

การวิเคราะห์การนำความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

HEAT CONDUCTION ANALYSIS BY FINITE DIFFERENT METHOD

ปฐวิติ สีลา
ปัญญา จำปาทอง
พรชัย คนฉลาด

โครงการวิศวกรรมศาสตร์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

หลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปีการศึกษา 2543

การวิเคราะห์การนำความร้อนด้วยวิธีไฟในดัดิฟเฟอร์เรนท
โดย

ภาควิชา
อาจารย์ที่ปรึกษา

ชื่อ

นาย ปฏิวัติ สีลา
นาย ปัญญา จำปาทอง
นาย พรชัย คนฉลาด
วิศวกรรม เครื่องกล
อาจารย์ มนัส แป้งใส

คณะวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒให้นับโครงการวิศวกรรมศาสตร์เป็น
ส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตหรือหลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตร
บัณฑิต

..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(.....)

คณะกรรมการตรวจปริญญานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(.....)
..... กรรมการ
(.....)
..... กรรมการ
(.....)
..... กรรมการ
(.....)

การวิเคราะห์การนำความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์
ปีการศึกษา 2543

โดย

นาย ปฏิวัติ สีลา

นาย ปัญญา จำปาทอง

นาย พรชัย คนฉลาด

อาจารย์ที่ปรึกษา

อ. มนัส แบ่งใส

บทคัดย่อ

โครงการวิศวกรรมฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มาใช้คำนวณการนำความร้อน โดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ การคำนวณการนำความร้อน เป็นการคำนวณแบบสภาวะคงตัว และการคำนวณก็จะอยู่ในขอบเขตของ 1 มิติ และ 2 มิติ การแสดงผลจะแสดงในรูปของตาราง และสี เพื่อสามารถเข้าใจได้ง่าย

ผลการวิเคราะห์พบว่า การนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้มากหรือน้อย มีองค์ประกอบที่สำคัญคือค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน และพื้นที่ที่ตั้งฉากกับทิศทางการถ่ายเทความร้อน โดยถ้าทั้งสองตัวแปรนี้ มีค่ามากการนำความร้อนก็จะเกิดขึ้นได้ดี ตรงกันข้ามถ้าหากทั้งสองตัวแปรนี้มีค่าน้อย การถ่ายเทความร้อนก็เกิดขึ้นได้น้อย

Heat Conduction Analysis By Finite Different Method

Academic Year 2000

By

Mr. Patiwad Srila

Mr. Panya Jampathong

Mr. Ponchai Khonchalard

Project Report Advisor

Mr. Manat Paengsai

ABSTRAC

The aim of engineering project is to develop a computer program for heat conduction analysis by finite different method. The assumption of heat conduction are steady state, one and two dimension. Simplified resultant are shown in table and color form.

The prime factor of heat conduction transfer, which are heat transfer coefficient and perpendicular area. If the factor are increased, heat conduction transfer would raise. In the other hand it is diminish.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณอาจารย์ มนัส แ่งไธ ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาสำหรับการทำโครงงานฉบับนี้ที่ให้คำแนะนำพร้อมทั้งตรวจสอบแก้ไขจนทำให้โครงงานฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น ขอขอบพระคุณ ครู อาจารย์ ทุกๆ ท่านที่ได้อบรมสั่งสอน จนทำให้ผู้เขียนได้มีโอกาสได้เขียนโครงงานฉบับนี้ได้สำเร็จ

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ผู้ให้กำเนิด คอยอบรมสั่งสอนและช่วยสนับสนุนการศึกษาของผู้เขียน

คณะผู้จัดทำ



สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ค
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ง
กิตติกรรมประกาศ	จ
สารบัญ	ฉ
สารบัญรูป	ช
สารบัญตาราง	ญ
คำอธิบายสัญลักษณ์	ท
บทที่	
1. บทนำ	
ความสำคัญและที่มาของโครงงานวิศวกรรมศาสตร์	1
วัตถุประสงค์ของโครงงานวิศวกรรมศาสตร์	1
ขอบเขตของโครงงานวิศวกรรมศาสตร์	1
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงานวิศวกรรมศาสตร์	1
2. ทฤษฎีที่ใช้ในการทำโครงงาน	2
รูปแบบของการถ่ายเทความร้อน	2
การนำความร้อน (Conduction)	2
การนำความร้อนใน 1 มิติ	3
วิธีการคำนวณอุณหภูมิในแต่ละเอलिเมนต์ด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่อง	9
ตัวอย่างการคำนวณที่ 1 (วิธีผลต่างสลับเนื่อง)	12
ตัวอย่างการคำนวณที่ 2 (การคำนวณชิ้นงานรูปตัวแอล)	17
การวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิด้วยวิธี	
ไฟไนต์เอลิเมนต์ของทรงกระบอก	21
ตัวอย่างการคำนวณที่ 3 (ทรงกระบอก)	22
การวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิด้วยวิธี	
ไฟไนต์เอลิเมนต์ของทรงกลม	26
ตัวอย่างการคำนวณที่ 4 (ทรงกลม)	26
ระเบียบวิธีการแบบแอลยู	32

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ตัวอย่างการคำนวณที่ 5 (แบบแอลยู)	34
ตัวอย่างการคำนวณที่ 6 (การนำความร้อนผ่านผนัง)	39
3. Flow Chart แสดงการทำงานของโปรแกรม	41
4. ผลการทดลอง 1 มิติ	52
ผลการทดลอง 2 มิติ	54
5 สรุปผลการทดลอง	57
ข้อเสนอแนะ	58
เอกสารอ้างอิง	59
ภาคผนวก	61
ประวัติผู้จัดทำ	68

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 แสดงกรณีระบุเป็น อุณหภูมิคงที่ (ผนัง)	5
รูปที่ 2.2 แสดงกรณีระบุเป็น อุณหภูมิคงที่ (ทรงกระบอก)	5
รูปที่ 2.3 แสดงกรณีระบุเป็น heat flux (ผนัง)	6
รูปที่ 2.4 แสดงกรณีระบุเป็น heat flux (ทรงกระบอก)	7
รูปที่ 2.5 แสดงกรณีระบุเป็นการพา (ผนัง)	8
รูปที่ 2.6 แสดงกรณีระบุเป็นการพา (ทรงกระบอก)	8
รูปที่ 2.7 แสดงรูปร่างลักษณะทั่วไปของขอบเขตปัญหา	9
รูปที่ 2.8 แสดงลักษณะการแบ่งรูปร่างของปัญหา	10
รูปที่ 2.9 แบบแผนภาพของสมการ	11
รูปที่ 2.10 แสดงการประยุกต์ใช้แผนภาพสมการ	12
รูปที่ 2.11 แสดงแผ่นโลหะที่ต้องการหาการกระจายอุณหภูมิ	12
รูปที่ 2.12 แสดงการแบ่งแผ่นโลหะ	13
รูปที่ 2.13 แสดงการประยุกต์ใช้แผนภาพสมการตัวอย่างการคำนวณที่ 1	14
รูปที่ 2.14 แสดงกรณีที่มีการพาความร้อนใน 2 มิติ	15
รูปที่ 2.15 แสดงกรณีที่เป็นแบบ intersection ใน 2 มิติ	16
รูปที่ 2.16 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ของตัวอย่างใน 2 มิติ	17
รูปที่ 2.17 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอก	21
รูปที่ 2.18 รูปแสดงตัวอย่างของทรงกลม	27
รูปที่ 2.19 รูปแสดงตัวอย่างการหาค่าการกระจายอุณหภูมิ 1 มิติ	39
รูปที่ 3.1 Flow Chart หลักการทำงาน	42
รูปที่ 3.2 Flow Chart การทำงานใน 1 มิติ	43
รูปที่ 3.3 Flow Chart การรับค่าตัวแปร	44
รูปที่ 3.4 Flow Chart การตรวจสอบการรับค่า	45
รูปที่ 3.5 Flow Chart การแบ่งเอลิเมนต์	46
รูปที่ 3.6 Flow Chart จำนวนผลลัพธ์	47
รูปที่ 3.7 Flow Chart แสดงผล	48

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 3.8 Flow Chart การคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์	49
รูปที่ 3.9 Flow Chart แสดงผล (รายละเอียด)	51
รูปที่ 4.1 ตัวอย่างการหาค่าการกระจายอุณหภูมิใน 1 มิติ	52
รูปที่ 4.2 ตัวอย่างการหาค่าการกระจายอุณหภูมิใน 2 มิติ	55
รูปภาคผนวกที่ 1	61
รูปภาคผนวกที่ 2	62
รูปภาคผนวกที่ 3	62
รูปภาคผนวกที่ 4	63
รูปภาคผนวกที่ 5	64
รูปภาคผนวกที่ 6	64
รูปภาคผนวกที่ 7	65
รูปภาคผนวกที่ 8	66
รูปภาคผนวกที่ 9	66
รูปภาคผนวกที่ 10	67

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 แสดงผลลัพธ์ของตัวอย่างการคำนวณใน 1 มิติ	40
4.1 เปรียบเทียบผลลัพธ์การทดสอบใน 1 มิติ	54
4.2 เปรียบเทียบผลลัพธ์การทดสอบใน 2 มิติ	56



สัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย	หน่วย
A	พื้นที่หน้าตัด	m^2
E	มอดูลัสการยืดหยุ่น	N/m^2
F	แรงภายในรวมของพิกัดแต่ละที่ , แรงภายนอก	N
[k]	สทiffเนสเมทริกซ์รวมในพิกัดเฉพาะที่	N/m
[K]	สทiffเนสเมทริกซ์รวมในพิกัดรวมของระบบ	N/m
L	ความยาว	m
N	หมายเลขจุดต่อของเอลิเมนต์ , ระดับชั้นความเสรี	
T	อุณหภูมิ	$^{\circ}C$
U	พลังงานความเครียด	N - m
x,y,z	พิกัดของแกนเฉพาะที่	
α	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้นต่อหน่วยอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง	mm/mm/degree
δ	การกระจัด , การยืดตัว / การหดตัว	m
ϵ	ความเครียด	m/m
ξ, η	พิกัดธรรมชาติ	
v	อัตราส่วนปริมาตรของ	
ϕ	พอลิโนเมียลฟังก์ชัน	
σ	ความเค้น	N/m^2
τ	ความเค้นเฉือน	N/m^2
θ	มุมระหว่างแกนหรือพิกัด	$^{\circ}$ (องศา)
[]	เมทริกซ์สี่เหลี่ยม	
[]	เมทริกซ์แถว	
{ }	คอลัมน์เมทริกซ์	
[] ⁻¹	เมทริกซ์ผกผัน	
[] ^T , { } ^T	เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	
	ตัวกำหนด (determinant), ค่าสมบรูณ์	

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของโครงการวิศวกรรมศาสตร์

ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อนเป็นปัญหาที่เราสามารถจะพบเห็นได้ทั่วไป ดังนั้น การศึกษาทางด้านการถ่ายเทความร้อนจึงเป็นสิ่งสำคัญ เพราะจะทำให้เราสามารถเข้าใจหลักการ ความเป็นจริงของการถ่ายเทความร้อน และเพื่อจะได้นำหลักการความเป็นจริงนี้มาประยุกต์ใช้กับ งานจริงได้อย่างรวดเร็ว ถูกต้อง แม่นยำ และก่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดกับงานที่เราทำอยู่ เพื่อที่จะ ทำให้การแก้ปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อนง่ายขึ้น จึงทำให้เกิดแนวความคิดที่จะนำ คอมพิวเตอร์มาใช้แก้ปัญหาเพื่อลดความยุ่งยาก

วัตถุประสงค์ของโครงการ

สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณการถ่ายเทความร้อนใน 1 มิติ และ 2 มิติ

ขอบเขตของโครงการ

1. ใช้วิธี finite different ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อน
2. เป็นการคำนวณการถ่ายเทความร้อนใน 1 มิติ และ 2 มิติ ของชิ้นงานรูปทรง เรขาคณิต
3. ใช้โปรแกรม Visual Basic 6.0 ในการสร้างโปรแกรม

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงการ

1. สามารถที่จะแก้ปัญหาคำนวณการนำความร้อนใน 1 มิติ และ 2 มิติ ได้อย่างรวดเร็ว
2. สามารถนำทฤษฎีที่เรียนมาประยุกต์ใช้กับชิ้นงานจริง

บทที่ 2

ทฤษฎีที่ใช้ในการทำโครงการ

พลังงานความร้อนเป็นพลังงานที่มีอยู่อย่างมากมาย กิจกรรมของมนุษย์ทุกอย่างที่ก่อให้เกิดงานก็จะก่อให้เกิดความร้อนควบคู่กันไปด้วย สรุปอย่างง่าย ๆ ก็คือเมื่อมนุษย์สร้างงานความร้อนก็จะเกิดขึ้นเสมอ งานบางอย่างของมนุษย์ต้องการนำความร้อนมาใช้ประโยชน์แต่งงานบางอย่างความร้อนก็ก่อให้เกิดปัญหา ดังนั้นจึงมีการศึกษาพฤติกรรมของความร้อนในลักษณะของการถ่ายเทความร้อนเพื่อจะควบคุมความร้อนให้เกิดประโยชน์สูงสุด

รูปแบบของการถ่ายเทความร้อน

- 1 การนำความร้อน (Conduction)
- 2 การพาความร้อน (Convection)
- 3 การแผ่รังสี (Thermal Radiation)

ในโครงการวิศวกรรมศาสตร์นี้จะกล่าวถึงเฉพาะการนำความร้อน (Conduction) ใน 1 มิติ และ 2 มิติเท่านั้น

การนำความร้อน (Conduction)

การนำความร้อนเป็นการถ่ายเทความร้อนที่ต้องอาศัยตัวกลางและต้องมีความแตกต่างของอุณหภูมิ (ΔT) เป็นสำคัญ

รูปแบบการถ่ายเทความร้อนโดยการนำนั้น พลังงานความร้อนจะถูกถ่ายเทจากแหล่งที่มีอุณหภูมิสูงไปยังแหล่งที่มีอุณหภูมิต่ำ โดยอาศัยการชนกันของโมเลกุลในตัวกลางนั้น ๆ การนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้ดีที่ตัวกลางที่เป็นของแข็งรองลงมาคือของเหลวและสุดท้ายคือก๊าซ

สำหรับสมการที่ใช้ในการคำนวณการนำความร้อนนั้นได้นำกฎของฟูเรียร์ (Fourier's law) มาใช้ในการวิเคราะห์ ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

การนำความร้อนใน 1 มิติ

การนำความร้อนใน 1 มิติ นั้นใช้กฎข้อที่ 1 ทางเทอร์โมไดนามิกส์ ในการวิเคราะห์ คือกฎการทรงพลังงานนั่นเอง ซึ่งสามารถสรุปเป็นสมการได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c} \text{อัตราการเพิ่มขึ้นของความร้อน} \\ \text{ของปริมาตรอันสืบเนื่องมาจาก} \\ \text{การนำความร้อน} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{อัตราการเกิดของ} \\ \text{ความร้อนภายใน} \\ \text{ปริมาตร} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{อัตราการเพิ่มขึ้น} \\ \text{ของพลังงานภายใน} \\ \text{ปริมาตร} \end{array} \right]$$

จากทั้ง 3 เทอมสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(Ak \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + g = \rho C_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

g คือ อัตราการเกิดของความร้อนภายในตัวกลางเอง

k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของตัวกลาง

p คือ ความหนาแน่นของตัวกลาง

C_p คือ ค่าความร้อนจำเพาะของตัวกลาง

กรณีการนำความร้อนใน 1 มิติตามทิศทางในแนวแกน x จะได้ว่า

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (w)$$

Q_x คือ อัตราการถ่ายเทความร้อนในทิศทางตามแนวแกน x

k คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของตัวกลาง

A คือ พื้นที่ที่ตัดฉากกับการถ่ายเทความร้อน

$\frac{\partial T}{\partial x}$ คือ ความแตกต่างของอุณหภูมิเทียบกับระยะทางในแนวแกน x ที่เราพิจารณา

จากสมการการถ่ายเทความร้อน (Q_x) เราสามารถเขียนในรูปการถ่ายเทความร้อนต่อหน่วยของพื้นที่ที่เรียกว่า Heat flux ซึ่งใช้สัญลักษณ์เป็น q ได้ดังนี้

$$\frac{q_x}{A} = Q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{W/m}^2)$$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k ; Thermal conductivity) นั้นเราสามารถหาได้จากตารางซึ่งจะเป็นค่ามาตรฐานสำหรับวัสดุต่าง ๆ ณ อุณหภูมิที่แตกต่างกัน เพราะค่า k นั้นจะขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุและอุณหภูมิ

การศึกษานำความร้อนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในตัวกลางที่เป็นของแข็งซึ่งการนำความร้อนจะเกิดขึ้นได้ดีที่สุด การวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนจะต้องพิจารณาเงื่อนไขดังนี้

1. เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition)

เงื่อนไขเริ่มต้นจะเป็นเงื่อนไขเกี่ยวกับเวลา เช่น ณ. เวลาเริ่มต้น ($t=0$) อุณหภูมิ $T = T_0$ เป็นต้น

2. เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

เงื่อนไขขอบเขตจะระบุถึงสถานะของขอบเขตที่ล้อมรอบระบบที่เราากำลังทำการศึกษายู่ และเงื่อนไขขอบเขตนั้นสามารถระบุได้เป็น 3 ประเภท คือ

2.1 กรณีระบุเป็นอุณหภูมิคงที่ (Constant Temperature condition)

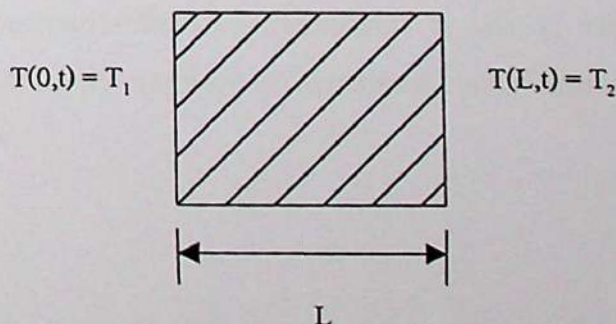
2.2 กรณีระบุเป็น Heat flux (Heat flux boundary condition)

2.3 กรณีระบุเป็นการพาความร้อน (Convection boundary condition)

กรณีที่ระบุเป็นอุณหภูมิคงที่ (Constant Temperature condition)

ขอบเขตของวัตถุหรือตัวกลางที่เราสนใจถูกระบุด้วยค่าอุณหภูมิคงที่ในทิศทางที่เราศึกษา เช่น

- กรณี ชิ้นงานรูปแผ่นสี่เหลี่ยม (Rectangular plate)



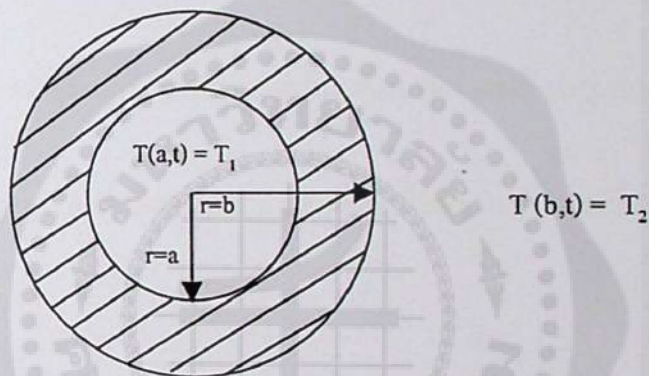
รูปที่ 2.1 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็นอุณหภูมิคงที่ Rectangular plate

$$\text{ที่ } x = 0 \quad ; \quad T(0,t) = T_1$$

$$\text{ที่ } x = L \quad ; \quad T(L,t) = T_2$$

ส่วนทิศทางการถ่ายเทความร้อนนั้นก็จะขึ้นอยู่กับค่า T_1 และ T_2 ว่าค่าของ T_1 มากกว่า T_2 หรือค่าของ T_2 มากกว่า T_1 และทิศทางการถ่ายเทความร้อนจะมีทิศทางจาก แหล่งอุณหภูมิสูงไปสู่แหล่งอุณหภูมิต่ำ

- กรณี ชิ้นงานรูปทรงกระบอก (Cylindrical)



รูปที่ 2.2 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็นอุณหภูมิคงที่กรณี Cylindrical

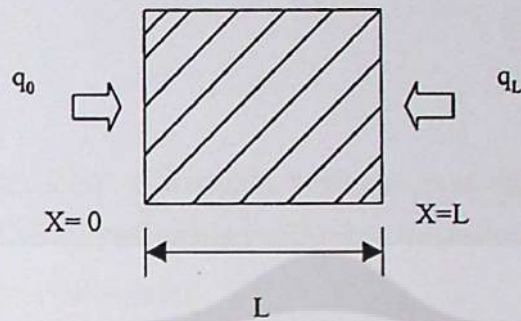
$$\text{ที่ } r = a \quad ; \quad T(a,t) = T_1$$

$$\text{ที่ } r = b \quad ; \quad T(b,t) = T_2$$

ส่วนทิศทางการถ่ายเทความร้อนนั้นก็จะขึ้นอยู่กับค่า T_1 และ T_2 ว่าค่าของ T_1 มากกว่า T_2 หรือค่าของ T_2 มากกว่า T_1 และทิศทางการถ่ายเทความร้อนจะมีทิศทางจาก แหล่งอุณหภูมิสูงไปสู่แหล่งอุณหภูมิต่ำ

กรณีระบุเป็นค่า Heat flux (Heat flux boundary condition)

- กรณี ชิ้นงานรูปแผ่นสี่เหลี่ยม (Rectangular plate)



รูปที่ 2.3 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็น Heat flux กรณี Rectangular plate

q_0 และ q_L เป็นพลังงานความร้อนภายนอก ซึ่งจะมีค่าเท่ากับค่าการนำความร้อนเข้าไปในวัตถุ

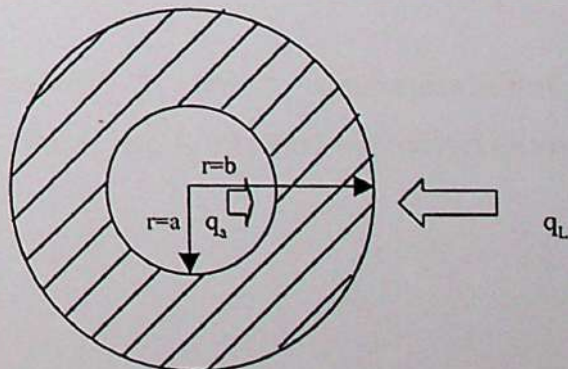
ที่ $x = 0$

$$q_0 = -k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=0}$$

ที่ $x = L$

$$q_L = +k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{x=L}$$

- กรณี ชิ้นงานรูปทรงกระบอก (Cylindrical)



รูปที่ 2.4 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็น Heat flux กรณี Cylindrical

ที่ $r = a$

$$q_a = -k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{r=a}$$

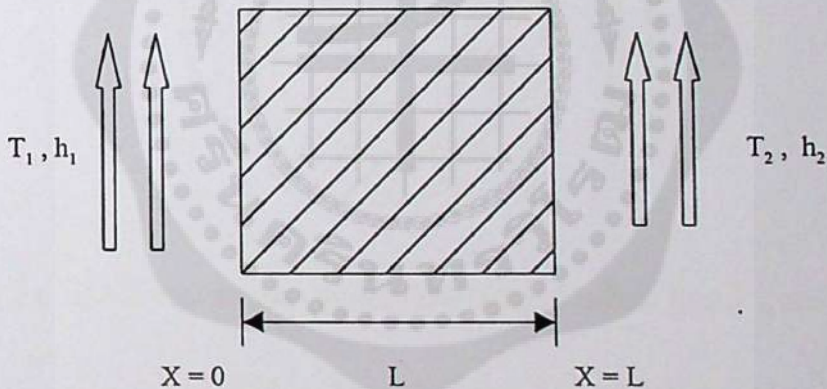
ที่ $r = b$

$$q_b = +k \left. \frac{\partial T}{\partial X} \right|_{r=b}$$

กรณีระบุเป็นการพาความร้อน (Convection boundary condition)

ซึ่งในกรณีนี้จะพบมากที่สุด在实际 ขอบเขตของวัตถุจะสัมผัสอยู่กับของไหลที่มีการพาความร้อนออกจากผิวของวัตถุ

- กรณี ชิ้นงานรูปแผ่นสี่เหลี่ยม (Rectangular plate)



รูปที่ 2.5 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็นการพาความร้อน กรณี Rectangular plate

ของไหลที่อยู่รอบวัตถุมีอุณหภูมิ T_1 และ T_2 และมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h ; heat transfer coefficient) เป็น h_1 และ h_2 การพาความร้อนที่ผิวจะมีค่าเท่ากับการนำความร้อนที่ผิว ดังนั้น

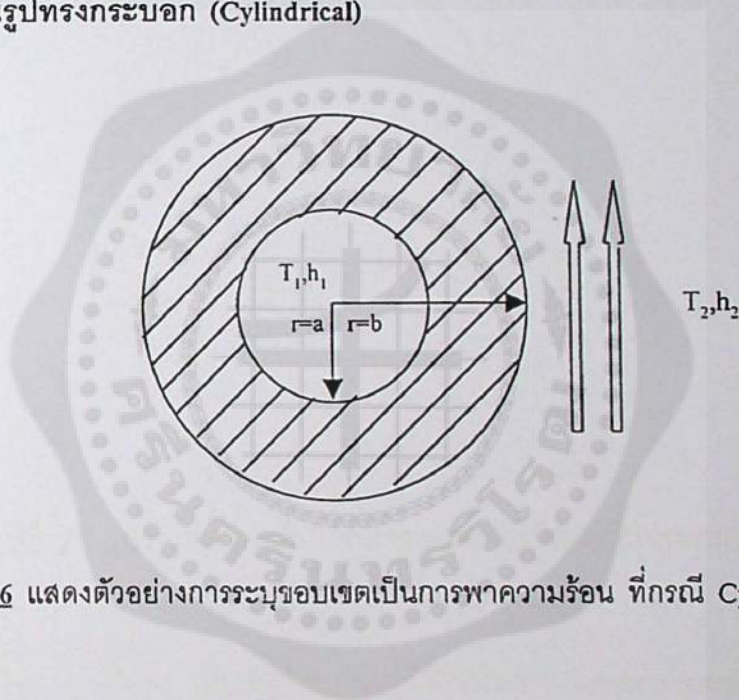
ที่ $x = 0$

$$h_1 (T_1 - T_{x=0}) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0}$$

ที่ $x = L$

$$h_2 (T_2 - T_{x=L}) = +k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=L}$$

- กรณี ชิ้นงานรูปทรงกระบอก (Cylindrical)



รูปที่ 2.6 แสดงตัวอย่างการระบุขอบเขตเป็นการพาความร้อน ที่กรณี Cylindrical

ที่ $r = a$

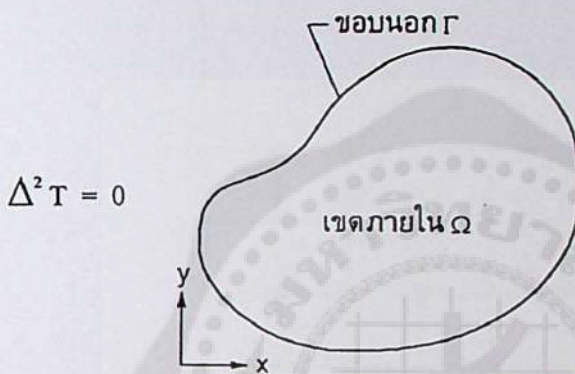
$$h_1 (T_1 - T_{r=a}) = -k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{r=a}$$

ที่ $r = b$

$$h_2 (T_2 - T_{r=b}) = +k \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{r=b}$$

วิธีการคำนวณอุณหภูมิในแต่ละเอลิเมนต์ด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่อง

ในการคำนวณด้วยวิธีนี้เราจะใช้สมการสมดุลของการถ่ายเทความร้อนซึ่งเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการลาปลาซ สำหรับปัญหาในสองมิติ บนระนาบ x และ y สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้



รูปที่ 2.7 รูปร่างลักษณะทั่วไปของขอบเขตของปัญหาที่กำหนดมาให้

โดย $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ เป็นสัญลักษณ์ของตัวดำเนินการ (operator notation)

$T = T(x, y)$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าซึ่งต้องการหาและอยู่ในขอบเขตภายใน (เช่น T อาจแทนการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่ง x, y ต่าง ๆ)

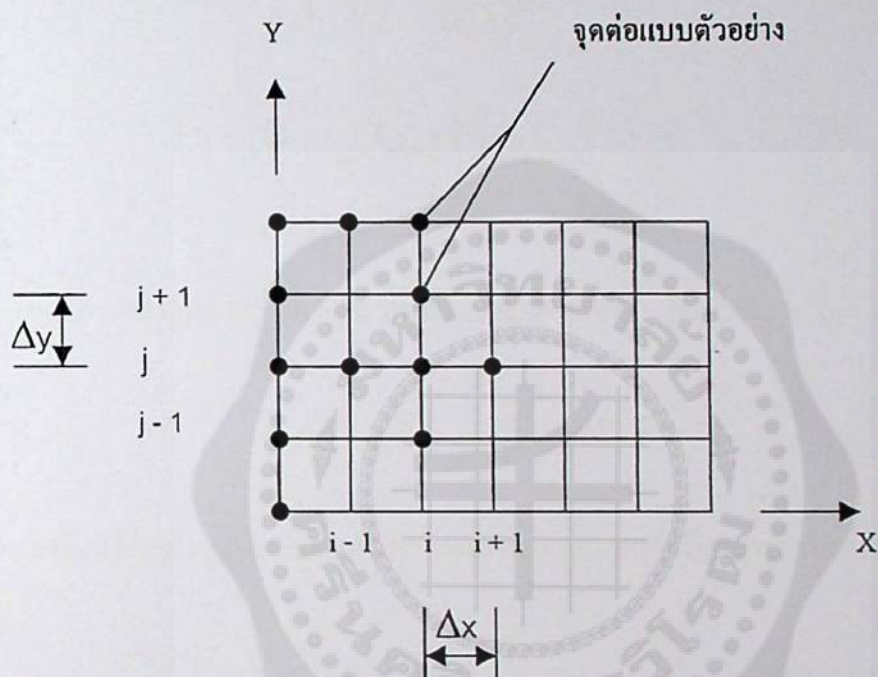
$T = f(x, y)$ ตลอดขอบนอก Γ (เช่น T ตลอดรอบขอบนอกอาจแทนอุณหภูมิที่กำหนดมาให้เท่ากับ 30°C)

จุดประสงค์ของการแก้ปัญหานี้คือ ต้องการหาค่าของผลเฉลยโดยประมาณของ $T(x, y)$ ในขอบเขตภายใน Ω โดยใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่อง

หลักการของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

การหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาโดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมนี้สามารถจำแนกออกได้เป็น 4 ขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการสร้างตารางสี่เหลี่ยมลงในรูปร่างของปัญหาที่กำหนดมาให้ สมมติว่ารูปร่างของปัญหาที่กำหนดมาให้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่ในระนาบ $x-y$ ดังแสดงในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม

สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ทั้งหมดที่สร้างขึ้นมานี้ มีขนาด Δx และ Δy ในทางแกน x และ y ตามลำดับและต่อกันที่จุดต่อ (grid point) ที่อยู่ในตำแหน่งต่าง ๆ กัน เช่นจุดต่อ ณ ตำแหน่ง i, j ดังแสดงในรูปที่ 2.8 บ่งถึงจุดต่อที่ $x = i$ และ $y = j$ เป็นต้น และที่จุดนี้เองเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าของผลเฉลยโดยประมาณของตัวไม่ทราบค่า (unknown) เช่น การแก้ปัญหาลักษณะการถ่ายเทความร้อน ตัวไม่ทราบค่าที่จุดเหล่านี้คืออุณหภูมิ

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ นี้ในตัวอย่างนี้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยคือสมการของลาปลาซ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์แปลงรูปสมการ (1) จะได้

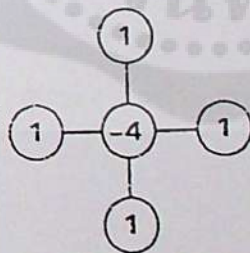
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3)$$

หลังจากนั้นนำสมการ (2) และ (3) แทนลงในสมการที่ (1) โดยที่ $\Delta x = \Delta y$ จะได้

