

อุณหพลศาสตร์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

ปริญญานิพนธ์
ของ
สุรพร จุลนพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2549

อุณหพลศาสตร์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

บทคัดย่อ
ของ
สุรพร จุลนพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2549

สุวรรณ จุลนพ. (2549). อุณหพลศาสตร์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก ปริญญาโท วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : ศ.ดร. สุทัศน์ ยกส้าน, ผศ. ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต (T_C) ผลต่างความร้อนจำเพาะ $\Delta C(T_C)$ ของตัวนำยิ่งยวดที่มีสองแถบพลังงานและมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กโดยใช้กรีนส์ฟังก์ชัน โดยพิจารณาอิทธิพลระหว่างอันตรกิริยาดึงดูดของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b (g_{aa}, g_{bb}) และอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b (g_{ab}) ในเงื่อนไขว่าอันตรกิริยาเป็นแบบอ่อน

ผลการคำนวณแสดงว่า ในกรณีตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มเสมอเมื่อ g_{aa}, g_{bb} และ g_{ab} มีค่าเพิ่มขึ้น และผลต่างความร้อนจำเพาะลดลงเมื่อ g_{aa}, g_{bb} และ g_{ab} เพิ่มขึ้น ในกรณีที่ $g_{ab} = 0$ จะได้สูตรของอุณหภูมิวิกฤตและผลต่างความร้อนจำเพาะสอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ส่วนในกรณีตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก พบว่าสมการอุณหภูมิวิกฤตและผลต่างความร้อนจำเพาะที่ได้จะครอบคลุมทั้งกรณีตัวนำยิ่งยวดแถบพลังงานเดี่ยวและสองแถบพลังงานมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กและเมื่อสารเจือมีความเข้มข้นเพิ่มขึ้นอุณหภูมิวิกฤตลดลงและผลต่างความร้อนจำเพาะลดลงเช่นกัน

THERMODYNAMICS OF MAGNESIUM DIBORIDE WITH NON-MAGNETIC IMPURITIES

AN ABSTRACT

BY

SUWORAPORN JULLANOPE

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master of Science Degree in Physics
at Srinakharinwirot University

May 2006

Suworaporn Jullanope. (2006). *Thermodynamics of Magnesium Diboride with Non-magnetic Impurities*. Master thesis, M.S. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Prof. Suthat Yoksan, Assist. Prof. Pongkraew Udomsamuthirun.

The purpose of this research is to calculate the critical temperature (T_C) and the specific heat jump $\Delta C(T_C)$ of two-band superconductors in containing non-magnetic impurities by using the Green's function. By considering the influence of the intraband pairing interaction (g_{aa}, g_{bb}) and interband pairing interaction (g_{ab}) in the weak-coupling limit.

It is found that in the pure case, the critical temperature increases as g_{aa}, g_{bb} and g_{ab} increases and the specific heat jump decreases as g_{aa}, g_{bb} and g_{ab} increases. When $g_{ab} = 0$ the T_C and $\Delta C(T_C)$ formulas as in the BCS theory is reobtained. In the impure case with nonmagnetic impurities, it is found that T_C and $\Delta C(T_C)$ formulas recover the formulas for one-band superconductors and two-band superconductors with non-magnetic impurities, and that T_C decreases when the impurity concentration increases whereas $\Delta C(T_C)$ decreases when the impurity concentration increases.

อุณหพลศาสตร์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุวรรพร จุลนพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2549

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

อุณหพลศาสตร์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

ของ
นางสาวสุรพร จุลนพ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาสตรมหาบัณฑิต สาขาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญศิริ จิระเดชากุล)
วันที่.....เดือน พฤษภาคม พ.ศ.2549

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ ดร.วิชุดา บุญรัตน์)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ดร.รัศมีดารา หุ่นสวัสดิ์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และได้ตรวจแก้ไขข้อพร่องต่างๆตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ในการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งได้ใช้ในงานวิจัยนี้ โดยพร้อมให้คำปรึกษาเสมอมา กราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.รัศมีดารา หุ่นสวัสดิ์ และ อาจารย์ ดร. วิชุดา บุญรัตนกลิน ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่าน ที่คอยช่วยเหลือและเป็นที่กำลังใจในการทำงานวิจัยตลอดมา

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และญาติๆ ทุกคน ที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

สุวรรพร จุลนพ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ตัวนำเวดย้งแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	5
สมบัติทางด้านกายภาพของแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	7
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องของตัวนำเวดย้งแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	8
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	17
ทฤษฎีตัวนำเวดย้งชนิดสองแถบพลังงานของซูล แมทไทอัสและวอลค์เคอร์.....	17
งานวิจัยของบุนสแมนน์-โฮลเตอร์.....	20
งานวิจัยของอุดมสมุทรศิริ.....	21
งานวิจัยของโอฮาชิ.....	22
3 การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต.....	33
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดย้งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์... ..	33
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดย้งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือ ประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก.....	40
4 การคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะ.....	51
การคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำเวดย้งที่มีสองแถบพลังงานและ บริสุทธิ์.....	51
การคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำเวดย้งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมี สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก.....	66
5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ.....	83
สรุปผลการวิจัย.....	83
อภิปรายผล.....	91
ข้อเสนอแนะ.....	92
บรรณานุกรม.....	93
ภาคผนวก.....	97
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	100

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคูคูเปอร์.....	2
2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	6
3 โมเลกุลของแมกนีเซียมไดโบไรด์ประกอบด้วยอะตอมของโบรอน (B) เรียงต่อในระนาบ 6 เหลี่ยมคั่นระหว่างระนาบอะตอมของแมกนีเซียม(Mg) รูปทรงจึงเป็นแบบเฮกซะโกนอล โคลส แพค (hexagonal-close-packed).....	7
4 แสดงความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน σ และแถบพลังงาน π	8
5 แสดงผิวเฟอร์มิของแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	8
6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิของแมกนีเซียมไดโบไรด์	9
7 ความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่งสำหรับ $B = 0$ ที่ช่วงอุณหภูมิ 2 – 40 K และความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติ ที่ $B = 10, 14, 16$ T.....	11
8 แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลการทดลองของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่สองของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับทฤษฎีสำหรับแบบจำลองสองแถบพลังงาน.....	11
9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ขณะมีและไม่มีสนามแม่เหล็กกับอุณหภูมิ.....	12
10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ...	13
11 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้าต่อศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลง.....	13
12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ...	14
13 แสดงผลการทดลองของCu–MgB ₂ ที่อุณหภูมิ 4.2 Kขณะที่ $\Delta_s = 2.8 \pm 0.1$ meV และ $\Delta_L = 6.8 \pm 0.3$ meV ตามลำดับ.....	14
14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ...	15
15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ...	16
16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{A, B}{kT_C}$ กับ T/T_C โดยที่ $A = g_{ab}D + g_{bb}S$ และ $B = g_{bb}D + g_{ab}S$	19
17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าคงตัวของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน ($V_{1,2}$)	21

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_C) ในกรณีความหนาแน่นสถานะเป็นแบบแวนโฮป โดยกำหนดให้ $E_F = 5000K$, $\omega_D = 745K$ และ $\omega_C = 800K$	22
19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับ $ \bar{v}_{ab} $	31
20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับความเข้มข้นของสารเจือ $u_j = n_{imp}/(\pi N_j(0))$ ในรูปนี้กำหนดให้ $u_a = u_b$ และกำหนดให้ $\bar{g}_{aa} = 0.3$, $\bar{g}_{bb} = 0.25$, $\alpha_a = \alpha_b = 0$ และ $ \bar{v}_{ab} = 1$	32
21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_C} \rightarrow \infty$	36
22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_C} \rightarrow \infty$	36
23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$	38
24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$	39
25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x_c กับ $g_{aa}N_a(0)$	57
26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x_c กับ $g_{bb}N_b(0)$	58
27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x_c กับ $g_{ab}N_b(0)$	58
28 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$ กับ $g_{ab}N_b(0)$	61
29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_C)/C_N$ กับ $g_{aa}N_a(0)$	63
30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_C)/C_N$ กับ $g_{bb}N_b(0)$	64
31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta C(T_C)/C_N$ กับ $g_{ab}N_b(0)$	65

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ผลการทดลองหนึ่งที่มีความสำคัญมาก ในการคิดทฤษฎีที่ใช้อธิบายสภาพนำยวดยิ่ง คือ ปรากฏการณ์ไอโซโทป (isotope effect) ซึ่งเกิดจากการวัดอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแล้ว พบว่าอุณหภูมิวิกฤต (T_C) มีค่าขึ้นกับมวลของอะตอม (M) ของสารโดยมีความสัมพันธ์กันตามสมการ

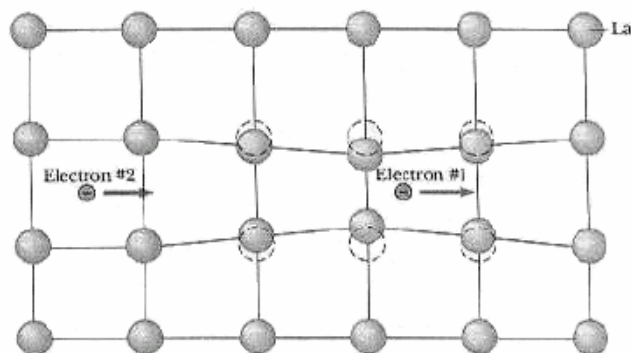
$$M^\alpha T_C = \text{ค่าคงที่} \quad (1.1)$$

เมื่อ T_C คือ อุณหภูมิวิกฤต M คือ มวลอะตอม และ $\alpha = 1/2$ ทฤษฎีบีซีเอส จึงใช้ข้อมูลนี้อธิบายความถี่ในการสั่นของอะตอมในแลตทิซ (ω_D) ที่มีความสัมพันธ์กับมวลอะตอมเป็น

$$\omega_D \propto M^{-1/2} \quad (1.2)$$

ดังนั้นปรากฏการณ์ไอโซโทปจึงชี้ให้เห็นว่าสภาพนำยวดยิ่งเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซ

ทฤษฎีบีซีเอสของ บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชริฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper; & Schrieffer. 1957 : 1175) สามารถอธิบายปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งได้ว่า เกิดจากการที่อิเล็กตรอนจับคู่กันโดยอาศัยอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (phonon) คือ เมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่เข้าไประหว่างกลุ่มออสซิลเลชันที่มีประจุบวกในแลตทิซผลึก อิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดออสซิลเลชันบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ ทำให้บริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนนั้นมีความหนาแน่นของออสซิลเลชันบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งส่งผลต่ออิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งที่อยู่ใกล้ๆ บริเวณนั้นจะถูกกลุ่มของออสซิลเลชันบวกดึงดูดให้พุ่งเข้าหากลุ่ม ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคูคูเปอร์
ที่มา: Tsuei; & Kirtley. (1996) : 6

เหตุการณ์นี้จึงเปรียบเสมือนอิเล็กตรอนสองตัวมีอันตรกิริยาดึงดูดกันซึ่งเกิดจากการที่อิเล็กตรอนแลกเปลี่ยนโฟนอนกัน โดยโฟนอนนั้นเกิดจากการสั่นของแลตทิซผลึกที่มีอิเล็กตรอนอยู่ และอันตรกิริยาดึงดูดนี้ต้องมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาผลึกแบบคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน อิเล็กตรอนจึงจับคู่กันได้ อิเล็กตรอนที่จับคู่กันในที่นี้เรียกว่า คูคูเปอร์ (Cooper pair)

ในการจับคู่ของอิเล็กตรอนทำให้พลังงานรวมลดลง จึงเป็นผลให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Δ) ขึ้น และความแตกต่างของพลังงานที่สถานะพื้นกับสถานะกระตุ้นมีค่าเท่ากับช่องว่างพลังงาน (energy gap)

เป็นที่ทราบกันดีว่า ความต้านทานไฟฟ้าเกิดจากการสูญเสียพลังงานของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ไปในแลตทิซผลึก แต่ถ้ามีช่องว่างพลังงานเกิดขึ้นในแถบพลังงานอิเล็กตรอน การชนกันระหว่างอิเล็กตรอนก็ไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาพคอนดัม อิเล็กตรอนจึงสามารถเคลื่อนที่ไปได้โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงสภาพนั้นแสดงให้เห็นการไม่มีความต้านทานไฟฟ้า

การทดลองที่บ่งชี้ว่ามีช่องว่างพลังงาน คือการเปลี่ยนแปลงของความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิ คือเมื่อลดอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งจนถึงอุณหภูมิวิกฤตค่าของความร้อนจำเพาะจะมีค่าไม่ต่อเนื่อง คือ มีค่าเพิ่มขึ้นทันทีทันใดก่อนจะลดลงแบบเอ็กโปเนนเชียล เมื่ออุณหภูมิใกล้ศูนย์ องศาสัมบูรณ์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิเป็นดังสมการ

$$C_V = a \exp\left[\frac{-bT_C}{T}\right] \quad (1.3)$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

ทฤษฎีบีซีเอสได้อธิบายว่าอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับพารามิเตอร์เฉพาะของสารสามค่าคือ ความถี่เดอบาย (ω_D) อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (V) และ ความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มี ($N(0)$)

ดังนั้นการอุณหภูมิวิกฤตคือ

$$T_C = 1.13 \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \exp[-1/VN(0)] \quad (1.4)$$

จากสมการ(1.4) ความถี่เดอบาย ω_D คือ ความถี่การสั่นของแลตทิซผลึก โดยพิจารณาการยืดหยุ่นของอะตอมในแลตทิซผลึกเปรียบเสมือนมวลสองก้อนที่ยึดเหนี่ยวกันด้วยสปริง จากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอน จะทำให้อะตอมในแลตทิซผลึกสั่นด้วยความถี่ $\omega = (k/m)^{1/2}$ เมื่อ k คือ ค่าคงที่ของสปริง และจากปรากฏการณ์ไอโซโทป ทำให้สามารถอธิบายได้ว่าอุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามส่วนกลับของรากที่สองของมวลอะตอม ถ้าความถี่เดอบาย ω_D เพิ่มขึ้น ทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นได้ดังนี้ จากสมการ (1.4) หากอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ ω_D จะได้

$$dT_C = 1.13 \frac{\hbar}{k_B} \exp\left[\frac{-1}{VN(0)}\right] d\omega_D \quad (1.5)$$

หารสมการ (1.5) ด้วย สมการ (1.4) จะได้

$$\frac{dT_C}{T_C} = d\omega_D \quad (1.6)$$

จากสมการ (1.6) แสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามความถี่เดอบาย

อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (V) เป็นสิ่งที่บ่งชี้ถึงความแรงของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน ถ้าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนเพิ่มขึ้นจะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นได้ดังนี้ จากสมการ (1.4) หากอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ V จะได้

$$dT_C = 1.13 \frac{\hbar \omega_D}{k_B N(0) V^2} \exp\left[\frac{-1}{VN(0)}\right] dV \quad (1.7)$$

หารสมการ (1.7) ด้วย สมการ (1.4) จะได้

$$\frac{dT_C}{T_C} = \frac{1}{N(0) V^2} dV \quad (1.8)$$

จากสมการ (1.8) หมายความว่า อุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน แต่ถ้าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนมีค่าสูงเกินไป แรงดึงดูดจะทำให้เกิดการเปลี่ยนสถานะได้ (phase transition) คือจะทำให้โครงสร้างผลึกเปลี่ยนไป

ความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มี $N(0)$ คือ จำนวนของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มี ซึ่งมีบทบาทในการทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง ถ้าความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มีมากก็จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้น โดยพิจารณาจากสมการ (1.4) หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับ $N(0)$ จะได้

$$dT_C = 1.13 \frac{\hbar \omega_D}{k_B N^2(0)V} \exp\left[\frac{-1}{VN(0)}\right] dN(0) \quad (1.9)$$

หารสมการ (1.9) ด้วย สมการ (1.4) จะได้

$$\frac{dT_C}{T_C} = \frac{1}{N^2(0)V} dN(0) \quad (1.10)$$

จากสมการ (1.10) แสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มี

ดังนั้นในการทำให้ตัวนำยวดยิ่งมีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้น ทฤษฎีบีซีเอสจึงพิจารณาที่ความถี่เดอบาย ω_D และ $N(0)$ มากกว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน เพราะว่ อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (V) ยกในการคำนวณและควบคุม

หลังจากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งชนิดต่างๆ และได้ศึกษาสมบัติเชิงกายภาพต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งแล้ว นักวิทยาศาสตร์ก็ได้พยายามค้นหาสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นๆ เพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในอุตสาหกรรม แต่ความพยายามในช่วงแรกๆ ไม่ประสบความสำเร็จเพราะสถิติอุณหภูมิวิกฤตสูงสุดอยู่ที่ 23 K ในสารประกอบไนโอเบียมเจอมาเนียม (Nb_3Ge) จนกระทั่งปี ค.ศ. 1986 เบ็ดนอร์ช และมุลเลอร์ (Bednorz & Muller. 1986 :189) ได้พบว่าในสารประกอบ La-Cu-O ซึ่งเมื่อถูกเจือด้วย Ba จะเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิประมาณ 35 K ในปัจจุบันสถิติอุณหภูมิวิกฤตสูงสุดอยู่ที่ 160 K (Canfield & Crabtree. 2003 : 34)

การวิจัยสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงพบว่ามีสมบัติต่างๆ ที่แตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ เช่น สมมาตรของการจับคู่ของคลื่น d , ช่องว่างพลังงานเทียม นักวิทยาศาสตร์ได้พยายามสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงให้สอดคล้องกับผลการทดลอง บางทฤษฎีก็ใช้ทฤษฎีบีซีเอสเป็นพื้นฐานแต่มีการเปลี่ยนแปลงในรายละเอียดบางประการ

ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงที่พบส่วนมากเป็นสารประกอบออกไซด์ และยังพบตัวนำยวดยิ่งที่มีคุณสมบัติแตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตต่ำ ได้แก่ สารประกอบเฟอร์มีออนหนัก (heavy-fermion), สารประกอบอินทรีย์ (organic) และที่สร้างความตื่นเต้นให้แก่วงการ

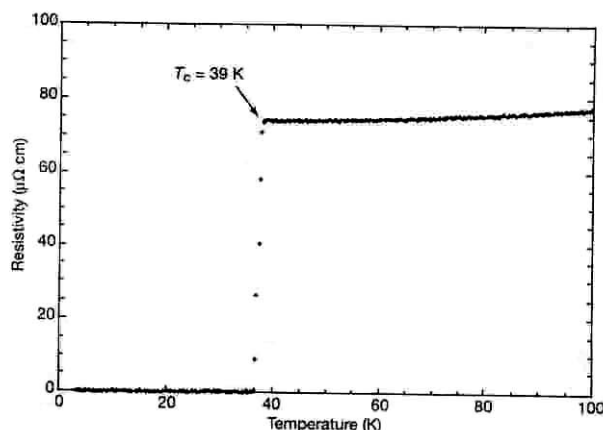
วิทยาศาสตร์ เมื่อปี ค.ศ. 2001 คือ การค้นพบสารประกอบแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ที่อุณหภูมิวิกฤต 40 K (Canfield; & Crabtree. 2003 : 34)

สาเหตุที่นักวิทยาศาสตร์สนใจในการศึกษาวิจัย แมกนีเซียมไดโบไรด์กันมาก ทั้งๆที่อุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพียง 40 K ซึ่งเมื่อเทียบกับตัวนำยวดยิ่งบางชนิดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงถึง 160K แล้วนับว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีอุณหภูมิวิกฤตต่ำมาก แต่จุดเด่นที่ทำให้แมกนีเซียมไดโบไรด์น่าสนใจคือ แมกนีเซียมไดโบไรด์ใช้ไฮโดรเจนเหลวในการควบคุมอุณหภูมิ ซึ่งไฮโดรเจนมีมากทำให้ไฮโดรเจนเหลวผลิตได้ง่าย มีราคาถูก และสะดวกในการใช้งาน นอกจากนี้แมกนีเซียมไดโบไรด์ยังประกอบด้วยธาตุที่เป็นโลหะเพียงสองชนิดซึ่งธาตุทั้งสองราคาถูกและมีโครงสร้างไม่ซับซ้อน แต่เทคนิคในการสร้างแมกนีเซียมไดโบไรด์ก็ไม่ใช่เรื่องง่าย วิธีหนึ่งที่ใช้ในการสร้างแมกนีเซียมไดโบไรด์ คือ การปล่อยให้ไอของแมกนีเซียม(Mg) ที่ความดันสูง ไปจับกับโบรอน (B) ที่อุณหภูมิ 900 K และมีการลดอุณหภูมิทุกๆ 2 ชั่วโมง

ตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ทฤษฎีบีซีเอสนั้นอธิบายได้ว่า เวลามวลอะตอมของธาตุมีค่าน้อยอันตรกิริยาระหว่างอะตอมจะทำให้โหมด (mode) การสั่นของโฟนอนมีความถี่สูง จึงเป็นผลให้ตัวนำยวดยิ่งที่ทำด้วยสารมวลอะตอมเบาที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูง เช่น ในปี ค.ศ. 1967 (Falge. 1967 : 579) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงความต้านทานไฟฟ้าของเบอริลเลียมซึ่งผลปรากฏว่าความต้านทานไฟฟ้าได้ลดลงทันทีที่ทันใดที่อุณหภูมิ 0.026 K ภายใต้ความดันปกติ ในปี ค.ศ. 1968 (Aschroft. 1968 : 1748) ได้ทำนายว่าเพราะอะตอมไฮโดรเจนมีมวลน้อยที่สุดดังนั้นไฮโดรเจนถ้าเป็นตัวนำยวดยิ่งจะมีอุณหภูมิวิกฤตสูงที่สุด ปีค.ศ.1986 (Lin; & Dunn. 1986 : 807) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงความต้านทานไฟฟ้าของลิเทียมภายใต้ความดันสูง และได้พบว่าความต้านไฟฟ้าของลิเทียมจะลดลงทันทีที่ทันใดที่อุณหภูมิ 7 K และอุณหภูมิวิกฤตของสารเหล่านี้จะเพิ่มขึ้น 9-10 K เมื่อถูกทำเป็นฟิล์มอสัณฐาน (Takai; et al. 1985 : 5093) ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1994 นักฟิสิกส์ได้สนใจศึกษาตัวนำยวดยิ่งที่มีองค์ประกอบเป็นโลหะเบา เช่น โบรอน เนื่องมาจากการค้นพบโบโรคาร์ไบด์ (borocarbide) คุณสมบัติพิเศษของสารนี้คือ มีอุณหภูมิวิกฤตที่สูงถึง 23 K และมีสนามแม่เหล็กวิกฤตสูงมาก (Nagarajan; et al. 1994 : 274) และการค้นพบแมกนีเซียมไดโบไรด์ของ Nagamatsu (Nagamatsu; et al. 2001 : 63) จึงยืนยันคำทำนายที่ว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์จะมีอุณหภูมิวิกฤตสูง เนื่องจากมี B เป็นอะตอมองค์ประกอบที่มีมวลอะตอมเบา ในปี 2001 (Kortus; et al. 2001 : 4656)

นักเคมีรู้คุณสมบัติของแมกนีเซียมไดโบไรด์ในสถานะปกติเป็นอย่างดีตั้งแต่ปี ค.ศ. 1950 แต่เมื่อปี ค.ศ. 2001 ได้มีการพบว่าสารประกอบชนิดนี้มีสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิสูงถึง 40 K คือ เกือบ 2 เท่าของสถิติสูงสุดของอุณหภูมิวิกฤตเดิมที่ 23K



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของแมกนีเซียมไดโบไรด์

ที่มา: Nagamatsu; et al. (2001) : 63

คำถามจึงมีว่าปัจจัยอะไรทำให้แมกนีเซียมไดโบไรด์มีอุณหภูมิวิกฤตสูงมากเป็นพิเศษ การมีโครงสร้างผลึกแบบง่ายหรือการมีระยะอาพันธ์ยาว หรือการมีความหนาแน่นกระแสวิกฤต และสนามวิกฤตสูง ณ วันนี้แมกนีเซียมไดโบไรด์ได้ถูกนำมาทำอุปกรณ์ในรูปแบบต่างๆ ทั้งในสภาพ ผลึกผสม ผลึกเดี่ยว ฟิล์มบาง เทปและลวด ตลอดเวลา 4 ปีที่ผ่านมาการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์ได้กระตุ้นนักฟิสิกส์ให้สนใจสารประกอบประเภทมิโซออกไซด์มากขึ้นและในเวลาต่อมานักวิจัยได้ค้นพบตัวนำยวดยิ่งชนิดอื่นๆ ที่มีโครงสร้างคล้ายแมกนีเซียมไดโบไรด์อีก อาทิ เช่น TaB₂, BeB_{2.75}, แผ่นประกบ C-S รวมทั้งได้มีการศึกษาโบรอนบิสฟุทรี เมื่ออยู่ภายใต้ความดันสูงมากๆ ด้วย (Buzea; & Yamashita. 2001 : 115)

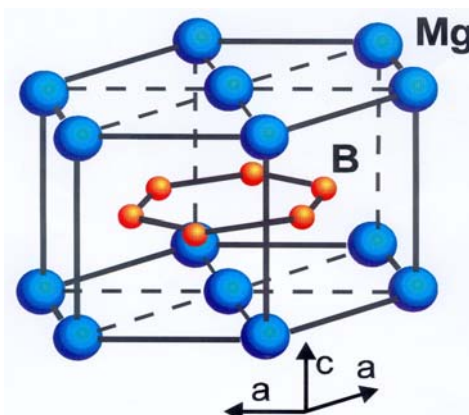
การค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในสารประกอบแมกนีเซียมไดโบไรด์ ได้ชักนำให้นักวิจัยพบตัวนำยวดยิ่งชนิดอื่นๆอีกมากมายเช่น TaB₂ ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤต 9.5 K (Kaczorowski; et al. 2001) BeB_{2.75} มีอุณหภูมิวิกฤต 0.7 K (Young; et al. 2001) สารประกอบระหว่างกราไฟท์กับกำมะถันมีอุณหภูมิวิกฤต 35 K (da Silva; et al. 2001) และ MgCNi₃ ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤต 8 K (He; et al. 2001) สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงถึงระดับ 40 K นี้ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีบีซีเอสธรรมดา

หลังจากมีรายงานการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งของแมกนีเซียมไดโบไรด์ในที่ประชุมเมืองเซนต์ไคประเทศญี่ปุ่น (Nagamatsu; et al. 2001 : 63) ทำให้มีผู้วิจัยเรื่องนี้จำนวนมากขึ้นเรื่อยๆ ในช่วงนั้นมีการตีพิมพ์งานวิจัยโดยเฉลี่ย 1.3 ชิ้นต่อวัน จำนวนงานวิจัยตั้งแต่เดือนมกราคมถึงเดือนกรกฎาคม 2001 มีจำนวนสูงถึง 58 ฉบับ ประเด็นที่กลุ่มวิจัยศึกษาได้แก่การฟอร์มตัวของผลึกMgB₂ ฟิล์มบาง ลวด เทป การวัดค่าดัชนีไอโซโทป ปฏิกิริยาการออกซิเดชัน คุณสมบัติเชิงความร้อน กระแสวิกฤตและสนามวิกฤต เป็นต้น (Buzea; & Yamashita. 2001 : 116)

สมบัติทางด้านกายภาพของแมกนีเซียมไดโบไรด์

สำหรับคำถามที่ว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีคุณสมบัติอะไรที่น่าสนใจเป็นพิเศษ และเหตุใดนักวิทยาศาสตร์จึงให้ความสนใจศึกษามาก ทั้งๆที่อุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพียง 40 K เท่านั้น จุดเด่นซึ่งทำให้แมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นที่น่าสนใจคือ แมกนีเซียมไดโบไรด์ประกอบด้วยธาตุที่เป็นโลหะเพียงสองชนิด คือ Mg และ B และมีโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อน นอกจากนี้หากพิจารณาด้านการประยุกต์ ลวดที่ทำด้วยแมกนีเซียมไดโบไรด์มีคุณสมบัติไม่เปราะง่าย นั่นก็หมายความว่าเราสามารถยืดแมกนีเซียมไดโบไรด์ออกเป็นลวดไฟฟ้าได้ดีและง่ายกว่าลวดที่ทำด้วยตัวนำยิ่งยวดอื่น ๆ ซึ่งส่วนมากเป็นสารประกอบพวกเซรามิกซ์ (Ceramics) ที่เปราะจึงนำมายืดเป็นเส้นได้ยาก นอกจากนี้ประเด็นอุณหภูมิวิกฤต 40 K ที่ต้องใช้ในการทำให้แมกนีเซียมไดโบไรด์มีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดก็ไม่ใช่เรื่องยากเย็นมากสำหรับเทคโนโลยีในปัจจุบัน

