ความร้อนจำเพาะของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงาน 2 แถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน

ปริญญานิพนธ์

ของ

วัชระ รอดสัมฤทธิ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
เมษายน 2524

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.... ประธาน

.... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.... ประธาน

.... กรรมการ

.... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และคำแนะนำจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุทัศน์ ยกส้าน ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ รองศาสตราจารย์ ดร.ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

วัชระ รอดสัมฤทธิ์

สารบาญ

บทที่ หน้า

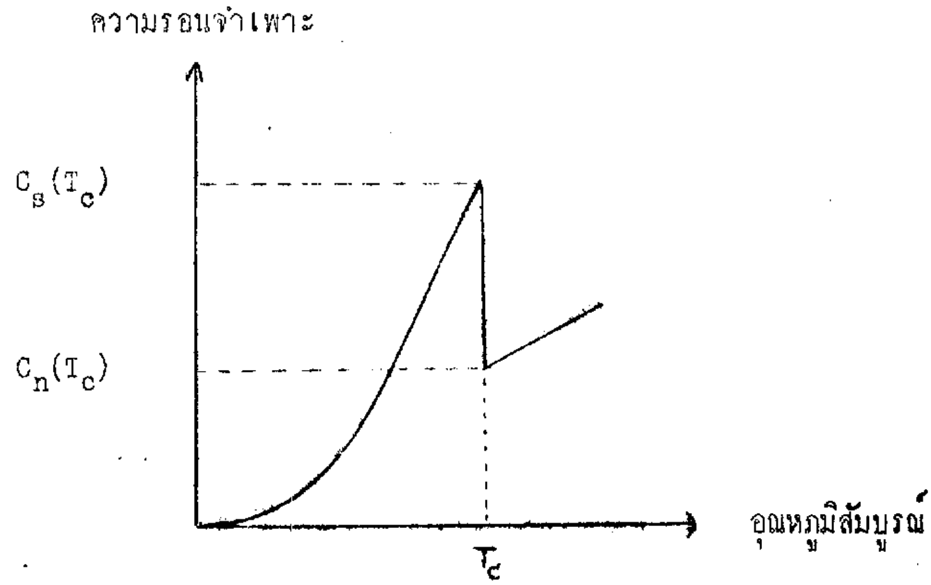
บัญชีภาพประกอบ

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ความร้อนจำเพาะเป็นปริมาณที่สำคัญปริมาณหนึ่งที่ใช้ในการบรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดในด้านอุณหพลศาสตร์ เป็นปริมาณที่แสดงอัตราการดูดกลืนหรือคายปริมาณความร้อนต่ออุณหภูมิที่เปลี่ยนไป จากการทดลองพบว่าบริเวณอุณหภูมิที่โลหะตัวนำปกติกลายสภาพเป็นโลหะตัวนำยิ่งยวด ความร้อนจำเพาะของโลหะมีค่าไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) กล่าวคือ จะเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด และที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต (T_c) ความร้อนจำเพาะจะเบี่ยงเบนไปจากลักษณะเส้นตรง คือจะเป็นแบบเอ็กซโพเนนเชียล ดังแสดงไว้ในภาพที่ 1



ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ C_n เป็นความร้อนจำเพาะที่สถานะตัวนำปกติ C_s เป็นความร้อนจำเพาะที่สถานะตัวนำยิ่งยวด

ในการศึกษาพฤติกรรมของความร้อนจำเพาะที่เปลี่ยนไป ณ บริเวณที่เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดนี้ ทฤษฎีบีซีเอส (Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 : 1175) ได้ทำนายว่าอัตราส่วนระหว่างช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะของโลหะ ($C_s - C_n = \Delta C$) กับความร้อนจำเพาะของโลหะตัวนำปกติที่อุณหภูมิวิกฤต ($C_n = \gamma T_c$) จะมีค่าเท่ากับ 1.426 ซึ่งค่านี้เป็นค่าที่ได้จากการคำนวณในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีโครงสร้างเป็นแบบมีแถบพลังงานเพียงแถบเดียว และโครงสร้างของผิวเฟอร์มิไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง แต่ถ้าธาตุที่เป็นตัวนำยิ่งยวดเป็นโลหะทรานซิชั่น ในสถานะปกติโลหะทรานซิชั่นจะมีแถบพลังงานหลายแถบและแถบพลังงานบางแถบมีการเหลื่อมซ้อนกันที่ระดับเฟอร์มิ เมื่อกลายสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดโลหะทรานซิชั่นก็ยังคงสภาพโครงสร้างเช่นนี้อยู่

ผลงานการวิจัยหลายฉบับแสดงให้เห็นว่าโครงสร้างที่มีแถบพลังงานหลายแถบมีอิทธิพลต่อช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะของตัวนำยิ่งยวด ซุง และเชน (Sung and Shen. 1965 : 101) ได้ใช้แบบจำลองที่มีแถบพลังงานสองแถบอธิบายช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะของโลหะไนโอเบียมบริสุทธิ์ พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณและจากการทดลองมีค่าน้อยกว่าค่าที่ทฤษฎีบีซีเอสทำนายไว้ ซาโตะ และออทซูกะ (Satoh and Ohtsuka. 1966 : 565) ได้วัดค่า $\Delta C/C_n$ ของสารประกอบแลนธานัมและสารประกอบยิทเทรียมพบว่า $\Delta C/C_n$ มีค่าน้อยกว่าค่าที่ทฤษฎีบีซีเอสทำนายไว้อีกเช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น $LaCe_2$ มีค่า $\Delta C/C_n$ เท่ากับ 0.69 อีกทั้งสรุปว่าค่าความร้อนจำเพาะที่ได้ผิดไปจากทฤษฎีบีซีเอสนี้ นอกจากจะมีสาเหตุจากการที่สารนั้นมีแถบพลังงานหลายแถบเหลื่อมซ้อนกันแล้วยังขึ้นกับสมบัติภายในเฉพาะตัวของสารประกอบนั้นเอง คืออาจจะเป็นเพราะว่าโครงสร้างของผิวเฟอร์มิของโลหะมีความสลับซับซ้อนมากก็เป็นได้

ในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีสิ่งเจือปน สิ่งเจือปนนอกจากจะทำให้สมบัติของโครงสร้างแถบพลังงานหลายแถบเปลี่ยนไปแล้ว ยังทำให้เกิดโมเมนต์แม่เหล็กในขอบเขตจำกัด (localized magnetic moment) ที่อะตอมของสิ่งเจือปนนั้น

โมเมนต์แม่เหล็กอาจสลายตัว ทำให้สิ่งเจือปนมีสถานะแบบไม่เป็นแม่เหล็กได้เมื่อถึงที่อุณหภูมิหนึ่ง นอกจากนี้สิ่งเจือปนยังสามารถทำให้เกิดปรากฏการณ์คอนโดได้อีกด้วย ชล็อตมานน์ (Schlottmann.1975 : 123) มูลเลอร์–ฮาร์ทมานน์ ชูห์ และซิททาร์ท (Müller-Hartmann, Schuh and Zittartz. 1976 : 439) ทำการศึกษาสมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโด แต่ไม่ประสบความสำเร็จในอาณาบริเวณที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโดมาก ๆ เพราะทฤษฎีการกระเจิงของอิเลคตรอนที่ความถี่ต่ำ ๆ ยังทำได้ไม่ถูกต้องนัก

ซากุไร (Sakurai. 1978 : 1195) ได้เสนอผลงานวิจัยเกี่ยวกับอิทธิพลของสิ่งเจือปนแบบไม่เป็นแม่เหล็กที่มีต่อสมบัติของตัวนำยิ่งยวด ณ ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโดมาก ๆ ทฤษฎีของซากุไรคำนวณช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ พบว่า $\Delta C/C_n(T_c)$ มีค่าเท่ากับ 1.42 ซึ่งนับว่าสอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอสได้ทำนายไว้ ทั้งนี้เพราะแบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดที่ซากุไรใช้ในการวิจัยเป็นแบบที่มีแถบพลังงานแถบเดียว

ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะขยายงานของซากุไร เพื่อศึกษาสมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานสองแถบเหลื่อมซ้อนกัน เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบไม่เป็นแม่เหล็กผสมอยู่อย่างเจือจาง โดยจะศึกษาเรื่องการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะตรงบริเวณที่เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด

<u>ความมุ่งหมายของการวิจัย</u>

1. เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของความร้อนจำเพาะ ณ อุณหภูมิที่เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดของโลหะที่มีแถบพลังงานสองแถบเหลื่อมซ้อนกัน เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สันผสมอยู่

2. เพื่อศึกษาหาทางขยายขอบเขตผลงานการวิจัยให้ครอบคลุมถึงกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีแถบพลังงาน n แถบเหลื่อมซ้อนกัน เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มใด ๆ

<u>ความสำคัญของการวิจัย</u>

1. ผลการวิจัยนี้จะสามารถบรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดในด้านอุณหพลศาสตร์ และใช้เป็นแนวทางที่จะขยายงานวิจัยให้สามารถบรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดแบบอื่น ๆ ที่อุณหภูมิ $T \ll T_k$

2. จะนำผลที่ได้จากการคำนวณใหม่นี้ไปเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อน ๆ ว่ามีความสอดคล้องหรือขัดแย้งอย่างไร เป็นการตรวจสอบว่าผลที่ได้จากงานวิจัยก่อน ๆ เป็นที่น่าเชื่อถือ น่ายอมรับได้เพียงใด

3. จะเป็นการเพิ่มพูนความเข้าใจในธรรมชาติของตัวนำยิ่งยวดให้ดียิ่งขึ้น

<u>ขอบเขตของการวิจัย</u>

การวิจัยครั้งนี้จะศึกษาการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤตและที่บริเวณอุณหภูมิ $T \ll T_k$ ตัวนำยิ่งยวดที่ใช้ในการพิจารณาเป็นโลหะที่มีแถบพลังงานสองแถบเหลื่อมซ้อนกัน โดยลักษณะโครงสร้างของแถบพลังงานไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง (isotropic) สิ่งเจือปนที่ใช้ในการศึกษาเป็นแบบแอนเดอร์สันและมีความเข้มข้นน้อยจนกระทั่งถือได้ว่าอันตรกิริยาระหว่างอะตอมของสิ่งเจือปนไม่มี

<u>คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ</u>

<u>ตัวนำยิ่งยวด</u> (superconductor) คือโลหะบริสุทธิ์หรือโลหะผสมที่มีสิ่งเจือปนอยู่เมื่ออุณหภูมิของโลหะเหล่านี้ลดต่ำลงกว่าอุณหภูมิวิกฤต โลหะเหล่านี้จะไม่มีความต้านทานไฟฟ้ากระแสตรง และเป็นสารแม่เหล็กชนิดไดอาแมกเนติค คือไม่ยอมให้สนามแม่เหล็กจากภายนอกผ่านเข้าไปในตัวมันได้หรือให้ผ่านเข้าไปได้บ้างแต่ก็น้อยมาก

<u>ระดับพลังงานเฟอร์มิ</u> (Fermi level) เมื่อระบบของอนุภาคอยู่ในสถานะพื้นฐาน (ground state) ระดับพลังงานชั้นนอกสุดของอนุภาคในโมเมนตัมสเปซ (momentum space) เรียกว่าระดับพลังงานเฟอร์มิ เหนือระดับพลังงานเฟอร์มินี้จะไม่มีอนุภาคใด ๆ ผิวของระดับพลังงานนี้เรียกว่า ผิวเฟอร์มิ (Fermi surface) เมื่อระบบถูกรบกวนด้วยสนามภายนอก อนุภาคที่มีระดับพลังงานใกล้ผิวเฟอร์มิเท่านั้นที่มีการเปลี่ยนแปลง ฉะนั้นอิเลคตรอนที่มีระดับพลังงานใกล้ ๆ ผิวเฟอร์มิจึงมีความสำคัญในการพิจารณาสมบัติของโลหะ

<u>อุณหภูมิวิกฤต</u> (transition temperature หรือ critical temperature) คืออุณหภูมิที่ตัวนำปกติกลายสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวด

<u>ทฤษฎีบีซีเอส</u> เป็นทฤษฎีที่ใช้อธิบายการเกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด และสมบัติทั่ว ๆ ไป ผู้ตั้งทฤษฎีนี้คือ บาร์ดีน คูเปอร์ และชรีฟเฟอร์ ใจความสำคัญของทฤษฎีนี้มีว่า กลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดคืออันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเลคตรอนอันเนื่องมาจากการแลกเปลี่ยนโฟนอน และแรงนี้มีค่ามากกว่าแรงผลักที่เกิดจากอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์มาก แรงลัพธ์จึงเป็นแรงดึงดูดทำให้เกิดการจับคู่ของอิเลคตรอนขึ้น โมเมนตัมของอิเลคตรอนที่จับคู่กันจะมีค่าเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกัน คู่อิเลคตรอนนี้เรียกว่า คู่คูเปอร์ ถ้าไม่พิจารณาถึงสมบัติการจับคู่แล้ว สมบัติอื่น ๆ ทางจุลภาคของอิเลคตรอนในสภาพตัวนำยิ่งยวดและสภาพตัวนำปกติจะเหมือนกันสำหรับโลหะชนิดเดียวกัน ทฤษฎีนี้ได้กำหนดตัวปฏิบัติการ (oparator) ต่าง ๆ เพื่อคำนวณหาเวฟฟังก์ชั่นของอิเลคตรอน ได้กำหนดแฮมิลโทเนียนการจับคู่เพื่อหาระดับพลังงานที่สถานะพื้นฐาน (ground state) และสถานะที่ถูกกระตุ้น (excited state) นอกจากนี้ยังได้คำนวณหาปริมาณต่าง ๆ ไว้มากมาย เช่น หาระยะทางระหว่างอิเลคตรอนในคู่คูเปอร์ที่อุณหภูมิใด ๆ หาสนามศักย์ในการจับคู่ของอิเลคตรอน เป็นต้น ทฤษฎีนี้ทำให้นักวิทยาศาสตร์ทั้งสามท่านได้รับรางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 1972

<u>สิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน</u> (Anderson Impurities) สารสิ่งเจือปนที่อยู่ในตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์จะทำให้สมบัติของตัวนำยิ่งยวดเปลี่ยนไป อะตอมของสารที่นิยมใช้ในการผสม เช่น อะตอมของเยอรมาเนียม และซิลิคอน เป็นต้น เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งเจือปนมีสมบัติเป็นแบบแม่เหล็ก หรือแบบไม่เป็นแม่เหล็กขึ้นอยู่กับสมบัติของโลหะเจ้าบ้าน อุณหภูมิ และอันตรกิริยาระหว่างอิเลคตรอนของโลหะเจ้าบ้านกับอิเลคตรอนของสิ่งเจือปน สิ่งเจือปนที่มีพฤติกรรมดังที่แอนเดอร์สันได้คำนวณไว้ เรียกว่า สิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน ทฤษฎีนี้ทำให้แอนเดอร์สันได้รับรางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 1978

<u>ผลของคอนโด</u> (Kondo effect) เมื่ออุณหภูมิของตัวนำยิ่งยวดที่ไม่บริสุทธิ์ลด ความต้านทานไฟฟ้าของโลหะจะลดลงเรื่อย ๆ จนถึงที่อุณหภูมิหนึ่งความต้านทานจะกลับเพิ่มขึ้นมาอีก ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ผลของคอนโด อุณหภูมิที่ตัวนำยิ่งยวดที่ไม่บริสุทธิ์มีสภาพต้านทางต่ำสุดเรียกว่าอุณหภูมิคอนโด (Kondo temperature, T_k)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

<u>สมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานหลายแถบและประกอบด้วยสิ่งเจือปน</u>

ผู้วิจัยคณะแรกที่ได้ศึกษาแบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดที่มีโครงสร้างเป็นแบบมีแถบพลังงานสองแถบอย่างจริงจังคือ ซูล แมทไทอัส และวอล์คเคอร์ (Suhl, Matthias and Walker. 1959 : 552) รวมทั้งมอสคาเลนโค (Moskalenko. 1959 : 25) ผู้วิจัยเหล่านี้ได้ขยายขอบเขตของทฤษฎีบีซีเอสให้ใช้ได้ในกรณีทั่ว ๆ ไปยิ่งขึ้น ต่อมาเกลิคแมน ซาอิทเซฟ และเครซิน (Galikman, Zaitsev and Kresin. 1967 : 36, 1967 : 826, 1967 : 769, 1968 : 159) ได้เสนอผลงานวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้อีกหลายฉบับ ผู้วิจัยคณะนี้ได้ใช้กรีนส์ฟังก์ชั่นศึกษาสมบัติทั่วไปของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานเหลื่อมซ้อนกันในด้านสมบัติเชิงแม่เหล็กไฟฟ้า จลศาสตร์ และอุณหพลศาสตร์ ผลงานวิจัยทั้งหลายที่กล่าวอ้างนี้สรุปว่า แถบพลังงานแต่ละแถบในตัวนำยิ่งยวดจะมีช่องว่างพลังงานของมันเอง และมีการจับคู่ของอิเลคตรอนในแต่ละแถบและระหว่างแถบคู่คูเปอร์ที่เกิดขึ้นทำให้การจับคู่เกิดได้มากขึ้นนั่นก็คือเป็นการเพิ่มค่าคงที่ลัพธ์ของการจับคู่

อย่างไรก็ตาม เมื่อนำสิ่งเจือปนผสมในตัวนำยิ่งยวด สิ่งเจือปนจะทำให้สมบัติของแถบพลังงานหลายแถบเปลี่ยนแปลง มอสคาเลนโคและคณะ (Moskalenko, Kon and Palistrant. 1965 : 539) ได้ศึกษาอิทธิพลของสิ่งเจือปนที่มีต่อพฤติกรรมของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานสองแถบอย่างละเอียด เขาได้ให้นิยามช่องว่างพลังงานว่าเป็นพลังงานเริ่มต้นในการดูดกลืน (absorption threshold) คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้นที่ความถี่ $w = \Delta_1$ (Δ_1 เป็นช่องว่างพลังงานที่มีค่าต่ำสุด) อิเลคตรอนต่าง ๆ ในแถบพลังงานอื่น ๆ จะมีส่วนช่วยในการดูดกลืน

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยเหมือนกัน โคเคนเบิร์ก และกริฟฟิน (Khohenberg and Griffin. 1965 : 1151) เบนเนมานน์ (Bennemann. 1965 : 273) ได้แสดงให้เห็นว่าถึงแม้ว่าตัวนำยิ่งยวดจะมีแถบพลังงานหลายแถบ แต่เมื่อมีสิ่งเจือปนช่องว่างพลังงานจะมีเพียงช่องเดียว และเมื่อความเข้มข้นของสิ่งเจือปนน้อยความหนาแน่นของสถานะซึ่งเป็นปริมาณสำคัญในการดูดกลืนจะมีค่าสูงสุดที่ความถี่ $w \simeq \Delta_i$ (Δ_i เป็นช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์) กล่าวคือ ถ้าสิ่งเจือปนที่เติมลงไปทำให้เกิดเงื่อนไข $l \ll \xi_0$ แล้ว (l เป็นระยะห่างระหว่างอะตอมของสิ่งเจือปน ξ_0 เป็นระยะอาพันธ์ซึ่งเป็นระยะระหว่างอิเลคตรอนในคูเปอร์) ช่องว่างพลังงานอาจขึ้นอยู่กับทิศทางหรืออาจมีแถบพลังงานหลายแถบเหลื่อมซ้อนกัน แต่ถ้าเงื่อนไข $l \gg \xi_0$ เกิดขึ้นเมื่อใดเมื่อนั้นช่องว่างพลังงานจะไม่ขึ้นอยู่กับทิศทางเลย

นักวิจัยอื่น ๆ ที่ได้ศึกษาปัญหาเกี่ยวกับเรื่องสิ่งเจือปนในตัวนำยิ่งยวดแบบมีแถบพลังงานสองแถบ ได้แก่ ซุง และวอง (Sung and Wong. 1967 : 1933) ชาว (Chow. 1968 : 467, 1969 : 631) เบอร์เคล และชาว (Burkel and Chow. 1971 : 779) คูซากาเบ (Kusakabe. 1970 : 906) โบโทซาน, วลาดิเมียร์ และมอสคาเลนโค (Botoshan, Vladimir and Moskalenko. 1974 : 579) โมฮาเบียร์ และนากิ (Mohabir and Nagi. 1977 : 292) ผลงานการวิจัยทั้งหมดนี้สรุปได้ว่า เมื่อเติมสิ่งเจือปนลงไปในตัวนำยิ่งยวด อะตอมของสิ่งเจือปนจะทำให้สมบัติของแถบพลังงานหลายแถบมีผลเด่นน้อยลงหรือไม่ปรากฏผลเลย การกระเจิงของอิเลคตรอนโดยสิ่งเจือปนทำให้สถานะของอิเลคตรอนในแถบต่าง ๆ ปะปนกัน นั่นคือ เวฟฟังก์ชั่นของอิเลคตรอนแต่ละตัวจะเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวฟฟังก์ชั่นของอิเลคตรอนในแถบต่าง ๆ นั้น โดยทั่วไปแล้วอะตอมของสิ่งเจือปนจะทำให้แรงดึงดูดลัพธ์ของคูเปอร์อ่อนแรงลง เป็นที่น่าสังเกตว่าผลเหล่านี้จะไม่ปรากฏ ถ้าตัวนำยิ่งยวดเป็นแบบมีแถบพลังงานเพียงแถบเดียวและโครงสร้างของแถบพลังงานไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง ซึ่งแบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองที่บาร์ดีน คูเปอร์ และชรีฟเฟอร์ใช้ในการคำนวณหาสมบัติต่าง ๆ ของตัวนำยิ่งยวด

