

การควบคุมที่ใช้พลังงานน้อยสุดสำหรับการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ

ปริญญานิพนธ์
ของ
เกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2551

การควบคุมที่ใช้พลังงานน้อยสุดสำหรับการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ

ปริญญานิพนธ์
ของ
เกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

พฤษภาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การควบคุมที่ใช้พลังงานน้อยสุดสำหรับการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ

บทคัดย่อ
ของ
เกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2551

เกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์. (2551). การควบคุมที่ใช้พลังงานน้อยที่สุดสำหรับการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ. ปรินญานิพนธ์ วศ.ม.(เครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: พันโท ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้ว, พันโท ดร.สรพชัย หุะนันท์.

ปรินญานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ที่มุ่งเน้นวิจัยเพื่อศึกษาและพัฒนาระบบการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamics System) เพื่อหาคำตอบของสมการการเคลื่อนที่ของระบบรถเข็น 4 ล้อ ที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constrain) เป็นพื้นลาด และเขียนโปรแกรมเฉพาะทางด้านการควบคุมระนาบ 2 มิติ (2-Dimension) พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ของตัวแปรควบคุมและเวลาในรูปกราฟ โดยมุ่งเน้นการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อโดยใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy)

OPTIMAL CONTROL OF MINIMUM ENERGY FOR FLATNESS CONTROL
OF 4 WHEEL PUSHCARTS

AN ABSTRACT
BY
KIATTISAK POSANG

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

May 2008

Kiattisak Posang. (2008). *Optimal Control of Minimum Energy for Flatness Control of 4 Wheel Pushcarts*. Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Asst. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew ; Lt. Dr.Sapachai Huwanan.

The purpose objective of this thesis is presents the studied and developed the flatness control of 4 wheel pushcarts. That is applied theory of the Optimal Control of Dynamics System to find the dynamics equation solution of 4 wheel pushcart. It's have slope floor constraint and programming just for flatness control in 2 dimension. Besides, find the relation of constraint variable and time on graph. That's aim to flatness control of 4 wheel pushcarts for minimum energy.

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า
ประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และ พ.ท.ดร.สรพชัย หุวะนันท์ กรรมการควบคุม
ปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้
กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ พ.อ.ดร.ธีรนนท์ นันทขว้าง และ พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง ที่
ช่วยตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบคุณบิดา มารดา ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่าน ในความสนับสนุน ช่วยเหลือและ
ให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้น โครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร. จปร.
สาขาวิศวกรรมเครื่องกล รุ่น 2 ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ

เกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย.....	1
ขอบเขตของโครงการวิจัย.....	1
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
การทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้อง	3
ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)	13
3 วิธีดำเนินการวิจัย	32
แนวทางหรือหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา.....	32
สมการและการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข.....	34
การกำหนดปัญหา.....	37
การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	39
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ	40
ผลการทดสอบ.....	40
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	60
5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ	62
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	62
ข้อเสนอแนะ.....	62
บรรณานุกรม	63
ภาคผนวก	66
ประวัติย่อผู้วิจัย	68

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Magnus B. Lizell.....	5
2 อุปกรณ์ควบคุมการจ่ายน้ำมันไฮดรอลิก.....	6
3 ระบบควบคุมส่วนกลาง (Central Control System).....	6
4 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Kanau Iwashita.....	7
5 ระบบควบคุมระดับและการสั่นสะเทือนในรถมอเตอร์ไซด์.....	8
6 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Taiji Ohmori.....	9
7 ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมการปรับค่าความหน่วง(Damping Rate).....	9
8 แบบสเก็ทของหุ่นยนต์เชือก.....	10
9 หุ่นยนต์เชือกในระบบควบคุมแบบย้อนกลับ (Feedback Control).....	11
10 แสดงโครงสร้างอุปกรณ์ของโต๊ะลดการสั่นสะเทือน.....	12
11 วงจรควบคุมการทำงานของโต๊ะลดการสั่นสะเทือน.....	12
12 แบบจำลองทางกายภาพของรถเข็น 4 ล้อ.....	32
13 แสดงระบบควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ.....	33
14 Free Body Diagram ของรถเข็น 4 ล้อ.....	34
15 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	41
16 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	42
17 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	42
18 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	43
19 กราฟแสดงระยะจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	43
20 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	44
21 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	44

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
22 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	45
23 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	45
24 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	46
25 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	47
26 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	47
27 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	48
28 กราฟแสดงระยะจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	48
29 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	49
30 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	49
31 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	50
32 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m	50
33 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	51
34 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	52

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
35 กราฟแสดงระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	52
36 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	53
37 กราฟแสดงระยะขจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	53
38 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	54
39 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	54
40 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	55
41 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	55
42 กราฟแสดงระยะขจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	56
43 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	57
44 กราฟแสดงระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	57
45 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	58
46 กราฟแสดงระยะขจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	58
47 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	59

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
48 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	59
49 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	60
50 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m	60

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำวิจัย

ระบบงานด้านการขนถ่ายในปัจจุบันได้มีการพัฒนาเครื่องทุ่นแรงต่างๆ มาใช้มากมาย ซึ่งเครื่องทุ่นแรงที่นิยมใช้มากที่สุดอย่างหนึ่งก็คือ รถเข็น 4 ล้อ เพราะสามารถบรรทุกสิ่งของต่างๆ ได้หลากหลายโดยที่รถเข็นไม่พลิกคว่ำและผู้ใช้งานไม่ต้องออกแรงในการรักษาสมดุลรถเข็นเพราะรถเข็น 4 ล้อมีเสถียรภาพค่อนข้างมาก นอกจากนั้นแล้วยังสามารถจัดหาเพื่อใช้งานได้ง่าย

โดยทั่วไปแล้ว รถเข็น 4 ล้อจะวางระนาบของตัวเองตามลักษณะของพื้นผิวด้านล่าง ดังนั้นหากรถเข็นอยู่บนพื้นผิวที่มีความลาดเอียง ระนาบของรถเข็นก็จะเอียงตามลักษณะพื้นผิวดังกล่าว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่ล้อทั้งสองของรถเข็นวางลงไป ซึ่งในงานขนถ่ายทั่วไปสิ่งเหล่านี้ไม่ได้ก่อให้เกิดปัญหาแต่อย่างใด แต่ในงานขนถ่ายสิ่งของที่มีผลตอบสนองไวต่อความลาดเอียงของพื้นผิว เช่น การขนถ่ายเครื่องมือแพทย์, การขนถ่ายสารเคมีอันตราย, การขนถ่ายอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ไวต่อแรงโน้มถ่วงของโลก แม้กระทั่ง การขนถ่ายวัตถุระเบิดในงานกิจการทหาร เป็นต้น ก็อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในการใช้งานหรือเกิดอันตรายและความเสียหายจากการเลื่อนไถลได้

จากประเด็นปัญหาดังกล่าว ผู้ดำเนินงานวิจัยจึงมีแนวคิดที่จะศึกษาและพัฒนาระบบควบคุมให้กับรถเข็น 4 ล้อ เพื่อคงระนาบแม้จะอยู่บนพื้นผิวที่มีความลาดเอียง โดยการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamics System) เพื่อให้ใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum Energy) ในการรักษาระนาบของรถเข็น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อหาคำตอบของสมการการเคลื่อนที่ของระบบรถเข็น 4 ล้อที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraint) เป็นพื้นลาด

1.2.2. เพื่อเขียนโปรแกรมเฉพาะทางในการหาคำตอบของสมการโดยสามารถเปลี่ยนพื้นลาดได้

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1. เขียนโปรแกรมควบคุมเฉพาะทางด้านการควบคุมระนาบ 2 มิติ (2-Dimension)

1.3.2. กำหนดอุปสรรคความลาดของพื้นเอียงตั้งแต่ 0-30 องศา

1.3.3. เขียนโปรแกรมเพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวแปรควบคุมและเวลาในรูปกราฟ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

สามารถนำผลการวิจัยที่ได้นี้ ไปเป็นแนวทางเพื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamics System) ในการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อ โดยใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum Energy)

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

2.1 การทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทวิวัชร วีระเกล้า⁽¹⁾ ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุด ของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีในที่จะช่วยอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกขึ้นซึ่งขึ้นอยู่กับคุณลักษณะ ของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) นั้นด้วย แนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณา ปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุด มีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ ได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาน้อยที่สุดสำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้น แต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ทำสุดท้ายได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien⁽²⁾, Direct and Indirect Optimization of Linear Time Invariant Dynamic Systems Using Transformation Journal of Optimal Control Applications and method, Vol.19 pp. 393-410, 2541. กล่าวถึงการวิเคราะห์หาคำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรง และสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุด ที่กำหนดให้ในระยะเวลาที่กำหนด จากทฤษฎีที่มีอยู่เดิมคำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่และสมการควบคุมเป็นจริงในรูปสมการอันดับหนึ่ง แต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอวิธีการใหม่ โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม (State and control variable) เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้ ผลที่ได้สามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อมมาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw⁽³⁾, New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems, AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic, Vol.24 No.2 , pp.228 - 236, 2544. ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูง มีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมาก ในเรื่องของการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับระบบสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอ อันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ในบทความฉบับนี้ ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจน ในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การที่จะเปรียบเทียบได้นั้น ผู้เขียนได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีทางตรงและทางอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw⁽⁴⁾, Optimization of Higher-Order System and Extentions of Minimum Principle, เอกสารประชุมทางวิชาการ – เครือข่ายวิศวกรรม เครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่15 เล่มที่ 2 หน้า MC131-MC140, พฤศจิกายน 2544. กล่าวถึง ทฤษฎีที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่ง ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงที่เรียกว่า ทฤษฎีความต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าวที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย คือทฤษฎีของฮามิลตัน - จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพิจารณาทฤษฎีของ พอนทริยาгин และทฤษฎีความต่ำสุดที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง และสนับสนุนทฤษฎีต่างๆให้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงและวารีเอชันแคลคูลัส ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของพอนทริยาгинและทฤษฎี ความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีการนี้ให้คำตอบที่ตรงกัน

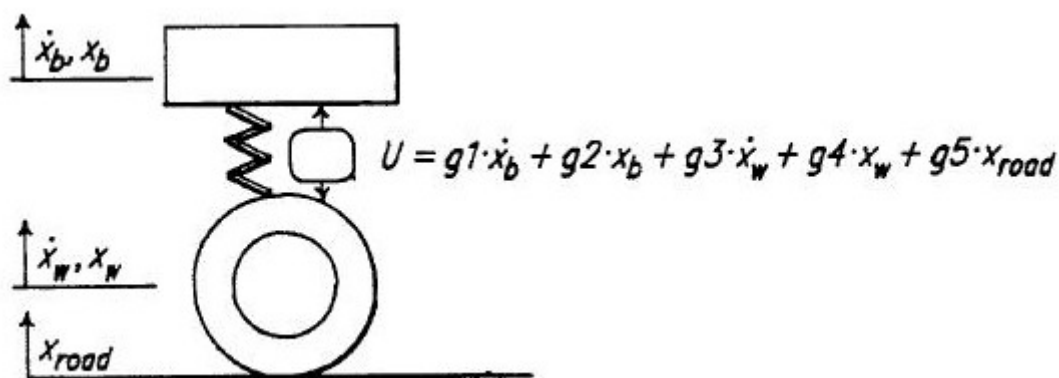
M .V. Bain and M. A.⁽⁵⁾ Alcorta Garcia, Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems, Applied Mathematics E - Notes, 2(2002), 36-44. เอกสารฉบับนี้เสนอการแก้ปัญหาค่าสูงสุดของระบบที่ไม่เป็นเส้นตรง (Nonlinear Systems) โดยการเปลี่ยนสมการของระบบให้เป็นสมการพหุนามของเทเลอร์ที่มีเลขยกกำลังเท่ากับสาม และทำการเปรียบเทียบกับการคำนวณค่าตัวแปรโดยใช้ระบบที่เป็นเส้นตรง (Linear System) พบว่าระบบที่ไม่เป็นเส้นตรงสามารถประมาณค่าของตัวแปรได้ดีกว่าระบบที่เป็นเส้นตรง

Z. Shiler, H. Chang and V. Wong⁽⁶⁾ The Practical Implimentation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators, Robotic & Computer - Integrate Manufacturing. เอกสารฉบับนี้ได้กล่าวถึงผลการทดลองสำหรับ Time optimial control สำหรับ Robotic Manipulators ซึ่ง

จะแก้ปัญหาแบบที่ไม่ต่อเนื่อง สมการการเคลื่อนที่ที่มีลำดับมาก ระบบการเคลื่อนที่ที่ไม่มีรูปแบบที่แน่นอน และมีการล่าช้า (Delay) จากการควบคุมผู้เขียนเสนอให้ใช้ Simplified model และกำหนดการควบคุมการตอบสนอง โดยได้ทดลองกับ UCLA Direct Drive ซึ่งผลการทดลองสามารถลดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ทั้งยังเพิ่มความแม่นยำในการเคลื่อนที่ให้กับเครื่องมือที่นำมาทดลองด้วย

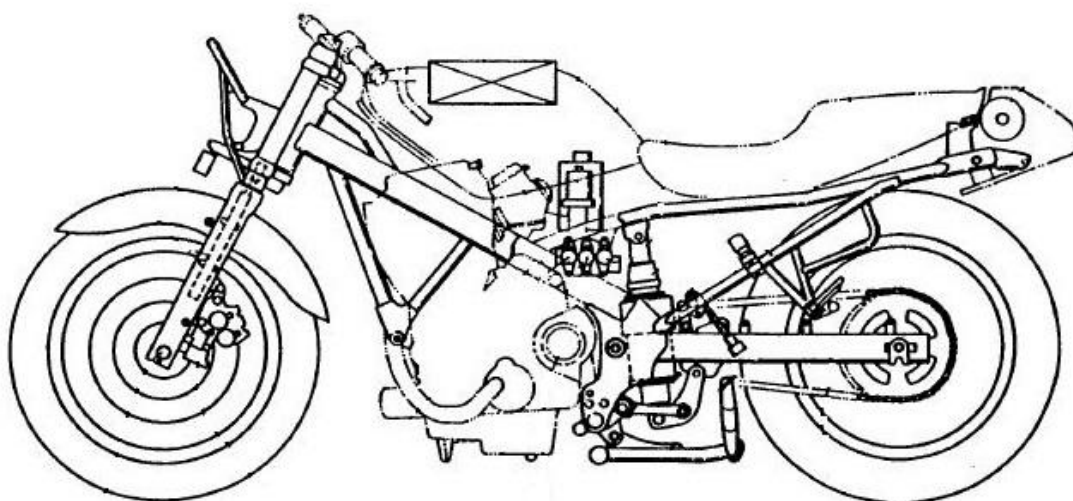
M.C. Renolds, P.H.Meckl ⁽⁷⁾ Composite Optimization Scheme for time Optimal Control. เอกสารฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาค่าต่ำสุด-สูงสุด โดยเปลี่ยนให้เป็นปัญหาไทม์ออปติมอลคอนโทรล (Time Optimal Control problem) แล้วใช้ทั้ง Quadratic และ Linear programming ซึ่งเป็น Linear programming จะสามารถคาดการณ์ค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาการควบคุมที่ได้ผลสูงสุด (Optimal Control) ของระบบที่ประกอบไปด้วยมวล 2 ก้อน และสปริง แสดงให้เห็นถึง คุณสมบัติที่น่าสนใจในการเปลี่ยนสมการเดิมให้เป็นสมการกำลังสองหรือคอตราคิกโปรแกรมมิ่ง (Quadratic programming)

Magnus B. Lizell ⁽⁸⁾ ได้ประดิษฐ์อุปกรณ์เพื่อปรับระดับและลดการสั่นสะเทือนของรถยนต์ โดยจะติดตั้งอุปกรณ์ดังกล่าวระหว่างระบบรองรับน้ำหนักกับโครงรถที่บริเวณล้อแต่ละข้าง



ภาพประกอบ 1 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Magnus B. Lizell ⁽⁸⁾

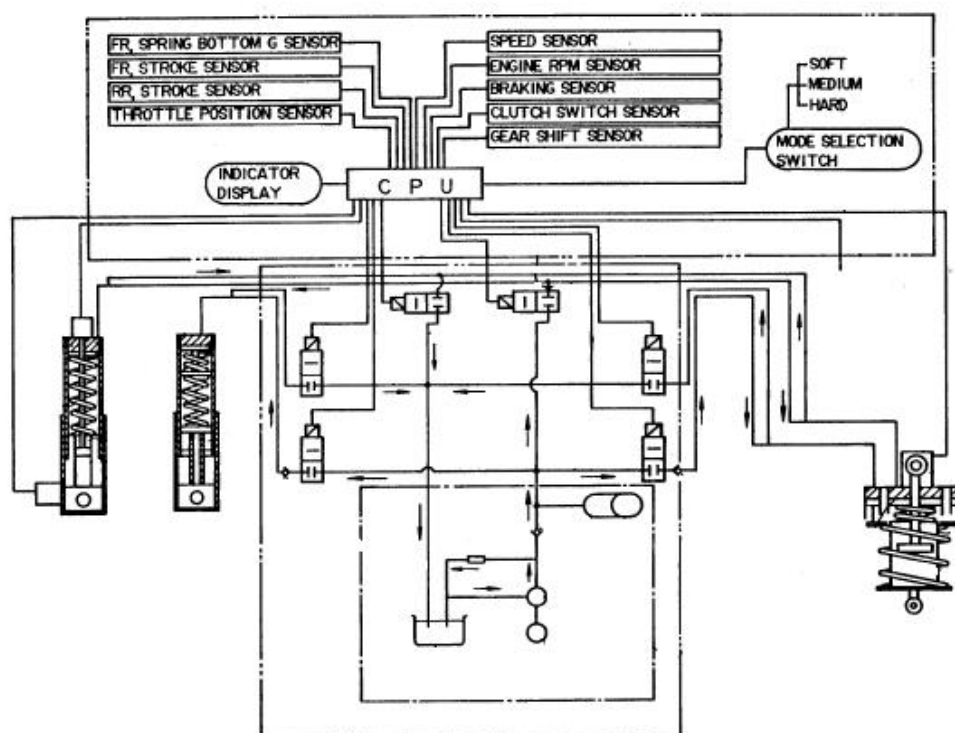
ซึ่งอุปกรณ์ดังกล่าวจะมีไฮดรอลิกแดมเปอร์ (Hydraulic Damper) ซึ่งกระบอกสูบจะต่อเข้ากับถังความดันส่วนกลาง (Central Pressure Chamber) และจะมีอุปกรณ์ควบคุมการจ่ายน้ำมันไฮดรอลิกไปยังกระบอกสูบ



