

การทวองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ (Matrices)
แะคิเฮอร์มิแนนต์ (Determinants) เบื้องกั ในระดับชั้น ม.ศ.1
โดยไ้ชนทเรียนโปรแกรกกับการสวณปรกคิ

ปริญญานพนธ

ของ

จิวรรัตน วิชาภิชาคิ

พฒณศกตถาถ

ณพาวิทยาถยจณตจันพหุสิโรณ

เสนอคอมหาวิทยาัยศรีนกรินทรวิโรฒ
เพื่อกัเป็นส่วนหนึ่ของการศีกษาถามหักสตร
ปริญญากการศีกษาถามหาบัณศิก

11 มีนาคม 2519

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ (Matrices)
 และดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) เบื้องต้น ในระดับชั้น ม.ศ. 1
 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ

บทคัดย่อ
 ของ
 วิวรรณ วิชาวิชาติ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
 เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า
 ปริญญากฎการศึกษาหาญวิทย์

11 มีนาคม 2519

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ (Matrices)
และดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants) เบื้องต้น ในระดับชั้น ม.ศ. 1
โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
ที่ได้จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ

การทดลองครั้งนี้กระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปีการศึกษา 2518
ภาคเรียนที่ 2 ของโรงเรียนวัดราชาธิวาส เขตดุสิต จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน
80 คน ซึ่งได้เลือกมาโดยวิธีสุ่ม แล้วแบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง 40 คน และกลุ่มควบคุม
40 คน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง ผู้วิจัยเป็นผู้สอนกลุ่มทดลองโดยให้นักเรียนเรียนจาก
บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น อาจารย์คณิตศาสตร์โรงเรียนวัดราชาธิวาส เป็นผู้สอน
กลุ่มควบคุม โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่าง เช่นเดียวกับกลุ่มทดลองและใช้วิธีสอนปรกติ ใช้
เวลาในการสอนกลุ่มละ 12 ชั่วโมง โดยเริ่มสอนพร้อมกัน แล้วทำการทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากสอนครบตามเนื้อหาของบทเรียนโปรแกรม

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นและผ่านการวิเคราะห์
มีจำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาในการสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียน
จากบทเรียนโปรแกรม และจากการสอนของครูแบบปรกติ ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ
ทางสถิติ ณ ระดับความเชื่อมั่น .05

A COMPARATIVE STUDY OF THE RESULTS OF MATHEMATICS
TEACHING OF ELEMENTARY MATRICES AND DETERMINANTS
IN M.S.I BY PROGRAMMED AND
CONVENTIONAL TEACHING

ABSTRACT

BY

WIWUT WANICHARPICHART

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education Degree
Sri Nakharinwirot University
March 11, 1976.

A Comparative Study of the Results of Mathematics Teaching of Elementary Matrices and Determinants in M.S.I by programmed and Conventional Teaching.

The purposes of this study were to compare the academic achievement in Elementary Matrices and Determinants of Mathayom Suksa I Students by using programmed and conventional teaching and to write a programmed text in Elementary Matrices and Determinants of Mathayom Suksa I students.

This study comprised 80 Mathayom Suksa I Students of Wat-Rajatiwat School, Dusit Region, Bangkok, during the academic year 1975. The 80 students were randomly selected and were divided into two equal groups: the experimental group and the control group. Each of these two groups studied the same content on Elementary Matrices and Determinants for 12 hours. The experimental group studied by themselves from the programmed text, constructed by the researcher. The mathematics teacher of Wat-Rajatiwat School taught the students in the control group, using the conventional teaching. The achievement test of Elementary Matrices and Determinants constructed by researcher was given to both groups for $1\frac{1}{2}$ hour at the end of the learning.

The scores were statistically analyzed. It was found that there was no statistically significant difference in the academic achievement between the experimental group and the control group at .05 level.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำคณะสัตวศาสตร์ได้พิจารณาปัญหานี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษากาณเภณสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....ประธาน

.....กรรมการ

ประกาศผลการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จจนได้ เพราะผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและช่วยเหลืออย่างดียิ่ง
จาก รองศาสตราจารย์ สุพจน์ ฐะนะมา และอาจารย์ ดร.ดาวิชัย พอดคำ ผู้วิจัยขอ
กราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอกราบขอบคุณ อาจารย์เผด็จียง เสี่ยงสกุล อาจารย์คณิตศาสตร์ โรงเรียน
วิศิษฐาธิวาส ที่ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับการทดลองบทเรียน

ผู้วิจัยได้รับความรู้ ความคิด และเห็นความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งนี้สืบเนื่อง
มาจาก อาจารย์บุรุษ บุบรานนท์ อาจารย์คณิตศาสตร์โรงเรียนการช่างสตรีนครสวรรค์
ได้สอน และให้กำลังใจตลอดมา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้
ด้วย

วิวรรณ วิศิษฐาธิ

4

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความหมายของการศึกษากนกัว	4
สมมุติฐานของการศึกษากนกัว	4
ความสำคัญของการศึกษากนกัว	4
ขอบเขตของการศึกษากนกัว	4
ข้อตกลงเบื้องต้นของการศึกษากนกัว	5
นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษากนกัว	5
2 เอกสารการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
ประวัติความเป็นมาของบทเรียนโปรแกรม	6
ชนิดและลักษณะของแบบเรียนโปรแกรม	6
หลักจิตวิทยาในการสอนแบบโปรแกรม	7
การสร้างบทเรียนโปรแกรม	8
ประโยชน์ของบทเรียนโปรแกรม	10
ข้อเสียของบทเรียนโปรแกรม	10
การทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้จัดทำเพื่อการสอนปกติ	10
การทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้จัดทำไปทดลองกับการสอนปกติ ..	12
การทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้ทำก่อนเพื่อการสอนแบบปกติ ..	12
การทดลองการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมในประเทศไทย	13
ผลการทดลองสอนวิชาเบรวิกในระดับประถมศึกษาในประเทศไทย	14
3 วิธีดำเนินการทดลอง	15
กลุ่มตัวอย่าง	15
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	15

วิธีดำเนินการทดลอง	17
4 การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง	18
การวิเคราะห์ข้อมูล	18
ผลการทดลอง	19
สรุปผลการทดลอง	20
5 สรุป อภิปรายผล และขอเสนอแนะ	21
ความหมายของการศึกษาครั้งนี้	21
สมมติฐานของการศึกษาครั้งนี้	21
การดำเนินการทดลอง	21
ผลการทดลอง	22
อภิปรายผล	22
ขอเสนอแนะ	23
บรรณานุกรม	24
ภาคผนวก	29

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบนักเรียน ในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	20
2 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	30
3 แสดงคะแนนจากการทดสอบกับแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	35

ภูมิหลัง

เนื่องจากประเทศไทยกำลังเร่งพัฒนาประเทศในหลาย ๆ ด้าน เพื่อความเจริญของประเทศ และเพื่อความอยู่ดีกินดีของพลเมือง ให้พลเมืองมีฐานะเศรษฐกิจดีขึ้น (เกษม สุกหอม และบำรุง กลักเจริญ, 2515:77) การพัฒนาประเทศจะบรรลุจุดหมายได้เร็ว หรือช้าขึ้นอยู่กับการศึกษาของประชากรในประเทศ กอ (กอ สวัสดิ์พาณิชย์, 2512:1-5) กล่าวว่า การศึกษามีส่วนสัมพันธ์กับการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคม 3 ประการ คือ

1. การศึกษาเป็นผลิตกำลังคนให้แกระบบเศรษฐกิจ
2. ทำให้คุณภาพของคนในสังคมดีขึ้น ทำให้การพัฒนาสังคมและเศรษฐกิจดำเนินไปอย่างรวดเร็ว

3. ช่วยให้คนได้คิดต่อกันได้อย่างถูกต้องเที่ยงตรง

การจัดการศึกษาในปัจจุบันต้องประสบกับปัญหาต่าง ๆ อย่างมาก โดยเฉพาะปัญหาเรื่องจำนวนครูไม่เพียงพอกับจำนวนนักเรียน อันเนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ สายภาณูรัตน์ และอมร รักษาสิทธิ์ (เกษม สุกหอม และบำรุง กลักเจริญ, 2512:277-278) กล่าวถึงปัญหาการผลิตครูว่า เราใช้ครูไปในทางการบริหารและธุรการเสียมาก ทำให้ขาดกำลังในการสอน และนักเรียนครูที่เรียนสำเร็จแต่ไม่ไปเป็นครู สาเหตุที่สำคัญอีกประการหนึ่ง คือ อัตราการเกิดของประชากรเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว การเพิ่มของประชากรสูงถึงอัตราร้อยละ 3 ต่อปี ซึ่งเกือบสูงที่สุดในโลก (กระทรวงสาธารณสุข, 2516:8) จึงทำให้จำนวนครูไม่เพียงพอกับจำนวนนักเรียน

ฉะนั้นจึงเกิดปัญหาว่า จะจัดกระบวนการเรียนการสอนอย่างไรจึงจะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพสูง โดยไม่เปลืองค่าใช้จ่าย สถานที่ และจำนวนครู

✓ สวัสดิ์ (สวัสดิ์ จงกล, 2510:248) กล่าวว่า นักการศึกษา นักจิตวิทยา และนักวิชาการทางสังคมศาสตร์ กำลังคิดหากระบวนการเรียนการสอนซึ่งต้องใช้อุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ ให้มีประสิทธิภาพและประหยัดที่สุดเท่าที่จะทำได้ กระบวนการเรียนการสอนแบบหนึ่งที่นักการศึกษาได้คิดขึ้น ก็คือ การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม สุภา(สุภา ภูซังคกุล,

2515:161) โค้กล่าวว่ วิธีสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมจะช่วยเหลือปัญหาเรื่องจำนวนครู และสถานที่เรียนที่เพิ่มขึ้นไม่พอกับจำนวนนักเรียน

บทเรียนโปรแกรม (Programmed Text Book) ยึดหลักการทางจิตวิทยา การเรียนรู้ ตามทฤษฎีสิ่งเร้ากับการตอบสนอง (Stimulus Response) คือ S-R Contiguity Theory และการเสริมแรง (Reinforcement) โดยให้ทราบผลการตอบสนองทันที ทำให้เกิดการเรียนรู้ นอกจากนี้ บทเรียนโปรแกรมช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนไปตามระดับความสามารถของแต่ละบุคคล

ลักษณะของบทเรียนโปรแกรม

1. เนื้อหาวิชาที่จะสร้างบทเรียนโปรแกรมจะถูกแบ่งเป็นตอน ๆ ตามลำดับความสัมพันธ์อันต่อเนื่องเรียกว่าบท ในแต่ละบทจะมีจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมซึ่งใช้เป็นหลักในการสร้างแบบทดสอบเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนหลังจากได้ศึกษาบทเรียนโปรแกรมแล้ว
2. ในแต่ละบทเรียน เนื้อหาวิชาจะถูกแยกย่อยเป็นขั้นเล็ก ๆ ตามลำดับ เรียกว่ากรอบ แต่ละกรอบมีคำอธิบาย ตัวอย่าง และมีคำถามให้ผู้เรียนตอบ หรือเติมคำในช่องว่าง หรือเลือกคำตอบที่ถูกต้อง
3. เมื่อผู้เรียนตอบเสร็จในแต่ละกรอบจะตรวจคำตอบและทราบผลทันทีว่าตอบถูกหรือผิดโดยคำควบคุมจากกรอบถัดไปหรือหน้าถัดไป ถ้าผู้เรียนตอบถูกจึงศึกษากรอบต่อไปตามลำดับ แต่ถ้าตอบผิดต้องกลับไปทำกรอบที่ผ่านมาตามคำสั่งที่ปรากฏในบทเรียน แล้วจึงตอบใหม่
4. การเรียนจะกำหนดฝึกคัดลอกกันไปทีละกรอบ และจะมีกรอบสำหรับฝึกหัดทบทวนเพื่อทดสอบตนเองได้เข้าใจยิ่งขึ้น
5. การเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ผู้เรียนจะเรียนได้เร็วหรือช้าขึ้นอยู่กับความสามารถของแต่ละบุคคล ไม่จำกัดเวลาเรียน

การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นการสอนโดยให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม โดยครูจะเป็นผู้ช่วยให้นักเรียนเกิดความสนใจในเรื่องที่จะเรียนและได้

คำแนะนำเมื่อนักเรียนมีปัญหาในขณะเรียน

นักการศึกษา นักวิจัยและผู้ที่สนใจเกี่ยวกับการสอนวิชาต่าง ๆ โดยใช้บทเรียนโปรแกรม ได้ทำการศึกษาและทบทวนสร้างบทเรียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการสอน วิชาวิทยาศาสตร์ วิชาคณิตศาสตร์ และวิชาภาษาศาสตร์ ซึ่งปรากฏว่าส่วนมากได้ผลดี และในปัจจุบันได้มีการสร้างบทเรียนโปรแกรม เพื่อใช้ในการสอนวิชาต่าง ๆ เช่น วิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น วิชาความน่าจะเป็น (Probability) วิชาเซต (Set) และวิชาอื่น ๆ

วิชาเมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (Matrices and Determinants) เป็นวิชาที่มีประโยชน์และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาการแขนงต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวาง ริงกีบีนีย์ (Ringbinder and Daniel, 1966:VII) กล่าวว่า วิชาเมทริกซ์เป็นวิชาที่มีประโยชน์อย่างกว้างขวางทั้งในด้าน การบิน วิศวกรรมไฟฟ้า เครื่องจักรกล การกำหนดทางสถิติ เศรษฐศาสตร์การเกษตร เคมี จีวิทยาาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิจัย คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และอื่น ๆ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2517:32) รายงานว่า เมทริกซ์มีประโยชน์ในด้านการช่วยอธิบายคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ได้เข้าใจง่ายขึ้น เช่น ใช้อธิบายเรื่องเวกเตอร์ เรื่องการแปลงสภาพ (Transformation) และการพิสูจน์กฎของ $\cos(A+B)$, $\sin(A+B)$, $\cos(A-B)$ และ $\sin(A-B)$

จากเหตุดังกล่าวนี้ ผู้วิจัยจึงสนใจและวางแผนการสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้น สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แล้วนำบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นใช้ทดลองเปรียบเทียบกับการสอนปกติ เพื่อวิจัยว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติหรือไม่ ซึ่งถ้าผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าหรือเท่ากับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติ ก็ควรจะได้นำบทเรียนโปรแกรมไปใช้เพื่อเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่จะช่วยในด้านการสอน เรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้น สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และวิชาอื่นที่เกี่ยวข้องต่อไป

ความมุ่งหมายของการศึกษาก่อนกว่า

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้นสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ

สมมุติฐานของการศึกษาก่อนกว่า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปรกติ

ความสำคัญของการศึกษาก่อนกว่า

1. เป็นการเสนอแนะให้การนำบทเรียนโปรแกรมเรื่อง เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้น ไปใช้ในการสอน

2. เป็นการวางแนวทางให้ครูได้ศึกษาและทดลองสร้างบทเรียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการสอนต่อไป

3. เป็นการเสริมสร้างให้เกิดแนวคิดในชั้นที่จะปรับปรุงการสอนของครู โดยการนำวิทยาการใหม่ ๆ ไปใช้

ขอบเขตของการศึกษาก่อนกว่า

1. บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้เป็นบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programmed)

2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ทำควบคู่กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนวัดราชธรรมาวาส เขตดุสิต จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ประจำปีการศึกษา 2518 จำนวนนักเรียน 80 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 40 คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่ม (Random)

3. การทดลองครั้งนี้กำหนดเวลาเรียนของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม ๆ ละ 12 ชั่วโมง โดยใช้เนื้อหาอย่างเดียวกัน ผู้วิจัยเป็นผู้สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และกรรณิศาสาคร

ของโรงเรียนวัดราชาธิวาส เป็นแผนส่วนแบบปรกติ

ข้อตกลงเบื้องต้นของการศึกษาก่อนกว่า

บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถือว่าเป็นบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นถูกต้องตามหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาก่อนกว่า

1. นักเรียน หมายถึงนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนวัดราชาธิวาส เขตดุสิต จังหวัดกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518
2. การสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมหมายถึงการสอนโดยให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าด้วยตนเองภายในห้องเรียนจากบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผู้วิจัยคอยให้ความช่วยเหลือแก่นักเรียนมีปัญหา
3. การสอนปรกติ หมายถึงการสอนโดยบรรยายในชั้นเรียน
4. บทเรียนโปรแกรมที่มีประสิทธิภาพ หมายถึงบทเรียนโปรแกรมที่ผ่านการวิเคราะห์โดยยึดหลัก แก่นและกรอบของบทเรียนจะต้องมีคะแนนถูกไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 ของจำนวนนักเรียนที่ใช้ในการทดลองทั้งหมด

