

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



ปริญญานิพนธ์
ของ
มณฑนา ศรีสุจันทร์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ธันวาคม 2560

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ธันวาคม 2560
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



บทคัดย่อ
ของ
มัทนา ศรีสุนทร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ธันวาคม 2560

มัทนา ศรีสุจันทร์. (2560). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: (บัณฑิตวิทยาลัย) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์.

ความมุ่งหมายของการวิจัยนี้คือ เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วศึกษาความสามารถและพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 30 คน โดยมีนักเรียน 4 คนเป็นนักเรียนเป้าหมาย เพื่อศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ (2) เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โดยนักเรียนให้เวลามากขึ้นในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ นักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้มากขึ้น และนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ นักเรียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วนมากขึ้น นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น และนักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้นเช่นกัน

MATHEMATICAL INSTRUCTIONAL ACTIVITIES TO ENHANCE
INDUCTIVE REASONING ABILITY FOR MATHAYOMSUKSA FOUR STUDENTS



Presented in Partial Fulfillment of Requirement for the
Master of Education Degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
December 20

Manthana Srisuchan. (2017). *Mathematical Instructional Activities to Enhance Inductive Reasoning Ability for Mathayomsuksa Four Students*. Master's thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor: Dr. Rungfa Janjaruporn.

The purposes of this research were to construct instructional activities to enhance the inductive reasoning abilities of Mathayomsuksa Four students and then to study its effects on the ability of the students and their performance in terms of inductive reasoning. The sample included thirty Mathayomsuksa Four students in the second semester of the 2016 academic year at Chumpholphonphisai School. Then, four of the participants were randomly selected as target students for a case study. The results of the study were as follows: (1) based on their scores on the test and the tasks, it was found that the number of students who scored higher than sixty percent was more than sixty percent of the total number of students at a .01 level of significance; (2) the students who had experiences in terms of instructional activities in inductive reasoning could develop their abilities to identify a relationship of information leading to the conjecture, students had more time to express their opinions with others before explaining or solving a specific problem. Moreover, they could clearly explain or solve a specific problem. Thus, they could explain the answer and relate it clearly. With reference to writing conjecture, students could define variables leading to the conjecture and check it accurately in order to clearly explain it.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง
กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ของ
มณฑนา ศรีสุจันทร์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณะบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นายแพทย์จักรชัย เอกปัญญาสกุล)
วันที่..... เดือน พ.ศ. 2560

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์)

..... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.สุกัญญา หะยีส้าและ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีด้วยความกรุณาอย่างยิ่งจากอาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ ที่ได้เสียสละอันมีค่าให้คำปรึกษา ให้ความรู้ ให้ประสบการณ์ที่เป็นประโยชน์ จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด อาจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย และ อาจารย์ธีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์ ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด และอาจารย์ ดร. สุกัญญา หะยิสาและ ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ผู้อำนวยการโรงเรียนและคณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย ที่สนับสนุนให้ความช่วยเหลือทั้งสถานที่ และสำเนาเอกสารที่ใช้ในการวิจัย และขอขอบคุณนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ให้ความร่วมมือในการทดลองใช้เครื่องมือ

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณพ่อ คุณแม่ พี่ชาย และญาติทุกท่านที่ได้ให้กำลังใจ และนิสิตปริญญาก่อน และปริญญากิตติมศักดิ์ทุกคนที่ให้กำลังใจ คอยแนะนำ ให้คำปรึกษา จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

มณฑนา ศรีสุจันทร์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	5
ความสำคัญของการวิจัย	6
ขอบเขตของการวิจัย	6
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	6
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	6
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	6
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	7
ตัวแปรที่ศึกษา	7
นิยามศัพท์เฉพาะ	7
กรอบแนวคิดในการวิจัย	10
สมมติฐานในการวิจัย	10
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	11
แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย	11
ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	11
รูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	14
ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัย	16
แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	18
แนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย	21
มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	21
สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้าง	
ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	24
การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหา	
ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	26
การประเมินผลในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	28
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย	34

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการวิจัย	39
กำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง	39
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	39
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	40
กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้าง	
ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	40
จุดมุ่งหมายของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์	40
ขอบเขตของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์	40
แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์	42
สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	46
เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์	46
เครื่องมือสำหรับวัดและประเมินผล	46
แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	46
แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	48
ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือ	46
เก็บรวบรวมข้อมูล	49
แบบแผนการวิจัย	49
การดำเนินการทดลอง	49
วิเคราะห์ข้อมูล	50
4 วิธีดำเนินการวิจัย	51
ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	51
ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	51
การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย	52
พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	53
พฤติกรรมด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่นำไปสู่การสร้าง	
ข้อความคาดการณ์	54
พฤติกรรมด้านการเขียนข้อความคาดการณ์	70

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	87
ความมุ่งหมาย สมมติฐานและวิธีดำเนินการวิจัย โดยสังเขป	87
สรุปและอภิปรายผลการวิจัย	90
ข้อเสนอแนะ	91
บรรณานุกรม	93
ภาคผนวก	99
ภาคผนวก ก	100
ภาคผนวก ข	105
ภาคผนวก ค	108
ภาคผนวก ง	191
ภาคผนวก จ	212
ภาคผนวก ฉ	215
ประวัติย่อผู้วิจัย	217

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบวิเคราะห์	32
2 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวม	33
3 กิจกรรมการเรียนรู้ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้าง ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	43
4 การให้คะแนนแบบวิเคราะห์	47
5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากใบกิจกรรม ในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง	51
6 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย	52
7 ค่าดัชนีความสอดคล้องของกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถ ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	102
8 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล แบบอุปนัย	102
9 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถ ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	103
10 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอน ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	106

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กรอบแนวคิดในการวิจัย	10
2 ลำดับของการคิด	12
3 การสร้างองค์ความรู้ใหม่ๆ ผ่านกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	16
4 ตัวอย่างแบบตรวจสอบรายการ	29
5 แบบบันทึกผลการสังเกต	30
6 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดวิสัยทัศน์และคณะที่ใช้ในกิจกรรม การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผล แบบอุปนัย	41
7 ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในแต่ละคาบเรียน	44
8 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของไปรยา	56
9 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของธาดา	56
10 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของนครา	57
11 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา	58
12 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว	58
13 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรไปรยา	59
14 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา	59
15 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา	60
16 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว	61
17 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา	62

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
18 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา	62
19 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของรุ่งข้าว	64
20 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของธาดา	64
21 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของนครา	64
22 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของไปรยา	65
23 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา	65
24 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไปรยา	66
25 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว	66
26 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา	66
27 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา	68
28 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา	68
29 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว	69
30 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา	69
31 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของนครา	71
32 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กวด” ของธาดา	71

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
33 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของรุ่งข้าว	71
34 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของไพบรยา	71
35 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา	72
36 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว	72
37 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา	73
38 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไพบรยา	73
39 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว	74
40 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไพบรยา	74
41 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา	74
42 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา	74
43 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของธาดา	76
44 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของรุ่งข้าว	76
45 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของไพบรยา	76
46 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของนครา	76
47 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไพบรยา	77

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
48 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา	77
49 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา	78
50 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว	78
51 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11	
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว	79
52 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11	
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา	79
53 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11	
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไพบรยา	79
54 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11	
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา	79
55 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1	
กิจกรรม “ลายไม้สนักกูต” ของรุ่งข้าว	81
56 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1	
กิจกรรม “ลายไม้สนักกูต” ของธาดา	81
57 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1	
กิจกรรม “ลายไม้สนักกูต” ของนครา	81
58 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1	
กิจกรรม “ลายไม้สนักกูต” ของไพบรยา	82
59 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไพบรยา	82
60 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา	83
61 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา	83
62 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7	
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว	83

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
63 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา	84
64 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา	84
65 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว	85
66 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา	85



บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

กิจกรรมในชีวิตประจำวันที่เราคิดและทำอยู่มักจะเกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลอยู่เสมอ เช่น การเลือกซื้อที่อยู่อาศัย การเลือกประกอบอาชีพ หรือการตัดสินใจความต่าง ๆ เป็นต้น ในบรรดาการให้เหตุผลเหล่านั้น มีทั้งการให้เหตุผลที่สามารถกระทำได้ในทันทีโดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิม ๆ และการให้เหตุผลที่มีความซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถกระทำได้ในทันทีที่ต้องอาศัยความรู้ ทักษะและกระบวนการและเทคนิควิธีหลายอย่างในการให้เหตุผล ซึ่งถ้าเรามีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนและกระบวนการในการให้เหตุผล มีเทคนิควิธีในการให้เหตุผลได้อย่างเหมาะสม ก็จะช่วยในการตัดสินใจให้ไม่ผิดพลาด หรือสามารถให้เหตุผลได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). 2555ค: 38)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2552: 1) เพื่อให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพ พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 3) พ.ศ. 2553 จึงให้ความสำคัญกับแนวทางในการจัดกระบวนการเรียนรู้สำหรับให้สถานศึกษาและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องดำเนินการตามเป็นการเฉพาะ โดยกำหนดไว้ในมาตรา 24 หมวดที่ 4 ว่าด้วยการจัดกระบวนการเรียนรู้ ซึ่ง 2 ใน 6 ข้อ คือ (1) ฝึกทักษะกระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา และ (2) จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้คิดเป็น ทำเป็น รักการอ่านและเกิดการใฝ่รู้อย่างต่อเนื่อง ด้วยเหตุนี้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้สนับสนุนการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีลักษณะดังกล่าว โดยกำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน ซึ่งสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์มี 6 สาระ ได้แก่ (1) จำนวนและการดำเนินการ (2) การวัด (3) เรขาคณิต (4) พีชคณิต (5) การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น และ (6) ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2552: 2-3)

สำหรับสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคนไว้ ดังนี้

มาตรฐาน 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical reasoning) เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะได้เรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้น ในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน แก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบ ทำให้ตัดสินใจได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม (สสวท. 2555ก: 79) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและในการดำรงชีวิต การคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้มีงานวิจัยจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ การสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผล จะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม (สสวท. 2555ค: 39) นักการศึกษาหลายคนได้นำเสนอแนวคิดต่างๆ ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แบ่งออกเป็น 3 รูปแบบ คือ (รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์. 2555: 16-17, 20)

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก ซึ่งจะมีมากน้อยก็ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่ตนมีอยู่
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์แล้วให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่

เพื่อให้ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)) ซึ่งเป็นองค์กรสำคัญที่มีบทบาทอย่างมากต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนใน สหรัฐอเมริกา และทั่วโลก ได้ระบุไว้ในหนังสือประจำปี ค.ศ.1999: การพัฒนาการให้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ระดับอนุบาลถึงเกรด 12 (Developing Mathematical Reasoning in Grade K-12) ว่า “การสอนให้คิดต้องเป็นจุดเน้นที่สำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน” (Sternberg RO. 1999: 13-21) สิ่งนี้ส่งผลให้นักการศึกษาทั่วโลกหันมาศึกษาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในทุก ระดับชั้นของหลักสูตร

การสอนให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จในการเรียน และสามารถใช้ชีวิตอย่างประสบความสำเร็จในศตวรรษที่ 21 นั้น ครูต้องมีความเข้าใจอย่างลึกซึ้งและสามารถสอนให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูง การสอนความรู้ในเนื้อหาผนวกกับการใช้สถานการณ์ที่จะช่วยให้ผู้เรียนวินิจฉัยและแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม และสามารถตั้งทรัพยากรมาใช้ได้อย่างเหมาะสม ตลอดจนเรียนรู้และเข้าใจกฎและหลัก การของอาชีพที่ผู้เรียนจะประกอบในอนาคต ซึ่งพื้นฐานสำคัญอันจะทำให้ผู้เรียนประสบความสำเร็จได้นั้น นอกจากการรู้หนังสือ (Literacy) การรู้ตัวเลข (Numeracy) แล้วความสามารถในการให้เหตุผล (Reasoning ability) ยังเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ส่งเสริมความสำเร็จให้แก่ผู้เรียน ความสามารถในการให้เหตุผลเปรียบเหมือนความสามารถในการเดินทางจากจุด ก ที่เป็นปัญหา ไปยังจุด ข ที่เป็นคำตอบของปัญหาอย่างมีเหตุผล มีทิศทาง มากกว่าการเดาสุ่มไร้จุดหมาย (วิชัย เสวกงาม. 2557: 208) ทั้งนี้ยังมีนักการศึกษาคณิตศาสตร์หลายท่านได้ให้แนวคิดว่าการที่นักเรียนได้คำตอบถูกต้องแต่ใช้เหตุผลผิดเป็นอันตรายอย่างยิ่งต่อการเรียนรู้เนื่องจากเมื่อผู้เรียนได้คำตอบถูกต้องแล้ว ครูอาจไม่ได้ให้โอกาสนักเรียนแสดงเหตุผล ซึ่งทำให้นักเรียนไม่ทราบเหตุผลว่าที่ผิดนั้นผิดอย่างไร ดังนั้น สิ่งที่ดีกว่าการได้คำตอบถูกต้องแต่เหตุผลผิด คือการได้คำตอบที่ผิด และสามารถค้นพบอย่างเป็นเหตุเป็นผลว่าอะไรผิดและผิดอย่างไร (อัมพร ม้าคะนอง. 2553: 50)

นอกจากนี้ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ส่งเสริมกระบวนการคิด ควรมุ่งให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ด้วยตนเอง นั่นคือ จัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ทำให้เกิดกระบวนการสำรวจ สังเกต สืบค้นข้อมูล บันทึกข้อมูล รวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ ตรวจสอบหรือพิสูจน์ยืนยันข้อความคาดการณ์ (สสวท. 2555ข: 130) จึงสอดคล้องกับแนวคิดของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่ง นั่นคือ **การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)** ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้เรียนจะต้องใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์ (conjecture) ถ้าต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นจริง ก็ต้องสืบเสาะค้นหาข้อเท็จจริงมาสนับสนุนให้มากพอหรือแสดงเหตุผลที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ในทางคณิตศาสตร์เรายืนยันว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริงโดยการแสดงหรือการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถ้าแสดงหรือพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในกรณีทั่วไป ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็นทฤษฎีบท ที่สามารถนำไปอ้างอิงได้ในทางตรงกันข้าม ถ้าสามารถยกตัวอย่างค้านได้แม้แต่เพียงตัวอย่างเดียว ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็นเท็จทันที (สสวท. 2555ค: 41-42) และในส่วนของงานวิจัยทางวิทยาศาสตร์จำนวนมากมีการดำเนินการด้วยวิธีอุปนัย ซึ่งเป็นการรวบรวมหลักฐานเพื่อมองหารูปแบบแล้วตั้งสมมติฐาน จากนั้นจึงทดสอบแล้วพัฒนาเป็นทฤษฎีที่อธิบายสิ่งที่พบ การให้เหตุผลแบบอุปนัยอาจเรียกได้ว่าเป็นการอ้างเหตุผลในชีวิตประจำวัน เกี่ยวข้องกับการลงข้อสรุปที่มีความไม่แน่นอน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเหตุผล ความน่าจะเป็นรวมถึงข้อสรุปที่มีแนวโน้มเหมาะสมและ

นำเชื่อถือเชื่อ (วิชัย เสวกงาม. 2557: 221) ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่สำคัญที่สามารถนำไปสู่ทฤษฎีบทหรือการค้นพบความรู้ใหม่ๆ ได้

จากการที่ผู้วิจัยศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย พบว่างานวิจัยส่วนใหญ่มุ่งเน้นศึกษาผลสัมฤทธิ์ที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยวิธีการสอนแบบอุปนัย ซึ่งจะมีขั้นตอนหนึ่งฝึกให้นักเรียนสังเกตและหาความสัมพันธ์เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โดยครูเป็นผู้ให้ตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง ในเนื้อหา การให้เหตุผลเชิงเรขาคณิต พหุนาม โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ความน่าจะเป็น แบบรูป สถิติ และความคล้าย เพราะเนื้อหาเหล่านี้สามารถหาความสัมพันธ์ เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ได้ และระดับชั้นที่งานวิจัยส่วนใหญ่ศึกษาจะอยู่ในระดับประถมศึกษา และระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ทำการศึกษากับนักเรียนที่ละความ สามารถ สถานการณ์ปัญหาที่ใช้ในการศึกษาจึงไม่ได้มีความยากหรือมีเงื่อนไขซับซ้อนจนเกินไป ซึ่งจะเน้นไปที่นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ปานกลางถึงต่ำ (ระดับต่ำกว่า 3) ซึ่งมีผลงานวิจัยว่า สามารถทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น และยังมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ในทางคณิตศาสตร์การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ และมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา (Alice; & Shirel. 1999: 125-126) ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา (Problem solving approach) ตามแนวคิดของโพลยา เป็นการเรียนการสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ผ่านสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมกับวัย และพัฒนาการของนักเรียน ให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาด้วยตนเองตามขั้นตอนสำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบาย และตัดสินใจสรุปในกรณีทั่วไปของตนเอง (สสวท. 2555ค: 145) โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา ซึ่งเป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่ยอมรับและนิยมนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย (Polya. 1957: 5-40)

ในการพัฒนาผู้เรียนให้เป็นผู้ที่สามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาได้นั้นต้องพัฒนาให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและใช้เหตุผลในการคิดพิจารณาการตัดสินใจ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำแนวคิดจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยและกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา มาสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหา (Problem solving approach) เพื่อที่นักเรียนจะได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Non-routine problem) ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล เขียนข้อความคาดการณ์ อีกทั้งการเรียนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้ นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน (สสวท. 2555ค: 145)

จากทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Theory of Intellectual Development) ในขั้นที่ 4 ขั้นปฏิบัติการคิดด้วยนามธรรม (Formal Operational Stage) เพียเจต์กล่าวว่าเด็กที่มีอายุประมาณ 11-15 ปี จะเริ่มมีการพัฒนาการทางสติปัญญาและความคิดของเด็กวัย

นี้เป็นขั้นสุดท้ายคือเด็กในวัยนี้จะเริ่มคิดแบบผู้ใหญ่ ความคิดแบบเด็กจะสิ้นสุดลง เด็กจะสามารถที่จะคิดหาเหตุผลนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถที่จะคิดแบบนักวิทยาศาสตร์ สามารถตั้งสมมติฐาน ทดลอง ใช้เหตุผล และทำงานที่ต้องใช้สติปัญญาอย่างสลับซับซ้อนได้ สนใจที่จะสร้างทฤษฎีเกี่ยวกับทุกสิ่งทุกอย่าง นักจิตวิทยาเชื่อว่า การพัฒนาความเข้าใจจะพัฒนาไปเรื่อยๆ จนกระทั่ง เข้าสู่วัยชรา (สรวงศ์ โค้วตระกูล. 2544: 57) ผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญว่าไม่ว่าจะพัฒนาการเรียนการสอนการให้เหตุผลในรูปแบบใดก็ตามนักเรียนควรจะได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง จึงสนใจที่จะศึกษาในนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบกับ การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผล ซึ่งเป็นหน่วยการเรียนรู้ที่ สสวท. จัดอยู่ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นั่นคือนักเรียนจะได้เรียนรู้เพียงเนื้อหาพื้นฐานเท่านั้น และเนื่องจากการให้เหตุผลเป็นการคิดระดับสูง (การคิดขั้นวิจารณ์ญาณและการคิดขั้นสร้างสรรค์) (Krulik & Rudnik. 1993: 3) และการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในการฝึกทักษะและกระบวนการ นั่นคือเป็นการฝึกให้นักเรียนมีความชำนาญ เชี่ยวชาญ ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำเป็นที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างจะต้องมีความรู้พื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์ที่เพียงพอ และมีความกระตือรือร้นที่อยากจะแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขซับซ้อน ดังนั้นงานวิจัยนี้น่าจะเหมาะสมกับนักเรียนที่มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นั่นคือ นักเรียนที่มีผลการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1 ไม่ต่ำกว่า 3

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อศึกษาผลของการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นในด้านความสามารถและพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
3. เพื่อศึกษาพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ความสำคัญของการวิจัย

1. มีกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เป็นข้อมูลสำหรับครูในการพัฒนาความสามารถและพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
3. เป็นแนวทางสำหรับครูและนักวิจัยในการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับ 3 ขึ้นไป นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเหล่านี้ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง (Purposive sampling) ในกลุ่มตัวอย่างผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม โดยนำคะแนนดิบของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 มาเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แล้วกำหนดให้นักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 1-7 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนสูง นักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 8-23 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนปานกลาง และนักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 24-30 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนต่ำ แล้วเลือกนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนสูง จำนวน 1 คน นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนปานกลาง จำนวน 2 คน และนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนต่ำ จำนวน 1 คน โดยนักเรียนที่เลือกเป็นผู้ที่มีความกล้าแสดงออก สามารถสื่อสารและนำเสนอแนวคิดของตนเองได้ เพื่อเป็นนักเรียนเป้าหมายในการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

เวลาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 14 คาบเรียน คาบเรียนละ 90 นาที ซึ่งเป็นเวลาเรียนปกติ โดยแบ่งเป็นเวลาเรียนจำนวน 12 คาบ และเวลาทดสอบจำนวน 2 คาบ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่เกินความรู้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ คือ กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2. ตัวแปรตาม คือ

2.1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

2.2 พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) หมายถึง กระบวนการให้เหตุผลที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์ (conjecture)

3. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง ความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในด้านต่อไปนี้

3.1 ด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่จะนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาความสามารถของนักเรียนในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่แต่ละกรณีมีร่วมกัน ที่คาดว่าจะนำไปสู่ความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไปได้

3.2 ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาความสามารถของนักเรียนในการเขียนอธิบายข้อสรุปที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป ซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง

โดยแต่ละด้านพิจารณาจาก

1) คะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียน ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม
ประกอบด้วย

1.1 คะแนนจากใบกิจกรรมกลุ่ม คิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนเต็ม

1.2 คะแนนจากใบกิจกรรมรายบุคคล คิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนเต็ม

2) คะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่ง
คิดเป็นร้อยละ 40 ของคะแนนเต็ม

4. พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง การแสดงออกของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในด้านต่อไปนี้

**4.1 ด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่น่าไปสู่การสร้างข้อความ
คาดการณ์** โดยพิจารณาการแสดงออกของนักเรียนในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี
เฉพาะ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่แต่ละกรณีมีร่วมกัน ที่คาดว่าจะนำไปสู่ความสัมพันธ์
ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไปได้

4.2 ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาการแสดงออกของ
นักเรียนในการเขียนอธิบายข้อสรุปที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป ซึ่งเชื่อว่าน่าจะ
ถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อ
ขัดแย้ง

ในการศึกษาพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยพิจารณา
ผลงานเขียนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ผลการสังเกตพฤติกรรม
ของนักเรียนเป้าหมายขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ โดยมี
แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลแบบอุปนัย และกล้องวิดีโอ ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของ
พฤติกรรมเหล่านั้น

**5. กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้
เหตุผลแบบอุปนัย** หมายถึง กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสำหรับ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยใช้การ
จัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหา (Problem solving approach) ประกอบด้วย
แผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 12 แผน ซึ่งแต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 90 นาที ซึ่ง
แผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผน ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้
กิจกรรมการเรียนรู้ การวัด ผลและประเมินผลการเรียนรู้

ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์นี้ นักเรียนจะได้เรียนรู้แนวคิดเกี่ยวกับการ
ให้เหตุผลแบบอุปนัย และกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์
ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Non-routine problem) ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาค้นหา
ความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี เขียนข้อความคาดการณ์ และสรุปคำตอบของปัญหา

โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เกินความรู้ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 นอกจากนี้ นักเรียนยังมีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative learning) รับผิดชอบในการแก้ปัญหาของกลุ่ม และนำเสนอผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งของตนเองและของกลุ่ม ตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

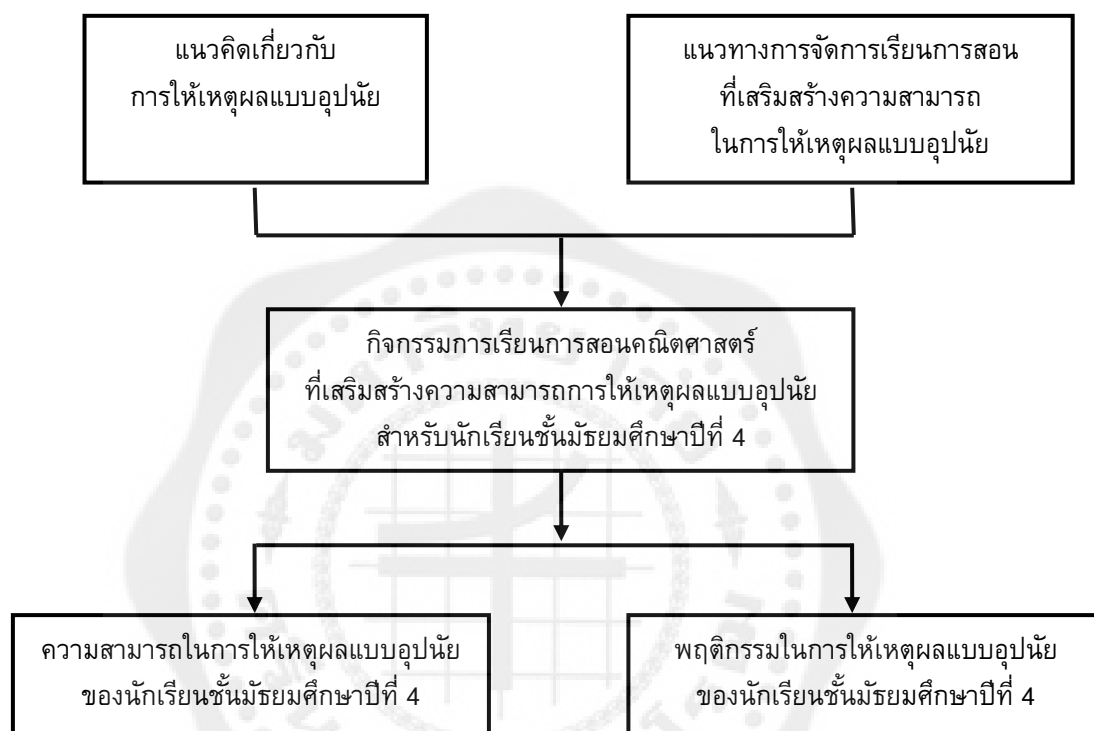
6. แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง แบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งประกอบด้วยปัญหาที่ไม่คุ้นเคย จำนวน 4 ข้อ ซึ่งแต่ละข้อใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่ไม่เกินความรู้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 โดยแต่ละข้อมีการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic scoring)

7. แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผล หมายถึง แบบบันทึกที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้บันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย แบบตรวจสอบรายการ (Check list) และแบบบันทึกภาคสนาม (Field note)

8. นักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีคะแนนจากการทำใบกิจกรรมในชั้นเรียน และจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

กรอบแนวคิดในการวิจัย

ในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วศึกษาความสามารถและพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นั้น ผู้วิจัยมีกรอบแนวคิดในการวิจัย ดังแสดงในภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 กรอบแนวคิดในการวิจัย

สมมติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย แล้วศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในหัวข้อต่อไปนี้

1 แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- 1.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 1.2 รูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 1.3 ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 1.4 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

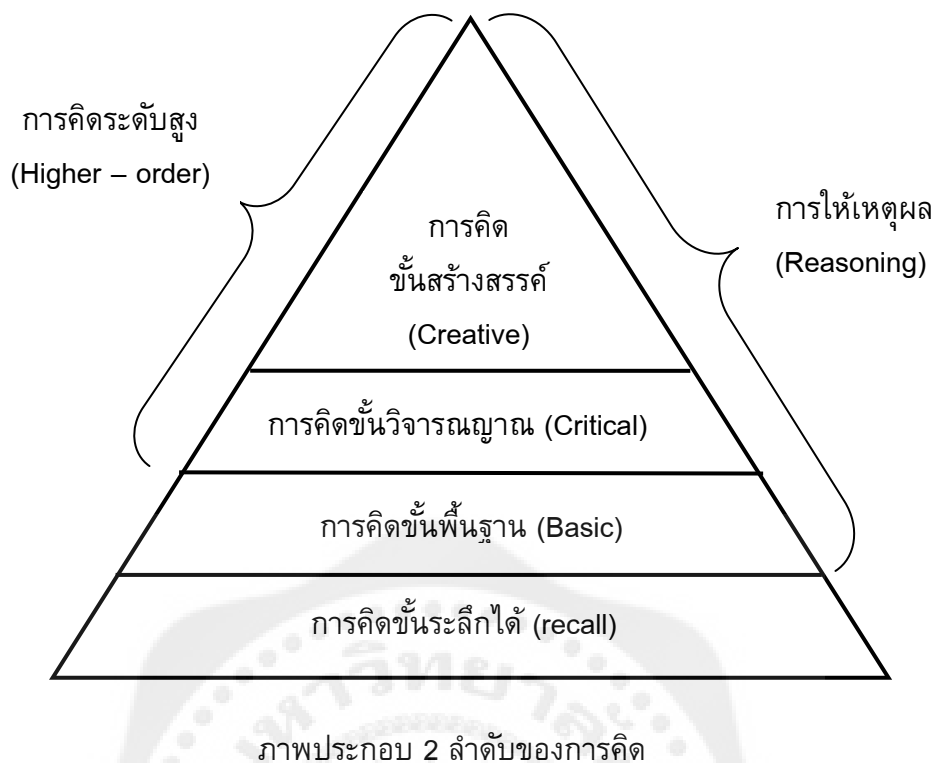
2 แนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- 2.1 มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- 2.2 สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 2.3 การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 2.4 การประเมินผลในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. แนวคิดเกี่ยวกับให้เหตุผลแบบอุปนัย

1.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การคิดและการให้เหตุผลมีส่วนที่เกี่ยวข้องกัน โดยครูลิกและรูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993: 3) ได้กล่าวว่า การคิด หมายถึงความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด ซึ่งนักเรียนต้องสร้างความคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผลพร้อมทั้งอธิบายข้อสรุป โดยเขาได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ระดับ คือ ขั้นการคิดระลึกได้ (recall) ขั้นพื้นฐาน (Basic) ขั้นวิจารณ์ญาณ (Critical) และขั้นสร้างสรรค์ (Creative) โดยได้จัดให้การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่เหนือจากระดับขั้นระลึกได้ ดังภาพประกอบ 2



ที่มา: Krulik, S. & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. p. 3.

จากแผนภาพดังกล่าว จะเห็นว่าการให้เหตุผล จะอยู่ในการคิดขั้นพื้นฐาน ขั้นวิจารณ์ และขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิจารณ์ และการคิดอย่างสร้างสรรค์นั้น จัดว่าเป็นการคิดระดับสูง (Higher-order Thinking) ซึ่งเป็นความคิดที่ซับซ้อน

จากความหมายของการคิด ความสัมพันธ์ของการคิดและการให้เหตุผล นอกจากนี้ยังมีนักการศึกษาที่สำคัญหลายคนได้กล่าวถึงการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ควอลมอลซ์ (Quellmalz. 1987: 86-105) กล่าวว่า การให้เหตุผลคือการที่ผู้เรียนสามารถระบุเหตุผลตัดสินความน่าเชื่อถือของหลักฐานใช้ทักษะการคิดแบบอุปนัยและนิรนัยตัดสินใจอย่างถูกต้อง

โอแดฟเฟอร์และธอนควิสท์ (O' Daffer & Thornquist. 1993: 43) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง การใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดตลอดจนแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

และได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างกรณีทั่วไปและการสร้างข้อสรุปของแนวคิดที่สัมพันธ์กันอย่างสมเหตุสมผล

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2542: 47) กล่าวว่า กระบวนการของเหตุผลนั้นเป็นปรากฏการณ์ทางจิต (Psychological phenomena) ซึ่งมนุษย์ใช้เป็นเครื่องมือในการสื่อความหมายทางใจ (mental talk) กระบวนการดังกล่าวนี้ เป็นการเรียบเรียงข้อเท็จจริงที่มีอยู่ เป็นสื่อทำให้จิตสามารถสร้างข้อเท็จจริงขึ้นมาใหม่ได้อีก หรือเห็นเกี่ยวกับข้อเท็จจริงใหม่ที่สร้างขึ้นมา

บราไฮเออร์ (Brahier. 2005: 25) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนค้นหาคำอธิบายว่า “ทำไม” สิ่งเหล่านั้นจึงเกิดขึ้น หรือ “อะไรจะเกิดขึ้น ถ้า...” เปลี่ยนแปลงอะไรบางอย่างในปัญหานั้น

คิม (Kim. 2005: 59) กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นกระบวนการคิดหรือการดำเนินการภายในจิตใจในการใช้ความรู้เพื่อทำความเข้าใจหรือสร้างข้อสรุปจากหลักฐาน กระบวนการในการให้เหตุผลจะเป็นการใช้ความรู้ที่มีในการแก้ปัญหาและการตัดสินใจ การนำไปสู่การคิดอย่างมีวิจารณญาณ หรือการสร้างกรณีทั่วไป

ทิพย์วัลย์ สัจจันทร์ (2548: 71) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง ลักษณะอย่างหนึ่งของการคิดเพื่ออธิบายบางสิ่งบางอย่าง ซึ่งอาจใช้หลักฐานหรือข้ออ้างที่เกิดจากการสังเกต หรือใช้ข้อความต่างๆ ที่ได้รับการยอมรับหรือได้รับการพิสูจน์แล้วว่าถูกต้อง เช่น ทฤษฎี หรือ กฎ เป็นต้น

เวชฤทธิ์ อังกะภักขจร (2551:19) กล่าวว่า ทักษะการให้เหตุผล หมายถึง ความสามารถในการอธิบาย การหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผล และความสามารถในการพิจารณาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

ขวัญ เพียชัย (2553: 16) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง การแสดงออกโดยการอธิบายการเขียน หรือแสดงหลักฐาน เพื่อลงความเห็นหาข้อสรุป โดยผ่านการวิเคราะห์ ที่เป็นไปอย่างสมเหตุสมผล

อัมพร ม้าคะนอง (2553: 48) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างข้ออ้างอิงทั่วไปและการหาข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับแนวคิดหรือวิธีการที่สิ่งต่างๆ เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กัน

สสวท. (2555ค: 39-40) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

สำหรับในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

1.2 รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

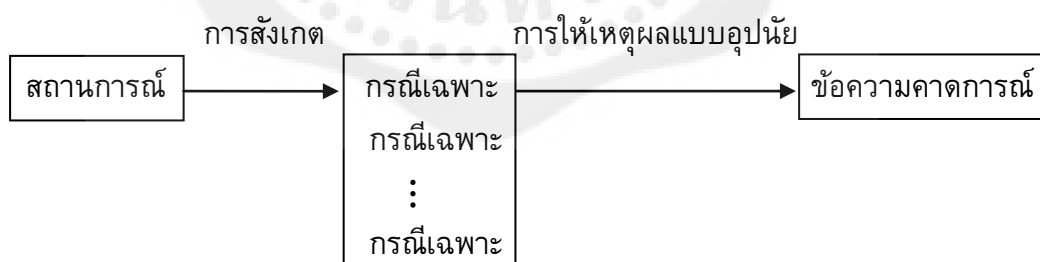
รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักการศึกษาได้จำแนกอย่างกว้างๆ ออกเป็น 3 รูปแบบ ดังนี้ (รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์. 2555: 9-16-9-22)

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก โดยทั่วไปมนุษย์มักจะใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก ซึ่งมนุษย์แต่ละคนอาจจะมีอยู่เล็กน้อยแตกต่างกันมาช่วยแก้ปัญหา การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ จึงเป็นการให้เหตุผลที่ไม่มีรูปแบบที่แน่นอน มักเกิดขึ้นมาทันทีทันใดในเวลาใดเวลาหนึ่ง บางคนเกิดขึ้นบ่อย บางคนนานๆ เกิดขึ้นครั้งหนึ่ง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับพื้นฐานความรู้ที่มีสะสมอยู่ในแต่ละบุคคล เช่น ในวันที่ฝนตกตอนเช้า คนในเมืองใหญ่มักจะออกจากบ้านเร็วกว่าปกติ เพราะคิดว่าการจราจรน่าจะติดขัดมากกว่าวันที่ฝนไม่ตกตอนเช้า เป็นต้น

ในทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีทฤษฎีบทและความรู้จำนวนไม่น้อยที่มีจุดเริ่มต้นจากการการให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เช่น การแก้ปัญหของเด็กชายคาร์ล ฟรีดริช เกาส์ เกี่ยวกับการหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 โดยใช้เวลาหาคำตอบของปัญหาได้ภายในเวลา 2-3 นาที ซึ่งแนวทางการแก้ปัญหาดังกล่าว ส่งผลให้มีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในการหาผลบวกของจำนวนเต็มบวกที่เรียงต่อกันอย่างเป็นระบบ

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า **ข้อความคาดการณ์ (conjecture)**

เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ข้างต้นได้ดังนี้



ตัวอย่าง ทอรัสสังเกตว่า $0 + 2 = 2$ และ 2 เป็นจำนวนคู่

$$4 + 6 = 10 \quad \text{และ } 2 \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$6 + 8 = 14 \quad \text{และ } 2 \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$8 + 10 = 18 \quad \text{และ } 2 \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$10 + 12 = 22 \quad \text{และ } 2 \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

เนื่องจากจำนวนต่างๆที่นำมาบวกกันนั้นเป็นจำนวนคู่ และผลบวกของจำนวนต่างๆ เหล่านั้นเป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ทอรั้งจึงสรุปว่า ผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวน เป็นจำนวนคู่

ถ้าต้องการยืนยันว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้จากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นจริง ก็ต้องสืบเสาะค้นหาข้อเท็จจริงมาสนับสนุนให้มากพอหรือแสดงเหตุผลที่ทำให้ยอมรับได้ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริง ในทางคณิตศาสตร์เรายืนยันว่าข้อความคาดการณ์เป็นจริง โดยการแสดงหรือการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถ้าแสดงหรือพิสูจน์ได้ว่า ข้อความคาดการณ์เป็นจริงในกรณีทั่วไป ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็น**ทฤษฎีบท** ที่สามารถนำไปอ้างอิงได้ ในทางตรงกันข้าม ถ้าสามารถยกตัวอย่างค้านได้แม้แต่เพียงตัวอย่างเดียว ข้อความคาดการณ์นั้นจะเป็นเท็จทันที

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์แล้วให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่

การให้เหตุผลแบบนิรนัย ประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วน คือ

- (1) เหตุหรือสมมติฐาน ซึ่งหมายถึง สิ่งที่เป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ได้แก่ คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์แล้ว กฎหรือสมบัติต่างๆ
- (2) ผลหรือผลสรุป ซึ่งหมายถึง ข้อสรุปที่ได้จากเหตุหรือสมมติฐาน เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ข้างต้นได้ดังนี้

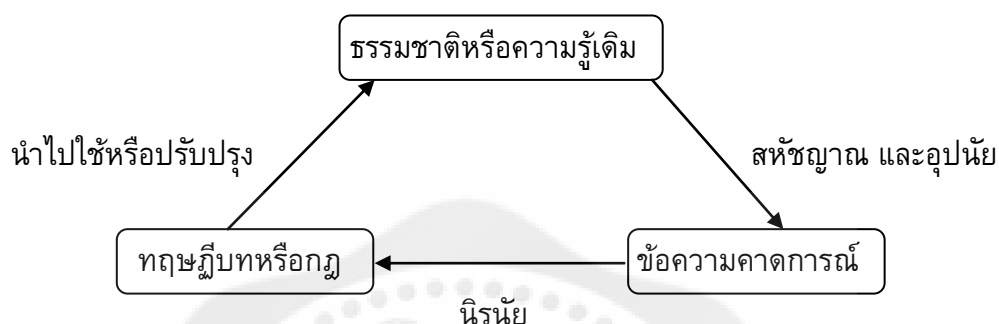


โดยทั่วไปเหตุหรือสมมติฐานของการให้เหตุผลแบบนิรนัย มักประกอบด้วย เหตุการณ์ทั่วไป และตามด้วย เหตุการณ์เฉพาะ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างเหตุการณ์ทั่วไป และเหตุการณ์เฉพาะ ก่อให้เกิด ผลหรือผลสรุป ถ้าเหตุทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลในทางตรงกันข้าม ถ้าเหตุไม่ทำให้เกิดผลหรือผลสรุปเสมอ เราเรียกว่าเป็นการให้เหตุผลที่ไม่สมเหตุ สมผล

จากรูปแบบการให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย จะเห็นว่าการให้เหตุผลทั้งสองแบบข้างต้นเป็นการให้เหตุผลที่มีการดำเนินการที่สวนทางกัน กล่าวคือการใช้

เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการใช้กรณีเฉพาะเป็นเหตุแล้วสรุปผลเป็นกรณีทั่วไป ขณะที่การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการใช้กรณีทั่วไปเป็นเหตุแล้วสรุปผลเป็นกรณีเฉพาะ

อย่างไรก็ตาม การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย อาจเป็นกระบวนการที่สับสนเนื่องต่อกัน โดยเฉพาะในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ ดังแสดงใน ภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 การสร้างองค์ความรู้ใหม่ ๆ ผ่านกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตามภาพประกอบ 3 เมื่อเราสังเกตข้อมูลจากชุมชนหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่ เราอาจพบปัญหาหรือคำถามที่อยากรู้คำตอบแรกๆ ก็อาจใช้การให้เหตุผลแบบสหัชญาณมาช่วยแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เป็นคำตอบคร่าวๆ ที่อาจจะใช้แก้ปัญหาได้ดีในบางกรณี ต่อไปเมื่อทำการสังเกตหรือทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อค้นหาแบบรูป ซึ่งจะนำไปสู่ข้อสรุปหรือคำตอบที่เชื่อว่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริง ก็เป็นการใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยมาช่วยสร้างข้อความคาดการณ์ที่เป็นกรณีทั่วไป หลังจากนั้นก็ใช้สิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้การให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริง เพื่อยืนยันว่า ข้อความคาดการณ์นั้นเป็นจริงก็เป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย ทำให้ได้ทฤษฎีบทหรือกฎ แล้วนำกลับไปใช้ในชุมชนหรือปรับปรุงขยายความรู้เดิมให้กว้างขวางหรือลึกซึ้งมากขึ้น ไม่ว่าจะเป็นเนื้อหาเดิมหรือเนื้อหาใหม่ก็ตาม ต่อจากนั้นก็อาจกลับไปเริ่มต้นวงจรใหม่จากการสังเกตข้อมูลจากชุมชนหรือด้วยความรู้เดิมที่มีอยู่เข้าวงจรตามภาพประกอบ 3 ต่อไป

1.3 ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัย

การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังนี้

โอดาฟเฟอร์ (O'Daffer. 1990 : 378) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงอุปนัย เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสมาชิกบางตัวในเซตหนึ่งๆ เพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไปหรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในเซตนั้น

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2542: 47-50) กล่าวว่า เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการของเหตุและผล ซึ่งส่วนที่เป็นเหตุ ประกอบด้วยเหตุหลายอันซึ่งอิสระต่อกัน มีน้ำหนักและความสำคัญเท่าๆกัน เหตุทั้งหลายที่มีอยู่ไม่มีเหตุใดแสดงเป็นเหตุใหญ่ หรือเป็นการวางนัยทั่วไปไว้และในที่สุดเหตุเหล่านี้ ก็รวมตัวกันเองมาเป็นผลสรุปอยู่ในรูปของการวางนัยทั่วไป