ภาพประกอบ 4 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Kanau Iwashita⁽⁹⁾

การทำงานของระบบการปรับระดับความสูงและค่าคงที่ของสปริงนี้ต้องอาศัยการทำงานร่วมกันกับเซนเซอร์ต่างๆ ได้แก่

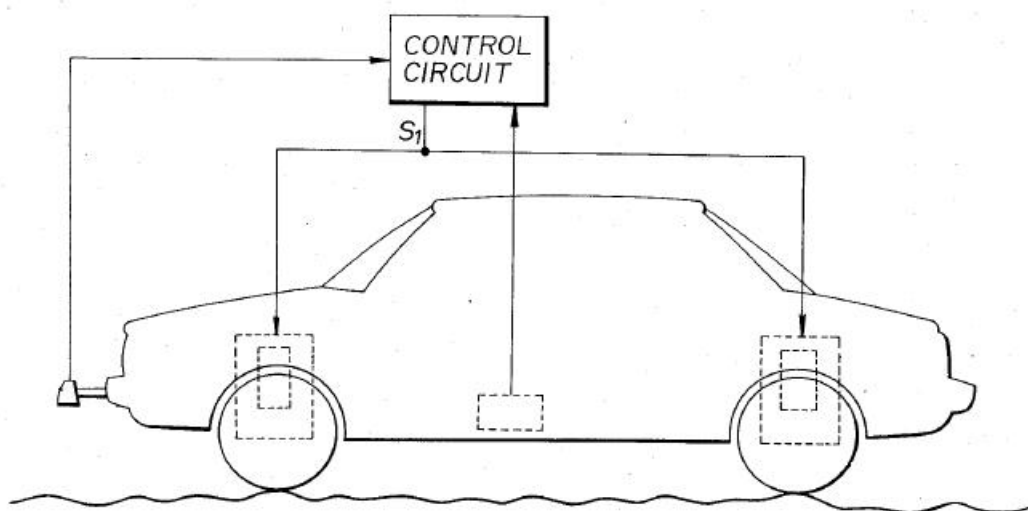
1. เซนเซอร์ความโน้มถ่วง (G Sensor)
2. เซนเซอร์ระยะยืดกระบอกสูบ (Stroke Sensor)
3. เซนเซอร์ตำแหน่งลิ้นบังคับน้ำมัน (Throttle Position Sensor)
4. เซนเซอร์วัดความเร็ว (Speed Sensor)
5. เซนเซอร์วัดรอบ (RPM Sensor)
6. เซนเซอร์เบรก (Braking Sensor)
7. เซนเซอร์คลัช (Clutch Switch Sensor)
8. เซนเซอร์เกียร์ (Gear Shift Sensor)



ภาพประกอบ 5 ระบบควบคุมระดับและการสั่นสะเทือนในรถมอเตอร์ไซด์⁽⁹⁾

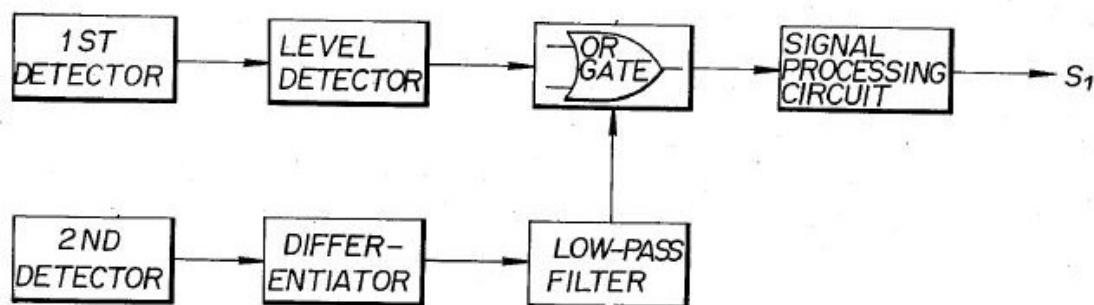
เซนเซอร์เหล่านี้จะส่งสัญญาณไปยัง ระบบประมวลผลส่วนกลาง (CPU: Central Processing Unit) เพื่อประมวลผล จากนั้นก็จะส่งสัญญาณไปควบคุมการทำงานของอุปกรณ์การจ่ายน้ำมันไฮดรอลิกให้กับกระบอกสูบไฮดรอลิกเพื่อปรับระดับความสูงของเครื่องยนต์และค่าคงที่ของสปริง ให้เหมาะสมกับสภาพการขับขี่ปัจจุบัน

Taiji Ohmori⁽¹⁰⁾ ใช้วิธีการปรับค่าความหน่วง (Damping Rate) ของระบบรองรับน้ำหนัก (Suspension System) โดยใช้อุปกรณ์ตรวจจับ (Detector) จำนวน 2 ชุด เพื่อตรวจจับค่าความเร่งของการสั่นสะเทือน (Vibration Acceleration) ตัวแรกจะติดตั้งไว้ที่ช่วงกลางของตัวรถ เมื่อมีการสั่นสะเทือนก็จะมีผลเปลี่ยนแปลงสัญญาณไปที่อุปกรณ์ตรวจจับระดับ (Level Detector) แล้วส่งสัญญาณไปที่วงจรควบคุม (Control Circuit) ส่วนอุปกรณ์ตรวจจับค่าความเร่งตัวที่สองจะติดตั้งไว้ที่กันชนหน้า



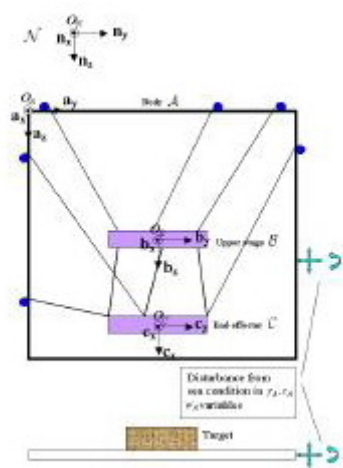
ภาพประกอบ 6 ระบบรองรับน้ำหนักพัฒนาโดย Taiji Ohmori ⁽¹⁰⁾

อุปกรณ์ตรวจจับค่าความเร่งทั้งสองตัวนี้จะส่งสัญญาณรายงานสภาพผิวถนนไม่ว่าจะเป็นค่าความขรุขระหรือความลาดเอียงของถนนไปยังวงจรการควบคุม (Control Circuit) จากนั้นวงจรการควบคุมก็จะส่งสัญญาณไปปรับค่าความหน่วง (Damping Rate) ของโช้ค (Shock Absorber) ในระบบรองรับน้ำหนักของรถยนต์ต่อไป



ภาพประกอบ 7 ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมการปรับค่าความหน่วง (Damping Rate) ⁽¹⁰⁾

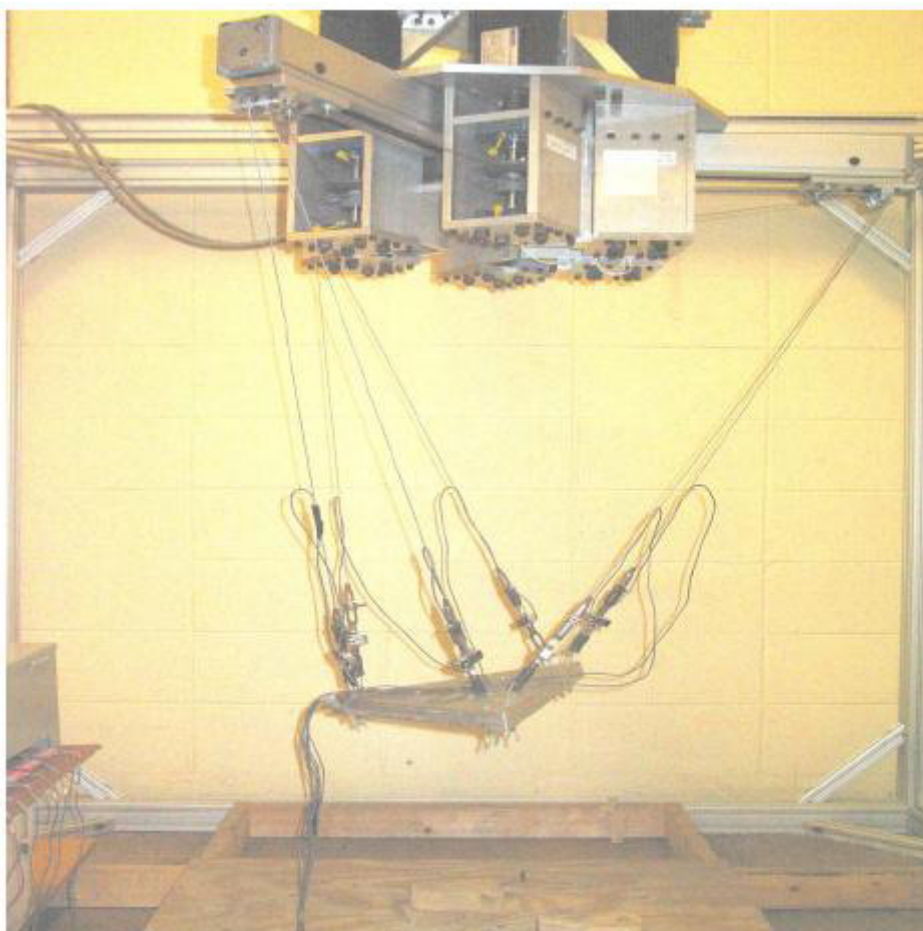
So-Ryeok Oh และ Kalyan Mankala ⁽¹¹⁾ ได้ศึกษาการใช้หุ่นยนต์เชือก (Cable Robot) เพื่อใช้ในงานขนถ่ายสินค้าในอุตสาหกรรมการเดินเรือ เพราะหุ่นยนต์เชือกมีพื้นที่ทำงาน (Workspace) ค่อนข้างมาก โดยที่เชือกสามารถรับแรงดึงได้แต่ไม่สามารถรับแรงดันได้ ดังนั้นจึงได้ศึกษาถึงวิธีการควบคุมแรงดึงในเส้นเชือกให้เป็นบวกตลอดเวลา โดยอาศัยตัวควบคุมแรงดึง (Positive Tension Controller) เพื่อควบคุมแรงดึงในเส้นเชือกให้เป็นบวกตลอดเวลา



ภาพประกอบ 8 แบบสเก็ทของหุ่นยนต์เชือก⁽¹¹⁾

หุ่นยนต์เชือกดังกล่าวจะให้เป็น หุ่นยนต์เชือก 2 ชั้น โดยหุ่นยนต์ทั้งสองตัวจะวางตำแหน่งกันไว้บน-ล่าง และทำงานสัมพันธ์กันดังนี้ หุ่นยนต์เชือกชุดแรกซึ่งอยู่ด้านบน มีหน้าที่พาหุ่นยนต์เชือกตัวที่สองเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งของตู้เก็บสินค้า (Container) แล้วหุ่นยนต์เชือกตัวที่สองซึ่งอยู่ด้านล่างก็จะเคลื่อนที่ขึ้นลงเพื่อไปจับยึดตู้เก็บสินค้า จากนั้นหุ่นยนต์เชือกทั้งสองตัวก็จะนำตู้เก็บสินค้านั้นเคลื่อนย้ายไปยังจุดอื่นต่อไป

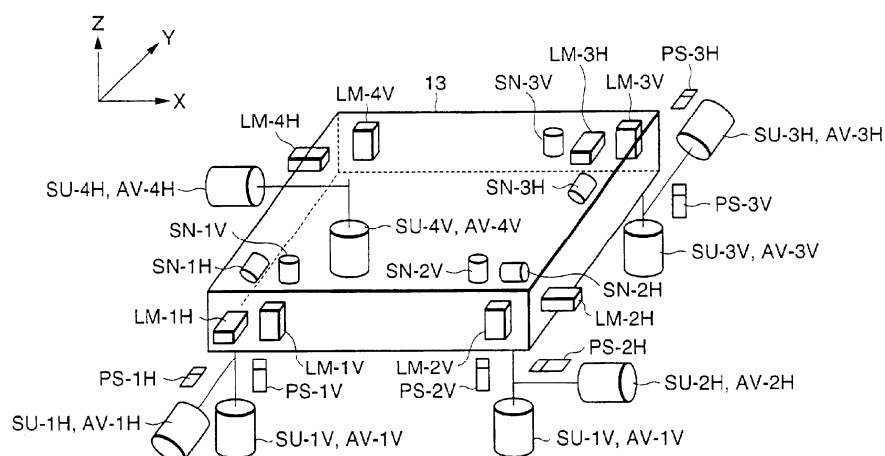
So-Ryeok Oh และ Sunil K. Agrawal⁽¹²⁾ ได้ทำการศึกษาระบบควบคุมการทำงานของหุ่นยนต์เชือก (Cable-suspended Robot) เพื่อสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานด้านการตรวจสอบและซ่อมบำรุงภายในอุโมงค์เรือและเครื่องบิน โดยนำเสนาระบบควบคุมแบบย้อนกลับ (Feedback Control) เนื่องจากคุณสมบัติของเชือก สามารถรับแรงดึง (Tension Force) ซึ่งก่อให้เกิดแรงดึงในเส้นเชือกได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น โดยเชือกไม่อาจรับแรงดัน (Compressed Force) ได้ ดังนั้นเงื่อนไขหนึ่งที่ถูกกำหนดเพื่อการควบคุมหุ่นยนต์ ก็คือการรักษาค่าแรงดึงในเส้นเชือกให้คงอยู่ตลอดเวลาโดยไม่ทำให้เชือกหย่อน (Positive input Constraints)



ภาพประกอบ 9 หุ่นยนต์เชือกในระบบควบคุมแบบย้อนกลับ (Feedback Control) ⁽¹²⁾

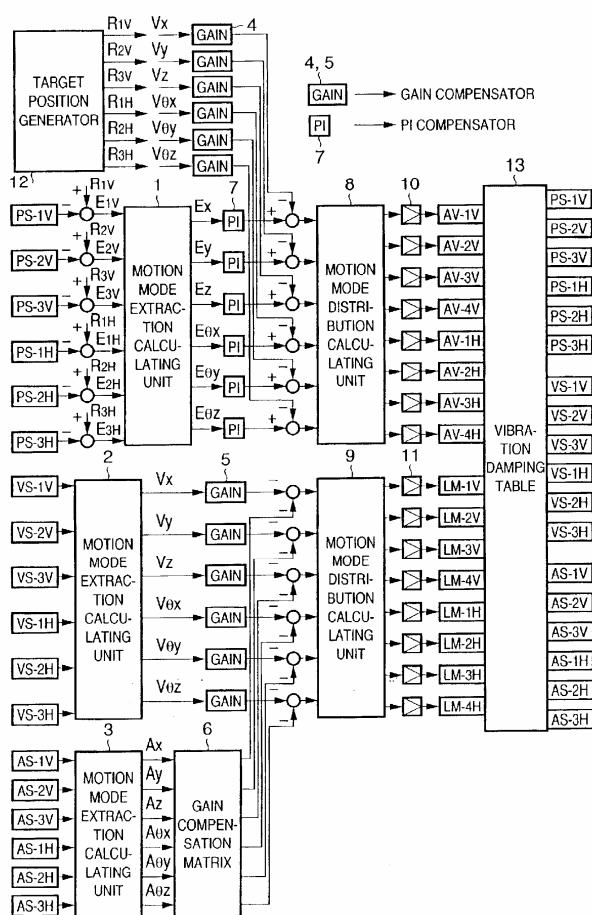
ซึ่งศึกษาการทำงานของระบบควบคุมหุ่นยนต์เชือกในสถานะต่างๆ โดยมีพื้นฐานอยู่ที่การควบคุมแบบย้อนกลับเชิงเส้น (Feedback Linearization Controller) ด้วยการอ้างอิงค่าฐาน (Reference Governor : RG) ของระบบอ้างอิงเอาไว้

Hiroaki Kato ⁽¹³⁾ ได้ประดิษฐ์อุปกรณ์ลดการสั่นสะเทือนของโต๊ะ ซึ่งใช้ในงานเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่มีความไวต่อการสั่นสะเทือน เช่น เซมิคอนดักเตอร์ (Semiconductor) และคริสตัลเหลว (Liquid Crystal) เป็นต้น โดยใช้ระบบการทำงานของแอกชูเอเตอร์ (Actuator System) ลดการสั่นสะเทือนของโต๊ะ 2 ระบบ ระบบแรกได้อาศัยแรงที่เกิดจากการทำงานของแอกชูเอเตอร์ (Actuator) กระทำต่อสัดส่วนการเคลื่อนที่ของโต๊ะ ส่วนระบบที่สองจะใช้แรงจากแอกชูเอเตอร์กระทำต่ออัตราเร่งของการเคลื่อนที่ของฐานโต๊ะ ซึ่งอุปกรณ์การทำงานลดการสั่นสะเทือนของโต๊ะ ประกอบไปด้วยอุปกรณ์ทางกลและเซนเซอร์ดังต่อไปนี้ สปริงลม (Air Spring:SU), แอกชูเอเตอร์ (Actuator:LM), เซนเซอร์ตรวจวัดความสั่นสะเทือน (Vibration Sensor:SN), เซนเซอร์ตำแหน่ง (Position Sensor:PS), วาล์วลม (Air Valve:AV) เป็นต้น



ภาพประกอบ 10 แสดงโครงสร้างอุปกรณ์ของโต๊ะลดการสั่นสะเทือน⁽¹³⁾

นอกจากอุปกรณ์ทางกลและเซนเซอร์ดังกล่าวแล้วระบบลดการสั่นสะเทือนของโต๊ะยังประกอบไปด้วยอุปกรณ์ด้านวงจรไฟฟ้าและการควบคุม ซึ่งรับสัญญาณแสดงสถานะโต๊ะจากเซนเซอร์ไปยังวงจรควบคุมเพื่อประมวลผลและสั่งการทำงานไปยังอุปกรณ์ทางกลต่างๆ ต่อไป



