

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปริญญานิพนธ์  
ของ  
กรรณิการ์ แพลอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
มีนาคม 2547

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทคัดย่อ  
ของ  
กรรณิการ์ แพลอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มีนาคม 2547

กรณีการ แพลอย.(2547). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัด  
ของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.ปริญญาโท กศ.ม.(คณิตศาสตร์).  
กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :  
รองศาสตราจารย์กมล เอกไทยเจริญ, ผู้ช่วยศาสตราจารย์วีวรรณ งามสันติกุล.

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างบทเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัด  
ของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน  
เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตาม  
บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน 1 ห้องเรียน จาก  
โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปี  
การศึกษา 2545 ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอน 10 คาบ  
คาบละ 50 นาที เมื่อสอนครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้กลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบด้วย  
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง  
แล้วนำผลการสอบมาวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโดยใช้สถิติทดสอบ z

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการ  
เรียนรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ที่ระดับนัยสำคัญ .01

A STUDY OF ACHIEVEMENT IN LEARNING ROTATIONAL TRANSFORMATION OF  
QUADRATIC EQUATION OF MATHAYOM SUKSA IV STUDENTS

AN ABSTRACT  
BY  
KANNIKA PAELOY

Presented in partial fulfillment of the requirements  
for the Master of Education degree in Mathematics  
at Srinakharinwirot University  
March 2004

Kannika Paeloy.(2004). *A Study of achievement in Learning Rotational Transformation of Quadratic Equations of Mathayom Suksa IV Students*. Master Thesis, M.Ed. (Mathematics).Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc.Prof. Kamon Ekthaicharern, Assist.Prof. Raweevan Ngamsuntikul.

The Purpose of this research were to construct the Rotational Transformation of Quadratic Equations lessons for Mathayom Suksa IV students and to study the achievement in learning on Rotational Transformation of Quadratic Equations of Mathayom Suksa IV students, designed by the researcher.

A sample consisted of thirty-two junior high school students (Mathayom Suksa IV) from the Secondary Demonstration School of Rajabhat Institute Bansomdejchaopraya in Bangkok. The experiment was executed during the second semester of the 2002 academic year. The students were taught, based on lessons prepared by the researcher, by using ten 50-minute periods. A final of the experiment, the achievement tests were given to them and their scores were later analyzed and judged for its effectiveness by the z-test.

The experiment indicated that the Mathayom Suksa IV students were able to learn Rotational Transformation of Quadratic Equations at the .01 significance level.

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ปริญญานิพนธ์  
ของ  
กรรณิการ์ แพลอย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มีนาคม 2547

## สารบัญ

| บทที่                                                                                                                                                                                                                                                              | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1 บทนำ.....                                                                                                                                                                                                                                                        | 1    |
| ภูมิหลัง.....                                                                                                                                                                                                                                                      | 1    |
| จุดมุ่งหมายของการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                        | 5    |
| ความสำคัญของการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                          | 5    |
| ขอบเขตของการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                             | 5    |
| นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                               | 6    |
| สมมติฐานของการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                           | 6    |
| 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....                                                                                                                                                                                                                              | 7    |
| ตอนที่ 1 ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM : Principles and Standards for<br>School Mathematics ในปีค.ศ. 2000.....                                                                                                                                                      | 7    |
| ตอนที่ 2 มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ของ<br>นักเรียนในสหรัฐอเมริกาปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543)และสาระการ<br>เรียนรู้ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่4(ม.4 - ม.6) ของนักเรียนใน<br>ประเทศไทย(หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544).....    | 9    |
| ตอนที่ 3 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย<br>พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และตัวอย่างการจัดสาระ<br>การเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคณิตศาสตร์เลือกช่วงชั้นที่ 4<br>(ม.4–ม.6)ของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544..... | 12   |
| ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์<br>ในเรื่องการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า.....                                                                                                                                     | 17   |
| 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                          | 22   |
| ประชากร.....                                                                                                                                                                                                                                                       | 22   |
| กลุ่มตัวอย่าง.....                                                                                                                                                                                                                                                 | 22   |
| เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                    | 22   |
| วิธีดำเนินการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                                                            | 25   |
| การวิเคราะห์ข้อมูล.....                                                                                                                                                                                                                                            | 25   |
| สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....                                                                                                                                                                                                                               | 25   |

## สารบัญ (ต่อ)

| บทที่ |                                                                                                                                                                                                                               | หน้า |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4     | ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....                                                                                                                                                                                                     | 26   |
|       | ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4<br>จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม จากการทำ<br>แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุน<br>แกนพิกัดของสมการกำลังสอง..... | 27   |
|       | ตอนที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์<br>การแปรผันของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์<br>ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                          | 29   |
|       | ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การ<br>แปรผันของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ใน<br>การเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                         | 30   |
|       | ตอนที่ 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การ<br>แปรผันของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผล<br>สัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                             | 31   |
|       | ตอนที่ 5 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4<br>ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์<br>ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                 | 32   |
|       | ตอนที่ 6 ผลการทดสอบสมมติฐานที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4<br>สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกน<br>พิกัดของสมการกำลังสองได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปหรือไม่.....                                          | 33   |
| 5     | สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....                                                                                                                                                                                           | 34   |
|       | สังเขปจุดมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย<br>และการวิเคราะห์ข้อมูล.....                                                                                                                             | 34   |
|       | สรุปผลการวิจัย.....                                                                                                                                                                                                           | 35   |
|       | อภิปรายผล.....                                                                                                                                                                                                                | 36   |
|       | ข้อเสนอแนะ.....                                                                                                                                                                                                               | 37   |
|       | บรรณานุกรม.....                                                                                                                                                                                                               | 38   |

## สารบัญ ( ต่อ )

| บทที่                                                                                                         | หน้า |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ภาคผนวก.....                                                                                                  | 42   |
| ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล.....                                                                             | 43   |
| ภาคผนวก ข แบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน<br>เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ..... | 48   |
| ภาคผนวก ค บทเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                        | 56   |
| ภาคผนวก ง แผนการสอนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                      | 86   |
| ภาคผนวก จ รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ.....                                                                           | 169  |
| ประวัติย่อผู้วิจัย.....                                                                                       | 171  |

## บัญชีตาราง

| ตาราง |                                                                                                                                                                                                                       | หน้า |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1     | ค่าเฉลี่ยร้อยละของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4<br>จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม จากการทำ<br>แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุน<br>แกนพิกัดของสมการกำลังสอง ..... | 27   |
| 2     | ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน<br>ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน<br>เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                           | 29   |
| 2     | ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน<br>ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน<br>เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                          | 30   |
| 3     | ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน<br>ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ใน<br>การเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                  | 31   |
| 5     | ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4<br>ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ใน<br>การเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                  | 32   |
| 6     | การทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่าน<br>เกณฑ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                                                                 | 33   |
| 7     | ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผล<br>สัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                                                                   | 44   |
| 8     | ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผล<br>สัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                                                                   | 44   |
| 9     | ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผล<br>สัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการ<br>กำลังสอง.....                                                                                  | 45   |
| 10    | ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของ<br>แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบ<br>หมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง.....                                                              | 46   |

## บทที่ 1

### บทนำ

#### ภูมิหลัง

สังคมไทยในปัจจุบันมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว เป็นผลมาจากความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการต่าง ๆ แนวโน้มของสังคมในอนาคตจะเป็นสังคมที่ใช้วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และเป็นสังคมข่าวสารหรือสังคมสารสนเทศมากขึ้น ระบบการศึกษาเป็นการเตรียมคนสำหรับสังคมในอนาคต จะต้องเตรียมคนให้เป็นผู้มีความรู้ ความสามารถ รู้จักติดตามข้อมูลข่าวสาร วิทยาการใหม่ๆ รู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นอย่างรวดเร็วและหลากหลาย รู้จักคิด วิเคราะห์ ให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และใฝ่เรียนใฝ่รู้ รู้จักการเลือกรับวิทยาการต่าง ๆ อีกทั้งยังมุ่งพัฒนาพฤติกรรมทางสังคมที่ดีงาม ทั้งในการทำงานและการอยู่ร่วมกัน รู้จักการช่วยเหลือเกื้อกูลประโยชน์แก่กันโดยไม่เห็นแก่ตัว มีความสามารถและทักษะในการติดต่อสื่อสารกับผู้อื่น (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2535 : 8-9) จากข้อความดังกล่าว คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งซึ่งทำให้วิทยาการสาขาต่าง ๆ และเทคโนโลยีเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็ว อาชีพต่าง ๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน เช่น วิศวกรไฟฟ้าต้องมีความรู้เรื่องแคลคูลัส สมการเชิงอนุพันธ์ อุตสาหกรรมต้องมีความรู้เรื่องสถิติว่าด้วยการควบคุมคุณภาพ ผู้บริหารต้องสามารถแปลความของข้อมูลทางสถิติได้ (เสริมศักดิ์ สุรวัฒน. 2535 : 24-25) นอกจากนี้วิชาคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาค้นคว้าวิจัยทุกประเภท อาจกล่าวได้ว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญที่จะนำสังคมไปสู่ความเจริญก้าวหน้า และเนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด กระบวนการและเหตุผล จึงทำให้ผู้เรียนเป็นผู้รู้และใช้ความคิดอย่างรอบคอบ เป็นระเบียบละเอียดถี่ถ้วนและมีเหตุผล เป็นคนช่างสังเกต และมีความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้เป็นพื้นฐานสำคัญที่ทำให้มนุษย์เป็นผู้มีความสามารถในการแก้ปัญหาที่พบในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ (จุไร ทวีรัตน์. 2528 : 2-3) ประเทศจะพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้ ก็ต่อเมื่อประเทศนั้นพัฒนาทางด้านคณิตศาสตร์แล้วเป็นอย่างดี กล่าวคือประเทศใดมีพลเมืองที่มีความรู้ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ที่ดีและแข็งแกร่งหรือมีศักยภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Power) ย่อมได้เปรียบเพราะจะสามารถพัฒนาให้เป็นผู้ที่มีศักยภาพทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่อไปได้ ดังนั้นในการพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จึงจำเป็นต้องพัฒนาทางด้านคณิตศาสตร์ก่อน เพราะความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็น และเป็นเครื่องมือที่มนุษย์จะได้นำไปใช้ในการพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้เจริญก้าวหน้าต่อไป ประเทศที่มีความเจริญก้าวหน้าทาง

วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จึงให้ความสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง (ปานทองกุลนาถศิริ . 2543 : 15)

จากความสำคัญของคณิตศาสตร์ดังกล่าวหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับต่าง ๆ ควรจะได้มีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงเพื่อให้สอดคล้องกับสภาพความเปลี่ยนแปลง ความต้องการด้านเศรษฐกิจและสังคม ความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2536 : ก) ในต่างประเทศมีโครงการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหลายโครงการ ซึ่งโครงการเหล่านี้จะแนะนำหัวข้อต่าง ๆ ที่ควรจะมีเพิ่มเติมในหลักสูตรระดับนี้ ซึ่งอาจเป็นหัวข้อที่ไม่มีในหลักสูตรเดิม หรือหัวข้อเดิมแต่สอนให้ลึกซึ้งขึ้น เช่น การนำไมโครคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ มิติที่สี่และมิติที่มากกว่ามิติที่สี่ กรุปจำกัด จำนวนเชิงอนันต์ โทโพโลยี ปีทาโกรัสและทฤษฎีบทของปีทาโกรัส การผกผัน (inversion) ในวิชาเรขาคณิต คณิตศาสตร์การบิน เศษส่วนต่อเนื่อง ข้อขัดแย้งกันแต่จริง (paradox) ในคณิตศาสตร์ การสร้างสมการจากตารางแสดงค่าของตัวแปร การเขียนรูปที่เหมือนกันหลาย ๆ รูปลงบนกระดาษ การแปลงสภาพเมตริกซ์ตลอดจนการประยุกต์สถิติ กับประวัติของ ปาสคาลและสามเหลี่ยมของปาสคาล (ปริชา จันกล้า .2539 :1 ; อ้างอิงจาก Sachs. 1988 : 118 )

สำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ได้ปรับปรุงระยะเวลาในการเรียนและเนื้อหาของวิชา โดยเฉพาะด้านเนื้อหาให้มีการเพิ่มเนื้อหาใหม่ ๆ ซึ่งมีประโยชน์และเป็นพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงลงไปให้นักเรียนได้ศึกษาหลายเรื่อง เช่น ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น โปรแกรมเชิงเส้นเบื้องต้น สมการพหุนาม ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อนุพันธ์อันดับสูง อินทิกรัลจำกัดเขตและดัชนีราคา เป็นต้น นอกจากนี้ยังได้ขยายเนื้อหาเดิมที่มีอยู่ โดยการเพิ่ม นิยาม ทฤษฎีบท ตัวอย่างและโจทย์บางหัวข้อ เช่น ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน และเมตริกซ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 38-110) ยิ่งไปกว่านั้นในปัจจุบัน ประเทศไทยกำลังอยู่ในระหว่าง การดำเนินการเพื่อปรับปรุงเปลี่ยนแปลงการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษาเพื่อให้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 โดย สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้รับมอบหมายให้ดำเนินการ จัดทำกรอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานของกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ ทางสถาบันส่งเสริมการสอน วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้จัดทำเอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ขึ้น ภายในเอกสารเล่มนี้ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ (12 ปี) และกำหนดสาระการเรียนรู้กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ (12 ปี) โดยแบ่งช่วงการเรียนรู้เป็น 4 ช่วงชั้น คือ ประถมศึกษาปีที่ 1-3 ประถมศึกษาปีที่ 4-6 มัธยมศึกษาปีที่ 1-3 และมัธยมศึกษาปีที่ 4-6

ในการจัดทำสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้แบ่งสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ออกเป็น สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานและสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกไว้ในแต่ละช่วงชั้น ส่วน

ที่เป็นสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน เป็นสาระที่สอดคล้องกับมาตรฐานช่วงชั้นที่กำหนดไว้ในหลักสูตร และส่วนที่เป็นสาระการเรียนรู้เลือก เป็นสาระการเรียนรู้สำหรับการศึกษาต่อและอาชีพ ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกในช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 ได้มีเนื้อหาใหม่ ๆ ซึ่งเป็นเนื้อหาที่ใช้สอนในระดับอุดมศึกษามาดัดแปลงเพื่อใช้สอนในระดับมัธยมศึกษา เช่น แคลคูลัสเบื้องต้น ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เวกเตอร์ในสามมิติ โดยพิจารณาให้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของผู้เรียน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2544 : 2-6)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กำหนดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรียนเรื่องภาคตัดกรวย โดยกล่าวถึงสมการของภาคตัดกรวยในรูป

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  เมื่อ  $A \neq 0$  หรือ  $B \neq 0$  โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ถ้า  $A = B$  กราฟเป็นวงกลม
2. ถ้า  $A = B$  และ  $A$  กับ  $B$  มีเครื่องหมายเหมือนกัน ( $AB > 0$ ) กราฟเป็นวงรี
3. ถ้า  $A = B$  และ  $A$  กับ  $B$  มีเครื่องหมายต่างกัน ( $AB < 0$ ) กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

4. ถ้า  $A = 0$  หรือ  $B = 0$  เพียงตัวใดตัวหนึ่ง ( $AB = 0$ ) กราฟเป็นพาราโบลา

ภาคตัดกรวยที่ศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทยในปัจจุบันจะเริ่มด้วยการศึกษาภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ภาคตัดกรวยในตำแหน่งมาตรฐาน กล่าวคือ ถ้าเป็นพาราโบลา หมายถึง พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนของพาราโบลาทับแกน  $x$  หรือทับแกน  $y$  และถ้าเป็นภาคตัดกรวยประเภทอื่น จะหมายถึง ภาคตัดกรวยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนของภาคตัดกรวยทับแกน  $x$  หรือทับแกน  $y$  หลังจากนั้นจึงศึกษาภาคตัดกรวยที่มีรูปแบบที่ซับซ้อนขึ้น โดยมีแกนของภาคตัดกรวยขนานกับแกน  $x$  หรือแกน  $y$  ในกรณีนี้สามารถใช้ความรู้เรื่องการแปลงแบบเลื่อนแกนขนาน เพื่อจัดสมการของภาคตัดกรวยใหม่เพื่อให้ได้ภาคตัดกรวยที่อยู่ในตำแหน่งมาตรฐานเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ และนอกจากนี้เนื้อหาในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย (ค012) ได้นำเสนอกราฟของสมการ  $xy = k$  เมื่อ  $k \neq 0$  เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากที่อยู่ในจุดภาคที่ 1 และ 3 และถ้า  $xy = k$  เมื่อ  $k = 0$  กราฟจะเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากที่อยู่ในจุดภาคที่ 2 และ 4 ซึ่งแสดงผลโดยการเขียนกราฟแบบคร่าว ๆ และกล่าวแต่เพียงว่ากราฟที่ได้เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากโดยไม่บอกเหตุผลว่าทำไมกราฟของสมการนี้จึงเป็นไฮเพอร์โบลา และทำไมจึงเรียกว่าไฮเพอร์โบลามุมฉาก ซึ่งในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายในปัจจุบันไม่ได้ให้ความหมายของไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จากภาคตัดกรวย วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา สมการของภาคตัดกรวยที่ศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในปัจจุบัน เมื่อเขียนสมการของภาคตัดกรวยเหล่านี้ในรูปทั่วไปจะได้สมการในรูปทั่วไปดังต่อไปนี้

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ซึ่งภาคตัดกรวยที่มีสมการ (1) เป็นกรณีเฉพาะของภาคตัดกรวยที่มีสมการ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวและไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ในกรณีที่ B = 0 สมการ (2) จะมีรูปแบบของสมการเช่นเดียวกับสมการ (1) ภาคตัดกรวยที่มีสมการตามนี้จะเป็นภาคตัดกรวยที่มีแกนของรูปขนานกับแกนพิกัด และในกรณีที่ B ≠ 0 สมการ (2) จะมีพจน์ Bxy ซึ่งเรียกว่าพจน์คูณไขว้ ภาคตัดกรวยที่มีพจน์คูณไขว้ จะเป็นภาคตัดกรวยที่มีแกนของรูปไม่ขนานกับแกนพิกัด ซึ่งจะเรียกว่าภาคตัดกรวยเอียง ปัญหาที่ตามมาคือ ในกรณีที่กำหนดสมการภาคตัดกรวยเอียง เราจะทราบได้อย่างไรว่าภาคตัดกรวยนี้เอียงมากน้อยเพียงใด และเขียนกราฟของภาคตัดกรวยนี้ได้อย่างไร หลังจากได้ศึกษารายละเอียดของการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง จะสามารถตอบคำถามเหล่านี้ได้ และเนื่องจาก สมการ  $xy = k$  เมื่อ k ไม่เท่ากับศูนย์ เป็นสมการของภาคตัดกรวยเอียงเพราะมีพจน์คูณไขว้ และเป็นกรณีเฉพาะของสมการ (2) เมื่อ B = 1 และ A = C = D = E = 0 ดังนั้นเราสามารถแสดงเหตุผลและตอบคำถามได้ว่าทำไมกราฟของสมการ  $xy = k$  เมื่อ k ไม่เท่ากับศูนย์ ดังกล่าวจึงเป็นไฮเพอร์โบลา หลังจากได้ศึกษาเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองแล้ว และนอกจากนั้นยังได้ศึกษาเรื่องไฮเพอร์โบลามุมฉากว่ามีที่มาอย่างไร เหตุใดจึงเรียกว่าไฮเพอร์โบลามุมฉาก โดยใช้การหมุนแกนช่วยหาคำตอบ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง กราฟของสมการ  $xy = k$  เมื่อ k ไม่เท่ากับศูนย์ ได้ดียิ่งขึ้น แทนการเรียนแบบการท่องจำดังเช่นในปัจจุบัน

จากเหตุผลและความสำคัญดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เหตุผลที่เลือกนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพราะว่าผู้เรียนที่จะเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองได้ควรมีพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 เรื่องภาคตัดกรวย และฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนั้นผู้วิจัยมีความเห็นว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นนักเรียนที่มีความเหมาะสมในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ และผู้วิจัยมีความเห็นว่าจะเป็นประโยชน์มากถ้าได้นำเนื้อหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง มาบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

### จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

### ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหา เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง มาสอนเพิ่มเติมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ผลการวิจัยครั้งนี้อาจเป็นแนวทางในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

### ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากร ได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร
2. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียนทั้งหมด 30 คน
3. เนื้อหาของเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ประกอบด้วย
  - 3.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม (2 คาบ)
  - 3.2 การแปลงแบบหมุนแกนพิกัด (6 คาบ)
  - 3.3 ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (1 คาบ)
  - 3.4 การแปลงพิกัดซ้อน (1 คาบ)
4. ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองสอนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ในภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2545 จำนวน 5 วัน วันละ 2 คาบ (คาบละ 50 นาที) รวม 10 คาบ และระยะเวลาที่ใช้ในการทดสอบเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองใช้เวลาทั้งหมด 2 ชั่วโมง
5. ตัวแปรที่ศึกษา
  - 5.1 ตัวแปรต้น ได้แก่ บทเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น
  - 5.2 ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

### นิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการวิจัย

1. นักเรียน หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของนักเรียนมัธยมศึกษาสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบทดสอบในเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
3. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ . 2534 : 28)

### สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด

## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งแบ่งได้ดังนี้

ตอนที่ 1 ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM : Principles and Standards for School Mathematics ในปีค.ศ. 2000

ตอนที่ 2 มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ของนักเรียนในสหรัฐอเมริกาปี ค.ศ.2000(พ.ศ. 2543) และสาระการเรียนรู้ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 - ม.6) ของนักเรียนในประเทศไทย (หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544)

ตอนที่ 3 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) ของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในเรื่องการนำเนื้อหาระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า

4.1 งานวิจัยภายในประเทศ

4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

ตอนที่ 1 ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM : Principles and Standards for School Mathematics ในปีค.ศ. 2000

สมาคมครูคณิตศาสตร์สหรัฐอเมริกาซึ่งรู้จักกันในนาม **The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM )** ได้จัดทำและพิมพ์เผยแพร่เอกสารมาตรฐานหลักสูตรและการวัดผล ที่ชื่อว่า **The Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics** ในปี ค.ศ.1989 (พ.ศ. 2532) โดยมีเหตุผล 3 ประการ กล่าวคือ

1. เพื่อเป็นการประกันคุณภาพของการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Ensure Quality)
2. เพื่อกำหนดเป้าหมายของการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Indicate Goals)
3. เพื่อส่งเสริมโอกาสในการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Promote Chance)

อีก 2 ปีต่อมา คือ ปี ค.ศ.1991 (พ.ศ. 2534) NCTM ได้จัดทำและพิมพ์เผยแพร่เอกสารมาตรฐานการสอนคณิตศาสตร์ ที่ชื่อว่า **The Professional Standards for Teaching Mathematics** และต่อมาอีก 4 ปี คือ ปี ค.ศ.1995 (พ.ศ. 2538) NCTM ก็ได้จัดทำและพิมพ์เผยแพร่เอกสารมาตรฐานการวัดและการประเมินผลคณิตศาสตร์ที่ชื่อว่า **The Assessment Standards for School Mathematics** การจัดทำเอกสารมาตรฐานทั้ง 3 เล่มนั้น เพื่อเป็นการวาง

กรอบหลักสูตรที่มีศักยภาพ และกำหนดทิศทางการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับชั้น K – 12 ให้ได้มาตรฐานเดียวกันทั่วประเทศ ทั้งในแง่ของเนื้อหาสาระของหลักสูตร การเรียนการสอน และการวัดและประเมินผลทางคณิตศาสตร์ (ก่อนหน้านี้ประเทศสหรัฐอเมริกาไม่มีหลักสูตรคณิตศาสตร์แห่งชาติแต่มีการจัดการศึกษาของรัฐแต่ละรัฐเป็นอิสระ)

เหตุผลสำคัญอีกประการหนึ่งที่ NCTM ได้ทำหน้าที่เป็นผู้นำของชาติในการปฏิรูปการศึกษาคณิตศาสตร์ ในปี ค.ศ. 1989 นั้นก็เนื่องมาจากผู้นำของประเทศคือประธานาธิบดีแห่งสหรัฐอเมริกาได้ประกาศอย่างชัดเจนว่า **“ภายในปี ค.ศ 2000 ประเทศสหรัฐอเมริกาจะต้องเป็นผู้นำทางด้านคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี”** เพื่อเป็นการสนองตอบต่อนโยบายของประเทศในการที่จะเป็นผู้นำของโลกด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ NCTM ซึ่งถือว่าเป็นสมาคมที่ใหญ่ที่สุดในโลก จึงรับหน้าที่เป็นผู้ดำเนินการจัดทำมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ของประเทศ

การจัดการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์สำหรับประเทศสหรัฐอเมริกานั้น มุ่งหวังให้เยาวชนเป็นผู้ที่มีศักยภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Power) ดังที่ NCTM ได้ระบุไว้ในเอกสารมาตรฐานหลักสูตรและการวัดผลว่าเยาวชนอเมริกันทุกคนจะต้องมีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ในการ

- สำรวจ (to explore)
- คาดการณ์ (to conjecture)
- ให้เหตุผลอย่างมีตรรก สมเหตุสมผล (to reason logically)
- นำความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ยากได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพ (to use a variety of mathematical methods effectively to solve nonroutine problems)

ทั้งนี้ NCTM ได้กำหนดมาตรฐานต่าง ๆ ในระดับชั้น K – 12 เมื่อปี ค.ศ. 1989 ไว้ดังต่อไปนี้

การแก้ปัญหา (Problem Solving)

การสื่อสาร (Communicating)

การให้เหตุผล (Reasoning)

การเชื่อมโยง (Connections)

การใช้เอกสารมาตรฐานหลักสูตรและการวัดผลของ NCTM (NCTM : Curriculum and Evaluation Standards) ผ่านมาแล้วประมาณ 1 ทศวรรษ คือตั้งแต่ปี ค.ศ. 1989 ถึง 1999 ตลอดระยะเวลาของการใช้เอกสารดังกล่าว NCTM ได้รับทราบปัญหาพร้อมทั้งข้อเสนอแนะและที่สำคัญอย่างยิ่งก็เนื่องมาจากการพัฒนาก้าวหน้าไปอย่างรวดเร็วและอย่างมากทางด้านเทคโนโลยี โดยเฉพาะอย่างยิ่งเทคโนโลยีสารสนเทศ (Information Technology : IT) เนื่องจากความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยีสารสนเทศ ในช่วงระยะเวลา 10 ปี (ค.ศ.1989 – 1999) ได้

พัฒนา ไปอย่างรวดเร็ว จึงทำให้ NCTM ต้องปรับทิศทางการศึกษา เนื้อหาหลักสูตรคณิตศาสตร์จะมีความเข้มข้นมากขึ้นในระดับมัธยมศึกษา (ปานทอง กุลนาถศิริ.2543)

จะเห็นได้ว่า สหรัฐอเมริกาได้ปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา เนื่องจากโลกวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา และสำหรับประเทศไทยเองได้มีการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีตลอดเวลาเช่นกัน ซึ่งจะเห็นได้จากการกระทรวงศึกษาธิการได้มีการปรับปรุงหลักสูตรทุกระดับชั้น โดยมีชื่อว่า หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งทางสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้รับมอบหมายให้ดำเนินการจัดทำกรอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์และกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และจะประกาศใช้หลักสูตรนี้พร้อมกันทั่วประเทศในปี พุทธศักราช 2546

**ตอนที่ 2 มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9–12 ของนักเรียนในสหรัฐอเมริกาปี ค.ศ. 2000 ( พ.ศ. 2543 ) และสาระการเรียนรู้ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) ของนักเรียนในประเทศไทย ( หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544)**

ในปี ค.ศ. 2000 ( พ.ศ. 2543 ) สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้กำหนดหลักสูตรมาตรฐานที่เรียกว่า **Standard** ซึ่งระบุเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ระดับเกรด 9 – 12 ของนักเรียนในสหรัฐอเมริกา ว่าควรจะเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ มี 10 มาตรฐานดังนี้

1. เนื้อหาที่เกี่ยวกับจำนวนและโอเปอเรชัน (Number and Operation)
2. แบบรูป ฟังก์ชัน และพีชคณิต (Patterns , Function , and Algebra)
3. เรขาคณิต และความรู้สึกเชิงมิติ / มิติสัมผัส (Geometry and Spatial Sense)
4. การวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูล สถิติ และความน่าจะเป็น (Data Analysis , Statistic , and Probability)
6. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
7. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
8. การสื่อสาร / การสื่อความหมาย (Communication)
9. การเชื่อมโยง (Connnection)
10. การแสดง / การนำเสนอ (Presentation)

มาตรฐานที่ 3 เรขาคณิต และความรู้สึกเชิงมิติ / มิติสัมผัส (Geometry and Spatial Sense) โปรแกรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรจัดให้นักเรียนได้เรียนเรขาคณิต และความรู้สึกเชิงมิติ / มิติสัมผัส (spatial sense) เพื่อให้นักเรียนทุกคนสามารถ

วิเคราะห์คุณลักษณะเฉพาะและสมบัติ (Characteristics and properties) ของสิ่งของ 2 - 3 มิติที่มีรูปร่างและรูปทรงเรขาคณิต

เลือกและใช้เรขาคณิตระบบต่าง ๆ รวมทั้งสามารถใช้เรขาคณิตเชิงพิกัด (Coordinate geometry)

เห็นประโยชน์และสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเรื่อง การแปลง (Transformations) และความสมมาตร (symmetry) ไปใช้ในการวิเคราะห์สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้

ใช้วิสัยทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical visualization) และการให้เหตุผลเชิงมิติ (Spatial reasoning) มาช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทั้งที่เป็นและไม่ใช่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ (Principles and Standards for School Mathematics .2000 : 10 - 360)

สำหรับประเทศไทยในปีพ.ศ. 2544 สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้กำหนดสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สาระที่เป็นองค์ความรู้ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 - ม.6)

| สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน    | สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก                                                         |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) จำนวน<br>จำนวนจริง<br>เลขยกกำลัง | 1) จำนวน<br>ระบบจำนวนจริง<br>ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น<br>จำนวนเชิงซ้อน<br>คณิตศาสตร์การเงิน |

| สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน                                               | สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2) พีชคณิต<br>ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน<br>ลำดับและอนุกรม<br>เซต<br>การให้เหตุผล | 2) พีชคณิต<br>ตรรกศาสตร์เบื้องต้น<br>ฟังก์ชัน<br>เมทริกซ์<br>กำหนดการเชิงเส้น                                                                                        |
| 3) เรขาคณิต                                                                    | 3) เรขาคณิต<br>เรขาคณิตวิเคราะห์<br>เวกเตอร์ในสามมิติ<br>เรขาคณิตเพื่อศิลปะและการ<br>ออกแบบ                                                                          |
| 4) การวัด<br>อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้                                  | 4) การวัด<br>แผนที่และการสำรวจ                                                                                                                                       |
| 5) สถิติและความน่าจะเป็น<br>สถิติเบื้องต้น<br>ความน่าจะเป็น                    | 5) สถิติและความน่าจะเป็น<br>การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น<br>การแจกแจงปกติ<br>ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง<br>ข้อมูล<br>การวางแผนการทดลองเบื้องต้น<br>ความน่าจะเป็น |
|                                                                                | 6) แคลคูลัส<br>ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์<br>แคลคูลัสเบื้องต้น                                                                                                       |
|                                                                                | 7) วิยุกตคณิต<br>กราฟเบื้องต้น                                                                                                                                       |

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี . 2544 : 153 -154)

จากสาระการเรียนรู้ด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่า สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ให้ความสำคัญกับวิชาเรขาคณิตซึ่งจัดไว้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และเรขาคณิตวิเคราะห์ก็เป็นส่วนหนึ่งของวิชาเรขาคณิตจึงมีความจำเป็นสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และจากความสำคัญของการแปลงแบบหมุนแกนพิกัด ซึ่ง

เป็นเนื้อหาที่อยู่ในเรขาคณิตวิเคราะห์ ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำเนื้อหาการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองมาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย

**ตอนที่ 3 โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) และตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6)ของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**

กระทรวงศึกษาธิการได้มีการเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตรทุกระดับชั้น เพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการของสังคม ซึ่งในปี พ.ศ. 2520 ได้มีการประกาศใช้หลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยมีชื่อว่าหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ซึ่งประกาศใช้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2521 เพื่อให้การศึกษาเป็นระบบที่ต่อเนื่องกันโดยตลอด สำหรับบุคคลที่เรียนในระดับสูงขึ้นไป กระทรวงศึกษาธิการจึงได้เปลี่ยนแปลงหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายเสียใหม่เพื่อให้สอดคล้องกับหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 ซึ่งมีชื่อว่า หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 และได้ประกาศใช้ตั้งแต่ปีการศึกษา 2524 เป็นต้นมา หลังจากใช้หลักสูตรมาระยะหนึ่งจนถึงปี พ.ศ. 2533 ได้มีการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรทั้งสองฉบับอีกครั้งหนึ่ง โดยเฉพาะหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) ในปีการศึกษา 2534 โดยวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จัดอยู่ในประเภทวิชาเลือกเสรี โดยแบ่งเป็น 2 โครงสร้างดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 215 -217)