สมวงศ์ แปลงประสพโชค (2544: 2-11) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยอ้างอิงจากตัวอย่าง หรือประสบการณ์ย่อยหลายๆ ตัวอย่างหลายแง่หลายมุม และสรุปเป็นความรู้ทั่วไป

พร้อมพรรณ อุดมสิน (2547: 48) กล่าวว่า การคิดเชิงเหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสร้างข้อสรุปจากการปฏิบัติหลายๆกรณี หรือพูดอีกอย่างหนึ่งว่า เป็นการสรุปจากส่วนย่อยๆ ไปสู่ส่วนใหญ่ๆ การสรุปแบบนี้ต้องมีความระมัดระวังด้วย เพราะใช้ว่าจะเป็นไปได้ทุกกรณี และต้องทำความเข้าใจกับนักเรียนด้วยว่าแท้ที่จริงแล้ว การเปรียบเทียบ 2-3 กรณี แล้วมาสรุปเป็นหลักการ เป็นเพียงแนวทางในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้มีการค้นพบไว้แล้วเท่านั้น

สสวท. (2547: 4-6) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการใช้การสังเกตขั้นพื้นฐานเพื่อค้นหาแบบรูป หรือสร้างข้อความคาดเดา แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป

สำหรับการสร้างข้อความคาดเดา แล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป ได้มีผู้ให้ความหมายโดยใช้ภาษาคณิตศาสตร์ว่า เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ข้อมูลเกี่ยวกับสมาชิกบางตัวในเซต นำมาสรุปรวมเป็นกรณีทั่วไป สำหรับสมาชิกทุกตัวในเซต

ข้อความคาดเดาจากการให้เหตุผลเชิงอุปนัยเป็นเพียงข้อคิดว่าน่าจะเป็นเช่นนั้น แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าจริงหรือไม่ อย่างไรก็ตามการให้เหตุผลเชิงอุปนัยอาจนำไปสู่การค้นพบแนวคิดใหม่ๆ

ทิพย์วัลย์ สัจจันทร์ (2548: 79) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Logic) เป็นการอ้างเหตุผลที่ข้ออ้างเป็นจริง แต่สนับสนุนข้อสรุปเพียงบางส่วน ดังนั้นข้อสรุปที่ได้อาจเป็นจริงหรืออาจเป็นเท็จก็ได้ หรืออาจกล่าวได้ว่า ถ้าข้ออ้างเป็นจริงทุกข้อข้อสรุปมีโอกาสเป็นจริงได้มาก ลักษณะของข้ออ้างและเรื่องที่น่ามาอ้างมีโอกาสเป็นจริงหรือเชื่อถือจะขึ้นอยู่กับปัจจัยต่อไปนี้

- ปริมาณข้ออ้าง หากมีข้ออ้างสนับสนุนมากก็จะยิ่งทำให้ข้อสรุปที่น่าเชื่อถือมากตามไปด้วย

- ข้ออ้างเป็นตัวแทนที่ดีของเรื่องที่สรุป หมายถึงว่าต้องเป็นข้ออ้างที่เป็นจริง น่าเชื่อถือ รวมทั้งต้องครอบคลุมในเรื่องที่นำมาตั้งกล่าวอ้าง

ศุภณัฐ ชัยดี (2549: 3) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลโดยใช้ประสบการณ์ หรือใช้เหตุการณ์เฉพาะ ซึ่งเกิดขึ้นซ้ำๆ กันหลายๆ ครั้งมาคาดคะเนผลสรุป หรือสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป ผลสรุปที่ได้อาจเป็นจริงหรือเท็จก็ได้

คณาจารย์โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา (2552: 88-99) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการคิดหาเหตุผลจากเหตุย่อยหรือปรากฏการณ์ข้อเท็จจริง

ปลีกย่อยหลายๆอัน ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน หรือมีความสำคัญเท่าๆกัน และนำมาสรุปเป็นกรณีหลักทั่วๆ ไป หรือในรูปการวางนัยทั่วๆ ไป

อัมพร ม้าคะนอง (2553: 50-53) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการคิดจากข้อเท็จจริงย่อย โดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบ เพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป การให้เหตุผลแบบนี้จึงใช้ข้อมูลที่เป็นจริงจากข้อมูลย่อยๆ ไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไป หรือเป็นการมองเห็นตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปแบบทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเป็นการหาความสัมพันธ์จากสมาชิกบางส่วนในกลุ่มเพื่ออ้างอิงไปใช้กับสมาชิกส่วนอื่นของกลุ่มเดียวกัน

สสวท. (2555ค: 40-45) กล่าวว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์

สำหรับในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ใช้ความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัย ว่าเป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์

1.4 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่สามารถพัฒนาได้ แนวทางพัฒนาที่ทำให้นักเรียนเกิดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ได้กล่าวไว้ในทำนองเดียวกับการพัฒนาในการให้เหตุผล ดังนี้

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 345-346) กล่าวว่า ในการพัฒนาความคิดและการให้เหตุผลของนักเรียนควรทำเป็นประจำ ครูต้องมีความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ครูต้องจัดบรรยากาศในการเรียนคณิตศาสตร์ ครูต้องแสดงให้เห็นความสำคัญของสิ่งที่รู้ว่ามีเหตุผลในเรื่องรูปแบบและข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ เพื่อประเมินความสมเหตุสมผล

สิริพร ทิพย์คง (2545: 99) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญ และองค์ประกอบที่ช่วยส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักให้เหตุผลมีดังนี้

1. ผู้สอนควรให้ผู้เรียนได้พบเห็นโจทย์หรือปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผลในการหาคำตอบได้
2. ผู้สอนควรให้ผู้เรียนมีโอกาและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเอง

3. ผู้สอนให้ผู้เรียนช่วยกันสรุป แล้วผู้สอนช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่า เหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ มีข้อบกพร่องที่ใดอย่างไร

นอกจากนี้ผู้สอนควรกระตุ้นให้ผู้เรียนสนใจ ผู้เรียนได้มีโอกาสลงมือปฏิบัติ คำถามที่ใช้ควรกระตุ้นนักเรียนด้วยว่า “ทำไม” “อย่างไร” “เพราะเหตุใด”

พร้อมพรรณ อุดมสิน (2547: 48) กล่าวว่า การพัฒนาทักษะการให้เหตุผลวิธีหนึ่งที่สำคัญ คือ การใช้คำถาม ครูต้องรู้จักใช้คำถามปลายเปิดเพื่อให้ให้นักเรียนให้เหตุผลในการตอบคำถาม

สสวท. (2547: 15-18) กล่าวว่า การพัฒนาด้านการให้เหตุผลจะบรรลุผลได้มากหรือน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับครู และการจัดการของครูเป็นสำคัญ รวมทั้งการจัดบรรยากาศ กิจกรรม พฤติกรรมการเรียนการสอนและการประเมินผล บทบาทของครูที่จะส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผลมี ดังนี้

1. ครูต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนระหนักในสิ่งต่อไปนี้

1.1 การเรียนคณิตศาสตร์ให้เรียนด้วยความเข้าใจ ก่อนอื่นครูต้องทำให้นักเรียนเกิดความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนสามารถเข้าใจได้ และต้องเรียนด้วยความเข้าใจ นักเรียนหรือบุคคลทั่วๆ ไปมักจะมีความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากเรียนไม่รู้เรื่อง ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเข้าใจได้ วิธีการเรียนต้องใช้การจดจำ จำขั้นตอนวิธีการ จำสูตรเพื่อหาคำตอบโดยไม่รู้ว่าทำไมจึงทำเช่นนั้น ความคิดเช่นนี้ทำให้เบื่อวิชาคณิตศาสตร์ เห็นว่าคณิตศาสตร์มีไว้สำหรับคนเก่งเท่านั้น แนวความคิดเช่นนี้ สกัดกั้นการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความสุขและเห็นคุณค่า ครูมีบทบาทสำคัญยิ่งในการสร้างบรรยากาศให้นักเรียนรู้สึกว่ายากวิชาไม่ยาก

1.2 ให้นักเรียนเรียนรู้อย่างมีเหตุผล นักเรียนจะต้องรู้ว่าทำไม เพราะอะไร และสามารถแสดงเหตุผลได้

1.3 ครูต้องทำให้นักเรียนรู้ว่าครูให้ความสำคัญต่อความเข้าใจและการให้เหตุผล โดยครูจะต้องประเมินสิ่งเหล่านี้อย่างสม่ำเสมอที่สำคัญเมื่อเด็กสามารถหรือมีการให้เหตุผลที่ดีครูควรให้การเสริมแรงทันที

2. ให้นักเรียนอธิบายแนวคิดและให้เหตุผลยืนยันแนวคิดนั้นๆ การให้เหตุผลอาจทำได้ด้วยวาจา ด้วยการเขียน โดยใช้ภาษาง่ายๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง

3. ควรถามบ่อยๆ และใช้คำถามอย่างต่อเนื่อง คำถามที่ควรใช้ควรเป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดและแสดงเหตุผล เช่น

- นักเรียนคิดว่าต่อไปนี่จะเป็นอย่างไร เพราะอะไร
- แบบรูปจะเป็นอย่างไร เพราะอะไร
- นักเรียนเชื่อไหม เพราะอะไร
- นักเรียนคิดว่าวิธีไหนดีกว่า เพราะอะไร
- มีคำตอบอื่นอีกไหม มีวิธีอื่นอีกไหม
- ทำไมถึงคิดว่าถูกต้อง

- ทำไม่ถึงคิดว่าจะเป็นจริง
 - ที่สรุปนี้จะเป็นจริงเสมอไปไหม หรือเป็นจริงเพียงบางกรณี
 - สัมพันธ์กันอย่างไร
4. สนับสนุนให้นักเรียนสร้างข้อาคัดเดา บนพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล
 5. เปิดโอกาสให้ทดสอบและปรับแต่งข้อาคัดเดาโดยอาศัยเหตุผล เช่นข้อาคัดเดาที่ว่า ผลคูณของจำนวนบวกสองจำนวนจะมากกว่าตัวตั้งและตัวคูณ อาจปรับแต่งเป็นการคูณจำนวนหนึ่งด้วยตัวคูณที่เป็นจำนวนที่มากกว่า 1 ผลคูณจะมากกว่าจำนวนนั้น แต่ถ้าตัวคูณเป็นจำนวนบวกที่น้อยกว่า 1 ผลคูณจะน้อยกว่าจำนวนนั้น โดยนักเรียนตัดสินใจปรับเองด้วยเหตุผล ไม่ใช่จากครูบอก
 6. ให้นักเรียนได้วิเคราะห์แบบรูป รวมทั้งสร้างแบบรูปเอง เช่น 2, 4, 6, 8,... พร้อมทั้งบอกความสัมพันธ์ได้ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการสร้างข้อาคัดเดา
 7. ใช้วิธีแสดงสิ่งที่เป็นตัวอย่าง สิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างให้นักเรียนได้สรุปแนวคิดนั้นอย่างมีเหตุผล
 8. ใช้ปัญหาปลายเปิด เช่น แก้วต้องการซื้อหนังสือเล่มละ 30 บาท ปากกาด้ามละ 10 บาท ทอฟฟี่เม็ดละ 2 บาท ถ้าแก้วมีเงินอยู่ 50 บาท จะมีเงินพอซื้อของเหล่านี้ได้ทั้งหมดหรือมากน้อยเพียงใด
 9. ให้มีการอภิปรายในชั้นเรียน เพื่อหากรณีทั่วไป
 10. ทำทนายให้นักเรียนคิด และทำกิจกรรม
 11. ให้ความสำคัญในการฟังความคิดเห็นของนักเรียน และให้นักเรียนได้ฝึกการรับฟังทำความเข้าใจเหตุผลของผู้อื่น และประเมินว่าเหตุผลเชื่อถือได้หรือไม่
 12. มีความยืดหยุ่น สามารถปรับแนวการอภิปรายให้เข้ากับวิธีคิดของนักเรียน
 13. มีความอดทน ให้เวลา ให้โอกาสแก่นักเรียน
 14. เน้นความเป็นเหตุเป็นผลมากกว่ากฎเกณฑ์หรืออาศัยคำที่ใช้เป็นกฎเกณฑ์ไปสู่การบอกวิธีการ เช่นมีคำ “รวม” ให้ทำวิธีบวก
 15. ครูควรใช้ภาษาที่เหมาะสมรัดกุม เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรตำหนิเมื่อนักเรียนใช้ภาษาไม่ถูกต้อง ไม่เหมาะสม ไม่รัดกุม ครูไม่ควรติตติง แต่ควรช่วยสรุปอีกครั้ง
 16. ครูควรใช้ภาษาทางตรรกศาสตร์ในเหตุการณ์ทั่วๆ ไป ให้นักเรียนคุ้นเคย เช่น ให้นักเรียนหยิบทั้งดินสอและปากกา มีนักเรียนบางคนชอบเล่นฟุตบอล
 17. ครูจะต้องสร้างความเข้าใจว่าครูให้ความสำคัญกับการให้เหตุผล ในการประเมินจะต้องมีคะแนนจากการประเมินการให้เหตุผลจากงานที่ให้ทำ หรือในข้อสอบจะต้องมีส่วนที่ให้นักเรียนแสดงเหตุผล

การพัฒนาการให้เหตุผลมีหลักการที่สำคัญ ดังนี้

1. ควรจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอทุกระดับชั้น
2. การให้เหตุผลสามารถพัฒนาได้ โดยสอดแทรกทุกหน่วยการเรียนรู้ตามความเหมาะสม
3. ระดับการให้เหตุผล ควรให้สอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของผู้เรียน
4. การให้เหตุผล ควรจัดให้มีประสบการณ์อย่างสม่ำเสมอ ตั้งแต่วัยก่อนอนุบาล จนถึงระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งควรจะต้องปลูกฝังให้เกิดเป็นนิสัย

5. ควรให้นักเรียนได้ตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล

6. ควรจัดบรรยากาศในห้องเรียนให้ส่งเสริมการฝึกการให้เหตุผล

อัมพร ม้าคะนอง (2553: 49) กล่าวว่า การให้เหตุผลของผู้เรียนยังมีความสำคัญโดยอาจทำให้ผู้สอนสามารถดำเนินการในสิ่งต่อไปนี้

1. อธิบายระดับพัฒนาการของผู้เรียนในการเรียนคณิตศาสตร์เฉพาะใดๆ
2. ระบุความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนหรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนพร้อมทั้งเหตุผล
3. วิเคราะห์แนวคิดใหม่ๆ (Emerging Ideas) ที่เกิดจากการให้เหตุผลของผู้เรียนที่จะขยายความและอภิปรายร่วมกับผู้เรียนคนอื่นๆ
4. ระบุโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structures) หรือประเภทของปัญหาที่จำเป็นสำหรับการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายของผู้เรียน
5. จัดหาสถานการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน
6. ตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมและวัฒนธรรมในห้องเรียนที่มีต่อความคิดและความเข้าใจของผู้เรียน

จากการศึกษาแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลที่กล่าวมา สรุปได้ว่า การให้เหตุผลเป็นสิ่งที่สามารถพัฒนาได้ ซึ่งเป็นผู้ครูมีบทบาทสำคัญในการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

2. แนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนทุกคนต้องเรียนรู้ ครูจึงต้องจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาทักษะและกระบวนการให้เหตุผลให้ดียิ่งขึ้น โดยศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนการให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังนี้

2.1 มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการยอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ มาตรฐานด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของสภาครูคณิตศาสตร์

แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ซึ่งได้เสนอไว้ในหนังสือหลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนในปี ค.ศ. 2000 ใช้ในการจัดการศึกษาตั้งแต่ระดับก่อนอนุบาลถึงมัธยมศึกษาตอนปลาย ต้องเน้นการพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถ (NTCM. 2000) ดังนี้

1. เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในฐานะที่เป็นรากเหง้าของคณิตศาสตร์ได้ (Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics)
กล่าวคือ ในการจัดการเรียนรู้ต้องมุ่งให้นักเรียนมีความเข้าใจว่าการยืนยันเรื่องใด ๆ ต้องมีเหตุผลที่เหมาะสมรองรับเสมอ ประโยค (Statement) จำเป็นต้องมีหลักฐานมาสนับสนุนว่าเป็นจริง หรือมีตัวอย่างมาค้านว่าเป็นเท็จ การเสนอความคิดใดออกมาให้นักเรียนต้องสามารถตอบได้ว่า ทำไมถึงคิดอย่างนั้นทำไมถึงคิดว่าเป็นสิ่งที่ถูกต้อง

2. สร้างและสืบสวนข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ (Make and investigate mathematics conjectures)
กล่าวคือ นักเรียนจะต้องเรียนรู้การสร้างพัฒนา ค้นหา และตรวจสอบข้อคาดเดา ตั้งแต่ระดับประถมศึกษา เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการค้นพบ และข้อคาดเดาก็คือเส้นทางไปสู่การค้นพบ นอกจากนี้นักเรียนต้องถูกฝึกให้คุ้นเคยกับคำถามที่เกี่ยวกับการค้นหาแบบรูป ว่าแบบรูปนี้มีลักษณะอย่างไร เทอมต่อไปคืออะไร แบบรูปนี้เป็นจริงตลอดหรือเป็นบางครั้ง

3. พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ (Develop and evaluate mathematics arguments and proofs)
กล่าวคือ ต้องให้นักเรียนเรียนรู้การให้เหตุผลเพื่อยืนยันหรือปฏิเสธข้อคาดเดาที่มีความเป็นกรณีทั่วไปได้ เช่น เด็กในระดับประถมศึกษาตอนต้นต้องสามารถยืนยันความจริงในกรณีทั่วไปโดยใช้ความรู้จากกรณีเฉพาะได้ นอกจากนี้ยังต้องส่งเสริมให้เด็กได้เรียนรู้การตรวจสอบข้อบกพร่องของการให้เหตุผล ซึ่งอาจทำได้โดยการให้เด็กอภิปรายร่วมกับเพื่อนร่วมชั้นเพื่อเปรียบเทียบความคิดของตนเองกับความคิดของคนอื่น ๆ ส่งผลให้เขาได้ปรับปรุงให้เหตุผลของตนเองมีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น ชั้นเรียนที่มีการกระตุ้นให้นักเรียนนำเสนอความคิดของตนเองและรับฟังข้อเสนอแนะจากคนอื่น เป็นชั้นเรียนที่เต็มไปด้วยบรรยากาศที่เหมาะสมสำหรับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์อย่างยิ่ง ลักษณะการนำเสนอเหตุผลของเด็กเล็กจะอธิบายโดยใช้ภาษาของตนเอง หรืออาจใช้อุปกรณ์ แต่สำหรับเด็กโตเขาสามารถที่จะนำเสนอการให้เหตุผลโดยใช้รูปแบบการเขียนที่สามารถยอมรับได้โดยผู้เชี่ยวชาญ แต่สิ่งสำคัญก็คือครูต้องตระหนักว่ารูปแบบการเขียนพิสูจน์มีความสำคัญน้อยกว่าการคิดและการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและชัดเจน

4. เลือกและใช้รูปแบบการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ได้อย่างหลากหลาย (Select and use various types of reasoning and methods of proof)
กล่าวคือนักเรียนจะต้องได้รับการฝึกให้รู้ว่าจะใช้ความรู้และข้อมูลที่มีอยู่สร้างการให้เหตุผลที่ชัดเจนได้อย่างไรต้องเรียนรู้เกี่ยวกับมาตรฐานในการให้เหตุผล และประเภทของการให้

เหตุผลแบบต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นแบบลองผิดลองถูก การพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้งแบบอุปนัย และแบบนิรนัย เป็นต้นว่าจะเลือกใช้รูปแบบใดของการพิสูจน์ที่เหมาะสมกับแต่ละกรณี

สำหรับประเทศไทย ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ในสาระที่ 6: ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งได้ระบุตัวชี้วัดชั้นปีที่เกี่ยวกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2552: 54-56)

ตัวชี้วัดชั้น ป.1-ป.3

1. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

2. ใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ตัวชี้วัดชั้น ป.4-ป.6

1. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

2. ใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ตัวชี้วัดชั้น ม.1- ม.3

1. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

2. ใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ตัวชี้วัดชั้น ม.4- ม.6

1. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

2. ใช้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

สำหรับการวิจัยนี้มาตรฐานหรือจุดมุ่งหมายการเรียนรู้ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือนักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ในด้านต่างๆดังต่อไปนี้

1. ด้านการค้นหความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาความสามารถของนักเรียนในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะ แล้วค้นหาค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีที่มีร่วมกัน ที่คาดว่าจะนำไปสู่ความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไปได้

2. ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ โดยพิจารณาความสามารถของนักเรียนในการเขียนอธิบายข้อสรุปที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป ซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง

2.2 สื่อการเรียนรู้สำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ในการเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน สำหรับการเรียนรู้ การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสื่อการเรียนรู้ ซึ่ง ลักษณะสำคัญของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรมีลักษณะดังนี้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระกระบวนการ หรือ ความรู้ที่นักเรียนไม่เคยพบเห็นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที การหาคำตอบจะต้องใช้ ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ รวมทั้งความสามารถด้านวิเคราะห์ การ สังเคราะห์ การให้เหตุผล และการตัดสินใจ สสวท. (2555ค: 102)

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (อุษาวดี จันทรสนธิ. 2555; 10-35: อ้างอิงจากNTCM. 1991: 25-32) ได้ให้ข้อเสนอเกี่ยวกับลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์และเกณฑ์ ที่ใช้พิจารณาปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

ปัญหาคณิตศาสตร์มีลักษณะสำคัญ 3 ประการ คือ 1) สะท้อนความคิดรวบยอดสำคัญ 2) เหมาะสมกับความรู้ ความเข้าใจ ความสนใจและประสบการณ์ของผู้เรียน และ 3) ส่งเสริมให้ ผู้เรียนปฏิบัติการกับปัญหาโดยวิธีที่หลากหลาย ลักษณะสำคัญทั้ง 3 ประการข้างต้น ย่อมนำมาซึ่ง สิ่งต่อไปนี้

1. การกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้กระบวนการคิด
2. การต่อยอดความคิดรวบยอดหลักๆเดิมของผู้เรียนไปสู่ข้อค้นพบใหม่จาก ประจักษ์ด้วยตนเองของผู้เรียน
3. การส่งเสริมให้ผู้เรียนสร้างความเชื่อมโยงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์
4. การกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดข้อสงสัย เกิดการคิดแก้ปัญหาและใช้เหตุผลทาง คณิตศาสตร์
5. ส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้สิ่งแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เพื่อ แสดงความคิดของตน
6. ส่งเสริมให้ผู้เรียนให้ผู้เรียนชี้คณิตศาสตร์อธิบายปรากฏการณ์ใน ชีวิตประจำวัน
7. การสนองความแตกต่างระหว่างผู้เรียน ผู้เรียนที่มีประสบการณ์แตกต่างกัน สามารถปฏิบัติการกับปัญหาวัยวิธีที่ต่างกันตามความสามารถของเขา
8. การส่งเสริมให้ผู้เรียนทุกคนมีโอกาสพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของเขา ได้เต็มที่

นอกจากนี้สถานการณ์ปัญหาที่ควรนำมาเป็นสื่อการเรียนรู้สำหรับการจัดกิจกรรมการ เรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน

ลักษณะที่ดีของปัญหาที่ครูควรเลือกเป็นสื่อสำหรับการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (สวท. 2555ค: 146–148) กล่าวพอสรุปได้ดังนี้

1. เป็นปัญหาที่ดึงดูดความสนใจและท้าทายความสามารถของนักเรียน เป็นปัญหาที่ไม่ง่ายหรือยากเกินไป เพราะถ้ายากเกินไปอาจไม่ดึงดูดความสนใจและไม่ท้าทาย แต่ถ้ายากเกินไปนักเรียนอาจท้อถอยก่อนที่จะแก้ปัญหาได้สำเร็จ
2. เป็นปัญหาที่แปลกใหม่และไม่คุ้นเคย ซึ่งนักเรียนไม่เคยมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่นั้นมาก่อน เพราะถ้านักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่นั้นมาแล้ว ปัญหานั้นจะไม่ใช่วิธีการที่น่าสนใจอีกต่อไป อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย ครูอาจดัดแปลงกำหนดสถานการณ์ขึ้นใหม่หรือเปลี่ยนแง่มุมของคำถามให้ต่างไปจากเดิม เพื่อให้กลายเป็นปัญหาที่แปลกใหม่สำหรับนักเรียนก็ได้
3. เป็นปัญหาที่มีสถานการณ์ทั้งในคณิตศาสตร์และในบริบทอื่นๆ เพื่อให้ นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาหลายๆ แบบ และมีประสบการณ์ในการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับแนวคิดของศาสตร์อื่นๆ ตลอดจนเพื่อให้ให้นักเรียนเห็นคุณค่าว่าคณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ใช้ในบริบทอื่นๆ นอกเหนือจากคณิตศาสตร์ได้
4. เป็นปัญหาในสถานการณ์จริง ที่เหมาะสมกับวัยและระดับพัฒนาการของนักเรียน ซึ่งนักเรียนสามารถทำความเข้าใจปัญหาและรับรู้ได้ การได้ลงมือแก้ปัญหาในสถานการณ์จริง จะช่วยให้นักเรียนได้มีโอกาสฝึกทักษะและกระบวนการด้านการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนได้เห็นคุณค่าว่า คณิตศาสตร์สามารถประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริงได้ด้วย
5. เป็นปัญหาที่ส่งเสริมกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง
6. เป็นปัญหาที่ส่งเสริมการสำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบาย และตัดสินใจสรุปในกรณีทั่วไป เพื่อให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการสำรวจ สืบสวน รวบรวมข้อมูล ค้นหาความสัมพันธ์ และแบบรูปที่นำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ ตรวจสอบข้อความคาดการณ์ และตัดสินใจสรุปในกรณีทั่วไปของตนเอง
7. เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนอย่างอิสระ เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิด การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ ตลอดจนช่วยให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านั้นได้ชัดเจนยิ่งขึ้นด้วย
8. เป็นปัญหาที่ใช้ภาษาที่เหมาะสมกับวัยและระดับพัฒนาการของนักเรียน เพื่อไม่ให้นักเรียนต้องมีปัญหาเกี่ยวกับภาษาที่ใช้

ดังนั้นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้เป็นสื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในงานวิจัยนี้ จะต้องเป็นสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมกับวัยและพัฒนาการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีเนื้อหาสาระกระบวนการ หรือความรู้ที่นักเรียนไม่เคยพบเห็นมาก่อน และไม่

สามารถหาคำตอบได้ทันที และเป็นปัญหาที่ส่งเสริมการสำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบาย และตัดสินข้อสรุปในกรณีทั่วไป

2.3 การดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาที่ เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการเรียนการสอนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ โดยผ่านสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมกับวัยและพัฒนาการของนักเรียน ให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาด้วยตนเองตามขั้นตอนสำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบาย และตัดสินข้อสรุปในกรณีทั่วไปของตนเอง ซึ่งเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การเรียนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะช่วยให้นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ มีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ ทั้งภายในและนอกห้องเรียน ซึ่งเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นานตลอดชีวิต (สสวท. 2555ค: 145)

ในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นอกจากครูจะต้องเตรียมปัญหาให้เหมาะสมและมีประสิทธิภาพแล้ว ครูควรจะดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนให้สอดคล้องและเหมาะสมด้วย แนวทางในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้การสอนผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ควรเป็นดังนี้ (สสวท. 2555ค: 153-157)

1. ครูควรใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ หรือการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย ซึ่งทำให้นักเรียนได้มีโอกาสทำงานร่วมกันเป็นทีมหรือกลุ่ม ได้ลงมือแก้ปัญหาและปฏิบัติการกิจต่างๆ จนบรรลุจุดประสงค์ที่คาดหวังไว้ ได้พูดคุยแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ได้สื่อสารและนำเสนอกลยุทธ์แก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาของตน ได้อภิปรายถึงกลยุทธ์แก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพ ได้สะท้อนความคิดเห็นเกี่ยวกับกลยุทธ์แก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาที่กระทำร่วมกัน ตลอดจนได้เรียนรู้ที่จะยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น

ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ ครูต้องเลือกขนาดกลุ่ม ว่าควรเป็นเท่าไร ซึ่งโดยปกติกลุ่มละ 3-4 คน เมื่อเลือกขนาดของกลุ่มแล้ว ครูควรจัดนักเรียนเข้ากลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มมีนักเรียนที่มีระดับความสามารถเก่ง ปานกลาง และอ่อน อยู่ในกลุ่มเดียวกัน หลังจากนั้น ครูควรชี้แจงบทบาทและหน้าที่ของสมาชิกในกลุ่ม โดยเน้นย้ำว่าทุกคนต้องมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา เข้าใจงานของกลุ่ม และสามารถอธิบายได้ ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมร่วมกันอยู่ ครูควรมีบทบาทในการตรวจตราสอดส่องการทำงานและพฤติกรรมของนักเรียนแต่ละคน คอยสอดแทรก/ชี้แจงหวัะกระบวนการแก้ปัญหาของกลุ่ม โดยใช้คำถามกระตุ้นเมื่อกลุ่มแก้ปัญหาไม่ได้หรือไม่ตรงประเด็น ตอบคำถามและให้คำปรึกษาเท่าที่จำเป็น

2. ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูอาจเริ่มต้นจากการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาด้วยตนเอง เพราะการแก้ปัญหาแต่ละครั้งจะช่วยให้นักเรียนได้ฝึกทักษะการคิดและกระบวนการของการแก้ปัญหา ได้เรียนรู้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ใหม่ๆ ผ่านการแก้ปัญหา

3. ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนอย่างอิสระ ครูอาจเริ่มต้นจากการให้นักเรียนเติมคำตอบเพียงคำเดียว เติมคำตอบสั้นๆ แล้วจึงเติมคำตอบเป็นข้อความหรือประโยค และเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับการได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนเองคิด และนำเสนอแนวคิดของตนแล้ว ครูควรให้ลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม เพราะจะช่วยให้ นักเรียนฝึกทักษะการคิด การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอร่วมกับเพื่อนสมาชิกในกลุ่มด้วย

4. ครูควรยอมรับความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าจะถูกหรือผิด ซึ่งการตอบผิดของนักเรียนจะทำให้ครูได้รู้ว่าข้อผิดพลาดนั้นมาจากไหนและมีมากน้อยเพียงใด ครูไม่ควรย่ำสิ่งที่นักเรียนทำผิดหรือเข้าใจผิด แต่ควรซักถามอภิปรายและเปิดอภิปราย เพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดและกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

5. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนคิดและลงมือปฏิบัติแก้ปัญหาตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์และคุ้นเคยกับขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง

6. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนสำรวจ สืบสวน สร้างข้อความคาดการณ์ อธิบาย และตัดสินใจสรุปในกรณีทั่วไปของตนเอง ซึ่งอาจเริ่มจากให้นักเรียนฝึกการตั้งคำถามกับตัวเอง บ่อยๆ โดยเป็นคำถามที่ต้องการคำตอบ อธิบาย เช่น เพราะเหตุใด ทำไม และอย่างไร แล้วให้นักเรียนลงมือ สำรวจ สืบสวน รวบรวมข้อมูล ค้นหาความสัมพันธ์และแบบรูป สร้างข้อความคาดการณ์อธิบาย และตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ตลอดจนตัดสินใจสรุปในกรณีทั่วไปของตนเอง

7. ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนรับรู้กระบวนการคิดของตนเอง ตรวจสอบการคิด และกระบวนการคิดของตนเองว่า มีสิ่งใดบ้างที่รู้ และมีสิ่งใดบ้างที่ไม่รู้ ตลอดจนสะท้อนกระบวนการแก้ปัญหาของตนออกมาด้วย โดยการให้นักเรียนเขียนบันทึกในหัวข้อเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ในงานวิจัยนี้นักเรียนจะได้มีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ โดยได้ร่วมคิดและลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม (Group problem solving) โดยที่แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียน 4-5 คน แบบละความสามารถ ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกปฏิบัติด้วยตนเองผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยในแต่ละคาบเรียน มีการส่งเสริมบทบาทของครู ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยดังนี้

1. ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ หรือการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย
 2. เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเอง
 3. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนเองอย่างอิสระ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนตอบคำถามสั้นๆ แล้วจึงให้ตอบคำถามยาวๆ เมื่อนักเรียนคุ้นเคยแล้วให้นักเรียนอธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนเอง
 4. ยอมรับฟังความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าจะถูกหรือผิด
 5. สร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น พูดถึงความสำคัญของการแก้ปัญหา หรือเชื่อมโยงให้เห็นว่าปัญหานั้นเกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน
 6. สนับสนุนให้นักเรียนเริ่มต้นคิดหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อน
 7. สนับสนุนให้นักเรียนคิดและลงมือแก้ปัญหตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
 8. สังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียน ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 9. คอยตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนตอบ ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
 10. เปิดอภิปรายร่วมกับนักเรียนเกี่ยวกับการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์
- สำหรับบทบาทของนักเรียนในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีดังนี้
1. ลงมือแก้ปัญหด้วยตนเอง
 2. มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่ม
 3. ลงมือแก้ปัญหตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
 4. แลกเปลี่ยนความคิดเห็น โดยอธิบายในสิ่งที่ตนคิด ชักถามเมื่อมีข้อสงสัย
 5. ยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนสมาชิกในกลุ่ม และเพื่อนในชั้นเรียน
 6. มีส่วนร่วมในการนำเสนอความสัมพันธ์ของข้อมูลและข้อความคาดการณ์เป็นรายกลุ่มหรือรายบุคคล
 7. มีส่วนร่วมในการอภิปรายในกลุ่มและในชั้นเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาลงมือจนอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

2.4 การประเมินผลในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ในการประเมินผลในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน ผ่านการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรให้คะแนนตามความสามารถของนักเรียนในทุกขั้นตอน เมื่อนักเรียนตอบปัญหาหรือแก้โจทย์ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบ แม้ว่าคำตอบที่ได้จะไม่ถูกต้องทั้งหมด ชาร์ลส์ เลสเทอร์ และ

โอดาฟเฟอร์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 35–42; citing Charles; Lester; & O'Daffer. 1987. *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 15–61) และ สสวท. (2555ค: 168-170) ได้เสนอแนวทาง/วิธีการประเมินผลการแก้ปัญหาไว้ 4 ประการ ได้แก่ การสังเกตและการใช้คำถาม (Observing and questioning) การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน (Using self assessment data from students) การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric scoring) และการใช้แบบทดสอบ (Using tests) มีรายละเอียดดังนี้

วิธีที่ 1 การสังเกตและการถามคำถามนักเรียน

การสังเกตและการถามคำถามนักเรียนเป็นวิธีการประเมินที่มีคุณค่ามาก สามารถใช้ประเมินในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล หรือแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ซึ่งข้อมูลที่ได้จะเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ที่ไม่สามารถระบุเป็นคะแนนได้ ซึ่งได้แก่ พฤติกรรมการแก้ปัญหาของนักเรียน ความเชื่อและเจตคติ โดยครูจะประเมินในขณะที่เดินตรวจตราไปยังกลุ่มต่างๆ ขณะที่นักเรียนกำลังลงมือแก้ปัญหา ในขณะที่ครูสังเกตและถามคำถามนักเรียน ครูจะต้องบันทึกข้อมูลที่ได้ให้ตรงประเด็นทันทีที่ได้ข้อมูล เนื่องจากครูมีเวลาจำกัดในการจดบันทึก ดังนั้นก่อนเข้าสู่บทเรียนครูต้องเลือกประเด็นของสิ่งที่ต้องการประเมินและเตรียมเครื่องมือการประเมินไว้ล่วงหน้าเครื่องมือที่ครูใช้ในการบันทึกข้อมูลประกอบด้วยแบบตรวจสอบรายการ (Checklist) และแบบบันทึกผลการสังเกต (Comment card) ซึ่งตัวอย่างของเครื่องมือเหล่านี้แสดงดัง ภาพประกอบ 4-5 ตามลำดับ

แบบตรวจสอบรายการ	
ชื่อนักเรียน _____	วันที่ _____
☐ 1.	ชอบการแก้ปัญหา
☐ 2.	มีส่วนร่วมในการทำงานกลุ่ม
☐ 3.	เสนอความคิดในการแก้ปัญหาของกลุ่ม
☐ 4.	มีความพยายามในการหาแบบรูป
☐ 5.	พยายามทำความเข้าใจปัญหา
☐ 6.	สามารถใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ได้
☐ 7.	เลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้เหมาะสม
☐ 8.	มีความพยายามในการเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาอื่นๆ มาแก้ปัญห เมื่อกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เลือกมาครั้งแรกไม่สามารถแก้ปัญหได้
☐ 9.	ตรวจคำตอบ
☐ 10.	สามารถอธิบายหรือวิเคราะห์คำตอบได้

ภาพประกอบ 4 ตัวอย่างแบบตรวจสอบรายการ

ที่มา: Charles; Lester; & O'Daffer. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 18.

แบบบันทึกผลการสังเกต	
ชื่อ – สกุล	ช. เทรนต์ วันที่ 10/5
ผลการสังเกต	
- รู้วิธีหาแบบรูป และรู้ว่าเมื่อไรควรจะหาแบบรูป - รู้ว่าตารางจะช่วยให้หาแบบรูปได้ง่ายขึ้น - มีความพยายามที่จะหาคำตอบ	

ภาพประกอบ 5 แบบบันทึกผลการสังเกต

ที่มา: Charles; Lester; & O'Daffer. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. p. 18.

วิธีที่ 2 การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน

การใช้ข้อมูลการวัดผลของนักเรียน เป็นอีกวิธีหนึ่งในการประเมินผลการแก้ปัญหา วิธีนี้จะมีคุณค่ามากน้อยนั้นขึ้นอยู่กับความเชื่อตรงที่นักเรียนรายงานหรือบันทึกออกมาถึง ความรู้สึก ความเชื่อ ความตั้งใจ และความคิดของนักเรียนเองเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่กำหนด ข้อมูลการวัดผลของนักเรียนจะถูกรวบรวมไว้ในสมุดรายงาน (Students reports) ที่นักเรียนต้องเขียนเล่าประสบการณ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา ภายหลังจากที่แก้ปัญหาเสร็จ เพื่อให้นักเรียนมีประเด็นในการเขียนครูอาจใช้คำถามต่อไปนี้แนะแนวทางในการเขียนได้

- นักเรียนทำอะไร เมื่อแรกพบปัญหา
- นักเรียนใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาเลยหรือไม่ ใช้กลยุทธ์ใด ผลเป็นอย่างไร มีอะไรเกิดขึ้นบ้างกลยุทธ์นั้นสามารถแก้ปัญหาได้หรือไม่
- ถ้าแก้ปัญหาไม่สำเร็จ นักเรียนพยายามหากลยุทธ์อื่นมาลองใช้อีกหรือไม่
- นักเรียนตรวจสอบคำตอบหรือไม่ ลองใช้วิธีการอื่น ๆ บ้างหรือไม่ นักเรียนแน่ใจไหมว่าคำตอบที่ได้ถูกต้อง

ครูสามารถใช้สมุดรายงานของนักเรียนในการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาได้และยังวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาในภาพรวมได้อีกเมื่อสิ้นภาคเรียนและสิ้นปีการศึกษา

วิธีที่ 3 การให้คะแนนแบบรูปrik

การให้คะแนนแบบรูปrik เป็นการให้คะแนนที่ประเมินผลจากผลงานที่นักเรียนทำหรือพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออก ซึ่งไม่ได้พิจารณาที่คำตอบหรือผลลัพธ์สุดท้ายเพียงอย่างเดียว แต่ยังพิจารณาที่ขั้นตอนการทำงานของนักเรียนด้วย ตลอดจนมีการกำหนดระดับคะแนนพร้อมระบุ

รายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนไว้อย่างชัดเจนและเป็นรูปธรรม เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริกสามารถปรับเปลี่ยนได้ตามความเหมาะสม

การให้คะแนนแบบรูบริกเป็นเครื่องมือช่วยให้ครูพิจารณาและตัดสินระดับความสามารถของนักเรียนด้านความรู้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการประยุกต์ใช้ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำผลที่ได้มาใช้ในการปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้น ตลอดจนการให้คะแนนแบบรูบริกยังเป็นเครื่องมือช่วยให้นักเรียนประเมินระดับความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนเองแล้วนำผลที่ได้มาปรับปรุงและพัฒนาความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของตนให้ดียิ่งขึ้นด้วย ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การให้คะแนนแบบรูบริกที่นิยมใช้ มี 2 แบบ คือ

1. การให้คะแนนแบบวิเคราะห์ (Analytic Scoring) เป็นการให้คะแนนตามองค์ประกอบของสิ่งที่ต้องการประเมิน เช่น เมื่อต้องการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา อาจแยกพิจารณาในความสามารถเข้าใจปัญหา ยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหา และการสรุปคำตอบของปัญหา ในการให้คะแนนจะกำหนดเกณฑ์ของคะแนนในแต่ละด้าน แล้วรายงานผลโดยจำแนกเป็นด้านๆ และอาจสรุปรวมคะแนนทุกด้านด้วยก็ได้

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การให้คะแนนแบบวิเคราะห์มักใช้ ในการประเมินผลที่มีวัตถุประสงค์ เพื่อวินิจฉัยหาจุดเด่นหรือจุดด้อยของนักเรียนในแต่ละด้าน แล้วนำผลของการประเมินที่ได้ ไปส่งเสริมจุดเด่นหรือแก้ไขจุดด้อยเหล่านั้น หรือใช้ในการประเมินผลที่มีวัตถุประสงค์เพื่อปรับปรุงการเรียนการสอนให้ เหมาะสมและมีประสิทธิภาพก่อนที่จะนักเรียนจะเรียนเนื้อหาใหม่ต่อไป การประเมินโดยการให้คะแนนแบบวิเคราะห์จะมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อใช้ ร่วมกับวิธีการประเมินผลอย่างอื่น เช่น การสังเกตและการใช้ คำถาม ตัวอย่างการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ แสดงดังตาราง 1

ตาราง 1 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบวิเคราะห์

ระดับ	เกณฑ์การให้คะแนน
3	การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างชัดเจน โดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล กำหนดตัวแปรที่สำคัญ และอธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรนั้นได้อย่างถูกต้อง ครบถ้วน
2	นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ไม่ชัดเจน โดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล แต่กำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร ถูกต้องเพียง 2 ใน 3
1	นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ไม่ชัดเจน โดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล แต่กำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร ถูกต้องเพียง 1 ใน 3
0	นักเรียนแสดงให้เห็นว่าไม่สามารถวิเคราะห์ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ โดยไม่สามารถกำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรได้
3	การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง โดยสามารถสร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้อง ครอบคลุมกับสภาพปัญหา
2	นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหา โดยสามารถสร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้อง แต่ขาดความครบถ้วน หรือมีข้อบกพร่องบางประการ
1	นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหบ้าง โดยสามารถสร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง แต่ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป
0	นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความไม่เข้าใจในปัญหบ้าง โดยไม่สามารถสร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ได้

ที่มา: จินดิษฐ์ ลออปักษิณ. (2550). การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิชุด สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง. หน้า 182-183.