ภาพประกอบ 11 วงจรควบคุมการทำงานโตะลดการสั่นสะเทือน⁽¹³⁾

2.2 ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์ และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธ้อปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องกำหนดลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.2.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่บอกถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์ตัวแปรคือตัวที่ไม่ทราบค่าและต้องทำการหาค่าออกมา ดีไซน์วาริเอเบิลนั้นผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้ประสบการณ์, ความชำนาญ, ข้อกำหนดของวิธี และพื้นฐานความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจหลักการและวิธีการของดีไซน์วาริเอเบิล คือต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิลจะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ดีไซน์วาริเอเบิลสามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิลเหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิลและในทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ $\mathbf{X}$, $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

2.2.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิลและเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

2.2.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิลและดีไซน์พารามิเตอร์มาประเมินค่าและเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชันนี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออบเจกทิฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design

objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาค่าที่เหมาะสมขึ้นมา และต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็กลายเป็นออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี่ก็จะเป็นคอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

2.2.4 รูปแบบมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นเป็นองค์ประกอบโดยทั่วไปของแบบจำลองเพื่อหาค่าทางคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) และมีการเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:} \quad g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

เขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(X), [X]_n \quad (2.5)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:} \quad [g(X)]_l = 0 \quad (2.6)$$

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2.7)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2.8)$$

2.2.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิลไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สเตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

2.2.5.1 กรณีห้อยสุด (Minimum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมีนัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.9)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมีนัม (Local minimum)

2.2.5.2 กรณีมากที่สุด (Maximum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.10)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

2.2.6 พลศาสตร์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ ขึ้นกับเวลาจะถูกเรียกว่าพลศาสตร์และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์มาเป็นตัวแสดงระบบพลศาสตร์ (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสเตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คือ non-linear ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการ

คำนวณวิถี (Trajectory) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนุโลมดิคหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.11) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.11) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้ห่อปเจตทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกห่อปเจตทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.12)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสภาวะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

2.2.7 แคลคูลัสฮอวารีโอชัน (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสฮอวารีโอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.13)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้อนุโลมดิคหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.14)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสของวาเรียนเทชัน (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนccessary conditions สำหรับเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสของวาเรียนเทชัน (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.7.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดียว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดียว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.7.2 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่ (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x + h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.15)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.16)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) ก็จะได้พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.17)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้ อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.18)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.7.3. กำหนดเวลาสุดท้ายคงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.7.2) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.21)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.7.4 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.7.2) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็น เอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt\end{aligned}\quad (2.22)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.23)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\ &\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.24)$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น(Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x|_{t_f}$, $\delta x|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น(Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.27)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.2.8 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of Variance Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.8.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่ (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั้นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.28)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt\end{aligned}\quad (2.29)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.30)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.31)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้ อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.8.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้คงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้(Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.8.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการของหัวข้อ (2.8.1) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ จึงสามารถกำหนดได้ตามการใช้งาน ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

ซึ่งสมการนี้เรียกว่าสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.2.8.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้เป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้เป็นเงื่อนไขหลักในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมแต่ก็มีวิธีการหาค่าตอบใกล้เคียง กับกรณี (2.8.1) ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
\Delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\
& \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right. \\
& + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\
& \left. - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \right] dt
\end{aligned} \quad (2.37)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\
& + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2.38)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_f} \delta t_f \\
& - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2.39)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i \Big|_{t_0} - \dot{x}_i \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i \Big|_{t_f} - \dot{x}_i \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i \Big|_{t_f}$, $\delta x_i \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.42)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.2.9 ฟังก์ชันหอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันหอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

2.2.9.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

พิจารณาฟังก์ชันหอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันหอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.43)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่ง

จะเป็น F' ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันหอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end

time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.2.9.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.44)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned}
\left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right]_{t_f} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i=1, \dots, n \\
\left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

2.2.9.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (2.9.1 และ 2.9.2) เราสามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j=1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k=1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์ มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \tag{2.48}$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\text{เมื่อ} \quad F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j \tag{2.50}$$

ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right]_{t_f} &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.2.10 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่ามิประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสสอฟวารีเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.2.10.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_f)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟฟ้าวิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออพเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3

ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรล วารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข บังคับตลอดเวลา

2.2.10.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.7.4) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผัน ได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลา สุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.10.3 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.53)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.54)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.55}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ ก็จะทำให้เราสามารถหาเงื่อนไขจำเป็น (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_j = & -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \\
\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = & 0, k = 1, \dots, m \\
\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = & 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.11) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.56) จำนวน n สมการ และเอตติชันนอลอีควชันคือสมการ (2.56) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.56) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.2.11 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.11) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.57)$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.58)$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไคเรคท์ (Direct methods) และวิธีอินไคเรคท์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของแปรเอเบิล (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ν_i , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt \quad (2.59)$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l \quad (2.60)$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากันและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

บทที่ 3

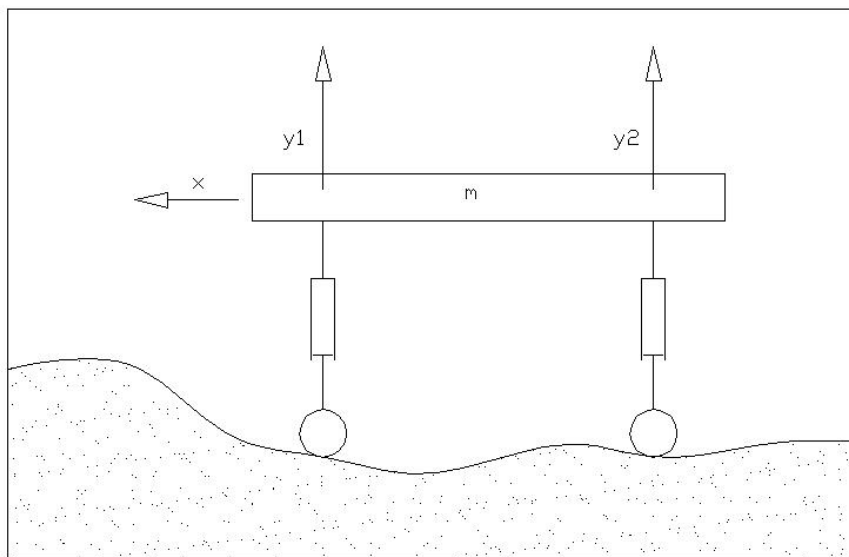
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามขั้นตอน ดังนี้

1. แนวทางหรือหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา
2. สมการและการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข
3. การออกแบบโปรแกรมคอมพิวเตอร์

3.1. แนวทางหรือหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา

เมื่อรถเข็น 4 ล้อเคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวที่มีความลาดเอียง การกระดกขึ้นลงของรถเข็นจะขึ้นอยู่กับสภาพความลาดชันและระดับที่แตกต่างของพื้นถนน รถเข็นเกิดการลาดเอียงและไร้เสถียรภาพ ดังนั้นการควบคุมระนาบของรถเข็น 4 ล้อบนพื้นผิวที่มีความลาดเอียงนั้น ขารองรับน้ำหนักทั้ง 4 ข้างของรถเข็นต้องสามารถยืดหดได้ เพื่อชดเชยระดับที่แตกต่างกันของพื้นเอียง ซึ่งการยืดหดนี้ต้องสามารถคงแรงกระทำอันเนื่องมาจากน้ำหนักบรรทุกที่ขาทั้ง 4 ข้างด้วย

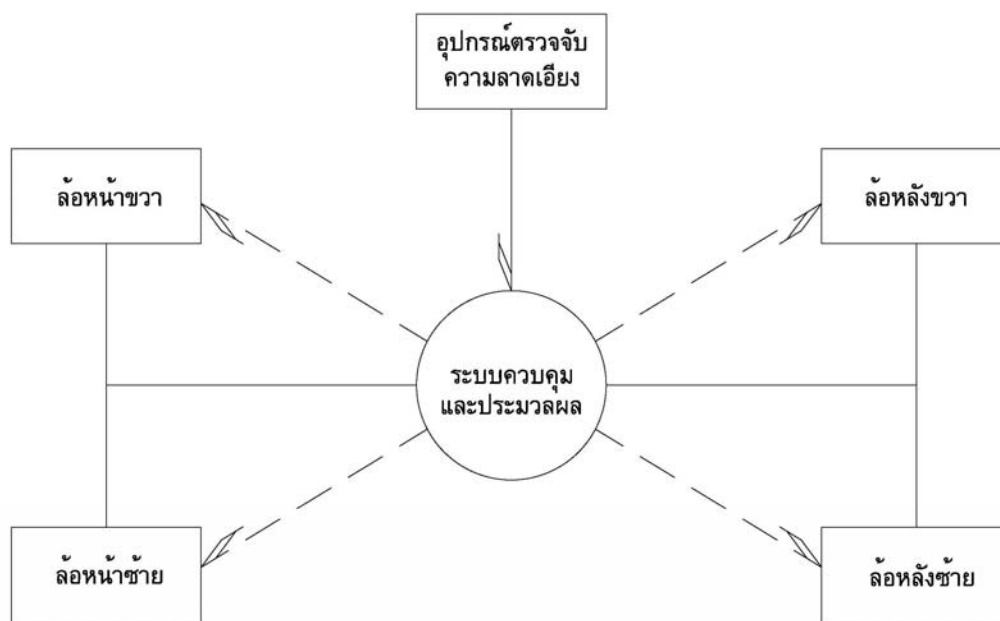


ภาพประกอบ 12 แบบจำลองทางกายภาพของรถเข็น 4 ล้อ

ดังนั้นรถเข็น 4 ล้อ จึงต้องอาศัยการทำงานจากระบบที่เกี่ยวข้อง 3 ระบบ ได้แก่

1. ระบบชดเชยความต่างระดับ เช่น กระบอกสูบ แอคชูเอเตอร์ (Actuator) เป็นต้น
2. ระบบตรวจสอบสถานะ เช่น เซนเซอร์บอกความลาดเอียงและเซนเซอร์บอกระดับ เป็นต้น
3. ระบบควบคุมส่วนกลาง เช่น ไมโครคอนโทรลเลอร์ และ PLC เป็นต้น

เมื่อเซนเซอร์แจ้งสถานะไปยังระบบควบคุมส่วนกลางที่เกิดความไม่เสถียรภาพ ระบบควบคุมส่วนกลางก็จะไปสั่งงานให้ระบบชดเชยความต่างระดับทำงาน จนกระทั่งสามารถคงระนาบของรถขึ้นไว้ได้



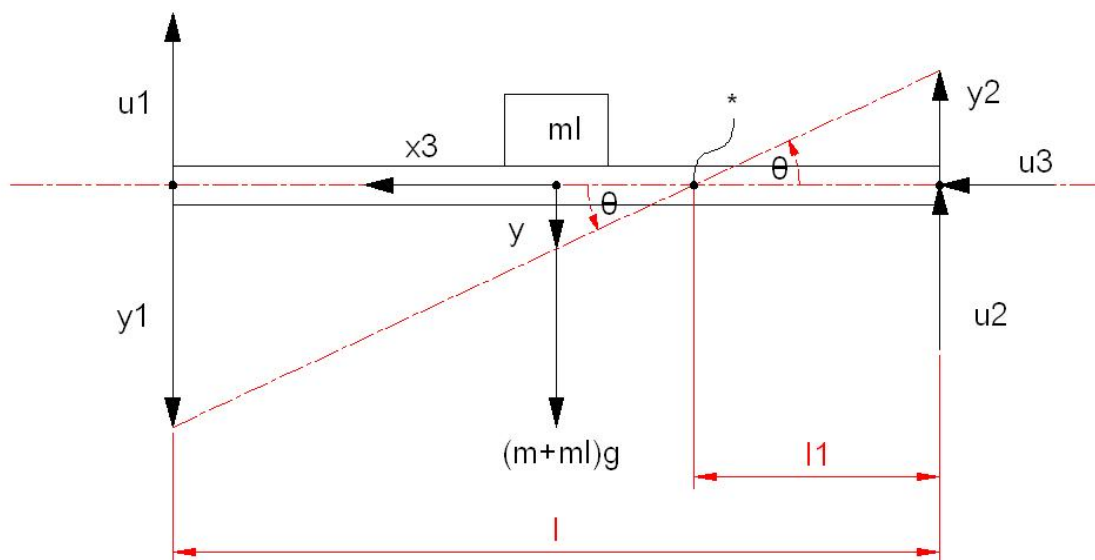
ภาพประกอบ 13 แสดงระบบควบคุมระนาบของรถขึ้น 4 ล้อ

การทำงานของระบบควบคุมส่วนกลาง ถือได้ว่าเป็นหัวใจสำคัญของระบบทั้งหมดซึ่งผู้วิจัยมีแนวคิดที่จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamic System) ในการรักษาระนาบของรถขึ้นโดยใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum Energy) โดยมีแนวทาง ดังนี้

1. จำลองการทำงานของระบบที่เกี่ยวข้องกับรถขึ้น 4 ล้อ ในรูปของสมการต่างๆ เช่น สมการการเคลื่อนที่, สมการพื้นผิว เป็นต้น
2. กำหนดเงื่อนไขบังคับ (Constraint) และตัวแปรควบคุม (Control Variable) ต่างๆ
3. ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamic System) ในการแก้ปัญหาของสมการโดยตั้งเป้าหมายที่การควบคุมระนาบของรถขึ้นโดยใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum Energy)
4. วิเคราะห์ผลความสัมพันธ์ของตัวแปรควบคุม (Control Variable) และเวลาในรูปกราฟ

3.2. สมการและการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข

สมการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการรักษาสมดุลระนาบรถเข็น 4 ล้อ สามารถหาได้จาก Free Body Diagram ของรถเข็น ซึ่งแสดงดังภาพประกอบ 3.3



ภาพประกอบ 14 Free Body Diagram ของรถเข็น 4 ล้อ

จาก Free Body Diagram มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

- x = ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน x
- y_1 = ระยะการเคลื่อนที่ของล้อหน้าในแนวแกน y
- y_2 = ระยะการเคลื่อนที่ของล้อหลังในแนวแกน y
- y_3 = ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ที่จุดศูนย์กลางของรถเข็น
- u_1 = แรงกระทำที่ล้อหน้าในแนวแกน y
- u_2 = แรงกระทำที่ล้อหลังในแนวแกน y
- u_3 = แรงกระทำเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวแกน x
- m = มวลของรถเข็น
- m_l = มวลของน้ำหนักบรรทุก
- l = ระยะระหว่างล้อหน้าและล้อหลังของรถเข็น
- l_1 = ระยะระหว่างล้อหลังและจุดหมุนของรถเข็น
- θ = องศาความลาดเอียงของระนาบรถเข็น
- $*$ = จุดหมุนของระนาบรถเข็น

สมการองศาความลาดเอียงและระยะจุดหมุนของรถเข็น

เมื่อรถเข็นเคลื่อนที่ไปบนพื้นเอียงจะทำให้ระนาบของรถเข็นเอียงตามสภาพของพื้น ซึ่งองศาความลาดเอียงที่เกิดขึ้นนี้เนื่องมาจากระยะการขึ้นลงของล้อหน้า (y_1) และล้อหลัง (y_2) ทำให้เกิดองศาความลาดเอียง θ ขึ้น

จากนั้นระบบชดเชยความต่างระดับของรถเข็น จะทำหน้าที่ให้ล้อหน้า-ล้อหลังชดเชยระดับของรถเข็นโดยมีเป้าหมายให้คงระนาบของรถเข็นไว้ ซึ่งระยะจากจุดหมุน * ไปจนถึงล้อหลังกำหนดให้มีระยะเป็น l_1

ซึ่งสมการองศาความลาดเอียงและระยะจุดหมุนของรถเข็นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\tan \theta = \frac{y_1}{l - l_1} = \frac{y_2}{l_1} = \frac{y_3}{\frac{l}{2} - l_1}$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{y_1}{l - l_1} &= \frac{y_2}{l_1} \\ y_1 l_1 &= y_2 (l - l_1) \\ y_1 l_1 &= y_2 l - y_2 l_1 \\ (y_1 + y_2) l_1 &= y_2 l \\ l_1 &= \frac{y_2 l}{y_1 + y_2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

และ

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y_2}{l_1} = \frac{y_2}{\frac{y_2 l}{y_1 + y_2}} \\ \tan \theta &= \frac{y_1 + y_2}{l} \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{y_1 + y_2}{l} \right)\end{aligned}\tag{3.2}$$

และ

$$\tan \theta = \frac{y_2}{l_1} = \frac{y_3}{\frac{l}{2} - l_1}$$

แทนค่า l_1 จากสมการ (3.1)

$$\frac{\frac{y_2}{y_1 + y_2}}{\frac{y_2 l}{y_1 + y_2}} = \frac{y_3}{\frac{l}{2} - \frac{y_2 l}{y_1 + y_2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_1 + y_2}{l} &= \frac{y_3}{(y_1 + y_2)l - 2y_2l} \\
y_3 &= \frac{y_1 + y_2}{l} \cdot \frac{(y_1 - y_2)l}{2(y_1 + y_2)} \\
y_3 &= \frac{y_1 - y_2}{2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

สมการสมดุลแรงในแนวแกน x

แรงที่ใช้ผลักให้รถเข็นเคลื่อนที่ไปข้างหน้า มีผลต่อพลังงานที่ใช้รักษาระนาบของรถเข็น โดยเมื่อใช้แรงผลักมากทำให้รถเข็นเคลื่อนที่เร็ว ระดับของรถเข็นเปลี่ยนแปลงเร็ว ทำให้ใช้พลังงานมากในการรักษาระนาบของรถเข็น ซึ่งสมการสมดุลแรงในแนวแกน x สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\leftarrow \sum F_x &= ma_x \\
u_3 &= (m + m_l)\ddot{x} \\
u_3 - (m + m_l)\ddot{x} &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

