

การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซตและความสัมพันธ์
แกนนิตชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
โดยไชยทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

มานพ ชัยภิเษก

พหุศาสตรบัณฑิต

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

11 มีนาคม 2519

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิติได้พิจารณาปฏิญานในระดับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

ศิริพร ประธาน
กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้เพราะผู้เขียนได้รับคำแนะนำ และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก อาจารย์ ดร.ลาวัณย์ พลกลา และรองศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา ในการวางแผนงานการทดลอง การสร้างบทเรียนโปรแกรม การสร้างแบบทดสอบ การวิเคราะห์ข้อมูล ตลอดจนแนะนำในการเขียนปริญญานิพนธ์

อาจารย์สมพล กลิ่นนาค ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ และอำนวยความสะดวกทุกประการในการดำเนินการทดลอง

อาจารย์ปรีดิ์ ฉิมแจ่ม ที่ได้ให้ความช่วยเหลือในการทดลองใช้บทเรียนโปรแกรม และในการสร้างแบบทดสอบ

ผู้เขียนมีความซาบซึ้งในความกรุณาของผู้ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ขอกราบขอบพระคุณ และขอขอบคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

มานพ ชัยศิริเรก

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการศึกษากันกว่า	5
	สมมุติฐานของการศึกษากันกว่า	5
	ความสำคัญของการศึกษากันกว่า	5
	ข้อตกลงเบื้องต้น	5
	ขอบเขตของการศึกษากันกว่า	6
	นิยามศัพท์เฉพาะ	6
2	เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
	ลักษณะของการสอนแบบโปรแกรม	7
	ข้อดีของการสอนแบบโปรแกรม	8
	ข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรม	9
	การวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปกติ	12
	การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ	12
	การทดลองการสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลดีกว่าการสอนปกติ	13
	การทดลองการสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลด้อยกว่าการสอนปกติ	18
	การวิจัยการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย	18

3	วิธีดำเนินการทดลอง และวิเคราะห์ข้อมูล	21
	กลุ่มตัวอย่าง	21
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	21
	วิธีดำเนินการทดลอง	23
	การวิเคราะห์ข้อมูล	23
4	การวิเคราะห์ข้อมูลและผลการทดลอง	25
	การวิเคราะห์ข้อมูล	25
	สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	27
	ผลการทดลอง	27
5	สรุปอภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	29
	ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	29
	สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า	29
	วิธีดำเนินการวิจัย	29
	ผลการทดลอง	31
	อภิปรายผล	31
	ข้อเสนอแนะทั่วไป	32
	ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป	33
	บรรณานุกรม	34
	ภาคผนวก	40
	ภาคผนวก ก.	41
	ภาคผนวก ข.	45
	ภาคผนวก ค.	62

บัญชีตาราง

๑

ตาราง		หน้า
1	แสดงผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบนิเวศ ในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม	27
2	แสดงการหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มทดลอง	42
3	แสดงการหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มควบคุม	43
4	แสดงค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของ แบบทดสอบ	46
5	แสดงการหาค่าความแปรปรวนของคะแนนทดสอบจากสถิติทั้งหมด	48
6	แสดงค่า p , q และ Σpq ของแบบทดสอบ	49

บทนำ

การจัดการศึกษานับว่าเป็นปัจจัยสำคัญในการพัฒนาประเทศ โดยที่การศึกษาสามารถช่วยพัฒนาประชากรของประเทศให้มีประสิทธิภาพที่จะทำใหเศรษฐกิจและสังคมดีขึ้น ดังนั้นประเทศต่าง ๆ จึงพยายามจัดและส่งเสริมการศึกษาควบคู่ไปกับการพัฒนาประเทศด้านอื่น ๆ

การจัดการศึกษาในปัจจุบันต้องประสบกับปัญหาต่าง ๆ มากมาย เป็นต้นว่า การเพิ่มของจำนวนประชากรอย่างรวดเร็ว จำนวนครูไม่พอเพียง งบประมาณทางการศึกษาที่จำนวนจำกัด ความต้องการการศึกษาในชั้นสูง ๆ เพิ่มมากขึ้น รวมทั้งความเจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วทางวิทยาการต่าง ๆ (Hartley, 1972 : 1) จึงทำให้เกิดปัญหาว่าจะวัดกระบวนการเรียนการสอนอย่างไร มีวิธีหรือเครื่องมืออะไรที่จะช่วยแก้สถานการณ์เหล่านี้ได้ นักการศึกษา นักจิตวิทยา และนักวิชาการทางสังคมศาสตร์ กำลังศึกษากระบวนการเรียนการสอนซึ่งต้องใช้อุปกรณ์และเครื่องมือต่าง ๆ ให้มีประสิทธิภาพ และประสิทธิผลที่สุดเท่าที่จะทำได้ (เว็ชชี จงกล, 2510 : 248) เมื่อเป็นเช่นนี้จึงมีความจำเป็นที่จะต้องนำเทคโนโลยีและแนวคิดใหม่ ๆ มาใช้ในการจัดการศึกษาตามความเหมาะสม เพื่อแก้ปัญหาและปรับปรุงกระบวนการเรียนการสอนให้ประสิทธิภาพยิ่งขึ้น กระบวนการเรียนการสอนอันหนึ่งที่มีการศึกษาได้คิดขึ้นก็คือ การสอนแบบโปรแกรม

การสอนแบบโปรแกรม (Programmed Instruction) เป็นเทคนิคการสอนแบบหนึ่ง ซึ่งสามารถนำมาใช้ช่วยแก้ปัญหการศึกษาได้ การสอนแบบนี้กำเนิดครั้งแรกในสหรัฐอเมริกา เมื่อ พ.ศ. 2463 แต่ได้นำมาใช้แก้ปัญหการศึกษาแคลงครู และสถานที่เรียนในปี พ.ศ. 2505 เป็นต้นมา และได้แพร่หลายไปยังประเทศต่าง ๆ เช่น อังกฤษ ญี่ปุ่น เยอรมัน ฝรั่งเศส สแกนดิเนเวีย โซเวียตรัสเซีย ไนจีเรีย จอร์แดน เอธิโอเปีย และบราซิล ในระหว่างปี พ.ศ. 2505 - 2506 เฉพาะในประเทศญี่ปุ่นมีโปรแกรมขึ้น ๆ

มากกว่า 1000 โปรแกรม ซึ่งเป็นผู้เขียนขึ้น นอกจากนี้ เอซีโอเอบี ได้นำวิธีนี้ไปใช้สอน
 วิชาภาษาอังกฤษ และบรรษัทได้นำเอาวิธีการนี้ไปใช้เป็นส่วนหนึ่งในการปรับปรุงหลักสูตร
 วิทยาศาสตร์ (Fund for the advancement of Education, 1969 : 9) และจาก
 การสำรวจขององค์การศึกษา ฯ สหประชาชาติ พบว่า ประเทศที่ใช้วิธีการสอนแบบโปรแกรม
 ช่วยแก้ปัญหาการศึกษาแคลงคร เมื่อ พ.ศ. 2505 คือ แอลจีเรีย ซึ่งได้สร้างแบบเรียนสำเร็จรูป
 วิชาคำนวณชั้น 3 เล่ม ให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง แล้วพบทวนอธิบายรายละเอียดของบทเรียน
 ภายหลังทันที ซึ่งปรากฏว่าโดยเฉลี่ย สำหรับในอังกฤษและสหรัฐ ได้มีการทดลองใช้การสอน
 แบบโปรแกรมแพร่หลายมากที่สุด โดยได้การจัดตั้งหน่วยงานสำหรับวิจัยค้นคว้า เผยแพร่การ
 สอนแบบโปรแกรมโดยเฉพาะขึ้น และมีหน่วยงานอื่น ๆ สนใจทดลองการสอนแบบนี้เช่นกัน
 หลังจากปี พ.ศ. 2505 เป็นต้นมา วัสดุการสอนแบบโปรแกรมได้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และ
 มีหลายสาขาวิชา ดังนั้น กระทรวงศึกษาธิการสหรัฐ ได้มอบหมายให้ Center for
 Programmed Instruction ดำรวจวัสดุการสอนแบบโปรแกรมที่ผลิตขึ้นในแต่ละปี ซึ่งมี
 ทั้งแบบเรียนสำเร็จรูป และเครื่องสอน และจัดทำหนังสือคู่มือแนะนำวัสดุการสอนแบบโปรแกรม
 อย่างละเอียด เพื่อช่วยให้นักการศึกษาได้เลือกใช้สะดวก และเหมาะสมกับความต้องการ
 นอกจากนี้ยังได้รับความร่วมมือจากคณะกรรมการของ American Educational Research
 Association, American Psychological Association และ Department of
 Audiovisual Instruction of the national Education Association โดย
 เขียนบทความเกี่ยวกับเกณฑ์การเลือกใช้วัสดุการสอนแบบโปรแกรม (Hanson, 1963 : V)

จากการสำรวจของ Center for Programmed Instruction ในปี พ.ศ.
 2504 - 2505 ในโรงเรียนสหรัฐ พบว่าการสอนแบบโปรแกรมใช้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
 (เกรด 7, 8, 9) มากกว่าระดับประถมศึกษา หรือมัธยมศึกษาตอนปลาย และมักใช้กับวิชา
 คณิตศาสตร์มากที่สุด และวิชาที่ใช้รองลงมาตามลำดับ คือ ภาษาอังกฤษ ภาษาต่างประเทศ
 การสะกดคำต่าง ๆ วิทยาศาสตร์ และสังคมศึกษา และจากการประเมินผลของครูพบว่า
 จำนวน 22% ชอบวิธีการสอนแบบนี้มาก จำนวน 55% ชอบ จำนวน 15% รู้สึกเฉย ๆ และ
 อีก 5% ไม่ชอบเลย (Fund for the Advancement of Education, 1964 : 10)

* ในระบบการสอนปัจจุบัน การที่จะสอนนักเรียนแต่ละคนเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ยาก และนักเรียนทุกคนมีความสามารถ ความถนัดความถนัดไม่เหมือนกัน ไม่สามารถจะเข้าใจบทเรียนบทหนึ่งใดในเวลาเท่า ๆ กัน (สุภา ฤชกุลกุล, 2515 : 162) ทำให้ครูไม่สามารถที่จะจัดการเรียนการสอนให้ก้าวหน้าไปตามความต้องการได้ สิ่งที่จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนได้ด้วยความสามารถมากขึ้นอย่างหนึ่งก็คือ แบบเรียนโปรแกรม (วิจิตร ศรีสะอาด, 2512 : 16) เพราะว่าการสอนแบบโปรแกรมจะจำแนกการกระทำและกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียน ผลการเรียนรู้ทำให้เกิดการเรียนรู้ นักเรียนแต่ละคนเรียนรู้ได้เร็วช้าไปตามความสามารถของตน (Hartley, 1972 : 12)

แบบเรียนโปรแกรมมีลักษณะคล้ายแบบเรียนที่จัดโดยปกติ แต่เนื้อหาภายในได้รับการแยกย่อย และจัดลำดับขึ้นจากสิ่งที่ยากไม่หาสิ่งที่ยากที่ละน้อย ๆ ผู้เรียนสามารถเรียนด้วยตนเอง โดยศึกษาไปตามลำดับขั้น และปฏิบัติตามคำแนะนำที่กำหนดไว้ในแบบเรียน แบบเรียนนี้จะทำหน้าที่แทนครูผู้ช่วย (Tutor) แก่นักเรียน และจะทำให้กระทำการปฏิบัติการตามที่กำหนด และจัดไว้ให้จนกระทั่งนักเรียนจะได้รับความรู้ตามที่แบบเรียนกำหนดไว้ว่าจะสอน (Schramm, 1964 : 1) โดยยึดหลักการทางจิตวิทยา ตามทฤษฎีการตอบสนอง (Stimulus - Response) คือ เมื่อสิ่งเร้ามากระทำต่อนักเรียน นักเรียนจะตอบสนองแล้วตามด้วยการเสริมแรง (Reinforcement) โดยให้ผู้เรียนทราบผลของการตอบสนองของเขาทันที จะทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ขึ้น (ประทีป สยามชัย, 2510 : 224)

จาคอบส์ เบเจอร์ และสโตลูโรว์ (Jacobs Mier and Stolurow) กล่าวว่าแบบเรียนโปรแกรมนั้นวางอยู่บนรากฐานทางจิตวิทยาการศึกษาที่สำคัญ ๆ ดังนี้

1. จัดวางเนื้อหาตามจุดมุ่งหมายที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้
2. เรียงเนื้อหาเป็นขั้น ๆ ตามลำดับอย่างมีประสิทธิภาพ
3. เสนอเนื้อหาอย่างมีระเบียบเป็นเรื่อง ๆ ไป
4. ชักเรียนได้มีส่วนร่วม (Active Involving) อย่างดีด้วยตนเอง
5. ใหญ่ผลของการกระทำทันที
6. ชักเรียนได้มีโอกาสก้าวหน้าไปตามความสามารถ และความถนัดของตนเอง
7. นักเรียนได้เรียนรู้จากจุดที่ตนยังบกพร่องหรือเข้าใจผิดได้ (Jacobs Mier

สำหรับการสอนวิธีการสอนแบบโปรแกรมเป็นการสอนให้เด็กเรียนเอง โดยมีหลักใหญ่ ๆ ของการสอน 3 ประการ คือ

1. อธิบายบทเรียน และให้นักเรียนตอบคำถามเกี่ยวกับบทเรียนนั้นหลาย ๆ ข้อ
2. มีวิธีทำให้นักเรียนทราบทันทีว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด
3. ให้นักเรียนมีโอกาสรียนด้วยตนเอง และเวลาเรียนสำหรับบทเรียนหนึ่ง ๆ

ขึ้นอยู่กับสติปัญญา ความสามารถของนักเรียนแต่ละคน (สุภา ฤชงกุล, 2515 : 162)

นักการศึกษาส่วนมากมีความเห็นว่าโปรแกรมที่คั้น สามารถนำมาสอนนักเรียนให้เข้าใจพื้นฐานของวิชาบางวิชาได้ ซึ่งจะช่วยแบ่งเบาภาระครูได้มาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในประเทศที่ขาดแคลนครู จะทำให้ครูมีเวลาเตรียมการสอน หรือสนใจนักเรียนเป็นรายบุคคลได้มากขึ้นและทั่วถึง (สุภา ฤชงกุล, 2507 : 84) กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการของไทยจึงได้ทดลองสร้างแบบเรียนสำเร็จรูปวิชาพีชคณิต สอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ขึ้นในปี พ.ศ. 2507 ผลการทดลองใช้แบบเรียนปรากฏว่าสอนนักเรียนที่สติปัญญาปานกลางได้คล่องและถ้าหากครูจะช่วยเหลือแนะนำนักเรียนบ้างแล้วก็จะใช้ประกอบการสอนในชั้นเรียนได้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2513 : 37) หลังจากนั้นเป็นต้นมา แบบเรียนสำเร็จรูปในประเทศไทยยังไม่แพร่หลายนัก และในมหาวิทยาลัยต่าง ๆ เพิ่งเริ่มให้ความสนใจในระยะ 3 - 4 ปีข้างหน้าเอง

ควยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาเซต (Sets) และความสัมพันธ์ (Relations) ในระดับชั้น กค.บ. ปีที่ 1 ขึ้น แล้วนำบทเรียนโปรแกรมที่ได้สร้างขึ้นใช้ทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนปกติ เพื่อศึกษาลักษณะพฤติกรรมการเรียนที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติ ซึ่งมีอาจารย์เป็นผู้บรรยายตลอดหรือไม่ การทดลองปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนแบบใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าหรือเท่ากับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้จากการสอนปกติ ก็จะได้นำบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นไปใช้เพื่อเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งที่จะช่วยในด้านการสอนวิชาเซต และความกัมพันธ์ ต่อไป

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ตั้งจุดมุ่งหมายไว้ดังต่อไปนี้

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาเซต และความสัมพันธ์ ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 1 พ.ศ. 2517 ของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเซต และความสัมพันธ์ของนิสิต ชั้นปีที่ 1 ใน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นกับการสอนตามปกติ

สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต และความสัมพันธ์ของนิสิตที่เรียน โดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่านิสิตที่เรียนจากวิธีสอนตามปกติ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. เป็นการเสนอแนะให้มีการนำบทเรียนโปรแกรมไปใช้ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ และวิชาอื่น ๆ ให้แพร่หลายยิ่งขึ้น
2. เป็นการวางแนวทางให้ครูได้ศึกษา และทดลองสร้างบทเรียนโปรแกรมเพื่อใช้ในการสอนต่อไป
3. เป็นการเสริมสร้างแนวคิดในการนำเทคโนโลยีทางการศึกษามาปรับปรุงการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ของครู

ขอทกลงเบื้องต้น

บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ถือว่าเป็นบทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นถูกต้องตามหลักวิชาการและมีประสิทธิภาพ

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนิสิตชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน
 - อ. เมือง จ.ชลบุรี จำนวน 60 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม โดยการสุ่ม
 - กลุ่มทดลอง จำนวน 30 คน เรียนจากบทเรียนโปรแกรม
 - กลุ่มควบคุม จำนวน 30 คน เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์โดยใช้เนื้อหาและแบบฝึกหัดเช่นเดียวกับในบทเรียนโปรแกรม
2. การทดลองกระทำในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2518 โดยใช้เวลาทดลองกลุ่มละ 10 ชั่วโมง
3. บทเรียนโปรแกรมเรื่อง "เช็ทและความสัมพันธ์" ผู้วิจัยสร้างเป็นแบบเชิงเส้นตามหลักสูตรของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ น.ศ. 2517
4. ผู้วิจัยทำหน้าที่ควบคุมการเรียนของนิสิตในกลุ่มทดลองด้วยตนเอง และอาจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน จะเป็นผู้สอนในกลุ่มควบคุม

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. บทเรียนโปรแกรม หมายถึง บทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เช็ทและความสัมพันธ์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
2. นิสิต หมายถึง นิสิตชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ
 - ก. กลุ่มทดลอง เป็นนิสิตที่เรียนโดยบทเรียนโปรแกรม
 - ข. กลุ่มควบคุม เป็นนิสิตที่เรียนจากการสอนตามปกติของอาจารย์
3. การสอนโดยบทเรียนโปรแกรม หมายถึง การสอนที่ให้นิสิตเรียนด้วยตนเองจากบทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียนของนิสิต
4. การสอนตามปกติ หมายถึง การสอนของอาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้เนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับบทเรียนโปรแกรม
5. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียน โดยใช้แบบทดสอบเรื่องเช็ท และความสัมพันธ์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

แบบเรียนโปรแกรม (Programmed Instruction) เป็นแบบเรียนที่จัดทำไว้สำเร็จสมบูรณ์ ภายใต้อำนาจของเครื่องสอน (Teaching Machines) หรือรูปเล่มหนังสือ (Programmed Textbook) ผู้เรียนจะท่องอ่านคำสั่งที่ระบุไว้ในบทเรียนแล้วปฏิบัติตามทีละขั้น แบบเรียนโปรแกรมจึงเป็นเครื่องมืออัตโนมัติชนิดหนึ่งที่ผู้เรียนใช้ศึกษาหาความรู้ที่ต้องการด้วยตนเอง (คณะนิติปริญาโท แผนกโสตทัศนศึกษา จุฬา, 2512 : 204)

แบบเรียนโปรแกรมคือ บทเรียนที่แบ่งออกเป็นหน่วยย่อย ๆ ขึ้น ๆ เรียกว่ากรอบ (Frame) แต่ละกรอบเหล่านี้เป็นวิธีชักนำให้เด็กนักเรียนรู้สารสนเทศของบทเรียนนั้น (สุภาภักดิ์, 2515 : 162)

การสอนแบบโปรแกรม หมายถึง การลำดับประสบการณ์ที่จัดวางไว้สำหรับนำผู้เรียนไปสู่ความสำเร็จ โดยอาศัยหลักความเข้มข้นของสิ่งเร้ากับการตอบสนอง (เป็รื่อง กุญ, 2516 : 1) ทั้งเป็นวิธีสอนที่สอดคล้องกับปรัชญาการศึกษาแบบโปรแกรมดีด (Progressive Education) เพราะนอกจากจะทำให้หลักการในรางวัลเป็นสิ่งล่อใจแล้ว ยังทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างสำคัญอีกด้วย (Fry, 1963 : 23 - 24) และเป็นการสอนชนิดหนึ่งที่เปิดโอกาสให้นักเรียนเรียนจากโปรแกรมด้วยตนเองเป็นส่วนใหญ่ ครูเป็นเพียงผู้แนะนำและสอนสิ่งซึ่งใช้วิธีสอนแบบโปรแกรมไม่เป็นผลเท่าไร (อุทม มุงเกษม, 2513 : 1)

ลักษณะของการสอนแบบโปรแกรม ปรากฏ (Fry, 1963 : 1) ได้กล่าวถึงลักษณะของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

1. เนื้อหาวิชาได้ถูกแตกออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ เรียกว่ากรอบ (Frame) ซึ่งกรอบเหล่านี้มีขนาดแตกต่างกัน ตั้งแต่ประโยคจนถึงตอน (Paragraph)
2. ภายในแต่ละกรอบจะต้องให้นักเรียนมีการตอบสนอง (Response) เช่น ตอบคำถาม หรือเติมข้อความลงในช่องว่าง ทำให้นักเรียนแต่ละคนได้มีส่วนร่วมในการเรียนกิจกรรมต่าง ๆ ที่ให้นักเรียนทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหา

3. นักเรียนได้รับการเสริมแรงแบบตอบกลับทันที (Immediate Feedback-reinforcement) ก็จะได้ทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที ซึ่งถ้าเขาตอบถูกต้องจะเป็นการให้รางวัลหรือเป็นการเสริมแรง แต่ถาตอบผิดก็จะได้แก่ความเข้าใจผิดที่ผิดที่

4. หน่วยต่าง ๆ ใ้ถูกจัดเรียงลำดับต่อเนื่องกันไป เนื่องจากเนื้อหาถูกแตกออกเป็นหน่วยเล็ก ๆ ผู้เขียนโปรแกรมจึงต้องคิดอย่างรอบคอบเกี่ยวกับลำดับขั้นของการเรียนรู้ ผลก็คือทำให้ลำดับขั้นของการนำเสนอายบทการ เข้าใจยิ่งขึ้น

5. โปรแกรมฝึกนักเรียนเป็นศูนย์กลาง คือ โปรแกรมแต่ละเรื่องี่เขียนขึ้นจะควบคุมนำไปทดลองกับนักเรียนจำนวนหนึ่ง เนื้อหาของบทเรียนจะปรับปรุงส่วนที่เป็นปัญหา รวมทั้งเชื่อว่าสอนนักเรียนได้ผลตามจุดมุ่งหมายแล้วจึงนำออกใช้

6. นักเรียนมีอิสระที่จะเรียนไปตามอัตราเร็วในการเรียนของตัวเองไม่ขึ้นกับคนอื่น

วิลเลียม คลาร์ก ไทรว์ (William Clark Trow, 1965 : 92) ได้สรุปลักษณะของแบบเรียนโปรแกรมที่ใช้ในการสอนนี้ว่า

1. เนื้อหาที่เรียนประกอบด้วยขั้นย่อย ๆ ที่ต่อเนื่องกันไปอย่างมีเหตุผล
2. ผู้เรียนจะต้องตอบสนองต่อสิ่งเร้าที่เสนอไว้ในแบบเรียน
3. ผู้เรียนสามารถเรียนได้ตามความสามารถของตนเอง
4. ผู้เรียนสามารถทราบผลการตอบสนองของตนทันที
5. การตอบสนองที่ถูกตองจะก่อให้เกิดแรงเสริม ในการตอบสนองครั้งต่อไป

ข้อดีของการสอนแบบโปรแกรม

สำหรับผลดีของการสอนแบบโปรแกรมที่มีต่อครู นักเรียน และวงการศึกษามี
 ถูกวิจารณ์หลายท่านด้วยกัน ไกแก ประทีป สยามชัย (ประทีป สยามชัย, 2510 : 226)
 เจมส์ ดี ฟินน์ (James D. Finn, 1962 , 19 - 21) ปีเตอร์ (Peter, 1972 : 132)
 ฟินเซนท์ (Finsent, 1969 : 474) เป็นต้น ซึ่งพอจะสรุปข้อดีของการสอนแบบโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้

1. การสอนแบบนี้ได้เหมือนกับการสอนนักเรียนเป็นรายบุคคล ซึ่งสามารถแก้ไขปัญหาความแตกต่างของนักเรียนได้
 2. การใช้วิธีสอนแบบนี้จะช่วยยกฐานะของครูให้สูงขึ้น ให้สมกับเป็นนักการศึกษา เพราะการนำเอาเครื่องมือหรือวิธีการใหม่เข้ามาใช้ย่อมเป็นการกระตุ้น และผลักดันให้ครูจำเป็นต้องเพิ่มความรู้ ความคิด ความสามารถและประสบการณ์ของตนให้มากขึ้น
 3. บทเรียนโปรแกรมจะทำให้หน้าที่คล้ายครูพิเศษสอนให้ก้าวไปทีละขั้นตามความสามารถของนักเรียน และช่วยให้ผู้เรียนคนพบด้วยตนเอง
 4. มีการเสริมแรงเกิดขึ้น เนื่องจากทราบผลการตอบสนองในทันทีทันใด ซึ่งจะช่วยสร้างแรงจูงใจและความสนใจแก่นักเรียน
 5. ช่วยแบ่งเบาภาระของครูในการสอนข้อเท็จจริงต่าง ๆ ทำให้ครูมีเวลาที่จะสร้างสรรผลงานสอน ปรับปรุงการสอนมากขึ้น และมีเวลาที่จะช่วยส่งเสริม สนับสนุน เราความสนใจ หรืออภิปรายปัญหาแก่นักเรียนเป็นรายบุคคลหรือเป็นกลุ่มย่อยได้
 6. จะช่วยแก้ปัญหาเรื่องการขาดแคลนครูได้ โดยที่ครูคนหนึ่งอาจจะควบคุมนักเรียนให้เรียนบทเรียนโปรแกรมได้คราวละหลายสิบคน
 7. การนำเอาเครื่องมือหรือวิธีสอนใหม่เข้ามาใช้ในวงการศึกษา ย่อมก่อให้เกิดแนวทางในด้านการค้นคว้าวิจัย เพื่อปรับปรุงการศึกษาให้ได้ผลดียิ่งขึ้น
- นอกจากที่กล่าวมาแล้ว เครื่องสอนและบทเรียนโปรแกรม ยังมีประโยชน์ต่อการจัดการศึกษาผู้ใหญ่ การศึกษานอกกระบวน หรือการฝึกคนงานตามโรงงานอุตสาหกรรม หรือบุคคลที่สนใจศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง

ข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรม

มาร์เคิล (Markle) (บุเกลสกี, 2516 : 325) ได้ชี้ให้เห็นว่า วิธีการที่เครื่องสอนสอนนั้นไม่ได้แก้ปัญหารายบุคคลให้มีประสิทธิภาพแต่อย่างใด ผู้ทำโปรแกรมนักจะพบข้อบกพร่อง ๆ ว่า โปรแกรมไม่เหมาะสมกับผู้เรียนทุกคนไป การสอนเป็นรายบุคคลอาจจะต้องมี

การกระทำโปรแกรมเฉพาะตัวขึ้น การเอาเครื่องสอนไปเทียบกับกรณีนี้ผิด เพราะเราสามารถ
จะปรับโปรแกรมการสอนของเราให้ทันที่ขณะที่กำลังทำการสอน แต่เครื่องสอนทำไม่ได้ การ
เรียนรู้แบบโปรแกรมจะทำได้ดีที่สุดเพียงแต่เป็นเครื่องช่วยอย่างหนึ่ง ถึงแม้บางครั้งก็ช่วยสอน
ได้มาก แต่ไม่ช่วยแก้ปัญหาการเรียนรู้อย่างไรก็ตาม

บูเกลสกี (Bugelski, 2516 : 326) กล่าวว่าในการนำเอาวิชาการธรรมดา
ที่เด็กเรียนตั้งแต่อนุบาลไปจนถึงมหาวิทยาลัยมาทำโปรแกรมนั้นเป็นสิ่งที่ทำได้ยาก และการที่จะ
ทำโปรแกรมขึ้นเยี่ยมเพียงโปรแกรมเดียวก็จะต้องทุ่มเทแรงงานอย่างมหาศาล

บัทเลอร์ เวิล และ แบงค์ (Butler, Wren and Banks, 1970 : 153) ได้
สรุปข้อวิพากษ์วิจารณ์ที่เป็นข้อเสียของการสอนแบบโปรแกรมไว้ดังนี้

1. วิชาที่ทำโปรแกรมจะไม่สามารถยืดหยุ่นหรือขยายเนื้อหา หรือย้ายเนื้อหาได้
จำเป็นต้องสร้างโปรแกรมใหม่เพิ่มเติมอีก
2. วิชาบางวิชาในคณิตศาสตร์ เมื่อนำมาทำโปรแกรม เนื้อหาการจัดลำดับยังเป็น
แบบเก่าอยู่ จึงไม่อาจจะแสดงให้เห็นแนวความคิดในคณิตศาสตร์แบบใหม่ได้
3. การสอนแบบโปรแกรมไม่สามารถจะทำให้เกิดมีกิจกรรมตอบโต้ระหว่างครูกับ
นักเรียน หรือนักเรียนกับนักเรียนได้

ชนิดของแบบเรียนโปรแกรม ถ้าชนิดชนิดของการตอบสนอง แบบโปรแกรมได้เป็น
สองประเภทคือ แบบที่ผู้เรียนสร้างคำตอบเอง (Constructed - Response) และ
แบบที่มีคำตอบไว้ให้เลือก (Multiple - Choice) ซึ่งแบบแรกขึ้นอยู่กับความสามารถ
ของนักเรียนที่จะนึกได้ (Recall) ส่วนแบบหลังขึ้นอยู่กับความสามารถที่จะจำได้ (re-
cognition) แต่อาจแบ่งตามเทคนิคการเรียน โปรแกรมก็แบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ ๆ ได้
สองประเภท คือ โปรแกรมแบบเชิงเส้นตรง (Linear Program) และโปรแกรมแบบสาขา
(Branching Program) โดยปกติแล้วโปรแกรมแบบเชิงเส้นตรงมักใช้การตอบสนองแบบสร้าง
คำตอบเอง ส่วนโปรแกรมแบบสาขามักใช้การตอบสนองแบบเลือกคำตอบ ซึ่งใช้ได้ทั้งสอง
(บรรณา รัตนวิทย์, 2516 : 8)

โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Program) สโตลูโรว์ (Stolurrow, 1961 : 12) ได้กล่าวถึงลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้น ว่า โปรแกรมแบบนี้จัดลำดับของกรอบปัญหาให้นักเรียนเป็นแบบตายตัว นักเรียนจะต้องหาตั้งแต่กรอบแรกไปจนถึงกรอบสุดท้ายตามลำดับ ไม่มีการข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเลย ทุก ๆ คนไปว่าจะมีระดับสติปัญญาแตกต่างกันอย่างไรก็ต้องทำเหมือนกัน เพราะผู้สร้างโปรแกรมชนิดนี้ถือว่า ผู้เรียนจากโปรแกรมแล้วจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทัดเทียมกัน ส่วนความแตกต่างที่จะปรากฏออกมาก็เฉพาะในเรื่องช่วงเวลาในการเรียน

ฟราย (Fry, 1963 : 4) ได้สรุปลักษณะของโปรแกรมแบบเชิงเส้น ว่ามีลักษณะดังนี้คือ

1. ใช้หน่วยเล็ก ๆ (กรอบ) เฉลี่ยแล้วมีความยาวสองประโยค
2. ต้องการให้นักเรียนตอบสนองโดยการเขียนคำตอบสั้น ๆ
3. ใช้ชั้นเล็ก ๆ ง่าย ๆ ในการแสดงชั้นความรู้
4. โดยทั่วไปแล้วจัดเรียงลำดับแบบเชิงเส้น (Linear Arrangement)

โปรแกรมแบบสาขา (Branching Program) โปรแกรมแบบนี้ให้ความสำคัญของความแตกต่างทางระดับสติปัญญา ในระหว่างผู้เรียนด้วยกัน ฉะนั้นการตอบสนองของผู้เรียนในโปรแกรมจึงเป็นแบบเลือกคำตอบ จากการเลือกคำตอบของผู้เรียนนี้ แต่ละคนจะก้าวหน้าไปในลักษณะที่แตกต่างกัน ผู้เรียนที่ตอบสนองได้ถูกต้อง แสดงว่ามีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนแล้วก็จะข้ามกรอบปัญหาบางกรอบที่ไม่จำเป็นสำหรับเขาไปก็ได้ ทำให้ช่วงเวลาในการเรียนได้มากยิ่งขึ้น ส่วนผู้ตอบไม่ถูกต้องแสดงว่ายังไม่เข้าใจบทเรียนในกรอบใดกรอบหนึ่งนั้น โปรแกรมก็จะนำเขาไปสู่กรอบปัญหาซึ่งจัดไว้เพื่อชี้แจงว่าทำไมเขาจึงตอบผิด แล้วจึงกลับมาตอบปัญหาในกรอบเดิมให้ถูกต้องเสียก่อนที่จะก้าวไปสู่กรอบปัญหาที่ต้องการต่อไป (Stolurrow, 1961 : 13) กรอบปัญหาในโปรแกรมแบบ นี้มี 2 ชนิด คือ

1. กรอบขึ้น เป็นกรอบที่อธิบายเนื้อหาวิชา และมีคำถามแบบเลือกคำตอบให้นักเรียนตอบโดยจะมีคำตอบให้เลือกหลายคำตอบ
2. กรอบสาขา เป็นกรอบที่ช่วยแก้ไขความเข้าใจผิดของนักเรียนที่ทำให้นักเรียนตอบคำถามในกรอบขึ้นผิด

กรอบขึ้นจะบรรจุเนื้อหาหลักของเรื่องที่สอน คำถามในกรอบจะมีคำตอบให้เลือกประมาณ 3 คำตอบ กรอบขึ้นทุกคนต้องอ่าน แต่กรอบสาขามีไว้สำหรับผู้เรียนที่ตอบผิดเขาจะได้รับคำแนะนำหรืออธิบายเพิ่มเติมให้เขาใจถูกต้องเสียก่อนจึงจะกลับมายังกรอบเดิมเพื่อเลือกคำตอบอื่น ๆ ต่อไป ผู้เรียนบางคนอาจจะไม่ต้องอ่านกรอบสาขาเลย บางคนอาจจะต้องอ่านทั้งหมด หรือบางกรอบแควแต่ความสามารถของบุคคล (เป็รื่อง กุมุท, 2516 :

63 - 67)

นอกจากโปรแกรมแบบเชิงเส้น และแบบสาขาแล้ว ยังมีแบบอื่น ๆ ที่ต่างกันออกไป ในข้อปลีกย่อยอีกมากมาย เช่น แบบเทคนิคการขอย้ายโซ่ (Retrogressive Chaining) เทคนิคการเขียนแบบบาบูน (Baboon Frame) และการเขียนบทเรียนประกอบสำเร็จรูป (Adjunct Programing) ซึ่งอาจจะทำออกมาในรูปเครื่องสอนหรือแบบเรียนสำเร็จรูป

ในระยะหลัง ๆ การสอนแบบโปรแกรมก็ได้รับการพัฒนาไปสู่แนวทางใหม่ ๆ ยิ่งขึ้น ผู้เขียนโปรแกรมพยายามที่จะไม่ยึดหลักของโปรแกรมแบบเชิงเส้น และแบบสาขาเป็นเกณฑ์ตายตัวในการเขียน คือ เลือกใช้ใดตามความเหมาะสม การเขียนโปรแกรมมีความโน้มเอียงที่จะใช้วิธีการวิเคราะห์งาน (Task Analysis) เกี่ยวกับขั้นตอนการเรียนรู้ทางหลักจิตวิทยาเป็นเครื่องนำทาง (Leith, 1966 : 97)

สำหรับการวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรม กับการสอนตามปกติของของครูนั้น มีนักการศึกษา นักวิจัย และผู้สอนหลายท่านได้วิจัยไว้หลายแบบด้วยกัน ซึ่งจะขอลาวเป็น 2 ตอนด้วยกันคือ

1. การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ
2. การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย

1. การวิจัยเกี่ยวกับการสอนแบบโปรแกรมในต่างประเทศ

การวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนโดยวิธีปกติในต่างประเทศนั้น มีนักการศึกษาได้ทำการวิจัยไว้มากพอควร และทำกัน ในหลายสาขาวิชา แต่ในที่นี้ผู้วิจัยได้เลือกศึกษางานวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่เป็นผลงานวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกในสหรัฐ ฯ และได้จำแนกตามผลการทดลองเป็น 2 ประเภท

1.1 การทดลองสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลดีกว่าหรือพอ ๆ กันกับการสอนตามปกติ

1.2 การทดลองสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ

การทดลองการสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ

ไอเกน (Eigen) (Schramm, 1964 : 38) ได้ศึกษาปฏิกริยาของนักเรียนมัธยมที่มีต่อการสอนแบบโปรแกรมสองกลุ่มที่เรียนด้วยเครื่องสอน และเรียนจากแบบเรียนสำเร็จรูป วิชาเซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน ปรากฏว่า นักเรียนเองชอบวิธีการสอนแบบโปรแกรมจากกว่าคนอื่น ๆ และเห็นว่าการสอนแบบโปรแกรมเป็นวิธีที่ดีที่สุด เพราะเขาทั้งหลายจะไม่ถูกขัดจังหวะในการเรียน และนักเรียนคนอื่น ๆ จะไม่ถูกทอดทิ้งให้ล่าหลัง และนอกจากนี้พบว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนจากแบบเรียนสำเร็จรูปชอบการสอนแบบนี้มากกว่าพวกที่เรียนจากเครื่องสอน

แรนดอล์ฟ (Randolph, 1963 : 449) ได้ทำการวิจัยเพื่อที่จะทดสอบผลของการใช้บทเรียนโปรแกรมที่ผลิตขายในท้องตลาดในวิชาเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Sets, Relations and Functions) โดยทดลองกับนักเรียนเกรด 8 หลังจากที่ได้ทำการทดลองสอนแล้ว เปรียบเทียบผลการทดสอบระหว่างคะแนนที่สอบก่อนและหลังเรียนบทเรียนแล้ว ผลปรากฏว่า นักเรียนทุกคนได้คะแนนจากการทดสอบดีขึ้น ยกเว้นเพียงคนเดียวที่ได้คะแนนเท่าเดิม จากการสัมภาษณ์ความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อการเรียนได้ผลว่า เนื้อหาที่เรียนน่าสนใจ แต่บทเรียนบางตอนน่าเบื่อ ครูผู้สอนได้ให้ความเห็นว่า นักเรียนสามารถเรียนเนื้อหาวิชาระดับสูงได้โดยใช้บทเรียนโปรแกรม

มอส (Moses, 1962 : 1559) ได้ทดลองสอนแบบโปรแกรมเปรียบเทียบกับ การสอนตามปกติระดับมัธยม วิชาพีชคณิต ผลการทดสอบปรากฏว่าการสอนแบบโปรแกรม ได้ผลดีสำหรับนักเรียนที่เก่ง ทำให้สามารถก้าวหน้าไปได้เร็วกว่าระดับสูง ซึ่งดีกว่าการสอนตามปกติ แต่สำหรับนักเรียนที่เรียนช้าไม่ได้ผลดี

อีสเตอร์เลย์ (Easterday, 1963 : 303 - 307) ได้ทดลองสอนตามปกติ เปรียบเทียบกับการสอนแบบโปรแกรม โดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูปวิชาพีชคณิตกับนักเรียนเกรด 5 ผลปรากฏว่า กลุ่มที่สอนแบบโปรแกรมทำคะแนนได้ดีกว่ากลุ่มที่สอนตามปกติ การเปรียบเทียบระหว่างเพศชายและหญิงไม่แตกต่างกัน และการเปรียบเทียบระหว่างเพศชายด้วยกัน กลุ่มที่ได้รับการสอนแบบโปรแกรมดีกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติ

สครีมและวัวร์ (Schramm, 1964 : 98) ได้ทดลองสอนวิชา กรู๊ปจะโลค แก่ นักเรียนมัธยมต้นคนที่เรียนเก่งใช้แบบเรียนธรรมดาเปรียบเทียบกับการใช้เครื่องสอนและแบบเรียนสำเร็จรูป ผลปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้เครื่องสอนและแบบเรียนสำเร็จรูปทำคะแนนได้ดีกว่าการสอนโดยใช้แบบเรียนธรรมดา และในระหว่างทำการทดลองกับนักเรียน เชื่อว่าพวกเขาสามารถเรียนด้วยการสอนแบบโปรแกรมได้ดีพอ ๆ กับการเรียนตามปกติ และพวกเขาชอบแบบเรียนสำเร็จรูปมากกว่าเครื่องสอน และชอบใช้อุปกรณ์เหล่านี้เมื่อได้จากการเรียนแบบอื่น ๆ และแบบที่ครูเป็นศูนย์กลาง

มอส์ (Moses, 1965 : 25 : 5793 - A) ได้ศึกษาการใช้แบบเรียนโปรแกรม ในวิชาพีชคณิตระดับเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองสอนด้วยแบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติทั้ง 2 กลุ่ม ก็คือ กลุ่มทดลองสอนด้วยแบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติทั้ง 2 กลุ่มสอนในเรื่องเดียวกัน ตามหลักสูตร และตารางสอนของโรงเรียน เมื่อเรียนจบก็นำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้ง 2 กลุ่มมาเปรียบเทียบกัน ปรากฏว่ากลุ่มทดลองให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุม แต่นักเรียนที่เรียนอ่อนไม่สามารถใช้แบบเรียนโปรแกรมได้ทัน

ไวท์ (White, 1970 : 3373 - A) ได้ทำการศึกษาวิจัยเปรียบเทียบผลการสอนแบบโปรแกรมกับการสอนตามปกติในวิชาคณิตศาสตร์ระดับวิทยาลัย โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง 73 คน สอนโดยแบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุม 58 คน สอนโดยวิธีปกติ ทั้ง 2 กลุ่ม สอนบททวนวิชาคณิตศาสตร์ในเนื้อหาเรื่องเดียวกัน เพื่อจะได้รู้จักนำผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของทั้ง 2 กลุ่มมาเปรียบเทียบกัน ผลปรากฏว่ากลุ่มทดลองมีความสามารถทางด้านการคำนวณ (Computation) ดีกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ แต่ทางด้านการแก้ปัญหา (Problem - Solving) ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คอลลาแกน (Collagan, 1969 : 1070 - A) ได้สร้างแบบเรียนสำเร็จรูปในวิชาคณิตศาสตร์ และเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์กายภาพ แล้วจัดให้นักศึกษาชั้นปีที่ 1 ของ The Catholic University of America เรียน โดยแบ่งนักศึกษากออกเป็นกลุ่มทดลอง 77 คน กลุ่มควบคุม 77 คน เรียนในเนื้อหาเดียวกัน เวลาที่ใช้ทั้งหมด คือ คณิตศาสตร์ 10 สัปดาห์ การากาศาสตร์ 6 สัปดาห์ และฟิสิกส์ 8 สัปดาห์ แล้วสอบวัดผล - สมรรถนะเปรียบเทียบกัน ปรากฏว่าทั้งทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์กายภาพ กลุ่มทดลองให้ผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุม นอกจากนี้กลุ่มทดลองยังใช้เวลาในการทำข้อสอบได้เร็วกว่ากลุ่มควบคุมโดยเฉลี่ยอีกด้วย

ริกส์ (Riggs, 1967 : 2748 - A) ได้ทดลองสร้างแบบเรียนสำเร็จรูปแบบเรียงเส้น เรื่องกราฟ สำหรับนักเรียนเกรด 5 และทำการทดลองดังนี้ กลุ่ม 1 สอนโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป แต่ไม่ได้รับการสอนจากครู กลุ่ม 2 สอนโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูป และได้รับการสอนจากครูเพิ่มเติม กลุ่ม 3 สอนโดยครูอย่างเดี่ยว แต่ไม่ใช้แบบเรียนสำเร็จรูป ผลปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้แบบเรียนสำเร็จรูปทั้งสองกลุ่มมีผลดีต่อการพัฒนาทักษะในการเรียนกราฟสูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยครูอย่างเดี่ยว

วีบี (Wiebe, 1966 : 1002 - A) ได้ทดลองสอนคณิตศาสตร์แก่นักเรียนเกรด 9 ซึ่งเรียนอ่อน โดยใช้เวลาสอน 3 วิธี คือ กลุ่ม 1 สอนโดยใช้แบบเรียนสำเร็จแบบเรียงเส้น และเสริมแรงแบบทันที กลุ่ม 2 สอนโดยครูบรรยายครึ่งหนึ่ง และสอนแบบโปรแกรมครึ่งหนึ่ง ซึ่งเป็นแบบเสริมแรงทันที กลุ่ม 3 สอนเหมือนกลุ่ม 2 แต่เสริมแรงแบบช้า 1 วัน ผลการทดลองปรากฏว่า กลุ่ม 2 ทำคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มอื่น ๆ ผลการวัดความทรงจำทั้งสามกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่สำหรับนักเรียนที่อ่อนภาษาและคำนวณ และนักเรียนหญิงที่เขาน่า การสอนโดยครูจะดีกว่าการสอนแบบโปรแกรม

บางฮาร์ท (Banghart, 1963 : 10 : 199 - 204) และคณะได้ทำการทดลองเปรียบเทียบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติในระดับประถม ใช้นักเรียนเกรด 4 ปีการศึกษา 1961 - 1962 ของโรงเรียนประชาบาลในเมืองนอร์ฟอล์ก รัฐเวอร์จิเนีย เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 195 คน โดยกลุ่มทดลอง

ใช้การสอนด้วยแบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมในการสอนด้วยแบบเรียนมาตรฐาน (Standard Textbook) ให้ครูโรงเรียนนั้นเป็นผู้สอนเป็นเวลา 1 ปี ใช้เวลาประมาณ วันละ 30 - 40 นาที เมื่อสิ้นปีก็เอาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้ง 2 กลุ่มมาเปรียบเทียบกัน ผลปรากฏว่ากลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ

บราวน์ (Brown) (Schramm, 1964 : 26) ได้ทำการเปรียบเทียบการสอนแบบใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยม กลุ่มทดลองเป็นนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 จากโรงเรียนต่าง ๆ กัน 7 โรงเรียน จำนวน 147 คน กลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 จากโรงเรียนต่าง ๆ กัน 7 โรงเรียน จำนวน 133 คน กลุ่มควบคุมใช้วิธีสอนตามปกติ กลุ่มทดลองได้ใช้วิธีสอนตามปกติและใช้แบบเรียนโปรแกรมรวมกัน พบว่ากลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญในการทดสอบความสามารถทั่วไป

ฟิชเชล (Fishel, 1964 : 2881) ได้ทดลองสอนแบบโปรแกรมในระดับมัธยมศึกษา วิชาคณิตศาสตร์ และสังคมวิทยา ผลการทดลองปรากฏว่า การสอนแบบผสมระหว่างการสอนด้วยครูกับการสอนแบบโปรแกรมประกอบกันได้ผลดีกว่าการสอนโดยใช้วิธีเดียว และพบว่าการสอนแบบโปรแกรมมีประโยชน์ต่อการสอนเนื้อหาใหม่ ๆ รวมทั้งพบความก้าวหน้า

เลน (Lane, 1963 : 3817) ได้ทดลองเปรียบเทียบการสอน 2 วิธีเพิ่มเติมจากการสอนโดยใช้โทรทัศน์วงจรปิดในวิชาคณิตศาสตร์ระดับวิทยาลัย ทดลองกับนักเรียนครู หลังจากบรรยายทางโทรทัศน์ได้ครั้งเดียว นักเรียนจะได้รับการสอนต่ออีก 12 คาบ ดังนี้ กลุ่ม 1 ให้ดูภาพยนตร์ แสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และให้แบบฝึกหัด กลุ่ม 2 ให้ช่วยกันแก้ปัญหาในหนังสือเรียนอภิปราย และทำแบบฝึกหัดการบ้าน โดยมีครูเป็นผู้ตอบคำถาม กลุ่ม 3 ให้ศึกษาจากหนังสือแบบเรียนโปรแกรม ซึ่งมีลักษณะเป็นการได้แบบฝึกหัด ผลการทดสอบหลังจากสิ้นสุดการเรียน ปรากฏว่าการใช้แบบเรียนโปรแกรมได้ผลดีกว่าการให้ดูภาพยนตร์หรืออภิปราย และใช้เวลาประมาณครึ่งหนึ่งของการเรียน

เฟลด์นุเซ็น (Feldnusen), แรมฮาร์เตอร์ (Ramharter) และเบิร์ต (Birt) (Schramm, 1964 : 43) ได้ทดลองสอนวิชาทักษะพื้นฐานทางเลขคณิตแก่นักเรียนเกรด 7 โดยสอนแบบโปรแกรม ใช้แบบเรียนโปรแกรมแบบเชิงเส้น เปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ เมื่อสอนไปได้ 7 สัปดาห์ ทั้งสองกลุ่มจะสอบเปลี่ยนวิธีสอน ผลการทดสอบทั้ง 7 สัปดาห์แรก และ 7 สัปดาห์หลัง ปรากฏว่าคะแนนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

สมิท (Smith) (Schramm, 1964 : 98) ได้ทดลองสอนวิชาสถิติเบื้องต้น โดยใช้วิธีสอนตามปกติ เปรียบเทียบกับการสอนแบบโปรแกรม โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมแบบสาขากับนักเรียนนายร้อยกองทัพอากาศสหรัฐ ปรากฏว่าผลการสอนทั้งสองวิธีไม่แตกต่างกัน ผลการทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ผลกลุ่มที่ใช้การเรียนแบบโปรแกรมใช้เวลาน้อยกว่าการเรียนตามปกติ