แอนเดอร์สัน (Anderson. 1961 : 41) ได้ศึกษาสาเหตุที่สิ่งเจือปนซึ่งแสดงสมบัติเป็นแม่เหล็ก ครั้นเมื่อถึงอุณหภูมิหนึ่งอาจกลับกลายเป็นแบบไม่เป็นแม่เหล็กได้ เขาได้อธิบายการเกิดและการสลายตัวของโมเมนต์แม่เหล็กของสิ่งเจือปน แอนเดอร์สันอธิบายว่าสภาพแม่เหล็กในขอบเขตจำกัดขึ้นอยู่กับอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ระหว่าง d – อิเลคตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปน เขาชี้ให้เห็นว่าอิเลคตรอนที่สำคัญอยู่สองชนิดที่มีอันตรกิริยาต่อกัน คืออิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในโลหะเจ้าบ้าน เรียกว่า s –อิเลคตรอนกับอิเลคตรอนของสิ่งเจือปนเรียกว่า d –อิเลคตรอน เมื่อมีอันตรกิริยาการแลกเปลี่ยนระหว่าง s –อิเลคตรอนและ d –อิเลคตรอน อันเป็นผลเนื่องมาจากแรงคูลอมบ์ระหว่างอิเลคตรอนเหล่านี้จะทำให้เกิดการถ่ายเทอิเลคตรอนระหว่างอิเลคตรอนของโลหะเจ้าบ้านกับอิเลคตรอนของสิ่งเจือปน ในการคำนวณเขาได้กำหนดแฮมิลโทเนียนขึ้น เรียกว่า "แฮมิลโทเนียนของแอนเดอร์สัน" (Anderson's Hamiltonian) เขาอาศัยวิธีเซลฟ์–คอนซิสเทนท์ (self-consistent) ของฮาร์ทรี–ฟ็อคคำนวณหาเงื่อนไขวิกฤตของการเกิดและการทำลายโมเมนต์แม่เหล็กในขอบเขตจำกัด ซึ่งจะเป็นตัวบอกการเปลี่ยนสถานะจากที่เป็นแม่เหล็กเป็นสถานะที่ไม่เป็นแม่เหล็ก หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือเงื่อนไขนี้จะบอกว่าเมื่อใดสิ่งเจือปนที่ผสมลงไปจะเป็นแบบแม่เหล็กหรือเป็นแบบไม่เป็นแม่เหล็ก ในการคำนวณหาเงื่อนไขนี้เขาไม่พิจารณาฟลักทุเอชั่น (fluctuation) ของ d –อิเลคตรอนเลย เงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงสภาพนี้นอกจากจะขึ้นอยู่กับความหนาแน่นของสถานะของอิเลคตรอนอิสระในโลหะเจ้าบ้านแล้วยังขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ของการผสมระหว่าง s และ d –อิเลคตรอน และแรงคูลอมบ์ระหว่าง d –อิเลคตรอนด้วย อาร์บริโคซอฟ และกอร์คอฟ (Abrikosov and Gorkov. 1961 : 1243) ได้ศึกษาอิทธิพลของสิ่งเจือปนแบบเป็นแม่เหล็กในสารตัวนำยิ่งยวด โดยใช้ข้อสันนิษฐานว่าในการจับคู่ระหว่างอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อิสระและมีสปินเป็น $\vec{\sigma}$ กับอะตอมของสิ่งเจือปนที่มีสปินเป็น $\vec{S}$ อันตรกิริยาแบบแลกเปลี่ยนเป็น $J\,\vec{S}.\vec{\sigma}$ (J เป็นพารามิเตอร์การจับคู่ของอิเลคตรอน) เมื่อสปินกลับตัวอย่างทันทีทันใด คูคูเปอร์จะแตกจากกัน ซึ่งนับว่าเป็นการทำลายคู่คูเปอร์

ปรากฏการณ์เช่นนี้เป็นการทำลายสภาพตัวนำยิ่งยวด ผลการคำนวณนี้สอดคล้องกับผลการทดลองของแมทไทอัส คอมพ์ตัน และซูล (Matthias, Compton and Suhl. 1959 : 1597) ซึ่งพบว่าเมื่อใส่สิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กลงไป จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าลดลง และจะลดลงไปเรื่อย ๆ เมื่อความเข้มข้นของสิ่งเจือปนเพิ่มขึ้น อาร์บรีโคซอฟ และกอร์คอฟยังได้คำนวณหาความเข้มข้นวิกฤต ซึ่งเป็นความเข้มข้นของสิ่งเจือปนที่ทำให้สารนั้นเป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีของอาร์บรีโคซอฟ และกอร์คอฟก็ยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์บางอย่างได้ถูกต้องเท่าที่ควร ทั้งนี้เพราะเขาไม่ได้คำนึงถึงปรากฏการณ์คอนโดด้วย จากการศึกษาผลของคอนโด (Kondo. 1964 : 35) ผลของคอนโดแสดงให้เห็นว่าโมเมนต์ในขอบเขตจำกัดของสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กจะค่อย ๆ จางหายไปทีละน้อย ๆ เมื่ออุณหภูมิต่ำลง ๆ

โยสิดะ และโยชิมอริ (Yosida and Yoshimori.1973 : 253) ได้ใช้แบบจำลองของแอนเดอร์สันศึกษาผลของคอนโด เขาทำนายว่าจะมีการเปลี่ยนแปลงของการจับคู่ระหว่างสปินของ s –อิเลคตรอนกับสปินของ d –อิเลคตรอนจากสถานะกำธรแบบไม่เป็นแม่เหล็ก (nonmagnetic resonant state) ไปสู่สถานะซิงเกล็ทร่วม (collective singlet state) เมื่ออันตรกิริยาแบบผลักมีค่าสูงกว่าค่าขอบเขตที่ทฤษฎีฮาร์ทรี–ฟ็อคกำหนดไว้ มูลเลอร์–ฮาร์ทมานน์ และซิททาร์ท (Müller-Hartmann and Zittartz.1971 : 516) ได้ศึกษาผลของคอนโดที่มีต่อตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสิ่งเจือปนเป็นแบบแม่เหล็กด้วยการพิจารณา $s - d$ แฮมิลโทเนียน (s–d Hamiltonian) ทำให้สามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่ตัวนำยิ่งยวดกลับกลายเป็นตัวนำธรรมดาเมื่ออุณหภูมิลดลงไปอีกได้สำเร็จ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าปรากฏการณ์กลับสู่สภาพเดิม (reentrant phenomena) มีพบในโลหะผสมบางชนิด และเกิดขึ้นได้เพราะอัตราการกระเจิงของอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระโดยสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก ณ อุณหภูมิคอนโดเพิ่มขึ้น แต่สถานการณ์ที่สิ่งเจือปนกลับกลายเป็นแบบไม่เป็นแม่เหล็กที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโดยังเป็นเรื่องคลุมเครือ ทั้งนี้

เนื่องจากความรู้เกี่ยวกับสถานะที่ถูกกระตุ้นซึ่งมีพลังงานต่ำ ๆ (low energy excitation) ยังไม่ค่อยถูกต้องนัก ถึงแม้ว่าจะมีการกระเจิงของอิเลคตรอนที่บริเวณผิวเฟอร์มิโดยสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก ผลของคอนโดจะทำให้การกระเจิงของอิเลคตรอนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ $w \sim T_k$ ($\hbar w$ คือพลังงานที่วัดจากผิวเฟอร์มิ) ด้วยเหตุนี้ในการบรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำกว่า T_k จึงต้องพิจารณาอิเลคตรอนที่มีโมเมนตัมในช่วง $|w| < w_D$ (เมื่อ w_D คือความถี่คีบาย) อีกทั้งต้องพิจารณาการกระเจิงของอิเลคตรอนโดยสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก ซึ่งอัตราการกระเจิงนี้ขึ้นอยู่กับพลังงานของอิเลคตรอนนั้น ๆ อีกด้วย สำหรับอิเลคตรอนที่มีพลังงาน ($\hbar w$) เท่ากับศูนย์ เขาพบว่าสิ่งเจือปนจะไม่มีอิทธิพลใด ๆ ต่อตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ทฤษฎีของมูลเลอร์–ฮาร์ทมานน์ และทฤษฎีของลุควิด และซุลเคอร์มานน์ไม่ได้คำนึงถึงความจริงข้อนี้ ทำให้ทฤษฎีของเขาบกพร่องตรงที่ว่าไม่สามารถหาค่าความเข้มข้นวิกฤตเมื่ออุณหภูมิวิกฤตมีค่ามากกว่าศูนย์องศาได้ นอกจากนี้ทฤษฎีนี้ยังได้ทำนายอีกว่าจะมีการเปลี่ยนสถานะครั้งที่สาม (third transition) ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ อีก ซึ่งผลการทำนายนี้ได้มาจากวิธีการคำนวณโดยประมาณของเขาเอง

ผลงานการวิจัยที่ศึกษาอิทธิพลของสิ่งเจือปนในสารตัวนำยิ่งยวดที่มีต่อความร้อนจำเพาะ นอกจากงานวิจัยของซาโตะ และออคซูกะที่กล่าวแล้วยังมีงานวิจัยของโซดะ และวาดะ (Soda and Wada.1966 : 1111) ทั้งสองได้อาศัยข้อสรุปของซาโตะ และออคซูกะ ตั้งแบบจำลองต่าง ๆ ของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานสองแถบ ซึ่งมีโครงสร้างที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง เพื่อหาสมการช่องว่างพลังงาน แล้วนำสมการช่องว่างพลังงานมาคำนวณหาช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ (ΔC) โดย $\Delta C \propto d\Delta_i^2/dT$ ที่อุณหภูมิวิกฤต พบว่าอัตราส่วน $\Delta C/C_n$ โดยทั่วไปจะมีค่าน้อยกว่าค่าที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองของซาโตะ และออคซูกะ

พี. เอนเทล (Entel. 1976 : 263) คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤต งานวิจัยของเขาครอบคลุมทุกค่าความเข้มข้นของสิ่งเจือปนที่ใส่ลงไปในสารแล้วสารนั้นยังคงสภาพตัวนำยิ่งยวดอยู่ แฮมิลโทเนียนที่ใช้เป็นแบบที่มีแถบพลังงานสองแถบเมื่อมีสิ่งเจือปนทั้งแบบแม่เหล็กและแบบไม่เป็นแม่เหล็ก เขาได้คำนวณหาพลังงานอิสระ (free energy) ที่แตกต่างระหว่างสภาพตัวนำยิ่งยวดและสภาพตัวนำปกติ ได้ผลยืนยันว่าการที่ค่าความร้อนจำเพาะผิดไปจากทฤษฎีบีซีเอสนั้นเกิดขึ้นได้ในธรรมชาติ ถ้าตัวนำยิ่งยวดนั้นประกอบด้วยแถบพลังงานหลายแถบที่เหลื่อมซ้อนกันหรือตัวนำยิ่งยวดนั้นมีโครงสร้างของผิวเฟอร์มีที่ขึ้นอยู่กับทิศทาง เอนเทลยังคำนวณต่อไปอีกว่าในกรณีที่มีการกระเจิงเชิงคูลอมบ์ของอิเลคตรอนที่อยู่ในแถบพลังงานต่างแถบกันอันเนื่องมาจากการที่สิ่งเจือปนแบบไม่เป็นแม่เหล็กผสมอยู่ในตัวนำยิ่งยวดนั้นจะทำให้ค่า $\Delta C(T_c)$ ไม่สมนัยกับ $\Delta C(T_c)$ ของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานแถบเดียว นี่เป็นการชี้ให้เห็นว่าการกระเจิงของอิเลคตรอนในตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนแบบไม่เป็นแม่เหล็กผสมอยู่มาก ไม่ใช่เป็นตัวการที่จะขจัดผลที่ผิวเฟอร์มีขึ้นอยู่กับทิศทางหรือผลของการที่ตัวนำยิ่งยวดมีแถบพลังงานหลายแถบได้อย่างสิ้นเชิง

เมื่อเร็ว ๆ นี้ ซากุไร (Sakurai. 1978 : 1195) ได้เสนอผลงานการวิจัยเกี่ยวกับอิทธิพลของสิ่งเจือปนที่ไม่เป็นแม่เหล็กแบบแอนเดอร์สัน เขาพิจารณากรณีที่สารตัวนำยิ่งยวดเป็นแบบบีซีเอส (คือเป็นแบบที่มีแถบพลังงานแถบเดียว) และผสมสิ่งเจือปนอย่างเจือจาง รวมทั้งใช้แบบจำลองของแอนเดอร์สันอธิบายสมบัติทั่ว ๆ ไปของตัวนำยิ่งยวดผสมนี้ได้ โดยเขานำเอาทฤษฎีของยามาดะและโยสิดะ (Yamada and Yosida. 1975 : 1286, 1975 : 316) ซึ่งโดยปกติทฤษฎีนี้ใช้ได้กับตัวนำปกติ มาประยุกต์กับกรณีที่มีสิ่งเจือปนอยู่ในตัวนำยิ่งยวด โดยคิดว่าอันตรกิริยาแรงผลักแบบคูลอมบ์ระหว่าง ดี–อิเลคตรอนเป็นเสมือนการรบกวน (perturbation) การคำนวณโดยวิธีของยามาดะ และโยสิดะนี้ไม่ทำให้เกิดฮาร์ทรี–ฟ็อค ซิงกุลาริที (HF singularity) และไม่พบกับอุปสรรคดังที่

ชล็อตมานน์ และมูลเลอร์–ฮาร์ทมานน์กับคณะได้เคยประสบ งานวิจัยของซากูไร สามารถบรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สันผสมอยู่ ณ บริเวณที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโดมาก ๆ ได้ถูกต้องดีที่ $T \ll T_K/3$ อีกทั้งยังชี้ให้เห็นถึงขบวนการที่สิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กแสดงสมบัติที่ไม่เป็นแม่เหล็กว่าเกิดขึ้นได้อย่างไร และเหตุใดเมื่อความเข้มข้นของสิ่งเจือปนเพิ่มจะมีการทำลายสภาพตัวนำยิ่งยวด ซากูไรพบว่าอันตรกิริยาแบบผลักของ d –อิเลคตรอนในสิ่งเจือปนมีอิทธิพลมากในการทำลายสภาพตัวนำยิ่งยวดด้วยสาเหตุ 2 ประการคือ ประการแรกทำให้อิเลคตรอนมีการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น ประการที่สองทำให้ขนาดของแถบพลังงานขึ้นกับผลของคอนโด นอกจากนี้เขาได้ใช้กรีนส์ฟังก์ชันคำนวณช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะพบว่าค่าที่ได้สอดคล้องกับที่ทฤษฎีบีซีเอสทำนายไว้ กล่าวคือ $\Delta C/C_n(T_c) = 1.42$ ผลลัพธ์นี้เป็นการยืนยันว่าทฤษฎีตัวนำยิ่งยวดของเขาที่ $T \ll T_K$ มีความถูกต้องจริง

<u>สมการช่องว่างพลังงาน และความแตกต่างของพลังงานอิสระ</u>

พิจารณาสารตัวนำยิ่งยวดที่โครงสร้างเป็นแบบมีพลังงานสองแถบเหลื่อมซ้อนกันเมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สันผสมอยู่อย่างเจือจางจนถือว่าอันตรกิริยาระหว่างอะตอมของสิ่งเจือปนมีค่าน้อยมากและตัดออกจากการคำนวณได้ เราสามารถบรรยายระบบนี้ด้วยแฮมิลโทเนียนของแอนเดอร์สันและบีซีเอส ดังนี้

$$H = H_o + H_{imp} \qquad \ldots (2.1)$$

H_o คือ แฮมิลโทเนียนของสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ $= H_{BCS}$

H_{imp} คือ แฮมิลโทเนียนของสิ่งเจือปน

$$H_o = \sum_{k\sigma} \epsilon_{kS} a^{\dagger}_{k\sigma} a_{k\sigma} - g_{SS} \sum_{kk'} a^{\dagger}_{k\uparrow} a^{\dagger}_{-k\downarrow} a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} + \sum_{k\sigma} \epsilon_{kD} D^{\dagger}_{k\sigma} D_{k\sigma}$$

$$- g_{DD} \sum_{kk'} D^{\dagger}_{k\uparrow} D^{\dagger}_{-k\downarrow} D_{-k'\downarrow} D_{k'\uparrow} - g_{SD} \sum_{kk'} \left(a^{\dagger}_{k\uparrow} a^{\dagger}_{-k\downarrow} D_{-k'\downarrow} D_{k'\uparrow} + D^{\dagger}_{k\uparrow} D^{\dagger}_{-k\downarrow} a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \right) \qquad ---(2.2)$$

และ

$$H_{imp} = \sum_{k\sigma} \left(V_{Sd} a^{\dagger}_{k\sigma} d_{\sigma} + h.c. \right) + \sum_{k\sigma} \left(V_{Dd} D^{\dagger}_{k\sigma} d_{\sigma} + h.c. \right) + E_d \sum_{\sigma} n_{\sigma} + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} \qquad ---(2.3)$$

$\epsilon_{kS(D)}$ คือ พลังงานจลน์ของอิเลคตรอนโมเมนตัม k ที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในแถบพลังงาน S (D)

$a^{\dagger}_{k\sigma}, a_{k\sigma}$ $(D^{\dagger}_{k\sigma}, D_{k\sigma})$ คือ ตัวปฏิบัติการสร้างหรือทำลายอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระมีโมเมนตัม k และสปิน σ ในแถบพลังงาน $S(D)$

g_{SS}, g_{DD}, g_{SD} คือ แรงดึงดูดสุทธิในการจับคู่ของอิเลคตรอนในแถบ $S-S$ ในแถบ $D-D$ และในแถบ $S-D$ ตามลำดับ

V_{Sd} (V_{Dd}) คือ อันตรกิริยาแลกเปลี่ยนระหว่าง S (D) –อิเลคตรอนกับ d –อิเลคตรอนของสิ่งเจือปน

U คือ อันตรกิริยาที่เกิดจากแรงคูลอมบ์ระหว่าง d –อิเลคตรอนของสิ่งเจือปนที่มีสปินตรงข้ามกัน

E_d คือ พลังงานของ d –อิเลคตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปนแต่ละตัว

$n_{i\sigma} = d^{\dagger}_{i\sigma} d_{i\sigma}$ เป็นตัวปฏิบัติการที่ใช้กับ d –อิเลคตรอนของสิ่งเจือปน

การคำนวณนี้ได้อาศัยสมมติฐานที่ว่าการจับคู่ของอิเลคตรอนทั้งหลายทั้งในแถบเดียวกันและต่างแถบกันเป็นไปได้ และได้เลือกระดับพลังงานของ d –อิเลคตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปน (E_d) เป็น $-U/2$ ดังนั้นแบบจำลองนี้จึงมีลักษณะสมมาตร

ให้ Δ เป็นช่องว่างพลังงาน อาร์บริโคซอฟ และกอร์คอฟเขียนสมการช่องว่างพลังงานได้ดังนี้

$$\Delta^{\dagger} = g/\beta' \sum_{k\,\omega_n} F^{\dagger}(i\omega_n) \quad \ldots (2.4)$$

g คือ อันตรกิริยาแรงดึงดูดสุทธิของการจับคู่ของอิเลคตรอน

$F_k^{\dagger}$ คือ อะนอมัลลัส กรีนส์ฟังก์ชั่น

$\beta' = 1/T$

กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีแถบพลังงาน 2 แถบ เราสามารถเขียนสมการที่ (2.4) ได้ดังนี้

$$\Delta^{\dagger}_{SS} = T\sum_{k\,n}\{g_{SS}F^{\dagger}_{SS}(k,w_n) + g_{SD}F^{\dagger}_{DD}(k,w_n)\} \quad \ldots (2.5-ก)$$

$$\Delta^{\dagger}_{DD} = T\sum_{k\,n}[g_{DD}F^{\dagger}_{DD}(k,w_n) + g_{SD}F^{\dagger}_{SS}(k,w_n)] \quad \ldots (2.5-ข)$$

$$F^{\dagger}_{SS}(k,w_n) = \int_0^{\beta'} d\tau \langle T_\tau \tilde{a}^{\dagger}_{k\uparrow}(\tau)\tilde{a}_{-k\downarrow}(0)\rangle_S e^{iw_n\tau}$$

$$F^{\dagger}_{DD}(k,w_n) = \int_0^{\beta'} d\tau \langle T_\tau \tilde{D}^{\dagger}_{k\uparrow}(\tau) D_{-k\downarrow}(0)\rangle_S e^{iw\tau}$$

$$\tilde{a}_{k\uparrow}(\tau) = e^{H_n\tau} a_{k\uparrow} e^{-H_n\tau} \qquad \tilde{D}_{k\uparrow}(\tau) = e^{H_n\tau} D_{k\uparrow} e^{-H_n\tau}$$

$$H_n = H(\Delta_{ii} = 0) \qquad \omega_n = (2n+1)\pi T$$

Δ_{SS} คือ ช่องว่างพลังงานของแถบ S

Δ_{DD} คือ ช่องว่างพลังงานของแถบ D

ผลรวมทุกค่า k ในสมการที่ (2.5 – ก) และ (2.5 – ข) เป็นการรวมสำหรับอิเลกตรอนที่มีพลังงาน $|\epsilon_k| < \omega_D$ (ความถี่ดีบาย) ทั้งนี้เพราะเราพิจารณาอิเลกตรอนในสถานะที่อยู่ใกล้กับผิวเฟอร์มิเท่านั้น ณ ที่ใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต สามารถเขียนสมการที่ (2.5) ให้อยู่ในเทอมของ Δ_{ii} จนถึงอันดับที่สาม ดังนี้

$$\begin{aligned}
\Delta^{\dagger}_{SS} = g_{SS} \Big\{ & \sum_{kk_1} \int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle T_\tau a^{\dagger}_{k\uparrow}(0) a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0) a_{-k_1\downarrow}(\tau_1) a_{k_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \Delta^{\dagger}_{SS} \\
& + \sum_{kk_1k_2k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle T_\tau a^{\dagger}_{k\uparrow}(0) a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0) a_{-k_1\downarrow}(\tau_1) a_{k_1\uparrow}(\tau_1) a^{\dagger}_{k_2\uparrow}(\tau_2) a^{\dagger}_{-k_2\downarrow}(\tau_2) a_{-k_3\downarrow}(\tau_3) a_{k_3\uparrow}(\tau_3) \rangle |\Delta^{\dagger}_{SS}|^3 \Big\} \\
+ g_{SD} \Big\{ & \sum_{kk_1} \int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle T_\tau D^{\dagger}_{k\uparrow}(0) D^{\dagger}_{-k\downarrow}(0) D_{-k_1\downarrow}(\tau_1) D_{k_1\uparrow}(\tau_1) \rangle \Delta^{\dagger}_{DD} \\
& + \sum_{kk_1k_2k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle T_\tau D^{\dagger}_{k\uparrow}(0) D^{\dagger}_{-k\downarrow}(0) D_{-k_1\downarrow}(\tau_1) D_{k_1\uparrow}(\tau_1) D^{\dagger}_{k_2\downarrow}(\tau_2) D^{\dagger}_{-k_2\uparrow}(\tau_2) D_{-k_3\downarrow}(\tau_3) D_{k_3\uparrow}(\tau_3) \rangle |\Delta^{\dagger}_{DD}|^3 \Big\}
\end{aligned}$$

... (2.6)