สมการสมดุลแรงในแนวแกน y

สมการสมดุลแรงในแนวแกน y นี้ เป็นแรงที่ขากระทำต่อระนาบของรถเข็น เมื่อรถเข็นเคลื่อนที่ไปบนพื้นเอียงและเกิดความลาดเอียง จะทำให้ระบบชดเชยความต่างระดับทำงาน ซึ่งสมการสมดุลแรงในแนวแกน y เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
+\uparrow \sum F_y &= ma_y \\
u_1 + u_2 - (m + m_l)g &= -(m + m_l)\ddot{y}_3 \\
u_1 + u_2 - (m + m_l)g + (m + m_l)\ddot{y}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

สมการโมเมนต์ที่จุดหมุน *

โมเมนต์ที่จุดหมุน * นี้ เกิดจากการพยายามรักษาระนาบของรถเข็นโดยระบบชดเชยความต่างระดับ ซึ่งจุดหมุนดังกล่าวนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\sum M_* &= I_*\alpha = I_*\ddot{\theta} \\
u_2l_1 + (m + m_l)g\left(\frac{l}{2} - l_1\right) - u_1(l - l_1) &= I_*\ddot{\theta}
\end{aligned}$$

จากสมการองศาความลาดเอียง $l_1 = \frac{y_2l}{y_1 + y_2}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
u_2 \left(\frac{y_2 l}{y_1 + y_2} \right) + (m + m_l) g \left(\frac{l}{2} - \left(\frac{y_1 l}{y_1 + y_2} \right) \right) - u_1 \left(l - \frac{y_1 l}{y_1 + y_2} \right) &= I_* \ddot{\theta} \\
u_2 \left(\frac{y_2 l}{y_1 + y_2} \right) + (m + m_l) g \left(\frac{y_1 l + y_2 l - 2y_2 l}{2(y_1 + y_2)} \right) - u_1 \left(\frac{y_1 l + y_2 l - y_2 l}{y_1 + y_2} \right) &= I_* \ddot{\theta} \\
u_2 \left(\frac{y_2 l}{y_1 + y_2} \right) + (m + m_l) g \left(\frac{(y_1 - y_2) l}{2(y_1 + y_2)} \right) + u_1 \left(\frac{y_1 l}{y_1 + y_2} \right) &= I_* \ddot{\theta} \\
\frac{l}{y_1 + y_2} (u_2 y_2 + (m + m_l) g (y_1 - y_2) - u_1 y_1) - I_* \ddot{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

สมการพลังงานน้อยสุด

พลังงานที่ใช้ผลักดันให้เกิดการเคลื่อนที่ทั้งหมดของรถเข็นนี้ จะทำให้อยู่ในรูปของสมการตามทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal Control of Dynamics System) เพื่อทำการวิเคราะห์และคำนวณหาค่าที่เหมาะสมสำหรับการรักษาระนาบของรถเข็น โดยมุ่งเน้นที่การใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum Energy) ซึ่งรูปแบบของสมการดังกล่าวเป็นดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt \tag{3.7}$$

3.3. การกำหนดปัญหา (State of the problem)

3.3.1 สเตตอีเควชัน (State Equation)

สมการสมดุลแรงและโมเมนต์ที่เกี่ยวข้องมีทั้งหมด 3 สมการ ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
u_3 - (m + m_l) \ddot{x} &= 0 \\
u_1 + u_2 - (m + m_l) g + (m + m_l) \ddot{y}_3 &= 0 \\
\frac{l}{y_1 + y_2} (u_2 y_2 + (m + m_l) g (y_1 - y_2) - u_1 y_1) - I_* \ddot{\theta} &= 0
\end{aligned}$$

3.3.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameter)

จากสมการสมดุลแรงและโมเมนต์ ตัวแปรบางตัวต้องจัดให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameter) ซึ่งประกอบไปด้วย m, m_l, g, l ซึ่งจะมีค่าคงที่ตลอดการคำนวณ

$$m = 20 \text{ kg}$$

$$m_l = 10 \text{ kg}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$l = 1 \text{ m}$$

3.3.3 คอนโทรลอินพุต (Control Input)

ตัวแปรที่ต้องจัดให้เป็นคอนโทรลอินพุต (Control Input) ได้แก่ u_1 , u_2 และ u_3

3.3.4 เงื่อนไขบังคับ (Constraints)

เริ่มด้วยการพิจารณากำหนดรูปร่างของสภาพพื้นผิว ซึ่งในการศึกษาวิจัยครั้งนี้กำหนดลักษณะสภาพพื้นผิวเป็นพื้นเอียงที่มีองศาไม่เกิน 30° ดังนั้นจึงใช้สมการ $y = mx + c$ เงื่อนไขบังคับจึงเป็นดังสมการ

1. ทางขึ้นพื้นเอียง 15° มีค่าเท่ากับ $m = \tan 15^\circ = 0.26795$

$$y = 0.26795x$$

2. ทางลงพื้นเอียง -15° มีค่าเท่ากับ $m = \tan -15^\circ = -0.26795$

$$y = -0.26795x$$

3. ทางขึ้นพื้นเอียง 30° มีค่าเท่ากับ $m = \tan 30^\circ = 0.57735$

$$y = 0.57735x$$

4. ทางลงพื้นเอียง -30° มีค่าเท่ากับ $m = \tan -30^\circ = -0.57735$

$$y = -0.57735x$$

5. องศาความลาดเอียงของรถ ซึ่งต้องปรับให้มาสู่สมดุระนาบ

$$\theta = 0^\circ$$

3.3.5 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (Initial and Boundary Condition)

เพื่อให้เป็นปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE : Two-point boundary value problem involving differential and algebraic equation) จึงต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยพิจารณาให้เริ่มต้นเคลื่อนที่ไปบนพื้นผิวตามสมการของเงื่อนไขบังคับ ณ จุดสตาร์ท $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ และสิ้นสุดที่ $x(t_f) = x_f, \dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$ โดยกำหนดค่าไว้ดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$x(t_f) = \text{Opencase}$$

$$\dot{x}(t_f) = \text{Opencase}$$

$$y(t_f) = \text{Opencase}$$

$$\dot{y}(t_f) = \text{Opencase}$$

$$\theta(t_f) = \text{Opencase}$$

$$\omega(t_f) = \text{Opencase}$$

3.3.6 คอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

เมื่อเราทำการวิเคราะห์ปัญหาได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปก็คือ ต้องกำหนดปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาออปติไมเซชัน (Optimization) โดยจะเป็นการค้นหาค่าคอนโทรลอินพุต (Control Input) $u(t)$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt$$

3.4 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในการพัฒนาโปรแกรมเพื่อทำการคำนวณตามวิธีดังที่กล่าวมานั้น ทางผู้ดำเนินการวิจัยได้ทำการออกแบบและเขียนโปรแกรมแมทแลป (MATLAB) เพื่อหาคำตอบของสมการ ซึ่งผู้วิจัยได้ขอความอนุเคราะห์นำโปรแกรมที่ทำการเขียนเพื่อแก้ปัญหาทางออปติไมเซชัน (Optimization) โดยโปรแกรม T.Veeraklaew 1995 มาช่วยในการวิเคราะห์และหาคำตอบสมการ ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการปรับปรุงให้เหมาะสมกับลักษณะสมการและเงื่อนไขต่างๆ เพื่อช่วยแก้ปัญหาของสมการดังกล่าว

บทที่ 4

ผลการทดสอบและการวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงานดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. การวิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบนี้จะเป็นผลที่ได้จากการวิเคราะห์หาคำตอบ ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาทางออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยเน้นที่การหาค่าพลังงานน้อยสุด ซึ่งผลของการแก้ปัญหาดังกล่าวนี้นี้แสดงด้วยกราฟทั้งสิ้น 9 กราฟเพื่อเปรียบเทียบและวิเคราะห์ผลดังนี้

กราฟที่ 1 : กราฟระยะจัดของรถตามแนวแกน x เทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $x-t$

กราฟที่ 2 : กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน x เทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $\dot{x}-t$

กราฟที่ 3 : กราฟระยะจัดของรถตามแนวแกน y เทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $y-t$

กราฟที่ 4 : กราฟความเร็วของรถตามแนวแกน y เทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $\dot{y}-t$

กราฟที่ 5 : กราฟระยะจัดเชิงมุม θ ของรถเทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $\theta-t$

กราฟที่ 6 : กราฟความเร็วเชิงมุม ω ของรถ เทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ $\omega-t$

กราฟที่ 7 : กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ u_1-t

กราฟที่ 8 : กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อหลังเทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ u_2-t

กราฟที่ 9 : กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ผลักรถเทียบกับ เวลา t

แสดงด้วยกราฟ u_3-t

4.1.1 การรักษาสมดุลระนาบบนพื้นเอียงไม่เกิน 15°

การจำลองลักษณะของพื้นเอียง เพื่อศึกษาการรักษาสมดุลระนาบบนพื้นเอียงไม่เกิน 15° นี้ ผู้วิจัยได้สมมุติให้เป็นพื้นเอียงในโรงพยาบาล ซึ่งใช้เป็นทางสัญจรระหว่างตึก และใช้รถเข็นบรรทุกอาหารและยา เป็นต้น เพื่อข้ามไปยังอีกตึกหนึ่ง โดยทั่วไปพื้นเอียงนี้จะถูกออกแบบให้มีความลาดเอียงไม่เกิน 15° ลักษณะของพื้นเอียงดังกล่าวจะเป็นไปดังสมการ

$$y = mx + c$$

โดยที่ y คือ ระยะจัดในแนวแกน y

x คือ ระยะจัดในแนวแกน x

m คือ slope ของพื้นผิวซึ่งมีค่า $m = \tan 15^\circ = 0.26795$

c คือ ค่าคงที่ ซึ่งกำหนดให้มีค่า $c = 0$ (โดยถือเสมือนว่าที่ $x_0 = 0, y_0 = 0$)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$y = 0.26795x$$

และกำหนดให้

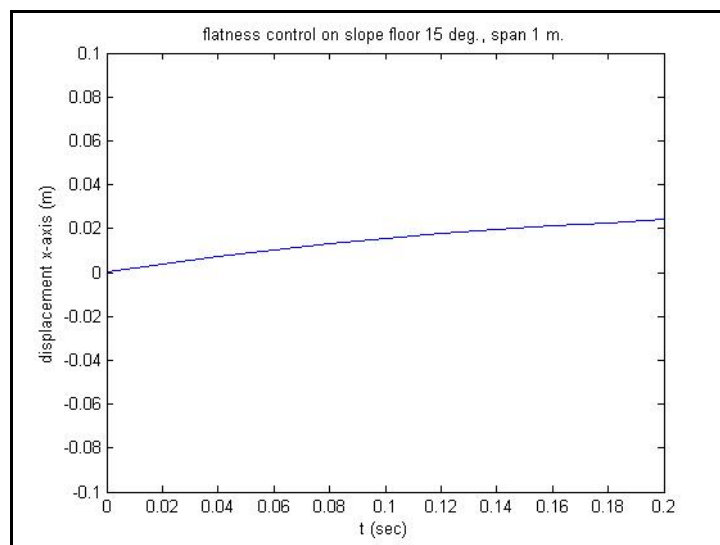
เวลาที่จุดเริ่มต้น $t_0 = 0\text{s}$.

เวลาที่จุดสุดท้าย $t_f = 0.2\text{s}$.

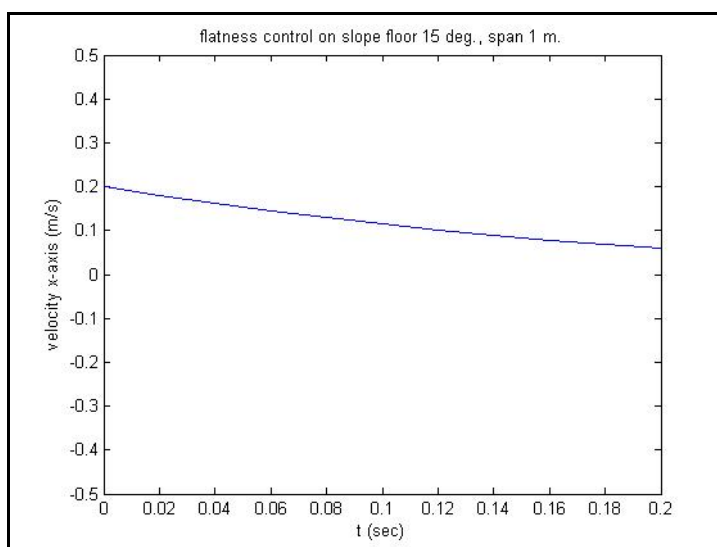
ช่วงของการหาคำตอบสมการ 6 interval

ระยะ span ระหว่างล้อ มีค่า 1m.

เมื่อรถเคลื่อนที่จากจุดหยุดหนึ่งไปบนพื้นเอียง 15° รถจะเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ทำให้เกิดความเร่งของเคลื่อนที่ในแนวแกน x ซึ่งสอดคล้องกันกับความเร็วในแนวแกน x แสดงดังภาพประกอบ 15 และ 16

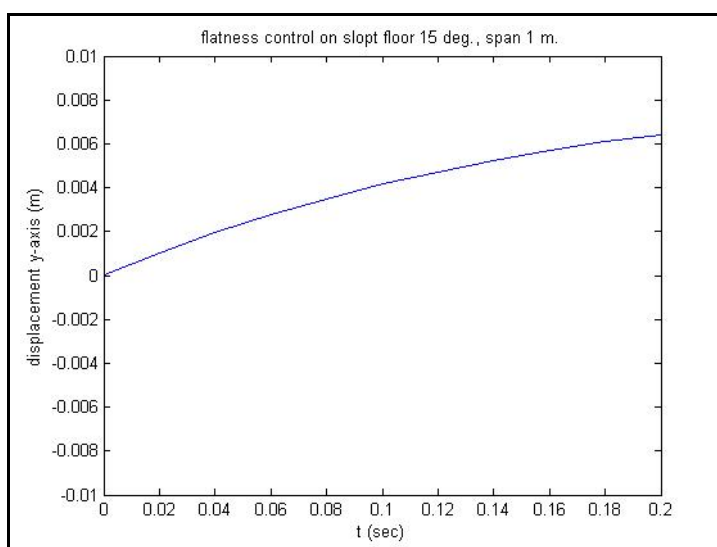


ภาพประกอบ 15 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

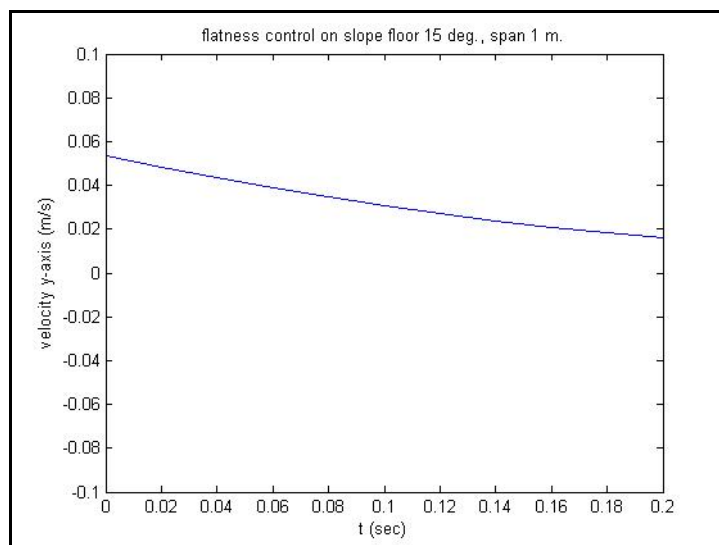


ภาพประกอบ 16 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ในขณะเดียวกัน ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ก็มีการเปลี่ยนแปลงตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะขจัดในแนวแกน x และระยะขจัดในแนวแกน y ดังสมการข้างต้น ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($y-t$) และความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($\dot{y}-t$) แสดงดังภาพประกอบ 17 และ 18

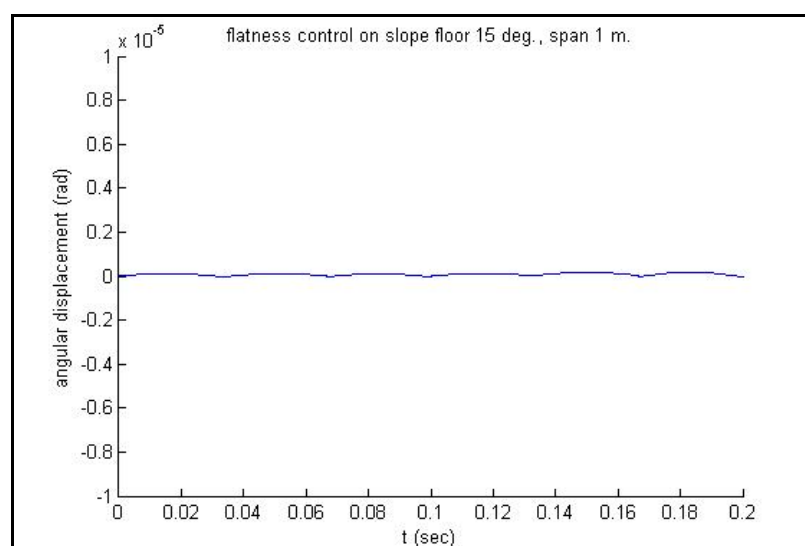


ภาพประกอบ 17 กราฟระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

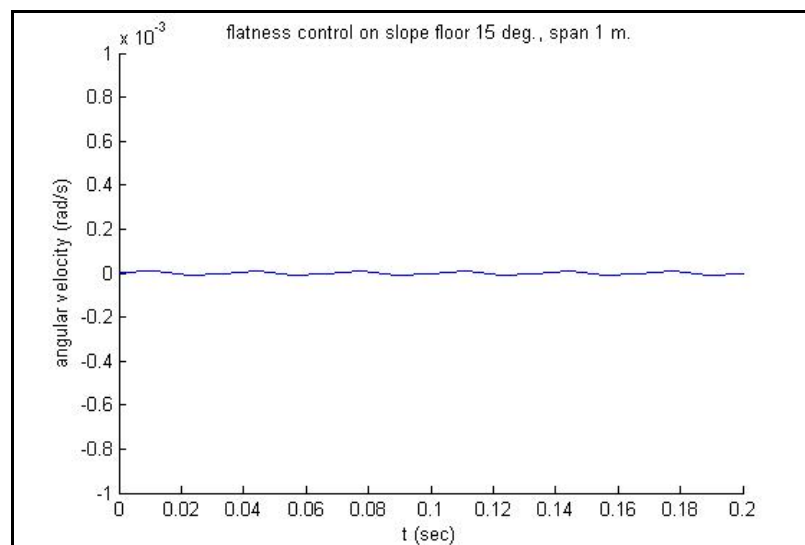


ภาพประกอบ 18 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ภายหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับของรถตามสภาพพื้นเอียงอย่างต่อเนื่องนี้ทำให้ตัวรถสูญเสียสมดุลระนาบ เกิดเป็นองศาความลาดเอียง θ ดังนั้นรถจึงพยายามปรับระนาบของตัวเองให้กลับสู่สมดุลระนาบอีกครั้ง ซึ่ง ณ จุดสมดุลดังกล่าวมีค่า $\theta = 0^\circ$ โดยช่วงของการหาคำตอบสมการได้ถูกกำหนดไว้ 6 ช่วง (6 interval) ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะจัดเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\theta-t$) และ ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\omega-t$) แสดงดังภาพประกอบ 19 และ 20