**โครงสร้างที่ 1 วิชาเลือกเสรี**

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ (สายวิทยาศาสตร์ – คณิตศาสตร์) หรือ (สายอังกฤษ – คณิตศาสตร์) ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

|                  |                       |                      |
|------------------|-----------------------|----------------------|
| ค 011 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 012 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 013 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 014 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 015 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 016 คณิตศาสตร์ | 5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 2.5 หน่วยการเรียนรู้ |

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011 – ค 016 ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

|                  |                       |                      |
|------------------|-----------------------|----------------------|
| ค 021 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 022 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 023 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 024 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 025 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 026 คณิตศาสตร์ | 1 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 0.5 หน่วยการเรียนรู้ |

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะด้านเพิ่มเติมจากรายวิชา ค 011 – ค 016 อาจเลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

|                  |                       |                      |
|------------------|-----------------------|----------------------|
| ค 031 คณิตศาสตร์ | 2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.0 หน่วยการเรียนรู้ |
|------------------|-----------------------|----------------------|

รายวิชา ค 011 – ค 016 รายวิชาละ 2.5 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนเน้นหนักทางด้านคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับสูงหรือมุ่งศึกษาต่อในแขนงที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ สถาปัตยกรรมศาสตร์ หรือ วิทยาศาสตร์ เป็นต้น ผู้เรียนในกลุ่มนี้หากต้องการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมอาจเลือกเรียนรายวิชา ค 021 – ค 026 รายวิชาละ 0.5 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเป็นชุดที่เน้นการศึกษาด้วยตนเอง และเรื่องที่เลือกให้เรียนเป็นการตกลงระหว่างผู้สอนและผู้เรียนเป็นรายบุคคล โดยความเห็นชอบของโรงเรียน และใช้รหัสวิชา ค 021 เป็นรายวิชาแรกที่เริ่มเรียนของแต่ละคน นอกจากนี้หากผู้เรียนต้องการเลือกเรียนรายวิชาที่เป็นเนื้อหาเฉพาะด้านเพิ่มเติมอีกอาจจะเลือกเรียนรายวิชา ค 031 รายวิชาละ 1 หน่วยการเรียนรู้ ซึ่งเน้นการศึกษาและฝึกทักษะการพิสูจน์ ทฤษฎีและข้อสรุปทางวิชาเรขาคณิต

## โครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี

สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐาน ให้เลือกเรียนรายวิชาต่อไปนี้

|                  |                       |                      |
|------------------|-----------------------|----------------------|
| ค 041 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 042 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 043 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 044 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 045 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |
| ค 046 คณิตศาสตร์ | 3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค | 1.5 หน่วยการเรียนรู้ |

## หมายเหตุ

สำหรับผู้เลือกเรียนวิชาชีพและประสงค์จะเลือกเรียนคณิตศาสตร์ อาจเลือกเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์จากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ

รายวิชา ค 041 – ค 046 รายวิชาละ 1.5 หน่วยการเรียนรู้ เป็นชุดที่จัดไว้สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์พอเป็นพื้นฐานเหมาะสำหรับผู้ที่ต้องการมุ่งศึกษาต่อในแขนงวิชาที่ต้องการใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ไม่มากนัก เช่น รัฐศาสตร์ นิติศาสตร์ อักษรศาสตร์ เป็นต้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 131 -138)

ในพุทธศักราช 2544 กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจัดทำกรอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานของกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ทางสถาบันจึงได้จัดทำเอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขึ้นภายในเอกสารได้จัดทำตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน และตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) ดังนี้

**ตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายภาค  
รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6)**

| ภาคเรียน<br>ที่ | สาระการเรียนรู้                           | จำนวนชั่วโมง |
|-----------------|-------------------------------------------|--------------|
| 1               | เซต                                       | 10           |
|                 | การให้เหตุผล                              | 8            |
|                 | จำนวนจริง                                 | 14           |
|                 | เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ | 8            |
| 2               | ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน                   | 28           |
|                 | อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้          | 12           |
| 3               | ลำดับและอนุกรม                            | 18           |
|                 | ความน่าจะเป็น                             | 22           |
| 4               | สถิติเบื้องต้น                            | 40           |

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี . 2544 : 155)

หมายเหตุ เวลาเรียนที่กำหนดไว้ 40 ชั่วโมงต่อภาคเป็นเวลาโดยประมาณ สถานศึกษาอาจปรับเวลาได้ตามความเหมาะสม

สำหรับการจัดวิชาเลือกคณิตศาสตร์ในช่วงชั้นที่ 4 ได้เสนอแนวคิดไว้เป็น 3 แบบสำหรับผู้เรียนที่มีจุดประสงค์ในการศึกษาต่างกัน ดังนี้

แบบที่ 1 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานเพื่อศึกษาต่อในด้านวิทยาศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

แบบที่ 2 สำหรับผู้ที่ต้องการเรียนคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานเพื่อศึกษาต่อในด้านสังคมศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

แบบที่ 3 สำหรับผู้ที่ไม่ต้องการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา แต่สนใจและต้องการความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปประยุกต์ในชีวิตประจำวัน

สถานศึกษาอาจจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกตามตัวอย่างที่ได้นำเสนอไว้นี้ให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนให้เหมาะสมกับความต้องการและความสามารถ และสถานศึกษาสามารถปรับเปลี่ยนลำดับการจัดเนื้อหาหรือเวลาเรียนจากตัวอย่างที่นำเสนอไว้โดยพิจารณาตามความเหมาะสม

สำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษาสามารถจัดสาระให้เรียนรู้เพิ่มเติมจากตัวอย่างสาระที่นำเสนอไว้ เช่น ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์ เรขาคณิตยูคลิด เป็นต้น

#### ตัวอย่างการจัดสาระการเรียนรู้รายภาค รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ช่วงชั้นที่ 4 ( ม.4 – ม.6 )

| ภาคเรียน<br>ที่ | ตัวอย่างแบบที่ 1<br>( 80 ชั่วโมง/ภาค )                                           | ตัวอย่างแบบที่ 2<br>( 60 ชั่วโมง/ภาค )            | ตัวอย่างแบบที่ 3<br>( 40 ชั่วโมง/ภาค ) |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1               | ตรรกศาสตร์เบื้องต้น<br>(28)<br>ระบบจำนวนจริง (38)<br>ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น<br>(14) | ตรรกศาสตร์เบื้องต้น<br>(28)<br>ระบบจำนวนจริง (32) | คณิตศาสตร์การเงิน<br>ตอนที่ 1 (40)     |
| 2               | เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (20)<br>เรขาคณิตวิเคราะห์ (42)<br>ฟังก์ชัน (18)        | เรขาคณิตวิเคราะห์ (40)<br>ฟังก์ชัน (20)           | คณิตศาสตร์การเงิน<br>ตอนที่ 2 (40)     |

| ภาคเรียน<br>ที่ | ตัวอย่างแบบที่ 1<br>( 80 ชั่วโมง/ภาค )                                                                               | ตัวอย่างแบบที่2<br>( 60 ชั่วโมง/ภาค )                                                                          | ตัวอย่างแบบที่3<br>( 40 ชั่วโมง/ภาค )                         |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 3               | ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม (20)<br>ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ (40)<br>เวกเตอร์ในสามมิติ (20) | ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม (20)<br>ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (20)<br>เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ (20) | กำหนดการเชิงเส้น (16)<br>ข่ายงาน (24)                         |
| 4               | จำนวนเชิงซ้อน (22)<br>กราฟเบื้องต้น (18)<br>ความน่าจะเป็น (40)                                                       | กำหนดการเชิงเส้น (10)<br>ความน่าจะเป็น (50)                                                                    | เรขาคณิตเพื่อศิลปะและการออกแบบ (20)<br>แผนที่และการสำรวจ (20) |
| 5               | การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น(40)<br>การแจกแจงปกติ (20)<br>ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ระหว่างข้อมูล (20)                 | การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น(40)<br>การแจกแจงปกติ (20)                                                          | การวางแผนการทดลองเบื้องต้น (40)                               |
| 6               | ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์(20)<br>แคลคูลัสเบื้องต้น (50)<br>กำหนดการเชิงเส้น (10)                                    | แคลคูลัสเบื้องต้น (60)                                                                                         |                                                               |

(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี . 2544 : 161)

**หมายเหตุ** ตัวเลขในวงเล็บ หมายถึง จำนวนชั่วโมง

จากความสำคัญของการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 ประกอบกับหลักสูตรคณิตศาสตร์โครงสร้างที่ 1 ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา

ตอนปลายสำหรับผู้ที่เน้นหนักทางคณิตศาสตร์ ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533 ) และการเปิดโอกาสให้สถานศึกษาจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือกตามความต้องการและ ความสามารถของนักเรียนและสถานศึกษา ตลอดจนความต้องการของท้องถิ่น ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำเสนอหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองมาทดลองสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และผลการวิจัยอาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงหลักสูตร ซึ่งอาจบรรจุเพิ่มเติมลงในรายวิชา ค 012 หรือ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก

#### ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ ในเรื่องการนำเนื้อหาระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า

จากความพยายามของนักคณิตศาสตร์ศึกษา ได้พยายามที่จะปรับปรุงหลักสูตรการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นจึงมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์มากมาย ซึ่งงานวิจัยที่ผู้วิจัยรวบรวมมานี้เกี่ยวกับการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่าดังต่อไปนี้

##### 4.1 งานวิจัยภายในประเทศ

บุญมา สมสวัสดิ์ (2517 : 38) ได้ทำการศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง เซตเบื้องต้น กับนักเรียนระดับชั้นอนุบาล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นอนุบาลของโรงเรียนประถมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นอนุบาลสามารถเรียนเรื่อง เซตเบื้องต้นตามบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ และนอกจากนี้ ดี บางกระ (2538 : 9) ยังได้กล่าวไว้ว่าการศึกษางานวิจัยเรื่องนี้พบว่า เซตเป็นคณิตศาสตร์ที่เรียนในระดับอุดมศึกษา ยังมีได้นำมาสอนในระดับประถมศึกษาหรือระดับมัธยมศึกษา การนำเสนองานวิจัยเรื่องนี้จึงถือว่าการริเริ่มแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์ เพราะเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์หลายสาขาและต่อมาภายหลังได้มีการนำมาบรรจุไว้ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับมัธยมศึกษาตอนปลายนอกจากนี้หนังสือคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษายังสอดแทรกแนวความคิดเกี่ยวกับเซตด้วย

สุเทพ ทองอยู่ ( 2517 : 38) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจากโรงเรียนเขมาภิรตาราม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ชั้นละ 50 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ซึ่งเรื่องความน่าจะเป็นเดิมไม่มีสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาเพราะเนื้อหาอยู่ในระดับอุดมศึกษา แต่ต่อมาภายหลังได้มีการเปลี่ยนแปลงปรับปรุงหลักสูตรโดยนำเรื่อง ความน่าจะเป็นบรรจุเป็นเนื้อหาทั้งในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ด้วย

เสกสรร ดำกระบี่ (2517 : 25) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ลิ้มิต ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญแผนกวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 72 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 48 คน ซึ่งเป็นนักเรียนของโรงเรียนคณะราษฎรบำรุงจังหวัดยะลา ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องลิ้มิต งานวิจัยนี้เป็นเรื่องที่น่าสนใจดังคำกล่าวของ ดี บางกระ (2538 : 10-11) ที่ว่าการพัฒนาหลักสูตรในโอกาสต่อมาได้นำเอาเนื้อหาเรื่อง ลิ้มิต ซึ่งเป็นเรื่องที่อยู่ในระดับอุดมศึกษามารรจไว้หลักสูตรระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภายหลังได้ปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในปีพุทธศักราช 2533 เนื้อหาเรื่อง ลิ้มิต ได้ถูกนำไปบรรจุไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จึงนับว่าผู้วิจัยมองเห็นถึงความเป็นไปได้ที่จะนำเรื่องลิ้มิตมาสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ณรงค์ บัณเฑาะ (2519 : 20) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อสมการและค่าสัมบูรณ์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนบางกรวย อำเภอบางกรวย จังหวัดนนทบุรี ชั้นละ 50 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์งานวิจัยนี้มีประโยชน์อย่างยิ่งเพราะผลการวิจัยสอดคล้องกับหลักสูตรที่ปรับปรุงในเวลาต่อมาคือได้นำเอาเนื้อหาเรื่องค่าสัมบูรณ์มารรจไว้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเนื้อหาเรื่องอสมการมารรจไว้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล (2519 : 27) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้นของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอุดรพิทย อำเภอมือง จังหวัดอุดรธานี ชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ปรากฏว่าภายหลังมีการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรและได้บรรจุเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์ไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

นพดล สุราพาณิชย์ (2524 : 25) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ชั้นละ 30 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 สามารถเรียนเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนได้

ดี บางกระ (2538 : 18 - 19) ได้ทำการศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันก่อกำเนิด

สิริสินธุ์ นุชนารถ ( 2538 : 52) ได้ทำการศึกษาการเรียนรู้เรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นใน ทฤษฎีจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนคลองคาราม อำเภอเมือง จังหวัด เพชรบุรี จำนวน 40 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถ เพียงพอในการเรียนรู้เรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวน

ปรีชา จันทกล้า (2539 : 21) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่อง เศษส่วน ต่อเนื่องเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนหัตถสารเกษตรวิทยาการ อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี จำนวน 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่อง เศษส่วนต่อเนื่อง

อำพล โต้ตอบ (2539 : 29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่อง การหาคำตอบ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนวัดจันทราวาสสุขประศาสนราษฎร์ จังหวัดเพชรบุรี ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม (2542 : 26) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 45 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งงานวิจัยมีประโยชน์อย่างยิ่ง เพราะการปรับปรุงหลักสูตร คณิตศาสตร์ในปี พ.ศ. 2544 ได้นำเอาเนื้อหาเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มาบรรจุไว้เป็น คณิตศาสตร์เลือกสำหรับการจัดสาระการเรียนรู้รายภาคคณิตศาสตร์แบบช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม. 6)

รจนา รัตนาคคม ( 2544 : 29) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มีความสามารถในการเรียนรู้เรื่อง ความน่าจะเป็น และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนรู้เรื่อง ความน่าจะเป็น สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

พงศ์ศรีมี เฟื่องฟู (2545 : 28) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้และ ประยุกต์เรื่องการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จิรศักดิ์ ดีสะมะอะ ( 2545 : 27) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้เรื่อง เวกเตอร์ ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการเรียน สายวิทยาศาสตร์ โรงเรียนพระโขนงพิทยาลัย จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 38 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

#### 4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

กัปรัด (Gubrud. 1971 : 6468 - A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8 – 10 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนเกรด 9 และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถเพียงพอในการศึกษาเรื่อง การบวกเวกเตอร์ และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถชัดเจนและสูงกว่านักเรียนเกรด 8 และเกรด 9

ไวท์ (White. 1974 : 1969 - A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 ในการเรียนเรื่องมโนคติเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องมโนคติเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

ไว닝 (Vining. 1989 : 380 – A อ้างมาจาก ดี บางกระ. 2538 : 11) ได้ทำการศึกษาหัวข้อเรื่องและแนวความคิดของคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในระดับมัธยมศึกษาซึ่งกำหนดโดยสมาคม NCTM ไว닝ได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่สอนคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหัวข้อที่สัมพันธ์กับคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหลักสูตรของระดับชั้นมัธยมศึกษา ปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นพ้องต้องกันว่าคณิตศาสตร์เต็มหน่วยที่มีในระดับสูง ซึ่งแยกมาสอนในระดับมัธยมศึกษามีความเหมาะสม

ดรัมมอนด์ (Drummond. 1989 : 641 – A) ทำการวิจัยออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นการนำไปใช้แก้ปัญหา และเพื่อกำหนดความเหมาะสมของการใช้หลักสูตร ซึ่งเสนอโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ในปี ค.ศ.1987 ในหัวข้อของวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยประกอบด้วยเรื่อง เมตริกซ์ การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เซต การนับ ความน่าจะเป็น กราฟ และความสัมพันธ์เวียนบังเกิด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ผ่านการเรียนรายวิชาเรขาคณิต พีชคณิต 1 และพีชคณิต 2 จำนวน 203 คน ผลการศึกษปรากฏว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยจากหลักสูตรซึ่งเสนอโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่า ทั้งในประเทศและต่างประเทศมีความตื่นตัวในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องโดยการนำเนื้อหาในระดับสูงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีการสอนให้เหมาะสมกับระดับสติปัญญาและความสามารถของผู้เรียน จากความสำคัญดังกล่าวจึงทำให้ผู้วิจัยสนใจในการนำเนื้อหาเรื่อง การ

แปลงแบบการหมุนแทนพืชของสมการกำลังสอง ซึ่งเป็นเนื้อหาในระดับอุดมศึกษามาทดลองสอน  
ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแทนพืชของ  
สมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ว่ามีความสามารถที่จะเรียนเรื่องดังกล่าวได้  
หรือไม่

### บทที่ 3

#### วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร

#### ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนสายวิทยาศาสตร์ ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร

#### กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียนทั้งหมด 32 คน ซึ่งได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยการจับสลากเลือก 1 ห้องเรียนจากทั้งหมด 2 ห้องเรียน โดยแต่ละห้องทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำแบบละความสามารถ

#### เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

##### 1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนจำนวน 10 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1.1.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม (2 คาบ)

1.1.2 การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง (6 คาบ)

1.1.2.1 การหาพิกัดเนื่องจากการหมุนแกน (2 คาบ)

1.1.2.2 การหมุนแกนของสมการที่มีพจน์คูณไขว้ (2 คาบ)

1.1.2.3 การใช้ค่าจำแนก ( Discriminant ) พิจารณากราฟของสมการกำลังสอง (2 คาบ)

1.1.3 ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (1 คาบ)

1.1.4 การแปลงพิกัดซ้อน (1 คาบ)

## 1.2 แผนการสอน 10 คาบ

1.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ซึ่งเป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือกที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามเนื้อหาที่กำหนดจำนวน 25 ข้อ

## 1.4 แบบทดสอบอัตนัยจำนวน 3 ข้อ

## 2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เพื่อสร้างบทเรียนและแผนการสอนโดยศึกษาจากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1.1 เรขาคณิตวิเคราะห์ (สมัย เหล่าวานิชย์)

2.1.2 แคลคูลัส 1 (กมล เอกไทยเจริญ)

2.1.3 เรขาคณิตวิเคราะห์ (ศุภกิจ เณิมวิสุตม์กุล)

2.1.4 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอน 3 (ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

2.1.5 แคลคูลัส (อำพล ธรรมเจริญ)

2.1.6 Precalculus with Graphing and Problem Solving (Karl Smitt J.)

2.1.7 Precalculus (Sullivan , Michael)

2.1.8 Calculus of a Single Variable (Larson Roland E.)

2.1.9 Precalculus : Problem solving with Teachnology (Cannon Lawrence O.)

2.1.10 Calculus with Analytical Geometry (Youse Bevan K.)

2.2 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง โดยมุ่งให้นักเรียนสามารถ

2.2.1 หาพิกัดจุดเนื่องจากการหมุนแกนพิกัดได้

2.2.2 นำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนไปใช้ในการเขียนกราฟได้

2.2.3 นำความรู้เรื่องการแปลงแบบการหมุนไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

2.2.4 บอกนิยามของไฮเปอร์โบลามุมฉากได้

2.2.5 พิจารณากราฟของสมการกำลังสองโดยใช้ค่าจำแนกได้

2.2.6 นำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนและเลื่อนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหการแปลงพิกัดซ้อนได้

2.3 สร้างบทเรียนและแผนการสอน ตามลำดับขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียน เนื้อหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เพื่อใช้สอนจำนวน 10 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งในบทเรียนประกอบด้วย จุดประสงค์

เชิงพฤติกรรม เนื้อหา แบบฝึกหัด และจัดทำแผนการสอน สื่อการสอน การวัดผลและการประเมินผล

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน ตรวจสอบแก้ไขเพื่อวิจารณ์ และ ชี้ข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและแผนการสอนที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 10 คน โดยใช้เวลาสอนรวม 10 คาบ คาบละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้ว ผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องในด้านความเหมาะสมของเนื้อหา ความยากง่ายของภาษา และเวลาที่ใช้ในการสอนแต่ละเนื้อหาของบทเรียน และกิจกรรมในแผนการสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท ตรวจสอบแก้ไขอีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง การแปลงแบบแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก 35 ข้อ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจคัดเลือก เพื่อให้ได้ข้อทดสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว จำนวน 10 คน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

2.5 วิเคราะห์แบบทดสอบปรนัยโดยการหาค่าความยากง่าย ( $p$ ) และอำนาจจำแนก ( $r$ )

2.6 คัดเลือกข้อสอบปรนัยที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 25 ข้อ จากทั้งหมด 35 ข้อ และแบบทดสอบที่ได้มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.8646 ซึ่งคำนวณโดยใช้สูตรของ คูเดอร์ - ริชาร์ดสัน แล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.7 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองในส่วนที่เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจแก้ไข แล้วนำไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว จำนวน 10 คน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที จากนั้นคัดเลือกข้อสอบ 3 ข้อจาก 6 ข้อ ที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหาแล้วให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาตรวจแก้ไขอีกครั้ง เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา แล้วจึงนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

### วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 32 คน โดยใช้บทเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 10 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนครบ 10 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง
3. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบสำหรับแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก ข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน และข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ให้ 0 คะแนน ส่วนแบบทดสอบอัตนัย 3 ข้อ ผู้วิจัยตรวจวิเคราะห์เป็นรายข้อ ข้อละ 5 คะแนน หามุมที่ใช้ในการหมุนได้ถูกต้อง 1 คะแนน จัดรูปสมการใหม่โดยการจัดพจน์คูณไขว้ได้ถูกต้อง 3 คะแนน และวาดรูปได้ถูกต้อง 1 คะแนน แล้วนำคะแนนรวมที่ได้จากแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยมาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

### การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน
2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรด้วยสถิติทดสอบ Z (Z -Test)

### สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน สัมประสิทธิ์การแปรผัน
2. ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบใช้การคำนวณจากสูตรของคูเดอร์ – ริชาร์ดสัน (KR - 20)
3. สถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ สถิติทดสอบ Z (Z -Test)

## บทที่ 4

### ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกน พิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียนทั้งหมด 32 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง แบบปรนัยจำนวน 25 ข้อและอัตนัยจำนวน 3 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

ตอนที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

ตอนที่ 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

ตอนที่ 5 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

ตอนที่ 6 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

### ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

**ตอนที่ 1 : ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม จากการทำแบบทดสอบปรนัย วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง**

ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหาได้จากค่าเฉลี่ยของค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์นั้น ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

| จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม                                                                                        | ข้อที่ | จำนวน<br>นักเรียน(คน) | ร้อยละของ<br>นักเรียน | ค่าเฉลี่ยร้อยละ<br>ของจำนวน<br>นักเรียน |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------------|
| <b>จุดประสงค์ที่ 1</b><br>นักเรียนสามารถหาพิกัด<br>เนื่องจากการหมุนแกนพิกัด<br>ได้                            | 1      | 32                    | 100                   | 98.958                                  |
|                                                                                                               | 2      | 32                    | 100                   |                                         |
|                                                                                                               | 3      | 31                    | 96.875                |                                         |
| <b>จุดประสงค์ที่ 2</b><br>เมื่อกำหนดสมการและมุม<br>ให้นักเรียนสามารถแปลง<br>พิกัดของสมการกำลังสองได้          | 4      | 31                    | 96.875                | 84.375                                  |
|                                                                                                               | 5      | 30                    | 93.75                 |                                         |
|                                                                                                               | 6      | 20                    | 62.5                  |                                         |
| <b>จุดประสงค์ที่ 3</b><br>นักเรียนสามารถหามุมที่ใช้<br>ในการแปลงพิกัดของสมการ<br>กำลังสองได้                  | 7      | 31                    | 96.875                | 89.583                                  |
|                                                                                                               | 8      | 30                    | 93.75                 |                                         |
|                                                                                                               | 9      | 25                    | 78.125                |                                         |
| <b>จุดประสงค์ที่ 4</b><br>นักเรียนสามารถนำความรู้<br>เกี่ยวกับการแปลงแบบหมุนแกน<br>พิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ | 10     | 30                    | 93.75                 | 87.5                                    |
|                                                                                                               | 11     | 25                    | 78.125                |                                         |
|                                                                                                               | 12     | 30                    | 93.75                 |                                         |
|                                                                                                               | 13     | 27                    | 84.375                |                                         |

ตาราง 1 (ต่อ)

| จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม                                                                                                                       | ข้อที่         | จำนวน<br>นักเรียน(คน) | ร้อยละของ<br>นักเรียน      | ค่าเฉลี่ยร้อยละ<br>ของจำนวน<br>นักเรียน |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------------------------|
| <b>จุดประสงค์ที่ 5</b><br>นักเรียนสามารถนำความรู้<br>เกี่ยวกับการแปลงแบบหมุนแกน<br>พิกัดไปใช้ในการเขียนกราฟ<br>ได้                           | 14<br>15       | 10<br>10              | 31.25<br>31.25             | 31.25                                   |
| <b>จุดประสงค์ที่ 6</b><br>นักเรียนสามารถบอกนิยาม<br>ของไฮเพอร์โบลามุมฉากได้                                                                  | 16<br>17       | 29<br>15              | 90.625<br>46.875           | 68.75                                   |
| <b>จุดประสงค์ที่ 7</b><br>นักเรียนสามารถนำความรู้<br>เรื่องการแปลงแบบหมุนแกน<br>พิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหา<br>เกี่ยวกับไฮเพอร์โบลามุมฉาก<br>ได้ | 18<br>19<br>20 | 23<br>31<br>27        | 71.875<br>96.875<br>84.375 | 84.375                                  |
| <b>จุดประสงค์ที่ 8</b><br>นักเรียนสามารถนำความรู้<br>เรื่องการแปลงแบบหมุนแกน<br>พิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหา<br>การแปลงพิกัดซ้อนได้               | 21<br>22       | 13<br>4               | 40.625<br>12.5             | 26.563                                  |
| <b>จุดประสงค์ที่ 9</b><br>นักเรียนสามารถพิจารณา<br>กราฟของสมการกำลังสอง<br>โดยใช้ค่าจำแนกได้                                                 | 23<br>24<br>25 | 30<br>26<br>30        | 93.75<br>81.25<br>93.75    | 89.583                                  |

จากตาราง 1 แสดงค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม พบว่า จุดประสงค์ที่ 1 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 98.958 รองลงมาคือ จุดประสงค์ที่ 3 และ 9 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 89.583 และลดหลั่นไปถึงจุดประสงค์ที่ 8 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุดคิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 26.563 ซึ่งในภาพรวมพบว่ามีจุดประสงค์ที่ 5 และ 8 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ยน้อยกว่าร้อยละ 50 นอกนั้นมีนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ยมากกว่าร้อยละ 50

**ตอนที่ 2 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง**

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

| กลุ่ม<br>ตัวอย่าง                     | จำนวน<br>นักเรียน<br>(คน) | คะแนน<br>เต็ม | ค่าเฉลี่ย<br>เลข<br>คณิต<br>( $\bar{x}$ ) | ค่าเฉลี่ยเลข<br>คณิตคิดเป็น<br>ร้อยละของ<br>คะแนนเต็ม | ส่วน<br>เบี่ยงเบน<br>มาตรฐาน | สัมประสิทธิ์<br>การแปรผัน |
|---------------------------------------|---------------------------|---------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------|---------------------------|
| นักเรียนชั้น<br>มัธยมศึกษา<br>ปีที่ 4 | 32                        | 25            | 19.406                                    | 77.624                                                | 2.589                        | 13.34 %                   |

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 19.406 คิดเป็นร้อยละ 77.624 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 2.589 และมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 13.34 %

**ตอนที่ 3 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง**

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

| กลุ่มตัวอย่าง                 | จำนวนนักเรียน (คน) | คะแนนเต็ม | ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $(\bar{x})$ | ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม | ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน | สัมประสิทธิ์การแปรผัน |
|-------------------------------|--------------------|-----------|------------------------------|-------------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 | 32                 | 15        | 9.438                        | 62.92                                     | 4.004                | 42.42 %               |

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 9.438 คิดเป็นร้อยละ 62.92 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.004 และมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 42.42 %

**ตอนที่ 4 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง**

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

| กลุ่มตัวอย่าง                 | จำนวนนักเรียน (คน) | คะแนนเต็ม | ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $(\bar{x})$ | ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม | ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน | สัมประสิทธิ์การแปรผัน |
|-------------------------------|--------------------|-----------|------------------------------|-------------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 | 32                 | 40        | 28.844                       | 72.11                                     | 4.548                | 15.77 %               |

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 28.844 คิดเป็นร้อยละ 72.11 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.548 และมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 15.77 %

**ตอนที่ 5 : ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง**

ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

| กลุ่มตัวอย่าง                 | จำนวน<br>(คน) | จำนวนนักเรียนที่ได้<br>คะแนนตั้งแต่ร้อยละ<br>50 ขึ้นไปของคะแนน<br>เต็ม (คน) | ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียน<br>ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50<br>ขึ้นไปของคะแนนเต็ม |
|-------------------------------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 | 32            | 30                                                                          | 93.75                                                                          |

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มหรือตั้งแต่ 20 คะแนนขึ้นไป จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน มีจำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 93.75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

**ตอนที่ 6 : ผลการทดสอบสมมติฐานที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปหรือไม่**

ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ผลการทดสอบสมมติฐานที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปหรือไม่

| กลุ่มตัวอย่าง                     | จำนวน<br>คน | จำนวนนักเรียนที่ได้<br>คะแนนตั้งแต่ร้อยละ<br>50 ขึ้นไปของคะแนน<br>เต็ม (คน) | ค่าสถิติทดสอบ Z |
|-----------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| นักเรียนชั้น<br>มัธยมศึกษาปีที่ 4 | 32          | 30                                                                          | 4.9491          |

จากตาราง 6 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง มีจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปที่ระดับนัยสำคัญ .01 ( $Z_{0.01} = 2.33$ )

## บทที่ 5

### สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปจุดมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

#### จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

#### สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด

#### วิธีดำเนินการวิจัย

##### กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนมัธยมศึกษา สานิตสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวน 32 คน

##### เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เพื่อใช้สอน 10 คาบ
2. แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนพิกัดของสมการกำลังสองจำนวน 25 ข้อ
3. แบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนพิกัดของสมการกำลังสองจำนวน 3 ข้อ

##### วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้บทเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 10 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอน 10 คาบ แล้วให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ และแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

### การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัด ของสมการกำลังสอง ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น หลังการทดลองแล้วผู้วิจัย ได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนน จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนน จากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของคะแนน จากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
5. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
6. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

### สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผลปรากฏดังนี้

1. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม พบว่าจุดประสงค์ที่ 1 (นักเรียนสามารถหาพิกัดใหม่เนื่องจากการหมุนแกนพิกัดได้) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุดร้อยละ 98.958 รองลงมาคือจุดประสงค์ที่ 3 (นักเรียนสามารถหามุมที่ใช้ในการพิกัดของสมการกำลังสองได้) และจุดประสงค์ที่ 9 (นักเรียนสามารถพิจารณากราฟของสมการกำลังสองโดยใช้ค่าจำแนกได้) มีนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมร้อยละ 89.583 และลดหลั่นตามลำดับจนถึงจุดประสงค์ที่ 8 (นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าการแปลงพิกัดซ้อนได้) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุดคิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 26.563 จาก

จุดประสงค์ทั้งหมด 9 จุดประสงค์ มีจุดประสงค์ที่ 5 และ 8 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมเป็นค่าเฉลี่ยน้อยกว่าร้อยละ 50 นอกนั้นมีนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมคิดเป็นค่าเฉลี่ยมากกว่าร้อยละ 50

2. จากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มคิดเป็นร้อยละ 93.75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และเมื่อทดสอบสมมติฐานปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ที่ระดับนัยสำคัญ .01

### อภิปรายผล

1. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน ที่ผ่านจุดประสงค์ที่ 5 (นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการเขียนกราฟได้) และจุดประสงค์ที่ 8 (นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหการแปลงพิกัดข้อได้) ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการทำแบบทดสอบสองข้อนี้ค่อนข้างใช้เวลาและมีวิธีทำยาวอาจทำให้ผิดพลาดได้ง่าย และข้อสอบตามจุดประสงค์ที่ 8 เมื่อวิเคราะห์ความยากง่ายของแบบทดสอบปรนัย พบว่าข้อสอบค่อนข้างยาก (ได้จากตาราง 10 ภาคผนวก ก หน้า 46 ข้อที่ 21)

