การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

ปริญญานิพนธ์
ของ
โรมรัน ลาดเหลา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2551

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด
โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

ปริญญานิพนธ์
ของ
โรมรัน ลาดเหลา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2551

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด
โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

บทคัดย่อ

ของ

โรมรัน ลาดเหลา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
พฤษภาคม 2551

โรมรัน ลาดเหลา. (2551). *การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์*. ปริญญานิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง

ปริญญานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ที่มุ่งเน้นวิจัย เพื่อศึกษาปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในรูปแบบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดและความต้องการความนิ่มนวลของระบบตลอดการทำงานโดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุม ซึ่งปกติแล้วในการกำหนดฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้น นิยมใช้ พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในบทความวิชาการหรืองานวิจัยนี้จะเน้นเฉพาะ

ในการแก้ปัญหาการใช้ความนิ่มนวลที่สุดที่เป็นสมการเชิงเส้นของการใช้พลังงานน้อยที่สุดของระบบ เนื่องจากความนิ่มนวล มีความจำเป็นต่อการทำงานของระบบพลศาสตร์หลายระบบด้วยกัน อาทิเช่น ความนิ่มนวลของการขับขี่รถยนต์ ความนิ่มนวลในการทำงานของหุ่นยนต์ แขนกล ซึ่งเป็นเครื่องมืออุปกรณ์ที่ทำจากวัสดุเปราะบาง แตกหักเสียรูปร่างได้ง่าย รวมทั้งการนำไปใช้ในกระบวนการผลิตชิ้นงานที่เปราะบาง ดังนั้น ผู้วิจัย จึงมีความสนใจศึกษาในปัญหาความนิ่มนวลของระบบพลศาสตร์ โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุม และต้องการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด จากการวิจัยพอสรุปได้ว่า เมื่อนำผลรวมการใช้พลังงานทั้งหมดมาเปรียบเทียบ จะได้คำตอบของปัญหาความนิ่มนวลที่ได้มีค่าแตกต่างกันกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด ซึ่งเป็นเพราะค่าเงื่อนไขขอบเขต จากผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง สามารถนำไปแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเพื่อปรับใช้การแก้ปัญหาในระบบงานได้อย่างเหมาะสม ซึ่งได้ทั้งความนิ่มนวลและช่วยให้เกิดการประหยัดพลังงานในการทำงาน

A COMPARISON OF USING MINIMUM ENERGY AND MINIMUM JERK BY GIVING BOTH END OF CONTROL INPUT IN DYNAMIC SYSTEMS

AN ABSTRACT

BY

ROMRUN LADLOU

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering

at Srinakharinwirot University

May 2008

Romrun Ladlou. (2008). *A Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk by Giving Both End of Control Input in Dynamic Systems*. M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew, Lt. Col. Assist. Prof. Dr. Anotai Suksangpranomrung.

This paper deals with the problem of finding the external solutions of the dynamic systems in term of minimum energy and minimum jerk with given both end of control input. In general, energy, time, velocity and displacement are used as an objective function; however, this paper is emphasizing the minimum jerk of linear equation problem. Moreover, this objective is needed in many dynamic systems such as automobile and robot that work with the fragile equipments. Not only the minimum jerk with given both end of control input in dynamic systems is become an objective of this work, but also the results are used to compare with the minimum energy problem. After comparison, the conclusion is that both results from the minimum jerk and minimum energy are quite different when the total energy consumptions are compared because of boundary condition. The result from experimentation can solve the extremum linear equation problem and save the energy of work.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด
โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

ของ
โรมรัน ลาดเหลา

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่….. เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์	คณะกรรมการสอบปากเปล่า
.... ประธาน (พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว)	……....................................... ประธาน (รศ.ดร.เศรษฐพงค์ มะลิสุวรรณ)
.... กรรมการ (พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)	….. กรรมการ (พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว)
………..…... กรรมการ (พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)	.... กรรมการ (ผศ.วิชิต บัวแก้ว)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือ แก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจ ขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว อาจารย์ ดร. พิชัย อัษฎมงคล และ พันเอกสุภโชค สัมปัตตะวนิช ที่ให้ความช่วยเหลือทุกเรื่องตลอดการศึกษา รวมทั้งตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ร้อยเอกหญิงสุวิมล เสนีวงศ์ ณ อยุธยา คุณโกวิทย์ กัลยาทอง และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ยศศักดิ์ สายสนิท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่ให้ความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณคุณพ่อบุญจันทร์ ลาดเหลา และ คุณแม่แพร ลาดเหลา ที่ให้ชีวิต ให้โอกาสให้ความรู้ ความรักความอบอุ่น ให้การเลี้ยงดูอบรมสั่งสอน และเป็นแรงใจให้ดำเนินชีวิตจนถึงทุกวันนี้

ขอขอบคุณภรรยา นางอโณทัย ลาดเหลา และน้องชายของข้าพเจ้า ขอขอบคุณ คุณนันทวัน และ คุณประสงค์ อุบลวัตร ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่านที่สนับสนุน ช่วยเหลือ และให้กำลังใจเป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 3 และรุ่นพี่ในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และโรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

โรมรัน ลาดเหลา

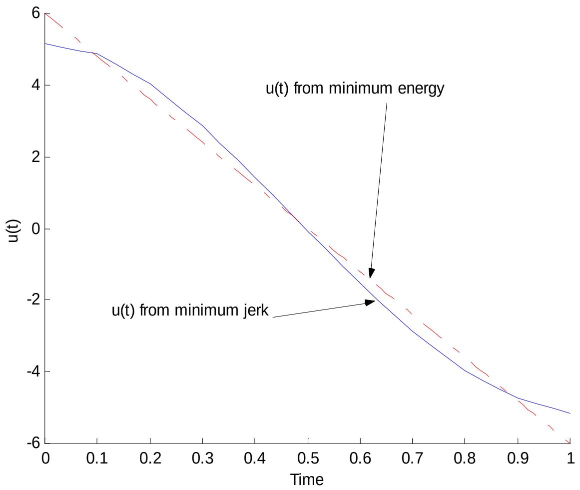
สารบัญ

บัญชีภาพประกอบ

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการสร้างและการออกแบบเครื่องจักร เครื่องกลชั้นสูง ต้องมีความเหมาะสมในการใช้พลังงาน หรือการเคลื่อนที่ให้มีความนิ่มนวลมากที่สุด ดังนั้น จึงมีการวางแผน และออกแบบเกี่ยวกับ วิถีการเคลื่อนที่ของเครื่องจักร เครื่องยนต์ หลักการออกแบบมีหลายวิธี ที่เรายังไม่ได้นำมาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด เช่น การใช้พลังงานน้อยที่สุด และให้มีความนิ่มนวลมากที่สุด ซึ่งหุ่นยนต์จำเป็นต้องเคลื่อนที่ตามคำสั่งอย่างนิ่มนวล เพื่อหลีกเลี่ยงความเสียหายอันจะเกิดกับชิ้นส่วนและชิ้นงาน ในช่วงระยะเวลาเท่ากันการทำงานของหุ่นยนต์แขนกลนั้นต้องการ การใช้พลังงานน้อยที่สุด พร้อมทั้งให้มีความนิ่มนวลมากที่สุด ประกอบกับงานวิจัยของ ปเสฏฐา สารลักษณ์ (2548) ได้ศึกษาปัญหา เรื่อง การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ ซึ่งได้ผล ดัง ภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 เปรียบเทียบ $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหา

จากการศึกษาของ ปเสฏฐา สารลักษณ์ (2548) ได้ข้อสรุปว่า คำตอบที่ได้จากการพิจารณาหาค่าความนิ่มนวลสูงสุดนั้น มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด เป็นฟังก์ชั่นของค่า ความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะเป็นผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลข ในเรื่องของการที่สามารถกำหนดค่าเริ่มต้น และสุดท้ายให้กับแรงที่จะมาทำกับระบบการเคลื่อนที่ได้ในอนาคต นั่นคือผลลัพธ์ของการศึกษาไม่สามารถนำไปใช้กับงานจริงได้เนื่องจากการกำหนด หรือเพิ่มแรงที่มีค่าสูง

เข้าไปในระบบการเคลื่อนที่อย่างทันทีทันใด ณ จุดเริ่มต้น จะมีผลทำให้เกิดการกระชากไม่นิ่มนวล ส่งผลให้ชิ้นงาน เครื่องจักร เครื่องยนต์ หุ่นยนต์ได้รับความเสียหาย รวมถึงผู้ปฏิบัติงาน มีความเสี่ยงจากอันตราย ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดในการแก้ปัญหาดังกล่าวโดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของค่า Control Input มีค่าเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่ง (Two-Point Boundary Value Conditions) เงื่อนไขของค่าเริ่มต้น (Initial Conditions) เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต (Boundary Conditions) ที่สำคัญการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ให้มีความนิ่มนวลมากที่สุด และการเคลื่อนที่ได้อย่างเหมาะสมที่สุด ดีที่สุด หรือไม่ขึ้นอยู่กับการใช้พลังงานของหุ่นยนต์นั่นเอง โดยทั่วไปรูปแบบปัญหาของระบบการเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์ จะต้องประกอบไปด้วยหลายส่วน เช่น สมการ การเคลื่อนที่ เงื่อนไขของค่าเริ่มต้น (Initial Conditions) เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต (Boundary Conditions) หรือเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่ง (Two-Point Boundary Value Conditions) ในการแก้ปัญหาต้องพิจารณาเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่งเสียก่อน แต่ละกรณี มีวิธีการแก้ปัญหามากมายขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของการนำไปประยุกต์ใช้งาน ตัวอย่างที่เห็นได้ชัด คือ หุ่นยนต์ที่สร้างขึ้นมา เพื่อทำงานที่ใช้พลังงานต่ำสุดจะออกแบบให้มีค่า Actuator Inputs ต่ำสุด ซึ่งเป็นหลักพื้นฐานของระบบพลศาสตร์ วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดและให้มีความนิ่มนวลมากที่สุด และนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบ โดยวิธีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด (Optimization Method) และใช้เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต (Boundary Conditions) ซึ่งเป็นทางเลือกใหม่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาระบบงานได้ เนื่องจากเรารู้ว่าค่าพลังงานต่ำสุดเป็นฟังก์ชันของความเร่ง ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีความเห็นว่า ปัจจัยที่สำคัญต่อผลลัพธ์ที่ได้คือค่าความเหมาะสมสูงสุดของความนิ่มนวลสัมพันธ์กับการใช้พลังงานน้อยที่สุด

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อนำเอาเทคนิควิธีแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดของระบบพลศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบเครื่องจักร เครื่องยนต์ และหุ่นยนต์

2. เพื่อพิสูจน์ถึงทฤษฏีหลักการแก้ปัญหาทางด้านการควบคุมที่ได้ความนิ่มนวลที่สุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic Optimization)

3. เพื่อนำเสนอถึงการเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียของการหาคำตอบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของค่าตัวแปรควบคุม ในระบบพลศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

1. การศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะนำเอาปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ ในการใช้ความนิ่มนวลที่สุดและการใช้พลังงานน้อยที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้น และ

จุดสิ้นสุดของค่าตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์ จากนั้นนำความเหมาะสมสูงสุด ในหลักการการใช้พลังงานต่ำสุด มาเปรียบเทียบกับหลักการใช้ความนิ่มนวลที่สุด ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear Systems) โดยทำการแก้ปัญหาโดยวิธีตรง (Direct Methods)

2. ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณหาคำตอบโดยใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขในการแก้สมการเชิงเส้นของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับหลักการ ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบทางพลศาสตร์ ประกอบด้วย

1.1 หลักการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่

1.2 หลักการวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมระบบพลศาสตร์

1.3 แนวความคิดทางคณิตศาสตร์

2. ศึกษาปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

3. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือ สมการการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์ที่เป็นสมการเชิงเส้นและการกำหนดเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา โดยการกำหนดสภาวะเริ่มต้นและสภาวะสุดท้ายของตัวแปรควบคุม (Control Input) และสร้างคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

4. ใช้โปรแกรมแม็ทแลป (Matlab) เพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดในการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems) โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของค่าตัวแปรควบคุมในระบบทางพลศาสตร์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

5. นำผลลัพธ์จากการแก้ปัญหามาเปรียบเทียบการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

6. สรุปและจัดทำรายงาน (Summary) โดยทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้รวมทั้งสรุปผลการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการแก้ปัญหา และจัดทำรายงาน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. สามารถนำหลักการแก้ปัญหาทางด้านการควบคุมที่ได้ความนิ่มนวลที่สุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic Optimization) มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบเครื่องจักร เครื่องยนต์ และหุ่นยนต์

2. สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้ประโยชน์ ในการคำนวณหาคำตอบ โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดและนำไปแก้ปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกันได้

3. สามารถนำเสนอถึงหลักการการใช้พลังงานที่น้อยที่สุด (Minimum Energy) เปรียบเทียบกับการใช้การใช้ความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) ที่เป็นเชิงเส้นโดยใช้ข้อมูลที่เป็นตัวแปรอย่างเดียวกันด้วยวิธีโดยตรง (Direct Methods)

4. สามารถนำข้อดี และข้อเสียของการหาคำตอบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้น และจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุม ในระบบพลศาสตร์มาแก้ปัญหางานได้

5. สามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการพัฒนา เพื่อแก้ปัญหากับงานจริง หรือนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกันได้ต่อไป

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากบทความทางวิชาการ ตำรา ซึ่งเป็นการนำเสนอข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ส่งผลให้การทำวิจัยบรรลุตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้และได้เรียงลำดับเนื้อหาตามหัวข้อต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน เป็นระเบียบวิธีทางตัวเลข ที่นำมาใช้ในการหาค่าที่เหมาะสมที่เป็นค่าที่ต่ำสุด หรือค่าสูงสุด เพื่อทำให้การใช้ประโยชน์ และความปลอดภัย รวมทั้งมีความคุ้มค่าที่สุด ทั้งด้านการลงทุนและด้านพลังงาน ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้กับทุกสาขาวิชา เพื่อค้นหาคำตอบของปัญหา จำเป็นต้องนำลักษณะของปัญหามาจัดให้อยู่ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เสียก่อน ในเทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ มีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of Problem Formulation) สามเทอม คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions) ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

1.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรที่แสดงถึงรายละเอียดของการออกแบบเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่จะต้องหาคำตอบ เช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม ดีไซน์วาริเอเบิล คือ ความยาว และความสูง ในการแก้ปัญหา ผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้ความรู้ความชำนาญ และประสบการณ์ มาเป็นองค์ประกอบการพิจารณาตัดสินใจกำหนด หรือเลือกว่า สิ่งไหน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล นั้นมีหลักการพื้นฐานคือ จะต้องเป็น ลิเนียร์อินดิเพนเดนท์ (Linear Independent) กำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตศาสตร์ไม่ได้ เช่น การออกแบบหน้าตัดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราจะไม่สามารถกำหนด ดีไซน์วาริเอเบิล เป็นความยาว ความกว้าง และพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรากำหนดความยาวและความกว้างเป็นดีไซน์วาริเอเบิล ตัวแปรที่สามคือพื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ เพื่อให้การออกแบบ มีความสมบูรณ์ ดีไซน์วาริเอเบิล มีได้หลายตัว และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล เหล่านี้ จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design Vecto r : Matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใด ๆ ของดีไซน์ วาริเอเบิล และในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นจะใช้อักษร x และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้น ๆ การเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[\mathbf{X}]$, $\mathbf{X}$ หรือ $\mathbf{x}$, $[x_1, x_2, ..., x_n]^T$ และ $x_i, i = 1,2,...,n$

1.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือ ค่าคงที่ ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบ แม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรง เป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ มีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector : Matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กัน ดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2,..., p_q]^T$

1.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือ ข้อมูลที่สำคัญเกี่ยวกับการออกแบบ เพื่อประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบ โดยจะใช้ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters) ซึ่ง ดีไซน์ฟังก์ชันนี้ สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของ ดีไซน์ออปเจคทิฟว์ และ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design Objectives and/or Constraints) ซึ่งเป็นปัจจัยที่ทำให้เกิดการค้นหาการออกแบบมีเหมาะสมและเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่า เป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้การได้ (Feasible) เช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุด โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield Strength) นั่นคือ ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดเป็นออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function) ส่วนความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงสูงสุด เป็นคอนสเทรนท์ฟังก์ชัน (Constraint Functions) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.3.1 ออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Function) แบบฟังก์ชันเดี่ยว รูปแบบของการนำไปใช้คือการหาปริมาณที่น้อยที่สุดหรือปริมาณที่มากที่สุด ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ ในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นจะเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $f(X)$ และ $f(x_1, x_2,..., x_q)$

1.3.2 คอนสเทรนท์ฟังก์ชัน (Constraint Functions)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน ที่มีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน (เป็นได้ทั้งสมการและอสมการ) ดังนั้น จึงเป็นเวกเตอร์ (Vector : Matrix) และใช้เครื่องหมายในการเปรียบเทียบสามตัวคือ $\leq$, $\geq$ และ = ซึ่งเงื่อนไขบังคับนี้แบ่งเป็นสามรูปแบบคือ อันคอนสเทรนท์ (Unconstraint), อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraint) ซึ่งมีรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1.3.2.1 อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints)

เป็นเงื่อนไขที่บังคับให้การออกแบบต้องเป็นไปตามเงื่อนไข อย่างเคร่งครัด โดยจะต้องไม่ขาดและไม่เกินจากเงื่อนไขรูปแบบเป็นสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร *g* เงื่อนไขบังคับนี้ สามารถมีได้หลายตัวแปรและเป็นเวกเตอร์ สัญลักษณ์สามารถเขียนได้หลายแบบ ดังนี้ คือ $[G]$, $[g_1, g_2,..., g_l]$ และ $g_l, l = 1,2,..., m$ จำนวนดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) *n* จะต้องมีขนาดที่มากกว่าจำนวน *m* การออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) จะต้องสอดคล้องกับออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function) และมีเครื่องหมายเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $g_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 500 = 0$ เป็นต้น

1.3.2.2 อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีความยืดหยุ่นในการออกแบบ ลักษณะการบังคับเป็นช่วงให้เปรียบเทียบมีรูปแบบเป็นอสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร c เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและจะเป็นเวกเตอร์ สัญลักษณ์เขียนได้หลายแบบ ดังนี้ คือ $[C]$, $[c_1, c_2, ..., c_m]$ และ $c_l, l = 1,2,...,m$ เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้อง คือเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ และน้อยกว่าหรือเท่ากับ แต่ในงานด้านวิศวกรรมจะนิยมใช้แบบน้อยกว่าหรือเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $c_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 1 \leq 0$ เป็นต้น

1.3.2.3 ไซด์คอนสเทรนท์ (Side Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่นำมาใช้เพื่อกำหนดตัวเลขช่วงให้กับดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และการกำหนดเป็นแบบขีดจำกัดบน และขีดจำกัดล่าง

1.3.2.4 ดีไซน์สเปส (Design Space)

ก็คือ ปริภูมิที่จะถูกใช้เพื่อการออกแบบที่เหมาะสม เป็นปริภูมิที่เกิดขึ้นจากหลักการของ Euclidean or Cartesian n-dimensional Space ที่มีมิติใดๆ ซึ่งเกิดขึ้นจากกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) แต่จะมีความซับซ้อนมากกว่าระบบปริภูมิอ้างอิงทั่วไปที่เป็นสามมิติตามที่เราคุ้นเคยกัน เช่น มี ดีไซน์วาริเอเบิล 10 ตัว ก็จะมีมิติของปริภูมิเป็น 10 มิติ เป็นการยากมากที่จะอธิบายโดยการวาดภาพหรือเขียนกราฟออกมา ด้วยเหตุนี้ จึงใช้ ไซด์คอนสเทรนท์ (Side Constraints) มาเป็นตัวจำกัดขอบเขตของปริภูมิ ซึ่งหากผลเฉลยอยู่ในช่วงขอบเขตนี้ก็ถือว่ายอมรับได้