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (4)$$

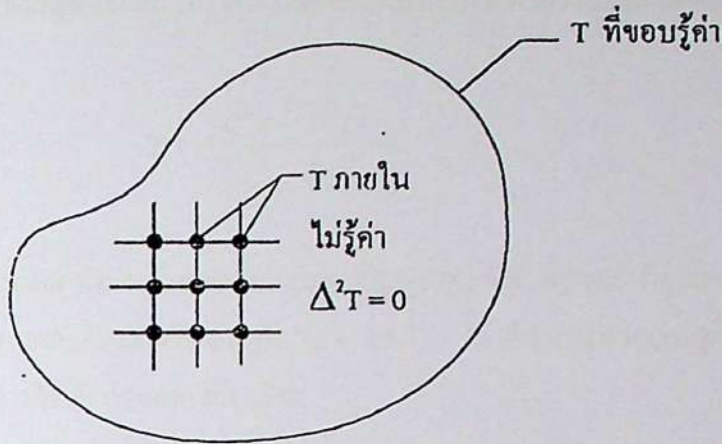
ซึ่งอาจเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแผนภาพสมการ(stencil form)เพื่อสะดวกในการประยุกต์ใช้ได้ดังนี้



$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} - \textcircled{-4} - \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} = 0 \quad (5)$$

รูปที่ 2.9 แสดงแผนภาพของสมการ Stencil form

ในการแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ เราจะประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (5) นี้ลงในจุดทุก ๆ จุดที่อยู่ในขอบเขตของปัญหานั้น ดังแสดงในรูปที่ 2.10



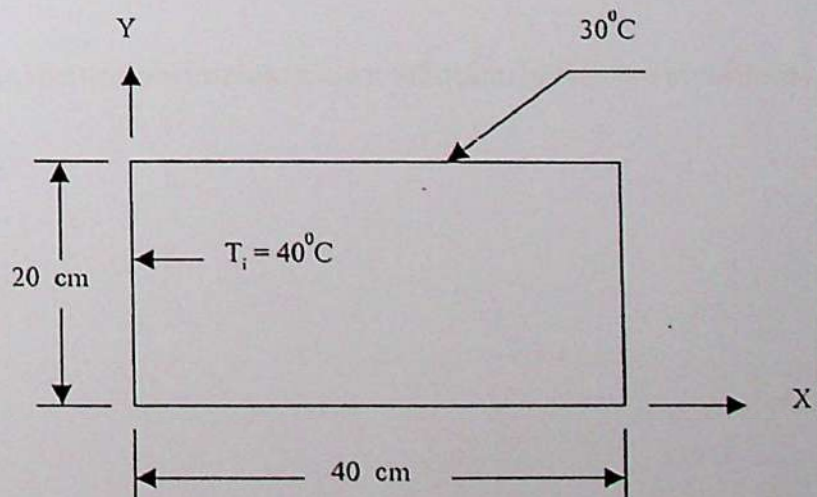
รูปที่ 2.10 การประยุกต์ใช้รูปแบบของแผนภาพสมการที่ (5) ลงบนทุกจุดในขอบเขตของปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพสมการ (5) ลงในทุก ๆ จุดต่อที่อยู่ในขอบเขตภายในของปัญหานั้น จะก่อให้เกิดระบบของสมการขึ้นพร้อมกัน โดยมีตัวไม่ทราบค่า เช่น T_i, T_{i+1} ณ ที่จุดต่อต่าง ๆ ภายในขอบเขตของปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 4 ทำการแก้ระบบของสมการที่เกิดขึ้นมานั้น เพื่อหาค่าโดยประมาณของตัวไม่ทราบค่า (unknowns) ณ. ที่จุดต่อนั้น

ตัวอย่างการคำนวณที่ 1

แผ่นโลหะขนาดยาว 40 cm และกว้าง 20 cm ดังแสดงในรูป 2.11 เกิดการถ่ายเทความร้อนภายใต้สภาวะอยู่ตัว



รูปที่ 2.11 รูปแสดงโจทย์ตัวอย่างที่ 1

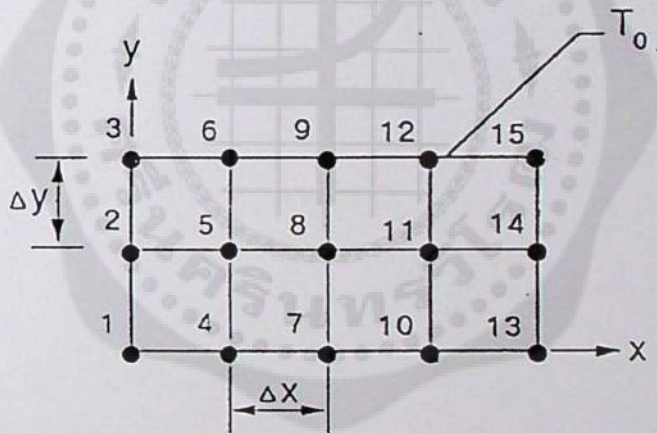
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ในรูปแบบของสมการลาปลาซ สำหรับปัญหาดังกล่าวคือ

$$\Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

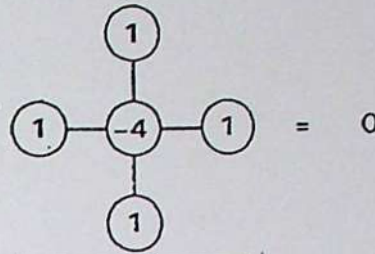
โดยที่ขอบรอบนอกทั้ง 4 ด้านของแผ่นโลหะมีอุณหภูมิ ดังนี้ ที่ทางเข้ามีอุณหภูมิ $T_i = 40^\circ\text{C}$ และทางด้านบนและด้านล่างมีอุณหภูมิ $T_o = 30^\circ\text{C}$ เราต้องการหาอุณหภูมิที่ตำแหน่ง 5, 8, 11 และ 14 โดยการใช้วิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม

วิธีทำ เราจะดำเนินการตามลำดับขั้นตอนทั้ง 4 ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการสร้างตารางสี่เหลี่ยมดังแสดงในรูป 2.12 สี่เหลี่ยมเหล่านี้คือกันที่จุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่เราจะหาค่าอุณหภูมิ ซึ่งในรูปนี้มีจุดต่อทั้งสิ้นจำนวน 15 จุดต่อ



รูปที่ 2.12 แสดงการแบ่งแผ่นโลหะออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมโดยวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม



รูปที่ 2.13 แสดงการประยุกต์แผนภาพ Stencil form ในโจทย์ตัวอย่างที่ 1

ขั้นตอนที่ 2 ทำการประยุกต์รูปแบบของแผนภาพลง ณ. จุดต่อที่ไม่ทราบค่านี้ เช่น หากเราประยุกต์ลง ณ. จุดต่อหมายเลข 5 เราจะได้สมการดังนี้

ที่จุด 5

$$\begin{aligned} T_i + T_0 + T_0 + T_8 - 4T_5 &= 0 \\ 4T_5 - T_8 &= 30 + 30 + 40 \end{aligned}$$

ที่จุด 8

$$\begin{aligned} T_5 + T_0 + T_0 + T_{11} + 4T_8 &= 0 \\ -T_5 + 4T_8 + -T_{11} &= 30 + 30 \end{aligned}$$

ที่จุด 11

$$\begin{aligned} T_8 + T_0 + T_0 + T_{14} - T_{11} &= 0 \\ -T_8 + + 4T_{11} - T_{14} &= 30 + 30 \end{aligned}$$

ที่จุด 14

$$\begin{aligned} T_{11} + T_0 + T_0 - 4T_{14} &= 0 \\ -T_{11} + 4T_{14} &= 30 + 30 \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 3 สมการทั้ง 4 สามารถนำมาเขียนรวมกันให้เกิดระบบสมการได้ดังนี้

$$4T_5 - T_8 = 100$$

$$-T_5 + 4T_8 - T_{11} = 60$$

$$-T_8 + 4T_{11} - T_{14} = 60$$

$$-T_{11} + 4T_{14} = 60$$

เขียนในรูปแบบเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_5 \\ T_8 \\ T_{11} \\ T_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 4 ทำการแก้ระบบสมการเมตริกซ์จะได้

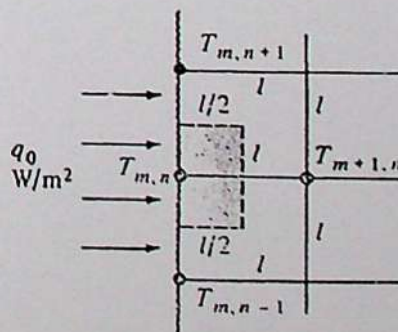
$$T_5 = 32.535^\circ\text{C}$$

$$T_8 = 30.143^\circ\text{C}$$

$$T_{11} = 28.038^\circ\text{C}$$

$$T_{14} = 22.009^\circ\text{C}$$

- กรณีปัญหาที่มีการพาความร้อนที่มีรูปทรงต่างออกไปและมีการพาความร้อนที่ผิวที่สัมผัสกับอากาศเราสามารถวิเคราะห์ได้ดังนี้

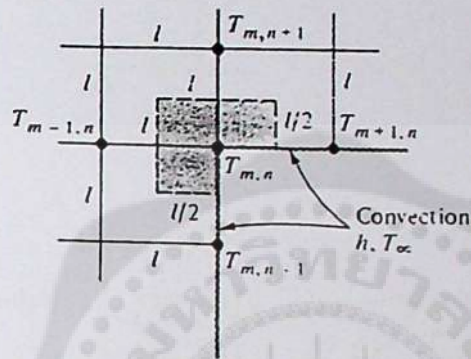


รูปที่ 2.14 แสดงกรณีที่เกิดการพาความร้อนในชิ้นงาน

จากรูปที่ 2.14 ในกรณีที่มีการพาความร้อนสามารถเขียนสูตรการคำนวณได้ดังนี้

$$T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_{m,n} + \frac{l^2}{k}g_{m,n} + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

- กรณีปัญหาแบบ intersection of two convection boundaries



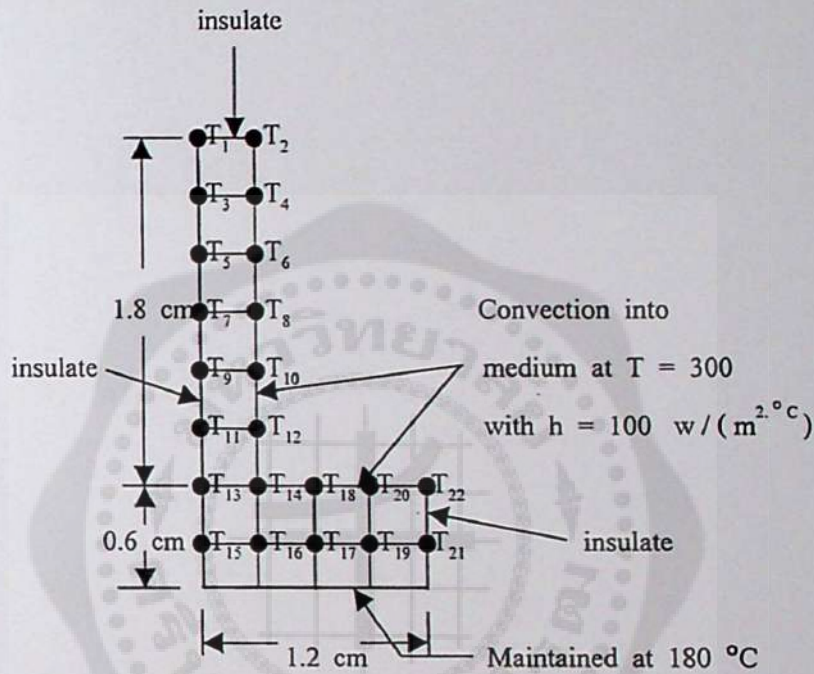
รูปที่ 2.15 แสดงกรณีที่เป็นแบบ Intersection of two convection boundaries

กรณีที่มีการพาความร้อนเกิดขึ้นที่สองด้านประกอบ สามารถเขียนแผนภาพอุณหภูมิได้ดังนี้

$$T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} - \left(6 + \frac{2hL}{k}\right)T_{m,n} + \frac{3}{2} \frac{l^2}{k}g_{m,n} + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ตัวอย่างการคำนวณที่ 2

พิจารณาแผ่นโลหะในสองมิติซึ่งการนำความร้อนไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยได้แสดงดังในรูปข้างล่างนี้ ซึ่งแผ่นโลหะมีค่าการนำความร้อน $k = 60 \text{ W / (}^{\circ}\text{C)}$ โดยเราจะแบ่งขนาดของเอลิเมนต์ออกเป็น $\Delta x = \Delta y = 0.3 \text{ cm}$ จงคำนวณหาอุณหภูมิแต่ละจุดของเอลิเมนต์ที่แบ่งดังรูป



รูปที่ 2.16 รูปแสดงโจทย์ตัวอย่างที่ 2

วิธีทำ

เขียนสมการของแต่ละจุดออกมาก่อน

ที่ $m = 1$ แทนค่าในสมการที่ (1)

$$2T_1 + 2T_3 - 4T_1 = 0$$

ที่ $m = 2$

$$2T_1 + 2T_4 - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_2 + \frac{2hL}{k}T_{\infty} = 0$$

ที่ $m = 3$

$$T_1 + 2T_4 + T_5 - 4T_3 = 0$$

ที่ $m=4$

$$T_2 + T_6 + 2T_3 - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_4 + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m=5$

$$T_3 + 2T_6 + T_7 - 4T_5 = 0$$

ที่ $m=6$

$$T_4 + T_8 + 2T_5 - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_6 + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m=7$

$$T_5 + 2T_8 + T_9 - 4T_7 = 0$$

ที่ $m=8$

$$T_6 + T_7 + 2T_{10} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_8 + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m=9$

$$T_7 + 2T_{10} + T_{11} - 4T_9 = 0$$

ที่ $m=10$

$$T_8 + T_{12} + 2T_9 - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_{10} + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m=11$

$$T_9 + 2T_{12} + T_{13} - 4T_{11} = 0$$

ที่ $m=12$

$$T_{10} + T_{14} + 2T_{11} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_{12} + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m = 13$

$$T_{11} + 2T_{14} + T_{15} - 4T_{13} = 0$$

ที่ $m = 14$

$$T_{12} + T_{18} + 2T_{13} + 2T_{18} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_4 + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m = 15$

$$T_{13} + 2T_{16} + 180 - 4T_{15} = 0$$

ที่ $m = 16$

$$T_{15} + T_{18} + T_{17} + 180 - 4T_{16} = 0$$

ที่ $m = 17$

$$T_{16} + T_{18} + T_{19} + 180 - 4T_{17} = 0$$

ที่ $m = 18$

$$T_{14} + T_{20} + 2T_{17} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_8 + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m = 19$

$$T_{17} + T_{20} + T_{21} + 180 - 4T_{19} = 0$$

ที่ $m = 20$

$$T_{18} + T_{22} + 2T_{19} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_{20} + \frac{2hL}{k}T_\infty = 0$$

ที่ $m = 21$

$$T_{22} + 2T_{19} + 180 - 4T_{21} = 0$$

ที่ $m = 22$

$$2T_{20} + 2T_{21} - \left(4 + \frac{2hL}{k}\right)T_{22} + \frac{2hL}{k}T_{\infty} = 0$$

เมื่อ

$$\frac{2hL}{k} = \frac{2(1000) \times 0.3 \times 10^{-2}}{60}$$

$$\frac{2hL}{k}T_{\infty} = (10^{-2})(30) = 0.3$$

แล้วทำการแทนค่าลงไปในการสมการของแต่ละเอलिเมนต์และจัดรูปเมตริกซ์พร้อมกับแก้สมการหาค่าของอุณหภูมิที่เอलिเมนต์ใด ๆ จะได้อุณหภูมิดังนี้ ($^{\circ}\text{C}$)

$$T_1 = 163.42$$

$$T_2 = 163.03$$

$$T_3 = 163.75$$

$$T_4 = 163.42$$

$$T_5 = 164.75$$

$$T_6 = 164.42$$

$$T_7 = 166.43$$

$$T_8 = 166.09$$

$$T_9 = 166.77$$

$$T_{10} = 166.45$$

$$T_{11} = 171.77$$

$$T_{12} = 171.55$$

$$T_{13} = 175.20$$

$$T_{14} = 175.62$$

$$T_{15} = 177.77$$

$$T_{16} = 177.96$$

$$T_{17} = 178.52$$

$$T_{18} = 177.26$$

$$T_{19} = 178.52$$

$$T_{20} = 177.86$$

$$T_{21} = 178.92$$

$$T_{22} = 178.52$$

การวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิด้วยวิธีดิฟเฟอเรนซ์ของทรงกระบอก

พิจารณาทรงกระบอกที่มีรัศมี $r = b$ มีพลังงานภายในเกิดขึ้น $g(r)$ W / m³ และเรากำหนด
 เอลิเมนต์ย่อยได้ดังความสัมพันธ์