เทียบสัมประสิทธิ์ของสมการที่ (2.6) กับสมการที่ (2.5 – ก) จะได้

$$T\sum_{k\omega_n} F^{\dagger}(k,\omega_n) = \sum_{kk_1}\int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle T_\tau a^{\dagger}_{k\uparrow}(0)a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0)a_{-k_1\downarrow}(\tau_1)a_{k_1\uparrow}(\tau_1)\rangle \Delta_{ss}$$

$$+\sum_{kk_1k_2k_3}\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle T_\tau a^{\dagger}_{k\uparrow}(0)a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0)a_{-k_1\downarrow}(\tau_1)a_{k_1\uparrow}(\tau_1)a^{\dagger}_{k_2\downarrow}(\tau_2)a^{\dagger}_{-k_2\uparrow}(\tau_2)$$

$$a_{k_3\uparrow}(\tau_3)a_{-k_3\downarrow}(\tau_3)\rangle/\Delta^{\prime 3}_{ss}$$

$$= \sum_{kk_1}\int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle a_2\rangle \Delta_{ss} + \sum_{kk_1k_2k_3}\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle \Delta^3_{ss}$$

โดยที่ $\langle a_2\rangle = \langle T_\tau a^{\dagger}_{k\uparrow}(0)a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0)a_{-k_1\downarrow}(\tau_1)a_{k_1\uparrow}(\tau_1)\rangle$

$$\langle a_4\rangle = \langle T_{\tau_1} a^{\dagger}_{k\uparrow}(0)a^{\dagger}_{-k\downarrow}(0)a_{-k_1\downarrow}(\tau_1)a_{k_1\uparrow}(\tau_1)a^{\dagger}_{k_2\uparrow}(\tau_2)a^{\dagger}_{-k_2\downarrow}(\tau_2)a_{-k_3\downarrow}(\tau_3)a_{k_3\uparrow}(\tau_3)\rangle$$

ดังนั้น
$$\frac{T\sum_{k\omega_n} F^{\dagger}_{ss}}{\Delta_{ss}} = \sum_{kk_1}\int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle a_2\rangle + \sum_{kk_1k_2k_3}\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle \Delta^2_{ss} \qquad \ldots (2.7)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อกระจาย Δ_{DD} จนถึงอันดับที่ 3 แล้วเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการที่ (2.5 – ข) จะได้

$$\frac{T\sum_{k\omega_n} F^{\dagger}_{DD}}{\Delta_{DD}} = \sum_{kk_1}\int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle D_2\rangle + \sum_{kk_1k_2k_3}\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle \Delta^2_{DD} \qquad \ldots (2.8)$$

โดยที่ $\langle D_2 \rangle = \langle T_\tau D^\dagger_{k\uparrow}(0) D^\dagger_{-k\downarrow}(0) D_{-k_1\downarrow}(\tau_1) D_{k_1\uparrow}(\tau_1) \rangle$

$\langle D_4 \rangle = \langle T_\tau D^\dagger_{k\uparrow}(0) D^\dagger_{-k\downarrow}(0) D_{-k_1\downarrow}(\tau_1) D_{k_1\uparrow}(\tau_1) D^\dagger_{k_2\uparrow}(\tau_2) D^\dagger_{-k_2\downarrow}(\tau_2) D_{-k_3\downarrow}(\tau_3) D_{k_3\uparrow}(\tau_3) \rangle$

โอคะ และวาคะ ได้หาความแตกต่างของพลังงานอิสระระหว่างสถานะตัวนำปกติ (f_n) กับสถานะตัวนำยิ่งยวด (f_s) โดยใช้สมการพลังงานอิสระของกิบบ์ (Gibb's free energy) ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\Delta f = f_s - f_n = \sum_i N_i(0) \int_0^{\Delta_i} d\Delta_i \, \Delta_i^2 \frac{d}{d\Delta_i} \left[\frac{T \sum_{k w_n} F^\dagger(\Delta_i, \beta)}{N_i(0)\, \Delta_i} \right] \quad \ldots (2.9)$$

เมื่อ $N_i(0)$ เป็นความหนาแน่นของสถานะอิเลคตรอนแถบที่ i ที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ

ในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีพลังงาน 2 แถบ ($i = 2$) สามารถเขียนสมการที่ (2.9) ได้เป็น

$$\Delta f = N_S(0) \int_0^{\Delta_{SS}} d\Delta_{SS} \, \Delta_{SS}^2 \frac{d}{d\Delta_{SS}} \left[\frac{T \sum_{k, w_n} F^\dagger_{SS}(\Delta_{SS}, \beta)}{N_S(0)\, \Delta_{SS}} \right] + N_D(0) \int_0^{\Delta_{DD}} d\Delta_{DD} \, \Delta_{DD}^2 \frac{d}{d\Delta_{DD}} \left[\frac{T \sum_{k w_n} F^\dagger_{DD}(\Delta_{DD}, \beta)}{N_D(0)\, \Delta_{DD}} \right]$$

$$= T \sum_{k w_n} \left\{ \int_0^{\Delta_{SS}} d\Delta_{SS} \, \Delta_{SS}^2 \frac{d}{d\Delta_{SS}} (F^\dagger_{SS} / \Delta_{SS}) + \int_0^{\Delta_{DD}} d\Delta_{DD} \, \Delta_{DD}^2 \frac{d}{d\Delta_{DD}} (F^\dagger_{DD} / \Delta_{DD}) \right\}$$

แทนค่า $T\sum_{kw_n} F_{SS}^{\dagger}/\Delta_{SS}$ และ $T\sum_{kw_n} F_{DD}^{\dagger}/\Delta_{DD}$ ที่ได้จากสมการที่ (2.7) และ (2.8)

$$\Delta f = \int_0^{\Delta_{SS}} d\Delta_{SS}\, \Delta_{SS}^2 \frac{d}{d\Delta_{SS}} \left\{ \sum_{k_1 k_2} \int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle a_2 \rangle + \sum_{k k_1 k_2 k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle \Delta_{SS}^2 \right\}$$

$$+ \int_0^{\Delta_{DD}} d\Delta_{DD}\, \Delta_{DD}^2 \frac{d}{d\Delta_{DD}} \left\{ \sum_{k_1 k_2} \int_0^{\beta'} d\tau_1 \langle D_2 \rangle + \sum_{k k_1 k_2 k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle \Delta_{DD}^2 \right\}$$

$$= \sum_{k k_1 k_2 k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle \frac{\Delta_{SS}^4}{2} + \sum_{k k_1 k_2 k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle \frac{\Delta_{DD}^4}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k k_1 k_2 k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle \left(\frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}} \right)^4 \right\} \Delta_{SS}^4 \qquad \ldots(2.10)$$

ช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะตรงอุณหภูมิวิกฤตหาได้จากสูตร

$$\Delta C = C_s - C_n = T_c \left. \frac{d^2 \Delta f}{d T^2} \right|_{T=T_c} \qquad \ldots(2.11)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการที่ (2.10) 2 ครั้ง และนิยามให้

$$x_c = \lim_{\substack{T \to T_c \\ \Delta_{SS} \to 0}} \Delta_{DD}/\Delta_{SS}$$

$$\frac{d^2\Delta f}{dT^2} = \sum_{kk_1k_2k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle x_c^4 \right\} \left[\left(\frac{d\Delta_{ss}^2}{dT} \right)^2 + \Delta_{ss}^2 \frac{d^2\Delta_{ss}^2}{dT^2} \right]$$

ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต $\Delta_{ss} \rightarrow 0$ ดังนั้นเทอม $\Delta_{ss}^2 \frac{d^2\Delta_{ss}^2}{dT}$ จึงมีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้

$$\frac{d^2\Delta f}{dT^2} = \sum_{kk_1k_2k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle x_c^4 \right\} \left(\frac{d\Delta_{ss}^2}{dT} \right)^2 .$$

แทนค่า $d^2\Delta f / dT^2$ ลงในสมการที่ (2.11)

$$\Delta C = T_c \sum_{kk_1k_2k_3} \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle x_c^4 \right\} \left(\frac{d\Delta_{ss}^2}{dT} \right)^2 \Bigg|_{T=T_c} \qquad \ldots (2.12)$$

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

การคำนวณหา ΔC ที่อุณหภูมิวิกฤต แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. คำนวณหาค่า $\int_0^{\beta} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle$ และ $\int_0^{\beta} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle$ โดยวิเคราะห์ผลการรบกวน (perturbational analysis) ของ $\langle a_4 \rangle$ และ $\langle D_4 \rangle$ ที่ได้จากอันตรกิริยาของอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในแถบ S และแถบ D กับ d –อิเลคตรอนของอะตอมของสิ่งเจือปน นอกจากนั้นยังพิจารณาจากอันตรกิริยาที่เกิดจากแรงคูลอมบ์ (U) และความเข้มข้นของสิ่งเจือปน (c) ในการคำนวณนี้ได้นิยามฟังก์ชั่นเพิ่มขึ้นดังนี้

ก. เทอร์มัล กรีนส์ฟังก์ชั่น (Thermal Green's function) ของอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในแถบพลังงาน S และ D เมื่ออยู่ในภาวะปกติ

$$G_S(k, i\omega_n) = (i\omega_n - \epsilon_{kS})^{-1} \qquad \ldots(3.1)$$

$$G_D(k, i\omega_n) = (i\omega_n - \epsilon_{kD})^{-1} \qquad \ldots(3.2)$$

ข. เทอร์มัล กรีนส์ฟังก์ชั่นของ d –อิเลคตรอนของสิ่งเจือปนที่ถูกรบกวน

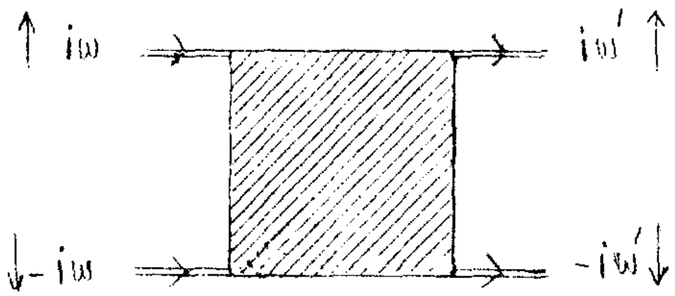
$$G_d(i\omega_n) = \left[i\omega_n + i\Gamma \operatorname{sgn}\omega_n - \Sigma(i\omega_n)\right]^{-1} \qquad \ldots(3.3)$$

$\Sigma(i\omega_n)$ เป็นพลังงานในตนเอง (self – energy) ซึ่งเกิดจากอันตรกิริยา

90683

แบบคูลอมบ์ระหว่าง d –อิเลคตรอนด้วยกัน ในกรณีที่แบบจำลองของแอนเดอร์สันมีลักษณะสมมาตร $G_d(i\omega_n)$ จะเป็นฟังก์ชั่นคี่ที่อยู่ในรูปจินตภาพแท้ ๆ บนแกนจินตภาพ

ค. เวอร์เทกซ์ (Vertex part) $[\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega, i\omega')]$ แสดงผลที่คู่คูเปอร์ของ d –อิเลคตรอนของสิ่งเจือปนที่มีสปินตรงข้ามกันกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น โดยกระเจิงจากสถานะ $(i\omega, -i\omega)$ ไปยังสถานะ $(i\omega', -i\omega')$ ซึ่งเขียนเป็นแผนภาพได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 เวอร์เทกซ์ $\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}$ แสดงการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นของคู่คูเปอร์ของ d –อิเลคตรอนที่มีสปินตรงข้ามกัน

การคำนวณในที่นี้ได้เลือกเครื่องหมายของฟังก์ชั่นเวอร์เทกซ์ ทำให้สมการ $\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega, i\omega') = U + \ldots$ ยังคงใช้ได้ที่การประมาณระดับต่ำสุด

ยามาดะ โยสิดะ และซากุไร เป็นผู้ตั้งสมการของเวอร์เทกซ์ ดังนี้

$$\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega, i\omega') = \pi\Gamma\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}\left[1 - \frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\Gamma}|\omega + \omega'| + \ldots\right] \qquad (3.4)$$

เมื่อ $\tilde{\chi}_{\sigma\sigma'}$ คือ ความไวต่ออำนาจแม่เหล็ก (susceptibility) ของ d –อีเล็คตรอนที่มีสปินเป็น σ กับ σ'

Γ คือ ความกว้างของสถานะกำธรที่อยู่ในภาวะปกติที่ระดับเฟอร์มิ

โดยที่ $\Gamma = \Gamma_{sd} + \Gamma_{Dd}$

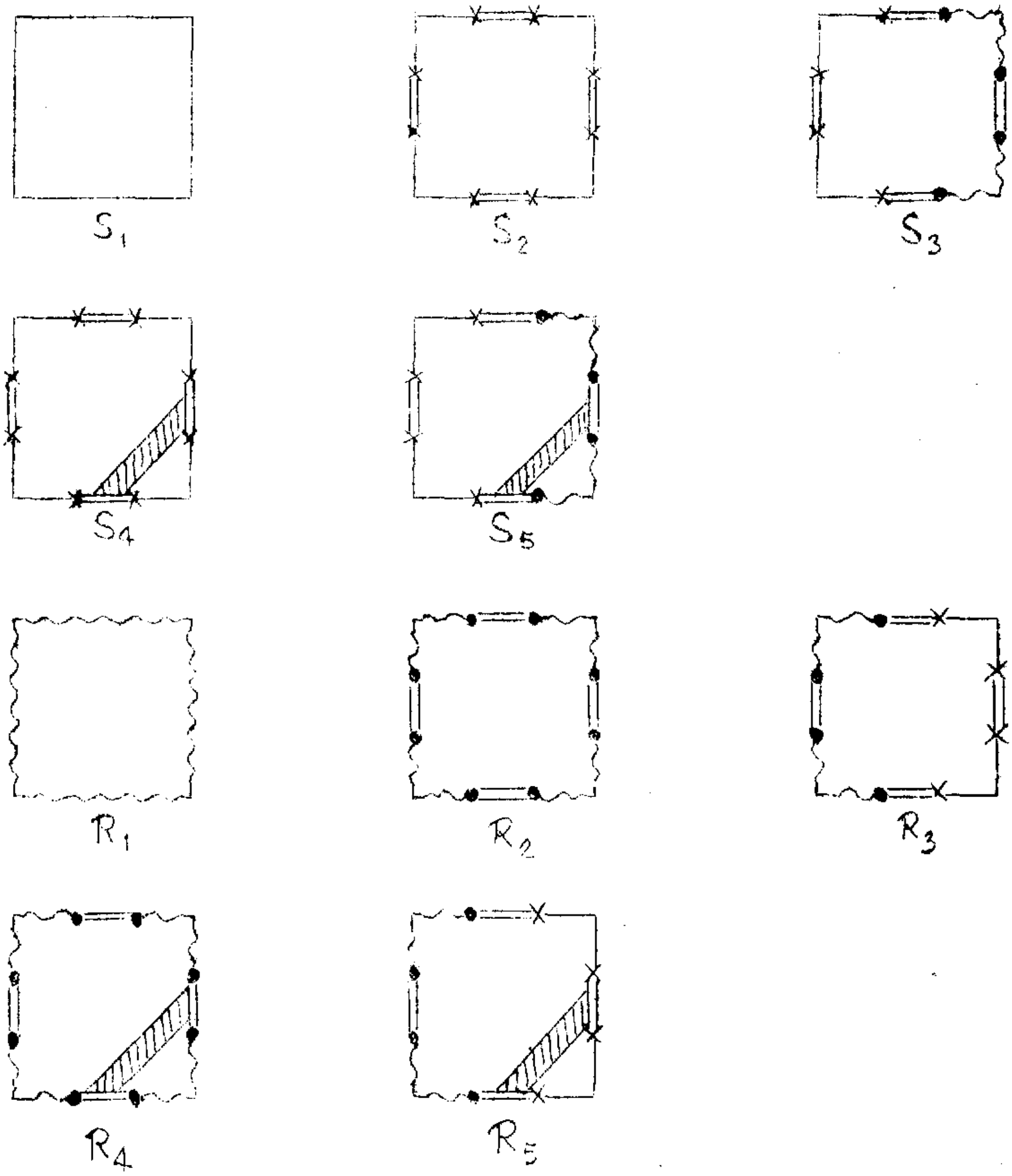
$$\Gamma_{s(D)d} = \pi N_{s(D)}(0) V^2_{s(D)d}$$

และ $$\Sigma(i\omega_n) = -(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}-1)i\omega_n - \frac{i\,\mathrm{sgn}\,\omega_n}{2\Gamma_d}\tilde{\chi}^2_{\uparrow\downarrow}\left[(i\omega_n)^2+(\pi T)^2\right]+\ldots \quad (3.5)$$

ง. นิยามฟังก์ชั่นที่ถูกนอมัลไลซ์ดังนี้

$$\tilde{G}_d(i\omega_n) = \frac{G_d(i\omega_n)}{G_d(i0\,\mathrm{sgn}\,\omega_n)} \quad \ldots \quad (3.6)$$

และ $$\tilde{\Gamma}^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega_n, i\omega_m) = \frac{\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega_n, i\omega_m)}{\pi\Gamma} \quad \ldots \quad (3.7)$$



ภาพประกอบ 3 แผนภาพสำหรับใช้ในการคำนวณกรีนส์ฟังก์ชั่นของอนุภาค 4 อนุภาค ที่เคลื่อนที่ได้อิสระในแถบพลังงาน S และ D รูป S_1 และ R_1 แสดงถึงกรีนส์ฟังก์ชั่นของอิเลคตรอน 4 ตัว ของแถบพลังงาน S และ D ในตัวนำยิ่งยวด รูป R_2, R_3, R_4, R_5 และ S_2, S_3, S_4, S_5 แสดงถึงกรีนส์ฟังก์ชั่นของอิเลคตรอน 4 ตัว ของแถบพลังงาน S และ D ในตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนรบกวน

การคำนวณหา $\langle a_4 \rangle$ และ $\langle D_4 \rangle$ กระทำได้โดยใช้กรีนส์ฟังก์ชั่นซึ่งอาศัยแผนภาพ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 และ $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5$ ในภาพประกอบ 3 รวมกันตามลำดับสัญลักษณ์ที่ใช้ในแผนภาพมีความหมายดังนี้

. X หมายถึง อันตรกิริยา V_{sd} ซึ่งเกิดจากการผสมกันระหว่าง s –อิเลคตรอน กับ d –อิเลคตรอน

. ● หมายถึง อันตรกิริยา V_{Dd} ซึ่งเกิดจากการผสมกันระหว่าง D –อิเลคตรอน กับ d –อิเลคตรอน

หมายถึง กรีนส์ฟังก์ชั่นของ S –อิเล่คตรอนอิสระในแถบพลังงาน S

หมายถึง กรีนส์ฟังก์ชั่นของ D –อิเลคตรอนอิสระในแถบพลังงาน D

หมายถึง กรีนส์ฟังก์ชั่นของ d –อิเลคตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปน

หมายถึง บริเวณเวอร์เทกซ์แสดงการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่นระหว่าง d–อิเลคตรอน

2. คำนวณหา χ_c ที่อุณหภูมิวิกฤต

$$\text{เมื่อ} \quad \chi_c \equiv \lim_{T \to T_c} \frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}}$$

3. คำนวณหา $\frac{d\Delta^2_{SS}}{dT}$ ที่อุณหภูมิวิกฤต โดยขั้นแรกคำนวณหา Δ_{SS} ให้อยู่ในรูปที่เป็นฟังก์ชั่นกับอุณหภูมิเสียก่อน แล้วจึงดิฟเฟอเรนชิเอทเทียบกับอุณหภูมิ

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การคำนวณหาช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ (ΔC) ณ บริเวณที่เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดนี้ หาได้จากสมการ (2.12) ในการคำนวณนี้เราถือว่าความเข้มข้นของสิ่งเจือปนมีค่าน้อยมากที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิคอนโด ($T \ll T_k$) นั่นคือ $T_c \ll \Gamma$

การคำนวณหา $\int_0^{\beta} d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 \langle Q_4 \rangle$ และ $\int_0^{\beta} d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 \langle D_4 \rangle$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราให้นิยามกรีนส์ฟังก์ชั่นของอิเลคตรอนที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระเมื่อถูกรบกวนด้วยอะตอมของสิ่งเจือปนเพียงอะตอมเดียวดังนี้

เมื่อคิดเฉพาะในแถบพลังงาน S

$$\equiv g_{kk'}(i\omega_n) = G_k(i\omega_n)\delta_{kk'} + V_{sd}^2 G_k(i\omega_n) G_d(i\omega_n) G_{k'}(i\omega_n) \quad \ldots (4.1)$$

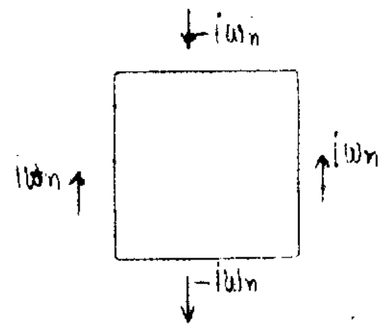
เมื่อคิดเฉพาะในแถบพลังงาน D

$$\equiv g_{kk'}(i\omega_n) = G_k(i\omega_n)\delta_{kk'} + V_{Dd}^2 G_k(i\omega_n) G_d(i\omega_n) G_{k'}(i\omega_n) \quad \ldots (4.2)$$

เมื่อคิดระหว่างแถบพลังงาน S กับแถบพลังงาน D

$$\equiv g_{kk'}(i\omega_n) = G_k(i\omega_n)\delta_{kk'} + V_{sd} V_{Dd} G_k(i\omega_n) G_d(i\omega_n) G_{k'}(i\omega_n) \quad \ldots (4.3)$$

ในสารตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์ เทอม $\int_0^{\beta} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle_0$ สามารถคำนวณได้จากแผนภาพ S_1 ดังนี้



$$S_1 = T\sum_k\sum_{\omega_n} G_k^2(i\omega_n)\, G_k^2(-i\omega_n) \quad \because V_{sd} = 0$$

$$= T\sum_k\sum_{\omega_n}\frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon^2)^2}$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย $\sum_k \longrightarrow N_s(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon$

$N_s(0)$ เป็นความหนาแน่นของ S –อิเลคตรอนที่ระดับเฟอร์มิ

$$= T\sum_{\omega_n} N_s(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{(\omega^2+\epsilon^2)^2}$$

อาศัยสูตรการหาค่าอินทิกรัลจากภาคผนวกจะได้

$$= T\,\frac{\pi}{2}\,N_s(0)\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^3}$$

เพราะว่า $\omega_n = (2n+1)\pi T$ และแลมบ์ดา ฟังก์ชั่น (Lambda function)

$$\lambda(j) = \sum_n \frac{1}{(2n+1)^j}$$

ให้ T_{c_0} เป็นอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์ ดังนั้น S_1 จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$S_1 = \frac{N_s(0)\,\lambda(3)}{\pi^2 T_{c0}^2}$$

เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบกับผลงานการวิจัยของโซกะและวาคะ เรา เปลี่ยน λ (j) ให้อยู่ในรูป ζ (j) (Zeta function) โดยที่

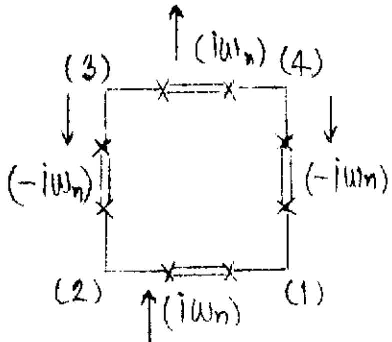
$$\lambda(j) = (1 - 1/2^{j})\,\zeta(j)$$

$$\therefore\ S_1 = \frac{7 N_s(0)}{8\pi^2 T_{c0}^2}\,\zeta(3) \quad \ldots\ldots \quad \ldots(4.4)$$

เมื่อสารตัวนำยิ่งยวดมีสิ่งเจือปน เทอมที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะที่เห็นได้ชัดมีอยู่ 4 เทอม คือ S_2, S_3, S_4, S_5.