ประวัติความเป็นมาของบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมได้พัฒนาจากการประดิษฐ์เครื่องสอนของ ศาสตราจารย์เพรสซี่ (Sydney L. Pressey) แห่งมหาวิทยาลัยโอไฮโอ ประเทศสหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ. 1920 (Fry, 1963:17) เครื่องสอนของเพรสซี่มีลักษณะคล้ายเครื่องป้อนสำหรับทดสอบนักเรียนซึ่งสามารถตรวจคำตอบและให้คะแนนได้ทันที (Dustien and Sam, 1961: 35) และสกินเนอร์ (G.F. Skinner) นักจิตวิทยาการเรียนรู้ แห่งมหาวิทยาลัย ฮาร์วาร์ด ในประเทศสหรัฐอเมริกา สกินเนอร์ก็ศึกษาและทำการทดลอง เขาสรุปพฤติกรรมการเรียนรู้ว่า การเรียนรู้จะดำเนินไปที่ละขั้นทีละน้อย ๆ และการเรียนรู้จะมีประสิทธิภาพมาก ถ้าแต่ละขั้นที่ออกจากขั้นหนึ่งไปสู่อีกขั้นหนึ่งแตกต่างกันเพียงเล็กน้อยจนผู้เรียนสามารถมองเห็นว่า เขาควรตอบอย่างไร การจัดให้แต่ละขั้นง่าย ๆ จะช่วยให้ผู้เรียนตอบถูกและผลจากการตอบถูกนี้จะเป็นแรงเสริมให้ผู้เรียนสามารถเรียนต่อไปได้อย่างดี การกระทำนี้ค่อย ๆ จะเท่ากับเป็นการลงโทษผู้เรียน (Frores and Overcut, 1963:515) ต่อมานักการศึกษาจึงมีการคัดค้านและประดิษฐ์บทเรียนโปรแกรมแบบต่าง ๆ ขึ้น

ชนิดและลักษณะของแบบเรียนโปรแกรม

กรีน (Green, 1962:147) กล่าวว่าแบบเรียนโปรแกรม เนื้อหาของบทเรียน จะถูกแบ่งออกเป็นกรอบ ๆ (Frames) ในแต่ละกรอบมีการเสนอเนื้อหาแล้วตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบและเนื้อหาของแต่ละกรอบจะต่อเนื่องกันไป โดยทั่ว ๆ ไป บทเรียนโปรแกรมมีอยู่ 2 ชนิด คือ

1. บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programme) ซึ่งบทเรียนชนิดนี้ผู้เรียน จะต้องตอบคำถามไปที่ละกรอบ ๆ ตามลำดับ ห้ามตอบข้ามกรอบใด ๆ

2. บทเรียนโปรแกรมแบบสาขา (Branching Programme) บทเรียนชนิดนี้ ผู้เรียนไม่ต้องทำไปทุกกรอบตามลำดับ อาจข้ามไปทำกรอบใด ตามคำสั่งในบทเรียนได้ ทั้งนี้ เพราะผลสร้างบทเรียนโปรแกรมวิเคราะห์แล้วว่า ถ้าผู้เรียนทำหรือเลือกคำตอบของคำถามบางกรอบใดถูกต้องก็แสดงว่าเข้าใจเนื้อหาในกรอบที่อยู่ถัด ๆ ไปจำนวนหนึ่งก็แล้ว

ในบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programme) เรานิยามให้ผู้เรียนตอบคำถามโดยการเติมคำ (Constructed Response) ทั้งนี้เพราะเราต้องการให้ระลึก (Recall) ความรู้ ส่วนในบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา (Branching Programme) นั้น จะให้ผู้เรียนได้ตอบโดยการเลือกตอบ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการที่จะสั่งให้แยกหรือข้ามไปว่าในกรอบใด ๆ ก็ตามความต้องการของผู้เรียนบทเรียนโปรแกรมง่ายขึ้น และบทเรียนโปรแกรมประเภทสาขานี้จะส่งผลในด้านการจำ (Recognition) เนื้อหาของบทเรียนกรีน (Green, 1962:150-151) ได้เสนอแนะว่า ผู้ที่จะร่างบทเรียนโปรแกรมได้ที่ดีที่สุดคือ ผู้ที่มีความรู้และคุ้นเคยกับเนื้อหาในเรื่องนั้น ๆ มาก ผู้เชี่ยวชาญทางการสร้างบทเรียนโปรแกรมแต่ไม่เคยเคยกับธรรมชาติของเนื้อหาวิชานั้น ย่อมเป็นการลำบากมากที่จะสร้างบทเรียนโปรแกรมที่ดีโดยเนื้อหาวิชาขึ้นได้ ถึงแม้ครูผู้สอนสอนวิชาต่าง ๆ จึงเป็นผู้ที่สามารถสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาขึ้นได้

หลักจิตวิทยาในการสอนแบบโปรแกรม

การสอนแบบโปรแกรมยึดถือความทฤษฎีความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนอง (Stimulus-response) กับ Law of Contiguity Theory และการเสริมแรง (Reinforcement)

การสอนแบบโปรแกรมกำเนิดหลัก 3 ประการดังนี้ (Epstein and San, 1961: 6-23)

1. สิ่งที่ยากต่อการเรียน ผู้เรียนสามารถเรียนได้ก็ถ้าและเร็วกว่าการเรียนสิ่งที่ยากกว่ามาก มันจะทำให้หมดกำลังใจ หมดเลย
2. การเรียนโดยการกระทำ โดยผู้เรียนมีกิจกรรมตอบสนองบทเรียนตลอดเวลาจะเป็นสิ่งที่ทำให้ผู้เรียนตั้งใจเรียน ถ้าผู้เรียนไม่ตั้งใจแล้วจะทำให้เขาไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนจากบทเรียน
3. การได้รับรางวัลจากการเรียนรู้โดยให้ผลตอบแทนของการตอบสนองบทเรียนโดยทันที ซึ่งโดยธรรมชาติแล้วเราต้องการรู้ผลการกระทำของตนเอง การรู้ผลการกระทำของตนเองจะเป็นแรงจูงใจให้มีความพยายามในการกระทำครั้งต่อไป ถ้าไม่ผลึกเปรียบเสมือนขาดการ

เสริมแรง

เปรี๊ยะ (เปรี๊ยะ กุมฯ, 2516:2-8) เสวแนะในเรื่งนี้ว่า

1. เสนอสิ่งเรื่อก่อนนักเรียน

2. ให้นักเรียนตอบสมองไก่อ้าง เมาะสม ้วยการบอกแนวทางให้ หรือบอกใบ้

หรือบอกคำตอบสมอง

3. เสริมแรงทั้ที่นักเรียนตอบสมอง ึ่งส่วนใหญเสริมแรงทางบวก (Positive Reinforcement)

การสร้างบทเรียนโปรแกรม

เปรี๊ยะ (เปรี๊ยะ กุมฯ, 2515:49-69) เน้นำการสร้างบทเรียนโปรแกรม ดังนี้

1. ศึกษาหลักสูตร เพื่อให้ทราบวาทองสอนอะไร้าง เื่อหาที่จะสอนเป็นอย่งไร ะดับไหน ะมวลการสอนก็อาจจะช่วยให้อำนาจดัดการสอน เื่อหาที่จะสอนและอาจจะช่วย กำหนดความลึกและ ะมวลของ เนื้อหาได้ นอกจากนั้นผู้สร้างบทเรียนยังต้องศึกษาเพิ่มเติมจาก กุม่อ หรือบันทึกการสอนของครู แบบฝึกหัดต่าง ๆ สำหรับนักเรียน ตำรา หรืออาจต้องสืบหาข้อมูล จากครูคอย ึ่งจะช่วยให้เกิดแนวคิในการสร้างบทเรียนโปรแกรม

2. ตั้งจุดมุ่งหมาย การสร้างบทเรียนโปรแกรมต้องสร้างให้สอดคล้องกับความต้องการของ ผู้เรียน การตั้งจุดมุ่งหมายในการสร้างบทเรียนโปรแกรมจึงต้องตั้งให้เหมาะสมกับความสามารถ ของนักเรียน ผู้สร้างบทเรียนโปรแกรมจะกองพยายามแจกแจงจุดมุ่งหมายไว้เป็นจุดมุ่งหมายเชิง พฤติกรรม ึ่งสามารถสังเกตได้และวัดได้

3. วางขอบเขตของงาน การวางขอบเขตของงานหรือวางเค้าโครงเรื่ง ให้ว่ามีประโยชน์ในการสร้างบทเรียนมาก เพราะจะช่วยให้การลำดับเรื่งก่อนหลัง และป้องกัน การหลงลืมเรื่งราวบางตอนได้

4. เขียนบทเรียนโปรแกรม กรอบของบทเรียน โทมัส (Thomas) กล่าวว่า ควรมีลักษณะดังนี้

1) เขียนเนื้อหาวิชาเป็นหน่วยเล็ก ๆ และแ่ละหน่วยย่อหน้าไว้ให้เกิดความรู ความเข้าใจในหน่วยถัด ๆ ไป

- 2) มีเนื้อหาที่อธิบายถึงถึงกความสนใจของผู้เรียน
- 3) ทำให้ผู้เรียนเกิดสัมฤทธิ์ผลได้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้
- 4) การเขียนเนื้อหาแต่ละกรอบควรให้พาตึงไปถึงกรอบที่ผู้เรียนเรียนไปแล้ว

ภายในตัว

5) ให้ทราบคำตอบที่ถูกต้องเพื่อเป็นการเสริมแรง (Reinforcement) เนื้อหาของบทเรียนแต่ละกรอบต้องเขียนด้วยภาษาที่ชัดเจน ถูกต้องตามหลักภาษาและการใช้ภาษา หากจะต้องใช้ศัพท์ควรเลือกคำศัพท์ที่เหมาะสมกับพื้นฐานและอายุของผู้เรียน เนื้อเรื่องก็ต้องถูกต้องตามหลักวิชา และมีความต่อเนื่องไปแต่ละกรอบ

กรอบบางกรอบอาจไม่ต้องการคำตอบ เช่น เป็นกรอบแนะนำบทเรียน วิธีทำบทเรียน หรือวิธีอธิบายเนื้อหาทางวิชาการที่จะเป็นพื้นฐานสำหรับกรอบต่อไปโดยยังไม่ต้องการคำตอบก็ได้

ศาสตราจารย์ เจ.อาร์. คิกซ์ (Leah R.T.B., 1976:60) ชาวอเมริกันได้กล่าวถึงการสร้างบทเรียนโปรแกรม ดังนี้

1. วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของบทเรียนโปรแกรม และสร้างแบบทดสอบสำหรับการสอบครั้งสุดท้าย โดยให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่วางไว้
2. พิจารณาความรู้จะเป็นพื้นฐานในการเรียนและกำหนดออกมาในรูปพฤติกรรม
3. เขียนกรอบ
4. เลือกผู้เรียนจากกลุ่มตัวอย่าง 4 คน ให้ทำ Pre-test แล้วเรียนบทเรียนโปรแกรม เมื่อเรียนจบให้ทำ Post-test ขณะผู้เรียนทำแบบทดสอบและเรียนบทเรียนโปรแกรม ผู้สร้างบทเรียนโปรแกรมควรตั้งเกณฑ์ตัดสินผู้เรียนทำในบทเรียนโปรแกรมและในแบบทดสอบ
5. แก้ไขโปรแกรมแล้วเขียนใหม่
6. กระทำซ้ำตามข้อ 4 และข้อ 5 จนกว่าเป็นที่พอใจ
7. ตรวจสอบกับกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด
8. กระทำซ้ำตามข้อ 4, 5, 6 และข้อ 7 จนกว่าจะใกล้เคียงเรียนโปรแกรมที่ดี

ประโยชน์ของบทเรียนโปรแกรม

1. การเรียนการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู เพราะครูคนเดียวสามารถสอนนักเรียนได้คราวละหลายสิบคน
2. นักเรียนแต่ละคนเรียนได้เร็วหรือช้าตามความสามารถของตนเอง ช่วยแก้ปัญหาเรื่องการเรียนไปทันเพื่อน และครูได้ใกล้ชิดกับนักเรียนมากขึ้น
3. จากผลการวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่นักวิจัยหลายคนพบว่า บทเรียนโปรแกรมช่วยประหยัดเวลาในการเรียนการสอน
4. บทเรียนโปรแกรมช่วยเสริมความรู้ที่ยังบกพร่องในบางเรื่องที่เคยเรียนผ่านมาแล้วในอดีต หรือยังไม่เคยเรียนมา แต่ต้องนำความรู้ในวิชาเหล่านั้นมาสัมพันธ์กับวิชาที่กำลังศึกษาอยู่ เช่น บทเรียนโปรแกรมเรื่องพีชคณิตและพีชคณิตเชิงเส้น เป็นพื้นฐานของวิชาพีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) หนึ่งส่วนในระดับปริญญาตรี และวิชาการวิเคราะห์องค์ประกอบ (Factor Analysis) หนึ่งส่วนในระดับปริญญาโท สาขาการวัดผลการศึกษา ซึ่งนิสิตบางคนไม่เคยเรียนวิชาพีชคณิตแต่ได้เตรียมเนื้อหามาก่อน อาจศึกษาหาความรู้จากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้

ข้อเสียของบทเรียนโปรแกรม

บัทเลอร์ เร็น และแบงก์ (Butler, Wren and Bank, 1970:153) ได้สรุปความเห็นเกี่ยวกับข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

1. วิชาที่ทำโปรแกรม จะไม่สามารถยืดหยุ่นหรือขยายเนื้อหา หรือย่อเนื้อหาได้ จำเป็นต้องสร้างโปรแกรมใหม่เพิ่มเติมอีก
2. วิชาบางวิชาในคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาทำโปรแกรมเนื้อหาการจัดลำดับยังเป็นแบบเก่า จึงไม่สามารถแสดงให้เห็นแนวความคิดในคณิตศาสตร์แบบใหม่ได้
3. การสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมไม่สามารถจะทำให้เกิดปฏิริยาตอบโต้ระหว่างครูกับนักเรียน หรือระหว่างนักเรียนกับนักเรียน

การทดลองการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้ผลดีกว่าการสอนปกติ

ฮัสเตอร์เคย์ (Hastorkey, 1963:363-367) ได้ทดลองสอนโดยใช้บทเรียน

โปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนแบบปรกติ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิต กับนักเรียน
เกรด 9 ผลปรากฏว่า กลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมทำคะแนนได้ดีกว่ากลุ่มที่สอนแบบ
ปรกติ

บราวน์, (Schramm, 1964:26) ได้ทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์กับ
นักเรียน เกรด 8 และ 9 จาก 7 โรงเรียน โดยใช้วิธีสอนแบบปรกติอย่างเดียว เปรียบ
เทียบกับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมควบคู่กับการสอนแบบปรกติ บทเรียนโปรแกรมที่เขา
ใช้ประกอบการสอนเป็นบทเรียนโปรแกรมแบบเชิงเส้น ผลการทดลองปรากฏว่าการสอนแบบ
ปรกติซึ่งเพิ่มเติมด้วยบทเรียนโปรแกรม นักเรียนสามารถทำคะแนนได้สูงกว่าการสอนแบบปรกติ

มอส (Voces, 1962:1559) ได้ทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับ
การสอนแบบปรกติ ระดับมัธยมศึกษา วิชาพีชคณิต ผลการสอบปรากฏว่า การสอนโดยใช้
บทเรียนโปรแกรมได้ผลดีสำหรับนักเรียนที่เรียนเก่ง ทำให้สามารถก้าวหน้าไปได้เร็ว ซึ่งดีกว่า
การสอนแบบปรกติ แต่สำหรับนักเรียนที่เรียนช้าไปหน่อยดี

ริกส์ (Riggs, 1967:2748-51) ได้ทดลองสร้างบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น เรื่อง
กราฟ สำหรับนักเรียนเกรด 5 และทำการทดลอง ดังนี้ กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้บทเรียน
โปรแกรมและไม่ได้รับการสอนจากครู กลุ่มที่ 2 สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมและได้รับการ
สอนจากครูเพิ่มเติม กลุ่มที่ 3 สอนโดยครูอย่างเดียว ผลปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียน
โปรแกรมทั้งสองกลุ่ม ได้รับผลดีทางพัฒนาทักษะในการเขียนกราฟสูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยครู
อย่างเดียว

สมิธและบาร์ (Sarason, 1964:92) ได้ทดลองสอนวิชากรุป และฟิลด์ แก่นักเรียน
มัธยมในชนบทที่เรียนเก่ง โดยใช้แบบเรียนธรรมชาติเปรียบเทียบกับการสอนโดยใช้เครื่องช่วย
และบทเรียนโปรแกรม ผลปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้เครื่องช่วยและบทเรียนโปรแกรมทำคะแนน
ได้ดีกว่าการสอนโดยใช้แบบเรียนธรรมชาติ และในระหว่างการทดลองนักเรียนเชื่อว่าพวกเขา
สามารถเรียนด้วยการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมได้ดีพอ ๆ กับการเรียนปรกติ และชอบ
บทเรียนโปรแกรมมากกว่าเครื่องช่วยนี้ พวกเขาต้องการใช้อุปกรณ์เหล่านี้เพิ่มเติมจากการเรียน
ปรกติ

การทดลองการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้ผลไม่แตกต่างกับการสอนปรกติ

คอนรอย (Conroy, 1972:5102-A) ได้ทดลองสอนวิชาพีชคณิต ในระดับ วิทยาลัย โดยใช้การสอนแบบโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนแบบปรกติ ผลปรากฏว่าความก้าวหน้าทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน และการเปรียบเทียบระหว่างเพศยังงไม่แตกต่างกัน แต่การเปรียบเทียบระหว่างอายุ ปรากฏว่า นักเรียนที่อายุมากจะมีความก้าวหน้าในการเรียนสูงกว่านักเรียนที่อายุน้อยกว่า