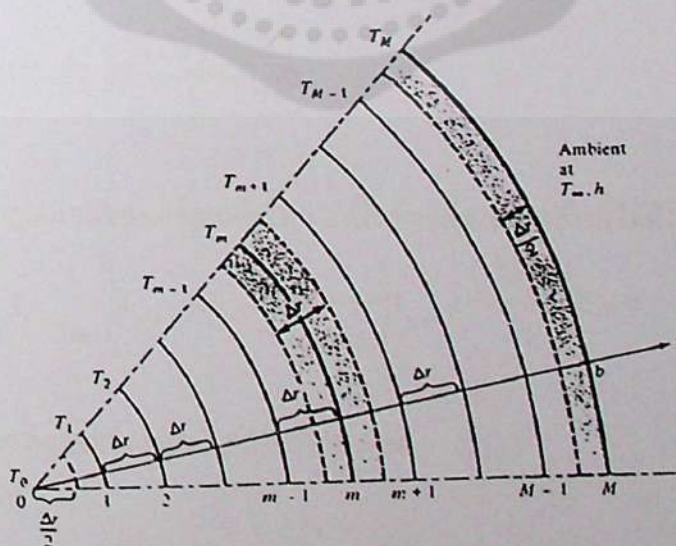
$$\Delta r = \frac{b}{m}$$

โดยที่ m คือ จำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการจะแบ่ง

b คือ รัศมีของทรงกระบอก

Δr คือ ระยะรัศมีของแต่ละเอลิเมนต์ที่แบ่ง

ดังแสดงในรูป เป็นการแสดงการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น m จุด (node)



รูปที่ 2.17 แสดงการแบ่งเอลิเมนต์ของทรงกระบอก

สมการที่ใช้หาการกระจายของอุณหภูมิที่ $r=0$ คือ

$$4(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0 \quad (1)$$

สมการที่ใช้หาการกระจายของอุณหภูมิที่จุด $m = 1, 2, \dots, m-1$

$$\left(1 - \frac{1}{2m}\right)T_{m-1} - 2T_m + \left(1 + \frac{1}{2m}\right)T_{m+1} + \frac{(\Delta r)^2 g_m}{k} = 0 \quad (2)$$

ตัวอย่างการคำนวณที่ 3

ทรงกระบอกที่มีรัศมี $b = 1 \text{ cm}$ และมีค่าการนำความร้อน $k = 25 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ มีพลังงานภายในเกิดขึ้นที่อัตราคงที่ $g = 5 \times 10^8 \text{ W/m}^3$ ที่ผิวด้านนอก $r = b$ เราสมมติให้ มีอุณหภูมิ 100°C และสมมติให้เป็นการกระจายของอุณหภูมิไปในทิศทางเดียว จึงคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิโดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

วิธีทำ ที่ขอบเขต $0 \leq r \leq b$ เราจะทำการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 10 ส่วน ($m = 10$) จากสูตรการหาการกระจายของอุณหภูมิในเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งต่าง ๆ แล้วทำการแทนค่าลงในสูตรสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จุดศูนย์กลาง ($m = 0$) จากสมการที่ (1)

$$4(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0$$

สำหรับสมการของอุณหภูมิของเอลิเมนต์ลำดับ 2 เป็นต้นไปสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left(1 - \frac{1}{2m}\right)T_{m-1} - 2T_m + \left(1 + \frac{1}{2m}\right)T_{m+1} + \frac{(\Delta r)^2 g_m}{k} = 0$$

อุณหภูมิที่ผิวภายนอกของทรงกระบอก สำหรับ $m = 10$

$$T_{10} = 100^\circ\text{C}$$

ที่ $r=0$ แทนค่าในสมการที่ (1)

$$4(T_1 - T_0) + \frac{(0.001)^2 \times 5 \times 10^8}{25} = 0$$

ที่ $m=2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)T_1 - 2T_2 + \left(1 + \frac{1}{4}\right)T_3 = -20$$

$$0.75T_1 - 2T_2 + 1.25T_3 = -20$$

ที่ $m=3$

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right)T_2 - 2T_3 + \left(1 + \frac{1}{6}\right)T_4 = -20$$

$$0.83T_2 - 2T_3 + 1.167T_4 = -20$$

ที่ $m=4$

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)T_3 - 2T_4 + \left(1 + \frac{1}{8}\right)T_5 = -20$$

$$0.875T_3 - 2T_4 + 1.125T_5 = -20$$

ที่ $m=5$

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)T_4 - 2T_5 + \left(1 + \frac{1}{10}\right)T_6 = -20$$

$$0.9T_4 - 2T_5 + 1.1T_6 = -20$$

ที่ $m=6$

$$\left(1 - \frac{1}{12}\right)T_5 - 2T_6 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)T_7 = -20$$

$$0.9167T_5 - 2T_6 + 1.0836T_7 = -20$$

ที่ $m=7$

$$\left(1 - \frac{1}{14}\right)T_6 - 2T_7 + \left(1 + \frac{1}{14}\right)T_8 = -20$$

$$0.928T_6 - 2T_7 + 1.07T_8 = -20$$

ที่ $m=8$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)T_7 - 2T_8 + \left(1 + \frac{1}{16}\right)T_9 = -20$$

$$0.937T_7 - 2T_8 + 1.062T_9 = -20$$

ที่ $m=9$

$$\left(1 - \frac{1}{18}\right)T_8 - 2T_9 + \left(1 + \frac{1}{18}\right)T_{10} = -20$$

$$0.94T_8 - 2T_9 + (1.056 \times 100) = -20$$

ทำการจัดรูปให้เป็นรูปแบบของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix}
 -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.5 & -2 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.75 & -2 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.833 & -2 & 1.167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.875 & -2 & 1.125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & -2 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.917 & -2 & 1.083 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.929 & -2 & 1.071 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.938 & -2 & 1.062 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.944 & -2
 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -20 \\ -125.6 \end{bmatrix}$$

ทำการแก้สมการเมตริกซ์หาการกระจายของอุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$)

$$T_0 = 600.27$$

$$T_1 = 595.27$$

$$T_2 = 580.27$$

$$T_3 = 555.27$$

$$T_4 = 520.28$$

$$T_5 = 475.30$$

$$T_6 = 420.31$$

$$T_7 = 355.28$$

$$T_8 = 280.20$$

$$T_9 = 195.05$$

เราจะได้ผลการกระจายของอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่าง ๆ

การวิเคราะห์การกระจายอุณหภูมิด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของทรงกลม

เราจะพิจารณาการนำความร้อนของทรงกลมรัศมี $r=b$ และมีพลังงานภายในเกิดขึ้นซึ่งลักษณะขั้นตอนการวิเคราะห์จะเหมือนกับการวิเคราะห์ของรูปทรงกระบอก สูตรที่ใช้คำนวณที่รัศมี $r=0$ แสดงดังนี้

$$6(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0 \quad (3)$$

สูตรที่ใช้คำนวณที่ระยะ r ใด ๆ หรือ $r = 1, 2, \dots, m-1$

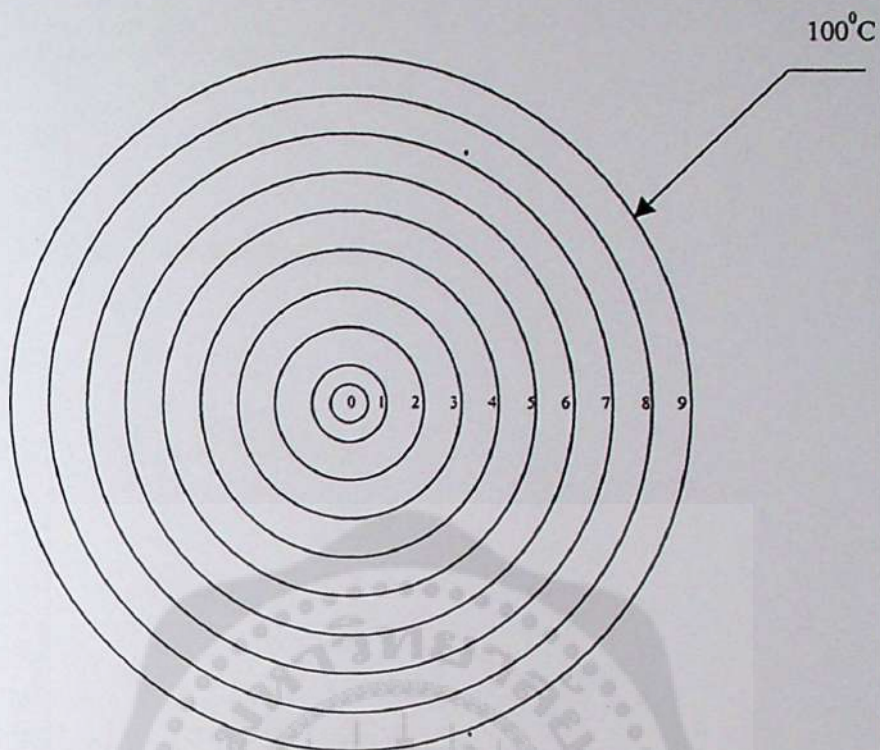
$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)T_{m-1} - 2T_m + \left(1 + \frac{1}{m}\right)T_{m+1} + \frac{(\Delta r)^2 g_m}{k} = 0 \quad (4)$$

ตัวอย่างการคำนวณที่ 4

ทรงกลมมีขนาดรัศมี $b = 1$ cm มีค่าการนำความร้อน $k = 25$ W/m $^{\circ}$ C มีพลังงานภายในเกิดขึ้น $g = 7.5 \times 10^8$ W/m 3 ที่ภายนอกของวงกลมที่ $r=b$ มีอุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส จงคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิ ถ้าการกระจายของอุณหภูมิไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

วิธีทำ

ที่รัศมี 1 cm เราจะแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็น 10 ส่วน ดังแสดงในรูปข้างล่าง



รูปที่ 2.18 รูปแสดงไอโซธัยตัวอย่างการคำนวณที่ 4

$$\Delta r = \frac{0.01}{10} = 10^{-3}$$

ที่ $m = 0$ เราจะแทนลงในสมการที่ (3)

$$6(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0$$

และที่ m ตั้งแต่ 1 ถึง 9 แทนลงในสมการที่ (4)

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)T_{m-1} - 2T_m + \left(1 + \frac{1}{m}\right)T_{m+1} + \frac{(\Delta r)^2 g_m}{k} = 0$$

แทนค่า

ที่ $m = 0$ แทนลงในสมการที่ (3)

$$6(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0$$

$$6(T_1 - T_0) + \frac{(\Delta r)^2 g_0}{k} = 0$$

$$6T_1 - 6T_0 = -30$$

ที่ $m=1$ ถึง 9 แทนลงในสมการที่ 4

ที่ $m=1$

$$-2T_1 + \left(1 + \frac{1}{1}\right)T_2 + \frac{(\Delta r)^2 g_m}{k} = 0$$

$$-2T_1 + 2T_2 = -30$$

ที่ $m=2$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)T_1 - 2T_2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)T_3 = -30$$

$$0.5T_1 - 2T_2 + 1.5T_3 = -30$$

ที่ $m=3$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)T_2 - 2T_3 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)T_4 = -30$$

$$0.667T_2 - 2T_3 + 1.333T_4 = -30$$

ที่ $m=4$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)T_3 - 2T_4 + \left(1 + \frac{1}{4}\right)T_5 = -30$$

$$0.5T_3 - 2T_4 + 1.25T_5 = -30$$

ที่ $m=5$

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right)T_4 - 2T_5 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)T_6 = -30$$

$$0.5T_4 - 2T_5 + 1.2T_6 = -30$$

ที่ $m=6$

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right)T_5 - 2T_6 + \left(1 + \frac{1}{6}\right)T_7 = -30$$

$$0.833T_5 - 2T_6 + 1.167T_7 = -30$$

ที่ $m=7$

$$\left(1 - \frac{1}{7}\right)T_6 - 2T_7 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)T_8 = -30$$

$$0.875T_6 - 2T_7 + 1.143T_8 = -30$$

ที่ $m=8$

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right)T_7 - 2T_8 + \left(1 + \frac{1}{8}\right)T_9 = -30$$

$$0.875T_7 - 2T_8 + 1.125T_9 = -30$$

ที่ $m=9$

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right)T_8 - 2T_9 + \left(1 + \frac{1}{9}\right) \times 100 = -30$$

$$0.889T_8 - 2T_9 + 111.11 = -30$$

$$0.889T_8 - 2T_9 = -141.1$$

จัดสมการให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix}
 -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5 & -2 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.667 & -2 & 1.333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.75 & -2 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & -2 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.833 & -2 & 1.167 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.857 & -2 & 1.143 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.875 & -2 & 1.125 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.899 & -2
 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -30 \\ -141.1 \end{bmatrix}$$

ทำการแก้สมการเมตริกซ์หาอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ ($^{\circ}\text{C}$)

$$T_0 = 599.9$$

$$T_1 = 549.9$$

$$T_2 = 579.9$$

$$T_3 = 554.9$$

$$T_4 = 519.9$$

$$T_5 = 474.9$$

$$T_6 = 419.9$$

$$T_7 = 354.9$$

$$T_8 = 280.0$$

$$T_9 = 195.0$$



ระเบียบวิธีการแก้สมการแบบแอลยู

ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (LU decomposition) เป็นอีกระเบียบวิธีการหนึ่งที่ยอมรับใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสำหรับปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ หลักการของระบบวิธีนี้เกิดจากแนวความคิดที่ว่าหากระบบสมการสามารถถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบดังเช่นด้านล่างนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

กล่าวคือสัมประสิทธิ์ที่อยู่ในแถบล่างซ้ายของเมตริกซ์ต่างมีค่าเป็นศูนย์ แล้วเราก็สามารถคำนวณหาผลลัพธ์โดยการแทนค่าย้อนกลับได้
เริ่มจากระบบสมการ

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

ซึ่งประกอบด้วย 3 สมการย่อย ขั้นตอนแรกคือการแยกเมตริกซ์ $[A]$ ออกเป็น 2 เมตริกซ์

$$[A] = [L][U]$$

ซึ่งมีรูปแบบโดยละเอียดดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[A]} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}}_{[L]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[U]}$$

กล่าวคือเมตริกซ์ $[L]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบบนขวาเป็นศูนย์หมด ในขณะที่เมตริกซ์ $[U]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ตลอดแถบล่างซ้ายเป็นศูนย์หมดเช่นกันหากเราแทนเมตริกซ์ $[A]$ ด้วย 2 เมตริกซ์นี้จะได้ว่า

$$[L]\underbrace{[U]\{X\}}_{\{Y\}} = \{B\}$$

ดังนั้น เราสามารถแก้ระบบสมการ

$$[L]\{Y\} = \{B\}$$

ด้วยการแทนค่าแบบไปข้างหน้า (forward substitution) เพื่อหา $\{Y\}$ จากนั้นจึงแก้ระบบสมการ

$$[U]\{X\} = \{Y\}$$

ด้วยการแทนค่าแบบย้อนหลัง (backward substitution) เพื่อหาผลลัพธ์ $\{X\}$ ที่ต้องการ จากคำอธิบายนี้ เราจะเห็นได้ว่าการแก้ระบบสมการ $[A]\{X\} = \{B\}$ ด้วยระเบียบวิธีแยกแบบแอลยูนั้นประกอบด้วย 3 ขั้นตอนคือ

- 1) ทำการแยกเมตริกซ์ $[A]$ ให้เป็นผลคูณระหว่างเมตริกซ์ $[L][U]$
- 2) แก้ระบบสมการ $[L]\{Y\} = \{B\}$ ด้วยการแทนค่าแบบไปข้างหน้าเพื่อหาเวกเตอร์ $\{Y\}$
- 3) แก้ระบบสมการ $[U]\{X\} = \{Y\}$ ด้วยการแทนค่าแบบย้อนกลับเพื่อหาผลลัพธ์เวกเตอร์ $\{X\}$

จากกระบวนการดังกล่าว เราพอจะเห็นได้ว่าเวลาส่วนใหญ่ที่จำเป็นต้องใช้ไปในการคำนวณนั้น จะเป็นการแยกเมตริกซ์ $[A]$ ออกเป็นเมตริกซ์ $[L][U]$ สำหรับปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์โดยทั่วไป เช่น ปัญหาการคำนวณความเค้นตามตำแหน่งต่าง ๆ ของสะพานที่