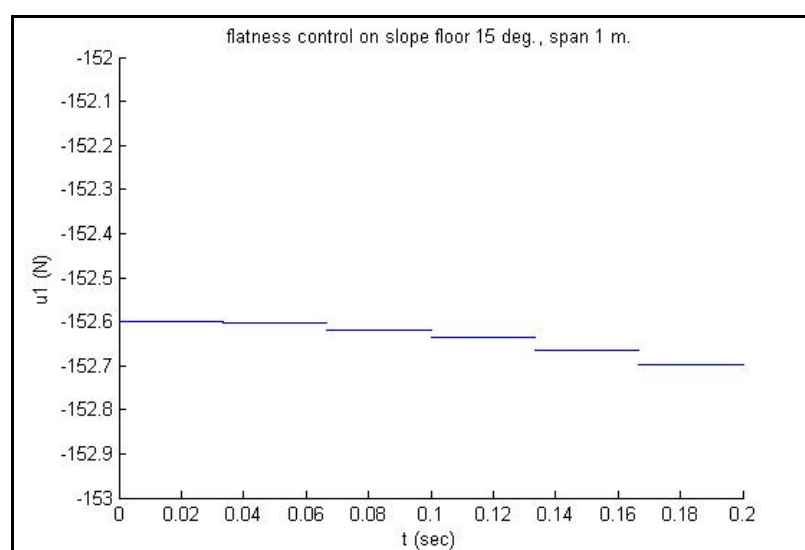


ภาพประกอบ 19 กราฟแสดงระยะจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

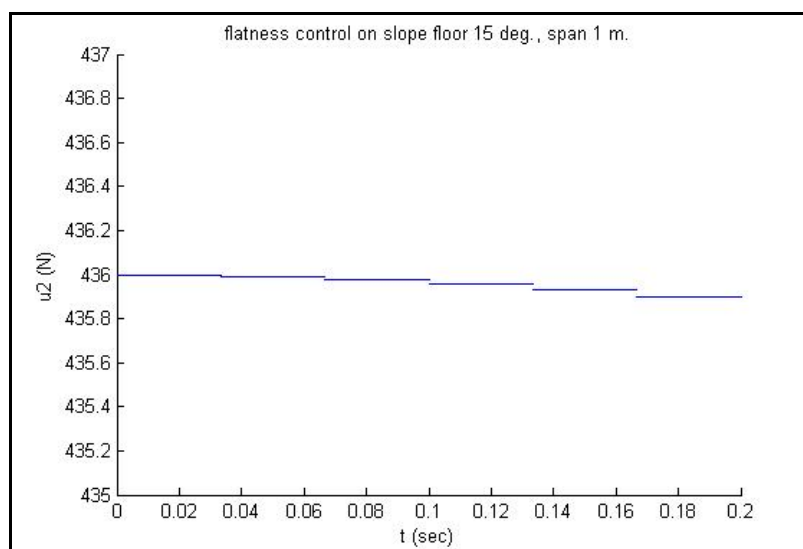


ภาพประกอบ 20 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

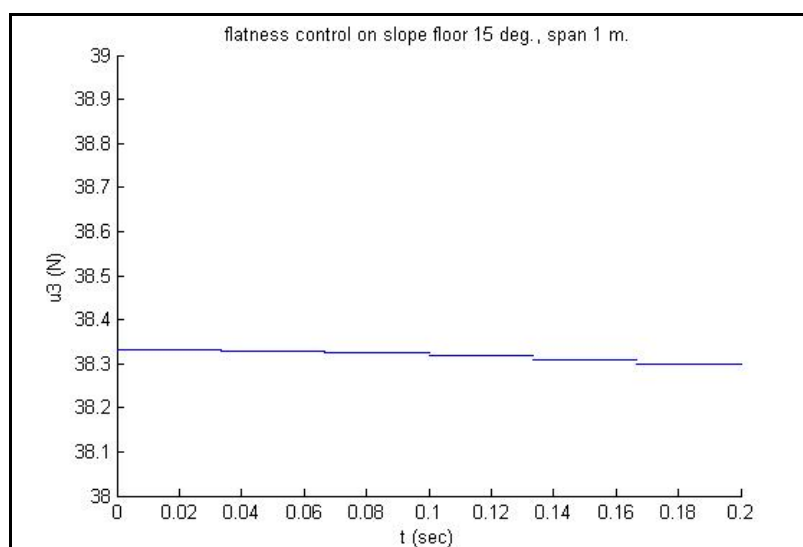
เมื่อรถเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ไปบนพื้นเอียง เกิดองศาความลาดเอียงเป็นมุม θ จากแนวนอน หลังจากนั้นแรงพุงรถที่ขาหน้าและขาหลังก็จะทำหน้าที่คอยควบคุมแรงกระทำให้ตัวรถกลับมาที่สมดุลระนาบอีกครั้งด้วยแรง u_1 และ u_2 ตามลำดับ โดยแรงทั้งสามนี้จะทำหน้าที่สัมพันธ์กัน แรงผลักรถให้เคลื่อนที่ u_3 เมื่อออกแรงมากจะทำให้ระดับเปลี่ยนแปลงเร็ว ก็จะทำให้ต้องใช้แรง u_1 และ u_2 เพิ่มขึ้นในการรักษาสสมดุลระนาบ ดังนั้นการควบคุมให้ u_3 อยู่ในสภาพที่เหมาะสมต่อการเคลื่อนที่ ก็จะช่วยให้ออกแรงในการรักษาสสมดุลระนาบน้อย และทำให้พลังงานรวมที่ใช้ในการควบคุมมีค่าน้อยไปด้วย ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำต่อตัวรถเทียบกับเวลา $(u_1 - t, u_2 - t, u_3 - t)$ แสดงดังภาพประกอบ 21 22 และ 23



ภาพประกอบ 21 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 22 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อยหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 23 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

4.1.2 การรักษาสมดุลระนาบทางลงพื้นเอียงไม่ต่ำกว่า -15°

การจำลองลักษณะของพื้นเอียง เพื่อศึกษาการรักษาสมดุลระนาบทางลงพื้นเอียงไม่ต่ำกว่า -15° นี้ ผู้วิจัยได้สมมติให้เป็นทางพื้นเอียงในโรงพยาบาล ซึ่งใช้เป็นทางสัญจรระหว่างตึก และใช้รถเข็นบรรทุกอาหารและยา เป็นต้น เพื่อเข้าไปยังอีกตึกหนึ่ง โดยทั่วไปทางลงพื้นเอียงนี้จะถูกออกแบบให้มีความลาดเอียงไม่ต่ำกว่า -15° ลักษณะของพื้นเอียงดังกล่าวจะเป็นไปดังสมการ

$$y = mx + c$$

โดยที่ y คือ ระยะจัดในแนวแกน y

x คือ ระยะจัดในแนวแกน x

m คือ slope ของพื้นผิวซึ่งมีค่า $m = \tan -15^\circ = -0.26795$

c คือ ค่าคงที่ ซึ่งกำหนดให้มีค่า $c = 0$ (โดยถือเสมือนว่าที่ $x_0 = 0, y_0 = 0$)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$y = -0.26795x$$

และกำหนดให้

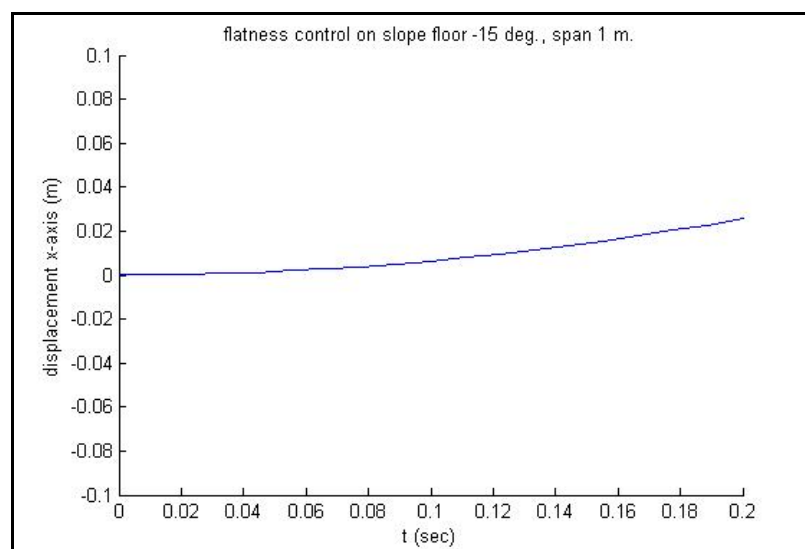
เวลาที่จุดเริ่มต้น $t_0 = 0\text{s}$.

เวลาที่จุดสุดท้าย $t_f = 0.2\text{s}$.

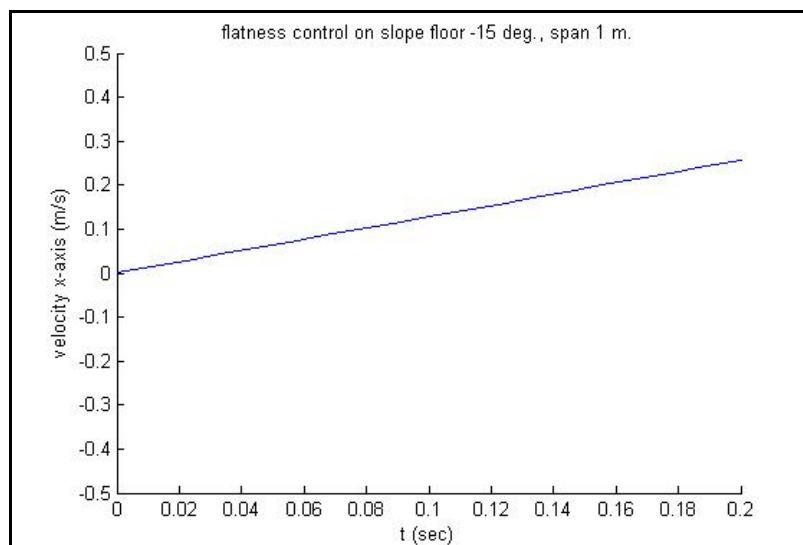
ช่วงของการหาคำตอบสมการ 6 interval

ระยะ span ระหว่างล้อ มีค่า 1m.

เมื่อรถเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งไปบนทางลงพื้นเอียง -15° รถจะเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ทำให้เกิดความเร่งของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ซึ่งสอดคล้องกับความเร็วในแนวแกน x แสดงดังภาพประกอบ 24 และ 25

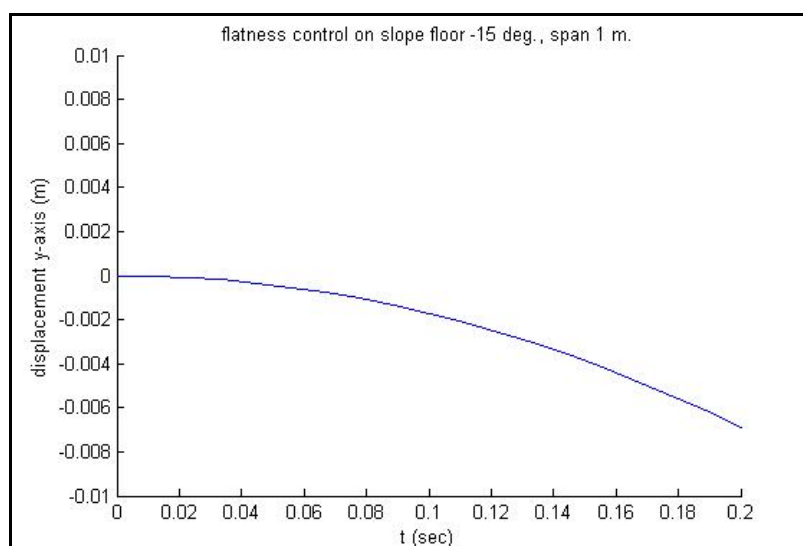


ภาพประกอบ 24 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

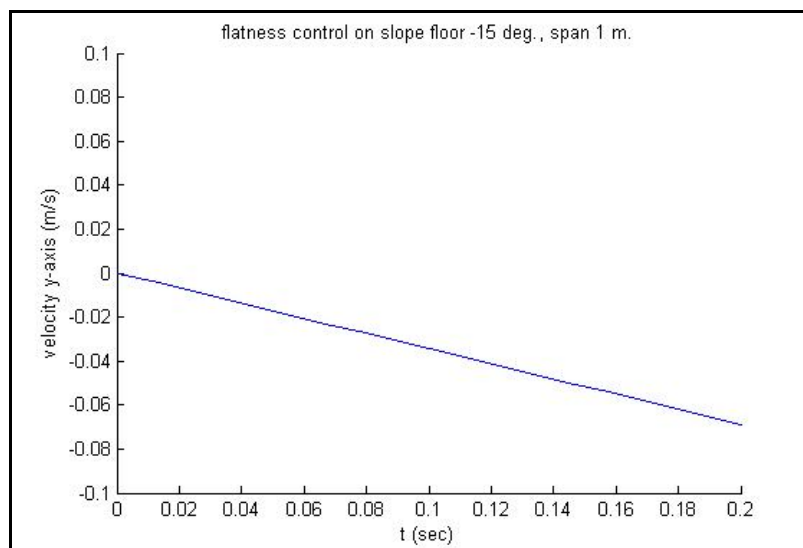


ภาพประกอบ 25 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ในขณะเดียวกัน ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ก็มีการเปลี่ยนแปลงตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะขจัดในแนวแกน x และระยะขจัดในแนวแกน y ดังสมการข้างต้น ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($y-t$) และความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($\dot{y}-t$) แสดงดังภาพประกอบ 26 และ 27

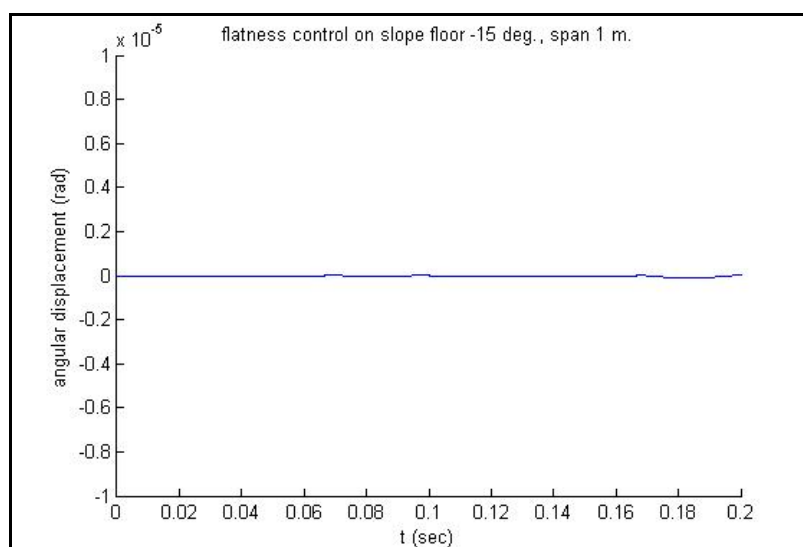


ภาพประกอบ 26 กราฟระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

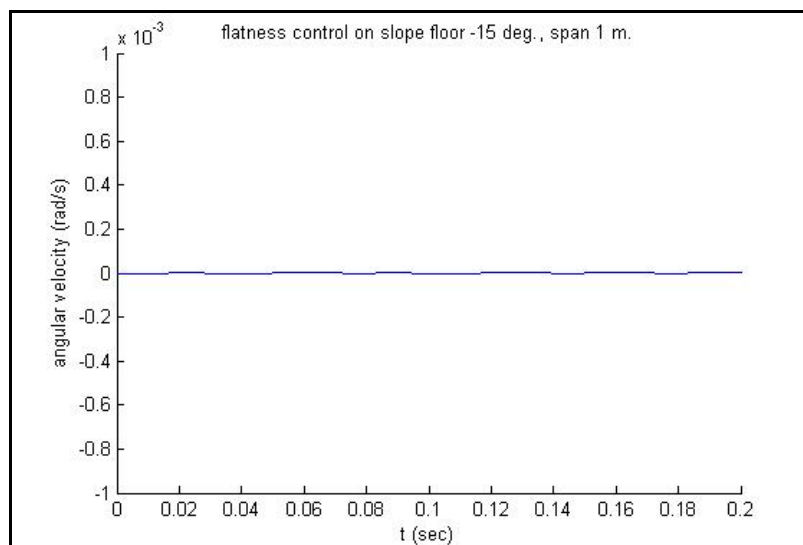


ภาพประกอบ 27 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ภายหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับของรถตามสภาพพื้นเอียงอย่างต่อเนื่องนี้ ทำให้ตัวรถสูญเสียสมดุลระนาบ เกิดเป็นองศาความลาดเอียง θ ดังนั้นรถจึงพยายามปรับระนาบของตัวเองให้กลับสู่สมดุลระนาบอีกครั้ง ซึ่ง ณ จุดสมดุลดังกล่าวมีค่า $\theta = 0^\circ$ โดยช่วงของการหาคำตอบสมการได้ถูกกำหนดไว้ 6 ช่วง (6 interval) ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะขจัดเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\theta - t$) และ ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\omega - t$) แสดงดังภาพประกอบ 28 และ 29