ก. เทอมที่มีพลังงานในตนเอง (**self - energy correction**) อัน เนื่องมาจากการผสมกันระหว่าง δ และ α –อิเลคตรอน

การคำนวณแผนภาพ



$$S_2 = T\sum_{\omega_n}\Big(\sum_{K_1-K_4} g_{K_1K_2}(i\omega_n)\, g_{K_2K_3}(-i\omega_n)\, g_{K_3K_4}(i\omega_n)\, g_{K_4K_1}(-i\omega_n) - \sum_K F_K^2(i\omega_n)\Big) \quad \ldots(4.5)$$

เมื่อ $$F_K(i\omega_n) = G_K(i\omega_n)\, G_{-K}(i\omega_n)$$

$$= \frac{1}{\omega_n^2 + \epsilon_K^2}$$

แทนค่า $g_{KK'}$ จากสมการ (4.1) ลงในสมการ (4.4) จะได้

$$= T\sum_{K}\Big[\sum_{i\omega_n}\Big(G_{K_1}(i\omega_n)\,\delta_{K_1K_2} + V_{sd}^2 G_{K_2}(i\omega_n)\,G_d(i\omega_n)\,G_{K_2}(i\omega_n)\Big) \times$$

$$\Big(G_{K_2}(-i\omega_n)\,\delta_{K_2K_3} + V_{sd}^2 G_{K_2}(-i\omega_n)\,G_d(-i\omega_n)\,G_{K_3}(-i\omega_n)\Big) \times$$

$$\Big(G_{K_3}(i\omega_n)\,\delta_{K_3K_4} + V_{sd}^2 G_{K_3}(i\omega_n)\,G_d(i\omega_n)\,G_{K_4}(i\omega_n)\Big) \times$$

$$\Big(G_{K_4}(-i\omega_n)\,\delta_{K_4K_1} + V_{sd}^2 G_{K_4}(-i\omega_n)\,G_d(-i\omega_n)\,G_{K_1}(-i\omega_n)\Big)\Big] - \sum_{K} F_K^2(i\omega_n)$$

เพื่อสะดวกในการเขียนนิยาม ให้ $G_{K_a}(i\omega_n) = G(a,+)$

$$G_{K_a}(-i\omega_n) = G(a,-)$$

ดังนั้นจากสมการบนจึงเขียนให้อยู่ในรูปสั้น ๆ ได้เป็น

$$= T\sum_{K}\sum_{\omega}\Big[\Big(G(1,+)\,\delta(1,2) + V_{sd}^2 G(1,+)\,G_d(+)\,G(2,+)\Big) \times$$

$$\Big(G(2,-)\,\delta(2,3) + V_{sd}^2 G(2,-)\,G_d(-)\,G(3,-)\Big) \times$$

$$\Big(G(3,+)\,\delta(3,4) + V_{sd}^2 G(3,+)\,G_d(+)\,G(4,+) \times$$

$$\Big(G(4,-)\,\delta(4,1) + V_{sd}^2 G(4,-)\,G_d(-)\,G(1,-)\Big)\Big] - \sum_{K} F_K^2(i\omega_n)$$

คูณวงเล็บทั้งสี่เข้าด้วยกัน แล้วอาศัยสมบัติของโครเนคเคอร์ เดลตา ฟังก์ชัน (Kronecker delta function) จะได้เป็น

$$
\begin{aligned}
= T\sum_{k}\sum_{w}\Big[\, & G(1,+)G(1,-)G(1,+)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{2}G(1,+)G(1,-)G(1,+)G(1,-)G_d(-)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{2}G(1,+)G(1,-)G(1,+)G_d(+)G(1,+)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{2}G(1,+)G(1,-)G_d(-)G(1,-)G(1,+)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{2}G(1,+)G_d(+)G(1,+)G(1,-)G(1,+)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{4}G(1,+)G(1,-)G(1,+)G_d(+)G(4,+)G(4,-)G_d(-)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{4}G(1,+)G(1,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G(3,-)G_d(-)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{4}G(1,+)G(1,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(1,+)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{4}G(1,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{6}G(1,+)G(1,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(4,+)G(4,-)G_d(-)G(1,-) \\
&+ V_{sd}^{6}G(1,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G(2,+)G_d(+)G(4,+)G(4,-)G_d(-)G(1,-)
\end{aligned}
$$

$$+ V_{sd}^{6} G(1,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G(3,-)G_d(-)G(1,-)$$

$$+ V_{sd}^{6} G(1,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(1,+)G(1,-)$$

$$+ V_{sd}^{8} G(1,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(4,+)G(4,-)G_d(-)G(1,-)\Big]$$

$$- \sum_{k} F_{k}^{2}(i\omega_n)$$

แทนค่า $G(j,+) = \dfrac{1}{i\omega_n - \epsilon_{k_j}}$, $G(j,-) = \dfrac{1}{-i\omega_n - \epsilon_{k_j}}$

เมื่อ $j = 1, 2, 3, 4$

และแทนค่าจะได้ $\sum_{k} F_{k}^{2}(i\omega_n) = \dfrac{1}{(\omega_n^2 + \epsilon_k^2)^2}$

ผลจะได้เป็น

$$= T\sum_{k}\sum_{\omega_n}\Bigg[V_{sd}^{2}\Bigg\{ \frac{G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_k^2)^2(-i\omega_n-\epsilon_k)} + \frac{G_d(+)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(i\omega_n-\epsilon_k)}$$

$$+ \frac{G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_k^2)^2(-i\omega_n-\epsilon_{k_1})} + \frac{G_d(+)}{(\omega_n^2+\epsilon_k^2)^2(i\omega_n-\epsilon_k)} \Bigg\}$$

$$+ V_{sd}^{4}\Bigg\{ \frac{G_d(+)G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)} + \frac{G_d(-)G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})(-i\omega_n-\epsilon_{k_4})}$$

$$+ \frac{G_d(+)G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)} + \frac{G_d(+)\,G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)}$$

$$\left. + \frac{G_d(+)\,G_d(+)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_1})(i\omega_n-\epsilon_{k_2})} + \frac{G_d(+)\,G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)^2}\right\}$$

$$+ V_{sd}^6 \left\{ \frac{G_d(+)\,G_d^2(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_1})} \right.$$

$$+ \frac{G_d^2(+)\,G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})}$$

$$+ \frac{G_d(+)\,G_d^2(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})}$$

$$\left. + \frac{G_d^2(+)\,G_d(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_1})}\right\}$$

$$\left. + \frac{V_{sd}^8\, G_d^2(+)\,G_d^2(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)}\right]$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย $\sum_{k}$ เป็น $N_s(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon$

$$= T\sum_{\omega}\Bigg[\; V_{sd}^2 N_s(0)\, G_d(-)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{(i\omega_n-\epsilon_k)^2(-i\omega_n-\epsilon_k)^3}$$

$$+\; V_{sd}^2 N_s(0)\, G_d(+)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{(i\omega_n+\epsilon_k)^2(i\omega_n-\epsilon_k)^3}$$

$$+\; V_{sd}^2 N_s(0)\, G_d(-)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{(i\omega_n-\epsilon_k)^3(-i\omega_n-\epsilon_k)^3}$$

$$+\; V_{sd}^2 N_s(0)\, G_d(+)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{(i\omega_n+\epsilon_k)^2(i\omega_n-\epsilon_k)^3}$$

$$+\; V_{sd}^4 N_s^2(0)\, G_d(+)\, G_d(-)\Bigg\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_4}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_3}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)} \;+\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)}\Bigg\}$$

$$+ V_{sd}^4 N_s^2(0) G_d(+) G_d(+) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}}{(i\omega_n - \epsilon_{k_1})(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)}$$

$$+ V_{sd}^4 N_s^2(0) G_d(-) G_d(-) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_3}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_1})(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})}$$

$$+ V_{sd}^6 N_s^3(0) G_d(+) G_d^2(-) \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_3}\, d\epsilon_{k_4}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_1})} \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}\, d\epsilon_{k_3}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})} \right)$$

$$+ V_{sd}^6 N_s^3(0) G_d^2(+) G_d(-) \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}\, d\epsilon_{k_4}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})} \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}\, d\epsilon_{k_3}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_1})} \right)$$

$$+ V_{sd}^8 N_s^4(0) G_d^2(+) G_d^2(-) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon_{k_1}\, d\epsilon_{k_2}\, d\epsilon_{k_3}\, d\epsilon_{k_4}}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_4}^2)} \Bigg]$$

อินทิเกรดแต่ละเทอมโดยอาศัย Calculus of Residue จากภาคผนวก

$$= T\sum_{\omega_n}\Big[-V_{sd}^2 N_s(0)\frac{3\pi i}{4\omega_n^4}G_d(+) + V_{sd}^2 N_s(0)\frac{3\pi i}{4\omega_n^4}G_d(-)$$

$$+ V_{sd}^4 N_s^2(0) G_d(+)G_d(-)\frac{2\pi^2}{\omega_n^4} + V_{sd}^4 N_s^2(0)\frac{(-\pi^2)}{4\omega_n^4}G_d^2(+)$$

$$- V_{sd}^4 N_s^2(0)\frac{\pi^2}{4\omega_n^4}G_d^2(-) + V_{sd}^6 N_s^3(0)\frac{(\pi i)}{\omega_n^4}G_d(+)G_d^2(-)$$

$$+ V_{sd}^6 N_s^3(0)\frac{(-\pi i)^3}{\omega_n^4}G_d^2(+)G_d(-) + V_{sd}^8 N_s^4(0)\frac{\pi^4}{\omega_n^4}G_d^2(+)G_d^2(-)\Big]$$

แทนค่า $V_{sd} = \left(\Gamma_{sd}/\pi N_s(0)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$G_d(+) = \tilde{G}_d/(i\Gamma), \quad G_d(-) = \tilde{G}_d/(-i\Gamma)$$

$$= T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^4}\left\{-\frac{3}{2}\tilde{G}_d\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right) + \frac{5}{2}\tilde{G}_d^2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2 - 2\tilde{G}_d^3\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right.$$

$$\left. + \tilde{G}_d^4\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^4\right\}$$

เพราะว่า $\tilde{G}_d(i\omega_n) = i\Gamma\, G_d(i\omega_n)$

$$= i\Gamma / i\omega_n + i\Gamma + \tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow} i\omega_n + \ldots$$

$$= 1 / 1 + \frac{\tilde{\chi}_{1\Gamma}\omega_n}{\Gamma} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}} \ldots\right) \qquad \ldots(4.6)$$

เมื่อ $\tilde{\Gamma} = \Gamma / \tilde{\chi}_{1\Gamma}$

แทนค่า $\tilde{G}_d(i\omega_n)$

$$= T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^4}\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left(1-\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2\left(1-\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)^2-2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\left(1-\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)^3 + \left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^4\left(1-\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)^4\right\}$$

อาศัยการกระจายแบบทวินาม

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n}{2}(n-1)x^2 + \ldots \qquad (x \ll 1)$$

$$= T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^4}\left\{-\frac{3}{2}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left(1-\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2\left(1-2\frac{\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)-2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\left(1-\frac{3\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right) + \left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^4\left(1-\frac{4\omega_n}{\tilde{\Gamma}}\right)\right\}$$

$$= -T\sum \frac{1}{\omega_n^4}\left[\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left\{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right\}\right]$$

$$+ T\sum \frac{1}{\omega_n^3\tilde{\Gamma}}\left[\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left\{\frac{3}{2}-5\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+6\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-4\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right\}\right]$$

เพราะว่า $(2n+1)\pi T = \omega_n$ และ $\lambda(j) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^j}$

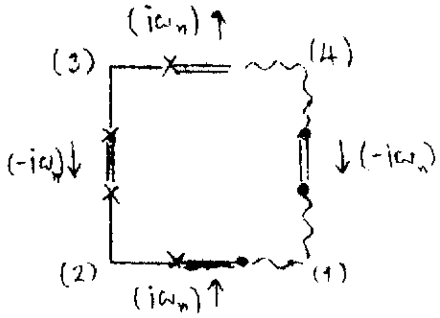
$$= -\frac{\lambda(4)}{\pi^4 T^3}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left[3-5\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+4\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right]$$

$$+\frac{\lambda(3)\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\pi^3 T^2 \Gamma}\left[3-10\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+12\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-8\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right]\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)$$

เขียนให้อยู่ในรูปซีตา ฟังก์ชัน แผนภาพนี้จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$= -\frac{15}{16}\frac{\zeta(4)}{\pi^4 T^3}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)\left[3-5\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+4\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right]$$

$$+\frac{7}{8}\frac{\zeta(3)\,\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\pi^3 T^2 \Gamma}\left[3-10\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)+12\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2-8\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^3\right]\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right) \quad \ldots (4.7)$$



การคำนวณแผนภาพ S_3

โดยการแทนค่าสมการ (4.1) และ (4.2) ลงในสมการที่ (4.4) จะได้

$$S_3 = 4T\sum_{K}\Big[\sum_{\omega}\Big(G_{K_{1D}}(i\omega_n)\delta_{K_{1D}K_2} + V_{sd}V_{Dd}G_{K_{1D}}(i\omega_n)G_d(i\omega_n)G_{K_2}(i\omega_n)\Big)$$

$$\times\Big(G_{K_2}(-i\omega_n)\delta_{K_2K_3} + V_{sd}^2 G_{K_2}(-i\omega_n)G_d(-i\omega_n)G_{K_3}(-i\omega_n)\Big)$$

$$\times\Big(G_{K_3}(i\omega_n)\delta_{K_3K_{4D}} + V_{sd}V_{Dd}G_{K_3}(i\omega_n)G_d(i\omega_n)G_{K_{4D}}(i\omega_n)\Big)$$

$$\times\Big(G_{K_{4D}}(-i\omega_n)\delta_{K_{4D}K_{1D}} + V_{Dd}^2 G_{K_{4D}}(-i\omega_n)G_d(-i\omega_n)G_{K_{1D}}(-i\omega_n)\Big)\Big] - \sum_{K} F_K^2(i\omega_n)$$

$$= AT \sum_{k} \Big[\Sigma \Big(G(1D,+)\delta(1D,2) + V_{sd}V_{Dd}\, G(1D,+)G_{d}(+)G(2,+) \Big)$$

$$\times \Big(G(2,-)\delta(2,3) + V_{sd}^{2}\, G(2,-)G_{d}(-)G(3,-) \Big)$$

$$\times \Big(G(3,+)\delta(3,4D) + V_{sd}V_{Dd}\, G(3,+)G_{d}(+)G(4D,+) \Big)$$

$$\times \Big(G(4D,-)\delta(4D,1D) + V_{Dd}^{2}\, G(4D,-)G_{d}(-)G(1D,-) \Big) \Big] - \sum_{k} F_{k}^{2}(i\omega_{n})$$

คูณทั้ง 4 เทอมเข้าด้วยกัน แล้วอาศัยสมบัติของโครเนคเคอร์ เดลตา ฟังก์ชัน จะได้เป็น

$$= AT \sum \Big[G^{2}(1D,+)G^{2}(1D,-)$$

$$+ V_{sd}^{2}\, G(2,+)G(2,-)G_{d}(-)G(3,-)G(3,+)G(3,-)\delta(1D,2)\delta(3,4D)\delta(4D,1D)$$

$$+ V_{sd}V_{Dd}\, G(2,+)G(2,-)G(2,+)G_{d}(+)G(1D,+)G(1D,-)\delta(1D,2)\delta(2,3)\delta(4D,1D)$$

$$+ V_{sd}V_{Dd}\, G(1D,+)G_{d}(+)G(2,+)G(2,-)G(2,+)G(1D,-)\delta(2,3)\delta(3,4D)\delta(4D,1D)$$

$$+ V_{Dd}^{2}\, G(1D,+)G(1D,-)G(1D,+)G(1D,-)G_{d}(-)G(1D,-)\delta(1D,2)\delta(2,3)\delta(3,4D)$$

$$+ V_{sd}^{3}V_{Dd}\, G(1D,+)G(1D,-)G_{d}(-)G(3,-)G(3,+)G_{d}(+)G(1D,+)G(1D,-)\delta(1D,2)\delta(4D,1D)$$

$$+ V_{sd}^{3}V_{Dd}\, G(1D,+)G_{d}(+)G(2,+)G(2,-)G_{d}(-)G(3,-)G(3,+)G(1D,-)\delta(3,4D)\delta(4D,1D)$$

$$+ V_{sd}^{2}V_{Dd}^{2}\, G(1D,+)G(1D,-)G_{d}(-)G(3,-)G(3,+)G(3,-)G_{d}(-)G(1D,-)\delta(1D,2)\delta(3,4D)$$

$$+V_{sd}^{2}V_{Dd}^{2}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G(2,+)G_d(+)G(1D,+)G(1D,-)\delta(2,3)\delta(1D,4D)$$

$$+V_{sd}V_{Dd}^{3}G(1D,+)G(2,-)G(2,+)G_d(+)G(4D,+)G(4D,-)G_d(-)G(1D,-)\delta(1D,2)\delta(2,3)$$

$$+V_{sd}V_{Dd}^{3}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G(4D,+)G(4D,-)G_d(-)G(1D,-)\delta(2,3)\delta(3,4D)$$

$$+V_{sd}^{4}V_{Dd}^{2}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(1D,+)G(1D,-)\delta(4D,1D)$$

$$+V_{sd}^{3}V_{Dd}^{3}G(1D,+)G(1D,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(4D,+)G(4D,-)G_d(-)G(1D,-)\delta(1D,2)$$

$$+V_{sd}^{3}V_{Dd}^{3}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G(3,-)G_d(-)G(1D,-)\delta(3,4D)$$

$$+V_{sd}^{2}V_{Dd}^{4}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G(2,+)G_d(+)G(4D,+)G(4D,-)G_d(-)G(1D,-)\delta(2,3)$$

$$+V_{sd}^{4}V_{Dd}^{4}G(1D,+)G_d(+)G(2,+)G(2,-)G_d(-)G(3,-)G(3,+)G_d(+)G(4D,+)G(4D,-)\times$$

$$G_d(-)G(1D,-)\Big] \cdots \sum_k F_k^{2}(i\omega_n)$$

แทนค่า $G(j,+)$, $G(j,-)$

$$= 4T\sum_k\Bigg[\frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon_k^2)^2} + \frac{V_{sd}^{2}G_d(-)\delta(1D,2)\delta(3,4D)\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})}$$

$$+\frac{V_{sd}V_{Dd}G_d(+)\delta(1D,2)\delta(2,3)\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{V_{sd} V_{Dd} G_d(+)\,\delta(2,3)\,\delta(3,4D)\,\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})}
+ \frac{V_{Dd}^2 G_d(-)\,\delta(1D,2)\,\delta(2,3)\,\delta(3,4D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)^2(-i\omega_n-\epsilon_{k_{1D}})} \\
&+ \frac{V_{sd}^3 V_{Dd} G_d(+) G_d(-)\,\delta(1D,2)\,\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)^2(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)}
+ \frac{V_{sd}^3 V_{Dd} G_d(+) G_d(-)\,\delta(3,4D)\,\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)} \\
&+ \frac{V_{sd}^2 V_{Dd}^2 G_d^2(-)\,\delta(1D,2)\,\delta(3,4D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_{1D}})(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})} \\
&+ \frac{V_{sd}^2 V_{Dd}^2 G_d^2(+)\,\delta(2,3)\,\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_{4D}})(i\omega_n-\epsilon_{k_2})} \\
&+ \frac{V_{sd} V_{Dd}^3 G_d(+) G_d(-)\,\delta(1D,2)\,\delta(2,3)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_{4D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)}
+ \frac{V_{sd} V_{Dd}^3 G_d(+) G_d(-)\,\delta(2,3)\,\delta(3,4D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_{4D}}^2)} \\
&+ \frac{V_{sd}^4 V_{Dd}^2 G_d^2(+) G_d(-)\,\delta(4D,1D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_{1D}})(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)}
+ \frac{V_{sd}^3 V_{Dd}^3 G_d(+) G_d^2(-)\,\delta(1D,2)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_{1D}})(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_{4D}}^2)} \\
&+ \frac{V_{sd}^3 V_{Dd}^3 G_d(+) G_d^2(-)\,\delta(3,4D)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n-\epsilon_{k_3})}
+ \frac{V_{sd}^2 V_{Dd}^4 G_d^2(+) G_d(-)\,\delta(2,3)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(i\omega_n-\epsilon_{k_2})(\omega_n^2+\epsilon_{k_{4D}}^2)} \\
&+ \left.\frac{V_{sd}^4 V_{Dd}^4 G_d^2(+) G_d^2(-)}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_{1D}}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n^2+\epsilon_{k_{4D}}^2)}\right] - \sum_k F_k^2(i\omega_n)
\end{aligned}
$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย $\sum_{k} \rightarrow N_{S(D)}(0)\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon$ แล้วอินทิเกรตแต่ละเทอม

โดยอาศัย Calculus of residue จากภาคผนวก แทนค่า V_{Sd} V_{Dd}

$G_d(+)$ และ $G_d(-)$ จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$
\begin{aligned}
= 4T \sum \frac{1}{\omega_n^4} \Bigg[& -\frac{3}{8}\frac{\tilde{G}_d(+)}{\Gamma}\left\{ \overset{(1)}{\Gamma_{Sd}} + \overset{(2)}{\Gamma_{Dd}} + \overset{(3)}{V_{Sd}V_{Dd}\pi\left(N_S(0)+N_D(0)\right)} \right\} \\
& + \frac{\tilde{G}_d^2(+)}{\Gamma^2}\left\{ \overset{(4)}{\frac{\Gamma_{Sd}\Gamma_{Dd}}{2}} + \overset{(5)}{\Gamma_{Sd}V_{Sd}V_{Dd}\pi N_D(0)} + \overset{(6)}{\Gamma_{Dd}V_{Sd}V_{Dd}\pi N_S(0)} \right\} \\
& + \frac{\tilde{G}_d^3(+)}{\Gamma^3}\left\{ \overset{(7)}{\frac{\Gamma_{Sd}^2\Gamma_{Dd}}{2}} + \overset{(8)}{\frac{\Gamma_{Sd}\Gamma_{Dd}^2}{2}} + \overset{(9)}{\frac{\Gamma_{Sd}\Gamma_{Dd}}{2}V_{Sd}V_{Dd}\pi\left(N_S(0)+N_D(0)\right)} \right\} \\
& + \overset{(10)}{\frac{\tilde{G}_d^4(+)}{\Gamma^4}\Gamma_{Sd}^2\Gamma_{Dd}^2} \Bigg]
\end{aligned}
$$