รีก (Reed, 1971:1909-A) ได้ทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ กับนักศึกษา ระดับปริญญาตรี โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเพิ่มเติมจากการบรรยายของครู เปรียบเทียบกับการสอนแบบบรรยายแก้ไขแบบเรียนธรรมดา ผลการทดสอบปรากฏว่าทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน ไม่ว่า จะจำแนกตามความสามารถหรือตามเพศ

สปีธ , (Schreim, 1964:98) ได้ทดลองสอนวิชาสถิติเบื้องต้นโดยใช้วิธีส่วนแบบปรกติ เปรียบเทียบกับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมแบบสาขา กับนักเรียน นายร้อย กองทัพอากาศสหรัฐอเมริกา ปรากฏว่าผลการสอนทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน ผลการทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่กลุ่มที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ใช้เวลาน้อยกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปรกติ

ไวท์ (White, 1970:3373-A) ได้ทดลองใช้บทเรียนโปรแกรมสอนวิชาคณิตศาสตร์ แก่เด็กเรียนที่คงซ่อมเสริมในระดับมัธยม เปรียบเทียบกับการสอนแบบปรกติ ผลการทดลอง ปรากฏว่าทั้งสองวิธีให้ผลไม่แตกต่างกัน แต่กลุ่มที่ใช้บทเรียนโปรแกรมมีความสามารถทางด้านการคำนวณดีกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปรกติ ส่วนความสามารถในด้านการแก้ปัญหาไม่แตกต่างกัน

การทดลองการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ได้ผลน้อยกว่าการสอนแบบปรกติ

โรบสัน (Robson, 1966:85-L) ได้ทดลองสอนวิชาพีชคณิต กับนักเรียนเกรด 9 สามกลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรม อีกสองกลุ่มสอนโดยวิธีปรกติ ผลการทดสอบปรากฏว่า กลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปรกติทำคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม แต่ทัศนคติของนักเรียนที่ปววิชาคณิตศาสตร์ไม่เปลี่ยนแปลง

การทดลองการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมในประเทศไทย

อุดม (อุดม บุ่งเกษม, 2513) ได้ทดลองสอนวิชาภาษาอังกฤษในชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนแบบปกติ ผลปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการเรียนรู้วิชาภาษาอังกฤษไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนที่มีความสามารถสูงจะใช้เวลาเรียนน้อยกว่านักเรียนที่มีความสามารถต่ำ

วรรณ (วรรณ เขียมทะวงษ์, 2514) ได้ทดลองสอนวิชาเลขคณิต เรื่องเศษส่วน ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์และความทรงจำของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่ผู้วิจัยพบว่า การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรม ทำให้ส่วนใช้เวลาว่างสำหรับทำงานอย่างอื่น และง่ายต่อการควบคุมชั้น

นิกร (นิกร วรวิทย์, 2515) ได้ทดลองการสอน การสะกดคำภาษาอังกฤษกับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยเปรียบเทียบระหว่างการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมแบบบอกคำตอบทันทีกับการสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมแบบบอกคำตอบช้า ผลปรากฏว่าทั้งสองกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน

ปรีชา (ปรีชา กุลวัลย์, 2515) ได้ทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลองเรียนจากบทเรียนโปรแกรม ส่วนกลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนแบบธรรมดา ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความทรงจำของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

บรรชา (บรรชา รัตนชัย, 2516) ได้ทดลองสอนวิชาเคมีในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนกวิทยาศาสตร์ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ของการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

ปรีบัติ (ปรีบัติ ฉิมแวม, 2518) ได้ทดลองสอนเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสเบื้องต้น ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

วิศา (วิศา ศิริเสาวรรณ, 2518) ได้ทดลองสอนเรื่องความน่าจะเป็น (Probability) ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่า กลุ่มที่เรียนโดยใช้วิธีสอนปกติ

สมวงษ์ (สมวงษ์ ทรัพย์เจริญ, 2518) ได้ทดลองสอนวิชาเซต (Set) ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมเปรียบเทียบกับการสอนปรกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

เอื้อน (เอื้อน ปิ่นเงิน, 2518) ได้ทดลองสอนเรื่องลิมิต (Limit) และความต่อเนื่อง (Continuity) ในระดับชั้น ป.กศ. สง. วิชาเอกคณิตศาสตร์ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าที่ได้จากการสอนตามปรกติ

นิรันดร์ (นิรันดร์ แนนสิก, 2518) ได้ทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์บางหัวข้อ ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่ากลุ่มที่สอนตามปรกติ และนักเรียนทั้งสองกลุ่มมีทัศนคติทางวิทยาศาสตร์สูงขึ้นกว่าเดิม

ทวีพร (ทวีพร เนียมมาลัย, 2518) ได้ทดลองสอนเรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวิชาเคมี ในระดับชั้น ป.กศ. โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปรกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

สุชน (สุชน จวบเกิด, 2518) ได้ทดลองสอนวิชาเคมี 1 บางหัวข้อ ในระดับชั้น ป.กศ.สง. โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปรกติ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่ากลุ่มที่สอนตามปรกติ

อรรถ (อรรถ บุญอุดม, 2518) ได้ทดลองสอนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องไฟฟ้า และเชื้อเพลิง ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปรกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

ผลการทดลองสอนวิชาเมทริกซ์ในระดับประถมศึกษาในประเทศไทย

ศุภกิจ (ศุภกิจ เฉลิมวิสุตกุล, 2517) ได้ทำการวิจัย เรื่องความเหมาะสมของการสอนเรื่องเมทริกซ์ในชั้นประถมศึกษาตอนปลาย ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า บทเรียนเรื่องเมทริกซ์เบื้องต้น เหมาะสมที่จะสอนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย แต่เหมาะที่จะสอนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มากกว่าชั้นอื่น ๆ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนวัดราชาธิวาส เขตดุสิต กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518 จำนวน 80 คน 82 คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง ใช้วิธีสุ่ม (Random) จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งปีจำนวนทั้งสิ้น 391 คน สุ่มมาจำนวน 80 คน และแบ่งนักเรียนจำนวน 80 คน ออกเป็นสองกลุ่มเท่า ๆ กัน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มที่หนึ่งมีจำนวน 40 คน ใช้เป็นกลุ่มทดลอง อีกกลุ่มหนึ่งมีจำนวน 40 คน ใช้เป็นกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. การสร้างบทเรียนโปรแกรม

บทเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างเป็นบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น และดำเนินการดังนี้

- 1) ผู้วิจัยได้ศึกษาวิธีการสร้างบทเรียนโปรแกรมจากหนังสือ บทความต่าง ๆ และตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นที่บุคคลอื่น ๆ ได้สร้างไว้
- 2) ศึกษาเนื้อหาของวิชาเนกริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์จากตำราทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษจนเข้าใจเป็นอย่างดี
- 3) วางจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม และสร้างแบบทดสอบ (Test-Items) เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่วางไว้
- 4) สร้างบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น โดยให้มีเนื้อหาวิชาตรงตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่วางไว้

การทดลองเบื้องต้นเพื่อปรับปรุงบทเรียนโปรแกรม

ขั้นที่ 1 นามบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นไปทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518 จำนวน 1 คน ผู้วิจัยสังเกตข้อบกพร่องที่นักเรียนสงสัย หรือสาเหตุ

ทำให้คอมพิวเตอร์ รวมทั้งให้กำลังใจ ผู้วิจัยดำเนินการปรับปรุงแก้ไข หรือเก็บเก็บบทเรียนโปรแกรม

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนที่ได้ปรับปรุงจากขั้นที่ 1 ไปทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ของโรงเรียนปทุมคงคา เขตพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2518

จำนวน 5 คน พร้อม ๆ กัน ผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่องของบทเรียน แล้วนำมาปรับปรุง เช่นเดียวกับวิธีการในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงในขั้นที่ 2 แล้ว ไปทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เขต บางกะปิ จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 34 คน พร้อม ๆ กัน ผู้วิจัยสังเกตและบันทึกข้อบกพร่อง แล้วนำไปปรับปรุงแก้ไข เช่นเดียวกับขั้นที่ 2 เป็นการปรับปรุงครั้งสุดท้ายเพื่อใช้ในการสอนกลุ่มทดลองต่อไป

เกณฑ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยยึดหลักว่า แต่ละกรอบของบทเรียนจะต้องมีคำตอบถูกต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 90 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจำนวน 40 ข้อ

1. การสร้างแบบทดสอบ

1) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งสร้างตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่ใดก็ได้ โดยสร้างเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ

2) การวิเคราะห์ แบบทดสอบ

ก. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 60 ข้อที่สร้างขึ้น ไปทดสอบนักเรียนกลุ่มที่ใช้ทดลอง เพื่อปรับปรุงบทเรียนในขั้นที่ 3 จำนวน 34 คน

ข. นำผล จากการทดสอบทั้งหมดมาวิเคราะห์ เพื่อกำหนดเลือกข้อสอบที่ดีตามหลักการคัดกลุ่ม 27 เปอร์เซ็นต์ กลุ่มสูงกลุ่มต่ำ แปลการอ้างสำเร็จรูปของ จุง-เคย์ ฟาน (Chung-Teh Fan, 1952) เพื่อหาถ้อยคำง่าย (p) และถ้อยคำยาก (r) ของข้อทดสอบทุกข้อ แล้วก็คัดเลือกเฉพาะข้อที่มีอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป และค่าความยากง่ายระหว่าง .20 ถึง .80 ไปทดสอบที่ทดลองการจำนวน 40 ข้อ

คู่มือการใช้สำหรับการสอนแบบปรกติ

ผู้วิจัยได้ทำคู่มือการใช้สอนกลุ่มความทุกข์ โดยมีเนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัด และคำกับหัวข้อที่คล้ายกันกับในบทเรียนโปรแกรม

วิธีการในการทดลอง

1. นำบทเรียนโปรแกรมไปสอนกลุ่มทดลองจำนวน (40) คน โดยให้นักเรียนเรียนจากบทเรียนด้วยตนเอง ผู้วิจัยเป็นผู้สอน ใช้เวลาสอน 12 ชั่วโมง แล้วจึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยคัดเลือกไว้จำนวน (40) ข้อ ใช้เวลาในการสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2. สำหรับกลุ่มความทุกข์ ให้ครูคณิตศาสตร์ ของโรงเรียนวัดราชาธิวาส เขตดุสิต จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นผู้สอนแบบปรกติ ตามเนื้อหาที่ปรากฏในคู่มือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยเริ่มทดสอบพร้อม ๆ กับกลุ่มทดลอง ใช้เวลาสอน ทดสอบ และเวลาสอบเช่นเดียวกับกลุ่มทดลองทุกประการ

การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาคำนวณหาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มาคำนวณหาค่าสถิติต่อไปนี้

1. หาค่าคะแนนเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่ $\bar{X}$ แทนค่าเฉลี่ย

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าแต่ละกลุ่มจากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

โดยที่ S แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

3. หาค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มจากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่ $\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง

$\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม

- S_1 แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มทดลอง
 S_2 แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม
 I_1 แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง
 I_2 แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุม

4. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบค่าเฉลี่ยใช้สูตร **Kuder-Richardson (K-R 20)** (Carroll, 1966:340-341,

$$r_{II} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sigma_t^2 - \sum pq}{\sigma_t^2}$$

โดยที่

r_{II} แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 n แทนจำนวนข้อของแบบทดสอบ
 σ_t^2 แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบทดสอบ
 p แทนอัตราของข้อที่ถูกเลือกในคำตอบของแบบทดสอบ
 q แทนอัตราของข้อที่ถูกเลือกในคำตอบของแบบทดสอบ
 $(q = 1 - p)$

ผลการทดลอง

คะแนนจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม นำมาวิเคราะห์ค่าคะแนนเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของแต่ละกลุ่ม และเปรียบเทียบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ปรากฏว่าถึรายละเอียดได้บอกไว้ในตาราง 1

ตาราง 1 แสดงผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบนักเรียน
ในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	40	19.50	40.14	1.21	.05
กลุ่มควบคุม	40	18.27	31.79		

จากตาราง 1 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ย
ในกลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05

นั่นคือ การสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมในคณิตศาสตร์ทางการเรียนไม่ว่าจะแตกต่าง
จากการสอนปกติ

สรุปผลการทดลอง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาเบสิกส์และเคมีอินทรีย์อินทรีย์ของนักเรียนที่เรียน
จากการสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม ไม่แตกต่างกับนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบปกติ
อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05

บทที่ 5

สรุป วิจัยรายบุคคล และข้อสังเกต

ความหมายของการศึกษาก่อน

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่อง เมทริกซ์และฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมทริกซ์และฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากการใช้แบบใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ

สมมติฐานของการศึกษาก่อน

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติ

การดำเนินการทดลอง

1. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนวัดราชาธิวาส เขตดุสิต กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2518 จำนวน 80 คน ซึ่งแบ่งโดยการสุ่ม แล้วนำมาแบ่งเป็น 2 กลุ่มโดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง เป็นกลุ่มทดลอง 40 คน และกลุ่มควบคุม 40 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

ก. บทเรียนโปรแกรม บทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น เรื่อง "เมทริกซ์และฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 8 บทเรียน รวม 246 กรอบ ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ข. แบบทดสอบ ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที มีความยากง่ายเฉลี่ย .65 มีอำนาจจำแนกเฉลี่ย .49 และมีค่าความเชื่อมั่น .87

3. วิธีการดำเนินการทดลอง

ก. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มทดลอง โดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 12 ชั่วโมง

ข. กรรณิศาจารย์มอญโรงเรียนวัดราชธิวาส ส่วนกลุ่มความทุกข์วิธีบรรยาย โดยใช้นี้หา ก่อนกมยตเรียนโปรแกรม ใช้เวลาในการสอน 12 ชั่วโมง

ผลการทดลอง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากการสอนแบบใช้ซ้ำเรียนโปรแกรม กับ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เรียนจากการสอนปกติ ไม่มีความแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ t ระดับ .05

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มทดลอง สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม ซึ่งค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยนี้ ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ t ระดับ .05. /6? แสดงว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ใช้แบบมอญมาปี 1 ที่ได้รับจากการสอนแบบใช้ซ้ำเรียนโปรแกรมไม่แตกต่างจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติ ซึ่งไม่เป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ดังนั้นอาจมีเนื่งมาจากสาเหตุต่อไปนี้ คือ

1. นักเรียนในกลุ่มทดลอง ไม่คุ้นเคยกับวิธีการเรียนด้วยตนเอง จึงต้องใช้สมาธิ ความรับผิดชอบและความมีสติกับตนเอง จากผลวิจัยและการทดลองพบว่า นักเรียนบางคนเมื่อจะหัดทำอย่างใดอย่างหนึ่งก็ทำไม่ได้ หรือทำช้าเกินไปจนเกินไปโดยให้อ่านหนังสือบางตอนซึ่งเป็นแบบรูป หรืออ่านเนื้อหาในการที่จะหัดทำอย่างใดอย่างหนึ่ง อาจเป็นเหตุให้การเรียนไม่ต่อเนื่อง จึงควรสอนแบบปกติสามารถจับปัญหานี้ได้ดีกว่า

2. การเรียนซึ่งเรียนจากบทเรียนโปรแกรม นักเรียนอาจจะเรียนได้เร็วหรือช้าตามความสามารถของตนเอง แต่ขอจะทำการทดลอง นักเรียนบางคนอาจจะอ่านบทเรียนอย่างรวดเร็วแล้วให้เรียนทำเอง หรือเอาใจเขินเขิน ซึ่งอาจทำให้การจับใจความของข้อความที่อ่านมาคลาดเคลื่อนได้

3. ตักะในการอ่านหนังสือของนักเรียน อาจเป็นผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมของนักเรียนได้

จากผลการทดลองแสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติไม่แตกต่างกัน แสดงว่าควรนำแบบเรียนโปรแกรมวิชาเนกริกมา

ที่เตรียมพื้นที่เบื้องต้นให้ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ ให้นักเรียนเรียนเป็นการลดแรงงานของครู และช่วย
แก้ปัญหาการขาดแคลนครูในปัจจุบัน เพราะครูหนึ่ง คนสามารถสอนนักเรียนโดยใช้ห้องเรียน
โปรแกรมได้หลายวิชาในเวลาเดียวกัน

ข้อเสนอแนะ

๑. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. จากผลการวิเคราะห์ข้อได้จากการทดลองปรากฏว่า การสอนโดยใช้
บทเรียนโปรแกรมไม่แตกต่างจากการสอนแบบปกติ จึงควรที่จะส่งเสริมให้มีการสร้างบทเรียน
โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องต่าง ๆ และวิชาอื่น ๆ ให้แพร่หลายยิ่งขึ้น เพื่อก่อให้เกิด
ประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุงการสอนวิชาคณิตศาสตร์ และช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครู

2. บทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเบื้องต้นนี้ สามารถนำไป
ประกอบการสอนวิชาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น วิชาฟิสิกส์ เคมี และวิชาการวิเคราะห์
องค์ประกอบ เป็นต้น

๒. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

1. การจัดการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน โดย
การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม กับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมควบคู่กับการสอนแบบ
ปกติ โดยนำบทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเบื้องต้นนี้ ไปประกอบการ
สอน

2. การสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเบื้องต้น แบบสาขา
ไว้เป็นเนื้อหาวิชาเช่นเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้นให้ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ และทำการทดลอง
สอนเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน จากบทเรียนโปรแกรมทั้งสองชนิด

3. การนำบทเรียนโปรแกรมวิชาเรขาคณิตและพีชคณิตเบื้องต้นนี้ไปทดลอง
ซ้ำอีก เพื่อหาความสัมพันธ์ของแบบเรียนและข้อทดสอบ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กอ สวัสดิ์พาณิชย์ การศึกษาของไทย วารสารการศึกษาระดับชาติ ปีที่ 3 ฉบับที่ 9
หน้า 1-5 เมษายน 2512.
- เกษม สุกหอม และบำรุง กลัดเจริญ มัธยมศึกษา โรงพิมพ์ระยองไทย พิมพ์โลก
2515, 286 หน้า.
- บรรพต สุวรรณประเสริฐ เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พิมพ์โลก 2518, 184 หน้า.
- เปื้อง กุมุท การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป พิมพ์ครั้งที่ 2 วิทยาลัยวิชาการศึกษา
ประสานมิตร 2516, 131 หน้า.
- ศุภกิจ เฉลิมวิสุตมุกด์ ความเหมาะสมของการสอนเรื่องเมตริกซ์ในชั้นประถมศึกษา
ก่อนปลาย ปริชญานีพนธ์ กต.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร
2517, 42 หน้า.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รายงานการดำเนินงานตั้งแต่วันที่
1 ตุลาคม 2513 ถึง 30 กันยายน 2514 ม.ป.ท. 2515, 37 หน้า.
- สวัสดิ์ จงกล "วิทยุและโทรทัศน์เพื่อการศึกษา" ใน ชุมนุมทางวิชาการ รายงานการ
ประชุมทางวิชาการครั้งที่หนึ่ง 1-5 สิงหาคม 2510 กรมสามัญศึกษา หน้า
241-248 สหกรณ์ขายส่งฯ 2510, 306 หน้า.
- สาธารณสุข, กระทรวง การเพิ่มช่องประชากรกับการวางแผนครอบครัวในประเทศไทย
โรงพิมพ์พัฒนศิลป์ 2516, 84 หน้า.
- สุภา ภูงักกุด "Programmed Instruction" ใน ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรม
และเทคโนโลยีการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ โรงพิมพ์สุภา
หน้า 161-165, 2515.