รีด (Reed, 1971 : 1989 - A) ได้ทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์แผนใหม่ กับนักศึกษาปริญญาตรี โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมเพิ่มเติมจากการบรรยายของครู เปรียบเทียบกับการสอนแบบบรรยาย แต่ใช้แบบเรียนสรุปค่า ผลการทดสอบปรากฏว่าทั้งสองวิธีให้ผลไม่แตกต่างกัน ไขว้จะจำแนกตามความสามารถหรือตามเพศ

คอนรอย (Conroy, 1972 : 5102 - A) ได้ทดลองสอนวิชาคณิตศาสตร์ 1 ในระดับวิทยาลัย ใช้การสอนแบบโปรแกรม เปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ ผลปรากฏว่า ความก้าวหน้าทางการเรียนของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน การเปรียบเทียบระหว่างเพศผลไม่แตกต่างกัน แต่การเปรียบเทียบระหว่างอายุ ปรากฏว่า นักเรียนที่อายุน้อยกว่าจะมีความก้าวหน้าในการเรียนสูงกว่านักเรียนที่อายุมากกว่า

ซาลิสบิวรี (Salisbury, 1966 : 712 - A) ได้สำรวจความคิดเห็นของครู 60 คน จากโรงเรียนมัธยม 40 โรงเรียน และนักเรียน 4,373 คน ในโอไฮโอ ซึ่งใช้แบบเรียนโปรแกรม English 2600 และ Temac Algebra ผลการศึกษาสรุปได้ว่า ทั้งครูใหญ่ ครู และนักเรียนมีความเชื่อว่า การสอนแบบโปรแกรมได้ผลพอ ๆ กับการสอนแบบธรรมดา แต่ไม่ถึงระดับที่มีผู้กล่าวอ้างกัน อย่างไรก็ตามปรากฏว่าโปรแกรมมีคุณค่าสำหรับการสอนเพิ่มพูนความรู้ และสอนซ่อมเสริม และให้งานแก่นักเรียน

การทดลองสอนแบบโปรแกรมที่ได้ผลน้อยกว่าการสอนตามปกติ

ร็อบสัน (Robson, 1966 : 85 - A) ได้ทดลองสอนที่สอดคล้องกับเด็กวัยเรียนเกรด 9 กลุ่ม 1 สอนแบบโปรแกรม อีกสองกลุ่มสอนโดยวิธีตามปกติ ผลการทดสอบปรากฏว่า กลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติทำคะแนนได้สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบโปรแกรม แต่ทัศนคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่เปลี่ยนแปลง

ดีไวน์ (Devine, 1967 : 535 - A) ได้ทดลองเปรียบเทียบการสอนเชิงคณิต 1 ระหว่างวิธีสอนแบบโปรแกรม กับวิธีสอนตามปกติ กลุ่มที่สอนแบบโปรแกรมจะมีครูคอยสังเกตความบันทึก และตอบคำถามของนักเรียนเมื่อนักเรียนมีปัญหา ซึ่งมี 2 กลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งจะเรียนจากครูที่มีประสบการณ์ในการสอน อีกกลุ่มหนึ่งเรียนจากครูที่ไม่มีประสบการณ์ในการสอน ส่วนกลุ่มควบคุมจะเรียนจากการสอนตามปกติ โดยที่ครูบรรยายและอภิปราย 2 กลุ่ม เช่นกัน และใช้ครูชุดเดียวกันกับนักเรียนกลุ่มทดลอง ผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปรากฏว่าการเรียนกับครูที่มีประสบการณ์ในการสอน การสอนโดยครูที่ว่าการสอนแบบโปรแกรม แต่การเรียนกับครูที่ไม่มีประสบการณ์ในการสอนทั้งสองวิธีสอนได้ผลไม่แตกต่างกัน

2. การวิจัยการสอนแบบโปรแกรมในประเทศไทย

ในประเทศไทยมีผู้เขียนบทความเกี่ยวกับแบบเรียนโปรแกรม และเครื่องสอนแบบกราฟหลายแห่ง เช่น ประทีป สยามชัย (ประทีป สยามชัย, 2510 : 221 - 228) วิจิตร ศรีสะอ้าน (วิจิตร ศรีสะอ้าน, 2512 : 21 - 36), สุภา ภูงคกุล (สุภา ภูงคกุล, 2515 : 161 - 165), สายหยุด จำปาทอง (สายหยุด จำปาทอง, 2515 : 165 - 173) และ เปื้อง ภูมุต (เปื้อง ภูมุต, 2516) เป็นต้น

สำหรับงานด้านการวิจัยเกี่ยวกับการเปรียบเทียบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยแบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติในประเทศไทยยังไม่แพร่หลาย แต่ก็มีผู้ได้กระทำการวิจัยไว้ เช่น

วรรณ เจียมทะวงษ์ (วรรณ เจียมทะวงษ์, 2515) ได้ศึกษาเปรียบเทียบ ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ แบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมและกลุ่มควบคุมสอนตามปกติทั้ง 2 กลุ่ม สอนในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่า ๆ กัน เมื่อสอนจบก็วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปรากฏว่านักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

สมวงษ์ ทวีชัยเจริญ (สมวงษ์ ทวีชัยเจริญ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง เซต ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติโดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติทั้ง 2 กลุ่ม สอนในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน เพื่อสอนจบก็วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปรากฏว่านักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

วิภา ศิริเวีรรณ (วิภา ศิริเวีรรณ, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความน่าจะเป็น (Probability) ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลการทดลองปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรมสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากวิธีสอนแบบปกติอย่างไม่มีนัยสำคัญ

ปรีดิ์ ลิ้มแจ่ม (ปรีดิ์ ลิ้มแจ่ม, 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลการสอนวิชาตรรกศาสตร์ ด้วยลักษณะเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบเรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองสอนโดยใช้แบบเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ทั้ง 2 กลุ่ม สอนในเนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน เมื่อสอนจบก็วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปรากฏว่านักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

เอื้อน ปิ่นเงิน (เอื้อน ปิ่นเงิน : 2518) ได้ทดลองเปรียบเทียบ ผลการสอน
 วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิต และความต่อเนื่องในระดับ ป.กศ.สูง วิชาเอกคณิตศาสตร์ โดย
 ใช้บทเรียนโปรแกรมทดแทนสาขากับการสอนตามปกติ โดยแบ่งนักศึกษาออกเป็น 2 กลุ่ม คือ
 กลุ่มทดลองสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม และกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ทั้ง 2 กลุ่มสอนใน
 เนื้อหาเดียวกัน ใช้เวลาเท่ากัน เมื่อสอนจบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลปรากฏว่า ผล
 สัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่าผลสัมฤทธิ์
 ทางการเรียนของนักศึกษาที่ได้จากการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญ

จากการศึกษางานวิจัยดังกล่าวมาแล้ว พอสรุปได้ว่า การสอนแบบโปรแกรมมีคุณค่า
 เพียงพอที่จะนำมาเป็นเครื่องมือในการสอนได้ และถึงแม้ในบางโอกาสการสอนด้วยบทเรียน
 โปรแกรมจะไม่ดีกว่าการสอนตามปกติมากนัก แต่มีข้อดีในหลายๆ ด้านอื่นๆ อีกหลายประการ ผู้วิจัย
 คิดว่าครูสอนจะเลือกใช้ประกอบการสอนให้เหมาะสมกับสถานการณ์ และความมุ่งหมายแล้ว
 จะปรับปรุงการเรียนการสอนได้มาก ดังนั้นจึงควรสร้างบทเรียนโปรแกรมได้แพร่หลายยิ่งขึ้น

พหุสมมติศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

บทที่ 3

วิธดำเนินการทดลอง และวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเพื่อคัดเลือกข้อสอบที่มีความเชื่อมั่นสูง และเพื่อปรับปรุงแบบเรียนให้สมบูรณ์ เป็นนิสิตชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2518 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร อำเภอพระโขนง จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 82 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยเป็นนิสิตชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2518 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 60 คน ซึ่งเลือกมาโดยการสุ่มจากนิสิตทั้งหมด 275 คน และแบ่งนิสิตจำนวน 60 คนนี้ออกเป็นสองกลุ่มเท่า ๆ กัน โดยการสุ่มอีกครั้งหนึ่ง กลุ่มหนึ่งไม่เป็นกลุ่มทดลอง และกลุ่มที่สองใช้เป็นกลุ่มควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

1. บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1) ศึกษาวิธีการสร้างบทเรียนโปรแกรม และตัวอย่างบทเรียนโปรแกรม

2) ศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พ.ศ. 2517

เรื่องเซต และความสัมพันธ์ แล้วจัดแบ่งเนื้อหาออกเป็นห้าบท ดังต่อไปนี้

บทที่ 1 ความหมาย และสัญลักษณ์ของเซต

บทที่ 2 วิธีการสร้างเซตใหม่ (Operation on Sets)

บทที่ 3 กฎทางพีชคณิตของเซต (Law of algebra of Sets)

บทที่ 4 ลำดับ (Ordered Pairs)

บทที่ 5 ความสัมพันธ์ (Relations)

3) กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมของแต่ละบท

4) สร้างแบบทดสอบแต่ละบทให้ตรงกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมที่กำหนดไว้

5) เวียนบทเรียนโปรแกรมตามลำดับเนื้อหาที่กำหนดไว้

6) ปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมโดยนำบทเรียนนี้ไปทดลองใช้กับอีกในระดับใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่างที่จะทำการวิจัย แต่เป็นผู้อื่นยังไม่เคยเรียนเนื้อหาใหม่มาก่อน และทำการปรับปรุงเป็นลำดับขั้นดังนี้

ครั้งที่ 1 ทดลองกับนิสิตชั้นปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน อำเภอปทุมวัน จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 1 คน เพื่อปรับปรุงแก้ไข

ครั้งที่ 2 เมื่อแก้ไขปรับปรุงบทเรียนโปรแกรมจากครั้งที่ 1 แล้วก็นำไปทดลองกับนิสิตชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน อำเภอบางเขน จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 3 คน เพื่อปรับปรุงแก้ไข

ครั้งที่ 3 จัดพิมพ์บทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงจากครั้งที่ 2 แล้วนำไปทดลองใช้กับนิสิตชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประดามิตร อำเภอกระโขนก จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน แล้วจึงนำผลการทดลองในครั้งนี้ ปรึกษาผู้รู้ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นมาตรวจวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงบทเรียนอีกครั้งหนึ่ง บทเรียนโปรแกรมนี้จะมีแบบทดสอบบทวนหลังจากนิสิตเรียนจบทุก ๆ บทแล้ว

การวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงบทเรียนมีผลดีที่ว่า แต่ละกรอบของบทเรียนจะต้องมีผู้ตอบถูกใบต่ำกว่า 50% ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

2. แบบทดสอบ ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบสองชุด

ชุดที่ 1 แบบทดสอบย่อยใช้ทดสอบหลังจากวิสัยทัศน์เรียนจบแต่ละบทเพื่อแก้ไขปัญหาและขอคำแนะนำที่เกิดจากการเรียนของนิสิต เป็นแบบทดสอบประเภทเติมคำ หรือตอบคำถาม หรือเลือกคำตอบถูกผิดสลับกัน สร้างตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

ชุดที่ 2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้ทดสอบหลังจากเสร็จสิ้นการเรียน ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบโดยที่กล่าวการออกแบบทดสอบ และเทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบตามแนวในหนังสือเทคนิคการวัดผล (ชวาล แนนท์กุล, 2508 : 1 - 452) แล้วสร้างแบบทดสอบชนิด 5 ตัวเลือก จำนวน 120 ข้อ ตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม แล้วนำไปทดสอบกับ

นิสิตชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร อำเภอกระโขนก จังหวัดกรุงเทพมหานคร จำนวน 82 คน จากนั้นนำผลมาวิเคราะห์ตามหลักการถัก 27% กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ และเปิดการางสำเร็จรูปของ จุง - เท ฟาน (Fan, 1952 : 6 - 32) เลือกข้อสอบที่มีความยากง่าย (y) ตั้งแต่ .20 - .80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป โขสอบคสอบจำนวน 60 ข้อ ซึ่งมีความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ .65 และค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .41 ผ่านค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบตามวิธีหาโดยใช้สูตร กูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder - Richardson) ปรากฏว่า ค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) เท่ากับ .87

3. คู่มือครูที่ใช้สำหรับการสอนแบบปกติ

ผู้วิจัยได้จัดทำคู่มือครูสำหรับใช้สอนกลุ่มควบคุม โดยให้เนื้อหา ตัวอย่าง แบบฝึกหัด และคำถามที่หัดที่จะสอน เหมือนกับในบทเรียนโปรแกรม

วิธีดำเนินการทดลอง

ในการทดลองผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังต่อไปนี้

1. สอนนิสิตกลุ่มทดลองด้วยวิธี บทเรียนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยให้สัดเรียนจากบทเรียนโปรแกรมควยานเอง ผู้วิจัยเป็นผู้ควบคุมการเรียน ใช้เวลาอนทั้งนี้ 10 ชั่วโมง สำหรับนิสิตกลุ่มควบคุมนั้น อาจารย์คณิศาสตรของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางมด เป็นผู้สอนตามปกติ ตามเนื้อหาในคู่มือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาทั้งนี้ 10 ชั่วโมง
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนแล้ว จึงทำการทดสอบนิสิตทั้งสองกลุ่ม จำนวน 60 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยได้คัดเลือกแล้วจำนวนทั้งสิ้น 60 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การวิเคราะห์ขอทดสอบ

หลังจากคัดเลือกข้อทดสอบแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบที่ทดลองมาตรวจและ
ให้คะแนนใหม่โดยตรวจเฉพาะข้อทดสอบที่คัดเลือกมาใช้ในการวิจัย 60 ข้อ แล้วนำมา
คำนวณหาความเชื่อมั่น (r_{tt}) โดยใช้สูตร กูเกอร์ - ริชาร์ดสัน (Johnson, 1950 :

$$137) \quad r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{ 1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right\}$$

เมื่อ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทน จำนวนข้อทดสอบของแบบทดสอบ

p แทน ระดับความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ กำหนดได้จากสูตร

$$\text{สูตร } p = \frac{\text{จำนวนคนที่ตอบข้อนั้นถูก}}{\text{จำนวนคนทั้งหมด}}$$

$$q = 1 - p$$

S^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนการทดสอบ ซึ่งกำหนดได้จาก

$$S^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}$$

เมื่อ N แทน จำนวนนิสิตในกลุ่ม

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของกำลังสอง ของคะแนนแต่ละจำนวน

2. การวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการวิจัย

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบนิสิตทั้งสองกลุ่มมาคำนวณหาค่าเฉลี่ยของบท

$$\text{ละกลุ่มจากสูตร } \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทน จำนวนของนิสิตในกลุ่ม

หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากสูตร

$$s = \sqrt{\frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}}$$

โดยที่ s แทน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน
 $\sum x$ แทน ผลรวมของคะแนนในกลุ่ม
 $\sum x^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนนแต่ละจำนวน
 N แทน จำนวนผู้ศึกษาในกลุ่ม

เมื่อกำหนดหาคะแนนเฉลี่ย และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของทั้งสองกลุ่มแล้ว นำผลมาเปรียบเทียบหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่ $\bar{x}_1$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1
 $\bar{x}_2$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2
 s_1 แทน ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มที่ 1
 s_2 แทน ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มที่ 2
 N_1 แทน จำนวนผู้ศึกษาในกลุ่มที่ 1
 N_2 แทน จำนวนผู้ศึกษาในกลุ่มที่ 2

การวิเคราะห์ข้อมูล และผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

นำคะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ภายแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 60 ข้อ มาคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม จากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

โดยที่ $\bar{X}$ แทนคะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนนในกลุ่ม

N แทนจำนวนนิสิตในกลุ่ม

และหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของทั้งสองกลุ่ม จากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

โดยที่ S แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละจำนวนยกกำลังสอง

N แทนจำนวนนิสิตในกลุ่ม

เมื่อคำนวณหาคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 แล้วนำมาเปรียบเทียบหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

โดยที่ $\bar{X}_1$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1

$\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 2

S_1 แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 1

S_2	แทนค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มที่ 2
N_1	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มที่ 1
N_2	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่มที่ 2

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลการทดลอง และการแปลความหมายของผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ ในการแสดงผล ดังนี้

N	แทนจำนวนนักศึกษาในกลุ่ม
$\bar{X}$	แทนคะแนนเฉลี่ย
S^2	แทนค่าความแปรปรวนของคะแนน
t	แทนค่าอัตราส่วนนัยสำคัญทางสถิติ
p	แทนการระดับความเชื่อมั่น

ผลการทดลอง

การเปรียบเทียบคะแนนการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ตรีโกณมิติและความสัมพันธ์ ซึ่งทำการทดสอบเมื่อเสร็จสิ้นการเรียนของทั้งสองกลุ่ม ผลการวิเคราะห์ ความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ปรากฏในตาราง 1 ดังนี้

ตาราง 1 แสดงผลการวิเคราะห์ความแตกต่างของคะแนนจากการทดสอบนัยสำคัญในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t	p
กลุ่มทดลอง	30	48.86	27.15	5.66	.01
กลุ่มควบคุม	30	39.66	52.02		

จากตาราง 1 จะเห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ($t_{(60, .01)} = 2.66$) จึงสรุปได้ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เซ้ทและความสัมพันธ์ ของนิสิตกลุ่มทดลองสูงกว่า นิสิตกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ .01

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาเซ็ท และความสัมพันธ์ ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์
ชั้นปีที่ 1 พ.ศ. 2517 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. เพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเซ็ท และความสัมพันธ์ ของ
นิสิตชั้นปีที่ 1 ในมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ โดยใช้บทเรียนโปรแกรมที่สร้างขึ้นกับการสอน
ตามปกติ

สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ผลสัมฤทธิ์ในการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเซ็ท และความสัมพันธ์ของนิสิตที่เรียน
โดยใช้บทเรียนโปรแกรม สูงกว่านิสิตที่เรียนจากวิธีสอนตามปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2518 ในมหา -
วิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 60 คน ซึ่งเลือก
มาโดยการสุ่ม

2. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

- 1) บทเรียนโปรแกรม ผู้วิจัยได้สร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องเซ็ท และ
ความสัมพันธ์ตามหลักการสร้างบทเรียนโปรแกรม แล้วทดสอบบทเรียนเพื่อปรับปรุงแก้ไข
3 ครั้ง ได้บทเรียนที่ปรับปรุงแล้ว โดยแบ่งเป็นบทดังนี้

- บทที่ 1 ความหมายและสัญลักษณ์ของเซต
 บทที่ 2 วิธีการสร้างเซตใหม่ (Operation on Sets)
 บทที่ 3 กฎทางพีชคณิตของเซต (Law of algebra of sets)
 บทที่ 4 คู่อันดับ (Ordered Pairs)
 บทที่ 5 ความสัมพันธ์ (Relations)

2) แบบทดสอบ แบบทดสอบมี 2 ชุด

- ชุดที่ 1 แบบทดสอบย่อย ใช้สำหรับทดสอบเพื่อจบบทเรียนแต่ละบท เพื่อปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ที่เกิดจากการเรียนของนิสิตเองเป็นระยะ ๆ
 ชุดที่ 2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและความสัมพันธ์ มีจำนวนทั้งสิ้น 60 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง แบบทดสอบนี้ค่าความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ .65 มีค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .41 มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .87

3. การดำเนินการทดลอง

- 1) เลือกบัณฑิตชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2518 จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทร-วิโรฒ บางแสน อาเภอเมือง จังหวัดชลบุรี จำนวน 60 คน จากนิสิตทั้งหมด 275 คน โดยวิธีสุ่ม แล้วแบ่งเป็น 2 กลุ่มเท่า ๆ กัน โดยวิธีสุ่มอีกครั้งหนึ่ง

กลุ่มที่ 1 ใช้เป็นกลุ่มทดลอง

กลุ่มที่ 2 ใช้เป็นกลุ่มควบคุม

- 2) ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มทดลองด้วยวิธีแบบทบทวนโปรแกรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น 10 ชั่วโมง

อาจารย์คณิศรของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางแสน สอนกลุ่มควบคุมด้วยวิธีสอนตามปกติ ตามคู่มือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น 10 ชั่วโมง

- 3) เมื่อสอนจบบทเรียนแต่ละบท ทำการทดสอบย่อยด้วยแบบทดสอบชุดที่ 1 เพื่อปรับปรุง แก้ไข ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นจากการเรียนของนิสิต

- 4) เมื่อสิ้นสุดการเรียนของนิสิตทั้งสองกลุ่มแล้วทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบชุดที่ 2 เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผลการทดลอง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า กลุ่มทดลองไคคาเฉลี่ยของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 48.86 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 27.15 กลุ่มควบคุมไคคาเฉลี่ยของคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเท่ากับ 39.66 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 52.02 และผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มไคคา t เท่ากับ 5.66 สรุปผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย ที่ระดับ .01 ปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องเซต และความสัมพันธ์ของนิสิตที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสูงกว่านิสิตที่เรียนจากวิธีสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .01 จึงเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้

อภิปรายผล

ผลการทดลองปรากฏว่า นิสิตที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนจากการสอนตามปกติ ซึ่งเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้เพราะการทดลองกระทำกับนิสิตที่เรียนในระดับสูง ซึ่งมีความรับผิดชอบ ความตั้งใจ และมีสมาธิพอที่จะศึกษาหาความรู้โดยด้วยตนเอง โดยครูเป็นเพียงผู้แนะให้ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการใช้บทเรียนโปรแกรมในเนื้อหาอื่น ๆ สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ระดับนี้ เพราะนอกจากจะเป็นการให้นิสิตเรียนตามความสามารถของแต่ละบุคคลแล้ว ยังเป็นการสร้างนิสัยรักการอ่าน และรักการศึกษาค้นคว้าให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียนอีกด้วย

จากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้สังเกตเห็นว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีข้อดีหลายประการ ดังนี้

1. นิสิตมีความสนใจและกระตือรือร้นต่อการเรียนตลอดเวลา เอาใจใส่การเรียนเป็นพิเศษ ผู้เรียนไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการเรียน การกระทำดังนี้เป็นการสร้างบรรยากาศแห่งการเรียนรู้

2. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมสามารถสนองตอบเรื่องความแตกต่างระหว่างบุคคลได้เป็นอย่างดี ผู้ที่เรียนเก่งไม่ต้องเสียเวลาคอยผู้เรียนที่เรียนอ่อน อันอาจทำให้เกิดความเบื่อหน่ายได้

3. การสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมเป็นการฝึกนิสัยให้ผู้เรียนมีความซื่อสัตย์ และมีความรับผิดชอบต่องานตัวเอง ทั้งนี้ เพราะการเรียนจากบทเรียนโปรแกรมฝึกให้ผู้เรียนปฏิบัติตามคำสั่งของบทเรียน รู้จักวิธีการที่งานด้วยตนเอง และรู้จักควบคุมตนเองได้

4. บทเรียนโปรแกรมช่วยประหยัดเวลาและแรงงานของครูผู้สอน ซึ่งทำให้ผู้สอนมีเวลาสร้างสรรค์การสอนให้ได้ดีและสามารถช่วยเหลือแนะนำผู้เรียนได้เป็นรายบุคคล

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. เนื่องจากผลการทดลองพบว่าการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมให้ผลดีกว่าการสอนตามปกติ ผู้วิจัยเห็นว่าควรจะได้มีการส่งเสริมการสร้าง การวิจัย และการใช้บทเรียนโปรแกรมให้แพร่หลาย เพื่อจะได้เกิดประโยชน์ทั้งในด้านการปรับปรุงการสอนและช่วยแก้ปัญหาการขาดแคลนครูอีกด้วย

2. ในการใช้บทเรียนโปรแกรม ไม่ควรใช้บทเรียนโปรแกรมสอนแทนครูโดยตลอดทุกอย่าง เรื่อง เพราะเนื้อหาบางเรื่อง บางตอนจะยากแก่การเข้าใจ ถ้าผู้เรียนอ่านด้วยตนเอง และขาดปฏิริยาตอบโต้ระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน หรือผู้เรียนกับผู้เรียน ผู้วิจัยเสนอแนะว่าควรใช้ประกอบกับการสอนตามปกติ โดยผู้สอนต้องเป็นผู้จัดกิจกรรมในการสอนให้เหมาะกับเนื้อหาที่เรียน ความมุ่งหมาย และสถานการณ์ตามความเหมาะสม

3. บทเรียนโปรแกรมที่นำมาใช้จะต้องผ่านการวิเคราะห์ตามหลักวิชาการ มีความเชื่อมั่นได้ คำอธิบายต้องชัดเจน ไม่คลุมเครือ และสัมพันธ์กับความรูพื้นฐานของผู้เรียน

4. ในการใช้บทเรียนโปรแกรมผู้สอนจะต้องเข้าใจผู้เรียนเกิดความสนใจที่จะเรียนรูด้วยตนเอง และทำหน้าที่เป็นผู้แนะนำเมื่อผู้เรียนเกิดปัญหา

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

1. ควรมีการวิจัยเพื่อศึกษาคุณลักษณะของบทเรียนโปรแกรมกับผู้เรียนที่มีระดับความสามารถต่าง ๆ กัน เพื่อความผู้เรียนประเภทใดได้รับผลจากการสอนแบบนี้นามากที่สุด
2. ควรมีการวิจัยความถี่ของประกอบอะไรบางอย่างที่จะช่วยให้การสอนด้วยบทเรียนโปรแกรมได้รับผลดี เช่น เทคนิคการเขียนโปรแกรม ลักษณะของวิชา ระยะเวลาที่จะใช้ในแต่ละครั้ง และบทบาทของครูในขณะใช้บทเรียนโปรแกรม เป็นต้น
3. ควรมีการศึกษาค้นคว้าการใช้วิธีสอนด้วยบทเรียนโปรแกรม จะทำให้ผู้เรียนมีทัศนคติต่อโปรแกรมที่เรียนอย่างไร และมีผลพลอยได้จากการสอนแบบนี้หรือไม่บ้าง
4. ควรนำบทเรียนโปรแกรมเรื่องเซต และความสัมพันธ์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงอีกครั้งหนึ่ง และทดลองกับกลุ่มตัวอย่างที่มีจำนวนมากขึ้นเพื่อใช้เป็นแบบฉบับในการเรียนที่ต่อไป
5. ควรจะมีการสร้างบทเรียนโปรแกรมแบบสาขา (Branching) ในเรื่องที่ได้ทดลองนี้ แล้วใช้ทดลองสอนเปรียบเทียบกับบทเรียนโปรแกรมแบบเชิงเส้น (Linear) ที่ได้สร้างขึ้นครั้งนี้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- จารุณี สุตะบุตร ทฤษฎีเซตขั้นต้น โรงพิมพ์อักษรเจริญทัศน์ 2515, 102 หน้า.
- ชวาล แพรัตกุล เทคนิคการวัดผล พิมพ์ครั้งที่ 5 สำนักพิมพ์วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า.
- แชรम्म วิลเบอร์ และคณะ สื่อมวลชนใหม่ ๆ : รายงานสำหรับนักวางแผนการศึกษา
 ถีน้อย โขวาทอง แปล สำนักเลขาธิการคณะกรรมการแห่งชาติว่าด้วยการศึกษา
 วิทยาศาสตร์และวัฒนธรรม 2514, 252 หน้า.
- ธง บุญเจริญ และ ล้วน สายยศ แบบเรียนโปรแกรมเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สำนักพิมพ์
 ประสานมิตร 2514, 374 หน้า.
- บรรชา รัตนวัย การสร้างและทดลองใช้แบบเรียนโปรแกรมสอนวิชาเคมีในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
 ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร 2516, 55 หน้า.
- บุญเกลศักดิ์, ปี.อาร์. จิตวิทยาการเรียนรู้กับการสอน สมควร อภัยพันธ์ แปลและเรียบเรียง
 โรงพิมพ์สังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย 2513, 375 หน้า.
- ปรีชา กุศลวลี การศึกษาเปรียบเทียบการสอนวิทยาศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้แบบ
เรียนโปรแกรมกับการสอนตามปกติ ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา
 ประสานมิตร 2515, 35 หน้า.
- เป็รื่อง กุมุท การสร้างแบบเรียนสำเร็จรูป พิมพ์ครั้งที่ 2 วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร
 2516, 131 หน้า.
- เป็รื่อง กุมุท แบบเรียนโปรแกรมเรื่องทฤษฎีเซต โรงพิมพ์ประเสริฐอักษร 2513, 82 หน้า.
- ภิรมย์ หุสสวัสดิ์ Logic and Sets โรงพิมพ์โรงเรียนสตรีเนติศึกษา 2509, 227 หน้า.

ภิรมย์ พูลสวัสดิ์ Set Theory โรงพิมพ์โรงเรียนสตรีเนติศึกษา 2511, 203 หน้า.

วรรณา เจียมทะวงษ์ การศึกษารเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเลขยกกิตชั้นประถมปีที่ 5 ระหว่างการใช้แบบเรียนสำเร็จรูป (Programmed Textbook) กับการสอนแบบปกติ ปรินญานินันท์ กต.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร 2516, 71 หน้า

วิศิษฐ์ ประจวบเหมาะ การเพิ่มของประชากรที่มีผลต่อการศึกษา ปัญหาจากการเพิ่มประชากรของไทย ก.ศ.การพิมพ์ ม.ป.ป., 44 หน้า.

กึกกาศการ, กระทรวง กรมวิชาการ คณิตศาสตร์แผนปัจจุบันเล่ม 2 พิมพ์ครั้งที่ 2 โรงพิมพ์คุรุสภา 2512, 118 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง หนังสือประกอบการเรียนวิชาพีชคณิต "Programmed Text" ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงพิมพ์คุรุสภา 2512, 246 หน้า.

สุภา ภูชงคกุล "Programmed Instruction" ประมวลบทความเกี่ยวกับนวัตกรรมและเทคโนโลยีทางการศึกษา โรงพิมพ์คุรุสภา-2515, 242 หน้า.

สุวรรณ มุ่งเกษม พัฒนาการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ปรินญานินันท์ กต.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร 2513, 173 หน้า.

สุเทพ จันทรมศักดิ์ หนังสือประกอบความรู้วิชาคณิตศาสตร์เซต อักษรเจริญทัศน์ 2514, 35 หน้า.

อุทม มุ่งเกษม การทดลองใช้เครื่องสอนประกอบการสอนวิชาภาษาอังกฤษในระดับชั้นประถมศึกษา ปีที่ 7 ปรินญานินันท์ กต.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร 2513, 63 หน้า.

- Butler, Charles H., Wren, F. Lynwood, and Banks, J. Houston, The Teaching of Secondary Mathematics, McGraw Hill Book Company, New York, 1970, 597 pp.
- Calvin, Alen D., Programmed Instruction, Bold New Venture Bloomington, Indiana University Press, 1969, 250 pp.
- Clarke, John, A First Book of Sets. Longmans, London, 1965, n.p.
- Conroy, David E., "The Effects of Age and Sex upon a Comparison Between Achievement Gains in Programmed Instruction and Conventional Instruction in Remedial Algebra I at Northern Virginia Community College", Dissertation Abstracts, 32(9) : 5102-A, March, 1972.
- Davis, Floyed Wayne, "A Study of Three Methods of Utilizing Programed Algebra Textbooks", Dissertation Abstracts, 27(8) : 2272-A, February, 1967.
- Devine, Donald F., "Student Attitudes and Achievement A Comparison between the Effects of Programmed Instruction and Conventional Classroom Approach in Teaching Algebra I", The Mathematics Teacher 61(3) : 296-301, March, 1968.
- Easterday, Kenneth and Easterday, Helen, "Ninth-Grade Algebra, Programmed Instruction, and Sex Differences - An Experiment", The Mathematics Teacher, 51(3) : 302-307, March, 1963.
- Epstien, Beryl, and Sam, The First Book of Teaching Machines, Franklin Watts, Inc., New York, 1961, 50 pp.
- Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, New York, 1952, 32 pp.
- Fehr, Howard F., "Reform of Mathematics Education Around the World," The Mathematics Teacher, 58 : 37-44, January, 1965.
- Fishell, Kenneth Nelson, "Utilization Patterns of Programmed Materials in the Junior High School", Dissertation Abstracts 25 (5) : 2881, November, 1964.
- Fund for the Advancement of Education, Four Case Study of Programmed Instruction, Fund for the Advancement of Education, New York, 1964, 119 pp.
- Goebel, Laurence Gayheart, "An Analysis of Teacher Pupil Interaction When Programmed Instruction Materials are Used", Dissertation Abstracts 27(4) : 982-A, October, 1966.

- Hanson, Lincoln F., Programs'63, The center for Programmed Instruction, Inc., Washington, 1963, 84 pp.
- Hartley, James, Strategies for Programmed Instruction : An Education Technology, Butlerworth, England, 1972. 231 pp.
- Lach, Ivan John, "Report of a Study on the Use of Programed Workbooks to Provide for Partially Individualized Mathematics Instruction in the Junior High", The Mathematics Teacher, 63(6) : 512-515, October, 1970.
- Lane, Bennie Ray, 'An Experiment with Programmed Instruction as a Supplement to Teaching College Mathematics by Closed-Circuit Television', Dissertation Abstracts, 23(10) P 3817, April, 1963.
- Leith, G.O.M. and others, A Handbook of Programmed Learning, Robert Gunningham and Sons Ltd., Great Britain, 1966, 152 pp.
- Moses, John Irvin, 'A Comparison of the Results of Achievement with Programmed Learning and Traditional Classroom Techniques in First Year Algebra at Spring Branch Junior High School', Dissertation Abstracts 23(5) . 1559, November, 1962.
- Nichols, D.Eugene, Kulin, Robert, and Rarland, Henry, Introduction to Set : A Programed Unit, Holt Rinehart and Winston, Inc., London, 1962, unpagged.
- Pinsent, Arthure, The Principle of Teaching-Method, 3rd.ed., London, Harrap, 1969, 594 pp.
- Reed, Jerry Franklin, "The Relative Effectiveness of Programmed and Conventional Textbooks as Supplements to Classroom Lecture in the Teaching of Elementary Modern Mathematics", Dissertation Abstracts, 30(4) : 1989-A, October, 1971.
- Richardson, M.", and Kuder, G.F., "The Calculation of Test Reliability Coefficients Based Upon Method of Rational Equivalence", Journal of Education Psychology, 30 : 621-678, 1939.
- Riggs, Corinne Whitlow, "The Construction and Evaluation of a Programmed Text on the Interpretation of Graphs for Grade Five", Dissertation Abstracts, 27(9) 2748-A, March, 1967.
- Robson, Allen Maynard, 'A Comparative Study of the Teaching of First Year Algebra', Dissertation Abstracts, 27(1) . 85-A, July, 1966.
- Salisbury, Robert Gardner, "A Study of Programmed Instruction in Selected Secondary Schools of Ohio", Dissertation Abstracts, 27(3) . 712-A, September, 1966.

- Schramm, Wilbur, The Research on Programmed Instruction An Annotated Bibliography, U.S. Dept. of Health Education and Welfare, Washington, D.C., 1964, 114 pp.
- Weber, Walter Irving, "A Comparative Study of the Effectiveness of Two Methods of Instruction Utilizing Programed Materials in a College Remedial Mathematics", Dissertation Abstracts, 31 (8) • 3911-A, February, 1971.
- White, Charles Colven, "The Use of Programmed Texts for Remedial Mathematics Instruction in College", Dissertation Abstracts, 30(8) : 3373-A, February, 1970.
- Wiebe, Arthur John, "The Comparative Effects of Three Methods of Utilizing Programmed Mathematics Materials with Low-Achievers", Dissertation Abstracts, 27(4) • 1002-A, October, 1966.
- Williams, Harold Henry, "An Experiment in Programmed Instruction", Dissertation Abstracts, 33(6) : 2700-A, December, 1972.
- Young, Robert G., Sets .A Programmed Course, Methuen Educational Ltd., London, 1967, 96 pp.

ภาคผนวก

- - - - -

-

1

ภาคผนวก ก.

ขอมูลที่ได้จากการทดลอง

การหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มทดลอง

X	f	fX	X ²	fX ²
40	1	40	1600	1600
41	1	41	1681	1681
42	4	168	1764	7056
43	2	86	1849	3698
44	1	44	1936	1936
45	1	45	2025	2025
47	1	47	2209	2209
48	1	48	2304	2304
49	1	49	2401	2401
50	3	150	2500	7500
51	3	153	2601	7803
52	1	52	2704	2704
53	5	265	2809	14045
55	4	220	3025	12100
58	1	58	3364	3364
	30	1466		72426

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$= \frac{1466}{30} = 48.86$$

$$S^2 = \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{30 \times 72426 - (1466)^2}{30(30-1)}$$

$$= \frac{2172780 - 2149156}{870}$$

$$= \frac{23624}{870}$$

$$= 27.15$$

$$S = 5.21$$

การหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนทดสอบกลุ่มควบคุม

X	f	fX	X ²	fX ²
24	1	24	576	576
27	1	27	729	729
30	2	60	900	1800
31	1	31	961	961
34	2	68	1156	2312
35	3	105	1225	3675
36	1	36	1296	1296
37	1	37	1369	1369
39	2	78	1521	3042
41	2	82	1681	3362
42	1	42	1764	1764
43	3	129	1849	5547
44	1	44	1936	1936
45	3	135	2025	6075
46	2	92	2116	4232
47	1	47	2209	2209
49	2	98	2401	4802
55	1	55	3025	3025
	30	1190		48712

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$= \frac{1190}{30} = 39.66$$

$$s^2 = \frac{N\sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}$$

$$= \frac{30 \times 48712 - (1190)^2}{30(30-1)}$$

$$= \frac{1461360 - 1416100}{870}$$

$$= \frac{45260}{870}$$

$$= 52.02$$

$$s = 7.21$$

หาค่า t ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างสองกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 \text{สูตร } t &= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \\
 &= \frac{48.86 - 39.06}{\sqrt{\frac{27.154}{30} + \frac{52.022}{30}}} \\
 &= \frac{9.20}{\sqrt{\frac{79.176}{30}}} \\
 &= \frac{9.20}{\sqrt{2.6392}} \\
 &= \frac{9.20}{1.6245} \\
 &= 5.66328
 \end{aligned}$$

ค่า t มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01

$$t(60, .01) = \pm 2.66 \quad ; \quad df = 30 + 30 - 2 = 58$$

ภาคผนวก ข.
แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p_h	p_l	r		ข้อที่	p_h	p_l	p	r
1	.91	.50	.73	.50	21	.77	.45	.62	.34
2	.27	.14	.20	.19	22	.86	.64	.76	.29
3	.32	.32	.32	.00	23	.68	.59	.64	.10
4	.86	.73	.80	.10	24	.91	.45	.70	.53
5	.95	.45	.74	.61	25	.50	.32	.41	.19
6	.82	.50	.67	.36	26	.95	.50	.76	.58
7	.91	.55	.75	.46	27	.95	.36	.70	.66
8	.86	.55	.72	.37	28	.95	.50	.76	.58
9	.82	.45	.64	.40	29	.91	.13	.67	.56
10	.86	.59	.73	.33	30	.95	.45	.74	.61
11	.23	.18	.20	.07	31	.95	.59	.80	.52
12	.91	.50	.73	.50	32	.95	.50	.70	.58
13	.91	.59	.77	.42	33	.86	.68	.77	.25
14	.86	.41	.65	.49	34	.95	.55	.78	.55
15	.95	.55	.78	.55	35	.86	.73	.80	.19
16	.82	.73	.78	.12	36	.91	.05	.46	.82
17	.95	.59	.80	.52	37	.82	.45	.64	.40
18	.91	.32	.36	.10	38	.36	.14	.50	.70
19	.91	.41	.69	.56	39	.86	.41	.65	.49
20	.95	.50	.76	.58	40	.91	.36	.66	.59

ข้อ	p_h	p_l	p	r
41	.95	.50	.70	.58
42	.95	.41	.72	.63
43	.73	.55	.64	.20
44	.86	.73	.80	.19
45	.91	.64	.79	.38
46	.18	.41	.29	.27
47	.68	.55	.62	.14
48	.91	.55	.75	.46
49	.59	.14	.35	.49
50	.91	.55	.75	.46
51	.82	.45	.64	.40
52	.82	.73	.78	.12
53	.59	.23	.40	.37
54	.95	.55	.78	.55
55	.27	.14	.20	.19
56	.41	.09	.23	.42
57	.91	.64	.79	.38
58	.95	.55	.78	.55
59	.95	.59	.80	.52
60	.91	.64	.79	.38

ค่าความยากง่ายเฉลี่ย = .65

ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย = .41

การหาความแปรปรวนของคะแนนทดสอบจากนิศัถนงมค

X	f	fX	X ²	fX ²
55	1	55	3025	3025
54	1	54	2916	2916
53	1	53	2809	2809
51	1	51	2601	2601
50	3	150	2500	7500
49	3	147	2401	7203
48	6	288	2304	13824
47	4	188	2209	8836
46	6	276	2116	12696
45	8	360	2025	16200
44	4	176	1936	7744
43	4	172	1849	7396
42	6	252	1764	10584
41	3	123	1681	5043
40	1	40	1600	1600
39	1	39	1521	1521
38	1	38	1444	1444
37	2	74	1369	2738
36	3	108	1296	3888
35	1	35	1225	1225

X	f	fX	X ²	fX ²
34	3	102	1156	3468
33	1	33	1089	1089
32	2	96	1024	3072
31	1	31	961	961
30	2	60	900	1800
29	1	29	841	841
28	1	28	784	784
27	2	54	729	1458
26	2	52	676	1352
25	1	25	625	625
24	2	48	576	1152
21	1	21	441	441
20	1	20	400	400
18	1	18	324	324
	82	3296		138560

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{82(138560) - (3296)^2}{82(81)} \\
 &= \frac{498304}{6642} = 75.023
 \end{aligned}$$

ตารางค่า p , q และ pq ของแบบทดสอบ

ข้อ สอบ	p	q	pq	ข้อ สอบ	p	q	pq
1	.73	.27	.1971	21	.50	.50	.2500
2	.13	.87	.1131	22	.83	.17	.1411
3	.28	.72	.2016	23	.66	.34	.2244
4	.78	.22	.1716	24	.65	.35	.2275
5	.74	.26	.1924	25	.45	.55	.2475
6	.65	.35	.2275	26	.74	.26	.1924
7	.70	.30	.2100	27	.78	.22	.1716
8	.76	.24	.1824	28	.83	.17	.1411
9	.63	.37	.2331	29	.73	.27	.1971
10	.83	.17	.1411	30	.80	.20	.1600
11	.22	.78	.1716	31	.76	.24	.1824
12	.78	.22	.1716	32	.83	.17	.1411
13	.78	.22	.1716	33	.82	.18	.1476
14	.62	.38	.2356	34	.83	.17	.1411
15	.80	.20	.1600	35	.85	.15	.1275
16	.80	.20	.1600	36	.55	.45	.2475
17	.79	.21	.1659	37	.57	.43	.2451
18	.68	.32	.2176	38	.57	.43	.2451
19	.66	.34	.2244	39	.70	.30	.2100
20	.77	.23	.1771	40	.72	.28	.2016

ตารางแสดงค่า p , q และ Σpq ของแบบทดสอบ

ข้อ ข้อที่	p	q	pq
41	.84	.16	.1344
42	.85	.15	.1275
43	.68	.32	.2176
44	.85	.15	.1275
45	.76	.24	.1824
46	.24	.76	.1824
47	.63	.37	.2331
48	.66	.34	.2244
49	.32	.68	.2176
50	.70	.30	.2100
51	.62	.38	.2356
52	.70	.30	.2100
53	.46	.54	.2484
54	.89	.11	.0979
55	.12	.88	.1056
56	.24	.76	.1824
57	.35	.65	.2275
58	.87	.13	.1131
59	.89	.11	.0979
60	.88	.12	.1056
			10.9711

หาความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

จากสูตร

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1} \left\{ 1 - \frac{\Sigma pq}{S^2} \right\}$$

r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

S^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนน

p แทน อัตราของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

q แทน อัตราของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

$$q = 1 - p$$

$$r_{tt} = \frac{60}{59} \left\{ 1 - \frac{10.9711}{75.0232} \right\}$$

$$= \frac{60}{59} \{ 1 - 0.1462 \}$$

$$= \frac{60}{59} (.8538)$$

$$= \frac{51.2280}{59}$$

$$= .8683$$

แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่อง เซตและความสัมพันธ์
ชั้น กค.บ. ปีที่ 1

คำอธิบายวิธีทำข้อสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้ต้องการให้นักศึกษาให้เสร็จทุกข้อ โดยกำหนดเวลา 1 ชั่วโมง ข้อสอบเป็นแบบเลือกตอบ มีทั้งหมด 60 ข้อ ทำตามแต่ละข้อมีคำตอบให้เลือก 5 คำตอบ ให้นักศึกษาเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวจากข้อ ก., ข., ค., ง., หรือ จ. เมื่อเลือกคำตอบใด ก็ให้ขีดเส้นหนา ๆ จนเต็มของเส้นประหลังอักษรของข้อที่เลือกนั้น

ในกระดาษคำตอบ

- ตัวอย่าง (๐) ข้อต่อไปนี้เป็นจริง ?
ก. $2 + 2 = 5$
ข. $2 + 5 = 6$
ค. $2 + 6 = 7$
ง. $2 + 7 = 9$
จ. $2 + 9 = 10$
- ข้อนี้คำตอบที่ถูกต้องคือ $2 + 7 = 9$
ซึ่งตรงกับข้อ ง. ให้นักศึกษาไปขีดเส้นหนา ๆ
จนเต็มของเส้นประหลังข้อ ง. ลงใน
กระดาษคำตอบ ดังนี้
(๐) ก::: ข::: ค::: ง ~~xxx~~ จ:::

2. ให้นักศึกษาต้องการเปลี่ยนคำตอบ ก็ให้ขีดเส้นขวางทับรอยเดิมเสียก่อน

ตัวอย่าง ต้องการเปลี่ยนคำตอบจากข้อ ข. เป็นข้อ ก.

(๐) ก::: ข ~~xxx~~ ค ~~xxx~~ ง::: จ:::

3. ต้องการทวงเลข ก็ให้ทวงลงในแผ่นกระดาษว่างที่แนบมาให้ โปรดอย่าขีดเขียนใด ๆ

ลงบนแบบทดสอบ

4. ถ้าพบข้อยากให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน จงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ.

1. ข้อใดเป็น finite set ?

ก. $\emptyset$

ข. $\{1, 2, 3, \dots\}$

ค. $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$

ง. เซตของจำนวนจริงที่หารด้วย 2 ลงตัว

จ. ข้อ ก. และ ค.

2. เซต $\{\{\}, 1, \{1\}, 2, \{1, 1\}, \{1, 2\}\}$ มีสมาชิก ?

ก. 6

ข. 5

ค. 4

ง. 3

จ. ถูกทุกข้อ

3. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็น infinite set ?

ก. เซตของจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

ข. เซตของจำนวนเฉพาะ (prime number) ที่หารด้วย 4 ลงตัว

ค. เซตของเลขคู่ตั้งแต่หนึ่งถึงล้าน

ง. เซตของมนุษย์บนโลก

จ. เซตของอำเภอในประเทศไทย

4. ข้อใดคือเซตเดียวกับ $\{3, 5, 7, 9\}$?

ก. $\{3, 7, 3, 5, 7, 9\}$

ข. $\{3, 5, 9, 5, 7\}$

ค. $\{9, 7, 5, 3\}$

ง. $\{7, 9, 3, 9, 5\}$

จ. ถูกทุกข้อ

5. $\{5, 7, 9, \dots\}$ คือเซตเดียวกับข้อใด ?

ก. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ}, x \geq 5\}$

ข. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}, x \geq 5\}$

ค. $\{x / x \text{ เป็น prime number}, x \geq 5\}$

ง. ข้อ ข. และ ค.

จ. ถูกทุกข้อ

6. $\{1, 2, 3\}$ เท่ากับเซตใด ?

- ก. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x \leq 3\}$
- ข. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก, } x \leq 3\}$
- ค. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริงบวก, } x \leq 3\}$
- ง. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก, } 1 < x < 3\}$
- จ. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริงบวก, } 1 \leq x \leq 3\}$

7. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x^2 = 1\}$ คือเซตเดียวกับเซตใด ?

- ก. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x \leq 1\}$
- ข. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก, } x \leq 1\}$
- ค. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } -1 \leq x \leq 1\}$
- ง. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } -1 \leq x \leq 1\}$
- จ. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x \neq 0 \text{ และ } -1 \leq x \leq 1\}$

8. เซตใดเป็นเซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - x - 6 = 0$?

- ก. $\{-2\}$ ข. $\{3\}$ ค. $\{-2, 3\}$ ง. $\{2, -3\}$ จ. นีคทุกข้อ

9. เซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตว่าง (empty set) ?

- ก. $\{\{\}\}$ ข. $\{0\}$ ค. $\{\emptyset\}$
- ง. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก, } x < 0\}$
- จ. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก, } x^2 = 1\}$

10. เซตใดเป็น Singleton set หรือ Unit set ?

- ก. $\{\{a\}\}$ ข. $\{\}$ ค. $\{0\}$
- ง. $\emptyset$ จ. ขอ ก. และ ค.

11. เซตต่อไปนี้ เซตใดไม่เป็นเซตว่าง และไม่เป็น singleton set ?

