การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

ปริญญานิพนธ์

ของ

วลีพร เดชเดชา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มีนาคม 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

616.00712
ว351ก
ร.3

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

25 พ.ค. 2547

บทคัดย่อ
ของ
วลีพร เดชเดชา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มีนาคม 2547

วลีพร เดชเดชา. (2547). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : อาจารย์ สุวรรณา คล้ายกระแส, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ รวีวรรณ งามสันติกุล.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต ตามบทเรียนซ่อมเสริมที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น โดยมีเนื้อหาดังนี้คือ การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ จำนวน 30 คน จากประชากรที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับต่าง ๆ กัน มีการสอบก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริม โดยผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเอง ใช้เวลาสอนทั้งหมด 12 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้การทดลองแบบ One–Group Pretest–Posttest Design การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตด้วยวิธีการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล

ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตทุกเนื้อหาวิชา อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF MATHAYOM SUKSA 3 STUDENTS' ABILITY ON PROBLEM SOLVING IN GEOMETRY BY USING THE GEOMETRIC CONCEPT IMAGE TEACHING

AN ABSTRACT

BY

WALIPORN DECHDECHA

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
March 2004

Waliporn Dechdecha. (2004). *A Study of Mathayom Suksa 3 Students' Ability on Problem Solving in Geometry by Using the Geometric Concept Image Teaching.* Master thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Mrs. Suwanna Claikrasae, Assist. Prof. Raweewan Ngamsuntikul.

The purpose of this research was to study of Mathayom Suksa 3 students' ability on problem solving in geometry by using the geometric concept image teaching.

A sample consisted of thirty–three middle school students [Mathayom Suksa 3] from the Secondary Demonstration School of Rajabhat Institute Bansomdejchaopraya in Bangkok. The experiment was conducted during the second semester of the 2003 academic year. They were selected by a stratified sampling of students who suffered from lack of geometric understanding were taught with the lessons designed by the researcher, over twelve 50–minute periods. A One–Group Pretest–Posttest design of the experiment in which the Wilcoxon Signed Ranks test was used in the analysis of data.

The findings revealed that the students gained significantly in terms of problem solving in geometry abilities at the .01 level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

ของ
นางสาววลีพร เดชเดชา

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาภรณ์ หะวานนท์)
วันที่...19...เดือน...มีนาคม...พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธาน
(อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์รวีวรรณ งามสันติกุล)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤต)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์เมตต์ แย้มวงษ์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เนื่องจากความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาที่ดียิ่งจากอาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส ประธานกรรมการควบคุม และผู้ช่วยศาสตราจารย์รวีวรรณ งามสันติกุล กรรมการควบคุม โดยท่านได้กรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ต่องานวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์เมตต์ แย้มวงษ์ และขอขอบคุณอาจารย์เอนก จันทรจรูญ อาจารย์พงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู ที่ช่วยกรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤดิ และอาจารย์เมตต์ แย้มวงษ์ ที่กรุณาช่วยเป็นกรรมการสอบปากเปล่าส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณผู้บริหาร ครู และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือและความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณคุณแม่ทวาย คุณพ่อใบ เดชเดชา และพี่โกสุม ที่ได้เป็นกำลังใจและให้ความช่วยเหลือผู้วิจัยในทุกด้านตลอดมา

ขอขอบคุณอาจารย์พงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู อาจารย์เอนก จันทรจรูญ อาจารย์สุกัญญา ยีกา อาจารย์ชนิชา แสงแก้ว อาจารย์ถนอม ชำนาญพันธ์ และเพื่อน ๆ พี่ ๆ ทุกคนที่คอยให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจจนทำให้ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จสมบูรณ์

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของมารดา บิดา ครู อาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย และขอยกคุณความดีนี้แก่ผู้มีพระคุณหรือผู้ที่ได้เกี่ยวข้องในการทำปริญญานิพนธ์นี้ทุก ๆ ท่าน

วลีพร เดชเดชา

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

บัญชีตาราง

บัญชีตาราง (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันสังคมเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็วตามความเจริญของเทคโนโลยี คณิตศาสตร์นับว่าเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการสร้างและเรียนรู้เทคโนโลยี เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ฝึกกระบวนการคิด ฝึกการแก้ปัญหา ช่วยพัฒนาศักยภาพของแต่ละบุคคลให้เป็นคนที่สมบูรณ์ ช่วยเสริมสร้างความมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิดริเริ่มสร้างสรรค์และมีระบบระเบียบในการคิด นอกจากนี้ยังเป็นวิชาที่สามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน มีผลการวิจัยชี้อย่างเด่นชัดว่าความรู้และทักษะที่ผู้เรียนพัฒนาเมื่อเรียนรู้คณิตศาสตร์และการประยุกต์ สามารถถ่ายโยงไปสู่การแก้ปัญหาในสาระอื่น ๆ ของหลักสูตร ในโรงเรียนครูจะต้องเตรียมการให้นักเรียนมีมโนมติทางคณิตศาสตร์และทักษะอย่างกว้างขวางให้ทันกับเทคโนโลยีที่ทันสมัย ให้นักเรียนมีโอกาสในการเรียนรู้และใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย (สิริพร ทิพย์คง. 2543 : 15) ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นพุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้เล็งเห็นความสำคัญดังกล่าวจึงกำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาบังคับสำหรับนักเรียนทุกคนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 1 และปีที่ 2 ส่วนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นวิชาเลือกเสรีสำหรับนักเรียนผู้สนใจทางคณิตศาสตร์และต้องการมีความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนระดับสูงขึ้นไป สำหรับจุดประสงค์ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาได้กำหนดไว้ดังนี้

1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์และข้อมูลที่ปรากฏในสิ่งแวดล้อม สามารถคิดอย่างมีเหตุผล และใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระบบ ชัดเจนและรัดกุม

2. เพื่อให้มีทักษะในการคิดคำนวณ

3. เพื่อให้เห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ที่มีต่อชีวิตประจำวันและเป็นเครื่องมือในการแสวงหาความรู้

4. เพื่อให้สามารถนำความรู้ความเข้าใจ และทักษะทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์

เรขาคณิตเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นได้บรรจุเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ ประกอบด้วย เส้นตรงและมุม ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทของปีทาโกรัสและบทกลับ วงกลมและการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต เนื้อหาสาระส่วนใหญ่เกี่ยวข้องกับชีวิตมนุษย์ ดังจะเห็นได้จากสิ่งที่ปรากฏอยู่รอบ ๆ ตัวเราในธรรมชาติ และสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ซึ่งส่วนใหญ่จะมีรูปทรงทางเรขาคณิตเกี่ยวข้องด้วยเสมอ นอกจากนี้เรขาคณิตยังเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์แขนงอื่นเช่น พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส และเป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาอื่น เช่น ฟิสิกส์ ศิลปะ ดาราศาสตร์ เคมี ชีววิทยา และยังเป็นทักษะสำคัญในการเรียนสถาปัตยกรรม การออกแบบและวิศวกรรม อีกทั้งพัฒนาผู้เรียนให้มีเหตุผล ทำงานเป็นขั้นตอนอย่างมีระบบ และช่วยพัฒนาความสามารถในการค้นพบ เพราะโจทย์ปัญหาทางเรขาคณิตบางรูปแบบทำให้อยากคิด เป็นการฝึกฝนให้ใช้สติปัญญาในการคิดแก้ปัญหาต่าง ๆ (โกมล ไพศาล . 2540 : 2) สอดคล้องกับ นวลศรี ชำนาญกิจ ที่กล่าวว่า

เรขาคณิตช่วยพัฒนาความสามารถด้านการคิดเชิงตรรกศาสตร์ การคิดเชิงมิติสัมพันธ์ และช่วยในการอ่าน การตีความ และการอ้างเหตุผล ช่วยให้มีความเข้าใจและซาบซึ้งในสิ่งที่อยู่รอบตัวเรา (นวลศรี ชำนาญกิจ . 2544 : 1)

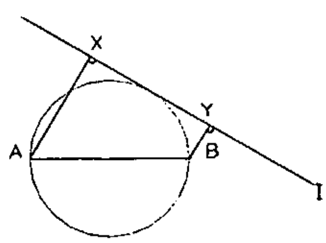
จากความสำคัญของวิชาเรขาคณิตดังกล่าว นักเรียนที่จบหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นจึงควรมีความรู้และประสบการณ์ในวิชาเรขาคณิตพอสมควร เพื่อจะได้นำไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่อตนเองและสังคม แต่จากผลการวิจัยของ สุพจน์ ไชยสังข์ พบว่าผลการเรียนของนักเรียนในวิชาเรขาคณิต อยู่ในระดับที่ไม่น่าพอใจ (สุพจน์ ไชยสังข์ . 2539 : 1 – 13) สมพล เล็กสกุล กล่าวว่าปัญหาที่ทำให้นักเรียนเรียนเรขาคณิตได้ไม่ดีเท่าที่ควรได้แก่ อ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจความหมายของโจทย์หรือทฤษฎีบทนั้น ไม่สามารถแยกได้ว่าข้อความตอนใดเป็นเหตุหรือสิ่งที่กำหนดให้ ตอนใดเป็นผลหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เขียนรูปไม่ถูกต้อง มักจะเขียนตามความคุ้นเคย สรุปผลหรืออ้างอิงจากการดูรูปหรือการทดลอง ลำดับขั้นตอนของการพิสูจน์ยังไม่ต่อเนื่อง ใช้วิธีท่องจำการพิสูจน์ (สมพล เล็กสกุล . ม.ป.ป. : 7 – 9) ในสหรัฐอเมริกาพบว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาเรียนรู้มโนมติเกี่ยวกับเรขาคณิตเบื้องต้น และการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตในระดับต่ำ (Clements and Battista . 1992 : 438) และพบว่าสาเหตุที่ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางเรขาคณิตในระดับต่ำมาจากนักเรียนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อน (Thommas.1991 : 38) จากงานวิจัยในประเทศและในต่างประเทศพบว่า ครู นักศึกษาครู นักเรียน มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อนคล้ายคลึงกัน (นวลศรี ชำนาญกิจ . 2544 : 1)

การมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อนจะส่งผลต่อการแก้ปัญหา และการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นต้นว่าพิจารณารูปไม่ถูกต้อง เขียนรูปผิดแล้วทึกทักตามรูป (พิชากร แปลงประสพโชค . 2518 : 3) เขียนรูปตามความคุ้นเคยหรือเข้าข้างตนเอง (ชุลีพร สุภธีระ. 2533 : 9) แล้วนำมาใช้ในการพิสูจน์ ถ้ามีความคลาดเคลื่อนมากอาจจะทำให้ไม่สามารถเขียนรูปได้ นอกจากนี้อาจจะมองไม่เห็นแนวทางในการพิสูจน์ หรือพิสูจน์ได้ไม่ครอบคลุมทุกกรณีซึ่งจะเห็นได้จากตัวอย่างบางตัวอย่างดังต่อไปนี้

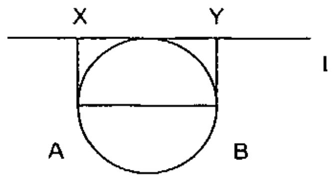
<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จากข้อสอบคัดเลือกนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อเข้าอบรมโครงการส่งเสริมนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2543 วิชาเรขาคณิต (นวลศรี ชำนาญกิจ . 2544 : 2)

ให้ l เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมที่มี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ลาก $\overline{AX}$ และ $\overline{BY}$ ตั้งฉากกับ l ที่จุด X และ Y ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า AB = AX + BY

โดยปกติเราจะเขียนรูปที่เป็นกรณีทั่วไป ซึ่งเส้นตรง l ควรเอียง เพื่อว่าจะได้ไม่หลงไปใช้กรณีเฉพาะดังรูป



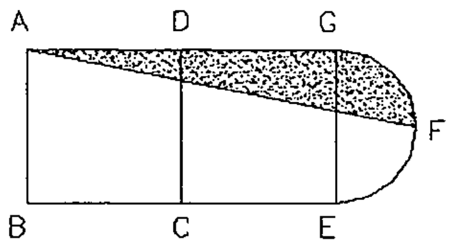
จากการทดลองพบว่า นักเรียนเกินครึ่งพิสูจน์ไม่ได้ และนักเรียนที่ถือว่าเป็นเด็กเก่งของแต่ละโรงเรียนจำนวนมากกว่า 130 คน จากนักเรียนประมาณ 900 คน จะเขียนรูปดังนี้



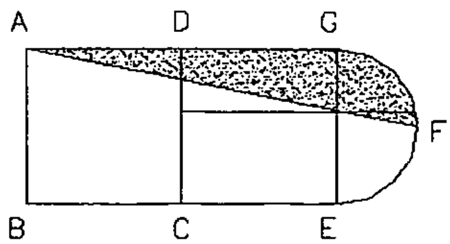
ที่เป็นเช่นนี้ สาเหตุหนึ่งน่าจะมาจากการที่นักเรียนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ไม่กว้างขวางพอ จึงนึกถึงกรณีเฉพาะของรูปที่มีเส้นสัมผัสอยู่ในแนวนอนโดยไม่นึกถึงกรณีทั่วไป (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544 : 2)

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> จากข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ประถมศึกษาระดับโลก ที่ฮ่องกง พ.ศ. 2543 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี .2545 : 10)

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และสี่เหลี่ยมจัตุรัส DCEG ต่างก็มีพื้นที่เท่ากับ 64 ตารางเซนติเมตร ส่วนโค้ง EFG เป็นส่วนโค้งรูปครึ่งวงกลมพอดี โดยมีจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง EFG จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา (กำหนดให้ใช้ค่า π = 3.14)

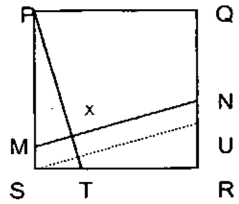


จากการที่ผู้วิจัยได้ทดลองนำโจทย์ข้อนี้ไปให้ครูที่สอนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและนักศึกษาสถาบันราชภัฏกาญจนบุรีจำนวน 5 คนแก้ปัญหา ปรากฏว่า ตอนแรกทุกคนพยายามแก้ปัญหาโดยการแทนค่าสูตรเพื่อหาพื้นที่ และใช้การแก้สมการ แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ เมื่อผู้วิจัยแนะว่าให้ใช้ความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย มี 2 คนสามารถทำได้ โดยการลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้าน GE กับจุด F ส่วนที่เหลือไม่สามารถแก้ปัญหาได้ เพราะไม่สามารถสร้างรูปที่ถูกต้องได้ ส่วนมากจะสร้างรูปที่ผิดดังนี้



<u>**ตัวอย่างที่ 3**</u> จากงานวิจัยของ นวลศรี ชำนาญกิจ ที่ได้ให้นักศึกษาครู โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 สถาบันราชภัฏนครสวรรค์ จำนวน 23 คน แก้ปัญหาโจทย์ดังนี้คือ

กำหนด PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป มีด้านยาวด้านละ 12 เซนติเมตร T อยู่บนด้าน RS ซึ่ง ST = 5 เซนติเมตร $\overline{MN} \perp \overline{PT}$ ที่ X ถ้า MX = 4 เซนติเมตร แล้ว $\overline{XN}$ ยาวเท่าใด



ปัญหาข้อนี้ไม่มีนักศึกษาคนใดสามารถทำได้ นักศึกษาพยายามที่จะนำความรู้เดิมมาใช้ เช่น เรื่องทฤษฎีบทของปีทาโกรัส แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ บางคนทราบว่าน่าจะนำความรู้เรื่องสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการมาใช้ แต่ไม่สามารถหารูปดังกล่าวได้ เพราะใช้แต่ข้อมูลที่กำหนดให้เท่านั้น ไม่ได้สร้างรูปเพิ่มเติมเพื่อใช้แก้ปัญหา เมื่อแนะว่าต้องสร้างรูปเพิ่ม นักศึกษาพยายามลากเส้นเพิ่มแต่ก็ยังไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ต้องแนะโดยการลากเส้นประ SU ให้ขนานกับส่วนของเส้นตรง MN มีนักศึกษาเพียงคนเดียวเท่านั้นที่สามารถแก้ปัญหาได้ เพราะสามารถหารูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการได้ บางคนยังไม่สามารถหารูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการได้ เพราะรูปนี้มีลักษณะซับซ้อน นักศึกษาครูมีความรู้เกี่ยวกับสมบัติและสัญลักษณ์ของรูปนี้ แต่ไม่สามารถสร้างภาพและนำสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหามาใช้ได้ กล่าวได้ว่าการมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ไม่สมบูรณ์ ทำให้แก้ปัญหาไม่ได้ (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544 : 3)

จากความสำคัญของภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตดังกล่าว จึงควรมีการเสริมสร้างภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ถูกต้องให้แก่ ครู นักศึกษาครู และนักเรียน โดยเฉพาะนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ควรจะมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ชัดเจนเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิชานี้ต่อไป ทั้งในระดับนี้และการศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งจุดมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อสร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ได้ต้นแบบบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งสามารถนำไปใช้สอนซ่อมเสริมให้กับนักเรียนที่มีความคลาดเคลื่อน

เกี่ยวกับภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. เป็นแนวทางหนึ่งในการแก้ไขภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และทำให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถแก้ปัญหาทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ได้

3. ผลการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางในการผลิตเครื่องมือเพื่อใช้สอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในด้านอื่น ๆ ของนักเรียนต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2546

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ จำนวน 30 คน จากประชากรที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับต่าง ๆ กัน

ระยะเวลาที่ใช้

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ ทดลองสอนจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที วันละ 2 คาบ เป็นเวลา 6 วัน และทดสอบก่อนและหลังการทดลองอย่างละ 1 คาบ จำนวน 8 คาบ รวมทั้งสิ้น 20 คาบ โดยใช้เวลานอกเวลาเรียนปกติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546

เนื้อหา

เนื้อหาในบทเรียนซ่อมเสริมเป็นเนื้อหาวิชาเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งได้จากการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนของภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากแบบสำรวจ ซึ่งมีหัวข้อของเนื้อหาดังนี้

1. การหาพื้นที่
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
3. รูปสามเหลี่ยมคล้าย
4. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระคือ บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวแปรตามคือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต หมายถึง คะแนนของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. ภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต หมายถึง ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ลึกซึ้งที่มีอยู่ในใจของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยภาพในใจ สัญลักษณ์ และสมบัติที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้น

ภาพในใจ หมายถึง เซตของภาพทุกภาพและสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่มีอยู่ในใจของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง

สัญลักษณ์ หมายถึง สิ่งที่เป็นตัวแทนของมโนทัศน์ เช่น เครื่องหมาย คำศัพท์ รูปภาพ

สมบัติ หมายถึง คุณลักษณะของมโนทัศน์ที่แสดงความสัมพันธ์ภายในมโนทัศน์และระหว่างมโนทัศน์

3. ภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต หมายถึง ภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง หรือนำไปใช้ไม่ถูกต้อง อันเป็นเหตุให้สำคัญผิด ยึดสมบัติต่าง ๆ ที่ไม่ได้ระบุไว้

สมมติฐานของการวิจัย

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตแต่ละเนื้อหาในเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีการพัฒนาขึ้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยจะนำเสนอตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตที่สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ตอนที่ 2 ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

ตอนที่ 3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนเรขาคณิต

ตอนที่ 4 ความรู้เกี่ยวกับภาพพลักษณ์มโนทัศน์

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับภาพพลักษณ์มโนทัศน์

ตอนที่ 6 ความรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 1 ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตที่สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โครงสร้างกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์ มีเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 ค 011 และ ค 021 ซึ่ง สมพล เล็กสกุล และ ชุลีพร สุภธีระ (2538 : 2 – 16) ได้สรุปเนื้อหาเรขาคณิตในส่วนที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ที่นักเรียนควรมีความรู้ความเข้าใจในแต่ละรายวิชาดังนี้

รายวิชา ค 101

เส้นตรงและมุม

1. ลักษณะ สมบัติและการใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับจุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี และมุม นอกจากนั้นยังใช้สัญลักษณ์แทนความยาวของส่วนของเส้นตรงและขนาดของมุมได้ถูกต้อง

2. สมบัติของจุดและเส้นตรงบางประการ ได้แก่

   2.1 สามารถลากเส้นตรง หรือส่วนของเส้นตรงผ่านจุดสองจุดได้เพียงเส้นเดียว

   2.2 เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะได้จุดตัดเพียงจุดเดียวเท่านั้น

3. การสร้าง (ใช้เพียงวงเวียนและสันตรง) โดยไม่ต้องเขียนคำอธิบายวิธีสร้าง แต่ต้องแสดงให้เห็นร่องรอยของการสร้าง ได้แก่

   3.1 สร้างส่วนของเส้นตรงและมุมให้มีขนาดเท่าที่กำหนดให้

   3.2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งครึ่งมุม

   3.3 การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง และการแบ่งมุมออกเป็นส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการแบ่งครึ่งมุม

   3.4 สร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา และ 60 องศา

   3.5 สร้างมุมขนาดต่าง ๆ โดยอาศัยการสร้างมุมขนาดเท่ากับ 90 องศา หรือ 60 องศา

   3.6 สร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

   3.7 สร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นตรงที่จุดซึ่งกำหนดให้บนเส้นตรงนั้น

3.8 สร้างรูปสามเหลี่ยม หรือรูปสี่เหลี่ยมบางรูปให้มีความยาวของด้านหรือขนาดของมุมตามที่กำหนดให้

4. สมบัติที่ควรทราบหลังจากทำแบบฝึกหัด

4.1 เส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งมีเพียงเส้นเดียว

4.2 เส้นตั้งฉากที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

4.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

4.4 เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐานจะตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง

รายวิชา ค 031 เป็นการสร้างเพิ่มเติมจากในรายวิชา ค 101 โดยมีการให้นักเรียนเขียนวิธีสร้างพอสังเขป หรืออย่างละเอียดด้วย ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มเติมมีดังนี้

การสร้าง

1. การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ ที่มีขนาดเท่ากันโดยอาศัยการสร้างมุมแย้งที่มีขนาดเท่ากัน

2. สร้างมุมขนาดต่าง ๆ ที่ยากขึ้น เช่น สร้างมุมที่มีขนาดเท่ากับ 82.5 องศา โดยใช้ความสัมพันธ์ $82.5 = \frac{(120+45)}{2}$ รวมทั้งสามารถหาขนาดของมุมบางมุมที่สร้างไว้แล้วโดยใช้การวัดด้วย

3. การสร้างรูปสามเหลี่ยมบางรูปที่กำหนดให้มีขนาดของมุมที่สร้างยากขึ้น

4. การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และรูปสี่เหลี่ยมอื่น ๆ ในกลุ่มเดียวกัน เช่น รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามวิธีใดวิธีหนึ่งต่อไปนี้

4.1 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่ โดยอาศัยสมบัติ " ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงสองเส้นและทำให้ขนาดของมุมแย้งเท่ากันแล้วเส้นตรงสองเส้นนั้นจะขนานกัน"

4.2 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยการสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่

4.3 สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่และให้ด้านคู่นี้ยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 203

1. บทนิยามของการเท่ากันทุกประการ คือ รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาวเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน (สรุป : ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงนั้นยาวเท่ากัน)

3. มุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทุกประการ และมุมที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน (สรุป : มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน)

4. มุมตรงข้ามที่เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกันย่อมมีขนาดเท่ากัน

5. รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อมีความสัมพันธ์แบบใดแบบหนึ่งต่อไปนี้

6.1 มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันนั้นเท่ากัน (ด.ม.ด.)

6.2 มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากันนั้นยาวเท่ากัน (ม.ด.ม.)

6.3 มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ (ด.ด.ด.)

7. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.1 มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

8.2 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

8.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

9. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส : ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

รายวิชา ค 204

เส้นขนาน

1. บทนิยามของเส้นขนาน คือ เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

2. สมบัติของเส้นขนาน

2.1 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

2.2 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

2.3 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

3. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา หรือสองมุมฉาก

4. ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว มุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย

5. ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 360 องศา หรือสี่มุมฉาก

6. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป ขนาดของมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

7. สมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด. คือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดมีขนาดของมุมที่เท่ากันสองคู่และมีด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

8. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพิ่มเติมอีกคือ "ถ้าลากเส้นตรงจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐานจะแบ่งครึ่งฐาน"

ความคล้าย

1. บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน "รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน"

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันคือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

รายวิชา ค 011

ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

1. ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังที่เคยเรียนมา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองแล้ว ยังมีอีกแบบหนึ่งที่เขียนในรูปความสัมพันธ์ของพื้นที่ คือ "ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก"

2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และบทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส : ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านยาว a , b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว c หน่วยเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

วงกลม

1. ความหมายของวงกลม วงกลมที่เท่ากัน สิ่งที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ได้แก่ จุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลาง ส่วนโค้ง (ใหญ่หรือน้อย) ของวงกลม

2. สมบัติเกี่ยวกับวงกลม

2.1 มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก

2.2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

2.3 มุมในส่วนโค้งของวงกลมวงหนึ่งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

2.4 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

2.5 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.6 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

2.7 ในวงกลมที่เท่ากันหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

2.8 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมที่เท่ากัน คอร์ดที่เท่ากันจะตัดส่วนโค้งออกได้ยาวเท่ากัน คือ ส่วนโค้งน้อยเท่ากับส่วนโค้งน้อย ส่วนโค้งใหญ่เท่ากับส่วนโค้งใหญ่

2.9 ในวงกลมวงหนึ่งหรือวงกลมสองวงที่เท่ากัน คอร์ดที่ตัดส่วนโค้งออกยาวเท่ากันจะยาวเท่ากัน

2.10 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด จะแบ่งครึ่งคอร์ดนั้น

2.11 ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ด(ที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง)จะตั้งฉากกับคอร์ดนั้น

2.12 จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่ง และตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่มีจุดทั้งสองนั้นเป็นจุดปลาย

2.13 เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

3. รู้จักวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าบางรูป โดยอาศัยวงกลมและความรู้ที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งสามารถหาขนาดของมุมภายในแต่ละมุมของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งเท่ากับ $\frac{180(n-2)}{n}$ องศา

4. สมบัติที่ควรทราบหลังทำแบบฝึกหัด

4.1 ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่แนบในวงกลมเท่ากับ 180 องศา

4.2 มุมที่เกิดจากคอร์ดจรดกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

4.3 จากจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดนั้นมาสัมผัสวงกลม จะลากได้เพียงสองเส้น และส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นจะยาวเท่ากัน

รายวิชา ค 021 เน้นการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิต ความรู้ความเข้าใจที่นักเรียนควรจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาทั้งหมดในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ปีที่สอง และ ค 011 มีดังนี้

1. บทนิยาม : การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

2. สัจพจน์ : เคลื่อนที่รูปเรขาคณิตได้

3. บทนิยาม : รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

4. สัจพจน์ : เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกันก็ต่อเมื่อ ผลบวกของขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็น 180 องศา

5. ทฤษฎีบทหรือสมบัติทางเรขาคณิต

5.1 สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ได้

5.2 ในบรรดาส่วนของเส้นตรงทั้งหลายที่ลากจากจุดภายนอกของเส้นตรงเส้นหนึ่งไปยังเส้นตรงเส้นนั้น จะมีส่วนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่เป็นเส้นตั้งฉากและเป็นเส้นที่สั้นที่สุด

5.3 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปเท่ากันทุกประการ (ฉ.ด.ด.) คือ "ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันและมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ"

5.4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.1 ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน

5.4.2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูป

นั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.4.3 มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ย่อมมีขนาดเท่ากัน

5.4.4 ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้ว รูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

5.5 สมบัติบางประการที่สรุปได้จากแบบฝึกหัด

5.5.1 รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากันสองมุมเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

5.5.2 เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวเท่ากัน

5.5.3 ส่วนของเส้นตรงที่ปิดกั้นหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากันจะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย

5.5.4 ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

5.5.5 เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม และขนานกับอีกด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จะตัดกับด้านที่สามที่จุดกึ่งกลางของด้านที่สามนั้น

5.5.6 เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

5.5.7 ถ้าต่อด้านด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

5.6 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับวงกลม

5.6.1 เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

5.6.2 คอร์ดสองเส้นที่อยู่ในวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อระยะจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ดสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

6. การพิสูจน์เกี่ยวกับรูปที่สร้างขึ้นโดยใช้วงเวียนและสันตรง
(สมพล เล็กสกุล และชุลีพร สุภธีระ. 2538 : 2-16)

รายละเอียดเนื้อหาสาระทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียน ตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ที่จัดทำโดย สสวท. ซึ่งปรากฏอยู่ในรายวิชา ค 101 ค 031 ค 203 ค 204 และ ค 011 มีเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต การสร้างและการนำไปใช้ คือ เส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เส้นขนาน ความคล้าย ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส และวงกลม โดยเนื้อหาสาระเหล่านี้จะไม่เป็นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน แต่เป็นการเรียนในลักษณะของการทำกิจกรรมและการทดลอง เพื่อให้ได้ข้อสรุป และสำหรับรายวิชา ค 021 นั้น เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้สมบัติทางเรขาคณิตที่นักเรียนจะได้รับเพิ่มขึ้นจากที่เรียนมาแล้ว โดยเนื้อหาในส่วนนี้จะเน้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (กระทรวงศึกษาธิการ. 2546 : 98 – 117) ได้กำหนดกรอบสาระและมาตรฐานการเรียนรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นไว้ดังนี้

<u>สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี คณิตศาสตร์พื้นฐาน ช่วงชั้นที่ 3 เรขาคณิต</u>

ระดับชั้น	สาระการเรียนรู้
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1	**1. พื้นฐานทางเรขาคณิต** 1) การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้วงเวียนและสันตรง - การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ - การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ - การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้ - การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ - การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้ - การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้ 2) การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยใช้การสร้างพื้นฐาน 3) การสำรวจสมบัติทางเรขาคณิต
	2. ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ 1) ภาพของรูปเรขาคณิตสองมิติที่เกิดจากการคลี่รูปเรขาคณิตสามมิติ 2) ภาพสองมิติที่ได้จากการมองทางด้านหน้า (front view) ด้านข้าง (side view) หรือด้านบน (top view) ของรูปเรขาคณิตสามมิติ 3) การวาดหรือประดิษฐ์รูปเรขาคณิตที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	**1. ความเท่ากันทุกประการ** 1) ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม 2) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน 3) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม 4) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน– ด้าน– ด้าน 5) ใช้สมบัติของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้
	2. ทฤษฎีบทปีทาโกรัส 1) ทฤษฎีบทปีทาโกรัส 2) บทกลับของทฤษฎีบทปีทาโกรัส 3) การแก้ปัญหาหรือสถานการณ์โดยใช้ทฤษฎีบทปีทาโกรัสและบทกลับ

ระดับชั้น	สาระการเรียนรู้
	3. เส้นขนาน 1) สมบัติของเส้นขนาน 2) รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน 3) การให้เหตุผลและแก้ปัญหาโดยใช้สมบัติของเส้นขนานและความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
	4. การแปลงทางเรขาคณิต 1) การเลื่อนขนาน 2) การสะท้อน 3) การหมุน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	**1. ความคล้าย** 1) รูปที่คล้ายกัน 2) รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน 3) สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน 4) การนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้

<u>สาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 3 เรขาคณิต</u>

ระดับชั้น	สาระการเรียนรู้
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1	**1. การสร้าง** 1) การสร้างมุมขนาดต่าง ๆ 2) การสร้างรูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านขนาน
	2. การให้เหตุผลทางเรขาคณิต
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	**1. การประยุกต์ของการแปลงทางเรขาคณิต** 1) การสร้างสรรค์งานศิลปะโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต 2) การออกแบบโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	**1. การให้เหตุผล** 1) สมบัติเกี่ยวกับวงกลม 2) การให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างรูปเรขาคณิต

ตอนที่ 2 ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

2.1 ความรู้เกี่ยวกับการสอนเรขาคณิต

สิธุ (Sidhu. 1981 : 291) ได้แนะนำการสอนเรขาคณิตดังนี้คือ

1. งานที่ให้ผู้เรียนฝึกทำ ควรได้สัดส่วนและชัดเจน

2. ครูควรให้ผู้เรียนสังเกตสิ่งต่าง ๆ ด้วยตัวเอง โดยการทดลองวัดจริงหรือประสบการณ์

3. กระดานดำที่ใช้ควรได้สัดส่วน สะอาดและถูกต้องเพื่อหลีกเลี่ยงความสงสัยและความเข้าใจผิดของผู้เรียน ขณะเดียวกันครูควรใช้ภาษาที่ถูกต้องชัดเจน และใช้ชอล์กสีเพื่อเน้นรายละเอียดที่สำคัญ

4. การให้แบบฝึกหัดผู้เรียน ไม่ควรทิ้งค้างไว้เพื่อให้ทำตอนท้ายของภาคเรียน แต่ควรจะให้ทำพร้อมกับทฤษฎีบทนั้น

5. ควรฝึกผู้เรียนให้เขียนรูปจากทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดที่เห็นสมควรแล้วแต่กรณี ในเบื้องต้นการสร้างทั้งหมดควรใช้วงเวียนและไม้บรรทัด

6. ครูควรมีการทบทวน โดยการถามผู้เรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้เรียนผ่านมาแล้วเท่าที่สามารถกระทำได้

7. ศัพท์ทางเรขาคณิต ครูผู้สอนต้องนำมาใช้ให้ถูกต้อง

8. ครูผู้สอนควรสนับสนุนผู้เรียนให้แสดงเนื้อหาสาระ โดยการเขียนรูป การสร้างและถ้อยคำเท่าที่เป็นไปได้

9. ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปผลลัพธ์สุดท้ายด้วยตนเอง

โกมล ไพศาล (2540 : 22) ได้เสนอแนะว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้

1. กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน

2. ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป

3. การจัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกต และการสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปมโนมติหรือแก้ปัญหาโจทย์

4. การสอนบทนิยาม ทฤษฎีบท และบทสร้าง ควรให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม เช่น ใช้วิธีการถามตอบ ใช้อุปกรณ์การสอนสำเร็จรูปและการเขียนรูปในแต่ละขั้นตอนจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ

2.2 ระดับขั้นของแวนฮีลีเกี่ยวกับความคิดทางเรขาคณิต (The Van Hiele Level of Geometric Thought)

จากงานวิจัยของ พิชากร แปลงประสพโชค ได้กล่าวว่า เนื่องจากนักเรียนส่วนมากมีปัญหาไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิต โดยเฉพาะการพิสูจน์ นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงมีครูและนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านได้พยายามศึกษาและค้นคว้า เพื่อหาวิธีแก้ปัญหาความไม่เข้าใจในการเรียนวิชาเรขาคณิตดังกล่าว ในปี ค.ศ. 1954 สองสามี – ภรรยา เพียร์ แวน ฮีลี (Pierre Van Hiele) และ ไดนา แวน ฮีลี (Dina Van Hiele) ครูคณิตศาสตร์ชาวเนเธอร์แลนด์ ซึ่งขณะนั้นกำลังศึกษาระดับปริญญาเอกได้ศึกษาการเรียนรู้ทางเรขาคณิตของนักเรียนและพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิต พบแนวทางพัฒนาการทางเรขาคณิตทำนองเดียวกับที่เพียเจต์พบขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาของนักเรียน และอธิบายได้ว่าเหตุใดนักเรียนจึงมีความยุ่งยากในการเรียนเรขาคณิต แวน ฮีลี สรุปว่า ขั้นพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนมี 5 ระดับ ดังนี้

ระดับ 0 : การมองเห็น (Visualization) นักเรียนที่มีความคิดระดับ 0 รับรู้รูปในภาพรวม ยังไม่ได้วิเคราะห์แยกแยะให้เห็นส่วนประกอบ เช่น เมื่อเรียกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ถูกต้อง จะไม่มีความคิดในเรื่องมุมฉากและความยาวด้านที่เท่ากัน ถ้าถามว่าทำไมจึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ เพราะดูแล้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ระดับ 1 : การวิเคราะห์ (Analysis) นักเรียนที่มีความคิดระดับ 1 สามารถวิเคราะห์รูปได้ โดยสนใจส่วนต่าง ๆ ของรูป วิเคราะห์ได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน และมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก สามารถใช้สมบัติของรูปเพื่อบอกรูปได้ แต่นักเรียนยังไม่สามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างรูปได้

ระดับ 2 : การพิสูจน์อย่างไม่มีแบบแผน (Informal Deduction) นักเรียนที่มีความคิดระดับ 2 เห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปต่าง ๆ และความสัมพันธ์ในสมบัติของรูปเหล่านั้น เช่น ทราบว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากก็เป็นตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นอกจากนี้ยังเห็นความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติต่าง ๆ ของรูปชนิดเดียวกัน และระยะนี้เป็นระยะเริ่มต้นก่อนที่จะมีความสามารถด้านการพิสูจน์

ระดับ 3 : การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) นักเรียนที่มีความคิดระดับ 3 เริ่มต้นเข้าใจการพิสูจน์แบบนิรนัย นักเรียนสามารถติดตามการพิสูจน์ได้ เรียนรู้ที่จะดำเนินการพิสูจน์ด้วยตัวเองได้ อธิบายได้

ระดับ 4 : การคิดขั้นละเอียด (Rigor) นักเรียนที่มีความคิดระดับ 4 เป็นระดับสุดยอดของพัฒนาการของการคิดปฏิบัติการโดยใช้นามธรรมมีลักษณะคล้ายนักคณิตศาสตร์ นักเรียนที่มีความคิดในระดับนี้จะมีความเข้าใจโครงสร้างคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง สามารถวิเคราะห์ลักษณะโครงสร้างและระบบสัจพจน์ และเปรียบเทียบเรขาคณิตที่มีสัจพจน์คนละชุดได้ (พิชากร แปลงประสพโชค. 2540 : 40)

นวลศรี ชำนาญกิจ ได้กล่าวถึงสมบัติของการคิดตามตัวแบบของ แวน ฮีลี ว่ามีดังต่อไปนี้

1. เป็นไปตามลำดับขั้น โดยมีการคิดที่เรียงลำดับทีละระดับ ไม่มีการข้ามระดับ นักเรียนจะมีการคิดอยู่ในระดับใดนั้น ต้องผ่านระดับที่มาก่อนเสมอ

2. ความก้าวหน้า ความก้าวหน้าจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีสอน ไม่ขึ้นอยู่กับอายุหรือวุฒิภาวะ ไม่มีวิธีสอนใดที่จะทำให้นักเรียนสามารถก้าวกระโดดข้ามระดับต่าง ๆ ได้

3. สิ่งที่ไม่ชัดแจ้งในระดับหนึ่งจะกลายเป็นสิ่งที่ชัดแจ้งในอีกระดับหนึ่ง ตัวอย่างเช่น ในระดับ 0 เป็นเพียงการรู้จักเฉพาะรูปร่างไม่เข้าใจสมบัติของรูป พอมาถึงระดับ 1 สามารถเข้าใจสมบัติและองค์ประกอบของรูปด้วย

4. ภาษา ในแต่ละระดับจะมีภาษาและสัญลักษณ์ตลอดจนการเชื่อมโยงสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นของตนเอง ถ้าครูใช้ภาษาที่อยู่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียนจะทำให้นักเรียนไม่สามารถเข้าใจได้

5. การไม่เข้ากัน การสอนต้องให้สอดคล้องกับระดับการคิดของนักเรียน ถ้าครูใช้วิธีการสอนในระดับที่สูงกว่าระดับการคิดของนักเรียน นักเรียนจะไม่เข้าใจและมีแนวโน้มที่จะลดระดับการคิดลง (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544 :31)

ผู้วิจัยศึกษาระดับการคิดของแวน ฮีลี เพื่อช่วยในการวินิจฉัยความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และใช้แนวการสอนของ แวน ฮีลี เป็นพื้นฐานในการจัดกิจกรรมการสอนเพื่อเสริมสร้างภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตอนที่ 3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนเรขาคณิต

งานวิจัยภายในประเทศ

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี (2535 : 40-42) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอน โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาและนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหาสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติ

อารีย์ คำปล้อง (2536 : 43 - 44) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การสอนแบบปฏิบัติการ เรื่อง คุณสมบัติที่เกี่ยวกับวงกลมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 311 (ปัจจุบันเป็น ค 011) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการและนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง คุณสมบัติเกี่ยวกับวงกลมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 โดยนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

โกมล ไพศาล (2540 : 76 - 79) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 และ 2 ปีการศึกษา 2539 ที่ไม่เคยเรียนวิชาเรขาคณิตระดับอุดมศึกษาของสถาบันราชภัฏหมู่บ้านจอมบึง ผลการวิจัยพบว่าชุดการสอนมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 จึงได้ชุดการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตที่น่าจะสามารถทำให้ผู้เรียนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ตามที่กำหนด

งานวิจัยต่างประเทศ

จอง (Jeon.1988 : 1410-A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนเกาหลีระดับมัธยมศึกษา โดยเน้นการวิเคราะห์การพิสูจน์และการถ่ายโยงความรู้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับ 8 ผลการวิจัย พบว่า

1. ความยากของปัญหาเรขาคณิตเป็นผลจากเงื่อนไขที่ให้มาในโจทย์ปัญหา
2. การเสนอปัญหาโดยการเขียนรูป และมีสัญลักษณ์ให้จะทำให้นักเรียนเก่ง และปานกลางประสบความสำเร็จมากกว่าการนำเสนอปัญหารูปแบบอื่น
3. นักเรียนส่วนมากยกเว้นนักเรียนเก่งบางคน ไม่สามารถแสดงวิธีการพิสูจน์ได้
4. นักเรียนพิสูจน์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้น้อยกว่าปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ
5. ปัญหาที่ต้องใช้เส้นช่วยในการพิสูจน์ (Auxiliary lines) จะยากกว่าปัญหาที่ไม่ใช้เส้นช่วยในการพิสูจน์
6. ความสำเร็จของการแก้ปัญหาส่วนมากขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐานมากกว่าการเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา

เฮนเดอร์สัน (Henderson.1989 : 2571-A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตและการเปลี่ยนแปลงในการสอนเรขาคณิตของครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อฝึกอบรมลักษณะการคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตของครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่าง

ความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตกับชนิดของคำถามที่ได้ถามในระหว่างการสอนและตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตกับความสามารถในการปรับปรุงการสอน กลุ่มตัวอย่างเป็นครูฝึกสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 5 คน เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย เป็นรูปแบบพัฒนาการทางความคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตของแวนฮีลี ผลการวิจัยพบว่า ครูฝึกสอนได้แสดงความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตในระดับ 2 จำนวน 1 คน ในระดับ 3 จำนวน 1 คน ในระดับ 4 จำนวน 2 คน และในระดับ 5 จำนวน 1 คน นอกจากนี้จากการสังเกตครูฝึกสอนทั้ง 5 คน พบว่า สามารถปรับปรุงการสอนหลังจากได้วิเคราะห์ปัญหาที่พบจากนักเรียน

คิปฟิงเกอร์ (Kipfinger.1990 : 488-A) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีการสอนเรขาคณิต 2 วิธีสำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้รูปแบบของแวนฮีลีซึ่งเป็นการวิจัยที่เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ในวิชาเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาเกรด 6 ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้วิธีปกติ กลุ่มที่ 2 สอนโดยลงมือปฏิบัติ ผลการวิจัยพบว่าคะแนนสอบก่อนเรียนของทั้ง 2 กลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่หลังจากการทดลอง คะแนนสอบหลังเรียนแตกต่างกันโดยที่คะแนนของนักเรียนในกลุ่มที่ 2 ดีกว่า

