

อัตราการผลิตสปีนของนิวเคลียสของตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือ

ปริณยานิพนธ์

ของ

เกศริน มีมล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ธันวาคม 2551

อัตราการผลิตสปีนของนิวเคลียสของตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือ

ปริญญาโท

ของ

เกศรินทร์ มีมล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ธันวาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อัตราการผลิตสปีนของนิวเคลียสของตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือ

บทคัดย่อ
ของ
เกศริน มีมล

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ธันวาคม 2551

เกศริน มีมล (2551). *อัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียสของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ*.

ปริญญาานิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทหิรัญ อ. ดร. สิริ สิรินิลกุล.

งานวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษา อัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียสของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีสารเจือ โดยใช้ฟังก์ชันกรีนในการคำนวณหาสมการความหนาแน่นสถานะที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจือแบบประมาณ ซึ่งได้สมการอัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียสแบบเชิงวิเคราะห์ ในกรณีที่ไม่มีศักย์การกระเจิงของสารเจือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน และศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ในการคำนวณพบว่าสมการที่ได้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายโดยอยู่ในรูปของสัดส่วนของช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ($\Delta_d(T)$) กับอุณหภูมิ (T) ที่ยกกำลังต่างๆ ซึ่งผลการคำนวณเชิงตัวเลขพบว่า มีฟิโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นในกรณีที่ไม่มีศักย์การกระเจิงของสารเจือ และกรณีที่ มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน แต่ไม่มีฟิโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นในกรณีที่ มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง

THE RELAXATION RATE OF IMPURE SUPERCONDUCTORS

AN ABSTRACT

BY

KEDSARIN MEEMON

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements

For the Master of Science Degree in Physics

at Srinakharinwirot University

December 2008

Kedsarin Meemon. (2008). *The Relaxation Rate of Impure Superconductors*.

Master thesis, M.Sc. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Dr. Pongkraew Udomsamuthirun , Dr. Siri Sirininlakul.

The purpose of our research is to study the nuclear spin lattice relaxation rate of impure d-wave superconductors. We use the Green's function method to derive the approximation equation of density of states including the impurity scattering potential. We can get the analytic equation of the nuclear spin lattice relaxation rate in case of the non impurity scattering potential , weak scattering potential and strong scattering potential in the simple form as the power series of the temperature dependence order parameter ($\Delta_d(T)$) and temperature (T). The numerical calculations show that there is coherence peak in the non impurity scattering potential and weak impurity scattering potential but there is no peak in the strong impurity scattering potential.

ปริญญาานิพนธ์

เรื่อง

อัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียสของตัวนำเวดิงที่มีสารเจือ

ของ

เกศริน มีมล

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณะบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒน์กุล)

วันที่.....เดือน พ.ศ. 25....

คณะกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน

..... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

(อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด)

.....กรรมการ

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สิริ สิรินิลกุล)

(รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ)

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัย

จาก

ThEP และ บางส่วนจากทุนสนับสนุนการทำปฏิญานิพนธ์สำหรับนิสิตในระดับบัณฑิตศึกษา
จากงบประมาณเงินรายได้ของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประจำปี พ.ศ. 2551

ประกาศคุณูปการ

ปริญญาโทฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริภูมิ ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และได้ตรวจแก้ไขข้อพร่องต่างๆ จนทำให้งานลุล่วงได้ด้วยดีตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สิริ สิรินิลกุล อาจารย์ ดร.เข้ม พุ่มสะอาด และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญาโท รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญาโทฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญาโทจนสำเร็จ

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่าน รวมทั้งพนักงานในภาควิชาฟิสิกส์ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในหลาย ๆ เรื่อง แก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ผ่านมา

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และขอบคุณพี่ชายเป็นอย่างสูงที่ได้ให้การสนับสนุน เป็นกำลังใจ และให้ความสำคัญต่อการศึกษา จึงให้ผู้วิจัยได้เข้าศึกษาวิชาฟิสิกส์ ต่อในระดับปริญญาโท

เกศริน มีมล

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
หลักการนิเวศวิทยร์แมกเนติกเรโซแนนซ์	10
เวลาการผ่อนคลายสปินของนิเวศวิทยส์	13
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	16
ตัวนำวูดิงแบบต่างๆ	16
อัตราการผ่อนคลายสปินของนิเวศวิทยส์	19
ความหนาแน่นสถานะ	31
3 วิธีดำเนินการวิจัย	38
สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิเวศวิทยส์ และ	
สมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิเวศวิทยส์	38
ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวูดิงที่ไม่มีสารเจือ	42
ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวูดิงที่มีสารเจือ	46
การคำนวณหาความหนาแน่นสถานะของตัวนำวูดิงที่มีสารเจือ	48
การคำนวณหาค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะตัวนำวูดิงแบบคลื่นดีที่มี	51
การคำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิเวศวิทยส์	
และ สมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิเวศวิทยส์ ของตัวนำวูดิงแบบ	
คลื่นดี	68
4 ผลการวิจัย	93
5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ	110
สรุปผลการวิจัย	110
อภิปรายผลการวิจัย	111

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5 (ต่อ)	
ข้อเสนอแนะ	112
บรรณานุกรม	113
ภาคผนวก	11
ประวัติย่อของผู้วิจัย	126

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 เปรียบเทียบคุณสมบัติของตัวนำวอดยิ่งอุณหภูมิต่ำและตัวนำวอดยิ่งอุณหภูมิสูง	1
2 ความสัมพันธ์เลขสปีนควอนตัมและนิวเคลียสตัวอย่าง	11
3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เรโซแนนซ์ของโปรตอนกับสนามแม่เหล็ก ภายนอกที่ค่าต่างๆ	13

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิปรอท	1
2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง	2
3 (ก) แสดงตัวนำปกติในสนามแม่เหล็ก (ข) แสดงตัวนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก.....	3
4 แสดงอันตรกิริยาดังดูระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซ ที่เรียกว่าโฟนอน ซึ่ง P_1 , P_2 และ P'_1 , P'_2 คือ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนก่อนและหลังอันตรกิริยา	4
5 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งกับปีที่ค้นพบ	5
6 แสดงโครงสร้างของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงของสารประกอบเซรามิกออกไซด์ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$	6
7 แสดงโครงสร้างของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2)	7
8 ผลของสารเจือต่อการเปลี่ยนแปลงสถานะของตัวนำยวดยิ่ง	9
9 แสดงถึงการจัดวางตัวของสปินนิวเคลียสเมื่อได้รับสนามแม่เหล็กภายนอก	12
10 แสดงการกลับตัวของสปินที่อยู่ในสถานะถูกกระตุ้น (Excited state)	12
11 (ก) แสดงการวางตัวของสปินเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก (\bar{B}_0) (ข) แสดงการจัดเรียงตัวของสปินเมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอก (\bar{B}_0)	14
12 (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ของตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (ข) แสดง ความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ของตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม....	20
13 แสดง $1/T_1$ กับอุณหภูมิของ ^{139}La ในตัวนำยวดยิ่ง $\text{La}_{1.8}\text{Sr}_{0.2}\text{CuO}_4$	22
14 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1T$ ของ ^{13}C , ^{87}Rb และ ^{133}Cs ในตัวนำ ยวดยิ่ง $\text{Rb}_2\text{CsC}_{60}$ โดย $T_c = 31$ เคลวิน ภายในสนามแม่เหล็กภายนอก	
8.8 เทสลา	24
15 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิกลุ่ม Sr_2RuO_4	24
16 แสดงผลการคำนวณ $1/T_1T$ เทียบกับข้อมูลการทดลอง.....	25
17 แสดงกระบวนการสัทธิการกระเจิงของสารเจือที่อยู่ในรูป ที-เมทริกซ์	46
18 (ก) แสดงลักษณะของช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น d_{xy} (ข) แสดงลักษณะของช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$	51

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

- 19 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส..... 53
- 20 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีการกระเจิงของ
 สารเจืออย่างอ่อน (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$
 และ u_0 (ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_{imp}(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_055
- 21 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีการกระเจิงของ
 สารเจืออย่างแรง (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$
 และ u_0 (ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_{imp}(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_0 ... 59
- 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 x^2 dx \dots\dots\dots 70$$
- 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) x^2 dx \right) \right] \dots\dots\dots 76$$
- 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\left(\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 x^2 dx \right) \right] \dots\dots 77$$
- 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 x^2 dx \right] \dots\dots\dots 85$$
- 26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] dx \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] x^2 dx \right) \right] \dots\dots\dots 85$$

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย	86
$y = \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right]^2 dx \right. \\ \left. - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right]^2 x^2 dx \right] \dots\dots\dots$	
28 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่ไม่สารเจือ	95
29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่ไม่สารเจือ	96
30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่ไม่สารเจือ	97
31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่ไม่สารเจือ	98
32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน	100
33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน	101
34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน	102
35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน	103
36 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง	105

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

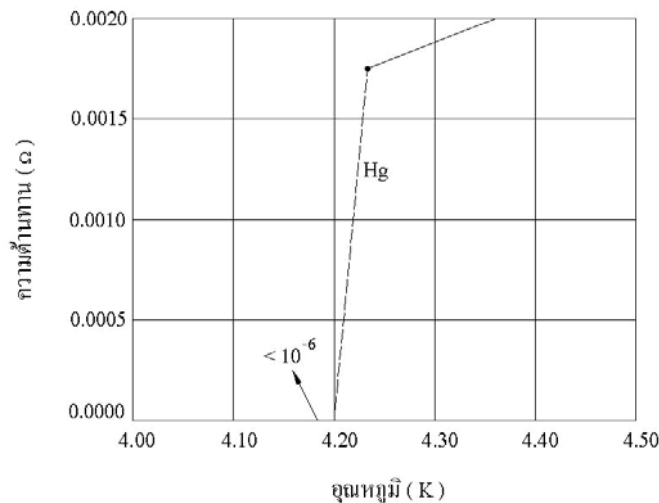
37 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง	106
38 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง	107
39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง	108
40 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ T ของตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิมในกลุ่ม $\text{Pr}(\text{Os}_{1-x}\text{Ru}_x)_4\text{Sb}_{12}$	109

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปี ค.ศ. 1911 นักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์ ชื่อ คาร์เมอริงเงอ ออนเนส (Onnes, 1911: 3) ได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่ง (Superconductivity) จากการศึกษากการเปลี่ยนแปลงสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์โดยใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวลดอุณหภูมิ พบว่าที่อุณหภูมิ 4.2 เคลวินความต้านทานไฟฟ้าของปรอทจะลดลงเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด ดังภาพประกอบ 1



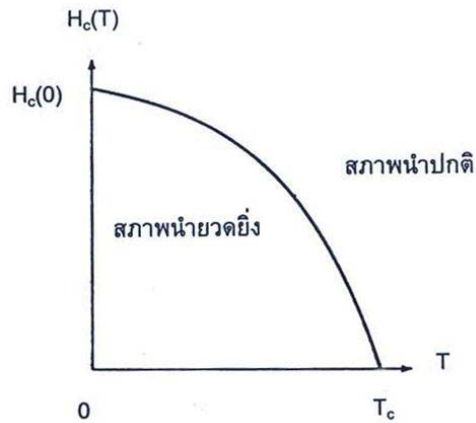
ภาพประกอบ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท

ที่มา: Buckel. (1991). *Superconductivity : Fundamental and Applications*. p. 3.

ออนเนส เรียกตัวนำที่ไร้ความต้านทานไฟฟ้านี้ว่า ตัวนำยวดยิ่ง (Superconductors) และเรียกอุณหภูมิขณะที่สารเปลี่ยนสถานะปกติเป็นสถานะนำยวดยิ่งว่า อุณหภูมิวิกฤต (Critical-temperature, T_c) ซึ่งเป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับสมบัติทางกายภาพของสาร

การเกิดสภาพนำยวดยิ่งนั้นเป็นกระบวนการที่ผันกลับได้ (Reversible process) คือถ้าอุณหภูมิของตัวนำสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต ตัวนำจะสูญเสียสภาพนำยวดยิ่งกลับสภาพเป็นตัวนำปกติทันที นอกจากนี้ปัจจัยด้านอุณหภูมิแล้วยังพบว่าสนามแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งได้ คือถ้าตัวนำยวดยิ่งถูกสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงยิ่งค่าหนึ่งกระทำ สภาพนำยวดยิ่งก็จะสูญเสียไป

โดยค่าความเข้มของสนามแม่เหล็กที่ทำให้ตัวนำยวดยิ่งเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำปกตินี้เรียกว่า สนามวิกฤต (Critical field, H_c) ซึ่งค่านี้ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ คือเมื่ออุณหภูมิมียุคค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ความเข้มของสนามวิกฤตจะมีค่าน้อยลง ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง

ที่มา: Kresin; & Wolf. (1990). *Fundamentals of Superconductors*. p. 10.

เขียนความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ ได้ดังนี้

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$

เมื่อ $H_c(0)$ คือ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

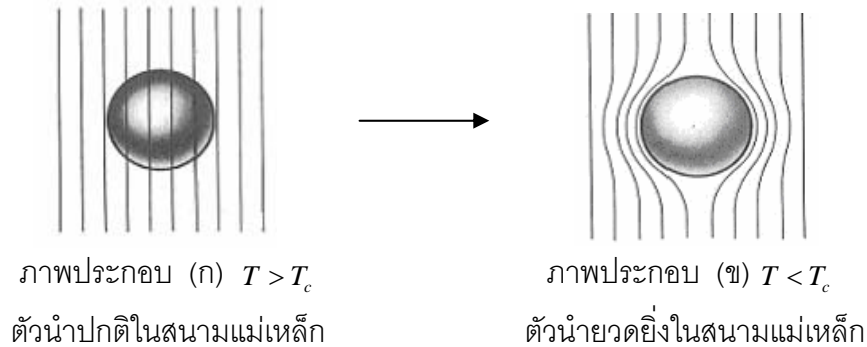
$H_c(T)$ คือ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิ T ใดๆ

T คือ อุณหภูมิ

T_c คือ อุณหภูมิวิกฤต

ในปี ค.ศ. 1933 ไมส์เนอร์และออคเซนเฟลด์ (Meissner & Ochsenfeld. 1933: 787) พบสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของตัวนำยวดยิ่งคือ เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กไม่สามารถพุ่งผ่านเข้าไปในสารที่เป็นตัวนำยวดยิ่งได้ แต่ถ้าอุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็ก

สามารถทะลุผ่านเข้าไปในเนื้อสารได้เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect) ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 (ก) แสดงตัวนำปกติในสนามแม่เหล็ก (ข) แสดงตัวนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. p. 344.

ในปี ค.ศ. 1950 แม็กเวลและเรย์โนลด์ (Maxwell; & Reynold. 1950: 43) ค้นพบปรากฏการณ์ไอโซโทป โดยพบว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งขึ้นกับมวลไอโซโทปตามสมการ

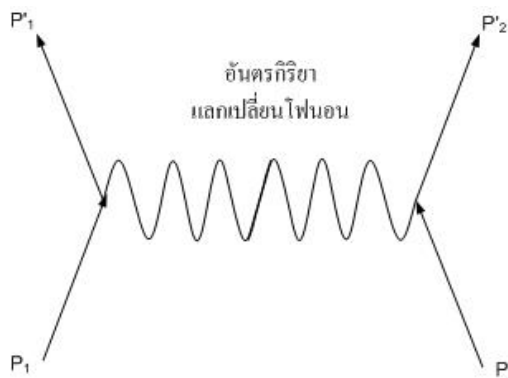
$$T_c \propto M^{-\alpha} \tag{1.2}$$

เมื่อ T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง
 M คือ มวลไอโซโทป
 α คือ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป

โดยที่ α มีค่าประมาณ 1/2

ทฤษฎีที่ใช้อธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งในระยะต้นๆ มีหลายทฤษฎีแต่ทฤษฎีที่เป็นที่ยอมรับมากที่สุดคือ ทฤษฎีของบาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1959: 1175) ทฤษฎีนี้เรียกว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ซึ่งสามารถอธิบายกลไกสำคัญที่ทำให้ตัวนำปกติกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งว่าเกิดจากอิเล็กตรอนจับคู่กัน โดยอาศัยอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (Phonon) คือเมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่เข้าไประหว่างกลุ่มไอออนที่มีประจุบวกในแลตทิซผลึก อิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดไอออนบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้

ทำให้บริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนตัวนั้นมีความหนาแน่นของไอออนบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งจะส่งผลต่ออิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้ๆ บริเวณนั้นโดยจะถูกกลุ่มไอออนบวกดึงดูดให้พุ่งเข้าหาอิเล็กตรอน เหตุการณ์นี้จึงเปรียบเหมือนกับว่าอิเล็กตรอนสองตัวมีอันตรกิริยาดึงดูดกัน และอันตรกิริยาดึงดูดนี้ต้องมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาผลลัทธิคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน อิเล็กตรอนที่จับคู่กันในลักษณะนี้ที่บริเวณผิวเฟอร์มิเรียกว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pairs) อิเล็กตรอนแต่ละตัวในคู่คูเปอร์จะมีขนาดของโมเมนตัมและสปินเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม และระยะห่างระหว่างคู่อิเล็กตรอนเรียกว่า ความยาวอาพันธ์ (Coherent length, ξ) อันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์นี้อาจพิจารณาได้ว่าเกิดจากการที่อิเล็กตรอนแลกเปลี่ยนโฟนอนกัน โดยโฟนอนนั้นเกิดจากการสั่นของแลตทิซผลึกที่มีไอออนบวกอยู่นั่นเอง แสดงได้ดังภาพประกอบ 4



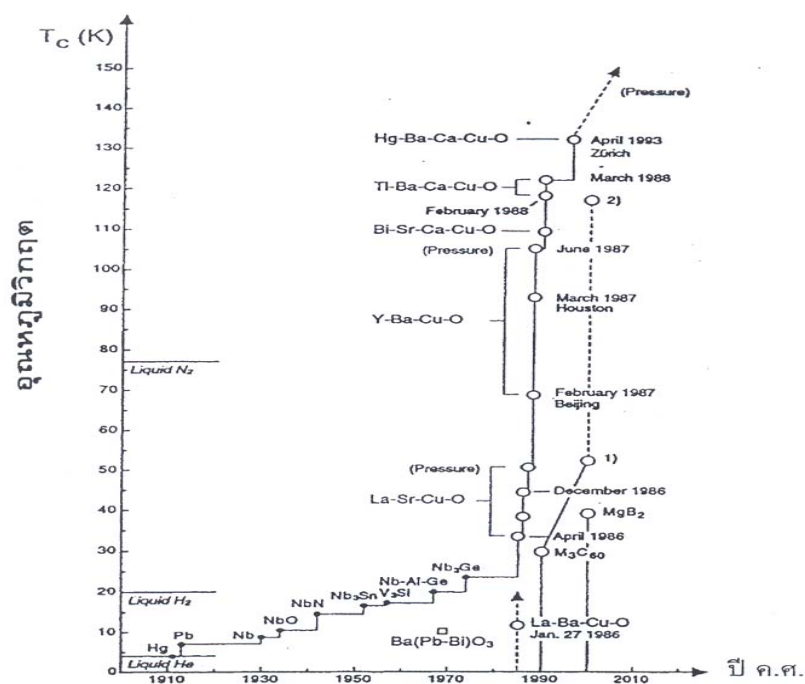
ภาพประกอบ 4 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซ ที่เรียกว่าโฟนอน ซึ่ง P_1 , P_2 และ P'_1 , P'_2 คือ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนก่อนและหลังอันตรกิริยา

ที่มา: Buckel. (1991). *Superconductivity : Fundamental and Applications*. p. 35.

ที่อุณหภูมิสูงๆ ไอออนบวกในแลตทิซของผลึกมีการสั่นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนมาก ทำให้อันตรกิริยาผลลัทธิคูลอมบ์มีค่ามากกว่าอันตรกิริยาดึงดูด จึงเป็นผลให้คู่อิเล็กตรอนแตกออกจากกัน และที่อุณหภูมิต่ำๆ อันตรกิริยาดึงดูดมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาแบบผลลัทธิคูลอมบ์ ดังนั้นระบบจึงเป็นคู่อิเล็กตรอน การที่อิเล็กตรอนสองตัวมาจับคู่กันทำให้อิเล็กตรอนต้องสูญเสียพลังงานจึงเป็นผลทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Energy gap, Δ) ขึ้น

ทฤษฎีบีซีเอส สามารถอธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งได้ดี ในกรณีที่อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งต่ำ แต่ต่อมาเมื่อมีการพบสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 35 เคลวิน ทฤษฎีบีซีเอสให้ผลไม่ตรงกับการทดลองในบางประการ

หลังจากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งชนิดต่างๆ นักวิทยาศาสตร์ได้พยายามค้นหาสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิสูงขึ้น แต่ความพยายามในช่วงแรกๆ ไม่ประสบความสำเร็จเพราะอุณหภูมิวิกฤตสูงสุดที่พบอยู่ที่ประมาณ 23.3 เคลวินเท่านั้น จนกระทั่งปี ค.ศ. 1986 เบ็ดนอร์ซและมุลเลอร์ (Bednorz; & Muller. 1986: 189) พบสารประกอบกลุ่มแลนทานัม-คอปเปอร์ออกไซด์ (La-CuO) ที่มีอุณหภูมิวิกฤต 40 เคลวิน ต่อมา ชูและคณะ (Chu; & et al. 1987: 405) พบว่าสารประกอบ Y-Ba-Cu-O มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 90-100 เคลวิน การพัฒนาของการวิจัยทำให้พบสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นไปเรื่อยๆ ดังภาพประกอบ 5



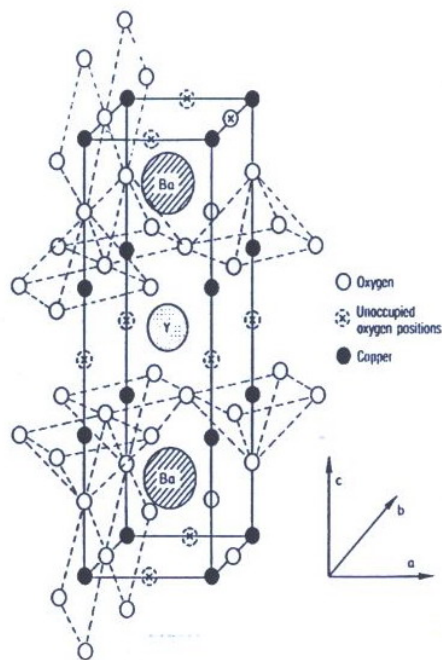
ภาพประกอบ 5 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งกับปีที่ค้นพบ

ที่มา: Bennemann; & Ketterson. (2002). *The Physics of Superconductors*. p. 387.

จากการวิจัยสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงพบว่า มีสมบัติต่างๆ ที่แตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำหลายประการ นักวิทยาศาสตร์จึงจำแนกตัวนำยวดยิ่งออกเป็นสองประเภท คือตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ (Low-temperature superconductors) หรือ ตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional superconductors) ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตไม่เกิน 35 เคลวิน โดยสมบัติต่างๆ อธิบายได้

ด้วยทฤษฎีบีซีเอส และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (High- temperature superconductors) ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 35 เคลวิน

ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่พบส่วนมากเป็นสารประกอบออกไซด์ที่มีคอปเปอร์ (Cu) และออกซิเจน (O) เป็นองค์ประกอบหลัก ตัวอย่างเช่น $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, $\text{Bi}_2\text{Rr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$, $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ลักษณะโครงสร้างผลึกจะเป็นแบบเตตระโกนอล (Tetragonal) หรือ ออโธโรมบิก (Orthorhombic) โดยอะตอม Cu และ O จะเรียงตัวเป็นระนาบและสายโซ่ เช่น โครงสร้างผลึกของ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ดังภาพประกอบ 6

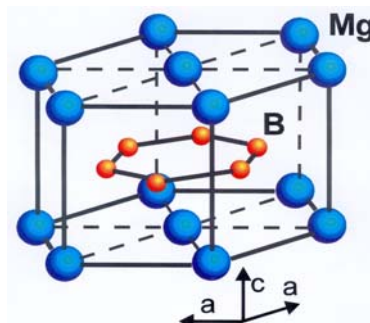


ภาพประกอบ 6 แสดงโครงสร้างของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงของสารประกอบเซรามิกออกไซด์ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$

ที่มา: Buckel. (1991). *Superconductivity : Fundamental and Applications*. p. 222.

นอกจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่เป็นสารประกอบออกไซด์แล้ว ยังพบในสารประกอบเฟอร์มิออนหนัก (Heavy fermion) สารประกอบอินทรีย์ (Organic) และเมื่อปี ค.ศ. 2001 นากามัตสึและอะคิมิตสึ (Nagamatsu; & Akimitsu.2001: 63) ค้นพบตัวนำยวดยิ่งตัวใหม่คือ แมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ที่มีโครงสร้างและองค์ประกอบที่แตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งกลุ่มเดิมที่พบในสารประกอบของธาตุทรานสิชันและคอปเปอร์ออกไซด์ โดยมี T_c ที่สูงถึง 39 เคลวิน ซึ่งสูงกว่า

ขอบเขตที่อธิบายได้ดีด้วยทฤษฎีบีซีเอส และยังไม่มีทฤษฎีหรือคำอธิบายใดที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวาง



ภาพประกอบ 7 แสดงโครงสร้างของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2)

ที่มา: Buzea; & Yamashita. (2001). *Review of the Superconducting Properties of MgB_2* . p. 116.

โมเลกุลของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ประกอบด้วยอะตอม 2 ชนิด คือแมกนีเซียม 1 อะตอม และโบรอน 2 อะตอม อะตอมของโบรอนแต่ละตัวจะจับกับอะตอมของโบรอนข้างเคียงอีก 2 ตัวและเรียงตัวกันในลักษณะเดียวกับแกรไฟต์ คือเป็นหกเหลี่ยมด้านเท่าที่บริเวณบนและล่างระนาบของโบรอนทั้งหมดตัวที่จับพันธะเป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า มีอะตอมของแมกนีเซียม 6 อะตอมเรียงแบบเฮกซะโกนอลไคลสแพค (Hexagonal-close-packed) เรียงซ้อนกันตามแกน c ระยะระหว่างระนาบของโบรอนกับระนาบของโบรอนที่อยู่ชั้นถัดไปจะมากกว่าระยะระหว่างอะตอมโบรอนในระนาบ โครงสร้างโมเลกุลเช่นนี้จึงแสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีคุณสมบัติกายภาพแบบขึ้นกับทิศทาง (Anisotropy)

นอกจากนี้นักวิทยาศาสตร์พบว่า คู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงจะมีโมเมนตัมเชิงมุมต่างกัน คือ ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำจะมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์ ($l=0$) จะเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอส (s-wave superconductors) จากผลการทดลองพบว่าตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม ส่วนใหญ่เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอส

ส่วนในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง คู่คูเปอร์จะมีโมเมนตัมเชิงมุมมากกว่าศูนย์ ($l > 0$) ถ้าตัวนำยวดยิ่งมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นหนึ่ง ($l=1$) จะเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นพี (p-wave superconductors) และถ้าตัวนำยวดยิ่งมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นสอง ($l=2$) จะเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี (d-wave superconductors) ดังนั้นในบางครั้งจะเรียกตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอสว่าเป็นตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม (Unconventional superconductors) เช่น

ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงที่มีโครงสร้างแบบคิวเพรท (High - T_c cuprates), ตัวนำยวดยิ่งกลุ่มเฟอร์มิออนหนัก (Heavy-fermion) และตัวนำยวดยิ่งกลุ่มอินทรีย์ (Organics superconductor) เป็นต้น สำหรับตัวนำยวดยิ่งประเภทนี้ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีบีซีเอส เนื่องจากมีสมบัติบางประการที่ไม่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส

ดังนั้นเพื่อให้เห็นความแตกต่างระหว่างตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงชัดเจนยิ่งขึ้น จะแสดงการเปรียบเทียบคุณสมบัติสำคัญๆ ดังตาราง 1

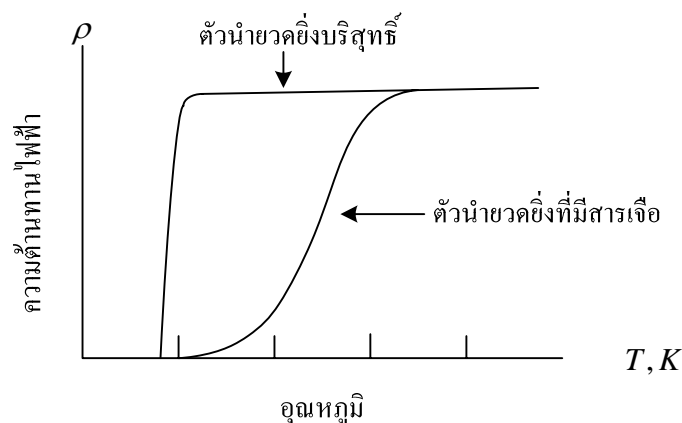
ตาราง 1 เปรียบเทียบคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

คุณสมบัติ	ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ	ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง
สภาพต้านทานไฟฟ้า (Subramanyam; & Gopal. 1989 : 3)	$\rho = 0$	$\rho = 0$
ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Buckel. 1991 : 112)	เกิด	เกิด
ความยาวอาพันธ์ (Coherent length, ξ)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 \approx 1 \text{ \AA}$ (Buckel. 1991 : 134)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 = 0.01 \text{ \AA}$ (Worthington; Gallger; & Dinger. 1987 : 1160)
ช่องว่างพลังงาน ($\Delta(T)$)	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} = 3.52$ (Buckel. 1991 : 64)	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} = 2.4$ ถึง 8 (Warren. 1987 : 1860)
สมบัติทางความร้อน	ความจุความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนในสภาพปกติ (C_n) ที่ $T > T_c$ แปรตามอุณหภูมิ ดังสมการ $C_n \approx T^3$ และสภาพนำยวดยิ่ง ความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนจะเข้าใกล้ศูนย์แบบเอกซ์โปเนนเชียล ($e^{-a/T}$ เมื่อ a คือค่าคงตัว) และที่อุณหภูมิต่ำ	ความจุความร้อนจำเพาะมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิแบบ T^n (Harlingen. 1995 : 515)

ตาราง 1 เปรียบเทียบคุณสมบัติของตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง (ต่อ)

คุณสมบัติ	ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ	ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง
สมบัติทางความร้อน	วิกฤตการเปลี่ยนสภาพความร้อนจำเพาะจะไม่ต่อเนื่อง (Subramanyam; & Gopal. 1989 : 157)	
สัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α)	0.5	มีค่าน้อยกว่า 0.5
พีคโคเฮียเรนซ์ (Coherence peak) หรือ พีคฮีเบล-สลิชเตอร์ (Hebel-Slichter peak)	เกิด	ไม่เกิด

ในการศึกษาสภาพนำวดยิ่งเมื่อระบบมีสารเจือ (Impurity) ได้มีการศึกษาอิทธิพลของสารเจือที่มีต่อสภาพนำวดยิ่ง โดยทั่วไปตัวนำวดยิ่งที่ไม่มีสารเจือ สภาพต้านทานของตัวนำวดยิ่งจะลดลงอย่างทันทีทันใด แต่ตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือ สภาพต้านทานไฟฟ้าจะลดลงอย่างช้าๆ ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 ผลของสารเจือต่อการเปลี่ยนแปลงสถานะของตัวนำวดยิ่ง

ที่มา: Omar. (1975). *Elementary Solid State Physic: Principles and Applications*.

