

การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะคิดและความสนใจ  
ในวิชาเรียน จากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธี ในทฤษฎีการเรียนรู้  
เพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) วิชาคณิตศาสตร์  
เรื่องโพลีโนเมียล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญาณีพนธ์

ของ

สาขา ศึกษาศาสตร์

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ  
สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

1 ก.ย. 2525

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร  
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร  
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต  
กุมภาพันธ์ 2525

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

90589



ปริญญานิพนธ์นี้ ได้รับทุน "ภูมิพล" เป็นทุนช่วยเหลือในการวิจัย  
ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและสำนึกในพระมหากรุณาธิคุณเป็นล้นพ้น

## ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลืออย่าง  
ดียิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.  
รวีวรรณ อุมตัย ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สำเร็จ บุญเรืองรัตน์  
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. บุญชม ศรีสะอาด ดร. คำรง กิริเจริญ ที่กรุณาให้เอกสารและ  
รายละเอียดที่เป็นประโยชน์ต่อการทำปริญญานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณาจารย์โรงเรียนนารีรัตน์จังหวัด  
แพร่ที่อนุเคราะห์ให้ใช้กลุ่มตัวอย่างและการทดลองเครื่องมือ พร้อมทั้งขอขอบคุณอาจารย์  
จันทร์เพ็ญ เมืองสุวรรณ ที่เป็นผู้ดำเนินการสอนเพื่อการทดลองครั้งนี้

ขอขอบคุณ คุณแม่แสงคำ แกนมณี และ อาจารย์สุมนต์เพ็ชร แกนมณี  
ที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา นอกจากนี้ยังมีบุคคลอีกหลายท่านที่กรุณาให้ความ  
ช่วยเหลือในคานต่างๆ จนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงด้วยดี ผู้วิจัยขอขอบพระคุณไว้  
ณ โอกาสนี้ด้วย

สาทร แกนมณี

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	6
ความสำคัญของการวิจัย	7
ขอบเขตของการวิจัย	7
นิยามศัพท์เฉพาะ	8
2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย	10
ความเป็นมาของทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้	10
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนซ่อมเสริม	14
การวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนซ่อมเสริมและทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้	19
เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้ที่มีต่อทัศนคติและ ความสนใจในวิชาเรียน	23
สมมุติฐานในการวิจัย	26
3 วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	27
กลุ่มตัวอย่าง	27
การดำเนินการทดลอง	28
เนื้อหาวิชาที่ใช้ในการทดลอง	29
ระยะเวลาในการทดลอง	30
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	30
ข้อสังเกตในขณะดำเนินการทดลอง	33
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	35

4 ผลการทดลอง .....	39
เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่าง กลุ่มทดลองแต่ละกลุ่มกับกลุ่มควบคุม .....	40
การเปรียบเทียบคะแนนก่อนและหลังซ่อมเสริม .....	44
อัตราส่วนระหว่างความแตกต่างของตัวกลางเลขคณิตกับค่าเบี่ยงเบน มาตรฐานผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม .....	47
ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน .....	48
ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบทดสอบรวม การเปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมเวลาที่ใช้ในการ ซ่อมเสริม .....	53
เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของทุกกลุ่ม กับรายละเอียดของเวลาที่ใช้ในการสอนซ่อมเสริม .....	57
เปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายในแต่ละกลุ่มทดลองระหว่าง ก่อนและหลังการทดลอง .....	58
เปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการ สอนซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธี .....	59
เปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ ภายในแต่ละกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนและหลังการทดลอง .....	60
เปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการ สอนซ่อมเสริมแตกต่างกัน 3 วิธี .....	61
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ .....	62
การดำเนินการวิจัย .....	62
กลุ่มตัวอย่าง .....	62
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย .....	62

บทที่

หน้า

การคำนวณการทดลอง .....	63
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล .....	64
สรุปผลการวิจัย .....	64
อภิปรายผลการวิจัย .....	65
อภิปรายทั่วไป .....	67
รูปแบบของการจัดการเรียนการสอนแนวใหม่ .....	67
ข้อเสนอแนะ .....	69
บรรณานุกรม .....	70
ภาคผนวก ก. ....	75
ภาคผนวก ข. ....	173

## บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	แสดงจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง .....	27
2	ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ .....	40
3	ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ .....	42
4	การทดสอบความแตกต่างของรายเฉลี่ยระหว่างคูโยวิธีของนิวแมน-คีลส์ .....	43
5	แสดงเปอร์เซ็นต์ของคะแนนการทดสอบย่อยและคะแนนที่เพิ่มขึ้นภายหลังจาก การซ่อมเสริมแล้ว .....	45
6	แสดงอัตราส่วนระหว่างความแตกต่างของตัวกลางเลขคณิตกับค่าเบี่ยงเบน มาตรฐานผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม .....	42
7	แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน ( Co-efficient of Variation $100 S / \bar{X}$ ของกลุ่มทดลองและควบคุมในเนื้อหาแต่ละตอน .....	48
8	แสดงค่าตัวกลางเลขคณิตและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากแบบทดสอบรวม .....	52
9	เปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่เข้าซ่อมเสริมกับรายเฉลี่ยเวลาที่ใช้ซ่อมเสริม	54
10	เปรียบเทียบรายเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ซ่อมเสริมและรายเฉลี่ยของคะแนน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องโพลิโนเมียลคี่กรีสูง .....	57
11	ทดสอบความแตกต่างของคะแนนทัศนคติก่อนการทดลองสอน และภายหลัง การทดลองสอนของแต่ละกลุ่มทดลอง .....	58
12	แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อเปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชา คณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธี .....	59
13	ทดสอบความแตกต่างของคะแนนทัศนคติก่อนการทดลองสอน และภายหลัง การทดลองสอนของแต่ละกลุ่มทดลอง .....	60
14	แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อเปรียบเทียบความสนใจในวิชา คณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธี .....	61

## บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 เปรียบเทียบตัวกลางเลขคณิตระหว่างวิธีสอนซ่อมเสริม 3 วิธี และ กลุ่มควบคุม .....	41
2 แสดงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนและหลังการซ่อมเสริมของเนื้อหา แต่ละตอน .....	46
3 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของคะแนนแต่ละตอน .....	49
4 แสดงจำนวนนักเรียนที่เข้ากับการซ่อมเสริมในเนื้อหาแต่ละตอน .....	55
5 แสดงรายเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ซ่อมเสริมในเนื้อหาแต่ละตอน .....	56
6 แสดงขั้นตอนของรูปแบบการเรียนการสอน .....	68

ภูมิหลัง

การสอนในโรงเรียนตั้งแต่ระดับประถมศึกษาไปจนถึงระดับมหาวิทยาลัยในอดีต และปัจจุบัน แทบทั้งหมดจะเป็นการสอนแบบเป็นกลุ่ม เช่น สอนทีละชั้น ทีละห้อง โดยใช้วิธีสอน วัสดุอุปกรณ์ หรือสื่อการสอนอย่างเดียวกัน แต่เนื่องจากผู้เรียนแต่ละคนมีความแตกต่างกันในความถนัด ทำให้ความสามารถที่จะเข้าใจในเรื่องที่เรียนแตกต่างกัน มีสมาธิแตกต่างกัน ครูผู้สอนก็ดำเนินการสอนคิดต่อกันไปเรื่อย ๆ โดยไม่ได้ทดสอบผลของการสอนในแต่ละหน่วย แต่ละเรื่อง เพื่อดำเนินการปรับปรุงซ่อมเสริมส่วนที่บกพร่อง และปรากฏอยู่เรื่อยมาว่า ในการสอนทุกครั้งจะมีผู้เรียนได้ศึกษาจำนวนหนึ่ง ปานกลางจำนวนหนึ่ง และเรียนอ่อนอีกจำนวนหนึ่ง ตามสภาพสติปัญญาหรือความถนัดก่อนที่จะเข้าเรียนวิชานั้น ๆ

บางครั้งครูผู้สอนถึงกับมีความเชื่อตั้งแต่ก่อนสอนแล้วว่า นักเรียนที่ตนจะสอนในห้องนี้มีคนสามารถเรียนได้กี่ประมาณหนึ่งในสาม เรียนได้ปานกลางประมาณหนึ่งในสาม และอีกประมาณหนึ่งในสามที่เหลือนั้นจะเรียนอ่อนเสมอ (Bloom, 1971 : 47) ทั้งนี้เพราะครูและนักการศึกษาได้ยึดถือเป็นแนวความคิดหลักปฏิบัติสืบต่อกันมาว่า เมื่อมีการเรียนการสอนต้องมีคนสอบตกเสมอ ไม่มีทางแก้ไขได้เลย ยิ่งการวัดผลชนิดอิงกลุ่ม (Norm-Referenced Measurement) ที่เอาคะแนนของนักเรียนมาจัดลำดับและเปรียบเทียบกันว่าคะแนนของใครอยู่เหนือใคร นักเรียนที่ได้คะแนนต่ำก็จะสอบตก แม้ว่าคะแนนของคนที่ดีก็จะแสดงให้เห็นว่าเขาเรียนผ่านครบทุกจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแล้วก็ตาม (กมล ภูประเสริฐ 2520 : 12) และนักเรียนที่สอบตกอยู่เรื่อย ๆ นี้ก็จะมองภาพพจน์ของตนเอง (Self Concept) ว่าเป็นคนไร้ความสามารถที่จะเรียนต่อไปได้ จึงหันกลับไปสร้างจุดเด่นให้แก่ตัวเองในทางลบ เช่น เกเร หรือเป็นอันธพาล เป็นต้น (Bloom, 1971 : 47) วิธีสอบโดยเอาคะแนนมาเปรียบเทียบกันตามที่ใช้อยู่ทั่วไปแบบ

เดิมนั้น ไม่ส่งเสริมให้เด็กส่วนใหญ่รักการเรียนเพิ่มขึ้นเลย เพราะถ้าเด็กส่วนใหญ่รู้สึกว่าถึงอย่างไรคนก็ไม่บรรลุผลสัมฤทธิ์ถึงเช่นคนอื่นได้ ย่อมขาดความพยายามซึ่งไม่เป็นผลดีต่อการศึกษา แต่ในทางตรงกันข้าม หากการเรียนที่ผู้เรียนก็ตระหนักว่าตนเองก็มีความสามารถที่จะสัมฤทธิ์ผลได้เท่ากับผู้อื่น ถ้าได้ใช้ความพยายามและวิธีการต่าง ๆ เขาช่วยแล้วผู้เรียนย่อมจะเกิดความพยายามเพิ่มขึ้น เกิดความมั่นใจในตนเอง และเกิดลักษณะนิสัยการเรียนรู้อัตโนมัติตลอดไป ซึ่งเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญของการจัดการศึกษา (สวัสดิ์ ประทุมราช 2517 : 33)

ดังนั้นเพื่อให้อบรมถึงจุดมุ่งหมายของการสอนที่มุ่งหมายให้ทุกคนสามารถเรียนรู้ได้อย่างรอบรู้ในวิชาที่เรียนนั้น ๆ จึงเกิดแนวคิดการเรียนเพื่อให้เกิดความรอบรู้ (Mastery Learning) เป็นปรัชญาเกี่ยวกับการสอนที่ว่า ภายใต้สภาพของการสอนที่เหมาะสม นักเรียนทุกคนจะสามารถเรียนรู้ให้ได้ดีในสิ่งที่เขาได้รับการสอน (Block, Anderson. 1975 : 1)

กำเนิดของแนวคิดการเรียนเพื่อให้เกิดความรอบรู้ มาจากรูปแบบความคิด (Conceptual Model) ที่เสนอแนะโดย จอห์น บี แครอล (Carrol. 1963 : 723 - 733) ซึ่งมาจากผลของการสังเกตที่ว่า ความถนัดของนักเรียนที่เรียนในวิชาใดวิชาหนึ่ง จะพยากรณ์ระดับผลสัมฤทธิ์ที่เขาสามารถจะเรียนวิชานั้นในเวลาที่กำหนดให้ รูปแบบของการเรียนรู้ของแครอลก็คือ ถ้าให้เวลาที่นักเรียนแต่ละคนต้องใช้ในการเรียนบางระดับ และถ้าเขาได้ใช้เวลาที่จำเป็นแล้ว เขาน่าจะบรรลุถึงระดับรอบรู้ได้ อย่างไรก็ตามนักเรียนไม่ได้รับอนุญาตเวลาที่เพียงพอ หรือไม่ได้ใช้เวลาตามที่ต้องการแล้ว ปริมาณของการเรียนรู้ของเขาสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\text{ปริมาณของการเรียนรู้} = \left\{ \left[ \frac{\text{เวลาที่ใช้ในการเรียนจริง}}{\text{เวลาที่จำเป็นสำหรับการเรียน}} \right] \right\}$$

หรืออาจจะอธิบายได้ว่า ปริมาณของการเรียนรู้ จะขึ้นกับอัตราส่วนของเวลาที่ใช้จริง ในการเรียนต่อเวลาที่จำเป็นต้องใช้เรียน ซึ่งแครอลได้ขยายสมการดังกล่าวข้างต้น ดังนี้

$$\text{ปริมาณของการเรียนรู้} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1. \text{ ความพากเพียร} \quad 2. \text{ โอกาสที่จะเรียน}}{3. \text{ ความถนัด} \quad 4. \text{ คุณภาพของการสอน}} \\ 5. \text{ ความสามารถที่จะเข้าใจการสอน} \end{array} \right.$$

หรืออาจจะอธิบายได้ว่าปริมาณของการเรียนรู้ในโรงเรียนในวิชาใด ๆ จะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความพากเพียร ของนักเรียน และโอกาสของเขาคที่จะเรียน ต่อความถนัดในวิชานั้น ของเขาตลอดถึงคุณภาพของการสอนและความสามารถที่จะเข้าใจการสอนของผู้เรียน

ตามเหตุผลและแนวคิดของแครอลดังกล่าวมานั้น บลูม (Bloom, 1976 : 4) ได้เปลี่ยนรูปแบบความคิดของแครอลเป็นรูปแบบเชิงปฏิบัติการสำหรับการเรียนเพื่อรอบรู้ว่า ถ้าความสามารถหรือความถนัด (Aptitude) ของนักเรียนมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และนักเรียนทุกคนได้รับการสอนอย่างเดียวกัน ให้เวลาในการเรียนเท่ากันทุกคนแล้ว ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่วัดได้เมื่อนักเรียนเรียนจบวิชาหนึ่งแล้วจะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ ในสภาพการณ์เช่นนี้ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จะมีค่าค่อนข้างสูง (ประมาณ  $r = .70$ ) แต่ถ้าได้จัดคุณภาพของการสอนและเวลาที่ใช้ในการเรียนแตกต่างกันตามความเหมาะสมของแต่ละบุคคลแล้ว นักเรียนส่วนใหญ่จะเรียนถึงเกณฑ์ระดับรอบรู้ที่ตั้งไว้ได้ ซึ่งค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะมีค่าใกล้ศูนย์

บลูมได้เสนอต่อไปว่า ถ้าให้ปริมาณของการเรียนรู้คงที่บ้าง เช่น กำหนดปริมาณการเรียนรู้ไว้ระดับหนึ่ง ระดับนี้อาจจะเป็น 80% คือนักเรียนคงจะทำคะแนนได้ 80% ของจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม แล้วเรียกระดับที่กำหนดไว้นี้ว่าระดับเรียนถึงขั้นรอบรู้ (Mastery Level) นักเรียนคนใดที่ทำคะแนนถึงเกณฑ์ที่กำหนดไว้เราถือว่าเขา

ใคร่รอบรู้ในสิ่งที่เรียน เมื่อกำหนดระดับการรอบรู้ไว้คงที่แล้วให้เวลาในการเรียนแตกต่างกันไป คนที่เรียนเร็วใช้เวลาเรียนน้อยก็สามารถทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่เรียกว่ารอบรู้ และคนที่เรียนช้าใช้เวลาในการเรียนมากก็สามารถทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่เรียกว่ารอบรู้เหมือนกัน ทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้จึงมีใจความสำคัญว่า คนทุกคน หรือเกือบทุกคนสามารถเรียนวิชาใด ๆ ที่จัดสอนในโรงเรียนจนถึงขั้นรอบรู้ได้ ถ้าหากจัดการเรียนการสอนได้อย่างเหมาะสม และให้เวลาสำหรับเรียนวิชานั้น ๆ แก่ผู้เรียนมากเพียงพอแก่ความสามารถที่จะเรียน นอกจากนั้นในระหว่างที่เรียนผู้เรียนได้รับความช่วยเหลือได้มีการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียน หรือข้อคิดขัดข้องของผู้เรียนได้ทันที (Bloom, 1976 : 4)

ตัวแปรที่สำคัญตัวหนึ่งที่บ่งชี้ระดับไว้ในทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ คือคุณภาพของการสอน (Quality of Instruction) ซึ่งประกอบด้วยลักษณะสำคัญ 4 ประการคือ

1. การชี้แนะ (Cue) คือ การที่ครูเสนอ อธิบายให้แก่นักเรียนเห็นอย่างชัดเจนว่าเมื่อเรียนแล้ว จะมีความสามารถอะไรบ้าง จะต้องเรียนอย่างไร และทำงานอะไรในการเรียนครั้งนี้

2. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน (Participiation) หมายถึง การที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน เช่น การเข้าฟังบรรยาย การโต้ตอบระหว่างครูและนักเรียน หรือให้นักเรียนได้ฝึกหัด และตอบสนองในกิจกรรมการเรียน เป็นต้น

3. การเสริมแรง (Reinforcement) หมายถึง การชมเชย คำหว่านถ้อยคำสนับสนุนให้เหมาะสมกับผู้เรียน

4. การแก้ไขข้อบกพร่อง (Feedback/Correctives) เป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับ จะเป็นการวินิจฉัยและแจ้งให้นักเรียนทราบว่าได้เรียนอะไรบ้าง ยังบกพร่องในเรื่องอะไร ส่วนการแก้ไขเป็นกระบวนการและกิจกรรมที่ใช้ปรับปรุงผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน โดยยึดตามข้อมูลย้อนกลับนั้น ซึ่งการแก้ไขข้อบกพร่องนี้บ่งชี้ได้เด่นเป็นอย่างมาก เป็นหลักการสำคัญที่จะเพิ่มคุณภาพของการสอนสำหรับทฤษฎีการเรียนรู้ (Bloom, 1976 : 172)

สำหรับวิธีการที่เหมาะสมของการแก้ไขข้อบกพร่องนั้นยังไม่เป็นที่กระจ่างชัดนัก  
เรื่องนี้ยังเป็นที่ถกเถียงกันอยู่

การสอนซ่อมเสริมเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องของเด็กนักเรียน บลูมได้เสนอแนะให้  
กระทำเป็นรายบุคคล (Bloom. 1976 : 125) เพราะวิธีนี้นับว่าเป็นการตอบสนอง  
ความต้องการเป็นรายบุคคล จึงเป็นการแก้ไขตัวแปรด้านความถนัดของแต่ละคนที่ไม่  
เหมือนกันให้ลดลงได้ แต่แนวความคิดของบลูมได้ถูกโต้แย้งจากบาร์และกรีเบน  
(Boonruangrutana. 1980 : 160, citing Bar and Dreben. 1977 : 125 -  
126) ว่าการเรียนเพื่อรื้อฟื้นขาดการพิจารณาเอาใจใส่แก่เด็กทั้งกลุ่ม เพราะชดกับ  
ธรรมชาติของการจัดห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนเป็นจำนวนมาก ครูควรหาเทคโนโลยีที่ใช้ได้  
เหมาะสมกับการสอนเป็นกลุ่มจะดีกว่าสอนเป็นรายบุคคล ซึ่งแนวคิดของบาร์และกรีเบน  
ได้รับการสนับสนุนจากเวสต์เบอร์รี่ (Boonruangrutana. 1980 : 157, citing  
Westbury. 1978 : 293) ว่าการสอนเป็นกลุ่มทำให้เด็กนักเรียนได้มีกิจกรรมร่วมกัน  
ในชั้นเรียน ทั้งยังเป็นการประหยัดเวลา และค่าใช้จ่ายอีกด้วย ส่วนในประเทศไทย  
สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ 2512) ได้แก้ไขข้อบกพร่องในการ  
เรียนโดยการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยใช้วิธี สอน-สอบ-สอนใหม่ (Teach - Test -  
Reteach) ในการสอนใหม่นั้น ใช้วิธีเฉลยข้อสอบจากแบบทดสอบย่อยกับนักเรียนทั้งชั้น  
กระทรวงศึกษาธิการ (กระทรวงศึกษาธิการ 2523 : 104 - 105) ได้  
เสนอแนะวิธีการสอนซ่อมเสริมสำหรับการใช้หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น 2521 และ  
หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย 2524 ไว้ 6 รูปแบบ คือ

1. การสอนซ่อมเสริมแบบตัวต่อตัว
2. การสอนซ่อมเสริมแบบเป็นกลุ่มย่อย
3. การสอนซ่อมเสริมโดยให้นักเรียนสอนกันเอง
4. การสอนซ่อมเสริมโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป
5. การสอนซ่อมเสริมโดยใช้สมุดแบบฝึกหัดด้วยตัวเอง
6. การสอนซ่อมเสริมโดยให้ทำกิจกรรมเพิ่มเติม

จากข้อโต้แย้งและข้อเสนอแนะดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้นำมาเป็นแนวในการจัดการสอนซ่อมเสริม เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียนของนักเรียน ซึ่งจะจัดกระทำได้เป็น 3 รูปแบบ คือ

1. สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยการทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม ตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่นักเรียนบกพร่อง
2. สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยให้ศึกษาจากบทเรียนโปรแกรม ตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่นักเรียนบกพร่อง
3. สอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย - อธิบายข้อบกพร่องและวิธีการแก้ไขให้ทราบร่วมกันทั้งชั้น

งานวิจัยครั้งนี้ต้องการตรวจสอบว่า การสอนซ่อมเสริมชนิดใดจะทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงสุด และสามารถลดความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนลง การทดลองครั้งนี้ยังต้องการศึกษาอีกด้วยว่า ทักษะและความสนใจต่อการเรียนด้วยวิธีสอนซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธีนั้นจะแตกต่างกันหรือไม่

ความมุ่งหมายดังกล่าวนี้สามารถเขียนแยกแยะเป็นจุดมุ่งหมายของการวิจัยได้ดังนี้

จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาว่าการสอนที่ซ่อมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด การสอนซ่อมเสริมโดยให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าตนเองจากบทเรียนโปรแกรม การสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยข้อสอบย่อย-อธิบาย และกลุ่มที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริมเลย จะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างแต่ละกลุ่มแตกต่างกันหรือไม่
2. เพื่อศึกษานักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยการเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง จะมีตัวแปรต่อไปนี้สูงขึ้นหรือไม่

### 2.1 ทักษะที่ต่อวิชาเรียน

2.2 ความสนใจในวิชาเรียน

3. เพื่อศึกษานักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยให้นักเรียนศึกษาค้นคว้าเองจากบทเรียนโปรแกรม จะมีตัวแปรต่อไปนี้สูงขึ้นหรือไม่

3.1 ทักษะคิดวิเคราะห์

3.2 ความสนใจในวิชาเรียน

4. เพื่อศึกษานักเรียนที่สอนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่สอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยการเฉลยข้อสอบย่อยและอธิบายสิ่งที่บกพร่อง จะมีตัวแปรต่อไปนี้สูงขึ้นหรือไม่

4.1 ทักษะคิดวิเคราะห์

4.2 ความสนใจในวิชาเรียน

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อหาวิธีการสอนซ่อมเสริมที่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ประหยัดเวลาที่ใช้สอน และเหมาะสมที่จะนำไปใช้ในระบบโรงเรียนปัจจุบัน
2. การศึกษาทดลองในครั้งนี้ทำให้ทราบถึงผลของการสอนซ่อมเสริมที่มีต่อพฤติกรรมด้านอาวาทบางอย่าง ได้แก่ ทักษะคิดและความสนใจในวิชาเรียน

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ เป็นนักเรียนโรงเรียนนารีรัตน์ จังหวัดแพร่ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 120 คน กลุ่มตัวอย่างทั้งหมดถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มควบคุม จำนวน 30 คน กลุ่มทดลองที่หนึ่งจำนวน 30 คน กลุ่มทดลองที่สอง จำนวน 30 คน กลุ่มทดลองที่สาม จำนวน 30 คน

2. ตัวแปรที่ศึกษา

2.1 ตัวแปรต้น ( Independent variables)

- 2.1.1 การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยการเพิ่มแบบฝึกหัด
- 2.1.2 การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใ้บทเรียนโปรแกรม
- 2.1.3 การสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยเฉลยขอสอบย่อยและ

อธิบายขอบกพร่อง

## 2.2 ตัวแปรตาม (Dependent variables)

- 2.2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
- 2.2.2 ทักษะการคิดวิชาเรียน
- 2.2.3 ความสนใจในวิชาเรียน

## 3. นิยามศัพท์เฉพาะ

เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกัน และเป็นการกำหนดขอบข่ายของตัวแปรที่นำมาศึกษาในปริิญฐานิพนธ์เล่มนี้ ผู้วิจัยจึงนิยามตัวแปรต่าง ๆ ไว้ดังนี้

3.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คือ คะแนนที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบรวม (Summative test) เมื่อสอนจบเนื้อหาทั้งหมดแล้ว ข้อสอบนี้เป็นข้อสอบชนิดอิงเกณฑ์ นั่นคือเป็นข้อสอบที่มุ่งวัดว่านักเรียนบรรลุผลในพฤติกรรมใ้บางและมีผลสัมฤทธิ์สูงถึงระดับเกณฑ์ที่ตั้งไว้หรือไม่

3.2 ทักษะการคิดวิชาเรียน หมายถึง ทักษะ การคิดเห็น ความรู้สึก เอนเอียงทางจิตใจของนักเรียนที่มีต่อวิชาที่เรียน ภายหลังจากที่นักเรียนได้มีประสบการณ์ทางการเรียนวิชานั้น อาจแสดงออกได้ในลักษณะความเชื่อ ท้าทาง การคิดเห็น ซึ่งอาจแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะคือ

3.2.1 ทัศนคติเชิงนิมมาน เป็นทหะ การคิดเห็น ที่แสดงออก ในลักษณะของความพึงพอใจ เห็นด้วย หรือรู้สึกชอบ เป็นต้น

3.2.2 ทัศนคติเชิงนิเสธ เป็นการแสดงออกในลักษณะตรงกันข้ามกับทัศนคติเชิงนิมมาน เช่น ไม่พึงพอใจ ไม่เห็นด้วย ไม่ชอบ ไม่ร่วมมือ เป็นต้น

3.2.3 ทัศนคติที่เป็นกลาง ๆ เป็นการแสดงออกในลักษณะที่ไม่เป็นทัศนคติเชิงนิมมานและทัศนคติเชิงนิเสธ แต่อยู่ระหว่างกลาง เช่น ความรู้สึกเฉย ๆ ไม่เกลียดไม่ชอบ เป็นต้น

ในการศึกษาเรื่องทัศนคติครั้งนี้ มุ่งพิจารณาถึงทัศนคติที่เกี่ยวข้องกับเรื่องราวทางคณิตศาสตร์ เป็นการวัดในเรื่องความพึงพอใจ หรือเบื่อหน่าย ซึ่งเป็นความรู้สึกที่เกี่ยวข้องกับประสบการณ์ในทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

3.3 ความสนใจในวิชาเรียน หมายถึง การแสดงออกซึ่งความกระตือรือร้นที่จะเข้าร่วมในการประกอบกิจกรรมการเรียนวิชานั้น ๆ รู้สึกเอาใจใส่ มองเห็นความสำคัญ มีการรับรู้ (Receiving) และมีการตอบสนองต่อการรับรู้ (Response) แล้วก็เกิดการยอมรับในคุณค่า (Acceptance of value) ในที่สุด

ในการศึกษาเรื่องความสนใจครั้งนี้ มุ่งพิจารณาถึงความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ หรือเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์เท่านั้น

3.4 การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยการเพิ่มแบบฝึกหัด หมายถึง การแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนเป็นรายบุคคลภายหลังจากที่ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อย (Formative test) เป็นการแก้ไขตรงจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่นักเรียนยังไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ โดยให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะเพิ่มเติมเฉพาะจุดประสงค์ที่ยังบกพร่องอยู่

3.5 การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรม หมายถึง การแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนเป็นรายบุคคลภายหลังจากที่ทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อย เป็นการแก้ไขตรงจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่นักเรียนยังไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ โดยให้นักเรียนได้ศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมเฉพาะจุดประสงค์ที่ยังบกพร่องอยู่

3.6 การสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบาย หมายถึง การแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนรวม ๆ ในกลุ่มเด็กที่ตอบแบบทดสอบย่อยได้ไม่ถึงเกณฑ์ที่ตั้งไว้ กระทำโดยการนำเอาแบบทดสอบย่อยที่นักเรียนได้ตอบไปแล้วนั้นมาเฉลยและอธิบาย ตลอดจนถึงแนววิธีการแก้ไขตรงจุดประสงค์หรือจุดประสงค์ที่นักเรียนยังบกพร่องอยู่เป็นการรวม ๆ

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย

เนื่องจากทฤษฎีการสอนของเมสซิมในครั้งนี้อยู่ในกระบวนการสอนโดยใช้ทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้ (Mastery Learnings) ในตอนนี้จึงควรอธิบายถึงทฤษฎีนี้ในแง่มุมต่าง ๆ ให้ละเอียดเพื่อเป็นเครื่องมือให้การอธิบายงานวิจัยครั้งนี้ให้กระจ่างชัดยิ่งขึ้น

ความเป็นมาของทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้

ถึงแม้ว่าทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้จะพัฒนาขึ้นมาเมื่อไม่นานมานี้เอง แต่แนวความคิดในเรื่องนี้มีมานานแล้วตั้งแต่ปี ค.ศ. 1922 ในช่วงนั้นมีโครงการสอนที่จะทำให้นักเรียนมีความรอบรู้ในสิ่งที่ตนเรียนอยู่สองโครงการ คือโครงการวินเนตกา (Winnetka Plan) ของวอชเบิร์น และคณะ (Washburne, 1922) อีกโครงการหนึ่งเป็นของศาสตราจารย์มอริสัน (Henry C. Morrison, 1926) (Block, 1971 : 3)

หลักการเรียนรู้เพื่อรอบรู้มีหลายขั้นตอน เริ่มด้วยการนิยามคำว่ารอบรู้ในรูปของจุดมุ่งหมายทางการศึกษาที่คาดหวังจะให้นักเรียนได้เรียนรู้ของวอชเบิร์น (Washburne) นั้น จุดประสงค์เน้นทางด้านสติปัญญา ส่วนของมอริสัน จุดประสงค์เน้นทางด้านสติปัญญาจิตใจและทักษะ

ขั้นที่สอง ในการสอนจะแบ่งเนื้อหาออกเป็นตอน ๆ แต่ละตอนประกอบด้วยสื่อการสอนที่จัดไว้เป็นอย่างดี เพื่อสอนตามจุดประสงค์ที่กำหนด

ขั้นที่สาม นักเรียนต้องรู้แจ้งในแต่ละตอน คือทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่ตั้งไว้ก่อนที่จะไปเรียนเนื้อหาตอนต่อไป เพราะถือว่าเนื้อหามีลำดับชั้นการเรียนรู้ (hierarchy of learning) การเรียนแต่ละขั้นตอนใช้ความรู้ของเนื้อหาตอนก่อน ๆ ด้วย

ขั้นที่สี่ หลังจากสอนจบแต่ละตอนใช้แบบทดสอบวินิจฉัย เพื่อหาข้อบกพร่องในการเรียนของเด็ก จากการสอบจะบอกให้ทราบว่านักเรียนมีความรู้รอบ (Master)

ในเนื้อหาตอนนั้นหรือยัง คะแนนจากการสอบจะเป็นแรงเสริมในการเรียนและเป็นแนวทาง  
ได้การศึกษาสื่อการเรียนในสิ่งที่เขายังต้องการจะรู้

ขั้นที่ห้า จากการวิจัยของบราวน์ (Brown) มีการสอนเพิ่มเติมโดยวิธีสอนแบบต่าง ๆ  
ให้เหมาะสมกับแต่ละคน จนกระทั่งนักเรียนมีความรอบรู้ในเนื้อหาแต่ละตอน

โครงการวินเทก้า นักเรียนได้เรียนด้วยตนเอง และมีการสอนเป็นกลุ่ม  
คละเคล้าไป แต่นักเรียนแต่ละคนได้รับอนุญาตให้ใช้เวลาเรียนแตกต่างกันไป

วิธีการของมอร์สันเป็นที่แพร่หลายในปี ค.ศ. 1930 หลังจากนั้นความคิดเกี่ยวกับการ  
เรียนเพื่อรอบรู้ก็หายไป เนื่องจากการขาดแคลนทางเทคโนโลยีที่จะทำให้การเรียน  
เพื่อรอบรู้ได้ผล

จนกระทั่งปลายปี ค.ศ. 1950 และต้นปี ค.ศ. 1960 ได้มีการค้นพบ  
เทคโนโลยีทางด้านสื่อการเรียนชนิดใหม่ขึ้นมาเรียกว่าบทเรียนโปรแกรม แนวความคิด  
พื้นฐานเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมคือ การเรียนเรื่องใด ๆ แม้ว่าเนื้อหาจะยากสักเพียงใด  
ก็ตาม การเรียนให้เข้าใจจะต้องเรียนเนื้อหาตอนสั้น ๆ ง่าย ๆ ก่อน (Block,

1975 : 4, citing Skinner. : 1954) หลักการสร้างบทเรียนโปรแกรมนั้น  
ต้องวิเคราะห์พฤติกรรมที่ยาก ๆ ให้เป็นพฤติกรรมย่อยให้เชื่อมโยงกัน จะทำให้นักเรียน  
เข้าใจเนื้อหาที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นได้ และนักเรียนก็สามารถจะศึกษาบทเรียนได้ด้วยตนเอง  
ซึ่งบทเรียนโปรแกรมนี้นี้เป็นสื่อที่ช่วยขจัดปัญหาความแตกต่างระหว่างบุคคลได้ดีพอสมควร

ต่อมาแครอลได้เสนอรูปแบบที่เป็นแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีการเรียนเพื่อรอบรู้  
(John B. Carroll's Model of School Learning) ซึ่งเขาได้กำหนดตัวแปรที่มี  
ความสำคัญต่อการเรียนรู้ คือโอกาสในการเรียน (Opportunity to learn) ความ  
พยายาม (Perseverance) ความถนัด (Aptitude) คุณภาพของการสอน  
(Quality of Instruction) และความสามารถที่จะเข้าใจการสอน (Ability to  
Understand Instruction) (Block, 1975 : 2)

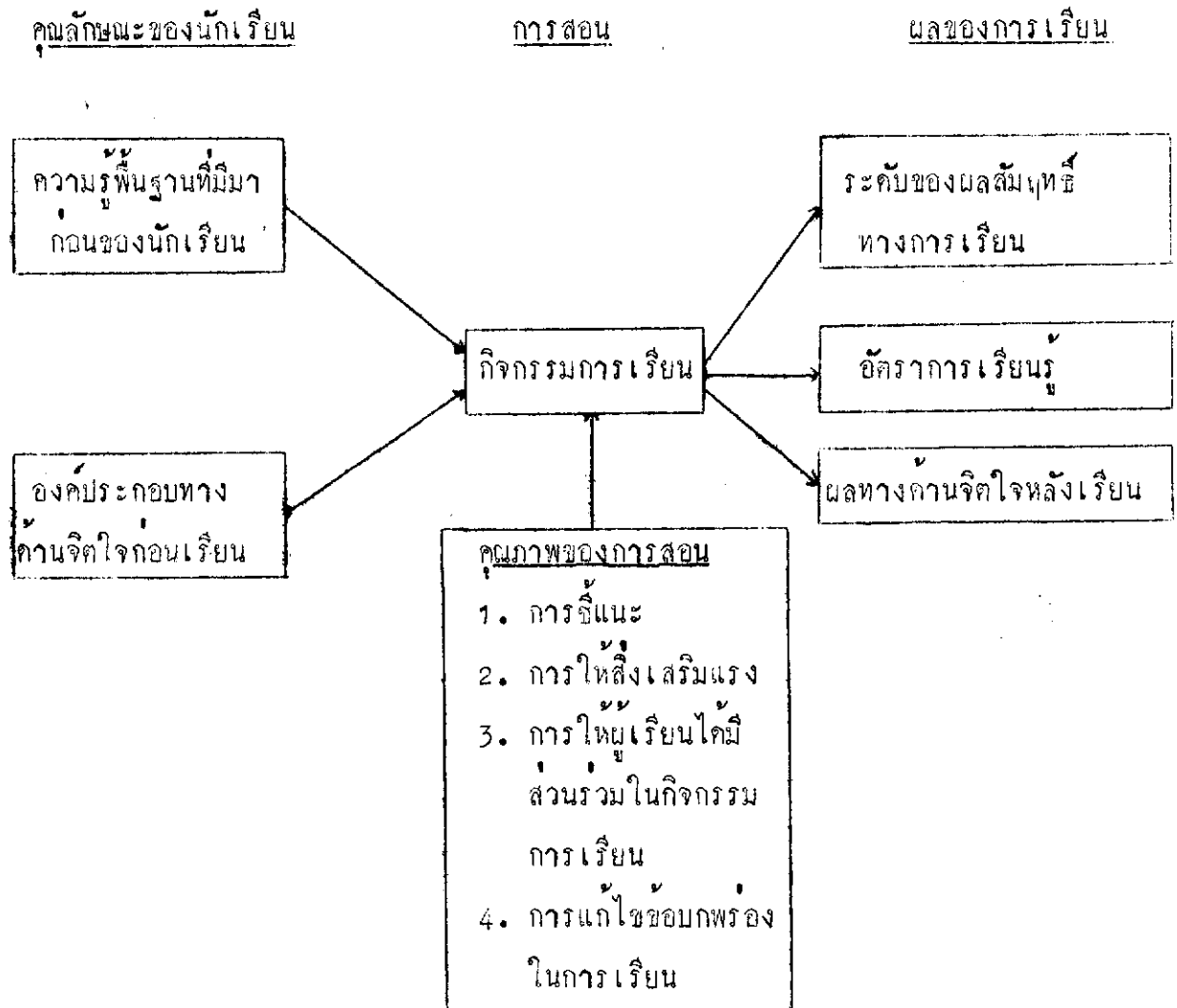
จากตัวแปรต่าง ๆ ของแครอลนี้ บลูม (Block, 1975 : 4, citing  
Bloom, 1963) ได้เสนอรูปแบบเชิงปฏิบัติการของทฤษฎีการเรียนเพื่อรอบรู้ โดยบลูม

ได้อธิบายว่า ถ้าความสามารถหรือความถนัดของนักเรียนในการเรียนวิชาหนึ่งมีการกระจายเป็นโค้งปกติ สหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะมีค่าค่อนข้างสูง (ประมาณ  $r = .70$ ) แต่ถ้านักเรียนมีเวลาในการเรียนแตกต่างกัน และสอนแต่ละคนให้แตกต่างกันไปตามความสามารถของนักเรียน คือ คนที่เรียนช้าใช้เวลาในการเรียนมาก คนที่เรียนเร็วใช้เวลาในการเรียนน้อยแล้ว จะมีนักเรียน 95 เปอร์เซ็นต์จะทำคะแนนได้ถึงเกณฑ์ที่เรียกว่ารอบรู้ ในกรณีเช่นนี้ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างความถนัดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะมีค่าเป็นศูนย์ สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ 2523 : 3) ได้กล่าวถึงหลักการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียนได้รอบรู่ว่า

1. นักเรียนทุกคนสามารถเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ตามที่สอนสั่งกันมาในโรงเรียนได้อย่างเท่าเทียมกัน ถ้าจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสม

2. นักเรียนทุกคนสามารถเรียนรู้ได้สัมฤทธิ์ผลเท่ากันก็ต่อเมื่อนักเรียนประเภท "โจ-ซ่า" ได้รับความรู้ในการเรียนอย่างเพียงพอ และได้รับการช่วยเหลือในเรื่องการเรียนอย่างดีจากครูผู้สอน และเพื่อนนักเรียนที่มีพื้นเพทางการศึกษามาอย่างก็

ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 บลูมได้เสนอรูปแบบการเรียนรู้ในโรงเรียน ซึ่งพัฒนาขึ้นมาภายหลังรูปแบบของการเรียนเพื่อรอบรู้ไว้ดังนี้ (Bloom. 1976 : 13 - 15)



รูปแบบการเรียนรู้ในโรงเรียนของกลุ่มประกอบไปด้วยตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน (Cognitive Entry Behavior) องค์ประกอบทางจิตใจก่อนเรียน (Affective Entry Characteristics) และคุณภาพของการสอน (Quality of Instruction) เป็นตัวกำหนดผลการเรียน (Learning Outcomes) อันได้แก่ระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน อัตราของการเรียนรู้ และผลทางจิตใจหลังเรียน

ทั้งนี้ตัวแปรทั้งสามประการ ได้แก่ ความรู้พื้นฐานที่มีมาก่อน องค์ประกอบ  
ด้านจิตใจก่อนเรียนและคุณภาพของการสอน มีส่วนอยู่ในความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์  
ทางการเรียนตอนปลายเทอมของนักเรียนเป็น 50% 25% และ 25% ตามลำดับ  
( Bloom, 1976 : 167, 169, 174)

### เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอนซ่อมเสริม

ตัวแปรที่สำคัญประการหนึ่งของทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้นั้นคือ การสอนซ่อมเสริม  
ไคมีนักการศึกษาทั้งในประเทศไทยและต่างประเทศหลายท่านได้แสดงความคิดเห็นและ  
ข้อเสนอแนะในเรื่องการสอนซ่อมเสริมด้วยวิธีต่าง ๆ หลายแบบ กับนักเรียนหลาย ๆ  
ลักษณะที่ควรได้รับการซ่อมเสริมดังรายละเอียดต่อไปนี้

การเรียนการสอนตามหลักสูตรทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา ผู้สอนมี  
หน้าที่จะต้องให้ผู้เรียนบรรลุตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ จุดประสงค์ใดที่ประเมินแล้วยัง  
ไม่บรรลุก็เป็นหน้าที่ของครูสอน จะต้องจัดสอนซ่อมเสริมในจุดประสงค์นั้น ๆ นั่นคือ  
เรามีความปรารถนาให้นักเรียนทุกคนได้บรรลุทุกจุดประสงค์ หรือมากที่สุดเท่าที่นักเรียน  
มีความสามารถ การที่เรามีความคิดเช่นนี้ เพราะเชื่อว่านักเรียนร้อยละ 80 สามารถ  
เรียนให้บรรลุตามจุดประสงค์ได้ ถ้าผู้สอนมีการจูงใจผู้เรียน ได้ใช้การสอนหลาย ๆ  
วิธี ได้ให้เวลาเรียนแก่ทุกคนแตกต่างกัน และการสอนการเรียนเป็นไปตามลำดับขั้น  
ของการเรียนรู้ แต่เนื่องจากมีผู้สอนบางคนไม่สามารถจะปฏิบัติดังกล่าวได้ ทำให้มี  
นักเรียนจำนวนไม่น้อยไม่สามารถจะบรรลุตามจุดประสงค์ได้ ดังนั้นการสอนซ่อมเสริมจึง  
มีความจำเป็น การสอนซ่อมเสริมก็คือการให้โอกาสแก่ผู้เรียนไคมีเวลาเรียนเพิ่มขึ้น  
ได้เรียนรู้สิ่งต่าง ๆ เพิ่มขึ้น เข้าใจบทเรียนมากขึ้นจนสามารถบรรลุตามจุดประสงค์ที่  
กำหนดไว้ (สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ 2523 : 24)

ในระบบการเรียนการสอนที่ดำเนินอยู่ในปัจจุบันนี้ อาจจะเป็นด้วยจำนวนนักเรียน  
ในแต่ละห้องมากเกินไปเกินกำลังของผู้สอน จึงทำให้ผู้สอนไม่สามารถใช้วิธีการที่เหมาะสมกับ

นักเรียนแต่ละคนได้ หรือผู้สอนมีชั่วโมงการสอนมาก หรือวัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ ที่จะช่วยให้การเรียนของนักเรียนบรรลุตามจุดประสงค์มีจำกัด จึงทำให้มีนักเรียนจำนวนไม่น้อยไม่สามารถบรรลุตามจุดประสงค์ใดดังกล่าว หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 จึงได้กำหนดไว้ในหลักสูตรว่า "โรงเรียนต้องจัดให้มีการสอนซ่อมเสริมสำหรับนักเรียนอ่อน เพื่อแก้ไขความบกพร่องต่าง ๆ และเพื่อช่วยให้มีพื้นฐานอันมั่นคงในการเรียนรู้" (กระทรวงศึกษาธิการ 2523 : 104) ส่วนลักษณะของนักเรียนที่ควรได้รับการซ่อมเสริมนั้น รวีวรรณ ชุมชัย (รวีวรรณ ชุมชัย 2523 : 1) ได้เสนอไว้ว่าควรเป็นนักเรียนที่มีลักษณะดังนี้

1. ขาดความสนใจในการเรียน หรือมีความสนใจน้อยกว่าเพื่อนในวัยเดียวกัน
2. มีความสามารถในการเรียนรู้ในระดับต่ำกว่าผู้อื่น
3. มีทัศนคติที่ไม่ดีต่อการเรียนอันเนื่องมาจากความผิดหวังในผลการเรียน
4. ได้รับความกดดันจากการเรียน หรือชนบทรวมเนียบประเพณีต่าง ๆ
5. ในด้านผลสำเร็จในการเรียนจัดอยู่ในเปอร์เซ็นต์ที่ต่ำกว่า 30 เปอร์เซ็นต์เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ
  - 5.1 ความเจริญทางด้านอารมณ์ต่ำ
  - 5.2 ความเจริญทางด้านสังคมมีน้อย
  - 5.3 ความเจริญทางด้านสติปัญญาต่ำ ความสามารถในการเรียนรู้น้อย ไม่สามารถแยกแยะปัญหาได้รวดเร็วเท่ากับเพื่อนในวัยเดียวกัน และมักจะพบว่า มีความถนัดทางด้านภาษาต่ำ
  - 5.4 มีความบกพร่องทางร่างกาย
  - 5.5 มีประสบการณ์ทางการเรียนและประสบการณ์ทั่ว ๆ ไปน้อยกว่าผู้อื่น

การสอนซ่อมเสริมนอกจากจะมีเหตุผลดังที่กล่าวมาแล้ว สมศักดิ์ สิ้นธุระเวช (สมศักดิ์ สิ้นธุระเวช 2523 : 24 - 25) ยังได้ระบุว่ายังมีเหตุผลอื่น ๆ อีกเช่น

1. นักเรียนมีความสามารถทางการเรียนต่ำ ในระหว่างการสอน คณิตศาสตร์จะพบว่า เมื่อให้งานใหม่ให้นักเรียนทำ นักเรียนมักจะทำไม่ได้ จนกว่าจะมีการสอนซ้ำ 2 หรือ 3 ครั้ง

2. การสอนที่ไม่ได้ผลก็มีผล เพราะมีผู้สอนจำนวนไม่น้อย ไม่รู้ว่าจะสอนเนื้อหาที่อยู่ในบทเรียนอย่างไร หรือจะใช้วิธีสอนอย่างไรจึงจะทำให้นักเรียนบรรลุ จุดประสงค์ตามที่กำหนดไว้

3. นักเรียนแต่ละคนแตกต่างกันในด้านทัศนคติ ความถนัดและความ ขาวขี้

4. เพื่อเป็นการสอนซ้ำในเรื่องที่สอนไม่ดี หรือยังไม่ได้สอนทั้งหมด โดยปกตินักเรียนมักจะพยายามเอาหลักการ วิธีการ ที่เคยเรียนมาเพียงเล็กน้อยไปใช้ ซึ่งเป็นการไม่ถูกต้อง อันที่จริงแล้วควรจะได้เรียนหลักการเหล่านั้นทั้งหมดเสียก่อน

5. สื่อการเรียนต่าง ๆ ยังไม่ดีพอ เช่น หนังสือเรียนใช้ภาษาไม่ เหมาะสมกับนักเรียน นักเรียนอ่านแล้วไม่เข้าใจว่าหมายความว่าอย่างไร ตัวอย่าง ต่าง ๆ ที่อยู่ในหนังสือเรียนยังไม่ดี อุปกรณ์ต่าง ๆ ไม่ได้รับการพัฒนาที่ดีพอ

6. จุดประสงค์ต่าง ๆ ที่ตั้งไว้บางจุดประสงค์อยู่ในระดับสูงหรือต้องใช้เวลามากในการที่ผู้เรียนจะบรรลุ ดังนั้นการที่ผู้เรียนจะบรรลุได้ภายหลังการสอนจึงเป็นไปได้อย่าง จำเป็นต้องมีการสอนซ่อมเสริมเป็นบางส่วน

7. จุดประสงค์บางจุดประสงค์เป็นลำดับขั้นการเรียนรู้อันเนื่องกัน ฉะนั้นการที่นักเรียนจะผ่านจุดประสงค์ขั้นสูง จำเป็นต้องผ่านจุดประสงค์ขั้นต้นก่อน การซ่อมเสริมเพื่อให้ผ่านจุดประสงค์ขั้นต้นจึงจำเป็น

ส่วนเหตุผลในการจะเลือกวิธีการซ่อมเสริมใดไปใช้ในการสอนนั้น กระทรวง ศึกษาธิการ (กระทรวงศึกษาธิการ 2523 : 104 - 105) ได้เสนอแนะไว้ว่า โรงเรียนแต่ละโรงเรียนย่อมจะใช้วิธีการสอนซ่อมเสริมที่แตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสภาพ

ของโรงเรียนที่แตกต่างกันเป็นต้นว่า บางโรงเรียนให้ครูประจำชั้นหรือผู้สอนในแต่ละรายวิชาเป็นผู้สอน แต่บางแห่งก็ใช้ครูพิเศษหรือครูที่ไม่ได้สอนประจำ บางแห่งก็มอบให้ครูประจำรายวิชารับผิดชอบเรื่องการสอนซ่อมเสริมไปเลย แต่บางแห่งก็มีครูทำหน้าที่จัดการเกี่ยวกับการสอนซ่อมเสริม โดยครูประจำชั้นมีหน้าที่คอยส่งนักเรียนที่จะซ่อมเสริมไปให้ สำหรับเวลาที่ใช้ในการสอนซ่อมเสริม อาจจะเป็นชั่วโมงว่างหรือในตอนท้ายของชั่วโมง หรือนอกเวลาเรียน หรือวันหยุดแล้วแต่ความเหมาะสม วิธีสอนซ่อมเสริมมีวิธีต่าง ๆ หลายวิธี ขึ้นอยู่กับผู้สอนจะเลือกวิธีใดให้เหมาะสมกับสภาพการณ์ในขณะนั้น ซึ่งมีรายละเอียดข้อเสนอแนะของแต่ละวิธีดังนี้

1. การสอนแบบตัวต่อตัว การสอนซ่อมเสริมแบบตัวต่อตัวระหว่างครูผู้สอนกับนักเรียนเป็นวิธีที่ดีที่สุด เพราะผู้สอนสามารถเลือกใจถ้อยคำหรือวิธีการได้เหมาะสมกับนักเรียน สามารถตรงความสนใจของนักเรียนได้อย่างใกล้ชิด และสามารถสอนได้ตรงตามที่นักเรียนกำลังประสบปัญหา ผู้สอนนอกจากจะเป็นครูประจำชั้นหรือประจำวิชาแล้ว ถ้าหากใช้ครูคนอื่นได้ก็ยิ่งดี เพราะครูผู้สอนจะได้ให้ความรู้ความเข้าใจแก่นักเรียนในแนวใหม่

2. การสอนเป็นกลุ่มย่อย เพื่อความสะดวกควรจัดนักเรียนที่มีปัญหาเหมือน ๆ กันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน กลุ่มหนึ่งประมาณ 2 - 3 คน ผู้สอนอาจจะใช้วิธีการสอนและให้งานสลับหมุนเวียนกันไปทีละกลุ่ม ข้อดีของวิธีนี้คือ นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะช่วยเหลือกันแก้ปัญหาความเข้าใจบทเรียนซึ่งกันและกัน ร่วมมือซึ่งกันและกัน ไม่ทำให้ใครรู้สึกว่ามิได้มีปัญหาคือตนเอง ผู้สอนนอกจากจะใช้ครูที่สอนประจำแล้วอาจจะเปลี่ยนให้ผู้อื่นสอนแทน หรือหมุนเวียนกันก็ได้

3. นักเรียนสอนกันเอง ในการสอนซ่อมเสริมผู้สอนจะคัดเลือกนักเรียนเก่งช่วยสอนนักเรียนที่ยังไม่บรรลุวัตถุประสงค์ได้ โดยให้ช่วยสอนตัวต่อตัว หรือสอนเป็นกลุ่มย่อย ข้อดีของการที่ให้นักเรียนช่วยสอนกันเองคือ นักเรียนใช้ภาษาแบบเดียวกัน ดังนั้นการถ่ายทอดความรู้ก็ดี หรือการใจถ้อยคำอธิบายก็ดี ย่อมทำให้ง่ายต่อการเข้าใจกว่าภาษาที่ครูใช้ และยังทำให้ผู้ช่วยสอนต้องสนใจในการเรียนมากยิ่งขึ้น เพราะต้อง

มีความรับผิดชอบมากขึ้น จากรายงานการวิจัยในเรื่องนี้พบว่าทั้งผู้ช่วยสอนและผู้เรียนมีการเปลี่ยนแปลงในทางที่ดี นักเรียนแสดงความชื่นชมกับระบบการช่วยสอนนี้และมีความรู้สึกต่อเพื่อนนักเรียนด้วยกันไปในทางที่ดี การคัดเลือกผู้ช่วยสอนนอกจากจะคัดเลือกจากนักเรียนเก่งในชั้นเดียวกันแล้ว อาจจะใช้นักเรียนที่อยู่ในระดับสูงกว่าที่ยอมทำได้

4. แบบเรียนสำเร็จรูป ในกรณีที่ผู้สอนพบนักเรียนมีปัญหาการเรียนในบางเรื่อง ก็อาจจะใช้แบบเรียนสำเร็จรูปแบบง่าย ไม่ซับซ้อนเป็นสื่อการเรียน โดยนักเรียนแต่ละคนจะต้องอ่าน ทำแบบฝึกหัด และตรวจคำตอบของตนเอง โดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูปนั้น

5. สมุดแบบฝึกหัดเรียนด้วยตนเอง ลักษณะของสมุดแบบฝึกหัดเรียนด้วยตนเองคล้ายแบบเรียนสำเร็จรูป เพราะเริ่มด้วยควรวินัยก่อนแล้วให้แบบฝึกหัดต่อจากนั้นเฉลยคำตอบ ลักษณะที่แตกต่างกับคือสมุดแบบฝึกหัดมีแบบฝึกหัดมากกว่าแบบเรียนสำเร็จรูป เพราะมีจุดมุ่งหมายที่จะให้ผู้เรียนได้ทำแบบฝึกหัดเป็นการฝึกทักษะให้มากยิ่งขึ้น

6. ให้อิทธิกรรณเพิ่มเติม ภายหลังจากการวินิจฉัยปัญหาพบว่าผู้เรียนมีความเข้าใจแล้วแต่สมควรได้รับการฝึกทักษะเพิ่มขึ้นอีก ผู้สอนอาจจะใช้วิธีการมอบหมายงานให้ทำเช่นทำแบบฝึกหัดที่มีระดับความยากง่ายใกล้เคียงเพิ่มขึ้น โดยจะให้ทำที่โรงเรียนหรือจะให้ทำที่บ้านก็ได้แล้วแต่ความเหมาะสม

วิธีการสอนซ่อมเสริมดังที่กล่าวมาแล้วนี้เป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น ผู้สอนอาจจะมีวิธีการต่างๆ อีกมากมายที่สามารถนำมาใช้กับนักเรียนของตนเองได้ อาทิ ในระหว่างเฉลยคำตอบของแบบฝึกหัดหรือแบบทดสอบ แทนที่ผู้สอนจะบอกแต่เพียงว่าข้อใดถูกหรือข้อนี้ผิดคำตอบเท่าใด ผู้สอนอาจจะถามนักเรียนต่อไปว่า นักเรียนเลือกข้อนี้หรือตอบข้อนี้ นักเรียนคิดอย่างไร ที่ถูกก็คิดอย่างไร เป็นการอธิบายให้นักเรียนรู้ว่าที่นักเรียนคิดนั้นถูกหรือผิด ถ้าผิดที่ผิดนั้นควรจะคิดอย่างไร การใช้คำถามแบบกะลอมเพื่อให้คิดด้วยตนเองจนได้คำตอบ และให้นักเรียนไปศึกษาเพิ่มเติมโดยวิธีการหาเหตุผลจากเพื่อนๆ ก็จัดว่าเป็นส่วนหนึ่งของการสอนซ่อมเสริมด้วยเช่นกัน

นอกจากนี้กระทรวงศึกษาธิการ (กระทรวงศึกษาธิการ 2523 : 10) ยังได้เสนอแนะว่าเราควรทำการสอนซ่อมเสริมเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องเมื่อใดบ้าง ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ระยะดังนี้

1. ภายหลังจากประเมินผลก่อนการเรียน ถ้าพบว่านักเรียนมีพื้นฐานความรู้ไม่พอ หรือยังมีพฤติกรรมบกพร่องขั้นก่อนการเรียน ควรจะได้จัดการสอนซ่อมเสริมให้
2. ภายหลังจากประเมินผลระหว่างเรียน ถ้ายังพบว่านักเรียนยังไม่มีความเก่งของจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ ควรจะได้จัดการสอนซ่อมเสริมให้
3. ภายหลังจากตัดสินผลการเรียน ถ้านักเรียนได้รับระดับผลการเรียน "๐" ก่อนจะให้ให้นักเรียนสอบแก้ตัว ควรจะได้จัดการซ่อมเสริมก่อน

### การวิจัยที่เกี่ยวกับการสอนซ่อมเสริมและทฤษฎีการเรียนรู้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ได้มีนักการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศพยายามค้นคว้าวิจัยเพื่อหาวิธีการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนด้วยวิธีการต่างๆ กันหลายวิธี และได้ส่งผลออกมาในหลายลักษณะ ซึ่งผู้วิจัยได้เรียบเรียงไว้ดังนี้

ไวคอฟ (Wyckoff, 1975:5160-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพื่อรอบรู้กับการสอนด้วยวิธีธรรมดา (traditional) ซึ่งนักเรียนที่สอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการแก้ไขข้อบกพร่องในการเรียน (Feedback/Corrective) โดยการสอนซ่อมเสริมปรากฏว่าในกลุ่มนักเรียนชายที่เรียนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ดีกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีธรรมดา และในกลุ่มที่มีความสามารถในการอ่านคำที่เรียนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้มีการสอนซ่อมเสริมมีผลการเรียนดีกว่ากลุ่มที่เรียนแบบธรรมดา ส่วนในกลุ่มนักเรียนหญิงปรากฏว่าการสอนทั้งสองแบบให้ผลพอกกัน ผลการวิจัยของไวคอฟบางส่วนสอดคล้องกับผลการวิจัยของบ็อบบี้ (Bobbie, 1974 : 4685 -A) ที่ได้ทำการวิจัยเพื่อตรวจสอบว่าการสอนโดยการเรียนเพื่อรอบรู้และวิธีสอนแบบธรรมดานั้น ถึงแม้ว่าจะได้ผลสัมฤทธิ์ผลทางการเรียนพอกกัน แต่ทว่าในบทเรียนหลังๆ มีแนวโน้มว่าการจัดการสอนโดยการเรียนเพื่อรอบรู้และการสอนซ่อมเสริมจะสูงขึ้นเป็นลำดับอย่างเห็นได้ชัด ส่วนจอห์น (John, 1973 : 3475 - A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและค่าใช้จ่ายในการทดลอง สอนซ่อมเสริมสามวิธี ได้แก่ ให้นักเรียนเป็นผู้สอน ใช้ผู้ช่วยสอนและใช้เทปคาสเซต ซึ่งปรากฏผลว่าใช้ครูเป็นผู้สอนให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงสุด แต่ใช้ค่าใช้จ่ายมาก และการใช้ผู้ช่วยสอนให้ผลสัมฤทธิ์

รองลงมาค่าใช้จ่ายในการสอนน้อย ส่วนวิธีใช้เทปคาสเซตคอมพิวเตอร์ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำและยังสืบเปลืองค่าใช้จ่ายมากอีกด้วย

จากการศึกษาในลักษณะเดียวกันนี้ในประเทศไทยเมื่อปี พ.ศ. 2512 สำเร้ง บุญเรืองรัตน์ (สำเร้ง บุญเรืองรัตน์ 2512 : 80) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาถึงอิทธิพลของการทดสอบย่อยที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 7 ได้พบว่าการจัดให้มีการทดสอบย่อยและเฉลยข้อสอบเพื่อชี้แนะให้เห็นถึงข้อบกพร่องเป็นกลุ่มรวมๆภายหลังผลการทดสอบนั้นมีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มากกว่าการทดสอบเฉยๆเพียงอย่างเดียวโดยไม่มีการเฉลยข้อสอบ ซึ่งผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับของสมบุญ สินถาวร (สมบุญ สินถาวร 2521 : 52) ที่ได้ศึกษาผลของการทำแบบฝึกหัด การทดสอบย่อยและการสอนสิ่งบกพร่องวิชาคณิตศาสตร์ พบว่าการทดสอบย่อยแล้วมีการอภิปรายข้อผิดพลาดภายหลังการสอบและการสอนสิ่งบกพร่องทั้งสองอย่างนี้ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนดีกว่าวิธีการสอนที่ให้นักเรียนฝึกทักษะด้วยการทำแบบฝึกหัดแต่เพียงอย่างเดียว

ต่อมาในปี พ.ศ. 2517 สำเร้ง บุญเรืองรัตน์ (สำเร้ง บุญเรืองรัตน์ 2523 : 4) ได้ทำการทดลองสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ เพื่อสอนครูประจำการจำนวน 43 คน ให้ครูเรียนรู้เกี่ยวกับการสร้างวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ครูทั้ง 43 คนนี้ประกอบด้วยครูที่ไม่มีวุฒิ จนถึงครูที่มีวุฒิปริญญาตรี ในการสอนนั้นผู้ทดลองได้สร้างบทเรียนสำเร็จรูป แบบบทเรียนออกเป็น 5 ตอน แต่ละบทกำหนดจุดมุ่งหมายต่าง ๆ กัน เพื่อว่าเมื่อเรียนครบทั้งห้าบทเรียนแล้ว ผู้เรียนสามารถเขียนวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมได้ก่อนเรียนเรื่องนี้ครูทุกคนได้รับการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่คิดว่าครูสามารถเขียนวัตถุประสงค์ของการสอนได้หรือไม่ เมื่อเรียนครบทั้งห้าบทแล้ว ครูเหล่านั้นได้รับการทดสอบด้วยแบบทดสอบเดิมอีก ในขณะที่เดียวกันก่อนเรียนทุกบทเรียนครูก็ได้ทดสอบความรู้ความเข้าใจในแต่ละบทเรียนก่อน และเมื่อการเรียน การสอนสิ้นสุดแต่ละบทเรียนแล้ว ครูก็ได้ทดสอบความรู้ความเข้าใจแต่ละบทเรียนอีก 6 เพื่อที่ว่าครูสามารถทำข้อสอบได้ตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้หรือไม่ ผลจากการวิเคราะห์เปรียบเทียบผลการสอบก่อนเรียนและสอบหลังเรียนแล้ว ปรากฏว่าจะแน่นอนหลังการเรียนเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทุกบทเรียน ก่อนเรียนผู้เรียนมีความรู้ไม่ถึงเกณฑ์ตามที่

กำหนด กล่าวคือยังไม่เป็นผู้ที่รอบรู้ แต่พอเรียนแต่ละบทเรียนแล้วมีความรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้แทบทุกคน

ในปี พ.ศ. 2521 สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์ 2521) ได้ทำการทดลองอีกครั้งหนึ่งโดยสร้างโปรแกรมการเรียนการสอน เรื่องการเขียนโปรแกรมเบื้องต้นสำหรับคอมพิวเตอร์ เพื่อสอนนิสิตวิชาเอกวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่เรียนอยู่ปีสองหรือปีสามของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร มีนิสิตเรียน 37 คน การเรียนการสอนครั้งนี้ผู้ทดลองได้สร้างบทเรียนสำเร็จรูป 12 บทเรียน แต่ละบทเรียนมีจุดประสงค์ของการเรียนมีโปรแกรมเพื่อให้ผู้เรียนช่วยตนเอง \ ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเพื่อประเมินผลการเรียนการสอนแต่ละบทเรียนทุกๆบทเรียน เมื่อการเรียนการสอนเสร็จแล้วก็ทำการทดสอบนักเรียนจากนั้นก็เฉลยผลการทดสอบให้นักเรียนตรวจเอง เมื่อนักเรียนทำผิดข้อใดก็ได้รับคำชี้แจงจากผู้สอนว่าที่ถูกต้องควรตอบอย่างไร มีการอภิปรายผลการสอบรวมทั้งชั้น หรือนักนิสิตมีปัญหาในเรื่องใด ก็อภิปรายซักถามร่วมกันทั้งชั้น ได้ทดลองดำเนินการสอนอย่างนี้ตลอดภาคเรียน พอปลายภาคเรียนนำผลการสอบเหล่านั้นมาพิจารณาว่าคนใดทำได้ความเกณฑ์ของการเรียนการสอนบ้าง ปรากฏว่าทุกคนทำได้ตามเกณฑ์ของจุดมุ่งหมายในการเรียนการสอน

ในปี พ.ศ. 2523 รุจิ ภูสาระ (รุจิ ภูสาระ 2523 : 128) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบวิธีสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งรวมหกวิธี เพื่อค้นหาว่าวิธีการเรียนการสอนแบบใดจะทำให้ผลการเรียนสูงสุดโดยมีความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ต่ำ และใช้เวลาในการเรียนการสอนน้อยที่สุด วิธีการเรียนการสอนทั้งหกวิธีนี้มีดังนี้

1. ครูเป็นผู้เสนอบทเรียน โดยถือว่านักเรียนทุกคนใช้เวลาในการเรียนเท่ากันหมด และไม่มีการสอนซ่อมเสริมตามหลักการเรียนเพื่อรอบรู้
2. ครูเป็นผู้เสนอบทเรียนเช่นวิธีที่หนึ่ง และให้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้คือมีการตรวจสอบความรู้พื้นฐานด้วยแบบทดสอบเพื่อวินิจฉัย และสร้างเสริมพื้นฐานก่อนเริ่มบทเรียน เมื่อจบบทเรียนแต่ละหน่วยแล้ว เด็กจะได้รับการทดสอบด้วยแบบทดสอบย่อย ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ก็จะได้รับการแก้ไขเฉพาะตรงส่วนที่บกพร่องโดยจัดการสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล

3. ครูเป็นผู้เสนอบทเรียน และใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้คล้ายวิธีที่สอง แต่แตกต่างกันที่วิธีนี้เด็กที่บกพร่องจะได้รับการซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม

4. นักเรียนเรียนด้วยตนเองยกย้าบทเรียนสำเร็จรูปครูเป็นเพียงผู้คอยแนะนำในตอนที่ยังไม่เข้าใจ และคอยควบคุมวินัยในชั้น วิธีนี้เด็กแต่ละคนใช้เวลาในการเรียนการสอนแตกต่างกัน แต่วิธีนี้ไม่มีการสอนซ่อมเสริม

5. นักเรียนเรียนด้วยตนเองด้วยบทเรียนสำเร็จรูป และนำหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มาใช้ คือมีการตรวจสอบพื้นฐาน การเสริมสร้างพื้นฐาน การทดสอบย่อย และถ้าคนใดไม่ผ่านเกณฑ์จะได้รับการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล

6. เด็กเรียนด้วยตนเองด้วยบทเรียนสำเร็จรูป และใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้คล้ายวิธีที่ห้า แต่แตกต่างกันที่วิธีนี้ เด็กที่บกพร่องจะได้รับการซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม

ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนจากครูเป็นผู้สอนและมีการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มกับนักเรียนที่เรียนจากบทเรียนสำเร็จรูปและมีการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล เป็นกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์น้อย และใช้เวลาในการเรียนการสอนที่เหมาะสมที่อยู่ในวิสัยที่ครูพึงปฏิบัติได้ โดยเฉพาะกลุ่มที่เรียนจากครูและมีการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มนั้นใช้เวลาเพิ่มขึ้นจากการเรียนการสอนแบบปกติเพียงสามเปอร์เซ็นต์เท่านั้น จำนวนเวลาที่เพิ่มขึ้นเพียงแค่นี้ อยู่ในวิสัยที่ครูทำได้ในห้องเรียนโดยไม่ต้องมีชั่วโมงพิเศษสำหรับซ่อมเสริมแต่อย่างใด นอกจากนั้นยังพบว่าการเรียนแบบรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มหรือเป็นรายบุคคลก็ตามจะช่วยให้เด็กเรียนที่มีความถนัดทางการเรียนค่ามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น จนเทียบเท่ากับนักเรียนกลุ่มที่มีความถนัดสูง แต่ได้รับการเรียนการสอนแบบไม่มีการซ่อมเสริม

จากเหตุผลและหลักฐานสนับสนุนผลการศึกษากล่าวมา ผู้วิจัยจึงตั้งสมมุติฐานว่า กระบวนการเรียนเพื่อรอบรู้ที่สอนซ่อมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด ซ่อมเสริมโดยศึกษาค้นคว้าเอง จากบทเรียนโปรแกรม ซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยข้อทดสอบย่อย อธิบายข้อบกพร่องรวม ๆ และกลุ่มที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริมเลยจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีต่อทัศนคติและความสนใจในวิชาเรียน

ก่อนนั้นทฤษฎีการเรียนรู้เพื่อรอบรู้จะมุ่งศึกษาถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จนกระทั่งหลังจากปี ค.ศ. 1970 การศึกษาและวิจัยจึงหันมาสนใจศึกษาตัวแปรทางด้านจิตใจ (Affective consequence) เช่นความสนใจ ทัศนคติและอึดทนในภาพเป็นกัน แต่ข้อมูลที่ได้มาก่อนข้างหยามเพราะได้มาจากกรวิจัยที่ไม่ใช่การทดลอง และใช้เครื่องมือชนิดง่าย ๆ ในการรวบรวมข้อมูลซึ่งเสนอว่า ธรรมชาติของอารมณ์ (เสนอว่า ธรรมชาติของอารมณ์ 2521 : 30) ได้ให้ข้อคิดไว้ว่า การสอนของครูปัจจุบันยังมองอยู่เพียงสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นส่วนใหญ่ และทำการประเมินผลแบบปกติวิสัยเทียบเคียงกับคนอื่น (Relative norm) ยิ่งกว่าจะใช้ปกติวิสัยจริง (Absolute norm) จึงทำให้นักเรียนที่เรียนอ่อนมองภาพพจน์ของตน (Self concept) ไปในทางลบ คือคิดว่าตนเองไม่มีความสามารถจะเรียนเท่าเพื่อนได้เลย แต่ถ้าใครส่งเสริมเด็กอ่อนเหล่านั้นให้มีสัมฤทธิ์ผลเท่าเด็กทั่วไปหรือเด็กเก่งแล้ว ผลทางด้านความรู้สึกและจิตใจของเด็ก ซึ่งเป็นสิ่งที่แฝงในตัวเด็กจะเป็นไปในทางบวก

ผลจากการวิจัยแสดงว่า วิธีเรียนเพื่อรอบรู้ทำให้นักเรียนมีความสนใจในวิชาที่เรียนสูง และเป็นไปในทางบวก (Block. 1974 : 50, citing Gallup. 1969 : Hapkeiwicz. 1971 : Shoppard and Mac - Dermont. 1970 )

แต่อย่างไรก็ตามทฤษฎีการเรียนรู้ที่กำหนดเกณฑ์ผ่าน (Criterion Level) ในการเรียนเนื้อหาแต่ละตอนไว้สูง นักเรียนต้องเรียนหนักเกินไปตลอดเนื้อหาที่เรียน เช่น วิธีของเคลเลอร์จะทำให้เด็กเรียนมีความสนใจลดลงแทนที่จะสนใจมากขึ้น และจากรายงานการวิจัยยังพบอีกว่าถ้าผู้เรียนได้พบกับความผิดหวังในเรื่องคะแนนจากผลการเรียนเรื่อย ๆ จะทำให้เขาลดความสนใจการเรียนลง (Block. 1971 : 17, citing White. 1959 : Atkinson and Feather. 1966 ) ส่วนคีฟส์ (Keeves. 1972 : 53, citing Biggs. 1959 : Keeves. 1966 : and Aiken. 1970 )

พบว่า

1. ทัศนคติของนักเรียนระดับประถมศึกษาที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับค่อนข้างต่ำ และจะค่อย ๆ สูงขึ้นไปตามลำดับ เมื่อเด็กได้เรียนระดับสูง ๆ จนถึงระดับมัธยมศึกษา

2. ในระดับมัธยมศึกษา เด็กชายจะมีทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าเด็กหญิง

3. ผลของทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มักจะเกิดจากการสอนของครู มากกว่าที่จะมีผลมาจากบ้านและอุปกรณ์ของ เด็ก

ในปี พ.ศ. 2520 ยุวดี. ปริยฉัตรานันท์ (ยุวดี. ปริยฉัตรานันท์ 2520 : 82) ได้ศึกษาถึงผลการเฉลยข้อสอบซึ่งเป็นวิธีการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนวิธีหนึ่งที่มีต่อพฤติกรรมบ้านอาเวคในวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 90 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม ในระหว่างการทดลองมีการทดสอบย่อย 5 ครั้ง แบ่งกลุ่มทดลองออกเป็น

กลุ่มที่ 1 หลังการทดสอบมีการเฉลยข้อสอบทันที

กลุ่มที่ 2 หลังการทดสอบไม่มีการเฉลยข้อสอบทันที

ก่อนและหลังการทดสอบนำแบบสอบถามพฤติกรรมบ้านอาเวคคือแรงจูงใจ ความสนใจ ทัศนคติ อคติ โศกภาพ ผลการทดสอบสรุปได้ว่าไม่พบความแตกต่างของพฤติกรรมบ้านอาเวค ในกลุ่มตัวอย่างทั้งสอง

สำหรับงานวิจัยที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมกับความสนใจและทัศนคติที่มีต่อวิชาเรียนมีผู้ศึกษาไว้ในรูปที่ยกต่างกันเช่น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี 2518 : 30) ได้ทำการศึกษาวิจัยกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่าทัศนคติมีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์ แต่ความสนใจทางคณิตศาสตร์ ไม่ค่อยมีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์

ฟรานซิส (Francies. 1971 : 1333 - A) ได้ทำการศึกษาวิจัยกับนักเรียนเกรด 4 และเกรด 6 พบว่าทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากรายงานการวิจัยระหว่างความสนใจในการเรียนและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของบลอค (Block. 1971 : 13, citing Neale, 1969 : Husen. 1967 : Anttonen. 1969 : Baraheni. 1962 : Frandsen and Sessions. 1953 :

Wyman. 1924) พบว่าทั้งความสนใจและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กันในทางบวก คือระหว่าง +.20 และ +.50

ส่วนรายงานการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่างทัศนคติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน นั้นเป็นไปในทางบวก โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะพบมากในเด็กที่มีผลการเรียนดี (Block. 1971 : 20, citiny Flemming. 1925 : Khan. 1969 : Kurts and Swenson. 1951 : Michael, Baker, and Jones. 1964 and Russel. 1969) ในการศึกษา ทั้งหมดนี้ส่วนมากจะกระทำกับนักเรียนระดับประถมศึกษา

เจนไทล์ ( Gentile. 1970 : 117 - 118) พบว่าการสอนโดยวิธีการเรียน เพื่อรอบรู้ทำให้นักเรียนมีองค์ประกอบด้านจิตใจ (Affective) ที่สูงขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับ วิธีสอนแบบบรรยายกันแค่น (Duncan. 1976 : 1370 - A) พบว่านักเรียนชอบวิธีที่ครู ใช้แบบทดสอบย่อยและชอบวิธีการที่ครูบอกจุดประสงค์ของการสอน นักเรียนมีความรู้สึกว่าการเรียนด้วยวิธีนี้ก้าวไปได้อย่างรวดเร็ว

บล็อก ( Block. 1970 : 104 ) ได้ทดลองสอนโดยใช้หลักการเรียนเพื่อรอบรู้ โดยแบ่งกลุ่มทดลองเป็น 4 กลุ่ม และกำหนดเกณฑ์การรอบรู้ของแต่ละกลุ่มไว้ 95% 85% 75% และ 65% ผลการวิจัยพบว่า การกำหนดเกณฑ์รอบรู้ของเนื้อหาของแต่ละตอนไว้สูงสุด คือ 95% นั้น ถ้าทำการทดลองไปนาน ๆ ทำให้ความสนใจในวิชาที่สอนลดลง แต่กลุ่มที่ สอนโดยกำหนดเกณฑ์รอบรู้ไว้ 85% ของเนื้อหา จะทำให้ความสนใจในวิชาที่สอนสูงสุด ทั้งนี้การตั้ง เกณฑ์รอบรู้ไว้สูงเกินไป จะทำให้นักเรียนลดความสนใจลงได้แก่การตั้ง เกณฑ์ ไว้ต่ำเกินไปก็ทำให้ประสิทธิภาพของการศึกษาต่ำลงไปด้วย

จากเหตุผลและหลักฐานสนับสนุนผลการสนับสนุนผลการศึกษาที่กล่าวมา ผู้วิจัยจึง ตั้งสมมุติฐานว่านักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมด้วยวิธีต่าง ๆ หลังจากการสอนจบแล้วจะมี ทัวแปรทางทัศนคติและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้น

## สมมติฐานในการวิจัย

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัด, นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมโดยใช้ศึกษาด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรม, นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยข้อสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องรวม ๆ และนักเรียนกลุ่มที่ไม่มีการสอนซ่อมเสริมจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
2. นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดความจุกประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ไม่ผ่าน หลังจากสอนจบแล้วจะมีตัวแปรตามข้อ 2.1 และ 2.2 สูงขึ้น
  - 2.1 ทักษะที่มีต่อวิชาเรียน
  - 2.2 ความสนใจในวิชาเรียน
3. นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ไม่ผ่าน หลังจากสอนจบแล้วมีตัวแปรตามข้อ 3.1 และ 3.2 สูงขึ้น
  - 3.1 ทักษะที่มีต่อวิชาเรียน
  - 3.2 ความสนใจในวิชาเรียน
4. นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยข้อสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง หลังจากสอนจบแล้วมีตัวแปรตามข้อ 4.1 และ 4.2 สูงขึ้น
  - 4.1 ทักษะที่มีต่อวิชาเรียน
  - 4.2 ความสนใจในวิชาเรียน

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2524 โรงเรียนนาวิรัตน์ อำเภอเมือง จังหวัดแพร่ จำนวน 120 คน ได้มาจากการสุ่มอย่างง่ายจากมวลประชากรทั้งหมด 139 คน ส่วนการจัดนักเรียนเข้ากลุ่มต่าง ๆ เพื่อให้ทราบว่านักเรียนคนใดจะได้รับการซ่อมเสริมโดยวิธีใดนั้น กระทำได้โดยการกำหนดตัวเลขให้กับกลุ่มตัวอย่างทุกคน ตั้งแต่เลข 001 จนถึง 120 แล้วอ่านตัวเลขจากตารางเลขสุ่ม เมื่อได้ตัวเลขตรงกับนักเรียนคนใดให้เลือกนักเรียนคนนั้นมาอยู่ในกลุ่มที่หนึ่ง คนที่สองอยู่ในกลุ่มที่สอง คนที่สามอยู่ในกลุ่มที่สาม คนที่สี่อยู่ในกลุ่มที่สี่ตามลำดับ แล้วเวียนกลับมาใส่กลุ่มที่หนึ่งใหม่จนครบกลุ่มละ 30 คน หลังจากนั้นก็ใช้วิธีสุ่มโดยการจับสลากเพื่อที่จะให้ทราบว่ากลุ่มใดเป็นกลุ่มทดลองหรือกลุ่มควบคุม เมื่อได้กลุ่มทดลองทั้งสามกลุ่มมาแล้ว ก็ทำการสุ่มวิธีการทดลอง (Treatment) ให้แก่แต่ละกลุ่มอีกครั้งหนึ่ง ตามแบบแผนการวิจัยแบบ Completely Randomized Design (Myers, 1979 : 57)

