

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหา
พลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

ปริญญาโท
ของ
อรัญ พงษ์ประณีต

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ตุลาคม 2551

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหา
พลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

ปริญญาโท
ของ
อรรถ พงษ์ประณีต

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ตุลาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหา
พลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

บทคัดย่อ
ของ
อรุณ พงษ์ประณีต

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตาม
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ตุลาคม 2551

อรุณ พงษ์ประณีต. (2551). การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง. ปรินซิเพิล วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพมหานคร:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้ว.

ปรินซิเพิลนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อการวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง รูปแบบของปัญหาที่กำหนดขึ้นนี้เพื่อหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการความโน้มถ่วงสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่กำหนดเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยกำหนดให้ทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขขอบเขตสำหรับแก้ปัญหา โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$ และ เวลาสุดท้ายที่พิจารณา $x(t_f)=x_f$ การระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ เรียกว่า ปัญหาเงื่อนไขของเขตสองจุด (TPBVP : Two Point Boundary Valued Problem)

ในการศึกษาวิจัยนี้การหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของระบบ สปริง มวล และตัวหน่วง (A Spring – Mass – Damper System) โดยแยกเป็นกรณีค่าตัวหน่วงคงที่และค่าตัวหน่วงแต่ละมวลมีค่าเพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า วิธีการหาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรงในการแก้ปัญหาที่เป็นเชิงเส้นของระบบพลศาสตร์ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง นั้นสามารถนำวิธีการนี้ไปใช้แก้ปัญหาได้ โดยสามารถคำนวณหาค่าตัวแปร States คือการกระจัด $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ ความเร็ว $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)$ ความเร่ง $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4(t)$ และ ความโน้มถ่วง $\dddot{x}_1(t), \dddot{x}_2(t), \dddot{x}_3(t), \dddot{x}_4(t)$ ได้ ในขณะที่เดียวกันสามารถคำนวณหา Control Input หรือแรงที่กระทำ $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ เทียบกับเวลาได้เช่นเดียวกัน โดยสามารถหาคำตอบของสมการอันดับสูงที่เป็นระดับชั้นความเสรีอันดับสองและระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ ได้

คำสำคัญ: ความเหมาะสมที่สุด, ความโน้มถ่วงสูงสุด, สมการอนุพันธ์อันดับสูง

ANALYSIS AND ANALYTICAL THE HIGHER ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN
DYNAMICS OPTIMIZATION BY THE MINIMUM DIRECT JERK METHOD.

AN ABSTRACT
BY
ARUT PONGPRANITHI

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

October 2008

Arut Pongpranithi. (2008). *Analysis And Analytical The Higher Order Differential Equation In Dynamics Optimization By The Minimum Direct Jerk Method*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Asst.Prof. Vichit Buakaew. Assoc.Prof.Ph.D. Taviwat eerakraew.

The objective of this research is show the minimum direct Jerk method to analysis and analytical the higher differential equation in dynamics optimization. This problem can be identify the real solution in term the control input variable $u(t)$ and control state variable $x(t)$. The boundary condition need to indicated the fixed end time and end points by the start time is $x(t_0)=x_0$ and the end time is $x(t_f)=x_f$ when the t_0 is the start time end t_f is the end time. So this problem is different in the start time and end time is call two point boundary valued problem (TPBVP).

This research is study on the two degree and four degree of freedom of the spring mass and damper linear equation system. In each case can be separately in two terms. The first is study in the constant damper valued the second is study in the case is up the damper valued for each mass.

The result of this research is show the computer program can solve the problem to show the real value solution that solve the higher order differential equation in dynamic optimization by the minimum direct Jerk method. There for this research show the variable state value by the displacement in term $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, velocity in term $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)$, acceleration in term $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4(t)$ and Jerk in term $\dddot{x}_1(t), \dddot{x}_2(t), \dddot{x}_3(t), \dddot{x}_4(t)$. Also that can calculate the control input $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ in each equation of two and four degree of freedom.

Keyword: Optimization, Minimum Jerk, Higher order equation.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การวิเคราะห์และประยุกต์ใช้วิธีความโน้มถ่วงสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหา
พลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง

ของ

อรุณ พงษ์ประณีต

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่ 10 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน

.....ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว)

(พันเอก ดร. ชีรนนท์ นันทขว้าง)

.....กรรมการ

.....กรรมการ

(พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระแก้ว)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว)

.....กรรมการ

(พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระแก้ว)

.....กรรมการ

(พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ประสบความสำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระแก้ว กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ พันเอก ดร.ธีรพันธ์ นันทขำวาง ประธานสอบปริญญานิพนธ์ พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการสอบปริญญานิพนธ์ที่ให้คำปรึกษาแนะนำและแก้ไขปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นกับปริญญานิพนธ์ ตลอดจนช่วยแก้ไขปริญญานิพนธ์จนสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.พิชัย อัมภมมงคล และ พันเอก สุภโชค สัมปัตตะวนิช ตลอดจนทั้งอาจารย์ทุกท่านที่ให้การอบรมสั่งสอนและให้ความช่วยเหลือเรื่องตลอดการศึกษา รวมทั้งตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อสุภา คุณแม่สังเวียน ประณีตพงศ์ และพี่น้องที่ให้การสนับสนุนตลอดการศึกษา ความรักความอบอุ่น ให้การเลี้ยงดูอบรมสั่งสอนและเป็นแรงใจให้ดำเนินชีวิตจนถึงทุกวันนี้

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่3 และรุ่นพี่รุ่นน้องในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโทมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒและโรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้าสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

อรุณ พงษ์ประณีต

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	1
ขอบเขตของงานวิจัย	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	36
3 วิธีดำเนินการวิจัย	39
กำหนดปัญหา	39
เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา	40
กำหนดสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง	44
กำหนดสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง	45
ปัญหาความถี่มีมวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง.....	47
ปัญหาความถี่มีมวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง.....	50
4 ผลการวิจัย	56
ผลการวิจัยปัญหาความถี่มีมวลสูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงโดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ	56
ผลการวิจัยปัญหาความถี่มีมวลสูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงโดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ	62

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	70
สรุปผล	70
อภิปรายผล.....	70
ข้อเสนอแนะ	71
บรรณานุกรม	72
ประวัติย่อผู้วิจัย	74

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสองของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง.....	44
2 ระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสี่ของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง.....	45
3 แรงกระทำที่มวลแต่ละก้อนของระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสองของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง.....	47
4 แรงกระทำที่มวลแต่ละก้อนของระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสี่ของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง.....	50
5 ระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสองของ สปริง มวลและตัวหน่วง.....	56
6 แสดงแรงกระทำต่อมวลแต่ละก้อนระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสอง.....	57
7 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 = c_2$	58
8 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 = c_2$	58
9 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 = c_2$	59
10 กราฟแสดงความนิ่มมวล $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี อันดับสองที่ค่า $c_1 = c_2$	59
11 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 < c_2$	60
12 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 < c_2$	61
13 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สองที่ค่า $c_1 < c_2$	61
14 กราฟแสดงความนิ่มมวล $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี อันดับสองที่ค่า $c_1 < c_2$	62
15 ระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสี่ของสปริง มวล และตัวหน่วง.....	62
16 แสดงแรงที่กระทำต่อมวลแต่ละก้อน กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ของสปริง มวล และตัวหน่วง.....	63
17 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$	64

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
18 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$	65
19 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$	65
20 กราฟแสดงความนิ่มนวล $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี อันดับสี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$	65
21 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$	67
22 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$	68
23 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับ สี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$	68
24 กราฟแสดงความนิ่มนวล $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี อันดับสี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$	69

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของงานวิจัย

วิธีการกำหนดการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ให้ได้ถูกต้องแม่นยำ โดยการเริ่มจากตำแหน่งเริ่มต้นไปยังตำแหน่งเป้าหมายสุดท้ายให้ได้ตามต้องการนั้นสามารถกำหนดได้โดยการป้อนโปรแกรมควบคุมให้ระบบทำการประมวลผลออกมาและแสดงผลเป็นตำแหน่งการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ให้ได้ถูกต้องแม่นยำจำเป็นต้องอาศัยกระบวนการประมวลผลที่มีประสิทธิภาพ การจะทำให้มีประสิทธิภาพได้ก็ต่อเมื่อโปรแกรมที่เราเขียนขึ้นมาควบคุมนั้นต้องสามารถทำการประมวลผลหาผลลัพธ์สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ที่ดีที่สุดและใช้เวลาในการประมวลผลได้เร็วที่สุดและที่สำคัญต้องใช้ทรัพยากรฮาร์ดแวร์ที่เรียบง่ายที่สุดด้วย

สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ยังมีความซับซ้อนหรือเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงเพียงใด ก็จะเป็นการยากที่จะหาคำตอบให้ได้ด้วยวิธีการคำนวณทางพีชคณิตธรรมดา โดยปกติความซับซ้อนยุ่งยากทางพีชคณิตจะทำการคำนวณและหาผลลัพธ์ของตำแหน่งหุ่นยนต์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำการหาคำตอบ การคำนวณหรือประมวลผลนั้นจะมีประสิทธิภาพดีก็ต่อเมื่อใช้ฮาร์ดแวร์ที่มีประสิทธิภาพสูงมาก นั่นก็หมายถึงราคาที่สูงตามไปด้วย เป็นการยากที่จะทำให้ผู้สนใจด้านหุ่นยนต์ที่เป็นบุคคลทั่วไปเข้าถึงเทคโนโลยีหุ่นยนต์ได้ ผู้ทำการวิจัยได้ทำการศึกษาและหาวิธีการในการแก้ปัญหา จนกระทั่งเจอวิธีการแนวใหม่ในการแก้ปัญหาดังกล่าว จึงอยากนำเสนอวิธีการวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ความนิยมมวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง เพื่อเป็นแรงบันดาลใจหรือแนวทางให้ผู้สนใจนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบและเขียนโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์เพราะวิธีการนี้จะลดความยุ่งยากซับซ้อนในการคำนวณให้ผลลัพธ์เร็วและต้องการแค่ระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้ทำงานทั่วไปก็เพียงพอในการประมวลผลหาคำตอบของสมการแล้ว

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ทฤษฎีความนิยมมวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง มาแก้ปัญหาพลศาสตร์ที่เหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงของระบบระดับชั้นความเสถียรอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงที่เคลื่อนที่แบบเชิงเส้น
2. เพื่อวิเคราะห์และประยุกต์ใช้ทฤษฎีความนิยมมวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรง มาแก้ปัญหาพลศาสตร์ที่เหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงของระบบระดับชั้นความเสถียรอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงที่เคลื่อนที่แบบเชิงเส้น

ขอบเขตของงานวิจัย

1. กำหนดรูปแบบการเคลื่อนที่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงเป็นแบบเชิงเส้น
2. ระบบเป็นแบบมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ (Fully actuated system)
3. หาคำตอบโดยวิธีการพิจารณาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดโดยตรง
4. กำหนดค่าตัวหน่วงในการคำนวณเป็น
 - 4.1. กรณีที่ตัวหน่วงมีค่าคงที่เป็น $c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=1.0$
 - 4.2. กรณีที่ค่าตัวหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $c_1=1, c_2=2, c_3=3, c_4=4, c_5=5$
5. ใช้โปรแกรม แมทแลปเวอร์ชัน 5.4 (Matlab Version 5.4) ในการแก้ปัญหา

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้วิธีการใช้ความนี้มนวลที่สุดแบบการพิจารณาโดยตรงไปใช้แก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นที่เป็นอนุพันธ์อันดับสูง
2. ผู้พัฒนาหุ่นยนต์นำวิธีการนี้ไปประยุกต์ใช้เขียนโปรแกรมเพื่อควบคุมหุ่นยนต์
3. ผลการวิจัยครั้งนี้จะให้ข้อมูลสำหรับการใช้เป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่น ๆ

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าที่เหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิคการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการพรรณนาถึงลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of problem formulation) ในเทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและจำเป็นสามเทอมด้วยกัน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่ระบุชี้ชัดถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์แล้ว ตัวแปรของการออกแบบก็คือตัวไม่ทราบค่าที่จะต้องถูกค้นหาค่านั้นเอง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม คือ ดีไซน์วาริเอเบิลก็คือความยาวและความสูง ในการกำหนดหรือเลือกว่าสิ่งไหนคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) นั้น ผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้สัญชาตญาณ, ความชำนาญ และพื้นความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ แต่ก็มีหลักการพื้นฐานเช่นกันก็คือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear independent) หมายความว่า ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ตัวอย่างเช่น การออกแบบหน้าต่างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราไม่สามารถกำหนด ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาว, ความกว้างและพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรา กำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาวและความกว้างแล้ว ตัวแปรที่สามคือพื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) สามารถมีได้หลายตัว เพื่อให้ให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขย่อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ x , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i=1, 2, \dots, n$

2. ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีมีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาชนะที่กระทำ, คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

3. ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) มาประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) นี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออปเจกทีฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาคำตอบที่เหมาะสมขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็กลายเป็นออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี้ก็จะเป็นคอนสเตรนทฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

3.1 ออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective Function)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งของออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยทั่วไปจะเป็นแบบฟังก์ชันเดียว รูปแบบของวัตถุประสงค์จะเป็นการหาปริมาณที่น้อยที่สุดหรือปริมาณที่มากที่สุด และปริมาณที่ว่าเป็นนี้ก็ปริมาณสเกลาร์ ในทอสมทางคณิตศาสตร์นั้นจะเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $f(X)$ และ $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$

3.2 คอนสเตรนทฟังก์ชัน (Constraint Functions)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการออกแบบเป็นอย่างมาก และสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ (เป็นได้ทั้งสมการและอสมการ) ดังนั้นจึงเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) และจะใช้เครื่องหมายดำเนินการเปรียบเทียบสามตัวคือ \leq , \geq และ $=$ ซึ่งเงื่อนไขบังคับนี้จะมีได้สามรูปแบบด้วยกันคือ อันคอนสเตรนท (Unconstraint), อีควอลิตีคอนสเตรนท (Equality constraints) และอินอีควอลิตีคอนสเตรนท (Inequality constraint) มีรายละเอียดดังนี้

3.2.1 อีควอลิตีคอนสเตรนท (Equality Constraints)

เป็นเงื่อนไขที่บังคับให้การออกแบบต้องเป็นไปตามเงื่อนไขอย่างเคร่งครัด โดยจะต้องไม่ขาดและไม่เกินจากเงื่อนไข มีลักษณะเป็นสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร g เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[G]$, $[g_1, g_2, \dots, g_l]$ และ $g_l, l=1, 2, \dots, m$ จำนวนดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) n จะต้องมีขนาดที่มากกว่าจำนวน m อีควอลิตีคอนสเตรนท (Equality constraints) จึงจะสามารถทำการอ

ปติไมซ์เซชัน (Optimization) ได้โดยจะต้องสอดคล้องกับออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective function) เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $g_1(X):f(X)-500=0$ เป็นต้น

3.2.2 อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีความยืดหยุ่นในการออกแบบ เพราะจะบังคับในลักษณะเป็นช่วงให้เปรียบเทียบ มีลักษณะเป็นอสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร c เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและจะเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[C]$, $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ และ $c_l, l=1, 2, \dots, m$ เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับและน้อยกว่าหรือเท่ากับแต่จะนิยมแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับในงานด้านวิศวกรรมมากกว่า โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $c_1(X):f(X)-1 \leq 0$ เป็นต้น

3.2.3 ไซด์คอนสเทรนท์ (Side Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่นำมาใช้เพื่อกำหนดตัวเลขช่วงให้กับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และมักมีการกำหนดเป็นลักษณะขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง

3.2.4 ดีไซน์สเปส (Design Space)

ก็คือปริภูมิที่จะถูกใช้เพื่อการออกแบบที่เหมาะสมนั่นเอง เป็นปริภูมิที่เกิดขึ้นจากหลักการของปริภูมิยูคลิดเดียนหรือปริภูมิคาร์ทีเซียน (Euclidean or cartesian n-dimensional space) ที่มีมิติใดๆ ซึ่งมิติใดๆ นี้เกิดขึ้นจากกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) แต่จะไม่เหมือนกับระบบปริภูมิอ้างอิงทั่วไปที่มีสามมิติตามที่เรารู้กัน เพราะจะมีความซับซ้อนกว่า ยกตัวอย่างเช่น มีดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) 10 ตัว ก็จะมีมิติของปริภูมิเป็น 10 มิติ เป็นการยากมากที่จะอธิบายโดยการวาดภาพหรือเขียนกราฟออกมา ด้วยเหตุนี้จึงใช้ไซด์คอนสเทรนท์ (Side constraints) มาเป็นตัวจำกัดขอบเขตของปริภูมิ ซึ่งหากผลเฉลยอยู่ในช่วงขอบเขตนี้ก็ถือว่ายอมรับได้ (Feasible)

4. รูปแบบมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นล้วนแต่เป็นองค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทั้งสิ้น และมีการเขียนในทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ c_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq 0 \\ x_j^l &\leq x_j \leq x_j^u, j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.5)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l=1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l=1, 2, \dots, m \quad (2.7)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, j=1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(X), [X]_n \quad (2.9)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } [g(X)]_l = 0 \quad (2.10)$$

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2.11)$$

$$X^{\text{low}} \leq X \leq X^{\text{up}} \quad (2.12)$$

จากรูปแบบมาตรฐานของปัญหาการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดได้ดังนี้ คือ หาค่าน้อยที่สุด (Minimize) ของออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) f โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (Subject to) บังคับเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จำนวน l เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับอีนอวาลิตีคอนสเตรนท์ (Inequality constraints) จำนวน i เงื่อนไข ทั้งนี้ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ทั้งหมดจำนวน n ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของไซด์คอนสเตรนท์ (Side constraints) เท่านั้น

5. ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สเตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยสุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมินิมัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.13)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมินิมัม (Local minimum)

กรณีมากที่สุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.14)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

5.1 ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ (Variables) ขึ้นกับเวลา (Time-dependent) จะถูกเรียกว่าไดนามิก (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) มาเป็นตัวแสดงระบบไดนามิก (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i=1, \dots, n \quad (2.15)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสเตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คืออนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\dot{x}=u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.15) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ

(2.15) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าของฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกหาค่าของฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.16)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสภาวะสุดท้าย (Final state) ของระบบ

ส่วนที่สองคือ

$$\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.17)$$

เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สเตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิก (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งวิธีไดเรกต์ (Direct methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่าแต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) ในการวิจัยศึกษาในครั้งนี้จะใช้วิธีไดเรกต์ (Direct methods) เข้ามาเป็นเครื่องมือสำหรับหาคำตอบ

ดังนั้นจึงต้องทำการศึกษาและทำความเข้าใจวิธีการแบบอินไดเรกต์ (Indirect methods) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการศึกษาและทำความเข้าใจแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) โดยเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) เพราะต้องใช้เป็นฐานในการใช้งานกับวิธีอินไดเรกต์ (Indirect

methods) จากนั้นก็จะลงลึกในรายละเอียดของวิธีการอินดิเรคท์ (Indirect methods) โดยจะเน้นหนักลงไปเกี่ยวกับมินิมัมไทม์ออปติไมซ์เซชัน (Minimum time optimization)

6. แคลคูลัสออฟวาเรียเอเบิล (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบชั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับชั้นความเสรี (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาเรียเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.18)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะมีขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.19)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.19) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาเรียเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนคเซสเซอร์ริคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาเรียเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบชั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

6.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่อง โดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)

$x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals)

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x}) dt \quad (2.20)$$

นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0)=h(t_f)=0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J=J[x+h]-J[x]=\int_{t_0}^{t_f} [F(t,x+h,\dot{x}+\dot{h})-F(t,x,\dot{x})] dt \quad (2.21)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.22)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.22) ก็จะพบว่า

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.23)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J=0$ ที่ $h(t_0)=h(t_f)=0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J=0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.24)$$

ซึ่งสมการ (2.24) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะ ทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

6.1.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (6.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.21-2.23) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.27)$$

ซึ่งสมการ (2.25-2.27) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะ ทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

6.1.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ ก็ มีวิธีการหาค่าตอบคล้ายๆ กับกรณี (6.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x+h] - J[x] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt \end{aligned} \quad (2.28)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \quad (2.29)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.29) ก็จะได้พบว่

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \quad (2.30)$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.30) เขียนได้เป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \quad (2.31)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J=0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \quad \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.33)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นี้แน่นอน

6.2 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

6.2.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กตรีмум (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กตรีмум (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.34)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2.35)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.36)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2.36) ก็พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.37)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J=0$ ที่ $h_i(t_0)=h_i(t_f)=0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J=0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.38)$$

ซึ่งสมการ (2.38) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)=x_{i1}$ และ $x_i(t_f)=x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

6.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (6.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.35-2.37) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนคเซสเซอร์คอนดิชัน (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.41)$$

ซึ่งสมการ (2.39-2.41) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

6.2.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (6.2.1) ถ้า $x_i(t)$, $i=1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1+h_1, \dots, x_n+h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.42)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ &\quad + F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2.43) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ &\quad + \left[F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \right] \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - \left[F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.44) จะเป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนกเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.46)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i=1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right] \Big|_{t_0} = 0, i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.47)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

6.3 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนออีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier)

6.3.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องกับหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j=1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.48)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F' ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่อเปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

6.3.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)|_{t_f} = 0, k=1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.49)$$

เมื่อ v_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2.45) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary condition) ก็คือ $\delta J'=0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i=1, \dots, n \quad (2.51)$$

โดยที่ $s_k=0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i=1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

6.3.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (6.3.1 และ 6.3.2) เราสามารถเอ็กซ์ตรีмум (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional)

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.53)$$

ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเตรนท (Equality constraints)

$$g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0 \quad \text{เมื่อ } j=1, \dots, m \text{ โดย } m < n \text{ เสมอ} \quad (2.54)$$

และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints)

$$s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k=1, \dots, p \text{ โดย } p < m \text{ เสมอ} \quad (2.55)$$

ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.56)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ v_k คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2.45) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

เมื่อ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$

ทำให้ได้เนกเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i=1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

โดยที่ $g_j = 0, j=1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k=1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

6.4 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนกเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่บอกไม่ได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการ

ตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional)

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (2.59)$$

นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องได้อย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ x, \dot{x} และ t ต่อไปหากเรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยสุด ต่อไปลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0)=h(t_f)=0$ เราจะพบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x+h] - J[x]$ แล้วใช้ออนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{high-order-terms} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0} \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) dt \end{aligned}$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านมา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากที่สุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \tilde{F} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} dt \quad (2.61)$$

เมื่อ

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ \tilde{F} เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า \tilde{F} เป็นลบ (Negative definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากที่สุด

7. การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟฟาริเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสออฟฟาริเอเบิล (Calculus of variation) นั้น พบว่ามีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic

optimization) ดังนั้นต่อไปนี้เป็นวิธีการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

7.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่าย ดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.15), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.16), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบุสถานะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปเจกทีฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวาริเอเบิลและสเตตวาริเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.1.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วทำให้เทอม $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ในสมการ (2.16) ไม่มีความเกี่ยวข้องกับการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ลักษณะของปัญหานี้จะคล้ายกับหัวข้อ (6.3.1) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.62)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ดังนั้นมีการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_0} \right) \end{aligned} \quad (2.63)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ t_0 และ t_f , $h_{x_j}|_{t_f} = h_{x_j}|_{t_0} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.63) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial x_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, & \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} &= -\lambda_j, \\ \frac{\partial L'}{\partial u_k} &= \frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, & \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} และ h_{u_k} , $\delta J' = 0$ ถ้า

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad \text{สำหรับ } j=1, \dots, n \quad \text{และ} \quad k=1, \dots, m \quad (2.65)$$

ด้วยการแทนสมการ (2.64) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\lambda_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (2.67)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเทต (Costates)) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, สมการโคสเทต (Costate equations) คือสมการ (2.66) จำนวน n สมการ และเอ็ดติชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.67) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two point boundary value problems) ส่วน $H = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ เรียกว่าฮามิลตันเนียนของระบบ (Hamiltonian of system)

7.1.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ เมื่อ $l=1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับหัวข้อ (6.3.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.68)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.69)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวตั้งนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f} \end{aligned} \quad (2.70)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J = 0$ ถ้า

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad \text{และ} \quad \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.71)$$

ทำให้เราได้เนคเซสเซอร์รี่คอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\lambda_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.73)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.74)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.72) จำนวน n สมการ และเอ็ดดิชันนอลอีควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.73) จำนวน m สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน m สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.74) ส่วนค่า v_l สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ t_f ในสมการ $s_l \Big|_{t_f} = 0$