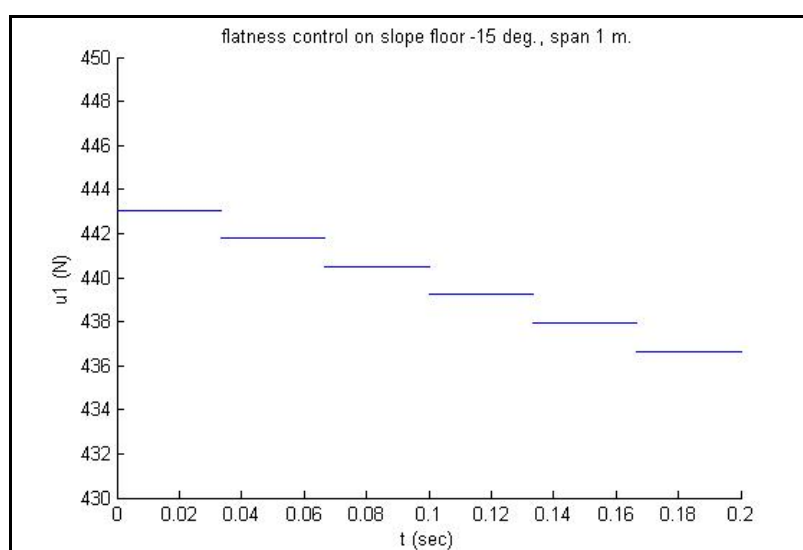


ภาพประกอบ 28 กราฟแสดงระยะขจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

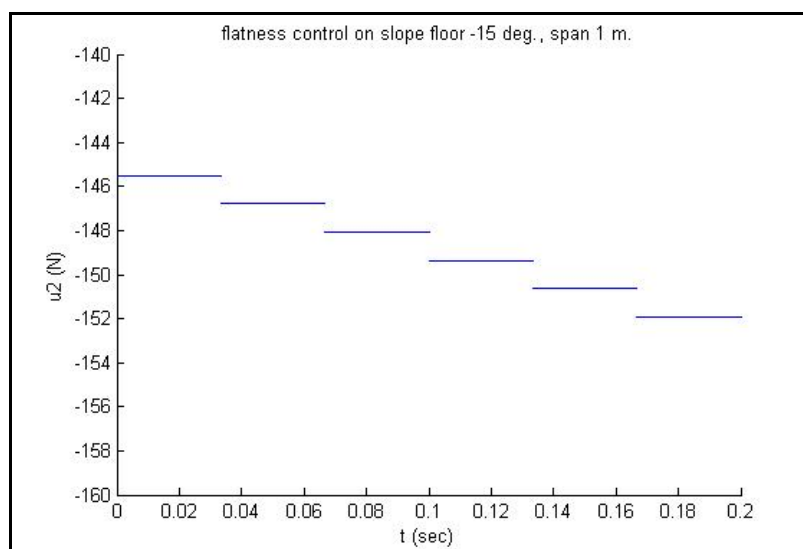


ภาพประกอบ 29 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}$ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

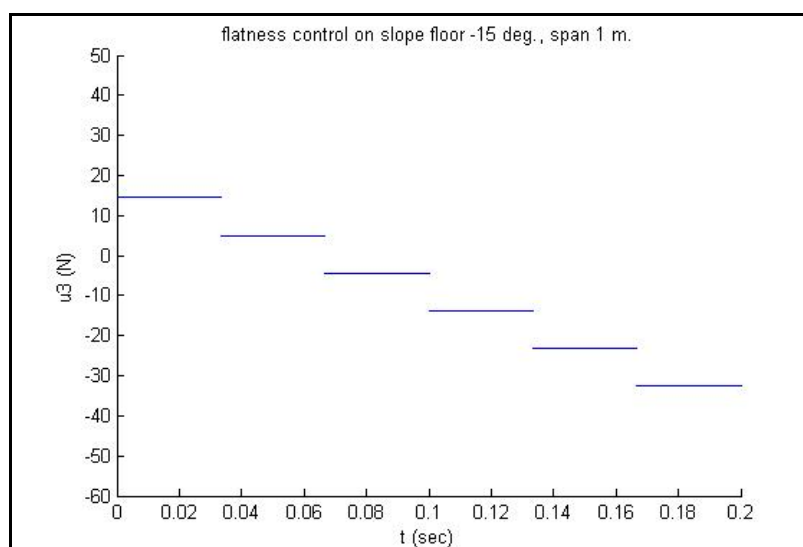
เมื่อรถเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ไปบนพื้นเอียง เกิดองศาความลาดเอียงเป็นมุม θ จากแนวนอน หลังจากนั้นแรงพยางรถที่ขาหน้าและขาหลังก็จะทำหน้าที่คอยควบคุมแรงกระทำให้ตัวรถกลับมาที่สมดุลระนาบอีกครั้งด้วยแรง u_1 และ u_2 ตามลำดับ โดยแรงทั้งสามนี้จะทำหน้าที่สัมพันธ์กัน แรงผลักรถให้เคลื่อนที่ u_3 เมื่อออกแรงมากจะทำให้ระดับเปลี่ยนแปลงเร็ว ก็จะทำให้ต้องใช้แรง u_1 และ u_2 เพิ่มขึ้นในการรักษาสมดุลระนาบ ดังนั้นการควบคุมให้ u_3 อยู่ในสภาพที่เหมาะสมต่อการเคลื่อนที่ ก็จะช่วยให้ออกแรงในการรักษาสมดุลระนาบน้อย และทำให้พลังงานรวมที่ใช้ในการควบคุมมีค่าน้อยไปด้วย ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำต่อตัวรถเทียบกับเวลา $(u_1 - t, u_2 - t, u_3 - t)$ แสดงดังภาพประกอบ 30 31 และ 32



ภาพประกอบ 30 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 31 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้นหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 32 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้นหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -15° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

4.1.3 การรักษาสมดุลระนาบบนพื้นเอียงไม่เกิน 30°

การจำลองลักษณะของพื้นเอียง เพื่อศึกษาการรักษาสมดุลระนาบบนพื้นเอียงไม่เกิน 30° นี้ ผู้วิจัยได้สมมุติให้เป็นพื้นเอียงเนื่องจากสภาพการเปลี่ยนแปลงผิวถนนแบบทันที และมีความลาดชัน ลักษณะของพื้นเอียงดังกล่าวจะเป็นไปดังสมการ

$$y = mx + c$$

โดยที่ y คือ ระยะจัดในแนวแกน y

x คือ ระยะจัดในแนวแกน x

m คือ slope ของพื้นผิวซึ่งมีค่า $m = \tan 30^\circ = 0.57735$

c คือ ค่าคงที่ ซึ่งกำหนดให้มีค่า $c = 0$ (โดยถือเสมือนว่าที่ $x_0 = 0, y_0 = 0$)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$y = 0.57735x$$

และกำหนดให้

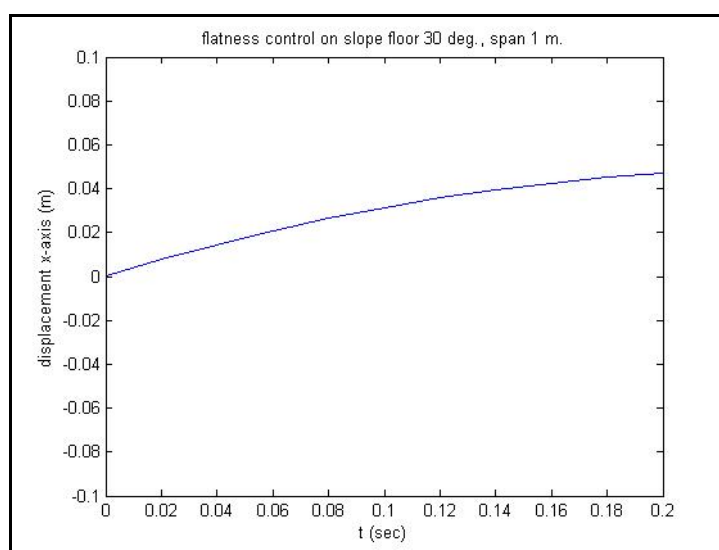
เวลาที่จุดเริ่มต้น $t_0 = 0\text{s}$.

เวลาที่จุดสุดท้าย $t_f = 0.2\text{s}$.

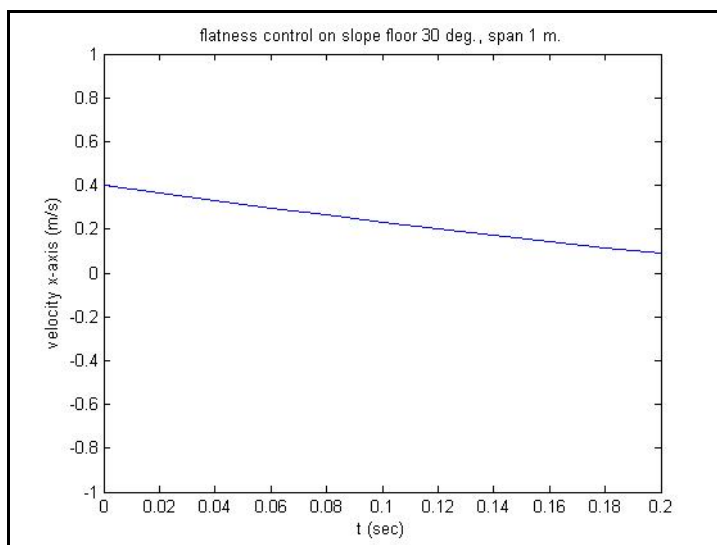
ช่วงของการหาคำตอบสมการ 6 interval

ระยะ span ระหว่างล้อ มีค่า 1m.

เมื่อรถเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งไปบนพื้นเอียง 30° รถจะเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ทำให้เกิดความเร่งของเคลื่อนที่ในแนวแกน x ซึ่งสอดคล้องกันกับความเร็วในแนวแกน x แสดงดังภาพประกอบ 33 และ 34

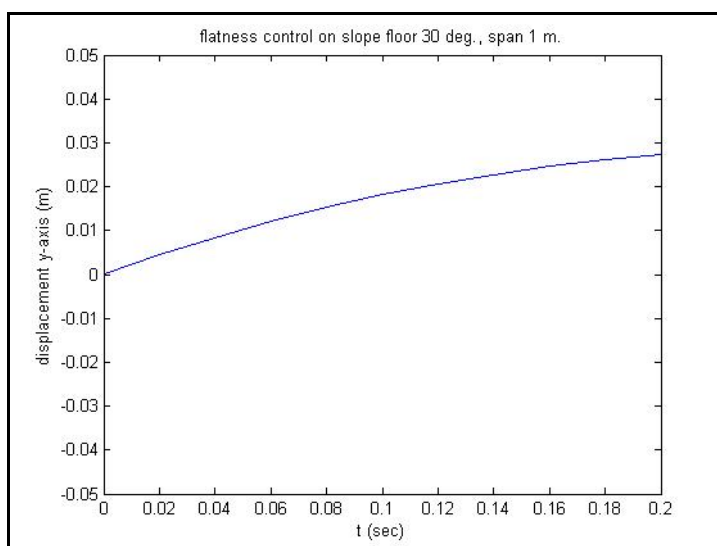


ภาพประกอบ 33 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

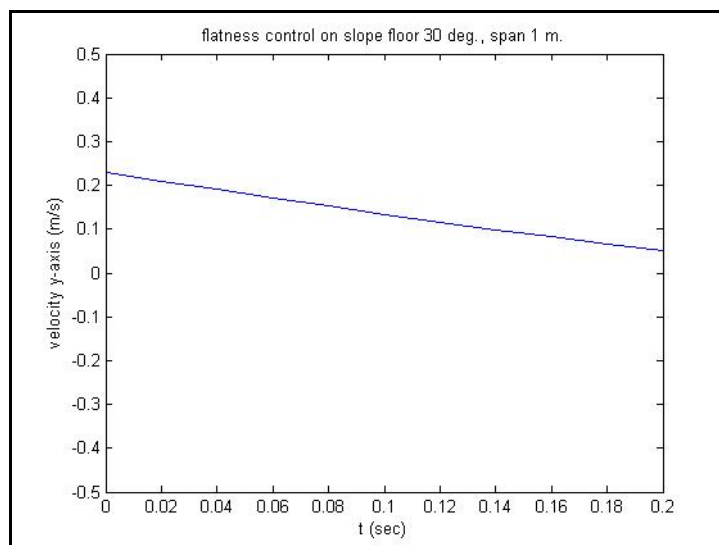


ภาพประกอบ 34 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ในขณะเดียวกัน ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ก็มีการเปลี่ยนแปลงตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะขจัดในแนวแกน x และระยะขจัดในแนวแกน y ดังสมการข้างต้น ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($y-t$) และความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($\dot{y}-t$) แสดงดังภาพประกอบ 35 และ 36

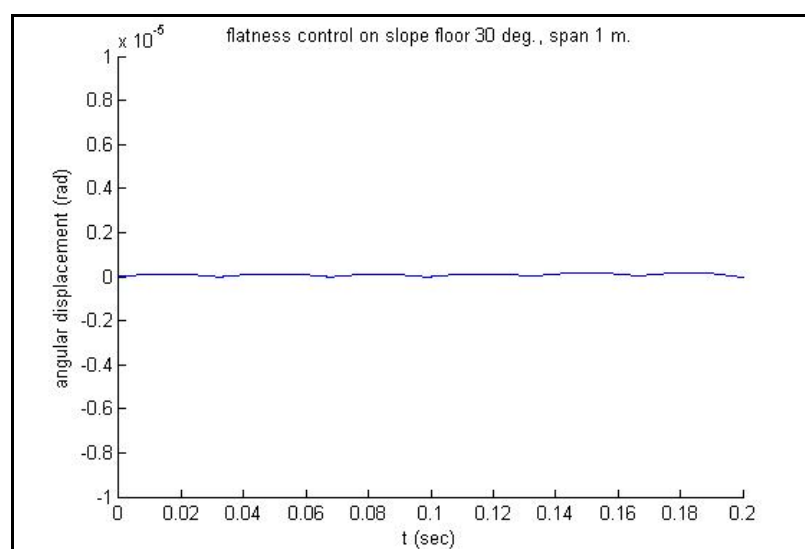


ภาพประกอบ 35 กราฟระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

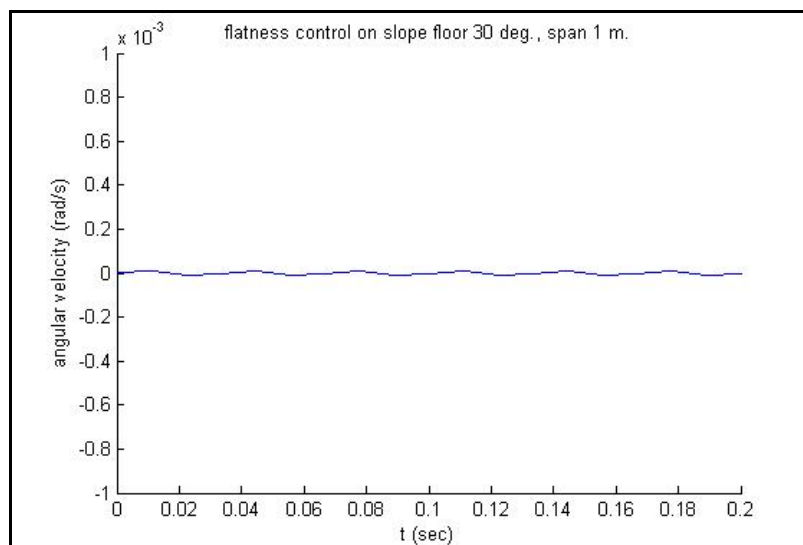


ภาพประกอบ 36 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ภายหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับของรถตามสภาพพื้นเอียงอย่างต่อเนื่องนี้ทำให้ตัวรถสูญเสียสมดุลระนาบ เกิดเป็นองศาความลาดเอียง θ ดังนั้นรถจึงพยายามปรับระนาบของตัวเองให้กลับสู่สมดุลระนาบอีกครั้ง ซึ่ง ณ จุดสมดุลดังกล่าวมีค่า $\theta = 0^\circ$ โดยช่วงของการหาคำตอบสมการได้ถูกกำหนดไว้ 6 ช่วง (6 interval) ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะจัดเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\theta-t$) และ ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\omega-t$) แสดงดังภาพประกอบ 37 และ 38

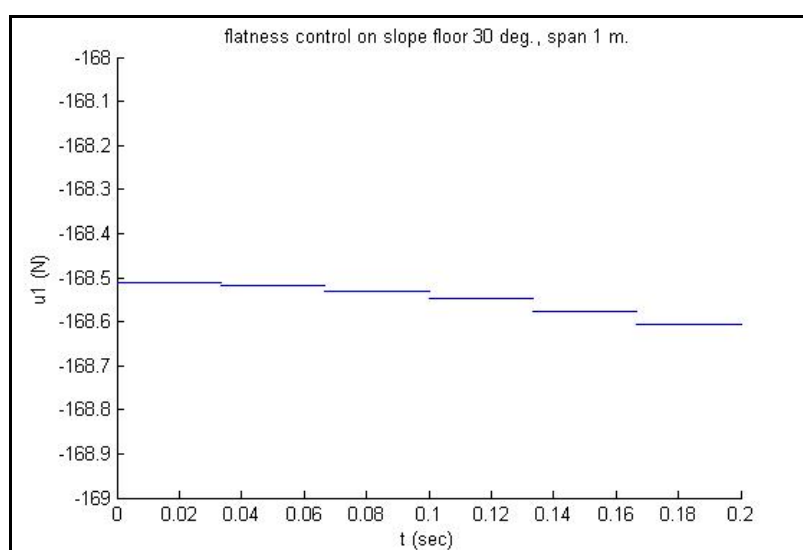


ภาพประกอบ 37 กราฟแสดงระยะจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

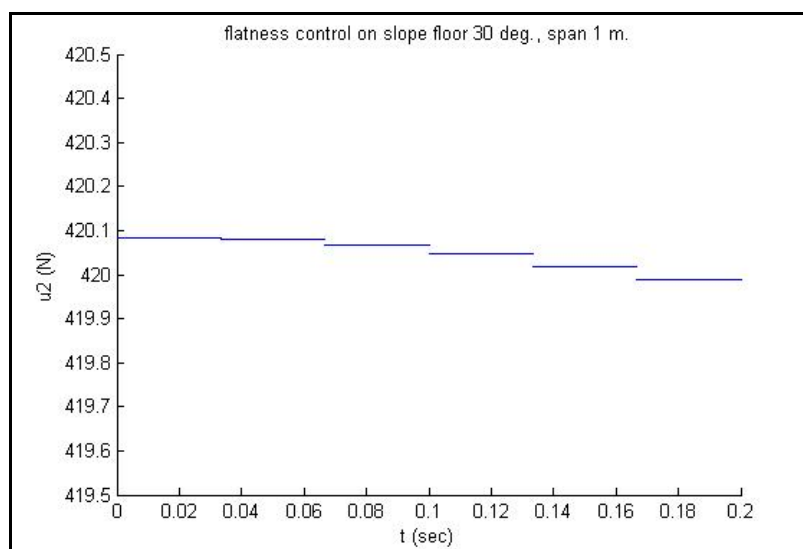


ภาพประกอบ 38 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม ω เทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