- Butler, Charles L. Wren, F. Lynwood, and Earls, J. Houston, The Teaching of Secondary Mathematics, McGraw Hill Book Company, New York, 1970, 597 pp.
- Campbell, Lugh C., Linear Algebra with Applications, Appleton-Century-Crofts Educational Division, New York, 1971, 376 pp.
- Conry, David B., "The Effect of Age and Sex upon a Comparison between Achievement Gains in Programmed Instruction and Conventional Instruction in Remedial Algebra I at Northern Virginia Community College", Dissertation Abstracts, 32(9):5102-A, March, 1972.
- Easterday, Kenneth and Easterday, Helen, "Ninth-Grade Algebra, Programmed Instruction, and Sex Difference : An Experiment", The Mathematics Teacher, 51(3):302-307, March, 1963.
- Epstein, Jerry, and Sam, The First Book of Teaching Machines, Franklin Watts, Inc., New York, 1961, 50 pp.
- Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, 1952, 32 pp.
- Finkleiner, Daniel T., Introduction to Matrices and Linear transformation, W.L. Freeman and Company, San Francisco, 1969, 297 pp.
- Frank Ayres, Matrices, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1962, 219 pp.
- Fry, Edward B., Teaching Machines and Programmed Instruction, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1963, 244 pp.
- Garrett, Henry B., Statistics in Psychology and Education, 6 th. ed., David McKay Company, Inc., New York, 1956, 491 pp.
- Green, Edward C., The Learning Process and Programmed Instruction, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1962, 228 pp.
- Moses, John Irvin, "A Comparison of the Results of Achievement with Programmed Learning and Traditional Classroom Techniques in First Year Algebra at Spring Branch Junior High School",

Dissertation Abstracts, 23(5):1559, November, 1962.

Leed, Jerry Franklin, "The Relative Effectiveness of Programmed and Conventional Textbooks as Supplements to Classroom Lecture in the Teaching of Elementary Modern Mathematics, Dissertation Abstracts, 30(4):1989-A, October, 1971.

Riggs, Corinne Whitlow, "The Construction and Evaluation of Programmed Text on the Interpretation of Graphs for Grade Five", Dissertation Abstracts, 27(9):2748-a, March, 1967.

Robson, Allen Waynard, "A Comparative Study of the Teaching of First Year Algebra", Dissertation Abstracts, 27(1):85-A, July, 1966.

Servais, V. and T. Jurga, Teaching School Mathematics, Middlesex, Penguin, 1971, 300 pp.

Schramm, Wilbur, The Research on Programmed Instruction An Annotated Bibliography, U.S. Dept. of Health Education and Welfare, Washington, D.C., 1964, 114 pp.

Thurstone, L.L., Multiple-Factor Analysis, The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1957, 535 pp.

White, Charles Colven, "The Use of Programmed Text for Remedial Mathematics Instruction in College", Dissertation Abstracts, 30(2):3373-A, February, 1970.

ກາດຜນວກ

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

ตาราง 2 แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อที่	P _L	P _H	p	r	ข้อที่	P _L	P _H	p	r
1	.33	.99*	.74	.79	21	.56	.89	.74	.41
2	.67	.89	.79	.31	22	.44	.78	.62	.36
3	.11	.89	.50	.75	23	.22	.67	.44	.46
4	.33	.78	.56	.46	24	.11	.78	.43	.67
5	.33	.99*	.74	.79	25	.33	.67	.50	.34
6	.67	.89	.79	.31	26	.56	.89	.74	.41
7	.67	.89	.79	.31	27	.33	.78	.56	.46
8	.56	.89	.74	.41	28	.67	.89	.79	.31
9	.56	.89	.74	.41	29	.33	.89	.63	.59
10	.44	.99*	.78	.75	30	.67	.89	.79	.31
11	.56	.78	.67	.25	31	.44	.99*	.78	.75
12	.44	.99*	.78	.75	32	.44	.99*	.78	.75
13	.44	.99*	.78	.75	33	.33	.99*	.74	.79
14	.67	.89	.78	.31	34	.22	.44	.33	.25
15	.67	.89	.79	.31	35	.56	.89	.74	.41
16	.11	.33	.21	.31	36	.67	.89	.79	.31
17	.22	.44	.33	.25	37	.44	.99*	.78	.75
18	.11	.44	.26	.41	38	.01*	.67	.26	.79
19	.33	.78	.56	.46	39	.33	.99*	.74	.79
20	.67	.89	.79	.31	40	.67	.89	.79	.31

เครื่องหมาย * เป็นค่าใกล้เคียง ; ค่าความยากง่ายเฉลี่ย = .65
ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย = .49

การวาง ก. การหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

X	f	fX	X ²	fX ²
15	3	45	225	675
16	1	16	256	256
17	1	17	289	289
18	2	36	324	648
21	2	42	441	882
24	3	72	576	1,728
26	2	52	676	1,352
28	2	56	784	1,568
29	3	87	841	2,523
30	1	30	900	900
31	3	93	961	2,883
32	3	96	1,024	3,072
34	3	102	1,156	3,468
35	3	105	1,225	3,675
36	1	36	1,296	1,296
38	1	38	1,444	1,444
	34	924		26,659

$$\begin{aligned}
 S_t &= \sqrt{\frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{(34 \times 26,659) - (851,929)}{33 \times 34}} \\
 &= \sqrt{48.553475} \\
 &= 6.97
 \end{aligned}$$

ตาราง ข. การหาอัตราคนที่ตอบถูกและอัตราคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อที่	จำนวนคนที่ตอบถูก	p	q	pq	ข้อที่	จำนวนคนที่ตอบถูก	p	q	pq
1	26	.76	.24	.18	21	30	.88	.12	.10
2	31	.91	.09	.08	22	24	.71	.29	.21
3	20	.59	.41	.24	23	18	.53	.47	.25
4	19	.56	.44	.25	24	21	.62	.38	.24
5	21	.62	.38	.24	25	13	.53	.47	.25
6	27	.79	.21	.16	26	26	.76	.24	.18
7	29	.85	.15	.13	27	23	.68	.32	.22
8	27	.79	.21	.16	28	29	.85	.15	.13
9	24	.71	.29	.21	29	24	.71	.29	.21
10	27	.79	.21	.16	30	27	.79	.21	.16
11	20	.59	.41	.24	31	29	.85	.15	.13
12	24	.71	.29	.21	32	29	.85	.15	.13
13	27	.79	.21	.16	33	23	.68	.32	.16
14	.88	.12	.11	.12	34	9	.27	.73	.19
15	28	.82	.18	.15	35	23	.68	.32	.16
16	8	.24	.76	.18	36	27	.79	.21	.16
17	16	.47	.53	.25	37	20	.59	.41	.24
18	9	.26	.74	.19	38	13	.38	.62	.24
19	18	.53	.47	.25	39	22	.65	.35	.23
20	28	.82	.18	.15	40	21	.62	.38	.24

7.37

การหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

จากสูตร

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sigma_t^2 - \sum p_i^2}{\sigma_t^2} \\
 &= \frac{40}{39} \cdot \frac{18.55 - 7.37}{48.55} \\
 &= \frac{40}{39} \cdot \frac{11.18}{48.55} \\
 &= 0.87
 \end{aligned}$$

แบบทดสอบวิชา เมทริกซ์และพีทอร์ม เน้นทบทวน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบฉบับนี้

1. แบบทดสอบฉบับนี้ใช้เวลาในการทำ 1 ชั่วโมง 30 นาที
 2. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 40 ข้อ แต่ละข้อมี 4 ตัวเลือก
 3. การตอบ ให้ตอบในกระดาษคำตอบ และห้ามขีดเขียนข้อความใด ๆ ลงในแบบทดสอบ
 4. วิธีตอบ ให้ขีดเส้นทแยงมุมขึ้นลงข้างมาก ๆ หรือ ปากกา ลงในช่องหลังตัวเลขที่กำกับคำตอบ ซึ่งนักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุด
- ตัวอย่าง

0. ก่อไปนี้ชื่อใดไม่ใช่สัตว์เลี้ยง

- 1) หมู
- 2) เป็ด
- 3) ไก่
- 4) มะเขือ

ถ้านักเรียนคิดว่าคำตอบหมายเลข 4) ถูกต้องที่สุด ให้ขีดดังนี้

0. 1 2 3 4

5. ถ้าต้องการ เปลี่ยนคำตอบ ให้ลบคำตอบเดิมให้สะอาด

แบบทดสอบวิชาเมทริกซ์และพีชคณิตเบื้องต้น

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} ; B' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

1) $A = B$

2) $A = 2B$

3) $B = -A$

4) $A = B^t$

2. จากข้อ 1. $A + B = ?$

1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $2A$

4) $\bar{O}$

3. ข้อใดเป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเป็น 2×2

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. ข้อใดเป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของเมทริกซ์ A

1) $-A$

2) $\bar{O}$

3) A^t

4) A^{-1}

5. a_{mn} หมายถึง

1) เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น $m \times n$

2) สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ n หลักที่ m

3) สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ m หลักที่ n ของเมทริกซ์ A

4) ถูกทั้งข้อ 1) และ ข้อ 3)

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

สมาชิกในตำแหน่ง a_{21} คือ

1) 5

2) 7

3) 9

4) 1

7. ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดถูกต้องที่สุด
- 1) เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากันบวกกันได้
 - 2) เมทริกซ์ที่มีจำนวนหลักเท่ากันบวกกันได้
 - 3) เมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันบวกกันได้
 - 4) ผลบวกของ เมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันจะเกิดเมทริกซ์ใหม่ที่มีมิติต่างจากเดิม

8. ถ้า A มีมิติเป็น 3×2
 A^t มีมิติเป็น ?

- 1) 2×3
- 2) 3×2
- 3) 3×3
- 4) 2×2

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $A^t = ?$

- 1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $A + B \neq B + A$
- 3) $A - B = B - A$
- 4) ถูกทั้ง 1) และ 3)

11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

พิจารณาเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B

เราสามารถได้ว่า

- 1) $B = A^t$
- 2) $A = B^t$
- 3) $A \neq B$
- 4) ข้อ 1), 2) และ 3) ถูกต้อง

12. ให้ A , B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน

- 1) $(A+B)+C = A+(B+C)$
- 2) $(A-B)-C = (B-A)-C$
- 3) $A+(B+C) = (A+B)+(A+C)$
- 4) ถูกต้องทั้งสามข้อข้างต้น

13. ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดถูกต้องที่สุด

- 1) กฎการจับหมับเป็นจริงสำหรับการบวกเมทริกซ์
- 2) กฎการสลับที่เป็นจริงสำหรับการบวกเมทริกซ์
- 3) กฎการสลับที่ไม่จริงสำหรับการลบเมทริกซ์
- 4) ถูกต้องทั้งสามข้อข้างต้น

14. ถ้า A มีมิติเป็น 2×3

$2A$ มีมิติเป็น ?

- 1) 6×9
- 2) 2×3
- 3) 3×2
- 4) 9×6

15. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\frac{A}{2} = ?$

1) $\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

4) ถูกทั้งข้อ 2) , 3)

16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$ เมตริกซ์ข้อใด

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A \times B = ?$

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A \times B = ?$

1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

19. $A \times B = C$

A มีมิติเป็น 1×2

B มีมิติเป็น 2×2

C มีมิติเป็น ?

1) 1×2

2) 1×1

3) 2×2

4) 2×1

20. ข้อใดเป็นเวกเตอร์สำหรับการคูณของเวกเตอร์

ที่มีมิติเป็น 2×2

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. จงหาคงของ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} = ?$

1) $\begin{bmatrix} 56 & 47 \\ 36 & 44 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 39 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$

4) เมทริกซ์ทั้งสองคูณกันไม่ได้

22. $A \times B$ จะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

1) A มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถวของ B

2) B มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถวของ A

3) A มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B

4) A มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ B

23. สัญลักษณ์ ขัดใจ เป็นเอกลักษณ์สำหรับ

การคูณของ เมทริกซ์จัตุรัส

1) $\bar{0}$

2) A^{-1}

3) I

4) $-A$

24. ถ้า I, $\bar{0}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน

$I \times \bar{0} = ?$

1) $\bar{0}$

2) I

3) หาค่าไม่ได้

4) ถูกทั้ง 1) และ 2)

25. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่เท่ากันและ $A \times B$ หาค่าได้

1) $A \times B = B \times A$

2) $A \times B \neq B \times A$

3) $A \times B = A \times A$

4) $A \times B = B \times B$

26. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

คือเทอรัมเน้นท์ของ A คือ

1) $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

2) $a_{11} a_{22} + a_{21} a_{22}$

3) $a_{11} a_{21} + a_{22} a_{12}$

4) $a_{22} a_{12} - a_{11} a_{21}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

คือเทอรัมเน้นท์ของ A คือ

1) $|A|$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

4) ถูกทั้งข้อ 1) และ 2)

28.

ใช้เมทริกซ์ A จากข้อ 27.

ไมเนอร์ของ a_{21} , $(|M_{21}|)$ เท่ากับ

1) 2

2) 4

3) 1

4) -2

29. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

โคแฟกเตอร์ของ 3 (A_{21})

- 1) 2
- 2) 6
- 3) 7
- 4) -2

30. จากข้อ 29.

$A_{11} = ?$

- 1) 6
- 2) 7
- 3) -7
- 4) 3

31. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

แอดจอยท์ของ A, $(adj A)$ เท่ากับ

- 1) $\begin{bmatrix} -a & c \\ b & -d \end{bmatrix}$
- 2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- 3) $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$
- 4) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$adj A$ คือ

- 1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$
- 2) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
- 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
- 4) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

33. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส
อินเวอร์สสำหรับการคูณของ A คือ A^{-1}
หาได้จาก

- 1) $|A| \times adj A$
- 2) $\frac{1}{adj A} \times |A|$
- 3) $\frac{1}{|A|} \times adj A$
- 4) $adj A \times |A|$

34. $A \times A^{-1} = ?$

- 1) I
- 2) 0
- 3) A
- 4) A^{-1}

35. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 A^{-1} คือ

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
 A^{-1} คือ

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

เราสรุปได้ว่า

1) $X = 1 ; Y = 2$

2) $X = 2 ; Y = 1$

3) $X = 2 ; Y = 2$

4) $X = 1 ; Y = 1$

38. $3X - Y = 0$
 $X + 2Y = 1$

เขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

39. $X + 3Y = 1$

$6X - 2Y = 8$

เขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

40. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมีมิติเป็น 2×2

$A \times A^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

เราสรุปได้ว่า

1) $I \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

4) ถูกทุกข้อ

ภาคผนวก ข.