แมกนีเซียมไดโบไรด์มีโครงสร้างง่าย ๆ ดังภาพประกอบ 3



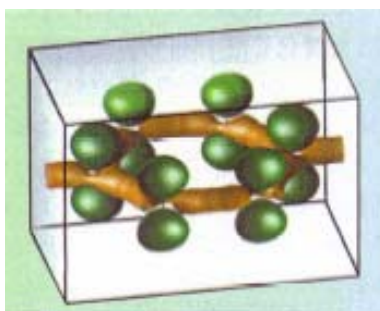
ภาพประกอบ 3 โมเลกุลของแมกนีเซียมไดโบไรด์ประกอบด้วยอะตอมของโบรอน (B) เรียงต่อกันในระนาบ 6 เหลี่ยมคั่นระหว่างระนาบอะตอมของแมกนีเซียม (Mg) รูปทรงจึงเป็นแบบเอกซะโกนอล โคลส แพค (hexagonal-close-packed)

ที่มา: Buzee; & Yamashita. (2001) : 116

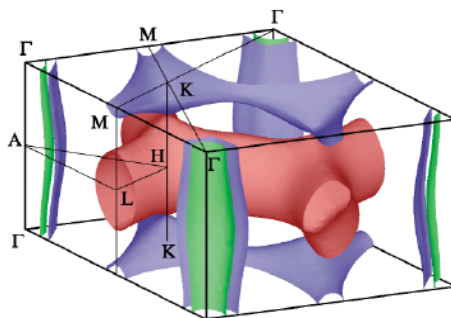
โมเลกุลของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ประกอบด้วยอะตอม 2 ชนิด คือ แมกนีเซียม 1 อะตอม และโบรอน 2 อะตอม อะตอมของโบรอนแต่ละตัวจะจับกับอะตอมของโบรอนข้างเคียงอีก 2 ตัวและเรียงตัวกันในลักษณะเดียวกับแกรไฟต์ คือเป็นที่บริเวณ 6 เหลี่ยมด้านเท่าที่บริเวณบนและล่างระนาบของโบรอนทั้ง 6 ตัวที่จับพันธะเป็น 6 เหลี่ยมด้านเท่ามีอะตอมของแมกนีเซียม 6 อะตอมเรียงแบบเอกซะโกนอล-โคลส-แพค (hexagonal-close-packed) เรียงซ้อนกันตามแกน C ระยะระหว่างระนาบของโบรอนกับระนาบของโบรอนที่อยู่ชั้นถัดไปจะมากกว่าระยะระหว่างอะตอม

โบรอนในระนาบ โครงสร้างโมเลกุลเช่นนี้จึงแสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีคุณสมบัติกายภาพแบบขึ้นกับทิศทาง (anisotropy)

พันธะยึดเหนี่ยวของโบรอนมีสองแบบ คือ พันธะ σ คือ พันธะยึดเหนี่ยวอะตอมโบรอนในระนาบเดียวกัน และ พันธะ π คือ พันธะยึดเหนี่ยวอะตอมโบรอนระหว่างระนาบ นอกจากนี้ยังมีการแลกเปลี่ยนอิเล็กตรอนระหว่างพันธะ σ และ π ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน σ และแถบพลังงาน π แสดงดังภาพประกอบ 4 ผิวเฟอร์มิของแมกนีเซียมไดโบไรด์แสดงดังภาพประกอบ 5



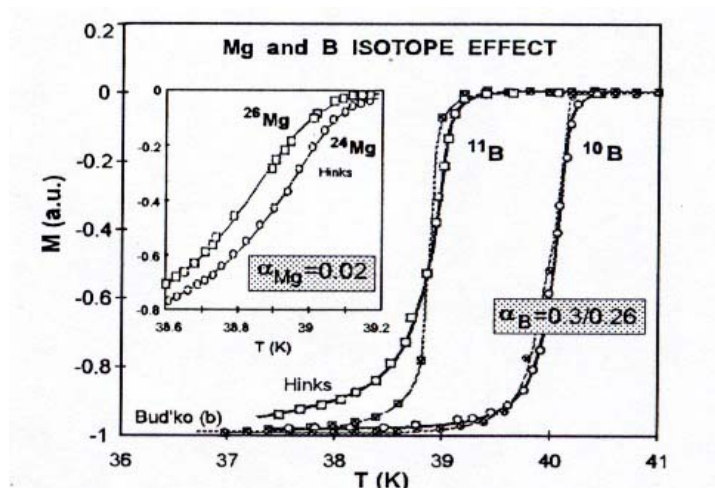
ภาพประกอบ 4 แสดงความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน σ และแถบพลังงาน π ที่มา: Canfield; & Crabtree. (2003) : 37



ภาพประกอบ 5 แสดงผิวเฟอร์มิของแมกนีเซียมไดโบไรด์
ที่มา: Canfield & Crabtree. (2003) : 37

งานวิจัยเกี่ยวกับตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์

ในเดือนกุมภาพันธ์ ปี ค.ศ. 2001 บุคโค และ คณะ (Bud'ko; et al. 2001:1877 ; Buzea; & Yamashita. 2001 : 115 - 146) ได้วัดค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์พบว่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของโบรอนเท่ากับ 0.26 ในปีเดียวกัน ฮิงค์ (Hink; et al. 2001) ได้วัดค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์พบว่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของโบรอนเท่ากับ 0.3 และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมเท่ากับ 0.02 ดังภาพประกอบ 2 ซึ่งแสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของโบรอนว่าทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้น 1 K เมื่อแทน ^{11}B ด้วย ^{10}B ซึ่งการค้นพบนี้เป็นหลักฐานยืนยันที่ชัดเจนว่าสภาพการนำยิ่งยวดเกิดจากการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนโดยการปล่อยและรับโฟนอนในระนาบของโบรอน และการจับคู่เช่นนี้เป็นกลไกสำคัญตามทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่มา: Buzea; & Yamashita. (2001) : 129

จากภาพประกอบ 6 กรณี Mg^{10}B_2 มีอุณหภูมิวิกฤต 40 K และกรณี Mg^{11}B_2 มีอุณหภูมิวิกฤต 39 K จากทฤษฎีบีซีเอส

$$T_C = KM^{-\alpha} \quad (1.11)$$

โดยที่ T_C คือ อุณหภูมิวิกฤต
 K คือ ค่าคงตัว
 M คือ มวลไอโซโทป
 α คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป

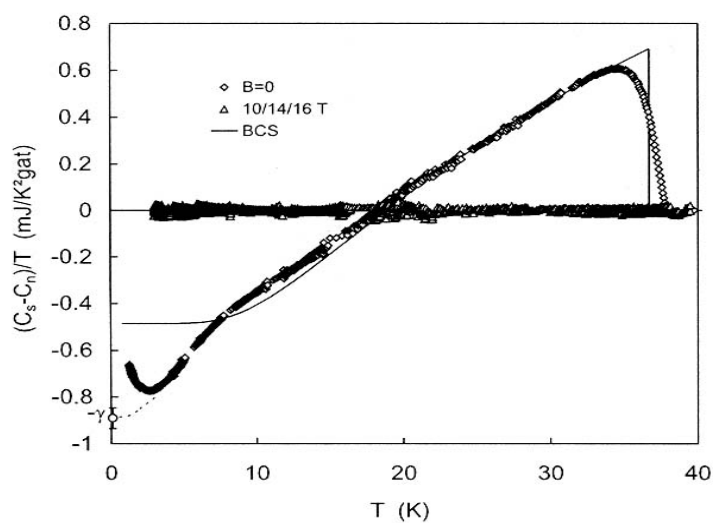
ดังนั้น

$$dT_C = K(-\alpha)M^{-\alpha-1}dM$$

$$\therefore \frac{dT_C}{T_C} = -\frac{\alpha}{M}dM \quad (1.12)$$

จากภาพประกอบ 6 เมื่อ $dT_C = -1$, $T_C = 40$ จะได้ $dM = 1$, $M = 10$ แทนค่าเหล่านี้ในสมการ (1.12) จะได้สัมประสิทธิ์ไอโซโทป $\alpha = \frac{1}{4}$ ดังนั้นกรณีแมกนีเซียมไดโบไรด์จึงไม่สามารถอธิบายด้วยทฤษฎีบีซีเอสง่ายเพราะในทฤษฎีบีซีเอสสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่า 0.5

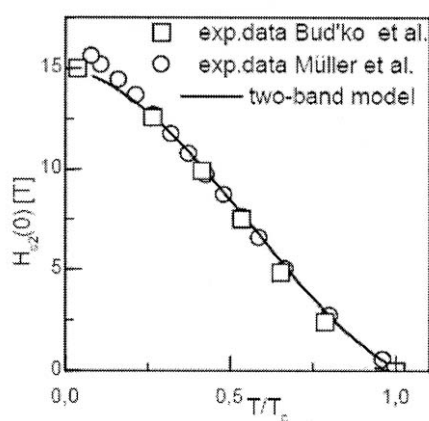
ในเดือนเมษายน ปี ค.ศ. 2001 หวัง พลาคลอสกีและจูนอด (Wang, Plackowski; & Junod. 2001 : 63) ได้รายงานว่แมกนีเซียมไดโบไรด์ที่เป็นก้อนขนาดใหญ่มีค่าเฉพาะต่าง ๆ ดังนี้ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศา $B(0) = 0.26$ เทสลา ความชันของสนามวิกฤตที่กับอุณหภูมิวิกฤตคือ $(dB_{C2}/dT)_{T_C} = 0.56 \text{ T/K}$ เมื่อ T คือ ความเข้มสนาม ค่าพารามิเตอร์ของกิลสเบิร์ก-แลนเดา (Ginzburg-Landau parameter) $\kappa = 38$ ความยาวอาพันธ์ $\xi \approx 0.018 \text{ nm}$ สนามวิกฤตแรก $B_{C1} \approx 0.018 \text{ T}$ ความลึกแทรกซึมลอนดอน (London penetration depth) ที่อุณหภูมิศูนย์องศา $\lambda(0) \approx 180 \text{ nm}$ จากค่าต่าง ๆ ที่วัดได้นี้ แสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดที่สองและพบว่าที่ $T \ll T_C$ ค่าอันตรกิริยาคงตัวระหว่างอิเล็กตรอนโฟนอน (λ_{ep}) หาได้จากการใช้วิธีรีโนอร์มัลไลซ์ (Renormalization) ความหนาแน่นสถานะอิเล็กตรอนโดยใช้สมการของแมคมิลแลน (McMillan's equation) สำหรับตัวนำยิ่งยวดที่มีช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางวิธีแรกให้ค่า $\lambda_{ep} \approx 0.6$ และวิธีที่สองได้ $\lambda_{ep} \approx 1.1$ ค่าที่ไม่สอดคล้องกันนี้บ่งชี้ว่าตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์มีช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง 2 ค่า นอกจากนี้ยังได้วัดความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ทั้งในสภานำยวดยิ่งยวดและสภาพปกติในช่วงอุณหภูมิ 2-300 K ภายใต้สนามแม่เหล็กความเข้ม 0-16 T ด้วยแล้วได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิในสนามแม่เหล็กเป็นดังภาพ 7



ภาพประกอบ 7 ความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่ง สำหรับ $B = 0$ ที่ช่วงอุณหภูมิ 2 – 40 K และความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติ ที่ $B = 10, 14, 16$ T

ที่มา: Wang, Plackowski; & Junod. (2001) : 63

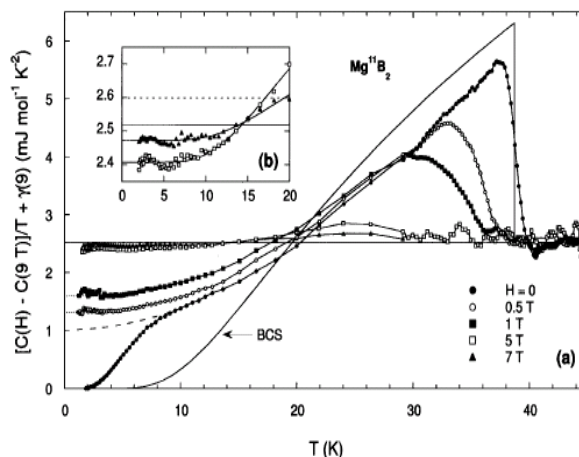
ในเดือนเมษายน ปี ค.ศ.2001 ชูลกาและคณะ (Shulga; et al. 2001) ได้ศึกษา สนามแม่เหล็กวิกฤตที่สองโดยใช้แบบจำลองของอีไลเชเบิร์ก (Eliashberg) ในระบบที่มีสอง แถบพลังงานซึ่งผลการทดลองที่ได้กับผลคำนวณทางทฤษฎีมีค่าใกล้เคียงกว่าการใช้แบบจำลองบี ซีเอสที่มีแถบพลังงานเดียวและไม่ขึ้นกับทิศทาง



ภาพประกอบ 8 แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลการทดลองของสนามแม่เหล็กวิกฤตที่สองของ แมกนีเซียมไดโบไรด์กับทฤษฎีสำหรับแบบจำลองสองแถบพลังงาน

ที่มา: Shulga; et al. 2001

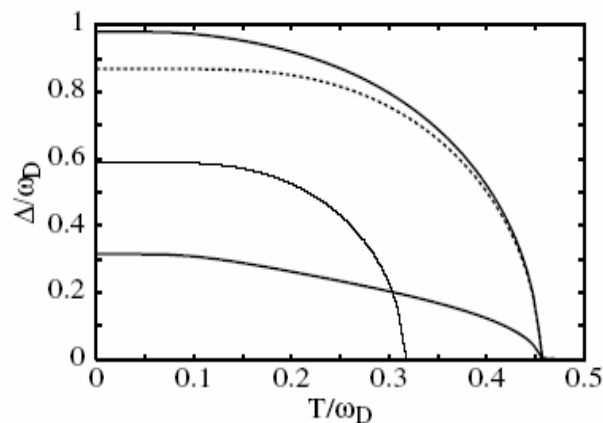
ในมิถุนายน ปีค.ศ. 2001 บูกเกต์และคณะ (Bouquet; et al. 2001: 047001-1) ได้ทดลองวัดความจุความร้อนของ Mg^{11}B_2 ในช่วงอุณหภูมิ 1 ถึง 50 K ในสนามแม่เหล็ก 9 T เพราะอุณหภูมิเดอบายของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (ω_D) เท่ากับ 1050 K สัมประสิทธิ์ชอมเมอร์เฟลด์ของอิเล็กตรอนในสถานะปกติ $\gamma_n = 2.6 \text{ mJ mol}^{-1}\text{K}^{-2}$ ได้กราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกับความจุความร้อนในสนามแม่เหล็กดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ขณะมีและไม่มีสนามแม่เหล็กกับอุณหภูมิ
ที่มา: Bouquet; et al. (2001) : 047001-1

ภาพประกอบ 9 แสดงให้เห็นว่าที่บริเวณอุณหภูมิต่ำมากค่าความจุความร้อนขึ้นกับสนามแม่เหล็ก ข้อมูลนี้ทำให้ Wang กับคณะสรุปว่าตัวนำยวดยิ่ง Mg^{11}B_2 มีช่องว่างพลังงานที่สองซึ่งมีขนาดเล็กกว่าช่องว่างพลังงานแรก

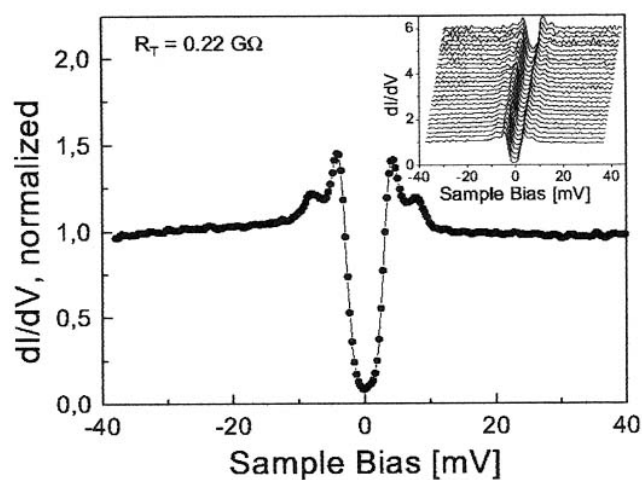
ในเดือนสิงหาคม ปี ค.ศ. 2001 หลิว และคณะ (Liu; et al. 2001 : 087005-1) เสนอความคิดว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีโครงสร้างของสองแถบพลังงานเป็นแบบสองมิติและแบบสามมิติ ซึ่งจะทำให้แมกนีเซียมไดโบไรด์มีโครงสร้างแถบพลังงานแบบมัลติแบนด์ (multiband) สำหรับช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์นั้นได้รับการยืนยันทั้งในแง่ทฤษฎีและในแง่การทดลองว่าช่องว่างพลังงานสองช่อง ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ

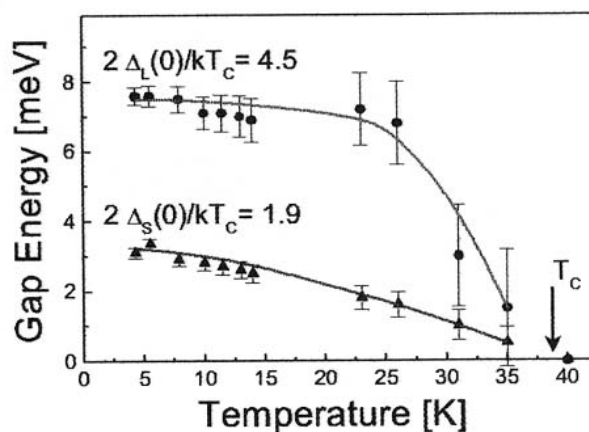
ที่มา: Liu; et al. (2001) : 087005-1

ในเดือนตุลาคม ปี ค.ศ. 2001 จิubilio และคณะ (Giubileo; et al. 2001 : 177008-1) ได้รายงานการวัดช่องว่างพลังงานสำหรับแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยใช้ STM (Scanning Tunneling Microscope) ซึ่งใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์ติดส่วนปลายของกล้องและใช้ NbSe₂ เป็นแผ่นรองรับ ขณะที่อุณหภูมิต่ำได้พบว่าการทะลุของอิเล็กตรอนผ่านช่องว่างพลังงานที่ระดับเฟอร์มิ ทำให้ค่า dI/dV มีลักษณะเป็นหลุมที่มีสองจุดยอดเหมือนกันทั้งสองข้าง ที่ความต่างศักย์ไฟฟ้า $V_s \cong \pm 3.8 \text{ mV}$ และ $V_L \cong \pm 7.8 \text{ mV}$ การทดลองนี้จึงแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีสภาพนำยิ่งยวดแบบ 2 แถบพลังงาน



ภาพประกอบ 11 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้าต่อศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลง

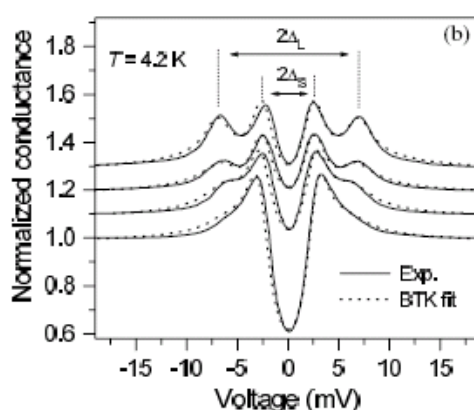
ที่มา: Giubileo; et al. (2001) : 177008-2



ภาพประกอบ 12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ

ที่มา : Giubileo, et al. (2001) : 177008-3

ในเดือนธันวาคม ปี ค.ศ.2001 ซาโบ และคณะ (Szabo; et al. 2001 :137005-1) ใช้เทคนิคการสะท้อนของแอนเดรฟ (Andreev Reflection) แสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีช่องว่างพลังงานแบบ 2 แถบ โดยช่องว่างพลังงานแถบเล็กมีขนาด $\Delta_S = 2.8 \text{ meV}$ และช่องว่างพลังงานแถบใหญ่ $\Delta_L = 7 \text{ meV}$ ตามลำดับ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับที่ทฤษฎีบีซีเอสได้ทำนายไว้ แสดงให้เห็นว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีลักษณะเป็นแบบหลายแถบพลังงาน และที่อุณหภูมิ 4.2 K พบอีกว่าอุณหภูมิมีผลต่อการเกิดช่องว่างพลังงานแบบ 2 แถบด้วย ดังภาพประกอบ 13

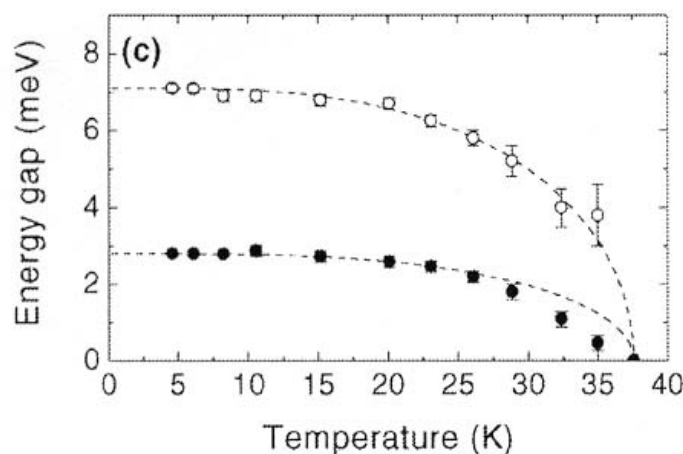


ภาพประกอบ 13 แสดงผลการทดลองที่ได้ Cu-MgB₂ ที่อุณหภูมิ 4.2 K ได้

ค่า $\Delta_S = 2.8 \pm 0.1 \text{ meV}$ และ $\Delta_L = 6.8 \pm 0.3 \text{ meV}$ ตามลำดับ

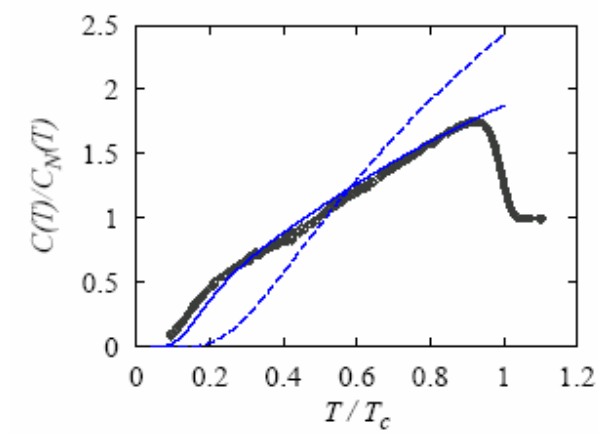
ที่มา : Szabo; et al. (2001) :137005-2

ในเดือนธันวาคม ปี ค.ศ.2002 กอนเนลลีและคณะ(Gonnelli; et al. 2002 : 247004 -1) ได้ทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์ Δ_π และ Δ_σ ด้วยวิธี PCS (Point-Contact Spectroscopy) ได้ค่า $\Delta_\sigma = 7.1 \pm 0.1 \text{ meV}$, $\Delta_\pi = 2.80 \pm 0.05 \text{ meV}$ และ Δ_σ มีการเปลี่ยนแปลงที่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส ส่วน Δ_π มีกราฟแตกต่างไปจากทฤษฎีบีซีเอสโดยที่อุณหภูมิ $T < 25\text{K}$ โดยมีอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน (gap ratio) ของ Δ_π และ Δ_σ เป็น $\frac{2\Delta_\sigma}{k_B T_C} \approx 4.18$, $\frac{2\Delta_\pi}{k_B T_C} \approx 1.59$ ซึ่ง Δ_σ สัมพันธ์กับแถบพลังงาน σ 2 มิติ เนื่องจากอิเล็กตรอนของโบรอนมีการผสมกันเล็กน้อยกับอิเล็กตรอนในอะตอมของแมกนีเซียม และความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์ขึ้นกับอิทธิพลของสองแถบพลังงานและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง



ภาพประกอบ 14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับอุณหภูมิ
ที่มา : Gonnelli; et al. (2002) : 247004-4

ในปี ค.ศ. 2004 มิสโซโนฟ, โปครอฟสกี และคณะ (Mishonov; et al. 2004 : 0312210) ได้ศึกษาแบบจำลองตัวนำยิ่งยวดที่มีสองแถบพลังงานโดยได้คำนวณความร้อนจำเพาะและช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่เป็นแบบขึ้นกับทิศทาง (anisotropic) โดยนำผลที่ได้จากการคำนวณมาทำการเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลองปรากฏว่าแตกต่างกันไม่เกิน 3-6%



ภาพประกอบ 15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะของแมกนีเซียมไดโบไรด์กับ
อุณหภูมิ
ที่มา : Mishonov; et al. (2004) : 0312210

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. ทฤษฎีตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงานของ ซูล แมทไทส์และวอล์คเกอร์

ในปี ค.ศ.1959 ซูล แมทไทส์และวอล์คเกอร์ (Suhl, Matthias; & Walker. 1959 : 552) ได้ขยายทฤษฎีสภาพนำวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอส ให้ครอบคลุมกรณีที่มีระดับเฟอร์มีมีสองแถบพลังงานเหลื่อมซ้อนกัน ซึ่งนอกจากจะทำให้มีการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงานเดียวกันแล้วยังมีการจับคู่กันระหว่างอิเล็กตรอนในต่างแถบพลังงานที่เหลื่อมซ้อนกันด้วย จึงเขียนแฮมิลโทเนียนของระบบได้ ดังนี้

$$H = H_a + H_b + H_{\text{int}} \quad (2.1)$$

กำหนดให้ H คือ แฮมิลโทเนียนรวมของระบบ

H_a คือ แฮมิลโทเนียนของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a

H_b คือ แฮมิลโทเนียนของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน b

H_{int} คือ แฮมิลโทเนียนของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b

โดย

$$\begin{aligned} H_a &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^a a_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} - g_{aa} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow} \\ H_b &= \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^b b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} - g_{bb} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} \\ H_{\text{int}} &= -g_{ab} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} (a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} + b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

เมื่อ

$\varepsilon_{\vec{k}}^a, \varepsilon_{\vec{k}}^b$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b

g_{aa}, g_{bb} คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b

g_{ab} คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b

$a_{\vec{k}\sigma}^+, b_{\vec{k}\sigma}^+$ คือ ตัวดำเนินการสร้างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ

$a_{\vec{k}\sigma}, b_{\vec{k}\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายอิเล็กตรอน ในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ

ชุด แมทโทอิสและวอลค์เคอร์ ใช้การแปลงแบบโบโกลิบอฟ กำหนดให้ตัวดำเนินการใหม่ คือ $e_{\vec{k}\sigma}$ และ $f_{\vec{k}\sigma}$ ตามการจำกัดความ

$$a_{\vec{k}\uparrow} = \cos\left(\frac{\theta_{\vec{k}}}{2}\right)e_{\vec{k}\uparrow} + \sin\left(\frac{\theta_{\vec{k}}}{2}\right)e_{-\vec{k}\downarrow}^+, \quad a_{\vec{k}\downarrow} = \cos\left(\frac{\theta_{\vec{k}}}{2}\right)e_{\vec{k}\downarrow} - \sin\left(\frac{\theta_{\vec{k}}}{2}\right)e_{-\vec{k}\downarrow}^+ \quad (2.3)$$

$$b_{\vec{k}\uparrow} = \cos\left(\frac{\varphi_{\vec{k}}}{2}\right)f_{\vec{k}\uparrow} + \sin\left(\frac{\varphi_{\vec{k}}}{2}\right)f_{-\vec{k}\downarrow}^+, \quad b_{\vec{k}\downarrow} = \cos\left(\frac{\varphi_{\vec{k}}}{2}\right)f_{\vec{k}\downarrow} - \sin\left(\frac{\varphi_{\vec{k}}}{2}\right)f_{-\vec{k}\downarrow}^+ \quad (2.4)$$

แทนค่าสมการ (2.3) และ (2.4) ในสมการ (2.2) และให้สัมประสิทธิ์ของ $e_{\vec{k}\uparrow}^+e_{-\vec{k}\downarrow}^+$ และ $e_{-\vec{k}\downarrow}e_{\vec{k}\uparrow}$ เท่ากับศูนย์ จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\vec{k}}^a \sin \theta_{\vec{k}} - [g_{ab}D + g_{aa}S] \cos \theta_{\vec{k}} &= 0 \\ \varepsilon_{\vec{k}}^b \sin \varphi_{\vec{k}} - [g_{bb}D + g_{ab}S] \cos \varphi_{\vec{k}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sin \theta_{\vec{k}} [1 - 2f_a(E_{\vec{k}}^a)] \\ D &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sin \varphi_{\vec{k}} [1 - 2f_b(E_{\vec{k}}^b)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

เมื่อ $f_a(E_{\vec{k}}^a)$, $f_b(E_{\vec{k}}^b)$ เป็นฟังก์ชันแฟร์มีแสดงจำนวนคู่คูเปอร์จากแถบพลังงาน a และ b ที่มีพลังงาน $E_{\vec{k}}^a$ และ $E_{\vec{k}}^b$ ตามลำดับ ซึ่งพลังงานนี้มีค่าเป็น

$$E_{\vec{k}}^a = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + A^2}, \quad E_{\vec{k}}^b = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^{b^2} + B^2} \quad (2.7)$$