7.1.3 อ็อกซิลเลอรีคอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r=1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \quad (2.75)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$\begin{aligned}
L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = & L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\
& + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \\
& + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)
\end{aligned} \quad (2.76)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \right) \Big|_{t_f} \\
& + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} h_{x_j} \Big|_{t_f}
\end{aligned} \quad (2.77)$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ h_{x_j} , h_{u_k} และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j} \Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad \frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad \text{และ} \quad \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0 \quad (2.78)$$

ทำให้เราได้เนccessary conditions (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (2.80)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, \quad j=1, \dots, n \quad (2.81)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรล อินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_l(t)$ และ v_l

สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.79) จำนวน n สมการ และเอดดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.80) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และคอนสเทรนท์อีควชันที่จุดสุดท้าย (End-point constraint equations) จำนวน p สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+p'+p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่ t_0 และโคสสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.81)

7.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (7.1) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.15), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.17), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

7.2.1 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, X_1, \dots, X_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.82)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.83}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.83) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนกเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\lambda_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \tag{2.85}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.86}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเทต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเทตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.84) จำนวน n สมการ และเอตดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.85) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.86) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order differential equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

7.2.2 สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l=1, \dots, p$ ปัญหานี้มีรูปแบบคล้ายกับ (7.1.2) ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.87)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.88)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน และได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\ & + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\ & + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\lambda_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.91)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.92)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.93)$$

ผลเฉลยของสถานะ (States) $x_j(t)$, โคสเทต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สแตตอีควชัน

(State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.90) จำนวน n สมการ และเอตดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.91) จำนวน m สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.92) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะเริ่มต้นที่เวลา t_0 ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.92)

7.2.3 อ็อกซิลเลียร์คอนสเทรนต์ (Auxiliary Constraints)

สเตตวารีเอเบิลและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and control variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r=1, \dots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง t_0 และ t_f ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l=1, \dots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^p v_l s_l(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.94)$$

เมื่อ v_l ก็คือค่าคงตัวลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Constant Lagrange multipliers) และ L' เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (2.95)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable end time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right) \Big|_{t_f} \\
& + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right) \Big|_{t_f} \delta x_j \Big|_{t_f} \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.96}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.96) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนกเซสเซอร์รี่คอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ดังนี้

$$\lambda_j = - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \tag{2.97}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \tag{2.98}$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \tag{2.99}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{l=1}^p v_l \frac{\partial s_l}{\partial t} + L + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \tag{2.100}$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคลสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_r(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคลสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.97) จำนวน n สมการ และเอตดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.98) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนต์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \Big|_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.100) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+p'+1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคลสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.99)

7.2.4 การเคลื่อนที่ด้วยเวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Motion)

ลักษณะของปัญหาแบบนี้ในทางวิศวกรรมถือว่าเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการนำไปใช้ในการหาเวลาน้อยที่สุดในขบวนการทำงานต่างๆ ส่วนมากแล้วการเคลื่อนที่แบบนี้จะทำให้ค่า $L=1$ และ $\Phi=0$ ดังนั้นจากหัวข้อที่ (7.2.3) จะทำให้ได้สมการเงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary conditions) ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \quad (2.101)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k=1, \dots, m \quad (2.102)$$

$$\lambda_j \Big|_{t_f} = \left[\sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right]_{t_f}, j=1, \dots, n \quad (2.103)$$

$$\left[1 + \sum_{i=1}^p v_i \frac{\partial s_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r g_r + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} = 0 \quad (2.104)$$

ผลเฉลยของสเตตวารีเอเบิล (State variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$, ลากรานจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\mu_r(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.15) จำนวน n สมการ, โคสเตตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.101) จำนวน n สมการ, เอ็ดจันนอลอีควชันคือสมการ (2.102) จำนวน m สมการ, คอนสเทรนท์อีควชัน (Constraint equations) $g_r(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน p' สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.104) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+p'+1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.103)

7.3 การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนccessary conditions สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุดในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่า $\bar{u}(t) \in R^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) นี้มีค่าน้อยสุด

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t_f, \bar{x}) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.105)$$

โดยสอดคล้องกับ $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u})$ และ $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ เมื่อ $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว
ต่อไปหากเรากำหนดให้ $\bar{h}_x(t) \in \mathbb{R}^n$ และ $\bar{h}_u(t) \in \mathbb{R}^m$ เป็นค่าที่เพิ่มเข้าไปในฟังก์ชัน จะพบการ
เปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังนี้

$$\Delta J = J[\bar{x} + \bar{h}_x, \bar{u} + \bar{h}_u] - J[\bar{x}, \bar{u}] \quad (2.106)$$

แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{higher-order-terms} \quad (2.107)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \delta J &= \bar{h}_x^T \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} - \bar{\lambda} \right] \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\bar{h}_x^T \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} + \dot{\bar{\lambda}} \right) + \bar{h}_u^T \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \right] dt \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \bar{h}_x^T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} \bar{h}_x \Big|_{t_0}^{t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \bar{h}_x^T & \bar{h}_u^T \end{bmatrix} \tilde{H} \begin{bmatrix} \bar{h}_x \\ \bar{h}_u \end{bmatrix} dt \\ \tilde{H} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u} \partial \bar{x}} \right)^T & \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{u}^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.108)$$

ซึ่งโคสเทตเวกเตอร์ (Costate vector) แสดงอยู่ในรูปของสเกลาร์ฮามิลตัน
เนียนฟังก์ชัน (Scalar Hamiltonian function) $H = L + \bar{\lambda}^T \bar{f}$ และ $\bar{\lambda}(t) \in \mathbb{R}^n$ เรียบร้อยแล้ว

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ เป็นเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) นั่นคือ $\delta J = 0$ ทำให้
สมการ (2.107) เขียนได้เป็น

$$\Delta J = \delta^2 J + \text{higher-order-terms} \quad (2.109)$$

ซึ่งเราจะพบว่าค่าของ $\bar{x}(t)$ และ $\bar{u}(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดเมื่อ $\delta^2 J$ มีค่าเป็นบวกทั้งหมด (Positive definite) นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} > 0; \tilde{H} > 0 \quad (2.110)$$

8. อินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality Constraints)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ที่มีอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) ของการค้นหาค่า $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) มีค่าน้อยสุด (Minimum) ดังสมการนี้คือ

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \Phi(t_f, \bar{x}) \Big|_{t_0} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (2.111)$$

โดยสอดคล้องกับ

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.112)$$

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, p \quad (2.113)$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.114)$$

เมื่อ $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้าย (t_0 และ t_f) ต่างก็ถูกกำหนดไว้ตายตัวแล้ว สมการอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Inequality constraints) คือ $c_i(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $i=1, \dots, p$ จะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (Variable inequality constraints) และสเตตวารีเอเบิลอินอีควอลิตีคอนสเทรนท์ (State variable inequality constraints) และเมื่อใช้วิธีการเติมสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) คือ $s_i(t)$ เข้าไปในคอนสเทรนท์อี่เควชัน (Constraints) จะได้สมการเป็น

$$c_i(\bar{x}, \bar{u}, t) + s_i^2(t) = 0, \quad i=1, \dots, p \quad (2.115)$$

ซึ่งสแลกวาริเอเบิล (Slack variables) ในสมการ (2.115) จะเป็นคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) ตัวใหม่ในปัญหา เมื่อทำการเพิ่มสมการ (2.112) และสมการ (2.115) เข้าไปในสมการฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.111) ด้วยการใช่อัลการานซ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multipliers) $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ และ $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ ทำให้ได้สมการใหม่เป็น

$$J' = \Phi + \int_0^f \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p u_i (c_i - s_i^2) \right) dt \quad (2.116)$$

เมื่อ $\delta J' = 0$ ทำให้เราได้เนccessารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้คือ

$$\dot{x}_i = f_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.117)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.118)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.119)$$

$$0 = 2u_i s_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.120)$$

$$0 = c_i + s_i^2, \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.121)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.122)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.123)$$

ซึ่งสมการ (2.117-2.123) คือลักษณะของบีวีพีพี-ดีเออี (BVP-DAE: Two point boundary value problem involving differential and algebraic equations) เมื่อสมการ (2.117 และ 2.118) คือสมการอนุพันธ์ (Differential equations) ส่วนสมการ (2.119-2.121) คือสมการพีชคณิต (Algebraic equations) และสมการ (2.122 และ 2.123) คือสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สำหรับกรณีที่เป็นกรณิที่เป็นการหาค่าน้อยสุด (Minimum) เราสามารถหาเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ได้ เมื่อ $\delta J''=0$ นั่นก็คือ

$$J'' = \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left(L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{i=1}^p \mu_i c_i \right) dt \quad (2.124)$$

เมื่อ $\delta J''=0$ ทำให้เราได้นเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ดังต่อไปนี้ คือ

$$\dot{x}_i = f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.125)$$

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial L}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \lambda_j - \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \mu_j, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.126)$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial u_i} \lambda_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial c_j}{\partial u_i} \mu_j, \quad i=1,2,\dots,m \quad (2.127)$$

$$0 = \mu_i c_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.128)$$

$$0 \leq \mu_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.129)$$

$$0 \geq c_i, \quad i=1,2,\dots,p \quad (2.130)$$

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.131)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{t_f}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.132)$$

9. สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F=ma=m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1=x_2$ และ $\dot{x}_2=\sum F/m$ ดังสมการ (2.15) คือ

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m,t), i=1,\dots,n$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J=\Phi(t_f,x_1,\dots,x_n) + \int_{t_0}^{t_f} L(t,x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m) dt$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t_f,x_1,\dots,x_n)$ ซึ่งเรียกว่าเทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t,x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L=\sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L=\sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi=t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi=x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินดิเรกต์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของแปรเอเบิล (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลีเออร์ (Lagrange multiplier) v_i, λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J=\Phi + \sum_{i=1}^q v_i s_i + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt$$

$$J'=\Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{i=1}^q v_i s_i$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดทอนที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มีงานวิจัยของผู้อื่นที่ได้ทำการศึกษามาก่อนที่ได้มีการนำเอาวิธีการหาค่าของความโน้มถ่วงที่ต่ำสุดโดยการพิจารณาโดยตรง (Minimum direct jerk) มาใช้ที่มีลักษณะใกล้เคียงและเกี่ยวข้องกับ การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ดังต่อไปนี้

Sunil K. Agrawal และ พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว (2547) ศึกษาเรื่องการออกแบบหุ่นยนต์ที่มีความเหมาะสมสูงสุดกับการเคลื่อนที่แบบซ้ำๆ โดยนำเสนอถึงวิธีการในการหาค่าตัวแปรต่างๆ ให้ได้ผลถึงความเหมาะสมสูงสุดระหว่างการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งในระยะเวลาที่กำหนด วิธีการที่นำเสนอเป็นวิธีการใหม่ที่ไม่มีการคิดค้นมาก่อนและจะไม่มีการใช้ตัวแปรที่ชื่อว่าตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multiplier) ตัวอย่างของระบบหุ่นยนต์ได้ถูกนำเสนอในบทความนี้ยังแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำมาใช้คำนวณหาค่าตอบได้อย่างรวดเร็วมาก ทำให้ได้ผลที่ดีอีกประการหนึ่งนั่นคือ ค่าตัวแปรของระบบหุ่นยนต์จะสามารถถูกปรับเปลี่ยนในขณะที่ หุ่นยนต์กำลังเคลื่อนที่อยู่ได้

Sunil K. Agrawal, พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว และ B.C. Fabien (2547) ศึกษาการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่คงที่แบบทางตรงและทางอ้อมโดยอาศัยการเปลี่ยนรูป โดยทำการวิเคราะห์และหาค่าตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงและสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ในระยะเวลาที่กำหนด จากทฤษฎีที่มีอยู่เดิมคำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่และสมการควบคุมเป็นจริงในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง แต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอถึงวิธีการใหม่โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสเตตและควบคุม ไปใช้ในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ ผลที่ได้สามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อม มาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี ผู้เขียนได้เปรียบเทียบถึงข้อดีและข้อเสียของการคำนวณไว้พร้อมกับตัวอย่างของระบบการเคลื่อนที่