“^๑ ^๒”
ขอขาดใจจากการทดลอง

ตาราง 3 แสดงคะแนนจากการสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง					กลุ่มควบคุม				
X	f	X ²	fX	fX ²	X	f	X ²	fX	fX ²
10	1	100	10	100	8	1	64	8	64
11	2	121	22	242	9	1	81	9	81
12	5	144	60	720	10	2	100	20	200
13	1	169	13	169	11	2	121	22	242
14	1	196	14	196	12	1	144	12	144
15	2	225	30	450	13	2	169	26	338
16	1	256	16	256	14	2	196	28	392
17	3	289	51	867	15	2	225	30	450
18	1	324	18	324	16	4	256	64	1,024
20	6	400	120	2,400	17	3	289	51	867
21	2	441	42	882	18	2	324	36	648
22	1	484	22	484	19	1	361	19	361
23	2	529	46	1,058	20	2	400	40	800
24	1	576	24	576	21	1	441	21	441
25	1	625	25	625	22	1	484	22	484
26	3	676	78	2,028	23	4	529	92	2,116
28	1	784	28	784	24	3	576	72	1,728
29	4	841	116	3,364	25	1	625	25	625
30	1	900	30	900	26	2	676	52	1,352
31	1	961	31	961	27	2	729	54	1,458
					28	1	784	28	784
	40-41		796	17,386		40-41		731	14,559
			816	17,786				725	923

$$\bar{X}_1 = 19.90$$

$$\bar{X}_2 = 18.27$$

$$S_1 = 6.33$$

$$S_2 = 5.64$$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลอง ($\bar{X}_1$)	=	19.90
คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุม ($\bar{X}_2$)	=	18.27
ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มทดลอง (S_1)	=	6.33
ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม (S_2)	=	5.64

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \\
 &= \frac{19.90 - 18.27}{\sqrt{40.14 + 31.79}} \\
 &= 1.21
 \end{aligned}$$

ถ้า t ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

$$\begin{aligned}
 * t_{.05, 78} &= \pm 2.00 ; df = 40 + 40 - 2 \\
 &= 78
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ก.
บทเรียนโปรแกรมแก้ไขปริมาตรน้ำ

บทเรียนโปรแกรม วิชาเมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ เบื้องต้น

ขอแนะนำในการศึกษาบทเรียนโปรแกรม

๑. บทเรียนโปรแกรมที่ท่านกำลังศึกษาอยู่นี้ เป็นบทเรียนโปรแกรมเชิงเส้น
๒. วิธีการเรียนบทเรียนโปรแกรมนี้ จะต้องอ่านข้อความของบทเรียนอย่างละเอียด เมื่อเข้าใจแล้วก็จึงตอบคำถาม หรือเติมคำลงในช่องว่าง
๓. หลังจากที่เติมคำหรือตอบคำถามแล้วให้ดูเฉลยคำตอบทันที ซึ่งคำตอบจะอยู่หน้าข้อถัดจากข้อที่กำลังศึกษาอยู่
๔. ถ้าคำตอบของท่านตรงกับเฉลย ให้ศึกษากรอบต่อไป ถ้าตอบผิดให้กลับไปศึกษากรอบที่ผ่านมาอีกครั้งจนเป็นที่เข้าใจ แล้วทำการทบทวนใหม่
๕. ทำการศึกษาด้วยวิธีการดังกล่าวข้างต้น จนจบบทเรียน ท่านจะได้รับความรู้วิชาเมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์เบื้องต้นอย่างสมบูรณ์

1.1 ในการจัดบันทึกการต่าง ๆ ที่มีรายการย่อย ๆ หลายรายการ เช่น การบันทึกจำนวนนักเรียนที่มาโรงเรียนของนักเรียนชั้นต่าง ๆ ในแต่ละวันใน 1 สัปดาห์ เรามีวิธีบันทึกได้หลายวิธี เราอาจบันทึกเป็นการวางได้ดังนี้

		หลักที่ 1		หลักที่ 3		หลักที่ 5	
ชั้นวัน		จ.	อ.	พ.	พฤ.	ศ.	
แถวที่ 1	ป 1	25	21	29	24	20	
แถวที่ 2	ป 2	23	24	22	26	29	
แถวที่ 3	ป 3	25	30	28	25	27	
แถวที่ 4	ป 4	27	26	29	28	25	

จากตารางนี้ เราสามารถทราบจำนวนนักเรียนแต่ละชั้นที่มาโรงเรียนในแต่ละวัน ใน 1 สัปดาห์ได้ เช่น

ถ้าเราต้องการทราบจำนวนนักเรียนชั้น ป 1 ที่มาเรียนในวันอังคาร เราดูที่ แถวที่ 1 คือ ชั้น ป 1 และ หลักที่ 2 คือ วันอังคาร ตรงกับ เลข 21 จึงแปลว่านักเรียนมาเรียน 21 คน

จากตารางนี้เราทราบว่า

นักเรียนชั้น ป 3 วันจันทร์ มาเรียน _____ คน

นักเรียนชั้น ป 4 วันพฤหัสบดี มาเรียน _____ คน

1.2 จากตารางชั้น 1.1

ถ้าต้องการทราบจำนวนนักเรียน

ชั้น ป 2 วันพุธ ดู แถวที่ 2 หลักที่ 3 มาเรียน 22 คน
 ชั้น ป 3 วันศุกร์ ดู แถวที่ 3 หลักที่ 5 มาเรียน _____ คน
 ชั้น ป 1 วันพฤหัสบดี ดู แถวที่ 1 หลักที่ 4 มาเรียน _____ คน

3, 5, 2,
1, 4, 24

1.3 จากตัวเลขในการวาง (ข้อ 1.1) เราเขียนได้อีก
วิธีหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า เขียนในรูปของ เมทริกซ์ ดังนี้

	หลักที่ 1	หลักที่ 3	หลักที่ 5		
แถวที่ 1	25	21	29	24	20
แถวที่ 2	23	24	22	26	29
แถวที่ 3	25	30	28	25	27
แถวที่ 4	27	26	29	28	25

เราเขียนตัวเลขในตำแหน่งต่าง ๆ ในเมทริกซ์ตรงกับ
ในการวาง (ข้อ 1.1) และใช้ วงเล็บใหญ่ [] แทนตาราง

จากเมทริกซ์ข้างบน เราทราบว่า

แถวที่ 1 คือ นักเรียนชั้น ป 1

แถวที่ 2 คือ นักเรียนชั้น ป 2

แถวที่ 3 คือ นักเรียนชั้น _____

แถวที่ 4 คือ นักเรียนชั้น _____

หลักที่ 1 คือ วัน จันทร์

หลักที่ 2 คือ วัน อังคาร

หลักที่ 3 คือ วัน _____

หลักที่ 4 คือ วัน _____

หลักที่ 5 คือ วัน _____

ป 3

ป 4

พร

พฤหัสบดี

ศุกร์

1.4 เมทริกซ์ ในข้อ 1.3 เราทราบว่า

แถวที่ 1 มีตัวเลขเรียงตามลำดับ คือ 25 21 29 24 20

แถวที่ 2 มีตัวเลขเรียงตามลำดับ คือ 23 24 _____ 29

แถวที่ 3 มีตัวเลขเรียงตามลำดับ คือ _____

หลักที่ 1 มีตัวเลขเรียงตามลำดับ คือ 25 23 25 27

หลักที่ 2 มีตัวเลขเรียงตามลำดับ คือ _____

22 26
25 30 28 25 27
21 24 30 26

1.5 พกอาจบันทึกรายการหนี้สิน ที่ค้างชำระดังนี้

	ก	ข	ค
สม'	2	3	5
กลวย	4	1	0

จากตารางนี้ พทราบว่า นาย ก. ค้างชำระค่าสม
2 เซง ค่ากลวย 4 เซง เป็นต้น
พกอาจบันทึกรายการข้างต้นในรูป เมตริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จากเมตริกซ์ข้างบน เราทราบว่า

แถวที่ 1 แทน สม'

แถวที่ 2 แทน _____

หลักที่ 1 แทน นาย ก.

หลักที่ 2 แทน นาย _____

หลักที่ 3 แทน นาย _____

กลวย

ข.

ค.

1.6

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เราเรียกตัวเลขในเมตริกซ์ว่า สมาชิกของเมตริกซ์

สมาชิก แถวที่ 1 ของเมตริกซ์นี้ ได้แก่ 2, 3, 5

สมาชิก แถวที่ 2 ของเมตริกซ์นี้ ได้แก่ __, __, __

สมาชิก หลักที่ 1 ของเมตริกซ์นี้ ได้แก่ 2, 4

สมาชิก หลักที่ 2 ของเมตริกซ์นี้ ได้แก่ __, __

4, 1, 0 3, 1	1.7 เราจะพบว่า เมทริกซ์ ในข้อ 1.6 มี 2 แถว และ 3 หลัก เมทริกซ์ ในข้อ 1.3 มี ____ แถว ____ หลัก
4 แถว, 5 หลัก	1.8 ในการกล่าวถึงเมทริกซ์ใด ๆ เราจะกล่าวถึง <u>จำนวนแถวก่อนจำนวนหลัก</u> $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ มี ____ แถว, ____ หลัก
2 แถว, 2 หลัก	1.9 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ มี ____ แถว, ____ หลัก
2 แถว, 3 หลัก	1.10 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ มี ____ แถว, ____ หลัก
3 แถว, 1 หลัก	1.11 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ มี ____ แถว, ____ หลัก

3 แถว, 2 หลัก	1.12 $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ มี ____ แถว, ____ หลัก
1 แถว, 1 หลัก	1.13 ถ้าเมทริกซ์ มีจำนวนแถว = m แถว มีจำนวนหลัก = n หลัก เมทริกซ์นี้ มีขนาดเป็น $m \times n$ (อ่านว่า m คูณ n) ถ้าเมทริกซ์ มีจำนวนแถว = 2 แถว มีจำนวนหลัก = 3 หลัก เมทริกซ์นี้ มีขนาดเป็น ____ (อ่านว่า 2 คูณ 3)
2 x 3	1.14 <u>ขนาดของเมทริกซ์</u> เราเรียกว่า <u>มิติ</u> ถ้าเมทริกซ์มี 4 แถว 5 หลัก เมทริกซ์นี้ มีมิติเป็น <u>4 x 5</u> ถ้าเมทริกซ์มี 3 แถว 2 หลัก เมทริกซ์นี้ มีมิติเป็น ____
3 x 2	1.15 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้มี ____ แถว, ____ หลัก เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น ____
2 แถว, 3 หลัก 2 x 3	1.16 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้มี ____ แถว, ____ หลัก เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น ____

3 แถว, 2 หลัก
3 x 2

1.17

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ มี ___ แถว, ___ หลัก

เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น _____

1 แถว, 3 หลัก
1 x 3

1.18

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ มี ___ แถว, ___ หลัก

เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น _____

3 แถว, 1 หลัก
3 x 1

1.19

$$\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ มี ___ แถว, ___ หลัก

เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น _____

1 แถว, 1 หลัก
1 x 1

1.20

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ มี ___ แถว, ___ หลัก

เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น _____

2 แถว, 2 หลัก
2 x 2

1.21

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์นี้ มี ___ แถว, ___ หลัก

เมทริกซ์นี้มีมิติเป็น _____

3 แถว, 3 หลัก

3 x 3

1.22 เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 2 x 2 เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3 x 3 เรียกว่า _____

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 1 x 1 เรียกว่า _____

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น n x n เรียกว่า _____

เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์จัตุรัส

เมทริกซ์จัตุรัส

1.23

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น _____

เรียกว่า _____

2 x 2

เมทริกซ์จัตุรัส

1.24

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น _____

เรียกว่า _____

3 x 3

เมทริกซ์จัตุรัส

1.25

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ที่มีมิติเป็น _____

เรียกว่า _____

2 x 2

เมทริกซ์จัตุรัส

1.26 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุก ๆ ตัวเป็น 0

เรียกเมทริกซ์นี้ว่า เมทริกซ์ศูนย์ เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

	1.27 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้เรียกว่า _____
เมทริกซ์ศูนย์	1.28 เมทริกซ์ชุดหนึ่ง อาจจะมีคุณสมบัติหลายอย่าง เช่น อาจเป็น เมทริกซ์จัตุรัส และ เมทริกซ์ศูนย์ กว้างก็ได้ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้มักจะเป็น _____ คือ เมทริกซ์ _____ และมีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 จึงเป็นเมทริกซ์ _____ กว้าง
3 x 3 , จัตุรัส ศูนย์	1.29 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้ <u>ไม่เป็น</u> เมทริกซ์ศูนย์ เพราะ _____
มีสมาชิกบางตัวไม่เป็น 0 ได้แก่ 1	1.30 $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์นี้เป็น _____ และ _____
เมทริกซ์จัตุรัส เมทริกซ์ศูนย์	

สัณยศาสตร์ทั่วไป และการเท่ากันของเมทริกซ์

2.1 ในบางโอกาสเราจำเป็นต้องกล่าวถึงเมทริกซ์สี่เหลี่ยมจัตุรัส เพื่อความสะดวก เรานิยามใช้อักษรภาษาอังกฤษขนาดตัวใหญ่ แทนเมทริกซ์แต่ละชุด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A หมายถึง $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ B หมายถึง $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$
 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
 $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
 $A + B = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2.4 เราอาจเขียนสมาชิกของเมทริกซ์ ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ตัวเลขที่กำกับข้างตัวอักษร เป็นการบอกตำแหน่ง
ของแถวและหลัก ที่สมาชิกแต่ละตัวอยู่ เช่น

a_{11} แทนสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 1

a_{12} แทนสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 2

a_{21} แทนสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 2 หลักที่ 1

a_{22} แทนสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ _____ หลักที่ _____

2, 2

2.5 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \text{---} & a_{23} \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่ขาดไปเป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ _____ หลักที่ _____

สมาชิกตัวที่ขาดไป ก็คือ _____

2, 2

a_{22}

2.6 ให้

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \text{---} \end{bmatrix}$$

สมาชิกที่ขาดไปเป็นสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ _____ หลักที่ _____

สมาชิกตัวที่ขาดไป คือ _____

2, 2

b_{22}

2.7 ให้

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \text{---} \end{bmatrix}$$

สมาชิกตัวที่ขาดไป ก็คือ _____

2.8 ให้
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

การอ่านสมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์ นิยมอ่านดังนี้

a_{11} อ่านว่า เอ หนึ่ง - หนึ่ง

a_{12} อ่านว่า เอ หนึ่ง - สอง

a_{21} อ่านว่า เอ สอง - หนึ่ง

a_{22} อ่านว่า เอ _____

สอง - สอง

2.9 ให้
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

2 เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1 ตรงกับตำแหน่ง a_{11}

7 เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 2 ตรงกับตำแหน่งของ _____

a_{12}

2.10 จากข้อ 2.9

$$a_{11} = 2$$

$$a_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$a_{21} = 5$$

$$a_{22} = \underline{\hspace{2cm}}$$

7

0

2.11 ให้

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = 3$$

$$b_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b_{21} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b_{22} = \underline{\hspace{2cm}}$$

4

1

5

2.12 ให้

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c_{21} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c_{32} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3

4

8

2.13 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสเป็น 3×3
จงเติมสมาชิกที่ขาดไปให้สมบูรณ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \underline{\hspace{2cm}} & a_{13} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} & a_{23} \\ \underline{\hspace{2cm}} & a_{32} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2.14 ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3×2
เขียนสมาชิกของ A ในแบบทั่วไปได้ ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

2.15 พิจารณาเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เราพบว่า เมทริกซ์ A มีมิติเท่ากับเมทริกซ์ B
หรือไม่

A มีมิติเป็น _____

B มีมิติเป็น _____

2×2

2×2

2.16 จากข้อ 2.15

เราพบว่า สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์
A และ เมทริกซ์ B มีค่า _____ ทั่วทั้ง
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

เท่ากัน

2.17 เมทริกซ์ ในข้อ 2.15 เท่ากัน หรือไม่

$$A = B$$

สรุป เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติ _____
(เท่ากัน / ต่างกัน)

2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์

ทั้งสอง จะต้องมีค่า _____ ทั่วทั้ง
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

เท่ากัน
เท่ากัน

2.18 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2+2 \end{bmatrix}$$

พิจารณาเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B

เมทริกซ์ A _____ เมทริกซ์ B
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

เพราะ 1. มีมิติ _____

2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกัน _____

เท่ากับ

เท่ากัน

เท่ากัน ($4 = 2 + 2$)

2.19 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A มีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ B มีมิติเป็น _____

A และ B มีมิติ _____
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

ดังนั้น เมทริกซ์ A _____ เมทริกซ์ B
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

2 x 2

3 x 2

ไม่เท่ากัน

ไม่เท่ากัน

2.20 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

1. เมทริกซ์ A มีมิติ _____ เมทริกซ์ B
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)
2. แด่สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันคือ

$$a_{12} = 2$$

$$b_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$$

ซึ่ง a_{12} กับ b_{12} อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน
มีค่า _____
(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

เท่ากัน

5

ไม่เท่ากัน

2.21 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x & 3 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B เมื่อ
x เท่ากับ _____

1

2.22 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (x+3) \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = B \text{ เมื่อ } (x+3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

5 2	2.23 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ $A = B$ เมื่อ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$
1 0	2.24 ให้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $x = \underline{\hspace{2cm}}$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$
2 3	2.25 ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{11} = b_{11}$ $a_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_{21} = \underline{\hspace{2cm}}$ $a_{22} = \underline{\hspace{2cm}}$
b_{11} b_{12} b_{21} b_{22}	2.26 สรุป เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ 1. เมทริกซ์ทั้งสองต้องมีมิติเท่ากัน 2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ เมทริกซ์ทั้งสองจะต้องเท่ากัน <u>ตัวต่อตัว</u>

