

๕๑๐.๙๑๒

๐๑๑๒๐

๙.๓

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
ของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

ปริญญานิพนธ์

ของ

อำพล ได้ตอบ

๒๒ ต.ค. ๒๕๓๙

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม ๒๕๓๙

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

B. ๔๖๘๔๕

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปัญหานี้นับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอก
คณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

..... กว.รรณ พูลสวัสดิ์ ประธาน
(ผศ.กชวรรณ พูลสวัสดิ์)

.....  กรรมการ
(ผศ.อภิชัย บวรกิตวงศ์)

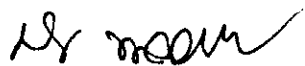
คณะกรรมการสอบ

..... กว.รรณ พูลสวัสดิ์ ประธาน
(ผศ.กชวรรณ พูลสวัสดิ์)

.....  กรรมการ
(ผศ.อภิชัย บวรกิตวงศ์)

..... วิไล สิริสุทธิรัตน์ กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผศ.วิไล สิริสุทธิรัตน์)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....  คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ดร.ศิริภา พูลสุวรรณ)

วันที่ ... ๗ ... เดือน ... สิงหาคม ... พ.ศ. ๒๕๖๑ ...

ประกาศขอบคุณ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความเมตตาจากผู้ช่วยศาสตราจารย์กชวรรณ พูลสวัสดิ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บวรภักตวงศ์และผู้ช่วยศาสตราจารย์วิไล สิริสุทธิรัตน์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา ช่วยเหลือและชี้แนะแนวทางการแก้ปัญหาตลอดระยะเวลาของการดำเนินการวิจัย ด้วยวิญญูญาณของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง มา ณ โอกาสนี้

กราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.สุเทพ ทองอยู่ ที่ได้กรุณาเป็นผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย พร้อมทั้งกรุณาให้คำแนะนำอย่างดียิ่ง

กราบขอบพระคุณว่าที่ร้อยตรีวันกร จุลธวัช ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดจันทราวาส (ศุขประสารราษฎร์) ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกแก่ผู้วิจัยโดยตลอด

ถ้าปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีประโยชน์และเกิดคุณค่าในอนาคต ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชา พระคุณของบิดามารดา ครู-อาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านของผู้วิจัย

อำพล ได้ตอบ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	3
สมมุติฐานของการวิจัย	3
ขอบเขตของการวิจัย	3
คำนิยามศัพท์เฉพาะ	4
ข้อตกลงเบื้องต้น	4
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์	5
งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่นำเนื้อหาใน ระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า	8
งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการกำลังสองและจำนวนเชิงซ้อน	11
เอกสารที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการพหุนาม	12
3 วิธีดำเนินการวิจัย	14
กลุ่มตัวอย่าง	14
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	14
วิธีดำเนินการวิจัย	16
การวิเคราะห์ข้อมูล	16
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	17
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	18

บทที่	หน้า
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	18
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	23
ความมุ่งหมายของการวิจัย	23
สมมติฐานของการวิจัย	23
วิธีดำเนินการวิจัย	23
การวิเคราะห์ข้อมูล	24
สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล	24
อภิปรายผล	25
ข้อเสนอแนะ	26
บรรณานุกรม	27
ภาคผนวก	32
ภาคผนวก ก.	
การวิเคราะห์ข้อมูล	33
ภาคผนวก ข.	
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน	
ของสมการพหุนาม	40
ภาคผนวก ค.	
บทเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม	47
ประวัติย่อผู้วิจัย	74

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	ค่าร้อยละ พิสัย มัธยฐาน และฐานนิยมของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียน กลุ่มตัวอย่าง	19
2	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป	20
3	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	21
4	ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ สมการพหุนาม	21
5	ค่า p และ r ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม	34
6	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม	35
7	คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการทำ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็น จำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม	36
8	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน ของสมการพหุนาม	37

บทที่ 1

บทนำ

บทนำ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งที่ทำให้วิทยาการสาขาต่าง ๆ และเทคโนโลยี
เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว อาชีพต่าง ๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจวิชาคณิตศาสตร์
เป็นพื้นฐาน เช่น วิศวกรไฟฟ้าต้องมีความรู้เรื่องแคลคูลัส สมการดิฟเฟอเรนเชียล อุตสาหกรรม
ต้องมีความรู้เรื่องสถิติด้วยการควบคุมคุณภาพ ผู้บริหารต้องสามารถแปลความของข้อมูลสถิติ
ได้(เสริมศักดิ์ สุรวัลลก. 2535 : 24-25) นอกจากนี้วิชาคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำหรับ
การศึกษาค้นคว้าวิจัยทุกประเภท อาจกล่าวได้ว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญที่จะนำสังคม
ไปสู่ความเจริญก้าวหน้า(วรรณิ์ โสภประยูร. 2526 : คำนำ)และเนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์
เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด กระบวนการและเหตุผล จึงทำให้ผู้เรียนเป็นผู้รู้และใช้ความรู้
อย่างรอบคอบ เป็นระเบียบ ละเอียดถี่ถ้วนและมีเหตุผล เป็นคนช่างสังเกต และมีความ
สามารถในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้เป็นพื้นฐานสำคัญที่จะทำให้มนุษย์เป็นผู้มีความ
สามารถในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่พบในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ(จุไร ทวีรัตน์.
2528 : 2-3) จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าวประกอบความเชื่อที่ว่าผู้เรียนต่าง
ระดับชั้นสามารถเรียนรู้เนื้อหาอย่างเดียวกันได้ ถ้าจัดเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับวัยของ
ผู้เรียน(Servais and Varga. 1971 : 21) จึงได้มีนักวิจัยทางการศึกษาพยายามนำ
หลักการและเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษาไปทดลองสอนในระดับ
ประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษา โดยปรับปรุงเนื้อหาและคำอธิบายให้เหมาะสมกับวัยของ
ผู้เรียน นอกจากนี้ยังเน้นความสำคัญทางโครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์และการให้เหตุผล
มากขึ้นกว่าเดิม ซึ่งแนวทางดังกล่าวมีผลดีหลายประการ เช่น ช่วยลดความแตกต่างระหว่าง
คณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษากับคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา (คณะวิชาการศึกษา. 2513 :
25) ช่วยให้นักวิชาการแขนงอื่นๆ ที่ต้องการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ สามารถนำหลักการทาง
คณิตศาสตร์ไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น (กรมการฝึกหัดครู. 2509 : 3)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.

2533) กำหนดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน สมการพหุนาม ฯลฯ โดยเรื่องสมการพหุนามกล่าวถึงการแก้สมการพหุนามกำลัง n ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ในขณะที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) กำหนดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรียนเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม สมการกำลังสอง ระบบสมการ ฯลฯ โดยเรื่องสมการกำลังสองกล่าวถึงการแก้สมการกำลังสองในระบบจำนวนจริง ซึ่งเขียนในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ แยกเป็น 3 กรณี คือ กรณีที่ 1 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว กรณีที่ 2 ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากันสองจำนวน และกรณีที่ 3 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ จะไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการ (คำตอบของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน) ดังนั้นถ้านำเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อนมาสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จะทำให้นักเรียนหาคำตอบของสมการกำลังสองได้ทั้ง 3 กรณี และช่วยให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างของระบบจำนวนดีขึ้น นอกจากนี้จำนวนเชิงซ้อนยังเป็นพื้นฐานของวิชาทฤษฎีตัวแปรเชิงซ้อน (Theory of Complex Variable) ซึ่งวิชานี้เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ ทั้งยังเป็นประโยชน์สำหรับการแก้ปัญหาต่างๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร เช่น การนำเอาคุณสมบัติ กฎเกณฑ์ และทฤษฎีต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้อธิบายและแก้ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของไหล (Fluid Mechanics) ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic Theory) ทฤษฎีความต่างศักย์ไฟฟ้า (Potential Theory) เป็นต้น (Spiegel. 1964 : 2) และในปี พ.ศ. 2526 เจลียว เทศกลัน (2526 : 31) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาสรุปได้ว่าควรเริ่มสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่ยังไม่ได้อธิบายเกี่ยวกับการนำความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนไปช่วยในการหาคำตอบของสมการพหุนาม

จากคำกล่าวของบรูเนอร์ (Bruner. 1960 : 33) ที่ว่าเราสามารถสอนวิชาใด ๆ ให้แก่นักเรียนระดับใดก็ได้ แต่ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนในระดับนั้น ๆ เสียก่อน ผู้วิจัยจึงได้เรียบเรียงเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนามให้ง่ายและเหมาะสมกับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเรื่องจำนวนเชิงซ้อนกล่าวถึงเฉพาะความหมายและการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน การบวก การลบ และการคูณจำนวนเชิงซ้อน และเรื่องสมการพหุนามกล่าวถึงการแก้สมการพหุนามที่มีกำลังไม่เกินสี่ โดยวิธี

แยกตัวประกอบ ซึ่งอาศัยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสมบัติการแจกแจง และนำไปทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อศึกษานักเรียนสามารถเรียนเนื้อหาดังกล่าวได้หรือไม่ ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ซึ่งผลจากการศึกษาครั้งนี้อาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกเนื้อหาเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม เพื่อบรรจุเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยจะทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหาเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม มาสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 และ ค 012 โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์) จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2538 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ซึ่งสุ่มมาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 9 ห้องเรียน จำนวน 360 คน