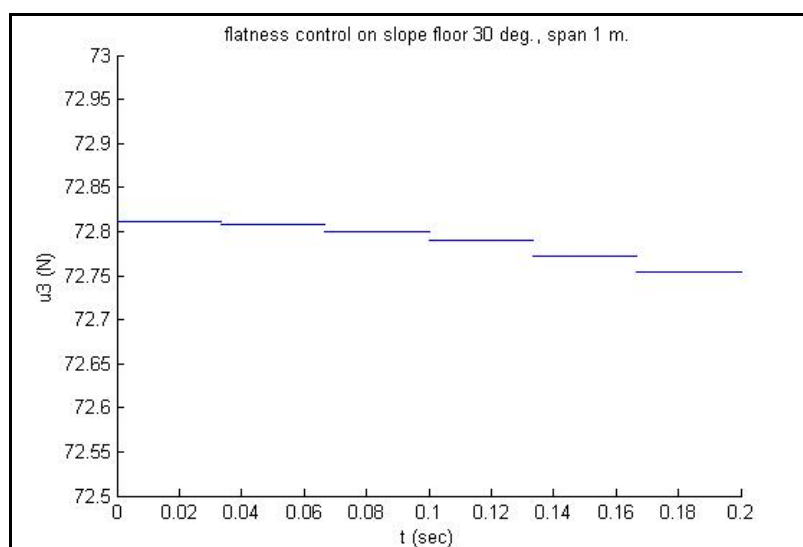
เมื่อรถเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ไปบนพื้นเอียง เกิดองศาความลาดเอียงเป็นมุม θ จากแนวนอน หลังจากนั้นแรงพยางรถที่ขาหน้าและขาหลังก็จะทำหน้าที่คอยควบคุมแรงกระทำให้ตัวรถกลับมาที่สมดุลระนาบอีกครั้งด้วยแรง u_1 และ u_2 ตามลำดับ โดยแรงทั้งสามนี้จะทำหน้าที่สัมพันธ์กัน แรงผลักรถให้เคลื่อนที่ u_3 เมื่อออกแรงมากจะทำให้ระดับเปลี่ยนแปลงเร็ว ก็จะทำให้ต้องใช้แรง u_1 และ u_2 เพิ่มขึ้นในการรักษาสสมดุลระนาบ ดังนั้นการควบคุมให้ u_3 อยู่ในสภาพที่เหมาะสมต่อการเคลื่อนที่ ก็จะช่วยให้ออกแรงในการรักษาสสมดุลระนาบน้อย และทำให้พลังงานรวมที่ใช้ในการควบคุมมีค่าน้อยไปด้วย ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำต่อตัวรถเทียบกับเวลา ($u_1 - t, u_2 - t, u_3 - t$) แสดงดังภาพประกอบ 39 40 และ 41



ภาพประกอบ 39 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 40 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อยหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 41 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อยหน้าเทียบกับเวลา t ที่พื้นเอียง 30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

4.1.4 การรักษาสมดุลระนาบทางลงพื้นเอียงไม่ต่ำกว่า -30°

การจำลองลักษณะของพื้นเอียง เพื่อศึกษาการรักษาสมดุลระนาบทางลงพื้นเอียงไม่ต่ำกว่า -30° นี้ ผู้วิจัยได้สมมุติให้เป็นพื้นเอียงเนื่องจากสภาพการเปลี่ยนแปลงผิวถนนแบบทันใดและความลาดชัน ลักษณะของพื้นเอียงดังกล่าวจะเป็นไปดังสมการ

$$y = mx + c$$

โดยที่ y คือ ระยะจัดในแนวแกน y

x คือ ระยะจัดในแนวแกน x

m คือ slope ของพื้นผิวซึ่งมีค่า $m = \tan -30^\circ = -0.57735$

c คือ ค่าคงที่ ซึ่งกำหนดให้มีค่า $c = 0$ (โดยถือเสมือนว่าที่ $x_0 = 0, y_0 = 0$)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$y = -0.57735x$$

และกำหนดให้

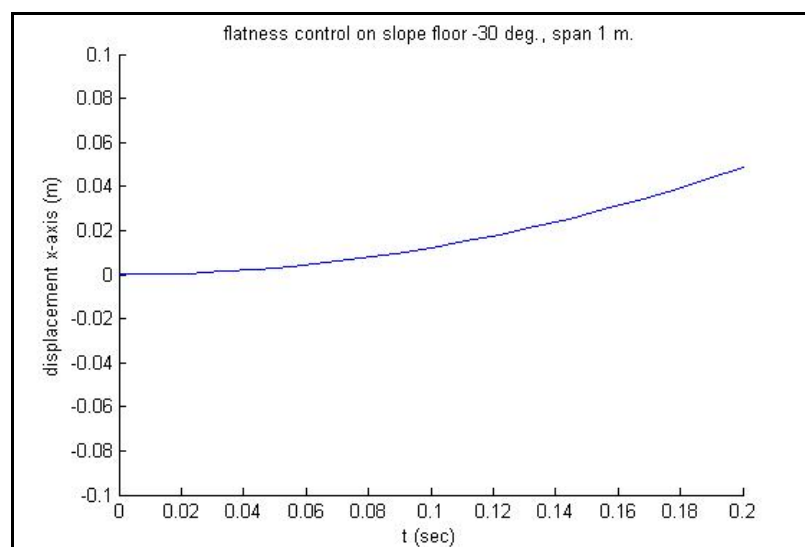
เวลาที่จุดเริ่มต้น $t_0 = 0\text{s}$.

เวลาที่จุดสุดท้าย $t_f = 0.2\text{s}$.

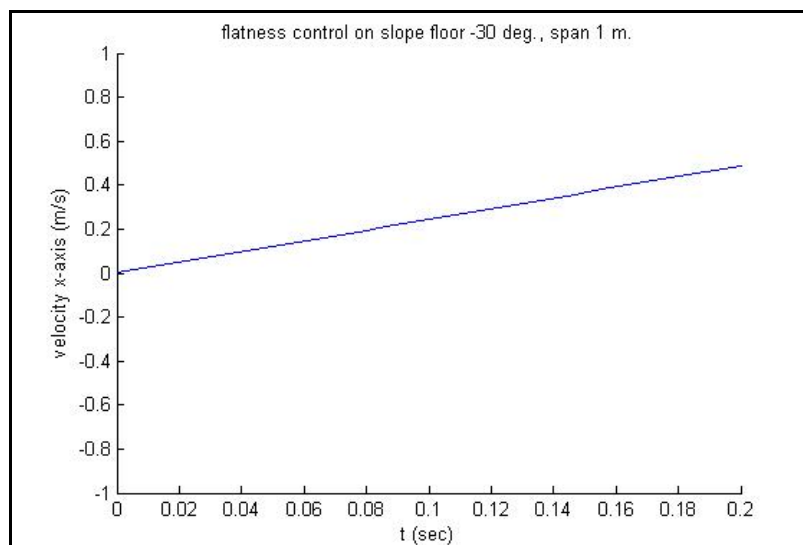
ช่วงของการหาคำตอบสมการ 6 interval

ระยะ span ระหว่างล้อ มีค่า 1m.

เมื่อรถเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งไปบนทางลงพื้นเอียง -30° รถจะเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ทำให้เกิดความเร่งของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x ซึ่งสอดคล้องกับความเร็วในแนวแกน x แสดงดังภาพประกอบ 42 และ 43

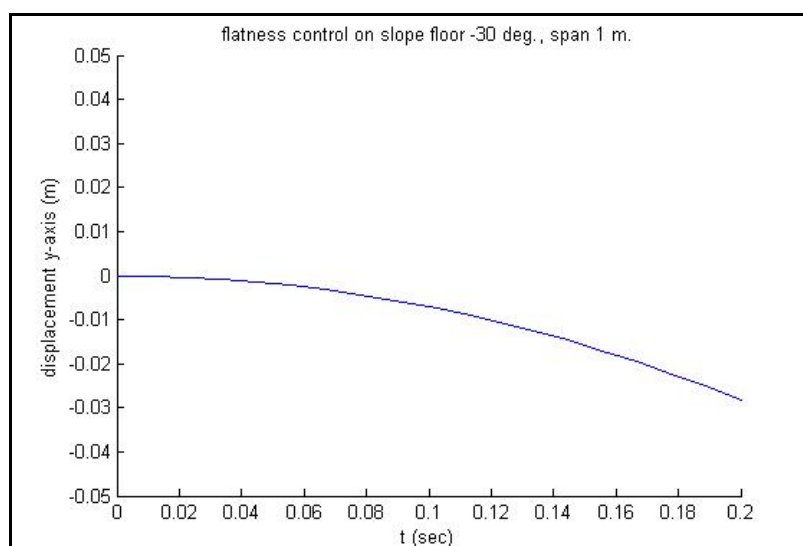


ภาพประกอบ 42 กราฟแสดงระยะจัดในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

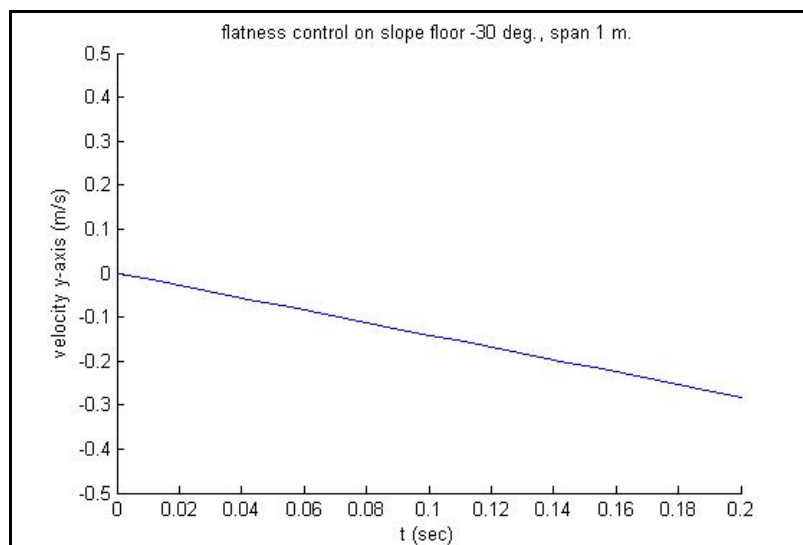


ภาพประกอบ 43 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ในขณะเดียวกัน ระยะการเคลื่อนที่ในแนวแกน y ก็มีการเปลี่ยนแปลงตามความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะขจัดในแนวแกน x และระยะขจัดในแนวแกน y ดังสมการข้างต้น ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($y-t$) และความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา ($\dot{y}-t$) แสดงดังภาพประกอบ 44 และ 45

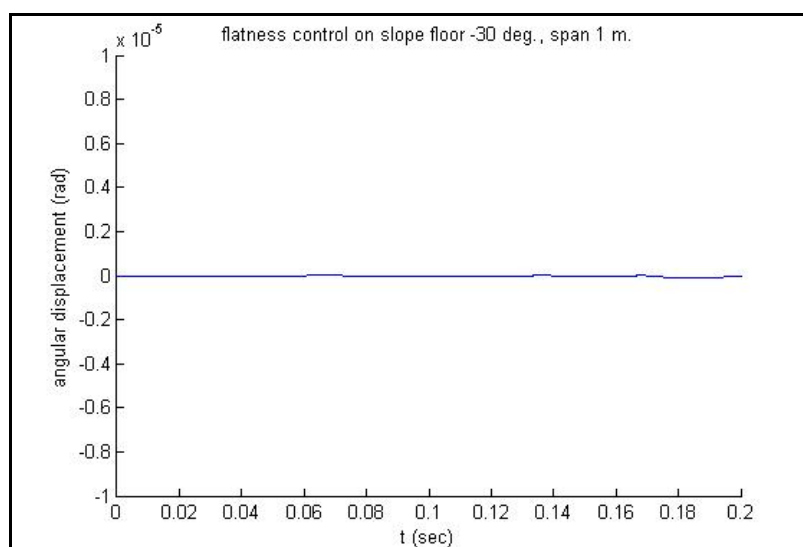


ภาพประกอบ 44 กราฟระยะขจัดในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

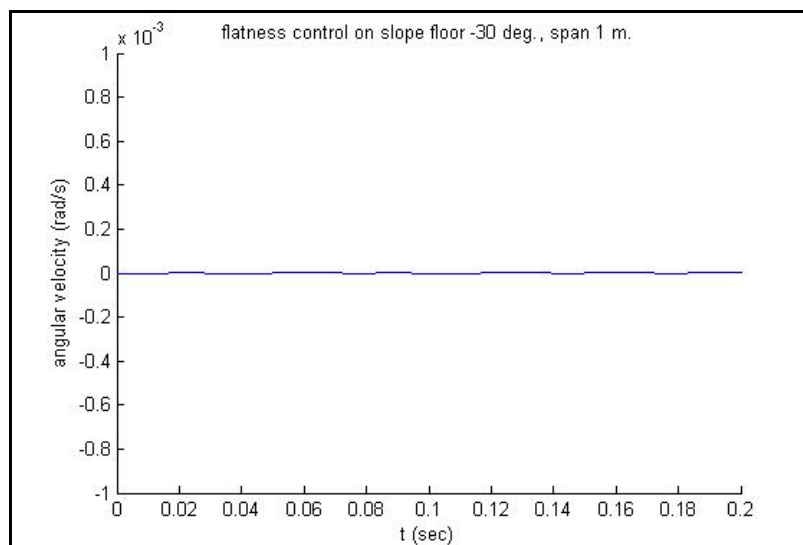


ภาพประกอบ 45 กราฟแสดงความเร็วในแนวแกน y เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

ภายหลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับของรถตามสภาพพื้นเอียงอย่างต่อเนื่องนี้ทำให้ตัวรถสูญเสียสมดุลระนาบ เกิดเป็นองศาความลาดเอียง θ ดังนั้นรถจึงพยายามปรับระนาบของตัวเองให้กลับสู่สมดุลระนาบอีกครั้ง ซึ่ง ณ จุดสมดุลดังกล่าวมีค่า $\theta = 0^\circ$ โดยช่วงของการหาคำตอบสมการได้ถูกกำหนดไว้ 6 ช่วง (6 interval) ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะจัดเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\theta-t$) และ ความเร็วเชิงมุมเทียบกับเวลา ($\omega-t$) แสดงดังภาพประกอบ 46 และ 47

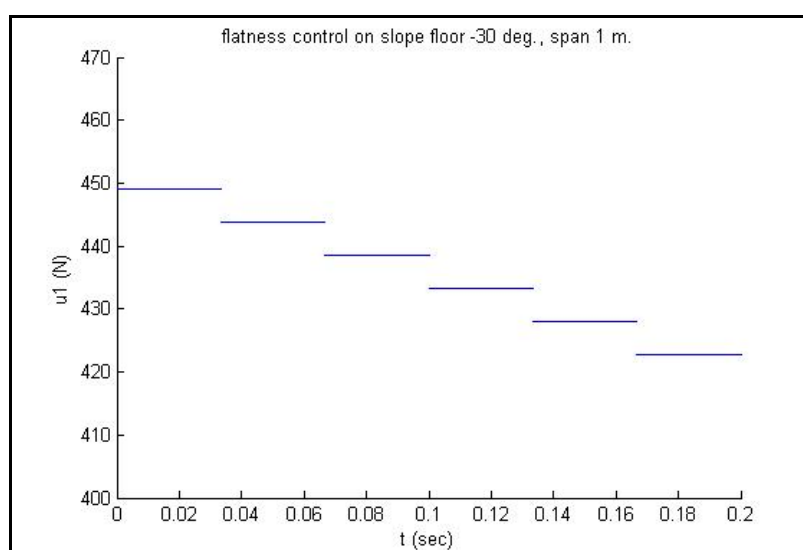


ภาพประกอบ 46 กราฟแสดงระยะจัดเชิงมุม θ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

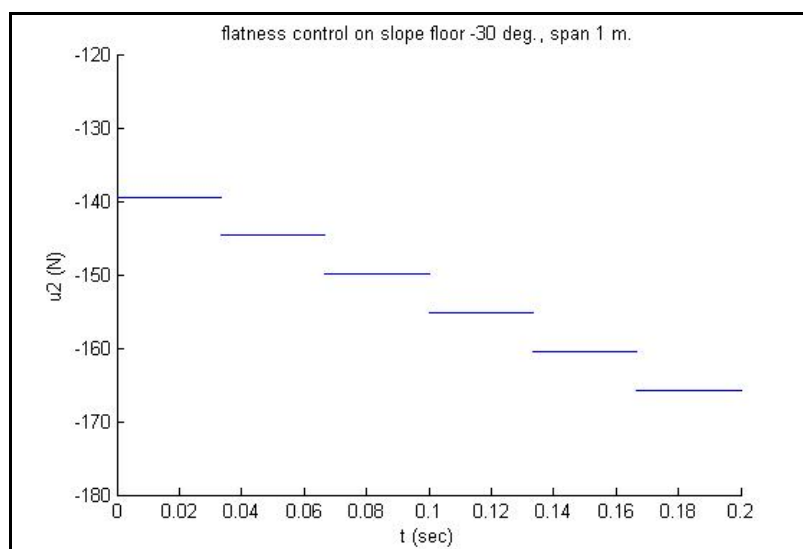


ภาพประกอบ 47 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุม $\dot{\theta}$ เทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