2.27 ให้
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

ถ้าเรากลับแถวที่ 1 มาเป็นหลักที่ 1 และกลับแถวที่ 2 มาเป็นหลักที่ 2 (หรือ กลับหลักที่ 1 มาเป็นแถวที่ 1 และกลับหลักที่ 2 มาเป็นแถวที่ 2)

เมทริกซ์ใหม่ที่เกิดขึ้น เราเรียกว่า

ทรานสโพสของ A และ เขียนแทนด้วย A^t

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2.28 ให้
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & - \\ - & 5 \\ 3 & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

2.29 การทรานสโพสของเมทริกซ์ใด ๆ คือ การเปลี่ยนสมาชิกในแถวของเมทริกซ์เดิม มาเป็นสมาชิกในหลักของเมทริกซ์ใหม่ (หรือ เปลี่ยนสมาชิกในหลักของเมทริกซ์เดิม มาเป็นสมาชิกในแถวของเมทริกซ์ใหม่) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.30 ใหญ่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & - & - \\ 0 & - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

2.31 ใหญ่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2.32 ใหญ่

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

2.33 ใหญ่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.34 ใหญ่

$$A = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} - \end{bmatrix}$$

[9]

2.35 ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติเป็น 2×3
 A^t มีมิติเป็น _____

3 x 2

2.36 ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติเป็น 5×2
 A^t มีมิติเป็น _____

2 x 5

2.37 A^t อ่านว่า _____

ทรานส์โพสของเมทริกซ์ A

2.38 ทรานส์โพสของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
 เราอาจเขียนเป็น $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^t$
 ดังนั้น
 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

2.39 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

2.40 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

การบวกเมทริกซ์

	3.1 <u>การบวกเมทริกซ์</u> เมทริกซ์จะบวกกันได้ ก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ทั้งสอง มีมิติเดียวกัน ถ้า A มีมิติเป็น 2×3 จะหาค่า $A + B$ ได้ก็ต่อเมื่อ B มีมิติเป็น _____
2×3	3.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ A มีมิติเป็น _____ เมทริกซ์ B มีมิติเป็น _____ นั่นคือ A และ B มีมิติ _____ (เดียวกัน / ต่างกัน) เมทริกซ์ A บวกกับเมทริกซ์ B ได้หรือไม่ _____
2×2 2×2 เดียวกัน ได้	3.3 <u>การบวกเมทริกซ์</u> เมทริกซ์จะบวกกันได้ต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเหมือนกันเท่านั้น และการบวกคือ การนำสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} (1 + 7) & (4 + 1) \\ (5 + 2) & (\quad + \quad) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (1 + 7) & (4 + 1) \\ (5 + 2) & (2 + 6) \end{bmatrix}$$

3.4 ให้อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A และ B มีมิติ

(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 + 2) & (\quad + \quad) \\ (\quad + \quad) & (4 + 4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เท่ากัน

$$\begin{bmatrix} (2 + 1) \\ (3 + 3) \end{bmatrix}$$

3.5 จากข้อ 3.4

ทำให้เป็นผลสำเร็จได้

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

3.6 จงบวกเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (A) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + (B) \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} &= (C) \quad \begin{bmatrix} (1 + 4) \\ (\quad + \quad) \\ (\quad + \quad) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เมทริกซ์ตัวตั้ง (A) มีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ตัวบวก (B) มีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ผลบวก (C) มีมิติเป็น _____

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3 x 1

3 x 1

3 x 1

3.7 จงบวกเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (_+ _) & (_+ _) \\ (_+ _) & (_+ _) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ตัวข้างป้มีคิเป็น _____

เมทริกซ์ตัวบวกมีคิเป็น _____

เมทริกซ์ผลบวกมีคิเป็น _____

$$\begin{bmatrix} (1 + 6) & (3 + 0) \\ (2 + 2) & (4 + 3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

2 x 2

2 x 2

2 x 2

3.8 เราสรุปได้ว่า

ผลบวกของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ จะได้เมทริกซ์ใหม่
ซึ่งมีมิติเท่ากับ เมทริกซ์ตัวตั้ง และเมทริกซ์ตัวบวก

ถ้า เมทริกซ์ A และ B มีมิติเป็น 2 x 2

$$A + B = C$$

เมทริกซ์ C จะมีมิติเป็น _____

2 x 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3.10 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ได้หรือไม่ } _$$

เพราะ _____

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3 x 1

3 x 1

3 x 1

3.7 จงบวกเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (_ + _) & (_ + _) \\ (_ + _) & (_ + _) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ตัวตั้งมีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ตัวบวกมีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ผลบวกมีมิติเป็น _____

$$\begin{bmatrix} (1 + 6) & (3 + 0) \\ (2 + 2) & (4 + 3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

2 x 2

2 x 2

2 x 2

3.8 เราสรุปได้ว่า

ผลบวกของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ จะได้เมทริกซ์ใหม่
ซึ่งมีมิติเท่ากับ เมทริกซ์ตัวตั้ง และเมทริกซ์ตัวบวก

ถ้า เมทริกซ์ A และ B มีมิติเป็น 2 x 2

$$A + B = C$$

เมทริกซ์ C จะมีมิติเป็น _____

2 x 2

$$3.9 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3.10 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ได้หรือไม่ } \underline{\hspace{2cm}}$$

เพราะ _____

ไม่ได้
มีมิติไม่เท่ากัน

$$3.11 \quad \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$3.12 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3.13 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3.14 เราพบว่าเมตริกซ์ศูนย์ ($\bar{0}$) เมื่อบวกกับเมตริกซ์ใด ๆ ผลบวกเป็นเมตริกซ์ตัวนั้น
เราเรียกเมตริกซ์ศูนย์ ($\bar{0}$) ว่า เอกลักษณ์สำหรับการบวกของเมตริกซ์
ดังนั้น

$$\bar{0} + A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A + \bar{0} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\bar{0} + A = A + \bar{0} = \underline{\hspace{2cm}}$$

A
A
A

3.15 ถ้า $A + \underline{B} = A$ แล้ว
เมตริกซ์ B จะต้องเท่ากับ $\bar{0}$ เท่านั้น
เราเรียก เมตริกซ์ศูนย์ ($\bar{0}$) ว่า เป็น
เอกลักษณ์สำหรับการ

บวก

3.16 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

พิจารณาเมทริกซ์ A และ เมทริกซ์ B จะพบว่า
สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ทั้งสอง มีตัวเลข
เหมือนกันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม

เมทริกซ์ B นี้ เรานิยมเรียกว่า "เมทริกซ์ $-A$ "

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.17 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.18 ได้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

3.19 เราพบว่า

$$A + (-A) = \bar{0} \text{ (เมทริกซ์ศูนย์)}$$

เมทริกซ์ A และ $-A$ เราเรียกว่า เมทริกซ์
ทั้งสองเป็น อินเวอร์สสำหรับการบวก ของซึ่งกันและกัน
นั่นคือ A เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ $-A$
และ $-A$ เป็น _____ ของ A

อินเวอร์สสำหรับการบวก

3.20 จากข้อ 3.18

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.21 สรุป เมื่อนำเมทริกซ์ใด ๆ บวกกับอินเวอร์ส
สำหรับการบวก ของตัวมันเอง จะได้เมทริกซ์ศูนย์ ($\bar{0}$)
ซึ่งเราเรียกเมทริกซ์ศูนย์ ($\bar{0}$) ว่าเป็น _____

เวกเตอร์สำหรับการบวก

3.22 ถ้าให้เราจะพิจารณาแบบนิยามของการ
สำหรับการบวกเมทริกซ์

ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3.23 จากข้อ 3.22

$$A + B \quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} \quad B + A$$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากัน)

เท่ากับ

3.24 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} - & - & - \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} - & - & - \end{bmatrix}$$

$$A + B \quad \xrightarrow{\quad \quad \quad} \quad B + A$$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากัน)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

เท่ากับ

3.25 สรุป การบวกเมทริกซ์ ปกติสมบัติการกฎ
การสลับที่สำหรับการบวก เพราะว่าเราทราบว่า
ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่มีมิติ
เหมือนกัน แล้ว

$$A + B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B + A$$

3.26 เราสามารถนำเมทริกซ์ มากกว่า 2 ชุดที่มี
มิติเหมือนกัน มาบวกกันได้ เช่น

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3.27 จากข้อ 3.26

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

สรุป $(A + B) + C$ $A + (B + C)$
(เท่ากับ / ไม่เท่ากับ)

3
1
3

313

4
3
6

เท่ากัน

3.28 เพื่อความสะดวกเราสามารถหาเบาริซซ์
ที่สอดคล้องกับ λ มากกว่า 2 จุด ในเวลาเดียวกันได้
เช่น จากข้อ 3.26 และ 3.27 เรา
สามารถทำได้วิธีหนึ่ง คือ

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} (1+2)+3 \\ (2+0)+1 \\ (3+1)+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1+(2+1) \\ _+ (_+ _) \\ _+ (_+ _) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(A+B)+C = A+(B+C)$

$$\begin{bmatrix} 1+(2+3) \\ 2+(0+1) \\ 3+(1+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3.29 เวกริก มีจุดสามทิศทาง กฎการจัดหน้าสำหรับ
การบวก คือ ถ้า A, B และ C เป็นเวกริก
ที่ปกติแล้วกัน แล้ว

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

ขอกรรจำ เบลริก A, B และ C จะ
บวกกันไดคองปียิก เท่านั้น
(เดียวกับ / ต่างกัน)

(เดียวกัน / ต่างกัน)

เดียวกัน

3.30 การลบเมทริกซ์ เมทริกซ์จะลบกันได้ ก็ถ้าว่
เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน และนำสมาชิกในตำแหน่ง
เดียวกัน ลบกัน เช่น

ให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4-1) & (5-4) \\ (7-2) & (3-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

3.31 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} () & () \\ () & () \\ () & () \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

B - A

3.35 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} () & () \\ () & () \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} () & () \\ () & () \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

3.36 ข้อสังเกต การลบเมทริกซ์ คล้ายการบวกเมทริกซ์
แต่มีข้อแตกต่างที่เห็นได้ชัด คือ

คุณสมบัติตามกฎการสลับที่ เป็นจริงสำหรับการบวก

คุณสมบัติตามกฎการสลับที่ _____ สำหรับการลบ
(เป็นจริง / ไม่จริง)

นั่นคือ

$$A - B \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad B - A$$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากับ)

ไม่จริง
ไม่เท่ากับ

3.37 ถ้า A มีมิติเป็น 3×5

$$A - B = C \quad \text{จะกระทำได้เมื่อ}$$

B มีมิติเป็น _____

แล้ว C มีมิติเป็น _____

3×5

3×5

บทที่ 4

การคูณเมทริกซ์

$$4.1 \quad \text{ให้} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore -A = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

เราสามารถเขียนเมทริกซ์ $-A$ ได้อีกแบบหนึ่ง

$$\text{คือ} \quad -1 \times A = \begin{bmatrix} -1 \times 4 & -1 \times 5 \\ -1 \times 3 & -1 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

4.2 เราจะพบว่าเมทริกซ์ $-A$ หาได้โดยการนำ -1 คูณกับสมาชิกของเมทริกซ์ A ทุก ๆ ตัว

ในทำนองเดียวกัน $2A$ หาได้โดยการนำ 2 คูณกับสมาชิกของเมทริกซ์ A ทุก ๆ ตัว เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2 \times A = \begin{bmatrix} 2 \times & 2 \times 5 \\ 2 \times 3 & 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$2 A = \begin{bmatrix} 8 & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

4.3 จากข้อ 4.2 เราสามารถหาค่าของ $3 A$ ได้ดังนี้

$$3 A = \begin{bmatrix} 3 \times 4 & 3 \times 5 \\ - \times & - \times \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

4.4 การคูณเมทริกซ์ ด้วยตัวเลขใด ๆ ผลคูณยังคง
เป็นเมทริกซ์ ที่มีขนาดเท่ากับเมทริกซ์เดิม

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5A &= \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 3 \\ 5 \times 4 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{5 \times 5} & \underline{5 \times 6} \\ \underline{25} & \underline{30} \end{bmatrix}$$

1.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3A &= \begin{bmatrix} \underline{3 \times 1} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1.6

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 5B &= \begin{bmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 2 & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

4.7 เราอาจนำเลขที่เป็นเศษส่วนมากคูณกับเมทริกซ์ได้

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times 2 & \frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{1}{2} \times 6 & \frac{1}{2} \times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

เราสามารถเขียน $3A$ ได้ดังนี้

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 3 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

4.9

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 7 & 2 \times 9 \\ 2 \times 4 & 2 \times 3 & 2 \times 9 \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

4.7 เราอาจนำเลขที่เป็นเศษส่วนมาคูณกับเมทริกซ์ได้

$$\begin{aligned} \text{เช่น } A &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times 2 & \frac{1}{2} \times 4 \\ \frac{1}{2} \times 6 & \frac{1}{2} \times 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

เราสามารถเขียน $3A$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 3 \\ 3 \times 2 & 3 \times 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

4.9

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 7 & 2 \times 9 \\ 2 \times 4 & 2 \times 3 & 2 \times 9 \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 7 & 2 \times 9 \\ 2 \times 4 & 2 \times 3 & 2 \times 9 \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 5 \end{bmatrix}$$

4.10 นาย ก. ซื้อคินสอ ยางลบ และสมุด เป็นจำนวนสิ่ง และราคา ตามที่ปรากฏในเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \text{คินสอ} & \text{ยางลบ} & \text{สมุด} \\ 2 & 1 & 3 \\ \text{แท่ง} & \text{อัน} & \text{เล่ม} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{บาท (ราคาคินสอ)} \\ \text{บาท (ราคายางลบ)} \\ \text{บาท (ราคาสมุด)} \end{array}$$

นาย ก. จะต้องจ่ายเงินทั้งสิ้น

$$(2 \times 1) + (1 \times 1) + (3 \times 2) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ บาท}$$

9 บาท

4.11 จากข้อ 4.10 เราสามารถหาจำนวนเงินที่ นาย ก. ต้องจ่าย โดยการคูณเมตริกซ์แถว กับเมตริกซ์หลัก ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \times 1) + (1 \times 1) + (3 \times 2) \\ \hspace{1.5cm} \\ \hspace{1.5cm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 1 + 6 \\ \hspace{1.5cm} \\ \hspace{1.5cm} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \hspace{1.5cm} \\ \hspace{1.5cm} \end{bmatrix}$$

[9]

4.12 ข้อสังเกต ผลคูณแบบปรกติ (ข้อ 4.10) จะหาผลคูณโดยใช้เวกริกซ์ คูณ เมตริกซ์ (ข้อ 4.11) ข้อควรจำ การคูณเมตริกซ์ด้วยเวตริกซ์ เราจะนำเมตริกซ์แถว คูณ เมตริกซ์หลัก เสมอ

4.12 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

เราอาจเขียนแผนผังการคูณเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow b_{11} \\ \rightarrow b_{21} \\ \rightarrow b_{31} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \end{bmatrix}$$

$$4.13 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow 2 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times 2) + (2 \times 1) + (3 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + \quad + \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$[2 + 2 + 12]$$

$$[16]$$

4.14 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 4) + (2 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} + \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \end{bmatrix} \text{ ซึ่งมิติเป็น } \underline{\quad}$$

$$[4 + 6]$$

$$[10]$$

$$1 \times 1$$

$$4.15 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \end{bmatrix} \text{ ซึ่งมิติเป็น } \underline{\quad}$$

$$[4 + 2 + 0]$$

$$[6]$$

$$1 \times 1$$

$$4.16 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แรก (A) มีมิติเป็น _____

เมทริกซ์หลัง (B) มีมิติเป็น _____

เมทริกซ์ผลคูณ (C) มีมิติเป็น _____

เมตริกซ์แรกมีจำนวน <u>หลัก</u> เท่ากับ จำนวน <u>แถว</u> ของ เมตริกซ์หลัง	4.21 A มีมิติเป็น 2×4 B มีมิติเป็น 4×1 A มีจำนวนหลัก = _____ หลัก B มีจำนวนแถว = _____ แถว A มีจำนวนหลัก = จำนวน_____ของ B A x B จะหาค่า _____ (ได้ / ไม่ได้)
4 4 แถว ได้	4.22 A มีมิติเป็น 3×2 B มีมิติเป็น 2×5 A มีจำนวนหลัก = _____ หลัก B มีจำนวนแถว = _____ แถว A มีจำนวนหลัก = จำนวนแถวของ _____ A x B จะหาค่า _____ (ได้ / ไม่ได้)
2 2 B ได้	4.23 A มีมิติเป็น 2×3 B มีมิติเป็น 3×1 A มีจำนวนหลัก _____ จำนวนแถวของ B (เท่ากับ / ไม่เท่ากัน) A x B จะหาค่า _____ (ได้ / ไม่ได้)
เท่ากับ ได้	4.24 A มีมิติเป็น 2×1 B มีมิติเป็น 2×1 A มีจำนวนหลัก _____ จำนวนแถวของ B (เท่ากับ / ไม่เท่ากัน) A x B จะหาค่า _____ (ได้ / ไม่ได้)