เมื่อ

$$A = g_{ab}D + g_{aa}S, \quad B = g_{bb}D + g_{ab}S \quad (2.8)$$

จากสมการ (2.5) และ (2.6) จะได้ว่า

$$A[1 - g_{aa}N_a(0)F(A)] = Bg_{ab}N_b(0)F(B) \quad (2.9)$$

$$B[1 - g_{bb}N_b(0)F(B)] = Ag_{ab}N_a(0)F(A) \quad (2.10)$$

เมื่อ

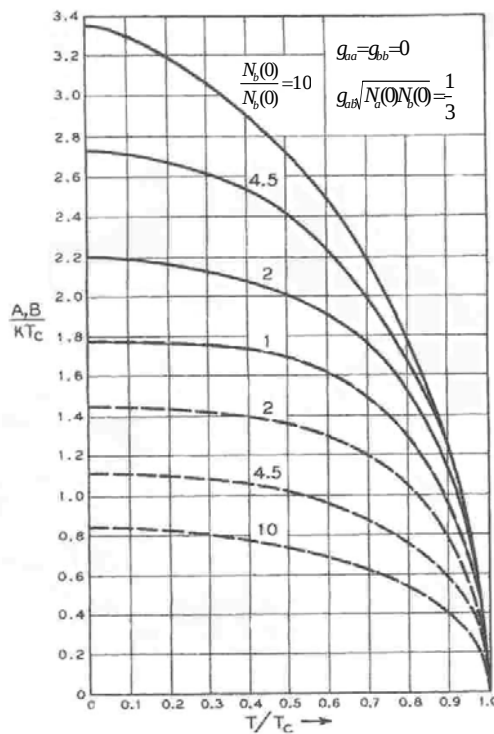
$$F(A) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + A^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + A^2}} d\varepsilon, \quad F(B) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + B^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + B^2}} d\varepsilon \quad (2.11)$$

และ $N_a(0)$ และ $N_b(0)$ คือความหนาแน่นสถานะที่ระดับเฟอร์มิของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ จากสมการ (2.9) , (2.10) พิจารณาที่อุณหภูมิวิกฤต จะได้

$$[g_{aa} + N_b(0)(g_{ab}^2 - g_{aa}g_{bb})F(0)][g_{bb} + N_a(0)(g_{ab}^2 - g_{aa}g_{bb})F(0)] = g_{ab}^2 \quad (2.12)$$

โดยที่ $F(0) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right)$ จากสมการ (2.12) สามารถคำนวณสมการของอุณหภูมิวิกฤตได้เป็น

$$T_C = 1.14\omega_D \exp - \left\{ \frac{\left[\left(\frac{g_{ab}^2}{N_a(0)N_b(0)} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{g_{bb}}{N_a(0)} - \frac{g_{aa}}{N_b(0)} \right) \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{bb}}{N_a(0)} + \frac{g_{aa}}{N_b(0)} \right)}{g_{ab}^2 - g_{aa}g_{bb}} \right\} \quad (2.13)$$



ภาพประกอบ 16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{A, B}{kT_C}$ กับ T/T_C โดยที่ $A = g_{ab}D + g_{bb}S$ และ

$$B = g_{bb}D + g_{ab}S$$

ที่มา : Suhl, Matthias; & Walker. (1959) : 552

2. งานวิจัยของบัสแมนน์-โฮลเดอร์

ในปี ค.ศ.2004 บัสแมนน์-โฮลเดอร์ และคณะ(Bussmann-Holder; et al. 2004 : 345-348)ได้ขยายทฤษฎีตัวนำวยอดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานของ ชูล แมทไทอัสและวอลค์เกอร์ โดยได้พิจารณาพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแถบพลังงานของตัวนำวยอดยิ่งประเภทคลื่นเอสและคลื่นดี ซึ่งทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มและให้ฮามิลโทเนียนของระบบนี้ คือ

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_{12} \quad (2.14)$$

$$H_0 = \sum_{k_1, \sigma} \xi_{k_1}^a c_{k_1 \sigma}^+ c_{k_1 \sigma} + \sum_{k_2, \sigma} \xi_{k_2}^b d_{k_2 \sigma}^+ d_{k_2 \sigma} \quad (2.15)$$

$$H_1 = - \sum_{k_1 k_1' q} V_1(k_1, k_1') c_{k_1+q/2 \uparrow}^+ c_{-k_1+q/2 \downarrow}^+ c_{-k_1'+q/2 \downarrow} c_{k_1'+q/2 \uparrow} \quad (2.16)$$

$$H_2 = - \sum_{k_2 k_2' q} V_2(k_1, k_2') d_{k_2+q/2 \uparrow}^+ d_{-k_2+q/2 \downarrow}^+ d_{-k_2'+q/2 \downarrow} d_{k_2'+q/2 \uparrow} \quad (2.17)$$

$$H_{12} = - \sum_{k_1 k_2 q} V_{1,2} (c_{k_1+q/2 \uparrow}^+ c_{-k_1+q/2 \downarrow}^+ d_{-k_2+q/2 \downarrow} d_{k_2+q/2 \uparrow} + h.c.) \quad (2.18)$$

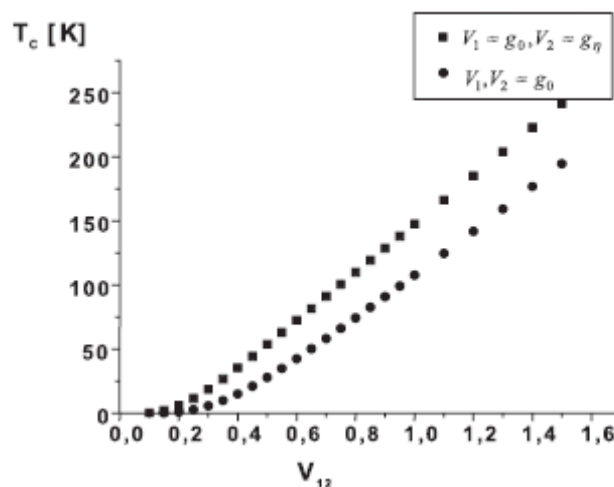
เมื่อ H_0 คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน , $\xi_{k_i} = \varepsilon_i + \varepsilon_{k_i} - \mu$ เมื่อ $i=1,2$, ε_i คือ ตำแหน่งของแถบพลังงาน , $\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน c และ d , $c_{p\sigma}^+, d_{p\sigma}^+$ คือ ตัวดำเนินการสร้างในแถบพลังงาน c และ d และ $c_{p\sigma}, d_{p\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายในแถบพลังงาน c และ d , $V_i(k_i, k_i')$ คือ พลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน i เมื่อ $V_i(k_i, k_i') = V_i \varphi_{k_i} \psi_{k_i}'$ และในกรณีการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นแบบเอส $\varphi_{k_1} = 1$ และ $\psi_{k_1} = 1$ และในกรณีตัวนำวยอดยิ่งประเภทคลื่นดี $\varphi_{k_i} = \cos k_x a + \cos k_y b = \psi_{k_i}$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัวของผลึกตามระนาบในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

บัสแมนน์ได้สมการช่องว่างพลังงาน ดังนี้คือ

$$\bar{\Delta}_{k_1} = \sum_{k_1'} V_1(k_1, k_1') \bar{\Delta}_{k_1'} \Phi_{k_1'} + \sum_{k_2} V_{1,2}(k_1, k_2) \bar{\Delta}_{k_2} \Phi_{k_2} \quad (2.19)$$

$$\bar{\Delta}_{k_1} = \sum_{k_1'} V_1(k_1, k_1') \bar{\Delta}_{k_1'} \Phi_{k_1'} + \sum_{k_2} V_{1,2}(k_1, k_2) \bar{\Delta}_{k_2} \Phi_{k_2} \quad (2.20)$$

จากสมการ (2.19) และ(2.20) สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าคงที่ของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานได้ ดังภาพประกอบ 17

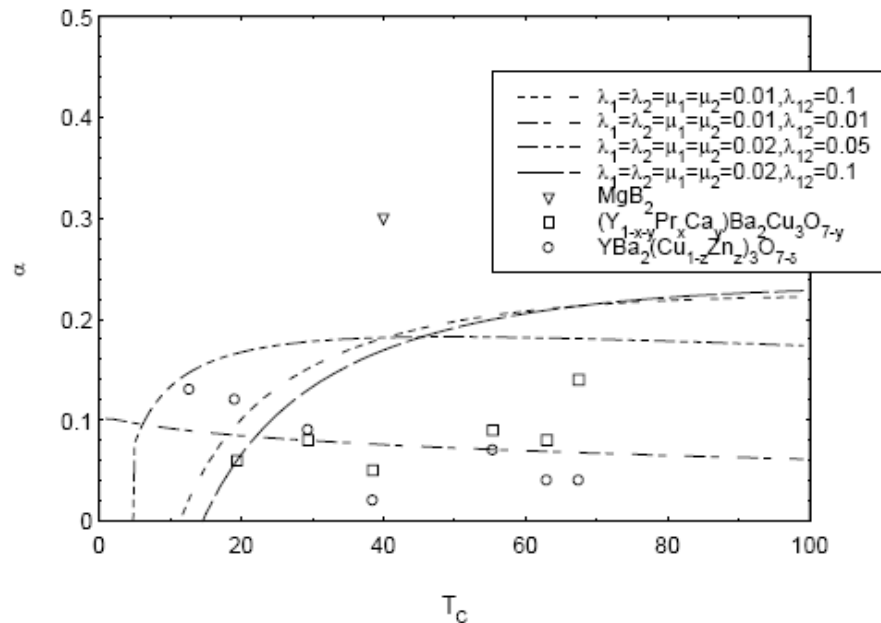


ภาพประกอบ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าคงตัวของอันตรกิริยาการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนต่างแถบพลังงาน ($V_{1,2}$)

ที่มา : Bussmann-Holder; et al. (2004): 347

3. งานวิจัยของอุดมสมุทรหิรัญ

ในเดือนมิถุนายน ปี ค.ศ.2005 อุดมสมุทรหิรัญ และคณะ (Udomsamuthirun; et al. 2005 : 149 -154) ได้คำนวณหาสูตรแบบแม่นยำของอุณหภูมิวิกฤต และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำชนิดสองแถบพลังงาน โดยใช้อันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส และพิจารณาตัวนำยวดยิ่งที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป โดยพิจารณาอันตรกิริยาดึงดูดของอิเล็กตรอนประกอบด้วย 2 ส่วน คือ ส่วนที่เกิดจากอันตรกิริยาการแลกเปลี่ยนโฟนอน (อิเล็กตรอน-โฟนอน-อิเล็กตรอน V_{ph}) และส่วนอื่นๆที่ไม่ใช่โฟนอนโดยอาจเป็นคูลอมป์ (U_c) ผลการคำนวณแสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน (interband interaction) ของอิเล็กตรอนมีผลต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ยิ่งกว่าอันตรกิริยาภายในแถบพลังงานเดียวกัน (intraband interaction) และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวให้ผลสอดคล้องกับการทดลองที่ใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์ ส่วนสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปผลนั้นก็ให้ผลสอดคล้องกับการทดลองที่ใช้ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง



ภาพประกอบ 18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_C)

ในกรณีความหนาแน่นสถานะเป็นแบบแบนโฮป โดยกำหนดให้ $E_F = 5000K$,

$$\omega_D = 745K \text{ และ } \omega_C = 800K$$

ที่มา : Udomsamuthirun; et al. (2005) : 149 -154

4. งานวิจัยของโอฮาชิ

ในปี ค.ศ. 2002 โอฮาชิ (Ohashi. 2002 : 1978–1992) ได้ศึกษาแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือที่ไม่เป็นแม่เหล็กในกรณีที่พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบทั้งสองของตัวนำยวดยิ่งมีค่าต่างกัน โดยพิจารณาการกระเจิงของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานด้วย ในงานวิจัยนี้โอฮาชิได้ศึกษาตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส (s – wave superconductor) ซึ่งเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำและสมมุติให้แถบพลังงานเป็นแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง (isotropic band) และกำหนดให้ฮามิลโทเนียนของระบบคือ

$$H = H_0 + H_{imp} \quad (2.21)$$

เมื่อ H_0 คือ ฮามิลโทเนียนของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์
 H_{imp} คือ ฮามิลโทเนียนของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

$$\begin{aligned}
H_0 = & \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^a a_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^b b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} - g_{aa} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow} \\
& - g_{bb} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} - g_{ab} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} - g_{ba} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow}
\end{aligned} \quad (2.22)$$

และ

$$H_{imp} = \sum_{\vec{R}_i, \vec{k}, \vec{k}', \sigma} e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{R}_i} [v_{aa} a_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}'\sigma} + v_{bb} b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}'\sigma} + v_{ab} a_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}'\sigma} + v_{ba} b_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}'\sigma}] \quad (2.23)$$

โดยที่

$\varepsilon_{\vec{k}}^a, \varepsilon_{\vec{k}}^b$	คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b
g_{aa}, g_{bb}	คือ ค่าคงตัวของอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a และ b
g_{ab}, g_{ba}	คือ ค่าคงตัวของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b
$a_{\vec{k}\sigma}^+, b_{\vec{k}\sigma}^+$	คือ ตัวดำเนินการสร้างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b
$a_{\vec{k}\sigma}, b_{\vec{k}\sigma}$	คือ ตัวดำเนินการทำลายอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b
v_{aa}, v_{bb}	คือ พารามิเตอร์ศักย์อธิบายการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสารเจือภายในแถบพลังงาน a และ b
v_{ab}, v_{ba}	คือ พารามิเตอร์ศักย์อธิบายการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสารเจือระหว่างแถบพลังงาน a กับ b และ b กับ a

โอฮาซิฮาฮามิลโทเนียนของสนามเฉลี่ย โดยการประมาณให้พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแถบพลังงาน a และ b คือ

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a &= -g_{aa} \sum_{\vec{k}} \langle a_{-\vec{k}\downarrow} a_{\vec{k}\uparrow} \rangle \\ \Delta_b &= -g_{bb} \sum_{\vec{k}} \langle b_{-\vec{k}\downarrow} b_{\vec{k}\uparrow} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

ดังนั้นฮามิลโทเนียนของสนามเฉลี่ยที่ได้ คือ

$$H_{MF} = \sum_{\vec{k}} \Psi_{\vec{k}}^+ (\varepsilon_{\vec{k}}^a \rho_3 + \hat{\Gamma}_a) \Psi_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \Phi_{\vec{k}}^+ (\varepsilon_{\vec{k}}^b \rho_3 + \hat{\Gamma}_b) \Phi_{\vec{k}} + H_{imp} \quad (2.25)$$

เมื่อ $\Psi_{\vec{k}}^+ \equiv (a_{\vec{k}\uparrow}^+, a_{-\vec{k}\downarrow}^+)$ และ $\Phi_{\vec{k}}^+ \equiv (b_{\vec{k}\uparrow}^+, b_{-\vec{k}\downarrow}^+)$ คือตัวดำเนินการสนามแนมบู (Nambu field operators) ในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ ρ_i ($i=1,2,3$) คือ เมทริกซ์เพาลี จากสมการ (2.25) $\hat{\Gamma}_j$ ($j=a,b$) คือ

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_j &= \text{Re}[\Gamma_j]\rho_1 - \text{Im}[\Gamma_j]\rho_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \text{Re}[\Gamma_j] + i \text{Im}[\Gamma_j] \\ \text{Re}[\Gamma_j] - i \text{Im}[\Gamma_j] & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_j \\ \Gamma_j^+ & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

เมื่อ

$$\Gamma_a = \Delta_a + \frac{g_{ab}}{g_{bb}} \Delta_b, \quad \Gamma_a^+ = \Delta_a^+ + \frac{g_{ba}}{g_{bb}} \Delta_b^+ \tag{2.27}$$

$$\Gamma_b = \Delta_b + \frac{g_{ba}}{g_{aa}} \Delta_a, \quad \Gamma_b^+ = \Delta_b^+ + \frac{g_{ab}}{g_{aa}} \Delta_a^+ \tag{2.28}$$

และฮามิลโทเนียนของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก คือ

$$H_{imp} = \sum_{R_i, \vec{k}, \vec{k}'} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{R}_i} [\Psi_{\vec{k}}^+ \hat{v}_{aa} \Psi_{\vec{k}'} + \Phi_{\vec{k}}^+ \hat{v}_{bb} \Phi_{\vec{k}'} + \Psi_{\vec{k}}^+ \hat{v}_{ab} \Phi_{\vec{k}'} + \Phi_{\vec{k}}^+ v_{ba} \Psi_{\vec{k}'}] \tag{2.29}$$

เมื่อ $\hat{v}_{aa} = v_{aa}\rho_3$, $\hat{v}_{bb} = v_{bb}\rho_3$ และ

$$\hat{v}_{ab} = \begin{pmatrix} v_{ab} & 0 \\ 0 & -v_{ab}^+ \end{pmatrix} = \text{Re}[v_{ab}]\rho_3 + i \text{Im}[v_{ab}]\rho_0 \tag{2.30}$$

ในกรณีตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์พิจารณากรีนส์ฟังก์ชันในแถบพลังงาน a และ b คือ

$$G_0^a(\vec{p}, i\omega_m) = \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_{\vec{k}}^a \rho_3 + \hat{\Gamma}_a} \tag{2.31}$$

$$G_0^b(\vec{p}, i\omega_m) = \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_{\vec{k}}^b \rho_3 + \hat{\Gamma}_b} \tag{2.32}$$

เมื่อ ω_m คือ ความถี่มาตรฐาน $(2n+1)\pi T$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.24) สามารถเขียน Δ_a และ Δ_b อยู่ในเทอมของกรีนส์ฟังก์ชันได้ดังนี้

$$\Delta_a = g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} G_0^a(\vec{k}, i\omega_n)_{12} \tag{2.33}$$

$$\Delta_b = g_{bb} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} G_0^b(\vec{k}, i\omega_n)_{12} \tag{2.34}$$

เมื่อ G_{12} คือ สมาชิก 12 ในเมทริกซ์ G

แทนค่าสมการ (2.31) ในสมการ (2.33) จะได้

$$\begin{aligned}
 \Delta_a &= g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} G_0^a(\vec{k}, i\omega_n)_{12} \\
 &= -g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} \left\{ \frac{i\omega_n + \varepsilon_{\vec{k}}^a \rho_3 - \hat{\Gamma}_a}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2} \right\}_{12} \\
 &= -g_{aa} T \left[\sum_{\vec{k}, \omega_n} \begin{pmatrix} i\omega_n + \varepsilon_{\vec{k}}^a & -\Gamma_a \\ -\Gamma_a & i\omega_n - \varepsilon_{\vec{k}}^a \end{pmatrix} \frac{1}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2} \right]_{12} \\
 &= g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\Gamma_a}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

ในทำนองเดียวกันเราก็จะได้

$$\Delta_b = g_{bb} T \sum_{\vec{k}, \omega_n} \frac{\Gamma_b}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{b^2} + \Gamma_b^2} \tag{2.36}$$

แทนค่าสมการ (2.35) และ (2.36) ในสมการ (2.27) และ (2.28) ตามลำดับ

$$\Gamma_a = g_{aa} T \sum_{\vec{k}, n} \frac{\Gamma_a}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2} + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, n} \frac{\Gamma_b}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{b^2} + \Gamma_b^2} \tag{2.37}$$

$$\Gamma_b = g_{ba} T \sum_{\vec{k}, n} \frac{\Gamma_a}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2} + g_{bb} T \sum_{\vec{k}, n} \frac{\Gamma_b}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{b^2} + \Gamma_b^2} \tag{2.38}$$

อาศัยสูตร $T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \tanh\left(\frac{a}{2T}\right)$ ดังนั้นสมการ (2.37) และ (2.38) กลายเป็น

$$\Gamma_a = g_{aa} N_a(0) \int_0^{\omega_D} d\varepsilon_{\vec{k}}^a \frac{\Gamma_a}{E_{\vec{k}}^a} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}}^a}{2T}\right) + g_{ab} N_b(0) \int_0^{\omega_D} d\varepsilon_{\vec{k}}^b \frac{\Gamma_b}{E_{\vec{k}}^b} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}}^b}{2T}\right) \tag{2.39}$$

$$\Gamma_b = g_{ba} N_a(0) \int_0^{\omega_D} d\varepsilon_{\vec{k}}^a \frac{\Gamma_a}{E_{\vec{k}}^a} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}}^a}{2T}\right) + g_{bb} N_b(0) \int_0^{\omega_D} d\varepsilon_{\vec{k}}^b \frac{\Gamma_b}{E_{\vec{k}}^b} \tanh\left(\frac{E_{\vec{k}}^b}{2T}\right) \tag{2.40}$$

เมื่อ $E_{\vec{k}}^a = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^{a^2} + \Gamma_a^2}$ และ $E_{\vec{k}}^b = \sqrt{\varepsilon_{\vec{k}}^{b^2} + \Gamma_b^2}$ และ $N_a(0)$ และ $N_b(0)$ คือ ความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มิของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ และให้ความถี่ตัดทั้งในทั้ง 2 แถบพลังงานเท่ากัน

จากสมการ (2.39) และ (2.40) จะได้

$$1 = g_{aa} N_a(0) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}^a}{E_{\bar{k}}^a} \tanh\left(\frac{E_{\bar{k}}^a}{2T}\right) + g_{ab} N_b(0) \frac{\Gamma_b}{\Gamma_a} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}^b}{E_{\bar{k}}^b} \tanh\left(\frac{E_{\bar{k}}^b}{2T}\right) \quad (2.41)$$

$$1 = g_{ba} N_a(0) \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}^a}{E_{\bar{k}}^a} \tanh\left(\frac{E_{\bar{k}}^a}{2T}\right) + g_{bb} N_b(0) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}^b}{E_{\bar{k}}^b} \tanh\left(\frac{E_{\bar{k}}^b}{2T}\right) \quad (2.42)$$

ที่อุณหภูมิวิกฤต $T = T_C$, $\Gamma_a(T_C) = 0$ และ $\Gamma_b(T_C) = 0$ ดังนั้น

$$1 = g_{aa} N_a(0) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) + g_{ab} N_b(0) \frac{\Gamma_b}{\Gamma_a} \bigg|_{T=T_C} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) \quad (2.43)$$

$$1 = g_{ba} N_a(0) \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} \bigg|_{T=T_C} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) + g_{bb} N_b(0) \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) \quad (2.44)$$

ถ้า $f(T_C) = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) \approx \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right)$ เพราะ $\omega_D \gg T_C$ จากสมการ (2.43) และ (2.44) จะได้

$$\left. \begin{aligned} 1 - g_{aa} N_a(0) f(T_C) &= g_{ab} N_b(0) \frac{\Gamma_b}{\Gamma_a} \bigg|_{T=T_C} f(T_C) \\ 1 - g_{bb} N_b(0) f(T_C) &= g_{ba} N_a(0) \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} \bigg|_{T=T_C} f(T_C) \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

กำหนดให้ $\bar{g}_{aa} = g_{aa} N_a(0)$, $\bar{g}_{bb} = g_{bb} N_b(0)$, $\bar{g}_{ab} = g_{ab} N_b(0)$ และ $\bar{g}_{ba} = g_{ba} N_a(0)$

จากสมการ (2.45) จะได้

$$[1 - \bar{g}_{aa} f(T_C)][1 - \bar{g}_{bb} f(T_C)] = \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba} f^2(T_C) \quad (2.46)$$

แก้สมการ (2.46) หา $f(T_C)$ ได้

$$f(T_C) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right) \quad (2.47)$$

$\therefore$ สมการอุณหภูมิวิกฤต สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานคือ

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp \left[-\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} \right] \quad (2.48)$$

กรณีตัวนำวยอดยั้งชนิดสองแถบพลังงานที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก เริ่มต้นพิจารณาจากกรีนส์ฟังก์ชันในแถบพลังงาน a ดังนี้

$$\begin{aligned} G_a(\bar{k}, i\omega_m) &= \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_{\bar{k}}^a \rho_3 + \hat{\Gamma}_a - \sum_{aa}(i\omega_m)} \\ &\equiv \frac{1}{i\bar{\omega}_m^a - \varepsilon_{\bar{k}}^a \rho_3 + \hat{\Gamma}_a} \end{aligned} \quad (2.49)$$

โดยที่

$$\sum_{aa}(i\omega_m) = n_{imp} [1 - \bar{V}_{aa}(i\omega_m) \sum_{\bar{k}} G_a(\bar{k}, i\omega_m)]^{-1} \bar{V}_{aa} \quad (2.50)$$

$$\bar{V}_{aa}(i\omega_m) = \hat{v}_{aa} + \hat{v}_{ab} \sum_{\bar{k}} G_b(\bar{k}, i\omega_m) [1 - \hat{v}_{bb} G_b(\bar{k}, i\omega_m)]^{-1} \hat{v}_{ba} \quad (2.51)$$

เมื่อ n_{imp} คือ จำนวนความหนาแน่นของสารเจือ

จากสมการ (2.49)

$$\hat{\Gamma}_j = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Gamma}_j \\ \bar{\Gamma}_j^+ & 0 \end{pmatrix} = \text{Re}[\bar{\Gamma}_j] \rho_1 - \text{Im}[\bar{\Gamma}_j] \rho_2 \quad (2.52)$$

เมื่อ $j = a, b$

จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.49) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} i\bar{\omega}_m^a &= i\omega_m + \frac{u_a}{D_a} \left[\frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1 + \alpha_b^2} \frac{i\bar{\omega}_m^b}{\bar{\Omega}_b} + \eta_a \frac{i\bar{\omega}_m^a}{\bar{\Omega}_a} \right] \\ i\bar{\omega}_m^b &= i\omega_m + \frac{u_b}{D_b} \left[\frac{|\bar{v}_{ba}|^2}{1 + \alpha_a^2} \frac{i\bar{\omega}_m^a}{\bar{\Omega}_a} + \eta_b \frac{i\bar{\omega}_m^b}{\bar{\Omega}_b} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_a &= \Gamma_a + \frac{u_a}{D_a} \left[\frac{\bar{v}_{ab}^2}{1 + \alpha_b^2} \frac{\bar{\Gamma}_b}{\bar{\Omega}_b} + \eta_a \frac{\bar{\Gamma}_a}{\bar{\Omega}_a} \right] \\ \bar{\Gamma}_b &= \Gamma_b + \frac{u_b}{D_b} \left[\frac{\bar{v}_{ba}^2}{1 + \alpha_a^2} \frac{\bar{\Gamma}_a}{\bar{\Omega}_a} + \eta_b \frac{\bar{\Gamma}_b}{\bar{\Omega}_b} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

เมื่อ $\bar{\Omega}_j = \sqrt{\bar{\omega}_m^2 + |\bar{\Gamma}_j|^2}$, $u_j = n_{imp}/(\pi N_j(0))$

และ

$$\begin{aligned}\eta_a &= \frac{|\bar{v}_{ab}|^4}{(1+\alpha_b^2)^2} + \left(\alpha_a - \frac{\alpha_b}{1+\alpha_b^2} |\bar{v}_{ab}|^2 \right)^2 \\ \eta_b &= \frac{|\bar{v}_{ab}|^4}{(1+\alpha_a^2)^2} + \left(\alpha_b - \frac{\alpha_a}{1+\alpha_a^2} |\bar{v}_{ba}|^2 \right)^2\end{aligned}\quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}D_a &= 1 + \eta_a + \frac{2}{1+\alpha_b^2} \frac{1}{\bar{\Omega}_a \bar{\Omega}_b} \left[\bar{\omega}_m^a \bar{\omega}_m^b |\bar{v}_{ab}|^2 + \text{Re}[\bar{v}_{ba}^2 \bar{\Gamma}_a^+ \bar{\Gamma}_b^-] \right] \\ D_b &= 1 + \eta_b + \frac{2}{1+\alpha_a^2} \frac{1}{\bar{\Omega}_a \bar{\Omega}_b} \left[\bar{\omega}_m^a \bar{\omega}_m^b |\bar{v}_{ba}|^2 + \text{Re}[\bar{v}_{ba}^2 \bar{\Gamma}_b^+ \bar{\Gamma}_a^-] \right]\end{aligned}\quad (2.56)$$

จากสมการ (2.53) และ (2.54) เขียนใหม่เป็น

$$\begin{aligned}i\bar{\omega}_m^a &= i\omega_m \frac{\zeta_a}{F_\omega} \\ i\bar{\omega}_m^b &= i\omega_m \frac{\zeta_b}{F_\omega}\end{aligned}\quad (2.57)$$

และ

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_a &= \frac{\bar{\Gamma}_a'}{F_\omega} \\ \bar{\Gamma}_b &= \frac{\bar{\Gamma}_b'}{F_\omega}\end{aligned}\quad (2.58)$$

เมื่อ

$$F_\omega = \left(1 - \frac{u_a}{D_a} \frac{\eta_a}{\bar{\Omega}_a} \right) \left(1 - \frac{u_b}{D_b} \frac{\eta_b}{\bar{\Omega}_b} \right) - \frac{|\bar{v}_{ab}|^4}{(1+\alpha_a^2)(1+\alpha_b^2)} \frac{u_a u_b}{D_a D_b} \frac{1}{\bar{\Omega}_a \bar{\Omega}_b} \quad (2.59)$$

$$\zeta_a = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b} \eta_b - \frac{u_a}{D_a} \frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1+\alpha_b^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_b} \quad (2.60)$$

$$\zeta_b = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a} \eta_a - \frac{u_b}{D_b} \frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1+\alpha_a^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_a} \quad (2.61)$$