ตาราง 1 แสดงจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

	กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง(1)	กลุ่มทดลอง(2)	กลุ่มทดลอง(3)	รวม
จำนวนนักเรียน	30	30	30	30	
รวม	30	30	30	30	120

### การดำเนินการทดลอง

✓ เป็นกรนำเอาหลักการเรียนเพื่อรอบรู้มาใช้ในการทดลอง ซึ่งทุกกลุ่มจะได้รับ การสอนตามรูปแบบเดียวกัน ตั้งแต่รอบวนการจากข้อ 1 ถึงข้อ 4 โดยครูผู้สอนประจำวิชา ซึ่งผู้วิจัยจะเขียนคู่มือประกอบการสอนให้แก่ครูผู้ทำการสอนปกติในชั้นเรียน ส่วนกระบวนการ ภายหลังจากข้อ 4.1 เป็นต้นไป จะเป็นการสอนซ่อมเสริมที่ต่างกันไป 3 วิธี ซึ่ง การดำเนินการทดลองโดยครูผู้สอน ซึ่งเป็นบุคคลวนเดียวกัน ดังรายละเอียดของการทดลอง ต่อไป

1. ก่อนสอนมีการทดสอบวัดทัศนคติและความสนใจที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และมีการตรวจสอบความรู้พื้นฐานเรื่องโพลีโนเมียลที่มีมาด้วยแบบทดสอบย่อย ถ้านักเรียน ขาดความรู้พื้นฐานก็ได้รับการสอนเพื่อเสริมสร้างความรู้พื้นฐานก่อนเริ่มบทเรียน
2. เริ่มการสอนโดยครูผู้สอนแจ้งจุดมุ่งหมายของวิชาและวิธีเรียน ตลอดจนเกณฑ์ในการประเมินผลว่าในแต่ละตอน นักเรียนต้องทำคะแนนจากแบบทดสอบย่อย ให้ได้ร้อยละ 80 ขึ้นไป ถ้าต่ำกว่านั้นก็ต้องเรียนซ่อมเสริม
3. ครูดำเนินการสอนเป็นกลุ่ม (Group - based Intruction)ตาม เอกสารและคู่มือครูซึ่งผู้วิจัยเขียนขึ้นมา เพื่อเป็นเครื่องชี้แนะให้ครูผู้สอนได้สอนเนื้อหาวิชา ความจุดประสงค์ที่วางไว้ ตลอดจนการใช้อุปกรณ์ให้คล้ายคลึงกันทุกกลุ่ม
4. เมื่อทุกกลุ่มสอนเนื้อหาจบลงในแต่ละตอนแล้วจะให้ให้นักเรียนทำแบบ ทดสอบย่อย แล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ ในกรณีที่นักเรียนคนใดทำข้อสอบได้ ไม่ถึงเกณฑ์ร้อยละ 80 ตามที่ตั้งไว้ต้องเรียนซ่อมเสริมดังต่อไปนี้
  - 4.1 กลุ่มควบคุม ไม่มีการเรียนซ่อมเสริม จึงไม่มีการนับเวลา ที่ใช้ในการซ่อมเสริม
  - 4.2 กลุ่มทดลอง (1) สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยให้ ทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม เฉพาะจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่นักเรียนไม่ผ่าน การนับเวลาเรียน เริ่มนับตั้งแต่ครูเริ่มสอนซ่อมเสริม โดยคิดเป็นรายเฉลี่ยของเวลาทั้งหมดที่นักเรียนทุกคนใช้

4.3 กลุ่มทดลอง (2) สอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยให้นักเรียนศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมที่เตรียมไว้ให้เฉพาะจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่นักเรียนไม่ผ่านการนับเวลาเรียนเริ่มตั้งแต่นักเรียนเรียนซ่อมเสริม โดยคิดเป็นรายเฉลี่ยของเวลาที่นักเรียนทุกคนใช้ซ่อมเสริม

4.4 กลุ่มทดลอง (3) สอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายเนื้อหาที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนอธิบายข้อผิดพลาด วิธีการแก้ไขของนักเรียนทุกคนโดยรวม ๆ การนับเวลา นับในช่วงที่ครูสอนซ่อมเสริมของแต่ละครั้ง

5. การบันทึกการเฉลี่ยของเวลาที่ทำการสอนซ่อมเสริมของแต่ละวิธีไว้นั้น ก็เพื่อนำไปเปรียบเทียบกันในตอนอภิปรายผลการทดลอง

6. ภายหลังจากการทดลองเสร็จนำแบบทดสอบวัดทัศนคติและความสนใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ฉบับเดิมสอบวัดอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับ การสอบวัดเมื่อก่อนทำการทดลองสอน

### ก. เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง

เนื้อหาวิชาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้คือ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลีโนเมียล ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น 2521 ของกระทรวงศึกษาธิการ โดยแบ่งเนื้อหาวิชาเป็นหน่วยย่อยได้ดังนี้

1. การแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียลดีกรีสูง (สูงกว่าดีกรี 2) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
2. การแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียลดีกรีสูง (สูงกว่าดีกรี 2) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีเศษ
3. เศษส่วนของโพลีโนเมียล
4. การแก้สมการเศษส่วนของโพลีโนเมียล
5. โจทย์สมการ

## ๗. ระยะเวลาในการทดลอง

ระยะเวลาในการทดลอง ใช้เวลาในการสอนซ่อมเสริมประมาณกลุ่มละ 12 ชั่วโมง

## ๘. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองประกอบด้วย

### ๑.1. โครงการสอนและบันทึกการสอน

1.1 วิเคราะห์หลักสูตรและกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมสำหรับเนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง

1.2 จัดทำโครงการสอนและบันทึกการสอนเรื่องโพลีโนเมียล

### ๑.2. แบบฝึกหัด โดยยึดหลักการสร้างดังนี้

2.1 ไม่เป็นแบบฝึกหัดที่ซ้ำซาก

2.2 ส่งเสริมให้เกิดแนวคิดใหม่ ๆ ในการแก้ปัญหา

2.3 เป็นแบบฝึกหัดที่นำไปสู่ข้อสรุปของกฎเกณฑ์ของสิ่งนั้น ๆ

2.4 มีทั้งส่วนที่ฝึกทักษะและฝึกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2.5 สร้างขึ้นให้สอดคล้องกับทุกจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของเนื้อหาในแต่ละตอน

แต่ละตอน

\* 3. บทเรียนโปรแกรม ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 5 ชุด ในแต่ละชุดจะประกอบด้วยบทเรียนโปรแกรมชุดย่อย ๆ ที่สร้างขึ้นให้เหมาะสมกับแต่ละจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่นักเรียนได้ศึกษาได้ด้วยตัวเอง ภายใต้การให้คำแนะนำและควบคุมวิธีการใช้โดยครูผู้สอนเท่าที่จำเป็น ซึ่งแต่ละชุดจะประกอบด้วยเนื้อหาดังนี้

3.1 การแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียลดีกรีสูง (สูงกว่าดีกรี 2) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

3.2 การแยกตัวประกอบโพลีโนเมียลดีกรีสูง (สูงกว่าดีกรี 2) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยวิธีทฤษฎีเศษ

3.3 เศษส่วนของโพลีโนเมียล

3.4 การแก้สมการเศษส่วนของโพลีโนเมียล

3.5 โจทย์สมการ

บทเรียนโปรแกรมนี้เมื่อสร้างเสร็จได้นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิต ประสานมิตร เพื่อนำมาวิเคราะห์ปรับปรุงบทเรียนและความยากง่ายของภาษาที่ใช้ให้เหมาะสม

\* 4. แบบทดสอบย่อย (Formative test) เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก รวมทั้งสิ้น 6 ฉบับ มีจำนวนข้อสอบ 14 ข้อ 9 ข้อ 10 ข้อ 5 ข้อ และ 5 ข้อ ตามลำดับ ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของแต่ละตอน ตัวอย่างเช่น

๑. เมื่อหาร  $x^3 - x^2 - 4$  ด้วย  $x - 2$  จะเหลือเศษเท่าไร

ก. - 2

ข. - 1

ค. 0

ง. 1

จ. 2

ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบย่อยที่สร้างเสร็จแล้วไปทดลองกับนักเรียนที่เรียนเรื่องโพลีโนเมียลแล้วเอาคะแนนมาหาค่าความเชื่อมั่นชนิดอิงเกณฑ์ ซึ่งได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .52 .63 .66 .58 .72 และ .44 ตามลำดับ และหาค่าความไวของข้อสอบ (Sensitivity index) ของแต่ละฉบับก่อนนำไปใช้จริง (ดูรายละเอียดในภาคผนวก)

\*5. แบบทดสอบรวม (Summative test) เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ของผู้เรียน มีข้อสอบทั้งหมด 55 ข้อ เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก ตัวอย่างเช่น

๐. ข้อใดเป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม  $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$
- ก.  $x - 2$
- ข.  $x + 2$
- ค.  $2x - 1$
- ง.  $2x + 1$
- จ.  $2x + 3$

เมื่อสร้างเสร็จแล้วผู้วิจัยได้นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนเรื่องพหุนามจำนวน 80 คน เพื่อนำเอาคะแนนมาหาค่าความเชื่อมั่นด้วยสูตร คูเคอร์-ริชาร์ดสัน สูตร 21 ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .88 และนำเอาคะแนนชุดเดียวกันนี้ไปหาค่าความยากและอำนาจจำแนกเป็นรายข้อก่อนนำไปใช้จริง (ดูรายละเอียดในภาคผนวก)

6. แบบทดสอบวัดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยได้แปลมาจากแบบทดสอบวัดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ ของคีฟส์ (Keeves, 1974 : 33) เป็นแบบลิเกิต สเกล (Likert scale) มีทั้งหมด 10 ข้อ ดังตัวอย่าง

- ค่าอำนาจจำแนก
๐. ข้าพเจ้าชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชาอื่น .60
๐๐. ข้าพเจ้าชอบที่จะลองแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ .62
๐๐๐. ข้าพเจ้าคิดว่าคณิตศาสตร์ไม่เป็นวิชาที่น่าสนุกและสนใจเลย .78

ลักษณะข้อคำถามจะมีทั้งความหมายทางบวก คือข้อ 1 2 5 7 8  
และความหมายทางลบ คือข้อ 3 4 6 9 10 ลักษณะคำตอบมี 5 ตัวเลือกคือ  
เป็นจริงมากที่สุด เป็นจริง เฉย ๆ เป็นจริงน้อย เป็นจริงน้อยที่สุด ผู้วิจัยได้นำ  
แบบทดสอบฉบับนี้ไปทดลองสอบและนำเอาคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่นด้วยสูตร ของ  
Co-efficient alpha มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .77

7. แบบทดสอบวัดทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ใช้แบบทดสอบ  
วัดทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ สมบูรณ์ ชิตพงศ์ (สมบูรณ์ ชิตพงศ์ 2519 : 119)  
ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบทดสอบแบบลิเกิต สเกล (Likert scale) 5 ตัวเลือก คือ  
เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง แบบทดสอบ  
ฉบับนี้มีจำนวน 20 ข้อ ผู้วิจัยได้นำไปทดลองสอบและหาค่าความเชื่อมั่นด้วยสูตร  
Co-efficient alpha ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .88 ดังตัวอย่าง

- 7.1 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยิ่งเรียนยิ่งน่าสนใจ
- 7.2 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เนื้อหาไม่ยาก
- 7.3 คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนมากกว่าวิชาอื่น ๆ

ฯลฯ

การตรวจให้คะแนนทั้งแบบทดสอบวัดความสนใจและทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์นั้น  
ถ้าข้อความมีความหมายในทางบวกก็ให้คะแนนของเห็นด้วยอย่างยิ่ง 5 คะแนน ของ  
เห็นด้วย 4 คะแนน ของไม่แน่ใจ 3 คะแนน ของไม่เห็นด้วย 2 คะแนน ของ  
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง 1 คะแนน แต่ถ้าหากข้อสอบมีความหมายในทางลบก็ให้คะแนนของ  
เห็นด้วยอย่างยิ่ง 1 คะแนน ของเห็นด้วย 2 คะแนน ของไม่แน่ใจ 3 คะแนน ของ  
ไม่เห็นด้วย 4 คะแนน ของไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง 5 คะแนน ไปตามลำดับ

#### ข้อสังเกตในขณะดำเนินการทดลอง

1. เนื่องจากการจัดทดลองตอนซ้อมเสริมในครั้งนี้มีแบบแผนจะต้องแยกนักเรียน  
เข้าตามกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนั้นจึงไม่สามารถจะจัดซ้อมเสริมในวันว่างเรียน

ปกติได้ ซึ่งผู้วิจัยได้แก้ปัญหาโดยนักหมายให้นักเรียนที่จะเข้ารับการซ่อมเสริมได้ซ่อมเสริมในคาบเรียนที่ 8 ภายหลังจากเลิกเรียนแล้ว คือตั้งแต่เวลา 15.30 น. เป็นต้นไป ส่วนนักเรียนที่ขาดเรียนในแต่ละวันนั้นก็ให้นักหมายให้เข้ารับการซ่อมเสริมในวันถัดไป

2. นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งเป็นเด็กโตแล้ว มีทักษะในการอ่านสูง มีความสามารถในการรับรู้ได้ดี การให้อาบบทเรียนโปรแกรมในการซ่อมเสริมแต่ละครั้งมักจะทำไปด้วยความรวดเร็ว แต่ก็มีนักเรียนบางคนไม่ชอบคิดคำนวณก่อนที่จะไปค่าเฉลี่ยในแต่ละรอบการเรียน แต่ถึงอย่างไรก็ตามนักเรียนส่วนใหญ่ที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมโดยใช้อบบทเรียนโปรแกรมก็มีความกระตือรือร้นที่จะเรียนไปได้อย่างสนุกสนาน

3. นักเรียนกลุ่มที่รองรับการซ่อมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ที่ไม่นานนั้นล้วนมากนักเรียนจะต้องใช้เวลามากในการคิดคำนวณแบบฝึกหัด และมีนักเรียนบางกลุ่มพยายามเร่งเวลาการทำแบบฝึกหัดของตนเองเพื่อจะได้กลับบ้านได้ทันเวลา การซ่อมเสริมโดยการเพิ่มแบบฝึกหัดนี้ถ้าจะให้ได้ผลดีขึ้นควรจะให้แบบฝึกหัดแก่นักเรียนไปทำที่บ้านได้ ซึ่งจะทำให้นักเรียนมีเวลาในการคิดมากขึ้น แต่ในการทดลองซ่อมเสริมในครั้งนี้ไม่สามารถทำได้เพราะผู้วิจัยจะต้องจับเวลาในการซ่อมเสริมของนักเรียนแต่ละคน เพื่อนำมาหารายเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริมแต่ละวิธี

4. การซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ นั้นจะได้เปรียบกว่าวิธีการซ่อมเสริมแบบอื่น ๆ ทั้งนี้เพราะนักเรียนได้ฟังและจับบันทึกข้อบกพร่องของตนเอง ได้ใช้ประสาทสัมผัสในการรับรู้หลายทาง อีกทั้งยังได้มีโอกาสพูดคุยซักถามโต้แย้งกับครูซ่อมเสริมถึงสิ่งที่ตนเองไม่เข้าใจอีกด้วย ซึ่งลักษณะอย่างนี้การซ่อมเสริมแบบอื่น ๆ ไม่ค่อยมีโอกาสได้ทำ

5. นักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมแต่ละกลุ่ม มักจะเป็นพวกเค็มที่เคยซ่อมเสริมในจุดประสงค์ของเนื้อหาวิชาตอนต้น ๆ ด้วย แต่ถึงอย่างไรก็ตามนักเรียนเหล่านี้ก็จะทำข้อสอบได้ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ภายหลังจากที่ได้รับการซ่อมเสริมแล้ว ซึ่งจะสังเกตได้ว่านักเรียนเหล่านี้จะมีความมั่นใจในตนเองมากขึ้นเมื่อเขาสามารถผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ได้

6. การตั้งเกณฑ์การเรียนรู้ในระดับ 80% ของเนื้อหาวิชาแต่ละตอนนั้น บางครั้งก็มีปัญหาในเนื้อหาตอนที่ยาก ๆ นักเรียนจะผ่านจุดประสงค์ไปได้ยากมาก ต้องใช้เวลาในการซ่อมเสริมมากขึ้นไปคล้ายอย่างเช่นเนื้อหาในตอนที่ 1 3 และ 4 เป็นต้น

๒. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อย โดยคำนวณจากสูตรของ ลีพวิงสตัน (อนันต์ ศรีโสภา 2520 : 68)

$$r_{tt} = \frac{s_0^2}{s_0^2 + (\bar{x} - c)^2}$$

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n \sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

เมื่อ D แทน ความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่  
n แทน จำนวนคู่

4. ทาคาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดทัศนคติและความสนใจในวิชาเรียน  
โดยใช้สูตร Co-efficient Alpha (Cronbach, 1972 : 126)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[ 1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right]$$

เมื่อ  $r_{tt}$  แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบสอบถามทั้งหมด  
n แทน จำนวนข้อของแบบสอบถาม

$S_i^2$  แทน ค่าความแปรปรวนรายข้อ

$S_t^2$  แทน ค่าความแปรปรวนของแบบสอบถามทั้งหมด

$\sum S_i^2$  แทน ผลรวมของค่าความแปรปรวนรายข้อ

5. ทาคาค่าความไว (Sensitivity index) ของแบบทดสอบย่อย (Formative test) โดยใช้สูตรของ Brennan (สมศักดิ์ สันสุระเวชญ์ 2522 : 79 อ้างอิงมาจาก Brennan, 1972)

$$B = \frac{U}{n_1} - \frac{L}{n_2}$$

เมื่อ B แทน ค่าความไวแต่ละข้อ ของข้อสอบย่อยชนิดอิงเกณฑ์

U แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มสูง

L แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

$n_1$  แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูงทั้งหมด

$n_2$  แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มต่ำทั้งหมด

คะแนนที่ถือเป็นจุดแบ่งของคะแนนกลุ่มสูง - ค่า คือคะแนนเกณฑ์ที่กำหนดไว้เป็น  
 ฐานของการสอบ ในกาทดสอบครั้งนี้คือเอาที่คะแนนตั้งแต่ 80 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไปเป็น  
 กลุ่มสูง คะแนนต่ำกว่า 80 เปอร์เซ็นต์ลงมาเป็นกลุ่มต่ำ

6. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบรวม (Summative Test) โดยใช้สูตร  
 ของ Kuder-Richardson สูตรที่ 21 (อนันต์ ศรีโสภณ 2520 : 53)

$$r_{tt} = \frac{ns_t^2 - \bar{X}(n - \bar{X})}{s_t^2(n - 1)}$$

เมื่อ  $r_{tt}$  แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งหมด  
 $s_t^2$  แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากการสอบ  
 $n$  แทน จำนวนข้อสอบ  
 $\bar{X}$  แทน ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการสอบ

7. หาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบรวม (Summative Test) โดยใช้  
 เทคนิค 27 เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ และเปิดหาค่าอำนาจจำแนกจากการวาง  
 สำเร็จของ Chung - Teh Fan (บุญชม ศรีสะอาด 2520 : 117)

8. หาค่าอำนาจจำแนกของแบบสอบถามเพื่อวัดทัศนคติและความสนใจในวิชาเรียน  
 โดยใช้สถิติแบบ ที (t - test) (อังคณา สายยศ 2523 : 96)

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

เมื่อ  $t$  แทน ค่าอำนาจจำแนกของแบบสอบถามแต่ละข้อ  
 $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  แทน ค่าเฉลี่ยของคะแนนในข้อคำถามนั้นของกลุ่มสูง  
 และกลุ่มต่ำตามลำดับ

เมื่อ  $s_1^2, s_2^2$  แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนนของแบบสอบถามใน  
 กลุ่มสูงและกลุ่มต่ำตามลำดับ

$n_1, n_2$  แทน จำนวนนักเรียนที่ตอบแบบสอบถามในกลุ่มสูงและ  
 กลุ่มต่ำตามลำดับ

บทที่ 4

ผลการทดลอง

ขั้นตอนในการเสนอผลการทดลองได้แบ่งออกเป็น 11 ขั้นตอนคือ

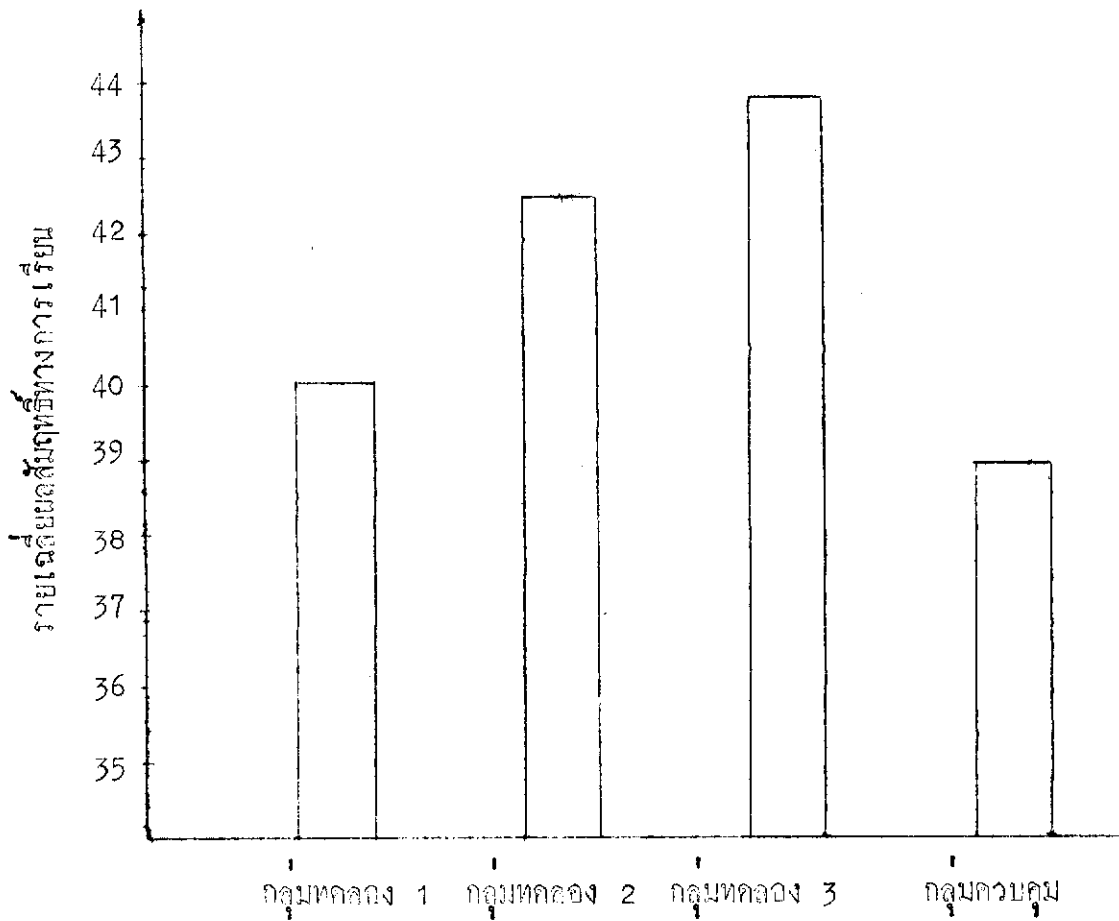
1. เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม
2. เปรียบเทียบคะแนนการสอบย่อยก่อนและหลังการซ่อมเสริม
3. อัตราร้อยระหว่างความแตกต่างของตัวกลางเลขคณิตกับความเบี่ยงเบนมาตรฐานผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม
4. เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบทดสอบย่อย
5. เปรียบเทียบค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบทดสอบรวม
6. เปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมกับร้อยละของเวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริม
7. เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของทุกกลุ่มกับร้อยละของเวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริม
8. เปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายในแต่ละกลุ่มทดลองระหว่างก่อนและหลังการทดลอง
9. เปรียบเทียบความแตกต่างของทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธี
10. เปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ภายในแต่ละกลุ่มทดลองระหว่างก่อนและหลังการทดลอง
11. เปรียบเทียบความแตกต่างของความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการซ่อมเสริมทั้ง 3 วิธี

เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลอง  
และกลุ่มควบคุม

ภายหลังจากการทดลองเสร็จสิ้นลง ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์  
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง จำนวน 55 ข้อ ไปทดสอบวัด  
กับนักเรียนในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏ คะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวน  
ของคะแนนทั้งปรากฏโดยตาราง 2

ตาราง 2 ค่าคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
วิชาคณิตศาสตร์

		$\bar{X}$	$S^2$
กลุ่มทดลอง 1	ได้รับการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดย เพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์เชิง พฤติกรรมที่บกพร่อง	40.27	46.60
กลุ่มทดลอง 2	ได้รับการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดย ศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมตามจุด ประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง	42.43	22.45
กลุ่มทดลอง 3	ได้รับการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดย การแจกแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อ บกพร่องรวม ๆ	43.60	26.04
กลุ่มควบคุม	ไม่มีการซ่อมเสริม	38.96	62.23



ภาพประกอบที่ 1 เปรียบเทียบค่ากลางเลขคณิตระหว่างวิธีสอนซ่อมเสริม 3 วิธี และ  
กลุ่มควบคุม

จากคะแนนเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของคะแนนในตาราง 2 เมื่อนำมาทดสอบความแตกต่าง โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทิศทางเดียว ปรากฏผลตามตาราง 3 ดังนี้

ตาราง 3 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

แหล่งตัวแปร	SS	df	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	392.56	3	130.65	.
ภายในกลุ่ม	4563.41	116	39.34	3.32*
	4955.97	119		

\* มีนัยสำคัญที่ระดับ .05

จากตาราง 3 เมื่อวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แล้วพบว่า มีนัยสำคัญที่ระดับ .05 จึงแสดงว่ามีกลุ่มตัวอย่าง อย่างน้อย 1 กลุ่ม ที่มีคะแนนเฉลี่ยแตกต่างกัน จึงได้ทำการทดสอบความแตกต่างของรายเฉลี่ยระหว่างกลุ่มโดยใช้วิธีการของนิวแมน-คูลส์ (Newman-Keuls Procedure) ดังแสดงผลวิเคราะห์ในตาราง 4

ตาราง 4 การทดสอบความแตกต่างของรายเฉลี่ยระหว่างคู่โดยวิธีของนิวแมน-คีสส์

กลุ่ม	รายเฉลี่ย	กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง 1	กลุ่มทดลอง 2	กลุ่มทดลอง 3
กลุ่มควบคุม	38.96	-	1.31	3.47	4.64
กลุ่มทดลอง 1	40.27		-	2.16	3.33
กลุ่มทดลอง 2	42.43			-	1.77
กลุ่มทดลอง 3	43.60				-
r			2	3	4
q.95 (r,116)			2.80	3.36	3.69
$\sqrt{MS_w/n} \cdot q.95(r,116)$			3.20	3.84	4.22
		กลุ่มควบคุม	กลุ่มทดลอง 1	กลุ่มทดลอง 2	กลุ่มทดลอง 3
กลุ่มควบคุม					*
กลุ่มทดลอง 1					
กลุ่มทดลอง 2					
กลุ่มทดลอง 3					

\* มีนัยสำคัญที่ระดับ .05

จากผลการวิเคราะห์ในตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า ระหว่างกลุ่มควบคุม ซึ่งมีรายเฉลี่ย 38.96 กับกลุ่มทดลอง 1 ซึ่งมีรายเฉลี่ย 40.27 และกลุ่มทดลอง 2 ซึ่งมีรายเฉลี่ย 42.43 มีความแตกต่างกันอย่างไม่นัยสำคัญทางสถิติ

ส่วนการเปรียบเทียบรายเฉลี่ยระหว่างกลุ่มทดลอง 3 ซึ่งมีรายเฉลี่ย 43.60 กับกลุ่มควบคุม ปรากฏว่า แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 แปลว่า นักเรียนที่ได้รับการส่งเสริมเป็นกลุ่มมีผลการเฉลี่ยที่รวมย่อยและอธิบายขอบเขตผลรวม ๆ มีผลการเรียนที่ดีขึ้นจริง กว่ากลุ่มที่ไม่ได้รับการส่งเสริม

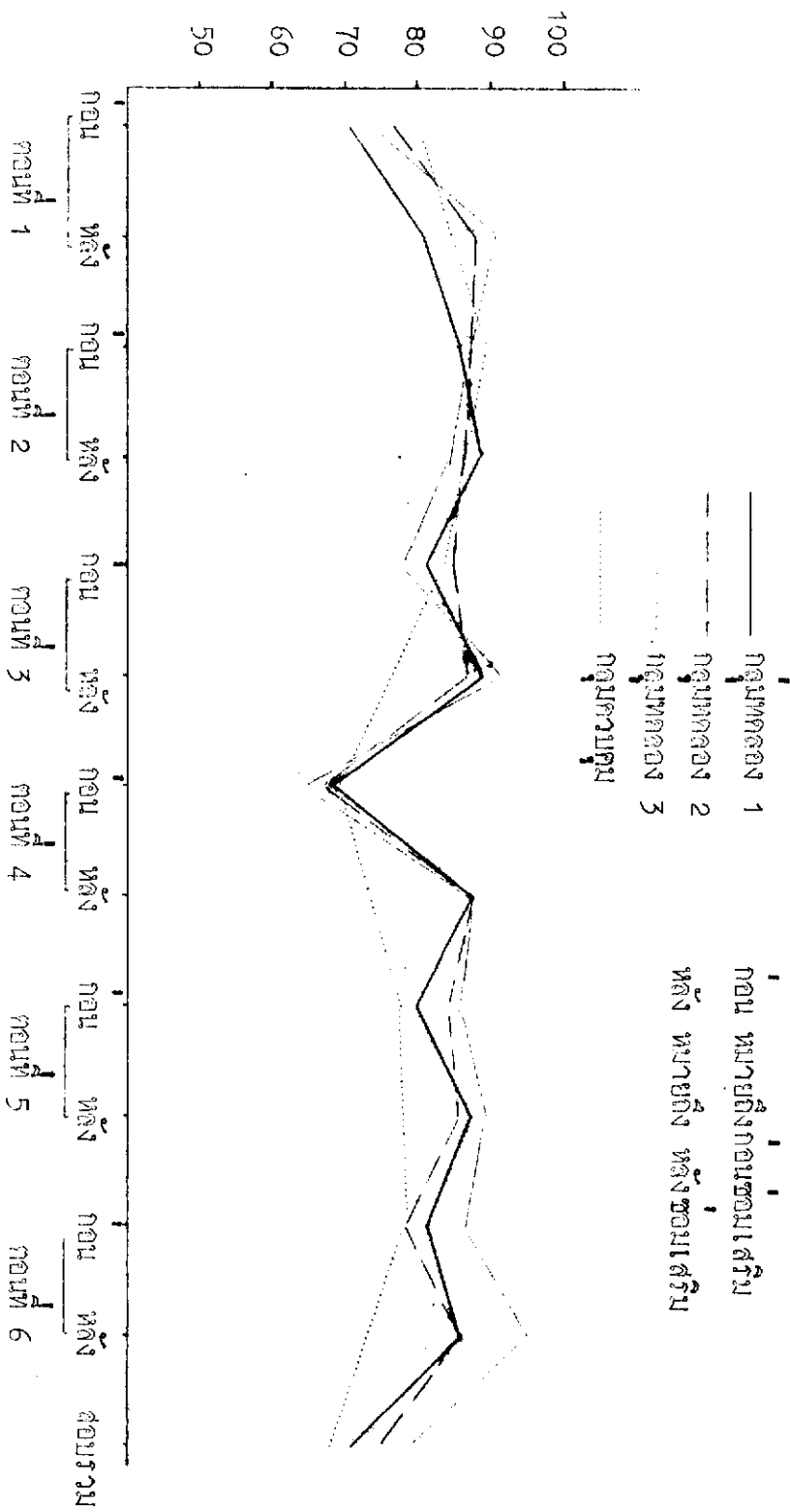
#### การเปรียบเทียบคะแนนก่อนและหลังการส่งเสริม

เพื่อศึกษาเปรียบเทียบดูว่าเมื่อใช้แบบทดสอบแต่ละฉบับ นักเรียนจะทำคะแนนได้กี่เปอร์เซ็นต์ และหลังจากการส่งเสริมแล้วนักเรียนจะทำคะแนนเพิ่มขึ้นกี่เปอร์เซ็นต์ จากการศึกษาทดลองปรากฏข้อมูลออกมาดังนี้

ตาราง 5 แสดงมูลค่าเพิ่มของคณะกรรมการตรวจสอบ และแผนกผู้ช่วยผู้ภายในองค์กรตามตัว

ปีงบประมาณที่	1		เพิ่ม ขึ้น	2		เพิ่ม ขึ้น	3		เพิ่ม ขึ้น	4		เพิ่ม ขึ้น	5		เพิ่ม ขึ้น	6		เพิ่ม ขึ้น	ยอดรวม
	ก่อน	หลัง		ก่อน	หลัง		ก่อน	หลัง		ก่อน	หลัง		ก่อน	หลัง		ก่อน	หลัง		
1	71.42	81.14	9.72	85.92	88.88	2.96	81.66	88.70	7.04	69.30	87.33	18.03	80.00	86.60	6.60	82.00	85.71	3.71	73.21
2	77.57	88.42	10.85	87.40	86.11	-1.29	83.00	86.00	3.00	68.30	87.00	18.70	84.66	85.71	1.05	79.33	85.71	6.38	77.14
3	74.00	90.00	16.00	87.77	85.18	2.59	77.66	90.00	12.34	66.66	87.50	20.84	86.00	88.00	2.00	86.66	95.00	8.34	79.27
รวม	80.42	-	-	88.14	-	-	83.00	-	-	69.66	-	-	74.00	-	-	79.33	-	-	70.83

จากคณะกรรมการเปรียบเทียบตาราง 5 สามารถนำไปใช้เปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าจ้างพนักงาน



ภาพประกอบ 2 แสดงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนและหลังการอบรมเสริมของเนื้อหาแต่ละตอน

จากการวาง 5 และภาพประกอบ 2 เป็นการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของคะแนนก่อนและหลังการอบรมเสริมของกลุ่มทดลอง 1 กลุ่มทดลอง 2 กลุ่มทดลอง 3 กลุ่มทดลอง 4 และกลุ่มทดลอง 5 และภาพประกอบ 3 แสดงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักวิจัยที่เรียนเนื้อหาตอนที่ 2 ของทดลอง 2 และกลุ่มทดลอง 3 เท่านั้นที่มีคะแนนเฉลี่ยลดลงมาเพียงเล็กน้อย ผลของการที่กลุ่มทดลอง 4 ได้รับความรู้เสริมซึ่งทำให้คะแนนจากการสอบครั้งสุดท้ายลดลงมากกว่ากลุ่มควบคุมความหมาย ถ้าสังเกตจากภาพประกอบ 2 จะเห็นว่ากราฟของคะแนนที่ปรากฏภายหลังจากการอบรมเสริมแล้ว จะดีกว่ากราฟที่เรียนมาก่อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเนื้อหาความหมาย ฯ

อัตราส่วนระหว่างความแตกต่างของตัวกลางเลขคณิตกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน  
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มควบคุม

ตาราง 6 แสดงอัตราส่วนระหว่างความแตกต่างของตัวกลางเลขคณิตกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม

ความแตกต่าง	เนื้อหาตอนที่						แบบทดสอบรวม
	1	2	3	4	5	6	
$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_c}{\frac{S}{S_c}}$	-.2614	-.0614	0	-.0549	.4453	0	.1162
$\frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_c}{\frac{S}{S_c}}$	-.8214	-.1754	-.0891	-.0164	.2521	.1372	.4403
$\frac{\bar{X}_3 - \bar{X}_c}{\frac{S}{S_c}}$	-.5882	-.0263	-.3439	-.1483	.5042	.3627	.5888

จากตาราง 6 แถวที่ 1 เป็นตัวเลขที่แสดงว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มที่ซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ที่บกพร่องมีค่ามากกว่า (ค่าเป็นบวก) หรือน้อยกว่า (ค่าเป็นลบ) ตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มควบคุมและเป็นค่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม เช่นในเนื้อหาตอนที่ 1 แสดงว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มที่ซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ที่บกพร่องมีค่าต่ำกว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มควบคุมอยู่ .2614 เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม และในเนื้อหาตอนที่ 5 แสดงว่ามีตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มที่ซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดมีค่าสูงกว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มควบคุมอยู่ .4453 เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม ตัวเลขค่าอื่น ๆ ก็แปลความหมายเช่นเดียวกับที่กล่าวมาข้างต้น คือแปลความในรูปของคะแนนมาตรฐาน (Z - score) เป็นค่าเหล่านี้มาเปรียบเทียบกันในแต่ละตอน ปรากฏว่า ในเนื้อหาตอนที่ 1 มีคะแนนมาตรฐานต่ำสุด และมีค่าสูงสุดในเนื้อหาตอนที่ 5 ค่าเหล่านี้มีแนวโน้มสูงขึ้นในเนื้อหาตอนที่ 3, 5 และ 6

และเช่นเดียวกัน ตัวเลขในแถวที่ 2 และแถวที่ 3 จึงแสดงว่าคะแนนมาตรฐานของเนื้อหาแต่ละตอนของกลุ่มที่ซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยศึกษาจากบทเรียน โปรแกรม และซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยเฉลี่ยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องมีแนวโน้มจะเพิ่มสูงขึ้นเรื่อย ๆ เช่นในเนื้อหาตอนที่ 4, 5 และ 6 ทั้งของแถว 2 และแถว 3 และค่าคะแนนมาตรฐานจะเพิ่มมากที่สุดไปในแบบทดสอบรวม แสดงว่าตัวกลางเลขคณิตของทุกกลุ่มทดลองที่ได้รับการซ่อมเสริมจะเพิ่มสูงขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเทียบกับตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มควบคุม และกลุ่มที่เพิ่มมากที่สุดคือกลุ่มทดลองที่ 3 จึงมีการแก้ไขข้อบกพร่องเป็นกลุ่ม