2. การวิจัยครั้งนี้ มุ่งศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. จำนวนเชิงซ้อน

1.1 ความหมายและการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

1.2 การบวก การลบ และการคูณจำนวนเชิงซ้อน

2. การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

2.1 การแก้สมการพหุนามกำลังหนึ่ง

2.2 การแก้สมการพหุนามกำลังสอง

2.3 การแก้สมการพหุนามกำลังสามและกำลังสี่โดยวิธีแยกตัวประกอบ ที่

อาศัยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสมบัติการแจกแจง

✱3. ตัวแปรที่ศึกษาคือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ✱

✓คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หมายถึงนักเรียนที่กำลังศึกษาอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 และ ค 012 โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์) จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2538

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหมายถึง คะแนนสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งได้จากการทำแบบทดสอบเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

3. เกณฑ์หมายถึงร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือถ้าผู้เรียนได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ถือว่าสอบผ่านเกณฑ์(กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

4. สมการพหุนามหมายถึง สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีกำลังไม่เกิน 4

ข้อตกลงเบื้องต้น

การเรียนการสอนเป็นไปภายใต้ภาวะปกติในชั้นเรียนโดยทั่ว ๆ ไป

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
2. งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ที่นำเนื้อหาในระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า
3. งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสองและจำนวนเชิงซ้อน
4. เอกสารที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการพหุนาม

1. เอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ สามารถสรุปได้ดังนี้

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถทางด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวิลสัน(Wilson. 1971 : 643-696) ได้จำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาออกเป็น 4 ระดับคือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ(Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด แบ่งออกเป็น 3 ชั้นดังนี้
 - 1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง(Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่จะระลึกถึงข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้วคำถามที่วัดความสามารถในระดับนี้จะเกี่ยวกับ ข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นเวลานานแล้ว
 - 1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม(Knowledge of Terminology)

เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ(Ability of Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยามและกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มา ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ(Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณแต่ซับซ้อนกว่า แบ่งออกเป็น 6 ชั้นดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับนิยาม (Knowledge of Concepts) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำที่เกี่ยวกับข้อเท็จจริงเพราะนิยามเป็นนามธรรมที่ประมวลข้อเท็จจริงต่าง ๆ ซึ่งต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างของนิยามนั้น โดยใช้คำพูดของตนหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ซึ่งเขียนในรูปใหม่หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นการวัดความจำ

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์ และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป(Knowledge of Principles, Rules and Generalization) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับนิยามไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญหา ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนพบเป็นครั้งแรก อาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบของปัญหาจากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability of Transform Problem from One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นสมการที่มีความหมายคงเดิม โดยไม่รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหาหลังจากแปลแล้ว อาจกล่าวได้ว่าเป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล(Ability to Follow a

Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่ว ๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problems) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่น ๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหา ซึ่งอาจอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนพบในระหว่างเรียน นักเรียนต้องเลือกกระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาจนได้คำตอบ พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งเป็น 4 ชั้น คือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routing Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบของปัญหานั้น

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparision) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหานี้ อาจต้องใช้วิธีการคิดคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่ประสบอยู่หรือต้องแยกโจทย์ปัญหาออกพิจารณาเป็นส่วน ๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบ ลักษณะ โครงสร้างที่เหมือนกัน และการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns , Isomorphisms and Symetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่องตั้งแต่การระลึกได้ ข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาให้พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคย

เห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลงแต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมาพร้อมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 5 ชั้นดังนี้

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) คำถามในชั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อนไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจในแนวคิด นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์ให้แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้ในการแก้โจทย์แทนการจำความสัมพันธ์เดิมที่เคยพบมาแล้ว

4.3 ความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ (Ability to Cite Proofs) เป็นความสามารถในการสร้างภาษาเพื่อยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล โดยอาศัยนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้ว ไปพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน

4.4 ความสามารถในการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องให้มีเหตุผลใช้ได้ เป็นกรณีทั่วไป (Ability to Formulate and Validate Generalizations) เป็นความสามารถในการค้นพบสูตรหรือกระบวนการแก้ปัญหาและพิสูจน์ว่าใช้เป็นกรณีทั่วไปได้

2. งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่นำเนื้อหาในระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า

นักการศึกษาหลายท่าน ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่นำเนื้อหาในระดับสูงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า ดังเช่น

สุเทพ ทองอยู่ (2516 : 35) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นได้หรือไม่ และเพื่อเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียนแต่ละระดับชั้นในการเรียนเรื่องนี้ ผลการศึกษาสรุปได้ว่าควรเริ่มสอนเรื่องความน่าจะเป็นตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และโชคชัย ศักดิ์ศรี (2516 : 32) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพของนักเรียนชั้นประถม

ศึกษาตอนปลาย ผลการศึกษาสรุปได้ว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพได้ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ไม่สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพได้ และผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สูงกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

นอกจากนี้วิทยา รุ่งอรุณพิศาล(2517 : 20) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพ(Transformation Geometry) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการศึกษาสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพเบื้องต้นได้ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพเบื้องต้นสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพเบื้องต้นแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ในทำนองเดียวกันณรงค์ ปันนัม(2519 : 19) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นควรเริ่มสอนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และสุมานะ อาจหาญ(2520 : 20) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นควรจะเริ่มสอนเรื่องพีชคณิตเบื้องต้นตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ส่วนนพดล สุธาพาณิชย์(2523 : 36) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอญคฺลเียยนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 เพื่อศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 เรียนวิชาเรขาคณิตนอญคฺลเียยนได้หรือไม่ ผลการศึกษาสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตนอญคฺลเียยนได้และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ปีที่ 4 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตอนุแคลิเดียนได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ
 ศรีน ประกิจเพชร(2526 : 35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องตรรกสัญลักษณ์เบื้องต้นในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
 หรือไม่ ผลการวิจัยสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียน
 เรื่องตรรกสัญลักษณ์เบื้องต้นในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นอกจากนี้วันชัย ทัพพะประ
 (2529 : 29-31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1
 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องเวกเตอร์หรือไม่ และเพื่อเป็นแนวทางในการ
 เสนอแนะการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยสรุปได้ว่า
 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องเวกเตอร์

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศนั้นผู้ทำการวิจัยไว้ได้แก่ กับริด(Gubrud. 1971 :
 6468-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของ
 นักเรียนเกรด 8 เกรด 9 และเกรด 10 ผลการวิจัยสรุปได้ว่านักเรียนเกรด 8 และเกรด 9
 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำและนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง
 และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์แต่นักเรียน
 เกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการ
 การรวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 และ
 นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับที่สูงกว่ามีความ
 สามารถในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

นอกจากนี้ไวท์(White. 1974 : 1969-A)ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถ
 ของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 ในการเรียนมโนภาพเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการ
 วิจัยสรุปได้ว่านักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนมโนภาพ
 เบื้องต้นของความน่าจะเป็น และไวท์ได้เสนอให้นำเนื้อหาเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นบรรจุ
 ในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 และกัลลิก(Gallick. 1971
 : 4035-A) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ของนักเรียน
 เกรด 5 เกรด 6 เกรด 9 และเกรด 10 ผลการศึกษารวบรวมได้ว่านักเรียนเกรด 5 และ
 เกรด 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยมีความสามารถ
 ไม่แตกต่างกัน นักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชา
 เรขาคณิตวิเคราะห์ โดยนักเรียนเกรด 9 มีความสามารถมากกว่านักเรียนเกรด 10

นักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 มีความสามารถในการเรียนมากกว่านักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 ดังนั้นควรสอนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ในเกรด 9

3. งานวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสองและจำนวนเชิงซ้อน

จากการศึกษางานวิจัยพบว่า มีนักการศึกษาหลายท่านที่สนใจทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสองและจำนวนเชิงซ้อน ดังเช่น

เบญญา ทองเต็ม(2533 : 56) ได้ทำการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสอง โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนจนะวิทยา จังหวัดสงขลา ผลการศึกษาสรุปได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนจนะวิทยา โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

นอกจากนี้ปรีชา เนาว์เย็นผล(2520 : 122) ได้ทำการทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน ของนักศึกษาชั้น ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติ ผลการศึกษาสรุปได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและการส่งวนความจำระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และวัฒนา นันท์(2524 : 38) ได้ศึกษาวิธีสอนแบบค้นพบและวิธีสอนแบบบรรยายกับเนื้อหาเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อน สำหรับนักศึกษาชั้น ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี ผลการศึกษาสรุปได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบค้นพบและกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบบรรยายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษากลุ่มสูงและกลุ่มต่ำแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ในทำนองเดียวกันเจสสิว เทศกลิ่น(2526 : 31) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์เรื่องจำนวนเชิงซ้อนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ไม่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ดังนั้นควรเริ่มสอนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (เฉพาะที่เรียนคณิตศาสตร์สายที่ 1 เป็นวิชาเลือก)

4. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์เรื่องสมการพหุนาม

พิจารณาสมการพหุนามกำลังต่าง ๆ และคำตอบของแต่ละสมการ เช่น $ax + b = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ทุกสมการ จะมีคำตอบในระบบจำนวนตรรกยะ $x^2 - 2 = 0$ มีคำตอบในระบบจำนวนอตรรกยะ และ $x^2 + 2 = 0$ ไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง แต่มีคำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อน

สังเกตได้ว่าสมการพหุนามกำลังต่าง ๆ จะมีคำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อนเสมอ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวในทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra) ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra)

สมการพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ที่มีกำลังอย่างน้อยหนึ่ง และมีสัมประสิทธิ์ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ทุกสมการ จะมีคำตอบอย่างน้อยหนึ่งคำตอบในฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน

รากของสมการ

ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามเหนือฟิลด์ F เรากล่าวว่า c ในฟิลด์ F เป็น รากของพหุนาม $f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $f(c) = 0$ และ c เป็น คำตอบของสมการพหุนาม $f(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $f(c) = 0$

ดังนั้น c เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $f(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ c เป็นรากของพหุนาม $f(x)$

มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับรากของพหุนามที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 1

พหุนาม $f(x)$ กำลัง n เมื่อ $n \geq 1$ เหนือฟิลด์ F จะมีรากอย่างมาก n รากใน F จากทฤษฎีบทนี้กล่าวได้ว่าถ้าพหุนาม $f(x)$ กำลัง n เมื่อ $n \geq 1$ เหนือฟิลด์ F มีรากใน F แล้ว จะมีจำนวนรากไม่เกิน n ราก

สังเกตว่ามีสมการเหนือฟิลด์บางฟิลด์ไม่มีรากในฟิลด์นั้น ตัวอย่างเช่น $x^2 - 2$ เป็นพหุนามเหนือฟิลด์ของจำนวนตรรกยะ แต่ไม่มีรากในฟิลด์ของจำนวนตรรกยะ และ $x^2 + 2$ เป็นพหุนามเหนือฟิลด์ของจำนวนจริง แต่ไม่มีรากในฟิลด์ของจำนวนจริง

แต่จากทฤษฎีบทพื้นฐานทางพีชคณิตยืนยันว่า แต่ละพหุนามเหนือฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน จะมีรากในฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งราก ดังนั้นประกันได้ว่าพหุนาม $x^2 + 2$ จะมี

รากในฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน

จากทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบทพื้นฐานของพีชคณิต สามารถพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทที่ 2 ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 แต่ละพหุนามกำลัง n เมื่อ $n \geq 1$ เหนือฟิลด์ C ของจำนวนเชิงซ้อน จะมีราก n ราก ใน C (Durbin. 1977 : 247)

จากทฤษฎีบท 2 มีผลตามมว่า

สมการพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ $n \geq 1$ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะมีคำตอบ n คำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ในกรณีที่ $(x - c)^m$ หาว $f(x)$ ลงตัว โดยไม่มี $x - c$ ที่มีกำลังมากกว่า m ตัวอื่น หาว $f(x)$ ลงตัว จะได้ c เป็นรากของพหุนาม $f(x)$ ที่ซ้ำ m ราก และ ได้ c เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $f(x) = 0$ ที่ซ้ำกัน m ครั้ง

ในการนับจำนวนคำตอบของสมการพหุนามนั้น ถ้าเรานับจำนวนคำตอบของสมการพหุนามที่ซ้ำกัน m ครั้ง เป็น m คำตอบ แล้วจำนวนคำตอบของสมการพหุนามนั้นจะเท่ากับ เลขชี้กำลังของสมการพหุนามนั้น

ตัวอย่างเช่น พหุนาม $x^3 - 2x^2 - 2x + 8 = (x - 2)^2(x + 2)$ มี 2 เป็นรากที่ซ้ำกัน 2 ราก และ -2 อีกหนึ่งราก ดังนั้นสมการ $x^3 - 2x^2 - 2x + 8 = 0$ มีคำตอบ 3 คำตอบ คือ -2, 2 และ 2

สามารถแสดงได้ว่าสมการกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$ มีคำตอบ 2 คำตอบ คือ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ และ

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ คำตอบจะเป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ คำตอบจะเป็นจำนวนจริงสองจำนวนที่ต่างกัน และถ้า $b^2 - 4ac < 0$ คำตอบจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่เป็นสังยุคซึ่งกันและกัน

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชา คณิตศาสตร์ ค 011 และ ค 012 โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์)จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2538 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม(Cluster Sampling) โดยใช้วิธีจับฉลากมา 1 ห้องเรียน จากทั้งหมด 9 ห้องเรียน จำนวน 360 คน สาเหตุที่ใช้วิธีสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม(Cluster Sampling) เพราะโรงเรียนได้จัดนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำเข้าชั้นเรียนในแต่ละห้องแบบคละกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ผู้วิจัย
เรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอน 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. จำนวนเชิงซ้อน 3 คาบ

1.1 ความหมายและการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

1.2 การบวก การลบ และการคูณจำนวนเชิงซ้อน

2. การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม 5 คาบ

2.1 การแก้สมการพหุนามกำลังหนึ่ง

2.2 การแก้สมการพหุนามกำลังสอง

2.3 การแก้สมการพหุนามกำลังสามและกำลังสี่ โดยวิธีแยกตัวประกอบ

ซึ่งอาศัยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสมบัติการแจกแจง

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหา โดยแบ่งเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำสั้น ๆ 3 ข้อ

2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาหลักสูตรและเนื้อหาเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม โดยศึกษาจากเอกสารและตำราที่เกี่ยวข้อง

2.2 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามดังต่อไปนี้

มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้
2. บอกได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่
3. หาผลบวก ผลลบและผลคูณเมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใดๆ ให้
4. หาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามที่กำหนดให้

2.3 เรียบเรียงบทเรียนตามลำดับต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม เพื่อใช้สอน 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที แต่ละคาบประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาและแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้คณะกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์และผู้ทรงคุณวุฒิอีก 1 ท่านตรวจแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนที่ปรับปรุงแล้ว ไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งไม่ใช่ นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 20 คน ใช้เวลาสอน 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องของบทเรียน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขและให้คณะกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ตรวจแก้ไข จากนั้นนำมาปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ แบ่งเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 45 ข้อ และแบบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ แล้วนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์และผู้ทรงคุณวุฒิอีก 1 ท่าน ตรวจคัดเลือกเพื่อหาค่าความเที่ยงตรง

ซึ่งเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว
จำนวน 20 คน ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2.5 วิเคราะห์แบบทดสอบแบบปรนัยเพื่อหาค่าความเชื่อมั่น ค่าความยากง่าย(p)
และค่าอำนาจจำแนก(r) โดยใช้โปรแกรมลิรี

2.6 คัดเลือกข้อสอบแบบปรนัยที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ .20 ถึง .80 และค่า
อำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป จำนวน 30 ข้อ จาก 45 ข้อ และข้อสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ
จาก 4 ข้อ โดยพิจารณาจากการทำข้อสอบของนักเรียน

2.7 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแบบปรนัยได้เท่ากับ 0.93

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน โดยใช้
บทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนการสอน 8 คาบ แล้วทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ
สมการพหุนามซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและปรับปรุงแล้ว โดยเป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก
จำนวน 30 ข้อ และแบบอัตนัยจำนวนแสดงวิธีทำสั้น ๆ 3 ข้อ ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง
3. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยข้อสอบแบบปรนัยข้อที่
ตอบถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบให้ 0 คะแนน ส่วน
ข้อสอบแบบอัตนัยให้ข้อละ 2 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐานได้แก่ ค่าร้อยละ พิสัย มัธยฐาน ฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมุติฐานว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียน
เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวน
นักเรียนทั้งหมด โดยใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร(Z test for
Population Proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ✓

1. ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ พิสัย มัธยฐาน ฐานนิยม ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z
3. หาค่าความเชื่อมั่น ค่าอำนาจจำแนกและค่าความยากง่าย โดยใช้โปรแกรมสำเร็จ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดจันทราวาส (ศุขประสารราษฎร์) จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2538 จำนวน 40 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. ค่าความถี่ พิสัย มัธยฐาน และฐานนิยม ของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

4. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ✓

1. ค่าความถี่ พิสัย มัธยฐาน และฐานนิยม ของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม บวกผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าความถี่ พิสัย มัธยฐาน และฐานนิยม ของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียน
กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คะแนน	ความถี่
11	1
13	1
14	4
15	2
16	3
17	2
18	1
19	3
20	4
21	1
22	3
23	2
24	5
25	3
26	2
27	2
29	1

พิสัย = 18 มัธยฐาน = 20 ฐานนิยม = 24

ตาราง 1 แสดงผลของคะแนนที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทำได้
จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ
สมการพหุนาม ซึ่งมีคะแนนเต็ม 36 คะแนน โดยเรียงคะแนนจากน้อยไปมาก คะแนนต่ำสุด ✓

เท่ากับ 11 คะแนน คะแนนสูงสุดเท่ากับ 29 คะแนน พิสัยเท่ากับ 18 คะแนน ฐานนิยมเท่ากับ 24 คะแนน และมีฐานเท่ากับ 20 คะแนน

2. หาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป บวกคูณผลดังตาราง 2 ตาราง 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของ คะแนนเต็ม ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3	40	27	67.50

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 67.50 ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

3. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม บวกคูณผลดังตาราง 3

ตาราง 4 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป มีจำนวนร้อยละ 67.50 ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3	40	36	20.25	56.25	4.62

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20.25 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 56.25 ของคะแนนเต็มและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.62 คะแนน

4. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน
เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ☒ ปรากฏผลดังตาราง 4
ตาราง 4 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของ คะแนนเต็ม ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3	40	27	2.22*

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์
การเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ
50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ✓

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ
สมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

สมมุติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการหาคำตอบ
ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 และ ค 012 โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์)
จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2538 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 บทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ผู้วิจัย
เรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอน 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวน
เชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ใช้วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหา โดยแบ่งเป็นแบบปรนัย
4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำสั้น ๆ 3 ข้อ

3. วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 นำบทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่
ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น 8 คาบ ๆ ละ 50 นาที

3.2 เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนการสอน 8 คาบ แล้วทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของ
สมการพหุนาม เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ และแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ

1. สั้น ๆ จำนวน 3 ข้อ ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น หลังจากทดลองแล้ว ผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ตามลำดับดังนี้

1. ค่าความถี่ พิสัย มัธยฐาน และฐานนิยมของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม
2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม
4. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษาการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปรากฏผลดังนี้

1. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป มีจำนวนถึงร้อยละ 67.50 ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด
2. คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20.25 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 56.25 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.62 คะแนน

3. จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

อภิปรายผล

1. ปัจจุบันเนื้อหาเรื่องสมการพหุนามเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) แต่จากการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนรู้เรื่องสมการพหุนามได้ ซึ่งผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับคำกล่าวของ เซอร์เวย์สและวาร์กา (Servais and Varga) ที่ว่านักเรียนต่างระดับชั้นกันสามารถเรียนรู้เนื้อหาอย่างเดียวกันได้ ถ้าจัดเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน

2. ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม จากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1 เนื้อหาที่นำมาสอนไม่ยากเกินไป นอกจากที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาในบทเรียน ให้สอดคล้องสัมพันธ์กัน และสอนเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อน

2.2 นักเรียนมีความสนใจเรียนและตั้งใจเรียนดี เนื่องจากเนื้อหาที่นำมาสอนเป็นเนื้อหาใหม่และช่วยให้นักเรียนหาคำตอบของสมการกำลังสองกรณี $b^2 - 4ac < 0$ ได้ ซึ่งในระบบจำนวนจริงไม่สามารถหาคำตอบได้

2.3 นักเรียนส่วนใหญ่ได้ทำแบบฝึกหัดด้วยตัวเอง หลังจากที่มีการเรียนการสอนแต่ละคาบ

2.4 นักเรียนส่วนใหญ่มีความรู้พื้นฐานเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามและการแก้สมการกำลังสอง จึงทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาที่เรียนได้ดียิ่งขึ้น

3. ผลการวิจัยครั้งนี้ ถ้ามีข้อบกพร่อง ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

3.1 การเรียนการสอนใช้เวลาเรียนในคาบที่นักเรียนว่างและซึ่งไม่เหมาะสมซึ่งไม่ใช่เวลาเรียนปกติ

3.2 เนื้อหาที่นำมาสอนเป็นเนื้อหาที่ไม่มีในหลักสูตรและการเรียนการสอนก็ไม่ได้มีการให้เกรด จึงทำให้นักเรียนบางคนไม่สนใจเรียนเท่าที่ควร

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม จากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ดังนั้นผลการวิจัยนี้จะเป็นแนวทางสำหรับผู้จัดทำหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นได้พิจารณาเพิ่มเนื้อหา เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม เพื่อบรรจุเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

ควรทำการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยเลือกกลุ่มตัวอย่างกระจายไปตามเขตการศึกษาต่าง ๆ ให้กว้างขวางขึ้น เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- การฝึกหัดครู, กรม. เอกสารสัมมนาผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับชั้นสูงระดับวิทยาลัยครู. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2509.
- จุไร ทวีรัตน์. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตการศึกษา 12. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2528. อัดสำเนา.
- เจสสิยา เทศกลิ่น. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเบญจมเทพอุทิศจังหวัดเพชรบุรี. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.
- โชคชัย ศักดิ์ศรี. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2516. อัดสำเนา.
- ณรงค์ ปิ่นมณี. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2519. อัดสำเนา.
- นพดล สุธาพาณิชย์. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตอนุภาคเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2523. อัดสำเนา.
- บุญเกิด ชำนาญคำ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.
- เบญญา ทองเต็ม. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องสมการกำลังสองโดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรมกับการสอนแบบปกติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนจะนะวิทยา จังหวัดสงขลา. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2533. อัดสำเนา.

- ปรีชา เนาว์เย็นผล. การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนของนักศึกษาชั้นป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติ. ปรินทิพพันธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520. อัดสำเนา.
- วรรณิ์ โสมประยูร. "วรรณกรรมเกี่ยวกับการเรียนการสอนกลุ่มทักษะ," ในเอกสารการสอนชุดวิชาวรรณกรรมประถมศึกษา หน่วยที่ 7. พิมพ์ครั้งที่ 7. นนทบุรี : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, 2530.
- วิชาการศึกษา, คณะ วิทยาลัยวิชาการศึกษา. การมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์มิตรสยาม, 2513.
- วิทยา รุ่งอดุลพิศาล. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพ (Transformation Geometry) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินทิพพันธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520. อัดสำเนา.
- *วัฒนา นที. การศึกษาวิธีสอนแบบค้นพบและวิธีสอนแบบบรรยายกับเนื้อหาเรื่องระบบจำนวนเชิงซ้อนสำหรับนักศึกษา ป.ศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิทยาลัยครูเพชรบุรี. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2524. อัดสำเนา.
- วันชัย ทัพพะประณะ. การทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2529. อัดสำเนา.
- ศวัน ประกิจเพชร. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องตรรกสัญลักษณ์เบื้องต้นในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2529. อัดสำเนา.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- . หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- . หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.

- สุมานะ อาจหาญ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินซิพัล กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2520. อุดลำนเา.
- สุเทพ จันทรสมบัติ และสุเทพ ทองอยู่. คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4 ค 014. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต, 2535.
- สุเทพ ทองอยู่. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินซิพัล กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2516. อุดลำนเา.
- เสริมศักดิ์ สุวาลลภ. คณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2535.
- Bruner, Jerome. The Process of Education. Harvard : Harvard University Press, 1960.
- Durbin, John R. Modern Algebra. New York : John Wiley and Sons, 1979.
- Gallick, Mary Catherine. "Achievement of Fifth, Sixth and Tenth Grades in Coordinate Geometry," Dissertation Abstracts International. 31(8) : 4035-A; February, 1971.
- Gubrud, Allan Roy. "The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School," Dissertation Abstracts International. 31(12) : 6468-A; June, 1971.
- Servais, W. and T. Varga. Teaching School Mathematics. Aylesbury : Compton Printing, 1971.
- Spiegel, Murray R. Theory and Problems of Complex Variable. New York : McGraw-Hill, 1964.
- White, Charles William. "A Study of the Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn Basic Concepts of Probability and the Relationship between Achievement," Dissertation Abstracts International. 35(4) : 1969-A; October, 1974.

Whitesitt, Elson J. Principles of Modern Algebra. Massachusetts :
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964.

Wilson, James W. "Evaluation of Learning in Secondary School
Mathematics," In Handbook on Formative and Summative
Evaluation of Student Learning. edited by Benjamin S Bloom,
U.S.A. : McGraw-Hill, 1971.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 5 ค่า p และ r ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็น
จำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	0.20	0.76	16	0.40	0.61
2	0.35	0.30	17	0.45	0.70
3	0.40	0.59	18	0.30	0.82
4	0.20	0.39	19	0.30	0.80
5	0.50	0.30	20	0.30	0.60
6	0.30	0.48	21	0.50	0.44
7	0.40	0.59	22	0.40	0.66
8	0.35	0.41	23	0.55	0.24
9	0.30	0.43	24	0.35	0.34
10	0.35	0.65	25	0.30	0.70
11	0.40	0.61	26	0.55	0.40
12	0.80	0.82	27	0.75	0.22
13	0.30	0.45	28	0.60	0.37
14	0.25	0.29	29	0.60	0.39
15	0.50	0.28	30	0.65	0.34

ตาราง 6 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบ
ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

x	3	8	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
f	1	1	1	3	2	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1

$$S^2 = 68.67$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR-20)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right]$$

$$r_{tt} = \frac{30}{29} \left[1 - \frac{6.69}{68.67} \right]$$

$$r_{tt} = \frac{30}{29} [0.90]$$

$$r_{tt} = 0.93$$

ตาราง 7 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

เลขที่	คะแนน	เลขที่	คะแนน	เลขที่	คะแนน
1	19	16	18	31	11
2	23	17	21	32	29
3	22	18	26	33	15
4	25	19	22	34	17
5	24	20	14	35	19
6	27	21	20	36	24
7	22	22	23	37	20
8	26	23	19	38	27
9	20	24	17	39	24
10	13	25	16	40	25
11	24	26	16		
12	14	27	25		
13	15	28	20		
14	14	29	16		
15	24	30	14		