สมการช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงานที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก คือ

$$\Delta_a = \bar{g}_{aa} \pi T \sum_{\omega_m} \frac{\bar{\Gamma}_a}{\sqrt{\omega_m^2 + \bar{\Gamma}_a^2}} \quad (2.62)$$

$$\Delta_b = \bar{g}_{bb} \pi T \sum_{\omega_m} \frac{\bar{\Gamma}_b}{\sqrt{\omega_m^2 + \bar{\Gamma}_b^2}} \quad (2.63)$$

และ

$$\bar{\Gamma}_a = \zeta_{aa} \Delta_a + \frac{\bar{g}_{ab}}{\bar{g}_{bb}} \zeta_{ab} \Delta_b \quad (2.64)$$

$$\bar{\Gamma}_b = \zeta_{bb} \Delta_b + \frac{\bar{g}_{ab}}{\bar{g}_{aa}} \zeta_{ba} \Delta_a \quad (2.65)$$

โดยที่

$$\zeta_{aa} = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b} \eta_b - \frac{\bar{g}_{ba}}{\bar{g}_{aa}} \frac{u_a}{D_a} \frac{\bar{v}_{ab}^2}{1 + \alpha_b^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_b} \quad (2.66)$$

$$\zeta_{ab} = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b} \eta_b - \frac{\bar{g}_{bb}}{\bar{g}_{ab}} \frac{u_a}{D_a} \frac{\bar{v}_{ab}^2}{1 + \alpha_b^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_b} \quad (2.67)$$

$$\zeta_{bb} = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a} \eta_a - \frac{\bar{g}_{ab}}{\bar{g}_{bb}} \frac{u_b}{D_b} \frac{\bar{v}_{ba}^2}{1 + \alpha_a^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_a} \quad (2.68)$$

$$\zeta_{ba} = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a} \eta_a - \frac{\bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{ba}} \frac{u_b}{D_b} \frac{\bar{v}_{ba}^2}{1 + \alpha_a^2} \right] \frac{1}{\bar{\Omega}_a} \quad (2.69)$$

แทนค่าสมการ (2.64) , (2.65) ในสมการ (2.62) , (2.63) ตามลำดับ จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 - \bar{g}_{aa} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{aa}}{\bar{\Omega}'_a} & -\bar{g}_{aa} \frac{\bar{g}_{ab}}{\bar{g}_{bb}} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{ab}}{\bar{\Omega}'_a} \\ -\bar{g}_{bb} \frac{\bar{g}_{ba}}{\bar{g}_{aa}} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{ba}}{\bar{\Omega}'_b} & 1 - \bar{g}_{bb} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{bb}}{\bar{\Omega}'_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_a \\ \Delta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

เมื่อ $\bar{\Omega}'_j = \sqrt{\zeta_j^2 \omega_m^2 + |\bar{\Gamma}'_j|^2}$ และ $s(\omega_m) = F_\omega / |F_\omega|$ จากสมการ(2.70) จะได้

$$\begin{aligned} & \left(1 - \bar{g}_{aa} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{aa}}{\bar{\Omega}'_a} \right) \left(1 - \bar{g}_{bb} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{bb}}{\bar{\Omega}'_b} \right) \\ & - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba} \pi T \sum_{\omega_m} s(\omega_m) \frac{\zeta_{ab}}{\bar{\Omega}'_b} \bullet \pi T \sum_{\omega'_m} s(\omega'_m) \frac{\zeta_{ba}}{\bar{\Omega}'_b} = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

สมการอนุกรมวิฤต สามารถหาได้จากสมการ (2.71) เนื่องจากอนุกรมวิฤตจะได้ว่า $\Delta_a = \Delta_b = 0$ ดังนั้น สมการ (2.71) กลายเป็น

$$0 = \left(1 - \bar{g}_{aa} \pi T \sum_{\omega_m} s^0(\omega_m) \frac{\zeta_{aa}^0}{|\zeta_a^0 \omega_m|} \right) \left(1 - \bar{g}_{bb} \pi T \sum_{\omega_m} s^0(\omega_m) \frac{\zeta_{bb}^0}{|\zeta_b^0 \omega_m|} \right) - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba} \pi T \sum_{\omega_m} s^0(\omega_m) \frac{\zeta_{ab}^0}{|\zeta_a^0 \omega_m|} \bullet \pi T \sum_{\omega'_m} s^0(\omega'_m) \frac{\zeta_{ba}^0}{|\zeta_b^0 \omega'_m|} \quad (2.72)$$

โดยที่

$$\zeta_a^0 = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b^0} \eta_b - \frac{u_a}{D_a^0} \frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1 + \alpha_b^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_b} \quad (2.73)$$

$$\zeta_b^0 = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a^0} \eta_a - \frac{u_b}{D_b^0} \frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1 + \alpha_a^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_a} \quad (2.74)$$

และ

$$\zeta_{aa}^0 = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b^0} \eta_b - \frac{\bar{g}_{ba}}{\bar{g}_{aa}} \frac{u_a}{D_a^0} \frac{\bar{v}_{ab}^2}{1 + \alpha_b^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_b} \quad (2.75)$$

$$\zeta_{ab}^0 = 1 - \left[\frac{u_b}{D_b^0} \eta_b - \frac{\bar{g}_{bb}}{\bar{g}_{ab}} \frac{u_a}{D_a^0} \frac{\bar{v}_{ab}^2}{1 + \alpha_b^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_b} \quad (2.76)$$

$$\zeta_{bb}^0 = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a^0} \eta_a - \frac{\bar{g}_{ab}}{\bar{g}_{bb}} \frac{u_b}{D_b^0} \frac{\bar{v}_{ba}^2}{1 + \alpha_a^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_a} \quad (2.77)$$

$$\zeta_{ba}^0 = 1 - \left[\frac{u_a}{D_a^0} \eta_a - \frac{\bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{ba}} \frac{u_b}{D_b^0} \frac{\bar{v}_{ba}^2}{1 + \alpha_a^2} \right] \frac{1}{|\omega_m| + \tau_a} \quad (2.78)$$

จากสมการ (2.72) $s^0(\omega_m) = F_\omega^0 / |F_\omega^0|$ เมื่อ F_ω^0 คือ

$$F_\omega^0 = \left(1 - \frac{u'_a}{D_a^0} \frac{\eta_a}{|\omega_m| + \tau_a} \right) \left(1 - \frac{u_b}{D_b^0} \frac{\eta_b}{|\omega_m| + \tau_b} \right) - \frac{|\bar{v}_{ab}|^4}{(1 + \alpha_a^2)(1 + \alpha_b^2)} \frac{u_a u_b}{D_a^0 D_b^0} \frac{1}{(|\omega_m| + \tau_a)(|\omega_m| + \tau_b)} \quad (2.79)$$

แทนค่าสมการ (2.73)-(2.79) ในสมการ (2.53) ที่อนุกรมวิฤตจะได้

$$i\bar{\omega}_m^a = i\omega_m + i \frac{u_a}{D_a^0} \left[\frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1 + \alpha_b^2} + \eta_a \right] \frac{\omega_m}{|\omega_m|} \equiv i\omega_m + i\tau_a \frac{\omega_m}{|\omega_m|}$$

$$i\bar{\omega}_m^b = i\omega_m + i \frac{u_b}{D_b^0} \left[\frac{|\bar{v}_{ba}|^2}{1 + \alpha_a^2} + \eta_b \right] \frac{\omega_m}{|\omega_m|} \equiv i\omega_m + i\tau_b \frac{\omega_m}{|\omega_m|} \quad (2.80)$$

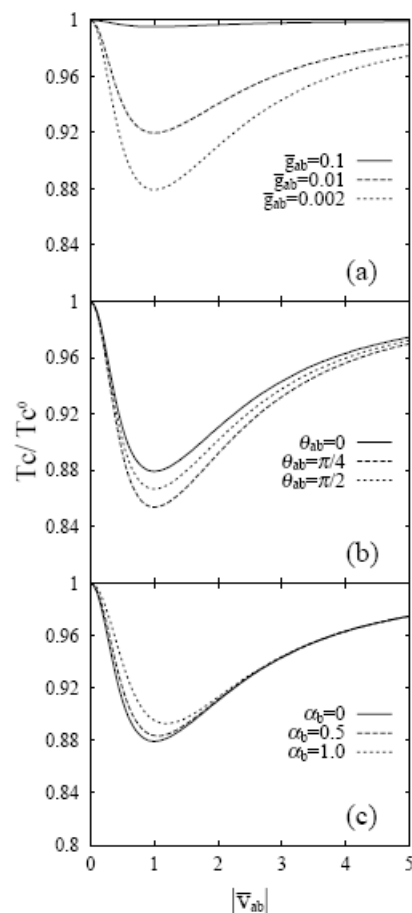
เมื่อ $\tau_j = \pi m_{imp} N_j(0) |\bar{v}_{ab}|^2$ และ

$$\begin{aligned} D_a^0 &= (1 + |\bar{v}_{ab}|^2 + \alpha_b^2)^2 + \left(\alpha_a - \frac{\alpha_b}{1 + \alpha_b^2} |\bar{v}_{ab}|^2 \right)^2 \\ D_b^0 &= \left(1 + \frac{|\bar{v}_{ab}|^2}{1 + \alpha_a^2} \right) + \left(\alpha_b - \frac{\alpha_a}{1 + \alpha_a^2} |\bar{v}_{ba}|^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

จากสมการ (2.72) สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับ $|\bar{v}_{ab}|$ ได้ดังภาพประกอบ 16 และ

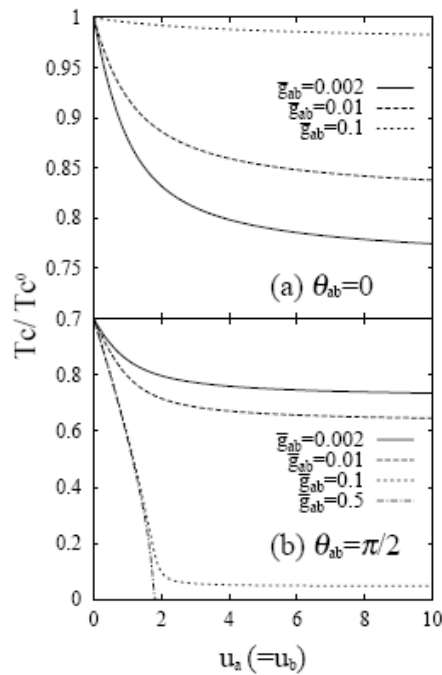
แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับ $u_a (= u_b)$ ซึ่งคือความเข้มข้นของสารเจือ ได้ดัง

ภาพประกอบ 19



ภาพประกอบ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับ $|\bar{v}_{ab}|$

ที่มา : Ohashi. (2002) : 1985



ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ กับความเข้มข้นของสารเจือ

$u_j = n_{imp} / (\pi N_j(0))$ ในรูปนี้กำหนดให้ $u_a = u_b$ และกำหนดให้

$\bar{g}_{aa} = 0.3$, $\bar{g}_{bb} = 0.25$, $\alpha_a = \alpha_b = 0$ และ $|\bar{v}_{ab}| = 1$

ที่มา : Ohashi. (2002) : 1985

จากภาพประกอบ 19 เป็นปรากฏการณ์ ระหว่างพารามิเตอร์ศักยภาพการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสารเจือระหว่างแถบพลังงาน a กับ b $|\bar{v}_{ab}|$ กับ $\frac{T_C}{T_{C^0}}$ พบว่าอุณหภูมิวิกฤต

T_C ลดลง เมื่อ $|\bar{v}_{ab}|$ มีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 1 และอุณหภูมิวิกฤต T_C เพิ่มขึ้นเมื่อ $\bar{v}_{ab} \geq 1$

ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือกับอุณหภูมิวิกฤต T_C ในช่วงแรกจะเห็นว่าเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงหลังจากนั้นอุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าคงที่แม้ว่าความเข้มข้นของสารเจือจะเพิ่มมากขึ้นเพียงใดก็ตาม

งานวิจัยที่ทั้งหมดที่ผ่านมา ยังไม่ได้คำนวณผลต่างความร้อนจำเพาะ (ΔC) เมื่อมีสารเจือชนิดไม่เป็นแม่เหล็ก ยังไม่ได้คำนวณบทบาทของค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b (g_{aa}, g_{bb}) และ ค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b (g_{ab}) ต่อ T_C และสารเจือ ยังไม่ได้หา Δ_a, Δ_b ว่าขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจืออย่างไร นี่คือนงานวิจัยที่จะทำต่อไป

บทที่ 3

การคำนวณหาอนุกรมวิกฤต

ในการวิจัยประเด็นนี้ ผู้วิจัยจะดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ใช้กรีนส์ฟังก์ชันคำนวณหาอนุกรมวิกฤตของตัวนำยวดยั้งที่มีสองแถบพลังงานและปริสทุรี
2. ใช้กรีนส์ฟังก์ชันคำนวณหาอนุกรมวิกฤตของตัวนำยวดยั้งที่มีสองแถบพลังงานและมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก แล้วศึกษากรณีจำกัดต่างๆ

การคำนวณหาอนุกรมวิกฤตของตัวนำยวดยั้งที่มีสองแถบพลังงานและปริสทุรี
ฮามิลโทเนียนของระบบคือ

$$\begin{aligned}
 H_0 = & \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^a a_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}, \sigma} \varepsilon_{\vec{k}}^b b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}\sigma} \\
 & - g_{aa} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow} - g_{bb} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} \\
 & - g_{ab} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}\uparrow}^+ a_{-\vec{k}\downarrow}^+ b_{-\vec{k}'\downarrow} b_{\vec{k}'\uparrow} - g_{ba} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} b_{\vec{k}\uparrow}^+ b_{-\vec{k}\downarrow}^+ a_{-\vec{k}'\downarrow} a_{\vec{k}'\uparrow}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

โดยที่

- $\varepsilon_{\vec{k}}^a, \varepsilon_{\vec{k}}^b$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b
- g_{aa}, g_{bb} คือ ค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ
- g_{ab}, g_{ba} คือ ค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b และ b กับ a
- $a_{\vec{k}\sigma}^+, b_{\vec{k}\sigma}^+$ คือ ตัวดำเนินการสร้างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ
- $a_{\vec{k}\sigma}, b_{\vec{k}\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ

ถ้าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแถบพลังงาน a และแถบพลังงาน b คือ Δ_a, Δ_b เราได้

$$\Delta_a = g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m) \quad (3.2)$$

$$\Delta_b = g_{bb} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m) + g_{ba} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) \quad (3.3)$$

เมื่อ $F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m), F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)$ คือ anomalous Green's function ของคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน a , b

จากสมการ (3.2) เมื่อ

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= g_{aa} T \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \Delta_a + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \Delta_b \\
&= g_{aa} T \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle T_{\tau_1} a_{\vec{k}\uparrow}^+(0) a_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) a_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) a_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \Delta_a \\
&\quad + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle T_{\tau_1} b_{\vec{k}\uparrow}^+(0) b_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) b_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) b_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \Delta_b \\
&= g_{aa} T \sum_{\omega_m} \left(\sum_{\vec{k}} \frac{1}{(i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^a)} \frac{1}{(-i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^a)} \right) \Delta_a + g_{ab} T \sum_{\omega_m} \left(\sum_{\vec{k}} \frac{1}{(i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^b)} \frac{1}{(-i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^b)} \right) \Delta_b \\
&= g_{aa} TN_a(0) \sum_{\omega_m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^a}{\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^a{}^2} \right) \Delta_a + g_{ab} TN_b(0) \sum_{\omega_m} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^b}{\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^b{}^2} \right) \Delta_b \\
&= g_{aa} TN_a(0) \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} \Delta_a + g_{ab} TN_b(0) \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} \Delta_b \\
&= g_{aa} TN_a(0) f(T) \Delta_a + g_{ab} TN_b(0) f(T) \Delta_b
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ดังนั้น

$$\sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle = N_a(0) f(T) \tag{3.5}$$

$$\sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle = N_b(0) f(T) \tag{3.6}$$

เมื่อ $f(T) = \pi T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right)$ และ $N_a(0)$ และ $N_b(0)$ คือ ความหนาแน่นของสถานะที่ระดับเฟอร์มีของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b ตามลำดับ ถ้ากำหนดให้ $\bar{g}_{aa} = g_{aa} N_a(0)$, $\bar{g}_{bb} = g_{bb} N_b(0)$, $\bar{g}_{ab} = g_{ab} N_b(0)$, $\bar{g}_{ba} = g_{ba} N_a(0)$ และ γ คือ ค่าคงตัวซัมเมอร์เฟลด์ (Sommerfeld constant)

ดังนั้น

$$\Delta_a = \bar{g}_{aa} f(T) \Delta_a + \bar{g}_{ab} f(T) \Delta_b \tag{3.7}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\Delta_b = \bar{g}_{bb} f(T) \Delta_b + \bar{g}_{ba} f(T) \Delta_a \tag{3.8}$$

จากสมการ (3.7) และ (3.8) จะได้

$$\Delta_a [1 - \bar{g}_{aa} f(T)] = \bar{g}_{ab} f(T) \Delta_b \tag{3.9}$$

$$\Delta_b[1 - \bar{g}_{bb} f(T)] = \bar{g}_{ba} f(T) \Delta_a \quad (3.10)$$

คูณสมการ (3.9) ด้วยสมการ (3.10) จะได้

$$[1 - \bar{g}_{aa} f(T)][1 - \bar{g}_{bb} f(T)] = \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba} f^2(T) \quad (3.11)$$

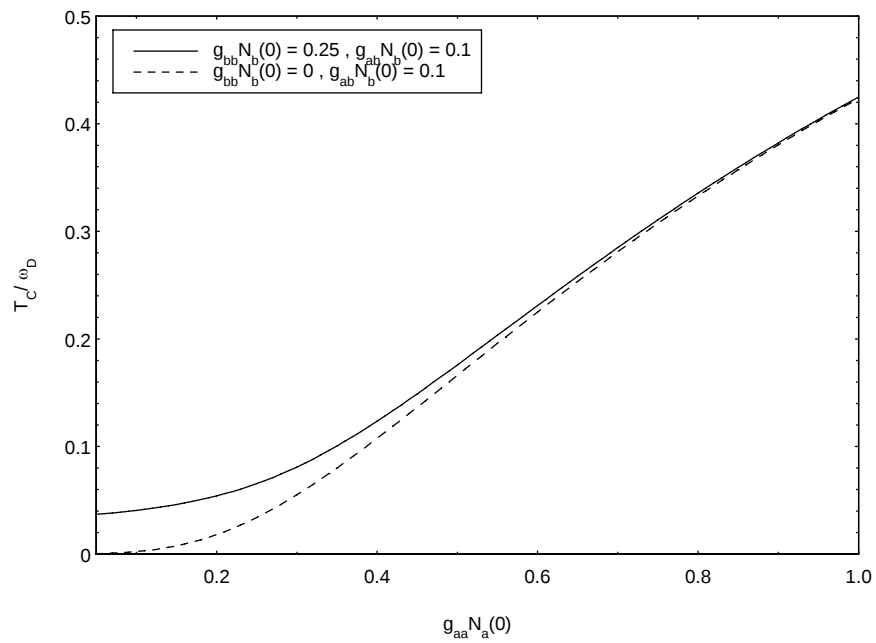
ดังนั้น เมื่อ $T = T_C$

$$f(T_C) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right) \quad (3.12)$$

สมการอุณหภูมิวิกฤต สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและปริสัทรีคือ

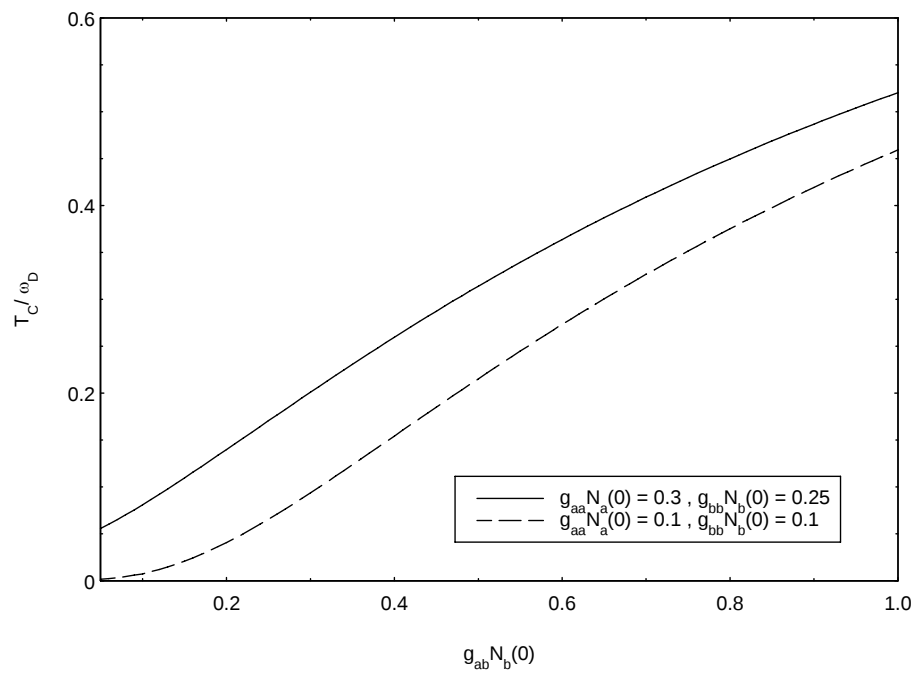
$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left[-\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}\right] \quad (3.13)$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับ ค่าคงตัวของอันตรกิริยาดึงดูดใน คู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a ($\bar{g}_{aa}$) และค่าคงตัวของอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนใน แถบพลังงาน a กับ b ($\bar{g}_{ab}$) ได้จากสมการ (3.13) โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ด้วยวิธีของนิวตัน (Newton's method) และสามารถเขียนกราฟระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$ และ $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$ ได้ดังภาพประกอบ 21 และ 22ตามลำดับ



ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$

จากภาพประกอบ 21 แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิวิกฤต (T_C) แปรผันตามอันตรกิริยาดึงดูดของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a ($\bar{g}_{aa}$) คือ ถ้า $\bar{g}_{aa}$ มีค่าน้อย T_C จะต่ำ แต่ถ้า $\bar{g}_{aa}$ มีค่ามาก T_C จะสูง



ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$

จากภาพประกอบ 22 แสดงให้เห็นว่าถ้า $g_{ab}N_b(0)$ คงที่อุณหภูมิวิกฤต (T_C) จะสูง หากอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b ($\bar{g}_{ab}$) ของเส้นที่มีค่ามากกว่าเส้นประ

สมการ (3.13) ใช้ได้ในกรณี $\frac{\omega_D}{T_C} \rightarrow \infty$, แต่ถ้าลิมิตของ $\frac{\omega_D}{T_C}$ ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ กำหนดให้

$$f(T_C) = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}}{\varepsilon_{\bar{k}}} \tanh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}}}{2T_C}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4/\pi}{(2n+1)} \tan^{-1}\left[\frac{\omega_D/\pi T_C}{(2n+1)}\right] \quad (3.14)$$

ดังนั้นสมการอุณหภูมิวิกฤต สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานในกรณี $\frac{\omega_D}{T_C}$ ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ คือ

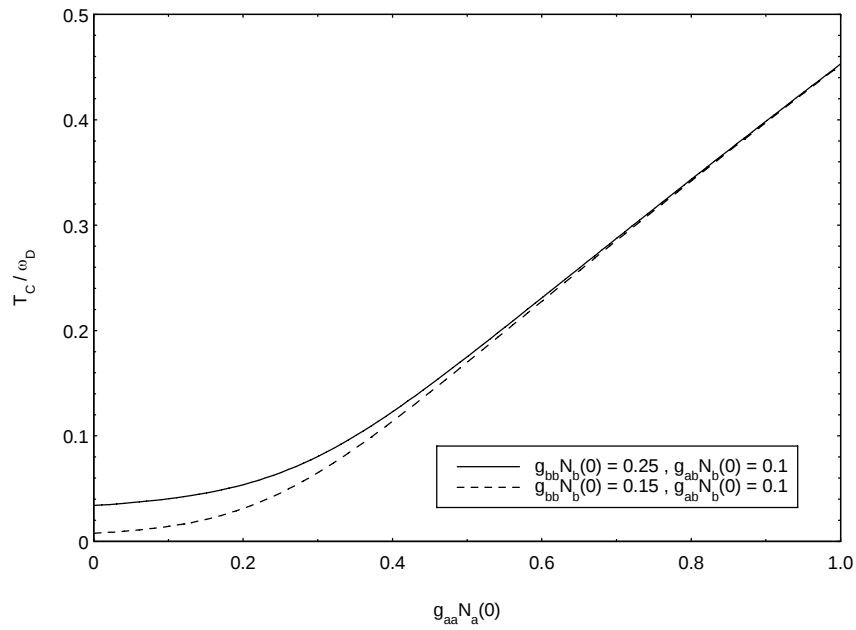
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4/\pi}{(2n+1)} \tan^{-1}\left[\frac{\omega_D/2T_C}{(2n+1)}\right] = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left[-\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}\right] \quad (3.15)$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับค่าคงตัวของอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a ($\bar{g}_{aa}$) และค่าคงตัวของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b ($\bar{g}_{ab}$) ในกรณี $\frac{\omega_D}{T_C}$ มีค่าจำกัด ได้จากสมการ (3.15) โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical

analysis) ด้วยวิธีของนิวตัน (Newton's method) และสามารถเขียนกราฟระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$

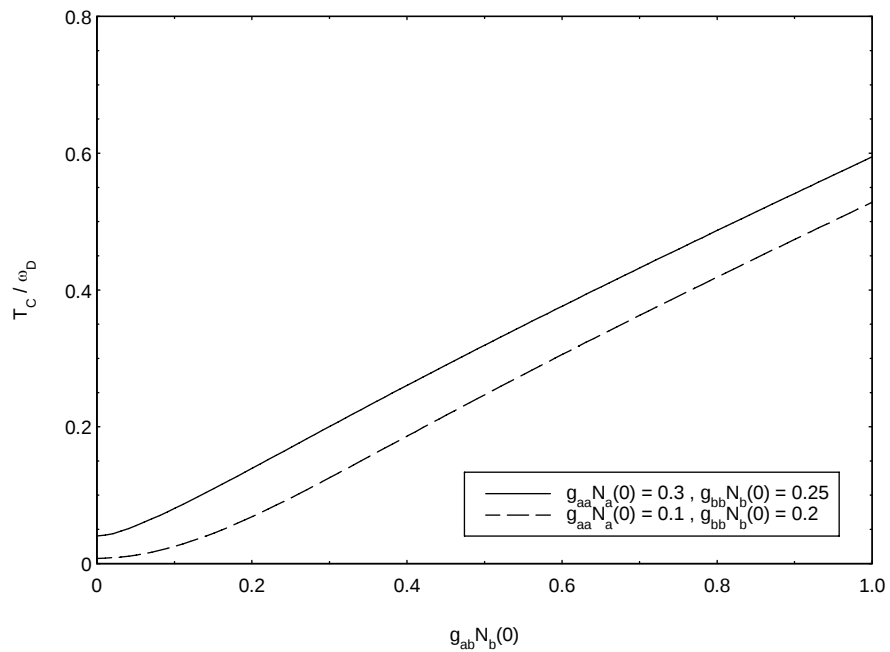
ได้ดังภาพประกอบ 23 และสามารถเขียนกราฟระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$ ได้ดังภาพประกอบ 24

ตามลำดับ



ภาพประกอบ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_c}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$

เมื่อเปรียบเทียบภาพประกอบ 21 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_c}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_c} \rightarrow \infty$ กับภาพประกอบ 23 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_c}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{aa}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_c}$ ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ จะเห็นว่ากราฟมีลักษณะเหมือนกัน คืออุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a และอุณหภูมิวิกฤตในภาพประกอบ 23 สูงกว่าภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$

เมื่อเปรียบเทียบภาพประกอบ 22 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_C} \rightarrow \infty$

กับภาพประกอบ 24 ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{T_C}{\omega_D}$ กับ $\bar{g}_{ab}$ กรณี $\frac{\omega_D}{T_C}$ ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ จะ

เห็นว่ากราฟมีลักษณะเหมือนกัน คืออุณหภูมิวิกฤตแปรผันตามอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a กับ b และอุณหภูมิวิกฤตในภาพประกอบ 24 สูงกว่าภาพประกอบ 22

จากสมการ (3.13) กรณี $\bar{g}_{ab} = 0$ สมการอุณหภูมิวิกฤต คือ

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{\bar{g}_{aa}}\right]$$

การคำนวณหาอนุหภูมิวิกฤตของตัวนำวยดยั้งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมี
สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