เป็นโครงสร้างหลักเป็นต้น เมตริกซ์ $[A]$ จะมีคุณสมบัติทางกายภาพ (physical meaning) ที่เกี่ยวข้องกับการแสดงลักษณะรูปแบบของโครงสร้างรวมทั้งความแข็งแรงของโลหะที่ใช้ ในขณะที่เวกเตอร์ $\{B\}$ ทางด้านขวาของระบบสมการอาจแทนน้ำหนักของรถที่วิ่งผ่าน ดังนั้นเวกเตอร์ $\{B\}$ จึงอาจเปลี่ยนแปลงไปโดยขึ้นอยู่กับปริมาณรถและตำแหน่งของรถเหล่านั้นบนสะพาน นั่นหมายความว่า หากเราคำนวณสิ่งที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างของสะพานนี้ ซึ่งในที่นี้ก็คือเวกเตอร์ $\{X\}$ เราสามารถแยกเมตริกซ์ $[A]$ เพียงครั้งเดียวและเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์ $\{B\}$ เพื่อหาผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นสำหรับกรณีต่าง ๆ ซึ่งจะช่วยท่นเวลาในการคำนวณไปได้มากโดยเฉพาะหากปัญหานั้นมีขนาดใหญ่ เหตุผลดังกล่าวนี้เองทำให้ระเบียบวิธีการนี้ได้รับความนิยมค่อนข้างมากในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ในทางปฏิบัติ อนึ่งหากเราพิจารณาการแยกของเมตริกซ์ $[A]$ ออกเป็นเมตริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ดังแสดงในสมการที่ผ่านมา เราจะเห็นได้ว่าสัมประสิทธิ์ตลอดแนวแกนเฉียงของเมตริกซ์ $[L]$ นั้นเป็นค่าใด ๆ ในขณะที่สัมประสิทธิ์แนวแกนเฉียงของเมตริกซ์ $[U]$ นั้นต่างมีค่าเท่ากับหนึ่ง การจัดรูปแบบเมตริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ในลักษณะเช่นนี้เรียกว่าเป็นการจัดของคราท์ (Crout) หากสัมประสิทธิ์ตลอดแนวแกนเฉียงของเมตริกซ์ $[L]$ มีค่าเท่ากับหนึ่งโดยสัมประสิทธิ์ตลอดแนวแกนเฉียงของเมตริกซ์ $[U]$ นั้นเป็นค่าใด ๆ การจัดรูปแบบของเมตริกซ์ในลักษณะหลังนี้เรียกว่าเป็นการจัดของดูลิตเติล (Doolittle) อย่างไรก็ตาม หากเราเข้าใจขั้นตอนวิธีการแยกแบบแอลยูดังที่จะอธิบายต่อไปนี้ เราจะเห็นว่าเราจะใช้การจัดในรูปแบบใดก็ได้ ซึ่งต่างจะนำไปสู่ผลลัพธ์เดียวกัน วิธีการแยกแบบแอลยูนี้สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่ายโดยใช้ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างการคำนวณที่ 5

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{Bmatrix}$$

ในที่นี้เมตริกซ์ $[A]$ คือ

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

เราจะทำการแยกเมตริกซ์ $[A]$ นี้ออกเป็นเมตริกซ์ $[L][U]$ ในรูปแบบของสมการดังนี้

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

จากการพิจารณาสมการข้างต้น เราสามารถหาสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในเมตริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} I_{11} &= a_{11} = 4 \\ I_{21} &= a_{21} = -1 \\ I_{31} &= a_{31} = 0 \\ I_{11}u_{12} &= a_{12}, \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{I_{11}} = -1 \\ I_{11}u_{13} &= a_{13}, \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{I_{11}} = 0 \\ I_{21}u_{12} + I_{22} &= a_{22}, \quad I_{22} = a_{22} - I_{21}u_{12} = 3 \\ I_{31}u_{12} + I_{32} &= a_{32}, \quad I_{32} = a_{32} - I_{31}u_{12} = -2 \\ I_{21}u_{13} + I_{22}u_{23} &= a_{23}, \quad u_{23} = \frac{a_{23} - I_{21}u_{13}}{I_{22}} = -\frac{2}{3} \\ I_{31}u_{13} + I_{32}u_{23} + I_{33} &= a_{33}, \quad I_{33} = a_{33} - I_{31}u_{13} - I_{32}u_{23} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือเราสามารถที่จะเขียนรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}}_{[L]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}}_{\substack{[U] \\ \{Y\}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{Bmatrix}}_{\{B\}}$$

จากนั้นเราสามารถแก้ระบบสมการ $[L]\{Y\} = \{B\}$ เพื่อหาค่าต่าง ๆ ในเวกเตอร์ $\{Y\}$ โดยการแทนค่าแบบไปข้างหน้าได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{Bmatrix}$$

$$4Y_1 = 400 \longrightarrow Y_1 = 100$$

$$-Y_1 + 3Y_2 = 400 \longrightarrow Y_2 = \frac{500}{3}$$

$$-2Y_2 + \frac{8}{3}Y_3 = 400 \longrightarrow Y_3 = 275$$

และจากนั้นเราสามารถแก้ระบบสมการ $[U] \{X\} = \{Y\}$ เพื่อหาค่าผลลัพธ์ในเวกเตอร์โดยการแทนค่าแบบย้อนกลับได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{Bmatrix}$$

$$X_3 = 275 \qquad X_3 = 275$$

$$X_2 - \frac{2}{3}X_3 = \frac{500}{3} \qquad X_2 = 350$$

$$X_1 - X_2 = 100 \qquad X_1 = 450$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของระบบสมการ

ลำดับขั้นตอนในการหาค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในเมตริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ จากเมตริกซ์ $[A]$ ดังแสดงในตัวอย่างนี้ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับระบบสมการโดยทั่วไปที่ประกอบด้วย n สมการย่อยสมการในการหาค่าสัมประสิทธิ์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$I_{ii} = a_{ii} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{I_{ii}} \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

เมื่อ $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$

$$I_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} I_{ik} u_{kj} \qquad i = j, j+1, \dots, n$$

$$U_{ik} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} I_{ji} u_{ik}}{I_{jj}} \quad k = j+1, j+2, \dots, n$$

และท้ายสุด

$$I_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} I_{nk} u_{kn}$$

เมื่อได้เมตริกซ์ $[L]$ และ $[U]$ แล้วเวกเตอร์ $\{Y\}$ และ $\{X\}$ สามารถคำนวณได้ตามลำดับดังนี้

$$Y_1 = \frac{b_1}{I_{11}}$$

$$Y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} I_{ij} Y_j}{I_{ii}} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

และ

$$X_n = Y_n$$

$$X_i = Y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} X_j \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

ตัวอย่างการคำนวณ 1 มิติ จงหา Heat flux (q) และอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นเหล็ก
พื้นที่ $A = 0.5 \text{ m}^2$ ความหนา $L = 0.02 \text{ m}$ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 70 \text{ w/m}^\circ\text{C}$
เมื่อผิวด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ $T_1 = 60^\circ\text{C}$ และอีกด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ $T_2 = 20^\circ\text{C}$

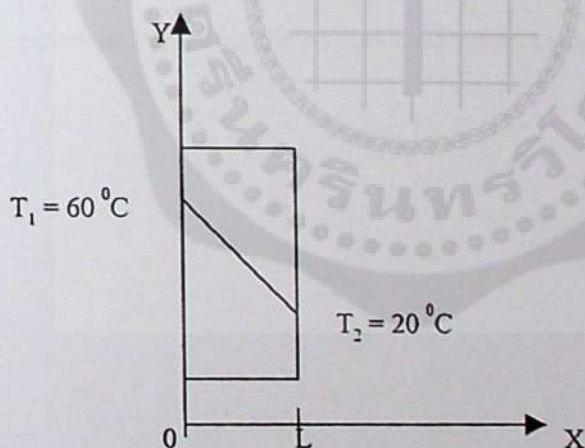
วิธีทำ

จากปัญหานี้ การถ่ายเทความร้อนเป็นลักษณะ dT/dX คงที่ ดังนั้นการกระจายของอุณหภูมิ $T(X)$
ผ่านแผ่นราบเป็นเชิงเส้นจะหา q ได้จาก

$$q = -k \frac{dT(X)}{dX}$$

$$= -k \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) = 70 \left(\frac{20 - 60}{0.02} \right) = 140 \text{ kw/m}^2$$

$$Q = A \cdot q = 0.5 \times 140 \text{ kw} = 70 \text{ kw}$$



รูปที่ 2.19 รูปแสดงโจทย์ตัวอย่างการคำนวณ 1 มิติ

จากสูตร

$$\frac{d^2 T(X)}{dX^2} = 0$$

ทำการอินทิเกรตสมการข้างบนจะได้ว่า

$$T(X) = C_1X + C_2$$

ทำการแทนค่าขอบเขตหาค่า C_1 , C_2 โดย $T(0) = 60^\circ\text{C}$; $T(0.02) = 20^\circ\text{C}$

จะได้ค่า $C_1 = -2000$ และ $C_2 = 60$

ดังนั้น

$$T(X) = (-2000)X + 60$$

หากต้องการรู้อุณหภูมิที่ตำแหน่งใดก็ใส่ค่า X ลงไปจะได้ค่าดังตารางด้านล่าง

ตารางที่ 2.1 แสดงผลลัพธ์การคำนวณในตัวอย่าง 1 มิติ

ตำแหน่ง	ค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยตรง ($^\circ\text{C}$)
1	60
2	56
3	52
4	48
5	44
6	40
7	36
8	32
9	28

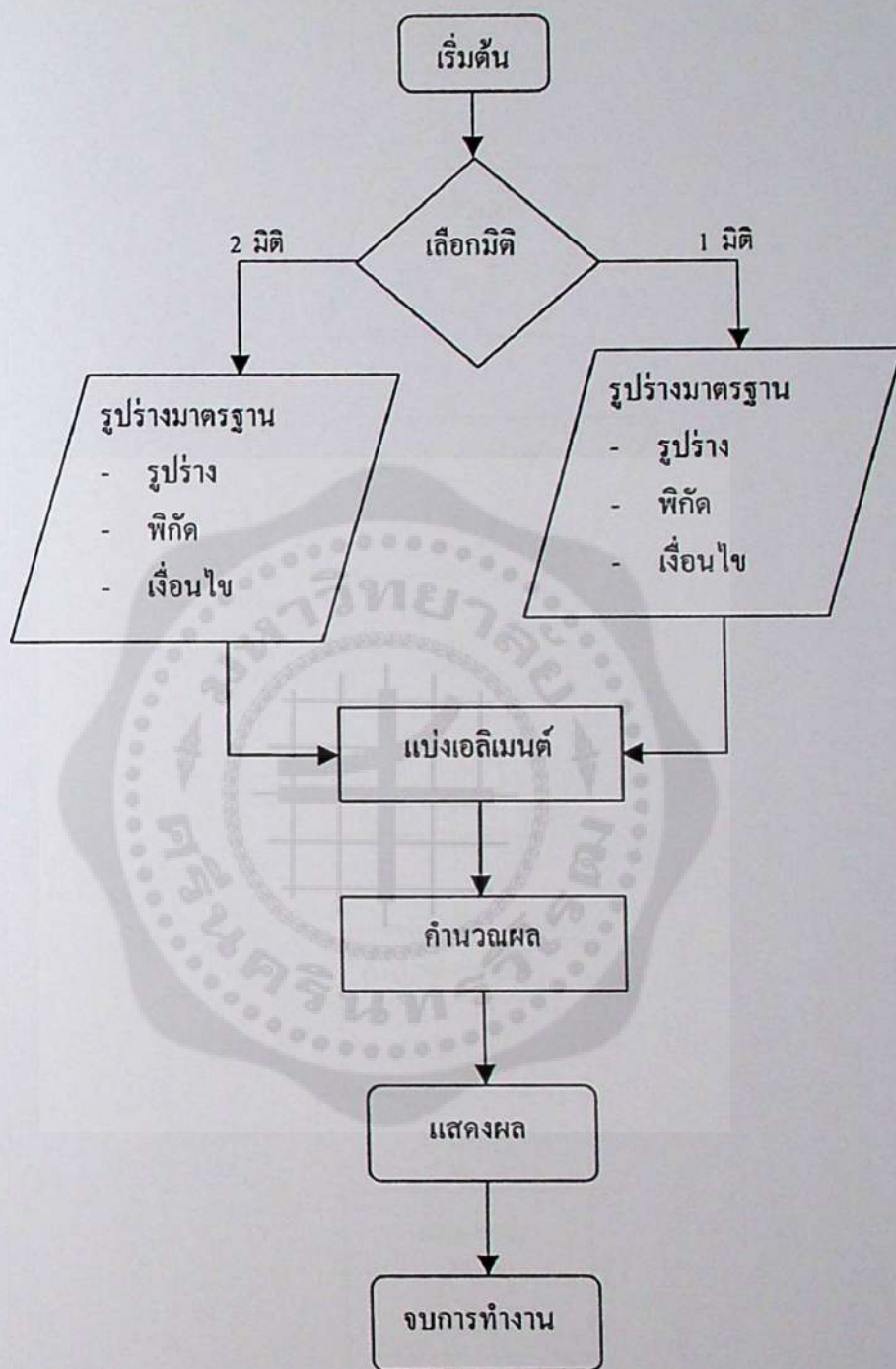
บทที่ 3

Flow chart และการทำงานของโปรแกรม

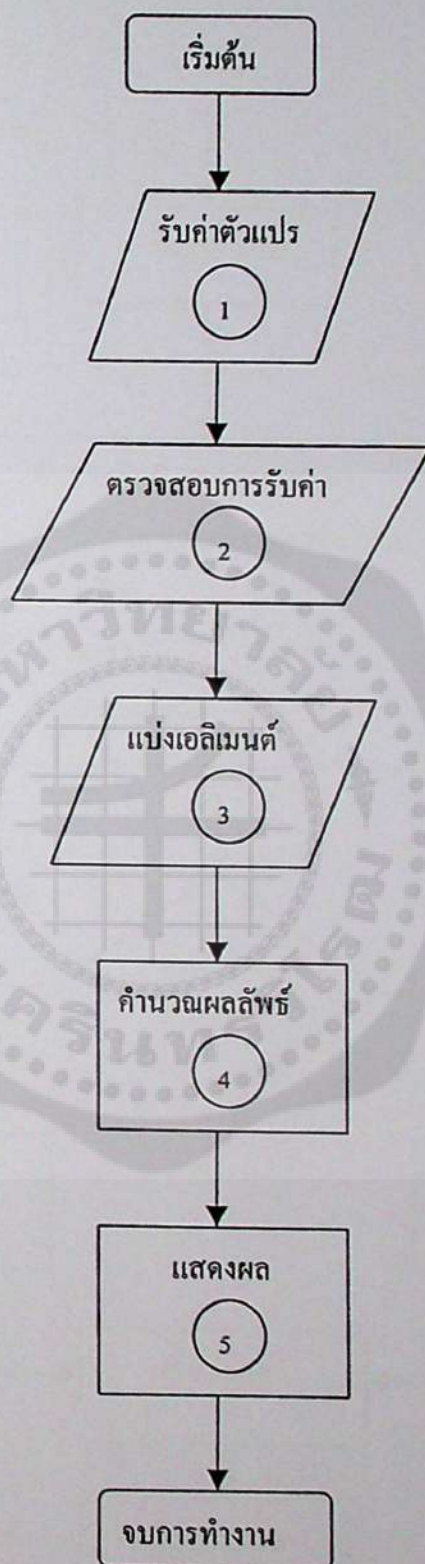
ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมประกอบด้วย ขั้นตอนต่างๆดังนี้

1. เลือกรูปแบบการทำงาน
 - รูปร่างมาตรฐาน
 - รูปร่างที่ผู้ใช้กำหนดเอง
2. รับเงื่อนไขขอบเขต
3. แบ่งเอลิเมนต์
4. ประมวลผล
5. เลือกรูปแบบการแสดงผล
 - แบบบันทึกงาน
 - แบบแสดงผลหน้าจอ
6. จบการทำงาน