- ก. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 2 < x < 4\}$
- ข. $\{x / x \text{ เป็นคนที่ 4 แขน}\}$
- ค. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนคู่, } 2 < x < 4\}$
- ง. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 = 3\}$
- จ. นีคทุกข้อ

12. $\{-2, 3\}$ เป็น solution set ของข้อใด ?
- ก. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 - 5x + 6 = 0\}$
 ข. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 - 6x + 5 = 0\}$
 ค. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 - 5x - 6 = 0\}$
 ง. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 + 5x + 6 = 0\}$
 จ. $\{x / x \text{ เป็นจำนวนจริง, } x^2 - x - 6 = 0\}$
13. ข้อใดเป็น solution set ของ $\{y / y \text{ เป็นจำนวนจริง, } y^2 - 2y - 35 = 0\}$
- ก. $-5, 7$ ข. $(-5, 7)$ ค. $\{-5, 7\}$
 ง. $-7, 5$ จ. $\{-7, -5\}$
14. ข้อใดเป็นข้อใดเป็นเซต (subset) ของ $\{0, 1\}$?
- ก. $\emptyset$ ข. $\{\emptyset\}$ ค. $\{\{\}, 0\}$
 ง. $\{\{0\}\}$ จ. $\{\{0\}, 1\}$
15. $\{x, y, z\}$ มีเซตทั้งหมดกี่เซต ?
- ก. 4 ข. 5 ค. 6 ง. 7 จ. 8
16. เซตใดต่อไปนี้ เป็นเซตของเซตของจำนวนเต็ม ?
- ก. เซตของจำนวนธรรมชาติ ข. เซตของจำนวนตรรกยะ
 ค. เซตของจำนวนอตรรกยะ ง. เซตของจำนวนจริง
 จ. เซตของจำนวนเชิงซ้อน
17. ให้ $C = \{\text{คนขยัน}\}$ และ $D = \{\text{คนสอบไล่ได้}\}$ ถ้า $C \subseteq D$ ข้อใดสรุปถูกต้อง ?
- ก. คนสอบไล่ได้ทุกคนเป็นคนขยัน ข. คนขยันทุกคนสอบไล่ได้
 ค. คนขยันบางคนสอบไล่ได้ ง. คนสอบไล่ได้บางคนเป็นคนขยัน
 จ. คนขยันบางคนอาจสอบตกก็ได้
18. A เป็น proper subset ของ B ($A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ
- ก. $A \subseteq B$ ข. $B \subseteq A$
 ค. $A = B$ ง. $A \neq B$
 จ. ข้อ ก. และ ง.

19. ให้ $A = \{1, 3, 5\}$ และ $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ ข้อใดสรุปถูกต้องที่สุด ?

ก. $A \subseteq B$ ✓

ข. $B \subseteq A$

ค. $A \neq B$

✓ ง. $A \subset B$

จ. $B \subset A$

20. ถ้า $B = \{2, \{4, 5\}\}$ ข้อใดเป็น proper subset ของ B ?

ก. $\{2\}$

ข. $\{4, 5\}$

ค. $\{2, \{4, 5\}\}$

✓ ง. $\{\{4, 5\}\}$

จ. ขอ ก. และ ง.

21. ให้ B และ D เป็นเซตใด ๆ ข้อใดเป็นเหตุผลที่ใช้ในการแสดงว่า $B \not\subseteq D$?

ก. ทุก ๆ สมาชิกของ B ไม่เป็นสมาชิกของ D

ข. มีบางสมาชิกของ D เป็นสมาชิกของ B

ค. ทุก ๆ สมาชิกของ D ไม่เป็นสมาชิกของ B

ง. มีบางสมาชิกของ D ไม่เป็นสมาชิกของ B

✓ จ. มีบางสมาชิกของ B ไม่เป็นสมาชิกของ D

22. ข้อใดเป็นเหตุผลที่แสดงว่า P และ H เป็น disjoint set ?

ก. $P \cap H \neq \emptyset$

ข. $P \cap H = H$

✓ ค. $P \cap H = \emptyset$

ง. $P \cap H = P$

✓ จ. ขอ ก., ข. และ ง.

23. ถ้า Universal set U เป็นเซตของจำนวนเต็มแล้ว solution set ของ $x^2 + 1 = 0$ เทียบกับเซตใด ?

ก. $\{-1\}$

ข. $\{1\}$

ค. $\{-1, 1\}$

✓ ง. $\{-1, 1\}$

✓ จ. $\emptyset$

24. เซตต่อไปนี้ เซตใดมี 0 เป็นสมาชิก

ก. เซตของจำนวนเต็มบวก

ข. เซตของจำนวนเต็มลบ

✓ ค. เซตของจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ง. เซตของจำนวนเต็มบวกคู่

✓ จ. เซตของจำนวนเต็มบวกคี่

25. ถ้า $a \in A$, $b \in B$ และ $A \subseteq B$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ ?

ก. $a \in B$ ข. $\{a\} \subseteq B$ ค. $\{a\} \subseteq A$

ง. $\{b\} \subseteq B$ จ. $\{b\} \subseteq A$

26. ให้ Universal set U เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ เซตใดต่อไปนี้ เป็น Complement ของเซตของเลขคู่บวก ?

ก. เซตของเลขคู่บวก

ข. เซตของเลขคี่ลบ

ค. เซตของเลขคู่ลบ

ง. เซตของจำนวนเต็มลบ

จ. เซตของจำนวนจริงลบ

27. ถ้า $U = \text{Universal set}$ และ A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $\phi' = ?$

ก. U

ข. A

ค. ϕ

ง. 0

จ. $\{0\}$

28. จากสิ่งที่กำหนดให้ในข้อ 27, $U' = ?$

ก. U

ข. A

ค. ϕ

ง. 0

จ. $\{0\}$

29. ให้ U เป็น Universal set, A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \cap \phi = ?$

ก. A

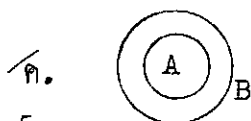
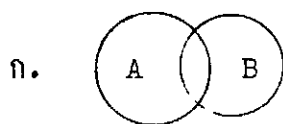
ข. ϕ

ค. U

ง. $\{0\}$

จ. ได้เซตใหม่

30. แผนภาพในข้อใดที่แสดงถึง $A \cap B = A$?



คำชี้แจง สิ่งที่กำหนดมาให้ต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 31 - 32 .

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}, A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$$

31. $(U \cap A)' = ?$

- ก. $\{4, 5, 6\}$ ข. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ค. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$
 ง. $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ จ. $\emptyset$

32. $A \cap B' = ?$

- ก. $\{1, 2, 3\}$ ข. $\{4, 5\}$ ค. $\{4, 5, 6\}$
 ง. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ จ. $\{6, 7, 8, 9, 10\}$

33. ก $A = \{x / x^2 + 3x - 10 = 0\}$

$$B = \{x / x^2 - 9x + 14 = 0\}$$

$$C = \{x / x^2 - 2x - 35 = 0\}$$

$$(A \cup B) - C = ?$$

- ก. $\{2\}$ ข. $\{-5\}$ ค. $\{7\}$ ง. $\{2, 7\}$ จ. $\{7, -5\}$

34. ก $A = \{2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ แล้ว $(A - B) \cap (A \cup B) = ?$

- ก. $\{2\}$ ข. $\{3\}$ ค. $\{2, 4, 5\}$
 ง. $\{3, 4, 5\}$ จ. $\{2, 3, 4, 5\}$

35. $A \cup \emptyset = ?$

- ก. $A \cup A$ ข. $A \cup A'$ ค. $A \cap A'$ ง. $\emptyset$ จ. U'

36. $A - A = ?$

- ก. A ข. 0 ค. $\emptyset'$ ง. U จ. $U' = \emptyset$

37. $\emptyset - \emptyset = ?$

- ก. 0 ข. $\{0\}$ ค. $\emptyset$ ง. $\emptyset'$ จ. U

38. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ ?

- ก. $U' = U - U$ ข. $U' = A - A$ ค. $U' = \emptyset - \emptyset$
 ง. $U' = A \cap \emptyset$ จ. $U' = A \cup \emptyset$

39. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ ?

- ก. $A - B \subseteq A$ ข. $A \cup B \subseteq A$ ค. $A \cap B \subseteq A$
 ง. $A \cup \emptyset \subseteq A$ จ. $A \cap \emptyset \subseteq A$

40. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ ?

- ก. $A - B \subseteq A \cup B$ ข. $A \cap B \subseteq A \cup B$
 ค. $A - \emptyset \subseteq A \cup B$ ง. $A \cap \emptyset \subseteq A \cap B$
 จ. $A - B \subseteq A \cap B$

41. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว ข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นจริง

- ก. $A \cap B = A$ ข. $A \cup B = A$ ค. $A - B = A$
 ง. $A \cap B = B$ จ. $A - B = B$

42. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว ข้อใดเป็นจริง ?

- ก. $A \cap B = B$ ข. $A \cup B = B$ ค. $A - B = B$
 ง. $A \cup B = A$ จ. $A - B = A$

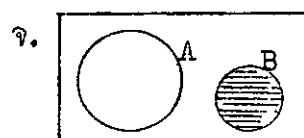
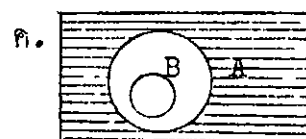
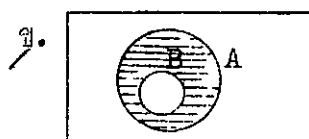
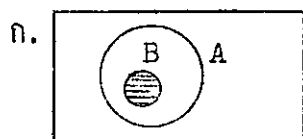
43. $(A \cup B) \cap C$ เท่ากับเซตใดในข้อต่อไปนี้ ?

- ก. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ ข. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
 ค. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ ง. $(A \cap C) \cup (B \cup C)$
 จ. $(A \cup C) \cup (B \cap C)$

44. ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$,
 $A' \cap B' = ?$

- ก. $\{2\}$ ข. $\{5\}$ ค. $\{7\}$ ง. $\{5, 7\}$ จ. $\{2, 5, 7\}$

45. บริเวณแรเงาในภาพใดที่แสดงถึงเซต $A - B$?



46. $A - B = \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $A \subseteq B$

ข. $B \subseteq A$

~~ค. $A = B$~~

ง. $A \neq B$

จ. ถูกทั้งข้อ ก. และ ค.

47. $A \cup B = A$ ก็ต่อเมื่อ

ก. $A \subseteq B$

ข. $B \subseteq A$

ค. $A \cap B = \emptyset$

ง. $A = B$

~~จ. ถูกทั้งข้อ ข. และ ง.~~

48. $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ เท่ากับเซตในข้อใด ?

ก. $A \cup B$

~~ข. $A \cap B$~~

ค. $A - B$

ง. $B - A$

จ. $\emptyset$

49. $(A' \cup B')'$ เท่ากับเซตในข้อใด ? $- A \cap B$

ก. $(A \cup B)'$

ข. $(A \cap B)'$

ค. $A \cup B$

~~ง. $A \cap B$~~

จ. $A' \cup B'$

50. $A - B$ เท่ากับเซตในข้อใด ?

ก. $A \cap B$

ข. $A' \cap B'$

ค. $A' \cap B$

~~ง. $A \cap B'$~~

จ. $(A \cap B)' = A \cup B'$

51. ถ้า $A \subseteq B, B \subseteq C$ และ $c \notin C, b \in B$ แล้ว ข้อใดสรุปถูกต้อง ?

ก. ~~$c \in B$~~

ข. $c \in A$

ค. $b \in A$

~~ง. $b \in C$~~

จ. $b, c \in B$

52. ให้ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ข้อใดถูกต้องใดแก่

~~ก. $\emptyset \in B$~~

ข. ~~$\{0\} \in B$~~

~~ค. $1 \in B$~~

ง. ~~$B \in B$~~

จ. ถูกทั้งข้อ ข. และ ค.

53. ข้อใดเป็นข้อใดเป็นจริง ?

ก. $(1, 2) = (2, 1)$

ข. $(0, \{0\}) = (\{0\}, 0)$

ค. $((0, 0), 0) = (0, (0, 0))$

~~ง. $(\{0\}, \{0, 1\}) = (\{0\}, \{1, 0\})$~~

จ. $(5^2, 2^3) = (2^5, 3^2)$

54. ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$ แล้ว $(A \times B) \cap (B \times A) = ?$

ก. $\{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ข. $\{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

ค. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

ง. $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

จ. $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

55. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นความสัมพันธ์ ?

ก. (a, b)

ข. $(\{a\}, a)$

ค. $((a, b), a)$

ง. $(\{a\}, \{a, b\})$

จ. $\emptyset$

56. ข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นเท็จ

ก. ความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับ

ข. $A \times \emptyset = \emptyset \times A$

ค. ความสัมพันธ์ใน A เป็นซับเซตของ $A \times A$

ง. ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B เป็นซับเซตของ $A \times B$

จ. สมาชิกทุกตัวของ $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์

* 57. กำหนดให้ R_1, R_2 เป็นความสัมพันธ์

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$R_2 = \{(1, 10), (2, 20), (3, 30), (4, 40)\}$$

โดเมนของ R_1 คือข้อใด ?

~~ก.~~ 1, 2, 3, 4

~~ข.~~ $\{1, 2, 3, 4\}$

ค. 2, 3, 4, 5

ง. $\{2, 3, 4, 5\}$

จ. ถูกทั้งข้อ ก. และ ข.

58. ให้ $F = \{(x,y) / y = 2x - 1\}$
เซตของคู่ลำดับใดที่แสดงถึงความสัมพันธ์ F ?

ก. $\{(-1,1), (0,1), (1,1), (2,3)\}$

~~ข. $\{(-1,-3), (0,-1), (1,1), (2,3)\}$~~

ค. $\{(-4,-1), (-1,0), (1,1), (3,2)\}$

ง. $\{(0,0), (0,-1), (-1,1), (2,3)\}$

จ. $\{(1,-1), (1,0), (1,1), (3,2)\}$

59. ให้ $G = \{(x,y) / y = 5x - 2\}$ เซตใดที่แสดงถึงความสัมพันธ์ G = ?

ก. $\{(2,3), (4,8), (3,13), (4,18)\}$

ข. $\{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20)\}$

ค. $\{(3,1), (8,2), (13,3), (18,4)\}$

ง. $\{(5,1), (10,2), (15,3), (20,4)\}$

~~จ. $\{(1,3), (2,8), (3,13), (4,18)\}$~~

60. เรนจ์ของความสัมพันธ์ R (ในข้อ 59) คือข้อใด ?

~~ก. $\{3,8,13,18\}$~~

ข. $\{1,2,3,4\}$

ค. $\{5,10,15,20\}$

ง. $\{1,2,4\}$

จ. $\{2,3,4\}$

ภาคผนวก ก.

บทเรียนโปรแกรมที่ได้ปรับปรุงแล้ว

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

บทเรียนนี้เรียกว่า บทเรียนแบบโปรแกรม (Programmed Textbook) เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเองโดยไม่ต้องใช้ครูสอน บทเรียนนี้จะทำหน้าที่เสมือนเป็นผู้สอนประจำตัวผู้เรียน ฉะนั้นผู้เรียนจะต้องปฏิบัติตามคำแนะนำในการเรียนอย่างเคร่งครัด

รายละเอียดเกี่ยวกับบทเรียนโปรแกรมมีดังนี้

1. บทเรียนโปรแกรมเล่มนี้เขียนขึ้นตามเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ ระดับ กศ.บ. ปีที่ 1 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เฉพาะเรื่องเซต และความสัมพันธ์
2. เนื้อหาในบทเรียนนี้แบ่งออกเป็นขั้นเล็ก ๆ เรียกว่า กรอบ เริ่มจากง่ายไปหายากตามลำดับ
3. ในแต่ละขั้นจะมีข้อความรู้ให้ผู้เรียนอ่าน และมีคำถามนำให้คิด ผู้เรียนจะเรียนรู้ไปทีละขั้น และสามารถทดสอบความเข้าใจไปพร้อม ๆ กับการเรียนด้วยการตอบคำถามเป็นขั้น ๆ ไป
4. ผู้เรียนจะทราบทันทีว่าคำตอบของผู้เรียนถูกหรือผิด เพราะจะมีการเฉลยคำตอบไว้ในหน้าถัดไป โดยทำเป็นกรอบอยู่ทางขวามือ
5. เมื่อผู้เรียนเรียนไปถึงตอนท้ายการทำแบบทดสอบ ผู้เรียนจะต้องพยายามตั้งใจทำแบบทดสอบให้เสร็จเรียบร้อยก่อน แล้วจึงเริ่มกลับมาเรียนในกรอบต่อไป.

คำแนะนำในการเรียน

บทเรียนเล่มนี้สร้างขึ้นสำหรับให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง ผู้เรียนจะได้รับประโยชน์มาก ถ้าท่านทำตามคำแนะนำต่อไปนี้ได้อย่างเคร่งครัด

1. เริ่มอ่านกรอบที่ 1 แล้วตอบคำถามหรือเติมข้อความที่ขาดหายไป

2. ตรวจสอบคำตอบของผู้เรียนโดยการเปิดในหน้าถัดไป ท่านจะพบคำตอบอยู่ในกรอบทางขวามือ ซึ่งจะเรียงไว้ตามลำดับของกรอบ

2.1 ถ้าปรากฏว่าผู้เรียนตอบถูก ให้ท่านอ่านกรอบต่อไป และกำหนดเงื่อนไขต่อไปเรื่อย ๆ

2.2 ถ้าปรากฏว่าผู้เรียนตอบผิด ให้ผู้เรียนวงกลม " ○ " ล้อมรอบหมายเลขกรอบนั้นไว้ แล้วอ่านกรอบเดิมซ้ำอีก เพื่อค้นหาว่าทำไมท่านจึงตอบผิด แล้วจึงอ่านกรอบต่อไป

3. ผู้เรียนจะต้องซื่อสัตย์ คือเรียนจากการอ่านและพยายามทำความเข้าใจในแต่ละขั้นให้ดี ถ้ายังเขียนคำตอบไม่เสร็จ ผู้เรียนไม่ควรแอบดูคำตอบก่อน เพราะจะทำให้ท่านขาดความรู้ ความเข้าใจ และจะไม่ไฉไลอะไร

4. ทำทุก ๆ กรอบจากเริ่มต้น อย่าข้ามกรอบใดกรอบหนึ่งเป็นอันขาด ระลึกไว้เสมอว่า คำถามในแต่ละกรอบไม่ใช่แบบทดสอบ แต่เป็นคำถามที่ต้องการให้ผู้เรียนคิด และเรียนรู้ ซึ่งเหมือนกับคำถามนักเรียนในขณะที่ครูอธิบายในห้องเรียนนั่นเอง

5. เมื่อจบบทเรียนแล้วแต่ละบท จะมีแบบทดสอบให้ผู้เรียนทำ เพื่อวัดว่าผู้เรียนมีความรู้และความเข้าใจเพียงใด

ผู้เรียนพร้อมหรือยัง ถ้าพร้อมแล้วเริ่มอ่านบทเรียนได้ ขอให้ท่านโชคดี.

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

บทที่ 1

เมื่อผู้เรียนเรียนจบบทที่ 1 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดค่าสุดเป็นประโยคมาให้ สามารถบอกได้ว่าค่าใดมีความหมายเหมือนกับค่าว่าเซต
2. เมื่อกำหนดเซตมาให้ สามารถบอกได้ว่าเซตนั้นเป็น finite set หรือ infinite set
3. เมื่อกำหนดเซตหยาบละเอียดสมาชิกรวมมาให้ สามารถใจสัญลักษณ์ ε และ $\notin$ ได้ถูกต้อง
4. สามารถอ่านและเขียนเซต แบบ Tabular form และ Set-builder form ได้ถูกต้อง
5. เมื่อกำหนดเซตมาให้หลาย ๆ เซต สามารถบอกได้ว่าเซตใดเท่ากับ เซตอื่นทั้งหมดให้เหตุผลได้ถูกต้อง
6. สามารถบอกได้ว่า เซตที่กำหนดมาให้เซตใดเป็นเซตว่าง
7. เมื่อกำหนดเซตมาให้หลาย ๆ เซต สามารถบอกได้ว่าเซตใดเป็นสมาชิกของเซตใด
8. สามารถหาสมาชิกทั้งหมดของเซตที่กำหนดมาให้ได้ถูกต้อง
9. เมื่อกำหนดเซตมาให้ สามารถหาเซตทั้งหมดที่เป็น proper subset และเซตที่ไม่เป็น proper subset ของเซตที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
10. เมื่อกำหนดเซตมาให้หลาย ๆ เซต สามารถบอกได้ว่าเซตใดเป็น disjoint set หรือไม่ disjoint set ได้ถูกต้อง
11. สามารถแจกแจงสมาชิกของเซตเมื่อกำหนด Universal set มาให้ ได้ถูกต้อง

ความหมาย และสัญลักษณ์ของเซต

ความหมายและสมาชิกของเซต

1	<u>เซต</u> (Set) เป็นคำหนึ่งในภาษาคณิตศาสตร์ที่ไม่ให้นิยาม ดังนั้นจึงจำเป็นต้องหาทางสร้างมโนภาพ (Concepts) ของคำว่าเซตด้วยภาษาที่เราเข้าใจกันอยู่แล้วเสียก่อน เพื่อจะได้มีมโนภาพของคำนี้เป็นอย่างเดียวกัน เรามีมโนภาพของคำว่า คณะ, กอง, หมู่, พวก ฯลฯ อยู่แล้ว แต่ละคำเป็นลักษณะนาม ซึ่งบ่งถึงการรวมกันอยู่ของสิ่งต่าง ๆ ในภาษาคณิตศาสตร์จะใช้คำคำเดียวกันว่า "เซต" แทนที่เราจะพูดว่า มีเลขช้อยชุดหนึ่ง, มีคนอยู่กลุ่มหนึ่ง เราจะกล่าวว่ามี "เลขช้อย<u>เซต</u>หนึ่ง", มี "คนอยู่.....หนึ่ง" เป็นต้น
2	เรามักใช้เซตสีมนหนึ่งเป็นกลุ่มหรือหมวดหมู่ของสิ่งของ เช่น หมวดของหนังสือคณิตศาสตร์ กลุ่มของคนไม่ หมูของจำนวนเลข ฯลฯ ดังนั้นเราอาจจะใช้คำว่าเซตแทนลักษณะนามนั้นได้ว่า.....ของหนังสือคณิตศาสตร์,ของต้นไม้,ของจำนวนเลข ฯลฯ
3	สิ่งของแต่ละสิ่งทีประกอบกันเข้าเป็นเซตใดเซตหนึ่ง เราเรียกว่า "สมาชิก" (members or elements) ของเซต เช่น เซตของนักเรียนคนหนึ่งมี 4 คน ซึ่งมีชื่อว่า วิเชียร, วิชัย, วิวัฒน์, วิไล เซตนี้มีสมาชิกอยู่ 4 สมาชิก ดังนั้นนักเรียนแต่ละคนต่างก็เป็น.....ของเซต

4	เซตแต่ละเซตจะประกอบด้วยจำนวนสมาชิกมากหรือน้อยเท่าใดก็ได้ ไม่จำกัด (1) เซตที่ประกอบด้วยตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4 มีกี่สมาชิก..... (2) เซตที่ประกอบด้วยตัวพยัญชนะไทย มีกี่สมาชิก..... (3) เซตที่ประกอบด้วยพระมหากษัตริย์ราชวงศ์จักรี มีกี่สมาชิก.....	เซต
5	เราอาจจะนับหรือบอกจำนวนสมาชิกในเซตแต่ละเซตได้สิ้นสุด หรือไม่สิ้นสุดก็ได้ เซตที่เราสามารถนับหรือบอกจำนวนสมาชิกได้แน่ชัดว่ามีจำนวนเท่าไรได้ (คือนับสิ้นสุดได้) เราเรียกเซตนั้นว่า ไฟไนต์เซต (finite set) แต่สำหรับเซตที่เราไม่สามารถนับหรือบอกจำนวนได้แน่ชัด (คือนับไม่สิ้นสุด) เราเรียกว่า อินฟินิไทต์เซต (infinite set) และ <u>เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย</u> เราก็คือว่าเป็น finite set จงบอกเซตต่อไปนี้ว่าเป็น finite หรือ infinite set (1) เซตของเดือนในรอบปี (2) {อาทิตย์, จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัส, ศุกร์, เสาร์} (3) เซตของจำนวนเลขคู่ที่เป็นบวก (4) เซตของจุดบนเส้นตรง (5) เซตของมนุษย์บนโลกา (6) เซตของจังหวัดในประเทศไทย (7) เซตของจำนวนจริงที่หารด้วย 2 ลงตัว	เซต เซต เซต สมาชิก

6	ถ้าเรานับจำนวนสมาชิกที่มีอยู่ในเซตนั้น จะนับได้ 2 ประการดังนี้ (1) นับได้จำนวนถูกต้องแน่นอน (definite number) คือ ทุก ๆ สมาชิกถูกนับหมด (2) นับไม่หมด เพราะจำนวนสมาชิกมีต่อไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด ถ้าเป็นไปตามข้อ 1 เราเรียกเซตนั้นมีจำนวนสมาชิก เป็น <u>finite</u> และถ้าเป็นไปตามข้อ 2 เราเรียกเซต นั้นว่ามีจำนวนสมาชิกเป็น	(1) 5 (2) 44 (3) 9
7.	เซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีค่ามากกว่า 1000 เราอาจจะเขียน $\{1, 2, 3, \dots, 999\}$ เซตนี้เป็นตัวอย่างของ set เพราะเซตนี้มีจำนวนสมาชิก 999 สมาชิก <u>ข้อสังเกต</u> : จุดสามจุด (...) ที่ละไว้ถือว่าแทนจำนวนที่เขียนเรียง ต่อกันไปเรื่อย ๆ ในเซตนั้น	(1) finite (2) finite (3) infinite (4) infinite (5) finite (6) finite
8	ตัวอย่างของการเขียนจำนวนสมาชิกโดยใจ (...) ที่สำคัญ คือ (1) $\{1, 2, 3, \dots\}$ เซตนี้เรียกว่า <u>เซตของจำนวนธรรมชาติ</u> (2) $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ เซตนี้เรียกว่า <u>เซตของจำนวนเต็ม</u> จงเขียนเซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่า 1000 ซึ่งเซตนี้เป็นตัวอย่างของ (finite, infinite) set.	(7) infinite

9	สมาชิกที่เราเขียนเรียงกันไว้ในเซต <u>การเรียงลำดับ</u> (Order) ของแต่ละสมาชิกไม่ถือเป็นสิ่งสำคัญ ตัวอย่าง เช่น เซต $\{a,b,c,d\}$ กับเซต $\{c,a,d,b\}$ ก็คือเซตเดียวกันนั่นเอง จงเขียนเซตที่มีสมาชิกเป็น r,t,a เป็นแบบที่ เรียงตามลำดับตัวอักษร เซตที่เขียนนี้แตกต่างจากเซต $\{t,r,a\}$ หรือไม่	infinite
10	การนับสมาชิกในเซต เราไม่นับสมาชิกที่เขียนซ้ำกัน กล่าวคือ ถ้าเขียนซ้ำกันจะก็ครั้งก็ตาม ก็ถือเป็นสมาชิกเดียว เช่น สมาชิกในเซตหนึ่งอาจจะเขียนได้เป็น $\{0, 1, 2, 1, 0\}$ ถือว่าเป็นเซต ที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียง 3 สมาชิก คือ 0, 1 และ 2 เท่านั้น (1) เซต $\{2, 1, 2, 1, 3, 1, 3\}$ มีกี่สมาชิก (2) จงเขียนเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของข้อ (1) เรียงตามลำดับตัวเลข $\{.....\}$	finite
11	เซตบางเซตจะไม่มีสมาชิกเลยก็ได้ แต่ยังคงถือว่าเป็นเซต เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เรียกว่า empty set หรือ null set (เซตว่างเปล่า) สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทน empty set เราใช้ $\emptyset$ หรือ $\{ \}$ เช่น เซตที่ประกอบด้วย คนที่หน้าตาเป็น empty set (เซตว่าง) เซตของนายกรัฐมนตรีที่เป็นผู้หญิงของไทย มีสมาชิกหรือไม่ ดังนั้นเซตนี้จึงเป็น set	$\{1001, 1002, 1003, \dots\}$ infinite

12	<u>ข้อสังเกต :</u> สัญลักษณ์ $\emptyset$ เป็นอักษร Scandinavian ไม่ใช่ ฟี (Phi) ของ Greek ถ้าเห็นสัญลักษณ์นี้ให้ได้อ่านว่า "empty set" หรือ "null set" เซตของคนที่เกิด พ.ศ. 2300 และยังมีชีวิตอยู่ มีสมาชิกหรือไม่ ดังนั้นเซตคนเกิด set	$\{a, r, t\}$ ไม่แตกต่าง
13	เนื่องจากเรามักต้องการบอกสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นสมาชิก (element) หนึ่งของเซตใดเซตหนึ่ง เช่น a เป็นสมาชิกของเซต A ฉะนั้นเพื่อความสะดวกและง่าย เราก้เขียนว่า "$a \in A$" หมายความว่า "a เป็นสมาชิกของเซต A" หรืออ่านว่า "a อยู่ในเซต A" จงอ่าน (1) $b \in A$ (2) $4 \in R$ <u>ข้อสังเกต:</u> โดยทั่ว ๆ ไป เราจะใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น $A, B, C, \dots$ เป็นสัญลักษณ์แทนเซต และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก เช่น $a, b, c, \dots$ เขียนแทนสมาชิก	(1), 3 (2) $\{1, 2, 3\}$
14	ในทำนองเดียวกัน ถ้า c ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เราก้เขียน "$c \notin A$" โดยเขียนเส้นขวางทับ $\in$ (epsilon) คือเขียนเป็น $\notin$ จงเขียนสัญลักษณ์แทน คำกล่าวต่อไปนี้ (1) "h เป็นสมาชิกของ A" (2) "a ไม่เป็นสมาชิกของ S"	ไม่มี empty

15	ในการกล่าวถึงเซตใดเซตหนึ่ง หรือการกำหนดสมาชิกของเซต หนึ่ง เราอาจจะทำได้โดยวิธีการต่าง ๆ กัน 2 วิธี คือ <u>วิธีที่ 1</u> The tabular method หรือ Tabulation วิธีนี้เมื่อจะพูดถึงเซตใดเซตหนึ่ง เราก็มักเขียนสมาชิกทั้งหลายของเซตไว้ในวงเล็บปีกกา และคั่นระหว่างสมาชิกด้วยเครื่องหมายจุลภาค " , " (Comma) เช่นถ้าเรากล่าวหาว่า A เป็นเซตของจำนวนเลข 2, 4, 6, 8 เราก็มักเขียนดังนี้ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ถ้า B เป็นเซตของเลขตั้งแต่ 1, 2, 3, ... จนถึง 50 เราเขียน $B = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ ให้ C เป็นเซตของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 100 เป็น Tabulated form $C = \dots\dots\dots$	ไม่มีสมาชิก empty (1) b เป็นสมาชิกของเซต A หรือ b อยู่ในเซต A (2) 4 เป็นสมาชิกของเซต R หรือ 4 อยู่ในเซต R
16	<u>วิธีที่ 2</u> The rule method หรือ Set builder method วิธีนี้เราใช้คุณสมบัติที่สมาชิกทุก ๆ ตัวในเซตนั้นมีร่วมกัน หรือเป็นการใช้สูตรหรือคำพูดแทนการเขียนแต่ละสมาชิกเรียงกันไปดังวิธีที่ 1 เช่น จากตัวอย่างในวิธีที่ 1 เราก็มักเขียนว่า "A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 10" จึงเขียนเซต B ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยพจน์เลข 5 ตัวแรกของพจน์เลขอังกฤษ เป็นแบบ tabulated form $B = \dots\dots\dots$	(1) $h \in A$ (2) $d \notin S$

17	เซต $\{1,2,3\}$ คือเซตที่มีสมาชิกเป็น 1,2 และ 3 จงใช้หลักอันนี้ เติมในช่องว่าง = เซตของจำนวนเต็มบวก และมีค่าน้อยกว่า 10 <u>ข้อสังเกต:</u> 0 ไม่ถือว่าเป็นจำนวนเต็มบวก	$\{1,3,5,\dots,99\}$
18	เรากำหนดเซต $B = \{c,d\}$ ว่า "B เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็น c และ d จงใช้หลักนี้กำหนดเซต $A = \{a\}$" "....." <u>ขอควรจำ:</u> เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวเดียว บางทีเรียกว่า singleton set หรือ unit set	
19	เราไม่เขียนเซต $S = x$ แม้ว่า x จะเป็นเพียงสมาชิกเดียวของเซต S จงจำไว้เสมอว่าสมาชิกของเซตจะต้องเขียนไว้ในวงเล็บปีกกาเสมอ ดังนั้นจากตัวอย่างจึงเขียนได้ว่า $S = \{x\}$ จึงจะถูกต้อง จงเขียนเซต P ซึ่งมีสมาชิกเป็น 0 เป็นแบบ tabulated form $P = \dots\dots\dots$ และเรียกเซต P ว่า.....เพราะมีสมาชิกตัวเดียว	$\{a,b,c,d,e\}$
20	เซต $\{0\}$ ไม่ใช่ empty set หรือ null set เพราะถ้าเราเขียนว่า (1) $S = \{0\}$ หมายความว่า "S เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็น.....เท่านั้น" (2) $S = \emptyset$ หมายความว่า "S เป็น.....set" (3) $\emptyset$ และ $\{0\}$ เหมือนกันหรือไม่	

21	ในหนังสือเล่มนี้ "Solution set" ของสมการ $ax + b = c$ (เมื่อ a, b, c ต่างก็เป็นจำนวนจริง ๆ หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยจำนวนทั้งหมดที่เมื่อนำมาแทนค่า x แล้วทำให้สมการนี้เป็นจริงเสมอ (คือเท่ากันทั้งสองข้าง) <u>ตัวอย่าง</u> solution set ของสมการ $3x - 5 = 10$ คือ $\{5\}$ จงหา solution set ของแต่ละข้อต่อไปนี้ (1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ คือ (2) $\frac{1}{4}x - 1 = 7$ คือ (3) $2x + 3 = 3$ คือ	$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ A เป็นเซต ซึ่งมีสมาชิกเป็น a หรือ A เป็นเซตที่มี a เป็นสมาชิกเท่านั้น
22	การกำหนดเซตที่หนึ่งมีมากที่สุด คือการกำหนดด้วยข้อความที่แทนคุณสมบัติรวมของสมาชิกที่เรียกว่า Set-builder notation <u>ตัวอย่าง</u> เช่น $J = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x > 7\}$ อ่านว่า "J เป็นเซตที่ประกอบด้วย x ทั้งหมด ซึ่งว่า x เป็นจำนวนเต็ม และ x มากกว่า 7" เครื่องหมาย "$\mid$" (หรือ "$:$") อ่านว่า "ซึ่งว่า" (such that) ตัวอักษรที่เป็นตัวแทนของสมาชิก เรานิยมใช้ตัวภาษาอังกฤษตัวเล็กคือ $m, n, p, q, r, s, t, u, v, x, y, z$ ตัวใดก็ได้ จงอ่าน Set-builder notation ต่อไปนี้เป็นคำพูด $S = \{m \mid m \text{ เป็นคน และ } m \text{ มีอายุมากกว่า 21 ปี}\}$	$\{0\}$ singleton set หรือ unit set (1) 0 (2) empty (3) ไม่เหมือน

23	ถ้าเราต้องการให้ C เป็นเซตที่ประกอบด้วยเลขคู่ทั้งหมด ที่มีเครื่องหมายบวก เราเขียนดังนี้ $C = \{x \mid x \text{ เป็นเลขคู่และเป็นบวก}\}$ จงเขียน "เซต I ซึ่งประกอบด้วย x ทั้งหมด ซึ่งว่า x เป็นจำนวนเต็ม และ x มากกว่า 7" เป็นแบบ Set builder $I = \dots\dots\dots$	(1) $\{2,3\}$ (2) $\{32\}$ (3) $\{0\}$
24	จงเขียน "S เป็นเซตที่ประกอบด้วย x ทั้งหมด ซึ่งว่า $x = 1$ หรือ $x = 0$" เป็นแบบ set-builder notation $S = \dots\dots\dots$	
25	ถ้า $A = \{x \mid x^2 = 4\}$ เราอ่านว่า A เป็นเซตของ x ทั้งหมด ซึ่ง x ยกกำลังสอง แล้วมีค่าเท่ากับ 4 ฉะนั้นสมาชิกของเซต A ก็คือ 2 และ -2 ถ้าเขียนเป็น Tabulated form จะเป็น $A = \dots\dots\dots$	S เป็นเซตที่ประกอบด้วย m ทั้งหมด ซึ่ง ว่า m เป็นคน และ m มีอายุมากกว่า 21 ปี
26	ให้ $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ เราอ่านว่า B เป็นเซตของ x ทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องตาม สมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ฉะนั้น สมาชิกของเซต B คือ (1) $\dots\dots\dots$ หรือถ้าเขียนเป็น Tabular form จะได้ (2) $B = \dots\dots\dots$	

27	ให้ V เป็นเซตของจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องตามสมการ $x^2 - x - 6 = 0$ (1) จงเขียนเซต V แบบ Tabular form $V = \dots\dots\dots$ (2) จงเขียนเซต V แบบ Set builder notation $V = \dots\dots\dots$	$\{x x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x > 7\}$
28	$S = \{x x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 8 < x < 12\}$ S เป็นเซตที่ประกอบด้วย x ทั้งหมด ซึ่งว่า x เป็นจำนวนเต็ม และ x อยู่ระหว่าง 8 กับ 12 ถ้าเขียนเซต S เป็น tabular form จะได้เป็น $S = \dots\dots\dots$	$\{x x = 1 \text{ หรือ } x = 0\}$
29	เซตของจำนวนเต็ม $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ อาจอธิบายได้ว่า เป็นเซตที่ประกอบด้วย x ทั้งหมด ซึ่งว่า x เป็นจำนวนเต็ม และ $-4 \leq x \leq 4$ จงเขียนเซต $J = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ เป็นแบบ set builder notation $J = \dots\dots\dots$	$\{2, -2\}$ (1) 2, 3 (2) $\{2, 3\}$

เซ็ทย่อย หรือ เซ็ตย่อย (Subsets)

30	<u>คำจำกัดความของเซ็ทย่อย</u> <u>เซ็ท A เป็นเซ็ทย่อยของเซ็ท B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกของเซ็ท A เป็นสมาชิกในเซ็ท B กว</u> และใช้สัญลักษณ์ "$A \subseteq B$" ซึ่งอ่านว่า "A เป็นเซ็ทย่อยของ B" ถ้าให้ $A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ แล้ว $A \subseteq B$ เพราะทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B กว (1) ถ้า $B = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $A = \{1, 2\}$ แล้ว $A \subseteq B$ ใช่หรือไม่....เพราะ..... (2) ถ้า $B = \{1, 3, 5\}$ และ $A = \{1, 3, 5\}$ แล้ว $A \subseteq B$ ใช่หรือไม่... เพราะ..... <u>ข้อสังเกต:</u> จากคำจำกัดความจะเห็นได้ว่า A เป็นเซ็ทย่อยของตัวเอง กว เพราะทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ A	$\{-2, 3\}$ $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง และ } x^2 - x - 6 = 0\}$
31	ให้ $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{2\}$ และ $D = \{4, 5, 6\}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้ (1) $A \subseteq M$ จริงหรือไม่ (2) $B \subseteq M$ จริงหรือไม่ (3) $D \subseteq M$ จริงหรือไม่ (4) $B \subseteq A$ จริงหรือไม่	$\{i \mid i \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } -3 \leq i \leq 3\}$

32	ให้ $M = \{1,2,3,4,5\}$, $N = \{1,2,3,4,5\}$ จากคำจำกัดความของเซต เราจะเห็นว่า $M \subseteq N$ และ $N \subseteq M$ (นั่นคือทุก ๆ สมาชิกของ M เป็นสมาชิกของ N ด้วย และทุก ๆ สมาชิกของ N เป็นสมาชิกของ M ด้วย) ความสัมพันธ์ระหว่าง M และ N เราเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $M = N$ <u>คำจำกัดความ:</u> การเท่ากันของเซต (equality of sets) เรากล่าวว่า เซต M กับเซต N เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ M เป็นสมาชิกของ N และ N เป็นสมาชิกของ M เขียนเป็นสัญลักษณ์ดังนี้ $M = N \text{ ก็ต่อเมื่อ } M \subseteq N \text{ และ } N \subseteq M$ หมายความว่า "เซต M กับเซต N เท่ากันก็ต่อเมื่อเซต M และเซต N ประกอบด้วยสมาชิกที่เหมือนกัน" จริงหรือไม่.....	(1) ใช่ เพราะทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย (2) ใช่ เพราะทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย
33	จากเซต $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,1,2,4\}$ (1) การเรียงลำดับของสมาชิกในเซตสำคัญหรือไม่ (2) เซต A และ B มีสมาชิกเหมือนกันจริงหรือไม่ (3) ดังนั้น $A = B$ ใช่หรือไม่	(1) จริง (2) จริง (3) ไม่จริง (4) ไม่จริง
34	เซต $C = \{a,b,a,c\}$, $D = \{c,a,c,b\}$ เซต C และ เซต D ต่างก็มีสมาชิก ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างเซต C และเซต D คือ (เขียนเป็นสัญลักษณ์)	

35	ในการหาซัพเซตทั้งหมดของเซตที่กำหนดให้ เราต้องเขียน (list) เซตทุก ๆ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจากเซตที่กำหนดให้ และเขียนเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย คือ empty set ($\emptyset$) รวมเข้าไปด้วย ดังนั้น ถ้า $A = \{a, b\}$ ก็จะหาซัพเซตได้ 4 ซัพเซต คือ $\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset$ ถ้าเซต $S = \{a, b, c\}$ จะมีอยู่ 8 ซัพเซต จงเขียนซัพเซตเหล่านั้น 	จริง
36	<u>Proper subset</u> ซัพเซตบางซัพเซตของเซต D ที่กำหนดให้ จะไม่มีสมาชิกครบเหมือนเซต D เราเรียกซัพเซตเหล่านั้นว่า <u>Proper subset</u> ของเซต D ดังนั้น ถ้า $D = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $A = \{3, 4\}$ แล้ว A เป็น <u>Proper subset</u> ของเซต D เพราะ $A \subset D$ แต่ A, D มีสมาชิกไม่เหมือนกัน แต่ถ้า $S = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ แล้ว B <u>ไม่เป็น proper subset</u> ของเซต S เพราะมีสมาชิกเหมือนกัน (1) ให้ $T = \{x, y, z\}$ จงหาเซต S ที่ <u>ไม่เป็น</u> proper subset ของเซต T $S = \{.....\}$ (2) จงหา proper subset ทั้งหมดของเซต T 	(1) ไม่สำคัญ (2) จริง (3) ไข่ เหมือนกัน $C = D$

37	<u>นิยาม</u> : proper subset เซต A เป็น proper subset ของเซต B ก็ต่อเมื่อ A เป็นสมาชิกของ B และเซต A ไม่เท่ากับเซต B (กล่าวคือ จะมีอย่างน้อยที่สุดหนึ่งสมาชิกของเซต B ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A) เขียนเป็นสัญลักษณ์ "$A \subset B$" อ่านว่า A "เป็น Proper subset ของเซต B" ดังนั้น $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ กำหนดเซต $\{1,2,3\}$ สมาชิกของเซตนี้คือ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ เซตที่ไม่เป็น proper subset ของเซตที่กำหนดให้ คือ	$\{a\}, \{b\}, \{c\},$ $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\},$ $\{a,b,c\}, \emptyset$
38	กำหนดให้ $P = \{a,b,c,d\}, Q = \{b,c,f,g\}$ (1) สมาชิกทุกตัวของ P เป็นสมาชิกของ Q จริงหรือไม่..... (2) จะสรุปว่า $P \subseteq Q$ ได้หรือไม่	(1) $\{x,y,z\}$ (2) $\{x\}, \{y\}, \{z\},$ $\{x,y\}, \{x,z\},$ $\{y,z\}, \emptyset$
39	"ถ้ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว ของ P ไม่เป็นสมาชิกของ Q แล้ว แสดงว่า P ไม่เป็นสมาชิกของ Q" เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P \not\subseteq Q$ ดังนั้น $A \not\subseteq B$ แสดงว่ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวของ..... ไม่เป็นสมาชิกของ	

40	$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C = \{2, 4, 6\}$ จะเห็นว่าสมาชิกบางตัวของ B ไม่เป็นสมาชิกของ C ได้แก่ 8 และ 10 ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า	$\{1, 2, 3\}$
41	$A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ (1) $A \subseteq B$ จริงหรือไม่ (2) $B \subseteq A$ จริงหรือไม่..... เพราะ	
42	จากกรอบที่ 40 จะเห็นว่า C เป็น proper subset ของ B เพราะว่า $C \subseteq B$ และ $C \neq B$ ดังนั้นในกรอบที่ 41 จะได้ว่า A เป็น proper subset ของ B เพราะ และ.....	(1) ไม่จริง (2) ไม่ได้
43	$S = \{a, b, c\}$, $T = \{c, a, b\}$ (1) สมาชิกทุกตัวของ S เป็นสมาชิกของ T หรือไม่..... (2) $T \subseteq S$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ..... เป็นสมาชิกของ..... (3) จากข้อ 1 และ 2 จะสรุปว่า $S = T$ หรือไม่..... (4) S เป็น proper subset ของ T หรือไม่.....	A, B

44	ขอให้ทราบว่า "เซตว่าง (empty set)" เป็นเซตเซต ของทุก ๆ เซต การพิสูจน์ว่า empty set เป็นเซตเซตของ ทุก ๆ เซต ในที่นี้จะขอละไว้ และขอให้เป็นนิยามดังนี้ <u>นิยาม</u> ให้ H เป็นเซตใด ๆ , $\emptyset \subseteq H$ (1) ดังนั้น $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$ เพราะ..... (2) $\emptyset \subseteq \{0\}$ จริงหรือไม่	$B \subset C$ (1) จริง (2) จริง เพราะ $5 \in B$ และ $5 \notin A$
45	จงเติม $\subseteq$ หรือ $\not\subseteq$ ลงในช่องว่าง (1) $\{2,6\} \dots \{2,6\}$ (2) $\{2\} \dots \{2,6\}$ (3) $\emptyset \dots \{2,6\}$ (4) $\{2,6\} \dots \{6\}$	$A \subseteq B$ และ $A \neq B$
46	จากที่กล่าวมาแล้วเราทราบว่าสำหรับทุก ๆ เซต A เซตแต่ละเซตจะเป็นเซตเซตของตัวเอง นั่นคือ $A \subseteq A$ empty set เป็นเซตเซตของทุก ๆ เซต นั่นคือ $\emptyset \subseteq A$ (1) $\{5,7\} \subseteq \{5,7\}$ จริงหรือไม่ (2) $\emptyset \subseteq \{a\}$ จริงหรือไม่	(1) $S \subseteq T$ (2) T, S (3) ได้ (4) ไม่ใช่

47	<u>Disjoint sets</u> เซต A และเซต B จะเป็น disjoint set ถ้าเซตทั้งสองไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย นั่นคือ <u>ไม่มีสมาชิกของ A อยู่ใน B และไม่มีสมาชิกของ B อยู่ใน A</u> ถ้า $A = \{x \mid x \text{ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก}\}$ $B = \{x \mid x \text{ เป็นเลขจำนวนเต็มลบ}\}$ ดังนั้น A และ B เป็น sets	(1) $\emptyset$ เป็นสมาชิกของทุก ๆ เซต (2) จริง
48	เซต $A = \{2,5,8\}$ และ $B = \{3,4,8,9\}$ A และ B เป็น disjoint sets ใช่หรือไม่ ? เพราะ	(1) $\subseteq$ (2) $\subseteq$ (3) $\subseteq$ (4) $\not\subseteq$
49	จงเขียนสมาชิกของ $S = \{a,b,c,d\}$ <u>ข้อสังเกต</u>: จะมีอยู่ 16 ซับเซต 	
50	จากคำตอบในรอบที่ 49 จงตอบคำถามข้างล่างนี้ (1) เซตที่มีสมาชิก 3 ตัว และเป็น disjoint set กันหรือไม่ ไດ่แก่ (2) เซตที่มีสมาชิก 2 ตัว และเป็น disjoint set เขียนได้เป็นคู่ ๆ ดังนี้ คือ $\{a,b\}$ และ $\{c,d\}$, (จงเขียนคู่ที่เหลือ)	(1) จริง (2) จริง

Universal set หรือ Universe

51	ในการศึกษาเรื่องเซต เราจำเป็นต้องทราบ Universal set หรือ Universe (ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย U) ซึ่งเราหมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในขอบข่ายที่เราจะสามารถนำมาพิจารณาในเรื่องใดเรื่องหนึ่งโดยเฉพาะได้ เช่น	disjoint sets
	ถ้าเราจะเขียนหรือสะกศกคำภาษาอังกฤษ Universal set ก็จะเป็นเซตที่ประกอบด้วย พยัญชนะภาษาอังกฤษทั้ง 26 ตัว ถ้า $K = \{ก, ข, ค\}$ แล้ว Universal set ของ สมาชิกในเซต K คือ เซต	ไม่ เพราะว่า $8 \in A$ และ $8 \in B$
52	โดยทั่วไปในการกล่าวถึงเซตแต่ละครั้ง เราจะเลือกสมาชิกมาจากเซตใหญ่เซตหนึ่ง เซตอื่น ๆ ที่เรากล่าวถึงจะต้องเป็น ขั้บเซตของเซตใหญ่ เราเรียกเซตใหญ่นี้ว่า <u>Universal set</u> ถ้าให้ $H = \{\text{ผลไม้}\}$ และ $A = \{\text{มะละกอ, มะม่วง, มะเฟือง}\}$ (1) จะเห็นได้ว่า A เป็น ของ H (2) Universal set ของสมาชิกในเซต A คือเซต <u>ข้อสังเกต</u>: Universal set ไม่ว่าเป็นต้องมีสมาชิกมาก ๆ จะมีสมาชิกน้อย ๆ ก็ได้ แต่สำคัญ คือ <u>เซตที่เรากำลังกล่าวถึง จะต้องเป็นขั้บเซตของ Universal set เสมอ</u>	$\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ และ $\emptyset$ (1) ไม่มี (2) มี $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ $\{a,c\}$, $\{b,d\}$ $\{a,d\}$, $\{b,c\}$