ฮามิลโทเนียนของระบบคือ

$$H = H_0 + H_{imp} \quad (3.16)$$

เมื่อ H_0 คือ ฮามิลโทเนียนของตัวนำวยดยั้งบริสุทธิ์
 H_{imp} คือ ฮามิลโทเนียนของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

$$\begin{aligned} H_0 = & \sum_{\vec{p}, \sigma} \varepsilon_{\vec{p}}^a a_{\vec{p}\sigma}^+ a_{\vec{p}\sigma} + \sum_{\vec{p}, \sigma} \varepsilon_{\vec{p}}^b b_{\vec{p}\sigma}^+ b_{\vec{p}\sigma} \\ & - g_{aa} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} a_{\vec{p}\uparrow}^+ a_{-\vec{p}\downarrow}^+ a_{-\vec{p}'\downarrow} a_{\vec{p}'\uparrow} - g_{bb} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} b_{\vec{p}\uparrow}^+ b_{-\vec{p}\downarrow}^+ b_{-\vec{p}'\downarrow} b_{\vec{p}'\uparrow} \\ & - g_{ab} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} a_{\vec{p}\uparrow}^+ a_{-\vec{p}\downarrow}^+ b_{-\vec{p}'\downarrow} b_{\vec{p}'\uparrow} - g_{ba} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} b_{\vec{p}\uparrow}^+ b_{-\vec{p}\downarrow}^+ a_{-\vec{p}'\downarrow} a_{\vec{p}'\uparrow} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$H_{imp} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \sigma} v_{aa} a_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}'\sigma} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \sigma} v_{bb} b_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}'\sigma} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \sigma} v_{ab} a_{\vec{k}\sigma}^+ b_{\vec{k}'\sigma} + \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \sigma} v_{ba} b_{\vec{k}\sigma}^+ a_{\vec{k}'\sigma} \quad (3.18)$$

โดยที่

$\varepsilon_{\vec{p}}^a, \varepsilon_{\vec{p}}^b$ คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และ b

g_{aa}, g_{bb} คือ พลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน a และ b

g_{ab}, g_{ba} คือ พลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน a และ b

$a_{\vec{p}\sigma}^+, b_{\vec{p}\sigma}^+$ คือ ตัวนำเนินการสร้างในแถบพลังงาน a และ b

$a_{\vec{p}\sigma}, b_{\vec{p}\sigma}$ คือ ตัวนำเนินการทำลายในแถบพลังงาน a และ b

v_{aa}, v_{bb} คือ ศักย์การกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือภายในแถบพลังงาน a และ b

v_{ab}, v_{ba} คือ ศักย์การกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือภายในระหว่างแถบพลังงาน a กับ b

สมการพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแถบพลังงาน a และแถบพลังงาน b คือ

$$\Delta_a^+ = g_{aa} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}^+(\vec{k}, i\omega_m) + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}^+(\vec{k}, i\omega_m) \quad (3.19)$$

$$\Delta_b^+ = g_{bb} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}^+(\vec{k}, i\omega_m) + g_{ba} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}^+(\vec{k}, i\omega_m) \quad (3.20)$$

หรือ

$$\Delta_a^+ = g_{aa} \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle + g_{ab} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \quad (3.21)$$

$$\Delta_b^+ = g_{bb} \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle + g_{ba} \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \quad (3.22)$$

เมื่อ $F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)$ คือ ผลคูณของกรีนส์ฟังก์ชันในแถบพลังงาน a ซึ่งสามารถเขียนในลักษณะ diagram ได้ ดังนี้