1.4 ฟอร์มมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

องค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มีการเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบ ดังนี้

หาค่าน้อยที่สุดของ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (2.1)$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$
$$g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$
$$g_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{2.2}$$

$$c_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$$
$$c_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$$
$$c_l(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0 \tag{2.3}$$

$$x_j^l \le x_j \le x_j^u,\ j = 1,2,...,n \tag{2.4}$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้ดังนี้ หาค่าน้อยที่สุดของ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.5}$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$g_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, l = 1,2,...,m \tag{2.6}$$

$$c_l(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, l = 1,2,...,m \tag{2.7}$$

$$x_j^l \le x_j \le x_j^u,\ j = 1,2,...,n \tag{2.8}$$

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้ หาค่าน้อยที่สุดของ

$$f(X), [X]_n \tag{2.9}$$

โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$[g(X)]_l = 0 \tag{2.10}$$

$$[c(X)]_l \le 0 \tag{2.11}$$

$$X^{low} \le X \le X^{up} \tag{2.12}$$

ปัญหาของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ มีฟอร์มมาตรฐานที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถเรียกได้ดังนี้คือ หาค่าน้อยที่สุดของออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function) โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (Subject to) บังคับเชิงเท่ากับ (Equality Constraints) จำนวน *l* เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับ อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints) จำนวน *i* เงื่อนไข ทั้งนี้ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ทั้งหมดจำนวน *n* ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของ ไซด์คอนสเทรนท์ (Side Constraints) เท่านั้น

1.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่นำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ประยุกต์ใช้งาน และ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลาจะเรียกกันว่า สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า เป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of Optimization) คือ การค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ที่มีออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function) เป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยที่สุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นโกลบอลมีนิมัม (Global Minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1,\ldots,x_n) \le f(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n) \tag{2.13}$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1\ h_2\ \ldots\ h_n] \ne 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่า โลคอลมีนนิมัม (Local Minimum)

กรณีมากที่สุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นโกลบอลเม็กซิมัม (Global maximum) ได้ ถ้า

$$f(x_1,\ldots,x_n) \ge f(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n) \tag{2.14}$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1\ h_2\ \ldots h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1\ x_2\ \ldots x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่า โลคอลเม็กซิมัม (Local Maximum)

1.6 สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization)

เป็นปัญหาพื้นฐานทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลา ซึ่งไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) เพราะต้องอาศัยหลักการแก้ปัญหาของสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) เช่นกัน ดังนั้นจึงควรทำการศึกษาหลักการและเทคนิคการค้นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) และการตรวจสอบค่าของตัวแปรที่หาได้ว่า เป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด ดังนี้

กรณีอันคอนสเทรนท์ (Unconstraint) กลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,\ldots,x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุดเรียกว่า เอ็กทรีมัม (Extremum) ถ้ากำหนดให้ $x_1,\ldots,x_n$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,\ldots,x_n)$ แล้วทำการพิจารณาโดยการเพิ่มค่า h_i ให้กับ $x_i, i=1,\ldots,n$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) ก็จะได้

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n) &= f(x_1,\ldots,x_n) + \delta f(x_1,\ldots,x_n) \\ &\quad + \delta^2 f(x_1,\ldots,x_n) + higher-order\ terms \end{aligned} \tag{2.15}$$

เมื่อ

$$\delta f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i} h_i$$

$$\delta^2 f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}[h_1\ \ldots\ h_n] H(x_1,\ldots,x_n) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$H(x_1,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

H เรียกว่า เฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian Matrix) ในการพิจารณากรณีค่าน้อยที่สุด (Minimum) ดังนั้น สมการ (2.15) ก็จะมีการเปลี่ยนแปลงดังนี้ $\delta^2 f < 0$ ทำให้ $x_1,\ldots,x_n$ มีเครื่องหมายเป็นลบทั้งหมด เป็นค่ามากที่สุด (Maximum) แต่เราสามารถลดความซับซ้อน

ในการพิสูจน์ได้ โดยการใช้ เฮสเซียนแมตริกซ์ (Hessian Matrix) เพราะเป็นการทำให้สอดคล้องกับสมการ (2.20) ได้จะมีค่าเจาะจง (Eigenvalues) เป็นบวกทั้งหมด (Positive Definite Matrices) นั่นคือ ถ้า

$H > 0$ ทำให้ค่าเจาะจง (EigenValues) มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมด (Positive Definite Matrices) ทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยที่สุด (Minimum)

$H < 0$ ทำให้ค่าเจาะจง (Eigenvalues) มีเครื่องหมายเป็นลบทั้งหมด (Negative Definite Matrices) ทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่ามากที่สุด (Maximum)

ถ้าค่าเจาะจง (Eigenvalues) มีค่าบวกบ้างลบบ้างจะเรียกว่า แซดเดิลพอยด์ (Saddle Point)

กรณีอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) พิจารณาการหาค่า $x_1,...,x_n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,...,x_n)$ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ นั่นคือ

$$g_l(x_1,...,x_n) = 0, l = 1,\dots,m \quad \text{เมื่อ } m < n \tag{2.16}$$

โดยทั่วไปจะหาค่าด้วยสองวิธีการ คือ วิธีพาร์ติชัน (Partition Method) กับวิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier Method)

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1 + h_1,..., x_n + h_n) - f(x_1,...,x_n) \\ &= \delta f(x_1,...,x_n) + \delta^2 f(x_1,...,x_n) + \dots \geq 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

จากสมการ (2.17) เมื่อตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้

$$\Delta f = \delta f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_i} h_i \geq 0 \tag{2.18}$$

จากสมการ (2.18) หากทำการตัด h_i ออกไปจะทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เพื่อใช้หาค่า $x_1,...,x_n$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1,...,x_n)$ มีค่าน้อยที่สุด (Minimum) ในทำนองเดียวกันยังสามารถหาค่ามากที่สุด (Maximum) ได้เช่นกัน ดังนั้นจึงได้สมการที่ใช้หาค่า $x_1,...,x_n$ ดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n \tag{2.19}$$

ดังนั้น เมื่อใช้สมการ (2.19) หาค่าของ $x_1,...,x_n$ ได้แล้วแต่ก็ยังบอกไม่ได้ว่าค่าที่หามาได้เป็นค่าน้อยที่สุด หรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ก็มีวิธีที่จะบอกได้ว่าค่า $x_1,...,x_n$ ที่หามาได้นั้นเป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) โดยพิจารณาจากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) ดังที่ผ่านมา ณ เทอมกำลังสอง จะพบว่า Δf จะมีค่าเป็นบวกในกรณีที่

$$\delta^2 f = \frac{1}{2}[h_1 \ldots h_n] H(x_1,...,x_n) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} > 0 \qquad (2.20)$$

ซึ่งหมายความว่า ค่า $x_1,...,x_n$ จะสอดคล้องกับสมการ (2.20) ได้จะต้องมีค่าอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ โลคอลมีนนิมัม (Local Minimum) ส่วนค่า h_i ที่เพิ่มเข้าไปนั้น ทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน Δf เป็นบวก ดังนั้นจึงบอกได้ว่า ถ้า $\delta^2 f > 0$ ทำให้ $x_1,...,x_n$ มีเครื่องหมายเป็นบวกทั้งหมดเป็นค่าน้อยที่สุด (Minimum)

วิธีพาร์ติชัน (Partition Method) การออปติไมต์เซชัน (Optimization) ที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraint) จะทำให้ตัวแปร $x_1,...,x_n$ ไม่เป็นอิสระ (Independent) ซึ่งตัวแปรทั้งหมดต้องสอดคล้องกับอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) ทั้งหมดจำนวน m สมการ ถ้าตัวแปร x_i ถูกเพิ่มค่าด้วย h_i จะทำให้พบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน Δf เป็น

$$\Delta f = f(x_1 + h_1,...,x_n + h_n) - f(x_1,...,x_n) \qquad (2.21)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออกจะได้ฟังก์ชัน คือ

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \qquad (2.22)$$

โดยที่ δf เป็นค่าประมาณของ Δf เพราะตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ทำนองเดียวกันค่า h_i ที่เพิ่มให้กับตัวแปร x_i จะต้องมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับด้วย นั่นคือ

$$g_l(x_1 + h_1,...,x_n + h_n) = 0, l = 1,\ldots,m \quad \text{เมื่อ } m < n \qquad (2.23)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออกจะได้

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_l}{\partial x_i} h_i = 0, l = 1,\ldots,m \qquad (2.24)$$

เพื่อความเหมาะสมของสัญลักษณ์ ตัวแปร $x_1,...,x_n$ จะแยกออกเป็นสองกลุ่มคือ $y_1,...,y_m$ และ $z_1,...,z_{n-m}$ ตัวแปรที่เพิ่มค่าให้กับกลุ่มตัวแปร $y_1,...,y_m$ สามารถคำนวณหาได้จากการเพิ่มค่าในเทอมของกลุ่ม $z_1,...,z_{n-m}$ ดังนั้นเราจึงเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \frac{\partial g_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}\end{bmatrix}_{(m\times m)} \begin{bmatrix}h_{y_1}\\ h_{y_2}\\ \vdots\\ h_{y_m}\end{bmatrix}_{(m\times 1)} + \\ &\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{n-m}}\\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial z_{n-m}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}_{(m\times n-m)} \begin{bmatrix}h_{z_1}\\ h_{z_2}\\ \vdots\\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix}_{(n-m\times 1)} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{(m\times 1)}\end{aligned} \tag{2.25}$$

เราเขียนสมการ (2.25) ใหม่ได้เป็น

$$J_y h_y + J_z h_z = 0 \tag{2.26}$$

ดังนั้นเราสามารถหาค่า h_y ได้เมื่อกำหนดค่าให้กับ h_z ดังนี้

$$h_y = -J_y^{-1} J_z h_z \tag{2.27}$$

โดยที่ J_y^{-1} คือ เมตริกซ์ผกผัน ดังนั้นสมการ (2.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ เป็น

$$\begin{aligned}\delta f &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{y_1}\\ \vdots\\ h_{y_m}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{z_1}\\ \vdots\\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix}\\ &= \left(-\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}\end{bmatrix} J_y^{-1} J_z + \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n-m}}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}h_{z_1}\\ \vdots\\ h_{z_{n-m}}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\delta f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial_c f}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial_c f}{\partial z_{n-m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{z_1} \\ \vdots \\ h_{z_{n-m}} \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

เมื่อ

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial_c f}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial_c f}{\partial z_{n-m}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial y_m} \end{bmatrix} J_y^{-1} J_z + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial z_{n-m}} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

ดังนั้น จะทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับ $\delta f = 0$ เป็น

$$\frac{\partial_c f}{\partial z_i} = 0, i = 1,...,n-m \tag{2.31}$$

สมการ (2.31) จะนำมาใช้เพื่อเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันที่มี อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint)

เมื่อพิจารณาดูการตรวจสอบว่าค่า $x_1,...,x_n$ ที่หามาได้เป็นค่าน้อยที่สุด หรือค่ามากที่สุด (Sufficient Conditions) จากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) เมื่อค้นพบว่าเอ็กทรีมัม จะหาได้เมื่อ $\delta f = 0$ ดังนั้น การตรวจสอบว่าเป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุดหาได้จาก $\Delta f = \delta^2 f$ และจากการแบ่งแยกออกเป็นสองกลุ่ม ทำให้พบว่า

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_z^T & h_y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{zz} & H_{zy} \\ H_{yz} & H_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_z \\ h_y \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

เมื่อ

$$H_{zz} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_{n-m}} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_{n-m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial z_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m}^2} \end{bmatrix}$$

$$H_{zy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial y_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial z_{n-m} \partial y_m} \end{bmatrix}$$

$$H_{yz} = H_{zy}^T$$

$$H_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_m \partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_m \partial y_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_m^2} \end{bmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม $h_y = -J_y^{-1} J_z h_z$ ดังนั้น Δf สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta f = \delta^2 f = \frac{1}{2} h_z^T \widetilde{H} h_z \tag{2.33}$$

เมื่อ $\widetilde{H} = H_{zz} - H_{zy} J_y^{-1} J_z - J_z^T \left(J_y^T\right)^{-1} H_{yz} + J_z^T \left(J_y^T\right)^{-1} H_{yy} J_y^{-1} J_z$

ซึ่งถ้าค่าของ $\widetilde{H}$ เป็นบวกก็จะทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยที่สุด แต่หากค่า $\widetilde{H}$ เป็นลบ จะทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่ามากที่สุด

วิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier Method) วิธีการนี้ จะทำการหาเนคเซสเซอรีคอนดิซัน (Necessary Conditions) ได้โดยการเปลี่ยนสมการ อีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) ให้ไปอยู่ในรูปแบบอันคอนสเทรนท์ (Unconstraint) ด้วยการเพิ่มสมการอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) เข้าไปในฟังก์ชันดั้งเดิม (Original Function) โดยที่คอนสเทรนท์อีเควชันนี้ จะต้องคูณด้วยลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) นั่นคือ $\lambda_l, l = 1,\ldots,m$ ซึ่งจะเรียกสมการนี้ว่า ลากรานซ์ฟังก์ชัน (Lagrange Function) เขียนได้เป็น

$$\zeta(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l g_l \tag{2.34}$$

เมื่อ x_i และ λ_l เป็นอินดิเพนเดนท์วาริเอเบิล (IndepEndent Variables) ของ

ลากรานซ์ฟังก์ชัน (Lagrange Function) ดังนั้น จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\frac{\partial g_l}{\partial x_i}=0, i=1,\ldots,n \tag{2.35}$$

$$g_l=0, l=1,\ldots,m \tag{2.36}$$

โดยที่สมการจำนวน $n+m$ สมการจะต้องถูกแก้สมการเพื่อหาเอ็กทรีมัม (Extremum) $x_1,\ldots x_n$ และ $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ ตามลำดับ

เมื่อหาเอ็กทรีมัมได้แล้วก็มีความจำเป็นที่ต้องการทราบว่า เอ็กทรีมัมที่หาได้เป็นค่าน้อยที่สุด หรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า $\Delta f=\delta f+\delta^2 f+\ldots$ หากเราพิจารณาโดยการเพิ่มค่าให้กับอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) ก็จะพบว่า

$$\Delta g_l(x_1,\ldots,x_n)=g_l(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n)-g_l(x_1,\ldots,x_n)=\delta g_l+\delta^2 g_l+\ldots \tag{2.37}$$

เมื่อ

$$\delta g_l(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_l(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}h_i$$

$$\delta^2 g_l(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}h_1 & \ldots & h_n\end{bmatrix}H_l(x_1,\ldots,x_n)\begin{bmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}$$

$$H_l(x_1,\ldots,x_n)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

ทำการรวมเทอม Δf และ Δg_l เข้าด้วยกันก็จะได้

$$\Delta f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \Delta g_l = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_i} \right) h_i + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \left[H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \dots \tag{2.38}$$

ดังนั้น เมื่อตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงออกจะพบว่า

$$\Delta f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \hat{H} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

เมื่อ

$$\hat{H} = H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l \tag{2.40}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\hat{H}$ เป็นบวกทำให้ $x_1,...,x_n$ เป็นค่าน้อยที่สุด แต่หากค่า $\hat{H}$ เป็นลบก็เป็นค่ามากที่สุด

กรณีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraint) จะพิจารณาการหาค่า $x_1,...,x_n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของ $f(x_1,...,x_n)$ ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ นั่นก็คือ

$$c_l(x_1,...,x_n) \le 0, l = 1,\dots,m \tag{2.41}$$

จะสามารถทำการแปลงสมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraint) นี้ให้เป็นสมการอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraint) ได้ด้วยการเติมแสลกวาริเอเบิล (Slack Variables) คือ $s_l, l = 1,\dots,m$ ดังนั้นจะได้สมการเงื่อนไขใหม่เป็น

$$c_l + s_l^2 = 0, l = 1,\dots,m \tag{2.42}$$

ทำให้เราสามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เพื่อใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) โดยใช้วิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier Method) ได้คือ

$$\tilde{f}(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m,s_1,\ldots,s_m) = f + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \left(c_l + s_l^2\right) \qquad (2.43)$$

โดยที่ตัวแปร x_i, λ_l และ s_l, $i = 1,\ldots,n$, $l = 1,\ldots,m$ ล้วนแต่เป็นอินดิเพนเดนท์วาริเอเบิลทั้งสิ้น ดังนั้น จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial c_l}{\partial x_i} = 0, i = 1,\ldots,n \qquad (2.44)$$

$$c_l + s_l^2 = 0, l = 1,\ldots,m \qquad (2.45)$$

$$\lambda_l s_l = 0, l = 1,\ldots,m \qquad (2.46)$$

สมการจำนวน $n + 2n$ สมการจะถูกแก้เพื่อหาค่า $x_1,\ldots,x_n$, $s_1,\ldots,s_m$ และ $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ เมื่อได้ เอ็กทรีมัม แล้ว

การพิสูจน์ว่าค่าที่หาได้เป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) พิจารณาจากสมการ (2.39) แล้วทำการปรับปรุงได้เป็น

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{f} = {} & \tilde{f}\left(x_1 + h_1^x,\ldots,x_n + h_n^x, s_1 + h_1^s,\ldots,s_m + h_m^s\right) \\ & - \tilde{f}\left(x_1,\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_m\right)\end{aligned} \qquad (2.47)$$

$$\Delta\tilde{f} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_1^x & \ldots & h_n^x \, h_1^s & \ldots & h_m^s \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} h_1^x & \ldots & h_n^x \, h_1^s & \ldots & h_m^s \end{bmatrix}^T \qquad (2.48)$$

เมื่อ

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \hat{H} & \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \vdots & 2\lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & & 2\lambda_m \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\hat{H} = H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$H_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 c_l}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (2.47) ได้ใหม่เป็น

$$\Delta \tilde{f} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h_1^x & \cdots & h_n^x \end{bmatrix} \left[H + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l H_l \right] \begin{bmatrix} h_1^x \\ \vdots \\ h_n^x \end{bmatrix} + \sum_{l=1}^{m} 2\lambda_l \left(h_l^s\right)^2 \qquad (2.49)$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\hat{H}$ เป็นบวกและ $\lambda_l \geq 0, l = 1, \ldots, m$ ก็จะทำให้ $x_1, ..., x_n$ เป็นค่าน้อยที่สุด แต่หากค่า $\hat{H}$ เป็นลบและ $\lambda_l \leq 0, l = 1, \ldots, m$ จะทำให้ $x_1, ..., x_n$ เป็นค่ามากที่สุด

1.7 ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ (Variables) ขึ้นกับเวลา (Time-Dependent) จะถูกเรียกว่า ไดนามิก (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) มาเป็นตัวแสดงระบบไดนามิก (Dynamic Systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), i = 1, \ldots, n \qquad (2.50)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสเตตวาริเอเบิล (State Variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized Coordinates or Time Derivatives), u_i คือ คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) และ f_i คือ นอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) และคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาไลติกคอล หรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาคหนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ โดยสามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) เป็น $\ddot{x}=u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอณุภาคและ u คือ แรงกระทำ จะเห็นได้ว่า เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order Differential Equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order Differential Equation) ดังสมการ (2.51) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1=x_2$ และ $\dot{x}_2=u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.51) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial State) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับตัวแปรควบคุม $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ เพื่อให้ออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด ปัญหาไดนามิกส์จะเรียกว่า คอสฟังก์ชันนอล และเขียนเป็นสมการ ดังนี้

$$J=\Phi\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \qquad (2.51)$$

เมื่อ t_0 คือ เวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และสภาวะสุดท้าย (Final State) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f}L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไปของ สเตตวาริเอเบิล (State Variables) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables) โดยที่ Φ และ L คือ นอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นความรู้จาก สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิกส์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะตามระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหา

ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีทางตรง (Direct Methods) และวิธีโดยอ้อม (Indirect Methods) ซึ่งวิธีทางตรง (Direct Methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่า แต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีโดยอ้อม (Indirect Methods)

2. แคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล ก็คือ ฟังก์ชันนอล เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x})dt \qquad (2.52)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือ ถ้ากำหนด $x(t)$ หาค่าของฟังก์ชันนอล ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติก หรือวิธีเชิงตัวเลข โดยที่ฟังก์ชันนอล อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) ก็ได้ ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)dt \qquad (2.53)$$

ฟังก์ชันนอล สมการ (2.53) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) หลายๆ ฟังก์ชันคือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล มาใช้นั้นมีเป้าหมาย ในการค้นหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล และการตรวจสอบว่า เอ็กทรีมัม ที่หาได้เป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ดังรายละเอียด ต่อไปนี้

2.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว(Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะ ดังนี้ คือ

2.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary

Conditions) $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ก็จะเป็นการกำหนด การค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล $J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h(t_0)=h(t_f)=0$ ของฟังก์ชันนอล ΔJ จะเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\Delta J = J[x+h]-J[x]=\int_{t_0}^{t_f}\left[F\left(t,x+h,\dot{x}+\dot{h}\right)-F(t,x,\dot{x})\right]dt \qquad (2.54)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้เป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt \qquad (2.55)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรด สมการ (2.56) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_f}-\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\right)\Bigg|_{t_0} \qquad (2.56)$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J=0$ ที่ $h(t_0)=h(t_f)=0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J=0$ จะได้เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0 \qquad (2.57)$$

ซึ่งสมการ (2.57) เป็นสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ซึ่งทำการหาคำตอบ โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับการกำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวเพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้น จึงใช้สมการ (2.54 – 2.56) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ สามารถกำหนดได้ตามต้องการ ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็นดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_0} = 0 \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_f} = 0 \tag{2.60}$$

ซึ่งสมการ (2.58 – 2.60) เป็นสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ที่หาค่าได้โดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส ด้วยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรม มีวิธีการหาคำตอบคล้าย ๆ กับกรณี 1. ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้น ก็จะเห็นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x})dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) - F(t, x, \dot{x})\right] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)dt
\end{aligned} \tag{2.61}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลง ดังนี้

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_f} \delta t_f$$
$$- F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_0} \delta t_0 \qquad (2.62)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้น เมื่อทำการอินทิเกรด สมการ (2.62) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h\,dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_0}$$
$$+ F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_f} \delta t_f - F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_0} \delta t_0 \qquad (2.63)$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x\big|_{t_0} - \dot{x}\big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x\big|_{t_f} - \dot{x}\big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้น สมการ (2.63) เขียนได้เป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h\,dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right)\Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right)\Big|_{t_0}$$
$$+ \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_0} \delta t_0 \qquad (2.64)$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x\big|_{t_f}$, $\delta x\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad (2.65)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_0} = 0 \qquad (2.66)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

2.2 ฟังก์ชันนอลของ N ฟังก์ชัน (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้าย ดังนี้คือ

2.2.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \ldots x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ จะเป็นการกำหนดการหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x_i(t), i = 1, \ldots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x})dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือกำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล คือ

$$J[x_1, \ldots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)dt \tag{2.67}$$

ถ้า $x_i(t), i = 1, \ldots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i = 1, \ldots, n$ และเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ฟังก์ชันนอล ΔJ จะเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n] - J[x_1, \ldots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} F(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \\ - F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \end{bmatrix} dt\end{aligned} \tag{2.68}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \tag{2.69}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาส สมการ (2.69) จะได้

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \tag{2.70}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดให้ F

จะต้องหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J=0$ ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}=0, i=1,\ldots,n \qquad (2.71)$$

ซึ่งสมการ (2.71) เป็นสมการของออยเลอร์ (Euler' Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)=x_{i1}$ และ $x_i(t_f)=x_{i2}$ ซึ่งสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส ด้วยวิธีออยเลอร์-ควอท์ชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี 1. เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้น จึงใช้สมการ (2.68 – 2.70) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัวและ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ สามารถกำหนดได้ตามที่ต้องการ จึงทำให้ได้ เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}=0, i=1,\ldots,n \qquad (2.72)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0}=0, i=1,\ldots,n \qquad (2.73)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_f}=0, i=1,\ldots,n \qquad (2.74)$$

ซึ่งสมการ (2.72 – 2.74) เป็นสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ที่จะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส ด้วยวิธีออยเลอร์-ควอท์ชี ได้เช่นกัน

2.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้เป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรม แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี 1. ถ้า $x_i(t), i=1,\ldots,n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล $J[x_1,\ldots,x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n]-J[x_1,\ldots,x_n]\\&=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f}F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\\&\quad-\int_{t_0}^{t_f}F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\\-F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\end{bmatrix}dt\\&\quad+\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f}F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\\&\quad-\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0}F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\end{aligned}\tag{2.75}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i\right)dt\\&\quad+F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_f}\delta t_f\\&\quad-F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_0}\delta t_0\end{aligned}\tag{2.76}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป เมื่อทำการอินทิเกรด สมการ (2.76) ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\Bigg|_{t_f}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\Bigg|_{t_0}\\&\quad+\left[F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\right]_{t_f}\delta t_f\\&\quad-\left[F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\right]_{t_0}\delta t_0\end{aligned}\tag{2.77}$$

เมื่อ $h_i(t_0)=\delta x_i\big|_{t_0}-\dot{x}_i\big|_{t_0}\delta t_0$ และ $h_i(t_f)=\delta x_i\big|_{t_f}-\dot{x}_i\big|_{t_f}\delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.77) จะเป็น

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Bigg|_{t_f}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Bigg|_{t_0}$$
$$+\left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Bigg|_{t_f}\delta t_f-\left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Bigg|_{t_0}\delta t_0 \quad (2.78)$$

เมื่อ $\delta J=0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i\big|_{t_f}$, $\delta x_i\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้ เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}=0, i=1,\ldots,n \quad (2.79)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0}=0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_f}=0, i=1,\ldots,n$$
$$\left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Bigg|_{t_f}=0, \left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Bigg|_{t_0}=0, i=1,\ldots,n \quad (2.80)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

2.3 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier)

2.3.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนท์ (Function Constraints)

การพิจารณาฟังก์ชันนอล $J[x_1,\ldots,x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) $g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)=0,\ j=1,...,m$ และ $m<n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\\+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)\end{bmatrix}dt \quad (2.81)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล นั่นเอง โดยจะนำไปใช้กับเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, variable End Points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.4 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล $J[x_1, \ldots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, ..., x_n)_{t_f} = 0, k = 1, ..., p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k s_k \tag{2.82}$$

เมื่อ υ_k คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.78) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = {} & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Bigg|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \tag{2.83}$$

เมื่อเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i\big|_{t_f}$, $\delta x_i\big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}=0, i=1,\dots,n \tag{2.84}$$

โดยที่ $s_k=0$ จึงได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{gathered}\left[F-\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right]_{t_f}=0;\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0}=0\ i=1,\dots,n\\ \left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial t}\right]\Big|_{t_f}=0;\ \left[F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0}=0\end{gathered} \tag{2.85}$$

2.5 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (2.3) สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล $J[x_1,\dots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ ซึ่งจะสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Equality Constraints) $g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)=0$ เมื่อ $j=1,...,m$ โดย $m<n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Constraints) $s_k(t,x_1,...,x_n)_{t_f}=0, k=1,...,p$ โดย $p<m$ เสมอ ดังนั้น เมื่อใช้เทคนิควิธีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล ใหม่เป็น

$$J'[x_1,\dots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}F(t,x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n)\\ +\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)g_j(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)\end{bmatrix}dt+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k s_k \tag{2.86}$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ υ_k คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) หากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.78) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta J'=&\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F'}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right\}\delta x_i\right]_{t_f}\\ &-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Big|_{t_0}+\left[F'-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{k=1}^{p}\upsilon_k\frac{\partial s_k}{\partial t}\right]_{t_f}\delta t_f\\ &-\left[F'-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.87}$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j$ ทำให้ได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับ เอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} = 0 \\
&\left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i}\right]_{t_f} = 0 \\
&\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0, i = 1, \ldots, n \\
&\left[F' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \upsilon_k \frac{\partial s_k}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \\
&\left[F' - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]_{t_0} = 0
\end{aligned} \tag{2.88}$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \ldots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \ldots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.6 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่า เป็นค่าน้อยที่สุด หรือมากที่สุด ในการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่า เอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดนั้น ซึ่งจะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยที่สุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน ในการพิจารณาปัญหาการหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t)dt$ นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้ อย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ $x, \dot{x}$ และ t ถ้ากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยที่สุด และลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0) = h(t_f) = 0$ เราจะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x+h] - J[x]$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + high - order - terms \tag{2.89}$$

เมื่อ

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_0}$$

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \dot{x}}\right)dt$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านๆ มา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยที่สุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากที่สุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t)\end{bmatrix}\tilde{F}\begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t)\end{bmatrix}dt \qquad (2.90)$$

เมื่อ

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\tilde{F}$ เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยที่สุด แต่หากค่า $\tilde{F}$ เป็นลบ (Negative Definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากที่สุด

2.7 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

แคลคูลัสออฟวาริเอเบิล มีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.8 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

เป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้ คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.51), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล ดังสมการ (2.52), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed End Time) และระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0),\ldots,x_n(t_f)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปเจคทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective Function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ และสุดท้าย

คือคอนโทรลวาริเอเบิลและสเตตวาริเอเบิล (Control Variables and State Variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.9 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว(Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลา และจุดสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วทำให้เทอม $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)$ ในสมการ (2.51) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (2.3) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt \tag{2.91}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) + \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] \end{aligned}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือ ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้น มีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \tag{2.92}$$

แต่ว่า มีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f, $h_{x_j}\big|_{t_f} = h_{x_j}\big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.92) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} = \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \ \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} = \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \ \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \tag{2.93}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ สำหรับ $j = 1,\dots,n$ และ $k = 1,\dots,m$ ด้วยการแทนสมการ (2.93) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าว จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\dots,n \tag{2.94}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\dots,m \tag{2.95}$$

ผลเฉลยของสภาวะ $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตต (Costate Equations) คือสมการ (2.94) จำนวน n สมการและเอดดิชันนอลอีเควชัน (Additional Optimality Equations) คือสมการ (2.95) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two Point Boundary Value Problems) และในส่วน $H = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of System)

2.10 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1,\dots,x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1,\dots,p$ มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (2.4) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล เป็น

$$\begin{aligned} J'[x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m] &= \Phi(t, x_1,\dots,x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1,\dots,x_n)_{t_f} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m)dt \end{aligned} \tag{2.96}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) = L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\left[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) - \dot{x}_i\right] \tag{2.97}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J' = &\int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\, dt \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j \right)\Bigg|_{t_f} \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right)\Bigg|_{t_f} h_{x_j}\Big|_{t_f}\end{aligned} \tag{2.98}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}\Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.100}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.101}$$

ผลเฉลยของสภาวะ $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ หาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน

(State Equations) คือ สมการ (2.51) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.99) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน (Additional Optimality Equations) คือ สมการ (2.100) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.101) ส่วนค่า υ_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลยที่ t_f ในสมการ $s_l\big|_{t_f} = 0$

2.11 อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์ (Auxiliary Constraints)

กรณีปัญหาที่สเตตวาริเอเบิล และคอนโทรลวาริเอเบิล (State and Control Variables) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \ldots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล เป็น

$$
\begin{aligned}
J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} &+ \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)\,dt
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

เมื่อ υ_l ก็คือ ค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$
\begin{aligned}
L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \\
+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] \\
+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือ ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตาย ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\delta J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right)\Bigg|_{t_f} \tag{2.104}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right)\Bigg|_{t_f} h_{x_j}\Big|_{t_f}$$

เมื่อเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}\Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, n \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \ldots, m \tag{2.106}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1, \ldots, n \tag{2.107}$$

ผลเฉลยของสภาวะ $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และ υ_l หาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือ สมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือ สมการ (2.105) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน คือ สมการ (2.106) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีเควชัน ที่จุดสุดท้าย (End-point Constraint Equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.107)

2.12 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.11) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.50), เป็นคอสฟังก์ชันนอล ดังสมการ (2.51), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Start Time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable End Time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0),\ldots,x_n(t_f)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถ จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ได้ 3 ลักษณะด้วยกัน คือ ในสภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ จะถูกกำหนดไว้ตายตัว, ซึ่งในสภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้าย คือ คอนโทรลวาริเอเบิล และสเตตวาริเอเบิล (Control Variables and State Variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.13 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล เป็น

$$\begin{aligned} J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m] &= \Phi(t,x_1,\ldots\ldots,x_n)_{t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \end{aligned} \tag{2.108}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) &= L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) - \dot{x}_i] \end{aligned}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\,dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\,dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_0} \right) \\ &\quad + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^{n} \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \tag{2.109}$$

การประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.109) จะทำให้สามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.110}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.111}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right]_{t_f} = 0 \tag{2.112}$$

ผลเฉลยของสภาวะ $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือ สมการ (2.110) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน คือสมการ (2.111) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ สมการ (2.112) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้ มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.14 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1,\ldots,x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1,\ldots,p$ มีรูปแบบคล้ายกับ (2.9) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล เป็น

$$\begin{aligned} J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m] = {} & \Phi(t, x_1,\ldots,x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1,\ldots,x_n)_{t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \end{aligned} \tag{2.113}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) = L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) - \dot{x}_i] \tag{2.114}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = {} & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j}\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k}\, dt \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Bigg|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Bigg|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^{n} \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.117}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.118}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.119}$$

ผลเฉลยของสภาวะ $x_j(t)$,โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.116) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.117) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.119) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$

สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.118)

2.15 อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์ (Auxiliary Constraints)

สเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and Control Variables) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \ldots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt \tag{2.120}$$

เมื่อ υ_l ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = {} & L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] \\ & + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \end{aligned} \tag{2.121}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable End Time) จะทำให้ฟังก์ชันนอลเปลี่ยนแปลงได้ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Bigg|_{t_f} \\
& + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Bigg|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned}
\tag{2.122}
$$

เมื่อทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.122) จะทำให้สามารถหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.123}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0,\ k = 1,\ldots,m \tag{2.124}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.125}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.126}$$

ผลเฉลยของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือ สมการ (2.50) จำนวน n สมการ โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือ สมการ (2.123) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีเควชัน คือสมการ (2.124) จำนวน m สมการ คอนสเทรนท์ อีเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.126) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$

เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.125)

2.16 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Motion)

ในทางวิศวกรรมถือว่า เป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาที่น้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L=1$ และ $\Phi=0$ ดังนั้น จากหัวข้อที่ (2.15) จะได้สมการเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'}\mu_l \frac{\partial g_r}{\partial x_j},\ j=1,\dots,n \tag{2.127}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'}\mu_l \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1,\dots,m \tag{2.128}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f},\ j=1,\dots,n \tag{2.129}$$

$$\left[1+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'}\mu_r g_r + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right]_{t_f} = 0 \tag{2.130}$$

ผลเฉลยของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.127) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.128) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m)_{t_f}=0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ สมการ (2.130) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และ มีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+p'+1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.129)

2.17 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

การพิจารณาปัญหาการหาค่า $\overline{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล นี้มีค่าน้อยที่สุด

$$J[\overline{x},\overline{u}] = \Phi(t,\overline{x})\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t,\overline{x},\overline{u})dt \tag{2.131}$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\overline{x}} = \overline{f}(t,\overline{x},\overline{u})$ และ $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$ เมื่อ $\overline{x}(t) \in R^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว ถ้ากำหนดให้ $\overline{h}_x(t) \in R^n$ และ $\overline{h}_u(t) \in R^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล ดังนี้

$$\Delta J = J[\overline{x}+\overline{h}_x,\overline{u}+\overline{h}_u] - J[\overline{x},\overline{u}] \tag{2.132}$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + higher - order - terms \tag{2.133}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
\delta J &= \overline{h}_x^T\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{x}} - \overline{\lambda}\right]\Bigg|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\overline{h}_x^T\left(\frac{\partial H}{\partial \overline{x}} + \dot{\overline{\lambda}}\right) + \overline{h}_u^T\frac{\partial H}{\partial \overline{u}}\right]dt \\
\delta^2 J &= \frac{1}{2}\overline{h}_x^T\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{x}^2}\overline{h}_x\Big|_{t_f} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\overline{h}_x^T \quad \overline{h}_u^T\right]\tilde{H}\begin{bmatrix}\overline{h}_x \\ \overline{h}_u\end{bmatrix}dt \\
\tilde{H} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{x}^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u}\partial \overline{x}} \\ \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u}\partial \overline{x}}\right)^T & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \overline{u}^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.134}$$

ซึ่งโคสเตตเวกเตอร์ (Costate Vector) อยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตันเนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian Function) $H = L + \overline{\lambda}^T \overline{f}$ และ $\overline{\lambda}(t) \in R^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\overline{x}(t)$ และ $\overline{u}(t)$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้สมการ (2.133) เขียนได้เป็น $\Delta J = \delta^2 J + higher - order - terms$ ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\overline{x}(t)$ และ $\overline{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overline{x}^2} > 0; \widetilde{H} > 0 \qquad (2.135)$$

2.18 อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ ของการค้นหาค่า $\overline{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล มีค่าน้อยที่สุด ดังสมการนี้คือ

$$J[\overline{x},\overline{u}] = \Phi(t,\overline{x})\Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t,\overline{x},\overline{u})dt \qquad (2.136)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(t,\overline{x},\overline{u}) \qquad (2.137)$$

$$c_i(\overline{x},\overline{u},t) \leq 0, i = 1,2,\ldots,p \qquad (2.138)$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \qquad (2.139)$$

เมื่อ $\overline{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ถูกกำหนดไว้ตายตัว สมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ คือ $c_i(\overline{x},\overline{u},t), i = 1,\ldots,p$ จะประกอบไปด้วยตัวแปรอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Variable inequality Constraints) และ สเตตวาริเอเบิลอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (State variable Inequality Constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวาริเอเบิล (Slack Variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\overline{x},\overline{u},t) + s_i^2(t) = 0, i = 1,\ldots,p \qquad (2.140)$$

ซึ่งสแลกวาริเอเบิล (Slack Variables) ในสมการ (2.140) จะเป็นคอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อเพิ่มสมการ (2.137) และสมการ (2.141) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล สมการ (2.136) ด้วยการใช้ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\overline{\lambda} \in R^n$ และ $\overline{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt \qquad (2.141)$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.142}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.143}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,m \tag{2.144}$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1,2,\ldots, p \tag{2.145}$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1,2,\ldots, p \tag{2.146}$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.147}$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\bigg|_{t_f}, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.148}$$