53	ตามปกติมักจะกำหนด Universal set ให้ก่อนเซ็ทอื่น ๆ ที่กล่าวถึง จะต้องเลือกสมาชิกมาจาก Universal set เท่านั้น ถ้ากำหนด Universal set $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $A = \{x \mid x > 5\}$ ดังนั้น $A = \{\dots\dots\dots\}$	เซ็ทของพหุนามไทย ทั้ง 44 ตัว
54	จากกรอบที่ 53 สมาชิกของเซ็ท A จะต้องเลือกมาจากเซ็ท U เท่านั้น จะเห็นได้ว่า $11 > 5$ แต่ $11 \notin U$ ดังนั้น $11 \in A$ ใดหรือไม่	
55	เซ็ทของจำนวนเต็ม $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ จะเห็นว่า เซ็ทของจำนวนเต็ม จะประกอบไปด้วยจำนวนเต็มบวก, จำนวนเต็มลบ และศูนย์ (0) ถ้า J เป็นเซ็ทของจำนวนเต็มบวก 6 ตัวแรก จงเขียนเซ็ท J เป็นแบบ tabular form $J = \dots\dots\dots$ <u>ข้อสังเกต</u> 0 ไม่รวมอยู่ในเซ็ทของจำนวนเต็มบวก	(1) ซับเซ็ท (subset) (2) เซ็ท $H = \{\text{ผลไม้ม}\}$
56	ถ้าเราแบ่งจำนวนเต็มเป็น 2 พวก คือ จำนวนเต็มลบ (negative integer) และจำนวนเต็มที่ไม่ลบ (nonnegative integer) ดังนั้น 0 จะอยู่ในพวกจำนวนเต็มที่ไม่ลบ (nonnegative integer) แต่ 0 (อยู่, ไม่อยู่) ในเซ็ทของจำนวนเต็มบวก	

57	ถ้า $P = \{p \mid p \text{ เป็น prime number, } p < 24\}$ <u>ขอควรจำ</u>: prime number หมายถึงจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่า 1 และไม่มีจำนวนเต็มใดที่จะนำมหารลงตัวได้ นอกจากตัวของมันเอง กับ 1 เท่านั้น จงเขียนเซต P เป็น Tabular form $P = \dots\dots\dots$	$\{6, 7, 8, 9, 10\}$
58	<u>จำนวนตรรกยะ</u> (rational numbers) หมายถึงจำนวนที่เราเขียนอยู่ในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ ในเมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เช่น 3, -5, $\frac{7}{8}$, .6, $\sqrt{25}$ และ $\sqrt{10.24}$ <u>ข้อสังเกต</u>: $.6 = \frac{6}{10}$ และ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{10.24} = 3.2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$ จงแสดงว่าจำนวนตัวต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะ (โดยเขียนในรูปของเศษส่วน) (1) .25 (2) .333... (3) $\sqrt{144}$ 	ไม่ได้ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
59	เรามักจะเขียนจำนวนตรรกยะเป็นแบบทศนิยม เช่น .25 ทศนิยมบางอย่างก็เป็นทศนิยมรอบ บางอย่างก็เป็นทศนิยมไม่รอบ เช่น .181818... แต่มีทศนิยมพวกหนึ่งที่<u>ไม่รอบและไม่ซ้ำกันเลย</u> / เมื่อเขียนออกมาในรูป $\frac{a}{b}$ โดยมี a หรือ b หรือทั้ง a และ b ไม่เป็นจำนวนเต็ม จำนวนเหล่านี้เรียกว่า <u>จำนวนอตรรกยะ</u> (irrational numbers) เช่น $\sqrt{2}$ และ π (ค่า $\sqrt{2} = 1.414\dots$, $\pi \approx 3.1416\dots$ เป็นเพียงค่าประมาณ)	ไม่อยู่

60	<u>จำนวนจริง</u> (Real number) ประกอบด้วยจำนวนทั้งจำนวน จำนวนอตรรกยะ ตัวอย่างเช่น $71, -\frac{2}{5}, 0, \sqrt{3}, .342, \sqrt[3]{27}, \sqrt[4]{-1}, \frac{193}{452}, \sqrt{16}$ มีจำนวนบางจำนวน<u>ไม่เป็นจำนวนจริง</u> เช่น จากสมการ $x^2 + 1 = 0$ หรือ $x^2 = -1$ ไม่มีจำนวนจริง จำนวนใดที่ยกกำลังสองแล้วจะเท่ากับ -1 ได้ จำนวนนี้เราถือว่าเป็น "จินตภาพ (imaginary)" และเขียนแทนด้วย $i^2 = -1$ หรือ $i = \sqrt{-1}$ ดังนั้นจากสมการจะได้ว่า $x^2 = -1 = i^2$ และ $x = \dots\dots\dots$	{2,3,5,7,11,13,17, 19,23}
61	จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bi$ ในเมื่อ a, b เป็นจำนวน จริง และ $i = \sqrt{-1}$ เราเรียกว่าเป็น<u>จำนวนเชิงซ้อน</u> (Complex numbers) ตัวอย่างเช่น $3 + 2i, 5i, \sqrt{3} - 7i$	(1) $.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ (2) $.333\dots = \frac{1}{3}$ (3) $\sqrt{144} = \frac{12}{1}$
62	ให้ U เป็น Universal set ซึ่งกำหนด ดังนี้ $U = \{\sqrt{5}, -4, 2-i, 15, \frac{4}{9}, 17\}$ เขียนเซตต่อไปนี้เป็น tabular form (1) $I = \{i \mid i \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } i \in U\}$ $I = \dots\dots\dots$ (2) $R = \{r \mid r \text{ เป็นจำนวนจริง และ } r \in U\}$ $R = \dots\dots\dots$ (3) $P = \{p \mid p \text{ เป็น Prime number และ } p \in U\}$ $P = \dots\dots\dots$	

63	ให้ U เป็น Universal set อันเดียวกับกรอบ 62 จงเขียนเซตต่อไปนี้ให้เป็น Tabular form (1) $N = \{n \mid n \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ และ } n \in U\}$ $N = \dots\dots\dots$ (2) $Q = \{q \mid q \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ และ } q \in U\}$ $Q = \dots\dots\dots$	$\pm i$ หรือ $\pm \sqrt{-1}$
64	ถ้ากำหนดให้ $U =$ เซตของจำนวนเต็ม (1) Solution set ของ $2x + 3 = 8$ เป็น empty set ใช่หรือไม่ $\dots\dots\dots$ (2) ถ้า $U =$ เซตของจำนวนทศนิยม solution set ของ $2x + 3 = 8$ เป็น empty set ใช่หรือไม่ ? อธิบาย $\dots\dots\dots$ (3) ให้ Universal set $U =$ เซตของจำนวนจริง จงหา Solution set ของ $x^2 + 1 = 0$ $\dots\dots\dots$ (4) ถ้า solution set เป็น $\{i, -i\}$ ดังนั้น Universal set คือ เซตของ $\dots\dots\dots$	(1) $\{-4, 15, 17\}$ (2) $\{\sqrt{5}, -4, 15, \frac{4}{9}\}$ (3) $\{17\}$
<u>ข้อแนะนำ:</u> ควรจะหาคำอ่านเพิ่มเติมเกี่ยวกับระบบจำนวน จะช่วยให้มีความเข้าใจยิ่งขึ้น		

65	จงศึกษาเกี่ยวกับคำ คำจำกัดความ (นิยาม) และสัญลักษณ์ ในข้อต่อไปนี้ให้ถี่ <u>ชั้นเซต</u> : เซต A เป็นชั้นเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B คำจำกัดความนี้จะตีความได้ 2 แนว ดังนี้ (1) ถ้าเซต A เป็นชั้นเซตของเซต B, แล้ว (เติมคำจำกัดความ) (2) ถ้าทุก ๆ สมาชิก a ของเซต A เป็นสมาชิกของ เซต B, แล้ว (เติมคำจำกัดความ)	(1) $\{15, 17\}$ (2) $\{-4, 15, \frac{4}{9}, 17\}$
66	บางที่เราใช้ลูกศรสองหัว "$\longleftrightarrow$" แทน "ก็ต่อเมื่อ" (if and only if) ดังนั้น จากคำจำกัดความของชั้นเซต จึงเขียนได้ว่า "$A \subseteq B \longleftrightarrow$ ทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B" ลูกศรสองหัวจะแทนความหมายใดสองทาง คือ (1) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว เป็นสมาชิก ของเซต B และ (2) ถ้าทุก ๆ สมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B แล้ว	(1) ใช่ (2) ไม่ใช่ เพราะ solution set ของ $2x + 3 = 8$ คือ $\{\frac{5}{2}\}$ (3) ถ้า U เป็นเซตของ จำนวนจริง solution set = $\emptyset$ (4) จำนวนเชิงซ้อน

67	<u>การเท่ากันของเซต</u> : $A = B$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a \in A$ แล้ว $a \in B$ และ $b \in B$ แล้ว $b \in A$ คือความได้ว่าเซต A จะเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิก a ของเซต A เป็น (1) และทุก ๆ สมาชิก b ของเซต B เป็น (2)	(1) สำหรับทุก ๆ สมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B (2) A เป็นสับเซตของ B ($A \subseteq B$)
68	$A = B \iff$ ทุก ๆ สมาชิก a ของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และทุก ๆ สมาชิก b ของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A (1) กำหนดให้ $A = \{4, 10, 11, 15\}$ และ $B = \{10, 11, 15\}$ จากคำจำกัดความข้างบน อยากทราบว่า $A = B$ ใช่หรือไม่ เพราะ (2) กำหนดให้ $C = D$ และ $D = \{a, b, c\}$ จากคำจำกัดความข้างบนนี้ เซต $C = ?$ (เขียนมาให้ดู)	(1) ทุก ๆ สมาชิกของเซต A (2) A เป็นสับเซตของ B ($A \subseteq B$)
69	การเท่ากันของเซต A กับเซต B อาจให้คำจำกัดความได้ก็ดียวกันที่ว่า "$A = B$ ก็ต่อเมื่อ A เป็นสับเซตของเซต B และเซต B เป็นสับเซตของเซต A" เขียนคำจำกัดความนี้เป็นสัญลักษณ์ ดังนี้ $A = B \iff$ และ	

72	ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่}, x < 20\}$ $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่}, x < 20\}$ $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}, x < 20\}$ จงเขียนเซต A, B, C เป็นแบบ tabular form (1) $A =$ (2) $B =$ (3) $C =$	(1) $A \subset B \longleftrightarrow A \subseteq B$ และ $A \neq B$ (2) ได้
73	จากเซต A, B, C ในกรอบที่ 72 จงตอบคำถามต่อไปนี้ (1) เซตไหนบ้างที่เป็น disjoint sets ? (2) A เป็นสับเซตของ C ใช่หรือไม่ ? และ $B \subseteq C$ ใช่หรือไม่ (3) A เป็น proper subset ของ C ใช่หรือไม่ (4) $A = B$ ใช่หรือไม่ ถ้า $D = \{d \mid d \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 0 < d \leq 9\}$ จงเขียนเซต D เป็นแบบ Tabular form $D =$	ไม่เป็น, เพราะเซต A และเซต B มีสมาชิก ร่วมกันอย่างน้อย 1 ตัว เช่น $1 \in A$ และ $1 \in B$

74	ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของ finite sets และ infinite sets Finite set $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ $= \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 0 < x < 13\}$ Infinite set $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ $= \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x > 0\}$ (1) จงเขียนเซต $J = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x < -3\}$ เป็นแบบ Tabular form. $J = \dots\dots\dots$ (2) เซต J เป็น .. . (finite or infinite) set	(1) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ (2) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ (3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$															
75	จงเติมในช่องว่างให้สมบูรณ์ <table border="0"> <thead> <tr> <th>เซต</th> <th>จำนวนสมาชิก</th> <th>จำนวนซับเซต</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\{a\}$</td> <td>1</td> <td>(1) $2^1 = 2$ คือ $\{a\}, \emptyset$</td> </tr> <tr> <td>$\{a, b\}$</td> <td>2</td> <td>(2) $2^2 = 4$ คือ $\{a, b\}, a, \{b\}, \emptyset$</td> </tr> <tr> <td>$\{a, b, c\}$</td> <td>3</td> <td>(3) (จำนวน)</td> </tr> <tr> <td>$\{a, b, c, d\}$</td> <td>4</td> <td>(4) (จำนวน)</td> </tr> </tbody> </table>	เซต	จำนวนสมาชิก	จำนวนซับเซต	$\{a\}$	1	(1) $2^1 = 2$ คือ $\{a\}, \emptyset$	$\{a, b\}$	2	(2) $2^2 = 4$ คือ $\{a, b\}, a, \{b\}, \emptyset$	$\{a, b, c\}$	3	(3) (จำนวน)	$\{a, b, c, d\}$	4	(4) (จำนวน)	(1) เซต A กับเซต B (2) ไข่, ไข่ (3) ไข่ (4) ไม่ใช่
เซต	จำนวนสมาชิก	จำนวนซับเซต															
$\{a\}$	1	(1) $2^1 = 2$ คือ $\{a\}, \emptyset$															
$\{a, b\}$	2	(2) $2^2 = 4$ คือ $\{a, b\}, a, \{b\}, \emptyset$															
$\{a, b, c\}$	3	(3) (จำนวน)															
$\{a, b, c, d\}$	4	(4) (จำนวน)															
76	จากกรอบที่ 75 จะเห็นว่าเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน 3, 4, 5 สมาชิก จะมีจำนวนซับเซตอยู่ $2^3, 2^4, 2^5$ ตามลำดับ อยากรู่ว่า ถ้า H เป็นเซตที่มี n สมาชิก แล้ว H จะมีซับเซตจำนวนเท่าใด	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$															

77	ถ้า $7 \in D$ แล้ว $\{7\} \subseteq D$ เพราะว่า 7 จะเป็นเพียงหนึ่งสมาชิกของเซตเท่านั้นก็ตาม เราไม่ เขียนว่า $7 = D$ หรือ $7 \subseteq D$ เพราะ D เป็นเซต และ 7 เป็นเพียง ที่อยู่ในเซต D	(1) $\{\dots, -6, -5, -4\}$ หรือ $\{-4, -5, -6, \dots\}$ (2) infinite
78	จงเติมในช่องว่างต่อไปนี้ให้ถูกต้อง (1) $D = \{7\}$ หมายความว่า D เป็นเซตที่ประกอบด้วย สมาชิก คือ (2) $\{7\} \subseteq D$ หมายความว่า $\{7\}$ เป็น... ..ของ D (3) $7 \in D$ หมายความว่า (4) $7 \in \{7\}$ หมายความว่า	(3) 2^3 หรือ 8 (4) 2^4 หรือ 16
79	a เป็นเพียงสมาชิกหนึ่งของเซต $\{a, b\}$ ถ้าเขียนเป็น สัญลักษณ์ ก็เขียนได้ว่า $a \in \{a, b\}$ ไม่ใช่เขียน $\{a\} \in \{a, b\}$ เพราะถ้าเขียนอย่างนี้หมายความว่า $\{a\}$ เป็นสมาชิกหนึ่งของ $\{a, b\}$ แต่เราอาจจะเขียนว่า $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ ได้เพราะเซตย่อยหนึ่งของ $\{a, b\}$ คือ เซต $\{a\}$ แต่เราเขียนว่า $a \subseteq \{a, b\}$ <u>ก็ผิด</u> เพราะ <u>a ไม่ใช่เซต</u> จงใช้หลักนี้พิจารณาข้อต่อไปนี้ว่าข้อใดเขียนถูกหรือผิด (1) $\{b\} \subseteq \{a, b\}$ (4) $b \in \{a, b\}$ (2) $\{b\} \subseteq \{a, b\}$ (5) $\emptyset \subseteq \{a, b\}$ (3) $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ (6) $\emptyset \in \{a, b\}$	2^n

80	กำหนดให้ $a \in A$, $b \in B$, $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ (1) จะได้ $a \in C$ โดยอาศัยค่าจำกัดความของซับเซตที่ว่า $A \subseteq B \iff \text{ทุก } x \text{ สมาชิกของ } A \text{ เป็นสมาชิกของ } B$ (2) จะสรุปได้ว่า $a \in C$ โดยการพิสูจน์ดังนี้ <u>พิสูจน์</u> : $a \in B$ (เพราะว่า $a \in A$ และ $A \subseteq B$) และ $B \subseteq C$ (กำหนดให้) $\therefore a \in C$ (ค่าจำกัดความของซับเซต)	สมาชิก
81	จากสิ่งที่กำหนดให้ในรอบที่ 80 ถ้า $C \subseteq D$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $b \in D$ <u>พิสูจน์</u> : $\therefore b \in B$ (กำหนดให้) และ $B \subseteq C$ (กำหนดให้) (1) $\therefore b \in \dots \dots \dots$ โดยที่ $C \subseteq D$ (กำหนดให้) (2) นั่นคือ $\dots \dots \dots$ (ค่าจำกัดความของซับเซต)	(1) 7 เพียงตัวเดียว (2) ซับเซตของเซต D $\{7\} \subseteq D$ (3) 7 เป็นสมาชิกของเซต D (4) 7 เป็นสมาชิกของเซต $\{7\}$
82	กำหนดให้ $A =$ เซตของจำนวนเต็มบวก $B =$ เซตของจำนวนเต็มบวกคี่ $C =$ เซตของจำนวนเต็มบวกคี่ $D =$ เซตของจำนวนเต็ม จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด (1) $C \subseteq A$ (4) $D \subseteq A$ (2) $B \subseteq A$ (5) $A \subseteq D$ (3) $B \subseteq C$	(1) ผิด (2) ถูก (3) ถูก (4) ถูก (5) ถูก (6) ผิด เพราะ $\emptyset$ เป็นเซต

83	<u>เซตของเซต</u> (Set of sets) ในบางครั้งเราจะพบว่า เซตที่กำหนดให้ มีสมาชิกเป็นเซต ซึ่งเราจะเรียกว่า <u>ชุดของเซต</u> (family of sets) เช่น $A = \{\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}\}$ เป็นชุดของเซต ซึ่งมี $\{2,3\}, \{2\}, \{5,6\}$ เป็นสมาชิก แต่เซต $B = \{a, \{5,7\}, b\}$ ไม่ใช่ชุดของเซต เพราะ a, b ไม่ใช่เซต แต่ B ก็เป็นเซตเพราะมี a, b และ $\{5,7\}$ เป็นสมาชิก ถ้าให้ $H = \{\{2,3\}, \{4,5,6\}, \{2\}\}$ เซต H จะมีจำนวนสมาชิกเท่าใด จงเขียนมาให้ดู 	(1) $b \in C$ (2) $b \in Q$
84	ขอให้พิจารณาความแตกต่างระหว่างเซตต่อไปนี้ $A = \{\{1,2\}\}$ และ $B = \{1,2\}$ (1) เซต A มีเพียง 1 สมาชิก คือ (2) B เป็นเซตซึ่งมีสมาชิก คือ	(1) ถูก (2) ถูก (3) ผิด (4) ผิด (5) ถูก
85	ถ้า A เป็นเซตที่ประกอบด้วย 4 สมาชิก โดยที่ $1 \in A$, $\{2,3\} \in A$, $\{b,c,d\} \in A$ และ $\{m\} \in A$ จากนั้นจะเขียนเซต A เป็นแบบ Tabular ได้ คือ $A = \{ \dots \dots \dots \}$	

แบบทดสอบชุดที่ 1

1. กลุ่มหรือหมู่ของสิ่งของที่อยู่รวมกัน เช่น $\{1, a, 6, 6\}$ เรียกว่า
และสิ่งของแต่ละอย่างในกลุ่ม เรียกว่า
2. $\{m, s, m, r, s, r\}$ เซตนี้มีจำนวนสมาชิกเท่าไร ?
3. จะเขียนเซตของจำนวนเต็มจาก 1 ถึง 9 คือ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ แทนด้วย
 $\{5, 1, 7, 3, 9\}$ ได้หรือไม่
4. เซตที่ประกอบด้วยจำนวนเต็ม $\{4, 5, 6, 7, \dots, 16\}$
เรียกเซตนี้ว่า (finite, infinite) set.
5. จงเขียนสัญลักษณ์แทนคำพูด "a เป็นสมาชิกของ A" และ
"y ไม่เป็นสมาชิกของ B"
6. เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า
สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตนี้ คือ
7. Singleton set หรือ Unit set มีสมาชิกกี่สมาชิก
8. จงเขียนเซตต่อไปนี้เป็นคำพูด
(1) $A = \{n \mid n \text{ เป็นตัวเลขที่อยู่บนหน้าปัดหน้าฬิกา}\}$
(2) $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x^2 - 3x = -2\}$
9. จงเขียนเซต A, C ในข้อ 8 เป็นแบบ Tabular form
10. กำหนดให้ $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 4 < x < 12\}$ ข้อความต่อไปนี้
ถูกหรือผิด
..... (1) $5 \in S$
.... (2) $4 \notin S$
.... (3) $12 \in S$
11. จงเติมข้อความในช่องว่าง
(1) ถ้า $x \in \{0\}$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$
(2) ถ้า $x \in \{a, b\}$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$ หรือ

แบบทดสอบชุดที่ 1

1. กลุ่มหรือหมู่ของสิ่งของที่อยู่รวมกัน เช่น $\{1, a, 6, 8\}$ เรียกว่า
และสิ่งของแต่ละอย่างในกลุ่ม เรียกว่า
2. $\{m, s, m, r, s, r\}$ เซตนี้มีจำนวนสมาชิกเท่าไร ?
3. จะเขียนเซตของจำนวนเต็มจาก 1 ถึง 9 คือ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ แทนด้วย
 $\{5, 1, 7, 3, 9\}$ ได้หรือไม่
4. เซตที่ประกอบด้วยจำนวนเต็ม $\{4, 5, 6, 7, \dots, 16\}$
เรียกเซตนี้ว่า (finite, infinite) set.
5. จงเขียนสัญลักษณ์แทนคำพูด " a เป็นสมาชิกของ A" และ
" y ไม่เป็นสมาชิกของ B"
6. เซตที่ไม่มีสมาชิก เรียกว่า
สัญลักษณ์ที่เขียนแทนเซตนี้ คือ
7. Singleton set หรือ Unit set มีสมาชิกกี่สมาชิก
8. จงเขียนเซตต่อไปนี้เป็นคำพูด
(1) $A = \{n \mid n \text{ เป็นตัวเลขที่อยู่บนหน้าปัดหน้าฬิกา}\}$
(2) $C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } x^2 - 3x = -2\}$
9. จงเขียนเซต A, C ในข้อ 8 เป็นแบบ Tabular form
10. กำหนดให้ $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } 4 < x < 12\}$ ข้อความต่อไปนี้
ถูกหรือผิด
..... (1) $5 \in S$
..... (2) $4 \notin S$
..... (3) $12 \in S$
11. จงเติมข้อความในช่องว่าง
(1) ถ้า $x \in \{0\}$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$
(2) ถ้า $x \in \{a, b\}$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$ หรือ

12. จงเขียน "X เป็นซับเซตหนึ่งของ Y" เป็นสัญลักษณ์
13. (1) A เป็นซับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ
 (2) เซต $M =$ เซต N ก็ต่อเมื่อ
14. กำหนดให้ $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 (1) A เป็นซับเซตของ B ใช่หรือไม่
 (2) A เป็น proper subset ของ B ใช่หรือไม่
 (3) $\emptyset \subseteq A$ ใช่หรือไม่ เพราะ
15. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ว่า สำหรับทุก ๆ เซต A
 (1) $\emptyset \subseteq A$
 (2) $A \subseteq A$
16. จงเขียน proper subsets ของเซต $\{a, b, c\}$ มาให้หมด

17. จงหาตัวอย่างของ disjoint sets จากเซตต่อไปนี้ โดยหาเป็นคู่ ๆ
 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 0, 3, 1\}$, $C = \{4, 5, 6\}$
 $E = \{5, 6, 7\}$, $F = \{2, 4, 6, 8\}$
 คือ
18. เรามี Universal set เป็นจำนวนเชิงซ้อน, จำนวนจริง, จำนวนตรรกยะ,
 จำนวนเต็ม และจำนวนธรรมชาติ จงบอก Universal set ของเซต
 $\{\sqrt{2}, -\sqrt{5}, 4 - 3i\}$

19. กำหนดให้ $R = \{-11, \frac{4}{5}, 2, 7, \sqrt{3}, 8, 100\}$ จงเขียนซับเซตของ R
 ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $\{n | n \text{ เป็น prime number}\}$ ในแบบ Tabular form

20. ให้ $E = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง ซึ่งเป็นรากของสมการ } x^2 - 4x + 3 = 0\}$
 และ $F = \{x \mid x \text{ เป็นเลขคี่บวกที่มีค่าน้อยกว่า 5}\}$
 $E = F$ จริงหรือไม่ ? เพราะ

21. จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ว่าถูกหรือผิด

- (1) $\{4\} \in \{\{4\}\}$
 (2) $\{4\} \subseteq \{\{4\}\}$
 (3) $\emptyset \subseteq \{\{4\}\}$

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

บทที่ 2

เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทที่ 2 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. สามารถเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของเซตที่กำหนดให้ใดถูกต้อง
2. สามารถแรเงาแสดงยูเนียน อินเตอร์เซกชันและคอมพลีเมนต์ของเซตที่กำหนดมาให้ใดถูกต้อง
3. สามารถอ่านแผนภาพที่กำหนดให้ เพื่อบอกความสัมพันธ์ของเซตใดถูกต้อง
4. สามารถแจกแจงสมาชิกของเซตจากแผนภาพที่กำหนดให้ใดถูกต้อง
5. สามารถหา ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์ของเซตที่กำหนดมาให้ใดถูกต้อง
6. เมื่อกำหนด Universal set และเซตอื่น ๆ มาให้ สามารถที่จะเขียนแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของเซตต่าง ๆ เหล่านั้น โดยอาศัยนิยามใดถูกต้อง

หน้า 2

วิธีการสร้างเซตใหม่ (Operation on Sets)

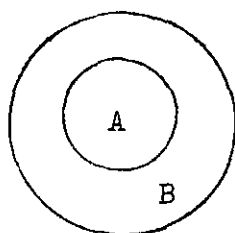
1	ในระบบจำนวนจริงวิธีการสร้างจำนวนใหม่โดยการนำเอาจำนวนมากระทำด้วยวิธีการ บวก ลบ คูณ และหารกัน ในระบบเซต เรามีวิธีการสร้างเซตใหม่ โดยการเอาเซตมากระทำกันดังนี้ คือ 1. คอมพลีเมนต์ (Complement) 2. อินเตอร์เซกชัน (Intersection) 3. ยูเนียน (Union)	3 สมาชิก คือ $\{2,3\}, \{4,5,6\}$ และ $\{2\}$
2	<u>Complement</u> กำหนดให้ $U = \{a,b,c,d,f\}$, $A = \{a,b,f\}$ (1) สมาชิกของ U ที่ไม่ได้อยู่ในเซต A คือ..... และ..... (2) ถ้าเราเอาสมาชิกของเซต U พวกที่ไม่ได้อยู่ใน A มาประกอบเป็นเซตใหม่ จะได้เป็นเซต $\{.....\}$ เราเรียกเซตใหม่นี้ว่า "Complement ของ A"	(1) $\{1,2\}$ (2) 1 และ 2
3	ดังนั้น Complement ของ A หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ Universal set U ที่ไม่ได้อยู่ในเซต ถ้าให้ $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ $D = \{1,2\}$ และ $E = \{3,4,5,6\}$ (1) ดังนั้น Complement ของ $D = \{.....\}$ (2) และ Complement ของ $E = \{.....\}$	$\{1, \{2,3\}, \{b,c,d\}, \{m\}\}$

4	กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ และให้ $A = \{1,2,3\}$ จะเห็นได้ว่า A เป็นเซตของ U ดังนั้น เซตของสมาชิกที่อยู่ใน U และไม่ได้อยู่ในเซต A ก็คือ $\{.....\}$ เซตของ U ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เหลือนี้เรียกว่า Complement ของ A เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A' หรือ $\bar{A}$ หรือ A^c แต่ในที่นี้เราจะใช้ A' แทน Complement ของ A ดังนั้น P' หรือ $\bar{P}$ หรือ P^c หมายถึง... ..ของ P	
5	<u>นิยาม:</u> (Complement) ให้ U เป็น Universal set และถ้า A เป็นเซตที่กำหนดให้ซึ่งเป็นเซตของ U เราเรียกเซต $\{x x \in U, x \notin A\}$ ว่าเป็น Complement ของ A เราจะเขียนนิยามนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ ดังนี้ $A' = \{x x \in U, x \notin A\}$ ถ้ากำหนดให้ $U =$ เซตของตัวอักษรในภาษาอังกฤษ ถ้า $B = \{a,b,c\}$ ดังนั้น $B' = \{.....\}$	(1) c และ d (2) $\{c,d\}$ A (1) $\{3,4,5,6\}$ (2) $\{1,2\}$

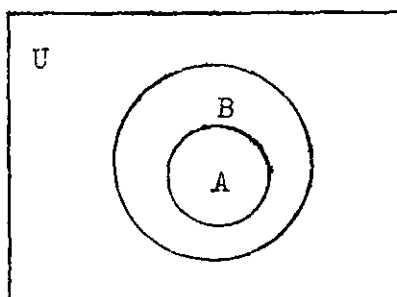
6	ให้ <u>universal set</u> U เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ ถ้า $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ นั่นคือ A เป็นเซตของเลขคู่บวก (1) ดังนั้น $A' = \{ \dots \}$ (2) นั่นคือ A' เป็นเซตของ $\dots$	$\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Complement ของ P
7	<u>เวนไคอะแกรม</u> (Venn-Euler Diagrams) วิธีทง่ายและสะดวกที่สุดที่จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต และวิธีการที่เกี่ยวข้องกับเซตก็คือ การใช้ "แผนภาพของเวน" (Venn Diagram) คือใช้วงกลมแทนเซต และใช้สี่เหลี่ยมแทน <u>universal set</u> และให้ทุก ๆ เซตอยู่ใน universal set อันเดียวกัน ภาพนี้แสดงว่า $A \subset U$ จะเห็นได้ว่าทุก ๆ สมาชิกของเซต A จะเป็นสมาชิกของ <u>universal set</u> U	$B' = \{d, e, f, \dots, z\}$

8

ถ้า $A \subseteq B$ เราเขียนแผนภาพแทนได้ดังนี้



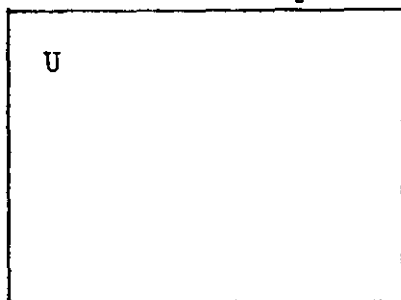
และถ้าเราต้องการจะแสดงว่า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq U$ เราอาจจะแทนด้วยรูปภาพนี้

(1) $\{1, 3, 5, \dots\}$

(2) เซตของเลขคี่บวก

9

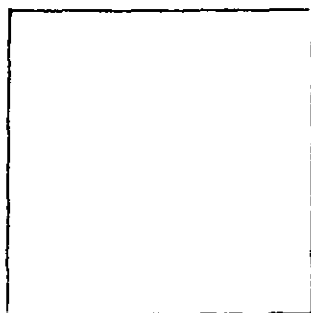
ถ้าในกรณีเซต A และ B ต่างก็เป็นเซตของ U โดยที่ A และ B เป็น disjoint sets แล้วจะเขียนแผนภาพแทนได้ คือ (เขียนแผนภาพไว้ใหญ่)



หมายเหตุ: disjoint sets หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย

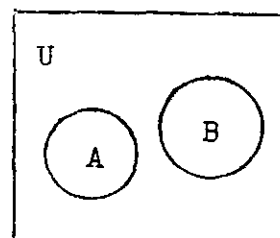
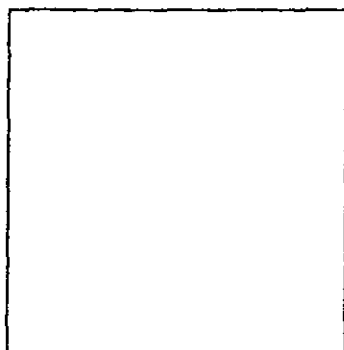
10

ถ้า universal set U = เซตของจำนวนทั้งปวง
 ให้ A = เซตของจำนวนเต็มคู่
 และ B = เซตของจำนวนเต็มคี่
 ทั้ง A และ B ต่างก็เป็นเซตของ U จงใช้เวเนนไดอะแกรม
 แสดงให้ดู

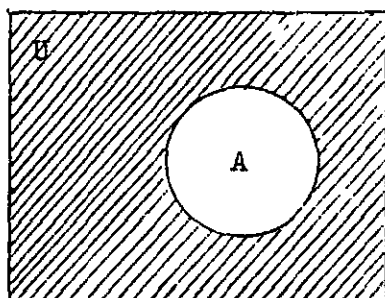


11

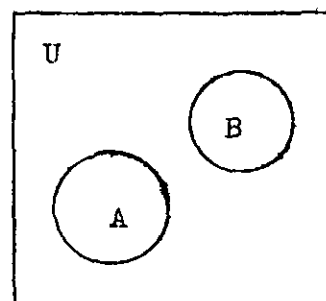
ให้ U = เซตของนักเรียนชายทั้งหมด
 จงใช้เวเนนไดอะแกรม แสดงความสัมพันธ์ของเซตต่อไปนี้
 A = เซตของนักเรียนชายในกรุงเทพฯ
 B = เซตของนักเรียนชายในโรงเรียนสวนกุหลาบ
 C = เซตของนักเรียนชายที่เรียนวิทยาศาสตร์ใน
 โรงเรียนสวนกุหลาบ



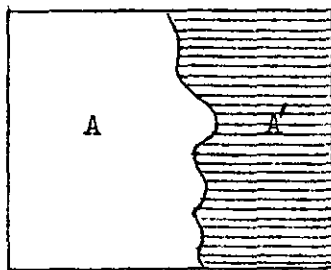
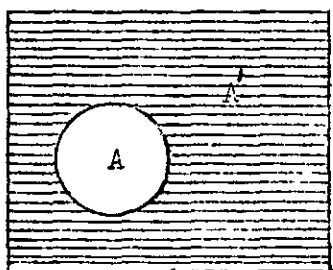
12



จากภาพนี้ ส่วนที่เป็น Complement ของเซต A (A')
คือบริเวณ (แรเงา, ไม่แรเงา)

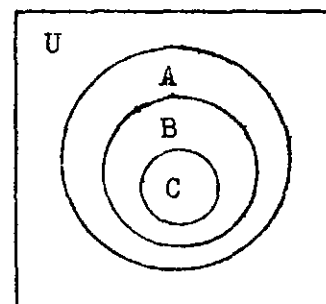


13



(1) แผนภาพนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต A กับ
..... ของเซต A

(2) จะเห็นว่า A และ A' เป็น disjoint sets
ดังนั้น A และ A' จะไม่มี



14 Intersection

เซตบางเซตจะประกอบด้วยสมาชิกซึ่งมีอยู่ร่วมกันทั้ง 2 เซต

$$\text{เซต } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{และ } B = \{4, 5, 6, 7\}$$

เราจะเห็นว่า มีสมาชิกบางสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และเซต B สมมติให้ C เป็นเซตของสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และเซต B

$$\text{ดังนั้น } C = \{.....\}$$

A' คือบริเวณที่แรเงา

15 นิยาม : ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ

เราเรียกเซต $\{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$ ว่า

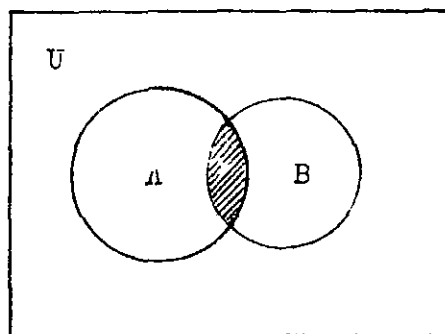
intersection ของ A กับ B เขียนสัญลักษณ์แทน

ด้วย " $A \cap B$ " อ่านว่า "A intersection B" ซึ่งเขียน

ผลคูณกันนั่นเอง

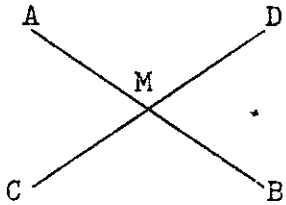
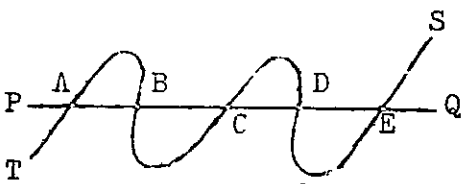
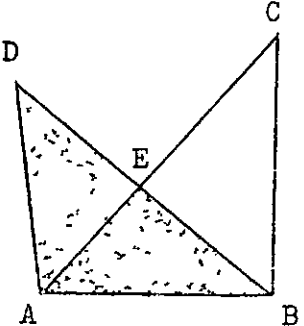
(1) Complement

(2) สมาชิกร่วมกันเลย



จากแผนภาพนี้ บริเวณที่แทนเซตของสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B คือบริเวณ

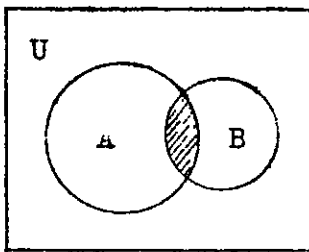
16	ให้ $A = \{a, b, c\}$ $B = \{f, d, g\}$ จะเห็นได้ว่า ไม่มีสมาชิกใดเลยที่เป็นทั้งสมาชิกของ A และ B (1) ดังนั้น $A \cap B = \dots\dots\dots$ (2) นั่นคือ A และ B เป็น $\dots\dots\dots$ set เพราะไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย	{4,5}
17	ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ดังนั้น เราจะได้ว่า (1) $A \cap B = \{2, 4\}$ (2) $A \cap C = \dots\dots\dots$ (3) $B \cap C = \dots\dots\dots$ (4) $B \cap A = \dots\dots\dots$ (5) $(A \cap B) \cap C = \dots\dots\dots$ (6) $A \cap (B \cap C) = \dots\dots\dots$ (7) $(A \cap B) \cap C$ และ $A \cap (B \cap C)$ มีสมาชิกเหมือนกันหรือไม่ $\dots\dots\dots$ (8) ดังนั้น เซต $(A \cap B) \cap C$ และเซต $A \cap (B \cap C) \dots\dots\dots$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน) <u>ข้อสังเกต</u>: Intersection ของเซตจะเป็นเซตใหม่อีกเซตหนึ่ง	ที่แรงๆ

18	 ให้ $\psi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นตรง AB} \}$ $\pi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นตรง CD} \}$ $\psi \cap \pi = \{ \text{จุดที่อยู่บนเส้นตรง AB และ CD} \}$ คือจุดตัดกัน ของ AB และ CD นั่นเอง ดังนั้น $\psi \cap \pi = \dots\dots\dots$	(1) $\emptyset$ (2) disjoint
19	 ให้ $\psi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นตรง PQ} \}$ $\pi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นโค้ง TS} \}$ ดังนั้น $\psi \cap \pi = \dots\dots\dots$	(2) $\{3,4\}$ (3) $\{4,6\}$ (4) $\{2,4,6,8\}$ (5) $\{4\}$ (6) $\{4\}$
20	E _____ F ให้ $\psi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นตรง EF} \}$ M _____ N $\pi = \{ \text{จุดทุกจุดบนเส้นตรง MN} \}$ โดยที่ $EF \parallel MN$ ดังนั้น $\psi \cap \pi = \dots\dots\dots$	(7) เหมือนกัน (8) เท่ากัน
21	 $ABC = \{ \text{จุดทุกจุดภายใน } \triangle ABC \}$ $ABD = \{ \text{จุดทุกจุดภายใน } \triangle ABD \}$ $ABC \cap ABD = \dots\dots\dots$	

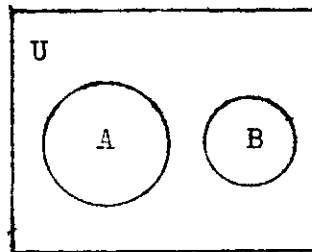
22

การใช้เว้นไคอะแกมแสดงเซต $A \cap B$ อาจจะแสดง
ได้ 4 วิธี ดังภาพต่อไปนี้ ซึ่งส่วนที่แรเงาจะแทนเซต $A \cap B$
ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A และเซต B

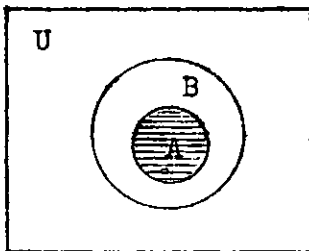
1



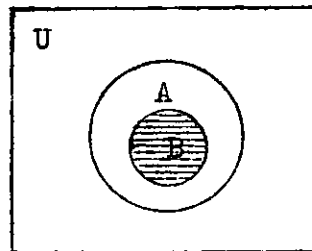
2



3



4



จงเลือกแผนภาพที่สอดคล้องกับเซตต่อไปนี้

(a) $A \cap B = A$ คือ

(b) $A \cap B = \emptyset$ คือ

(c) $A \cap B = B$ คือ

ข้อสังเกต : ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แสดงว่าเซต A และ B
ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ดังนั้นในภาพที่ 2 จึงไม่มีส่วน
ที่แรเงา

$\{M\}$

$\{A, B, C, D, E\}$

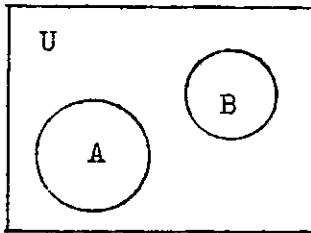
$\emptyset$

$\{\text{จุดทุกจุดภายใน } \triangle ABE\}$

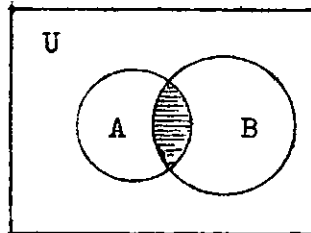
- 23 จากคำจำกัดความ (นิยาม) ของ intersection ของ A และ B เราเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

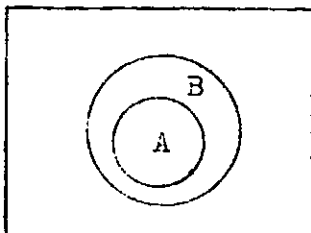
1



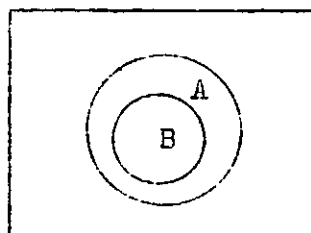
2



3



4



ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_1 = \{2, 3, 7, 8\}$,
 $B_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B_3 = \{8, 9, 10\}$,
 $B_4 = \{1, 2, 3\}$

จงหาว่าภาพไหนที่แสดงถึง

- (1) $A \cap B_1$ (2) $A \cap B_2$
 (3) $A \cap B_3$ (4) $A \cap B_4$

- (a) ภาพที่ 3
 (b) ภาพที่ 2
 (c) ภาพที่ 4

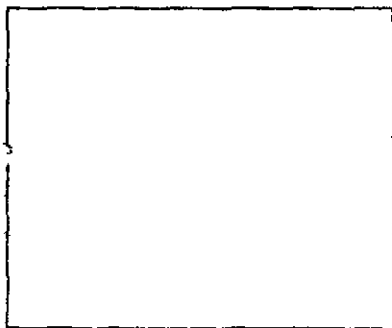
24

ให้ U = เซตของจำนวนจริง

ถ้า A = เซตของจำนวนเต็ม

B = เซตของจำนวนเต็มคู่

จงเขียนแสดงด้วยเวกซ์ไออะแกรมและแรเงาส่วนที่แสดงถึง
เซต $A \cap B$



(1) ภาพที่ 2

(2) ภาพที่ 3

(3) ภาพที่ 1

(4) ภาพที่ 4

25

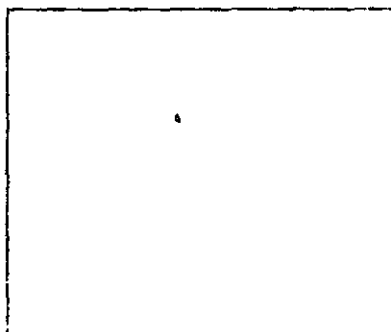
จงใช้เวกซ์ไออะแกรม และแรเงาส่วนที่แสดงถึง $A \cap B$ ถ้า

U = เซตของนักเรียนทั้งหมด

$A = \{a | a \text{ เป็นนักเรียนที่เรียนวิทยาศาสตร์}\}$

$B = \{b | b \text{ เป็นนักเรียนที่เรียนศึกษาศาสตร์}\}$

ทั้งนี้สมมติว่า นักเรียนศึกษาศาสตร์บางคน (ไม่ใช่ทั้งหมด)
เป็นนักเรียนวิทยาศาสตร์ด้วย



26 Union

Union เป็นวิธีการทางเซตที่สำคัญอย่างหนึ่งในการที่จะสร้างเซตใหม่ ตัวอย่างเช่น

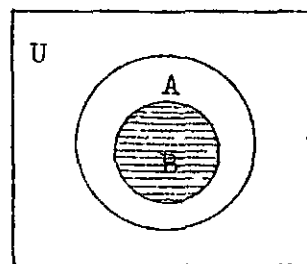
$$\text{สมมติว่า } A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{และ } B = \{5, 6, 7, 8\}$$

ให้ C เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ได้จากการรวมเอาสมาชิกทั้งหมดของ A และ B ไว้ด้วยกัน

$$C = \{ \dots \dots \dots \}$$

เซต C นี้เรียกว่า "union ของเซต A และเซต B"



27

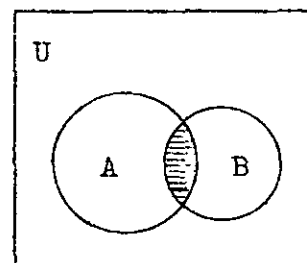
สัญลักษณ์ " $A \cup B$ " อ่านว่า union ของ A และ B หรือ " $A \text{ union } B$ "

$A \cup B$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน A หรืออยู่ใน B เช่น

$$\text{ให้ } D = \{1, 4, 7, 10\}, E = \{7, 10, 13, 16\}$$

$$D \cup E = \{ \dots \dots \dots \}$$

ข้อสังเกต : Union ของเซต A และ B นั้นจะเป็นเซตใหม่ที่เกิดจากการนำสมาชิกของ A และสมาชิกของ B มารวมกันเป็นเซต, ถ้าสมาชิกซ้ำกันให้เขียนเพียงตัวเดียว



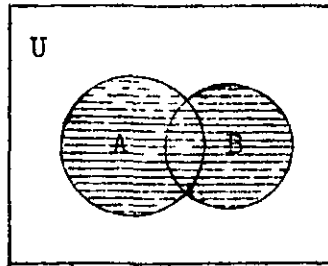
28 นิยาม (Union)

Union ของเซต A และ B คือเซตที่ประกอบด้วย
ทุก ๆ สมาชิก ซึ่งอยู่ในเซต A หรืออยู่ในเซต B

เราอาจจะเขียนนิยามของ union ของ A และ B
ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ คือ

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

ซึ่งอาจเขียนแทนด้วยวงโคจรแวน ได้นี้



$A \cup B$ คือ พื้นที่ส่วนที่แรเงา

ให้ $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{f, b, d, g\}$

(1) $A \cup B = \{ \dots \}$

(2) $A \cap B = \{ \dots \}$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$

29

เซตที่ประกอบด้วยทุก ๆ สมาชิกซึ่งอยู่ในเซต D หรืออยู่ใน
เซต E เราเรียกเซตนี้ว่า
และเขียนค่าจำกัดความของเซตนี้เป็นแบบสัญลักษณ์ ดังนี้

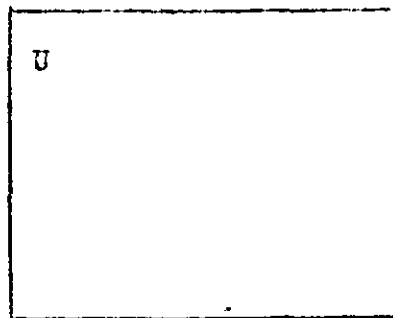
$$D \cup E = \{y | \dots\}$$

30

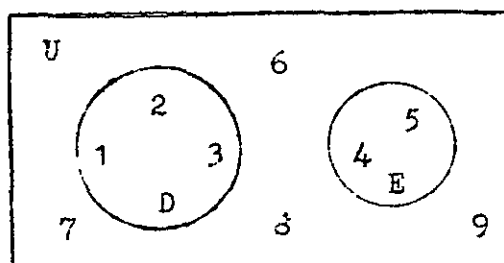
ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ถ้า $A = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $B = \{5, 4\}$ (1) $A \cup B = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap B = \dots\dots\dots$

(3) A และ B เป็น disjoint set ใช่หรือไม่.....