ปัจจุบันได้มีการศึกษาผลของสารเจือที่มีต่อคุณสมบัติของตัวนำยิ่งยวด โดยทั่วไปได้แบ่งสารเจือเป็น 2 ประเภท คือ

1. สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (Non-magnetic impurities) เนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กของอะตอมเป็นศูนย์ทำให้อะตอมหรือไอออนนั้นไม่แสดงผลความเป็นแม่เหล็ก
2. สารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก (Magnetic impurities) เนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กของอะตอมหักล้างกันไม่หมดมีค่าๆ หนึ่ง จึงสามารถแสดงผลความเป็นแม่เหล็กได้

ในปี ค.ศ.1961 อบริกอสอฟและกอร์คอฟ (Abrikosov; & Gor'kov. 1994: 12337) พบว่าในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กไม่มีอิทธิพลต่อคุณสมบัติและช่องว่างพลังงาน แม้ความเข้มข้นของสารเจือจะเพิ่ม แต่ถ้าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำถูกโคปด้วยสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก อุณหภูมิต่ำและช่องว่างพลังงานจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว แม้ว่าความเข้มข้นของสารเจือจะมีค่าเพียงเล็กน้อยก็ตาม และถ้าความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มจนถึงค่าหนึ่ง ตัวนำยิ่งยวดก็จะสูญเสียสภาพนำยิ่งยวดไป

สาเหตุที่สารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยิ่งยวดได้ เป็นเพราะสารเจือมีโมเมนต์แม่เหล็กซึ่งจะมีอันตรกิริยากับสปินของอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์ ทำให้อิเล็กตรอนตัวใดตัวหนึ่งในคูคูเปอร์กลับทิศของสปินส่งผลทำให้คูคูเปอร์ถูกทำลาย และเมื่อจำนวนคูคูเปอร์ลดลง อุณหภูมิต่ำและช่องว่างพลังงานจึงลดลงด้วย โดยช่องว่างพลังงานจะลดลงในอัตราที่เร็วกว่าอุณหภูมิต่ำทำให้เกิดปรากฏการณ์ที่แปลกประหลาด คือตัวนำยิ่งยวดไม่มีช่องว่างพลังงาน อบริกอสอฟและกอร์คอฟพบว่าเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเป็น $n = 0.91n_{cr}$ เมื่อ n_{cr} คือความเข้มข้นของสารเจือ ขณะที่สภาพนำยิ่งยวดถูกทำลาย ช่องว่างพลังงานจะหายไปในขณะที่ยังคงสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดอยู่ ตัวนำยิ่งยวดที่ไม่มีช่องว่างพลังงานนั้นนอกจากจะเกิดจากการมีสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กดังที่กล่าวแล้วยังอาจเกิดจากอิทธิพลของสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้า ที่สามารถทำลายคูคูเปอร์หรืออิเล็กตรอนแยกออกจากกัน การเกิดสภาพนำยิ่งยวดที่ไม่มีช่องว่างพลังงานนี้ แสดงให้เห็นว่าการมีช่องว่างพลังงานไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็นในการเกิดสภาพนำยิ่งยวด (Kresin; & Wolf. 1990: 38)

หลักการของนิวเคลียร์แมกเนติกเรโซแนนซ์

นิวเคลียร์แมกเนติกเรโซแนนซ์ (Nuclear Magnetic Resonance) หรือที่เรียกโดยย่อว่า เอ็นเอ็มอาร์ (NMR) ได้พัฒนาครั้งแรกในปี ค.ศ. 1946 โดยกลุ่มงานวิจัยที่ Stanford และ M.I.T (Massachusetts Institute of Technology) ที่ประเทศสหรัฐอเมริกา

NMR เป็นเทคนิคที่เกี่ยวข้องกับการดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงคลื่นวิทยุ ซึ่งมีพลังงานอยู่ในช่วงที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลง “สปิน” ซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะของนิวเคลียสของแต่ละชนิด

เมื่ออยู่ภายใต้สนามแม่เหล็ก นิวเคลียสที่จะสามารถเกิดการดูดกลืนคลื่นวิทยุได้ จะต้องเป็นนิวเคลียสที่มีค่า "สปิน" ไม่เป็นศูนย์เท่านั้น ตัวอย่างเช่น ^1H , ^{13}C , ^{31}P , ^{19}F เป็นต้น

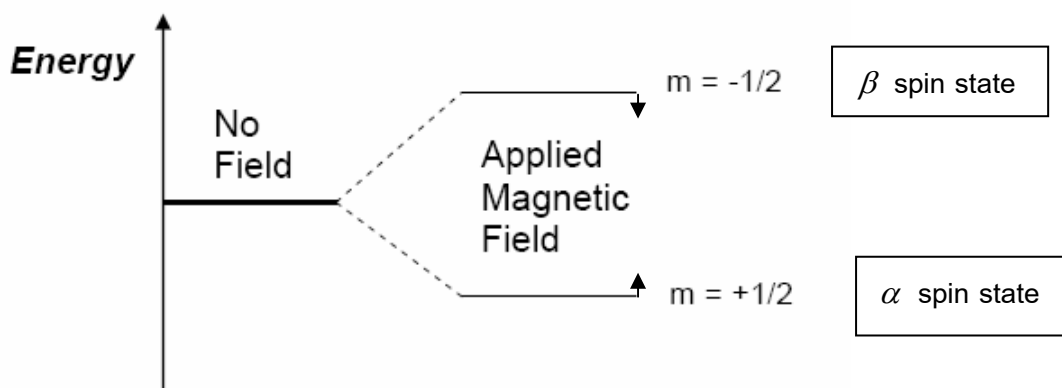
ปรากฏการณ์ทาง NMR เป็นการศึกษาพื้นฐานนิวเคลียสของอะตอม ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติทางแม่เหล็ก ในทางกลศาสตร์ควอนตัม ภายในอะตอม (ประกอบด้วยโปรตอน นิวตรอน และอิเล็กตรอน) ของสารบางชนิด เช่น ^{12}C , ^{16}O , ^{32}S สปินจะมีค่าเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตามในสารบางชนิด เช่น ^1H , ^{13}C , ^{31}P , ^{15}N , ^{19}F จะมีนิวเคลียสที่มีค่าสปินไม่เป็นศูนย์ ในการพิจารณาสปินของนิวเคลียสสามารถพิจารณาได้ดังตาราง 2

ตาราง 2 ความสัมพันธ์เลขสปินควอนตัมและนิวเคลียสตัวอย่าง

Spin	ตัวอย่าง
เป็นเลขจำนวนเท่าของ $1/2$, $3/2$, $5/2$	$^1\text{H}(1/2)$, $^{13}\text{C}(1/2)$, $^{31}\text{P}(1/2)$, $^{17}\text{O}(5/2)$
เป็นจำนวนเต็ม (1, 2, 3, ...)	$^2\text{H}(1)$, $^{14}\text{N}(1)$
เป็นศูนย์	^{12}C , ^{16}O , ^{32}S

เนื่องจากนิวเคลียสเป็นอนุภาคที่มีประจุ ในนิวเคลียสของธาตุ ประจุนี้จะหมุน (Spin) เป็นวงรอบแกนนิวเคลียส (Nuclear axis) เช่นเดียวกับที่อิเล็กตรอนซึ่งเป็นอนุภาคที่มีประจุหมุนรอบนิวเคลียส การสปินของนิวเคลียสนี้จะก่อให้เกิดโมเมนต์แม่เหล็ก (Magnetic moment) บริเวณแกนของการหมุน และในส่วนของกลศาสตร์ควอนตัมอธิบายว่า โมเมนต์แม่เหล็กของนิวเคลียสจะวางตัวในแนวเดียวกับสนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{B}_0) โดยมีค่าสถานะพลังงาน $2\ell+1$ เท่านั้น

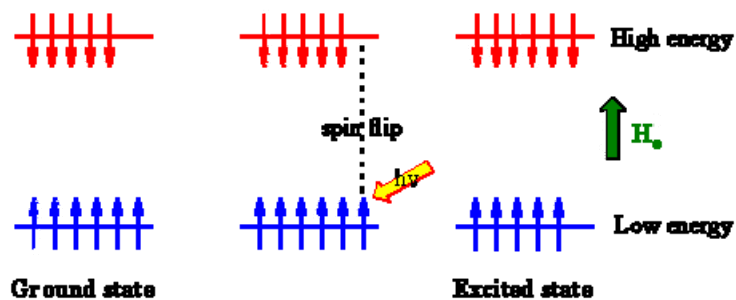
ตัวอย่างเช่น ^1H มีเลขสปินควอนตัมเป็น $1/2$ และมีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่า คือ $+1/2$ และ $-1/2$ เมื่อให้สนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{B}_0) แก่นิวเคลียส สปินซึ่งเคยวางตัวในแบบสุ่มในทุกทิศทางจะจัดเรียงตัวใหม่ และจะมีโมเมนต์แม่เหล็กที่เป็นไปได้เพียงสองแบบดังภาพประกอบ 9 คือโมเมนต์แม่เหล็ก $m=+1/2$ ซึ่งจะวางตัวในแนวขนานกับแนวของ \vec{B}_0 , มีทิศทางเดียวกับ \vec{B}_0 และเป็นสถานะที่มีพลังงานต่ำ (เรียกว่า α) ส่วนโมเมนต์แม่เหล็ก $m=-1/2$ จะวางตัวในแนวขนานกับแนวของ \vec{B}_0 แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ \vec{B}_0 และจะมีพลังงานสูงกว่า (เรียกว่า β)



ภาพประกอบ 9 แสดงถึงการจัดวางตัวของสปินนิวเคลียสเมื่อได้รับสนามแม่เหล็กภายนอก

ที่มา: Cowan. (1997). *Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation*. p. 6 .

เมื่อนิวเคลียสที่ระดับพลังงานต่ำซึ่งอยู่ในสถานะเดิม (Ground state) ได้รับพลังงานที่เหมาะสมกว่าคือเท่ากับ ΔE ก็จะเปลี่ยนนิวเคลียสสปินและขึ้นไปอยู่ที่ระดับพลังงานที่สูงขึ้น ซึ่งจะเกิดการกลับตัว (Flip) ของสปินทำให้นิวเคลียส อยู่ในสถานะถูกกระตุ้น (Excited state) จากนั้นนิวเคลียสก็จะกลับเข้าสู่สถานะเดิม พร้อมทั้งปลดปล่อยพลังงานออกมาในรูปของคลื่นวิทยุ การเปลี่ยนแปลงแบบนี้เรียกว่าเรโซแนนซ์ (Resonance) ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงการกลับตัวของสปินที่อยู่ในสถานะถูกกระตุ้น (Excited state)

ที่มา: www.chem.ucalgary.ca/. /ch13/ch13-nmr-1.html : Online.

ความแตกต่างของระดับพลังงานนี้ สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์กับความแรงสนามแม่เหล็กได้ตามสมการ

$$\Delta E = \frac{h\gamma}{2\pi} B_0 \quad (1.3)$$

หรือเขียนความสัมพันธ์ความถี่ลาร์มอร์กับความแรงสนามแม่เหล็กได้

$$\omega_0 = \gamma \bar{B}_0 \quad (1.4)$$

เมื่อ ΔE คือ ความแตกต่างระดับพลังงาน

ω_0 คือ ความถี่ลาร์มอร์ (Larmor frequency)

h คือ ค่าคงตัวของพลังค์ (Planck's constant)

\bar{B}_0 คือ สนามแม่เหล็กภายนอก

γ คือ ค่าคงตัวของอัตราส่วนแม่เหล็กไจโร (Gyromagnetic ratio) ซึ่งเป็นค่าเฉพาะของนิวเคลียสแต่ละชนิด โดยโปรตอนจะมีค่า $2.675 \times 10^8 \text{ T}^{-1}\text{s}^{-1}$

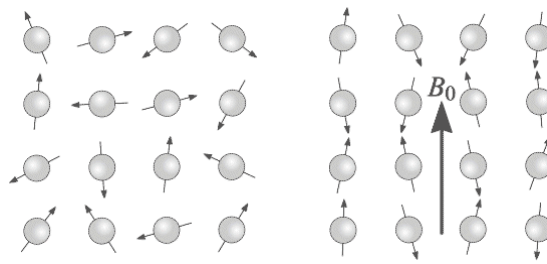
ดังนั้นจะเห็นว่า ΔE ขึ้นกับชนิดของนิวเคลียส และความแรงของสนามแม่เหล็กภายนอก \bar{B}_0 (หน่วยเป็นเทสลา, T) โดยหากความแรงของสนามแม่เหล็กเพิ่มขึ้น ΔE ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ซึ่งสามารถคำนวณความถี่เรโซแนนซ์ของโปรตอนสำหรับความแตกต่างสนามแม่เหล็กภายนอกได้ดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กภายนอกที่มีค่าต่างๆกับความถี่เรโซแนนซ์ของโปรตอน

\bar{B}_0 (T)	^1H Freq (MHz)
1.41	60
2.35	100
4.70	200
7.05	300
9.40	400
11.75	500

เวลาการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (Nuclear spin relaxation time, T_1)

เวลาการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส คือ เวลาการกลับสู่สถานะสมดุลของสปิน จากการที่สปินซึ่งจะวางตัวในแบบสุ่มได้ทุกทิศทาง เมื่อใส่สนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{B}_0) เข้าไป สปินจะจัดเรียงตัวใหม่ในทิศทางที่ขนานกับ \vec{B}_0 แต่เมื่อนำ \vec{B}_0 ออก สปินจะกลับสู่ทิศเดิมคือแบบสุ่ม ซึ่งเวลาในการกลับสู่ทิศเดิมนี้ถูกเรียกว่า เวลาการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (T_1)



ภาพประกอบ (ก)

ภาพประกอบ (ข)

ภาพประกอบ 11 (ก) แสดงการวางตัวสปินเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{B}_0) (ข) แสดงการจัดเรียงตัวสปินเมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอก (\vec{B}_0)

ที่มา: Cowan. (1997). *Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation*. p. 6 .

อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (Relaxation rate, $1/T_1$) เป็นส่วนกลับของเวลาการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส , (T_1) ซึ่งใช้อธิบาย พีคโคเฮียเรนซ์ (Coherence peak) หรือ พีคฮีเบล-สลิชเตอร์ (Hebel-Slichter peak) และ พีคโคเฮียเรนซ์ ได้จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ในตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิม

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) ในตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมที่มีสารเจือ
2. เพื่อศึกษาความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะของสปินในนิวเคลียส (w) ในตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมที่มีสารเจือ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่ออธิบายอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) ในตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมที่มีสารเจือ
2. เพื่อนำผลการวิจัยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง
3. ทำให้เข้าใจกลไกการเกิดสภาพนำยิ่งยวดมากขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

1. หาสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) ในตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมที่มีสารเจือ
2. ใช้วิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) และเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวนำวอดยิ่งยวดแบบต่างๆ

ตัวนำวอดยิ่งยวดแบบต่างๆ ได้มีการแบ่งประเภทไว้ตามทฤษฎีและตามชนิดของสารประกอบดังนี้ (Burns. 1992: 1-181)

1. การแบ่งประเภทตามทฤษฎี

เป็นการแบ่งประเภทของตัวนำวอดยิ่งยวดโดยใช้หลักการทางทฤษฎีเป็นตัวกำหนด เช่น สปินแบบซิงเกิลต (Singlet) หรือ สปินแบบทริเปิลต (Triplet) และ ตัวนำวอดยิ่งยวดคู่อย่างแรง (Strong-coupled superconductors) หรือ ตัวนำวอดยิ่งยวดคู่อย่างอ่อน (Weak-coupled superconductors)

1.1 สปินแบบซิงเกิลต (Singlet) หรือ สปินแบบทริเปิลต (Triplet)

ในทฤษฎีควอนตัมฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน 2 ตัว ในปริภูมิจะถูกเขียนอยู่ในเทอมของผลคูณของฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับตำแหน่ง (ψ) และ ฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับสปิน (χ) ดังนี้

$$\Psi(r_1, s_1, r_2, s_2) = \psi(r_1, r_2) \chi(s_1, s_2) \quad (2.1)$$

โดย r_1, r_2 และ s_1, s_2 เป็นพิกัดตำแหน่งที่ 1, ตำแหน่งที่ 2 และ สปินตัวที่ 1, ตัวที่ 2 ตามลำดับ

ฟังก์ชันคลื่นรวมของคู่อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นเฟอร์มิออนมี $s = 1/2$ เมื่อพิจารณาการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างอิเล็กตรอนจะเป็นฟังก์ชันแบบไม่สมมาตร (Antisymmetric) สามารถเขียนได้ 2 แบบคือ

$$\Psi_A^{S=0} = \psi_{\text{even}}(r_1, r_2) \chi_{\text{odd}}^{s=0} \quad (2.2)$$

$$\Psi_A^{S=1} = \psi_{\text{odd}}(r_1, r_2) \chi_{\text{even}}^{s=1} \quad (2.3)$$

เนื่องจากมีอิเล็กตรอน 2 ตัว ดังนั้นสปินรวมสามารถเป็นได้แค่ 2 แบบ คือ $s = -1/2 + 1/2 = 0$ และ $s = 1/2 + 1/2 = 1$ ซึ่ง $s = 0$ จะเรียกว่า สปินแบบซิงเกิลต มีฟังก์ชันคลื่นแบบคี่ (odd) และกรณี $s = 1$ จะเรียกว่า สปินแบบทริเปิลต มีฟังก์ชันคลื่นแบบคู่ (even) เนื่องจาก $\psi_{\text{odd}}(r_2, r_1) = -\psi_{\text{odd}}(r_1, r_2)$ และ $\psi_{\text{even}}(r_2, r_1) = \psi_{\text{even}}(r_1, r_2)$ กำหนดให้ α และ β แทนขึ้น

(Spin up) และสปินลง (Spin down) ของอิเล็กตรอน และตัวเลข 1 กับ 2 แทนอิเล็กตรอนแต่ละตัว จะเขียนฟังก์ชันคลื่นในส่วนของสปินได้เป็น

$$\chi_{odd}^{s=0} = [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]/\sqrt{2}$$

$$\chi_{even}^{s=1} = \begin{cases} \alpha(1)\alpha(2) \\ [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)]/\sqrt{2} \\ \beta(1)\beta(2) \end{cases} \quad (2.4)$$

สำหรับฟังก์ชันคลื่นของสปินแบบซิงเกิล ตามสมการ (2.2) จะมีฟังก์ชันคลื่นรวมเป็นแบบไม่สมมาตร โดยมีฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับตำแหน่งเป็นแบบสมมาตร และฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับสปินเป็นแบบไม่สมมาตร ดังนั้นออร์บิทัลของฟังก์ชันคลื่นรวม $(A(\theta, \phi))$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับตำแหน่ง จะต้องมีฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่ด้วย และโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์ (ℓ) ที่เป็นไปได้ต้องเป็นเลขคู่ คือ $\ell=0$ และ $\ell=2$ และอื่นๆ

ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชันคลื่นของสปินแบบทริปเลต ตามสมการ (2.3) เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับตำแหน่งเป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นออร์บิทัลของฟังก์ชันคลื่นรวม $(A(\theta, \phi))$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของฟังก์ชันคลื่นที่แทนอนุภาคที่ขึ้นกับตำแหน่ง จะต้องมีฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคี่ด้วย และโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์ที่เป็นไปได้ต้องเป็นเลขคี่ คือ $\ell=1$ และ $\ell=3$ และอื่นๆ

สำหรับทฤษฎีบีซีเอส การจับคู่ของอิเล็กตรอนจะเป็นแบบเดียวคือ $\ell=0$ ดังนั้นจึงเป็น สปินแบบซิงเกิล และจากเงื่อนไขของทฤษฎีจึงสามารถสรุปได้ว่าเป็นการจับคู่แบบคลื่นเอส จากผลการทดลองพบว่าตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิมส่วนใหญ่เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอส และจากการทดลองสมมาตรการจับคู่ (pairing-symmetry) ของตัวนำยวดยิ่ง Y123 , Sr_2RuO_4 และ UPt_3 พบว่า Y123 เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นคี่ Sr_2RuO_4 และ UPt_3 เป็นตัวนำยวดยิ่งที่แบบคลื่นพี หรือเป็นตัวนำยวดยิ่งสปินแบบทริปเลต ดังนั้นในบางครั้งจะเรียกตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ การจับคู่แบบคลื่นเอสว่า เป็น ตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม

1.2 ตัวนำยวดยิ่งควบคู่อย่างแรง หรือตัวนำยวดยิ่งควบคู่อย่างอ่อน

ทฤษฎีบีซีเอส จะกำหนดให้อันตรกิริยาของอิเล็กตรอนกับโฟนอนเป็นอันตรกิริยาอย่างอ่อน แต่ถ้าตัวนำยวดยิ่งมีกลไกอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนกับโฟนอนเป็นแบบรุนแรงแล้ว จะไม่สามารถใช้ ทฤษฎีบีซีเอส อธิบายได้ และสภาพการจับคู่ของอิเล็กตรอนก็จะมีเวลาจำกัด ทำให้ $\Delta(0)$ และ T_c ลดลงมากกว่าปกติ ค่าของ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c}$ จะมากกว่า 3.52 และตัวชี้วัดว่าเป็นการควบคู่อย่างแรง

อีกอย่างคือ อัตราส่วน $\left(\frac{T_c}{\omega_D}\right)^2$ ซึ่งจะมีค่าไม่น้อยจนสามารถตัดทิ้งได้เหมือนทฤษฎีบีซีเอส และค่าของ λ จะมีค่ามากกว่าทฤษฎีบีซีเอสมาก โดยสามารถคำนวณได้จากสมการของแมกซ์มิลแลน (McMillan) ดังนี้

$$\lambda \equiv 2 \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d\omega_q}{\omega_q} \alpha^2(\omega_q) F(\omega_q) \quad (2.5)$$

เมื่อ $\alpha^2(\omega_q)$ คือ ค่าเฉลี่ย อันตรกิริยาของอิเล็กตรอนกับโฟนอนที่ความถี่ ω_q
 $F(\omega_q)$ คือ ความหนาแน่นของโฟนอน
 ω_{\max} คือ ความถี่สูงสุดของโฟนอน

2. การแบ่งประเภทตามสารประกอบ

ใช้องค์ประกอบของสารประกอบ ในการแบ่งประเภทซึ่งสามารถแบ่งได้ดังนี้

2.1 ตัวนำวอดยี่งที่เป็นแม่เหล็ก

เนื่องจากแม่เหล็กภายนอกมีผลทำลายสภาพนำวอดยี่งได้ แต่ในตัวนำวอดยี่งบางประเภทคือ พวกตัวนำวอดยี่งที่มีสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก จะมีผลทำให้เกิดสภาพความเป็นแม่เหล็กขึ้นในโครงสร้าง ทำให้คุณสมบัติวิกฤตมีค่าลดลง นอกจากนี้ยังทำให้เกิดตัวนำวอดยี่งที่เรียกว่า ตัวนำวอดยี่งแบบ Gapless โดย อบริกฮอฟและกอร์คอฟ ได้พิจารณาผลของการแลกเปลี่ยนสปิน (Spin-exchange) ของสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กที่ไม่เข้มข้น พบว่ามีผลทำให้ T_c ลดลง โดยความเข้มข้นของสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กจะมีค่าหนึ่งที่ทำให้ T_c ลดลงจนกลายเป็นศูนย์ และความเข้มข้นอีกค่าหนึ่งทำให้ช่องว่างพลังงานมีค่าเป็นศูนย์ด้วย

การค้นพบตัวนำวอดยี่งในกลุ่มธาตุ แร่เอิร์ธ (Rare-earth, RE) เช่น สารประกอบ $REMo_6X_8$ ($X=S$ หรือ Se) และ XRh_4B_4 ($X=Y, TH$ หรือ RE) ในปี ค.ศ. 1975 - 1977 ได้มีการศึกษาผลของการอยู่รวมกันของสภาพนำวอดยี่งกับสภาพความเป็นแม่เหล็ก โดยในสารประกอบ $HoMo_6X_8$ จะมี $T_{c1} \approx 1.8$ เคลวิน และ $T_{c2} = 0.7$ เคลวิน ซึ่งสารจะกลับเป็นสภาพปกติ ที่ T_{c2} และมี T_M เป็นจุดเปลี่ยนของสภาพนำวอดยี่งกับสภาพแม่เหล็ก และในสารประกอบ $REMo_6X_8$ จะมี $T_{c2} \approx T_M$ จากการทดลองในกรณีสารประกอบ $ErRh_4B_4$ และ $HoMo_6X_8$ พบว่าที่อุณหภูมิต่ำกว่า T_{c2} จะมีสภาพนำวอดยี่งอยู่รวมกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โร และในสารประกอบ $ErMo_6S_8$ และ $SmRh_4B_4$ จะพบการอยู่รวมกันของสภาพนำวอดยี่งกับสภาพแม่เหล็กแอนติเฟอร์โร

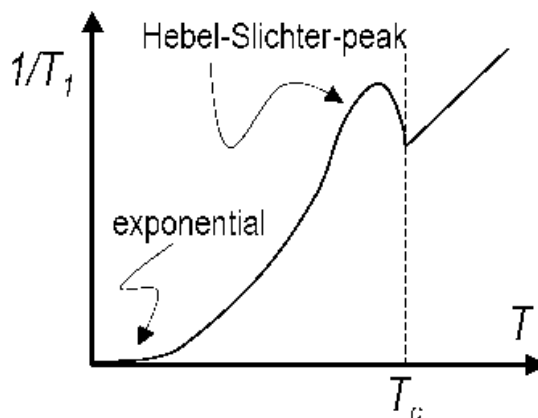
2.2 โลหะอิเล็กตรอนหนัก (Heavy-Electron Metal)

พบในสารประกอบ UBe_{13} ($T_c=0.85$ เคลวิน) $CeCu_2Si_2$ ($T_c=0.65$ เคลวิน) และ UPt_3 ($T_c=0.54$ เคลวิน) โดยมีสมบัติคือ ความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่ำจะมีค่ามากกว่าของโลหะปกติถึง 2 หรือ 3 เท่า โดยเกิดจากอิเล็กตรอนชั้นเอฟ (f-electron) ความจุความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนที่สถานะปกติ (C_{en}) จะมี C_{en} แปรผันตรงตาม $N(E_F)$ และแปรผันตรงตาม $m^*^{3/2}$ เมื่อ $N(E_F)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิ และ m^* คือ มวลยังผล เนื่องจากสารเหล่านี้มีค่า C_{en} มาก ดังนั้น m^* ของสารเหล่านี้จึงมีค่ามากด้วย ทำให้ถูกเรียกว่า “อิเล็กตรอนหนัก” ในสาร $NbBe_{13}$ U_2Sn_{17} และ UCd_{11} นอกจากเป็นอิเล็กตรอนหนักแล้ว ยังพบสมบัติการเป็นแม่เหล็กด้วย

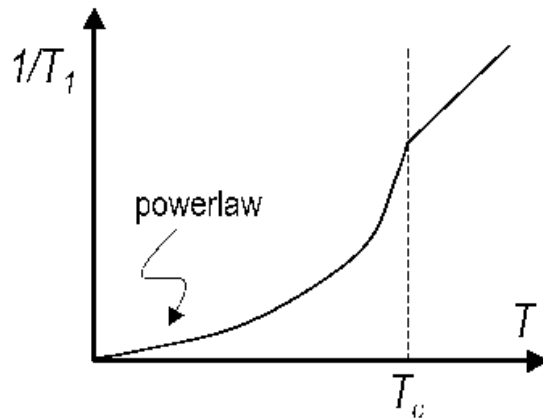
มีการค้นพบว่าพวกตัวนำยวดยิ่งอิเล็กตรอนหนัก ไม่เป็นสปีนแบบซิงเลต ไม่ขึ้นกับทิศทาง ไม่เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอส และอธิบายด้วยทฤษฎีบีซีเอส ไม่ได้ โดยพบว่ากลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง อาจจะไม่เกิดจากอันตรกิริยาอิเล็กตรอนกับโฟนอน ในบางครั้งตัวนำยวดยิ่งประเภทนี้อาจถูกเรียกว่า ตัวนำยวดยิ่งกลุ่มเฟอร์มิออนหนัก

อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส

สำหรับการศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) สังเกตได้จากพฤติกรรมของปริมาณทางเทอร์โมไดนามิกส์ที่อุณหภูมิกว้างของสารตัวนำยวดยิ่ง โดยที่ตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม ปริมาณนี้จะมีพฤติกรรมแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล $\exp(-\Delta/T)$ ในขณะที่ตัวนำยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม ปริมาณนี้จะมีพฤติกรรมแบบกฎการยกกำลัง (Power law) T^n เมื่อ n คือจำนวนเต็ม มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 5 ขึ้นอยู่กับสารตัวนำแต่ละชนิด โดยมีลักษณะความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ดังแสดงในภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ (ก) ตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม



ภาพประกอบ (ข) ตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม

ภาพประกอบ 12 (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ของตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิม

(ข) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T ของตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม

ที่มา: Sigrist. (2006). *Unconventional Superconductivity*. p. 49.

คุณสมบัติของตัวนำยิ่งยวดศึกษาจากการเกิดพีคที่ขึ้นกับอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต พีคที่เกิดเรียกว่า พีคโคเฮียเรนซ์ (Coherence peak) ซึ่งได้จากการสังเกตการวัดอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ (Nuclear spin-lattice relaxation rate, $1/T_1$) ของตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิม

อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (Relaxation rate, $1/T_1$) เป็นส่วนกลับของเวลาการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (Relaxation time, T_1) ซึ่งใช้อธิบายพีคโคเฮียเรนซ์ สำหรับตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิมบางชนิด ความสัมพันธ์ระหว่าง $1/T_1$ กับ T พบว่าเกิดพีคที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต และที่บริเวณอุณหภูมิก่อนของค่าสัมบูรณ์ของ $1/T_1$ จะเพิ่มขึ้นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ดังนั้น พีคโคเฮียเรนซ์ จึงสามารถอธิบายตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิม โดยใช้แบบจำลองตามทฤษฎีบีซีเอสได้

ในปี ค.ศ. 1967 ลีดอนและซูล (Leadon; & Suhl. 1967: 596) ศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ (Nuclear spin-lattice relaxation rate, $1/T_1$) ของตัวนำยิ่งยวด โดยใช้วิธีฟังก์ชันกรีน

ในการศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ นิยามว่า $R \equiv 1/T_1$ คือความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ($W_{n \rightarrow m}$) จากสถานะ $|n\rangle$ ไปยัง

สถานะ $|m\rangle$ สำหรับกรณีทั่วไป อันตรกิริยาการเปลี่ยนสถานะของสปินระหว่างสปินของนิวเคลียส และอิเล็กตรอนตัวนำ ความน่าจะเป็นสามารถเขียนในเทอมของฟังก์ชันกรีน, G_ω และ F_ω^+ ได้ดังนี้

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{C^2}{2\hbar} \sum_{j,j'} \frac{[\langle n|I_j|m\rangle\langle m|I_{j'}|n\rangle + c.c.]}{[1 - \exp(\beta\omega)]} \text{Im} O[i\omega(q) \rightarrow \omega + i\delta] \\ \times \left\{ T \sum_s [G_{\omega(s)}(R_j, R_{j'}) G_{\omega(s)-\omega(q)}(R_{j'}, R_j) + F_{\omega(s)}(R_j, R_{j'}) F_{\omega(q)-\omega(s)}^+(R_j, R_{j'})] \exp[i\omega(s)\eta] \right\} \quad (2.6)$$

เมื่อ $C = (-8\pi/3)\gamma_e\gamma_n\hbar^2$
 γ_e, γ_n คือ ค่าคงตัวของอัตราส่วนแม่เหล็กไจโรของอิเล็กตรอนและนิวเคลียส ตามลำดับ
 T คือ อุณหภูมิ
 I_j คือ สปินของนิวเคลียส
 $\omega(q)$ คือ ความถี่ โดยที่ $\omega(q) = 2q\pi T$
 $\omega(s)$ คือ ความถี่ โดยที่ $\omega(s) = (2s+1)\pi T$
 q, s คือ จำนวนเต็ม โดยที่ $q = 1, 2, 3, \dots$ และ $s = 0, 1, 2, 3, \dots$
 δ, η คือ ปริมาณที่มีค่าน้อยๆ
 ω คือ ความถี่ที่เกิดจากความแตกต่างของระดับพลังงานซีแมน (Zeeman) ของสถานะ $|n\rangle$ และ $|m\rangle$ โดยทั่วไป ω จะมีค่าน้อย และสามารถกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ได้

จากสมการ (2.6) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$W_{n \rightarrow m} = (C^2/2\pi\hbar) \sum_{j,j'} [\langle n|I_j|m\rangle\langle m|I_{j'}|n\rangle + c.c.] \int dE f(E) [1 - f(E)] \\ \times [\text{Im} G_E^R(R_j, R_{j'}) \text{Im} G_{E-\omega}^R(R_{j'}, R_j) + \text{Im} F_E^R(R_j, R_{j'}) \text{Im} F_{\omega-E}^{R^+}(R_j, R_{j'})] \quad (2.7)$$

เมื่อ $f(E)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มิของอนุภาคที่มีพลังงาน E

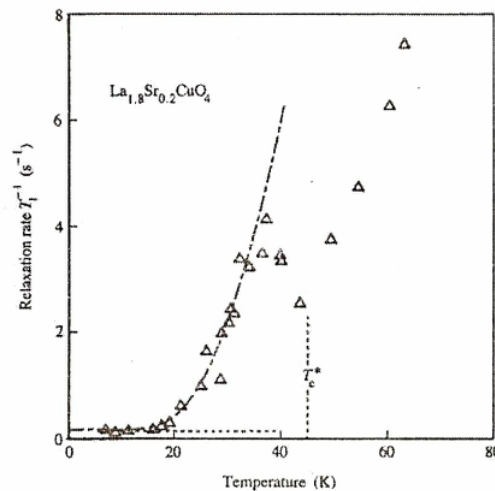
สมการ (2.7) เป็นรูปแบบสมการทั่วไปของสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะ สปินของนิวเคลียส

ในปี ค.ศ. 1989 เมริง (Mehring. 1989: 349) ศึกษา NMR ของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูง โดย NMR เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับอธิบายตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูง ซึ่งแสดงถึงลักษณะที่โดดเด่นของการเกิด Gap opening และการกระตุ้นของกึ่งอนุภาคโดยการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ (Nuclear spin-lattice relaxation) จากการศึกษาสารตัวนำยวดยิ่ง ^{27}Al พบว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอสเป็นอย่างมาก และผลการทดลองได้รับการยืนยันตามข้อมูลการทดลองของฟิคโคเฮียเรนซ์ ซึ่งกล่าวว่า เมื่ออุณหภูมิลดลงอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสจะลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ดังสมการ (2.8)

$$\frac{1}{T_1} \sim \exp(-\Delta/k_B T) \quad \text{เมื่อ } T \ll T_c \quad (2.8)$$

ความหนาแน่นสถานะของการกระตุ้นกึ่งอนุภาคจะเพิ่มขึ้นเมื่อ Gap opens ที่ระดับฟีวเฟอร์มี และการลดลงของ $1/T_1$ มีความสอดคล้องกับสมการ (2.8)

อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซของตัวนำยวดยิ่ง ^{139}La ในสารประกอบ $\text{La}_{1.8}\text{Sr}_{0.2}\text{CuO}_4$ เมื่อสนามเป็นศูนย์ (Zero-field) ได้ผลดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 แสดง $1/T_1$ กับอุณหภูมิของ ^{139}La ในตัวนำยวดยิ่ง $\text{La}_{1.8}\text{Sr}_{0.2}\text{CuO}_4$

ที่มา: Mehring. (1989). *IMB J. RES Develop.* 33. p. 349.