หมายเหตุ 1. คะแนนเต็ม 36 คะแนน

2. มีนักเรียน 27 คนจากทั้งหมด 40 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของ
คะแนนเต็ม ขึ้นไป

ตาราง 8 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหา
คำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

X	f	fX	X ²	fX ²
11	1	11	121	121
13	1	13	169	169
14	4	56	196	784
15	2	30	225	450
16	3	48	256	768
17	2	34	289	578
18	1	18	324	324
19	3	57	361	1,083
20	4	80	400	1,600
21	1	21	441	441
22	3	66	484	1,452
23	2	46	529	1,058
24	5	120	576	2,880
25	3	75	625	1,875
26	2	52	676	1,352
27	2	54	729	1,458
29	1	29	841	841
$\Sigma f = 40$		$\Sigma fX = 810$	$\Sigma fX^2 = 17,234$	

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{810}{40}$$

$$\bar{X} = 20.25$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$S^2 = \frac{n\sum fX^2 - (\sum fX)^2}{n(n-1)}$$

$$S^2 = \frac{40(17,234) - (810)^2}{40(39)}$$

$$S^2 = \frac{689,360 - 656,100}{1,560}$$

$$S^2 = 21.32$$

$$S = 4.62$$

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z test for Population Proportion)

$$\text{สมมติฐานคือ } H_0 : P \leq 0.50$$

$$H_1 : P > 0.50$$

$$\text{ตัวสถิติทดสอบ } Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1 - P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้
คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม ขึ้นไป ต่อจำนวนนักเรียนใน
กลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

$$\hat{p} = \frac{27}{40} = 0.675$$

$$P_0 = 0.50$$

n แทนจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน

$$\text{แทนค่า } Z = \frac{0.675 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1 - 0.50)}{40}}}$$

$$Z = 2.22$$

$$Z_{.05} = 1.645$$

ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .05

ภาคผนวก ข .

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
ของสมการพหุนาม

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เวลาสอบ 1 ชั่วโมง คะแนนเต็ม 30 คะแนน

#####

คำชี้แจง แบบทดสอบนี้มี 2 ตอน

ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ

ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ

1. การตอบแบบทดสอบแบบปรนัย ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย **==** ในช่องที่ตรงกับหมายเลขข้อคำตอบที่ต้องการในกระดาษคำตอบ
เช่น ต้องการเลือกตัวเลือก 2 เป็นคำตอบ ให้ทำเครื่องหมายดังนี้

1	2	3	4
==	==	==	==

- 1.1 ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ให้ขีดกากบาทที่บรอยเดิมเสียก่อน แล้วจึงขีดคำตอบใหม่

เช่น ต้องการเปลี่ยนจากตัวเลือก 2 เป็นตัวเลือก 3

1	2	3	4
==	X	==	==

- 1.2 การตอบแต่ละข้อ ห้ามขีดคำตอบเกิน 1 คำตอบ

2. การตอบแบบทดสอบแบบอัตนัย ให้นักเรียนแสดงวิธีทำสั้น ๆ
3. ห้ามขีดเขียนหรือทำเครื่องหมายใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้เป็นอันขาด

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมาย — ในช่องที่ต้องการ

#####

1. $(1 - 2i) - (3 - 4i)$ เท่ากับจำนวนใด
 1. $-2 - 2i$
 2. $-2 - 6i$
 3. $-2 + 2i$
 4. $-2 + 6i$
2. ถ้า $(2x + yi) - (5i) = -6 - 6i$ แล้ว x และ y มีค่าเท่าใด
 1. 3 , 1
 2. 3 , -1
 3. -3 , 1
 4. -3 , -1
3. ถ้า $(2a + 18i) - (-10 - 3bi) = 14 + 27i$ แล้ว $a + bi$ คือข้อใด
 1. $2 + 3i$
 2. $26 + 4i$
 3. $2 - 3i$
 4. $13 + 3i$
4. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดมีส่วนจินตภาพเป็น 0
 1. $(2 + i)(3 - 2i)$
 2. $(2 + 3i)(-2 + i)$
 3. $(1 + i)(1 - i)$
 4. $(1 + i)(1 + i)$
5. ข้อใดต่อไปนี้ผิด
 1. $i(8i + 5) = -8 + 5i$
 2. $(1 + i)(3 - 4i) = 7 - i$
 3. $(1 - i)(2 + 7i) = 9 + 5i$
 4. $(5 + 4i)(3 + 2i) = 23 + 22i$
6. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 1. $(3 + i)(2 + 2i) = 4 + 8i$
 2. $(5 - 3i)(5 - 3i) = 16 + 30i$
 3. $(3 + 2i)(3 - 2i) = 7 + 10i$
 4. $(2 + 6i)(2 - 4i) = 26 + 22i$
7. $(2 - 3i)(-1 - i)(3 + 4i)$ เท่ากับจำนวนใด
 1. $7 + 7i$
 2. $-6 + 12i$
 3. $-19 - 17i$
 4. $-14 - 18i$

8. ถ้า $(x + yi) + (2 - 3i) = 5 + 3i$ แล้ว $x + y$ เท่ากับจำนวนใด
1. -3
 2. 0
 3. 3
 4. 9
9. ถ้า $(x + yi) + (-3 + 6i) = -2 - 3i$ แล้ว $x + yi$ เท่ากับจำนวนใด
1. $-5 + 3i$
 2. $1 - 3i$
 3. $1 - 9i$
 4. $-5 - 9i$
10. ถ้า $(x + yi)(-2 + 5i) = 12 - i$ แล้ว $x + yi$ เท่ากับจำนวนใด
1. $-1 - 2i$
 2. $10 - 6i$
 3. $12 - i$
 4. $29 + 58i$
11. ถ้า $(x + yi)(-3 + 2i) = -17 - 6i$ แล้ว $x + yi$ เท่ากับจำนวนใด
1. $3 + 4i$
 2. $1 - i$
 3. $-17 - 6i$
 4. $-63 + 16i$
12. $-1 + 17i$ เป็นผลลัพธ์ของข้อใด
1. $i(5 - 2i)(3 + i)$
 2. $i(5 + 2i)(3 - i)$
 3. $i(5 - 2i)(3 + 2i)$
 4. $i(5 + i)(3 - 2i)$
13. คำตอบของสมการ $7 = 32 - 5y$ คือข้อใด
1. 5
 2. -5
 3. 7
 4. -7
14. คำตอบของสมการ $3(x + 1)^2 - 96 = 0$ คือข้อใด
1. $-1 \pm 4\sqrt{2}$
 2. $1 \pm 4\sqrt{2}$
 3. $-1 \pm 2\sqrt{2}$
 4. $1 \pm 2\sqrt{2}$
15. คำตอบของสมการ $x^2 - 7x - 3 = 0$ คือข้อใด
1. $\frac{-7 \pm \sqrt{61}}{2}$
 2. $\frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}$
 3. $\frac{7 \pm \sqrt{61}}{2}$
 4. $\frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$

16. คำตอบของสมการ $4x^2 + 36 = 0$ คือข้อใด

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. $2i$, $-2i$ | 2. $3i$, $-3i$ |
| 3. $4i$, $-4i$ | 4. $6i$, $-6i$ |

17. คำตอบของสมการ $x^2 + 4x = 2x - 5$ คือข้อใด

- | | |
|---------------|----------------|
| 1. $1 \pm 2i$ | 2. $-1 \pm 2i$ |
| 3. $1 \pm 4i$ | 4. $-1 \pm 4i$ |

18. คำตอบของสมการ $x^2 + 2x + 2 = 0$ คือข้อใด

- | | |
|---------------|----------------|
| 1. $1 \pm i$ | 2. $-1 \pm i$ |
| 3. $1 \pm 2i$ | 4. $-1 \pm 2i$ |

19. $1 + 2i$ เป็นคำตอบของสมการใด

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $x^2 - 2x + 5 = 0$ | 2. $x^2 + 2x + 1 = 0$ |
| 3. $x^2 - 2x + 1 = 0$ | 4. $x^2 - 4x + 5 = 0$ |

20. คำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 6x = 0$ คือข้อใด

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. -2 , 0 และ 3 | 2. -2 , 0 และ -3 |
| 3. 2 , 0 และ 3 | 4. 2 , 0 และ -3 |

21. คำตอบของสมการ $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ คือข้อใด

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. 1 และ -1 | 2. 1 และ 2 |
| 3. -1 , 1 และ 2 | 4. -1 , 1 และ -2 |

22. คำตอบของสมการ $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ คือข้อใด

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. -1 , 1 , 3 | 2. -1 , 1 , -3 |
| 3. -1 , $-\frac{1}{3}$, 1 | 4. -1 , $-\frac{1}{3}$, 1 |

23. คำตอบของสมการ $x^3 + 64 = 0$ คือข้อใด

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1. 4 , $2 \pm 2\sqrt{3}i$ | 2. 4 , $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ |
| 3. -4 , $2 \pm 2\sqrt{3}i$ | 4. -4 , $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ |

24. คำตอบของสมการ $27x^3 - 125 = 0$ คือข้อใด

1. $\frac{5}{3}, \frac{5 \pm 3\sqrt{3}i}{6}$

2. $\frac{5}{3}, \frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{6}$

3. $-\frac{5}{3}, \frac{5 \pm 7\sqrt{3}i}{6}$

4. $-\frac{5}{3}, \frac{-5 \pm 9\sqrt{3}i}{6}$

25. คำตอบของสมการ $x^4 - 81x^2 = 0$ คือข้อใด

1. 0, 9

2. 0, 9, -9

3. 0, 3, 9, -9

4. 3, -3, 9, -9

26. คำตอบของสมการ $x^4 - 625 = 0$ คือข้อใด

1. $\pm 3, \pm 3i$

2. $\pm 4, \pm 4i$

3. $\pm 5, \pm 5i$

4. $\pm 6, \pm 6i$

27. คำตอบของสมการ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ คือข้อใด

1. $\pm 1, \pm 3i$

2. $\pm 3, \pm i$

3. $\pm 3i, \pm 3$

4. $\pm 1, \pm i$

28. คำตอบของสมการ $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ คือข้อใด

1. $\pm i, \pm 2i$

2. $\pm i, \pm 3i$

3. $\pm 2i, \pm 3i$

4. $\pm i, \pm 4i$

29. คำตอบของสมการ $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ คือข้อใด

1. $\pm i, \pm 2i$

2. $\pm i, \pm 3i$

3. $\pm 2i, \pm 3i$

4. $\pm i, \pm 4i$

30. คำตอบของสมการ $x^4 + x^2 + 1 = 0$ คือข้อใด

1. $3 \pm i, -3 \pm i$

2. $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

3. $\frac{3 \pm i}{2}, \frac{-3 \pm i}{2}$

4. $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ตอนที่ 2 ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ

1. จงแก้สมการ $2x^2 - 3x + 7 = 0$
2. จงแก้สมการ $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
3. จงแก้สมการ $3x^4 + 9x^2 - 12 = 0$

ภาคผนวก ค.

บทเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

บทเรียน เรื่อง

การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม (8 คาบ)

บทเรียนนี้มี 2 หัวข้อ ดังนี้

1. จำนวนเชิงซ้อน 3 คาบ
 - 1.1 ความหมายและการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน
 - 1.2 การบวก การลบ และการคูณจำนวนเชิงซ้อน
2. สมการพหุนาม 5 คาบ
 - 2.1 การแก้สมการพหุนามกำลังหนึ่ง
 - 2.2 การแก้สมการพหุนามกำลังสอง
 - 2.3 การแก้สมการพหุนามกำลังสามและกำลังสี่ โดยวิธีแยกตัวประกอบ
ซึ่งอาศัยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและสมบัติการแจกแจง

เนื้อหาเรื่องสมการพหุนามที่สอนในชั้นนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับสมการพหุนามตัวแปร x ซึ่งเขียนในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็มที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \leq 4$ ผู้ที่จะศึกษาเนื้อหาดังกล่าวควรมีความรู้ เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนาม และ สมการกำลังสอง ตามหัวข้อต่างๆ ในบทที่ 2 และบทที่ 3 ของหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบทมีดังนี้

ให้นักเรียนสามารถ

1. บอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้
2. บอกได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่
3. หาผลบวก ผลลบและผลคูณ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใด ๆ ให้
4. หาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามที่กำหนดให้

1. จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

1.1 ความหมายและการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาสมการ $x^2 = -1$

จะเห็นว่าในระบบจำนวนจริงสมการดังกล่าวไม่มีคำตอบ เนื่องจากสำหรับจำนวนจริง

x ใด ๆ $x^2 \geq 0$

นักคณิตศาสตร์กำหนดจำนวนซึ่งเป็นคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ ด้วย i โดยที่ $i^2 = -1$

ข้อสังเกต i ไม่เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$

บทนิยาม 1 จำนวนเชิงซ้อนคือ จำนวนที่สามารถเขียนได้เป็นรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 2 กำหนดให้ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
เรียก a ว่าส่วนจริงของ z และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพของ z

ข้อตกลง (1) $1(i) = i$ (2) $0(i) = 0$

ตัวอย่างเช่น

$2 + 3i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 2 และมีส่วนจินตภาพเป็น 3

$1 - 4i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 1 และมีส่วนจินตภาพเป็น -4

$-3 - i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น -3 และมีส่วนจินตภาพเป็น -1

5 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 5 และมีส่วนจินตภาพเป็น 0 เนื่องจาก $5 = 5 + 0i$

i เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็น 0 และส่วนจินตภาพเป็น 1 เนื่องจาก $i = 0 + (1)i$

ข้อสังเกต จำนวนจริง a ทุกจำนวนเป็นจำนวนเชิงซ้อน ที่มีส่วนจริงเป็น a และ
ส่วนจินตภาพเป็น 0 เนื่องจากสามารถเขียน a ได้เป็น $a = a + (0)i$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$(1) 3 + 4i \qquad (4) 2 - i$$

$$(2) -5 + 2i \qquad (5) -3$$

$$(3) -2 - 3i \qquad (6) 5i$$

วิธีทำ (1) $3 + 4i$ ส่วนจริงของ $3 + 4i$ คือ 3

ส่วนจินตภาพของ $3 + 4i$ คือ 4

(2) $-5 + 2i$ ส่วนจริงของ $-5 + 2i$ คือ -5

ส่วนจินตภาพของ $-5 + 2i$ คือ 2

(3) $-2 - 3i$ ส่วนจริงของ $-2 - 3i$ คือ -2

ส่วนจินตภาพของ $-2 - 3i$ คือ -3

(4) $2 - i$ ส่วนจริงของ $2 - i$ คือ 2

ส่วนจินตภาพของ $2 - i$ คือ -1

(5) -3 ส่วนจริงของ -3 คือ -3

ส่วนจินตภาพของ -3 คือ 0

(6) $8i$ ส่วนจริงของ $8i$ คือ 0

ส่วนจินตภาพของ $8i$ คือ 8

บทนิยาม 3 สำหรับจำนวนจริงบวก a ใด ๆ $\sqrt{-a} = \sqrt{a} i$

ตัวอย่างเช่น $\sqrt{-5} = \sqrt{5} i$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$$

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64} i = 8i$$

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 4 ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง แล้ว $z = w$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ a และ b ที่สอดคล้องกับสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. 3a + 5i = 6 + bi$$

$$2. 2 + ai = b - 3i$$

$$3. 3ab - 4i = 48 + 2ai$$

วิธีทำ 1. จาก $3a + 5i = 6 + bi$

$$\text{ได้ } 3a = 6 \text{ และ } 5 = b$$

$$\text{ดังนั้น } a = 2 \text{ และ } b = 5$$

$$2. \text{ จาก } 2 + ai = b - 3i$$

$$\text{ได้ } 2 = b \text{ และ } a = -3$$

$$\text{ดังนั้น } a = -3 \text{ และ } b = 2$$

$$3. \text{ จาก } 3ab - 4i = 48 + 2ai$$

$$\text{ได้ } 3ab = 48 \text{ และ } -4 = 2a$$

$$\text{ดังนั้น } a = -2 \text{ และ } 3(-2)b = 48$$

$$\text{นั่นคือ } a = -2 \text{ และ } b = -8$$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $1 + 2i$

(6) $-6 + 3i$

(2) $3 + 4i$

(7) $4 - 5i$

(3) $5i$

(8) 2

(4) $6 - 2i$

(9) $-1 - 3i$

(5) $3 + 6i$

(10) $-8i$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป ai เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

(1) $\sqrt{-100}$

(2) $-\sqrt{-25}$

(3) $\sqrt{-8}$

(4) $-\sqrt{-12}$

(5) $\sqrt{-32}$

3. จงหาค่าของ a และ b ที่สอดคล้องกับสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $a + bi = 6$

(6) $a - bi = 5 + 2i$

(2) $a + bi = -7i$

(7) $3a + 5bi = 6 - 10i$

(3) $a - 5bi = 20i$

(8) $(a + b) - (a - b)i = 3 + i$

(4) $a + bi = -5 - 5i$

(9) $3 - 2i = (5a - b) + (a + 5b)i$

(5) $8 - 9bi = 4a - 2i$

(10) $(a - b) + (a + b)i = 2 + 6i$

1.2 การบวก การลบและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

การบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 5 ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

แล้ว ผลบวกของ z และ w เขียนแทนด้วย $z + w$ โดยที่

$$z + w = (a+c) + (b+d)i$$

ผลต่างของ z และ w เขียนแทนด้วย $z - w$ โดยที่

$$z - w = (a-c) + (b-d)i$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$1. (2 + 3i) + (4 + 5i)$$

$$2. (3 + 4i) + (6 - 2i)$$

วิธีทำ $1. (2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i$
 $= 6 + 8i$

$$2. (3 + 4i) + (6 - 2i) = (3 + 6) + (4 - 2)i$$

 $= 9 + 2i$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลบต่อไปนี้

$$1. (3 + 4i) - (2 + 3i)$$

$$2. (2 - 5i) - (4 + 3i)$$

วิธีทำ $1. (3 + 4i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (4 - 3)i$
 $= 1 + i$

$$2. (2 - 5i) - (4 + 3i) = (2 - 4) + [(-5) - 3]i$$

 $= -2 + -8i$

ข้อตกลง การบวกจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติเช่นเดียวกับการบวกจำนวนจริง ดังต่อไปนี้