เพราะ

(4) จงเขียนเว้นไคอะแกรมแสดงโดยการเขียนสมาชิก
ของเซตลงในเซตต่าง ๆ ให้ถูกต้อง(1) $\{a, b, c, d, f, g\}$ (2) $\{b, d\}$

31

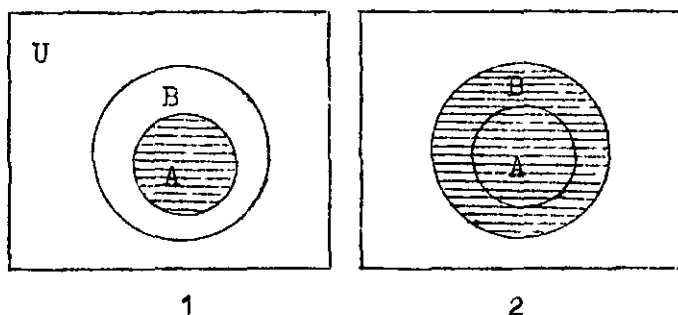
ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ถ้า $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{4, 5\}$ เซต D และ E วาจะเขียนแทนด้วยเว้นไคอะแกรม
ถึงภาพ จงแรเงาส่วนที่แสดง $D \cup E$ 

Union ของเซต D

และ E หรือ

 $D \cup E$ $y \in D$ หรือ $y \in E$

32 จากแผนภาพต่อไปนี้ จงพิจารณาแล้วตอบคำถามข้างล่าง



- (1) $A \cup B$ เขียนแทนด้วยแผนภาพ รูปที่
- (2) $A \cap B$ เขียนแทนด้วยแผนภาพ รูปที่

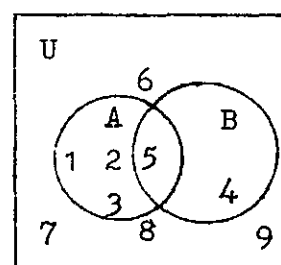
(1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(2) $\{5\}$

(3) ไม่ใช่ เพราะ

$5 \in A$ และ $5 \in B$

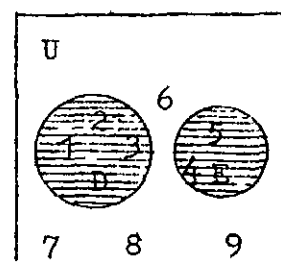
(4)

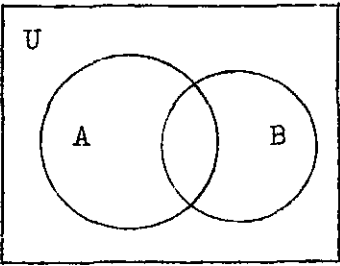


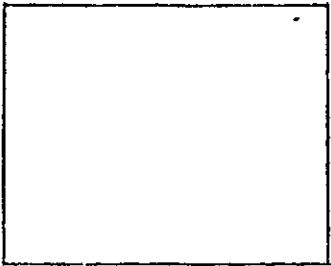
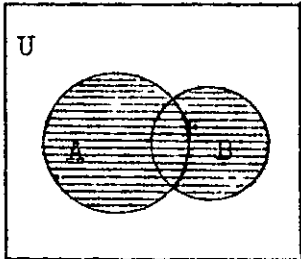
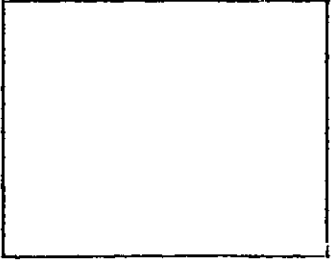
33 สมมติให้ A = เซตของคนที่มีผมสีทอง
 B = เซตของคนที่มีตาสีฟ้า
 C = เซตของคนที่มีความสูงเกิน 6 ฟุต

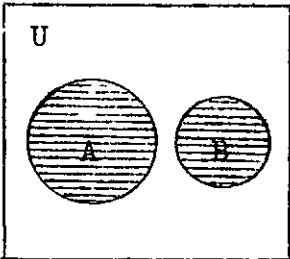
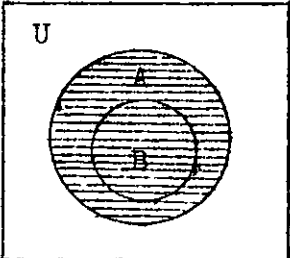
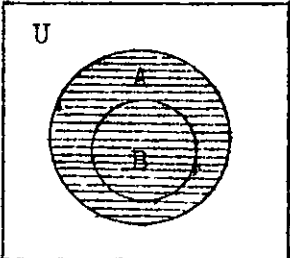
ดังนั้น

- (1) BUG เป็นเซตของ
- (2) จงเขียน "เซตของคนที่มีตาสีฟ้าหรือมีความสูงเกิน 6 ฟุต" เป็นสัญลักษณ์



34	ถ้า $A = \{x x \text{ มีตาสีน้ำตาล}\}$ $B = \{y y \text{ มีผมสีดำ}\}$ และเขียนวงนัยอะแกรมแทนได้ดังนี้  (1) จากภาพจงแรเงาส่วนที่แสดง $A \cup B$ (2) บริเวณที่วงกลมทั้งสองซ้อนกันอยู่นั้น จะแทนเซต (เขียนเป็นสัญลักษณ์) แสดงว่าใน เซตนี้มีสมาชิกที่มีตาสีน้ำตาลและมีผมสีดำ	(1) 2 (2) 1
35	จากกรอบที่ 33 ถ้าเราจะเขียนเซตของคนที่มีผมสีทอง หรือมีตาสีฟ้า หรือมีความสูงเกิน 6 ฟุต เป็นสัญลักษณ์ แทนเซตนี้ คือ) 	(1) เซตของคนที่มีผม สีทอง หรือมีตา สีฟ้า (2) $B \cup C$

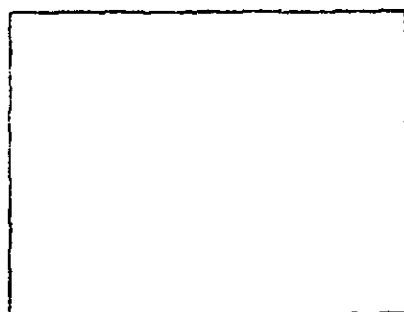
36	ขอให้พิจารณา $A \cup B$ จาก $A =$ เซตของคนที่มีตาสีน้ำเงิน $A = \{x/x \text{ เป็นคนที่มีตาสีน้ำเงิน}\}$ $B =$ เซตของคนที่มีตาสีน้ำตาล $B = \{y/y \text{ เป็นคนที่มีตาสีน้ำตาล}\}$ (1) A และ B เป็น set เพราะว่าไม่มีผู้ใดที่มีตาสีน้ำเงินและสีน้ำตาล พร้อม ๆ กันได้ (2) จงเขียนเว้นน์ไคอะแกรมแล้วแรเงาส่วนที่จะแสดง ถึงเซต $A \cup B$ 	(1)  (2) $A \cap B$
37	จงเขียนเว้นน์ไคอะแกรมแล้วแรเงาส่วนที่แสดง $A \cup B$ ในเมื่อ $A =$ เซตของคนในประเทศไทย $B =$ เซตของคนในจังหวัดอยุธยา 	$G \cup B \cup C$

38	ถ้าไม่ได้กำหนดเซต A, B มาให้ก่อน แต่เราทราบว่า $A \cup B = \{a, c, d, g, m\}$ เราจะบอกได้แน่นอนไหมว่า d เป็นสมาชิกของ A	(1) disjoint set (2)
39	ให้ $C = \{\text{นักเรียนที่ฟันผุ}\}$ $D = \{\text{นักเรียนที่สายตาสั้น}\}$ ดังนั้น $C \cup D$ จะเป็นเซตที่ประกอบด้วยนักเรียนที่..... ทั้งหมดหรือนักเรียนที่..... ทั้งหมด	
40	จากกรอบที่ 39 ถ้าเราทราบว่า สมศรีมีชื่ออยู่ในเซต $C \cup D$ เราก็ยังบอกแน่นอนไม่ได้ว่า สมศรีเป็นอะไรแน่ เราบอกได้แต่เพียงว่า สมศรี อาจจะ..... หรือไม่ก็..... หรืออาจจะเป็นทั้งสองอย่างก็ได้	
41	$A = \{\text{การถ่ายภาพยนตร์}\}$ และ $B = \{\text{นักร้อง}\}$ ถ้าเราทราบว่า ยุกา $\in A \cup B$ บอกไปข้อใดถูก (a) ยุกา เป็นคาราพยนตร์แน่นอน (b) ยุกา เป็นนักร้องแน่นอน (c) ยุกา อาจจะเป็นอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งสองอย่างก็ได้ ยังไม่ทราบแน่นอน ตอบ	 ข้อสังเกต $B \subseteq A$

42	ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ $A \cup B = \{x x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$ $A \cap B = \{x x \in A \text{ และ } x \in B\}$ เป็นสัญลักษณ์แทนนิยามของ "A union B" และ "A intersection B" เราอาจจะให้นิยามของ Union และ intersection ของเซต A และเซต B ดังต่อไปนี้ <u>Union</u> ของเซต A และเซต B คือเซต $A \cup B$ กำหนดดังนี้ สำหรับทุก ๆ สมาชิก x, $x \in A \cup B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A$ หรือ $x \in B$ <u>Intersection</u> ของเซต A และเซต B คือ เซต $A \cap B$ กำหนดดังนี้ สำหรับทุกสมาชิก x, $x \in A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A$ และ $x \in B$	ยังบอกไม่ได้
		พันธุ์ สาขาอื่น
43	ให้ E และ F เป็นเซตใด ๆ จงเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์ (1) $E \cup F = \{a \dots\dots\dots\}$ (2) สำหรับทุก ๆ สมาชิก a, $a \in E \cup F$ ก็ต่อเมื่อ $\dots\dots\dots$ (3) $E \cap F = \{b \dots\dots\dots\}$ (4) สำหรับทุก ๆ สมาชิก x, $x \in E \cap F$ ก็ต่อเมื่อ..... $\dots\dots\dots$	พันธุ์ สาขาอื่น (c)

44

กำหนดเซต A ของ Universal set U หรือ $A \subseteq U$
 Union ของ A กับ Complement ของเซต A
 (คือ A') จะเท่ากับ Universal set U ทั้งหมดนั่นเอง
 นั่นคือ $A \cup A' = U$
 จงเขียนแผนไकोะแอมที่จะแสดงเซต A และ A' ซึ่ง
 เกี่ยวข้องกับ universal set U แล้ววงแรเงาแสดง
 บริเวณ $A \cup A'$



- (1) $\{a/a \in E$
หรือ $a \in F\}$
- (2) $a \in E$ หรือ $a \in F$
- (3) $\{b/b \in E$
และ $b \in F\}$
- (4) $x \in E$ และ $x \in F$

45

ตัวอย่างที่แสดงว่า $A \cup A' = U$

(1) ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

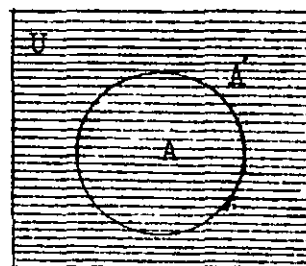
ถ้า $A = \{2, 3, 4\}$

ดังนั้น $A' = \{\dots\dots\dots\}$

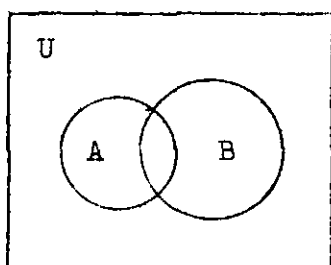
(2) $A \cup A' = \{\dots\dots\dots\}$

(3) $A \cup A' = U$ จริงหรือไม่

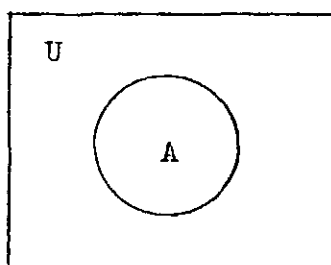
- 46 ถ้า U เป็น Universal set ของเซต A ที่กำหนดให้
- (1) นั่นคือ $A \subseteq U$ และ $A' \dots U$
- (2) ดังนั้น $A \cup A' = \dots\dots\dots$



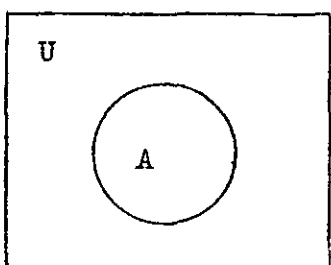
- 47 จากเว้นน์โคอะแกรมต่อไปนี้ จงแรเงาแสดงถึงความสัมพันธ์ตามที่บอกไว้ใ้ภาพแต่ละภาพ



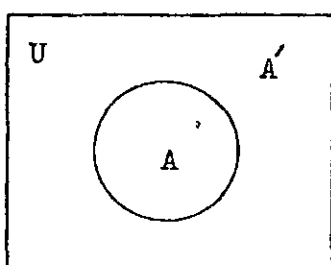
$A \cup B$



$U \cup A$



$A \cup A$



$A \cup A'$

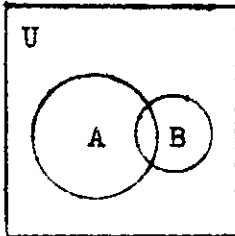
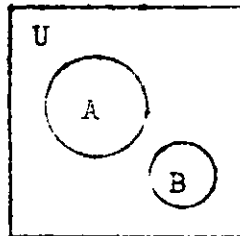
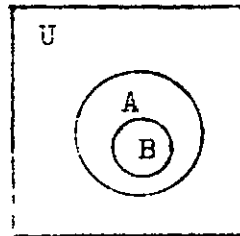
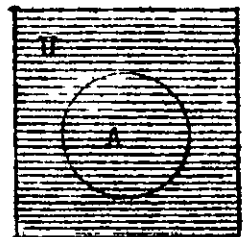
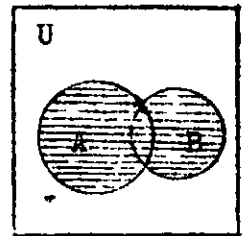
$A \cup A'$ คือบริเวณที่แรเงาทั้งหมด ซึ่งเท่ากับ U

- (1) $\{1, 5\}$
- (2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- (3) จริง

48

Intersection ของเซต A และ B ($A \cap B$) ก็คือ เซตของเซตหนึ่งทีประกอบควยสมาชิกที่มีอยู่วางกันทั้งสองเซตนั้น และถ้า A, B เป็น disjoint set แล้ว $A \cap B = \emptyset$ หมายความว่าทั้งเซต A และ B จะไม่มีสมาชิกรวมกัน (เหมือนกัน)

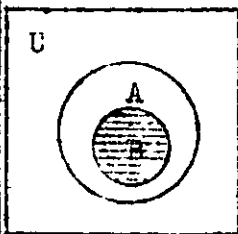
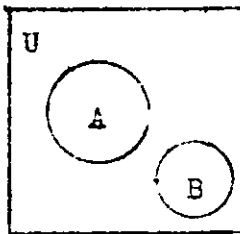
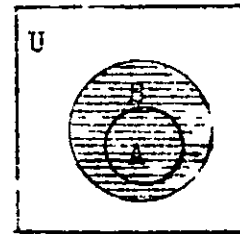
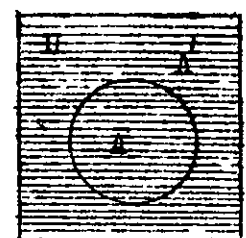
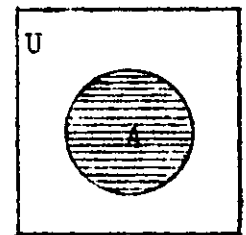
จากเว้นไคอะแกรมต่อไปนี้ จงแรเงาพื้นที่บอกไว้ใ้ภาพ

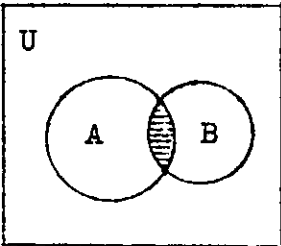
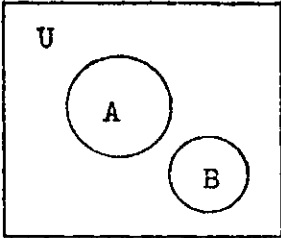
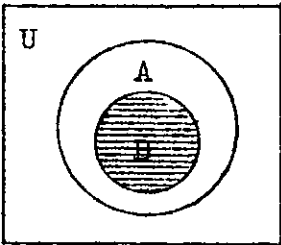
 $A \cap B$  $A \cap B = \emptyset$  $A \cap B = B$ (1) $A' \cap U$ (2) U 

49

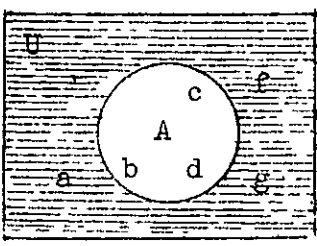
จากเว้นไคอะแกรมต่อไปนี้

จงเติมเครื่องหมาย $\cap$ (intersection) หรือ $\cup$ (union) ให้ถูกต้อง (ตามลำดับแรก)

1. $B = A \dots B$ 2. $\emptyset = A \dots B$ 3. $B = A \dots B$ 

50	$A \cap \emptyset$ อ่านว่า "intersection ของเซต A กับ empty set" ก็คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในทั้งสองเซตนั้น จะเขียนเป็นสัญลักษณ์จากนิยามได้ดังนี้ $A \cap \emptyset = \{x x \in A \text{ และ } x \in \emptyset\}$ (1) ท่านจะหาสมาชิกที่อยู่ในทั้งเซต A และ $\emptyset$ ได้หรือไม่เพราะ..... (2) ดังนั้น $A \cap \emptyset$ ก็คือ	 $A \cap B$
51	$A \cup \emptyset$ อ่านว่า "Union ของเซต A กับ empty set" ก็คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ในเซต A หรือ $\emptyset$ นั่นคือจะเขียนเป็นสัญลักษณ์จากนิยามได้ดังนี้ $A \cup \emptyset = \{x x \in A \text{ หรือ } x \in \emptyset\}$ (1) สมาชิกที่จะอยู่ใน $A \cup \emptyset$ ก็คือสมาชิกของเซต A ทั้งหมดใช่หรือไม่..... เพราะ (ก่อนตอบควรจะอ่านนิยามของ Union ให้เข้าใจก่อน) (2) ดังนั้นเซตซึ่งแทนโดย $A \cup \emptyset$ คือ..... (3) จากกรอบที่ 50 และกรอบนี้ จะสรุปได้ว่า $A \cap \emptyset = \dots\dots\dots \text{ และ } A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$	 $A \cap B = \emptyset$  $A \cap B = B$
		(1) $B = A \cap B$ (2) $\emptyset = A \cap B$ (3) $B = A \cup B$

52	ถ้า $A =$ เซตของนายกรัฐมนตรีไทยที่เป็นชาย $\emptyset =$ เซตของนายกรัฐมนตรีไทยที่เป็นหญิง ดังนั้น (1) $A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$	(1) ไม่ได้เพราะ $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก (2) $\emptyset$ (empty set)
53	ในกรอบที่ 54, 55 และ 56 จะเป็นการทบทวนเรื่อง วิธีการทางเซต (Operations on sets) คือ Complementation, Intersection และ Union ถ้า A เป็นเซตของ Universal set ที่กำหนด ให้แล้ว A' จะเป็น Complement ของ A ซึ่ง A' เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของ Universal set ที่ไม่อยู่ในเซต A นั่นคือ $A' = \{x x \in U, x \notin A\}$ กำหนดให้ $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ $A = \{a, c, f\}$, $E = \{e, f\}$ และ $C = \emptyset$ จงหา (1) $A' = \dots\dots\dots$ (2) $B' = \dots\dots\dots$ (3) $C' = \dots\dots\dots$ <u>ข้อสังเกต</u> : ก่อนจะหา $\emptyset'$ นั้น เราต้องคิดว่า $\emptyset$ เป็นเซต ของทุก ๆ เซต นั่นคือ $\emptyset \subseteq U$ บลา $\emptyset$ ไม่มีสมาชิกเลย	(1) ใช่ เพราะ $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก (2) A (3) $A \cap \emptyset = \emptyset$ และ $A \cup \emptyset = A$

54	 (1) บริเวณที่แรเงาคือเซต.... (2) $A' = \{ \dots \}$ (3) $(A')'$ คือ Complement ของ A' นั่นคือ $(A')'$ คือเซตของสมาชิกใน U ที่ไม่อยู่ใน A' จากเว้นน์ไคอะแกรม $(A')' = \{ \dots \} = A$	(1) A (2) $\emptyset$
55	ให้ Universal set $U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{6, 8\}$ จงหา (1) $A' = \dots$ (2) $(A')' = \dots$ (3) $B' = \dots$ (4) $(B')' = \dots$	(1) $\{b, d, e\}$ (2) $\{a, b, c, d\}$ (3) $\{a, b, c, d, e, f\}$ หรือ U
56	(1) ถ้า P เป็นเซตใด ๆ เราสรุปได้ว่า $(P')' = \dots$ (2) ดังนั้น $(\emptyset')' = \dots$	

57 Intersection ของเซต A และเซต B
 คือ เซตที่ประกอบด้วยทุก ๆ สมาชิก ซึ่งอยู่ในทั้งเซต A
 และ B นั่นคือ

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

$$\text{กำหนดให้ } U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, c, f\}, \quad B = \{e, f\}$$

จงหา (1) $A \cap B = \dots\dots\dots$

(2) $A \cap A = \dots\dots\dots$

(3) $A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$

(1) A'

(2) $\{a, g, f\}$

(3) $\{b, c, d\}$

(1) $\{6, 10\}$

(2) $\{2, 4, 6\}$

(3) $\{2, 4, 10\}$

(4) $\{6, 8\}$

58 Union ของเซต A และ B ($A \cup B$) คือเซตที่
 ประกอบด้วยทุก ๆ สมาชิกซึ่งอยู่ในเซต A หรือ B นั่นคือ

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

$$\text{กำหนดให้ } U = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$A = \{a, c, f\}, \quad B = \{e, f\}$$

จงหา (1) $A \cup B = \dots\dots\dots$

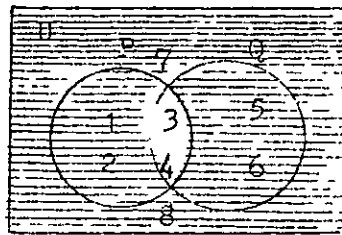
(2) $B \cup B = \dots\dots\dots$

(3) $A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$

(1) P

(2) $\emptyset$

59



บริเวณที่ไม่แรเงาก็คือ $P \cap Q$

$$P \cap Q = \{3, 4\}$$

บริเวณที่แรเงาก็คือ Complement ของ $P \cap Q$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(P \cap Q)'$

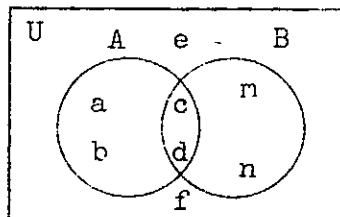
จากภาพ $(P \cap Q)' = \{ \dots \dots \dots \}$

(1) $\{f\}$

(2) $A = \{a, c, f\}$

(3) $\emptyset$

60



(1) $A \cap B = \dots \dots \dots$

(2) $(A \cap B)' = \dots \dots \dots$

(3) จงแรเงาบริเวณที่แสดงถึง $(A \cap B)'$

61

กำหนดให้ $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{3, 5, 7, 9\}$$

(1) $A \cap B = \dots \dots \dots$

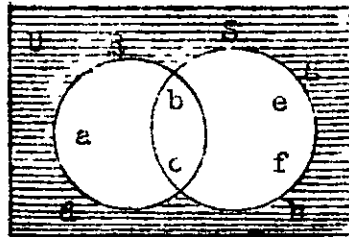
(2) $(A \cap B)' = \dots \dots \dots$

(1) $\{a, c, e, f\}$

(2) $B = \{e, f\}$

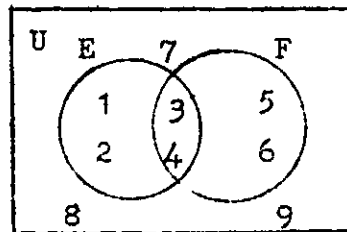
(3) $A = \{a, c, f\}$

62

 $\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$

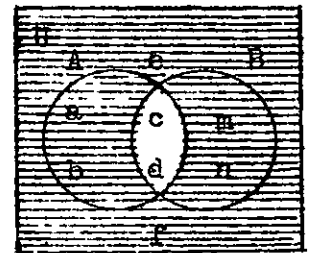
- (1) บริเวณที่ไม่แรเงาคือเซต
- (2) $(R \cup S)'$ คือ Complement ของ $R \cup S$ บริเวณที่แสดงถึงเซต $(R \cup S)'$ คือบริเวณที่.....
..... (แรเงา, ไม่แรเงา)
- (3) ดังนั้น $(R \cup S)' = \{.....\}$

63

(1) $\{c, d\}$ (2) $\{a, b, e, f, m, n\}$

(3)

- (1) $E \cup F =$
- (2) $(E \cup F)' =$
- (3) จงแรเงาบริเวณที่แสดงถึงเซต $(E \cup F)'$



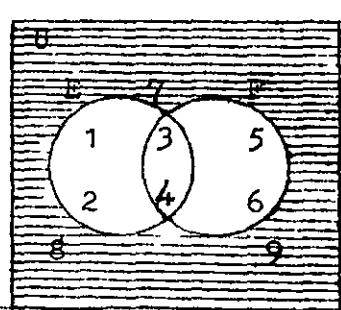
64

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ถ้า $C = \{1, 2, 4\}$, $D = \{1, 3, 5\}$

จงหา

- (1) $C \cup D =$
- (2) $(C \cup D)' =$

(1) $\{3, 5, 7\}$ (2) $\{1, 9\}$

65	กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $C = \{4, 5, 6, 7\}$, $D = \{6, 7, 8, 9\}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้ (ถ้าจำเป็นเพื่อความเข้าใจจะเขียนเงื่อนไขประกอบ ด้วยก็ได้) (1) $B' = \dots\dots\dots$ (2) $A \cup D = \dots\dots\dots$ (3) $B \cap D = \dots\dots\dots$ (4) $(B \cap D)' = \dots\dots\dots$	(1) $R \cup S$ (2) แรกเงา (3) $\{d, g, h\}$
66	จากที่กำหนดให้หากรอบที่ 65 จงหา (1) $A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$ (2) $C \cap \emptyset = \dots\dots\dots$ (3) $(C \cap \emptyset)' = \dots\dots\dots$ <u>ข้อควรจำ</u> : ตามนิยามของ Complement ของเซต ให้ $U = \text{Universal set}$ A เป็นเซตใด ๆ ดังนั้น $U' = \emptyset$ และ $\emptyset' = U$	(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $\{7, 8, 9\}$ (3)  (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (2) $\{6, 7\}$

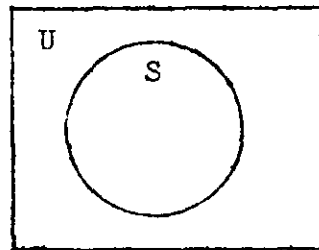
67	จากที่กำหนดให้ตามกรอบที่ 65 จงหา (1) $A \cap C = \dots\dots\dots$ (2) $(U \cap A)' = \dots\dots\dots$	(1) $\{1, 2, 8, 9\}$ (2) $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ (3) $\{6, 7\}$ (4) $\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$
68	จงเติมข้อความต่อไปนี้ให้ถูกต้อง (1) $A \cup A = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap A = \dots\dots\dots$ (3) $A \cup U = \dots\dots\dots$ (4) $A \cap U = \dots\dots\dots$	
69	จงเติมข้อความต่อไปนี้ให้ถูกต้อง (1) $A \cup A' = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap A' = \dots\dots\dots$ (3) $A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$ (4) $A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$ (5) $(A')' = \dots\dots\dots$ (6) $\emptyset' = \dots\dots\dots$	(1) $\{1, 2, 3\} = A$ (2) $\emptyset$ (3) $\emptyset' = U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

70	<u>ผลต่างของเซตสองเซต</u> (Difference of two sets) <u>นิยาม</u> : ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ $A-B$ อ่าน "A ลบ B" หรือผลต่างของเซต A และ B คือเซตของสิ่งทั้งหลายที่เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2\}$ ดังนั้น $A-B = \{3, 4\}$ ถ้าให้ $C = \{3\}$ $D = \{4\}$ $C-D = \{\dots\dots\dots\}$ <u>ข้อสังเกต</u> : พยายามทบทวนนิยามให้เข้าใจจนคล่อง	(1) ϕ (2) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
71	ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ ดังนั้น $A-B = \dots\dots\dots$	(1) A (2) A (3) U (4) A
72	กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $S = \{2, 4, 5\}$ จงหา (1) $U-S = \dots\dots\dots$ (2) $S' = \dots\dots\dots$ (3) $U-S = S'$ ใช่หรือไม่.....	(1) U (2) ϕ (3) A (4) ϕ (5) A (6) U

73

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $S = \{2, 4, 5\}$

จงเขียนเว้นน์ไดอะแกรมแสดงถึงสมาชิกของ S , S'
และ U และจงแรเงาบริเวณที่แสดงถึงสมาชิกของ S' ซึ่งก็คือ
สมาชิกของ $U - S = \dots\dots\dots$ นั่นเอง
และจงเขียนสมาชิกลงในเว้นน์ไดอะแกรมนี้ด้วย

 $\{3\}$ $A - B = \{1\}$

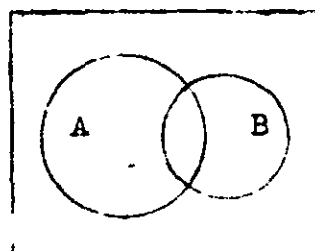
74

ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{4, 5, 6, 7\}$

แสดงของ A และ B หมายถึงเซตที่ประกอบ
ด้วยสมาชิกของ A ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ B

ดังนั้น $A - B = \dots\dots\dots$

จงใช้เว้นน์ไดอะแกรมแสดงถึง $A - B$ โดยการแรเงาบริเวณ
ที่แสดงถึงสมาชิกของ $A - B$

(1) $\{1, 3, 6, 7, 8\}$ (2) $\{1, 3, 6, 7, 8\}$

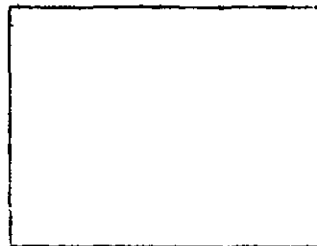
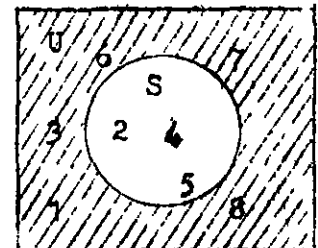
(3) ไข

75

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ดังนั้น $B \setminus A = \dots\dots\dots$

$B \setminus A$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ B ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ A

จงเขียนเวเนนไดอะแกรมแสดงสมาชิก และแรเงาบริเวณที่แสดงถึงเซต $B \setminus A$

 $\{1, 3, 6, 7, 8\}$ 

76

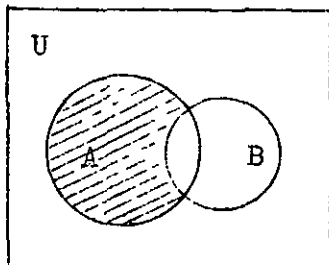
Complement ของ B เทียบกับ A

นิยาม : ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ ที่กำหนดให้

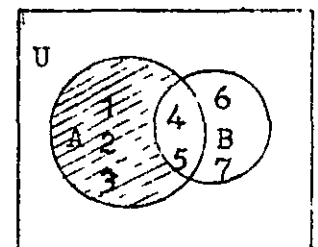
$A \setminus B$ เรียกว่า ผลต่างของ A และ B เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

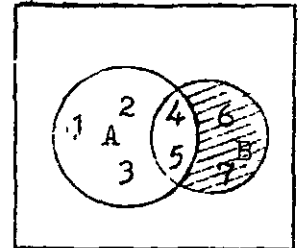
หรือเรียกอีกชื่อว่า Complement ของ B เทียบกับ A
แสดงด้วยเวเนนไดอะแกรมดังนี้



$A \setminus B$ คือบริเวณที่
แรเงา

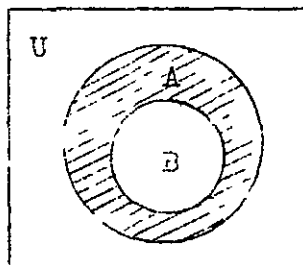
 $\{1, 2, 3\}$ 

77

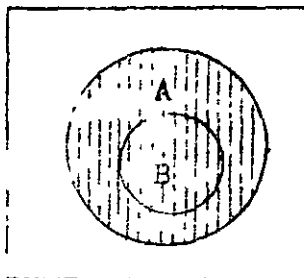
ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{f, b, d, g\}$ (1) $A-B = \{\dots\dots\dots\}$ (2) $\dots\dots\dots$ เรียกว่า Complement ของ B
เทียบกับ A $\{6, 7\}$ 

78

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ที่กำหนดให้

ถ้า $B \subseteq A$ แล้ว เราเรียก $A-B$ ว่า Complement ของ B
ใน A เขียนเว้นได้แก่ แกรมแสดงได้ดังนี้ $A-B = \text{Complement ของ B ใน A (บริเวณที่แรเงา)}$ ตัวอย่าง ให้ $U = \text{เซตของจำนวนธรรมชาติ}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{3, 4, 5\}$ (1) $B \subseteq A$ ใช่หรือไม่? $\dots\dots\dots$ (2) $A-B = \{\dots\dots\dots\}$ (3) ดังนั้นเรียก $A-B$ ว่า $\dots\dots\dots$

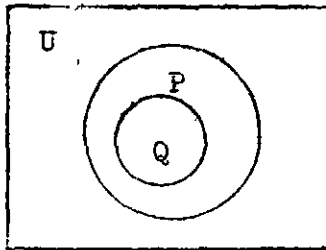
79	กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ จงเปรียบเทียบ $A \cap B'$ กับ $A - B$ จากข้อต่อไปนี้ (1) $B' = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap B' = \dots\dots\dots$ (3) $A - B = \dots\dots\dots$ (4) $A \cap B' = A - B$ ใช่หรือไม่ $\dots\dots\dots$ (5) $A - B$ เรียกว่า Complement ของ B ใน A ใช่หรือไม่? $\dots\dots\dots$ เพราะ $\dots\dots\dots$	(1) $\{a, c\}$ (2) $A - B$
80	จากเว้นน์โคดแกรมสำหรับเซต A และ B ดังที่กำหนดให้ เราจะแรเงาเพื่อแสดงเซต $A \cap B'$ ตามลำดับดังนี้ (1) แรเงาเส้นตั้งแทนเซต A (2) จงแรเงาตอนนอกแทนเซต B' (3) ส่วนที่แรเงาซ้อนกัน (คือแรเงาเส้นตั้งกับแรเงาเส้นวนรัศมี) คือเซต $A \cap B'$ (4) จากแผนภาพนี้ $A - B$ และ $A \cap B'$ เป็นบริเวณเดียวกันใช่ไหม $\dots\dots\dots$	(1) ใช่ (2) $\{1, 2, 6\}$ (3) Complement ของ B ใน A



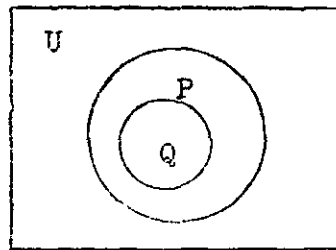
81

จากเว้นน์โคอะแกรมสำหรับเซต P และ Q ดังที่
กำหนดไว้ จงแรเงาตามที่กำหนดแต่ละภาค

(1) $P - Q$



(2) $P \cap Q'$



(3) จากแผนภาพทั้งสองนี้ $P - Q$ และ $P \cap Q'$ เป็นบริเวณ
เดียวกันหรือไม่

(1) $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $\{1, 2, 3\}$

(3) $\{1, 2, 3\}$

(4) ใช่

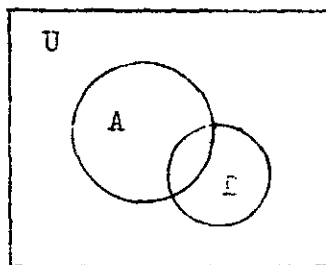
(5) ไม่ได้

เพราะว่า $B \not\subseteq A$

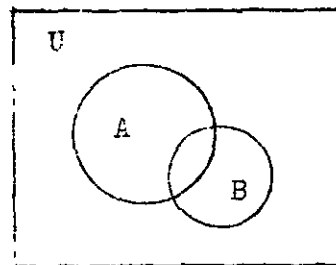
82

จากเว้นน์โคอะแกรมต่อไปนี้ จงแรเงาตามที่กำหนดให้

(1) $A - B$

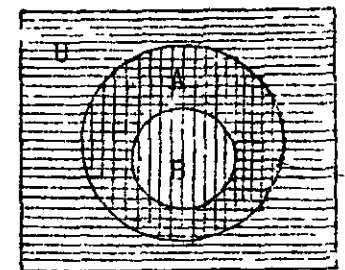


(2) $A \cap B'$



(3) ดังนั้น $A - B = \dots\dots\dots$

(2)



$A \cap B'$ คือส่วนที่แรเงา
เท่านั้น

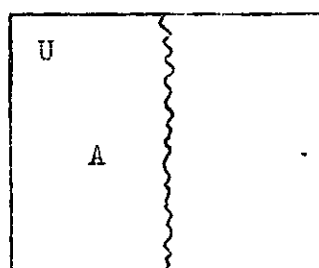
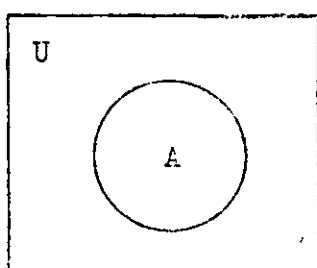
(4) ใช่

แบบทดสอบวัตถุ 2

- 1 ให้ U เป็น Universal set ดังนั้น

$$A' = \{x \mid \dots\dots\dots\}$$

- 2 จงแรเงาส่วนที่แสดงว่าเป็น Complement ของ A (A')



- 3 ให้ P เป็นเซตใด ๆ $(P')' = \dots\dots\dots$

4 (1) $A \cap B = \{x \mid \dots\dots\dots\}$

(2) $A \cup B = \{x \mid \dots\dots\dots\}$

- 5 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

จงหา (1) $A' = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap B = \dots\dots\dots$

(3) $A \cup B = \dots\dots\dots$ (4) $B' = \dots\dots\dots$

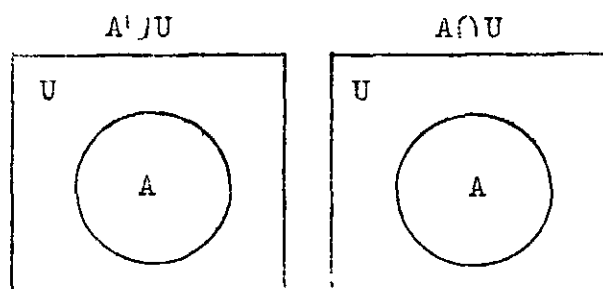
- 6 กำหนดให้ $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e, f\}$

จงเขียนวิธีแก้โดยใช้แผนแสดงเซต $A \cup B$ ใน Universal set U โดยการเขียนสมาชิกของเซตแต่ละเซต และแรเงาบริเวณ $A \cup B$ ให้ถูกต้อง



- 7 ให้ A เป็นเซตของ
Universe U จงหา
บริเวณที่กำหนดไว้แต่ละภาพ

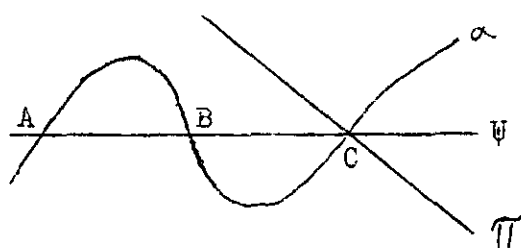


8. จากข้อ 7 จะได้ว่า

$$(1) A \cup U = \dots\dots\dots (2) A \cap U = \dots\dots\dots$$

$$(3) A \cup A' = \dots\dots\dots (4) A \cap A' = \dots\dots\dots$$

9



จงหาของ

$$(1) \alpha \cap \psi = \dots\dots\dots$$

$$(2) \alpha \cap \psi \cap \pi = \dots\dots\dots$$

10. ผลต่างของเซต A และ B คือเซตของสิ่งทั้งหลายที่เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B ดังนั้นเราจะเขียนนิยามนี้เป็นสัญลักษณ์ได้ คือ

$$A - B = \{x \mid \dots\dots\dots\}$$

- 11 จากสิ่งที่กำหนดไว้ในข้อ 6 จงหา

$$(1) U - A = \{ \dots\dots\dots \} \quad (2) A - B = \{ \dots\dots\dots \}$$

$$(3) B - A = \{ \dots\dots\dots \} \quad (4) A \cap B = \{ \dots\dots\dots \}$$

- 12 ให้ $U =$ เซตของจำนวนธรรมชาติ

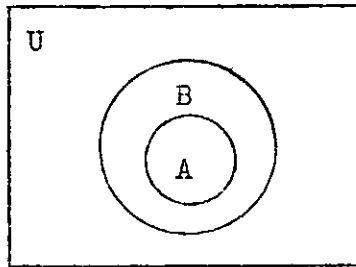
$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(1) A \subseteq B \text{ ใช่หรือไม่ } \dots\dots\dots$$

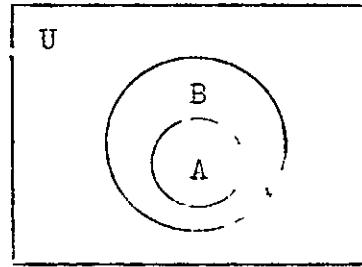
$$(2) B - A = \{ \dots\dots\dots \}$$

$$(3) \text{ เราเรียก } B - A \text{ ว่า Complement ของ } A \text{ ใน } B \text{ เพราะ } \dots\dots\dots$$

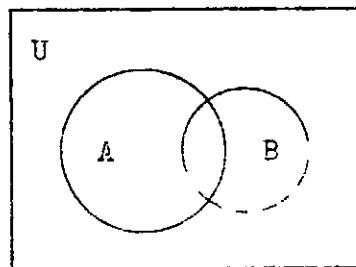
13 จากแผนภาพข้างล่างนี้ จงแรเงาเพื่อแสดงบริเวณที่กำหนดไว้แต่ละภาพ



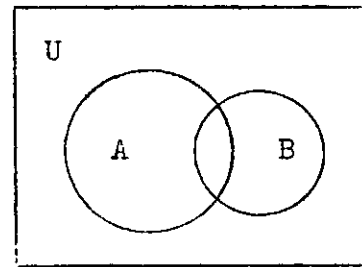
(1) $A^c \cup B$



(2) $A \cap B$



(3) $A - B$



(4) $B - A$

14 จงเติมสัญลักษณ์ ในช่องว่างต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

(1) = $\{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$

(2) $P - Q$ = $\{x \mid \dots \dots \dots\}$

(3) $B \cup D$ = $\{x \mid \dots \dots \dots\}$

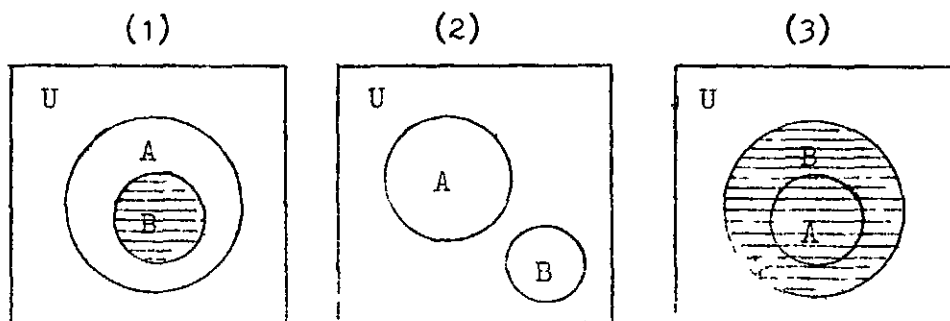
(4) = $\{x \mid x \in U, x \notin A\}$, U = Universal set

15 ให้ M และ N เป็นเซตใด ๆ

สำหรับทุก ๆ สมาชิก x , $x \in M \cap N$ ก็คือเมื่อ

สำหรับทุก ๆ สมาชิก y , $y \in N \cup M$ ก็คือเมื่อ

16



- (1) $A \cup B = B$ คือภาพที่ (2) $A \cap B = B$ คือภาพที่.....
 (3) $A \cap B = \emptyset$ คือภาพที่

17 ให้ A เป็นซับเซตของ Universal set U

- (1) $A \cup \emptyset = \dots\dots\dots$ (2) $A \cap \emptyset = \dots\dots\dots$
 (3) $A \cup U = \dots\dots\dots$ (4) $A \cap U = \dots\dots\dots$
 (5) $\emptyset' = \dots\dots\dots$ (6) $U' = \dots\dots\dots$

18 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

จงหา

- (1) $A' = \dots\dots\dots$ (2) $B' = \dots\dots\dots$
 (3) $A - B = \dots\dots\dots$ (4) $A \cap B' = \dots\dots\dots$
 (5) $(A')' = \dots\dots\dots$ (6) $(B - C)' = \dots\dots\dots$
 (7) $A' \cap C' = \dots\dots\dots$ (8) $A' \cup C' = \dots\dots\dots$

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

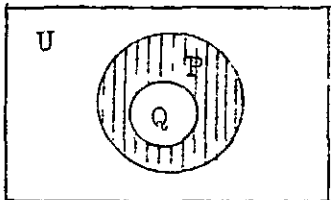
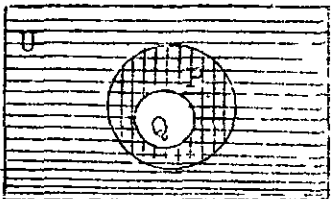
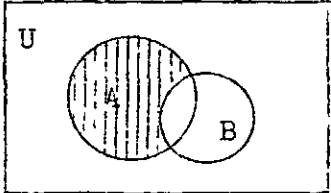
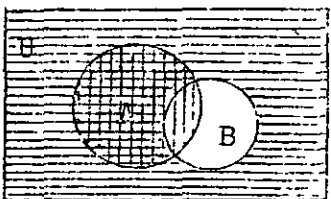
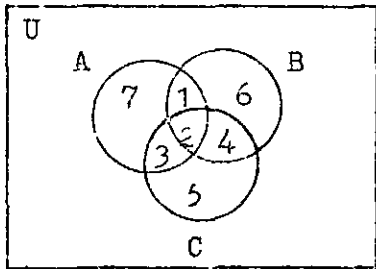
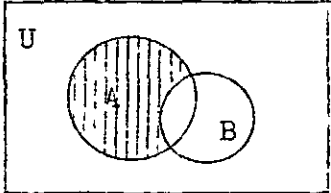
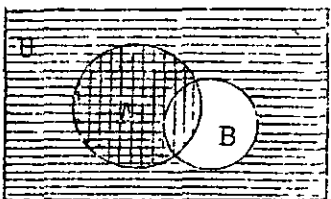
บทที่ 3

เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทที่ 3 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดเซตมาให้มากกว่าสองเซต สามารถหายูเนียน และอินเตอร์เซกชันของเซตที่กำหนดมาให้ได้ถูกต้อง
2. สามารถแสดงไวยากรณ์ยูเนียน และอินเตอร์เซกชันของเซต 3 เซต เป็นไปตามกฎ Associative Laws โดยการเขียนแผนภาพและตาราง
3. สามารถแสดงไวยากรณ์ยูเนียน และอินเตอร์เซกชันของเซต 2 เซต เป็นไปตามกฎ Commutative Laws โดยการเขียนแผนภาพและตาราง
4. สามารถใช้แผนภาพและการตาราง เพื่อแสดง Distributive Laws ของวิธีการทางเซตได้ถูกต้อง
5. สามารถใช้แผนภาพและการตารางเพื่อแสดงถึง DeMorgan's Laws ของวิธีการทางเซตได้ถูกต้อง

บทที่ 3

กฎทางพีชคณิตของเซต (Law of algebra of sets)

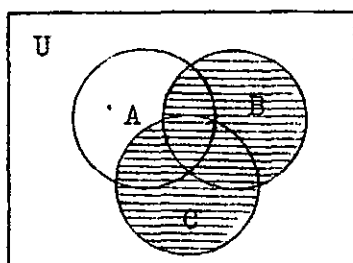
1	ถ้าเรามีเซตมากกว่าสองเซตเราก็สามารถนำมา union หรือ intersection กันได้ เช่น $A \cup B \cup C$ หมายถึงเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน..... หรืออยู่ใน..... หรืออยู่ใน..... หรือหมายถึงเซตที่ได้จากการรวมสมาชิกของเซต A และ B และ C เป็นเซตเดียวกัน ถ้า $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{7, 6, 9\}$, $C = \{7, 2, 9\}$ แล้ว $A \cup B \cup C = \{.....\}$	(1) $P - Q$  (2) $P \cap Q'$  $P \cap Q'$ คือส่วนที่แรเงาคนก่อน (3) ใช่
2	$A \cap B \cap C$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เหมือนกัน หรืออยู่รวมกันทั้งสามเซต สมาชิกที่จะอยู่ในเซต $A \cap B \cap C$ จะต้องอยู่ใน A และอยู่ใน B และอยู่ใน C พร้อมๆ กัน เช่น กำหนดให้ A, B และ C เหมือนในกรอบที่ 1 สมาชิกที่อยู่ในทั้งสามเซต คือ 7 ดังนั้น $A \cap B \cap C = \{.....\}$	(1) $A - B$  (2) $A \cap B'$  $A \cap B'$ คือส่วนที่แรเงาคนก่อน (3) $A \cap B'$
3	 (1) $A \cup B \cup C =$ (2) $A \cap B \cap C =$	(1) $A - B$  (2) $A \cap B'$  $A \cap B'$ คือส่วนที่แรเงาคนก่อน (3) $A \cap B'$

4	ในการรวมจำนวนหลายจำนวน เราจะใช้วงเล็บ เพื่อแสดงถึงว่าจะต้องบวกจำนวนคู่ใดก่อน เช่น $(3 + 5) + 8 = 8 + 8 = 16$ ในการรวมเซตเราจะใช้วงเล็บแสดงถึงการรวมเซตใดก่อน เช่น $(A \cup B) \cup C$ แสดงว่าต้องรวม A กับ B ก่อน จึงรวมกับ C ส่วน $A \cup (B \cup C)$ แสดงว่าต้องรวม.....กับ..... ก่อนจึงรวมกับ.....	A, B, C 2, 5, 6, 7, 9
5	$(A \cap B) \cap C$ เครื่องหมายวงเล็บบอกให้เราทราบว่าต้องทำ $A \cap B$ ก่อน แล้วจึงนำมา intersection กับ C และ $A \cap (B \cap C)$ บอกให้เราทราบว่าต้องทำ.....ก่อน แล้วจึงนำมา intersection กับ.....	7
6	(1) $(P \cap Q) \cap R = \dots\dots\dots$ (2) $\exists (Q \cap R) = \dots\dots\dots$ (3) $(P \cup Q) \cup R = \dots\dots\dots$ (4) $P \cup (Q \cup R) = \dots\dots\dots$ <u>ข้อสังเกต</u>: จะเห็นว่าไม่มีสมาชิกตัวใดอยู่ในเซตทั้งสามพร้อมกัน	(1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (2) $\{2\}$

7 Associative laws

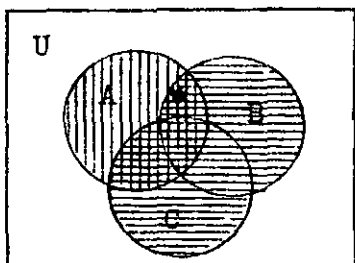
กำหนดเซต A, B และ C ให้เราสามารถจะเขียนโค-
อะแกรม แสดงเซต $A \cup (B \cap C)$ ได้ตามลำดับขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนเวเนนโคอะแกรมของเซต A, B และ C โดย
แรเงาบริเวณ $B \cap C$ ก่อน (ทำในวงเล็บก่อน)



บริเวณที่แรเงาก็คือ $B \cap C$

ขั้นที่ 2 เขียนเวเนนโคอะแกรมโดยการแรเงาบริเวณที่เซต A
union กับ $(B \cap C)$ ต่อจากขั้นที่ 1



บริเวณที่เราแรเงาทั้งหมด ก็คือเซต.....