จากภาพพบว่า โหนด (Hump) เกิดขึ้นที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต และที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์ องศาสัมบูรณ์ อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ($1/T_1$) เพิ่มขึ้นแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสในสภานำยวดยิ่ง คำนวณได้ดังสมการ

$$\frac{1}{T_{1s}} = \frac{4\pi}{\hbar} \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_e} \right)^2 K^2 \int \left(\frac{E^2 + \Delta^2}{E^2 - \Delta^2} \right) f(E)(1-f(E)) dE \quad (2.9)$$

เมื่อ $f(E)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มิของอนุภาคที่มีพลังงาน

K คือ ค่าคงตัว Knight shift

สมการ (2.9) ลดรูปเป็น อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสในสถานะนำปกติ ($1/T_{1n}$) ได้ เมื่อ $T > T_c$ โดยกำหนดให้ $\Delta = 0$ สามารถเขียนได้ดังสมการนี้

$$\frac{1}{T_{1n}} = \frac{4\pi}{\hbar} \left(\frac{\gamma_n}{\gamma_e} \right)^2 K^2 \int f(E)(1-f(E)) dE \quad (2.10)$$

ในปี ค.ศ. 1995 สเตนเกอร์และคณะ (Stenger; & et al. 1995: 1649 -1652) สังเกตลักษณะพีคโคเฮียเรนซ์ ใน $1/T_1T$ โดยศึกษาผลของการขึ้นกับอุณหภูมิและสนามของสัญญาณ NMR และ T_1 ในตัวนำยวดยิ่ง A_3C_{60} พบว่าพีคโคเฮียเรนซ์ ใน $1/T_1T$ ได้จากการใส่สนามแม่เหล็กภายนอกที่มีค่ามาก

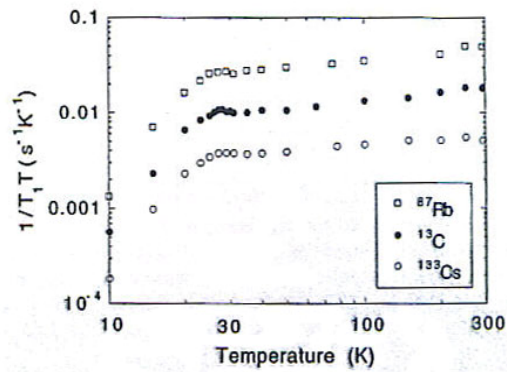
นอกจากนี้ยังพบว่า $1/T_1T$ ที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ของ ^{13}C , ^{87}Rb และ ^{133}Cs ในตัวนำยวดยิ่ง $\text{Rb}_2\text{CsC}_{60}$ ที่สนามแม่เหล็ก 8.8 เทสลา ดังภาพประกอบ 14 ซึ่งเป็นการแสดงถึงการขึ้นกับอุณหภูมิของ T_1 สำหรับนิวเคลียสสามชนิด การผ่อนคลายสปินเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซในโลหะเป็นกลไกคอรริงกา (Korringa) ของอิเล็กตรอนตัวนำ ผลของการไม่ขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1T$ เป็นตามสมการ

$$\frac{1}{T_1T} = \frac{\pi k_B}{\hbar} \gamma_n^2 A_{eff}^2 \rho^2(E_F) \quad (2.11)$$

เมื่อ A_{eff} คือ ผลไฮเพอร์ไฟน์ (Hyperfine) ของการจับคู่พารามิเตอร์

γ_n คือ ค่าคงตัวของอัตราส่วนแม่เหล็กไจโรของนิวเคลียส

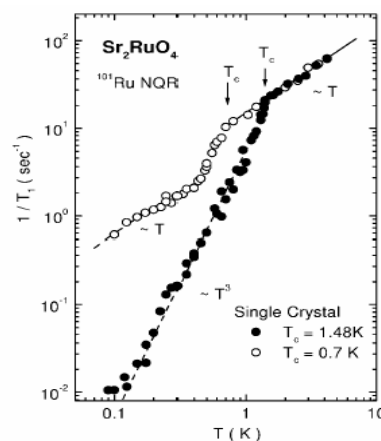
$\rho(E_F)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่พลังงานเฟอร์มิ



ภาพประกอบ 14 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ของ ^{13}C , ^{87}Rb และ ^{133}Cs ในตัวนำยวดยิ่ง $\text{Rb}_2\text{CsC}_{60}$ โดย $T_c = 31$ เคลวิน ภายในสนามแม่เหล็กภายนอก 8.8 เทสลา

ที่มา: Stenger; & et al. (1995). *Physical Review Letters*. 74(9): 1649.

ในปี ค.ศ. 1999 ไอชิเดและคณะ (Ishida; & et al. 1999: 5387) ศึกษาโครงสร้างช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งที่มีสปินแบบทริปเลต ในกลุ่ม Sr_2RuO_4 พบว่าการขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ของ ^{101}Ru ที่สนามแม่เหล็กเท่ากับศูนย์ เมื่ออุณหภูมิวิกฤตประมาณ 1.48 เคลวิน ลักษณะของกราฟของ $1/T_1$ ลดลงแบบ T^3 โดยไม่เกิดพีกโคเฮียเรนซ์ ภายใต้อุณหภูมิวิกฤต การขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงส่วนใหญ่จะแสดงดังภาพประกอบ 15 ซึ่งจะคล้ายกับตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 0.7 เคลวิน



ภาพประกอบ 15 แสดงการขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ในตัวนำยวดยิ่งกลุ่ม Sr_2RuO_4

ที่มา: Ishida; & et al. (1999). *Physical Review Letters*. 84(23): 5387.

ในปี ค.ศ. 2002 อีเรมินและคณะ (Eremin; & et al. 2002: 220502) คำนวณอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ , $1/T_1T$ ในสถานะปกติของสารประกอบ Sr_2RuO_4 ที่มีสปินแบบทริเพลต แล้วเทียบกับผลการทดลอง

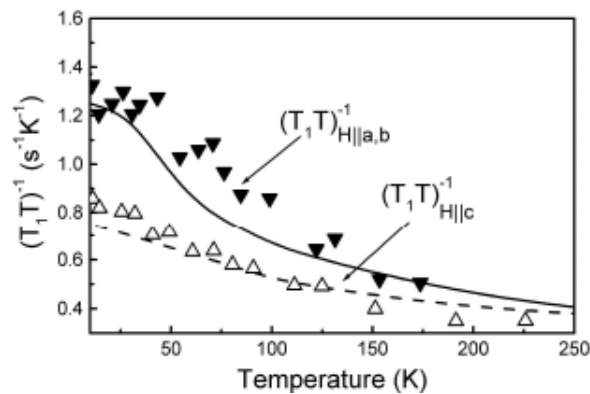
สมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ , $1/T_1T$ ของตัวนำยวดยิ่ง ^{17}O ในสารประกอบที่มีระนาบของ RuO_2 เป็นองค์ประกอบ โดยมีทิศทางสนามแม่เหล็กภายนอกเป็น $i = a, b, c$ สามารถเขียนได้ตามสมการดังนี้

$$\left[\frac{1}{T_1T} \right]_i = \frac{2k_B\gamma_n^2}{(\gamma_e\hbar)^2} \sum_q |A_q^p|^2 \frac{\chi(q, \omega_{sf})}{\omega_{sf}} \quad (2.12)$$

เมื่อ A_q^p คือ ค่าคงตัวที่ขึ้นกับการควบคู่ไฮเพอร์ไฟน์ (Hyperfine-coupling)

χ คือ ค่าซึมซับสปิน (Spin susceptibility)

นำสมการ (2.12) คำนวณเชิงตัวเลข สามารถพล็อต $1/T_1T$ เทียบกับการทดลองได้ดังภาพประกอบ 16 ซึ่งพบว่าผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลอง โดยที่ $T=250$ เคลวิน ค่า $1/T_1T$ ไม่ขึ้นกับทิศทาง และการขึ้นกับทิศทางจะปรากฏใกล้กับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของสภาพนำยวดยิ่ง



ภาพประกอบ 16 แสดงผลการคำนวณ $1/T_1T$ เทียบกับข้อมูลการทดลอง

ที่มา: Eremin; & et al. (2002). *Physical Review B*. 65 : 220502.

ในปี ค.ศ. 2002 แบงค์ แกรฟและบาลาสกาย (Bang, Graf & Balatsky. 2002: 054514) คำนวณหาอัตราการทำนองคล้ายสปีนของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ ($1/T_1$) ในสถานะตัวนำยวดยิ่งแบบ $D+iD$ ที่มีสารเจือ โดยเริ่มพิจารณาจาก ที-เมทริกซ์ ดังนี้

$$T_0(\omega_n) = \frac{g_0(\omega_n)}{[c^2 - g_0^2(\omega_n)]} \quad (2.13)$$

และมีฟังก์ชันกรีน

$$g_0(\omega_n) = \frac{1}{\pi N_0} \sum_k \frac{i\tilde{\omega}_n}{\tilde{\omega}_n^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta^2(k)} \quad (2.14)$$

โดย $\tilde{\omega}_n = \omega_n + \sum_0$ และ $\sum_0 = \Gamma T_0$ และ $\Gamma = n_i/\pi N_0$

เมื่อ N_0 คือ ความหนาแน่นสถานะที่พลังงานเฟอร์มิ

n_i คือ ความเข้มข้นของสารเจือ

สมการของช่องว่างพลังงานเป็นแบบ เซลฟ์คอนซิสเทนท์ (Self-consistent) ดังสมการ

$$\Delta(k) = -N_0 \sum_{k'} V(k, k') T \sum_{\omega_n} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\Delta(k')}{\tilde{\omega}_n^2 + \varepsilon^2 + \Delta^2(k')} d\varepsilon \quad (2.15)$$

แทนค่าสมการ (2.15) ในสมการ (2.14) จากนั้นนำไปแทนในสมการ (2.13) แล้วใช้การประมาณแบบ Pade สามารถคำนวณหาอัตราการทำนองคล้ายสปีนของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซได้ดังนี้

$$\frac{1}{T_1} \approx \int_0^\infty \left[\left\langle \left\langle \text{Re} \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \Delta^2(k)}} \right\rangle k \right\rangle^2 + \left\langle \left\langle \text{Re} \frac{\Delta(k)}{\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \Delta^2(k)}} \right\rangle k \right\rangle^2 \right] \frac{\partial f_F(\omega)}{\partial \omega}$$

(2.16)

เมื่อ $\langle \dots \rangle$ คือ ค่าเฉลี่ยบนผิวเฟอร์มิ

$f_F(\omega)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มิ

การคำนวณอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอัตราปฏิสัมพันธ์กับแลตทิซ, $1/T_1$ สำหรับตัวนำวูดิงแบบ $D+iD$ และตัวนำวูดิงแบบคลื่นดีที่มีสารเจือ พบว่าสารเจือก่อให้เกิดการตกค้าง (Residual) ของความหนาแน่นสถานะภายในช่องว่างพลังงาน ผลของช่องว่างพลังงาน $D+iD$ และตัวนำวูดิงแบบคลื่นดีก่อให้เกิดการขึ้นกับอุณหภูมิแบบเชิงเส้น (Linear temperature) ใน $1/T_1$ ที่อุณหภูมิต่ำ

ในปี ค.ศ.2001 มัทซุโมโต (Matsumoto, 2001: 2505-2508) ศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสที่ตำแหน่งมีสารเจือ พบว่าสารเจือทำให้เกิดขอบเขตจำกัดของสถานะยึดเหนี่ยวรอบๆ อะตอมของสารเจือในตัวนำวูดิงแบบไม่ดั้งเดิม และอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสลดลงเนื่องจากพลังงานศักย์ของสารเจือ ซึ่ง $1/T_1$ เกิดพีคที่อุณหภูมิต่ำและมีความเหมาะสมกับสถานะยึดเหนี่ยวของสารเจือ และพีคจะไม่เกิดที่ตำแหน่งที่ไม่มีสารเจือ

สำหรับการจับคู่แบบไม่ดั้งเดิมจะพิจารณาสถานะการจับคู่ของคลื่นฟี $(p_x \pm ip_y)$ และคลื่นดี $(d_{x^2-y^2})$ เพื่อให้การคำนวณไม่ซับซ้อนกำหนดให้ตัวนำวูดิงเป็นแบบ 2 มิติ และมีพื้นผิวเฟอร์มิเป็นรูปทรงระบอบอก โดยเริ่มพิจารณาจากฟังก์ชันกรีนที่มีสารเจือ ซึ่งใช้การประมาณแบบ ที-เมทริกซ์ ดังนี้

$$\hat{G}(i\omega_m, r, r') = \hat{G}_0(i\omega_m, r, r') + \hat{G}_0(i\omega_m, r, 0)U_0\hat{\tau}_3 \frac{1}{1 - \hat{G}_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\hat{\tau}_3} \hat{G}_0(i\omega_m, 0, r') \quad (2.17)$$

กำหนดให้ฟังก์ชันกรีนที่ไม่มีสารเจือเป็น

$$\hat{G}_0(i\omega_m, r, r') = -\frac{1}{\Omega} \sum_k e^{ik(r-r')} \frac{i\omega_m + \varepsilon_k \hat{\tau}_3 + \Delta_k \hat{\tau}_1}{\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2} \quad (2.18)$$

เมื่อ ω_m คือ ความถี่มัดซูบระระ

$\tau_i (i)$ คือ เพลลีเมทริกซ์ $(i=1, 2, 3)$

ε_k คือ พลังงานจลน์

Δ_k คือ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น สำหรับคลื่นแบบฟีและคลื่นแบบดีจะมี

ช่องว่างพลังงานตามสมการ $\Delta_k = \Delta_p(T)e^{i\theta_k}$, $\Delta_k = \Delta_d(T)\cos 2\theta_k$ ตามลำดับ เมื่อ θ_k เป็นมุมที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นที่ผิวเฟอร์มิ และ $\Delta_p(T)[\Delta_d(T)]$ เป็น ช่องว่างพลังงานของคลื่นฟี [คลื่นดี] ที่ขึ้นกับอุณหภูมิและ $1/T_1$ ที่ตำแหน่งสารเจือจะอยู่ในรูปสมการ

$$1/T_1 = 2\pi \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 W \quad (2.19)$$

โดย

$$W = \int \frac{a_{11}(E)a_{22}(-E) - a_{12}(E)a_{21}(-E)}{1 + \cosh(E/T)} dE \quad (2.20)$$

เมื่อ W คือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะของสปินในนิวเคลียส
 γ_e, γ_n คือ ค่าคงตัวของอัตราส่วนแม่เหล็กไจโรของอิเล็กตรอน, นิวเคลียส
 a_{ij} คือ องค์ประกอบเมทริกซ์ของฟังก์ชันกรีน โดยมีรูปแบบตามสมการ

$$a_{ij} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{ij}(i\omega_m \rightarrow E + i\delta, 0, 0)]$$

ในกรณีตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นเอส (s -wave) $1/T_1$ เกิดพีคโคเฮียเรนซ์ ที่ต่ำกว่า T_c ที่ตำแหน่งไม่มีสารเจือ $u_0 = 0$ ($u_0 = \pi N_0 U_0$) ส่วนที่ตำแหน่งมีสารเจือ $u_0 \neq 0$ จะกำหนดให้ $a_{ij}(E, u_0) = \frac{a_{ij}(E, 0)}{1 + u_0^2}$ พบว่าความหนาแน่นสถานะที่อยู่ในขอบเขตจำกัดเมื่อเติมสารเจือจะค่อยๆ ลดลง ซึ่งสอดคล้องกับการขึ้นกับพลังงาน ในกรณีของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นเอสนี้จะสอดคล้องกับทฤษฎีแอนเดอร์สัน (Anderson theorem) โดยที่ W เป็นตามสมการ

$$W(u_0, T) = \frac{W(0, T)}{(1 + u_0^2)^2} \quad (2.21)$$

จากการศึกษาพบว่า $1/T_1$ จะค่อยๆ ลดลงที่ตำแหน่งที่มีสารเจือ และการขึ้นกับอุณหภูมิไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างตำแหน่งที่มีสารเจือและตำแหน่งที่ไม่มีสารเจือสำหรับตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นเอส

สำหรับตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นพี ($p_x \pm ip_y$ -wave) การขึ้นกับอุณหภูมิที่ตำแหน่งสารเจือจะแตกต่างจากที่ตำแหน่งไม่มีสารเจือ และคู่ของอิเล็กตรอนในกรณีของตัวนำวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิมทั้งตำแหน่ง a_{12} และ a_{21} เป็นศูนย์ทั้งคู่ ดังนั้น W จะเปลี่ยนเป็น

$$W = \int \frac{a_{11}(E)a_{22}(-E)}{1 + \cosh(E/T)} dE \quad (2.22)$$

จากความหนาแน่นสถานะที่อยู่ในขอบเขตจำกัดที่อะตอมมีสารเจือ เป็นตามสมการ

$$N_{\text{imp}}(E) = \frac{a_{11}(E)}{N_0} = \frac{a_{22}(-E)}{N_0} \quad (2.23)$$

แทนค่าสมการ (2.23) ในสมการ (2.22) จะได้

$$W = N_0^2 \int \frac{N_{\text{imp}}^2}{1 + \cosh(E/T)} dE \quad (2.24)$$

สำหรับตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นพี สถานะยึดเหนี่ยวจะปรากฏรอบสารเจือและตำแหน่งพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยวจะเป็น $E_B = -\text{sgn}(u_0)\Delta_p(T)/\sqrt{1+u_0^2}$ จากสมการ (2.24) กำหนดให้ N_{imp} มีรูปแบบเป็นตามสมการ

$$N_{\text{imp}}(E) = \frac{N_p(E)}{1 + [u_0 N_p(E)]^2} \theta(|E| - \Delta_p(T)) + \frac{\pi |u_0| \Delta_p(T)}{(1+u_0^2)^{3/2}} \delta(E - E_B)$$

(2.25)

โดย
$$N_p(E) = \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Delta_p^2(T)}}$$

เมื่อ $N_p(E)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ตำแหน่งไม่มีสารเจือของคลื่น $p_x \pm ip_y$

θ คือ ฟังก์ชันสถานะแบบเฮวิดไซ (Heaviside step function)

δ คือ ฟังก์ชันเดลต้า

จากสมการ (2.25) เทอมแรกคือ ความต่อเนื่อง (Continuum) และเทอมที่สองคือ สถานะยึดเหนี่ยว พิจารณา W ที่สถานะยึดเหนี่ยวโดยนำเทอมที่สองของสมการ (2.25) แทนในสมการ (2.24) จะได้

$$W_B = N_0^2 \int \left[\frac{\pi |u_0| \Delta_p(T)}{(1+u_0^2)^{3/2}} \right]^2 \delta^2(E - E_B) \cdot \frac{1}{1 + \cosh E/T} dE \quad (2.26)$$

จาก $\delta(E - E_B) \approx \frac{\delta}{\pi[(E - E_B)^2 + \delta^2]}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} W_B &= N_0^2 \int \left[\frac{\pi |u_0| \Delta_p(T)}{(1+u_0^2)^{3/2}} \right]^2 \frac{\delta^2}{\pi^2 [(E - E_B)^2 + \delta^2]^2} \cdot \frac{1}{1 + \cosh E_B/T} dE \\ &= N_0^2 \left[\frac{|u_0| \Delta_p(T)}{(1+u_0^2)^{3/2}} \right]^2 \frac{1}{1 + \cosh E_B/T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2}{[(E - E_B)^2 + \delta^2]^2} dE \end{aligned} \quad (2.27)$$

พิจารณาเฉพาะ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2}{[(E - E_B)^2 + \delta^2]^2} dE$

จากสมการ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{(2n-3)!!}{2 \cdot (2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{a^{2n-1}}$ โดย $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)$

และกำหนดให้ $u = (E - E_B)$, $du = dE$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{\delta^2}{[(E - E_B)^2 + \delta^2]^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2}{[u^2 + \delta^2]^2} du \\ &= 2 \left[\delta^2 \frac{\pi}{\delta^3} \frac{1!!}{2 \cdot 2!!} \right] \\ &= \frac{\pi}{2\delta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

ดังนั้น

$$W_B = N_0^2 \left[\frac{|u_0| \Delta_p(T)}{(1+u_0^2)^{3/2}} \right]^2 \frac{1}{1 + \cosh E_B/T} \frac{\pi}{2\delta} \quad (2.29)$$

สำหรับกรณีตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ($d_{x^2-y^2}$ - wave) ซึ่งเป็นสมมาตรการจับคู่สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ในที่นี้จะกำหนด N_{imp} ตามสมการ

$$N_{\text{imp}}(E) = \frac{1}{u_0^2} \frac{N_d(E)}{[A(E) + 1/u_0]^2 + N_d^2(E)} \quad (2.30)$$

เมื่อ $A(E)$ และ $N_d(E)$ คือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $\left\langle (E + i\delta) / \sqrt{(-iE + \delta)^2 + |\Delta_k|^2} \right\rangle_{\text{FS}}$

$\langle \dots \rangle_{FS}$ คือ ค่าเฉลี่ยบนพื้นผิวเฟอร์มิ

$N_d(E)$ คือ สถานะความหนาแน่นที่ไม่มีสารเจือสำหรับตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่ตำแหน่งสารเจือ $u_0 \neq 0$ และ $1/T_1$ สำหรับตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดี จะเกิดพีคที่เหมาะสมกับสถานะยึดเหนี่ยว

งานวิจัยนี้พบว่าพีค $1/T_1$ จะเกิดขึ้นโดยสถานะยึดเหนี่ยวของสารเจือ และพีคจะหายไปที่ตำแหน่งที่ไม่มีสารเจือ ซึ่งแสดงถึงความแตกต่างใน $1/T_1$ ระหว่าง ตำแหน่งที่มีสารเจือและตำแหน่งที่ไม่มีสารเจือในตัวนำวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม สำหรับตัวนำวดยิ่งแบบดั้งเดิมของคลื่นเอส การขึ้นกับอุณหภูมิของ $1/T_1$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างตำแหน่งที่มีสารเจือและตำแหน่งที่ไม่มีสารเจือ ดังนั้น การเกิดพีค $1/T_1$ ที่ตำแหน่งที่มีสารเจือสามารถพิสูจน์ความเป็นตัวนำวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิม

ความหนาแน่นสถานะ

ในปี ค.ศ. 1999 มัตซึโมโตะและซิกิริทซ์ (Matsumoto & Sigrist, 1999: 994-1007) ศึกษาสมการความหนาแน่นสถานะที่อยู่ในขอบเขตจำกัด สำหรับการจับคู่ของสปีนแบบทริปลेट โดยเริ่มจาก

$$N(\theta_k, E, x) = \text{Re} [g(\theta_k, \omega_m, x) |i\omega_m \rightarrow E + i\delta|] \quad (2.31)$$

เมื่อ g คือ ฟังก์ชันกรีน และ δ คือ จำนวนจริง

ในกรณีนี้ ฟังก์ชันกรีนเป็นแบบกึ่งดั้งเดิม มีรูปแบบตามสมการ

$$\begin{aligned} \bar{g}(\theta_k, \omega_m, x) &= \bar{g}_x(\theta_k, \omega_m, x) \bar{t}_x + \bar{g}_y(\theta_k, \omega_m, x) \bar{t}_y + \bar{g}_z(\theta_k, \omega_m, x) \bar{t}_z \\ \bar{g}_x(\theta_k, \omega_m, x) &= \bar{g}_x(\pi - \theta_k, \omega_m, x) = \frac{-\Delta_y(\theta_k)}{\Omega} \left[1 + \frac{\Delta_x^2(\theta_k)}{\omega_m^2 + \Delta_y^2(\theta_k)} e^{-2qx} \right] - i \frac{\omega_m |\Delta_x(\theta_k)|}{\omega_m^2 + \Delta_y^2(\theta_k)} e^{-2qx} \\ \bar{g}_y(\theta_k, \omega_m, x) &= -\bar{g}_y(\pi - \theta_k, \omega_m, x) = \frac{-\Delta_x(\theta_k)}{\Omega} [1 - e^{-2qx}] \\ \bar{g}_z(\theta_k, \omega_m, x) &= \bar{g}_z(\pi - \theta_k, \omega_m, x) = \frac{\omega_m}{\Omega} + \frac{\omega_m \Delta_x^2(\theta_k) - i\Omega |\Delta_x(\theta_k)| \Delta_y(\theta_k)}{\Omega [\omega_m^2 + \Delta_y^2(\theta_k)]} e^{-2qx} \end{aligned} \quad (2.32)$$

โดยมี $\Delta_x(\theta_k) = \Delta(T) \cos \theta_k$, $\Delta_y(\theta_k) = \Delta(T) \sin \theta_k$, $\Omega = \sqrt{\omega_m^2 + \Delta^2(\theta_k)}$ และ $q = \frac{\Omega}{|v_{Fx}|}$

เมื่อ $\bar{t}_i(i)$ คือ เวกเตอร์ ($i = x, y, z$)

พิจารณาสมมาตรของตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นพี ($p_x + ip_y$) ซึ่งมีช่องว่างพลังงาน $\Delta(\theta_k) = \Delta_x(\theta_k) + i\Delta_y(\theta_k) = \Delta(T)(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ เมื่อ $\Delta(T)$ คือ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และที่อุณหภูมิต่ำๆ จะได้ $\Delta(T) \approx \Delta(0)$ แทน g_z ในสมการ (2.31) จะได้ความหนาแน่นสถานะเป็น

$$N(\theta_k, E, x) = N(\pi - \theta_k, E, x) = \left[\frac{|E| - \Delta_x^2(\theta_k)|E|\cos(2\eta x) + \text{sgn}(E)\Delta_x(\theta_k)\Delta_y(\theta_k)\rho\sin(2\eta x)}{\rho[E^2 - \Delta_y^2(\theta_k)]} \right] \theta(E^2 - \Delta^2(T)) + \pi|\Delta_x(\theta_k)|\exp\left(-\frac{2|\Delta_x(\theta_k)|}{|v_{Fx}|}x\right)\delta(E - \Delta_y(\theta_k)) \quad (2.33)$$

$$\text{โดย } \rho = \sqrt{E^2 - \Delta^2(T)}, \quad \eta = \frac{\rho}{|v_{Fx}|}$$

เทอมแรกของสมการ (2.33) คือ ความต่อเนื่อง และเทอมที่สองคือ สถานะยึดเหนี่ยว

ในปี ค.ศ. 2003 คูเบิร์ต (Kubert, 2003: 754) ศึกษาความหนาแน่นสถานะที่อยู่ในขอบเขตจำกัดรอบๆ สารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ของสภาวะตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นดี (DSC) และความหนาแน่นแบบคลื่นดี (DDW) โดยใช้รูปแบบฮาร์มิลโทเนียนเป็น

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} + \sum_k \Delta_k (c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow} + h.c.) + \sum_k iW_k (c_{k\sigma}^+ c_{k+Q\sigma} + h.c.) + \epsilon_d \sum_{\sigma} d_{\sigma}^+ d_{\sigma} + V \sum_{k\sigma} (c_{k\sigma}^+ d_{\sigma} + h.c.) + Ud_{\uparrow}^+ d_{\uparrow} d_{\downarrow}^+ d_{\downarrow}, \quad (2.34)$$

เมื่อ ϵ_k คือ สภาพการกระจายของแถบอิเล็กทรอนิกส์ที่ความหนาแน่นของพารามิเตอร์ที่ $t = 400 \text{ meV}$, $t' = -50 \text{ meV}$ และ $\Delta_k(W_k)$ คือ ช่องว่างพลังงานของ DSC (DDW) ซึ่งเขียนได้ตามสมการ $\epsilon_k = 2t(\cos k_x + \cos k_y) - 4t'(\cos k_x \cos k_y) - \mu$, $\Delta_k = \frac{\Delta_0}{2}(\cos k_x - \cos k_y)$ และ $W_k = \frac{W_0}{2}(\cos k_x - \cos k_y)$

โดย $G_0^{-1}(k, \omega)$ คือ ฟังก์ชันกรีนที่ไม่มีสารเจือ แสดงด้วยเมทริกซ์ดังนี้

$$\hat{G}_0^{-1}(k, \omega) = \begin{pmatrix} \omega - (\epsilon_k - \mu) & iW_k & -\Delta_k & 0 \\ iW_k & \omega - (\epsilon_{k+Q} - \mu) & 0 & \Delta_k \\ -\Delta_k & 0 & \omega + (\epsilon_k - \mu) & -iW_k \\ 0 & \Delta_k & -iW_k & \omega + (\epsilon_{k+Q} - \mu) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

และฟังก์ชันกรีนของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดี

$$\hat{G}_d^{-1}(\omega) = \left[\omega \hat{t}_0 - \sum_{\sigma}^d(\omega) \hat{t}_0 - \left(\epsilon_d + \frac{U}{2} \right) \hat{t}_3 + \omega \sum_k \frac{V^2}{\omega^2 - \epsilon_k^2 - \Delta_k^2} \hat{t}_0 \right], \quad (2.36)$$