2. สัมประสิทธิ์การแปรผันของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน มีค่าเท่ากับ 42.42 % ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการทำแบบทดสอบนี้ คะแนนที่ได้มีค่าแตกต่างกันค่อนข้างมาก จึงทำให้มีความแปรปรวนค่อนข้างสูง (ได้จากตาราง 8 ภาคผนวก ก หน้า 44 )

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง จากบทเรียนที่สร้างขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

3.1 ผู้วิจัยได้ปรับปรุงเนื้อหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสองที่ใช้สอนในระดับอุดมศึกษา ก่อนนำมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า โดยปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน มีตัวอย่างประกอบอย่างชัดเจน โดยเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อนแล้วจึงเพิ่มเนื้อหาที่ยากขึ้นตามลำดับ

3.2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนภายในชั้นเรียน ผู้วิจัยได้ถ่ายทอดความรู้ให้นักเรียนได้อย่างละเอียด นักเรียนมีความสนใจและตั้งใจเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งเห็นได้จากการซักถามภายในชั้นเรียนและการทำแบบฝึกหัด อีกทั้งเนื้อหาเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เป็นเนื้อหาวิชาที่ใหม่มีลักษณะที่ท้าทายความสามารถของผู้เรียน และยังเป็นประโยชน์ในการเรียนเนื้อหาต่อไป

3.3 ส่วนใหญ่กลุ่มตัวอย่างจะทำคะแนนในส่วนที่เป็นปรนัยได้ดีกว่าอัตนัยทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนได้รับการฝึกฝนให้ทำโจทย์จากแบบฝึกหัดที่เป็นอัตนัยไม่มากพอ จึงมีความชำนาญในการแก้ปัญหาไม่สูงนัก

3.4 ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยในจุดประสงค์ที่ 5 (นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการเขียนกราฟได้) ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนขาดความรู้พื้นฐานเดิมคือ การเขียนกราฟต่าง ๆ ของภาคตัดกรวย จึงทำให้วาดกราฟได้ไม่ถูกต้อง และค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยในจุดประสงค์ที่ 8 (นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหาการแปลงพิกัดข้อนี้ได้) ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเนื่องจากขาดความรู้พื้นฐานเดิมคือ การจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ จึงทำให้การจัดสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ไม่ถูกต้อง

## ข้อเสนอแนะ

### 1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง ดังนั้นผลการวิจัยน่าจะเป็นแนวทางเลือกที่สถานศึกษาจะนำไปใช้ในการเรียนการสอนในระดับช่วงชั้นที่ 2 (ม. 4 - ม. 6) ในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์เลือก

1.2 ควรให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดการจัดสมการใหม่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ และการวาดกราฟต่าง ๆ ของภาคตัดกรวย เพื่อให้เกิดความชำนาญก่อนการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง จะทำให้การเรียนการสอนได้ประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

### 2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรทำวิจัยเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ขึ้น และมีขอบเขตกว้างขึ้น เพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนชัดเจนยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง โดยเพิ่มการหามุมที่เหมาะสมในการกำจัดพจน์คูณไขว้ ซึ่งมีมุมอื่น ๆ นอกจาก มุม  $30^\circ$  ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$

2.3 ควรทำการวิจัยเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง โดยวิธีอื่นที่นอกเหนือจากการใช้ตรีโกณมิติ เช่น การใช้เมตริกซ์มาช่วยในการจัดรูปสมการเพื่อขจัดพจน์คูณไขว้

บรรณานุกรม

### บรรณานุกรม

- กมล เอกไทยเจริญ. (2537). แคลคูลัส 1. กรุงเทพฯ : ไอเอ็ดพับลิชชิง จำกัด .
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2534). หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ครุสภา ลาดพร้าว.
- จิรศักดิ์ ดีสะมะะ. (2545). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จุไร ทวีรัตน์. ( 2528). เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค203 ที่เป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในเขตการศึกษา 12. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.
- ณรงค์ ปันนิม. (2519). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอสมการ และค่าสัมบูรณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ดี บางกระ. ( 2538). การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่อง ฟังก์ชันก่อนกำเนิด. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม. (2542). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- นพดล สุภาพาณิชย์. (2524). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง วิชาเรขาคณิตนอนยูคลิเดียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- บุญมา สมสวัสดิ์. (2517). การศึกษาการทดลองสอนเรื่องเซตเบื้องต้นกับนักเรียนระดับชั้นอนุบาล. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล. ( 2519). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ปานทอง กุลนาถศิริ. ( 2543, สิงหาคม – ตุลาคม ). “ความเคลื่อนไหวเกี่ยวกับ NCTM,” วารสาร สสวท. 503 : 15

- ปรีชา จันทกล้า. (2539). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เศษส่วนต่อเนื่องเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- พงศ์รัตน์ เฟื่องฟู. (2545). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- รจนา รัตนนิคม. (2544). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2521). แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอน 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศุภกิจ เฉลิวิสุตม์กุล. (2524). เรขาคณิตวิเคราะห์. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2536). คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ค 012. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ครุสภา ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ครุสภา ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (2524). เรขาคณิตวิเคราะห์. กรุงเทพฯ : กราฟฟิคอาร์ต.
- สิริสินธุ์ นุชนารถ. (2538). การศึกษาการเรียนเรื่อง การลงรอยกันเบื้องต้นในทฤษฎีจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- เสกสรร ดำกระบี่. (2517). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ลิมิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยการศึกษาประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- เสริมศักดิ์ สุรวัลลภ. (2535). คณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- สุเทพ ทองอยู่. (2517). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็น ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2535). แผนการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2535. กรุงเทพฯ : บริษัท อมรินทร์พริ้นติ้งกรุ๊ป จำกัด.

- อำพล ธรรมเจริญ (2542). แคลคูลัส. กรุงเทพมหานคร: ห้างหุ้นส่วนจำกัด พัทธการพิมพ์.
- อำพล โตตอบ. (2538). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินูญานินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.
- Cannon, Lawrence O.(1996). *Precalculus : Problem solving with Teachnology*. New York : Harper Collins College Publishers.
- Drummond, Pamela Johnson. (1989). *The design implementation and evaluation of a course in discrete mathematic for high school student*. Dissertation Thesis,Ph.D. Photocopied.
- Smitt, Karl J.(1993) *Precalculus with graphing and problem solving*. California : Lable Publishing.
- Gubrud, Allarm Roy. (1971). *The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School*. Dissertation Thesis,Ph.D. Photocopied.
- Larson, Roland E. Hostetler Robert P. (1994). *Calculus of a single variable*. USA : D.C.Heath and Company.
- Sachs, Leroy Ed. (1988). “ *Projects To Enrich School Mathematics*. ” Resources In Education. 23 (10) : 1180-1189.
- Sullivan, Michael. (1988). *Precalculus*. London : Division of Macmilan, Inc.
- The National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA : Inc.
- White, Charles William. (1974). *A study of Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn Basic Concept of probability and the Relationship between Achievement in Probability and Selected Factor*. Dissertation Thesis,Ph.D. Photocopied.
- Youse, Bevan K. (1978). *Calculus with Analytical Geometry*. USA. : Holt Rinehart and Winston.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก  
การวิเคราะห์ข้อมูล

**ตาราง 7** ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ของ  
กลุ่มตัวอย่าง

| คะแนน      | ความถี่   |
|------------|-----------|
| 13         | 1         |
| 15         | 2         |
| 16         | 2         |
| 17         | 4         |
| 19         | 4         |
| 20         | 7         |
| 21         | 5         |
| 22         | 4         |
| 23         | 3         |
| <b>รวม</b> | <b>32</b> |

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 19.406

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คือ 2.589

และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 13.34 %

**ตาราง 8** ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ของ  
กลุ่มตัวอย่าง

| คะแนน      | ความถี่ | คะแนน | ความถี่   |
|------------|---------|-------|-----------|
| 0          | 1       | 8     | 2         |
| 1.5        | 1       | 9     | 3         |
| 2          | 1       | 10    | 3         |
| 3.5        | 1       | 11    | 1         |
| 4.5        | 1       | 11.5  | 2         |
| 5          | 1       | 12    | 2         |
| 6          | 1       | 13    | 5         |
| 7          | 1       | 13.5  | 2         |
| 7.5        | 1       | 14    | 3         |
| <b>รวม</b> |         |       | <b>32</b> |

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 9.4375  
 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คือ 4.0035  
 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 42.42 %

**ตาราง 9** ตารางแสดงความถี่ของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบปรนัยและอัตนัยวัด  
 ผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มตัวอย่าง

| คะแนน | ความถี่ | คะแนน | ความถี่   |
|-------|---------|-------|-----------|
| 17    | 1       | 29    | 3         |
| 19    | 1       | 30    | 6         |
| 20    | 1       | 31    | 3         |
| 21    | 1       | 31.5  | 1         |
| 24.5  | 1       | 32    | 1         |
| 25.5  | 1       | 33    | 3         |
| 26    | 1       | 33.5  | 2         |
| 26.5  | 1       | 34.5  | 1         |
| 27.5  | 1       | 36    | 1         |
| 28    | 2       | -     |           |
| รวม   |         |       | <b>32</b> |

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ 28.8438  
 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คือ 4.548  
 และสัมประสิทธิ์การแปรผัน คือ 15.77 %

**ตาราง 10** ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ  
วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

| ข้อที่ | p   | r   | ข้อที่ | p   | r   |
|--------|-----|-----|--------|-----|-----|
| 1      | 0.6 | 0.4 | 14     | 0.6 | 0.6 |
| 2      | 0.6 | 0.4 | 15     | 0.5 | 0.2 |
| 3      | 0.6 | 0.2 | 16     | 0.5 | 0.2 |
| 4      | 0.8 | 0.2 | 17     | 0.3 | 0.6 |
| 5      | 0.8 | 0.6 | 18     | 0.2 | 0.4 |
| 6      | 0.5 | 0.4 | 19     | 0.6 | 0.4 |
| 7      | 0.8 | 0.4 | 20     | 0.4 | 0.4 |
| 8      | 0.3 | 0.2 | 21     | 0.4 | 0.4 |
| 9      | 0.7 | 0.2 | 22     | 0.5 | 0.2 |
| 10     | 0.5 | 0.2 | 23     | 0.8 | 0.4 |
| 11     | 0.8 | 0.4 | 24     | 0.7 | 0.6 |
| 12     | 0.4 | 0.4 | 25     | 0.6 | 0.4 |
| 13     | 0.5 | 0.6 |        |     |     |

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ ( KR - 20 )

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right) \\
 &= \frac{25}{24} \left( 1 - \frac{5.46}{31.8778} \right) \\
 &= \frac{25}{24} [0.83] \\
 &= 0.8646
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ s แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง  
จำนวน 10 คน ซึ่งเท่ากับ 5.646

p แทน ค่าความยากง่ายของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์

q แทน 1 - p

n แทน จำนวนข้อสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ จำนวน 25 ข้อ

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4  
ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (z – test for Population Proportion)

สมมติฐาน คือ  $H_0 : p = 0.50$

$H_1 : p < 0.50$

ค่าสถิติทดสอบ 
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

เมื่อใช้  $\hat{p}$  แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้  
คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ซึ่ง

$$\hat{p} = \frac{30}{32} = 0.9375$$

$$p_0 = 0.50$$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 32 คน

แทนค่า 
$$z = \frac{0.9375 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.5(1 - 0.5)}{32}}}$$
  
$$= \frac{0.4375}{0.0884}$$

ดังนั้น 
$$z = 4.9491$$

เปิดตาราง z ที่ระดับนัยสำคัญ  $\alpha = .01$  จะได้  $z = -2.33$

เพราะว่า  $4.9491 > -2.33$

เพราะฉะนั้น ยอมรับ  $H_0$  ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องการ  
แปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง เป็นจำนวนตั้งแต่ร้อยละ 50 ของจำนวน  
นักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข

## แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง

### คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์นี้ แบ่งเป็น 2 ตอน ได้แก่  
 ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบปรนัย จำนวน 25 ข้อ คะแนนเต็ม 25 คะแนน  
 ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ คะแนนเต็ม 15 คะแนน
2. ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง
3. แบบทดสอบชุดนี้วัดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมดังนี้  
 จุดประสงค์ที่ 1 นักเรียนสามารถหาพิกัดเนื่องจากการหมุนแกนพิกัดได้ (ข้อ 1 - 3)  
 จุดประสงค์ที่ 2 เมื่อกำหนดสมการและมุมให้ นักเรียนสามารถแปลงพิกัดของ  
 สมการกำลังสองได้ (ข้อ 4 – 6)  
 จุดประสงค์ที่ 3 นักเรียนสามารถหามุมที่ใช้ในการแปลงพิกัดของสมการกำลังสอง  
 ได้ (ข้อ 7 - 9)  
 จุดประสงค์ที่ 4 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้  
 ในการแก้ปัญหาได้ (ข้อ 10 - 13)  
 จุดประสงค์ที่ 5 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้  
 ในการเขียนกราฟได้ (ข้อ 14 -15)  
 จุดประสงค์ที่ 6 นักเรียนสามารถบอกนิยามของไฮเพอร์โบลามุมฉากได้  
 (ข้อ 16 –17)  
 จุดประสงค์ที่ 7 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้  
 ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลามุมฉากได้ (ข้อ 18 – 20)  
 จุดประสงค์ที่ 8 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนและเลื่อน  
 แกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหการแปลงพิกัดซ้อนได้ (ข้อ 21 -22)  
 จุดประสงค์ที่ 9 นักเรียนสามารถพิจารณากราฟของสมการกำลังสองโดยใช้ค่า  
 จำแนกได้ (ข้อ 23 – 24)

แบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกน  
พิกัดของสมการกำลังสอง

1. ถ้า P เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัด  $(2, 6)$  ในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  แล้วข้อใดเป็นพิกัดของ P

ในระบบแกนพิกัด  $xy$  เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $\frac{\pi}{6}$  เรเดียน

- ก.  $(4\sqrt{3}, \sqrt{3} - 3)$  ค.  $(4\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$   
 ข.  $(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3} - 3)$  ง.  $(\sqrt{3} - 3, 1 + 3\sqrt{3})$
2. ข้อใดเป็นพิกัดใหม่ของ  $(0, 3)$  เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $30^\circ$

- ก.  $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$  ค.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$   
 ข.  $\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$  ง.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}$

3. พิกัด Q  $(3, 1)$  เป็นพิกัดจุดในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ข้อใดเป็นพิกัด Q ในระบบแกนพิกัด  $xy$

เมื่อหมุนแกนไปเป็นมุม  $\theta = \frac{\pi}{6}$  เรเดียน

- ก.  $\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$  ค.  $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}$   
 ข.  $\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$  ง.  $\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

4. ข้อใดเป็นสมการในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ของสมการ  $xy = 4$  เมื่อหมุนแกนพิกัดไปเป็นมุม  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียน

- ก.  $x'^2 - y'^2 = 8$  ค.  $x'^2 - y'^2 = 4$   
 ข.  $y'^2 - x'^2 = 8$  ง.  $y'^2 - x'^2 = 4$

5. ข้อใดเป็นสมการในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ของสมการ  $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$  เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $60^\circ$

- ก.  $x'^2 + 5y'^2 - 20 = 0$  ค.  $20x'^2 + 10y'^2 - 40 = 0$   
 ข.  $5x'^2 + y'^2 - 20 = 0$  ง.  $10x'^2 + 20y'^2 - 40 = 0$

6. สมการ  $y'^2 - x'^2 = 1$  เป็นสมการใหม่เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $30^\circ$  ข้อใดเป็นสมการเดิม ในระบบแกนพิกัด  $xy$

ก.  $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$

ค.  $y^2 - 2\sqrt{3}xy - x^2 - 2 = 0$

ข.  $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$

ง.  $y^2 + 2\sqrt{3}xy - x^2 - 2 = 0$

7. มุม  $\frac{\pi}{3}$  เรเดียน เป็นมุมที่เหมาะสมในการจัดสมการใหม่ของสมการใด

ก.  $xy + 9 = 0$

ข.  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

ค.  $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

ง.  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 80x - 60y + 100 = 0$

8. ข้อใดจัดมุม  $\theta$  ได้เหมาะสมกับสมการ

ก.  $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0, \theta = 30^\circ$

ค.  $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 72 = 0, \theta = 30^\circ$

ข.  $3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 2 = 0, \theta = 60^\circ$

ง.  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2y = 0, \theta = 45^\circ$

9. จากสมการ  $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$  ข้อใดถูกต้อง

ก. มุมที่เหมาะสมในการจัดรูปสมการคือ  $\theta = \frac{\pi}{3}$

ข. มุมที่เหมาะสมในการจัดรูปสมการคือ  $\theta = \frac{\pi}{4}$

ค. มุมที่เหมาะสมในการจัดรูปสมการคือ  $\theta = \frac{\pi}{6}$

ง. มุมที่เหมาะสมในการจัดรูปสมการคือ  $\theta = \frac{\pi}{2}$

10.  $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6 = 0$  เป็นสมการในระบบแกนพิกัด  $xy$  เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไป

เป็นมุม  $\frac{\pi}{4}$  เรเดียนแล้วข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก.  $x = \frac{\sqrt{2}(y' - x')}{2}$

ค.  $y = \frac{\sqrt{2}(x' - y')}{2}$

ข.  $x = \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2}$

ง.  $y = \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2}$

11. ข้อใดเป็นสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ของสมการ  $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6 = 0$

ก.  $3x'^2 + 2y'^2 + 6 = 0$

ค.  $3y'^2 + x'^2 - 6 = 0$

ข.  $3x'^2 + y'^2 - 6 = 0$

ง.  $3y'^2 - x'^2 + 6 = 0$

12. สมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ของสมการ  $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$  คือข้อใด

ก.  $\sqrt{2}y' - 2x'^2 = 0$

ค.  $2x'^2 + \sqrt{2}y' = 0$

ข.  $2x'^2 - \sqrt{2}y' = 0$

ง.  $\sqrt{2}y' + 2x'^2 = 0$

13. ข้อใดเป็นสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ของสมการ  $\sqrt{3}xy + y^2 - 6 = 0$

ก.  $3x'^2 - y'^2 = 12$

ค.  $x'^2 - 3y'^2 = 12$

ข.  $x'^2 + y'^2 = 12$

ง.  $x'^2 - 3y'^2 = 12$

14. จากสมการ  $x^2 + 2xy + y^2 - 6 = 0$  ข้อใดกล่าวถูกต้อง

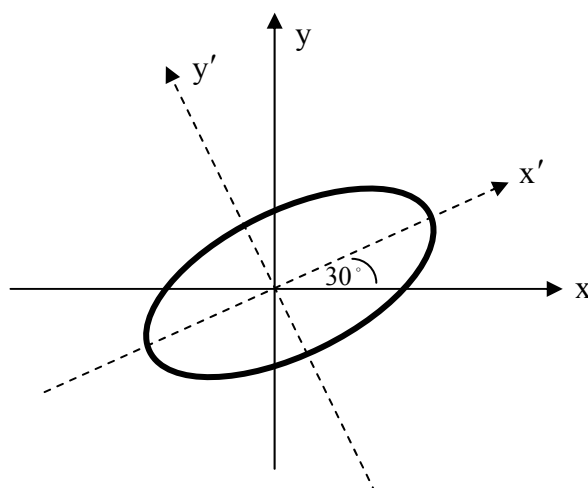
ก. กราฟเป็นวงรี

ข. กราฟเป็นพาราโบลา

ค. กราฟเป็นวงกลม

ง. กราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

15.



จากรูปเป็นกราฟของสมการใด

ก.  $7x^2 + 6\sqrt{3}xy - 13y^2 + 16 = 0$  ค.  $7x^2 + 6\sqrt{3}xy - 13y^2 - 16 = 0$

ข.  $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$  ง.  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 16 = 0$

16. ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง

ก. ไฮเพอร์โบลามุมฉากมีแกนสังยุคและแกนตามขวางยาวเท่ากัน

ข. ไฮเพอร์โบลามุมฉากมีแกนสังยุคและแกนตามขวางตั้งฉากซึ่งกันและกัน

ค. ไฮเพอร์โบลามุมฉากมีสมการรูปทั่วไปเป็น  $x^2 - y^2 = k$  เมื่อ  $k \neq 0$

ง. ไฮเพอร์โบลามุมฉากมีสี่เหลี่ยมกำกับเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส



จงพิจารณาสมการ  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$  แล้วตอบคำถามข้อ 21 - 22

21. เมื่อหมุนแกนแล้วได้สมการในข้อใด

ก.  $8x'^2 + 2y'^2 - 4\sqrt{2}y' - 4 = 0$  ค.  $8x'^2 + 2y'^2 + 4\sqrt{2}y' - 4 = 0$

ข.  $8x'^2 - 2y'^2 + 4\sqrt{2}y' + 4 = 0$  ง.  $8x'^2 - 2y'^2 - 4\sqrt{2}y' + 4 = 0$

22. จะต้องเลื่อนแกนขนานไปที่จุดใด สมการจึงจะอยู่ในรูปมาตรฐาน

ก.  $(\sqrt{2}, 0)$  ค.  $(0, \sqrt{2})$

ข.  $(-\sqrt{2}, 0)$  ง.  $(0, -\sqrt{2})$

23. จากสมการ  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$  พิจารณาจากค่าจำแนก จะมีกราฟเป็นภาคตัดกรวยชนิดใด

ก. ไฮเพอร์โบลา

ค. พาราโบลา

ข. วงรี

ง. ไม่มีข้อใดถูก

24. พิจารณาจากค่าจำแนก สมการในข้อใดเป็นไฮเพอร์โบลา

ก.  $\sqrt{3}xy + y^2 - 6 = 0$

ค.  $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

ข.  $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$

ง.  $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

25. จากสมการ  $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$  ข้อใดถูกต้อง

ก. มีค่าจำแนกมากกว่าศูนย์ และมีกราฟวงรี

ข. มีค่าจำแนกน้อยกว่าศูนย์ และมีกราฟเป็นวงรี

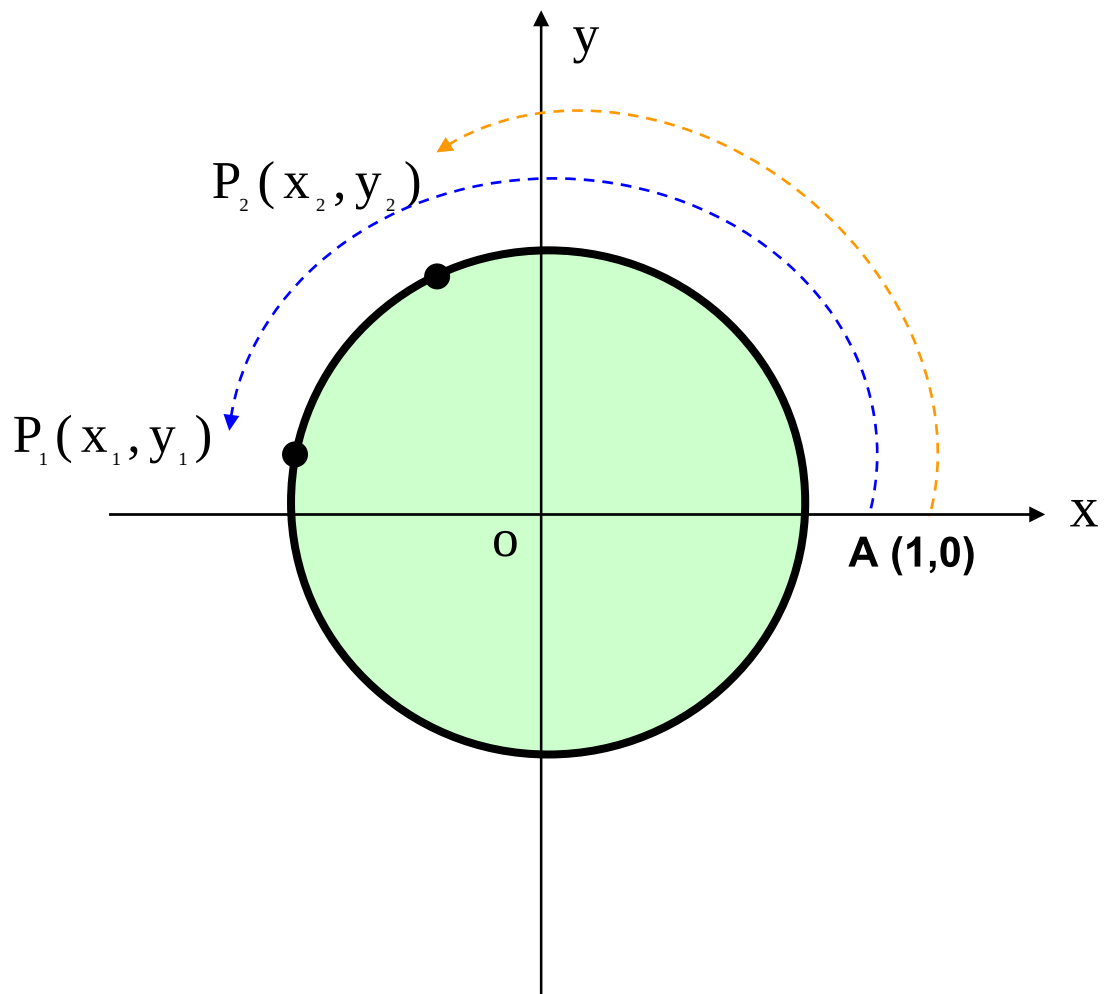
ค. มีค่าจำแนกเท่ากับศูนย์ และมีกราฟเป็นพาราโบลา

ง. มีค่าจำแนกมากกว่าศูนย์ และมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

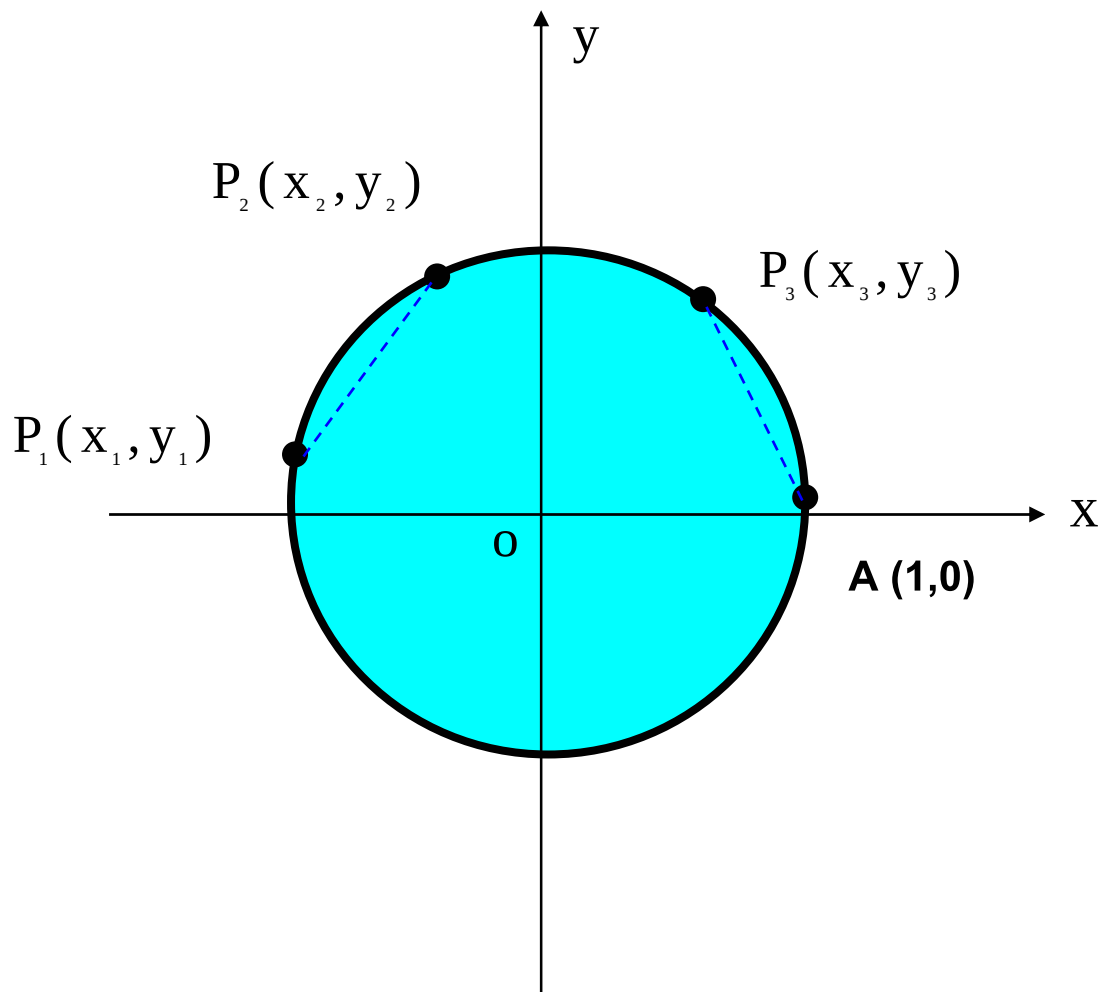
แบบทดสอบอัตนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกน  
พิกัดของสมการกำลังสอง

1. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ  $2x^2 + \sqrt{3}xy + 3y^2 - 21 = 0$
2. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ  $xy + 6 = 0$
3. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ  $xy - 4x - 2y = 0$