ซึ่งสมการ (2.142 – 2.149) คือลักษณะของบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two Point Boundary Value Problem Involving Differential and Algebraic Equations) เมื่อสมการ (2.142 และ 2.143) คือสมการอนุพันธ์ (Differential Equations) ส่วนสมการ (2.144 – 2.145) คือ สมการพีชคณิต (Algebraic Equations) และสมการ (2.147 และ 2.148) คือ สมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) สำหรับกรณีที่เป็นการหาค่าน้อยที่สุด (Minimum) จะหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i c_i \right) dt \tag{2.149}$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.150}$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.151}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, \, i = 1,2,\ldots,m \tag{2.152}$$

$$0 = \mu_i c_i, \, i = 1,2,\ldots, p \tag{2.153}$$

$$0 \le \mu_i, \, i = 1,2,\ldots, p \tag{2.154}$$

$$0 \ge c_i, \, i = 1,2,\ldots, p \tag{2.155}$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.156}$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\Big|_{t_f}, \, i = 1,2,\ldots,n \tag{2.157}$$

2.19 การหาผลเฉลยด้วยวิธีอินไดเรคท์ (Indirect Solution)

ใช้หลักการของแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variation) โดยจะหาค่าของสเตต, โคสเตตวาริเอเบิล (Costate Variables) และ คอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables) ด้วยการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary Value Problems) ซึ่งเทคนิควิธีที่ให้ความแม่นยำในการแก้ปัญหาค่าขอบที่เกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์ก็คือมัลติเปิลชูดติ้งเทคนิค (Multiple Shooting Techniques) ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

- ปัญหาค่าขอบของการควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal Control Boundary Value Problems)

การพิจารณาปัญหาการควบคุมเหมาะที่สุด (Optimal Control Problem) ที่อันคอนสเทรนท์ เป็นการหาเนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point Boundary-Value Problem) ที่เกี่ยวข้องเฉพาะกับสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) โดยพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งมีรูปแบบสมการ ดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u})dt \tag{2.158}$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad t \in [0, t_f] \tag{2.159}$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{2.160}$$

$$\overline{\psi}(\overline{x}(t_f)) = 0 \tag{2.161}$$

เมื่อ $\overline{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State Vector), $\overline{x}_0$ คือ กลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น (Set of Initial Conditions), และ $\overline{\psi}(\overline{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือเงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Final State Constraint) ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับหัวข้อ 2.14 คือสภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface) จะได้เนคเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\dot{\overline{x}} = H_\lambda = \overline{f}(t, \overline{x}, \overline{u}) \tag{2.162}$$

$$\dot{\overline{\lambda}} = -H_x \tag{2.163}$$

$$0 = H_u \tag{2.164}$$

$$0 = \overline{x}(0) - \overline{x}_0 \tag{2.165}$$

$$0 = \overline{\psi}(\overline{x}(t_f)) \tag{2.166}$$

$$0 = \overline{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \overline{\psi}_x^T \overline{\upsilon}_f \tag{2.167}$$

เมื่อ $\overline{\lambda}(t) \in R^n$ คือโคสเตตวาริเอเบิล (State Variables), สเกลาร์ $H = L + \overline{\lambda}^T \overline{f}$, $H_x = \partial H/\partial \overline{x}$, $H_u = \partial H/\partial \overline{u}$, $\Phi_x = \partial \Phi/\partial \overline{x}$ ตามลำดับ ส่วน $\overline{\upsilon}_f \in R^{n_f}$ คือ ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) ที่เพิ่มเข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) เพื่อลดความซับซ้อนลง เราจะทำการสมมุติให้อยู่ในสภาวะคงที่ (Stationary Condition) คือ $H_u = 0$ และทำการจัดรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables) $\overline{u}$ ในเทอมของสเตตวาริเอเบิล (State) และโคสเตตวาริเอเบิล (Costate) สมมุติให้สมการ (2.168 – 2.171) มีจำนวน $2n + n_f$ เพื่อใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขเพื่อให้อยู่ในเทอมของ $\overline{x}$ และ $\overline{\lambda}$ ด้วยการกำจัด $\overline{\upsilon}_f$ ออก ส่วนปัญหาที่ไม่มีการกำจัด $\overline{\upsilon}_f$ และ $\overline{u}$ ออกจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากการกำจัด $\overline{\upsilon}_f$ และ $\overline{u}$ ออกจะทำให้ได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-Point Boundary-Value Problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.164 - 2.169) กลายเป็น

$$\dot{\overline{y}} = \overline{h}(t, \overline{y}) \tag{2.168}$$

$$0 = \bar{r}\left(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)\right) \tag{2.169}$$

เมื่อ $\bar{y} = \left[\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T\right]^T \in R^{2n}$, $\bar{h}(t, \bar{y}) = \left[H_\lambda^T, -H_x^T\right]^T \in R^{2n}$ และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข ได้จากสมการ (2.167 - 2.169)

3. สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่รูปแบบสมการที่เป็นกำลังสองมีการแก้ปัญด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะไม่สะดวก ดังนั้น จึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.49) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), i = 1, \ldots, n$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and Boundary Conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล ว่าต้องการค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt \tag{2.170}$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal Term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral Term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^{m} u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^{m} |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยที่สุด (Minimum Fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่า ปัญหาเวลาน้อยที่สุด (Minimum Time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่า ปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum Velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the Problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical Techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีทางตรง (Direct Methods) และวิธีโดยอ้อม (Indirect Methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of Variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล โดยทั่วไป ที่มีลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multiplier) υ_l, λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^{q} \upsilon_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i g_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (c_i + s_i^2) dt$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^{q} \upsilon_l s_l$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i g_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้ นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and Inequality Constraints) ไว้ด้วยกัน เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

4. ปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Transcription Method)

สามารถใช้หลักการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาอธิบายการ ทรานสคริปชัน (Transcription) โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือ กลุ่มของวิธีที่ใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยการแบ่งข้อมูลเป็นช่วงๆ มีวิธีการแบ่งอยู่หลายวิธี ไม่ว่า จะเป็นเทคนิควิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) วิธีคอลโลเคชันวิธีทางโพลีโนเมียล (Polynomial Method) หรือวิธีดิสครีท เป็นต้น แล้วแต่ความเหมาะสมของปัญหาที่ต้องการศึกษา โดยจะต้องแก้ปัญหาร่วมกับการใช้โปรแกรมด้วยภาษาทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งการแปลงปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ไปเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์นั้น ต้องทำฟังก์ชันให้เป็นช่วงๆ ตามวิธีของการอินทิเกรท โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข แต่เนื่องจาก $x(t)$ และ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์สามารถแปลง หรืออธิบายได้ในรูปของวิธีแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น

โดยขั้นตอนการแก้ปัญหาของการทรานสคริปชัน มีสองขั้นตอน ดังนี้ ขั้นตอนที่หนึ่งคือ การแปลงปัญหาทางพลศาสตร์ (Dynamics) ให้เป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์ (Statistics) และขั้นตอนที่สอง คือ หาคำตอบของปัญหาทางสถิตยศาสตร์ โดยใช้การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ ด้วยวิธีการทำให้เป็นตัวแปร ซึ่งสามารถเลือกวิธีแก้ปัญหาได้สองแบบ คือ วิธีตรง (Direct Approach) และวิธีอ้อม (Indirect Approach) ขึ้นอยู่กับปัญหาที่จะนำมาพิจารณา โดยแต่ละแบบมีข้อเด่น ข้อจำกัด และมีวิธีการแก้ปัญหา ดังนี้

4.1 วิธีตรง (Direct approach หรือ Direct transcription)

โดยที่ Agrawal (1999) อธิบายว่า วิธีตรงเป็นวิธีที่มีสเตทวาริเอเบิล และคอนโทรลวาริเอเบิล เป็นพารามิเตอร์ และหาค่าคำตอบโดยวิธีทางโพลีโนเมียล ซึ่งเป็นวิธีเชิงตัวเลข ทำการแก้ปัญหา โดยการเปลี่ยนปัญหาที่ได้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการทางพีชคณิต (Algebraic Equation) ซึ่งใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยการกำหนดเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด โดยวิธีตรงสามารถเรียกรวมๆ ได้ว่า Differential Algebraic Equation (DAE) โดยมีข้อดีคือ เป็นวิธีที่ลดจำนวนปัญหาค่าเริ่มต้นให้เหลือน้อยที่สุด แต่มีข้อจำกัดคือ ผลที่อยู่ในรูปปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบสถิตยศาสตร์ จะมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามากมาย เนื่องจากยังไม่มีเงื่อนไขใดๆ เข้ามาช่วยควบคุมคอนโทรลวาริเอเบิล

เมื่อพิจารณาปัญหาที่ต้องการหาค่าคอนโทรลวาริเอเบิล $\bar{u}(t)$ ให้ปริมาณของคอสฟังก์ชันนอล ให้มีค่าต่ำที่สุด สามารถเขียนสเตทเมนท์ออฟพรอบเบิ้ม (Statement of Problem) ได้ในรูป

$$J' = \phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t,\bar{x},\bar{u})dt \qquad (2.171)$$

หรือ

$$J' = \phi(t, x_1, x_2, ..., x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ...u_m)dt \qquad (2.172)$$

จากสมการ (2.171) ในเทอม $\phi(t, x_1, x_2, ..., x_n)_{t_f}$ เรียกว่า เทอมินอลเทอม (Terminal Term) เป็นฟังก์ชันของตัวแปรที่อยู่ ณ เวลาสุดท้าย และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ...u_m)dt$ เรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral Term) เป็นค่าของฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดตลอดช่วงเวลา

โดยที่ค่า J' คือ คอสฟังก์ชันนอล n คือ จำนวนของสเตทวาริเอเบิล และ m คือ จำนวนของคอนโทรลวาริเอเบิล ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}) \qquad (2.173)$$

สามารถเขียนเป็นรูปแบบอย่างง่ายได้ว่า

$$\dot{\bar{x}}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, t) \;;\; i = 1,2,........., n \qquad (2.174)$$

ต่อมาพิจารณา $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ ซึ่งหมายถึงการแสดงการทำงานที่สภาวะเวลาเริ่มต้น

เป็นศูนย์ (t_0) หรือเริ่มทำงานจากจุดหยุดนิ่ง และที่สเตทวาริเอเบิลให้ $\bar{x}(t) \in R^n$ ซึ่งเวลาที่จุดปลายทาง (t_f) มีค่าแน่นอนเนื่องจากสามารถกำหนดได้เอง และรู้สภาวะเริ่มต้นทั้งหมดจากเงื่อนไขบังคับ แล้วนำมารวมไว้ในคอสฟังก์ชันนอลผ่านตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ แล้วจึงได้สมการเป็น

$$J = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left[L + \bar{\lambda}^T (\bar{f} - \dot{\bar{x}}) \right] dt \qquad (2.175)$$

เมื่อพิจารณาค่า คอนโทรลวาริเอเบิล จากค่าเริ่มต้น (Initial Guess; $\bar{u}_o(t)$) จะทำให้ทราบค่า คอนโทรลอินพุท (Control input; $\bar{u}^1(t)$) และปรับปรุงค่านี้ไปเรื่อยๆ จนทำให้คอสฟังก์ชันนอล มีจำนวนลดลง โดยสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าเริ่มต้น และคอนโทรลอินพุทได้ว่า

$$\bar{u}^1(t) = \bar{u}^o(t) + \bar{h}_u(t) \qquad (2.176)$$

โดยที่ $\bar{h}_u(t)$ คือ ค่าที่เพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ ของค่าเริ่มต้นทุกๆ ครั้งที่ทำการหาค่าจากหลักการดังกล่าว เปลี่ยนจากพารามิเตอร์กลายเป็นปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นช่วงๆ เรียกว่า เฟส (Phase) ตามวิธีเชิงตัวเลข ตัวแปรทั้งหมด ไม่ว่าจะเป็น $x(t), u(t)$ และ t จะถูกกำหนดให้ตรงกับแต่ละเฟสในแต่ละช่วงเวลา

พิจารณาเวลา (t) ในแต่ละช่วงเวลา (Interval; k) กำหนดให้เวลาเริ่มต้น (Initial Time; t_{in}^k) และเวลาที่จุดสุดท้าย (Final Time; t_f^k) เป็น $t_{in}^k \geq t \geq t_f^k$ หรือ $t_{in}^{k+1} = t_f^k$ ต่อจากนั้นกลุ่มของตัวแปรที่ไม่เป็นอิสระ (Dependent Variable) เช่น ความเร็ว ระยะทาง ความดัน เป็นต้น จะขึ้นกับ สเตทวาริเอเบิล และคอนโทรลวาริเอเบิล โดยจะถูกกำหนดขึ้นเป็นขอบเขตของตัวแปรใหม่ แต่ในบางปัญหาอาจมีตัวแปรอิสระที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Independent Variable) ซึ่งเป็นตัวแปรที่มีมิติ เช่น แรงดึงดูดของโลก ความหนาแน่นของของไหล ค่านิจสปริง เป็นต้น

สำหรับแต่ละเฟสของเงื่อนไขขอบเขตถูกกำหนดไว้ที่เวลาเริ่มต้นของเฟสแรก $(k = 1)$ และเฟสสุดท้าย $k = n$ นั่นคือ

$$\Psi_L \le \Psi \begin{bmatrix} x^{(1)}(t_o{}^{(1)}), u^{(1)}(t_o{}^{(1)}), p^{(1)}, t_o \\ x^{(1)}(t_f{}^{(1)}), u^{(1)}(t_f{}^{(1)}), p^{(1)}, t_f \\ x^{(2)}(t_o{}^{(2)}), u^{(2)}(t_o{}^{(2)}), p^{(2)}, t_o \\ x^{(2)}(t_f{}^{(2)}), u^{(2)}(t_f{}^{(2)}), p^{(2)}, t_o \\ x^{(N)}(t_o{}^{(N)}), u^{(N)}(t_o{}^{(N)}), p^{(N)}, t_o \\ x^{(N)}(t_f{}^{(N)}), u^{(N)}(t_f{}^{(N)}), p^{(N)}, t_f \end{bmatrix} \le \Psi_u \tag{2.177}$$

โดยที่ตัวแปร p เป็นค่าที่ถูกกำหนดไว้ในแต่ละเฟส ทำให้ ψ เสมือนเป็นฟังก์ชันของค่าเป็นจุดๆ ไม่มีความต่อเนื่องของข้อมูล โดยสามารถกำหนดขอบเขต หรือช่วงของสถานะหรือคอนโทรลวาริเอเบิลได้ว่า

$$\underline{x}_L^k \le \underline{x}^k(t) \le \underline{x}_U^k \tag{2.178}$$

$$\underline{u}_L^k \le \underline{u}^k(t) \le \underline{u}_U^k \tag{2.179}$$

4.1.1 ปัญหาของสมการที่เป็นเชิงเส้น (Linear programming Problem)

เป็นการแก้ปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งอธิบายด้วยสมการที่เป็นเชิงเส้น เราเรียกว่า การแก้ปัญหาของสมการที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่จัดเป็นปัญหาที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (Time Variant) ซึ่งไม่ขึ้นกับฟังก์ชันของตัวแปร x ในการพิจารณาว่า ปัญหาใดเป็นการแก้ปัญหาของระบบสมการที่เป็นเชิงเส้น คือ ปัญหานั้น เมื่อเขียนในรูปของเมตริกซ์แล้ว เมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์ที่ไม่ติดในรูป x หรือตัวแปรอื่นใด เป็นเพียงเมตริกซ์ ที่แสดงในรูปตัวเลขหรือเมตริกซ์ที่ขึ้นกับเวลา

รูปแบบทั่วไปของระบบสมการที่ใช้แก้ปัญหาของระบบสมการที่เป็นเชิงเส้น เขียนได้ ดังนี้

$$Ax + B = 0 \tag{2.180}$$

จากสมการ 2.40 สามารถแสดงในรูปของเมตริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = 0 \tag{2.181}$$

โดยปกติปัญหาที่ได้มักไม่ค่อยพบในรูปแบบสมการที่เป็นเชิงเส้น เนื่องจากปัญหาทั่วไปมักติดในรูปตัวแปร และมีมุมเข้ามาเกี่ยวข้อง

4.1.2 ปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming Problem)

โดยทั่วไปแล้วปัญหาเกี่ยวกับงานทางวิศวกรรม ส่วนใหญ่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นแทบทั้งสิ้น เนื่องจากมีหลักการพิจารณาว่า หากพบปัญหาที่มีสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นบางสมการ ก็ถือว่า เป็นปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้เลย การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นมักจะถูกนำมาแก้ปัญหาร่วมกับปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของ คอสฟังก์ชันนอล ประกอบกับเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality Constraints) และเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality Constraints) สมมติให้สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ในรูปของฟังก์ชัน

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \tag{2.182}$$

และ

$$h_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \qquad , \qquad k = 1,2,.....,l \tag{2.183}$$

$$g_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le 0 \qquad , \qquad j = 1,2,.....,m \tag{2.184}$$

$$x_i^l \le x_i \le x_i^u \qquad , \qquad i = 1,2,.....,n \tag{2.185}$$

โดยที่ h_k คือ เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ และ g_j คือ เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ มีบางกรณีที่ปัญหามีฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ (Objective Function) เท่านั้นที่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น นอกนั้นไม่ว่าจะเป็นเงื่อนไขบังคับต่างๆ ก็เป็นสมการเชิงเส้นทั้งหมด แต่ก็จะต้องแก้ปัญหาแบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งคำตอบของปัญหาจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด และระดับของปัญหาด้วย เมื่อผ่านการแก้ปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น คำตอบที่ได้ก็ถือว่า เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) ของปัญหานั้นได้ และถ้าสามารถแก้ปัญหาให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด และสภาวะที่เพียงพอจะเรียกว่าคำตอบที่ได้เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดอย่างแท้จริง เรียกว่า คำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Optimum Solution)

การแก้ปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น สามารถแบ่งการแก้ปัญหาออกเป็นสามกรณี คือ

4.1.2.1 ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ

เป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการเพียงอย่างเดียว รูปแบบของสมการจะมีเครื่องหมายเท่ากับให้สมการอยู่ในรูปของฟังก์ชัน

$$f(x_1, x_2): -x_1 x_2 \tag{2.186}$$

สมมติตัวอย่าง ดังนี้

$$h_1(x_1, x_2): 17x_1 + 10x_2 - 1978 = 0 \tag{2.187}$$

$$h_2(x_1, x_2): 3x_1^2 + 8x_2^2 = 1989 \tag{2.188}$$

โดยที่

$$0 \le x_1 \le 3 \quad ; \quad 0 \le x_2 \le 3 \tag{2.189}$$

สมการ (2.187) และ (2.188) เป็นเงื่อนไขบังคับของปัญหาแบบระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ที่สามารถให้คำตอบสำหรับปัญหาแบบสองตัวแปร ทำให้ปัญหาดังกล่าวสามารถหาค่าเหมาะสมที่สุดได้ จึงสมมติให้กรณีทั่วไป ตัวแปรที่ทำให้เป้าหมายที่ต้องการ (Objective) มีค่าต่ำที่สุด จะเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของปัญหา ซึ่งเมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วจะเป็นปัญหาที่แก้ได้ง่าย แต่เมื่อนำมาแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคำตอบที่ได้จะแก้ได้ยากและค่อนข้างอยู่ในวงจำกัด

4.1.2.2 ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ

เป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ รูปแบบของสมการจะมีเครื่องหมายมากกว่า น้อยกว่า ร่วมกับเครื่องหมายเท่ากับเสมอ ให้สมการอยู่ในรูปของฟังก์ชัน

$$f(x_1, x_2): -x_1 x_2 \tag{2.190}$$

สมมติตัวอย่าง ดังนี้

$$h_1(x_1, x_2): 17x_1 + 10x_2 - 1978 \le 0 \tag{2.191}$$

$$h_2(x_1, x_2): 3x_1^2 + 8x_2^2 \le 1989 \tag{2.192}$$

โดยที่

$$0 \le x_1 \le 3 \quad ; \quad 0 \le x_2 \le 3 \tag{2.193}$$

สมการ (2.191) และ (2.192) เป็นเงื่อนไขบังคับของปัญหาแบบระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่สามารถให้คำตอบสำหรับปัญหาแบบสองตัวแปรที่ให้คำตอบ มีความยืดหยุ่นมากกว่าในการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากขอบเขตของคำตอบที่ใช้ได้กว้างกว่า เมื่อเปรียบเทียบกับการแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ ซึ่งเมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาที่แก้ได้ยาก แต่เมื่อนำมาแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คำตอบที่ได้จะแก้ได้ค่อนข้างง่าย