วอลเลซ (Wallace.1991 : 4052-A) ได้ทำการวิจัยเรื่องครูรู้เรขาคณิตอย่างไร เพื่อสืบค้นความรู้เนื้อหาสาระทางเรขาคณิตของครู และความรู้เกี่ยวกับวิธีการสอนเนื้อหา กลุ่มตัวอย่างเป็นครูเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จำนวน 4 คน ซึ่งเลือกแบบเจาะจงจากผู้สนใจที่มีประสบการณ์และมีความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และผู้สอนเรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่าความรู้เนื้อหาสาระกับวิธีการสอนเรขาคณิตมีความสัมพันธ์กันมาก นอกจากนี้ยังรู้ว่าแหล่งความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาสาระเรขาคณิตครูได้มาหลายทางด้วยกัน เช่นได้จากเพื่อนร่วมงาน การฝึกอบรมและการอ่านทั่วไป ครูบางคนได้เรียนรู้ประเด็นต่าง ๆ ที่เป็นปัญหาเกี่ยวกับการสอนเนื้อหาจากสมัยที่เรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย หรือวิทยาลัยครู

ตอนที่ 4 ความรู้เกี่ยวกับภาพลักษณ์มโนทัศน์

4.1 ความหมายและความสำคัญของภาพลักษณ์มโนทัศน์

มโนทัศน์ทางเรขาคณิต แบ่งออกได้เป็น 2 องค์ประกอบ (Vinner. 1983 : 293; citing Vinner. 1975 : 339) ได้แก่ ภาพลักษณ์มโนทัศน์ และบทนิยามมโนทัศน์

บทนิยามมโนทัศน์ หมายถึง คำหรือข้อความที่ใช้สำหรับให้คำจำกัดความของมโนทัศน์นั้น ๆ

เนื่องจากคำว่า "ภาพลักษณ์มโนทัศน์" เป็นศัพท์ใหม่ ซึ่งมีคำที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ภาพ ภาพในใจ จึงขอให้ความหมายของคำว่าภาพและภาพในใจเสียก่อน

ภาพ (Pictures) หมายถึง ตัวแทนของมโนทัศน์ที่มองเห็นได้ (Visual representation) รวมทั้งสัญลักษณ์ เช่น กราฟของฟังก์ชันและนิพจน์ทางพีชคณิตคือ $y = f(x)$ เป็นภาพของมโนทัศน์ของฟังก์ชันเป็นต้น

ภาพในใจ หมายถึง เซตของภาพทุกภาพและสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่มีอยู่ในใจของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง

ให้ C เป็นมโนทัศน์หนึ่ง และ P เป็นบุคคลหนึ่ง ภาพในใจของบุคคล P เกี่ยวกับมโนทัศน์ C หมายถึง เซตของภาพทุกภาพที่เกี่ยวข้องกับ C ซึ่งมีอยู่ในใจของบุคคล P

นอกจากภาพในใจของมโนทัศน์แล้วยังมีเซตของสมบัติ (Properties) ที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่มีอยู่ในใจของบุคคล P อีกด้วย ตัวอย่างเช่น บางคนอาจจะคิดว่าความสูงของรูปสามเหลี่ยมอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมเสมอ บางคนอาจจะคิดว่าการนิยามฟังก์ชัน จะนิยามด้วยนิพจน์ทางพีชคณิต คือ $y = f(x)$ เป็นต้น เซตของสมบัติกับภาพในใจ เรียกว่า ภาพลักษณ์มโนทัศน์

มโนทัศน์บางมโนทัศน์อาจจะประกอบด้วย ภาพลักษณ์มโนทัศน์และบทนิยามมโนทัศน์ แต่ในบางมโนทัศน์มีเพียงภาพลักษณ์มโนทัศน์เท่านั้นก็เป็นที่เข้าใจกันแล้ว เช่น มโนทัศน์ คำว่า บ้าน ไม่จำเป็นต้องมีบทนิยามมโนทัศน์ เพราะทุกคนจะมีมโนทัศน์ที่ชัดเจนเกี่ยวกับบ้านติดตัวมาตั้งแต่เด็กแล้ว แต่บางมโนทัศน์จะมีทั้งสององค์ประกอบ เช่น มโนทัศน์ของป่าไม้ อาจต้องเริ่มต้นโดยการให้นิยามคำว่า ป่าไม้ หมายถึง สถานที่ที่มีต้นไม้ขึ้นอยู่เป็นจำนวนมาก แล้วเราก็นึกถึงภาพของสถานที่ที่มีต้นไม้ขึ้นเป็นจำนวนมาก นั่นคือ เราสร้างมโนภาพของ "ป่าไม้" ขึ้นมา ซึ่งเราเรียกว่าภาพลักษณ์มโนทัศน์ของป่าไม้นั่นเอง ตัวอย่างทางเรขาคณิต เช่น เราให้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีมุม ๆ หนึ่งเป็นมุมฉาก ถ้าเราสามารถสร้างภาพในใจโดยไม่ต้องสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจริง ๆ ประกอบ มองเห็นภาพและสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แสดงว่าเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นในใจเรา

จากแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า ภาพลักษณ์มโนทัศน์ หมายถึง ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่ลึกซึ้งที่มีอยู่ในใจของบุคคลใดบุคคลหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยภาพในใจ สัญลักษณ์และสมบัติที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น ถ้านักเรียนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ไม่ถูกต้อง นักเรียนก็อาจจะนำภาพลักษณ์มโนทัศน์ดังกล่าวมาใช้ โดยไม่สนใจบทนิยามมโนทัศน์ที่ถูกต้อง เนื่องจากอาจจะหลงลืมบทนิยามมโนทัศน์ได้เมื่อเวลาผ่านไป แต่ภาพลักษณ์มโนทัศน์เป็นมโนทัศน์ที่คงทนกว่าและติดตัวนักเรียน จึงระลึกถึงได้ง่ายและใช้ได้ทันที

วินเนอร์ (Vinner.1983 : 293) ได้ให้ข้อสังเกตเกี่ยวกับมโนทัศน์ดังนี้คือ

1. ในการสร้างมโนทัศน์ คนเราต้องการสร้างภาพลักษณ์มโนทัศน์ ไม่ใช่บทนิยามมโนทัศน์

2. บทนิยามมโนทัศน์ อาจจะไม่คงทนหรืออาจหลงลืมได้เมื่อเวลาผ่านไป แต่ภาพลักษณ์มโนทัศน์มีคุณลักษณะคงทนกว่า โดยที่เกือบทั้งหมดจะติดตัวตลอดเวลา แม้ว่าจะเกิดการหลงลืมก็สามารถกระตุ้นให้ระลึกถึงได้

3. บางครั้งจะมีการแนะนำมโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ด้วยบทนิยามมโนทัศน์ แต่นักเรียนไม่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ของมโนทัศน์นี้มาก่อน ซึ่งนับว่าเป็นช่องโหว่อันหนึ่ง นวลศรี ชำนาญกิจ กล่าวว่าสาเหตุหนึ่งที่ผู้เรียนไม่สามารถทำความเข้าใจมโนทัศน์บางมโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งมโนทัศน์ที่เป็นนามธรรมนั้น เป็นเพราะไม่สามารถทำความเข้าใจและไม่สามารถสร้างภาพในใจของมโนทัศน์ดังกล่าวได้ การสร้างภาพในใจสำหรับบางคนเป็นสิ่งที่ยากมาก เนื่องจากบทนิยามมโนทัศน์ของมโนทัศน์บางมโนทัศน์นั้นมีความยุ่งยาก ซับซ้อน และยากต่อการตีความ ทำให้ไม่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาได้ สิ่งหนึ่งที่น่าจะช่วยให้เราเข้าใจได้ดีขึ้นก็คือ บางมโนทัศน์อาจต้องใช้การสร้างภาพประกอบในรูปของรูปภาพ แผนภาพ หรือกราฟ แม้ว่าสิ่งเหล่านี้จะเป็นเพียงตัวแทนของมโนทัศน์ ไม่ใช่ตัวตนจริง ๆ ของมโนทัศน์นั้นก็ตาม แต่ก็เป็นสิ่งที่มีคุณลักษณะใกล้เคียงกับมโนทัศน์นั้น ๆ เช่น แผนภาพเปรียบเสมือนกับรูปถ่ายของมโนทัศน์ที่มองมุมใดมุมหนึ่ง จึงพออนุโลมได้ว่าเป็นมโนทัศน์ของสิ่งนั้น นอกจากนี้ ภาพในใจยังมีความสำคัญกว่าภาพที่สามารถมองเห็นได้ เพราะจะช่วยส่งเสริมการคิดเชิงสัญลักษณ์ (นวลศรี ชำนาญกิจ . 2544 : 11) และสอดคล้องกับหลักพัฒนาการของเพียเจต์ (Lin Cheung Yiu.1979 : 107) การที่นักเรียน

สามารถสร้างภาพในใจได้จะช่วยให้นักเรียนมีความรู้ที่มั่นคงพอเพื่อไปสู่การคิดที่เป็นสัญลักษณ์และเป็นสื่อช่วยให้สามารถขยายการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการคิดที่มีสัญลักษณ์เป็นจุดมุ่งหมายหลัก การคิดเชิงสัญลักษณ์ถือเป็นการเรียนรู้ในการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพที่สุด อนึ่งการสร้างภาพในใจมีความสำคัญในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพราะพื้นฐานกิจกรรมทางคณิตศาสตร์มาจากภาพ (image based) (Wheatley. 1998 : 75 - 76) คือ สามารถใช้ภาพลักษณ์มโนทัศน์แทนได้ เนื่องจากภาพลักษณ์มโนทัศน์ประกอบด้วยภาพในใจ (ภาพและสัญลักษณ์) และสมบัติของมโนทัศน์ ดังนั้น การเสริมสร้างให้นักเรียนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่ถูกต้องย่อมดีกว่าการให้นักเรียนรับบทนิยามมโนทัศน์เพียงอย่างเดียว โดยเฉพาะสัญลักษณ์ทางเรขาคณิตต้องฝึกให้นักเรียนเห็นแล้วสามารถเข้าใจได้ในทันทีโดยไม่จำเป็นต้องอาศัยสื่อกลาง (Pimm. 1995 : 57) เพราะเป็นการกำหนดภาพที่เป็นรูปธรรมสำหรับมโนทัศน์ที่เป็นนามธรรม (Lin Cheung Yiu. 1979 : 107)

กล่าวโดยสรุปคือ ภาพลักษณ์มโนทัศน์ ซึ่งประกอบด้วยภาพในใจ สัญลักษณ์ และสมบัติของมโนทัศน์นั้น มีประสิทธิภาพต่อการเรียนรู้มากกว่าบทนิยามมโนทัศน์ เพราะจะคงทนกว่า และถ้าหลงลืมไปก็สามารถกระตุ้นให้ระลึกถึงได้

4.2 การวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

การสอนมโนทัศน์นั้น ครูควรทราบปัญหาที่เกิดขึ้นกับนักเรียนเพื่อที่จะได้หาวิธีการป้องกันและแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนในเนื้อหาที่สอน การที่จะทราบปัญหาของนักเรียนเกี่ยวกับการเรียนการสอนมโนทัศน์นั้น สามารถกระทำได้โดยใช้การวินิจฉัย

การวินิจฉัย (Diagnosis) หมายถึง การค้นหาคุณลักษณะความบกพร่องของนักเรียน ซึ่งเป็นจุดแข็งหรือจุดอ่อนที่เป็นอุปสรรคในการเรียนของนักเรียน ทำให้นักเรียนไม่ก้าวหน้าหรือไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544 : 18)

คูนีย์ เดวิส และเฮนเดอร์สัน (Cooney, Davis & Henderson. 1983 : 205) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการวินิจฉัย 4 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ค้นหาสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียน
2. จัดประเภทความบกพร่องของนักเรียนแต่ละคนหรือทั้งกลุ่ม

ตัวอย่างความบกพร่องทางมโนทัศน์หรือมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ เช่น

2.1 ความบกพร่องเกี่ยวกับบทนิยามมโนทัศน์ ได้แก่ บอกบทนิยามที่ขาดความสมบูรณ์ บอกบทนิยามตามหนังสือเรียนได้ แต่ไม่สามารถบอกโดยใช้คำพูดของตนเองได้

2.2 ไม่สามารถยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างของมโนทัศน์ได้

2.3 ไม่สามารถหาแบบรูป (Pattern) จากเซตของสิ่งที่เป็นตัวอย่างได้

2.4 ไม่สามารถสรุปนัยทั่วไปของมโนทัศน์ได้

2.5 ไม่สามารถนำหลักการไปใช้เมื่อต้องเผชิญปัญหาด้วยตนเอง ถ้าครูไม่ชี้แนะหรือไม่มีสิ่งชี้นำจากหนังสือเรียน

3. การคาดการณ์สิ่งที่เป็นสาเหตุของความบกพร่อง ในการคาดการณ์สาเหตุ ครูต้องค้นหาว่าสาเหตุใดที่ทำให้นักเรียนเกิดความบกพร่องในการแก้ปัญหาหรือนักเรียนแก้ปัญหาไม่ได้

4. การทดสอบเพื่อหาคำอธิบายและใช้การคาดการณ์สาเหตุเป็นสมมติฐานและการทำนาย

ในการทดสอบเพื่อหาคำอธิบายปัญหาของนักเรียน สามารถทำได้ 2 วิธีด้วยกัน คือ

วิธีแรก หาขอบเขต (Extent) ของการคาดการณ์สาเหตุที่ทำให้นักเรียนมีปัญหา เพื่อให้แน่ใจว่าสิ่งที่ครูคาดการณ์นั้นเป็นจริงหรือไม่

วิธีที่สอง ใช้การคาดการณ์สาเหตุเป็นสมมติฐานและทำนาย ถ้าสมมติฐานได้รับการยืนยันก็จะเกิดความเชื่อมั่นมากขึ้น วิธีทดสอบว่านักเรียนมีความคลาดเคลื่อนประเภทนี้ ทำได้โดยครูให้นักเรียนอธิบายวิธีการและเหตุผลที่นักเรียนใช้

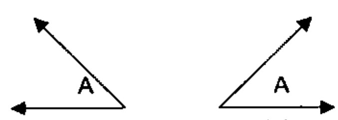
กล่าวสรุปได้ว่า จุดมุ่งหมายในการวินิจฉัย คือ การค้นหาสาเหตุของปัญหาการเรียนของนักเรียน แล้วใช้การสอนเพิ่มเติมเพื่อแก้ไขสาเหตุ ซึ่งเรียกว่า การสอนซ่อมเสริม การวินิจฉัยและการซ่อมเสริมต้องทำควบคู่กันไปเสมอ

นวลศรี ชำนาญกิจ (2544 : 19) ได้ทำการสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยกลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 10 คน นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจำนวน 25 คน และนักศึกษาครู โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ชั้นปีที่ 1 , 2 และ 3 สถาบันราชภัฏนครสวรรค์ จำนวน 15 คน โดยใช้แบบทดสอบที่สร้างขึ้นและผู้วิจัยสัมภาษณ์ประกอบ เพื่อนำข้อมูลมาวิเคราะห์หาภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่คลาดเคลื่อน ผลการสำรวจพบว่า นักศึกษาครู นักเรียนและครูบางคนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคล้ายคลึงกัน และสาเหตุของความคลาดเคลื่อนเหล่านี้คล้ายคลึงกับการสำรวจที่พบในต่างประเทศก่อนหน้านี้ ดังตัวอย่างภาพลักษณ์มโนทัศน์และสาเหตุของความคลาดเคลื่อนต่อไปนี้

1. ยึดติดกับตำแหน่งหรือทิศทางของรูปในลักษณะตั้งขึ้น

2. คิดว่ามุมที่มีแขนยาวกว่าจะมีขนาดใหญ่กว่า ทั้ง ๆ ที่มุมมีขนาดเท่ากัน

3. เมื่อกำหนดมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่ทางขวามือและจุดยอดมุมอยู่คนละข้างมาให้บอกว่ามุมที่กำหนดให้ไม่เท่ากัน ทั้ง ๆ ที่มีสัญลักษณ์กำกับแสดงว่ามีขนาดเท่ากัน ดังรูป

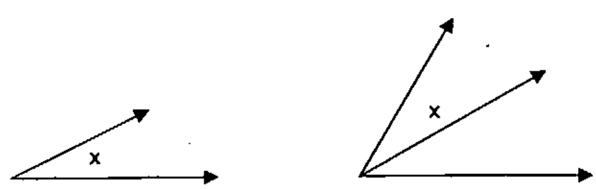


ภาพประกอบ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับมุม

4. ยึดติดกับลูกศรที่กำกับแขนของมุม เมื่อกำหนดมุมที่ใช้ส่วนของเส้นตรงเป็นแขนของมุม จะบอกว่าไม่ใช่มุม

5. มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับแขนของมุม โดยคิดว่ามุมจะต้องมีแขนทั้งสองแขนยาวเท่ากัน

6. คิดว่ามุมที่มีเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรงเพิ่มมาอีก 1 เส้นไม่ใช่มุม ดังรูป



รูปที่กำกับด้วย x เป็นมุม รูปที่กำกับด้วย x ไม่เป็นมุม

ภาพประกอบ 2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับมุม

7. คิดว่าจุดที่อยู่ภายในมุมต้องอยู่ในบริเวณรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นตรงเชื่อมปลายแขนของมุมทั้งสองแขนเท่านั้น จุดที่อยู่นอกบริเวณนี้ไม่อยู่ภายในมุม

8. เข้าใจว่า รังสี เส้นขนานและมุมตรง อยู่ในแนวนอนเท่านั้น

9. ยึดติดกับสัญลักษณ์ที่ใช้กำกับรูป เช่น สัญลักษณ์มุมฉาก

10. เมื่อกำหนดให้ลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านไปยังด้านที่กำหนดให้ มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดขึ้น 4 แบบ คือ ลากเส้นไปยังด้านตรงข้ามโดยไม่คำนึงว่าจะไปตั้งฉากกับด้านตรงข้ามหรือไม่ ลากเส้นทับด้านที่กำหนดให้ ลากเส้นจากจุดยอดไปขนานกับด้านที่กำหนดให้ และไม่ลากเส้นใด ๆ เลย เพราะไม่รู้ว่าจะลากอย่างไร

11. เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวกว่าด้านที่สามมาก ๆ ดังรูป (a) บอกว่าไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมเพราะไม่เคยเห็นรูปสามเหลี่ยมที่มีคุณลักษณะนี้มาก่อน บอกว่ารูป (b) เป็นรูปสามเหลี่ยม นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คิดว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คิดว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป (c) ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อให้ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม กลุ่มตัวอย่างส่วนมากลากเส้นทแยงมุมรูปสี่เหลี่ยมนูนได้ แต่ลากเส้นทแยงมุมรูปสี่เหลี่ยมเว้าไม่ได้หรือลากไม่ถูกต้อง จากการสัมภาษณ์ประกอบ พบว่า บางคนไม่เคยเห็นรูปสี่เหลี่ยมเว้ามาก่อน บางคนที่เคยเห็นรูปลักษณะนี้มาก่อนก็ไม่สามารถหาจุดยอดที่อยู่ตรงกันข้ามได้ บางคนไม่รู้ว่าจะลากเส้นทแยงมุมได้อย่างไร โดยที่ความคลาดเคลื่อนนี้เกิดขึ้นกับนักเรียน ครู และนักศึกษาครู ส่วนในเรื่องของพื้นที่กับเส้นรอบรูป บางคนคิดว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก กลุ่มตัวอย่างมีความคุ้นเคยกับรูปหลายเหลี่ยมปกติ แต่เมื่อกำหนดรูปหกเหลี่ยมที่ไม่ใช่หกเหลี่ยมปกติมาให้ มีนักศึกษาครูเกินครึ่งและนักเรียนเกือบครึ่งตอบว่าไม่ใช่รูปหกเหลี่ยม ส่วนครูนั้นมีจำนวนไม่ถึงครึ่งที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน นักศึกษาครูทั้งหมดตอบว่ารูปที่กำหนดให้ดังรูป (d) เป็นรูปหลายเหลี่ยม โดยที่กลุ่มตัวอย่างเห็นว่ารูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปมาต่อกัน ไม่ได้มองว่าเป็นเพียงรูปเดียว ตัวอย่างนี้พบว่ามีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่มีความคลาดเคลื่อนมากที่สุด ที่เป็นดังนี้อาจจะเป็นเพราะว่ามีการนำเสนอรูปเรขาคณิตที่เป็นรูปเชิงเดียว (Single figures) เป็นส่วนมาก เมื่อผู้เรียนไปพบรูปที่เป็นรูปเชิงซ้อน ซึ่งไม่คุ้นเคย จึงนำความรู้เดิมมาพิจารณารูป โดยไม่ได้คำนึงถึงบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยมหรือลืมบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยม จึงเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

(a) (b) (c) (d)

12. เรื่องรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ จากการใช้แบบทดสอบและการสัมภาษณ์ประกอบในเรื่องรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ผลสำรวจจากกลุ่มตัวอย่างข้างต้นและกลุ่มตัวอย่างที่เป็นครูสอนในระดับมัธยมศึกษาที่สำเร็จการศึกษาจากสถาบันราชภัฏนครสวรรค์ โปรแกรมคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2544 จำนวน 12 คน จากทั้งหมด 31 คน พบภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและสาเหตุของความคลาดเคลื่อนเรื่องรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ ซึ่งสามารถจัดประเภทได้ดังนี้

12.1 มีความรู้พื้นฐานไม่พอ เช่น ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์อื่นมาประกอบในการอธิบายหรือให้เหตุผลที่เกี่ยวกับมโนทัศน์ใหม่ได้

12.2 ยึดติดกับรูป ไม่สนใจเงื่อนไขที่กำหนดให้

12.3 ยึดติดกับความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมตามหนังสือเรียน หรือตามที่ครูสอน มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ต่ำ มีระดับการคิดตามตัวแบบของแวน ฮีลี ระดับ 1 และไม่สามารถแยกรูปย่อย ๆ ออกจากรูปซ้อน (Field dependence)

12.4 จำความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ไม่เข้าใจสาระสำคัญของความสัมพันธ์ เป็นต้นว่า คิดว่าความสัมพันธ์ ด.ม.ด. ประกอบด้วยด้านเท่ากันสองด้านและมุมเท่ากันหนึ่งมุมเท่านั้น โดยไม่ได้พิจารณาว่ามุมที่เท่ากันนั้นต้องอยู่ระหว่างด้านที่เท่ากัน

สาเหตุของความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ ประการหนึ่งน่าจะมาจากกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งนำเสนอรูปที่เป็นตัวอย่างน้อยไปหรือไม่นำเสนอสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างในบางเรื่อง บางเรื่องมีบ้างแต่ไม่มากพอที่จะทำให้ผู้เรียนจะสามารถทำความเข้าใจในมโนทัศน์ได้ ครูบางคนยึดติดกับหนังสือเรียนและปฏิบัติตามคำแนะนำของหนังสือเรียน ทั้งด้านเนื้อหาและวิธีการนำเสนอเนื้อหา ไม่ยกตัวอย่างในสถานการณ์ที่นอกเหนือจากหนังสือเรียน จึงทำให้นักเรียนยึดติดกับสิ่งที่ครูสอนและสิ่งที่หนังสือเหล่านี้นำเสนอ และครูบางคนไม่นำคู่มือครูมาใช้เป็นแนวทางในการสอน จากสาเหตุดังกล่าว ทำให้เกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับนักเรียน เมื่อไม่ได้รับการแก้ไขก็จะติดตัวมาจนเป็นผู้ใหญ่ และส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับอื่นต่อไป

4.3 การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

4.3.1 การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้วยกลวิธีการสร้างมโนทัศน์

เรขา อรัญวงศ์ (2540 : 47 - 48) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับการสอนมโนทัศน์ไว้ว่า การที่บุคคลจะสร้างมโนทัศน์ใด ๆ ได้นั้น เขาต้องรับรู้สิ่งต่าง ๆ แต่สิ่งต่าง ๆ ที่นำเสนอให้รับรู้นั้น ยังไม่ได้จัดระบบหรือแยกประเภทไว้ ผู้เรียนต้องสร้าง (Form) ประเภทของสิ่งเหล่านั้นขึ้นมาเอง โดยใช้คุณลักษณะ (Attribute) อย่างใดอย่างหนึ่งเป็นเกณฑ์ การสอนมโนทัศน์ด้วยกลวิธีการสร้างมโนทัศน์ (Concept formation) เป็นขั้นตอนย่อยขั้นตอนหนึ่งของการสอนแบบอุปนัย ซึ่งมีขั้นตอนตามกลวิธีการสร้างมโนทัศน์ดังนี้

ขั้นที่ 1 การแจกแจงรายละเอียดข้อมูล ครูเสนอข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา แล้วอาจจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนใช้ความคิดในการแจกแจงรายละเอียดของข้อมูลนั้น เน้นการฝึกการสังเกตของนักเรียน แต่ยังไม่มีการสรุปข้อมูล ตัวอย่างคำถามได้แก่ นักเรียนเห็นอะไรบ้าง ... นักเรียนรู้สึกอย่างไรเมื่อกล่าวถึง ...... นักเรียนคิดว่าอย่างไร นักเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับ ... เป็นต้น ในขั้นตอนนี้ นักเรียนปฏิบัติการคิดในลักษณะที่เรียกว่า การแยกแยะสิ่งต่าง ๆ (Differentiation) โดยมีการระบุมโนทัศน์ ระบุความแตกต่างหรือแยกแยะมโนทัศน์นั้น

ขั้นที่ 2 การจัดประเภท ครูอาจจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนจัดประเภทหรือจัดกลุ่มของมโนทัศน์ตามคุณลักษณะที่คล้ายคลึงกันไว้ในกลุ่มเดียวกัน หรือมีคุณลักษณะร่วมกันไว้ในกลุ่มเดียวกัน ครูอาจจะใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสามารถจัดประเภทของมโนทัศน์ เช่นอะไรบ้างที่มีส่วนเหมือนกัน การคิดในลักษณะนี้เรียกว่า การจัดสิ่งที่มีคุณสมบัติเหมือนกันไว้ในกลุ่มเดียวกัน (Identifying Common Properties)

ขั้นที่ 3 การให้ชื่อกลุ่มหรือประเภทของกลุ่ม ครูให้นักเรียนตัดสินลำดับความสำคัญของมโนทัศน์นั้น แล้วเลือกตั้งชื่อกลุ่มหรือประเภทของมโนทัศน์ โดยใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนให้ชื่อกลุ่มหรือ

ประเภทของข้อมูลที่จัดขึ้น โดยอาจจะถามว่า เราจะเรียกชื่อกลุ่มนี้ว่าอะไรดี กลุ่มใดเป็นส่วนย่อยของกลุ่มใด การปฏิบัติการคิดในขั้นตอนนี้เรียกว่า การตัดสินจัดลำดับของข้อมูล การจัดกลุ่มใหญ่ - กลุ่มย่อย (Determining the Hierarchical Order of Items. Super and Sub Ordinates)

4.3.2 การสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้มูฟ

มูฟ (Moves) หมายถึง รูปแบบของภาษาที่ใช้ในการอธิบายหรือบอกความรู้ (Cooney, Davis & Henderson. 1983 : 92)

การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้มูฟ มีกระบวนการ 3 ขั้นตอน คือ การสอน (Teaching) การนำเสนอมโนทัศน์ (Present) และการให้ความกระจ่าง (Clarify) เกี่ยวกับมโนทัศน์ เมื่อนำมาใช้ในการสอนจะมีวิธีการดังต่อไปนี้

4.3.2.1 การให้บทนิยาม (Defining) มโนทัศน์ที่มีความเป็นทางการมาก การใช้วิธีนี้เป็นสิ่งจำเป็น โดยเฉพาะมโนทัศน์คณิตศาสตร์ส่วนมากจะมีคุณลักษณะชัดเจนอยู่แล้ว จึงสามารถใช้วิธีให้บทนิยามได้ ส่วนมโนทัศน์ใดที่มีคุณลักษณะกำกวม ซับซ้อน การให้บทนิยามอาจจะไม่เหมาะสม

4.3.2.2 การกล่าวถึงเงื่อนไขที่เพียงพอ (Stating a Sufficient Condition) เงื่อนไขที่เพียงพอช่วยทำให้นักเรียนสามารถหาสิ่งที่เป็นตัวอย่างของมโนทัศน์ได้ นั่นคือ ช่วยอำนวยความสะดวกในการนำมโนทัศน์ไปใช้

4.3.2.3 การให้สิ่งที่เป็นตัวอย่างหนึ่งตัวอย่างหรือมากกว่าหนึ่งตัวอย่าง (Giving One Example or More Examples) วิธีการให้สิ่งที่เป็นตัวอย่าง (Examplification moves) จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์มากขึ้น ช่วยให้มโนทัศน์มีความชัดเจน แต่บางมโนทัศน์อาจจะไม่สามารถใช้วิธีนี้ได้ เช่น มโนทัศน์ที่มีความเป็นนามธรรมสูง

4.3.2.4 การให้สิ่งที่เป็นตัวอย่างพร้อมเหตุผล (Giving an Example with a Reason) การยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างเพียงอย่างเดียวอาจจะไม่เพียงพอที่จะเข้าใจมโนทัศน์ ต้องให้นักเรียนให้คำอธิบายด้วยว่าเหตุใดสิ่งที่ยกมาจึงเป็นสิ่งที่เป็นตัวอย่างของมโนทัศน์ การให้เหตุผลเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ การใช้วิธีนี้ถือเป็นการสอนมโนทัศน์ที่มีประสิทธิภาพสำหรับนักเรียนที่เรียนรู้ได้ช้า

4.3.2.5 การเปรียบเทียบความคล้ายคลึงและความแตกต่าง (Comparing and Contrasting) ในการสอนมโนทัศน์ควรเลือกสิ่งที่นักเรียนมีความคุ้นเคยมาก่อน เพื่อให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคยน้อยกว่า วัตถุต่าง ๆ ย่อมมีทั้งสิ่งที่คล้ายคลึงกันและแตกต่างกัน จึงต้องเปรียบเทียบทั้งสองคุณลักษณะ เช่น การเปรียบเทียบกึ่งเส้น (Half – line) กับรังสี เป็นต้น

4.3.2.6 การให้ตัวอย่างค้าน (Giving a Counter Example) ตัวอย่างค้าน หมายถึง ตัวอย่างที่แสดงการพิสูจน์แย้งนัยทั่วไปที่ไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น นักเรียนบอกว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ครูควรให้ตัวอย่างค้านเพื่อให้นักเรียนเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันคู่หนึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เช่น รูปสี่เหลี่ยมคางหมู จากนั้นครูจึงกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นถ้านักเรียนยกตัวอย่างที่ไม่ถูกต้อง วิธีการยกตัวอย่างค้านคือการยกสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่าง

4.3.2.7 การกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็น (Stating a Necessary Condition) การที่นักเรียนบอกว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านสองด้านขนานกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เป็นเพราะนักเรียนไม่เข้าใจ

เงื่อนไขที่จำเป็นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นั่นคือ เงื่อนไขที่ว่า ด้านที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานต้องขนานกัน

4.3.2.8 การกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (Stating a Necessary and Sufficient Condition) การให้นิยามบางมโนทัศน์อาจจะต้องผ่านมโนทัศน์อื่น เช่น การนิยามรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนในรูปของสี่เหลี่ยมด้านขนาน อาจกล่าวว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (เงื่อนไขที่ 1) และด้านที่อยู่ติดกันยาวเท่ากัน (เงื่อนไขที่ 2) เมื่อนำเงื่อนไขที่จำเป็นทั้งสองเงื่อนไขมาผนวกเข้าด้วยกัน จะได้เงื่อนไขที่เพียงพอ ครูสามารถทำให้นักเรียนเข้าใจเงื่อนไขทั้งสองโดยใช้คำว่า "ก็ต่อเมื่อ" แทนเงื่อนไขทั้งสองประโยค เช่น ประโยคที่ว่า "รูปหลายเหลี่ยมปกติ คือ รูปที่มีด้านเท่ากันทุกด้านและมุมเท่ากันทุกมุม" สามารถแทนประโยค "รูปหลายเหลี่ยมเป็นรูปปกติ ก็ต่อเมื่อ เป็นรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันและด้านยาวเท่ากัน"

4.3.2.9 การให้สิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างหนึ่งตัวอย่างหรือมากกว่าหนึ่งตัวอย่าง (Giving One Nonexample or More Nonexamples) ในการเรียนรู้มโนทัศน์อาจต้องใช้การวิเคราะห์สิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างควบคู่กันไป จนนักเรียนสามารถสรุปเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอได้ การยกสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างจะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์ได้อย่างกระจ่างชัด และควรใช้หลังจากมีการให้บทนิยามแล้ว และเมื่อนักเรียนมีมโนทัศน์ที่สับสนเกี่ยวกับเงื่อนไขที่จำเป็น

4.3.2.10 การให้สิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างพร้อมเหตุผล (Giving a Nonexample with a Reason) การยกสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างพร้อมทั้งบอกเหตุผลด้วยว่า เหตุใดจึงไม่เป็นสิ่งที่เป็นตัวอย่าง จะช่วยให้นักเรียนเห็นการเชื่อมโยงระหว่างเงื่อนไขที่จำเป็นกับสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่าง วิธีนี้มีประสิทธิภาพเช่นเดียวกับการยกสิ่งที่เป็นตัวอย่างพร้อมเหตุผล

4.3.2.11 การให้คุณลักษณะที่ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (Giving a Characteristic Which is Neither Necessary Nor Sufficient Condition) การกล่าวถึงคุณลักษณะของมโนทัศน์เป็นวิธีการหนึ่งในการเรียนรู้มโนทัศน์ คุณลักษณะของมโนทัศน์มีอยู่สามประเภท คือ คุณลักษณะที่เป็นเงื่อนไขจำเป็น คุณลักษณะที่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ และคุณลักษณะที่ไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ บางครั้งในการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ครูอาจจำเป็นต้องยกสิ่งที่เป็นคุณลักษณะของมโนทัศน์แทนการยกสิ่งที่เป็นตัวอย่าง

การสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นมโนทัศน์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม จึงมีความจำเป็นต้องเลือกใช้กิจกรรมการสอนหลาย ๆ อย่างไปพร้อม ๆ กันอย่างเหมาะสม เพื่อเสริมให้นักเรียนมีความเข้าใจมโนทัศน์นั้นอย่างกระจ่างชัด

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับภาพลักษณ์มโนทัศน์

งานวิจัยภายในประเทศ

พีระพล ศิริวงศ์ (2525). ได้ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการสรุปครอบคลุม ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความคงทนในการจำ ในการเรียนเรื่องรูปเรขาคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยได้รับทั้งตัวอย่างที่ถูกและตัวอย่างที่ผิด กับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยได้รับเฉพาะตัวอย่างที่ถูกเพียงอย่างเดียว ผลปรากฏว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยได้รับทั้งตัวอย่างที่ถูกและตัวอย่างที่ผิดมีความสามารถในการสรุปครอบคลุมสูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยได้รับเฉพาะตัวอย่างที่ถูกเพียงอย่างเดียว แต่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการจำของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

กฤษฎา ศรีชนะ (2537). ได้ทำการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ ความคิดสร้างสรรค์ในวิชาคณิตศาสตร์เรื่องรูปเรขาคณิต และรูปทรงเรขาคณิตที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับการสอนแบบปกติ ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ ความคิดสร้างสรรค์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01

นวลศรี ชำนาญกิจ (2544 : 100) ได้ทำการพัฒนาตัวแบบเพื่อสร้างสมรรถภาพการสอนภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตสำหรับนักศึกษาครู กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาครูโปรแกรมคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 3 สถาบันราชภัฏนครสวรรค์ จำนวน 23 คน ผลการวิจัยพบว่าตัวแบบที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นมีความเหมาะสม และมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

บุษบา โคตพันธ์ (2546 : 40)ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตเรื่องรูปสี่เหลี่ยม รูปทรงและปริมาตร ที่เน้นความรู้สึกเชิงปริภูมิ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 ของโรงเรียนวัดขุนซ่อง จำนวน 1 ห้องเรียน 21 คน ผลการวิจัยพบว่า แบบกิจกรรมที่สร้างเป็นไปตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ คะแนนความรู้สึกเชิงปริภูมิหลังการทดลองสูงกว่าคะแนนความรู้สึกเชิงปริภูมิก่อนการทดลอง นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องรูปสี่เหลี่ยม รูปทรงและปริมาตร มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด และคะแนนความรู้สึกเชิงปริภูมิและคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตเป็นไปในทิศทางเดียวกัน

งานวิจัยต่างประเทศ

เฮิร์ชโควิทซ์ และวินเนอร์.(Hershkowitz, Bruckheimer & Vinner.1987 ; citing Hershkowitz & Vinner.1980) ได้สำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา ครูประจำการและนักศึกษาครูในประเทศอิสราเอล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5-8 จำนวน 518 คน เป็นนักศึกษาครูที่จะทำการสอนในโรงเรียนประถมศึกษา จำนวน 142 คน ครูประจำการที่สอนระดับประถมศึกษา จำนวน 25 คน โดยเปรียบเทียบภาพลักษณ์มโนทัศน์ รวมทั้งตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อการสร้างมโนทัศน์ของทั้งสามกลุ่มดังกล่าว ผลการวิจัยพบว่า ครู นักศึกษาครูและนักเรียน มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนลักษณะเดียวกันในเรื่องมุม ความสูงของรูปสามเหลี่ยม เส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยม และผลกระทบจากตำแหน่งของมุมฉาก

แยคเคิลและวีทลีย์ (Yackel and Wheatley. 1990: 52 – 58) ได้สร้างกิจกรรมสำหรับนักเรียนเกรดสองเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการนึกภาพในใจ (Visual Imagery) ผลปรากฏว่ากิจกรรมที่สร้างขึ้นเป็นกิจกรรมที่ทำให้นักเรียนได้เรียนรู้การจำแนกและการสร้างรูปเรขาคณิต พัฒนามโนมติทางเรขาคณิต และเรียนรู้การใช้ภาษาทางเรขาคณิต ค้นพบรูปเรขาคณิตในภาพที่ซับซ้อน และพัฒนาการดำเนินการเชิงปริภูมิโดยการหมุนภาพในใจได้ และผู้วิจัยเสนอแนะว่ากิจกรรมนี้สามารถนำไปใช้ได้กับนักเรียนทุกระดับ

คลีเมนท์และซารามา (Clements and Sarama. 2000 : 482 – 488) ได้ศึกษาความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต โดยการสัมภาษณ์นักเรียนอายุ 3 – 6 ปี จำนวน 128 คน พบว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังมีความเข้าใจผิดเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิต คลีเมนท์และซารามาได้เสนอแนะกิจกรรมที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจมโนมติที่แท้จริงของรูปเรขาคณิต เช่น ในระดับเบื้องต้น ให้บอกรูปเรขาคณิตที่นักเรียนพบในห้องเรียน ในโรงเรียน ในชุมชน จัดรูปเรขาคณิตเป็นพวกและบอกเกณฑ์ในการจัด ลอกและสร้างรูป

เรขาคณิตโดยใช้แบบรูปได้ และในระดับการมองภาพ ให้นักเรียนบอกได้ว่าทำไมรูปเรขาคณิตที่กำหนดให้เป็นหรือไม่เป็นรูปเรขาคณิตชนิดใดชนิดหนึ่งหรือไม่ เป็นต้น

ตอนที่ 6 ความรู้เกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

6.1 ความหมายของปัญหาและประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้สาระความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้คิดหาคำตอบไม่คุ้นเคยกับปัญหานั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด (ปรีชา เนาว์เย็นผล. 2544 : 16)

สำหรับงานวิจัยนี้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์หมายถึง ปัญหาเกี่ยวกับเรขาคณิตที่ต้องการคำตอบเดียว และวิธีการพิสูจน์เพื่อให้ได้คำตอบอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งผู้ตอบส่วนใหญ่ไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันที ต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางเรขาคณิตมาช่วยในการหาคำตอบหรือการพิสูจน์ปัญหานั้น

ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1985 : 123 - 128) แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็นสองประเภทคือ

1. ปัญหาในการค้นหา เป็นปัญหาที่ให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการซึ่งอาจเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎี หรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็นสามส่วนคือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ และเงื่อนไข

2. ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่าข้อความที่กำหนดเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็นสองส่วนคือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องการ

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 133) ได้กล่าวถึงปัญหาคณิตศาสตร์ที่จะนำมาให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหา ว่าควรมี 4 ลักษณะคือ

1. เป็นปัญหาที่นักเรียนจะต้องค้นหาความจริงหรือข้อสรุปใหม่ที่ผู้เรียนไม่เคยเรียนมาก่อน
2. ปัญหาเกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท
3. ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ใช้บทนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ มาใช้ในการแก้ปัญหา
4. ปัญหาอื่น ๆ ที่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา

6.2 ความหมายและกระบวนการในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต

การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่มีความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลที่มีอยู่ในปัญหากับผู้แก้ปัญหาในการนำประสบการณ์ความรู้ ความเข้าใจและความคิดมาประยุกต์หาวิธีการที่จะเอาชนะปัญหาที่เผชิญอยู่ เพื่อหาคำตอบของปัญหาในสถานการณ์ใหม่ที่ไม่คุ้นเคยมาก่อน (ปรีชา เนาว์เย็นผล. 2544 : 18)

สำหรับความหมายของการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตในงานวิจัยนี้ หมายถึง การหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา ซึ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ต้องใช้ความรู้ ความคิดทางเรขาคณิตที่มีอยู่มาผสมผสานกับข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดให้ในปัญหา เพื่อหาคำตอบของปัญหา

กระบวนการในการแก้ปัญหา

โพลยา (Polya. 1957 : 5 - 22) ได้ค้นพบตัวแบบในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ว่า กระบวนการแก้ปัญหามี 4 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ในขั้นแรกต้องทำความเข้าใจกับ คำ วลี ประโยคย่อย ๆ หรือ สัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา จะถือว่ามีความเข้าใจปัญหาก็ต่อเมื่อสามารถแยกและระบุส่วนสำคัญของปัญหาแต่ละส่วน คือสิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดและเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหากับข้อมูลที่กำหนด

2. ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนสำคัญที่ต้องพิจารณาว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีใดและจะแก้ปัญหาอย่างไร ปัญหาที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กับปัญหาที่เคยมีประสบการณ์การแก้ปัญหามาก่อนหรือไม่ ขั้นวางแผนเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาต้องพิจารณาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปัญหา ผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่มีอยู่ กำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา และเลือกยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ หรือค้นพบวิธีการแก้ปัญหาใหม่

4. ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหามองย้อนกลับไปที่ขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมา เพื่อพิจารณาความถูกต้องของคำตอบ และวิธีการแก้ปัญหา พิจารณาว่ามีคำตอบหรือวิธีการแก้ปัญหาอย่างอื่นอีกหรือไม่ พิจารณาปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาให้กะทัดรัดชัดเจนเหมาะสมขึ้นกว่าเดิม

ครูลิค และเรย์ (Krulik and Reys. 1980 : ปกใน) กล่าวถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

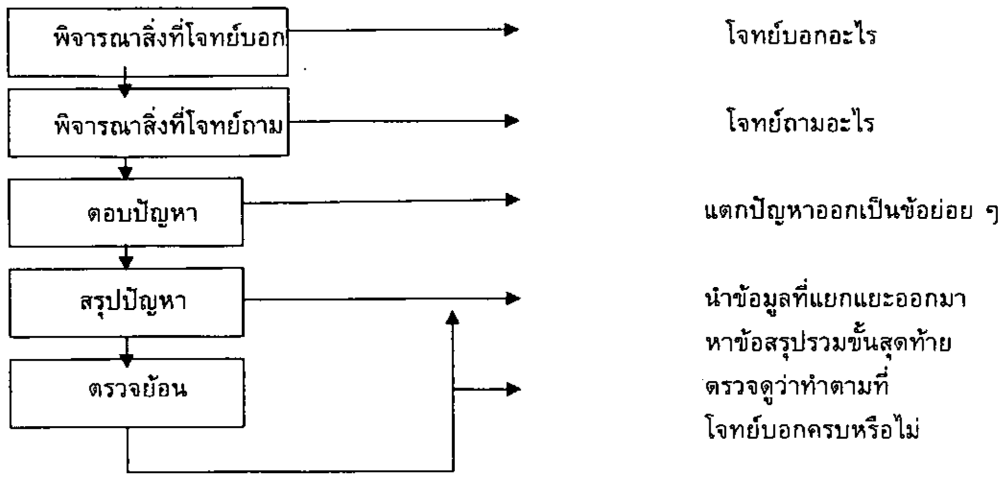
1. ทำความเข้าใจปัญหา พิจารณาว่าอะไรเป็นตัวไม่ทราบค่า มีข้อมูลหรือเงื่อนไขอะไรบ้าง สิ่งที่โจทย์บอกมาเพียงพอในการแก้ปัญหาหรือไม่ ในการพิจารณาอาจสร้างภาพประกอบความเข้าใจ แยกแยะส่วนต่าง ๆ ของสิ่งที่โจทย์บอกแล้วเขียนลงไปว่ามีอะไรบ้าง