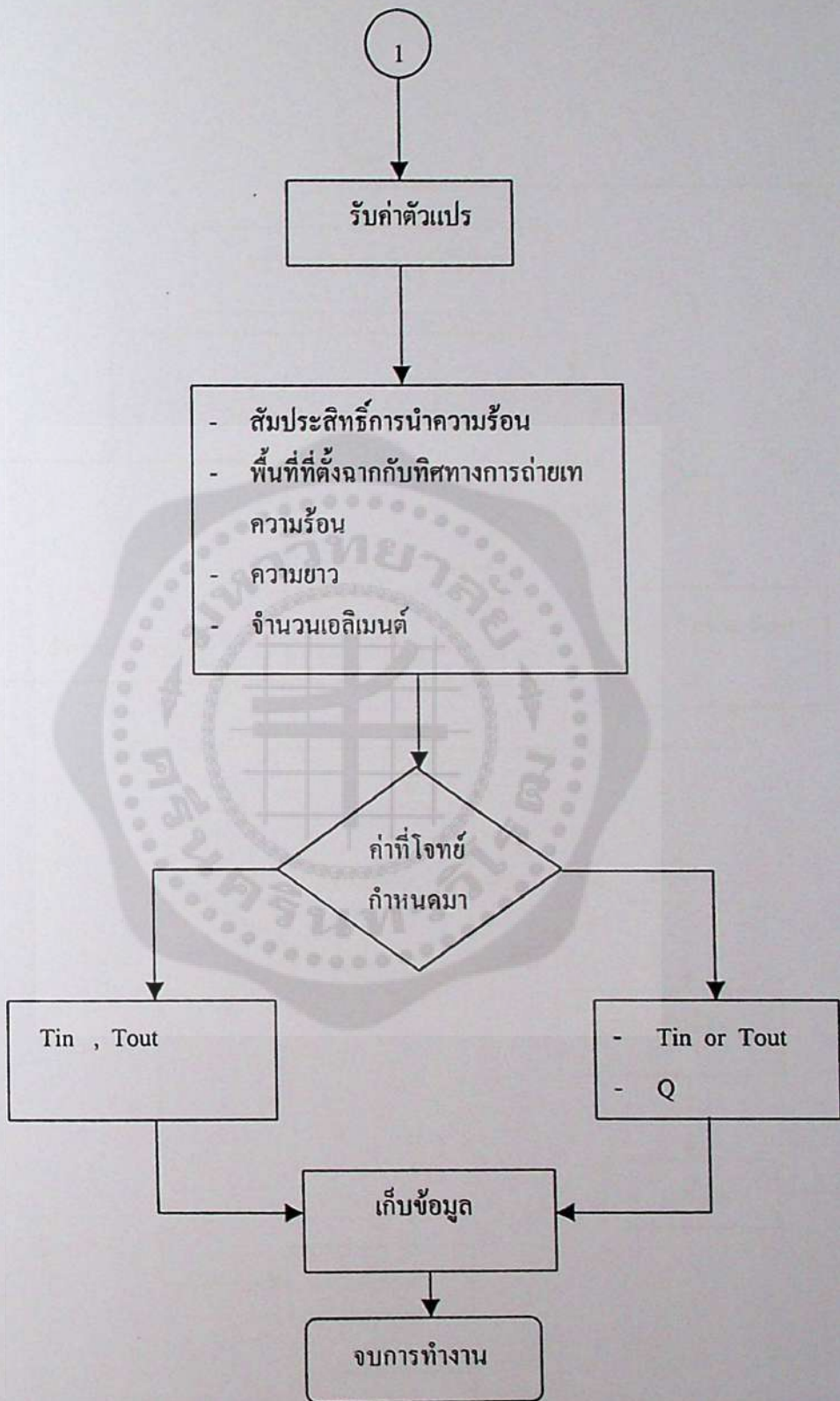




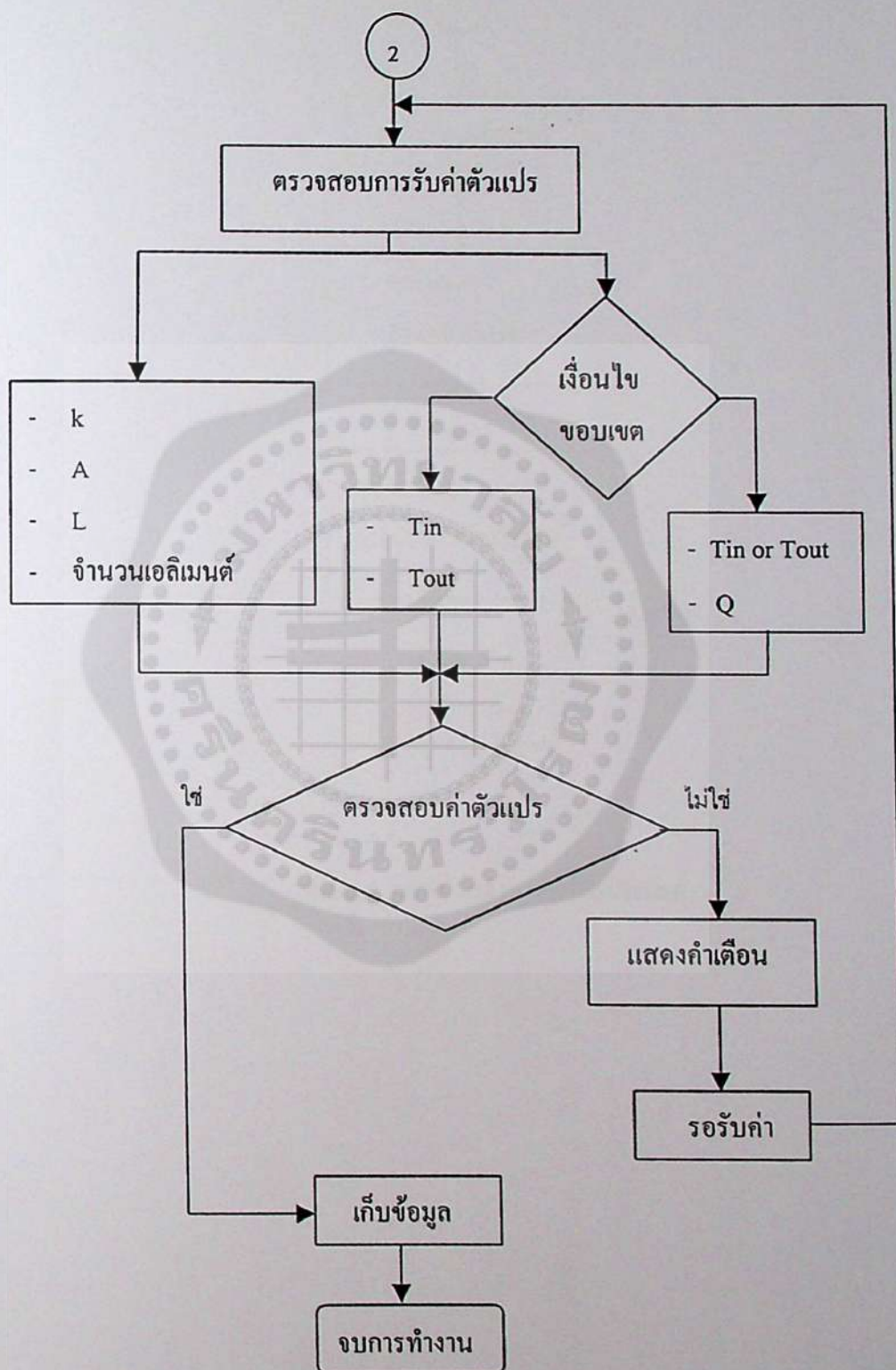
รูปที่ 3.1 แผนผังหลักการทำงาน



รูปที่ 3.2 แผนผังการทำงานสำหรับ 1 นาที



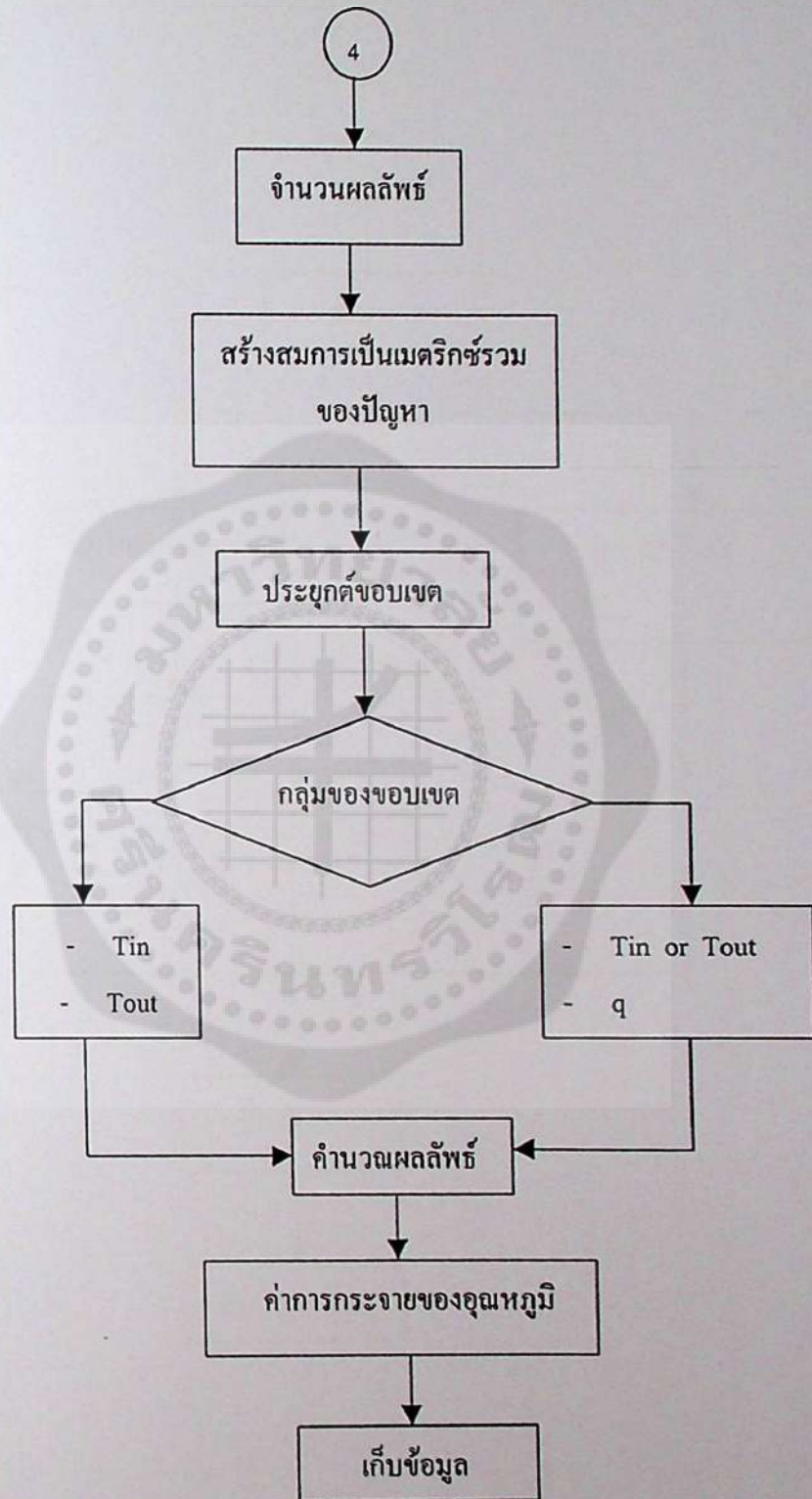
รูปที่ 3.3 แผนผังของการรับค่าตัวแปรสำหรับปัญหา 1 มิติ



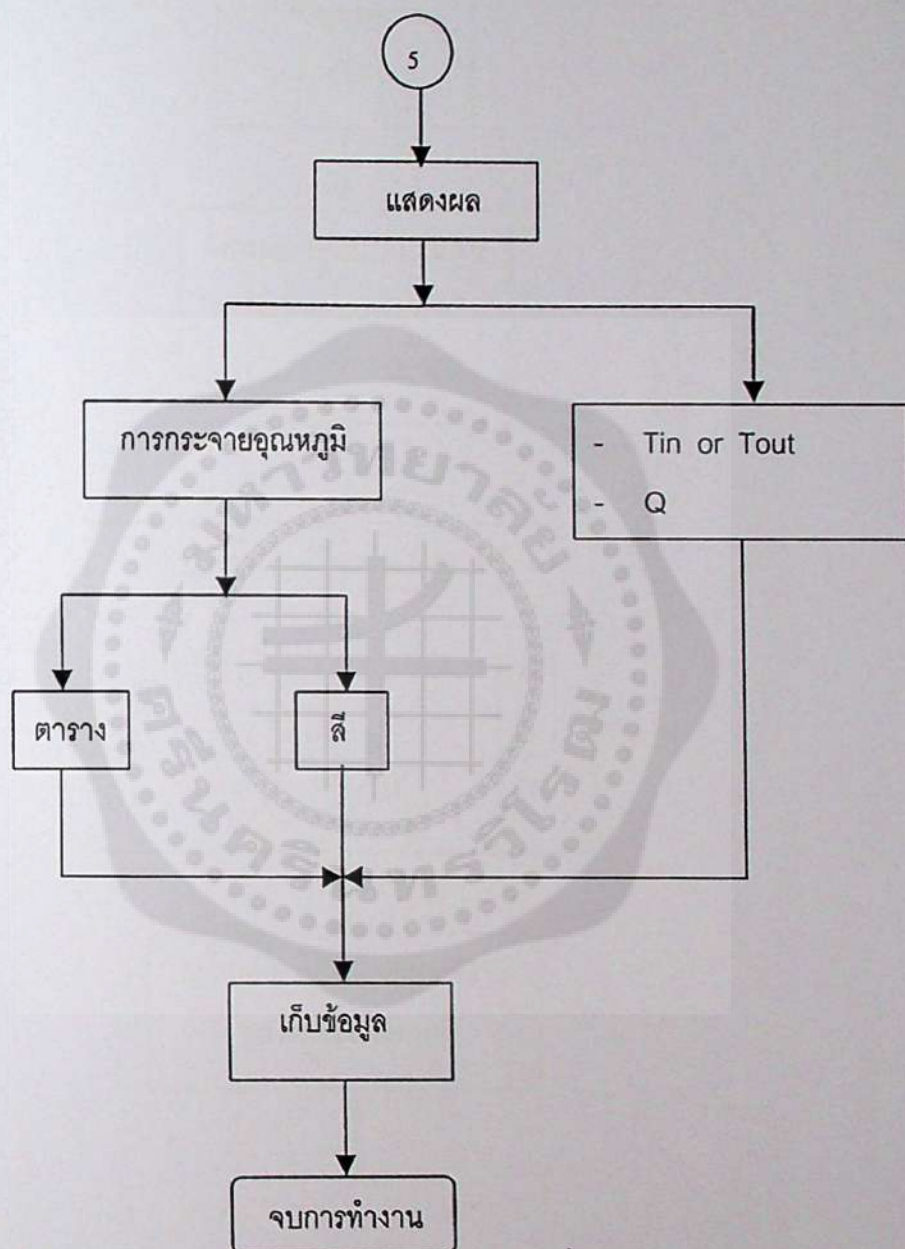
รูปที่ 3.4 แผนผังของการตรวจสอบการรับค่าตัวแปร