เส้น — แทน กรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a

~~~~~ แทน กรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน b

— แทน กรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนเมื่ออยู่รอบอะตอมสารเจือ

✱ แทน ศักย์การกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือภายใน  
แถบพลังงาน a

และ ● แทน ศักย์การกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือภายใน  
แถบพลังงาน b

$$F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) = \begin{array}{c} \text{(a)} \quad \text{(b)} \quad + \\ \text{(c)} \quad \text{(d)} \quad + \quad \text{(e)} \end{array}$$

ในการคำนวณ diagram a คือ กรีนส์ฟังก์ชันในแถบพลังงาน a ในกรณีตัวนำวยดยิ่งยวดบริสุทธิ์

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram a} &= T \sum_{\omega_m} \left( \sum_{\vec{k}} G_{aa}^o(\vec{k}, i\omega_m) G_{aa}^o(\vec{k}, -i\omega_m) \right) \\
 &= T \sum_{\omega_m} \left( \sum_{\vec{k}} \frac{1}{(i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^a)} \frac{1}{(-i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}}^a)} \right) \\
 &= T \sum_{\omega_m} \left( \sum_{\vec{k}} \frac{1}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2})} \right) \\
 &= T \sum_{\omega_m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_a(0)}{\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a^2}} d\varepsilon_{\vec{k}}^a \right) \\
 &= T \sum_{\omega_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^a}{\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^2} N_a(0) \\
 &= T \pi N_a(0) \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} \\
 &= N_a(0) f(T)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

โดยที่  $f(T) = \pi T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} = \ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T} \right)$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram b} &= -2v_{aa}^2 T \sum_{\omega_m} \left( \sum_{\vec{k}} G_{aa}^0(\vec{k}, i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}, -i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}, i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) \right) \\
 &= -2v_{aa}^2 T N_a(0) \sum_{\omega_m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^a}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^2)(i\omega_m + \varepsilon_{\vec{k}})} \right) G_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) \\
 &= -2v_{aa}^2 T N_a(0) \sum_{\omega_m} \left( \frac{-\pi i}{2|\omega_m|^2} \right) G_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)
 \end{aligned}$$

เมื่อ  $v_{aa} = (\Gamma_{aa} / \pi N_a(0))^{1/2}$  และ  $G_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) = \tilde{G}_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) / (i\Gamma_{aa})$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 &= iv_{aa}^2 T N_a(0) \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2} \frac{\tilde{G}_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{i\Gamma_{aa}} \\
 &= \frac{\Gamma_{aa}}{\Gamma_{aa}} T \sum_{\omega_m} \frac{\tilde{G}_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{|\omega_m|^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เนื่องจาก } \tilde{G}_{aa}(\bar{k}, i\omega_m) &= i\Gamma_{aa} G_{aa}(\bar{k}, i\omega_m) = \frac{i\Gamma_{aa}}{i\omega_m + i\Gamma_{aa}} \\
&= T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2} \frac{i\Gamma_{aa}}{(i\omega_m + i\Gamma_{aa})} \\
&= \Gamma_{aa} T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2 (\omega_m + \Gamma_{aa})} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \Gamma_{aa} = v_{aa}^2 \pi N_a(0)$$



$$\begin{aligned}
&= v_{aa}^4 T \sum_{\omega_m} \left( \sum_{\bar{k}} G_{aa}^0(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}^0(\bar{k}, -i\omega_m) G_{aa}^0(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}^0(\bar{k}, -i\omega_m) \right) G_{aa}(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}(\bar{k}, -i\omega_m) \\
&= v_{aa}^4 T N_a^2(0) \sum_{\omega_m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\bar{k}}^a}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\bar{k}}^2)} \right)^2 G_{aa}(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}(\bar{k}, -i\omega_m) \\
&= v_{aa}^4 T N_a^2(0) \sum_{\omega_m} \left( \frac{\pi}{\omega_m} \right)^2 G_{aa}(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}(\bar{k}, -i\omega_m) \\
&= v_{aa}^4 T N_a^2(0) \pi^2 \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2} \frac{\tilde{G}_{aa}(\bar{k}, i\omega_m)}{(i\Gamma_a)} \frac{\tilde{G}_{aa}(\bar{k}, -i\omega_m)}{(i\Gamma_a)} \\
&= -\frac{v_{aa}^4 T N_a^2(0) \pi^2}{\Gamma_{aa}^2} \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2} \left( \frac{i\Gamma_{aa}}{i\omega_m + i\Gamma_{aa}} \right) \left( \frac{i\Gamma_{aa}}{i\omega_m + i\Gamma_{aa}} \right) \\
&= -T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2} \frac{\Gamma_{aa}^2}{(\omega_m + \Gamma_{aa})(\omega_m + \Gamma_{aa})} \\
&= -\Gamma_{aa}^2 T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|^2 (\omega_m + \Gamma_{aa})(\omega_m + \Gamma_{aa})} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน  $F_{bb}(\bar{k}, i\omega_m)$  คือ ผลคูณของกรีนส์ฟังก์ชันในแถบพลังงาน b ซึ่งสามารถเขียนในลักษณะ diagram ดังนี้ — แทนด้วย  $\sim$

$$F_{bb}(\bar{k}, i\omega_m) = \begin{array}{c} \text{(A)} \\ \text{(B)} \\ \text{(C)} \\ \text{(D)} \\ \text{(E)} \end{array}$$

หากเราให้  $Q = \text{diagrams (b) + (c) + (d) + (e)}$

$$P = \text{diagrams (B) + (C) + (D) + (E)}$$

ดังนั้น

$$\sum_{\bar{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle = N_a(0) f(T) + Q \quad (3.26)$$

$$\sum_{\bar{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle = N_b(0) f(T) + P \quad (3.27)$$

สมการพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของแถบพลังงาน a และแถบพลังงาน b เขียนได้เป็น

$$\Delta_a = g_{aa}[N_a(0) f(T) + Q]\Delta_a + g_{ab}[N_b(0) f(T) + P]\Delta_b \quad (3.28)$$

$$\Delta_b = g_{bb}[N_b(0) f(T) + P]\Delta_b + g_{ba}[N_a(0) f(T) + Q]\Delta_a \quad (3.29)$$

ดังนั้น

$$\Delta_a = [\bar{g}_{aa} f(T) + g_{aa} Q]\Delta_a + [\bar{g}_{ab} f(T) + g_{ab} P]\Delta_b \quad (3.30)$$

$$\Delta_b = [\bar{g}_{bb} f(T) + g_{bb} P]\Delta_b + [\bar{g}_{ba} f(T) + g_{ba} Q]\Delta_a \quad (3.31)$$

โดยการกำจัด  $\Delta_a$  และ  $\Delta_b$  เราได้

$$[1 - \bar{g}_{aa} f(T) + g_{aa} Q][1 - \bar{g}_{bb} f(T) + g_{bb} P] = [\bar{g}_{ab} f(T) + g_{ab} P][\bar{g}_{ba} f(T) + g_{ba} Q] \quad (3.32)$$

กระจายสมการ (3.32) จะได้

$$\begin{aligned}
& (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) f^2(T) - [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q}{N_a(0)} \right)] f(T) \\
& + [1 + (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \frac{PQ}{N_a(0)N_b(0)} - \left( \frac{P\bar{g}_{bb}}{N_b(0)} + \frac{Q\bar{g}_{aa}}{N_a(0)} \right)] = 0
\end{aligned} \quad (3.33)$$

ดังนั้น

$$f(T) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} + \frac{K}{2} - \frac{1}{2} \left[ A_0^2 + K^2 + 2A_0 \left( \frac{P}{N_b(0)} - \frac{Q}{N_a(0)} \right) \beta - \frac{4PQ}{N_a(0)N_b(0)} \right]^{1/2} \quad (3.34)$$

เมื่อ  $f(T) = \pi T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|} = \ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C} \right)$  และ

$$K = - \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q}{N_a(0)} \right) \quad (3.35)$$

$$A_0 = \frac{[(\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}]^{1/2}}{|\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}|} \quad (3.36)$$

$$\beta = \frac{(\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa})}{[(\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}]^{1/2}} \quad (3.37)$$

ถ้าเรากำหนดให้กรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a และแถบพลังงาน b ในกรณีมีสารเจือ เป็นต้นนี้คือ

$$L_a(i\omega_m) = \lim_{\Delta_a \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a} \quad (3.38)$$

$$L_b(i\omega_m) = \lim_{\Delta_b \rightarrow 0} \sum_{\vec{k}} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b} \quad (3.39)$$

และให้นิยาม P และ Q ใหม่เป็น

$$P(c) = T \sum_{\omega_m} [L_b(i\omega_m) - L_{bo}(i\omega_m)] \quad (3.40)$$

$$Q(c) = T \sum_{\omega_m} [L_a(i\omega_m) - L_{ao}(i\omega_m)] \quad (3.41)$$

เมื่อ  $L_{bo}(i\omega_m)$  และ  $L_{ao}(i\omega_m)$  เป็นผลคูณของกรีนส์ฟังก์ชันของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ และ  $L_b(i\omega_m)$  และ  $L_a(i\omega_m)$  เป็นผลคูณของกรีนส์ฟังก์ชันของตัวนำยวดยิ่งไม่บริสุทธิ์

จากการคำนวณของซากุไรซึ่งบรรยายการชนของคู่คูเปอร์ต่อสารเจือ (Sakurai. 1978:1195) ได้ผลดังนี้.

$$L_a(i\omega_m) = L_{ao}(i\omega_m) \left[ 1 + N_i T \sum_{\omega'_m} K_a(i\omega_m, i\omega_{m'}) L_a(i\omega_{m'}) \right] \quad (3.41)$$

$$L_b(i\omega_m) = L_{bo}(i\omega_m) \left[ 1 + N_i T \sum_{\omega'_m} K_b(i\omega_m, i\omega_{m'}) L_b(i\omega_{m'}) \right] \quad (3.42)$$

เมื่อ  $N_i$  เป็นจำนวนอะตอมของสารเจือ และ  $K_i(i\omega_m, i\omega_{m'})$  เป็น kernel ของการกระเจิง ซึ่ง Sakurai ได้คำนวณไว้ว่า

$$\frac{K_a(i\omega_m, i\omega'_{m'})}{T} = -v_{aa}^4 G_{aa}^2(i\omega_m) \delta_{\omega_m, \omega_{m'}} - v_{aa}^2 v_{bb}^2 G_{aa}^2(i\omega_m) \delta_{\omega_m, \omega_{m'}} \quad (3.43)$$

ในที่นี้ จะแสดงการคำนวณเฉพาะในแถบพลังงาน a สำหรับกรณีแถบพลังงาน b นั้นก็ดำเนินการคำนวณในทำนองเดียวกันโดยแทนสมการ (3.43) ในสมการ (3.41)

$$\begin{aligned} L_a(i\omega_m) &= \left\{ 1 + N_i \sum_{\omega'_m} \left( -v_{aa}^4 G_{aa}^2(i\omega_m) \delta_{\omega_m, \omega_{m'}} - v_{aa}^2 v_{bb}^2 G_{aa}^2(i\omega_m) \delta_{\omega_m, \omega_{m'}} \right) L_a(i\omega'_{m'}) \right\} L_{ao}(i\omega_m) \\ &= L_{ao}(i\omega_m) \left\{ 1 - (v_{aa}^4 + v_{aa}^2 v_{bb}^2) G_{aa}^2(i\omega_m) L_a(i\omega_m) N_i \right\} \\ &= L_{ao}(i\omega_m) - L_{ao}(i\omega_m) (v_{aa}^4 + v_{aa}^2 v_{bb}^2) G_{aa}^2(i\omega_m) N_i L_a(i\omega_m) \\ &\quad \frac{L_a(i\omega_m)}{L_{ao}(i\omega_m)} = 1 - (v_{aa}^4 + v_{aa}^2 v_{bb}^2) G_{aa}^2(i\omega_m) N_i L_a(i\omega_m) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$L_a(i\omega_m) = \frac{1}{L_{ao}^{-1}(i\omega_m) + v_{aa}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2) G_{aa}^2(i\omega_m) N_i} \quad (3.44)$$

กำหนดให้

$$H_a(i\omega_m) = [L_{ao}^{-1}(i\omega_m) + v_{aa}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2) G_{aa}^2(i\omega_m) N_i]^{-1} / \pi N_a(0) \quad (3.45)$$

ดังนั้น

$$\frac{L_a(i\omega_m)}{\pi N_a(0)} = H_a(i\omega_m) \quad (3.46)$$

เนื่องจาก

$$L_{a0}(i\omega_m) = \frac{\pi N_a(0)}{\left\{ |\omega_m| + N_i (v_{aa}^2 + v_{aa} v_{bb}) \right\} G_{aa}(i\omega_m)} \quad (3.47)$$

จะได้

$$H_a(i\omega_m) = \left\{ |\omega_m| + \frac{c}{\rho_s \Gamma_{aa}} [N_a(0) + N_b(0)] (v_{aa}^2 + v_{aa} v_{bb}) \tilde{G}_{aa}(i\omega_m) \right\}^{-1} \quad (3.48)$$

$$- N_a(0) \frac{\pi c}{\rho_s \Gamma_{aa}^2} [N_a(0) + N_b(0)] \tilde{G}_{aa}^2(i\omega_m) v_{aa}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{aa}(i\omega_m) &= G_{aa}(i\omega_m) i\Gamma_{aa} = i\Gamma_{aa} / (i\omega_m + i\Gamma_{aa}) \\ N_i &= \frac{c}{\rho_s} [N_a(0) + N_b(0)] \quad ; \quad \Gamma_{aa} = \pi N_a(0) v_{aa}^2 \\ \rho_s &= [N_a(0) + N_b(0)] / N \quad ; \quad \Gamma_{bb} = \pi N_b(0) v_{bb}^2 \\ c &= N_i / N \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$H_a(i\omega_m) = \left\{ |\omega_m| + c \alpha_a(\omega_m) \right\}^{-1} \quad (3.49)$$

เมื่อ

$$\alpha_a(\omega_m) = \frac{N}{\Gamma_a} (v_{aa}^2 + v_{aa} v_{bb}) \tilde{G}_{aa}(i\omega_m) - N_a(0) \pi \frac{N}{\Gamma_a^2} \tilde{G}_{aa}^2(i\omega_m) v_{aa}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2) \quad (3.50)$$

เพราะว่ากรีนส์ฟังก์ชันของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์ คือ

$$\frac{L_{a0}^0(i\omega_m)}{\pi N_a(0)} = H_a^0(i\omega_m) = \frac{1}{|\omega_m|} \quad (3.51)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} Q &= -T \sum_{\omega_m} [L_a(i\omega_m) - L_{a0}^0(i\omega_m)] \\ &= -\pi N_a(0) T \{ H_a(i\omega_m) - H_a^0(i\omega_m) \} \\ &= -\pi N_a(0) T \sum_{\omega_m} \left[ \frac{1}{|\omega_m| + c \alpha_a(\omega_m)} - \frac{1}{|\omega_m|} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{Q}{N_a(0)} = 2\pi T \sum_{\omega_m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{|\omega_m|} - \frac{1}{|\omega_m| + c \alpha_a(\omega_m)} \right] = K(\rho_a) \quad (3.52)$$

เมื่อ

$$K(\rho_a) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_a\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.53)$$

$$\text{โดยที่ } \rho_a = \frac{c\alpha_a(\omega_m)}{\pi T_C} \text{ และ } \alpha_a(\omega_m) = \frac{N(v_{aa}^2 + v_{aa}v_{bb})}{|\omega_m| + \Gamma_{aa}} + \frac{N_a(0)\pi N v_{aa}^2(v_{aa}^2 + v_{bb}^2)}{(|\omega_m| + \Gamma_{aa})^2}$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{P}{N_b(0)} = 2\pi T \sum_{\omega_m} \left[ \frac{1}{|\omega_m|} - \frac{1}{|\omega_m| + c\alpha_b(\omega_m)} \right] = K(\rho_b) \quad (3.54)$$

เมื่อ

$$K(\rho_b) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_b\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3.55)$$

$$\text{โดยที่ } \rho_b = \frac{c\alpha_b(\omega_m)}{\pi T_C} \text{ และ } \alpha_b(\omega_m) = \frac{N(v_{bb}^2 + v_{aa}v_{bb})}{|\omega_m| + \Gamma_{bb}} + \frac{N_b(0)\pi N v_{bb}^2(v_{aa}^2 + v_{bb}^2)}{(|\omega_m| + \Gamma_{bb})^2} \quad \text{ด้วย}$$

แทนสมการ (3.51) และ (3.54) ในสมการอุณหภูมิกฤต (3.33) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก จะได้

$$\begin{aligned} f(T_C) &= \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} - \frac{1}{2}[K(\rho_a) + K(\rho_b)] \\ &\quad - \frac{1}{2}[A_0^2 + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2A_0(K(\rho_b) - K(\rho_a))\beta - 4K(\rho_a)K(\rho_b)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

เมื่อ  $f(T_C) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right)$  และ  $A_0, \beta$  มีค่าตามสมการ (3.35) และ (3.36)

สมการ (3.56) คือสมการอุณหภูมิกฤตของตัวนำยิ่งยวดที่มีสองแถบพลังงานและมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

ในกรณีตัวนำวยดิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์ คือ  $P=Q=0$  โดยที่  $P = N_a(0)K(\rho_a)$  และ  $Q = N_b(0)K(\rho_b)$  จะได้  $f(T_C)$  กลับไปสู่กรณีตัวนำวยดิ่งบริสุทธิ์

จากสมการ (3.56) เราจะมาพิจารณากรณีจำกัดต่างๆดังต่อไปนี้

1. เมื่อ  $\bar{g}_{ab} = 0$  คือ เมื่อไม่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานแต่ตัวนำวยดิ่งมีสารเจือ จะได้สมการอนุกรมวิวิกฤต คือ

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T} \exp \left[ -\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}}{2\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} + \frac{1}{2}[K(\rho_a) + K(\rho_b)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} \right)^2 + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2 \left( \frac{\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} \right) (K(\rho_b) - K(\rho_a)) \right. \right. \\ \left. \left. - 4K(\rho_a)K(\rho_b) \right\}^{1/2} \right] \quad (3.57)$$

2. เมื่อ  $\bar{g}_{aa} = \bar{g}_{bb} \gg \bar{g}_{ab}$  สมการอนุกรมวิวิกฤตสามารถหาได้ดังนี้ จากสมการ (3.56) จะได้  $A_0 = 0, \beta = 0$

$$f(T_C) = \frac{1}{\bar{g}_{aa}} - K(\rho_a)$$

เมื่อ

$$K_a(\rho) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_a\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

โดยที่  $\rho = \frac{c\alpha_a(\omega_m)}{\pi T_C}$ ,  $\alpha_a(\omega_m) = \frac{2Nv_{aa}^2}{|\omega_m| + \Gamma_{aa}} + \frac{2N_a(0)\pi Nv_{aa}^4}{(|\omega_m| + \Gamma_{aa})^2}$  เมื่อ  $v_{aa}$  คือ ศักย์การกระเจิง

ของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือ และ  $\Gamma_{aa} = \pi N_a(0)v_{aa}^2$  ดังนั้น

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp \left[ -\frac{1}{\bar{g}_{aa}} + K(\rho_a) \right] \quad (3.58)$$

3.เมื่อ  $\bar{g}_{bb} = 0$  แต่  $\bar{g}_{ab} \neq 0$  และ  $\bar{g}_{aa} \neq 0$  การจับคู่ในแถบพลังงาน b น้อยมาก แต่ในแถบพลังงาน a มากและระหว่างแถบพลังงาน a ,b มาก จะได้สมการอนุกรมวิวิกฤตดังนี้

$$\begin{aligned}
 T_C = & \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C} \exp \left[ \frac{\bar{g}_{aa}}{2\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}} + \frac{1}{2} [K(\rho_a) + K(\rho_b)] \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{g}_{aa}^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}{\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}} + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2 \frac{\bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}} (K(\rho_b) - K(\rho_a)) \right. \\
 & \left. \left. - 4K(\rho_a)K(\rho_b) \right\}^{1/2} \right] \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

โดยภาพรวม  $T_C$  ลดลงแบบ exponential เมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม เนื่องจากดูได้จาก  $K(\rho_a)$  และ  $K(\rho_b)$  ที่ขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือ

## บทที่ 4

### การคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะ

ในการวิจัยประเด็นนี้ ผู้วิจัยจะดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์
2. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กแล้ววิเคราะห์สูตร  $\Delta C$  ในกรณีจำกัดต่างๆ

### การคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์

ที่อุณหภูมิใกล้  $T_C$  , สามารถกระจาย anomalous Green's function ได้เป็นอนุกรมของ  $\Delta, \Delta^3, \Delta^5 \dots$  ดังนี้ คือ

$$T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}^+(\vec{k}, \omega_m) = \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle \Delta_a + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^3 \quad (4.1)$$

และ

$$T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}^+(\vec{k}, \omega_m) = \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle \Delta_b + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^3 \quad (4.2)$$

โดยที่  $A_2, B_2$  คือ ผลคูณของกรีนฟังก์ชัน 2 ตัว และ  $A_4, B_4$  คือ ผลคูณของกรีนฟังก์ชัน 4 ตัว ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle A_2 \rangle &= \langle T_{\tau_1} a_{\vec{k}\uparrow}^+(0) a_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) a_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) a_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \\ \langle B_2 \rangle &= \langle T_{\tau_1} b_{\vec{k}\uparrow}^+(0) b_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) b_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) b_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \\ \langle A_4 \rangle &= \langle T_{\tau_1} a_{\vec{k}\uparrow}^+(0) a_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) a_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) a_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) a_{\vec{k}_2\uparrow}^+(\tau_2) a_{-\vec{k}_2\downarrow}^+(\tau_2) a_{-\vec{k}_3\downarrow}(\tau_3) a_{\vec{k}_3\uparrow}(\tau_3) \rangle \\ \langle B_4 \rangle &= \langle T_{\tau_1} b_{\vec{k}\uparrow}^+(0) b_{-\vec{k}\downarrow}^+(0) b_{-\vec{k}_1\downarrow}(\tau_1) b_{\vec{k}_1\uparrow}(\tau_1) b_{\vec{k}_2\uparrow}^+(\tau_2) b_{-\vec{k}_2\downarrow}^+(\tau_2) b_{-\vec{k}_3\downarrow}(\tau_3) b_{\vec{k}_3\uparrow}(\tau_3) \rangle \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}^+(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_a} = \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^2 \quad (4.3)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}^+(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_b} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^2 \quad (4.4)$$

ผลต่างระหว่างพลังงานอิสระของสถานะยวดยิ่ง ( $F_S$ ) กับสถานะปกติ ( $F_N$ ) คือ

$$\begin{aligned} \Delta F = F_S - F_N &= \int_0^{\Delta_a} d\Delta_a \Delta_a^2 \frac{d}{d\Delta_a} \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}^+(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_a} \right] + \int_0^{\Delta_b} d\Delta_b \Delta_b^2 \frac{d}{d\Delta_b} \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}^+(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_b} \right] \\ &= \int_0^{\Delta_a} d\Delta_a \Delta_a^2 \frac{d}{d\Delta_a} \left\{ \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^2 \right\} \\ &\quad + \int_0^{\Delta_b} d\Delta_b \Delta_b^2 \frac{d}{d\Delta_b} \left\{ \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^2 \right\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\Delta F = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left[ \frac{\Delta_a^4}{2} \langle A_4 \rangle + \frac{\Delta_b^2}{2} \langle B_4 \rangle \right] \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 \Delta F}{dT^2} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 + \langle A_4 \rangle \Delta_a^2 \frac{d^2 \Delta_a^2}{dT^2} + \langle B_4 \rangle \left( \frac{d\Delta_b^2}{dT} \right)^2 + \langle B_4 \rangle \Delta_b^2 \frac{d^2 \Delta_b^2}{dT^2} \right\}$$

ที่  $T = T_C$  จะได้  $\Delta_a^2 = \Delta_b^2 = 0$

$$\left. \frac{d^2 \Delta F}{dT^2} \right|_{T=T_C} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 + \langle B_4 \rangle \left( \frac{d\Delta_b^2}{dT} \right)^2 \right\}$$

กำหนดให้  $x_c = \Delta_b / \Delta_a$  จะได้ว่า

$$\therefore \left. \frac{d^2 \Delta F}{dT^2} \right|_{T=T_C} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle + \langle B_4 \rangle x_c^4 \right\} \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 \quad (4.6)$$

ผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์ที่มีสองแถบพลังงานที่อุณหภูมิวิกฤตหาได้จากสูตร คือ

$$\Delta C(T_C) = C_S - C_N = T \left. \frac{d^2 \Delta F}{dT^2} \right|_{T=T_C} \quad (4.7)$$

แทนค่า  $\left. \frac{d^2 \Delta F}{dT^2} \right|_{T=T_C}$  ลงในสมการ (4.7) จะได้

$$\Delta C(T_C) = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle + \langle B_4 \rangle x_c^4 \right\} \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 \bigg|_{T=T_C} \quad (4.8)$$

การคำนวณหาค่า  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิวิกฤตแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. คำนวณหาค่า  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  สำหรับตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์
2. คำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤต

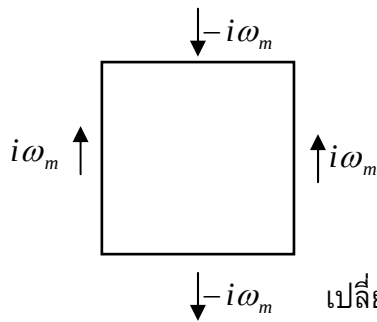
$$\text{เมื่อ } x_c = \lim_{T \rightarrow T_C} \frac{\Delta_b}{\Delta_a}$$

3. คำนวณหา  $\frac{d\Delta_a^2}{dT}$  ที่อุณหภูมิวิกฤต โดยขั้นแรกคำนวณหา  $\Delta_a$  ให้อยู่ในรูปที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเสียก่อน แล้วจึงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับอุณหภูมิ

การคำนวณหา  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  สำหรับตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์

ในตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์ เทอม  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  สามารถคำนวณได้จากแผนภาพ  $S_1$

ดังนี้



$$S_1 = T \sum_{\vec{k}, \omega_m} G_a^{02}(\vec{k}, i\omega_m) G_a^{02}(\vec{k}, -i\omega_m)$$

$$= T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{1}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^2)^2}$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย  $\sum_{\vec{k}} \rightarrow N_a(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_{\vec{k}}^a$

$N_a(0)$  เป็นความหนาแน่นของสถานะของแถบพลังงาน a

$$= T \sum_{\omega_m} N_a(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^a}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a2})^2}$$

อาศัยสูตรการหาค่าอินทิกรัล  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon_{\vec{k}}^a}{(\omega_m^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^{a2})^2} = \frac{\pi}{2\omega_m^3}$

$$= T \frac{\pi}{2} N_a(0) \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^3}$$

เพราะว่า  $\omega_m = (2n+1)\pi T$  และ แลมบ์ดา ฟังก์ชัน (lambda function)

$$\lambda(j) = \sum_n \frac{1}{(2n+1)^j}$$

ดังนั้น  $S_1$  จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$S_1 = \frac{N_a(0)\lambda(3)}{\pi^2 T_c^2}$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป  $\zeta(j)$  (Zeta function) โดยที่

$$\lambda(j) = (1 - 1/2^j) \zeta(j)$$

ดังนั้น

$$S_1 = \frac{7N_a(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} \quad (4.9)$$

จะได้ว่า

ในทำนองเดียวกัน

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle = \frac{7N_a(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} \quad (4.10)$$

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle = \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} \quad (4.11)$$

การคำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤต

จากสมการพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแถบพลังงาน a และแถบพลังงาน b (3.2) และ (3.3) แทนค่า  $T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)$  และ  $T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)$  จากสมการ (4.1) และ (4.2) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_a = g_{aa} & \left\{ \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle \Delta_a + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^3 \right\} \\ & + g_{ab} \left\{ \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle \Delta_b + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^3 \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta_b = g_{bb} & \left\{ \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle \Delta_b + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^3 \right\} \\ & + g_{ba} \left\{ \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle \Delta_a + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^3 \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ใกล้ๆ อุณหภูมิวิกฤตเทอม  $\Delta_i^3$  มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ อัตราส่วน  $\frac{\Delta_b}{\Delta_a}$  ที่อุณหภูมิวิกฤตจึงเขียนได้ดังนี้

$$x_c = \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T=T_c} \quad (4.14)$$

จากสมการ (4.12) จะได้

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_a} = \frac{1 - g_{aa} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle}{g_{ab} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle} \quad (4.15)$$

หรือจากสมการ (4.13) จะได้

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_a} = \frac{g_{ba} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle A_2 \rangle}{1 - g_{bb} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^B d\tau_1 \langle B_2 \rangle} \quad (4.16)$$

แทนค่า  $\sum_{k,k_1}^{\beta} \int_0^{\beta} d\tau_1 \langle A_2 \rangle$  และ  $\sum_{k,k_1}^{\beta} \int_0^{\beta} d\tau_1 \langle B_2 \rangle$  จากสมการ (3.5) ,(3.6) ในสมการ (4.15) จะได้

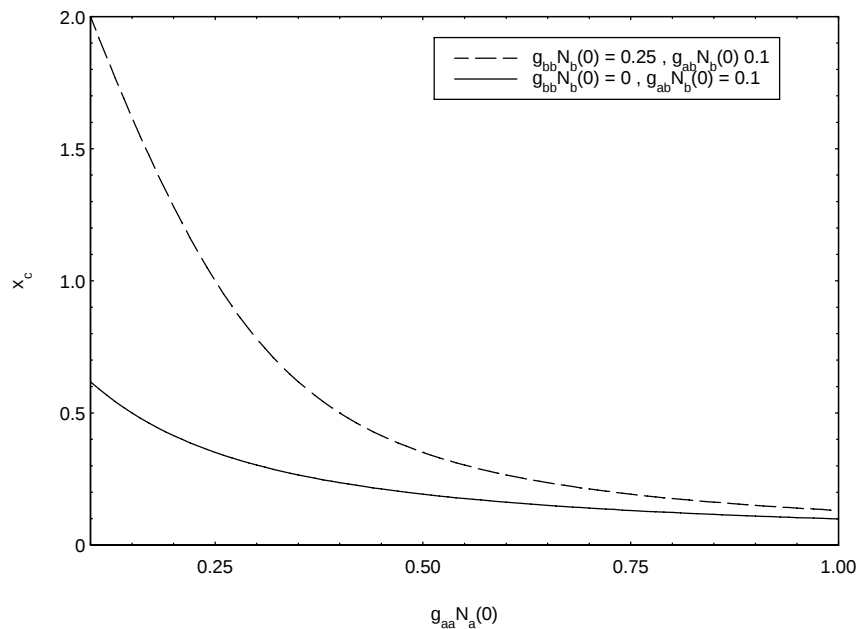
$$x_c = \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T=T_c} = \frac{1 - \bar{g}_{aa} f(T_c)}{\bar{g}_{ab} f(T_c)} \quad (4.17)$$

จากสมการ (4.16) จะได้

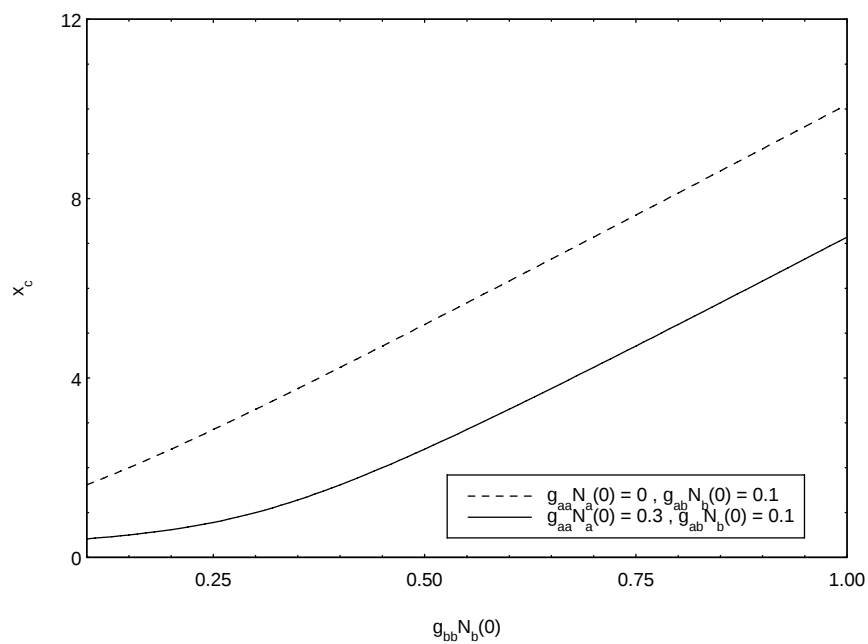
$$x_c = \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T=T_c} = \frac{\bar{g}_{ba} f(T_c)}{1 - \bar{g}_{bb} f(T_c)} \quad (4.18)$$

เมื่อ 
$$f(T_c) = \ln \left( \frac{2r\omega_D}{\pi T_c} \right) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 - 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}$$

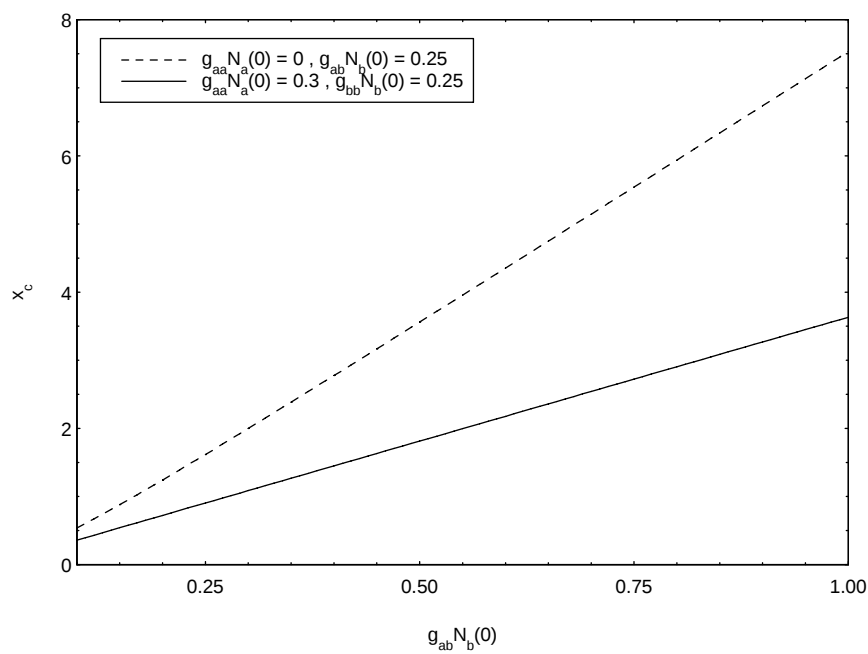
เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง  $x_c$  กับ  $g_{aa}N_a(0)$ ,  $g_{bb}N_b(0)$ ,  $g_{ab}N_b(0)$  ได้จากสมการ (4.17) และ (4.18) โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ด้วยวิธีของนิวตัน (Newton's method) แล้วเขียนกราฟระหว่าง  $x_c$  กับ  $g_{aa}N_a(0)$ ,  $g_{bb}N_b(0)$ ,  $g_{ab}N_b(0)$  ได้ดังภาพประกอบ 25 , 26 ,27 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $x_c$  กับ  $g_{aa}N_a(0)$



ภาพประกอบ 26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $x_c$  กับ  $g_{bb}N_b(0)$



ภาพประกอบ 27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $x_c$  กับ  $g_{ab}N_b(0)$

คำนวณหา  $\frac{d\Delta_a^2}{dT}$  ที่อุณหภูมิวิกฤต

จากสมการ (3.2) และ (3.3) จะได้

$$\frac{\Delta_a}{g_{aa}} = T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) + \frac{g_{ab}}{g_{aa}} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m) \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta_b}{g_{bb}} = T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m) + \frac{g_{ba}}{g_{bb}} T \sum_{\vec{k}, \omega_m} F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m) \quad (4.20)$$

คูณสมการ (4.19) และ (4.20) เข้าด้วยกัน จะได้

$$\begin{aligned} 1 = g_{aa} \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_a} \right) + g_{bb} \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_b} \right) \\ - (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_a} \right) \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, \omega_m)}{\Delta_b} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

แทนค่าสมการ (4.1) และ (4.2) ในสมการ (4.21) จะได้

$$\begin{aligned} 1 = g_{aa} \left( \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^2 \right) \\ + g_{bb} \left( \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^2 \right) \\ - (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \left( \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \Delta_a^2 \right) \times \\ \left( \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle + \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \Delta_b^2 \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \Delta_a^2 = \frac{1}{M} \left\{ 1 - g_{aa} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle - g_{bb} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle + \right. \\ \left. (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
M = & g_{aa} \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle + g_{bb} \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle x_c^2 \\
& - (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \left\{ \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \right. \\
& \left. + \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle x_c^2 \right\} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle = N_a(0) f(T) \quad (4.24)$$

$$\sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle = N_b(0) f(T) \quad (4.25)$$

แทนสมการ (4.24) และ (4.25) ในสมการ(4.23) จะได้

$$\Delta_a^2 = \frac{1}{M} \{ 1 - g_{aa} N_a(0) f(T) - g_{bb} N_b(0) f(T) + (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) N_a(0) N_b(0) f^2(T) \} \quad (4.26)$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
f(T) &= \ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T} \right) \\
f(T_c) &= \ln \left( \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} \right) \\
f(T_c) - f(T) &= \ln \left( \frac{T}{T_c} \right) = - \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \\
f(T) &= f(T_c) + (1 - T/T_c)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\Delta_a^2 = -\frac{1}{M} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) [ \bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba}) 2 f(T_c) ] \quad (4.27)$$

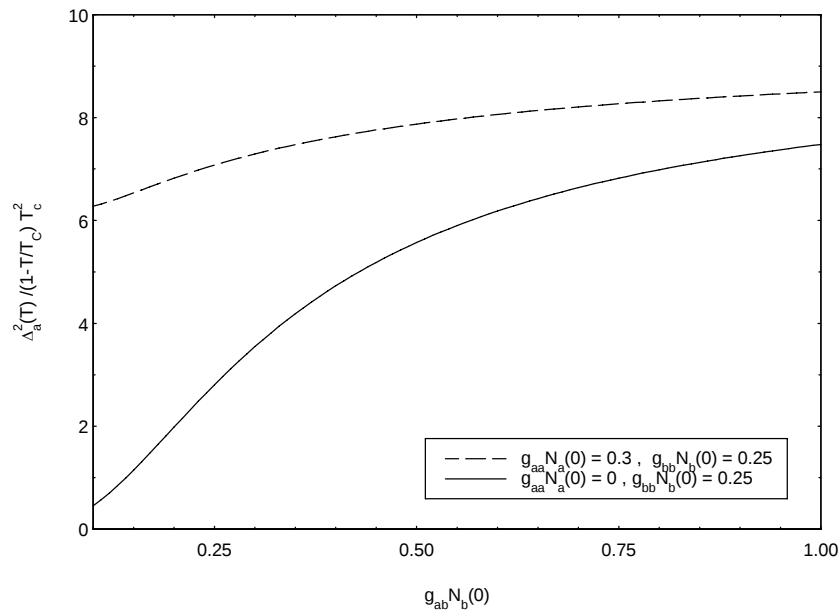
แทนสมการ (4.10) และ (4.11) ในสมการ (4.25) จะได้

$$M = \frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 T_c^2} \{ \bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} x_c^2 - (\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba}) (1 + x_c^2) f(T_c) \} \quad (4.28)$$

เมื่อ

$$f(T_c) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$  กับ  $g_{ab}N_b(0)$  ได้จาก สมการ (4.27) และ (4.28) โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ด้วยวิธีของนิวตัน (Newton's method) แล้วเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$  กับ  $g_{ab}N_b(0)$  โดยแทนค่าได้ดังภาพประกอบ 28



ภาพประกอบ 28 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$  กับ  $g_{ab}N_b(0)$

ดังนั้น

$$\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_C} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{[\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})]}{[\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{aa}x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)]} \quad (4.29)$$

เนื่องจากสมการผลต่างความร้อนจำเพาะ คือ สมการ (4.8)

$$\Delta C(T_C) = T \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \{ \langle A_4 \rangle + \langle B_4 \rangle x_c^4 \} \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 \bigg|_{T=T_C} \quad (4.30)$$

แทนค่า  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  จากสมการ (4.10) , (4.11) และ  $\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_C}$

จากสมการ (4.29) จะได้

$$\Delta C(T_C) = \frac{8\pi^2 T_C}{7\zeta(3)} [N_a(0) + N_b(0)x_c^4] \left\{ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)} \right\}^2 \quad (4.31)$$

เนื่องจาก  $C_N = \frac{2}{3}\pi^2 N(0)T_C = \gamma T_C$  ดังนั้น  $C_N = \frac{2}{3}\pi^2 [N_a(0) + N_b(0)]T_C$

$$\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)} = \frac{24}{14\zeta(3)} \left[ \frac{N_a(0) + N_b(0)x_c^4}{N_a(0) + N_b(0)} \right] \left\{ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)} \right\}^2 \quad (4.32)$$

เมื่อ  $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.202$  ดังนั้น

$$\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)} = 1.426 \left[ \frac{N_a(0) + N_b(0)x_c^4}{N_a(0) + N_b(0)} \right] \left\{ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)} \right\}^2 \quad (4.33)$$

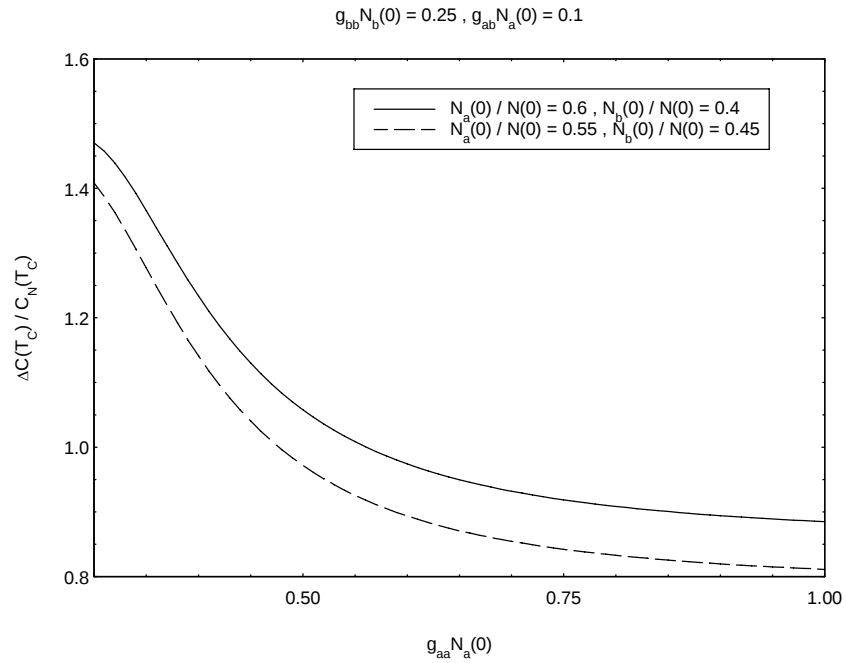
เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภานำยวด

ยิ่งกับสภานำปกติที่อุณหภูมิวิกฤต  $\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)}$  กับค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่

อิเล็กตรอนในแถบพลังงาน a ( $\bar{g}_{aa}$ ), b ( $\bar{g}_{bb}$ ) และค่าคงตัวเนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่ อิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงาน a กับ b ( $\bar{g}_{ab}$ ) ได้จากสมการ (4.33) โดยใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (numerical analysis) ด้วยวิธีของนิวตัน (Newton's method) และสามารถเขียนกราฟ

ระหว่าง  $\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)}$  กับ  $g_{aa}N_a(0)$ ,  $g_{bb}N_b(0)$ ,  $g_{ab}N_b(0)$  ได้ดังภาพประกอบ 29, 30 และ 31

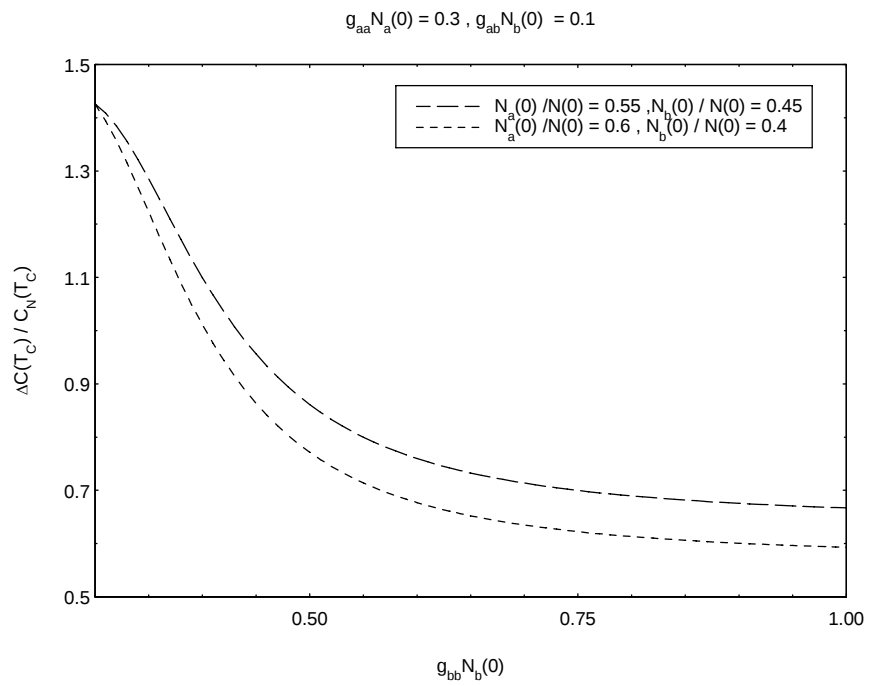
ตามลำดับ



ภาพประกอบ 29 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta C(T_C)/C_N$  กับ  $g_{aa}N_a(0)$

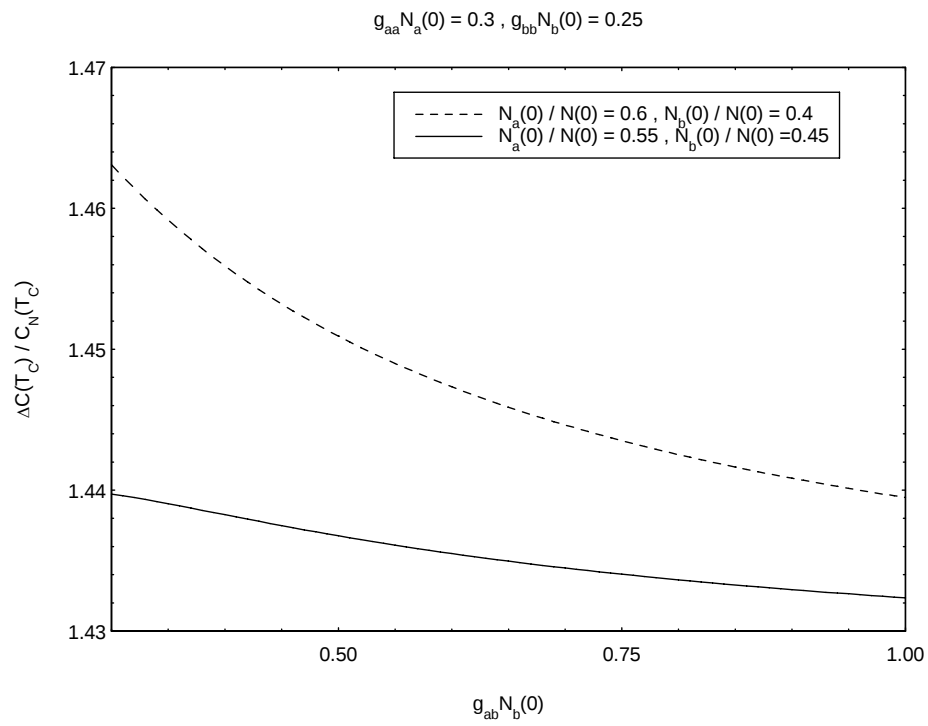
จากสมการ (4.33) ในลิมิต  $\omega_D/T_C \rightarrow \infty$  จะได้  $\frac{\Delta C}{C_N} \rightarrow 1.43$  และถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  เพิ่มขึ้น

$\Delta C(T_C)$  เพิ่มขึ้น, ถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  ลด  $\Delta C(T_C)$  ลด



ภาพประกอบ 30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta C(T_C)/C_N$  กับ  $g_{bb}N_b(0)$

จากสมการ (4.33) พิจารณากรณี  $\bar{g}_{ab} = 0$  จะได้สูตร  $\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)} = 1.426$  เหมือนกับกรณีตัวนำ  
ยวดยิ่งชนิดแถบพลังงานเดี่ยว (one-band superconductors)



ภาพประกอบ 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta C(T_C) / C_N$  กับ  $g_{ab}N_b(0)$

## การคำนวณหาความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

การคำนวณหา  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิวิกฤต ของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณหาค่า  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  ในกรณีมีสารเจือ
2. คำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤต
3. คำนวณหา  $\frac{d\Delta_a^2}{dT}$  ที่อุณหภูมิวิกฤต

การคำนวณหา  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  ในกรณีมีสารเจือ

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราให้นิยามกรีนส์ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ได้โดยอิสระ เมื่อถูกรบกวนด้วยอะตอมของสิ่งเจือปนเพียงอะตอมเดียวดังนี้

เมื่อคิดเฉพาะในแถบพลังงาน a

$$\begin{array}{c} v_{aa} \quad v_{aa} \\ \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \end{array} \equiv g_{aa}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) = G_{aa}^0(\bar{k}, i\omega_m) \delta_{\bar{k}, \bar{k}'} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\bar{k}, i\omega_m) G_{aa}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) G_{aa}^0(\bar{k}', i\omega_m) \quad (4.34)$$

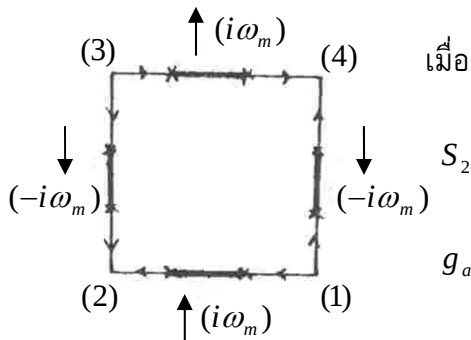
เมื่อคิดเฉพาะในแถบพลังงาน b

$$\begin{array}{c} v_{bb} \quad v_{bb} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \equiv g_{bb}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) = G_{bb}^0(\bar{k}, i\omega_m) \delta_{\bar{k}, \bar{k}'} + v_{bb}^2 G_{bb}^0(\bar{k}, i\omega_m) G_{bb}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) G_{bb}^0(\bar{k}', i\omega_m) \quad (4.35)$$

เมื่อคิดระหว่างแถบพลังงาน a กับแถบพลังงาน b

$$\begin{array}{c} v_{ba} \quad v_{ab} \\ \text{---} \bullet \text{---} \times \text{---} \end{array} \equiv g_{ba}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) = G_{bb}^0(\bar{k}, i\omega_m) \delta_{\bar{k}, \bar{k}'} + v_{ab} v_{ba} G_{bb}^0(\bar{k}, i\omega_m) G_{ba}(\bar{k}, \bar{k}', i\omega_m) G_{aa}^0(\bar{k}', i\omega_m) \quad (4.36)$$

ในกรณีตัวนำวยดยังมีสารเจือ เทอมที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะที่เห็นได้ชัดมีอยู่ 2 เทอม คือ  $S_2$  และ  $S_3$



$$S_2 = T \sum_{\omega_n} \left( \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} g_{aa}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, i\omega_m) g_{aa}(\vec{k}_2, \vec{k}_3, -i\omega_m) g_{aa}(\vec{k}_3, \vec{k}_4, i\omega_m) \times g_{aa}(\vec{k}_4, \vec{k}_1, -i\omega_m) - \sum_{\vec{k}} F^2(\vec{k}, i\omega_m) \right) \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ} \quad F(\vec{k}, i\omega_m) &= G(\vec{k}, i\omega_m) G(\vec{k}, -i\omega_m) \\ &= \frac{1}{\omega_n^2 + \varepsilon_{\vec{k}}^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

แทนค่า  $g_{aa}(\vec{k}, \vec{k}', i\omega_m)$  จากสมการ (4.34) ลงในสมการ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned} S_2 = T \sum_{\vec{k}} \left[ \sum_{\omega_n} \left( G_{aa}^0(\vec{k}_1, i\omega_m) \delta_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\vec{k}_1, i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_2, i\omega_m) \right) \times \right. \\ \left( G_{aa}^0(\vec{k}_2, -i\omega_m) \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\vec{k}_2, -i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}_2, \vec{k}_3, -i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_3, -i\omega_m) \right) \times \\ \left( G_{aa}^0(\vec{k}_3, i\omega_m) \delta_{\vec{k}_3, \vec{k}_4} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\vec{k}_3, i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}_3, \vec{k}_4, i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_4, i\omega_m) \right) \times \\ \left. \left( G_{aa}^0(\vec{k}_4, -i\omega_m) \delta_{\vec{k}_4, \vec{k}_1} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\vec{k}_4, -i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}_4, \vec{k}_1, -i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_1, -i\omega_m) \right) \right. \\ \left. - \sum_{\vec{k}} F^2(\vec{k}, i\omega_m) \right] \end{aligned}$$

คูณวงเล็บทั้งสี่เข้าด้วยกัน แล้วอาศัยสมบัติของ Kronecker delta function และแทนค่า

$$G_{aa}^0(\vec{k}_j, i\omega_m) = \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_{\vec{k}}^a} \quad (4.39)$$

$$G_{aa}^0(\vec{k}_j, -i\omega_m) = \frac{1}{-i\omega_m - \varepsilon_{\vec{k}}^a} \quad (4.40)$$

และเปลี่ยนเครื่องหมาย  $\sum_{\vec{k}}$  เป็น  $N_a(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_{\vec{k}}$  อินทิเกรตแต่ละเทอมโดยอาศัย Calculus of Residue จะได้

$$\begin{aligned}
S_2 = T \sum_{\omega_m} \left[ -v_{aa}^2 N_a(0) \frac{3\pi i}{4\omega_m^4} G_{aa}(i\omega_m) + v_{aa}^2 N_a(0) \frac{3\pi i}{4\omega_n^2} G_{aa}(-i\omega_m) \right. \\
+ v_{aa}^4 N_a^2(0) G_{aa}(i\omega_m) G_{aa}(-i\omega_m) \frac{2\pi^2}{\omega_m^4} + v_{aa}^4 N_a^2(0) \frac{(-\pi^2)}{4\omega_m^4} G_{aa}^2(i\omega_m) \\
- v_{aa}^2 N_a^2(0) \frac{\pi^2}{4\omega_m^4} G_{aa}^2(-i\omega_m) + v_{aa}^6 N_a^0(0) \frac{(\pi^3 i)}{\omega_n^4} G_{aa}(i\omega_m) G_{aa}^2(-i\omega_m) \\
\left. + v_{aa}^6 N_a^3(0) \frac{(-\pi^3 i)}{\omega_m^4} G_{aa}^2(i\omega_m) G_{aa}(-i\omega_m) + v_{aa}^8 N_a^4(0) \frac{\pi^4}{\omega_n^4} G_{aa}^2(i\omega_m) G_{aa}^2(-i\omega_m) \right]
\end{aligned}$$

แทนค่า  $v_{aa} = (\Gamma_{aa} / \pi N_a(0))^{1/2}$ ,  $G_{aa}(i\omega_m) = \tilde{G}_{aa}(i\omega_m) / (i\Gamma_{aa})$  และ  
 $G_{aa}(-i\omega_m) = \tilde{G}_{aa} / (-i\Gamma_{aa})$

$$= T \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^4} \left\{ -\frac{3}{2} \tilde{G}_a(i\omega_m) + \frac{5}{2} \tilde{G}_a^2(i\omega_m) - 2\tilde{G}_a^3(i\omega_m) + \tilde{G}_a^4 \right\} \quad (4.41)$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{aa}(i\omega_m) &= i\Gamma_{aa} G_{aa}(i\omega_m) \\
&= i\Gamma_{aa} / (i\omega_m + i\Gamma_{aa}) \\
&= 1 / \left( 1 + \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right)
\end{aligned}$$

ที่อุณหภูมิต่ำ  $\omega_m < \Gamma_{aa}$  จะได้

$$\tilde{G}_{aa}(i\omega_m) = \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) \quad (4.42)$$

แทนค่าสมการ (4.42) ในสมการ (4.41)

$$S_2 = T \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^4} \left\{ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) + \frac{5}{2} \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right)^2 - 2 \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right)^3 + \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right)^4 \right\}$$

อาศัยการกระจายแบบทวินาม

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n}{2}(n-1)x^2 + \dots \quad (x \ll 1)$$

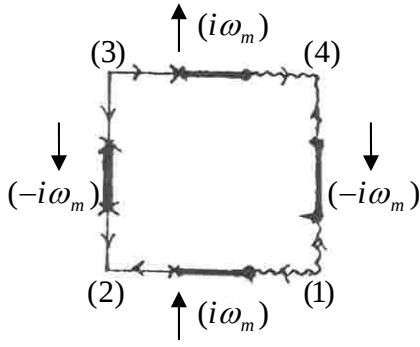
$$\begin{aligned}
S_2 &= T \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^4} \left\{ -\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) + \frac{5}{2} \left( 1 - 2 \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) - 2 \left( 1 - 3 \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) + \left( 1 - 4 \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right) \right\} \\
&= -T \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^4} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + 2 - 1 \right\} + T \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^3 \Gamma_{aa}} \left[ \left\{ \frac{3}{2} - 5 + 6 - 4 \right\} \right] \\
&= -\frac{5T}{2\Gamma_{aa}} \sum_{\omega_m} \frac{1}{\omega_m^3}
\end{aligned}$$

เพราะว่า  $\omega_m = (2n+1)\pi T$  และ  $\lambda(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^j}$

$$S_2 = -\frac{5\lambda(3)}{2\pi^3 T_C^2 \Gamma_{aa}}$$

เขียนให้อยู่ในรูปซีตาฟังก์ชัน ดังนี้

$$S_2 = -\frac{35\zeta(3)}{16\pi^3 T_C^2 \Gamma_{aa}} \quad (4.43)$$



การคำนวณแผนภาพ  $S_3$

โดยการแทนค่าสมการ (4.34) , (4.35) และ (4.36)

ลงในสมการ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned}
 S_3 = 4T \sum_{\vec{k}} \left[ \sum_{\omega_m} \left( G_{bb}^0(\vec{k}_1, i\omega_m) \delta_{\vec{k}_1b, \vec{k}_2} + v_{ab} v_{ba} G_{bb}^0(\vec{k}_1, i\omega_m) G_{ba}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_2, i\omega_m) \right) \times \right. \\
 \left( G_{aa}^0(\vec{k}_2, -i\omega_m) \delta_{\vec{k}_2, \vec{k}_3} + v_{aa}^2 G_{aa}^0(\vec{k}_2, -i\omega_m) G_{aa}(\vec{k}_2, \vec{k}_3, -i\omega_m) G_{aa}^0(\vec{k}_3, -i\omega_m) \right) \times \\
 \left( G_{aa}^0(\vec{k}_3, i\omega_m) \delta_{\vec{k}_3, \vec{k}_4b} + v_{ab} v_{ba} G_{aa}^0(\vec{k}_3, i\omega_m) G_{ab}(\vec{k}_3, \vec{k}_4, i\omega_m) G_{bb}^0(\vec{k}_4, i\omega_m) \right) \times \\
 \left( G_{bb}^0(\vec{k}_4, -i\omega_m) \delta_{\vec{k}_4b, \vec{k}_1b} + v_{bb}^2 G_{bb}^0(\vec{k}_4, -i\omega_m) G_{bb}(\vec{k}_4, \vec{k}_1, -i\omega_m) G_{bb}^0(\vec{k}_1, -i\omega_m) \right) \\
 \left. - \sum_{\vec{k}} F^2(\vec{k}, i\omega_m) \right] \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการเขียน นิยามให้

$$G_{aa}^0(\vec{k}, i\omega_m) = G_{aa}(+), G_{ab}(\vec{k}, i\omega_m) = G_{ab}(+)$$

$$G_{bb}^0(\vec{k}, i\omega_m) = G_{bb}(+), G_{ba}(\vec{k}, i\omega_m) = G_{ba}(+)$$

$$\begin{aligned}
 S_3 = 4T \sum_{\vec{k}} \left[ \sum_{\omega_m} \left( G_{bb}(1,+) \delta(1b,+) + v_{ab} v_{ba} G_{bb}(1,+) G_{ba}(1,2,+) G_{aa}(2,+) \right) \times \right. \\
 \left( G_{aa}(2,-) \delta(2,3) + v_{aa}^2 G_{aa}(2,-) G_{aa}(2,3,-) G_{aa}(3,-) \right) \times \\
 \left( G_{aa}(3,+) \delta(3,4b) + v_{ab} v_{ba} G_{aa}(3,+) G_{ab}(3,4,+) G_{bb}(4,+) \right) \times \\
 \left. \left( G_{bb}(4,-) \delta(4b,1b) + v_{bb}^2 G_{bb}(4b,-) G_{bb}(4,1,-) G_{bb}(1,+) \right) \right] - \sum_{\vec{k}} F^2(\vec{k}, i\omega_m) \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

คูณวงเล็บทั้งสี่เข้าด้วยกัน แล้วอาศัยสมบัติของ Kronecker delta function และแทนค่าสมการ

(4.39) และ (4.40) ในสมการ (4.45) เปลี่ยนเครื่องหมาย  $\sum_{\vec{k}}$  เป็น  $N_a(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_{\vec{k}}$  จะได้



อินทิเกรตแต่ละเทอมโดยอาศัย Calculus of Residue และแทนค่า

$$v_{aa} = (\Gamma_{aa} / \pi N_a(0))^{1/2}, \quad v_{ab} = (\Gamma_{ab} / \pi N_b(0))^{1/2}$$

$$v_{bb} = (\Gamma_{bb} / \pi N_b(0))^{1/2}, \quad v_{ba} = (\Gamma_{ba} / \pi N_a(0))^{1/2}$$

$$G_{aa}(i\omega_m) = \tilde{G}_{aa} / (i\Gamma_{aa}), \quad G_{ab}(i\omega_m) = \tilde{G}_{ab} / (i\Gamma_{ab})$$

$$G_{bb}(i\omega_m) = \tilde{G}_{bb} / (i\Gamma_{bb}), \quad G_{ba}(i\omega_m) = \tilde{G}_{ba} / (i\Gamma_{ba})$$

จะได้