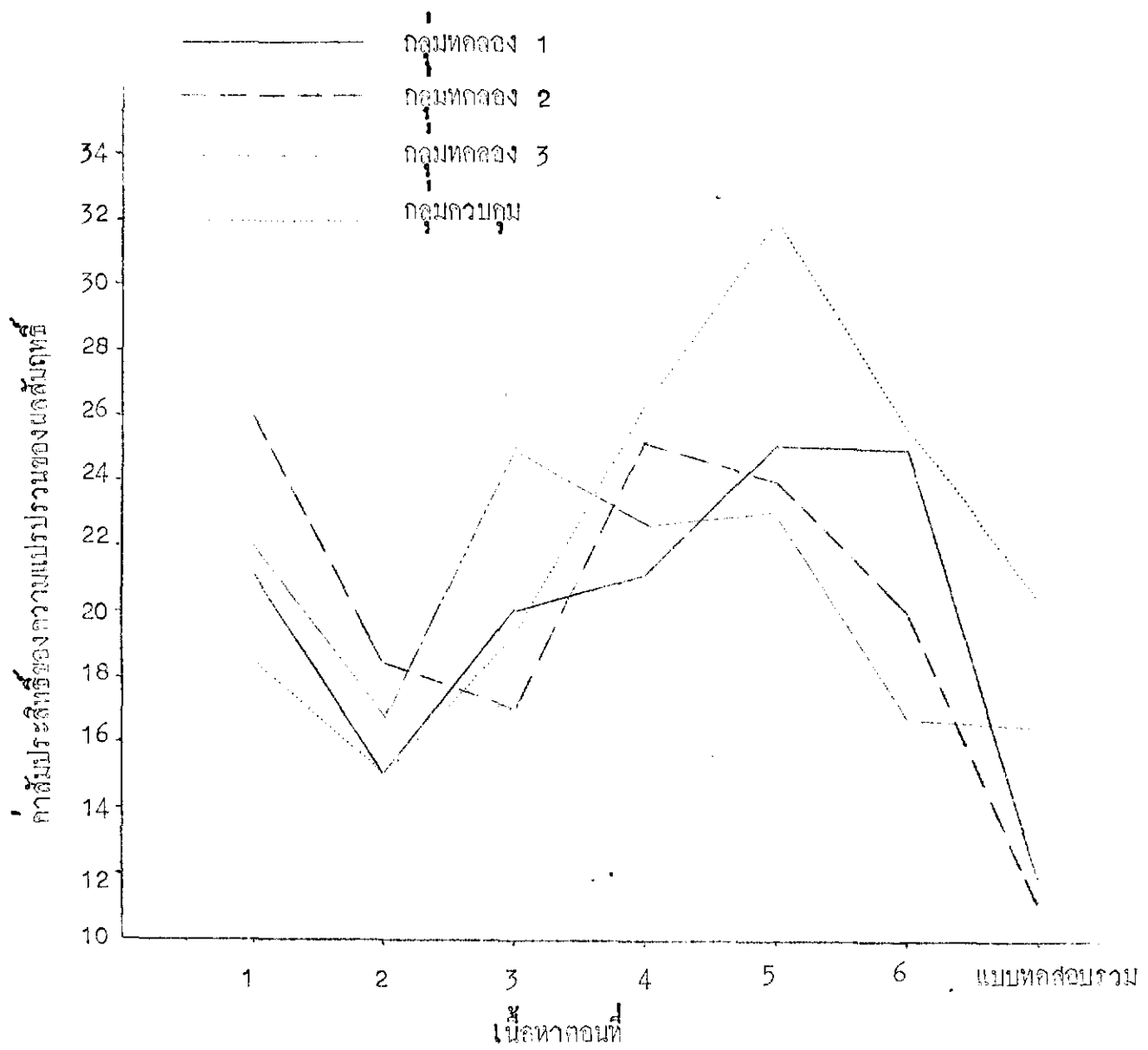
#### ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เพื่อศึกษาความเปลี่ยนแปลงของสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จึงได้วิเคราะห์ค่าจากแบบทดสอบย่อยทั้ง 6 ฉบับ ดังปรากฏผลในการวาง 7

ตาราง 7 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน ( Co-efficient of Variation 100 S/ $\bar{X}$  ) ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมในเนื้อหาแต่ละตอน

เนื้อหาตอนที่	ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน						แบบทดสอบรวม
	1	2	3	4	5	6	
กลุ่มทดลอง 1	21.63	12.23	20.72	21.08	25.29	24.49	11.69
กลุ่มทดลอง 2	26.70	18.49	17.03	25.54	24.26	20.48	11.14
กลุ่มทดลอง 3	22.29	17.34	25.12	22.67	22.77	16.39	16.93
กลุ่มควบคุม	18.56	14.37	18.91	22.14	32.16	25.75	20.22

เพื่อให้ได้ภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้นจึงนำข้อมูลจากตาราง 7 มาเขียนเป็นกราฟดังภาพประกอบที่ 3



ภาพประกอบ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของคะแนนแต่ละตอน

เมื่อพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนจากตาราง 7 และภาพประกอบที่ 3 สรุปได้ดังนี้ กลุ่มทดลองที่ 1 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนจะเริ่มลดลงในเนื้อหาตอนที่ 2, 3 และ 4 แต่กลับมาเพิ่มขึ้นในเนื้อหาตอนที่ 5, 6 และลดลงอีกในแบบทดสอบรวม

ในกลุ่มทดลองที่ 2 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนจะเริ่มลดลงในเนื้อหาตอนที่ 2 และ 3 แต่กลับมาเพิ่มในเนื้อหาตอนที่ 4 เพียงเล็กน้อย หลังจากนั้นจะลดลงเรื่อย ๆ จนถึงเนื้อหาตอนที่ 5, 6 และแบบทดสอบรวม

ในกลุ่มทดลองที่ 3 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนจะเริ่มลดลงในเนื้อหาตอนที่ 2 และกลับเพิ่มขึ้นเล็กน้อยในเนื้อหาตอนที่ 3 หลังจากนั้นจะเริ่มลดลงเรื่อยจนถึงแบบทดสอบรวม

ในกลุ่มควบคุม ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนจะลดลงในเนื้อหาตอนที่ 2 แต่ไปเพิ่มสูงสุดในเนื้อหาตอนที่ 5 และค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในแบบทดสอบรวมก็ยังมีค่าสูงกว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในแบบทดสอบรวมของกลุ่มทดลองทุกกลุ่ม

จากกราฟพิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ในตาราง 7 ปรากฏว่า ในกลุ่มทดลองที่ 1 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนมีแนวโน้มลดลงในเนื้อหาตอนที่ 2, 3 และ 4 แต่กลับไปเพิ่มในเนื้อหาตอนที่ 5 และ 6 เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนระหว่างเนื้อหาตอนที่ 1 และเนื้อหาตอนที่ 6 จะเพิ่มขึ้น 13.22 เปอร์เซ็นต์ แต่เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนระหว่างเนื้อหาตอนที่ 1 กับค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของเนื้อหาตอนที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 แล้ว ปรากฏว่ามีค่าลดลง 3.09 เปอร์เซ็นต์

ในกลุ่มทดลองที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 1 กับตอนที่ 6 จะลดลง 23.29 เปอร์เซ็นต์ และเมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 1 กับค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 ปรากฏว่ามีค่าลดลง 20.74 เปอร์เซ็นต์

ในกลุ่มทดลองที่ 3 เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนใน เนื้อหาตอนที่ 1 กับเนื้อหาตอนที่ 6 จะลดลง 26.46 เปอร์เซ็นต์ และเมื่อเปรียบเทียบ ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 1 กับค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์ของ ความแปรปรวนในเนื้อหา 2, 3, 4, 5 และ 6 ปรากฏว่ามีค่าลดลง 6.42 เปอร์เซ็นต์

ในกลุ่มควบคุม เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนใน เนื้อหา ตอนที่ 1 กับเนื้อหาตอนที่ 6 จะเพิ่มขึ้น 38.75 เปอร์เซ็นต์ และเมื่อเปรียบเทียบ ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 1 กับค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์ของ ความแปรปรวนในเนื้อหาตอนที่ 2, 3, 4, 5 และ 6 ปรากฏว่ามีค่าเพิ่มขึ้น 26.43%

จากการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของคะแนนระหว่าง กลุ่มทดลองที่ 1 กลุ่มทดลองที่ 2 กลุ่มทดลองที่ 3 และกลุ่มควบคุม พบว่า ในเนื้อหา ตอนที่ 1 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของกลุ่มควบคุมมีค่าต่ำสุด กลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 3 มีค่าพอ ๆ กัน ส่วนกลุ่มทดลองที่ 2 มีค่าสูงสุด ในเนื้อหาตอนที่ 2, 3 และ 4 ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของทุกกลุ่มมีค่าพอ ๆ กัน ในเนื้อหาตอนที่ 5 และตอนที่ 6 ปรากฏว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 3 มีค่าต่ำสุด ที่สุด ส่วนกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 มีค่าพอ ๆ กัน แต่กลุ่มควบคุมมีค่าสูงสุด

ส่วนในแบบทดสอบรวม ปรากฏว่า ความแปรปรวนในกลุ่มทดลองที่ 2 ซึ่งได้รับการ สอนเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีค่าความแปรปรวนค่าที่ต่ำสุด ซึ่งมีค่าพอ ๆ กับ กลุ่มทดลองที่ 1 ซึ่งได้รับการสอนเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด และกลุ่มทดลองที่ 3 ซึ่งได้ รับการ สอนเสริมโดยเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องมีค่าความแปรปรวนปานกลาง ส่วนกลุ่มควบคุมมีค่าความแปรปรวนมากที่สุด จึงพอสรุปได้ว่าการสอนโดยใช้หลักการเรียน เพื่อรอบรู้ที่มีการสอนเสริมนี้ทำให้ลดความแปรปรวนของคะแนนลงได้ ซึ่งทำโดยกลไกของวิธี ทางการเรียนของผู้เรียนแตกต่างกันน้อยลงใน เนื้อหาตอนหลังและการทดสอบรวม

ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนจากแบบทดสอบรวม

เป็นการเปรียบเทียบค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์จากแบบทดสอบรวมของครูทดลองและกลุ่มควบคุม ดังตาราง 8

ตาราง 8 แสดงค่าตัวกลางเลขคณิตและความเบี่ยงเบนมาตรฐานจากแบบทดสอบรวม

	N	X	S	$\frac{\bar{X}_E - \bar{X}_C}{S_c}$	$S_E^2/S_C^2$
กลุ่มทดลอง 1	30	40.27	6.82	.12	.74
กลุ่มทดลอง 2	30	42.43	4.73	.44	.36
กลุ่มทดลอง 3	30	43.60	5.10	.59	.41
กลุ่มควบคุม	30	38.96	7.88	—	1.00

จากการพิจารณาค่าความแตกต่างระหว่างตัวกลางเลขคณิตจากกลุ่มทดลองแต่ละกลุ่มกับกลุ่มควบคุมแล้วหาความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มควบคุม พบว่า ค่าเท่ากับ .12, .44 และ .59 ตามลำดับ แสดงว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มทดลอง 1 กลุ่มทดลอง 2 และกลุ่มทดลอง 3 ต่างก็มีความมากกว่าตัวกลางเลขคณิตของกลุ่มควบคุม .12, .44 และ .59 เท่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐานจากกลุ่มควบคุมโดยที่กลุ่มทดลอง 3 มีความมากที่สุด

เมื่อพิจารณาค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลอง 1 ปรากฏว่าน้อยกว่าค่าที่ได้จากกลุ่มควบคุม 26 เปอร์เซ็นต์ คือค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากกลุ่มทดลอง 1 เท่ากับ 74 เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มควบคุม ค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากกลุ่มทดลอง 2 น้อยกว่าค่าที่ได้จากกลุ่มควบคุม 64 เปอร์เซ็นต์ คือค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์จากกลุ่มทดลอง 2

มีค่า 36 เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มควบคุม และค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากกลุ่มทดลอง 3 น้อยกว่าค่าที่ได้จากกลุ่มควบคุม 59 เปอร์เซ็นต์ คือค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์จากกลุ่มทดลอง 3 มีค่า 41 เปอร์เซ็นต์ของกลุ่มควบคุม

เมื่อนำเวลาความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบทดสอบ รวมทุกกลุ่มมาเปรียบเทียบกันแล้ว ปรากฏว่ากลุ่มทดลอง 2 ซึ่งได้รับการซ่อมเสริมโดยใช้ บทเรียนโปรแกรมมีค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ต่ำสุด คือน้อยกว่ากลุ่มควบคุม 64 เปอร์เซ็นต์ ส่วนกลุ่มทดลอง 3 ที่ได้รับการซ่อมเสริมโดยเฉลยแบบทดสอบย่อยและ กซิมาซอซอกพรองรวม ๆ นั้นมีค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์น้อยกว่ากลุ่มควบคุม 59 เปอร์เซ็นต์ และกลุ่มทดลอง 1 ซึ่งได้รับการซ่อมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัดมีค่า ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์มากที่สุด ในระหว่างกลุ่มทดลองด้วยกันคือน้อยกว่า กลุ่มควบคุม 26 เปอร์เซ็นต์

จากข้อมูลดังกล่าวมานี้ พอจะสรุปได้ว่า การสอนโดยใช้หลักการเรียนรู้ ที่มีการซ่อมเสริมจะทำให้ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ลดลง ซึ่งหมายถึง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนแตกต่างกันน้อยลงด้วย

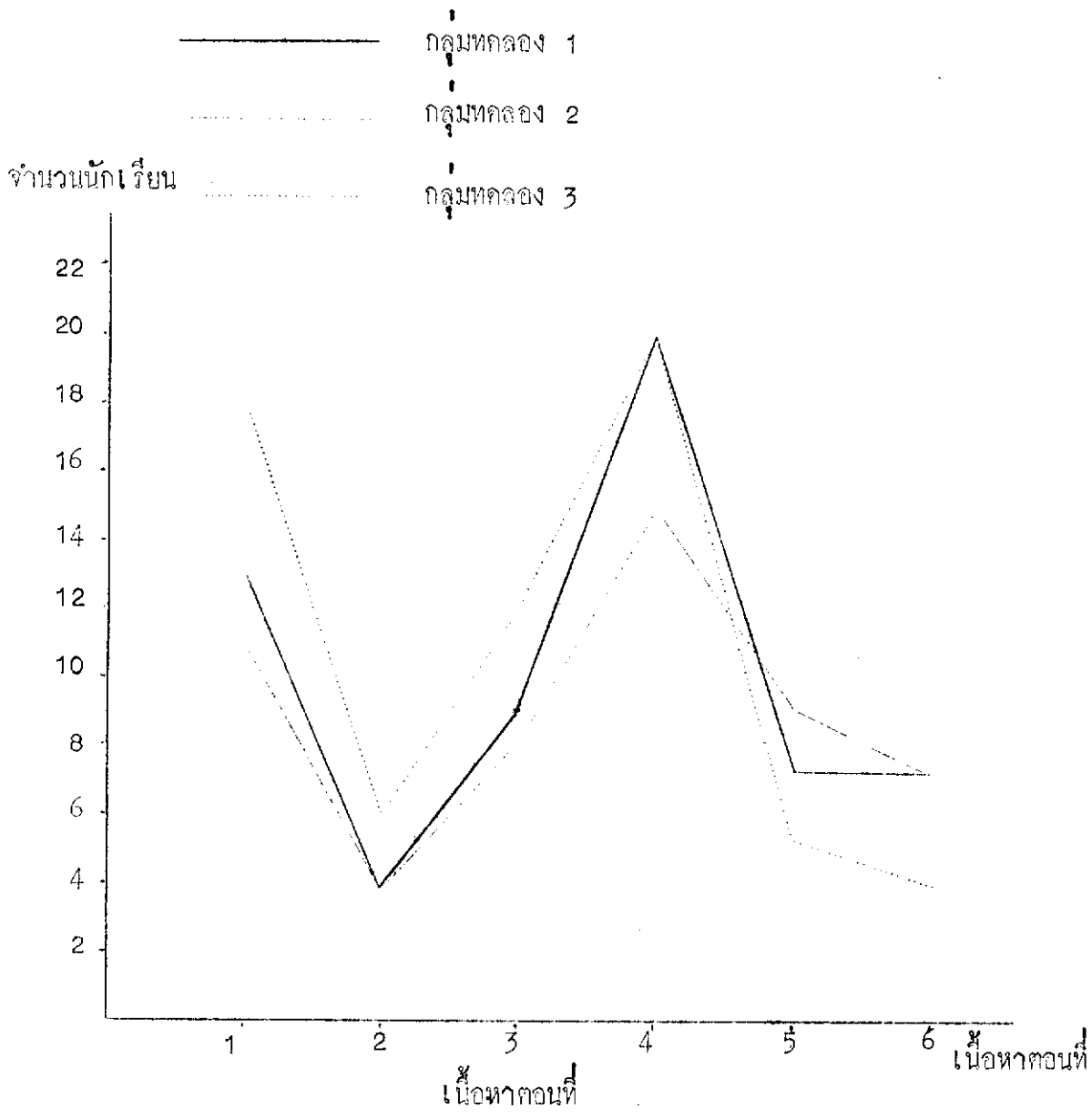
#### การเปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมกับเวลาที่ใช้ในการ ซ่อมเสริม

จำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมในเนื้อหาแต่ละตอนและรายละเอียด ของเวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริม ปรากฏดังตาราง 9

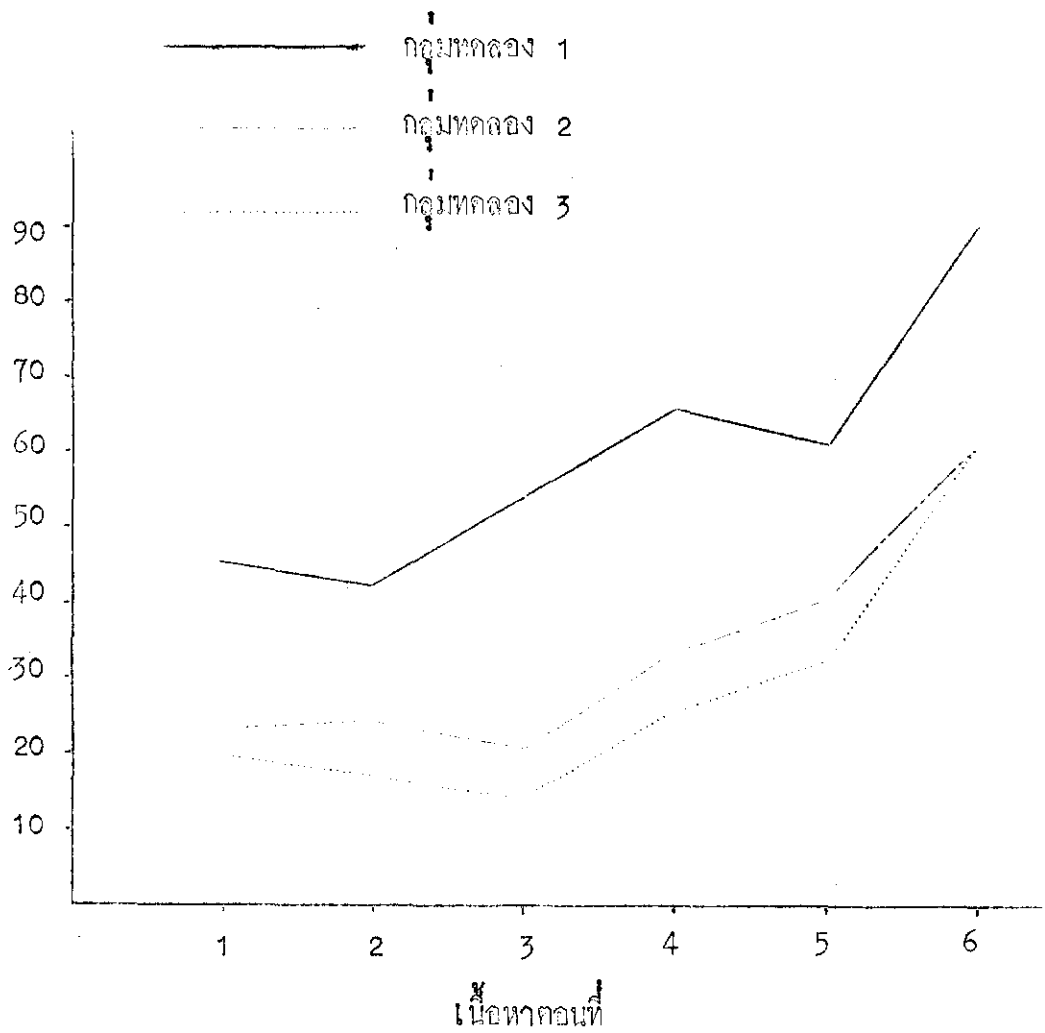
ตาราง 9 เปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่ขาดเรียน สวมกับรายเฉลี่ย เวลาที่ ขาดเรียน

เดือน/ภาคเรียน	1	2	3	4	5	6						
	จำนวนนักเรียน	รายเฉลี่ย (เวลา) (นาที)	จำนวนนักเรียน	รายเฉลี่ย (เวลา) (นาที)	จำนวนนักเรียน	รายเฉลี่ย (เวลา) (นาที)						
ภาคเรียน 1	13	45	4	42	9	53	20	65	7	61	7	90
ภาคเรียน 2	11	23	4	24	8	20	15	33	9	39	7	60
ภาคเรียน 3	18	20	6	18	12	15	20	25	5	30	4	60

จากตาราง 9 เปรียบเทียบจำนวนนักเรียนที่ขาดเรียน สวมกับรายเฉลี่ย เวลาที่ ขาดเรียน



ภาพประกอบ 4 แสดงจำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมในเนื้อหาแต่ละตอน



ภาพประกอบ 5 แสดงรายเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ซ่อมเสริมในเนื้อหาแต่ละตอน

จากภาพประกอบที่ 4 ซึ่งแสดงจำนวนนักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมและภาพประกอบที่ 5 ซึ่งแสดงรายละเอียดเวลาที่ใช้ซ่อมเสริมในแต่ละคาบเรียน ถ้านำมาพิจารณารวมกันทั้งตาราง 9 แล้วจะพบว่านักเรียนที่เข้ารับการซ่อมเสริมในแต่ละคาบเรียนแต่ละตอนมีจำนวนใกล้เคียงกัน (ภาพประกอบที่ 4) แต่เวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริมแตกต่างกันมาก (ภาพประกอบที่ 5) จะเห็นว่า การสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยวิธีการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ ใช้เวลาในการซ่อมเสริมน้อยที่สุด ซึ่งใช้เวลาใกล้เคียงกับการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยใช้บทเรียนไปรบทบและการสอนซ่อมเสริมที่ใช้เวลามากที่สุดคือการสอนซ่อมเสริมในรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดความจุประสงค์เชิงพฤติกรรมต้นบทพร้อม

เปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของทุกกลุ่มกับรายละเอียดของเวลาที่ใช้ในการสอนซ่อมเสริม

การทดลองสอนซ่อมเสริมในครั้งนี้ผู้วิจัยได้บันทึกเวลาที่ใช้ในการสอนไว้เพื่อจะได้นำมาเปรียบเทียบกับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง ของนักเรียนทั้งรายละเอียดความตาราง 10

ตาราง 10 เปรียบเทียบรายละเอียดของเวลาที่ใช้ซ่อมเสริมและรายละเอียดของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง

	รายละเอียดของเวลาที่ใช้ซ่อมเสริม (นาที)	รายละเอียดของคะแนนผลสัมฤทธิ์
กลุ่มทดลอง 1	56.35	40.27
กลุ่มทดลอง 2	30.90	42.43
กลุ่มทดลอง 3	23.04	43.60
กลุ่มควบคุม	-	36.90

จากตาราง 10 กลุ่มทดลอง 3 ใช้เวลาในการซ่อมเสริมน้อยที่สุด ซึ่งใช้เวลาเพียง 23.04 เปอร์เซ็นต์ของเวลาซ่อมเสริมทั้งหมด ของทั้ง 3 กลุ่ม และมีคะแนน

ผลสัมฤทธิ์สูงสุด ซึ่งสูงกว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มควบคุม 10.77 เปอร์เซ็นต์ รองลงมา คือกลุ่มทดลอง 2 ซึ่งใช้เวลาในการซ่อมเสริม 27.25 เปอร์เซ็นต์ของเวลาซ่อมเสริม ทั้งหมด มีคะแนนผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุม 8.31 เปอร์เซ็นต์ กลุ่มทดลอง 1 ใช้เวลา ในการซ่อมเสริมมากที่สุดคือ ใช้เวลา 49.71 เปอร์เซ็นต์ ของเวลาซ่อมเสริมทั้งหมด และมีคะแนนผลสัมฤทธิ์ต่ำกว่ากลุ่มทดลอง 2 และกลุ่มทดลอง 3 คือ สูงกว่าคะแนน ผลสัมฤทธิ์กลุ่มควบคุม 3.40 เปอร์เซ็นต์

เปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายในแต่ละกลุ่มทดลองระหว่างก่อน และหลังการทดลอง

ก่อนการทดลองได้มีการสอบถามทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในกลุ่มทดลองแต่ละกลุ่ม และเมื่อภายหลังการทดลองสอนเสร็จสิ้นลงได้นำแบบทดสอบ ฉบับเดิมสอบถามอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำเอาคะแนนการสอบทั้ง 2 ครั้งมาเปรียบเทียบ ความแตกต่าง โดยใช้การทดสอบความแตกต่างแบบการแจกแจงของที ( t-test แบบ independent ) ดังปรากฏในตาราง 11

ตาราง 11 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนทัศนคติก่อนการทดลองสอนและภายหลังจาก การทดลองสอนของแต่ละกลุ่มทดลอง

	N	ZD	ZD <sup>2</sup>	ค่าคะแนน t
กลุ่มทดลอง 1	30	2.50	1.27	2.29 *
กลุ่มทดลอง 2	30	2.83	2.02	2.09 *
กลุ่มทดลอง 3	30	2.76	1.65	2.28 *

\* มีนัยสำคัญที่ระดับ .05

จากตาราง 11 ปรากฏว่ากลุ่มทดลองทั้ง 3 กลุ่มคือกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริม เป็นรายบุคคลโดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง กลุ่มที่ได้รับ

การชอมเสริมเป็นรายบุคคลโดยศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ผู้ปกครอง และกลุ่มที่ได้รับการชอมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ มีทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ภายหลังจากการทดลองเสร็จจึงนั่ง

เปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการชอมเสริมทั้ง 3 วิธี

ชอมเสริมทั้ง 3 วิธี

เมื่อนำเอาค่าแปรปรวนทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มาหาค่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อหาวิธีสอนทั้ง 3 วิธีคือการชอมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด การชอมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการชอมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่อง เมื่อสอนจบแล้ว ทำให้ตัวแปรที่เกี่ยวกับทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันหรือไม่ จากการทดลองได้ผลออกมาดังตาราง 12

ตาราง 12 แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อเปรียบเทียบทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการชอมเสริมทั้ง 3 วิธี

แหล่งของความแปรปรวน	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	2	0.3153	0.1576	1.1297
ภายในกลุ่ม	87	12.1416	0.1395	
รวม	89	12.4569		

จากตาราง 12 ค่า  $F$  ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าวิธีการชอมเสริมทั้ง 3 วิธี คือการชอมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด การชอมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการชอมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง ทำให้ตัวแปรที่เกี่ยวกับทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

เปรียบเทียบความสนใจในวิชาจิตศาสตร์ ภายในแต่ละกลุ่มทดลองระหว่างก่อน  
และหลังการทดลอง

ก่อนการทดลองได้มีการ สอบวัดความสนใจในวิชาจิตศาสตร์ของนักเรียน  
ในกลุ่มทดลองแต่ละกลุ่ม และเมื่อภายหลังการทดลองสอนเสร็จสิ้นลงให้นำแบบทดสอบ  
ฉบับเดิมสอบวัดอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำเอาคะแนนการสอบทั้ง 2 ครั้งมาเปรียบเทียบความ  
แตกต่างโดยใช้การทดสอบความแตกต่างแบบการแจกแจงสองที่ (t-test แบบ  
dependent) ดังปรากฏในตาราง 13

ตาราง 13 ทดสอบความแตกต่างของคะแนนที่บันทึกก่อนการทดลองสอนและภายหลัง  
การทดลองสอนของแต่ละกลุ่มทดลอง

	น	$\Sigma D$	$\Sigma D^2$	ค่าคะแนน t
กลุ่มทดลอง 1	30	1.60	3.02	.92
กลุ่มทดลอง 2	30	1.10	4.31	.52
กลุ่มทดลอง 3	30	2.10	6.85	.79

จากตาราง 13 ปรากฏว่ากลุ่มทดลองทั้ง 3 กลุ่มคือ กลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริม  
เป็นรายบุคคลโดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ที่บกพร่อง กลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริม  
เป็นรายบุคคลโดยศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์ที่บกพร่อง และกลุ่มที่ได้รับ  
การซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการ เฉลย แบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ  
มีความสนใจในวิชาจิตศาสตร์สูงขึ้นอย่างไร้มีนัยสำคัญทางสถิติ

เปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอน  
รวมเสริมแตกต่างกัน 3 วิธี

เมื่อนำเอาตัวแปรด้านความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ มาทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อดูว่าการสอนรวมเสริมทั้ง 3 วิธี คือการรวมเสริมโดยการเพิ่มแบบฝึกหัด การรวมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการรวมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย และการอธิบายข้อบกพร่อง เมื่อสอนจบแล้ว ทำให้ตัวแปรที่เกี่ยวกับความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันหรือไม่ จากผลการทดลองได้ผลออกมาดังตาราง 14

ตาราง 14 แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อเปรียบเทียบความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการรวมเสริมทั้ง 3 วิธี

แหล่งของความแปรปรวน	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	2	0.3000	0.1500	0.4406
ภายในกลุ่ม	87	29.6200	0.3404	
รวม	89	29.9200		

จากตาราง 14 ค่า  $F$  ไม่นับสำคัญทางสถิติ แสดงว่าวิธีการรวมเสริมทั้ง 3 วิธี คือการรวมเสริมโดยเพิ่มแบบฝึกหัด การรวมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการสอนรวมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง ทำให้ค่าแปรที่เกี่ยวกับความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่องนี้มีจุดประสงค์ที่จะเปรียบเทียบเพื่อค้นหาวิธีการสอนซ่อมเสริม วิชาคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 3 วิธี ที่จะทำให้ได้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สูงสุด โดยลดความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์และใช้เวลาในการซ่อมเสริมให้น้อยที่สุด และยังศึกษาถึงผลทางพฤติกรรมด้านอาวเอคบางประการ คือทัศนคติและความสนใจใน วิชาคณิตศาสตร์ว่าจะเปลี่ยนแปลงแตกต่างกันหรือไม่ เป็นการศึกษาจากตัวแปรอิสระ 3 ตัวแปร ซึ่งได้แก่การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคล โดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรมตาม จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ยังบกพร่องและการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบ ทดสอบอธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ ส่วนตัวแปรตามคือผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษารังนี้ เป็นนักเรียนโรงเรียน นาวีรัตน์ จังหวัดแพร่ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 120 คน กลุ่มตัวอย่างทั้งหมด ถูกจัดให้อยู่ในกลุ่มควบคุมจำนวน 30 คน กลุ่มทดลองที่หนึ่ง 30 คน กลุ่มทดลองที่สอง 30 คน กลุ่มทดลองที่สาม 30 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย โครงการสอนและบันทึกการสอน เรื่องโพลิโนเมียลคี่กรีสสูง แบบฝึกหัดสำหรับการซ่อมเสริม เพื่อใช้ในการซ่อมเสริมกลุ่มทดลองที่หนึ่ง บทเรียนโปรแกรมสำหรับการซ่อมเสริมเพื่อใช้ ในการซ่อมเสริมกลุ่มทดลองที่สอง แบบทดสอบย่อยเป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก รวมทั้งสิ้น 6 ฉบับ รวมข้อสอบเป็น 53 ข้อ แบบทดสอบรวมเป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ

5 ตัวเลือก มีข้อสอบทั้งหมด 55 ข้อ เพื่อใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเมื่อเสร็จสิ้น การทดลองแล้ว แบบทดสอบวัดทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 20 ข้อ และแบบ ทดสอบวัดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 10 ข้อ

### การดำเนินการทดลอง

เป็นการนำเอาหลักการเรียนเพื่อรวบรวมมาใช้ในการทดลอง ซึ่งทุกกลุ่มจะได้รับ การสอนตามรูปแบบเดียวกันตั้งแต่ขบวนการจากข้อ 1 ถึงข้อ 4 โดยครูผู้สอนประจำวิชา ซึ่งผู้วิจัยได้เขียนคู่มือประกอบการสอนให้แก่ครูผู้สอนมีอยู่ในชั้นเรียน ส่วนกระบวนการ ภายหลังจากข้อ 4.1 เป็นต้นไป จะเป็นการสอนซ่อมเสริมที่แตกต่างกันไป 3 วิธี ซึ่งดำเนินการทดลองโดยครูผู้สอน ซึ่งเป็นบุคคลคนเดียวกัน ดังรายละเอียดของการ ทดลองต่อไปนี้

1. ก่อนสอนมีการทดสอบวัดทัศนคติ และความสนใจที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และมีการตรวจสอบความรู้พื้นฐาน เรื่องโพลิโนเมียล ที่นำมาช่วยแบบทดสอบย่อย ถ้านักเรียน ขาดความรู้พื้นฐานก็จะได้รับการสอนเพื่อเสริมสร้างความรู้พื้นฐานก่อนเริ่มบทเรียน
2. เริ่มการสอนโดยครูผู้สอนแจ้งจุดมุ่งหมายของวิชา และวิธีเรียน ตลอดจนเกณฑ์ในการประเมินผลว่าแต่ละตอน นักเรียนต้องทำคะแนนจากแบบทดสอบย่อย ให้ได้ร้อยละ 80 ขึ้นไป ถ้าต่ำกว่านั้นก็ต้องเรียนซ่อมเสริม
3. ครูดำเนินการสอนเป็นกลุ่มตามคู่มือครูและบันทึกการลองที่มอบให้
4. เมื่อทุกกลุ่มสอนเนื้อหาแต่ละตอนจบลงแล้ว ใ้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ ย่อย ถ้าได้คะแนนไม่ถึงเกณฑ์ 80 เปอร์เซ็นต์ ที่กำหนดไว้ก็ต้องเรียนซ่อมเสริมดังต่อไปนี้
  - 4.1 กลุ่มควบคุมได้รับการทดสอบจากแบบทดสอบย่อย แต่ไม่มี การเรียนซ่อมเสริม
  - 4.2 กลุ่มทดลองที่หนึ่งได้รับการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยเพิ่ม แบบฝึกหัดตามจุดประสงค์ที่บกพร่อง และมีการบันทึกเวลาที่ใช้ในการซ่อมเสริม

4.4 กลุ่มทดลองที่สาม ได้รับการซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม โดยเนลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ การบันทึกเวลา บันทึกจากเวลาที่ผู้ใช้สอนซ่อมเสริมทั้งหมด

5. ภายหลังจากทดลองเสร็จให้นำแบบทดสอบวัดทัศนคติและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ฉบับเดิมสอบวัดอีกครั้งหนึ่ง เพื่อนำผลมาเปรียบเทียบกับ การสอบวัดเมื่อก่อนทำการทดลอง

### สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ทดสอบความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่ละคู่แปร โดยใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ส่วนการทดสอบความแตกต่างของรายเฉลี่ยระหว่างคู่ โดยวิธีของ นิวแมน-คีสส์ (Newman - Keuls Procedure) ทดสอบความแตกต่างของทัศนคติและความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนการทดลองกับหลังการทดลองโดยใช้การแจกแจงของที (t - test)

### สรุปผลการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมด้วยวิธีต่าง ๆ ทั้งสามวิธีสูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริม และนักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยเนลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม คือนักเรียนที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริมทุกกลุ่ม มีค่าน้อยกว่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ กลุ่มควบคุมคือกลุ่มที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริม โดยที่ความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริม โดยใช้บทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่องมีค่าน้อยที่สุด

3. การซ่อมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง ใช้เวลาในการซ่อมเสริมน้อยที่สุด ซึ่งใช้เวลาใกล้เคียงกับการซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการซ่อมเสริมโดยการเพิ่มแบบฝึกหัด ใช้เวลาในการซ่อมเสริมมากที่สุด

4. ทักษะที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสามกลุ่มทดลองสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แต่ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

5. ความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมทั้งสามกลุ่มไม่สูงขึ้นและไม่มีความแตกต่างกันระหว่างกลุ่ม

### อภิปรายผลการวิจัย

1. กานผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ในการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพบว่า นักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่องกับการสอนซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริม ซึ่งสอดคล้องกับผลของการวิจัยของ ไวคอฟ (Wyckoff, 1975 : 5160 - A) ที่พบว่า นักเรียนที่เรียนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้และมีการซ่อมเสริม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริม และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ รุจิรี ภูสาระ (รุจิรี ภูสาระ 2522) ที่พบว่า การเรียนโดยวิธีเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่ม และวิธีที่ให้นักเรียนศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมแล้วซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลให้ผลสัมฤทธิ์สูงสุดกว่าวิธีสอนต่าง ๆ รวมทั้งหมด 6 วิธี

ในการศึกษาครั้งนี้ ทำให้พบว่าการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มก็ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงเช่นเดียวกับการสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลตามที่ บลูม เสนอแนะ (Bloom, 1971 : 44) และในการซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องนั้น ทำให้นักเรียนได้มีโอกาสได้ซักถาม โตแย้ง เสนอแนะ ในสิ่งต่าง ๆ ที่ตนยังไม่เข้าใจได้อย่างดีอีกด้วย

2. ค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ ปรากฏว่านักเรียนที่ได้รับการสอน  
 ขอม เสริมทุกกลุ่มมีค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนน้อยกว่าค่าความ  
 แปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มควบคุม กล่าวคือ กลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริม  
 โดยเพิ่มแบบฝึกหัด มีค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์น้อยกว่ากลุ่มควบคุม 26 เปอร์เซ็นต์  
 กลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริมโดยศึกษาจากบทเรียนโปรแกรมมีค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์  
 น้อยกว่ากลุ่มควบคุม 64 เปอร์เซ็นต์ และกลุ่มที่ได้รับการซ่อมเสริมโดยการเฉลยแบบ  
 ทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง มีค่าความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์น้อยกว่ากลุ่มควบคุม  
 51 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ รุจิรี ภูสาระ (รุจิรี ภูสาระ 2522)  
 และ ค่างง ศิริเจริญ (ค่างง ศิริเจริญ 2524) ที่พบว่า การสอนโดยวิธีเรียนเพื่อ  
 รอบรู้ที่มีการสอนซ่อมเสริมทำให้ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ลดลง ผลการศึกษา  
 ที่ปรากฏมาทั้งกล่าว อาจเนื่องจากนักเรียนที่เรียนจากครูและมีการสอนซ่อมเสริมได้ทราบ  
 ข้อบกพร่องของตนเอง และมีโอกาสได้แก้ไข เมื่อมีการสอบครั้งสุดท้ายนักเรียนที่ได้รับการ  
 การซ่อมเสริมส่วนมากจึงมีโอกาสมานเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดความแปรปรวนของคะแนน  
 ผลสัมฤทธิ์จึงลดลง

3. ทัศนคติที่มีต่อวิชาเรียน ปรากฏผลว่า นักเรียนที่ได้รับการสอน  
 ขอมเสริมทุกกลุ่มมีทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งสอดคล้อง  
 กับผลการศึกษาของ คีฟ (Keeves. 1972 : 53, citing Biggs. 1959 :  
 Keeves. 1966 : and Aikon. 1970) ซึ่งพบว่า ทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาเรียน  
 จะค่อย ๆ สูงขึ้น ถ้านักเรียนทราบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของเขาสูงขึ้น และ  
 ทัศนคติที่มีต่อวิชาเรียนจะเกิดจากผลการสอนของครูมากกว่าที่จะมีผลมาจากบ้านและ  
 ฝูงกระของของเค็ก

4. ค่าความสนใจในวิชาเรียน ผลจากการวิจัยในครั้งนี้ พบว่า ความ  
 สนใจในวิชาเรียนของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการซ่อมเสริมด้วยวิธีต่าง ๆ ไม่สูงขึ้นกว่าเดิม  
 ซึ่งขัดแย้งกับผลของการวิจัยที่ บล็อก เคยรวบรวมไว้ (Block. 1974 : 50, citing  
 Gallup. 1969 : Hapkeiwicz. 1971 : Sheppard and Mac-Dermont. 1970)

ว่าวิธีการเรียนเพื่อรอบรู้ที่มีการซ่อมเสริมทำให้ความสนใจในวิชาเรียนสูงขึ้น ซึ่งการวิจัยในครั้งนี้ได้ตั้งเกณฑ์ผ่านไว้ 80% ของเนื้อหาซึ่งอาจจะสูงไปสำหรับเด็กนักเรียนไทย ถึงแม้ว่าจะมีการวิจัยพบว่า เกณฑ์ที่เหมาะสมคือ 85% (Block, 1970 : 104) แต่ก็เป็นการศึกษาวิจัยกับเด็กนักเรียนต่างประเทศ ซึ่งการตั้งเกณฑ์สูงเกินไปอาจจะทำให้ความสนใจในวิชาเรียนของนักเรียนลดลงเนื่องจากความท้อแท้ตนเอง