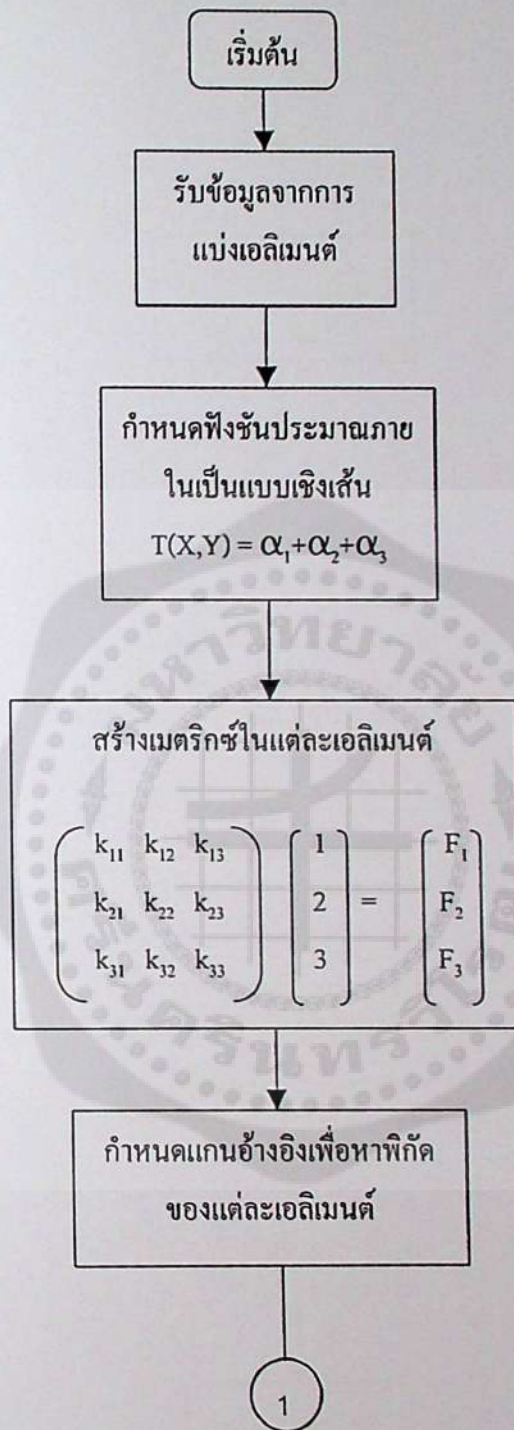
รูปที่ 3.5 แผนผังของการแบ่งเอลิเมนต์



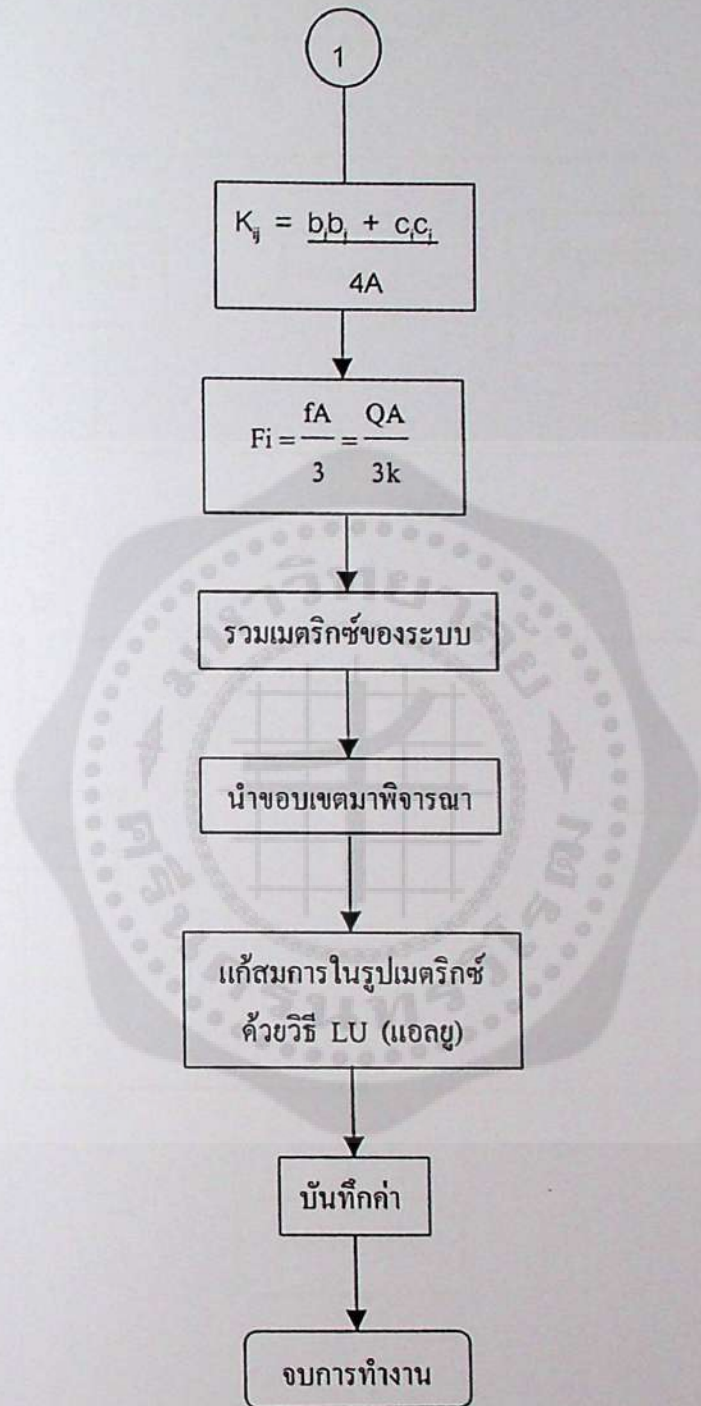
รูปที่ 3.6 แผนผังของการคำนวณผล



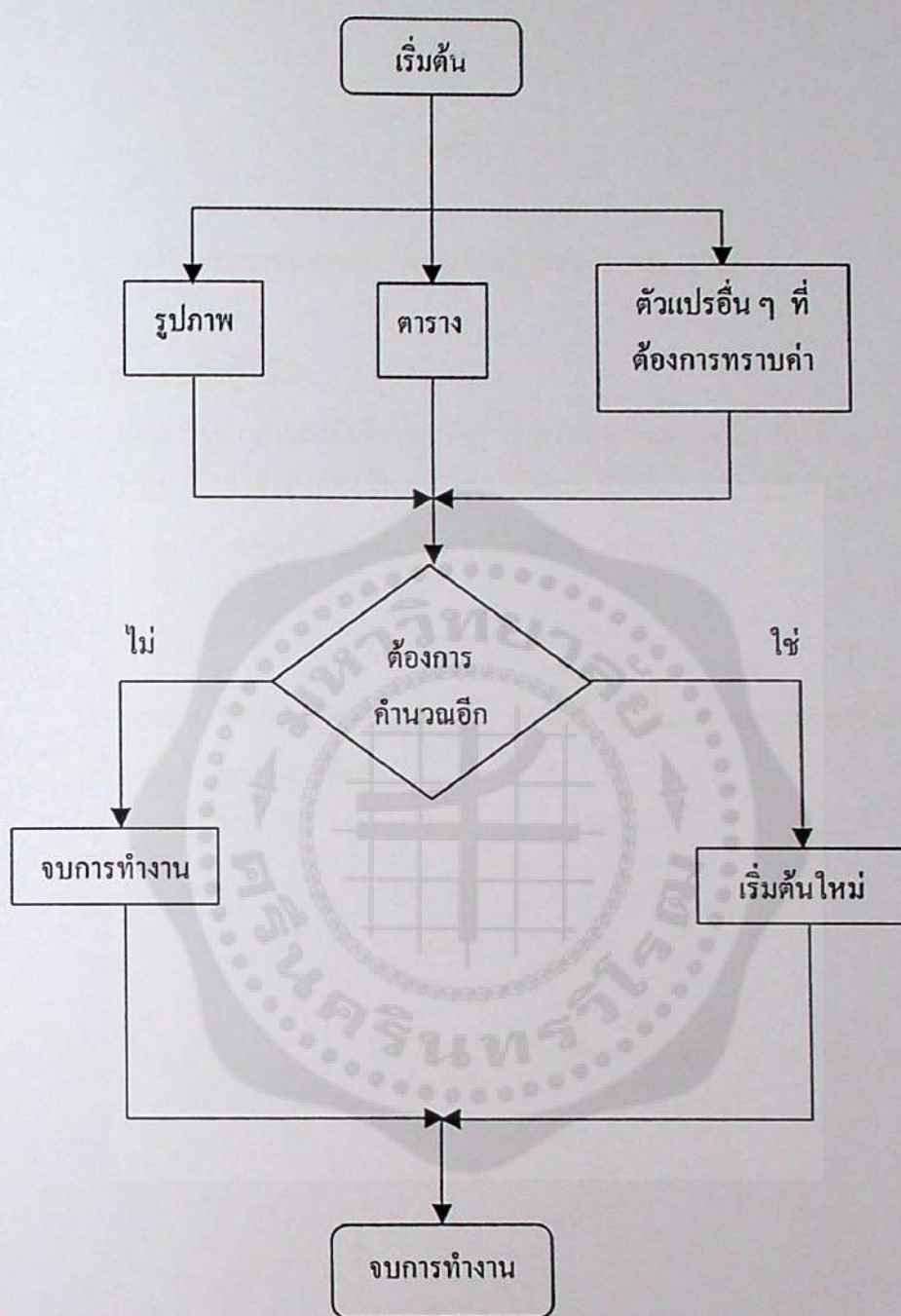
รูปที่ 3.7 แผนผังของการแสดงผลลัพธ์



รูปที่ 3.8 แผนผังการคำนวณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์



รูปที่ 3.8 แผนผังการคำนวณไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (ต่อ)



รูปที่ 3.9 แผนผังของการแสดงผล

บทที่ 4

ผลการทดสอบโปรแกรมสำหรับวัตถุ 1 และ 2 มิติ

ตัวอย่างผลการทดสอบวัตถุ 1 มิติ

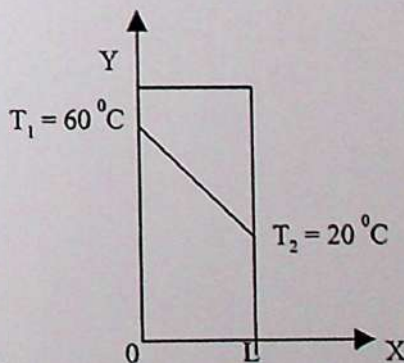
จงหา Heat flux (q) และอัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นเหล็ก พื้นที่ $A = 0.5 \text{ m}^2$ ความหนา $L = 0.02 \text{ m}$ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 70 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ เมื่อผิวด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ $T_1 = 60^\circ\text{C}$ และอีกด้านหนึ่งมีอุณหภูมิคงที่ $T_2 = 20^\circ\text{C}$

วิธีทำ

จากปัญหานี้ การถ่ายเทความร้อนเป็นลักษณะ dT/dX คงที่ ดังนั้นการกระจายของอุณหภูมิ $T(X)$ ผ่านแผ่นราบเป็นเชิงเส้นจะหา q ได้จาก

$$q = -k \frac{dT(X)}{dX}$$
$$= -k \left(\frac{T_2 - T_1}{L} \right) = 70 \left(\frac{20 - 60}{0.02} \right) = 140 \text{ kW/m}^2$$

$$Q = A \cdot q = 0.5 \times 140 \text{ kW} = 70 \text{ kW}$$



รูปที่ 4.1 รูปแสดงโจทย์ผลการทดสอบ 1 มิติ

ขั้นตอนการใช้โปรแกรม 1 มิติ

1) ป้อนค่า T_1, T_2, L, A และจำนวนของเอลิเมนต์

2) แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม

— แสดงค่าอุณหภูมิตามจุด (node) ในรูปแบบของตารางและ แสดงค่าที่หาได้จากตัวแปรที่มีจากสูตร

$$\frac{d^2 T(X)}{dX^2} = 0$$

ทำการอินทิเกรตสมการข้างบนจะได้ว่า

$$T(X) = C_1 X + C_2$$

ทำการแทนค่าขอบเขตหาค่า C_1, C_2

จะได้ค่า $C_1 = -2000$ และ $C_2 = 60$

ดังนั้น

$$T(X) = (-2000)X + 60$$

หากต้องการรู้อุณหภูมิที่ตำแหน่งใดก็ได้ใส่ค่า X ลงไปได้ค่าดังตารางด้านล่าง

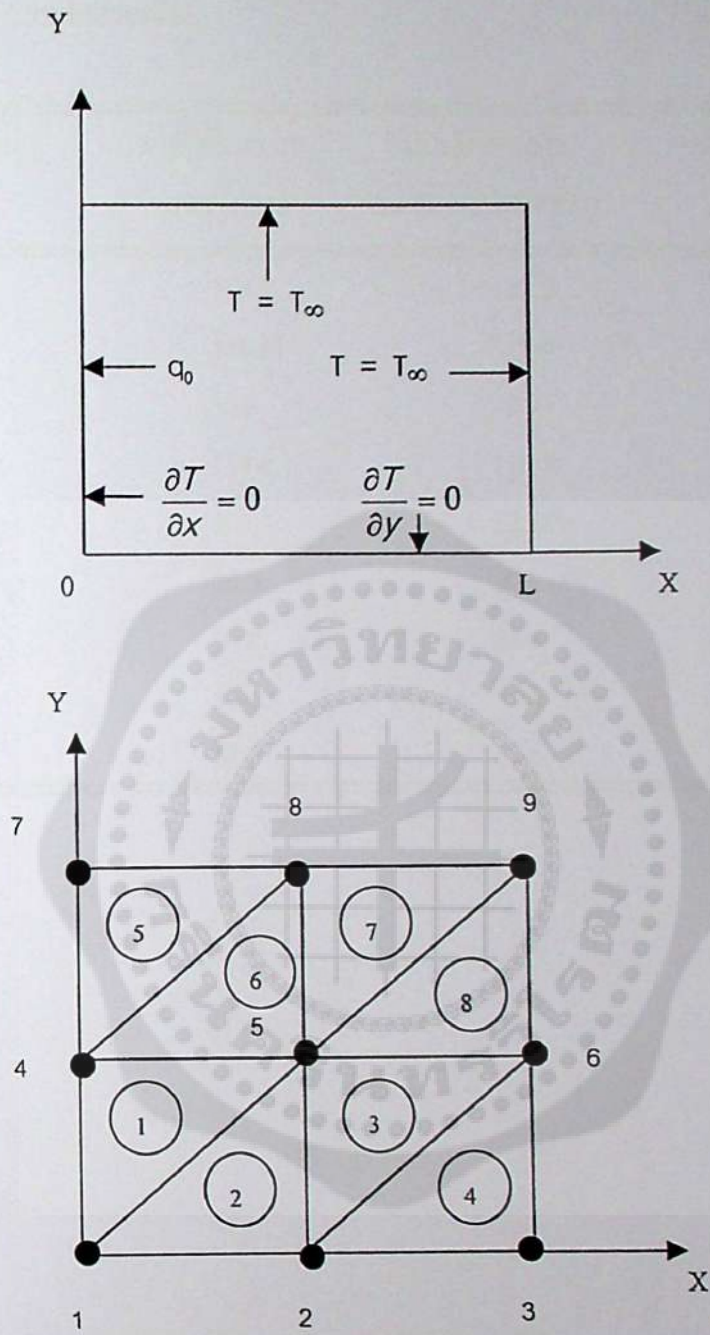
ตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบผลลัพธ์

ตำแหน่ง	ค่าที่ได้จากการ คำนวณโดยตรง	ค่าที่ได้จากการ คำนวณโดยโปรแกรม	ค่าผิดพลาด
1	60	60	0%
2	56	56	0%
3	52	52	0%
4	48	48	0%
5	44	44	0%
6	40	40	0%
7	36	36	0%
8	32	32	0%
9	28	28	0%
10	24	24	0%
11	20	20	0%

ผลการทดสอบวัตถุ 2 มิติ

ตัวอย่าง

จงหาการกระจายตัวของอุณหภูมิในวัตถุแผ่นสี่เหลี่ยม พลังงานภายในเกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอ ดังรูป สมมุติไม่มีการกระจายตัวของอุณหภูมิในทิศทางแกน z กำหนดให้ $k = 30$ watts/cm $\cdot$ K, $L = 10$ cm, $T_{\infty} = 50^{\circ}\text{C}$ and $q = q_0 = 100$ watts/cm 2 .