ไม่เท่ากับ
ไม่ได้

4.25 เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์คูณกัน ได้ผลคูณเป็นเมทริกซ์
ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ เมทริกซ์แรก
มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ เมทริกซ์หลัง

		$A \times B$	$=$	C
ถ้า	A	มีมิติเป็น	1×4	
	B	มีมิติเป็น	4×1	
แล้ว	C	มีมิติเป็น	1×1	
ถ้า	A	มีมิติเป็น	1×2	
	B	มีมิติเป็น	2×3	
แล้ว	C	มีมิติเป็น	_____	

1×3

4.26

		$A \times B$	$=$	C
ถ้า	A	มีมิติเป็น	2×3	
	B	มีมิติเป็น	3×7	
แล้ว	C	มีมิติเป็น	_____	

2×7

4.27

		$A \times B$	$=$	C
ถ้า	A	มีมิติเป็น	3×2	
	B	มีมิติเป็น	2×5	
แล้ว	C	มีมิติเป็น	_____	

3×5

4.28

		$A \times B$	$=$	C
ถ้า	A	มีมิติเป็น	$k \times m$	
	B	มีมิติเป็น	$m \times n$	
แล้ว	C	มีมิติเป็น	_____	

$k \times n$

4.29 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{array}{cc} \text{(A)} & \text{(B)} \\ \left[\begin{array}{cc} 5 & 2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 2 \\ 7 \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{cc} \text{(C)} & \\ \left[\begin{array}{c} (\quad \times \quad) + (\quad \times \quad) \end{array} \right] & \\ & = \left[\begin{array}{c} \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right] \end{array}$$

A มีมิติเป็น _____

B มีมิติเป็น _____

C มีมิติเป็น _____

$$\left[\begin{array}{c} (5 \times 2) + (2 \times 7) \\ 24 \end{array} \right]$$

 1×2 2×1 1×1

4.30 ให้

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right]$$

A มีมิติเป็น _____

B มีมิติเป็น _____

A มีจำนวนหลัก _____ จำนวนแถวของ B
(เท่ากับ / ไม่เท่ากับ)A $\times$ B จะหาผล _____
(ได้ / ไม่ได้)ผลคูณของ A $\times$ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ _____ 2×2 2×1

เท่ากับ

 2×1

4.31

จากข้อ 4.30 เราสามารถหาผลคูณของ
ได้โดยใช้วิธีการคูณคล้ายกับ ข้อ 4.29 คือ

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right] \end{array} = \left[\begin{array}{c} (1 \times 1) + (2 \times 3) \\ (3 \times 1) + (4 \times \underline{\hspace{1cm}}) \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

4.32 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \times 2) + (5 \times \underline{\quad}) \\ (\underline{\quad}) + (1 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (2 \times 2) + (5 \times 4) \\ (3 \times 2) + (1 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 + 20 \\ 6 + 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 10 \end{bmatrix}$$

4.33 $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \\ (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (7 \times 1) + (3 \times 2) \\ (5 \times 1) + (9 \times 2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 + 6 \\ 5 + 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$$

4.34 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \\ (\underline{\quad}) + (\underline{\quad}) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times 5) + (0 \times 6) \\ (0 \times 5) + (1 \times 6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4.35 ถ้า เมทริกซ์ A มีมิติเป็น 2×2

เมทริกซ์ B มีมิติเป็น 2×2

ผลคูณของ $A \times B$ มีมิติเป็น _____

$$\begin{array}{c} \text{(A)} \quad \text{(B)} \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} (1 \times 3) + (2 \times 1) & (1 \times 2) + (2 \times 0) \\ (4 \times 3) + (6 \times 1) & (4 \times 2) + (6 \times 0) \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 18 & 8 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right] \quad (6 \times 0)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

4.36 จงหาผลคูณของ เมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \times 4) + (5 \times 2) & (\underline{\hspace{1cm}}) + (\underline{\hspace{1cm}}) \\ (\underline{\hspace{1cm}}) + (\underline{\hspace{1cm}}) & (\underline{\hspace{1cm}}) + (\underline{\hspace{1cm}}) \end{bmatrix} \\ = \left[\begin{array}{cc} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right] \circ$$

$$\begin{bmatrix} (2 \times 4) + (5 \times 2) & (2 \times 3) + (5 \times 0) \\ (3 \times 4) + (1 \times 2) & (3 \times 3) + (1 \times 0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}$$

4.37

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right] \\ = \left[\begin{array}{cc} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times 1) + (1 \times 4) & (1 \times 2) + (1 \times 3) \\ (3 \times 1) + (2 \times 4) & (3 \times 2) + (2 \times 3) \end{bmatrix}$$

4.38

ถ้า เมทริกซ์ A มีมิติเป็น 3×3 B มีมิติเป็น 3×3 ผลคูณของ $A \times B$ มีมิติเป็น _____

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 3) & (1 \times 3) + (0 \times 2) + (1 \times 1) & (1 \times 2) + (0 \times 1) + (1 \times 3) \\ (0 \times 1) + (2 \times 2) + (1 \times 3) & (0 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) & (0 \times 2) + (2 \times 1) + (1 \times 3) \\ (2 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 3) & (2 \times 3) + (1 \times 2) + (1 \times 1) & (2 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

 3×3

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

4.39 เมทริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุม จากมุมบนซ้าย

ไปมุมล่างขวา ทุก ๆ ตัว เป็น 1 และสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น 0

เมื่อคูณกับเมทริกซ์ใด ๆ ผลคูณจะเป็นเมทริกซ์นั้น เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times 1) + (0 \times 3) & (1 \times 2) + (0 \times 4) \\ (0 \times 1) + (1 \times 3) & (0 \times 2) + (1 \times 4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4.40 เราเรียกเมทริกซ์ ที่มีคุณสมบัติ ตามข้อ 4.39
ว่าเป็น เมทริกซ์เอกลักษณ์สำหรับการคูณ และ
เขียนแทนด้วย I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1 \ 5) \ (0 \ 6) \\ (0 \ 5) \ (1 \ 6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

4.41 ถ้าได้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่มีจำนวนแถว
เท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ I

เราสรุปได้ว่า

$$I \times A = A$$

เราเรียก I ว่าเป็น สำหรับการคูณ
ของเมทริกซ์

เอกลักษณ์

4.42 จงเขียนสมาชิกของ เมทริกซ์ที่เป็นเอกลักษณ์สำหรับ
การคูณ (I) ของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3×3

$$I = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.43

จงหาลกกดของ เมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{matrix} (I) & (A) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 \times 1) + (0 \times 4) + (0 \times 7) & (\quad) + (\quad) + (\quad) & (1 \times 3) + (0 \times 6) + (0 \times 9) \\ (\quad) + (\quad) + (\quad) & (0 \times 2) + (1 \times 5) + (0 \times 8) & (\quad) + (\quad) + (\quad) \\ (0 \times 1) + (0 \times 4) + (1 \times 7) & (\quad) + (\quad) + (\quad) & (\quad) + (\quad) + (\quad) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$\text{เราพบว่า} \quad I \times A = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

4.44

เมื่อเราพบเมทริกซ์ I คูณกับเมทริกซ์ใด ๆ
ผลคูณย่อมเป็นเมทริกซ์ตัวนั้น

เราสามารถเก็บคำตอบได้โดยไม่ต้องแสดงวิธีคูณ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.45 พิจารณาเมทริกซ์ต่อไปนี้ว่าเป็น เมทริกซ์เอกลักษ์
สำหรับการคูณหรือไม่ ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเอกลักษ์สำหรับการคูณของเมทริกซ์
เพราะ _____

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์คูณคูณไม่เท่ากับเมทริกซ์หลัง
(เหตุผลท่านเอง กรุณาเขียนคำตอบ)

4.46

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเอกลักษ์สำหรับการคูณของเมทริกซ์
เพราะ _____

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์คูณคูณไม่เท่ากับเมทริกซ์หลัง
(เหตุผลท่านเอง กรุณาเขียนคำตอบ)

บทที่ 5

คุณสมบัติบางประการของการคูณเมตริกซ์

5.1 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

$$= \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1x1)+(3x1) & (1x2)+(3x2) \\ (2x1)+(4x1) & (2x2)+(4x2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

5.2 ទំនាក់ទំនង 5.1

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \\ \rule{1.5cm}{0.4pt} & \rule{1.5cm}{0.4pt} \end{bmatrix}$$

พิจารณาผลของอเมริกัน ข้อ 5.1 และ ข้อ 5.2

จะพบว่า $A \neq B$ $B \neq A$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากัน)

$$\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

ไม่เท่ากับ

5.3 การคูณเมทริกซ์ ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่

เพราะ

$$A \neq B$$

$$B \neq A$$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากับ)

ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

ไม่เท่ากับ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5.4 จากข้อ 5.3

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

พิจารณาลักษณะของเมทริกซ์ ข้อ 5.3 และ ข้อ 5.4

จะพบว่า

$$A \neq B$$

$$B \neq A$$

(เท่ากับ / ไม่เท่ากับ)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ไม่เท่า

5.5 ให้น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5.6 จากข้อ 5.5

$$(A \times B) \times C = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

5.7 จากข้อ 5.5

$$\begin{aligned} B \times C &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5.8 จากข้อ 5.5 และ ข้อ 5.7

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\ A \times (B \times C) &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

พิจารณาผลคูณของเมทริกซ์ จากข้อ 5.6

$$(A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B) \times C \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad A \times (B \times C)$$

(เท่ากัน / ไม่เท่ากัน)

เราพบว่า

การคูณเมทริกซ์ มีคุณสมบัติ การกฎการจับคู่ สำหรับ

การคูณ

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

5.9 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5.10 จากข้อ 5.9

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

5.11 เราจะพิจารณาการกระจายว่า เป็นจริงสำหรับเมทริกซ์หรือไม่?

จากการกระจาย

$$X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$$

ถ้า การกระจายเป็นจริงสำหรับเมทริกซ์ แล้ว

$$A \times (B + C) = (A \times B) + \underline{\hspace{2cm}}$$

(A x C)

5.12 จากข้อ 5.9

$$\begin{aligned}
 A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5.13 จากข้อ 5.9

$$\begin{aligned}
 A \times C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

5.14 พิจารณาคงจากข้อ 5.8 และ ข้อ 5.9

$$\begin{aligned}
 (A \times D) + (A \times C) &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

5.15 จากข้อ 5.10 เราทราบว่า

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

จากข้อ 5.14 เราทราบว่า

$$(A \times B) + (A \times C) = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

เราสรุปได้ว่า

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

"กฎการกระจายเป็นจริงสำหรับเมทริกซ์"

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

5.16 สรุป

ถ้า A , B และ C เป็นเมทริกซ์

$$A \times B \neq B \times A$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ เมทริกซ์จัตุรัส

6.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีมิติเป็น 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $|A|$

หรือ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $| \quad |$

หรือ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

6.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส มีมิติเป็น 2×2

เราจะให้ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์ของ A ซึ่ง

เขียนแทนด้วย $|A|$ ว่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากับ

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2 \times 3) - (4 \times 1)$$

$$(2 \times 3) - (4 \times 1)$$

$$6.3 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ อ่านว่า } \underline{\hspace{2cm}} \text{ ของ } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ มีค่าเท่ากับ } \underline{(2 \times 3) - (4 \times 1)} \\ = \underline{\hspace{2cm}}$$

ดีเทอร์มิแนนต์

$$(2 \times 3) - (4 \times 1)$$

2

$$6.4 \quad \text{ให้} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| \text{ มีค่าเท่ากับ } \underline{(1 \times 4) - (2 \times 2)} \\ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(1 \times 4) - (2 \times 2)$$

0

$$6.5 \quad \text{ให้} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| \text{ มีค่าเท่ากับ } \underline{(5 \times 1) - (3 \times 2)} \\ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(5 \times 1) - (2 \times 3)$$

$$-1$$

6.6 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ต่อไปนี้

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

มีค่าเท่ากับ _____
= _____

$$(5 \times 3) - (2 \times 4)$$

$$7$$

6.7

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

มีค่าเท่ากับ _____
= _____

$$(0 \times 2) - (1 \times 9)$$

$$-9$$

6.8

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

มีค่าเท่ากับ _____
= _____

$$(-2 \times 3) - (1 \times 5)$$

$$-11$$

6.9 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ถ้าเราตัดสมาชิกในแถวที่ 1 และ หลักที่ 1
ออกหมด แล้วนำสมาชิกที่เหลือมาหาค่าดีเทอร์มิแนนต์
ค่า ดีเทอร์มิแนนต์ นี้เรียกว่า ไมเนอร์ของ a_{11}

ซึ่งเขียนแทนด้วย $|M_{11}|$

ไมเนอร์ของ a_{11} คือ $|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$|M_{11}|$ มีค่าเท่ากับ $a_{22} a_{33} -$ _____

$$a_{22} a_{33} - \underline{a_{32} a_{23}}$$

6.10 $|M_{11}|$ หมายถึงไมเนอร์ของสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 1 และ หลักที่ 1

$|M_{21}|$ หมายถึงไมเนอร์ของสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ ____ และ หลักที่ ____

ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ถ้าต้องการหาค่าไมเนอร์ของสมาชิก

ตัวใด ให้ตัดสมาชิกในแถวและหลักที่สมาชิกตัวนั้นอยู่
ออกหมด แล้วนำสมาชิกที่เหลือมาหาค่าดีเทอร์มิแนนต์

ไมเนอร์ของ a_{21} คือ $|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & - \\ a_{32} & - \end{vmatrix}$

$|M_{21}|$ มีค่าเท่ากับ _____

2 , 1

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}$$

6.11 จากข้อ 6.10

ไมเนอร์ของ a_{22} คือ $|M_{22}| = \begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$

$|M_{22}|$ มีค่าเท่ากับ _____

$$|M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}$$

6.12 จากข้อ 6.10

ไมเนอร์ของ a_{13} คือ $|M_{13}| = \begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$

$|M_{13}|$ มีค่าเท่ากับ _____

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}$$

6.13 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

7 เป็นสมาชิกตำแหน่ง a_{11}

ไมเนอร์ของ 7 มีค่า = $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

6.14 จากข้อ 6.13

ไมเนอร์ของ 9 มีค่า = $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

ไมเนอร์ของ 9 ในที่นี้ เขียนแทนด้วย M_{12}

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

6.15 จากข้อ 6.13

$|M_{22}|$ คือ ไมเนอร์ของ 4 = $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$|M_{22}|$ มีค่าเท่ากับ $(7 \times 5) - (2 \times 2)$
= _____

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(7 \times 5) - (2 \times 2)$$

31

6.16 จากข้อ 6.13

$|M_{33}|$ = $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

$|M_{33}|$ มีค่าเท่ากับ _____
= _____

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(7 \times 4) - (5 \times 9)$$

$$-17$$

6.17 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & 8 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

6.18 จากเมตริกซ์ข้อ 6.17

$$|M_{23}| = \begin{vmatrix} & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

6.19 จากเมตริกซ์ข้อ 6.17

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|M_{11}| \text{ มีค่าเท่ากับ } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix},$$

$$(4 \times 5) - (6 \times 8)$$

6.20 ถ้า i เป็นตำแหน่งของแถว
 j เป็นตำแหน่งของหลัก
 a_{ij} หมายถึงสมาชิกของเมทริกซ์ A
 ที่อยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j
 ถ้า $i = 1, j = 3$
 a_{ij} คือ a_{13} นั่นเอง
 ถ้า $i = 3, j = 5$
 a_{ij} คือ a_{35} นั่นเอง

 a_{35}

6.21 ถ้า $i = 2, j = 3$
 a_{ij} คือ a_{23}

 a_{23}

6.22 เราทราบว่า $x^2 = x \times x$
 $(-1)^2 = (-1) \times (-1)$
 $= 1$
 $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$
 $=$ _____

 -1

6.23 $(-1)^4 =$ _____
 $=$ _____

 $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$
 1

6.24 เราพบว่า ถ้ากำลังของ (-1) เป็นเลขคู่
 ผลคูณจะมีค่า เท่ากับ 1
 ถ้ากำลังของ (-1) เป็นเลขคี่ ผลคูณจะมีค่า
 เท่ากับ -1
 $(-1)^5 =$ _____

$$\begin{array}{l}
 -1 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 6.25 \quad (-1)^{2+2} = (-1)^4 \\
 \qquad \qquad \qquad = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 \hline
 (-1)^5 \\
 -1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 6.26 \quad (-1)^{3+2} = \underline{\hspace{1cm}} \\
 \qquad \qquad \qquad = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (-1)^5 \\
 -1 \\
 \hline
 -1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 6.27 \quad \text{ถ้า } i = 1, j = 2 \\
 (-1)^{i+j} = (-1)^{1+2} \\
 \qquad \qquad \qquad = (-1)^3 \\
 \qquad \qquad \qquad = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -1 \\
 \hline
 (-1)^{3+1} \\
 (-1)^4 \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 6.28 \quad \text{ถ้า } i = 3, j = 1 \\
 (-1)^{i+j} = (-1)^{\underline{\hspace{1cm}}} \\
 \qquad \qquad \qquad = (-1)^{\underline{\hspace{1cm}}} \\
 \qquad \qquad \qquad = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (-1)^{3+1} \\
 (-1)^4 \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 6.29 \quad \text{เราทราบว่า เมื่อ นำ 1 คูณกับเลขจำนวนใด} \\
 \text{ผลคูณจะเป็นเลขจำนวนนั้น} \\
 \text{เมื่อ นำ } -1 \text{ คูณกับเลขจำนวนใด ผลคูณจะเป็น} \\
 \text{เลขจำนวนเดิม แต่เครื่องหมายต่างจากเดิม} \\
 \begin{array}{l}
 \text{เช่น} \quad 1 \times 5 = 5 \\
 \qquad \quad -1 \times 5 = -5 \\
 \qquad \quad 1 \times |M_{11}| = |M_{11}| \\
 \qquad \quad -1 \times |M_{12}| = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$- |M_{12}|$$