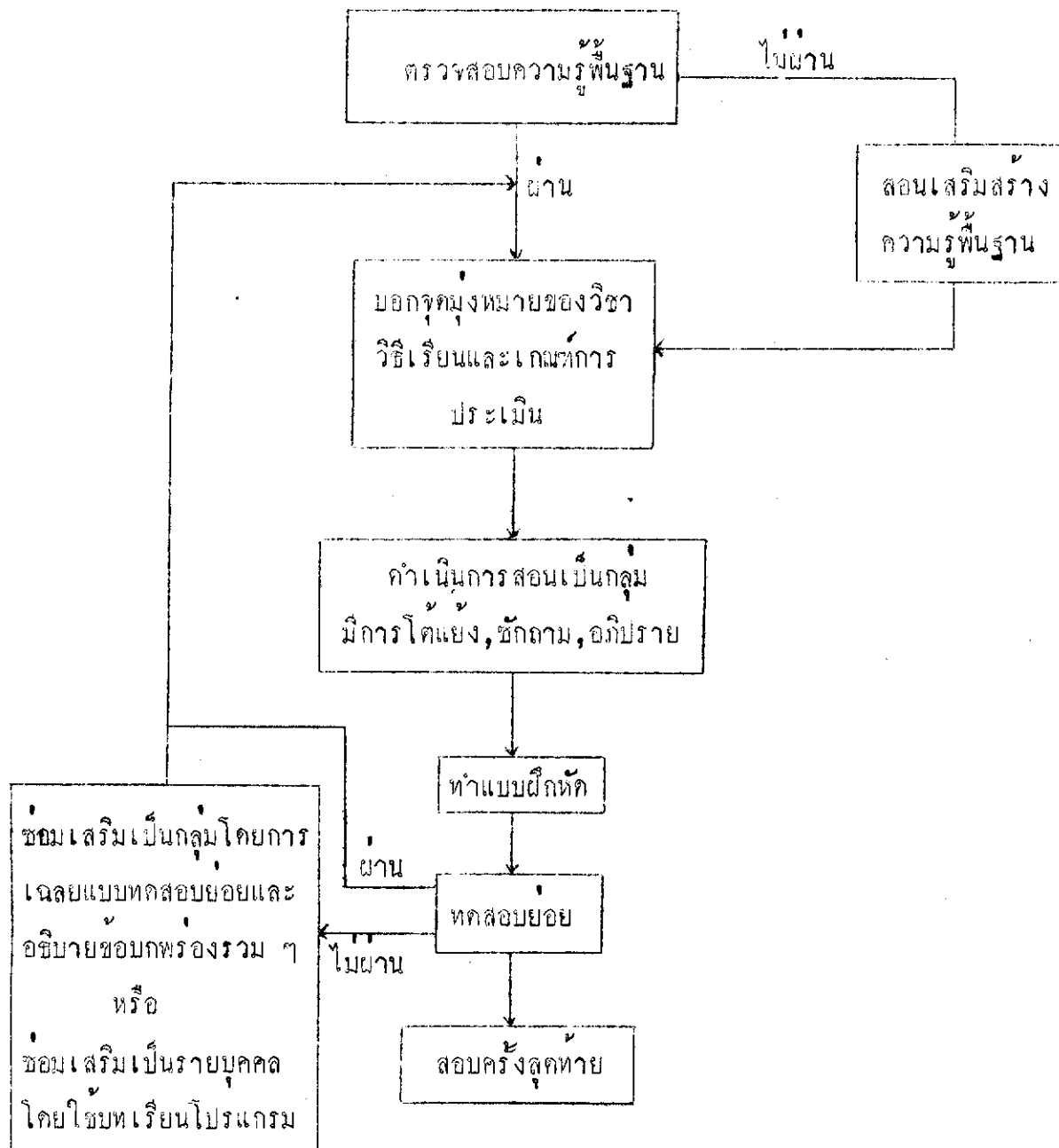
อีกประการหนึ่งช่วงเวลาในการทำการทดลองมีระยะสั้น และแบบทดสอบวัดความสนใจฉบับที่ใช้วัดมีจำนวนเพียง 10 ข้อ และเป็นการแปลมาจากภาษาต่างประเทศ ความหมายของข้อคำถามอาจจะคลาดเคลื่อนไปจากความหมายจริง

### อภิปรายทั่วไป

จากผลของการวิจัยเป็นที่ยืนยันว่าการสอนซ่อมเสริมสามารถจะทำให้ให้นักเรียนมีสัมฤทธิ์ผลสูงขึ้น ซึ่งวิธีการที่ง่ายที่สุดและให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงก็คือ การเฉลยแบบทดสอบย่อย และอธิบายขอบคพกรวม ๆ ซึ่งโรงเรียนมัธยมศึกษาทั่ว ๆ ไปสามารถนำเอาไปใช้ได้ ในการจัดชั่วโมงซ่อมเสริมนั้นถ้าไม่มีในตารางสอน ครู-อาจารย์ก็สามารถที่จะจัดกระทำได้ในชั่วโมงสอนปกติของตนเอง ซึ่งการสอนซ่อมเสริมแบบนี้จะใช้เวลาไม่มากนัก และการสอนซ่อมเสริมอีกวิธีหนึ่งที่ให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงเช่นกันก็คือ การซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม แต่การสอนแบบนี้สิ้นเปลืองวัสดุและเวลาสร้างบทเรียนโปรแกรมมาก จึงเหมาะสำหรับโรงเรียนใหญ่ ๆ ที่มีความพร้อมทางกำลังคนและกำลังทรัพย์ ส่วนจะทำไปใช้ในโรงเรียนที่มีความพร้อมในด้านต่าง ๆ ดังกล่าว คำเช่น โรงเรียนมัธยมระดับตำบล จึงยังไม่สมควรจะนำไปใช้ ควรใช้การซ่อมเสริมแบบเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบ-อธิบายแทน

### รูปแบบของการจัดการเรียนการสอนแนวใหม่

ผลจากการวิจัยในครั้งนี้ พอสรุปวิธีการจัดการเรียนการสอนที่คาดว่าจะทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงได้เป็นรูปแบบดังนี้



ภาพประกอบ 6 แสดงขั้นตอนของรูปแบบการเรียนการสอน

วิธีการจัดการเรียนการสอนตามภาพประกอบ 6 เริ่มบทเรียนมีการตรวจสอบพื้นฐานในเรื่องที่จะเรียนก่อน ถ้าไม่ผ่านเกณฑ์ก็จะได้รับการสอนเสริมสร้างพื้นฐานก่อน เมื่อเริ่มหน่วยการเรียนรู้ ครูเริ่มบอกจุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียนรู้และกำหนดเกณฑ์ในการประเมินไว้ หลังจากนั้นครูก็เริ่มดำเนินการสอน มีการซักถาม อธิบาย โต้แย้ง และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด แล้วทำการทดสอบย่อยเมื่อจบเนื้อหาวิชาในตอนหนึ่ง ๆ ถ้านักเรียนคนใดที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดไว้ก็จะมีโอกาสเสริมโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อยและอธิบายข้อบกพร่อง หรือเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรม แล้วทำการทดสอบอีกครั้งหนึ่ง เมื่อนักเรียนผ่านเกณฑ์แล้วก็ให้การสอนในเนื้อหาตอนต่อไปได้

### ข้อเสนอแนะ

1. ควรจัดให้มีการจัดการเรียนการสอนที่มีการซ่อมเสริมภายในโรงเรียนมัธยมทั่ว ๆ ไป ถึงแม้ว่าจะสิ้นเปลืองบ้างแต่ก็คุ้มค่า กล่าวคือ ได้ช่วยเด็กนักเรียนที่เรียนอ่อนได้มีสัมฤทธิ์ผลสูงขึ้น
2. ควรจัดให้มีการศึกษาทดลองเพื่อหาวิธีการซ่อมเสริมแบบอื่น ๆ ที่จะให้ผลสัมฤทธิ์สูงขึ้น เช่น การสอนซ่อมเสริมโดยให้นักเรียนสอนกันเอง หรือซ่อมเสริมโดยแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ เป็นต้น
3. ควรจัดให้มีการศึกษาวิจัยเพื่อหาเกณฑ์ผ่านชั้นรอบรู้ที่เหมาะสมกับเด็กไทย และส่งเสริมให้มีเหตุการณ์ทางคานาอาเวคสูงชันด้วย

ਅੰਤਰਰਾਸ਼ਟਰੀ

บรรณานุกรม

- กมล ภูประเสริฐ "แนวคิดที่เกี่ยวกับการวัดผลการเรียนการสอน" พัฒนาวัฒน  
13 : 1 - 17, 2520
- กระทรวงศึกษาธิการ คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย  
พุทธศักราช 2524 โรงพิมพ์การศาสนา 2523, 111 หน้า
- บุญชม ศรีสะอาด การวัดผลและประเมินผลทางการศึกษา กันยายน 2520, 192 หน้า  
อัครสาเนา
- บุวดี ปริยฉัตรานันท์ อิทธิพลของการเฉลยข้อสอบที่มีต่อพฤติกรรมค่านิยมในวิชา  
คณิตศาสตร์ ปริญญาณิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2520 : 80
- รวิวรรณ รุชมชัย "การสอนซ่อมเสริม" เอกสารประกอบการประชุมปฏิบัติการ  
คณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2 ณ โรงเรียนมัธยมสาธิต  
ประสานมิตร 2525, 3 หน้า อัครสาเนา
- รุจิร ภูสาระ การศึกษาเปรียบเทียบการสอนคณิตศาสตร์ระดับ ม.1 ทหวิธีที่จะให้ผล  
สัมฤทธิ์สูงสุด โดยมีความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ค่าและใช้เวลาในการเรียนการสอน  
น้อยที่สุด ปริญญาณิพนธ์ กศ.ค. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร  
2523, 128 หน้า อัครสาเนา
- วิเชียร เกตุสิงห์ สถิติวิเคราะห์สำหรับการวิจัย 2522, 155 หน้า อัครสาเนา
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รายงานการวิจัยอันค้นที่ 3/2518  
2518, 30 หน้า ✓
- สมบูรณ์ จิตพงศ์ การประเมินผลหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ปริญญาณิพนธ์ กศ.ค.  
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2519, 119 หน้า อัครสาเนา
- สมบูรณ์ สีนถาวร ผลการทำแบบฝึกหัด การทดสอบย่อยและการสอนสิ่งที่บกพร่อง ที่มี  
ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปริญญาณิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย  
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 52 หน้า อัครสาเนา

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ "การสอนซ่อมเสริม" เอกสารประกอบการอบรมวิทยากรวัดผล  
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย 2523, 148 หน้า อักสำเนา

สวัสดิ์ ประทุมราช "การเรียนรู้ (Learning for Mastery)" พัฒนาวิทย์  
10 : 19 - 33, 2517

ลำเรียง บุญเรืองรัตน์ "การเรียนรู้เพื่อรอบรู้" วารสารการวัดผลการศึกษา 1(3) :  
1 - 9 มกราคม - เมษายน 2523

โปรแกรมการเรียนการสอน : การเขียนโปรแกรมเบื้องต้นสำหรับ  
คอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2521, 87 หน้า  
อักสำเนา

อิทธิพลของการทดสอบที่มีต่อการเรียนรู้ในเนื้อหาบางประการในวิชา  
คณิตศาสตร์ ของกลุ่มนักเรียนที่มีสมรรถภาพในการเรียนแตกต่างกัน ปรินฎาณิพนธ์  
กต.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2512, 80 หน้า  
อักสำเนา

เสนาะ ชรรmgrองอาคม "ผลของการเรียนการสอนในค่านที่เกี่ยวกับความรู้สึก  
และอารมณ์" ประชาศึกษา 30(3) : 2 - 13 ตุลาคม 2521

อนันต์ ศรีโสภา การวัดและประเมินผลการศึกษา ไทยวัฒนาพานิช 2520,  
251 หน้า

อังคณา สายยศ วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย สำนักทดสอบทางการศึกษาและ  
จิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2523/193 หน้า  
อักสำเนา

Block, J.H., 1970 "The Effects of Various Levels of Performance on  
Selected Cognitive, Affectives and Time Variables" in Mastery  
Learning : Theory and Practice p. 104 - 106 ed. by James H. Block,  
New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971.

- Block, J.H. 1970 Mastery Learning : Theory and Practice. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971, 152 p. ✓
- \_\_\_\_\_. School, Society and Mastery Learning. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974, 148 p. ✓
- Block, J.H. and Anderson Lorin W., Mastery Learning in Classroom Instruction. New York, Macmillan Publishing Co., Inc., 1975, 88 p.
- Bloom, B.S., Human Characteristics and School Learning, New York, McGraw-Hill Book Company, 1976, 284 p.
- Bloom, B.S., and others, Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning, New York, McGraw-Hill Book Co., 1971 a, 923 p.
- Bloom, B.S., "Mastery Learning", in Mastery Learning : Theory and Practices p. 47 - 63, ed by James H. Block, New York, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971.
- Bobbie, Thatcher B., "An Evaluative Study of Teaching, Seventh-Grade Mathematics Incorporating Team Teaching, Individualized Instruction and Team Supervision Utilizing the Strategy of Learning for Mastery," Dissertation Abstracts 34(8) : 4685 - A January, 1974
- Boonruangrutana, Samrerng., "The Effects of Group-Focussed Feedback on Learning in classroom Instruction," Journal of Curriculum Study 12(2) June, 1980.
- Brenan, R.L. & Stolorow, L.M. Research Memorandum No. 4
- Carroll, John B. "A Model of School Learning," Teacher College Record 64 : 723 - 733, 1963.
- Sronbach, Lee Joseph. The Dependability of Behavioral Measurement Theory of Generalisability for Score and Profile, New York, Wiley, 1972, p. 410.

- ✓ Duncan, Donal D., "The Evaluation of Teaching Strategy Which Utilizes Bloom's Mastery Learning Procedures in a College Elementary Function Course," Dissertation Abstract 37(3) : 1370 - A September, 1976.
- Francies, Hallie D., "Arithmetic Attitudes and Arithmetic Achievement of Fourth and Sixth Grade Students in Urban Poverty-Area Elementary Schools," Dissertation Abstracts 32(3) : 1333 - A September 1971. ✓
- Gentile, J. Ronald, (1970) "A Mastery Strategy for Introductory Educational Psychology," in Mastery Learning : Theory and Practice p. 117 - 118 ed. by James H. Block, New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971.
- John, Dennis B., "Cost-Effectiveness of Three Methods of Remedial Instruction in Mastery Learning and the Relationship Between Aptitude and Achievement," Dissertation Abstract 33(7) : 3475 - A January, 1973.
- ✓ Keeses, John P., Educational Environment and Student Achievement Sweden, Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB, Uppsals 1972, 658 p.
- \_\_\_\_\_. Some Attitude Scales for Educational Research Purpose Hawthorn, Australian Council for Educational Research 1974, 44 p.
- Myers, J.L., Fundermental of Experimental Design Massachusetts, Allyn and Bacon Inc., 1979, 524 p.
- Winer, B.J., Statistical Principles in Experimental Design 1971 McGraw-Hill Inc., p. 907.
- Wyckoff, Delores B., "A Study of Mastery Learning and It's Effects on Achievement of Sixth Grade Social Studies Students," Dissertation Abstracts 35(8) : 5160 - A February 1975.

ภาคผนวก ก.

1. แบบทดสอบย่อยเรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง
2. แบบทดสอบรวมเรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง
3. บทเรียนโปรแกรมสำหรับซ่อมเสริมเรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง
4. แบบฝึกหัดสำหรับซ่อมเสริมเรื่อง โพลีโนเมียลดีกรีสูง
5. แบบทดสอบวัดทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์
6. แบบทดสอบวัดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์

แบบทดสอบย่อยเรื่องโพลีโนเมียลดีกรีสูง  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท(x)ทับตัวอักษรในกระดาษคำตอบที่ตรงกับคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงข้อละคำตอบเดียว

1. ข้อใดคือคำตอบของการแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียล  $8x^3-1$ 
  - ก.  $(2x-1)(4x^2-2x-1)$
  - ข.  $(2x-1)(4x^2-2x+1)$
  - ค.  $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
  - ง.  $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
  - จ.  $(2x+1)(4x^2+2x+1)$
2. จงพิจารณาว่าตัวประกอบ  $(m+3)(m^2-3m+9)$  เกิดจากการแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลในข้อใด
  - ก.  $m^3+3$
  - ข.  $m^3-3$
  - ค.  $m^3+9$
  - ง.  $m^3-9$
  - จ.  $m^2+9$
3. ถ้าจัด  $8a^3+27b^3$  เป็นรูปยกกำลังสามทั้งสองพจน์จะได้  $(2a)^3+(3b)^3$ 
 จงจัด  $125x^3+64y^3$  ให้เป็นรูปยกกำลังสามทั้งสองพจน์
  - ก.  $(5x)^3-(4y)^3$
  - ข.  $(5x)^3+(4y)^3$
  - ค.  $(25x)^3-(16y)^3$
  - ง.  $(25x)^3+(16y)^3$
  - จ.  $(5x^3)+(4y^3)$

4. จงพิจารณาว่าตัวประกอบ  $(a-5)(a^2+5a+25)$  เกิดจากการแยกตัวประกอบของ โพลีโนเมียลในข้อใด

ก.  $a^3-15$

ข.  $a^3+25$

ค.  $a^3-25$

ง.  $a^3+125$

จ.  $a^3-125$

5. ข้อใดคือค่าคงของการแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียล  $a^4b-ab^4$

ก.  $ab(a^4-b^4)$

ข.  $(a^2b-ab^2)(a^2b+ab^2)$

ค.  $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

ง.  $ab(a-b)(a^2+ab+b^2)$

จ.  $ab(a+b)(a^2-ab+b^2)$

คำชี้แจง จงพิจารณาโพลีโนเมียล  $x^3-x^2-30x$  ที่กำหนดให้แล้วตอบคำถามในข้อ 6 ถึงข้อ 7

6. ถ้าจะแยกตัวประกอบโพลีโนเมียลที่กำหนดให้ข้างต้นนี้ ขั้นแรกที่สุดควรจะแยกตัวประกอบโดยวิธีใด

ก. ทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ก่อน

ข. จัดให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง

ค. แยกตัวประกอบรวมออกก่อน

ง. จัดให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสาม

จ. จัดให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสาม

7. เมื่อแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียลที่กำหนดมาให้ข้างต้นอยู่ในรูปสำเร็จ แล้วข้อใดคือค่าคง

ก.  $x(x-5)(x+6)$

ข.  $x(x+5)(x-6)$

ค.  $(x^2+5x-6)(x^2-5x+6)$

ง.  $(x^2-5)(x+6)$

จ.  $(x^2-5)(x-6)$

8. ถ้าจะแยกตัวประกอบของพหุนาม  $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$  ชั้นแรกควรเริ่มจัดกระทำให้อยู่ในรูปใดก่อน

ก.  $(a^3 - 6a^2) + (12a - 8)$

ข.  $(a^3 + 12a) - (6a^2 + 8)$

ค.  $(a^3 + 12a) - (6a^2 - 8)$

ง.  $(a^3 - 8) - (6a^2 - 12a)$

จ.  $(a^3 - 8) - (6a^2 + 12a)$

9. ถ้าอยากรู้คำตอบของการแยกตัวประกอบของพหุนาม  $x^3 + x^2 + x + 1$

ก.  $(x+1)(x^2+1)$

ข.  $(x+1)(x^2-1)$

ค.  $(x-1)(x^2+1)$

ง.  $(x-1)(x^2-1)$

จ.  $(x+1)(x+1)(x+1)$

10.  $1 - x - x^2 + x^3$

$= (1-x) - (x^2 + x^3) \dots\dots\dots(1)$

$= (1-x) - x^2(1+x) \dots\dots\dots(2)$

$= (1-x)(1-x^2) \dots\dots\dots(3)$

$= (1-x)(1-x)(1+x) \dots\dots\dots(4)$

การแยกตัวประกอบข้างต้นนี้เริ่มคิดพหุคูณตัวใดเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่มีใครเลย

11. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $(2x+1)(x-3)(3x-2) = 0$

ก.  $\left\{\frac{1}{2}, 3, -\frac{2}{3}\right\}$

ข.  $\left\{-\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3}\right\}$

ค.  $\left\{\frac{1}{2}, -3, \frac{2}{3}\right\}$

ง.  $\left\{-\frac{1}{2}, -3, -\frac{2}{3}\right\}$

จ.  $\left\{\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3}\right\}$

12. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^3-3x^2+2x = 0$

ก.  $\{-2, -1, 0\}$

ข.  $\{-1, 0, 1\}$

ค.  $\{0, 1, 2\}$

ง.  $\{0, 2, 3\}$

จ.  $\{1, 2, 3\}$

13. ให้นักเรียนเินความรูจากการตรวจคำตอบเพื่อหาว่าตัวเลขต่อไปนี้ข้อใดคือคำตอบหนึ่งของสมการ  $x^3+3x^2-4x = 12$

ก. 5

ข. 3

ค. 1

ง. -3

จ. -5

14. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $y^4-5y^2+4 = 0$

ก.  $\{-1, -2\}$

ข.  $\{1, 2\}$

ค.  $\{-2, -1, 1, 2\}$

ง.  $\{-3, -1, 1, 3\}$

จ.  $\{-5, -2, 2, 3\}$

15. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^3+6x^2+12x+8 = 0$

ก.  $\{-2\}$

ข.  $\{1, 2\}$

ค.  $\{-2, 2\}$

ง.  $\{-2, 1, 2\}$

จ.  $\{-2, -1, 2\}$

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท (x) หน้าข้อใดในกระดาษคำตอบที่ตรงกับคำตอบที่ถูก  
ถูกต้องที่สุด เพียงข้อละคำตอบเดียว

1. จงหาเศษเมื่อหาร  $3x^3+x^2+5x-6$  ด้วย  $x-2$ 
  - ก. -36
  - ข. 36
  - ค. -32
  - ง. 32
  - จ. 16
2. จากการหารในข้อ 1. จะได้อลหารเป็นเท่าไร
  - ก.  $3x^2+7x+19$
  - ข.  $3x^2+7x-19$
  - ค.  $3x^2-7x+19$
  - ง.  $3x^2-7x-19$
  - จ. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง
3. การหารในข้อใดที่เป็นการหารลงตัว (มีเศษเป็น 0)
  - ก. หาร  $3x^2+x-2$  ด้วย  $x-2$
  - ข. หาร  $4x^2-4x+1$  ด้วย  $x-2$
  - ค. หาร  $3x^2-2x-8$  ด้วย  $x-2$
  - ง. หาร  $10x^2-19x+7$  ด้วย  $x-2$       จ. หาร  $3x^2-25x+28$  ด้วย  $x-2$
4. จงหา  $q(x)$  จากสมการต่อไปนี้  $2x^3-7x^2-9x+30 = (x-2) \cdot q(x)$ 
  - ก.  $2x^2-3x-15$
  - ข.  $2x^2+3x-15$
  - ค.  $2x^2+3x+15$
  - ง.  $2x^2-3x+5$
  - จ.  $2x^2+3x-5$

5. ถ้า  $x^2 - 2ax + 15$  หารด้วย  $x + 5$  ลงตัว จงหาค่า  $a$
- ก.  $a = 9$
- ข.  $a = 10$
- ค.  $a = 11$
- ง.  $a = 12$
- จ.  $a = 13$
6. ถ้าหาร  $x^3 - 5x^2 + mx - 6$  ด้วย  $x - 2$  ได้เศษ 8 จงหาค่าของ  $m$
- ก.  $m = 13$
- ข.  $m = -13$
- ค.  $m = 21$
- ง.  $m = -21$
- จ.  $m = 26$
7. จงหาผลหารเมื่อหาร  $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$  ด้วย  $x + 1$
- ก. 1
- ข. -1
- ค. 15
- ง. -15
- จ. 30
8. ถ้า  $2x^2 - 3x - 2$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$  แล้ว  
จงหาตัวประกอบที่เหลือ
- ก.  $x - 1$
- ข.  $x + 1$
- ค.  $x - 2$
- ง.  $x + 2$
- จ.  $x + 3$

9. ข้อใดเป็นแก้วประกอบของ  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

ก.  $(x-1)(x+2)(x-3)$

ข.  $(x+1)(x+2)(x-3)$

ค.  $(x-1)(x-2)(x-3)$

ง.  $(x+1)(x-2)(x-3)$

จ.  $(x+1)(x+2)(x+3)$

10. ถ้า  $x+3$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$  จงหาตัวประกอบที่เหลือ

ก.  $(x+4)(x+5)$

ข.  $(x+4)(x-5)$

ค.  $(x-4)(x+5)$

ง.  $(x-4)(x-5)$

จ.  $(x+3)(x-4)$

## แบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท(x)ทับตัวอักษรในกระดาษคำตอบที่ตรงกับคำตอบ  
ที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว

1. จงบอกค่าของตัวแปรซึ่งทำให้เศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้ไม่มีความหมาย

$$\frac{x-1}{x(x+1)}$$

ก. 1,2

ข. 0,2

ค. 0,-2

ง. 0,1

จ. 0,-1

2. จงบอกค่าของตัวแปรซึ่งทำให้เศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้ไม่มีความหมาย

$$\frac{5x}{x^2-x-12}$$

ก. 4,3

ข. 4,-3

ค. -4,3

ง. -4,-3

จ. -4,0

3.  $\frac{4x^2y^2}{-32xy^2}$  ทำให้เป็นรูปร่างแล้วขอใดถูก

ก.  $\frac{x}{8}$ ข.  $\frac{x}{4}$ 

ค. 0

ง.  $-\frac{x}{4}$ จ.  $-\frac{x}{8}$

4. ค่าคงที่คือรูปง่ายของ  $\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$

ก.  $\frac{x-4}{x+3}$

ข.  $\frac{x+4}{x-3}$

ค.  $\frac{x+3}{x-4}$

ง.  $\frac{x-3}{x+4}$

จ.  $\frac{x-3}{x-4}$

5. จงหาค่าคงที่ของ  $\frac{5x^2}{14a^2} \cdot \frac{7a}{15x}$

ก.  $\frac{5x}{a}$

ข.  $\frac{x}{5a}$

ค.  $\frac{6x}{a}$

ง.  $\frac{x}{6a}$

จ.  $\frac{x}{2a}$

6. จงหาค่าหารของ  $\frac{(a+b)^2}{6ay} \div \frac{(a+b)}{3ay}$

ก.  $\frac{a+b}{2}$

ข.  $\frac{2}{a+b}$

ค.  $\frac{(a+b)^3}{18a^2y^2}$

ง.  $\frac{18a^2y^2}{(a+b)^3}$

จ.  $a+b$

7. จงหาค่าคงที่ของ  $\frac{a^2+a}{a^2-a} \cdot \frac{a^2-1}{a^2-a-2}$

ก.  $\frac{a-2}{a+1}$

ข.  $\frac{a+1}{a-2}$

ค.  $\frac{a-1}{a+2}$

ง.  $\frac{a+2}{a-1}$

จ.  $\frac{a-1}{a-2}$

8. จงหาค่าของพหุนามของ  $\frac{m^2-2m+1}{3m-6} \div \frac{m^2-1}{15m-30}$

ก.  $\frac{5(m-1)}{m+1}$

ข.  $\frac{m-1}{5(m+1)}$

ค.  $\frac{3(m+1)}{m-1}$

ง.  $\frac{m+1}{3(m-1)}$

จ.  $\frac{m-1}{m+1}$

9. จงหาค่าของพหุนามของ  $\frac{6a^2+a-2}{4a^2-1} \div \frac{2a^2-a-1}{6a+4}$

ก.  $\frac{a-1}{2a+1}$

ข.  $\frac{2}{2a+1}$

ค.  $\frac{2a+1}{2}$

ง.  $\frac{2}{a-1}$

จ.  $\frac{a-1}{2}$

10. จงหาค่าของพหุนามของ  $\frac{x^2-x-20}{x^2-25} \div \frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}$

ก.  $\frac{x+5}{x+1}$

ข.  $\frac{x-1}{x+5}$

ค.  $\frac{x+1}{x-5}$

ง.  $\frac{x+1}{x+5}$

จ.  $\frac{x-1}{x-5}$

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

ชื่อ..... เลขที่..... ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท(x)ทับตัวอักษรในระคาบคำตอบที่ตรงกับคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงขอละคำตอบเดียว

1. จงหา ค.ร.น. ของพหุนาม  $9ax^2, 36abxy, 18bx^2y^2$

ก.  $9xy$

ข.  $9abx^2y^2$

ค.  $18abx^2y^2$

ง.  $36x$

จ.  $36abx^2y^2$

2. จงหา ค.ร.น. ของพหุนาม  $(x-2)^2, 5x-10, x^2+x-6$

ก.  $x-2$

ข.  $5(x-2)(x+3)$

ค.  $5(x-2)^2(x+3)$

ง.  $5(x-2)(x+3)^2$

จ.  $5(x-2)^2(x+3)^2$

3. จงหา ค.ร.น. ของพหุนาม  $x^2-9, x^2-3x, x^2-2x-3$

ก.  $x-3$

ข.  $(x-3)(x+3)(x+1)$

ค.  $x(x-3)(x-3)(x+1)$

ง.  $x(x-3)(x+3)(x+1)$

จ.  $x(x-3)(x-3)(x-1)$

คำชี้แจง จากผลต่าง  $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x-3}$  ให้ใช้โจทย์นี้ตอบคำถามข้อ 4 และข้อ 5

4. ก.ร.น. ของผลต่างตามโจทย์นี้คือข้อใด

ก.  $(x-2)$

ข.  $(x-3)$

ค.  $(x-2)(x-3)$

ง.  $(x-2)+(x-3)$

จ.  $(x-2)-(x-3)$

5. ผลต่างของโจทย์นี้ ถ้าทำจนสำเร็จ ข้อใดคือคำตอบ

ก.  $\frac{x^2-6x+6}{x^2-5x+6}$

ข.  $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+6}$

ค.  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+6x+6}$

ง.  $\frac{x^2-6x+6}{x-2}$

จ.  $\frac{x^2-6x+6}{x-3}$

คำชี้แจง ให้ใช้คำตอบข้อต่อไปนี้ สำหรับตอบคำถามข้อ 6 และข้อ 7

ก. 2

ข. 1

ค. 0

ง. -1

จ. -2

6. จงหาคำตอบของ  $\frac{2x-y}{x} - \frac{x-y}{x}$  เมื่อทำให้เป็นผลสำเร็จ

7. จงหาคำตอบของ  $\frac{1}{6x+4} - \frac{1}{2(3x+2)}$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \frac{3}{x^2-4} - \frac{1}{(x-2)^2} &= \frac{3}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x-2)} \dots\dots\dots(1) \\
 &= \frac{3+(x+2)}{(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(2) \\
 &= \frac{3+x+2}{(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(3) \\
 &= \frac{x+5}{(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

การบวกพหุคูณในข้อนี้เริ่มฝึกตั้งแต่วรรหัตคือเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่ฝึกเลย

$$\begin{aligned}
 9. \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} &= \frac{(x-1)(x-1)-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots(1) \\
 &= \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots(2) \\
 &= \frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots(3) \\
 &= -\frac{4x}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

การลบเศษส่วนของพหุคูณในข้อนี้เริ่มฝึกตั้งแต่วรรหัตคือเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่ฝึกเลย

$$\begin{aligned}
 10. \quad & \frac{5}{2x-4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{4x^2+8x} \\
 &= \frac{5}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{4x(x+2)} \dots\dots\dots(1) \\
 &= \frac{10x(x+2)+4x-3(x-2)}{4x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(2) \\
 &= \frac{10x^2+20+4x-3x-6}{4x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(3) \\
 &= \frac{10x^2+x+14}{4x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

การทำให้เป็นผลสำเร็จตามข้อ 10. นี้ เริ่มคิดตั้งแต่มรรคใดเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่นึกเลย

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 5

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท(x)ทับตัวอักษรในระแวกคำตอบที่ตรงกับคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงขอละคำตอบเดียว

1. จากสมการ  $\frac{3}{2} - \frac{1}{a} = \frac{1}{4a}$  จงหาค่าของ a

ก. a = 5

ข. a = 6

ค. a =  $\frac{5}{6}$

ง. a =  $-\frac{5}{6}$

จ. a =  $\frac{6}{5}$

คำสั่ง จงใส่คำตอบต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ (2) และข้อ (3)

ก. 3

ข. 2

ค. 0

ง. -2

จ. -3

2. จากสมการ  $\frac{x+2}{x-2} + 2 = \frac{4}{x-2}$  จงหาค่าของ x

3. จากสมการ  $\frac{x-1}{x} = \frac{4}{3}$  จงหาค่าของ x

4. เมื่อแก้สมการ  $1 + \frac{12}{x^2-14} = \frac{3}{x-2}$  แล้วพบว่า x มีค่าเป็น 1 และ 2 ให้พิจารณาโดย

การตรวจคำตอบว่า x มีค่าเท่าไร จึงจะทำให้สมการไม่มีความหมาย

ก. มีค่าเป็น 1 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของโพลินอเมียลเป็น 0

ข. มีค่าเป็น 1 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของโพลินอเมียลไม่เป็น 0

ค. มีค่าเป็น 2 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของโพลินอเมียลเป็น 0

ง. มีค่าเป็น 2 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของโพลินอเมียลไม่เป็น 0

จ. มีค่าเป็นได้ทั้ง 1 และ 2

5. จงหาค่าของ  $x$  จากสมการต่อไปนี้  $\frac{x+3}{2x+3} + \frac{x+1}{2x-3} = 2$

ก.  $\{1, 3\}$

ข.  $\{-1, 3\}$

ค.  $\{1, -3\}$

ง.  $\{-2, -3\}$

จ.  $\{2, 3\}$

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 6

ชื่อ.....เลขที่.....ห้อง.....

คำสั่ง ให้นักเรียนเขียนเครื่องหมายกากบาท (x) ทับตัวอักษรในคำถามคำตอบที่ตรงกับคำตอบที่ถูกต้องที่สุด เพียงข้อละคำตอบเดียว

คำชี้แจง จากโจทย์ต่อไปนี้ ให้ใช้ตอบคำถามข้อ 1 และข้อ 2

" แบ่ง 6 ออกเป็นสองส่วน โดยให้ผลบวกของส่วนกลับของทั้งสองส่วนนั้น

เท่ากับ  $\frac{3}{4}$  จงหาส่วนแบ่งทั้งสอง "

กำหนดให้ ส่วนแบ่งทั้งสองส่วนนั้นคือ  $x$  และ  $y$

1. "ผลบวกของส่วนกลับของทั้งสองส่วนนั้นเท่ากับ  $\frac{3}{4}$ " จากข้อความนี้เข้าไปเขียนเป็นสมการได้อย่างไร

ก.  $x-y = \frac{3}{4}$

ข.  $x+y = \frac{3}{4}$

ค.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$

ง.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$

จ.  $3x = 4y$

2. ส่วนแบ่งทั้งสองหรือค่าของ  $x$  และ  $y$  เป็นเท่าไร

ก. 1,5

ข. 2,4

ค. 3,3

ง. -2,-4

จ. -1,-5

คำชี้แจง จากโจทย์ต่อไปนี้ ให้ใช้ตอบคำถามข้อ 3 ถึงข้อ 5

" ในระยะทาง 200 กิโลเมตร เรือยนต์ลำหนึ่งใช้เวลาแล่นตามน้ำเป็นสองเท่าของเวลาที่แล่นตามน้ำ ถ้ากระแสน้ำไหลด้วยอัตราเร็วคงที่ชั่วโมงละ 15 กิโลเมตร จงหาอัตราเร็วของเรือลำนี้ในน้ำนิ่ง "

กำหนดให้ อัตราเร็วของเรือในน้ำนิ่งเป็น  $x$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

3. จากโจทย์ ความเร็วของเรือที่แล่นทวนกระแสน้ำ จะมีลักษณะอย่างไร
- เท่ากับความเร็วของเรือที่แล่นในน้ำนิ่ง
  - เท่ากับความเร็วของกระแสน้ำ
  - เท่ากับความเร็วเรือในน้ำนิ่งบวกกับความเร็วของกระแสน้ำ
  - เท่ากับความเร็วเรือในน้ำนิ่งลบด้วยความเร็วของกระแสน้ำ
  - เท่ากับความเร็วเรือที่แล่นตามน้ำ
4. จากการคำนวณทราบว่าเรือแล่นตามน้ำ 200 กิโลเมตร ใช้เวลา  $\frac{200}{x+15}$  ชั่วโมงและแล่นทวนน้ำ 200 กิโลเมตร เท่ากันใช้เวลา  $\frac{200}{x-15}$  ชั่วโมง
- เมื่อโจทย์กำหนดให้ว่า ใช้เวลาแล่นทวนน้ำเป็นสองเท่าของเวลาที่แล่นตามน้ำ
- จงตั้งสมการตามข้อความดังกล่าว
- $2\left(\frac{200}{x+15}\right) = \frac{200}{x-15}$
  - $\frac{200}{x+15} = 2\left(\frac{200}{x-15}\right)$
  - $\frac{200}{x+15} = \frac{200}{x-15}$
  - $\frac{x+15}{200} = \frac{x-15}{200}$
  - ข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอที่จะตั้งเป็นสมการได้
5. อัตราความเร็วของเรือในน้ำนิ่ง (หรือค่าของ  $x$ ) เป็นเท่าไร
- 5 กิโลเมตร/ชั่วโมง
  - 15 กิโลเมตร/ชั่วโมง
  - 30 กิโลเมตร/ชั่วโมง
  - 45 กิโลเมตร/ชั่วโมง
  - 60 กิโลเมตร/ชั่วโมง

แบบทดสอบรวมเรื่องโพลีโนเมียลดีกรีสูง  
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

## แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เรื่องโพลีโนเมียล

คำอธิบายวิธีทำแบบทดสอบ

- แบบทดสอบฉบับนี้มีคำถาม 55 ข้อ ใช้เวลา 1.30 ชั่วโมง  
นักเรียนควรรีบตอบโดยเร็วให้ครบทุกข้อ จึงจะได้คะแนนดี
- คำถามทั้งหมดเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียง  
คำตอบเดียวจาก ก. ข. ค. ง. หรือ จ. แล้วขีดเส้นทับในช่องที่จะตอบ  
ตัวอย่าง ช่องการตอบข้อ ค. ดังนี้  

$$0. \quad \text{ก.} = \quad \text{ข.} = \quad \text{ค.} = \quad \text{ง.} = \quad \text{จ.} =$$
- ถ้านักเรียนตอบไปแล้ว แต่ต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ ก็ให้ขีดฆ่าที่รอยเดิมตั้ง  
ตัวอย่าง ต้องการเปลี่ยนคำตอบจาก ค. ไปเป็น ง. ดังนี้  

$$0. \quad \text{ก.} = \quad \text{ข.} = \quad \text{ค.} \quad \times \quad \text{ง.} = \quad \text{จ.} =$$
- ข้อสอบแต่ละข้อจะมีคำตอบถูกเพียงคำตอบเดียว ข้อใดนักเรียนขีดตอบมากกว่า  
1 คำตอบ ขอนั้นจะถือว่าผิดและไม่ได้คะแนน
- ถ้านักเรียนพบข้อยากอย่าท้อใจ จงข้ามไปทำข้ออื่นก่อน มีเวลาเหลือจึงย้อนกลับมาทำ  
ข้อนั้น พยายามทำใหม่มากที่สุด

หวังว่าคงทำได้ดีไม่แพ้ใคร.