$$\begin{aligned} S_3 = T \sum_{\omega_m} & \left\{ -\frac{N_a(0)\pi\tilde{G}_{aa}}{2\omega_m^3} - \left( \frac{\Gamma_{ba}N_a(0)N_b(0)}{\Gamma_{ab}} \right)^{1/2} \frac{\pi\tilde{G}_{ab}}{2\omega_m^3} \right. \\ & - \left( \frac{\Gamma_{ab}N_a(0)N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right)^{1/2} \frac{\pi\tilde{G}_{ba}}{2\omega_m^3} - \frac{\tilde{G}_{bb}}{2\omega_m^2} \\ & + \left( \frac{\Gamma_{ba}N_b(0)}{\Gamma_{ab}N_a(0)} \right) \frac{\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{ab}}{\omega_m^2} - \frac{i\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{ba}}{\omega_m^3} \\ & + \frac{\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{bb}}{4\omega_m^4} + \frac{\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{ba}}{4\omega_m^4} + \left( \frac{\Gamma_{ba}}{\Gamma_{ab}}N_a(0)N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{bb}}{\omega_m^3} \\ & + \left( \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_{ba}}N_a(0)N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi\tilde{G}_{ba}\tilde{G}_{bb}}{\omega_m^3} - i \left( \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_{ba}}N_a(0)N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi\tilde{G}_{ba}\tilde{G}_{aa}}{2\omega_m^4} \\ & - \left( \frac{\Gamma_{ba}N_b(0)}{\Gamma_{ab}N_a(0)} \right)^{1/2} \frac{\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{ba}}{2\omega_m^4} - i \left( \frac{\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}N_a(0)}{N_b(0)} \right)^{1/2} \frac{\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{bb}}{2\omega_m^4} \\ & \left. - \frac{\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{ba}\tilde{G}_{bb}}{2\omega_m^4} + \frac{\tilde{G}_{aa}\tilde{G}_{bb}\tilde{G}_{ab}\tilde{G}_{ba}}{\omega_m^4} \right\} \end{aligned}$$

ที่อุณหภูมิต่ำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{aa} &= \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}} \right), & \tilde{G}_{ab} &= \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}} \right) \\ \tilde{G}_{bb} &= \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}} \right), & \tilde{G}_{ba} &= \left( 1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S_3 = T \sum_{\omega_m} & \left\{ -\frac{N_a(0)\pi}{2\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) - \left( \frac{\Gamma_{ba} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ab}} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \right. \\
& - \left( \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) - \frac{1}{2\omega_m^2} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \\
& + \left( \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right) \frac{1}{\omega_m^2} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) - \frac{i}{\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \\
& + \frac{1}{4\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) + \frac{1}{4\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \\
& + \left( \frac{\Gamma_{ba}}{\Gamma_{ab}} N_a(0) N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi}{\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \\
& + \left( \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_{ba}} N_a(0) N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi}{\omega_m^3} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \\
& - i \left( \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma_{ba}} N_a(0) N_b(0) \right)^{1/2} \frac{\pi}{2\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \\
& - \left( \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right)^{1/2} \frac{1}{2\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \\
& - i \left( \frac{\Gamma_{ab} \Gamma_{ba} N_a(0)}{N_b(0)} \right)^{1/2} \frac{1}{2\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \\
& - \frac{1}{2\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \\
& \left. + \frac{1}{\omega_m^4} \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{aa}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{bb}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ab}}\right) \left(1 - \frac{\omega_m}{\Gamma_{ba}}\right) \right\} \tag{4.46}
\end{aligned}$$

กระจายสมการ (4.76) และเขียนในรูป ซีตาฟังก์ชัน ได้เป็น

$$\begin{aligned}
S_3 = & \frac{15\zeta(3)}{32\pi^4 T_C^3} \left\{ 1 - i \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} - \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right]^{1/2} - i \left[ \frac{\Gamma_{ab} \Gamma_{ba} N_a(0)}{N_b(0)} \right]^{1/2} \right\} \\
& + \frac{7\zeta(3)}{32\pi^3 T_C^2} \left\{ -2i N_a(0) \pi + 2\pi \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ab}} \right]^{1/2} + 2\pi \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} \right. \\
& \quad + 2i \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{2}{\Gamma_{ba}} \right) + 2 \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{1}{\Gamma_{ab}} + \frac{1}{\Gamma_{ba}} \right) \\
& \quad \left. + 2i \left[ \frac{\Gamma_{ab} \Gamma_{ba} N_a(0)}{N_b(0)} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{1}{\Gamma_{bb}} \right) - \frac{3}{\Gamma_{ab}} - \frac{3}{\Gamma_{ba}} - \frac{3}{\Gamma_{bb}} - \frac{4}{\Gamma_{aa}} \right\} \\
& + \frac{3\zeta(2)}{4\pi^2 T_C} \left\{ -\frac{N_a(0)\pi}{2\Gamma_{aa}} + \pi \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ab}} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{2\Gamma_{ab}} - \frac{1}{\Gamma_{bb}} - \frac{1}{\Gamma_{aa}} \right) \right. \\
& \quad + \pi \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{2\Gamma_{ba}} - \frac{1}{\Gamma_{bb}} - \frac{1}{\Gamma_{aa}} \right) \\
& \quad + \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{1}{2\Gamma_{ab}\Gamma_{aa}} + \frac{1}{2\Gamma_{ba}\Gamma_{aa}} - \frac{1}{2\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} \right) \\
& \quad + i \left( \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{1}{\Gamma_{ab}} + \frac{1}{\Gamma_{ba}} \right) - \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{9}{4\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}} + \frac{5}{4\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} \\
& \quad - i \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} \frac{1}{2\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} - i \left[ \frac{\Gamma_{ab} \Gamma_{ba} N_a(0)}{N_b(0)} \right]^{1/2} \frac{1}{2\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}} \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} + \frac{1}{2\Gamma_{bb}\Gamma_{ba}} + \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{ab}} - \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}\Gamma_{ab}} - \frac{1}{2} \right\} \\
& + f(T_C) \left\{ \frac{1}{2\pi\Gamma_{bb}} - \left[ \frac{\Gamma_{ab} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ba}} \right]^{1/2} \left( \frac{1}{\Gamma_{ab}} + \frac{1}{\Gamma_{aa}} + \frac{1}{2\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}\Gamma_{aa}} + \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}} \right) \right. \\
& \quad + \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}} \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_a(0) N_b(0)}{\Gamma_{ab}} \right]^{1/2} - \frac{i}{\pi} \left( \frac{1}{\Gamma_{ab}\Gamma_{aa}} + \frac{1}{\Gamma_{ab}\Gamma_{bb}} + \frac{1}{\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} \right) \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\pi\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}\Gamma_{bb}} - \frac{1}{\pi\Gamma_{aa}\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} - \frac{1}{\pi\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}\Gamma_{ba}} \right\} \\
& + T_C \left\{ \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}} \left[ \frac{\Gamma_{ba} N_b(0)}{\Gamma_{ab} N_a(0)} \right]^{1/2} + \frac{i}{\Gamma_{aa}\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} + \frac{1}{\Gamma_{aa}\Gamma_{bb}\Gamma_{ab}\Gamma_{ba}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\text{เมื่อ } f(T_C) = \pi T_C \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|}$$

การคำนวณแผนภาพ  $R_2, R_3$  สามารถทำได้โดยวิธีการเดียวกันนี้ และจะได้ผลลัพธ์เหมือนกับ  $S_2, S_3$  ตามลำดับเพียงแต่เปลี่ยนตัวอักษรในสมการจาก  $a$  เป็น  $b$  และจาก  $b$  เป็น  $a$  เท่านั้น

การคำนวณทั้งหมดที่ได้กล่าวมานี้สามารถเขียนอยู่ในรูปสั้นๆ ได้ดังนี้

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle = \frac{7N_a(0)}{8\pi^2 T_C^2} + S \quad (4.48)$$

เมื่อ  $S = S_2 + S_3$

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle = \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + R \quad (4.49)$$

เมื่อ  $R = R_2 + R_3$

การคำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤตในกรณีมีสารเจือ

จากสมการ (4.12) และ (4.13) ใกล้ๆ อุณหภูมิวิกฤตเทอม  $\Delta_i^3$  มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ อัตราส่วน  $\frac{\Delta_b}{\Delta_a}$  ที่อุณหภูมิวิกฤตจึงเขียนได้ดังนี้

$$x_c = \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T=T_C} \quad (4.50)$$

จากสมการ (4.12) จะได้

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T \rightarrow T_C} = \frac{1 - g_{aa} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle}{g_{ab} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle} \quad (4.51)$$

จากสมการ (4.13) จะได้

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_a} \Big|_{T \rightarrow T_C} = \frac{g_{ba} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle}{1 - g_{bb} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle} \quad (4.52)$$

จากสมการ (3.26) และ (3.27)

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle &= N_a(0) f(T) + Q \\ \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle &= N_b(0) f(T) + P \end{aligned}$$

เมื่อ  $f(T) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right) = \pi T \sum_{\omega_m} \frac{1}{|\omega_m|}$  และ  $P, Q$  เป็นผลที่เกิดจากที่ตัวนำยวดยิ่งมีสารเจือ

ซึ่งได้พิสูจน์แล้วได้ว่า

$$P = N_b(0)K(\rho_b)$$

เมื่อ

$$K(\rho_b) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_b\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{โดยที่ } \rho_b = \frac{c\alpha_b(\omega_m)}{\pi T_C} \text{ และ } \alpha_b(\omega_m) = \frac{N(v_{bb}^2 + v_{aa}v_{bb})}{|\omega_m| + \Gamma_{bb}} + \frac{N_b(0)\pi N v_{bb}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2)}{(|\omega_m| + \Gamma_{bb})^2}$$

และ

$$Q = N_a(0)K(\rho_a)$$

เมื่อ

$$K(\rho_a) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_a\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

โดยที่  $\rho_a = \frac{c\alpha_a(\omega_m)}{\pi T_C}$  และ  $\alpha_a(\omega_m) = \frac{N(v_{aa}^2 + v_{aa}v_{bb})}{|\omega_m| + \Gamma_{aa}} + \frac{N_a(0)\pi N v_{aa}^2 (v_{aa}^2 + v_{bb}^2)}{(|\omega_m| + \Gamma_{aa})^2}$

แทนค่าสมการ (4.26) และ (4.27) ในสมการ (4.51) จะได้

$$x_c = \frac{1 - \bar{g}_{aa}[f(T_c) + Q/N_a(0)]}{\bar{g}_{ab}[f(T_c) + P/N_b(0)]} \quad (4.53)$$

แทนค่า  $P(T), Q(T)$  ในสมการ (4.53) จะได้

$$x_c = \frac{1 - \bar{g}_{aa}[f(T_c) + K(\rho_a)]}{\bar{g}_{ab}[f(T_c) + K(\rho_b)]} \quad (4.54)$$

แทนค่าสมการ (4.26) และ (4.27) ในสมการ (4.52) จะได้

$$x_c = \frac{\bar{g}_{ba}[f(T_c) + Q/N_a(0)]}{1 - \bar{g}_{bb}[f(T_c) + P/N_b(0)]} \quad (4.55)$$

แทนค่า  $P(T), Q(T)$  ในสมการ (4.55) จะได้

$$x_c = \frac{\bar{g}_{ba}[f(T_c) + K(\rho_a)]}{1 - \bar{g}_{bb}[f(T_c) + K(\rho_b)]} \quad (4.56)$$

เมื่อไม่มีสารเจือปน  $K(\rho_a), K(\rho_b) = 0$  ดังนั้น  $x_c$  ในสมการ (4.54) และ (4.56) จะได้

$$x_c = \frac{1 - \bar{g}_{aa}f(T_c)}{\bar{g}_{ab}f(T_c)}$$

หรือ

$$x_c = \frac{\bar{g}_{ba}f(T_c)}{1 - \bar{g}_{bb}f(T_c)}$$

ซึ่งได้ตรงกับสมการ (4.19) และ (4.20) ในกรณีไม่มีสารเจือ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (4.54) และ (4.56) ที่คำนวณได้นั้นถูกต้อง

เมื่อแทนค่าสมการ (3.26) และ (3.27) ในสมการ (4.12) และ (4.13) ตามลำดับ (หลังจากตัดเทอม  $\Delta_i^3$  ทิ้งแล้ว เพราะ  $\Delta_i^3$  มีค่าน้อยใกล้ๆ  $T_C$ ) สมการทั้งสองเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Delta_a = g_{aa}\Delta_a[N_a(0)f(T_C)+Q]+g_{ab}\Delta_b[N_b(0)f(T_C)+P] \quad (4.57)$$

$$\Delta_b = g_{bb}\Delta_b[N_b(0)f(T_C)+P]+g_{ba}\Delta_b[N_a(0)f(T_C)+Q] \quad (4.58)$$

$$1 = \bar{g}_{aa}f(T_C) + \bar{g}_{aa}\frac{Q}{N_a(0)} + \left(\bar{g}_{ab}f(T_C) + \bar{g}_{ba}\frac{P}{N_b(0)}\right)\frac{\Delta_b}{\Delta_a} \quad (4.59)$$

$$1 = \bar{g}_{bb}f(T_C) + \bar{g}_{bb}\frac{Q}{N_b(0)} + \left(\bar{g}_{ab}f(T_C) + \bar{g}_{ba}\frac{Q}{N_a(0)}\right)\frac{\Delta_a}{\Delta_b} \quad (4.60)$$

จัดเทอมบางเทอมในแต่ละสมการให้เหมาะสม แล้วนำสมการ (4.59) คูณกับสมการ (4.60)

$$\begin{aligned} & (1 - \bar{g}_{aa}f(T_C) - \bar{g}_{aa}\frac{Q}{N_a(0)})(1 - \bar{g}_{bb}f(T_C) - \bar{g}_{bb}\frac{P}{N_b(0)}) \\ & = (\bar{g}_{ab}f(T_C) + \bar{g}_{ab}\frac{P}{N_b(0)})(\bar{g}_{ba}f(T_C) + \bar{g}_{ab}\frac{Q}{N_a(0)}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

คูณแต่ละวงเล็บเข้าด้วยกัน จะได้

$$\begin{aligned} & (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})f^2(T_C) - [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})\left(\frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q}{N_a(0)}\right)]f(T_C) \\ & + [1 + (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})\frac{PQ}{N_a(0)N_b(0)} - \left(\frac{\bar{g}_{bb}P}{N_b(0)} + \frac{\bar{g}_{aa}Q}{N_a(0)}\right)] = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

การคำนวณหา  $\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_c}$  ในกรณีมีสารเจือ

สมการ (3.17) หารด้วย  $\Delta_a$  และสมการ (3.18) หารด้วย  $\Delta_b$

$$1 = g_{aa} \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a} \right) + g_{ab} \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a} \right) \quad (4.63)$$

$$1 = g_{bb} \left( T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b} \right) + g_{ba} T \left( \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b} \right) \quad (4.64)$$

คูณสมการ (4.63) และ (4.64) เข้าด้วยกันจะได้

$$\begin{aligned} 1 = & g_{aa} \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a} \right] + g_{bb} \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b} \right] \\ & - (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a} \right] \left[ T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b} \right] \end{aligned} \quad (4.65)$$

แทนค่า  $T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{aa}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_a}$  และ  $T \sum_{\vec{k}, \omega_m} \frac{F_{bb}(\vec{k}, i\omega_m)}{\Delta_b}$  ในสมการ (4.65) จะได้

$$\begin{aligned} 1 = & g_{aa} \left( \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \right) + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \\ & + g_{bb} \left( \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \right) + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \\ & - (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \left( \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \right) + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \times \\ & \left( \sum_{\vec{k}, \omega_m} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \right) + \sum_{\vec{k}, k_1, k_2, k_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \end{aligned} \quad (4.66)$$

ต้องการหาค่า  $\Delta_a^2$  คูณในวงเล็บสมการ (4.66) ให้เป็นผลสำเร็จแล้วย้ายเทอม  $\Delta_b^2$  ไปทางด้านขวามือให้หมด และด้วยเหตุที่ว่า เมื่อ  $T \rightarrow T_c$ ,  $\Delta_{bb} \rightarrow 0$  ดังนั้น  $\Delta_b^2$  จึงมีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้

$$\begin{aligned} \Delta_a^2 = & \frac{1}{M} [1 - g_{aa} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle - g_{bb} \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \\ & + (g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \sum_{\vec{k}, k_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle] \end{aligned} \quad (4.67)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 M = & g_{aa} \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle + g_{bb} \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle x_c^2 \\
 & - (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \left\{ \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle B_2 \rangle \right. \\
 & \left. + \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1} \int_0^\beta d\tau_1 \langle A_2 \rangle \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle x_c^2 \right\} \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (3.26) และ (3.27) ในสมการ (4.67) จะได้

$$\begin{aligned}
 \Delta_a^2 = & \frac{1}{M} [1 - g_{aa} (N_a(0) f(T) + Q) - g_{bb} (N_b(0) f(T) + P) \\
 & + (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) (N_a(0) f(T) + Q) (N_b(0) f(T) + P)] \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
 f(T) &= \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right), \quad f(T_C) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C}\right) \\
 f(T_C) - f(T) &= \ln\left(\frac{T}{T_C}\right) = -\left(1 - \frac{T}{T_C}\right) \\
 f(T) &= f(T_C) + (1 - T/T_C) \\
 f^2(T) &= f^2(T_C) + 2(1 - T/T_C) f(T_C) + (1 - T/T_C)^2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \Delta_a^2 = & \frac{1}{M} \{1 - g_{aa} Q - g_{bb} P + (\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba}) PQ + \\
 & f(T) [-g_{aa} N_a(0) - g_{bb} N_b(0) + (N_a(0) P + N_b(0) Q) (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \\
 & + (1 - T/T_C) [-g_{aa} N_a(0) - g_{bb} N_b(0) + (N_a(0) P + N_b(0) Q) (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba})] \\
 & + f^2(T_C) N_a(0) N_b(0) (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \\
 & + 2(1 - T/T_C) f(T_C) N_a(0) N_b(0) (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \\
 & + (1 - T/T_C)^2 N_a(0) N_b(0) (g_{aa} g_{bb} - g_{ab} g_{ba}) \}
 \end{aligned}$$

ทั้งนี้ได้ตัดเทอมที่  $O(1 - \frac{T}{T_C})^2$  ทิ้ง ในเมื่อ  $T \approx T_C$  จะได้

$$\begin{aligned}
\Delta_a^2 = & \frac{1}{M} \{1 - g_{aa}Q - g_{bb}P + (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})PQ + \\
& f(T)[-g_{aa}N_a(0) - g_{bb}N_b(0) + (N_a(0)P + N_b(0)Q)(g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \\
& + (1 - T/T_C)[-g_{aa}N_a(0) - g_{bb}N_b(0) + (N_a(0)P + N_b(0)Q)(g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba})] \\
& + f^2(T_C)N_a(0)N_b(0)(g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}) \\
& + 2(1 - T/T_C)f(T_C)N_a(0)N_b(0)(g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba})\}
\end{aligned} \quad (4.70)$$

แทนสมการ (4.62) ลงในสมการ (4.70) จะได้

$$\Delta_a^2 = -\frac{1}{M} \left(1 - \frac{T}{T_C}\right) [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})] \left(\frac{P}{N_b(0)} - \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_C)\right) \quad (4.71)$$

พิจารณา  $M$  แทนค่าสมการ (3.26) , (3.27) , (4.48) และ (4.49) ลงในสมการ (4.68) จะได้

$$\begin{aligned}
M = & \frac{7}{8\pi^2} \frac{\zeta(3)}{T_C^2} (\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}x_c^2) + \frac{\bar{g}_{aa}S}{N_a(0)} + \frac{\bar{g}_{bb}R}{N_b(0)} x_c^2 \\
& - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left\{ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} (1 + x_c^2) f(T_C) + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Qx_c^2}{N_a(0)} \right) \right. \\
& \left. + f(T_C) \left( \frac{Rx_c^2}{N_b(0)} + \frac{S}{N_a(0)} \right) + \frac{PS + RQx_c^2}{N_a(0)N_b(0)} \right\}
\end{aligned} \quad (4.72)$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งสมการ (4.71) เทียบกับ  $T$  จะได้

$$\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_C} = \frac{1}{MT_C} [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})] \left( \frac{P}{N_b(0)} - \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_C) \right) \quad (4.73)$$

เนื่องจากสมการผลต่างความร้อนจำเพาะ (4.8) คือ

$$\Delta C(T_C) = T \sum_{\bar{k}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle + \langle B_4 \rangle x_c^4 \right\} \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 \bigg|_{T=T_C}$$

แทนสมการ (4.48) , (4.49) , (4.55) และ (4.73) ที่ได้ในสมการผลต่างความร้อนจำเพาะ จะได้

$$\Delta C(T_C) = \frac{1}{T_C} \left\{ \left( \frac{7N_a(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + S \right) + \left( \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + R \right) x_c^4 \right\} \times$$

$$\left[ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_C) \right)}{\frac{7}{8\pi^2} \frac{\zeta(3)}{T_C^2} (\bar{g}_{aa} + x_c^2 \bar{g}_{bb}) + \frac{\bar{g}_{aa}S}{N_a(0)} + \frac{\bar{g}_{bb}x_c^2 R}{N_b(0)} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left[ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} (1 + x_c^2) f(T_C) \right.} \right. \\ \left. \left. + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Qx_c^2}{N_a(0)} \right) + f(T_C) \left( \frac{Rx_c^2}{N_b(0)} + \frac{S}{N_a(0)} \right) + \frac{PS + RQx_c^2}{N_a(0)N_b(0)} \right]} \right]^2 \quad (4.74)$$

นี่คือ สมการแสดงความแตกต่างของความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤต เป็นฟังก์ชันของ  $N_a(0), N_b(0), g_{aa}, g_{bb}, g_{ab}, g_{ba}, P, Q, R$  และ  $S$  ซึ่งสามารถครอบคลุมกรณี  $\Delta C(T_C)$  ของ ตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดี่ยวเมื่อไม่มีสารเจือ  $\Delta C(T_C)$  ของ ตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเดี่ยวเมื่อไม่มีสารเจือ  $\Delta C(T_C)$  ของ ตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดี่ยวเมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก  $\Delta C(T_C)$  ของ ตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

## บทที่ 5

### สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตและ ผลต่างระหว่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน โดยศึกษาทั้งกรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ และกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์
2. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก แล้วศึกษากรณีจำกัดต่าง ๆ
3. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์
4. ใช้กรีนฟังก์ชันคำนวณหาผลต่างความร้อนจำเพาะของสภาพนำยวดยิ่งกับสภาพนำปกติของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มี สารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กแล้ววิเคราะห์สูตร  $\Delta C$  ในกรณีจำกัดต่าง ๆ

### สรุปผลการวิจัย

1. สมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์

1.1 สมการอุณหภูมิวิกฤตสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์ ในกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่ค่าอนันต์ คือ

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left[-\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}\right] \quad (3.13)$$

จากสมการ (3.13) พบว่าพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a และระหว่างแถบพลังงาน a และ b มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง ดังภาพประกอบ 21 และ 22 คือ ถ้า  $\bar{g}_{aa}$  และ  $\bar{g}_{ab}$  มีค่าน้อย  $T_C$  จะต่ำ แต่ถ้า  $\bar{g}_{aa}$  และ  $\bar{g}_{ab}$  มีค่ามาก  $T_C$  จะสูง

1.2 สมการอุณหภูมิวิกฤตสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์ ในกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4/\pi}{(2n+1)} \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_D / 2T_C}{(2n+1)} \right] = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp \left[ -\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} \right] \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.15) พบว่าพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a และระหว่างแถบพลังงาน a และ b มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง เช่นเดียวกับกรณี

$\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่ค่าอนันต์ดังภาพประกอบ 23 และ 24

เมื่อเปรียบเทียบภาพประกอบ 21, 22 สำหรับกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่ค่าอนันต์กับ

ภาพประกอบ 23, 24 สำหรับกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์ พบว่ากรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์

อุณหภูมิวิกฤตสูงกว่ากรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่ค่าอนันต์

2. สมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก คือ

$$f(T_C) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})} - \frac{1}{2}[K(\rho_a) + K(\rho_b)] - \frac{1}{2}[A_0^2 + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2A_0(K(\rho_b) - K(\rho_a))\beta - 4K(\rho_a)K(\rho_b)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

ในกรณีตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์ คือ  $P = Q = 0$  โดยที่  $P = N_a(0)K(\rho_a)$  และ  $Q = N_b(0)K(\rho_b)$  จะได้  $f(T_C)$  กลับไปสู่กรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์

จากสมการ (3.56) เมื่อพิจารณากรณีจำกัดต่างๆ ได้ผลการคำนวณดังนี้

2.1 เมื่อ  $\bar{g}_{ab} = 0$  คือ เมื่อไม่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานแต่ตัวนำยวดยิ่งมีสารเจือ จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤต คือ

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T} \exp \left[ -\frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}}{2\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} + \frac{1}{2}[K(\rho_a) + K(\rho_b)] + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} \right)^2 + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2 \left( \frac{\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb}} \right) (K(\rho_b) - K(\rho_a)) - 4K(\rho_a)K(\rho_b) \right\}^{1/2} \right] \quad (3.57)$$

2.2 เมื่อ  $\bar{g}_{aa} = \bar{g}_{bb} \gg \bar{g}_{ab}$  สมการอุณหภูมิมิกฤตสามารถหาได้ดังนี้ จากสมการ (3.56) จะได้  $A_0 = 0, \beta = 0$

$$f(T_C) = \frac{1}{\bar{g}_{aa}} - K(\rho_a)$$

เมื่อ

$$K(\rho_a) = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho_a\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

โดยที่  $\rho_a = \frac{c\alpha_a(\omega_m)}{\pi T_C}$ ,  $\alpha_a(\omega_m) = \frac{2Nv_{aa}^2}{|\omega_m| + \Gamma_{aa}} + \frac{2N_a(0)\pi Nv_{aa}^4}{(|\omega_m| + \Gamma_{aa})^2}$  เมื่อ  $v_{aa}$  คือ ศักย์การกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือ และ  $\Gamma_{aa} = \pi N_a(0)v_{aa}^2$

ดังนั้น

$$T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi} \exp\left[-\frac{1}{\bar{g}_{aa}} + K(\rho_a)\right] \quad (3.58)$$

2.3 เมื่อ  $\bar{g}_{bb} = 0$  แต่  $\bar{g}_{ab} \neq 0$  และ  $\bar{g}_{aa} \neq 0$  การจับคู่ในแถบพลังงาน b น้อยมาก แต่ในแถบพลังงาน a มากและระหว่างแถบพลังงาน a ,b มาก จะได้สมการอุณหภูมิมิกฤตดังนี้

$$\begin{aligned} T_C = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_C} \exp\left[ \frac{\bar{g}_{aa}}{2\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}} + \frac{1}{2}[K(\rho_a) + K(\rho_b)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\bar{g}_{aa}^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}{\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}} + [K(\rho_a) + K(\rho_b)]^2 + 2\frac{\bar{g}_{aa}}{\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}(K(\rho_b) - K(\rho_a)) \right. \right. \\ \left. \left. - 4K(\rho_a)K(\rho_b) \right\}^{1/2} \right] \quad (3.59) \end{aligned}$$

โดยภาพรวม  $T_C$  ลดลงแบบ exponential เมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม เนื่องจากดูได้จาก  $K(\rho_a)$  และ  $K(\rho_b)$  ที่ขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือ

3. สมการผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำวยดยั้งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธ์ คือ

$$\Delta C(T_C) = \sum_{\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \int_0^B d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle A_4 \rangle + \langle B_4 \rangle x_c^4 \right\} \left( \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right)^2 \bigg|_{T=T_C} \quad (4.8)$$

การคำนวณหาค่า  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิมิกฤตแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

3.1 คำนวณหาค่า  $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle$  และ  $\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle$  สำหรับตัวนำยวดยิ่ง

ยิ่งยวด ผลการคำนวณ คือ

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle = \frac{7N_a(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} \quad (4.10)$$

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle = \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} \quad (4.11)$$

3.2 คำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤต ผลการคำนวณ คือ

$$x_c = \left. \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \right|_{T=T_C} = \frac{1 - \bar{g}_{aa} f(T_c)}{\bar{g}_{ab} f(T_c)} \quad (4.17)$$

$$x_c = \left. \frac{\Delta_b}{\Delta_a} \right|_{T=T_C} = \frac{\bar{g}_{ba} f(T_c)}{1 - \bar{g}_{bb} f(T_c)} \quad (4.18)$$

เมื่อ 
$$f(T_c) = \ln\left(\frac{2r\omega_D}{\pi T_c}\right) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 - 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}$$

จากสมการ (4.17) และ (4.18) พบว่าพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดในคู่คูเปอร์ในแถบพลังงาน a และ b ( $\bar{g}_{aa}, \bar{g}_{bb}$ ) และระหว่างแถบพลังงาน a กับ b ( $\bar{g}_{ab}$ ) มีผลต่อ  $x_c$  ดังภาพประกอบ 25, 26 และ 27 คือ  $x_c$  ลดลงเมื่อ  $\bar{g}_{aa}$  เพิ่มขึ้น และ  $x_c$  เพิ่มขึ้นเมื่อ  $\bar{g}_{bb}$  หรือ  $\bar{g}_{ab}$  เพิ่มขึ้น

3.3 คำนวณหา  $\frac{d\Delta_a^2}{dT}$  ที่อุณหภูมิวิกฤต โดยขั้นแรกคำนวณหา  $\Delta_a$  ให้อยู่ในรูปที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเสียก่อน แล้วจึงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับอุณหภูมิ

$$\Delta_a^2 = -\frac{1}{M} \left( 1 - \frac{T}{T_C} \right) [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) 2f(T_c)] \quad (4.27)$$

เมื่อ

$$M = \frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 T_C^2} \{ \bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1 + x_c^2) f(T_c) \} \quad (4.28)$$

โดยที่

$$f(T_c) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}$$

จากสมการ (4.27) พบว่าพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของอิเล็กตรอนระหว่าง  
แถบพลังงาน a กับ b  $g_{ab}N_b(0)$  มีผลต่อ  $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$  ดังภาพประกอบ 28 คือ  
 $\Delta_a^2(T)/(1-T/T_C)T_C^2$  เพิ่ม  $g_{ab}N_b(0)$  เพิ่ม

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สมการ (4.27) เทียบกับ  $T$  จะได้

$$\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_C} = \frac{8\pi^2}{7\zeta(3)} \frac{[\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})]}{[\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{aa}x_c^2 - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)]} \quad (4.29)$$

แทนค่าสมการ (4.10) , (4.11) , (4.17) และ (4.29) ในสมการ (4.8) จะได้ สมการผลต่างความ  
ร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธิ์ คือ

$$\frac{\Delta C(T_C)}{C_N(T_C)} = 1.426 \left[ \frac{N_a(0) + N_b(0)x_c^4}{N_a(0) + N_b(0)} \right] \left\{ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_C)(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb}x_c - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})(1+x_c^2)f(T_C)} \right\}^2 \quad (4.33)$$

จากสมการ (4.33) พบว่า ถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  เพิ่ม  $\Delta C(T_C)$  เพิ่ม , ถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  ลด  $\Delta C(T_C)$  ลด ดัง

ภาพประกอบ 29 , 30 และ 31 ตามลำดับ

4. สมการผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มี  
คุณสมบัติแม่เหล็ก

การคำนวณหาค่า  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิวิกฤตแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

$$4.1 \text{ คำนวณหาค่า } \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle \text{ และ } \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle \text{ ในกรณีมี}$$

สารเจือ ผลการคำนวณ คือ

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle A_4 \rangle = \frac{7N_a(0)}{8\pi^2 T_C^2} + S \quad (4.48)$$

$$\text{เมื่อ} \quad S = S_2 + S_3$$

$$\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle B_4 \rangle = \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + R \quad (4.49)$$

$$\text{เมื่อ} \quad R = R_2 + R_3$$

4.2 คำนวณหา  $x_c$  ที่อุณหภูมิวิกฤต ผลการคำนวณ คือ

$$x_c = \frac{1 - \bar{g}_{aa}[f(T_c) + Q/N_a(0)]}{\bar{g}_{ab}[f(T_c) + P/N_b(0)]} \quad (4.53)$$

หรือ

$$x_c = \frac{\bar{g}_{ba}[f(T_c) + Q/N_a(0)]}{1 - \bar{g}_{bb}[f(T_c) + P/N_b(0)]} \quad (4.55)$$

เมื่อ  $Q = N_a K(\rho_a)$  และ  $P = N_b K(\rho_b)$

เมื่อไม่มีสารเจือปน  $P, Q = 0$  ดังนั้น  $x_c$  ในสมการ (4.53) และ (4.55) จะได้

$$x_c = \frac{1 - \bar{g}_{aa} f(T_c)}{\bar{g}_{ab} f(T_c)}$$

หรือ

$$x_c = \frac{\bar{g}_{ba} f(T_c)}{1 - \bar{g}_{bb} f(T_c)}$$

ซึ่งได้ตรงกับสมการ (4.19) และ (4.20) ในกรณีไม่มีสารเจือ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (4.54) และ (4.56) ที่คำนวณได้นั้นถูกต้อง

4.3 คำนวณหา  $\frac{d\Delta_a^2}{dT}$  ที่อุณหภูมิวิกฤต โดยขั้นแรกคำนวณหา  $\Delta_a$  ให้อยู่ใน

รูปที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเสียก่อน แล้วจึงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับอุณหภูมิ ได้ผลการคำนวณ ดังนี้ คือ

$$\Delta_a^2 = -\frac{1}{M} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left(\frac{P}{N_b(0)} - \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_c)\right)] \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{7}{8\pi^2} \frac{\zeta(3)}{T_c^2} (\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} x_c^2) + \frac{\bar{g}_{aa} S}{N_a(0)} + \frac{\bar{g}_{bb} R}{N_b(0)} x_c^2 \\ & - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left\{ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} (1 + x_c^2) f(T_c) + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q x_c^2}{N_a(0)} \right) \right. \\ & \left. + f(T_c) \left( \frac{R x_c^2}{N_b(0)} + \frac{S}{N_a(0)} \right) + \frac{PS + RQ x_c^2}{N_a(0) N_b(0)} \right\} \end{aligned} \quad (4.72)$$

เมื่อ

$$f(T_c) = \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - \sqrt{(\bar{g}_{aa} - \bar{g}_{bb})^2 + 4\bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}}}{2(\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba})}$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งสมการ (4.71) เทียบกับ  $T$  จะได้

$$\frac{d\Delta_a^2}{dT} = \frac{1}{MT_C} [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left( \frac{P}{N_b(0)} - \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_C) \right)] \quad (4.73)$$

แทนสมการ (4.48) , (4.49) , (4.55) และ (4.73) ที่ได้ในสมการผลต่างความร้อนจำเพาะ (4.8) จะได้

$$\Delta C(T_C) = \frac{1}{T_C} \left\{ \left( \frac{7N_a(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + S \right) + \left( \frac{7N_b(0)\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} + R \right) x_c^4 \right\} \times$$

$$\left[ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Q}{N_a(0)} + 2f(T_C) \right)}{\frac{7}{8\pi^2} \frac{\zeta(3)}{T_C^2} (\bar{g}_{aa} + x_c^2 \bar{g}_{bb}) + \frac{\bar{g}_{aa}S}{N_a(0)} + \frac{\bar{g}_{bb}x_c^2 R}{N_b(0)} - (\bar{g}_{aa}\bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab}\bar{g}_{ba}) \left[ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} (1+x_c^2) f(T_C) \right.} \right. \quad (4.74)$$

$$\left. \left. + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_C^2} \left( \frac{P}{N_b(0)} + \frac{Qx_c^2}{N_a(0)} \right) + f(T_C) \left( \frac{Rx_c^2}{N_b(0)} + \frac{S}{N_a(0)} \right) + \frac{PS + RQx_c^2}{N_a(0)N_b(0)} \right] \right\}^2$$

นี่คือ สมการผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กเป็นฟังก์ชันของ  $N_a(0)$  ,  $N_b(0)$  ,  $g_{aa}$  ,  $g_{bb}$  ,  $g_{ab}$  ,  $g_{ba}$  ,  $P$  ,  $Q$  ,  $R$  และ  $S$  ซึ่งสามารถครอบคลุมกรณีต่างดังต่อไปนี้

#### 4.3.1 ผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดี่ยวเมื่อ

ไม่มีสารเจือ

ในกรณีไม่มีสารเจือ  $c \rightarrow 0$  ,  $x_c = x_{c0} = 0$  และ

$$M = \frac{7\zeta(3)\bar{g}_{aa}}{8\pi^2 T_{C0}^2}, S_1 = \frac{7\zeta(3)N_a(0)}{8\pi^2 T_{C0}^2}, \left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_{C0}} = \frac{\bar{g}_{aa}}{MT_{C0}}$$

$$P = Q = R = S = 0$$

ดังนั้นสมการ (4.74) กลายเป็น

$$\Delta C(T_{C0}) = \frac{8\pi^2 T_{C0}}{7\zeta(3)} N_a(0)$$

เนื่องจาก  $C_N(T_{C0}) = \frac{2}{3} \pi^2 N_a(0) T_{C0} = \gamma T_{C0}$  เมื่อ  $\gamma$  คือ ค่าคงตัวของซอมเมอร์เฟลด์

(Sommerfeld's constant) ดังนั้น

$$\frac{\Delta C(T_{C0})}{C_N(T_{C0})} = \frac{24}{14\zeta(3)}$$

เมื่อ  $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.202$

$$\frac{\Delta C(T_{C0})}{C_N(T_{C0})} = 1.426$$

ผลลัพธ์นี้ตรงกับการคำนวณในทฤษฎีบีซีเอส

#### 4.3.2 ผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อ

ไม่มีสารเจือ

ในกรณีไม่มีสารเจือ  $c = 0$

$$M = \frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 T_{C0}^2} \{ \bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} x_{c0}^2 - (\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba})(1 + x_{c0}^2) f(T_C) \}$$

$$\left. \frac{d\Delta_a^2}{dT} \right|_{T=T_{C0}} = \frac{1}{MT_{C0}} [\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_{C0})(\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba})]$$

$$S_1 = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_{C0}^2} N_a(0), R_1 = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_{C0}^2} N_b(0)$$

ดังนั้นสมการ (4.74) กลายเป็น

$$\frac{\Delta C(T_{C0})}{C_N(T_{C0})} = 1.426 \left[ \frac{N_a(0) + N_b(0) x_{c0}^4}{N_a(0) + N_b(0)} \right] \left\{ \frac{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} - 2f(T_{C0})(\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba})}{\bar{g}_{aa} + \bar{g}_{bb} x_{c0}^2 - (\bar{g}_{aa} \bar{g}_{bb} - \bar{g}_{ab} \bar{g}_{ba})(1 + x_{c0}^2) f(T_{C0})} \right\}^2$$

ผลลัพธ์นี้ตรงกับการคำนวณผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อไม่มีสารเจือ ในสมการ (4.33)

#### 4.3.3 ผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดี่ยวเมื่อมี

สารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก

ในกรณีนี้  $x_c = 0$  ดังนั้นสมการ (4.74) กลายเป็น

$$\Delta C(T_C) = \frac{8\pi^2 N_a(0)T_C}{7\zeta(3)} \left[ 1 + \frac{4N_i}{\pi N_a(0)\Gamma_{aa}} \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_{C0}}\right) \right]$$

เมื่อ  $N_i$  คือ จำนวนอะตอมของสารเจือ

4.3.4 ผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก ดังสมการ (4.74)

### อภิปรายผล

ข้อแตกต่างระหว่างงานวิจัยนี้กับงานวิจัยของโอฮาชิ คือ งานวิจัยนี้ได้ใช้การประมาณแบบบอร์น (Born approximation) ในการพิจารณาการกระเจิงของอิเล็กตรอนอันเนื่องมาจากสารเจือ ในงานวิจัยของโอฮาชินั้นได้ใช้การประมาณแบบเมทริกซ์ที (t-matrix approximation) ซึ่งจะพิจารณาการกระเจิงของอิเล็กตรอนที่อันดับสูงๆด้วย แต่สูตรที่ได้จากงานวิจัยของโอฮาชินั้นไม่สามารถคำนวณหาสมการผลต่างความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตต่อได้

จากสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้ในกรณีตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานและบริสุทธ์ทั้งกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่อันดับหนึ่งและกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  ไม่เข้าสู่อันดับหนึ่ง จะเห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับ  $\bar{g}_{aa}$ ,  $\bar{g}_{bb}$  และ  $\bar{g}_{ab}$  ตามลำดับ คือ อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ  $\bar{g}_{aa}$ ,  $\bar{g}_{bb}$  และ  $\bar{g}_{ab}$  และอุณหภูมิวิกฤตกรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  ไม่เข้าสู่อันดับหนึ่งสูงกว่ากรณี  $\frac{\omega_D}{T_C}$  เข้าสู่อันดับหนึ่งในกรณีที่ศึกษา  $\bar{g}_{aa}$ ,  $\bar{g}_{bb}$  และ  $\bar{g}_{ab}$  มีค่าน้อยกว่าหนึ่ง เพราะต้องการศึกษาการจับคู่ของคูคูเปอร์แบบอ่อน

จากสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานที่มีสารเจือไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก สมการ (3.56) หากกำหนดให้  $P = Q = 0$  โดยที่  $P = N_a(0)K(\rho_a)$  และ  $Q = N_b(0)K(\rho_b)$  จะได้  $f(T_C)$  กลับไปสู่กรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธ์

ในการคำนวณหา  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานบริสุทธ์ สมการ (4.33) พบว่า ถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  เพิ่ม  $\Delta C(T_C)$  เพิ่ม , ถ้า  $\frac{N_a(0)}{N_b(0)}$  ลด  $\Delta C(T_C)$  ลด

ในการคำนวณหา  $\Delta C$  ที่อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กสมการ (4.74) พบว่าสามารถครอบคลุมถึงค่า  $\Delta C$  ของตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดียวเมื่อไม่มีสารเจือ ตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อไม่มีสารเจือ และตัวนำยวดยิ่งแถบพลังงานเดียวเมื่อมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก นั่นคือสูตร  $\Delta C$  ที่หาได้เพียงสูตรเดียวนี้นี้สามารถใช้หา  $\Delta C$  ของตัวนำยวดยิ่งในแต่ละกรณีที่กล่าวมาข้างต้นได้

### ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและผลต่างความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานทั้งกรณีบริสุทธิ์และกรณีมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็ก ในกรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ โดยมีเงื่อนไขในการศึกษาคืออันตรกิริยาดึงดูดระหว่างคูคูเปอร์เป็นอันตรกิริยาอ่อน เพราะทฤษฎีที่ใช้พัฒนามาจากทฤษฎีของบีซีเอส ซึ่งผลการวิจัยที่ได้สอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ในตัวนำยวดยิ่งมีสารเจือที่ไม่มีคุณสมบัติแม่เหล็กผลการวิจัยที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องโดยการลดรูปสมการแล้วได้ผลการวิจัยตรงกับกรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ ซึ่งยังมีกรณีอื่นๆที่น่าสนใจ คือ ตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงานเมื่อมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก และยังมีคุณสมบัติอื่นๆ ที่ยังไม่ได้ศึกษา เช่น สัมประสิทธิ์ไอโซโทป เป็นต้น

บรรณานุกรม

## บรรณานุกรม

- Ascroft, N.W. (1968). "Metallic Hydrogen : A High-Temperature Superconductor ?," *Physical Review Letters*. 21 : 1748 .
- Bardeen, J., Cooper, N., and Schrieffer, J.R. (1959). "Theory of Superconductivity," *Physical Review* , 108 (5) : 1175 – 1204 .
- Bouquet, F., and others. (2001). "Specific Heat of  $\text{MgB}_2$  : Evidence for a Second Energy Gap," *Physical Review Letters*. 87 : 047001-1.
- Bud'ko, S.L., and others. (2001). "Boron Isotope Effect in Superconducting  $\text{MgB}_2$ ," *Physical Review Letters*. 86(9) : 1877.
- Bussman-Holder, A., Micnas, R., and Bishop A.R. (2004) "Enhancement of the Superconducting Transition Temperature with the Two-band Model," *The European Physical Journal B*. 37:345-348.
- Buzza, C. & Yamashita, T. (2001). "Review of the Superconducting Properties of  $\text{MgB}_2$ ," *Superconductor Science Technology*. 14 : 115 -146 .
- Canfield, P.C. & Crabtree, G.W. (2003). "Magnesium Diboride : Better Late than Never," *Physics Today*.: 34 – 40.
- da Silva, R., and others. (2001). "Superconductivity at 35 K in Graphite-sulfur Composites," *Physical Review Letters*. 87 : 147001.
- Falge, R.L. (1967) *Physical Letters A*. 24 : 579.
- Gonnelli, R.S., and others. (2002). "Direct Evidence for Two-band Superconductivity in  $\text{MgB}_2$  Single Crystals from Directional Point-Contact Spectroscopy in Magnetic Fields," *Physical Review Letters*. 89 : 247004-1.
- Giubileo, F., and others. (2001) "Two Gap State Density in  $\text{MgB}_2$  : A True Bulk Property or A Proximity Effect," *Physical Review Letters*. 87 : 177008.
- He, T., and others. (2001). "Superconductivity in the Non-oxide Perovskite  $\text{MgCNi}_3$ ," *Nature*. 411 : 54.
- Hink, D.G., and others. (2001). "The Complex Nature of Superconductivity in  $\text{MgB}_2$  as Revealed by the Reduced Total Isotope Effect," *Nature*. 411 : 457.
- Kaczorowski, D., and others. (2001). "Incipient superconductivity in  $\text{TaB}_2$  : A Full-Potential Electronic Structure Comparison," *cond-mat*. 1 : 0103571.
- Kortus, J., Mazin, I.I., and others. (2001). "Superconductivity of Metallic Boron in  $\text{MgB}_2$ ," *Physical Review Letters*. 86 : 4656.

- Lin, T.H. & Dunn, K.J. (1986). "High Pressure and Low Temperature Study of Electrical Resistance of Lithium," *Physical Review B*. 33 : 807.
- Liu, A.Y., and others. (2001). "Beyond Eliashberg Superconductivity in  $\text{MgB}_2$  : Anharmonicity, Two-Phonon Scattering, and Multiple Gaps," *Physical Review Letters*. 87(8) : 087005-1.
- Mishonov, T.M., and others. (2005). "Two-band BCS Model Describes Well the Thermodynamics of  $\text{MgB}_2$ ," *Physical Review B*. 71 : 012514.
- Nagamatsu, N., Akimitsu, N., and others. (2001). "Superconductivity at 39 K in Magnesium Diboride," *Nature*. 63 : 410.
- Nagarajan, R., and others. (1994). "Bulk Superconductivity at an Elevated Temperature ( $T_c = 12\text{K}$ ) in a Nickel Containing Alloy system Y-Ni-B-C," *Physical Review Letters*. 72 : 274.
- Ohashi, Y. (2002). "Bound State and Order Parameter Mixing Effect by Nonmagnetic Impurity Scattering in Two-band Superconductors," *Physical Society of Japan*. 71(8) : 1978-1991.
- Sakurai, A. (1978) "Effect of Anderson Magnetic Impurities on Superconductivity," *Physical Review B* 17 : 1195-1208.
- Shulga, S.V., and others. (2001). "The Upper Critical Field Problem in  $\text{MgB}_2$ ," *cond-mat*. 1 : 0103154.
- Suhl, H., Matthias, B.T., and others. (1959). "Bardeen-Cooper-Schreiffer Theory of Superconductivity in the Case of Overlapping Bands," *Physical Review Letters*. 3(12) : 552.
- Szabo, P., and others. (2001). "Evidence for two Superconducting Energy Gaps in  $\text{MgB}_2$  by Point-Contact Spectroscopy," *Physical Review Letters*. 87 : 2001.
- Takei, K., and others. (1985). "Superconducting Beryllium Thin films Prepared by Ion-beam Sputtering," *Journal of Applied Physics*. 57 : 5093.
- Tsuei & Kirtley . (1996). "Probing High -Temperature Superconductivity," *Scientific American* . 50 : 6.
- Udomsamuthirun, P., and others. (2005). "Effect of Density of State on Isotope Effect Exponent of Two-band Superconductors," *Physica C*. 425:149-154.
- Wang, Y., and others.(2001). "Specific Heat in the Superconducting and Normal State ( 2 - 300 K, 0 -16 T), and Magnetic Susceptibility of the 38 K Superconductor  $\text{MgB}_2$  : Evidence for a Multicomponent Gap," *Physica C* 355 : 179.

Young, D.P., and others. (2001). "Structure and Superconducting Properties of BeB<sub>2</sub>," *cond-mat*. 4 : 0104063.

ภาคผนวก

ภาคผนวก  
โปรแกรม Mathematica

(\*the specific heat jump of two band superconductors\*)