2. วางแผนในการแก้ปัญหา ต้องหาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่โจทย์ให้มากับตัวที่ไม่ทราบค่า พิจารณาปัญหาย่อย เทียบเคียงปัญหาเดิมที่คล้ายคลึงกัน ค้นหาทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม ที่จะนำมาใช้แล้วลงมือแก้ปัญหา

3. ดำเนินการตามแผน เมื่อวางแผนแล้วก็ดำเนินการตามแผนทันทีและควรทำการตรวจสอบทีละขั้นตอนว่าถูกต้องหรือไม่

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา เมื่อทำเสร็จแล้วต้องตรวจสอบอีกครั้งหนึ่งว่าใช้ข้อมูลหมดหรือยัง ตอบคำถามครบทุกข้อหรือไม่

ยุพิน พิพิธกุล (2530 : 136) ได้สรุปแผนผังของลำดับขั้นของการแก้ปัญหาไว้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 แผนผังของลำดับขั้นการแก้ปัญหา

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต โดยมีรายละเอียดของการดำเนินการตามหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. วิธีดำเนินการวิจัย
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในปีการศึกษา 2546

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ จำนวน 30 คน จากประชากรที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับต่าง ๆ กัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

1.1 แบบสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

1.2 บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต ซึ่งสร้างจากการวิเคราะห์แบบสำรวจในข้อ 1.1 เพื่อใช้สอนซ่อมเสริม 12 คาบ ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

1.2.1 การหาพื้นที่

1.2.2 ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1.2.3 รูปสามเหลี่ยมคล้าย

1.2.4 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.3 แผนการสอนซ่อมเสริมจำนวน 12 คาบ

1.4 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตจำนวน 4 ฉบับแยกตามเนื้อหาในข้อ 1.2 ซึ่งแต่ละฉบับเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

ศึกษาผลงานวิจัย เอกสาร หนังสือ และตำราที่เกี่ยวข้องกับภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเพื่อนำมาใช้ในการสร้างเครื่องมือดังต่อไปนี้

2.1 สร้างแบบสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยสร้างจากงานวิจัยของนวลศรี ชำนาญกิจ (2544 : 148) จำนวน 2 ฉบับดังต่อไปนี้

ฉบับที่ 1 แบบทดสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 48 ข้อ เพื่อสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต เกี่ยวกับเนื้อหาเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเรื่อง รังสี มุม รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมคล้าย

ฉบับที่ 2 แบบทดสอบอัตนัย จำนวน 19 ข้อ เป็นการวัดภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเนื้อหาเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานทั่วไปได้แก่ การลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม การลากเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยม การพิจารณาขนาดของมุม และมโนทัศน์เกี่ยวกับมุมฉาก มุมแหลม มุมป้าน รังสี รูปหลายเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มุมภายใน มุมภายนอก รูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ และรูปสามเหลี่ยมคล้าย ในบางข้อจะถามซ้ำกับฉบับที่ 1 เพื่อทดสอบความคงเส้นคงวาในการตอบของกลุ่มตัวอย่าง

2.2 สร้างบทเรียนซ่อมเสริม และแผนการสอนตามลำดับขั้นดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนซ่อมเสริม มีเนื้อหาดังนี้คือ การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพื่อใช้สอนจำนวน 12 คาบ ซึ่งในบทเรียนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหา แบบฝึกหัด ซึ่งเนื้อหาแต่ละเรื่องขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนของภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ได้จากแบบสำรวจในข้อ 2.1 และจัดทำแผนการสอนประกอบด้วย หัวเรื่อง จำนวนคาบที่สอน สาระการเรียนรู้ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการสอน การวัดผลและการประเมินผล

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนซ่อมเสริมและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน ตรวจแก้ไข เพื่อพิจารณา และชี้แนะข้อบกพร่องแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและแผนการสอนที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ไม่ใช่กลุ่มทดลองจำนวน 10 คน โดยใช้เวลาสอน 12 คาบ หลังจากทดลองสอนแล้ว ผู้วิจัยบันทึกข้อบกพร่องในด้านความเหมาะสมของเนื้อหา เวลาที่ใช้สอนในแต่ละเนื้อหาของบทเรียนและกิจกรรมในแผนการสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขและให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.3 สร้างแบบทดสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 4 ฉบับ โดยแต่ละฉบับแยกตามหัวข้อต่อไปนี้ การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่ละฉบับมีจำนวน 30 ข้อ เพื่อวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนำแบบทดสอบ 4 ชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และ ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไข เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมจำนวน 10 คน ทั้งก่อนทำการทดลองและหลังทำการทดลอง

2.4 วิเคราะห์แบบทดสอบปรนัยโดยการหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)

2.5 คัดเลือกข้อสอบปรนัยที่มีความยากง่ายตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และหาค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 20 ข้อ จากทั้งหมด 30 ข้อ และหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตรของคูเดอร์–ริชาร์ดสัน เพื่อเป็นแบบทดสอบก่อนทำการทดลองและแบบทดสอบหลังการทดลอง

2.6 สร้างข้อสอบอัตนัยเนื้อหาละ 5 ข้อ เพื่อวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 เมื่อสร้างเสร็จแล้วนำไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไข

วิธีดำเนินการวิจัย

แบบแผนการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยใช้แบบแผนการวิจัยที่มีกลุ่มทดลองเพียงกลุ่มเดียวและมีการทำการทดสอบก่อนทำการทดลองและหลังทำการทดลอง (One – Group Pretest – Posttest Design) ดังนี้

$T_1 \quad X \quad T_2$

เมื่อ X คือ การจัดกระทำ (Treatment)

T_1 คือ การสอบก่อนที่จะจัดกระทำการทดลอง (Pre – test)

T_2 คือ การสอบหลังจากที่จัดกระทำการทดลอง (Post – test)

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ ทดลองสอนจำนวน 12 คาบ คาบละ 50 นาที วันละ 2 คาบ เป็นเวลา 6 วัน และทดสอบก่อนและหลังการทดลองอย่างละ 1 คาบ จำนวน 8 คาบ รวมทั้งสิ้น 20 คาบ โดยใช้เวลานอกเวลาเรียนปกติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาในบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต ประกอบด้วยเนื้อหาเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งแยกบทเรียนเป็นเนื้อหาแต่ละเรื่อง

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยทำการสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา โดยใช้แบบสำรวจที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจากงานวิจัยของนวลศรี ชำนาญกิจ (2544 : 148) จำนวน 2 ฉบับ เป็นข้อสอบปรนัย 1 ฉบับ และข้อสอบอัตนัย 1 ฉบับ แล้วนำผลการสำรวจมาวิเคราะห์หานักเรียนที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตแต่ละเนื้อหา ใน 4 เนื้อหาดังนี้ การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพื่อเป็นกลุ่มประชากร จากนั้นจำแนกนักเรียนที่มีความคลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตออกเป็น 4 กลุ่มย่อยดังนี้คือ กลุ่มที่มีความคลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตหนึ่งเนื้อหา สองเนื้อหา สามเนื้อหา และสี่เนื้อหา

2. สุ่มตัวอย่างนักเรียนจำนวน 30 คน แบบแบ่งชั้นภูมิ โดยให้ขนาดตัวอย่างในแต่ละกลุ่มย่อยเป็นสัดส่วนกับจำนวนนักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อย ซึ่งได้ขนาดตัวอย่างดังนี้ กลุ่มที่มีความคลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตหนึ่งเนื้อหาจำนวน 5 คน สองเนื้อหาจำนวน 14 คน สามเนื้อหาจำนวน 7 คน และสี่เนื้อหาจำนวน 4 คน

3. แยกนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มได้ เข้ากลุ่มเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ตามเนื้อหาที่นักเรียนแต่ละคนมีความคลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในแต่ละเนื้อหา เพื่อทำการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ในเนื้อหานั้น ๆ

4. สร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์และแผนการสอน โดยอาศัยข้อสรุปเกี่ยวกับภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในแต่ละเนื้อหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการวิเคราะห์แบบสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ในข้อ 1

5. ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาแต่ละเนื้อหาที่สร้างขึ้นไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในเนื้อหานั้น ก่อนทำการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ในแต่ละเนื้อหา

6. ผู้วิจัยสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ให้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในแต่ละเนื้อหา โดยใช้บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์และแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น การสอนกลุ่มตัวอย่างในแต่ละเนื้อหาจะสอนนอกเวลาเรียนปกติเนื้อหาละ 3 คาบ โดยสอนวันละ 2 คาบ จำนวน 6 วัน รวม 12 คาบ

7. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนในแต่ละเนื้อหา ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในเนื้อหานั้น ทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต โดยใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกับแบบทดสอบก่อนทำการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ ใช้เวลาทำแบบทดสอบ 1 คาบ

8. ตรวจผลการทดสอบ โดยให้คะแนนแบบทดสอบปรนัย ข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิด ไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 ข้อ ให้ 0 คะแนน และข้อสอบอัตนัย 5 ข้อ ให้คะแนนข้อละ 2 คะแนน จากนั้นนำผลการทดสอบที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตแต่ละเนื้อหาในเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม การหาพื้นที่ รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีการพัฒนาขึ้น โดยแยกวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละเนื้อหาหลังทำการสอนซ่อมเสริมจบในเนื้อหานั้น ๆ แล้วทำการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนทำการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์กับความสามารถในการแก้ปัญหาหลังทำการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ โดยใช้การทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอน (Wilcoxon Signed Rank Test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองได้แก่ สถิติหาค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบใช้การคำนวณจากสูตรของ คูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (KR-20)

2. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ การทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอน

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องการหาพื้นที่

ตอนที่ 2 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ตอนที่ 3 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย

ตอนที่ 4 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตอนที่ 1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง การหาพื้นที่

1.1 ผลประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์เรื่องการหาพื้นที่ ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องการหาพื้นที่

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม (30 คะแนน)		
		คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ก่อนการสอนซ่อมเสริม	11	8.36	132.66	4.20
หลังการสอนซ่อมเสริม	11	19.45		4.68

จากตาราง 1 จะเห็นว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนการสอนซ่อมเสริมและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์มีคะแนนเฉลี่ย 8.36 คะแนน และ 19.45 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 132.66 ดังนั้นแสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริม

1.2 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องการหาพื้นที่ มีการพัฒนาขึ้นหรือไม่โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล ปรากฏผลในตาราง 2

ตาราง 2 วิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องการหาพื้นที่ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

	จำนวนคน	Z	P - value
คะแนนสอบก่อนสอนซ่อมเสริม – คะแนนสอบหลังสอนซ่อมเสริม	11	-2.955 **	.0015

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จากตาราง 2 พบว่า ได้ค่าประมาณสถิติทดสอบ Z = -2.955 มี P – value = 0.0015 จึงสรุปได้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องการหาพื้นที่ หลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

ตอนที่ 2 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

2.1 ผลประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม (30 คะแนน)		
		คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ก่อนการสอนซ่อมเสริม	25	13.20	56.06	3.32
หลังการสอนซ่อมเสริม	25	20.60		2.60

จากตาราง 3 จะเห็นว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนการสอนซ่อมเสริมและหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ย 13.20 คะแนน และ 20.60 คะแนน ตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 56.06 ดังนั้นแสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริม

2.2 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม มีการพัฒนาขึ้นหรือไม่โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล ปรากฏผลในตาราง 4

ตาราง 4 วิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

	จำนวนคน	Z	P - value
คะแนนสอบก่อนสอนซ่อมเสริม – คะแนนสอบหลังสอนซ่อมเสริม	25	-4.379 **	.000

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จากตาราง 4 พบว่า ได้ค่าประมาณสถิติทดสอบ Z = -4.379 มี P – value = 0.000 จึงสรุปได้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม หลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

ตอนที่ 3 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย

3.1 ผลประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม (30 คะแนน)		
		คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ก่อนการสอนซ่อมเสริม	23	7.78	138.69	2.45
หลังการสอนซ่อมเสริม	23	18.57		2.15

จากตาราง 5 จะเห็นว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนการสอนซ่อมเสริมและหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ย 7.78 คะแนน และ 18.57 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 138.69 ดังนั้นแสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริม

3.2 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายมีการพัฒนาขึ้นหรือไม่โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล ปรากฏผลในตาราง 6

ตาราง 6 วิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

	จำนวนคน	Z	P - value
คะแนนสอบก่อนสอนซ่อมเสริม – คะแนนสอบหลังสอนซ่อมเสริม	23	-4.204 **	.000

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จากตาราง 6 พบว่า ได้ค่าประมาณสถิติทดสอบ Z = -4.204 มี P – value = 0.000 จึงสรุปได้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริม

ภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย หลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนสอนซ่อมเสริม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

ตอนที่ 4 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4.1 ผลประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ปรากฏผลดังตาราง 7

ตาราง 7 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม (30 คะแนน)		
		คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยที่เพิ่มขึ้น	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ก่อนการสอนซ่อมเสริม	9	8.00	158.38	2.24
หลังการสอนซ่อมเสริม	9	20.67		5.20

จากตาราง 7 จะเห็นว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนการสอนซ่อมเสริมและหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ย 8.00 คะแนน และ 20.67 คะแนน ตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 158.38 ดังนั้นแสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริม

4.2 ผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีการพัฒนาขึ้นหรือไม่โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล ปรากฏผลในตาราง 8

ตาราง 8 วิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตในเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

	จำนวนคน	T	W
คะแนนสอบก่อนสอนซ่อมเสริม – คะแนนสอบหลังสอนซ่อมเสริม	9	0 **	4

** มีนัยสำคัญที่ระดับ .01

จากตาราง 8 พบว่า ค่าสถิติทดสอบ $T = 0$ ซึ่ง $T < W_{.01}$ จึงสรุปได้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนสอนซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปจุดมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตแต่ละเนื้อหาในเรื่อง การหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีการพัฒนาขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตของโรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งชั้นภูมิ จำนวน 30 คน จากประชากรที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับต่าง ๆ กัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

2. บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต ซึ่งสร้างจากการวิเคราะห์แบบสำรวจในข้อ 1 เพื่อใช้สอนซ่อมเสริม 12 คาบ ซึ่งประกอบด้วยเรื่องการหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. แผนการสอนซ่อมเสริมจำนวน 12 คาบ

4. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตจำนวน 4 ฉบับแยกตามเนื้อหาในข้อ 2 ซึ่งแต่ละฉบับเป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ และอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาแต่ละเนื้อหาที่สร้างขึ้นไปทดสอบกับ

นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในเนื้อหานั้น ก่อนทำการสอนซ่อมเสริมในแต่ละเนื้อหา

2. ผู้วิจัยสอนซ่อมเสริมนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในแต่ละเนื้อหา โดยใช้บทเรียนซ่อมเสริมและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น การสอนกลุ่มตัวอย่างในแต่ละเนื้อหาจะสอนนอกเวลาเรียนปกติเนื้อหาละ 3 คาบ โดยสอนวันละ 2 คาบ จำนวน 6 วัน รวม 12 คาบ

3. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนในแต่ละเนื้อหา ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในเนื้อหานั้น ทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต โดยใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกับแบบทดสอบก่อนทำการสอนซ่อมเสริม ใช้เวลาทำแบบทดสอบ 1 คาบ

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตแต่ละเนื้อหาในเรื่องการหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีการพัฒนาขึ้น การวิเคราะห์ข้อมูลจะแยกวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละเนื้อหาหลังทำการสอนซ่อมเสริมจบในเนื้อหานั้น ๆ โดยการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนทำการสอนซ่อมเสริมกับความสามารถในการแก้ปัญหาหลังทำการสอนซ่อมเสริมจะใช้การทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอน (Wilcoxon Signed Rank Test)

สรุปผลการวิจัย

1. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องการหาพื้นที่ มีคะแนนเฉลี่ย 8.36 คะแนน และ 19.45 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 132.66 แสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

2. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม มีคะแนนเฉลี่ย 13.20 คะแนน และ 20.60 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 56.06 แสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

3. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย มีคะแนนเฉลี่ย 7.78 คะแนน และ 18.57 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 138.69 แสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

4. คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีคะแนนเฉลี่ย 8.00 คะแนน และ 20.67 คะแนนตามลำดับ ซึ่งหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นร้อยละ 158.38 แสดงว่าความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างหลังได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตดีกว่าก่อนได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

5. จากการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเรื่องการหาพื้นที่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม รูปสามเหลี่ยมคล้าย และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 กล่าวคือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีการพัฒนาขึ้น ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

อภิปรายผล

1. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการสอนซ่อมเสริมสูงกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 กล่าวคือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตมีการพัฒนาขึ้น ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจมีสาเหตุมาจาก

1.1 เนื้อหาของบทเรียนแต่ละเรื่อง เป็นเนื้อหาที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว แต่นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อนในบางเนื้อหา ซึ่งเมื่อนักเรียนได้รับการสอนซ่อมเสริมในเนื้อหาที่นักเรียนคลาดเคลื่อนจนนักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหานั้น ๆ และเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ในใจอย่างชัดเจน นักเรียนจึงสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ดีกว่าก่อนการสอนซ่อมเสริม

1.2 เนื้อหาของบทเรียนมีแบบฝึกหัดที่หลากหลาย และเน้นให้นักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหา ปัญหาบางข้อเป็นปัญหาที่นักเรียนไม่เคยพบ และมีวิธีคิดที่แปลกใหม่ นักเรียนจึงรู้สึกท้าทายและสนใจที่จะหาคำตอบ แต่จากการทดลองพบว่าความสนใจและความพยายามในการแก้ปัญหาของนักเรียนจะเกิดขึ้นภายหลังจากที่นักเรียนได้รับการสอนซ่อมเสริมจนมีความรู้ในเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานอย่างชัดเจนพอ ซึ่งจะแตกต่างจากการที่ให้นักเรียนทำการแก้ปัญหาก่อนการสอนซ่อมเสริม นักเรียนจะเห็นว่าปัญหานั้นยากเกินไปและไม่พยายามที่จะแก้ปัญหา ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ นักเรียนมองไม่เห็นแนวทางในการแก้ปัญหา และมีความรู้พื้นฐานในการแก้ปัญหาไม่เพียงพอ

1.3 การเรียนการสอนเป็นกลุ่มย่อย ช่วยให้นักเรียนมีโอกาสซักถาม และแสดงความคิดอย่างอิสระ มีการคิดร่วมกันเป็นกลุ่ม แลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน จึงช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหานั้น ๆ มากขึ้น จนนักเรียนสามารถสรุปเป็นความรู้และเกิดภาพในใจของนักเรียนเอง เมื่อนักเรียนมาพบปัญหาที่ต้องแก้ นักเรียนจึงพยายามนำความรู้ที่นักเรียนมีอยู่มาช่วยในการแก้ปัญหา และการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มจะช่วยให้นักเรียนไม่เครียดและมีความสนุกในการทำการแก้ปัญหา

2. คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบทั้งก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริมของกลุ่มตัวอย่างไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีความบกพร่องในเนื้อหานั้น ๆ และปัญหาที่นักเรียนพบในแบบทดสอบถือว่าเป็นปัญหาทางเรขาคณิตที่ค่อนข้างยาก และนักเรียนไม่ค่อยได้ฝึกการแก้ปัญหามาก่อน พอนักเรียนพบปัญหาที่ยากจึงข้ามไป และไม่พยายามทำ

3. จากเนื้อหาทั้งสี่เรื่องจะพบว่านักเรียนมีความคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมากที่สุด อันดับสองเป็นเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย ทั้งนี้มีสาเหตุที่สอดคล้องกับงานวิจัยของ นวลศรี ชำนาญกิจ ดังนี้

1. มีความรู้พื้นฐานไม่พอ เช่น ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์อื่นมาประกอบในการอธิบายหรือให้เหตุผลที่เกี่ยวกับมโนทัศน์ใหม่ได้

2. ยึดติดกับรูป ไม่สนใจเงื่อนไขที่กำหนดให้

3. ยึดติดกับความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมตามหนังสือเรียนหรือตามที่ครูสอน มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ต่ำ มีระดับการคิดตามตัวแบบของแวน ฮีลี ระดับ 1 และไม่สามารถแยกรูปย่อย ๆ ออกจากรูปซ้อน (Field dependence)

4. จำความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้ แต่ไม่เข้าใจสาระสำคัญของความสัมพันธ์ เป็นต้นว่า คิดว่าความสัมพันธ์ ด.ม.ด. ประกอบด้วยด้านเท่ากันสองด้านและมุมเท่ากันหนึ่งมุมเท่านั้น โดยไม่ได้พิจารณาว่ามุมที่เท่ากันนั้นต้องอยู่ระหว่างด้านที่เท่ากัน (นวลศรี ชำนาญกิจ. 2544 : 19)

5. เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายนักเรียนจะเขียนอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันไม่ถูกต้อง สาเหตุเพราะนักเรียนมองรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันไม่ถูก และไม่สามารถบอกได้ว่าด้านใดเป็นด้านที่สมนัยกัน มุมใดเป็นมุมที่สมนัยกัน

6. จากโจทย์ปัญหาเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย เมื่อนักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาแล้วต้องวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา นักเรียนไม่สามารถวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาได้

จากสาเหตุดังกล่าวทำให้นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์และแก้ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม และเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ แต่เมื่อนักเรียนได้รับการสอนซ่อมเสริมในจุดที่นักเรียนบกพร่องนักเรียนจึงสามารถทำการแก้ปัญหาได้

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำไปใช้

1. บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในงานวิจัยนี้ ครูสามารถนำไปใช้สอนซ่อมเสริมนักเรียนที่มีความคลาดเคลื่อนทางเรขาคณิตในแต่ละเรื่องที่นักเรียนบกพร่องเป็นรายบุคคล หรือจะทำการสอนซ่อมเสริมเป็นรายกลุ่มก็ได้ แต่ควรจะเป็นกลุ่มย่อยจะได้ผลมากกว่ากลุ่มใหญ่

2. ครูอาจจะนำโจทย์ปัญหาในงานวิจัยนี้ไปสอนแทรกระหว่างการเรียนการสอนเนื้อหาวิชานั้น ๆ เพื่อให้นักเรียนได้มีโอกาสฝึกทำการแก้ปัญหา และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้นำความรู้ที่เรียนไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา

3. การสอนให้นักเรียนเกิดภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้นนอกจากครูจะเป็นผู้สอนเนื้อหาส่วนหนึ่งแล้ว ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น และมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

และให้นักเรียนได้สรุปความรู้เป็นของตนเองก่อน สุดท้ายครูจึงสรุปอีกครั้งเพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบดูว่าความรู้ที่นักเรียนสรุปเองนั้นถูกต้องหรือไม่

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

1. ควรมีงานวิจัยเกี่ยวกับการสร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ในคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ เพิ่มเติม

2. ควรมีงานวิจัยเกี่ยวกับการสร้างบทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตกับนักเรียนในระดับอื่น ๆ โดยเฉพาะกับนักเรียนในระดับประถมศึกษา

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ.(2537). *คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.

________________.(2541). *คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 203 คณิตศาสตร์ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง*. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.

________________.(2541). *คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 204 คณิตศาสตร์ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง*. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.

________________.(2543). *คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น*. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.

________________. (2546). *ผังมโนทัศน์และสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544* . กรุงเทพ ฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.

กรองทิพย์ พงษ์ลิ้มศรี. (2535). *การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการ*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

กฤษฎา ศรีชนะ. (2537). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้ และความคิดสร้างสรรค์เรื่องรูปเรขาคณิตและรูปทรงเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านดูม อำเภอศรีรัตตนะ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ได้รับการสอนโดยวิธีสอนแบบปฏิบัติการกับวิธีสอนแบบปกติ*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

โกมล ไพศาล. (2540). *การพัฒนาชุดการสอนเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตรศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ชุลีพร สุภธีระ. (2533). *" การสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยใช้แบบเรียนของ สสวท :"* ในเอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 6 วันที่ 9 – 10 พฤษภาคม *2533* : หน้า 1 – 9. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

นวลศรี ชำนาญกิจ. (2544). *การพัฒนาตัวแบบเพื่อสร้างสมรรถภาพการสอนภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตสำหรับนักศึกษาครู*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตรศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

บุษบา โคตพันธ์. (2546). *กิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิตเรื่องรูปสี่เหลี่ยม รูปทรงและปริมาตรที่เน้นความรู้สึกเชิงปริภูมิ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6* . ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2544). *กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิดสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตรศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

พิชากร แปลงประสพโชค. (2518). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโครงสร้างคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตรศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

__________________. (2540). *การพัฒนาหลักสูตรพิเศษทางเรขาคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตรศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

พีระพล ศิริวงศ์. (2525). *การเปรียบเทียบความสามารถในการสรุปครอบคลุม ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการจำเรื่องรูปเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จากการสอนที่แตกต่างกันสองแบบ.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

เรขา อรัญวงศ์. (2540). *รูปแบบการสอน (Models of Teaching)* . กำแพงเพชร : สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). *ตัวอย่างข้อสอบและ ข้อสอบสำหรับการแข่งขันคณิตศาสตร์ประถมศึกษาระดับโลกที่ฮ่องกง พ.ศ. 2543.* กรุงเทพฯ : คอมม่า ดีไซน์แอนด์พริ้นท์.

สมพล เล็กสกุล และ ชุลีพร สุภธีระ. (2538). *เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น.* กรุงเทพฯ : ม.ป.พ.

สมพล เล็กสกุล. (ม.ป.ป.). *เรขาคณิต (เอกสารประกอบการอบรมครู).* กรุงเทพฯ : ม.ป.พ.

สุพจน์ ไชยสังข์. (2539). *การสำรวจระดับความคิดและความสามารถในการพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิตของนักเรียนไทย.* ม.ป.พ.

สิริพร ทิพย์คง. (2543). *"ศิลปะการตั้งคำถามในวิชาคณิตศาสตร์" วารสารคณิตศาสตร์ฉบับพิเศษ.* กรุงเทพฯ : สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์.

อารีย์ คำปล้อง. (2536). *การสอนแบบปฏิบัติการเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับวงกลม.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

Clements, Douglas H. and Battista, Michael T. (1992). " Geometry and Spatial Reasoning," *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Edited by Douglas A. Grouws. p. 420 – 463. New Yok : Macmillan Publishing Company.

Clements, Douglas H. and Sarama, Julie. (2000, April). " Young Children's Ideas about Geometric Shape". *Teaching Children Mathematics.* 6(8) : 482 – 488.

Cooney, Thomas J., Davis, Ed ward J. & Henderson, K.B. (1983). *Dynamics Teaching Secondary School Mathematics.* 2nd ed. Boston : Houghton Mifflin.

Henderson, Elizabeth Marie. (1989, March). " Preservice Secondary Mathematics Teachers' Geometric Thinking and Their Flexibility in Teaching Geometry," *Dissertation Abstracts International.* 49(9) : 2571 – A.

Hershkowitz, Rina and Bruckheimer, Maxim and Vinner, Shlomo. (1987). " Activities with Teachers Based on Cognitive Research," *In Learning and Teaching Geometry : K – 12 (Year Book).* Edited by Mary Montgomery Linquist and Albert P.Shulie. p. 222 – 235. Reston,Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.

Jeon, Pyung Kook. (1988, December). " Geometry Problem Solving of Korean Middle School Students : an Analysis of Representation and Transfer," *Dissertation Abstracts International.* 49(6) : 1410 – A .

Kipfinger, Mary Elizabeth. (1990 ,November). " A Comparison of Two Methods of Teaching Geometry at The Middle School Level as Influenced by The Van Hiele Model," *Dissertation Abstracts International.* 28(4) : 488 – A .

Krulik, Stephen and Robert E. Reys. (1980). *Problem Solving in School Mathematics.* Washington D.C. : The National Council of Teachers of Mathematics.

Lin Cheung Yiu. (1979, January – March). " Imagery in Mathematical Thinking and Learning". *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*10(1):107–111.

Pimm, David. (1995). *Symbols and Meaning in School Mathematics.* London : Routledge.

Polya, George. (1957). *How to Solve It.* Princeton, New Jersy : Princeton University.

___________. (1985). *How to Solve It.* Princeton : Princeton University Press.

Sidhu, Kulber Singh. (1981). *The Teaching of Mathematics.* 3rd ed. New Delhi : Sterling Printer.

Thommas, David A. (1991). *Children, Teachers and Mathematics.* 2nd ed. Needham Heights, Massachusetts : Allyn and Bacon.

Vinner, Shlomo. (1983, January – February). " Concept Definition, Concept Image and The Notion of Function," *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* 14(3) : 293 – 305.

Wallace, Martha Louise Tibbetts. (1991, June). " How do Teachers Know Geometry ? A Multi – Case Study of Secondary School Geometry Teachers' Subject – Matter and Pedagogical Content Knowledge," *Dissertation Abstracts International.* 51(12) : 4052 – A.

Wheatley, Grayson H. (1998, Spring & Summer). " Imagery and Mathematics Learning," *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 20(2&3) : 65 – 77.

Yackel, Erna and Wheatley, Grayson H. (1990, February). "Promoting Visual Imagery in Young Pupils," *Arithmetic Teacher.* 37 (6) : 52 – 58.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ ที่ช่วยตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือในการวิจัย

1. อาจารย์ เมตต์ แย้มวงษ์
   ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
   มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์เอนก จันทรจรูญ
   ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
   มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์พงศ์รัศมิ์ เฟื่องฟู
   โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
   สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา

ภาคผนวก ข
ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

ตาราง 9 ข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการหาพื้นที่

เลขที่	คะแนนเต็ม 30 คะแนน	
	ก่อนการสอนซ่อมเสริม	หลังการสอนซ่อมเสริม
7/2	13	16
9/2	14	26
15/2	14	27
23/2	4	17
26/2	6	19
29/2	5	17
38/2	5	17
41/2	5	13
42/2	8	26
12/1	13	18
36/1	5	18

ตาราง 10 ข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

เลขที่	คะแนนเต็ม 30 คะแนน	
	ก่อนการสอนซ่อมเสริม	หลังการสอนซ่อมเสริม
1 / 2	16	18
2/2	13	20
5/2	11	20
7/2	15	17
14/2	18	24
19/2	14	23
22/2	10	26
23/2	15	21
26/2	11	18
29/2	8	22
33/2	17	23
35/2	12	22
36/2	17	20
37/2	17	21
38/2	13	19
39/2	10	18
41/2	12	20
42/2	18	20
44/2	18	22
45/2	15	21
12/1	9	14
14/1	8	21
21/1	14	21
25/1	10	25
36/1	9	19

ตาราง 11 ข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

เลขที่	คะแนนเต็ม 30 คะแนน	
	ก่อนการสอนซ่อมเสริม	หลังการสอนซ่อมเสริม
1 /2	8	16
2/2	5	19
5/2	8	18
7/2	5	23
10/2	8	20
15/2	7	21
22/2	10	19
23/2	9	17
26/2	12	15
29/2	12	19
33/2	5	15
35/2	8	19
36/2	5	17
37/2	11	18
38/2	5	19
39/2	5	20
41/2	7	16
42/2	6	20
44/2	10	17
45/2	11	23
14/1	10	18
27/1	5	20
36/1	7	18

ตาราง 12 ข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบทดสอบของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เลขที่	คะแนนเต็ม 30 คะแนน	
	ก่อนการสอนซ่อมเสริม	หลังการสอนซ่อมเสริม
14/2	9	24
15/2	6	18
23/2	10	27
35/2	10	17
37/2	7	19
38/2	5	10
41/2	10	24
21/1	5	24
36/1	10	23

ภาคผนวก ค
คุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ตาราง 13 ผลการวิเคราะห์ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลก่อนและหลังการเรียนซ่อมเสริม เรื่อง การหาพื้นที่

ข้อ	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.4	0.8
2	0.8	0.4
3	0.4	0.8
4	0.8	0.4
5	0.8	0.4
6	0.7	0.6
7	0.3	0.6
8	0.5	0.6
9	0.3	0.2
10	0.4	0.4
11	0.5	0.6
12	0.6	0.8
13	0.5	0.6
14	0.8	0.4
15	0.6	0.8
16	0.6	0.8
17	0.8	0.4
18	0.6	0.8
19	0.4	0.8
20	0.6	0.4

ค่าความเชื่อมั่น 0.89

ตาราง 14 ผลการวิเคราะห์ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลก่อนและหลังการเรียนซ่อมเสริม เรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ข้อ	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.3	0.6
2	0.5	0.6
3	0.4	0.4
4	0.5	1.0
5	0.6	0.4
6	0.7	0.6
7	0.5	0.6
8	0.6	0.4
9	0.5	0.6
10	0.6	0.4
11	0.5	0.6
12	0.5	0.2
13	0.4	0.8
14	0.3	0.6
15	0.3	0.6
16	0.6	0.4
17	0.5	0.6
18	0.3	0.2
19	0.3	0.2
20	0.7	0.6

ค่าความเชื่อมั่น 0.88

ตาราง 15 ผลการวิเคราะห์ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลก่อนและหลังการเรียนซ่อมเสริม เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย

ข้อ	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.6	1.0
2	0.6	0.58
3	0.8	0.5
4	0.6	0.58
5	0.5	0.83
6	0.7	0.33
7	0.7	0.33
8	0.8	0.5
9	0.8	0.5
10	0.4	0.25
11	0.7	0.75
12	0.8	0.5
13	0.4	0.25
14	0.8	0.5
15	0.8	0.5
16	0.7	0.75
17	0.5	0.42
18	0.5	0.42
19	0.7	0.75
20	0.3	0.5

ค่าความเชื่อมั่น 0.89

ตาราง 16 ผลการวิเคราะห์ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลก่อนและหลังการเรียนซ่อมเสริม เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข้อ	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.7	0.33
2	0.7	0.33
3	0.2	0.33
4	0.7	0.75
5	0.8	0.5
6	0.8	0.5
7	0.7	0.75
8	0.7	0.75
9	0.5	0.42
10	0.5	0.83
11	0.5	0.42
12	0.7	0.75
13	0.7	0.33
14	0.6	1.0
15	0.8	0.5
16	0.8	0.5
17	0.5	0.83
18	0.6	0.58
19	0.6	1.0
20	0.5	0.42

ค่าความเชื่อมั่น 0.92

ภาคผนวก ง

ตารางแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ

จากโปรแกรม SPSS

ตาราง 17 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริม โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล (Wilcoxon Signed Ranks Test) เรื่องการหาพื้นที่

Descriptives Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
Pre – Test	11	8.3636	4.20173	4.00	14.00
Post – Test	11	19.4545	4.67683	13.00	27.00

Wilcoxon Signed Ranks Test

		N	Mean Rank	Sum of Rank
POST – PRE	Negative Rank	0[a]	.00	.00
	Positive Rank	11[b]	6.00	66.00
	Ties	0[c]		
	Total	11		

a, POST < PRE

b, POST > PRE

c, POST = PRE

Test Statistics[b]

	POST - PRE
Z	-2.955[a]
Asymp.Sig.(2 – tailed)	.003

a, Based on negative rank

b, Wilcoxon Signed Ranks Test

ตาราง 18 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริม โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล (Wilcoxon Signed Ranks Test) เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

Descriptives Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
Pre – Test	25	13.20	3.31662	8	18
Post – Test	25	20.60	2.59808	14	26

Wilcoxon Signed Ranks Test

		N	Mean Rank	Sum of Rank
POST – PRE	Negative Rank	0[a]	.00	.00
	Positive Rank	25[b]	13.00	325.00
	Ties	0[c]		
	Total	25		

a, POST < PRE

b, POST > PRE

c, POST = PRE

Test Statistics[b]

	POST - PRE
Z	-4.379[a]
Asymp.Sig.(2 – tailed)	.000

a, Based on negative rank

b, Wilcoxon Signed Ranks Test

ตาราง 19 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริม โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล (Wilcoxon Signed Ranks Test) เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

Descriptives Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
Pre – Test	23	7.7826	2.44868	5.00	12.00
Post – Test	23	18.5652	2.14955	15.00	23.00

Wilcoxon Signed Ranks Test

		N	Mean Rank	Sum of Rank
POST – PRE	Negative Rank	0[a]	.00	.00
	Positive Rank	23[b]	12.00	276.00
	Ties	0[c]		
	Total	23		

a, POST < PRE

b, POST > PRE

c, POST = PRE

Test Statistics[b]

	POST - PRE
Z	-4.204[a]
Asymp.Sig.(2 – tailed)	.000

a, Based on negative rank

b, Wilcoxon Signed Ranks Test

ตาราง 20 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการสอนซ่อมเสริม โดยการทดสอบลำดับเครื่องหมายวิลโคซอล (Wilcoxon Signed Ranks Test) เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

Descriptives Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
Pre – Test	9	8.00	2.24	5.00	10.00
Post – Test	9	20.67	5.20	10.00	27.00

Wilcoxon Signed Ranks Test

		N	Mean Rank	Sum of Rank
POST – PRE	Negative Rank	0[a]	.00	.00
	Positive Rank	9[b]	5.00	45.00
	Ties	0[c]		
	Total	9		

a, POST < PRE

b, POST > PRE

c, POST = PRE

Test Statistics[b]

	POST - PRE
Z	-2.666[a]
Asymp.Sig.(2 – tailed)	.008

a, Based on negative rank

b, Wilcoxon Signed Ranks Test

ภาคผนวก จ

บทเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

บทที่ 1
บทเรียนเรื่อง การหาพื้นที่

บทเรียนฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นต้นฉบับแบบเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องการหาพื้นที่ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อหาประกอบด้วย

1. การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
2. การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (ยกเว้นการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก)
3. การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม
4. การเปลี่ยนหน่วย

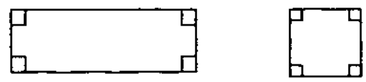
จุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียนเรื่อง การหาพื้นที่ เมื่อเรียนจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
2. คำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
3. บอกความสัมพันธ์ของพื้นที่ระหว่างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานร่วมกันและความสูงเท่ากันได้ถูกต้อง
4. คำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
5. สรุปบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้ถูกต้อง
6. คำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้ถูกต้อง
7. หาความยาวของส่วนที่ต้องการจากรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
8. เปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยใหญ่และหน่วยย่อยในมาตราเมตริกได้
9. เปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยใหญ่และหน่วยย่อยในมาตราไทยได้
10. เปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยในมาตราเมตริกและมาตราไทยได้
11. นำความรู้เรื่องการหาพื้นที่ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

บทที่ 1
การหาพื้นที่

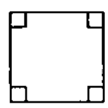
1. การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก*

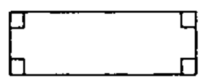


รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมี 2 ชนิด คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน ดังรูป

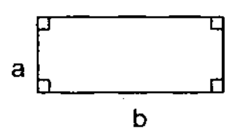


รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านกว้างไม่เท่ากับด้านยาว ดังรูป



การหาพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

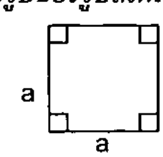
ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านกว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = a x b ตารางหน่วย
= กว้าง x ยาว

เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = a + a + b + b
= 2 (a + b) หน่วย

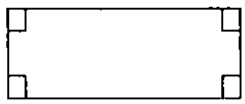
การหาพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = a x a ตารางหน่วย
= ด้าน x ด้าน

เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = a + a + a + a
= 4a หน่วย

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้



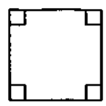
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง x ยาว

= 3 x 5

= 15 ตารางเซนติเมตร

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดให้



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน x ด้าน

= 3 x 3

= 9 ตารางเซนติเมตร

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.3 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 144 ตารางเซนติเมตร ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอีกรูปหนึ่งมีเส้นรอบรูปเท่ากับเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้ และมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 6 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่าไร

วิธีทำ ให้ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = a เซนติเมตร

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = a x a

144 = a x a

12 = a

เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = 4 x 12

= 48 เซนติเมตร

ให้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = b เซนติเมตร

ด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = b + 6 เซนติเมตร

เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = 2 (b + b + 6)

48 = 4b + 12

9 = b

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านกว้างยาว 9 เซนติเมตร ด้านยาวยาว 15 เซนติเมตร

ดังนั้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่ = 9 x 15

= 135 ตารางเซนติเมตร

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาพื้นที่ที่มีค่ามากที่สุดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับ 40 เซนติเมตร

   ....
   ....
   ....
   ....

2. ถ้านำเชือกยาว 32 เซนติเมตร มาสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปที่สร้างแล้วจะมีพื้นที่เท่าไร

   ....
   ....
   ....
   ....

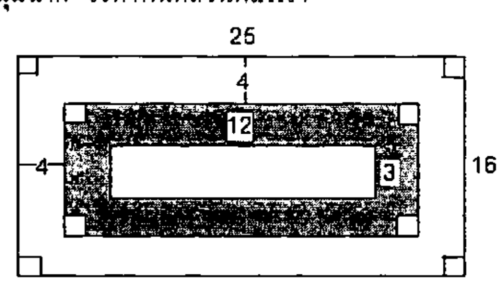
3. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 225 ตารางเซนติเมตร จะมีเส้นรอบรูปยาวเท่าไร

   ....
   ....
   ....
   ....

4. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีด้านยาว 2k – 5 เซนติเมตร มีพื้นที่ 81 ตารางเซนติเมตร จงหาค่า k

   ....
   ....
   ....
   ....

5. จากรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา

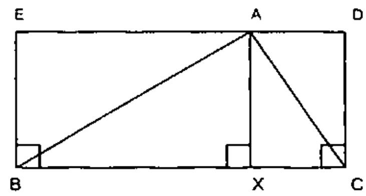


   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้

พิจารณาจากรูป



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCDE = BC x CD

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABX = $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม AEBX

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACX = $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ADCX

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABX + พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACX

= $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม AEBX + $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ADCX

= $\frac{1}{2}$ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCDE

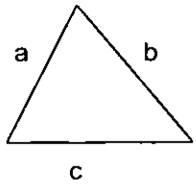
= $\frac{1}{2}$ (BC x CD)

ฉะนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}$ (BC x AX) , CD = AX

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม	= $\frac{1}{2}$ x ความยาวของฐาน x ความสูง

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใช้ด้านใดเป็นฐานก็ได้ แต่ความสูงต้องเป็นเส้นที่ลากจากมุมตรงข้ามไปตั้งฉากกับด้านที่ใช้เป็นฐาน

การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ทราบความยาวของด้านทั้งสาม

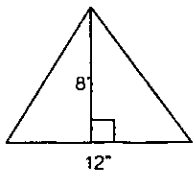


จากรูปที่กำหนดให้ s = $\frac{1}{2}$ ของความยาวของเส้นรอบรูป

s = $\frac{1}{2}$ (a + b + c)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<u>ตัวอย่างที่ 2.1</u> จากรูปจงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม



พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times 12 \times 8$

$= 48$ ตารางนิ้ว

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 2.2</u> รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีความสูงเท่ากับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ฐานยาวเป็นสองเท่าของด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้ จงหาอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

<u>วิธีทำ</u> ให้ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= a$ หน่วย

ด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= b$ หน่วย

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= a \times b$ ตารางหน่วย

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times 2b \times a$

$= a \times b$ ตารางหน่วย

ดังนั้นอัตราส่วนของ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม : พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $= 1 : 1$

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 2.3</u> กำหนดด้านของรูปสามเหลี่ยมดังนี้ 3 , 4 และ 5 เซนติเมตรจงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้

<u>วิธีทำ</u> พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 4 + 5)$$

$$= 6$$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

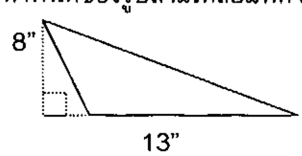
$= \sqrt{36}$

$= 6$ ตารางเซนติเมตร

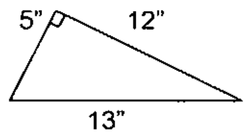
<u>ตอบ</u>

แบบฝึกหัดที่ 2

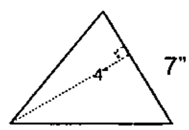
1. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้



พื้นที่ = ...