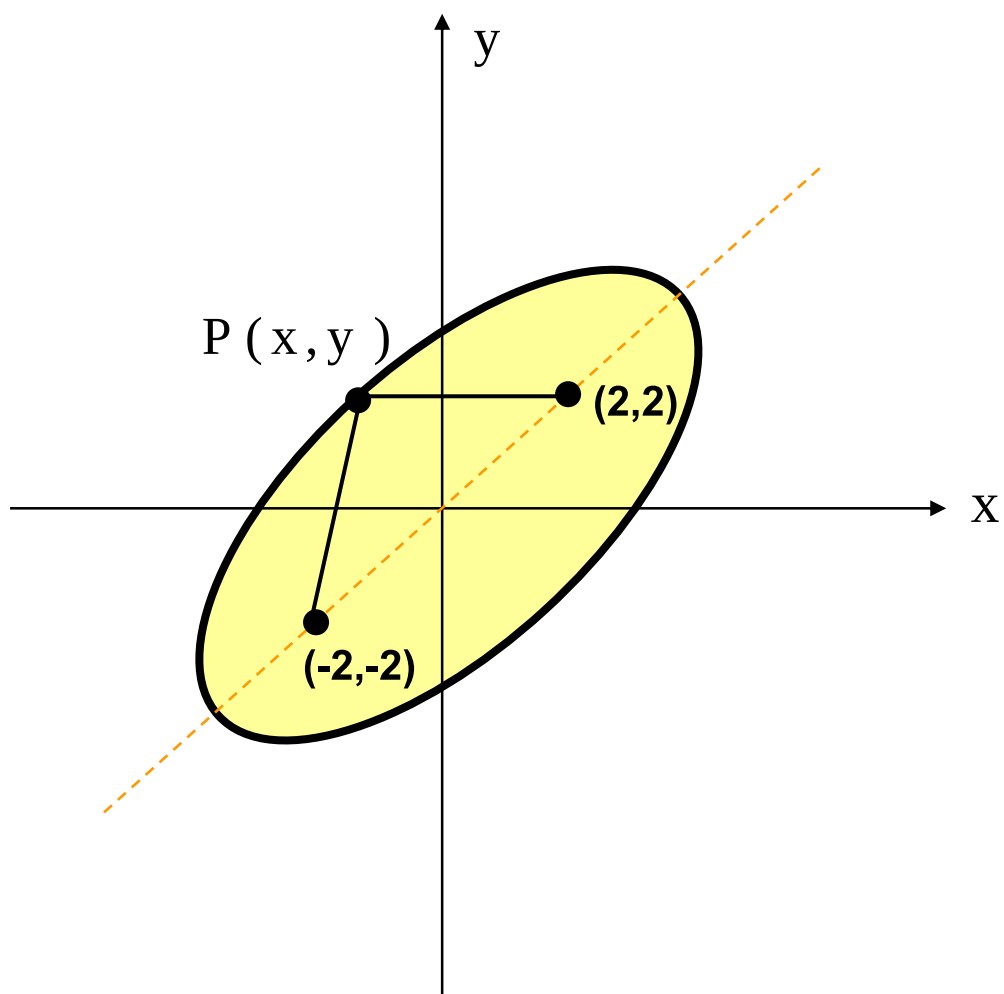
ภาคผนวก ค



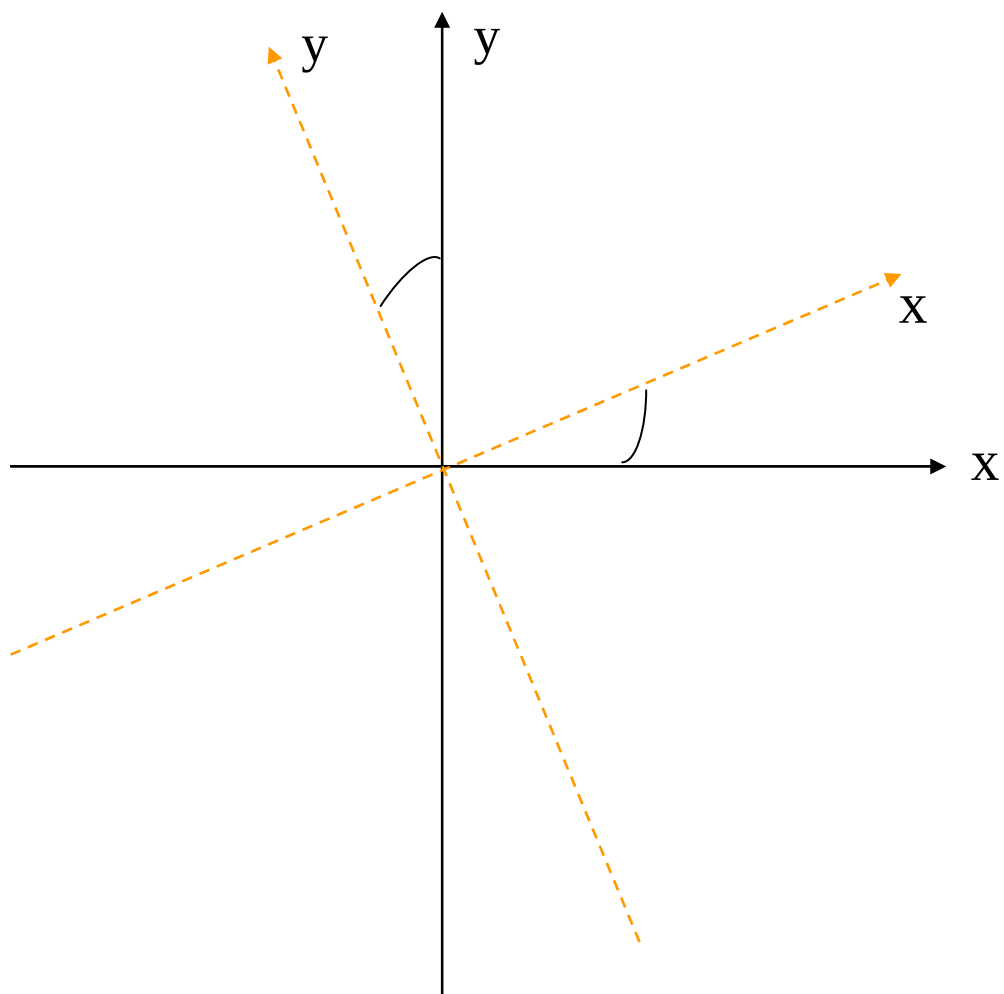
รูป 1



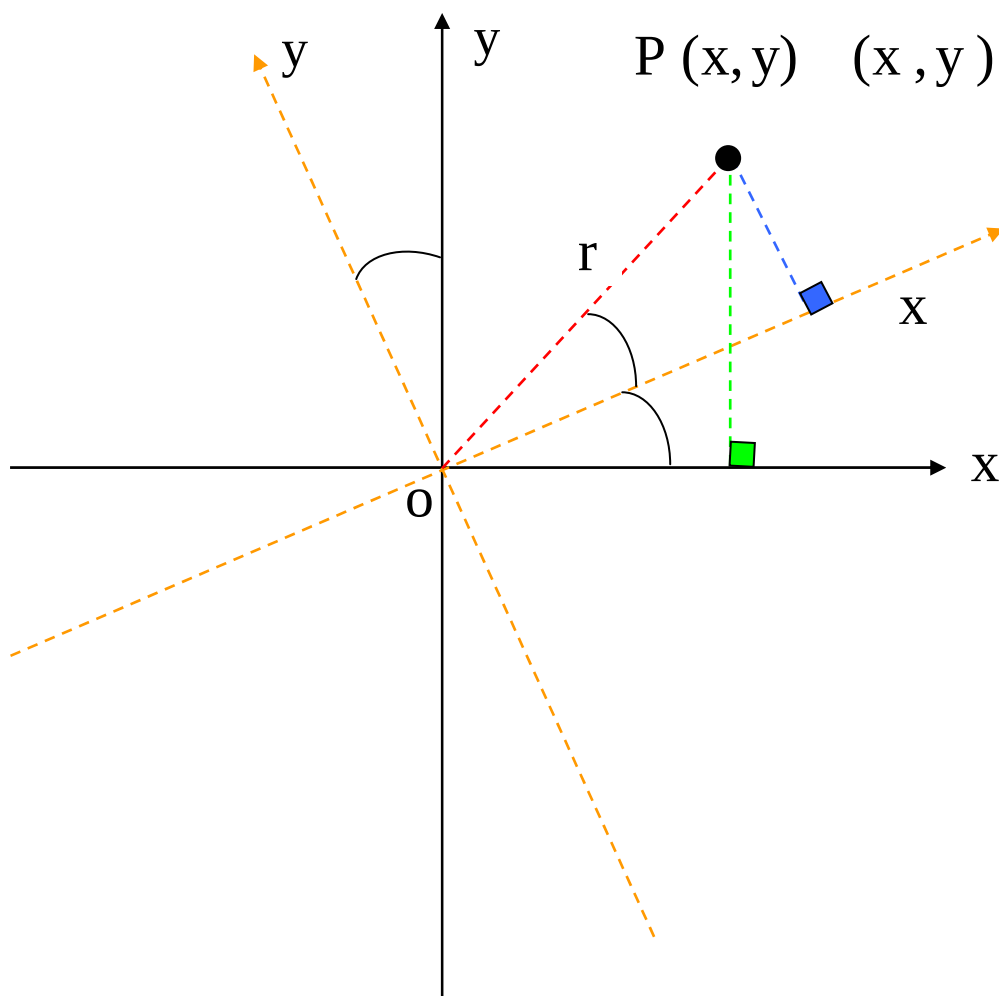
รูป 2



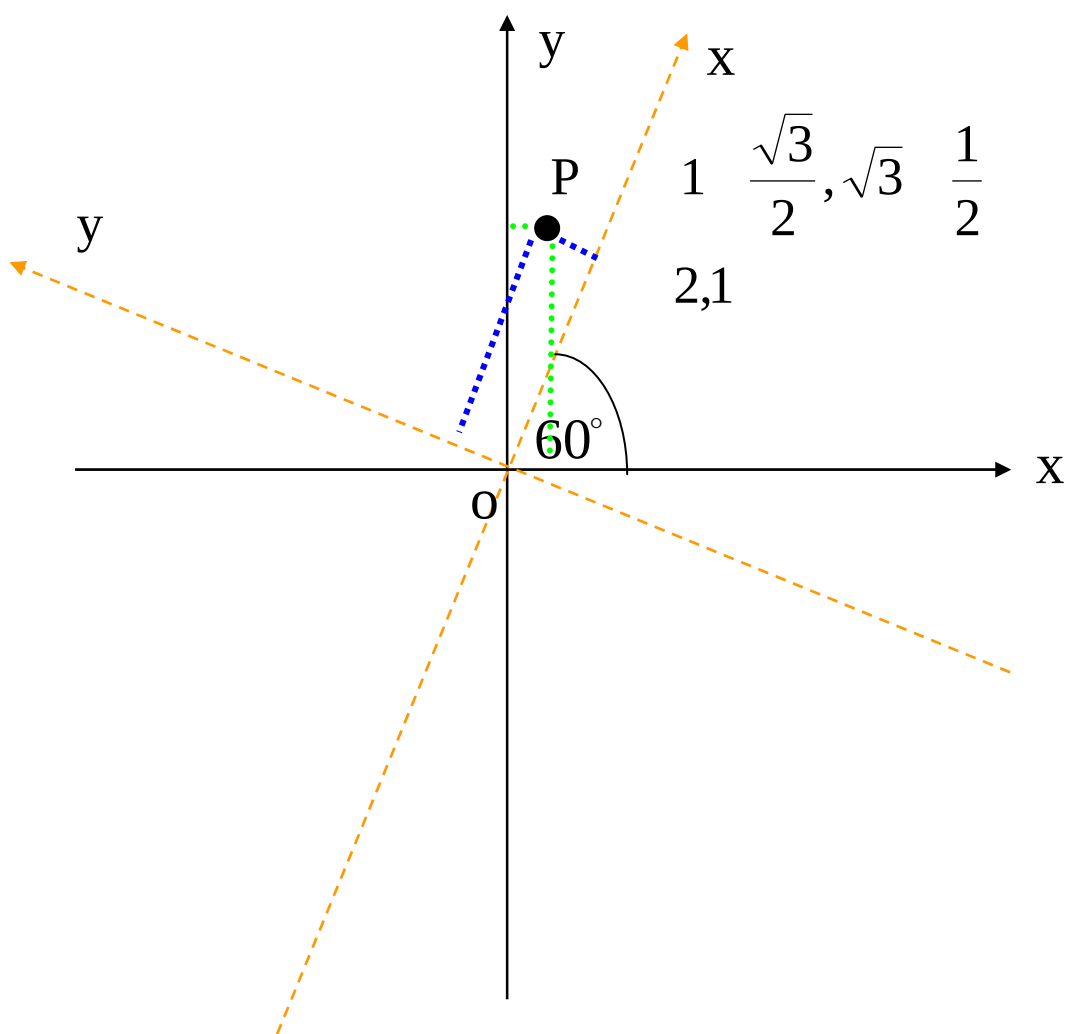
รูป 1

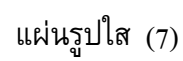


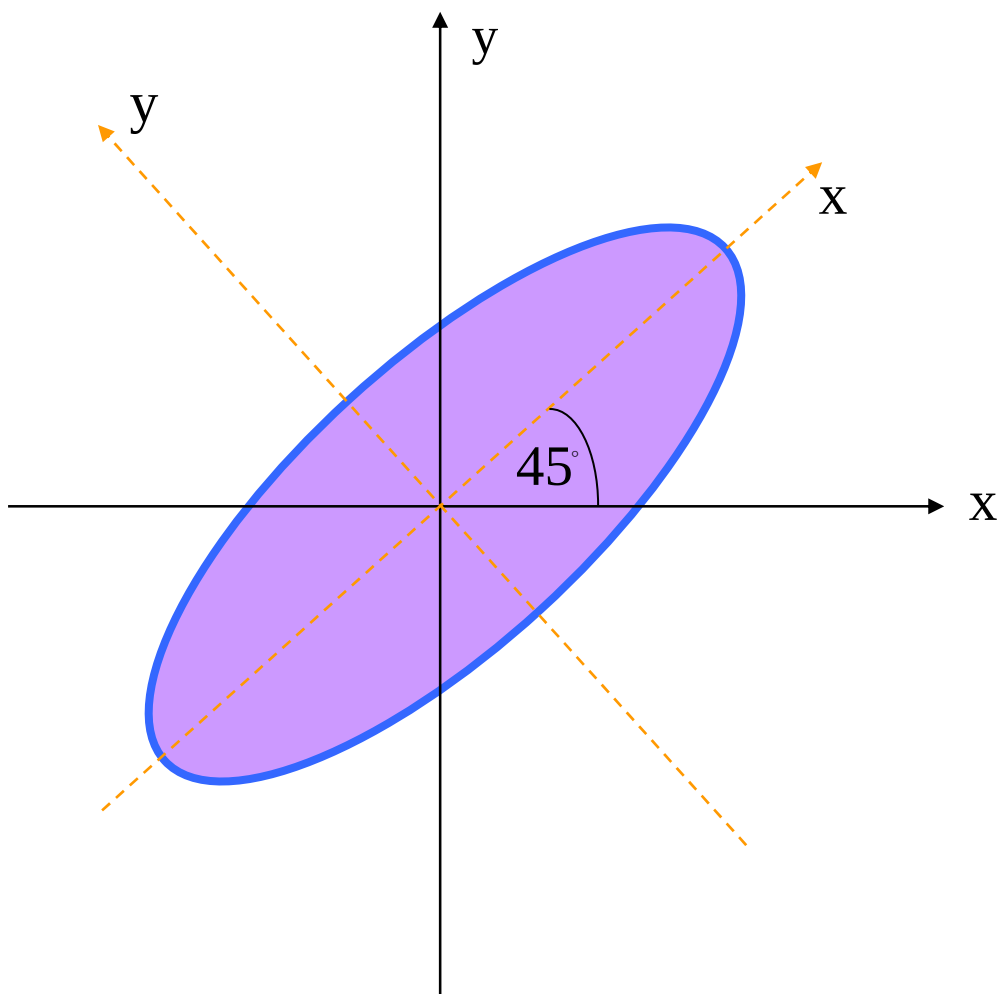
รูป ก

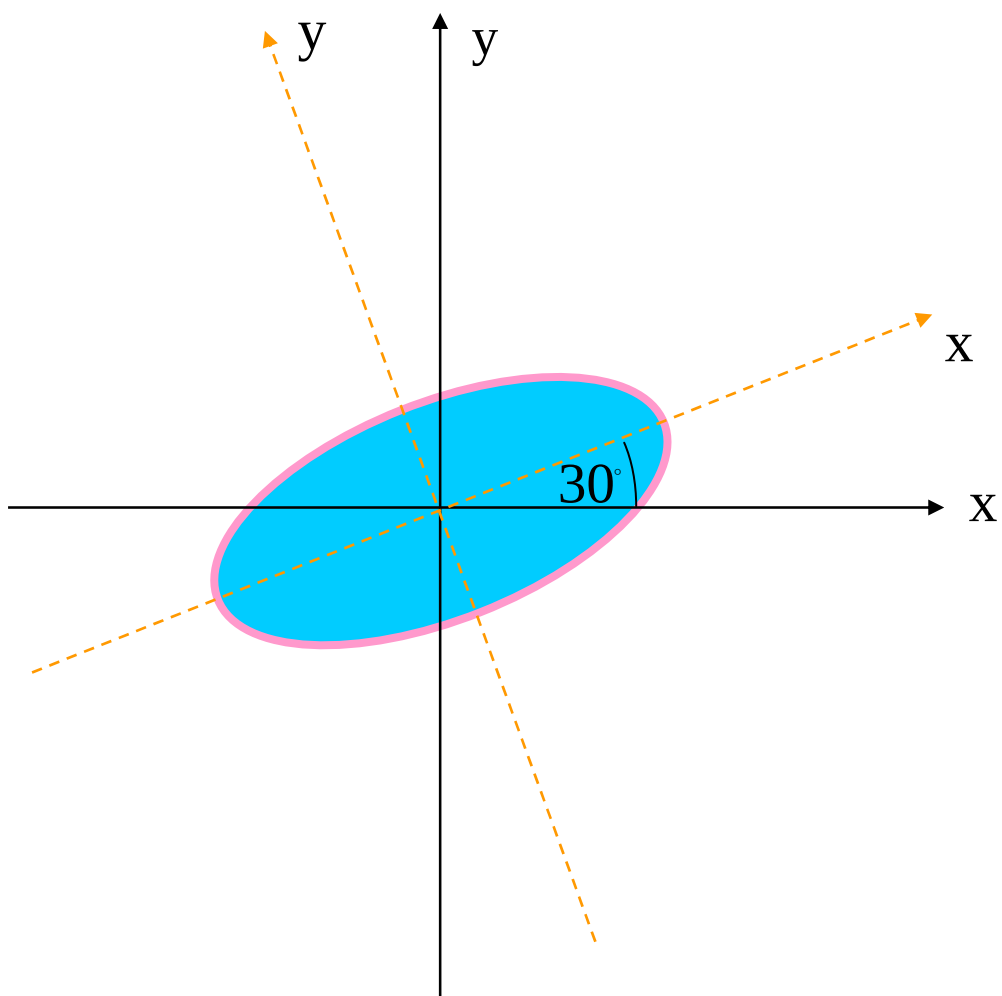


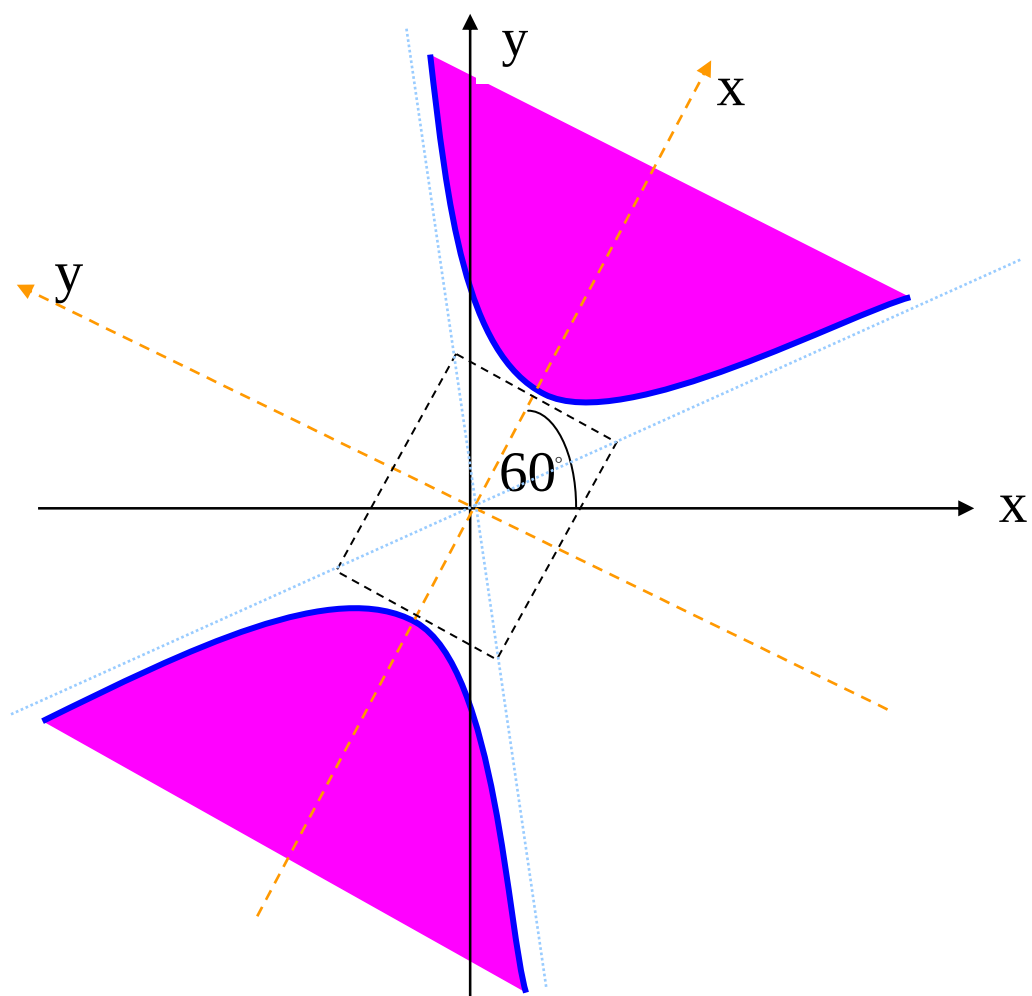
รูป ข

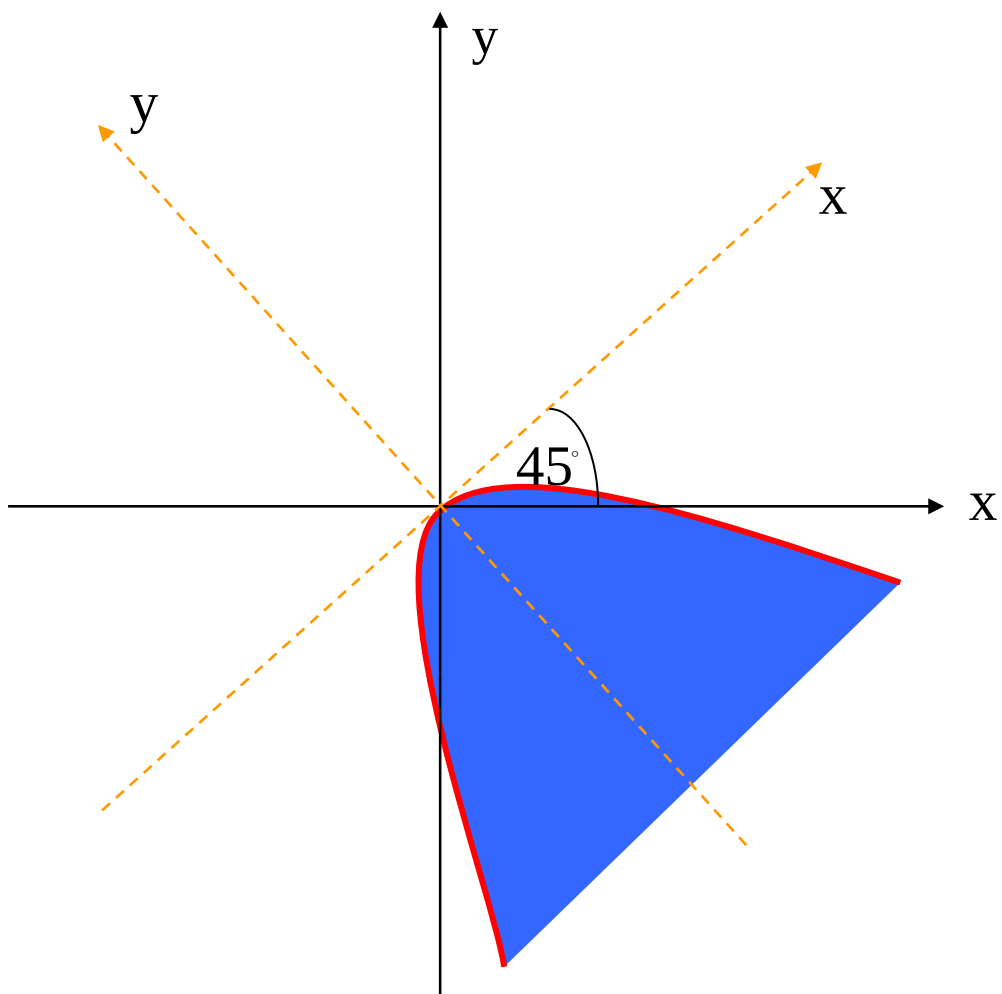


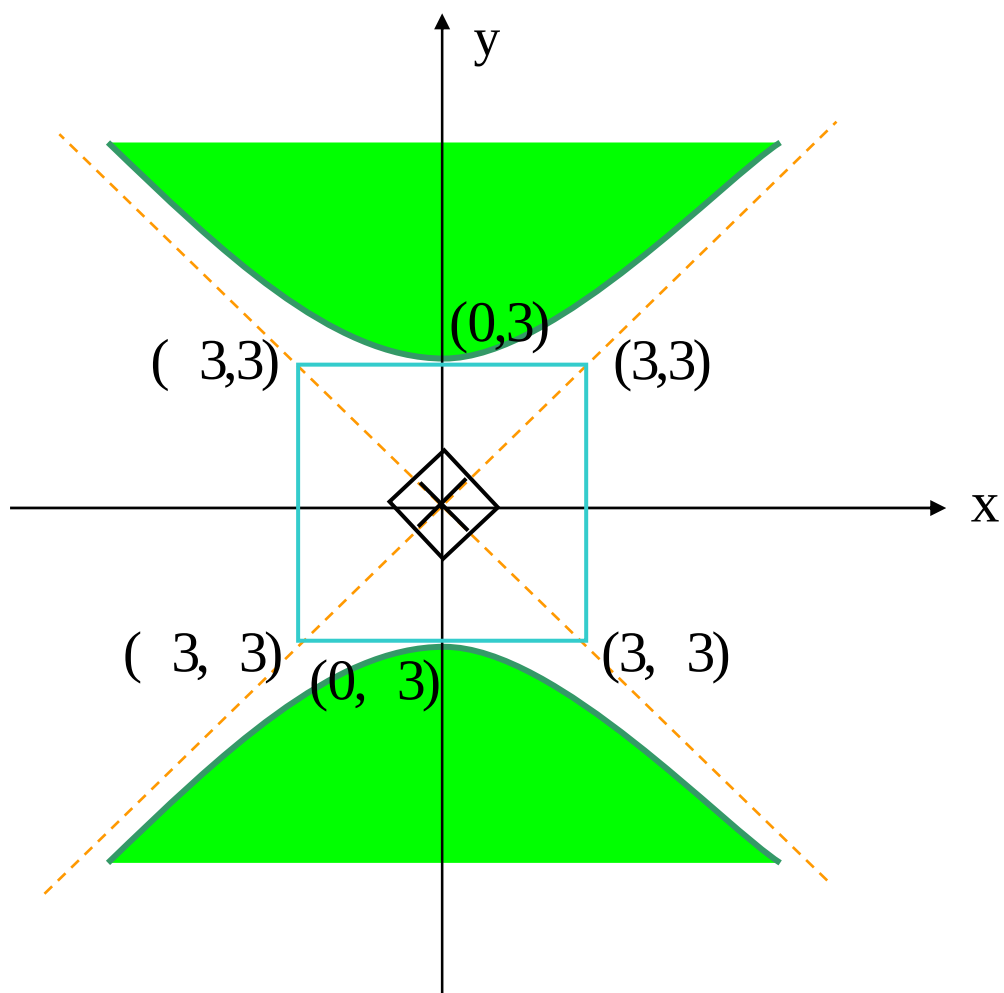


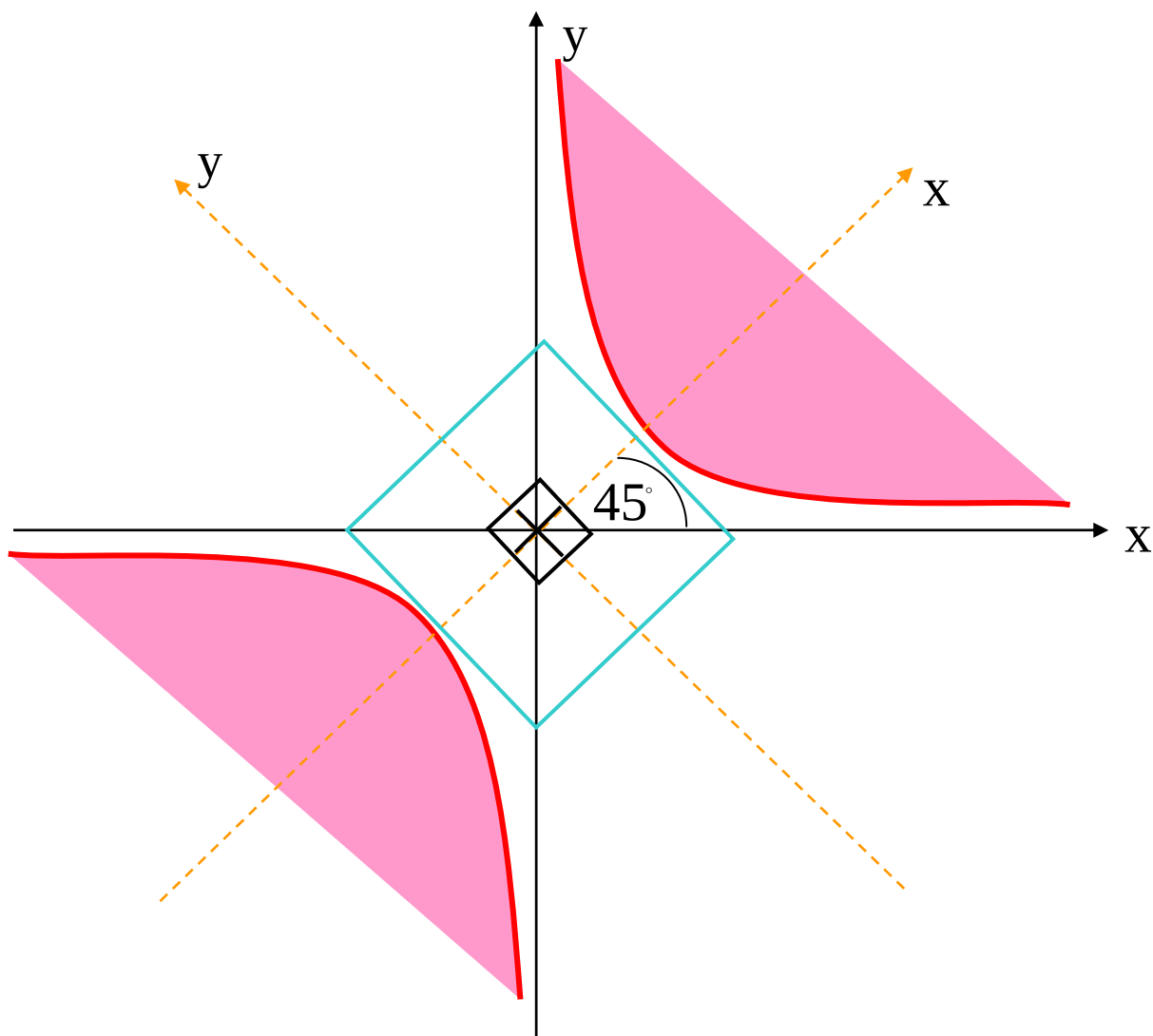


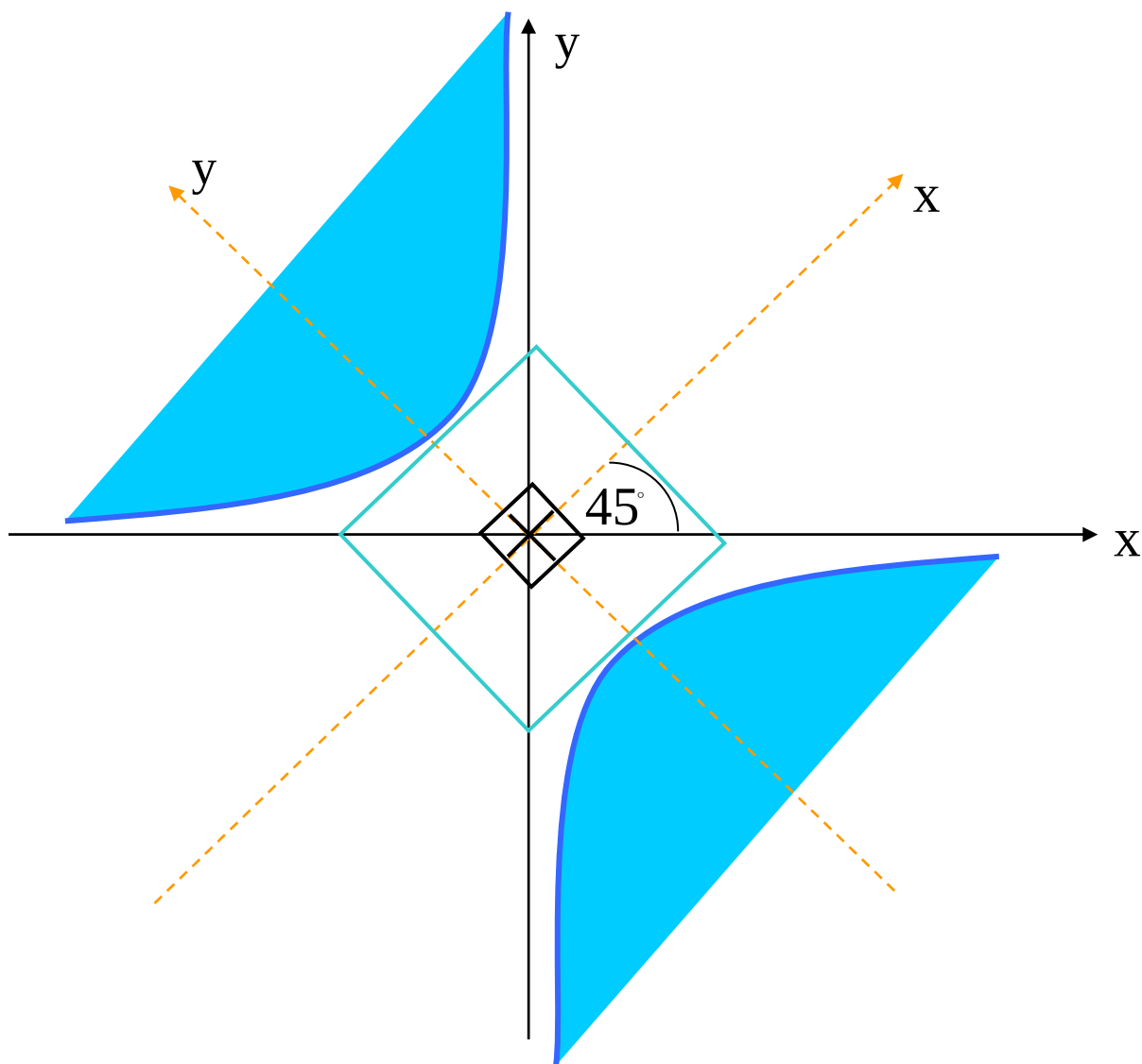


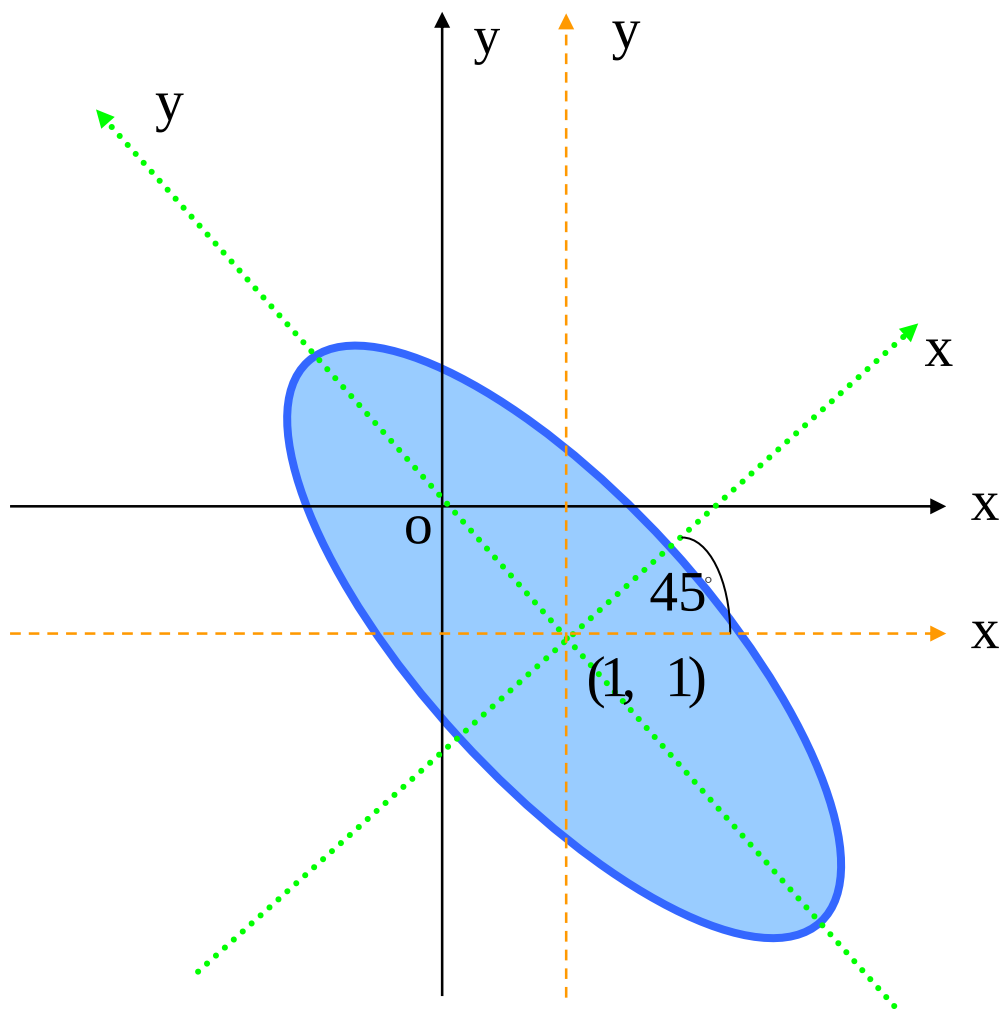


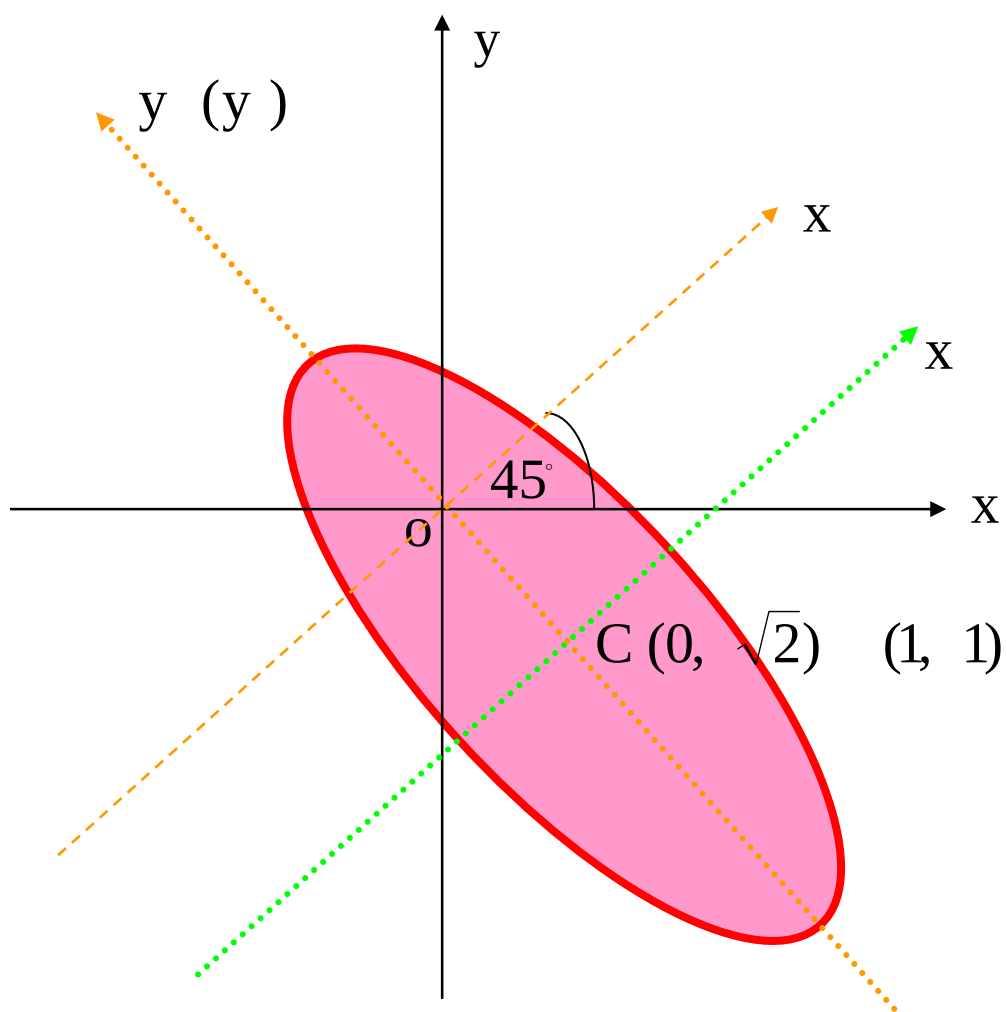


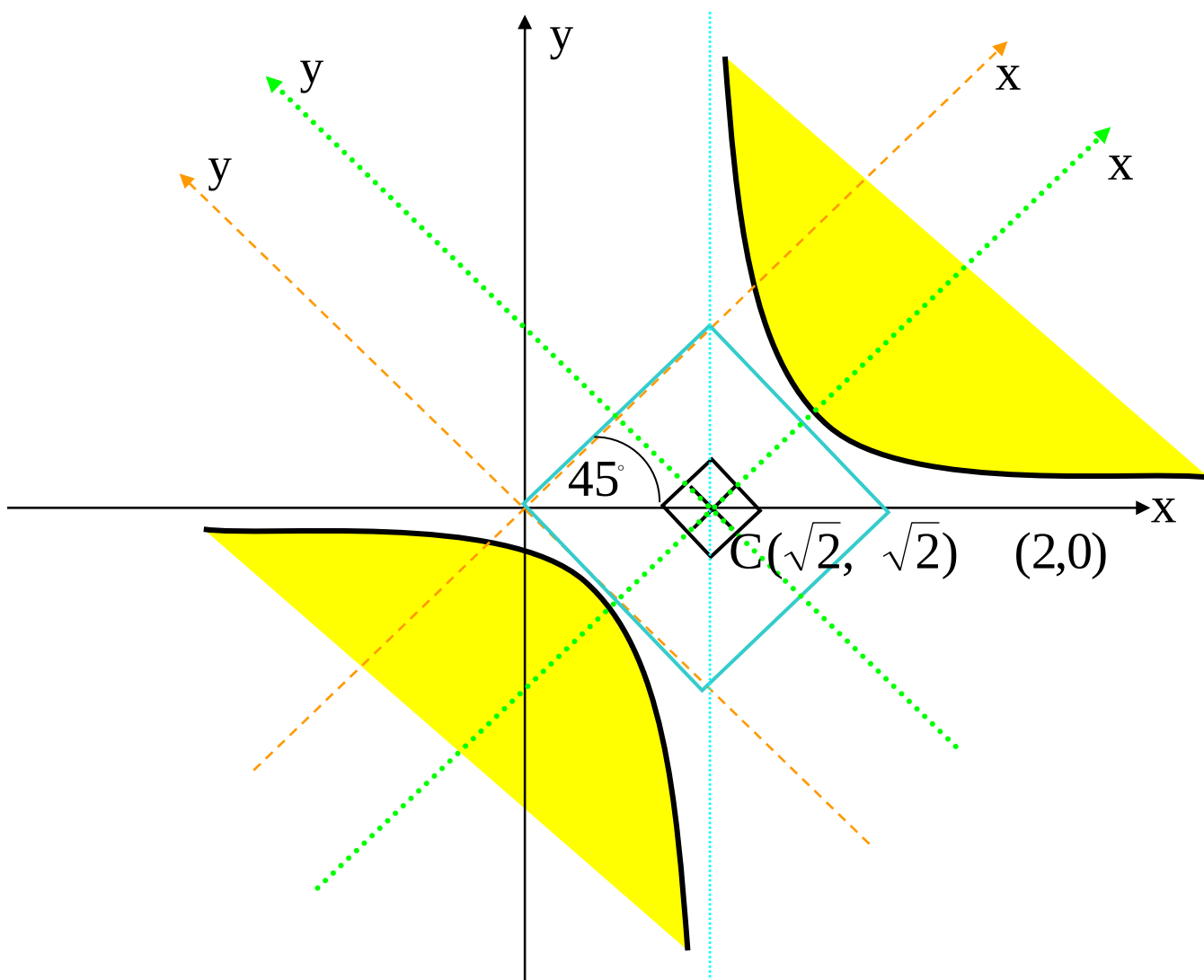


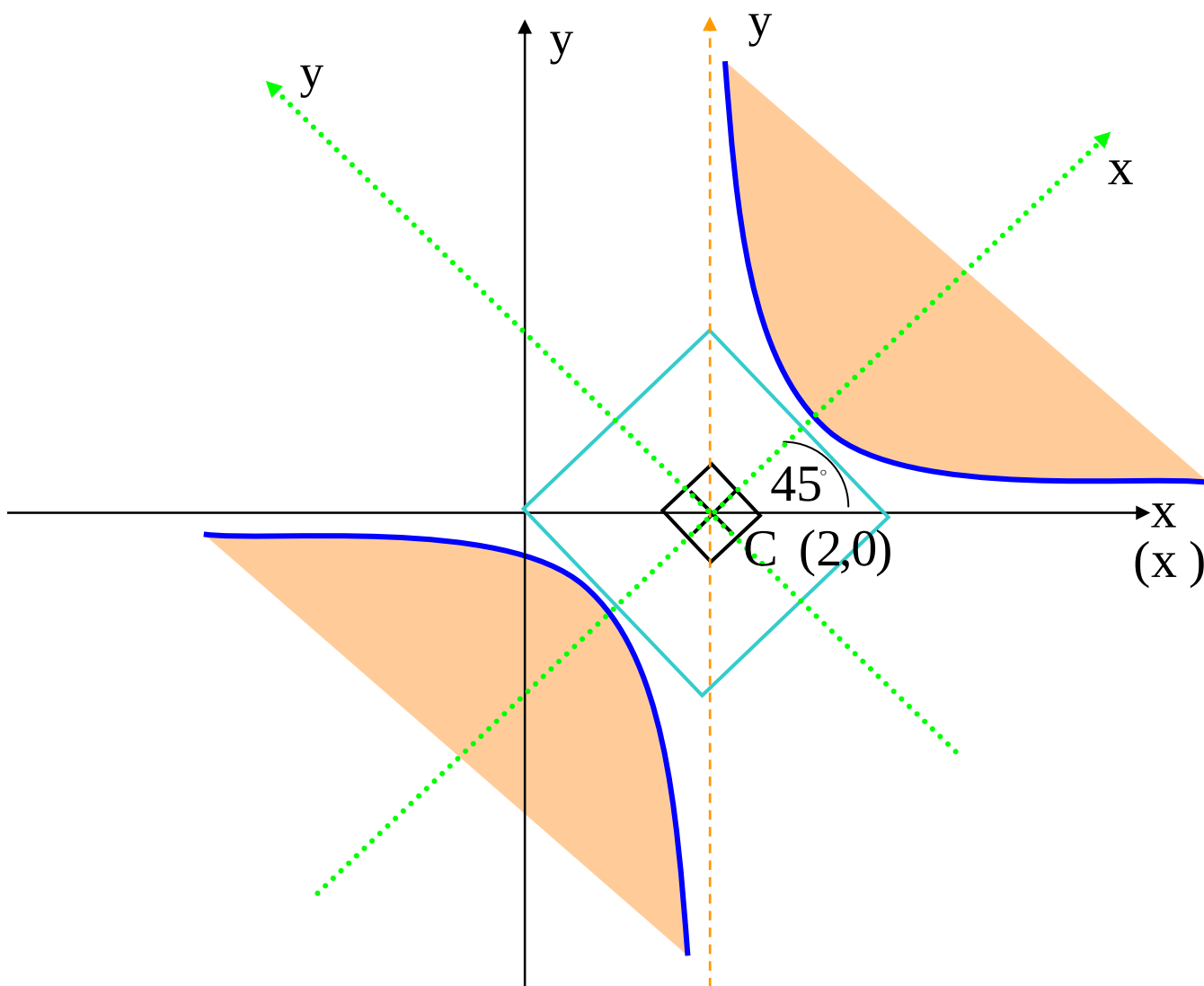












ภาคผนวก ง

## แผนการสอนเรื่องที่ 1

หัวเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม จำนวน 1 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมต่าง ๆ ได้

### เนื้อหา

1.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
2.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
3.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
4.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยการถาม – ตอบ เกี่ยวกับความหมายของค่า  $\sin$  หมายถึง .....  
 $\cos$  หมายถึง .....  
 $\tan$  หมายถึง .....  
 และทบทวนส่วนกลับของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น  
 ส่วนกลับของ  $\sin$  คือ .....  
 ส่วนกลับของ  $\cos$  คือ .....  
 ส่วนกลับของ  $\tan$  คือ .....
2. ครูอธิบายและพิสูจน์  $\cos$  ของผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม โดยดูแผ่นใส (1) , (2) , (3) แผ่นใสรูป (1) และ (2) ประกอบคำอธิบาย
3. ครูและนักเรียนช่วยกันหาสูตร  $\cos$  ของผลบวกจากการทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 1
4. ครูและนักเรียนช่วยกันหาสูตร  $\sin$  ของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม จากเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 1 (ต่อ)
5. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปสูตรในการหา  $\sin$  และ  $\cos$  ของผลต่างและผลบวกของจำนวนจริงหรือมุม

### สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 1
2. แผ่นใส (1) , (2) , (3)
3. แผ่นใสรูป (1) , (2)

### การวัดผล

1. การถาม-ตอบในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 1

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 1 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

# ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือ ผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

## 1. โคไซน์ของผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

กำหนดให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ (หรือมุมใด ๆ )

$P(\alpha)$  และ  $P(\beta)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่แทน

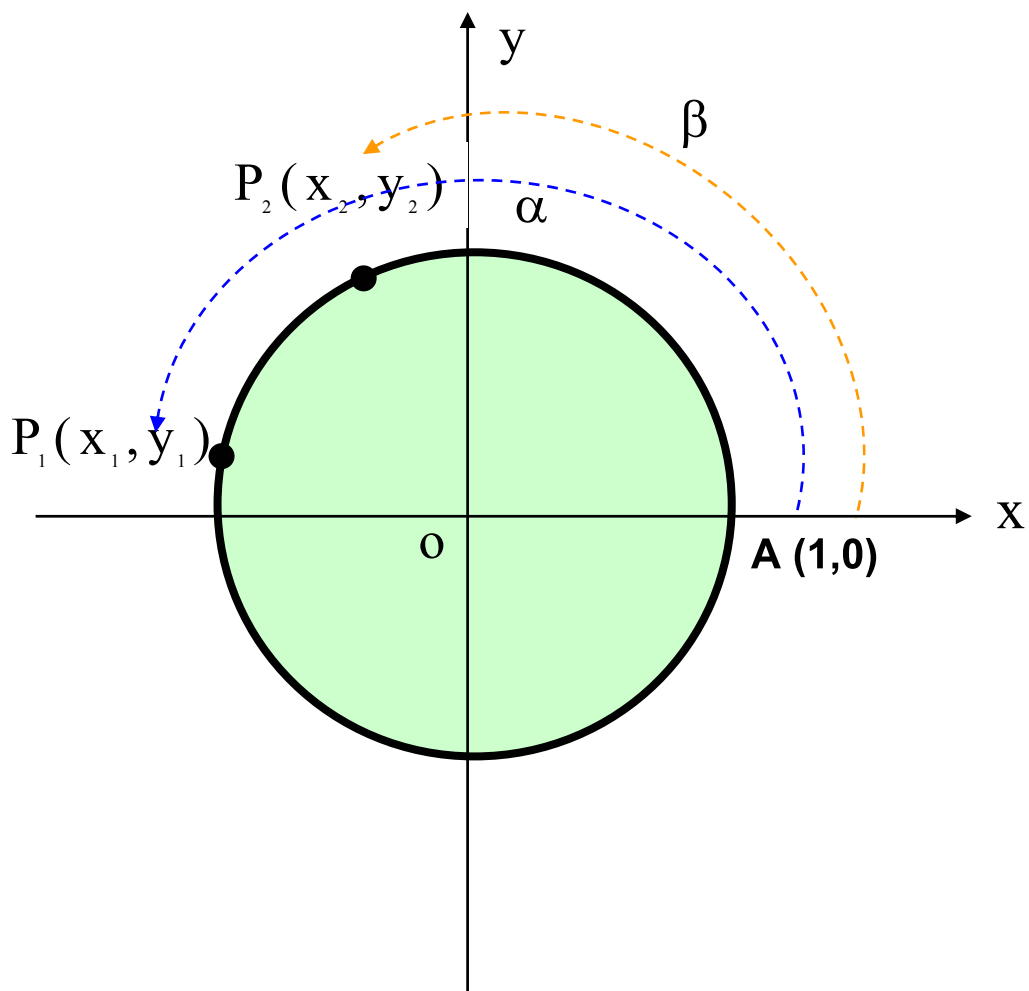
$\alpha$  และ  $\beta$  ตามลำดับ

เนื่องจาก  $\alpha, \beta$  เป็นจำนวนจริง เพื่อความ

สะดวก เราจะกำหนดให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นจำนวนจริงในช่วง  
 $[0, 2\pi]$  และ  $\beta \leq \alpha$

สมมติให้  $P(\alpha) = P_1(x_1, y_1)$

$$P(\beta) = P_2(x_2, y_2)$$



រូប ១

จากรูป 1 จะได้ว่า

ความยาวส่วนโค้ง  $AP_1 = \alpha$  หน่วย

ความยาวส่วนโค้ง  $AP_2 = \beta$  หน่วย

ความยาวส่วนโค้ง  $P_1P_2 = \alpha - \beta$  หน่วย

สมมติให้  $P_3(x_3, y_3)$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่แทน  $\alpha - \beta$  นั่นคือ

ความยาวส่วนโค้ง  $AP_3 = \alpha - \beta$  หน่วย(ดูรูป 2)

เนื่องจาก

$$P(\alpha) = P_1(x_1, y_1), \quad P(\beta) = P_2(x_2, y_2) \text{ และ } P(\alpha - \beta) = P_3(x_3, y_3)$$

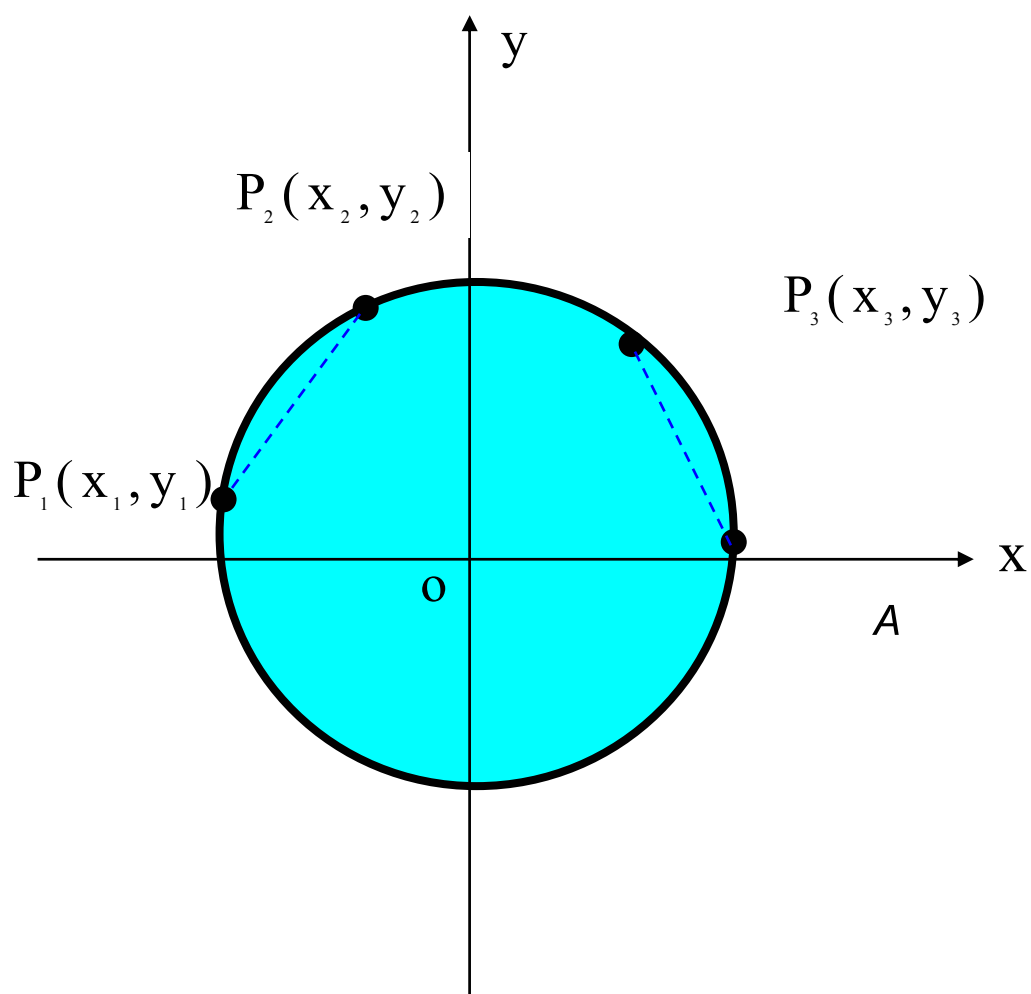
ดังนั้น จากบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\cos \alpha = x_1 \quad ; \quad \sin \alpha = y_1$$

$$\cos \beta = x_2 \quad ; \quad \sin \beta = y_2$$

$$\cos(\alpha - \beta) = x_3 \quad ; \quad \sin(\alpha - \beta) = y_3$$

$$\dots\dots\dots (1)$$



รูป 2

จากรูป 2 จะได้ว่า  
ความยาวส่วนโค้ง  $AP_3$  = ความยาวส่วนโค้ง

$$P_1 P_2 = \alpha - \beta$$

ดังนั้น  $AP_3 = P_1 P_2$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_3 - 1)^2 + (y_3 - 0)^2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 \\ (x_3^2 + y_3^2) - 2x_3 + 1 &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 \\ \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $P_1, P_2$  และ  $P_3$  เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= 1 \\ x_2^2 + y_2^2 &= 1 \quad \dots\dots\dots (3) \\ x_3^2 + y_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

จากสมการ (2) และ (3) จะได้ว่า  $-2x_3 + 2 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2$   
นั่นคือ  $x_3 = x_1x_2 + y_1y_2 \quad \dots\dots\dots (4)$