เมื่อ $\hat{t}_\alpha(\alpha)$ คือ เพลทเมทริกซ์ ($\alpha = 1, 2, 3$) และฟังก์ชันกรีนที่มีสารเจือ สามารถเขียนในรูป ที-เมทริกซ์ ได้ตามสมการ

$$\hat{G}(r, r'; \omega) = \hat{G}^0(r - r'; \omega) + \hat{G}^0(r; \omega) \hat{T}(\omega) \hat{G}^0(-r; \omega) \quad (2.37)$$

เมื่อ $\hat{T}(\omega)$ คือ ที-เมทริกซ์ เขียนได้ตามสมการ

$$\hat{T}(\omega) = V \hat{t}_3 \hat{G}_d(\omega) V \hat{t}_3 \quad (2.38)$$

พิจารณาความหนาแน่นสถานะจะเป็น

$$N(r, \omega) = N_{d\text{-wave}} + N_{\text{impurity}} \quad (2.39)$$

เมื่อ $N_{d\text{-wave}}$ คือ ความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดี และ N_{impurity} คือ ความหนาแน่นสถานะของอิล็กตรอนที่มีสารเจือ เขียนได้ตามสมการ

$$N_{d\text{-wave}} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\sum_k \hat{G}_{11}^0(k, \omega) \right) \quad (2.40)$$

$$N_{\text{impurity}} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(\sum_k e^{ik \cdot r} \hat{G}^0(k, \omega) \hat{T}(\omega) \sum_k e^{-ik \cdot r} \hat{G}^0(k, \omega) \right)_{11} \quad (2.41)$$

โดยทั่วไปความหนาแน่นสถานะของสารเจือจะเป็น

$$N_{\text{impurity}} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left(G_{11}^0(r, \omega) T_{11}(\omega) G_{11}^0(-r, \omega) + G_{12}^0(r, \omega) T_{21}(\omega) G_{11}^0(-r, \omega) \right. \\ \left. + G_{11}^0(r, \omega) T_{12}(\omega) G_{21}^0(-r, \omega) + G_{12}^0(r, \omega) T_{22}(\omega) G_{21}^0(-r, \omega) \right) \quad (2.42)$$

ในกรณีของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี นอกแนวทแยงของที-เมทริกซ์ $T_{12} = T_{21} = 0$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเฮสนอกแนวทแยง ที-เมทริกซ์ จะไม่เป็นศูนย์

สารเจือมีอิทธิพลในช่องว่าง ซึ่งกำหนดโดยโพลของที-เมทริกซ์ หรือ $\det[T^{-1}] = 0$ ซึ่งจะได้

$$(\omega - \epsilon_d + V^2 \alpha(\omega))(\omega + \epsilon_d + V^2 \beta(\omega)) - V^4 \gamma^2(\omega) = 0 \quad (2.43)$$

เมื่อ $\alpha(\omega) = \sum_k \frac{(\omega - \epsilon_k)}{\omega^2 - E_k^2}$, $\beta(\omega) = \sum_k \frac{(\omega + \epsilon_k)}{\omega^2 - E_k^2}$, $\gamma(\omega) = \sum_k \frac{\Delta_k}{\omega^2 - E_k^2}$

สำหรับตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี $\gamma(\omega) = 0$ และขึ้นกับพารามิเตอร์ V และ ϵ_d โดยใช้สมการ (2.43) อธิบายได้ ส่วนกรณีของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเฮส $\gamma(\omega) \neq 0$ ไม่สามารถนำสมการ (2.43) อธิบายได้ทั้งนี้เพราะสารเจือไม่มีอิทธิพลในช่องว่างและสอดคล้องกับทฤษฎีแอนเดอร์สันสำหรับสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กในตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเฮส

ในปี ค.ศ. 2007 อะบูอลร็อบและเคอโนล (Abu Alrub & Curnoe. 2007: 184511) ศึกษาอิทธิพลของสารเจือต่อสมการความหนาแน่นสถานะ โดยได้คำนวณความหนาแน่นสถานะ การนำไฟฟ้า และการนำความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแบบ nonunitary และได้ประยุกต์ผลไปสู่เฟสบี (B phase) ของสารประกอบ $\text{PrOs}_4\text{Sb}_{12}$ ซึ่งเริ่มพิจารณาจากฟังก์ชันกรีนที่มีสารเจือและมีสปินเป็นแบบทริปลेट โดยฟังก์ชันกรีนตามแนวทแยงเป็น

$$\tilde{G}(k, \omega) = \frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \left[\frac{u_{k-}^2}{\omega - E_{k-} + i\delta} + \frac{v_{k-}^2}{\omega + E_{k-} + i\delta} + \frac{u_{k+}^2}{\omega - E_{k+} + i\delta} + \frac{v_{k+}^2}{\omega + E_{k+} + i\delta} \right] \\ - \frac{q_k \cdot \tilde{\sigma}}{2|q_k|} \left[\frac{u_{k-}^2}{\omega - E_{k-} + i\delta} + \frac{v_{k-}^2}{\omega + E_{k-} + i\delta} - \frac{u_{k+}^2}{\omega - E_{k+} + i\delta} - \frac{v_{k+}^2}{\omega + E_{k+} + i\delta} \right] \quad (2.44)$$

นอกแนวทแยง

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k, \omega) = & -\frac{\tilde{\sigma}_0}{2} \left[\frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k-}} \left[\frac{u_{k-} v_{k-}}{\omega - E_{k-} + i\delta} - \frac{u_{k-} v_{k-}}{\omega + E_{k-} + i\delta} \right] + \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k+}} \left[\frac{u_{k+} v_{k+}}{\omega - E_{k+} + i\delta} - \frac{u_{k+} v_{k+}}{\omega + E_{k+} + i\delta} \right] \right] \\ & + \frac{q_k \cdot \tilde{\sigma}}{2|q_k|} \left[\frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k-}} \left[\frac{u_{k-} v_{k-}}{\omega - E_{k-} + i\delta} - \frac{u_{k-} v_{k-}}{\omega + E_{k-} + i\delta} \right] - \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k+}} \left[\frac{u_{k+} v_{k+}}{\omega - E_{k+} + i\delta} - \frac{u_{k+} v_{k+}}{\omega + E_{k+} + i\delta} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อ

$$u_{k\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k}{E_{k\pm}} \right], \quad v_{k\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k}{E_{k\pm}} \right], \quad u_{k\pm} v_{k\pm} = \frac{\Delta_{k\pm}}{2E_{k\pm}}, \quad u_{k\pm}^2 v_{k\pm}^2 = 1$$

และ $i(q_k \times d_k) \cdot \tilde{\sigma} = (q_k \cdot \tilde{\sigma})(d_k \cdot \tilde{\sigma}) - q_k \cdot d_k = (q_k \cdot \tilde{\sigma})(d_k \cdot \tilde{\sigma})$

เมื่อ $q_k \cdot d_k = 0$ เพราะ $q_k \perp d_k$ และ พลังงานในตนเอง (self energy) เป็น

$$\sum_{ret}(\omega) = \sum(i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta) = -i\Gamma(\omega)$$

ฟังก์ชัน $\tilde{A}^G(k, \omega)$ และ $\tilde{A}^F(k, \omega)$ สามารถหาได้จาก

$$\tilde{G}(k, i\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}^G(k, \omega)}{i\omega_n - \omega} d\omega \quad (2.46)$$

แทนค่าจะสามารถหาฟังก์ชัน $\tilde{A}^G(k, \omega)$ และ $\tilde{A}^F(k, \omega)$ ได้เป็น

$$\tilde{A}^G(k, \omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{2\pi} \tilde{\sigma}_0 \left[\frac{u_{k-}^2}{(\omega - E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} + \frac{v_{k-}^2}{(\omega + E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} + \frac{u_{k+}^2}{(\omega - E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} + \frac{v_{k+}^2}{(\omega + E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right]$$

$$-\frac{\Gamma(\omega) q_k \cdot \tilde{\sigma}}{2\pi |q_k|} \left[\frac{u_{k-}^2}{(\omega - E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} + \frac{v_{k-}^2}{(\omega + E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{u_{k+}^2}{(\omega - E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{v_{k+}^2}{(\omega + E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] \quad (2.47)$$

และ

$$\tilde{A}^F(k, \omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{2\pi} \tilde{\sigma}_0 \left[\frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k-}} \left[\frac{u_{k-} v_{k-}}{(\omega + E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{u_{k-} v_{k-}}{(\omega - E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] + \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k+}} \left[\frac{u_{k+} v_{k+}}{(\omega + E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{u_{k+} v_{k+}}{(\omega - E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] \right] - \frac{\Gamma(\omega) q_k \cdot \tilde{\sigma}}{2\pi |q_k|} \left[\frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k-}} \left[\frac{u_{k-} v_{k-}}{(\omega + E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{u_{k-} v_{k-}}{(\omega - E_{k-})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] + \frac{\tilde{\Delta}_k}{\Delta_{k+}} \left[\frac{u_{k+} v_{k+}}{(\omega - E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} - \frac{u_{k+} v_{k+}}{(\omega + E_{k+})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] \right] \quad (2.48)$$

ความหนาแน่นสถานะสามารถหาได้จาก

$$N(\omega) = \sum_k Tr[\tilde{A}^G(k, \omega)] \quad (2.49)$$

ใช้สมการ (2.47) หาความหนาแน่นสถานะในตัวนำยวดยิ่ง ไม่มีสารเจือได้ดังสมการ

$$N(\omega) = \sum_{k, \pm} \left[u_{k\pm}^2 \delta(\omega - E_{k\pm}) + v_{k\pm}^2 \delta(\omega + E_{k\pm}) \right] \quad (2.50)$$

และความหนาแน่นสถานะที่ประกอบด้วยสารเจือจะเป็นตามสมการ

$$N(\omega) \approx \frac{\Gamma(\omega)}{\pi} \sum_{k, \pm} \left[\frac{1}{(\omega - E_{k\pm})^2 + \Gamma^2(\omega)} \right] \quad (2.51)$$

สมการ (2.51) คือความหนาแน่นสถานะที่ขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือผ่านพลังงานในตนเอง $\Gamma(0)$ และสมการ (2.51) สามารถเขียนได้อีกแบบเป็น

$$N(\omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{\pi} 2 \sum_{j=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega - E_k)^2 + \Gamma^2(\omega)} \quad (2.52)$$

กำหนดให้

$$p^2 = v^2(k_x^2 + k_y^2) + v_F^2 k_z^2 \approx E_k^2 \quad (2.53)$$

แทนค่าสมการ (2.53) ลงในสมการ (2.52) จะได้

$$\begin{aligned} N(\omega) &= \frac{2\Gamma(\omega) b}{\pi^3 a} \frac{1}{[|\eta_1|^2 b^2 - |\eta_2|^2 a^2]} \frac{1}{v_F} \int_0^{p_0} \frac{dp p^2}{(\omega - p)^2 + \Gamma^2(\omega)} \\ &= \frac{2 b}{\pi^3 a} \frac{1}{[|\eta_1|^2 b^2 - |\eta_2|^2 a^2]} \frac{1}{v_F} \left[[\omega^2 - \Gamma^2(\omega)] \left[\tan^{-1} \left(\frac{p_0 - \omega}{\Gamma(\omega)} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\Gamma(\omega)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \omega \Gamma(\omega) \ln \left(\frac{[p_0 - \omega]^2 + \Gamma^2(\omega)}{\omega^2 + \Gamma^2(\omega)} \right) - \omega \Gamma(\omega) + p_0 \Gamma(\omega) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

สมการ (2.54) เป็นสมการความหนาแน่นสถานะที่ขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส
2. ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวอดยิ่งที่ไม่มีสารเจือ
3. ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวอดยิ่งที่มีสารเจือ
4. ใช้ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวอดยิ่งที่มีสารเจือคำนวณหาความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งที่มีสารเจือ
5. คำนวณหาค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีสารเจือ 3 กรณี คือ กรณีไม่มีสารเจือ ($u_0 N_d(\varepsilon) = 0$) กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ($u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$) และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ($u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$) โดยได้ศึกษาที่ช่องว่างพลังงานตามสมการ $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ และ $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$
6. คำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นดี ใน 3 กรณีที่ศึกษา

สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส

ในฟิสิกส์ควอนตัม Fermi's golden rule คือ กฎที่ใช้ในการคำนวณหาอัตราในการเปลี่ยนสถานะ หรือ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะต่อหน่วยเวลา จากสถานะไอเกนพลังงานหนึ่ง (Energy eigenstate) ไปยังสถานะไอเกนพลังงานอีกสถานะหนึ่ง อันเกิดจากการถูกรบกวน เช่น สารเจือ โฟนอน โฟตอน และอื่นๆ

ในการศึกษาจะเริ่มพิจารณาในสถานะไอเกน $|n\rangle$ ของฮาร์มิลโทเนียน (H_0) และพิจารณาฮาร์มิลโทเนียนที่ถูกรบกวนเป็น H' ถ้า H' เป็นฮาร์มิลโทเนียนที่ไม่ขึ้นกับเวลา ของระบบสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่งโดยมีพลังงานเหมือนกับสถานะเริ่มแรก และถ้า H' เป็นฟังก์ชันการสั่นของเวลากับความถี่เชิงมุม (ω) ของสถานะหนึ่งไปยังอีกสถานะหนึ่งซึ่งมีความแตกต่างของพลังงานเป็น $\hbar\omega$ ในทั้งสองกรณีนี้ ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะต่อหน่วยเวลาจากสถานะ $|n\rangle$ ไปยังสถานะ $|m\rangle$ โดยมีการถูกรบกวน สามารถเขียนได้เป็น

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n,m} |\langle m|H'|n \rangle|^2 \delta(\varepsilon_m - \varepsilon_n) \quad (3.1)$$

เมื่อ $|\langle m|H'|n \rangle|$ คือ องค์ประกอบเมทริกซ์ของการถูกรบกวน H' ระหว่างสถานะสุดท้ายและสถานะ เริ่มแรก

และอัตราการผ่อนคลายจะมีความสัมพันธ์กับความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะต่อหน่วยเวลา ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{T_1} = W_{n \rightarrow m} \quad (3.2)$$

ต่อมาจะศึกษาอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสเมื่อมีอันตรกิริยากับแลตทิซ โดยได้นิยามว่า $R \equiv 1/T_1$ คืออัตราส่วนของความน่าจะเป็น ($W_{n \rightarrow m}$) ของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส จากสถานะ $|n\rangle$ ไปยังสถานะ $|m\rangle$ สามารถเขียนในเทอมของฟังก์ชันกรีน, G_ω และ F_ω^+ ได้ดังนี้

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{C^2}{2\hbar} \sum_{j,j'} \frac{[\langle n|I_j|m\rangle\langle m|I_{j'}|n\rangle + c.c.]}{[1 - \exp(\beta\omega)]} \text{Im} O[i\omega(q) \rightarrow \omega + i\delta] \\ \times \left\{ T \sum_s [G_{\omega(s)}(R_j, R_{j'}) G_{\omega(s)-\omega(q)}(R_{j'}, R_j) + F_{\omega(s)}(R_j, R_{j'}) F_{\omega(q)-\omega(s)}^+(R_{j'}, R_j)] \exp[i\omega(s)\eta] \right\} \quad (3.3)$$

เมื่อ $C = (-8\pi/3)\gamma_e\gamma_n\hbar^2$

$\omega(q) = 2q\pi T$ เมื่อ $q = 1, 2, 3, \dots$

$\omega(s) = (2s+1)\pi T$ เมื่อ $s = 0, 1, 2, 3, \dots$

γ_e, γ_n คือ ค่าคงตัวของอัตราส่วนแม่เหล็กไจโรของอิเล็กตรอนและนิวเคลียส ตามลำดับ

T คือ อุณหภูมิ

I_j คือ สปินของนิวเคลียส

δ, η คือ ปริมาณที่มีค่าน้อยๆ ที่มีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์

ω คือ ความถี่ที่เกิดจากความแตกต่างของระดับพลังงานซีแมน (Zeeman) ของสถานะ $|n\rangle$ และ $|m\rangle$ โดยทั่วไป ω จะมีค่าน้อย และสามารถกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ได้

จากสมการ (3.3) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$W_{n \rightarrow m} = (C^2/2\pi\hbar) \sum_{j,j'} [\langle n|I_j|m\rangle \langle m|I_{j'}|n\rangle + c.c.] \int d\varepsilon f(\varepsilon)[1-f(\varepsilon)] \\ \times [\text{Im} G_E^R(R_j, R_{j'}) \text{Im} G_{E-\omega}^R(R_j, R_{j'}) + \text{Im} F_E^R(R_j, R_{j'}) \text{Im} F_{\omega-E}^{R*}(R_j, R_{j'})] \quad (3.4)$$

เมื่อ $f(\varepsilon)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มิของอนุภาคที่มีพลังงาน ε โดย $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{-\varepsilon/k_B T} + 1}$

จากความหนาแน่นสถานะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือตามสมการ

$$N_{\text{imp}}(\varepsilon) = -\frac{1}{N_0 \pi} \text{Im} [G_{ij}(i\omega_m \rightarrow \varepsilon + i\delta, 0, 0)] \quad (3.5)$$

เมื่อ N_0 คือ ความหนาแน่นสถานะที่ระดับพลังงานเฟอร์มิในสถานะนำปกติ

G_{ij} คือ ฟังก์ชันกรีนที่อยู่ในรูปเมทริกซ์ แถวที่ i หลักที่ j

กำหนดให้

$$a_{ij} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} [G_{ij}(i\omega_m \rightarrow \varepsilon + i\delta, 0, 0)]$$

ดังนั้น

$$N_{\text{imp}}(\varepsilon) = \frac{a_{ij}(\varepsilon)}{N_0} \quad (3.6)$$

สามารถเขียนสมการ $W_{n \rightarrow m}$ ใหม่เป็น

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{C^2}{2\pi\hbar} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} f(\varepsilon)[1-f(\varepsilon)] \times [a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)] d\varepsilon \\ = \frac{C^2}{2\pi\hbar} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{4} \left[\frac{2}{(e^{-\varepsilon/2T} + e^{\varepsilon/2T})} \right]^2 \times [a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)] d\varepsilon \quad (3.7)$$

จาก $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ และ $\text{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2$ จัดรูป $W_{n \rightarrow m}$ จะได้

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{C^2}{2\pi\hbar} \frac{1}{4} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right) \times [a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)] d\varepsilon \quad (3.8)$$

จาก $\text{sech}^2 x = \frac{2}{1 + \cosh 2x}$ จึงเขียนสมการ $W_{n \rightarrow m}$ ได้เป็น

$$W_{n \rightarrow m} = \frac{C^2}{4\pi\hbar} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} \times [a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)] d\varepsilon \quad (3.9)$$

แทนค่า $C = (-8\pi/3)\gamma_e\gamma_n\hbar^2$ โดยที่ $\hbar = 1$ และ $k_B = 1$ ดังนั้น

$$W_{n \rightarrow m} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (\gamma_e\gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon \quad (3.10)$$

จากนิยาม $1/T_1 \equiv W_{n \rightarrow m}$ สามารถเขียนอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ได้เป็น

$$\frac{1}{T_1} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (\gamma_e\gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon \quad (3.11)$$

กำหนดให้

$$W = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(-\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon$$

สำหรับตัวนำวดยิ่งแบบไม่ตั้งเดิมค่าของ $a_{12}(\varepsilon)$ และ $a_{21}(\varepsilon)$ เป็นศูนย์ทั้งคู่ ดังนั้น W จะเปลี่ยนเป็น

$$W = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{a_{11}(\varepsilon)a_{22}(-\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon \quad (3.12)$$

และจากความหนาแน่นสถานะที่มีสารเจือ ตามสมการ (3.6) จะได้

$$N_{\text{imp}}(\varepsilon) = \frac{a_{11}(\varepsilon)}{N_0} = \frac{a_{22}(-\varepsilon)}{N_0} \quad (3.13)$$

แทนค่าจะได้

$$W = N_0^2 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{N_{\text{imp}}^2(\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon \quad (3.14)$$

ดังนั้นจะได้อัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส เป็นตามสมการ

$$\frac{1}{T_1} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} W \quad (3.15)$$

ฟังก์ชันกรีนของตัวนำวอดยิ่งที่ไม่มีสารเจือ

ปัจจุบันมีทฤษฎีของตัวนำวอดยิ่งที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างคือ ทฤษฎีบีซีเอส โดยมีหลักการที่ว่า ตัวนำในสถานะนำวอดยิ่งเป็น คู่อิเล็กตรอนที่ดึงดูดกันด้วยปฏิกิริยาที่มีโฟนอนเป็นตัวช่วย (Electron-phonon interaction) และ คู่ของอิเล็กตรอนนี้ถูกเรียกว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pair) ซึ่งทฤษฎี บีซีเอส ได้เสนอแบบจำลองของฮาร์มิลโทเนียนที่มีคูคูเปอร์เป็นตัวนำดังนี้

$$H = H_0 + H_{red} \quad (3.16)$$

เมื่อ H_0 คือ ฮาร์มิลโทเนียนของพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน โดยพิจารณาเทียบกับผิวเฟอร์มิ มีรูปแบบสมการเป็น $H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}$

H_{red} คือ ฮาร์มิลโทเนียนที่เกิดจากอันตรกิริยาแบบดึงดูดกันระหว่างคู่อิเล็กตรอนที่อยู่ในช่วงแคบๆ บริเวณผิวเฟอร์มิ มีรูปแบบสมการเป็น $H_{red} = \sum_{kk'} V_{kk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}$
ดังนั้นฮาร์มิลโทเนียน จะเป็น

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \quad (3.17)$$

โดย $C_{k\sigma}^+$ ($C_{k\sigma}$) คือ ตัวดำเนินการสร้าง (ทำลาย) สำหรับอิเล็กตรอนที่มีเวกเตอร์คลื่น k และสปิน σ

ε_k คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

$V_{kk'}$ คือ พลังงานศักย์ดึงดูดของอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์

จากนิยามของช่องว่างพลังงาน (Order parameter, Δ_k)

$$\Delta_k = \sum_k V_k \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \quad (3.18)$$

ดังนั้นจะเขียนแฮมิลโทเนียนได้ใหม่เป็น

$$H = \sum_k (\varepsilon_k C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + \varepsilon_k C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}) + \sum_k \Delta_k (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \quad (3.19)$$

จากนิยามของ ฟังก์ชันกรีน

$$G_0(k, \omega_m) = \langle -T_\tau \psi_k(\tau) \psi_k^*(0) \rangle \quad (3.20)$$

เมื่อ $\psi_k^*(0) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$ และ $\psi_k(\tau) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}$

จะได้

$$\begin{aligned} G_0(k, \omega_m) &= \left\langle -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ & C_{k\uparrow} C_{-k\downarrow} \\ C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ในการหาค่าเทอมต่างๆของฟังก์ชันกรีนสามารถหาได้จากสมการของ ไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg equation) โดยนิยามของสมการไฮเซนเบิร์ก เป็น $i \frac{d}{dt} O = [O, H]$

เมื่อ O คือ ตัวดำเนินการ และอาศัยสมบัติของตัวดำเนินการดังนี้

1. $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
2. $[C_\alpha, C_\beta^+] = 1$ เมื่อ $\alpha = \beta$
 $[C_\alpha, C_\beta^+] = 0$ เมื่อ $\alpha \neq \beta$
3. $[C_\alpha, C_\beta] = [C_\alpha^+, C_\beta^+] = 0$ เมื่อ α และ β มีค่าใดๆ

พิจารณา $C_{k\uparrow}$,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} (C_{k\uparrow}) &= [C_{k\uparrow}, H] \\ &= \left[C_{k\uparrow}, \sum_k \left\{ \varepsilon_k (C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}) + \Delta_k (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_k [C_{k\uparrow}, C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow}] + \varepsilon_k [C_{k\uparrow}, C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}] + \Delta_k [C_{k\uparrow}, C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+] + \Delta_k [C_{k\uparrow}, C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}] \\
&= \varepsilon_k C_{k\uparrow} + \Delta_k C_{-k\downarrow}^+ \\
\text{หรือ} \quad &\left(i \frac{d}{dt} - \varepsilon_k\right) C_{k\uparrow} - \Delta_k C_{-k\downarrow}^+ = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

ใช้ฟูเรียร์ทรานฟอร์ม (Fourier transform) $i \frac{d}{dt} \rightarrow i\omega_m$ และจัดรูปให้ตรงกับฟังก์ชันกรีนจะได้

$$(i\omega_m - \varepsilon_k) \langle -T_\tau C_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ \rangle - \Delta_k \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ \rangle = [C_{k\uparrow}, C_{k\uparrow}^+] \tag{3.23}$$

จะได้

$$(i\omega_m - \varepsilon_k) G_{11} - \Delta_k G_{21} = 1 \tag{3.24}$$

พิจารณา $C_{-k\downarrow}^+$,

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{dt} (C_{-k\downarrow}^+) &= [C_{-k\downarrow}^+, H] \\
&= [C_{-k\downarrow}^+, \Sigma \{ \varepsilon_{-k} (C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}) + \Delta_{-k} (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \}] \\
&= \varepsilon_{-k} [C_{-k\downarrow}^+, C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow}] + \varepsilon_{-k} [C_{-k\downarrow}^+, C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}] + \Delta_{-k} [C_{-k\downarrow}^+, C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+] + \Delta_{-k} [C_{-k\downarrow}^+, C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}]
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขที่ว่า $\varepsilon_{-k} = \varepsilon_k$, $\Delta_{-k} = -\Delta_k$, $-\Delta_{-k} = \Delta_k$ จะได้

$$\left(i \frac{d}{dt} + \varepsilon_k\right) C_{-k\downarrow}^+ - \Delta_k C_{k\uparrow} = 0 \tag{3.25}$$

ใช้ฟูเรียร์ทรานฟอร์ม $i \frac{d}{dt} \rightarrow i\omega_m$ และจัดรูปให้ตรงกับฟังก์ชันกรีนจะได้

$$(i\omega_m + \varepsilon_k) \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ \rangle - \Delta_k \langle -T_\tau C_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ \rangle = [C_{-k\downarrow}^+, C_{k\uparrow}^+] \tag{3.26}$$

จะได้

$$(i\omega_m + \varepsilon_k) G_{21} - \Delta_k G_{11} = 0 \tag{3.27}$$

เมื่อ ω_m คือ ความถี่มาตรฐาน โดยที่ $\omega_m = \pi T(2n+1)$

T คือ อุณหภูมิ

n คือ จำนวนเต็มใดๆ โดยที่ $n=0,1,2,\dots$

และสำหรับ $C_{-k\downarrow}$ และ $C_{k\uparrow}^+$ ก็ทำในทำนองเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} (i\omega_m - \varepsilon_k) & -\Delta_k \\ -\Delta_k & (i\omega_m + \varepsilon_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = 1 \quad (3.28)$$

โดย τ_0, τ_1, τ_2 และ τ_3 เป็นเมทริกซ์เพาลี ซึ่ง

$$\tau_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$(i\omega_m \tau_0 - \varepsilon_k \tau_3 - \Delta_k \tau_1) G_0(k, \omega_m) = 1 \quad (3.29)$$

หรือ

$$\begin{aligned} G_0(k, \omega_m) &= \frac{1}{(i\omega_m - \varepsilon_k \tau_3 - \Delta_k \tau_1)} \\ &= \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_k \tau_3 - \Delta_k \tau_1} \square \frac{i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1}{i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1} \end{aligned}$$

พิจารณาตัวส่วน

$$(i\omega_m - \varepsilon_k \tau_3 - \Delta_k \tau_1)(i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1) = -(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)$$

โดยที่ $\tau^2 = 1$, $\tau_1 \tau_2 = i\tau_3$, $\tau_3 \tau_1 = i\tau_2$ ดังนั้นจะได้

$$G_0(k, \omega_m) = -\frac{(i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \quad (3.30)$$

และสามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้เป็น

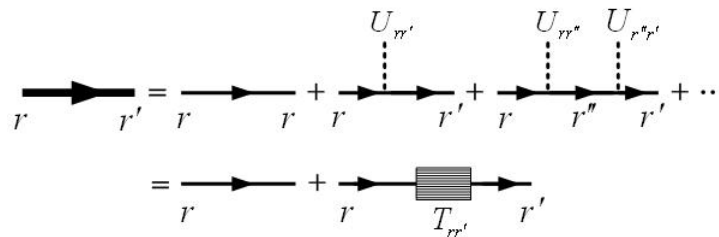
$$G_0(k, \omega_m) = \begin{bmatrix} -\frac{(i\omega_m + \varepsilon_k)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} & \frac{\Delta_k}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \\ \frac{\Delta_k}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} & -\frac{(i\omega_m - \varepsilon_k)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

สำหรับฟังก์ชันกรีนของอิเล็กตรอนที่ตำแหน่ง r เทียบกับ r' จะเขียนได้เป็น

$$G_0(i\omega_m, r, r') = -\frac{1}{\Omega} \sum_k e^{ik(r-r')} \frac{(i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \quad (3.32)$$

ฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ

ในการศึกษาฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือจะใช้การประมาณแบบ ที-เมทริกซ์ ซึ่งมีรูปภาพฟายน์แมน (Feynman diagrams) ดังภาพประกอบ 3.1



ภาพประกอบ 17 แสดงกระบวนการตัดกัการกระเจิงของสารเจือที่อยู่ในรูปแบบ ที-เมทริกซ์ ที่มา: Balatsky; Vekhter; & Zhu. (2006). *Review Modern Physics*. 78. p. 373.