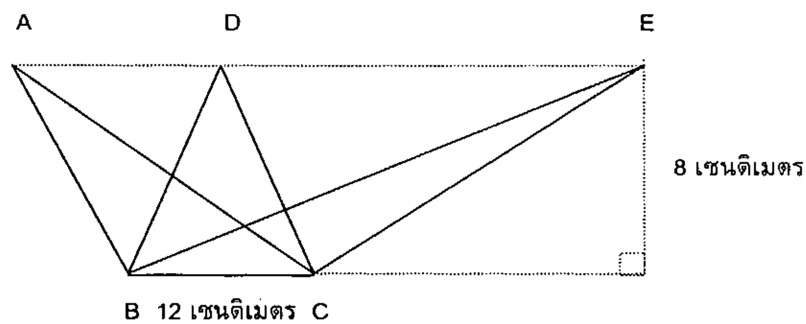


พื้นที่ = ...



พื้นที่ = ...

2. จงหาพื้นที่ของรูปต่อไปนี้

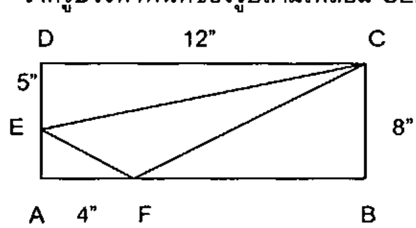


พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = ...

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม DBC = ...

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม EBC = ...

3. จากรูปจงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม CEF ถ้ารูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



....

....

....

4. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีความสูงเท่ากับด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ฐานเป็นหนึ่งในสามของความยาวด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยมจะมีพื้นที่เป็นเท่าไรของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

....

....

....

....

....

....

....

....

5. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 8 , 15 และ 17 หน่วย

....

....

....

....

....

....

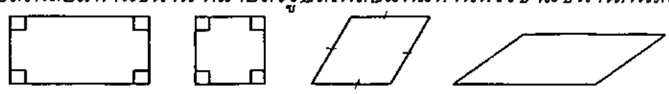
....

....

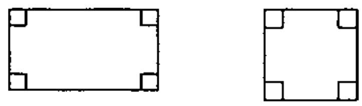
3. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม

3.1 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

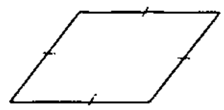
บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หมายถึงรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่*



รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากเรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



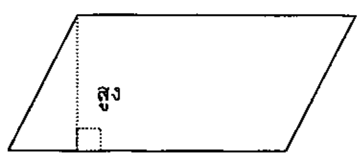
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน มุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดังรูป



สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

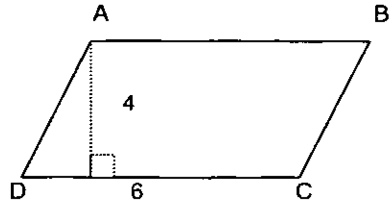
1. ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน
2. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวของฐาน x ความสูง

ตัวอย่าง 3.1.1

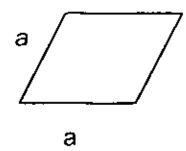


พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD = 6 x 4

= 24 ตารางหน่วย

3.2 รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน*



สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

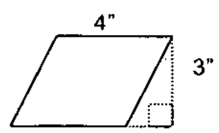
1. มีด้านทั้งสี่ด้านยาวเท่ากัน
2. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันและไม่เป็นมุมฉาก
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (แบบที่1) = ฐาน x สูง

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (แบบที่ 2) = $\frac{1}{2}$ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม

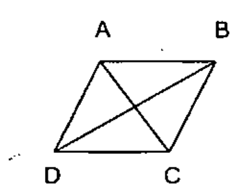
ตัวอย่างที่ 3.2.1 จากรูปจงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน



พื้นที่ = 4 x 3
= 12 ตารางนิ้ว

ตัวอย่างที่ 3.2.2 จากรูปจงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

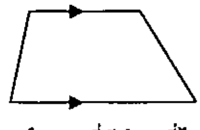
AC = 6" , BD = 8"



พื้นที่ = $\frac{1}{2}$ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม
= $\frac{1}{2}$ x 6 x 8
= 24 ตารางนิ้ว

3.3 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

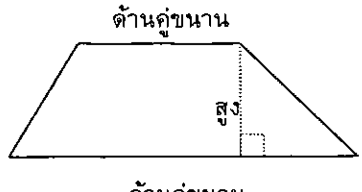
บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมคางหมู หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่ และคู่เดียวเท่านั้น*



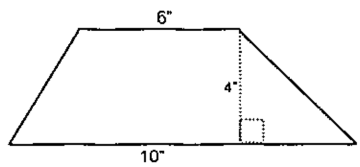
รูปสี่เหลี่ยมคางหมูใด ๆ ที่มีด้านที่ไม่ขนานกันยาวเท่ากัน ดังรูป เรียกว่า
รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

<u>พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู</u>

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2}$ x ผลบวกของด้านคู่ขนาน x สูง



ตัวอย่างที่ 3.3.1

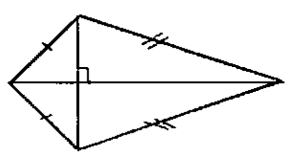


พื้นที่ $= \frac{1}{2} \times (6 + 10) \times 4$

$= 32$ ตารางนิ้ว

3.4 รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

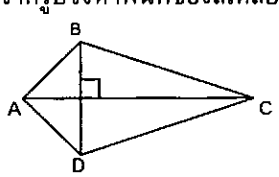
บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันสองคู่*



<u>พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว</u>

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว $= \frac{1}{2}$ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จากรูปจงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมรูปว่าว



AC = 12" , BD = 4"

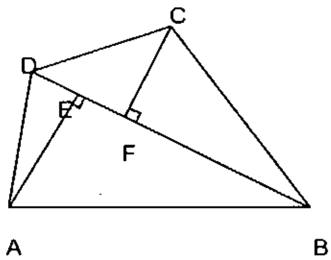
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมABCD $= \frac{1}{2}$ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 4$

$= 24$ ตารางนิ้ว

3.5 รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านและมุมไม่เท่ากัน*

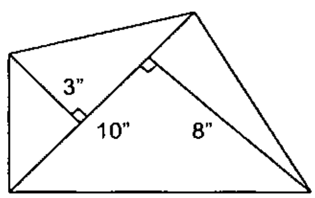


$\overline{BD}$ เป็น เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง เส้นที่ลากจากมุมใดมุมหนึ่งไปตั้งฉากกับเส้นทแยงมุม เรียกว่า เส้นกิ่ง ตามรูปนี้ $\overline{AE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นกิ่ง

<u>พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ</u>

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ = $\frac{1}{2}$ x ผลบวกของเส้นกิ่ง x เส้นทแยงมุม

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.1</u>



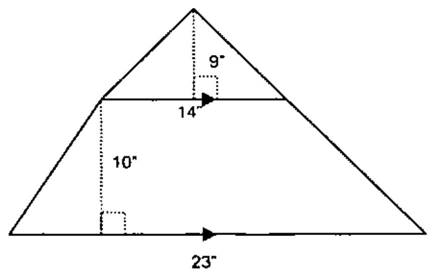
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ x ผลบวกของเส้นกิ่ง x เส้นทแยงมุม

= $\frac{1}{2}$ x (3 + 8) x 10

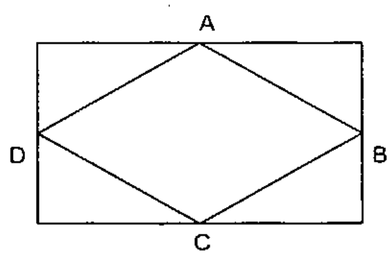
= 55 ตารางนิ้ว

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาพื้นที่ของรูปต่อไปนี้



2. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านกว้าง 12 วา ยาว 16 วา โดย A, B ,C, D เป็นจุดกึ่งกลางด้านทั้งสี่ดังรูป ถ้าใช้ส่วนที่เป็นรูปสามเหลี่ยมทำแปลงดอกไม้ ส่วนที่เหลือปลูกหญ้า คิดเป็นพื้นที่ปลูกหญ้าเท่าไร



3. กระดาษรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีเส้นทแยงมุมยาว 18 เซนติเมตร และ 20 เซนติเมตรจะมีพื้นที่เท่าไร

....

....

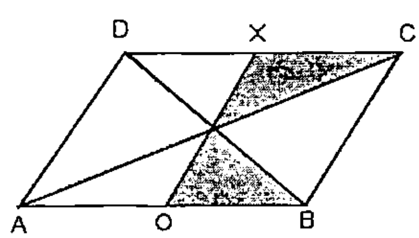
4. ห้องรับแขกรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้านคู่ขนานยาว 4 เมตร และ 5 เมตร ระยะห่างของด้านคู่ขนานยาว 4 เมตร ถ้าต้องการปูพื้นตารางเมตรละ 350 บาท จะต้องจ่ายเงินเท่าไร

....

....

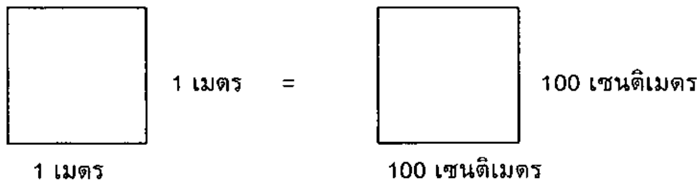
....

5. จงหาว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เป็นกี่เท่าของพื้นที่ที่แรเงา

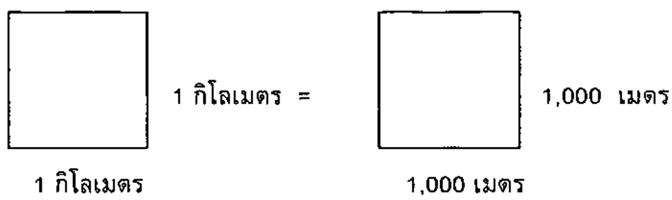


4. การเปลี่ยนหน่วย

1. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ในมาตราเมตริก

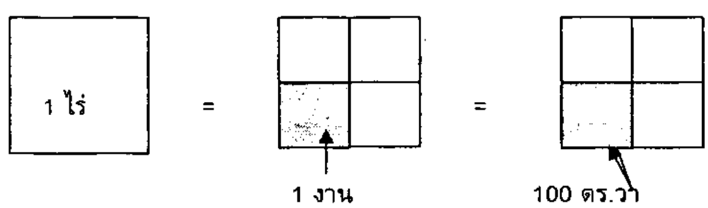


1 เมตร x 1 เมตร	=	100 เซนติเมตร x 100 เซนติเมตร
1 ตารางเมตร	=	10,000 ตารางเซนติเมตร



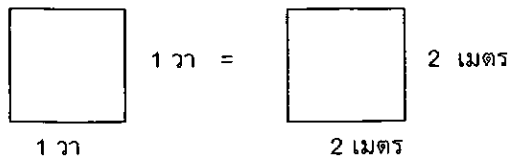
1 กิโลเมตร x 1 กิโลเมตร	=	1,000 เมตร x 1000 เมตร
1 ตารางกิโลเมตร	=	1,000,000 ตารางเมตร

2. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ในมาตราไทย



1 ไร่	=	4 งาน
1 งาน	=	100 ตารางวา
1 ไร่	=	400 ตารางวา

3. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างมาตราเมตริกและมาตราไทย



1 วา	=	2 เมตร
1 วา x 1 วา	=	2 เมตร x 2 เมตร
1 ตารางวา	=	4 ตารางเมตร

<u>ตัวอย่างที่ 4.1</u> ที่นารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 40 เมตร ยาว 50 เมตร คิดเป็นพื้นที่กี่ไร่

<u>วิธีทำ</u> ที่นามีพื้นที่	= 40 x 50	ตารางเมตร
	= 2,000	ตารางเมตร
1 ตารางวา	= 4	ตารางเมตร
1 ไร่	= 400	ตารางวา
1 ไร่	= 400 x 4	
	= 1,600	ตารางเมตร
ดังนั้น พื้นที่ 2,000 ตารางเมตร	= 2,000 / 1,600 ไร่	
	= 1 ไร่ 400 ตารางเมตร	
	= 1 ไร่ 1 งาน	

<u>ตอบ</u>

<u>ตัวอย่างที่ 4.2</u> ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 4 ไร่ จะมีความยาวของด้านแต่ละด้านกี่เมตร

<u>วิธีทำ</u> ที่ดิน 4 ไร่	=	4 x 1,600	ตารางเมตร
	=	6,400	ตารางเมตร
80 x 80 เมตร	=	6,400	ตารางเมตร
ดังนั้น ที่ดินมีความยาวด้านละ	80		เมตร

<u>ตอบ</u>

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

1.1 พื้นที่ 10 ตารางเมตร	=..........................ตารางเซนติเมตร
1.2 พื้นที่ 2 ตารางกิโลเมตร	=..........................ตารางเมตร
1.3 พื้นที่ 8,000,000 ตารางเมตร	=..........................ตารางกิโลเมตร
1.4 พื้นที่ 4 ไร่	=..........................ตารางเมตร
1.5 พื้นที่ 10,400 ตารางเมตร	=..........................ไร่

2. เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งยาว 2 เมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้มีพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร

....

....

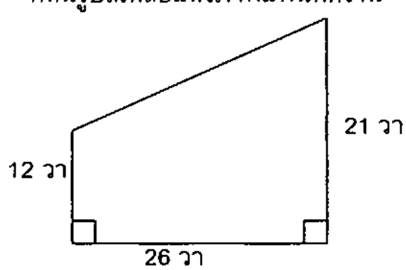
3. ถ้าต้องการล้อมรั้วลวดหนามรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีพื้นที่ 5 ไร่ มีด้านยาว 50 วา ล้อมรั้ว 2 รอบ ต้องใช้ลวดหนามยาวกี่เมตร

....

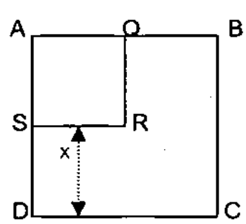
....

....

4. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมดังภาพมีพื้นที่กี่งาน



5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD มีพื้นที่ 64 ตารางเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส AQRS มีพื้นที่ 16 ตารางเมตร จงหาว่า x ยาวกี่วา



บทที่ 2
บทเรียนเรื่อง ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

บทเรียนฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นต้นฉบับแบบเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อหาประกอบด้วย

1. ความเท่ากันทุกประการ
2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม
3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน
4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม
5. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน
7. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน
8. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. อธิบายได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อใด
2. บอกด้านและมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการให้
3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน หรือไม่
4. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการและนำไปใช้ได้
5. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม หรือไม่
6. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม เท่ากันทุกประการและนำไปใช้ได้
7. บอกได้ว่าด้านใดเป็นฐาน มุมใดเป็นมุมยอด และมุมใดเป็นมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
8. บอกสมบัติของสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ดังนี้
   มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
   เส้นที่แบ่งครึ่งมุมยอดย่อมตั้งฉากกับฐานและแบ่งครึ่งฐาน
9. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน หรือไม่
10. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน เท่ากันทุกประการและนำไปใช้ได้
11. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน หรือไม่
12. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการและนำไปใช้ได้
13. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน หรือไม่
14. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน เท่ากันทุกประการและนำไปใช้ได้

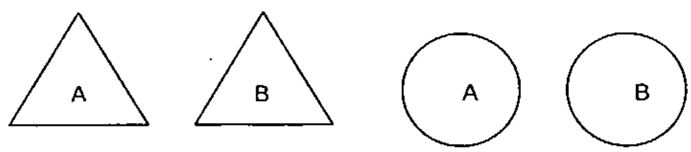
บทที่ 2
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1. ความเท่ากันทุกประการ

1.1 ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

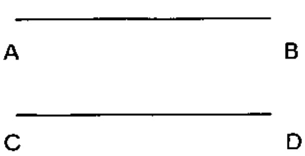
สัญลักษณ์ $\cong$ แทนความสัมพันธ์ " เท่ากันทุกประการ "



เมื่อรูป A และรูป B ทับกันได้สนิทพอดีจะได้ว่า รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B จะเขียนว่า รูป A $\cong$ รูป B และอ่านว่ารูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B

1.2 ความเท่ากันทุกประการของเส้นตรง

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

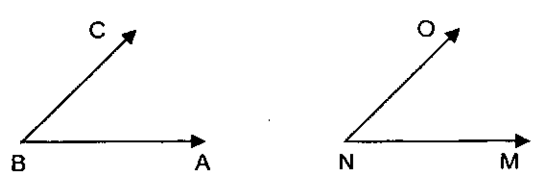


จากรูป $\overline{AB}$ เท่ากันทุกประการกับ $\overline{CD}$ เขียนว่า $AB \cong CD$

จะได้ว่า $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

1.3 ความเท่ากันทุกประการของมุม

บทนิยาม มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน



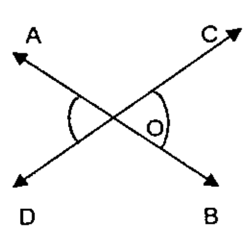
จากรูป $A\hat{B}C \cong M\hat{N}O$ จะได้ว่า

$m(A\hat{B}C) = m(M\hat{N}O)$

1.4 มุมตรงข้าม

1.4 มุมตรงข้าม เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกัน หรืออาจจะเกิดจากส่วนของเส้นตรง หรือรังสีสองเส้นตัดกัน

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน



เรียก $A\hat{O}D$ กับ $C\hat{O}B$ ว่ามุมตรงข้าม และจะได้ว่า

$A\hat{O}D \cong C\hat{O}B$ หรือ $m(A\hat{O}D) = m(C\hat{O}B)$

แบบฝึกหัดที่ 1

จงเขียน / หน้าข้อความที่ถูก และเขียน × หน้าข้อความที่ผิด

_______1. รูปเรขาคณิตสองรูปจะเท่ากันทุกประการเมื่อนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

_______2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการเมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

_______3. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการเมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นหนาเท่ากัน

_______4. ส่วนของเส้นตรงทุกเส้นเท่ากันทุกประการ

_______5. เส้นตรงทุกเส้นเท่ากันทุกประการ

_______6. รังสีทุกเส้นเท่ากันทุกประการ

_______7. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการเมื่อจุดยอดมุมทั้งสองทับกันสนิท

_______8. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการแล้วแขนของมุมทั้งสองนั้นจะต้องยาวเท่ากัน

_______9. รูปวงกลมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากันแล้วรูปวงกลมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

______ 10. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน แล้วรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

______ 11. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

______ 12. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน แล้วรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

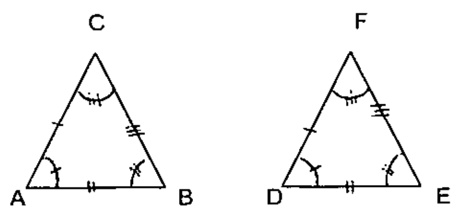
______ 13. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

______ 14. ถ้ารูป A = รูป B และ รูป B = รูป C แล้ว รูป A = รูป C

_______15. เฉพาะเส้นตรงสองเส้นเท่านั้นที่ตัดกันแล้วทำให้เกิดมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากัน

2. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยม ABC คือ รูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น คือ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A , B และ C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A , B และ C ว่าจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และเรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่าด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เขียนแทนรูปสามเหลี่ยม ABC ด้วย △ ABC ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม



ถ้า △ ABC ≅ △DEF จะได้ว่า

$\hat{A} = \hat{D}$		$AB = DE$
$\hat{B} = \hat{E}$	และ	$BC = EF$
$\hat{C} = \hat{F}$		$AC = DF$

จะกล่าวว่า

$\hat{A}$ สมนัยกับ $\hat{D}$		$\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$
$\hat{B}$ สมนัยกับ $\hat{E}$	และ	$\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$
$\hat{C}$ สมนัยกับ $\hat{F}$		$\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

ในการเขียนสัญลักษณ์แทนสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการมักนิยมเขียนตัวอักษรเรียงตามลำดับของมุมและด้านที่สมนัยกัน ดังนั้นเมื่อรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ดังข้างต้นจะเขียน △ ABC ≅ △ DEF จะไม่เขียน △ ABC ≅ △ DFE เพราะจะหมายถึง

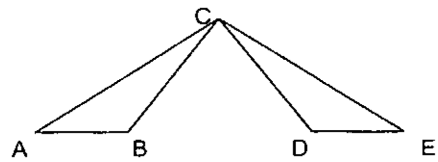
$\hat{A} = \hat{D}$		$AB = DF$
$\hat{B} = \hat{F}$	และ	$BC = FE$
$\hat{C} = \hat{E}$		$AC = DE$

ซึ่งไม่สอดคล้องกับความเป็นจริง

แบบฝึกหัดที่ 2

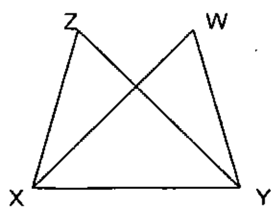
จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. กำหนด $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



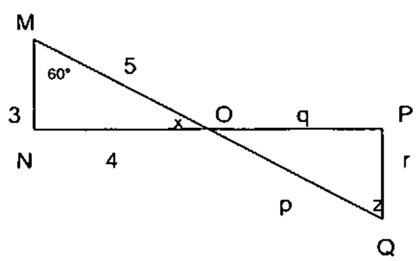
จุด A สมนัยกับ..................
จุด B สมนัยกับ....................
$\overline{AC}$ สมนัยกับ....................
$\overline{BC}$ สมนัยกับ....................
$A\hat{B}C$ สมนัยกับ....................

2. กำหนด $\triangle XYW \cong \triangle YXZ$



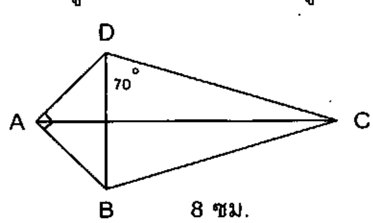
ZY = ...
XYW = ...
ZX = ...

3. กำหนด $\triangle MNO \cong \triangle QPO$ และ $M\hat{N}O = 90°$



x = ...
z = ...
q = ...
p = ...
r = ...

4. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว $\overline{AC}$ และ $\overline{DB}$ เป็นเส้นทแยงมุม และ $B\hat{A}D = 90°$

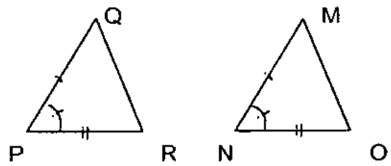


$A\hat{B}D$ = ...
$D\hat{A}C$ = ...
$B\hat{C}D$ = ...
$A\hat{B}C$ = ...
CD =........................

3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ตามบทนิยามนี้ นิยมใช้อักษรย่อว่า ด.ม.ด.



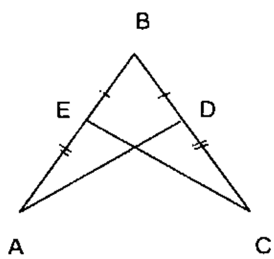
จากรูป $QP = MN$

$Q\hat{P}R = M\hat{N}O$

$PR = NO$

จะได้ว่า $\triangle PQR \cong \triangle NMO$ (ด.ม.ด.)

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปจงพิสูจน์ว่า AD = CE เมื่อกำหนดให้ BD = BE , AE = CD



<u>พิสูจน์</u> 1. $BD = BE$ (โจทย์กำหนด)

2. $A\hat{B}D = C\hat{B}E$ (มุมร่วม)

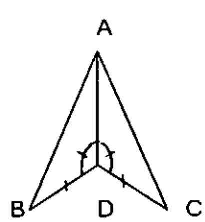
3. $AB = CB$ (เพราะ BE = BD , AE = CD)

4. $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (ด.ม.ด.)

5. $AD = CE$ (จากข้อ 4.)

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle ACD$



<u>พิสูจน์</u> 1. $BD = CD$ (โจทย์กำหนด)

2. $B\hat{D}A = C\hat{D}A$ (โจทย์กำหนด)

3. $AD = AD$ (ด้านร่วม)

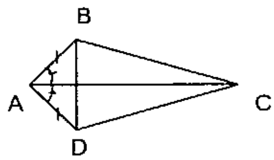
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (ด.ม.ด.)

<u>ตอบ</u>

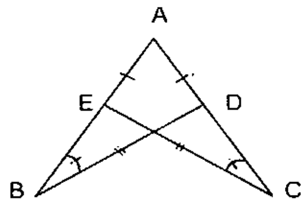
แบบฝึกหัดที่ 3

1. ข้อใดที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

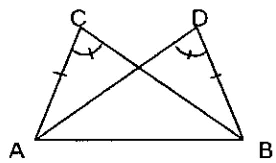
1.1



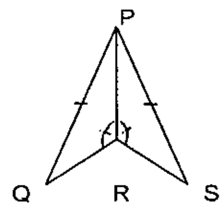
1.2



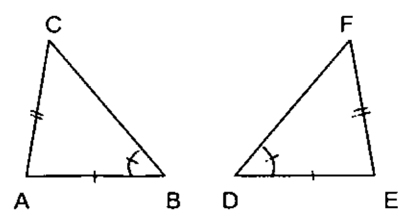
1.3



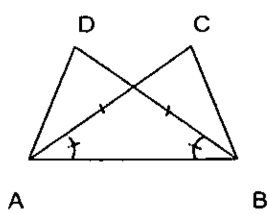
1.4



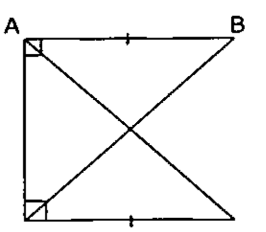
1.5



2. จากรูปกำหนดให้ AC = BD , $A\hat{B}D = B\hat{A}C$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABD \cong \triangle BAC$



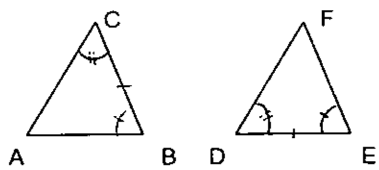
3. กำหนดให้ AB = CD จงพิสูจน์ว่า AD = BC



4. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน –มุม

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากันด้วยแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ตามบทนิยามนี้ นิยมใช้อักษรย่อว่า ม.ด.ม.



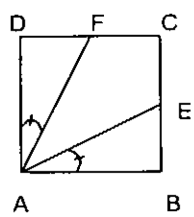
จากรูป $A\hat{B}C = F\hat{E}D$

$BC = ED$

$A\hat{C}B = F\hat{D}E$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle FED$ (ม.ด.ม.)

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้สี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ $B\hat{A}E = D\hat{A}F$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ADF \cong \triangle ABE$



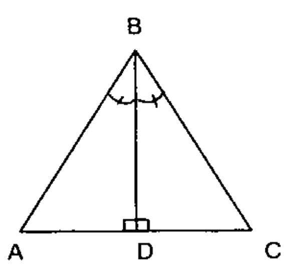
<u>พิสูจน์</u> 1. $D\hat{A}F = B\hat{A}E$ (โจทย์กำหนด)

2. $AD = AB$ (ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

3. $A\hat{D}F = A\hat{B}E$ (มุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

4. $\triangle ADF \cong \triangle ABE$ (ม.ด.ม.)

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A\hat{B}D = C\hat{B}D$, $A\hat{D}B = C\hat{D}B = 90°$ จงพิสูจน์ว่า $\triangle ADB \cong \triangle CDB$



<u>พิสูจน์</u> 1. $A\hat{B}D = C\hat{B}D$ (โจทย์กำหนด)

2. $A\hat{D}B = C\hat{D}B$ (โจทย์กำหนด)

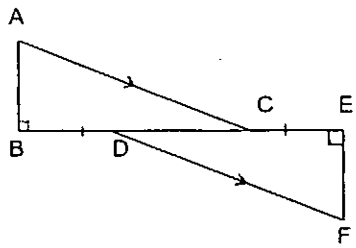
3. $BD = BD$ (ด้านร่วม)

4. $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ (ม.ด.ม.)

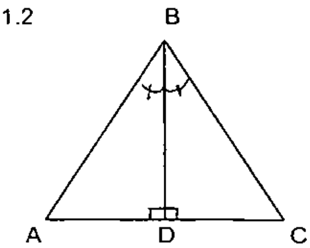
แบบฝึกหัดที่ 4

1. ข้อใดที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม

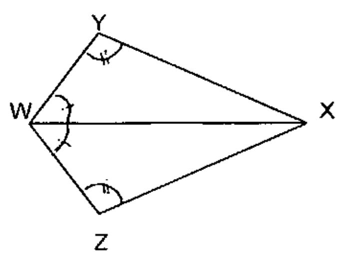
1.1



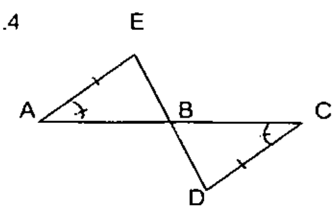
1.2



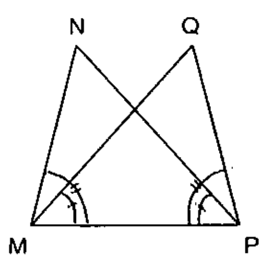
1.3



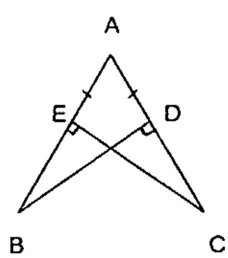
1.4



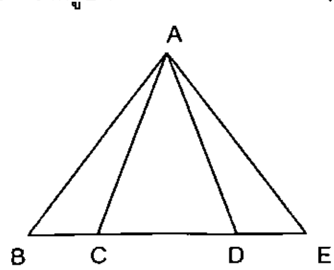
1.5



2. กำหนดให้ AD = AE , $\overline{CE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ จงพิสูจน์ว่า BD = CE

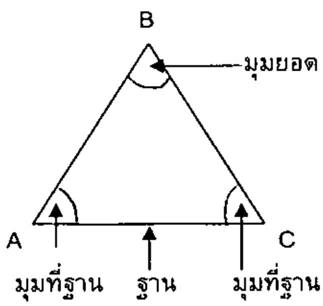


3. จากรูป กำหนดให้ BD = CE , $A\hat{B}D = A\hat{E}C$, $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ จงพิสูจน์ว่า AC = AD



5. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB = BC

เรียกด้าน AC ว่า ฐาน

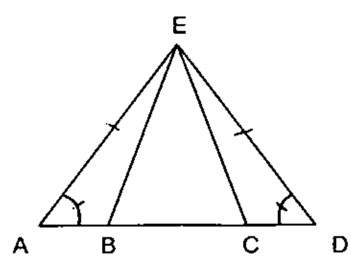
เรียก $B\hat{A}C$ และ $B\hat{C}A$ ว่า มุมที่ฐาน

และเรียก $A\hat{B}C$ ว่า มุมยอด

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

1. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
2. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
3. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตัวอย่าง กำหนด AE = DE , $E\hat{A}B = E\hat{D}C$, AB = CD จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ EBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



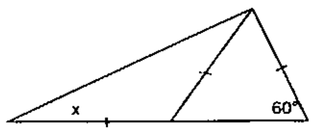
<u>พิสูจน์</u>

1. AE = DE	(โจทย์กำหนด)
2. $E\hat{A}B = E\hat{D}C$	(โจทย์กำหนด)
3. AB = CD	(โจทย์กำหนด)
4. $\triangle$ EAB $\cong$ $\triangle$ EDC	(ด.ม.ด.)
5. BE = CE	(จากข้อ 4.)
6. $\triangle$ EBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(มีด้านเท่ากันสองด้าน)

แบบฝึกหัดที่ 5

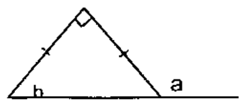
1. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาค่าตัวแปร

1.1



x = ...

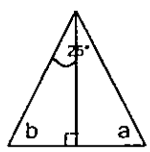
1.2



a = ...

b =..............................

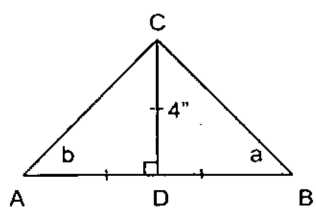
1.3



a = ...

b = ...

1.4

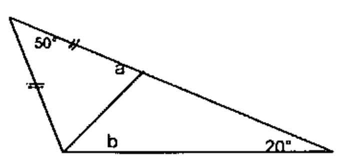


a = ...

b = ...

AB = ...

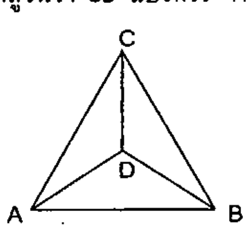
1.5



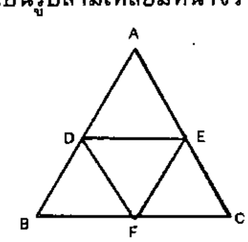
a = ...

b = ...

2. กำหนด △ ABC และ △ ABD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่อยู่บนฐาน AB ร่วมกัน จงพิสูจน์ว่า $\overline{CD}$ แบ่งครึ่ง $A\hat{C}B$



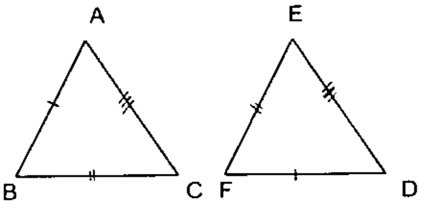
3. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี AB = AC และ D , E , F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน จงพิสูจน์ว่า △ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้าน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ตามบทนิยามนี้ นิยมใช้อักษรย่อว่า ด.ด.ด.



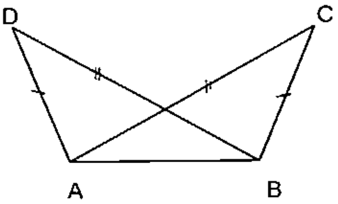
จากรูป AB = DF

BC = FE

AC = DE

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DFE (ด.ด.ด.)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ AD = BC , BD = AC จงพิสูจน์ว่า $D\hat{A}B = C\hat{B}A$



พิสูจน์ 1. AD = BC (โจทย์กำหนด)

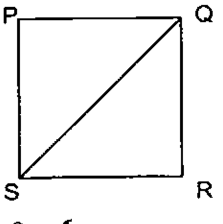
2. BD = AC (โจทย์กำหนด)

3. AB = AB (ด้านร่วม)

4. $\triangle$ DAB $\cong$ $\triangle$ CBA (ด.ด.ด.)

5. $D\hat{A}B = C\hat{B}A$ (จากข้อ 4.)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ SPQ $\cong$ $\triangle$ SRQ



พิสูจน์ 1. PQ = RQ (ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

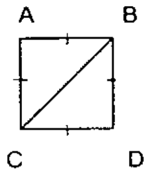
2. PS = RS (ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

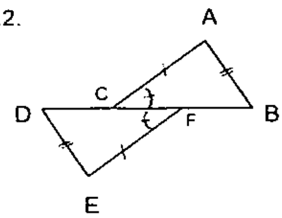
3. SQ = SQ (ด้านร่วม)

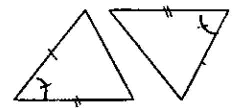
4. $\triangle$ SPQ $\cong$ $\triangle$ SRQ (ด.ด.ด.)

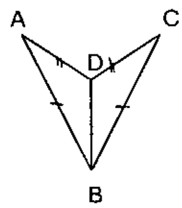
แบบฝึกหัดที่ 6

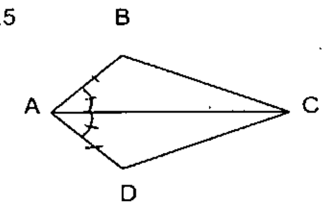
1. ข้อใดที่รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน

1.1


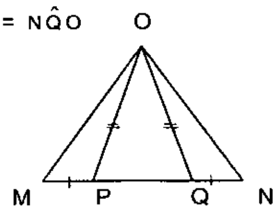
1.2.


1.3


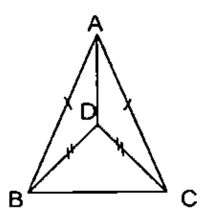
1.4


1.5


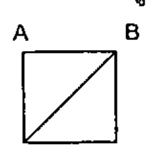
2. กำหนดรูปสามเหลี่ยม MON เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ MP = QN , OP = OQ จงพิสูจน์ว่า $M\hat{P}O = N\hat{Q}O$



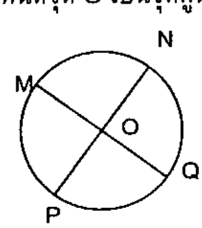
3. จงพิสูจน์ว่า $A\hat{C}D = A\hat{B}D$



4. รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จงพิสูจน์ว่า $\overline{BD}$ แบ่งรูปสี่เหลี่ยม ABCD ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ



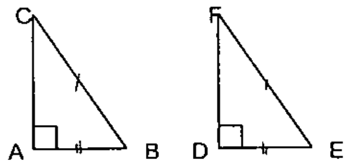
5. กำหนดจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ MN = PQ จงพิสูจน์ว่า $\triangle MNO \cong \triangle PQO$



7. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน –ด้าน

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ตามบทนิยามนี้ นิยมใช้อักษรย่อว่า ฉ.ด.ด.



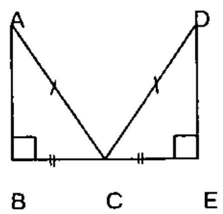
จากรูป $C\hat{A}B = F\hat{D}E = 90^\circ$

$BC = EF$

$BC = ED$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ฉ.ด.ด.)

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ เมื่อ AC = DC และ จุด C เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BE



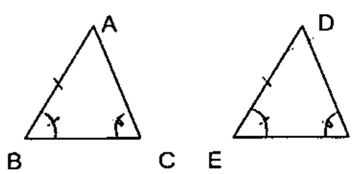
<u>พิสูจน์</u>

1.	$AC = DC$	(โจทย์กำหนด)
2.	$BC = CE$	(เพราะจุด C เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BE)
3.	$A\hat{B}C = D\hat{E}C$	(มุมฉาก)
4.	$\triangle ABC \cong \triangle DEC$	(ฉ.ด.ด.)

8. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ตามบทนิยามนี้ นิยมใช้อักษรย่อว่า ม.ม.ด.



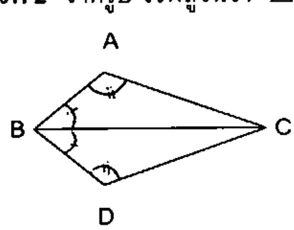
จากรูป $A\hat{B}C = D\hat{E}F$

$B\hat{C}A = E\hat{F}D$

$AB = DE$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ม.ม.ด.)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ เมื่อ $A\hat{B}C = D\hat{B}C$ และ $B\hat{A}C = B\hat{D}C$



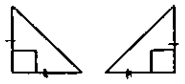
<u>พิสูจน์</u>

1.	$A\hat{B}C = D\hat{B}C$	(โจทย์กำหนด)
2.	$B\hat{A}C = B\hat{D}C$	(โจทย์กำหนด)
3.	$BC = BC$	(ด้านร่วม)
4.	$\triangle ABC \cong \triangle DBC$	(ม.ม.ด.)

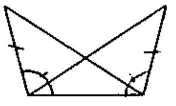
แบบฝึกหัดที่ 7

1. พิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อที่กำหนดให้ เท่ากันทุกประการหรือไม่ และเป็นไปตามความสัมพันธ์แบบใด

1.1



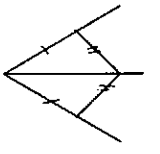
1.2



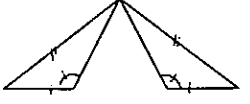
1.3

1.4

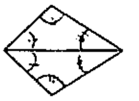
1.5



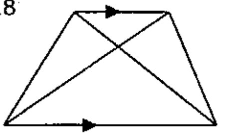
1.6



1.7

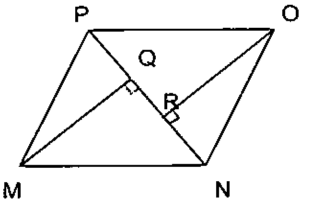


1.8

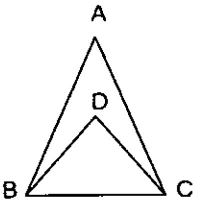


1.9

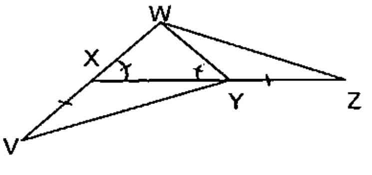
2. กำหนดให้ MNOP เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงพิสูจน์ว่า PQ = RN



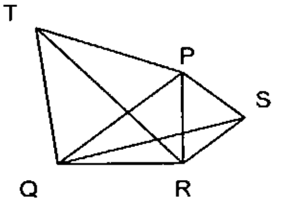
3. รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BDC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จงพิสูจน์ว่า $A\hat{B}D = A\hat{C}D$



4. จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ VXY $\cong$ $\triangle$ ZYW



5. $\triangle$ PRS และ $\triangle$ PQT เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จงพิสูจน์ว่า $\triangle$ TPR $\cong$ $\triangle$ QPS



บทที่ 3

บทเรียนเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

บทเรียนฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นต้นฉบับแบบเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อหาประกอบด้วย

1. รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน
2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน
3. การนำไปใช้

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

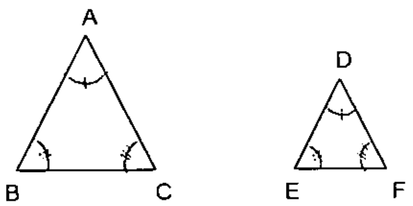
1. บอกบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
2. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่
3. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน อัตราส่วนความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน
4. นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันในข้อ 3 ไปใช้ได้

บทที่ 3

รูปสามเหลี่ยมคล้าย

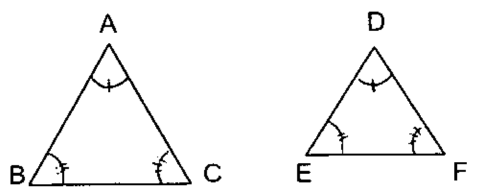
1. รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

<u>บทนิยาม</u> รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน



จากรูปจะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับ รูปสามเหลี่ยม DEF จะใช้สัญลักษณ์ ~ แทนความสัมพันธ์ " คล้ายกัน" โดยเขียนว่า $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF และอ่านว่า รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกันกับหรือคล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF การใช้สัญลักษณ์ ~ นี้ นิยมเขียนจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมคู่ที่มีขนาดของมุมเท่ากันไว้ในตำแหน่งเดียวกัน เช่น

ถ้าเขียน $\triangle$ ABC ~ $\triangle$ DEF หมายความว่า $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$ เช่น



เนื่องจากด้าน BC อยู่ตรงข้ามกับมุม A ด้าน EF อยู่ตรงข้ามมุม D

และ $\hat{A} = \hat{D}$ จะได้ว่า $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$

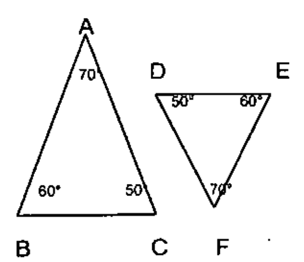
และในทำนองเดียวกัน $\hat{B} = \hat{E}$ จะได้ว่า $\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

$\hat{C} = \hat{F}$ จะได้ว่า $\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$

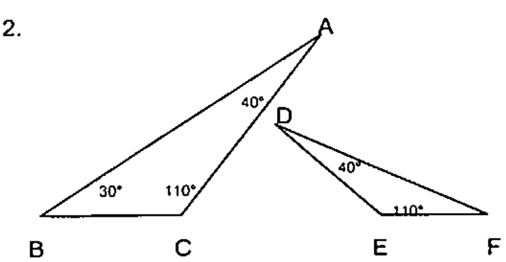
สรุปได้ว่า ถ้า $\triangle$ ABC ~ $\triangle$DEF แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเป็นด้านที่สมนัยกัน

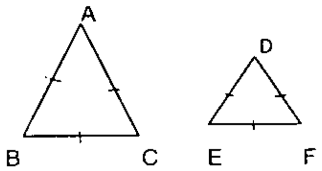
ตัวอย่างที่ 1 นักเรียนจงให้เหตุผลว่าเพราะเหตุใดรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ในแต่ละข้อนั้นคล้ายกัน

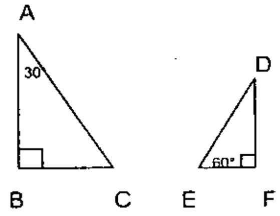
1.