1. จงหาผลหารเมื่อหาร  $a^3 - 4a^2 + 6a - 4$  ; ด้วย  $a + 1$

ก. 7

ข. -7

ค. 15

ง. -15

จ. -17

2. จงทำเศษส่วนของพหุนามเมื่อยลคต่อไปนี้ให้เป็นรูปง่าย  $\frac{-6a^2bxy^2}{21abx^2y}$

ก.  $\frac{2ay}{7x}$

ข.  $-\frac{2ay}{7x}$

ค.  $\frac{3ay}{7x}$

ง.  $-\frac{3ay}{7x}$

จ.  $-\frac{6ay}{21x}$

3. จงหา ก.ร.น. ของพหุนาม  $2a^2m$ ,  $4ab^2$ ,  $3abm^2$

ก.  $2a$

ข.  $2a^2b^2m^2$

ค.  $12a$

ง.  $12a^2b^2m^2$

จ.  $12a^4b^3m^3$

4. จงหาผลหารของ  $\frac{(a+b)^2}{6xy} \div \frac{(a+b)^3}{12x^2y}$

ก.  $\frac{2x}{a+b}$

ข.  $\frac{a+b}{2x}$

ค.  $\frac{72x^3y^2}{(a+b)^5}$

ง.  $\frac{(a+b)^5}{72x^3y^2}$

จ.  $-\frac{(a+b)^5}{72x^3y^2}$

5. จงหาค่าของ  $x$  ที่ทำให้เศษส่วนของพหุนามเมียดต่อไปนี้ไม่มีความหมาย

$$\frac{3(x-1)}{x^2-2x-8}$$

ก. 0

ข. -2, 4

ค. 2, -4

ง. 2, 4

จ. -2, -4

6. ถ้าหาร  $x^3-5x^2+mx+6$  ด้วย  $x+1$  ลงตัว แล้วจงหาค่า  $m$

ก.  $m = -2$

ข.  $m = -1$

ค.  $m = 0$

ง.  $m = 1$

จ.  $m = 2$

คำชี้แจง ให้ใช้คำตอบต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 7 และข้อ 8

ก.  $a = -3$

ข.  $a = -2$

ค.  $a = 1$

ง.  $a = 2$

จ.  $a = 3$

7. จงหาค่าของ  $a$  จากสมการ  $\frac{a-1}{a} = \frac{4}{3}$

8. จงหาค่าของ  $a$  จากสมการ  $\frac{a+2}{a-2} + 2 = \frac{4}{a-2}$

9. จงหา ค.ร.น. ของพหุนามเมียด  $x^2-1$ ,  $x^2-x$ ,  $x^2-2x+1$

ก.  $x-1$

ข.  $(x-1)(x-1)(x+1)$

ค.  $x(x-1)(x-1)(x+1)$

ง.  $x(x-1)(x+1)(x+1)$

จ.  $(x^2-1)(x^2-x)(x^2-2x+1)$

10. ข้อใดคือคำตอบของการแยกตัวประกอบของ  $a^3-27$

ก.  $(a-3)(a^2-3a-9)$

ข.  $(a-3)(a^2-3a+9)$

ค.  $(a-3)(a^2+3a+9)$

ง.  $(a+3)(a^2-3a+9)$

จ.  $(a+3)(a^2+3a+9)$

11. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $(3m+2)(m-1)(2m+1) = 0$

ก.  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

ข.  $\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$

ค.  $\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

ง.  $\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$

จ.  $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$

12. จงใช้ความรู้เรื่องตรวจคำตอบหาว่า ตัวเลขใดเป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

$$b^3+3b^2-4b = 12$$

ก. 5

ข. 3

ค. 1

ง. -3

จ. -5

13. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^4-10x^2+9 = 0$

ก.  $\{1\}$

ข.  $\{3\}$

ค.  $\{1, 3\}$

ง.  $\{-1, -3\}$

จ.  $\{1, -1, 3, -3\}$

14. จงหาผลคูณของ  $\frac{9m^3 \cdot 7n}{14n^3 \cdot 3m^2}$

ก.  $\frac{3m}{2n}$

ข.  $\frac{3m^2}{2n}$

ค.  $\frac{3m}{2n^2}$

ง.  $\frac{3m^2}{2n^2}$

จ.  $\frac{m}{n^2}$

15. ข้อใดเป็นตัวประกอบของ  $x^3 - 7x - 6$

ก.  $(x-1)(x-6)$

ข.  $(x+1)(x+6)$

ค.  $(x-1)(x-2)(x-3)$

ง.  $(x+1)(x-2)(x-3)$

จ.  $(x+1)(x+2)(x-3)$

16. จากสมการ  $\frac{12}{x^2-4} - \frac{3}{x-2} = -1$  เมื่อแก้สมการทราบว่า  $x$  มีค่าเป็น 2 และ 1 ให้พิจารณาโดยการตรวจคำตอบว่า  $x$  มีค่าเท่าไรจึงจะทำให้สมการ ไม่มีความหมาย

ก. มีค่าเป็น 1 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของพหุนามเป็น 0

ข. มีค่าเป็น 1 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของพหุนามไม่เป็น 0

ค. มีค่าเป็น 2 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของพหุนามเป็น 0

ง. มีค่าเป็น 2 เพราะทำให้ส่วนของเศษส่วนของพหุนามไม่เป็น 0

จ. มีค่าเป็น 1 และ 2

17. จงพิจารณาว่าตัวประกอบ  $(2y+1)(4y^2-2y+1)$  เกิดจากการแยกตัวประกอบของพหุนามในข้อใด

ก.  $4y^3-1$

ข.  $4y^3+1$

ค.  $8y^3-1$

ง.  $8y^3+1$

จ.  $16y^3+1$

18. ถ้าจัด  $125x^3 + 64y^3$  เป็นรูปยกกำลังสามทั้งสองพจน์จะได้  $(5x)^3 + (4y)^3$   
 จัด  $8m^3 - 27n^6$  ให้เป็นรูปยกกำลังสามทั้งสองพจน์

ก.  $(2m)^3 - (3n)^3$

ข.  $(2m^3) - (3n^3)^2$

ค.  $(2m)^3 + (3n)^3$

ง.  $(2m)^3 - (3n^2)^3$

จ.  $(2m)^3 + (3n^2)^3$

19. การหารในข้อใดที่เป็นการหารลงตัว (มีเศษเป็น 0)

ก.  $3m^2 + m - 2$  หารด้วย  $m-2$

ข.  $4m^2 - 4m + 1$  หารด้วย  $m-2$

ค.  $3m^2 - 2m - 8$  หารด้วย  $m-2$

ง.  $10m^2 - 19m + 7$  หารด้วย  $m-2$

จ.  $3m^2 - 25m + 28$  หารด้วย  $m-2$

20. ถ้า  $x^3 - 2ax^2 + 3x + 6$  หารด้วย  $x + 2$  ลงตัว จงหาค่า  $a$

ก. -1

ข. 1

ค.  $-\frac{5}{2}$

ง.  $\frac{5}{2}$

จ. 0

21. จงหา  $q(y)$  จากสมการต่อไปนี้  $2y^3 - 7y^2 - 9y + 30 = (y-2) \cdot q(y)$

ก.  $y^2 - 3y - 15$

ข.  $y^2 - 3y + 15$

ค.  $y^2 + 3y + 15$

ง.  $2y^2 - 3y - 15$

จ.  $2y^2 + 3y - 15$

22. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $y^3 - 2y^2 - 3y = 0$

ก.  $\{1, -2, -3\}$

ข.  $\{1, 2, 3\}$

ค.  $\{0, 1, 3\}$

ง.  $\{0, -1, 3\}$

จ.  $\{0, -1, -3\}$

23. จงหาเศษเมื่อหาร  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$  ด้วย  $x - 2$

ก. 0

ข. 7

ค. -7

ง. 41

จ. -41

24. จากการหารในข้อ 23. จะได้ผลหารเป็นเท่าไร

ก.  $2x^2 + x + 6$

ข.  $2x^2 - x + 6$

ค.  $2x^2 - x - 6$

ง.  $2x^2 + x - 6$

จ.  $-2x^2 - x - 6$

25.  $x^3 - x^2 - x + 1$

$= (x^3 - x^2) - (x + 1)$  .....(1)

$= x^2(x - 1) - (x + 1)$  .....(2)

$= (x - 1)(x^2 - 1)$  .....(3)

$= (x - 1)(x - 1)(x + 1)$  .....(4)

การแยกตัวประกอบในข้อนี้ เริ่มตั้งแต่วรรคใดเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่เกิดเลย

26. ถ้าต้องการแยกตัวประกอบของพหุนาม  $b^3 + b^2 - 30b$  ขั้นแรกที่สุดจะทำอะไรก่อน
- จัดให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสาม
  - จัดให้อยู่ในรูปผลบวกกำลังสาม
  - จัดให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง
  - แยกตัวประกอบรวมออกก่อน
  - ทำให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์ก่อน
27. ถ้าแยกตัวประกอบในข้อ 26. จนเสร็จแล้วข้อใดคือคำตอบ
- $(b-5)(b+6)$
  - $(b+5)(b-6)$
  - $b(b-5)(b+6)$
  - $b(b+5)(b-6)$
  - $b(b+5)(b+6)$
28. ถ้าแยกตัวประกอบของ  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  ควรจัดให้อยู่ในรูปใดก่อน
- $(x^3 - 6x^2) + (12x - 8)$
  - $(x^3 + 12x) - (6x^2 - 8)$
  - $(x^3 + 12x) - (6x^2 + 8)$
  - $(x^3 - 8) - (6x^2 - 12x)$
  - $(x^3 - 8) - (6x^2 + 12x)$
29. จากสมการ  $\frac{a+3}{2a+3} + \frac{a+1}{2a-3} = 2$  จงหาค่าของ  $a$
- $\{1, 3\}$
  - $\{-1, 3\}$
  - $\{1, -3\}$
  - $\{-2, -3\}$
  - $\{2, 3\}$

30. จากสมการ  $\frac{1}{4m} = \frac{3}{2} - \frac{1}{m}$  จงหาค่า  $m$

ก.  $m = \frac{2}{3}$

ข.  $m = -\frac{2}{3}$

ค.  $m = \frac{3}{4}$

ง.  $m = \frac{5}{6}$

จ.  $m = -\frac{5}{6}$

31. จงพิจารณาว่าตัวประกอบ  $(x-5)(x^2+5x+25)$  เกิดจากการแยกตัวประกอบของพหุนามชนิดใด

ก.  $x^2-25$

ข.  $x^3-25$

ค.  $x^3+25$

ง.  $x^3-125$

จ.  $x^3+125$

32. ข้อใดคือผลของการแยกตัวประกอบของพหุนาม  $a^3+a^2+a+1$

ก.  $(a+1)(a^2+1)$

ข.  $(a-1)(a^2+1)$

ค.  $(a+1)(a+1)(a+1)$

ง.  $(a-1)(a+1)(a+1)$

จ.  $(a-1)(a-1)(a+1)$

33. จงหาเซตคำตอบของสมการ  $x^3+9x^2+27x+27 = 0$

ก.  $\{3\}$

ข.  $\{-3\}$

ค.  $\{0, 3\}$

ง.  $\{0, -3\}$

จ.  $\{0, -1, -3\}$

34. จงหาผลคูณของ  $\frac{6x^2+x-2}{4x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x-1}{6x+4}$

ก.  $\frac{x+1}{4}$

ข.  $\frac{x-1}{4}$

ค.  $\frac{x+1}{2}$

ง.  $\frac{x-1}{2}$

จ.  $x-1$

35. ข้อใดคือรูปงายของ  $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

ก.  $\frac{x+2}{x-2}$

ข.  $\frac{x-2}{x+3}$

ค.  $\frac{x+2}{x+3}$

ง.  $\frac{x+3}{x+2}$

จ.  $\frac{x+3}{x-2}$

36.  $\frac{2}{m^2-9} + \frac{1}{(m-3)^2}$

=  $\frac{2}{(m-3)(m+3)} + \frac{1}{(m-3)(m-3)} \dots\dots\dots(1)$

=  $\frac{2(m-3)+(m+3)}{(m-3)(m-3)(m+3)} \dots\dots\dots(2)$

=  $\frac{2m-6+m+3}{(m-3)(m-3)(m+3)} \dots\dots\dots(3)$

=  $\frac{3m-3}{(m-3)(m-3)(m+3)} \dots\dots\dots(4)$

การบวกพหุนามในข้อนี้เริ่มคิดตั้งแต่บรรทัดใดเป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่มีตัวเลข

37. จงหา ค.ร.น. ของพหุนาม  $(y-1)^2$  ,  $2y-4$  ,  $y^2-y-2$

- ก.  $y-1$
- ข.  $2(y-1)(y-2)$
- ค.  $2(y-1)^2(y-2)$
- ง.  $2(y-1)(y-2)^2$
- จ.  $2(y-1)^2(y-2)^2$

คำชี้แจง ให้ใช้คำตอบต่อไปนี้สำหรับตอบคำถามข้อ 38 และข้อ 39

- ก. 2
- ข. 1
- ค. 0
- ง. -1
- จ. -2

38. จงหาค่าของ  $\frac{2a-b}{a} - \frac{a-b}{a}$

เมื่อทำให้เป็นผลสำเร็จ

39. จงหาคำตอบของ  $\frac{1}{4x+2} - \frac{1}{2(2x+1)}$

เมื่อทำให้เป็นผลสำเร็จ

40.  $\frac{m-1}{m+1} - \frac{m+1}{m-1}$

$$= \frac{(m-1)(m-1) - (m+1)(m+1)}{(m+1)(m-1)} \dots\dots\dots(1)$$

$$= \frac{m^2-2m+1 - (m^2+2m+1)}{(m+1)(m-1)} \dots\dots\dots(2)$$

$$= \frac{m^2-2m+1-m^2-2m-1}{(m+1)(m-1)} \dots\dots\dots(3)$$

$$= \frac{-4m}{(m+1)(m-1)} \dots\dots\dots(4)$$

การลดเศษส่วนของพหุนามในข้อนี้ เริ่มคิดตั้งแต่วรรพหุคูณตัวใดเป็นตัวแรก

- ก. (1)
- ข. (2)
- ค. (3)
- ง. (4)
- จ. ไม่มีเลย

คำชี้แจง ให้ใช้โจทย์ต่อไปนี้ในการตอบคำถามข้อ 41 ถึงข้อ 42

" เรือยนต์ลำหนึ่งแล่นในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าแล่นทวนน้ำเป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร แล้วแล่นกลับตามน้ำในระยะเวลาเดียวกัน ใช้เวลาทั้งสิ้น 45 นาที จงหาอัตราเร็วของกระแสน้ำ "

กำหนดให้ อัตราเร็วของกระแสน้ำ =  $x$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง

41. จากการคำนวณทราบว่าในระยะเวลา 10 กิโลเมตร ถ้าแล่นเรือตามน้ำใช้เวลา

$\frac{10}{30+x}$  ชั่วโมง แต่ถาแล่นเรือทวนน้ำจะใช้เวลา  $\frac{10}{30-x}$  ชั่วโมง และในการแล่นเรือทั้งตามและทวนน้ำในครั้งนี้ ใช้เวลาทั้งสิ้น 45 นาที ให้ตั้งสมการจากข้อความข้างตน

ก.  $\frac{10}{30+x} - \frac{10}{30-x} = 45$

ข.  $\frac{10}{30+x} + \frac{10}{30-x} = 45$

ค.  $\frac{10}{30+x} - \frac{10}{30-x} = \frac{45}{60}$

ง.  $\frac{10}{30+x} + \frac{10}{30-x} = \frac{45}{60}$

จ. ข้อมูลที่กำหนดให้มาไม่เพียงพอที่จะตั้งสมการ

42. จงหาอัตราเร็วของกระแสน้ำ (ค่าของ  $x$ )

ก. 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ข. 25 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ค. 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ง. 15 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จ. 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

43. ถ้า  $2m^2 - 3m - 2$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม

$2m^3 + 3m^2 - 11m - 6$  แล้วจงหาตัวประกอบที่เหลือ

ก.  $m+1$

ข.  $m+2$

ค.  $m+3$

ง.  $m+4$

จ.  $m+5$

44. จงบอกค่าของตัวแปร  $x$  ที่ทำให้เศษส่วนของพหุนามเมียดต่อไปนี้ไม่มีค่าความหมาย  $\frac{x+2}{x(x-3)}$
- ก. 0,1  
ข. 0,2  
ค. 0,3  
ง. 1,2  
จ. 1,3
45. ถ้า  $x+3$  เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนามเมียด  $x^3+2x^2-23x-60$   
จงหาตัวประกอบที่เหลือ
- ก.  $(x+1)(x-2)$   
ข.  $(x+2)(x-3)$   
ค.  $(x+3)(x-4)$   
ง.  $(x+4)(x-5)$   
จ.  $(x+5)(x-6)$
46. จงหาผลคูณของ  $\frac{m^2-1}{m^2-m-2} \cdot \frac{m^2+m}{m^2-m}$
- ก.  $\frac{m}{m-2}$   
ข.  $\frac{m+1}{m-2}$   
ค.  $\frac{m-2}{m+1}$   
ง.  $\frac{m+2}{m-1}$   
จ.  $\frac{m-1}{m+2}$
47. จงหาผลหารของ  $\frac{a^2-a-20}{a^2-25} \div \frac{a^2+2a-8}{a^2-a-2}$
- ก.  $\frac{a+1}{a+5}$   
ข.  $\frac{a+1}{a-5}$   
ค.  $\frac{a-2}{a+5}$   
ง.  $\frac{a+4}{a-5}$   
จ.  $\frac{a-5}{a+5}$

คำชี้แจง ให้ใช้โจทย์การบวกโพลิโนเมียลต่อไปนี้ในการตอบคำถามข้อ 48 และข้อ 49

$$\frac{1}{b+2} + \frac{2}{b^2-4}$$

48. ค.ร.น. ของผลบวกนี้คือข้อใด

ก.  $b+2$

ข.  $b-2$

ค.  $(b+2)(b-2)$

ง.  $(b-2)(b-2)$

จ.  $(b+2)(b+2)(b-2)$

49. ผลบวกของโจทย์ดังกล่าว ถ้าทำต่อไปจนสำเร็จ ข้อใดคือค่าขอบ

ก.  $\frac{b}{b+2}$

ข.  $\frac{b}{b-2}$

ค.  $\frac{b}{(b+2)(b-2)}$

ง.  $\frac{b}{(b-2)(b-2)}$

จ.  $\frac{b}{(b+2)(b+2)(b-2)}$

50. ข้อใดคือผลการแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียล  $x^4y + xy^4$

ก.  $xy(x^4+y^4)$

ข.  $(x^2y-xy^2)(x^2y+xy^2)$

ค.  $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

ง.  $xy(x-y)(x^2+xy+y^2)$

จ.  $xy(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned}
 51. \text{ จงหาคำตอบของ } & \frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{2x^2+4x} \\
 &= \frac{3}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{2x(x+2)} \dots\dots\dots(1) \\
 &= \frac{3x(x+2)+2x-(x-2)}{2x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(2) \\
 &= \frac{3x^2+6x+2x-x+2}{2x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(3) \\
 &= \frac{3x^2+7x+2}{2x(x-2)(x+2)} \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

การบวกและลบเศษส่วนของพหุนามในข้อนี้เริ่มฝึกตั้งแต่วรรคใดก็เป็นต้นมา

ก. (1)

ข. (2)

ค. (3)

ง. (4)

จ. ไม่ผิดเลย

$$52. \text{ จงหาผลหารของ } \frac{x^2-1}{15x-30} - \frac{x^2-2x+1}{3x-6}$$

ก.  $\frac{x-1}{x+1}$

ข.  $\frac{x+1}{x-1}$

ค.  $\frac{x+1}{3(x-1)}$

ง.  $\frac{x+1}{5(x-1)}$

จ.  $\frac{x-1}{5(x+5)}$

$$53. \text{ จงหาค่าของ } a \text{ เมื่อหาร } m^3+3m^2+5am+7 \text{ ด้วย } x+3 \text{ แล้วเหลือเศษ } -8$$

ก.  $a = 0$

ข.  $a = 1$

ค.  $a = -1$

ง.  $a = \frac{23}{5}$

จ.  $a = -\frac{23}{5}$

คำชี้แจง ให้ใช้โจทย์ต่อไปนี้ ในการตอบคำถามข้อ 54 และข้อ 55

" แบ่ง 20 ออกเป็นสองส่วน โดยให้ผลบวกของส่วนกลับของทั้งสองส่วนนั้น เท่ากับ  $\frac{5}{24}$  จงหาส่วนแบ่งทั้งสอง "

กำหนดให้ ส่วนแบ่งส่วนแรกเป็น  $x$

ส่วนแบ่งส่วนที่สองเป็น  $y$

54. จากข้อความ "ให้ผลบวกของส่วนกลับของทั้งสองส่วนนั้นเท่ากับ  $\frac{5}{24}$ "

เขียนเป็นสมการได้อย่างไร

ก.  $x + y = \frac{5}{24}$

ข.  $\frac{1}{x} + y = \frac{5}{24}$

ค.  $x + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

ง.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$

จ.  $\frac{x}{y} = \frac{5}{24}$

55. ส่วนแบ่งทั้งสองมีค่าเท่าไร

ก. 12 และ 8

ข. 13 และ 7

ค. 14 และ 6

ง. 15 และ 5

จ. 16 และ 4

โครงการการเรียนรู้: โพลีโนเมียล  
สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจงการใช้บทเรียนโปรแกรม  
สำหรับเรียนซ่อมเสริม

จุดประสงค์ที่บ่งพ้อง	ให้ศึกษาเพิ่มเติมในบทเรียนโปรแกรมดังนี้
1. การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลคี่ที่ตามที่อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของกำลังตาม	1. อ่านบทเรียนจากกรอบ1ถึงกรอบ10
2. การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลที่มีดีกรีสูงกว่าสอง โดยการจับหมุแล้วถอดตัวร่วมหรือจัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์	2. อ่านบทเรียนจากกรอบ11ถึงกรอบ16
3. การหาเซตคำตอบของสมการโพลิโนเมียลคี่ที่สูงกว่าสอง	3. อ่านบทเรียนจากกรอบ17ถึงกรอบ25
4. การใช้ทฤษฎีเศษแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลคี่ที่สูงที่มีสมบัติเป็นจำนวนเต็ม	4. อ่านบทเรียนจากกรอบ26ถึงกรอบ40
5. การคูณและหารเศษส่วนของโพลิโนเมียล	5. อ่านบทเรียนจากกรอบ41ถึงกรอบ59
6. การบวก,ลบเศษส่วนของโพลิโนเมียล	6. อ่านบทเรียนจากกรอบ60ถึงกรอบ76
7. การหาคำตอบจากสมการเศษส่วนของโพลิโนเมียล	7. อ่านบทเรียนจากกรอบ77ถึงกรอบ86
8. การตั้งสมการในรูปเศษส่วนของโพลิโนเมียลจากโจทย์สมการ	8. อ่านบทเรียนจากกรอบ87ถึงกรอบ109
9. การหาเซตคำตอบของโจทย์สมการ	9. อ่านบทเรียนจากกรอบ77ถึงกรอบ109

การแยกตัวประกอบโพลิโนเมียลดีกรีสามที่อยู่ในรูปผลต่างและผลบวกกำลังสาม

- 1) เราสามารถเขียน  $a^3+b^3$  ในรูปของตัวประกอบได้เป็น  $(a+b)(a^2-ab+b^2)$  ไชหรือไม่ว่า เพราะเหตุใด

คำตอบคือใช่ เพราะผลคูณของ  $a+b$  และ  $a^2-ab+b^2$  มีค่าเท่ากับ  $a^3+b^3$  เราสามารถแสดงวิธีคูณได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} a^2-ab+b^2 \\ \times \\ a+b \\ \hline a^2b-ab^2+b^3 \\ a^3-a^2b+ab^2 \\ \hline a^3 \quad + \quad b^3 \end{array}$$

- 2) และถ้าเขียน  $a^3-b^3$  ในรูปของตัวประกอบได้เป็น  $(a-b)(a^2+ab+b^2)$  ไชหรือไม่ว่า เพราะเหตุใด

คำตอบคือใช่ เพราะผลคูณของ  $a-b$  และ  $a^2+ab+b^2$  จะมีค่าเท่ากับ  $a^3-b^3$  ซึ่งนักเรียนสามารถทดลองคูณดูได้ในลักษณะเดียวกับคำตอบในกรอข 1)

- 3) ให้หาว่าการแยกตัวประกอบต่อไปนี้ข้อใดถูกต้อง โดยตรวจสอบว่าโพลิโนเมียลทางคานซ้ายเป็นผลมาจากการคูณของตัวประกอบทางคานขวาหรือไม่ว่า

ก.  $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$

ข.  $a^3-1 = (a-1)(a^2+a+1)$

ค.  $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

ง.  $x^3-2^3 = (x-2)(x^2-2x+4)$

ข้อ ก, ข และ ค เป็นคำตอบที่ถูกต้อง เพราะตัวประกอบทางคานขวาทั้งสองวงเล็บเมื่อนำมาคูณกันแล้ว ผลคูณจะมีค่าเท่ากับโพลิโนเมียลทางคานซ้ายเมื่อ ส่วนข้อ ง. นั้นที่ถูกต้องควรจะเป็นดังนี้  $x^3-2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

- 4) ถ้าเราจะสรุปถึงการแยกตัวประกอบของผลบวกและผลต่างกำลังสามของพหุนามให้อยู่ในรูปทั่วไปว่า

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

นักเรียนคิดว่า การสรุปเช่นนี้ถูกต้องหรือไม่

คำตอบคือถูกต้องแล้ว และนักเรียนควรจะจดจำแบบการแยกตัวประกอบข้างต้นนี้ให้ได้ เพื่อนำไปใช้ในการแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นผลบวกหรือผลต่างของกำลังสามต่อไป

- 5) ถ้าเราต้องการแยกตัวประกอบของพหุนาม  $x^3-27$  นักเรียนคิดว่าขั้นแรกที่สุด เราควรจะทำอย่างไรก่อน

นักเรียนเก่งมากที่ตอบว่าควร จะจัดพหุนามนี้ให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสามเหมือน กรอบ 4) ได้เป็น  $x^3-3^3$

- 6) คราวนี้นักเรียนลองจัดพหุนาม  $8m^3+64$  ให้เป็นรูปผลบวกกำลังสามดูซิว่าจะได้เท่าไร

ถ้านักเรียนตอบว่าได้  $(2m)^3 + 4^3$  แสดงว่าคำตอบของนักเรียนถูกต้องแล้ว

- 7) การจัดพหุนามให้อยู่ในรูปผลบวกและผลต่างกำลังสามต่อไปนี้ ข้อใดบ้างที่ทำให้ถูกต้อง

ก.  $27+8x^3 = 3^3+(2x)^3$

ข.  $y^3-125 = y^3-25^3$

ค.  $a^3+1 = a^3+1^3$

ง.  $m^6-n^6 = (m^2)^3-(n^2)^3$

คำตอบที่ถูกต้องคือข้อ ก, ค และ ง ถูก ส่วนข้อ ข นั้น ที่ถูกต้องควรเป็นดังนี้

$$y^3-125 = y^3-5^3$$

- 8) ให้นักเรียนอาศัยความรู้จากการแยกตัวประกอบ  $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$   
นำมาแสดงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้  $27a^3+64$

วิธีทำ  $27a^3+64 = (3a)^3+(4)^3$   
 $= (3a+4)(3a)^2-(4 \cdot 3a)+(4)^2$   
 $= (3a+4)(9a^2-12a+16)$

ดังนั้นคำตอบคือ  $27a^3+64 = (3a+4)(9a^2-12a+16)$

- 9) ให้นักเรียนอาศัยความรู้จากการแยกตัวประกอบ  $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$   
นำมาแสดงวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้  $1-27b^3$

วิธีทำ  $1-27b^3 = 1^3-(3b)^3$   
 $= (1-3b)(1)^2+(1 \cdot 3b)+(3b)^2$   
 $= (1-3b)(1+3b+9b^2)$

ดังนั้นคำตอบคือ  $1-27b^3 = (1-3b)(1+3b+9b^2)$

10. ให้นักเรียนพิจารณาว่า  $a^3+b^3$  เท่ากับ  $(a+b)^3$  หรือไม่  
และ  $a^3-b^3$  เท่ากับ  $(a-b)^3$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

คำตอบคือไม่เท่ากันเพราะ  $a^3+b^3$  เป็นผลบวกกำลังสามซึ่งแยกตัวประกอบได้  
 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

แต่  $(a+b)^3$  เป็นกำลังสามสมบูรณ์กระจายได้เป็น  $(a+b)(a+b)(a+b)$

และพหุนามเดียวกัน  $a^3-b^3$  ก็ไม่เท่ากับ  $(a-b)^3$  ซึ่งสามารถแสดง  
เหตุผลได้เหมือนกับผลบวกกำลังสามและกำลังสามสมบูรณ์ดังกล่าวข้างต้น

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าดีกรีสองอย่างง่าย ๆ ได้โดยใช้วิธีจัดหมู่ แล้วลดค้วรวม หรือจัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

11) ในบางกริ่งการแยกตัวประกอบพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าดีกรีสอง เราอาจแยกได้ โดยการจัดเสียใหม่ให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ หรืออยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง ตัวอย่างเช่น  $x^4 - 16y^4$  นักเรียนคิดว่าวิธีใดที่เหมาะสมจะนำมาแยกตัวประกอบพหุนามเมื่อบดค้างแล้ว

เป็นคำตอบที่ถูกต้องแล้ว ถ้านักเรียนตอบว่าใช้วิธีการแยกตัวประกอบแบบผลต่างกำลังสอง จึงสามารถแสดงวิธีการแยกได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x^4 - 16y^4 &= (x^2)^2 - (4y^2)^2 \\ &= (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2)\end{aligned}$$

และเรายังสามารถแยกตัวประกอบของ  $x^2 - 4y^2$  ได้ต่อไปอีกเป็น

$$\begin{aligned}x^2 - 4y^2 &= x^2 - (2y)^2 \\ &= (x - 2y)(x + 2y)\end{aligned}$$

ดังนั้น  $x^4 - 16y^4 = (x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2)$

12) ในพหุนามเมื่อบดค้างเช่น  $x^4 + x^2 + 1$  เราอาจจัดให้อยู่ในรูปของกำลังสองสมบูรณ์ได้ แต่ต้องทำให้บางพจน์สมบูรณ์ขึ้น จากพหุนามเมื่อบดค้างข้างบนนี้ให้นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการควอดราติกพิจารณาว่าเราควรจะทำพจน์ใดให้สมบูรณ์ขึ้น ทำได้อย่างไร

จากพหุนามเมื่อบด  $x^4 + x^2 + 1$  นี้ถ้าจะทำให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์ก็ต้องทำให้พจน์กลางสมบูรณ์ขึ้น  $(x^4 + x^2 + 1)$  คือทำพจน์กลางให้เป็น  $2x^2$

13) ถ้าเราจัดกระทำทำให้พหุนามเมื่อบด  $x^4 + x^2 + 1$  เป็น  $x^4 + 2x^2 + 1$  นั้นหากจะให้ค่าของพหุนามเมื่อบดใหม่มีค่าคงเดิมก็ต้องลบออกด้วย  $x^2$  ให้นักเรียนลองเขียนพหุนามเมื่อบดรูปใหม่นี้ออกมาในรูปสัญลักษณ์ที่สมบูรณ์

เขียนพหุนามเมื่อบดรูปใหม่นี้ได้เป็น  $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

- 14) ให้นักเรียนอาศัยความรู้ในเรื่องของการแยกตัวประกอบแบบกำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสองมาแสดงวิธีการแยกตัวประกอบโพลิโนเมียล  $x^4+2x^2+1-x^2$

$$x^4+2x^2+1-x^2 = (x^4+2x^2+1)-x^2$$

$$= [(x^2+1)(x^2+1)] - x^2$$

ตรงบรรทัดนี้ใช้ความรู้ผลต่างกำลังสองแยกต่อไป  $= (x^2+1)^2 - x^2$

$$= (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

$$= (x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

- 15) ในทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียล  $4x^4+1$  เราจะได้ดังนี้คือ

1. หาจตุรกำลังที่เหมาะสม  $4x^4+4x^2+1-4x^2$  เพิ่มเติมเข้ามา

2. อาศัยความรู้ในการแยกตัวประกอบแบบกำลังสองสมบูรณ์จัดกระทำต่อไป

ได้เป็น

$$(4x^4+4x^2+1)-4x^2$$

$$(2x^2+1)^2-4x^2$$

$$(2x^2+1)^2-(2x)^2$$

ภายหลังจากนี้ นักเรียนคิดว่าควรอาศัยความรู้ในเรื่องการแยกตัวประกอบแบบใดเข้าช่วย และทำต่อไปได้อย่างไร จึงแสดงวิธีทำ

คำตอบคือ นำเอาความรู้การแยกตัวประกอบแบบผลต่างกำลังสองมาดำเนินการต่อไปได้ดังนี้

$$(2x^2+1)^2-(2x)^2$$

$$[(2x^2+1)-2x][(2x^2+1)+2x]$$

จัดเรียงพจน์ใหม่  $(2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$

$$\text{ดังนั้น } 4x^4+1 = (2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1)$$

16) จงพิจารณาว่าขั้นตอนในการแยกตัวประกอบต่อไปนี้ บรรทัดใดที่แสดงวิธีหาค

$$\begin{aligned}
 & m^4 - 7m^2 + 9 \\
 & \left\{ \begin{aligned} & m^4 - 6m^2 + 9 - m^2 \dots\dots\dots(1) \\ & (m^2 - 3)^2 - m^2 \dots\dots\dots(2) \\ & [(m^2 - 3) - m] + [(m^2 - 3) + m] \dots\dots\dots(3) \\ & (m^2 - m - 3)(m^2 + m - 3) \dots\dots\dots(4) \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

บรรทัดที่ 3 บิด เพราะ  $[(m^2 - 3) - m]$  คูณกับ  $[(m^2 - 3) + m]$  ซึ่งได้ถูกต้อง  
 เขียนอย่างนี้  $[(m^2 - 3) - m][(m^2 - 3) + m]$

---

### การหาคำตอบของสมการโพลีโนเมียลดีกรีสูงกว่าสอง

17) การที่  $a$  คูณ  $b$  มีค่าเท่ากับศูนย์ (0) หรือเขียนได้เป็น  $a \cdot b = 0$

นั้นหมายความว่า  $a$  หรือ  $b$  ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ (0)

และถ้าหากว่า  $(x-2)(x+3) = 0$  หมายความว่าอย่างไร

หมายความว่า  $(x-2) = 0$  หรือ  $(x+3) = 0$

เพราะการที่  $(x-2)$  หรือ  $(x+3)$  ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อนำไปคูณกับ

จำนวนใดๆ ย่อมมีค่าเท่ากับศูนย์ (0)

18) ถ้า  $x-2 = 0$  หรือ  $x+3 = 0$  แล้ว  $x$  จะมีค่าเท่าไร แสดงวิธีหาค่า  $x$  ได้อย่างไร

ดังนั้น  $x$  จะมีค่าเป็น 2 และ -3 ซึ่งแสดงวิธีหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{array}{rcl} x-2 & = & 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} x-2+2 & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. & & \text{(บวก 2 เข้าทั้ง 2 ข้าง)} \end{array}$$

หรือ

$$\begin{array}{rcl} x+3 & = & 0 \\ x+3-3 & = & 0 \\ x & = & -3 \end{array} \quad \text{(-3 ออกทั้ง 2 ข้าง)}$$

19) การที่เรานำเอาค่า  $x$  จากกรอบ 18) ดังกล่าวมาเป็นคำตอบนั้นเราต้องแสดงออกมาให้เป็นรูปของเซตของคำตอบ ให้นักเรียนแสดงค่า  $x$  ดังกล่าวออกมาเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (เซตของคำตอบ)

เซตของคำตอบของค่า  $x$  คือ  $\{2, -3\}$

20) ถ้า  $(2x-1)(x+7) = 0$  แล้วจงแสดงวิธีหาคำตอบของ  $x$

สามารถแสดงได้ดังนี้ :-

จากผลคูณของสองวงเล็บนี้หมายความว่า  $2x-1$  หรือ  $x+7$  ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ (0)

$$\text{ถ้า } 2x-1 = 0$$

$$2x-1+1 = 1 \quad \text{(บวกหนึ่งเข้าทั้งสองข้าง)}$$

$$2x = 1$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{หรือ } x+7 = 0$$

$$x+7-7 = -7$$

$$x = -7$$

เซตของคำตอบคือ  $\left\{ \frac{1}{2}, -7 \right\}$

(นำเอา 2 หารออกทั้ง 2 ข้างเพื่อให้เหลือเพียง  $x$  ตัวเดียว)

(-7 ออกทั้งดองข้าง เพื่อให้เหลือค่า  $x$  เพียงค่าเดียว)

21) ถ้า  $(3x+2)(x-4)(x+1) = 0$  จงแสดงวิธีหาคำตอบ

นั่นหมายความว่า  $(3x+2) = 0$  หรือ  $(x-4) = 0$  หรือ  $(x+1) = 0$

$$\text{ถ้า } 3x+2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{หรือ } x-4 = 0$$

$$x = 4$$

$$\text{หรือ } x+1 = 0$$

$$x = -1$$

เซตของคำตอบคือ  $\left\{ -\frac{2}{3}, 4, -1 \right\}$

22) ในการหาคำตอบของสมการอย่างเช่น  $x^3+4x^2-5x = 0$  ประการแรกผู้เรา  
 ต้องทราบวิธีการแยกตัวประกอบร่วม เพื่อแยกออกก่อนดังนี้  $x(x^2+4x-5) = 0$   
 ในขั้นต่อไปก็ใช้การแยกตัวประกอบโพลีโนเมียลกำลังสองสามพจน์ ให้นักเรียนใช้  
 ความรู้พื้นฐานที่มีมาแสดงวิธีการแยกตัวประกอบขั้นนี้ออกมา

วิธีทำ  $x(x^2+4x-5) = 0$

$$x(x+5)(x-1) = 0$$

23) จากสมการ  $x(x+5)(x-1) = 0$  ให้นักเรียนแสดงวิธีหาเน็ทของคำตอบ

จากสมการ  $x(x+5)(x-1) = 0$  แสดงว่า

$$x = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x+5) = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x-1) = 0$$

ดังนั้นคำตอบแรกที่ได้คือ  $x = 0$  คำตอบต่อไปหาได้ดังนี้

ถ้า  $x+5 = 0$

$$x = -5$$

หรือ  $x-1 = 0$

$$x = 1$$

เน็ทของคำตอบคือ  $\{0, -5, 1\}$

24) ทุกครั้งที่เราต้องการทราบว่าเน็ทของคำตอบที่ได้จากการแก้สมการนั้นๆ ถูกต้องหรือไม่ เรามีวิธีการตรวจสอบคำตอบที่ได้มาโดยการนำเอาคำตอบเหล่านั้นไปแทนค่าลงในสมการที่ละคำตอบ ผลที่ออกมาภายหลังการแทนค่านั้น เราจะทราบอย่างไรว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องแล้ว

ทราบได้จากการดูว่า ผลของการแทนค่าทำให้ตัวเลขทางด้านซ้ายมือ มีค่าเท่ากับทางด้านขวามือ

25) ถ้าต้องการแสดงให้เห็นว่า  $\{0, -5, 1\}$  เป็นคำตอบที่ถูกต้องของสมการ

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0 \quad \text{จะแสดงได้ดังนี้}$$

ตรวจคำตอบ โดยการแทนค่า  $0, -5, 1$  ลงไปแทนที่  $x$  ในสมการ  $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

ถ้า  $x = 0$

แทนค่า  $x$  ในสมการจะได้  $0^3 + 4(0)^2 - 5(0) = 0$

$$0 = 0$$

(ด้านซ้าย = ด้านขวา)

ถ้า  $x = -5$

แทนค่า  $x$  ในสมการจะได้  $(-5)^3 + 4(-5)^2 - 5(-5) = 0$

$$-125 + 100 + 25 = 0$$

$$0 = 0$$

แสดงว่า  $x = -5$  และ  $0$  เป็นคำตอบที่ถูกต้องแล้ว

ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบว่า  $x = 1$  เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ  
 $x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

วิธีหาคำตอบ ถ้า  $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } x \text{ ลงในสมการจะได้ } (1)^3 + 4(1)^2 - 5(1) &= 0 \\ \underbrace{1 + 4} - 5 &= 0 \\ \underbrace{5 - 5} &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า  $x = 1$  เป็นคำตอบที่ถูกห่อหุ้มอีกค่าหนึ่งของสมการ

การใช้ทฤษฎีเศษในการแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

26) ถ้านำเอา 2 หาร 8 จะได้นผลหารเท่าไร เหลือเศษเท่าไร และเขียนแสดงเป็น  
ประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างไร

นักเรียนตอบได้ถูกต้องแล้ว คำตอบคือได้นผลหารเท่ากับ 4 และเหลือเศษศูนย์ (0)  
ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$8 = (2 \times 4) + 0$$

27) ถ้านำเอา 2 หาร 9 จะได้นผลหารเท่าไร เหลือเศษเท่าไร และเขียนแสดงเป็น  
ประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างไร

นักเรียนสามารถตอบถูกต้องอีกเช่นเคย คำตอบคือได้นผลหารเท่ากับ 4 เหลือเศษ 1  
ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$9 = (2 \times 4) + 1$$

28) ให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์ซึ่งแสดงความเกี่ยวข้องของตัวตั้ง, ตัวหาร, ผลหาร  
และเศษของจำนวนต่อไปนี้ให้มีสัญลักษณ์เหมือนตัวอย่างในข้อ ก. และ ข้อ ข.