พันธุ์ ทวีวัชร วีระแก้ว และ Sunil K. Agrawal (2547) ศึกษาการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่มีขอบเขตด้วยฟังก์ชันเพนัลตี โดยกล่าวถึงปัญหาของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่มีขอบเขต ทั้งที่เป็นสมการและอสมการ วิธีการใหม่นี้อาศัยหลักการในการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสแตทและตัวแปรควบคุม เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดได้ ถึงกระนั้น ทั้งสมการและอสมการที่เป็นขอบเขต ไม่สามารถแทนค่าในฟังก์ชันดังกล่าวได้ จึงต้องอาศัยฟังก์ชัน เพนัลตี ซึ่งเป็นที่นิยมในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะกับขอบเขตที่เป็นอสมการสุดท้ายในภาพรวมผู้เขียนได้กล่าวถึงข้อเปรียบเทียบด้วยการนำเสนอตัวอย่างในด้านกลศาสตร์วิศวกรรม

พันธุ์ ทวีวัชร วีระแก้ว สุพจน์ ศรีนุตาพงษ์และพันธุ์ เศรษฐพงษ์ มะลิสวรรณ (2547) ศึกษาการควบคุมแบบย้อนกลับข้างเคียงของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปอันดับสูงสำหรับการประยุกต์ใช้กับระบบหุ่นยนต์ โดยกล่าวถึงทฤษฎีที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น เปลี่ยนรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ จากสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ไปเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง ได้ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายและมีข้อได้เปรียบในการควบคุมแบบเวลาจริง ดังนั้นในบทความผู้ศึกษาจึงได้นำเสนอถึงการค้นคว้าอย่างต่อเนื่องถึงกฎการควบคุมแบบย้อนกลับข้างเคียง ที่จะสามารถถูกนำมาใช้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสูงได้

พันธุ์ ทวีวัชร วีระแก้ว (2547) ศึกษาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นอย่างเหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีค่าขอบเขตสองตำแหน่งในสมการอันดับที่สี่ สูตรสมการหาค่าตอบแบบเวกซ์เรชิวอล โดยบทความดังกล่าวได้ถูกนำเสนอด้วยระบบ สปริง มวลและตัวหน่วง ที่สามารถถูกจัดให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับที่สี่ได้ เนื่องจากสมการที่มีชื่อว่าสมการโคสเทท (costate equations) ในทฤษฎีของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดสามารถถูกกำจัดออกจากระบบได้ สมการอนุพันธ์อันดับที่สี่นี้จะอยู่ในรูปของสมการที่สามารถถูกแก้ปัญหาหาค่าตอบได้ด้วยวิธีเวกซ์เรชิวอล (weight residual) เช่นวิธีการกาลเลอร์กิน (Galerkin methods) วิธีการที่แนะนำเสนอนี้มีข้อได้เปรียบกว่าวิธีเดิมที่นักวิจัยนิยมใช้แก้ปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดที่มีชื่อว่ามัลติเปิ้ลชู้ตติ้ง (multiple shooting) ในเชิงของการคำนวณในเวลาที่เป็นจริง

พันธุ์ ทวีวัชร วีระแก้ว และ Sunil K. Agrawal (2547) เสนอวิธีการใหม่ในการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง โดยกล่าวถึงการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับที่หนึ่ง โดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางวิศวกรรมเครื่องกลจะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอเนื่องจากเป็นผลมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน โดยในบทความนี้ได้แสดงข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจนในด้านการคำนวณ ระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูงและสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งโดยการสร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาจากวิธีการทางตรงและทางอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่า ไม่ว่าสมการการ

เคลื่อนที่จะอยู่ในรูปแบบใด ก็จะสามารถที่จะใช้ซอฟต์แวร์เดียวกันภายใต้สภาวะเดียวกันหาคำตอบ เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

พันตรี ทวีวัชร วีระแก้ว (2547) เสนอการแก้ปัญหาเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงและหลักการพัฒนาหาค่าต่ำสุด โดยนำเสนอถึงทฤษฎีที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่งในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของสมการอนุพันธ์อันดับสูงมีชื่อว่า ทฤษฎีความต่ำสุด ทฤษฎีดังกล่าวที่นำเสนอถูกพิสูจน์จากสองวิธีการซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายคือทฤษฎีฮาร์มิลตัน-จาโคบี ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาทฤษฎีของพอนทรียากินและทฤษฎีความต่ำสุดที่มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งและสนับสนุนทฤษฎีต่างๆให้กับระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสูง และวาริเอชันแคลคูลัส ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ตรวจสอบทฤษฎีของ พอนทรียากินและทฤษฎีความต่ำสุดอีกครั้งหนึ่งซึ่งทั้งสองวิธีให้คำตอบตรงกัน และได้นำเสนอพร้อมตัวอย่างเพื่อแสดงความสอดคล้องกัน

สรุป จากการศึกษาเอกสาร โครงการงาน งานที่เกี่ยวข้องทำให้ทราบว่ามีการพยายามที่จะหาวิธีการในการแก้ปัญหาสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงให้มีความถูกต้องแม่นยำและง่ายต่อการคำนวณวิธีการหนึ่งที่ทำวิจัยสนใจคือการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยการพิจารณาหาค่าความนิ่มนวลสูงสุดโดยตรง(Minimum Direct Jerk) แก้ปัญหาสมการอนุพันธ์อันดับสูง ในการหาคำตอบซึ่งวิธีการนี้ยังไม่มีใครได้ทำการศึกษามาก่อน

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดปัญหา (Problem Statement)
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)
3. กำหนดสมการระดับชั้นความเสถียรอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง
4. กำหนดสมการระดับชั้นความเสถียรอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง
5. ปัญหาความหิวมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง สำหรับสมการระดับชั้นความเสถียรอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง โดยมีภาระกระทำกับมวลทุกก้อนและทำการวิเคราะห์ระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบสมการค่าหิวมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง
6. ปัญหาความหิวมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง สำหรับสมการระดับชั้นความเสถียรอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง โดยมีภาระกระทำกับมวลทุกก้อนและทำการวิเคราะห์ระบบสมการให้อยู่ในรูปแบบสมการค่าหิวมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง

การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F=ma=m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1=x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.15) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i=1, \dots, n \quad (3.1)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States, Control Input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาที่ทำการกำหนดขึ้นนี้เพื่อหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการความหิวมวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่กำหนดเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยกำหนดให้ทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขขอบเขตสำหรับแก้ปัญหา โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f)=x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad (3.2)$$

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของความถี่มวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างกันดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ อนุพันธ์อันดับที่สามที่เทียบกับเวลา หรือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control Input (u) ดังนั้น ความถี่มวลสามารถถูกเขียนในรูปของตัวแปรใหม่ได้ดังนี้

$$\text{Jerk} = \ddot{x} \propto \dot{u} \quad (3.3)$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \quad (3.4)$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n+m}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, t); \quad i=1, \dots, n+m \quad (3.5)$$

ในที่นี้ \tilde{u} คือค่าตัวแปร Control Input ของระบบพลศาสตร์ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความถี่มวลสูงสุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i^2 dt \quad (3.6)$$

J เป็น Cost Function ของความถี่มวล (Jerks)

เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)

ในการศึกษานิวตันนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations) เพื่อหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด โดยการกำหนดเงื่อนไขของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์นั้นขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงานให้ฟังก์ชันนอลเป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \varphi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.7)$$

ซึ่ง

$$\varphi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \quad (3.8)$$

เป็นค่าตัวเลขวัตถุประสงค์หลักซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และ สภาวะสุดท้าย (Final States) ของระบบและ

$$\int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.9)$$

เป็นค่าส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของสแตตและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables)

ในการหาค่าความเหมาะสมของฟังก์ชันในระบบพลศาสตร์ได้เพิ่มตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) เข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) จะได้สมการดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3.10)$$

ซึ่ง

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_i) \quad (3.11)$$

โดยที่ $\lambda_i(t)$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้น สมการ(3.10) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} \left[L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [\dot{x}_i - f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)] \right] dt \quad (3.12)$$

การเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล ใน การศึกษานี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and End Points) ซึ่งเป็น ฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น t_0 และเวลาสุดท้าย t_f รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable Functions) เป็นไปตามสภาวะ ขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u(t_0) = u_0$ and $u(t_f) = u_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_i \leq t \leq t_f$

ให้ฟังก์ชัน $L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ แสดงฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (3.13)$$

ถ้าให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{x_j}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{u_k}(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_{x_j}(t_0) = h_{x_j}(t_f) = h_{u_k}(t_0) = h_{u_k}(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x_1 + h_{x_1}, \dots, x_n + h_{x_n}, u_1 + h_{u_1}, \dots, u_m + h_{u_m}] - J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \quad (3.14)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[L \left(t, x_1 + h_{x_1}, \dots, x_n + h_{x_n}, \dot{x}_1 + \dot{h}_{x_1}, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_{x_n}, u_1 + h_{u_1}, \dots, u_m + h_{u_m}, \dot{u}_1 + \dot{h}_{u_1}, \dots, \dot{u}_m + \dot{h}_{u_m} \right) - L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) \right] dt \quad (3.15)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher Order Terms) ทั้งสำหรับเงื่อนไขขอบ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\ & + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k} \Big|_{t_i} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j} \Big|_{t_i} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $h_{x_j}|_{t_f} = h_{x_j}|_{t_i} = 0$ ทำให้เขียนเทอมต่างๆของ สมการ (3.16) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad (3.17)$$

และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (3.18)$$

สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$.

สมการ(3.17) และ สมการ(3.18) เป็นเนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่จะนำไปแก้ปัญหาร่วมกับตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$, และ Control Inputs $u_k(t)$ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้หลายทาง สำหรับ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i=1, \dots, n \quad (3.19)$$

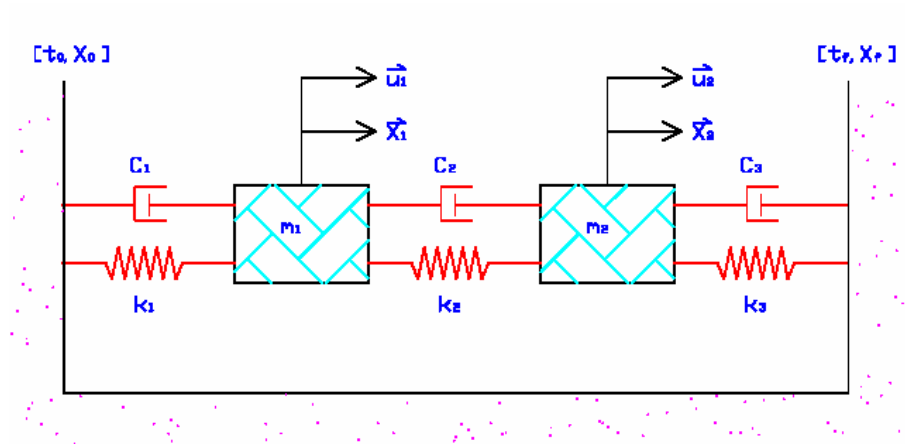
เนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (necessary conditions) ของสมการ(3.19)

$$\lambda_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, n \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k=1, \dots, m \quad (3.21)$$

จาก เนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และ สมการพีชคณิต (Differential and Algebraic Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two Point Boundary Valued Problem)

กำหนดสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง



ภาพประกอบ 1 ระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง

ในงานศึกษาวิจัยนี้สำหรับการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบมวล สปริงและตัวหน่วงซึ่งมีสมการดังนี้

$$A\dot{x}=Bu \quad (3.22)$$

จัดรูปให้อยู่ในเมตริกซ์ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

จัดรูปเมตริกซ์ของ M , C และ K เป็น

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

จากสมการ(3.22) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

กรณีที่ 1 $m_1=2.0, m_2=1.0, c_1=c_2=c_3=1.0, k_1=k_2=k_3=1.0$

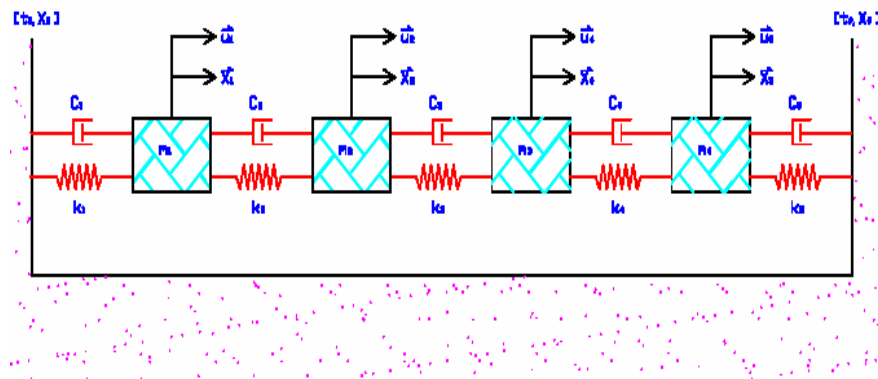
กรณีที่ 2 $m_1=2.0, m_2=1.0, c_1=1.0, c_2=2.0, c_3=3.0, k_1=k_2=k_3=1.0$