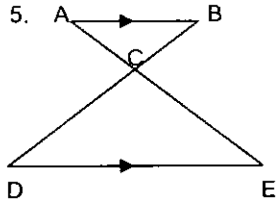


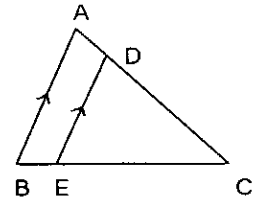
2.



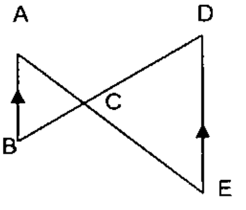
3.


4.


5.


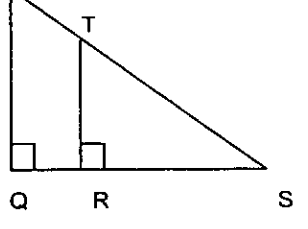
6.


ตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ที่กำหนดให้ต่อไปนี้คล้ายกันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

1.


$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ เพราะมีมุมเท่ากัน 3 คู่ คือ

$B\hat{A}C$	$= D\hat{E}C$	(มุมแย้ง)
$A\hat{B}C$	$= E\hat{D}C$	(มุมแย้ง)
$A\hat{C}B$	$= E\hat{C}D$	(มุมตรงข้าม)

2.


$\triangle PQS \sim \triangle TRS$ เพราะมีมุมเท่ากัน 3 คู่ คือ

$P\hat{Q}S = T\hat{R}S = 90^\circ$

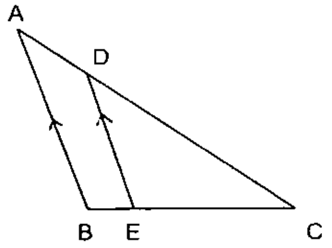
$Q\hat{S}P = R\hat{S}T$

$Q\hat{P}S = R\hat{T}S$ เพราะรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากัน 2 คู่ แล้ว มุมคู่ที่สามย่อมเท่ากัน

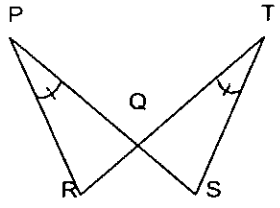
แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผล

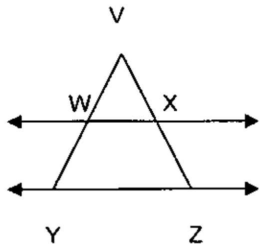
1.1



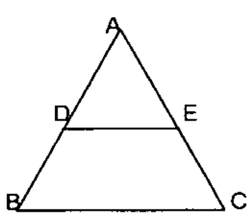
1.2



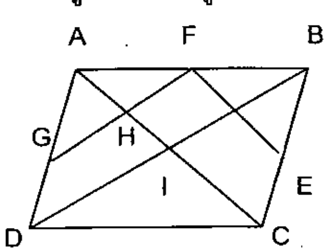
1.3



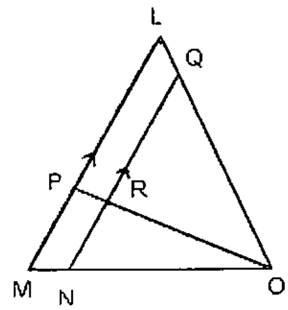
2. จากรูปสามเหลี่ยม ABC จุด D และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB และ AC ตามลำดับ ลาก $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ จงแสดงว่า $\triangle ADE \sim \triangle ABC$



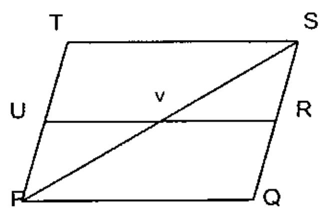
3. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E, F, G, เป็นจุดกึ่งกลางของด้านแต่ละด้านของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป จงหาว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันทั้งหมดกี่คู่ อะไรบ้าง



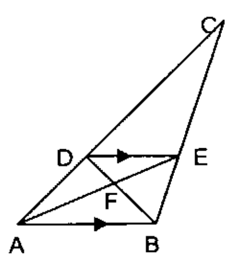
4. จากรูปจงหาว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันกี่คู่ อะไรบ้าง



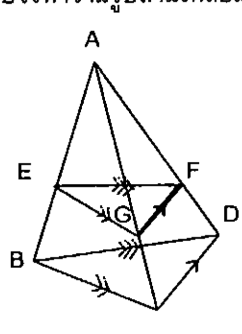
5. จากรูป $\overline{ST}$ // $\overline{RU}$ // $\overline{QP}$ จงหาว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันกี่คู่ อะไรบ้าง



6. จากรูป จงหาว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันกี่คู่ อะไรบ้าง



7. จากรูปจงหาว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันกี่คู่ อะไรบ้าง

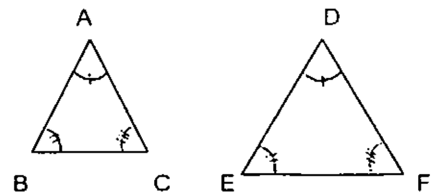


2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

หรือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน

กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ จะได้ว่า

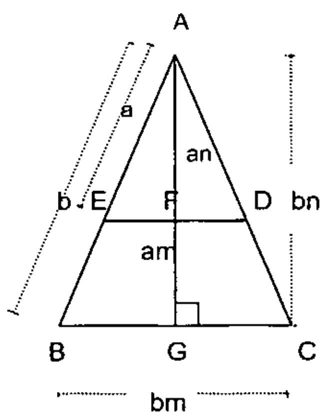


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้าใช้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมใดเป็นตัวเศษก็ต้องใช้ด้านของสามเหลี่ยมรูปนั้นเป็นตัวเศษของทุกอัตราส่วน ในทำนองเดียวกันตัวส่วนก็ต้องมาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งเสมอ

2. ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูป และอัตราส่วนของแต่ละด้านที่สมนัยกันมีค่าเท่ากับ a : b จะได้อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง เท่ากับ $a^2 : b^2$



เนื่องจาก $\triangle ABC \sim \triangle AED$

ให้ AE = a หน่วย, ED = am, AF = an,

AB = b หน่วย, BC = bm, AG = bn

เมื่อ m , n เป็นจำนวนจริงใดๆ

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times bm \times bn$

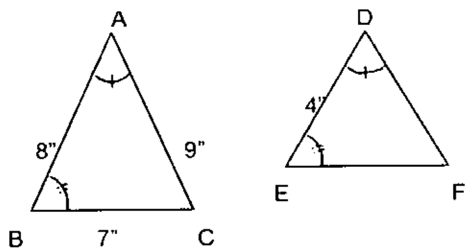
$= \frac{1}{2} b^2 (mn)$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม AED $= \frac{1}{2} \times am \times an$

$= \frac{1}{2} a^2 (mn)$

$$\frac{\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม AED}}{\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC}} = \frac{\frac{1}{2} a^2 mn}{\frac{1}{2} b^2 mn} = \frac{a^2}{b^2}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ โดยแต่ละด้านมีความยาวตามที่กำหนด จงหาความยาวด้าน DF และ EF

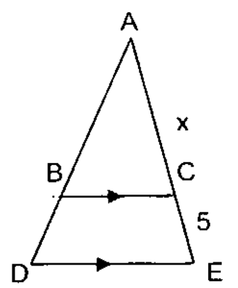


$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \qquad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{9}{DF} \qquad \frac{8}{4} = \frac{7}{EF}$$

$$DF = 4.5 \qquad EF = 3.5$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากรูปถ้าอัตราส่วน BC : DE = 2 : 3 และ CE = 5 หน่วย จงหาความยาว AC



จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ จะได้

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{5+x}$$

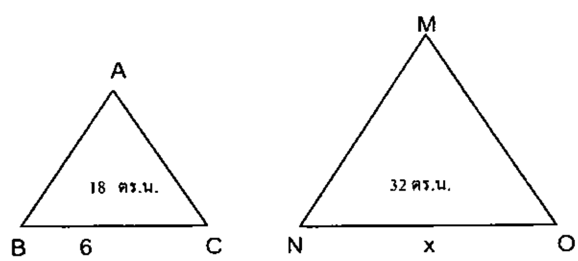
$$2(5+x) = 3x$$

$$10 + 2x = 3x$$

$$10 = x$$

ดังนั้น AC = 10 หน่วย

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle MNO$ จงหาความยาวด้าน NO



จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันจะได้

$$\frac{\text{พท. } \triangle ABC}{\text{พท. } \triangle MNO} = \frac{6^2}{x^2}$$

$$\frac{18}{32} = \frac{6^2}{x^2}$$

$$18x^2 = 32 \times 36$$

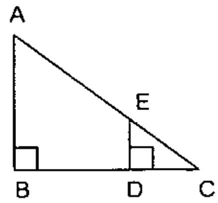
$$x^2 = \frac{32 \times 36}{18}$$

$$x = 8$$

NO เท่ากับ 8 นิ้ว

แบบฝึกหัดที่ 2

1.

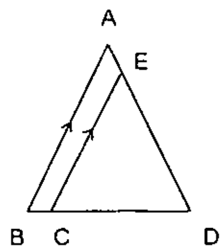


จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ และ $\frac{CD}{DB} = \frac{4}{5}$ จงหา

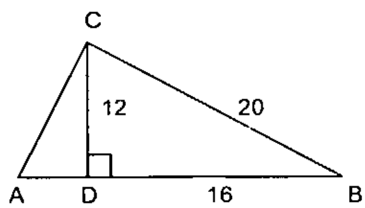
1.1 $\frac{CE}{EA}$ =

1.2 $\frac{DE}{BA}$ =

2. จากรูป $\frac{CE}{BA} = \frac{2}{3}$ และด้าน CD = 7 จงหาความยาว BD

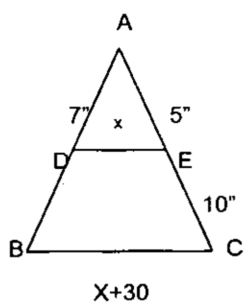


3.

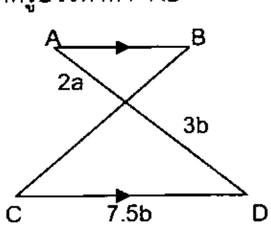


จากรูป CD ตั้งฉากกับ AB ที่จุด D , CD = 12 นิ้ว, BD = 16 นิ้ว , CB = 20 นิ้ว จงหาความยาว AD และ AC

4. จากรูปกำหนดให้ $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$ จงหาค่า X และ BD



5. จากรูปจงหาค่า AB

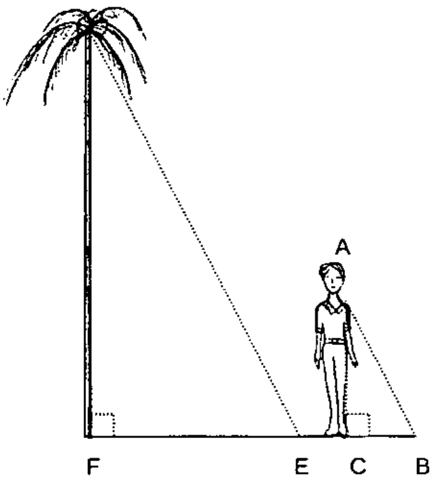


6. กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ และรูปสามเหลี่ยมดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับ 6 และ 54 ตารางเซนติเมตร ตามลำดับ ถ้า AB = 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของ DE

3. การนำไปประยุกต์

เราสามารถนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน 2 รูป มาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการวัดความยาว การหาความสูงและการหาระยะทางได้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งสูง 180 เซนติเมตร ในขณะที่เงาของต้นมะพร้าวต้นหนึ่งยาว 15 เมตร เขาวัดความยาวเงาของเขาที่ทอดไปตามพื้นได้ยาว 90 เซนติเมตร จงหาความสูงของต้นมะพร้าว



จากรูป $A\hat{C}B = D\hat{F}E = 90^\circ$

$A\hat{B}C = D\hat{E}F$ ($\overleftrightarrow{DE} // \overline{AB}$)

$B\hat{A}C = E\hat{D}F$ (มุมที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมย่อมเท่ากัน)

เนื่องจาก $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ดังนั้น

$$\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

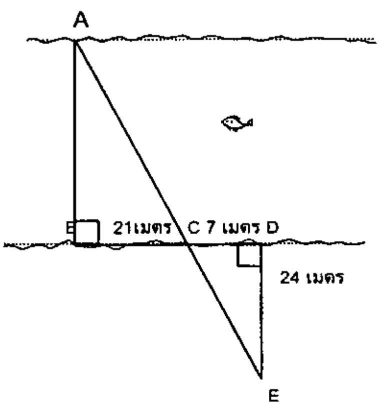
$$\frac{DF}{1.80} = \frac{15}{0.90}$$

$$DF = \frac{15 \times 1.80}{0.90}$$

$$= 30$$

$\therefore$ ต้นมะพร้าวสูง 30 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป จงหาความกว้างของแม่น้ำ



จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

จะได้ $$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{AB}{24} = \frac{21}{7}$$

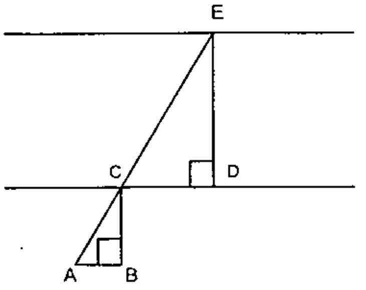
$$AB = \frac{21 \times 24}{7}$$

$$= 72 \text{ เมตร}$$

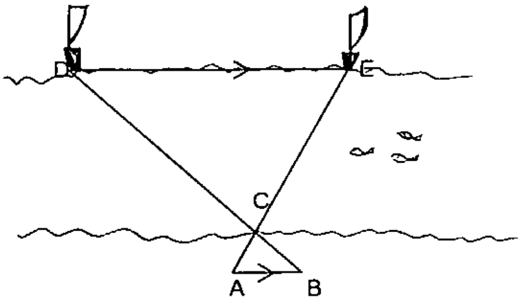
$\therefore$ แม่น้ำกว้าง 72 เมตร

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จากรูป แม่น้ำมีความกว้างเท่ากับเท่าไร ถ้า AB เท่ากับ 4 เมตร BC เท่ากับ 3 เมตร และ CD เท่ากับ 20 เมตร



2. หนึ่งไปเที่ยวชายหาดมองเห็นเรือสองลำอยู่กลางทะเล หนึ่งอยากทราบว่าเรือสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าไร หนึ่งจึงจำลองภาพ ดังรูป โดย $\overline{DE} // \overline{AB}$ และ AB = 3 เมตร , BC = 15 เมตร และ CD = 45 เมตร



3. บันไดยาว 50 ฟุต ถ้าเอนไปทางทิศตะวันออกจะจรดปลายเสา A พอดี และเอนไปทางทิศตะวันตกจะจรดปลายเสา B พอดี ถ้าเสา A สูง 14 ฟุต และเสา B สูง 48 ฟุต จงหาว่าเสา A อยู่ห่างจากเสา B กี่ฟุต

....

....

....

....

4. บันไดยาว 21 ฟุต พาดอยู่กับเสาไฟฟ้า ช่างไฟฟ้าปีนขึ้นไป $\frac{5}{7}$ ของความยาวบันไดแล้วทำคีมตกลงมาในแนวดิ่ง ถ้าความสูงจากพื้นดินถึงปลายบันได เท่ากับ 14 ฟุต จงหาความสูงที่คีมตกลงมา

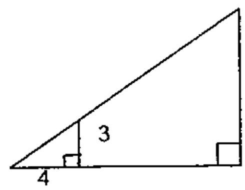
....

....

....

....

5. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 และ 4 เซนติเมตร ตามลำดับ ถ้าต้องการสร้างรูปสามเหลี่ยมที่ขยายจากรูปเดิมนี้โดยให้มีพื้นที่เพิ่มขึ้น 5 เท่า ของรูปเดิม แล้วรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่จะมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวกี่หน่วย



6. น้อยยืนอยู่ห่างจากเสาไฟฟ้าซึ่งสูง 10.50 เมตร เป็นระยะทาง 12 เมตร น้อยสังเกตเห็นเงาของตัวเองที่เกิดจากดวงไฟที่ปลายเสาที่ทอดยาวไปตามพื้น อยากทราบว่าเงาของน้อยยาวกี่เมตร ถ้าน้อยสูง 150 เซนติเมตร

7. ลูกเสือใช้ไม้อันหนึ่งซึ่งยาว 35 เซนติเมตร เล็งไปยังยอดไม้ ถ้าแขนของลูกเสือคนนี้ยาว 50 เซนติเมตร และยื่นแขนไปในแนวขนานกับพื้นดิน ปรากฏว่าลูกเสือต้องยืนห่างจากต้นไม้ 16 เมตร จึงจะมองเห็นแนวของยอดไม้พอดี จงหาความสูงของต้นไม้ ถ้าความสูงจากเท้าถึงแขนของลูกเสือคนนี้เท่ากับ180 เซนติเมตร

บทที่ 4

บทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทเรียนฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นต้นฉบับแบบเรียนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อหาประกอบด้วย

1. ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
2. บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
3. การนำไปใช้

จุดประสงค์การเรียนรู้ เมื่อเรียนจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
2. หาความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้ โดยใช้ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
3. นำทฤษฎีบทปีทาโกรัสและบทกลับไปใช้ได้

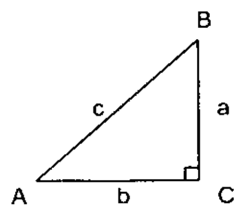
บทที่ 4
สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

<u>ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส</u> กล่าวไว้ 2 แบบดังนี้

<u>แบบที่ 1</u>

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้



$$c^2 = a^2+b^2$$

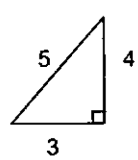
โดยทั่วไปนิยมใช้ a แทนความยาวของด้านมุมตรงข้าม A

b แทนความยาวของด้านมุมตรงข้าม B

c แทนความยาวของด้านมุมตรงข้าม C

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ให้ถือว่าตัวเลขและตัวอักษรที่กำกับด้านของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้มีหน่วยเป็นหน่วยความยาว

1.1

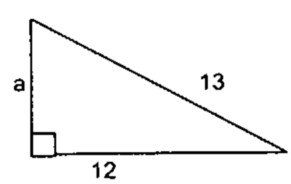


$5^2 = 3^2 + 4^2$

จากการตรวจสอบจะเห็นว่าเป็นจริง

เพราะว่า $5^2 = 25$ และ $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

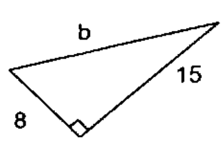
1.2



ถ้าจะหาค่า a จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 13^2 &= 12^2 + a^2 \\ 13^2 - 12^2 &= a^2 \\ 25 &= a^2 \\ 5 &= a \end{aligned}$$

1.3



ถ้าจะหาค่า b จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} b^2 &= 8^2 + 15^2 \\ b^2 &= 289 \\ b &= 17 \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้โดยที่ a , b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากและ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

2.1) $a = 9$, $c = 41$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$41^2 - 9^2 = b^2$$
$$1600 = b^2$$
$$40 = b$$

2.2) $a = 12$, $b = 35$

$$c^2 = 12^2 + 35^2$$
$$c^2 = 1369$$
$$c = 37$$

<u>สรุป</u> การหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อทราบความยาวของด้านสองด้าน โดยใช้ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ทำได้ดังนี้

ถ้า a , b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านมุมตรงข้ามมุมฉาก จะได้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้ากำหนด a และ b ให้

จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้ากำหนด b และ c ให้

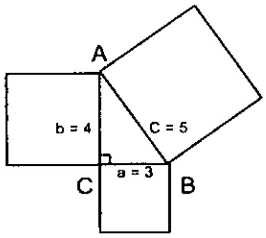
จะได้ว่า $a^2 = c^2 - b^2$

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้ากำหนด a และ c ให้

จะได้ว่า $b^2 = c^2 - a^2$

<u>แบบที่ 2</u> ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

ถ้า ACB เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉากโดย a , b และ c แทนความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนี้

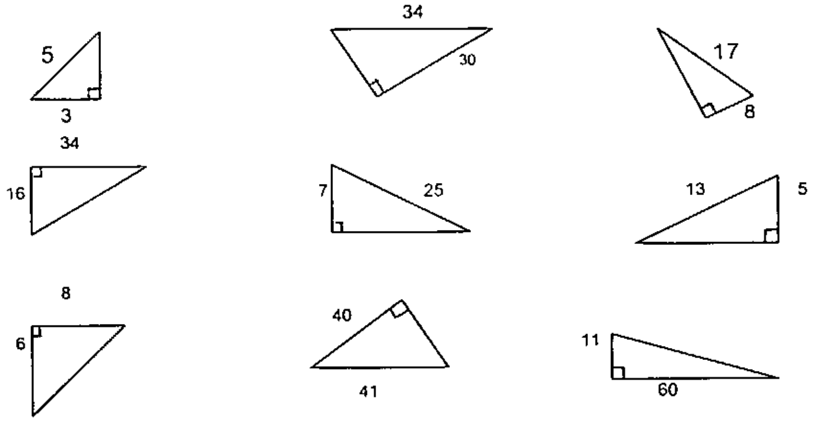


จากรูปจะพบว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB = พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน BC + พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AC

$$25 = 9+16$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
นั่นคือ $$c^2 = a^2 + b^2$$

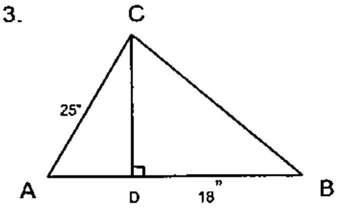
แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของบางด้านให้ มีหน่วยเป็นเซนติเมตร



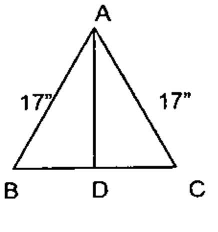
2. จงหาความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้โดยให้ c เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก และ a , b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

1. a = 12 , b = 25	6. b = 60 , c = 61
2. a = 24 , c = 25	7. a = 35 , c = 37
3. a = 16 , c = 63	8. a = 15 , b = 8
4. b = 30 , c = 34	9. a = 13 , c = 85
5. a = 16 , c = 24	10. b = 22 , c = 122

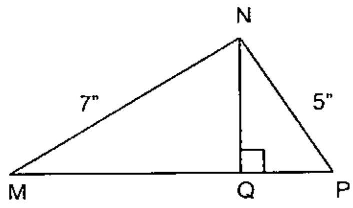
3. 

จากรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $\overline{CD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D ซึ่งมี AB ยาว 25 นิ้ว DB ยาว 18 นิ้ว และ AC ยาว 25 นิ้ว จงหาความยาวของด้าน BC

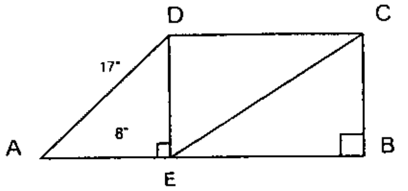
4. กำหนดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ที่มีฐาน BC ยาว 16 นิ้ว และด้านประกอบมุมยอดยาว 17 นิ้ว มี $\overline{AD}$ แบ่งครึ่งมุมยอด จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC



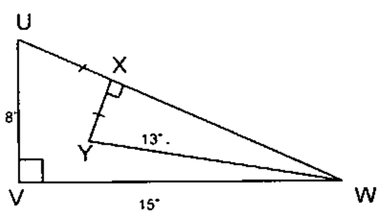
5. จากรูป MN = 7 นิ้ว NP = 5 นิ้ว และ MP = 8 นิ้ว จงหาความยาว QP



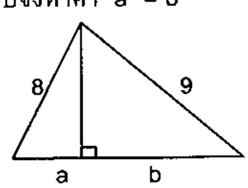
6. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เมื่อ AD = 17" , EC = 25" และ AE = 8"



7. จงหาความยาวของ UX



8. จากรูปจงหาค่า $a^2 - b^2$



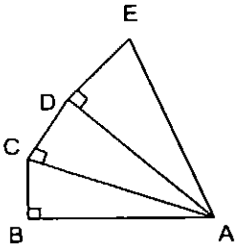
9. จงหาความยาวเส้นรอบรูป

เมื่อ AB = 3"

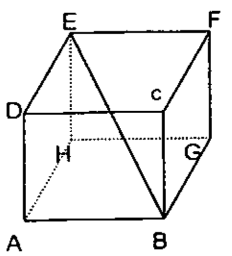
AC = 5"

CD = 12"

AE = 85"

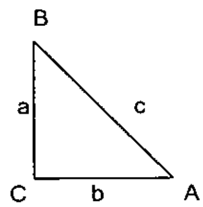


10. กำหนด EB = 4 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวรอบนอกของกล่องลูกบาศก์



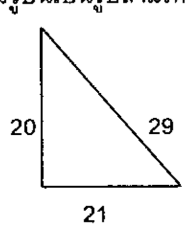
2. บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a , b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก



ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

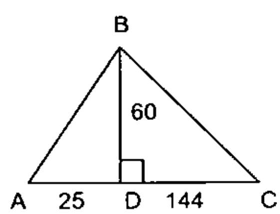
<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 20 ,21 และ 29 นิ้ว อยากทราบว่ารูปสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่



$$20^2 = 400$$
$$21^2 = 441$$
$$29^2 = 841$$
$$400 + 441 = 841$$

สรุปรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> จงแสดงว่าสามเหลี่ยม ABC ในข้อต่อไปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



เนื่องจาก สามเหลี่ยม ABD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้

$$AB^2 = 25^2 + 60^2$$
$$AB^2 = 4225$$

สามเหลี่ยม BDC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้

$$BC^2 = 60^2 + 144^2$$
$$BC^2 = 24336$$
$$AB^2 + BC^2 = 28561$$
$$AC^2 = (25 + 144)^2$$
$$= 169^2$$
$$= 28561$$

ดังนั้น $AC^2 = AB^2 + BC^2$

เพราะฉะนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

สรุป ในกรณี ที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้า a , b และ c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ c เป็นด้านที่ยาวที่สุด แล้วจะได้ข้อสรุปดังนี้

1. $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม
2. $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

แบบฝึกหัดที่ 2

1. ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 ในข้อความของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ข้อความใดเป็นเหตุ ข้อความใดเป็นผล

ตอบ..

....

1.2 ในข้อความของบทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ข้อความใดเป็นเหตุ ข้อความใดเป็นผล

ตอบ..

....

2. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวของด้านให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

1. 3, 4, 5 ตอบ ....
2. 2.0, 2.1, 2.9 ตอบ ....
3. 7, 14, 15 ตอบ ....
4. 2.8, 4.5, 5.3 ตอบ ....
5. 6, 8, 15 ตอบ ....
6. 10, 24, 26 ตอบ ....
7. 6, 14.4, 16 ตอบ ....
8. 4, 7.5, 8.5 ตอบ ....
9. 12, 25, 37 ตอบ ....
10. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ตอบ ....

3. ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

1. 15, 36, 39 ตอบ ....
2. 7, 11, 12 ตอบ ....
3. 6, 7, 8 ตอบ ....
4. 8, 15, 17 ตอบ ....
5. 5, 5, 7 ตอบ ....
6. 10, 12, 16 ตอบ ....
7. 12, 35, 37 ตอบ ....
8. 0.9, 4, 4.1 ตอบ ....
9. 1.1, 6, 6.1 ตอบ ....
10. 2, 2.1, 2.9 ตอบ ....

3. การนำไปใช้

สิ่งที่น่าสนใจเกี่ยวกับทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

จากทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ ถ้า c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากจะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

ในการหาความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวของแต่ละด้านเป็นจำนวนเต็มสามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

<u>สูตรของปีทาโกรัส</u> เนื่องจาก $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$ ดังนั้นความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

n, $\frac{n^2-1}{2}$ และ $\frac{n^2+1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1

<u>เช่น</u> $n = 3$, $\frac{3^2-1}{2} = 4$, $\frac{3^2+1}{2} = 5$ และ $3^2 + 4^2 = 5^2$

$n = 11$, $\frac{11^2-1}{2} = 60$, $\frac{11^2+1}{2} = 61$ และ $11^2 + 60^2 = 61^2$

<u>สูตรของพลาโต</u>

เนื่องจาก $(n^2+1)^2 = (2n)^2 + (n^2-1)^2$ ดังนั้นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

$2n$, n^2-1, n^2+1 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

เช่น $n = 2$, $2(2) = 4$, $2^2 - 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$ และ $3^2 + 4^2 = 5^2$

$n = 3$, $2(3) = 6$, $3^2 - 1 = 8$, $3^2 + 1 = 10$ และ $6^2 + 8^2 = 10^2$

$n = 4$, $2(4) = 8$, $4^2 - 1 = 15$, $4^2 + 1 = 17$ และ $8^2 + 15^2 = 17^2$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี C เป็นมุมฉาก CB ยาว 15 เซนติเมตร จงหาความยาว CA และ AB

เนื่องจาก 15 เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1 เราใช้สูตรของปีทาโกรัส

$n = 15$, $\frac{15^2-1}{2} = 112$ และ $\frac{15^2+1}{2} = 113$

ดังนั้น ด้าน CA = 112 เซนติเมตร และ ด้าน AB ยาว 113 เซนติเมตร ตามลำดับ

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยม MNO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี N เป็นมุมฉาก และ NO ยาว 12 นิ้ว จงหาความยาวของด้าน NM และ MO

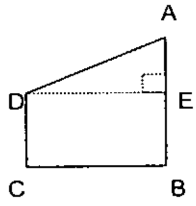
เนื่องจาก 12 เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป เราใช้สูตรของพลาโต

$n = \frac{12}{2}$, $2(6) = 12$, $(6)^2 - 1 = 35$, $(6)^2 + 1 = 37$

ดังนั้น MN = 35 นิ้ว และ MO = 37 นิ้ว ตามลำดับ

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศใต้ 27 กิโลเมตร จากนั้นไปทางทิศตะวันตก 24 กิโลเมตรและกลับไปทางทิศเหนืออีก 20 กิโลเมตร ขณะนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร

ให้จุด A เป็นจุดเริ่มต้น D เป็นจุดสุดท้าย ลาก $\overline{AD}$ และลาก $\overline{DE}$ ให้ขนานกับ $\overline{BC}$ จะได้สามเหลี่ยม ADE เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก



$AD^2 = DE^2+AE^2$

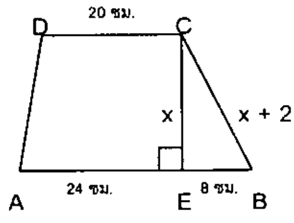
$AD^2 = 24^2+7^2$

$AD^2 = 625$

$AD = 25$

ชายคนนั้นอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 25 กิโลเมตร

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จากรูปจงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCE

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= CE^2+BE^2 \\
(x+2)^2 &= x^2+8^2 \\
x^2+4x+4 &= x^2+64 \\
4x &= 60 \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

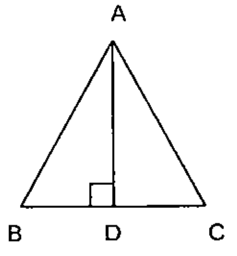
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times (20+32) \times 15$

$= \frac{1}{2} \times 52 \times 15$

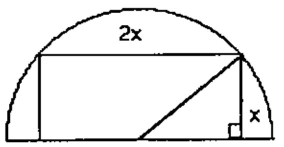
$= 390$ ตารางเซนติเมตร

แบบฝึกหัดที่ 3

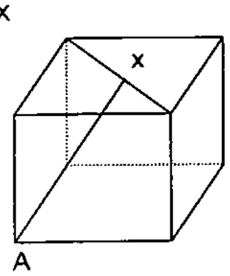
1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก AB ยาว 15 นิ้ว จงหาความยาว AC และ BC
2. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมยอดยาว 25 นิ้ว ด้านฐานยาว 14 นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปนี้
3. เสาธงต้นหนึ่งสูง 63 ฟุต เด็กชายนัทยืนห่างจากเสาธง 11 ฟุต เพื่อเชิญธงชาติขึ้นสู่ยอดเสา จงหาความยาวของเชือกเสาธงชาติจากมือของ ด.ช.นัท ถึงยอดเสา เมื่อมือของเด็กชายนัทสูงจากพื้นดิน 3 ฟุต
4. ดอนขับรถจากบ้านไปทางทิศเหนือ 22 กิโลเมตร แล้วเลี้ยวไปทางทิศตะวันออก 24 กิโลเมตร แล้วตรงขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 10 กิโลเมตร จึงถึงบ้านปรานี อยากทราบว่าบ้านของดอนอยู่ห่างจากบ้านปรานีกี่กิโลเมตร
5. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D และ AB = 26 นิ้ว, AC = 30 นิ้ว และ BC = 25 นิ้ว



6. มดตะนอยเดินออกจากรังไปทางทิศตะวันออก 30 เมตร แล้วเดินขึ้นเหนือ 18 เมตร แล้วเลี้ยวไปทางทิศตะวันออกอีก 15 เมตร แล้วเดินขึ้นเหนือไปอีก 10 เมตร จึงพบน้ำตาลก้อนหนึ่ง อยากทราบว่ารังของมดตะนอยอยู่ห่างจากก้อนน้ำตาลกี่เมตร
7. ในครึ่งวงกลมซึ่งมีรัศมี $2\sqrt{2}$ หน่วย จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แนบในครึ่งวงกลมดังรูป



8. ให้ x เป็นจุดกึ่งกลางเส้นทแยงมุมด้านบนของลูกบาศก์ซึ่งมีสันยาวด้านละ 6 หน่วย จงหาความยาวของ AX



ภาคผนวก ฉ

แผนการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

สิ่งที่ต้องระวังในการสอนซ่อมเสริมภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิต

เรื่องการหาพื้นที่

1. ในการหาความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า นักเรียนจะนำความยาวของด้านกว้างบวกด้วยความยาวของด้านยาวเท่านั้น โดยจะไม่นำผลบวกที่ได้นั้นมาคูณด้วย 2 สาเหตุเพราะนักเรียนท่องจำสูตรโดยไม่เข้าใจที่มาของสูตรของการหาความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผา นักเรียนจึงลืมที่จะต้องนำ 2 มาคูณกับผลบวกที่ได้

2. ในเรื่องการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม นักเรียนยังมีความคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการหาส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม โดยนักเรียนบางคนยังลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมไม่ได้ และระบุด้านที่เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมยังไม่ถูกต้อง

3. นักเรียนบางคนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมไม่ถูกต้อง สาเหตุเพราะนักเรียนจำสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้นไม่ได้ และหาเงื่อนไขที่จำเป็นต้องนำมาใช้จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ได้

4. ในเรื่องการแปลงหน่วย นักเรียนบางคนจำอัตราการแปลงหน่วยไม่ได้ และบางคนยังมีความสับสนในเรื่องการแปลงหน่วยเล็กไปเป็นหน่วยใหญ่ เช่น การแปลงหน่วยเซนติเมตรไปเป็นหน่วยเมตร หรือการแปลงหน่วยใหญ่มาเป็นหน่วยเล็ก เช่น การแปลงหน่วยเมตรมาเป็นหน่วยเซนติเมตร

เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

1. นักเรียนยังมีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอที่จะนำความรู้นั้นมาใช้ในการพิสูจน์ โดยนักเรียนไม่ทราบว่าจะพิสูจน์ให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบใด เช่น นักเรียนไม่ทราบว่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้นั้นจะนำมาใช้ในการพิสูจน์ได้อย่างไร และควรจะพิสูจน์ตามความสัมพันธ์แบบใด

2. ครูควรฝึกให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปทีละเงื่อนไข เมื่อเข้าใจแต่ละเงื่อนไขดีแล้วจึงให้นักเรียนทำโจทย์ระคน ครูอาจแนะให้นักเรียนแปลงตัวย่อเป็นคำที่มีความหมายต่อตัวเขาเองเพื่อง่ายในการจำ เช่น ด.ม.ด. แปลงเป็น เดินไม่ได้ เป็นต้น

3. นักเรียนบางคนยึดติดกับรูปจนไม่สนใจสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสรุปเอาเองเพื่อให้ได้เงื่อนไขครบตามความสัมพันธ์ที่นักเรียนคิดไว้ว่าจะทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

4. นักเรียนจำความสัมพันธ์ที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการได้ แต่ไม่เข้าใจสาระสำคัญของความสัมพันธ์ เช่น ม.ด.ม. นักเรียนจะบอกได้ว่าประกอบด้วยมุมที่เท่ากันสองคู่ และด้านที่เท่ากันหนึ่งคู่ แต่นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่าด้านที่เท่ากันหนึ่งคู่นั้นต้องเป็นด้านที่สมนัยกัน กล่าวคือ ในกรณีนี้อยู่ระหว่างมุมคู่ที่เท่ากัน

5. นักเรียนสร้างรูปเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์ไม่ได้

เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

1. นักเรียนยังไม่เข้าใจบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
2. นักเรียนยังระบุมุมและด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันไม่ถูกต้อง
3. นักเรียนเขียนอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันไม่ถูกต้อง
4. นักเรียนไม่สามารถวาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาได้

5. ครูควรเน้นให้นักเรียนเขียนชื่อรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูปตามลำดับของมุมที่สมนัยกัน เพื่อให้หาด้านที่สมนัยกันโดยง่าย เพราะจะดูจากลำดับตัวอักษรเท่านั้น ไม่ต้องย้อนกลับไปดูรูป เช่น $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ หมายความว่า $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$, $\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$ และ $\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

เรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. นักเรียนบางคนยังสรุปไม่ได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉากจะต้องเป็นด้านที่ยาวที่สุด
2. นักเรียนบางคนยังไม่สามารถหาค่ารากที่สองได้
3. นักเรียนบางคนยังไม่สามารถวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

แผนการสอนที่ 1 เรื่อง พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และพื้นที่รูปสามเหลี่ยม
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมแต่ละมุมเป็นมุมฉาก
2. สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง x ยาว
3. สูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ x ความยาวของฐาน x ความสูง

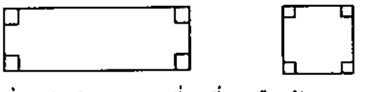
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของพื้นที่ระหว่างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานร่วมกันและความสูงเท่ากันได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
5. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

เนื้อหา

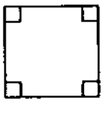
1. การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก*

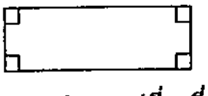


มี 2 ชนิด คือ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน ดังรูป

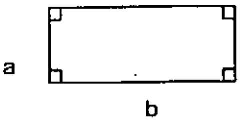


รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านกว้างไม่เท่ากับด้านยาว ดังรูป



การหาพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

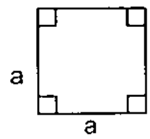
ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านกว้าง a หน่วย ยาว b หน่วย



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = a x b ตารางหน่วย
= กว้าง x ยาว

เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = a + a + b + b
= 2 (a + b) หน่วย

การหาพื้นที่และเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

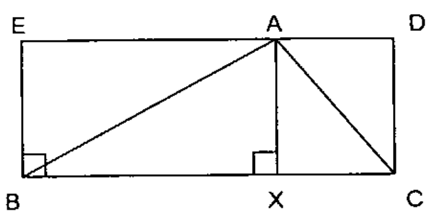


พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	= a x a ตารางหน่วย
	= ด้าน x ด้าน
เส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	= a + a + a + a
	= 4a หน่วย

2. การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมดังนี้

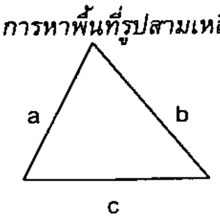
พิจารณาจากรูป



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCDE	= BC x CD
พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABX	= ½ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม AEBX
พื้นที่ของสามเหลี่ยม ACX	= ½ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ADCX
ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC	= พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABX + พื้นที่ของสามเหลี่ยม ACX
	= ½ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม AEBX + ½ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ADCX
	= ½ ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม BCDE
	= ½ (BC x CD)
ฉะนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC	= ½ (BC x AX) , CD = AX

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม	= ½ x ความยาวของฐาน x ความสูง

การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่ทราบความยาวของด้านทั้งสาม



จากรูปที่กำหนดให้ s = ½ ของความยาวของเส้นรอบรูป

s = ½ (a + b + c)

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

สื่อการเรียนการสอน

1. แบบเรียนเรื่องการหาพื้นที่
2. บัตรรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

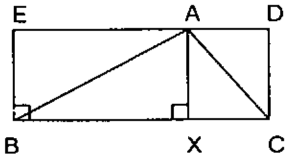
กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ให้นักเรียนนึกภาพสี่เหลี่ยมมุมฉากไว้ในใจ ครูสุ่มเรียกนักเรียนมาวาดรูปที่นึกไว้ในใจบนกระดานดำ

2. *ขั้นสอน*

   1. จากรูปที่นักเรียนวาดบนกระดานดำ (เลือกรูปที่เป็น และไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก) ถามนักเรียนว่ารูปที่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นเพราะอะไร รูปที่ไม่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่เป็นเพราะอะไร
   2. ครูอธิบายว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากันเรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านกว้างไม่เท่ากับด้านยาวเรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
   3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
   4. ครูให้นักเรียนหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยการทำเป็นตารางแล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
   5. ครูยกตัวอย่างที่ 1.1
   6. ครูแจกบัตรงานดังรูป



   ครูให้นักเรียนตัดตามแนว AC แล้วนำสามเหลี่ยม ADC มาทับสามเหลี่ยม ACX

   สรุปได้ว่า สามเหลี่ยม ACX = ½ ของสี่เหลี่ยม ADCX

   ครูให้นักเรียนตัดตามแนว AB แล้วนำสามเหลี่ยม ABE มาทับ สามเหลี่ยม ABX

   สรุปได้ว่า สามเหลี่ยม ABX = ½ ของสี่เหลี่ยม AXBE ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปได้ว่า สามเหลี่ยม ABC = ½ ของสี่เหลี่ยม BCDE

   7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปถึงความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเดียวกันและส่วนสูงเท่ากัน
   8. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

3. *ขั้นสรุป*

   1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
   2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
   3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 และที่ 2

5. *การประเมินผล*

   ตรวจผลการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน และสังเกตการตอบคำถามของนักเรียน

แผนการสอนที่ 2 เรื่อง พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่
2. สูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ฐาน x สูง
3. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
4. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่ และคู่เดียวเท่านั้น
5. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันสองคู่
6. รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านและมุมไม่เท่ากัน

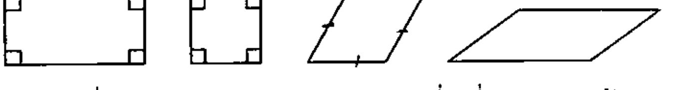
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถสรุปบทนิยามและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถสรุปบทนิยามและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนได้ถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมขนมเปียกปูนได้ถูกต้อง
5. นักเรียนสามารถสรุปบทนิยามและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้ถูกต้อง
6. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมคางหมูได้ถูกต้อง
7. นักเรียนสามารถสรุปบทนิยามและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวได้ถูกต้อง
8. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมรูปว่าวได้ถูกต้อง
9. นักเรียนสามารถสรุปบทนิยามและอธิบายลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้ถูกต้อง
10. นักเรียนสามารถคำนวณหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ได้ถูกต้อง
11. นักเรียนสามารถคำนวณหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสี่เหลี่ยมได้ถูกต้อง

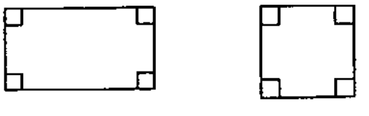
เนื้อหา

1. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

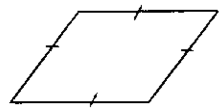
บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หมายถึงรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่*



รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากเรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป



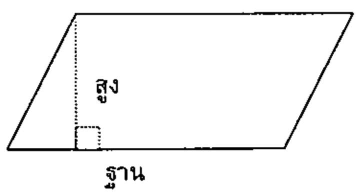
รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน มุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก เรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดังรูป



<u>สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน</u>

1. ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน
2. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

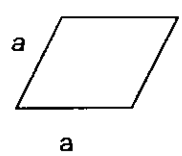
<u>การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน</u>



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวของฐาน x ความสูง

2. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน*



<u>สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน</u>

1. มีด้านทั้งสี่ด้านยาวเท่ากัน
2. มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากันและไม่เป็นมุมฉาก
3. เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน

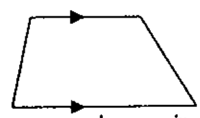
<u>พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน</u>

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (แบบที่1) = ฐาน x สูง

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (แบบที่ 2) = ½ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม

3. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

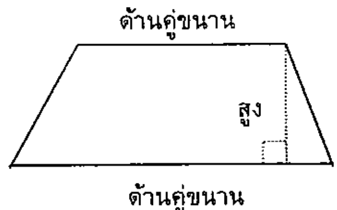
บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมคางหมู หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันหนึ่งคู่ และคู่เดียวเท่านั้น*



รูปสี่เหลี่ยมคางหมูใด ๆ ที่มีด้านที่ไม่ขนานกันยาวเท่ากัน ดังรูป เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

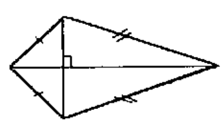
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = ½ x ผลบวกของด้านคู่ขนาน x สูง



4. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดกันยาวเท่ากันสองคู่*

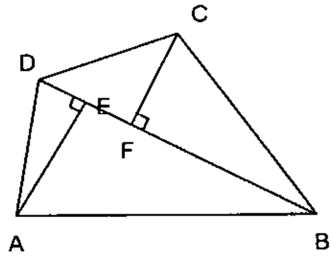


พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว = ½ x ผลคูณของเส้นทแยงมุม

5. รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

บทนิยาม *รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านและมุมไม่เท่ากัน*



$\overline{BD}$ เป็น เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง เส้นที่ลากจากมุมใดมุมหนึ่งไปตั้งฉากกับเส้นทแยงมุม เรียกว่า เส้นกิ่ง ตามรูปนี้ $\overline{AE}$ และ $\overline{CF}$ เป็นเส้นกิ่ง

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ = ½ x ผลบวกของเส้นกิ่ง x เส้นทแยงมุม

สื่อการเรียนการสอน

1. แบบเรียนเรื่องการหาพื้นที่
2. แผนภูมิรูปสี่เหลี่ยม
3. บัตรงานรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

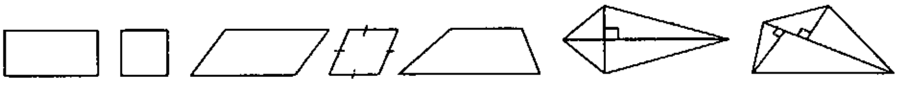
กิจกรรมการเรียนการสอน

1.ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยมและให้นักเรียนทำกิจกรรมการหาส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม

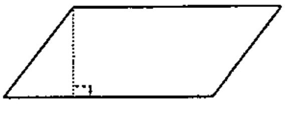
2.ขั้นสอน

1. ครูติดแผนภูมิตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมบนกระดานดำดังนี้



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

2. ครูให้นักเรียนสังเกตลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมที่ครูติดไว้ และให้นักเรียนช่วยกันจัดกลุ่มของรูปสี่เหลี่ยมตามลักษณะที่เหมือนกันของรูปสี่เหลี่ยมและบอกชื่อของรูปสี่เหลี่ยม
3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปได้ว่าจากรูปที่ครูติดไว้จะแบ่งรูปสี่เหลี่ยมออกเป็นสี่กลุ่ม ดังนี้คือ กลุ่มที่ 1 กลุ่มของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือรูปที่ 1 – 4 กลุ่มที่ 2 กลุ่มของสี่เหลี่ยมคางหมูคือรูปที่ 5 กลุ่มที่ 3 กลุ่มของสี่เหลี่ยมรูปว่าวคือรูปที่ 6 และกลุ่มที่ 4 กลุ่มของสี่เหลี่ยมใด ๆ คือรูปที่ 7
4. เมื่อแยกกลุ่มเป็น 4 กลุ่มแล้วครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นบทนิยามและสมบัติของสี่เหลี่ยมแต่ละประเภท
5. จากกลุ่มที่ 1 จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมี 2 แบบคือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก คือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มุมเรียกว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
6. ครูแจกบัตรงานรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังรูป

   ครูให้นักเรียนตัดบัตรงานตามเส้นประที่เป็นเส้นส่วนสูง แล้วให้นำมาต่อกับอีกด้านหนึ่ง ครูให้นักเรียนสังเกตดูว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมอะไร จากนั้นครูและนักเรียนช่วยสรุปสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจนได้ว่า ใช้สูตรเดียวกับการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แต่จะใช้ว่า ด้านฐาน x ความสูง และครูยกตัวอย่างที่ 3.1.1 ในแบบเรียน
7. จากตัวอย่างที่ 3.2.1 และ 3.2.2 ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
8. ให้นักเรียนลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู แล้วหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง ครูให้นักเรียนอภิปรายกันจนได้สูตรของการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู
9. จากตัวอย่างที่ 3.3.1 ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

10. จากรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวเมื่อลากเส้นทแยงมุมจะได้รูปสามเหลี่ยมสองรูปให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้และสรุปเป็นสูตรของการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว
11. จากรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ครูให้นักเรียนลากเส้นทแยงมุมและเส้นกิ่งแล้วหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ
12. จากตัวอย่างที่ 3.4.1 และ 3.5.1 ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวและรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ

3. ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของรูปสี่เหลี่ยม
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม

4. ขั้นการนำไปใช้

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3

5. การประเมินผล

ตรวจผลการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน และสังเกตการตอบคำถามของนักเรียน

แผนการสอนที่ 3 เรื่อง การเปลี่ยนหน่วย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่จากหน่วยย่อยเป็นหน่วยใหญ่สามารถทำได้โดยการเปลี่ยนความยาวของหน่วยย่อยให้เป็นหน่วยใหญ่แล้วยกกำลังสองจะได้พื้นที่ของหน่วยใหญ่
2. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่จากหน่วยใหญ่เป็นหน่วยย่อยสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนความยาวของหน่วยใหญ่ให้เป็นหน่วยย่อยแล้วยกกำลังสองจะได้พื้นที่ของหน่วยย่อย

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยย่อยและหน่วยใหญ่ในมาตราเมตริกได้
2. นักเรียนสามารถเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยย่อยและหน่วยใหญ่ในมาตราไทยได้
3. นักเรียนสามารถเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างหน่วยมาตราเมตริและหน่วยในมาตราไทยได้

เนื้อหา

1. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ในมาตราเมตริก

1 ตารางเมตร	=	10000 ตารางเซนติเมตร
1 ตารางกิโลเมตร	=	1,000,000 ตารางกิโลเมตร

2. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ในมาตราไทย

1 ไร่	=	4 งาน
1 งาน	=	100 ตารางวา
1 ไร่	=	400 ตารางวา

3. การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างมาตราเมตริกและมาตราไทย

1 วา	=	2 เมตร
1 ตารางวา	=	4 ตารางเมตร

สื่อการเรียนการสอน

แบบเรียนเรื่องการหาพื้นที่

กิจกรรมการเรียนการสอน

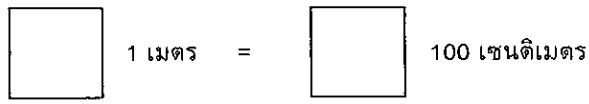
1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ถามนักเรียนเกี่ยวกับหน่วยวัดความยาวและหน่วยพื้นที่ทั้งในมาตราเมตริกและมาตราไทย

2. *ขั้นสอน*

   2.1 การเปลี่ยนหน่วยในมาตราเมตริก

   1. ครูวาดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 1 เมตร ให้นักเรียนหาพื้นที่ ครูให้นักเรียนหาพื้นที่อีกครั้งหนึ่งโดยเปลี่ยนเมตรเป็นเซนติเมตรดังนี้



1 เมตร 100 เซนติเมตร

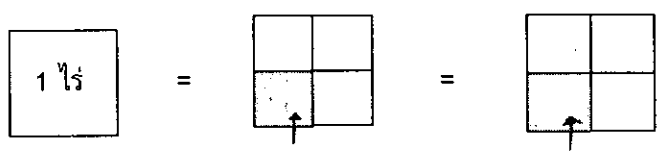
พื้นที่ 1 เมตร x 1 เมตร = 100 เซนติเมตร X 100 เซนติเมตร

1 ตารางเมตร = 10,000 ตารางเซนติเมตร

2. ครูให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 1 กิโลเมตรเป็นตารางเมตร

2.2 การเปลี่ยนหน่วยในมาตราไทย

1. ครูอธิบายการเปลี่ยนหน่วยในมาตราไทยและความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยในมาตราไทยดังนี้



1 งาน 100 ตร.วา

สรุปความสัมพันธ์ได้ดังนี้

1 ไร่ = 4 งาน

1 งาน = 100 ตารางวา

1 ไร่ = 400 ตารางวา

2. ครูให้นักเรียนเปลี่ยนหน่วยในมาตราไทยดังนี้
   1. พื้นที่ 5 ไร่ มีกี่งาน และถ้าคิดเป็นตารางวาจะได้กี่ตารางวา
   2. พื้นที่ 10 งาน 40 ตารางวาเท่ากับกี่ไร่

ครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

2.3 การเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ระหว่างมาตราเมตริกและมาตราไทย

1. ให้นักเรียนหาว่า 1 วา เท่ากับกี่เมตร และพื้นที่ 1 ตารางวา เท่ากับกี่ตารางเมตร
2. ให้นักเรียนทำตัวอย่างที่ 4.1 และ 4.2

3. *ขั้นสรุป*

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการเปลี่ยนหน่วยพื้นที่ในมาตราต่าง ๆ

4. *ขั้นการนำไปใช้*

ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4

5. *การประเมินผล*

ตรวจผลการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน และสังเกตการตอบคำถามของนักเรียน

แผนการสอนที่ 1 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. รูปสองรูปเท่ากันทุกประการเมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี
2. ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน
3. มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน
4. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ
5. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

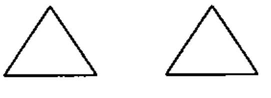
1. สรุปบทนิยามของความเท่ากันทุกประการได้ถูกต้อง
2. สรุปความสัมพันธ์ที่ทำให้เส้นตรง 2 เส้นเท่ากันทุกประการได้ถูกต้อง
3. สรุปเงื่อนไขที่ทำให้มุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุมเท่ากันทุกประการได้ถูกต้อง
4. สรุปบทนิยามของการเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
5. ระบุด้านและมุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการได้ถูกต้อง
6. สรุปบทนิยามของการเท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
7. พิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน ได้ถูกต้อง
8. แก้ปัญหาโดยใช้ความเท่ากันทุกประการได้ถูกต้อง

เนื้อหา

1. ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

สัญลักษณ์ $\cong$ แทนความสัมพันธ์ " เท่ากันทุกประการ "



A B

เมื่อรูป A และรูป B ทับกันได้สนิทพอดีจะได้ว่ารูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B จะเขียนว่า รูป A $\cong$ รูป B และอ่านว่ารูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B

2. ความเท่ากันทุกประการของเส้นตรง

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นเท่ากันทุกประการ เมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน

A B จากรูป $\overline{AB}$ เท่ากันทุกประการกับ $\overline{CD}$ เขียนว่า $AB \cong CD$

C D จะได้ว่า $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

3. ความเท่ากันทุกประการของมุม

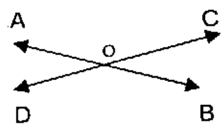
บทนิยาม มุมสองมุมเท่ากันทุกประการ เมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

จากรูป $A\hat{B}C \cong M\hat{N}O$ จะได้ว่า

$m(A\hat{B}C) = m(M\hat{N}O)$

4. มุมตรงข้าม เกิดจากเส้นตรงสองเส้นตัดกัน หรืออาจจะเกิดจากส่วนของเส้นตรง หรือรังสีสองเส้นตัดกัน

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน

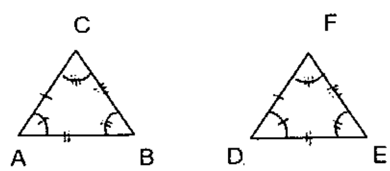


เรียก $A\hat{O}D$ กับ $C\hat{O}B$ ว่ามุมตรงข้าม และจะได้ว่า

$A\hat{O}D \cong C\hat{O}B$ หรือ $m(A\hat{O}D) = m(C\hat{O}B)$

5. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

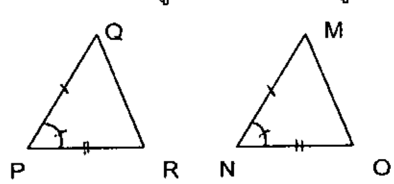


ถ้า $\triangle ABC = \triangle DEF$ จะได้ว่า

$\hat{A} = \hat{D}$		$AB = DE$
$\hat{B} = \hat{E}$	และ	$BC = EF$
$\hat{C} = \hat{F}$		$AC = DF$

6. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.)

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



จากรูป $QP = MN$

$Q\hat{P}R = M\hat{N}O$

$PR = NO$

จะได้ว่า $\triangle PQR \cong \triangle NMO$ (ด.ม.ด.)

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ

กิจกรรมการเรียนการสอน

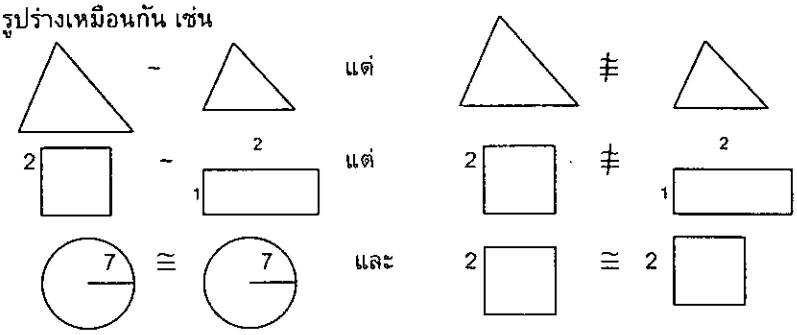
1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

ครูให้นักเรียนตอบคำถาม " ความเท่ากันทุกประการของรูปสองรูป หมายถึงอะไร " แล้วสุ่มนักเรียนขึ้นมาตอบ ครูสังเกตดูว่านักเรียนเข้าใจนิยามของความกันทุกประการของรูปสองรูปได้ถูกต้องหรือไม่

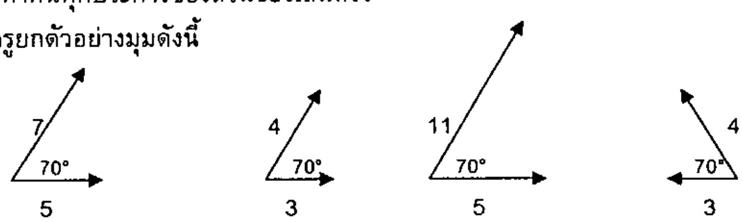
2. *ขั้นสอน*

1. ครูเขียนสัญลักษณ์ $\cong$ บนกระดานดำ และถามนักเรียนเกี่ยวกับสัญลักษณ์นี้ จนสรุปได้ว่า สัญลักษณ์ $\cong$ มาจาก " ~ " หมายถึงการมีรูปร่างเหมือนกัน (Same Shape) และ " = " หมายถึง การมีขนาดเท่ากัน (Same Size) เมื่อรวมกันแล้วหมายถึง การมีขนาด

และรูปร่างเหมือนกัน เช่น

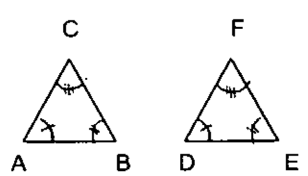


2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของความเท่ากันทุกประการของรูปสองรูป
3. ครูให้นักเรียนเขียนส่วนของเส้นตรงที่มีความยาวตั้งแต่ 1 – 10 มาคนละ 1 เส้น และครูก็เขียนส่วนของเส้นตรงบนกระดานดำ 1 เส้น แล้วถามนักเรียนว่ามีส่วนของเส้นตรงของใครที่เท่ากันกับของครูบ้าง เพราะอะไร จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง
4. ครูยกตัวอย่างมุมดังนี้



และถามนักเรียนว่ามุมในรูปใดที่เท่ากันทุกประการ จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของความเท่ากันทุกประการของมุม

5. ครูยกตัวอย่าง



ถ้า $\triangle ABC = \triangle DEF$ จะได้ว่า

$\hat{A} = \hat{D}$		$AB = DE$
$\hat{B} = \hat{E}$	และ	$BC = EF$
$\hat{C} = \hat{F}$		$AC = DF$

จะกล่าวว่า $\hat{A}$ สมนัยกับ $\hat{D}$ $\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$

$\hat{B}$ สมนัยกับ $\hat{E}$ และ $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$

$\hat{C}$ สมนัยกับ $\hat{F}$ $\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

จะไม่เขียน $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ เพราะจะหมายถึง

$\hat{A} = \hat{D}$		$AB = DF$
$\hat{B} = \hat{F}$	และ	$BC = FE$
$\hat{C} = \hat{E}$		$AC = DE$

ซึ่งไม่สอดคล้องกัน จากนั้นครูให้นักเรียนช่วยกันทำแบบฝึกหัดที่ 2

6. ครูเสนอตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมเป็นคู่ ๆ ทั้งที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน และไม่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน และให้นักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ ด้าน – มุม – ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป

7. ครูพิสูจน์ให้นักเรียนดู ตามตัวอย่าง ที่ 1 และ 2

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 และ 3

3. ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนสรุปบทนิยามของความเท่ากันทุกประการของส่วนของเส้นตรง มุม ความเท่ากันของรูปสามเหลี่ยม และสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

4. ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ที่ 1 และ 3

5. การประเมินผล

สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน และผลของการทำแบบฝึกหัด

แผนการสอนที่ 2 เรื่อง ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป แบบ มุม – ด้าน – มุม และ รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ แบบ ด้าน – มุม – ด้าน
2. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน

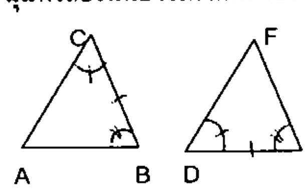
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. สรุปลักษณะความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ถูกต้อง
2. สรุปความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ได้ถูกต้อง
3. พิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ได้ถูกต้อง
4. นำความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
5. สรุปบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ถูกต้อง
6. อธิบายลักษณะและสมบัติของสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ถูกต้อง
7. นำความรู้เรื่องสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปใช้แก้ปัญหาได้

เนื้อหา

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน –มุม (ม.ด.ม.)

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากันด้วยแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



จากรูป $A\hat{B}C = F\hat{E}D$

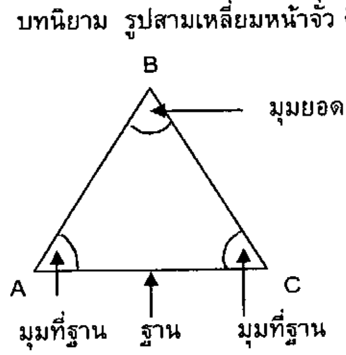
$BC = ED$

$A\hat{C}B = F\hat{D}E$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle FED$ (ม.ด.ม.)

2. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB = BC

เรียกด้าน AC ว่าฐาน

เรียก $B\hat{A}C$ และ $B\hat{C}A$ ว่า มุมที่ฐาน

และเรียก $A\hat{B}C$ ว่า มุมยอด

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

1. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
2. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ ใบงานเรื่องรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูให้นักเรียนวาดรูปสามเหลี่ยมลงในกระดาษที่ครูแจกให้คนละ 1 รูป แล้วให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ มุม – ด้าน – มุม ลงในรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนวาด

2. *ขั้นสอน*

   1. ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ มุม – ด้าน – มุม ในรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนวาดและช่วยกันสรุปความสัมพันธ์นั้นว่า มีมุมเท่ากัน 2 มุม และมีด้านที่อยู่ระหว่างมุมคู่ที่เท่ากัน
   2. ครูยกตัวอย่าง รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม และไม่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม
   3. นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นบทนิยามความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป
   4. ครูพิสูจน์ให้นักเรียนดูตามตัวอย่างที่ 1 และให้นักเรียนพิสูจน์ตัวอย่างที่ 2
   5. ครูแจกให้นักเรียนทำใบงานเรื่องสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   6. จากใบงานให้นักเรียนสรุปบทนิยามของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   7. ครูอธิบายสมบัติของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และยกตัวอย่างเพื่อถามความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับ สมบัติต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   8. ครูยกตัวอย่างปัญหาเกี่ยวกับการนำเรื่องสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาใช้แก้ปัญหา

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม และสรุปสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 และ 5

5. *การประเมินผล*

   สังเกตจากการตอบคำถาม การทำใบงานของนักเรียน และผลของการทำแบบฝึกหัด

แผนการสอนที่ 3 เรื่อง ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน, ฉาก – ด้าน – ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้าน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน
2. ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการแบบ ฉาก – ด้าน –ด้าน
3. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่งแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการแบบ มุม – มุม – ด้าน

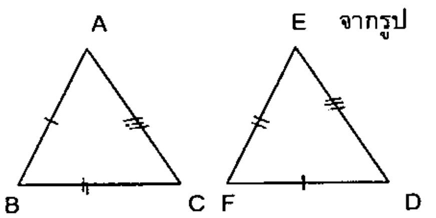
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. สรุปลักษณะความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน , ฉาก – ด้าน –ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ถูกต้อง
2. สรุปความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน, ฉาก – ด้าน –ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน ได้ถูกต้อง
3. พิสูจน์ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ,ฉาก – ด้าน –ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน ได้ถูกต้อง
4. นำความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม , ฉาก – ด้าน –ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

เนื้อหา

1. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.)

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ด้านต่อด้าน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



จากรูป $AB = DF$

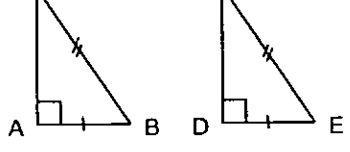
$BC = FE$

$AC = DE$

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$ (ด.ด.ด.)

2. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน –ด้าน (ฉ.ด.ด.)

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



จากรูป $C\hat{A}B = F\hat{D}E = 90^\circ$

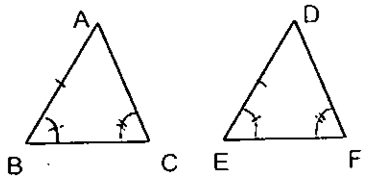
$BC = EF$

$BC = ED$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ฉ.ด.ด.)

3. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด.)

บทนิยาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่ง แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



จากรูป $A\hat{B}C = D\hat{E}F$

$B\hat{C}A = E\hat{F}B$

$AB = DE$

จะได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ม.ม.ด.)

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูทบทวนความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน และ มุม – ด้าน – มุม

2. *ขั้นสอน*

   1. ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน
   2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นบทนิยามความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป
   3. ครูพิสูจน์ให้นักเรียนดูตามตัวอย่างที่ 1 และให้นักเรียนพิสูจน์ตัวอย่างที่ 2
   4. ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน
   5. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเป็นบทนิยามความสัมพันธ์แบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป
   6. ครูอธิบายความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน
   7. ครูยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมที่มีมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน และไม่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน
   8. นักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของรูปสามเหลียมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน
   9. ครูแสดงการพิสูจน์ตัวอย่างที่ 1 และ 2

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน ,ฉาก – ด้าน – ด้าน และ มุม – มุม – ด้าน

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 6 และ 7

5. *การประเมินผล*

   สังเกตจากการตอบคำถาม และผลของการทำแบบฝึกหัด

แผนการสอนที่ 1 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมคล้าย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน หมายถึง รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่

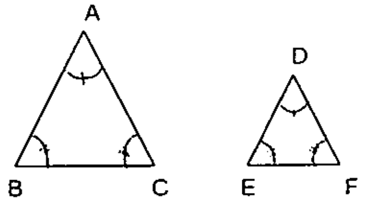
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
2. บอกได้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่
3. บอกด้านและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันได้

เนื้อหา

1. รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

บทนิยาม รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน



จากรูปจะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับ รูปสามเหลี่ยม DEF

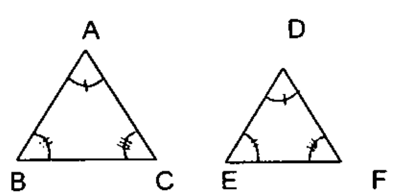
จะใช้สัญลักษณ์ ~ แทนความสัมพันธ์ " คล้ายกัน"โดยเขียนว่า $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

และอ่านว่า รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกันกับหรือคล้ายกับรูปสามเหลี่ยม DEF

2. ด้านที่สมนัยกัน คือ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน

การใช้สัญลักษณ์ ~ นี้ นิยมเขียนจุดยอดมุมรูปสามเหลี่ยมคู่ที่มีขนาดของมุมเท่ากันไว้ในตำแหน่งเดียวกัน เช่น

ถ้าเขียน $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ หมายความว่า $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$ เช่น



เนื่องจากด้าน BC อยู่ตรงข้ามกับมุม A ด้าน EF อยู่ตรงข้ามมุม D

และ $\hat{A} = \hat{D}$ จะได้ว่า $\overline{BC}$ สมนัยกับ $\overline{EF}$

และในทำนองเดียวกัน $\hat{B} = \hat{E}$ จะได้ว่า $\overline{AC}$ สมนัยกับ $\overline{DF}$

$\hat{C} = \hat{F}$ จะได้ว่า $\overline{AB}$ สมนัยกับ $\overline{DE}$

สรุปได้ว่า ถ้า $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเป็นด้านที่สมนัยกัน

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย รูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูติดรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันบนกระดาน แล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมจัดครอบครัวรูปเรขาคณิต โดยการจัดรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันไว้เป็นครอบครัวเดียวกัน

2. *ขั้นสอน*
   1. จากกิจกรรมข้างต้นให้นักเรียนสรุปบทนิยามของความคล้ายกันของรูปเรขาคณิต
   2. ครูยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมทั้งที่คล้ายกันและไม่คล้ายกันหลาย ๆ รูปบนกระดาน แล้วให้นักเรียนสรุปเป็นบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
   3. ครูอธิบายลักษณะของด้านที่สมนัยกันและยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน 1 คู่บนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนเขียนด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมคู่นั้น
   4. ครูให้นักเรียนทำดังอย่างที่ 1
   5. ครูแสดงการพิสูจน์ให้นักเรียนดูตามตัวอย่างที่ 2

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามของสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1

5. *การประเมินผล*

   ดูผลการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 2 เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ
สาระการเรียนรู้

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน
2. ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูป และอัตราส่วนของแต่ละด้านที่สมนัยกันมีค่าเท่ากับ a : b จะได้อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง เท่ากับ $a^2 : b^2$

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

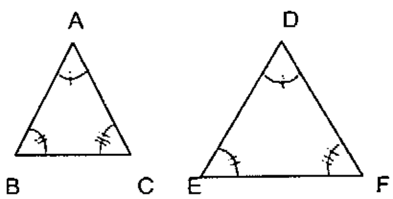
1. บอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน
2. นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันในข้อ 1 ไปใช้ได้

เนื้อหา

1. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

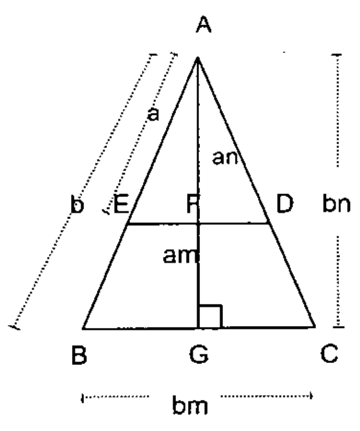
<u>*บทนิยาม*</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน

หรือ ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันจะเท่ากัน
กำหนด $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ จะได้ว่า



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

2. ถ้ามีรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูป และอัตราส่วนของแต่ละด้านที่สมนัยกันมีค่าเท่ากับ a : b จะได้อัตราส่วนของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง เท่ากับ $a^2 : b^2$



เนื่องจาก $\triangle ABC \sim \triangle AED$
ให้ AE = a หน่วย, ED = am, AF = an,
AB = b หน่วย, BC = bm, AG = bn
เมื่อ m , n เป็นจำนวนจริงใดๆ

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times bm \times bn$
$= \frac{1}{2}\, b^2 (mn)$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม AED $= \frac{1}{2} \times am \times an$
$= \frac{1}{2}\, a^2 (mn)$

$$\frac{\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม AED}}{\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC}} = \frac{\frac{1}{2} a^2 mn}{\frac{1}{2} b^2 mn} = \frac{a^2}{b^2}$$

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูทบทวนเรื่องด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน โดยครูยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันให้บนกระดานดำ และให้นักเรียนเขียนด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น

2. *ขั้นสอน*

   1. ครูให้นักเรียนนำด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วน
   2. ครูแสดงให้นักเรียนเห็นว่าอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน จะเท่ากัน
   3. ครูให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันของสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
   4. ครูยกตัวอย่างที่ 1
   5. ครูอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
   6. ครูยกตัวอย่างการนำไปใช้แก้ปัญหาจากตัวอย่างที่ 3

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสมบัติของสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2

5. *การประเมินผล*

   ดูผลการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 3 เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 **ภาคเรียนที่ 1** เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

เราสามารถนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน 2 รูป มาใช้ในการแก้ปัญหาโจทก์เกี่ยวกับวัดความยาว การหาความสูงและการหาระยะทางได้

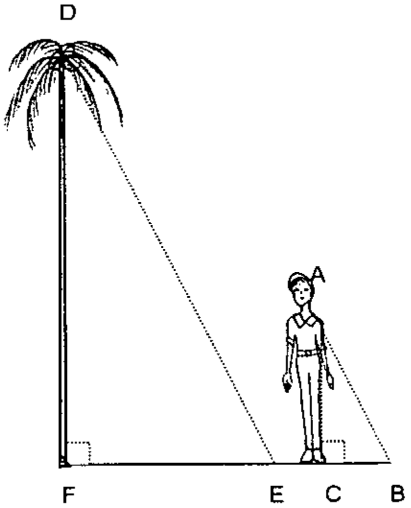
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

เนื้อหา

เราสามารถนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายกัน 2 รูป มาใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับการวัดความยาว การหาความสูงและการหาระยะทางได้ ดังนี้

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> ชายคนหนึ่งสูง 180 เซนติเมตร ในขณะที่เงาของต้นมะพร้าวต้นหนึ่งยาว 15 เมตร เขาวัดความยาวเงาของเขาที่ทอดไปตามพื้นได้ยาว 90 เซนติเมตร จงหาความสูงของต้นมะพร้าว



จากรูป $A\hat{C}B = D\hat{F}E = 90^\circ$

$A\hat{B}C = D\hat{E}F$ ($\overline{DE} // \overline{AB}$)

$B\hat{A}C = E\hat{D}F$ (มุมที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมย่อมเท่ากัน)

เนื่องจาก $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ดังนั้น

$$\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

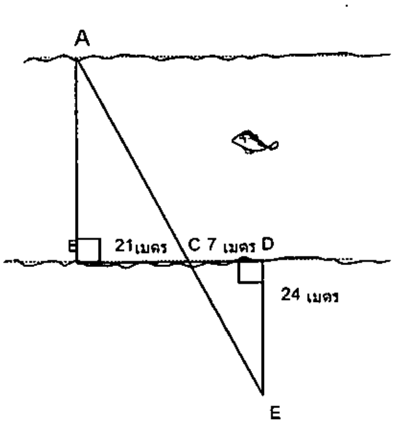
$$\frac{DF}{1.80} = \frac{15}{0.90}$$

$$DF = \frac{15 \times 1.80}{0.90}$$

$$= 30$$

$\therefore$ ต้นมะพร้าวสูง 30 เมตร

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> จากรูป จงหาความกว้างของแม่น้ำ



จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle EDC$

จะได้ $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$

$$\frac{AB}{24} = \frac{21}{7}$$

$$AB = \frac{21 \times 24}{7}$$

$= 72$ เมตร

$\therefore$ แม่น้ำกว้าง 72 เมตร

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูทบทวนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

2. *ขั้นสอน*

   1. ครูยกตัวอย่างที่1 และที่ 2 โดยการอธิบายให้นักเรียนฟัง
   2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มแล้วออกไปหาความสูงของเสาธงโดยใช้ความรู้เรื่องสามเหลี่ยมคล้าย
   3. ให้นักเรียนส่งตัวแทนกลุ่มออกมาอธิบายวิธีการหาความสูงของเสาธงตามที่ไปสำรวจมา
   4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปกิจกรรมที่นักเรียนได้ไปทำมา

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายไปช่วยในการแก้ปัญหา

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3

5. *การประเมินผล*

   ดูผลการทำกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 1 เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้ $c^2 = a^2 + b^2$

2. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉากโดย a , b และ c แทนความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC จะพบว่า

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB = พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน BC + พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AC

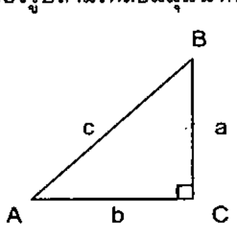
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างกำลังสองของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัสได้
2. หาความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้โดยใช้ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

เนื้อหา

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส กล่าวไว้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้



$$c^2 = a^2+b^2$$

<u>สรุป</u> การหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อทราบความยาวของด้านสองด้าน โดยใช้ทฤษฎีบทของปีทาโกรัส ทำได้ดังนี้

ถ้า a , b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านมุมตรงข้ามมุมฉาก จะได้

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้ากำหนด a และ b ให้
จะได้ว่า $c^2 = a^2 + b^2$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้ากำหนด b และ c ให้
จะได้ว่า $a^2 = c^2 - b^2$

<u>กรณีที่ 3</u> ถ้ากำหนด a และ c ให้
จะได้ว่า $b^2 = c^2 - a^2$

แบบที่ 2 ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

   ครูให้นักเรียนวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 3 เซนติเมตร และ 4 เซนติเมตร ลงในกระดาษของนักเรียน

2. *ขั้นสอน*

   1. จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนแต่ละคนวาด ครูให้นักเรียนวัดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
   2. ครูให้นักเรียนนำด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้านยกกำลังสอง แล้วนำมาบวกกัน
   3. ครูให้นักเรียนนำความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากมายกกำลังสอง แล้วสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างข้อ 2 และข้อ 3
   4. ครูให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ของด้านประกอบมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งจะเป็นไปตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
   5. ครูยกตัวอย่างที่ 1 และให้นักเรียนเขียนความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
   6. ครูยกตัวอย่างที่ 2 เพื่อแสดงการนำทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้หาด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดด้านมาให้ 2 ด้านแล้วให้หาความยาวของด้านที่เหลือ
   7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการนำทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้
   8. ครูยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนกระดานดำแล้วให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
   9. ครูให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะเป็นไปตามทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

3. *ขั้นสรุป*

   ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. *ขั้นการนำไปใช้*

   ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1

5. *การประเมินผล*

   ดูผลการทำกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 2 เรื่อง บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ
สาระการเรียนรู้

บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a , b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

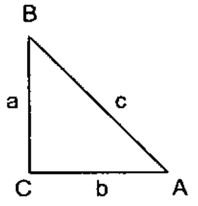
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนบทกลับของปีทาโกรัสและนำไปใช้ได้
2. บอกได้ว่าสามเหลี่ยมที่กำหนดความยาวของด้านทั้งสามให้เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

เนื้อหา

1. บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว a , b และ c หน่วย และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านที่ยาว c หน่วย เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก



ถ้า $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. ในกรณี ที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้า a , b และ c เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม โดยที่ c เป็นด้านที่ยาวที่สุด แล้วจะได้ข้อสรุปดังนี้

2.1 $c^2 < a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม
2.2 $c^2 = a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2.3 $c^2 > a^2 + b^2$ แล้ว แสดงว่ารูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

ครูทบทวนทฤษฎีบทของปีทาโกรัส โดยสุ่มถามนักเรียน 1 คนในห้อง จากนั้นครูเขียนทฤษฎีบทของปีทาโกรัสบนกระดานดำ

2. *ขั้นสอน*

1. ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 3 เซนติเมตร 4 เซนติเมตร และ 5 เซนติเมตร แล้วให้นักเรียนวัดขนาดของมุมทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนวาดขึ้น ถ้านักเรียนวาดรูปได้ถูกต้องนักเรียนจะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีด้านที่ยาว 5 เซนติเมตร เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

2. ครูกำหนดด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมเป็นด้าน a , b , c ดังนี้

a	b	c	$a^2 + b^2 = c^2$	
			เท่า	ไม่เท่า
5	12	13		
0.8	1.5	1.7		
4	1.5	8.5		
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2		

จากตัวอย่างที่ครูกำหนด ให้นักเรียนนำด้านของรูปสามเหลี่ยมชุดที่ $a^2 + b^2 = c^2$ มาสร้างรูปสามเหลี่ยมจะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และให้นักเรียนสังเกตว่าด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด

3. นักเรียนช่วยกันสรุปและเขียนบทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส
4. ครูพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัสให้นักเรียนดูบนกระดานดำ
5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนดูบนกระดานดำ
6. ครูและนักเรียนสรุปการนำบทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหา
7. ครูกำหนดความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมดังนี้

   1. $c^2 < a^2 + b^2$ 2. $c^2 > a^2 + b^2$

   ให้นักเรียนหาค่า a , b , c ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ที่ครูกำหนดให้ทั้ง 2 ข้อ แล้วให้นักเรียนวาดรูปตามความยาวด้านที่นักเรียนกำหนด จากนั้นวัดมุมที่ได้ เพื่อสรุปว่าสามเหลี่ยมที่นักเรียนกำหนดเป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม หรือเป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน
8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมกับชนิดของรูปสามเหลี่ยม

3. ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทกลับของทฤษฎีบทของปีทาโกรัส และสรุปความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมกับชนิดรูปสามเหลี่ยมของรูปสามเหลี่ยม

4. ขั้นการนำไปใช้

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2

5. การประเมินผล

ดูผลการทำกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียน

แผนการสอนที่ 3 เรื่อง การนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไปใช้
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2546 ภาคเรียนที่ 1 เวลา 1 คาบ

สาระการเรียนรู้

1. สูตรของปีทาโกรัส เนื่องจาก

$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$ ดังนั้นความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

$n,\ \frac{n^2-1}{2}$ และ $\frac{n^2+1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1

2. สูตรของพลาโต เนื่องจาก

$(n^2+1)^2 = 2n + (n^2-1)$ ดังนั้นความยาวของด้านทั้งสามขอรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

$2n,\ n^2-1,\ n^2+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อจบบทเรียนแล้วนักเรียนสามารถ

นำทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

เนื้อหา

1. ในการหาความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวของแต่ละด้านเป็นจำนวนเต็มสามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

สูตรของปีทาโกรัส เนื่องจาก เนื่องจาก $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$ ดังนั้นความยาวด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

$n,\ \frac{n^2-1}{2}$ และ $\frac{n^2+1}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1

<u>เช่น</u> $n = 3,\ \frac{3^2-1}{2} = 4,\ \frac{3^2+1}{2} = 5$ และ $3^2 + 4^2 = 5^2$

$n = 11,\ \frac{11^2-1}{2} = 60,\ \frac{11^2+1}{2} = 61$ และ $11^2 + 60^2 = 61^2$

สูตรของพลาโต เนื่องจาก $(n^2+1)^2 = (2n)^2 + (n^2-1)^2$ ดังนั้นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังนี้

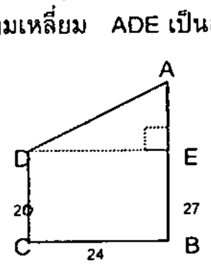
$2n,\ n^2-1,\ n^2+1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

เช่น $n = 2,\ 2(2) = 4,\ 2^2 - 1 = 3,\ 2^2 + 1 = 5$ และ $3^2 + 4^2 = 5^2$

2. การนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไปใช้ในการแก้ปัญหา

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศใต้ 27 กิโลเมตร จากนั้นไปทางทิศตะวันตก 24 กิโลเมตร และกลับไปทางทิศเหนืออีก 20 กิโลเมตร ขณะนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร

<u>วิธีทำ</u> ให้จุด A เป็นจุดเริ่มต้น D เป็นจุดสุดท้ายจาก AD และลากเส้น DE ให้ขนานกับ BC จะได้สามเหลี่ยม ADE เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก



$AD^2 = DE^2+AE^2$

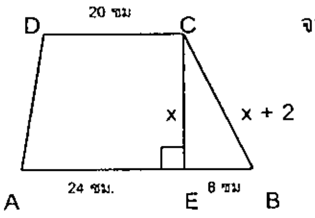
$AD^2 = 24^2+7^2$

$AD^2 = 625$

$AD = 25$ กม.

ชายคนนั้นอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 25 กม.