แทนค่า $V_{Sd} = \left(\Gamma_{Sd}/\pi N_S(0)\right)^{\frac{1}{2}}$, $V_{Dd} = \left(\Gamma_{Dd}/\pi N_D(0)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\pi V_{Sd}V_{Dd} = \left(\Gamma_{Sd}\Gamma_{Dd}/N_S(0)N_D(0)\right)^{\frac{1}{2}}$$

แทนค่า $\tilde{G}_d$ จากสมการ (4.6) และนิยามฟังก์ชั่น

$$a_S = \left(\Gamma_{Sd}/N_D(0)\Gamma^2\right)\left[\Gamma_{Sd}N_D(0) + \Gamma_{Dd}N_S(0)\right] \quad \ldots (4.7\text{-ก})$$

$$a_D = \left(\Gamma_{Dd}/N_S(0)\Gamma^2\right)\left[\Gamma_{Sd}N_D(0) + \Gamma_{Dd}N_S(0)\right] \quad \ldots (4.7\text{-ข})$$

$$= T \sum \frac{1}{\omega_n^4} \left\{ -\frac{3}{8} - \frac{N(0)}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right) + a_s \left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{T}{\Gamma} \sum \frac{1}{\omega_n^3} \left\{ \frac{3}{8} + \frac{3\,N(0)}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right) - 2a_s \left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)} \right)^{1/2} - 4\left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right)^2 + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{2\Gamma^2} \right\}$$

เปลี่ยน ω_n ให้อยู่ในรูป $\lambda(j)$ ผลสุดท้ายจะได้

$$= \frac{\lambda(4)}{\pi^4 T^3} \left\{ -\frac{3}{8} - \frac{N(0)}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right) + a_s \left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)} \right)^{1/2} + \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{\lambda(3)\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\pi^3 T^2 \Gamma} \left\{ \frac{3}{8} + \frac{3\,N(0)}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right) - 2a_s \left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)} \right)^{1/2} \right.$$

$$\left. - 4\left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right)^2 + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{2\Gamma^2} \right\}$$

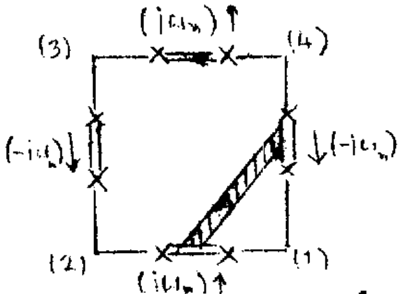
เขียนให้อยู่ในรูปซีตา ฟังก์ชัน

$$= \frac{15\,\zeta(4)}{16\,\pi^4 T^3} \left\{ -\frac{3}{8} - \frac{N(0)}{2\Gamma} \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{4} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right) + a_s \left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)} \right)^{1/2} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2} \right)^2 \right\} + \frac{7\,\zeta(3)\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{8\,\pi^3 T^2 \Gamma} \left\{ \frac{3}{8} + \frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{2\Gamma^2} \right.$$

$$+\frac{3}{2}\frac{N(0)}{\Gamma}\left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{N_s(0)N_D(0)}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2}\right)-2a_s\left(\frac{\Gamma_{Dd}N_D(0)}{\Gamma_{sd}N_s(0)}\right)^{1/2}-4\left(\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^2}\right)^2\Bigg\} \qquad \ldots (4.8)$$

ข. เทอมที่มีทั้งพลังงานในตนเอง (self-energy correction) และที่มีเวอร์เทกซ์ (Vortex correction) อันเป็นผลเนื่องมาจากการกระเจิงแบบไม่ยึดหยุ่นระหว่าง d - อิเลกตรอน



การคำนวณแผนภาพ S_4

$$S_4 = 4V_{sd}^4 T^2 \sum_{\omega_n \omega'_n}\sum_{k_1\sim k_4} F_{k_1}(i\omega_n) G_d^2(i\omega_n)\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega_n, i\omega'_n) G_d^2(i\omega'_n) G_{k_2}(i\omega'_n)$$

$$\times\, g_{k_2k_3}(i\omega'_n)\, g_{k_3k_4}(i\omega_n)\, G_{k_4}(-i\omega'_n) \qquad \ldots (4.9)$$

แทนค่า $g_{kk'}$ จากสมการ (4.1)

$$= -4V_{sd}^4 T^2 \sum_{\omega_n}\sum_{k} F_{k_1}(i\omega_n) G_d^2(i\omega_n)\Gamma^2_{\uparrow\downarrow}(i\omega_n, i\omega'_n) G_d^2(i\omega'_n)$$

$$\times\left[G_{k_2}(-i\omega'_n)\delta_{k_2k_3} + V_{sd}^2 G_{k_2}(-i\omega'_n) G_d(-i\omega'_n) G_{k_3}(-i\omega'_n)\right] G_{k_2}(i\omega'_n)$$

$$\times\left[G_{k_3}(i\omega'_n)\delta_{k_3k_4} + V_{sd}^2 G_{k_3}(i\omega'_n) G_d(i\omega'_n) G_{k_4}(i\omega'_n)\right] G_{k_4}(-i\omega'_n)$$

เขียน $G_{k_j}(i\omega'_n)$ และ $G_{k_j}(-i\omega'_n)$ ให้อยู่ในรูปสั้น ๆ แล้วคูณ $g_{k_2k_3}\, g_{k_3k_4}$ เข้าด้วยกัน

$$= -4V_{sd}^4 T^2 \sum_{\omega} \sum_{k} G(1,+)G(1,-)G_d^2(+)\Gamma_{\uparrow\downarrow}^d(+,+')G_d^2(+')G(2,+')G(4,-')$$

$$\times \Big[G(2,-')G(3,+')\delta(2,3)\delta(2,4) + V_{sd}^2 G(2,-')G(3,+')G_d(+')G(4,+')\delta(2,3)$$

$$+ V_{sd}^2 G(2,-')G_d(-')G(3,-')G(3,+')\delta(3,4)$$

$$+ V_{sd}^4 G(2,-')G_d(-')G(3,-')G(3,+')G_d(+')G(4,+') \Big]$$

คูณเข้าไปในวงเล็บ อาศัยสมบัติโครเนคเคอร์ เดลตา ฟังก์ชัน แล้วแทนค่า $G(j,+)$, $G(j,-)$ จะได้เป็น

$$= -4V_{sd}^4 T^2 \sum \sum G_d^2(+)\Gamma_{\uparrow\downarrow}^d(+,+')G_d^2(+') \frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_2}^2)}$$

$$- 4V_{sd}^6 T^2 \sum \sum G_d^2(+)\Gamma_{\uparrow\downarrow}^d(+,+')G_d^2(+')G_d(+') \frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_4}^2)(i\omega_n'-\epsilon_{k_2})}$$

$$- 4V_{sd}^6 T^2 \sum \sum G_d^2(+)\Gamma_{\uparrow\downarrow}^d(+,+')G_d^2(+')G_d(-') \frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_3}^2)(-i\omega_n'-\epsilon_{k_3})}$$

$$- 4V_{sd}^8 T^2 \sum \sum G_d^2(+)\Gamma_{\uparrow\downarrow}^d(+,+')G_d^3(+')G_d(-') \frac{1}{(\omega_n^2+\epsilon_{k_1}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_2}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_3}^2)(\omega_n'^2+\epsilon_{k_4}^2)}$$

เปลี่ยนเครื่องหมาย $\sum_{k_1 \sim k_4} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} N_s(0)\, d\epsilon_k$ แล้วใช้ calculus of residue หาค่าอินทิกรัลของแต่ละเทอม พร้อมทั้งแทนค่า $V_{sd} = (\Gamma_{sd}/\pi N_s(0))^{1/2}$ จะได้เป็น

$$= - 2\Gamma_{sd}^{2} G_{d}^{2}(+)\Gamma_{1l}^{d}(+,+')G_{d}^{2}(+')\sum \frac{T^{2}}{W_{n}W_{n}'} + 2\Gamma_{sd}^{3}G_{d}^{2}(+)\Gamma_{1l}^{d}(+,+')G_{d}^{3}(+')\sum \frac{T^{2}}{W_{n}W_{n}'}$$

$$- 2\Gamma_{sd}^{3}G_{d}^{2}(+)\Gamma_{1l}^{d}(+,+')G_{d}^{2}(+')G_{d}(-')\sum \frac{T^{2}}{W_{n}W_{n}'^{3}} - 4\Gamma_{sd}^{4}G_{d}^{2}(+)\Gamma_{1l}^{d}(+,+')G_{d}^{3}(+')G_{d}(-')\sum \frac{T^{2}}{W_{n}W_{n}'^{3}}$$

แทนค่า $G_{d}(+) = \frac{\tilde{G}_{d}}{i\Gamma}$ และ $G_{d}(-) = \frac{\tilde{G}_{d}}{-i\Gamma}$ โดยที่ $\tilde{G}_{d}$ ได้มาจากสมการ (4.6)

แทนค่า $\Gamma_{1l}^{d}(iw, iw')$ จากสมการ (3.4)

$$= - \pi T^{2}\frac{\Gamma_{sd}^{2}}{\Gamma^{3}}\tilde{\chi}_{1l}\sum\frac{1}{W_{n}W_{n}'^{3}}\left(1-\frac{\tilde{\chi}_{1l}}{\Gamma}(W+W')\right)\left(1-\frac{2W}{\Gamma}\right)\left(1-\frac{2W'}{\Gamma}\right)\times$$

$$\left\{\frac{1}{2} - \frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\left(1-\frac{W'}{\Gamma}\right) + \left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^{2}\left(1-\frac{2W'}{\Gamma}\right)\right\}$$

เพราะว่า $W_{n}' = (2n+1)\pi T$ และ $\pi T \sum^{W_{D}} \frac{1}{W_{n}} = \ln\left(\frac{2\gamma W_{D}}{\pi T}\right)$

แล้วเปลี่ยน W_{n}' ให้อยู่ในรูป $\lambda(j)$ ผลสุดท้ายจะได้

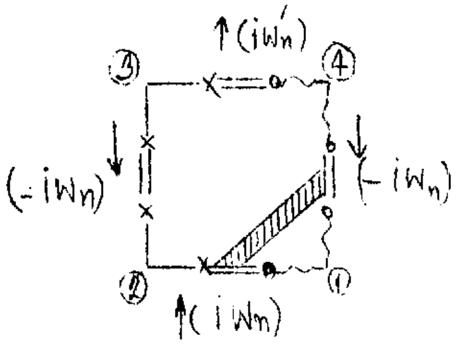
$$= -\frac{\Gamma_{sd}^{2}\tilde{\chi}_{1l}}{\Gamma^{3}}\frac{\lambda(3)}{\pi^{3}T^{2}}\left(1-2\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}+2\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}+2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^{2}\right)\left\{\ln\left(\frac{2\gamma W_{D}}{\pi T}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{W_{D}\tilde{\chi}_{1l}}{\Gamma}\left(2+\frac{\tilde{\chi}_{1l}}{\tilde{\chi}_{1l}}\right)\right\}$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูป ซีตา ฟังก์ชัน

$$= -\frac{7\zeta(3)}{8\pi^3 T^2}\frac{\Gamma_{sd}^2\,\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\Gamma^3}\left(1-2\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}+2\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}\right)^2\right)\left\{\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right)-\left(\frac{\omega_D\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}{\Gamma}\right)\times\left(2+\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\right)\right\} \quad \ldots (4.10)$$

การคำนวณแผนภาพ S_5



แทนค่า $g_{KK'}$ จากสมการ (4.1) และ (4.3) ลงในสมการที่ (4.8) เขียน $G_{kj}(i\omega)$ และ $G_{kj}(-i\omega)$ ให้อยู่ในรูปสั้น

$$= -4\, V_{sd}^2\, V_{Dd}^2\, T \sum_{\omega}\sum_{K} G(1D,+)\,G(1D,-)\,G_d^2(+)\,G_d^2(+')\,\Gamma^d_{\uparrow\downarrow}(i\omega,i\omega')$$

$$G(2,+')\;G(4D,-')\times\left(G(2,-')\,\delta(2,3)+V_{sd}^2\,G(2,-')\,G_d(-')\,G(3,-')\right)\times$$

$$\left(G(3,+')\,\delta(3,4D)+V_{sd}V_{Dd}\,G(3,+')\,G_d(+')\,G(4D,+')\right)$$

คูณเทอมในวงเล็บเข้าด้วยกันแล้วอาศัยสมบัติของโครเนคเกอร์ เดลตา ฟังก์ชัน จะได้เป็น

$$= -4\, V_{sd}^{3} V_{Dd}^{2} T^{2} \sum \sum G(1D,+) G(1D,-) G_d^{2}(+) \Gamma_{1\nu}^{d}(+,+') G_d^{2}(+') G(2,+') G(3,-') \times$$

$$G(2,-') G(3,+')\ \delta(2,3)\, \delta(3,4D)$$

$$-4 V_{sd}^{4} V_{Dd}^{2} T^{2} \sum \sum G(1D,+) G(1D,-) G_d^{2}(+) \Gamma_{1\nu}^{d}(+,+') G_d^{2}(+') G(2,+') G(3,-') \times$$

$$G(2,-') G_d(-') G(3,-') G(3,+')\ \delta(3,4D)$$

$$-4 V_{sd}^{3} V_{Dd}^{3} T^{2} \sum \sum G(1D,+) G(1D,-) G_d^{2}(+) \Gamma_{1\nu}^{d}(+,+') G_d^{2}(+') G(2,+') G(4D,-') \times$$

$$G(2,+') G_d(+') G(4D,+') G(2,-')\ \delta(2,3)$$

$$-4\, V_{sd}^{5} V_{Dd}^{3} T^{2} \sum \sum G(1D,+) G(1D,-) G_d^{2}(+) \Gamma_{1\nu}^{d}(+,+') G_d^{2}(+') G(2,+') G(4D,-') \times$$

$$G(2,-') G_d(-') G(3,-') G(3,+') G_d(+') G(4D,+')$$

แทนค่า $G(j,+)$ และ $G(j,-)$ แล้วเปลี่ยนเครื่องหมาย Σ เป็น $\int_{-\alpha}^{\alpha} N_{S(D)}(0)\, d\varepsilon$

โดยอาศัย calculus of residue จากภาคผนวก

แทนค่า $V_{sd} = \left(\Gamma_{sd} / \pi N_S(0) \right)^{\frac{1}{2}}$

$$V_{Dd} = \left(\Gamma_{Dd} / \pi N_D(0) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma = \Gamma_{sd} + \Gamma_{Dd}$$

$$\Gamma^{d}_{1\nu}(+,+') = \pi\Gamma\tilde{\Gamma}^{d}_{1\nu}(+,+')$$

$$G_d(+) = \frac{\tilde{G}_d}{i\Gamma} \quad \text{และ} \quad G_d(-) = \frac{\tilde{G}_d}{-i\Gamma}$$

จะได้

$$= -\frac{2\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^3}\,\pi T^2\sum_{\omega\omega'}\tilde{G}^2_d(+)\,\tilde{\Gamma}^d_{1\nu}(+,+')\,\tilde{G}^2_d(+')\,\frac{1}{3} +$$

$$\frac{2\Gamma^2_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^4}\,\pi T^2\sum_{\omega\omega'}\tilde{G}^2_d(+)\,\tilde{\Gamma}^d_{1\nu}(+,+')\,\frac{1}{3}\,\tilde{G}^2_d(+)\,\tilde{G}_d(-)$$

$$+\; 2\,\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}\,\pi T^2 V_{sd}V_{Dd}\sum_{\omega\omega'}N_D(0)\,\tilde{G}_d(+)\,\tilde{\Gamma}^d_{1\nu}(+,+')\,\frac{1}{3}\,\tilde{G}^3_d(+') -$$

$$\frac{4\Gamma^2_{sd}\Gamma_{Dd}V_{sd}V_{Dd}}{\Gamma^5}\,\pi^2T^2 N_D(0)\,\frac{1}{3}\sum_{\omega\omega'}\tilde{G}^2_d(+)\,\tilde{\Gamma}^d_{1\nu}(+,+')\,\tilde{G}^3_d(+')\,\tilde{G}_d(-')$$

แทนค่า $\tilde{G}_d$ จากสมการ (4.6) และ $\tilde{\Gamma}_{1\nu}(i\omega, i\omega')$ จากสมการ (3.4)

$$= -\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}\,\pi T^2\tilde{\chi}_{1\nu}}{2\Gamma^3}\sum\left(1-\frac{2\omega}{\Gamma}\right)\left(1-\frac{2\omega'}{\Gamma}\right)\left(1-\frac{\tilde{\chi}_{1\nu}}{\Gamma}(\omega+\omega')\right)\times$$

$$\left\{\left(1-\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}-\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_s(0)}}\sqrt{\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma}}+2\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma^2}\sqrt{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_s(0)}}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{\omega'}{\Gamma}\left(\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}+\sqrt{\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma}}\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_s(0)}}-4\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma^2}\sqrt{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_s(0)}}\right)\right\}$$

คูณเทอมหน้าเข้าไปในวงเล็บ และอาศัยวิธีการเดียวกับแผนภาพ S_4 ในที่สุดจะได้เป็น

$$= -\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^3}\frac{\widetilde{\chi}_{1k}}{\pi^2T^2}\lambda(3)\left\{1-\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}-\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_S(0)}}\sqrt{\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma}}+\frac{2\Gamma_{sd}\sqrt{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}}{\Gamma^2}\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_S(0)}}\right\}\times\left\{\ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T}\right)-\frac{W_D}{\Gamma}\chi_{1k}\left(2+\frac{\widetilde{\chi}_{1k}}{\widetilde{\chi}_{1k}}\right)\right\}$$

เขียนให้อยู่ในรูปซีตา ฟังก์ชัน

$$= -\frac{7}{8}\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma^3}\frac{\widetilde{\chi}_{1k}}{\pi^2T^3}\zeta(3)\left\{1-\frac{\Gamma_{sd}}{\Gamma}-\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_S(0)}}\sqrt{\frac{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}{\Gamma}}+\frac{2\Gamma_{sd}}{\Gamma^2}\sqrt{\Gamma_{sd}\Gamma_{Dd}}\sqrt{\frac{N_D(0)}{N_S(0)}}\right\}\times\left\{\ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T_c}\right)-\frac{W_D\widetilde{\chi}_{1k}}{\Gamma}\left(2+\frac{\widetilde{\chi}_{1k}}{\widetilde{\chi}_{1k}}\right)\right\} \quad \ldots (4.11)$$

การคำนวณแผนภาพ R_2 R_3 R_4 R_5 สามารถทำได้โดยวิธีการเดียวกันนี้ และจะได้ผลลัพธ์เหมือนกับแผนภาพ S_2 S_3 S_4 S_5 ตามลำดับ เพียงแต่เปลี่ยนตัวอักษรในสมการจาก S เป็น D และจาก D เป็น S เท่านั้น

การคำนวณทั้งหมดที่ได้กล่าวมานี้สามารถเขียนสรุปให้อยู่ในรูปสั้น ๆ ได้ดังนี้

$$\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle = \frac{7}{8}\frac{N_S(0)}{\pi^2T_c^2}\zeta(3) + S \quad \ldots (4.12\text{-ก})$$

เมื่อ $S = S_2 + S_3 + S_4 + S_5$

$$\int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle = \frac{7}{8}\frac{N_D(0)}{\pi^2 T_c^2} \zeta(3) + R \qquad \ldots (4.12-ข)$$

เมื่อ $R = R_2 + R_3 + R_4 + R_5$

<u>การคำนวณหา x_c</u>

จากสมการช่องว่างพลังงาน (2.5 – ก) และ (2.5 – ข) แทนค่า F^{+}_{SS} และ F^{+}_{DD} จากสมการ (2.7) และ (2.8) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$\Delta_{SS} = g_{SS}\left\{\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2\rangle \Delta_{SS} + \Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle \Delta^3_{SS}\right\} + g_{SD}\left\{\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2\rangle \Delta_{DD} + \Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle \Delta^3_{DD}\right\} \quad (4.13-ก)$$

$$\Delta_{DD} = g_{DD}\left\{\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2\rangle \Delta_{DD} + \Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle \Delta^3_{DD}\right\} + g_{SD}\left\{\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2\rangle \Delta_{SS} + \Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle \Delta^3_{SS}\right\} \quad (4.13-ข)$$

ใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤตเทอม Δ^3_{ii} มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ อัตราส่วน $\Delta_{DD} / \Delta_{SS}$ ที่อุณหภูมิวิกฤติจึงเขียนได้ดังนี้

$$x_c = \left.\frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}}\right|_{T = T_c}$$

จากสมการ (4.13 – ก) จะได้

$$= \frac{1 - g_{SS} \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle}{g_{SD} \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle} \qquad (4.14\text{-ก})$$

หรือจากสมการ (4.13 – ข) จะได้

$$= \frac{g_{SD} \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle}{1 - g_{DD} \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle} \qquad (4.14\text{ข})$$

ยกล้าน (Yoksan. 1981 : 217) ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยิ่งยวด ชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน ผลของงานวิจัยในการคำนวณหา $\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle$ และ $\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle$ ได้ว่า

$$\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle = N_S(0) f(T) + Q \qquad (4.15\text{-ก})$$

$$\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle = N_D(0) f(T) + P \qquad (4.15\text{-ข})$$

เมื่อ $f(T) = \ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T}\right) \pm \pi T \Sigma_n^{W_D} \frac{1}{|W_n|}$

$$Q = N_S(0)\frac{\tilde{C}_s}{1+\tilde{C}_s}\left\{\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right) + \frac{\tilde{\chi}_{1\nu}}{\tilde{\chi}_{1p}}\frac{a_s \ln^2\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c}\right)}{1+\tilde{C}_s\left[1+a_s\frac{\tilde{\chi}_{1\nu}}{\tilde{\chi}_{1p}}\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c}\right)\right]}\right\} \quad (4.15\text{-ก})$$

P มีค่าเหมือนกับ Q เพียงแต่เปลี่ยนตัวอักษรจาก $S \leftrightarrow D$ (4.16 – ข)

a_S และ a_D นิยามไว้ในสมการ (4.7 – ก) และ (4.7 – ข)

$$\tilde{C}_s = \frac{CN}{\pi N_S(0)\tilde{F}}$$

$$\tilde{C}_D = \frac{CN}{\pi N_D(0)\tilde{F}}$$

แทนค่า $\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1\langle a_2\rangle$ และ $\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle$ จากสมการ (4.15 – ก)

และ (4.15 – ข) ลงในสมการ (4.14 – ก และ 4;14 – ข) จะได้เป็น

$$x_e = \frac{1-\eta_S\left(f(T_c)+Q/N_S(0)\right)}{\eta'_D\left[f(T_c)+P/N_D(0)\right]} \quad (4.17\text{-ก})$$

$$\text{หรือ} = \frac{\eta'_S\left[f(T_e)+Q/N_S(0)\right]}{1-\eta_D\left[f(T_c)+P/N_D(0)\right]} \quad (4.17\text{-ข})$$

ในเมื่อ $\eta_S = g_{SS} N_S(0) \qquad \eta'_S = g_{SD} N_S(0) \qquad (4.18)$

$$\eta_D = g_{DD} N_D(0) \qquad \eta'_D = g_{SD} N_D(0) \qquad (4.19)$$

กรณีที่สารตัวนำยิ่งยวดไม่มีสิ่งเจือปน ปริมาณ P และ Q จะเป็นศูนย์

$$T_c \longrightarrow T_{c_0} \quad \text{และ} \quad x_c \longrightarrow x_{c_0}$$

ดังนั้น

$$x_{c_0} = \frac{1 - \eta_S f(T_{c_0})}{\eta'_D f(T_{c_0})} = \frac{\frac{1}{f(T_{c_0})} - \eta_S}{\eta'_D} \qquad (4.20\text{-ก})$$

$$= \frac{\eta'_S f(T_{c_0})}{1 - \eta_D f(T_{c_0})} = \frac{\eta'_S}{\frac{1}{f(T_{c_0})} - \eta_D} \qquad (4.20\text{-ข})$$

โดยที่ $f(T_{c_0}) = \ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T_{c_0}}\right)$

เมื่อแทนค่าสมการ (4.15 – ก) และ (4.15 – ข) ลงในสมการ (4.13 – ก) และ (4.13 – ข) ตามลำดับ (หลังจากตัดเทอม Δ^3_{ii} ทิ้งแล้ว เพราะ Δ^3_{ii} มีค่าน้อยใกล้ ๆ T_c) สมการทั้งสองเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Delta_{SS} = g_{SS}\Delta_{SS}\left[N_S(0)f(T_c)+Q\right] + g_{SD}\Delta_{DD}\left[N_D(0)f(T_c)+P\right] \quad \ldots (4.21\text{-ก})$$

$$\Delta_{DD} = g_{DD}\Delta_{DD}\left[N_D(0)f(T_c)+P\right] + g_{SD}\Delta_{SS}\left[N_S(0)f(T_c)+Q\right] \quad \ldots (4.21\text{-ข})$$

อาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง η และ g จากสมการ (4.18) และ (4.19) สามารถเขียนสมการข้างบนทั้งสองสมการได้ดังนี้

$$1 = \eta_S f(T_c) + \eta_S \frac{Q}{N_S(0)} + \left(\eta'_D f(T_c) + \eta'_D \frac{P}{N_D(0)}\right)\frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}} \quad \ldots (4.22\text{-ก})$$

$$1 = \eta_D f(T_c) + \eta_D \frac{P}{N_D(0)} + \left(\eta'_D f(T_c) + \eta'_S \frac{Q}{N_S(0)}\right)\frac{\Delta_{SS}}{\Delta_{DD}} \quad \ldots (4.22\text{-ข})$$

จัดเทอมบางเทอมในแต่ละสมการให้เหมาะสม แล้วนำสมการ (4.22 – ก) คูณกับสมการ (4.22 – ข)

$$\left(1-\eta_S f(T_c) - \eta_S\frac{Q}{N_S(0)}\right)\left(1-\eta_D f(T_c) - \eta_D \frac{P}{N_D(0)}\right)$$

$$= \left(\eta'_D f(T_c) + \eta'_D\frac{P}{N_D(0)}\right)\left(\eta'_S f(T_c) + \eta'_S \frac{Q}{N_S(0)}\right)$$

คูณแต่ละวงเล็บเข้าด้วยกัน จะได้เป็น

$$(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')f^2(T_c) - \left[\eta_S + \eta_D - (\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')\left(\frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right)\right]f(T_c)$$
$$+\left[1 + (\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')\frac{PQ}{N_S(0)N_D(0)} - \left(\frac{P\eta_D}{N_D(0)} + \frac{Q\eta_S}{N_S(0)}\right)\right] = 0 \qquad (4.23)$$

กรณีที่เป็นตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ ($P = Q = 0$) สมการ (4.23) จะกลายเป็น

$$(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')f^2(T_{co}) - (\eta_S + \eta_D)f(T_{co}) + 1 = 0 \qquad (4.24)$$

แก้สมการ (4.24) จะได้ค่า $f(T_{c_0})$ ดังนี้

$$f(T_{co}) = \frac{\eta_S + \eta_D - \left[(\eta_S + \eta_D)^2 + 4\eta_S'\eta_D'\right]^{\frac{1}{2}}}{2(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')} \qquad (4.25)$$

<u>การคำนวณหา</u> $\frac{d\Delta_{SS}^2}{dT}$

ขั้นแรกต้องคำนวณหาค่า Δ_{SS} ที่อยู่ในรูปที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเสียก่อน เริ่มต้นจากสมการช่องว่างพลังงาน (2.5 – ก) และ (2.5 – ข) โดยนำ g_{SS} และ g_{SD} หารตลอดในแต่ละสมการตามลำดับ

$$T\Sigma F_{SS}^{+} + \frac{g_{SD}}{g_{SS}} T\Sigma F_{DD}^{+} = \frac{\Delta_{SS}}{g_{SS}} \qquad (4.26\text{-ก})$$

$$T\Sigma F_{SS}^{+} + \frac{g_{DD}}{g_{SD}} T\Sigma F_{DD}^{+} = \frac{\Delta_{DD}}{g_{SD}} \qquad (4.26\text{-ข})$$

นำสมการ (4.26 – ก) ตั้งลบด้วยสมการ (4.26 – ข) จะได้

$$T\Sigma F^{+}_{DD} = \frac{\Delta_{DD} g_{SS} - \Delta_{SS} g_{SD}}{g_{SS} g_{DD} \; g^{2}_{SD}} \qquad (4.27)$$

ในทำนองเดียวกันนำ g_{SD} หารสมการ (2.5 – ก) และ g_{DD} หารสมการ (2.5 – ข) แล้วนำสมการทั้งสองลบกันก็จะได้

$$T\Sigma F^{+}_{SS} = \frac{\Delta_{SS} g_{DD} - \Delta_{DD} g_{SD}}{g_{SS} g_{DD} - g^{2}_{SD}} \qquad (4.28)$$

สมการ (2.5 – ก) และ (2.5 – ข) อาจเขียนให้อยู่ในรูปใหม่ดังนี้

$$\frac{g_{SS}}{\Delta_{SS}} T\Sigma F^{+}_{SS} + \frac{g_{SD}}{\Delta_{SS}} T\Sigma F^{+}_{DD} = 1 \qquad (4.29\text{-ก})$$

$$\frac{g_{DD}}{\Delta_{DD}} T\Sigma F^{+}_{DD} + \frac{g_{SD}}{\Delta_{DD}} T\Sigma F^{+}_{SS} = 1 \qquad (4.29\text{-ข})$$

สมการ (2.5 – ข) ตั้งหารด้วย Δ_{SS} จะได้เป็น

$$\frac{g_{DD}}{\Delta_{SS}} T\Sigma F^{+}_{DD} + \frac{g_{SD}}{\Delta_{SS}} T\Sigma F^{+}_{SS} = \frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}} = X_c \qquad (4.30)$$

จากสมการ (4.29 – ข) สามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$g_{DD} T\Sigma F^{+}_{DD} = \left(1 - \frac{g_{SD} T\Sigma F^{+}_{SS}}{\Delta_{DD}}\right) \Delta_{DD} \qquad (4.31)$$

แทนค่า $g_{DD} T \Sigma F^{+}_{DD}$ จากสมการ (4.31) ลงในสมการ (4.30) จะได้

$$\frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}} = \frac{\dfrac{g_{SD} T \Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{SS}}}{\left(1 - \dfrac{g_{DD} T \Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{DD}}\right)} \qquad (4.32)$$

สมการ (4.29 – ก) อาจเขียนได้ใหม่ ดังนี้

$$\frac{g_{SS}}{\Delta_{SS}} T \Sigma F^{+}_{SS} + g_{SD} \frac{\Delta_{DD}}{\Delta_{SS}} \left(\frac{T \Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{DD}} \right) = 1$$

แทนค่า $\Delta_{DD} / \Delta_{SS}$ จากสมการ (4.32) ลงในสมการบน แล้วทำให้เป็นผลสำเร็จจะได้

$$g_{SS} T \frac{\Sigma F^{+}_{SS}}{\Delta_{SS}} + g_{DD} T \frac{\Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{DD}} - \left(g_{SS} g_{DD} - g^{2}_{SD} \right) \left(T \frac{\Sigma F^{+}_{SS}}{\Delta_{SS}} \right) \left(\frac{T \Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{DD}} \right) = 1 \qquad (4.33)$$

แทนค่า $\dfrac{T \Sigma F^{+}_{SS}}{\Delta_{SS}}$ และ $T \dfrac{\Sigma F^{+}_{DD}}{\Delta_{DD}}$ จากสมการ (2.7) และ (2.8) ลงในสมการ (4.33)

$$g_{SS}\left(\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle + \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle \Delta^{2}_{SS} \right) + g_{DD} \left(\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle + \right.$$

$$\left. \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle \Delta^{2}_{DD} \right) - \left(g_{SS} g_{DD} - g^{2}_{SD} \right) \left(\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2 \rangle + \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right.$$

$$\left. \langle a_4 \rangle \Delta^{2}_{SS} \right) \left(\Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2 \rangle + \Sigma \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle \Delta^{2}_{DD} \right) = 1$$

ต้องการหาค่า Δ^2_{SS} คูณในวงเล็บให้เป็นผลสำเร็จแล้วย้ายเทอม Δ^2_{DD} ไปไว้ด้านขวามือให้หมด และด้วยเหตุที่ว่าเมื่อ $T \longrightarrow T_c$, $\Delta_{DD} \longrightarrow 0$ ดังนั้น Δ^2_{DD} จึงมีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้

$$\Delta^2_{SS} = \frac{1 - g_{SS}\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2\rangle - g_{DD}\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle + (g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle a_2\rangle \sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle}{\left[\begin{array}{l} g_{SS}\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle + g_{DD}\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle x^2_c \\ \qquad - (g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})\left\{\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle \sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle \right. \\ \qquad\qquad \left. + \sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle \sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle D_4\rangle x^2_c\right\} \end{array}\right]}$$

$$= \frac{1}{M}\left\{1 - g_{SS}\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle a_2\rangle - g_{DD}\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle + (g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle a_2\rangle\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle\right\}$$

เมื่อ M ใช้เขียนเทอมที่เป็นส่วนทั้งหมด

แทนค่า $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle a_2\rangle$ และ $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1\langle D_2\rangle$ จากสมการ (4.15 – ก) และ (4.15 – ข) แทนลงในสมการข้างบน แล้วทำให้เป็นผลสำเร็จ จัดเทอมเสียใหม่จะได้

$$\Delta^2_{SS} = \frac{1}{M}\left\{1 - g_{SS}Q - g_{DD}P + (g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})PQ + f(T)\left[-g_{SS}N_S(0) - g_{DD}N_D(0) + (N_S(0)P + N_D(0)Q)(g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})\right] + f^2(T)N_S(0)N_D(0)(g_{SS}g_{DD} - g^2_{SD})\right\} \quad \ldots(4.34)$$

พิจารณา $f(T)$

เพราะว่า $$f(T) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right)$$

$$f(T) = \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c}\right)$$

$$f(T) - f(T_c) = \ln\frac{T}{T_c} = -\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

แทนค่า $f(T)$ ลงในสมการ (4.33) จะได้

$$\Delta_{ss}^2 = \frac{1}{M}\Big\{1 - g_{ss}Q - g_{DD}P + (g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)PQ + f(T_c)\Big[-g_{ss}N_s(0) - g_{DD}N_D(0) + \left(N_s(0)P + N_D(0)Q\right)(g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)\Big] + f^2(T_c)\Big[N_s(0)N_D(0)(g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)\Big] + \left(1-\frac{T}{T_c}\right)\Big[-g_{ss}N_s(0) - g_{DD}N_D(0) + (g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)\big(N_s(0)P + N_D(0)Q + 2N_s(0)N_D(0)f(T_c)\big)\Big]\Big\} \tag{4.35}$$

ทั้งนี้ได้ตัดเทอมที่ $O\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2$ ทิ้ง ในเมื่อ $T \simeq T_c$

จากสมการ (4.23) จะได้

$$-g_{ss}Q - g_{DD}P + (g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)PQ + f(T_c)\Big[-g_{ss}N_s(0) - g_{DD}N_D(0) + \left(N_s(0)P + N_D(0)Q\right)(g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2)\Big] + f^2(T_c)\Big[N_s(0)N_D(0)\left(g_{ss}g_{DD} - g_{sD}^2\right)\Big] = -1$$

ดังนั้นสมการ (4.35) จะกลายเป็น

$$\Delta^2_{ss} = -\frac{1}{M}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\Big[g_{ss}N_S(0)+g_{DD}N_D(0)-(g_{ss}g_{DD}-g^2_{SD})\big(N_S(0)P+N_D(0)Q$$

$$+2N_S(0)N_D(0)f(T_c)\big)\Big]$$

อาศัยความสัมพันธ์ระหว่าง η และ g จากสมการ (4.18) และ (4.19) สมการข้างบนนี้จะกลายเป็น

$$\Delta^2_{ss} = -\frac{1}{M}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\left[\eta_S+\eta_D-(\eta_S\eta_D-\eta'_S\eta'_D)\left(\frac{P}{N_D(0)}+\frac{Q}{N_S(0)}+2f(T_c)\right)\right] \quad (4.36)$$

$$\frac{d\Delta^2_{ss}}{dT} = \frac{1}{MT_c}\left[\eta_S+\eta_D-(\eta_S\eta_D-\eta'_S\eta'_D)\left(\frac{P}{N_D(0)}+\frac{Q}{N_S(0)}+2f(T_c)\right)\right] \quad (4.37)$$

พิจารณา M

$$M = g_{ss}\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle + g_{DD}\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle D_4\rangle K_e^2 - (g_{ss}g_{DD}-g^2_{SD})\times$$

$$\left[\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1\langle D_2\rangle + \sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle a_4\rangle\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\langle D_4\rangle K_e^2\right]$$

เปลี่ยนค่า g เป็น η แล้วแทนค่าอินทิกรัลต่าง ๆ ในที่สุดจะได้

$$M = \frac{7}{8\pi^2}\frac{\zeta(3)}{T_c^2}\left(\eta_S + \kappa_c^2 \eta_D\right) + \eta_S \frac{S}{N_S(0)} + \eta_D \frac{R\kappa_c^2}{N_D(0)} - \left(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D'\right)$$

$$\left[\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\left(\frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right) + f(T_c)\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\left(1+\kappa_c^2\right) + \frac{PS + \kappa_c^2 RQ}{N_S(0)\,N_D(0)}\right] \qquad (4.37\text{-ก})$$

แทนค่า M ลงในสมการ (4.37) จะได้ค่า $d\Delta_{SS}^2/dT$ ดังต้องการ

พิจารณากรณีที่สารตัวนำยิ่งยวดเป็นแบบบริสุทธิ์ $P = Q = 0$ สมการที่ (4.36) เขียนได้เป็น

$$\Delta_{SS_0}^2 = -\frac{1}{M_0}\left(1 - \frac{T}{T_{c_0}}\right)\left[\eta_S\eta_D - 2f(T_{c_0})\left(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D'\right)\right] \qquad (4.38)$$

เมื่อ
$$M_0 = g_{SS}\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle_0 + g_{DD}\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle_0 \kappa_{c_0}^2$$

$$-\left(g_{SS}g_{DD} - g_{SD}^2\right)\left\{\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle a_2\rangle_0 \,\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 \langle D_2\rangle_0\right.$$

$$\left. + \kappa_{c_0}^2 \Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle_0 \,\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle_0\right\}$$

แทนค่า $\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle_0$ และ $\Sigma\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle_0$ จากสมการ (4.4).

แทนค่า $\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 \langle a_2\rangle_0$ และ $\sum\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 \langle D_2\rangle_0$ จากสมการ (4.15)

$$M_0 = g_{SS} N_S(0) \frac{\lambda(3)}{\pi^2 T_{e_0}^2} + g_{DD} N_D(0) \frac{\lambda(3)}{\pi^2 T_{e_0}^2} \kappa_{e_0}^2$$

$$-\left(g_{SS} g_{DD} - g_{SD}^2\right)\left\{\frac{N_S(0)\lambda(3)}{2\pi^2 T_{e_0}^2} N_D(0) f(T_{e_0}) + \kappa_{e_0}^2 N_S(0) f(T_{e_0}) N_D(0) \frac{\lambda(3)}{\pi^2 T_{e_0}^2}\right\}$$

$$= \frac{\lambda(3)}{\pi^2 T_{e_0}^2}\left\{\eta_S + \eta_D \kappa_{e_0}^2 - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')(1 + \kappa_{e_0}^2) f(T_{e_0})\right\} \qquad (4.39)$$

ดิฟเฟอเรนซิเอทสมการ (4.38)

$$\frac{d\Delta_{SS0}^2}{dt} = \frac{1}{M_0 T_{e_0}}\left[\eta_S + \eta_D - 2f(T_{e_0})(\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')\right] \qquad (4.40)$$

แทนค่า M_0

$$= \frac{\pi^2 T_{e_0}\left[\eta_S + \eta_D - 2f(T_{e_0})(\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')\right]}{\lambda(3)\left[\eta_S + \eta_D \kappa_{e_0}^2 - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')(1 + \kappa_{e_0}^2) f(T_{e_0})\right]} \qquad (4.41)$$

<u>การหาค่า ΔC</u>

จากสมการ (2.12)

$$\Delta C = T\sum_{K\sim K_3} \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{\langle a_4\rangle + \langle D_4\rangle \kappa_e^2\right\}\left(\frac{d\Delta_{SS}^2}{dT}\right)^2 \Bigg|_{T = T_e}$$

แทนค่า $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle$ และ $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle$ จากสมการ (4.12)

แทนค่า $\frac{d\Delta^2_{ss}}{dT}$ จากสมการ (4.37) ลงในสมการ (2.12) จะได้การเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ ณ ที่อุณหภูมิวิกฤต

$$\Delta C(T_c) = \frac{1}{T_c}\left\{\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\left(N_S(0) + \kappa_e^4 N_D(0)\right) + \left(S + R\kappa_e^4\right)\right\} \times$$

$$\left\{\frac{\eta_S + \eta_D - (\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)\left(2f(T_c) + \frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right)}{\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}\left(\eta_S + \eta_D\kappa_e^2\right) + \frac{\eta_S S}{N_S(0)} + \eta_D\kappa_e^2\frac{R}{N_D(0)} - (\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)\left[\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}\left(\frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right) + f(T_c)\,7\zeta(3)(1+\kappa_e^2) + \left(\frac{PS + RQ\kappa_e^2}{N_S(0)N_D(0)}\right)\right]}\right\}^2 \quad (4.42)$$

สมการที่ (4.42) จะเป็นสมการที่บอกปริมาณการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สันที่อุณหภูมิวิกฤตจึงสามารถทราบได้ ด้วยการแทนค่าฟังก์ชั่น P, Q, R และ S ที่ได้คำนวณมาแล้ว แรงดึงดูดสิทธิของการจับคู่ของอิเล็กตรอนในแต่ละแถบและระหว่างแถบพลังงาน (η) และ κ_e ลงในสมการ

เราจะนำสมการที่ (4.42) มาพิจารณาในแต่ละกรณีดังต่อไปนี้

1. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบ แต่ไม่มีสิ่งเจือปน

$$\Delta C_0 = T_{c_0}\left\{\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{\langle a_4\rangle_0 + \langle D_4\rangle \kappa_{c_0}^4\right\}\left(\frac{d\Delta^2_{ss_0}}{dT}\right)^2\right\}$$

แทนค่า $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle_0$, $\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4\rangle_0$ จากสมการที่ (4.4)

และแทนค่า $\frac{d\Delta^2_{ss_0}}{dT}$ จากสมการที่ (4.40)

ในที่สุดจะได้

$$\Delta C_0 = -\frac{8\pi^2 T_{c_0}}{7\zeta(3)}\left(N_S(0) + N_D(0)\kappa_{c_0}^4\right)\left\{\frac{\eta_S + \eta_D - 2(\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)f(T_{c_0})}{\eta_S + \eta_D\kappa_{c_0}^2 - (\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)f(T_{c_0})(1+\kappa_{c_0}^2)}\right\}^2 \quad (4.43)$$

ซึ่งผลลัพธ์นี้ตรงกับงานวิจัยของโชกะ และวาคะ

เปลี่ยน $\zeta(3)$ ในสมการ (4.42) และ (4.43) ให้อยู่ในรูป $\lambda(3)$
แล้วนำสมการ (4.42) ตั้งหารด้วยสมการ (4.43) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\frac{\Delta C}{\Delta C_0} = \frac{T_c\left[N_S(0) + \kappa_c^4 N_D(0) + \frac{\pi^2 T_c^2}{\lambda(3)} + R\kappa_c^4\right]}{T_{c_0}\left[N_S(0) + \kappa_{c_0}^4 N_D(0)\right]} \quad (4.44)$$

$$\times\left\{\frac{\eta_S+\eta_D-(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')\left[2f(T_c)+\frac{P}{N_D(0)}+\frac{Q}{N_S(0)}\right]}{\eta_S+\eta_D-2(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')f(T_{c0})}\right\}^2$$

$$X'\left\{\frac{\eta_S+\kappa_{c0}^2\eta_D-(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')f(T_{c0})(1+\kappa_{c0}^2)}{(\eta_S+\kappa_c^2\eta_D)-(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')\left[\frac{P}{N_D(0)}+\frac{\kappa_c^2 Q}{N_S(0)}+f(T_c)(1+\kappa_c^2)+\frac{\pi^2 T_c^2}{\gamma(3)}\left(\frac{PS+\kappa_c^2 QR}{N_D(0)N_S(0)}\right)\right]}\right\}^2$$

พิจารณาเฉพาะเทอม $\left\{\frac{\eta_S+\eta_D(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')\left[2f(T_c)+\frac{P}{N_D(0)}+\frac{Q}{N_S(0)}\right]}{\eta_S+\eta_D-2(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')f(T_{c0})}\right\}^2$

เพราะว่า $f(T_c)-f(T_{c0})=-\left(1-\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = -\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}$

แทนค่า $f(T_c)$ จะได้เป็น

$$\left\{\frac{\eta_S+\eta_D-(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')\left[2f(T_c)-2\left(\frac{\Delta T_c}{T_{c0}}\right)+\frac{P}{N_D(0)}+\frac{Q}{N_S(0)}\right]}{\eta_S+\eta_D-2(\eta_S\eta_D-\eta_S'\eta_D')f(T_{c0})}\right\}^2$$

อาศัยผลงานวิจัยของยาลล้าน ที่ว่า

$$2\left|\frac{\Delta T_c}{T_{c_0}}\right| = \frac{P}{N_D(0)}(\beta+1) - \frac{Q}{N_S(0)}(\beta-1) \qquad (4.45)$$

โดยที่

$$\beta = \frac{\eta_D - \eta_S}{\left[(\eta_D-\eta_S)^2 + 4\eta_S'\eta_D'\right]^{\frac{1}{2}}}$$

แทนค่า $\eta_S + \eta_D - (\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D') = f(T_{c_0})$ จากสมการ (4.25)

แทนค่า $2(\Delta T_c / T_{c_0})$ จากสมการ (4.45)

$$= \left\{1 - \frac{\beta(\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)}{\left[(\eta_D-\eta_S)^2 + 4\eta_S'\eta_D'\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}^2$$

อาศัยทฤษฎีบททวินามกระจายสมการข้างบนจะได้เป็น

$$= 1 - \frac{2\beta}{A_0'}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)$$

เมื่อ $A_0 = \left[(\eta_S+\eta_D)^2 + 4\eta_S'\eta_D'\right]^{\frac{1}{2}}$

พิจารณาเฉพาะเทอม

$$\frac{(\eta_S + \eta_D \varkappa_e^2) - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')\left[\frac{P}{N_D(0)} + \frac{\varkappa_e^2 Q}{N_S(0)} + f(T_e)(1+\varkappa_e^2) + \frac{\pi^2 T_e^2}{\lambda(3)}\left(\frac{PS + \varkappa_e^2 QR}{N_D(0) N_S(0)}\right)\right]}{\eta_S + \varkappa_{e0}^2 \eta_D - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D') f(T_{e0})(1+\varkappa_{e0}^2)}$$

เทอม $\frac{\pi^2 T_e^2}{\lambda(3)} \left(\frac{PS + \varkappa_e^2 QR}{N_D(0) N_S(0)}\right)$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่น ๆ จึงตัดทิ้งได้

และคิดว่า $x_e \rightarrow x_{e0}$ เพราะ $P, Q \ll 1$

เทอมดังกล่าวจะได้ผลเป็น

$$\simeq \frac{\eta_S + \eta_D \varkappa_{e0}^2 - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')\left[\frac{P}{N_D(0)} + \frac{\varkappa_{e0}^2 Q}{N_S(0)} + \left(f(T_{e0}) - \left(\frac{\Delta T_e}{T_{e0}}\right)\right)(1+\varkappa_{e0}^2)\right]}{\eta_S + \varkappa_{e0}^2 \eta_D - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D') f(T_{e0})(1+\varkappa_{e0}^2)}$$

$$\doteq 1 - \frac{(\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D')\left[\frac{P}{N_D(0)} + \frac{\varkappa_{e0}^2 Q}{N_S(0)} - \left(\frac{\Delta T_e}{T_{e0}}\right)(1+\varkappa_{e0}^2)\right]}{\eta_S + \varkappa_{e0}^2 \eta_D - (\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D') f(T_{e0})(1+\varkappa_{e0}^2)}$$

แทนค่า $\Delta T_e / T_{e0}$ จากสมการ (4.45) และแทนค่า $(\eta_S \eta_D - \eta_S' \eta_D') f(T_{e0})$ จากสมการ (4.25) ในที่สุดจะได้เป็น

$$= 1 + \left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right) \frac{1}{A_0} \left[\frac{(\beta-1) + (\beta+1)\varkappa_{e0}^2}{(\beta-1) - (\beta+1)\varkappa_{e0}^2}\right]$$

ดังนั้น

$$\frac{\eta_S + \kappa_c^2 \eta_D - (\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D') f(T_{c_0})(1+\kappa_{c_0}^2)}{(\eta_S + \eta_D\kappa_c^2) - (\eta_S\eta_D - \eta_S'\eta_D')\left[\frac{P}{N_D(0)} + \frac{\kappa_c^2 Q}{N_S(0)} + f(T_c)(1+\kappa_c^2) + \frac{\pi^2 T_c^2}{\lambda(3)}\left(\frac{PS + \kappa_c^2 QR}{N_D(0)\,N_S(0)}\right)\right]}$$

$$= \left\{ 1 + \left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)\frac{1}{A_c}\left[\frac{(\beta-1) + (\beta+1)\kappa_{c_0}^2}{(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{c_0}^2}\right]\right\}^{-1}$$

อาศัยทฤษฎีบททวินามกระจายสมการข้างบนจะได้

$$\doteq 1 - \frac{2}{A_c}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)\left[\frac{(\beta-1) + (\beta+1)\kappa_{c_0}^2}{(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{c_0}^2}\right]$$

พิจารณาเทอม $\dfrac{N_S(0) + \kappa_c^4 N_D(0) + \frac{\pi^2 T_c^2}{\lambda(3)}(S + R\kappa_c^4)}{N_S(0) + \kappa_{c_0}^4 N_D(0)}$

เพราะว่า $T_c = T_{c_0} + \Delta T_c$

แทนค่า T_c ลงในสมการข้างต้น โดยที่ $(\Delta T_c)^2$ และ $2T_{c_0}\Delta T_c$ มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ ในที่สุดจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$= 1 + \frac{\pi^2 T_{c_0}^2}{\lambda(3)}\frac{(S + R\kappa_{c_0}^4)}{(N_S(0) + \kappa_{c_0}^4 N_D(0))}$$

ค่าผลลัพธ์ที่ได้จากการพิจารณาของแต่ละเทอมแทนลงในสมการ (4.44)

$$\frac{\left(\frac{\Delta e}{\Delta e_0}\right)}{\left(\frac{T_c}{T_{c_0}}\right)} = \left(1 + \frac{\pi^2 T_{c_0}^2 (S + R\kappa_{e_0}^4)}{\lambda(3)\left[N_S(0) + \kappa_{e_0}^4 N_D(0)\right]}\right)\left(1 - \frac{2\beta}{A_0}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)\right)$$

$$* \left(1 - \frac{2}{A_0}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)\left[\frac{(\beta-1) + (\beta+1)\kappa_{e_0}^2}{(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{e_0}^2}\right]\right)$$

คูณในวงเล็บทั้งหมดเข้าด้วยกัน ตัดเทอมบางเทอมที่มีค่าน้อย ๆ ทิ้ง

$$= 1 + \frac{\pi^2 T_{c_0}^2 \left[S + R\kappa_{e_0}^4\right]}{\lambda(3)\left[N_S(0) + \kappa_{e_0}^4 N_D(0)\right]} - \left(\frac{2}{A_0}\right)\left[\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right]\left(\beta + \frac{(\beta-1) + (\beta+1)\kappa_{e_0}^2}{(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{e_0}^2}\right)$$

เปลี่ยน $\lambda(3)$ ให้อยู่ในรูป $\zeta(3)$ ในที่สุดจะได้เป็น

$$= 1 + \frac{8\pi^2 T_{c_0}^2 (S + R\kappa_{c_0}^4)}{7\zeta(3)\left[N_S(0) + \kappa_{c_0}^4 N_D(0)\right]} + \frac{2}{A_0}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right)\frac{(1-\beta^2)(1-\kappa_{c_0}^2)}{\left[(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{c_0}^2\right]} \qquad (4.45)$$

นิยามให้ $N_d^{eff}(0)$ เป็นความหนาแน่นสุทธิของสถานะอิเลคตรอนที่ระดับเฟอร์มิ โดยที่

$$Ni\, N_d^{eff}(0) = \left(N_S(0) + N_D(0)\right)\left\{\frac{8\pi^2 T_{c_0}^2 (S + \kappa_{c_0}^4 R)}{7\zeta(3)\,(N_S(0) + \kappa_{c_0}^4 N_D(0))} + \frac{2}{A_0}\left(\frac{Q}{N_S(0)} - \frac{P}{N_D(0)}\right) \times \frac{(1-\beta^2)(1-\kappa_{c_0}^2)}{\left[(\beta-1) - (\beta+1)\kappa_{c_0}^2\right]}\right\} \qquad (4.46)$$

ดังนั้น

$$\left(\frac{\Delta C}{\Delta C_o}\right) \Big/ \left(\frac{T_c}{T_{co}}\right) = 1 + \frac{N_i N_d^{eff}(0)}{N_s(0) + N_D(0)} \qquad (4.47)$$

2. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานแถบเดียว และมีสิ่งเจือปน

กรณีนี้จะได้เงื่อนไข $\beta = -1 \quad (\eta_D = \eta_s' = \eta_v' = 0)$

และ $\kappa_c = 0, \quad \Gamma = \Gamma_{sd} \quad (\Gamma_{Dd} = 0)$

แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงในสมการ (4.37) จะได้

$$\frac{d\Delta_s^2}{dT} = \frac{\eta_s}{M T_c}$$

$$\text{โดยที่} \quad M = g_{ss} \sum \int_0^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle = g_{ss}\left[S_1 + S_2 + S_4\right]$$

$$= g_{ss}\left\{\frac{N_s(0)\,\lambda(3)}{\pi^2 T_c^2} - \frac{4\,\lambda(3)\,N_i}{\pi^3 T_c^2\,\Gamma}\left[\frac{3}{4} + \frac{\tilde{\chi}_{1\downarrow}}{\tilde{\chi}_{1\uparrow}}\left(\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T}\right) - \left(2 + \frac{\tilde{\chi}_{1\downarrow}}{\tilde{\chi}_{1\uparrow}}\right)\frac{\omega_D}{\Gamma}\right)\right]\right\}$$

เราเติม N_i (จำนวนอะตอมของสิ่งเจือปน) ลงไปตรงเทอม S_2 และ S_4 เพราะคิดจำนวนอะตอมของสิ่งเจือปนหลายอะตอม ตัดเทอม 3/4 ทิ้งเพราะว่ามีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมอื่น ๆ

$$M = g_{ss}\frac{N_s(0)\lambda(3)}{\pi^2 T_e^2}\left\{1-\frac{4N_i}{\pi N_s \Gamma}\left[\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\left\{\ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T_{e0}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(2+\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\right)\frac{W_D}{\Gamma}\right\}\right]\right\}$$

สมการ (2.12) จะกลายเป็น

$$\Delta C_1 = T\sum\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle \left(\frac{d\Delta_{ss}^2}{dT}\right)^2$$

แทนค่า $\int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4\rangle$ และ $\left(\frac{d\Delta_{ss}^2}{dT}\right)^2$ จะได้เป็น

$$\Delta C_1 = \frac{g_{ss}N_s^2(0)}{T_e M}$$

แทนค่า M โดยเปลี่ยน $\lambda(3)$ ให้อยู่ในรูป $\zeta(3)$

$$\Delta C_1 = \frac{8\pi^2 N_s(0) T_e}{7\zeta(3)}\left\{1-4\frac{N_i}{N_s(0)\pi\Gamma}\left[\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\left\{\ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T_{e0}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(2+\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\right)\frac{W_D}{\Gamma}\right\}\right]\right\}$$

อาศัยทฤษฎีบททวินาม และตัดเทอมที่มีค่าน้อย ๆ ทิ้ง ในที่สุดจะได้เป็น

$$\Delta C_1 = \frac{8\pi^2 N_s(0) T_e}{7\zeta(3)}\left\{1+\frac{4N_i}{N_s(0)\pi\Gamma}\left[\frac{\tilde{\chi}_{\uparrow\downarrow}}{\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}}\ln\left(\frac{2\gamma W_D}{\pi T_{e0}}\right)\right]\right\} \quad \ldots \quad (a.08)$$

3. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ และมีแถบพลังงานแถบเดียว จะได้เงื่อนไข ความเข้มข้นของสิ่งเจือปน (c) = 0 , $\alpha_d = \alpha_{d_0} = 0$

$$\eta_D' = \eta_D' = \eta_D = 0 \quad \text{และ} \quad P = Q = R = S = 0$$

แทนเงื่อนไขเหล่านี้ลงในสมการ (4.42) จะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\Delta C_{10} = \frac{8\pi^2 N_S(0) T_{c0}}{7\,\zeta(3)} \qquad (4.49)$$

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ γ ของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ และมีแถบพลังงานแถบเดียวมีค่า $= \frac{2}{3}\pi^2 N_S(0)$

สมการ (4.49) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Delta C_{10} = \frac{8 \times 3}{7\,\zeta(3) \times 2} \gamma T_{c0}$$

แทนค่า $\zeta(3) = 1.20$

$$\Delta C_{10} = 1.42 \; \gamma T_{c0}$$

ผลการคำนวณนี้ตรงกับผลลัพธ์ที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส

นำสมการ (4.48) ตั้งแล้วหารด้วยสมการ (4.49) จะได้

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta C_{10}} = \frac{T_c}{T_{c0}} \left(1 + \frac{4 N_i}{\pi N_S(0) \Gamma} \left[\frac{\tilde{\chi}_{1\nu}}{\tilde{\chi}_{1\nu}} \ln \left(\frac{2\gamma \omega_D}{\pi T_{c0}} \right) \right] \right) \qquad (4.50)$$

ในกรณีที่อุณหภูมิคอนโดของสารตัวนำยิ่งยวดมีค่ามาก แรงดึงดูดการจับคู่ของอิเลคตรอนจะมีค่าค่อนข้างน้อย จะได้เงื่อนไขว่า $\tilde{\chi}_{1\nu} = \pi \Gamma / 4 T_K$

และ $\ln \left(\frac{2\gamma \omega_D}{\pi T_{c_0}} \right) \approx 1/4$

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta C_{10}} = \frac{T_c}{T_{c0}}\left(1 + \frac{N_i}{4N_s(0)T_K}\right)$$

จะได้ผลลัพธ์ตรงกับงานวิจัยของอิชิโนส (Ichinose, 1977 : 404)

ถ้าเขียนสมการ (4.50) ให้อยู่ในรูปใหม่ จะได้

$$\left(\frac{\Delta C_1}{\Delta C_{10}}\right)\Big/\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = 1 + \frac{N_i\,\tilde{\chi}_{1\downarrow}}{N_s(0)\,\pi\Gamma} \quad (\because\ \Gamma = \tilde{\chi}_{1\downarrow}\tilde{\Gamma}) \quad \ldots(4.51)$$

นิยามให้ความหนาแน่นสุทธิของสถานะของ d -อิเลคตรอนที่ระดับเฟอร์มิเป็น

$N_d^{eff}(0)$ โดยที่

$$N_d^{eff}(0) = \frac{\tilde{\chi}_{1\downarrow}}{\pi\Gamma}$$

และความหนาแน่นทั้งหมดของสถานะของอิเลคตรอนที่ระดับเฟอร์มิเป็น $N_T(0)$

โดยที่

$$N_T(0) = N_s(0) + N_i N_d^{eff}(0)$$

สมการ (4.51) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta C_0} = \left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)\frac{N_T(0)}{N_s(0)} \qquad (4.52)$$

สมการที่ (4.52) นี้เรียกว่า กฎสมนัยของสถานะ (law of corresponding state) กล่าวคือ สารตัวนำยิ่งยวดทุกชนิดจะมีสมบัติเช่นเดียวกัน เมื่อเราวัดสมบัติเหล่านี้ในหน่วยลดทอน ในที่นี้ $\Delta C/\Delta C_0$ เป็นฟังก์ชั่นของ T_c/T_{c0} และเป็นฟังก์ชันของ $N_T(0)/N(0)$

จากสมการ (4.47) ถ้านิยามให้

$$N_T(0) = N_s(0) + N_i N_d^{eff}(0) \qquad \ldots(4.53)$$

ก็สามารถเขียน $\Delta C_2/\Delta C_{20}$ ให้อยู่ในรูปของกฎสมนัยของสถานะได้เช่นกัน กล่าวคือ

$$\frac{\Delta C_2}{\Delta C_{20}} = \left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)\frac{N_T(0)}{[N_s(0) + N_0(0)]} \qquad \ldots(4.54)$$

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

<u>บทย่อ</u>

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาเชิงปริมาณของการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะ ณ อุณหภูมิที่เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดของโลหะที่มีแถบพลังงานสองแถบเหลื่อมซ้อนกัน เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน และมุ่งหวังว่าวิธีการที่ได้คำนวณนี้จะเป็นแนวทางสำหรับศึกษาถึงกรณีที่โลหะมีแถบพลังงาน n แถบ เหลื่อมซ้อนกันได้ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีดำเนินการวิจัย

การคำนวณหา ΔC ที่อุณหภูมิวิกฤต แบ่งวิธีการออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

1. คำนวณหาค่า $\int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle a_4 \rangle$ และ $\int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \langle D_4 \rangle$ โดยใช้วิธีการของทฤษฎีควอนตัมของสนาม
2. คำนวณหา x_c ที่อุณหภูมิวิกฤต
3. คำนวณหา $d\Delta_{ss}^2/dT$ ที่อุณหภูมิวิกฤต

เสร็จแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้จากทั้งสามข้อไปแทนค่าในสมการที่ (2.12) จะได้ค่า ΔC ตามต้องการ

การวิเคราะห์ผล

นำผลการคำนวณจากสมการที่ (2.12) มาพิจารณาในกรณีต่อไปนี้

1. กรณีที่เป็นตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ ความเข้มข้นของสิ่งเจือปนเป็นศูนย์ พิจารณาค่า ΔC เทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยของโซดะ และวาดะ

2. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน แต่มีแถบพลังงานเพียงแถบเดียว พิจารณาค่า ΔC เทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยของซากุไร และอิชิโนส

3. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ แต่มีแถบพลังงานแถบเดียว พิจารณาค่า ΔC เทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส

สรุปผลการวิจัย

ในการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีพลังงาน 2 แถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน โดยใช้วิธีการของทฤษฎีควอนตัมของสนาม และอาศัยผลงานการวิจัยบางส่วนของซากุไร (Sakurai. 1978 : 1195) โซดะ และวาดะ (Soda and Wada. 1966 : 111) ยกส้าน (Yoksan. 1981 : 217) ผลการคำนวณ ΔC พบว่า

$$\Delta C_2 = \left\{ \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\left(N_S(0) + x_c^4 N_D(0)\right) + \left(S + R x_c^4\right)\right\} \times \frac{1}{T_c}$$

$$\times \left[\frac{\eta_S + \eta_D - (\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)\left(2f(T_c) + \frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right)}{\left\{ \begin{array}{l} \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}(\eta_S + \eta_D x_c^2) + \eta_S \frac{S}{N_S(0)} + \eta_D \frac{R x_c^2}{N_D(0)} \\ \quad - (\eta_S\eta_D - \eta'_S\eta'_D)\left[\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}\left(\frac{P}{N_D(0)} + \frac{Q}{N_S(0)}\right) \right. \\ \quad \left. + f(T_c)\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2}(1 + x_c^2) + \frac{PS + RQ x_c^2}{N_S(0) N_D(0)} \right] \end{array} \right\}} \right]^2$$

เพื่อนำผลการคำนวณนี้มาพิจารณากรณีเฉพาะในแต่ละกรณี ดังนี้

1. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบ และไม่มีสิ่งเจือปน จะได้ผลว่า

$$\Delta C_{2_0} = \frac{8\pi^2 T_{c_0}}{7\zeta(3)}\left(N_s(0)+N_D(0)x_{c_0}^4\right)\left\{\frac{\eta_s+\eta_D-2f(T_{c_0})(\eta_s\eta_D-\eta_s'\eta_D')}{\eta_s+\eta_D x_{c_0}^2-f(T_{c_0})(1+x_{c_0}^2)(\eta_s\eta_D-\eta_s'\eta_D')}\right\}^2$$

ผลลัพธ์นี้ตรงกับสูตรในงานวิจัยของโชคะและวาคะ

2. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานแถบเดียว และมีสิ่งเจือปน

$$\Delta C_1 = \frac{8\pi^2 N_s(0) T_c}{7\zeta(3)}\left\{1+\frac{4N_i}{\pi N_s(0)\tilde{F}}\left[\frac{\tilde{\chi}_{11}}{\chi_{11}}\ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_{c_0}}\right)\right]\right\}$$

และเมื่อเปรียบเทียบ $\Delta C_1/\Delta C_0$ สำหรับสิ่งเจือปนที่มีอุณหภูมิคอนโดสูง ๆ พบว่า

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta C_{1_0}} = \frac{T_c}{T_{c_0}}\left(1+\frac{N_i}{4N_s(0)T_k}\right)$$

ผลลัพธ์นี้ตรงกับงานวิจัยของอิชิโนส

3. กรณีที่ตัวนำยิ่งยวดเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานแถบเดียว และไม่มีสิ่งเจือปน

$$\Delta C_{1_0} = 1.42\,\gamma\, T_{c_0}$$

ผลลัพธ์นี้ตรงกับผลการคำนวณในทฤษฎีบีซีเอส

เมื่อเปรียบเทียบ $\Delta C_2 / \Delta C_{20}$ พบว่า

$$\frac{\Delta C_2}{\Delta C_{20}} = \left(\frac{T_c}{T_{c_0}}\right) \frac{N_I(0)}{(N_I(0) + N_V(0))}$$

แสดงว่าผลการคำนวณของเราสอดคล้องกับกฎสมนัยของสถานะตามที่ทฤษฎีบีซีเอสทำนายไว้

<u>อภิปรายผลการวิจัย</u>

ในการคำนวณหา ΔC ที่อุณหภูมิวิกฤตของงานวิจัยฉบับนี้ พบว่าสามารถครอบคลุมถึงค่า ΔC ของตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์ และที่มีแถบพลังงานสองแถบ และรวมไปทั้งกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีแถบพลังงานเพียงแถบเดียว เมื่อมีสิ่งเจือปนและไม่มีสิ่งเจือปน นั่นก็คือสูตร ΔC_2 ที่หาได้เพียงสูตรเดียวนี้สามารถใช้หา ΔC ของตัวนำยิ่งยวดในแต่ละกรณีที่กล่าวมาแล้วข้างต้นได้

สูตร ΔC_2 ที่คำนวณได้นี้สามารถใช้บรรยายสมบัติของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบเมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สันได้ถูกต้องอย่างยิ่งที่ $T \leq \omega_D << T_K$ สูตรที่ได้เป็นสูตรที่เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันของปริมาณต่าง ๆ ที่สามารถวัดได้จากการทดลอง เช่น ความเข้มข้นของสิ่งเจือปน (c) จะถูกเขียนอยู่ในรูปองค์ประกอบที่ค่อนข้างซับซ้อนเป็นต้น จากสูตรจะเห็นได้ชัดว่า อิทธิพลของสิ่งเจือปนจะทำให้สัมประสิทธิ์เชิงเส้น (γ) ในสูตรของปริมาณความร้อนจำเพาะมีค่าเปลี่ยนไป ทั้งนี้เนื่องมาจากความหนาแน่นของสถานะของอิเลคตรอนที่ระดับเฟอร์มิมีค่าเพิ่มขึ้น