นำผลลัพธ์จาก (1) แทนใน (4) จะได้สูตรของ  $\cos(\alpha - \beta)$  ดังนี้

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

### เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 1

#### ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกหรือผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

จงเติมค่าลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

$$\cos(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

เราสามารถนำสูตรของ  $\cos(\alpha - \beta)$  และความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $-\theta$  มาช่วยในการพิสูจน์โคไซน์ของผลบวกของจำนวนจริงหรือมุมได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ (หรือมุมใด ๆ )

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\cos(-\beta) = \cos \beta$  และ  $\sin(-\beta) = -\sin \beta$  ดังนั้นสูตรของ  $\cos(\alpha + \beta)$  ดังนี้

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

นอกจากนี้เราสามารถนำผลจาก

$$\cos \frac{\pi}{2} - \theta = \sin \theta \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \theta = \cos \theta \quad \dots\dots\dots (B)$$

มาช่วยในการหาสูตรของ  $\sin(\alpha - \beta)$  ได้ดังต่อไปนี้

จาก (A) และ (B) และสูตร  $\cos(\alpha + \beta)$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \cos \frac{\pi}{2} (\alpha - \beta) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \alpha + \beta \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะได้สูตรของ  $\sin(\alpha - \beta)$  ดังนี้

$$\sin(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}\text{และ } \sin(\alpha + \beta) &= \sin[\alpha - (-\beta)] \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้สูตรการหา  $\sin(\alpha + \beta)$  ดังนี้

$$\sin(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

## แผนการสอนเรื่องที่ 2

หัวเรื่อง สมการของภาคตัดกรวยแบบต่าง ๆ

จำนวน 1 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถบอกบทนิยามของภาคตัดกรวยเอียงได้
2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าภาคตัดกรวยใดเป็นภาคตัดกรวยเอียง

### เนื้อหา

สมการรูปทั่วไปของภาคตัดกรวย จะมีรูปดังนี้

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- 1) ในกรณีที่  $B = 0$  ภาคตัดกรวยจะมีแกนของรูปขนานกับแกน  $x$  หรือแกน  $y$
- 2) ในกรณีที่  $B \neq 0$  สมการจะมีพจน์คูณไขว้ ซึ่งมีแกนของรูปไม่ขนานกับแกน  $x$  หรือแกน  $y$  เราเรียกภาคตัดกรวยนี้ว่า **ภาคตัดกรวยเอียง**

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนสมการของภาคตัดกรวยแบบต่าง ๆ โดยกล่าวถึงบทนิยามของ วงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา พาราโบลา การจำแนกสมการต่าง ๆ ว่ามีกราฟเป็นรูปอะไรบ้างจากเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 2

2. ครูอธิบายถึงสมการภาคตัดกรวยที่ได้เรียนไปแล้วคือ วงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา พาราโบลา จะมีกราฟของรูปขนานกับแกน  $x$  หรือ แกน  $y$  เท่านั้น

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 โดยแผ่นใส (4) และ (5) เพื่อให้นักเรียนได้เห็นถึงว่าสมการกำลังสองไม่ได้มีเฉพาะกราฟขนานกับแกน  $x$  หรือ แกน  $y$  เท่านั้น แต่ยังมีกราฟที่มีลักษณะไม่ขนานกับแกน  $x$  หรือ แกน  $y$  ซึ่งการวาดกราฟนี้เราอาศัยนิยามของวงรี โดยใช้แผ่นใสรูป (3)

4. จากตัวอย่างครูและนักเรียนสามารถสรุปได้ว่า โดยทั่วไปสมการของภาคตัดกรวยทั้งหมดไม่ว่าจะขนานหรือไม่ขนานกับแกน  $x$  หรือ แกน  $y$  จะอยู่ในรูปดังนี้

ในกรณีที่  $B = 0$  ภาคตัดกรวยจะมีแกนของรูปขนานกับแกน  $x$  หรือแกน  $y$

ในกรณีที่  $B \neq 0$  สมการจะมีพจน์คูณไขว้ ซึ่งมีแกนของรูปไม่ขนานกับแกน  $x$

หรือแกน  $y$

### สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 2
2. แผ่นใส (4) และ (5)
3. แผ่นใสรูป (3)

### การวัดผล

1. การถาม-ตอบในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 2

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 2 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

## เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 2

### สมการของภาคตัดกรวยแบบต่าง ๆ

จงเติมคำลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

บทนิยาม วงกลม คือ .....

.....

บทนิยาม วงรี คือ .....

.....

บทนิยาม พาราโบลา คือ .....

.....

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ .....

.....

สมการของภาคตัดกรวยในรูป  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$  เมื่อ  $A \neq 0$  หรือ  $B \neq 0$  โดยมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ถ้า  $A = B$  กราฟเป็น .....

2. ถ้า  $A \neq B$  และ  $A$  กับ  $B$  มีเครื่องหมายเหมือนกัน ( $AB > 0$ )

กราฟเป็น .....

3. ถ้า  $A \neq B$  และ  $A$  กับ  $B$  มีเครื่องหมายต่างกัน ( $AB < 0$ )

กราฟเป็น .....

4. ถ้า  $A = 0$  หรือ  $B = 0$  เพียงตัวใดตัวหนึ่ง ( $AB = 0$ )

กราฟเป็น .....