ก. 3 หาร 87 เขียนแสดงได้ดังนี้  $87 = (3 \times 29) + 0$

ข.  $x+1$  หาร  $x^2+2x+3$  ,  $x^2+2x+3 = [(x+1)(x+1)] + 2$

ค. 5 หาร 135 , ..... = .....

ง. 7 หาร 39 , ..... = .....

จ.  $x-2$  หาร  $x^2-x-2$  , ..... = .....

ฉ.  $x+3$  หาร  $x^2+5x+7$  , ..... = .....

คำตอบคือ

ค.  $135 = (5 \times 27) + 0$

ง.  $39 = (7 \times 5) + 4$

จ.  $x^2-x-2 = [(x-2)(x+1)] + 0$

ฉ.  $x^2+5x+7 = [(x+3)(x+2)] + 1$

29) จากประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างตัวตั้ง, ตัวหาร, ผลหารและเศษ  
ที่นักเรียนเขียนมาแล้วนั้น เขียนเป็นรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$a(x) = [b(x) \cdot q(x)] + r(x)$$

เมื่อ  $a(x)$  เป็นตัวตั้ง

$b(x)$  เป็นตัวหาร

$q(x)$  เป็นผลหาร

ค่าตามคือ  $r(x)$  เป็นตัวแสดงสัญลักษณ์ของอะไร

เป็นคำตอบที่ถูกต้องแล้วที่นักเรียนตอบว่าเป็นสัญลักษณ์ของ เศษ

30) จากสัญลักษณ์ในกรอบ 29) ถ้า  $b(x)$  หาร  $a(x)$  ลงตัว แล้ว เศษ  $r(x)$  จะ  
มีค่าเป็นเท่าไร

คำตอบที่ถูกต้องคือ  $r(x)$  จะมีค่าเป็นศูนย์(0) เพราะการหารลงตัวนั้นจะให้ค่าเศษ  
เป็นศูนย์เสมอ

31) ในการนำเอาทฤษฎีเศษไปใช้ในการหาเศษและผลหารของโพลิโนเมียล เรามักจะ  
ทำให้ตัวหารอยู่ในรูปของ  $x-c$  ก่อนเสมอ เช่น  $x-2$  ในที่นี้  $c$  ก็มีค่าเท่ากับ 2

$$\begin{array}{r} x - c \\ x - 2 \end{array}$$

ถ้าหาก  $x+5$  ทำให้อยู่ในรูป  $x-c$  ก็จะทำให้ได้เป็น  $x-(-5)$

$$\begin{array}{r} x - (-5) \\ x - c \end{array}$$

ดังนั้น  $x+5$  ค่าของ  $c$  ก็จะมีค่าเป็น  $-5$  เป็นต้น ให้นักเรียนใช้หลักการดังกล่าว  
หาค่า  $c$  ของตัวหาร ต่อไปนี้

ก.  $x-3$

ข.  $x+1$

ค.  $x+2$

คำตอบคือ

$$\text{ก. } \begin{array}{l} x - \boxed{3} \\ x - \boxed{c} \end{array}$$

ดังนั้นค่า  $c = 3$ 

$$\text{ข. } x+1 \text{ คือ } \begin{array}{l} x - \boxed{(-1)} \\ x - \boxed{c} \end{array}$$

ดังนั้นค่า  $c = -1$ 

$$\text{ค. } x + 2 \text{ คือ } \begin{array}{l} x - \boxed{(-2)} \\ x - \boxed{c} \end{array}$$

ดังนั้นค่า  $c = -2$ 

32) ประโยชน์ประการแรกของการรู้ค่า  $c$  คือนำไปใช้หาเศษของการหารพหุนามเมียด เช่น จงหาเศษของการหาร  $x^3+2x^2+3x-1$  ด้วย  $x+2$

วิธีทำ

$$\text{เมื่อ } p(x) = x^3+2x^2+3x-1$$

$$\text{แก } x+2 \text{ ทำให้รู้ค่า } c = -2$$

$$\text{ดังนั้น } p(-2) = (-2)^3+2(-2)^2+3(-2)-1$$

ให้นักเรียนทำต่อไปจนเสร็จ

$$\begin{aligned} \text{ทำต่อไปได้ดังนี้} &= -8 + 8 - 6 - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

ดังนั้นเศษจากการหาร  $x^3+2x^2+3x-1$  ด้วย  $x+2$  คือ  $-7$ 

33) ประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของการหาค่า  $c$  คือนำมาช่วยในการแยกตัวประกอบ

วิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามเมียดก็ทำได้โดยใช้เทคนิคที่กล่าวได้ดังนี้

ขั้นแรก หาตัวประกอบในรูป  $x-c$  โดยหาค่า  $c$  ที่ทำให้  $p(c) = 0$ ตัวอย่างเช่น จงแยกตัวประกอบของ  $2x^3+3x^2-5x-6$ 

วิธีทำ ให้  $p(x) = 2x^3+3x^2-5x-6$

แล้วให้นักเรียนทดลองหาค่า  $c$  ซึ่งทำให้  $p(c) = 0$ จากการทดลองได้  $c = -1$  เป็นค่าหนึ่งที่ทำให้  $p(c) = 0$ ให้นักเรียนทดลองนำค่า  $c = -1$  แทนลงในค่า  $x$  เพื่อแสดงว่า  $p(c) = 0$

$$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

$$p(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) - 6$$

$$= -2 + 3 + 5 - 6$$

$$= 0$$

34)  $p(c)$  ที่ทำให้โพลีโนเมียลเป็นศูนย์(0) แสดงว่า  $x-c$  ไปหารโพลีโนเมียลนั้นได้ลงตัว คือมีเศษเป็นศูนย์(0)

$x-c$  ตัวที่ได้จากกรอบ 34) คืออะไร

นักเรียนเก่งมากที่ตอบว่า  $x-c$  ในกรอบ 34) ก็คือ  $x-(-1)$  หรือ  $x+1$  นั่นเอง

35) วิธีการแยกตัวประกอบของโพลีโนเมียลดีกรีสูงโดยใช้ทฤษฎีเศษชั้นที่สองก็นำ  $x-c$  ที่หาได้ไปหาร  $p(x)$  โดยวิธีตั้งหาร ผลหารจะเป็นโพลีโนเมียลที่ดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ  $p(x)$  ลงมาอีก 1 ระดับ จากตัวอย่างในกรอบ 34), 35) ให้นักเรียนหาร  $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$  ด้วย  $x+1$  ว่าจะได้ผลหารเท่าไร

ถ้านักเรียนตอบว่าได้ผลหารเป็น  $2x^2 + x - 6$  แสดงว่านักเรียนตอบได้ถูกต้องแล้ว

36) เราแสดงสัญลักษณ์ของตัวตั้ง, ผลหาร และตัวหารของกรอบ 33), 34), 35) ได้อย่างไร

$$\text{แสดงได้ดังนี้ } 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = (x+1)(2x^2 + x - 6)$$

$\uparrow$   
ตัวตั้ง

$\uparrow$   
ตัวหาร

$\uparrow$   
ผลหาร

37) และเราจะสังเกตเห็นได้ว่าสำหรับโพลีโนเมียล  $2x^2 + x - 6$  นั้นแยกต่อไปได้อีกเป็น

$2x^2 + x - 6 = (x+2)(2x-3)$  ดังนั้นนักเรียนจะเขียนสรุปผลของการแยกตัวประกอบจากกรอบ 33), 34), 35), และ 36) นี้ได้อย่างไร

$$\text{เขียนได้เป็น } 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x+2)(2x-3)$$

- 38) จาก  $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1$  ให้  $c=2$  นักเรียนจงแสดงวิธีหาเศษเมื่อหาร  $p(x)$  ด้วย  $(x-c)$

วิธีหา  $p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1$   
 $p(2) = 4(2)^3 - 5(2)^2 + 2(2) + 1$   
 $= 32 - 20 + 4 + 1$

$\therefore$  จะเหลือเศษ = 17

- 39) ถ้า  $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  เป็นตัวตั้ง

และ  $x+1$  เป็นตัวหาร

ให้  $q(x)$  เป็นผลหาร

ซึ่งจะเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1) \cdot q(x)$$

ให้นักเรียนหา  $q(x)$  ที่เป็นผลหารในรูปโพลีโนเมียล

วิธีหา  $x+1 \quad \left| \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ x^2 - 5x - 6 \\ \underline{x^2 + x} \\ -6x - 6 \\ \underline{-6x - 6} \\ 0 \end{array} \right. \quad x^2 + x - 6$

ผลหาร หรือ  $q(x) = x^2 + x - 6$

- 40) ถ้า  $x+1$  หาร  $x^3 - 3x^2 + mx - 4$  ลงตัว, จากคำว่า ลงตัว หมายความว่า การหารครั้งนี้มีเศษเป็นศูนย์ (0)

จากตัวหารคือ  $x+1$  ทำให้อยู่ในรูป  $x-c$  ได้เป็น  $x-(-1)$  ดังนั้น  $c=-1$

เมื่อ  $p(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 4$

ถ้า  $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + m(-1) - 4$

$= -1 - 3 - m - 4$

จะเหลือเศษ =  $-8 - m$

แต่เราทราบแล้วว่าเศษเป็นศูนย์(๐) นั่นคือ  $-8-m = 0$

ให้นักเรียนหาว่า  $m$  จะมีค่าเท่าไร

---

คำตอบคือ  $-8-m = 0$

$$-8-m+m = m$$

$$-8 = m$$

ดังนั้น  $m = -8$

---

### การคูณและหารเศษส่วนของพหุนาม

41) เมื่อกล่าวถึงเศษส่วนของพหุนาม ให้ถือว่า พหุนามที่เป็นส่วนต้งไม่เป็นศูนย์(๐)

นั่นหมายถึง  $\frac{p(x)}{q(x)}$  เป็นเศษส่วนของพหุนามแล้ว  $q(x)$  จะมีค่าเป็นศูนย์(๐)ไม่ได้ หรืออย่างเช่น  $\frac{x^2-3}{x+2}$  เป็นเศษส่วนของพหุนาม

นั่นหมายความว่า พหุนามที่เป็นส่วนคือ  $x+2$  จะมีค่าเป็นศูนย์(๐)ไม่ได้ ในที่นี้หมายความว่า  $x$  จะมีค่าเป็นเท่าไรไม่ได้

คำตอบคือ  $x$  จะมีค่าเป็น  $-2$  ไม่ได้

42) หรืออย่างเช่น  $\frac{5m}{m^2+2m-8}$  เป็นเศษส่วนของพหุนามแล้ว  $m$  จะมีค่าเป็นเท่าไรไม่ได้

$m$  จะมีค่าเป็น  $-4$  และ  $2$  ไม่ได้เพราะจะทำให้พหุนามที่เป็นส่วนมีค่าเป็นศูนย์

(หาได้จาก  $m^2+2m-8 = (m-2)(m+4)$ )

43) ในการคูณหรือหารเศษส่วนของพหุนามนั้นก็ให้จัดกระทำเหมือนๆ กับการคูณหรือหารตัวเลขจำนวนจริงทั่วไปนั่นเอง เช่น

จากการคูณจำนวนจริง

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{เมื่อ } b, d \neq 0$$

และในการทำเศษส่วนให้เป็นจำนวนอย่างง่ายนั้น เรามักจะกระจายจำนวนนั้นออกเช่น

$$\frac{48}{18} = \frac{8 \times 6}{3 \times 6} \quad \text{ถ้าหากว่าเป็น } \frac{20}{4} = \frac{5 \times \square}{4}$$

เติมลงใน  $\square$

นักเรียนเก่งมากที่ตอบว่า 4 นี่เป็นคำตอบที่ถูกต้องแล้ว

44) จากการกระจายเศษส่วน  $\frac{2x^2}{x} = \frac{2x \cdot x}{x}$

แต่เราทราบว่า  $\frac{x}{x} = 1$  ดังนั้น  $\frac{2x^2}{x}$  ทำให้เป็นรูปร่างง่ายเหลือเท่าไร

คำตอบคือเหลือ  $2x$

45) จากเศษส่วนของพหุนาม  $\frac{(p^2)(2q-1)}{(q)(2q-1)}$  เราเรียก  $2q-1$  ว่าเป็นตัวประกอบ  
 ร่วมที่มีทั้งในจำนวนของเศษและส่วน และ  $\frac{2q-1}{2q-1} = 1$

ดังนั้น  $\frac{(p^2)(2q-1)}{(q)(2q-1)}$  ทำให้เป็นรูปร่างเหลือค่าเท่าไร

คำตอบคือเหลือ  $\frac{p^2}{q}$

46) จากเศษส่วนของพหุนาม  $\frac{(m+n)(m^2-1)}{(n+3)(m+n)}$  ทำให้เป็นรูปร่างเหลือเท่าไร

เมื่อเราทราบว่า  $\frac{m+n}{m+n} = 1$

นักเรียนสามารถตอบถูกอีกตามเคย คำตอบคือ  $\frac{m^2-1}{n+3}$

47) จากเศษส่วนของพหุนาม  $\frac{x^2+4x+3}{5(x+3)}$  ถ้าเราต้องการทำให้เป็นรูปร่าง จะต้อง

กระจายเศษคือ  $x^2+4x+3$  ออกเป็นตัวประกอบให้นักเรียนแยกตัวประกอบของ  
 $x^2+4x+3$

ตัวประกอบของ  $x^2+4x+3$  คือ  $(x+1)(x+3)$  หรือ  $(x+3)(x+1)$

48) ถ้าทำเศษส่วนของพหุนามในกรณ 47) ให้เป็นรูปร่าง ได้คำตอบเท่าไร

$$\frac{x+1}{5}$$

49) ให้นักเรียนแสดงวิธีทำเศษส่วนของพหุนาม  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$  ให้เป็นรูปร่าง

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} &= \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{x+1}{x-2} \quad (\text{เพราะ } \frac{x+1}{x+1} = 1) \end{aligned}$$

50) ถ้าจะทำพหุนาม  $\left(\frac{x^3}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$  ให้เป็นรูปร่างสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) &= \frac{x^3(x^2-1)}{(x+1)x^2} \\ &= \frac{x \cdot x \cdot x \cdot (x-1)(x+1)}{(x+1) \cdot x \cdot x} \end{aligned}$$

ตัวประกอบร่วมที่มีทั้งในจำนวนของเศษและส่วนคือจำนวนใดบ้าง

คำตอบคือ  $x \cdot x \cdot (x+1)$

51) ถ้าทำพหุโนเมียลในกรอบ 50) ให้เป็นรูปง่าย จะเหลือค่าเท่าไร

จะเหลือค่าตอบในรูปง่ายเป็น  $x(x-1)$

52) จากการคูณ  $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}\right)\left(\frac{x^2+3x}{x^2+2x}\right)$  ให้นักเรียนแสดงการกระจายออกเป็น

ตัวประกอบย่อยทั้ง เกมและสวน

$$\begin{aligned} \text{กระจายได้ดังนี้} \quad \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}\right)\left(\frac{x^2+3x}{x^2+2x}\right) &= \frac{(x^2-2x+1)(x^2+3x)}{(x^2+2x-3)(x^2+2x)} \\ &= \frac{(x-1)(x-1) \cdot x \cdot (x+3)}{(x+3)(x-1) \cdot x \cdot (x+2)} \end{aligned}$$

53) จากผลการแยกตัวประกอบย่อยในกรอบ 52) ทำให้เป็นรูปง่ายเหลือเท่าไร

ค่าตอบคือ  $\frac{x-1}{x+2}$  เพราะ  $\left[\frac{(x-1) \cdot x \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x-1) \cdot x} = 1\right]$

54) ในการหารเศษส่วนของพหุโนเมียล ใจหลักการ เช่นเดียวกับการหารเศษส่วนของ

จำนวนจริงกล่าวคือ  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$  เมื่อ  $b, c, d \neq 0$

ดังนั้นถ้า  $\frac{x}{x+1} \div \frac{y}{y-1} = \frac{x}{x+1} \times \boxed{?}$

นั่นคือ  $\frac{y-1}{y}$

55) จากการหาร  $\frac{8a^2b}{x^3}$  ด้วย  $\frac{4ab^2}{x^2}$  ให้นักเรียนแสดงวิธีการกระจายออกเป็นตัว

ประกอบย่อย

$$\begin{aligned} \frac{8a^2b}{x^3} \div \frac{4ab^2}{x^2} &= \frac{8a^2b}{x^3} \times \frac{x^2}{4ab^2} \\ &= \frac{8a^2bx^2}{4ab^2x^3} \quad (\text{จัดเรียงลำดับอักษรเสียใหม่}) \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot x \cdot x}{4 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot x \cdot x \cdot x} \end{aligned}$$

56) จากค่าตอบในกรอบ 55) ตัวประกอบร่วมที่มีทั้งในเศษและส่วนคืออะไรบ้าง

คือ  $4 \cdot a \cdot b \cdot x \cdot x$

57) จากโจทย์ในกรอบ 55) เมื่อทำให้เป็นอย่างง่ายจะเหลือคำตอบเท่าไร

$$\frac{2a}{bx}$$

58) ผลหารของพหุนาม  $\frac{x^2-9}{x^2+8x+7} \div \frac{x+3}{x+1}$  เป็นเท่าไร

$$\begin{aligned} \frac{x^2-9}{x^2+8x+7} \div \frac{x+3}{x+1} &= \frac{x^2-9}{x^2+8x+7} \times \frac{x+1}{x+3} \\ &= \frac{(x^2-3^2)(x+1)}{(x^2+8x+7)(x+3)} \\ &= \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{(x+7)(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้นผลหารคือ } = \frac{x-3}{x+7} \quad \text{เพราะ} \left[ \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = 1 \right]$$

59) ให้นักเรียนหาผลหารของพหุนาม  $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2+4x+4}{x^2-x}$

$$\text{ถ้านักเรียนตอบ } \frac{x}{x+2} \text{ แสดงว่านักเรียนตอบถูกต้องแล้ว}$$

การบวก, ลบเศษส่วนของพหุนาม

60) การบวกเศษส่วนของพหุนามทำได้เช่นเดียวกับการบวกจำนวนจริง

จากการบวกจำนวนจริงเราทราบว่า  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{\square}$  ให้นักเรียนเติมค่าในช่องว่าง

ถ้านักเรียนเติม  $b$  ลงในช่องว่างแสดงว่านักเรียนตอบถูกต้องแล้ว

61)  $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{1+2}{\square}$  ให้นักเรียนเติมค่าคอมลงในช่องว่าง

นักเรียนตอบถูกต้องกี่คะแนน ค่าตอบคือ  $x$

62)  $\frac{x}{2y} + \frac{2}{y} = \frac{2x+2}{\square}$  ให้นักเรียนเติมค่าคอมลงในช่องว่าง

ค่าตอบที่ถูกต้องคือ  $2y$

63)  $\frac{m}{3n} + \frac{2}{n} = \frac{m+\square}{3n}$  ค่าตอบที่ถูกต้องใน  $\square$  คืออะไร

คือ 6

64)  $\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{\square}{(x+y)(x-y)} + \frac{\square}{(x+y)(x-y)}$  ให้นักเรียนเติมค่าคอมในช่องว่าง

คือ  $2(x-y)$  และ  $x+y$  ตามลำดับ

65) เมื่อได้ค่าตอบแล้วให้นักเรียนทำโจทย์ของกรอบ 64) ต่อไปให้เป็นผลสำเร็จ

$$\begin{aligned} \text{ทำต่อไปได้ดังนี้} \quad & \frac{2(x-y) + (x+y)}{(x+y)(x-y)} \\ & \frac{2x-2y+x+y}{(x+y)(x-y)} \\ & \frac{3x-y}{(x+y)(x-y)} \end{aligned}$$

66)  $\frac{m}{m^2-16} + \frac{m-1}{m^2-5m+4}$  ให้นักเรียนแยกตัวประกอบของจำนวนที่เป็นส่วนคือ

$m^2-16$  และ  $m^2-5m+4$

$$67) \text{ เมื่อ } \frac{m}{m^2-16} + \frac{m-1}{m^2-5m+4} = \frac{m}{(m-4)(m+4)} + \frac{m-1}{(m-4)(m-1)}$$

จากเศษส่วนของโพสิโนเน็บอ  $\frac{m-1}{(m-4)(m-1)}$  เมื่อเราทราบว่า  $\frac{m-1}{m-1} = 1$

แล้วเศษส่วนนี้จะเหลือค่าเท่าไร

$$\frac{1}{m-4}$$

$$\begin{aligned} 68) \frac{m}{m-16} + \frac{m-1}{m-5m+4} &= \frac{m}{(m-4)(m+4)} + \frac{m-1}{(m-4)(m-1)} \\ &= \frac{m}{(m-4)(m+4)} + \frac{1}{m-4} \\ &= \frac{m + \boxed{\phantom{0000}}}{(m-4)(m+4)} \end{aligned}$$

ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างที่กำหนดให้

คำตอบคือ  $m+4$

69) เมื่อนักเรียนทราบจำนวนที่เติมลงไปในช่วงว่างของกรอม 68) แล้ว จงทำต่อไปให้สำเร็จ

$$\begin{aligned} &\frac{m + (m+4)}{(m+4)(m-4)} \\ &\frac{m+m+4}{(m+4)(m-4)} \\ &\frac{2m + 4}{(m+4)(m-4)} \end{aligned}$$

70) การลบคือการบวกกับจำนวนตรงกันข้ามของตัวลบเอง

$$a-b = a+(-b) \quad \text{เป็นต้น}$$

$$\text{ถ้า } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (\dots)$$

ให้นักเรียนหาคำตอบมาเติมลงในวงเล็บให้ถูกต้อง

คำตอบคือ  $-\frac{c}{d}$

$$71) \quad \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^5} = \frac{2}{x^3} + (\dots)$$


---


$$- \frac{1}{x^5}$$

$$72) \quad \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^5} = \frac{2}{x^3} + \left(-\frac{1}{x^5}\right)$$

$$= \frac{\boxed{\phantom{2x^2}} + (-1)}{x^5}$$

$$2x^2$$

$$73) \quad \frac{m+1}{m+2} - \frac{m+2}{m+3} = \frac{m+1}{m+2} + \left[-\frac{(m+2)}{m+3}\right]$$

$$= \frac{(m+1)(m+3) + [-(\dots)(\dots)]}{(m+2)(m+3)}$$

$$-(m+2)(m+2)$$

$$74) \quad \frac{m+1}{m+2} - \frac{m+2}{m+3} = \frac{m+1}{m+2} + \left[-\frac{(m+2)}{m+3}\right]$$

$$= \frac{(m+1)(m+3) + [-(m+2)(m+2)]}{(m+2)(m+3)}$$

$$= \frac{(m^2+4m+3) + [-(m^2+4m+4)]}{(m+2)(m+3)}$$

$$= \frac{(m^2+4m+3) + (-m^2-4m-4)}{(m+2)(m+3)}$$

$$= \frac{m^2+4m+3-m^2-4m-4}{(m+2)(m+3)}$$

$$= \frac{\boxed{\phantom{\dots\dots\dots}}}{(m+2)(m+3)}$$

$$75) \frac{3x}{x^2+3x-10} - \frac{2x}{x^2+x-6} = \frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{2x}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{3x(x+3) + [-2x(x+5)]}{\boxed{\hspace{2cm}}}$$

จงหาจำนวนส่วนมาเติมลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

---


$$(x+5)(x-2)(x+3)$$


---

76) จากคำตอบในกรอม 75) ให้แก้เศษแทนค่าต่อไปให้สำเร็จ

$$\frac{3x(x+3) + [-2x(x+5)]}{(x+5)(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{(3x^2+9x) + (-2x^2-10x)}{(x+5)(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{3x^2+9x-2x^2-10x}{(x+5)(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{x^2-x}{(x+5)(x-2)(x+3)}$$


---

สมการของเศษส่วนพีอินเอช

คำชี้แจง ให้ใช้สมการต่อไปนี้ในการศึกษาทเรียนจากกรอบ 77) ถึง 80)

$$\frac{3-2x}{6x} + \frac{30-x}{3x} = \frac{1}{2}$$

77) ค.ร.น. ของส่วนทั้งสามจำนวนเป็นเท่าไร

คำตอบที่ถูกต้องคือ  $6x$

78) ถ้าเอา ค.ร.น. ที่ได้คือ  $6x$  มาคูณจำนวนทั้ง 2 ข้างของสมการแล้วจะได้สมการ  
ในรูปใหม่ให้นักเรียนเขียนสมการใหม่ขึ้น

$$(6x) \frac{(3-2x)}{6x} + (6x) \frac{(30-x)}{6x} = (6x) \cdot \frac{1}{2}$$

สมการในรูปใหม่คือ  $(3-2x) + (2)(30-x) = 3x$

79) จากสมการในรูปใหม่ที่ได้ในกรอบ 78) ให้นักเรียนนำไปหาคำตอบของสมการ  
(หรือแก้สมการเพื่อหาค่าของ  $x$  นั้นเอง)

$$(3-2x) + (2)(30-x) = 3x$$

$$3-2x+60-2x = 3x$$

$$-4x+63 = 3x$$

$$-7x = -63$$

$$x = 9$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ 9

80) นักเรียนจะทราบได้อย่างไรว่าคำตอบในกรอบ 79) นี้ถูกต้องหรือไม่

โดยการแทนค่า  $x$  ในสมการด้วย 9 แล้วดูผลที่ได้ ถ้าเป็นคำตอบที่ถูกต้องจริง  
ค่าตัวเลขทั้งสองข้างของสมการจะออกมาเท่ากัน

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้โจทย์สมการต่อไปนี้ในการศึกษากรอบ 81) ถึง 86)

$$\frac{5}{m-3} - \frac{30}{m^2-9} = 1$$

- 81) จากโจทย์มีส่วนอยู่จำนวนหนึ่งที่สามารถแยกออกเป็นตัวประกอบย่อยคือ  $m^2-9$   
ให้นักเรียนแยกออกเป็นตัวประกอบย่อย

$$m^2-9 = (m-3)(m+3)$$

- 82) ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็น  $\frac{5}{m-3} + \frac{30}{(m-3)(m+3)} = 1$

ให้นักเรียนพิจารณาว่า ค.ร.น. ของส่วนเป็นเท่าไร

ถ้านักเรียนตอบว่า  $(m-3)(m+3)$  แสดงว่าคำตอบของนักเรียนถูกต้อง

- 83) ดังนั้นถ้าเราต้องการให้ส่วนของสมการหายไป เราต้องนำเอา ค.ร.น. ที่ได้  
ไป..... เข้าทั้งสองข้างของสมการ (ให้เลือกตอบว่า "คูณ" หรือ "หาร")

คูณ

- 84) ให้นักเรียนนำเอา ค.ร.น. ไปคูณเข้าทั้งสองข้างของสมการในกรอบ 82) และ  
หาสมการที่ได้ใหม่ภายหลังการคูณแล้ว

$$\begin{aligned} (m-3)(m+3) \cdot \frac{5}{(m-3)} + (m-3)(m+3) \cdot \frac{30}{(m-3)(m+3)} &= (m-3)(m+3) \cdot 1 \\ 5(m+3) + 30 &= (m-3)(m+3) \\ 5m + 15 + 30 &= m^2 - 9 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการที่ได้ใหม่คือ  $m^2-5m+6 = 0$

- 85) จากสมการที่ได้ในกรอบ 84) ให้นักเรียนหาคำตอบของสมการต่อไป

$$m^2-5m+6 = 0$$

$$(m-3)(m-2) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } m = 2$$

แต่ค่าของ  $m$  หรือคำตอบของสมการเท่ากับ 3 ไม่ได้

- 86) เพราะเหตุใดคำตอบของสมการในกรอบ 85) จึงเท่ากับ 3 ไม่ได้

เพราะจะทำให้ตัวส่วนของพหุนามมีค่าเป็นศูนย์ (เมื่อแทนค่า  $m$  ด้วย 3)

การตั้งสมการในรูปเศษส่วนของพหุนาม

87) จำนวนหนึ่งมากกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 9 ถ้าจำนวนมากเป็น  $x$  จำนวนน้อยเป็นเท่าไร

$$x-9$$

88) "จำนวนหนึ่งมากกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 7 ถ้าจำนวนมากเป็น  $x$  สองเท่าของจำนวนมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนน้อย"

จากข้อความดังกล่าวนี้เมื่อเราทราบว่าจำนวนมากเป็น  $x$

ดังนั้นจำนวนน้อยเป็นเท่าไร

$$x-7$$

89) จากกรอบ 88) "สองเท่าของจำนวนมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนน้อย" ข้อความนี้เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เท่าไร

$$2x + \frac{1}{2}(x-7)$$

"สมุดจำนวนหนึ่งถ้าชาย 4 เล่ม 14 บาทจะได้เงินมากกว่าชาย 3 เล่ม 10 บาท อยู่ 13 บาท จงหาจำนวนสมุด ถ้าให้จำนวนสมุดนั้นเป็น  $x$  เล่ม"

จากโจทย์ข้างต้นนี้ให้นักเรียนนำไปใช้ศึกษาร่วมกับบทเรียนในกรอบ 90) ถึงกรอบ 93)

90) ชายสมุด 4 เล่ม 14 บาท

แต่ถ้าชายทั้งหมด  $x$  เล่มจะเป็นเงินเท่าไร

นักเรียนใช้วิธีเทียบบัญญัติใครอย่างง่าย ๆ ก็จะทราบว่าเงิน  $\frac{14}{4} \cdot x$  บาท

91) ทำนองเดียวกัน ถ้าชายสมุด 3 เล่ม ราคา 10 บาท

แต่สมุดที่ชายทั้งหมด  $x$  เล่ม เป็นเงินกี่บาท

วิธีคิดทำนองเดียวกับกรอบ 90) จะทราบว่าเงิน  $\frac{10}{3} \cdot x$  บาท

92) "สมุดจำนวนหนึ่งถ้าขาย 4 เล่ม 14 บาทจะได้เงินมากกว่าขาย 3 เล่ม 10 บาท อยู่ 13 บาท"

ให้นักเรียนนำเอาความรู้จากกรอม 90) และ 91) มาตั้งเป็นสมการ ตาม โจทย์ที่ปรากฏนี้

$$\frac{14}{4} \cdot x - \frac{10}{3} \cdot x = 13$$

"ชายคนหนึ่งพายเรือตามน้ำได้ทาง 36 กิโลเมตร ในช่วงเวลาเท่ากัน ชายคนนี้ พายเรือทวนน้ำจะได้ทางเพียง 24 กิโลเมตร ถ้ากระแสน้ำในขณะนั้นมีอัตราความเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาอัตราเร็วของเรือถ้าพายในน้ำนิ่ง"

จากโจทย์ข้างต้นนี้ ให้นักเรียนใช้ศึกษาร่วมกับบทเรียนในกรอม 93) ถึง 99)

93) ความเร็วของเรือเมื่อพายเรือตามกระแสน้ำนั้นจะเร็วกว่าปกติที่เราพายในน้ำนิ่ง ทั้งนี้เพราะความเร็วที่เร็วกว่าปกติ นั้น เกิดมาจากรวมความเร็วของเรือและอะไร อีกอย่างหนึ่งรวมกัน

เกิดจากรวมความเร็วของเรือและกระแสน้ำรวมกัน จึงสามารถเขียนแสดง เป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{ความเร็วของการพายเรือตามน้ำ} = \text{ความเร็วเรือปกติในน้ำนิ่ง} + \text{ความเร็วของกระแสน้ำ}$$

94) ในทางตรงกันข้าม การพายเรือทวนน้ำนั้น จะทำให้ความเร็วของเรือช้าลงกว่าปกติ ทั้งนี้เพราะความเร็วที่ได้เป็นผลต่างของความเร็วเรือในน้ำนิ่งและอะไรอีกอย่างหนึ่ง

คำตอบก็คือ ความเร็วที่ได้เป็นผลต่าง (ผลลบ) ของความเร็วเรือปกติในน้ำนิ่ง กับ ความเร็วกระแสน้ำ จึงเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{ความเร็วของการพายเรือทวนน้ำ} = \text{ความเร็วเรือปกติในน้ำนิ่ง} - \text{ความเร็วของกระแสน้ำ}$$

- 95) คราวนี้ให้นักเรียนกลับไปดูโจทย์การพายเรือข้างต้นอีกครั้งหนึ่งว่า ถ้าให้อัตราความ  
เร็วเรือในน้ำนิ่ง เป็น  $x$  กิโลเมตร/ชั่วโมง และเราทราบอัตราความเร็วของกระแสน้ำ  
จากโจทย์กำหนดมาว่ามีความเร็วเป็น  $3$  กิโลเมตร/ชั่วโมง ให้นักเรียนเขียน  
สัญลักษณ์อัตราความเร็วของการพายเรือตามน้ำและทวนน้ำ

อัตราความเร็วของการพายเรือตามน้ำเป็น  $x+3$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

อัตราความเร็วของการพายเรือทวนน้ำเป็น  $x-3$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

- 96) จากโจทย์ข้างต้นเขากำหนดสิ่งหนึ่งมาให้เท่ากัน เพื่อเป็นแนวทางในการที่เราจะนำ  
ไปตั้งเป็นสมการต่อไป สิ่งที่เขากำหนดมาให้ นั่นคืออะไร

คำตอบก็คือ ช่วงเวลา ของการพายเรือทั้งตามและทวนน้ำ

ดังนั้นเราต้องอาศัยเวลาที่เท่ากันนี้ เป็นแนวทางไปสู่การตั้งสมการเพื่อหาคำตอบต่อไป

- 97) พายเรือตามน้ำในอัตราความเร็ว  $x+3$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

หมายถึงพายเรือตามน้ำได้ทาง  $x+3$  กิโลเมตร ใช้เวลา  $1$  ชั่วโมง

ถ้าพายเรือตามน้ำได้ทาง  $36$  กิโลเมตร ใช้เวลาเท่าไร

(ให้คิดโดยการเทียบบัญญัติไตรยางค์)

$$\frac{36}{x-3} \text{ ชั่วโมง}$$

- 98) พายเรือทวนน้ำในอัตราเร็ว  $x-3$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

หมายถึงพายเรือทวนน้ำได้ทาง  $x-3$  กิโลเมตร ใช้เวลา  $1$  ชั่วโมง

ถ้าพายเรือทวนน้ำได้ทาง  $24$  กิโลเมตร ใช้เวลาเท่าไร

(วิธีคิดเหมือนกรอบ 97)

$$\frac{24}{x-3} \text{ ชั่วโมง}$$

- 99) แต่โจทย์เขากำหนดให้ว่า ช่วงเวลาของการพายเรือตามน้ำและทวนน้ำเท่ากัน

เราจะนำมาตั้งเป็นสมการได้อย่างไร

$$\text{ห้เป็นสมการได้ดังนี้} \quad \frac{36}{x+3} = \frac{24}{x-3}$$

ตอนที่ซื้อเข้ามาเงิน 240 บาท ตัดเก็บไว้ 5 เมตร ที่เหลือขายไปในราคาสูงกว่าต้นทุน  
เมตรละ 8 บาท ยังได้กำไรอีก 60 บาท เขาซื้อเข้ามากี่เมตรและราคาเมตรละเท่าไร  
จากโจทย์ข้างต้นให้นักเรียนใช้ศึกษาร่วมกับบทเรียนในกรอบ 100) ถึง 104)

100) ถ้าให้พ่อค้าซื้อเข้ามาเมตรจะ  $x$  บาท  
ดังนั้นที่ซื้อมาเป็นเงิน 240 บาท คิดเป็นค่ากี่เมตร

$$\frac{240}{x} \text{ เมตร}$$

101) ขายไปสูงกว่าต้นทุนเมตรละ 8 บาท ถ้าต้นทุนเมตรละ  $x$  บาท เขาขายไปเมตรละ  
เท่าไร

$$x+8 \text{ บาท}$$

102) เมื่อขายไปแล้วได้กำไรอีก 60 บาท ที่เขาซื้อเข้ามา 240 บาท ดังนั้นเขาขายไปได้  
เงินทั้งสิ้นเท่าไร

$$\begin{array}{rcccl} 240 + 60 & = & 300 & \text{บาท} \\ \text{(ทุน)} & \text{(กำไร)} & \text{(ราคาขาย)} & \end{array}$$

103) จากกรอบ 101) และ 102) เมื่อขายไปเมตรละ  $x+8$  บาท ได้เงิน 300 บาท  
ดังนั้นขายผ่านไปทั้งหมดกี่เมตร

$$\frac{300}{x+8} \text{ เมตร}$$

104) ซื้อเข้ามา  $\frac{240}{x}$  เมตร ขายไป  $\frac{300}{x+8}$  เมตร ตัดเก็บไว้ 5 เมตร ให้นักเรียนตั้ง  
สมการจากข้อความนี้

$$\frac{240}{x} - \frac{300}{x+8} = 5$$

นายกิจทำงานอย่างหนึ่งเสร็จในเวลา 2 ชั่วโมง ถ้าน้องชายช่วยทำคว้งงานนั้นจะเสร็จในเวลา  $1\frac{1}{4}$  ชั่วโมง จงหาว่าน้องชายของนายกิจทำงานคนเดียวจะแล้วเสร็จในเวลาเท่าใด

ให้นักเรียนอ่านโจทย์ข้างบนนี้อีกทีหนึ่ง แล้วใช้โจทย์นี้ศึกษารวมกับบทเรียนกรวย 105) ถึง 109)

105) สมมุติให้น้องชายของกิจทำงานแล้วเสร็จในเวลา  $x$  ชั่วโมง และสมมุติให้งานทั้งหมดที่ต้องทำเป็น 1 หน่วย ดังนั้นในเวลา  $x$  ชั่วโมง น้องชายของกิจทำงานได้ 1 หน่วย ถ้าในเวลา 1 ชั่วโมง น้องชายของกิจทำงานได้กี่หน่วย

คำตอบคือ  $\frac{1}{x}$  หน่วย

106) นายกิจทำงานแล้วเสร็จในเวลา 2 ชั่วโมง สมมุติงานที่ต้องทำทั้งหมดเป็น 1 หน่วย ดังนั้นในเวลา 2 ชั่วโมง นายกิจทำงานได้ 1 หน่วย ถ้าในเวลา 1 ชั่วโมง นายกิจทำงานได้กี่หน่วย

ถ้านักเรียนตอบว่า  $\frac{1}{2}$  หน่วย แสดงว่าคำตอบของนักเรียนถูกต้อง

107) จากคำตอบในกรวย 105) และ 106) ในเวลา 1 ชั่วโมง นายกิจและน้องเขาจะทำงานได้รวมกันเป็นเท่าไร

$$\text{ได้ } \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \text{ หรือเท่ากับ } \frac{2x}{x+2} \text{ หน่วย}$$

108) คั้งนั้นงาน  $\frac{x+2}{2x}$  หน่วย นายกิจและน้องชายของเขาทำได้ในเวลา 1 ชั่วโมง แต่ถาต้องการทำงานจนเสร็จ 1 หน่วย นายกิจและน้องชายของเขาจะต้องใช้เวลาทำเท่าไร

$$\text{ใช้เวลา } \frac{1}{\frac{x+2}{2x}} \text{ ชั่วโมง หรือเท่ากับ } \frac{2x}{x+2} \text{ ชั่วโมง}$$

- 109) ให้นักเรียนกลับไปอ่านโจทย์อีกครั้งหนึ่ง จะพบโจทย์เขากำหนดว่าทั้งสองคนช่วยกันทำงานเสร็จ(๑หน่วย)ในเวลา  $1\frac{1}{4}$  ชั่วโมง(หรือ  $\frac{5}{4}$  ชั่วโมง) และจากกรอบ 108) ก็ทราบว่าเขาทั้งสองทำงานเสร็จในเวลา  $\frac{2x}{x+2}$  ชั่วโมงเช่นกัน เวลาที่กล่าวมาข้างต้นทั้งสองหน่วยนั้นย่อมเป็นเวลาอันเดียวกัน ดังนั้นนักเรียนจะนำเอาความสัมพันธ์ดังกล่าวมาสร้างสมการออกมาได้อย่างไร

$$\frac{2x}{x+2} = \frac{5}{4}$$

แบบฝึกหัดสำหรับซ่อมเสริม

เรื่อง โพลีโนเมียล

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓

## "โพลิโนเมียล"

ทบทวน

ให้  $p(x)$  แทนโพลิโนเมียลที่มีตัวแปร  $x$  เช่น

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$p(a)$  เป็นค่าของโพลิโนเมียล  $p(x)$  เมื่อ  $x=a$ ,  $a$  เป็นจำนวนจริง

เช่น  $p(x) = 3x^2 - 5x + 7$

$$p(a) = 3a^2 - 5a + 7$$

$$p(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 7 = 9$$

การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียล

โพลิโนเมียล  $p(x)$  เป็นตัวประกอบของโพลิโนเมียล  $q(x)$  ได้ เมื่อเราสามารถหาโพลิโนเมียล  $r(x)$  มาคูณกับ  $p(x)$  แล้วทำให้ผลคูณเท่ากับ  $q(x)$  นั่นคือ

$$p(x) \cdot r(x) = q(x)$$

เช่น  $x(x-3) = x^2 - 3x$

เราเรียก  $x(x-3)$  ว่าเป็นการแยกตัวประกอบของ  $x^2 - 3x$  และเรากล่าวว่าตัวประกอบของโพลิโนเมียล  $x^2 - 3x$  คือโพลิโนเมียล  $x$  และโพลิโนเมียล  $x-3$

แบบฝึกหัดทบทวน

จงแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลต่อไปนี้

1.  $3x^2 - 6x = \dots\dots\dots$       2.  $b^2 - b^3 = \dots\dots\dots$

3.  $3x^3 - 9x^2 - 6x = \dots\dots\dots$       4.  $(3y-5)^2 + 5 - 3y = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

5.  $m^2 + 15m + 36 = \dots\dots\dots$       6.  $n^2 + 2n - 3 = \dots\dots\dots$

7.  $r^2 - 49 = \dots\dots\dots$       8.  $3x^2 - 75 = \dots\dots\dots$

9.  $18x^2 - 50y^2 = \dots\dots\dots$       10.  $5x^2 - 80y^4 = \dots\dots\dots$

11.  $(a+b)^2 - c^2 = \dots\dots\dots$       12.  $x^2 - (y-z)^2 = \dots\dots\dots$

13.  $4x^2 + 13x - 12 = \dots\dots\dots$       14.  $21y^2 - 29y + 10 = \dots\dots\dots$

15.  $6x^2 - 5x - 21 = \dots\dots\dots$       16.  $-9x^2 + 70x + 16 = \dots\dots\dots$

17.  $21x + 21 - 58x = \dots$   
 $= \dots$

18.  $-12y + 14 - 13y = \dots$   
 $= \dots$

19.  $16x^2 - 40x + 25 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

20.  $a^2 + ab + ac + bc = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

21.  $1 + 3x - 5a - 15ax = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

22.  $(x+1)(x-1)(x+2) + (x^2+2x)(x+1) = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

23.  $16x^2 - 9y^2 + 4x - 3y = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

24.  $x^2 - 4x + 4 - 25y^2 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

25.  $(x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

26.  $2x^2 - 9y - 18 + yx^2 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

27.  $4 - x^2 - 2xy - y^2 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

28.  $x^2 + y - x - y^2 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

29.  $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

30.  $x^2 + xy + y - 1 = \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$   
 $= \dots$

แบบฝึกหัดเสริม

สำหรับผู้ที่ยังไม่เข้าใจในเรื่อง การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสามพจน์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งอยู่ในรูปผลบวกของกำลังสามและผลต่างของกำลังสาม

เพราะว่าผลคูณของพหุนาม  $(x+y)$  กับพหุนาม  $x^2-xy+y^2$  ได้ผลลัพธ์เป็น  $x^3+y^3$

ดังนั้น เขียนการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีรูปเป็นผลบวกของกำลังสามโดยทั่วไปได้เป็น  $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$\text{หรือ } (\text{หน้า}^3 + \text{หลัง}^3) = (\text{หน้า} + \text{หลัง}) \text{ หน้า}^2 - (\text{หน้า} \times \text{หลัง}) \text{ หลัง}^2$$

และเพราะว่า ผลคูณของพหุนาม  $(x-y)$  กับพหุนาม  $x^2+xy+y^2$  ได้ผลลัพธ์เป็น  $x^3-y^3$

ดังนั้น เขียนการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีรูปเป็นผลต่างของกำลังสามโดยทั่วไปเป็น  $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$\text{หรือ } (\text{หน้า}^3 - \text{หลัง}^3) = (\text{หน้า} - \text{หลัง}) \text{ หน้า}^2 + (\text{หน้า} \times \text{หลัง}) + \text{หลัง}^2$$

แบบฝึกหัด

แยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 1)

1.  $8x^3+27y$

$= (2x)^3 + (3y)^3$

$= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

2.  $x^3+1$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

3.  $a^3-1$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4.  $1+8p^3$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

5.  $64a^3+343b^3$

= .....