4.1.2.3 ปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraint)

วิธีนี้ การออกแบบตัวแปร จึงเป็นสิ่งที่สำคัญมาก เนื่องจากเป็นวิธีที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับใดๆ มาเกี่ยวข้อง แต่ถ้าเรากำหนดขอบเขตบน (Upper Bounded) และขอบเขตล่าง (Lower Bounded) ของตัวแปร ก็จะสามารถทำให้ได้คำตอบ คำตอบที่ได้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ ให้สมการอยู่ในรูปของฟังก์ชัน

$$f(x_1, x_2) : -x_1 x_2 \tag{2.194}$$

โดยที่

$$0 \le x_1 \le 3 ; 0 \le x_2 \le 3 \tag{2.195}$$

4.2 วิธีอ้อม (Indirect Approach หรือ Indirect Transcription)

อธิบายโดย Agrawal (1999) ว่า เป็นวิธีที่ประกอบไปด้วยเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน โดยการหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุด (Minimum) หรือสูงที่สุด (Maximum) ซึ่งทำให้รูปแบบของคอสฟังก์ชันนอล ถูกเปลี่ยนจากสมการอินทิกรัล มาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วแก้ปัญหาแบบระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด สามารถแก้ปัญหาโดยใช้แคลคูลัสของความแปรปรวน หลักการการหาค่าที่ต่ำสุดหรือหลักการของ พอนทิยากิน (Pontriyakin's Principle) ก็ได้แล้วแต่ความเหมาะสมของปัญหา

4.2.1 แคลคูลัสของความแปรปรวน

เป็นระเบียบวิธีที่จะทำให้ได้ค่าคำตอบว่า ปริมาณอันหนึ่ง ซึ่งเกี่ยวเนื่องกับตัวแปรจำนวนหนึ่งจะให้ค่าต่ำสุดและสูงสุดเมื่อใด เป็นประโยชน์เมื่อต้องการประหยัด

ทรัพยากรในการดำเนินกิจกรรมต่างๆ ซึ่งส่งผลต่อการเลือกรูปแบบของการดำเนินกิจกรรม การเลือกเส้นทาง (Path) การเลือกรูปทรงของวัสดุ เป็นต้น โดยปกติแล้ว การประหยัดพลังงานนี้จะเขียนในรูปอินทิกรัล ผลลัพธ์ของแคลคูลัสของความแปรปรวนนั้นใช้ประโยชน์ในการพัฒนาทฤษฎีของความเหมาะสมของระบบพลศาสตร์

ให้ฟังก์ชันนอลของแคลคูลัสของความแปรปรวนเป็น (Functional; $J[x]$) ซึ่งเป็นฟังก์ชันพื้นฐาน โดยที่

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x})dt \tag{2.196}$$

ซึ่งฟังก์ชัน $x(t)$ จะต่อเนื่องจนถึงจำนวนจริง ถ้ากำหนด $x(t)$ มาให้ฟังก์ชันนอล $J[x]$ สามารถหาค่าได้จาก ทั้งการวิเคราะห์หรือการพิจารณาทางตัวเลข โดยฟังก์ชันนี้มีค่าเป็นปริมาณสเกลาร์ และอาจจะมีความต่อเนื่องที่หลายฟังก์ชันเช่นเดียวกับ

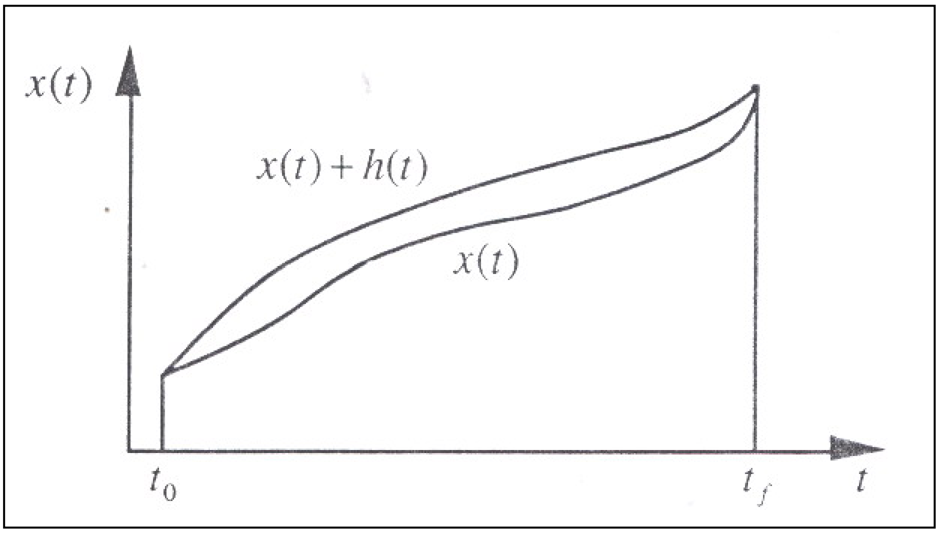
$$J[x_1, x_2, ..., x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)dt \tag{2.197}$$

ดังนั้นฟังก์ชันจะต่อเนื่องจาก $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ จนถึงจำนวนจริง $J[x_1, x_2, ..., x_n]$ ในกรณีที่เมื่อค่าต่างๆ ที่จุดปลายทางเป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขบังคับพิจารณาฟังก์ชันของค่าต่ำที่สุด หรือสูงที่สุด จุดที่น่าสนใจคือการหาเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด สำหรับค่าที่สุดของฟังก์ชันนอล โดยฟังก์ชันนอล $J[x_1, x_2, ..., x_n]$ สามารถวิเคราะห์ได้ 3 ลักษณะ ดังนี้

4.2.1.1 กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and End Points)

เป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0), x(t_f)$ ไว้แล้ว มีฟังก์ชัน $F(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)$ เป็นความต่อเนื่องที่อนุพันธ์ลำดับที่หนึ่ง และสองได้ด้วยตัวมันเอง โดยความต่อเนื่องทั้งหมด และความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable Functions) เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตของ $x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_0 \le t \le t_f$ และหาค่าฟังก์ชัน $x(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Extremizes) ของฟังก์ชันนอลหาได้จากสมการ 2.196

เมื่อพิจารณาความยาวของเส้นโค้งในพื้นที่ $x - t$ เป็นความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายฟังก์ชันจากเวลาเริ่มต้นไปจนเวลาสุดท้าย $t_0 \le t \le t_f$ ตามภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงค่าที่เพิ่มขึ้นของ $h(t)$ ภายใต้สภาวะขอบเขตของ $x(t)$ ในกรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and End Points) [1]

ถ้าให้ $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นเรื่อย ๆ โดย $h(t)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขตทำให้ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ฟังก์ชันนอลในสมการ 2.56 จะถูกเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) - F(t, x, \dot{x})\right] dt\end{aligned} \tag{2.198}$$

โดยที่ ΔJ เป็นฟังก์ชันนอลที่ถูกเปลี่ยนแปลงเนื่องจากมีการเพิ่มขึ้นของ $h(t)$ เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher order terms) จะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \tag{2.199}$$

ซึ่ง δJ เป็นการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป ต่อมาเมื่อทำการ อินทิเกรทสมการ 2.198 ในเทอมที่สองจะได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_0} \tag{2.200}$$

โดยเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของค่าเหมาะสมสูงสุด เป็นค่าที่ทำให้ $\delta J = 0$ โดยตัวที่ทำให้เป็นเช่นนั้นอยู่ที่ค่า $h(t)$ คือการทำให้ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ดังนั้นจึงสมมติให้ F เป็นอนุพันธ์ต่อเนื่อง (Continuous Derivatives) ทำให้ได้ค่าความต่อเนื่องเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{2.201}$$

การหาค่า $x(t)$ สามารถหาค่าเงื่อนไขขอบเขตได้จากการกำหนดให้ $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ โดยแบ่งการพิจารณาการหาค่า F ออกเป็นสามกรณี คือ

4.2.1.1.1 กรณีที่หนึ่ง ค่า F ไม่ขึ้นกับ x จากสมการ 2.192 สามารถเขียนรูปสมการใหม่เขียนได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, \dot{x}) dt \tag{2.202}$$

ดังนั้นในสมการ 2.200 รูปแบบสมการจึงเป็น

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{2.203}$$

และ

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = c \tag{2.204}$$

โดยที่ c คือ ค่าคงที่ (Constant)

4.2.1.1.2 กรณีที่สอง ค่า F ไม่ขึ้นกับ t ดังนั้นฟังก์ชันของ $F(x, \dot{x})$ ในสมการ 2.200 รูปแบบสมการ จึงเป็น

$$\frac{d}{dt}\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \tag{2.205}$$

และ

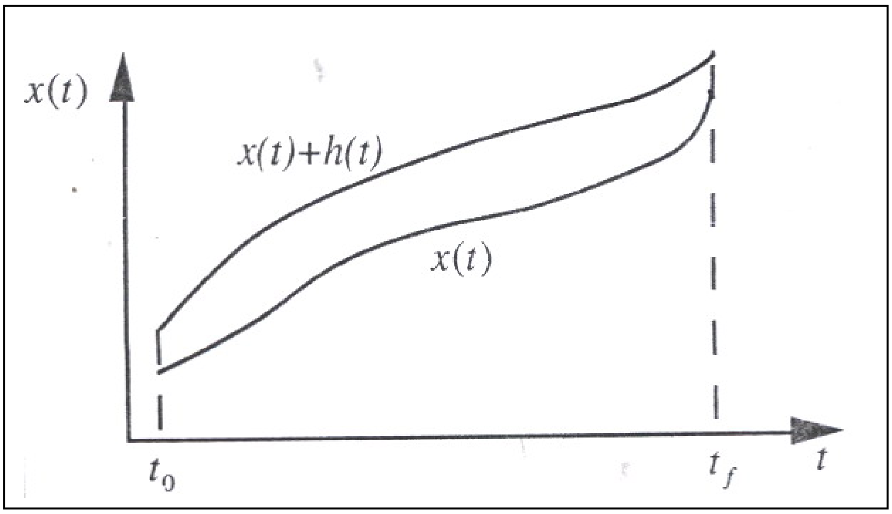
$$F - \dot{x}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = c \tag{2.206}$$

4.2.1.1.3 กรณีที่สาม ค่า F ไม่ขึ้นกับ $\dot{x}$ ดังนั้นฟังก์ชันของ $F(x,t)$ ในสมการ 2.201 รูปแบบสมการ จึงเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2.207}$$

4.2.1.2 กรณีมีเวลาที่มีปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed End Times and Variable End Points)

เป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) แต่ค่าของฟังก์ชัน $x(t_0), x(t_f)$ เป็นอิสระ มีฟังก์ชัน $F(t,x,\dot{x})$ เป็นความต่อเนื่องที่อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองได้ด้วยตัวมันเอง โดยความต่อเนื่องทั้งหมด และความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชันเป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0,\ x(t_f) = x_f$ โดยค่าฟังก์ชัน $x(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันนอลหาได้จากสมการ 2.196 เมื่อพิจารณาความยาวของเส้นโค้งในพื้นที่ $x-t$ ตามภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงค่าที่เพิ่มขึ้นของ $h(t)$ ภายใต้สภาวะขอบเขตของ $x(t)$ ในกรณีที่มีเวลาที่ปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed End Times and Variable End Points)

ให้ $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นเรื่อยๆ โดย $h(t)$ แต่ยังคงอยู่ในสภาวะขอบเขต ทำให้ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ฟังก์ชันนอล $J[x]$ ในสมการ 2.196 จะถูกเปลี่ยนแปลงเป็น ΔJ และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไปทิ้ง แล้วทำการอินทิเกรทบายพาร์ท จะได้ฟังก์ชันนอล δJ ใหม่ คือ

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_0} \qquad (2.208)$$

แต่เนื่องจากว่า $x(t_0), x(t_f)$ มีค่าอิสระ ไม่คงที่ ทำให้ค่า $h(t_0)$ $h(t_f)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงได้ตลอดเวลา ดังนั้นเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชันแบบนี้ ได้แก่

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (2.209)$$

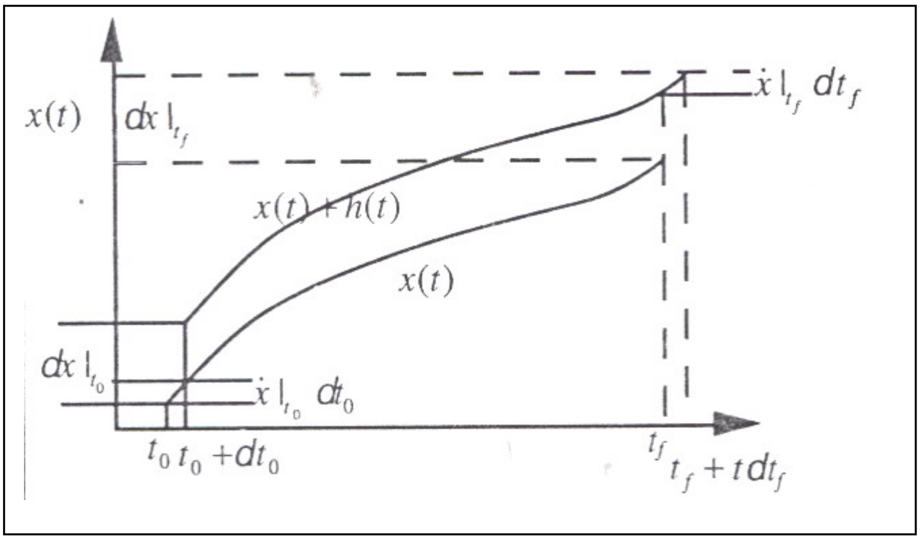
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} |_{t_0} = 0, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (2.210)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} |_{t_f} = 0, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (2.211)$$

ซึ่งสุดท้ายแล้วคำตอบที่เหมาะสมที่สุด $x(t)$ ทำให้สามารถหาค่าเงื่อนไขขอบเขตได้ แต่จะได้ค่าเงื่อนไขขอบเขตสองค่า หรืออาจเรียกว่าเป็นสองจุดสุดท้าย (Two End Points)

4.2.1.1.3 กรณีที่มีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าที่แปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

เป็นฟังก์ชันที่เป็นอิสระทั้งเวลาเริ่มต้น (t_0) เวลาสุดท้าย (t_f) รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ $x(t_f)$ เมื่อพิจารณาความยาวของเส้นโค้งในพื้นที่ $x - t$ เป็นความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายฟังก์ชันจากเวลาเริ่มต้นไปจนเวลาสุดท้าย $t_0 \le t \le t_f$ ตามภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงค่าที่เพิ่มขึ้นของ $h(t)$ ภายใต้สภาวะขอบเขตของ $x(t)$ ในกรณีที่มีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าที่แปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

ให้ $x(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของฟังก์ชันนอลถูกเพิ่มค่าขึ้นเรื่อยๆ โดย $h(t)$ แต่ยังคงอยู่ในสภาวะขอบเขต ทำให้ $h(t_0)=h(t_f)=0$ ฟังก์ชันนอลในสมการ 2.196 จะถูกเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x+h]-J[x] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})\,dt-\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})\,dt \qquad (2.212)\\ &= \int_{t_0}^{t^f}\left[F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})-F(t,x,\dot{x})\right]dt+\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})\,dt-\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})\,dt\end{aligned}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไปทิ้งจะได้ว่า

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}h+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{h}\right)dt+F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})|_{t_f}\ \delta t_f-F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})|_{t_0}\ \delta t_0 \qquad (2.213)$$

โดยที่ δJ เป็นการประมาณค่าของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป แล้วทำการอินทิเกรท จะได้ฟังก์ชันนอล δJ ใหม่ คือ

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_f}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}h\Big|_{t_0}$$
$$+F\left(t,x+h,\dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_f}\delta t_f-F\left(t,x+h,\dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_0}\delta t_0 \qquad (2.214)$$

แต่เมื่อกำหนดให้ $h(t_0)=\delta x|_{t_0}-\delta \dot{x}|_{t_0}\ \delta t_0$ และ $h(t_f)=\delta x|_{t_f}-\delta \dot{x}|_{t_f}\ \delta t_f$ จะสามารถเขียนรูปสมการอย่างง่ายได้ว่า

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)hdt+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_f}-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}$$
$$+\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_f}\delta t_f-\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_0}\delta t_0 \qquad (2.215)$$

การพิจารณาเงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุดสำหรับค่าเหมาะสมสูงสุด นั่นคือ การทำให้ $\delta J=0$ โดยการกำหนด $h(t),\delta x\Big|_{t_f},\delta x\Big|_{t_0},\delta t_f$ และ δt_0 ดังนั้นสามารถกำหนดเงื่อนไขของค่าต่ำสุด และสูงสุดของฟังก์ชันลักษณะนี้ได้จากสมการออยเลอร์

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)=0 \qquad (2.216)$$

เงื่อนไขขอบเขต

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}=0 \qquad (2.217)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f}=0 \qquad (2.218)$$

$$\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_0}=0 \qquad (2.219)$$

$$\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right]_{t_f}=0 \qquad (2.220)$$

โดยทั้งสี่เงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (2.217), (2.218), (2.219) และ (2.220) เป็นตัวบ่งค่าเหมาะสมสูงสุดของ $x(t)$

ต่อมาวิเคราะห์ปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ ให้อยู่ในรูปที่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ เนื่องจากปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ มีลักษณะของปัญหาแบบต่อเนื่อง (Continuous) จึงเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา แต่ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นเป็นการแก้ปัญหาแบบดิสครีท ดังนั้น จึงแบ่งกระบวนการแก้ปัญหาออกเป็นสองขั้นตอน คือ แปลงปัญหาจากเวลาต่อเนื่องเป็นดิสครีท โดยเทคนิคของวิธีคอลโลเคชัน ทำให้ปัญหาถูกศึกษาเป็นช่วงๆ และจะถูกแปลงจากปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic Optimization) เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางสถิตยศาสตร์ (Static Optimization) หรือเรียกว่า Parameter Optimization ต่อมาหาคำตอบของปัญหาด้วยวิธีของสมการออยเลอร์-ลากรานซ์ ทำให้ได้ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งนำไปแก้ปัญหาต่อไป

5. แนวความคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical concept)

มนัส สังวรศิลป์ และคณะกล่าวว่า คอมพิวเตอร์ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาในวิธีเชิงตัวเลข โดยมีภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการแก้ปัญหา เช่น ภาษาซี ภาษา Fortran ภาษา Pascal ภาษา MATLAB เป็นต้น โดย ภาษา C ภาษา Fortran และภาษา Pascal เหมาะในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข แต่ไม่เหมาะกับงานกราฟิกที่ซับซ้อน เนื่องจากการใช้งานที่ยุ่งยากและเสียเวลาในการแสดงผลมาก โดยมีรูปแบบคำสั่งที่แน่นอน ส่วนภาษา MATLAB เป็นการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขโดยตรง และกราฟิกที่ซับซ้อนให้ง่ายต่อการใช้งาน โดยมีการพัฒนาอย่างไม่หยุดยั้ง ง่ายต่อความเข้าใจ และการเขียนโปรแกรมที่ไม่ซับซ้อน สามารถหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็ว ปัจจุบันมีการใช้งานอย่างกว้างในงานสาขาต่างๆ