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปจงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู ABCD



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCE

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= CE^2+BE^2 \\
(x+2)^2 &= x^2+8^2 \\
x^2+4x+4 &= x^2+64 \\
4x &= 60 \\
x &= 15
\end{aligned}
$$

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times (20+32) \times 15$

$= \frac{1}{2} \times 52 \times 15$

$= 390$ ตารางเซนติเมตร

สื่อการเรียนการสอน

บทเรียนเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. *ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน*

ครูทบทวนทฤษฎีบทของปีทาโกรัส โดยเขียนทฤษฎีบทของปีทาโกรัสบนกระดานดำ

2. *ขั้นสอน*

1. ครูอธิบายการหาด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้สูตรของปีทาโกรัส เมื่อกำหนดด้าน 1 ด้านมาให้ และให้นักเรียนหาด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากด้านที่ครูกำหนดให้ดังนี้

1.1) 5 1.2) 7 1.3) 11

2. ครูอธิบายการหาด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้สูตรของพลาโต เมื่อกำหนดด้าน 1 ด้านมาให้ และให้นักเรียนหาด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากด้านที่ครูกำหนดให้ดังนี้

1.1) 8 1.2) 4 1.3) 12

3. ครูให้นักเรียนสรุปข้อแตกต่างระหว่างสูตรของปีทาโกรัส และ พลาโต

4. ครูยกตัวอย่างการนำทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหา ตามตัวอย่างที่ 3 และ 4

3. *ขั้นสรุป*

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการนำสูตรของ ปีทาโกรัส และ พลาโต ไปใช้ และการนำทฤษฎีบทของปีทาโกรัสไปใช้ในการแก้ปัญหา

4. *ขั้นการนำไปใช้*

ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3

5. *การประเมินผล*

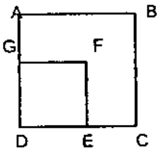
ดูผลการทำกิจกรรม และแบบฝึกหัดของนักเรียน

ภาคผนวก ช

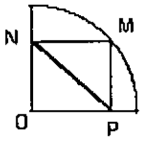
แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต

แบบทดสอบเรื่องการหาพื้นที่

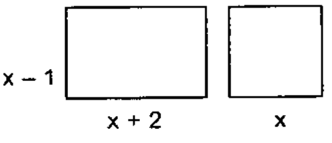
1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าต่างกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานในเรื่องใด
   ก. ผลบวกของมุมภายใน ข. ขนาดของมุมตรงข้าม
   ค. ความยาวของเส้นทแยงมุม ง. ความยาวของด้านคู่ขนาน
2. ถ้าลากเส้นเชื่อมต่อจุดกึ่งกลางทุกด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้รูปสี่เหลี่ยมในข้อใด
   ก. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ข. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว
   ค. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ง. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
3. ข้อใดกล่าวถูกต้อง
   ก. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่น้อยกว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน
   ข. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน
   ค. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่น้อยกว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีด้านยาวเท่ากัน
   ง. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่มากกว่ารูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีด้านยาวเท่ากัน
4. พื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับ 33 ตารางนิ้ว AG = EC = 3" พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส DEFG เท่ากับข้อใด



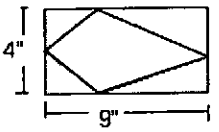
   ก. 8 ตารางนิ้ว ข. 16 ตารางนิ้ว ค. 12 ตารางนิ้ว ง. 24 ตารางนิ้ว
5. กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี 8 นิ้ว จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส MNOP



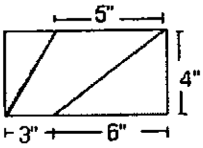
   ก. 16 ตารางนิ้ว ข. 24 ตารางนิ้ว ค. 32 ตารางนิ้ว ง. 64 ตารางนิ้ว
6. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามากกว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่ 2 ตารางเซนติเมตร ข้อใดเป็นค่าของ x



   ก. 2 เซนติเมตร ข. 4 เซนติเมตร ค. 6 เซนติเมตร ง. 8 เซนติเมตร
7. ให้ A มีค่าเท่ากับพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ 1 และ B มีค่าเท่ากับพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ 2 ข้อใดเป็นค่าของ B – A



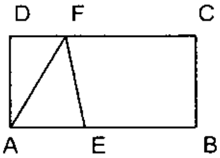
รูปที่ 1



รูปที่ 2

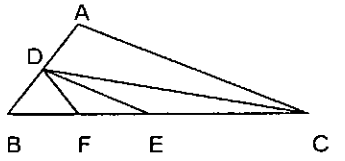
   ก. 2 ตารางนิ้ว ข. 4 ตารางนิ้ว ค. 16 ตารางนิ้ว ง. 18 ตารางนิ้ว

8. ถ้าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม AFE เท่ากับ 3/8 ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD CB = 4 เซนติเมตร AB = 6 เซนติเมตร แล้วข้อใดเป็นความยาวของ AE



ก. 3 เซนติเมตร ข. 4 เซนติเมตร ค. 4.5 เซนติเมตร ง. 9 เซนติเมตร

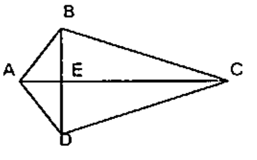
9. รูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB จุด E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC จุด F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BE และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม DCF เท่ากับ 60 ตารางเซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC



ก. 120 ตารางเซนติเมตร ข. 140 ตารางเซนติเมตร

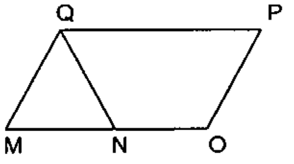
ค. 160 ตารางเซนติเมตร ง. 180 ตารางเซนติเมตร

10. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวมีเส้นทแยงมุมยาว 10 เซนติเมตร และ 18 เซนติเมตร ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวเป็น 4 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABD แล้ว AC ยาวเป็นกี่เท่าของ AE



ก. 3 เท่า ข. 4 เท่า ค. 5 เท่า ง. 6 เท่า

11. MOPQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน MO และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม MNQ เท่ากับ 7.25 ตารางเซนติเมตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม NOPQ เท่ากับข้อใด



ก. 14.5 ตารางเซนติเมตร ข. 20 ตารางเซนติเมตร

ค. 21.75 ตารางเซนติเมตร ง. 25.5 ตารางเซนติเมตร

12. รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีพื้นที่ 24 ตารางเมตร ด้านคู่ขนานห่างกัน 4 เมตร ถ้าด้านหนึ่งยาว 9 เมตร อีกด้านหนึ่งยาวเท่าไร

ก. 5 เมตร ข. 4.5 เมตร ค. 4 เมตร ง. 3 เมตร

13. ที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีด้านยาวเป็น 4 เท่าของด้านกว้าง ความยาวรอบรูปเท่ากับ 50 เมตร ที่ดินแปลงนี้มีพื้นที่เท่ากับข้อใด

ก. 100 ตารางเมตร ข. 125 ตารางเมตร

ค. 150 ตารางเมตร ง. 200 ตารางเมตร

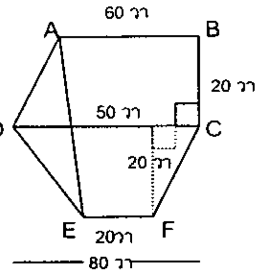
14. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีความสูงเท่ากับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ฐานเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสามเหลี่ยมจะมีพื้นที่เป็นเท่าไรของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ก. $\frac{1}{4}$ ข. $\frac{1}{2}$ ค. $\frac{4}{3}$ ง. $\frac{2}{3}$

15. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 4 ไร่ จะมีความกว้างกี่เมตร

ก. 20 เมตร ข. 80 เมตร ค. 45 เมตร ง. 100 เมตร

16. จากภาพรูปสามเหลี่ยม ADE มีพื้นที่กี่ไร่



ก. 1 ไร่ ข. 2 ไร่ ค. 1.5 ไร่ ง. 3 ไร่

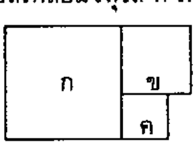
17. สระว่ายน้ำกว้าง 20 เมตร ยาว 30 เมตร ลึก 2 เมตร ต้องการปูด้วยกระเบื้องขนาด 10X10 ตารางเซนติเมตร จะต้องใช้กระเบื้องกี่แผ่น

ก. 10,000 แผ่น ข. 40,000 แผ่น ค. 80,000 แผ่น ง. 100,000 แผ่น

18. สวนผลไม้แห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 2 ไร่ 140 ตารางวา มีด้านกว้างยาว 20 วา ถ้าต้องการล้อมรั้วรอบสวนแห่งนี้ต้องทำรั้วยาวกี่เมตร

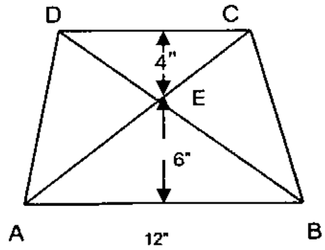
ก. 134 เมตร ข. 268 เมตร ค. 426 เมตร ง. 520 เมตร

19. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ค มีพื้นที่ 25 ตารางเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ข มีพื้นที่ 400 ตารางเมตร พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ก เท่ากับข้อใด



ก. 425 ตารางเมตร ข. 525 ตารางเมตร ค. 625 ตารางเมตร ง. 725 ตารางเมตร

20. จากรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADE + พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCE



ก. 60 ตารางนิ้ว ข. 48 ตารางนิ้ว ค. 36 ตารางนิ้ว ง. 24 ตารางนิ้ว

แบบทดสอบอัตนัย

1. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีฐานยาว x หน่วย และ สูง y หน่วย ถ้าเพิ่มฐานขึ้น 50 % และลดความสูงลง 25% พื้นที่ใหม่เป็นเศษส่วนเท่าใดของรูปเดิม

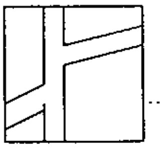
....

....

....

....

2. จากรูปเป็นสนามรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ยาวด้านละ 10 เมตร ทำทางเดินดังรูป โดยทางเดินกว้าง 2 เมตร จงหาพื้นที่ส่วนที่เหลือของสนาม



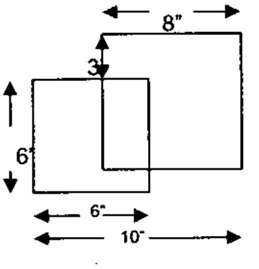
....

....

....

....

3. ส่วนที่ซ้อนทับกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่กำหนดให้ ดังรูป มีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว



....

....

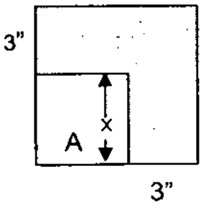
....

....

....

....

4. พื้นที่ส่วนที่แรเงาเท่ากับ 33 ตารางนิ้ว จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส A



....

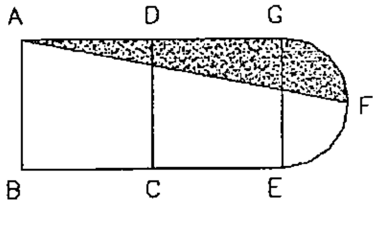
....

....

....

....

5. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD และสี่เหลี่ยมจัตุรัส DCEG ต่างก็มีพื้นที่เท่ากับ 64 ตร.ซม. ส่วนโค้ง EFG เป็นส่วนโค้งรูปครึ่งวงกลมพอดี โดยมีจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง EFG จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา (กำหนดให้ใช้ค่า π = 3.14)



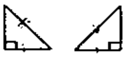
แบบทดสอบเรื่องความเท่ากันทุกประการ

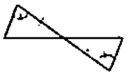
1. เหตุผลข้อใดที่ทำให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

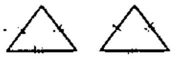
ก. มีพื้นที่เท่ากัน | ข. มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน

ค. มีด้านทั้งสามยาวเท่ากันด้านต่อด้าน | ง. มีมุมทั้งสามมีขนาดเท่ากันมุมต่อมุม

2. รูปสามเหลี่ยมคู่ใดที่สรุปไม่ได้ว่าเท่ากันทุกประการ

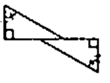
ก. 

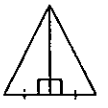
ข. 

ค. 

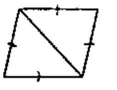
ง. 

3. รูปสามเหลี่ยมในข้อใดเท่ากันทุกประการตามความสัมพันธ์แบบ ด.ม.ด.

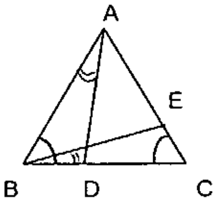
ก. 

ข. 

ค. 

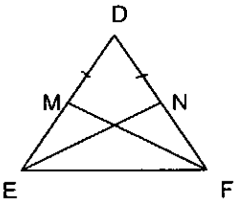
ง. 

4. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มี $B\hat{A}D = C\hat{B}E$ แล้ว $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ตามความสัมพันธ์ข้อใด



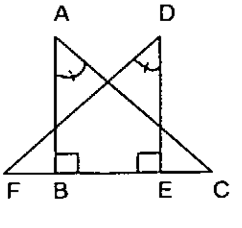
ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

5. กำหนดให้ DM = DN และ EM = FN แล้ว $\triangle MEF \cong \triangle NFE$ ตามความสัมพันธ์ข้อใด



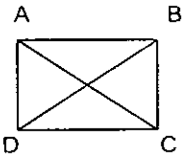
ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

6. กำหนดให้ BC = EF , $B\hat{A}C = E\hat{D}F$ แล้วสรุปได้ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ตามความสัมพันธ์แบบใด



ก. ด.ด.ด. ข. ฉ.ด.ด. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

7. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุม แล้ว $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ ตามความสัมพันธ์ในข้อใด

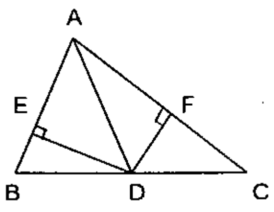


ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

8. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มี $AB = AC$, $AB = 2x + 4$, $AC = 5x - 2$, $BC = 2x + 3$ แล้ว เส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับข้อใด

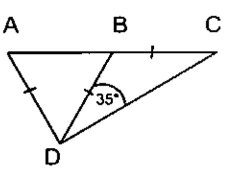
ก. 63 หน่วย ข. 48 หน่วย ค. 23 หน่วย ง. 5 หน่วย

9. กำหนดให้ $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $B\hat{A}C$ $\overline{DE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด E $\overline{DF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด F แล้ว $\Delta AED \cong \Delta AFD$ ตามความสัมพันธ์ใด



ก. ด.ด.ด. ข. ฉ.ด.ด. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด

10. จากรูป $A\hat{B}D$ กางกี่องศา

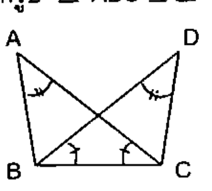


ก. 35 องศา ข. 55 องศา ค. 70 องศา ง. 80 องศา

11. ถ้ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาด 2 เท่าของมุมยอดแล้ว มุมยอดมีขนาดกี่องศา

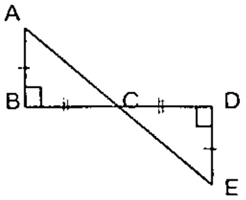
ก. 36 องศา ข. 72 องศา ค. 80 องศา ง. 144 องศา

12. จากรูป $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ ด้วยความสัมพันธ์ตามข้อใด



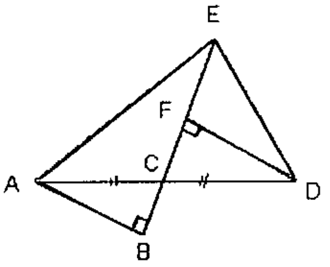
ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

13. จากรูป AC = CE เพราะว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์แบบใด



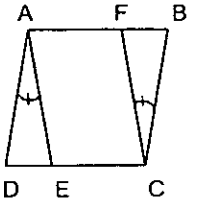
ก. ด.ม.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ฉ.ด.ด. ง. ม.ม.ม.

14. จากรูป Δ ABC $\cong$ Δ DFC ตามความสัมพันธ์ใด



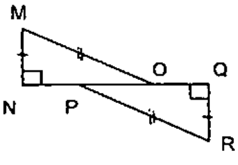
ก. ฉ.ด.ด. ข. ด.ด.ด. ค. ด.ม.ด. ง. ม.ม.ด.

15. จากรูปกำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $D\hat{A}E = B\hat{C}F$ แล้ว Δ ADE $\cong$ Δ CBF ตามความสัมพันธ์ใด



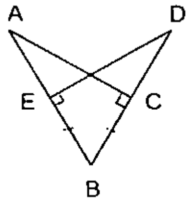
ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ฉ.ด.ด.

16. จากรูป Δ MNO $\cong$ Δ RQP ตามความสัมพันธ์ในข้อใด



ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ฉ.ด.ด.

17. จากรูป AC = DE เพราะรูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบใด



ก. ด.ด.ด. ข. ม.ด.ม. ค. ด.ม.ด. ง. ฉ.ด.ด.

18. รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากับ x , 2x + 15 , x + 45 เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

ก. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ข. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

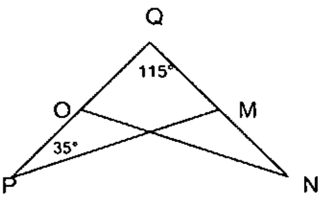
ค. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ง. รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

19. Δ ABC และ Δ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีฐาน BC ร่วมกัน แต่อยู่คนละด้านของ $\overline{BC}$ แล้วรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด

ก. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ข. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ค. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ง. รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

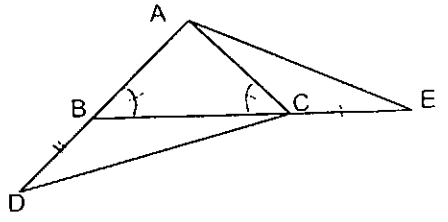
20. จากรูป Δ PQM $\cong$ Δ NQO แล้ว $Q\hat{O}N$ มีขนาดกี่องศา



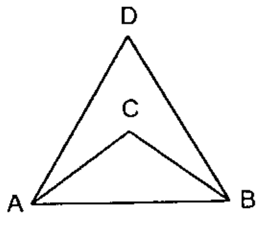
ก. 70 องศา ข. 50 องศา ค. 45 องศา ง. 30 องศา

แบบทดสอบอัตนัย

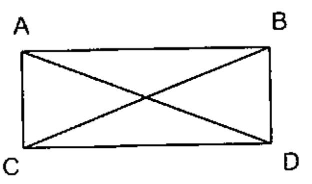
1. กำหนดให้ $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, BD = CE จงพิสูจน์ว่า DC = AE



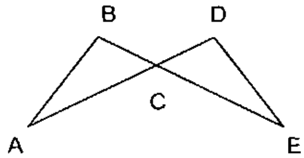
2. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ADB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้าน AB เป็นด้านฐาน และ C เป็นจุดบนเส้นที่ลากจาก D ไปตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ จงพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยม ACB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



3. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงพิสูจน์ว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวเท่ากัน



4. กำหนดให้ AB = ED , BE = DA จงพิสูจน์ว่า Δ ABC $\cong$ Δ EDC



....

....

....

....

....

....

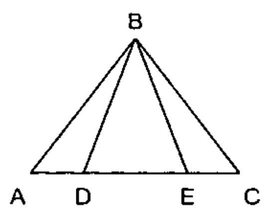
....

....

....

....

5. กำหนดให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี AB = CB จุด D , E อยู่บนด้าน AC และ $A\hat{B}E = C\hat{B}D$ จงพิสูจน์ว่า Δ ABD $\cong$ Δ CBE



....

....

....

....

....

....

....

....

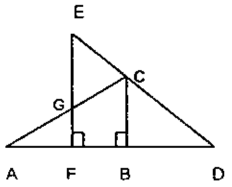
....

....

....

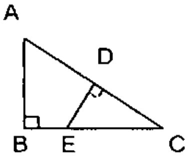
<u>แบบทดสอบเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย</u>

1. คำกล่าวข้อใดไม่ถูกต้อง
   ก. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน
   ข. ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน
   ค. ถ้ามุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากคู่หนึ่งเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน
   ง. ถ้ารูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปมีมุมยอดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะคล้ายกัน
2. จากรูป รูปสามเหลี่ยมในข้อใดคล้ายกับรูปสามเหลี่ยม AGF



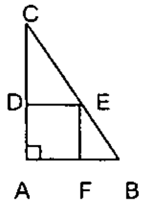
   ก. Δ ACB   ข. Δ DEF   ค. Δ DCB   ง. ถูกทุกข้อ

3. จากรูป Δ ABC ~ Δ EDC อัตราส่วนของความยาวของด้านในข้อใดเป็นจริง



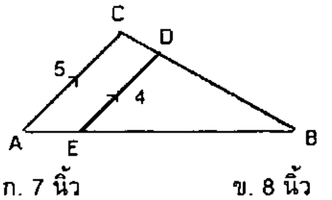
   ก. BC : EC = DE : BA   ข. DC : BC = EC : AC
   ค. BC : DE = AB : AD   ง. BC : DC = AC : DE

4. จากรูป รูปสี่เหลี่ยม ADEF เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส CE : EB = 2 : 1 ถ้า AB = 12 เซนติเมตร จงหาว่า DE ยาวเท่าไร



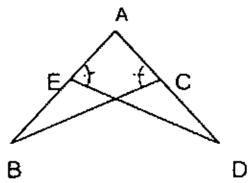
   ก. 20 เซนติเมตร   ข. 15 เซนติเมตร   ค. 10 เซนติเมตร   ง. 8 เซนติเมตร

5. จากรูป $\overline{AC}$ // $\overline{ED}$ และ AC = 5", ED = 4" , AE = 2" จงหาความยาวด้าน AB



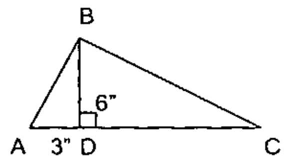
   ก. 7 นิ้ว   ข. 8 นิ้ว   ค. 9 นิ้ว   ง. 10 นิ้ว

6. กำหนด $A\hat{E}D = A\hat{C}B$ และ AB = 10, AD = 20, AC = 5 จงหาความยาว AE



ก. 6 ข. 10 ค. 12 ง. 15

7. จากรูป BD = 6", AD = 3" อัตราส่วนของพื้นที่ของ Δ BCD : พื้นที่ของ Δ ABC เท่ากับข้อใด



ก. 1 : 2 ข. 3 : 5 ค. 4 : 5 ง. 3 : 4

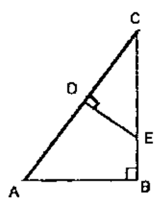
8. บนเรือเล็กลำหนึ่งมองเห็นยอดเสากระโดงเรือใหญ่กับยอดเขาริมทะเลอยู่ในแนวเดียวกัน ถ้าเสากระโดงเรือใหญ่สูง 12 เมตร ยอดเขาสูง 300 เมตร และเรือเล็กอยู่ห่างจากเรือใหญ่ 35 เมตร จงหาว่าเรือใหญ่อยู่ห่างจากภูเขาเท่าใด

ก. 875 เมตร ข. 840 เมตร ค. 800 เมตร ง. 850 เมตร

9. ถ้าเงาของต้นไม้ทอดยาว 20 เมตร ในขณะที่คนสูง 180 เซนติเมตร และเงาของเขายาว 3 เมตร ต้นไม้สูงกี่เมตร

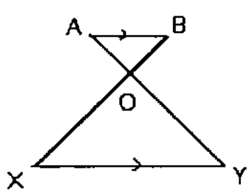
ก. 9 เมตร ข. 10 เมตร ค. 11 เมตร ง. 12 เมตร

10. จากรูป $E\hat{D}C = C\hat{B}A = 90°$, CE = 6", EB = 2" , ED = 4" แล้วพื้นที่ของ Δ EDC : พื้นที่ของ Δ ABC เท่ากับข้อใด



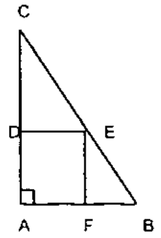
ก. 3 : 5 ข. 5 : 16 ค. 9 : 25 ง. 4 : 5

11. จากรูป $\overline{AB}$ // $\overline{XY}$, AB = 25 เซนติเมตร XY = 50 เซนติเมตร , AY = 90 เซนติเมตร จงหาว่า AO ยาวเท่าใด



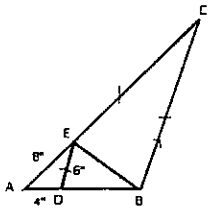
ก. 20 เซนติเมตร ข. 30 เซนติเมตร ค. 45 เซนติเมตร ง. 50 เซนติเมตร

12. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยม ADEF เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ถ้า CD = 8", FB = 2" รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เท่าใด



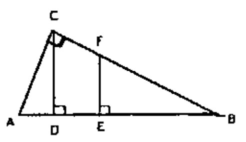
ก. 64 ตารางนิ้ว ข. 48 ตารางนิ้ว ค. 36 ตารางนิ้ว ง. 24 ตารางนิ้ว

13. จากรูป EC = BC , $\overline{ED}$ // $\overline{CB}$ จงหาความยาวของ BD



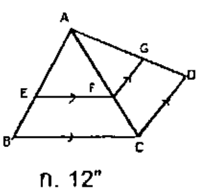
ก. 12" ข. 20" ค. 24" ง. 36"

14. จากรูป AC = 3" , CF = 1" ,FB = 3" จงหาความยาวของ BE



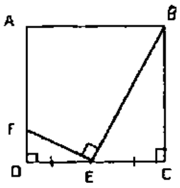
ก. 2.7" ข. 2.4" ค. 2.3" ง. 1.5"

15. จากรูป AG = 4", AD = 6", AC = 9", AB = 12" จงหาความยาวของ AE



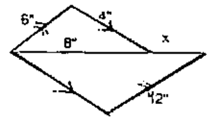
ก. 12" ข. 10" ค. 8" ง. 6"

16. จากรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน DC จงหาอัตราส่วนของพื้นที่ของ Δ FDE : พื้นที่ของ Δ ECB



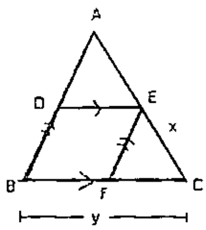
ก. 1 : 4 ข. 1 : 2 ค. 1 : 3 ง. 1 : 9

17. จากภาพ x มีค่าเท่าใด



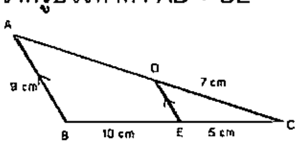
ก. 6" ข. 8" ค. 10" ง. 12"

18. จากรูป BD = 6" , AD = 8" , AE = 12" , BF = 10" จงหาค่า x + y



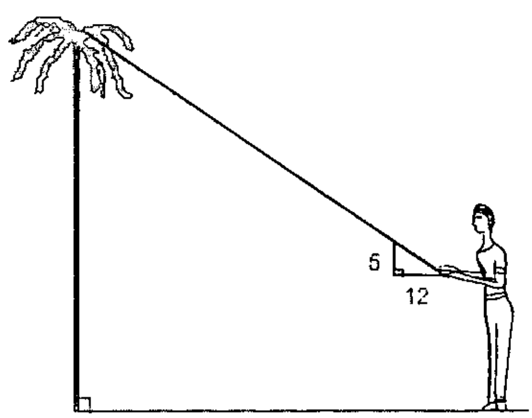
ก. 7.5 " ข. 9" ค. 17.5" ง. 26.5"

19. จากรูปจงหาค่า AD + DE



ก. 17 เซนติเมตร ข. 15 เซนติเมตร ค. 13 เซนติเมตร ง. 9 เซนติเมตร

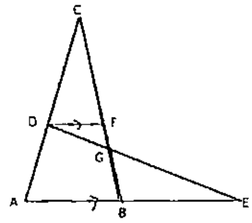
20. จากรูปเด็กชายสูง 150 เซนติเมตร และอยู่ห่างจากต้นมะพร้าว 30 เมตร ต้นมะพร้าวสูงกี่เมตร



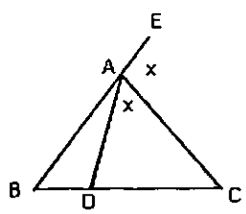
ก. 12.5 เมตร ข. 14 เมตร ค. 15 เมตร ง. 15.5 เมตร

แบบทดสอบอัตนัย

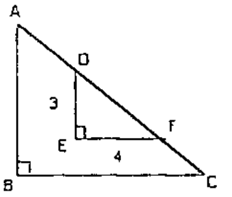
1. จากรูปกำหนด CD = AE , DF = DA , $\overline{DF}$ // $\overline{AE}$ ถ้า CD = 9" ,DG = 3", BE = 5" แล้วจงหาค่า BG



2. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB = 8 นิ้ว BD = 4 นิ้ว AD = 6 นิ้ว และ $\overline{AC}$ แบ่งครึ่ง $D\hat{A}E$ จงหาว่า CD ยาวกี่นิ้ว



3. จากรูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เป็นสามเท่าของรูปสามเหลี่ยม DEF จงหาความยาวของด้าน AC



....

....

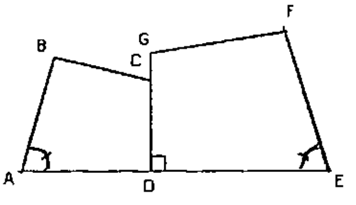
....

....

....

....

4. จากรูปสี่เหลี่ยม ABCD และสี่เหลี่ยม DEFG เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ Δ ABD ~ Δ EFD, $A\hat{B}D = D\hat{F}E$, $B\hat{A}D = F\hat{E}D$, AB = 8" ,AD = 9" , FE = 12" จงหาความยาวของ DE



....

....

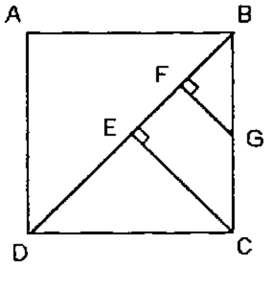
....

....

....

....

5. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมี $\overline{GF}$ และ $\overline{CE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BD}$ และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BE}$ ถ้ารูปสามเหลี่ยม BFG มีพื้นที่ 256 ตารางหน่วยแล้ว AB ยาวเท่าใด



....

....

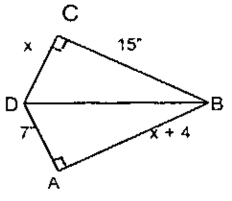
....

<u>แบบทดสอบเรื่องสามเหลี่ยมมุมฉาก</u>

1. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีพื้นที่ 108 ตารางเซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร ด้านที่เป็นด้านประกอบมุมยอดยาวกี่เซนติเมตร

   ก. 21 เซนติเมตร ข. 18 เซนติเมตร ค. 17 เซนติเมตร ง. 15 เซนติเมตร

2. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD

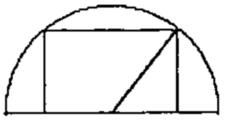


   ก. 150 ตารางเมตร ข. 234 ตารางเมตร ค. 352 ตารางเมตร ง. 425 ตารางเมตร

3. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีเส้นทแยงมุมยาว $13\sqrt{2}$ นิ้ว จะมีเส้นรอบรูปยาวกี่นิ้ว

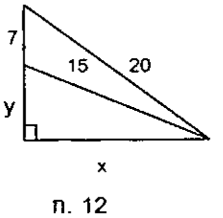
   ก. 60 นิ้ว ข. 52 นิ้ว ค. $52\sqrt{2}$ นิ้ว ง. 59 นิ้ว

4. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบในครึ่งวงกลมดังรูป ถ้าด้านยาวยาวเป็น 2 เท่าของด้านกว้าง และครึ่งวงกลมมีรัศมี $15\sqrt{2}$ จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



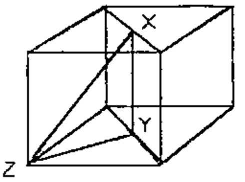
   ก. 300 ตารางนิ้ว ข. 350 ตารางนิ้ว ค. 450 ตารางนิ้ว ง. 500 ตารางนิ้ว

5. จากรูปจงหาค่า x + y



   ก. 12 ข. 20 ค. 21 ง. 24

6. X , Y เป็นจุดกึ่งกลางเส้นทแยงมุมของลูกบาศก์ที่มีสันยาวด้านละ 6 หน่วย จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม XYZ



ก. 9 ตารางหน่วย ข. $9\sqrt{2}$ ตารางหน่วย

ค. $6\sqrt{2}$ ตารางหน่วย ง. $3\sqrt{2}$ ตารางหน่วย

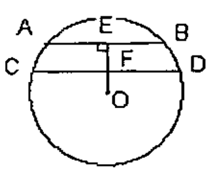
7. ถ้าด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับ x + 27, x + 4 , 45 – x หน่วย x จะต้องมีค่าเท่าใดจึงจะทำให้รูปสามเหลี่ยมรูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ก. 4 ข. 6 ค. 8 ง.10

8. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีอัตราส่วนของด้านประกอบมุมฉากเป็น 1 : 2 ถ้าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้เป็น 25 ตารางหน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่าใด

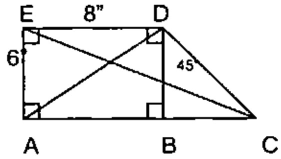
ก. $3\sqrt{3}$ ข. $5\sqrt{3}$ ค. $5\sqrt{5}$ ง. $3\sqrt{5}$

9. จากรูปวงกลม O มี AB = 30 เซนติเมตร CD = 48 เซนติเมตร และ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และห่างกัน 13 เซนติเมตร จงหารัศมีของวงกลมนี้



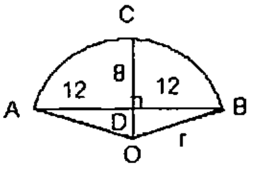
ก. 13 เซนติเมตร ข. 15 เซนติเมตร ค. 25 เซนติเมตร ง. 35 เซนติเมตร

10. จากรูปข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. EC = 14 นิ้ว ข. AD = 10 นิ้ว ค. CD = $6\sqrt{3}$ นิ้ว ง. EC = $\sqrt{232}$ นิ้ว

11. จากภาพ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี r เป็นรัศมี และ CD = 8, AB = 24 จงหาความยาว r



ก. 11 ข. 12 ค.13 ง.15

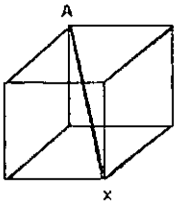
12. ว่าวตัวหนึ่งอยู่สูงจากพื้นดินในแนวดิ่ง 24 เมตร สายป่านยาว 25 เมตร ถ้าผู้เล่นต้องการให้ว่าวลดต่ำลงมา 4 เมตร เขาต้องถอยห่างจากเดิมกี่เมตร

ก. 8 เมตร ข. 10 เมตร ค. 12 เมตร ง.15 เมตร

13. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีอัตราส่วนของด้านตรงข้ามมุมฉากกับด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งเป็น 25 : 7 ถ้าเส้นรอบรูปยาว 112 นิ้ว สามเหลี่ยมรูปนี้จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว

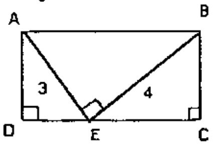
ก. 336 ตารางนิ้ว ข. 456 ตารางนิ้ว ค. 526 ตารางนิ้ว ง. 98 ตารางนิ้ว

14. จากรูปเป็นกล่องลูกบาศก์ AX = 9" จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของกล่องใบนี้



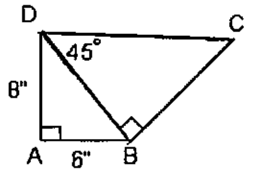
ก. 81 ตารางนิ้ว ข. 108 ตารางนิ้ว ค. 162 ตารางนิ้ว ง. 210 ตารางนิ้ว

15. จากรูป ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า AE = 3" , BC = 4" จงหาความยาวของ AD



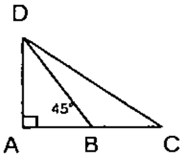
ก. 2.4" ข. 3" ค. 4.2" ง. 5.4"

16. จากรูป พื้นที่ของสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับกี่ตารางนิ้ว



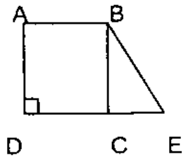
ก. 100 ตารางนิ้ว ข. 86 ตารางนิ้ว ค. 64 ตารางนิ้ว ง. 74 ตารางนิ้ว

17. จากรูป AD = 3" , AC = BD จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน CD



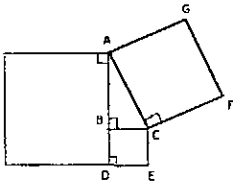
ก. 18 ตารางนิ้ว ข. 27 ตารางนิ้ว ค. 43 ตารางนิ้ว ง. 50 ตารางนิ้ว

18. จากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD มีพื้นที่ 64 ตารางนิ้ว BE = 17" จงหาอัตราส่วนของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม BCEต่อพื้นที่ของสี่เหลี่ยม ABCD



ก. 12 : 13 ข. 15 : 16 ค. 17 : 19 ง. 9 : 13

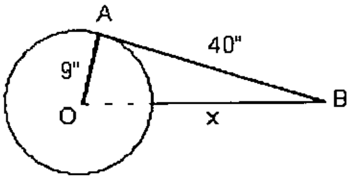
19. จากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACFG มีพื้นที่ 25 ตารางเซนติเมตร พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส BCED = 9 ตารางเซนติเมตร จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AD



ก. 16 ตารางเซนติเมตร ข. 34 ตารางเซนติเมตร

ค. 45 ตารางเซนติเมตร ง. 49 ตารางเซนติเมตร

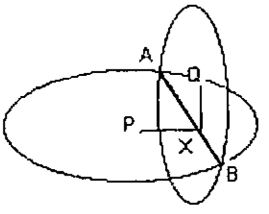
20. AB เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O จงหาค่า x



ก. 41" ข. 32" ค. 25" ง.18"

<u>แบบทดสอบอัตนัย</u>

1. จากรูปวงกลม P และ Q ไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน $\overline{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{QX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$, $\overline{PX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{QX}$ และ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดร่วมของวงกลมทั้งสอง AB = 24", PA = 13" , QA = 20" จงหาความยาวของ PQ



....

....

....

....

2. บันไดยาว 50 ฟุต พาดที่ขอบหน้าต่างบ้าน A ซึ่งสูง 48 ฟุต เมื่อพลิกบันไดไปด้านตรงข้ามจะไปพาดที่ขอบหน้าต่างบ้าน B พอดี ซึ่งสูง 14 ฟุต จงหาว่าขอบหน้าต่างของบ้านทั้งสองอยู่ห่างกันกี่ฟุต

....

....

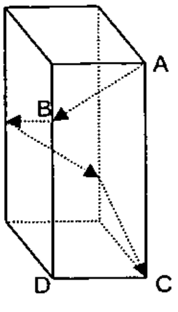
....

....

....

....

3. เสาทรงสี่เหลี่ยมสูง 48 ฟุต หน้าตัดเสาเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 16 ฟุต จิ้งจกตัวหนึ่งเกาะอยู่ที่มุมด้านบนสุดที่จุด A ดังรูป แล้วไต่ลงมาเป็นแนวเส้นทแยงมุมโดยเมื่อไต่ลงมาถึงจุด B ซึ่งอยู่สูงจากพื้นดิน $\frac{3}{4}$ ของความสูงของเสา จิ้งจกตัวนี้จะไต่ลงมาตามแนวเส้นตรงตลอดโดยลดความสูงลงและมีความลาดเท่าเดิมจนถึงจุด C ดังภาพ แล้วไต่ไปเข้ารังที่จุด D ถามว่าจิ้งจกไต่เป็นระยะทางทั้งหมดกี่ฟุต



....

....

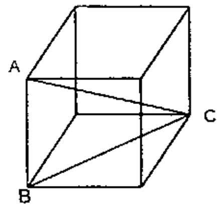
....

....

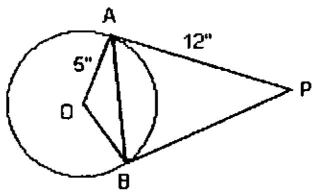
....

....

4. ถ้าพื้นที่ผิวของลูกบาศก์เป็น 216 ตารางนิ้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เป็นเท่าไร



5. ถ้า $\overline{PA}$ และ $\overline{PB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ดังรูป จงหาความยาวของคอร์ด AB



ภาคผนวก ซ

แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต

และผลการวิเคราะห์แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต

แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต (ฉบับที่ 1)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบชุดนี้เป็นแบบทดสอบเพื่อวัดมโนทัศน์ภาพลักษณ์ทางเรขาคณิต ในแต่ละข้ออาจจะมีตัวเลือกไม่เท่ากัน ให้ผู้ตอบเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

2. ผลจากการทดสอบจะไม่มีผลต่อผู้สอบแต่อย่างใด ผู้วิจัยจะนำผลที่ได้ไปพัฒนารูปแบบการสอนภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเท่านั้น

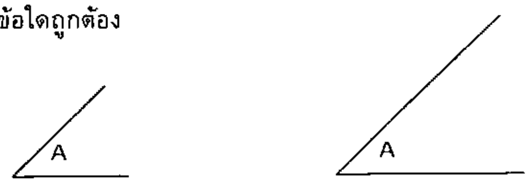
3. ขอให้ผู้ตอบอ่านคำถามและเลือกตอบอย่างตั้งใจ

4. ไม่มีการกำหนดเวลาในการทดสอบ ผู้ตอบสามารถใช้เวลาได้อย่างเต็มที่ในการตอบ

แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต (ชุดที่ 1)　จำนวน 48 ข้อ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จากรูปที่กำหนดให้ข้อใดถูกต้อง



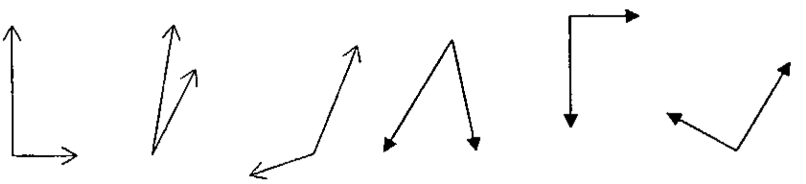
รูป (a)　　　　　　รูป (b)

ก. มุม A ในรูป (a) มีขนาดเล็กกว่ามุม A ในรูป (b)

ข. มุม A ในรูป (a) มีขนาดเท่ากับมุม A ในรูป (b)

ค. มุม A ในรูป (a) มีขนาดใหญ่กว่ามุม A ในรูป (b)

2. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้รูปใดบ้างที่น่าจะเป็นมุมฉาก



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)　(f)

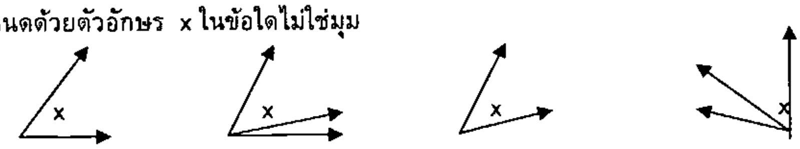
ก. รูป (a)　　ข. รูป (a) และรูป (e)　　ค. รูป (a) , รูป (e) และรูป (f)

3. จากรูปที่กำกับด้วยตัวอักษรที่กำหนดให้ ข้อใดถูกต้อง

ก. มุม a เท่ากับมุม a　　ข. มุม b เท่ากับมุม b　　ค. มุม a ไม่เท่ากับมุม a

ง. มุม b ไม่เท่ากับมุม b　　จ. ข้อ ก. และข้อ ข.

4. รูปที่กำหนดด้วยตัวอักษร x ในข้อใดไม่ใช่มุม



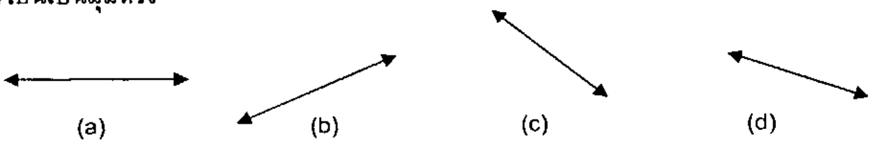
(a)　(b)　(c)　(d)

(e)　(f)

ก. รูป (a) ,(b) , (d)　　ข. รูป (b) , (e) , (f)　　ค. รูป (b) , (c) ,(d)

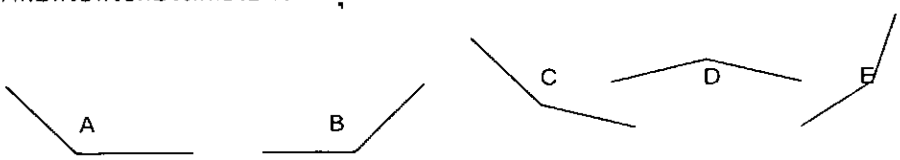
ง. รูป (b) , (d) , (e)　　จ. ทุกข้อใช่มุม

5. มุมใดต่อไปนี้เป็นมุมตรง



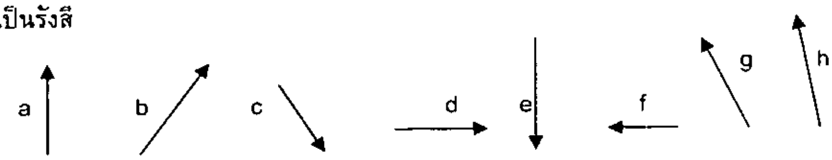
ก. รูป (a)　　　　ข. รูป (b)
ค. รูป (c)　　　　ง. ทุกรูปเป็นมุมตรง

6. มุมที่กำกับด้วยตัวอักษรใดต่อไปนี้ไม่ใช่มุมป้าน



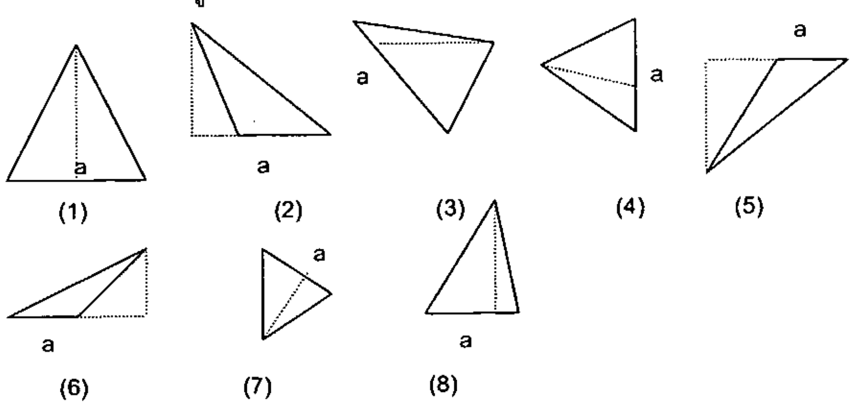
ก. A และ B　　　　ข. A และ D　　　　ค. C และ D
ง. C และ E　　　　จ. ทุกข้อเป็นมุมป้าน

7. รูปใดต่อไปนี้เป็นรังสี



ก. รูป a และ d　　　　ข. รูป d และ f　　　　ค. รูป a และ e
ง. รูป e และ f　　　　จ. ทุกรูปเป็นรังสี

8. เส้นประในข้อใดน่าจะเป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยมที่ลากไปยังด้าน a



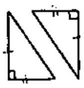
ก. รูป (1) และ (5)　　　　ข. รูป (1) , (2) และ (5)
ค. รูป (1) , (7) และ (8)　　　　ง. รูป (1) , (2) , (5), (6), (7) และ (8)

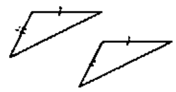
9. มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเป็นมุมชนิดใด

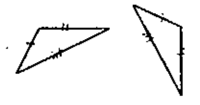
ก. มุมแหลม ข. มุมฉาก ค. มุมป้าน

ง. มุมแหลมหรือมุมป้าน จ. มุมแหลม หรือมุมป้าน หรือมุมฉาก

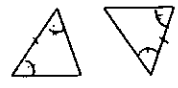
10. จากรูปที่กำหนดให้แต่ละคู่ คู่ใดที่ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

ก. 