= .....

7.  $8p^3-q^3$

= .....

= .....

9.  $729m^3+8n^3$

= .....

= .....

11.  $x^3-64y^3$

= .....

= .....

13.  $64a^6+125b^3$

= .....

= .....

6.  $1-125x^3$

= .....

= .....

8.  $x^3-1000y^3$

= .....

= .....

10.  $x^3-27y^3z^3$

= .....

= .....

12.  $729x^3y^3+512z^3$

= .....

= .....

14.  $a^9-b^9$

= .....

= .....

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลดีกรีสูง ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยถอดตัวรวมหรือจัดบางตัวให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (Perfect square)

จงพิจารณาโพลิโนเมียล  $x^4+x^2+1$

จะเห็นว่า  $x^4+x^2+1$  จะเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ถ้าพจน์กลางเป็น  $+2x^2$  หรือ  $-2x^2$  และเราทราบว่า เมื่อนำ 0 ไปบวกกับจำนวนใดๆ จะไม่ทำให้จำนวนนั้นมีค่าเปลี่ยนแปลง

ดังนั้นเรานำ  $x^2+(-x^2)$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 ไปบวกกับ  $x^4+x^2+1$  ซึ่งจะได้เป็น

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+x^2+1+ x^2+(-x^2) \\ &= (x^4+2x^2+1) - x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เมื่อจัดพจน์กลางจนทำให้โพลิโนเมียลเป็นกำลังสองสมบูรณ์แล้วเราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของผลต่างของกำลังสองของสองจำนวนได้เสมอ

แบบฝึกหัด

แยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 1 และข้อ 7)

- |                              |                         |
|------------------------------|-------------------------|
| 1. $x^4+x^2y^2+y^4$          | 2. $x^4-12x^2y^2+16y^4$ |
| = $(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$ | = .....                 |
| = $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$       | = .....                 |
| = $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$ | = .....                 |
| = $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ | = .....                 |
| 3. $x^4-3x^2+1$              | 4. $9x^4+11x^2+4$       |
| = .....                      | = .....                 |
| = .....                      | = .....                 |
| = .....                      | = .....                 |
| = .....                      | = .....                 |

5.  $x^4+4$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

6.  $x^6-y^6$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

การแยกตัวประกอบของโพลิโนเมียลที่มีดีกรีสูงกว่าดีกรีสอง บางครั้งเราอาจจะลอง  
 จัดใหม่ แล้วแยกตัวประกอบโดยอาศัยคุณสมบัติการกระจายผลต่างกำลังสอง ผลบวกของกำลัง  
 สาม ผลต่างของกำลังสาม (ดูตัวอย่างข้อ 7)

7.  $x^3+x^2+x+1$

=  $(x^3+x^2)+(x+1)$   
 =  $x^2(x+1)+(x+1)$   
 =  $(x+1)(x^2+1)$

8.  $1-x-x^2+x^3$

=.....  
 =.....  
 =.....

9.  $4y^3-7y^2+3y$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

10.  $x^3-xy^2-x^2y+y^3$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

11.  $a^5-81a$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

12.  $x^6+y^6-x^2y^4-x^4y^2$

=.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....  
 =.....

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่ยังบกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การหาค่าตัดของสมการพหุนามเมื่อยลคือกรี  
สูง ที่มีการแยกตัวประกอบด้วยวิธีต่างๆ

การที่จำนวนใดๆ ทั้งสองจำนวนขึ้นไปคูณกันแล้วได้ผลลัพธ์เป็น 0 แสดงว่าจำนวนใดจำนวนหนึ่งจะต้องมีค่าเป็น 0

$$\text{เช่น } a \cdot b \cdot c = 0$$

$$\text{แสดงว่า } a = 0 \text{ หรือ } b = 0 \text{ หรือ } c = 0$$

$$\text{เช่น } x(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{แสดงว่า } x = 0 \text{ หรือ } x-3 = 0 \text{ หรือ } x+1 = 0$$

หลังจากนั้นก็สามารรถแก้สมการหาค่า  $x$  ได้ต่อไป

แบบฝึกหัด

แยกตัวประกอบของพหุนามเมื่อยลต่อไปนี้และหาค่าตัดของสมการ (ดูตัวอย่างข้อ 1)

$$1. x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$x(x-3)(x-4) = 0$$

$$\text{ถ้า } x = 0 \text{ หรือ } x-3 = 0 \text{ หรือ } x-4 = 0$$

$$x = 3 \quad x = 4$$

หาค่าตัดของสมการ  $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$  คือ 0, 3, 4

โปรดแสดงวิธีทำข้อ 2 ถึงข้อ 6 ในสมุดแบบฝึกหัดของนักเรียน

$$2. x^3 - 3x = x$$

$$3. y^5 - 10y^3 + 9y = 0$$

$$4. 2m^3 - 9m^2 = 2m - 9$$

$$5. x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$6. (x^2 - 6x)^2 \cdot 2(x^2 - 6x) = 35$$

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การหาเศษของโพลิโนเมียลตามทฤษฎีเศษ

จากการหารโพลิโนเมียลใดๆ ท่อจะสรุปเป็นสัญลักษณ์แสดงความเกี่ยวข้องระหว่าง  
ตัวตั้ง ตัวหาร ผลหารและเศษ ใ้ดังนี้

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษ}$$

การหารในครั้งใดๆ ที่เป็นการหารแล้วลงตัวแสดงว่าเศษจะเป็น 0

ถ้าวัดตั้งคือโพลิโนเมียล  $p(x)$

ตัวหารอยู่ในรูป  $x-a$  จะได้เศษเป็น  $p(a)$

ตัวหารอยู่ในรูป  $x-2$  จะได้เศษเป็น  $p(2)$

ตัวหารอยู่ในรูป  $x+1$  จะได้เศษเป็น  $p(-1)$

ตัวหารอยู่ในรูป  $2x+3$  จะได้เศษเป็น  $p(\frac{-3}{2})$  เป็นต้น

แบบฝึกหัด

จงหาเศษ(คูตัวอย่างขอ 1)

1. เมื่อ  $2x^3-3x^2-x+5$  หารด้วย  $x+2$

วิธีทำ ให้  $p(x) = 2x^3-3x^2-x+5$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นเศษ} &= p(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - (-2) + 5 \\ &= -16 - 12 + 2 + 5 \\ &= -21 \end{aligned}$$

2. เมื่อ  $3x^3-2x^2+2x+1$  หารด้วย  $x-2$

3. เมื่อ  $2x^3+3x^2-2x+3$  หารด้วย  $x-1$

4. เมื่อ  $4x^3-2x^2-5x+3$  หารด้วย  $2x-1$

โดยไม่ต้องตั้งหารจงแสดงว่า (ดูตัวอย่างข้อ 5)

5.  $x-2$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3-4x^2+6x-4$

วิธีทำ ให้  $p(x) = x^3-4x^2+6x-4$

$$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4$$

$$= 8 - 16 + 12 - 4$$

$$= 0$$

$x-2$  หาร  $x^3-4x^2+6x-4$  ลงตัว

นั่นคือ  $x-2$  เป็นตัวประกอบหนึ่งของ  $x^3-4x^2+6x-4$

6.  $x-1$  เป็นตัวประกอบของ  $x^2-13x+12$

7.  $2x+1$  เป็นตัวประกอบของ  $2x^3+3x^2-11x-6$

8.  $x+a$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3+10a^2x+11a^3$

9. ถ้า  $x^3-2ax+15$  หารด้วย  $x+5$  ลงตัว จงหาค่าของ  $a$

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การใช้ทฤษฎีเศษเพื่อแยกตัวประกอบของ  
พหุนามเมื่อยลคือกรีสูงที่มีดีกรีเป็นจำนวนเต็ม

หลักการแยกตัวประกอบโดยอาศัยทฤษฎีเศษ

1. หาตัวประกอบในรูปของ  $x-c$  โดยทฤษฎีเศษ
2. นำ  $x-c$  ที่ได้ไปหาร  $p(x)$  ผลหารจะเป็นพหุนามเมื่อยลที่มีดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ  $p(x)$
3. แยกตัวประกอบของผลหารในข้อ 2 แต่ถาผลหารยังมีดีกรีสูงกว่าสองและสามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก ก็ทำตามข้อ 2.1 และ 2.2 ซ้ำกับผลหารอีก

แบบฝึกหัด

จงแยกตัวประกอบของพหุนามเมื่อยลต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 1)

1.  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$p(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6$$

$$= 1 - 2 - 5 + 6$$

$$= 0$$

แสดงว่า  $x-1$  หาร  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  ได้ลงตัว

$$x^2 - x - 6$$

$$x-1 \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$x^3 - x^2$$

$$-x^2 - 5x$$

$$-x^2 + x$$

$$-6x + 6$$

$$-6x + 6$$

$$\text{นั่นคือ } x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

$$= (x-1)(x-3)(x+2)$$

ดังนั้นตัวประกอบ  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  คือ  $(x-1)(x-3)(x+2)$

ให้นักเรียนแสดงวิธีทำข้อ 2 ถึง ข้อ 5 ในสมุดแบบฝึกหัดของนักเรียน

2.  $x^3 - 19x + 30$

3.  $2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

4.  $2x^3 + 13x^2 - 36$

5.  $3x^4 - x^3 - 23x^2 - 9x + 18$

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การคูณ,หารเศษส่วนของพหุนาม

ถ้า  $a(x), b(x)$  เป็นพหุนาม และ  $b(x) \neq 0$  แล้ว เราเรียก  $\frac{a(x)}{b(x)}$  ว่าเศษส่วนของพหุนาม

ตัวอย่างเศษส่วนของพหุนาม

ก.  $\frac{3x+2}{7}$

ข.  $\frac{1}{x-1}$  เมื่อ  $x \neq 1$

ค.  $\frac{x^2-3x+2}{x^3}$  เมื่อ  $x \neq 0$

ง.  $\frac{x^2-y^2}{(x-2)(y-3)}$  เมื่อ  $x \neq 2$  และ  $y \neq 3$

ให้นักเรียนระบุดำเนินการซึ่งทำให้เศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้ไม่มีค่านัย

1.  $\frac{a}{a(a+2)}$  .....

2.  $\frac{x}{x-8}$  .....

3.  $\frac{x+2}{(x-2)(x+6)}$  .....

4.  $\frac{1}{x^2-5x+6}$  .....

แบบฝึกหัด

จงทำให้อยู่ในรูปร่างง่าย (ดูตัวอย่างข้อ 1,2)

$$1. \frac{18a^2b}{24ab^3} = \frac{3a \cdot 6ab}{4b^2 \cdot 6ab} = \frac{3a}{4b^2}$$

$$2. \frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x-4}{x-5}$$

3.  $\frac{x+3}{2x+6}$

=

=

4.  $\frac{y^2-25}{y^2-5y}$

=

=

$$5. \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-20}$$

=

=

$$6. \frac{x^2+4xy+3y^2}{x^2-y^2}$$

=

=

จงหาผลคูณต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 7)

$$7. \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x-2}$$

$$= \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}$$

$$8. \frac{a^2-b^2}{9} \cdot \frac{3}{a-b}$$

=

=

$$9. \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

=

=

จงหาผลหารต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 10)

$$10. \frac{x^2-6x+8}{x^2+3x+2} \div \frac{x^2-4x}{x^2-4}$$

$$= \frac{x^2-6x+8}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-4x}$$

$$= \frac{(x-2)(x-4)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-4)}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{x(x+1)}$$

$$11. \frac{5(x-y)}{6(x+y)} \div \frac{2(x-y)}{(x+y)}$$

=

=

=

$$12. \frac{a^2+4a-12}{a^2+9a+18} \div \frac{3a+12}{6a+18}$$

=

=

=

$$13. \frac{y^2-9}{2y} \div (y^2 \div 3y)$$

=

=

=

=

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่ยังบกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การหา ค.ร.น. ของ โพลิโนเมียล  
และการบวก, ลบ, คูณ ส่วนของ โพลิโนเมียล

ค.ร.น. ของ โพลิโนเมียลตั้งแต่สอง โพลิโนเมียลขึ้นไปคือ โพลิโนเมียลที่มีดีกรี  
 ต่ำสุดและสัมประสิทธิ์ที่น้อยที่สุด ซึ่งมี โพลิโนเมียลแต่ละ โพลิโนเมียล เป็นตัวประกอบ

แบบฝึกหัด

จงหา ค.ร.น. ของ โพลิโนเมียลต่อไปนี้ (ดูตัวอย่างข้อ 1, 2)

1.  $42a^2x^2, 35a^3xy$  และ  $30ay^2$

$$42a^2x^2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x$$

$$35a^3xy = 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot y$$

$$30ay^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot y \cdot y$$

ค.ร.น. คือ  $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = 210 a^3 x^2 y^2$

2.  $x^2-4, x^2-4x+4$  และ  $x^2-2x$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2-4x+4 = (x-2)(x-2)$$

$$x^2-2x = x(x-2)$$

ค.ร.น. คือ  $x(x-2)(x-2)(x+2)$

3.  $7a^2b^2, 5abc, 6bc^2$

.....

.....

.....

.....

4.  $(a-b)^2, a-b, a^2-b^2$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

5.  $m^2-m-6, m^2+2m-15, (m-3)^3$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

ดูตัวอย่างข้อ 6, 7 แล้วทำแบบฝึกหัดการบวก, ลบเศษส่วนของพหุนามเรียงข้อ 8 ถึง 11

$$\begin{aligned} 6. \quad & \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \\ &= \frac{(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{2a}{(a+b)(a-b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad & \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. \quad & \frac{5}{x+2} + \frac{2}{x-3} \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9. \quad & \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x-1) - (x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \quad & \frac{5}{2x-4} + \frac{1}{x^2-4} - \frac{3}{4x^2+8x} \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \quad & \frac{x}{x^2+5x+4} - \frac{1}{x^2+2x+1} \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดหอมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การแก้สมการที่เป็นเศษส่วนของ  
พหุนาม

การแก้สมการที่เป็นเศษส่วนของพหุนามก็ดำเนินการเช่นเดียวกันกับการแก้สมการที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว กล่าวคือหาสมการที่สมมูลกับสมการที่ต้องการจะหาคำตอบ โดยอาศัยคุณสมบัติของความเท่ากัน แต่สิ่งที่ควรระวังคือต้องไม่นำเอาพหุนามที่มีค่าเท่ากับศูนย์มาคูณกับจำนวนทั้งสองข้างของสมการ และในขั้นแรกควรจะทำส่วนของเศษส่วนของพหุนามให้มีค่าเป็นหนึ่งก่อน โดยนำค.ร.น. ของส่วนของเศษส่วนของพหุนามทั้งสองข้างของสมการเสียก่อน

แบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ  $\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y+2} = \frac{2}{y^2-4}$

แนวคิด ค.ร.น. ของ  $y-4, y+2$  และ  $y^2-4$  คือ  $(y-4)(y+2)(y-2)$  ในที่นี้จะเห็นว่า  $y$  จะมีค่าเท่ากับ 4 หรือ -2 หรือ 2 ไม่ได้ เพราะทำให้ส่วนเป็น 0 ที่หาค่าไม่ได้

วิธีทำ จาก  $\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y+2} = \frac{2}{y^2-4}$   
เอา  $(y-4)(y+2)(y-2)$  คูณทั้งสองข้าง  

$$(y-4)(y+2)(y-2) \frac{1}{y-4} - \frac{1}{y+2} = (y-4)(y+2)(y-2) \frac{2}{(y+2)(y-2)}$$

$$(y+2)(y-2) - (y-4)(y-2) = 2(y-4)$$

$$y^2-4-y^2+6y-8 = 2y-8$$

$$6y-12 = 2y-8$$

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

ตรวจคำตอบ แทนค่า  $y$  ด้วย 1 ในสมการ  $\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y+2} = \frac{2}{y^2-4}$

$$\frac{1}{1-4} - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{1^2-4}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{-3}$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ 1

ให้นักเรียนเขียนเฉพาะคำตอบของสมการแต่ละข้อต่อไปนี้

1.  $\frac{5}{6} - \frac{1}{x} = \frac{2}{3x}$ , คำตอบของสมการคือ.....

2.  $\frac{x+1}{x} = \frac{3}{2}$ , คำตอบของสมการคือ.....

3.  $\frac{2y}{y-2} - 2 = \frac{3}{y}$ , คำตอบของสมการคือ.....

4.  $\frac{4}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}$ , คำตอบของสมการคือ.....

5.  $\frac{x}{x-2} = 2 + \frac{3}{x}$ , คำตอบของสมการคือ.....

ให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ (ตรวจคำตอบด้วย)

6.  $\frac{3}{x-4} + \frac{2}{x+2} = \frac{8}{x^2-2x-8}$

7.  $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x-2}$

8.  $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3} = -1$

แบบฝึกหัดซ่อมเสริม

สำหรับผู้ที่บกพร่องในจุดประสงค์เรื่อง การตั้งสมการเศษส่วนของโพลีโนเมียล  
จากโจทย์สมการ และการหาเซตคำตอบของโจทย์สมการ

แบบฝึกหัด

ศึกษาตัวอย่างข้อ 1 แล้วทำข้อ 2,3,4,5 ในสมุดแบบฝึกหัดของนักเรียน

1. ในระยะทาง 150 กิโลเมตร เรือยนต์ลำหนึ่งใช้เวลาแล่นทวนน้ำเป็นสามเท่าของเวลาที่แล่นตามน้ำ ถ้าเรือยนต์ลำนี้แล่นด้วยอัตราความเร็วสม่ำเสมอ และแล่นในน้ำนิ่งได้ชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร กระแสน้ำในขณะนั้นมีอัตราความเร็วเท่าไร

วิธีทำ สมมติให้อัตราความเร็วของกระแสน้ำเท่ากับ  $x$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

ดังนั้นอัตราความเร็วของเรือยนต์แล่นทวนน้ำเป็น  $30-x$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

และอัตราความเร็วของเรือยนต์แล่นตามน้ำเป็น  $30+x$  กิโลเมตร/ชั่วโมง

เรือยนต์แล่นทวนน้ำ	$30-x$ กิโลเมตร	ใช้เวลา	1 ชั่วโมง
ดังนั้นเรือยนต์แล่นทวนน้ำ	150 กิโลเมตร	ใช้เวลา	$\frac{150}{30-x}$ ชั่วโมง
เรือยนต์แล่นตามน้ำ	$30+x$ กิโลเมตร	ใช้เวลา	1 ชั่วโมง
ดังนั้นเรือยนต์แล่นตามน้ำ	150 กิโลเมตร	ใช้เวลา	$\frac{150}{30+x}$ ชั่วโมง

แควว่าเรือยนต์ใช้เวลาแล่นทวนน้ำเป็นสามเท่าของเวลาแล่นตามน้ำ

$$\frac{150}{30-x} = 3 \frac{150}{30+x}$$

$$\frac{150}{30-x} = \frac{450}{30+x}$$

$$(30-x)(30+x) \frac{150}{30-x} = (30-x)(30+x) \frac{450}{30+x}$$

$$(30+x)150 = (30-x)450$$

$$4500+150x = 13500-450x$$

$$600x = 9000$$

$$x = 15$$

เพราะฉะนั้นกระแสน้ำไหลด้วยอัตราความเร็ว 15 กิโลเมตร/ชั่วโมง

2. แบ่ง 40 ออกเป็นสองส่วน โดยให้ผลบวกของส่วนกลับของทั้งสองส่วนนั้นเท่ากับ  $\frac{8}{75}$  จงหาส่วนแบ่งทั้งสอง
3. เศษส่วนจำนวนหนึ่ง มีค่ามากกว่าเศษอยู่ 5 ถ้านำเอา 35 บวกกับเศษของเศษส่วนจำนวนนั้น เศษส่วนจำนวนใหม่จะเท่ากับส่วนกลับของเศษส่วนจำนวนเดิม จงหาว่าเศษส่วนจำนวนเดิมเป็นเท่าไร
4. ในระยะทาง 200 กิโลเมตร เรือยนต์ลำหนึ่งใช้เวลาแล่นทวนน้ำเป็นสองเท่าของเวลาที่แล่นตามน้ำ ถ้ากระแสน้ำไหลด้วยอัตราเร็วคงที่ ชั่วโมงละ 15 กิโลเมตร จงหาอัตราเร็วของเรือยนต์ลำนี้ในน้ำนิ่ง
5. ในเวลาเท่าๆกัน เครื่องบินลำหนึ่งบินตามกระแสลมได้ทาง 1,062 กิโลเมตร แต่บินทวนกระแสลมจะได้ทาง 738 กิโลเมตร อัตราเร็วของเครื่องบินในขณะลมสงบเป็น 200 กิโลเมตร/ชั่วโมง จงหาอัตราเร็วของกระแสลม

.....

แบบทดสอบวัดทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ให้ท่านเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความเป็นจริงในความรู้ลึกของท่าน

ศึกษาเพิ่มเติมจากบทเรียนโปรแกรม

ผู้ตอบแบบสอบถามอยู่ในกลุ่มที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมแบบ  ทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม

ครูเฉลยแบบทดสอบย่อย

และอธิบายเพิ่มเติม

	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
1. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่ยังเรียนยิ่ง น่าสนใจ					
2. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เนื้อหาไม่ยาก					
3. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่นักเรียนมากกว่าวิชาอื่น					
4. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่ควรบังคับ เรียนในทุกระดับชั้น					
5. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เรียนด้วย ความสนุกสนาน					
6. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่เรียนรู้ได้ อย่างกว้างขวาง					
7. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่มีค่าควรแก่ การศึกษา					
8. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่น่าจะใช้เวลา เรียนให้มากกว่านี้					
9. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่ส่งเสริม ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์					
10. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่สามารถนำไป ใช้ในวิถีชีวิตประจำวันได้					

(๓๕ ลึก)

	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
11. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ช่วยในการ พัฒนาสมอง					
12. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ทันสมัยและ ก้าวหน้าอยู่เสมอ					
13. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ทำให้มนุษย์ มีเหตุผลมากขึ้น					
14. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนแล้วมี ความรู้ลึกซึ้งภาคภูมิใจ					
15. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยอมรับกันมา นานแล้ว					
16. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเนื้อหา ท้าทายความคิดมนุษย์					
17. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นรากฐาน สำคัญในการเรียนวิทยาศาสตร์					
18. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สร้างความ มั่นใจให้กับผู้เรียน					
19. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่คนฉลาด เรียนได้อย่างรวดเร็ว					
20. คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีรากฐาน ทางความคิดอยู่ในระดับสูง					

แบบทดสอบวัดความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง ให้ท่านเขียนเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความเป็นจริงในความรู้สึกของท่าน

ศึกษาเพิ่มเติมจากบทเรียนโปรแกรม

ผู้ตอบแบบสอบถามอยู่ในกลุ่มที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมแบบ  ทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติม

ครู เสนอแบบทดสอบย่อย

และอธิบายเพิ่มเติม

	เป็นจริง มากที่สุด	เป็นจริง	เฉย ๆ	เป็นจริง น้อย	เป็นจริง น้อยที่สุด
1. ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มากกว่าวิชาอื่น					
2. ฉันชอบทดลอง คิดแก้ปัญหาเพื่อหา คำตอบจากโจทย์คณิตศาสตร์					
3. ฉันคิดว่าคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่น่า เบื่อหน่ายไม่น่าสนใจเลย					
4. เมื่อพ้นออกนอกห้องเรียนแล้วฉัน ไม่ชอบเก็บเอาคณิตศาสตร์มาคิดอีก					
5. ฉันมักจะรวบรวมโจทย์ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ที่น่าสนใจไปฝึกและทำ ที่บ้านอีก					
6. ฉันไม่ค่อยชอบคณิตศาสตร์ เพราะ ตัวอย่างและโจทย์คณิตศาสตร์มัก จะยากทำให้ต้องใช้ความคิดหนัก					
7. คณิตศาสตร์ เป็นวิชาหนึ่งที่ฉันสนใจ เรียนมากที่สุด และจะพยายาม ชวนชวายนคนกว่าในเรื่องนี้ต่อไป ให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้					

(พลิก)

	เป็นจริง มากที่สุด	เป็นจริง	เฉยๆ	เป็นจริง น้อย	เป็นจริง น้อยที่สุด
8. มีความเห็นวาคณิตศาสตร์เป็นวิชา ที่สำคัญที่สุดที่ควรจะต้องอุทิศเวลา อย่างมากเพื่อใช้ในการเรียน คณิตศาสตร์ในโรงเรียน					
9. ฉันเบื่อคณิตศาสตร์มากและคาดว่า จะพยายามหลีกเลี่ยงไม่เลือก เรียนคณิตศาสตร์ในการเรียนชั้น สูงๆ ต่อไปอีก					
10. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากซึ่งเรียน แล้วไม่รู้สึกสนุกสนานเลย					

ภาคผนวก ข.

1. ตารางแสดงค่าความไว (Sensitivity index) ข้อสอบย่อย
2. ตารางแสดงค่าความยากและอำนาจจำแนกของข้อสอบรวม
3. ตารางแสดงค่าสถิติพื้นฐานของแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับ

ตารางแสดงค่าความไว (Sensitivity index) ของข้อสอบย่อย 6 ฉบับ

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ	ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ
1	.09	1	.35
2	-	2	.56
3	.13	3	.26
4	.06	4	.29
5	.35	5	-
6	.00	6	.73
7	.19	7	.44
8	.35	8	.03
9	.30	9	.69
10	.43	10	.43
11	.13		
12	.25		
13	.12		
14	.40		
15	.65		

ตารางแสดงค่าความไวของข้อสอบย่อย(ต่อ)

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4

ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ	ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ
1	.33	1	.07
2	.46	2	.44
3	.27	3	.31
4	.13	4	.19
5	.20	5	.27
6	.13	6	.35
7	.50	7	.23
8	.30	8	.41
9	.16	9	.30
10	.50	10	.32

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 5

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 6

ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ	ข้อสอบ	ค่าความไวของข้อสอบ
1	.37	1	.14
2	.83	2	.28
3	.42	3	.41
4	.49	4	.73
5	.46	5	.45

## ตารางแสดงค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบรวม

ข้อสอบ	FH	PL	p	r	ข้อสอบ	FH	PL	p	r
1	.95	.60	.77	.35	29	.55	.35	.42	.25
2	.90	.65	.77	.25	30	.65	.25	.45	.40
3	.90	.60	.75	.30	31	1.00	.85	.92	.15
4	.95	.80	.87	.15	32	.40	.27	.30	.20
5	.95	.35	.65	.60	33	.55	.30	.40	.20
6	.90	.35	.63	.55	34	.80	.10	.45	.70
7	.90	.70	.55	.20	35	.95	.50	.72	.45
8	.80	.30	.55	.50	36	.80	.40	.60	.40
9	.95	.45	.70	.50	37	.70	.45	.57	.25
10	.85	.60	.73	.25	38	.45	.30	.37	.15
11	1.00	.75	.86	.25	39	.85	.60	.72	.25
12	1.00	.70	.85	.30	40	.85	.25	.55	
13	.75	.45	.60	.30	41	.80	.15	.47	.65
14	.95	.70	.83	.25	42	.45	.20	.32	.25
15	.80	.45	.62	.35	43	.95	.45	.70	.50
16	.90	.70	.80	.20	44	.90	.40	.65	.50
17	1.00	.80	.90	.20	45	1.00	.50	.75	.50
18	.95	.70	.82	.25	46	1.00	.25	.62	.75
19	.95	.65	.80	.30	47	1.00	.30	.65	.70
20	.55	.15	.35	.40	48	1.00	.65	.82	.35
21	.85	.35	.60	.50	49	1.00	.60	.80	.40

ตารางแสดงค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบรวม (ต่อ)

ข้อสอบ	FH	FL	p	r	ข้อสอบ	FH	FL	p	r
22	.95	.60	.77	.35	50	.85	.25	.55	.60
23	.90	.45	.67	.45	51	.45	.10	.27	.35
24	1.00	.45	.72	.55	52	.95	.35	.65	.60
25	.75	.35	.55	.40	53	.45	.30	.37	.15
26	1.00	.85	.92	.15	54	.95	.75	.85	.20
27	1.00	.75	.87	.25	55	1.00	.65	.82	.35
28	.80	.40	.60	.40					

ค่าสถิติพื้นฐานของแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับ

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม14)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม
N	30	30	30	30	13	11	18	-
$\bar{X}$	10.86	10	10.36	11.26	12.38	11.36	12.60	-
$s^2$	5.56	7.17	5.35	4.37	1.26	3.05	1.90	-
S.D.	2.35	2.67	2.31	2.09	1.12	1.74	1.37	-

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม 9)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม
N	30	30	30	30	4	4	6	-
$\bar{X}$	7.86	7.73	7.90	7.93	7.75	8	7.66	-
$s^2$	1.08	2.06	1.88	1.30	.25	0	.27	-
S.D.	1.04	1.43	1.37	1.13	.50	0	.51	-

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 3

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม10)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	ควบคุม
N	30	30	30	30	9	8	12	-
$\bar{X}$	8.30	8.16	7.76	8.30	8.60	8.37	9	-
$s^2$	2.97	1.93	3.84	2.46	.54	.69	.54	-
S.D.	1.72	1.39	1.95	1.57	.73	.83	.73	-

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 4

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม 10)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
N	30	30	30	30	20	15	20	-
$\bar{X}$	6.83	6.93	6.66	6.96	8.70	8.73	8.75	-
$s^2$	2.07	3.16	2.29	3.34	.53	.49	.72	-
S.D.	1.44	1.77	1.51	1.82	.73	.70	.85	-

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 5

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม 5)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
N	30	30	30	30	7	9	5	-
$\bar{X}$	4.23	4	4.30	3.70	4.28	4.33	4.40	-
$s^2$	1.15	.96	.97	1.41	.23	.25	.30	-
S.D.	1.07	.88	.98	1.19	.48	.50	.54	-

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 6

	การทดสอบครั้งแรก(คะแนนเต็ม 5)				การทดสอบภายหลังซ่อมเสริม			
	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
N	30	30	30	30	7	7	4	-
$\bar{X}$	3.96	4.10	4.33	3.96	4.28	4.28	4.75	-
$s^2$	.95	.71	.50	1.05	.23	.23	.25	-
S.D.	.97	.84	.71	1.02	.48	.48	.50	-

การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะคิดและความสนใจ  
ในวิชาเรียน จากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธี ในทฤษฎีการเรียนรู้  
เพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) วิชาคณิตศาสตร์  
เรื่องโพลิโนเมียล ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ

ของ

ศาสตราจารย์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2525

จุดมุ่งหมายของการวิจัยในครั้งนี้เพื่อต้องการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ทักษะคิดที่มีต่อวิชาเรียน และความสนใจในวิชาเรียน จากการสอนซ่อมเสริม 3 วิธี ในกระบวนการเรียนเพื่อรอบรู้ (Mastery Learning) อันได้แก่ การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยเพิ่มแบบฝึกหัดตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง การสอนซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรมตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่บกพร่อง และการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโพลีโนเมียล ระยะเวลาที่ทำการทดลอง คือระหว่างเดือนพฤศจิกายนถึงเดือนธันวาคม พ.ศ. 2524 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนนารีรัตน์ อำเภอเมือง จังหวัดแพร่ จำนวน 120 คน แบ่งออกเป็นกลุ่มทดลอง 3 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม นักเรียนแต่ละกลุ่มมี 30 คน การจัดนักเรียนแต่ละคน ให้อยู่ในกลุ่มต่าง ๆ ใ้วิธีสุ่มอย่างง่าย สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) การทดสอบความแตกต่างรายเฉลี่ยของคะแนนรายคู่โดยวิธีของนิวแมน-คีลส์ (Newman - Keuls Procedure)

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่องเป็นการรวม ๆ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ไม่ได้รับการซ่อมเสริม และภายหลังจากการสอนจบแล้วทัศนคติที่มีต่อวิชาเรียนของกลุ่มทดลองทุกกลุ่มสูงขึ้น กว่าก่อนการทดลองสอน แต่ทัศนคติและความสนใจในวิชาเรียนของกลุ่มทดลองทั้ง 3 กลุ่มที่วัดหลังจากการสอนจบแล้วไม่แตกต่างกัน การซ่อมเสริมเป็นกลุ่มโดยการเฉลยแบบทดสอบย่อย-อธิบายข้อบกพร่อง ใช้เวลาในการซ่อมเสริมน้อยสุด รองลงมาเป็นการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และการซ่อมเสริมเป็นรายบุคคลโดยเพิ่มแบบฝึกหัดใช้เวลาในการซ่อมเสริมมากที่สุด การสอนซ่อมเสริมโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสามารถลดความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ลงได้มากที่สุด

A COMPARATIVE STUDY OF THE EFFECTS OF THREE METHODS  
OF REMEDIAL INSTRUCTION IN MASTERY LEARNING  
ON STUDENTS' ACHIEVEMENT, ATTITUDE  
AND INTEREST IN MATHEMATICS  
NATAYONSUKSA 3

AN ABSTRACT  
BY  
SATHORN GALDAMEE

Presented in partial fulfillment of the requirements  
for the Master of Education degree  
at Srinakharinwirot University  
March 1962

The purpose of this study was to compare the learning achievement, attitude and interest towards mathematics by using 3 methods of remedial in the process of mastery learning on the topic 'Polynomial'. The 3 methods were 1) remedial teaching by giving more exercises individually according to the behavioral objectives that each student failed to achieve those objectives 2) individual remedial teaching by using the program instructions 3) feedback/correction by reteaching and discussion in group. The study was performed from November to December 1991. The subject were 120 students in M.S. 3 at Margaret School in Phrae. The students were divided equally into 3 experimental groups and one controlled group by the simple randomized method and there were 30 students in each group.

ANOVA was used to analyse the data and the Newman - Keuls Procedure was also used to test the difference of arithmetic means.

The result of the study suggested that the learning achievement of the students of the group which remedied by the method of feedback/correction by reteaching and discussion in group was higher than that of the other groups. The variation of the learning achievement of the three experimental groups was decreased. Having finish the lessons, the students in the experimental groups got higher attitude towards the lessons than that before the lessons. But the

attitude and interest towards the lessons of the students in the 3 experimental groups were not different from each other. The remedial by the method of feedback/correction in group took the least time. The remedial method which took most time was that by adding more exercises individually.

## ประวัตินิติปรัชญาโท

1. ชื่อ นายสาทร แกนมณี  
เกิดวันที่ 21 สิงหาคม 2495
2. ประวัติการศึกษา
  - พ.ศ. 2513 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (แผนกวิทยาศาสตร์)  
จากโรงเรียนปรีณสรอยแยลส์ วิทยาลัย เชียงใหม่
  - พ.ศ. 2516 ประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง  
จากวิทยาลัยครูอุบลราชธานี
  - พ.ศ. 2519 การศึกษามัธยมศึกษา (วิชาเอกภาษาอังกฤษ)  
จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม
  - พ.ศ. 2525 การศึกษามหาบัณฑิต (การมัธยมศึกษา-การสอน  
คณิตศาสตร์)  
จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
3. ตำแหน่งหน้าที่
  - พ.ศ. 2519 อาจารย์ 1 ระดับ 3 โรงเรียนนโยโสธรพิทยาคม  
จังหวัดยโสธร
  - พ.ศ. 2521 - ปัจจุบัน อาจารย์ 1 ระดับ 4 โรงเรียนนารีรัตน์  
จังหวัดแพร่
4. ที่อยู่ปัจจุบัน 172/3 ยंत्रกิจโกศล อำเภอเมือง จังหวัดแพร่  
โทร.511124