2. การให้คะแนนแบบองค์รวม (Holistic Scoring) เป็นการให้ คะแนนแบบรูปrikที่ประเมินผลงานของนักเรียน โดยการกำหนดระดับคะแนนพร้อมบรรยายละเอียดของผลงาน หรือพฤติกรรมของนักเรียนที่ควรมี เป็นภาพรวมของการทำงานทั้งหมดไม่ต้องแยกเป็นด้านๆ

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การให้คะแนนแบบองค์รวมมักนำมาใช้ ในการประเมินผลที่มีวัตถุประสงค์เพื่อตัดสินหรือสรุปผลการเรียนของนักเรียน การประเมินผลโดยการให้คะแนนแบบองค์รวมเป็นการประเมินที่เหมาะสมสำหรับการประเมินที่มีพิสัยกว้างๆ และต้องการผลที่เป็นภาพรวมกว้างๆ และจะมีประสิทธิภาพมากขึ้นเมื่อใช้ ร่วมกับวิธีการประเมินผลอย่างอื่น เช่น การสังเกตและการใช้ คำถาม ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวม แสดงดังตาราง 2

ตาราง 2 ตัวอย่างการให้คะแนนแบบองค์รวม

คะแนน	เงื่อนไข
20	- ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายได้อย่างชัดเจน
15	- ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายพอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน
10	- ตอบได้ถูกต้อง สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายพอสื่อให้เข้าใจได้บางส่วน
5	- ตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายได้ หรือ - ตอบไม่ถูกต้อง แต่สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายพอสื่อให้เข้าใจได้บางส่วน
0	- ตอบไม่ถูกต้อง ไม่สามารถแสดงข้อมูลเปรียบเทียบและอธิบายได้ หรือ - อธิบายผิด

ที่มา: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2555ค). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. หน้า 176.

วิธีที่ 4 การใช้แบบทดสอบ

แบบทดสอบที่ใช้ในการประเมินผลการแก้ปัญหา มี 2 ประเภท ได้แก่

1. แบบทดสอบชนิดเลือกตอบ (Multiple-choice test) แบบทดสอบชนิดเลือกตอบประกอบด้วยข้อคำถาม ซึ่งแต่ละคำถามจะมีตัวเลือกหลายๆ ตัวเลือกให้นักเรียนเลือกที่คิดว่าถูกต้องที่สุดเพียงตัวเลือกเดียว
2. แบบทดสอบชนิดเติมคำตอบ (Completion test) แบบทดสอบชนิดเติมคำตอบเป็นแบบทดสอบที่ประกอบด้วยข้อสอบที่เว้นช่องว่างเอาไว้เพื่อให้นักเรียนเติมคำ ตัวเลขชุดของสัญลักษณ์ หรือประโยคที่คิดว่าถูกต้องลงในช่องว่าง

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา (2552: 60) อธิบายถึงการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่

บรรจุไว้ในหลักสูตร โดยครูสามารถประเมินได้จากกิจกรรมที่นักเรียนทำจากแบบฝึกหัด จากการเขียนอนุทินหรือข้อสอบที่เป็นคำถามปลายเปิดที่ให้โอกาสนักเรียนแสดงความสามารถ

สำหรับในการวิจัยครั้งนี้ การประเมินความสามารถและพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน ประเมินได้โดยใช้แบบทดสอบแบบอัตนัยที่มีการให้คะแนนให้คะแนนแบบรูปริก (Rubric) แบบวิเคราะห์เพื่อประเมินความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และใช้แบบตรวจสอบรายการและแบบบันทึกภาคสนามเพื่อบันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน

2.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยในด้านต่าง ๆ ดังนี้

งานวิจัยต่างประเทศ

เยรูซาลมี (Yerushalmy. 1986) ได้ศึกษาเรื่องการอุปนัยและหลักการทั่วไป : เป็นการทดสอบในการสอนและการเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เรื่องคอมพิวเตอร์, การคาดเดาทางเรขาคณิต, หลักสูตร) เป็นการศึกษาถึงการทำงานแบบอุปนัย ของนักเรียนที่เรียนเรขาคณิตในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในการคาดเดาจากการสังเกตข้อมูล และกระบวนการให้เหตุผล ที่สามารถนำมาพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากการศึกษาพบว่า นักเรียนทั่วไปไม่คุ้นเคยกับงานที่เป็นแบบอุปนัย หลักสูตรเดิมของวิชาเรขาคณิตได้ลดแรงจูงใจในการคิดที่หลากหลายของนักเรียน ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงในสิ่งที่จะเป็นกุญแจสำคัญในลักษณะเฉพาะ และในขณะที่การเรียนแบบอุปนัยช่วยให้ผู้เรียน พิจารณาวิเคราะห์วิธีการนำไปใช้ที่ไม่เป็นแบบแผน และนักเรียนจะมีการอธิบายในแง่มุมที่ต่างกันออกไปตามทักษะ, ระดับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในระดับสูง, การสังเกตในตอนท้ายของการศึกษา, และรวมไปถึงสิ่งที่เกิดจากการนำวิธีการสอนแบบอุปนัย และนิรนัยมาใช้ สุดท้ายนักเรียนมีการถ่ายโอนความรู้เรื่องเรขาคณิตน้อยมากถึงแม้บางหัวข้อจะเป็น การถ่ายโอนความรู้ที่ง่ายก็ตาม

มัวร์ (Mourad. 2005) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยในห้องเรียนพีชคณิต (Inductive reasoning in the algebra classroom) การศึกษานี้เป็นการเปรียบเทียบผลของวิธีสอน 2 วิธี ในหน่วยการเรียนรู้พีชคณิต เรื่องฟังก์ชันเชิงเส้นของนักเรียนเกรด 8 วิธีการสอนที่นำมาใช้ในการทดลองครั้งนี้ คือ การจัดกิจกรรมเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย การเป็นตัวแทนและแนวทางในการค้นพบในขณะที่วิธีสอนที่ควบคุมคือ การสอนแบบปกติ จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ คือ ต้องการปรับปรุงแก้ไขผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในเรื่อง ฟังก์ชันเชิงเส้น ของนักเรียน ผู้วิจัยต้องการพิสูจน์ความจริงที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ 3 ข้อ คือ ข้อแรกเกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงเส้นและอีกสองข้อเกี่ยวกับความสามารถในการเป็นตัวแทนของการแปลง โดยจะนำมาใช้วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในการทดสอบประจำหน่วยซึ่งนักเรียนทั้งหมด 29 คนที่เข้าร่วมนี้จะมีระดับของความคิดแตกต่างกันผลการเปรียบเทียบพบว่ากลุ่มทดลองให้ความร่วมมือและมีส่วนร่วม

ในการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์จากกิจกรรมการเรียนการสอนมากกว่ากลุ่มที่ใช้การสอนแบบปกติ ดังนั้น วิธีการสอนแบบนี้ดูเหมือนว่าจะเป็นการสร้างความเชื่อมั่นเกี่ยวกับผลสำเร็จที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งเกี่ยวกับการปรับปรุงการเรียนการสอนนั่นเอง

คริสตู และปาปาจิออจิโอว์ (Christou; & Papageorgiou. 2006) ได้ศึกษาเรื่องโครงสร้างของการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ได้กล่าวถึงพื้นฐานบวรกรรมในการให้เหตุผลเชิงอุปนัย โดยได้ทำการศึกษาโครงสร้างสำหรับการแนะนำและการประเมินการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาเป็นการชี้แจงและทำให้สมบูรณ์ท่ามกลางคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ ใช้ข้อมูลจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 135 คนในประเทศไซปรัส ได้ใช้ประโยชน์จากการวิเคราะห์ปัจจัยปัจจัยที่นำมายืนยันและพิสูจน์ความสอดคล้องกับข้อมูลแล้วนำมาสรุปให้เป็นกระบวนการเฉพาะที่มุ่งตรวจสอบความเหมือนและแตกต่างในคุณสมบัติหรือและความสัมพันธ์ซึ่งเป็นการนำมาใช้สำหรับผลเฉลยของปัญหาคณิตศาสตร์เชิงอุปนัยที่ควบคุมด้วยคุณสมบัติหรือความสัมพันธ์ ผลจากการวิจัยโครงสร้างของการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ให้ประโยชน์ในการกำหนดพื้นฐานทางทฤษฎีสำหรับการออกแบบหลักสูตรและการกำหนดโปรแกรมในการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยภายในประเทศ

ทรงชัย อักษรคิด (2546) ได้วิจัยเกี่ยวกับ กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เรื่องแบบรูป โดยใช้การเรียนร่วมมือ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบรูปมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 จึงสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องแบบรูป ตามกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

จินตนา เพิ่มทรัพย์ทวีผล (2547) ได้วิจัยเกี่ยวกับ การศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีระดับความสามารถต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า (1) ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนที่มีระดับความสามารถต่างกัน ก่อนและหลังได้รับการฝึกทักษะการให้เหตุผลแบบอุปนัย แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .01 (2) ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับสูงมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยมากกว่านักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ .05 นักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับสูงกับนักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับปานกลาง และ นักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับปานกลางกับนักเรียนที่มีระดับความสามารถระดับต่ำ มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จินตนิษฐ์ ลออปักษิณ (2550) ได้วิจัยเกี่ยวกับ การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิชุด สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผลวิจัย

พบว่า นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสอบผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และมีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ระพีพัฒน์ แก้วอำ (2551) ได้วิจัยเกี่ยวกับ กิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายคือ เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อศึกษาความสามารถทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และเพื่อศึกษาพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า (1) ด้วยความเชื่อมั่นร้อยละ 95 สามารถกล่าวได้ว่านักเรียนที่สอบได้คะแนนความสามารถทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น มากกว่าร้อยละ 60 มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด (2) ด้วยความเชื่อมั่นร้อยละ 99 สามารถกล่าวได้ว่าความสามารถด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงในทิศทางตามกันในระดับค่อนข้างมากที่สุด (3) ด้วยความเชื่อมั่นร้อยละ 99 สามารถกล่าวได้ว่านักเรียนซึ่งมีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิมลรัตน์ ศรีสุข (2551) ได้วิจัยเกี่ยวกับ การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยการบูรณาการรูปแบบการสร้างมโนทัศน์กับรูปแบบการแปลงเพื่อเสริมสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถทางการคิดแบบอุปนัยของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยพบว่า (1) กระบวนการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้นประกอบด้วยขั้นตอน 6 ขั้นตอน ได้แก่ 1) ขั้นทบทวนความรู้พื้นฐาน 2) ขั้นค้นหาลักษณะสำคัญร่วม 3) ขั้นจัดกลุ่มข้อมูล 4) ขั้นแสดงเหตุผลเชิงประจักษ์ 5) ขั้นสรุป 6) ขั้นนำความรู้ไปใช้ (2) ความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดแบบอุปนัยหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (3) ความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดแบบอุปนัยของนักเรียนหลังเรียนด้วยกระบวนการสอนที่พัฒนาขึ้นสูงกว่าก่อนเรียนมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เวชฤทธิ์ อังกะภาทรขจร (2551) ได้วิจัยเกี่ยวกับ การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงโดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูล กับ สิ่งแวดล้อมศึกษาสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผลการทดลอง ด้านทักษะการให้เหตุผล พบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบภายหลังการทดลองมากกว่าก่อนการทดลองที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 จากการสังเกตพฤติกรรมและการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการด้านการอธิบายการหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์และ

แสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลมากที่สุด โดยที่นักเรียนสามารถตอบคำถามถูกต้อง และแสดงเหตุผลได้เกือบสมบูรณ์ โดยเหตุผลที่แสดงนั้นชี้ให้เห็นว่านักเรียนมีการใช้การเปรียบเทียบ หรือมีการมองแนวโน้มจากข้อมูลนอกเหนือจากการมองเพียงตัวเลขหรือความสูงของกราฟ เมื่อให้อ่านข้อมูล เปรียบเทียบข้อมูล วิเคราะห์แนวโน้มของข้อมูลที่กำหนดให้ หรือเมื่อให้อธิบายถึงคำตอบที่กำหนดให้

กุลนิดา วรสารนันท์ (2552) ได้วิจัยเกี่ยวกับ ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการอุปนัย ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลวิจัยพบว่า (1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลการอุปนัย มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดโดยกระทรวงศึกษาธิการ คือ สูงกว่า 50% ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หลังเรียน (2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการอุปนัย มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (3) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลการอุปนัยมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดโดยกระทรวงศึกษาธิการ คือ สูงกว่า 50% ของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หลังเรียน (4) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการอุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุพรรณิ คำนันท์ (2552) ได้วิจัยเกี่ยวกับ ผลของการเรียนแบบผสมผสานโดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบด้วยวิธีอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีระดับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า (1) นักเรียนที่เรียนแบบผสมผสานด้วยวิธีการเรียนแบบค้นพบต่างกัน มีการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (2) นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกัน เมื่อเรียนแบบผสมผสานด้วยวิธีการเรียนแบบค้นพบ มีการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (3) นักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกัน และเรียนแบบผสมผสานด้วยวิธีการเรียนแบบค้นพบต่างกัน มีการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อัญชลีรัตน์ รอดเลิศ (2553) ได้วิจัยเกี่ยวกับ ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการพัฒนาโนทัศน์และเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลวิจัยพบว่า (1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการพัฒนาโนทัศน์และเอกสารสรุปมโนทัศน์มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการ

เรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการพัฒนามโนทัศน์และเอกสารสรุปมโนทัศน์ มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (3) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการพัฒนามโนทัศน์และเอกสารสรุปมโนทัศน์ มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ธีรรัตน์ สัทร (2556) ได้วิจัยเกี่ยวกับ ผลของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัยที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย – นिरนัย กับเกณฑ์ ผลการวิจัยพบว่า (1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัย เรื่อง สถิติ สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 (2) ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นिरนัย เรื่อง สถิติ สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ณัฐวิญญาน พิชญาชมชื่น (2558) ได้วิจัยเกี่ยวกับ ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย กับเกณฑ์ร้อยละ 70 ซึ่งเป็นแผนการวิจัยแบบ ศึกษากลุ่มเดียววัดหลังการทดลองครั้งเดียว (one-group posttest-only design) ผลการวิจัยสรุปได้ว่า (1) มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความสัมพันธ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 (2) ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัย สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยสรุปได้ว่าการศึกษาเกี่ยวกับการให้เหตุผลของแบบอุปนัย ในการจัดการเรียนการสอน สามารถทำได้กับนักเรียนในทุกระดับการเรียน และส่งผลให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งเป็นการฝึกให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของข้อมูล แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป และอธิบายข้อสรุป สิ่งนี้ จะช่วยพัฒนากระบวนการคิดในการตัดสินใจและส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นได้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้นำมาวิเคราะห์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยพิจารณาคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพใช้ในการประเมินพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนเป้าหมาย โดยพิจารณางานเขียนของนักเรียนเป้าหมายในการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และการเขียนข้อความคาดการณ์ และผลการสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนเป้าหมายขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ ใช้แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล และกล้องวิดีโอ ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของพฤติกรรมเหล่านั้น

ในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย แล้วศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ดังกล่าวที่สร้างขึ้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย
3. สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. เก็บรวบรวมข้อมูล
5. วิเคราะห์ข้อมูล

1. กำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย

1.2 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน ซึ่งมีนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ระดับ 3 ขึ้นไป นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเหล่านี้ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง (Purposive sampling) ในกลุ่มตัวอย่างผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม โดยนำคะแนนดิบของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 มาเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย แล้วกำหนดให้นักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 1-7 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนสูง นักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 8-23 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนปานกลาง และนักเรียนที่มีคะแนนลำดับที่ 24-30 เป็นนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนต่ำ แล้วเลือกนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนสูง จำนวน 1 คน นักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนปานกลาง จำนวน 2 คน และนักเรียนที่อยู่ในกลุ่มคะแนนต่ำ จำนวน 1 คน โดยผู้วิจัยได้สังเกตนักเรียนก่อนทดลองและสัมภาษณ์ครูที่สอนคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 1 ในการเลือกนักเรียนที่มีความกล้าแสดงออก สามารถสื่อสารและนำเสนอแนวคิดของตนเองได้ เพื่อเป็นนักเรียนเป้าหมายในการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

2. กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยดัดแปลงมาจากกรอบแนวคิดของ รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 47–54) และ ชญาภา ใจโปรง (2554: 35-41) ดังนี้

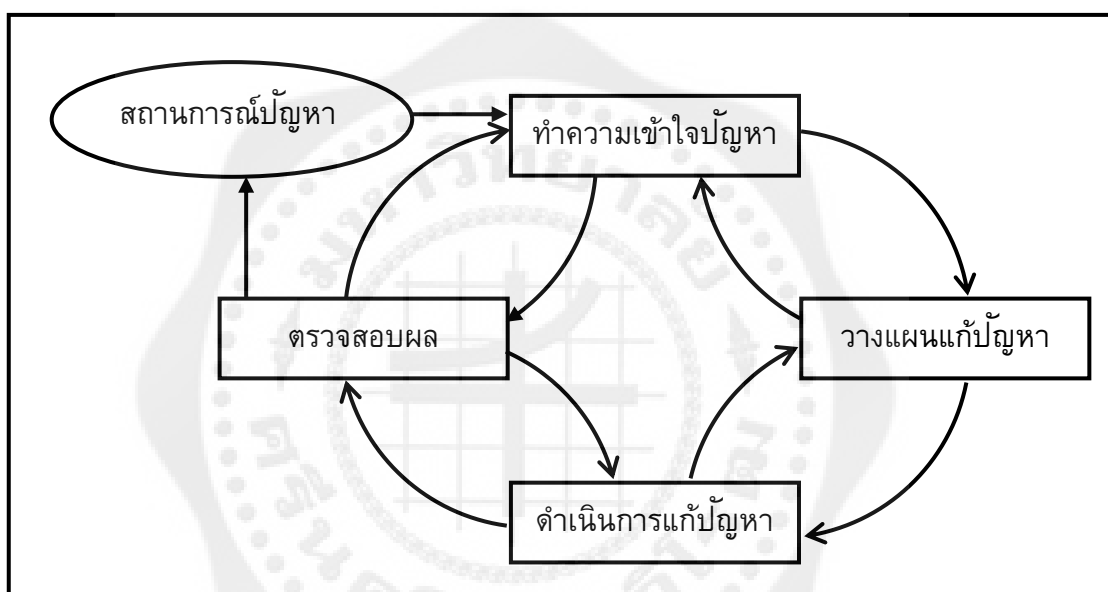
2.1 จุดมุ่งหมายของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีจุดมุ่งหมายหลัก เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่นำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์

2.2 ขอบเขตของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 12 แผน แต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 90 นาที ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นี้ นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่ได้รับการยอมรับและแพร่หลายทั่วโลก ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน และขั้นตรวจสอบผล สำหรับกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาดทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยาในรูปแบบที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดวิลสันและคณะที่ใช้ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ในขณะที่นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น จะได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Non-routine problem) ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหา ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี เขียนข้อความคาดการณ์ และสรุปคำตอบของปัญหา โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เกินความรู้ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1

นอกจากนั้นนักเรียนยังได้มีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ โดยได้ร่วมคิดและลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม (Group problem solving) โดยที่แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียน 4-5 คน แบบคละความสามารถ กล่าวคือมีนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนสูง 1 คน นักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนปานกลาง 2-3 คน และนักเรียนที่มีกลุ่มคะแนนต่ำ 1 คน ซึ่งนักเรียนแต่ละคนต้องมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา

ของกลุ่ม นำเสนอความสัมพันธ์ของข้อมูล ข้อความคาดการณ์ และผลของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นรายกลุ่มหรือรายบุคคล ตลอดจนได้มีโอกาสอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ผู้วิจัยเป็นผู้สร้างนั้น ประกอบด้วยการจัดการเรียนรู้จำนวน 12 แผน ซึ่งแต่ละแผนใช้เวลา 1 คาบเรียน คาบเรียนละ 90 นาที ผู้วิจัยแบ่งกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์นี้ออกเป็น 3 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 คาบเรียน 1-4

ช่วงที่ 2 คาบเรียน 5-8

ช่วงที่ 3 คาบเรียน 9-12

โดยในแต่ละช่วงมีรายละเอียดของกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

ช่วงที่ 1 (คาบเรียนที่ 1-4) กิจกรรมการเรียนรู้ในคาบเรียน 1 เป็นการแนะนำกระบวนการแก้ปัญหา และแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยอย่างง่าย ในคาบเรียน 2-3 เป็นการฝึกฝนกระบวนการแก้ปัญหา ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี และเขียนข้อความคาดการณ์ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้ ส่วนคาบเรียน 4 เป็นการตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

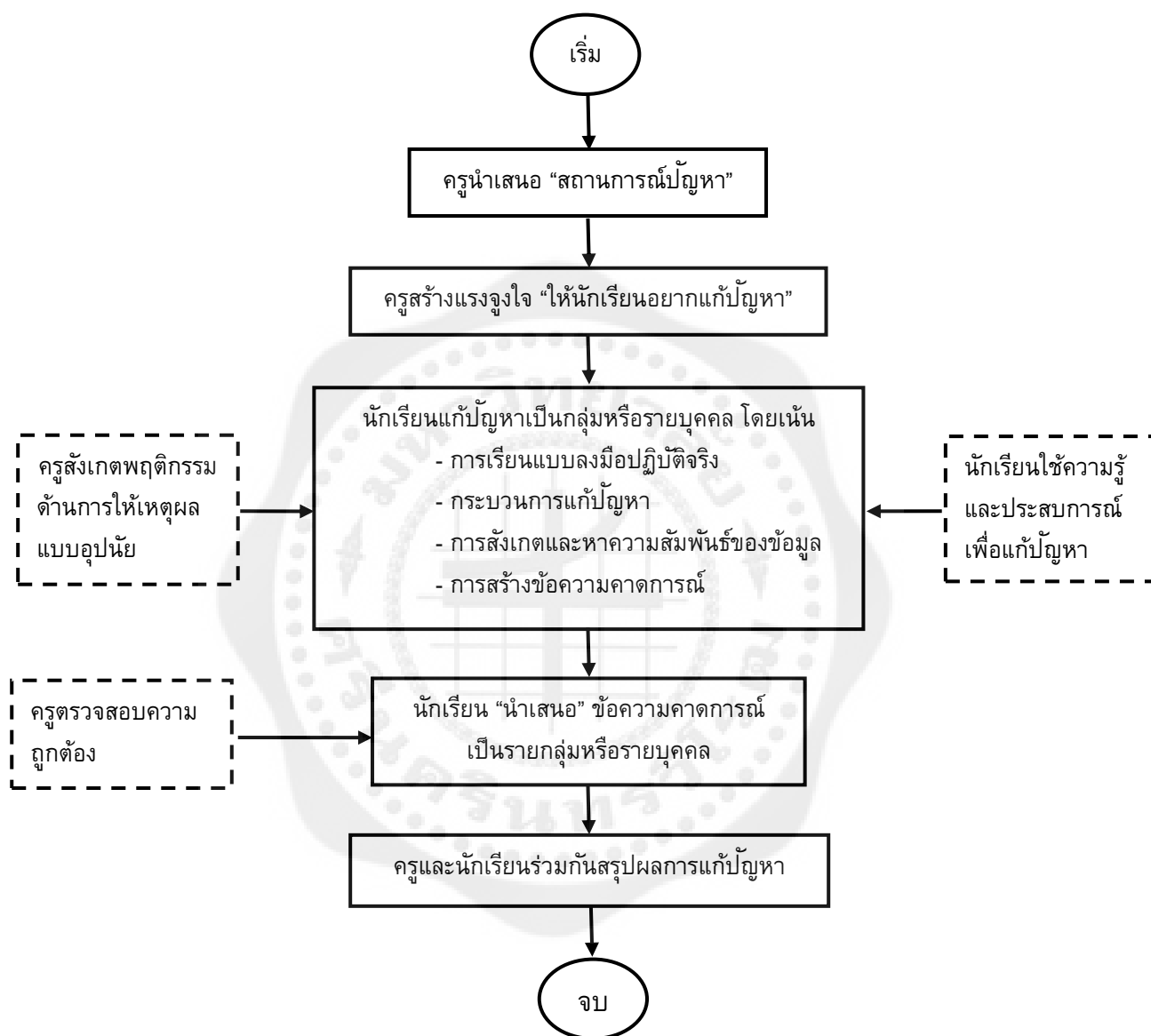
ช่วงที่ 2 (คาบเรียนที่ 5-8) กิจกรรมการเรียนรู้ในคาบเรียน 5-7 เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ในทำนองเดียวกัน ในคาบเรียน 8 เป็นการตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย

ช่วงที่ 3 (คาบเรียนที่ 9-12) เป็นช่วงท้ายของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น กิจกรรมการเรียนรู้ในคาบเรียน 9-11 ยังคงให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย และในคาบเรียน 12 ซึ่งเป็นคาบเรียนสุดท้าย เพื่อตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้ โดยให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคลผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ดังตาราง 3 ต่อไปนี้

ตาราง 3 กิจกรรมการเรียนรู้ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คาบเรียน	กิจกรรมการเรียนรู้
1	- การแนะนำกระบวนการแก้ปัญหาและแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย - นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาอย่างง่าย
2-3	- การฝึกฝนกระบวนการแก้ปัญหา - นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - สะท้อนความคิดเห็นต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (เฉพาะคาบเรียน 3)
4	- นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล ผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้
5-7	- การเรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ - นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - สะท้อนความคิดเห็นต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (เฉพาะคาบเรียน 7)
8	- นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล ผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้
9-11	- การเรียนรู้และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ - นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นกลุ่มผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - สะท้อนความคิดเห็นต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (เฉพาะคาบเรียน 11)
12	- นักเรียนลงมือแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล ผ่านการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย - ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตามกระบวนการแก้ปัญหาที่เรียนรู้

สำหรับขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน โดยเฉพาะการดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มและเป็นรายบุคคล ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนดังภาพประกอบ 7 ต่อไปนี้



ภาพประกอบ 7 ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในแต่ละคาบเรียน

ที่มา: Rungfa Janjaruporn. (2005). *The Development of a Problem-Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers' Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. p. 53.

ในแต่ละคาบเรียนของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย **ครูมีบทบาทสำคัญ**ในการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้

- 1) ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ หรือการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย
- 2) เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหาด้วยตนเอง
- 3) เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิด อธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนเองอย่างอิสระ โดยเริ่มต้นจากการให้นักเรียนตอบคำถามสั้นๆ แล้วจึงให้ตอบคำถามยาวๆ เมื่อนักเรียนคุ้นเคยแล้วให้นักเรียนอธิบายในสิ่งที่ตนคิด และนำเสนอแนวคิดของตนเอง
- 4) ยอมรับฟังความคิดเห็นของนักเรียนไม่ว่าจะถูกหรือผิด
- 5) สร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น พูดถึงความสำคัญของการแก้ปัญหา หรือเชื่อมโยงให้เห็นว่าปัญหานั้นเกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน
- 6) สนับสนุนให้นักเรียนเริ่มต้นคิดหาวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเองก่อน
- 7) สนับสนุนให้นักเรียนคิดและลงมือแก้ปัญหตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
- 8) สังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียน ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 9) คอยตั้งคำถามกระตุ้นให้นักเรียนตอบ ขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์
- 10) เปิดอภิปรายร่วมกับนักเรียนเกี่ยวกับการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์

สำหรับบทบาทของนักเรียนในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีดังนี้

- 1) ลงมือแก้ปัญหด้วยตนเอง
- 2) มีส่วนร่วมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่ม
- 3) ลงมือแก้ปัญหตามขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา
- 4) แลกเปลี่ยนความคิดเห็น โดยอธิบายในสิ่งที่ตนคิด ชักถามเมื่อมีข้อสงสัย
- 5) ยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนสมาชิกในกลุ่ม และเพื่อนในชั้นเรียน
- 6) มีส่วนร่วมในการนำเสนอความสัมพันธ์ของข้อมูลและข้อความคาดการณ์เป็นรายกลุ่มหรือรายบุคคล
- 7) มีส่วนร่วมในการอภิปรายในกลุ่มและในชั้นเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาลงมืออภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

3. สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ (1) เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย (2) เครื่องมือสำหรับวัดและประเมินผลกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

3.1 เครื่องมือสำหรับจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

เครื่องมือที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 12 แผนซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ โดยในการดำเนินการแต่ละแผน ใช้เวลา 1 คาบ คาบละ 90 นาที เนื้อหาที่ใช้เป็นสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่เกินความรู้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3.2 เครื่องมือสำหรับวัดและประเมินผล

ในงานวิจัยครั้งนี้ เครื่องมือสำหรับวัดและประเมินผล ประกอบด้วย (1) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และ (2) แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีรายละเอียดดังนี้

(1) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นแบบทดสอบอัตนัย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งประกอบด้วยปัญหาที่ไม่คุ้นเคยจำนวน 4 ข้อ ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหา ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่น่าไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ เขียนข้อความคาดการณ์ และสรุปคำตอบของปัญหา และใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เกินความรู้ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 1 ในการแก้ปัญหาโดยแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน และมีการให้คะแนนแบบวิเคราะห์ ดังตาราง 4 ต่อไปนี้

ตาราง 4 การให้คะแนนแบบวิเคราะห์

ด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่นำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์	คะแนน
(1) เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ - เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบได้ถูกต้องครบถ้วน - ไม่เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบไม่ถูกต้อง	1 0
(2) เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล - เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะและเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจน ครบถ้วน - เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะและเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลพอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน - เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะและเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลพอสื่อให้เข้าใจได้เพียงบางส่วน - เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะแต่เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลไม่ถูกต้อง - เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะแต่ไม่เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล - ไม่เขียนแสดงข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะและไม่เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล	5 4 3 2 1 0
ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์	คะแนน
(1) กำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ - กำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วน - กำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้เพียงบางส่วน - กำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง	2 1 0
(2) เขียนข้อความคาดการณ์ - เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจน - เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องแต่ชัดเจน - เขียนข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง	2 1 0
(3) แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ในแต่ละกรณี - แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง - แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง	1 0

(2) แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นแบบบันทึกที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้บันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย แบบตรวจสอบรายการและแบบบันทึกภาคสนาม

ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือ

1. กำหนดจุดมุ่งหมายและขอบเขตของเครื่องมือแต่ละชนิด
2. ดำเนินการสร้างเครื่องมือ ดังนี้

2.1 สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ โดยเริ่มจากรวบรวมปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจที่สามารถใช้การสังเกตจากกรณีเฉพาะ หลายๆกรณี เพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่จะนำไปสู่ข้อความคาดการณ์ได้ หลังจากนั้นนำมาปรับเปลี่ยนเงื่อนไขให้เหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แสดงกระบวนการค้นหาคำตอบพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน

2.2 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 12 แผน ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

2.3 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ และเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 6 ข้อ มาสร้างเป็นแบบทดสอบ

2.4 สร้างแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งได้แก่แบบตรวจสอบรายการ และแบบบันทึกภาคสนาม โดยดัดแปลงมาจากแบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ (Rungfa Janjaruporn. 2005: 132-133) และ จินดิษฐ์ ลออปักษิณ (2550: 185)

3. นำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมดเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และความชัดเจนของข้อคำถามสำหรับแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีการให้คะแนนข้อสอบแต่ละข้อดังนี้

คะแนน +1 หมายถึง ข้อสอบใช้ได้

คะแนน 0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบใช้ได้หรือไม่

คะแนน -1 หมายถึง ข้อสอบใช้ไม่ได้

4. นำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมดมาปรับปรุงแก้ไขตามข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่าน สำหรับแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผู้วิจัยคัดเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์เฉพาะข้อที่มีค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of Objective Congruence (IOC)) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

5. นำเครื่องมือไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนาร่องจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย

6. นำคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนกลุ่มนาร่องมาวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ แล้วคัดเลือกปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.20-0.80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป จำนวน 4 ข้อ เพื่อใช้เป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

7. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ที่ได้ในข้อ 6 โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α —Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผล เท่ากับ 0.98

8. นำผลที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนกลุ่มนาร่องมาวิเคราะห์และปรับแก้แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ให้เหมาะสมและมีความชัดเจนเพื่อเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

4. เก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัย

แบบแผนการวิจัยที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ แบบกลุ่มเดียว มีการทดสอบหลังการทดลอง (One—Group Posttest—Only Design) ซึ่งเป็นแบบแผนการวิจัยที่เลือกใช้กลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียว มีการให้ตัวแปรอิสระกับกลุ่มตัวอย่าง แล้วทำการทดสอบหลังการทดลอง แล้วพิจารณาผลการทดลอง

การดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยใช้เวลาในการดำเนินการทดลองทั้งหมด 14 คาบเรียน คาบเรียนละ 90 นาที โดยแบ่งเป็นเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 12 คาบเรียน และเวลาในการทดสอบหลังเรียน 2 คาบเรียน ซึ่งรายละเอียดการดำเนินการทดลอง มีดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โดยใช้เวลาในคาบเรียนปกติ ในแต่ละคาบเรียนผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนและผู้สังเกตการณ์ โดยมีครูกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย จำนวน 2 คน ทำหน้าที่เป็นผู้ช่วยสังเกตการณ์ บันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนเป้าหมายขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

โดยใช้แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และใช้กล้องวิดีโอช่วยในการบันทึกรายละเอียดของพฤติกรรม

2. เมื่อสิ้นสุดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยใช้เวลา 2 คาบเรียน เพื่อตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

5. วิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มาทดสอบสมมติฐานโดยใช้สถิติทดสอบ หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. คำนวณจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

3. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

4. นำแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย การเขียนสะท้อนความคิดเห็นต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และงานเขียนของนักเรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มาวิเคราะห์พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ โดยใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ ได้แก่ ค่าดัชนีความสอดคล้องค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีการหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน คือ การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัยครั้งนี้ คือ เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ข้อมูลที่ได้จากการเก็บรวบรวมผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ แล้วนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ตอน ได้แก่ ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และตอนที่ 2 พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยนำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

แหล่งที่มาของคะแนน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)
1. ใบกิจกรรมในชั้นเรียน	60	42.27	70.45	3.57
2. แบบทดสอบวัดความสามารถ ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย	40	28.67	71.68	5.96
รวม	100	70.94	71.07	9.53

จากตาราง 5 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนเท่ากับ 42.27 คิดเป็นร้อยละ 70.45 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.57 ขณะที่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เท่ากับ 28.67 คิดเป็นร้อยละ 71.68 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 5.96 จึงส่งผลให้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนรวมจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เท่ากับ 70.94 คิดเป็นร้อยละ 71.07 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐานเท่ากับ 9.53

1.2 การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

เพื่อทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วย กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่า ร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดนั้น ผู้วิจัยได้รวมคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียน และ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างแต่ละคน แล้วหาจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของ คะแนนเต็ม หลังจากนั้นทำการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial Test) ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย แสดงดังตาราง 6

ตาราง 6 ผลการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีความสามารถ ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผ่านเกณฑ์ (ร้อยละ)	ค่าสัดส่วนทดสอบ (Test. Prop.)	Exact Sig. (1-tailed)
30	27 (90)	0.60	0.000

* ที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 6 พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ การสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ ระดับนัยสำคัญ .01

ตอนที่ 2 พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ในการศึกษาพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น ผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์จำนวน 2 คน ร่วมกันวิเคราะห์ (1) ผลงานเขียนในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง (2) ผลการสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนเป้าหมายขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ โดยมีแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และกล้องวิดีโอ ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของพฤติกรรมเหล่านั้น

สำหรับพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยพิจารณาการแสดงออกของนักเรียนขณะลงมือแก้ปัญหาที่กำหนดในด้าน (1) ด้านการค้นหาคำความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และ (2) ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ แล้วนำเสนอผลการวิเคราะห์พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยการอธิบายพฤติกรรมของนักเรียนทั้งชั้น และนักเรียนเป้าหมายจำนวน 4 คน ซึ่งได้แก่ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไพบรียา (นามสมมติ) โดยที่นคราเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ชอบคิด ชอบแสดงความคิดเห็นและอธิบายสิ่งต่าง ๆ ให้เพื่อนและครูฟัง และชอบซักถามเมื่อมีข้อสงสัย ในขณะที่ธาดาและรุ่งข้าว เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง ชอบคิด ชอบแสดงความคิดเห็น และซักถามเมื่อมีข้อสงสัย ส่วนไพบรียา เป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ ไม่ชอบคิด ชอบฟังความคิดเห็นของกลุ่มและมักคล้อยตาม แต่ชอบซักถามเมื่อมีข้อสงสัย

ในการอธิบายพฤติกรรมแต่ละด้านของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ผู้วิจัยแบ่งกิจกรรมการเรียนรู้สอนออกเป็น 3 ช่วง ดังนี้

ช่วงที่ 1 คาบเรียนที่ 1-4

ช่วงที่ 2 คาบเรียนที่ 5-8

ช่วงที่ 3 คาบเรียนที่ 9-12

ในแต่ละช่วงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ผู้วิจัยเลือกคาบเรียนที่นักเรียนมีพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยที่เด่นชัดมาอธิบายรายละเอียดพฤติกรรมของนักเรียนมี ดังนี้

ช่วงที่ 1 ผู้วิจัยเลือกคาบเรียนที่ 1 มาอภิปรายว่า พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียน เป็นอย่างไรบ้างในช่วงแรกของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

ช่วงที่ 2 ผู้วิจัยเลือกคาบเรียนที่ 7 มาอภิปรายว่า พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนอะไรบ้างที่เปลี่ยนแปลง และเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

ช่วงที่ 3 ผู้วิจัยเลือกคาบเรียนที่ 11 มาอภิปรายว่า พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนอะไรบ้างที่เปลี่ยนแปลงไปจากช่วงที่ 2 และยังคงแสดงอยู่อย่างสม่ำเสมอในช่วงที่ 3

รายละเอียดของพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีดังนี้

2.1 พฤติกรรมด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยพิจารณาการแสดงออกของนักเรียนในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะมีร่วมกัน ที่คาดว่าจะนำไปสู่ความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไปหรือข้อความคาดการณ์ได้

ผลจากการวิเคราะห์ผลงานเขียนของนักเรียนในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และผลการสังเกตของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ พบว่า นักเรียนมีพฤติกรรมด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ อยู่ 3 ลักษณะ ได้แก่ (1) นักเรียนให้เวลามากขึ้นในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ (2) นักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้มากขึ้น และ (3) นักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) นักเรียนให้เวลามากขึ้นในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ

ในช่วงแรกของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเห็นกวด” เมื่อนักเรียนได้รับใบกิจกรรมที่มีสถานการณ์ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนแสดงวิธีหาจำนวนของลายไม้สเห็นกวดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด ครูให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา และค้นหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ซึ่งใน 3 กรณีแรกนักเรียนสามารถหาคำตอบได้ในเวลารวดเร็ว (1-2 นาที) แต่ในกรณีที่ 4-5 ซึ่งมีความยากและซับซ้อนมากขึ้น ทำให้นักเรียนไม่มั่นใจในคำตอบ จึงมีการแลกเปลี่ยนคำตอบกับสมาชิกในกลุ่ม โดยไม่ได้แลกเปลี่ยนแนวคิดและรายละเอียดในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ซึ่งได้แก่ ธาดา รุ่งข้าวและไพบรียา ได้แลกเปลี่ยนเฉพาะคำตอบเช่นเดียวกันในกรณีที่ 4-5 ในขณะที่นครา ได้ใช้เวลาประมาณ 5 นาที ในการแลกเปลี่ยนแนวคิดและรายละเอียดในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบ

ต่อมาในช่วงที่ 2 คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาค่าจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” เมื่อนักเรียนได้รับใบกิจกรรมที่มีสถานการณ์ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนแสดงวิธีหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-7 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ครูให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา และค้นหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ นักเรียนได้ให้ความสำคัญในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ เพื่อนำไปสู่การอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล และสามารถหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก ในกรณีที่ 1-2 ได้ด้วยตนเองโดย

ไม่ได้แลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่ม แต่มีการแลกเปลี่ยนแนวคิดและรายละเอียดในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนของจำนวนพหุนามที่มี 5-7 หลัก ในกรณีที่ 3-5 โดยใช้เวลาประมาณ 6-8 นาที สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ได้แก่ นคราและธาดา ให้เวลาในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณี เฉพาะ ประมาณ 6 นาที ในขณะที่ รุ่งข้าวและไพบรียา ให้เวลามากกว่านคราและธาดา 2 นาที

ในช่วงท้ายของกิจกรรมการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” เมื่อนักเรียนได้รับใบกิจกรรมที่มีสถานการณ์ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนแสดงวิธีหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ครูให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหา และค้นหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่ยังคงคิดหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้เอง และให้เวลาในการแลกเปลี่ยนการเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น โดยใช้เวลาประมาณ 7-10 นาที สำหรับนักเรียนเป้าหมายซึ่ง ได้แก่ ธาดา ให้เวลาในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ประมาณ 8 นาที ในขณะที่นครา รุ่งข้าวและไพบรียา ให้เวลามากกว่า 2 นาที

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ได้ให้เวลาในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ มีแต่แลกเปลี่ยนเฉพาะคำตอบ สำหรับช่วงที่ 2 นักเรียนส่วนใหญ่เริ่มให้เวลามากขึ้นในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ โดยแลกเปลี่ยนแนวคิดในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีหาคำตอบมากกว่าแลกเปลี่ยนเฉพาะคำตอบ เนื่องจากเริ่มมองเห็นความสำคัญในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ที่นำไปสู่การอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งนักเรียนยังคงแสดงพฤติกรรมดังกล่าวจนสิ้นสุดการเรียนการสอน

(2) นักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้มากขึ้น

ในช่วงแรกของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน็กวูด” ซึ่งเป็นกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด เมื่อไม้สเน็กวูดมีการขยายครั้งที่ 1-5 ผลการวิเคราะห์พบว่า มีจำนวนนักเรียนเพียง 2 กลุ่มจากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 28.57 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้อง ครบถ้วน โดยเขียนอธิบายวิธีหาจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาว จำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีดำ และจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ธาดาและไพบรียาในแต่ละกรณีเฉพาะเขียนเพียงคำตอบ ไม่ได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีหาคำตอบ โดยเขียนเพียงจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาว จำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีดำ และ

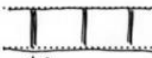
จำนวนของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกัน ส่วนนครา ได้เขียนรูปประกอบการอธิบายในแต่ละกรณีเฉพาะ ดังภาพประกอบ 8-10

3.1 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 1 สีขาว สี 1 ๖๖ สีดำ สี 0 ๖๖ รวม 1 ๖๖	3.2 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 2 สีขาว สี 2 ๖๖ สีดำ สี 1 ๖๖ รวม 3 ๖๖	
3.3 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 3 สีขาว สี 4 ๖๖ สีดำ สี 3 ๖๖ รวม 7 ๖๖	3.4 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 4 สีขาว สี 8 ๖๖ สีดำ สี 7 ๖๖ รวม 15 ๖๖	3.5 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 5 สีขาว สี 16 ๖๖ สีดำ สี 15 ๖๖ รวม ๓1 ๖๖