จากภาพประกอบ 17 สามารถเขียนสมการฟังก์ชันกรีนได้

$$G(i\omega_m, r, r') = G_0(i\omega_m, r, r') + G_0(i\omega_m, r, 0)T(i\omega_m)G_0(i\omega_m, 0, r') \quad (3.33)$$

เมื่อ $T(i\omega_m)$ คือ ที-เมทริกซ์ เกิดจากการกระเจิงของตัวนำที่เกิดจากสารเจือ เขียนได้ตามสมการ

$$T(i\omega_m) = U + UG_0(i\omega_m, 0, 0)T(i\omega_m)$$

โดย U คือ พลังงานศักย์การกระเจิงของสารเจือ และ $U = U_0 \tau_3$

จัดรูปจะสามารถเขียนสมการ $T(i\omega_m)$ ได้ใหม่เป็น

$$T(i\omega_m) = \frac{U_0\tau_3}{1-G_0(i\omega_m,0,0)U_0\tau_3} \quad (3.34)$$

ดังนั้น

$$G(i\omega_m, r, r') = G_0(i\omega_m, r, r') + G_0(i\omega_m, r, 0)U_0\tau_3 \frac{1}{1-G_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\tau_3} G_0(i\omega_m, 0, r') \quad (3.35)$$

สำหรับ $r = r' = 0$ จะได้

$$G(i\omega_m, 0, 0) = G_0(i\omega_m, 0, 0) + G_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\tau_3 \frac{1}{1-G_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\tau_3} G_0(i\omega_m, 0, 0) \quad (3.36)$$

และจากฟังก์ชันกรีนในสมการ (3.32) ถ้า $r = r' = 0$ จะเขียนสมการได้ใหม่เป็น

$$G_0(i\omega_m, 0, 0) = -\frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{(i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \quad (3.37)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} G_0(i\omega_m, 0, 0) &= -\frac{1}{\Omega} \sum_k \frac{(i\omega_m + \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1)}{(\omega_m^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2)} \\ &= \frac{N_0}{\Omega} \int \frac{(i\omega_m + \varepsilon \tau_3 + \Delta \tau_1)}{(\omega_m^2 + \varepsilon^2 + \Delta^2)} d\varepsilon \\ G_0(i\omega_m, 0, 0) &= N_0 \pi \left(\frac{i\omega_m + \Delta \tau_1}{\sqrt{\omega_m^2 + \Delta^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

โดย $\sum_k = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 + a^2} d\varepsilon = \frac{\pi}{a}$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + a^2} d\varepsilon = 0$

พิจารณา

$$G_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\tau_3 = u_0 \left(\frac{i\omega_m + \Delta \tau_1}{\sqrt{\omega_m^2 + \Delta^2}} \right) \tau_3 \quad (3.39)$$

พิจารณา

$$\frac{1}{1-G_0(i\omega_m, 0, 0)U_0\tau_3} = \frac{1+u_0\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)\tau_3}{1-\left(u_0\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)\tau_3\right)^2} \quad (3.40)$$

โดย $u_0 = N_0\pi U_0$

แทนค่าสมการ (3.38), (3.39) และสมการ (3.40) ในสมการ (3.36) จะได้

$$G(i\omega_m, 0, 0) = N_0\pi\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right) + \frac{1}{1-\left(u_0\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)\tau_3\right)^2} \left[N_0\pi u_0\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)^2\tau_3 + N_0\pi u_0^2\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k\tau_1}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)^3 \right] \quad (3.41)$$

สมการ (3.41) คือ สมการฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ โดยมีค่าขึ้นอยู่กับศักย์การกระเจิงของสารเจือ ความหนาแน่นสถานะที่ระดับพลังงานเฟอร์มิในสถานะนำปกติ ความถี่มีดซูบาระและ ช่องว่างพลังงาน ถ้าพิจารณาฟังก์ชันกรีนในองค์ประกอบเมทริกซ์ที่ตำแหน่ง 11 จะได้

$$G_{11}(i\omega_m, 0, 0) = N_0\pi\left(\frac{i\omega_m}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right) + \frac{1}{1-\left(u_0\left(\frac{i\omega_m}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)\right)^2} \left[N_0\pi u_0\left(\frac{i\omega_m+\Delta_k}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)^2 + N_0\pi u_0^2\left(\frac{i\omega_m}{\sqrt{\omega_m^2+\Delta_k^2}}\right)^3 \right] \quad (3.42)$$

การคำนวณหาความหนาแน่นสถานะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ

ปัจจุบันได้มีการแบ่งประเภทของสารเจือเป็น 2 ประเภท คือ สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (non-magnetic impurities) และสารเจือประเภทแม่เหล็ก (magnetic impurities) โดยสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก จะมีโมเมนต์ดัมพ์ร์ของอะตอมหักล้างกันพอดีจึงไม่มีผลเนื่องจากสปิน ดังนั้นเมื่อเติมสารเจือประเภทนี้ลงไปในตัวนำยวดยิ่งจึงไม่มีผลต่อคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่ง เพียงแต่ทำให้มีช่องว่างพลังงานมากขึ้น และสำหรับสารเจือประเภทแม่เหล็กจะมีโมเมนต์แม่เหล็กซึ่งจะมีอันตรกิริยากับสปินของอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์ ทำให้อิเล็กตรอนตัวใดตัวหนึ่งในคูคูเปอร์กลับทิศของสปินส่งผลให้คูคูเปอร์ถูกทำลาย และเมื่อจำนวนคูคูเปอร์ลดลง คุณสมบัติวิฤตและช่องว่างพลังงานจึง

ลดลงด้วย ซึ่งในส่วนของงานวิจัยนี้จะพิจารณาสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ในการศึกษาความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีสารเจือ จะเริ่มพิจารณาจากความหนาแน่นสถานะที่มีสารเจือ

$$N_{\text{imp}}(\varepsilon) = -\frac{1}{N_0\pi} \text{Im}[G_{11}(i\omega_m \rightarrow \varepsilon + i\delta, 0, 0)] \quad (3.43)$$

พิจารณาความหนาแน่นสถานะที่มีสารเจือ ของฟังก์ชันกรีนในองศาประกอบเมทริกซ์ ที่ตำแหน่ง 11 โดยนำสมการ (3.42) แทนค่าในสมการ (3.43) แล้วพิจารณาเฉพาะส่วนจินตภาพ โดยให้ δ มีค่าน้อยๆ จะได้

$$N_{\text{imp}}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} - \frac{1}{1 + \left(u_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}}\right)^2} \left[u_0^2 \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} \right)^3 \right] \quad (3.44)$$

จัดรูปสมการใหม่ โดยให้ $N_d(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}}$ จะได้

$$\begin{aligned} N_{\text{imp}}(\varepsilon) &= N_d(\varepsilon) - \frac{u_0^2 N_d^3(\varepsilon)}{1 + (u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \\ &= \frac{N_d(\varepsilon)}{(1 + u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ดังนั้นจะได้ความหนาแน่นสถานะที่เกิดจากสถานะที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยวเป็นตามสมการ (3.45)

พิจารณาค่าตำแหน่งพลังงานที่สถานะยึดเหนี่ยวโดยเริ่มจากการพิจารณา ที่เมทริกซ์ จากสมการ (3.34) จะได้

$$\frac{1}{T(i\omega_m)} = \frac{1}{U_0\tau_3} - G_0(i\omega_m, 0, 0) \quad (3.46)$$

แทนค่าสมการ (3.37) ในสมการ (3.46) โดยที่ $\text{Im}[G_0(i\omega_m \rightarrow \varepsilon + i\delta, 0, 0)]$ จะได้

$$\frac{1}{T(i\omega_m)} = \frac{1}{U_0\tau_3} - N_0\pi \left(\frac{\varepsilon + i\delta + \Delta_k\tau_1}{i\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{U_0 \tau_3} + N_0 \pi \left(\frac{i\varepsilon + \Delta_k \tau_1}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} \right) \quad (3.47)$$

สำหรับตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นพีและแบบคลื่นดี ที่ตำแหน่งนอกแนวทแยงจะเป็นศูนย์ จะได้

$$\frac{1}{T(i\omega_m)} = \frac{1}{U_0 \tau_3} + N_0 \pi \left(\frac{i\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} \right) \quad (3.48)$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้

$$\frac{1}{T(i\omega_m)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_0} + \frac{N_0 \pi i \varepsilon}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}\right)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{U_0} + \frac{N_0 \pi i \varepsilon}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}\right)} \end{bmatrix}$$

ที่ตำแหน่งสถานะยึดเหนี่ยว ค่าของ $\det \left[\frac{1}{T(i\omega_m)} \right]$ จะมีค่าเป็นศูนย์

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{U_0} + \frac{N_0 \pi i \varepsilon}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}\right)} \right) \left(-\frac{1}{U_0} + \frac{N_0 \pi i \varepsilon}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}\right)} \right) &= 0 \\ -\frac{1}{U_0^2} - \frac{N_0^2 \pi^2 \varepsilon^2}{\left(\varepsilon^2 - \Delta_k^2\right)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

ให้ $u_0 = N_0 \pi U_0$ จะได้

$$\varepsilon = \frac{\Delta_k}{\sqrt{1+u_0^2}}$$

ดังนั้นจะได้พลังงานที่สถานะยึดเหนี่ยว เป็น

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta_k}{\sqrt{1+u_0^2}} \quad (3.50)$$

พิจารณา $N_{imp}(\varepsilon)$ ที่ตำแหน่งสถานะยึดเหนี่ยว

จากนิยาม
$$N_{imp}(\varepsilon) = \frac{\pi|u_0|\varepsilon_B}{(1+u_0^2)} \quad (3.51)$$

แทนค่าสมการ (3.50) ลงในสมการ (3.51) จะได้

$$\begin{aligned} N_{imp}(\varepsilon) &= \frac{\pi|u_0|}{(1+u_0^2)} \frac{\Delta_k}{\sqrt{1+u_0^2}} \\ &= \frac{\pi|u_0|\Delta_k}{(1+u_0^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ดังนั้น สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งที่มีสารเจือ จะเป็น

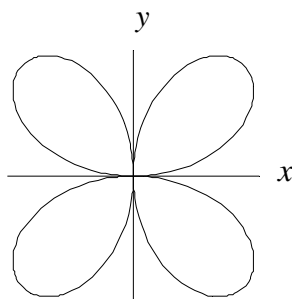
$$N_{imp}(\varepsilon) = \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} + \frac{\pi|u_0|\Delta_k}{(1+u_0^2)^{3/2}} \quad (3.53)$$

โดย เทอมที่หนึ่ง คือ ความหนาแน่นสถานะที่เกิดจากสถานะที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยว

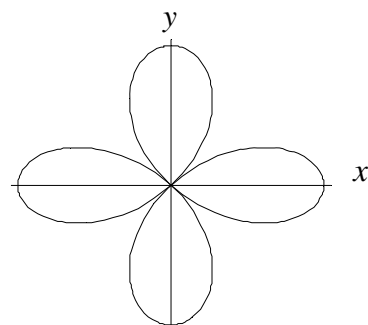
เทอมที่สอง คือ ความหนาแน่นสถานะที่เกิดจากสถานะยึดเหนี่ยว (bound state)

การคำนวณค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีที่มีสารเจือ

เนื่องจากตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีเป็นตัวนำวอดยิ่งอุณหภูมิสูง มีลักษณะการนำไฟฟ้าแบบ 2 มิติ และส่วนใหญ่จะเป็นตัวนำวอดยิ่งแบบช่องว่างพลังงานเดี่ยว ที่มีสมมาตรของช่องว่างพลังงานที่แตกต่างกัน ซึ่งสมมาตรของช่องว่างพลังงานแบบคลื่นตีจะเป็น d_{xy} หรือ $d_{x^2-y^2}$ แบบ 2 มิติ โดยจะมีช่องว่างพลังงานตามสมการ $\Delta_k = \Delta_d(T)\sin 2\theta$ และ $\Delta_k = \Delta_d(T)\cos 2\theta$ ตามลำดับ ลักษณะของช่องว่างพลังงานของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีทั้งสองแบบจะมีลักษณะดังภาพประกอบ 18



ภาพประกอบ (ก)



ภาพประกอบ (ข)

ภาพประกอบ 18 (ก) แสดงลักษณะของช่องว่างพลังงานของตัวนำวอดยั้งแบบคลื่น d_{xy} (ข)

แสดงลักษณะของช่องว่างพลังงานของตัวนำวอดยั้งแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$

1. ตัวนำวอดยั้งแบบคลื่น d_{xy}

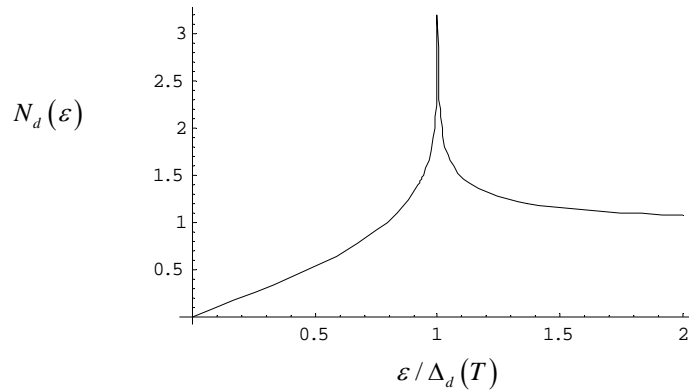
สำหรับการวิจัยนี้จะพิจารณาตัวนำวอดยั้งแบบคลื่น d_{xy} ซึ่งจะมีลักษณะการนำไฟฟ้าละโครงสร้างแบบ 2 มิติ โดยมุม θ เป็นมุมที่กวาดไปบนระนาบ โดยสมมาตรช่องว่างพลังงานเป็น $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ นำช่องว่างพลังงานมาแทนค่า เพื่อหาค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยั้งที่มีสารเจือ ($N_{imp}(\varepsilon)$) จะได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \left\langle \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \right\rangle + \left\langle \frac{\pi |u_0| \Delta_k}{(1+u_0^2)^{3/2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \right\rangle + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi |u_0| \Delta_d(T) \sin 2\theta}{(1+u_0^2)^{3/2}} d\theta \\ &= \left\langle \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \right\rangle + 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

จากสมการ (3.54) จะพบว่าค่าเฉลี่ยของตัวนำวอดยั้งที่มีสารเจือที่เกิดจากสถานะยึดเหนี่ยว (bound state) จะมีค่าเฉลี่ยทั่วผิวเฟอร์มิเป็นศูนย์ ต่อไปจะพิจารณาหาค่าเฉลี่ยของตัวนำวอดยั้งที่มีสารเจือ ที่เกิดจากสถานะที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยวทั่วผิวเฟอร์มิ โดยจะพิจารณาในกรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$, $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ และ $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ ดังนี้

1.1 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$

พิจารณากรณีตัวนำวอดยั้งที่ไม่มีสารเจือ ความหนาแน่นสถานะที่เกิดจากสถานะที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยวทั่วผิวเฟอร์มิ จะลดรูปเป็น $N_{imp}(\varepsilon) = N_d(\varepsilon)$ กำหนดให้ช่องว่างพลังงานคือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ สามารถแสดงความผันแปรของ $N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon / \Delta_d(T)$ ได้ดังภาพประกอบ 19



ภาพประกอบ 19 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยึ่งแบบคลื่นดีที่ได้จากทฤษฎี ปีซีเอส

จากภาพประกอบ 19 พบว่าความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยึ่งแบบคลื่นดี จะเกิดพีคที่พลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และเมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าเพิ่มขึ้นแบบเส้นตรง แต่เมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าลดลง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในกรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$ สามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ ได้ โดยเริ่มพิจารณาค่าเฉลี่ยของความหนาแน่นสถานะบนพื้นผิวเฟอร์มิ

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \langle N_d(\varepsilon) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} d\theta \end{aligned} \quad (3.55)$$

เมื่อ $\langle \dots \rangle$ คือ ค่าเฉลี่ยบนพื้นผิวเฟอร์มิ แทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ ในสมการ (3.55) จะได้

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \sin^2 2\theta}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' \end{aligned} \quad (3.56)$$

เมื่อ $\theta' = 2\theta$

จากสมการ (3) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' = \frac{2}{\pi} \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T)$$

และจากนิยามสมการ (9) ตามภาคผนวก ก โดย

$\mathbf{F}(x, k)$ คือ ฟังก์ชันอิลลิปติกเลขของชนิดที่ 1 (Legendre elliptic integral of the 1st kind)

$\mathbf{K}(k)$ คือ ฟังก์ชันอิลลิปติกชนิดที่ 1 แบบสมบูรณ์ (Complete elliptic integral of the 1st kind)

$\mathbf{E}(x, k)$ คือ ฟังก์ชันอิลลิปติกเลขของชนิดที่ 2 (Legendre elliptic integral of the 2nd kind)

$\mathbf{E}(k)$ คือ ฟังก์ชันอิลลิปติกชนิดที่ 2 แบบสมบูรณ์ (Complete elliptic integral of the 2nd kind)

ดังนั้นเมื่อ $\varepsilon > \Delta_d(T)$ จะได้

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad (3.57)$$

และเมื่อ $\varepsilon < \Delta_d(T)$ โดยนิยามสมการ (11) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \quad (3.58)$$

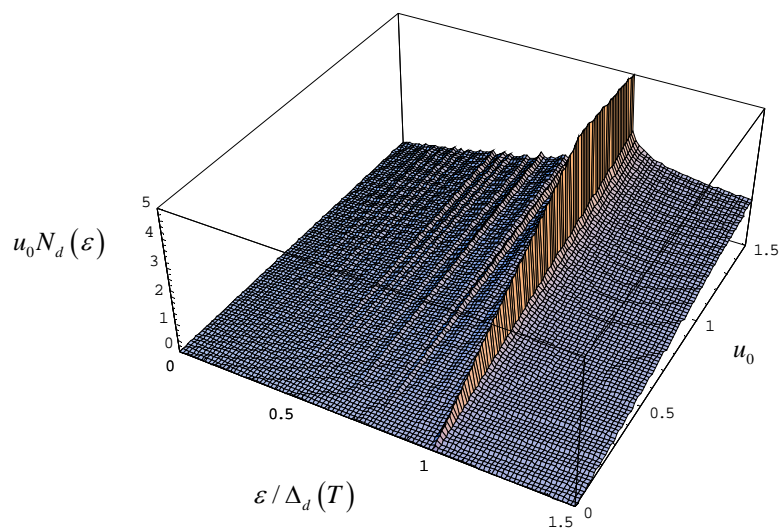
แทนค่าจะได้ค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ เป็นตามสมการ

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \quad , \varepsilon < \Delta_d(T) \end{aligned}$$

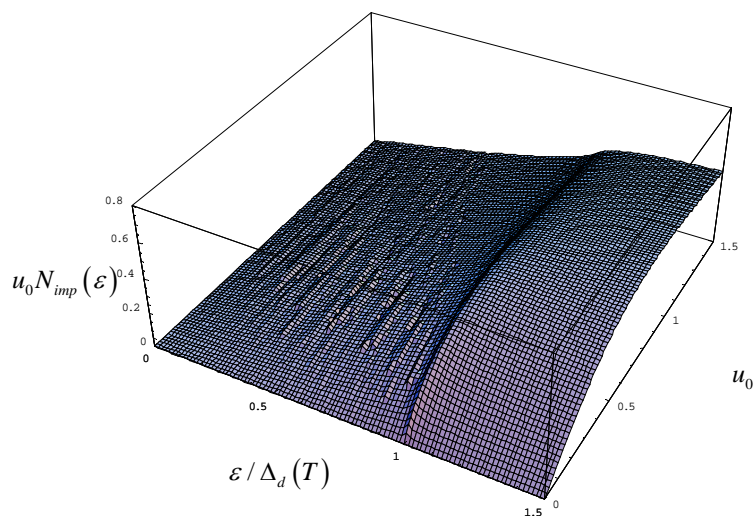
สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิงแบบคลื่นที่ไม่มีสารเจือ ซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอนและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับคุณสมบัติ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 แบบสมบูรณ์

1.2 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$

พิจารณากรณีที่ มีสารเจือเพียงเล็กน้อย หรือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ซึ่งจะนิยามโดย $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ กำหนดให้ช่องว่างพลังงาน คือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ สามารถแสดงความพันธ์ต่างๆ ได้ดังภาพประกอบ 20



ภาพประกอบ (ก)



ภาพประกอบ (ข)

ภาพประกอบ 20 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีการกระเจิงของ

สารเจืออย่างอ่อน (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_0 (ข)

แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_{imp}(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_0

จากภาพประกอบ 20 (ก) พบว่าความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน จะเกิดพีคที่พลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และเมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่เมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าลดลง และจากภาพประกอบ 20 (ข) พบว่าความหนาแน่นสถานะที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน จะเกิดพีคเล็กๆ ที่พลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และพีคนี้มีค่าไม่เกินหนึ่ง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในกรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ สามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ ได้ในช่วงของค่าที่เป็นไปได้โดยมีความสอดคล้องกับทฤษฎีซีเอสที่ว่า $u_0 N_d(\varepsilon)$ ต้องมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ เริ่มพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} N_{imp}(\varepsilon) &= \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \\ &= N_d(\varepsilon)(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))^{-1} \end{aligned} \quad (3.59)$$

จากการกระจายทวินาม (Binomial series)

$$(1+x)^n = 1+nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad \text{เมื่อ } x < 1$$

สำหรับกรณีที่ $u_0^2 N_d^2(\varepsilon) \ll 1$ พิจารณาเพียง 2 เทอมแรก จะได้

$$(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))^{-1} \cong 1-u_0^2 N_d^2(\varepsilon) \quad (3.60)$$

แทนค่าสมการ (3.60) ในสมการ (3.59) จะได้

$$N_{imp}(\varepsilon) \cong N_d(\varepsilon) - u_0^2 N_d^3(\varepsilon) \quad (3.61)$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยบนพื้นผิวเฟอริมี เป็น

$$\begin{aligned}\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \langle N_d(\varepsilon) - u_0^2 N_d^3(\varepsilon) \rangle \\ \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_0^2 \varepsilon^3}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}\right)^3} d\theta\end{aligned}\quad (3.62)$$

เมื่อ $\langle \dots \rangle$ คือ ค่าเฉลี่ยบนพื้นผิวเฟอริมี แทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \sin^2 2\theta}} d\theta - \frac{u_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^3}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \sin^2 2\theta}\right)^3} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' - \frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}\right)^3} d\theta'\end{aligned}\quad (3.63)$$

พิจารณาเทอมแรกของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.63) ซึ่งจะมีรูปแบบสมการเช่นเดียวกับสมการ (3.57) และ (3.58) คือ

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}} d\theta' &= \frac{2}{\pi} K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right), \quad \varepsilon < \Delta_d(T)\end{aligned}\quad (3.64)$$

พิจารณาเทอมที่สองของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.63)

จากสมการ (4) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'}\right)^3} d\theta' = \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > \Delta_d(T)$$

และจากนิยามสมการ (10) ตามภาคผนวก ก ดังนั้นเมื่อ $\varepsilon > \Delta_d(T)$ จะได้

$$\frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3} d\theta' = \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \quad (3.65)$$

พิจารณา $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}$ ในสมการ (3.65) ใช้การกระจายทวินาม จะได้

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)} \cong 1 + \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}$$

แทนค่าจะได้

$$\frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3} d\theta' \cong \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \quad (3.66)$$

และเมื่อ $\varepsilon < \Delta_d(T)$ จากนิยามสมการ (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3} d\theta' = \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 \Delta_d(T) + \Delta_d^3(T)}{\varepsilon^3} \left[E\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \quad (3.67)$$

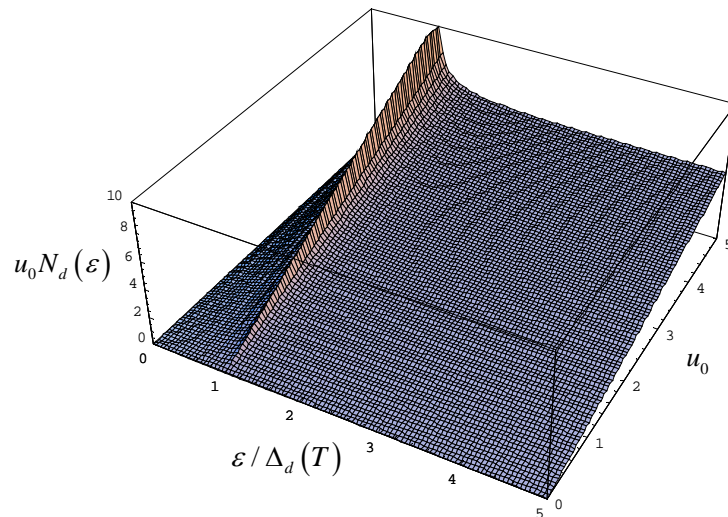
เนื่องจากสารเจือมีค่าเพียงเล็กน้อย ดังนั้นในการคำนวณครั้งนี้จะมีผลเนื่องจากสมการ (3.67) น้อยมาก จึงสามารถตัดสมการนี้ทิ้งได้ แทนค่าสมการ (3.64) และ (3.66) ในสมการ (3.63) จะได้ค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ ในกรณีที่ $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ เป็นตามสมการ

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{2}{\pi} K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) & , \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) & , \varepsilon < \Delta_d(T) \end{aligned}$$

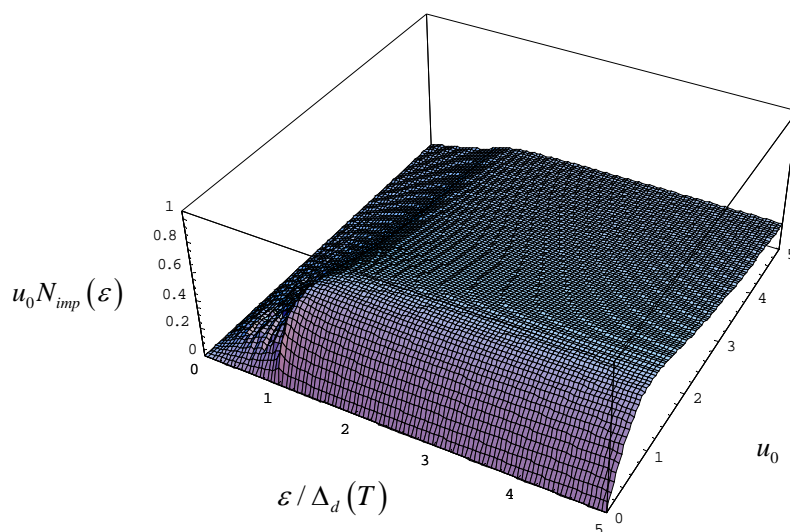
สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำเวดิงแบบคลื่นดีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ($u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$) โดยมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอน และ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2 แบบสมบูรณ์

1.3 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$

พิจารณากรณีที่มีสารเจือมากๆ หรือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ซึ่ง จะนิยามโดย $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ กำหนดให้ช่องว่างพลังงาน คือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ สามารถแสดงความ พันธุ์ได้ดังภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ (ก)



ภาพประกอบ (ข)

ภาพประกอบ 21 แสดงความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักย์การกระเจิงของ

สารเจืออย่างแรง (ก) แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_0 (ข)

แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $u_0 N_{imp}(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon/\Delta_d(T)$ และ u_0

จากภาพประกอบ 21 (ก) พบว่าความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง จะเกิดพีคที่พลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และเมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าน้อยกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าเพิ่มขึ้น แต่เมื่อพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่ามากกว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ความหนาแน่นสถานะจะมีค่าลดลง และจากภาพประกอบ 20 (ข) พบว่าความหนาแน่นสถานะที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง จะเกิดพีคเล็กๆ ที่พลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ และพีคนี้มีค่าไม่เกินหนึ่ง ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าในกรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ สามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ ได้โดยมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง ซึ่งแสดงว่าอยู่ในขอบเขตที่จะสามารถใช้การคำนวณแบบปีซีเอสได้

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ เริ่มพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} N_{imp}(\varepsilon) &= \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \\ &= \frac{N_d(\varepsilon)}{u_0^2 N_d^2(\varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{u_0^2 N_d^2(\varepsilon)}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.68)$$

จากการกระจายทวินาม กรณีที่ $u_0^2 N_d^2(\varepsilon) \gg 1$ พิจารณาเพียง 2 เทอมแรก จะได้

$$\left(1 + \frac{1}{u_0^2 N_d^2(\varepsilon)}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{1}{u_0^2 N_d^2(\varepsilon)}$$

แทนค่าจะได้

$$N_{imp}(\varepsilon) = \frac{1}{u_0^2 N_d(\varepsilon)} - \frac{1}{u_0^4 N_d^3(\varepsilon)} \quad (3.69)$$

ค่าเฉลี่ยบนพื้นผิวเฟอร์มิ เป็น

$$\begin{aligned}
\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \left\langle \frac{1}{u_0^2 N_d(\varepsilon)} - \frac{1}{u_0^4 N_d^3(\varepsilon)} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi u_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2}}{\varepsilon} d\theta - \frac{1}{2\pi u_0^4} \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_k^2})^3}{\varepsilon^3} d\theta
\end{aligned} \quad (3.70)$$

แทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}
\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi u_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \sin^2 2\theta}}{\varepsilon} d\theta - \frac{1}{2\pi u_0^4} \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \sin^2 2\theta})^3}{\varepsilon^3} d\theta \\
&= \frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} d\theta' - \frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3 d\theta'
\end{aligned} \quad (3.71)$$

พิจารณาเทอมแรกของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.71)

จากสมการ (1) และจากนิยามสมการ (10) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} d\theta' &= \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \\
&= \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T)
\end{aligned} \quad (3.72)$$

ต่อมาพิจารณาสมการ (3.72) จากนิยามสมการ (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} d\theta' &= \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \left[E\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) + \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta_d^2(T)} - 1\right) K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \right] \\
& \quad , \varepsilon < \Delta_d(T)
\end{aligned} \quad (3.73)$$

พิจารณาเทอมที่สองของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.71)

จากสมการ (2) และจากนิยามสมการ (9) , (10) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3 d\theta'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi u_0^4} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{F} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2}{\pi u_0^4} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \right] \right\}, \varepsilon > \Delta_d(T)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

ต่อมาพิจารณาสมการ (3.74) จากนิยามสมการ (11), (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \sin^2 \theta'} \right)^3 d\theta' \\
&= \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 \Delta_d(T) - 2\Delta_d^3(T)}{\varepsilon^3} \right) \left[\mathbf{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon \Delta_d(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right], \varepsilon < \Delta_d(T)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

แทนค่าสมการ (3.72) - (3.75) ในสมการ (3.71) จะได้ค่าเฉลี่ย $N_{imp}(\varepsilon)$ กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ เป็น

$$\begin{aligned}
\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{2}{\pi u_0^2} \mathbf{E} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \right] \\
&\quad, \varepsilon > \Delta_d(T) \\
&= \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \left[\mathbf{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \\
&\quad - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 \Delta_d(T) - 2\Delta_d^3(T)}{\varepsilon^3} \right) \left[\mathbf{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon \Delta_d(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right], \varepsilon < \Delta_d(T)
\end{aligned}$$

สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มี ศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ($u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$) โดยมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอน และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติกชนิดที่ 1 และ 2 แบบสมบูรณ์

2. ตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$

สำหรับการวิจัยนี้จะพิจารณาตัวนำวดยิ่งแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$ ซึ่งจะมีลักษณะการนำไฟฟ้า และโครงสร้างแบบ 2 มิติ โดยมุม θ เป็นมุมที่กวาดไปบนระนาบ และมีสมมาตรช่องว่างพลังงาน

เป็น $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ นำช่องว่างพลังงานมาแทนค่า เพื่อหาค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ ($N_{imp}(\varepsilon)$) จะได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \left\langle \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \right\rangle + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi |u_0| \Delta_d(T) \cos 2\theta}{(1+u_0^2)^{3/2}} d\theta \\ \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \left\langle \frac{N_d(\varepsilon)}{(1+u_0^2 N_d^2(\varepsilon))} \right\rangle + 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

จากสมการ (3.76) จะพบว่าค่าเฉลี่ยของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือที่เกิดจากสถานะยึดเหนี่ยวจะมีค่าเฉลี่ยทั่วผิวเฟอร์มิเป็นศูนย์ ต่อไปจะพิจารณาค่าเฉลี่ยของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือที่เกิดจากสถานะที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยวทั่วผิวเฟอร์มิ โดยจะพิจารณาในกรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$, $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ และ $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ ดังนี้

2.1 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$

พิจารณากรณีตัวนำยวดยิ่งที่ไม่มีสารเจือ โดยกำหนดให้ช่องว่างพลังงาน คือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ สามารถแสดงความสัมพันธ์ของ $N_d(\varepsilon)$ กับ $\varepsilon / \Delta_d(T)$ ได้เช่นเดียวกับภาพประกอบ 19 ดังนั้นในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ จะเริ่มพิจารณาจากสมการ (3.55) โดยแทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ จะได้

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \cos^2 2\theta}} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}} d\theta' \end{aligned} \quad (3.77)$$

จากสมการ (5) และจากนิยามสมการ (9) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}} d\theta' = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \quad (3.78)$$

พิจารณาสมการ (3.78) จากนิยามสมการ (11) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}} d\theta' = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \quad , \varepsilon < \Delta_d(T) \quad (3.79)$$

แทนค่าสมการ (3.78) และ (3.79) ในสมการ (3.77) จะได้ค่าเฉลี่ย $N_{imp}(\varepsilon)$ เป็น

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \quad , \varepsilon < \Delta_d(T) \end{aligned}$$

สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นตีที่ไม่มีสารเจือ โดยมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอน และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 แบบสมบูรณ์

2.2 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$

พิจารณากรณีที่มีสารเจือเพียงเล็กน้อย หรือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ซึ่งจะนิยามโดย $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ กำหนดให้ช่องว่างพลังงาน คือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ สามารถแสดงความผันแปรต่างๆ ได้เช่นเดียวกับภาพประกอบ 20 ดังนั้นการคำนวณหาค่าเฉลี่ย $N_{imp}(\varepsilon)$ จะเริ่มจากสมการ (3.62) โดยแทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ จะได้

$$\begin{aligned} \langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \cos^2 2\theta}} d\theta - \frac{u_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \cos^2 2\theta}\right)^3} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}} d\theta' - \frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}\right)^3} d\theta' \quad (3.80) \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมแรกของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.80) จะได้ผลการคำนวณเช่นเดียวกับกรณีที่ไม่มีสารเจือ คือ