เงื่อนไขขอบเขต(boundary conditions)

$x(t_0)=(0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ และ $x(t_f)=(1 \ 1 \ 0 \ 0)^T$

ที่ $t_0=0$ และ $t_f=1.0$

กำหนดสมการระดับชั้นความเสียดันต์สี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง



ภาพประกอบ 2 ระบบระดับชั้นความเสียดันต์สี่ของระบบมวล สปริงและตัวหน่วง

ในงานศึกษาวิจัยนี้สำหรับการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของระบบระดับชั้นความเสียดันต์สี่ของระบบมวล สปริงและตัวหน่วงซึ่งมีสมการดังนี้

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = U \quad (3.28)$$

เมื่อ M, C และ K เป็นเมตริกซ์ของ มวล ตัวหน่วงและค่าคงที่ของสปริง และ $U=(0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ จัดรูปให้อยู่ในเมตริกซ์ เป็น

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4+c_5 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

สำหรับ 4 สมการอนุพันธ์อันดับสอง ในสมการสามารถเขียนอยู่ในรูป 8 สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในรูปของตัวแปร X ซึ่ง เมตริกซ์ A และ B ของระบบเป็น

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

จากสมการ(3.23) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

กรณีที่ 1 $m_1=m_3=2.0, m_2=m_4=1.0, c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=1.0, k_1=k_2=k_3=1.0, k_4=k_5=2.0$

กรณีที่ 2 $m_1=m_3=2.0, m_2=m_4=1.0, c_1=1, c_2=2, c_3=3, c_4=4, c_5=5,$

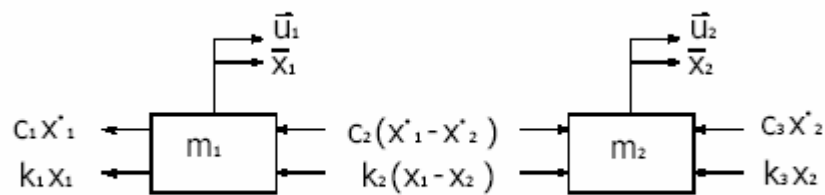
$k_1=k_2=k_3=1.0, k_4=k_5=2.0$

เงื่อนไขขอบเขต(boundary conditions)

$$x(t_0)=(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \text{ และ } x(t_f)=(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$\text{ที่ } t_0=0 \text{ และ } t_f=1.0$$

ปัญหาความหิวมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง สำหรับสมการระดับชั้นความเสถียรอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง



ภาพประกอบ 3 แรงกระทำที่มวลแต่ละก้อนของระบบระดับชั้นความเสถียรอันดับสองของระบบมวลสปริงและตัวหน่วง

1. กรณีตัวหน่วงมีค่าคงที่ ($c_1=c_2$) ค่าตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS

$$\text{จากรูปกำหนดให้มีค่า} \quad c_1=1 \quad k_1=1 \quad m_1=2$$

$$c_2=1 \quad k_2=1 \quad m_2=1$$

$$c_3=1 \quad k_3=1$$

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $x_1 > x_2$

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum F=ma \tag{3.34}$$

พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\overset{+}{\longrightarrow} \sum F=m_1\ddot{x}_1 \tag{3.35}$$

$$u_1+c_1\dot{x}_1-c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1x_1-k_2(x_1-x_2)=m_1\ddot{x}_1 \tag{3.36}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} [u_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \quad (3.37)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [u_1 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + x_2] \quad (3.38)$$

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [u_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_2] \quad (3.39)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.40)$$

$$u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.41)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2] \quad (3.42)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_2 = u_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + x_1 - 2x_2 \quad (3.43)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 \quad (3.44)$$

จากสมการ Minimum direct Jerk = $\int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_2^1 + \ddot{x}_2^2] dt$

$$= \int_0^1 \left[(0.5 [\dot{u}_1 + \ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 + (\dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)^2 \right] dt \quad (3.45)$$

2. กรณีตัวหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ ($c_1 < c_2$) ค่าตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS

จากรูปกำหนดให้มีค่า	$c_1=1$	$k_1=1$	$m_1=2$
	$c_2=2$	$k_2=1$	$m_2=1$
	$c_3=3$	$k_3=1$	

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $x_1 > x_2$

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum F=ma \quad (3.46)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F=m_1\ddot{x}_1 \quad (3.47)$$

$$u_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 - k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \quad (3.48)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} [u_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 - k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \quad (3.49)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_1 = 0.5[u_1 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + x_2] \quad (3.50)$$

$$\ddot{x}_1 = 0.5[u_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_2] \quad (3.51)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F=m_2\ddot{x}_2 \quad (3.52)$$

$$u_2 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3\dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2) - k_3x_2 = m_2\ddot{x}_2 \quad (3.53)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2] \tag{3.54}$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

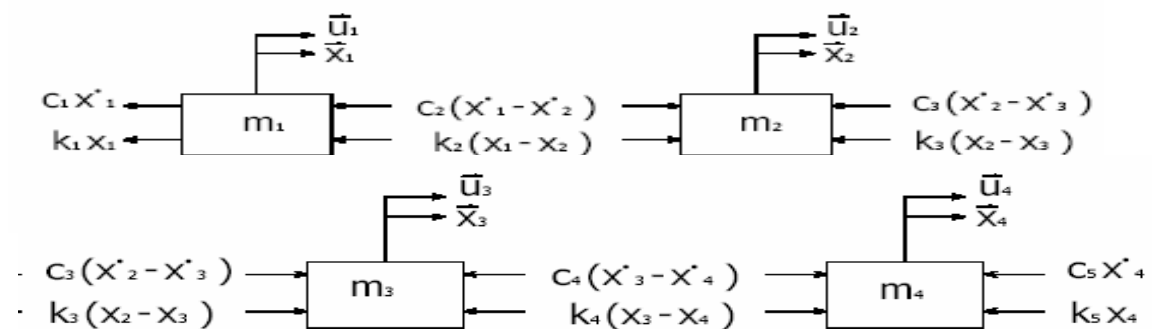
$$\ddot{x}_2 = u_2 + \dot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2x_2 \tag{3.55}$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 \tag{3.56}$$

จากสมการ Minimum direct Jerk = $\int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_2^1 + \ddot{x}_2^2] dt$

$$= \int_0^1 \left[(0.5[\dot{u}_1 + \ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 + (\dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)^2 \right] dt \tag{3.57}$$

ปัญหาความหืดมวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง สำหรับสมการระดับชั้นความเสริอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง



ภาพประกอบ 4 แรงกระทำที่มวลแต่ละก้อนของระบบระดับชั้นความเสริอันดับสี่ของระบบมวล สปริง และตัวหน่วง

1. กรณีตัวหน่วงมีค่าคงที่ ($c_1=c_2=c_3=c_4=c_5$) ค่าตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS

กำหนดให้

$c_1=1$	$k_1=1$	$m_1=2$
$c_2=1$	$k_2=1$	$m_2=1$
$c_3=1$	$k_3=1$	$m_3=2$
$c_4=1$	$k_4=2$	$m_4=1$
$c_5=1$	$k_5=2$	

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$
 เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)
 พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.58)$$

$$u_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.59)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} [u_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \quad (3.60)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [u_1 - \dot{x}_2 + x_2] \quad (3.61)$$

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [\dot{u}_1 + \ddot{x}_2 + \dot{x}_2] \quad (3.62)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.63)$$

$$u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_3 (x_3 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.64)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_3 (x_3 - x_2)] \quad (3.65)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_2 = u_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + x_1 - 2x_2 + \dot{x}_3 + x_3 \quad (3.66)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \dot{x}_3 \quad (3.67)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 3 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_3 \ddot{x}_3 \quad (3.68)$$

$$u_3 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 (x_2 - x_3) - c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) - k_4 (x_3 - x_4) = m_3 \ddot{x}_3 \quad (3.69)$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{m_3} [u_3 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 (x_2 - x_3) - c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) - k_4 (x_3 - x_4)] \quad (3.70)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_3 = 0.5 [u_3 + \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + x_2 - 2x_3 + \dot{x}_4 + x_4] \quad (3.71)$$

$$\dddot{x}_3 = 0.5 [\dot{u}_3 + \ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + \ddot{x}_4 + \dot{x}_4] \quad (3.72)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 4 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_4 \ddot{x}_4 \quad (3.73)$$

$$u_4 + c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_4 (x_3 - x_4) - c_5 \dot{x}_4 - k_5 x_4 = m_4 \ddot{x}_4 \quad (3.74)$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{1}{m_4} [u_4 + c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_4 (x_3 - x_4) - c_5 \dot{x}_4 - k_5 x_4] \quad (3.75)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_4 = u_4 + \dot{x}_3 - 2\dot{x}_4 + x_3 - 2x_4 \quad (3.76)$$

$$\dddot{x}_4 = \dot{u}_4 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x}_4 + \dot{x}_3 - 2\dot{x}_4 \quad (3.77)$$

จากสมการ Minimum direct Jerk = $\int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2 + \ddot{x}_4^2] dt$

$$= \int_0^1 \left[\begin{aligned} &(0.5[\dot{u}_1 - \ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 \\ &+ (\dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \dot{x}_3)^2 \\ &+ (0.5[\dot{u}_3 + \ddot{x}_2 - 2\ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + \ddot{x}_4 + \dot{x}_4])^2 \\ &+ (\dot{u}_4 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x}_4 + \dot{x}_3 - 2\dot{x}_4)^2 \end{aligned} \right] dt \quad (3.78)$$

2 กรณีตัวหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ ($c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$) ค่าตัวแปรก็ใช้หน่วยของ

MKS

กำหนดให้

$c_1=1$	$k_1=1$	$m_1=2$
$c_2=2$	$k_2=1$	$m_2=1$
$c_3=3$	$k_3=1$	$m_3=2$
$c_4=4$	$k_4=2$	$m_4=1$
$c_5=5$	$k_5=2$	

โดยมีเงื่อนไขการเคลื่อนที่คือ $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

พิจารณามวลก้อนที่ 1 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.79)$$

$$u_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.80)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} [u_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 - k_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \quad (3.81)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [u_1 - \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 + x_2] \quad (3.82)$$

$$\ddot{x}_1 = 0.5 [u_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_2] \quad (3.83)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 2 จะได้สมการดังนี้

$$\xrightarrow{+} \sum F = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.84)$$

$$u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_3 (x_3 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.85)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} [u_2 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2 (x_1 - x_2) - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_3 (x_3 - x_2)] \quad (3.86)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_2 = u_2 + 2\dot{x}_1 - 5\dot{x}_2 + x_1 - 2x_2 + 3\dot{x}_3 + x_3 \quad (3.87)$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{u}_2 + 2\ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 + \dot{x}_3 \quad (3.88)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 3 จะได้สมการดังนี้

$$\overset{+}{\longrightarrow} \sum F = m_3 \ddot{x}_3 \quad (3.89)$$

$$u_3 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 (x_2 - x_3) - c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) - k_4 (x_3 - x_4) = m_3 \ddot{x}_3 \quad (3.90)$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{1}{m_3} [u_3 + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 (x_2 - x_3) - c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) - k_4 (x_3 - x_4)] \quad (3.91)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_3 = 0.5 [u_3 + 3\dot{x}_2 - 7\dot{x}_3 + x_2 - 3x_3 + 4\dot{x}_4 + 2x_4] \quad (3.92)$$

$$\ddot{x}_3 = 0.5 [\dot{u}_3 + 3\ddot{x}_2 - 7\ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 3\dot{x}_3 + 4\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_4] \quad (3.93)$$

พิจารณามวลก้อนที่ 4 จะได้สมการดังนี้

$$\overset{+}{\longrightarrow} \sum F = m_4 \ddot{x}_4 \quad (3.94)$$

$$u_4 + c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_4 (x_3 - x_4) - c_5 \dot{x}_4 - k_5 x_4 = m_4 \ddot{x}_4 \quad (3.95)$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{1}{m_4} [u_4 + c_4 (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + k_4 (x_3 - x_4) - c_5 \dot{x}_4 - k_5 x_4] \quad (3.96)$$

แทนค่าเงื่อนไข c, k และ m แล้วหาอนุพันธ์อันดับสาม จะได้

$$\ddot{x}_4 = u_4 + 4\dot{x}_3 - 9\dot{x}_4 + 2x_3 - 4x_4 \quad (3.97)$$

$$\ddot{x}_4 = \dot{u}_4 + 4\ddot{x}_3 - 9\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_3 - 4\dot{x}_4 \quad (3.98)$$