ภาพประกอบ 8 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของไพรยา

3.1 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 1 สีขาว 1 ๖๖ สีดำ 0 ๖๖ ทั้งหมด 1 ๖๖	3.2 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 2 สีขาว 2 ๖๖ สีดำ 1 ๖๖ ทั้งหมด 3 ๖๖	
3.3 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 3 สีขาว 4 ๖๖ สีดำ 3 ๖๖ ทั้งหมด 7 ๖๖	3.4 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 4 สีขาว 8 ๖๖ สีดำ 7 ๖๖ ทั้งหมด 15 ๖๖	3.5 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 5 สีขาว 16 ๖๖ สีดำ 15 ๖๖ ทั้งหมด 21 ๖๖

ภาพประกอบ 9 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” ของธาดา

3.1 ไม่สั่นกวาด ขยายครั้งที่ 1 เริ่มสั่นกวาดปลายไม้สั่นกวาดเป็นสีขาวยาว 1 งง  สีไม้สั่น, ขาว 1 งง รวมแล้ว 1 งง	3.3 ไม่สั่นกวาด ขยายครั้งที่ 3 จะเกิดสายไฟสีส้มยาวกลางสีขาวยาวอีก 1 งง โดยไม่ทับรอยสีส้ม  สีส้ม 3 งง สีขาวยาว 4 งง รวม 7 งง
3.2 ไม่สั่นกวาด ขยายครั้งที่ 2 จะเกิดสายไฟสีส้ม 1 งง แทรกกลางสายไฟสีขาวยาว  สีส้ม 1 งง, ขาว 2 งง รวมแล้ว 3 งง	3.5 ไม่สั่นกวาด ขยายครั้งที่ 5 จะเกิดสายไฟสีส้มยาวกลางสีขาวยาวอีก 1 งง โดยไม่ทับรอยสีส้ม  สีส้ม 15 งง สีขาวยาว 16 งง รวม 31 งง
3.4 ไม่สั่นกวาด ขยายครั้งที่ 4 จะเกิดสายไฟสีส้มยาวกลางสีขาวยาวอีก 1 งง โดยไม่ทับรอยสีส้ม  สีส้ม 7 งง สีขาวยาว 8 งง รวม 15 งง	

ภาพประกอบ 10 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 1
กิจกรรม “ลายไม้สั่นกวาด” ของนครา

ต่อมาในช่วงที่ 2 คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำถามของจำนวนพาลินโดรม” ซึ่งเป็นกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อจำนวนพาลินโดรมมี 3-7 หลัก ผลการวิเคราะห์ พบว่า มีจำนวนนักเรียน 5 กลุ่มจากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 71.43 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) สามารถเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-7 หลักได้ถูกต้อง ครบถ้วน ซึ่งในตอนแรกนักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจว่าจะต้องเขียนแสดงจำนวนพาลินโดรมทุกจำนวน เนื่องจากจำนวนพาลินโดรมมีจำนวนมากจึงทำให้นักเรียนไม่สามารถเขียนแสดงได้ทุกจำนวน ครูได้แนะนำให้เขียนสัญลักษณ์ “...” ทำให้นักเรียนสามารถเขียนแจกแจงจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก ได้อย่างเป็นระบบ แต่เมื่อต้องเขียนจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-7 หลักนักเรียนยังไม่สามารถเขียนแจกแจงอย่างเป็นระบบได้ ผู้วิจัยจึงได้ตั้งประเด็นคำถามเพื่อให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเลขโดดในแต่ละหลักกับจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก เมื่อนักเรียนบางคนเริ่มเห็นความสัมพันธ์ของจำนวนเลขโดดในแต่ละหลักกับจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่หาได้นั้น นักเรียนจึงเริ่มอธิบายให้สมาชิกในกลุ่มฟัง และเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-7 หลัก ได้โดยไม่ต้องเขียนแจกแจงเลย สำหรับนักเรียนเป้าหมาย นคราได้เขียนแจกแจงจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก ได้อย่างเป็นระบบเช่นกัน และยังพยายามที่จะเขียนแจกแจงจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-6 หลัก ให้เป็นระบบด้วย แต่การเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-6 หลักยังไม่ชัดเจน เมื่อให้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่มี 7 หลัก นคราสามารถทำได้โดยใช้กฎการคูณ ส่วนรุ่งข้าวได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำถามของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลักด้วยการเขียนแจกแจงอย่างเป็นระบบ โดยไม่ได้เขียนสรุป

จำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก และเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-7 หลัก ด้วยวิธีการคูณ พร้อมเขียนรูปประกอบเพื่อแสดงหลักที่มีเลขโดดเหมือนกัน ในขณะที่ไปรยาไม่ได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลักอย่างเป็นระบบ แต่ได้ใช้กฎการคูณเพื่อหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-4 หลัก และยังคงใช้กฎการคูณเพื่อหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 5-7 หลัก ส่วนชานดา ยังคงใช้กฎการคูณเพื่อหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มี 3-7 หลัก พร้อมเขียนรูปประกอบเพื่อแสดงหลักที่มีเลขโดดเหมือนกันและจำนวนเลขโดดที่เป็นไปได้ ดังภาพประกอบ 11-14

3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก

101, 111, 121, 131, ..., 191

202

⋮

909, 919, 929, 939, ..., 999

9 ตัว

10 ตัว

$$10 \times 9 = 90 \text{ ตัว}$$

3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก

1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, ..., 1991

⋮

9009, 9119, 9229, 9339, ..., 9889, 9999

9 ตัว

$$10 \times 9 = 90 \text{ ตัว}$$

10 ตัว

3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก

10001, 11011, ..., 19091

⋮

20002, 21012, ..., 29092

⋮

90009, 91019, ..., 99099

90 ตัว

10 ตัว

$$10 \times 90 = 900 \text{ ตัว}$$

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

100001, 110011, ..., 190091

⋮

200002, 210012, ..., 290092

⋮

900009, 910019, ..., 999999

90 ตัว

10 ตัว

$$10 \times 90 = 900 \text{ ตัว}$$

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก

หลักเลขล้าน 1-9 = 9

สิบล้าน 0-9 = 10

ร้อยหมื่น 0-9 = 10

พัน 0-9 = 10

$$= 9000 \text{ ตัว}$$

ภาพประกอบ 11 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำตอบของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา

3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก								
1001	2002	3003	4004	5005	6006	7007	8008	9009
1111	2112	3113	4114	5115	6116	7117	8118	9119
1221	2222	3223	4224	5225	6226	7227	8228	9229
1331	2332	3333	4334	5335	6336	7337	8338	9339
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1441	2442	3443	4444	5445	6446	7447	8448	9449

3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก								
101	202	303	404	505	606	707	808	909
111	212	313	414	515	616	717	818	919
121	222	323	424	525	626	727	828	929
131	232	333	434	535	636	737	838	939
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
141	242	343	444	545	646	747	848	949

3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก		
หลักแสน	1-9	= 9 จำนวน
หลักหมื่น	0-9	= 10 จำนวน
หลักพัน	0-9	= 10 จำนวน
หลักร้อย	0-9	= 10 จำนวน
หลักสิบ	0-9	= 10 จำนวน
หลักหน่วย	0-9	= 10 จำนวน
รวม		$9 \times 10 \times 10 = 900$ จำนวน

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก		
หลักแสน	1-9	= 9 จำนวน
หลักหมื่น	0-9	= 10 จำนวน
หลักพัน	0-9	= 10 จำนวน
หลักร้อย	0-9	= 10 จำนวน
หลักสิบ	0-9	= 10 จำนวน
หลักหน่วย	0-9	= 10 จำนวน
รวม		$9 \times 10 \times 10 = 900$ จำนวน

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก		
หลักแสน	1-9	= 9 จำนวน
หลักหมื่น	0-9	= 10 จำนวน
หลักพัน	0-9	= 10 จำนวน
หลักร้อย	0-9	= 10 จำนวน
หลักสิบ	0-9	= 10 จำนวน
หลักหน่วย	0-9	= 10 จำนวน
รวม		$9 \times 10^3 = 9,000$ จำนวน

ภาพประกอบ 12 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำตอบของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว

3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก
 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, ..., 999 $\rightarrow$ 90 ตัว

หลักหน่วย, หลักสิบ เขียนได้ 1-9 เลขโดด 9 จำนวน
 หลักสิบ, หลักร้อย เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน

$$= 9 \times 10$$

$$= 90 \text{ ตัว}$$

3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก
 1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991, 2002, 2112, 2222, 2332, 2442, ..., 9999 $\rightarrow$ 90 ตัว

หลักหน่วย, หลักพัน เขียนได้ 1-9 เลขโดด 9 จำนวน
 หลักสิบ, หลักร้อย เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน

$$= 9 \times 10$$

$$= 90 \text{ ตัว}$$

3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก

หลักหน่วย, หลักพัน เขียนได้ 1-9 เลขโดด 9 จำนวน
 หลักสิบ, หลักร้อย เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน
 หลักร้อย, หลักพัน เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน

$$= 9 \times 10 \times 10$$

$$= 900 \text{ ตัว}$$

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

หลักหน่วย, หลักแสน เขียนได้ 1-9 เลขโดด 9 จำนวน
 หลักสิบ, หลักร้อย เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน
 หลักร้อย, หลักพัน เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน

$$= 9 \times 10 \times 10$$

$$= 900 \text{ ตัว}$$

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก

หลักหน่วย, หลักพัน เขียนได้ 1-9 เลขโดด 9 จำนวน
 หลักสิบ, หลักร้อย เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน
 หลักร้อย, หลักพัน เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน
 หลักพัน เขียนได้ 0-9 เลขโดด 10 จำนวน

$$= 9 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= 9,000 \text{ ตัว}$$

ภาพประกอบ 13 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7
 กิจกรรม “การค้นหาคำตอบของจำนวนพาลินโดรม” ของไปรยา

3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก

จุด 1, 3 มี 9 จำนวน
 จุด 2 มี 10 จำนวน
 พาลินโดรม = $9 \times 10 = 90$ จำนวน

3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก

จุด 1, 4 มี 9 จำนวน
 จุด 2, 3 มี 10 จำนวน
 พาลินโดรม = $9 \times 10 = 90$ จำนวน

3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก

จุด 1, 5 มี 9 จำนวน
 จุด 2, 4 มี 10 จำนวน
 จุด 3 มี 10 จำนวน
 พาลินโดรม = $9 \times 10 \times 10 = 900$ จำนวน

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

จุด 1, 6 มี 9 จำนวน
 จุด 2, 5 มี 10 จำนวน
 จุด 3, 4 มี 10 จำนวน
 พาลินโดรม = $9 \times 10 \times 10 = 900$ จำนวน

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก

จุด 1, 7 มี 9 จำนวน
 จุด 2, 6 มี 10 จำนวน
 จุด 3, 5 มี 10 จำนวน
 จุด 4 มี 10 จำนวน
 พาลินโดรม = $9 \times 10 \times 10 \times 10$
 $= 9,000$ จำนวน

ภาพประกอบ 14 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 7
 กิจกรรม “การค้นหาคำตอบของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา

ในช่วงท้ายของกิจกรรมการเรียนรู้การสอน คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ซึ่งเป็นกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกสิ่งของมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นแถวทั้งหมด 5 กรณีที่แตกต่างกัน ผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนทุกกลุ่มสามารถเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องชัดเจน สำหรับนักเรียนเป้าหมาย นครา รุ่งข้าว และไปรยา สามารถเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องชัดเจนโดยใช้ความรู้เรื่องกฎการคูณ ส่วนธาดาเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องแต่ยังไม่ชัดเจน กล่าวคือเขียนเฉพาะจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ในแต่ละขั้นตอนของสถานการณ์ปัญหา โดยไม่ได้ระบุรายละเอียดว่าจำนวนที่เขียนนั้นเป็นจำนวนวิธีของขั้นตอนใด เมื่อครูเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบความชัดเจนของคำอธิบายหรือรายละเอียดที่เขียนในแต่ละกรณี นักเรียนได้ดำเนินการตรวจสอบจนสามารถเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องชัดเจน ดังภาพประกอบ 15-18

3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าคอตตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ขั้นตอนที่ 1 เลือกสีตัวเสื้อได้ 4 สี ขั้นตอนที่ 2 เลือกสีกระโปรงได้ 3 สี $4 \times 3 = 12$ วิธี	3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยืนเก็บตัวที่ประตูลำดับที่ 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี ขั้นตอนที่ 1 เลือกคนมาอยู่ประตู 1 ได้ 5 วิธี ขั้นตอนที่ 2 เลือกคนมาอยู่ประตู 2 ได้ 4 วิธี วิธีจัดได้ทั้งหมด $5 \times 4 = 20$ วิธี
3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันกี่วิธี ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 3 วิธี ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 4 วิธี ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 3 วิธี วิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกัน $3 \times 4 \times 3 = 36$ วิธี	3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้น ชั้นละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ขั้นตอนที่ 1 ชั้นที่ 1 ได้ 7 วิธี ขั้นตอนที่ 2 ชั้นที่ 2 ได้ 6 วิธี ขั้นตอนที่ 3 ชั้นที่ 3 ได้ 5 วิธี จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมด 360 วิธี
3.5 ชุมนุมคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้ ขั้นตอนที่ 1 เลือกประธานได้ 10 วิธี ขั้นตอนที่ 2 เลือกรองประธานได้ 9 วิธี ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขานุการได้ 8 วิธี ขั้นตอนที่ 4 เลือกเหรัญญิกได้ 7 วิธี จะเลือกคณะกรรมการทั้ง 4 คนได้ $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$	

ภาพประกอบ 15 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา

3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าคอตตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมด กี่วิธี สี: $P, R, G, B \rightarrow$ เสื้อ 4 กระโปรง 3 ขั้น 1: เสื้อ 1X1X1X1X1 = 4 วิธี ขั้น 2: กระโปรง 3 = 3 วิธี $\therefore 4 \times 3 = 12$ วิธี	3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยืนเก็บตัวที่ประตูหมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี ขั้นที่ 1: ขึ้นประตูหมายเลข 1 ได้ 5 วิธี ขั้นที่ 2: ขึ้นประตูหมายเลข 2 ได้ 4 วิธี $\therefore 5 \times 4 = 20$ วิธี
3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันกี่วิธี ขั้นที่ 1: ดึงเลขโดดได้ 5 วิธี ขั้นที่ 2: ดึงเลขโดดได้ 4 วิธี ขั้นที่ 3: ดึงเลขโดดได้ 3 วิธี $\therefore 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี	3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้น ชั้นละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ขั้นที่ 1: เลือกตู้ได้ 7 วิธี ขั้นที่ 2: เลือกตู้ได้ 6 วิธี ขั้นที่ 3: เลือกตู้ได้ 5 วิธี $\therefore 7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี
3.5 ชุมชนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีกวีที่เลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้ ขั้นที่ 1: เลือกประธาน 10 วิธี ขั้นที่ 2: เลือกรองประธาน 9 วิธี ขั้นที่ 3: เลือกเลขานุการ 8 วิธี ขั้นที่ 4: เลือกเหรัญญิก 7 วิธี $\therefore 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ วิธี	

ภาพประกอบ 16 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว

จากการสัมภาษณ์อย่างไม่เป็นทางการของรุ่งข้าว

- ครู : ข้อ 3.2 ต้องการให้เราทำอะไรคะ
- รุ่งข้าว : เลือกคนมา 2 คนค่ะ
- ครู : เลือกมาทำอะไรหาคะ
- รุ่งข้าว : เลือกมายืนเก็บตัวประตูหมายเลขที่ 1 และหมายเลขที่ 2
- ครู : ถ้าอย่างนั้นเราจะต้องมีขั้นตอนในการเลือก ที่ขั้นตอนละ อะไรบ้าง
- รุ่งข้าว : มี 2 ขั้นตอนค่ะ คือ ขั้นที่ 1 เลือกคน 1 คน จากทั้งหมด 5 คน มายืนประตูหมายเลขที่ 1 เลือกได้ 5 วิธี และขั้นที่ 2 เลือกคน 1 คน จาก 4 คนที่เหลือ เลือกได้ 4 วิธี มายืนประตูหมายเลขที่ 2

3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าทอดตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมด กี่วิธี ผู้ตอบข้อที่ 1. เลือกสีเสื้อ 4 สี เลือกสีกระโปรง 4 สี ผู้ตอบข้อที่ 2. เลือกสีเสื้อ 4 สี เลือกสีกระโปรง 4 สี ∴ $4 \times 4 = 16$ วิธี ข้ออื่น: ตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีต่างกันไม่ได้ 16 วิธี	3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยืนกับตัวที่ประตุนหมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี ผู้ตอบข้อที่ 1. เลือกคน 5 คน ผู้ตอบข้อที่ 2. เลือกคน 5 คน ผู้ตอบข้อที่ 3. เลือกคน 5 คน ผู้ตอบข้อที่ 4. เลือกคน 5 คน ∴ $5 \times 4 = 20$ วิธี
3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันกี่วิธี ผู้ตอบข้อที่ 1. เลือกเลขโดด 3 ตัว จาก 5 ตัว ผู้ตอบข้อที่ 2. เลือกเลขโดด 3 ตัว จาก 5 ตัว ผู้ตอบข้อที่ 3. เลือกเลขโดด 3 ตัว จาก 5 ตัว ∴ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี	3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้น ชั้นละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี ผู้ตอบข้อที่ 1. เลือกโมเดลรถ 7 คัน ผู้ตอบข้อที่ 2. เลือกโมเดลรถ 7 คัน ผู้ตอบข้อที่ 3. เลือกโมเดลรถ 7 คัน ∴ $7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี
3.5 ชุมชนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้ ผู้ตอบข้อที่ 1. เลือกประธาน 10 วิธี ผู้ตอบข้อที่ 2. เลือกรองประธาน 9 วิธี ผู้ตอบข้อที่ 3. เลือกเลขานุการ 8 วิธี ผู้ตอบข้อที่ 4. เลือกเหรัญญิก 7 วิธี ∴ $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ วิธี	

ภาพประกอบ 17 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา

3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าทอดตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมด กี่วิธี 4 3 เสื้อ กระโปรง $4 \times 3 = 12$ วิธี	3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยืนกับตัวที่ประตุนหมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี 5 4 ประตู 1 ประตู 2 $5 \times 4 = 20$ วิธี
3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันกี่วิธี 5 4 3 หลัก 3 หลัก 2 หลัก 1 $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี	3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้น ชั้นละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี 7 6 5 ชั้น 1 ชั้น 2 ชั้น 3 $7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี
3.5 ชุมชนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีวิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้ 10 9 8 7 ประธาน รองประธาน เลขานุการ เหรัญญิก $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ วิธี	

ภาพประกอบ 18 เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่เขียนคำตอบในแต่ละกรณีได้ถูกต้องแต่ยังไม่ชัดเจน โดยเขียนเฉพาะคำตอบ ไม่ได้เขียนอธิบายรายละเอียดหรือแสดงวิธีการหาคำตอบ จึงทำให้นักเรียนมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล อย่างไรก็ตามในช่วงที่ 2 เมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น และเห็นความสำคัญของการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะที่จะนำไปสู่การค้นหาคำความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีที่มีร่วมกัน ทำให้นักเรียนส่วนใหญ่เริ่มเขียนอธิบายรายละเอียดหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ถูกต้องมากขึ้น และยังคงแสดงพฤติกรรมดังกล่าวจนสิ้นสุดการเรียนการสอน

นอกจากนั้น ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ พบว่า

ปัญหา เรื่อง “ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ” มีนักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ โดยที่ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะแตกต่างกัน ได้ถูกต้อง จำนวน 10 คน (ร้อยละ 33.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียน เป้าหมาย คือ นครา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “การแข่งขันแบบทีมเหย้า-เยือน” มีนักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนการจัดการแข่งขันไทยลีกทั้งหมด เมื่อมีจำนวนทีมที่เข้าแข่งขันทั้งหมดในแต่ละกรณี ได้ถูกต้อง จำนวน 24 คน (ร้อยละ 80 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าวและไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง” มีนักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการทำทำความสะอาดหน้าต่างกระจกของคอนโดมิเนียม ที่มีจำนวนชั้นในแต่ละกรณีได้ถูกต้อง จำนวน 15 คน (ร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “พายเรือข้ามคลอง” มีนักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาจำนวนเที่ยวของการพายเรือไฟเบอร์กลาสข้ามคลอง เมื่อมีจำนวนนักท่องเที่ยวที่เป็นผู้ใหญ่ 5 คน และเด็ก 2 คน ได้ถูกต้อง จำนวน 4 คน (ร้อยละ 13.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ ธาดา รวมอยู่ด้วย

(3) นักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น

ในช่วงแรกของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเห็นกูด” หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะแล้ว นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของลายไม้สเห็นกูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดและจำนวนครั้งของการขยายไม้สเห็นกูด เพื่อนำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ผลการวิเคราะห์ พบว่า ไม่มีนักเรียนกลุ่มใดเลยที่เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องเลย เนื่องจากในการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ นักเรียนส่วนใหญ่เขียนเพียงคำตอบ

เท่านั้น แล้วนำคำตอบในแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบเป็นตาราง ไม่ได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล สำหรับนักเรียนเป้าหมายรู้จำ ชาติ และนครา ได้นำคำตอบในแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบเป็นตาราง โดยไม่ได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลเช่นกัน ดังภาพประกอบ 19-21 ในขณะที่ไปรยาไม่ได้นำคำตอบในแต่ละกรณีมาเปรียบเทียบเป็นตารางและไม่ได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล แต่เขียนเพียงเล็กน้อยว่าจำนวนงสีขาวมากกว่าจำนวนงสีดำอยู่ 1 วง ดังภาพประกอบ 22

สีขนตัว	ขา	สี
1	1	0
2	2	1
3	4	3
4	8	7
5	16	15

ภาพประกอบ 19 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้ สเน่กูด” ของรู้จำ

การขยายตัว	สี	ขา
1	0	1
2	1	2
3	3	4
4	7	8
5	15	16
⋮	⋮	⋮
n	$(2^{n-1})-1$	2^{n-1}

ภาพประกอบ 20 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้ สเน่กูด” ของชาติ

การขยายตัว	สี	ขา
1	0	1
2	1	2
3	3	4
4	7	8
5	15	16
⋮	⋮	⋮
n	(2^{n-1})	2^{n-1}

ภาพประกอบ 21 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้ สเน่กูด” ของนครา

$x = 92.86$ $y = 92.86$ $x + 1 = y$

ภาพประกอบ 22 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้ สเน่ห์กวด” ของไปรยา

ในช่วงที่ 2 ของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำนวณของจำนวนพาลินโดรม” หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะแล้ว นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรมและจำนวนของจำนวนพาลินโดรม เพื่อนำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนที่ได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ และสามารถเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้อง มีเพียง 3 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 42.86 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ซึ่งนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยใช้ตารางและความรู้เรื่องฟังก์ชันพหุนามที่ได้จากการทำกิจกรรมที่ 2 “แกะดำเจ้าเล่ห์” มาช่วยเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล นอกเหนือจากที่ครูมีอยู่ ในบรรดาทั้งสามกลุ่มข้างต้น มีเพียงกลุ่มของนักเรียนเป้าหมายนคราที่เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องและชัดเจน ในขณะที่ไปรยาและรุ่งข้าว เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องแต่เขียนหัวข้อของตารางไม่ชัดเจน ส่วนธาดาเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้เพียงบางส่วนและเขียนหัวข้อของตารางไม่ชัดเจน ดังภาพประกอบ 23-26

จำนวนพาลินโดรม	จำนวนพาลินโดรม
1	$9 \times 1 = 9$
2	$9 \times 1 = 9$
3	$9 \times 10 = 90$
4	$9 \times 10 = 90$
5	$9 \times 10 \times 10 = 900$
6	$9 \times 10 \times 10 = 900$
7	$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

ภาพประกอบ 23 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำนวณของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา

ก	จำนวนพหุนาม
3	$90 \text{ ตัว} = 9 \times 10 \rightarrow 9 \times 10^1$
4	$90 \text{ ตัว} = 9 \times 10 \rightarrow 9 \times 10^1$
5	$900 \text{ ตัว} = 9 \times 10^2 \rightarrow 9 \times 10^2$
6	$900 \text{ ตัว} = 9 \times 10^2 \rightarrow 9 \times 10^2$
7	$9,000 \text{ ตัว} = 9 \times 10^3 \rightarrow 9 \times 10^3$

ภาพประกอบ 24 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพหุนาม” ของไปรยา

จำนวนหลัก	จำนวนพหุนาม
1	$9 \times 10^{\frac{1}{2}-1} = 9$
2	$9 \times 10^{\frac{2}{2}-1} = 9$
3	$9 \times 10^{\frac{3}{2}-1} = 90$
4	$9 \times 10^{\frac{4}{2}-1} = 90$
5	$9 \times 10^{\frac{5}{2}-1} = 900$
6	$9 \times 10^{\frac{6}{2}-1} = 900$

ภาพประกอบ 25 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพหุนาม” ของรุ่งข้าว

จำนวนหลัก	จำนวนพหุนาม
1	$9 = 9 \times 1 = 9 \times 10^0 = 9 \times 10^{\frac{1}{2}-1}$
2	$9 = 9 \times 1 = 9 \times 10^0 = 9 \times 10^{\frac{2}{2}-1}$
3	$90 = 9 \times 10 = 9 \times 10^1 = 9 \times 10^{\frac{3}{2}-1}$
4	$90 = 9 \times 10 = 9 \times 10^1 = 9 \times 10^{\frac{4}{2}-1}$
5	$900 = 9 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^2 = 9 \times 10^{\frac{5}{2}-1}$
6	$900 = 9 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^2 = 9 \times 10^{\frac{6}{2}-1}$
7	$9000 = 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^3 = 9 \times 10^{\frac{7}{2}-1}$

ภาพประกอบ 26 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพหุนาม” ของนครา

จากการสัมภาษณ์อย่างไม่เป็นทางการของนครา

ครู : นคราแสดงความสัมพันธ์ได้หรือยังคะ

นครา : ได้แล้วครับ ผมคิดแบบนี้ถูกไหมครับ

ครู : ให้อธิบายให้ครูฟังหน่อย

- นศรา : คือว่าจำนวนของจำนวนพาลินโดรมมันจะมีจำนวนเท่ากันเป็นคู่ๆครับ เช่น
1 หลัก เท่ากับ 2 หลัก, 3 หลัก เท่ากับ 4 หลัก, 5 หลัก เท่ากับ 6 หลัก
ผมเลยเอา 2 มาหารหลัก แล้วใช้ฟังก์ชันเพดานปัดเศษขึ้นให้เป็นจำนวนเต็ม
แล้วลบออก 1 มันจะได้เท่ากับจำนวนของจำนวนพาลินโดรมในแต่ละหลัก
- ครู : ถ้าอย่างนั้นเขียนแสดงความสัมพันธ์นี้ออกมาให้ชัดเจนทุกกรณีเลยนะคะ
- นศรา : ครับ

ในช่วงท้าย คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น”

หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะแล้ว นักเรียนจะต้องเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และจำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน เพื่อนำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในกิจกรรมนี้นักเรียนได้เรียนรู้เรื่องแฟกทอเรียลเพื่อนำมาใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งขณะที่ครูเดินตรวจสอบความถูกต้องของแต่ละกลุ่มนั้น นักเรียนเป้าหมายรุ่งข้าวซึ่งกำลังจะเขียนหัวข้อในตารางได้เกิดความสับสน จึงได้ยกมือและบอกครูว่า ตนเกิดความสับสนเกี่ยวกับจำนวนที่ได้เขียนแสดงในแต่ละกรณีเฉพาะนั้น จำนวนใดเป็นจำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดหรือจำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน และจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ครูจึงแนะนำให้รุ่งข้าวปรึกษากับเพื่อนในกลุ่มก่อน หลังจากนั้นครูได้เดินผ่านกลุ่มของไปรยาพอดิ ไปรยาได้ขออธิบายความเข้าใจของตนถึงแต่ละจำนวนที่อยู่ในกรณีที่ 5 ให้ครูฟังว่า 10 คือ จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 4 คือ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน และจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ก็คือคำตอบที่กรณีนี้ต้องการ นอกจากนั้นไปรยาหยิบใบกิจกรรมของเพื่อนที่เขียนสรุปจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนในแต่ละกรณีเฉพาะโดยไม่เขียนแสดงแนวคิดของคำตอบ มาอธิบายเพิ่มเติมว่าถ้าเขียนแบบนี้จะทำให้มองว่าไม่ออกว่าจะใช้แฟกทอเรียลอย่างไร ซึ่งไปรยาเข้าใจถูกต้องครูจึงแนะนำให้ไปรยาแลกเปลี่ยนแนวคิดนี้กับสมาชิกในกลุ่ม ผลการวิเคาะห์พบว่า มีนักเรียน 4 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 57.14 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น ทั้งนี้ยังมีนักเรียนบางกลุ่มเขียนจำนวนที่ได้ในแต่ละกรณีเฉพาะกับหัวข้อในตารางไม่ตรงกัน สำหรับนักเรียนเป้าหมาย นศราเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องแต่ไม่ชัดเจน และยังเขียนหัวข้อของตารางช่องที่ 1 ไม่ถูกต้องซึ่งจะต้องเป็นจำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ส่วนธาดาเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้พอเข้าใจได้บางส่วนด้วยการเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของกรณีที่ 1 เพิ่ม ได้ตารางแสดงความสัมพันธ์ รุ่งข้าวเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจน แต่เขียนหัวข้อในตารางไม่ถูกต้อง และไปรยาเขียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจน ดังภาพประกอบ 27-30

จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนสิ่งของ	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน	ความสัมพันธ์
4	2	12	$4 \times 3 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4!}{2!}$
5	2	20	$5 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{5!}{3!}$
5	3	60	$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!}$
7	3	210	$7 \times 6 \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!}$
10	4	5,040	$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{6!}$

ภาพประกอบ 27 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา

ข้อ	จำนวนสิ่งของ	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน	ความสัมพันธ์
1	4	2	$4 \times 3 = 12$
2	5	2	$5 \times 4 = 20$
3	5	3	$5 \times 4 \times 3 = 60$
4	7	3	$7 \times 6 \times 5 = 210$
5	10	4	$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$
$\text{ความสัมพันธ์: } 4! = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$			

ภาพประกอบ 28 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา

จากการสัมภาษณ์อย่างไม่เป็นทางการของธาดา

ธาดา : ครูครับผมได้ความสัมพันธ์แล้วครับ

ครู : ความสัมพันธ์ที่ได้เป็นยังไงคะ

ธาดา : อย่างกรณีที่ 1 ได้จำนวนวิธีสับเปลี่ยนคือ 12 ผมก็จะเขียนว่า

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ก่อน แล้วใช้ $2! = 2 \times 1$ มาหารออกจาก $4!$ ก็จะได้ 12 ครับ

ครู : ทำไมต้องมี $4!$ และ $2!$

ธาดา : คือว่าต้องแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดซึ่งก็คือ 4 และจำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยนซึ่งก็คือ 2 แล้วให้ได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน

ครู : แล้วกรณีอื่นสามารถแสดงความสัมพันธ์ลักษณะนี้ได้ไหม

ธาดา : ได้ทุกกรณีครับ

จำนวนวิธีที่เลือก	จำนวนสิ่งของที่เลือก	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน
เลือก 4 คน	ทำการทัก 4 คน	เรียงสับเปลี่ยน
2	4	$\left(\frac{4!}{(4-4)!}\right) = 12$
2	5	$\left(\frac{5!}{(5-4)!}\right) = 20$
3	5	$\left(\frac{5!}{(5-3)!}\right) = 60$
3	7	$\left(\frac{7!}{(7-3)!}\right) = 210$
A	16	$\left(\frac{16!}{(16-4)!}\right) = 5040$

ภาพประกอบ 29 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว

จำนวนสิ่งของที่เลือก	จำนวนสิ่งของที่เลือก	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน
ทำการทัก 4 คน (ก.)	เรียงสับเปลี่ยน (ก.)	
4	2	$12 = \frac{4!}{(4-2)!}$
5	2	$20 = \frac{5!}{(5-2)!}$
5	3	$60 = \frac{5!}{(5-3)!}$
7	3	$210 = \frac{7!}{(7-3)!}$
16	4	$5040 = \frac{16!}{(16-4)!}$

ภาพประกอบ 30 การเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไพรยา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล เพียงแต่นำข้อมูลมาใส่ในตารางเท่านั้น ทั้งนี้เนื่องมาจากนักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้ไม่ถูกต้องหรือไม่ชัดเจน จึงส่งผลให้ไม่ได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล อย่างไรก็ตามในช่วงที่ 2 เมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น และเริ่มเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะได้มากขึ้น ทำให้นักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้นด้วยและยังคงแสดงพฤติกรรมดังกล่าวจนสิ้นสุดการเรียนการสอน

นอกจากนั้นผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ พบว่า

ปัญหา เรื่อง “ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ” มีนักเรียนสามารถเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจน จำนวน 14 คน (ร้อยละ 46.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา และรุ่งข้าว รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “การแข่งขันแบบทีมเหย้า-เยือน” มีนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจน จำนวน 19 คน (ร้อยละ 63.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา และรุ่งข้าว รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง” มีนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจน จำนวน 7 คน (ร้อยละ 23.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “พายเรือข้ามคลอง” มีนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจน จำนวน 16 คน (ร้อยละ 53.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา และธาดา รวมอยู่ด้วย

2.2 พฤติกรรมด้านการเขียนข้อความคาดการณ์

ในการวิเคราะห์พฤติกรรมด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยพิจารณาการเขียนอธิบายข้อสรุปที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป ซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง หรือที่เรียกว่า ข้อความคาดการณ์ขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผลจากการวิเคราะห์ผลงานเขียนของนักเรียนในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และผลการสังเกตของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ พบว่า นักเรียนมีพฤติกรรมด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ อยู่ 3 ลักษณะ ได้แก่ (1) นักเรียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ได้ถูกต้องครบถ้วนมากขึ้น (2) นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น และ (3) นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) นักเรียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วนมากขึ้น

ในช่วงแรกของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด” หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้ว นักเรียนจะต้องกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวน n ครั้งของการขยายไม้สเน่ห์กูด ดังนี้

กำหนดให้

L แทน จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด

และ n แทน จำนวนครั้งของการขยายของไม้สเน่ห์กูด

ผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและครบถ้วน มีนักเรียนเพียงหนึ่งกลุ่มที่กำหนดตัวแปรได้ถูกต้อง

เพียงบางส่วน สำหรับนักเรียนเป้าหมาย นครา ธาดาและรุ่งข้าว ไม่ได้กำหนดตัวแปรเลย ส่วนไปรยาเป็นกลุ่มที่กำหนดตัวแปรได้ถูกต้องเพียงบางส่วน โดยกำหนดให้ n แทน จำนวนครั้งที่ขยาย ดังภาพประกอบ 31-34

จำนวนจอสี่	$= (2^{n-1} - 1)$	$= 2^n(1) - 1$
สี่ขาว	$= 2^{n-1}$	$= 2^n - 1$
รวม	$= 2^{n-1} - 1 + 2^{n-1}$	
	$= 2^n \left(\frac{1}{2} \right) - 1 + 2^n \left(\frac{1}{2} \right)$	
	$= 2^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - 1$	

ภาพประกอบ 31 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1
กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กู๊ด” ของนครา

จำนวนจอสี่	$= (2^{n-1}) - 1$
จำนวนสี่ขาว	$= 2^{n-1}$

ภาพประกอบ 32 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1
กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กู๊ด” ของธาดา

สี่ขาว	สี่	2^{n-1}
จอสี่	สี่	$(2^{n-1}) - 1$

ภาพประกอบ 33 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1
กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กู๊ด” ของรุ่งข้าว

n แทนจำนวนครั้งที่ขยาย

ภาพประกอบ 34 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1
กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กู๊ด” ของไปรยา

ในช่วงที่ 2 ของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้ว นักเรียนจะต้องเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรมและจำนวนของจำนวนพาลินโดรม n หลัก ได้ถูกต้องครบถ้วน ดังนี้

กำหนดให้

P แทน จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

และ n แทน จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม

ผลการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 2 กลุ่มจากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 28.57 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่สามารถกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและครบถ้วน ส่วนนักเรียนจำนวน 5 กลุ่มที่เหลือนั้นกำหนดตัวแปรได้ถูกต้องเพียงบางส่วนเท่านั้น โดยเขียนความหมายของตัวแปรไม่ชัดเจน เช่น ในการกำหนดความหมายของตัวแปร n และ P นักเรียนเขียนแค่ “จำนวนหลัก” และ “จำนวนพาลินโดรม” แทนการเขียน “จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม” และ “จำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ตามลำดับ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ชาติาและรุ่งข้าวกำหนดตัวแปรได้ถูกต้องเพียงบางส่วน ในขณะที่นคราและไพบรียากำหนดตัวแปรได้ถูกต้องและครบถ้วน ดังภาพประกอบ 35-38

กำหนดให้	$X =$	จำนวนพาลินโดรมที่มีหลักเป็นคู่
	$Y =$	จำนวนพาลินโดรมที่มีหลักเป็นคี่
	$n =$	จำนวนหลักพาลินโดรม

ภาพประกอบ 35 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของชาติา

$X =$	จำนวนพาลินโดรม	$n =$	จำนวนหลัก
-------	----------------	-------	-----------

ภาพประกอบ 36 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว

n = จำนวนหลัก
x = จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

ภาพประกอบ 37 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา

n = จำนวนหลัก
x = จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

ภาพประกอบ 38 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไปรยา

ในช่วงท้ายของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” หลังจากที่นักเรียนได้เขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลแล้ว นักเรียนจะต้องเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของ r สิ่งที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน ได้ถูกต้องครบถ้วน ดังนี้

กำหนดให้

P แทน จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน

n แทน จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

และ r แทน จำนวนสิ่งของที่เลือกมาเรียงสับเปลี่ยน

ผลการวิเคราะห์พบว่า มี 3 กลุ่มจากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 42.86 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่สามารถกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและครบถ้วน ส่วนนักเรียนจำนวน 4 กลุ่มที่เหลือนั้นกำหนดตัวแปรได้ถูกต้องเพียงบางส่วนเท่านั้น โดยเขียนความหมายของตัวแปรไม่ชัดเจน เช่น ในการกำหนดความหมายของตัวแปร n , r และ P นักเรียนเขียนแค่ “สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด” “สิ่งของที่เลือกมาเรียงสับเปลี่ยน” และ “วิธีการเรียงสับเปลี่ยน” แทนการเขียน “จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด” “จำนวนสิ่งของที่เลือกมาเรียงสับเปลี่ยน” และ “จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน” ตามลำดับ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย รุ่งข้าวเขียนกำหนดตัวแปรไม่ถูกต้อง ในขณะที่ธาดาและไปรยาเขียนกำหนดตัวแปรถูกต้องเพียงบางส่วน และนคราเขียนกำหนดตัวแปรได้ถูกต้องครบถ้วนและชัดเจน ดังภาพประกอบ 39-42

ก	สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
ข	สิ่งที่นำมาใช้ร่วมกัน

ภาพประกอบ 39 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว

ก	สิ่งใดที่แตกต่างกันทั้งหมด
ข	จำนวนสิ่งใดบ้างที่นำมาใช้เรียงสับเปลี่ยน
ค	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน

ภาพประกอบ 40 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา

Y	คือ จำนวนสิ่งของทั้งหมดที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน
ก	คือ สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

ภาพประกอบ 41 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา

X	คือ จำนวนสิ่งของที่ใช้สับเปลี่ยน
ก	คือ จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด
ค	คือ จำนวนสิ่งของทั้งหมดที่ใช้สับเปลี่ยน

ภาพประกอบ 42 การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและครบถ้วน หรือกำหนดตัวแปรได้ถูกต้องเพียงบางส่วน อย่างไรก็ตามในช่วงที่ 2 เมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น ทำให้กำหนดความหมายของตัวแปรได้ถูกต้องและครบถ้วนมากขึ้นด้วย แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนยังคงเขียนความหมายของตัวแปรไม่ชัดเจนและยังคงแสดงพฤติกรรมดังกล่าวจนสิ้นสุดการเรียนการสอน

นอกจากนี้ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ พบว่า

ปัญหา เรื่อง “ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ” มีนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วน จำนวน 24 คน (ร้อยละ 80 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “การแข่งขันแบบทีมเหย้า-เยือน” มีนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วน จำนวน 25 คน (ร้อยละ 83.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง” มีนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วน จำนวน 23 คน (ร้อยละ 76.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “พายเรือข้ามคลอง” มีนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วน จำนวน 17 คน (ร้อยละ 56.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

(2) นักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น

ในช่วงแรกของกิจกรรมการเรียนรู้การสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน็กกู๊ด” เมื่อนักเรียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้แล้ว นักเรียนจะต้องเขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวงของลายไม้สเน็กกู๊ดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และจำนวน n ครั้งของการขยายไม้ ดังนี้

เมื่อกำหนดให้ L แทน จำนวนวงของลายไม้สเน็กกู๊ดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด

และ n แทน จำนวนครั้งของการขยายของไม้สเน็กกู๊ด

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวงสีขาวและวงสีดำรวมกัน

คือ $L = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)$ วง หรือ $L = 2^n - 1$ วง

ผลการวิเคราะห์ พบว่า มีนักเรียนเพียง 1 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 14.29 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจน ส่วนนักเรียนจำนวน 6 กลุ่มที่เหลือนั้นไม่ได้เขียนข้อความคาดการณ์เลยหรือเขียนข้อความคาดการณ์ที่ไม่ถูกต้องหรือถูกต้องแต่ไม่ชัดเจน เขียนเพียงรูปทั่วไปของจำนวนวงของลายไม้สเน็กกู๊ดที่มีสีขาว (2^{n-1}) หรือจำนวนวงของลายไม้สเน็กกู๊ดที่มีสีดำ ($2^{n-1} - 1$) โดยไม่นำรูปทั่วไปของทั้งสองข้อมูลมารวมกันแล้ว

เขียนข้อความคาดการณ์ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ธาดาและรุ่งข้าว เขียนเพียงรูปทั่วไปของ
จำนวนของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาว และรูปทั่วไปของจำนวนของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีดำ ส่วน
ไปรยาเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องแต่ไม่ชัดเจน ในขณะที่นคราเขียนข้อความคาดการณ์ได้
ถูกต้องและชัดเจน ดังภาพประกอบ 43-46

$$\begin{aligned} \text{จำนวนสีดำ} &= (2^{n-1}) - 1 \\ \text{จำนวนสีขาว} &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 43 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด”
ของธาดา

$$\begin{aligned} \text{สีขาว} & \text{คือ } 2^{n-1} \\ \text{สีดำ} & \text{คือ } (2^{n-1}) - 1 \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 44 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด”
ของรุ่งข้าว

$$\begin{aligned} \text{ก. เตาณจำนวนสีของลายไม้สเน่ห์กูด} \\ 2^n - 1 = \text{จำนวนวงสีทั้งหมด} \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 45 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด”
ของไปรยา

$$\begin{aligned} \text{จำนวนสีดำ} &= (2^{n-1} - 1) &= 2^n(1) - 1 \\ \text{สีขาว} &= 2^{n-1} &= \boxed{2^n - 1} \\ \text{รวม} &= 2^{n-1} - 1 + 2^n \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2} \right) - 1 + 2^n \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= 2^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - 1 \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 46 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สเน่ห์กูด”
ของนครา

ในช่วงที่ 2 ของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” เมื่อนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้แล้วนักเรียนจะต้องเขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรมและจำนวนของจำนวนพาลินโดรม n หลัก ดังนี้

เมื่อกำหนดให้ P แทน จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

และ n แทน จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรม

คือ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ $P = 9(10)^{\frac{n}{2}-1}$ หรือ $P = 9(10)^{\frac{n-2}{2}}$ จำนวน

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ $P = 9(10)^{\frac{n-1}{2}}$ จำนวน

ผลการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 5 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 71.43 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจน โดยนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ และในกิจกรรมนี้นักเรียนยังได้สร้างข้อความคาดการณ์ใหม่ด้วยตนเองที่แตกต่างจากข้อความคาดการณ์ของผู้วิจัย โดยใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันพหุนามที่ได้จากการทำกิจกรรมที่ 2 “แกะดำเจ้าเล่ห์” ซึ่งได้แก่ข้อความคาดการณ์ที่ว่า $P = 9(10)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}$ และ

$P = 9(10)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}$ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ไปรยาเขียนข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง ส่วนนศราธาดาและรุ่งข้าว เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจน ดังภาพประกอบ 47-50

$n =$ จำนวนหลัก
 $x =$ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม
 $\boxed{\frac{n}{2} = x \text{ แล้ว } 9 \times 10^{x-1}}$

ภาพประกอบ 47 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของไปรยา

$n =$ จำนวนหลัก
 $x =$ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม
 $\boxed{x = 9 \times 10^{\frac{n}{2}-1}}$

ภาพประกอบ 48 การเขียนข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนศรา

$$\begin{aligned}
 \text{กำหนดให้ } X &= \text{จำนวนพาลินโดรมที่มีหลักเป็นคู่} \\
 Y &= \text{จำนวนพาลินโดรมที่มีหลักเป็นคี่} \\
 n &= \text{จำนวนพาลินโดรม} \\
 \therefore 1) X &= 9 \cdot 10^{\frac{n-2}{2}} \\
 2) Y &= 9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}}
 \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 49 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาค่าของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา

$$\begin{aligned}
 X &= \text{จำนวนพาลินโดรม} \quad n = \text{จำนวนหลัก} \\
 X &= 9 \times 10^{\frac{n-2}{2}}
 \end{aligned}$$

ภาพประกอบ 50 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาค่าของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว

ในช่วงท้ายของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” เมื่อนักเรียนเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้แล้ว นักเรียนจะต้องเขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนจำนวนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด และจำนวนสิ่งของ r สิ่งที่น่ามาเรียงสับเปลี่ยน ได้ถูกต้องชัดเจน ดังนี้

เมื่อกำหนดให้ P แทน จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน

n แทน จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

และ r แทน จำนวนสิ่งของที่เลือกมาเรียงสับเปลี่ยน

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่ง คือ $\frac{n!}{(n-1)!}$ วิธี

จากการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 6 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 85.71 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจน ทั้งนี้เนื่องมาจากการที่นักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น สำหรับนักเรียนเป้าหมาย รุ่งข้าว เขียนข้อความคาดการณ์ถูกต้องแต่ไม่ชัดเจน โดยไม่ได้ระบุว่า $\frac{n!}{(n-1)!}$ เป็น

ข้อความคาดการณ์ของอะไร ส่วนนครา ธาดา และไปรยา เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องและชัดเจน ดังภาพประกอบ 51-54

n คือ สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
 r คือ สิ่งที่มาเรียงกันเปลี่ยน

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

ภาพประกอบ 51 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว

x คือ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน
 n คือ จำนวนสิ่งต่าง ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด
 r คือ จำนวนสิ่งต่าง ๆ ที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน

$$x = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ภาพประกอบ 52 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา

$$X = \frac{n!}{(n-r)!}$$

 y คือ จำนวนสิ่งต่าง ๆ ที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน
 n คือ สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด

ภาพประกอบ 53 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของธาดา

n = สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด
 r = จำนวน สิ่งต่าง ๆ ที่นำมา เรียง สับเปลี่ยน
 x = จำนวน วิธีหา ร้อย ร้อย ร้อย ร้อย

$$\frac{n!}{(n-r)!} = x$$

ภาพประกอบ 54 การเขียนข้อความคาดการณ์ในคาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไปรยา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่เขียนข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง เนื่องจากนักเรียนเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลไม่ถูกต้อง หรือถูกต้องแต่ไม่ชัดเจน อย่างไรก็ตามในช่วงที่ 2 เมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น นักเรียนส่วนใหญ่เริ่มเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจนมากขึ้น จึงทำให้เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้นด้วย และยังคงแสดงพฤติกรรมดังกล่าวจนสิ้นสุดการเรียนการสอน

นอกจากนี้ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ พบว่า ปัญหา เรื่อง “ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ” มีนักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจน จำนวน 24 คน (ร้อยละ 80 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “การแข่งขันแบบทีมเหย้า-เยือน” มีนักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจน จำนวน 24 คน (ร้อยละ 80 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง” มีนักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจน จำนวน 10 คน (ร้อยละ 33.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา และธาดา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “พายเรือข้ามคลอง” มีนักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจน จำนวน 23 คน (ร้อยละ 76.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา และไปรยา รวมอยู่ด้วย

(3) นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น

ในช่วงแรกของกิจกรรมการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้สั่นไหว” เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวงของลายไม้สั่นไหวที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวม กันทั้งหมดแล้ว ก่อนที่จะนำข้อความคาดการณ์ไปใช้แก้ปัญหาตามที่สถานการณ์ต้องการนั้น นักเรียนจะต้องแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์นี้โดยการแทนค่าในแต่ละกรณีเฉพาะ และจะต้องแสดงการตรวจสอบอย่างน้อย 3 กรณี ในกรณีที่ $n=1-5$ เมื่อ n แทน จำนวนการขยายของไม้สั่นไหว

จากการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 2 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 28.57 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ที่แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ทั้งนี้อาจเนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจว่ามีกรณีใดบ้างที่การตรวจสอบได้ จึงส่งผลให้นักเรียนนำกรณีที่ $n > 5$ มาตรวจสอบ สำหรับนักเรียนเป้าหมาย รุ่งข้าวได้แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้องทั้ง 3 กรณี โดยแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์กรณีที่ $n > 5$ และข้อความคาดการณ์ที่ได้มานั้นยังไม่ถูกต้อง ส่วนธาดาแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก

ข้อความคาดการณ์ที่ได้มานั้นไม่ถูกต้องเช่นกัน ในขณะที่นครและปรียาแสดงการตรวจสอบ
ข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องทั้ง 3 กรณี ดังภาพประกอบ 55-58

แทน n	$n=9, 10, 12$				
พจน์	ค่า	รวม 10	ค่า	รวม 12	ค่า
$= 2^{n-1}$	$= (2^{n-1}) - 1$	$= 2^{n-1}$	$= (2^{n-1}) - 1$	$= 2^{n-1}$	$= (2^{n-1}) - 1$
$= 2^{9-1}$	$= (2^{9-1}) - 1$	$= 2^{10-1}$	$= (2^{10-1}) - 1$	$= 2^{11}$	$= 2^{11} - 1$
$= 2^8$	$= 2^8 - 1$	$= 2^9$	$= 2^9 - 1$	$= 2048$	$= 2047$
$= 256$	$= 255$	$= 512$	$= 511$		

ภาพประกอบ 55 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้
สนั้กวด” ของรุ่งข้าว

ครั้งที่	พจน์	ค่า
1) 3	2^{3-1}	$(2^{3-1}) - 1$
	4	3
2) 5	2^{5-1}	$(2^{5-1}) - 1$
	8	7
3) 7	2^{7-1}	$(2^{7-1}) - 1$
	16	15

ภาพประกอบ 56 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้
สนั้กวด” ของธาดา

การขยายครั้งที่ 1	$= 2^1 - 1 = 2^1 - 1 = 1$ วง
การขยายครั้งที่ 2	$= 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ วง
การขยายครั้งที่ 3	$= 2^3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$ วง
การขยายครั้งที่ 4	$= 2^4 - 1 = 2^4 - 1 = 15$ วง
การขยายครั้งที่ 5	$= 2^5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$ วง

ภาพประกอบ 57 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้
สนั้กวด” ของนครา

กรณี 1	การขยายกรณี 2	แทน 2	อยู่ในสภาวะ
$2^n - 1 =$	จำนวนจริง		
$2^n - 1 = 3$			
กรณี 2	การขยายกรณี 3	แทน 3	อยู่ในสภาวะ
$2^n - 1 =$	จำนวนจริง		
$2^n - 1 = 7$			
กรณี 3	การขยายกรณี 4	แทน 4	อยู่ในสภาวะ
$2^n - 1 =$	จำนวนจริง		
$2^n - 1 = 15$			

ภาพประกอบ 58 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 1 กิจกรรม “ลายไม้ สนิ่กวูด” ของไพบรยา

ในช่วงที่ 2 ของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำนวณของจำนวนพาลินโดรม” เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรมแล้ว ก่อนที่จะนำข้อความคาดการณ์ไปใช้แก้ปัญหาตามที่สถานการณ์ต้องการนั้น นักเรียนจะต้องแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์นี้โดยการแทนค่าในแต่ละกรณีเฉพาะ และจะต้องแสดงการตรวจสอบอย่างน้อย 3 กรณี ในกรณีที่ $n=1-7$ เมื่อ n แทน จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรมจากการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 5 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 71.43 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด) ที่แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากนักเรียนเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้น และเข้าใจถึงกรณีที่จะนำมาแสดงการตรวจสอบ สำหรับนักเรียนเป้าหมายไพบรยา แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ไม่ถูกต้อง 2 กรณี โดยแสดงการตรวจสอบกรณีที่ $n > 7$ ส่วนนครา ธาดา และรุ่งข้าว แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ถูกต้องทั้ง 3 กรณี ดังภาพประกอบ 59-62

1. จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก สูตร $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{x-1}$
; $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{\frac{5}{2}-1} = a \times 10^{2-1} = a00$
2. จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก สูตร $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{x-1}$
; $\left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{\frac{6}{2}-1} = a \times 10^{3-1} = a,000$
3. จำนวนพาลินโดรม 10 หลัก สูตร $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{x-1}$
; $\left\lceil \frac{10}{2} \right\rceil = x$ บอกร $a \times 10^{\frac{10}{2}-1} = a \times 10^{5-1} = a0000$

ภาพประกอบ 59 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7 กิจกรรม “การค้นหาคำนวณของจำนวนพาลินโดรม” ของไพบรยา

(3 คะแนน)	
1) 2 หลัก $= 9 \times 10^{\left[\frac{2}{2}\right]-1}$	3) 4 หลัก $= 9 \times 10^{\left[\frac{4}{2}\right]-1}$
$= 9 \times 10^{1-1}$	$= 9 \times 10^{2-1}$
$= 9 \times 10^0$	$= 9 \times 10$
$= 9$ ตัว	$= 90$ ตัว
2) 3 หลัก $= 9 \times 10^{\left[\frac{3}{2}\right]-1}$	
$= 9 \times 10^{2-1}$	
$= 9 \times 10$	
$= 90$ ตัว	

ภาพประกอบ 60 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของนครา

3 หลัก ; $Y = 9 \times 10^{\frac{3-1}{2}} = 9 \times 10^1 = 90$ จำนวน
4 หลัก ; $X = 9 \times 10^{\frac{4-2}{2}} = 9 \times 10^1 = 90$ จำนวน
5 หลัก ; $Y = 9 \times 10^{\frac{5-1}{2}} = 9 \times 10^2 = 900$ จำนวน

ภาพประกอบ 61 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของธาดา

① 1 หลัก $x = 9 \times 10^{\left[\frac{1}{2}\right]-1}$ $= 9$	② 3 หลัก $x = 9 \times 10^{\left[\frac{3}{2}\right]-1}$ $= 90$
③ 4 หลัก $x = 9 \times 10^{\left[\frac{4}{2}\right]-1}$ $= 9 \times 10$ $= 90$	

ภาพประกอบ 62 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 7
กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ของรุ่งข้าว

ในช่วงท้ายของการเรียนการสอน คาบเรียนที่ 11 กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่งแล้ว ก่อนที่จะนำข้อความคาดการณ์ไปใช้แก้ปัญหาตามที่สถานการณ์ต้องการนั้น นักเรียนจะต้องแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์นี้ โดยการแทนค่าในแต่ละกรณีเฉพาะ และจะต้องแสดงการตรวจสอบอย่างน้อย 3 กรณี จากการวิเคราะห์พบว่า มีนักเรียนจำนวน 6 กลุ่ม จากทั้งหมด 7 กลุ่ม (คิดเป็นร้อยละ 85.71 ของจำนวนกลุ่มทั้งหมด)แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง สำหรับนักเรียนเป้าหมาย ชาดา รุ่งข้าว และไปรยา แสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ถูกต้องทั้ง 3 กรณี ในขณะที่นครามีการกำหนดหัวข้อของตารางช่องที่ 3 ไม่ตรงกับข้อมูล ดังภาพประกอบ 63-66

กรณีที่	จำนวนสิ่งของ สับเปลี่ยน (n)	จำนวนสิ่งของ สับเปลี่ยน (r)	คำนวณ
1	2	4	$x = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$
2	2	5	$x = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$
3	3	5	$x = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$

ภาพประกอบ 63 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของนครา

1) $n=4, r=2$	$x = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ ร้อย
2) $n=7, r=3$	$x = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ ร้อย
3) $n=10, r=4$	$x = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$ ร้อย

ภาพประกอบ 64 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของชาดา

กรณี 1 $n=4$ $r=2$	กรณี 2 $n=5$ $r=2$	กรณี 3 $n=5$ $r=3$
$\frac{(n!)}{(n-r)!} = \frac{(4!)}{(4-2)!}$	$\frac{(n!)}{(n-r)!} = \frac{(5!)}{(5-2)!}$	$\frac{(n!)}{(n-r)!} = \frac{(5!)}{(5-3)!}$
$= 12$	$= 20$	$= 60$

ภาพประกอบ 65 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของรุ่งข้าว

กรณีที่ 1: $n = 4, r = 2 \rightarrow \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ วิธี
กรณีที่ 2: $n = 5, r = 2 \rightarrow \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ วิธี
กรณีที่ 3: $n = 10, r = 4 \rightarrow \frac{10!}{(10-4)!} = 5,040$ วิธี

ภาพประกอบ 66 ตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ ในคาบเรียนที่ 11
กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ของไพบรยา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ในช่วงแรกของการเรียนการสอน นักเรียนส่วนใหญ่ไม่เข้าใจการตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ว่าจะต้องตรวจสอบกรณีใดบ้าง จึงส่งผลให้นักเรียนตรวจสอบในกรณีเฉพาะที่นอกเหนือจากกรณีเฉพาะที่นักเรียนได้แสดงวิธีการหาคำตอบไว้แล้ว อย่างไรก็ตามในช่วงที่ 2 เมื่อนักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น นักเรียนสามารถตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ โดยนำข้อความคาดการณ์ไปตรวจสอบในกรณีเฉพาะที่นักเรียนได้แสดงวิธีการหาคำตอบไว้ จึงทำให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น และในช่วงท้ายของการเรียนการสอนเมื่อนักเรียนส่วนใหญ่เขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น ประกอบกับเข้าใจการตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ จึงทำให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง

นอกจากนี้ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยเป็นข้อสอบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ พบว่า ปัญหา เรื่อง “ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ” มีนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ครบถ้วน จำนวน 24 คน (ร้อยละ 80 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไพบรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “การแข่งขันแบบทีมเหย้า-เยือน” มีนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ครบถ้วน จำนวน 25 คน (ร้อยละ 83.33 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง” มีนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ครบถ้วน จำนวน 12 คน (ร้อยละ 40 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา และธาดา รวมอยู่ด้วย

ปัญหา เรื่อง “พายเรือข้ามคลอง” มีนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้อง ครบถ้วน จำนวน 17 คน (ร้อยละ 56.67 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด) ซึ่งในบรรดานักเรียนเหล่านั้นมีนักเรียนเป้าหมาย คือ นครา ธาดา รุ่งข้าว และไปรยา รวมอยู่ด้วย

ดังที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์มากขึ้นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ส่งผลให้นักเรียนเห็นความสำคัญในการเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ โดยการเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีมีร่วมกันแล้วนำไปสู่การเขียนกำหนดตัวแปรที่นำไปสู่การเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องครบถ้วนและตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น ตลอดจนทำให้นักเรียนคิดหาผลเฉลยของสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้อง ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐานและวิธีดำเนินการวิจัยโดยสังเขป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. เพื่อศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
3. เพื่อศึกษาพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

สมมติฐานในการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กำหนดประชากร และเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย โดยที่กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็น นักเรียนห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย อำเภอโพธิ์พิสัย จังหวัดหนองคาย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียนจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ระดับ 3 ขึ้นไป นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างเหล่านี้ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง (Purposive sampling) ในกลุ่มตัวอย่างผู้วิจัยแบ่งนักเรียนออกเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำโดยพิจารณาจากคะแนนดิบของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 หลังจากนั้นเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง 2 คน และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ 1 คน โดยผู้วิจัยได้สังเกตนักเรียนก่อนทดลองและสัมภาษณ์ครูที่สอนคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ 1 ที่มีความกล้าแสดงออก สามารถสื่อสารและนำเสนอแนวคิดของตนเองได้ เพื่อเป็นนักเรียนเป้าหมาย ในการศึกษาเชิงลึกเกี่ยวกับพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

2. กำหนดกรอบแนวคิดของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 12 แผน แต่ละแผนใช้เวลา 90 นาที โดยมีจุดมุ่งหมายหลักคือ เพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ ในกิจกรรมการเรียนรู้การสอนนี้ นักเรียนจะได้เรียนรู้แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ซึ่งแต่ละข้อนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหา ค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณี เขียนข้อความคาดการณ์ และสรุปคำตอบของปัญหา โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ไม่เกินความรู้ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นอกจากนี้นักเรียนยังมีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือตลอดจนมีส่วนร่วมในการอภิปรายผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ (1) แผนการจัดการเรียนรู้จำนวน 12 แผน ซึ่งแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นแบบทดสอบอัตนัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้ตรวจสอบความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และ (3) แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นแบบบันทึกที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้บันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

หลังจากสร้างเครื่องมือเสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยนำเครื่องมือเสนอต่อกรรมการควบคุมปริญญาโทเพื่อตรวจสอบก่อนที่จะเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ ความยากง่ายของปัญหา และความชัดเจนของข้อคำถามแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญจากนั้นนำเครื่องมือไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องจำนวน 30 คน ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย แล้วปรับปรุงแก้ไขเครื่องมืออีกครั้งก่อนนำไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

4. เก็บรวบรวมข้อมูล

แบบแผนการวิจัยที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ แบบกลุ่มเดียวมีการทดสอบหลังการทดลอง (One-Group Posttest-Only Design) ผู้วิจัยใช้เวลาในการดำเนินการทดลองทั้งหมด 14 คาบเรียน คาบเรียน ละ 90 นาที โดยแบ่งเป็นเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์

ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 12 คาบเรียน และเวลาในการทดสอบ หลังเรียน 2 คาบเรียน ผู้วิจัยดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 โดยใช้เวลาใน เวลาเรียนปกติ ในแต่ละคาบเรียนผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นผู้สอนและผู้สังเกตการณ์ โดยมีครูกลุ่มสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนชุมพลโพธิ์พิสัย จำนวน 2 คน ทำหน้าที่เป็นผู้ช่วยสังเกตการณ์ บันทึกพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนเป้าหมายขณะลงมือแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ โดยใช้แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และใช้กล้องวิดีโอช่วยในการ บันทึกรายละเอียดของพฤติกรรม

เมื่อสิ้นสุดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อตรวจสอบความสามารถในการให้ เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัด ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

5. วิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ผู้วิจัยนำคะแนนจากใบกิจกรรมในชั้นเรียนและ แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน แล้วหาจำนวนนักเรียนที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม จากนั้นผู้วิจัยทดสอบสมมติฐานการวิจัยที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบ อุปนัย มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม

สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยพิจารณาผลงานเขียนของนักเรียน ในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และผลการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนเป้าหมายเกี่ยวกับการให้ เหตุผลแบบอุปนัย ขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์โดยมีแบบ สังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และกล้องวิดีโอ ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของ พฤติกรรมเหล่านั้น แล้ววิเคราะห์พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ในด้านการค้นหา ความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ ขณะลงมือแก้ปัญหาที่กำหนดพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างและ นักเรียนเป้าหมายจำนวน 4 คน

สรุปและอภิปรายผลการวิจัย

1. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของจินดิษฐ์ ลออปักษิณ (2550: 83-88) ที่ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ซึ่งมีข้อค้นพบด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสอบผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และสอดคล้องกับผลการวิจัยของทรงชัย อักษรจิต (2546: 36-39) ที่ได้สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูป โดยใช้การเรียนร่วมมือ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้ รวมทั้งสามารถเขียนรูปทั่วไปของแบบรูปที่ไม่ซับซ้อนเกินไป และนำความรู้เรื่องแบบรูปไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ ซึ่งผลการวิจัยพบว่านักเรียนสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องแบบรูปมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ทั้งนี้ อาจเนื่องมาจากกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ได้สร้างตามแนวคิดของกิจกรรมการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นการเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย เพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่นักเรียนได้เรียนรู้ทั้งกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ ได้ฝึกฝนและมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ได้มีส่วนร่วมในการเรียนแบบร่วมมือ รับผิดชอบในการแก้ปัญหาของกลุ่ม ตลอดจนได้มีส่วนร่วมในการอภิปรายและนำเสนอผลผลการแก้ปัญหาทั้งของตนเองและของกลุ่มในชั้นเรียน

2. พฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

จากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนในกิจกรรมการเรียนการสอน ผลการสังเกตของผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง พบว่า เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นักเรียนสามารถพัฒนาความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่น่าไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และการเขียนข้อความคาดการณ์ขณะลงมือแก้ปัญหาที่กำหนด ที่นำไปสู่การค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของจินดิษฐ์ ลออปักษิณ (2550: 83-88) ซึ่งมีข้อค้นพบด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียน

ทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และสอดคล้องกับผลการวิจัยของเวชฤทธิ์ อังกะภักทรขจร (2551: 191) ซึ่งผลการทดลองด้านทักษะการให้เหตุผล จากการสังเกตพฤติกรรม และการสัมภาษณ์ พบว่า นักเรียนมีพัฒนาการด้านการอธิบายการหาความสัมพันธ์ การวิเคราะห์ และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลมากที่สุด

2.1 ด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความ

การคาดการณ์

ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผลการสังเกตของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ พบว่า เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลแบบอุปนัยมากขึ้น ทำให้นักเรียนเริ่มให้ความสำคัญในการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ มากขึ้นโดยนักเรียนใช้เวลามากขึ้นในการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่มก่อนลงมือเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะ จึงส่งผลให้นักเรียนเขียนอธิบายหรือแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละกรณีเฉพาะและเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องมากขึ้น

2.2 ด้านการเขียนข้อความคาดการณ์

ผลจากการวิเคราะห์งานเขียนของนักเรียนในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ผลการสังเกตของผู้วิจัยและผู้ช่วยสังเกตการณ์ พบว่า เมื่อนักเรียนมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลแบบอุปนัยมากขึ้น ทำให้นักเรียนเริ่มเขียนความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ชัดเจนมากขึ้น จึงส่งผลให้กำหนดความหมายของตัวแปรได้ถูกต้องและครบถ้วนมากขึ้นทั้งยังเขียนข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องชัดเจนมากขึ้นด้วย และตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ได้ถูกต้องมากขึ้น

ดังนั้นการเรียนรู้และมีประสบการณ์ในการให้เหตุผลแบบอุปนัยจะช่วยให้ นักเรียนค้นหาคำตอบได้ถูกต้อง ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยสอดคล้องกับอาลิซ และชิเรล (Alice; & Shirel. 1999: 125-126) กล่าวในทางคณิตศาสตร์ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ และมีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการเรียนการสอน

เนื่องจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 กำหนดให้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นหนึ่งในห้าทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน และการให้เหตุผลแบบอุปนัยก็เป็นรูปแบบหนึ่งของการให้เหตุผล ดังนั้นเพื่อเสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ครูอาจนำกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปจัดกระบวนการเรียนรู้ให้

นักเรียนที่มีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา หรือนำไปบูรณาการกับการเรียนการสอนปกติ สำหรับสถานการณ์จริงที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรเป็นสถานการณ์จริงที่ใกล้ตัวกับนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเห็นคุณค่าและความสำคัญของคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ตลอดจนครูควรเสริมสร้างความสามารถในด้านการค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และด้านการเขียนข้อความคาดการณ์ ที่นำไปสู่การค้นหาคำตอบที่ถูกต้องพร้อมทั้งคำอธิบายที่ชัดเจน

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 การวิจัยครั้งต่อไป อาจปรับเปลี่ยนตัวแปรที่ศึกษา เช่น ขอบเขตเนื้อหาที่สูงกว่าในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 สำหรับเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรเพิ่มเป็น 15-20 คาบเรียน คาบเรียนละ 90-120 นาที เพื่อจะได้ศึกษาพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัยบางอย่างที่ยังไม่ปรากฏเด่นชัด เช่น การค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และการเขียนข้อความคาดการณ์ที่หลากหลาย



บรรณานุกรม

- กุลนิดา วรรณนนท์. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการอุปนัยที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- ขวัญ เพี้ยซ้าย. (2553). การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้ที่พัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- คณาจารย์โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา. (2552). การคิดและการตัดสินใจ. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- โครงการ TIMSS 2011 THAILAND สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2556). สรุปผลการวิจัยโครงการ TIMSS 2011 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สมุทรปราการ: แอดวานซ์ พรินติ้ง เซอร์วิส .
- จินตนา เพิ่มทรัพย์ทวีผล. (2547). การศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีระดับความสามารถต่างกัน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- จิณดิษฐ์ ลออปักษิณ. (2550). การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิชุด สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ชญากา ใจโปร่ง. (2554). กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ที่เลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อเสริมสร้างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ชานนท์ จันทรา. (2554). ประมวลสาระชุดวิชาการจัดประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์ หน่วยที่ 9-15. นนทบุรี: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- ณัฐปัญญชาน์ พิษญาชมชื่น. (2558, พฤษภาคม-สิงหาคม). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบอุปนัยที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. วารสารมหาวิทยาลัยศิลปากร. 8(2): 85-88.

- ทรงชัย อักษรคิด. (2546). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์เรื่องแบบรูป โดยใช้การเรียนรู้ร่วมมือ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ทิพย์วัลย์ สีจันทร์. (2548). *การคิดและการตัดสินใจ*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต.
- ธีรรัตน์ สังห. (2556). *ผลของการจัดการเรียนรู้แบบอุปนัย-นิรนัยที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สถิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พร้อมพรรณ อุดมสิน (2547). *ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- รุ่งฟ้า จันทจักรุภรณ์. (2555). *ประมวลสาระชุดวิชาการจัดการประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์ หน่วยที่ 9 กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- ศรีสุรางค์ ทีนะกุล. (2542). *การคิดและการตัดสินใจ*. กรุงเทพฯ: เวิร์ดเวฟ เอ็ดดูเคชั่น.
- ศุภณัฐ ชัยดี. (2549). *การให้เหตุผล : Reasoning ฉบับหนังสือออนไลน์*. สืบค้นเมื่อ 2 มิถุนายน 2558, จาก <http://www.thai-mathpaper.net>
- ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ. (2551). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เน้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วิชัย เสวกงาม. (2557). *ความสามารถในการให้เหตุผล ความสามารถที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนในศตวรรษที่ 21*. วารสารครุศาสตร์. 42(2): 207-223.
- วิมลรัตน์ ศรีสุข. (2551). *การพัฒนากระบวนการเรียนรู้การสอนโดยการบูรณาการรูปแบบการสร้างมโนทัศน์กับรูปแบบการแปลงเพื่อเสริมสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถทางการคิดแบบอุปนัยของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น*. วิทยานิพนธ์ ค.ด. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- เวชฤทธิ์ อังกะนัฏทขจร. (2551). *การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ใช้ทักษะการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงโดยบูรณาการสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์ข้อมูล กับ สิ่งแวดล้อมศึกษาสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2558). สรุปผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาตินี้
พื้นฐาน (O-NET) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2558. สืบค้นเมื่อ 25 เมษายน
2558, จาก <http://bet.obec.go.th/index/>
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์
ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ:
เอส.พี.เอ็น.การพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.
กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- . (2555). ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพเส้นทางสู่ ความสำเร็จ. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย.
- . (2555). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: 3-คิว
มีเดีย.
- สมวงษ์ แปลงประสพโชค. (2544). การให้เหตุผล. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: เลอนแอนเพลย์
แมทกรู๊ป พระนคร.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- สุพรรณิ คำนันท์. (2552). ผลของการเรียนแบบผสมผสานโดยใช้แนวคิดการเรียนรู้แบบค้นพบ
ด้วยวิธีอุปนัยและนิรนัย ที่มีต่อการรับรู้ความสามารถของตนเองในวิชาคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีระดับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่างกัน.
วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- สุรางค์ ไคว์ตระกูล. (2544). จิตวิทยาการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่ง
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2552). ตัวชี้วัดและสาระแกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- อุษาวดี จันทรสนธิ. (2555). ประมวลสาระชุดวิชาการจัดประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์
หน่วยที่ 9 กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2.
นนทบุรี: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช.
- อัญชลีรัตน์ รอดเลิศ. (2553). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการ
พัฒนามโนทัศน์และเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้
เหตุผลเชิงอุปนัยทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ค.ม.
(การศึกษาคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่าย
เอกสาร.

- อัมพร ม้าคะนอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ*.
 กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Alice, F Artzt.; &Shirel, Yaloe-Femia. (1999). *Mathematics Reasoning During Small-Group Problem Solving. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12 1999 Yearbook*. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Brahier, D.J. (2005). *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*. 2 nd ed. USA: Pearson Education.
- Charles, Randall; Lester, Frank; & O'Daffer, Phares. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Christou, Contantinos; & Papageorgiou, Eleni. (2006, February). *A Framework of mathematics inductive reasoning*. Learning and Instruction. 17(1): 55-66.
 Retrieved May 20, 2016, from <http://www.perl.hs.iastate.edu/sites/default/files/uploads/projects/carver/framework.pdf>
- Kim, Mi Sun. (2005). *Alignment of classroom history assessments and the 7th national curriculum in Korea: Assess historical knowledge and reasoning skills*. Dissertation, Ph.D. Pittsburgh: Graduate faculty of the school of education, University of Pittsburgh. Retrieved January 9, 2016, from <http://d-scholarship.pitt.edu/7890/1/KimMS2005etd.pdf>
- Krulik, S. & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights, Mass: Allyn and Bacon.
- Mourad, Nihad Mahmoud. (2005). *Inductive reasoning in the algebra classroom*. Master's Theses. San Jose State University. Retrieved May 20, 2016, http://scholarworks.sjsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3812&context=etd_theses
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- O'Daffer, Phares G. (1990, May). *Inductive and Deductive Reasoning*. Mathematics Teacher. 84(5): 378-380.
- O'Daffer, P.G. &Thornquist, B.A. (1993). *Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof*. In Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics. pp. 39-56. New York: Macmillan Publishing.
- Polya, G. (1957). *How to Solve It*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

- Quellmalz, E. S. (1987). *Developing Reasoning Skills*. In Teaching Thinking Skills: Theory and Practice. Edited by Joan B. Baron & Robert J. Sternberg. pp. 86-105. New York: W. H. Freeman.
- Janjaruporn, R. (2005). *The Development of a Problem–Solving Instructional Program to Develop Preservice Teachers' Competence in Solving Mathematical Problems and Their Beliefs Related to Problem Solving*. Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University.
- Sternberg RO. (1999). *Developing mathematical reasoning in the middle grades recognizing diversity*. In Developing Mathematical Reasoning In Grades K-12. Edited by Stiff LV & Corcio FR. pp. 13-21. Reston: Nation Council of Teacher of Mathematics.
- Yershalmy, Michal. (1986). *Induction and Generalization : An Experiment in Teaching and Learning High School Geometry (Computers, Geometric Supposer, Curriculum)*. Retrieved May 26, 2016, from <http://www.lib.umicom/dissertations/fullcit/8616766>





ภาคผนวก ก
การหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การหาคุณภาพของเครื่องมือ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยนี้ประกอบด้วย กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และแบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยผู้วิจัยดำเนินการหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ดังนี้

1. วิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้และความชัดเจนของข้อคำถาม โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

1.1 นำเครื่องมือที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และความชัดเจนของข้อความ โดยใช้เกณฑ์ในการพิจารณาดังนี้

คะแนน +1	หมายถึง	ใช้ได้
คะแนน 0	หมายถึง	ไม่แน่ใจว่าใช้ได้หรือไม่
คะแนน -1	หมายถึง	ใช้ไม่ได้

1.2 คำนวณค่า IOC ของแต่ละกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบ แล้วเลือกกิจกรรมการเรียนการสอนและแบบทดสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ .05 ขึ้นไป โดยใช้สูตรการคำนวณ IOC คือ (ชานนท์ จันทรา. 2554: 15-54-15-55)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ	IOC	คือ ค่าดัชนีความสอดคล้อง
	$\sum R$	คือ ผลรวมของคะแนนที่ได้จากการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ
	N	คือ จำนวนผู้เชี่ยวชาญทั้งหมด

ตาราง 7 ค่าดัชนีความสอดคล้องของกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

แผนที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

ตาราง 8 ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

แผนที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
2	0	+1	+1	2	0.67	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	3	1.00	ใช้ได้

2. วิเคราะห์หาค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนก ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นรายข้อ โดยใช้ดัชนีความยาก (Difficulty index: p) และดัชนีอำนาจจำแนก (Discrimination index: D หรือ r) ของแบบทดสอบ ซึ่งดำเนินการโดยการนำแบบทดสอบที่ได้จากการทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องมาคำนวณค่าดัชนีความยากและค่าดัชนีอำนาจจำแนก แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าดัชนีความยากตั้งแต่ 0.20-0.80 และมีค่าดัชนีอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป จำนวน 4 ข้อ โดยใช้สูตรการคำนวณ คือ (ชานนท์ จันทรา. 2554: 15-54-15-55)

ดัชนีความยาก

$$p = \frac{S_u + S_l - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	p	คือ ดัชนีความยาก
	S_u	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มสูง
	S_l	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มต่ำ
	N	คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมด
	$X_{\max}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

ดัชนีอำนาจจำแนก

$$r = \frac{S_u - S_l}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	r	คือ ดัชนีอำนาจจำแนก
	S_u	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มสูง
	S_l	คือ ผลรวมของคะแนนนักเรียนในกลุ่มต่ำ
	N	คือ จำนวนนักเรียนทั้งหมด
	$X_{\max}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	คือ คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด

ตาราง 9 ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ข้อที่	P	r
1	0.51	0.55
2	0.40	0.72
3	0.61	0.49
4	0.44	0.68
5	0.46	0.51
6	0.65	0.60

3. วิเคราะห์หาความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัก ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ซึ่งสูตรการคำนวณ คือ (ซานนท์ จันทรา. 2554: 14-57)

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S^2} \right)$$

เมื่อ α คือ สัมประสิทธิ์ค่าความเชื่อมั่น

k คือ จำนวนข้อในแบบทดสอบ

S_i^2 คือ ความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละข้อ

S^2 คือ ความแปรปรวนของข้อมูลทั้งหมด

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย คำนวณโดยวิธีหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) เท่ากับ 0.98





ภาคผนวก ข

ข้อมูลที่ได้จากการวิจัย และการทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

ตาราง 10 คะแนนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่เสริมสร้าง
ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

คนที่	คะแนนใบกิจกรรม		คะแนน แบบทดสอบ (คะแนนเต็ม 40)	คะแนนรวม (คะแนนเต็ม 100)
	กิจกรรมกลุ่ม (คะแนนเต็ม 20)	กิจกรรมรายบุคคล (คะแนนเต็ม 40)		
1	20	26	36	82
2	20	19	33	72
3	20	20	24	65
4	20	25	37	82
5	20	20	27	67
6	19	20	32	72
7	19	24	34	77
8	19	16	18	53
9	19	16	15	50
10	20	27	31	78
11	20	24	23	67
12	20	23	29	72
13	20	24	28	71
14	20	19	23	62
15	21	23	34	78
16	21	25	35	80
17	21	23	22	65
18	21	23	30	73
19	23	25	38	86
20	23	25	36	84
21	23	22	21	66
22	23	23	32	77
23	20	23	30	73
24	20	19	28	67
25	20	22	26	68
26	20	22	29	71
27	18	26	34	79
28	18	22	33	73
29	18	20	27	65
30	18	16	21	56

การทดสอบสมมติฐานของการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จึงใช้สถิติทดสอบทวินาม (Binomial test) ดังนี้

จากคะแนนของนักเรียน 30 คน ให้เครื่องหมายบวกแทนคะแนนที่มากกว่า 60 และให้เครื่องหมายลบแทนคะแนนที่น้อยกว่า 60 ส่วนคะแนนที่เท่ากับ 60 ตัดทิ้ง จะได้ว่า

ให้ x แทน จำนวนเครื่องหมายบวก

n แทน จำนวนเครื่องหมายทั้งหมด

ดังนั้น $x = 27$ และ $n = 30$

ให้ p แทน ความน่าจะเป็นที่ได้เครื่องหมายบวก สมมติฐานของการทดสอบ คือ

$$H_0 : p \leq 0.6$$

$$H_1 : p > 0.6$$

ตัวสถิติทดสอบคือ $\Pr(X \leq 27 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง})$ สำหรับการแจกแจงทวินามที่ $x = 27$ และ $n = 30$ และ $p = \frac{1}{2} = 0.5$ จะได้ $\Pr(X \leq 27 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง}) = 0.000$ นั่นคือค่าพีเท่ากับ 0.000

ขอบเขตวิกฤติของการทดสอบ คือ ปฏิเสธ H_0 ถ้า $\Pr(X \leq 19 \text{ เมื่อ } H_0 \text{ จริง}) < 0.1$

เนื่องจาก $0.000 < 0.1$ เพราะฉะนั้นจึงปฏิเสธ H_0 นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ที่มีความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่า ร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01



ภาคผนวก ค
ตัวอย่าง แผนการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม (พสวท.)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กิจกรรม “แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
และการให้เหตุผลแบบอุปนัย”

ปีการศึกษา 2559

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 90 นาที

การจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนนี้มีวัตถุประสงค์การเรียนรู้หลัก คือ เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Poya) และแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย สามารถอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้และได้เริ่มลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ปัญหาสถานการณ์ที่ใช้ในคาบเรียนนี้คือ ปัญหา “ลายไม้สเน็กวูด” ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non-routine problem) อย่างง่าย ที่เกี่ยวกับลักษณะการเจริญเติบโตของไม้สเน็กวูด (Snakes Wood) ที่มีเจริญเติบโตด้วยการขยายของลายไม้เป็นวงรอบๆ อย่างเป็นระบบ โดยมีวงสีขาวสลับกับวงสีดำ ซึ่งสถานการณ์ปัญหานี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความสัมพันธ์ของจำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นทั้งหมด เมื่อไม้สเน็กวูดมีการเจริญเติบโตไปในระยะเวลาต่างๆ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

- 1.1.1 อธิบายความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้
- 1.1.2 อธิบายกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาได้
- 1.1.3 อธิบายความหมายและรูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้
- 1.1.4 อธิบายความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้

1.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

- 1.2.1 (เริ่ม) ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “ลายไม้สเน็กวูด”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- 1.2.2 เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน็กวูด
- 1.2.3 สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

- 1.3.1 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกลุ่ม
- 1.3.2 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม
- 1.3.3 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน

2. สารการเรียนรู้

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่เราทำอยู่เป็นประจำก็คือ การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง เช่นปัญหาการเดินทาง ปัญหาการเรียน ปัญหาการทำงาน เป็นต้น ในบรรดาปัญหาเหล่านั้น มีทั้งปัญหาที่สามารถแก้ได้ง่ายโดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิมๆ และปัญหาที่มีความซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถแก้ได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ทักษะและกระบวนการและเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าเรามีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนและกระบวนการในการแก้ปัญหา มีเทคนิควิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ตลอดจนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาก่อน เราก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหา จึงเป็นกระบวนการที่นักเรียนควรจะได้เรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

กระบวนการแก้ปัญหาดตามแนวคิดของโพลยา

ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่

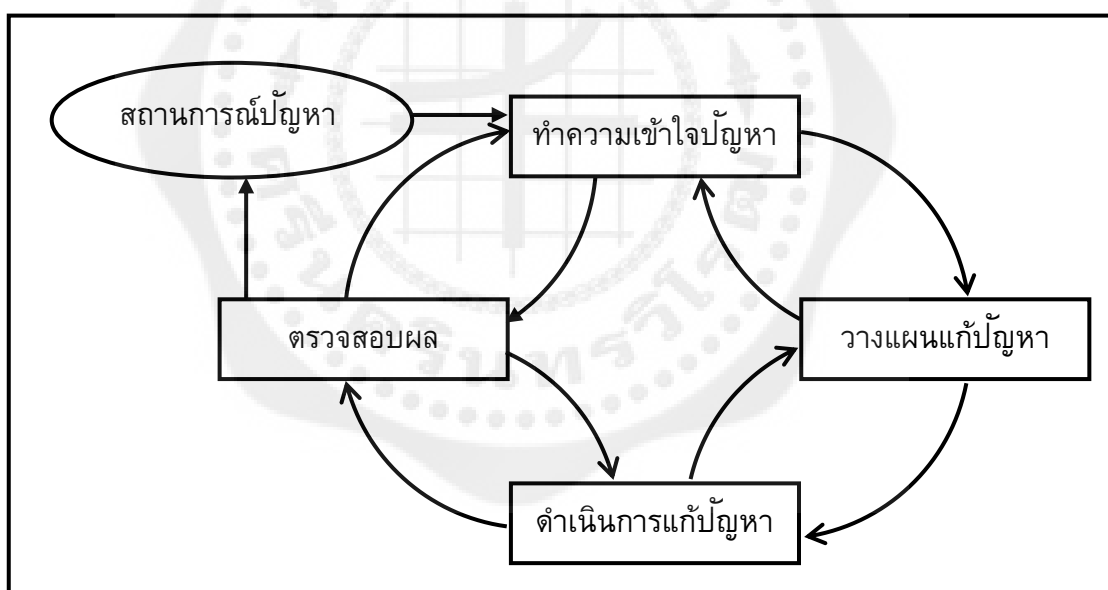
ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหาและตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหานั้นนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ตัวไม่รู้ค่าข้อมูลและเงื่อนไขในการทำความเข้าใจปัญหานักเรียนต้องพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วนพิจารณาเข้าไปซ้ำมาพิจารณาหลากหลายมุมมองหรืออาจใช้วิธีต่างๆช่วยในการทำความเข้าใจปัญหาเช่นการเขียนภาพการเขียนแผนภูมิหรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเอง

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและสิ่งที่ต้องการรู้แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาเพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหาและเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผนเพิ่มเติมรายละเอียดต่างๆของแผนให้ชัดเจนแล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ถ้าแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาใหม่

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มาโดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้องความสมเหตุสมผลและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ใช้แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาย่อยอื่นอีกหรือไม่

สำหรับกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาในรูปแบบที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดวิลสันและคณะ

จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตในภาพประกอบ 1 อธิบายได้ดังนี้ เมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ที่เป็นปัญหานักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อนหลังจากนั้นวางแผนแก้ปัญหาคำเนินการตามแผนที่วางไว้จนกระทั่งหาคำตอบได้สุดท้ายตรวจสอบผลพิจารณาความถูกต้องความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

สำหรับทิศทางของลูกศรนั้นเป็นการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่งหรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่นเมื่อนักเรียนทำความเข้าใจปัญหาและคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้วก็เคลื่อนการกระทำไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ นักเรียนก็อาจจะย้อน กลับไปวางแผนใหม่หรืออาจต้องกลับไปทำความเข้าใจปัญหาใหม่เพื่อปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น

2.2 แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

กิจกรรมในชีวิตประจำวันที่เราคิดและทำอยู่มักจะเกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลอยู่เสมอ เช่นการเลือกซื้อที่อยู่อาศัย การเลือกประกอบอาชีพ หรือการตัดสินใจความต่าง ๆ เป็นต้น ในบรรดาการให้เหตุผลเหล่านั้น มีทั้งการให้เหตุผลที่สามารถกระทำได้ในทันทีโดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิม ๆ และการให้เหตุผลที่มีความซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถกระทำได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ ทักษะและกระบวนการและเทคนิควิธีหลายอย่างในการให้เหตุผล ซึ่งถ้าเรามีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนและกระบวนการในการให้เหตุผล มีเทคนิควิธีในการให้เหตุผลได้อย่างเหมาะสม ก็จะช่วยในการตัดสินใจให้ไม่ผิดพลาด หรือสามารถให้เหตุผลได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical reasoning) เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะได้เรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน แก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบ ทำให้ตัดสินใจได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สามารถจำแนกอย่างกว้างๆ ได้เป็น 3 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (Intuitive Reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก โดยทั่วไปมนุษย์มักจะใช้ความรู้ที่มามีแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก ซึ่งมนุษย์แต่ละคนอาจจะมีอยู่น้อยแตกต่างกันมาช่วยแก้ปัญหา

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า **ข้อความคาดการณ์ (conjecture)**

เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ข้างต้นได้ดังนี้



3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์แล้วใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

3.1 ใบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

3.2 ใบกิจกรรม เรื่อง “ลายไม้สเน่ห์กวด”

3.3 เฉลยใบกิจกรรม เรื่อง “ลายไม้สเน่ห์กวด” (สำหรับครูเท่านั้น)

3.4 เกณฑ์การให้คะแนนรูปrik สำหรับ “ลายไม้สเน่ห์กวด” (สำหรับครูเท่านั้น)

3.5 แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย (สำหรับครูเท่านั้น)

3.6 ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 ครูนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย โดยการตั้งประเด็นคำถามเพื่อให้นักเรียนเห็น “ความสำคัญของการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์” ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่นักเรียนทำอยู่เป็นประจำ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า กิจกรรมในชีวิตประจำวัน เช่น การอาบน้ำแปรงฟัน การเดินทาง และการรับประทานอาหาร เป็นต้น]
- (2) กิจกรรมที่ทำอยู่เหล่านั้น มีกิจกรรมใดบ้างที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรค
[นักเรียนควรตอบว่า ปัญหาการเดินทาง ปัญหาการเรียน และปัญหาการทำงาน เป็นต้น]
- (3) นักเรียนมีวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้นอย่างไร และประสบผลสำเร็จมากน้อยเพียงไร
[นักเรียนควรตอบว่า ถ้าเป็นปัญหาการเดินทาง แก้ปัญหาโดยมีการวางแผนก่อนเดินทาง ซึ่งทำให้การเดินทางประสบผลสำเร็จดีมาก หรือถ้าเป็นปัญหาการเรียน แก้ปัญหาโดยตั้งใจเรียน อ่านหนังสือ ทบทวนเนื้อหาให้มากขึ้น ซึ่งทำให้ผลการเรียนดีขึ้น เป็นต้น]
- (4) นักเรียนคิดว่าสิ่งใด คือสิ่งสำคัญที่ช่วยในการแก้ปัญหาต่างๆ
[นักเรียนควรตอบว่า มีความรู้ในเรื่องนั้นๆ รู้ขั้นตอนและกระบวนการแก้ปัญหา มียุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหานั้นๆ]
- (5) การแก้ปัญหาใดบ้างที่นักเรียนใช้การให้เหตุผลมาช่วยในการแก้ปัญหา
[นักเรียนควรตอบว่า การเลือกเส้นทาง การเลือกโปรโมชัน การตัดสินใจ ความ การเลือกที่พักอาศัย และการเลือกประกอบอาชีพ เป็นต้น]
- (6) นักเรียนมีวิธีการใช้การให้เหตุผลอย่างไร ในการแก้ปัญหา และประสบผลสำเร็จ หรือไม่อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า การสังเกต ทดลอง คาดเดา และการตรวจสอบ ซึ่งจะช่วยให้แก้ปัญหาสำเร็จได้]
- (7) สิ่งสำคัญที่นำมาใช้ในการให้เหตุผล คืออะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป]

4.1.2 เพื่อให้ นักเรียนมีความเข้าใจที่ตรงกัน ครูอธิบาย “แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย” ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้

4.2 ขั้นสอน

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 70 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูจัดนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน โดยที่แต่ละกลุ่มควรมีนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 1 คน ปานกลาง 2 คน และต่ำ 1 คน เพื่อลดความสามารถ

4.2.2 ครูชี้แจงแนวปฏิบัติในชั้นเรียนในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ซึ่งได้แก่

- (1) การลงมือปฏิบัติการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนด
- (2) การอภิปรายกระบวนการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย
- (3) การเขียนผลเฉลยในใบกิจกรรม
- (4) การนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความ
คาดการณ์ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

โดยเน้นย้ำว่า “ทุกคนในกลุ่มต้องเข้าใจผลเฉลยของกลุ่ม และสามารถอธิบายได้” หลังจากนั้นครูให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย (ถ้ามี)

4.2.3 ครูแจกใบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลแบบอุปนัย ให้นักเรียนแต่ละคน พร้อมทั้งอธิบายแนวคิดเกี่ยวกับแนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้ โดยเน้นย้ำ “ความหมายและกระบวนการของการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล” ซึ่งได้แก่

- (1) ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- (2) กระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา
- (3) ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

4.2.4 เพื่อให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา และแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย มากยิ่งขึ้น ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง “ลายไม้สนเหินกูด” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “ลายไม้สนเหินกูด” ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาที่กำหนด โดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาแนวคิดของโพลยาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย

4.2.5 เพื่อดำเนินการตามขั้นตอนในการแก้ปัญหา ซึ่งเริ่มด้วยขั้นการทำ**ความเข้าใจปัญหา** ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดอีกครั้ง แล้วตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบและแสดงความคิดเห็น เช่น

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า ลักษณะการเจริญเติบโตของไม้สนเหินกูด ที่มีเจริญเติบโตด้วยการขยายของลายไม้เป็นวงรอบๆอย่างเป็นระบบ]
- (2) ในสถานการณ์ปัญหา ไม้สนเหินกูดมีรูปแบบการขยายของลายไม้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า การขยายครั้งที่ 1 เริ่มด้วยเนื้อไม้ที่เป็นวงสีขาว 1 วงการขยายครั้งที่ 2 จะมีเนื้อไม้วงสีดำเกิดขึ้นแทรกอยู่ตรงกลางวงสีขาว และครั้งต่อไป จะเกิดลักษณะเดียวกันกับเนื้อไม้วงสีขาว ส่วนเนื้อไม้วงสีดำวงเดิมไม่มีการเปลี่ยนแปลง]
- (3) สิ่ง สถานการณ์ปัญหาต้องการหา คืออะไร
[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนวงของลายไม้สนเหินกูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด]

- (4) ข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า รูปแบบการขยายของลายไม้สเน็กวูด และจำนวนครั้งของการขยายของไม้สเน็กวูด]

- (5) ความรู้คณิตศาสตร์หรือวิธีการที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า การวาดรูปภาพ การหาแบบรูป เลขยกกำลัง]

4.2.6 เมื่อนักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนหาจำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด เมื่อไม้สเน็กวูดขยายครั้งที่ 1-2 โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา (ถ้ามี) ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคณอื่น (3-5 นาที)

4.2.7 หลังจากได้คิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนนำแนวคิดของตนมาแลกเปลี่ยนกันในกลุ่ม (อาจเริ่มจากการแลกเปลี่ยนกัน 2 คนก่อน แล้วทั้งกลุ่ม) แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.8 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการขยายของลายไม้สเน็กวูด ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

- (1) ไม้สเน็กวูดขยายครั้งที่ 1 จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง

[นักเรียนควรตอบว่า มีจำนวนวงสีขาว 1 วง และจำนวนวงสีดำ 0 วง รวมทั้งหมดเป็น 1 วง]

- (2) ไม้สเน็กวูดขยายครั้งที่ 2 จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง

[นักเรียนควรตอบว่า มีจำนวนวงสีขาว 2 วง และจำนวนวงสีดำ 1 วง รวมทั้งหมดเป็น 3 วง]

- (3) จากผลเฉลยที่ได้ให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน็กวูด]

4.2.9 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาจำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเมื่อไม้สเน็กวูดขยายครั้งที่ 3-5 โดยให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวงของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำ และ จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน็กวูด แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.10 ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มกำลังบันทึกผลลงในแบบบันทึกกิจกรรมครูตรวจสอบการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งสังเกตการมีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหานักเรียน พร้อมทั้งให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย (ถ้ามี)

4.2.11 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการขยายของลายไม้สเน็กวูด ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

- (1) ไม้สเน็กวาดขยายครั้งที่ 3 จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง
[นักเรียนควรตอบว่า มีจำนวนวงสีขาว 4 วง และจำนวนวงสีดำ 3 วง รวมทั้งหมดเป็น 7 วง]
- (2) ไม้สเน็กวาดขยายครั้งที่ 4 จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง
[นักเรียนควรตอบว่า มีจำนวนวงสีขาว 8 วง และจำนวนวงสีดำ 7 วง รวมทั้งหมดเป็น 15 วง]
- (3) ไม้สเน็กวาดขยายครั้งที่ 5 จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง
[นักเรียนควรตอบว่า มีจำนวนวงสีขาว 16 วง และจำนวนวงสีดำ 15 วง รวมทั้งหมดเป็น 31 วง]

4.2.12 เมื่อนักเรียนบันทึกผลลงในใบกิจกรรมเป็นที่เรียบร้อยแล้ว เพื่อให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์หรือแบบรูป (pattern) ระหว่าง จำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำ และ จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน็กวาด ที่นำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

- (1) จำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาว ในแต่ละกรณี มีลักษณะเป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า สามารถเขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 2 คือ $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$]
- (2) จำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีดำ ในแต่ละกรณี มีลักษณะเป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า มีค่าน้อยกว่าจำนวนวงสีขาวอยู่ 1]
- (3) ในการขยายของลายไม้สเน็กวาด ครั้งที่ 1 นักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $2^0 + (2^0 - 1)$ วง หรือ $2^1 - 1$ วง]
- (4) ในการขยายของลายไม้สเน็กวาด ครั้งที่ 2 นักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $2^1 + (2^1 - 1)$ วง หรือ $2^2 - 1$ วง]
- (5) ในการขยายของลายไม้สเน็กวาด ครั้งที่ 3 นักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนวงของลายไม้สเน็กวาดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $2^2 + (2^2 - 1)$ วง หรือ $2^3 - 1$ วง]

- (6) ในการขยายของลายไม้สเน็กวูด ครั้งที่ 4 นักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $2^3 + (2^3 - 1)$ วง หรือ $2^4 - 1$ วง]

- (7) ในการขยายของลายไม้สเน็กวูด ครั้งที่ 5 นักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $2^4 + (2^4 - 1)$ วง หรือ $2^5 - 1$ วง]

- (8) ถ้าไม้สเน็กวูดมีจำนวนการขยายของลายไม้ 15 ครั้ง แล้วนักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $2^{14} + (2^{14} - 1)$ วง หรือ $2^{15} - 1$ วง]

- (9) ถ้าไม้สเน็กวูดมีจำนวนการขยายของลายไม้ 20 ครั้ง แล้วนักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $2^{19} + (2^{19} - 1)$ วง หรือ $2^{20} - 1$ วง]

- (10) ถ้าไม้สเน็กวูดมีจำนวนการขยายของลายไม้ n ครั้ง แล้วนักเรียนสามารถเขียนรูปแบบของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)$ วง หรือ $2^n - 1$ วง]

4.2.13 เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ด้วยการแทนค่ากลับในแต่ละกรณี แล้วนำข้อความคาดการณ์นี้ไปแก้สถานการณ์ปัญหาที่ต้องการหา

4.2.14 สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ครูอาจท้าทายความสามารถของนักเรียน โดยตั้งคำถามให้นักเรียนตอบและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ดังนี้

- (1) ถ้าไม้สเน็กวูดมีจำนวนการขยายของลายไม้ 7 ครั้ง แล้วจำนวนของลายไม้สเน็กวูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด จะมีทั้งหมด กี่วง

[นักเรียนควรตอบว่า $2^6 + (2^6 - 1)$ วง หรือ $2^7 - 1$ หรือ 127 วง]

- (2) ถ้าไม้สเน็กวูดมีจำนวนสีดำ 127 วง แล้วไม้สเน็กวูดจะมีการขยายของลายไม้ กี่ครั้ง

[นักเรียนควรตอบว่า ไม้สเน็กวูดจะมีการขยายของลายไม้ 7 ครั้ง]

4.2.15 เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มได้คำตอบของสถานการณ์ปัญหาแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ หน้าชั้นเรียน หรือครูสุ่มเลือกนักเรียนบางกลุ่มที่สร้างข้อความคาดการณ์ที่แตกต่างกัน (ถ้ามี)

4.2.16 ครูให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ ของแต่ละกลุ่ม ประเด็นที่ใช้การอภิปรายมีดังนี้

- (1) ในกระบวนการแก้ปัญหา ขั้นตอนใดมีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุด เพราะเหตุใด
[นักเรียนอาจตอบว่า ขั้นตอนค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล หรือขั้นตอนสร้างข้อความคาดการณ์]
- (2) ในการสร้างข้อความคาดการณ์ สามารถสร้างได้จากความสัมพันธ์ในลักษณะอื่นๆได้หรือไม่ อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า ไม่ เนื่องจากจะทำให้ข้อความคาดการณ์เปลี่ยน]
- (3) ถ้าเปลี่ยนรูปแบบการขยายของลายไม้สเน็กวูดแล้ว “ข้อความคาดการณ์” ที่นำมาใช้แก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า ข้อความคาดการณ์จะเปลี่ยนแปลง โดยข้อความคาดการณ์ จะไม่สามารถเขียนในรูปเดิมได้]
- (4) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ ความสัมพันธ์ของข้อมูล ข้อความคาดการณ์ และผลของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มใดชัดเจนที่สุด เพราะเหตุใด

เป็นต้น

4.3 ขั้นสรุป

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน ครูแจกใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนเองไป โดยคำถามในใบตรวจสอบความรู้ มีดังนี้

- (1) ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที]
- (2) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธี

แก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์]

- (3) กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล]

- (4) การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจง ความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่]

- (5) การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีกี่รูปแบบ อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มี 3 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย]

- (6) การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึงอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง กระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็นจริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์ (conjecture)]

- 4.3.2 ครูเก็บใบตรวจสอบความรู้ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้

- 4.3.3 ครูตั้งคำถามในใบตรวจสอบความรู้ที่ละข้อ แล้วสุ่มนักเรียน 5 คน เพื่อ

นำเสนอคำตอบในแต่ละข้อ

- 4.3.4 ครูตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบของนักเรียน พร้อมทั้งสรุปคำตอบแต่ละ

ข้ออีกครั้ง

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> - อธิบายความหมายของปัญหาและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ - อธิบายกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาได้ - อธิบายความหมายและรูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ - อธิบายความหมายของการให้เหตุผลแบบอุปนัยได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบตรวจสอบความรู้เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย (มีคำถามทั้งหมด 6 ข้อ)	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียนตอบได้ถูกต้อง จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียนตอบไม่ถูกต้อง จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 3 คะแนน ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:</u> (เริ่ม) ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “ ลายไม้สเน่ห์กูด ”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย - เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำ และจำนวนครั้งของการขยายไม้สเน่ห์กูด	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบกิจกรรมเรื่อง ลายไม้สเน่ห์กูด <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบกิจกรรม เรื่อง ลายไม้สเน่ห์กูด	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปริบเบวิเคราะห์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังตารางแนบ <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 11 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
3. สื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และ ข้อความคาดการณ์ของกลุ่ม หน้าชั้นเรียนได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องและชัดเจน ของการอธิบายและนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูลและ ข้อความคาดการณ์ <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการ แก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบ อุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>ได้ถูกต้องและ ชัดเจน</u> จะได้ คะแนน 3 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ เพียงบางส่วน</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน <u>ไม่</u> อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>เลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนน มากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ :</u> 1. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกลุ่ม 2. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปราย ของกลุ่ม 3. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน	<u>วิธีวัดผล :</u> <u>วิธีวัด :</u> สังเกตพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียน ขณะตอบคำถามหรือทำงานที่มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกตแล้วบันทึกผลในแบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบอุปนัย <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบอุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็นอย่าง<u>เด่นชัด</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็นเพียง<u>เล็กน้อย</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน<u>ไม่แสดงออกให้เห็นเลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่น ๆ (ถ้ามี)

ใบความรู้

เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในชีวิตประจำวันกิจกรรมที่เราทำอยู่เป็นประจำก็คือ การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง เช่นปัญหาการเดินทาง ปัญหาการเรียน ปัญหาการทำงาน เป็นต้น ในบรรดาปัญหาเหล่านั้น มีทั้งปัญหาที่สามารถแก้ได้ง่ายโดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิมๆ และปัญหาที่มีความซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถแก้ได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ทักษะและกระบวนการและเทคนิควิธีหลายอย่างในการแก้ปัญหา ซึ่งถ้าเรามีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนและกระบวนการในการแก้ปัญหา มีเทคนิควิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ตลอดจนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหามาก่อน เราก็จะสามารถแก้ปัญหานั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหา จึงเป็นกระบวนการที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดทักษะขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้นักเรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

กระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของโพลยา

ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหาและตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหานั้นนักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ตัวไม่รู้ค่าข้อมูลและเงื่อนไขในการทำความเข้าใจปัญหานักเรียนต้องพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วนพิจารณาเข้าไปซ้ำมาพิจารณาหลากหลายมุมมองหรืออาจใช้วิธีต่างๆช่วยในการทำความเข้าใจปัญหาเช่นการเขียนภาพการเขียนแผนภูมิหรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเอง

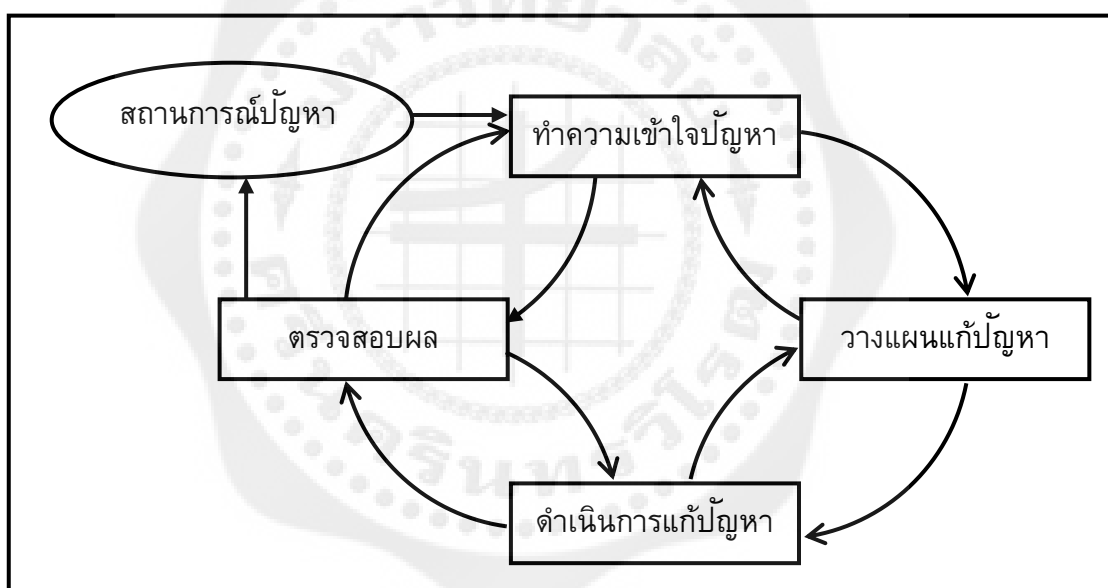
ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและสิ่งที่ต้องการรู้แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับ

ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาเพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหาและเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผนเพิ่มเติมรายละเอียดต่างๆของแผนให้ชัดเจนแล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ถ้าแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้นักเรียนต้องค้นหาแผนหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาใหม่

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มาโดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้องความสมเหตุสมผลและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ใช้แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมีกลยุทธ์ในการแก้ปัญหายังอื่นอีกหรือไม่

สำหรับกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาในรูปแบบที่แสดงความเป็นพลวัต มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดวิลสันและคณะ

จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตในภาพประกอบ 1 อธิบายได้ดังนี้ เมื่อต้องเผชิญกับสถานการณ์ที่เป็นปัญหานักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อนหลังจากนั้นวางแผนแก้ปัญหาดำเนินการตามแผนที่วางไว้จนกระทั่งหาคำตอบได้สุดท้ายตรวจสอบผลพิจารณาความถูกต้องความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

สำหรับทิศทางของลูกศรนั้นเป็นการพิจารณาหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่งหรือพิจารณาย้อนกลับไปยังขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหหรือข้อสงสัย เช่นเมื่อนักเรียนทำความเข้าใจปัญหาและคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้วก็เคลื่อนการกระทำ

ไปสู่ขั้นวางแผนแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้แต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ นักเรียนก็อาจจะย้อน กลับไปวางแผนใหม่หรืออาจต้องกลับไปทำความเข้าใจปัญหาใหม่เพื่อปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น

2.2 แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

กิจกรรมในชีวิตประจำวันที่เราคิดและทำอยู่มักจะเกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลอยู่เสมอ เช่นการเลือกซื้อที่อยู่อาศัย การเลือกประกอบอาชีพ หรือการตัดสินใจความต่าง ๆ เป็นต้น ในบรรดาการให้เหตุผลเหล่านั้น มีทั้งการให้เหตุผลที่สามารถกระทำได้ในทันทีโดยใช้เพียงความรู้หรือประสบการณ์เดิม ๆ และการให้เหตุผลที่มีความซับซ้อนมากจนเราไม่สามารถกระทำได้ในทันที ต้องอาศัยความรู้ ทักษะและกระบวนการและเทคนิควิธีหลายอย่างในการให้เหตุผล ซึ่งถ้าเรามีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนและกระบวนการในการให้เหตุผล มีเทคนิควิธีในการให้เหตุผลได้อย่างเหมาะสม ก็จะช่วยในการตัดสินใจให้ไม่ผิดพลาด หรือสามารถให้เหตุผลได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematical reasoning) เป็นความสามารถหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน เพราะการเรียนรู้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน แก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบ ทำให้ตัดสินใจได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

รูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สามารถจำแนกอย่างกว้างๆ ได้เป็น 3 รูปแบบ ดังนี้

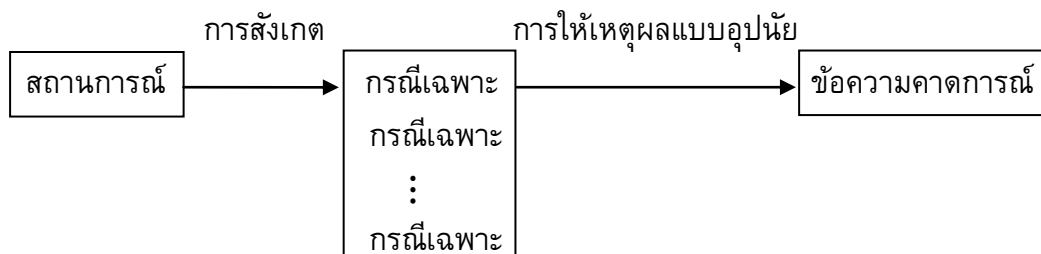
1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ (Intuitive Reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ เป็นการให้เหตุผลที่มาจากการใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก โดยทั่วไปมนุษย์มักจะใช้ความรู้ที่มีมาแต่กำเนิดหรือสามัญสำนึก ซึ่งมนุษย์แต่ละคนอาจจะมีอยู่น้อยแตกต่างกันมาช่วยแก้ปัญหา

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็น

จริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า **ข้อความคาดการณ์ (conjecture)**

เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ข้างต้นได้ดังนี้



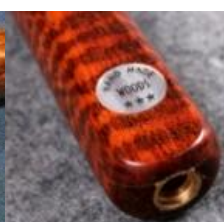
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่ยกเอาสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์แล้วใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นไปสู่ข้อสรุปหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่

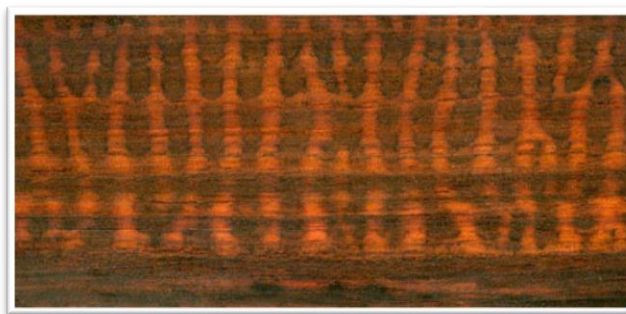
ใบกิจกรรม ลายไม้สเน็กวูด



ในปัจจุบันไม้ที่มีลวดลายสวยงาม มักจะนิยมนำมาทำเป็นเฟอร์นิเจอร์ ของเล่น เครื่องดนตรี หรืออุปกรณ์กีฬา เป็นต้น

สเน็กวูด (Snake Wood) เป็นชื่อไม้ตระกูล *Piratinera guianensis* เป็นไม้แข็งและมีน้ำหนัก พบมากทางภาคเหนือของอเมริกาใต้ ลักษณะเนื้อไม้มีลวดลายที่สวยงามคล้ายผิวนกยูง ผลิตภัณฑ์ที่ทำมาจากไม้สเน็กวูด นั่นคือ ขลุ่ยไทย ที่ล่ำลือกันว่าให้โทนเสียงที่คมชัด และก้องกังวาน และผลิตภัณฑ์อื่นๆ เช่น ปากกา มีด ไม้ตะเกียบ กีต้าร์ ไม้สเน็กเกอร์ เป็นต้น ดังภาพตัวอย่าง ต่อไปนี้





ไม้สเน็กูดที่มีการเจริญเติบโตหรือมีอายุมากขึ้น จะเกิดการขยายของลายไม้เป็นวงรอบๆ อย่างเป็นระบบ ดังนี้

การขยายครั้งที่ 1 เริ่มต้นด้วยการเติบโตเป็นลายไม้ที่มีลักษณะเป็นวงสีขาว 1 วง

การขยายครั้งที่ 2 จะเกิดลายไม้ที่มีลักษณะเป็นวงสีดำ 1 วง ขึ้นแทรกอยู่ตรงกลางลายไม้ที่เป็นวงสีขาว

การขยายครั้งที่ 3 และครั้งต่อไป จะเกิดลักษณะเดียวกันกับ การขยายครั้งที่ 2 ลายไม้ส่วนที่เกิดเป็นวงสีดำแล้ว ก็จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงหรือยังคงเดิมนั่นเอง

อยากทราบว่า ไม้สเน็กูดที่มีการขยายของลายไม้อย่างต่อเนื่อง 11 ครั้ง จะมีจำนวนวงของลายไม้สเน็กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด กี่วง



ลายไม้สเน่ห์กวด



ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนของลายไม้สเน่ห์กวดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้น
รวมกันทั้งหมด เมื่อไม้สเน่ห์กวดมีการขยายในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)

3.1 ไม้สเน่ห์กวด ขยายครั้งที่ 1

.....

.....

.....

3.2 ไม้สเน่ห์กวด ขยายครั้งที่ 2

.....

.....

.....

.....

3.3 ไม้สั่นเข้กวูด ขยายครั้งที่ 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.4 ไม้สั่นเข้กวูด ขยายครั้งที่ 4

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.5 ไม้สั่นเข้กวูด ขยายครั้งที่ 5

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนของลายไม้สเห์กวดที่มี
สีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวนครั้งของการขยาย
ไม้สเห์กวด (5 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ ข้อความคาดการณ์ ” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวน
ของลายไม้สเห์กวดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวน
 n ครั้งของการขยายไม้สเห์กวด (4 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



เฉลยใบกิจกรรม ลายไม้สเน่ห์กูด



- ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด
- ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด (1) กระบวนการขยายของลายไม้
 การขยายครั้งที่ 1 เริ่มต้นด้วยลายไม้ที่เป็นวงสีขาว 1 วง
 การขยายครั้งที่ 2 จะมีลายไม้วงสีดำเกิดขึ้นแทรกอยู่ตรงกลางลายไม้
 วงสีขาว
 การขยายครั้งที่ 3 และครั้งต่อไป จะเกิดลักษณะเดียวกันกับลายไม้
 วงสีขาว ส่วนลายไม้วงสีดำวงเดิมจะไม่มีเปลี่ยนแปลง
 (2) ไม้สเน่ห์กูดมีการขยายของลายไม้ต่อเนื่อง 11 ครั้ง
- ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาและสีดำเกิดขึ้น
 รวมกันทั้งหมด เมื่อไม้สเน่ห์กูดมีการขยายในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)
- 3.1 ไม้สเน่ห์กูด ขยายครั้งที่ 1
- แนวคิด1** แสดงโดยใช้สัญลักษณ์
 กำหนดให้ W แทน วงสีขาว และ B แทน วงสีดำ
 จะได้ W
- แนวคิด2** แสดงโดยวาดภาพ
☐
- จะได้ว่า มีจำนวนวงสีขาว 1 วง และจำนวนวงสีดำ 0 วง
 ดังนั้น จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด 1 วง

แนวคิด2 แสดงโดยวาดภาพ



จะได้ว่า มีจำนวนวงสีขาว 16 วง และจำนวนวงสีดำ 15 วง

ดังนั้น จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด 31 วง

- ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน่ห์กูด (5 คะแนน)

แนวคิด จากข้อ 3 สังเกตเห็นการขยายไม้สเน่ห์กูด ในแต่ละกรณีพบว่า

จำนวนวงสีขาว สามารถจัดอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 2 และจำนวนวงสีดำจะมีค่าน้อยกว่าจำนวนวงสีขาวอยู่ 1 วง ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนครั้งของการขยายไม้สเน่ห์กูด (ครั้ง)	จำนวนวงสีขาว (วง)	จำนวนวงสีดำ (วง)	จำนวนวงสีขาวและวงสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด (วง)
1	$1 = 2^{1-1}$	$0 = 2^{1-1} - 1$	$1 = 2^{1-1} + (2^{1-1} - 1)$
2	$2 = 2^{2-1}$	$1 = 2^{2-1} - 1$	$3 = 2^{2-1} + (2^{2-1} - 1)$
3	$4 = 2^{3-1}$	$3 = 2^{3-1} - 1$	$7 = 2^{3-1} + (2^{3-1} - 1)$
4	$8 = 2^{4-1}$	$7 = 2^{4-1} - 1$	$15 = 2^{4-1} + (2^{4-1} - 1)$
5	$16 = 2^{5-1}$	$15 = 2^{5-1} - 1$	$31 = 2^{5-1} + (2^{5-1} - 1)$

- ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด และ จำนวน n ครั้งของการขยายไม้สเน่ห์กูด (4 คะแนน)

แนวคิด ให้ n แทน จำนวนการขยายของไม้สเน่ห์กูด

ให้ L แทน จำนวนวงของลายไม้สเน่ห์กูดที่มีสีขาวและสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวงสีขาวและวงสีดำเกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด

คือ $L = 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1)$ วง หรือ $L = 2^n - 1$ วง

- ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)

แนวคิด จากข้อความคาดการณ์ ข้างต้น

จำนวนครั้งของการ ขยายไม้สั่นแก้ว (ครั้ง)	จำนวนวงสีขาวและวงสีดำ เกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด (วง)
1	$2^{1-1} + (2^{1-1} - 1) = 1$ หรือ $2^1 - 1 = 1$
2	$2^{2-1} + (2^{2-1} - 1) = 3$ หรือ $2^2 - 1 = 3$
3	$2^{3-1} + (2^{3-1} - 1) = 7$ หรือ $2^3 - 1 = 7$
4	$2^{4-1} + (2^{4-1} - 1) = 15$ หรือ $2^4 - 1 = 15$
5	$2^{5-1} + (2^{5-1} - 1) = 31$ หรือ $2^5 - 1 = 31$

- ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

แนวคิด จากสถานการณ์ปัญหา

ไม้สั่นแก้วมีการขยายของลายไม้อย่างต่อเนื่อง 11 ครั้ง

นั่นคือ $n = 11$

จากข้อความคาดการณ์ของจำนวนวงสีขาวและวงสีดำที่เกิดขึ้นรวมกันทั้งหมด
ดังข้างต้น จะได้ว่า

$$2^{11} - 1 = 2,048 - 1$$

$$= 2,047$$

$$\text{หรือ } 2^{11-1} + (2^{11-1} - 1) = 2^{10} + (2^{10} - 1)$$

$$= 2^{10} + (2^{10} - 1)$$

$$= 1,024 + 1,023$$

$$= 2,047$$

ดังนั้น ไม้สั่นแก้วที่มีการขยายของลายไม้ 11 ครั้ง จะมีจำนวนวงสีขาวและสีดำ

ใบตรวจสอบความรู้

เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

.....

.....

ข้อ 2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

ข้อ 3 กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอน อะไรบ้าง

.....

.....

.....

.....

ข้อ 4 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

ข้อ 5 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีกี่รูปแบบ อะไรบ้าง

.....

.....

.....

ข้อ 6 การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึงอะไร

เฉลยใบตรวจสอบความรู้

เรื่อง แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง สถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบ โดยที่ยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของสถานการณ์นั้นทันที

ข้อ 2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อ 3 กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอน อะไรบ้าง

แนวคำตอบ กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยา (Polya) ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล

ข้อ 4 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์และ/หรือความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ในการรวบรวมข้อเท็จจริง/ข้อความ/แนวคิด/สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ แจกแจงความสัมพันธ์ หรือการเชื่อมโยง เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่

ข้อ 5 การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีรูปแบบ อะไรบ้าง

แนวคำตอบ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มี 3 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสหัชญาณ
2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย
3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ข้อ 6 การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง กระบวนการที่ใช้การสังเกตหรือการทดลอง หลายๆ ครั้ง แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสู่ข้อสรุปซึ่งเชื่อว่า น่าจะถูกต้อง น่าจะเป็น

จริง มีความเป็นไปได้มากที่สุด แต่ยังไม่ได้พิสูจน์ว่าเป็นจริงและยังไม่พบข้อขัดแย้ง เรียกข้อสรุปที่ได้ว่า ข้อความคาดการณ์ (conjecture)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม พสวท.

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กิจกรรม “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม”

ปีการศึกษา 2559

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 90 นาที

การจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนนี้มีวัตถุประสงค์การเรียนรู้หลัก คือ เพื่อให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ปัญหาสถานการณ์ที่ใช้ในคาบเรียนนี้ คือ ปัญหา “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non-routine problem) ที่เกี่ยวกับการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้ายแล้วได้จำนวนเดิม เราเรียกจำนวนเต็มบวกที่มีลักษณะดังกล่าวว่า “จำนวนพาลินโดรม” (Palindrome number) ซึ่งสถานการณ์ปัญหานี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความสัมพันธ์ของจำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่มีหลักที่แตกต่างกัน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.1.1 อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรมได้

1.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1.2.2 เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

1.2.3 สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

1.3.1 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกลุ่ม

- 1.3.2 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม
- 1.3.3 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน

2. สารการเรียนรู้

แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม

พาลินโดรม (Palindrome) คือ คำหรือวลี ที่ไม่ว่าจะอ่านไปข้างหน้าหรืออ่านย้อนกลับก็อ่านได้เหมือนกัน โดยไม่ต้องพิจารณาตัวอักษรตัวใหญ่เล็ก เครื่องหมายเว้นวรรคตอน และตัวแยกคำ

ตัวอย่าง ของพาลินโดรมในภาษาไทย คือ กก กนก ยาย นาน และ รรรรร (ชื่อฝาแฝดคู่หนึ่ง โดยแฝดคนหนึ่งอ่านว่า ระ-รัน-รอน ส่วนอีกคนหนึ่งอ่านว่า ระ-รอน-รัน)

ตัวอย่าง ในภาษาอังกฤษก็มีมากมาย เช่น dad, mom, eye, nun, pop, rotator, reviver, God saw I was dog, Never odd or even เป็นต้น

ในทางคณิตศาสตร์ก็มีพาลินโดรมเช่นกัน โดยเรียกว่า **จำนวนพาลินโดรม (palindromic number)** เป็นจำนวนเต็มบวกที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้ายแล้วได้จำนวนเดิม ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเป็นตัวเลขที่สมมาตรทั้งซ้ายขวา

ตัวอย่าง 77, 181, 11233211, 2002 (เป็นปี ค.ศ. ในทศวรรษที่ผ่านมา)

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 รูปภาพ HONDA CIVIC ภาพสัญลักษณ์ TOT แผ่นDVD และ ซนมSUGUS
- 3.2 ใบกิจกรรม เรื่อง “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม”
- 3.2 เฉลยใบกิจกรรม เรื่อง “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.3 เกณฑ์การให้คะแนนรูปrik สำหรับ “การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.4 แบบสังเกตพฤติกรรมและการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.5 ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง “แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม”

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 **ครูนำเข้าสู่บทเรียน** เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม โดยการตั้งประเด็นคำถามเพื่อให้นักเรียนเห็น “ ลักษณะของพาลินโดรม ” ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) รถยนต์คันนี้มีชื่อรุ่นว่าอะไร (ครูแสดงภาพรถยนต์ยี่ห้อ HONDA CIVIC)

[นักเรียนควรตอบว่า CIVIC]

- (2) สัญลักษณ์ของภาพนี้คืออะไร (ครูแสดงภาพสัญลักษณ์ TOT)
[นักเรียนควรตอบว่า TOT]
 - (3) สิ่งนี้เรียกว่าอะไร (ครูแจกแผ่น DVD)
[นักเรียนควรตอบว่า DVD]
 - (4) ขนมนี้อือยี่ห้ออะไร (ครูแจกขนม SUGUS)
[นักเรียนควรตอบว่า SUGUS]
 - (5) จากคำว่า CIVIC TOT DVD และ SUGUS มีลักษณะความสัมพันธ์เป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า มีตัวอักษรที่เรียงหรือเขียนจากหน้าไปหลัง และจากหลังไปหน้า แล้วเป็นคำเดิม]
 - (6) นอกจากตัวอย่างดังกล่าวแล้วคำในภาษาอังกฤษที่มีลักษณะความสัมพันธ์เช่นนี้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า dad mom eye nun เป็นต้น]
 - (7) คำในภาษาไทยที่มีลักษณะความสัมพันธ์เช่นนี้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า กก ยาย นาน]
 - (8) แล้วจำนวนที่มีลักษณะความสัมพันธ์เช่นนี้ มีอะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 11, 22, 121, 11211 เป็นต้น]
- 4.1.2 เพื่อให้ นักเรียนมีความเข้าใจที่ตรงกัน ครูอธิบาย “แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม” ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้

4.2 ขั้นสอน

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 70 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง “การค้นหาคำของจำนวนพาลินโดรม” ให้ นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “การค้นหาคำของจำนวนพาลินโดรม” ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาที่กำหนด โดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาแนวคิดของโพลยา และกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

4.2.2 เพื่อดำเนินการตามขั้นตอนในการแก้ปัญหา ซึ่งเริ่มด้วยขั้นการทำความเข้าใจปัญหา ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดอีกครั้ง แล้วตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบและแสดงความคิดเห็น เช่น

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนพาลินโดรม]
- (2) ในสถานการณ์ปัญหา ลักษณะของจำนวนพาลินโดรม เป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่าอ่านจากหน้าไปหลังหรือจากหลังไปหน้า ก็มีค่าเท่าเดิม]
- (3) สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหา คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม]

(4) ข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ความหมายของจำนวนพาลินโดรม ตัวอย่างและจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 1 หลัก และ 2 หลัก]

(5) ความรู้คณิตศาสตร์หรือวิธีการที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า หลักการคูณ เลขยกกำลัง]

4.2.3 เมื่อนักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด ของจำนวนพาลินโดรม 3 หลัก และ 4 หลัก (ข้อ 3.1-3.2 ของใบกิจกรรม) โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา (ถ้ามี) ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคนอื่น (3-5 นาที)

4.2.4 หลังจากได้คิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนนำแนวคิดของตนมาแลกเปลี่ยนกันในกลุ่ม (อาจเริ่มจากการแลกเปลี่ยนกัน 2 คนก่อน แล้วทั้งกลุ่ม) แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.5 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

(1) จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก มีหลักใดบ้างที่ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ

[นักเรียนควรตอบว่า หลักหน่วยและหลักร้อย]

(2) ในหลักหน่วยและหลักร้อยสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 9 ตัว คือ 1 - 9]

(3) แล้วหลักสิบสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

(4) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนพาลินโดรม 3 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า 90 จำนวน]

(5) จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก มีหลักใดบ้างที่ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ

[นักเรียนควรตอบว่า หลักหน่วยหลักพัน และ หลักสิบหลักร้อย]

(6) ในหลักหน่วยและหลักพันสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 9 ตัว คือ 1 - 9]

(7) แล้วหลักสิบและหลักร้อยสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

(8) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนพาลินโดรม 4 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า 90 จำนวน]

(9) จากทั้ง 2 กรณีดังกล่าวนักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม]

4.2.6 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมดของจำนวนพาลินโดรม 5 หลัก 6 หลัก และ 7 หลัก (ข้อ 3.3-3.5 ของใบกิจกรรม) โดยให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.7 ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มกำลังบันทึกผลลงในแบบบันทึกกิจกรรมครูตรวจสอบการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งสังเกตการมีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหานักเรียนพร้อมทั้งให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย (ถ้ามี)

4.2.8 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

(1) **จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก** มีหลักใดบ้างที่ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ

[นักเรียนควรตอบว่า หลักหน่วยหลักหมื่น และ หลักสิบหลักพัน]

(2) ในหลักหน่วยและหลักหมื่นสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 9 ตัว คือ 1 - 9]

(3) ในหลักสิบและหลักพันสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

(4) แล้วหลักร้อยสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

(5) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนพาลินโดรม 5 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า 900 จำนวน]

(6) **จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก** มีหลักใดบ้างที่ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ

[นักเรียนควรตอบว่า หลักหน่วยหลักแสน และ หลักสิบหลักหมื่น และ หลักร้อยหลักพัน]