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'}} d\theta' &= \frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \quad , \varepsilon < \Delta_d(T) \end{aligned} \quad (3.81)$$

พิจารณาเทอมที่สองของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.80) จะได้

$$\frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} \right)^3} d\theta' = \frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \right)} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)} \sin^2 \theta'} \right)^3} d\theta'$$

จากสมการ (7) และจากนิยามสมการ (10) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} \frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} \right)^3} d\theta' &= \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \mathbf{E} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \end{aligned} \quad (3.82)$$

พิจารณาสมการ (3.82) จากนิยามสมการ (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} \frac{2u_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} \right)^3} d\theta' &= \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 \Delta_d(T) + \Delta_d^3(T)}{\varepsilon^3} \left[\mathbf{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \\ & \quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \end{aligned} \quad (3.83)$$

เนื่องจากสารเจือมีค่าเพียงเล็กน้อย ดังนั้นในการคำนวณครั้งนี้จะมีผลเนื่องจากสมการ (3.83) น้อยมาก จึงสามารถตัดสมการนี้ทิ้งได้ แทนค่าสมการ (3.81) และ (3.82) ในสมการ (3.80) จะได้ค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ ในกรณีที่ $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$ เป็นตามสมการ

$$\begin{aligned}\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{2}{\pi} K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \frac{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) & , \varepsilon > \Delta_d(T) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) & , \varepsilon < \Delta_d(T)\end{aligned}$$

สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน โดยมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอน และ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2 แบบสมบูรณ์

2.3 กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$

พิจารณากรณีที่มีสารเจือมากๆ หรือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ซึ่งจะนิยามโดย $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$ กำหนดให้ช่องว่างพลังงาน คือ $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ สามารถแสดงความพันธ์ต่างๆ ได้เช่นเดียวกับภาพประกอบ 21 ดังนั้นในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $N_{imp}(\varepsilon)$ จะเริ่มพิจารณาจากสมการ (3.70) โดยแทนค่า $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ จะได้

$$\begin{aligned}\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle &= \frac{1}{2\pi u_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \cos^2 2\theta}}{\varepsilon} d\theta - \frac{1}{2\pi u_0^4} \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T) \cos^2 2\theta})^3}{\varepsilon^3} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} d\theta' - \frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} \right)^3 d\theta' \quad (3.84)\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมแรกของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.84)

จากสมการ (6) และจากนิยามสมการ (10) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta'} d\theta' &= \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) & , \varepsilon > \Delta_d(T)\end{aligned} \quad (3.85)$$

พิจารณาสมการ (3.85) จากนิยามสมการ (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \cos^2 \theta' d\theta' = \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \left[E\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) + \left(\frac{\varepsilon^2}{\Delta_d^2(T)} - 1\right) K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \right] ; \varepsilon < \Delta_d(T) \quad (3.86)$$

พิจารณาเทอมที่สองของ $\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle$ ในสมการ (3.84) จะได้

$$\frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \cos^2 \theta' \right)^3 d\theta' = \frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \right)^3 \left(\sqrt{1 + \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)} \sin^2 \theta'} \right)^3 d\theta'$$

จากสมการ (8) และจากนิยามสมการ (9) , (10) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi u_0^4} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \cos^2 \theta' \right)^3 d\theta' &= \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \right] \\ &\quad , \varepsilon > \Delta_d(T) \quad (3.87) \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (3.87) จากนิยามสมการ (11) , (12) ตามภาคผนวก ก จะได้

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi u_0^2} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \frac{\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2}} \cos^2 \theta' \right)^3 d\theta' &= \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 \Delta_d(T) - 2\Delta_d^3}{\varepsilon^3} \right) \left(E\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)}\right) K\left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2}{\varepsilon \Delta_d(T)} \right) K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \right] , \varepsilon < \Delta_d(T) \quad (3.88) \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (3.85) - (3.88) ในสมการ (3.84) จะได้ค่าเฉลี่ย $N_{imp}(\varepsilon)$ เป็น

$$\langle N_{imp}(\varepsilon) \rangle = \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 - 2\Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) E\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\varepsilon^2} \right) K\left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& , \varepsilon > \Delta_d(T) \\
= & \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \left[\text{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \text{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right] \\
& - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4\varepsilon^2 \Delta_d(T) - 2\Delta_d^3}{\varepsilon^3} \right) \left(\text{E} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) + \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2(T)}{\Delta_d^2(T)} \right) \text{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\varepsilon^2 - \Delta_d^2}{\varepsilon \Delta_d(T)} \right) \text{K} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \right] \quad , \varepsilon < \Delta_d(T)
\end{aligned}$$

สมการข้างบนคือ สมการความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง โดยมีค่าขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเล็กตรอน และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ โดยอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2 แบบสมบูรณ์

จากที่ได้คำนวณค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีที่มีสารเจือ ที่มีช่องว่างพลังงาน $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ และ $\Delta_k = \Delta_d(T) \cos 2\theta$ ของทั้ง 3 กรณี พบว่าค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของทั้ง 3 กรณี มีค่าเท่ากัน ดังนั้นต่อไปจะแสดงการคำนวณ โดยใช้ช่องว่างพลังงาน $\Delta_k = \Delta_d(T) \sin 2\theta$ เพียงกรณีเดียวเท่านั้น

การคำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตี

เพื่อให้สอดคล้องกับความหนาแน่นสถานะที่คำนวณไปแล้ว ในการศึกษาความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส จะพิจารณา 3 กรณี ที่สอดคล้องกันคือ

1. กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$

พิจารณากรณีที่ตัวนำวอดยิ่งที่ไม่มีสารเจือ โดยเริ่มจากสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ในสมการ (3.14) คือ

$$\begin{aligned}
W &= N_0^2 \int_{-\omega_b}^{\omega_p} \frac{N_{\text{imp}}^2(\varepsilon)}{1 + \cosh(\varepsilon/T)} d\varepsilon \\
&= N_0^2 \int_0^{\omega_p} \text{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) N_{\text{imp}}^2(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.89)
\end{aligned}$$

แทนค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะของตัวนำวอดยิ่งแบบคลื่นตีที่ไม่มีสารเจือ จะได้

$$W = N_0^2 \left\{ \int_0^{\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \mathbf{K} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)} \right) \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) d\varepsilon + \int_{\Delta_d(T)}^{\omega_D} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{\Delta_d(T)}{\varepsilon} \right) \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) d\varepsilon \right\} \quad (3.90)$$

กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}$ และจาก $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_D/\Delta_d(T)} \int_1^{\omega_D/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \quad (3.91) \end{aligned}$$

จากนั้นใช้การประมาณ $\tanh x \cong x$; $x < 1$ และ $\tanh x \cong 1$; $x > 1$ ดังนั้นสำหรับกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_D/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^{\omega_D/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \quad (3.92) \end{aligned}$$

เนื่องจากเทอมสุดท้ายถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ เทอมนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จะกำหนดให้

$$\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_D/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^{\omega_D/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx = a$$

เมื่อ a คือ ค่าคงตัว ดังนั้นสมการ (3.92) เขียนได้เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 x^2 dx \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 x^2 dx + a \right\} \quad (3.93)$$

พิจารณาสมการ (3.93) ที่ละเทอม จากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมแมทริแมทริคา เวอร์ชัน 5.1 (Mathematica version 5.1) จะได้

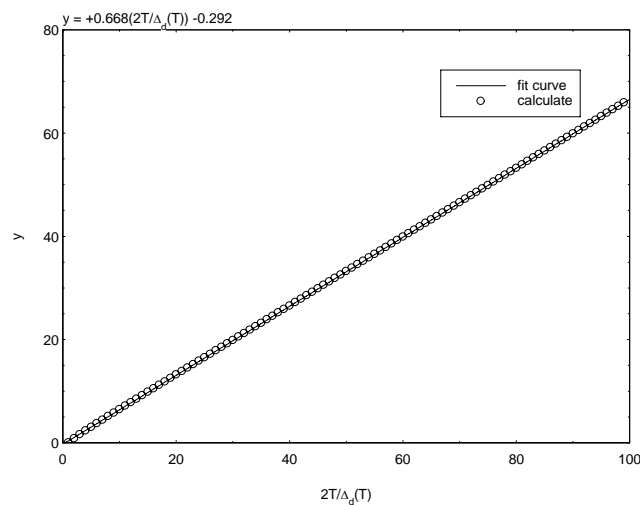
$$\text{เทอม} \quad \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 dx = 0.6424$$

$$\text{เทอม} \quad \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 x^2 dx = 0.4534$$

และเทอม

$$\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 x^2 dx \cong 0.6680 - 0.2920 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)$$

สำหรับเทอมข้างบน ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้นโค้งที่เหมาะสมด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด (least square) ดังภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 x^2 dx$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.93) ในกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ ได้ใหม่เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ (0.6680 + a) + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\} \quad (3.94)$$

ต่อไปจะพิจารณากรณี $\Delta_d(T) > 2T$ ที่

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \quad (3.95) \end{aligned}$$

เนื่องจากถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ จะทำให้บางเทอมมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จึงกำหนดให้เทอมที่เป็นศูนย์เท่ากับ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx = b \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^\alpha + c \end{aligned}$$

เมื่อ b, c และ α คือ ค่าคงตัว ดังนั้นสมการ (3.95) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{3 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 x^2 dx \right. \\ & \left. + b \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^\alpha + c \right\} \quad (3.96) \end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (3.96) ที่ละเทอม จากการกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ โดยการกระจาย
รอบตำแหน่งที่ $\left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right) = 0$ จะได้

$$\text{เทอม} \quad \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T}\right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} x K(x)\right)^2 dx \cong \frac{1}{3} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^4$$

$$\text{เทอม} \quad \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T}\right)^{3 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} x K(x)\right)^2 x^2 dx \cong \frac{1}{5} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^2 + \frac{1}{14} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^4$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.96) ในกรณี $\Delta_d(T) > 2T$ ได้ใหม่เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^4 + b \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)}\right)^\alpha + c \right\} \quad (3.97)$$

เนื่องจากสมการ $\frac{W}{T}$ ที่คำนวณได้มี 2 สมการคือ สมการ (3.94) และสมการ (3.97) ซึ่ง
ทั้ง 2 สมการขึ้นกับขอบเขตการคำนวณ ดังนั้นทั้ง 2 สมการ ต้องมีความต่อเนื่องที่รอยต่อ และค่า
 $\frac{W}{T}$ ที่ $T=T_c$ และ $T=0$ จะต้องมีเงื่อนไขเพื่อให้ค่าที่ตำแหน่งวิกฤตสอดคล้องกับที่คำนวณมาแล้ว
จึงมีเงื่อนไข 4 ข้อ ดังนี้

1. ที่ $T=T_c$ พบว่า $\Delta_d(T) \rightarrow 0$ ดังนั้น $\frac{W}{T}$ ของสถานะนำปกติกับสถานะนำยวดยิ่ง
จะต้องเท่ากัน ซึ่ง

$$\frac{W_n}{T} = \frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = N_0^2 \int_0^{\omega_p} \text{sech}^2\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right) d\varepsilon = 2N_0^2$$

จากสมการ (3.94) จะได้ว่า

$$\frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = 2N_0^2 = 2N_0^2 \left\{ (0.668 + a) + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T}\right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T}\right)^3 \right\}$$

ดังนั้น

$$1 = (0.6680 + a) \quad , a = 0.3320$$

จะได้ $\frac{W}{T}$ กรณี $\Delta_d(T) < 2T$ เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ 1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\} \quad (3.98)$$

2. ที่ $T \rightarrow 0$ ที่อุณหภูมินี้ค่า $\frac{W}{T}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ หรือ $\frac{W}{T}(T \rightarrow 0) = 0$ จากสมการ (3.97) จะได้ $c = 0$

3. พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $\frac{W}{T}$ ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.97)} = \frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.98)}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.1333 + 0.0286 + b &= 1 + 0.3504 - 0.4534 \\ b &= 0.7351 \end{aligned}$$

จะได้กรณี $\Delta_d(T) > 2T$ เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^\alpha \right\} \quad (3.99)$$

4. พิจารณาความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\frac{d}{dT} \frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ (สมการ (3.99))} = \frac{d}{dT} \frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ (สมการ (3.98))}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.2666 + 0.1144 + 0.7351 \times \alpha &= -0.3504 + 1.3602 \\ \alpha &= 0.86 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{W}{T}$ กรณี $\Delta_d(T) > 2T$ เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right\} \quad (3.100)$$

ในที่สุดกรณีตัวนำวดยิ่งที่ไม่มีสารเจือจะได้สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปีนของนิวเคลียส เป็นไปตามสมการ

$$\begin{aligned} W &= 2N_0^2 T \left\{ 1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\}, \Delta_d(T) < 2T \\ &= 2N_0^2 T \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right\}, \Delta_d(T) > 2T \end{aligned} \quad (3.101)$$

แทนค่าสมการ (3.101) ในสมการ (3.15) เพื่อหาสมการอัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียส จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ 1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\} \right], \Delta_d(T) < 2T \\ &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right\} \right] \\ & \hspace{15em}, \Delta_d(T) > 2T \end{aligned} \quad (3.102)$$

สมการข้างบนคือ สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปีนของนิวเคลียสและสมการอัตราการผ่อนคลายสปีนของนิวเคลียส ของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่ไม่มีสารเจือ โดยมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

2. กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$

เป็นการศึกษาตัวนำวดยิ่งกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน โดยเริ่มจากสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปีนของนิวเคลียส ตามสมการ (3.89) โดยแทนค่าเฉลี่ย

ความหนาแน่นสถานะของตัวนำยวดยิ่งที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อนลงในสมการ (3.89)

จากนั้นกำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{\Delta_d(T)}$ และ $\text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_b/\Delta_d(T)} \int_1^{\omega_b/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \quad (3.103) \end{aligned}$$

ใช้การประมาณ $\tanh x \cong x$; $x < 1$ และ $\tanh x \cong 1$; $x > 1$

ดังนั้นสำหรับกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_b/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^{\omega_b/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \quad (3.104) \end{aligned}$$

เนื่องจากเทอมสุดท้ายถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ เทอมนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จะกำหนดให้

$$\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{\omega_b/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^{\omega_b/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \Bigg\} = d$$

เมื่อ d คือ ค่าคงตัว ดังนั้นเขียนสมการ (3.104) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 x^2 dx \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 dx \\
& - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{3 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_1^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 x^2 dx + d \} \quad (3.105)
\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (3.105) ที่ละเทอม จากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรม
แมทริแมทริคา เวอร์ชัน 5.1 จะได้

$$\text{เทอม} \quad \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 dx = 0.6424$$

$$\text{เทอม} \quad \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 x^2 dx = 0.4534$$

เทอม

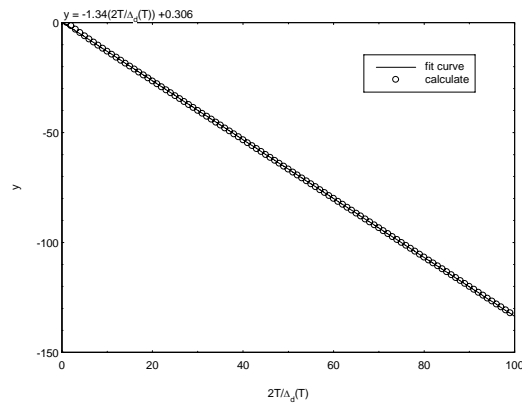
$$\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^2 x^2 dx \right] \cong 0.6680 - 0.2920 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)$$

สำหรับเทอมข้างบน ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้น
โค้งที่เหมาะสมด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด เช่นเดียวกับภาพประกอบ 22

พิจารณาเทอม

$$\begin{aligned}
& u_0^2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left[\left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \mathbf{K} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{x} \right) \right) x^2 dx \right) \right] \cong u_0^2 \left(-1.3400 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right)
\end{aligned}$$

สำหรับเทอมข้างบน ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้น
โค้งที่เหมาะสม ด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด ดังภาพประกอบ 23



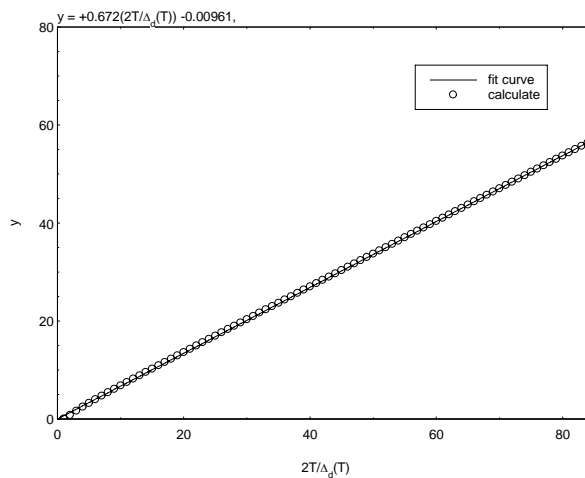
ภาพประกอบ 23 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx + 2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) x^2 dx \right) \right]$$

พิจารณาเทอม

$$u_0^4 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left[\left(\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right) x^2 dx \right) \right] \\ \cong u_0^4 \left(0.6720 - 0.0096 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right)$$

สำหรับเทอมข้างบน ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้นโค้งที่เหมาะสม ด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด ดังภาพประกอบ 24



ภาพประกอบ 24 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 x^2 dx \right]$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.105) ในกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left((0.6680 + d_1) + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-(1.3400 + d_2) + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^2 + \left((0.6720 + d_3) - 0.0096 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

ต่อไปจะพิจารณกรณี $\Delta_d(T) > 2T$

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 & \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right. \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)_{2T/\Delta_d(T)} \int_1^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \end{aligned} \quad (3.107)$$

เนื่องจากถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ จะทำให้บางเทอมมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จึงกำหนดให้เทอมที่เป็นศูนย์เท่ากับ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)_{2T/\Delta_d(T)} \int_1^1 \left(\frac{2}{\pi} x K(x) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2u_0^2}{\pi} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx = e \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^\beta + f \end{aligned}$$

เมื่อ e, f และ β คือ ค่าคงตัว สมการ (3.107) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{3 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 x^2 dx + e \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^\beta + f \right\} \quad (3.108)$$

พิจารณาสมการ (3.108) ที่ละเทอม จากการกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ โดยการกระจายรอบตำแหน่งที่จุด $\left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned} \text{เทอม} \quad & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 dx \cong \frac{1}{3} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \\ \text{เทอม} \quad & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{3 \cdot 2T/\Delta_d(T)} \int_0^{\Delta_d(T)} \left(\frac{2}{\pi} x \mathbf{K}(x) \right)^2 x^2 dx \cong \frac{1}{5} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{1}{14} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \end{aligned}$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.108) ได้เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \left[0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + e_1 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_1} + f_1 \right] + \left[e_2 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_2} + f_2 \right] u_0^2 + \left[e_3 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_3} + f_3 \right] u_0^4 \right\} \quad (3.109)$$

เนื่องจากสมการ $\frac{W}{T}$ ที่คำนวณได้มี 2 สมการ คือ สมการ (3.106) และ (3.109) ซึ่งทั้ง 2 สมการขึ้นกับขอบเขตการคำนวณ ดังนั้นทั้ง 2 สมการ ต้องมีความต่อเนื่องที่รอยต่อ และค่า $\frac{W}{T}$ ที่ $T = T_c$ และ $T = 0$ จะต้องมีเงื่อนไขเพื่อให้ค่าที่ตำแหน่งวิกฤตสอดคล้องกับที่คำนวณมาแล้ว จึงมีเงื่อนไข 4 ข้อ ดังนี้

1. ที่ $T = T_c$ ค่า $\Delta_d(T) \rightarrow 0$ ดังนั้น $\frac{W}{T}$ ของสถานะนำปกติกับสถานะนำยวดยิ่งต้องเท่ากัน ซึ่ง

$$\frac{W_n}{T} = \frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = N_0^2 \int_0^{u_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) \frac{1}{(1+u_0^2)^2} d\varepsilon = 2N_0^2 (1+u_0^2)^{-2}$$

จากการกระจายทวินาม จะได้

$$\frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = 2N_0^2 (1 - 2u_0^2 + 3u_0^4)$$

จากสมการ (3.106) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = 2N_0^2 (1 - 2u_0^2 + 3u_0^4) = 2N_0^2 \left\{ \left((0.6680 + d_1) + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right) \right. \\ \left. + \left(-(1.3400 + d_2) + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^2 \right. \\ \left. + \left((0.6720 + d_3) - 0.0096 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1 &= (0.668 + d_1) \quad , \quad d_1 = 0.3320 \\ -2 &= -(1.34 + d_2) \quad , \quad d_2 = 0.6600 \\ 3 &= (0.672 + d_3) \quad , \quad d_3 = 2.3280 \end{aligned}$$

จะได้ $\frac{W}{T}$ กรณี $\Delta_d(T) < 2T$ เป็น

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \left(1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right) \right. \\ \left. + \left(-2 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^2 \right. \\ \left. + \left(3 - 0.0104 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\} \quad (3.110) \end{aligned}$$

2. ที่ $T \rightarrow 0$ ที่จุดหมุนมีค่า $\frac{W}{T}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ หรือ $\frac{W}{T}(T \rightarrow 0) = 0$ จากสมการ (3.109) จะได้ $f_1, f_2, f_3 = 0$

3. พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $\frac{W}{T}$ ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.109)} = \frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.110)}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.1333+0.0286+e_1 &= 1+0.3504-0.4534 \\ e_1 &= 0.7351 \\ e_2 &= -2+0.306 = -1.6940 \\ e_3 &= 3-0.0096 = 2.9903 \end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับกรณี $\Delta_d(T) > 2T$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} &= 2N_0^2 \left\{ \left[0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_2} \right] u_0^2 + \left[2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{\beta_3} \right] u_0^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.111)$$

4. พิจารณาความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\left. \frac{d}{dT} \frac{W}{T} \right|_{\Delta_d(T)=2T} (\text{สมการ (3.111)}) = \left. \frac{d}{dT} \frac{W}{T} \right|_{\Delta_d(T)=2T} (\text{สมการ (3.110)})$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.2666+0.1144+0.7351 \times \beta_1 &= -0.3504+1.3602 & \text{ได้ } \beta_1 &= 0.86 \\ -1.6940 \times \beta_2 &= -0.3060 & \text{ได้ } \beta_2 &= 0.18 \\ 2.9903 \times \beta_3 &= 0.00961 & \text{ได้ } \beta_3 &= 0.0032 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{W}{T}$ กรณี $\Delta_d(T) > 2T$ จะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} &= 2N_0^2 \left\{ \left[0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.18} \right] u_0^2 + \left[2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.0032} \right] u_0^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.112)$$

ในที่สุดกรณีตัวนำวดยิ่งกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน จะได้สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส เป็นไปตามสมการ

$$\begin{aligned}
W &= 2N_0^2T \left\{ \left(1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + \left(-2 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) \right) u_0^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(3 - 0.0104 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\}, \Delta_d(T) < 2T \\
&= 2N_0^2T \left\{ \left(0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.18} \right) u_0^2 + \left(2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.0032} \right) u_0^4 \right\}, \Delta_d(T) > 2T \quad (3.113)
\end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (3.113) ลงในสมการ (3.15) เพื่อหาสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2T \left\{ \left(1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + \left(-2 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) \right) u_0^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(3 - 0.0104 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\} \right], \Delta_d(T) < 2T \\
&= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2T \left\{ \left(0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.18} \right) u_0^2 + \left(2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.0032} \right) u_0^4 \right\} \right], \Delta_d(T) > 2T \quad (3.114)
\end{aligned}$$

สมการข้างบนคือ สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียสและสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีกรีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน โดยมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

3. กรณีที่ $u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$

เป็นการศึกษาตัวนำยวดยิ่งกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง โดยเริ่มจากสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ตามสมการ (3.89) โดยแทนค่าเฉลี่ย

ความหนาแน่นสถานะของตัวนำเวดิงที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ลงในสมการ (3.89)

จากนั้นกำหนดให้ $x = \frac{\mathcal{E}}{\Delta_d(T)}$ และ $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right. \right. \\ & - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \left. \right\}^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ & + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{o_p/\Delta_d(T)} \int_1^{o_p/\Delta_d(T)} \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\}^2 \\ & \left. \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} \end{aligned} \quad (3.115)$$

ใช้การประมาณ $\tanh x \cong x$; $x < 1$ และ $\tanh x \cong 1$; $x > 1$

สำหรับกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ เนื่องจากเทอมสุดท้ายถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ เทอมนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จะกำหนดให้

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{o_p/\Delta_d(T)} \int_{2T/\Delta_d(T)}^{o_p/\Delta_d(T)} \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\}^2 \\ & \left. \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \right\} = g + h \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \end{aligned}$$

เมื่อ g, h คือ ค่าคงตัวกำหนดให้ $\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5$ เพราะจากการพิจารณาที่เป็นไปได้ สำหรับกรณีนี้พบ

ในเทอมยกกำลัง 5 ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right. \right. \\ & - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \left. \right\}^2 dx \\ & - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \right\}^2 x^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_1 \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\}^2 dx \\
& - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_1 \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\}^2 x^2 dx \\
& + \left(g + h \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \left. \right\} \tag{3.116}
\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (3.116) ทีละเทอมจากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรม

แมทริแมทริคา เวอร์ชัน 5.1 จะได้

เทอม $\int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right]^2 dx = 0.10406 \frac{1}{u_0^4}$

เทอม

$$2 \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right] \left[\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right] dx = 0.1489 \frac{1}{u_0^6}$$

เทอม $\int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right]^2 dx = 0.0534 \frac{1}{u_0^8}$

เทอม $\int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right]^2 x^2 dx = 0.0657 \frac{1}{u_0^4}$

เทอม

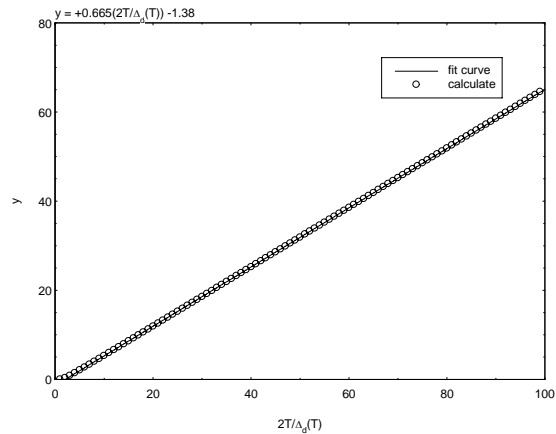
$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right] \left[\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right] x^2 dx \\
= 0.0930 \frac{1}{u_0^6}
\end{aligned}$$

เทอม $\int_0^1 \left[\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right]^2 x^2 dx = 0.0329 \frac{1}{u_0^8}$

เทอม

$$\frac{1}{u_0^4} \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left(\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 x^2 dx \right) \cong \frac{1}{u_0^4} \left(0.6650 - 1.3800 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right)$$

สำหรับเทอมสุดท้าย ได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้นโค้งที่เหมาะสม ด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด ดังภาพประกอบ 25



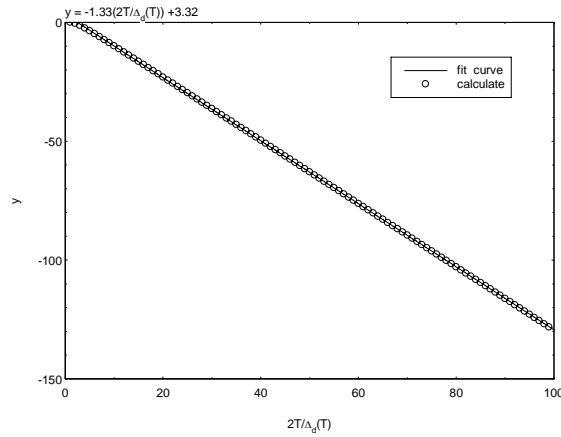
ภาพประกอบ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 dx - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 x^2 dx \right]$$

เทอม

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u_0^6} \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] dx \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] x^2 dx \right) \cong \frac{1}{u_0^6} \left(-1.3300 + 3.3200 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) \end{aligned}$$

สำหรับเทอมข้างบนได้จากการใช้โปรแกรมคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้นโค้งที่เหมาะสม ด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด ดังภาพประกอบ 26



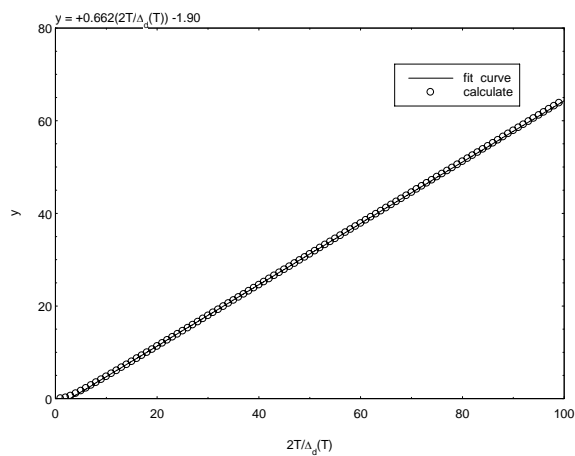
ภาพประกอบ 26 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\left(-2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] dx \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] x^2 dx \right] \right]$$

เทอม

$$\frac{1}{u_0^8} \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \left(\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right]^2 dx \right. \\ \left. - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right] x^2 dx \right) \cong \frac{1}{u_0^8} \left(0.6620 - 1.9000 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right)$$

สำหรับเทอมข้างบน ได้จากการใช้โปรแกรมการคำนวณค่าออกมา แล้วพิจารณาช่วงของเส้นโค้งที่เหมาะสม ด้วยวิธีการเลือกใช้ค่ายกกำลังที่น้อยที่สุด ดังภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 27 แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง $2T/\Delta_d(T)$ กับ y โดย

$$y = \left[\int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right]^2 dx \right. \\ \left. - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^2 \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left[\frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right]^2 x^2 dx \right]$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.116) ในกรณี $\Delta_d(T) < 2T$ ได้เป็น

$$\frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left[(0.6650 + g_1) - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.06567 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + h_1 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{u_0^6} \left[-(1.3300 + g_2) + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - h_2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{u_0^8} \left[(0.6620 + g_3) - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + h_3 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \right\} \quad (3.117)$$

สำหรับกรณี $\Delta_d(T) > 2T$ เนื่องจากเทอมสุดท้ายถ้าใช้การประมาณ โดยให้ $\tanh x \cong 1$ เทอมนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเพื่อเป็นการเก็บรายละเอียดให้มากขึ้น จะกำหนดให้

$$\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \int_{2T/\Delta_d(T)}^1 \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right\}^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx \\ + \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{6} \int_1^{2T/\Delta_d(T)} \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} E\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^2} \right) E\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right) K\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right\}^2 \\ \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\Delta_d(T)x}{2T} \right) \right) dx = k \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + m$$

เมื่อ k, m คือ ค่าคงตัว กำหนดให้ $\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^6$ เพราะจากการพิจารณาที่เป็นไปได้ สำหรับกรณีนี้ พบในเทอมยกกำลัง 6 ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{W}{T} &= 2N_0^2 \left\{ \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left\{ \frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right. \right. \\
&\quad - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \left. \right\}^2 dx \\
&\quad - \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \int_0^1 \left\{ \left[\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \right] \right\}^2 x^2 dx \\
&\quad \left. + \left(k \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + m \right) \right\} \tag{3.118}
\end{aligned}$$

พิจารณาสมการ (3.118) ทีละเทอม จากการกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์ โดยการกระจาย