```
ClearAll[ff11, gaa, gbb, gab, gba, ftc, x];
```

```
gaa = 0.3;
```

```
gbb = 0.25;
```

```
na = 0.6;
```

```
nb = 0.4;
```

```
ff11[y_, x_] :=
```

```
y-
```

```
1.42613 +
```

```
(na +
```

```
nb * ((x * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x))) /
```

```
(1 - gbb * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x)))) ^ 4) +
```

```
( (gaa + gbb - 2 * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x)) + (gaa + gbb - x * x)) /
```

```
(gaa +
```

```
gbb * ((x * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x))) /
```

```
(1 - gbb * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x)))) ^ 2) -
```

```
(gaa + gbb - x * x) * (1 + ((x * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x))) / (1 -
```

```
gbb * (gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x)))) ^ 2)
```

```
(gaa + gbb -  $\sqrt{((gaa - gbb)^2 + 4 * x * x)}$ ) / (2 * (gaa + gbb - x * x)) ^ 2;
```

```
h = 0.00001;
```

```
y = 0.1;
```

```
x = 0.3;
```

```
While[x < 1.01, b = 2.5;
```

```
While[b > 0.0001,
```

```
p1 = y;
```

```
sff = ff11[y, x];
```

```
ssf1 = ff11[y + h, x];
```

```
y = y -  $\frac{sff + h}{ssf1 - sff}$ ;
```

```
b = Abs[y - p1];
```

```
];
```

```
Print[x, " ", y];
```

```
x = x + 0.01;];
```

ประวัติย่อผู้วิจัย

## ประวัติย่อผู้วิจัย

|                     |                                                |
|---------------------|------------------------------------------------|
| ชื่อ ชื่อสกุล       | น.ส. สุวรรพร จุลนพ                             |
| วันเดือนปีเกิด      | 8 มีนาคม 2522                                  |
| สถานที่เกิด         | อ.เมือง จ.สงขลา                                |
| สถานที่อยู่ปัจจุบัน | 15 ถ.สุวรรณรังษี ต.ระโนด อ.ระโนด จ.สงขลา 90140 |

### ประวัติการศึกษา

|           |                                                          |
|-----------|----------------------------------------------------------|
| พ.ศ. 2541 | มัธยมศึกษาตอนปลาย<br>จากโรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย          |
| พ.ศ. 2545 | วท.บ. (สาขาวิชาฟิสิกส์)<br>จากมหาวิทยาลัยมหิดล           |
| พ.ศ. 2549 | วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์)<br>จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |