

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานสูงสุดกับการใช้ความหนาแน่นสูงสุด
ของลิฟต์ความเร็วสูงโดยให้จุดสิ้นสุดทั้งสองค่าของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

ปริญญานิพนธ์
ของ
สมมาตร ศรีประเทือง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
กันยายน 2551

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานสูงสุดกับการใช้ความหนาแน่นสูงสุด
ของลิฟต์ความเร็วสูงโดยให้จุดสิ้นสุดทั้งสองค่าของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

ปริญญานิพนธ์
ของ
สมมาตร ศรีประเทือง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
กันยายน 2551
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานสูงสุดกับการใช้ความหนาแน่นกระด้างสูงสุด
ของลิฟต์ความเร็วสูงโดยให้จุดสิ้นสุดทั้งสองค่าของตัวแปรควบคุมในระบบพลศาสตร์

บทคัดย่อ

ของ

สมมาตร ศรีประเทือง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

กันยายน 2551

สมมาตร ศรีประเทือง. (2551) การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานสูงสุดกับการใช้ความ
ความหนาแน่นกระต้างสูงสุดของลิฟต์ความเร็วสูงโดยให้จุดสิ้นสุดทั้งสองค่าของตัวแปรควบคุม
ในระบบพลศาสตร์,ปริญญาานิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล) กรุงเทพฯ:บัณฑิตวิทยาลัย
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ คณะกรรมการควบคุม : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์
คุรุเจริญ , พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า

ปริญญาานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์ที่มุ่งเน้นวิจัยเพื่อศึกษาวิธีการวิเคราะห์การหาค่าความ
เหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่งในรูปแบบของความต้องการความนิ่มนวลตลอด
การทำงาน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้น
จะนิยมใช้เทอมของ พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในบทความวิชาการหรืองานวิจัยชิ้นนี้
จะเน้นเป็นพิเศษที่ความหนาแน่นกระต้างน้อยที่สุดของระบบลิฟต์ขนส่งเนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าใน
การทำงานของระบบพลศาสตร์โดยเฉพาะระบบลิฟต์ขนส่งนั้น ต้องการความนิ่มนวลในการเคลื่อนมาก
ที่สุด ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจในปัญหานี้และต้องการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้เพื่อนำไปเปรียบเทียบกับ
การใช้พลังงานน้อยที่สุด จากการวิจัยพอสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อย
ที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขและนำผลลัพธ์ที่
ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความนิ่มนวลและการประหยัดพลังงาน

Sommart Sripratuang. (2008) *The Comparison of Using Maximum Energy and Maximum Jerk with given both end of Control Input in Dynamic System Application in High Speed Elevator*, Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School , Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assist. Prof. Dr.Chutharat Khurucharean : Lt. Col. Assist. Prof.Dr.Tawiwat Veeraklaew

The purpose of this research is to problem of finding the extremal solutions of the elevator systems in term of minimum jerk. In general, energy, time, velocity and displacement are used as an objective function; however, this paper is emphasizing the minimum jerk instead. Moreover, this objective is needed in many dynamic systems such as automobile and robot that work with the fragile equipments. Not only the minimum jerk is become an objective of this work, but also the results are used to compare with the minimum energy problem. After comparison, the conclusion is that both results from the minimum jerk and energy are quite similar when the total energy consumptions are compared.

ประกาศศุภณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คุรุเจริญ ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และพันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้ว กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณอาจารย์ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง ที่ให้ความช่วยเหลือทุกเรื่องตลอดการศึกษา รวมทั้งตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณพันเอก รองศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐพงศ์ มะลิสุวรรณ ที่อนุเคราะห์เวลาเป็นประธานในการสอบทำให้งานวิจัยลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณคุณพ่อสวอง ศรีประเทือง และคุณแม่หยาด ศรีประเทือง ที่ให้ชีวิตให้โอกาส ให้ความรู้ ความรักความอบอุ่น ให้การเลี้ยงดูอบรมสั่งสอนและเป็นแรงใจให้ดำเนินชีวิตจนถึงทุกวันนี้

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 3 และรุ่นพี่ในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และโรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

สมมารท ศรีประเทือง

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
ขอบเขตของการวิจัย.....	2
วิธีการดำเนินการวิจัย.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย.....	3
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	4
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	4
ไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน.....	56
สรุปไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน.....	81
การทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	82
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	86
การกำหนดปัญหา	86
สมการระบบพลศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา.....	86
เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา.....	90
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	93
ผลการทดสอบ.....	93
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	103
5 สรุปและวิจารณ์.....	104
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	104
ข้อเสนอแนะ.....	104

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
บรรณานุกรม.....	105
ภาคผนวก.....	107
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	108

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ผังวัฏจักรของลิฟต์ขึ้นส่ง (เคลื่อนที่ขึ้น).....	87
2 ผังวัฏจักรของลิฟต์ขึ้นส่ง (เคลื่อนที่ลง).....	88
3 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	93
4 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	94
5 แสดงค่าของแรง ; u เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง	94
6 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง	95
7 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง	95
8 แสดงค่าของแรง ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง	96
9 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	96
10 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	97
11 แสดงค่าแรง ; u เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	97
12 แสดงค่าของความกระด้าง (Jerk) ; $\ddot{u}$ ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	98
13 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	98
14 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง.....	99

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

- 15 แสดงค่าแรงป้อนเข้า ; u เทียบกับเวลาที่กำหนด
กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง.....99
- 16 แสดงค่าความกระด้าง ; $\ddot{u}$ ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด
กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง100
- 17 แสดงการเปรียบเทียบการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 100
- 18 แสดงความเร็ว $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 100
- 19 แสดงค่าของแรง ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 101
- 20 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 101
- 21 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 102
- 22 แสดงค่าของแรง ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด
ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด..... 102

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในยุคปัจจุบันนี้การลำเลียงหรือขนส่งในแนวดิ่ง ที่เรียกว่า ลิฟต์นั้น มีความจำเป็นอย่างสูงสำหรับการดำรงชีวิตในเมือง ที่อยู่ในอาคารสูง ไม่ว่าจะเป็นการขนส่งผู้คน สิ่งมีชีวิต เครื่องอุปโภคบริโภคหรือสินค้าต่างๆ ระบบลิฟต์ขนส่งนั้น จะต้องตอบสนองถึงสิ่งที่อยู่ภายในระบบการลำเลียงนั้น ที่จะได้รับผลกระทบของความโน้มถ่วงจากการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งนั้นด้วยซึ่งเป็นไปตามหลักการ กรอบอ้างอิงความเฉื่อยของเซอร์ ไอแซค นิวตัน เพื่อความปลอดภัยทั้งในชีวิตและทรัพย์สิน ดังนั้นการวางแผนและออกแบบเกี่ยวกับวิธีการเคลื่อนที่ของลิฟต์นั้นต้องคำนึงถึงความนิ่มนวลสูงสุด ด้วยการวิเคราะห์ถึงตัวแปรควบคุมต่างๆ เช่นตำแหน่ง ความเร็วและความเร่ง (หรือความหน่วง) ให้เหมาะสมสูงสุดในทำงานของตัวเองกันนั้นก็เพื่อหลีกเลี่ยงความเสียหายอันจะเกิดกับชิ้นส่วนหรือผู้โดยสาร

ผู้วิจัยมีแนวคิดว่าการวิเคราะห์หาผลที่ได้สูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้น เกี่ยวข้องกับผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ของระบบซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง โดยใช้รูปแบบสมการการเคลื่อนที่นั้นยังไม่ได้รูปแบบของผลเฉลยที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงนัก ดังนั้นจึงมีแนวคิดในการที่จะหาผลเฉลยโดยการให้สมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk) ซึ่งก็คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการการเคลื่อนที่เนื่องจากเราจะได้เงื่อนไขเริ่มต้นเพิ่มขึ้นตามการหาอนุพันธ์ในแต่ละครั้ง ดังนั้นผลที่ได้ น่าจะมีความสอดคล้องกับหลักการทางกายภาพและการนำไปใช้งานจริงได้ดีกว่า

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 เพื่อนำเอาเทคนิควิธีแก้ปัญหาคอมพิวเตอร์ที่ได้สูงสุดของระบบพลศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่ง
- 1.2.2 เพื่อพิสูจน์ถึงทฤษฎี และหลักการแก้ปัญหาทางด้านการควบคุมที่ได้ความกระด้างน้อยที่สุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic Optimization)
- 1.2.3 เพื่อเปรียบเทียบข้อดี และข้อด้อยของการหาคำตอบของการแก้ปัญหาคำตอบที่ใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดกับการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk) ของลิฟต์ขนส่ง

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 การศึกษาวิจัยครั้งนี้ จะนำเอาปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่งในการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk) โดยการกำหนด จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของค่าตัวแปรควบคุม (Control input) ในระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่ง จากนั้นนำความเหมาะสมสูงสุดในหลักการการใช้พลังงานต่ำสุด มาเปรียบเทียบกับหลักการใช้สมการความนิ่มนวลที่สุด ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear Systems)
- 1.3.2 หาผลเฉลยของค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input; ค่าแรงที่ป้อนให้กับระบบ) ในแต่ละกรณีมาทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบผล
- 1.3.3 ใช้โปรแกรม แมทแล็บ (Matlab) ในการโปรแกรมการแก้ปัญหาที่เป็นเชิงเส้น

1.4 วิธีการดำเนินการวิจัย

- 1.4.1 ทำการศึกษาลักษณะของ สมการการเคลื่อนที่ระบบทางพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่ง
- 1.4.2 ศึกษาปัญหาการใช้หลักการการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของสมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk Problems)
- 1.4.3 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์คือ สมการการเคลื่อนที่ของลิฟต์ขนส่ง และสมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk Problems) และการกำหนดเงื่อนไขกำหนดสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายเงื่อนไขขอบจากนั้นสร้างสมการคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) เพื่อหาผลเฉลยต่อไป
- 1.4.4 ใช้กล่องเครื่องมือ (Toolbox) ของโปรแกรมแมทแล็บ (Matlab) เพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดในการใช้หลักการการใช้พลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาสมการของความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk Problems) ของระบบทางพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่งจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
- 1.4.5 ทดสอบหลักการโดยใช้โปรแกรมช่วยในการคำนวณหาผลเฉลย
- 1.4.6 นำผลเฉลยของค่าตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input; ค่าแรงที่ป้อนให้กับระบบ) ในแต่ละกรณีมาทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบผลระหว่าง การใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems) และปัญหาของความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk Problems)
- 1.4.7 วิเคราะห์ข้อมูลที่ได้และสรุปผลการทดสอบ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับการวิจัย

- 1.5.1 ผลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาเพื่อให้สามารถนำไปแก้ปัญหากับงานจริงของลิฟต์ขนส่งได้ต่อไป
- 1.5.2 ผลการวิจัยครั้งนี้ สามารถนำหลักการแก้ปัญหาทางด้านการควบคุมที่ได้ความกระด้างน้อยที่สุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic Optimization) มาประยุกต์ใช้ในการออกแบบของลิฟต์ขนส่ง
- 1.5.3 ผลการวิจัยครั้งนี้สามารถนำข้อดี และข้อด้อยของการหาคำตอบของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด กับการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุดของลิฟต์ขนส่งโดยการกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของลิฟต์ขนส่ง มาแก้ปัญหา
- 1.5.4 ผลการวิจัยครั้งนี้ จะทำให้การใช้ประโยชน์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้คำนวณหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาและยังสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้
- 1.5.5 สามารถนำเสนอถึงหลักการการใช้เวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time) เปรียบเทียบกับการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุด (Minimum Jerk) ที่เป็นเชิงเส้นของลิฟต์ขนส่ง

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 แคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variations)

2.1.2 ไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization)

2.2 สรุปไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization conclusion)

2.3 การทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นเครื่องมือหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาในหลายสาขาวิชา เช่น เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เป็นต้น เพราะการหาค่าความเหมาะสมให้กับความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปสมการพีชคณิตเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์ในอันดับต่างๆ ทั้งที่เป็นแบบเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้น ก็ตาม สามารถที่จะใช้หลักวิชาออปติไมซ์เซชันช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งในส่วนของทางวิศวกรรมศาสตร์ นั้นจะมุ่งเน้นไปที่การแก้ปัญหาระบบพลศาสตร์ (Dynamics systems) ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับต่างๆ ออปติไมซ์เซชันจะต้องอาศัยความรู้ทางแคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of Variations) ก่อนเป็นอันดับแรก ดังนี้

2.1.1 แคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสถียรเดียว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสถียร (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.1)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.2)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.2) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.1.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดียว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสี่เดียว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.1.1.1.1 การกำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่อง โดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะทำให้พบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x + h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.3)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.4)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.4) ก็จะได้พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.5)$$

เมื่อเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.6)$$

ซึ่งสมการ (2.6) นี้เรียกว่า สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) เช่นโดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.1.1.2 การกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.1.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการ (2.3-2.5) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} = 0 \quad (2.8)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0 \quad (2.9)$$

ซึ่งสมการ (2.7-2.9) นี้เรียกว่าสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.1.1.3 การที่เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่า เป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.1.1.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x+h] - J[x] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.11) ก็จะได้พบว่

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\ & + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.12) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

เมื่อเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.15)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้แน่นอน

2.1.1.2 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.1.1.2.1 การกำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.16)$$

ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i = 1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.18)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.18) ก็จะได้พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.19)$$

เมื่อเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

ซึ่งสมการ (2.20) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.1.1.2.2 การกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.1.1.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.17-2.19) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนด

ไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

ซึ่งสมการ (2.21-2.23) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.1.1.2.3 การที่เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.1.1.2.1) ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ & + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ & - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.25)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.25) ก็จะได้พบว่

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.26)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.26) จะเป็น

$$\begin{aligned}\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2.27)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.29)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.1.1.3 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

2.1.1.3.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.30)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.1.1.3.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.31)$$

เมื่อ v_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.31) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

เมื่อเนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.1.1.3.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (2.1.1.3.1 และ 2.1.1.3.2) เราสามารถเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j = 1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.35)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.31) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ทำให้ได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0, \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0, \\ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.1.1.4 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยที่สุด หรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่บอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจหาค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$ นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้อย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ $x, \dot{x}$ และ t ต่อไปหากเรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยสุด ต่อไปลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0) = h(t_f) = 0$ เราจะได้พบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x + h] - J[x]$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้ว่า

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{high-order-terms} \quad (2.38)$$

เมื่อ

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0}$$

และ

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) dt$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านมา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากที่สุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \tilde{F} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} dt \quad (2.39)$$

เมื่อ

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\tilde{F}$ เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\tilde{F}$ เป็นลบ (Negative definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากที่สุด

2.1.2 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่ามีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.1.2.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่าย ดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.1), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.2), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบบจะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_f)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้วซึ่งออไปเจตพิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.2.1.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัว แล้วทำให้เทอมของ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการ (2.1) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.2.1.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.40)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ดังนั้นมีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.41) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$

สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$ ด้วยการแทนสมการ (2.42) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.44)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตต (Costate equations) คือสมการ (2.43) จำนวน n สมการ และเออดีชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.44) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสมการที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two point boundary value problems) ส่วน

$$H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of system)}$$

2.1.2.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$$

เมื่อ $l=1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (2.1.1.3.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.45)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.46)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนด เวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.47)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0, \quad \text{ค่าการเปลี่ยนแปลง } \delta J' = 0 \quad \text{ถ้า} \quad \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad \text{และ} \\ \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0 \quad \text{ทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary conditions) เป็น} \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.49)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.50)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ และ คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, คอสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.48) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.49) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน คอสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.50) ส่วนค่า v_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l|_{t_f} = 0$

2.1.2.1.3 อักซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.51)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned}
L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) &= L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\
&+ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \\
&+ \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned} \quad (2.52)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
&+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \right)
\end{aligned} \quad (2.53)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้าพจน์ $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (2.55)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$ โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ ลากrange มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_i(t)$ และ v_i สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.54) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.55) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.56)

2.1.2.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.1.1.1) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.1) มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือ คอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1.2.2.1 สถานะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.57)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.58)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการที่ (2.58) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.60)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.61)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน

(Costate equations) คือสมการ (2.59) จำนวน n สมการ และเออดิตชันนอลอีควชันคือสมการ (2.60) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.61) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสมการที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.1.2.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับ (2.1.2.2.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.62)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางซ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.63)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางซ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน และได้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_f} \right. \\
& + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \tag{2.66}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \tag{2.67}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.68}$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการแก้สมการสถานะ (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.65) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.66) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.67) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.67)

2.1.2.2.3 อ็อกซิลเลอรีคอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สถานะ

สุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.69)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.70)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.71)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.71) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.73)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.74)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.75)$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรังก์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.72) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.73) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.75) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสถานะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.74)

2.1.2.2.4 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาที่น้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L=1$ และ $\Phi=0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ (2.1.2.2.3) จะทำให้ได้สมการเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.76)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.77)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.78)$$

$$\left[1 + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.79)$$

ผลเฉลยของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรังก์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.76) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.77) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.79) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.78)

2.1.2.3 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่า เป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังบอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยที่สุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยที่สุดเท่านั้น เพราะการตรวจหาค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) นี้มีค่าน้อยที่สุด

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.80)$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$ และ $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว
ต่อไปหากเรากำหนดให้ $\bar{h}_x(t) \in R^n$ และ $\bar{h}_u(t) \in R^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการ
เปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังนี้

$$\Delta J = J[\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u] - J[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.81)$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{higher-order-terms} \quad (2.82)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \delta J &= \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} - \bar{\lambda} \right] \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\bar{h}_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}} \right) + \bar{h}_u^T \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right] dt \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \bar{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \bar{h}_x^T & \bar{h}_u^T \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} \bar{h}_x \\ \bar{h}_u \end{bmatrix} dt \\ \tilde{H} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right)^T & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.83)$$

ซึ่งโคสเตตเวกเตอร์ (Costate vector) แสดงอยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตันเนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian function) $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$ และ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้สมการ (2.80) เขียนได้เป็น $\Delta J = \delta^2 J + \text{higher-order-terms}$ ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} > 0; \tilde{H} > 0 \quad (2.84)$$

2.1.2.4 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาที่เป็น ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.85)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.86)$$

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.87)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.88)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x}, \bar{u}, t), i = 1, \dots, p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Variable inequality constraints) และสแตตวารีเอเบิลอินอีควอลิตี

คอนสเทรนต์ (State variable inequality constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนต์ที่เคอร์ชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) + s_i^2(t) = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.89)$$

ซึ่งสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) ในสมการ (2.89) จะเป็นคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.86) และสมการ (2.87) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.85) ด้วยการใส่ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt \quad (2.90)$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.91)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.92)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.93)$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.94)$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.95)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.96)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.97)$$

ซึ่งสมการ (2.91-2.97) คือลักษณะของบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.91 และ 2.92) คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.93-2.95) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.96 และ 2.97) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับกรณีที่เป็นการหาค่าน้อยสุด (Minimum) เราสามารถหาเนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i \right) dt \quad (2.98)$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.99)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.100)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.101)$$

$$0 = \mu_i c_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.102)$$

$$0 \leq \mu_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.103)$$

$$0 \geq c_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.104)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.105)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.106)$$

2.1.3 การหาผลเฉลยด้วยวิธีอินไดเรกต์ (Indirect Solution)

วิธีการหาผลเฉลยวิธีนี้จะใช้หลักการของแคลคูลัสของแปร (Calculus of variation) โดยจะทำการค้นหาค่าของสเตต (State), โคสเตตวารีเอเบิล (Costate variables) และ คอนโทรลวารี

เอเบิล (Control variables) ด้วยการแก้ปัญหาค่าขอบ (Boundary value problems) ซึ่งเทคนิควิธีที่ให้ ความแม่นยำในการแก้ปัญหาค่าขอบที่เกี่ยวข้องกับสมการอนุพันธ์ก็คือมัลติเปิลชู้ตติ้งเทคนิค (Multiple shooting techniques) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1.3.1 ปัญหาค่าขอบของการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal Control Boundary Value Problems)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) ที่อันคอนสเทรนต์ โดยจะเป็นการหาเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่ เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่เกี่ยวข้อง เฉพาะกับสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่า คอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบ สมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.107)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad t \in [0, t_f] \quad (2.108)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.109)$$

$$\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) = 0 \quad (2.110)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{x}_0$ คือกลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น (Set of initial conditions), และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือเงื่อนไขบังคับที่สภาวะสุดท้าย (Final state constraint) ซึ่งเป็น กรณีเดียวกับหัวข้อ 2.1.2.1.2 คือสภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface) ทำให้เราได้เนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.111)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.112)$$

$$0 = H_u \quad (2.113)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.114)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.115)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \quad (2.116)$$

เมื่อ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ คือโคสเตตวารีเอเบิล (State variables), สเกลาร์ $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$, $H_x = \partial H / \partial \bar{x}$, $H_u = \partial H / \partial \bar{u}$, $\Phi_x = \partial \Phi / \partial \bar{x}$ ตามลำดับ ส่วน $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เพื่อให้ลดความซับซ้อนลงเราจะทำการสมมุติให้อยู่ในสภาวะคงที่ (Stationary condition) คือ $H_u = 0$ และทำการจัดรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) $\bar{u}$ ในเทอมของสเตตวารีเอเบิล (State) และโคสเตตวารีเอเบิล (Costate) นอกจากนี้เราจะทำการสมมุติให้สมการ (2.114-2.116) มีจำนวน $2n + n_f$ เพื่อใช้สำหรับสร้างเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไขเพื่อให้อยู่ในเทอมของ $\bar{x}$ และ $\bar{\lambda}$ ด้วยการกำจัด $\bar{v}_f$ ออก ส่วนปัญหาที่ไม่มีการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากการกำจัด $\bar{v}_f$ และ $\bar{u}$ ออกจะทำให้ได้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.111-2.116) กลายเป็น

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}) \quad (2.117)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.118)$$

เมื่อ $\bar{y} = [\bar{x}^T, \bar{\lambda}^T]^T \in R^{2n}$, $\bar{h}(t, \bar{y}) = [H_{\lambda}^T, -H_x^T]^T \in R^{2n}$ และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข ได้จากสมการ (2.114-2.116)

2.1.3.2 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดิง (Multiple Shooting Solution)

มีหลายๆ เทคนิควิธีที่สามารถใช้หาผลเฉลยทางตัวเลขปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) ที่กำหนดรูปแบบตามสมการ (2.117-2.118) ยกตัวอย่างเช่น

วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference methods), วิธีจัดตำแหน่ง (Collocation method) และวิธีค่าเริ่มต้นหรือชู้ตติ้ง (Initial value or shooting method) แต่วิธีที่มีประสิทธิภาพและให้ความแม่นยำสูงในการแก้ปัญหาแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ก็คือวิธีมัลติเปิลชู้ตติ้ง (Multiple shooting method)

2.1.3.2.1 มัลติเปิลชู้ตติ้งอัลกอริทึม (Multiple Shooting Algorithm)

เพื่อให้ใช้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับปัญหาที่มีค่าขอบ (Boundary value) สมการ (2.117-2.118) ได้ จะทำการแบ่งช่วงเวลา $[0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem)

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}), t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.119)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.120)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ของสมการ (2.168-2.169) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ อย่างไรก็ตามสำหรับ $M = 1$ เราจะได้วิธีชู้ตติ้ง (Simple shooting method) ซึ่งหลักการเบื้องต้นของวิธีนี้คือการเดาค่าตัวแปรที่ไม่รู้ค่าของ $\bar{s}_0^y$ จากนั้นก็ทำการหาผลรวมของค่าเริ่มต้นของปัญหาสมการ (2.119-2.120) เพื่อให้ได้ $\bar{s}_1^y$ การใช้ค่าผิดพลาดที่คำนวณได้จากสมการ (2.118) จะถูกนำมาใช้เพื่อปรับปรุงค่าที่เดาสำหรับตัวไม่ทราบค่าที่เวลา $t = 0$ ขั้นตอนนี้จะถูกกระทำซ้ำหลายๆ ครั้งจนกระทั่งได้ผลเฉลย $\bar{s}_0^y$ ที่ลู่เข้าหาคำตอบ (Converge) และ/หรือสอดคล้องกับสมการ (2.118)

มัลติเปิลชู้ตติ้งเทคนิค (Multiple shooting technique) อาศัยหลักการเดียวกันกับวิธีชู้ตติ้ง (Simple shooting method) ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) ให้ในแต่ละโหนดต่อเนื่องกัน ด้วยการเพิ่มสิ่งจำเป็นดังนี้

- ผลเฉลยที่แต่ละโหนดมีความต่อเนื่อง นั่นคือ

$$\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

เมื่อ $\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary differential equation) สมการ (2.119) ที่เวลา $t = t_{i+1}$ โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) $\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y$

- ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) นั่นคือ

$$\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$$

สมการเหล่านี้จะทำให้เกิดนอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equations) จำนวน $2n(M+1)$ สมการ จะมีตัวแปรค่า $2n(M+1)$ ซึ่งเขียนได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y) - \bar{s}_M^y \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

นอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.121) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ (Iterative) ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) ดังนั้นถ้าเดาค่าเริ่มต้น (initial gauss) $\bar{s}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.119-2.120) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{s}^{k+1}$ ดังรูปแบบนี้

$$\bar{s}^{k+1} = \bar{s}^k + \alpha \Delta \bar{s}, \alpha \in (0,1] \quad (2.122)$$

$$J(\bar{s}^k) \Delta \bar{s} = -F(\bar{s}^k), k = 1, 2, \dots, \text{until convergence} \quad (2.123)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) คือ $J(\bar{s}) = \partial F(\bar{s}) / \partial \bar{s}$ มีขนาดมิติ $2n(M+1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบเป็นดังนี้

$$J(\bar{s}) = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix}$$

$$A_i = \left[\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} \right]; C_i = -I, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.124)$$

$$B_0 = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} \right]; B_M = \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} \right]$$

จะทำซ้ำสมการ (2.122-2.123) ไปจนกระทั่งผู้เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta \bar{s}\| \leq \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแอมป์แฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \|F(\bar{s}^k)\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณผู้เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{s}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (Two-point boundary-value problem) สมการ (2.117-2.119) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้เป็น ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \dots, t_{M-1}, \bar{s}^0$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

1. คำนวณค่า $F(\bar{s}^0)$
2. ถ้า $\|F(\bar{s}^0)\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
3. คำนวณค่า $\Delta \bar{s} = -J^{-1}(\bar{s}^0)F(\bar{s}^0)$
ถ้า $\|\Delta \bar{s}\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
4. ค้นหา $\alpha^* > 0$ ที่ทำให้ $F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s}) < F(\bar{s}^0)$
5. กำหนด $\bar{s}^1 = \bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s}$
6. กำหนด $F(\bar{s}^1) = F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta \bar{s})$
7. ย้อนกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีชิมเปลชูดิง (Simple shooting method) จะพบว่ามัลติเปลชูดิงเทคนิค (Multiple shooting technique) มีคุณสมบัติที่มีความเสถียรทางตัวเลขมากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับปัญหาที่มีความไม่เชิงเส้นสูง (Nonlinear) และปัญหาที่ตัวแปรเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว สรุปได้ว่าวิธีมัลติเปลชูดิงเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

1. หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.119-2.120)
2. คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.124)
3. หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.123)

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีก็คือวิธีรังกัตตาอันดับ 4(3) (Runge-Kutta method of order 4(3)) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.129-2.130) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y}, t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.126)$$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Solution of linear system of equations) นั้นก็สามารถใช้จาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) มาคำนวณหาค่าเดมพ์ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) โดยการแก้ปัญหามการ (2.124) แต่จะทำการจัดเรียงใหม่ดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} C_0 & & & & A_0 \\ A_1 & C_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & A_{M-1} & C_{M-1} & \\ & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

ต่อไปก็ทำการหาค่าแมตริกซ์ทแยง (Orthogonal factorization matrix) $Q_0 \in R^{4n \times 4n}$ นั่นคือ

$$Q_0^T \begin{bmatrix} C_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $R_0 \in R^{2n \times 2n}$ จะเป็นแมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper triangular matrix) ทำการคูณทั้งสองข้างของสมการ (2.127) ด้วย (Q_0^T, I) จึงทำให้ได้สมการเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & G_0 \\ & \tilde{C}_1 & & & \tilde{G}_1 \\ & A_2 & C_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ & & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F'_0 \\ F''_1 \\ \vdots \\ F_{M-1} \\ F_M \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

ในทำนองเดียวกันโดยใช้ $\begin{bmatrix} \tilde{C}_i \\ A_{i+1} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$ ทำให้เราได้สมการใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} R_0 & E_0 & & & \\ & R_1 & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{C}_{M-1} & \tilde{G}_{M-1} \\ & & & B_M & B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{s}_1 \\ \Delta \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \Delta \bar{s}_M \\ \Delta \bar{s}_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F'_0 \\ F'_1 \\ \vdots \\ F'_{M-1} \\ F''_M \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_{M-1} & \tilde{G}_{M-1} \\ B_M & B_0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมื่อทำการลดสมการ (2.127) ไปเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน ด้วยการทำเช่นนี้ จะทำให้สามารถหาค่า $\Delta \bar{s}$ ด้วยการแทนค่ากลับ (Back substitution) นั่นเอง

2.1.3.3 ข้อจำกัดเสริม (Auxiliary Constraints)

ในหัวข้อนี้จะทำการพิจารณาปัญหาการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) ที่มีข้อจำกัดเสริม (Equality constraints) เข้ามาเกี่ยวข้องกับสแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) โดยเนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ที่เขียนอยู่ในรูปของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential and algebraic equations: BVP-DAE) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.130)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.131)$$

$$0 = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.132)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.133)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$ คือสเตตเวกเตอร์ (State vector), $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอสมการอสมการ (Equality constraints) ของสเตตเวกเตอร์และคอนโทรลเวกเตอร์ (State and control variables) จำนวน $(0 \leq p \leq n + m)$, และ $\bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \in R^{n_f}$ คือช่วงสุดท้ายที่หลากหลายของสถานะ $0 \leq n_f \leq n$ ในสมการคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) (2.130) ประกอบไปด้วย สเกลาร์ เทอร์มินอลเวตติ้งฟังก์ชัน (Scalar terminal weighting function) Φ , และสเกลาร์เพอร์ฟอร์แมนซ์ ฟังก์ชัน (Scalar performance function) L ส่วนเวลาสุดท้าย t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว

โดยทั่วไปแล้วปัญหาการหาค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control problem) สามารถทำให้อยู่ในรูปสมการ (2.131-2.133) ส่วนกรณีที่มีอสมการอสมการ (Inequality constraints) จะมีการเพิ่มสแลกเวกเตอร์ (Slack variables) เข้าไปเพื่อเปลี่ยนให้เป็นเงื่อนไขเชิงเท่ากัน (Equality constraints) จากนั้นก็ใช้แคลคูลัสของแปร (Calculus of variations) มีแฮมิลตันนิอัน (Hamiltonian) คือ $H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\mu}^T \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u})$ เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ด้วยการใช้แฮมิลตันนิอัน (Hamiltonian) ทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\bar{x}} = H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.134)$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -H_x \quad (2.135)$$

$$0 = H_u \quad (2.136)$$

$$0 = H_{\mu} = \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.137)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.138)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)) \quad (2.139)$$

$$0 = \bar{\lambda}(t_f) - (\Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f) \quad (2.140)$$

เมื่อ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multipliers) ที่ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในสมการ (2.139-2.140) เพื่อบอกลักษณะของปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (BVP-DAE) ส่วนสมการพีชคณิตคือสมการ (2.127-2.128) และสมการเงื่อนไขขอบเขตคือสมการ (2.139-2.140) สมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมของสเตตเวกเตอร์

เบิล (State variables) ($\bar{x}$), โคสเตตวารีเอเบิล (Costate variables) ($\bar{\lambda}$), คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ($\bar{u}$) และลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ($\bar{\mu}$) ซึ่งเขียนดังนี้

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{bmatrix} H_u \\ H_\mu \end{bmatrix} \in R^{m+p}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.141)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.142)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f)) \quad (2.143)$$

สมการปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต(BVP-DAE) สมการ (2.141-2.143) จะลดรูปลงเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้นด้วยการใช้สมการพีชคณิตสมการ (2.194) มาหาค่า $\bar{z} = G(\bar{y})$ ดังนั้นสมการ (2.141) สามารถเขียนเป็น $\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, G(\bar{y}))$ รวมกับสมการ (2.143) จะมีลักษณะเป็นปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุดที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์และสมการพีชคณิต (Boundary-value problem involving differential equations: BVP-DE)

2.1.3.4 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดั้งของบีวีพี-ดีเออี (Multiple Shooting Solution to the BVP-DAE)

เพื่อให้วิธีนี้แก้ปัญหาได้กับระบบดีเออี (DAE system) สมการ (2.131-2.133) ได้จะทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ และในแต่ละช่วงเวลาให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z)$ เป็นผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) คือ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.144)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}) - \bar{k}_i, \quad t \in (t_i, t_{i+1}),$$

$$\bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = \text{const} \quad (2.145)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.146)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.141-2.143) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ และเพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.141-2.143) จะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) - \bar{s}_{i+1}^y &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ \bar{g}(t_i; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) &= 0 \end{aligned}$$

สภาวะแรกก็คือผลเฉลยที่ไหน t_i ซึ่ง $\bar{s}_i^y$ ต้องมีความต่อเนื่อง, สภาวะที่สองคือสมการพีชคณิต (2.141) จะต้องสอดคล้องกับทุกไหนและสภาวะที่สามคือ จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ถ้าสอดคล้องกับสภาวะที่สองจะทำให้ $\bar{k}_i = 0$ ($\bar{k}_i$ คือแฟกเตอร์คลาย (Relaxation factor)) ในสมการ (2.134) สภาวะเหล่านี้จะทำให้เกิดนอนลิเนียร์ไอควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ จำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

นอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.147) สามารถหาค่าได้โดยการทำซ้ำ (Iterative) ด้วยวิธีนิวตัน (Newton's method) ดังนั้นถ้าเดาค่าเริ่มต้น (initial guess) $\bar{s}^k$ เพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของสมการ (2.141-2.142) จะต้องทำการพัฒนาผลเฉลยที่ได้ $\bar{s}^{k+1}$ ดังต่อไปนี้

$$\bar{s}^{k+1} = \bar{s}^k + \alpha \Delta \bar{s}, \alpha \in (0,1] \quad (2.148)$$

$$J(\bar{s}^k) \Delta \bar{s} = -F(\bar{s}^k), k = 1, 2, \dots, \text{until convergence} \quad (2.149)$$

เมื่อจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) คือ $J(\bar{s}) = \partial F(\bar{s}) / \partial \bar{s}$ มีขนาดมิติ $(2n + m + p)(M + 1)$ ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้

$$J(\bar{s}) = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ 0 & A_1 & C_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & A_{M-1} & C_{M-1} \\ B_0 & & & 0 & B_M \end{bmatrix}; A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^z} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.150)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^z} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix}$$

จะทำซ้ำสมการ (2.148-2.150) ไปจนกระทั่งลู่เข้าหาคำตอบ (Convergence) นั่นคือ $\|\Delta \bar{s}\| \leq \varepsilon$ หรือ $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นค่าบวกที่มีค่าน้อย ส่วนแดมปีงแฟกเตอร์ (Damping factor) α จะเป็นตัวที่ควบคุมการทำซ้ำแต่ละครั้งว่า $\|F(\bar{s}^{k+1})\| \leq \|F(\bar{s}^k)\|$ ซึ่งเมื่อค่าการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ ค่า $\bar{s}^{k+1}$ ก็จะเป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพีดีเอ (BVP-DAE) สมการ (2.141-2.142) จากหลักการดังกล่าวสามารถเขียนอย่างสรุปได้ดังนี้

ก่อนอื่นต้องกำหนดค่า $M, t_0, t_1, \dots, t_{M-1}, \bar{s}^0$ และค่า $\varepsilon > 0$ แต่เป็นค่าน้อยๆ แล้วเริ่มด้วย

1. คำนวณค่า $F(\bar{s}^0)$
2. ถ้า $\|F(\bar{s}^0)\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
3. คำนวณค่า $\Delta\bar{s} = -J^{-1}(\bar{s}^0)F(\bar{s}^0)$
ถ้า $\|\Delta\bar{s}\| \leq \varepsilon$ ค่า $\bar{s}^0$ ก็คือผลเฉลย
4. ค้นหาค่า $\alpha^* > 0$ ที่ทำให้ $F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta\bar{s}) < F(\bar{s}^0)$
5. กำหนด $\bar{s}^0 = \bar{s}^0 + \alpha^* \Delta\bar{s}$
6. กำหนด $F(\bar{s}^0) = F(\bar{s}^0 + \alpha^* \Delta\bar{s})$
7. ย้อนกลับไปทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

สรุปได้ว่าวิธีมัลติเปิลชู้ตติงเทคนิค (Multiple shooting technique) จะต้องกระทำดังนี้คือ

1. หาผลรวมของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value) สมการ (2.144) ในแต่ละช่วงของเวลา M เพื่อนำมาใช้คำนวณหาฝั่งขวามือของสมการ (2.49)
2. คำนวณค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) สมการ (2.150)
3. หาผลเฉลยของระบบเชิงเส้น สมการ (2.149) เพื่อให้ได้ $\Delta\bar{s}$

ซึ่งแต่ละขั้นตอนล้วนแต่เป็นนัยสำคัญของปัญหาทั้งสิ้น ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) ก็มีหลายวิธีการเช่นกันแต่วิธีที่ได้ผลดีที่สุดคือวิธีรังกัตตาอันดับ 4(3) (Runge-Kutta method of order 4(3)) การหาค่าจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) จะใช้สมการ (2.144) และสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของ A_i ในจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ค่าปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value problem) คือ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y}, \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.151)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{y}}, \quad (2.152)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z}, \quad (2.153)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{z}}, \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = 0 \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = I \quad (2.156)$$

สมการ (2.151-2.155) คือกลุ่มของสมการอนุพันธ์-พีชคณิตแบบเชิงเส้น (Linear differential-algebraic equations)

2.1.3.5 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints)

จะใช้เทคนิคฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function technique) เปลี่ยนให้ไม่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.157)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.158)$$

$$\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \leq 0 \quad (2.159)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.160)$$

เมื่อ $\bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}) \in R^p$ คือกลุ่มของอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของสเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) และกระจายด้วยการใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) คือ

$$C_i = \begin{cases} -1/c_i & \text{if } -c_i \geq \sigma \\ (3 + 3c_i/\sigma + (c_i/\sigma)^2)/\sigma & \text{if } -c_i < \sigma \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.161)$$

เมื่อ σ คือพารามิเตอร์ ด้วยการใช้สมการ (2.161) ทำให้เปลี่ยนอีนอควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ให้เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstraint) ได้ โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \sum_{i=1}^p \rho_k C_i(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.162)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.163)$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (2.164)$$

เมื่อ $\sigma = \sqrt{\rho_k}$, $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$

2.1.3.6 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ่งต่อเนื่อง (Multiple Shooting-Continuation Solution)

การควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) ของปัญหาสมการ (2.157) สามารถที่จะหาคำตอบได้โดยการทำให้อยู่รูปของสมการ (2.162) ด้วยการเพิ่มค่าเพียงเล็กน้อยของ ρ_k และเนชเชสเซอร์คอนดิชันของปัญหานี้สามารถทำให้อยู่ในเทอมของฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$\begin{aligned} H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}; \rho_k) &= L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \rho_k \sum_{i=1}^l C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \\ \dot{\bar{x}} &= H_{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_{\bar{x}}; 0 = H_{\bar{u}} \\ 0 &= \bar{x}(0) - \bar{x}_0; 0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f)); 0 = \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{\psi}_f \end{aligned} \quad (2.165)$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) บีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) สมการ (2.165) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{z} = \bar{u} \in R^m$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \end{bmatrix} \in R^{2n}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) = H_u \in R^m$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) \quad (2.166)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) \quad (2.167)$$

สมการ (2.165) จำนวน $2n + n_f$ จะลดลงเป็น $2n$ ในสมการ (2.220) ด้วยการตัด n_f ออกเพราะเกี่ยวข้องกับลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) v_f วิธีมัลติเปิลชูตติงต่อเนื่อง (Multiple shooting-continuation method) จะถูกนำมาใช้แก้ปัญหาโดยการกำหนดค่า $\rho_k \rightarrow 0$ และทำการแบ่งช่วงเวลา $t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.168)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}; \rho_k) - \bar{k}_i, \quad \bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z) = \text{constant} \quad (2.169)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.170)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.168-2.170) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ เพื่อให้แน่ใจว่า $\bar{s}_i^y$ และ $\bar{s}_i^z$ เป็นผลเฉลยของปัญหาบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE) จะต้องสอดคล้องกับสมการเหล่านี้ด้วย คือมีความสืบเนื่องของผลเฉลยที่ไหนคือ

$$\bar{y}(t_{i+1}; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k) - \bar{s}_{i+1}^y = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

เป็นไปตามสมการพีชคณิตที่ไหนคือ

$$\bar{g}(t_i; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z; \rho_k) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M$$

เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต คือ $\bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y) = 0$

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ และมีตัวไม่รู้ค่า $\bar{s}$ และ ρ_k จำนวน $(2n + m + p)(M + 1)$ ด้วย และสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z; \rho_k) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z; \rho_k) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z; \rho_k) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z; \rho_k) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z; \rho_k) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y; \rho_k) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

เมื่อกำหนดค่า ρ_k ก็จะได้ผลเฉลยของนอนลิเนียร์อีควชัน (Nonlinear equation) สมการ (2.162) เป็นผลเฉลยโดยประมาณของสมการ (2.152) ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$

2.1.3.6 วิธีต่อเนื่อง (Continuation Method)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.214) ที่มีระบบสมการ (2.224) จะต้องทำการแก้ปัญหาด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยการ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ซึ่งสามารถทำได้โดยใช้ขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation or homotopy procedure) โดยเริ่มจากการแก้สมการ (2.224) ด้วยการกำหนดค่า ρ_k ซึ่งผลที่ได้จากการแก้สมการจะเป็นค่าเดาเริ่มต้นให้กับพารามิเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (Penalty parameter) $\rho_{k+1} < \rho_k$ และขั้นตอนของวิธีต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะทำไปจนกระทั่ง ρ_k เข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1

ประมาณค่าโพลีโนเมียลนอกช่วง (Prediction via Polynomial Extrapolation) ในการหาค่าของ $(\bar{s}^{k-1}; \rho_{k-1})$ และ $(\bar{s}^{k-2}; \rho_{k-2})$ จะต้องทำการประมาณค่า ρ_k โดยการใช้วิธีการใดวิธีการหนึ่งดังนี้คือ

1. ตัวทำนายกำลังศูนย์ (Zeroth-order predictor)

$$\hat{s}^k = \bar{s}^{k-1}, \quad \rho_k = h_{k-1} \rho_{k-1}$$

2. ตัวทำนายกำลังหนึ่ง (First-order predictor (secant))

$$\hat{s}^k = \bar{s}^{k-2} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k-2} - \rho_{k-1}} + \bar{s}^{k-1} \frac{\rho_k - \rho_{k-2}}{\rho_{k-1} - \rho_{k-2}}$$

$$\rho_k = h_{k-1} \rho_{k-1}$$

เมื่อ $\hat{s}^k$ เป็นผลเฉลยโดยประมาณที่ ρ_k และ $h_{k-1} \in (0,1)$ เป็นแฟกเตอร์ปรับค่า

ขั้นตอนที่ 2

แก้ค่าแดมป์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via Damped Newton's Iteration) วิธีการเหมือนกับในหัวข้อ (2.1.3.6) ณ ช่วงสุดท้ายของขั้นตอนนี้ กำหนดให้ N_{cor} เป็นจำนวนครั้งของการทำซ้ำ

ขั้นตอนที่ 3 ปรับขนาดช่วง (Stepsize adjustment)

ขนาดช่วง h_k ที่เหมาะสมจะมีขนาดใกล้เคียงกับหนึ่ง ณ ที่ทุกๆ k แต่ก็สามารถทำการปรับขนาดช่วงได้เช่นกัน คือ

$$h_{k-1}^{new} = h_{k-1}^{old} \frac{N_{cor}}{N_{opt}}$$

$$0 < h_{\min} \leq h_{k-1}^{new} \leq h_{\max} < 1$$

ขั้นตอนการทำต่อเนื่อง (Continuation procedure) จะสิ้นสุดเมื่อ $|I(\rho_k) - I(\rho_{k-1})| < \varepsilon$ หรือ $|\rho_k| < \varepsilon_\rho$

2.1.3.8 ปัญหาการควบคุมเหมาะสมที่สุดที่มีพารามิเตอร์ (Optimal Control Problems with Parameters)

โดยเราจะทำการพิจารณาปัญหาการค้นหาค่าคอนโทรล (Control) $\bar{u}(t) \in R^m$ และมีพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าน้อยสุด ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$J = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) dt \quad (2.172)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.173)$$

$$0 \geq \bar{c}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.174)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.175)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \quad (2.176)$$

เมื่อใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Penalty function) จะทำให้เขียนสมการได้เป็น

$$I(\rho_k) = \Phi(\bar{x}(t_f), \bar{p}) + \int_0^{t_f} \left(L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^p C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \right) dt \quad (2.177)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (2.178)$$

$$0 = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \quad (2.179)$$

$$0 = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \quad (2.180)$$

เมื่อ $\rho_k > 0$, $\rho_k > \rho_{k+1}$ และ $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ ทำให้ได้เนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= H_{\lambda} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}); \dot{\bar{\lambda}} = -H_x; \dot{\bar{\gamma}} = H_p \\ 0 &= H_u = \bar{x}(0) - \bar{x}_0 = \bar{\gamma}(0) = \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ 0 &= \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f = \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{aligned} \quad (2.181)$$

โดยฮามิลตันเนียน (Hamiltonian) คือ

$$H(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda}; \rho_k) = L(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) + \rho_k \sum_{i=1}^l C_i(\sigma, t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \rho_k) + \bar{\lambda}^T \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$$

เมื่อ $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{v}_f \in R^{n_f}$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) ส่วน $\bar{\gamma} \in R^{n_p}$ คือผลเฉลยอย่างง่ายของปัญหา (Facilitate) สมการ (2.181) สามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{z} = \bar{u} \in R^m, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{n_p+n_f}$$

$$\bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) = \begin{bmatrix} H_\lambda \\ -H_x \\ H_p \end{bmatrix} \in R^{2n+n_p}, \quad \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) = H_u \in R^m$$

$$\bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{w}; \rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{x}(0) - \bar{x}_0 \\ \gamma(0) \\ \bar{\psi}(\bar{x}(t_f), \bar{p}) \\ \bar{\lambda}(t_f) - \Phi_x - \bar{\psi}_x^T \bar{v}_f \\ \bar{\gamma}(t_f) + \Phi_p + \bar{\psi}_p^T \bar{v}_f \end{bmatrix} \in R^{2n+2n_p+n_f}$$

และ

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) \quad (2.182)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) \quad (2.183)$$

$$0 = \bar{r}(\bar{y}(0), \bar{y}(t_f), \bar{w}) \quad (2.184)$$

2.1.3.9 ผลเฉลยมัลติเปิลชูดติ่งต่อเนื่อง (Multiple Shooting-Continuation Solution)

การแก้ปัญหสมการ (2.182-2.184) สามารถที่จะหาคำตอบได้โดยใช้ขั้นตอนเหมือนกับในหัวข้อ (2.1.3.6) แต่ต้องเพิ่มเติมในส่วนของตัวไม่ทราบค่า $\bar{w}$ และทำการแบ่งช่วงเวลา

$t \in [0, t_f]$ ออกเป็น M ช่วงคือที่ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = t_f$ โดยในแต่ละช่วงเวลาจะให้ $\bar{y}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{w}; \rho_k)$, $\bar{z}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{w}; \rho_k)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ดังนี้

$$\dot{\bar{y}} = \bar{h}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k), \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (2.185)$$

$$0 = \bar{g}(t, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}; \rho_k) - \bar{k}_i, \quad \bar{k}_i = \bar{g}(t; \bar{s}_i^y, \bar{s}_i^z, \bar{w}; \rho_k) = \text{const} \quad (2.186)$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{s}_i^y, \quad \bar{z}(t_i) = \bar{s}_i^z, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.187)$$

เมื่อ $\bar{s}_i^y$, $\bar{s}_i^z$ และ $\bar{w}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาวีฟิเคออี (BVP-DAE) ของสมการ (2.235-2.237) ณ ที่ไหน $t_i, i = 0, 1, 2, \dots, M$ และจะต้องสอดคล้องกับสภาวะเหล่านี้ด้วย คือ

- มีความสืบเนื่องของผลเฉลย $\bar{s}_i^y$ ที่ไหน
- เป็นไปตามสมการพีชคณิต สมการ (2.186) ที่แต่ละไหน
- เป็นไปตามสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สมการ (2.187)

จากเงื่อนไขทั้งสามทำให้ระบบเกิดนอนลิเนียร์ไอควชัน (Nonlinear equations) ขึ้นมาจำนวน $(2n + m + p)(M + 1) + n_p + n_f$ และมีตัวไม่รู้ค่า $(\bar{s}, \bar{w})$ และ ρ_k และเขียนสมการได้เป็น

$$F(\bar{s}, \bar{w}; \rho_k) = \begin{bmatrix} \bar{g}(t_0; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \bar{w}; \rho_k) \\ \bar{y}(t_1; \bar{s}_0^y, \bar{s}_0^z, \bar{w}; \rho_k) - \bar{s}_1^y \\ \vdots \\ \bar{g}(t_{M-1}; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \bar{w}; \rho_k) \\ \bar{y}(t_M; \bar{s}_{M-1}^y, \bar{s}_{M-1}^z, \bar{w}; \rho_k) - \bar{s}_M^y \\ \bar{g}(t_M; \bar{s}_M^y, \bar{s}_M^z, \bar{w}; \rho_k) \\ \bar{r}(\bar{s}_0^y, \bar{s}_M^y, \bar{w}; \rho_k) \end{bmatrix} = 0; \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_0^y \\ \bar{s}_0^z \\ \vdots \\ \bar{s}_M^y \\ \bar{s}_M^z \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

ในการหาผลเฉลยของปัญหาสมการ (2.241) จะต้องทำการแก้ปัญหาดังกล่าวด้วยการกำหนดค่า ρ_k ด้วยและมีขั้นตอนเหมือนกับหัวข้อ (2.1.9.4.2) แต่ขั้นตอนแก้ค่าแดมพ์ของการทำซ้ำแบบนิวตัน (Correction via Damped Newton's Iteration) หาจากสมการนี้คือ

$$J(\bar{s}, \bar{\omega}; \rho_k) = \begin{bmatrix} F_s & F_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & E_0 \\ 0 & A_1 & C_1 & E_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{M-1} & C_{M-1} & E_{M-1} \\ B_0 & & 0 & B_M & E_M \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

เมื่อ

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_i^z} \\ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix}; B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_0^y} & 0 \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^y} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{s}_M^z} \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{s}_M^y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1890)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{bmatrix}; E_M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} \end{bmatrix}; E_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix}, i = 0, 1, \dots, M-1$$

จากสมการ (2.238-2.240) สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของจาโคเบียนแมตริกซ์ (Jacobain matrix) ได้โดยการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น (Initial value DAE) ในช่วงเวลา $t \in (t_i, t_{i+1})$ ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} \quad (2.191)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^y} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{y}} \quad (2.192)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} \quad (2.193)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{s}_i^z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{s}_i^z} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{z}} \quad (2.194)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\omega}} \quad (2.195)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\omega}} - \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\omega}} \quad (2.196)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = I, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^y} = 0 \quad (2.197)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{s}_i^z} = I \quad (2.198)$$

$$\frac{\partial \bar{y}(t_i)}{\partial \bar{\omega}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}(t_i)}{\partial \bar{\omega}} = 0 \quad (2.199)$$

2.2 ไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization: Basic Result)

ระบบควบคุมทางวิศวกรรมทั้งหมดเป็นระบบที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้มาจากกฎของฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของยานยนต์สามารถหาได้โดยกฎของกลศาสตร์หรือกฎของเทอร์โมไดนามิกส์ ระบบที่กล่าวถึงเรียกโดยรวมว่า ระบบพลศาสตร์ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.200)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสมฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และสถานะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุม (Control Variables) โดยที่ Φ และ L คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุมหรือคอนโทรลวารีเอเบิล (Control Variables) และเป็นความสัมพันธ์กันทางฟิสิกส์ไปสู่ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไป

การแก้ปัญหาคือการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์หรือไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สถิติออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัส ออฟ วารีเอชัน (Calculus of Variations) . เป็นอย่างมากอีกด้วย ปัญหาของการหาเวลาที่ผ่านไปของตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของสมการที่ (2.199) สามารถหาคำตอบได้จากวิธีแคลคูลัส ออฟ วารีเอชัน ที่ได้พัฒนามาจากหัวข้อที่ผ่านมา จากผลของหัวข้อที่ 3.4 สอดคล้องเป็นพิเศษกับเงื่อนไขสมการที่ (2.199) ลำดับ

การนำเสนอในบทนี้ จะเริ่มจากหัวข้อที่ 2.2 ที่กล่าวถึงปัญหาที่เป็นการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed final time.) และหัวข้อ 2.3 อธิบายถึงปัญหาที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายหรือเวลาสุดท้ายแปรผันได้ (Variable Final time)

ระบบทางพลศาสตร์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีตรงหรือวิธีไดเรกต์ (Direct Methods) และวิธีอ้อมหรือวิธีอินไดเรกต์ (Indirect Methods) ซึ่งวิธีตรง (Direct Methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่าแต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีอ้อม (Indirect Methods)

2.2.1 ปัญหาการกำหนดเวลาสุดท้ายคงที่ (Fixed Final Time)

ข้อปัญหาที่กล่าวถึงในตอนนี้เป็นไปตามสาระสำคัญดังนี้ (i) ระบบพลศาสตร์ที่อธิบายดังสมการที่ 2.1 (ii) คอสฟังก์ชันนอลสำหรับค่าที่น้อยที่สุดกำหนดโดยสมการที่ 2.2 (iii) เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายกำหนดไว้ตายตัว และ (iv) ต้องระบุสถานะเริ่มต้น (Initial States) $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่เคลื่อนขบวนไปมาระหว่างสองเมือง และกำหนดเวลาเข้าและเวลาออกจากแต่ละสถานี ซึ่งอาจจะวางแผนการเดินทางโดยกำหนดเป้าประสงค์ในเรื่องการใช้เวลาที่น้อยที่สุด หรือ ในทางกลับกันอาจจะกำหนดการใช้กำลังงานให้คุ่มค่าที่สุด ต่อเราจะมาพิจารณาปัญหาสามประเภทในตอนนี้เป็นคือ (a) ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$, (b) ปัญหาที่สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกบังคับให้อยู่ในแนวของพื้นผิวที่กำหนด (c) ตัวแปรควบคุม (Control Variables) และตัวแปรสถานะ (State Variables) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่มีความสัมพันธ์กับทุกช่วงเวลา

2.2.1.1 ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย (Final State are Prescribed)

เป็นปัญหาที่มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัวทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการจะคงที่และไม่มีผลเกี่ยวข้องกับ การหาความเหมาะสมที่สุดหรือออปติไมซ์เซชันทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ จะถูกตัดทิ้งไปในสมการที่ (2.2) ซึ่งเราจะได้ฟังก์ชันนอลใหม่ (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.201)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.202)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.203)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j} \Big|_{t_f} = h_{x_j} \Big|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.5) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \end{aligned} \quad (2.204)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$ และ

$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$ ด้วยการแทนสมการ (2.6) กลับเข้าไปใน

สมการดังกล่าวทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็นหรือเนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.205)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.206)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Co-states) และตัวแปรควบคุมป้อนเข้าหรือคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สมการสถานะหรือสเตทอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.1) จำนวน n สมการ, สมการโคสเตตหรือสมการสถานะร่วม (Co-state Equations) คือสมการ (2.7) จำนวน n สมการ และ สมการแอตติชัณนอลอีควชัน (Additional Optimality Equations) คือสมการ (2.8) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตระหว่างจุดสองจุด (TPBVP: Two Point Boundary Value Problems) ส่วน

$$H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \text{ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of System)}$$

2.2.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States lie on a Constraint Surface)

ปัญหานี้สถานะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับอธิบายในทอมทางคณิตศาสตร์ได้โดย $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l=1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.207)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' กำหนดเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.208)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.209)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$,

ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.210)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.211)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.212)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ และ คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.14) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Co-state Equations) คือสมการ (2.12) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชัน (Additional Optimality Equations) คือสมการ (2.13) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order Different Equations) อยู่ จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลย นี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และ ต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จาก สมการ (4.14) ส่วนค่า v_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l|_{t_f} = 0$

2.2.1.3 ออกริลเลียร์คอนสเทรนต์ (Ailiary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิล และคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)|_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะ สุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.213)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.214)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \right) \end{aligned} \quad (2.215)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ

$\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.216)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.217)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.218)$$

ผลเฉลยของสมการ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และ v_l สามารถหาค่าได้โดยใช้สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.50) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Co-state Equations) คือสมการ (2.105) จำนวน n สมการ และเอตดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.106)

จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์ที่ไอเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนต์ที่ไอเควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสมการที่ t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.107) และ $(l, -d)$ ดังแสดงในรูป ทั้ง 6 ตัวแปรสถานะสำหรับหุ่นยนต์คือ $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}, x_5 = \theta$ และ $x_6 = \dot{\theta}$ สมการการเคลื่อนที่เชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

2.2.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.2) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.1), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.51), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Start Time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถ เป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สถานะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.2.2.1 สถานะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.219)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.220)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.220) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนซเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.221)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.222)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.223)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Co-states)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State Equations) โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ

(2.221) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.222) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.2.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในทอมนทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับ (2.2.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.224)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.225)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและได้เนซเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \Big|_{t_f} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^p \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \delta x_j \Big|_{t_f} \right. \end{aligned} \quad (2.226)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right] \delta t_f \right. \\ & \dot{\lambda}_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.227)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.228)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.229)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.230)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Co-states) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใส่สแตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.227) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.229) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.228) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.230) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Co-state) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.31)

2.2.2.3 อ็อกซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สแตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้าย

จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.231)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.232)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.233)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.233) ก็จะทำให้เราสามารถหา เงื่อนไขที่จำเป็นเนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \quad (2.234)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1, \dots, m \quad (2.235)$$

$$\lambda_j|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j = 1, \dots, n \quad (2.236)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p \nu_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.237)$$

ผลเฉลยของสแตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Co-state) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.234) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Co-state Equations) คือสมการ (2.236) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.235) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Co-state) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.237)

2.2.3 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาน้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L = 1$ และ $\Phi = 0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ (2.1.7.2.3) จะทำให้ได้สมการเนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.238)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.239)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.240)$$

$$\left[1 + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.241)$$

ผลเฉลยของสแตตวารีเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรังก์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน (State Equations) คือสมการ (2.238) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.240) จำนวน n สมการ, เอดดิชันนอลอีควชัน คือสมการ (2.239) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.241) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + 1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Co-state) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.240)

2.2.4 สมการของ แฮมมิลตัน-จาโคบี-เบลแมน

ในตอนนี้จะกล่าวถึงการพัฒนาทางเลือก สำหรับการหาเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการพิจารณาหาค่าความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.242)$$

และคอนสฟังก์ชันนอลเป็น

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x})_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.243)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n, \bar{u}(t) \in R^m$ และ t_0, t_f กำหนดไว้ตายตัวในตอนนี้จะทำการกำหนดจำกัดความให้กับ คอส ฟังก์ชันนอลใหม่ มีลักษณะดังนี้

$$\mathfrak{J}[\bar{x}(t), t] = \min_{\bar{u}(t)} \left\{ \Phi(t, \bar{x})_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(\tau, \bar{x}, \bar{u}) d\tau \right\} \quad (2.244)$$

สเกลลาร์ฟังก์ชัน $\mathfrak{J}[\bar{x}(t), t]$ นี้แสดงถึงค่าคอสต่ำสุดที่ขับเคลื่อนให้กับระบบจากเวลาเริ่มต้น t_0 จนถึง เวลาสุดท้าย t_f กำหนดให้ $\mathfrak{J}$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้นและใช้ประโยชน์ของสถานะเริ่มต้น (จุดที่ดีที่สุดของ $u(t)$) ในการคำนวณสมการ (2.244) ในการวิเคราะห์ต่อไปนี้จะสมมติให้ $\mathfrak{J}$ มีความ ต่อเนื่องตลอดช่วงที่กำหนด ในช่วงเวลา $[t, t_f]$ สามารถแบ่งออกเป็น 2 เซ็กเมนต์ $[t, t + \Delta t]$ และ $[t + \Delta t, t_f]$ เมื่อ Δt คือช่วงเล็กๆ ผลต่างของเวลาในกรณีนี้สมการ (2.244) จะกลายเป็น

$$\mathfrak{J}[\bar{x}(t), t] = \min_{\bar{u}(\tau)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L(\tau, \bar{x}, \bar{u}) d\tau + \Phi(t, \bar{x})_{t_f} + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L(\tau, \bar{x}, \bar{u}) d\tau \right\} \quad (2.245)$$

สมการ (2.244) แสดงได้ดังนี้

$$\mathfrak{J}[\bar{x}(t), t + \Delta t, t + \Delta t] = \min_{\bar{u}(\tau)} \left\{ \Phi(t, \bar{x})_{t_f} + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L(\tau, \bar{x}, \bar{u}) d\tau \right\} \quad (2.246)$$

สมการ (2.246) จะเป็น

$$\mathfrak{J}[\bar{x}(t), t] = \min_{\bar{u}(\tau)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L(\tau, \bar{x}, \bar{u}) d\tau + \mathfrak{J}[\bar{x}(t + \Delta t, t + \Delta t)] \right\} \quad (2.247)$$

กระจายสมการที่(2.247) ในอนุกรมเทเลอร์ รอบ $(x(t), t)$ เราพบว่า

$$\mathfrak{I}[\bar{x}(t), t + \Delta t, t + \Delta t] \approx \mathfrak{I}[\bar{x}(t), t] + \left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \bar{x}} \right)^T \frac{d\bar{x}}{dt} \Delta t + \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.248)$$

ถ้า Δt มีขนาดเล็กพอ ดังนั้น สมการที่(2.247) และ (2.248) จะได้ว่า

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} \Delta t + \min_{u(\tau)} \left\{ L(t, \bar{x}, \bar{u}) \Delta t + \left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \bar{x}} \right)^T f(t, \bar{x}, \bar{u}) \Delta t + o(\Delta t) \right\} \quad (2.249)$$

ในสมการที่ (2.248) เทอมของ $\mathfrak{I}[\bar{x}(t), t]$ และ $\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t}$ ถูกลบจากการหาค่าต่ำสุด ซึ่งขึ้นอยู่กับ $\bar{u}(t)$ ทำการหารสมการที่ (2.248) ด้วย Δt และให้ลิมิต Δt เข้าใกล้ ศูนย์ จะได้

$$-\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t} = \min_{u(\tau)} \left\{ L(t, \bar{x}, \bar{u}) + \left(\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial \bar{x}} \right)^T f(t, \bar{x}, \bar{u}) \right\} \quad (2.250)$$

ซึ่งสมการที่ (2.250) เรียกว่า สมการของ แฮมิลตัน-จาโคบี-เบลแมน สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนี้แสดงถึงเงื่อนไขที่จำเป็นที่ต้องสอดคล้องกับการควบคุมผลที่ได้สูงสุด เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกำหนดให้โดย $\mathfrak{I}[\bar{x}(t_f), t_f] = \Phi(\bar{x}(t_f), t_f)$

2.2.5 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนซเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการ

ตรวจสอบเพื่อป้องกันค่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่า
น้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่า
 $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) นี้มีค่าน้อยสุด

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.251)$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$ และ $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว
ต่อไปหากเรากำหนดให้ $\bar{h}_x(t) \in R^n$ และ $\bar{h}_u(t) \in R^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการ
เปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังนี้

$$\Delta J = J[\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u] - J[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.252)$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{higher-order-terms} \quad (2.253)$$

เมื่อ

$$\delta J = \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} - \bar{\lambda} \right] \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\bar{h}_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}} \right) + \bar{h}_u^T \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right] dt$$

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \bar{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \bar{h}_x^T & \bar{h}_u^T \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} \bar{h}_x \\ \bar{h}_u \end{bmatrix} dt$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right)^T & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \end{bmatrix} \quad (2.254)$$

ซึ่งโคสเตตเวกเตอร์ (Costate Vector) แสดงอยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตันเนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian Function) $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$ และ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้สมการ (2.46) เขียนได้เป็น $\Delta J = \delta^2 J + \text{higher-order-terms}$ ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive Definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} > 0; \tilde{H} > 0 \quad (2.255)$$

เซตของเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับจุดเอ็กทรีมัม $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ ที่เป็นค่าต่ำสุดคือสอดคล้องกับสมการที่ (2.255) สำหรับค่าสูงสุดของเมตริกซ์นี้จะกำหนดโดยการใช้เครื่องหมายลบ จุดเด่นของเซตเงื่อนไขที่จำเป็นสามารถหาค่าได้โดยการกำหนด $\bar{h}_x(t)$ และ $\bar{h}_u(t)$ ไม่ให้เป็นอิสระต่อกันในรูปแบบเงื่อนไขทางพลศาสตร์ในสมการที่ (2.251) สามารถพบว่า

$$\frac{d}{dt}(\bar{x} + \bar{h}_x) - \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u, t) - \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

$$\dot{\bar{h}}_x = \bar{f}(\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u, t) - \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

ขยายเทอมที่อยู่ในวงเล็บในอนุกรมเทเลอร์และตัดเทอมที่มีอันดับ สูงขึ้นไปใน $\bar{h}_x$ และ $\bar{h}_u$ จะได้ว่า

$$\dot{\bar{h}}_x = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{h}_x - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \bar{h}_u \quad (2.256)$$

ดังนั้นกำหนดให้การเพิ่มค่า $\bar{h}_u$ โดยที่หนึ่งค่าสามารถเพิ่มค่า $\bar{h}_x$ โดยการแก้สมการที่ (2.256) กับเงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมการแสดงให้เห็นอยู่ในรูปอย่างง่ายสำหรับ $\delta^2 J$ ให้พิจารณาเทอมที่เพิ่มเข้าไป

$$\int_{t_0}^{t_f} \bar{h}_x^T S \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{h}_x + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \bar{h}_u - \dot{\bar{h}}_x \right) dt \quad (2.257)$$

เมื่อ $S(t) \in R^{n \times n}$ ที่เป็นเมตริกซ์สมมาตรที่สามารถหาค่าได้ ซึ่ง $\dot{\bar{h}}_x$ สอดคล้องกับสมการที่ (2.256) และ (2.257) ที่เป็นศูนย์ เพิ่มสมการที่ (2.257) ใน $\delta^2 J$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta^2 J = & \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - S \right] \bar{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \bar{h}_x^T S \bar{h}_x \Big|_{t_0} \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\bar{h}_x^T \dot{S} \bar{h}_x + 2 \bar{h}_x^T S \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \bar{h}_x + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \bar{h}_u \right) + [\bar{h}_x^T \bar{h}_u^T] \tilde{H} \begin{bmatrix} \bar{h}_x \\ \bar{h}_u \end{bmatrix} \right] dt \end{aligned} \quad (2.258)$$

ขยายเทอมแต่ละเทอมในสมการที่ (2.258) จะได้

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - S \right] \bar{h}_x \Big|_{t_f} + \frac{1}{2} \bar{h}_x^T S \bar{h}_x \Big|_{t_0}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{h}_x^T \left[\dot{S} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} + S \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T S + \right] \bar{h}_x \right. \\
& + \bar{h}_u^T \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \bar{h}_u + \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} + S \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right] \bar{h}_u \\
& \left. + \bar{h}_u^T \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \bar{h}_x \right) dt
\end{aligned} \tag{2.259}$$

อินทิเกรตสมการที่ (2.258) จะอยู่ในรูป

$$\bar{h}_u^T A \bar{h}_u + 2b^T \bar{h}_u + \bar{h}_u^T b + c \tag{2.260}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
A &= \bar{h} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2}; b^T = \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} + S \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right] \\
c &= \bar{h}_x^T \left[\dot{S} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} + S \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \bar{h}_x
\end{aligned} \tag{2.261}$$

สมการที่(2.261)สามารถจัดรูปใหม่เป็น $\bar{z}^T A \bar{z}$ กับ $\bar{z}^T = \bar{h}_u + A^{-1}b$ นั้นทำให้ $b^T A^{-1}b - c = 0$ เงื่อนไขนี้สามารถพบได้โดยการเลือก $S(t)$ ให้สอดคล้องกับสมการเวลาแปรเปลี่ยนของรีคาตี

$$\begin{aligned}
\dot{S} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} + S \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right)^T S = \\
\left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right) + S \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \\
S(t_f) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}(t_f)}
\end{aligned} \tag{2.262}$$

ใช้สมการที่ (2.260) ในสมการที่ (2.259) หาค่า

$$\begin{aligned}
\delta^2 J = \frac{1}{2} \bar{h}_x^T S \bar{h}_x \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \bar{z}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \bar{z} dt \\
\bar{z} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \bar{h}_x + \bar{h}_u
\end{aligned} \tag{2.263}$$

ถ้าเราพิจารณาวิถีสำหรับ $\bar{h}_x(t_0) = 0$, ดังนั้น $\delta^2 J > 0$ ถ้า $\partial^2 H / \partial \bar{u}^2 > 0$ และ $\bar{z} \neq 0$ อย่างไรก็ตาม $\bar{z} = 0$ จะได้

$$\bar{h}_u = - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \bar{h}_x \tag{2.264}$$

ใช้สมการที่ (2.263) และ (2.264) เราพบว่า $\bar{h}_x$ นั้นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของเวลาแปรผันเชิงเส้น

$$\dot{\bar{h}}_x = \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x} \partial \bar{u}} \right)^T + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \right)^T S \right] \right] \bar{h}_x; t \in [t_0, t_f]$$

สำหรับกรณีที่ $\bar{h}_x(t_0) = 0$ สมการเชิงอนุพันธ์จะมีผลเฉลยค่าเล็กน้อย $\bar{h}_x(t) = 0$ ให้ $S(t)$ เข้าอยู่ในช่วง $t \in [t_0, t_f]$ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไป $S(t)$ อาจจะไม่มียผลเฉลยในช่วงเวลาที่เราสงสัยก็ได้ ถ้า $\bar{h}_x(t) = 0$ ดังนั้น $\bar{z} = 0$ จะได้ $\bar{h}_u = 0$ โดยปริยาย ดังนั้น $\bar{h}_u$ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ $\delta^2 J > 0$, ถ้า $\partial^2 H / \partial \bar{u}^2 > 0$ พัฒนาการข้างบนที่กล่าวมาสามารถประมวลได้ตามนี้ ในกรณีที่เมื่อส่วนที่เพิ่มเข้าที่พิจารณา คือ $\bar{h}_x(t_0) = 0$ ตามนี้ ดังนั้นเงื่อนไขจะเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับ $\bar{u}(t)$ ที่ เป็นค่าต่ำสุดของสมการที่ (2.264)

1. เงื่อนไขลาเจนเดอร์: $\partial^2 H / \partial \bar{u}^2 > 0$

2. เงื่อนไขจาโคบี: สมการรีคาตี (2.86) มีผลเฉลยที่อยู่ในช่วงจำกัด $t_0 \leq t \leq t_f$.

ตัวอย่างเช่นจงหาค่าถ้าค่าเอ็กทรีมัม $x(t=0), u(t)=0$ ของ

$$J = J(u^2 + \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} dt; \quad \dot{x} = u; x(0) = 0$$

เป็นค่าต่ำสุดวิธีทำสำหรับปัญหาข้อนี้ แฮมิลตันเนียนถูกกำหนดโดย $H = (u^2 + \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} + \lambda u$. อนุพันธ์อันดับหนึ่งของเงื่อนไขที่จำเป็นคือ

$$\dot{x} = u; \dot{\lambda} = (u^2 + \cos^2 x)^{-\frac{1}{2}} \sin x \cos x; x(0) = 0; \lambda(\pi) = 0$$

เงื่อนไขที่ทำให้ชัดเจนที่สุดคือสิ่งที่ทำได้ โดย $x = 0, \lambda = 0$ และ $u = 0$ พิจารณาถ้าค่าเอ็กทรีมัมจะเป็นค่าต่ำสุด เราจะต้องทำการทดสอบ โดยใช้สมการเงื่อนไขของลาเจนเดอร์ และจาโคบี สมการเงื่อนไขของลาเจนเดอร์จะสอดคล้องกับ $\partial^2 H / \partial u^2 = 1 > 0$ เงื่อนไขจาโคบีเป็นสิ่งที่กำหนดสมการของรีคาตี

$$\dot{S} = S^2 + 1; S(\pi) = 0$$

การได้รับผลเฉลยในช่วงเวลา $0 \leq t \leq \pi$ เป็นการง่ายที่จะพิสูจน์สมการรีคาตีนี้ซึ่งมีผลเฉลยเป็น $S(t) = -\tan(\pi - t)$ กำหนดให้ $t = \pi/2, S(t) = \infty$ ดังนั้นเงื่อนไขจาโคบีจะไม่สอดคล้องเมื่อ $x = 0$ และ $u = 0$ ไม่เป็นฟังก์ชันนอลของจุดต่ำสุด

2.2.6 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t, \bar{x}) \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.265)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.266)$$

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.267)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.268)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in R^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x}, \bar{u}, t), i = 1, \dots, p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Variable Inequality Constraints) และสแตตวารีเอเบิลอินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (State Variable Inequality Constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวารีเอเบิล (Slack Variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนต์ที่เคอร์ชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) + s_i^2(t) = 0, i = 1, \dots, p \quad (2.269)$$

ซึ่งสแลกวารีเอเบิล (Slack Variables) ในสมการ (2.265) จะเป็นคอนโทรลวารีเอเบิล (Control Variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.266) และสมการ (2.267) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.268) ด้วยการใช้ลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) $\bar{\lambda} \in R^n$ และ $\bar{\mu} \in R^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) \right) dt$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนซเซสซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.270)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.271)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.272)$$

$$0 = 2\mu_i s_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.273)$$

$$0 = c_i + s_i^2, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.274)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.275)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.276)$$

ซึ่งสมการ (2.270-2.276) คือลักษณะของบีวีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.270 และ 2.271) คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.272-2.274) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.275 และ 2.276) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จะนำเสนอเทคนิคระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับผลเฉลยของปัญหาแบบ BVP-DAE เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาสามารถนำมาใช้ได้โดยปราศจากการใช้ตัวแปรสแลในการที่จะได้ผลสำเร็จของนี้ ในการอธิบายค่าต่ำสุด $x(t), u(t)$ สำหรับปัญหา ดังนั้นเป็นไปได้ที่แสดงเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ $\delta^2 J' > 0$ เป็นดังนี้

$$\partial^2 H / \partial \bar{u}^2 > 0$$

$$\partial^2 H / \partial s_i^2 = \mu_i \geq 0, i = 1, \dots, p$$

เมื่อ

$$H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

เงื่อนไขอันดับสองข้างบนนั้นตัวคูณลากรางจ์ $\mu_i, i = 1, \dots, p$ เป็นการพิจารณาไม่ให้เป็นค่าลบ สมการที่ (2.273) มีค่าเท่ากับ $\mu_i c_i = 0$ และสมการที่ (2.274) เทียบเท่ากับ $c_i \leq 0$ ดังนั้น สำหรับกรณีที่เป็น การหาค่าน้อยสุด (Minimum) เราสามารถหาเนccessary conditions (Necessary Conditions) ได้ เมื่อ $\delta J'' = 0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i \right) dt$$

เมื่อ $\delta J'' = 0$ ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i, i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, n \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, i = 1, 2, \dots, m \\ 0 &= \mu_i c_i, i = 1, 2, \dots, p \\ 0 &\leq \mu_i, i = 1, 2, \dots, p \\ 0 &\geq c_i, i = 1, 2, \dots, p \\ x_i(t_0) &= x_{0i}, i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_i(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

เป็นสิ่งที่น่าสนใจตรงที่ว่าสมการเหล่านี้มีความคล้ายกับเงื่อนไขของ คูห์น-ทัคเกอร์ จะเป็นเงื่อนไข บังคับแบบอินอีควาลิตี มีความชัดเจนยิ่งขึ้นทำได้โดยการจัดรูปของปัญหาใดๆที่สรุปไว้ในตอนที่แล้ว มา วิธีหนึ่ง ก็คือจะต้องแปลงกลับปัญหาที่เป็นเงื่อนไขบังคับแบบอินอีควาลิตีให้เป็นเงื่อนไขบังคับแบบอีควาลิตีโดยใช้สแลกวาริเอเบิล (Slack Variable)

2.3 สรุปไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.266)

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n$$

ปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สถานะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไคเรคท์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรคท์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของแปรเอด (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional)

โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ν_l , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากันและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

2.4 การทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทวิวัชร วีระเกล้า (2000) กล่าวถึงทฤษฎีที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่งในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงที่เรียกว่า ทฤษฎีความค่าต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าวที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย คือทฤษฎีของฮามิลตัน-จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพิจารณาทฤษฎีของพอนทริยาгин และทฤษฎีความต่ำสุดที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง และยังสนับสนุนทฤษฎีต่างๆ ให้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง และแคลคูลัสของวาเรียนชัน ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของพอนทริยาгинและทฤษฎีความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีการนี้สามารถได้ให้คำตอบที่ตรงกัน

ทวิวัชร วีระเกล้า (2000) ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธี ในการที่ช่วยให้การวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรง นั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) ด้วยการใช้แนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณาปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุดมีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum Energy with Free Final Time Problem) เอกสารทางวิชาการฉบับนี้ จะได้อธิบายถึงรายละเอียดความคล้ายคลึงกัน ระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาที่น้อยที่สุด สำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้นแต่จากการพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่า และท้ายสุดได้มีการเปรียบเทียบผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

ยศศักดิ์ สายสนธิ (2003) ในปริญญานิพนธ์นี้ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาวิธีการวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งที่เล่นในสนามแข่งขัน โดยใช้วิธีมินิแมกไทมออปติไมเซชัน (Minimum Time Optimization) มาเป็นเครื่องมือสำหรับทำการวิเคราะห์และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มาเป็นเครื่องมือช่วยในการหาคำตอบ ซึ่งก็คือค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่ง โดยทำการศึกษาวิจัยกระทำในลักษณะแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองของรถแข่งซึ่งเป็นรถยนต์แบบห้าระดับขั้นความเร็ว ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของรถแข่งทั้งหมดห้าสมการ (ไม่คิดผลกระทบจากอากาศพลศาสตร์) และใช้แบบจำลองของรถแข่งที่มีมวลขนาดต่างๆ เพื่อใช้เปรียบเทียบกันโดยแบบจำลองของรถแข่งทั้งสองมีเงื่อนไขบังคับก็คือรูปร่างของสนามแข่งขัน แล้วให้รถแข่งวิ่งในสนามดังกล่าว โดยจะป้อนค่าคอนโทรลอินพุต (Control Input) ในรูปของแรงขับเคลื่อนและมุมเลี้ยวให้กับแบบจำลองของรถแข่งเพื่อดูผลลัพธ์ก็คือได้ความเร็วสูงสุดเท่าใด ด้วยการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ซึ่งทั้งแบบจำลองของรถแข่งและสนามแข่งขันจะถูกแปลงให้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ แล้วใช้ฟังก์ชัน fmincon ของโปรแกรมแมทแล็บ (Matlab) มาเป็นเครื่องมือในการคำนวณหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่าวิธีการหาค่าของความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Minimum Time Optimization) สามารถนำมาใช้หาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ได้ และผลของคำตอบอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ แต่มีความยากในการหาคำตอบค่อนข้างมากเนื่องจากจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของเวลาให้ใกล้เคียงกับคำตอบให้มากที่สุด แต่ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้หาเวลาในการเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆ ได้เช่นกัน

ปเสฐฐา สารลักษณะ ทำการศึกษาปัญหาเรื่องการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุด ในระบบพลศาสตร์ ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหา

เงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อม ทางหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะการทำงาน แล้วนำค่าคำตอบของการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดมาเปรียบเทียบกัน ผลจากการศึกษาวิจัยพบว่าค่าความนิ่มนวลที่สุดมีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด ซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขในเรื่องของการที่สามารถกำหนดค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายให้กับแรงที่จะมาทำกับระบบในอนาคต และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสมทั้งความนิ่มนวลและการประหยัดพลังงาน

Evtim VZ. ศึกษา “ระบบพลศาสตร์และกลไกการควบคุมทางหาค่าที่เหมาะสมที่สุด” (Dynamics and Optimization of Controlled Mechanical Systems) เป็นการพัฒนาโปรแกรมให้เข้าใจการทำงานของหุ่นยนต์ให้มากที่สุด โดยศึกษาจากระบบของเครื่องจักรกล (Multibody systems) ระบบการทำงานของหุ่นยนต์ การทำงานจริงของชิ้นส่วนที่เลียนแบบมนุษย์ (Manipulators and robots) การเปลี่ยนแปลงรูปร่างอัตโนมัติ (Automobiles) และการเคลื่อนย้ายโครงสร้างอื่นๆ (Moving structures) เป็นต้น ทำให้ได้ข้อมูลทางพลศาสตร์การเคลื่อนที่ (Kinematics) และค่าเหมาะสมสูงสุด (Extremum) โดยออกแบบให้แก้ปัญหาแบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear dynamics) รวมถึงการแก้ปัญหาแบบโดยวิธีตรง และปัญหาผกผัน (Inverse problems) โดยการสร้างโปรแกรมบนภาษา Fortran เพื่อคำนวณหาคำตอบของปัญหาโดยการคำนวณจากวิธีของนิวตัน ออยเลอร์ ลากรางจ์ (Newton-Euler Lagrange equations) ในการหาสมการการเคลื่อนที่ที่ประกอบกับการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น จะได้ผลที่แสดงโดยกราฟสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างและวิเคราะห์ระบบ ผลที่ได้คือโปรแกรมสามารถแก้ปัญหาทางการควบคุมให้ได้ประโยชน์สูงสุดได้อย่างแม่นยำ แต่มีความหลากหลายทางการใช้งานมากเกินไป ไม่ได้สร้างโปรแกรมมาเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่เพียงอย่างเดียว การใช้งานจึงใช้เวลาในการวิเคราะห์นาน และไม่สะดวกในการกำหนดข้อมูลเริ่มต้น

Jufeng P. ศึกษา “การใช้ Mathematical Program with Complementarily Constraints (MPCC) ในการวิเคราะห์หาความเสียดทานที่เกิดขึ้นกับหุ่นยนต์ โดยการแก้ปัญหาการควบคุมให้ได้ประโยชน์สูงสุด” (Optimal Control of Multiple Robot Systems with Friction sing MPCC) โดยความเสียดทานได้จากระบบพลศาสตร์ (Dynamic System) ซึ่งแบ่งเป็นทางพลศาสตร์การเคลื่อนที่และขอบเขตทางพลศาสตร์ (Dynamics Constraints) ประกอบกับวิธีแก้ปัญหของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยโปรแกรมใช้วิเคราะห์ปัญหาการควบคุมโดยสมบูรณแบบให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่สุด (Full Minimal Time Optimal Control) ผลลัพธ์ถูกเขียนแสดงเป็นภาพประกอบตามปัญหาต่างๆ ผลที่ได้ค่อนข้างแม่นยำ แต่รายละเอียดย่อยอื่นๆ ไม่ได้แสดงผลออกมา จึงทำให้ข้อมูลไม่ครอบคลุมเพียงพอ

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien, ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณ เมื่อนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมออันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตันในบทความฉบับนี้ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจน ในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการชั้นสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งการที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัยได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีตรงและวิธีอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่ จะอยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (State of the Problem)
2. สมการของระบบพลศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Dynamics System of Problem)
3. การกำหนดสมการเงื่อนไขที่จำเป็นที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

3.1 การกำหนดปัญหา (State of the Problems)

ในระบบพลศาสตร์ของลิฟต์ขนส่งเป็นระบบที่เป็นเชิงเส้น (Linear Dynamics System) นั้นสามารถเขียนแสดงให้อยู่ในรูปแสดงความสัมพันธ์ของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

เมื่อ $x \in R^n$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่าตัวแปรสถานะ (States Variable) ของค่าปริภูมิสถานะ (State Space Variable) และ $u \in R^m$ เป็นตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control Input) ของการแก้ปัญหา ตัวแปร x_0 คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปรสถานะ ให้ t_0 คือเวลาเริ่มต้นและ $f(x, u, t)$ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของตัวแปรตัวแปรสถานะ, ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้ก็คือการหาค่าของตัวแปรสถานะ $x(t)$ โดยกำหนดค่าเป็นช่วงจำนวนให้กับตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control Input), $u(t)$ ที่ทำให้การทำงานของระบบการเคลื่อนที่ของลิฟต์ขนส่งให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ ในเรื่องการใช้หลักการความหยวบกระด้างสูงสุด (Maximum Jerk) เปรียบเทียบกับหลักการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy)

3.2 สมการระบบพลศาสตร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Dynamic system of problems)

ระบบลิฟต์ขนส่งเป็นระบบที่มีลักษณะทางกายภาพ ที่ประกอบไปด้วยก้อนมวลหลายๆก้อน (ผู้โดยสารหรือสัมภาระ) ประกอบอยู่ภายใน มีการเคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวดิ่ง และกำหนดให้เป็นไปตามหลักการกรอบอ้างอิงความเฉื่อยของนิวตัน ดังนั้น ทั้งตัวลิฟต์ และ สิ่งที่อยู่ภายในลิฟต์จะเกิดแรง

ปฏิกิริยาที่เหมือนกัน เพื่อความสะดวกในการคำนวณหาผลเฉลยจะตั้งข้อสมมติฐานเบื้องต้นของระบบดังนี้

1. ระบบมีจุดศูนย์ถ่วงอยู่จุดเดียว
2. การเคลื่อนที่ของลิฟต์จะสัมผัสกับแกนประคองเลื่อนตลอดการเคลื่อนที่ไม่คิดผลของแรงต้านอากาศ
3. คิดเฉพาะค่าของแรงเสียดทานสถิตย

และเนื่องจากการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนตัวแปรสถานะจาก $\dot{x} = f(x, u, t)$; $x(t_0) = x_0$, ไปเป็น $\dot{y} = f(x, u, t)$; $y(t_0) = y_0$, แทน เพื่อให้สอดคล้องกับทิศทางการเคลื่อนที่ของลิฟต์ขนส่ง กำหนดผังวัตถุอิสระ (Free body Diagram) ของระบบลิฟต์ขนส่งแต่ละกรณีเป็นดังนี้

3.2.1 กรณีของลิฟต์ขนส่ง เคลื่อนที่ขึ้น

จากภาพประกอบ 1 กำหนดให้ห้องโดยสารมีมวล M_1 จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้

3.2.1.1 ทิศทางของการเคลื่อนที่สวนทางกับความโน้มถ่วงของโลก

$$-M_1\ddot{y} + M_1g - F_n - T = 0 \quad (3.2)$$

เมื่อ

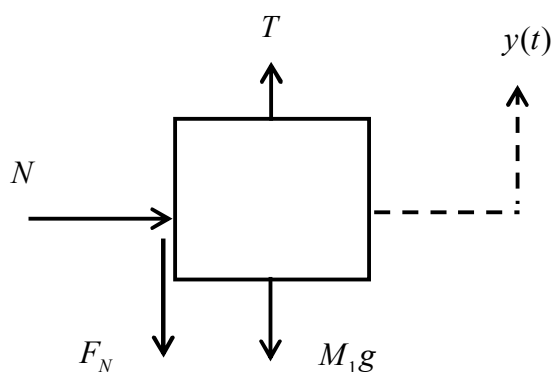
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ คือ ค่าความโน้มถ่วงของโลก

y คือ ตัวแปรสถานะ

F_s คือ แรงเสียดทานสถิตย (นิวตัน, N)

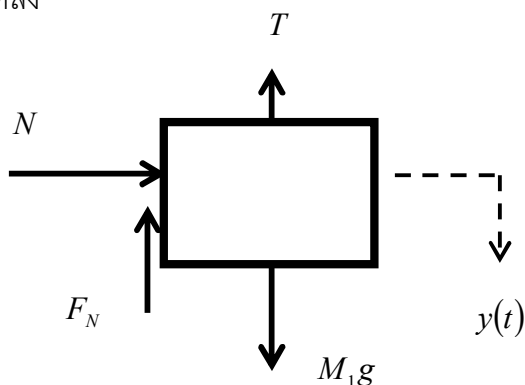
T คือ แรงดึงของเส้นลวดสลิง (นิวตัน, N)

M_1 คือ มวลทั้งหมดของลิฟต์ขนส่ง (กิโลกรัม, kg .)



ภาพประกอบ 1 ผังวัตถุอิสระของลิฟต์ขนส่ง (เคลื่อนที่ขึ้น)

กรณีของลิฟต์ขึ้นลง เคลื่อนที่ลง



ภาพประกอบ 2 ผังวัตถุอิสระของลิฟต์ขึ้นลง (เคลื่อนที่ลง)

จากภาพประกอบ 2 กำหนดให้ห้องโดยสารมีมวล M_1 จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้

ทิศทางของการเคลื่อนที่เป็นทิศทางเดียวกับความโน้มถ่วงของโลก

$$M_1 \ddot{y} + M_1 g - F_n - T = 0 \quad (3.3)$$

เมื่อ

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$ คือ ความโน้มถ่วงของโลก

y คือ ตัวแปรสถานะ

F_s คือ แรงเสียดทานสถิตย์ (N , นิวตัน)

T คือ แรงดึงของเส้นลวดสลิง (N , นิวตัน)

M_1 คือ มวลทั้งหมดของลิฟต์โดยสาร (กิโลกรัม, kg)

จากสมการที่ (3.2) หาร ตลอดด้วย M_1 และกำหนดให้มวล $M_1 = 1,200$ กิโลกรัม จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\ddot{y} - 9.81 - \frac{F_n}{1,200} = \frac{u_1}{1,200} \quad (3.4)$$

เมื่อกำหนด u_1 แทนตัวแปร T และทำนองเดียวกันสมการที่ (3.3)

$$\ddot{y} + 9.81 - \frac{F_n}{1,200} = -\frac{u_1}{1,200} \quad (3.5)$$

เราสามารถลดทอนอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์จากอันดับสองให้เป็นอันดับหนึ่งดังนี้ จากสมการที่ (3.4) และ (3.5)

$$\dot{y} = y_2 \quad (3.6)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \quad (3.7)$$

สำหรับสมการที่ (3.4) และ

$$\dot{y}_2 = -\frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \quad (3.8)$$

สำหรับสมการที่ (3.5) โดยที่กำหนดแรงดึงของลวดสลิง $T = u_i$ เป็นตัวแปรควบคุมป้อนเข้าของสมการ และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับสมการเพื่อหาผลเฉลยเฉพาะรายให้สมการ ดังนี้

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 2$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad \dot{y}(1) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(1) = 0$$

3.3 เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Conditions)

ในหัวข้อนี้เราจะนำสมการการเคลื่อนที่ของลิฟต์ขึ้นส่งมากำหนดเงื่อนไขตามหลักวิชาการควบคุมผลที่ได้สูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamics Optimization) เพื่อหาผลเฉลยต่อไปในแต่ละกรณี

3.3.1 ปัญหาการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด (Minimum Energy Problems)

เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง จากหลักวิธีของ แคลคูลัส ออฟ วาเรียชัน มาทำการจัดรูปสมการการหาผลการควบคุมทางพลศาสตร์ที่ได้ผลดีที่สุดดังนั้น รูปแบบของค่าฟังก์ชันนอลหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Functional or Objective Function) ของความเหมาะสมสูงสุด คือ

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 dt \quad (3.9)$$

พิจารณาจากค่าฟังก์ชันใน (3.9) เพื่อให้ได้ค่าที่น้อยที่สุด เมื่อใช้หลักการของแคลคูลัส ออฟ วาเรียชัน จะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์, $J'[x]$ ใหม่ ซึ่งกำหนดในสมการที่ (3.9) ถ้าแทน ค่าตัวแปร L ด้วยตัวแปร F จะได้ว่า

$$F = u_1^2 + \lambda_1(y_2 - \dot{y}_1) + \lambda_2\left(\frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 - \dot{y}_2\right) \quad (3.10)$$

และ

$$F = u_1^2 + \lambda_1(y_2 - \dot{y}_1) + \lambda_2\left(-\frac{u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 - \dot{y}_2\right) \quad (3.11)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นในการหาคำตอบของปัญหา มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \pm u_1 \\ u_1 &= -\frac{\lambda_2}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3.2 ปัญหาของการใช้สมการความนิ่มนวลสูงสุด โดยการกำหนดจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของ ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Minimum Jerk Problems with given both end of control input)

ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุด มีความเหมือนกับรูปแบบปัญหาของหลักการการใช้พลังงานน้อยที่สุดในสมการที่ (3.11) ดังแสดงไว้ข้างล่าง

$$\begin{aligned}\dot{y} &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 = \frac{\pm u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81 \\ \dot{y}_3 &= \ddot{y} = \pm \tilde{u}_1\end{aligned}\quad (3.13)$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายของตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control Input) ปัญหานี้ยังคงต้องพิจารณาถึงเงื่อนไขของเวลาดังนี้

$$t_1 = 0, u_1 = 0, y = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0 \quad (3.14)$$

ในปัญหานี้ค่าฟังก์ชันของสมการความกระด้าง กำหนดไว้ชัดเจนดังที่แสดง

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 dt = \int_0^1 \ddot{y}^2 dt \quad (3.15)$$

$\ddot{x}_1$ จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันของ $F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}, t)$

ซึ่งวิธีการนี้เหมือนกับการนำไปใช้ในปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุด ดังนั้น

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(y_2 - \dot{y}) + \lambda_2(y_3 - \dot{y}_2) + \lambda_3(\pm \tilde{u}_1 - \dot{y}_3) \quad (3.16)$$

พิจารณา (3.16) ด้วยรูปสมการ ออยเลอร์ ลากรางจ์ (Euler- Lagrange Equation)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \ddot{y}} \right) - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \ddot{y}} \right) = 0 \quad (3.17)$$

เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับปัญหาของความโน้มถ่วงสูงสุด มีดังนี้

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2$$

$$\dot{y} = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_3 = \frac{\pm u_1}{1,200} + \frac{F_n}{1,200} - 9.81$$

$$\dot{y}_3 = \tilde{u}_1,$$

$$\tilde{u}_1 = -\lambda_3/2$$

ซึ่งจะได้นำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และเงื่อนไขที่จำเป็นของปัญหาทั้งหมดมาทำการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมแมทแล็บต่อไป

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

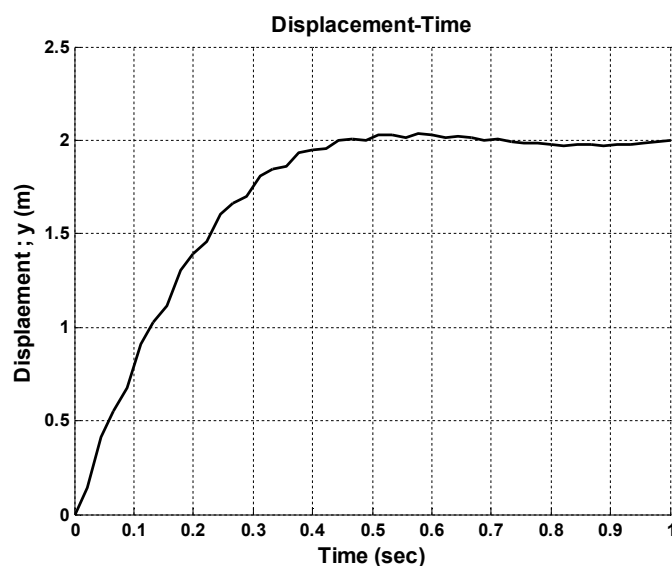
4.1.1 การใช้หลักการของสมการพลังงานน้อยที่สุด เปรียบเทียบกับการใช้สมการของความโน้มถ่วงสูงสุดโดยกำหนดเวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย

เป็นการแสดงการเปรียบเทียบระหว่างปัญหาทั้งสอง คือการใช้หลักการของสมการพลังงานน้อยที่สุดโดยเปรียบเทียบกับการใช้สมการของความกระด้างน้อยที่สุด โดยแบ่งเป็นกรณีการเคลื่อนที่ขึ้นและเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง

4.1.1.1 ปัญหาใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด (The minimum Energy Problem)

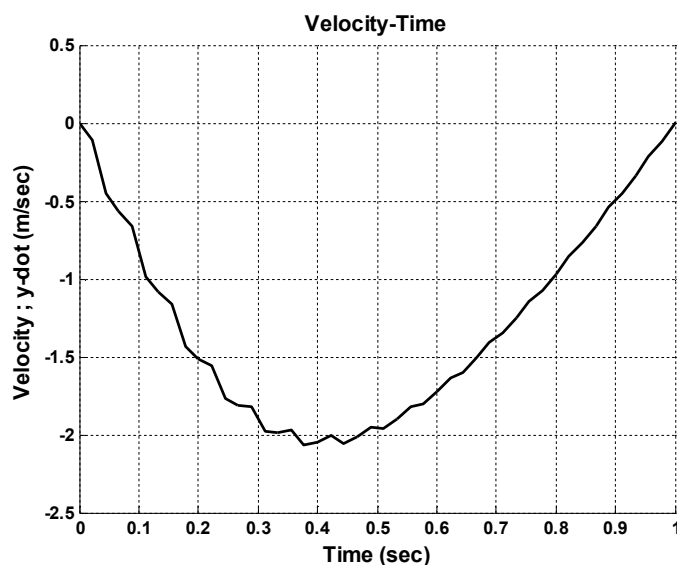
4.1.1.1.1 กรณีการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขนส่ง (moving upward)

กรณีนี้เป็นกรณีที่ทิศทางการเคลื่อนที่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางความโน้มถ่วงของโลกแต่เทอมของแรงเสียดทานนั้น มีทิศทางเดียวกับความโน้มถ่วงของโลก ประกอบด้วยภาพประกอบแสดง การกระจัด $y(t)$, ความเร็ว $\dot{y}(t)$ และ ค่าแรงที่ป้อนเข้า $u(t)$ ตามลำดับ เทียบกับเวลาที่กำหนด ดังนี้

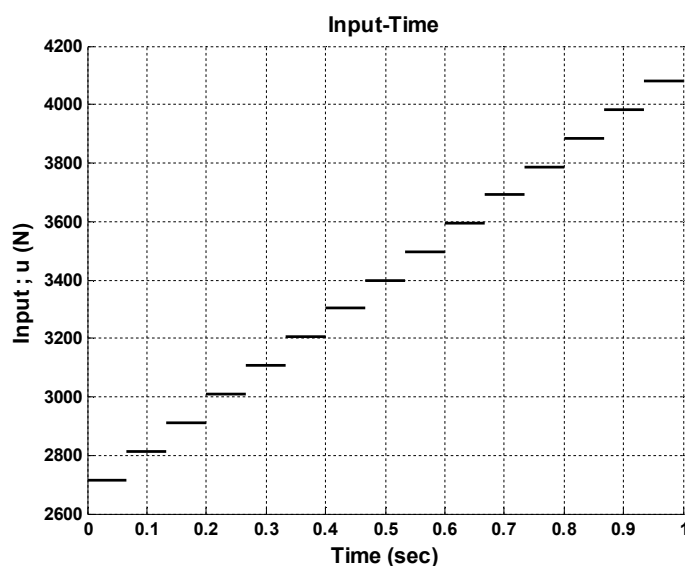


ภาพประกอบ 3 แสดงการกระจัด $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงาน

น้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Energy ; Elevator moving up) ที่มีลักษณะเส้นโค้งที่ ต่อเนื่องที่กำหนดเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ ถึง $t = 1$ sec เป็นระยะทาง 2 เมตร



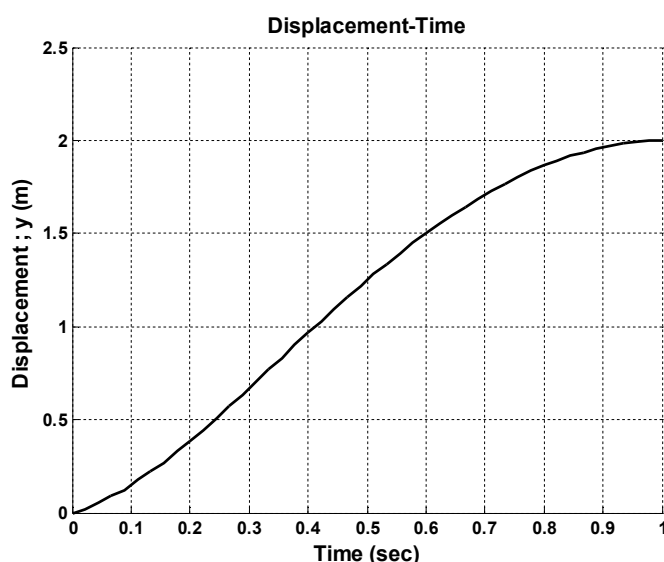
ภาพประกอบ 4 แสดงความเร็ว $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Energy ; Elevator moving up) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่องกันลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่องมีความเร็วสูงสุดที่ 2.1 m/sec ที่ เวลา 0.4 sec



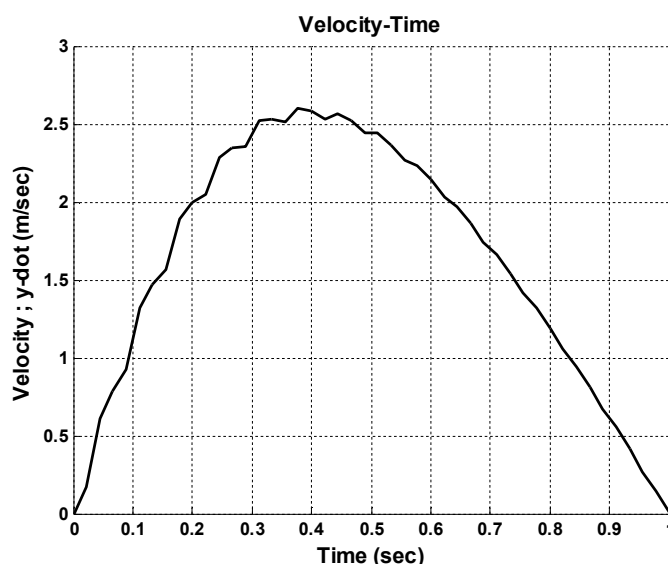
ภาพประกอบ 5 แสดงค่าของอินพุต ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Energy; Elevator moving up) ที่มีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวระนาบแบบขั้นบันได ที่ไม่ต่อเนื่องกัน

4.1.1.1.2 กรณีการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง (Elevator moving Down)

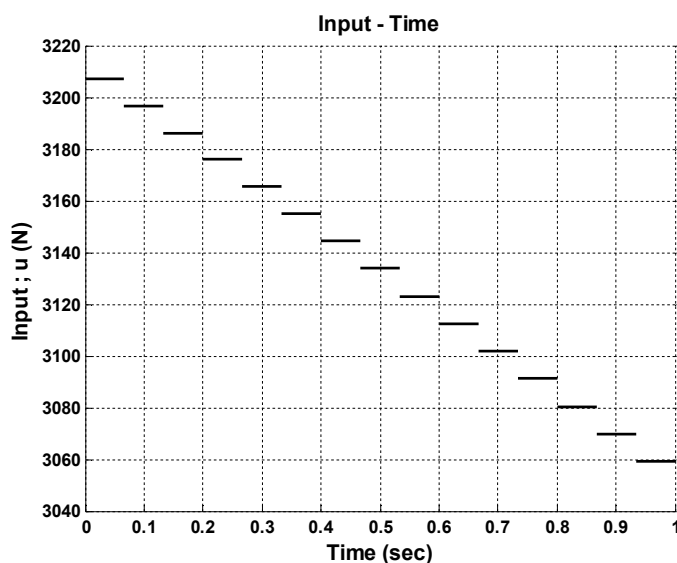
กรณีนี้เป็นกรณีที่ ทิศทางการเคลื่อนที่มีทิศทางเดียวกับทิศทางความโน้มถ่วงของโลก แต่เทอมของแรงเสียดทานนั้นมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ ประกอบด้วยภาพประกอบแสดง การกระจัด $y(t)$, ความเร็ว $\dot{y}(t)$ และ ค่าแรงที่ป้อนเข้า $u(t)$ ตามลำดับ เทียบกับเวลาที่กำหนด ดังนี้



ภาพประกอบ 6 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Energy ; Elevator moving Down) ที่มีลักษณะเส้นโค้งที่ต่อเนื่องที่กำหนดเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ ถึง $t = 1$ sec เป็นระยะทาง 2 เมตร



ภาพประกอบ 7 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Energy ; moving Down) ลักษณะ เป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่อง มีความเร็วสูงสุดที่ 2.6 m/sec ที่ เวลา 0.4 sec

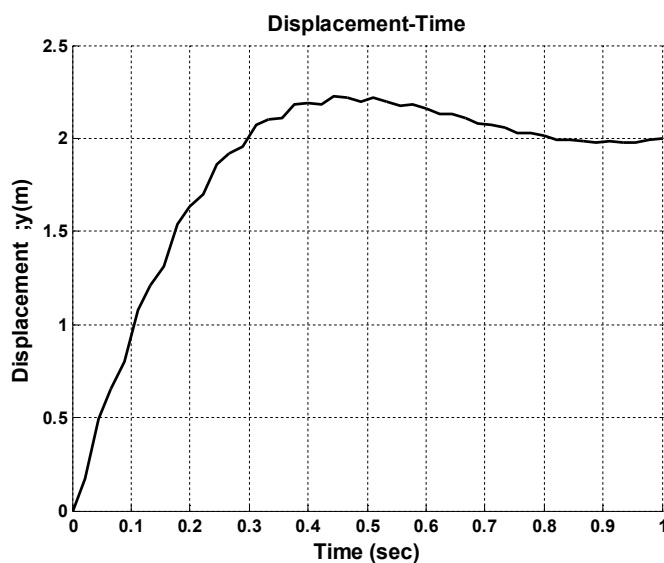


ภาพประกอบ 8 แสดงค่าแรงป้อนเข้า; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นสูง (Minimum Energy ; Elevator moving upward) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงในแนวระนาบแบบขั้นบันได ที่ไม่ต่อเนื่องกัน

4.1.1.2 ปัญหาความกระด้างน้อยที่สุด (The minimum Jerk Problem)

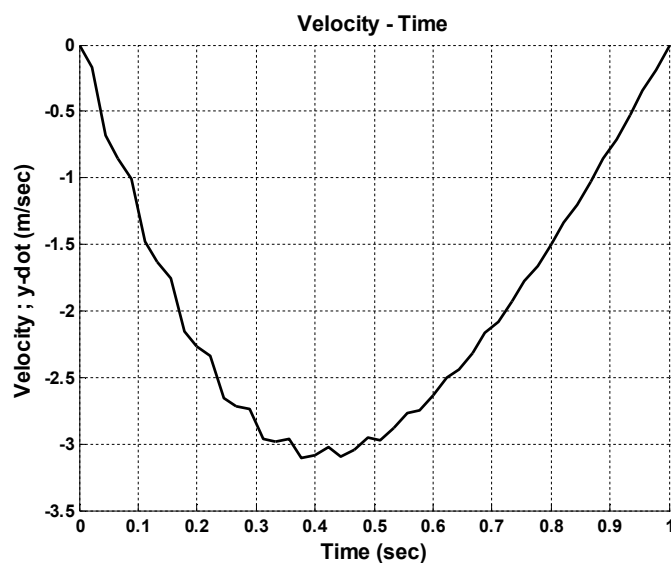
4.1.1.2.1 กรณีการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นสูง (Elevator moving upward)

กรณีนี้เป็นกรณีที่ ทิศทางการเคลื่อนที่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางความโน้มถ่วงของโลก แต่เทอมของแรงเสียดทานนั้นมีทิศทางเดียวกับความโน้มถ่วงของโลก ประกอบด้วยภาพประกอบแสดง การกระจัด $y(t)$, ความเร็ว $\dot{y}(t)$ และ ค่าแรงที่ป้อนเข้า $u(t)$, ความกระด้าง $\ddot{u}(t)$ ตามลำดับ เทียบกับเวลาที่กำหนด ดังนี้

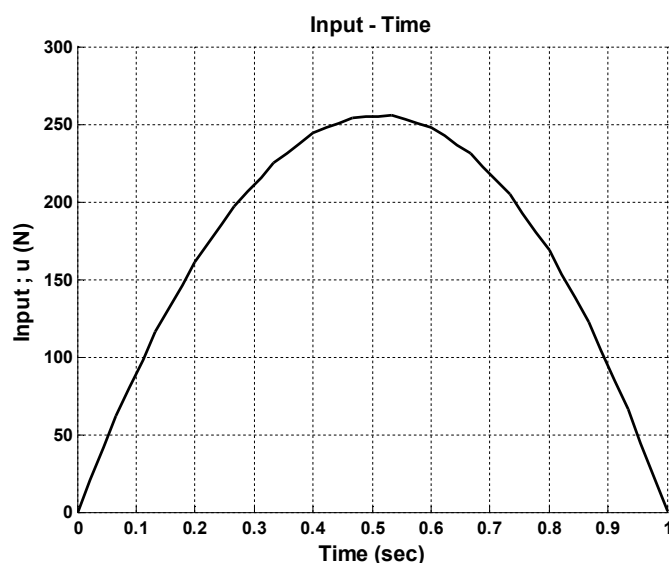


ภาพประกอบ 9 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้าง

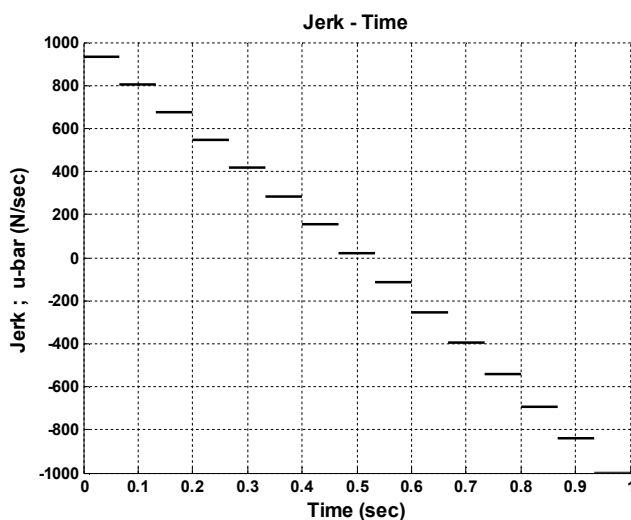
น้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving upward) ที่มีลักษณะเส้นโค้งที่ต่อเนื่องที่กำหนดเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ ถึง $t = 1$ sec เป็นระยะทาง 2 เมตร



ภาพประกอบ 10 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการขึ้นลิฟต์การความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving upward) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่องมีความเร็วสูงสุดที่ 2.6 m/sec ที่ เวลา 0.4 sec



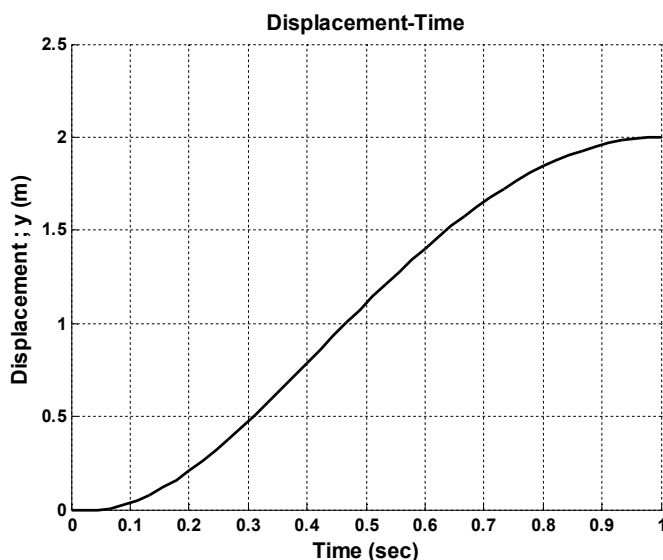
ภาพประกอบ 11 แสดงค่าแรงป้อนเข้า ; u เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการขึ้นลิฟต์การความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving upward) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่อง มีการป้อนแรงสูงสุดที่ 2600 N ที่ เวลา 0.4 sec



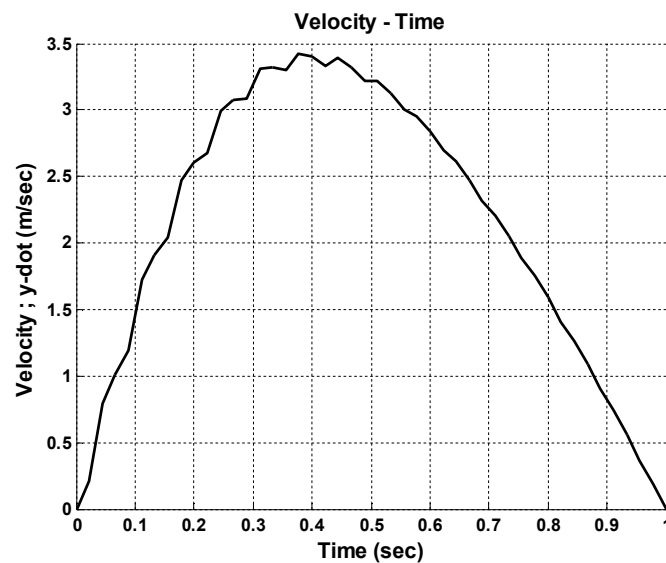
ภาพประกอบ 12 แสดงค่าของความกระด้าง (Jerk) ; $\ddot{u}$ ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนดกรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขึ้นส่ง (Minimum Jerk ; Elevator moving upward)

4.1.1.2.2 กรณีการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง(Elevator moving downward)

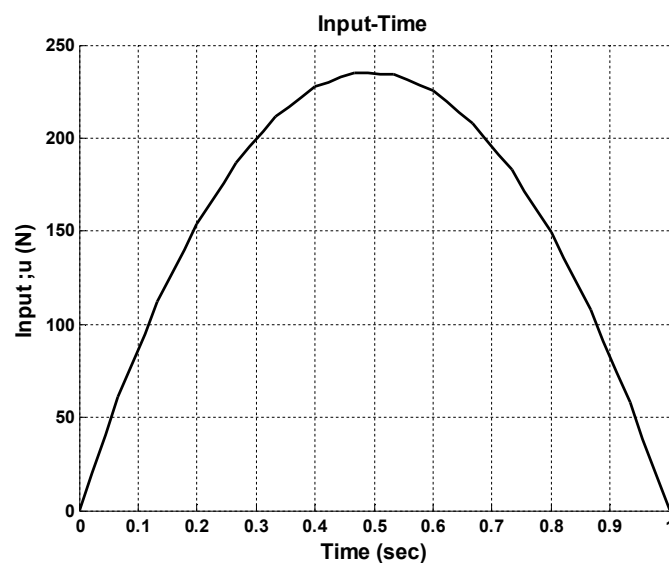
กรณีนี้เป็นกรณีที่ ทิศทางการเคลื่อนที่มีทิศทางเดียวกับทิศทางความโน้มถ่วงของโลก แต่เทอมของแรงเสียดทานนั้นมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ ประกอบไปด้วยภาพประกอบแสดง การกระจัด $y(t)$, ความเร็ว $\dot{y}(t)$, ค่าแรงที่ป้อนเข้า $u(t)$ และ ความกระด้าง $\ddot{u}(t)$ ตามลำดับ เทียบกับเวลาที่กำหนด ดังนี้



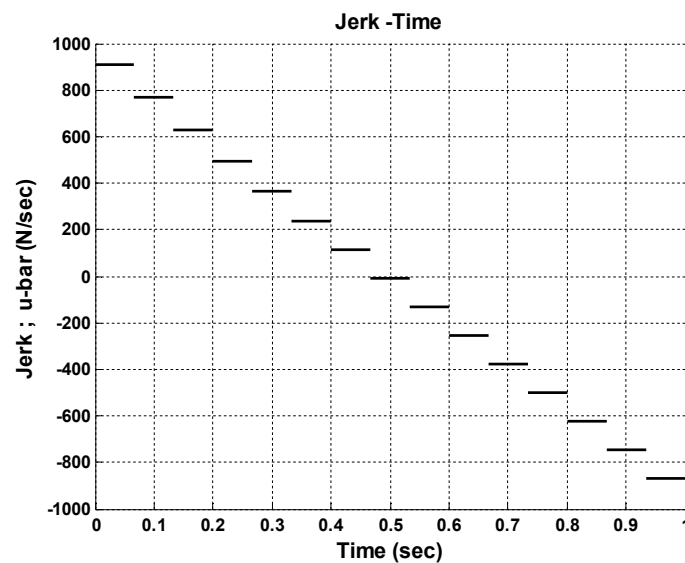
ภาพประกอบ 13 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนดกรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving downward) ที่มีลักษณะ เส้นโค้งที่ต่อเนื่องที่กำหนดเวลาเริ่มต้นที่ $t = 0$ ถึง $t = 1$ sec เป็นระยะทาง 2 เมตร



ภาพประกอบ 14 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้น้ำหนักการความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving downward) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่อง มีความเร็วสูงสุดที่ 3.45 m/sec ที่เวลา 0.4 sec



ภาพประกอบ 15 แสดงค่าแรงป้อนเข้า ; u เทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้น้ำหนักการความกระด้างน้อยที่สุด ของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง (Minimum Jerk; Elevator moving downward) ลักษณะเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความต่อเนื่อง มีค่าแรงสูงสุดที่ 2350 N. ที่ เวลา 0.5 sec

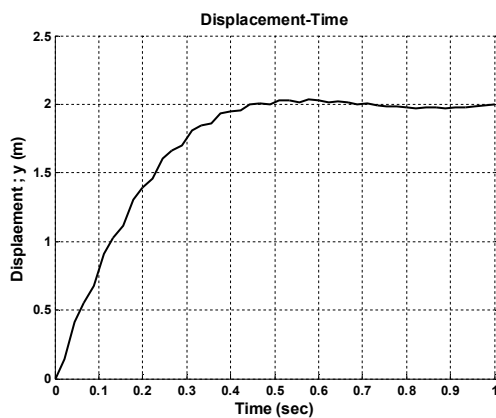


ภาพประกอบ 16 แสดงค่าความกระด้าง ; $\ddot{u}$ ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนด กรณีการใช้หลักการความกระด้างน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขึ้นลง (Minimum Jerk ; Elevator moving downward)

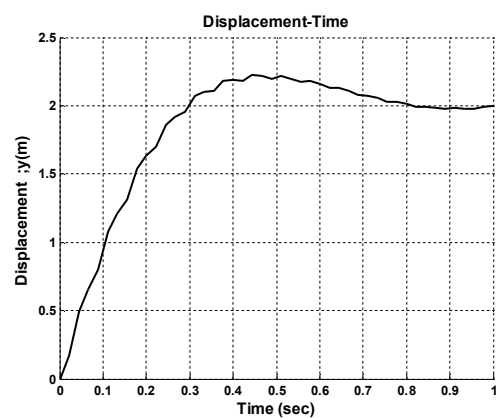
4.1.1.3 การเปรียบเทียบการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

กรณีเคลื่อนที่ขึ้น

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)

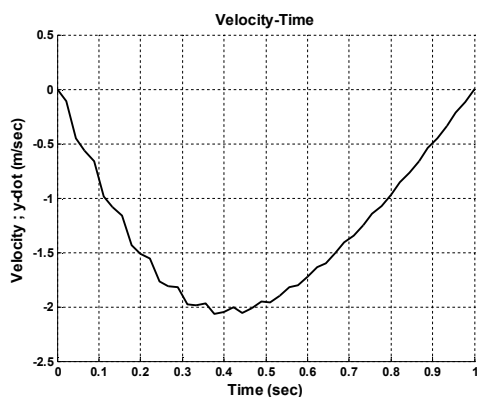


หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)

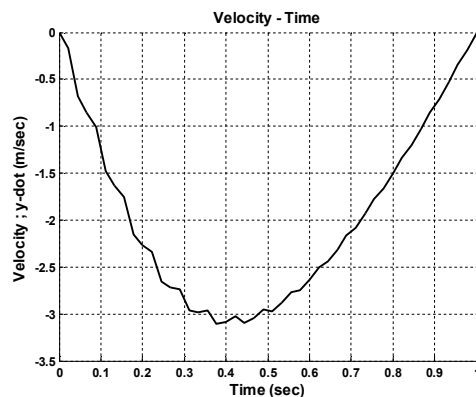


ภาพประกอบ 17 แสดงการเปรียบเทียบการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)

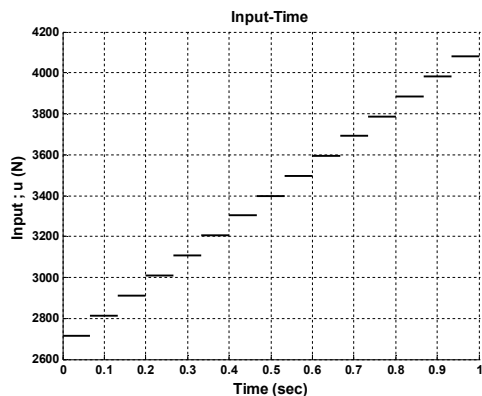


หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)

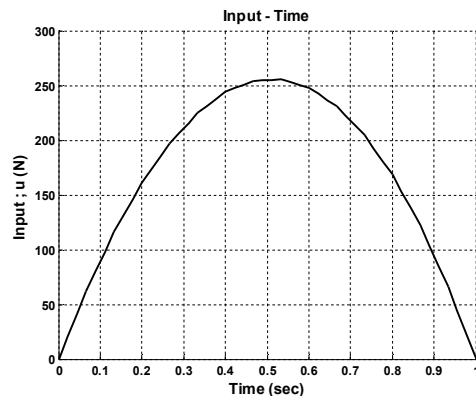


ภาพประกอบ 18 แสดงความเร็ว $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)



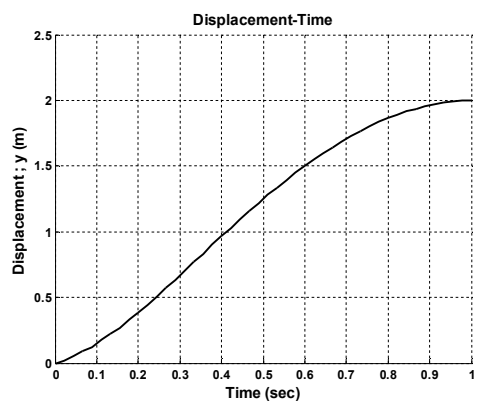
หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ขึ้น)



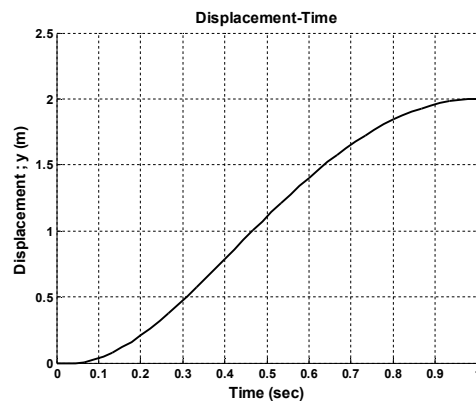
ภาพประกอบ 19 แสดงค่าของแรง ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

กรณีเคลื่อนที่ลง

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)

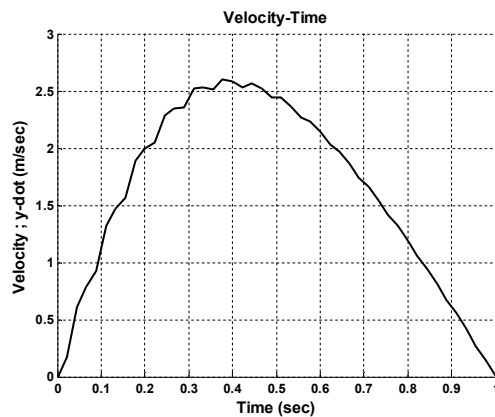


หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)

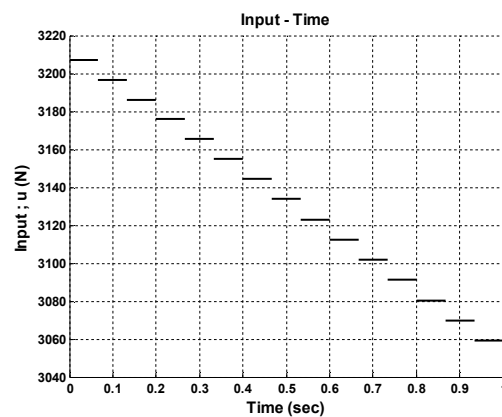


ภาพประกอบ 20 แสดงการกระจัด ; $y(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดเปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)



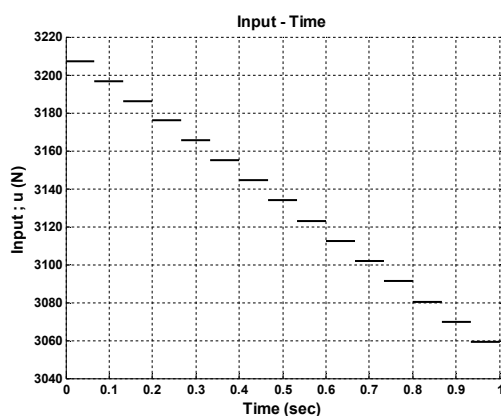
หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)



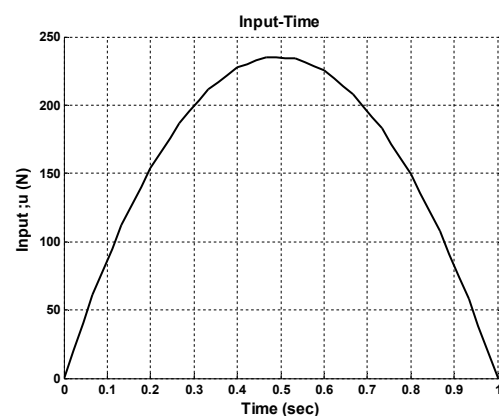
ภาพประกอบ 21 แสดงความเร็ว ; $\dot{y}(t)$ เทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด

เปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

หลักการพลังงานน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)



หลักการความกระด้างน้อยที่สุด (เคลื่อนที่ลง)



ภาพประกอบ 22 แสดงค่าของแรง ; u ที่กระทำเทียบกับเวลาที่กำหนดใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด

เปรียบเทียบกับการใช้ความหยابกระด้างน้อยที่สุด

จากการเปรียบเทียบกราฟแสดงผลตอบสนองของทั้งสอง หลักการสิ่งที่ได้เห็นชัดเจนคือ

ภาพประกอบ 5 กับภาพประกอบ 11 จะแตกต่างกันเนื่องจากการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุดนั้น ทำให้ค่าเริ่มต้นของกราฟนั้นเริ่มต้นที่จุด 0 เมื่อเวลาเริ่มต้น $t=0$ วินาที เป็นผลเนื่องจากที่มีเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มมาอีก 1 เงื่อนไข (เช่นเดียวกับภาพประกอบ 8 กับภาพประกอบ 15 ในกรณีทีลิตเคลื่อนที่ลง) และลักษณะของกราฟ ในกรณีของสมการความกระด้างน้อยที่สุดเป็นสมการเส้นตรงเอียงกับระนาบแต่กราฟของการใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดนั้นเป็นสมการเส้นตรงขนานกับระนาบ

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.2.1 ปัญหาใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด (The minimum Energy Problem)

การใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุดกรณีการเคลื่อนที่ขึ้นและการเคลื่อนที่ลง แต่ในภาพประกอบ 3 ถึงภาพประกอบ 8 นั้น เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดังนั้นจึงสามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับตัวแปรสถานะ (ระยะกระจัด) และความเร็วเท่านั้นในส่วนของภาพประกอบ 5 และภาพประกอบ 8 นั้นรูปกราฟที่ทำการพล็อตได้มีลักษณะที่ไม่ต่อเนื่องมีการกระโดดของค่าแรงที่ป้อนเข้า ในทุกช่วงทำให้วิเคราะห์ได้ว่าในทุกช่วงเวลาที่เกิดการกระโดดนั้นจะทำให้ความนุ่มนวลลดลง (มีความกระด้างเกิดขึ้น)

4.2.2 ปัญหาความกระด้างน้อยที่สุด (The minimum Jerk Problem)

เนื่องจากเป็นอนุพันธ์ของสมการการเคลื่อนที่ ดังนั้นจึงมีข้อดีตรงที่ว่าเราสามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเพิ่มได้อีกเป็นสองเงื่อนไขให้กับตัวแปรควบคุมป้อนเข้า ทำให้ได้ผลเฉลยที่สามารถนำไปใช้งานได้จริงดังภาพประกอบ 11 และภาพประกอบ 15 ที่แสดงถึงการป้อนแรงจากจุดเริ่มต้นที่ $t=0, u=0$ ต่างจากกับกรณีการใช้พลังงานน้อยที่สุด และ ในส่วนของ ภาพประกอบที่ 4.9 และ 4.13 นั้นรูปกราฟที่ทำการพล็อตได้มีลักษณะที่ต่อเนื่องไม่มีการกระโดดของค่าแรงที่ป้อนเข้า ในทุกช่วงทำให้วิเคราะห์ได้ว่าในทุกช่วงเวลาที่กราฟไม่เกิดการกระโดดนั้นจะทำให้มีความนุ่มนวลในการเคลื่อนที่

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การใช้หลักการของสมการพลังงานน้อยที่สุดนั้นให้ผลเฉลยในแต่ละกรณีคือการเคลื่อนที่ขึ้นและการเคลื่อนที่ลงแต่ในภาพประกอบ 5 และภาพประกอบ 8 นั้นไม่สามารถที่จะนำไปใช้งานจริงได้เพราะเป็นไปไม่ได้ที่จะป้อนแรงให้ระบบในทันทีทันใด ณ เวลาเริ่มต้นที่ $t_1 = 0 \text{ sec}$. และเวลาสุดท้าย $t_2 = 1 \text{ sec}$ การใช้หลักการสมการการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้นให้ผลเฉลยของเทอมตัวแปรควบคุมป้อนเข้า(Control Input) หรือแรงที่ป้อนเข้าระบบ ในกรณีการเคลื่อนที่ขึ้น และการเคลื่อนที่ลงนั้นลักษณะของเส้นกราฟเป็นแบบขั้นบันได พิจารณาได้ว่าถึงแม้จะใช้หลักการพลังงานน้อยที่สุด ลักษณะการป้อนแรงก็ยังคงเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นความจำเป็นของความต้องการให้กับระบบยังไม่ได้พอแต่ในกรณีของการใช้สมการความกระด้างน้อยที่สุด ในภาพประกอบ 11 และภาพประกอบ 15 นั้นเนื่องจากการแก้สมการความกระด้างน้อยที่สุด เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สาม ดังนั้นจึงสามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้กับตัวแปรควบคุมป้อนเข้าในเทอมของแรงที่ป้อนได้ จึงสามารถที่จะนำผลเฉลยไปใช้งานจริงได้เพราะสามารถที่จะป้อนแรงให้ระบบตามเวลาที่กำหนด และสอดคล้องกับตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่มีค่าสูงสุดในการเคลื่อนที่ลงของลิฟต์ขนส่ง $u(t) \approx 2350 \text{ N}$ และ $u(t) \approx 2550 \text{ N}$ ในการเคลื่อนที่ขึ้นของลิฟต์ขนส่ง ณ เวลา 0.5 sec. เป็นเวลาครึ่งหนึ่งของเวลาที่กำหนด สอดคล้องกับสภาพการทำงานจริงของลิฟต์ขนส่งที่ลักษณะของเส้นกราฟของตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่มีต่อเนื่องกันแทนที่จะเป็นแบบขั้นบันได

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการพัฒนาในขั้นต่อไป ควรจะต้องกำหนดสมการฟังก์ชันของแรงเสียดทานระหว่างแกนประกอบเลื่อนกับตัวลิฟต์ให้ใกล้เคียงกับสถานการณ์จริงมากที่สุด เพื่อที่จะได้สามารถออกแบบคอนโทรลเลอร์ที่เหมาะสมในการใช้งานต่อไป และจะต้องหาวิธีการที่ช่วยให้การกำหนดค่าเริ่มต้นไม่จำเป็นจะต้องกำหนดค่าให้ใกล้เคียงกับคำตอบมาก เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ปเสฐฐา สารลักษณ์ (2548). การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความโน้มถ่วงที่สุดในระบบพลศาสตร์. ปรินซ์นิพนธ์วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพมหานคร:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- มนัส สังวรศิลป์, วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). **คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- ยศศักดิ์ สายสนธิ. (2548) การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับชั้นความเร็ว. ปรินซ์นิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล).กรุงเทพมหานคร:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- สุธรรม ศรีเกษม, เมทินี ทรงชัยกุล, สง่า ศรีสุภาปรีดา.(2545) **MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม**.กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.
- Agrawal SK., Fabien BC.(1999). **Optimization of Dynamic Systems**. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Arthur E.Bryson,Jr. and Yu-Chi Ho.(1969). **Applied Optimal Control**. United States of America:Ginn and Company.
- Bock HG.(1978). **Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems withApplication to Optimal Control**. ZAMM. p. 58.
- Craig JJ. (1986). **Introduction to Robotic: Mechanics and Control**. Addison-Wesley Publishing Company.
- Evtim VZ. (1997) **Dynamics and optimization of controlled mechanical systems**. Bulgaria: Institute of mechanics bulgarian academy of sciences acad. G. Bonchev Street, bl. 4 1113 Sofia.

Jufeng P. (2002). **Optimal control of multiple robot systems with friction using MPCC.**

New York: Mathematical Sciences Rensselaer Polytechnic Institute Troy.

Kane TR., Levinson DA. (1985). **Dynamics: Theory and Applications.** McGraw-Hill Inc.

Mark WS. (1989). **Robot Dynamics and Control.** University of Illinois at Urbana-Champaign.

Saneewong Na Ayuttaya S. (2005). **The development of program for designing the structure of automatic car cloth cover.** [Dissertation]. Srinakarinwiroj University.

Veeraklaew T. (2000) **Extensions of optimization theory and new computational approaches for higher-order dynamic systems** [Dissertation]. Delaware: The University of Delaware.

Veeraklaew T. and Salaluk P., **The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems.** The 19 th conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.

อภิธานศัพท์

อภิธานศัพท์

A_{ij}	คือเมตริกซ์ความเฉื่อย
B_{il}	คือส่วนกลับของเมตริกซ์ความเฉื่อย
C_f	คือค่ากระแสต้านแรงเสียดทาน
F	คือสเกลลาร์ฟังก์ชัน
g	คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
g_j	คือฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)
H	คือ เฮสเซียนเมตริกซ์ (Hessian matrix)
λ_l	คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier)
$\psi_i(t)$	คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักอิสระ
J	คือฟังก์ชันวัตถุประสงค์
s_i	คือตัวแปรสแลก (Slack variables)
t_0	คือเวลาเริ่มต้น
t_f	คือเวลาที่จุดสุดท้าย
$\bar{u}(t)$	คือตัวแปรควบคุมป้อนเข้า
$x(t)$	คือตัวแปรสถานะ

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ-ชื่อสกุล	นายสมมาตร ศรีประเทือง
วันเดือนปีเกิด	30 พฤศจิกายน 2517
สถานที่เกิด	จังหวัดสระบุรี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	18/1 หมู่ 4 ต.หนองนาก อ.หนองแค จ.สระบุรี
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	หัวหน้าฝ่ายซ่อมบำรุง
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	บ.เจ เอส อุตสาหกรรม จก. 30/12 หมู่ที่ 2 ถ.บางบอน 2 เขตบางบอน แขวงบางบอน กรุงเทพมหานคร 10150

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2530	ประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนวัดหนองครก จ.สระบุรี
พ.ศ. 2533	มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนหินกองวิทยาคม จ.สระบุรี
พ.ศ. 2536	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) แผนกวิชาช่างกลโลหะ จากวิทยาลัยเทคนิคสระบุรี
พ.ศ. 2539	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) แผนกวิชาช่างเทคนิค การผลิต จากวิทยาลัยเทคนิคสระบุรี
พ.ศ. 2544	อุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2551	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