MATLAB ย่อมาจาก Matrix Laboratory เป็นภาษาชั้นสูง สำหรับการคำนวณทางเทคนิคที่ประกอบด้วยการคำนวณเชิงตัวเลข กราฟิกที่ซับซ้อน และการจำลองแบบเพื่อให้มองเห็นภาพอย่างชัดเจน โดยผู้ใช้หลายๆ แขนง ได้ช่วยพัฒนาโปรแกรมการแก้ปัญหาทำให้ปัจจุบัน MATLAB มีฟังก์ชันต่างๆ ให้เลือกมากมาย เหมาะในการศึกษางานด้านคณิตศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์แขนงต่างๆ ตลอดจนงานด้านอุตสาหกรรม

ในงานวิจัยนี้เลือกใช้โปรแกรม MATLAB โดยมีซิมโบลิกส์ทูลบ๊อกซ์ (Symbolic Toolbox) ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเครื่องมือในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งช่วยให้การแก้ปัญหาแคลคูลัสพีชคณิตเชิงเส้น การหาคำตอบของระบบสมการ และงานในสาขาอื่นๆ ทำได้ง่ายขึ้น โดยไม่ต้องใช้ความรู้ทางการคำนวณทางคอมพิวเตอร์มากนัก โดยหลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น คือ อนุพันธ์ต่างๆ อนุพันธ์ย่อย เวกเตอร์ เมตริกซ์ อนุพันธ์ของเมตริกซ์ และการหาคำตอบ

ของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น จาโคเบียน (Jacobian) และเฮสเชี่ยน (Hessian) ซึ่งสามารถใช้ซิมโบลิกส์ ใน MATLAB คำนวณหาค่าเหล่านี้ได้ โดยไม่ต้องกำหนดขึ้นมาใหม่โดย MATLAB มีข้อเด่นที่ง่ายต่อการใช้งานหลายประการ คือ

1. มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ให้เลือกในการคำนวณมากมาย ตลอดจนสามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใช้เองได้กับงานเฉพาะสาขานั้นๆ ผู้ใช้จึงสามารถสร้างทูลบ็อกส์ (Tool boxes) ของตัวเองขึ้นมาได้

2. Algorithm พัฒนาง่ายไม่ยุ่งยาก สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนง่าย และรวดเร็ว

3. มีโครงสร้างแบบจำลอง (Simulink) ซึ่งเป็น Package ที่สามารถสร้างบล็อกไดอะแกรม เพื่อใช้ทดสอบและประเมินผลของระบบพลศาสตร์ต่างๆ ก่อนการนำไปใช้งานจริง

4. มีลักษณะเป็น Interactive Software ง่ายต่อผู้ใช้เบื้องต้นในการเรียนรู้

5. การเขียนโปรแกรมไม่ยุ่งยากและการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ สามารถทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า เมื่อเปรียบเทียบกับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาอื่น

6. มีฟังก์ชันที่ผู้ใช้ในวิศวกรรมหลายแขนงสามารถนำไปใช้ได้ทันที หรือเรียกว่า Tool Boxes เช่น Control System, Signal Processing, Dynamic System Simulation, Neutral Network เป็นต้น

โครงสร้างของโปรแกรม ประกอบด้วย 5 ส่วนใหญ่ๆ คือ

1. ภาษาโปรแกรม MATLAB เป็นโปรแกรมชั้นสูงที่ใช้ควบคุม Flow Statements ฟังก์ชัน โครงสร้างข้อมูลอินพุท/เอาท์พุท

2. สถาปัตยกรรมในการทำงานของ MATLAB (The MATLAB Working Environment) ใช้โปรแกรม โดยจัดการตัวแปรใน Workspace นำข้อมูลหรือการผ่านค่าตัวแปรเข้า/ออก และกลุ่มของเครื่องมือต่างๆ นี้ก็จะใช้สำหรับพัฒนา จัดการ ตรวจสอบความผิดพลาดของโปรแกรม (Debugging) ที่ได้เขียนขึ้น

3. ฟังก์ชันในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ (The MATLAB Mathematical Function Library) มีไลบรารีทั่วไปที่ใช้ในการคำนวณอย่างกว้าง เช่น Sine, Cosine และพีชคณิตเชิงซ้อน โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นฟังก์ชันหรือไลบรารีเพิ่มเติม ทำให้โปรแกรม MATLAB มีฟังก์ชันการใช้งานมาก และครอบคลุมในรายละเอียดของการคำนวณในงานต่างๆ

4. Handle Graphic ประกอบด้วยคำสั่งชั้นสูงสำหรับการพล็อตกราฟ ซึ่งสามารถติดต่อกับผู้ใช้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูลบนพื้นฐานความต้องการใช้งานของผู้ใช้

การสร้างหน้าจอรับข้อมูลสามารถนำรูปแบบต่างๆ มาประยุกต์ใช้โดยการเขียนในโปรแกรม M-file

5. The MATLAB Application Program Interface (API) เป็นฟังก์ชันเพื่อสนับสนุนการติดต่อจากภายนอก

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยในประเทศ

ทวิวัชร วีระแกล้ว (2000) กล่าวถึง ทฤษฎีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงที่เรียกว่า ทฤษฎีความค่าต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าว ที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการ คือ ทฤษฎีของ ฮามิลตัน-จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพิจารณาทฤษฎีของพอนทริยากิน และทฤษฎีความต่ำสุด และยังสนับสนุนทฤษฎีต่างๆ ให้กับระบบการเคลื่อนที่ ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงและแคลคูลัสออฟวาริเอชั่น ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของพอนทริยากิน และทฤษฎีความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีการนี้สามารถได้ให้คำตอบที่ตรงกัน

ทวิวัชร วีระแกล้ว (2000) ศึกษาปัญหา เรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The Minimum Time Problem of Linear Dynamic Optimization) โดยจะใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีที่ช่วยในการวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรงได้สะดวกยิ่งขึ้น ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหา เรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) การพิจารณาปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุด มีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงที่สุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum Energy with Free Final Time Problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือ ปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย และปัญหาเวลาที่น้อยที่สุดสำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้น แต่การพิจารณาด้วยวิธีนี้มีข้อดีกว่าหลายประการ ในตอนท้ายสุดได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหา โดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

ยศศักดิ์ สายสนิท (2003) ศึกษาวิธีการวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่แล่นในสนามแข่งขัน โดยใช้วิธี มีนนิมัมไทม์ออปติไมต์เซชัน (Minimum Time Optimization) มาเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการหาคำตอบของค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่ง โดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของรถแข่งซึ่งเป็นรถยนต์แบบห้าระดับขั้นความเสรี ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ทั้งหมดห้าสมการ ซึ่งไม่คิดผลกระทบจากอากาศพลศาสตร์ และใช้แบบจำลองของรถแข่งที่มีมวลขนาดต่างๆ เพื่อใช้เปรียบเทียบกันโดยมีเงื่อนไขบังคับ ก็คือ รูปร่างของสนามแข่งขัน แล้วให้รถแข่งวิ่งในสนามดังกล่าว โดยจะป้อนค่าคอนโทรลอินพุต (Control Input) ในรูปของแรงขับเคลื่อนและมุมเลี้ยว

เพื่อดูความเร็วสูงสุดเท่าใด เพื่อเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่แบบจำลองของรถแข่งและสนามแข่งขันจะถูกแปลงให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์แล้วใช้โปรแกรมแมทแล็บหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่า วิธีการหาค่าของความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Minimum Time Optimization) สามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ได้ และผลของคำตอบอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ แต่มีความยากในการหาคำตอบค่อนข้างมากเนื่องจากจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของเวลาให้ใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุด แต่ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้หาเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆ ได้เช่นกัน

ปเสฏฐา สารลักษณ์ (2548) ศึกษาปัญหา เรื่องการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด ในระบบพลศาสตร์ โดยการนำหลักการของแคลคูลัส ความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมทางการหาค่าเหมาะสมที่สุด สำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพ หรือปลายทางของระยะการทำงาน แล้วนำค่าคำตอบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดมาเปรียบเทียบกัน ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่า ค่าความนิ่มนวลที่สุดมีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด เป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลข ในเรื่องของการที่สามารถกำหนดค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายให้กับแรงที่จะมาทำกับระบบในอนาคต และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสมทั้งด้านความนิ่มนวลและการประหยัดพลังงาน

งานวิจัยในต่างประเทศ

เอฟทิม วีแซด (Evtim VZ. 1997) ศึกษา “ระบบพลศาสตร์และกลไกการควบคุมทางการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด” (Dynamics and Optimization of Controlled Mechanical Systems) โดยศึกษาจากระบบของเครื่องจักรกล (Multibody Systems) ระบบการทำงานของหุ่นยนต์ การทำงานจริงของชิ้นส่วนที่เลียนแบบมนุษย์ (Manipulators and Robots) การเปลี่ยนแปลงรูปร่างอัตโนมัติ (Automobiles) และการเคลื่อนย้ายโครงสร้างอื่นๆ (Moving Structures) เป็นต้น ทำให้ได้ข้อมูลทางพลศาสตร์การเคลื่อนที่ (Kinematics) และค่าเหมาะสมสูงสุด (Extremum) โดยแก้ปัญหาระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Dynamics) แก้ปัญหาแบบโดยวิธีตรง และปัญหาผกผัน (Inverse Problems) โดยการสร้างโปรแกรมบนภาษา Fortran เพื่อหาคำตอบโดยใช้วิธีของ นิวตัน ออยเลอร์ ลากรางจ์ (Newton-Euler Lagrange Equations) ประกอบกับแก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น จะได้ผลที่แสดงโดยกราฟการวิเคราะห์โครงสร้างและวิเคราะห์ระบบ ผลที่ได้คือโปรแกรมสามารถแก้ปัญหาทางการควบคุมให้ได้ประโยชน์สูงสุดได้อย่างแม่นยำ แต่สร้างโปรแกรมที่ใช้งานได้หลากหลายมาก ดังนั้น การใช้งานจึงใช้เวลาในการวิเคราะห์นาน และไม่สะดวกในการกำหนดข้อมูลเริ่มต้น

จูแฟ็ง พี (Jufeng P. 2002) ศึกษา “การใช้ Mathematical Program with Complementarily Constraints (MPCC) ในการวิเคราะห์หาความเสียดทานที่เกิดขึ้นกับหุ่นยนต์

โดยการแก้ปัญหาการควบคุมให้ได้ประโยชน์สูงสุด" (Optimal Control of Multiple Robot Systems with Friction Sing MPCC) โดยความเสียดทานได้จากระบบพลศาสตร์ (Dynamic System) ซึ่งแบ่งเป็นทางพลศาสตร์การเคลื่อนที่ และขอบเขตทางพลศาสตร์ (Dynamics Constraints) ซึ่งเป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้น ใช้โปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาของการควบคุมโดยสมบูรณ์แบบที่เหมาะสมที่สุด (Full Minimal Time Optimal Control) ผลลัพธ์ที่ได้แสดงเป็นภาพประกอบตามปัญหาต่างๆ ค่อนข้างแม่นยำ แต่ไม่ครอบคลุมเพียงพอ เนื่องจากรายละเอียดย่อยอื่นๆ ไม่ได้แสดงผลออกมา

สุนิล เค ; แอคกราวัล ที ; วีระแกล้ว และ ฟาเบน (Sunil, K. ; Agrawal, T.; Veerakleaw, & Fabien, B.C. 1999) ศึกษาการวิเคราะห์หาคำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง และสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่กำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดในระยะเวลาที่กำหนดจากทฤษฎีที่มีอยู่เดิม คำตอบที่ได้ของสมการการเคลื่อนที่ และสมการควบคู่ต้องเป็นจริงในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสถานะ และตัวแปรควบคุม (State and Control Variable) เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุด และต่ำสุด โดยนำวิธีการทางตรง และทางอ้อมมาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดีในการวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุด และสูงสุดนั้น ระบบการเคลื่อนที่ ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง มีข้อได้เปรียบในการคำนวณมากกว่ารูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอ ในงานวิจัยฉบับนี้ ได้นำเสนอผลการเปรียบเทียบการแก้สมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการชั้นสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งอย่างชัดเจน และได้สร้างซอฟแวร์ขึ้นมาทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ซึ่งโปรแกรมสามารถแก้สมการการเคลื่อนที่ เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบได้หลายรูปแบบ

สรุปจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยส่วนใหญ่เป็นการวิจัยเกี่ยวกับความเหมาะสมสูงสุดทางพลศาสตร์ ที่มุ่งเน้นในการแก้ปัญหาโดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเท่านั้น โดยมีการเปรียบเทียบการใช้พลังงานน้อยที่สุด และการใช้ความนิ่มนวลมากที่สุด แต่ยังไม่มีการกำหนดค่าเริ่มต้นและสุดท้ายหรือตัวแปรควบคุมให้กับแรงที่มากระทำกับระบบการเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (State of the Problem)
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

การกำหนดปัญหา (State of the Problem)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ ดังนี้

$$\dot{x} = f(x,u,t); \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

โดยที่ $x \in R^n$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า สถานะและตัวแปรควบคุม $u \in R^m$ เป็นตัวแปรควบคุมป้อนเข้าของการแก้ปัญหาตามลำดับ x_0 คือ ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปร States t_0 คือ เวลาเริ่มต้นและ $f(x,u,t)$ เป็นฟังก์ชั่นที่อยู่ในรูปของ States Control Input และ เวลา รูปแบบของปัญหาในที่นี้ก็คือ การหาค่าของ States $x(t)$ และ Control Input $u(t)$ ที่ทำให้การทำงานของระบบการเคลื่อนที่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของ Control Input

1. ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

ในปัญหานี้ การควบคุมให้เกิดความเหมาะสมสูงสุดของการใช้พลังงานน้อยที่สุดจะจัดให้อยู่ในรูป ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum u_i^2 \, dt, \; i = 1,...,m \tag{3.2}$$

เมื่อ u_i เป็นตัวแปรควบคุมสามารถนำมาประยุกต์การใช้งานเป็นแรง หรือทอร์กของระบบการเคลื่อนที่ J เป็นค่าฟังก์ชั่นการใช้พลังงาน

2. ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk Problems)

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control Input u ดังนั้น Jerk สามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ ดังนี้

กำหนดให้

$$u = \bar{x} \tag{3.3}$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x} = f(x, \bar{x}, t) \tag{3.4}$$

โดยที่

$$\bar{x} = \tilde{u} \tag{3.5}$$

และ

$$Jerk = \ddot{x} = \dot{u} = \tilde{u} \;\; . \tag{3.6}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.4) จึงกลายเป็น

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_{n+m}, \tilde{u}_1, .. \tilde{u}_m, t);\; i = 1, .., n+m \tag{3.7}$$

ให้ $\tilde{u}$ เป็นตัวแปรและค่า Control Input ของระบบการเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์ ด้วยเหตุนี้สมการ (3.2) จึงเขียนเป็นสมการใหม่ตามวัตถุประสงค์ของฟังก์ชันความนิ่มนวลสูงสุดได้ว่า

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum \tilde{u}_i^2 dt,\; i = 1, ..., m \tag{3.8}$$

เมื่อ *J* เป็นค่าฟังก์ชั่นของ Jerk

เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

โดยการศึกษาในงานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีแก้ปัญหาทางอ้อมโดยกำหนดค่า Control Input ใหม่เป็นค่า $\tilde{u}$ หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนช่วยแก้ของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ด้วยการหาค่าเวลาของ Control Input ควรเป็นค่าต่ำสุด

ของฟังก์ชันดังสมการ

$$J = \Phi(t, x_L, ..., x_u)_{t_f} + \int_{L_o}^{L_1} L(t, x_l, ..., x_u, u_l, ...u_m)dt \tag{3.9}$$

เมื่อ

$$\phi(t, x_1, ..., x_n)_{t_f}\ , \tag{3.10}$$

เป็นค่าพื้นฐานในการหาค่าเวลาสิ้นสุดและสถานะสุดท้ายของระบบสมการการเคลื่อนที่

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left(L' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i - f_i) \right) dt \tag{3.11}$$

เป็นการอินตริเกรทค่าตัวแปรอิสระในช่วงเวลาที่ผ่านมาของสถานะและค่าควบคุมแปรปรวน ดังนั้น จึงตัดเทอมแรกของสมการที่ (3.9) สมการการเคลื่อนที่ระบบพลศาสตร์จะเท่ากับค่าฟังก์ชันของ Lagrange Multiplier ดังต่อไปนี้

$$J'(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L'(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt \tag{3.12}$$

ในการศึกษางานวิจัยนี้เป็นการแก้ปัญหา โดยพิจารณาเงื่อนไขที่กำหนดค่าเริ่มและค่าสุดท้ายที่แน่นอน ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเงื่อนไขเวลาเริ่มต้น t_0 เวลาสุดท้าย t

เงื่อนไขสถานะ (Initial State) $x(t_f)$ เพื่อใช้แก้ปัญหาไว้ก่อนแล้ว และฟังก์ชันสามารถแบ่งแยกได้เป็น เงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เป็นอิสระ ของ $x(t_0)= x_0$, $x(t_f)= x_f$, $u(t_0)= u_0$ และ $u(t_f)= u_f$ เมื่อเวลาที่ใช้ลดลงมาอยู่ในช่วงระหว่าง $t_i \le t \le t_f$

ให้ฟังก์ชัน $F(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ สามารถแสดงเป็นฟังก์ชันนอลใหม่ได้ว่า

$$J[x_1, x_2, ..., x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, ..., x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)dt \tag{3.13}$$

ให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_{xj}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกลดค่าโดย $h_{uk}(t_0)$ จนกระทั่งเป็นไปตามเงื่อนไข ขอบเขต ดังนั้น the $h_{xj}(t_0) = h_{xj}(t_f) = h_{uk}(t_0) = h_{uk}(t_f) = 0$

ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงภายในฟังก์ชัน ΔJ ดังนี้

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\left[x_1+h_1, x_2+h_2,..., x_n+h_n\right] - J\left[x_1, x_2,..., x_n\right] \\ &= \int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix} F\left(t, x_1+h_1, x_2+h_2,..., x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1,..., \dot{x}_n+\dot{h}_n\right) \\ -F\left(t, x_1,..., x_n, \dot{x}_1,..., \dot{x}_n\right)\end{bmatrix} dt\end{aligned} \tag{3.14}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) ดังสมการที่ 3.1 โดยตัดเทอมของสมการที่มีดีกรีสูงออกไป และนำไปประยุกต์เพื่อหาคำตอบได้ว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i\right)dt \tag{3.15}$$

และอินทิเกรทด้วยวิธีบายพาร์ท (Integral by Parts) จะได้

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\,|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\,|_{t_0}\right] \tag{3.16}$$

เนื่องจากวิธีการแก้ไขปัญหาของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดนั้น เงื่อนไข ทำให้ $\delta J = 0$ ที่ค่าความ แปรปรวนไม่เฉพาะเจาะจงของ $h(t_0) = h(t_f) = 0$.
ดังนั้น จะได้อนุพันธ์ต่อเนื่อง (Continuous Derivative) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1,..., n \tag{3.17}$$

Necessary Conditions (3.17) นำไปแก้ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

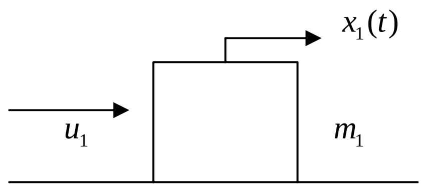
บทที่ 4
ผลการทดสอบและเปรียบเทียบผลลัพธ์

จากการศึกษาวิจัยเรื่องการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุม ในระบบพลศาสตร์ ได้มีการวิเคราะห์ผลการทดสอบ และเปรียบเทียบผลลัพธ์ และนำเสนอข้อมูลเป็นลำดับตามรายละเอียด ดังนี้