$B \cap C, A$

$B \cap C, A$

(1) $\emptyset$

(2) $\emptyset$

(3) $\{a, b, c, d, f\}$

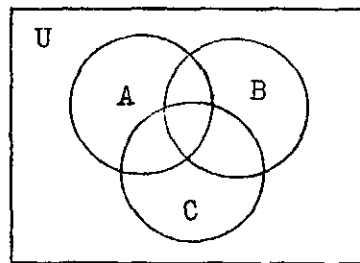
(4) $\{a, b, c, d, f\}$

8 กำหนดเซต A, B และ C ให้ จงเขียนเว้นโคะแกรม
แสดง $(A \cup B) \cup C$ โดยแสดงเป็นชั้น ๆ เหมือนในกรอบที่ 7

$A \cup (B \cup C)$

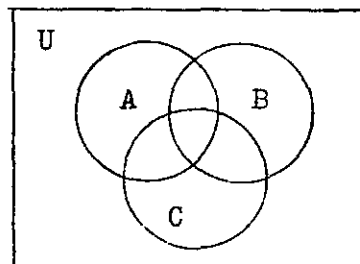
ชั้นที่ 1 โดยการแรเงาบริเวณ $A \cup B$ ก่อน (ทำในวงเล็บก่อน)

(1)



ชั้นที่ 2 โดยการแรเงาบริเวณที่เหลือ $(A \cup B)$ union กับ C
ต่อจากชั้นที่ 1

(2)

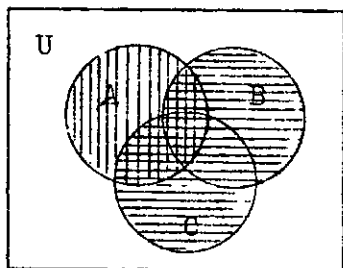


ดังนั้น $(A \cup B) \cup C$ ก็คือบริเวณ.....

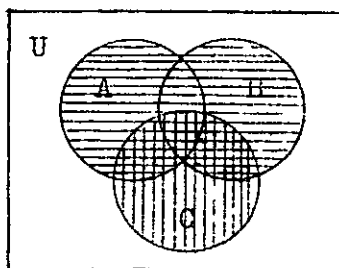
ข้อสังเกต : ในชั้นที่ 1 นั้น ในขณะที่แรเงาบริเวณ $A \cup B$ นั้น
เราจะทำได้โดยที่ถ้าไม่มีเซต C อยู่ด้วย

- 9 ถ้าเราใช้เว้นน์โคะแกรมแสดง $A \cup (B \cap C)$
และ $(A \cup B) \cap C$

$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C$



เราจะทราบว่า $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $U =$ เซตของจำนวนธรรมชาติ

$$A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{8, 10\}$$

จงหา (1) $B \cap C = \dots\dots\dots$

(2) $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$

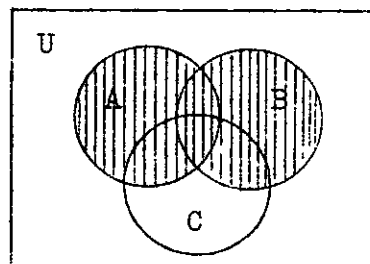
(3) $A \cup B = \dots\dots\dots$

(4) $(A \cup B) \cap C = \dots\dots\dots$

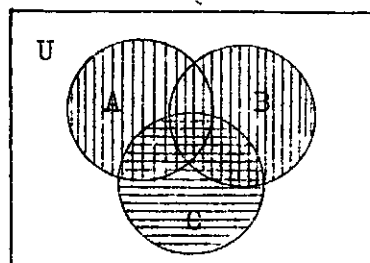
(5) ดังนั้น $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

ใช่หรือไม่.....

(1)



(2)



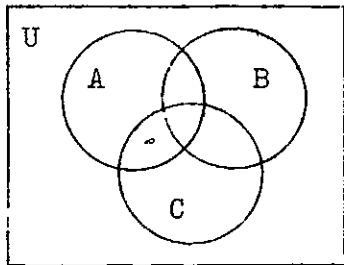
$(A \cup B) \cap C$ คือบริเวณ
ที่แรเงาทั้งหมด

- 10 จากการใช้เว้นน์โคะแกรมพอที่จะทำให้เราเห็นว่า
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ทั้งนี้ขอให้เข้าใจว่าเราไม่ได้
พิสูจน์ แต่จากการใช้เว้นน์โคะแกรมก็ทำให้เราเห็นว่า
สำหรับทุก ๆ เซต A, B และ C ใด ๆ

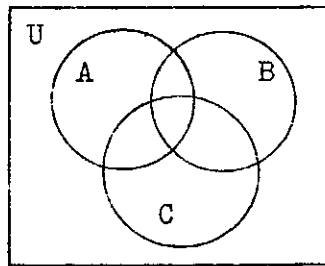
$$A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$$

คุณสมบัติอันนี้เราเรียกว่า Associative laws ของ
Union ของเซต

11	วิธีการบวก (+) และการคูณ (·) ในจำนวนจริงจะเป็นไปตามกฎ "Associative law" เช่น $5 + (3 + 2) = (5 + 3) + 2$ และ $2 \cdot (3 \cdot 6) = (2 \cdot 3) \cdot 6$ เราอยากทราบว่าวิธีการลบ (−) ในจำนวนจริงเป็นไปตามกฎข้อหรือไม่ เช่น (1) $5 - (4 - 2) = (5 - 4) - 2$ ใช่หรือไม่ ? อธิบาย (2) กฎนี้วิธีการลบ.....(สอดคล้อง, ไม่สอดคล้อง) กับ Associative law.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (1) {1,2,3,8,10} (2) {1,2,3,4,5,6,7,8,10} (3) {1,2,3,4,5,6,7} (4) {1,2,3,4,5,6,7,8,10} (5) ใช่
12	ลองพิจารณาเรื่อง intersection ของเซต จะเป็นไปตาม associative law หรือไม่ กำหนดเซต A, B, C ให้ตามแผนไคน์ต่อไปนี้ จงหาบริเวณที่แสดงถึง $A \cap (B \cap C)$ <u>ขั้นแรก</u> หาบริเวณที่แสดงถึง $(B \cap C)$ ก่อน แล้วจึงหา $A \cap (B \cap C)$ โดยคิดว่า A intersection กับ $(B \cap C)$	$(A \cup B) \cap C$

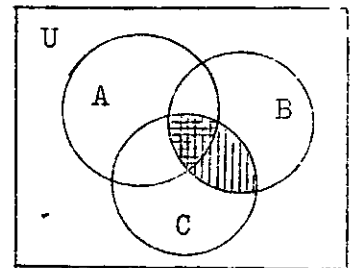


- 13 กำหนดเซต A, B และ C ให้ตามโคจรแตรม จงแรงแงส่วนที่แสดงถึง $(A \cap B) \cap C$ ชั้แรกให้แรงแงส่วนที่แสดง $(A \cap B)$ ก่อน แล้วจึงแรงแง $(A \cap B) \cap C$ โดยคึกว่า $(A \cap B)$ intersection กับ C

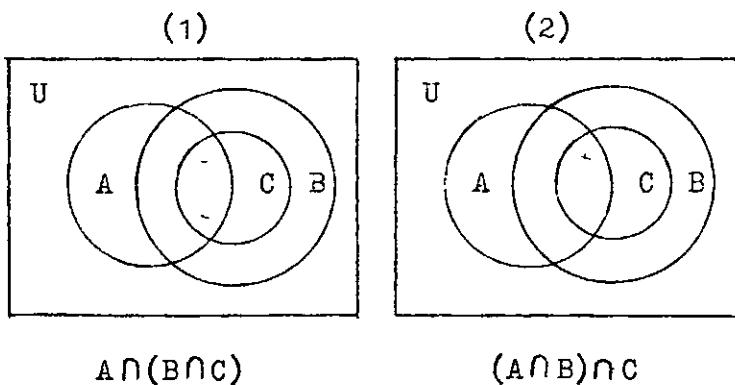


- (1) ไม่ใช่ เพราะว่
 $5 - (4 - 2) = 3$
 $(5 - 4) - 2 = -1$
 $\therefore 5 - (4 - 2) \neq (5 - 4) - 2$
 (2) ไม่ส่อกคล่่งกัน

- 14 จ้่วว่ $A \cap (B \cap C)$ นั้นหมยถึงเซตที่ประกอบช้นควยสมาชิกช้่งอยู่ใน A และอยู่ใน $(B \cap C)$
 $(A \cap B) \cap C$ นั้นหมยถึงเซตที่ประกอบช้นควยสมาชิกช้่งอยู่ใน $(A \cap B)$ และอยู่ใน C
 จากรูปข้างล่งนี้ จงแรงแงบรเแงตามท่เขียนไว้ค้ภาพ

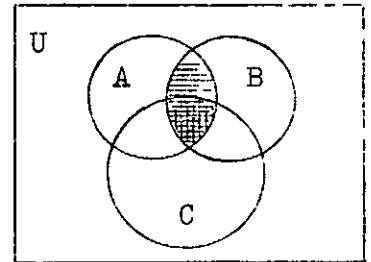


ส่วนที่แรงแงช่อน ค้
 $(A \cap B) \cap C$



15

จากเวเนนไคอะแกรมที่แสดงมาแล้วนั้น ท่านลองพิจารณาว่า $A \cap (B \cap C)$ และ $(A \cap B) \cap C$ เป็นบริเวณเดียวกันหรือไม่.....ถ้าใช่พอสรุปได้ว่า $A \cap (B \cap C) = \dots\dots\dots$



ส่วนที่แรเงาซ้อนกันคือ

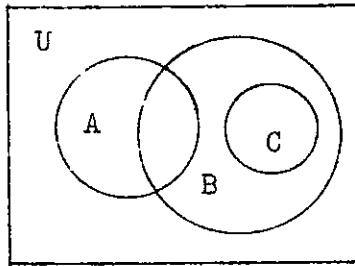
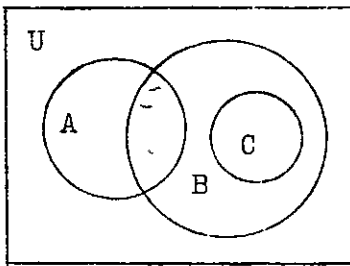
$$(A \cap B) \cap C$$

16

กำหนดเซต A, B และ C ให้ตามรูป จงแรเงาบริเวณที่แสดงถึง $(A \cap B) \cap C$ และ $A \cap (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cap C$$

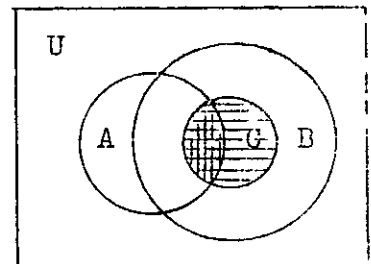
$$A \cap (B \cap C)$$



(1) อยากทราบว่า $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ใช่หรือไม่
อธิบาย.....
.....

ข้อสังเกต : ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้วแสดงว่า A, B เป็น disjoint set ดังนั้น A, B จะไม่มีสมาชิกรวมกัน

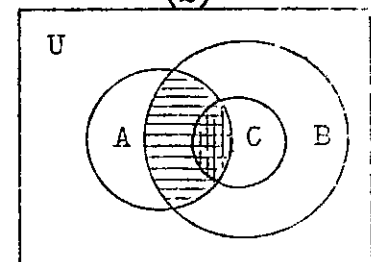
(1)



ส่วนที่แรเงาซ้อนกันคือ

$$A \cap (B \cap C)$$

(2)



ส่วนที่แรเงาซ้อนกันคือ

$$(A \cap B) \cap C$$

17 กำหนดให้ $M = \{e, f, g\}$, $N = \{c, d, e, f\}$

และ $P = \{d, e, f, g\}$

(1) $M \cap (N \cap P) = \{e, f, g\} \cap \{.....\}$

$=$

(2) $(M \cap N) \cap P = \{.....\} \cap \{d, e, f, g\}$

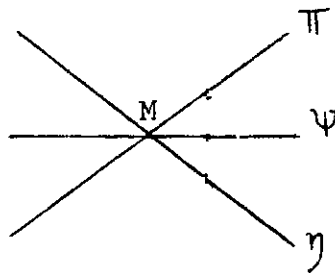
$=$

(3) ดังนั้น $M \cap (N \cap P) = = (M \cap N) \cap P$

ใช้

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

18



เส้นตรงทั้งสามเส้นตัดกัน ณ จุด ๆ เดียวกัน คือจุด M

$\pi \cap \psi \cap \eta$ คือเซตของจุดตัดกันของเส้นทั้งสามเส้น

ดังนั้น $\pi \cap \psi \cap \eta =$

ไม่มีส่วนที่ตรงกันทั้งสองภาพ

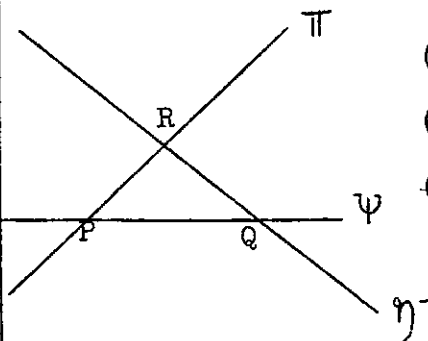
(1) ใช้ เพราะว่า

$$(A \cap B) \cap C = \emptyset$$

และ

$$A \cap (B \cap C) = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$



(1) $\pi \cap \psi =$

(2) $\pi \cap \eta =$

(3) $\psi \cap \eta =$

(4) $\pi \cap (\psi \cap \eta) = = (\pi \cap \psi) \cap \eta$

20 Commutative laws

สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งในการศึกษาวิธีการสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์ก็คือ พิจารณาว่าวิธีการนั้นเป็นไปตามกฎ "Commutative laws" หรือไม่ เช่นตัวอย่างในพีชคณิต เราทราบว่า

1. การบวก (+) เป็นไปตาม Commutative laws

∴ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x, y ; $x + y = y + x$

2. การลบ (−) ไม่เป็นไปตาม Commutative laws

∴ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x - y \neq y - x$

(เว้นแต่ว่า $x = y$)

จงเอาค่า x และ y ทดแทนค่าในข้อ 1 และ 2 เพื่อยืนยันคำตอบว่าเป็นจริง

$$(a) \quad x = 2, y = 6 \quad (b) \quad x = 7, y = -5$$

$$(c) \quad x = 3, y = 3$$

วิธีทำ : (a) 1. $2 + 6 = 6 + 2$

$$\therefore 8 = 8$$

$$2. \quad 2 - 6 \neq 6 - 2$$

$$-4 \neq 4$$

(b) 1. (c) 1.

.....

2. 2.

.....

$$(1) \quad \{d, e, f\}$$

$$\{e, f\}$$

$$(2) \quad \{e, f\}$$

$$\{e, f\}$$

$$(3) \quad \{e, f\}$$

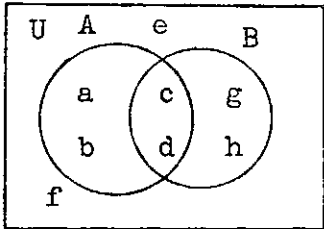
$$\{M\}$$

$$(1) \quad \{P\}$$

$$(2) \quad \{R\}$$

$$(3) \quad \{Q\}$$

$$(4) \quad \emptyset$$

21	ให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, m, n, d\}$ จงหา (1) $A \cup B = \dots\dots\dots$ (2) $B \cup A = \dots\dots\dots$ (3) $A \cup B = B \cup A$ ใช่หรือไม่..... (4) $A \cap B = \dots\dots\dots$ (5) $B \cap A = \dots\dots\dots$ (6) $A \cap B = B \cap A$ ใช่หรือไม่.....	(b) 1. $7 + (-5) = (-5) + 7$ $2 = 2$ 2. $7 - (-5) \neq (-5) - 7$ $12 \neq -12$ (c) 1. $3 + 3 = 3 + 3$ $6 = 6$ 2. $3 - 3 = 3 - 3$ $0 = 0$
22	 (1) $A \cup B = \dots\dots\dots$ (2) $B \cup A = \dots\dots\dots$ (3) $A \cap B = \dots\dots\dots$ (4) $B \cap A = \dots\dots\dots$	
23	จากที่โลกสามมาแล้ว เราสามารถจะสรุปได้ว่า Union และ intersection ของเซต จะสอดคล้องกับ Commutative law นั่นคือ ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า $A \cup B = \dots\dots\dots$ $A \cap B = \dots\dots\dots$	

24	<u>Distributive laws</u> : ในพีชคณิต distributive law หมายถึงว่า ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริง แล้ว $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$ จงพิสูจน์ว่า (1) $2.(3 + 4) = (2.3) + (2.4)$ (2) $-3.(-4+6) = (-3.-4) + (-3.6)$ <u>พิสูจน์</u> : (1) $2.(3 + 4) = (2.3) + (2.4)$ $2.7 = 6 + 8$ $14 = 14$ (2)	(1) $\{a, b, c, d, m, n\}$ (2) $\{a, b, c, d, m, n\}$ (3) ใช่ (4) $\{c\}$ (5) $\{c\}$ (6) ใช่ (1) $\{a, b, c, d, g, h\}$ (2) $\{a, b, c, d, g, h\}$ (3) $\{c, d\}$ (4) $\{c, d\}$
25	Distributive laws ของวิธีการทางเซต จะกำหนด ดังนี้ ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ถ้า P, Q และ R เป็นเซตที่กำหนดให้ $P \cup (Q \cap R) = \dots\dots\dots$ และ $P \cap (Q \cup R) = \dots\dots\dots$	BUA BNA

26

การใช้เวเนนไดอะแกรม เพื่อแสดงถึง distributive laws ของวิธีการทางเซต ทำได้ดังนี้

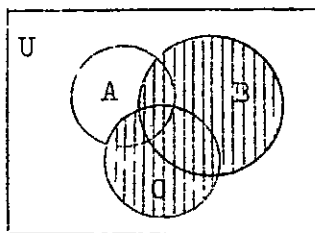
กำหนดเซต A, B และ C ให้ จะแสดงว่า

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

เขียนเวเนนไดอะแกรมของ $A \cap (B \cup C)$ ตามลำดับดังนี้

1. ให้ A, B, C แทนวงภาพ
2. แรกเงาเส้นตรงแทนเซต $B \cup C$
3. จงแรเงาเส้นนอนแทนเซต

$$A \cap (B \cup C)$$



ข้อสังเกต : ส่วนที่แรเงาซ้อนกัน (คือแรเงาเส้นตั้งกับแรเงาเส้นนอนทับกัน) คือ $A \cap (B \cup C)$

$$-3.(-4+6)=(-3.-4)+(-3.6)$$

$$-3.2 = 12 - 18$$

$$-6 = -6$$

27

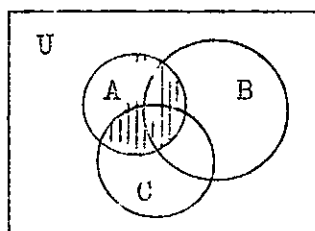
เราเขียนเวเนนไดอะแกรมของ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ตามที่กำหนดตามแผนภาพในรอบที่ 26 ได้ดังนี้

- (1) แรกเงาเส้นตั้งแทนเซต

$$(A \cap B) \text{ และ } (A \cap C)$$

- (2) จงแรเงาเส้นนอนแทนเซต

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



ข้อสังเกต : ส่วนที่เส้นแรเงาซ้อนกันก็คือ

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

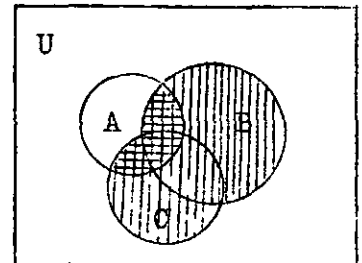
$$(P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

$$(P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

28

จากการที่เราได้แสดงโดยใช้วงโคจรตามกรอบ
ที่ 26 และ 27 เราพอจะเห็นได้ว่า

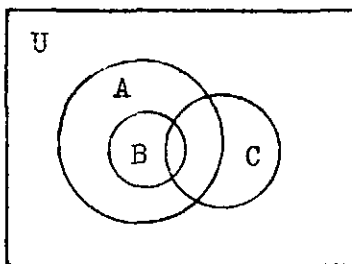
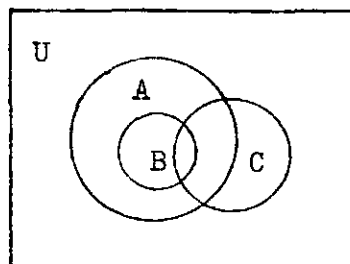
$A \cap (B \cup C)$ และ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ เป็นส่วนเดียวกัน
หรือไม่



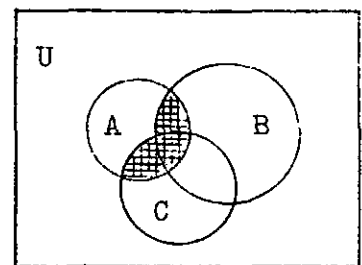
ส่วนที่แรเงาซ้อนกันคือเซต
 $A \cap (B \cup C)$

29

ถ้าให้ A, B และ C อยู่แตกต่างจากภาพในกรอบที่ 26
ลองแรเงาหาพิสูจน์ว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
หรือไม่

(1) $A \cap (B \cup C)$ (2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

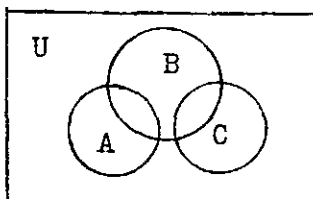
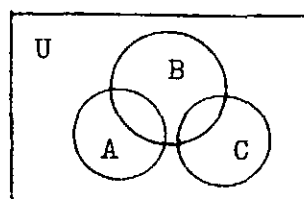
ข้อสังเกต : ในภาพที่ 1 ให้แรเงา $B \cup C$ ก่อนแล้วแรเงา
 $A \cap (B \cup C)$
ภาพที่ 2 ให้แรเงา $(A \cap B)$ และ $(A \cap C)$ ก่อน
แล้วแรเงา $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



ส่วนที่แรเงาซ้อนกันคือเซต
 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

30

กำหนดให้ A และ C เป็น disjoint sets และ
 $A \cap B \neq \emptyset$ และ $B \cap C \neq \emptyset$ ตามโคจรข้างล่างนี้
อย่าทราบบว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
หรือไม่

 $A \cap (B \cup C)$  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

31

กำหนดให้ $M = \{f, g\}$, $N = \{c, d, f\}$

และ $P = \{d, e, f, g\}$

$$(1) \quad M \cap (N \cup P) = \{f, g\} \cap \{ \dots \dots \dots \}$$

$$= \{ \dots \dots \dots \}$$

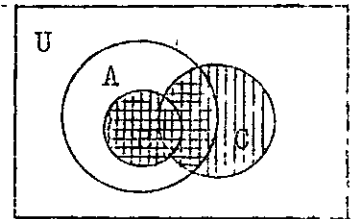
$$(2) \quad (M \cap N) \cup (M \cap P) = \{ \dots \dots \dots \} \cup \{ \dots \dots \dots \}$$

$$= \{ \dots \dots \dots \}$$

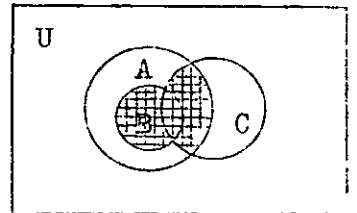
$$(3) \quad M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

ใช่หรือไม่.....

ใช่

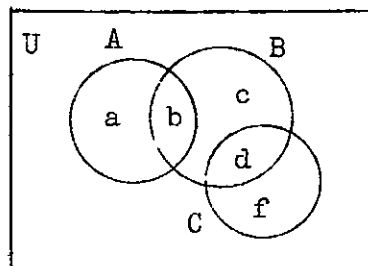


(1) $A \cap (B \cup C)$ คือส่วน
ที่แรเงาซ้อนกัน



(2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
คือส่วนที่แรเงาซ้อนกัน

32



จากเว้นน์โคอะแกรมนี้ จงหา

$$(1) \quad A \cap (B \cup C) = \dots \dots \dots$$

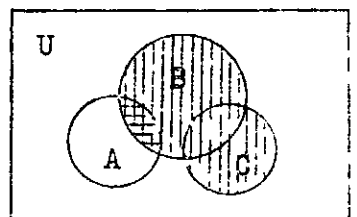
$$(2) \quad (A \cap B) \cup (A \cap C) = \dots \dots \dots \cup \dots \dots \dots$$

$$= \dots \dots \dots$$

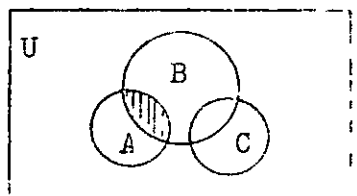
$$(3) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ใช่หรือไม่

ใช่



(1) $A \cap (B \cup C)$ คือส่วน
ที่แรเงาซ้อนกัน



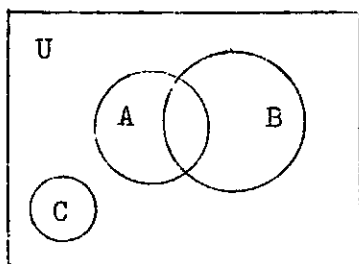
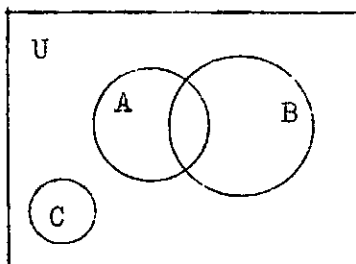
(2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
คือส่วนที่แรเงา

33

จากรูปข้างล่างนี้ ตรวจสอบอีกครั้งว่า

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ใช่หรือไม่


 $A \cap (B \cup C)$

 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(1) $\{c, d, e, f, g\}$

$\{f, g\}$

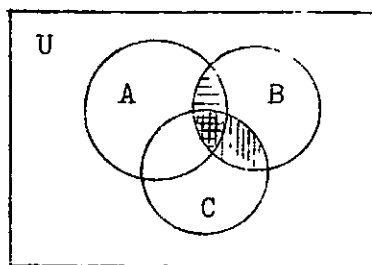
(2) $\{f\} \cup \{f, g\}$

$\{f, g\}$

(3) ใช่

34

จากเซต A, B และ C ที่อยู่ในภาพข้างล่างนี้ จงใช้สัญลักษณ์ $\cup$ และ $\cap$ เติมในช่องว่างเพื่อให้สอดคล้องกับส่วนที่แรเงาตามภาพ



(1) ส่วนที่แรเงาเป็นเส้นทแยงคือ $B \cap A$

(2) ส่วนที่แรเงาเป็นเส้นตั้ง คือ $B \cap C$

(3) ส่วนที่แรเงาทั้งหมดในภาพหมายถึง $B \cap (A \cup C)$

หรือ $(B \cap A) \cup (B \cap C)$

ใช่หรือไม่

(1) $\{b\}$

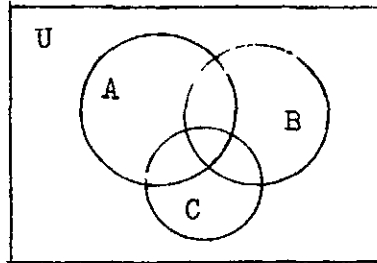
(2) $= \{b\} \cup \emptyset$

$= \{b\}$

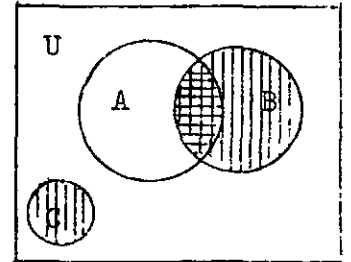
(3) ใช่

35

ท่านคิดว่า $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ หรือไม่
 ขอให้พิจารณาโจทย์ในคำถามนี้ให้ถี่ เพราะไม่ใช่โจทย์ที่เคย
 กล่าวมาแล้ว เนื่องจากสัญลักษณ์ $\cup$ และ $\cap$ เปลี่ยนที่กัน
 จากเว้นน้ไออะแกรม จงแรเงาส่วนที่แสดง $A \cup (B \cap C)$
 ให้แรเงา $(B \cap C)$ ก่อน
 แล้วแรเงา $A \cup (B \cap C)$
 ที่หลัง



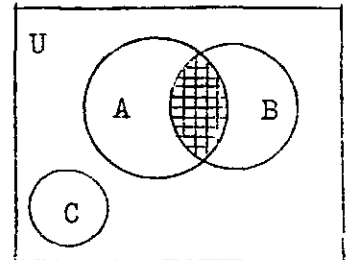
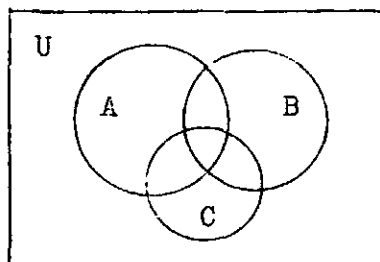
ใช่

 $A \cap (B \cup C)$

คือส่วนที่แรเงาซ้อนกัน

36

จากเว้นน้ไออะแกรมนี้ จงแรเงาส่วนที่แสดงถึงเซต
 $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ โดยแรเงาเป็น 3 ชั้น ดังนี้
 1. $A \cup B$ 2. $A \cup C$ 3. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
 แล้วจงพิจารณาว่าส่วนที่แรเงาของ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
 เหมือนกับส่วนที่แรเงาของ $A \cup (B \cap C)$
 ในกรอบที่ 35 หรือไม่

 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

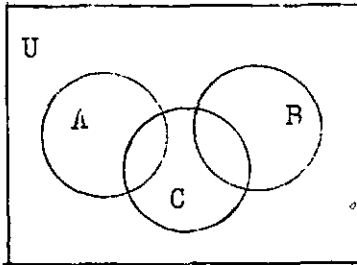
คือส่วนที่แรเงาซ้อนกัน

ข้อสังเกต: $A \cap C = \emptyset$ $\therefore (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$ (1) $B \cap A$ (2) $B \cap C$

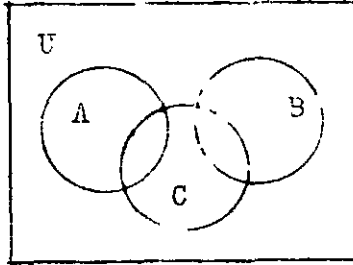
(3) ใช่

37

จงเงาใจอะแวงบซางลางนั้ก่อนตอบคำถาม



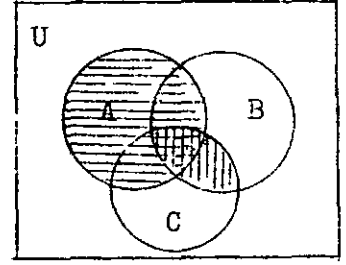
$$A \cup (B \cap C)$$



$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ใช่หรือไม่



$$A \cup (B \cap C) = \text{ส่วนที่}$$

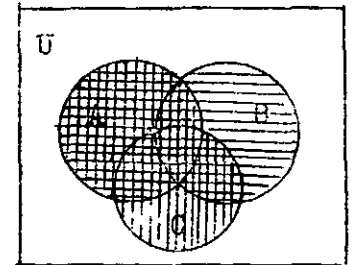
แรเงาทั้งหมด

38

จากตัวอย่างที่ได้แสดงโดยเว้นแวงเงาแวงจากกรอบ
ที่ 35 ถึง 37 เราจะกล่าวได้ว่า

$$A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$$

ข้อสังเกต : การแสดงโดยเว้นแวงเงาแวงนั้น ถึงแม้จะเป็น
วิธีการง่าย ๆ ก็จริง แต่ตามจำนวนเซตมาก ๆ ก็ทำได้
ยาก ขอให้เข้าใจว่าเราไม่ได้ใช้วิธีการพิสูจน์ ถ้าหาก
สนใจการพิสูจน์ก็ควรจะหาจากตำราเวทอน ๆ เพิ่มเติม



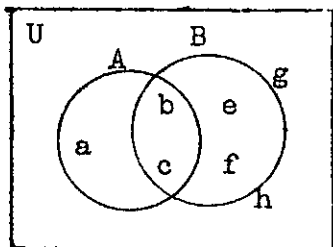
$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

คือส่วนที่แรเงาซ้อนกัน

เหมือนกัน

39

ขอให้เรามาพิจารณาเซต $(A \cup B)'$ และ $A' \cap B'$ อีกครั้งหนึ่ง จากเวเนนไดอะแกรมข้างล่างนี้ จงหา



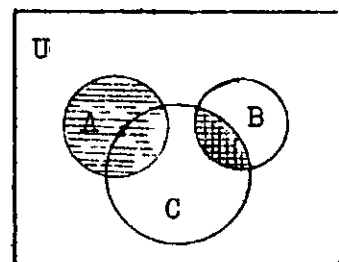
$$(1) (A \cup B)' = \{ \dots \}$$

$$(2) A' = \{ \dots \}$$

$$(3) B' = \{ \dots \}$$

$$(4) A' \cap B' = \{ \dots \}$$

$$(5) (A \cup B)' = A' \cap B' \text{ ใช่หรือไม่ } \dots$$



$A \cup (B \cap C)$ คือส่วนที่
แรงเงาทั้งหมด

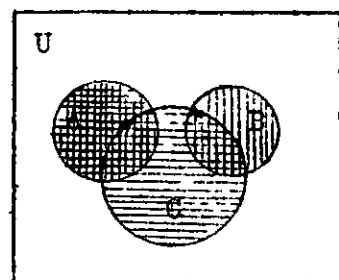
40

จากเวเนนไดอะแกรมในกรอบที่ 39 จงหา

$$(1) (A \cap B)' = \dots$$

$$(2) A' \cup B' = \dots$$

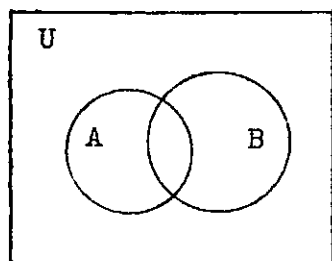
$$(3) (A \cap B)' = A' \cup B' \text{ จริงหรือไม่ } \dots$$



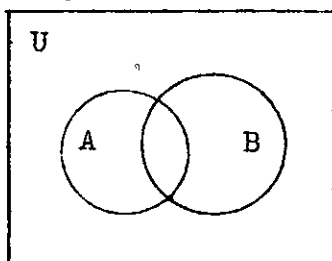
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
คือส่วนที่แรงเงาซ้อนกัน

41

จากเวเนนไดอะแกรมที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ จงแรงเงาตาม
ที่กำหนดไว้แต่ละภาพ



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$

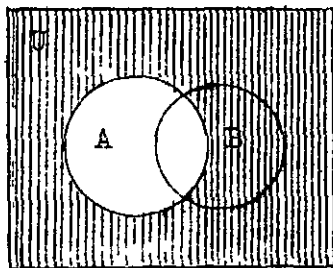
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

42 การใช้เว็นน์โคอะแกรมเพื่อแสดงถึงเซต $A \cap B'$ จะเขียนเว็นน์โคอะแกรมของ $A \cap B'$ ตามลำดับดังนี้

(1) ใหเซต A และ B แทน
ด้วยภาพ

(2) แรกเงาเส้นตั้งแทน A'

(3) จงแรกเงาเส้นนอนแทน B'



(4) ส่วนที่แรกเงาซ้อนกันคือเซต

(5) $(A \cup B)'$ และ $A \cap B'$ เป็นบริเวณเดียวกัน
ใช่หรือไม่.....

(1) g, h

(2) e, f, g, h

(3) a, g, h

(4) g, h

(5) ใช่

(1) $\{a, e, f, g, h\}$

(2) $\{a, e, f, g, h\}$

(3) จริง

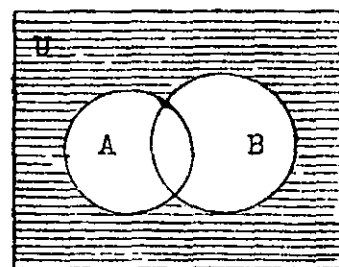
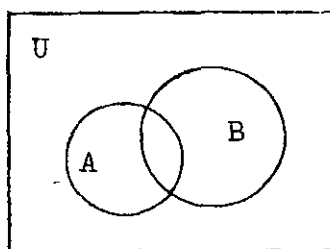
43 ในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้เว็นน์โคอะแกรมเพื่อแสดงถึงเซต $A \cup B'$ จากเซต A และ B ตามที่กำหนดให้จากแผนภาพ ตามลำดับดังนี้

(1) จงแรกเงาเส้นตั้งแทน A'

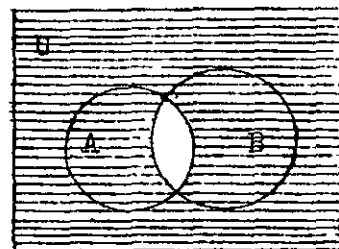
(2) จงแรกเงาเส้นนอนแทน B'

(3) ส่วนที่แรกเงาทั้งหมดคือ
เซต

(4) $(A \cap B)'$ และ $A \cup B'$
เป็นบริเวณเดียวกันจริงหรือไม่.....



$(A \cup B)'$



$(A \cap B)'$

44 De Morgan's law

ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{และ}$$

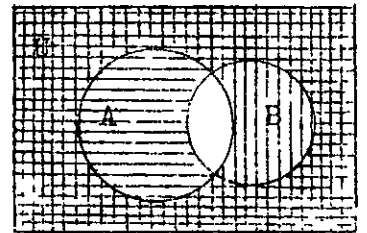
$$(2) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

" $(A \cup B)' = A' \cap B'$ " เขียนเป็นคำพูดได้ว่า "Complement ของ union ของ A และ B จะเท่ากับ Intersection ของ Complement ของ A และ Complement ของ B "

" $(A \cap B)' = A' \cup B'$ " หมายความว่า

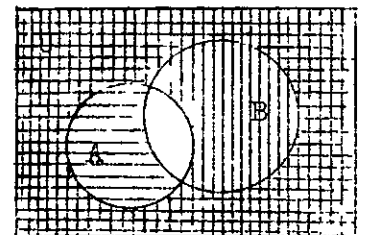
Complement ของ intersection ของเซต A และ B จะเท่ากับ union กับ.....

(3)

(4) $A' \cap B'$ หรือ $(A \cup B)'$

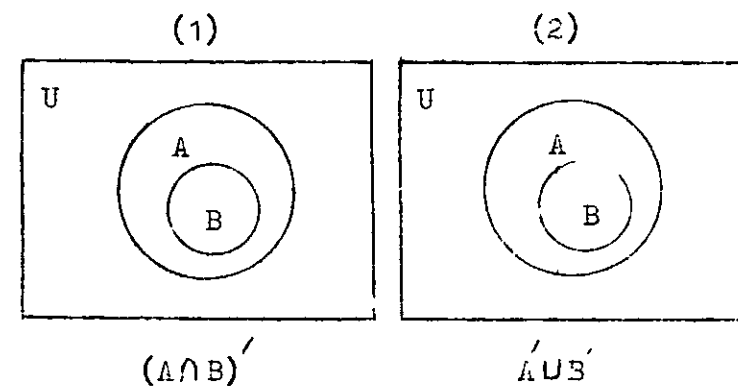
(5) ใช่

(1) และ (2)

(3) $A' \cup B'$ หรือ $(A \cap B)'$

(4) จริง

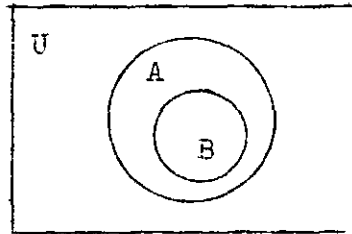
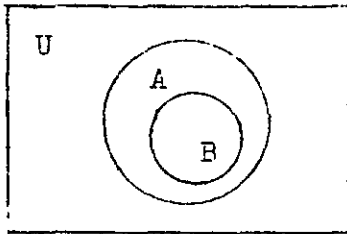
45 ให้เซต A และ B ตามที่แสดงไว้ในวงกลมภายใน



$(A \cap B)'$ และ $A' \cup B'$ เป็นจริงเหมือนกันหรือไม่.....

46

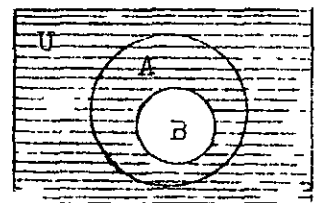
ให้เซต A และ B ตามที่แสดงไว้ในเวนไดอะแกรม
จงแรเงาส่วนที่แสดงถึง $(A \cup B)'$ และ $A' \cap B'$

 $(A \cup B)'$ $A' \cap B$

$(A \cup B)'$ และ $A' \cap B'$ เป็นบริเวณเดียวกันหรือไม่.....

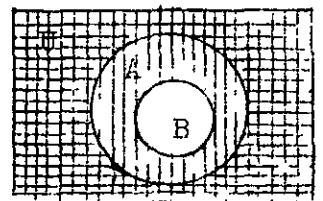
Complement ของ
A Union กับ Complement ของ B

(1)

 $(A \cap B)'$

คือส่วนที่แรเงา

(2)

 $A \cup B'$

คือส่วนที่แรเงาทั้งหมด
รวมทั้งที่แรเงาซ้อนกันด้วย
ใช่

47

กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

จงหา

(1) $A' = \dots\dots\dots$

(2) $B' = \dots\dots\dots$

(3) $A \cup B' = \dots\dots\dots$

(4) $A' \cap B' = \dots\dots\dots$

(5) $(A \cup B)' = \dots\dots\dots$

(6) $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$

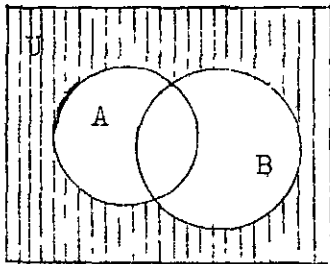
(7) $(A \cap B)' = A \cup B'$ ใช่หรือไม่.

(8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ใช่หรือไม่.....

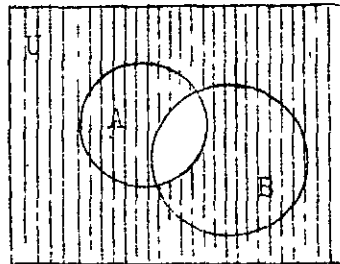
48

อยากทราบวาทามไคอะแกรมต่อไปนี้

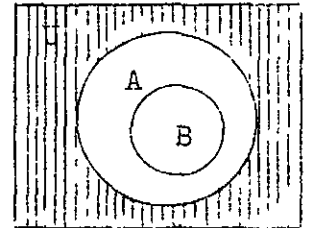
ภาพที่ 1



ภาพที่ 2

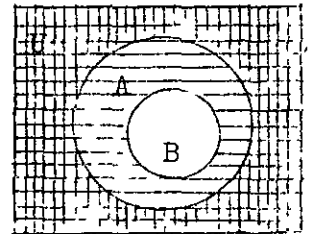


วิธีการทางเซตที่สอดคล้องกับภาพที่ 1 คือ (1)
หรือ..... และสอดคล้องกับภาพที่ 2 คือ (2)
หรือ.....



$(A \cup B)'$

คือส่วนที่แรเงา



$A' \cap B'$

คือส่วนที่แรเงาซ้อนกัน

ใช่

49

จากที่โดยตัวอย่างมาตั้งแต่กรอบที่ 44 ถึง 48 นี้

เราอาจจะกล่าวได้ว่า

(1) $(A \cup B)' = \dots\dots\dots$

และ (2) $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$

ทั้งนี้ขอให้เข้าใจว่า ที่ยกตัวอย่างในเรื่องนี้เป็นการแสดง
โดยใช้เวเนนไคอะแกรม การพิสูจน์ข้อละไว้ ถ้าท่านสนใจ
การพิสูจน์ ก็ควรหาความรู้จากตำราเซตเล่มอื่น ๆ จะทำให้
ท่านมีความรู้เพิ่มขึ้น

(1) $\{4, 5, 6, 7\}$

(2) $\{1, 3, 5, 7\}$

(3) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(4) $\{5, 7\}$

(5) $\{5, 7\}$

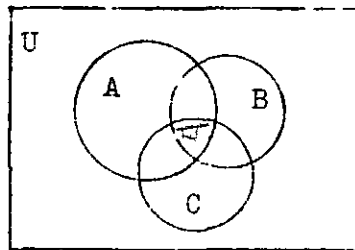
(6) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(7) ใช่

(8) ใช่

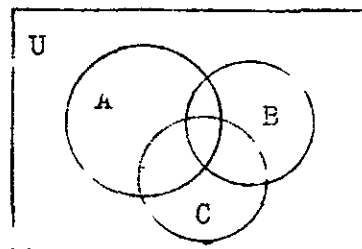
แบบทดสอบชุดที่ 3

1. กำหนดให้เซต A, B และ C มีความสัมพันธ์กันในเว้นไออะแกรมนี้ จงแรเงา
เส้นนอนแทนเซต $B \cap C$ แล้วแรเงาเส้นข้างบน $A \cap (B \cap C)$

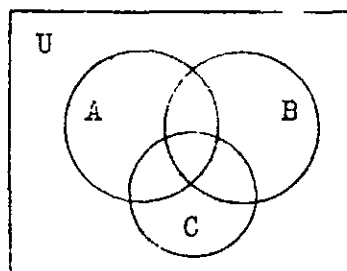


2. จากไออะแกรมในข้อ 1

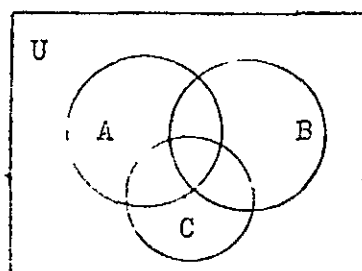
จงแรเงาเส้นนอนแทน $A \cap B$ แล้ว
แรเงาเส้นข้างบน $(A \cap B) \cap C$



3. จากเว้นไออะแกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงแรเงาตามที่กำหนดไว้แต่ละภาพ



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap C$

4. Associative Laws ของเซต A, B และ C กล่าวหาว่า

(1) $A \cap (B \cap C) = \dots \dots \dots$

(2) $A \cup (B \cup C) = \dots \dots \dots$

5. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ Commutative Laws กล่าวหาว่า

(1) $A \cup B = \dots\dots\dots$

(2) $A \cap B = \dots\dots\dots$

6. จากข้อต่อไปนี้ จงนิยามที่เป็นไปตาม Commutative Law

(1) $3 + 4 = 4 + 3$

(2) $3 - 6 = 6 - 3$

(3) $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$

(4) $A \cup B = B \cup A$

(5) $A \cap B = B \cap A$

(6) $A - B = B - A$

ตอบ : ข้อ.....

7. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $C = \{2, 6, 7, 8\}$

จงหา (a) $A \cap B = \dots\dots\dots$

(b) $A \cap C = \dots\dots\dots$

(c) $B \cap C = \dots\dots\dots$

(d) $(A \cup B) \cup C = \dots\dots\dots$

(e) $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$

(f) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \dots\dots\dots$

(g) $A \cap (B \cup C) = \dots\dots\dots$

(h) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \dots\dots\dots$

8. ให้ P และ Q เป็นเซตใด ๆ De Morgan's Laws กล่าวหาว่า

$(P \cup Q)' = \dots\dots\dots$

และ $(P \cap Q)' = \dots\dots\dots$

9. ให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}, \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

จงหา (a) $A' = \dots\dots\dots$

(b) $B' = \dots\dots\dots$

(c) $(A \cap C)' = \dots\dots\dots$

(d) $(A \cup B)' = \dots\dots\dots$

(e) $(A \cup C)' = \dots\dots\dots$

(f) $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$

10. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ Distributive Laws กล่าวว่า

(1) $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$

(2) $A \cap (B \cup C) = \dots\dots\dots$

11. ถ้า $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m\}$

$$A = \{a, i, j\}, \quad B = \{c, d, f, k, m\}, \quad C = \{b, e, f\}$$

จงหา (1) $A \cup (B \cap C) = \dots\dots\dots$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \dots\dots\dots$

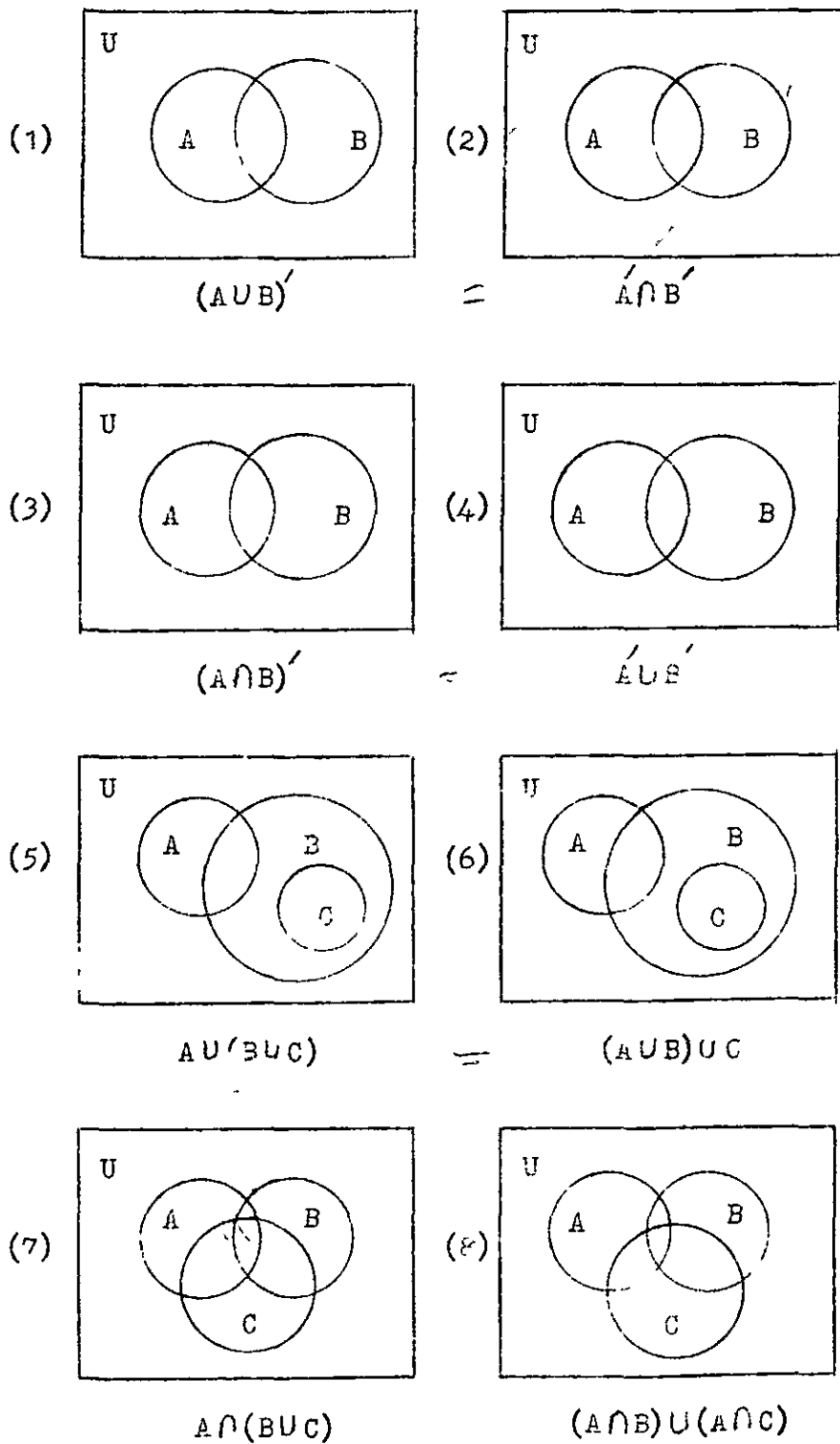
(3) $A \cap (B \cup C) = \dots\dots\dots$

(4) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \dots\dots\dots$

(5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ใช้หรือไม่.....✓

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ใช้หรือไม่.....✓

12. จงแรเงาแผนภาพต่อไปนี้ แสดงถึงเซตตามที่กำหนดให้โดยภาพ



จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

บทที่ 4

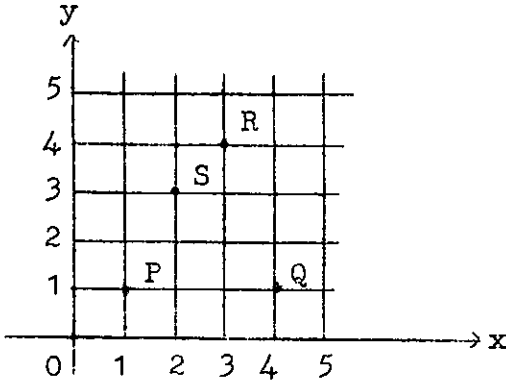
เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทที่ 4 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. สามารถเขียนสัญลักษณ์ของคู่ลำดับโคออร์ดิเนต
2. เมื่อกำหนดคู่ลำดับใด ๆ มาให้ สามารถบอกได้ว่าจำนวนใดเป็นตัวประกอบตัวแรก และจำนวนใดเป็นตัวประกอบตัวที่สอง
3. เมื่อกำหนดกราฟของจุดมาให้ สามารถเขียนคู่ลำดับแทนตำแหน่งของจุดในกราฟโคออร์ดิเนต
4. เมื่อกำหนดคู่ลำดับมาให้ สามารถหาตำแหน่งของจุดโคออร์ดิเนต ในการลงจุดบนกราฟที่กำหนดมาให้
5. ถ้าสัมพันธ์กันระหว่างตัวประกอบตัวแรก และตัวประกอบตัวที่สองของคู่ลำดับแล้ว สามารถบอกได้ว่า คู่ลำดับใหม่จะใกล้เคียงกับคู่ลำดับเดิม เพราะแผนจุดในกราฟทางกัน
6. เมื่อกำหนดคู่ลำดับมาให้หลาย ๆ คู่ลำดับ สามารถเลือกได้ว่าคู่ลำดับใดเท่ากัน โดยอาศัยนิยามการเท่ากันของคู่ลำดับ
7. เมื่อกำหนด Universal set และ Open sentence ที่มีตัวแปรสองตัวมาให้ สามารถเขียน solution set แบบแจกแจงสมาชิกโคออร์ดิเนต
8. เมื่อกำหนดจำนวนสมาชิกของเซต A และ B มาให้ สามารถหาจำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ โคออร์ดิเนต
9. เมื่อกำหนดเซต A และ B มาให้ สามารถเขียนเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน ของเซต A และ B โคออร์ดิเนต
10. เมื่อกำหนดให้ A, B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ แล้วสามารถให้เหตุผลได้ว่า $A \times B \neq B \times A$ และ $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$

คู่อันดับ (Ordered Pairs)

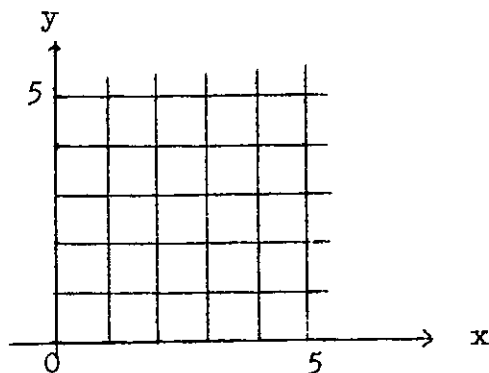
1	<u>คู่อันดับ (Ordered Pairs)</u> "กิม เป็นพี่สาวของตอย" ข้อความนี้เราอาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (กิม, ตอย) เช่นเดียวกับ "x เป็นพี่สาวของ y" เราอาจเขียนสัญลักษณ์ว่า (....,)
2	"7 มากกว่า 6" เราเขียนสัญลักษณ์ว่า (7,6)  "m มากกว่า n" เราเขียนสัญลักษณ์ว่า (....,) สัญลักษณ์ (กิม, ตอย), (x,y), (7,6) เราเรียกว่า <u>คู่อันดับ</u>
3	จากคู่อันดับ (m,n) ที่แทนข้อความ "m มากกว่า n" เราสามารถหาคู่อันดับที่แทน ข้อความทำนองเดียวกันข้อความนี้ได้ เช่น (6,3), (7,2), ... จึงบอกคู่อันดับที่แทนข้อความทำนองเดียวกันกับคู่อันดับนี้อีก 3 คู่อันดับ (....,....), (....,....), (....,....)
4	คู่อันดับ (a,b) เราเรียก a ว่าเป็น <u>ตัวประกอบตัวแรก</u> (First Component หรือ First Coordinate) ของคู่อันดับ เรียก b ว่าเป็น <u>ตัวประกอบตัวที่สอง</u> (Second Component หรือ Second Coordinate) ของคู่อันดับ เช่นเดียวกัน คู่อันดับ (5,8) เราเรียก 5 ว่าเป็น 8 ว่าเป็น

7	คู่อันดับ $(5,3)$ ไม่เหมือนกับเซต $\{5,3\}$ เพราะว่า เครื่องหมายวงเล็บมีกาะจะแทนความหมายว่าเป็นเซตที่มีสมาชิก เป็น 5 และ 3 โดยที่เซต $\{5,3\}$ กับเซต $\{3,5\}$ นี้เหมือนกัน กล่าวคือ การเรียงลำดับของสมาชิกในเซตไม่ถือว่าเป็นสิ่งสำคัญ จึงบอกว่าขอต่อไปนี้เป็นเซต หรือเป็นคู่อันดับ (1) $\{1,3\}$ เป็น..... (2) (a,b) เป็น..... (3) $(9,-8)$ เป็น..... (4) $\{9,-8\}$ เป็น.....	คู่อันดับ $4,3$ 4 3
8	จงพิจารณากากราฟนี้ จุด A อยู่ห่างจากแกน y 3 หน่วย และอยู่ห่างจากแกน x 2 หน่วย เราบอกตำแหน่งของจุด A โดยใช้อันดับ $(3,2)$ จุด B อยู่ห่างจากแกน y หน่วย และอยู่ห่างจากแกน x หน่วย ดังนั้น ตำแหน่งของจุด B มีคู่อันดับเป็น	(1) $(5,7)$ (2) (n,m)

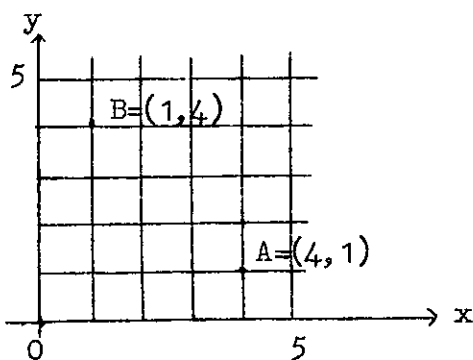
9	นั่นคือ<u>ตัวประกอบตัวแรก</u>ของ<u>คู่ลำดับ</u> แทน<u>จำนวนบนแกน x</u> <u>ซึ่งเป็นตัวบอกวาจุดนั้นอยู่ห่างจากแกน y</u> กี่หน่วย <u>ตัวประกอบตัวที่สอง</u>ของ<u>คู่ลำดับ</u> แทน<u>จำนวนบนแกน y</u> <u>ซึ่งเป็นตัวบอกวาจุดนั้นอยู่ห่างจากแกน x</u> กี่หน่วย เช่น คู่ลำดับ (5,3) 5 แทนจำนวนบนแกน..... ซึ่งเป็นตัวบอกวาจุด คู่ลำดับ (5,3) ห่างจากแกน..... 5 หน่วย 3 แทนจำนวนบนแกน..... ซึ่งเป็นตัวบอกวาจุด คู่ลำดับ (5,3) ห่างจากแกน..... 3 หน่วย	(1) เซ้ท (2) คู่ลำดับ (3) คู่ลำดับ (4) เซ้ท
10	 จุด P มี<u>คู่ลำดับ</u>เป็น จุด Q มี<u>คู่ลำดับ</u>เป็น จุด S มี<u>คู่ลำดับ</u>เป็น จุด R มี<u>คู่ลำดับ</u>เป็น	2 3 (2,3)

11

จุด A มีค่า $(4,3)$ บอกตำแหน่งของจุดว่าจุดนี้อยู่ห่างจากแกน y 4 หน่วย และอยู่ห่างจากแกน x 3 หน่วย
จากกราฟข้างล่างนี้จึงลงจุดที่มีค่าเป็น $(1,4), (4,1)$
 $(3,2), (1,3)$

แกน x แกน y แกน y แกน x

12



พิจารณากราฟของจุดข้างบนนี้

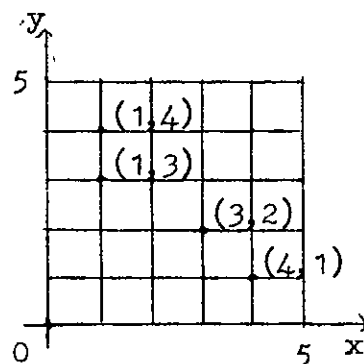
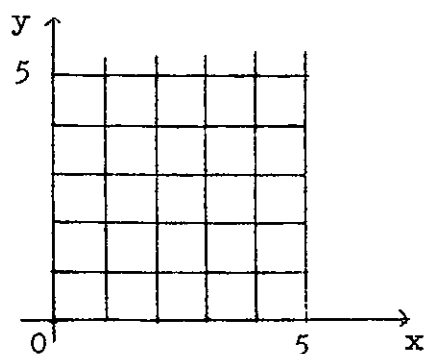
จุด A และจุด B ไม่ใช่จุดเดียวกัน

จุด A มีค่าเป็น $(4,1)$ จุด B มีค่าเป็น $(1,4)$ เนื่องจากค่าทั้งสองนี้แทนจุดที่ต่างกัน ดังนั้น
จุด A กับจุด B จึง..... (เท่ากัน,
ไม่เท่ากัน)

 $(1,1)$ $(4,1)$ $(2,3)$ $(3,4)$

13

จงลงจุดที่มีคู่ลำดับ $(2,4)$ และคู่ลำดับ $(4,2)$



คู่ลำดับ $(2,4)$ กับคู่ลำดับ $(4,2)$
(เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)

เพราะ

14

สองนักถึง 2 ประโยคนั้น คือ "คนขี้มา" และ "มาขี้คน"
จะได้โน้ตภาพสองอย่างที่ไม่เหมือนกัน การจะบอกว่า "อะไร"
ที่ "อะไร" ต้องบ่ง "อะไร" ให้ถูกต้องตามลำดับก่อนหลัง
จึงจะทำให้เรามองเห็นภาพตามที่ต้องการ

อยากทราบว่า คู่ลำดับ $(6,7)$ เท่ากับคู่ลำดับ $(7,6)$
หรือไม่

เพราะ

ไม่เท่ากัน
เพราะแทนจุดที่ต่างกัน

15 นิยาม: การเท่ากันของคู่อันดับ (Equality of Ordered Pairs)

คู่อันดับ (a, b) และคู่อันดับ (c, d) เท่ากันก็ต่อเมื่อ

$$a = c \quad \text{และ} \quad b = d$$

นั่นคือคู่อันดับสองคู่อันดับจะเท่ากันก็ต่อเมื่อคู่อันดับทั้งสองนั้นมี
ตัวประกอบตัวที่หนึ่งเท่ากัน และมีตัวประกอบตัวที่สองเท่ากันด้วย
เช่น

ตัวอย่าง

$$(3, 1) = (3, 1), (5, 8) \neq (2^3, 5)$$

$$(4, 9) = (2^2, 3^2), (5, 8) \neq (5, 6)$$

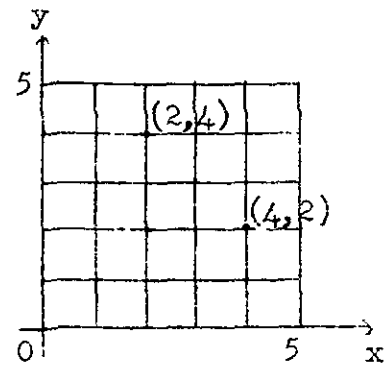
คู่อันดับแต่ละข้อต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

$$(1) \quad (1, 3), (3, 1) \quad \dots \quad \times \dots \dots$$

$$(2) \quad (2, 9), (2, 3^2) \quad \dots \dots \dots \checkmark$$

$$(3) \quad \left(\frac{1}{2}, 5\right), (0.5, 5) \quad \dots \dots \dots \checkmark$$

$$(4) \quad (0, 1), (1, 0) \quad \dots \dots \dots$$



ไม่เท่ากัน
เพราะแทนจุดที่ต่างกัน

ไม่เท่ากัน
เพราะแทนจุดที่ต่างกัน

16 จะเห็นได้ว่าคู่อันดับใดก็ตามเราถือว่า ลำดับ ของตัวประกอบ
ตัวแรก และตัวประกอบตัวที่สอง มีความสำคัญ ถ้าเราสลับที่กัน
ระหว่างตัวประกอบทั้งสองจะทำให้คู่อันดับทั้งสองไม่เท่ากัน เช่น
 $(a, b) \neq (b, a)$ เมื่อ $a \neq b$
และถ้า $x = y$ แล้ว $(x, y) = (y, x)$
หรือไม่?

17	จากนิยามของการเท่ากันของคู่อันดับ 2 คู่อันดับ กล่าวว่ $(a,b) = (x,y)$ ก็ต่อเมื่อ $a = \dots$ และ $b = \dots$ ถ้า $(x,2) = (3,y)$ โดยใช้นิยามของการเท่ากันของคู่อันดับ เราจะสรุปได้ว่า $x = \dots$ และ $y = \dots$	(1) ไม่เท่ากัน (2) เท่ากัน (3) เท่ากัน (4) ไม่เท่ากัน
18	ถ้า $(x,5) = (y,5)$ โดยอาศัยนิยามของการเท่ากัน ของคู่อันดับ จะสรุปได้ว่า $\dots$	
19	กำหนดให้ $(x,2) \neq (x,y)$ ซึ่งจะทำให้ตัวประกอบ ตัวแรกเท่ากัน คือ $x = x$ แต่คู่อันดับทั้งสองนี้ไม่เท่ากัน แล้วเราจะสรุปได้ว่า 2 และ $y \dots$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	
20	ถ้า $(a,b) \neq (c,d)$ เราพอจะสรุปได้ว่า $a \neq c$ หรือ $b \neq d$ ในทางตรงกัน ถ้า $x \neq m$ หรือ $y \neq n$ แล้วเราจะสรุปได้ว่า $(x,y) \neq \dots(m,n)$	จริง

21

$\{(1,2), (3,5), (4,3)\}$ นี่เป็นตัวอย่างของเซตที่มีสมาชิก
เป็นคู่ลำดับ โดยเซตนี้มี 3 สมาชิก
จงบอกสมาชิกตัวแรกของเซต และเขียนให้ถูกต้องตามหลัก
ของการเขียนคู่ลำดับด้วย!./.....

$$x = x \text{ และ } b = y$$

$$x = 3 \text{ และ } y = 2$$

22

ให้ $A = \{(1,2), (3,5), (4,3)\}$
ดังนั้น $\{1,3,4\}$ จึงเป็นเซตประกอบด้วยสมาชิก ซึ่งเป็น
ตัวประกอบตัวแรก (first coordinate) ของคู่ลำดับ
ในเซต A

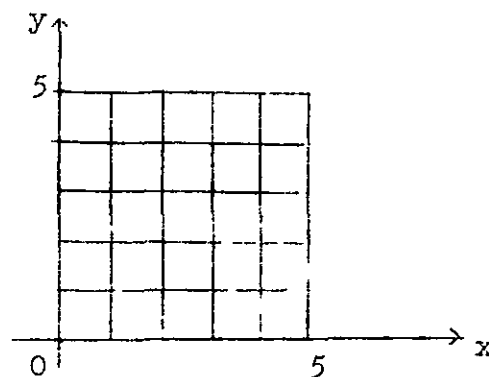
$$x = y$$

จงเขียนเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นตัวประกอบตัวที่สอง
(Second Coordinate) ของคู่ลำดับในเซต A
.....!./.....

ไม่เท่ากัน

23

จงลงจุดของสมาชิกในเซต $\{(1,2), (3,5), (4,3)\}$
บนกราฟ

 $\neq$ 

24

Open sentence นี้จะประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว จะมี solution set เป็นคู่ลำดับ และเช่นจริงทดเมื่อนำค่าในคู่ลำดับในเข้าไปแทนค่าตัวแปรทั้งสองนั้นแล้ว เป็นจริง

(1,2)

เช่น Open sentence $y = x + 2$

คู่ลำดับ (1,3) จะอยู่ใน solution set

$\therefore x = 1, y = 3$ แทนค่าใน Open sentence

จะได้ $3 = 1 + 2 = 3$

{2,5,3}

(1) อยากทราบว่า ถ้าเอาคู่ลำดับ (2,5) แทนค่าตัวแปรใน

Open sentence $y + 1 = x$

จะจริงหรือไม่ ... ✗

(2) ถ้าเอาคู่ลำดับ (3,2) แทนค่าตัวแปรใน Open

sentence $y + 1 = x$

จะจริงหรือไม่ ✓

25 กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4\}$

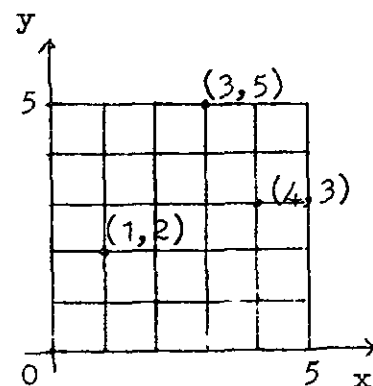
และถ้า x, y เป็นสมาชิกของ U จงหา solution set ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นคู่ลำดับของ Open sentence

$y + 1 = x$ (ถ้าตอบจะมี 3 คู่ลำดับ)

(1) $\{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

(2) คู่ลำดับ (2,2) จะอยู่ใน Solution set นี้หรือไม่ ✗

เพราะ



26 ให้ Universal set U ดังนี้

$$U = \{(5,5), (4,1), (1,2), (8,3), (0,0)\}$$

จงเขียนสมาชิกของเซต U ที่มีตัวประกอบตัวแรกน้อยกว่า
ตัวประกอบตัวที่สอง

(1) ไม่จริง

เพราะ $3 + 1 \neq 2$

(2) จริง

เพราะ $2 + 1 \neq 3$

27 จากเซต U ในกรอบที่ 26

ให้ $S = \{(x,y) \mid x = y\}$ จงเขียนเซต S ได้ดังนี้

$$S = \{(5,5), (0,0)\}$$

ถ้า $T = \{(x,y) \mid x > y\}$ จงเขียนเซต T

$$T = \{.....\}$$

28 โดมัย U ของกรอบที่ 26 จงหา

(1) $\{(x,y) \mid x < y\} =$

(2) $\{(x,y) \mid x = 4y\} =$

(3) $\{(x,y) \mid x + y < 5\} =$

(4) $\{(x,y) \mid x < 5\} =$

(5) $\{(x,y) \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่}\} =$

(1) $(3,2), (4,3)$

(2) ไม่อยู่

$\therefore 2 + 1 \neq 2$

29 ผลคูณการคูณ (Cartesian Product)

(1,2)

เมื่อเราเริ่มศึกษาคู่ลำดับ (Ordered pairs) เราเริ่ม
เขียนของจำนวนอยู่เซตหนึ่ง แล้วเขียนคู่ลำดับจากสมาชิกของเซต
ออกมาเท่าที่จะเขียนได้ทั้งหมด

ในที่นี้ สมมติว่าเรามีเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ
เซต $B = \{4, 5, 6\}$

(4,1),(8,3)

จงเขียนเซตของคู่ลำดับทั้งหมดมาให้อยู่ โดยการใช้สมาชิกจาก
เซต A มาเป็นตัวเลขประกอบตัวที่ 1 (First Coordinate)
และใช้สมาชิกจากเซต B มาเป็นตัวเลขประกอบตัวที่ 2
(Second Coordinate)

(กำหนด จะมีอยู่ทั้งหมด 9 คู่ลำดับ)

(1) $\{(1,2)\}$

$\{(1,4), (1,5), (1,6), \dots, (4,1), (4,5), (4,6), \dots, (3,4), (3,5), (3,6)\}$

(2) $\{(4,1), (0,0)\}$

$\dots, (1,1), \dots, (1,2), \dots, (1,3), \dots, (1,4), \dots, (1,5), \dots, (1,6), \dots, (2,1), \dots, (2,2), \dots, (2,3), \dots, (2,4), \dots, (2,5), \dots, (2,6), \dots, (3,1), \dots, (3,2), \dots, (3,3), \dots, (3,4), \dots, (3,5), \dots, (3,6)\}$

(3) $\{(1,2), (0,0)\}$

(จงเขียนคู่ลำดับที่เหลือให้ครบ)

(4) $\{(4,1), (1,2), (0,0)\}$ (5) $\{(5,5), (1,2)\}$

30	เซตที่เขียนตอบในกรณที่ 29 เรียกว่า "เซตของผลคูณ คาร์ทีเซียน (Cartesian Product) ของ A และ B" ขอให้เข้าใจว่า ไม่ใช่ การคูณ อย่างในเลขคณิตที่เคยเรียน แต่เป็น เซตของคู่ลำดับ ให้ $S = \{1, 2\}$, $T = \{3, 4\}$ ดังนั้นเซต $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ เรียกว่า เซต.....ของ S และ T	$(2, 4), (2, 5), (2, 6)$ $(3, 4), (3, 5), (3, 6)$
31	$C = \{1, 2\}$, $D = \{x, y, z\}$ จงเขียนเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนของ ของ C และ D $\{.....\}$ (คำตอบจะมี 6 คู่ลำดับ)	
32	เซตที่ประกอบด้วยคู่ลำดับทั้งหมดซึ่งตัวประกอบตัวแรกของลำดับ ได้มาจากเซต A และตัวประกอบตัวที่สองได้มาจากเซต B เรียกว่าของ A และ B <u>ขอควรจำ</u> : เราใช้สัญลักษณ์ "$A \times B$" แทนเซตของผลคูณ คาร์ทีเซียนของ A และ B "$A \times B$" อ่านว่า "A cross B"	

33	<u>นิยาม</u> : ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product) ผลคูณคาร์ทีเซียน คือ เซตของคู่ลำดับทั้งหมดที่เกิดจากการจับคู่ที่เป็นไปได้อันหนึ่งของสมาชิกของเซตใด ๆ ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ สองเซต ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ <u>เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้ในเมื่อ a แทนสมาชิกใด ๆ ของเซต A และ b แทนสมาชิกใด ๆ ของเซต B</u> จะเขียนคำนิยามนี้เป็นสัญลักษณ์ ดังนี้ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ ถ้า C เป็นเซตที่กำหนดให้อีกเซตหนึ่ง แล้วจะได้ว่า (1) $A \times C = \{(a, c) \mid \dots\dots\dots\}$ (2) $B \times C = \{(b, c) \mid \dots\dots\dots\}$	เซตของผลคูณคาร์ทีเซียน $(1, x), (1, y), (1, z)$ $(2, x), (2, y), (2, z)$
34	ถ้าเขียนเป็นสัญลักษณ์ จะได้ว่า $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ จะเขียนสัญลักษณ์ข้างบนนี้เป็นคำพูด ดังนี้ "A cross B เป็นเซต	ผลคูณคาร์ทีเซียน

35	ถ้า $A = \{1\}$ และ $B = \{1,2\}$ $\therefore A \times B = \{(1,1), (1,2)\}$ ดังนั้น $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 2 ถ้าให้ $C = \{0,1\}$, $D = \{2,3,4\}$ (1) จำนวนสมาชิกของเซต $C \times D$ เท่ากับ..... (2) จงเขียนเซต $C \times D$ มาให้ดู $C \times D = \{.....\}$	(1) $a \in A, c \in C$ (2) $b \in B, c \in C$
36	จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนที่กล่าวมาแล้ว ถ้า A เป็นเซตใด ๆ $A \times A = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$ เซต $A \times A$ ก็คือผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A ถ้ากำหนดให้ $S = \{1,2,3\}$ จงหา (1) $S \times S = \{(1,1), (1,2), (1,3),$ $.....\}$ (2) ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $S \times S = .. 9$	เซตของคู่อันดับ (x,y) ทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้ในเมื่อ x แทนสมาชิกใด ๆ ของเซต A และ y แทนสมาชิกใด ๆ ของเซต B

37	ให้ $U = \{0,1,2,3\}$ (1) $U \times U$ ประกอบด้วยสมาชิกอะไรบ้าง..... (2) จงเขียน $U \times U$ ซึ่งเป็นเซตของคู่ลำดับมาให้ดู $U \times U =$	(1) 6 (2) (0,2),(0,3), (0,4),(1,2), (1,3),(1,4)
38	ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ถ้าจำนวนสมาชิกของเซต A และ B เท่ากับ m,n ตามลำดับ ดังนั้น จำนวนสมาชิกของ $A \times B = m \cdot n$ จำนวนสมาชิกของ $A \times A = \dots\dots\dots$ และ จำนวนสมาชิกของ $B \times B = \dots\dots\dots$	(1) (2,1),(2,2),(2,3) (3,1),(3,2),(3,3) (2) 9
39	ถ้าเซต S มี 12 สมาชิก และเซต T มี 7 สมาชิก แล้ว $S \times T$ กวรมีจำนวนคู่ลำดับทั้งหมด =	

40	ถ้าเขียนเป็นสัญลักษณ์ จะได้ว่า $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ จงเขียนสัญลักษณ์ข้างบนนี้เป็นคำพูด (คือกำหนด) 	(1) 16 (2) (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) (1,0), (1,1), (1,2), (1,3) (2,0), (2,1), (2,2), (2,3) (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)
41	ให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ $\therefore A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2),$ $(3,1), (3,2)\}$ $B \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1),$ $(2,2), (2,3)\}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้ (1) จำนวนสมาชิกของเซต $A \times B$ เท่ากับเซต $B \times A$ ใช่หรือไม่....ใช่..... (2) $A \times B = B \times A$ ใช่หรือไม่ ..ใช่..... เพราะ..... <u>ข้อสังเกต</u> : $B \times A$ คือเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ ทั้งหมด โดยนำสมาชิกจากเซต B เป็นตัวประกอบ ตัวที่ 1 และนำสมาชิกจากเซต A เป็นตัว ประกอบตัวที่ 2	$m \cdot m = m^2$ $n \cdot n = n^2$ 84

42

$$\text{ให้ } A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2\}$$

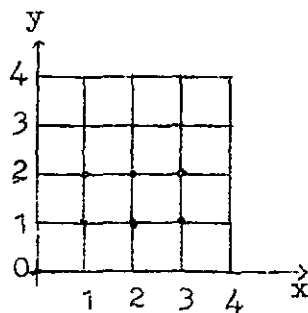
$$\therefore A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$\text{และ } B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

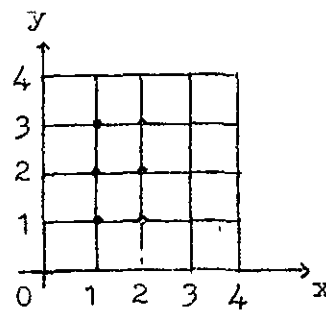
ถ้าเราให้ Ordered pairs เหล่านั้นเป็น Coordinate ของจุดในระนาบ XY (XY-plane) จะได้จุดทั้ง 6 จุด

(1) รูปที่ 1 แทนเซตของจุดในเซต

(2) รูปที่ 2 แทนเซตของจุดในเซต



รูปที่ 1



รูปที่ 2

- (1) ใช่
(2) ไม่ใช่ เพราะเซต
 $A \times B$ และ $B \times A$
มีสมาชิกไม่เหมือนกัน

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 จะเห็นว่าจุดบางจุดต่างกัน

(3) ฉะนั้น $A \times B \neq B \times A$ จริงหรือไม่.....?

เพราะ.....

43 ถ้า $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$

จงเขียนเซต $A \times B$ และ $B \times A$ แบบใช้ทศนิยมคู่ลำดับ

(1) $A \times B$

(2) $B \times A$

(1) $A \times B = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(2) $B \times A = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

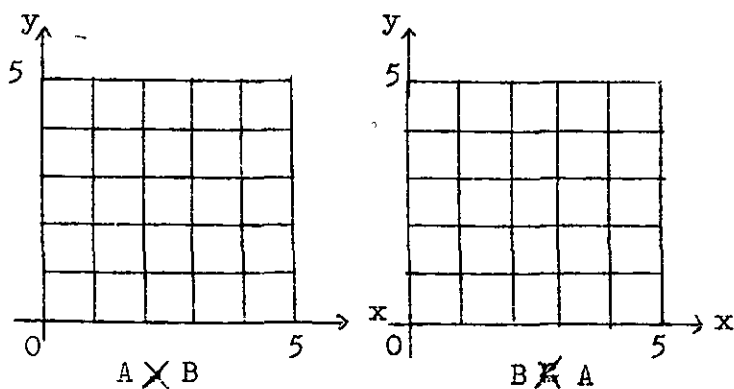
(3) จริง เพราะ $A \times B$

และ $B \times A$ มีสมาชิก

ไม่เหมือนกัน หรือมีจุด

ต่างกัน

44 จงลงจุดในเซต $A \times B$ และ $B \times A$ จากกรอบที่ 43
ลงบนกราฟต่อไปนี้



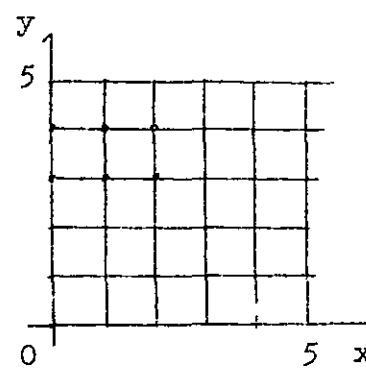
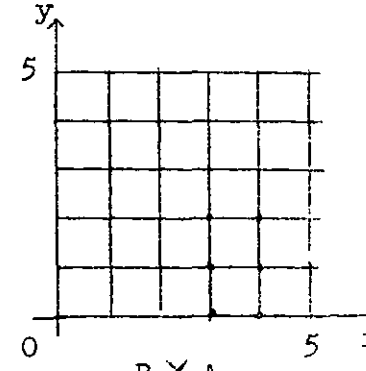
(1) จากกราฟทั้งสองนี้ จะเห็นว่า มีจุดบางจุดต่างกันหรือไม่

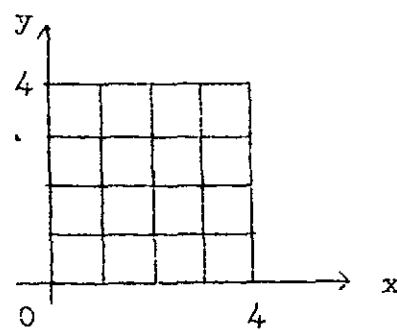
$\dots\dots\dots$

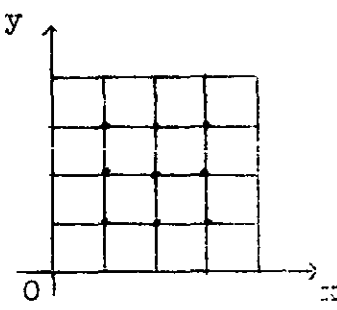
(2) ฉะนั้น $A \times B \neq B \times A$ จริงหรือไม่.....

(3) เซต $A \times B$ และ $B \times A$ มีจำนวนสมาชิก.....

$\dots\dots\dots$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)

45	ถ้า $A = \{8,5\}$, $B = \{8,5\}$ จงหา (1) $A \times B = \{.....\}$ (2) $B \times A = \{.....\}$ (3) $A \times B$ และ $B \times A$ มีสมาชิก (เหมือนกัน, ต่างกัน) (4) ดังนั้นเซต $A \times B$ กับ $B \times A$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	(1) $\{(0,3), (0,4), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$ (2) $\{(3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2)\}$
46	$C = \{1,2,3\}$, $D = \{1,2,3\}$ $C \times D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ จงหา (1) $D \times C =$ (2) $C \times D = D \times C$ ใช่หรือไม่	
47	สรุป ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ (1) โดยทั่วไปแล้ว $A \times B \neq B \times A$ (2) จากที่ได้ยกตัวอย่างมาแล้ว พอสรุปได้ว่า $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ..... (3) จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ และ $B \times A$ (เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)	 (1) ใช่ (2) จริง (3) เท่ากัน

48	เราได้อธิบายมาแล้วว่า empty set ($\emptyset$) เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิก ให้ A เป็นเซตใดๆ โดยที่ $A \times \emptyset = \{(x,y) \mid x \in A, y \in \emptyset\}$ ดังนั้น $A \times \emptyset = \emptyset$ ในทำนองเดียวกัน (1) $\emptyset \times A = \{(x,y) \mid \dots\dots\dots\}$ (2) จะได้ว่า $\emptyset \times A = \dots\dots\dots$ (3) นั่นคือ $A \times \emptyset = \dots\dots\dots = \emptyset \times A$	(1) $(8,8), (8,5),$ $(5,8), (5,5)$ (2) $(8,8), (8,5),$ $(5,8), (5,5)$ (3) เหมือนกัน (4) เท่ากัน
49	เรามักจะพูดถึงค่าพิกัดในรูปที่เป็นจุดอยู่บนระนาบ (Plane) เราจึงใช้ U และเขียนผลคูณการที่เขียนเป็น $U \times U$, ซึ่ง หมายความว่าเซต A กับเซต B เท่ากัน นั่นคือ $A = U$ และ $B = U$ ถ้า $U = \{1,2,3\}$ แล้วจะเขียนเซต $U \times U$ ได้ดังนี้ $U \times U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),$ $(3,1), (3,2), (3,3)\}$ จงลงจุดในเซต $U \times U$ ลงบนกราฟนี้ 	(1) $(1,1), (1,2),$ $(1,3), (2,1),$ $(2,2), (2,3),$ $(3,1), (3,2),$ $(3,3)$ (2) ใช่ (1) $A = B$ (2) เท่ากัน

50	เซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x,y) ซึ่ง x เป็นสมาชิกหนึ่งของเซต R และ y เป็นสมาชิกของ R เรียกเซตนี้ว่า	(1) $x \in \emptyset, y \in A$ (2) $\emptyset$ (3) $\emptyset$
51	ให้ $R =$ เซตของเลขจำนวนจริงทั้งหมด $R \times R = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$ ดังนั้นเราจะแทน $R \times R = R^2$ ด้วยจุดทุก ๆ จุดอยู่ในระนาบ xy (xy plane) $\therefore$ "$R \times R$ หรือ R^2 ก็คือ จุดทั้งหมดบนระนาบนั่นเอง" ขอความนี้ถูกหรือไม่..... <u>หมายเหตุ</u> : เราเรียก R ว่า 1-dimensional-Euclidean space และให้ $R \times R = R^2$ จึงเรียกว่า 2-dimensional-Euclidean space หรือ Euclidean plane	

52 ให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(1) $U \times U$ เป็นเซตประกอบด้วยคู่อันดับจำนวนเท่าใด
.....

(2) จงเขียน $U \times U$ ซึ่งเป็นเซตของคู่อันดับมาให้อยู

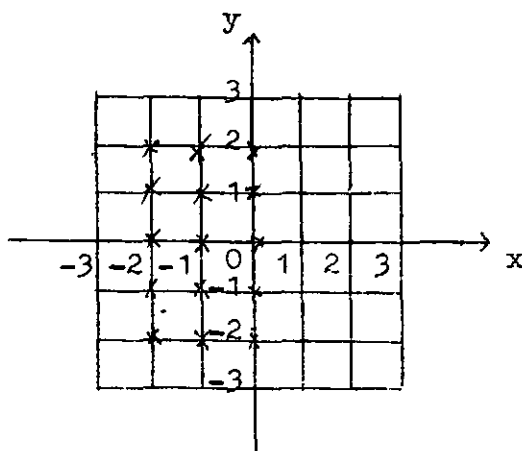
$$U \times U = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), \dots\}$$

(จงเขียนคู่อันดับที่เหลือให้ครบ)

Cartesian Product
ของเซต R หรือผลคูณ
การเขียน ของเซต R
หรือ R cross R

53 จงเขียนกราฟของ $U \times U$ ในกรอบที่ 52 มาให้อยู

ถูก



54 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$

จงหา

(1) $A \times B = \{\dots\dots\dots\}$

(2) $B \times A = \{\dots\dots\dots\}$

(3) $A \times B$ และ $B \times A$ มีสมาชิกร่วมกันหรือไม่
.....

(4) $(A \times B) \cap (B \times A) = \dots\dots\dots$

(1) 25

(2) $(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0),$
 $(-1, 1), (-1, 2), (0, -2),$
 $(0, -1), (0, 0), (0, 1),$
 $(0, 2), (1, -2), (1, -1),$
 $(1, 0), (1, 1), (1, 2),$
 $(2, -2), (2, -1), (2, 0),$
 $(2, 1), (2, 2)$

55 ถ้า $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 3\}$ จงหา

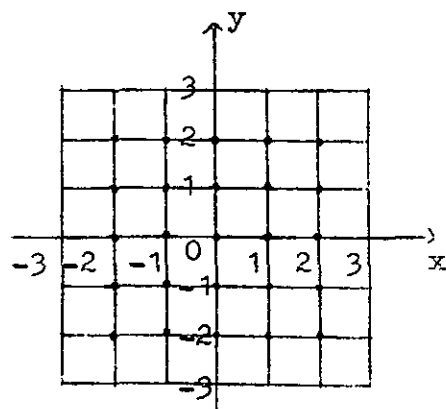
(1) $M \times N = \dots\dots\dots$

(2) $N \times M = \dots\dots\dots$

(3) $M \times N$ และ $N \times M$ มีสมาชิกร่วมกันหรือไม่
.....

(4) $(M \times N) \cap (N \times M) = \dots\dots\dots$

.....



แบบทดสอบชุดที่ 4

1. (1) (a, b) ใจแทน
 (2) a เรียกว่า..... และ b เรียกว่า.....
2. (1) $\{1, 2\}$ เป็น..... และ $\{2, 1\} = \{1, 2\}$ ใช่หรือไม่.....
 (2) $(1, 2)$ เป็น..... และ $(2, 1) = (1, 2)$ ใช่หรือไม่.....
3. คู่อันดับ (a, b) และ (c, d) จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ..... และ
4. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 ถ้า $S = \{(x, y) \mid x - 2 = y\}$ จงเขียนเซต S ในรูปของคู่อันดับ
 $\therefore$ เซต $S = \{.....\}$
5. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $S = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$
 (1) จงเขียนเซต S ในรูปของคู่อันดับ
 (2) จงเขียนกราฟของเซต S มาให้ดูด้วย
6. (1) คู่อันดับ $(25, \frac{2}{3})$ เท่ากับ $(5^2, 4/6)$ ใช่หรือไม่
 (2) ถ้าคู่อันดับ $(\underbrace{x+y}_x, 1) = (3, \underbrace{x-y}_y)$ แล้ว $x = y =$
7. กำหนดให้ $U = \{(8, -2), (3, 5), (5, 3), (0, 0), (2, 1), (-2, -4), (1, 2)\}$
 ถ้า $E = \{(x, y) \mid x > y\}$, $F = \{(x, y) \mid x + y \text{ เป็นจำนวนเลขคู่}\}$
 จงหา (1) $E =$
 (2) $F =$
 (3) $E \cap F =$
 (4) $E' =$

8. ให้ $E = \{a, b, c\}$ จงหา

(1) $E \times E = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(2) จำนวนสมาชิกของ $E \times E = \dots\dots\dots$

9. ผลคูณคาร์ทีเซียน $U \times U$ ก็คือที่ประกอบด้วยคู่ลำดับ (x, y) ทั้งหมด ซึ่ง $\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

(เติมคำนิยามให้สมบูรณ์)

10. เซตที่ประกอบด้วยคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมด เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$ เรียกว่า $\dots\dots$

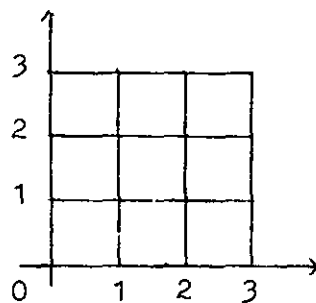
$\dots\dots\dots$

11. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

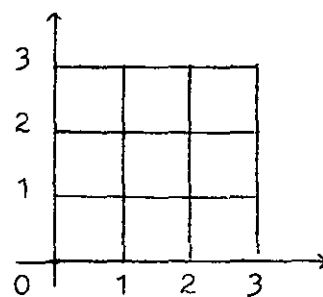
(1) จงเขียนสมาชิกของ $A \times B = \{\dots\dots\dots\}$

(2) จงเขียนสมาชิกของ $B \times A = \{\dots\dots\dots\}$

(3) จากกราฟข้างล่างนี้ จงเขียนจุดต่าง ๆ ที่แทนคู่ลำดับของ $A \times B$ และ $B \times A$



$A \times B$



$B \times A$

12. จากข้อ 11 จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ และ $B \times A$

(เท่ากัน, ไม่เท่ากัน)

(2) $A \times B$ และ $B \times A$ มีสมาชิกเหมือนกันหรือไม่

(3) $A \times B$ และ $B \times A$ มีสมาชิกรวมกันหรือไม่..... ได้แก่.....

(4) ดังนั้น $(A \times B) \cap (B \times A) =$

13. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(1) โดยทั่วไปแล้ว $A \times B$ $B \times A$

(2) $A \times B = B \times A$ ก็ต่อเมื่อ

(3) $A \times \emptyset = \emptyset \times A$ จริงหรือไม่ เพราะ.....