รูปที่ 4.2 รูปแสดงตัวอย่างการหาค่าการกระจายอุณหภูมิใน 2 มิติ

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบผลลัพธ์

ตำแหน่ง	ค่าที่ได้จากการ คำนวณโดยตรง	ค่าที่ได้จากการ คำนวณโดยโปรแกรม	ค่าผิดพลาด
1	133.3	133.3	0%
2	119.4	119.4	0%
3	50.0	50.0	0%
4	119.4	119.4	0%
5	105.6	105.6	0%
6	50.0	50.0	0%
7	50.0	50.0	0%
8	50.0	50.0	0%
9	50.0	50.0	0%

บทที่ 5

สรุปผลการทดสอบ

สรุปผลการทดสอบ

จากการประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ สรุปได้ว่า

1 การถ่ายเทความร้อนด้วยการนำความร้อนผ่านวัสดุใน 1 มิติและ 2 มิตินั้นการถ่ายเทความร้อนจะเป็นในลักษณะเชิงเส้น คือการลดลงของอุณหภูมิจะลดลงด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่งตลอดพื้นที่หน้าตัดที่เกิดการถ่ายเทความร้อน

2 การนำความร้อนผ่านผิววัสดุนั้นจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับตัวแปรดังนี้

2.1 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) ของวัสดุซึ่งค่าตัวแปรตัวนี้จะเป็นค่าคงที่เฉพาะของแต่ละวัสดุ และจะเป็นค่าที่เราต้องทราบค่าก่อนที่จะทำการคำนวณหาได้จากตารางแสดงคุณสมบัติของวัสดุแต่ละชนิด

2.2 พื้นที่หน้าตัดที่ตั้งฉากกับทิศทางการถ่ายเทความร้อน (A) ถ้าพื้นที่ที่ตั้งฉากกับการนำความร้อนมีค่ามากการนำความร้อนก็สามารถที่จะเกิดขึ้นได้ดี ตรงข้ามถ้าหากพื้นที่ที่ตั้งฉากกับการนำความร้อนมีค่าน้อยการนำความร้อนก็จะเกิดขึ้นได้น้อย

2.3 ความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิววัสดุที่เกิดการถ่ายเทความร้อน โดยถ้าหากว่าความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุที่เกิดการนำความร้อนมีความแตกต่างกันมาก ก็จะทำให้การนำความร้อนเกิดขึ้นได้มาก ตรงกันข้ามถ้าหากว่าความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุที่เกิดการนำความร้อนมีความแตกต่างกันน้อย ก็จะทำให้การนำความร้อนเกิดขึ้นได้น้อย

2.4 ความหนาของวัสดุตามแนวที่เกิดการนำความร้อน คือถ้าวัสดุมีความหนามากความร้อนที่เกิดการนำความร้อนก็ไม่สามารถที่จะผ่านวัสดุได้โดยง่ายแต่ถ้าหากวัสดุมีความหนาน้อยความร้อนที่เกิดการนำความร้อนก็สามารถที่จะผ่านวัสดุได้โดยง่าย

ข้อเสนอแนะ

1. ค่าคงที่ต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณควรระบุในช่วงที่เป็นไปได้ในความเป็นจริง
2. ควรมีการแสดงผลในรูปแบบของกราฟเพื่อความเข้าใจที่ง่ายขึ้น
3. ควรที่จะแสดงตารางของค่าคงที่ในโปรแกรมเพื่อความสะดวกในการใช้งาน



เอกสารอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เคชะอำไพ , ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม , สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2541
2. รศ.ดร. เดช พุทธเจริญ , การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ , ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ 2540
3. ปราโมทย์ เคชะอำไพ , ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข , สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2541
4. M. NECAIT OZISIK , HEAT TRANSFER A BASIC APPROACH , MCGRAW — HILL INTERNATIONAL EDITIONS 1998
5. STEVEN C. CHAPRA , NUMERICAL METHODS FOR ENGINEER , RAYMOND P. CANALE 1995
6. SINGIRESU S. RAO , THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING , BUTTERWORTH — HEINEMANN 1997



การใช้งานโปรแกรม

โปรแกรมการวิเคราะห์การนำความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิและอัตราการถ่ายเทความร้อนใน 1 มิติและ 2 มิติ โดยแสดงผลในรูปแบบของตารางและรูปภาพ โปรแกรมนี้เขียนจาก Microsoft Visual Basic 6 โดยใช้ชื่อโปรแกรมว่า "Finite 1-2D.exe" ซึ่งทำงานบนระบบปฏิบัติการ Microsoft Windows 9x และ Microsoft Windows NT

การติดตั้งโปรแกรม

- 1.เปิด Windows
- 2.ดับเบิลคลิกที่ My Computer
- 3.ดับเบิลคลิกที่ CD-rom drive
- 4.ดับเบิลคลิกที่ Finite 1-2 D

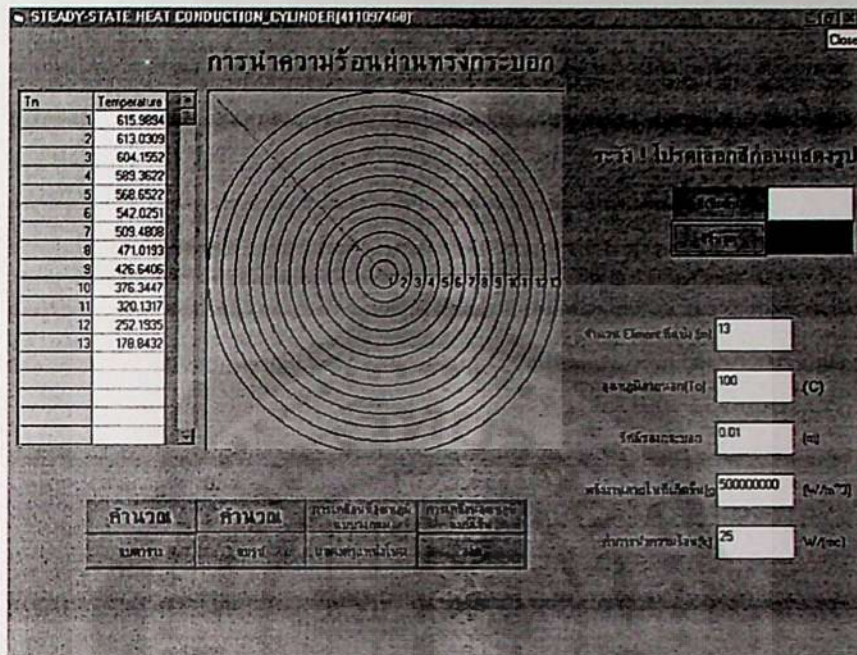
ขั้นตอนการใช้โปรแกรม

- 1.ดับเบิลคลิกไอคอนชื่อ Finite 1-2 D
- 2.จะปรากฏจอภาพดังนี้คือ



รูปภาพผนวกที่ 1

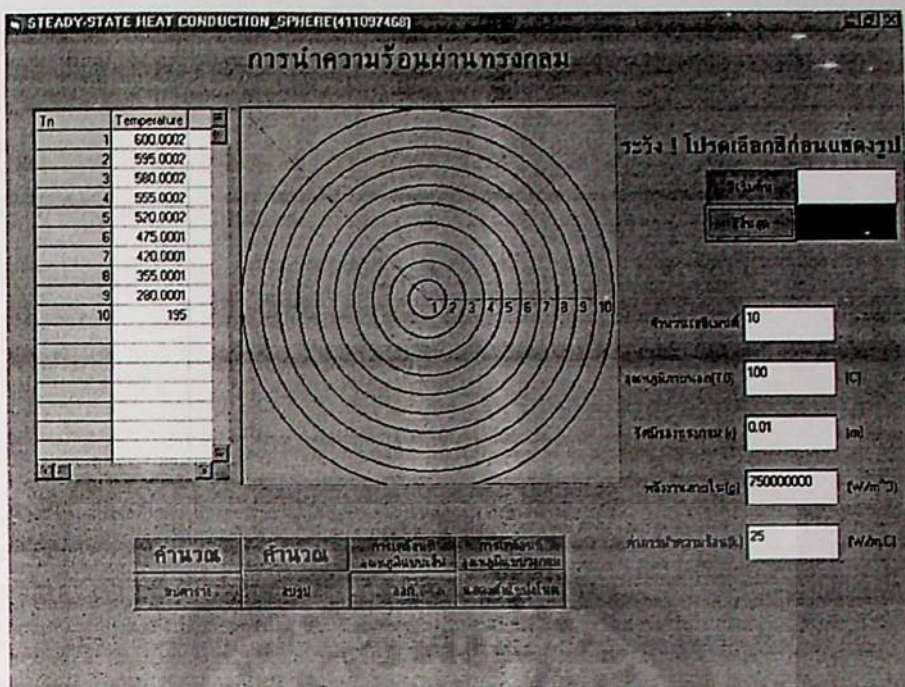
- กรณีของวัสดุทรงกระบอกแสดงในภาคผนวกที่ 4
- กรณีของวัสดุทรงกลมแสดงในภาคผนวกที่ 5
- กรณีของวัสดุทรงกระบอกกลวงแสดงในภาคผนวกที่ 6



รูปภาคผนวกที่ 4

4.1.2 คลิ๊กคำนวณผลลัพธ์

- แสดงค่าการกระจายของอุณหภูมิ
- กรณีของแผ่นวัสดุแสดงในรูปภาคผนวกที่ 3
- กรณีของวัสดุทรงกระบอกแสดงในภาคผนวกที่ 4
- กรณีของวัสดุทรงกลมแสดงในภาคผนวกที่ 5
- กรณีของวัสดุทรงกระบอกกลวงแสดงในภาคผนวกที่ 6



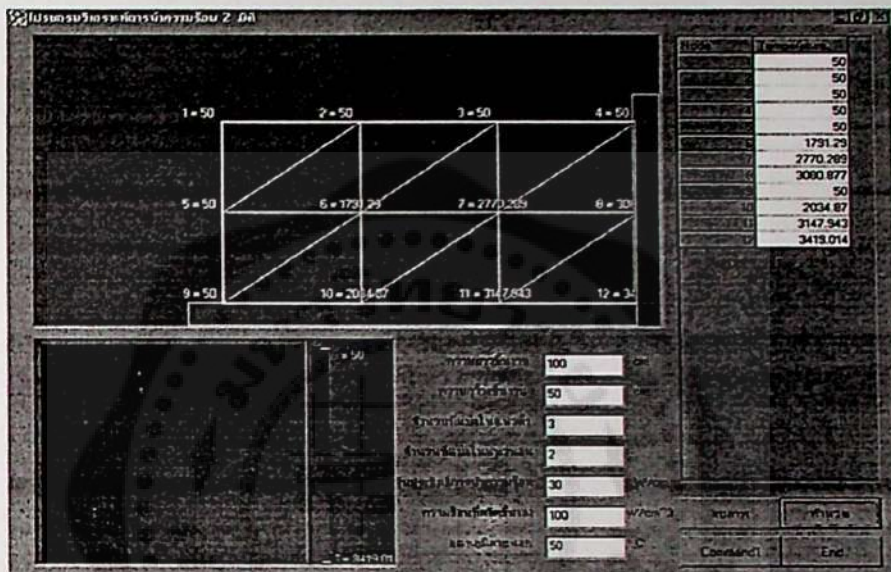
รูปภาคผนวกที่ 5



รูปภาคผนวกที่ 6

4.2 กรณีปัญหา 2 มิติประกอบด้วย

- วัตถุรูปสี่เหลี่ยมแสดงดังรูป ภาคผนวกที่ 7
- วัตถุเป็นรูปตัวแอล(L)แสดงดังรูปภาคผนวกที่ 8
- วัตถุเป็นรูปตัวยู(U)แสดงดังรูปภาคผนวกที่ 9
- วัตถุเป็นรูปสี่เหลี่ยมกลวงแสดงดังรูปภาคผนวกที่ 10

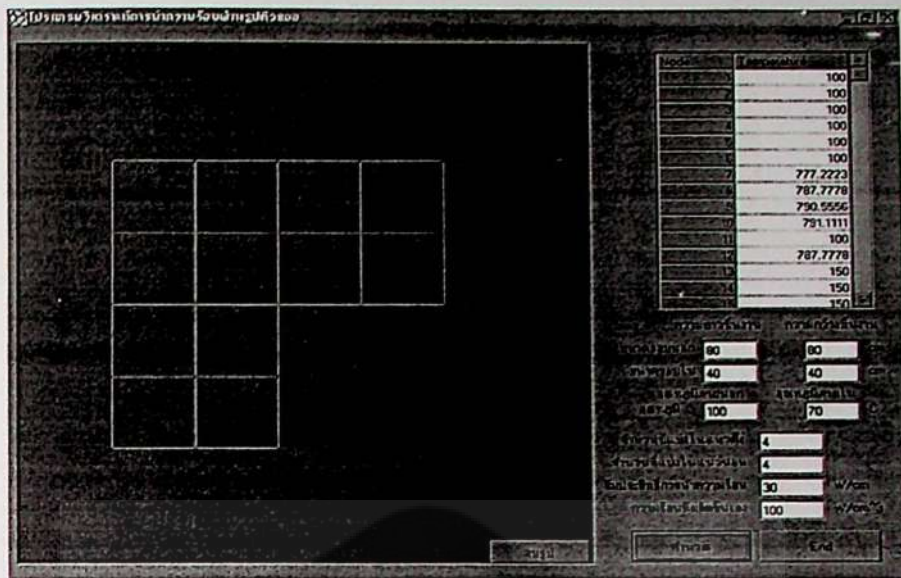


รูปภาคผนวกที่ 7

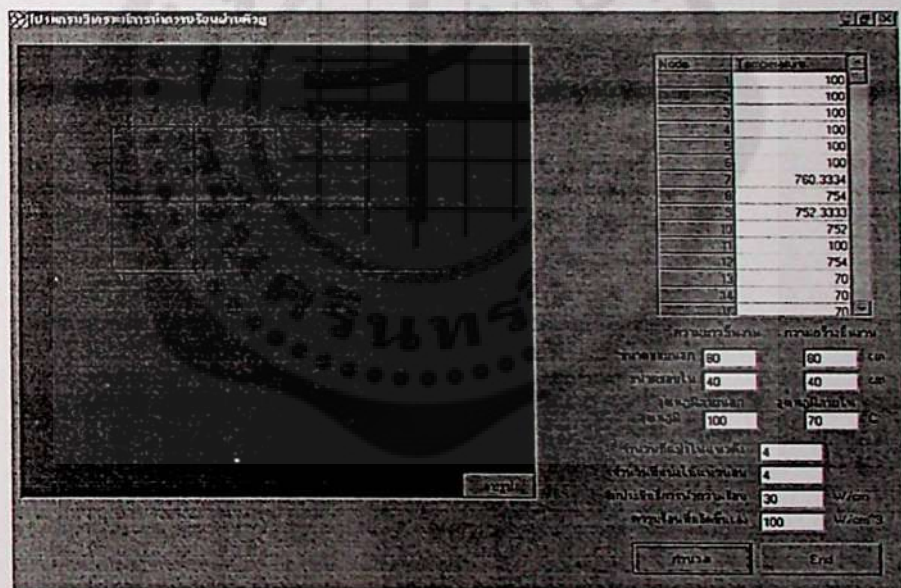
4.2.1 ป้อนค่าตัวแปรต่างๆลงในช่องว่างของแต่ละปัญหา

- วัตถุรูปสี่เหลี่ยมแสดงดังรูป ภาคผนวกที่ 7
- วัตถุเป็นรูปตัวแอล(L)แสดงดังรูปภาคผนวกที่ 8
- วัตถุเป็นรูปตัวยู(U)แสดงดังรูปภาคผนวกที่ 9
- วัตถุเป็นรูปสี่เหลี่ยมกลวงแสดงดังรูปภาคผนวกที่ 10

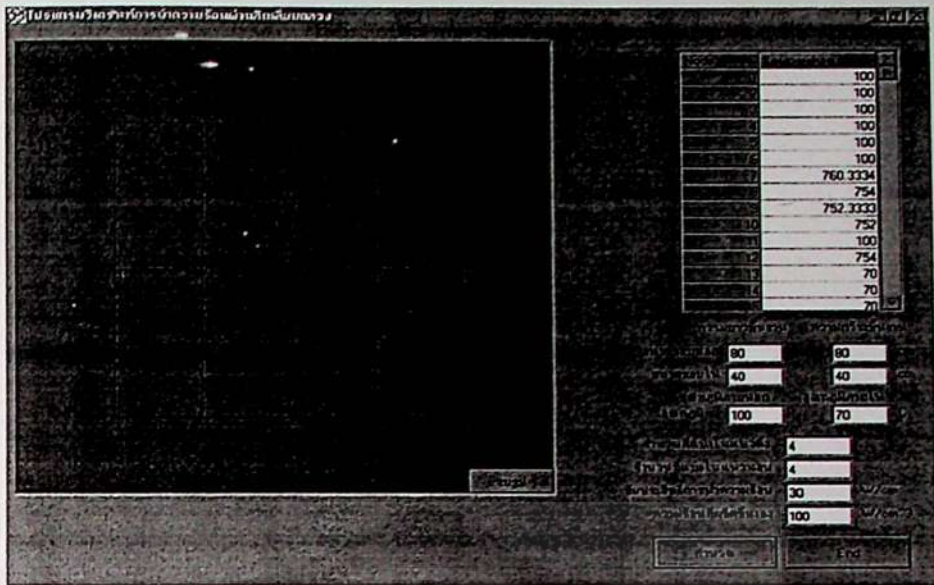
4.2.2 คลิกคำนวณผลลัพธ์จะได้ผลของอุณหภูมิที่จุดต่างๆดังภาพ



รูปภาคผนวกที่ 8



รูปภาคผนวกที่ 9



รูปภาคผนวกที่ 10



ประวัติผู้ทำโครงการ

- ชื่อ นาย ปฏิวัติ สีลา
 ที่อยู่ 42 หมู่ 7 บ้านหนองเจริญ ต. ขอนบุง อ. กุดจับ จ. อุครธานี 41250
 การศึกษา ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส) วิทยาลัยเทคนิคอุครธานี อ. เมือง
 จ. อุครธานี
 อุดมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- ชื่อ นาย ปัญญา จำปาทอง
 ที่อยู่ 300/4 หมู่ 2 บ้านถนนหัก ต. ไทยเจริญ อ. ปะคำ จ. บุรีรัมย์ 31220
 การศึกษา ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส) สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขต
 ขอนแก่น อ. เมือง จ. ขอนแก่น
 อุดมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- ชื่อ นาย พรชัย คนฉลาด
 ที่อยู่ 19 หมู่ 2 บ้านหนองนาไฮ ต. สุมเส้า อ. เพ็ญ จ. อุครธานี 41150
 การศึกษา ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส) วิทยาลัยเทคนิคอุครธานี อ. เมือง
 จ. อุครธานี
 อุดมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