(7) ในหลักหน่วยและหลักแสนสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 9 ตัว คือ 1 - 9]

(8) ในหลักสิบและหลักหมื่นสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

(9) แล้วหลักร้อยและหลักพันสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้กี่ตัว อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]

- (10) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนพาลินโดรม 6 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 900 จำนวน]
- (11) จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก มีหลักใดบ้างที่ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ
[นักเรียนควรตอบว่า หลักหน่วยหลักล้าน และ หลักสิบหลักแสน และ หลักร้อยหลักหมื่น]
- (12) ในหลักหน่วยและหลักล้านสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 9 ตัว คือ 1 - 9]
- (13) ในหลักสิบและหลักแสนสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]
- (14) ในหลักร้อยและหลักหมื่นสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]
- (15) แล้วหลักพันสามารถเป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ที่ตัว ะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 10 ตัว คือ 0 - 9]
- (16) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนพาลินโดรม 7 หลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 9,000 จำนวน]

4.2.9 เมื่อนักเรียนบันทึกผลลงในใบกิจกรรมเป็นที่เรียบร้อยแล้ว เพื่อให้นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์หรือแบบรูป (pattern) ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรมเพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบดังนี้

- (1) จำนวนพาลินโดรม 1 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 9 จำนวน]
- (2) จำนวนพาลินโดรม 2 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 9 จำนวน]
- (3) จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 90 จำนวน]
- (4) จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 90 จำนวน]
- (5) จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 900 จำนวน]
- (6) จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 900 จำนวน]

- (7) จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า 9,000 จำนวน]
- (8) จำนวนของจำนวนพาลินโดรมในแต่ละกรณี ที่หาได้นั้นนักเรียนสังเกตเห็นมีลักษณะของแต่ละจำนวนเป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า สังเกตเห็นลักษณะของจำนวนที่ได้ในแต่ละกรณี ดังนี้
จำนวนพาลินโดรม 1-2 หลัก มีจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 9 จำนวน
เท่ากัน, จำนวนพาลินโดรม 3-4 หลัก มีจำนวนของจำนวนพาลินโดรม
90 จำนวน เท่ากัน และจำนวนพาลินโดรม 5-6 หลัก มีจำนวนของจำนวน
พาลินโดรม 900 จำนวนเท่ากัน]
- (9) จำนวนพาลินโดรมในแต่ละกรณีสามารถเขียนให้อยู่ในรูปใดได้
[นักเรียนควรตอบว่า $9 = 9(10)^0$, $90 = 9(10)^1$, $900 = 9(10)^2$, $9,000 = 9(10)^3$]
- (10) จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และจำนวนของจำนวนพาลินโดรม
นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์เป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนหลักที่เป็นจำนวนคี่ (1,3,5,7 หลัก)
สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$9(10)^0 = 9(10)^{\frac{1-1}{2}}, 9(10) = 9(10)^{\frac{3-1}{2}}, 9(10)^2 = 9(10)^{\frac{5-1}{2}}, 9(10)^3 = 9(10)^{\frac{7-1}{2}}$$
จำนวนหลักที่เป็นจำนวนคู่ (2,3,6 หลัก) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$9(10)^0 = 9(10)^{\frac{2}{2}-1}, 9(10) = 9(10)^{\frac{4}{2}-1}, 9(10)^2 = 9(10)^{\frac{6}{2}-1}]$$
- (11) จำนวนพาลินโดรม 13 หลัก จะมี กี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า $9(10)^{\frac{13-1}{2}} = 9(10)^6$ จำนวน]
- (12) จำนวนพาลินโดรม 22 หลัก จะมี กี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า $9(10)^{\frac{22}{2}-1} = 9(10)^{10}$ จำนวน]
- (13) แล้วจำนวนพาลินโดรม n หลัก จะมี กี่จำนวน
[นักเรียนควรตอบว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะมี $9(10)^{\frac{n-1}{2}}$ จำนวน และ
ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะมี $9(10)^{\frac{n}{2}-1}$ จำนวน]

4.2.10 เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรม ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ด้วยการแทนค่ากลับในแต่ละกรณี แล้วนำข้อความคาดการณ์นี้ไปแก้สถานการณ์ปัญหาที่ต้องการหา

4.2.11 สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ครูอาจท้าทายความสามารถของนักเรียน โดยตั้งคำถามให้นักเรียนตอบและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ดังนี้

- (1) จำนวนพาลินโดรม 8 หลัก จะมี กี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า $9(10)^{\frac{8-1}{2}} = 9(10)^3 = 9,000$ จำนวน]

- (2) จำนวนพาลินโดรม 9 หลัก จะมี กี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า $9(10)^{\frac{9-1}{2}} = 9(10)^4 = 90,000$ จำนวน]

4.2.12 เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มได้คำตอบของสถานการณ์ปัญหาแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์หน้าชั้นเรียน หรือครูสุ่มเลือกนักเรียนบางกลุ่มที่สร้างข้อความคาดการณ์ที่แตกต่างกัน (ถ้ามี)

4.2.13 ครูให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ ของแต่ละกลุ่ม ประเด็นที่ใช้การอภิปรายมีดังนี้

- (1) ในกระบวนการแก้ปัญหา ขั้นตอนใดมีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุด เพราะเหตุใด
[นักเรียนอาจตอบว่า ขั้นตอนค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล หรือขั้นตอนสร้างข้อความคาดการณ์]
- (2) ในการสร้างข้อความคาดการณ์ สามารถสร้างจากความสัมพันธ์ในลักษณะอื่นๆ ได้หรือไม่ อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า ไม่ เนื่องจากจะทำให้ข้อความคาดการณ์เปลี่ยน]
- (3) ถ้าเปลี่ยน ไม่ให้อ่านจำนวนจากหน้าไปหลัง และหลังไปหน้าเป็นจำนวนเดียวกันแล้ว “ข้อความคาดการณ์” ที่นำมาใช้แก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า จะทำให้ข้อความคาดการณ์เปลี่ยนแปลง และไม่สามารถหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมได้]
- (4) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ ความสัมพันธ์ของข้อมูล ข้อความคาดการณ์ และผลของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มใดชัดเจนที่สุด เพราะเหตุใด

เป็นต้น

4.3 ขั้นสรุป

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน ครูแจกใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนลงไป โดยคำถามในใบตรวจสอบความรู้ มีดังนี้

- (1) จำนวนพาลินโดรม (Palindrome) หมายถึงอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนพาลินโดรม หมายถึง คำหรือวลีที่สามารถเขียนตัวอักษรย้อนจากหลังไปหน้า หรือจากซ้ายไปขวาแล้วยังคงอ่านออกเสียงได้เหมือนเดิม]

- (2) จำนวนพาลินโดรม (Palindromic number) หมายถึงอะไร พร้อมยกตัวอย่าง

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนพาลินโดรม หมายถึง จำนวนเต็มบวกที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้ายแล้วได้จำนวนเดิม ตัวอย่างเช่น จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก เช่น 1552551

จำนวนพาลินโดรม 8 หลัก เช่น 12344321]

- (3) จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก มากกว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 17 หลัก กี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก และ 17 หลัก

คือ $9(10)^{\frac{20}{2}-1} = 9(10)^9$ และ $9(10)^{\frac{17-1}{2}} = 9(10)^8$ จำนวน ตามลำดับ

จะได้ว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก มากกว่า 17 หลัก

$$\begin{aligned} 9(10)^9 - 9(10)^8 &= 9(10)^8(10-1) \\ &= 9(10)^8(9) \\ &= 81(10)^8 \end{aligned}$$

- 4.3.2 ครูเก็บใบตรวจสอบความรู้ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้

- 4.3.3 ครูตั้งคำถามในใบตรวจสอบความรู้ที่ละข้อ แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน เพื่อ

นำเสนอคำตอบในแต่ละข้อ

- 4.3.3 ครูตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบของนักเรียน พร้อมทั้งสรุปคำตอบแต่ละ

ข้ออีกครั้ง

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรมได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม (มีคำถามทั้งหมด 3 ข้อ)	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียนตอบ<u>ได้</u>ถูกต้อง จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียนตอบ<u>ไม่</u>ถูกต้อง จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:</u> 1. (เริ่ม) ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “ การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม ”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย 2. เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบกิจกรรม เรื่อง การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบกิจกรรม เรื่อง การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปริกแบวเคาระห์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังตารางแนบ <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 11 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
3. สื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และ ข้อความคาดการณ์ของกลุ่ม หน้าชั้นเรียนได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องและชัดเจน ของการอธิบายและนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูลและ ข้อความคาดการณ์ <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการ แก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบ อุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>ได้ถูกต้องและ ชัดเจน</u> จะได้ คะแนน 3 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ เพียงบางส่วน</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน <u>ไม่</u> อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>เลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนน มากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ :</u> 1. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกลุ่ม 2. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปราย ของกลุ่ม 3. มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน	<u>วิธีวัดผล :</u> <u>วิธีวัด :</u> สังเกตพฤติกรรมหรือการแสดงออกของนักเรียน ขณะตอบคำถามหรือทำงานที่มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกตแล้วบันทึกผลในแบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบอุปนัย <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบอุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็นอย่างเด่นชัด จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็นเพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียนไม่แสดงออกให้เห็นเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่น ๆ (ถ้ามี)

ใบกิจกรรม

การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม

ในชีวิตจริงเราคงเคยเห็น “คำหรือวลีที่สามารถเขียนตัวอักษรย้อนจากหลังไปหน้า หรือจากซ้ายไปขวาแล้วยังคง อ่านออกเสียงได้เหมือนเดิม”

เช่นคำว่า กนก ยาย นาน SUGUS TOT DVD POP

เราเรียกคำหรือวลีที่มีลักษณะดังกล่าวว่า “พาลินโดรม” (Palindrome) ซึ่งเป็นภาษากรีก แปลว่า วิ่งกลับไปที่ได้เดิมอีก



ในทางคณิตศาสตร์ เราก็มียุทธวิธีที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้ายแล้วได้จำนวนเดิม เราเรียกจำนวนเต็มบวกที่มีลักษณะดังกล่าวว่า “จำนวนพาลินโดรม” (Palindromic number)

ตัวอย่าง

จำนวนพาลินโดรม 1 หลัก มี 9 จำนวน ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ..., 9

จำนวนพาลินโดรม 2 หลัก มี 9 จำนวน ได้แก่ 11, 22, 33, 44, ..., 99

อยากทราบว่า

- (1) จำนวนพาลินโดรม 2560 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี กี่จำนวน
- (2) จำนวนพาลินโดรม 2561 หลักที่เป็นไปได้ทั้งหมดมี กี่จำนวน



การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม

ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมดในแต่ละกรณี (5 คะแนน)

3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก

3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก



3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก



ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม (5 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ ข้อความคาดการณ์ ” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม n หลัก (4 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



เฉลยใบกิจกรรม

การค้นหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรม



- ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 2560 หลัก และ 2561
- ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด 1) ความหมายของพาลินโดรมและลักษณะของจำนวนพาลินโดรม
 2) ตัวอย่างการหาจำนวนพาลินโดรม 1 หลัก และ 2 หลัก
 3) จำนวนพาลินโดรม 1 หลัก มี 9 จำนวน
 4) จำนวนพาลินโดรม 2 หลัก มี 9 จำนวน
- ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนของจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมดในแต่ละกรณี (5 คะแนน)
- 3.1 จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก
แนวคิด
 หลักหน่วยและหลักร้อย ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ
 หลักหน่วยและหลักร้อย เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 9 ตัว คือ 1–9
 หลักสิบ เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9
 ดังนั้น มีจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $9 \times 10 = 90$ ตัว
- 3.2 จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก
แนวคิด
 หลักหน่วยและหลักพัน ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ
 หลักสิบและหลักร้อย ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเดียวกันเสมอ
 หลักหน่วยและหลักพัน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 9 ตัว คือ 1–9
 หลักสิบและหลักร้อย เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9
 ดังนั้น มีจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $9 \times 10 = 90$ ตัว

3.3 จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก

แนวคิด

หลักหน่วยและหลักหมื่น ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักสิบและหลักพันต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักหน่วยและหลักหมื่น เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 9 ตัว คือ 1–9

หลักสิบและหลักพัน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

หลักร้อย เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

ดังนั้น มีจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $9 \times 10 \times 10 = 900$ ตัว

3.4 จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

แนวคิด

หลักหน่วยและหลักแสน ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักสิบและหลักหมื่น ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักร้อยและหลักพัน ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักหน่วยและหลักแสน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 9 ตัว คือ 1–9

หลักสิบและหลักหมื่น เป็นเลขโดดที่ต่างกัน 10 ตัว คือ 0–9

หลักร้อยและหลักพัน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

ดังนั้น มีจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $9 \times 10 \times 10 = 900$ ตัว

3.5 จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก

แนวคิด

หลักหน่วยและหลักล้าน ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักสิบและหลักแสน ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักร้อยและหลักหมื่น ต้องมีเลขโดดเป็นตัวเลขเดียวกันเสมอ

หลักหน่วยและหลักล้าน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 9 ตัว คือ 1–9

หลักสิบและหลักแสน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

หลักร้อยและหลักหมื่น เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

หลักพัน เป็นเลขโดดที่ต่างกันได้ 10 ตัว คือ 0–9

ดังนั้น มีจำนวนพาลินโดรมที่เป็นไปได้ทั้งหมด $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9,000$ ตัว

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม (5 คะแนน)

แนวคิด1 จากจำนวนพาลินโดรม 1-2 หลัก และข้อ 3 สังเกตเห็นว่า

จำนวนพาลินโดรม 1 หลัก และ จำนวนพาลินโดรม 2 หลัก

มีจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 9 จำนวน เท่ากัน

จำนวนพาลินโดรม 3 หลัก และ จำนวนพาลินโดรม 4 หลัก

มีจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 90 จำนวน เท่ากัน

จำนวนพาลินโดรม 5 หลัก และ จำนวนพาลินโดรม 6 หลัก

มีจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 900 จำนวน เท่ากัน

จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม	จำนวนของจำนวนพาลินโดรม
1	$9 = 9(10)^0 = 9(10)^{\frac{1-1}{2}}$
2	$9 = 9(10)^0 = 9(10)^{\frac{2-1}{2}}$
3	$90 = 9(10) = 9(10)^{\frac{3-1}{2}}$
4	$90 = 9(10) = 9(10)^{\frac{4-1}{2}}$
5	$900 = 9(10)^2 = 9(10)^{\frac{5-1}{2}}$
6	$900 = 9(10)^2 = 9(10)^{\frac{6-1}{2}}$
7	$9,000 = 9(10)^3 = 9(10)^{\frac{7-1}{2}}$

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ ข้อความคาดการณ์ ” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม n หลัก (4 คะแนน)

แนวคิด ให้ n แทน จำนวนหลักของจำนวนพาลินโดรม

และ P แทน จำนวนของจำนวนพาลินโดรม

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรม เมื่อ

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ คือ $P = 9(10)^{\frac{n-1}{2}}$ หรือ $P = 9(10)^{\frac{n-2}{2}}$ จำนวน

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ คือ $P = 9(10)^{\frac{n-1}{2}}$ จำนวน

- ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี (3 คะแนน)

แนวคิด จากข้อความคาดการณ์ ข้างต้น

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$n=2 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{2}{2}-1} = 9(10)^0 = 9$$

$$n=4 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{4}{2}-1} = 9(10)^1 = 90$$

$$n=6 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{6}{2}-1} = 9(10)^2 = 900$$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$n=1 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{1-1}{2}} = 9(10)^0 = 9$$

$$n=3 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{3-1}{2}} = 9(10)^1 = 90$$

$$n=5 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{5-1}{2}} = 9(10)^2 = 900$$

$$n=7 \text{ จะได้ว่า } 9(10)^{\frac{7-1}{2}} = 9(10)^3 = 9,000$$

- ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

แนวคิด จากสถานการณ์ปัญหา

จำนวนพาลินโดรม 2560 หลัก เป็นจำนวนหลักที่เป็นจำนวนคู่
นั่นคือ $n = 2560$

จากข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรมหลักคู่

$$\text{จะได้ว่า } P = 9(10^{\frac{2560}{2}-1}) = 9(10^{1280-1}) = 9(10^{1279}) \text{ หลัก}$$

และจำนวนพาลินโดรม 2561 หลัก เป็นจำนวนหลักที่เป็นจำนวนคี่
นั่นคือ $n = 2561$

จากข้อความคาดการณ์ของจำนวนของจำนวนพาลินโดรมหลักคี่

$$\text{จะได้ว่า } P = 9(10^{\frac{2561-1}{2}}) = 9(10^{\frac{2560}{2}}) = 9(10^{1280}) \text{ หลัก}$$

ดังนั้นจำนวนของจำนวนพาลินโดรม 2560 หลัก มีจำนวน $9(10^{1279})$ จำนวน
และ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 2561 หลัก มีจำนวน $9(10^{1280})$ จำนวน

ใบตรวจสอบความรู้
เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม

ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่.....

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 จำนวนพาลินโดรม (Palindrome) หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2 จำนวนพาลินโดรม (Palindromic number) หมายถึงอะไร พร้อมยกตัวอย่าง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก มากกว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 17 หลัก กี่จำนวน

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบตรวจสอบความรู้
เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับพาลินโดรม

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 จำนวนพาลินโดรม (Palindrome) หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ จำนวนพาลินโดรม หมายถึง คำหรือวลีที่สามารถเขียนตัวอักษรย้อนจากหลังไปหน้า หรือจากซ้ายไปขวาแล้วยังคงอ่านออกเสียงได้เหมือนเดิม

ข้อ 2 จำนวนพาลินโดรม (Palindromic number) หมายถึงอะไร พร้อมยกตัวอย่าง

แนวคำตอบ จำนวนพาลินโดรม หมายถึง จำนวนเต็มบวกที่เมื่อเขียนเลขโดดเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้าหรือจากขวาไปซ้ายแล้วได้จำนวนเดิม
ตัวอย่างเช่น จำนวนพาลินโดรม 7 หลัก เช่น 1552551
จำนวนพาลินโดรม 8 หลัก เช่น 12344321

ข้อ 3 จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก มากกว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 17 หลัก กี่จำนวน

แนวคำตอบ จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก คือ $9(10)^{\frac{20}{2}-1} = 9(10)^9$ จำนวน
จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 17 หลัก คือ $9(10)^{\frac{17-1}{2}} = 9(10)^8$ จำนวน
จะได้ว่า จำนวนของจำนวนพาลินโดรม 20 หลัก มากกว่า 17 หลัก

$$\begin{aligned} 9(10)^9 - 9(10)^8 &= 9(10)^8(10-1) \\ &= 9(10)^8(9) \\ &= 81(10)^8 \end{aligned}$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม พสวท.

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กิจกรรม “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น”

ปีการศึกษา 2559

ภาคเรียนที่ 2

เวลา 90 นาที

การจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนนี้มีวัตถุประสงค์การเรียนรู้หลัก คือ เพื่อให้นักเรียนได้ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ปัญหาสถานการณ์ที่ใช้ในคาบเรียนนี้ คือ ปัญหา “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (non-routine problem) ที่เกี่ยวกับวิธีการจัดหนังสือที่แตกต่างกันจำนวน 12 เล่ม ให้นักเรียน 5 คน ยืมไปอ่านที่บ้าน ซึ่งสถานการณ์ปัญหานี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความสัมพันธ์ของ จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.1.1 อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นได้

1.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: เพื่อให้นักเรียน

1.2.1 ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1.2.2 เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน

1.2.3 สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ของกลุ่มหน้าชั้นเรียนได้

1.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

- 1.3.1 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกลุ่ม
- 1.3.2 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายของกลุ่ม
- 1.3.3 มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปรายหน้าชั้นเรียน

2. สารการเรียนรู้

2.1 แนวคิดเกี่ยวกับแฟกทอเรียล

แฟกทอเรียล (Factorial) เป็นตัวดำเนินการที่สำคัญมากในการศึกษาคอมบินาทอริกซ์ โดยแฟกทอเรียลมี นิยามดังนี้

บทนิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n หรือ $n \times (n-1) \times \dots \times 1$ และ เขียนแทนด้วย $n!$

ตัวอย่างที่ 1 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

2.2 แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น

ในชีวิตประจำวันของมนุษย์เรามักจะเกี่ยวข้องกับการทำนายอนาคตเสมอ ก็คือความน่าจะเป็น ซึ่งการหาความน่าจะเป็น จำเป็นต้องรู้กรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด และการหาจำนวนกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) เป็นวิธีการที่เรานำสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจัดเรียง โดยที่การจัดเรียงดังกล่าวให้คำนึงถึงตำแหน่งของสิ่งของแต่ละสิ่งเป็นสิ่งสำคัญ แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น
2. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น หมายถึงการจัดเรียงสิ่งของ โดยมีลักษณะเป็นแถว ซึ่งจะมีกี่แถวก็ได้ แต่ละแถวจะอยู่ในแนวเส้นตรงหรือโค้งอย่างไรก็ได้ แต่ไม่โค้งจนบรรจบกันเป็นวงกลม ในลักษณะนี้ จะสามารถกำหนดตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถวได้ แยกพิจารณา ดังนี้

- ก. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันหมด
- ข. วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันหมด คือ การจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันหมด โดยมีลักษณะเป็นแถว ซึ่งอาจนำมาเพียงบางส่วนหรือนำมาเรียงทั้งหมด โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งของการเรียงสิ่งของเป็นสิ่งสำคัญ

- (1) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ $n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2 ในการหาจำนวนวิธีของการเรียงลำดับคน 3 คน คือ A, B, C

ทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งแรก ได้ 3 วิธี (เลือกคนใดคนหนึ่งจาก 3 คน)

ขั้นที่ 2 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สอง ได้ 2 วิธี (เหลือให้เลือก 2 คน)

ขั้นที่ 3 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สาม ได้ 1 วิธี (เหลือคนเดียว)

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี หรือ $6!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 3 การเรียงลำดับของคน 4 คน ก็จะเป็น $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี

(2) จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง แตกต่างกันไปทั้งหมด โดยเรียง

$$\text{สับเปลี่ยนครั้งละ } r \text{ สิ่ง เมื่อ } r < n \text{ เท่ากับ } \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4 มีคน 5 คน จะมีวิธีการจัดคนเข้าแถวกี่วิธี เมื่อนำคนมาจัดแถว

เพียง 3 คน

ขั้นที่ 1 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งแรก ได้ 5 วิธี (เลือกคนใดคนหนึ่งจาก 5 คน)

ขั้นที่ 2 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สอง ได้ 4 วิธี (เหลือให้เลือก 4 คน)

ขั้นที่ 3 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สาม ได้ 3 วิธี (เหลือให้เลือก 3 คน)

ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

$$\text{หรือ } \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ วิธี}$$

3. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

- 3.1 ใบกิจกรรม เรื่อง “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น”
- 3.2 เฉลยใบกิจกรรม เรื่อง “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.3 เกณฑ์การให้คะแนนรูปрик สำหรับ “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.4 แบบสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย (สำหรับครูเท่านั้น)
- 3.5 ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง “แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น”

4. กิจกรรมการเรียนรู้

4.1 ขั้นนำ

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1.1 ครูนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น โดยการตั้งประเด็นคำถามเพื่อให้นักเรียนเห็น “ความสำคัญของวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ซึ่งประเด็นคำถามมีดังนี้

- (1) ในชีวิตประจำวันมีสถานการณ์อะไรบ้างที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้หลายรูปแบบ

[นักเรียนควรตอบว่า การเลือกชุด การเดินทางมาโรงเรียน การเลือกตั้ง การจัดสิ่งของ การรับสมัครงาน และการเข้าแถว เป็นต้น]

- (2) แล้วสถานการณ์ใดเป็นการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกเพียงบางส่วนมาเรียงในลักษณะเป็นแถว และคำนึงถึงตำแหน่งเป็นสำคัญ
[นักเรียนควรตอบว่า การเลือกชุด การเลือกตั้ง การรับสมัครงาน และการเลือกคนเข้าแถว เป็นต้น]
- (3) มีคน 5 คน จะมีวิธีการจัดคนเข้าแถวกี่วิธี เมื่อนำคนมาจัดแถวเพียง 3 คน
[นักเรียนควรตอบว่า ขั้นที่ 1 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งแรก ได้ 5 วิธี
ขั้นที่ 2 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สอง ได้ 4 วิธี
ขั้นที่ 3 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สาม ได้ 3 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี]
- (4) จากตัวอย่างดังกล่าวอะไรคือสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมาเรียง และมีจำนวนเท่าไร
[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดคือคนจำนวน 5 คน และสิ่งของที่นำมาเรียงคือคนจำนวน 3 คน]

4.1.2 เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ตรงกัน ครูอธิบาย “แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ดังรายละเอียดในสาระการเรียนรู้

4.2 ขั้นสอน

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 70 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.2.1 ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วนำเสนอสถานการณ์ปัญหา “วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น” ตลอดจนจูงใจให้นักเรียนอยากแก้ปัญหาที่กำหนด โดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาแนวคิดของโพลยา และกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย

4.2.2 เพื่อดำเนินการตามขั้นตอนในการแก้ปัญหา ซึ่งเริ่มด้วยขั้นการทำความเข้าใจปัญหา ครูให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดอีกครั้ง แล้วตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบและแสดงความคิดเห็น เช่น

- (1) สถานการณ์ปัญหานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า วิธีการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน ให้นักเรียน 5 คน ยืมไปอ่าน]
- (2) ในสถานการณ์ปัญหา ลักษณะการยืมหนังสือ เป็นอย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า นักเรียนแต่ละคนจะยืมได้คนละ 1 เล่ม พร้อมกันทั้ง 5 คน ซึ่งแต่ละครั้งที่เจ้าหน้าที่ให้ยืม นักเรียนจะได้หนังสือที่ไม่ซ้ำกัน]

(3) สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการหา คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนวิธีการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน]

(4) ข้อมูลหรือเงื่อนไขของสถานการณ์ มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า ห้องสมุดมีหนังสือ 12 เล่มที่แตกต่างกัน นักเรียน 5 คน ต้องการยืมไปอ่าน และเจ้าหน้าที่ห้องสมุดให้ยืมได้คนละหนึ่งเล่ม]

(5) ความรู้คณิตศาสตร์หรือวิธีการที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา มีอะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า หลักการคูณ แฟกทอเรียล]

4.2.3 เมื่อนักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละคนหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ในกรณีที่ 1 (ข้อ 3.1 ของใบกิจกรรม) โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา (ถ้ามี) ด้วยตนเอง โดยไม่ต้องปรึกษาคณอื่น (3-5 นาที)

4.2.4 หลังจากได้คิดเป็นรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนนำแนวคิดของตนมาแลกเปลี่ยนกันในกลุ่ม (อาจเริ่มจากการแลกเปลี่ยนกัน 2 คนก่อน แล้วทั้งกลุ่ม) แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.5 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

(1) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 1 สิ่งที่ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยน คืออะไร
อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า นำผ้าคอตตอน 4 สี มาทำเป็นชุดเดรส โดยส่วนที่เป็นเสื้อและกระโปรงสีต้องต่างกัน]

(2) ในการตัดชุดเดรส นักเรียนต้องทำการเลือกกี่ชิ้นตอน อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 2 ชิ้นตอน คือ เลือกสีผ้าคอตตอนตัดเป็นเสื้อ และกระโปรง]

(3) ในขั้นตอนที่ 1 นักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า เลือกสีผ้าคอตตอนตัดเป็นเสื้อได้ 4 วิธี]

(4) ในขั้นตอนที่ 2 นักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า ขั้นที่ 2 เลือกสีผ้าคอตตอนตัดเป็นกระโปรงได้ 3 วิธี]

(5) จะได้วิธีการตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและกระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมด กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า $4 \times 3 = 12$ วิธี]

(6) จากกรณีดังกล่าว นักเรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน]

4.2.6 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ในกรณีที่ 2-5 (ข้อ 3.2-3.5 ของใบกิจกรรม) โดยให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน แล้วบันทึกผลลงในใบกิจกรรม

4.2.7 ขณะที่นักเรียนแต่ละกลุ่มกำลังบันทึกผลลงในแบบบันทึกกิจกรรมครูตรวจสอบการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละกลุ่ม พร้อมทั้งสังเกตการมีส่วนร่วมและความรับผิดชอบในการแก้ปัญหานักเรียน พร้อมทั้งให้คำปรึกษาเมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย (ถ้ามี)

4.2.8 เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนตอบ โดยมีประเด็นคำถาม ดังนี้

- (1) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 2 สิ่งที่ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยน คืออะไร
อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า ต้องการจัดคน 2 คน จากคน 5 คน ยืนเก็บตัวที่ประตูลำดับเลข 1 และ ลำดับเลข 2]
- (2) ในการเลือกคนมายืนเก็บตัวที่ประตู นักเรียนต้องทำการเลือกกี่ขั้นตอน
อะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 2 ขั้นตอน คือ เลือกคนยืนเก็บตัวที่ประตูลำดับเลข 1 และ ลำดับเลข 2]
- (3) ในแต่ละขั้นตอนนักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี
[นักเรียนควรตอบว่า ขั้นที่ 1 เลือกคนยืนเก็บตัวที่ประตูลำดับเลข 1 ได้ 5 วิธี และ ขั้นที่ 2 เลือกคนยืนเก็บตัวที่ประตูลำดับเลข 2 ได้ 4 วิธี]
- (4) จัดคนยืนเก็บตัวที่ประตู ได้ทั้งหมด กี่วิธี
[นักเรียนควรตอบว่า $5 \times 4 = 20$ วิธี]
- (5) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 3 สิ่งที่ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยน คืออะไร
อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า ต้องการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดต้องไม่ซ้ำกัน]
- (6) ในการเลือกเลขโดดมาสร้างจำนวน 3 หลัก นักเรียนต้องทำการเลือกเลขโดดกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง
[นักเรียนควรตอบว่า 3 ขั้นตอน คือ เลือกหลักหน่วย หลักสิบ และหลักร้อย]
- (7) ในแต่ละขั้นตอนนักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี
[นักเรียนควรตอบว่า ขั้นที่ 1 เลือกหลักหน่วยได้ 5 วิธี ขั้นที่ 2 เลือกหลักสิบได้ 4 วิธี และ ขั้นที่ 3 เลือกหลักร้อยได้ 3 วิธี]

(8) จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลัก ได้ทั้งหมด กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี]

(9) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 4 สิ่งที่ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยน คืออะไร
อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้นๆ
ละคัน โดยมีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน]

(10) ในการเลือกรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า นักเรียนต้องทำการเลือกกี่ขั้นตอน
อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 3 ขั้นตอน คือ เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่ 1, 2
และ 3]

(11) ในแต่ละขั้นตอนนักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า ชั้นที่ 1 เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่หนึ่งได้ 7 วิธี
ชั้นที่ 2 เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่สองได้ 6 วิธี และ ชั้นที่ 3 เลือกโมเดล
รถมาวางบนชั้นที่สามได้ 5 วิธี]

(12) จัดคนยืนเก็บตัวที่ประตู ได้ทั้งหมด กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า $7 \times 6 \times 5 = 210$ วิธี]

(13) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 5 สิ่งที่ต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยน คืออะไร
อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ต้องการเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วย
ประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คน]

(14) ในการเลือกคณะกรรมการ นักเรียนต้องทำการเลือกกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า 4 ขั้นตอน คือ เลือกประธาน รองประธาน เลขานุการ
และเหรัญญิก]

(15) ในแต่ละขั้นตอนนักเรียนสามารถเลือกได้กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า ชั้นที่ 1 เลือกประธานได้ 10 วิธี ชั้นที่ 2 เลือกรอง
ประธานได้ 9 วิธี ชั้นที่ 3 เลือกเลขานุการได้ 8 วิธี ชั้นที่ 4 เลือกเหรัญญิกได้
7 วิธี]

(16) จัดคนยืนเก็บตัวที่ประตู ได้ทั้งหมด กี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5,040$ วิธี]

4.2.9 เมื่อนักเรียนบันทึกผลลงในใบกิจกรรมเป็นที่เรียบร้อยแล้ว เพื่อให้นักเรียน
สังเกตเห็นความสัมพันธ์หรือแบบรูป (pattern) ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวน

ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน เพื่อนำไปสู่การ
สร้างข้อความคาดการณ์ ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ ดังนี้

- (1) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 1 สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยน มีจำนวนเท่าไร
[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 4 สิ่ง และสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยนมี 2 สิ่ง]
- (2) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $4 \times 3 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{4!}{2!}$]
- (3) สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 4 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 2 สิ่ง
มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของ
แฟกทอเรียล
[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!}$]
- (4) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 2 สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยน มีจำนวนเท่าไร
[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 5 สิ่ง และสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยนมี 2 สิ่ง]
- (5) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $5 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{5!}{3!}$]
- (6) สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 5 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 2 สิ่ง
มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของ
แฟกทอเรียล
[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$]
- (7) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 3 สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยน มีจำนวนเท่าไร
[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 5 สิ่ง และสิ่งของที่นำมา
เรียงสับเปลี่ยนมี 3 สิ่ง]
- (8) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร
[นักเรียนควรตอบว่า $5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5!}{2!}$]
- (9) สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 5 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 3 สิ่ง
มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของ

แฟกทอเรียล

[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$]

- (10) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 4 สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน มีจำนวนเท่าไร

[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 7 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยนมี 3 สิ่ง]

- (11) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $7 \times 6 \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{4!}$]

- (12) สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 7 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 3 สิ่ง มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$]

- (13) ในสถานการณ์ปัญหาที่ 5 สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดและสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน มีจำนวนเท่าไร

[นักเรียนควรตอบว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 10 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยนมี 4 สิ่ง]

- (14) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10!}{6!}]$$

- (15) สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 10 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 4 สิ่ง มีความสัมพันธ์อย่างไรกับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$]

- (16) ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด 25 สิ่ง และสิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน 12 สิ่ง แล้วจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เขียนอยู่ในรูปของแฟกทอเรียลจะเป็นอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{25!}{(25-12)!} = \frac{25!}{13!}$]

- (17) จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r จะมีกี่วิธี

[นักเรียนควรตอบว่า $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี]

4.2.10 เมื่อนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ครูให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ด้วยการแทนค่ากลับในแต่ละกรณี แล้วนำข้อความคาดการณ์นี้ไปแก้สถานการณ์ปัญหาที่ต้องการหา

4.2.11 สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ครูอาจท้าทายความสามารถของนักเรียน โดยตั้งคำถามให้นักเรียนตอบและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ดังนี้

- (1) สร้างจำนวน 4 หลักที่ จากเลขโดด 1-9 โดยแต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน จะสามารถสร้างได้กี่จำนวน

[นักเรียนควรตอบว่า จะได้ว่า $n=9$ และ $r=4$ ดังนั้น สร้างจำนวน 4 หลัก

ได้ทั้งหมด $\frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3,024$ จำนวน]

- (2) เขียนรายชื่อพนักงาน 15 คน ลงในสลากรายชื่อละ 1 ใบ ใส่ลงในภาชนะ แล้วสุ่มหยิบสลาก ขึ้นมาทีละหนึ่งใบสองครั้ง เพื่อแจกรางวัลที่หนึ่งและรางวัลที่สองตามลำดับ จงหาจำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

[นักเรียนควรตอบว่า จะได้ว่า $n=15$ และ $r=2$ ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาจ

เกิดขึ้นได้ทั้งหมด $\frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = 15 \times 14 = 210$ วิธี]

4.2.12 เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มได้คำตอบของสถานการณ์ปัญหาแล้ว ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มส่งตัวแทนมานำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์หน้าชั้นเรียน หรือครูสุ่มเลือกนักเรียนบางกลุ่มที่สร้างข้อความคาดการณ์ที่แตกต่างกัน (ถ้ามี)

4.2.13 ครูให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายกระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และข้อความคาดการณ์ ของแต่ละกลุ่ม ประเด็นที่ใช้การอภิปรายมีดังนี้

- (1) ในกระบวนการแก้ปัญหา ขั้นตอนใดมีความยุ่งยากซับซ้อนที่สุด เพราะเหตุใด
[นักเรียนอาจตอบว่า ขั้นตอนค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูล หรือขั้นตอนสร้างข้อความคาดการณ์]

- (2) ในการสร้างข้อความคาดการณ์ สามารถสร้างจากความสัมพันธ์ในลักษณะอื่นๆ ได้หรือไม่ อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ไม่ เนื่องจากจะทำให้ข้อความคาดการณ์เปลี่ยน]

- (3) ถ้าเปลี่ยน เป็นการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม แล้ว “ข้อความคาดการณ์” ที่นำมาใช้แก้ปัญหา จะเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า จะทำให้ข้อความคาดการณ์เปลี่ยนแปลง เพราะจะไม่มีตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้าย]

- (4) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอ ความสัมพันธ์ของข้อมูล ข้อความคาดการณ์ และผลของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มใด ชัดเจนที่สุด เพราะเหตุใด
- เป็นต้น

4.3 ขั้นสรุป

ขั้นนี้ใช้เวลาประมาณ 10 นาที ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.3.1 เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน ครูแจกใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนลงไป โดยคำถามในใบตรวจสอบความรู้ มีดังนี้

- (1) วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น หมายถึงอะไร
[นักเรียนควรตอบว่า การจัดเรียงสิ่งของโดยมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้งซึ่งอาจนำมาเพียงบางส่วนหรือนำมาเรียงทั้งหมด โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งของการเรียงสิ่งของเป็นสำคัญ]
- (2) จงยกตัวอย่างสถานการณ์จริง ที่ใช้วิธีการเรียงสับเปลี่ยนในการแก้ปัญหา
[นักเรียนควรตอบว่า
 1. การเลือกหัวหน้าห้อง รองหัวหน้าห้อง จากห้องเรียนห้องหนึ่ง
 2. การเลือกประธานนักเรียน รองประธานนักเรียน เภรัณุก จากโรงเรียนแห่งหนึ่ง
 3. การเลือกตัวแทนถือพานไหว้ครู
 4. การซื้อข้าวราดแกง 2 อย่างจากร้านขายข้าวแกงที่โรงเรียน]
- (3) จงหาจำนวนวิธีในการเรียงลำดับตัวอักษร 3 ตัว จากคำว่า COMPUTER โดยไม่ต้องคำนึงถึงความหมาย

[นักเรียนควรตอบว่า จากสถานการณ์ปัญหาจะได้ว่า สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 8 สิ่ง สิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยนมี 3 สิ่ง นั่นคือ $n=8$ และ

$$r=3 \text{ จะได้ } \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6,720 \text{ วิธี}$$

4.3.2 ครูเก็บใบตรวจสอบความรู้ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อประเมินผลการเรียนรู้

4.3.3 ครูตั้งคำถามในใบตรวจสอบความรู้ทีละข้อ แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน เพื่อ

นำเสนอคำตอบในแต่ละข้อ

4.3.3 ครูตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบของนักเรียน พร้อมทั้งสรุปคำตอบแต่ละข้ออีกครั้ง

5. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</u> 1. อธิบายแนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้นได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบตรวจสอบความรู้ เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น (มีคำถามทั้งหมด 3 ข้อ)	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียนตอบได้ถูกต้อง จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียนตอบไม่ถูกต้อง จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:</u> 1. (เริ่ม) ลงมือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนด (ปัญหา “ วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น ”) เป็นกลุ่มผ่านกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของโพลยาและกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัย 2. เขียนข้อความคาดการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนจำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวน สิ่งของที่น่ามาเรียงสับเปลี่ยน	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องของคำตอบของนักเรียนในใบกิจกรรม เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น <u>เครื่องมือวัดผล:</u> ใบกิจกรรม เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริกแบวิเคราะห์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนน ดังตารางแนบ <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 11 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
3. สื่อความหมายทาง คณิตศาสตร์และนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูล และ ข้อความคาดการณ์ของกลุ่ม หน้าชั้นเรียนได้	<u>วิธีวัดผล :</u> พิจารณาความถูกต้องและชัดเจน ของการอธิบายและนำเสนอ กระบวนการแก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของข้อมูลและ ข้อความคาดการณ์ <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการ แก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบ อุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อคำถาม ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>ได้ถูกต้องและ ชัดเจน</u> จะได้ คะแนน 3 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ครบถ้วน</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียน อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ ของข้อมูลและข้อความ คาดการณ์ <u>พอสื่อให้เข้าใจได้ เพียงบางส่วน</u> จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน <u>ไม่</u> อธิบายและ นำเสนอกระบวนการ แก้ปัญหา ความสัมพันธ์ของ ข้อมูลและข้อความคาดการณ์ <u>เลย</u> จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนน มากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ ต้องการวัดและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึง</u> <u>ประสงค์ :</u> 1.มีส่วนร่วมและรับผิดชอบใน การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกลุ่ม 2.มีส่วนร่วมและรับผิดชอบใน การอภิปราย ของกลุ่ม 3.มีส่วนร่วมและรับผิดชอบใน การอภิปรายหน้าชั้นเรียน	<u>วิธีวัดผล :</u> <u>วิธีวัด :</u> สังเกตพฤติกรรมหรือ การแสดงออกของนักเรียน ขณะ ตอบคำถามหรือทำงานที่ มอบหมาย โดยมีครูเป็นผู้สังเกต แล้วบันทึกผลในแบบสังเกต พฤติกรรมการแก้ปัญหา และการ ให้เหตุผลแบบอุปนัย <u>เครื่องมือวัดผล:</u> แบบสังเกตพฤติกรรมการ แก้ปัญหา และการให้เหตุผลแบบ อุปนัย	<u>เกณฑ์การให้คะแนน :</u> ในแต่ละข้อของแบบสังเกต พฤติกรรม ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็น อย่าง<u>เด่นชัด</u> จะได้ คะแนน 2 คะแนน ● ถ้า นักเรียนแสดงออกให้เห็น เพียงเล็กน้อย จะได้ คะแนน 1 คะแนน ● ถ้า นักเรียน<u>ไม่แสดงออกให้</u> เห็นเลย จะได้ คะแนน 0 คะแนน <u>เกณฑ์การประเมินผล:</u> ถ้า นักเรียนได้คะแนน มากกว่า 1 คะแนน ถือว่าผ่าน

6. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

6.1 ด้านนักเรียน

(ระบุ ความรู้ /ทักษะและกระบวนการ/คุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียนที่พบ)

6.2 ด้านผู้สอน

(ระบุ ปัญหาหรือผลการจัดการเรียนรู้/ข้อเสนอแนะสำหรับการจัดการเรียนรู้ครั้งต่อไป)

6.3 ด้านอื่น ๆ (ถ้ามี)

ใบกิจกรรม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น



ในชีวิตประจำวันของมนุษย์เรามักจะเกี่ยวข้องกับการทำนายอนาคตเสมอ ก็คือความน่าจะเป็น ซึ่งการหาความน่าจะเป็น จำเป็นต้องรู้กรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด และการหาจำนวนกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด สำหรับการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันในลักษณะเป็นแถวสามารถคำนวณโดยใช้ การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) เช่น

ในการหาจำนวนวิธีของการเรียงลำดับคน 3 คน คือ A, B, C ทำได้ดังนี้
 ขั้นที่ 1 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งแรก ได้ 3 วิธี (เลือกคนใดคนหนึ่งจาก 3 คน)
 ขั้นที่ 2 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สอง ได้ 2 วิธี (เหลือให้เลือก 2 คน)
 ขั้นที่ 3 เลือกคนมาอยู่ในตำแหน่งที่สาม ได้ 1 วิธี (เหลือให้คนเดียว)
 ดังนั้นจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ในการทำนองเดียวกันถ้ามีคน n คน จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด $n \times (n-1) \times \dots \times 1$ วิธี เราจะเขียนสูตรนี้ในรูป “ $n!$ ” และเรียกว่า “แฟกทอเรียล n ”

ในกรณีของการเรียงลำดับของคน 4 คน ก็จะเป็น $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ วิธี
 ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีคน 5 คน แล้วเลือกออกมาเรียงทีละ 3 คน ลักษณะนี้ก็เป็น การเรียงสับเปลี่ยนเช่นกัน และสามารถคำนวณทำนองเดียวกับที่กล่าวมา

ดังนั้นสรุปได้ว่า วิธีการเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น

คือ การจัดเรียงสิ่งของโดยมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ซึ่งอาจนำมาเพียงบางส่วนหรือนำมาเรียงทั้งหมด โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งของการเรียงสิ่งของเป็นสำคัญ



ให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน เมื่อมีจำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง แล้วเลือก r สิ่งมาเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น แล้วค้นหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้



ห้องสมุดโรงเรียนแห่งหนึ่งมีหนังสือเข้ามาใหม่ 12 เล่มที่แตกต่างกัน นักเรียน 5 คน ต้องการยืมไปอ่านที่บ้าน ซึ่งทางเจ้าหน้าที่ห้องสมุดให้ยืมได้เพียงคนละหนึ่งเล่มเท่านั้น อยากทราบว่า เจ้าหน้าที่ห้องสมุดสามารถจัดหนังสือให้นักเรียน 5 คน ยืมไปอ่านที่บ้านได้ทั้งหมดกี่วิธี



วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น



ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่.....

ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกสิ่งของมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นแถว ในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)

3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าคอตตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและ กระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมด กี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....



3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยื่นเก็บตัวที่ประตูลำดับเลข 1 และ
หมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลข
โดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดง
สินค้า 3 ชั้น ชั้นละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.5 ชุมชนนักคิดศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีกวีวิธี ที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน
จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียง
สับเปลี่ยน (5 คะแนน)

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวน
วิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด และ
จำนวนสิ่งของ r สิ่ง ที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน (4 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบกิจกรรม

วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น



- ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด จำนวนวิธีการจัดหนังสือที่แตกต่างกัน
- ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด (1) ห้องสมุดมีหนังสือ 12 เล่มที่แตกต่างกัน
(2) นักเรียน 5 คน ต้องการยืมไปอ่าน
(3) เจ้าหน้าที่ห้องสมุดให้ยืมได้คนละหนึ่งเล่ม
- ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการหาจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกสิ่งของมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นแถว ในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)
- 3.1 ร้านตัดชุดมีผ้าคอตตอนแท้ 100% นำเข้าจากญี่ปุ่นอยู่ 4 สี ต้องการนำมาตัดเป็นชุดเดรส (เสื้อและกระโปรงติดกัน) ทางร้านจะตัดชุดเดรสที่มีตัวเสื้อและ กระโปรงสีแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี
แนวคิด ขั้นที่ 1 เลือกสีผ้าคอตตอนตัดเป็นเสื้อได้ 4 วิธี
ขั้นที่ 2 เลือกสีผ้าคอตตอนตัดเป็นกระโปรงได้ 3 วิธี
ดังนั้น ตัดชุดเดรสที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $4 \times 3 = 12$ วิธี
- 3.2 จัดคนครั้งละ 2 คน จากคน 5 คน ให้ยืนเก็บตัวที่ประตูหมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี
แนวคิด ขั้นที่ 1 เลือกคนยืนเก็บตัวที่ประตูหมายเลข 1 ได้ 5 วิธี
ขั้นที่ 2 เลือกคนยืนเก็บตัวที่ประตูหมายเลข 2 ได้ 4 วิธี
ดังนั้น จัดคนยืนเก็บตัวที่ประตู ได้ทั้งหมด $5 \times 4 = 20$ วิธี
- 3.3 ในการสร้างจำนวน 3 หลักจากเลขโดด 2, 3, 4, 5, 6 โดยแต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีวิธีสร้างจำนวน 3 หลัก ที่แตกต่างกันกี่วิธี
แนวคิด ขั้นที่ 1 เลือกหลักหน่วยได้ 5 วิธี
ขั้นที่ 2 เลือกหลักสิบได้ 4 วิธี

ชั้นที่ 3 เลือกหลักร้อยได้ 3 วิธี

ดังนั้น สร้างจำนวน 3 หลักที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

3.4 มีโมเดลรถ 7 คันที่แตกต่างกัน ต้องการเลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดง

สินค้า 3 ชั้นๆ ละคัน จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

แนวคิด ชั้นที่ 1 เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่หนึ่งได้ 7 วิธี

ชั้นที่ 2 เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่สองได้ 6 วิธี

ชั้นที่ 3 เลือกโมเดลรถมาวางบนชั้นที่สามได้ 5 วิธี

ดังนั้น เลือกโมเดลรถมาแสดงในตู้แสดงสินค้า 3 ชั้นได้ทั้งหมด

$$7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ วิธี}$$

3.5 ชุมนุมคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ประกอบด้วยสมาชิก

10 คน มีกี่วิธีที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน

รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้

แนวคิด ชั้นที่ 1 เลือกประธานได้ 10 วิธี

ชั้นที่ 2 เลือกรองประธาน ได้ 9 วิธี

ชั้นที่ 3 เลือกเลขานุการได้ 8 วิธี

ชั้นที่ 4 เลือกเหรัญญิกได้ 7 วิธี

ดังนั้น เลือกคณะกรรมการ 4 คน ได้ทั้งหมด $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5,040$ วิธี

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน
จำนวนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของที่นำมาเรียง
สับเปลี่ยน (5 คะแนน)

แนวคิด จากข้อ 3 ข้างต้น สรุปได้ดังนี้

ข้อ	จำนวนสิ่งของที่ แตกต่างกันทั้งหมด	จำนวนสิ่งของที่ นำมาเรียงสับเปลี่ยน	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน (วิธี)
3.1	4	2	$4 \times 3 = 12$
3.2	5	2	$5 \times 4 = 20$
3.3	5	3	$5 \times 4 \times 3 = 60$
3.4	7	3	$7 \times 6 \times 5 = 210$
3.5	10	4	$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5,040$

จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่ได้ข้างต้น สามารถจัดให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล ดังนี้

ข้อ	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน (จัดรูปใหม่)	จัดในรูป แฟกทอเรียล
3.1	$4 \times 3 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$	$\frac{4!}{2!} = \frac{4!}{(4-2)!}$
3.2	$5 \times 4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$	$\frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$
3.3	$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$	$\frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$
3.4	$7 \times 6 \times 5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$	$\frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$
3.5	$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$	$\frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์”แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน จำนวนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด และ จำนวนสิ่งของ r สิ่ง ที่นำมาเรียงสับเปลี่ยน (5 คะแนน)

แนวคิด ให้ n แทน จำนวนของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

r แทน จำนวนสิ่งของที่เลือกมาเรียงสับเปลี่ยน

และ P แทน จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน

จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่ง

ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่ง คือ $P = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี

แนวคิด จากข้อความคาดการณ์ ข้างต้น จะได้ว่า (3 คะแนน)

ข้อ	จำนวนสิ่งของ ที่แตกต่างกันทั้งหมด	จำนวนสิ่งของที่เลือกมา เรียงสับเปลี่ยน	จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน (วิธี)
3.1	4	2	$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$
3.2	5	2	$\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$
3.3	5	3	$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$
3.4	7	3	$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$
3.5	10	4	$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5,040$

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

แนวคิด จากสถานการณ์ปัญหา ได้ว่ามีหนังสือเข้ามาใหม่ 12 เล่มที่แตกต่างกัน

และนักเรียน 5 คน ต้องการยืมไปอ่าน ซึ่งยืมได้คนละหนึ่งเล่ม

นั่นคือ $n=12$ และ $r=5$

จากข้อความคาดการณ์ของจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ข้างต้น

$$\text{จะได้ว่า } \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95,040$$

ดังนั้น เจ้าหน้าที่สามารถจัดหนังสือให้นักเรียน 5 คน

ยืมไปอ่านที่บ้านได้ 95,040 วิธี

ใบตรวจสอบความรู้

เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น

ชื่อ..... ชั้น เลขที่ กลุ่มที่.....

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น หมายถึงอะไร

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2 จงยกตัวอย่างสถานการณ์จริง ที่ใช้วิธีการเรียงสับเปลี่ยนในการแก้ปัญหา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 จงหาจำนวนวิธีในการเรียงลำดับตัวอักษร 3 ตัว จากคำว่า COMPUTER โดยไม่ต้องคำนึงถึงความหมาย

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบตรวจสอบความรู้

เรื่อง แนวคิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น

ให้นักเรียนแต่ละคนเขียนคำตอบของตนในแต่ละข้อคำถามต่อไปนี้

ข้อ 1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบเชิงเส้น หมายถึงอะไร

แนวคำตอบ การจัดเรียงสิ่งของโดยมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้งซึ่งอาจนำมาเพียงบางส่วนหรือนำมาเรียงทั้งหมด โดยคำนึงถึงลำดับหรือตำแหน่งของการเรียงสิ่งของเป็นสำคัญ

ข้อ 2 จงยกตัวอย่างสถานการณ์จริง ที่ใช้วิธีการเรียงสับเปลี่ยนในการแก้ปัญหา

แนวคำตอบ

1. การเลือกหัวหน้าห้อง รองหัวหน้าห้อง จากห้องเรียนห้องหนึ่ง
2. การเลือกประธานนักเรียน รองประธานนักเรียน เสรฐัญญิก จากโรงเรียนแห่งหนึ่ง
3. การเลือกตัวแทนถือพานไหว้ครู
4. การซื้อข้าวราดแกง 2 อย่างจากร้านขายข้าวแกงที่โรงเรียน

ข้อ 3 จงหาจำนวนวิธีในการเรียงลำดับตัวอักษร 3 ตัว จากคำว่า COMPUTER

โดยไม่ต้องคำนึงถึงความหมาย

แนวคำตอบ จากสถานการณ์ปัญหาจะได้ว่า

สิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดมี 8 สิ่ง

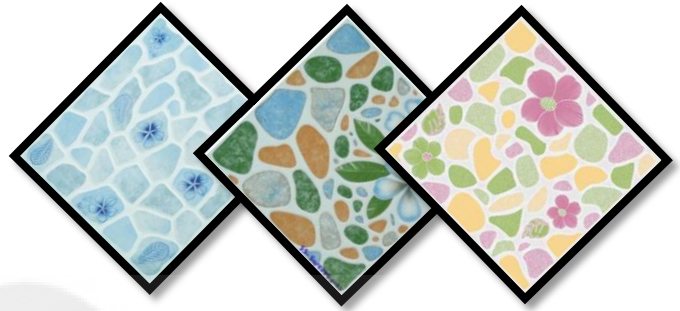
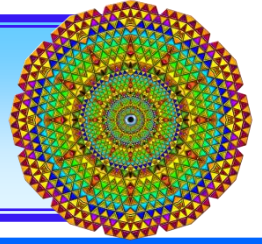
สิ่งของที่นำมาเรียงสับเปลี่ยนมี 3 สิ่ง

นั่นคือ $n=8$ และ $r=3$

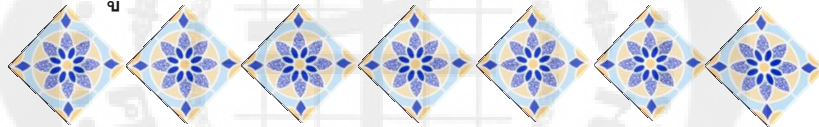
จะได้ว่า
$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 = 6,720 \text{ วิธี}$$

ภาคผนวก ง
ตัวอย่าง แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

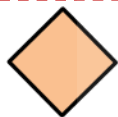
แบบทดสอบ ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ



ปัจจุบันไม่ว่าจะบ้าน อาคาร หรือสถานที่ต่าง ๆ มักจะปูพื้นห้องด้วยกระเบื้อง ซึ่งเป็นเพราะว่ามีลวดลายที่สวยงามมากมายให้เลือก ทำความสะอาดง่าย หรือราคาถูก เมื่อเทียบกับการปูพื้นด้วยไม้หรือหิน นอกจากการปูพื้นห้องแล้วกระเบื้องยังสามารถนำมาปูผนังห้อง โต๊ะ เก้าอี้ โดยมีการนำเอากระเบื้องหลายขนาดหลายสีมาปูต่อกันในลักษณะต่าง ๆ ที่ทำให้ดูสวยงามแปลกตายิ่งขึ้น



หมากเปิดร้านทำโต๊ะที่บนโต๊ะปูด้วยกระเบื้องขนาดเล็ก ซึ่งที่ร้านจะมีกระเบื้องเล็ก ๆ ที่มีความยาวของเส้นทแยงมุมเป็น 1 นิ้ว ดังภาพตัวอย่างข้างล่างนี้



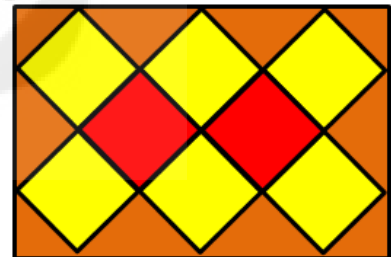
แทนกระเบื้อง 1 แผ่น



แทนกระเบื้องครึ่งแผ่น



แทน 1 ใน 4 ส่วนของกระเบื้อง 1 แผ่น



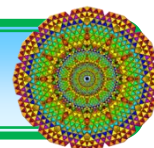
โต๊ะกว้าง 2 นิ้ว ยาว 3 นิ้ว

เมื่อมีลูกค้าคนหนึ่งเข้ามาสั่งให้หมากทำโต๊ะ 1 ตัว โดยลูกค้าต้องการโต๊ะที่มีลักษณะดังนี้

1. โต๊ะที่มีพื้นโต๊ะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านละ 35 นิ้ว
2. บนพื้นโต๊ะปูด้วยกระเบื้องสีล้วนจนเต็มพื้นโต๊ะ
3. การปูกระเบื้องมีลักษณะเหมือนภาพตัวอย่างข้างต้น

อยากทราบว่า หมากต้องใช้กระเบื้องปูบนโต๊ะทั้งหมด กี่แผ่น

ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ



ชื่อ..... ชั้น เลขที่

ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ โดยที่ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ แตกต่างกันดังกรณีต่อไปนี้ (5 คะแนน)

3.1 กรณีที่ 1 โต๊ะมีขนาดความยาวด้านละ 1 นิ้ว

3.2 กรณีที่ 2 โต๊ะมีขนาดความยาวด้านละ 2 นิ้ว

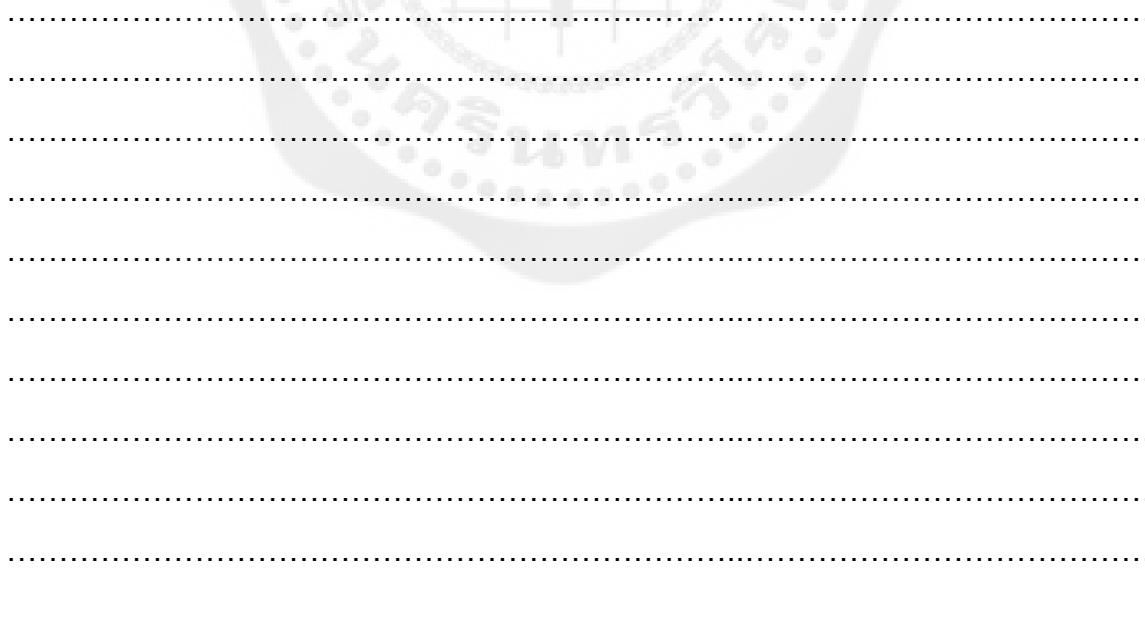
3.3 กรณีที่ 3 โต๊ะมีขนาดความยาวด้านละ 3 นิ้ว

3.4 กรณีที่ 4 โต๊ะมีขนาดความยาวด้านละ 4 นิ้ว

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวน
กระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ และ ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ
ที่ยาวด้านละ n นิ้ว (4 คะแนน)

[illegible]

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)



ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

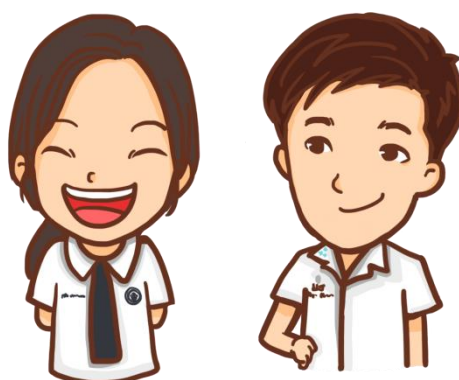
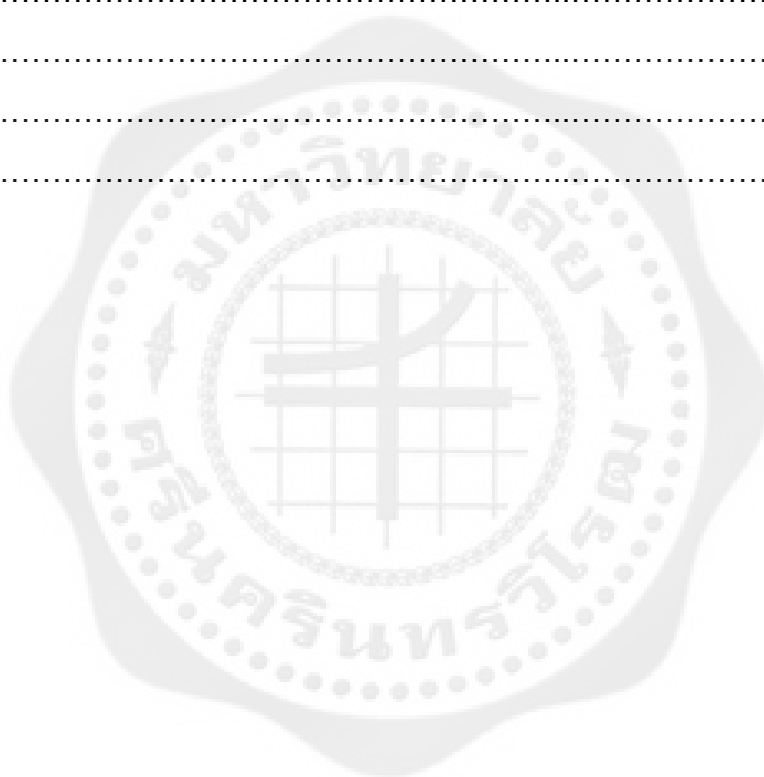
.....

.....

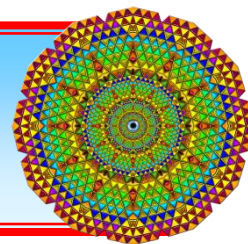
.....

.....

.....



เฉลยแบบทดสอบ ค้นหาจำนวนกระเบื้องปูโต๊ะ



- ข้อ 1 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ
- ข้อ 2 สิ่งที่สามารถแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด (1) กระเบื้องมีความยาวของเส้นทแยงมุม 1 นิ้ว
 (2) กระเบื้องที่ต้องใช้ปูมี 3 ลักษณะ
 (3) ปูกระเบื้องบนโต๊ะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านละ 35 นิ้ว
- ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ โดยที่ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ แตกต่างกันดังกรณีต่อไปนี้ (5 คะแนน)
แนวคิด กำหนดให้
 กระเบื้องสีเขียว แทนกระเบื้อง 1 แผ่น
 กระเบื้องสีชมพู แทนกระเบื้องครึ่งแผ่น
 กระเบื้องสีเหลือง แทน 1 ใน 4 ส่วนของกระเบื้อง 1 แผ่น

3.1 กรณีที่ 1 โต๊ะมีความยาวด้านละ 1 นิ้ว

แนวคิด



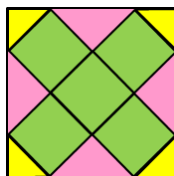
จากภาพ กระเบื้องสีเขียวมีจำนวนทั้งหมด 1 แผ่น

กระเบื้องสีเหลืองมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{4} = 1$ แผ่น

ดังนั้น ใช้จำนวนกระเบื้องทั้งหมด $1 + 1 = 2$ แผ่น

3.2 กรณีที่ 2 โต๊ะมีความยาวด้านละ 2 นิ้ว

แนวคิด



จากภาพ กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวนทั้งหมด 5 แผ่น

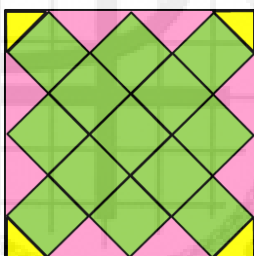
กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{4} = 1$ แผ่น

กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{2} = 2$ แผ่น

ดังนั้น ใช้จำนวนกระเบื้องทั้งหมด $5 + 1 + 2 = 8$ แผ่น

3.3 กรณีที่ 3 โต๊ะมีความยาวด้านละ 3 นิ้ว

แนวคิด



จากภาพ กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวนทั้งหมด 13 แผ่น

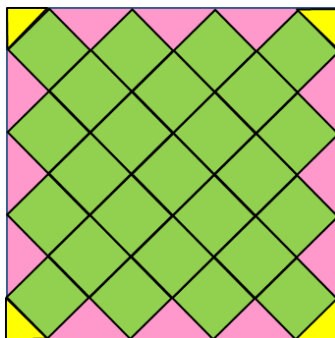
กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{4} = 1$ แผ่น

กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 8 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{8}{2} = 4$ แผ่น

ดังนั้น ใช้จำนวนกระเบื้องทั้งหมด $13 + 1 + 4 = 18$ แผ่น

3.4 กรณีที่ 4 โต๊ะมีความยาวด้านละ 4 นิ้ว

แนวคิด



จากภาพ กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวนทั้งหมด 25 แผ่น

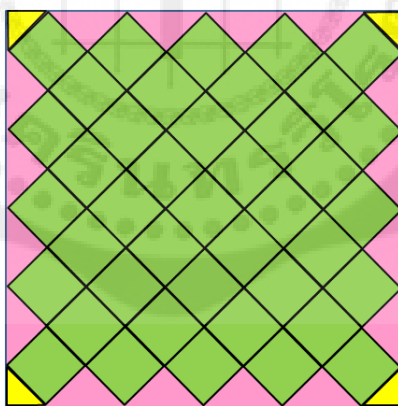
กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{4} = 1$ แผ่น

กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 12 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{12}{2} = 6$ แผ่น

ดังนั้น ใช้จำนวนกระเบื้องทั้งหมด $25 + 1 + 6 = 32$ แผ่น

3.5 กรณีที่ 5 โต๊ะมีความยาวด้านละ 5 นิ้ว

แนวคิด



จากภาพ กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวนทั้งหมด 41 แผ่น

กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 4 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{4}{4} = 1$ แผ่น

กระเบื้องสี่เหลี่ยมมีจำนวน 16 ชิ้น หรือเท่ากับ $\frac{16}{2} = 8$ แผ่น

ดังนั้น ใช้จำนวนกระเบื้องทั้งหมด $41 + 1 + 8 = 50$ แผ่น

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้น
โต๊ะ และ ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ (5 คะแนน)

แนวคิด จากข้อ 3 สังเกตได้ว่าจำนวนกระเบื้องสีเหลืองในทุกกรณี
จะมีจำนวน 1 แผ่น ส่วนจำนวนแผ่นกระเบื้องสีชมพูในแต่ละกรณีสามารถสรุป
ความสัมพันธ์ได้ ดังตารางต่อไปนี้

กรณี	ความยาวแต่ละด้าน ของโต๊ะ (นิ้ว)	จำนวนกระเบื้อง สีเหลือง (แผ่น)	จำนวนกระเบื้อง สีชมพู (แผ่น)
1	1	1	$0 = 2(0) = 2(1-1)$
2	2	1	$2 = 2(1) = 2(2-1)$
3	3	1	$4 = 2(2) = 2(3-1)$
4	4	1	$6 = 2(3) = 2(4-1)$
5	5	1	$8 = 2(4) = 2(5-1)$

ส่วนความสัมพันธ์ของจำนวนกระเบื้องสีเขียวสังเกตได้จาก



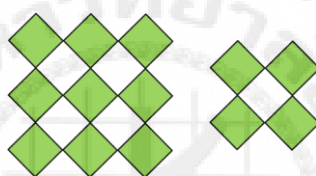
แนวคิด1 จากภาพ พิจารณาจำนวนกระเบื้องสีเขียวเป็นแถว

กรณีที่	จำนวนกระเบื้องสีเขียวแต่ละแถวรวมกัน
1	$1 = 0(0) + 1(1) = 1$
2	$2 + 1 + 2 = 1(1) + 2(2) = 5$
3	$3 + 2 + 3 + 2 + 3 = 2(2) + 3(3) = 13$
4	$4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 3(3) + 4(4) = 25$
5	$5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 = 4(4) + 5(5) = 41$

จากแนวคิด1 จะได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนกระเบื้องทั้งหมด ที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ และ ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ ดังนี้

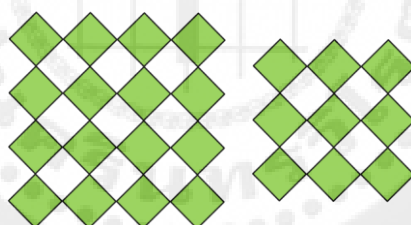
กรณี	ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ (นิ้ว)	จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ (แผ่น)
1	1	$2 = 1 + 2(1-1) + 0(0) + 1(1)$
2	2	$8 = 1 + 2(2-1) + 1(1) + 2(2)$
3	3	$18 = 1 + 2(3-1) + 2(2) + 3(3)$
4	4	$32 = 1 + 2(4-1) + 3(3) + 4(4)$
5	5	$50 = 1 + 2(5-1) + 4(4) + 5(5)$

แนวคิด2 พิจารณาจำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยมโดยแยกออกเป็นสองรูป ตัวอย่างเช่น กรณีที่ 3



มีจำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยมทั้งหมด $3^2 + 2^2 = 13$ แผ่น

กรณีที่ 4



มีจำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยมทั้งหมด $4^2 + 3^2 = 25$ แผ่น

จากแนวคิดนี้ในแต่ละกรณีสามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ ดังตารางต่อไปนี้

กรณีที่	จำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม (แผ่น)
1	$1^2 + 0^2 = 1$
2	$2^2 + 1^2 = 5$
3	$3^2 + 2^2 = 13$
4	$4^2 + 3^2 = 25$
5	$5^2 + 4^2 = 41$

จากแนวคิด 2 จะได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ และ ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ ดังนี้

กรณี	ความยาวแต่ละด้าน ของโต๊ะ (นิ้ว)	จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ (แผ่น)
1	1	$2 = 1 + 2(1 - 1) + (1^2 + 0^2)$
2	2	$8 = 1 + 2(2 - 1) + (2^2 + 1^2)$
3	3	$18 = 1 + 2(3 - 1) + (3^2 + 2^2)$
4	4	$32 = 1 + 2(4 - 1) + (4^2 + 3^2)$
5	5	$50 = 1 + 2(5 - 1) + (5^2 + 4^2)$

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ และ ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะที่ยาวด้านละ n นิ้ว (4 คะแนน)

แนวคิด ให้ T แทน จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ

และ n แทน ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ

และจำนวนกระเบื้องทั้งหมด คือผลรวมของจำนวนกระเบื้องทั้ง 3 สี

ซึ่งจะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องสีชมพู คือ $2(n-1)$ แผ่น

และ จำนวนกระเบื้องสีเหลือง คือ 1 แผ่น

จากแนวคิด 1 จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องสีเขียว คือ

$$(n-1)(n-1) + n(n) \text{ แผ่น}$$

ดังนั้น จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ

$$\text{คือ } T = [(n-1)(n-1) + n(n)] + 2(n-1) + 1$$

$$= [(n^2 - 2n + 1) + n^2] + (2n - 2) + 1$$

$$= n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n - 2 + 1$$

$$= 2n^2$$

จากแนวคิด 2 จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องสี่เหลี่ยม คือ

$$n^2 + (n-1)^2 \text{ แผ่น}$$

ดังนั้น จะได้ข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ

$$\begin{aligned} \text{คือ } T &= [n^2 + (n-1)]^2 + 2(n-1) + 1 \\ &= [(n^2 + (n^2 - 2n + 1))] + (2n - 2) + 1 \\ &= n^2 + n^2 - 2n + 1 + 2n - 2 + 1 \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี (3 คะแนน)

แนวคิด จากข้อความคาดการณ์ ข้างต้น

กรณีที่	ความยาวแต่ละด้านของโต๊ะ (นิ้ว)	จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปู บนพื้นโต๊ะ (แผ่น)
1	1	$2(1)^2 = 2(1) = 2$
2	2	$2(2)^2 = 2(4) = 8$
3	3	$2(3)^2 = 2(9) = 18$
4	4	$2(4)^2 = 2(16) = 32$
5	5	$2(5)^2 = 2(25) = 50$

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

แนวคิด จากสถานการณ์ปัญหา

ต้องการปูกระเบื้องบนโต๊ะที่มีความยาวแต่ละด้านของโต๊ะยาวด้านละ 35 นิ้ว
นั่นคือ $n = 35$

จากข้อความคาดการณ์ของจำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ

$$\begin{aligned} \text{คือ } T &= 2(35)^2 \\ &= 2(1,225) \\ &= 2,450 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนกระเบื้องทั้งหมดที่ใช้ปูบนพื้นโต๊ะ คือ 2,450 แผ่น

แบบทดสอบ

บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง



การทำความสะอาดกระจกในที่สูง หรืออาคารสูง มักประสบความยากลำบาก ต่อการทำความสะอาด ในปัจจุบันนี้จึงมีหลายบริษัทที่รับบริการเช็ดทำความสะอาด กระจกอาคารสูง (High Rise Window Cleaning Service) เช่น กระจกของโรงแรม, อาคาร, คอนโดมีเนียม, ศูนย์การค้า, มหาวิทยาลัย และสำนักงานต่าง ๆ

การทำความสะอาดกระจกอาคารสูง เป็นการบำรุงรักษาอาคารเชิงป้องกัน เพื่อ ดูแลรักษากระจกให้อยู่ในสภาพดีอยู่เสมอ โดยส่วนใหญ่ ควรได้รับการบริการการเช็ดทำความสะอาดกระจกอาคารสูง อย่างน้อยปีละ 2 ครั้ง ไม่เช่นนั้นคราบสกปรกจะฝังแน่นลง ไปในเนื้อกระจก จนไม่สามารถทำความสะอาดออกได้ซึ่งการทำความสะอาดแบบนี้จะ ช่วยในการขจัดคราบฝุ่น คราบน้ำ เหม่า คราบหินปูน หรือตะกรัน ต่างๆ ที่เกาะอยู่บนผิว กระจก



คอนโดมีเนียมหรรแห่งหนึ่งในกรุงเทพฯ ในแต่ละปีจะใช้บริการบริษัทไทยคลีน ให้ทำความสะอาดหน้าต่างกระจก ซึ่งมี 77 ชั้น แต่ละชั้นมี หน้าต่าง 50 บาน ทางบริษัทไทยคลีน คิด ค่าบริการชั้นแรกหน้าต่างกระจกบานละ 2 บาท และชั้นถัดไปจะคิด เพิ่มขึ้นชั้นละ 2 บาท

อยากทราบว่า คอนโดมีเนียมหรรแห่งนี้จะต้องจ่ายเงินทั้งหมด ให้บริษัทไทยคลีน กี่บาท



บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง



ชื่อ..... ชั้น เลขที่

ข้อ 1 สิ่งที่คุณสังเกตเห็นปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 2 สิ่งที่คุณสังเกตเห็นปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการทำสะอาดหน้าต่างกระจกของ
คอนโดมิเนียมที่มีจำนวนชั้นในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)

3.1 คอนโดมิเนียมมี 1 ชั้น

3.2 คอนโดมิเนียมมี 2 ชั้น



3.3 คอนโดมิเนียมมี 3 ชั้น

3.4 คอนโดมิเนียมมี 4 ชั้น

3.5 หน้าต่างกระจกของชั้นที่ 5

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าใช้จ่ายทั้งหมด และ จำนวนชั้นของ คอนโดมิเนียม (5 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์”แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าใช้จ่าย
ทั้งหมด และ จำนวน n ชั้น ของคอนโดมิเนียม (4 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี
(3 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

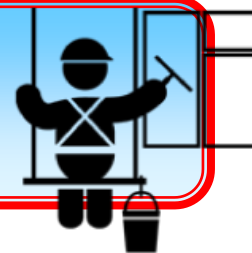
.....

.....



เฉลยแบบทดสอบ

บริการทำความสะอาดกระจกอาคารสูง



- ข้อ 1 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด ค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกของคอนโดมิเนียม
- ข้อ 2 สิ่งที่สถานการณ์ปัญหากำหนดมาให้ มีอะไรบ้าง (1 คะแนน)
แนวคิด (1) คอนโดมิเนียม มี 77 ชั้น แต่ละชั้นมีหน้าต่าง 50 บาน
 (2) บริษัทไทยคลีน คิดค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกชั้นแรกบานละ 2 บาท และชั้นถัดไปจะคิดเพิ่มขึ้นชั้นละ 2 บาท
- ข้อ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกของคอนโดมิเนียมที่มีจำนวนชั้นในแต่ละกรณี ดังนี้ (5 คะแนน)
- 3.1 คอนโดมิเนียมมี 1 ชั้น
แนวคิด ค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกชั้นที่ 1 บานละ 2 บาท
 ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $50 \times 2 = 100$ บาท
- 3.2 คอนโดมิเนียมมี 2 ชั้น
แนวคิด ค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกชั้นที่ 2 บานละ 4 บาท
 ค่าใช้จ่ายชั้นที่ 2 ทั้งหมด คือ $50 \times 4 = 200$ บาท
 ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $100 + 200 = 300$ บาท
- 3.3 คอนโดมิเนียมมี 3 ชั้น
แนวคิด ค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกชั้นที่ 3 บานละ 6 บาท
 ค่าใช้จ่ายชั้นที่ 3 ทั้งหมด คือ $50 \times 6 = 300$ บาท
 ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $100 + 200 + 300 = 600$ บาท
- 3.4 คอนโดมิเนียมมี 4 ชั้น
แนวคิด ค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกชั้นที่ 4 บานละ 8 บาท
 ค่าใช้จ่ายชั้นที่ 4 ทั้งหมด คือ $50 \times 8 = 400$ บาท
 ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $100 + 200 + 300 + 400 = 1,000$ บาท

3.5 หน้าต่างกระจกของชั้นที่ 5

แนวคิด ค่าบริการทำความสะอาดหน้าต่างกระจกบานละ 10 บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $50 \times 10 = 500$ บาท

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $100 + 200 + 300 + 400 + 500 = 1,500$ บาท

ข้อ 4 ให้นักเรียนอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าใช้จ่ายทั้งหมด และ จำนวนชั้นของ คอนโดมิเนียม (5 คะแนน)

แนวคิด จากข้อ 3 ค่าใช้จ่ายทั้งหมด มีความสัมพันธ์กับจำนวนชั้น ดังนี้

จำนวนชั้น	ค่าใช้จ่ายทั้งหมด (บาท)
1	100
2	$100 + 200 = 100[1 + 2]$
3	$100 + 200 + 300 = 100[1 + 2 + 3]$
4	$100 + 200 + 300 + 400 = 100[1 + 2 + 3 + 4]$
5	$100 + 200 + 300 + 400 + 500 = 100[1 + 2 + 3 + 4 + 5]$

ข้อ 5 ให้นักเรียนเขียน “ข้อความคาดการณ์” แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าใช้จ่ายทั้งหมด และ จำนวน n ชั้น ของคอนโดมิเนียม (4 คะแนน)

แนวคิด ให้ n แทน จำนวนชั้นของคอนโดมิเนียม

และ P แทน ค่าใช้จ่ายทั้งหมด

จะได้ข้อความคาดการณ์ของของค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ

$$P = 100(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$$

$$P = 100\left[\frac{n}{2}(1 + n)\right]$$

$$P = 50[n(1 + n)] \text{ บาท}$$

ข้อ 6 ให้นักเรียนแสดงการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ที่ได้อย่างน้อย 3 กรณี (3 คะแนน)

แนวคิด จากข้อความคาดการณ์ ข้างต้น

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด ของคอนโดมิเนียมมี 1 ชั้น คือ $50[1(1+1)] = 100$ บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด ของคอนโดมิเนียมมี 2 ชั้น คือ $50[2(1+2)] = 300$ บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด ของคอนโดมิเนียมมี 3 ชั้น คือ $50[3(1+3)] = 600$ บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด ของคอนโดมิเนียมมี 4 ชั้น คือ $50[4(1+4)] = 1,000$ บาท

ค่าใช้จ่ายทั้งหมด ของคอนโดมิเนียมมี 5 ชั้น คือ $50[5(1+5)] = 1,500$ บาท

ข้อ 7 ให้นักเรียนแสดงวิธีหาสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการ (1 คะแนน)

แนวคิด จากสถานการณ์ปัญหา

คอนโดมิเนียมที่มี 77 ชั้น

นั่นคือ $n = 77$

จากข้อความคาดการณ์ของค่าใช้จ่ายทั้งหมด ดังข้างต้น จะได้ว่า

$$50[77(1+77)] = 300,300$$

ดังนั้น ค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการทำความสะดวกหน้าต่างกระจกของ

คอนโดมิเนียม คือ 300,300 บาท





ภาคผนวก จ

แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

แบบสังเกตพฤติกรรม การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ชื่อกิจกรรม _____ วันที่ _____

ชื่อนักเรียน 1. _____ กลุ่มที่ _____

2. _____ กลุ่มที่ _____

3. _____ กลุ่มที่ _____

4. _____ กลุ่มที่ _____

พฤติกรรม การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย		นักเรียนคนที่				ข้อสังเกตเพิ่มเติม (ถ้ามี)
		1	2	3	4	
1	มีความกระตือรือร้น ในการทำความเข้าใจปัญหา					
2	มีการขีดเขียน / วาดรูปประกอบ ขณะทำความเข้าใจปัญหา					
3	ระบุสิ่งที่สถานการณ์ปัญหาต้องการหาได้อย่างถูกต้อง					
4	ระบุข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง					
5	สามารถนำความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องมาใช้ได้					
6	มีความกระตือรือร้นในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูล					
7	ระบุความสัมพันธ์ของข้อมูล					
8	สร้างข้อความคาดการณ์ได้					
9	เขียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์					
10	มีความพยายามในการค้นหาผลเฉลย					
11	เขียนผลเฉลยของปัญหาได้					
12	หาคำตอบของปัญหาได้					
13	มีความพยายามอธิบายและนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา					
14	มีความพยายามอธิบายและนำเสนอความสัมพันธ์ของข้อมูล					
15	มีความพยายามอธิบายและนำเสนอข้อความคาดการณ์					
16	มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของกลุ่ม					
17	มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปราย ของกลุ่ม					
18	มีส่วนร่วมและรับผิดชอบในการอภิปราย หน้าที่					

การให้คะแนน 0 → ไม่มี 1 → มีน้อย 2 → มีมาก

แบบสังเกตพฤติกรรม การแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ชื่อกิจกรรม _____ วันที่ _____

ชื่อนักเรียน _____ (นักเรียนเป้าหมาย) กลุ่มที่ _____

พฤติกรรมการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. การทำความเข้าใจปัญหา

(ระบุ สิ่งที่ต้องการหา / ข้อมูลและเงื่อนไขของสถานการณ์ / เข้าใจสถานการณ์ปัญหา)

2. การค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์

(ความสัมพันธ์ของข้อมูลในแต่ละกรณีเฉพาะ และความสัมพันธ์ของข้อมูลแต่ละกรณีร่วมกัน)

3. การเขียนข้อความคาดการณ์

(เขียนอธิบายข้อสรุปที่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่เป็นกรณีทั่วไป)

4. การตรวจสอบข้อความคาดการณ์ และการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา

(เขียนตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์ และนำข้อความคาดการณ์ไปหาคำตอบ)

5. การมีส่วนร่วม รับผิดชอบงาน และอื่น ๆ

(มีความสนใจ / มีความพยายาม / กระตือรือร้น / ข้อซักถาม / แลกเปลี่ยนแนวคิด)

ภาคผนวก จ
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ซึ่งได้แก่ (1) กิจกรรมการเรียนการสอนที่เสริมสร้างความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย (2) แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย และ (3) แบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลแบบอุปนัย มีดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทรงชัย อักษรคิด
ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ขวัญ เพี้ยซ้าย
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์ธีรเชษฐ์ เรืองสุขอนันต์
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร (ฝ่ายมัธยม)





ประวัตย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวมณฑนา ศรีสุจันทร์
วันเดือนปีเกิด	3 พฤษภาคม 2527
สถานที่เกิด	อำเภอโพธาราม จังหวัดหนองคาย
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	343 หมู่ 6 ตำบลรัตนวาปี อำเภอรัตนวาปี จังหวัดหนองคาย 43120
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	ครู คศ.1 โรงเรียนชุมพลโพธาราม
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2545	มัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนอุดรพิทยานุกูล จังหวัดอุดรธานี
พ.ศ. 2549	วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น
พ.ศ. 2550	ประกาศนียบัตรวิชาชีพครู จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น
พ.ศ. 2560	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



ประวัตย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล นางสาวมณฑนา ศรีสุจันทร์
 วันเดือนปีเกิด 3 พฤษภาคม 2527
 สถานที่เกิด อำเภอโพธาราม จังหวัดหนองคาย
 สถานที่อยู่ปัจจุบัน 343 หมู่ 6 ตำบลรัตนวาปี อำเภอรัตนวาปี
 จังหวัดหนองคาย 43120
 ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน ครู คศ.1 โรงเรียนชุมชนพลโพธาราม
 ประวัติการศึกษา
 พ.ศ. 2545 มัธยมศึกษาปีที่ 6
 จากโรงเรียนอุดรพิทยานุกูล จังหวัดอุดรธานี
 พ.ศ. 2549 วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
 จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น
 พ.ศ. 2550 ประกาศนียบัตรวิชาชีพครู
 จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น
 พ.ศ. 2560 การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
 จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