# ปัญหาคิด

จงแยกสมการของภาคตัดกรวยต่อไปนี้

|                                           |                                        |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$         | 2. $16x^2 + 2y^2 - 400 = 0$            |
| 3. $y^2 = 8x$                             | 4. $x^2 - 12y = 0$                     |
| 5. $3x^2 - y^2 + 8y - 28 = 0$             | 6. $x^2 + y^2 - 9 = 0$                 |
| 7. $y^2 - 16x = 0$                        | 8. $5y^2 - 4x^2 = 20$                  |
| 9. $x^2 - 3y^2 + 10x + 12y - 25 = 0$      | 10. $5x^2 + 9y^2 - 54y - 99 = 0$       |
| 11. $16y^2 + 36x^2 - 576 = 0$             | 12. $xy - 6 = 0$                       |
| 13. $x^2 + y^2 = 25$                      | 14. $16x^2 + y^2 - 96x - 4y - 84 = 0$  |
| 15. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 37 = 0$        | 16. $4x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 27 = 0$ |
| 17. $9x^2 + 45y^2 - 20y - 45 = 0$         | 18. $xy + 9 = 0$                       |
| 19. $16x^2 - 9y^2 + 128x - 36y - 144 = 0$ | 20. $x^2 + 8x + 10y + 45 = 0$          |
| 21. $12x^2 - y^2 = 108$                   | 22. $y^2 - 4x^2 - 12x + 12 = 0$        |



# ตัวอย่างที่ 1

จงใช้บทนิยามของวงรี หา  
สมการของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(0,0)$  มี  $F_1(2,2)$   
และ  $F_2(-2,-2)$  เป็นโฟกัสของวงรีและมีผลบวกของ  
ระยะทางระหว่างจุดใด ๆ บนวงรีกับโฟกัสทั้งสองมีค่า  
คงตัวเท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ กำหนดวงรีที่มีจุด  $F_1(2,2)$  และ  $F_2(-2,-2)$  เป็น  
โฟกัส จะพบว่าแกนเอกของวงรีนี้อยู่บนเส้นตรง ซึ่งไม่  
ขนานกับแกน  $x$  และไม่ขนานกับแกน  $y$  แต่จะอยู่ใน  
ลักษณะเอียง

ถ้ากำหนดให้วงรีนี้ประกอบด้วยจุด  $P(x,y)$  บนระนาบ  
ที่ทำให้ผลบวกของระยะทางจาก  $P$  ไปยังโฟกัสทั้งสองมีค่า  
คงตัวเท่ากับ 8 หน่วย แล้วสมการของวงรีนี้หาได้จาก  
สมการต่อไปนี้

$$PF_1 + PF_2 = 8$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = 8 \text{ หรือ}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}$$

..... (1)

จากการยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ (1) พร้อมทั้งกระจาย จะได้ว่า

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 = 16\sqrt{x^2 + 4x + y^2 + 4y + 8} + x^2 + 4x + y^2 + 4y + 72$$

หรือ

$$4(x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8) = x^2 + 2xy + y^2 + 16x + 16y + 64$$

$$16\sqrt{x^2 + 4x + y^2 + 4y + 8} = 8x + 8y + 64$$

หรือ

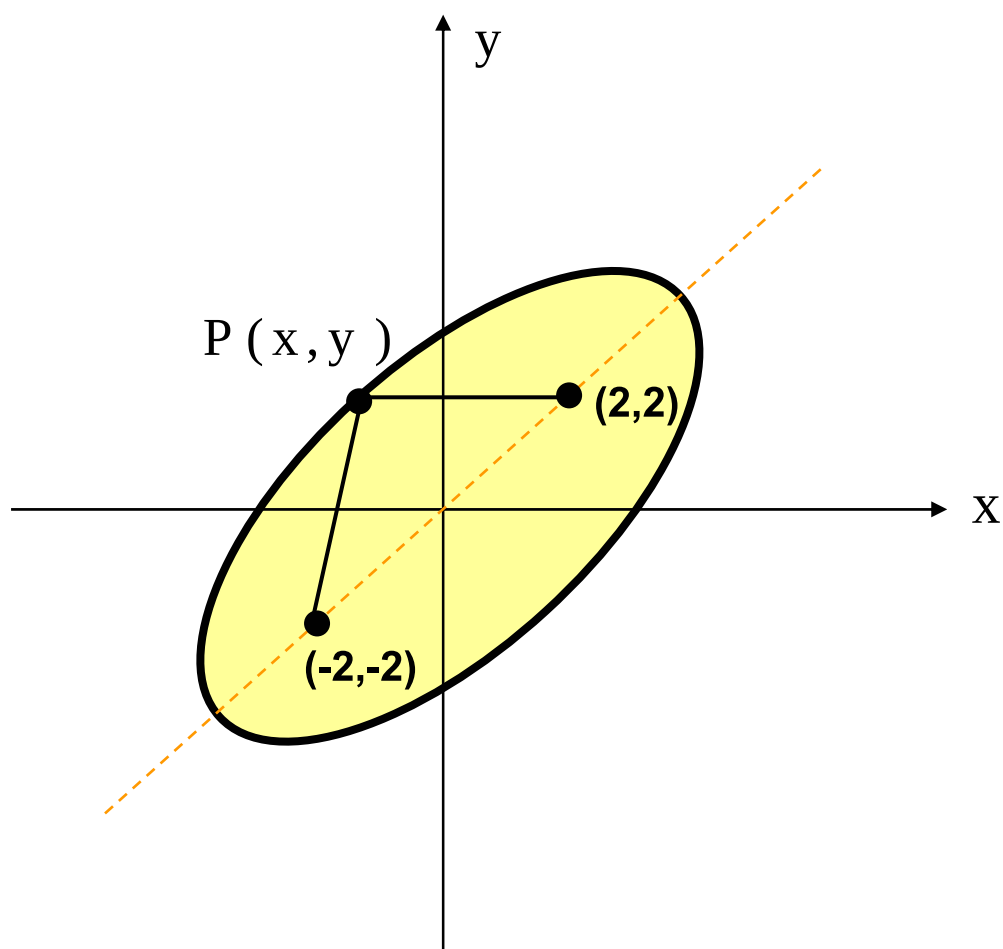
$$2\sqrt{x^2 + 4x + y^2 + 4y + 8} = x + y + 8$$

..... (2)

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้ว่า

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 32 = 0 \quad \text{..... (3)}$$

ดังนั้นสมการ (3) เป็นสมการวงรีที่กำหนดให้ ซึ่งมีกราฟดังรูป



รูป 1

### แผนการสอนเรื่องที่ 3

หัวเรื่อง การแปลงแบบหมุนแกนพิกัด

จำนวน 2 คาบ

#### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถหาพิกัดเนื่องจากการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดได้
2. เมื่อกำหนดมุม  $\theta$  ที่เหมาะสมให้ นักเรียนสามารถแปลงพิกัดของสมการได้

#### เนื้อหา

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $x, y$  กับ  $x', y'$  มีดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

ในทางกลับกันการหา  $x'$  และ  $y'$  ในรูปของ  $x, y$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

2. โดยการหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $\theta$  ที่เหมาะสมก็จะสามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ ซึ่งทำให้ได้สมการของภาคตัดกรวยอยู่ในรูปของตัวแปร  $x', y'$

#### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่าง  $P(x, y)$  จุดในระบบแกนพิกัด  $xy$  และ  $P(x', y')$  จุดในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร โดยแผ่นใสรูป (4) และ (5) และแผ่นใส (6) , (7) และ (8) ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

2. ครูอธิบายถึงการหาค่า  $P(x, y)$  จุดในระบบแกนพิกัด  $xy$  เมื่อเรารหาค่าของมุม  $\theta$  ที่ใช้ในการหมุน และหาค่า  $P(x', y')$  จุดในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  จากตัวอย่างที่ 2 โดยแผ่นใส (9) และแผ่นใสรูป (6)

3. ครูอธิบายถึงการหาค่า  $P(x', y')$  จุดในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  เมื่อเรารหาค่า  $\theta$  ที่ใช้ในการหมุน และหาค่า  $P(x, y)$  จุดในระบบแกนพิกัด  $xy$  จากตัวอย่างที่ 3 โดยแผ่นใส (10) และแผ่นใสรูป (7)

4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 3 ข้อ 1, 2

5. ครูอธิบายถึงการหาสมการในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  เมื่อกำหนดสมการในระบบแกนพิกัด  $xy$  และมุม  $\theta$  ที่ใช้ในการหมุนให้ จากตัวอย่างที่ 4 โดยแผ่นใส (11) และ (12) แผ่นใสรูป (6)

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 3

7. ครูและนักเรียนช่วยกันทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 3 ข้อ 4 ที่แสดงถึงการหาสมการในระบบแกนพิกัด  $xy$  เมื่อกำหนดสมการในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  และมุม  $\theta$  ที่ใช้ในการหมุน

8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ระหว่าง  $x, y$  กับ  $x', y'$

9. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 เป็นการบ้าน

### สื่อการสอน

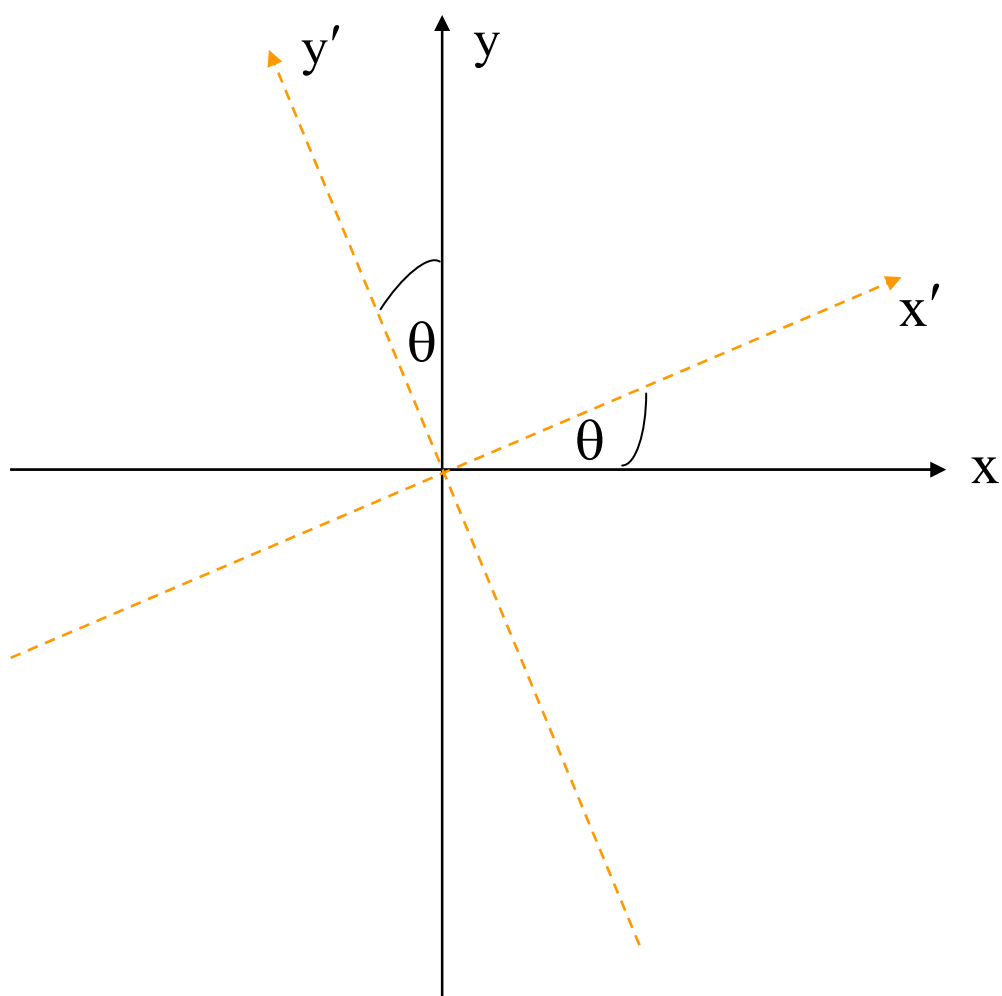
1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 3
2. แผ่นใส (9) , (10) , (11) และ (12)
3. แผ่นใสรูป (4) , (5) , (6) , (7) , (8)

### การวัดผล

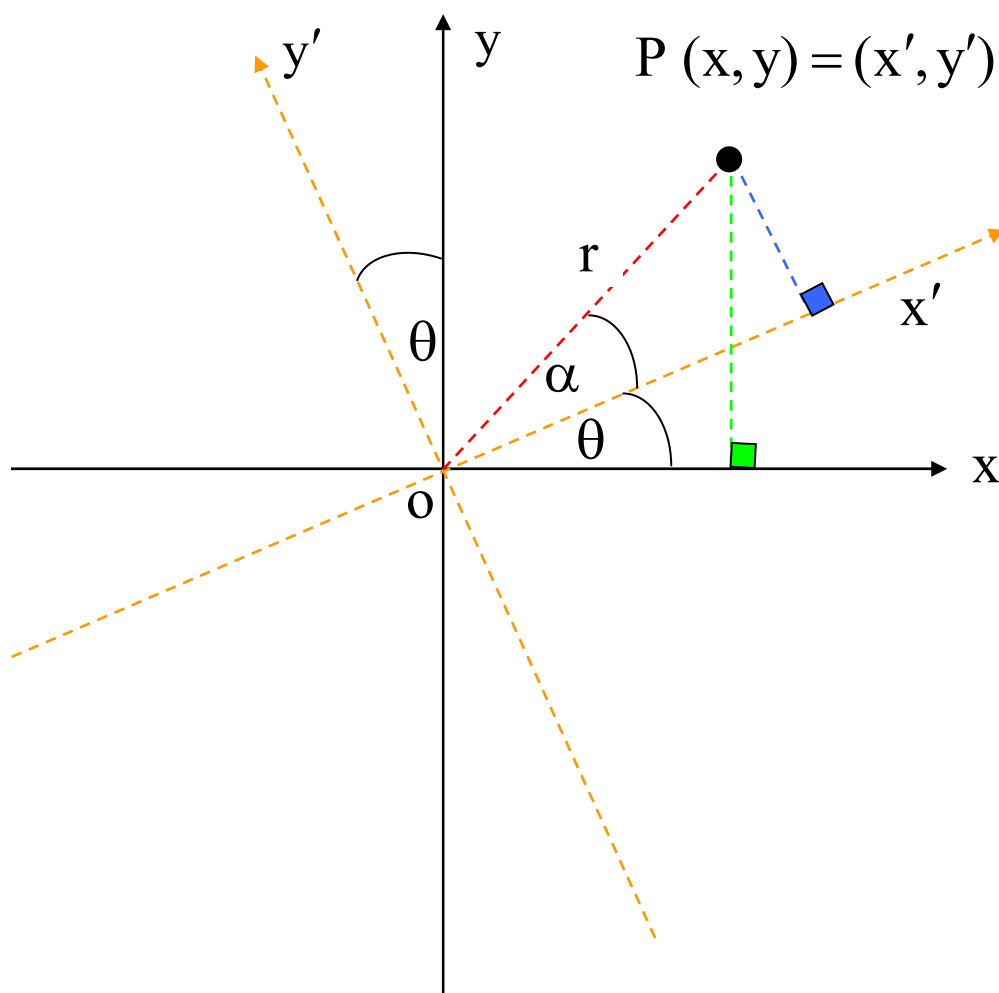
1. การถาม – ตอบ ในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 2
3. การทำแบบฝึกหัดที่ 1

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 3 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด



រូប ក



រូប ២

จากรูปให้  $r$  แทนระยะทางจากจุด  $O$  ถึงจุด  $P$  จะได้  $r$  ทำมุม  $\alpha$  กับแกน  $X'$  และทำมุม  $(\theta + \alpha)$  กับแกน  $X$  พบว่า

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \sin \alpha$$

$$x = r \cos (\theta + \alpha), \quad y = r \sin (\theta + \alpha)$$

ดังนั้น จาก  $x = r \cos (\theta + \alpha)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= r (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) \\ &= r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ &= (r \cos \alpha) \cos \theta - (r \sin \alpha) \sin \theta \\ &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \end{aligned}$$

และ จาก  $y = r \sin (\theta + \alpha)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y &= r (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ &= r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha \\ &= (r \cos \alpha) \sin \theta + (r \sin \alpha) \cos \theta \\ &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

ความสัมพันธ์ตามข้างบน แสดงถึงการหาค่า  $x$  และ  $y$  ในเทอมของ  $x'$  และ

$y'$  สำหรับการหาค่าของ  $x'$  และ  $y'$  ในเทอมของ  $x$  และ  $y$  เราสามารถทำได้โดยการคูณสมการ (1) ด้วย  $\cos \theta$  จะได้

$$x \cos \theta = x' \cos^2 \theta - y' \sin \theta \cos \theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

และคูณสมการ (2) ด้วย  $\sin \theta$  จะได้

$$y \sin \theta = x' \sin^2 \theta + y' \cos \theta \sin \theta \dots\dots (4)$$

นำ (3) + (4) จะได้

$$x \cos \theta + y \sin \theta = x' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = x' \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$$

นั่นคือ

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

ในทำนองเดียวกัน คูณสมการ (1) ด้วย  $\sin \theta$  และคูณสมการ (2) ด้วย  $\cos \theta$  จะได้

$$x \sin \theta = x' \cos \theta \sin \theta - y' \sin^2 \theta \dots\dots (5)$$

และ

$$y \cos \theta = x' \sin \theta \cos \theta + y' \cos^2 \theta \dots\dots (6)$$

นำ (5) - (6) จะได้

$$x \sin \theta - y \cos \theta = -y' (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$x \sin \theta - y \cos \theta = -y' (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

นั่นคือ

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

ดังนั้นถ้าเราทราบค่า  $X$  และ  $Y$  สามารถหาค่าของ  $X'$  และ  $Y'$  ได้ตามความสัมพันธ์

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

## ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ P เป็นจุดบนระนาบที่มีพิกัดเป็น

(2,1) เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  ซึ่งเกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม

$\theta = \frac{\pi}{3}$  จงหาพิกัดของจุด P เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $xy$

วิธีทำ ในที่นี้  $x' = 2$ ,  $y' = 1$  และ  $\theta = \frac{\pi}{3}$  ดังนั้น

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{3} - 1 \sin \frac{\pi}{3}$$

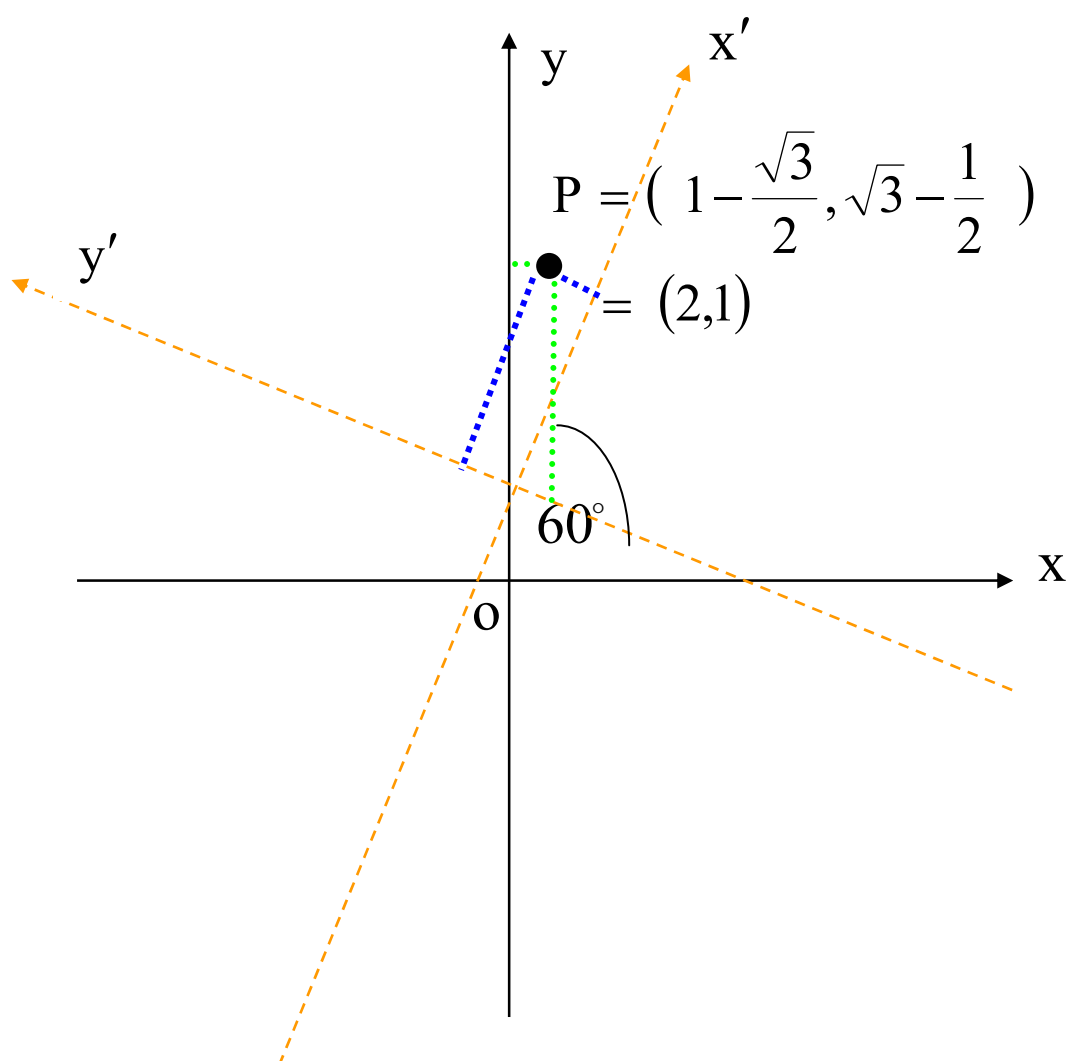
$$= 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{3} + 1 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$

ดังนั้นพิกัดของ P เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $xy$  คือ  $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$



## ตัวอย่างที่ 3

จงหาพิกัดจุด  $P (-2,4)$  เมื่อเทียบกับแกน

พิกัด  $x'y'$  ที่เกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  เป็นมุม  $\theta = 30^\circ$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

เนื่องจาก  $x = -2, y = 4$  และ  $\theta = 30^\circ$  ดังนั้น

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$= -2 \cos 30^\circ + 4 \sin 30^\circ$$

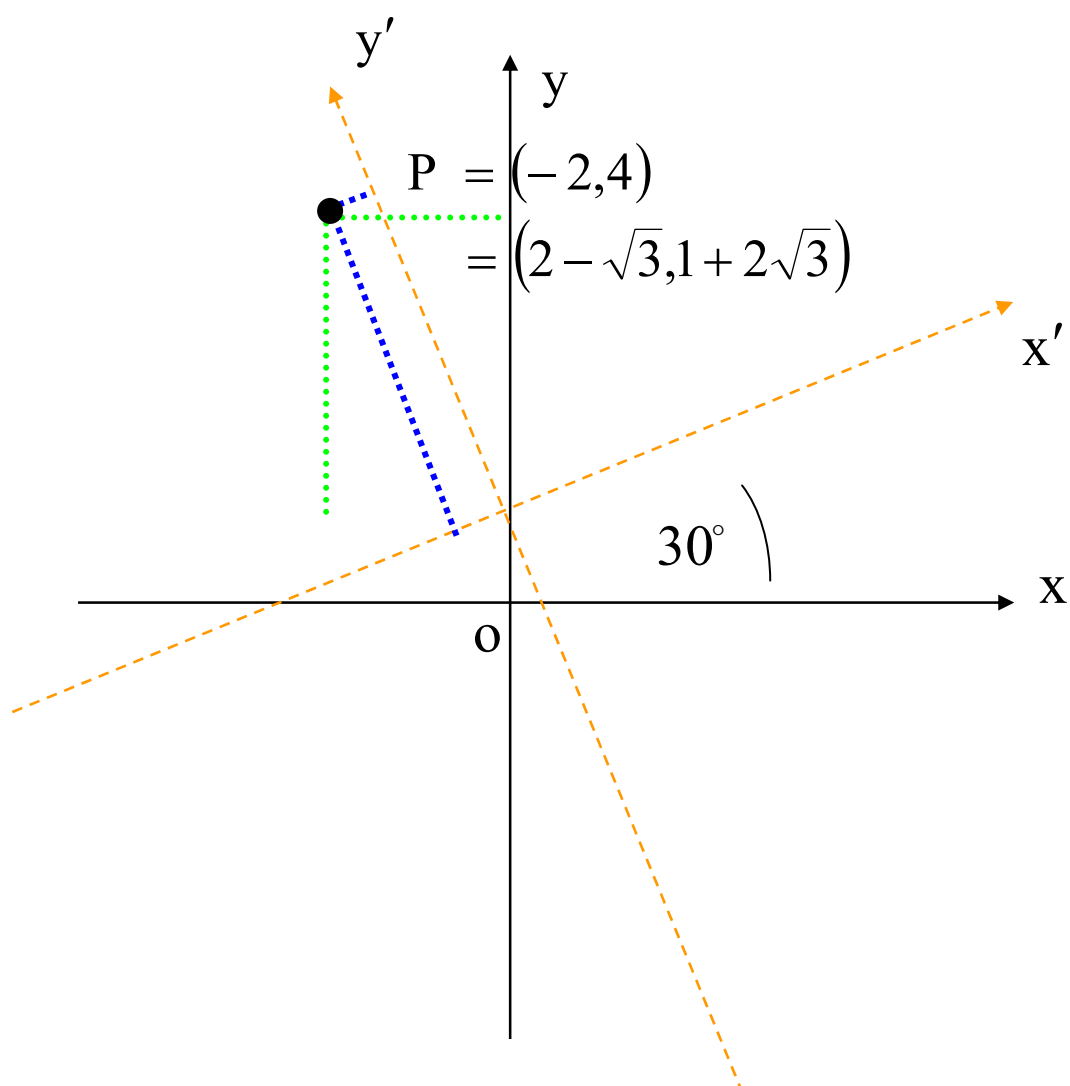
$$= -2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 4 \left( \frac{1}{2} \right) = 2 - \sqrt{3}$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$= 2 \sin 30^\circ + 4 \cos 30^\circ$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} \right) + 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + 2\sqrt{3}$$

ดังนั้นพิกัดของจุด  $P$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  คือ  $(2 - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$



## ตัวอย่างที่ 4

กำหนดภาคตัดกรวยที่มีสมการ

$x^2 - xy + y^2 - 6 = 0$  ถ้าหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $\theta = 45^\circ$  จงหาสมการของภาคตัดกรวยนี้ เมื่อเทียบแกนพิกัดใหม่

วิธีทำ สมมติให้แกนพิกัดใหม่เป็นแกนพิกัด  $x'y'$  ดังนั้น

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

ในที่นี้  $\theta = 45^\circ$  ดังนั้น

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ$$

$$= \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ$$

$$= \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้นเมื่อแทน  $x$  และ  $y$  ในสมการของภาคตัดกรวย จะได้ว่า

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6 = 0$$

หรือ

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2 - x'^2 + y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 6$$

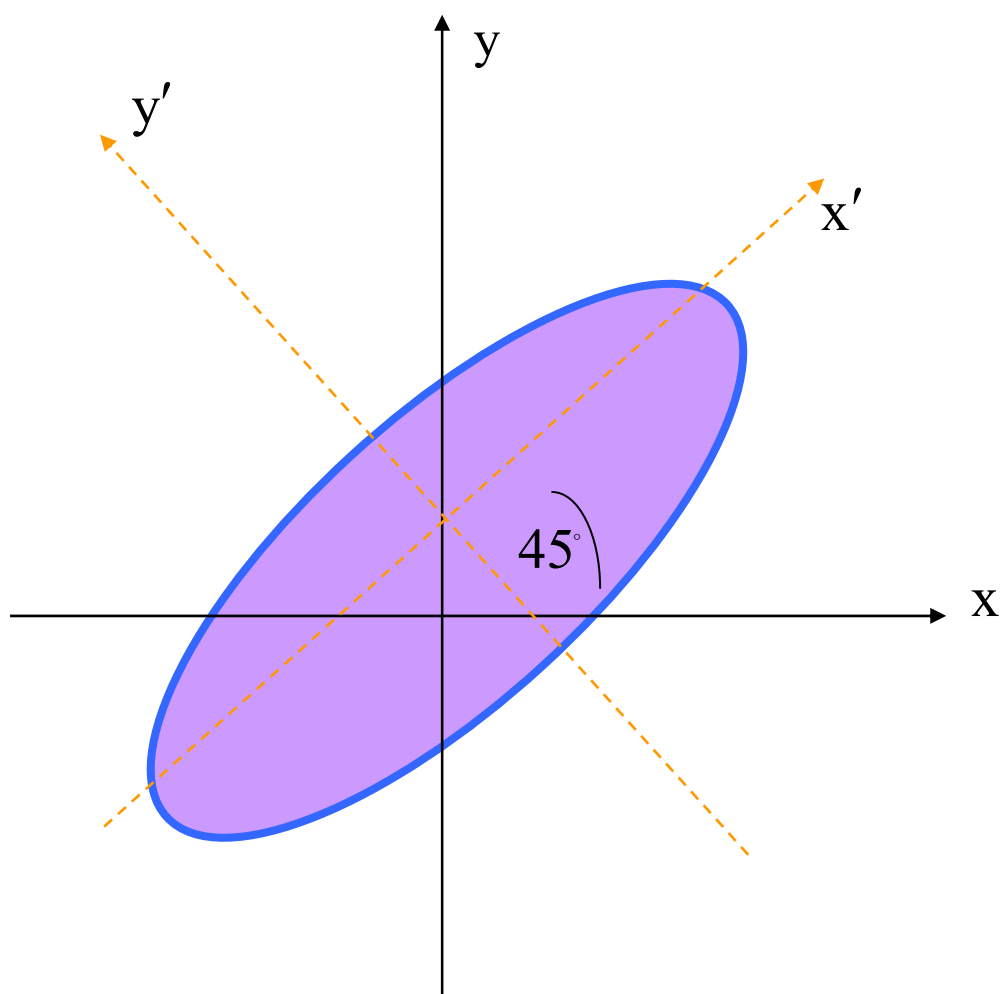
หรือ

$$\frac{x'^2 + 3y'^2}{2} = 6$$

ดังนั้น สมการของภาคตัดกรวยที่กำหนดให้ เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  คือ

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

จะพบว่าสมการดังกล่าว ไม่มีพจน์คูณไขว้ ดังนั้น จึงเป็นสมการของภาคตัดกรวยที่เป็นวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน  $x'$  ดังรูป



**เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 3**  
**การหมุนแกนพิกัด**

จงเติมค่าลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $x, y$  กับ  $x', y'$  มีดังต่อไปนี้

$$x = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$x' = \dots\dots\dots$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

1. พิกัดใหม่ของจุด A ( -6 , -4 ) ถ้าหมุนแกนพิกัดของ  $xy$  ไปเป็นมุม  $45^\circ$  หาได้ดังต่อไปนี้  
วิธีทำ จากความสัมพันธ์

$$x' = \dots\dots\dots$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

เนื่องจาก  $x = \dots\dots\dots$  ,  $y = \dots\dots\dots$  และ  $\theta = \dots\dots\dots$  ดังนั้น

$$x' = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$y' = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

ดังนั้นพิกัดของจุด A เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  คือ  $\dots\dots\dots$

2. พิกัด B (2,1) เป็นพิกัดจุดในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ซึ่งเกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $\theta = \frac{\pi}{6}$  การหาพิกัดของจุด B เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $xy$  ทำได้ดังต่อไปนี้

วิธีทำ ในที่นี้  $x' = \dots\dots\dots$  ,  $y' = \dots\dots\dots$  และ  $\theta = \dots\dots\dots$   
ดังนั้น

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

ดังนั้นพิกัดของ B เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $xy$  คือ  $\dots\dots\dots$

3. กำหนดภาคตัดกรวยที่มีสมการ  $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$  ถ้าหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $\theta = 60^\circ$  การหาสมการของภาคตัดกรวยนี้ เมื่อเทียบแกนพิกัด  $x'y'$  ทำได้ดังนี้

วิธีทำ

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

ในที่นี้  $\theta = 60^\circ$  ดังนั้น

$$x = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

ดังนั้นเมื่อแทน  $x$  และ  $y$  ในสมการของภาคตัดกรวย จะได้ว่า

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

นำ 4 คูณตลอดทั้งสมการ จะได้

หรือ  $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

หรือ  $\dots\dots\dots$

ดังนั้น สมการของภาคตัดกรวยที่กำหนดให้ เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  คือ

$\dots\dots\dots$

4. เมื่อหมุนแกนพิกัด  $xy$  ไปเป็นมุม  $45^\circ$  ได้สมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้เป็น  $3x'^2 + y'^2 = 6$  เราสามารถหาสมการในระบบแกนพิกัด ได้ดังต่อไปนี้

วิธีทำ  $x' = \dots\dots\dots$

$$y' = \dots\dots\dots$$

ในที่นี้  $\theta = 45^\circ$  ดังนั้น

$x =$  .....

$=$  .....

$=$  .....

$y =$  .....

$=$  .....

$=$  .....

ดังนั้นเมื่อแทน  $x'$  และ  $y'$  ในสมการของภาคตัดกรวย จะได้ว่า

.....

.....

.....

นำ 4 คูณตลอดทั้งสมการ จะได้

.....

.....

นำ ..... หารตลอด จะได้

.....

หรือ .....

## แผนการสอนเรื่องที่ 4

หัวเรื่อง การกำจัดพจน์ไขว้

จำนวน 2 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถหามุมที่ใช้ในการแปลงพิกัดของสมการกำลังสองได้
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการเขียนกราฟได้
3. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

### เนื้อหา

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนดสมการกำลังสอง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

เมื่อ  $B \neq 0$  ถ้าหมุนแกนพิกัดเป็นมุม  $\theta$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} \quad \dots\dots\dots (2)$$

แล้วสมการ (1) เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  จะไม่มีพจน์ไขว้ และอยู่ในรูป

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ซึ่งสะดวกต่อการเขียนกราฟ

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนค่ามุมต่างๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ จากเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 4
2. ให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง  $x, y$  กับ  $x', y'$
3. ครูอธิบายบทพิสูจน์ของสูตรในการหามุมที่เหมาะสมในการแปลงพิกัดของทฤษฎีบทที่ 1 โดยแผ่นใส (13) และ (14)
4. ครูอธิบายถึงการหาสมการที่ไม่มีพจน์ไขว้ เมื่อกำหนดสมการให้เพียงอย่างเดียว โดยให้หามุม  $\theta$  ที่เหมาะสมในการหมุนเอง จากทฤษฎีบทที่ 2 พร้อมทั้งวาดกราฟที่เกิดจากการหมุนแกน จากตัวอย่างที่ 5 โดยแผ่นใส (15) และ (16) และแผ่นใสรูป (9)
5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6 จากแผ่นใส (17) และ (18) และแผ่นใสรูป (10)
6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7 จากแผ่นใส (19) และ (20) และแผ่นใสรูป (11)
7. ในนักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 4

8. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดของสมการกำลังสอง
9. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 เป็นการบ้าน

### สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 4
2. แผ่นใส (13) , (14) , (15) , (16) , (17) , (18) , (19) และ (20)
3. แผ่นใสรูป (9) , (10) และ (11)

### การวัดผล

1. การถาม – ตอบ ในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 4
3. การทำแบบฝึกหัดที่ 2

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 4 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

## เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 4

### การหามุม $\theta$ และเขียนกราฟ

ทบทวนค่ามุมต่าง ๆ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

|             | sin | cos | tan | sec | cosec | cot |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-------|-----|
| $0^\circ$   |     |     |     |     |       |     |
| $30^\circ$  |     |     |     |     |       |     |
| $45^\circ$  |     |     |     |     |       |     |
| $60^\circ$  |     |     |     |     |       |     |
| $90^\circ$  |     |     |     |     |       |     |
| $120^\circ$ |     |     |     |     |       |     |
| $135^\circ$ |     |     |     |     |       |     |
| $180^\circ$ |     |     |     |     |       |     |

จงเติมค่าลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

1. จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของ  $2x^2 + \sqrt{3}xy + 3y^2 - 21 = 0$

วิธีทำ ในที่นี้  $A = \dots\dots\dots$ ,  $B = \dots\dots\dots$  และ  $C = \dots\dots\dots$

การวิเคราะห์กราฟ สามารถทำได้ด้วยการเขียนสมการของกราฟนี้ใหม่ ที่เกิดจากการหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$  ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B}$$

$$\cot 2\theta = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\cot 2\theta = \cot \dots\dots\dots$$

$$2\theta = \dots\dots\dots, \theta = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น

$$x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$= x' \cos \dots\dots\dots + y' \sin \dots\dots\dots$$

$$= x' \dots\dots\dots + y' \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$= x' \sin \dots\dots\dots + y' \cos \dots\dots\dots$$

$$= x' \dots\dots\dots + y' \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

แทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ จะได้ว่า

.....