การวัด ΔC ทำให้เราได้รู้สมบัติของแถบพลังงานของตัวนำยิ่งยวดมากขึ้นในตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบ พบว่า $\Delta C / \gamma T_c$ โดยทั่วไป

จะมีค่าน้อยกว่าที่ทฤษฎีบีซีเอสกำหนดไว้ เพราะเทอม $d\Delta^2_{ii} / dT$ ที่ T_c จะมีค่ามาก เมื่อแถบพลังงานมีค่าช่องว่างพลังงานมาก แถบพลังงานทั้งสองแถบตามปกติจะมีความสำคัญเท่า ๆ กัน ในการกำหนดค่า δT_c นอกจากนั้นการวัด ΔC ทำให้เราทราบด้วยว่าโลหะเจ้าบ้านนั้นมีการจับคู่ของอิเล็คตรอนอย่างเข้มหรืออย่างอ่อน โลหะตัวนำยิ่งยวดส่วนน้อยมีอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเลคตรอนอย่างเข้ม อิทธิพลของการจับคู่อย่างเข้มมีผลให้อันตรกิริยาระหว่างอิเลคตรอนโดยใช้โฟนอนมีค่ามาก ทำให้ค่า ΔC มีค่ามากกว่า 1.42 เช่น ไนโอเบียม ซึ่งมีแถบพลังงาน $5S$ และ $4D$ เหลื่อมซ้อนกันพบว่า $\Delta C = 1.87\delta T_c$ ในขณะที่โมลิบดินัม ซึ่งเป็นโลหะที่มีการจับคู่ของอิเลคตรอนอย่างอ่อน มีค่า $\Delta C = (1.29 \pm 0.15)\,\delta T_c$

ในสิ่งเจือปนที่มีอยู่ อันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ระหว่าง d –อีเล็คตรอนของสิ่งเจือปนมีผลต่อตัวนำยิ่งยวด คือ ทำให้คูเปอร์ที่เคลื่อนที่ได้อิสระ ในแต่ละแถบพลังงานเกิดการกระเจิงทั้งแบบไม่ยืดหยุ่นและยืดหยุ่น ถ้าสิ่งเจือปนเป็นชนิดที่อุณหภูมิคอนโดของมันมากกว่าอุณหภูมิวิกฤตของโลหะเจ้าบ้าน สภาพตัวนำยิ่งยวดจะเกิดขึ้นได้ยาก

ข้อเสนอแนะในการวิจัย

1. สูตรการคำนวณหา ΔC_2 เพียงสูตรเดียว สามารถใช้ครอบคลุมในการหา ΔC_{20} , ΔC_1 และ ΔC_{10} โดยอาศัยวิธีการคำนวณ ΔC_2 นี้ พอที่จะเป็นแนวทางในการคำนวณหา ΔC_n ได้ (เมื่อ n เป็นตัวเลขที่บอกจำนวนแถบพลังงาน ซึ่งเป็นจำนวนเต็มใด ๆ) เพื่อที่จะได้สูตร ΔC_n ที่สามารถใช้ในกรณีทั่ว ๆ ไปได้ทุกกรณี

ตัวอย่างเช่น ถ้าแถบพลังงานมี 3 แถบเหลื่อมซ้อนกัน คือแถบ S , D และ F แฮมิลโทเนียนที่ใช้บรรยายระบบตัวนำยิ่งยวดจะเป็นดังนี้

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_{kS} a^{\dagger}_{k\sigma} a_{k\sigma} - g_{SS} \sum_{kk'} a^{\dagger}_{k\uparrow} a^{\dagger}_{-k\downarrow} a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} + \sum_{k\sigma} \epsilon_{kD} D^{\dagger}_{k\sigma} D_{k\sigma}$$

$$- g_{DD} \sum_{kk'} D^{\dagger}_{k\uparrow} D^{\dagger}_{-k\downarrow} D_{-k'\downarrow} D_{k'\uparrow} - g_{SD} \sum_{kk'} \left(a^{\dagger}_{k\uparrow} a^{\dagger}_{-k\downarrow} D_{-k'\downarrow} D_{k'\uparrow} + D^{\dagger}_{k\uparrow} D^{\dagger}_{-k\downarrow} a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} \right)$$

$$+ \sum_{k\sigma} \epsilon_{kF} F^{\dagger}_{k\sigma} F_{k\sigma} - g_{FF} \sum_{kk'} F^{\dagger}_{k\uparrow} F^{\dagger}_{-k\downarrow} F_{-k'\downarrow} F_{k'\uparrow}$$

$$- g_{DF} \sum_{kk'} \left(F^{\dagger}_{k\uparrow} F^{\dagger}_{-k\downarrow} D_{-k'\downarrow} D_{k'\uparrow} + D^{\dagger}_{k\uparrow} D^{\dagger}_{-k\downarrow} F_{-k'\downarrow} F_{k'\uparrow} \right)$$

$$- g_{SF} \sum_{kk'} \left(F^{\dagger}_{k\uparrow} F^{\dagger}_{-k\downarrow} a_{-k'\downarrow} a_{k'\uparrow} + a^{\dagger}_{k\uparrow} a^{\dagger}_{-k\downarrow} F_{-k'\downarrow} F_{k'\uparrow} \right)$$

$$+ \sum \left(V_{sd} a^{\dagger}_{k\sigma} d_{\sigma} + h.c. \right) + \sum \left(V_{Dd} D^{\dagger}_{k\sigma} d_{\sigma} + h.c. \right)$$

$$+ \sum \left(V_{Fd} F^{\dagger}_{k\sigma} d_{\sigma} + h.c \right) + E_d \sum_{\sigma} n_{\sigma} + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow}$$

สมการช่องว่างพลังงานจะกลายเป็น

$$\Delta_{SS} = T \sum \left[g_{SS} F^{\dagger}_{SS}(k, i\omega_n) + g_{SD} F^{\dagger}_{DD}(k, i\omega_n) + g_{SF} F^{\dagger}_{FF}(k, i\omega_n) \right]$$

$$\Delta_{DD} = T \sum \left[g_{SD} F^{\dagger}_{SS}(k, i\omega_n) + g_{DD} F^{\dagger}_{DD}(k, i\omega_n) + g_{SF} F^{\dagger}(k, i\omega_n) \right]$$

$$\Delta_{FF} = T \sum \left[g_{SF} F^{\dagger}_{SS}(k, i\omega_n) + g_{DF} F^{\dagger}(k, i\omega_n) + g_{FF} F^{\dagger}(k, i\omega_n) \right]$$

โดยอาศัยวิธีการเดียวกันกับในบทที่ 2 จะได้

$$\Delta f = f_s - f_n$$

$$\Delta f = \Sigma T\left\{ \int_0^{\Delta_{SS}} d\Delta_{SS}\, \Delta_{SS}^2 \frac{d}{d\Delta_{SS}}(F_{SS}^{+}/\Delta_{SS}) + \int_0^{\Delta_{DD}} d\Delta_{DD}\, \Delta_{DD}^2 \frac{d}{d\Delta_{DD}}(F_{DD}^{+}/\Delta_{DD}) + \int_0^{\Delta_{FF}} d\Delta_{FF}\, \Delta_{FF}^2 \frac{d}{d\Delta_{FF}}(F_{FF}^{+}/\Delta_{FF}) \right\}$$

ในที่สุดจะได้

$$\Delta f = \frac{1}{2}\Delta_{SS}^4 \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle x_c^4 + \langle F_4 \rangle y_c^4 \right\}$$

เมื่อ $y_c = \lim\limits_{\substack{T \to T_c \\ \Delta_{SS} \to 0}} \Delta_{FF} / \Delta_{SS}$

และ $\langle F_4 \rangle = \langle T_\tau F^{+}_{(0)K\uparrow} F^{+}_{(0)-K\downarrow} F_{(\tau_1)-K_1\downarrow} F_{(\tau_1)K_1\uparrow} F^{+}_{(\tau_2)K_2\uparrow} F^{+}_{(\tau_2)-K_2\downarrow} F_{(\tau_3)-K_3\downarrow} F_{(\tau_3)K_3\uparrow} \rangle$

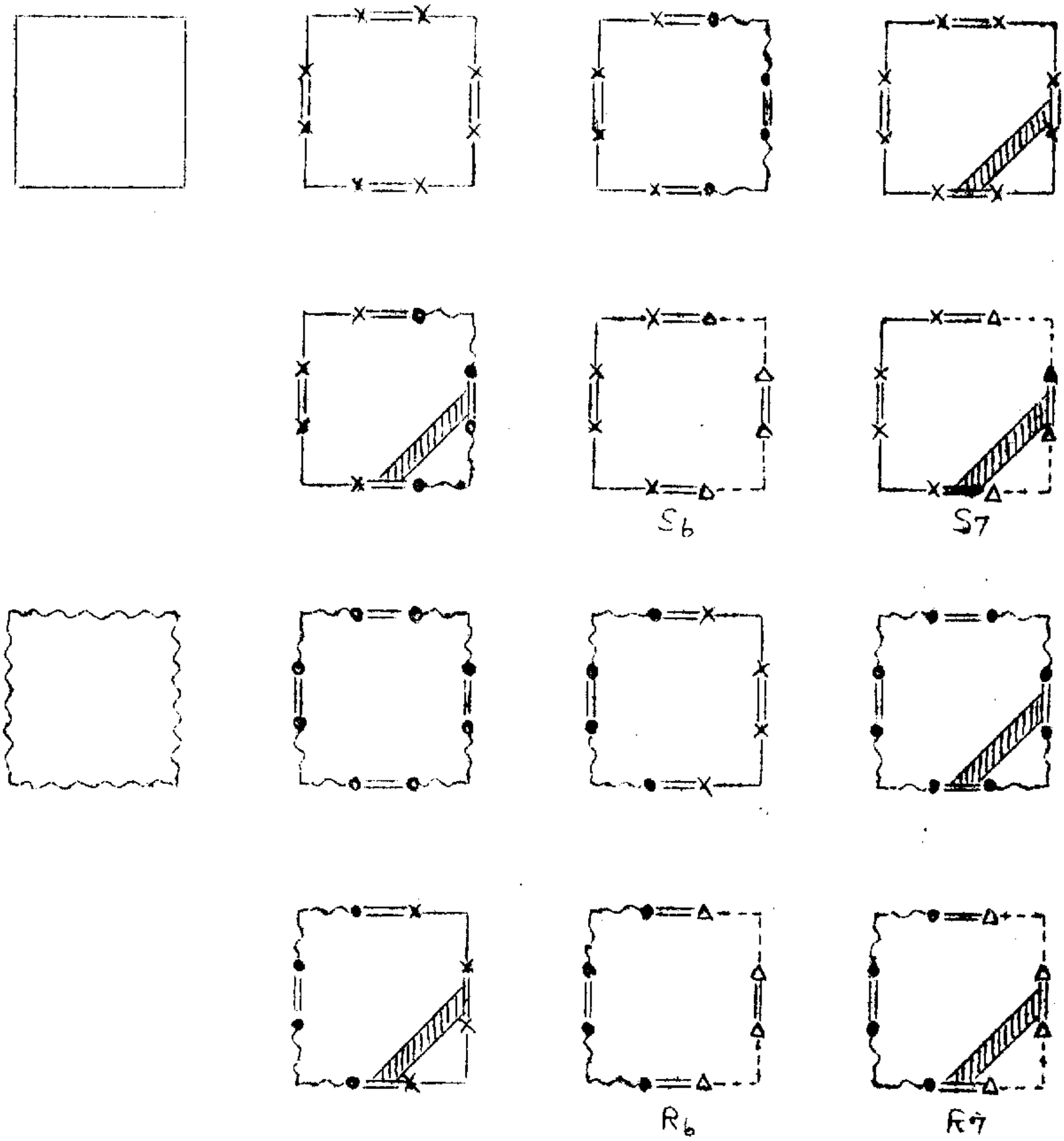
จะได้สูตร Δc_3 ดังนี้

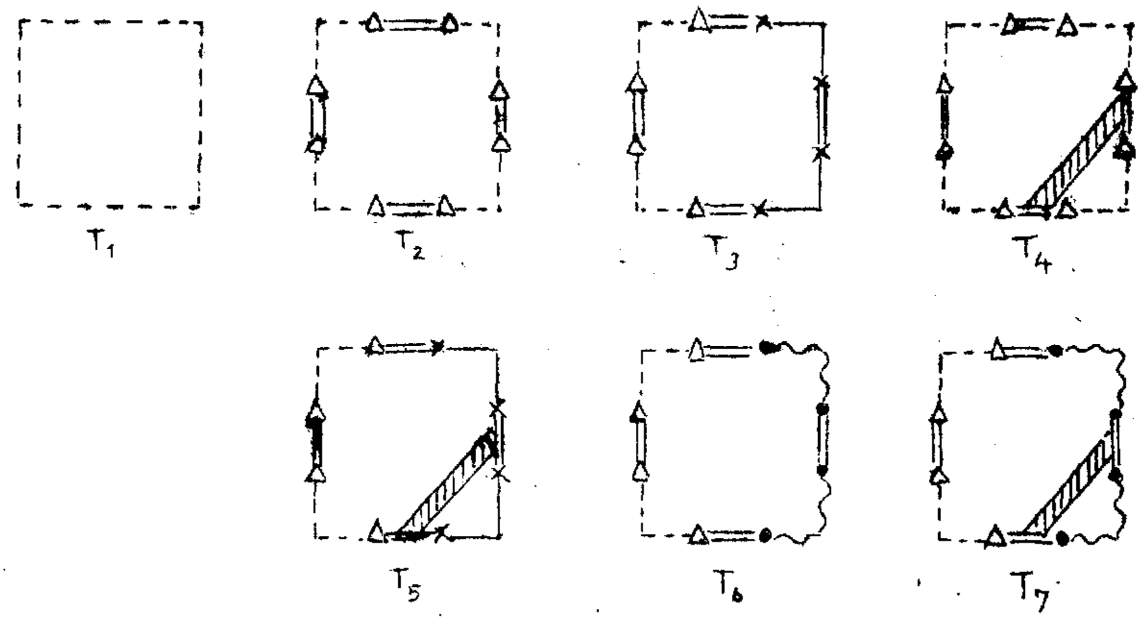
$$\Delta c_3 = T_c \Sigma \int_0^{\beta'} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \left\{ \langle a_4 \rangle + \langle D_4 \rangle x_c^4 + \langle F_4 \rangle y_c^4 \right\} \left(\frac{d\Delta_{SS}^2}{dT} \right)^2 \Bigg|_{T=T_c}$$

แผนภาพในภาพประกอบ 3 จะเปลี่ยนไปดังแสดงไว้ในภาพประกอบ 4

ในที่นี้ให้ Δ หมายถึง อันตรกิริยา V_{Fd}

---- หมายถึง กรีนส์ฟังก์ชั่นของ d –อีเลคตรอนอิสระในแถบพลังงาน F


S6
S7
R6
R7



ภาพประกอบ 4 แผนภาพที่ใช้ในการคำนวณหา ΔC เมื่อตัวนำยิ่งยวดมีแถบพลังงาน 3 แถบ

2. ในแง่ปฏิบัติ สูตร ΔC_2 ที่ได้นี้ สามารถนำไปพิสูจน์ว่าสารตัวนำยิ่งยวดที่ทำการทดลองนั้นเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบจริงหรือไม่ โดยทดลองวัด ΔC_2 เปรียบเทียบกับการคำนวณ ΔC_2 กับรูปกราฟที่ได้จากผลการทดลอง ถ้าค่าที่วัดได้กับค่าที่คำนวณได้คล้องจองกัน แสดงว่าตัวนำยิ่งยวดนั้นเป็นชนิดที่มีแถบพลังงานสองแถบจริง ปัจจุบันยังไม่มีการทดลองเกี่ยวกับเรื่องนี้ สูตรที่ได้นี้จะเป็นแนวทางให้นักทดลองทดลองวัด ΔC_2 ได้เป็นอย่างดี

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Abrikosov, A.A. and L.P. Gorkov, Zh. Exsperim. i Teor. Fiz. 39 : 1781, 1960; Soviet Phys.-JETP. 12 : 1243, 1961.

Anderson, P.W. Physical Review. 124 : 41, 1961.

Bardeen, J. L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Physical Review. 108 : 1175, 1957.

Bennemann, K.M. Physical Review. 14 : 273, 1965.

Botoshan, N.I., M.I. Vladimir, and V.A. Moskalenko, Theor. Math. Phys. (USSR) 19 : 579, 1974.

Burkel, R.H. and W.S. Chow, Physical Review. 3 : 779, 1971.

Chow, W.S. Physical Review. 172 : 467, 1968; 180 : 631, 1969.

Entel, P. Physik B. 24 : 265, 1976.

Geilikman, B.T., R.O. Zaitsev, and V.Z. Kresin, Low. Temp. Phys. (Moscow) IIA : 173, 1967; Fisika Tverdogo Tela 9 : 846, 1967; Fisika Metalov i Metalovedenie 23 : 796, 1967; 25 : 159, 1968.

Ichinose, S. Progress of Theoretical Physics. 58 : 404, 1977.

Khokhenberg, U. and A. Griffin. Physical Review. 137 : 1151, 1965.

Kusakabe, T. Progress of Theoretical Physics. 43 : 906, 1970.

Kondo, J. Progress of Theoretical Physics. 32 : 37, 1964.

Ludwig, A. and M.J. Zuckermann. J. Phys. F1 : 516, 1971.

Matthias, B.T. and others Physical Review. 115 : 1597, 1959.

Mohabir, S. and A.D.S. Nagi. J. Low Temp. Phys. 29 : 292, 1977.

Moskalenko, V.A. Phys. Metals Metatiography (USSR) 8 : 25, 1959.

Moskalenko, V.A., L.Z. Kon, and M.E. Palistrant, Doklady Akademii Nauk SSSR. 162 : 539, 1965.

Müller-Hartmann, E., B. Schuch, and J. Zittartz, Solid State Commun. 19 : 439, 1976.

Mullor-Hartmann, E. and J. Zittartz, Physical Review. 26 : 428, 1971.

Sakurai, A. Physical Review 17 : 1195, 1978.

Satoh, T. and T. Ohtsuka, Physical Review. 20 : 565, 1966.

Schlottmann, P.J. Low Temp. Phys. 20 : 123, 1975.

Soda, T. and Y. Wada. Progress of Theoretical Physics. 36 : 1111, 1966.

Suhl, H., B.T. Matthias, and L.R. Walker, Physical Review. 3 : 552, 1959.

Sung, C.C. and I.Y.L. Shen. Physical Review. 19 : 101, 1965.

Sung, C.C. and V.K. Wong. J. Phys. Chem. Solids. 28 : 1933, 1967.

Yamada, K. Progress of Theoretical Physics. 54 : 316, 1975.

Yamada, K. and K. Yosida. Progress of Theoretical Physics 53 : 1286, 1975.

Yoksan, S. J. Low Temp. Phys. 42 : 217, 1981.

Yosida, K. and A, Yoshimori. in Magnetism, edited by H. Suhl (Academic, New York) Vol 5 : 253, 1973.

ภาคผนวก

สูตรการหาค่าอินทิกรัล

ค่าอินทิกรัลต่อไปนี้สามารถหาได้โดยอาศัยวิธีเรสสิดิว (calculus of residue) ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณสามารถเขียนเป็นสูตรสำเร็จ ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\omega^2+\epsilon^2} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(\omega^2+\epsilon^2)(-i\omega-\epsilon)} = \frac{\pi i}{2\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(\omega^2+\epsilon^2)(i\omega-\epsilon)} = -\frac{\pi i}{2\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(i\omega-\epsilon)^2(-i\omega-\epsilon)^3} = \frac{3\pi i}{8\omega^4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(i\omega-\epsilon)^2(i\omega-\epsilon)^3} = -\frac{3\pi i}{8\omega^4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{(\omega^2+\epsilon^2)^2} = \frac{\pi}{2\omega^3}$$

ความร้อนจำเพาะของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงาน 2 แถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน

บทคัดย่อ

ของ

วัชระ รอดสัมฤทธิ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

เมษายน 2524

เริ่มต้นด้วยแฮมิลโทเนียนของตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานสองแถบ เมื่อมีสิ่งเจือปนแบบแอนเดอร์สัน ได้คำนวณช่วงการเปลี่ยนแปลงความร้อนจำเพาะที่อุณหภูมิวิกฤต ในการคำนวณนี้ถือว่าความเข้มข้นของสิ่งเจือปนมีค่าน้อยและอยู่อย่างไม่เป็นระเบียบในโลหะเจ้าบ้าน อีกทั้งไม่มีสหสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเจือปนเหล่านี้เลยและการจับคู่ของอิเลคตรอนทั้งหลายเกิดขึ้นทั้งในแถบพลังงานแถบเดียวและต่างแถบกัน สูตร ΔC ซึ่งใช้ได้ดีที่ $T \leq W_D << T_k$ สามารถเขียนอยู่ในเทอมของปริมาณที่สามารถวัดได้จากการทดลอง ผลลัพธ์สำคัญที่ได้คือ ความเข้มข้นของสิ่งเจือปนอยู่ในรูปที่มีแฟคเตอร์รีนอร์มัลไลซ์คูณอยู่ สูตร ΔC ที่ได้ยังครอบคลุมถึงกรณีของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีพลังงานสองแถบที่บริสุทธิ์ ตัวนำยิ่งยวดที่มีแถบพลังงานแถบเดียวที่ไม่บริสุทธิ์ และตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีแถบพลังงานแถบเดียวที่บริสุทธิ์ของโชคะและวาคะ อิชิโนส และทฤษฎีบีซีเอสตามลำดับ ในที่สุดเราได้พบว่ากฎสมนัยของสถานะยังคงใช้ได้สำหรับในกรณีนี้

SPECIFIC HEAT OF TWO-BAND SUPERCONDUCTORS

WITH ANDERSON IMPURITIES

AN ABSTRACT

BY

WACHARA RODSUMRID

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Education degree

at Srinakharinwirot University

April 1981

Starting with the two-band Hamiltonian with Anderson impurities, the jump in the specific heat at the critical temperature is calculated. Our analysis considers only a small concentration of impurities, which are assumed to be randomly distributed in the host metal and there exits no correlation among each other. Both interband and intraband contributions are treated explicitly. Result for the jump in the specific heat ΔC, valid for $T \leqslant W_D \ll T$, is written as a function of "observable quantities" and the main result is that the impurity concentration is multiplied by renormalization factors. Our formula recovers the formulas for the pure two-band, dirty one-band and pure one-band superconductors of Soda and Wada, Ichinose and BSC, respectively. Finally, it is found that the law of the corresponding states still holds.