1. ตัวอย่างของปัญหา (Example Problem)
2. การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการใช้พลังงานน้อยที่สุด และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด

ตัวอย่างของปัญหา (Example Problem)

กำหนดให้ระบบสมการเชิงเส้นของการเคลื่อนที่ของเครื่องยนต์เครื่องจักร ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 ระบบพลศาสตร์ของมวล m_1

จากภาพประกอบ 5 กำหนดให้ $m_1 = 1kg$ จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้สมการเคลื่อนที่อยู่ในรูป

$$\ddot{x}_1 = u_1 \tag{4.1}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

โดย u_1 เป็นตัวแปรควบคุมของสมการสามารถกำหนดให้

$$x_1(0) = 0 \qquad x_1(1) = 1$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \qquad \dot{x}_1(1) = 0 \tag{4.3}$$

$$\ddot{x}_1(0) = 0 \qquad \ddot{x}_1(1) = 0$$

1. ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

รูปแบบของค่าฟังก์ชั่นของความเหมาะสมสูงสุด คือ

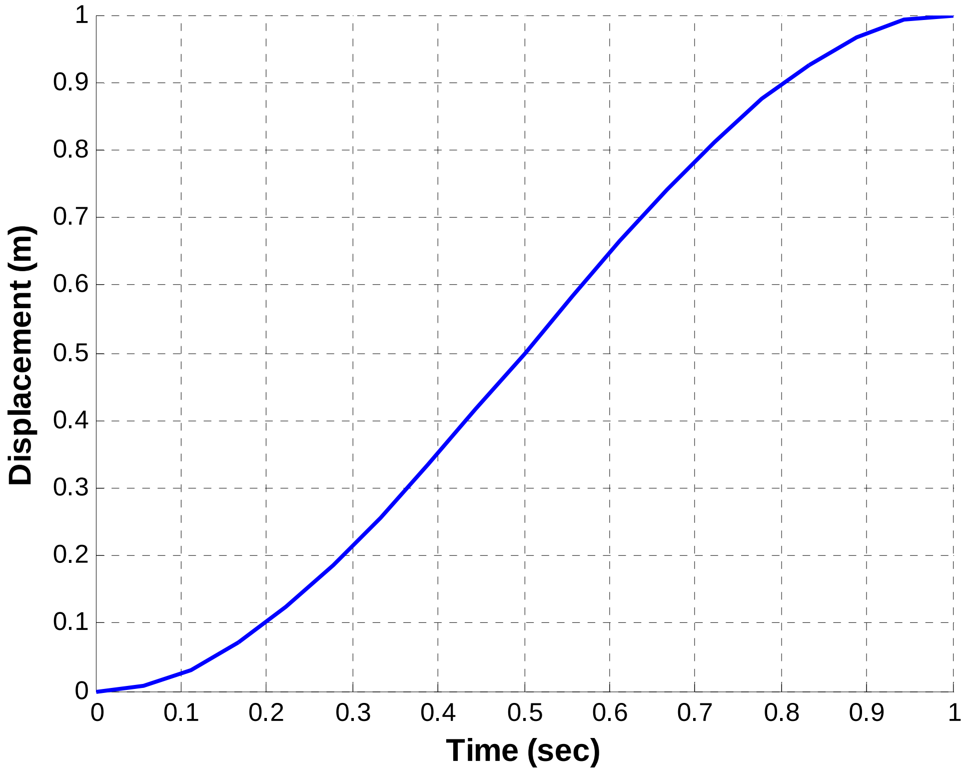
$$J = \int_0^1 u_1^2 \, dt \tag{4.4}$$

พิจารณาจากค่าฟังก์ชันในสมการ (4.4) เพื่อให้ได้ค่าที่น้อยที่สุด เมื่อใช้ แคลคูลัสแปรปรวนจะได้ฟังก์ชันนอล $J'[x]$ ใหม่ ซึ่งกำหนดชัดเจนใน (4.3) ถ้าแทน L ด้วย F จะได้ว่า

$$F = u_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(u_1 - \dot{x}_2) \tag{4.5}$$

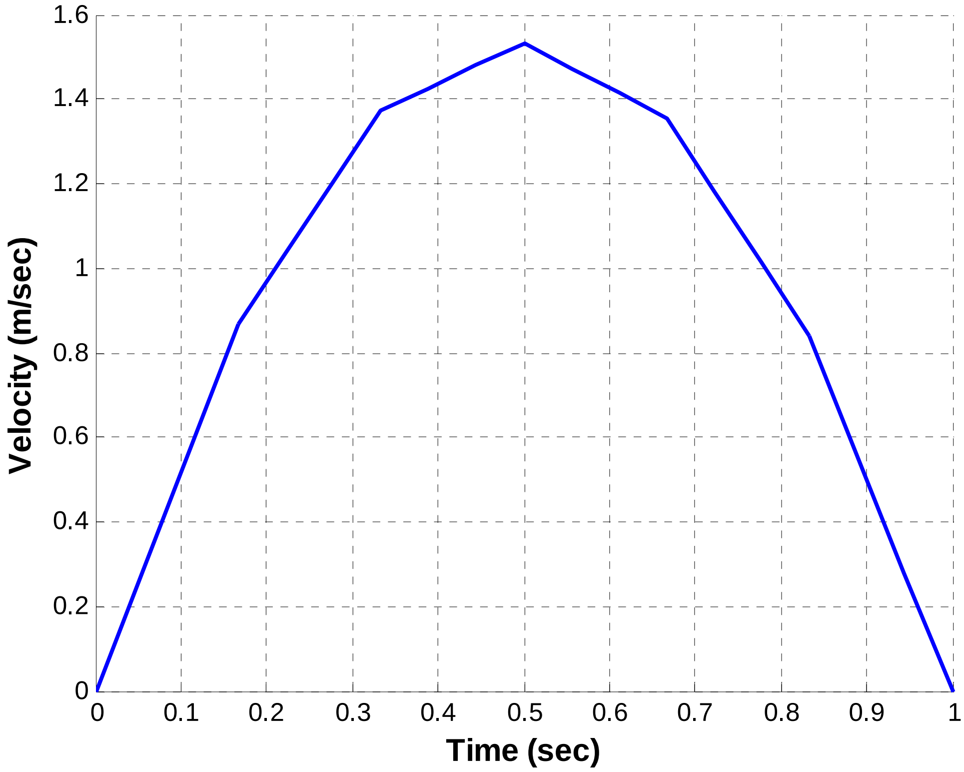
เงื่อนไขที่จำเป็นในการหาคำตอบของปัญหา มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ u_1 &= -\lambda_2/2 \end{aligned} \tag{4.6}$$



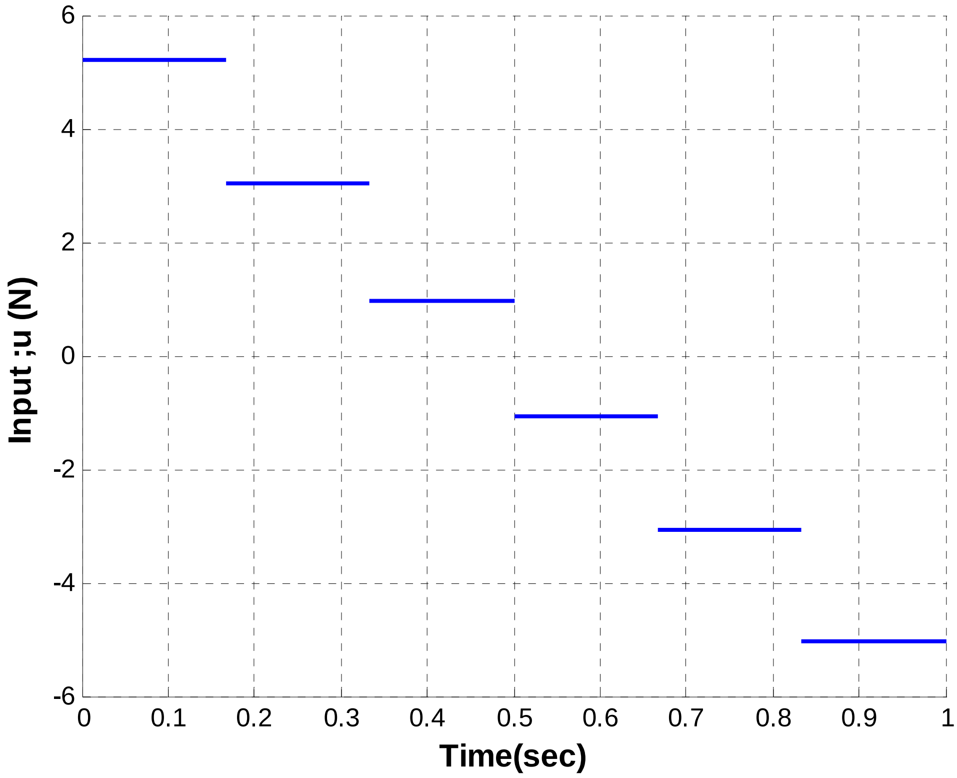
ภาพประกอบ 6 ผลการเปรียบเทียบระหว่างการขจัดกับเวลาจากการแก้ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด

จากภาพประกอบ 6 เป็นรูปกราฟ x_1 ซึ่งพล็อตแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการขจัดและเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการขจัดเทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด ผลเฉลยได้กราฟเป็นรูปเส้นโค้งที่เวลาใดๆ ความชันของเส้นกราฟคือความเร็ว



ภาพประกอบ 7 ผลการเปรียบเทียบระหว่างความเร็วกับเวลาจากการแก้ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด

จากภาพประกอบ 7 เป็นภาพกราฟ x_2 ซึ่งพล็อตแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาที่ช่วงเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดหรือเกิดจากการนำความชันของกราฟ s-t (ภาพประกอบ 7) มาพล็อตเทียบกับเวลาอีกครั้ง ผลเฉลยจะได้กราฟเป็นเส้นตรง เป็นช่วงๆ เวลาตามเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งความชันของเส้นกราฟ คือ ความเร่ง



ภาพประกอบ 8 ผลการเปรียบเทียบระหว่าง Control Input กับเวลา จากการแก้ปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด

จากภาพประกอบ 8 เป็นรูปกราฟแสดงผลลัพธ์การใช้พลังงานน้อยที่สุด เป็นผลจากการพล็อตตัวแปรควบคุม เทียบกับเวลาตามการแก้สมการปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด ซึ่งการหาอนุพันธ์ของสมการที่เป็นเส้นตรงจะได้สมการเส้นตรงที่ขนานกับแนวระนาบพื้นที่ได้กราฟแต่ละช่วงเวลาหรือที่ t ใดๆ จะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของความเร่ง แต่ผลที่ได้ในกรณีนี้ไม่สามารถนำไปใช้งานจริงได้ เนื่องจากเป็นการป้อนแรงที่ $t = 0$ วินาที ในทันทีซึ่งทำให้ระบบไม่สามารถควบคุมความนุ่มนวลได้

2. ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด โดยการกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุม (Minimum Jerk Problems with Given Both End of Control Input)

ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดมีความเที่ยงตรง แน่นอนเหมือนรูปแบบปัญหาของการใช้พลังงานน้อยที่สุดใน (3.17) ดังแสดงไว้ข้างล่าง

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 = u \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 = \dddot{x}_1\end{aligned} \tag{4.7}$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายของ Control Input ปัญหานี้ยังคงต้องพิจารณาถึงเงื่อนไขของเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned}t_1 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_1 &= 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

ในปัญหานี้ค่าฟังก์ชันของ Jerk กำหนดไว้ชัดเจน ดังที่แสดง

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2\, dt = \int_0^1 \dddot{x}_1^2 dt \tag{4.9}$$

$\dddot{x}_1$ จะขึ้นอยู่กับ $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t)$

ซึ่งวิธีการนี้เหมือนกับการนำไปใช้ในปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด ดังนั้น

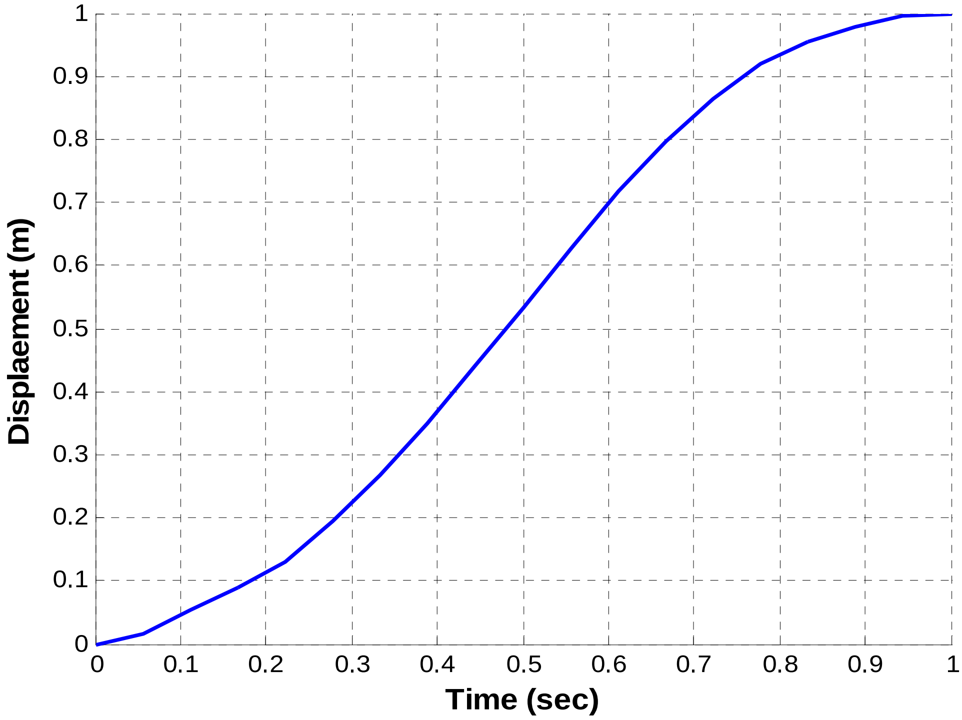
$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\tilde{u}_1 - \dot{x}_3) \tag{4.10}$$

พิจารณา (4.10) ด้วยสมการ Euler- Lagrange Equation.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \dot{x}_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \ddot{x}_1}\right) - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial u}{\partial \dddot{x}_1}\right) = 0 \tag{4.11}$$

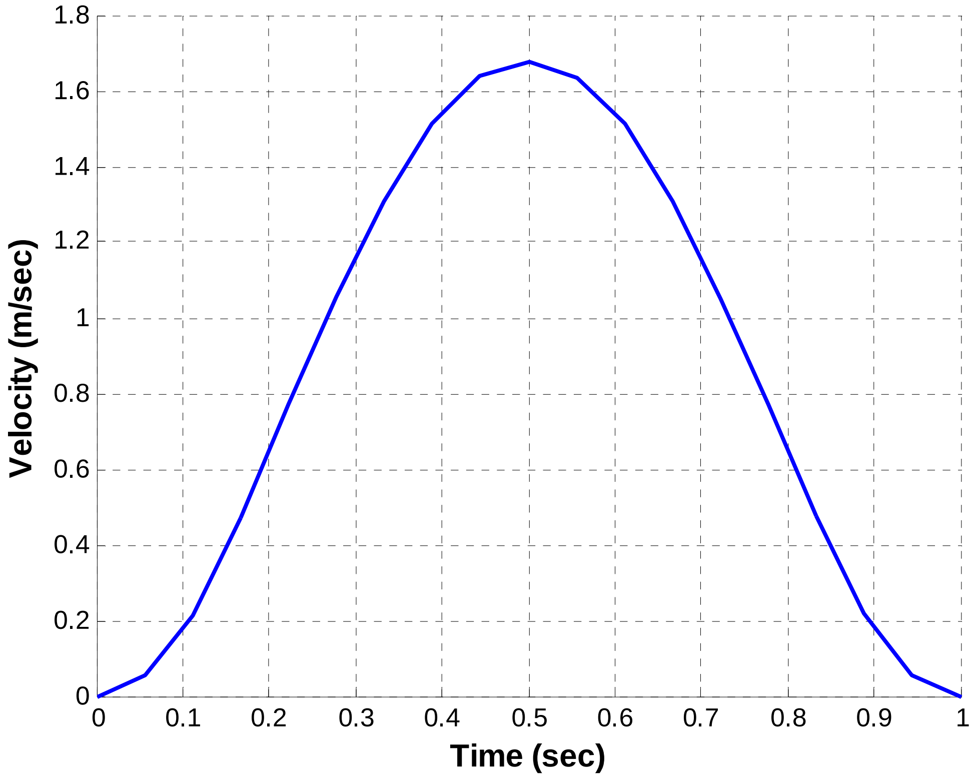
เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด มีดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= 0 \\
\dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\
\dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2 \\
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \\
\tilde{u}_1 &= -\lambda_3 / 2
\end{aligned} \tag{4.12}$$



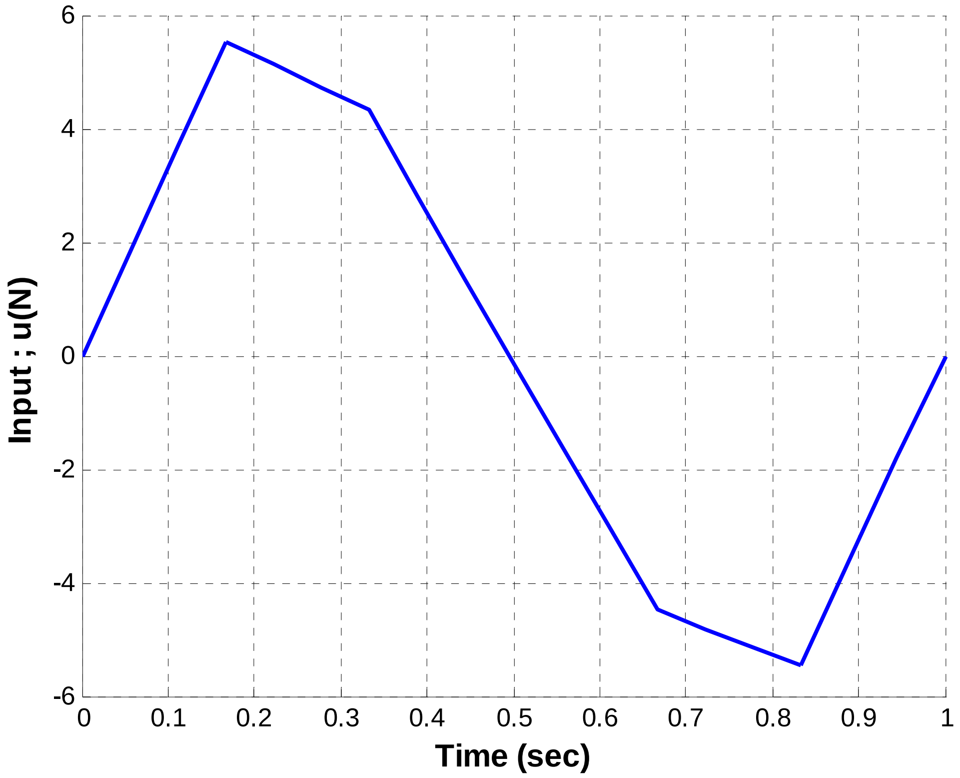
ภาพประกอบ 9 ผลการเปรียบเทียบระหว่างการขจัดกับเวลาจากการแก้ปัญหา ของความนิ่มนวลสูงสุด

จากภาพประกอบ 9 เป็นรูปกราฟ x_1 ซึ่งพล็อตแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการขจัด และเวลาที่ช่วงระยะเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของการขจัด เทียบกับเวลา ตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความนิ่มนวลที่สุด ผลเฉลยได้กราฟเป็น รูปเส้นโค้งที่เวลาใดๆ ความชันของเส้นกราฟคือความเร็ว