รอบตำแหน่งที่จุด $\left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right) = 0$ จะได้

$$\text{เทอม} \quad \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right)^2 dx \cong \left(\frac{1}{12} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{1}{80} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^4}$$

$$\begin{aligned}
\text{เทอม} \quad &2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right) \\
&\quad \left(-\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \right) dx \\
&\cong \left(\frac{1}{8} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{1}{64} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เทอม} \quad &\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2 - 2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] - \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) K(x) \right] \right)^2 dx \\
&\cong \left(\frac{3}{64} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{3}{640} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เทอม} \quad &\left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2 - 1)K(x)] \right)^2 x^2 dx \\
&\cong \left(\frac{1}{20} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{1}{112} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เทอม} \quad & 2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi u_0^2} \frac{1}{x} [E(x) + (x^2-1)K(x)] \right) \\
& \left(-\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right) x^2 dx \\
& \cong \left(\frac{3}{40} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{5}{448} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เทอม} \quad & \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^{2T/\Delta_d(T)} \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi u_0^4} \frac{1}{3} \left[\left(\frac{4x^2-2}{x^3} \right) [E(x) + (x^2-1)K(x)] - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) K(x) \right] \right)^2 x^2 dx \\
& \cong \left(\frac{9}{320} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + \frac{3}{896} \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 \right) \frac{1}{u_0^8}
\end{aligned}$$

ดังนั้นเขียนสมการ (3.118) กรณี $\Delta_d(T) > 2T$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + k_1 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + m_1 \right) \right. \\
& + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + k_2 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + m_2 \right) \\
& \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + k_3 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + m_3 \right) \right\} \quad (3.119)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก สมการ $\frac{W}{T}$ ที่คำนวณได้มี 2 สมการ คือ สมการ (3.117) และ (3.119) ซึ่งทั้ง 2 สมการขึ้นกับขอบเขตการคำนวณ ดังนั้นทั้ง 2 สมการ ต้องมีความต่อเนื่องที่รอยต่อ และค่า $\frac{W}{T}$ ที่ $T=T_c$ และ $T=0$ จะต้องมีเงื่อนไขเพื่อให้ค่าที่ตำแหน่งวิกฤตสอดคล้องกับที่คำนวณมาแล้ว จึงมีเงื่อนไข 4 ข้อ ดังนี้

1. ที่ $T=T_c$ ค่า $\Delta_d(T) \rightarrow 0$ ดังนั้น $\frac{W}{T}$ ของสถานะนำปกติกับสถานะนำยวดยิ่งต้องเท่ากัน ซึ่ง

$$\frac{W_n}{T} = \frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = N_0^2 \int_0^{op} \text{sech}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) \frac{1}{(1+u_0^2)^2} d\varepsilon = \frac{2N_0^2}{u_0^4} \left(1 + \frac{1}{u_0^2} \right)^{-2}$$

จากการกระจายทวินาม จะได้

$$\frac{W_s}{T} \Big|_{T=T_c} = \frac{2N_0^2}{u_0^4} \left(1 - \frac{2}{u_0^2} + \frac{3}{u_0^4} \right)$$

จากนั้นนำไปเทียบกับสมการ (3.117) จะได้

$$\begin{aligned} 1 &= (0.6650 + g_1) \quad , \quad g_1 = 0.3350 \\ -2 &= -(1.3300 + g_2) \quad , \quad g_2 = 0.6670 \\ 3 &= (0.6620 + g_3) \quad , \quad g_3 = 2.3380 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{W}{T}$ กรณี $\Delta_d(T) < 2T$ จะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = 2N_0^2 \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left[1 - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.06567 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + h_1 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \right. \\ + \frac{1}{u_0^6} \left[-2 + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - h_2 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \\ \left. + \frac{1}{u_0^8} \left[3 - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + h_3 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right] \right\} \quad (3.120) \end{aligned}$$

2. ที่ $T \rightarrow 0$ ที่จุดวิกฤตนี้ค่า $\frac{W}{T}$ จะมีค่าเป็นศูนย์ หรือ $\frac{W}{T}(T \rightarrow 0) = 0$ จากสมการ (3.119) จะได้ $m_1, m_2, m_3 = 0$

3. พิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $\frac{W}{T}$ ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.119)} = \frac{W}{T} \Big|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ สมการ (3.120)}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.0333 + 0.0036 + k_1 &= 1 - 1.2759 - 0.0657 + h_1 \\ k_1 &= -0.3774 + h_1 \\ -0.0500 - 0.0045 + k_2 &= -2 + 3.1710 + 0.0930 - h_2 \\ k_2 &= -1.3183 + h_2 \\ 0.0188 + 0.0013 + k_3 &= 3 - 1.8466 - 0.0329 + h_3 \\ k_3 &= 1.1003 + h_3 \end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับกรณี $\Delta_d(T) > 2T$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{W}{T} = & 2N_0^2 \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 - 0.3774 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + h_1 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right. \\ & + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 1.3183 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 - h_2 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \\ & \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 1.1003 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 + h_3 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.121)$$

4. พิจารณาความต่อเนื่องของอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ที่ตำแหน่ง $\Delta_d(T) = 2T$

$$\left. \frac{d}{dT} \frac{W}{T} \right|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ (สมการ (3.121))} = \left. \frac{d}{dT} \frac{W}{T} \right|_{\Delta_d(T)=2T} \text{ (สมการ (3.120))}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 0.0667 + 0.0143 - 2.2644 + h_1 \times 6 &= 1.2759 + 0.1970 - h_1 \times 5 \\ h_1 &= 0.3323 \\ -0.100 - 0.0179 + 7.9104 - h_2 \times 6 &= -3.1710 - 0.2788 + h_2 \times 5 \\ h_2 &= 1.0219 \\ 0.0375 + 0.0054 + 6.6024 + h_3 \times 6 &= 1.8466 + 0.0988 - h_3 \times 5 \\ h_3 &= -0.4272 \end{aligned}$$

แทนค่า h_1, h_2, h_3 ในสมการ (3.120) และ (3.121)

ในที่สุดกรณีตัวนำยวดยิ่งกรณีที่มีศักยภาพการกระเจิงของสารเจืออย่างแรง จะได้สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส เป็นไปตามสมการ

$$\begin{aligned} W = & 2N_0^2 T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(1 - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0657 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + 0.3323 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right. \\ & + \frac{1}{u_0^6} \left(-2 + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 1.0219 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \\ & \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(3 - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 0.4272 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right\}, \Delta_d(T) < 2T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2N_0^2T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 - 0.0451 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.2965 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.6732 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right\}, \Delta_d(T) > 2T
\end{aligned} \tag{3.122}$$

แทนค่าสมการ (3.122) ลงในสมการ (3.15) เพื่อหาจากสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(1 - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0657 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + 0.3323 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-2 + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 1.0219 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(3 - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 0.4272 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right\} \right], \Delta_d(T) < 2T \\
&= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 - 0.0451 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.2965 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.6732 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right\} \right], \Delta_d(T) > 2T
\end{aligned} \tag{3.123}$$

สมการข้างบนคือ สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียสและสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดิกรอนี่ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง โดยมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

บทที่ 4 ผลการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินตามขั้นตอนในบทที่ 3 เป็นการคำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะสปินของนิวเคลียส (w) และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส $\left(\frac{1}{T_1}\right)$ ของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีเพื่อศึกษาผลของสารเจือ โดยได้ศึกษา 3 กรณี คือ กรณีที่ไม่มีสารเจือ ($u_0 N_d(\varepsilon) = 0$) กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ($u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$) และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ($u_0 N_d(\varepsilon) \gg 1$) ในการคำนวณพบว่าสมการที่ได้อยู่ในรูปแบบอย่างง่าย โดยอยู่ในรูปของสัดส่วนของอุณหภูมิ (T) และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ($\Delta_d(T)$) ที่ยกกำลังต่างๆ ซึ่งในบทนี้จะนำสมการที่ได้มาคำนวณเพื่อตรวจสอบการเกิดฟีด แต่เนื่องจากจะต้องมีการคำนวณหาช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ที่อุณหภูมิต่างๆ ออกมาเสียก่อน ดังนั้นในการคำนวณค่าช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิสามารถหาได้จากการพิจารณาช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์ และช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิใดๆ ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

ช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์เคลวิน และที่อุณหภูมิจากัด เป็นตามสมการ

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\varepsilon / 2T_c)}{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{N_{imp}(\varepsilon, \Delta_d(0))}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(0)}} d\varepsilon \quad (4.1)$$

และสมการช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิจากัด

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\varepsilon / 2T_c)}{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{N_{imp}(\varepsilon, \Delta_d(T)) \tanh\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)} / 2T\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_d^2(T)}} d\varepsilon \quad (4.2)$$

ในการคำนวณสามารถคำนวณหา $\Delta_d(0)$ ได้จากการกำหนด T_c และ ω_D ตามสมการ (4.1) แล้วนำมาหาค่า $\Delta_d(T)$ ได้จากสมการ (4.2) โดยในบทที่ 3 ได้ผลการคำนวณดังนี้

1. กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) = 0$

จากสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลีนดี จะได้

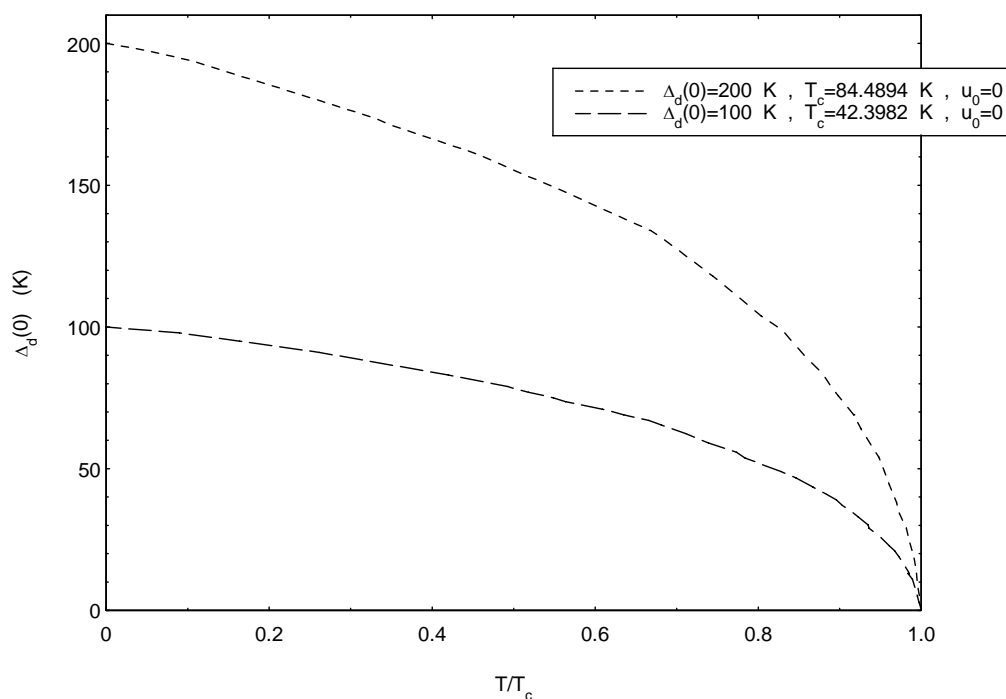
$$\begin{aligned}
 W &= 2N_0^2 T \left\{ 1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\} , \Delta_d(T) < 2T \\
 &= 2N_0^2 T \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right\} , \Delta_d(T) > 2T
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียสของตัวนำยวดยิ่งแบบคลีนดี จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ 1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 \right\} \right] , \Delta_d(T) < 2T \\
 &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ 0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right\} \right] \\
 & , \Delta_d(T) > 2T \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

สำหรับการวิจัยในบทนี้ได้คำนวณโดยใช้โปรแกรมแมติแมทริคา เวอร์ชัน 5.1 (Mathematica version 5.1) เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ต่างๆ ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าดังนี้ $u_0 = 0$, $\omega_D = 700$ K, $\Delta_d(0) = 100$ K, 200 K ซึ่งผลการคำนวณ $T_c = 42.3982$ K, 84.4894 K ตามลำดับ และหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ได้ดังภาพประกอบ 28

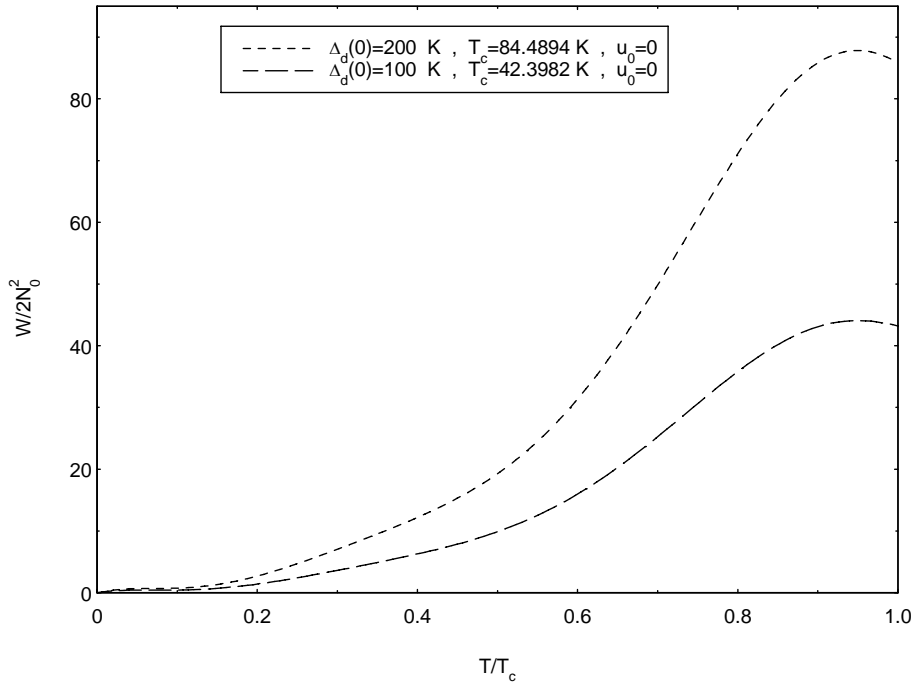


ภาพประกอบ 28 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่ไม่มีสารเจือ

จากภาพประกอบ 28 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องทฤษฎีบีซีเอส คือ ที่ศูนย์เคลวินได้ค่าช่องว่างพลังงานมากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤต ค่าช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ โดยที่เมื่อกำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 100 เคลวิน และ 200 เคลวิน สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต ได้เท่ากับ 42.3982 เคลวิน และ 84.4894 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย และช่องว่างพลังงานลดลงเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยวดยิ่งและทฤษฎีบีซีเอส

จากนั้นนำสมการ (4.3) คำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ได้ผล

ดังภาพประกอบ 29

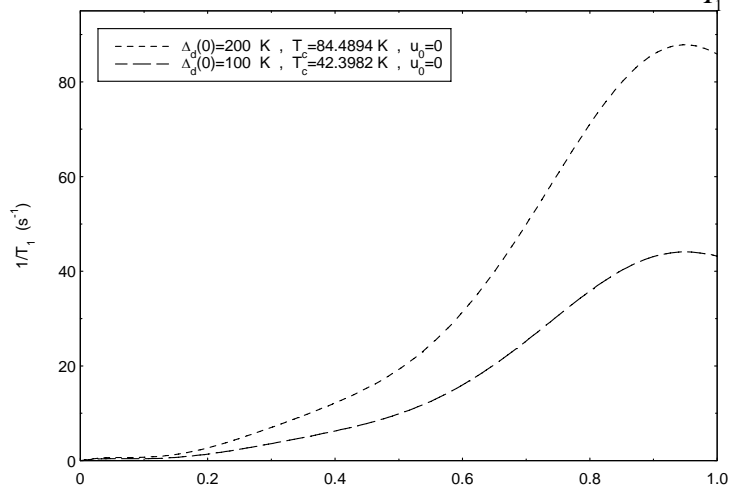


ภาพประกอบ 29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยิ่งยวดแบบคลีนดีที่ไม่มีสารเจือ

จากภาพประกอบ 29 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้ $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้นด้วย โดยที่ค่าช่องว่างพลังงาน และ อุณหภูมิวิกฤตใดๆ จะพบว่า ในช่วงต้นค่า $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้น เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น

จากนั้นนำสมการ (4.4) มาคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$

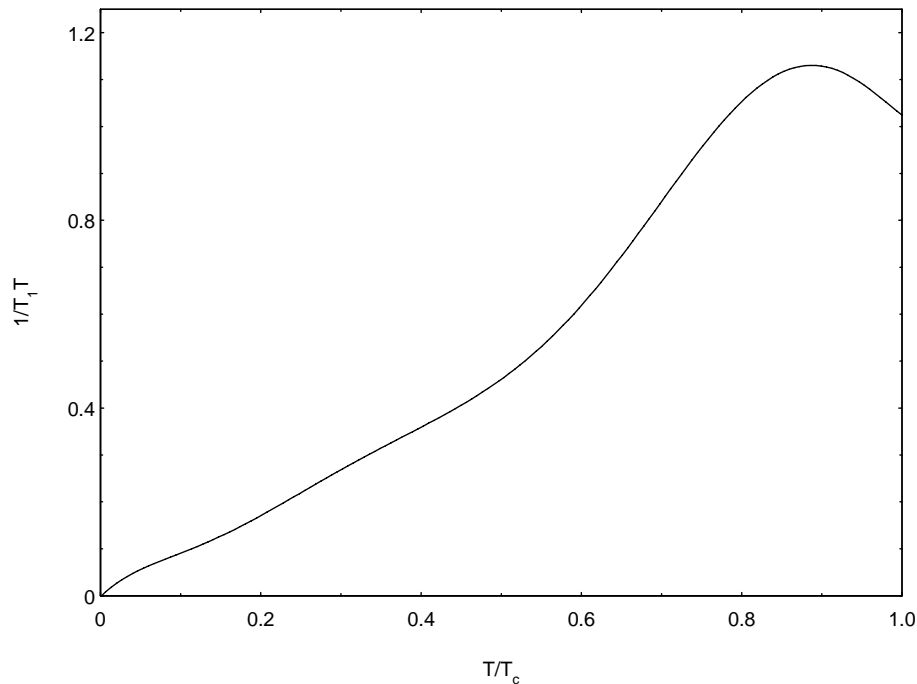
ได้ผลดังภาพประกอบ 30



ภาพประกอบ 30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยิ่งยวดแบบคลีนดีที่ไม่มี

สารเจือ

จากภาพประกอบ 30 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้ $\frac{1}{T_1}$ เพิ่มขึ้นด้วย จากภาพประกอบ 29 และ 30 กราฟที่ได้จากการคำนวณมีลักษณะเหมือนกัน แตกต่างเพียงหน่วยที่ใช้



ภาพประกอบ 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดีที่ไม่มี สารเจือ

จากภาพประกอบ 31 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน กำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 100 เคลวิน และ 200 เคลวิน คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตได้เท่ากับ 42.3982 เคลวิน และ 84.8494 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย และมีผลต่อ $\frac{1}{T_1 T}$ โดยลักษณะของกราฟจะซ้อนทับกันสนิท

2. กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$

สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี จะได้

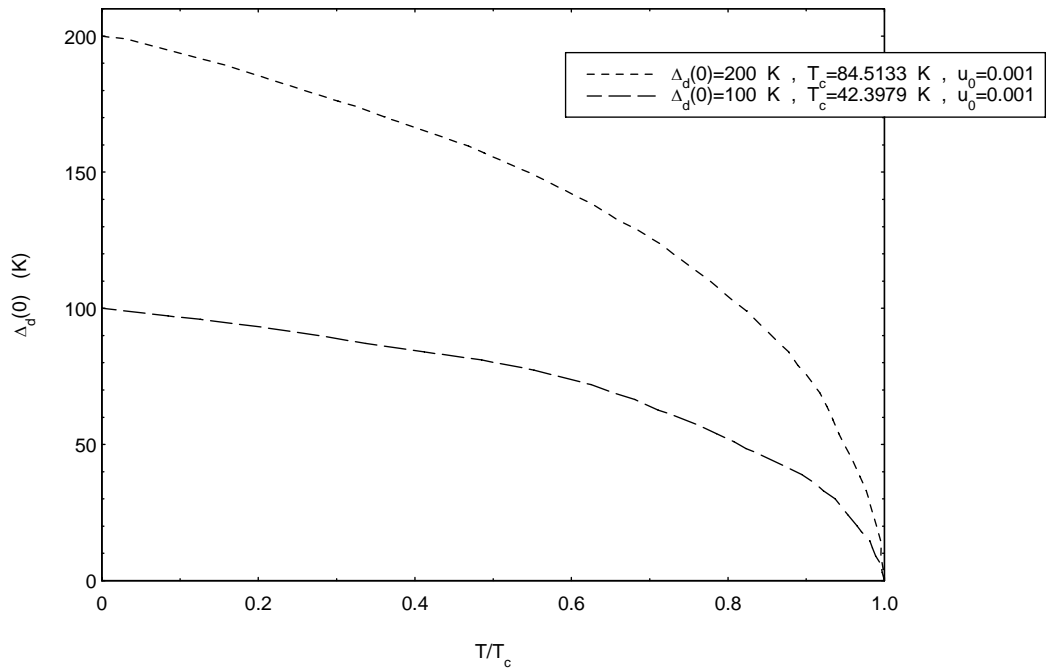
$$\begin{aligned}
 W &= 2N_0^2 T \left\{ \left(1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + \left(-2 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(3 - 0.0104 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\}, \Delta_d(T) < 2T \\
 &= 2N_0^2 T \left\{ \left(0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.18} \right) u_0^2 + \left(2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.0032} \right) u_0^4 \right\}, \Delta_d(T) > 2T
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ \left(1 + 0.3504 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.4534 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + \left(-2 + 0.3060 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^2 \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(3 - 0.0104 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) \right) u_0^4 \right\} \right], \Delta_d(T) < 2T \\
 &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ \left(0.1333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0286 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.7351 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.86} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(-1.6940 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.18} \right) u_0^2 + \left(2.9903 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^{0.0032} \right) u_0^4 \right\} \right], \Delta_d(T) > 2T
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

สำหรับการวิจัยในบทนี้ได้คำนวณโดยใช้โปรแกรมแมทริแมทริคา เวอร์ชัน 5.1 เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ต่างๆ ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าดังนี้ $u_0 = 0.001$, $\omega_D = 700$ K, $\Delta_d(0) = 100$ K, 200 K ได้ผลการคำนวณ $T_c = 42.3979$ K, 84.5133 K ตามลำดับ และหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ได้ดังภาพประกอบ 32

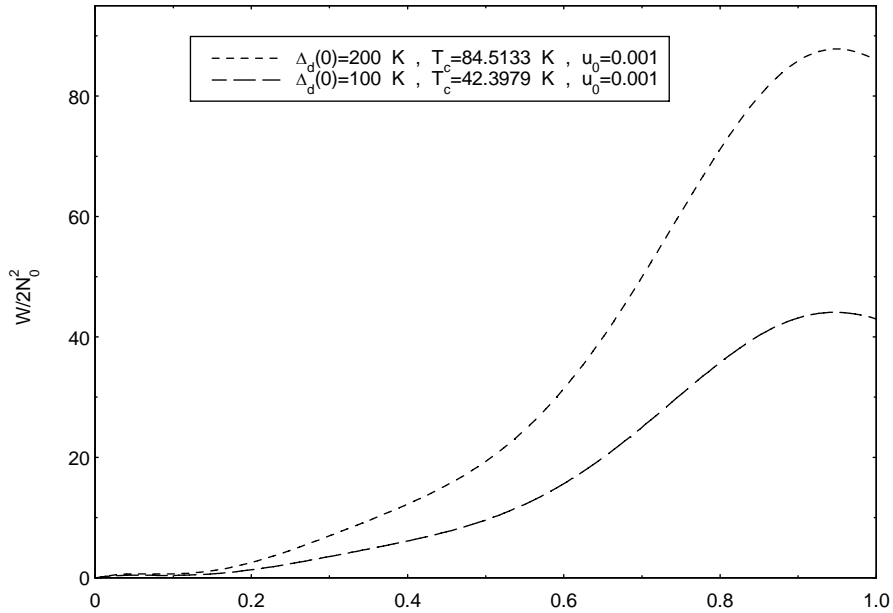


ภาพประกอบ 32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดีที่มีมีศักย์ การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน

จากภาพประกอบ 32 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องทฤษฎีบีซีเอส คือ ที่ศูนย์เคลวินได้ค่าช่องว่างพลังงานมากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤตค่าช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ โดยที่เมื่อกำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 100 เคลวิน และ 200 เคลวิน สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต ได้เท่ากับ 42.3979 เคลวิน และ 84.5133 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย และช่องว่างพลังงาน ลดลงเมื่ออุณหภูมิ เข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยิ่งยวดและทฤษฎีบีซีเอส

จากนั้นนำสมการ (4.5) คำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$

ได้ผลดังภาพประกอบ 33

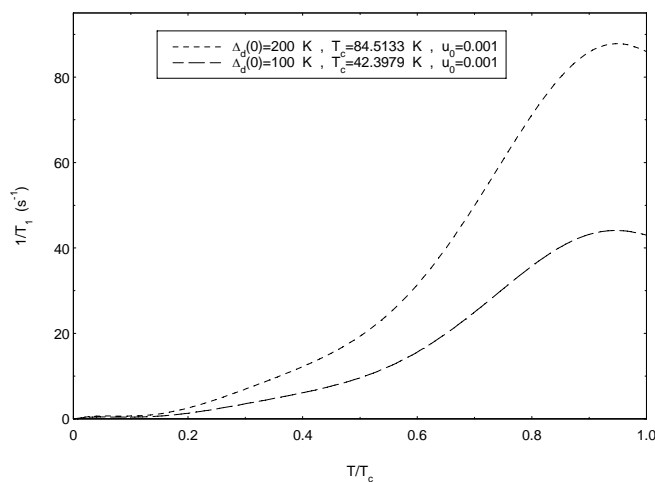


ภาพประกอบ 33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักยภาพการกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน

จากภาพประกอบ 33 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจนจากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้ $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้นด้วย โดยที่ค่าช่องว่างพลังงาน และ อุณหภูมิวิกฤต ใดๆ จะพบว่าในช่วงต้นค่า $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้น เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น

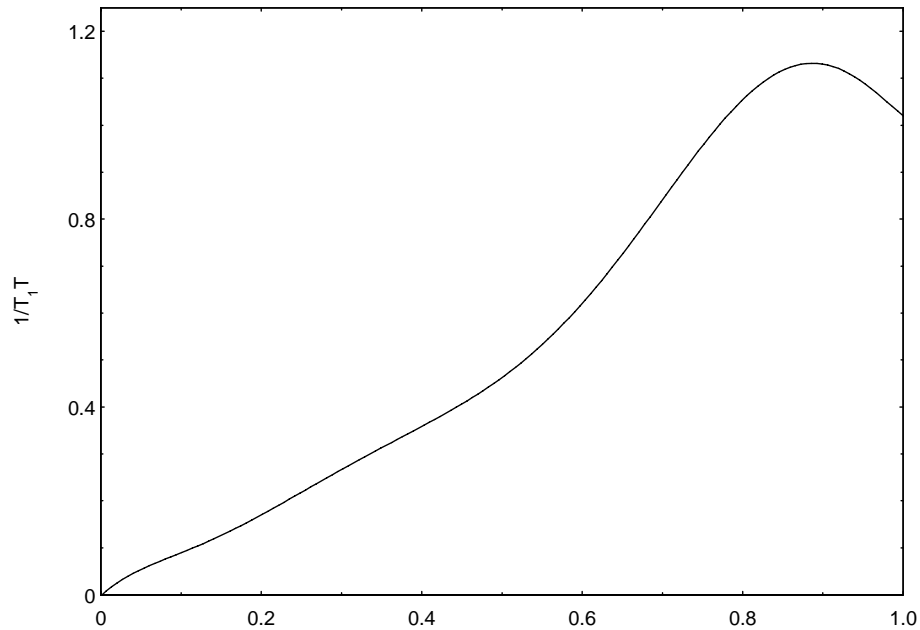
จากนั้นนำสมการ (4.6) มาคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$

ได้ผลดังภาพประกอบ 34



ภาพประกอบ 34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มีศักยภาพการกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน

จากภาพประกอบ 34 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่มจะทำให้ $\frac{1}{T_1}$ เพิ่มขึ้นด้วย จากภาพประกอบ 33 และ 34 กราฟที่ได้จากการคำนวณมีลักษณะเหมือนกันแตกต่างกันเพียงหน่วยที่ใช้



ภาพประกอบ 35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T/T_1}{TT}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีที่มี ศักยภาพกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน

จากภาพประกอบ 35 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{TT}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน โดยกำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 100 เคลวิน และ 200 เคลวิน คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต ได้เท่ากับ 42.3979 เคลวิน และ 84.5133 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย และมีผลต่อ $\frac{1}{TT}$ โดยลักษณะของกราฟจะซ้อนทับกันสนิท

3. กรณี $u_0 N_d(\varepsilon) \ll 1$

สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบ
คลื่นดี

$$\begin{aligned}
 W &= 2N_0^2 T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(1 - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0657 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + 0.3323 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-2 + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 1.0219 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(3 - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 0.4272 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right\}, \Delta_d(T) < 2T \\
 &= 2N_0^2 T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 - 0.0451 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.2965 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.6732 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right\}, \Delta_d(T) > 2T
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

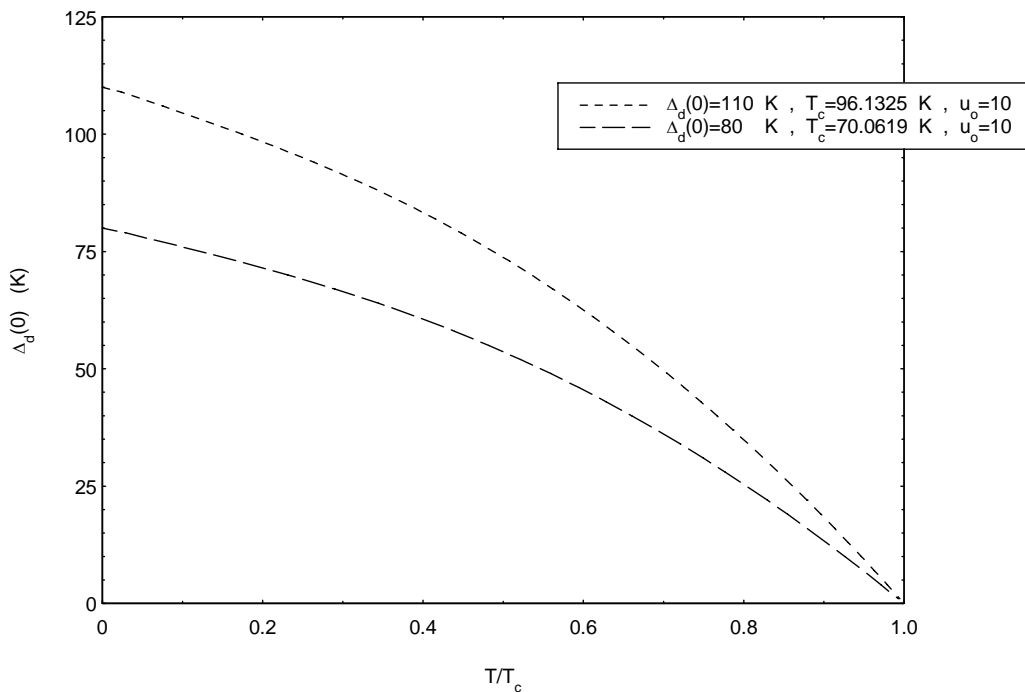
และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T_1} &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(1 - 1.2759 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0657 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 + 0.3323 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right. \right. \\
 &\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-2 + 3.1710 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) + 0.0930 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 1.0219 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(3 - 1.8466 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right) - 0.0329 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^3 - 0.4272 \left(\frac{\Delta_d(T)}{2T} \right)^5 \right) \right\} \right], \Delta_d(T) < 2T \\
 &= \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 (\gamma_e \gamma_n)^2 \frac{1}{\pi} \left[2N_0^2 T \left\{ \frac{1}{u_0^4} \left(0.0333 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0036 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 - 0.0451 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right. \right. \\
 &\quad + \frac{1}{u_0^6} \left(-0.0500 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 - 0.0045 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.2965 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{u_0^8} \left(0.0188 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^2 + 0.0013 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^4 + 0.6732 \left(\frac{2T}{\Delta_d(T)} \right)^6 \right) \right\} \right], \Delta_d(T) > 2T
 \end{aligned}$$