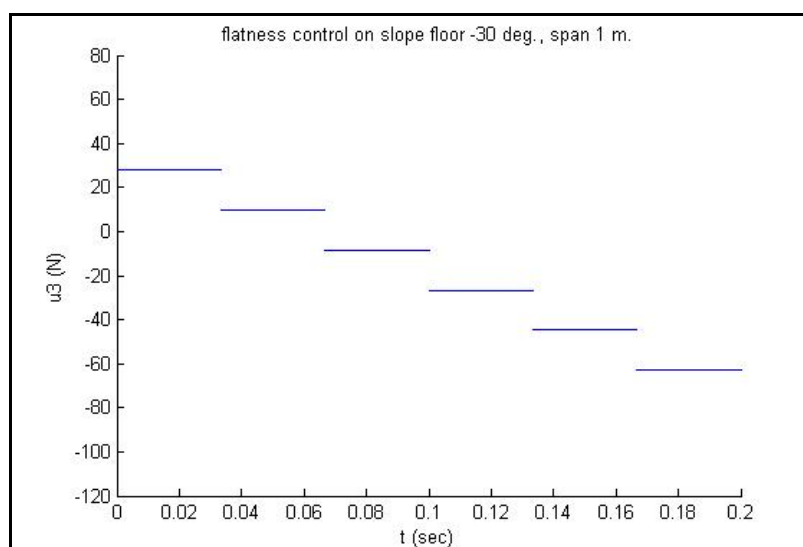
เมื่อรถเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ไปบนพื้นเอียง เกิดองศาความลาดเอียงเป็นมุม θ จากแนวนอน หลังจากนั้นแรงพยุงรถที่ขาหน้าและขาหลังก็จะทำหน้าที่คอยควบคุมแรงกระทำให้ตัวรถกลับมาที่สมดุลระนาบอีกครั้งด้วยแรง u_1 และ u_2 ตามลำดับ โดยแรงทั้งสามนี้จะทำหน้าที่สัมพันธ์กัน แรงผลักรถให้เคลื่อนที่ u_3 เมื่อออกแรงมากจะทำให้ระดับเปลี่ยนแปลงเร็ว ก็จะทำให้ต้องใช้แรง u_1 และ u_2 เพิ่มขึ้นในการรักษาสสมดุลระนาบ ดังนั้นการควบคุมให้ u_3 อยู่ในสภาพที่เหมาะสมต่อการเคลื่อนที่ ก็จะช่วยให้ออกแรงในการรักษาสสมดุลระนาบน้อย และทำให้พลังงานรวมที่ใช้ในการควบคุมมีค่าน้อยไปด้วย ซึ่งสามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำต่อตัวรถเทียบกับเวลา $(u_1 - t, u_2 - t, u_3 - t)$ แสดงดังภาพประกอบ 48 49 และ 50



ภาพประกอบ 48 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_1 ที่ล้อหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 49 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_2 ที่ล้อยหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.



ภาพประกอบ 50 กราฟแรงกระทำต่อตัวรถ u_3 ที่ล้อยหน้าเทียบกับเวลา t ที่ทางลงพื้นเอียง -30° ระยะระหว่างล้อ 1 m.

4.2 การวิเคราะห์ผลการทดสอบ

กำหนดให้ รถเข็นซึ่งมีระยะห่างระหว่างล้อ (Span) 1 m. มีน้ำหนักของตัวรถ 20 kg และมีน้ำหนักบรรทุกที่จุดกึ่งกลางรถ 10 kg วิ่งไปบนพื้นผิวซึ่งเป็นไปดั่งสมการ $y = mx + c$ โดยมีคอนโทรลอินพุต (Control input) จำนวน 3 ตัวแปร ได้แก่ u_1 = แรงพยุ่งรถที่ล้อยหน้า, u_2 = แรงพยุ่งรถที่ล้อยหลัง, u_3 = แรงผลักดันให้รถวิ่ง นอกจากนั้นก็จะมีการกำหนดเงื่อนไขบังคับให้รถรักษาระนาบตลอดการเคลื่อนที่

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาค่าพลังงานน้อยสุดที่ใช้ในการเคลื่อนที่ และรักษาสมุมระนาบ จะได้แสดงออกมาในลักษณะกราฟทั้งสิ้น 9 กราฟ ประกอบไปด้วย ระยะขจัดของรถในแนวแกน x และแกน y , ความเร็วของรถในแนวแกน x และแกน y , องศาความลาดเอียง θ และความเร็วเชิงมุม ω แรงกระทำในแนวแกน x เพื่อให้รถเคลื่อนที่ และแรงกระทำในแนวแกน y เพื่อรักษาสมุมระนาบ

จากกราฟจะพบว่าเมื่อรถเคลื่อนที่ไปบนพื้นเอียงและเกิดองศาความลาดเอียงขึ้น ตัวรถก็จะพยายามปรับระนาบตัวเองให้กลับมาสุม $\theta = 0^\circ$ อีกครั้งด้วยแรง u_1 และ u_2 โดยมีแรง u_3 เป็นตัวกำหนดความเร็วที่เหมาะสมต่อการเคลื่อนที่ของตัวรถ

และเมื่อวิเคราะห์ถึงความถูกต้องของคำตอบที่ได้ โดยการพิจารณาความสอดคล้องและความสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขขอบเขต รวมทั้งเงื่อนไขบังคับ ก็พบว่ามีความสมเหตุสมผลและสอดคล้องกัน โดยสามารถอธิบายได้ว่า เมื่อรถเคลื่อนที่ด้วยแรงกระทำ u_3 ให้เคลื่อนที่ไปบนพื้นเอียง ตัวรถจะเอียงตามสภาพพื้นผิวตามสมการข้างต้น ทำให้เกิดองศาความลาดเอียงเป็นมุม θ จากแนวระนาบ หลังจากนั้นแรงพยุกรถที่ขาหน้าและขาหลัง ก็จะทำหน้าที่คอยดึงและดันให้ตัวรถกลับมาระนาบเดิมด้วยแรง u_1 และ u_2 ตามลำดับ โดยแรงผลักดันตัวรถทั้ง 3 แรงนี้จะทำหน้าที่สัมพันธ์กัน แรงผลักดันให้เคลื่อนที่ u_3 จะออกแรงเพิ่มขึ้นเมื่อขึ้นเนินและคอยดึงรถไว้เมื่อลงเนิน เพื่อควบคุมไม่ให้รถเคลื่อนที่เร็วเกินไป อันเป็นผลทำให้ระดับเกิดการเปลี่ยนแปลงเร็ว ต้องใช้พลังงานในการพยุกระนาบของ u_1 และ u_2 มากจนเกินไป และอาจทำให้เงื่อนไขการรักษาระนาบของรถไม่ได้ตามที่กำหนดไว้ ดังนั้นแรงผลักดัน u_3 ที่เหมาะสมที่สุด ณ สภาพพื้นผิวนั้นๆ จึงมีความสำคัญต่อการรักษาระนาบของรถมาก ส่วนแรงพยุกรถ u_1 และ u_2 นี้ใช้ในการปรับระดับขาเพื่อให้รถกลับมาสุมมุมระนาบอีกครั้งภายหลังจากที่ตัวรถเกิดความลาดเอียง จะเป็นผลพวงสืบเนื่องมาจากแรงผลักดัน u_3 ดังกล่าวข้างต้น และในขณะที่ขึ้นหรือลงเนินขาหนึ่งก็จะยืดขึ้นส่วนอีกขาหนึ่งก็จะหดลงเพื่อให้ระนาบของรถกลับมาสุมมุมระนาบ ดังนั้นแรงทั้งสามนี้จึงทำงานสัมพันธ์กันตลอดเวลาเพื่อให้ใช้พลังงานน้อยที่สุดในการรักษาระนาบขณะที่รถมีการเคลื่อนที่

อย่างไรก็ตาม ผู้วิจัยได้พบว่าการกำหนดระยะห่างระหว่างล้อมีผลต่อแรงที่ใช้ในการรักษาสมุมระนาบด้วย โดยที่ระยะห่างระหว่างล้อมากจะช่วยให้ใช้แรงในการรักษาสมุมน้อยลง ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงองศาความลาดเอียงน้อยนั่นเอง

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal control of dynamics system) ในการศึกษาความเป็นไปได้ของการพัฒนาระบบควบคุมสมดุระนาบ (Flatness control) ของรถเข็น 2 มิติ (2-Dimension) เพื่อให้ใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum energy) นี้ เมื่อเปรียบเทียบผลของคำตอบที่ได้จากโปรแกรมคำนวณและทฤษฎี พบว่ามีความสอดคล้องและสมเหตุสมผลกัน โดยการทดสอบกับ สภาวะเงื่อนไขเริ่มต้น สภาวะเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขบังคับที่ได้กำหนดขึ้น ทำให้สามารถอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของรถจากกราฟที่เกิดขึ้นได้เป็นอย่างดี ดังแสดงผลการทดสอบรวมทั้งได้อธิบายรายละเอียดของกราฟต่างๆ ไว้แล้วในบทที่ 4

ผลจากการนำเอาทฤษฎีการควบคุมที่เหมาะสมของระบบพลศาสตร์ (Optimal control of dynamics system) มาใช้เพื่อคำนวณหาค่าพลังงานน้อยสุดของการควบคุมสมดุระนาบ พบว่าการกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ล้วนมีผลต่อการหาค่าคำตอบของสมการทั้งสิ้น โดยการหาค่าตอบของสมการจะเป็นการสุ่มค่าและคัดเลือกค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น หากกำหนดเงื่อนไขที่ไม่สอดคล้องกันหรือห่างไกลจากความเป็นจริงมาก ก็จะมีผลทำให้การหาค่าตอบเป็นไปได้ยากและใช้เวลานาน ดังนั้นการศึกษาถึงสมการที่ใช้และกำหนดเงื่อนไขต่างๆ จึงมีความสำคัญมากต่อการหาค่าตอบของสมการ นอกจากนี้การกำหนดสเกลปัญหาและความละเอียดในการค้นหาค่าตอบก็มีผลต่อการค้นหาค่าตอบเช่นกัน โดยหากมีสเกลปัญหาที่ใหญ่หรือมีความละเอียดมาก ก็จะทำให้การค้นหาค่าตอบใช้เวลานานหรืออาจต้องใช้คอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเพื่อรองรับกับเงื่อนไขดังกล่าว

สำหรับการเขียนโปรแกรมเพื่อแก้ปัญหาทางออปติไมซ์เซชัน (Optimization problems) เพื่อศึกษาการควบคุมระนาบโดยใช้พลังงานน้อยสุด (Minimum energy) ของรถเข็นนี้ ผู้วิจัยได้รับความอนุเคราะห์จาก พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า ที่ได้อนุญาตให้ใช้โปรแกรม T.Veeraklaew 1995 ซึ่งเป็นโปรแกรมต้นแบบในการแก้ปัญหาออปติไมซ์เซชัน มาช่วยในการวิเคราะห์เพื่อศึกษาและหาค่าตอบของสมการดังกล่าว จนสามารถหาค่าตอบของสมการได้เป็นผลสำเร็จ

5.2 ข้อเสนอแนะ

การพัฒนาในขั้นต่อไป อาจจะเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาให้มากขึ้นโดยการศึกษาถึงความเป็นไปได้ของการควบคุมสมดุระนาบในระบบ 3 มิติ โดยไม่จำกัดว่าต้องเป็นรถเข็นเท่านั้น รวมถึงการประดิษฐ์อุปกรณ์ตัวต้นแบบเพื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้ในทางทฤษฎีต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

1. Veeraklaew T. *A New Approach on Direct/Indirect Linear Optimization Problem ; “Bang-Bang” Control : An Equivalent to the Maximum Energy with Free Final Time Problem.* In: Sixth International Conference on Optimization: Techniques and Applications; 2004 Dec 9-11; Ballarat, Australia: 2004.
2. Agrawal SK, Veeraklaew T, Fabien BC. *Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations.*, Journal of Optimal Control Applications and Methods 1998;19:393-410.
3. Veeraklaew T, Agrawal SK. . *New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems*, Journal of Guidance Control and Dynamics 2001;24:228–236.
4. Veeraklaew T, Agrawal SK. *Optimization of Higher – Order System and Extensions of Minimum Principle.* In: 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, AZ:1999.
5. Bain MV, Alcorta Garcia MA. *Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems.* Applied Mathematics E–Notes 2002;2(2002):36-44.
6. Shiler Z, Chang H, Wong V. *The Practical Implemmentation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators*, Robotic & Computer - Integrate Manufacturing 1996;12(1):29-39.
7. Renolds MC, Meckl PH. *Composite Optimization Scheme for time Optimal Control.* Journal of Guidance Control and Dynamics 2002;25(5):987-989.
8. Lizell MB, Inventor; Monroe Auto Equipment Company, assignee. *Method and apparatus for dynamic leveling.* US patent 5,097,419. 1992 Mar 17.
9. Iwashita K, inventor; Honda Giken Kogyo Kabushiki Kaisha, assignee. *Adjustable height suspension mechanism for two-wheeled motor vehicles.* US patent 5,211,420. 1993 May 18.
10. Ohmori T, inventor; Honda Giken Kogyo Kabushiki Kaisha, assignee. *System for controlling the damping rate of a vehicle suspension.* US patent 4,657,280. 1987 Apr 14.
11. Oh S, Mankala K. *A Dual Stage Planar Cable Robot: Dynamic Modeling and Design of A Robust Control with Positive Inputs [dissertation].* Univ. of Delaware; 2004.

12. Oh S, Agrawal SK. *A Reference Governor Based Controller for a Cable Robot Under Input Constraints*. Univ. of Delaware; 2004.
13. Kato H, inventor; Canon Kabushi Kaisha, assignee. *Vibration damping apparatus, Control method therefore, Exposure apparatus having the vibration damping apparatus, Maintenance method therefore, Semiconductor device fabrication method, and Semiconductor fabrication factory*. US patent 6,771,354. 2004 Aug 3.
14. ทวีวัชร วีระเกล้า. การพัฒนาซอฟต์แวร์ทางด้านการควบคุมระบบการเคลื่อนที่ที่มีความเหมาะสมสูงสุดด้วยวิธีการไดเรกต์. นครนายก: กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ส่วนการศึกษา โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า; 2546.
15. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม*. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย; 2538.
16. แม็คคอมป์, กอร์ดอน. *เส้นทางสู่นักประดิษฐ์หุ่นยนต์*. แปลโดย วาที ปรียพงศ์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น); 2547.
17. วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ. *การควบคุมระบบพลศาสตร์ (Control of Dynamic System)*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย; 2548.
18. Agrawal SK, Fabien BC. *Optimization of Dynamic System*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic; 1999.
19. Kane TR, Levinson DA. *Dynamics: Theory and Applications*. USA: McGraw-Hill; 1985.
20. Ogata, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. USA: Prentice-Hall; 1997.
21. Veeraklaew T, Agrawal SK. *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constraints Using Higher – Order Method with Penalty Function*. In: IV WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics). Buenos Aires, Argentina: n.p.; 1998.
22. Veeraklaew T, Piromsopa P, Chirungsarpsook K, Pattaravarangkur C. *A Study on the Comparison between Minimum Jerk and Minimum Energy of Dynamic Systems*. In: The International Conference on Computational Intelligence for Modeling, Control and Automation (CIMCA). Wien, Austria: n.p.; 2005.

ภาคผนวก

อภิธานศัพท์

x	คือ ระยะการจัดขจัดของรถในแนวแกน x
y_1	คือ ระยะการจัดขจัดของล้อหน้าในแนวแกน y
y_2	คือ ระยะการจัดขจัดของล้อหลังในแนวแกน y
y_3	คือ ระยะการจัดขจัดในแนวแกน y ที่จุดศูนย์กลางของรถเข็น
$\dot{x}$	คือ ความเร็วของรถในแนวแกน x
$\dot{y}_1$	คือ ความเร็วของล้อหน้าในแนวแกน y
$\dot{y}_2$	คือ ความเร็วของล้อหลังในแนวแกน y
$\dot{y}_3$	คือ ความเร็วในแนวแกน y ที่จุดศูนย์กลางของรถเข็น
$\ddot{x}$	คือ ความเร่งของรถในแนวแกน x
$\ddot{y}_1$	คือ ความเร่งของล้อหน้าในแนวแกน y
$\ddot{y}_2$	คือ ความเร่งของล้อหลังในแนวแกน y
$\ddot{y}_3$	คือ ความเร่งในแนวแกน y ที่จุดศูนย์กลางของรถเข็น
u_1	คือ แรงกระทำที่ล้อหน้าในแนวแกน y
u_2	คือ แรงกระทำที่ล้อหลังในแนวแกน y
u_3	คือ แรงกระทำเพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวแกน x
m	คือ มวลของรถเข็น
m_l	คือ มวลของน้ำหนักบรรทุก
l	คือ ระยะระหว่างล้อหน้าและล้อหลังของรถเข็น
l_1	คือ ระยะระหว่างล้อหลังและจุดหมุนของรถเข็น
θ	คือ องศาความลาดเอียงของระนาบรถเข็น
ω	คือ ความเร็วเชิงมุม
α	คือ ความเร่งเชิงมุม
$*$	คือ จุดหมุนของระนาบรถเข็น

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายเกียรติศักดิ์ โพธิ์สังข์
วันเดือนปีเกิด	19 พฤศจิกายน 2519
สถานที่เกิด	จังหวัดสุรินทร์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	457 หมู่ที่ 5 ต.ปรือ อ.ปราสาท จ.สุรินทร์ 32140
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2534	มัธยมศึกษาตอนต้น จาก โรงเรียนประสาทวิทยาคาร อ.ปราสาท จ.สุรินทร์
พ.ศ. 2537	มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนสุรวิทยาคาร อ.เมือง จ.สุรินทร์
พ.ศ. 2543	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. เครื่องกล) จาก มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี
พ.ศ. 2551	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