14. ให้ C, D เป็นเซตใด ๆ

ถ้าจำนวนสมาชิกของ C และ D เท่ากับ 7 และ 4 ตามลำดับ

จงหา (1) จำนวนสมาชิกของ $C \times D =$

(2) จำนวนสมาชิกของ $D \times C =$

(3) จำนวนสมาชิกของ $C \times C =$

(4) จำนวนสมาชิกของ $D \times D =$

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียน

บทที่ 5

เมื่อผู้เรียน เรียนจบบทที่ 5 แล้ว จะมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดค่าพหุเป็นประโยคมาให้ สามารถบอกได้ว่าค่าพหุใดมีส่วนใดมีลักษณะเป็น ความสัมพันธ์
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์มาให้ สามารถบอกได้ว่าค่าพหุใดอยู่ในความสัมพันธ์ที่กำหนดให้
3. เมื่อกำหนด Universal set และ ความสัมพันธ์ในแบบ Tabulation มาให้ สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นแบบ Set-builder ได้ถูกต้อง
4. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกแต่ละมาให้ สามารถเขียนเซตของตัวประกอบตัวแรก และเซตของตัวประกอบตัวที่สองของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ได้ถูกต้อง
5. สามารถอธิบายได้ว่า เซตว่าง (empty set) เป็นความสัมพันธ์
6. เมื่อกำหนด Universal set และความสัมพันธ์ในแบบ Set-builder มาให้ สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นแบบ Tabulation ได้ถูกต้อง
7. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ในแบบ Open sentence ที่มีตัวแปรสองตัวมาให้ สามารถเขียนโดเมน (Domain) และเรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์ ได้ถูกต้อง
8. สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ โดยใช้ตัวประกอบตัวแรกเป็น Abscissa และใช้ตัวประกอบตัวที่สองเป็น Ordinate ได้ถูกต้อง

1 ท 5

ความสัมพันธ์ (Relations)

1	<u>ความสัมพันธ์ (Relations)</u> การสนทนาในชีวิตประจำวันก็เช่นเดียวกันในคณิตศาสตร์ เรามักจะพูดถึง "ความสัมพันธ์ (Relations)" ระหว่างวัตถุสองอย่าง หรือ จำนวนสองจำนวน เช่น "สูงกว่า", "สีเดียวกันกับ", "มากกว่า", "เป็นพ่อของ", "เป็นสามีของ", "เป็นบุตรของ" ฯลฯ เหล่านี้ทางก็แสดงถึง	(1) (1,4),(1,5), (2,4),(2,5), (3,4),(3,5) (2) (4,1),(4,2), (4,3),(5,1), (5,2),(5,3) (3) ไม่มี (4) ϕ
2	ในวิชาเรขาคณิตเราใช้ว่า "ขนานกับ", "คล้ายกับ", "ยาวกว่า", "หัดกันกับ" ฯลฯ เหล่านี้ทางก็แสดงถึง..... 	(1) (1,2),(1,3), (2,2),(2,3), (3,2),(3,3) (2) (2,1),(2,2), (2,3),(3,1), (3,2),(3,3)
3	กุ่มเป็นพี่สาวของคอย A ยาวกว่า B M หักมากกว่า N คำว่า "เป็นพี่สาวของ", "ยาวกว่า", "หักมากกว่า" ทางก็แสดงถึง.....ของสิ่งของ 2 สิ่ง	(3) มี (4) $\{(2,2),(2,3), (3,2),(3,3)\}$

4	คำว่า "เป็นผลบวกของ", "มากกว่า", "เท่ากับ", "น้อยกว่า", "กำลังสองของ" ฯลฯ ต่างก็แสดงถึง.....ของจำนวน 2 จำนวนในวิชาเลขคณิต	ความสัมพันธ์
5	ความสัมพันธ์ที่เรามักพบบนในชีวิตประจำวัน เช่น " a มากกว่า b " นอกความสัมพันธ์ "การมากกว่า - น้อยกว่า" "น้อยเป็นผู้สาวของนิค" นอกความสัมพันธ์ "การเป็นผู้สาว - น้องสาว" "อุมเป็นแม่ของออย" นอกความสัมพันธ์ "....."	ความสัมพันธ์
6	ความสัมพันธ์ที่เราจะกล่าวต่อไปนี้ แสดงถึงความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวน 2 จำนวน หรือวัตถุ 2 อย่างเท่านั้น	
7	เราอาจจะแสดงความสัมพันธ์ด้วยคำพูด, ตาราง (เช่น ตารางความสูง กับ น้ำหนัก) กราฟ, สูตร หรือสิ่งของที่เป็น รูปใด ทั้งนี้เพราะว่าในแต่ละกรณี เราสามารถจะมีเซตที่ประกอบ ด้วย <u>เซตของคู่ลำดับ</u> ได้ ดังนั้น เป็นสิ่งธรรมดาเหลือเกิน ที่เราจะนึกถึงความสัมพันธ์ เส้นหนึ่งเป็นเซตของ.....	ความสัมพันธ์

10	จาก Open sentence $P(x,y) : y = x + 2$ บอกให้เรารวบรวม Solution set ซึ่ง y สัมพันธ์กับ x กันนี้ $y \dots\dots\dots x$ อยู่ 2 (มากกว่า, น้อยกว่า)	(1) เป็นแม่ของ และเป็น พี่สาวของ (2) (a, b) (3) (M, D)
11	กำหนดให้ Universal set $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ และให้ $S = \{(x, y) \mid y = x + 2\}$ เขียนเซต S เป็นรูป set builder โดยที่ x และ y เป็นสมาชิกของ U (นั่นคือ $x \in U, y \in U$) จงเขียนเซต S เป็นแบบเซตของคู่ลำดับมาใหญ่ $S = \{ \dots\dots\dots \}$	$Q(M, D)$ R (คุณ, ทอย)
12	จากกรอบที่ 11 จะเห็นได้ว่า S เป็นเซตของคู่ลำดับ ของ $U \times U$ ซึ่งสอดคล้องกับตาม Open sentence $P(x, y) : y = x + 2$ นั่นคือ S ก็เป็น.....ใน $U \times U$	

15	ถ้า "เป็นมารดาของ" เป็นความสัมพันธ์ และถ้าคู่ลำดับ (นาง ก , คำ) อยู่ในความสัมพันธ์นี้ แล้วแสดงว่า นาง ก. "เป็นมารดาของ" คำ อยากทราบว่า (1) คู่ลำดับ (คำ, นาง ก) อยู่หรือไม่อยู่ในความสัมพันธ์ (2) จากคุณสมบัติดังกล่าว จะทำให้เราเห็นว่า ความสัมพันธ์ เป็นเซตของ.....	(1,3),(2,4),(3,5)
16	มีบางความสัมพันธ์ในวิชาเรขาคณิตที่มีคุณสมบัติพิเศษ เช่น " A คล้ายคลึงกับ B " ความสัมพันธ์นี้ทำให้คู่ลำดับ (A,B) "และ" (B,A) อยู่ในความสัมพันธ์ ถ้ามีสิ่งของ C และ D อยู่ และมีความสัมพันธ์ว่า "หนักเท่ากันกับ" เราจะได้ว่า ถ้า (C,D) อยู่ในความสัมพันธ์แล้ว (D,C)	3 มากกว่า 2 คู่ลำดับ

17	จากการกำหนดเซตของคู่ลำดับให้ บางทีเราจะบอกกฎ หรือ สูตรของความสัมพันธ์ได้ (ซึ่งอยู่ในรูปของ Set-builder) ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ให้ R_1 เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่ง $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ จากความสัมพันธ์ R_1 นี้ เราอาจจะบอกเงื่อนไขหนึ่งเป็นกฎ ได้ว่า $R_1 = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$ ซึ่งความสัมพันธ์ R_1 จะอยู่ในรูปของ Set-builder notation ถ้ากำหนดให้ R_2 เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $R_2 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ ดังนั้นเราจะเขียน R_2 ในรูปของ Set-builder notation ได้คือ $R_2 = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$	(1) ไม่อยู่ (2) คู่ลำดับ
18	ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ จงพิจารณาความสัมพันธ์ R ใน U นี้ โดยที่ $R = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), \dots\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ R ในแบบ Set-builder $R = \{(x, y) \mid \dots\dots\dots\}$	จะอยู่ในความสัมพันธ์ อันไหน

19	ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4\}$ แล้ว $U \times U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots \dots \dots \}$ (จงเติมสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน $U \times U$ ที่เหลือให้หมด)	$y = x - 1$ หรือ $y + 1 = x$
20	จากกรอบที่ 19 ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่ง $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ R เป็น.....ของ $U \times U$ เพราะทุก ๆ สมาชิกของ R เป็นสมาชิกของ $U \times U$	
21	<u>นิยาม</u> : (ความสัมพันธ์ระหว่างเซต A กับ B) เราจะเรียกว่า "R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B" (relation from A to B ถ้า R เป็น <u>ซับเซตของ $A \times B$</u> และถ้า $(x, y) \in R$ เราจะพูดว่า "x มีความสัมพันธ์กับ y ภาย ความสัมพันธ์ R" ซึ่งเราอาจจะเขียนแทนโดยไซ "xRy" ดังนั้น (1) $(a, 3) \in R$ จะเขียนเป็น..... (2) $(p, q) \in R$ จะเขียนเป็น.. .. (3) $(นก, วิชัย) \in R$ จะเขียนเป็น.....	$y = x - 2$ หรือ $x = y + 2$

22	จำไว้ว่า ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B เป็นซับเซต ของ $A \times B$ เสมอ เช่น $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4\}$ $A \times B = \{(5, 2), (5, 4), (6, 2), (6, 4), (7, 2), (7, 4)\}$ $R = \{(5, 2), (6, 4), (7, 2)\}$ (1) จะเห็นว่า R เป็น.....ของ $A \times B$ ดังนั้น R เป็น.....จากเซต A ไปยังเซต B (2) ถ้า $S = \{(2, 5), (6, 4), (7, 2)\}$ S เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B หรือไม่... เพราะ.....	$(2, 1), (2, 2), (2, 3),$ $(2, 4), (3, 1), (3, 2),$ $(3, 3), (3, 4), (4, 1),$ $(4, 2), (4, 3), (4, 4)$
23	ให้ R เป็นความสัมพันธ์ ถ้า $(y, z) \in R$ เราจะพูดว่า-กว่า ความสัมพันธ์ R	ซับเซต
24	กำหนดความสัมพันธ์ $R = \{(4, 3), (5, 4), (9, 8)\}$ (1) ให้ A เป็นเซตของตัวประกอบตัวแรกของคู่อันดับใน R ดังนั้น $A = \{.....4, 5, 9.....\}$ (2) ให้ B เป็นเซตของตัวประกอบตัวที่สองของคู่อันดับใน R ดังนั้น $B = \{.....3, 4, 8.....\}$ (3) เราจะกล่าวว่า R เป็นซับเซตหนึ่งของ $A \times B$ ได้ หรือไม่	(1) aRb (2) pRq (3) กนก R วิชัย

25	$A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$ $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ (1) โดยที่ความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B เป็น.....ของ $A \times B$ (2) จำนวนสมาชิกของทั้งหมดของเซต $A \times B$ เท่ากับ. ... (3) โดยที่จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจะมีได้ทั้งหมดระหว่างเซต A และ B จะเท่ากับจำนวนสมาชิกทั้งหมดของ $A \times B$ ดังนั้นจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดระหว่างเซต A และ B เท่ากับ.....	(1) นับเซต ความสัมพันธ์ (2) ไม่เป็น เพราะ $S \not\subseteq A \times B$
26	จากกรอบที่ 25 โดยที่ $\emptyset$ (empty set) ก็เป็นสมาชิกหนึ่งของ $A \times B$ ด้วย เพราะ $\emptyset$ เป็น.....ของทุก ๆ เซต นั่นคือ $\emptyset \dots\dots\dots A \times B$ ดังนั้นเราก็มี empty relation จาก.....ไปยัง.....	y มีความสัมพันธ์กับ z
27	ให้ $P = \{1, 2\}$, $Q = \{3\}$ (1) $P \times Q = \{ \dots\dots\dots \}$ (2) จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจะมีได้ทั้งหมดระหว่างเซต P และ Q เท่ากับ.....ซึ่งจะเท่ากับจำนวนสมาชิก ทั้งหมดของ $P \times Q$ (3) และจะต้องมี.....จากเซต P ไปยัง Q เพราะ $\emptyset \subseteq P \times Q$	(1) $\{4, 5, 9\}$ (2) $\{3, 4, 8\}$ (3) ใด

28	<u>นิยาม</u> : ให้ A เป็นเซตใด ๆ ถ้า R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต A เราจะเรียกว่า "R เป็นความสัมพันธ์ใน A" (relation in A) จากนิยามนี้จะเห็นได้ว่า $R \subseteq A \times A$ กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ $R_2 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$ $R_3 = \{(a, c), (c, b), (b, a)\}$ $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ (1) ความสัมพันธ์ ที่เป็นความสัมพันธ์ใน A คือ..... (2) R_4 เป็น..... (3) ความสัมพันธ์ใดที่เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B	(1) ซับเซต (2) $2^4 = 16$ (3) $2^4 = 16$ ซับเซต $\emptyset \subseteq A \times B$ เซต A ไปยังเซต B
29	ให้ U เป็น Universal set (1) ทุก ๆ ซับเซตของ $U \times U$ ก็จะเป็น.....ใน U (2) $\emptyset$ เป็นความสัมพันธ์ใน U จริงหรือไม่..... เพราะ.....	(1) $(1, 3), (2, 3)$ (2) $2^2 = 4$ (3) empty relation

30	<u>การกำหนดหรือการเขียนความสัมพันธ์</u> ความสัมพันธ์ (Relations) ใน Universal set จะกำหนดได้โดย 1. Tabulation 2. Set-builder notation หรือ Extension ของ Open sentence $P(x,y)$ กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ $P_1 = \{(x,y) \mid x = y\}$ $R_2 = \{(x,y) \mid y = 2x\}$ ความสัมพันธ์ R_1, R_2 จะถูกกำหนดขึ้นโดยวิธี Set-builder จงเขียน R_1, R_2 ใน U นี้ให้เป็นแบบ Tabulation $R_1 = \{ \dots \}$ $R_2 = \{ \dots \}$	(1) R_3 (2) ความสัมพันธ์ใน $\mathbb{N}$ (3) R_1, R_2
31	กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5\}$ $R_1 = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$ $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$ จงเขียน R_1, R_2 ใน U ให้เป็นแบบ Set builder (1) $R_1 = \{(x,y) \mid \dots\}$ (2) $R_2 = \{(x,y) \mid \dots\}$	(1) ความสัมพันธ์ (2) จริง เพราะ $\emptyset \subseteq U \times U$

32 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R_1 = \{(x, y) \mid x = y + 1\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 20\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x + y > 6\}$$

(1) เราจะบอกได้หรือไม่ว่า R_1 , R_2 และ R_3 เป็นความสัมพันธ์ใน U

(2) R_1 , R_2 และ R_3 เป็น.....ของ $U \times U$

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

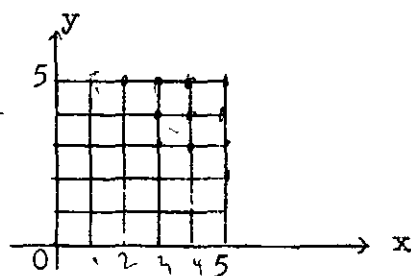
33 จากสิ่งที่กำหนดไว้ในกรอบที่ 32

(1) จงเขียน R_1 ในแบบเซตของคู่อันดับ

$$R_1 = \dots\dots\dots$$

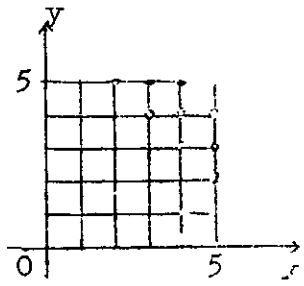
(2) และจงหาคู่อันดับของ $U \times U$ ที่อยู่ในความสัมพันธ์ R_2

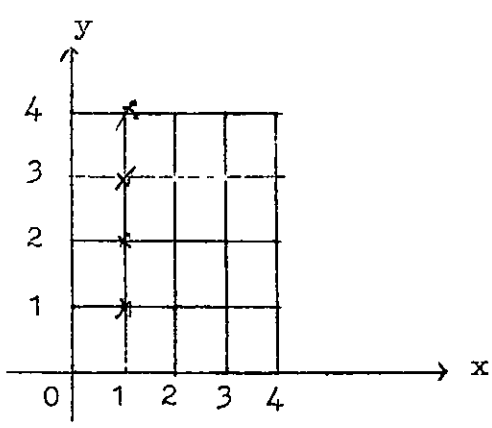
(3) จงเขียนกราฟของคู่อันดับของ $U \times U$ ที่อยู่ในความสัมพันธ์ R_3

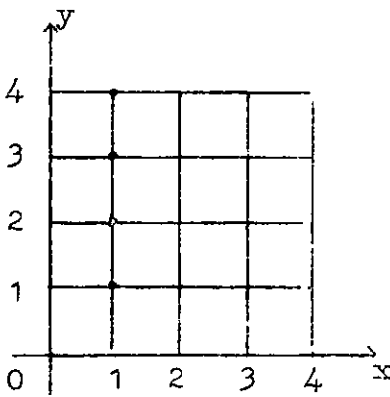


$$(1) y = x + 2$$

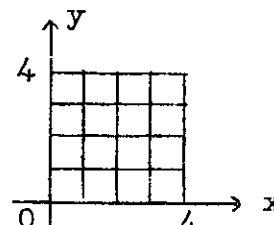
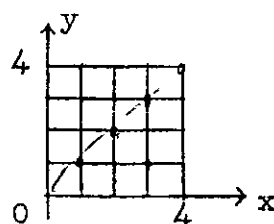
$$(2) y = x$$

34	โดเมน (Domain) และ เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์ นิยาม : ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยังเซต B นั่นคือให้ R เป็นซับเซตของ $A \times B$ "โดเมน (Domain) ของความสัมพันธ์ R" ก็คือเซตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวที่ 1 ทั้งหมดของคู่ลำดับที่อยู่ใน R ให้ D_R เป็นสัญลักษณ์ของโดเมนของความสัมพันธ์ R นั่นคือ $D_R = \{a \mid a \in A, (a,b) \in R\}$ ถ้าให้ $R_1 = \{(1,2), (4,5), (7,8)\}$ $D_{R_1} = \text{โดเมนของความสัมพันธ์ } R_1$ $= \{1,4,7\}$ จงหาโดเมนของ $R_2 = \{(3,2), (5,8), (4,6)\}$ $D_{R_2} = \dots\dots\dots$	(1) ได้ (2) ซับเซต $\times$ $/$
35	เซตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวแรกทั้งหมดของคู่ลำดับ เรียกว่าโดเมน (Domain) ของความสัมพันธ์ ถ้าให้ $R = \{(a,b), (a,c), (d,e), (a,h)\}$ จงหา $D_R = \dots\dots\dots$	(1) $R_1 = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4)\}$ (2) (2,4) และ (4,2) (3) 

36	เซตที่ประกอบไปด้วยตัวประกอบตัวแรก ทั้งหมดของความ สัมพันธ์ เรียกว่า.....?.....ของความสัมพันธ์	$\{3, 5, 4\}$
37	กำหนดความสัมพันธ์ $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ เซต $\{1\}$ เรียกว่าเป็น.....?.....ของความสัมพันธ์ R ทั้งนี้เพราะ $\{1\}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวแรก ทั้งหมดของความสัมพันธ์ R	
38	จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ R ในกรอบที่ 37 	$\{a, d\}$

39	นิยาม : ถ้าให้ R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปยัง B นั่นคือ ให้ R เป็นเซตของ $A \times B$ "เรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์ R" ก็คือเซตที่ ประกอบด้วยตัวประกอบตัวที่สองทั้งหมดของคู่ลำดับที่อยู่ใน R นั่นคือ $E = \{b b \in B, (a, b) \in R\}$, $E =$ เรนจ์ของ R ให้ความสัมพันธ์ $S = \{(1,2), (4,5), (7,8)\}$ $R_S =$ Range ของความสัมพันธ์ R_1 $\therefore R_S = \{\dots, 2, 5, 8, \dots\}$ จงหา Range ของความสัมพันธ์ $F = \{(3,2), (5,8),$ $(4,6)\}$ $R_F = \{2, 8, 6, \dots\}$	โดเมน (Domain)
40	จงเขียนเรนจ์ของความสัมพันธ์ $G = \{(1,1), (1,2),$ $(1,3)\}$ $R_G = \{1, \dots\}$	โดเมน (Domain)
41	เซตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวที่สองทั้งหมดของความ สัมพันธ์ เรียกว่า.....ของความสัมพันธ์	

42	(1) โดเมนของความสัมพันธ์คือเซตของ..... ของความสัมพันธ (2) เรนจ์ของความสัมพันธ์คือเซตของ..... ของความสัมพันธ	$R_S = \{2, 5, 8\}$ $R_F = \{2, 8, 6\}$
43	กำหนดให้ F เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $F = \{(ab), (x,y), (r,s), (u,v)\}$ จงหา (1) $D_F = \dots\dots\dots$ (2) $R_F = \dots\dots\dots$	$R_G = \{1.2.3\}$
44	กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ถ้า R เป็นความสัมพันธ์ใน $A \times B$ ดังนั้น โดเมนของความสัมพันธ์ R เป็นซับเซตของ A และเรนจ์ของความสัมพันธ์ R เป็นซับเซตของ B ถ้า F เป็นความสัมพันธ์ใน $T \times S$ แล้ว (1) โดเมนของความสัมพันธ์ F เป็นซับเซตของ..... (2) เรนจ์ของความสัมพันธ์ F เป็นซับเซตของ.....	เรนจ์ (Range)

45	ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$, F เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่ง $F = \{(x, y) \mid y < x\}$ (1) จงเขียน F ในรูปของ Tabular $F = \dots\dots\dots$ (2) จงหา $D_F = \dots\dots\dots$ (3) จงหา $R_F = \dots\dots\dots$ (4) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ F 	(1) ตัวประกอบตัวที่ 1 (2) ตัวประกอบตัวที่ 2
46	ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ และ G เป็นความสัมพันธ์ใน U $G = \{(x, y) \mid x = y\}$ (1) จงเขียนความสัมพันธ์ในรูปของ Tabular $G = \dots\dots\dots$ (2) จงหา $D_G = \dots\dots\dots$ (3) จงหา $R_G = \dots\dots\dots$ (4) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ G 	(1) T (2) S

47

ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$
 ให้ F และ G เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่ง
 $F = \{(x, y) \mid y < x\}$ และ
 $G = \{(x, y) \mid x = y\}$

ถ้ากล่าวกับ $(x, y) \in F$ แล้วมันจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า
 $y < x$ และ

ถ้ากล่าวกับ $(x, y) \in G$ แล้วมันจะสอดคล้องกับเงื่อนไข
 ที่ว่า $x = y$

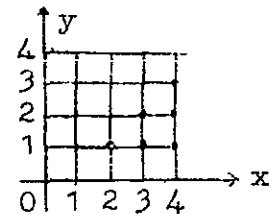
- (1) $(3, 2) \in F$ ใช่หรือไม่ ✓
 (2) $(2, 3) \in F$ ใช่หรือไม่ ✗
 (3) $(2, 2) \in G$ ใช่หรือไม่ ✓
 (4) $(4, 3) \in G$ ใช่หรือไม่ ✗

- (1) $\{(2, 1), (3, 1),$
 $(3, 2), (4, 1),$
 $(4, 2), (4, 3)\}$

- (2) $\{2, 3, 4\}$

- (3) $\{1, 2, 3\}$

- (4)



48

ถ้า $U = \{1, 2, 3, 4\}$ และ
 ให้ E เป็นความสัมพันธ์ใน $U \times U$ ซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1\}$

- (1) จงเขียน E ในแบบ Tabular มาให้ดู
 $E = \dots 1 \dots 12 \dots 13 \dots 14 \dots$

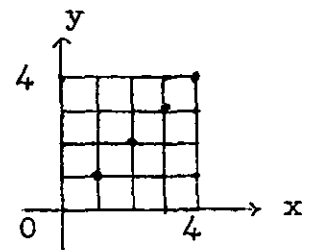
- (2) จงหา Range ความสัมพันธ์ E
 $R_E = \dots 1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots$

- (1) $\{(1, 1), (2, 2),$
 $(3, 3), (4, 4)\}$

- (2) $\{1, 2, 3, 4\}$

- (3) $\{1, 2, 3, 4\}$

- (4)



49	ให้ $U = \{1,2,3,4\}$, E เป็นความสัมพันธ์ใน U ถ้า $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ เราจะเขียนความสัมพันธ์ E ให้เป็นแบบ Set-builder ดังนี้ $E = \{(x,y) \mid x = 1\}$ (1) คู่ลำดับ $(1,5)$ เป็นสมาชิกของ E หรือไม่ เพราะเหตุใด (2) คู่ลำดับ $(2,1)$ อยู่ใน E หรือไม่ เพราะเหตุใด	(1) ใช่ (2) ไม่ใช่ (3) ใช่ (4) ไม่ใช่
50	จากที่ใดเรียนมาแล้วจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ (relation) จะเขียนอยู่ในรูปของสูตร, กฎ, กราฟ, อธิบายหรือเขียน (list) คู่ลำดับทั้งหมดมาให้อีกได้ ไม่ว่าจะเขียนอยู่ในรูปใด ความสัมพันธ์จะเป็นเซตของคู่ลำดับ ซึ่งมีตัวประกอบตัวแรกเป็นสมาชิกของเซตที่เรียกว่า.....ของความสัมพันธ์ และมีตัวประกอบตัวที่สองเป็นสมาชิกของเซตที่เรียกว่า.....ของความสัมพันธ์	(1) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ (2) $\{1,2,3,4\}$

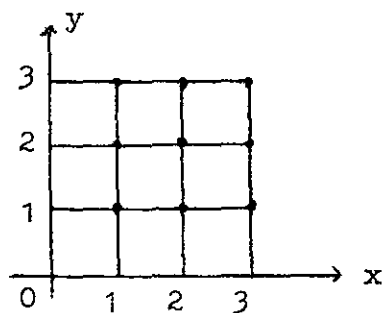
51 กราฟของความสัมพันธ์ (Graphs of Relations)

การเขียนกราฟของความสัมพันธ์ เราจะใช้ตัวประกอบตัวที่ 1 เป็น Abscissa (ค่าตามแกน x) และใช้ตัวประกอบตัวที่ 2 เป็น Ordinates (ค่าตามแกน y) เช่น

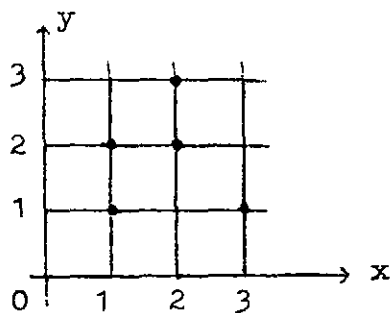
$$\text{ถ้า } U = \{1, 2, 3\} \text{ แล้ว}$$

$$U \times U = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

จะเขียนเป็นกราฟได้ดังนี้



ถ้า R_1 เป็นความสัมพันธ์ใน U และเขียนแทนด้วยกราฟนี้ จงเขียนความสัมพันธ์ R_1 ในแบบ Tabular มาใหญ่



$$R_1 = \{ \dots (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1) \dots \}$$

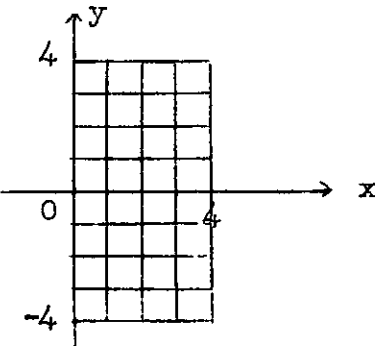
(1) ไม่ใช่ เพราะตัวประกอบตัวที่สองคือ 5 ไม่เป็นสมาชิกของ U

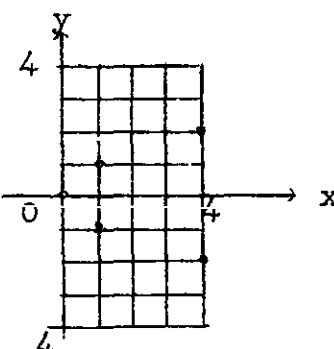
(2) ไม่อยู่ เพราะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ E ทว่า

$x = 1$ (หรือตัวประกอบตัวแรกต้องเท่ากับ 1)

โดเมน (Domain)

เรนจ์ (Range)

52	ให้ $U =$ เซตของจำนวนเต็ม $F = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$ จากคู่ลำดับต่อไปนี้ จงหาคู่ลำดับที่อยู่ในความสัมพันธ์ F $(0,0), (1,1), (-1,1), (1,-1), (4,2), (-4,2), (4,-2)$ 	$\{(1,1), (1,2), (2,2)$ $(2,3), (3,1)\}$
53	จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ F_1 นี้ $F_1 = \{(0,0), (1,1), (1,-1), (4,2), (4,-2)\}$ 	
54	ถ้า Universal set U เป็นเซตของจำนวนจริงแล้ว $U \times U$ ก็จะเป็นเซตของจุดในระนาบ xy ทั้งหมด ซึ่งเรียงกันหนาแน่น ดังนั้น กราฟของความสัมพันธ์ใน $U \times U$ นี้จะเป็นเซตของจุดที่เรียงกันหนาแน่นจนเกิดเป็น <u>เส้น</u> (line) สำหรับการเขียนกราฟเมื่อ U เป็นเซตของจำนวนจริงนั้น ในหนังสือละไมอาทวนสนธิจักรจะหาอ่านจากหนังสืออื่น ๆ เพิ่มเติม จะทำให้ท่านมีความรู้มากยิ่งขึ้น	

55	สรุป เราให้นิยามของความสัมพันธ์ใน U ว่าเป็นเซต ของ $U \times U$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ คือ เซต	$(0,0), (1,1), (1,-1),$ $(4,2), (4,-2)$
56	ความสัมพันธ์อาจจะให้ความหมายในรูปของ Open sentence sentence (เช่น $P(x,y)$) ที่มีตัวแปรสองตัว, แสดง โดยกราฟ, โดยกฎหรือสูตร ฯลฯ ก็ได้ แต่ความสัมพันธ์โดย ตัวของมันเองก็พอใช้ได้.....	
57	ให้ $U =$ เซตของตัวพยัญชนะภาษาอังกฤษ ให้ $R =$ เป็นความสัมพันธ์ ดัง $R = \{(a,b), (r,d), (a,x), (m,y)\}$ (1) เซต $\{a,r,m\}$ เรียกว่า.....ของ ความสัมพันธ์ R (2) เซต $\{b,d,x,y\}$ เรียกว่า.....ของ ความสัมพันธ์ R	

นี่คือการรู้เกี่ยวกับเซต (Sets) และ
ความสัมพันธ์ (Relations) พอสมควรแล้ว
ความรู้ตอนนี้เปรียบเสมือนบันไดแก้วที่จะนำท่านไปสู่
การศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป...

ทำไมท่านจะหยุดเพียงเท่านั้นเสียละ ?
จงก้าวต่อไปอีกซิ !

เซตของคู่อันดับ (Ordered-
Pairs)

เซตของคู่อันดับ

(1) โดเมน (Domain)

(2) เรนจ์ (Range)

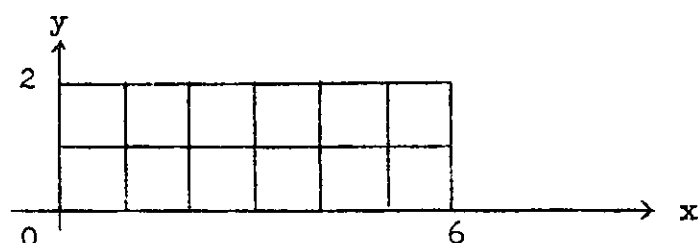
8. กำหนดความสัมพันธ์ $F = \{(6,2), (5,8), (1,2)\}$

จงหา (a) $D_F = \{\dots\dots\dots\}$

(b) $R_F = \{\dots\dots\dots\}$

9. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ R ซึ่ง

$$R = \{(3,2), (5,2), (6,2), (4,2), (0,2), (1,2), (2,2)\}$$



10. กำหนดให้ $U = \{1,2,3,4,5\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ใน U ต่อไปนี้
ในแบบ Tabular

(a) $R_1 = \{(x,y) \mid x \cdot y \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$

$R_1 = \dots\dots\dots$

(b) $R_2 = \{(x,y) \mid x - y = 6\}$

$R_2 = \dots\dots\dots$

(c) $R_3 = \{(x,y) \mid x > 2 \text{ และ } y = 3\}$

$R_3 = \dots\dots\dots$

11. ให้ S และ T เป็นเซตใด ๆ จงเติมคำในช่องว่างให้ถูกต้อง

(1) $S \times T = \{(x,y) \mid \dots\dots\dots\}$

(2) เซตใด ๆ ของ $S \times T$ เรียกว่า.....ใน $S \times T$

- 12 เซ็ตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวแรกทั้งหมดของคู่ลำดับของความสัมพันธ์
เรียกว่า.....ของความสัมพันธ์
และเซตที่ประกอบด้วยตัวประกอบตัวที่สองทั้งหมดของคู่ลำดับของความสัมพันธ์
เรียกว่า.....ของความสัมพันธ์

- 13 ให้ $U =$ เซตของจำนวนเต็ม

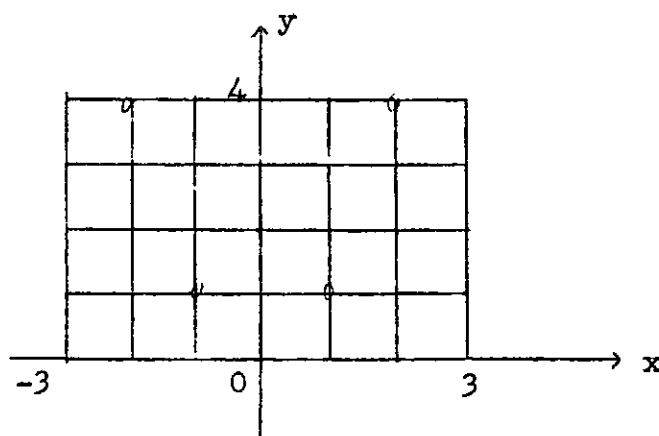
ความสัมพันธ์ $R = \{(x, y) \mid y = x^2\}$

- (1) จงหาคู่ลำดับที่อยู่ใน R จากคู่ลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (-2, 0), (-1, 1), (2, 4), (-4, 2), (1, 1), (1, -1),$
 $(-2, 4), (4, -2), (0, -2), (2, 0)$

$\therefore R = \{.....\}$

- (2) จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ R ในเมื่อ U เป็นเซตของจำนวนเต็ม



- 14 จากข้อ 13 จงหา

(1) โดเมนของ $R = \{.....\}$

(2) เรนจ์ของ $R = \{.....\}$

15. ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ให้ R เป็นความสัมพันธ์ใน U ซึ่ง

$$R = \{(x, y) \mid x + y \leq 5\}$$

(1) เราจะเขียน R ในแบบ Tabular ได้ คือ

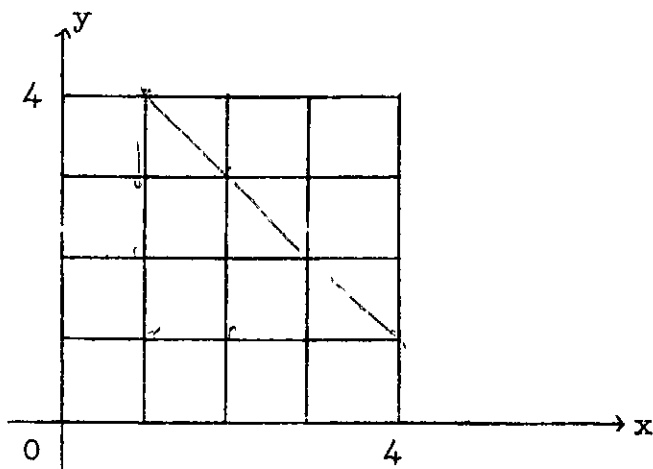
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$$

(จงเติมค่าลำดับที่เหลือทั้งหมด)

(2) โคเมนของ $R = \{\dots\}$

(3) เรนจ์ของ $R = \{\dots\}$

16. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ R ในข้อ 15



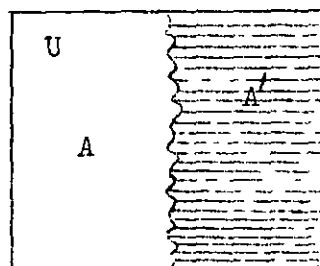
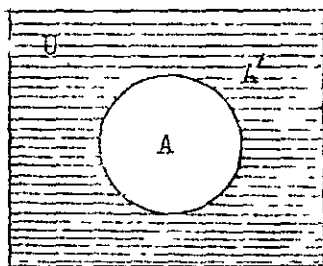
เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 1

1. เซ็ต , สมาชิก
2. 3
3. ใต้
4. finite set
5. $a \in A$, $y \notin B$
6. เซ็ตว่างเปล่า หรือ empty set , $\emptyset$
7. มีสมาชิกเดียว
8. (1) A เป็นเซตที่ประกอบด้วย n ทั้งหมด ซึ่งว่า n เป็นตัวเลขที่อยู่บนหน้าปัดหน้าฬิกา
(2) C เป็นเซตของจำนวนเต็ม x ทั้งหมด ซึ่งว่า $x^2 - 3x = -2$
9. $A = \{1, 2, \dots, 12\}$
 $C = \{1, 2\}$
10. 1. ถูก 2. ถูก 3. ผิด
11. (1) $x = 0$ (2) $x = a$ หรือ $x = b$
12. (1) $X \subseteq Y$
13. (1) ทุก ๆ สมาชิกของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B
(2) $M \subseteq N$ และ $N \subseteq M$
14. (1) ใช่ (2) ใช่ (3) ใช่
15. (1) จริง (2) จริง
16. $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ (มี 7 เซ็ต)
17. A กับ E, B กับ C และ B กับ E
18. เป็นจำนวนเชิงซ้อน
19. $\{2, 7\}$
20. จริง, เพราะ $E = \{1, 3\}$ และ $F = \{1, 3\}$
21. (1) ถูก (2) ผิด (3) ถูก เพราะว่า $\emptyset$ เป็นเซตของทุก ๆ เซต

เฉลยแบบทดสอบจากที่ 2

1 $x \in U, x \notin A$

2



3 P

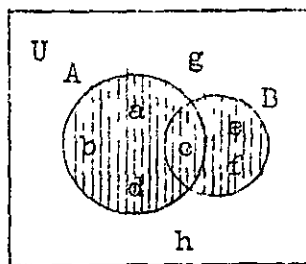
4 (1) $x \in A$ และ $x \in B$

(2) $x \in A$ หรือ $x \in B$

5 1) $\{2, 4, 6\}$ (2) $\{1, 3\}$

(3) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (4) $\{5, 6\}$

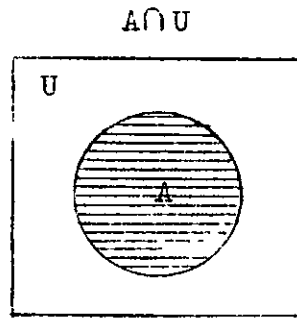
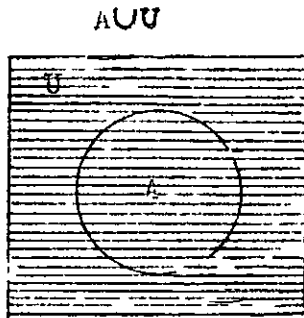
6



$A \cup B$ คือ บริเวณที่แรเงา

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

7



8 (1) U (2) A

(3) U (4) $\emptyset$

9 (1) $\{A, B, C\}$ (2) $\{C\}$

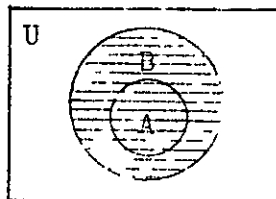
10 $y \in A$ and $y \notin B$

11 (1) $\{e, f, g, h\}$ (2) $\{a, b, d\}$

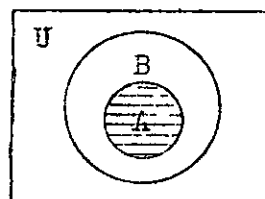
(3) $\{e, f\}$ (4) $\{a', b, d\}$

12 (1) $\{1\}$ (2) $\{4, 5\}$ (3) $A \subseteq B$

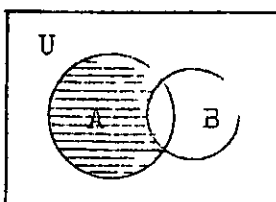
13



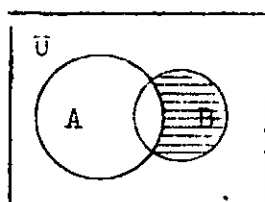
(1) $A \cup B$



(2) $A \cap B$



(3) $A - B$

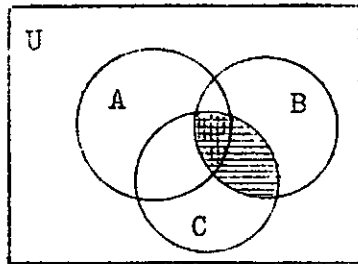


(4) $B - A$

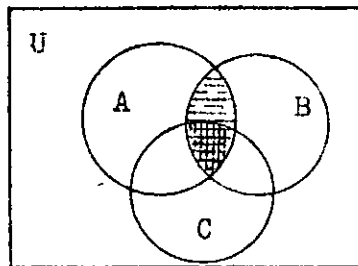
- 14 (1) $A \cap B$ (2) $x \in P$ และ $x \notin Q$
 (3) $x \in B$ หรือ $x \in D$ (4) A'
- 15 $x \in M$ และ $x \in N$, $y \in N$ หรือ $y \in M$
- 16 (1) ภาพที่ 3 (2) ภาพที่ 1 (3) ภาพที่ 2
- 17 (1) A (2) $\emptyset$ (3) U
 (+) A (5) U (6) $\emptyset$
- 18 (1) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 (3) $\{1, 3\}$ (4) $\{1, 3\}$
 (5) $\{1, 2, 3, 4\}$ (6) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
 (7) $\{7, 8, 9\}$ (8) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 3

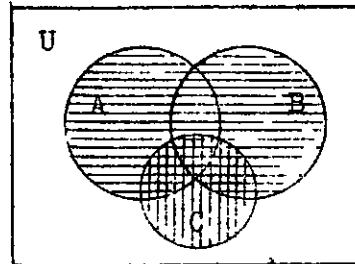
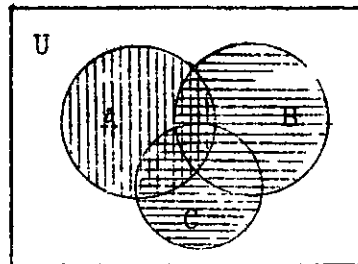
1.



2.



3.



$A \cup (B \cap C)$ คือบริเวณที่แรเงาทั้งหมด

$(A \cup B) \cup C$ คือบริเวณที่แรเงาทั้งหมด

4. (1) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

5. (1) $A \cup B = B \cup A$ (2) $A \cap B = B \cap A$

6. ข (1), (3), (4), (5)

7. (a) $\{2, 4\}$

(b) $\{2\}$

(c) $\{2, 6, 8\}$

(d) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

(e) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

(f) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

(g) $\{2, 4\}$

(h) $\{2, 4\}$

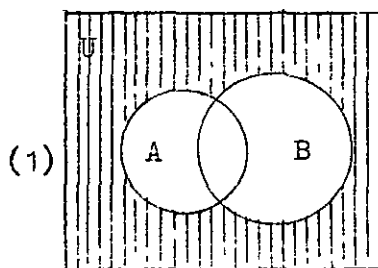
8. $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$
 และ $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

9. (a) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (b) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
 (c) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (d) $\{5, 7, 9\}$
 (e) $\{7, 8, 9\}$ (f) $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

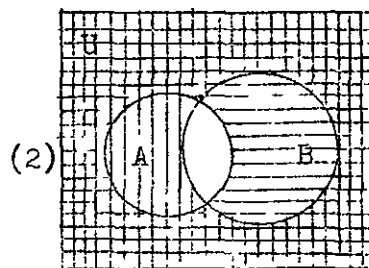
10. (1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 (2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

11. (1) $\{a, i, j, f\}$ (2) $\{a, i, j, f\}$
 (3) $\emptyset$ (4) $\emptyset$
 (5) ใช่ (6) ใช่

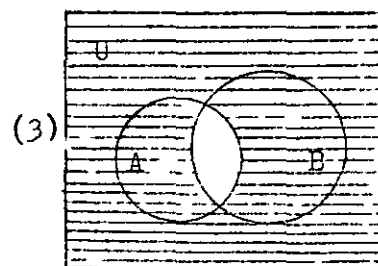
12.



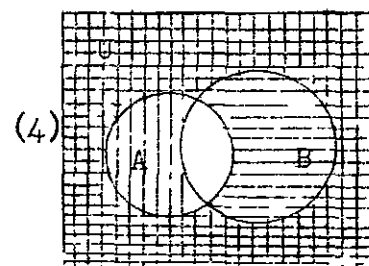
$(A \cup B)'$ คือบริเวณที่แรเงา



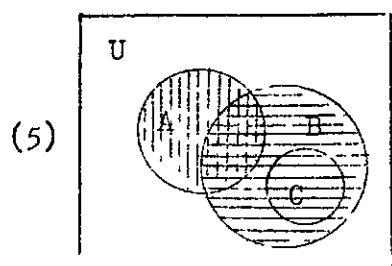
$A' \cap B'$ คือบริเวณที่แรเงาซ้อนกัน



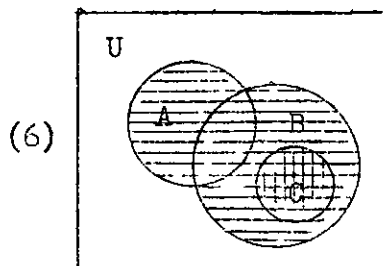
$(A \cap B)'$ คือบริเวณที่แรเงา



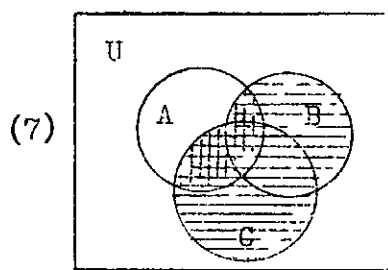
$A' \cup B'$ คือบริเวณที่แรเงาทั้งหมด



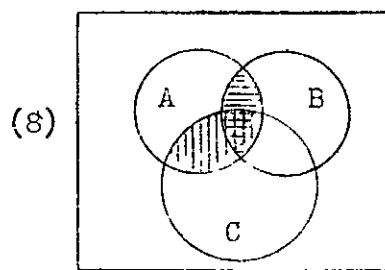
$A \cup (B \cap C)$ คือบริเวณที่แรงเงาทั้งหมด



$(A \cup B) \cap C$ คือบริเวณที่แรงเงาทั้งหมด



$A \cap (B \cup C)$ คือบริเวณที่แรงเงาซ้อนกัน



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ คือบริเวณที่แรงเงาทั้งหมด

เฉลยแบบทดสอบชุดที่ 4

1. (1) ใช่ เหมือนค่ากับ a, b
 (2) a เรียกว่าตัวประกอบตัวแรก และ b เรียกว่าตัวประกอบตัวที่สอง

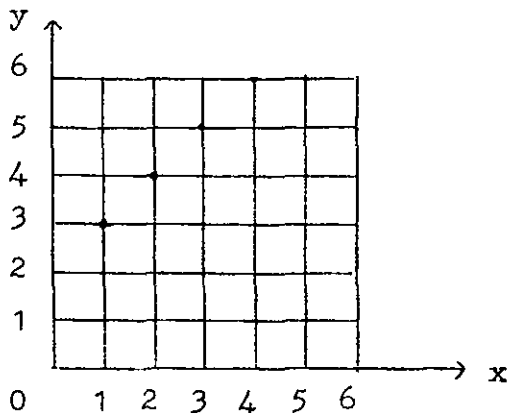
2. (1) $\{1, 2\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก คือ 1 และ 2, ใช่
 (2) $(1, 2)$ เป็นคู่อันดับ 1 และ 2, ไม่ใช่

3. $a = c$ และ $b = d$

4. $S = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$

5. (1) $S = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$

(2)



6. (1) ใช่ (2) $x = 2, y = 1$

7. (1) $E = \{(8, -2), (5, 3), (2, 1), (-2, -4)\}$
 (2) $F = \{(8, -2), (3, 5), (5, 3), (0, 0), (-2, -4)\}$
 (3) $E \cap F = \{(8, -2), (5, 3), (-2, -4)\}$
 (4) $E' = \{(3, 5), (0, 0), (1, 2)\}$

8. (1) $E \times E = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

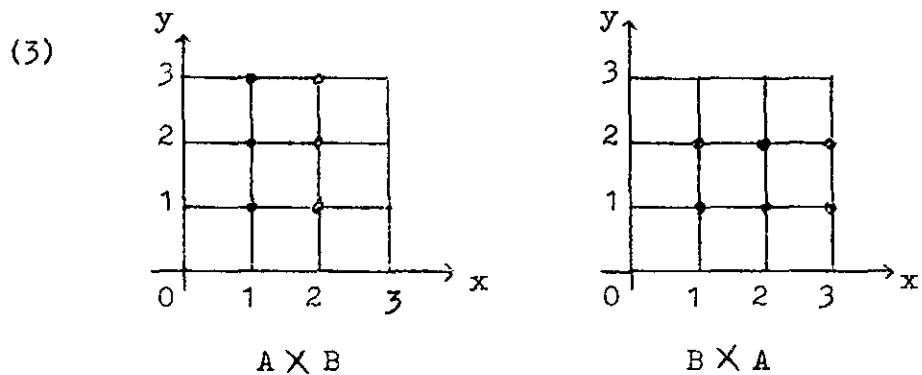
(2) 9

9. $U \times U$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x,y) ทั้งหมด ซึ่ง $x \in U$ และ $y \in U$

10. ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$

11. (1) $\{(1,1), (2,1), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

(2) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$



12. (1) เท่ากัน (2) ไม่เหมือน

(3) มี 4 คู่ $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$

(4) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

13. (1) $A \times B \neq B \times A$ (2) $A = B$

(3) จริง เพราะ $A \times \emptyset = \emptyset$ และ $\emptyset \times A = \emptyset$

14. (1) 28 (2) 28

(3) 49 (4) 16

! จดรูปแบบทดสอบชุดที่ 5

1. $\{(5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8), (7,8)\}$

2. ไม่ได้

3. ได้

4. ผลคูณคาร์ทีเซียนของ $A \times B$

5. ความสัมพันธ์ใน $A \times B$

6. S_1 คือ ผลคูณคาร์ทีเซียน ของ $A \times B$ และเป็นความสัมพันธ์ใน $A \times B$

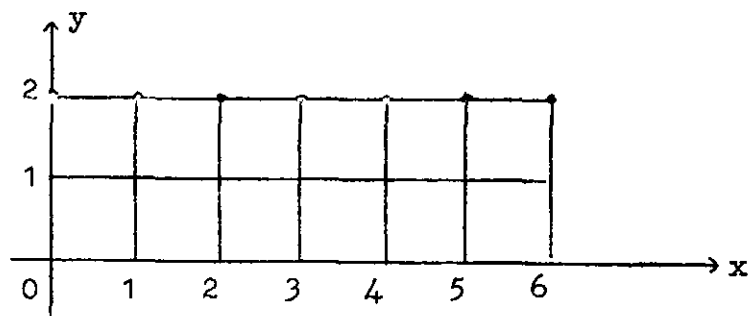
S_2 คือ ความสัมพันธ์ใน $A \times B$

S_3 คือ ความสัมพันธ์ใน $A \times B$ เพราะ $\emptyset \subseteq A \times B$

7. $R_1 = \{(1,2), (2,4)\}$

8. (a) $D_F = \{6, 5, 1\}$ (b) $R_F = \{2, 8\}$

9.



10.(a) $R_1 = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), (5,4)\}$

(b) $R_2 = \emptyset$

(c) $R_3 = \{(3,3), (4,3), (5,3)\}$

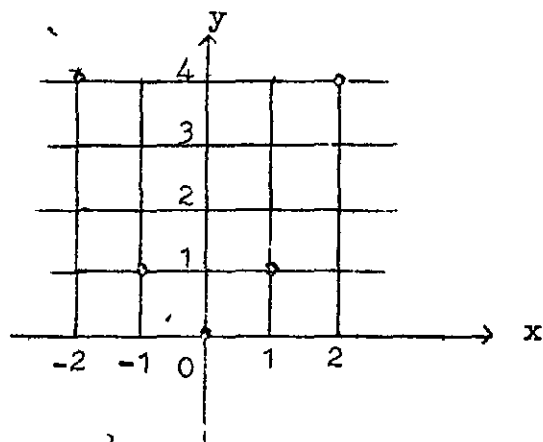
11. (1) $\{(x, y) \mid x \in S, y \in T\}$

(2) ความสัมพันธ์

12. โดเมนของความสัมพันธ์, เรนจ์ ของความสัมพันธ์

13. (1) $\{(0,0), (-1,1), (1,1), (-2,4), (2,4)\}$

(2)



14. (1) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(2) $\{0, 1, 4\}$

15. (1) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$

(2) $\{1, 2, 3, 4\}$

(3) $\{1, 2, 3, 4\}$

16.