.....

.....

.....

.....

หรือ ..... = 1

..... = 1

ซึ่งเป็นสมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  พบว่ากราฟเป็นรูป..... มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  
 ..... เมื่อเทียบกับแกน  $x'y'$  แกนเอกทับแกน ..... และยาว  
 ..... หน่วย แกนโททับแกน.....และยาว .....หน่วย กราฟของ  
 วงรีนี้มีลักษณะดังรูป

# พิสูจน์

เนื่องจาก

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

แทนความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ในสมการ (1) จะได้สมการในรูปดังนี้

$$\begin{aligned} & A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) \\ & + C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + \\ & E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0 \\ & (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta)x'^2 + \\ & [B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A)\sin \theta \cos \theta]x'y' \\ & + (A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)y'^2 \\ & + (D \cos \theta + E \sin \theta)x' + (-D \sin \theta + E \cos \theta)y' + F = 0 \\ & \text{ให้ } A' = (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta) \\ & B' = [B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A)\sin \theta \cos \theta] \\ & C' = (A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \\ & D' = (D \cos \theta + E \sin \theta) \\ & E' = (-D \sin \theta + E \cos \theta) \\ & F' = F \end{aligned}$$

จะได้สมการในรูป

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

เราจะได้  $B' = 0$  ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A)\sin \theta \cos \theta &= 0 \\ B \cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta &= 0 \\ B \cos 2\theta &= (A - C)\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

# ตัวอย่างที่ 5

จงหาสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ พร้อมทั้งเขียน

กราฟของ  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ หลังจากหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$

วิธีทำ ในที่นี้  $A=7, B=6\sqrt{3}$  และ  $C=13$

การวิเคราะห์กราฟ สามารถทำได้ด้วยการเขียนสมการของกราฟนี้ใหม่ ที่เกิดจากการหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$  ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{A-C}{B} \\ \cot 2\theta &= \frac{7-13}{6\sqrt{3}} = -\frac{6}{6\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot 2\theta &= \cot 60^\circ \\ 2\theta &= 60^\circ, \theta = 30^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ &= x' \cos 30^\circ + y' \sin 30^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ \\ &= x' \frac{1}{2} + y' \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\end{aligned}$$

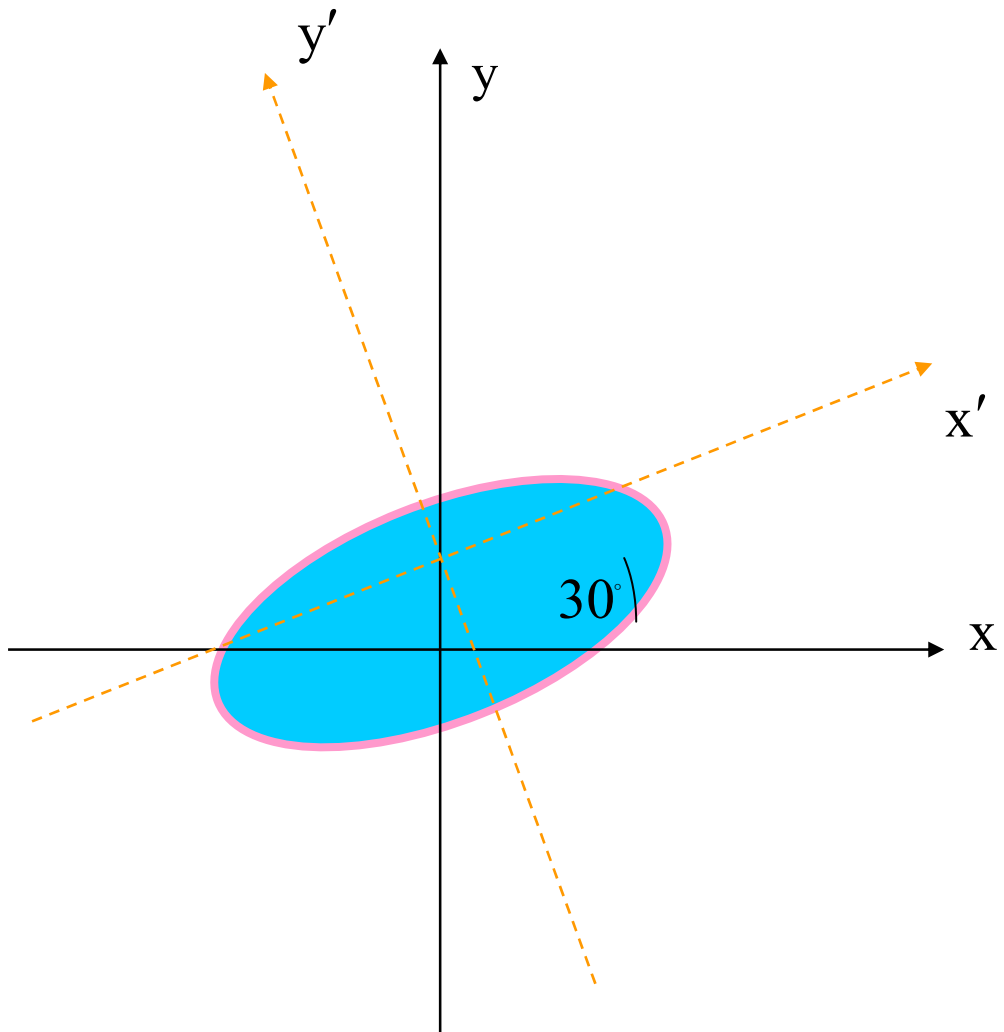
แทนค่า  $X$  และ  $y$  ในสมการ จะได้ว่า

$$7 \left( \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} \right)^2 - 6\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} \right) \left( \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \right) + 13 \left( \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \right)^2 - 16 = 0$$

หรือ

$$\begin{aligned}4(x')^2 + 16(y')^2 &= 16 \\ \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} &= 1\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  พบว่ากราฟเป็นรูปวงรี มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ แกนเอกทับแกน  $x'$  และยาว 4 หน่วย แกนโททับแกน  $y'$  และยาว 2 หน่วย กราฟของวงรีนี้มีลักษณะดังรูป



# ตัวอย่างที่ 6

จงหาสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ พร้อมทั้ง

เขียนกราฟของ  $\sqrt{3}xy + y^2 = 6$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ หลังจากหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$

วิธีทำ ในที่นี้  $A=0, B=\sqrt{3}$  และ  $C=1$

การวิเคราะห์กราฟ สามารถทำได้ด้วยการเขียนสมการของกราฟนี้ใหม่ ที่เกิดจากการหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$  ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{A}{B} \frac{C}{1} \\ \cot 2\theta &= \frac{0}{\sqrt{3}} \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot 2\theta &= \cot 120^\circ \\ 2\theta &= 120^\circ, \theta = 60^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ &= x' \cos 60^\circ + y' \sin 60^\circ \\ &= x' \frac{1}{2} + y' \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin 60^\circ + y' \cos 60^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2}\end{aligned}$$

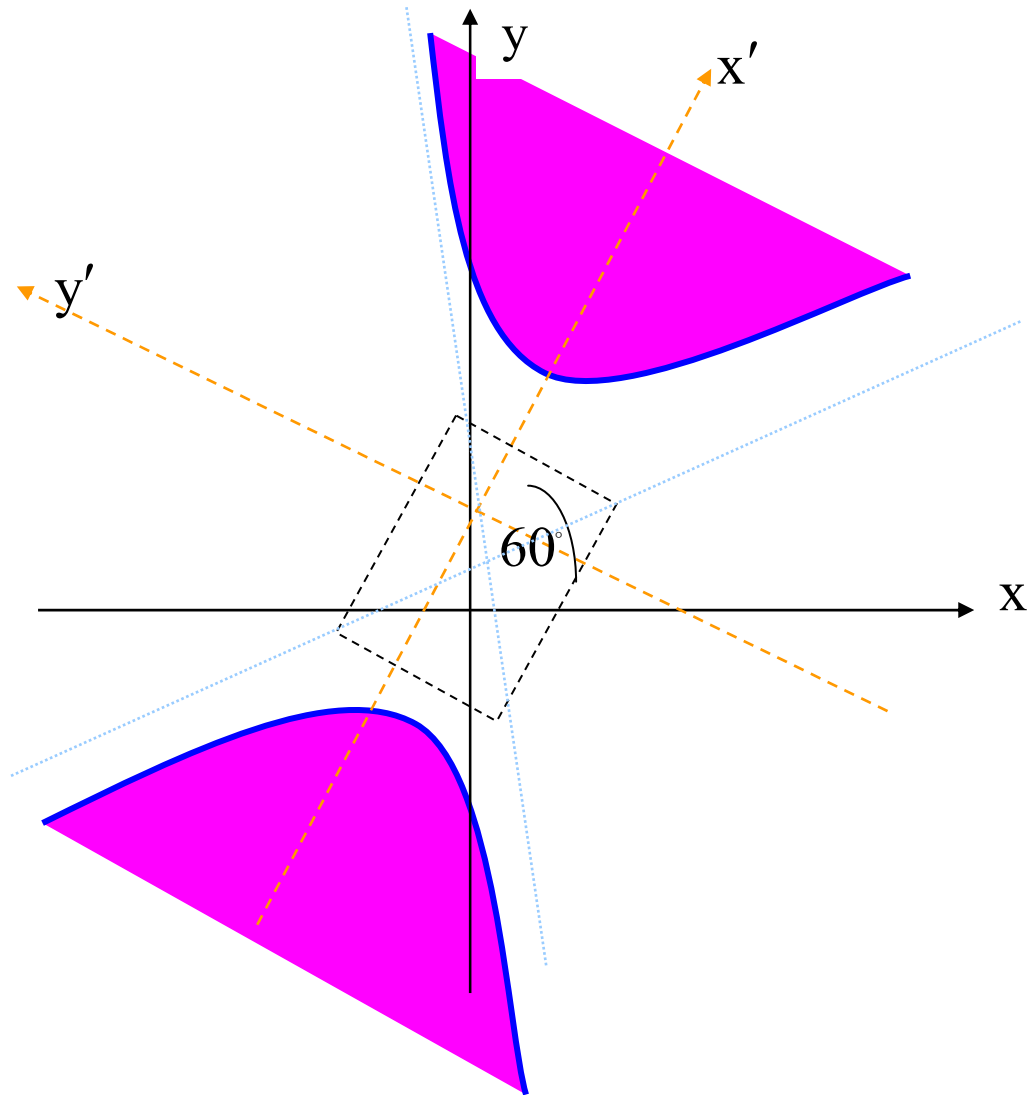
แทนค่า  $X$  และ  $Y$  ในสมการ จะได้ว่า

$$\sqrt{3} \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} + \frac{\sqrt{3}x' + y'}{2} = 6$$

หรือ

$$\begin{aligned}3(x')^2 - (y')^2 &= 12 \\ \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{12} &= 1\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  พบว่ากราฟเป็นรูปไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ แกนตามขวางทับแกน  $x'$  และยาว 4 หน่วย แกนสังยุคทับแกน  $y'$  และยาว  $4\sqrt{3}$  หน่วย กราฟของไฮเพอร์โบลานี้มีลักษณะดังรูป



# ตัวอย่างที่ >

จงหาสมการที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ พร้อมทั้งเขียน

กราฟของ  $x^2 + 2xy + y^2 = x - y$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ หลังจากหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$

วิธีทำ ในที่นี้  $A=1, B=2$  และ  $C=1$

การวิเคราะห์กราฟ สามารถทำได้ด้วยการเขียนสมการของกราฟนี้ใหม่ ที่เกิดจากการหมุนแกนพิกัดเดิมเป็นมุม  $\theta$  ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned}\cot 2\theta &= \frac{A-C}{B} \\ \cot 2\theta &= \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \cot 2\theta &= \cot 90^\circ \\ 2\theta &= 90^\circ, \theta = 45^\circ\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ &= x' \cos 45^\circ + y' \sin 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2}\end{aligned}$$

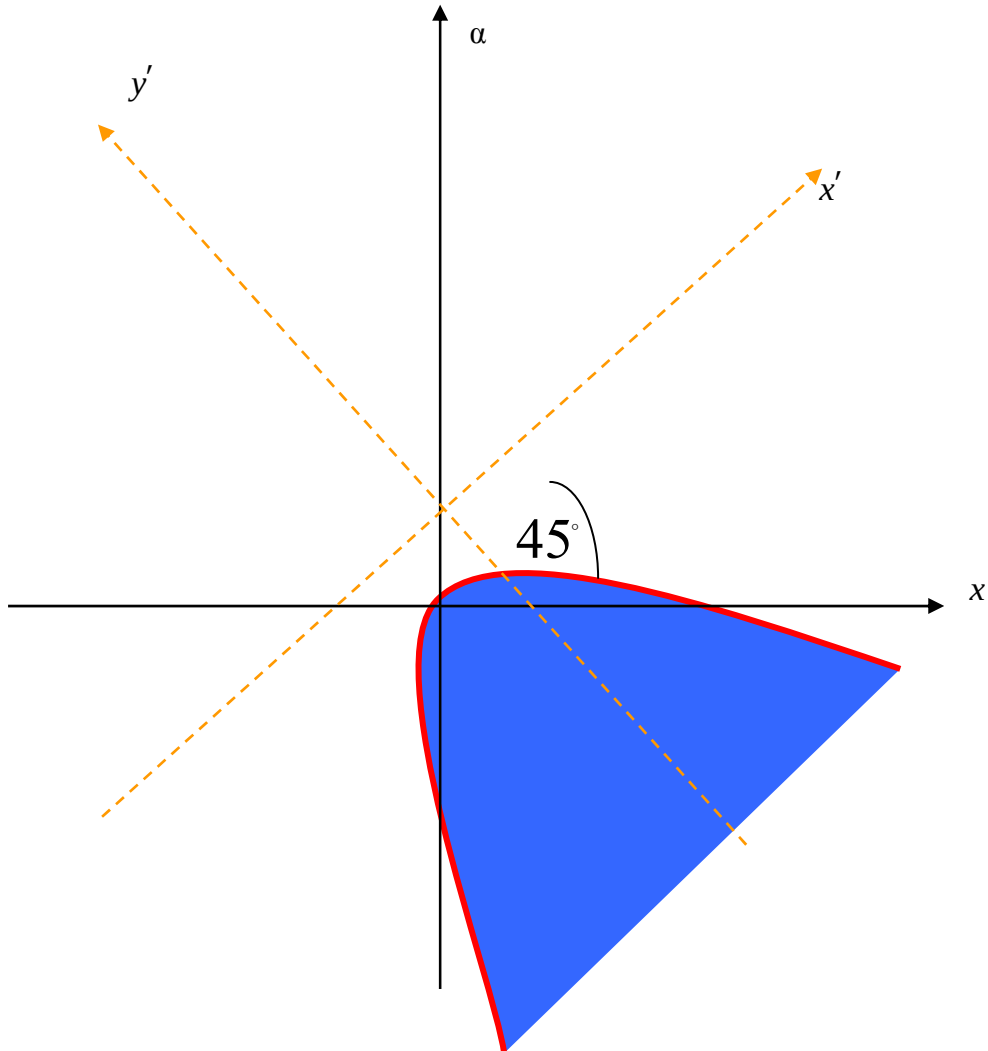
แทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}(x' + y')^2}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} \\ + \frac{\sqrt{2}(x' + y')^2}{2} &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2}\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}2(x')^2 &= \sqrt{2} y' \\ x'^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} y'\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x'y'$  พบว่ากราฟเป็นรูปพาราโบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0)$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ แกนสมมาตรทับแกน  $y'$  เป็นกราฟว่า กราฟของพาราโบลานี้มีลักษณะดังรูป



## แผนการสอนเรื่องที่ 5

หัวเรื่อง ไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จำนวน 1 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามของไฮเพอร์โบลามุมฉากได้
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนพิกัดไปใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลามุมฉากได้

### เนื้อหา

ไฮเพอร์โบลามีความยาวแกนของสังยุคเท่ากับความยาวของแกนตามขวางเราเรียกไฮเพอร์โบลานี้ว่าไฮเพอร์โบลามุมฉาก

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนโดยการถาม – ตอบ เกี่ยวกับไฮเพอร์โบลามุมฉากว่ามีรูปสมการเป็นแบบใดบ้าง และทบทวนการวาดกราฟของไฮเพอร์โบลาวาดกราฟว่าต้องใช้ส่วนประกอบใดบ้างในการวาดกราฟ และทบทวนถึงส่วนประกอบต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลามุมฉาก เช่น แกนสังยุค แกนตามขวาง เส้นกำกับ สีเหลี่ยมกำกับ ฯลฯ
2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8 โดยแผ่นใส (21) แผ่นใสรูป (12)
3. ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาและสรุปจากตัวอย่างที่ 8 เกี่ยวกับสมบัติของไฮเพอร์โบลามุมฉากว่ามีสมบัติอะไรบ้าง
4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 9 โดยแผ่นใส (22) , (23) แผ่นใสรูป (13) ซึ่งเป็นการกำจัดพจน์คูณไขว้โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม แล้วได้กราฟออกมาเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก
5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 10 โดยแผ่นใส (24) , (25) แผ่นใสรูป (14) ซึ่งจะได้กราฟออกมาเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากอีกรูปแบบหนึ่ง
6. ให้นักเรียนหาข้อแตกต่างเปรียบเทียบระหว่าง ไฮเพอร์โบลามุมฉากจากตัวอย่างที่ 9 และ 10 ว่าแตกต่างกันอย่างไร และเหมือนกันอย่างไร
7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 5
8. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3 เป็นการบ้าน

## สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 5
2. แผ่นใส (21) , (22) , (23) , (24) และ (25)
3. แผ่นใสรูป (12) , (13) และ (14)

## การวัดผล

1. การถาม – ตอบ ในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 5
3. การทำแบบฝึกหัดที่ 3

## การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 5 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

# ตัวอย่างที่ 8

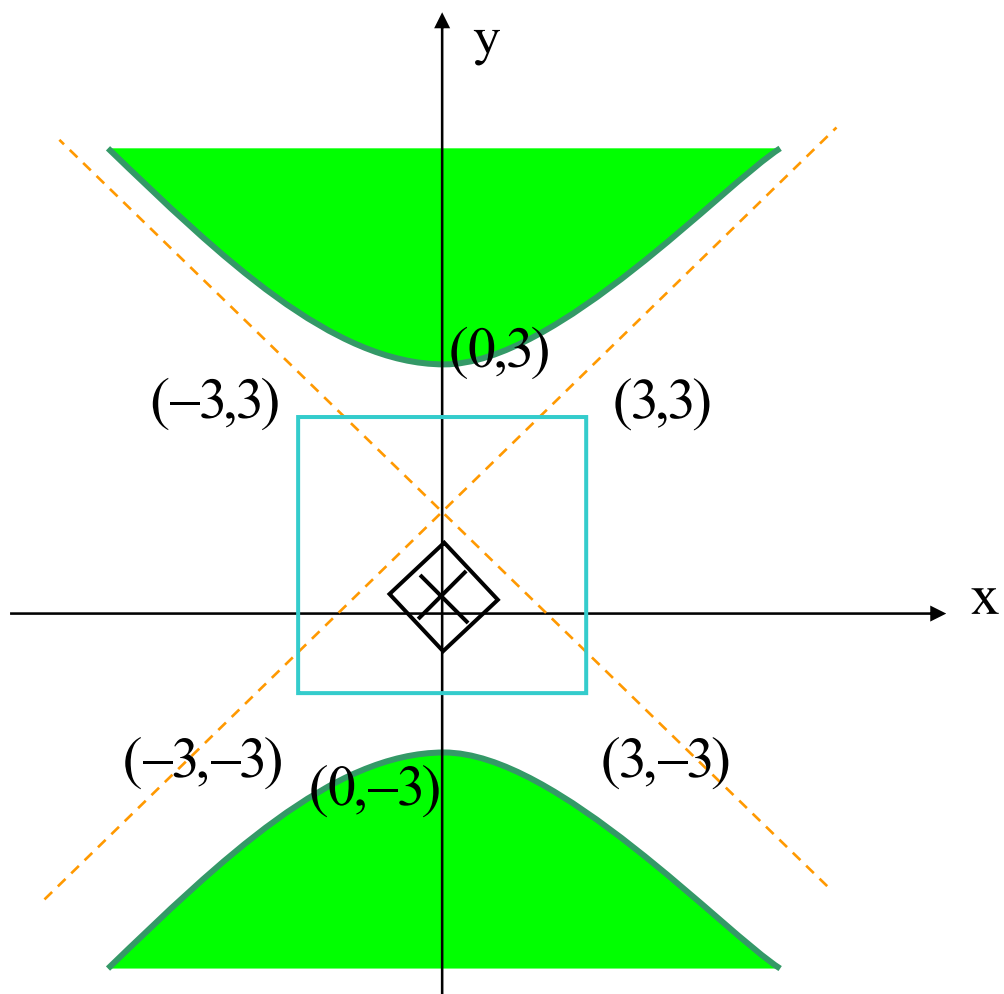
จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา  $y^2 - x^2 = 9$

วิธีทำ จากสมการ  $y^2 - x^2 = 9$  เมื่อเขียนเป็นสมการมาตรฐานจะได้สมการใหม่  
ดังนี้

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$$

จะเห็นว่า  $a = 3$  และ  $b = 3$

ดังนั้นไฮเพอร์โบลานี้เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากมีกราฟดังรูป



## ตัวอย่างที่ 9

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ  $xy = 1$

วิธีทำ ในที่นี้  $A=0$ ,  $B=1$  และ  $C=0$

ดังนั้นถ้าต้องการสมการใหม่ที่ไม่มีพจน์ไขว้ แล้วมุม  $\theta$  ต้องสอดคล้องกับ

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B} \frac{C}{B}$$

$$\cot 2\theta = \frac{0}{1} \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\theta = \cot 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' - y')}{2} \end{aligned}$$

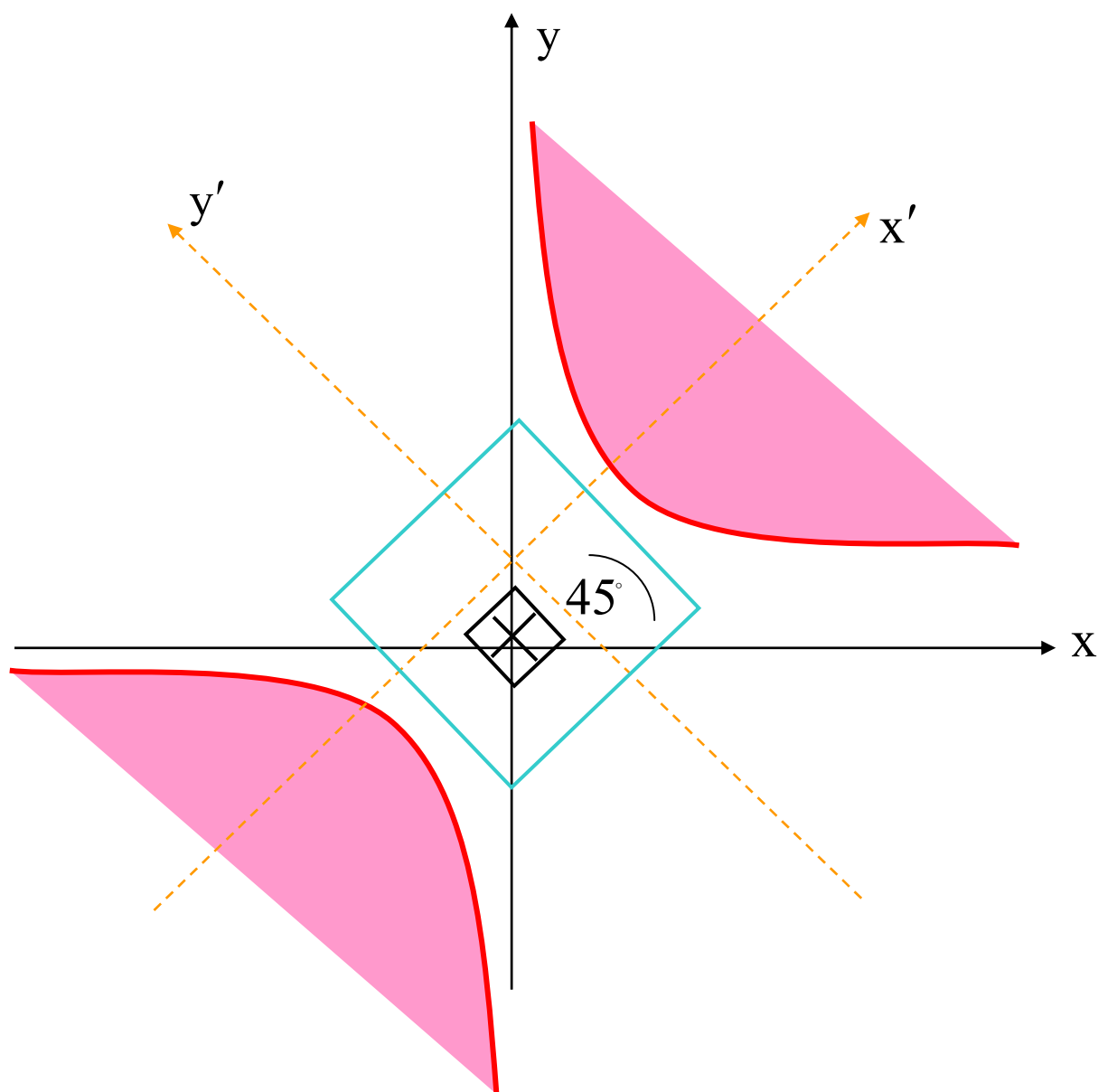
$$\begin{aligned} y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} \end{aligned}$$

แทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ  $xy = 1$  จะได้ว่า

$$\left( \frac{\sqrt{2}(x' - y')}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} \right) = 1$$

หรือ  $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$  ..... (\*)

สมการ (\*) เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ ซึ่งเกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  เป็นมุม  $45^\circ$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ พบว่าไฮเพอร์โบลานี้มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด แกนตามขวางทับแกน  $x'$  ยาว  $2\sqrt{2}$  หน่วย และแกนสังยุคทับแกน  $y'$  ยาว  $2\sqrt{2}$  จะเห็นว่า แกนตามขวางและแกนสังยุคยาวเท่ากัน ดังนั้นกราฟของสมการนี้จึงเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก มีลักษณะกราฟดังรูป



# ตัวอย่างที่ 10

จงวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ  $xy = \frac{9}{2}$

วิธีทำ ในที่นี้  $A=0$ ,  $B=2$  และ  $C=0$

ดังนั้นถ้าต้องการสมการใหม่ที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ แล้วมุม  $\theta$  ต้องสอดคล้องกับ

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B} = \frac{C}{2}$$

$$\cot 2\theta = \frac{0}{2} = 0$$

$$\cot 2\theta = \cot 90^\circ$$

$$2\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ &= x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' - y')}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \\ &= x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} \end{aligned}$$

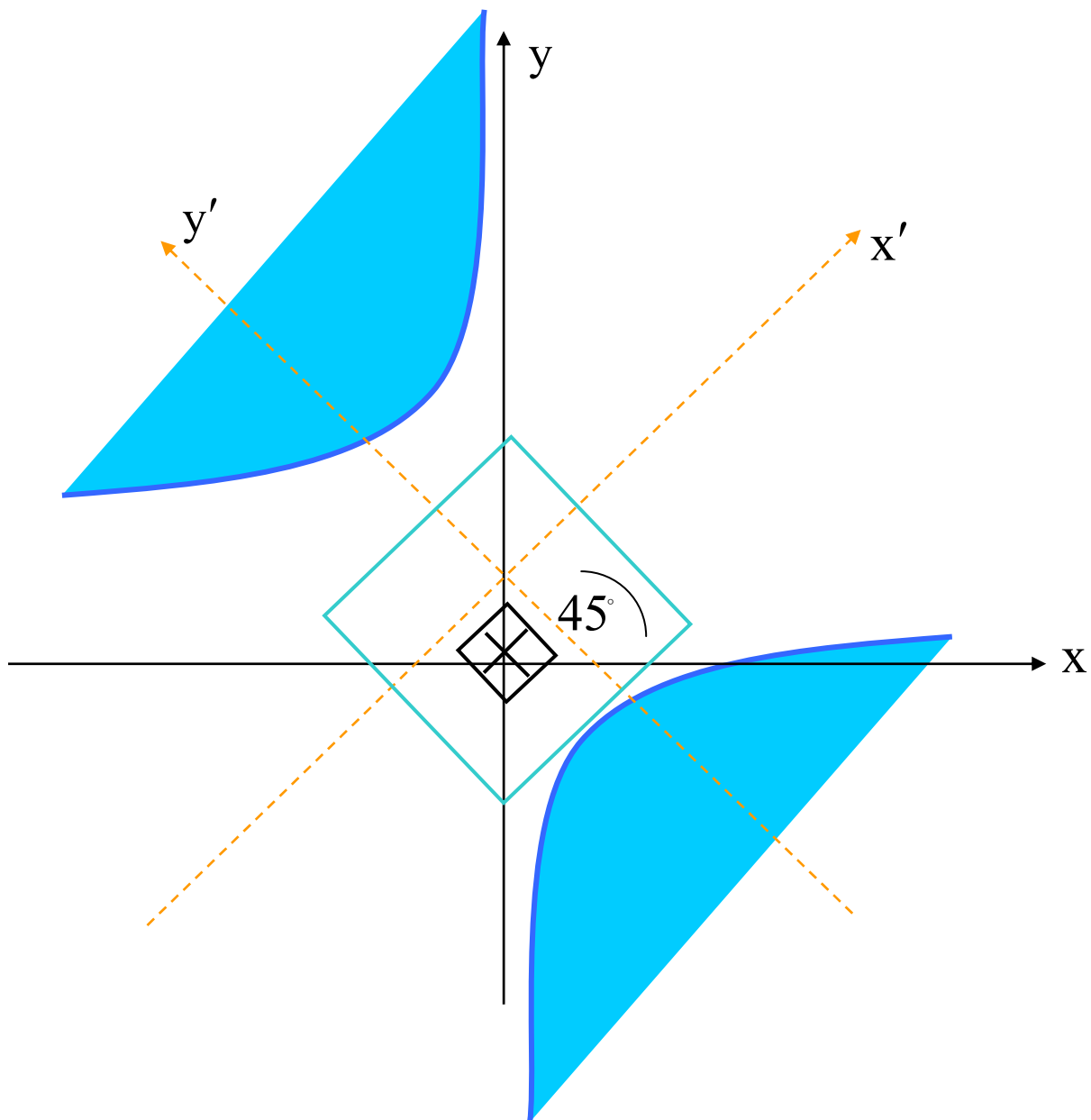
แทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ จะได้ว่า

$$\left( \frac{\sqrt{2}(x' - y')}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2}(x' + y')}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

หรือ  $\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{9} = 1 \dots\dots\dots (**)$

สมการ (\*\*) เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ ซึ่งเกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  เป็นมุม  $45^\circ$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ พบว่าไฮเพอร์โบลานี้มีจุดศูนย์กลาง

ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางทับแกน  $y'$  ยาว 6 หน่วย และแกนสังยุคทับแกน  $x'$  ยาว 6 หน่วย จะเห็นว่า แกนตามขวางและแกนสังยุคยาวเท่ากัน ดังนั้นกราฟของสมการนี้จึงเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก มีลักษณะกราฟดังรูป



## เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 5

## ไฮเพอร์โบลามุมฉาก

จงพิจารณาการเขียนวิเคราะห์และเขียนกราฟของ  $xy + 6 = 0$  แล้วเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์

วิธีทำ ในที่นี้  $A = \dots\dots\dots$ ,  $B = \dots\dots\dots$  และ  $C = \dots\dots\dots$

ดังนั้นถ้าต้องการสมการใหม่ที่ไม่มีพจน์คูณไขว้ แล้วมุม  $\theta$  ต้องสอดคล้องกับ

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B} \frac{C}{B}$$

$$\cot 2\theta = \dots\dots\dots$$

$$\cot 2\theta = \cot \dots\dots\dots$$

$$2\theta = \dots\dots\dots, \theta = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ &= x' \cos \dots\dots\dots - y' \sin \dots\dots\dots \\ &= x' \dots\dots\dots - y' \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ &= x' \sin \dots\dots\dots + y' \cos \dots\dots\dots \\ &= x' \dots\dots\dots + y' \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