(4.8)

สำหรับการวิจัยในบทนี้ได้คำนวณโดยใช้โปรแกรมแมทเทอริคา เวอร์ชัน 5.1 เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ต่างๆ ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าดังนี้ $u_0 = 10$, $\omega_D = 700$ K, $\Delta_d(0) = 80$ K, 110 K ได้ผลการคำนวณ $T_c = 70.0619$ K, 96.1325 K ตามลำดับ และหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ได้ดังภาพประกอบ 36

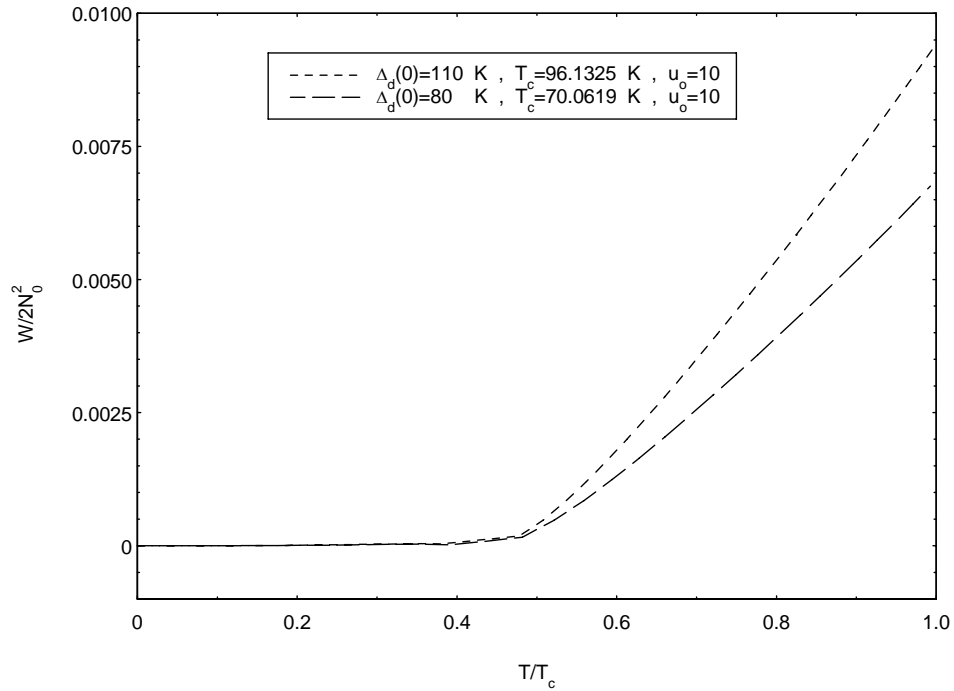


ภาพประกอบ 36 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(T)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดี ที่มีศักยภาพการกระเจิงของสารเจืออย่างแรง

จากภาพประกอบ 36 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_d(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องทฤษฎีบีซีเอส คือ ที่ศูนย์เคลวินได้ค่าช่องว่างพลังงานมากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤตค่าช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ โดยที่เมื่อกำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 80 เคลวิน และ 110 เคลวิน สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตได้เท่ากับ 70.0619 เคลวิน และ 96.1325 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย และช่องว่างพลังงาน ลดลงเมื่ออุณหภูมิลดลงเข้าสู่อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยวดยิ่งและทฤษฎีบีซีเอส

จากนั้นนำสมการ (4.7) คำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$

ได้ผลดังภาพประกอบ 37

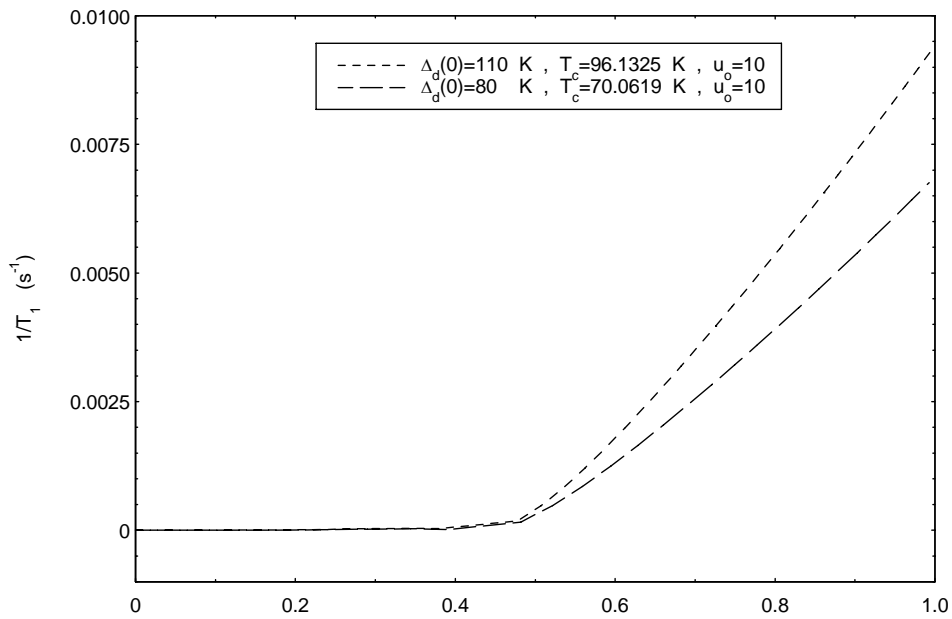


ภาพประกอบ 37 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี ที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง

จากภาพประกอบ 37 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาเคลวิน เพิ่ม จะทำให้ $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้นเล็กน้อย โดยที่ค่าช่องว่างพลังงาน และ อุณหภูมิวิกฤต ใดๆ จะพบว่า ในช่วงต้นค่า $\frac{W}{2N_0^2}$ เพิ่มขึ้น เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น

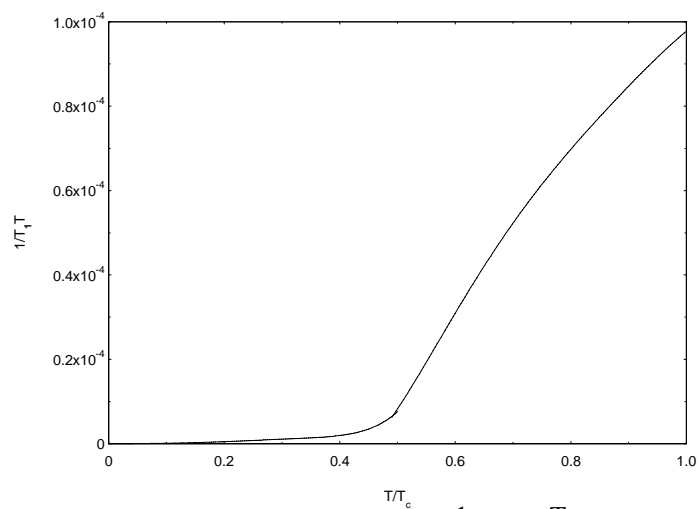
จากนั้นนำสมการ (4.8) มาคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$

ได้ผลดังภาพประกอบ 38



ภาพประกอบ 38 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลีนดีที่มี ศักย์ การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง

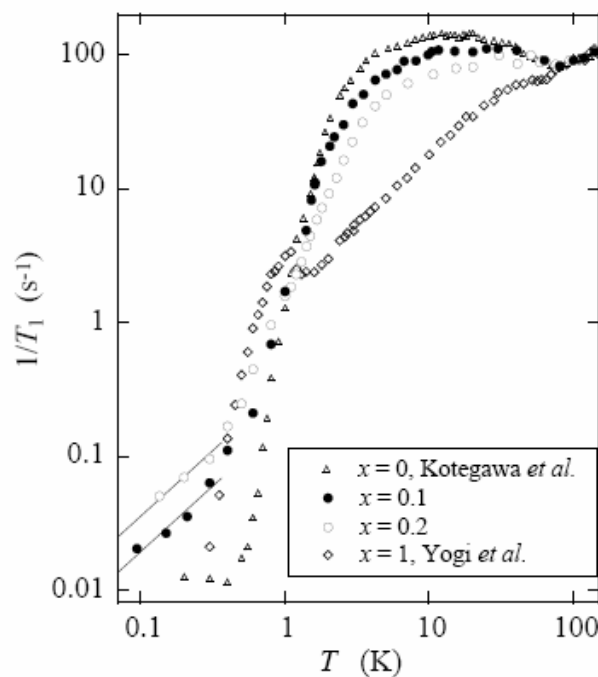
จากภาพประกอบ 38 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่า อุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่ม จะทำให้ $\frac{1}{T_1}$ เพิ่มขึ้นด้วย จากภาพประกอบ 37 และ 38 กราฟที่ได้จากการคำนวณมีลักษณะเหมือนกันแตกต่างกัน เพียงหน่วยที่ใช้



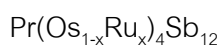
ภาพประกอบ 39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลีนดีที่มี ศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง

จากภาพประกอบ 39 แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ พบว่าที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น โดยกำหนดให้ ช่องว่างพลังงานเท่ากับ 80 เคลวิน และ 110 เคลวิน คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต ได้เท่ากับ 70.0619 เคลวิน และ 96.1325 เคลวิน ตามลำดับ จากการคำนวณแสดงให้เห็นว่าค่าช่องว่างพลังงานเพิ่มจะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นด้วย แต่มีผลต่อ $\frac{1}{T_1}$ โดยลักษณะของกราฟจะซ้อนทับกันสนิท

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขตามภาพประกอบ 33-39 พบว่ากรณีที่ไม่มีสารเจือ และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน จะมีพีคเกิดขึ้น ส่วนกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง จะไม่มีพีคเกิดขึ้น ซึ่งเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลอง $\frac{1}{T_1}$ ของตัวนำยิ่งยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิมในกลุ่ม $\text{Pr}(\text{Os}_{1-x}\text{Ru}_x)_4\text{Sb}_{12}$ ดังภาพประกอบ 40



ภาพประกอบ 40 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1}$ กับ T ของตัวนำยิ่งยวดยิ่งแบบไม่ดั้งเดิมในกลุ่ม



จากภาพประกอบ 40 เป็นการรวบรวมผลการทดลองของนักวิจัยหลายคนะ ซึ่งทำการวัด $\frac{1}{T_1}$ ที่มีสัดส่วนของสารเจือค่าต่างๆ โดยผลที่ได้จากการทดลองของโกเตกาวาและคณะ (Kotegawa; & et al. 2007: 027001) ที่ได้ศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิของ $\frac{1}{T_1}$ ในกรณีที่ไม่มีสารเจือ ($x=0$) พบว่าจะมีพีคโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นอย่างชัดเจน แสดงด้วยรูปสามเหลี่ยมในภาพ

และจากการทดลองของนิชิยามาและคณะ (Nishiyama; & et al. 2005: 15044) ที่ได้ศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิของ $\frac{1}{T_1}$ ในกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ($x=0.1, 0.2$) พบว่าจะมีพีคโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นอย่างชัดเจน โดยแสดงด้วยรูปวงกลมทึบและโปร่งในภาพ

และจากการทดลองของโยกิและคณะ (Yogi; & et al. 2003: 180501) ที่ได้ศึกษาการขึ้นกับอุณหภูมิของ $\frac{1}{T_1}$ ในกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ($x=1$) พบว่าจะไม่มีพีคโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้น โดยแสดงด้วยรูปสี่เหลี่ยมในภาพ

จากผลการทดลองเมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ จะเห็นว่าผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกับการทดลองที่ว่า กรณีที่ไม่มีสารเจือและกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อนจะมีพีคโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นอย่างชัดเจน ส่วนกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรงจะไม่มีพีคโคเฮียเรนซ์เกิดขึ้นเนื่องจากอิทธิพลของสารเจือ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษา และคำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส (w) และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส $\left(\frac{1}{T_1}\right)$ ของตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นดี เพื่อศึกษาผลของสารเจือ โดยได้ศึกษา 3 กรณี คือ กรณีไม่มีสารเจือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. สมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส
2. ฟังก์ชันกรีนของตัวนำเวดดิ้งที่ไม่มีสารเจือ
3. ฟังก์ชันกรีนของตัวนำเวดดิ้งที่มีสารเจือ
4. ใช้ฟังก์ชันกรีนของตัวนำเวดดิ้งที่มีสารเจือคำนวณหาความหนาแน่นสถานะของตัวนำเวดดิ้งที่มีสารเจือ
5. คำนวณหาค่าเฉลี่ยความหนาแน่นสถานะตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นดีที่มีสารเจือ
6. คำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส ของตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นดี

สรุปผลการวิจัย

ในการคำนวณหาสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส (w) และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส $\left(\frac{1}{T_1}\right)$ ของตัวนำเวดดิ้งแบบคลื่นดี ในกรณีที่ไม่มีสารเจือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง จากการคำนวณพบว่าสมการที่ได้ทั้งหมดอยู่ในรูปแบบอย่างง่ายโดยอยู่ในรูปของสัดส่วนของอุณหภูมิ (T) และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ ($\Delta_d(T)$) ที่ยกกำลังต่างๆ ตามสมการ (4.3) - (4.8) ซึ่งนำเสนอเป็นกราฟตามความสัมพันธ์ต่างๆ ดังได้แสดงในบทที่ 4 โดยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_r(0)$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของทั้ง 3 กรณี พบว่า ทั้ง 3 กรณี มีความสอดคล้องทฤษฎีบีซีเอส คือ ที่ศูนย์เคลวินได้ค่าช่องว่างพลังงานมากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤต ค่าช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์ จากการเปลี่ยนแปลงค่าช่องว่างพลังงานทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้น และช่องว่างพลังงานลดลงเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งสอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยวดยิ่งและทฤษฎีบีซีเอส

2. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{W}{2N_0^2}$ และ $\frac{1}{T_1}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของทั้ง 3 กรณีพบว่ากรณีไม่มีสารเจือและกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น เนื่องจากอิทธิพลของสารเจือ จากการเปลี่ยนแปลงค่าช่องว่างพลังงานทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้น จึงส่งผลให้ค่าของ $\frac{W}{2N_0^2}$ และ $\frac{1}{T_1}$ เพิ่มขึ้นด้วย

3. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{T_1 T}$ กับ $\frac{T}{T_c}$ ของทั้ง 3 กรณีพบว่ากรณีไม่มีสารเจือและกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น และจากการเปลี่ยนแปลงค่าช่องว่างพลังงานทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้น แต่ไม่มีผลต่อค่าของ $\frac{1}{T_1 T}$

อภิปรายผลการวิจัย

ในการวิจัยนี้ได้แสดงสมการความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส (w) และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส $\left(\frac{1}{T_1}\right)$ แบบประมาณ ของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีของ 3 กรณี คือ กรณีที่ไม่มีสารเจือ กรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน และกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ผลการคำนวณเชิงตัวเลขพบว่ากรณีที่ไม่มีสารเจือและกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างอ่อน ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะมีพีคเกิดขึ้นอย่างชัดเจน ส่วนกรณีที่มีศักย์การกระเจิงของสารเจืออย่างแรง ที่บริเวณต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตจะไม่มีพีคเกิดขึ้น จึงกล่าวได้ว่าอิทธิพลของสารเจือมีผลต่อการเกิดพีค ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความเข้มข้นของสารเจือ

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยนี้คำนวณความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะสปินของนิวเคลียส (w) และสมการอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส $\left(\frac{1}{T_1}\right)$ แบบประมาณ เพื่อศึกษาอิทธิพลของสารเจือ ซึ่งถ้าต้องการความละเอียดยิ่งขึ้นอาจตัดการประมาณทิ้ง ซึ่งจะยุ่งต่อการคำนวณมากขึ้น

ข้อจำกัดอีกข้อหนึ่ง คือ ในการวิจัยนี้ศึกษาเฉพาะตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นดีเท่านั้น ดังนั้นการทำวิจัยในอนาคต อาจพิจารณาตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นพี หรือ คลื่นเอฟ

ควรมีการทำการทดลองศึกษา $\frac{1}{T_1}$ ให้มากขึ้น โดยมีการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนของสารเจือแบบต่างๆ เพื่อดูว่ามีพีคของ $\frac{1}{T_1}$ เกิดขึ้นหรือไม่ ซึ่งจะเป็นการรับรองว่าผลการคำนวณที่ผู้วิจัยนำมาถูกต้องแน่นอน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Abrikosov, A. A.; & Gor'kov, L.P. (1994). *Comment on "Theory of Impure Superconductors : Anderson Versus Abrikosov and Gor'kov"*. Physical Review B. 49:12337
- Abu Alrub, T. R. ; & Curnoe, S. H. (2007). *Impurity Induced Density of State and Residual Transport in Nonunitary Superconductors*. Physical Review B. 76:184511.
- Balatsky, A.V. ; Vekhter, I. ; & Zhu, J. X. (2006). *Impurity-induced states in Conventional and Unconventional Superconductors*. Review Modern Physics. 78: 373.
- Bang, Y.; Graf, M. J. ; & Balatsky, A. V. (2002). *Nuclear Spin-lattice Relaxation rate in the D+*i*D Superconducting State : Implication for CoO Superconductor*. Physical Review B. 74: 054514.
- Bardeen, J. ; Cooper, N. ; & Schrieffer, J. R. (1959). *Theory of Superconductivity*. Physical Review. 108 (5): 1175 – 1204.
- Bednorz, J.G. ; & Muller. K. A.(1986). *Possible High T_c Superconductivity in the BaLaCuO System*. Zeitschrift fuer Physik B. 64: 189 –193.
- Bennemann, K.H. ; & Ketterson, J.B. (2002). *The Physics of Superconductors*. New York: Springer.
- Buckel, W. (1991). *Superconductivity : Fundamental and Applications*. New York : VCH Publisher Inc.
- Burns, G. (1992). *High-Temperature Superconductivity*, Academic Press. Inc. Boston.
- Buzea, C. & Yamaskita, T. (2001). *Review of the Superconducting Properties of MgB₂*. Superconductor Science Technology. 14: 115 -146.
- Chu, C.W. ;& et al. (1987). *Evidence for Superconductivity Above 40 k in the La-Ba- Cu-O Compound System*. Physical Review Letters .58(4): 405 – 410.
- Cowan, B. (1997). *Nuclear Magnetic Resonance and Relaxation*. Cambridge University Press, New York.
- Eremin, I. ;& et al. (2002). *Electronic Theory for the Normal State Spin Dynamics in Sr₂RuO₄: Anisotropy Due to Spin-orbit Coupling*. Physical Review B. 65 : 220502.

- Gradshteyn; & Ryzhik. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic press, Inc.
- Harlingen, D. J. (1995). Review Modern Physics. 67: 515- 536.
- Ishida, K. ; & et al. (1999). *Anisotropic Superconducting Gap in the Spin-Triplet Superconductor Sr_2RuO_4 : Evidence from a Ru-NQR Study*. Physical Review Letters. 84(23): 5387.
- Kittel, C. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. 7th edition. John Wiley & Sons. New York.
- Kotegawa, H. ; & et al. (2007). *Evidence for Unconventional Strong-coupling Superconductivity in $PrOs_4Sb_{12}$: An Sb Nuclear Quadrupole Resonance (NQR) Study*. Physical Review Letters. 90: 027001.
- Kresin, H. ; & Wolf, V. Z. (1990). *Fundamentals of Superconductors*. New York.
- Kubert, C. (2003). *Distinguishing Models for the Pseudo-Gap in Cuprate Superconductors by Probing the Spatial Distribution of Impurity States*. Brazilian Journal of Physics. 33(4): 754.
- Leadon, R. ; & Suhl, H. (1967). *Properties of an Abrikosov Fluxoid in Type-II Superconductor*. Physical Review. 165(2): 596.
- Matsumoto, M. (2001). *Impurity Site NMR Relaxation in Unconventional Superconductors*. Journal of the Physical Society of Japan. 70(9): 2505 - 2508.
- Matsumoto, M. ; & Sigrist, M. (1999). *Quasiparticle State Near the Surface and the Domain Wall in a $p_x \pm ip_y$ -wave Superconductor*. Journal of the Physical Society of Japan. 68: 994 -1007.
- Maxwell, E. (1950). *Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury*. Physical Review Letters. 78: 477.
- Mehring, M. (1989). *Nuclear Magnetic Resonance in High- T_c Superconductors*. IMB J. RES Develop. 33 : 349.
- Meissner, W. ; & Ochsenfeld, R. (1933). Naturwissenschaften. 21: 787.
- Nagamatsu, N. ; & Akimitsu, N. (2001). *Superconductivity at 39 Kin Magnesium Diboride*. Nature. 410: 63.

- Nishiyama, M. ; & et al. (2005). *Impurity Effect as a Probe for the Gap Function in the Filled Skutterudite Compound Superconductor PrOs₄Sb₁₂: Sb-NQR Study*. Journal of the Physical Society of Japan. 74: 15044
- Omar, M. A. (1975). *Elementary Solid State Physic: Principles and Applications*. Singapore: 495.
- Onnes, K.H. (1911). *Communication – Laboratory of Leiden*. London. 119: 1-1226. Publishing Corporation.
- Sigrist, M. (2006). *Unconventional Superconductivity*. Physical Review B. 73:49.
- Stenger, V. A.; & et al. (1995). *NuclearMagnetic Resonance of A₃C₆₀ Superconductors*. Physical Review Letter .74(9): 1649-1652.
- Subramanyam. S. V. ; & Gopal. E. S. R. (1989). *High-Temperature Superconductor*. Wiley Aeastern Limited.
- Warren, W.W. ; & et al. (1987). Physical Review Letters. 59(16): 1860-1863.
- Worthington, T.K. ; Gallgher, W.J. ; & Dinger, T.R . (1987). Physical Review Letters. 59: 1160.
- Yogi, M. ; & et al. (2003). *Sb-NQR Probe for Superconducting Property in the Pr-based Filled Skutterudite Compound PrRu₄Sb₁₂*. Physical Review B. 67 : 180501(R).
- Yogi, M.; & et al. (2004). *Evidence for aNovel State of Superconductivity in Noncentrosymmetric CePt₃S : A ¹⁹⁵Pt-NMR Study*. Physical Review Letters. 93(2): 027003(1-4).
- Nuclear Magnetic Resonance (NMR) Spectroscopy. Retrieved October 25, 2007, from [http:// www.chem.ucalgary.ca/. /ch13/ch13-nmr-1.html](http://www.chem.ucalgary.ca/. /ch13/ch13-nmr-1.html)

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

สูตรสมการฟังก์ชันอิลลิปติก ชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2

จาก Table of Integrals, Series, and Products

ที่มา: Gradshteyn; & Ryzhik. (1980). Academic press, Inc.

จากสมการ หน้า 158 ข้อ 2.583 ข้อย่อย 1

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \, dx = E(x,k) \quad ; k < 1 \quad (1)$$

จากสมการ หน้า 160 ข้อ 2.583 ข้อย่อย 22

$$\int (\sqrt{1-k^2 \sin^2 x})^3 \, dx = \frac{2}{3}(2-k^2)E(x,k) - \frac{1-k^2}{3}F(x,k) + \frac{k^2}{3}\sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \sin x \cos x \quad ; k < 1 \quad (2)$$

จากสมการ หน้า 162 ข้อ 2.584 ข้อย่อย 1

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \, dx = F(x,k) \quad ; k < 1 \quad (3)$$

จากสมการ หน้า 164 ข้อ 2.584 ข้อย่อย 37

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 x})^3} = \frac{1}{1-k^2}E(x,k) - \frac{k^2}{1-k^2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad ; k < 1 \quad (4)$$

จากสมการ หน้า 176 ข้อ 2.612 ข้อย่อย 1

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}} = F\left(\arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}}, k\right) \quad ; k < 1 \quad (5)$$

จากสมการ หน้า 176 ข้อ 2.612 ข้อย่อย 2

$$\int \sqrt{1-k^2 \cos^2 2x} \, dx = E\left(\arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}}, k\right) - \frac{k^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 x}} \quad ; k < 1 \quad (6)$$

จากสมการ หน้า 174 คือ

1. $k^2 = -p^2$
2. $k'^2 = 1+p^2$
3. $F(x, k) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)$
4. $E(x, k) = \sqrt{1+p^2} E\left(\alpha, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - p^2 \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}$

เมื่อ $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}$

จากสมการ หน้า 164 ข้อ 2.584 ข้อย่อย 37 คือ

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{1-k^2 \sin^2 x})^3} = \frac{1}{1-k^2} E(x, k) - \frac{k^2}{1-k^2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad ; k < 1$$

แทนค่าสมการหน้า 174 ในหน้า 164 ข้อ 2.584 ข้อย่อย 37 จะได้

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt{1+p^2 \sin^2 x})^3} &= \frac{1}{1+p^2} \left[\sqrt{1+p^2} E\left(\arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - \frac{p^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right] \\ &\quad - \frac{(-p^2)}{1+p^2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} E\left(\arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) \quad ; k < 1 \end{aligned} \quad (7)$$

จากสมการ หน้า 160 ข้อ 2.583 ข้อย่อย 22 คือ

$$\int (\sqrt{1-k^2 \sin^2 x})^3 dx = \frac{2}{3}(2-k^2)E(x,k) - \frac{1-k^2}{3}F(x,k) + \frac{k^2}{3}\sqrt{1-k^2 \sin^2 x} \sin x \cos x$$

แทนค่าสมการหน้า 174 ในหน้า 160 ข้อ 2.583 ข้อย่อย 22 จะได้

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{1+p^2 \sin^2 x})^3 dx &= \frac{2}{3}(2+p^2) \left[\sqrt{1+p^2} E \left(\arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{p^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right] \\ &\quad - \frac{(1+p^2)}{3} \left[\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} F \left(\arcsin \frac{\sqrt{1+k^2} \sin x}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 x}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{(-p^2)}{3} \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} \sin x \cos x \quad ; k < 1 \\ &= \frac{2}{3}(2+p^2) \left[\sqrt{1+p^2} E \left(\arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) - \frac{p^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}} \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{1+p^2}}{3} F \left(\arcsin \frac{\sqrt{1+p^2} \sin x}{\sqrt{1+p^2 \sin^2 x}}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) \\ &\quad - \frac{p^2}{3} \sqrt{1+p^2 \sin^2 x} \sin x \cos x \quad ; k < 1 \end{aligned} \quad (8)$$

จากนิยาม หน้า 907 ข้อ 8.121 ข้อย่อย 3

$$F(n\pi \pm \varphi, k) = 2nK(k) \pm F(\varphi, k) \quad ; k < 1$$

(9)

จากนิยาม หน้า 907 ข้อ 8.121 ข้อย่อย 4

$$E(n\pi \pm \varphi, k) = 2nE(k) \pm E(\varphi, k) \quad ; k < 1 \quad (10)$$

จากนิยาม หน้า 908 ข้อ 8.126 ข้อย่อย 3

$$K\left(\frac{1}{k}\right) = k K(k) \quad ; k > 1 \quad (11)$$

จากนิยาม หน้า 908 ข้อ 8.127

$$E\left(\varphi, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \left[E(\varphi, k) + (k^2 - 1)F(\varphi, k) \right]$$

จะได้

$$E\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} E(k) + \left(\frac{k^2 - 1}{k}\right) K(k) \quad ; k > 1$$

(12)

ผลการแสดงค่าอุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงาน

ตาราง 1 แสดงค่าช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง

สารประกอบ	$2\Delta_0 / k_B T_c$	T_c	Δ_0
YBa ₂ Cu ₃ O ₇	5	93	232.50
Sr ₂ RuO ₄ (Ishida; & et. 1999:5387)	3.5	1.5	1.31
CePt ₃ Si (Yogi; & et. 2004:027003)	5.1	0.75	1.91
PrOs ₄ Sb ₁₂ (Kotegawa; & et. 2007:027001)	5.1	1.85	4.8

ภาคผนวก ข

โปรแกรม Mathematica version 5.1

```
ClearAll [p1, pl2, vh1, vh2, ff11, ff22, nn, l1, nn1, l11, D, Dt, fff1, fff3]
D=100;
wd=700;
u=0.001;

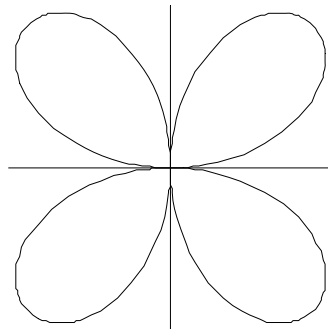
nn = NIntegrate[ArcTan[1 + u^2] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
l1 = NIntegrate[ArcTan[D*s] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
pl1 = NIntegrate[ArcTan[2*p] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
vh1 = 1/NIntegrate[ArcTan[2*p] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
ff11 = pl1;

h=0.0000001; tc=80;
b=3;
While[b>.000000001
  p1=tc;
  sff=ff11;
  ssf1=ff11;
  tc=tc-sff*h;
  b=Abs[tc-p1];
  Print["error-> ", b, " sff ", sff];
  Print["p1=", D, " tc=", Re, " ssf1=", ssf1];
  nn1 = NIntegrate[ArcTan[1 + u^2] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
  l11 = NIntegrate[ArcTan[D*s] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
  pl1 = NIntegrate[ArcTan[2*p] e^k x, {x, 0, wd}, 2*p, MinRecursion 2, MaxRecursion 5]
  ff22 = pl1;
  fff1 = ttc - 0.350 * Dt[k] + 0.453 * Dt[k] + 0.104 * Dt[k] + 0.306 * Dt[k]
  fff3 = ttc - 0.38 * Dt[k] + 0.0157 * Dt[k] + 0.7351 * Dt[k] + 0.896 * Dt[k] + 0.694 * Dt[k]

h=0.001; Dt=D-1;
ttc=0;
While[Dt>b
  b=3;
  While[b>.000000001
    p1=ttc;
    sff=ff22;
    ssf1=ff22;
    ttc=ttc-sff*h;
    b=Abs[ttc-p1];
    Print["tc=", Re, " sff1=", sff1, " fff1=", fff1, " fff3=", fff3, " 2*tc*ttc=", 2*tc*ttc, " ttc*ttc=", ttc*ttc];
    Dt=Dt-3;
```

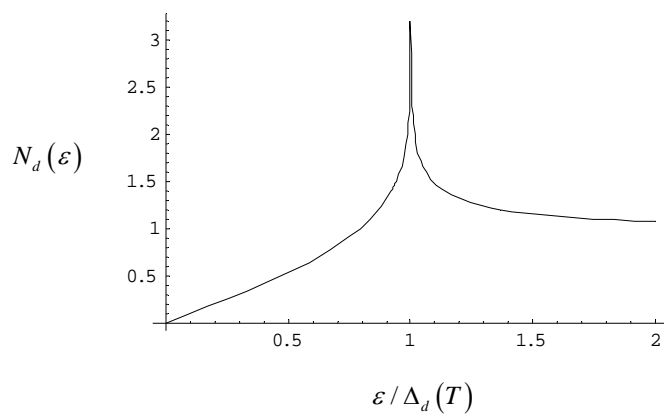
ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณหาค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น d_{xy}

```
ParametricPlot[{Sin[2t] Sin[t], Sin[2t] Cos[t]}, {t, 0, 2π},
  Axes→True, Ticks→False, AspectRatio→Automatic]
```



ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณหาค่าความหนาแน่นสถานะ

```
ClearAll["Global`*"];
u = 0;
m1 = 1;
Plot[NIntegrate[1/Sqrt[1 - (u + m1 * Cos[2 * p])^2], {p, 0, 2 * π}, MinRecursion -> 5,
  PlotRange -> {0, 2}]]
```



ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	น.ส. เกศริน มีมล
วันเดือนปีเกิด	12 พฤษภาคม 2526
สถานที่เกิด	อ.เมือง จ.แพร่
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	160 หมู่ 4 ต.ทุ่งไ้้ง อ. เมือง จ. แพร่ 54000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2544	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนถิ่นโสภาวิทยา
พ.ศ. 2548	วท.บ. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2551	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