6.30 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส
โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย A_{ij}
ซึ่งหาได้โดย

$$A_{ij} = (-1)^{1+j} \times |M_{1j}|$$

เมื่อ i คือ ตำแหน่งของแถว
 j คือ ตำแหน่งของหลัก
 $|M_{1j}|$ คือ ค่าดีเทอร์มิแนนต์ของ a_{ij}

6.31 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3 ตรงกับตำแหน่งของ a_{13}

ไมเนอร์ของ 3 คือ $|M_{13}|$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (7 \times 5) - (4 \times 8)$$

$$|M_{13}| = 3$$

โคแฟกเตอร์ของ 3 คือ A_{13}

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \times |M_{13}|$$

$$= (-1)^4 \times 3$$

$$= 1 \times 3$$

$$A_{13} = 3$$

$$(7 \times 5) - (4 \times 8)$$

3

6.32 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

ไมเนอร์ของ 5 คือ

$$M_{32}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ _ & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (9 \times 2) - (1 \times _)$$

$$= 18$$

โคแฟกเตอร์ของ 5 คือ

$$A_{32}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32}$$

$$= (-1) \times 18$$

$$= -18$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(9 \times 2) - (4 \times 1)$$

$$18 - 4$$

$$(-1)^5 \times 18$$

$$-18$$

6.33 จากเมทริกซ์ของ 6.32

ไมเนอร์ของ 4 คือ

$$M_{21}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} _ & _ \\ _ & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \times 8) - (_ \times _)$$

$$= 8$$

โคแฟกเตอร์ของ 4 คือ

$$A_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$= (-1) \times 8$$

$$= -8$$

$$\begin{vmatrix} M_{21} \\ 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(3 \times 8) - (5 \times 1)$$

$$19$$

$$(-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} M_{21} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^3 \times 19$$

$$-19$$

6.34 เมื่อเราทราบค่าแทนของ a_{ij} และ
หาค่า ไมเนอร์ของ a_{ij} ได้แล้ว

เราสามารถหาค่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

ได้ทันที โดยพิจารณาดังนี้

$$\text{ถ้า ค่าของ } i+j \text{ เป็นเลขคู่} \quad A_{ij} = \begin{vmatrix} M_{ij} \end{vmatrix}$$

$$\text{ถ้า ค่าของ } i+j \text{ เป็นเลขคี่} \quad A_{ij} = -\begin{vmatrix} M_{ij} \end{vmatrix}$$

จากเขตรักรข้อ 6.32

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_{11} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (7 \times 8) - (5 \times 2) \\ &= 66 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $1 + 1 = 2$ เป็นเลขคู่

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad A_{11} &= \begin{vmatrix} M_{11} \end{vmatrix} \\ &= 66 \end{aligned}$$

$$(7 \times 8) - (5 \times 2)$$

$$46$$

$$A_{11} = 46$$

6.35 ถ้า

$$\begin{vmatrix} M_{23} \end{vmatrix} = 12$$

เนื่องจาก $2 + 3 = 5$ เป็นเลขคี่

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad A_{23} &= -\begin{vmatrix} M_{23} \end{vmatrix} \\ &= -12 \end{aligned}$$

อินเวอร์สสำหรับการคูณของ เมทริกซ์จัตุรัส

7.1 ในระดับนี้เราจะศึกษาการหาอินเวอร์สสำหรับการคูณของเมทริกซ์จัตุรัส เฉพาะที่มีมิติเป็น 2×2 ส่วนเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดใหญ่กว่านี้คงใช้หลักการและวิธีการหาอินเวอร์สสำหรับการคูณท่านเองเถียวกัน

การหาค่าไมเนอร์ของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเป็น 2×2 คงใช้วิธีการหาเช่นเกี่ยวกับการหาค่าไมเนอร์ของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเป็น 3×3 แต่จะง่ายกว่า เช่น

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|M_{11}| = 3$$

$$|M_{12}| = 2$$

$$|M_{21}| = 4$$

$$|M_{22}| = 1$$

4

1

7.2 การหาค่าโคแฟกเตอร์ของสมาชิกในเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ 2×2 คงใช้ความรู้จากที่เราศึกษามาโดย

$$\text{ถ้า ค่าของ } 1+j \text{ เป็นเลขที่ } A_{1j} = |M_{1j}|$$

$$\text{ถ้า ค่าของ } 1+j \text{ เป็นเลขที่ } A_{1j} = -|M_{1j}|$$

เมื่อ 1 คือตำแหน่งของแถว

j คือตำแหน่งของหลัก

$$\text{จากขอ 7.1 } A_{12} = -2$$

$$A_{21} = -4$$

-4

$$7.3 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|M_{11}| = \underline{2}$$

$$|M_{12}| = \underline{5}$$

$$|M_{21}| = \underline{1}$$

$$|M_{22}| = \underline{4}$$

2

$$7.4 \quad \text{จากข้อ 7.3}$$

5

$$A_{11} = \underline{2}$$

1

$$A_{12} = \underline{-5}$$

4

$$A_{21} = \underline{-1}$$

$$A_{22} = \underline{4}$$

2

$$7.5 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

-5

-1

4

$$|M_{11}| = 4, \quad A_{11} = \underline{4}$$

$$|M_{12}| = \underline{3}, \quad A_{12} = \underline{-3}$$

$$|M_{21}| = \underline{1}, \quad A_{21} = \underline{-9}$$

$$|M_{22}| = \underline{5}, \quad A_{22} = \underline{5}$$

$$4, \quad 4$$

$$3, \quad -3$$

$$9, \quad -9$$

$$5, \quad 5$$

7.6 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ถ้าเรานำ โคแฟกเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัว
มาแทนลงในตำแหน่งของสมาชิกนั้น ๆ เช่น

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

แล้ว ทรานส์โพสเมทริกซ์ นี้ จะได้เมทริกซ์ใหม่
เรียกว่า แอดจอยท์ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย

$\text{adj } A$ คือ

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

7.7 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = 3, \quad A_{11} = 3$$

$$M_{12} = 1, \quad A_{12} = -1$$

$$M_{21} = 6, \quad A_{21} = -6$$

$$M_{22} = 4, \quad A_{22} = 4$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$1, \quad -1$$

$$6, \quad -6$$

$$4, \quad 4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

7.8 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|M_{11}| = \underline{9}, \quad A_{11} = \underline{9}$$

$$|M_{12}| = \underline{2}, \quad A_{12} = \underline{-2}$$

$$|M_{21}| = \underline{2}, \quad A_{21} = \underline{-2}$$

$$|M_{22}| = \underline{3}, \quad A_{22} = \underline{3}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \underline{9} & \underline{2} \\ \underline{-2} & \underline{3} \end{bmatrix}$$

$$9, \quad 9$$

$$7, \quad -7$$

$$2, \quad -2$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

7.9 ให้

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$|M_{11}| = \underline{d}, \quad A_{11} = \underline{d}$$

$$|M_{12}| = \underline{c}, \quad A_{12} = \underline{-c}$$

$$|M_{21}| = \underline{b}, \quad A_{21} = \underline{-b}$$

$$|M_{22}| = \underline{a}, \quad A_{22} = \underline{a}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \underline{d} & \underline{-b} \\ \underline{-c} & \underline{a} \end{bmatrix}$$

พิจารณา เมทริกซ์ A และแอ็ดจอยนต์ของ A
 จะพบว่า สมาชิก a กับ a สลับตำแหน่งกัน
 สมาชิก b กับ c ตำแหน่งคงเดิมแต่
 เครื่องหมายต่างไปจากเดิม

เราอาจจำเป็นหลักในการหาแอ็ดจอยนต์ของ
 เมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 ทำให้รวดเร็วขึ้น

d , d
 c , $-c$
 b , $-b$
 a , a

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

7.10 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

เมื่อเทียบสมาชิกของเมทริกซ์นี้ กับเมทริกซ์

ในข้อ 7.9 เราพบว่า

a ตรงกับ 3 , b ตรงกับ 2

c ตรงกับ 7 , d ตรงกับ 9

เราจะหา แอดจอยท์ของ A โดยใช้ผลสรุป

ตามข้อ 7.9 ได้ดังนี้

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

(เมทริกซ์ในข้อนี้ เป็นเมทริกซ์ซัดเดียวกันกับ

เมทริกซ์ในข้อ 7.8 เราสามารถตรวจคำตอบได้)

แอดจอยท์ A นี้ ✓
(ถูกต้อง / ผิด)

ถูกต้อง

7.11 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

7.12 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

(ข้อสังเกต ทาแหน่ง $\mathbf{b}$ และ $\mathbf{c}$
คงเกิดแต่เครื่องหมายเปลี่ยน)

$$7.13 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$7.14 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$7.15 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

7.16 เมื่อเรานำ $\frac{1}{|A|}$ คูณ $\text{adj } A$
ผลคูณจะเป็นเมทริกซ์ ซึ่งเป็น อินเวอร์สสำหรับ
การคูณของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{adj } A$$

A^{-1} อ่านว่า _____

อินเวอร์สสำหรับการคูณของเมทริกซ์ A

$$\begin{aligned}
 7.17 \quad \text{ให้ } A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
 \text{adj } A &= \begin{bmatrix} \underline{3} & \underline{-1} \\ \underline{-4} & \underline{2} \end{bmatrix} \\
 |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{(2 \times 3) - (4 \times 1)}{2} \\
 &= \underline{2} \\
 A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \times \text{adj } A \\
 A^{-1} &= \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} \underline{3} & \underline{-1} \\ \underline{-4} & \underline{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

7.18 จากข้อ 7.17

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ทำให้เป็นผลสำเร็จได้คือ

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times (3) & \frac{1}{2} \times (-1) \\ \frac{1}{2} \times (-4) & \frac{1}{2} \times (2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \underline{\frac{3}{2}} & \underline{-\frac{1}{2}} \\ \underline{-2} & \underline{1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \times (3) & \frac{1}{2} \times (-1) \\ \frac{1}{2} \times (-4) & \frac{1}{2} \times (2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7.19 \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \times 7) - (1 \times 9)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(2 \times 7) - (1 \times 9)$$

5

7.20 จากข้อ 7.19

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{adj } A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

ทำให้เป็นผลสำเร็จได้ คือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}x(7) & \frac{1}{5}x(-9) \\ \frac{1}{5}x(-1) & \frac{1}{5}x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

7.21 จากข้อ 7.19 และ ข้อ 7.20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times A = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{14}{5} - \frac{9}{5} & \frac{63}{5} - \frac{63}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{9}{5} + \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.22 จากข้อ 7.17 และ ข้อ 7.18

$$A^{-1} \times A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.23 เราพบว่า $A^{-1} \times A = I$

การแก้สมการโดยใช้เมทริกซ์

	8.1 ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติเป็น 2×2 เมทริกซ์ B มีมิติเป็น 2×1 ผลคูณของ $A \times B$ มีมิติเป็น _____ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
2×1 $\begin{bmatrix} X + Y \\ X + 2Y \end{bmatrix}$	8.2 ให้ $\begin{bmatrix} X + Y \\ X + 2Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และจะเท่ากันจริงเมื่อ สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันตัวต่อตัว ก็คือ $\begin{aligned} X + Y &= 1 \\ X + 2Y &= \end{aligned}$
2	8.3 จากข้อ 8.1 และ ข้อ 8.2 เราสามารถเขียน $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เพราะเมื่อ เมทริกซ์ถ้ายคูณกันจะได้ผลคูณเป็น $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการ 2 สมการ คือ _____ = 1 และ _____ = 2

$$\begin{bmatrix} X + Y \\ X + 2Y \end{bmatrix}$$

$$X + Y = 1$$

$$X + 2Y = 2$$

8.4 พิจารณา ข้อ 8.3

เมื่อนำเมทริกซ์คูณกัน เราสามารถจัดให้อยู่
ในรูปของสมการ 2 สมการได้

ในทางตรงข้าม ถ้าเรามีสมการ 2 สมการ
เราสามารถใช้เขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์
คูณกัน เช่น

$$X + Y = 3$$

$$5X - 2Y = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เราจะตรวจสอบว่า เมทริกซ์ข้างบนจะเขียนแทน
สมการทั้งสองได้หรือไม่ โดยการคูณเมทริกซ์คานซาย
จะได้

$$\begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \underline{\hspace{2cm}} = 3$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 1$$

แสดงว่าเมทริกซ์นี้เขียนแทนสมการทั้งสองได้

$$\begin{bmatrix} X + Y \\ 5X - 2Y \end{bmatrix}$$

$$X + Y = 3$$

$$5X - 2Y = 1$$

8.5 การเขียนสมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ มีหลัก ดังนี้ คือ

1. เขียนสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในตำแหน่งเดิม
ไว้ในเมทริกซ์จัตุรัส

2. เขียนตัวแปรเรียงตามลำดับก่อนหลัง ไว้ใน
เมทริกซ์ซึ่งคูณกับเมทริกซ์จัตุรัส จากบนลงล่าง

3. เทอมอิสระ เขียนไว้ในเมทริกซ์ทางขวาของเมทริกซ์

$$8.6 \quad 3X + 7Y = 4$$

$$5X + 2Y = 9$$

สมการทั้งสองเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$8.7 \quad X + 3Y = 1$$

$$6X - 2Y = 8$$

สมการทั้งสองเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$8.8 \quad 4X - 5Y = 0$$

$$7X + Y = 2$$

สมการทั้งสองเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$8.9 \quad X + Y = 6$$

$$X - Y = 6$$

สมการทั้งสองเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ \\ _ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8.10

$$X + Y = 1$$

$$X + 2Y = 2$$

สมการทั้งสองเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{matrix} (A) & (B) & (C) \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

พิจารณาเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัส

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.11

$$\text{จาก } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \text{adj } A$$

พิจารณาเมทริกซ์ A

ข้อ 3.10

$$|A|$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = (1 \times 2) - (1 \times 1)$$

$$|A|$$

$$= 1$$

แทนค่าใส่

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{(1)} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(1 \times 2) - (1 \times 1)$$

1,

$$\frac{1}{(1)} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.12

จากข้อ 8.10 เราทราบว่า

$$A \times B = C$$

นำ A^{-1} คูณทางซ้ายทั้งสองข้างของสมการ

$$A^{-1} \times (A \times B) = A^{-1} \times C$$

เนื่องจากกฎการสลับที่เป็นจริงสำหรับการคูณ จะได้ว่า

$$(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$$

เราจะแทนค่า A, B, C และ A^{-1} ในข้อถัดไป

8.13 จากข้อ 8.12 $(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$
 แทนค่า A, B, C และ A^{-1} จากข้อ 8.10
 และ ข้อ 8.11 จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.14 เราทราบมาแล้วว่า

$$A^{-1} \times A = I$$

ดังนั้นผลคูณของ เมทริกซ์จัตุรัส ข้อ 8.13

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.15 แทนค่าผลคูณ จากข้อ 8.14 ลงใน ข้อ 8.13

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.16 จากข้อ 8.15

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ทำให้เป็นผลลัพธ์ได้

$$\begin{bmatrix} X + 0 \\ Y + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8.17 จากข้อ 8.16

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทั้งสองจะเท่ากันจริงก็ต่อเมื่อ

$$X = 0$$

$$Y = 1$$

0

1

8.18 ลำดับขั้นตอนที่แสดงไว้ตั้งแต่ข้อ 8.10 ถึงข้อ 8.17 เป็นการแก้สมการกำลังหนึ่งชนิดของตัวแปร

สำหรับการแก้สมการที่มีตัวแปรมากกว่านี้โดยวิธีแก้สมการด้วยเมทริกซ์ คงให้ดูเรื่องราววิธีการทำของเกี่ยวกับ คือ

1. เขียนสมการที่จะหาค่าตัวแปรให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $A \times B = C$

2. หาอินเวอร์สสำหรับการคูณของ A , (A^{-1})

3. นำ A^{-1} คูณเมทริกซ์ที่ได้จาก 1. ทางซ้าย
จากคั่นสองข้าง จะได้

$$(A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times C$$

$$I \times B = A^{-1} \times C$$

$$B = A^{-1} \times C$$

4. หาค่าตัวแปรทุกตัวที่ต้องการ โดยใช้ความรู้เรื่องการเท่ากันของเมทริกซ์

8.19 ตัวอย่างการแก้สมการโดยใช้เมทริกซ์

จงแก้สมการ

$$3X + 2Y = 7$$

$$X + Y = 3$$

เขียนเป็นรูปทางเมทริกซ์ คือ

$$\begin{matrix} (A) & (B) & & (C) \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix} \dots (1)$$

หาอินเวอร์สสำหรับการคูณของ $A, (A^{-1})$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \times \text{adj } A \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

เอา A^{-1} คูณสมการ (1) ทั่ว

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (7 - 6) \\ (-7 + 9) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ans $X = 1, Y = 2$