1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $z + w$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

ถ้า z , w และ v เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$\text{แล้ว } (z + w) + v = z + (w + v)$$

3. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $z + w = w + z$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้วมี 0 ซึ่ง

$$z + 0 = 0 + z = z \text{ เรียก } 0 \text{ ว่าเอกลักษณ์การบวกของ } z$$

5. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้วมีจำนวนเชิงซ้อน $-z$ ซึ่ง

$$z + (-z) = (-z) + z = 0 \text{ เรียก } -z \text{ ว่าเป็นอินเวอร์สการบวกของ } z$$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาผลบวกต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| (1) $(4 + 3i) + (2 + i)$ | (6) $(-2 - i) + (5 - 3i)$ |
| (2) $(5 + i) + (3 - 3i)$ | (7) $(2 - 5i) + (3 + 6i)$ |
| (3) $(3 + 4i) + (-1 - 6i)$ | (8) $(-6 + 2i) + (4 - 2i)$ |
| (4) $(-2 + 3i) + (5 - 5i)$ | (9) $(7 - 3i) + (2 + 6i)$ |
| (5) $(6 - 4i) + (-2 + 3i)$ | (10) $(1 + 2i) + (2 + 3i) + (3 + 4i)$ |

2. จงหาผลลบต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| (1) $(4 + 3i) - (2 + i)$ | (6) $(6 - 4i) - (-2 + 3i)$ |
| (2) $(5 + i) - (3 - 3i)$ | (7) $(2 - 5i) - (3 + 6i)$ |
| (3) $(3 + 4i) - (-1 - 6i)$ | (8) $(-2 + 3i) - (5 - 5i)$ |
| (4) $(7 - 3i) - (2 + 6i)$ | (9) $(-6 + 2i) - (4 - 2i) - (3 + i)$ |
| (5) $(-2 - i) - (5 - 3i)$ | (10) $(1 + 2i) - (2 + 3i) + (3 + 4i)$ |

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม 6 ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง แล้วผลคูณของ z และ w เขียนแทนด้วย zw โดยที่

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณต่อไปนี้

$$(1) (2 + i)(2 + 3i) \quad (2) (4 + 3i)(2 - 5i)$$

วิธีทำ (1) $(2 + i)(2 + 3i) = (4 - 3) + (6 + 2)i$
 $= 1 + 8i$

(2) $(4 + 3i)(2 - 5i) = (8 + 15) + (-20 + 6)i$
 $= 23 - 14i$

ข้อตกลง การคูณจำนวนเชิงซ้อนมีสมบัติเช่นเดียวกับการคูณจำนวนจริง ดังต่อไปนี้

1. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว zw เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

ถ้า z , w และ v เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $(zw)v = z(wv)$

3. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $zw = wz$

4. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้วมี 1 ซึ่ง

$$z(1) = (1)z = z \text{ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณของ } z$$

5. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ $z \neq 0$ แล้วมีจำนวนเชิงซ้อน z^{-1} ซึ่ง

$$z(z^{-1}) = (z^{-1})z = 1 \text{ เรียก } z^{-1} \text{ ว่าเป็นอินเวอร์สการคูณของ } z$$

6. สมบัติการแจกแจง

ถ้า z , w และ v เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว $z(w + v) = zw + zv$

7. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ

$$0z = z0 = 0$$

บทนิยาม 7 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ

$$1. z^0 = 1$$

$$2. z^1 = z$$

$$3. z^n = z(z^{n-1})$$

8. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ใด ๆ

ถ้า $zw = 0$ แล้ว $z = 0$ หรือ $w = 0$

แบบฝึกหัดที่ 3

จงหาผลคูณต่อไปนี้

$$(1) (1 - 3i)(2 + 4i)$$

$$(11) (3 + 2i)(4 + 7i)$$

$$(2) (6 + 3i)(3 - 5i)$$

$$(12) (2 - 3i)(6 + 4i)$$

$$(3) (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$(13) (3 + 7i)(2 - 5i)$$

$$(4) (3 - 2i)(3 + 2i)$$

$$(14) (2 + 3i)(4 + 2i)$$

$$(5) (1 - 2i)(-1 - 2i)$$

$$(15) (6 + 4i)(-7 + 3i)$$

$$(6) (4 + 3i)(2 + i)$$

$$(16) (-2 - i)(5 - 3i)$$

$$(7) (5 + i)(3 - 3i)$$

$$(17) (2 - 5i)(3 + 6i)$$

$$(8) (3 + 4i)(-1 - 6i)$$

$$(18) (1 + 2i)(2 + 3i)$$

$$(9) (-6 + 2i)(4 - 2i)$$

$$(19) (-2 + 3i)(5 - 5i)$$

$$(10) (7 - 3i) + (2 + 6i)$$

$$(20) (6 - 4i)(-2 + 3i)$$

2. สมการพหุนาม

สมการพหุนามที่จะกล่าวถึงในที่นี้ เป็นสมการพหุนามตัวแปร x ซึ่งมีกำลังไม่เกิน 4

และอยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

เมื่อ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $a_n \neq 0$

และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ $n \leq 4$

2.1 การแก้สมการพหุนามกำลังหนึ่ง

สมการพหุนามกำลังหนึ่ง คือสมการที่เขียนในรูป $a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ $a_1 \neq 0$

และ a_1, a_0 เป็นจำนวนเต็ม

คำตอบของสมการ $a_1 x + a_0 = 0$ คือ $x = -\frac{a_0}{a_1}$

ตัวอย่างเช่น $2x + 16 = 0$

$$2x = -16$$

$$x = -\frac{16}{2}$$

$$x = -8$$

แบบฝึกหัดที่ 4

จงแก้สมการต่อไปนี้

(1) $4x - 1 = 0$

(2) $6 - 7x = 0$

(3) $7x - 14 = 0$

(4) $9 - 42x = 0$

(5) $-14x + 8 = 0$

2.2 การแก้สมการพหุนามกำลังสอง

สมการพหุนามกำลังสองคือ สมการที่เขียนในรูป $ax^2 + bx + c = 0$
เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะการแก้สมการกำลังสอง
โดยใช้สูตร ดังต่อไปนี้

$$\text{จากสมการ } ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (***)$$

1. ถ้า $b^2 - 4ac \geq 0$ จะได้

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว $4ac - b^2 > 0$

$$\text{จากบทนิยาม 3 ได้ } b^2 - 4ac = i\sqrt{4ac - b^2}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

สรุปได้ว่า คำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ มี 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว คือ

$$x = -\frac{b}{2a}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง 2 จำนวน คือ

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

กรณีที่ 3 ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ คำตอบของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน คือ

$$x = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ข้อตกลง จะเขียน $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ แทน

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

และเขียน $x = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ แทน

$$x = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 2x - 13 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a = 1$, $b = 2$, $c = -13$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-13) = 56$$

เพราะฉะนั้น

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{56}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{14}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ คือ $-1 + \sqrt{14}$ และ $-1 - \sqrt{14}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 12x + 11 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a = 1$, $b = -12$, $c = 11$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(1)(11) = 144 - 44 = 100$$

เพราะฉะนั้น

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{100}}{2(1)}$$

$$x = \frac{12 \pm 10}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } x = \frac{12 + 10}{2} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{12 - 10}{2}$$

$$x = 11 \quad \text{หรือ} \quad x = 1$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ คือ 11 และ 1

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคำตอบของสมการ $9x^2 - 30x + 25 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4(9)(25) = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{-(-30)}{2(9)}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ คือ $\frac{5}{3}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 4x + 13 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $a = 1$, $b = -4$, $c = 13$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(13) = -36 < 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$x = 2 \pm 3i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $2 + 3i$ และ $2 - 3i$

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $2x^2 - 3x + 6 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $2x^2 - 3x + 6 = 0$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(6) = -39 < 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{3 \pm i\sqrt{39}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{39} i}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{39}}{4} i$$

$$\text{ดังนั้นคำตอบของสมการคือ } \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4} i \text{ และ } \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4} i$$

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $x^2 - 2x + 5 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$\text{ได้ } b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 < 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$$x = 1 \pm 2i$$

$$\text{ดังนั้นคำตอบของสมการคือ } 1 + 2i \text{ และ } 1 - 2i$$

แบบฝึกหัดที่ 5**จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้**

(1) $x^2 - 12x + 11 = 0$

(2) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(3) $x^2 + 4x + 1 = 0$

(4) $4x^2 - 4x + 2 = 0$

(5) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(6) $x^2 - 3x + 7 = 0$

(7) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

(8) $x^2 + 25 = 0$

(9) $x^2 - 2x + 40 = 0$

(10) $6x^2 = 7x - 3$

(11) $7x^2 - 3x - 2 = 0$

(12) $4x^2 + 68x + 289 = 0$

(13) $3x^2 = 7x - 3$

(14) $7x = 2x^2 + 4$

(15) $4 - 4x - 5x^2 = 0$

(16) $x^2 + 8x + 25 = 0$

(17) $2x^2 + 2x + 25 = 0$

(18) $4x^2 + 3x + 10 = 0$

(19) $2x^2 + 5x + 12 = 0$

(20) $3x^2 + 5x - 16 = 0$

2.3 การแก้สมการพหุนามกำลังสามและกำลังสี่ โดยวิธีแยกตัวประกอบ ซึ่งอาศัยสมบัติ การเปลี่ยนกลุ่มและสมบัติการแจกแจง