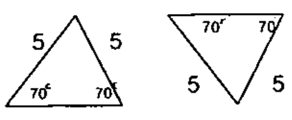
ข. 

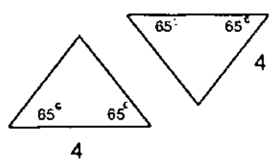
ค. 

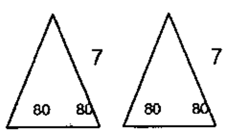
ง. 

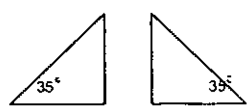
จ. 

11. จากรูปที่กำหนดให้แต่ละคู่ รูปสามเหลี่ยมคู่ใดไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ

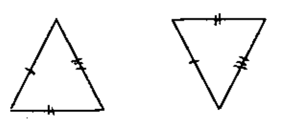
ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

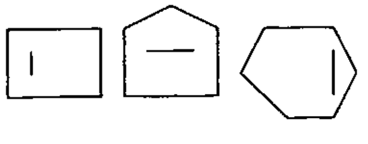
12. สามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจากสมบัติข้อใด



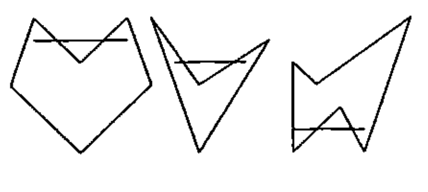
ก. ด.ม.ด. ข. ฉ.ด.ด. ค. ม.ด.ม.

ง. ด.ด.ด. จ. ถูกทุกข้อยกเว้นข้อ ข

จงสังเกตตัวอย่างต่อไปนี้

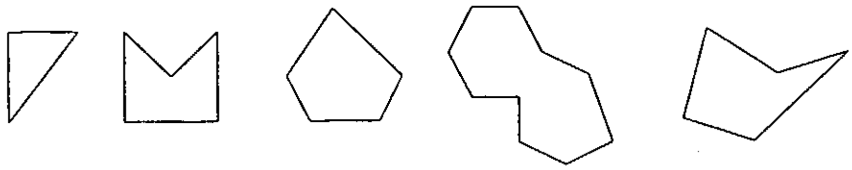


รูปหลายเหลี่ยมนูน



รูปหลายเหลี่ยมเว้า

จากรูปที่กำหนดต่อไปนี้ จงตอบคำถามข้อ 13 – 14



(1) (2) (3) (4) (5)

13. ข้อใดเป็นรูปหลายเหลี่ยมนูน

ก. รูป (1) และ รูป (3)　　ข. รูป (4) และรูป (5)

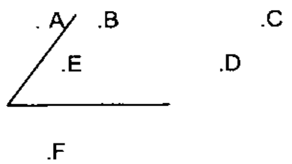
ค. รูป (2) และ รูป (3)　　ง. รูป (1) , (2) และ (3)

14. ข้อใดเป็นรูปหลายเหลี่ยมเว้า

ก. รูป (1)　　ข. รูป (2) , (5)

ค. รูป (1) ,(3)　　ง. รูป (2),(4),(5)

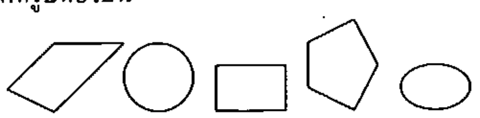
15. จากรูปจุดใดไม่อยู่ภายในมุม



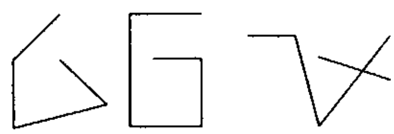
ก. B, C, D　　ข. A , F

ค. A, B, C, D, F　　ง. A , D , F

จงสังเกตรูปต่อไปนี้



เป็นรูปปิด



เป็นรูปเปิด

กำหนดรูปและอักษรกำกับดังนี้

(a) (b) (c) (d)

จงตอบคำถามข้อที่ 16 – 17

16. รูปใดเป็นรูปปิด

ก. รูป a　　ข. รูป c

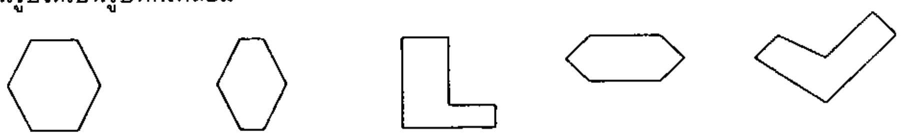
ค. รูป a,c　　ง. รูป b, d

17. รูปใดเป็นรูปเปิด

ก. รูป a　　ข. รูป c

ค. รูป a,c　　ง. รูป b, d

18. รูปต่อไปนี้รูปใดเป็นรูปหกเหลี่ยม

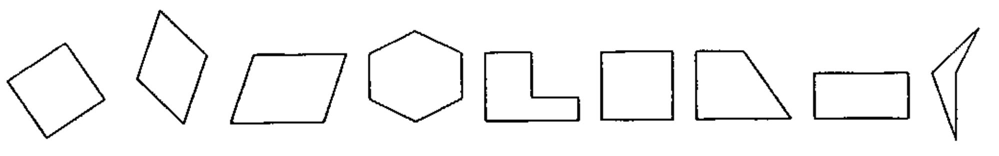


(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

ก. รูป (1)　　ข. รูป (1), (2)

ค. รูป (1) , (2), (4)　　ง. ทุกรูปเป็นรูปหกเหลี่ยม

รูปต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 19 – 23



(A)　(B)　(C)　(D)　(E)　(F)　(G)　(H)　(I)

19. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ก. รูป C　　ข. รูป A , B ,C

ค. รูป C , F ,H　　ง. รูป A , B ,C, F ,H

20. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ก. รูป A, F　　ข. รูป A , B

ค. รูป F , H　　ง. รูป A ,F ,H

21. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ก. รูป A, F　　ข. รูป A , B

ค. รูป F , H　　ง. รูป A ,F ,H

22. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

ก. รูป G　　ข. รูป A ,B

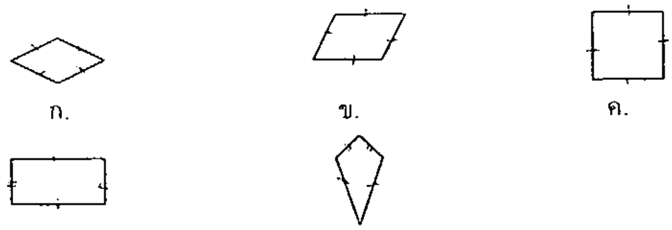
ค. รูป F , H　　ง. รูป A ,F ,H

23. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ก. รูป A, F　　ข. รูป A , B

ค. รูป H, F　　ง. รูป A , F ,H

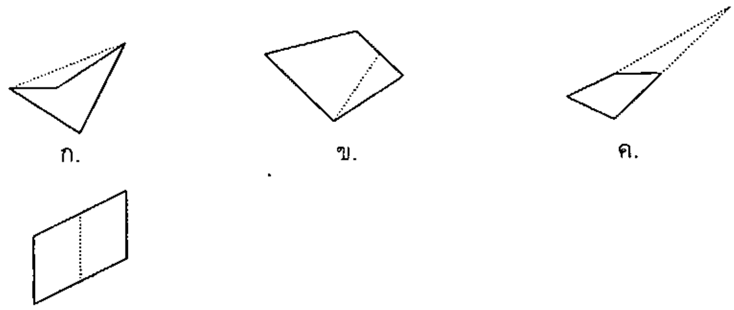
24. รูปใดไม่เป็นรูปว่าว



ก. ข. ค.

ง. จ.

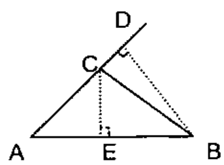
25. เส้นประในข้อใดแสดงเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม



ก. ข. ค.

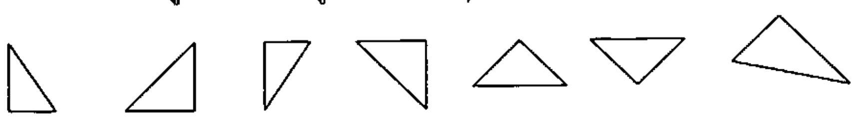
ง. จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

26. กำหนดให้ด้าน AC เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC ส่วนของเส้นตรงใดน่าจะแสดงส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC



ก. $\overline{CD}$ ข. $\overline{CB}$ ค. $\overline{DB}$ ง. $\overline{CE}$

27. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้รูปใดน่าจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



(ก) (ข) (ค) (ง) (จ) (ฉ) (ช)

ก. รูป ก , ข　　ข. รูป ก ,ข, ค และ ง

ค. รูป ก ,ข ,ค , ง ,จ , ช　　ง. ทุกรูป

28. ข้อใดเป็นจริงสำหรับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทุกรูป

ก. ด้านสามด้านต้องยาวเท่ากัน　　ข. ด้านหนึ่งยาวเป็นสองเท่าของอีกด้านหนึ่ง

ค. มีมุมอย่างน้อยสองมุมที่มีขนาดเท่ากัน　　ง. มุมสามมุมต้องมีขนาดเท่ากัน

29. รูปใดเป็นรูปสามเหลี่ยม

(U) (V) (W) (X)

ก. ไม่มีรูปใดเป็นรูปสามเหลี่ยม
ข. รูป V เท่านั้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม
ค. รูป W เท่านั้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม
ง. W และ X เท่านั้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม
จ. V และ W เท่านั้นที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

30. สมบัติต่อไปนี้เป็นสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด

สมบัติ : มีด้านสี่ด้าน ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน มีมุมเป็นมุมฉากอย่างน้อย 1 มุม
มีด้านด้านหนึ่งยาวกว่าอีกด้านหนึ่ง

ก. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ข. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
ค. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ง. รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

31. รูปในข้อใดเป็นเส้นตรงที่ขนานกัน

a b c d

ก. รูป a ข. รูป b
ค. รูป a , c ง. รูป a ,b , c , d

32. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปใด ๆ คล้ายกัน
ข. รูปสามเหลี่ยมมุมป้านสองรูปใด ๆคล้ายกัน
ค. รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าสองรูปใด ๆ คล้ายกัน
ง. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉากสองรูปใด ๆ คล้ายกัน

33. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถึงการคล้ายกันไม่ถูกต้อง

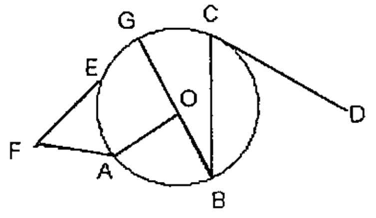
ก. วงกลมสองวงคล้ายกัน
ข. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนสองรูปคล้ายกัน
ค. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปคล้ายกัน
ง. รูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปคล้ายกัน

34. กำหนด R และ S เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันบนวงกลม ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด R และจุด S สามารถเป็นสิ่งใดต่อไปนี้

ก. เส้นตัดวงกลม　　ข. รัศมีของวงกลม

ค. คอร์ดของวงกลม　　ง. เส้นสัมผัสของวงกลม

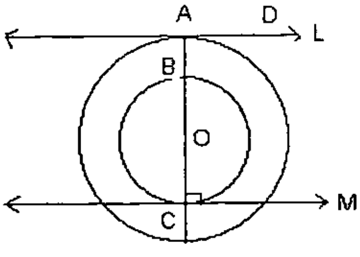
35. จากรูปที่กำหนดให้ ข้อใดต่อไปนี้เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม



ก. $C\hat{B}G$　　ข. $B\hat{C}D$

ค. $A\hat{O}B$　　ง. $A\hat{F}E$

36. จากรูปที่กำหนดให้ เป็นวงกลมร่วมศูนย์กลางเดียวกัน มีเส้นตรง L เป็นเส้นสัมผัสวงกลมวงใหญ่ที่จุด A และ $O\hat{C}M = 90^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง



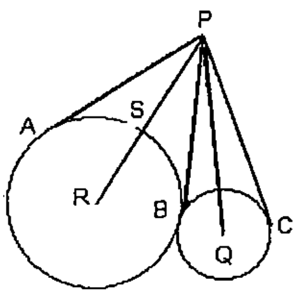
ก. $O\hat{A}D = 90^\circ$

ข. $OB = AB$

ค. เส้นตรง L ขนานกับเส้นตรง M

ง. เส้นตรง M เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมวงเล็กที่จุด C

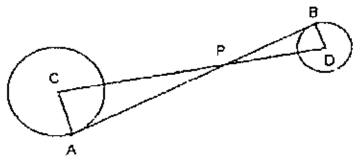
37. จากรูปที่กำหนดให้ $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ และ $\overline{PC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม R และวงกลม Q ที่ลากจากจุด P ซึ่งอยู่ภายนอกวงกลม ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง



ก. $A\hat{P}R = C\hat{P}Q$　　ข. $S\hat{P}B = Q\hat{P}B$

ค. $PR = PQ$　　ง. $AP = CP$

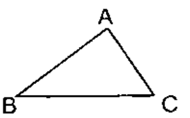
38. จากรูปที่กำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม C และ วงกลม D ที่จุด A และ B ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง



ก. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ข. $C\hat{A}P = D\hat{B}P$

ค. $PB = \frac{1}{2} AP$ ง. $\triangle PCA \sim \triangle PDB$

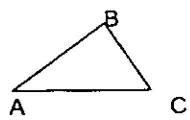
39. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้า $\overline{AB}$,....., $\overline{AC}$ เป็นข้อมูลแสดงลักษณะ ด.ม.ด. ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว ..... หมายถึงข้อใด



ก. $\hat{A}$ ข. $\hat{B}$ ค. $\overline{BC}$

ง. $\overline{AB}$ จ. $\hat{C}$

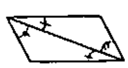
40. จากรูปที่กำหนดให้ ถ้า ...... , $\hat{B}$, $\overline{AC}$ เป็นข้อมูลแสดงลักษณะ ม.ม.ด. ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว ..... หมายถึงข้อใด

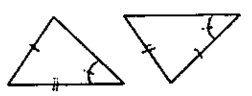


ก. $\overline{AC}$ ข. $\hat{B}$ ค. $\overline{AB}$

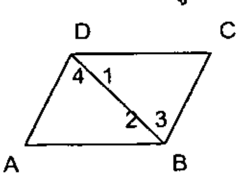
ง. $\overline{BC}$ จ. $\hat{A}$

41. รูปสามเหลี่ยมสองรูปในข้อใดเท่ากันทุกประการ

ก.  ข.  ค. 

ง.  จ. 

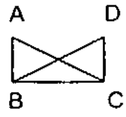
42. กำหนดให้ AD = BC , $\hat{1} = \hat{2}$ ดังรูป ข้อใดถูกต้อง



ก. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ข. $\hat{2} = \hat{3}$

ค. AB = DC ง. ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

43. กำหนด AC = BD, $A\hat{C}B = D\hat{B}C$ ข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. Δ ABC $\cong$ Δ DCB

ข. ไม่จำเป็นที่ Δ ABC $\cong$ Δ DCB

ค. AB = DC

ง. $A\hat{B}C = D\hat{C}B$

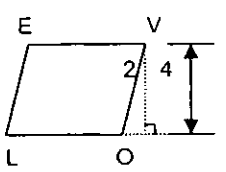
จ. $A\hat{B}D = D\hat{C}A$

44. นักเรียนคิดว่า 1 ตารางเมตร เป็นกี่ตารางเซนติเมตร

ก. 10 ตารางเซนติเมตร ข. 100 ตารางเซนติเมตร ค. 160 ตารางเซนติเมตร

ง. 10,000 ตารางเซนติเมตร จ. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

45. จากรูปสี่เหลี่ยม EVOL ที่กำหนดให้ ข้อใดเป็นฐานและส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมนี้



ก. $\overline{LO}$,2 ข. $\overline{LO}$, 4 ค. $\overline{EV}$, 2

ง. $\overline{OV}$, 4 จ. $\overline{OV}$, 2

46. พื้นที่ 18 ตารางเมตร คิดเป็นพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร

ก. 0.18 ตารางเซนติเมตร ข.1.8 ตารางเซนติเมตร ค. 180 ตารางเซนติเมตร

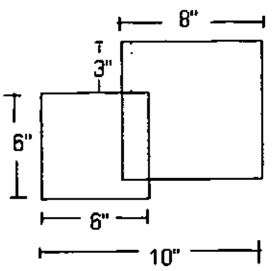
ง. 1,800 ตารางเซนติเมตร จ. 180,000 ตารางเซนติเมตร

47. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีด้านยาวเป็นสองเท่าของความยาวเดิม แล้วพื้นที่จะเป็นกี่เท่าของรูปเดิม

ก. 1 ข. 2 ค. 3

ง. 4 จ. 5

48. ส่วนที่ซ้อนทับกันของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองรูปที่กำหนดให้ ดังรูป มีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว



ก. 10 ตารางนิ้ว ข. 20 ตารางนิ้ว ค. 24 ตารางนิ้ว

ง. 30 ตารางนิ้ว จ. 64 ตารางนิ้ว

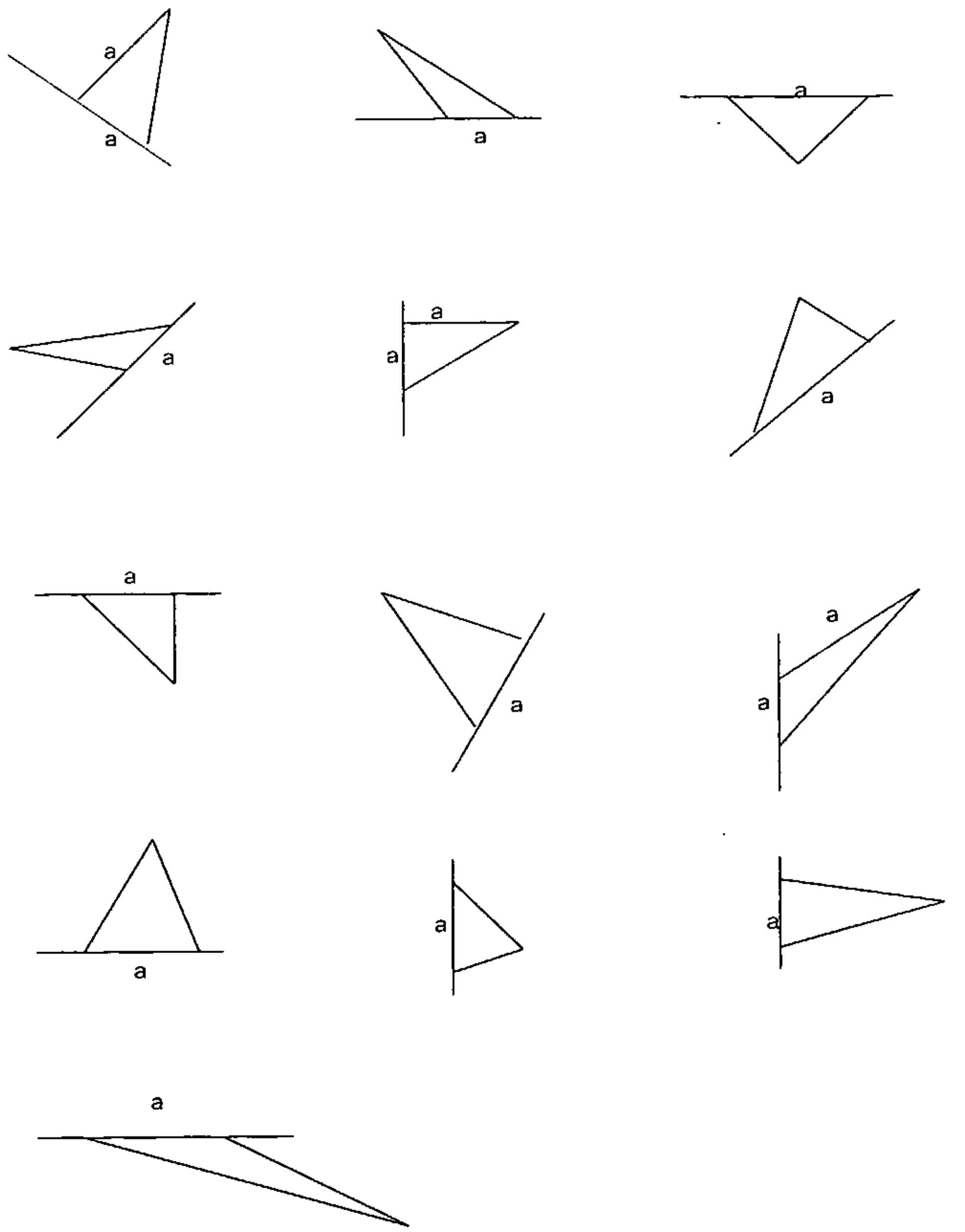
แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต (ฉบับที่ 2)

คำชี้แจง

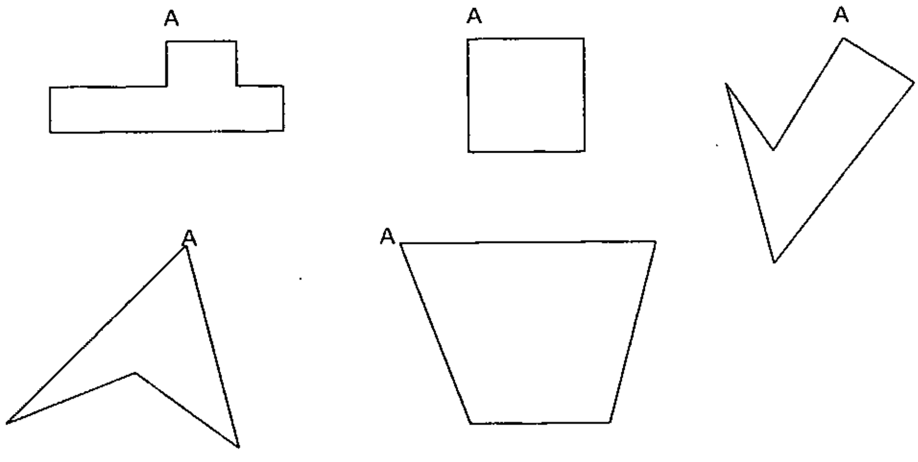
1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบเขียนตอบจำนวน 19 ข้อ ให้ผู้ตอบเขียนคำตอบลงในตัวข้อสอบ ในช่องว่างที่เว้นไว้ให้
2. ผลจากการทดสอบจะไม่มีผลต่อผู้สอบแต่อย่างใด ผู้วิจัยจะนำผลที่ได้ไปพัฒนารูปแบบการสอนภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตเท่านั้น
3. ขอให้ผู้ตอบอ่านคำถามและตอบอย่างตั้งใจ
4. ไม่มีการกำหนดเวลาในการทดสอบ ผู้ตอบสามารถใช้เวลาได้อย่างเต็มที่ในการตอบ

แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์พื้นฐานทางเรขาคณิต (ชุดที่ 2)

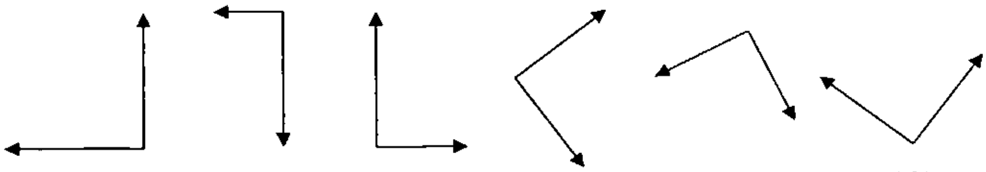
1. จากรูปที่กำหนดให้จงลากส่วนสูงของสามเหลี่ยมไปยังด้าน a ที่กำหนดให้



2. จากรูปหลายเหลี่ยมที่กำหนดให้ จงลากเส้นทแยงมุมจากจุดยอด A



3. จากรูปที่กำหนดให้ รูปใดบ้างน่าจะเป็นมุมฉาก

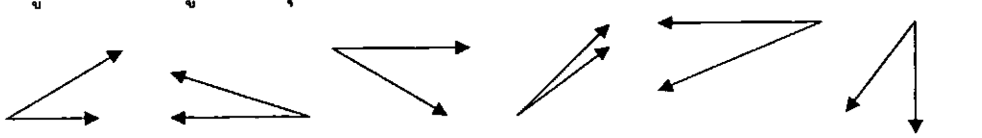


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

คำตอบ..

....

4. จากรูปที่กำหนดให้ รูปใดเป็นมุมแหลม

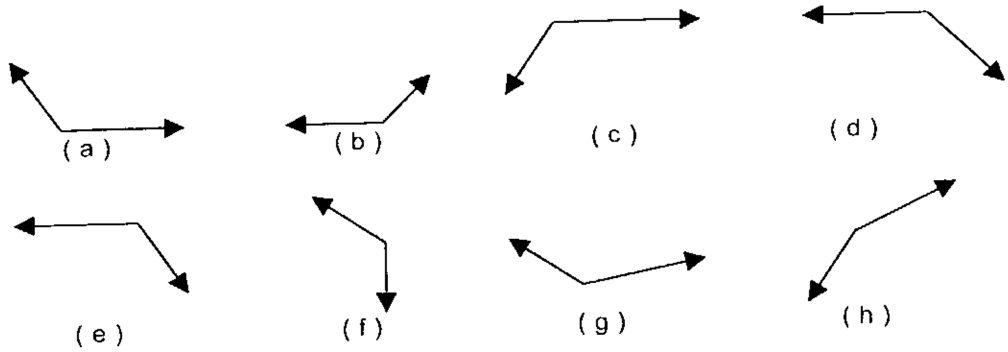


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

คำตอบ..

....

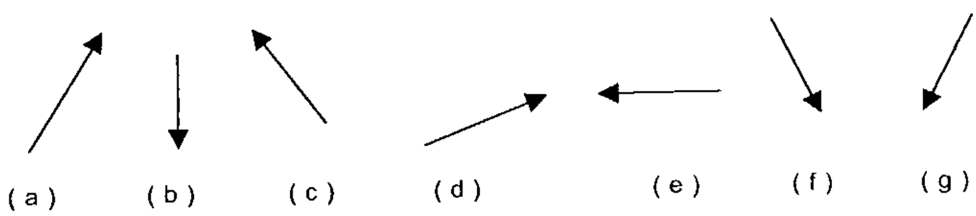
5. จากรูปที่กำหนดให้ รูปใดเป็นมุมป้าน



คำตอบ..

....

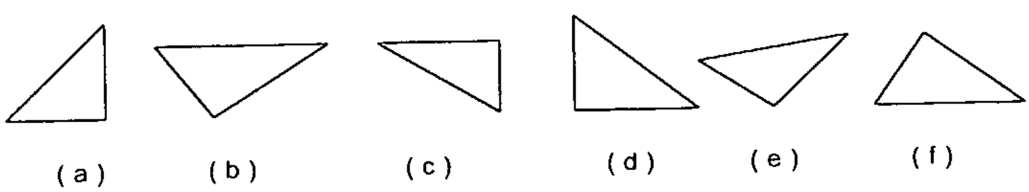
6. จากรูปที่กำหนดให้รูปใดเป็นรังสี



คำตอบ..

....

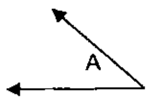
7. รูปใดน่าจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



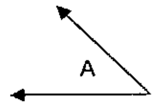
คำตอบ..

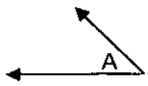
....

8. จากมุมที่กำหนดให้ จงเลือก คำว่า เล็กกว่า หรือ ใหญ่กว่า หรือ เท่ากับ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ด้วย A โดยขีดเส้นใต้คำที่ต้องการ

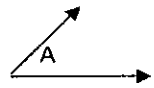


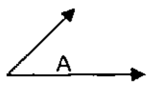
เล็กกว่า / ใหญ่กว่า/ เท่ากับ



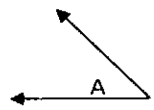


เล็กกว่า / ใหญ่กว่า/ เท่ากับ

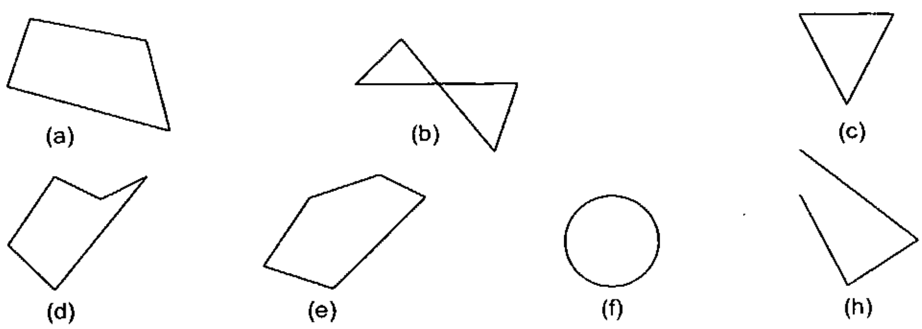




เล็กกว่า / ใหญ่กว่า/ เท่ากับ

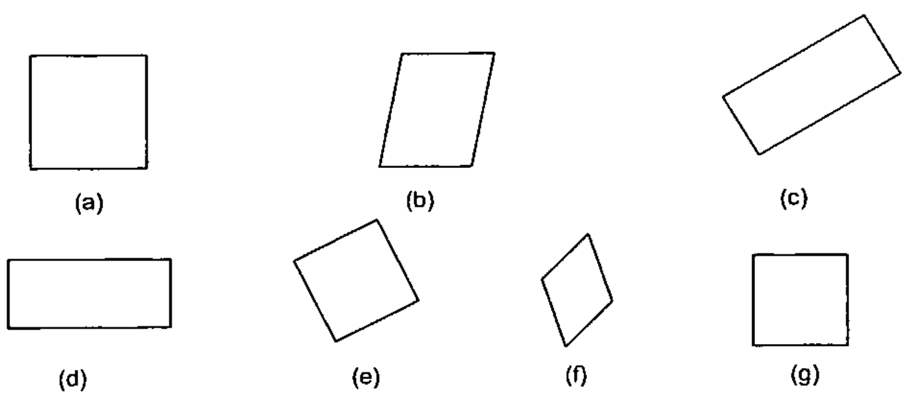


9. รูปต่อไปนี้รูปใดไม่เป็นรูปหลายเหลี่ยม เพราะเหตุใด



ตอบ...

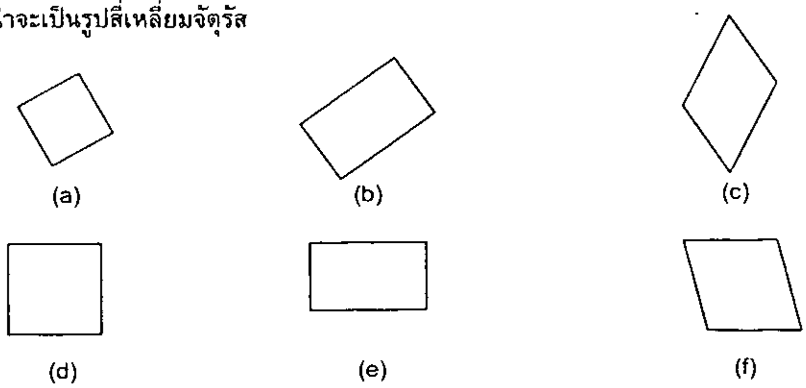
10. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ตอบ...

....

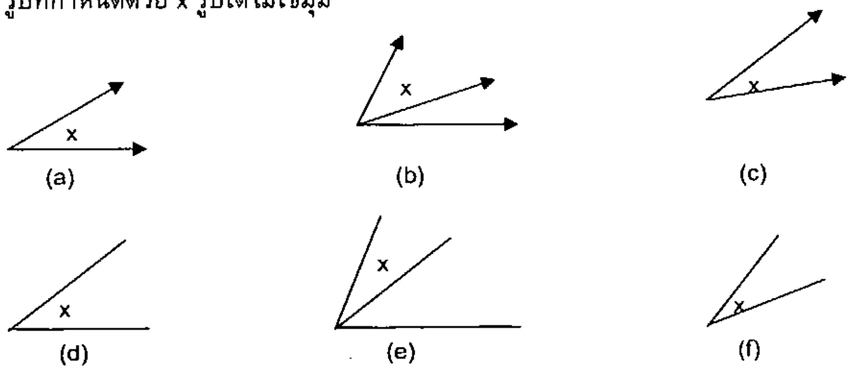
11. รูปใดน่าจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



ตอบ..

....

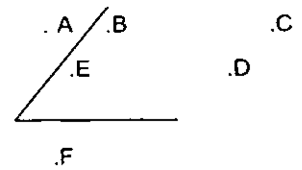
12. รูปที่กำหนดด้วย x รูปใดไม่ใช่มุม



ตอบ..

....

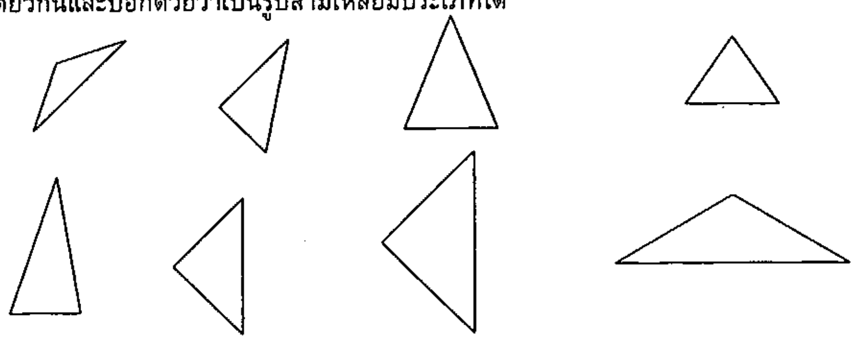
13. จากรูปที่กำหนดให้ จุดใดบ้างที่อยู่ภายในมุม



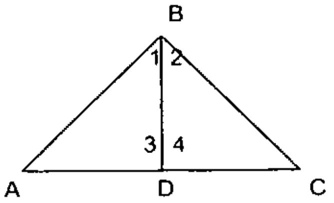
ตอบ ....

....

14. จากรูปที่กำหนดให้ จงเขียนวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะร่วมกันโดยจัดให้อยู่ในวงเดียวกันและบอกด้วยว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมประเภทใด

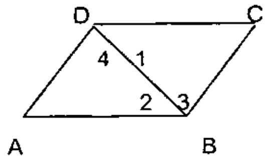


15. ถ้ากำหนดให้ AB = BC แล้ว $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ CBD หรือไม่ เพราะเหตุใด



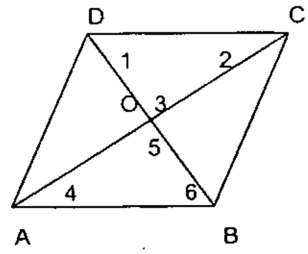
ตอบ...
....
....
....

16. ถ้ากำหนดให้ $\hat{1} = \hat{2}$, AD = BC แล้ว $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$CDB หรือไม่ เพราะเหตุใด



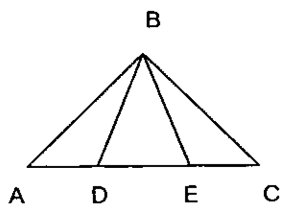
ตอบ...
....
....
....

17. กำหนดให้ $\hat{1} = \hat{6}, \hat{3} = \hat{5}$, AB = DC แล้ว $\triangle$ ABO $\cong$ $\triangle$ CDO หรือไม่ เพราะเหตุใด



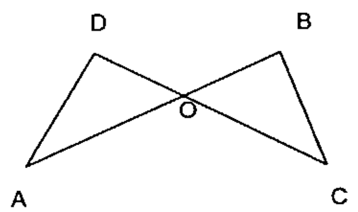
ตอบ...
....
....
....

18. ถ้ากำหนดให้ $A\hat{B}E = C\hat{B}D$, AB = BC, $\hat{A} = \hat{C}$ แล้ว $\triangle$ ADB $\cong$ $\triangle$ CEB หรือไม่ เพราะเหตุใด



ตอบ...
....
....
....

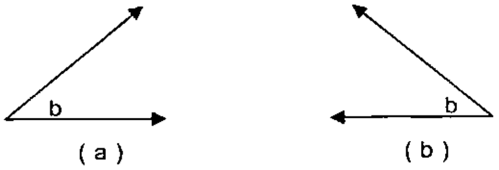
19. ถ้ากำหนดให้ DA = BC, DC = BA, $A\hat{O}D = C\hat{O}B$ แล้ว $\triangle$ ADO $\cong$ $\triangle$ CBO หรือไม่ เพราะเหตุใด



ตอบ...
....
....
....

จากการที่ผู้วิจัยได้ทำการสำรวจภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางเรขาคณิต โดยทำการสำรวจจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 70 คน โดยใช้แบบทดสอบภาพลักษณ์มโนทัศน์ทางเรขาคณิตที่ นวลศรี ชำนาญกิจ (2544 : 148) และผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ผลการสำรวจพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคล้ายคลึงกันกับที่ นวลศรี ชำนาญกิจ และงานวิจัยในต่างประเทศได้สำรวจพบ ซึ่งนักเรียนมีภาพลักษณ์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและสาเหตุดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่ทางขวามือและจุดยอดมุมอยู่ทางซ้ายมือมาให้ นักเรียนบอกว่ามุมที่กำหนดให้มีขนาดไม่เท่ากันทั้งที่มีสัญลักษณ์กำกับแสดงว่ามีขนาดเท่ากัน ดังรูป



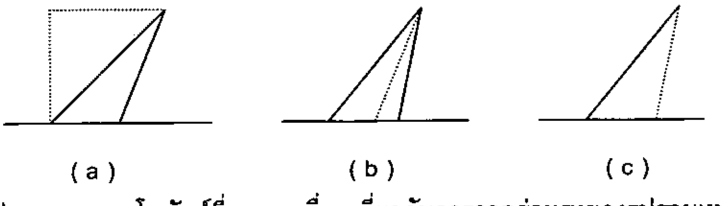
ภาพประกอบ 1 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับมุม

2. คิดว่ามุมที่มีรังสีเพิ่มขึ้นมาอีกหนึ่งเส้นไม่ใช่มุม ดังรูป

มุมที่กำกับด้วย x เป็นมุม มุมที่กำกับด้วย x ไม่เป็นมุม

ภาพประกอบ 2 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับมุม

3. เมื่อกำหนดให้ลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ส่วนมากนักเรียนจะลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมได้ถูกต้อง แต่จะลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก กับรูปสามเหลี่ยมมุมป้านไม่ถูกต้อง สรุปได้ดังนี้
   3.1 นักเรียนไม่ลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะไม่ทราบว่าจะลากอย่างไร บางคนลากจากมุมยอดไปยังด้านตรงข้ามโดยไม่คำนึงว่าจะเป็นเส้นตั้งฉากหรือไม่
   3.2 เมื่อกำหนดให้นักเรียนลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน จะมีลักษณะดังนี้คือ ลากไปยังด้านตรงข้ามโดยไม่คำนึงว่าจะเป็นเส้นตั้งฉากหรือไม่ ลากเส้นจากจุดยอดไปขนานกับด้านที่กำหนดให้ ลากทับด้านประกอบมุมยอด และไม่ลากเส้นใดเลย



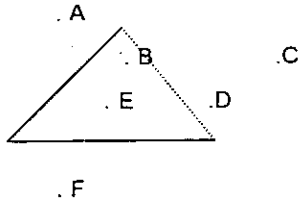
ภาพประกอบ 3 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการลากส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม

4. เมื่อกำหนดให้ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม นักเรียนจะลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนูนได้ แต่ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมเว้าไม่ถูกต้อง บางคนไม่สามารถหาจุดยอดที่อยู่ตรงกันข้ามได้ บางคนไม่ทราบว่าจะลากเส้นทแยงมุมได้อย่างไร

เส้นที่กำกับด้วย X เป็นเส้นทแยงมุม　　เส้นที่กำกับด้วย X ไม่เป็นเส้นทแยงมุม

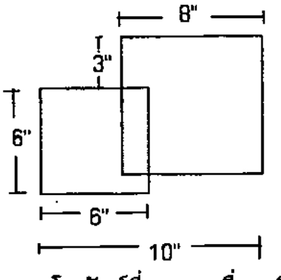
ภาพประกอบ 4 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการลากเส้นทแยงมุมรูปสี่เหลี่ยม

5. นักเรียนคิดว่าจุดที่อยู่ภายในมุมจะต้องอยู่ในบริเวณรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นตรงเชื่อมปลายแขนของมุมทั้งสองเท่านั้น จุดที่อยู่ภายนอกบริเวณนี้ไม่อยู่ภายในมุม



ภาพประกอบ 5 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับแขนของมุม
จากรูปนักเรียนจะบอกว่าจุด B และจุด E เท่านั้นที่อยู่ภายในมุม

6. นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สาเหตุเป็นเพราะนักเรียนไม่เข้าใจบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดีพอ และนักเรียนยึดติดกับรูปจนไม่สนใจบทนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
7. นักเรียนไม่สามารถหาความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ เมื่อกำหนดรูปที่ซับซ้อนมาให้ ดังรูป



ภาพประกอบ 6 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของความยาวด้าน

8. เรื่องรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ นักเรียนมีความคลาดเคลื่อนและสาเหตุของความคลาดเคลื่อนดังนี้คือ
   8.1 นักเรียนมีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอในการนำความรู้นั้นมาใช้ในการพิสูจน์ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการเพราะความสัมพันธ์ใด

8.2 นักเรียนยึดติดกับรูปจนไม่สนใจเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด และนักเรียนจะสรุปเอาเองเพื่อให้ได้เงื่อนไขครบตามความสัมพันธ์ที่นักเรียนคิดไว้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

8.3 นักเรียนจำความสัมพันธ์ของการเท่ากันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปได้ แต่ไม่เข้าใจสาระสำคัญของความสัมพันธ์ เช่น เข้าใจว่าความสัมพันธ์ ด.ม.ด. จะประกอบด้วยด้านที่เท่ากันสองคู่ และมุมที่เท่ากัน 1 คู่ แต่ไม่สามารถบอกได้ว่า มุมคู่ที่เท่ากันนั้นจะต้องอยู่ในระหว่างด้านที่เท่ากัน

8.4 นักเรียนไม่สามารถวาดรูปเพิ่มเติมเพื่อใช้ในการพิสูจน์ได้

9. เรื่องรูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน นักเรียนยังไม่เข้าใจบทนิยามการคล้ายกันของรูปเรขาคณิต นักเรียนไม่สามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตจะคล้ายกันเพราะเหตุใด และไม่คล้ายกันเพราะเหตุใด

10. เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายนักเรียนจะเขียนอัตราส่วนของด้านที่สมนัยกันไม่ถูกต้อง สาเหตุเพราะนักเรียนมองรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันไม่ถูก และไม่สามารถบอกได้ว่าด้านใดเป็นด้านที่สมนัยกัน มุมใดเป็นมุมที่สมนัยกัน

11. จากโจทย์ปัญหาเรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย เมื่อนักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาแล้วต้องวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา นักเรียนไม่สามารถวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาได้

12. ในเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนบางคนยังสรุปไม่ได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉากจะต้องเป็นด้านที่ยาวที่สุด

13. เมื่อต้องวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเรื่องสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนไม่สามารถวาดรูปเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาได้

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นางสาว วลีพร เดชเดชา
วันเดือนปีเกิด	14 สิงหาคม 2519
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลราชบุรี จังหวัดราชบุรี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	55 หมู่ 7 ตำบลลุ่มสุ่ม อำเภอไทรโยค จังหวัดกาญจนบุรี 71150 โทร 034 – 591272 หรือ 06 – 3232149
สถานที่ทำงาน	สถาบันราชภัฏกาญจนบุรี
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2532	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านลุ่มผึ้ง
พ.ศ. 2535	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนไทรโยคมณีกาญจน์วิทยา
พ.ศ. 2538	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนสมเด็จพระปิยมหาราชรมณียเขต
พ.ศ. 2542	ค.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 สถาบันราชภัฏกาญจนบุรี
พ.ศ. 2547	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