แทนค่า  $x$  และ  $y$  ในสมการ  $xy + 6 = 0$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= -6 \\ \dots\dots\dots &= -6 \\ \dots\dots\dots &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{หรือ} \quad \dots\dots\dots = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของ..... เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ ซึ่งเกิดจากการหมุนแกนพิกัด  $xy$  เป็นมุม ..... เมื่อเทียบกับแกนใหม่ พบว่าไฮเพอร์โบลานี้มีจุดศูนย์กลางที่..... แกนตามขวางทับแกน ..... ยาว ..... หน่วย และแกนสังยุคทับแกน ..... ยาว ..... หน่วย จะเห็นว่า แกนตามขวางและแกนสังยุคยาวเท่ากัน ดังนั้นกราฟของสมการนี้จึงเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก มีลักษณะกราฟดังรูป

## แผนการสอนเรื่องที่ 6

หัวเรื่อง การแปลงพิกัดซ้อน

จำนวน 2 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องการแปลงแบบหมุนแกนและเลื่อนแกนพิคัดไปใช้ในการแก้ปัญหาการแปลงพิกัดซ้อนได้

### เนื้อหา

ในการจัดรูปสมการของภาคตัดกรวยให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน บางครั้งการแปลงแบบหมุนแกนพิคัดเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอในการจัดรูปของสมการ ดังนั้นจึงใช้การแปลงแบบเลื่อนแกนพิคัดมาช่วยในการจัดรูปสมการให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน โดยมีการมีการแปลงถึง 2 ขั้นตอน กล่าวคือ แปลงโดยการหมุนแกนและการเลื่อนแกน หรือ แปลงโดยการเลื่อนแกนและหมุนแกน เราเรียกการแปลงที่มีการแปลง 2 แบบในข้อเดียวกันว่า **การแปลงพิกัดซ้อน**

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนความรู้เกี่ยวกับการเลื่อนแกนขนานว่าเป็นการแปลงพิกัดแบบหนึ่งเพื่อกำจัดพจน์กำลังหนึ่ง เพื่อจัดสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เพื่อสะดวกในการพิจารณากราฟและเขียนกราฟ โดยการถาม – ตอบในชั้นเรียน

2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 11 โดยแผ่นใส (26) ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาสมการว่ามีทั้งพจน์คูณไขว้ ( $xy$ ) และพจน์กำลังหนึ่ง ดังนั้นการหมุนแกนเพียงอย่างเดียว หรือการเลื่อนแกนเพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอ ในการแก้ปัญหา ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้การหมุนแกนพิคัดและการเลื่อนแกนพิคัดเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 11 การแปลงพิกัดซ้อนโดยการเลื่อนแกนก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกนโดยใช้แผ่นใส (26) และ (27) แผ่นใสรูป (15) แล้วครูอธิบายการแปลงพิกัดซ้อนโดยการหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกน โดยแผ่นใส (28) และ (29) แผ่นใสรูป (16)

4. ครูถามนักเรียนถึงความแตกต่างระหว่างการแปลงพิกัดซ้อนแบบหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกน กับ การแปลงพิกัดซ้อนแบบเลื่อนแกนก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกน ว่าเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 12 โดยแผ่นใส (30) และ (31) แผ่นใสรูป (17) ซึ่งใช้การแปลงพิกัดโดยหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกน และให้เปรียบเทียบกับแปลงโดยการ

เลื่อนแกนก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกน โดยแผ่นใส (32) แผ่นใสรูป (18) ว่าเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 6
7. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 เป็นการบ้าน

### สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 6
2. แผ่นใส (26) , (27) , (28) , (29) , (30) , (31) และ (32)
3. แผ่นใสรูป (15) , (16) , (17) , (18) , (19) และ (20)

### การวัดผล

1. การถาม – ตอบ ในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 6
3. การทำแบบฝึกหัดที่ 4

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 6 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

# ตัวอย่างที่ 11

จงเขียนกราฟของ  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 โดยการเลื่อนแกนขนานก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกน

ให้  $x = x' + h$  และ  $y = y' + k$  แทนลงในสมการจะได้

$$5(x' + h)^2 + 6(x' + h)(y' + k) + 5(y' + k)^2 - 4(x' + h) + 4(y' + k) - 4 = 0$$

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 - (10h + 6k - 4)x' + (10k + 6h + 4)y' + 5h^2 + 6hk + 5k^2 - 4h + 4k - 4 = 0 \quad (1)$$

$$\text{ให้ } 10h + 6k - 4 = 0 \text{ และ } 10k + 6h + 4 = 0$$

แก้สมการจะได้  $h = 1$ ,  $k = -1$  ดังนั้นเลื่อนแกนขนานโดยให้จุดกำเนิดเลื่อนไปที่จุด

(1, -1)

แทนค่า  $h, k$  ลงในสมการ (1) จะได้ สมการ (2) ในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ดังนี้

$$5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 = 8 \quad (2)$$

หมุนแกน  $x'y'$  ไปเป็นมุม  $\theta$  จะได้แกนพิกัด  $x''y''$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$2\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$$

$$\text{ให้ } x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' - \frac{1}{\sqrt{2}} y''$$

$$\text{และ } y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x'' + \frac{1}{\sqrt{2}} y''$$

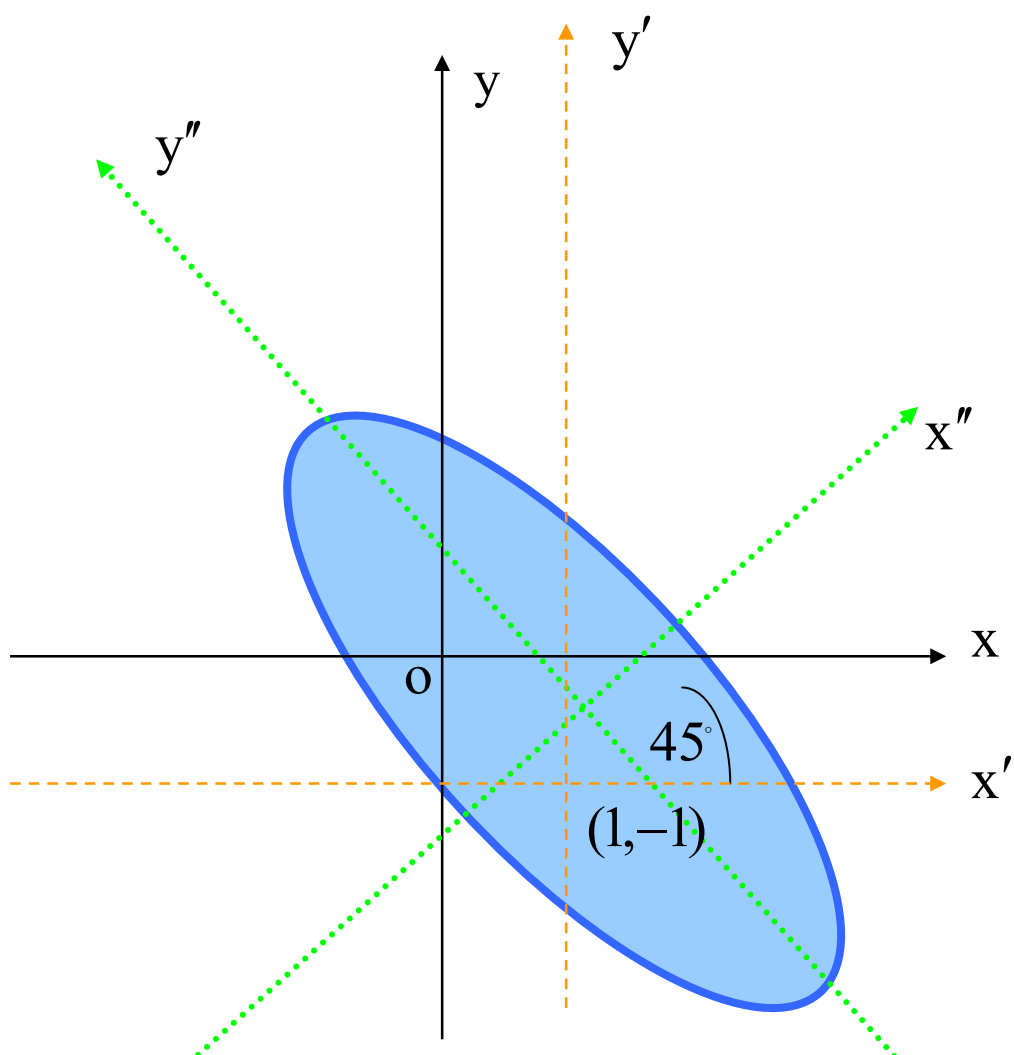
แทนลงในสมการ (2) จะได้ สมการ (3) ในระบบแกนพิกัด  $x''y''$

$$5 \frac{x''}{\sqrt{2}} \frac{y''}{\sqrt{2}} + 6 \frac{x''}{\sqrt{2}} \frac{y''}{\sqrt{2}} + 5 \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}} = 8$$

$$4x''^2 + y''^2 = 4 \quad \text{หรือ}$$

$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{4} = 1 \quad (3)$$

กราฟเป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(1, -1)$  แกนเอกทับแกน  $y''$  และยาว 4 หน่วย แกนโทขนานแกน  $x''$  และยาว 2 หน่วย วงรีนี้มีลักษณะดังภาพ



วิธีที่ 2 โดยวิธีการหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกนขนาน

ทำได้โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม  $\theta$

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B} \frac{C}{6} = \frac{5}{6} \frac{5}{6} = 0$$

$$2\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$$

$$\text{ให้ } x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$\text{และ } y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

แทนลงในสมการ  $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

จะได้

$$5 \frac{x'^2}{2} - 6 \frac{x'y'}{2} + 5 \frac{y'^2}{2} - 4 \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} + 4 \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} - 4 = 0$$

จะได้

$$8x'^2 + 2y'^2 + 4\sqrt{2}y' - 4 = 0 \quad 8x'^2 + 2(y'^2 + 2\sqrt{2}y' + (\sqrt{2})^2) = 4 + 4$$

$$8x'^2 + 2(y' + \sqrt{2})^2 = 8$$

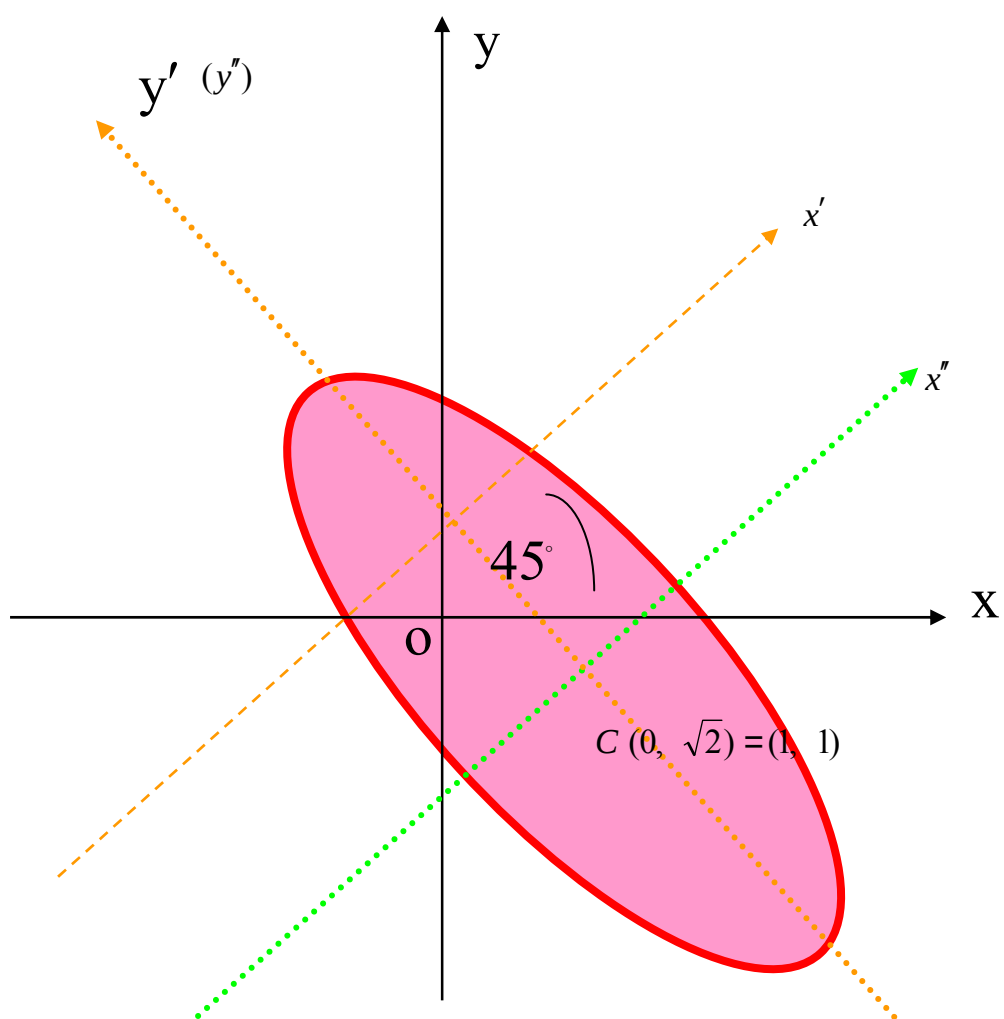
$$\frac{x'^2}{1} + \frac{(y' + \sqrt{2})^2}{4} = 1$$

$$\text{ให้ } x' = x'' \text{ และ } y' + \sqrt{2} = y''$$

นั่นคือ เลื่อนแกนขนานไปที่  $C(0, \sqrt{2})$  ซึ่งอยู่ใน

ระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ( หรือ จุด  $P(1, -1)$  ในระบบแกนพิกัด  $xy$  ) จะได้ สมการใหม่ใน

ระนาบ  $x''y''$  ดังนี้  $\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{4} = 1$  วงรีนี้มีลักษณะดังกราฟ



# ตัวอย่างที่ 12

จงเขียนกราฟของ  $xy - 2y - 1 = 0$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 โดยการหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกน

ทำได้โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม  $\theta$

$$\cot 2\theta = \frac{A}{B} \frac{C}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

$$2\theta = 90^\circ, \theta = 45^\circ$$

$$\text{ให้ } x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

$$\text{และ } y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'$$

แทนค่า  $X$  และ  $Y$  ลงในสมการจะได้ว่า

$$\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} - 2 \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} - 1 = 0$$

$$x'^2 - y'^2 - 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 2 = 0$$

$$\left( x'^2 - 2\sqrt{2}x' + (\sqrt{2})^2 \right) - \left( y'^2 + 2\sqrt{2}y' + (\sqrt{2})^2 \right) = 2 - 2 + 2$$

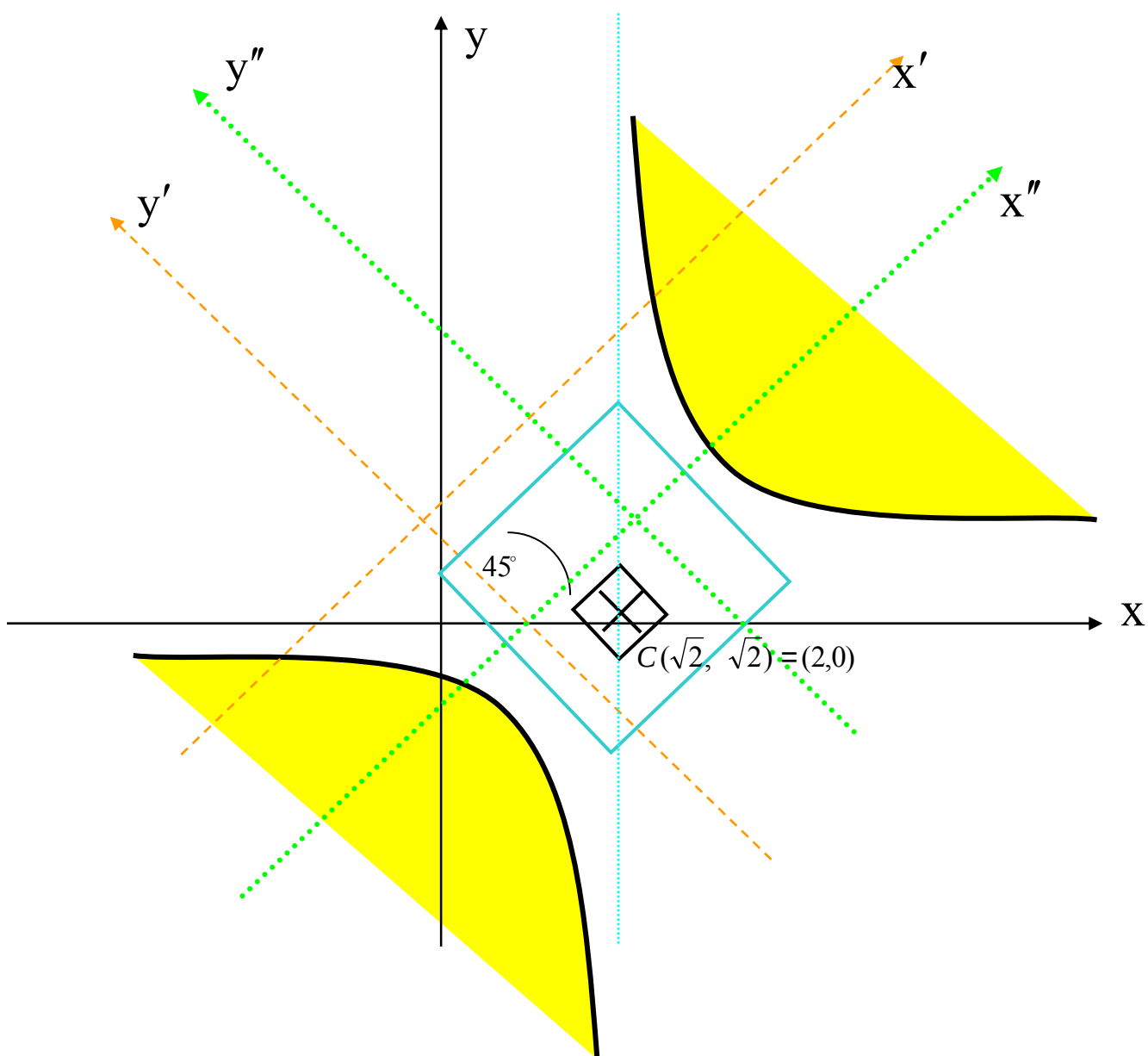
$$\left( x' - \sqrt{2} \right)^2 - \left( y' + \sqrt{2} \right)^2 = 2$$

$$\text{หรือ } \frac{\left( x' - \sqrt{2} \right)^2}{2} - \frac{\left( y' + \sqrt{2} \right)^2}{2} = 1$$

เลื่อนแกนขนานไปที่  $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x''y''$  (หรือ จุด  $C(2,0)$  ในระบบแกนพิกัด  $xy$ ) จะได้สมการใหม่เป็น

$$\frac{(x'')^2}{2} - \frac{(y'')^2}{2} = 1$$

ซึ่งสมการที่ได้นี้จะเป็นสมการของไฮเพอร์โบลามุมฉาก มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(2,0)$  มีแกนตามขวางและแกนสังยุคยาวเท่ากันและเท่ากับ  $2\sqrt{2}$  และมีแกนตามขวางทับแกน  $x''$  และแกนสังยุคทับแกน  $y''$  กราฟมีลักษณะดังรูป



**วิธีที่ 2** โดยการเลื่อนแกนขนานก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกน

$$\text{จากสมการ } xy^2 - 2y - 1 = 0$$

$$y(x^2 - 2) = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{สมมติให้ } x' = x - 2$$

$$y' = y$$

การให้  $x' = x - 2$  และ  $y' = y$  เป็นการเลื่อนแกนพิกัด โดยให้จุดกำเนิดเลื่อนจากจุด (0,0) ไปยังจุด (2,0) ดังนั้นสมการใหม่เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่จะได้เป็น

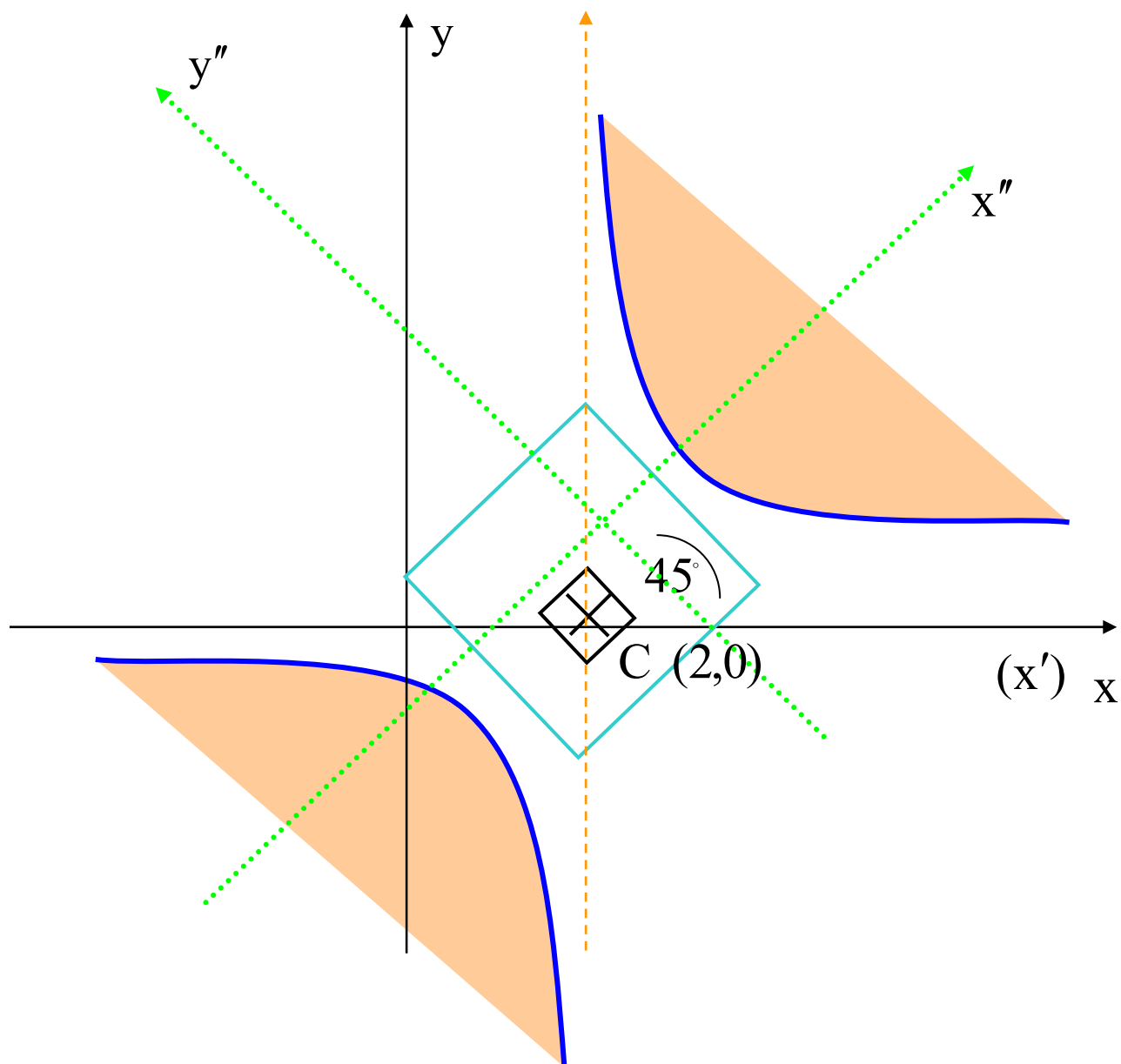
$$x'y' = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

จากตัวอย่างที่ 9 ถ้าใช้การแปลงแบบหมุนแกนพิกัดกับสมการ (2) จะได้สมการในรูป

$$\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1$$

ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลามุมฉากมีลักษณะกราฟดังรูป

$y'$



**เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 6**  
**การแปลงพิกัดซ้อน**

จงพิจารณาการเขียนวิเคราะห์และเขียนกราฟของสมการ

1.  $x^2 + 3xy + y^2 - 8x + 8y = 0$

**วิธีทำ**

**วิธีที่ 1** โดยการเลื่อนแกนขนานก่อนแล้วตามด้วยการหมุนแกน

ให้  $x = x' + h$  และ  $y = y' + k$  แทนลงในสมการจะได้

$$(x' + h)^2 + 3(x' + h)(y' + k) + (y' + k)^2 - 8(x' + h) + 8(y' + k) = 0$$

.....  
.....  
.....

(1)

ให้ ..... = 0 และ ..... = 0

แก้สมการจะได้  $h = \dots\dots\dots$ ,  $k = \dots\dots\dots$  ดังนั้นเลื่อนแกนขนานโดยให้จุด

กำเนิดเลื่อนไปที่จุด .....

แทนค่า  $h, k$  ลงในสมการ (1) จะได้ สมการ (2) ในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ดังนี้

..... (2)

หมุนแกน  $x'y'$  ไปเป็นมุม  $\theta$  จะได้แกนพิกัด  $x''y''$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$2\theta = \dots\dots\dots, \theta = \dots\dots\dots$$

ให้  $x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta = \dots\dots\dots x'' - \dots\dots\dots y''$

และ  $y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta = \dots\dots\dots x'' + \dots\dots\dots y''$

แทนลงในสมการ (2) จะได้ สมการ (3) ในระบบแกนพิกัด  $x''y''$

.....  
.....  
.....

หรือ ..... (3)

ซึ่งมีกราฟเป็น.....มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ ..... แกนตามขวางทับ

แกน ..... และยาว ..... หน่วย แกนสัจยุคทับแกน ..... และยาว .....

หน่วย มีลักษณะดังภาพ

**วิธีที่ 2** โดยวิธีการหมุนแกนก่อนแล้วตามด้วยการเลื่อนแกนขนาน

ทำได้โดยการหมุนแกนไปเป็นมุม  $\theta$  ,  $\cot 2\theta = \frac{A}{B} \frac{C}{B} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$$2\theta = \dots\dots\dots , \theta = \dots\dots\dots$$

ให้  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \dots\dots\dots x' - \dots\dots\dots y'$

และ  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \dots\dots\dots x' + \dots\dots\dots y'$

แทนลงในสมการ (1) จะได้

.....  
 .....  
 .....

จะได้

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

ให้  $\dots\dots\dots = x''$  และ  $\dots\dots\dots = y''$

นั่นคือ เลื่อนแกนขนานไปที่ C..... ซึ่งอยู่ในระบบแกนพิกัด  $x'y'$  ( หรือ จุด P  
 ..... ในระบบแกนพิกัด  $xy$  ) จะได้ สมการใหม่ในระนาบ  $x''y''$  ดังนี้

..... มีลักษณะดังกราฟ

2. จงเขียนกราฟของ  $xy - 4x - 2y = 0$

วิธีทำ

ทำโดยการหมุนแกนไปเป็นมุม  $\theta$  ,  $\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$2\theta = \dots\dots\dots$  ,  $\theta = \dots\dots\dots$

ให้  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \dots\dots\dots x' - \dots\dots\dots y'$

และ  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \dots\dots\dots x' + \dots\dots\dots y'$

แทนค่า  $x$  และ  $y$  ลงในสมการจะได้ว่า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เลื่อนแกนขนานไปที่  $C$  ..... เมื่อเทียบกับแกนพิกัด  $x''y''$  ( หรือ จุด  $C$  ..... ในระบบแกนพิกัด  $xy$  ) จะได้สมการใหม่เป็น

.....

ซึ่งสมการที่ได้นี้จะเป็สมการของไฮเพอร์โบลามุมฉาก มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ ..... มีแกนตามขวางและแกนสัณยุคยาวเท่ากันและเท่ากับ ..... หน่วย และมีแกนตามขวางทับแกน ..... และแกนสัณยุคทับแกน ..... กราฟมีลักษณะดังรูป

## แผนการสอนเรื่องที่ 7

หัวเรื่อง การใช้ค่าจำแนกพิจารณากราฟ

จำนวน 1 คาบ

### จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักเรียนสามารถพิจารณากราฟของสมการกำลังสองโดยใช้ค่าจำแนกได้

### เนื้อหา

**ทฤษฎีบทที่ 2** กำหนดสมการกำลังสองในรูป

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. ถ้า  $B^2 - 4AC < 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นวงกลม หรือวงรี หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟ
2. ถ้า  $B^2 - 4AC > 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงคู่หนึ่งที่ตัดกัน
3. ถ้า  $B^2 - 4AC = 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงหนึ่งเส้นหรือเส้นตรงหนึ่งคู่ที่ขนานกัน หรือไม่มีกราฟ

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนการแปลงพิกัดแบบหมุนแกน จากตัวอย่างที่ผ่านมาว่าสมการภาคตัดกรวยมีกราฟเป็นรูปอะไรบ้าง เช่นตัวอย่างที่ 5 , 6 , 7 , 9 และ 10

2. ครูอธิบายทฤษฎีบทที่ 2 โดยใช้แผ่นใส (33) ซึ่งมีดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 2** กำหนดสมการกำลังสองในรูป

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. ถ้า  $B^2 - 4AC < 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นวงกลม หรือวงรี หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟ
  2. ถ้า  $B^2 - 4AC > 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงคู่หนึ่งที่ตัดกัน
  3. ถ้า  $B^2 - 4AC = 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงหนึ่งเส้นหรือเส้นตรงหนึ่งคู่ที่ขนานกัน หรือไม่มีกราฟ
3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 13 โดยใช้แผ่นใส (34) และ (35)
  4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 7

5. ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาสมการของตัวอย่างที่ 5 , 6 , 7 , 9 และ 10 ว่าเป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2 หรือไม่
6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 5 เป็นการบ้าน

### สื่อการสอน

1. เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 7
2. แผ่นใส (33) , (34) และ (35)

### การวัดผล

1. การถาม – ตอบ ในชั้นเรียน
2. การตรวจเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 7
3. การทำแบบฝึกหัดที่ 5

### การประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดในเอกสารประกอบการสอนชุดที่ 7 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 5 ได้ถูกต้องตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของนักเรียนทั้งหมด

# ทฤษฎีบทที่ 2

กำหนดสมการกำลังสองในรูป

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. ถ้า  $B^2 - 4AC < 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นวงกลม หรือวงรี หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟ
1. ถ้า  $B^2 - 4AC > 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงคู่หนึ่งที่ตัดกัน
3. ถ้า  $B^2 - 4AC = 0$  แล้ว กราฟของสมการ จะเป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงหนึ่งเส้น หรือเส้นตรงหนึ่งคู่ที่ขนานกัน หรือไม่มีกราฟ

# ตัวอย่างที่ 13

จงใช้ค่าจำแนกบอกลักษณะกราฟของสมการต่อไปนี้

$$1) \quad 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

$$2) \quad xy = 1$$

$$3) \quad 8x^2 + 2xy + 3y^2 - 10x + 5 = 0$$

วิธีทำ

$$1) \text{ จาก } 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$$

มี  $A = 7, B = 6\sqrt{3}, C = 13$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (6\sqrt{3})^2 - 4(7)(13) \\ &= 108 - 364 = -256 < 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า กราฟของสมการที่กำหนดให้เป็นวงกลม หรือวงรี หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟ

$$2) \text{ จาก } xy = 1$$

มี  $A = 0, B = 1, C = 0$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (1)^2 - 4(0)(0) \\ &= 1 - 0 = 1 > 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า กราฟของสมการที่กำหนดให้เป็นไฮเพอร์โบลา หรือเส้นตรงหนึ่งคู่ที่ตัดกัน

$$3) \text{ จาก } 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 52x + 26y + 81 = 0$$

มี  $A = 4, B = -12, C = 9$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= (-12)^2 - 4(4)(9) \\ &= 144 - 144 = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า กราฟของสมการที่กำหนดให้เป็นพาราโบลา หรือเส้นตรงหนึ่งเส้น หรือเส้นตรงคู่หนึ่งที่ขนานกัน หรือไม่มีกราฟ

เอกสารประกอบการสอน ชุดที่ 7  
การใช้ค่าจำแนกพิจารณากราฟ

จงใช้ค่าจำแนกบอกลักษณะกราฟของสมการต่อไปนี้

1. จาก  $x^2 + 4xy - 4y^2 + x = 1$

มี  $A = \dots\dots\dots, B = \dots\dots\dots, C = \dots\dots\dots$  ดังนั้น

$B^2 - 4AC = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2  $\dots\dots\dots$

2. จาก  $x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x + y - 4 = 0$

มี  $A = \dots\dots\dots, B = \dots\dots\dots, C = \dots\dots\dots$  ดังนั้น

$B^2 - 4AC = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2  $\dots\dots\dots$

3. จาก  $2xy - x + y + 3 = 0$

มี  $A = \dots\dots\dots, B = \dots\dots\dots, C = \dots\dots\dots$  ดังนั้น

$B^2 - 4AC = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2  $\dots\dots\dots$

4. จาก  $2x^2 - 4xy + 8y^2 + 7 = 0$

มี  $A = \dots\dots\dots, B = \dots\dots\dots, C = \dots\dots\dots$  ดังนั้น

$B^2 - 4AC = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2  $\dots\dots\dots$