ในที่นี้เราจะศึกษาสมการพหุนามกำลังสามและสมการพหุนามกำลังสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น นักเรียนเคยเรียนวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยการจัดพหุนามให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ ผลต่างกำลังสอง ผลบวกกำลังสาม และผลต่างกำลังสามมาแล้ว

- คือ
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

ในหัวข้อนี้ เราจะนำความรู้ดังกล่าวมาใช้ในการแก้สมการพหุนามกำลังสามและกำลังสี่ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการ $4x^3 - 10x^2 - 6x = 0$

วิธีทำ จาก $4x^3 - 10x^2 - 6x = 0$

ได้ $2x(2x^2 - 5x - 3) = 0$

$$2x(2x + 1)(x - 3) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 0, -\frac{1}{2}$ หรือ 3

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $0, -\frac{1}{2}$ และ -3

ตัวอย่างที่ 13 จงแก้สมการ $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

วิธีทำ จาก $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

ได้ $(x^3 + 3x^2) - (2x + 6) = 0$

$$x^2(x + 3) - 2(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x^2 - 2) = 0$$

ถ้า $x + 3 = 0$ แล้ว $x = -3$

ถ้า $x^2 - 2 = 0$ แล้ว $x^2 = 2$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ -3 , $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 14 จงแก้สมการ $x^3 - 8 = 0$

วิธีทำ จาก $x^3 - 8 = 0$

ได้ $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

ถ้า $x - 2 = 0$ แล้ว $x = 2$

ถ้า $x^2 + 2x + 4 = 0$

แล้ว $b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(4) = -12 < 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{-2 \pm i\sqrt{12}}{2}$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3} i}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3} i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ 2 , $-1 + \sqrt{3} i$ และ $-1 - \sqrt{3} i$

ข้อสังเกต จาก $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

และโดยที่ $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2$ (เนื่องจาก $i^2 = -1$)

ดังนั้น $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a + bi)(a - bi)$

นำข้อสังเกตนี้ไปใช้ในการแยกตัวประกอบ เช่น

$$\begin{aligned} x^2 + 9 &= x^2 - 9i^2 \\ &= (x - 3i)(x + 3i) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 15 จงแก้สมการ $x^4 - 16 = 0$

วิธีทำ จาก $x^4 - 16 = 0$

$$\text{ได้ } x^4 - 4^2 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 4i^2) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

$$\text{ถ้า } x - 2 = 0 \text{ แล้ว } x = 2$$

$$\text{ถ้า } x + 2 = 0 \text{ แล้ว } x = -2$$

$$\text{ถ้า } x - 2i = 0 \text{ แล้ว } x = 2i$$

$$\text{ถ้า } x + 2i = 0 \text{ แล้ว } x = -2i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $2, -2, 2i$ และ $-2i$

ตัวอย่างที่ 16 จงแก้สมการ $16x^4 - 81 = 0$

วิธีทำ จาก $16x^4 - 81 = 0$

$$\text{ได้ } (4x^2)^2 - 9^2 = 0$$

$$(4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 - 9i^2) = 0$$

$$(2x - 3)(2x + 3)(2x - 3i)(2x + 3i) = 0$$

$$\text{ถ้า } 2x - 3 = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{ถ้า } 2x + 3 = 0 \text{ แล้ว } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ถ้า } 2x - 3i = 0 \text{ แล้ว } x = \frac{3}{2}i$$

$$\text{ถ้า } 2x + 3i = 0 \text{ แล้ว } x = -\frac{3}{2}i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}i$ และ $-\frac{3}{2}i$

ตัวอย่างที่ 17 จงแก้สมการ $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

วิธีทำ จาก $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

$$\text{ได้ } (x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x^2 - 4i^2)(x^2 - 9i^2) = 0$$

$$(x - 2i)(x + 2i)(x - 3i)(x + 3i) = 0$$

$$\text{ถ้า } x - 2i = 0 \text{ แล้ว } x = 2i$$

$$\text{ถ้า } x + 2i = 0 \text{ แล้ว } x = -2i$$

$$\text{ถ้า } x - 3i = 0 \text{ แล้ว } x = 3i$$

$$\text{ถ้า } x + 3i = 0 \text{ แล้ว } x = -3i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $2i$, $-2i$, $3i$ และ $-3i$

ตัวอย่างที่ 18 จงแก้สมการ $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

วิธีทำ จาก $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

$$\text{ได้ } (x^2 - 3)(x^2 + 1) = 0$$

$$\text{ถ้า } x^2 - 3 = 0 \text{ แล้ว } x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{ถ้า } x^2 + 1 = 0 \text{ แล้ว } x^2 - i^2 = 0$$

$$(x - i)(x + i) = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \pm i$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, i และ $-i$

ตัวอย่างที่ 19 จงแก้สมการ $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$

วิธีทำ จาก $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$

$$\text{ได้ } x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x) = 0$$

$$(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) = 0$$

ถ้า $x^2 - x + 2 = 0$

แล้ว $b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1 \pm \sqrt{7} i}{2}$

ถ้า $x^2 + x + 2 = 0$

แล้ว $b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{-1 \pm \sqrt{7} i}{2}$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $\frac{1 + \sqrt{7} i}{2}$, $\frac{1 - \sqrt{7} i}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{7} i}{2}$ และ $\frac{-1 - \sqrt{7} i}{2}$

ตัวอย่างที่ 20 จงแก้สมการ $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

วิธีทำ จาก $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

ได้ $x(x^2 - 4x + 4) = 0$

$$x(x - 2)^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ หรือ 2

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ 0 และ 2

แบบฝึกหัดที่ 6

จงแก้สมการต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (1) $x^3 + x^2 - 42x = 0$ | (11) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ |
| (2) $x^4 - 49x^2 = 0$ | (12) $x^4 + 2x^2 + 9 = 0$ |
| (3) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ | (13) $9x^4 - 25x^2 + 16 = 0$ |
| (4) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ | (14) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ |
| (5) $x^4 - 7x^2 + 9 = 0$ | (15) $5x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$ |
| (6) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ | (16) $3x^4 - 11x^2 - 14 = 0$ |
| (7) $x^3 - 64 = 0$ | (17) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ |
| (8) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$ | (18) $x^4 + x^2 + 1 = 0$ |
| (9) $x^3 + 8 = 0$ | (19) $x^4 + 49x^2 = 0$ |
| (10) $x^4 - 1 = 0$ | (20) $3x^4 - 11x^2 - 14 = 0$ |

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ นายอำพล ใต้ตอบ

เกิดวันที่ 8 เดือน มิถุนายน พุทธศักราช 2506

สถานที่เกิด อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

สถานที่อยู่ปัจจุบัน บ้านเลขที่ 130/5 หมู่ 3 ตำบลต้นมะม่วง

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

76000

ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน อาจารย์ 1

สถานที่ทำงานปัจจุบัน โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์)

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2524 มัธยมศึกษาตอนปลาย(แผนกวิทยาศาสตร์)

จากโรงเรียนพรหมานุสรณ์จังหวัดเพชรบุรี

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

พ.ศ. 2528 ค.บ.(วิชาเอกคณิตศาสตร์)

จากวิทยาลัยครูเพชรบุรี

อำเภอเมืองฯ จังหวัดเพชรบุรี

พ.ศ. 2538 กศ.ม.(คณิตศาสตร์)

จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
ของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ
ของ
อำพล ได้ตอบ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
มีนาคม 2539

การศึกษารั้งนี้ม่้จุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง การหาคำตอบที่
เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์
ค 011 และค 012 โรงเรียนวัดจันทราวาส(ศุขประสารราษฎร์) จังหวัดเพชรบุรี ภาคเรียน
ที่ 2 ปีการศึกษา 2538 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้
บทเรียน เรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
ใช้เวลาสอน 8 คาบๆ ละ 50 นาที เมื่อสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว
ทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็น
จำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอใน
การเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ที่ระดับนัยสำคัญ .05

A STUDY OF THE ACHIEVEMENT OF THE MATHAYOM SUKSA 3
IN SOLVING POLYNOMIAL EQUATIONS OVER THE COMPLEX FIELD

AN ABSTRACT

BY

AMPON TOTOB

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University

March 1996

The purpose of this study was to study of the achievement of the Muthayom Suksa 3 in solving polynomial equations over the complex field.

The subjects were 40 Mathayom Suksa 3 students registered Math. 011 and Math. 012 in the second semester of the 1995 academic year at Sukprasanrat School. The resercher taught them by using lessons on solving polynomial equations over the complex field for 8 periods , 50 minutes per period. The achievement test on solving polynomial equations over the complex field was administered at the end of the experiment.

The result of this study was that the Muthayom Suksa 3 students were able to learn the concept of solving polynomial equations over the complex field at 0.05 level.