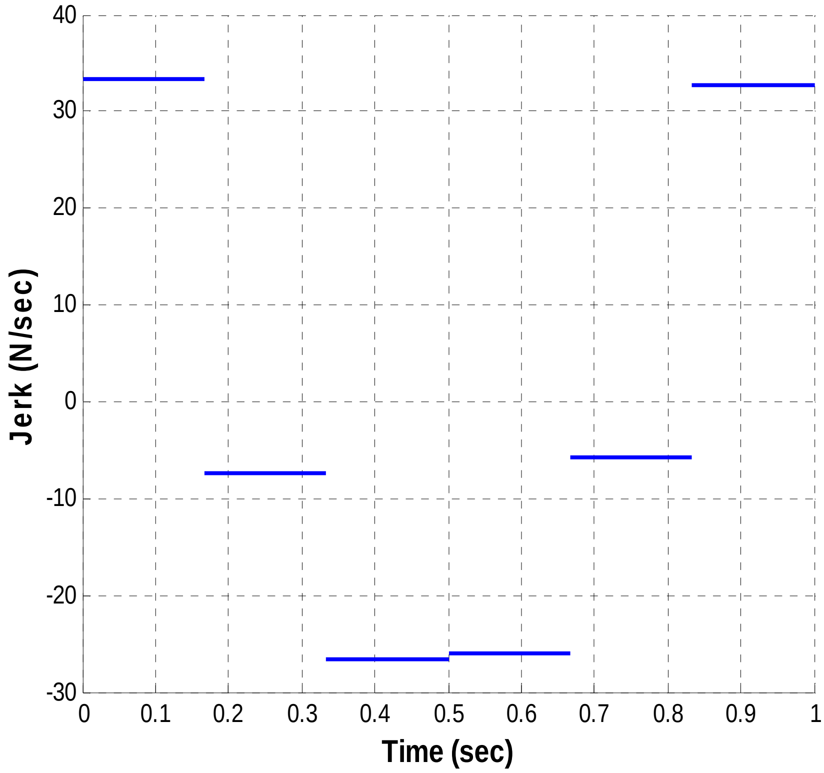
ภาพประกอบ 10 ผลการเปรียบเทียบระหว่างความเร็วกับเวลาจากการแก้ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด

จากภาพประกอบ 10 เป็นรูปกราฟ x_2 ซึ่งพล็อตแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาที่ช่วงเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลาตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความนิ่มนวลสูงสุด หรือเกิดจากการนำความชันของกราฟ $s-t$ (ภาพประกอบ 9) มาพล็อตเทียบกับเวลาอีกครั้ง ผลเฉลยจะได้กราฟเป็นเส้นตรง เป็นช่วงๆ เวลาตามเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งความชันของเส้นกราฟคือความเร่งเนื่องจากเราสามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับสมการการเคลื่อนที่แล้วหาอนุพันธ์อีกครั้ง ทำให้ผลลัพธ์เป็นกราฟเกิดการเปลี่ยนแปลงน้อยมากมีผลทำให้มีความนิ่มนวลมากกว่าปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด



ภาพประกอบ 11 ผลการเปรียบเทียบระหว่างความเร่งกับเวลาจากการแก้ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด

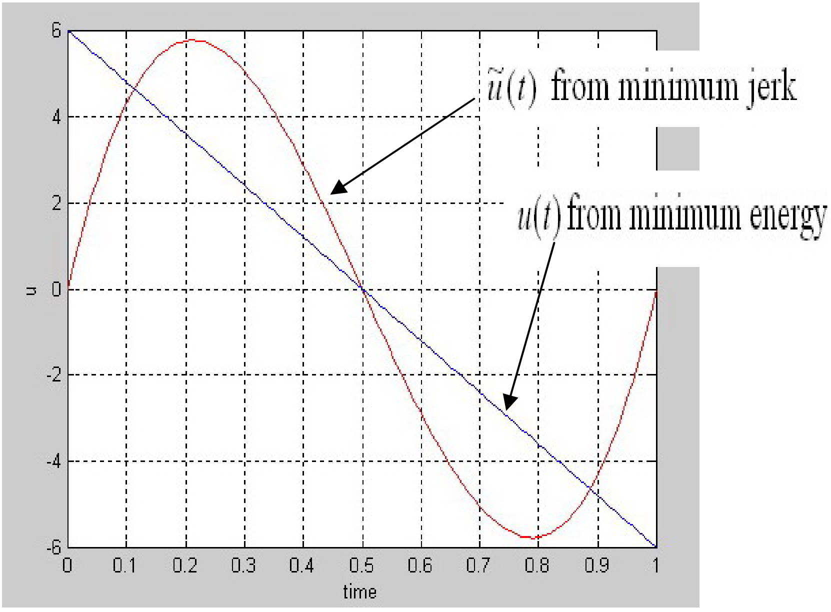
จากภาพประกอบ 11 เป็นรูปกราฟ x_3 ซึ่งพล็อตแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งและเวลาที่ช่วงเวลาเริ่มต้น t_0 ถึงเวลาสุดท้าย t_f เป็นผลจากการหาอนุพันธ์ของความเร่งเทียบกับเวลา $(x_2 - t)$ ซึ่งจะต่างจากกรณีของการใช้พลังงานน้อยที่สุด เพราะจุดเริ่มต้นของกราฟจะเริ่มจากจุด $x = 0$ และ $y = 0$ ซึ่งจะสามารถนำคุณลักษณะที่ดีของกรณีของความนุ่มนวลที่สุดนี้มาประยุกต์ใช้ได้เพราะ การป้อนแรงของให้กับระบบนั้น จะต้องแปรผันตามเวลาจากน้อยไปหามาก จึงจะเกิดความนุ่มนวลตามที่ต้องการ ซึ่งในหลักการ การใช้พลังงานน้อยที่สุดจะไม่มีคุณลักษณะที่ดี ตามสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการใช้ความนิ่มนวลสูงสุด ผลเฉลยจะได้กราฟเป็นเส้นตรงที่ต่อเนื่อง พื้นที่ใต้กราฟในช่วงเวลาเริ่มต้นถึงเวลาสุดท้าย คือการเปลี่ยนแปลงของความเร่งซึ่งเป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์



ภาพประกอบ 12 ผลการเปรียบเทียบระหว่าง Control Input กับเวลา จากการแก้ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด

จากภาพประกอบ 12 เป็นรูปกราฟแสดงผลลัพธ์การใช้ความนิ่มนวลสูงสุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์ เป็นกราฟซึ่งพล็อตระหว่างความชันของ Jerk เทียบกับเวลา$(\tilde{u}-t)$ เป็นผลจากการแก้ปัญหาความนิ่มนวลสูงสุด ได้กราฟเส้นตรงในแนวขนานกับระนาบ ซึ่งในกรณีสมการการเคลื่อนที่ การหาอนุพันธ์ครั้งสุดท้าย จะได้เส้นตรงขนานกับแนวระนาบเสมอ ขึ้นอยู่กับอันดับของอนุพันธ์

การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการใช้พลังงานน้อยที่สุด และปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด



ภาพประกอบ 13 เป็นเส้นกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาของตัวแปรควบคุมเปลี่ยนไป ซึ่งได้จากทั้งสองปัญหา คือ การใช้พลังงานน้อยที่สุด และความนิ่มนวลสูงสุด โดยกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุม

ในส่วนของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด ตัวแปรควบคุมขึ้นอยู่กับเวลา ซึ่งหาคำตอบของปัญหาได้ โดยให้เวลาเริ่มต้น $(t = 0)$ และ Control Input เพิ่มขึ้นลงอย่างฉับพลัน ดังนั้น จึงเกิดการเคลื่อนที่แบบกระชากอย่างรุนแรง เมื่อเวลาผ่านไปเส้นกราฟของตัวแปรควบคุมจะลดลงมีลักษณะเป็นเส้นตรง ในเทอมของสมการและสามารถพิจารณาจากแรงที่กระทำและการเคลื่อนที่แบบกระชากที่มีเงื่อนไขของเวลาอาจมีผลทำให้ ชิ้นส่วนหรืออุปกรณ์ รวมถึงชิ้นงานที่ถูกจับโดยหุ่นยนต์เกิดความเสียหาย หรือ เครื่องยนต์เครื่องจักรเคลื่อนที่ไม่สะดวก

จากภาพประกอบ 13 เส้นกราฟที่ได้จากการเคลื่อนที่ของ Jerk จากจุดเริ่มต้นที่ $(0,0)$ และ $(1,0)$ เพราะว่า เป็นเงื่อนไขขอบเขต อย่างไรก็ตาม เมื่อนำค่าในแต่ละปัญหามาเปรียบเทียบ จะเห็นว่า ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดจะใช้พลังงานมากกว่า จากการแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขช่วยในการหาคำตอบได้ จากการสังเกตผลที่แสดงในกราฟจะเห็นได้ชัดว่า เส้นกราฟของตัวแปรควบคุม $u(t)$ และ(t)

มีความแตกต่างกันมาก เพราะปัญหาความนิ่มนวลสูงสุดจะกำหนดตัวแปรควบคุม ทั้งเงื่อนไขและจุดปลายของเส้นพื้นที่ใต้กราฟ u_1 กรณี Jerk มีการเปลี่ยนแปลงค่าน้อยกว่าพลังงาน ทำให้เกิดผลดีต่อการควบคุมการเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์ ฉะนั้นจะเห็นว่า เราสามารถนำวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับตัวเลขจริงมาใช้ในระบบพลศาสตร์ได้ ด้วยเหตุนี้ ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดมีข้อดี คือ สามารถกำหนดเพิ่มเงื่อนไขขอบเขตของตัวแปรควบคุม เพื่อแก้ปัญหางานได้

บทที่ 5
สรุป วิจารณ์ผลและข้อเสนอแนะ

สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

ปริญญานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิจัย โดยมุ่งเน้นเกี่ยวกับปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ ในรูปแบบของการใช้พลังงานน้อยที่สุด และความต้องการความนิ่มนวลของระบบตลอดการทำงาน โดยกำหนดจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุม ซึ่งปกติแล้วในการกำหนดฟังก์ชั่นของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้นนิยมใช้พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในงานวิจัยนี้ จะเน้นเฉพาะในการแก้ปัญหาการใช้ความนิ่มนวลที่สุด ที่เป็นสมการเชิงเส้นของการใช้พลังงานน้อยที่สุดของระบบ เนื่องจากความนิ่มนวล มีความจำเป็นต่อการทำงานของระบบพลศาสตร์หลายระบบด้วยกัน อาทิเช่น ความนิ่มนวลในการทำงานของเครื่องจักรกล ความนิ่มนวลของการขับขี่รถยนต์ ความนิ่มนวลในการทำงานของหุ่นยนต์ แขนกล ซึ่งเป็นเครื่องมืออุปกรณ์ที่ทำจากวัสดุเปราะบาง แตกหักเสียรูปร่างได้ง่าย รวมทั้งการนำไปใช้ในกระบวนการผลิตชิ้นงานที่เปราะบาง ดังนั้น ผู้วิจัย จึงมีความสนใจศึกษาในปัญหาความนิ่มนวลของระบบพลศาสตร์ โดยกำหนดจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของตัวแปรควบคุมและต้องการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด

จากการแก้ปัญหาของสมการเชิงเส้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขช่วยในการหาคำตอบได้ จากการสังเกตผลที่แสดงในกราฟจะเห็นได้ชัดว่า เส้นกราฟของตัวแปรควบคุม $u(t)$และ $\tilde{u}(t)$ มีความแตกต่างกันตรงที่จุดเริ่มต้นของ Control Input ; $u(t)$ เพราะปัญหาความนิ่มนวลสูงสุดจะกำหนดตัวแปรควบคุม ทั้งเงื่อนไข และจุดปลายของเส้น ฉะนั้นจะเห็นว่า เราสามารถนำวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับตัวเลขจริงมาใช้ในระบบพลศาสตร์ได้ ด้วยเหตุนี้ ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด มีข้อดี คือ สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของตัวแปรควบคุม เพื่อแก้ปัญหางานได้ และนำมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบเครื่องจักรกล หุ่นยนต์ เครื่องยนต์ ให้มีความนิ่มนวลสูงสุดใช้พลังงานน้อยที่สุด เคลื่อนที่ได้อย่างเหมาะสมที่สุด

เมื่อนำค่าในแต่ละปัญหามาเปรียบเทียบ จะเห็นว่า ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดจะใช้พลังงานสิ้นเปลืองมากกว่า แต่ข้อดีของการใช้ความนิ่มนวลสูงสุด คือ สามารถนำไปใช้งานได้จริงทำให้การเคลื่อนที่นิ่มนวลขึ้น ในส่วนของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดพบว่า ไม่สามารถนำไปใช้งานได้จริง เนื่องจากการกำหนดหรือเพิ่มแรงที่มีค่าสูงเข้าไปในระบบการเคลื่อนที่อย่างทันทีทันใด ณ จุดเริ่มต้น จะมีผลทำให้เกิดการกระชากไม่นิ่มนวลส่งผลให้ชิ้นงาน เครื่องจักร เครื่องยนต์ หุ่นยนต์ ได้รับความเสียหายและการเคลื่อนไหวของชิ้นส่วนไม่สะดวก จึงเกิดการขัดตัวทำให้ชิ้นงานเสียหาย รวมถึงผู้ปฏิบัติงานมีความเสี่ยงจากอันตราย

ข้อเสนอแนะ

จากผลการเปรียบเทียบผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ถึงทฤษฎีหลักการแก้ปัญหา จะเห็นข้อดีของรูปแบบปัญหาทั้งสองแบบ สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อให้เกิดประโยชน์ในการควบคุมการทำงานของเครื่องจักร เครื่องยนต์ แขนกล หุ่นยนต์ ที่ส่งกำลังด้วยสายพาน เฟือง ลูกสูบ ไฮดรอลิกส์ แรงดัน ซึ่งอาจจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง หรือเคลื่อนที่แบบหมุน เนื่องจากแรงหรือทอร์คมีผลต่อการเคลื่อนที่ ฉะนั้น ต้องให้ความสำคัญต่อการกำหนดค่าตัวแปรควบคุมในระบบการเคลื่อนที่ โดยการกำหนดหรือปรับค่าที่อุปกรณ์ควบคุมทั้งที่เป็นทางกระบวนการควบคุมการผลิต และทางเซอร์โวแมคคานิคส์ เพื่อให้เกิดการใช้พลังงานและความนิ่มนวลเหมาะสมสูงสุด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

มนัส สังวรศิลป์; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.

ยศศักดิ์ สายสนิท. (2548). *การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับขั้นความเสรี.* ปริญญานิพนธ์ วศ.ม. (วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุธรรม ศรีเกษม ; เมธินทร์ ทรงชัยกุล ; และ สง่า ศรีศุภปรีดา. (2545). *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.

Agrawal, SK. ; & Fabien, BC. (1999). *Optimization of Dynamic Systems*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Arthur, E .Bryson Jr.; & Yu-Chi, Ho. (1969). *Applied Optimal Control*. United States of America: Ginn and Company.

Bock, HG. (1978). *Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems with Application to Optimal Control*. ZAMM. p. 58.

Craig, JJ. (1986). *Introduction to Robotic : Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company.

Evtim, VZ. (1997). *Dynamics and Optimization of Controlled Mechanical Systems. Bulgaria: Institute of Mechanics Bulgarian Academy of Sciences Acad*. G.: Bonchev Street, bl. 4 1113 Sofia.

Jufeng, P. (2002). *Optimal Control of Multiple Robot Systems with Friction Using MPCC*. New York: Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute Troy.

Kane, TR.; & Levinson, DA. (1985). *Dynamics : Theory and Applications*. McGraw-Hill Inc.

Mark, WS. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign.

Saneewong, Na Ayuttaya S. (2005). *The Development of Program for Designing the Structure of Automatic Car Cloth Cover*. Dissertation. Bangkok: Graduate School Srinakarinwiroj University. Photocopied.

Veeraklaew, T. (2000). Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic Systems. Dissertation. Delaware: The University of Delaware.

Veeraklaew, T. ; & Salaluk, P. (2000). *The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems*. The 19th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

อภิธานศัพท์

อภิธานศัพท์

Boundary Condition	เงื่อนไขที่เป็นขอบเขต
Calculus of Variation	แคลคูลัสความแปรปรวน
Constraints	เงื่อนไขบังคับ
Continuous Derivatives	อนุพันธ์ต่อเนื่อง
Control Input	ตัวแปรควบคุมของระบบพลศาสตร์
Control Variable	คอนโทรลวาริเอเบิล
Cost Functional	คอสฟังก์ชันนอล
Differential Equation	สมการเชิงอนุพันธ์
Direct Method	วิธีแก้ปัญหาโดยตรง
Design Functions	ดีไซน์ฟังก์ชัน
Design Parameters	ดีไซน์พารามิเตอร์
Design Variables	ดีไซน์วาริเอเบิล
Displacement	การขจัด
Dynamics Constraints	ขอบเขตทางพลศาสตร์
Dynamic Equation	สมการทางพลศาสตร์
Dynamic Optimization Problem	ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์
Dynamic Optimization	ความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์
Dynamic System	ระบบพลศาสตร์
Final Time	เวลาสุดท้าย
Functional	ฟังก์ชันนอล
Independent Variable	ตัวแปรอิสระ
Indirect Method	วิธีแก้ปัญหาโดยอ้อม
Initial Condition	เงื่อนไขเริ่มต้น
Initial State	เงื่อนไขสถานะ
Initial Time	เวลาของค่าเริ่มต้น
Lagrange Method	วิธีของลากรานซ์
Lagrange Multipliers	ตัวคูณลากรานซ์
Linear Dynamics	ระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

Minimum Jerk	ความนิ่มนวลสูงสุด
Minimum Energy	การใช้พลังงานน้อยที่สุด
Necessary Condition	เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา
Nonlinear Systems	ระบบที่ไม่ใช่เชิงเส้น
Numerical Method	ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
Optimal Control Problem	ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม
Statement of Problem	รูปแบบของปัญหา
State Variable	ตัวแปรสถานะ
Two-Point Boundary Value Conditions	ค่าเงื่อนไขที่เป็นขอบเขตสองตำแหน่ง

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ-ชื่อสกุล	นายโรมรัน ลาดเหลา
วันเดือนปีเกิด	19 ธันวาคม 2512
สถานที่เกิด	จังหวัดมหาสารคาม
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	วิทยาลัยเทคนิคท่าหลวงซิเมนต์ไทยอนุสรณ์ ตำบลบ้านครัว อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	ครูชำนาญการ ค.ศ. 2
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	วิทยาลัยเทคนิคท่าหลวงซิเมนต์ไทยอนุสรณ์ ตำบลบ้านครัว อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2524	ประถมศึกษาปีที่ 6 จาก โรงเรียนหนองเม็ก จังหวัดมหาสารคาม
พ.ศ. 2527	มัธยมศึกษาตอนต้น จาก โรงเรียนนาเชือกพิทยาสรรค์ จังหวัดมหาสารคาม
พ.ศ. 2530	มัธยมศึกษาตอนปลาย (วิทย์-คณิต) จาก โรงเรียนนาเชือกพิทยาสรรค์ จังหวัดมหาสารคาม
พ.ศ. 2533	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) แผนกวิชาช่างกลโลหะ จาก วิทยาลัยเทคนิคมหาสารคาม จังหวัดมหาสารคาม
พ.ศ. 2535	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง(ปวส.) แผนกวิชาช่างโลหะ จาก สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ
พ.ศ. 2538	ครุศาสตร์อุตสาหกรรม สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ จาก สถาบันเทคโนโลยีราชมงคลวิทยาเขตขอนแก่น
พ.ศ. 2551	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม.) สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