จากสมการ Minimum direct Jerk = $\int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2 + \ddot{x}_4^2] dt$

$$= \int_0^1 \left[\begin{aligned} & (0.5[\dot{u}_1 - \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 \\ & + (\dot{u}_2 + 2\ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 + \dot{x}_3)^2 \\ & + (0.5[\dot{u}_3 + 3\ddot{x}_2 - 7\ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 3\dot{x}_3 + 4\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_4])^2 \\ & + (\dot{u}_4 + 4\ddot{x}_3 - 9\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_3 - 4\dot{x}_4)^2 \end{aligned} \right] dt \quad (3.99)$$

จากสมการที่ (3.45), (3.57), (3.78) และ (3.99) นำไปทำการวิเคราะห์และหาคำตอบของสมการในบทที่ 4 ต่อไป

บทที่ 4

ผลการวิจัย

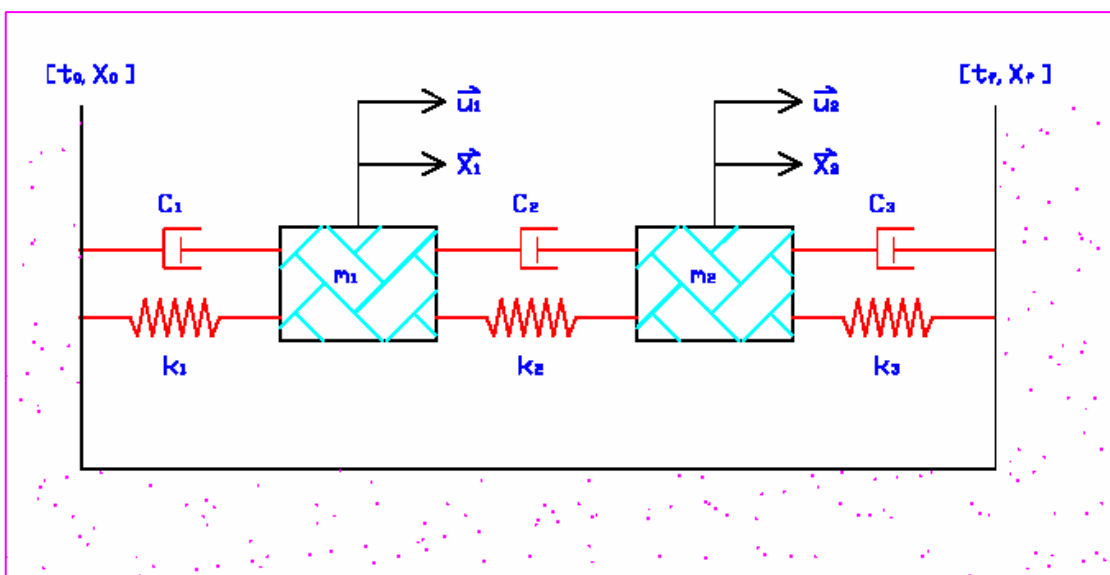
ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอหัวข้อต่อไปนี้

1. ผลการวิจัยปัญหาความถี่มีนวลสูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงโดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ
2. ผลการวิจัยปัญหาความถี่มีนวลสูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงโดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ

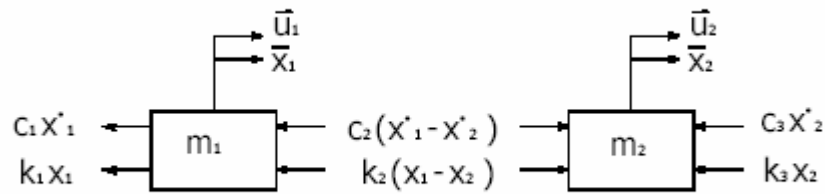
ผลการวิจัย

ผลการวิจัยนี้ได้ทำการหาค่าความถี่มีนวลสูงสุดโดยการพิจารณาโดยตรง (Minimum Direct Jerk) ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง (Higher Order Derivative) โดยกำหนดให้ระบบการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น (Linear of Dynamic Systems) ของระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสอง (Two Degree-of-Freedom) และระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสี่ (Four Degree-of-Freedom) ของสปริง มวล และ ตัวหน่วง (Spring-Mass-Damper) ที่มีภาระกระทำตลอดทั้งระบบ (Fully Actuated System) ดังที่จะนำมาสู่ผลการวิจัยต่อไปนี้

1. ผลการวิจัยปัญหาความถี่มีนวลสูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความเสรีอันดับสองของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงโดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ



ภาพประกอบ 5 ระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสองของ สปริง มวลและตัวหน่วง



ภาพประกอบ 6 แสดงแรงที่กระทำต่อมวลแต่ละก้อนระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสอง

1.1 กรณีตัวหน่วงมีค่าคงที่ ($c_1=c_2$) จากสมการ (3.45) จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion: EOM) ของระบบระดับชั้นความเสรีอันดับสองของ สปริง มวลและตัวหน่วง ดังนี้

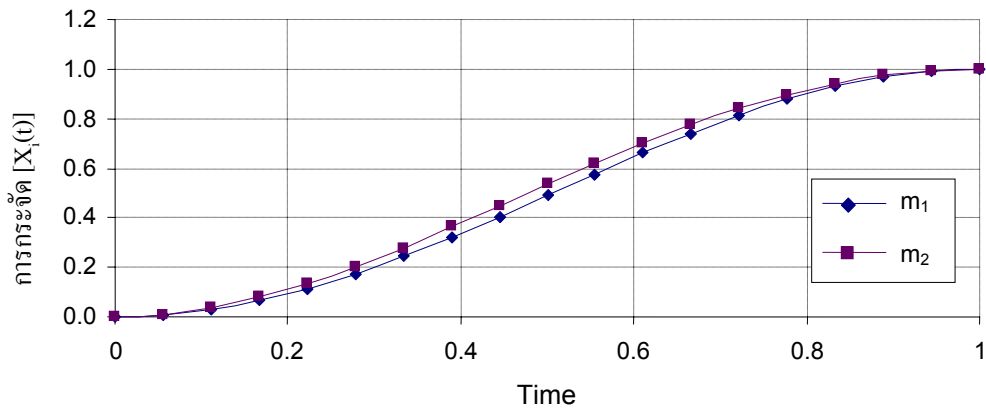
$$\begin{aligned} \text{ค่าความหนี้มวลสูงสุด} &= \int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2] dt \\ &= \int_0^1 \left[(0.5[\dot{u}_1 + \ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 + (\dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)^2 \right] dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

กำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f)=x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

เงื่อนไขขอบเขต

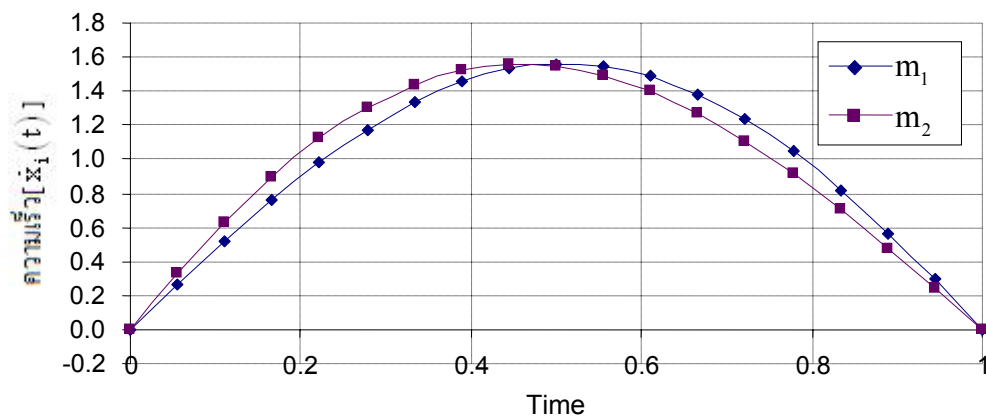
$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_1 &= 1 \\ x_1(0) &= 0 & x_1(1) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 & x_2(1) &= 1 \\ \dot{x}_1(0) &= 0 & \dot{x}_1(1) &= 0 \\ \dot{x}_2(0) &= 0 & \dot{x}_2(1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ในขั้นตอนต่อไปจึงจะนำสมการ (4.1) และ (4.2) ไปแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ที่พัฒนาซอฟต์แวร์โดย ทวีวัชร วีระแก้ว ซึ่งจะได้ผลดังต่อไปนี้



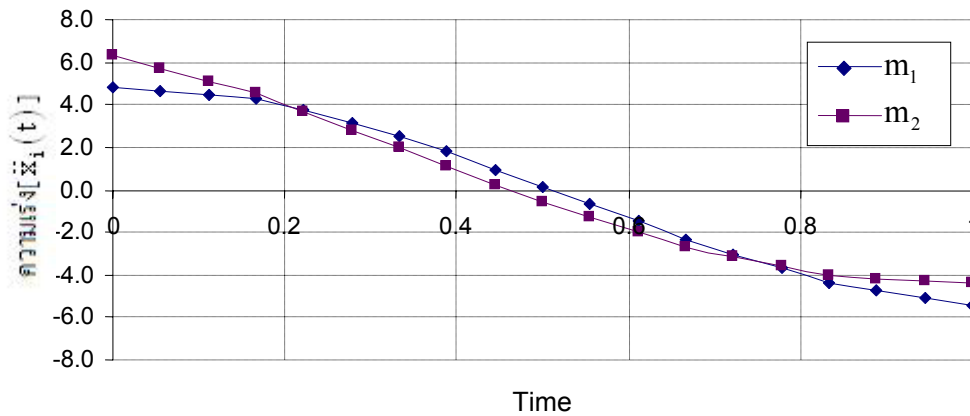
ภาพประกอบ 7 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์สองที่ค่า $c_1 = c_2$

จากภาพประกอบ 7 พบว่า m_1 และ m_2 ถูกกระทำให้เคลื่อนที่จากจุด $t_0=0$ ไปยัง $t_f=1$ ด้วยแรงกระทำ $[u_1(t)]$ และ $[u_2(t)]$ ผลที่ได้คือค่าการกระจัดของ m_2 มีค่ามากกว่า m_1 ตลอดระยะเวลา $0 < t < 1$



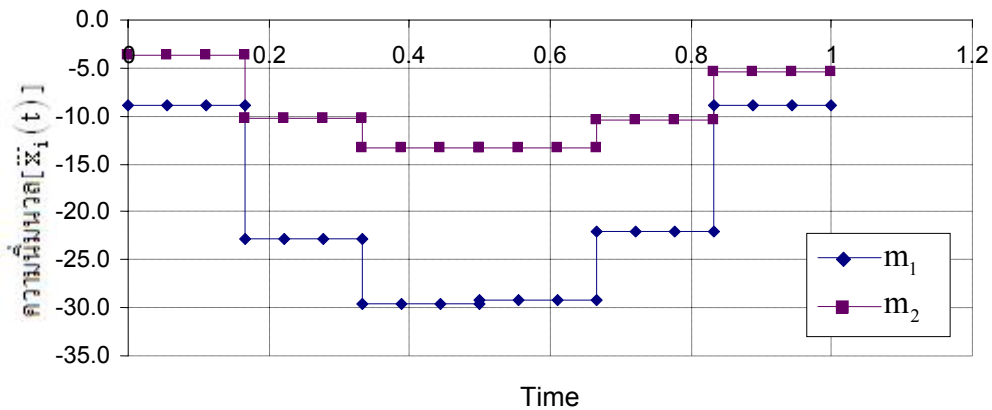
ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงความเร็ว $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์สองที่ค่า $c_1 = c_2$

จากภาพประกอบ 8 พบว่าค่าความเร็วของ m_2 สูงกว่า m_1 ในช่วง $0 < t < 0.43$ จนกระทั่งค่าความเร็วเท่ากันและหลังจากนั้นค่าความเร็วลดลงโดยที่ค่าของ m_2 ต่ำกว่า m_1 ในช่วง $0.43 < t < 1$ และเป็นศูนย์ทั้งคู่ เมื่อ $t_f=1$



ภาพประกอบ 9 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์สองที่ค่า $c_1 = c_2$

จากภาพประกอบ 9 พบว่าค่าความเร่งของ m_2 และ m_1 ลดลงตลอดช่วง $0 < t < 1$ หรือเกิดค่าความหน่วง และมีค่าความหน่วงมากที่สุดที่ $t_f = 1$ โดย m_1 มีค่าความหน่วงมากกว่า m_2



ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงความหนึ่มนวล $[\ddot{\ddot{x}}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์สองที่ค่า $c_1 = c_2$

จากภาพประกอบ 10 พบว่าค่าความหนึ่มนวลของ m_1 มีค่าความหนึ่มนวลต่ำกว่า m_2 แต่ m_1 เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าความหนึ่มนวลมากกว่า m_2

1.2 กรณีตัวหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ ($c_1 < c_2$) จากสมการ (3.57) จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion: EOM) ของระบบ ระดับชั้นความเสียดันต์สองของสปริง มวล และตัวหน่วง ดังนี้

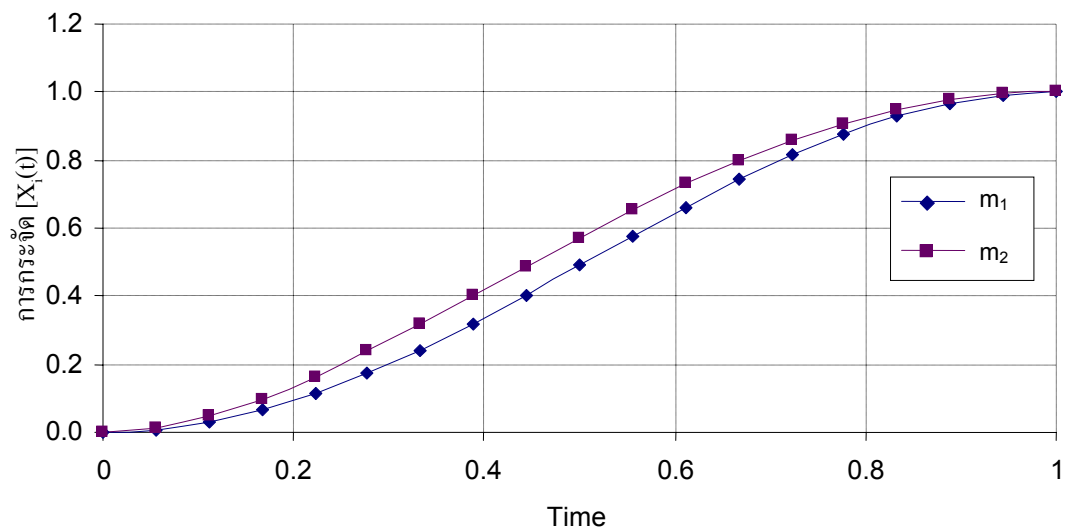
$$\begin{aligned}
 \text{ค่าความหิ้นมวลสูงสุด} &= \int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2] dt \\
 &= \int_0^1 \left[(0.5[\dot{u}_1 - \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\dot{u}_2 + 2\ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)^2 \right] dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f)=x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

เงื่อนไขขอบเขต

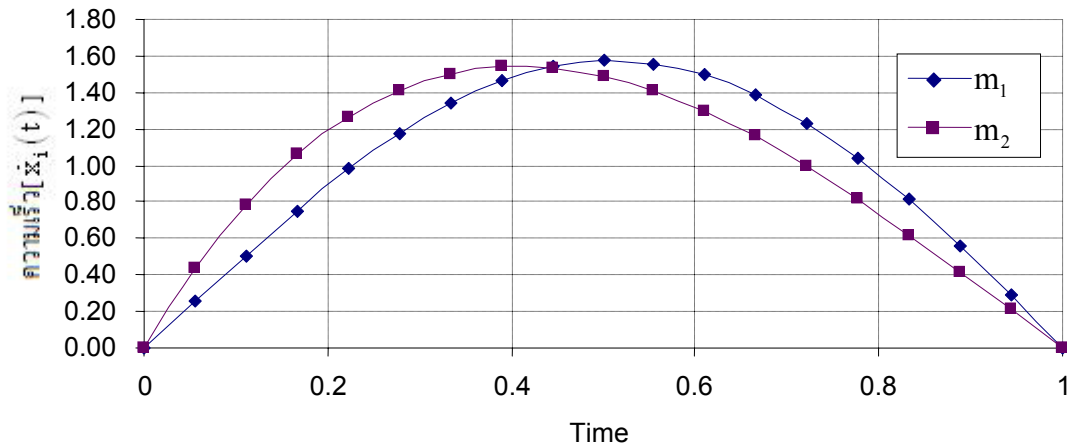
$$\begin{array}{ll}
 t_0 = 0 & t_1 = 1 \\
 x_1(0) = 0 & x_1(1) = 1 \\
 x_2(0) = 0 & x_2(1) = 1 \\
 \dot{x}_1(0) = 0 & \dot{x}_1(1) = 0 \\
 \dot{x}_2(0) = 0 & \dot{x}_2(1) = 0
 \end{array} \tag{4.4}$$

ในขั้นตอนต่อไปจึงจะนำสมการ (4.3) และ (4.4) ไปแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม Linear Programming ที่พัฒนาซอฟต์แวร์โดย ทวีวัชร วีระเกล้า ซึ่งจะได้ผลดังต่อไปนี้



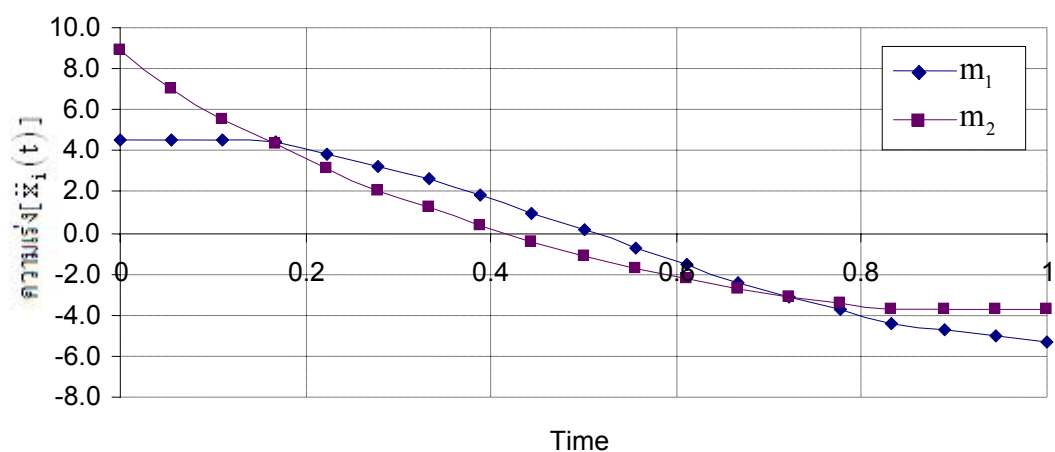
ภาพประกอบ 11 กราฟแสดงการกระจัด $[x_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสองที่ค่า $c_1 < c_2$

จากภาพประกอบ 11 พบว่า m_1 และ m_2 ถูกกระทำให้เคลื่อนที่จากจุด $t_0=0$ ไปยัง $t_f=1$ ด้วยแรงกระทำ $[u_1(t)]$ และ $[u_2(t)]$ ผลที่ได้คือค่าการกระจัดของ m_2 มีค่ามากกว่า m_1 ตลอดระยะเวลา $0 < t < 1$



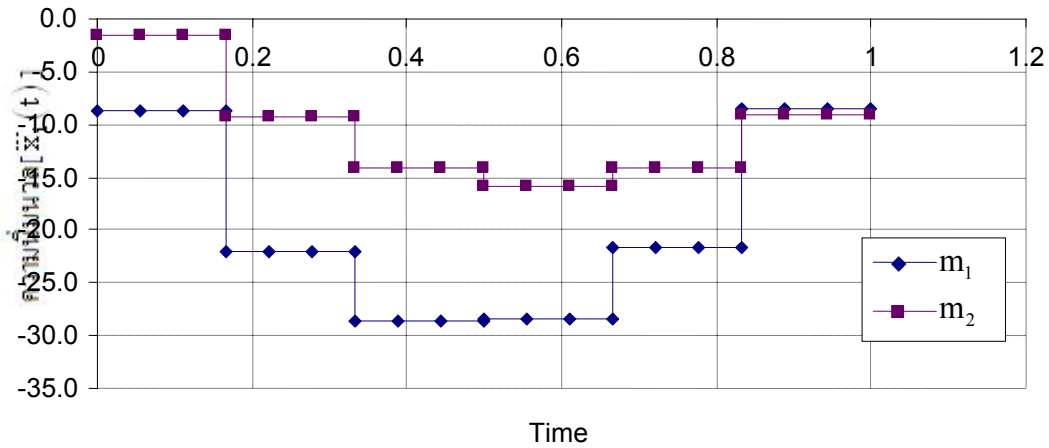
ภาพประกอบ 12 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันดับสองที่ค่า $c_1 < c_2$

จากภาพประกอบ 12 พบว่าค่าความเร็วของ m_2 สูงกว่า m_1 ในช่วง $0 < t < 0.43$ จนกระทั่งค่าความเร็วเท่ากันและหลังจากนั้นค่าความเร็วลดลงโดยที่ค่าของ m_2 ต่ำกว่า m_1 ในช่วง $0.43 < t < 1$ และเป็นศูนย์ทั้งคู่ เมื่อ $t_f=1$



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันดับสองที่ค่า $c_1 < c_2$

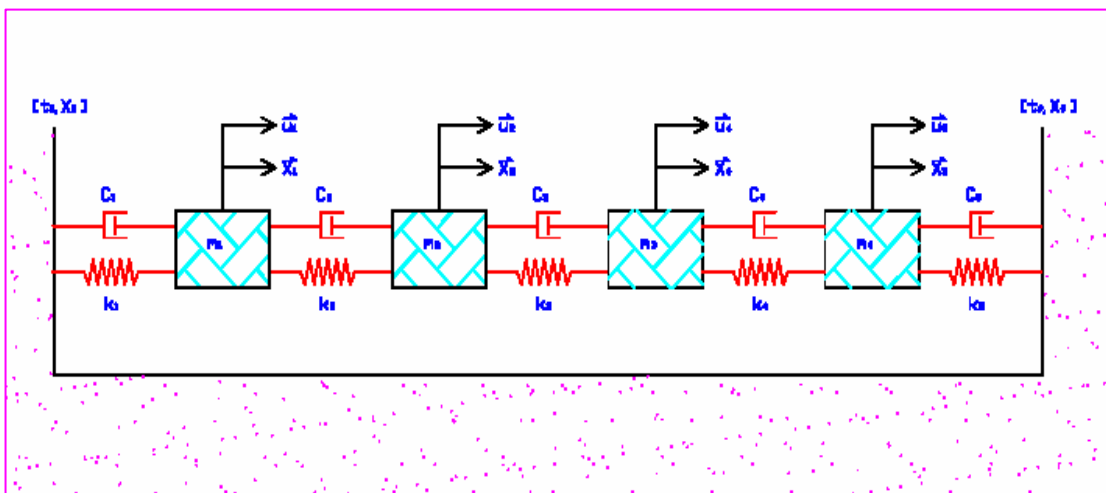
จากภาพประกอบ 13 พบว่าค่าความเร่งของ m_2 และ m_1 ลดลงตลอดช่วง $0 < t < 1$ หรือเกิดค่าความหน่วง และมีค่าความหน่วงมากที่สุดที่ $t_f=1$ โดย m_1 มีค่าความหน่วงมากกว่า m_2



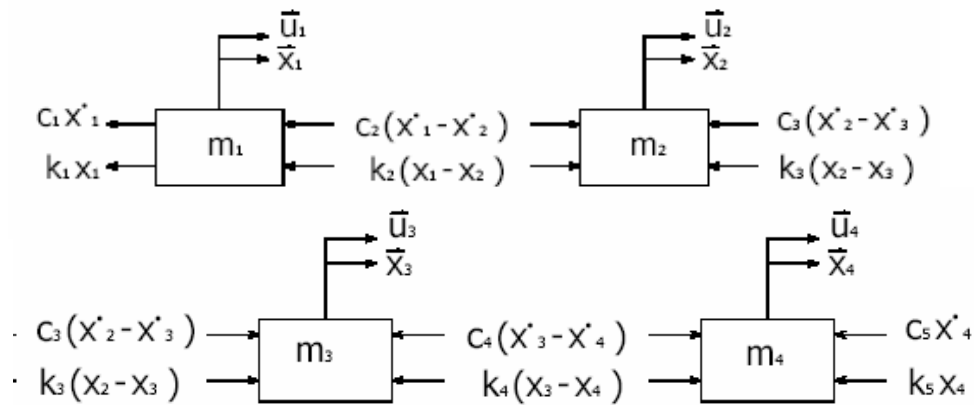
ภาพประกอบ 14 กราฟแสดงความถี่ความถี่ $[x''_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความถี่อันดับสองที่ค่า $c_1 < c_2$

จากภาพประกอบ 14 พบว่าค่าความถี่ความถี่ของ m_1 มีค่าความถี่ความถี่ต่ำกว่า m_2 และค่าใกล้เคียงกันที่ $t_f=1$ แต่ m_1 เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่ความถี่มากกว่า m_2 ตลอดการเคลื่อนที่

2. ผลการวิจัยปัญหาความถี่ความถี่สูงสุดโดยวิธีทางตรงสำหรับสมการระดับชั้นความถี่อันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วง โดยมีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ



ภาพประกอบ 15 ระบบระดับชั้นความถี่อันดับสี่ของสปริง มวล และตัวหน่วง



ภาพประกอบ 16 แสดงแรงที่กระทำต่อมวลแต่ละก้อน กรณีระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสี่ของสปริง มวล และตัวหน่วง

2.1 กรณีตัวหน่วงมีค่าคงที่ ($c_1=c_2=c_3=c_4=c_5$) จากสมการ (3.78) สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion: EOM) ของระบบระดับชั้นความเสี้อันดับสี่ของสปริง มวล และตัวหน่วง ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ค่าความนิ่มมวลสูงสุด} &= \int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2 + \ddot{x}_4^2] dt \\ &= \int_0^1 \left[\begin{aligned} &(0.5[\dot{u}_1 - \ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 \\ &+ (\dot{u}_2 + \ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \ddot{x}_3 + \dot{x}_3)^2 \\ &+ (0.5[\dot{u}_3 + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 2\ddot{x}_3 + \ddot{x}_4 + \dot{x}_4])^2 \\ &+ (\dot{u}_4 + \ddot{x}_3 - 2\ddot{x}_4 + \dot{x}_3 - 2\dot{x}_4)^2 \end{aligned} \right] dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

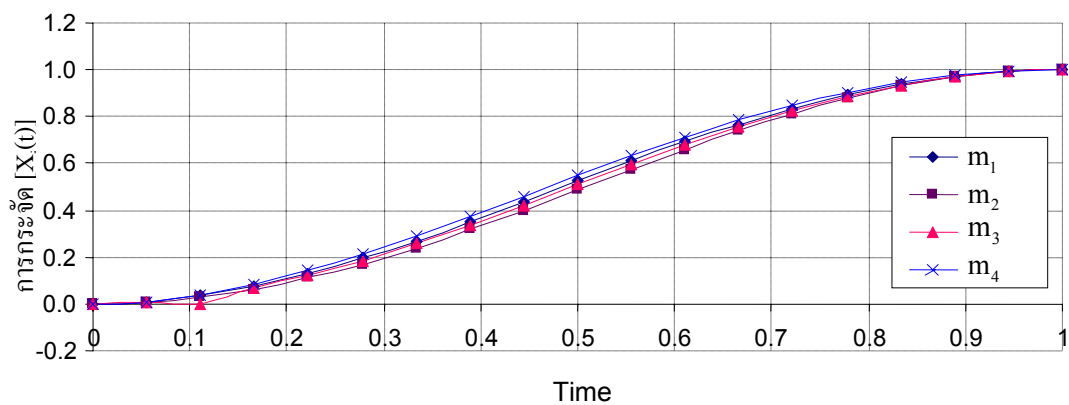
เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f)=x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

เงื่อนไขขอบเขต

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_f &= 1 \\ x_1(0) &= 0 & x_1(1) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 & x_2(1) &= 1 \\ x_3(0) &= 0 & x_3(1) &= 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

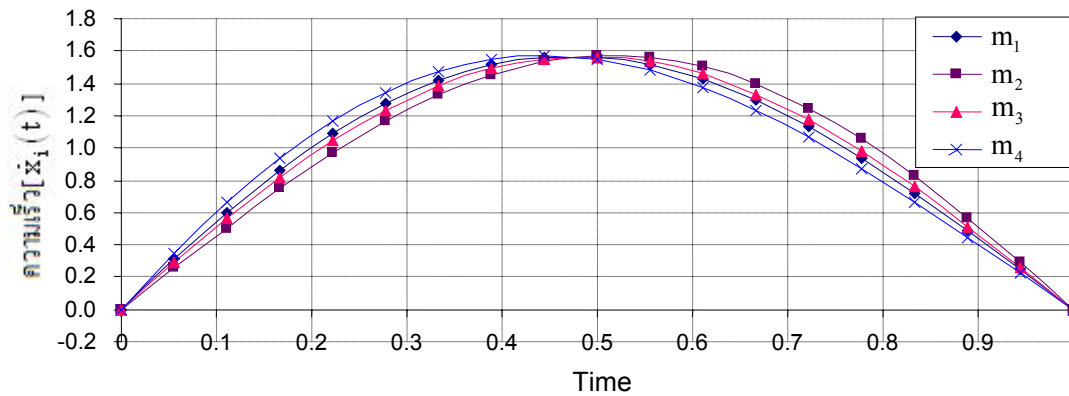
$$\begin{array}{ll}
 x_4(0)=0 & x_4(1)=1 \\
 \dot{x}_1(0)=0 & \dot{x}_1(1)=0 \\
 \dot{x}_2(0)=0 & \dot{x}_2(1)=0 \\
 \dot{x}_3(0)=0 & \dot{x}_3(1)=0 \\
 \dot{x}_4(0)=0 & \dot{x}_4(1)=0
 \end{array}$$

ในขั้นตอนนี้ต่อไปจึงจะนำสมการทั้งสองวิธีไปแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ที่พัฒนาซอฟต์แวร์โดย ทวีวัชร วีระแก้ว ซึ่งจะได้ผลดังต่อไปนี้



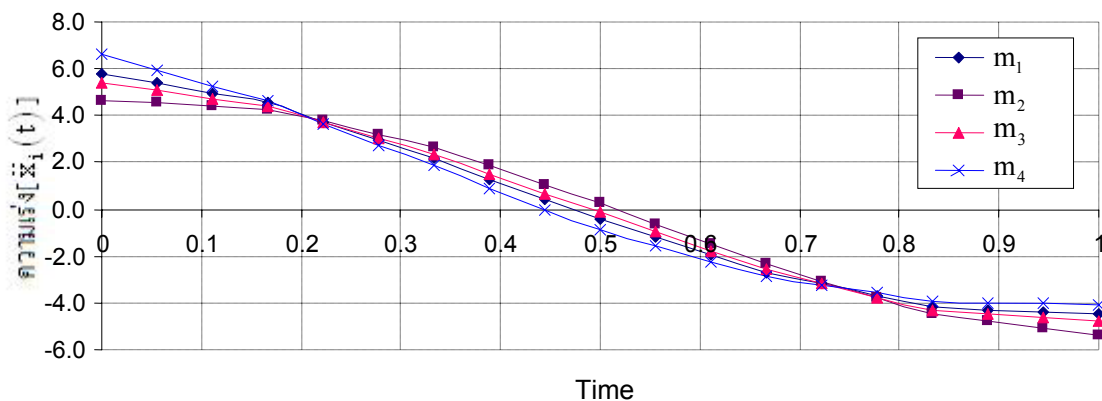
ภาพประกอบ 17 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับขึ้นความเร็วอันดับสี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$

จากภาพประกอบ 17 พบว่า m_1, m_2, m_3 และ m_4 ถูกกระทำให้เคลื่อนที่จากจุด $t_0=0$ ไปยัง $t_f=1$ ด้วยแรงกระทำ $[u_1(t)]$, $[u_2(t)]$, $[u_3(t)]$ และ $[u_4(t)]$ ผลที่ได้คือค่าการกระจัดของ $m_4 > m_1 > m_3 > m_2$ ตลอดระยะเวลา $0 < t < 1$



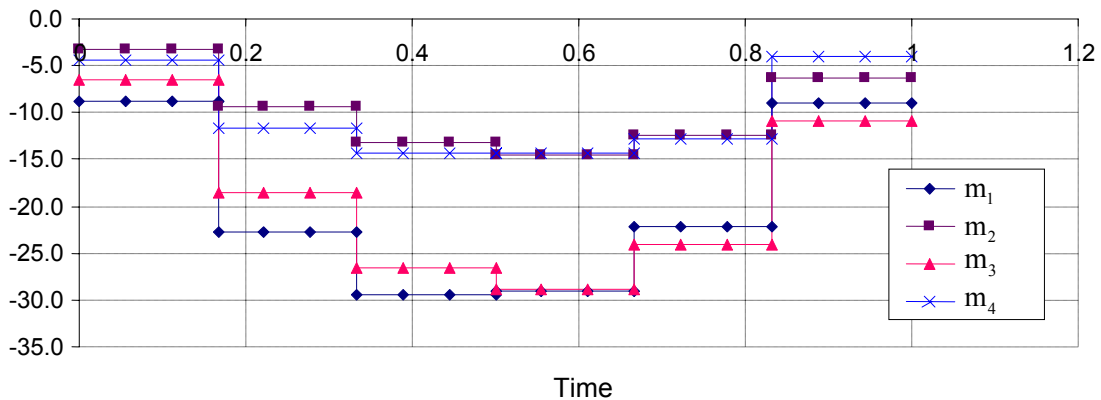
ภาพประกอบ 18 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์
 สี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$

จากภาพประกอบ 18 พบว่าค่าความเร็วของ $m_4 > m_1 > m_3 > m_2$ ในช่วง $0 < t < 0.47$
 จนกระทั่งค่าความเร็วเท่ากันและหลังจากนั้นค่าความเร็วลดลงโดยที่ค่าของ $m_4 < m_1 < m_3 < m_2$
 ในช่วง $0.47 < t < 1$ และทั้งหมดเป็นศูนย์ เมื่อ $t_f = 1$



ภาพประกอบ 19 กราฟแสดงความเร่ง $[\ddot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์
 สี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$

จากภาพประกอบ 19 พบว่าค่าความเร่งของ m_1, m_2, m_3 และ m_4 ลดลงตลอดช่วง
 $0 < t < 1$ หรือเกิดค่าความหน่วงและมีค่าความหน่วงมากที่สุดที่ $t_f = 1$ โดย $m_2 > m_3 > m_1 > m_4$



ภาพประกอบ 20 กราฟแสดงความถี่ความถี่ [x₁(t)] เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความถี่อันดับสี่ที่ค่า $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$

จากภาพประกอบ 20 พบว่าค่าความถี่ของ m_1 มีค่าความถี่ใกล้เคียง m_3 และค่าความถี่ของ m_2 มีค่าความถี่ใกล้เคียง m_4 เช่นกัน แต่ m_1 และ m_3 เกิดการเปลี่ยนแปลงค่าความถี่มากกว่า m_2 และ m_4 ตลอดการเคลื่อนที่

2.2 กรณีตัวหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นตามลำดับ ($c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5$) จากสมการ (3.99) สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion: EOM) ของระบบระดับชั้นความถี่อันดับสี่ของสปริงมวล และตัวหน่วง ดังนี้

$$\text{ค่าความถี่สูงสุด} = \int_{t_0}^{t_f} [\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2 + \ddot{x}_4^2] dt$$

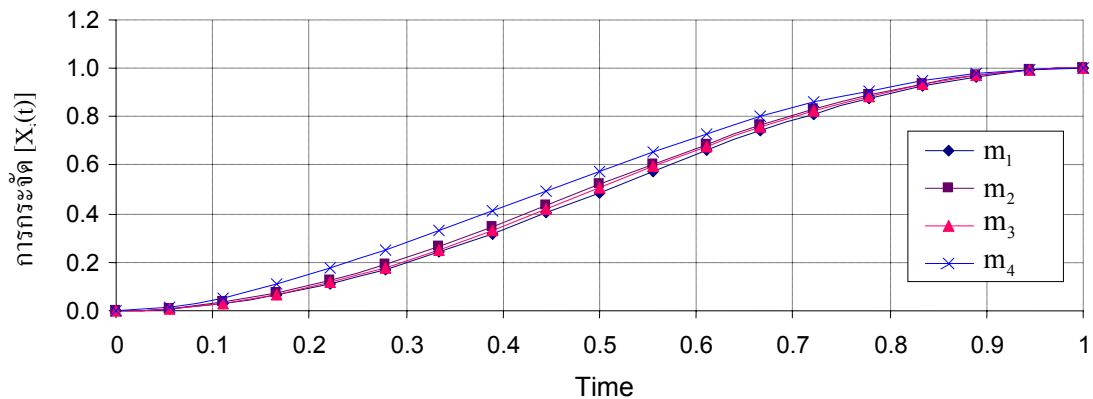
$$= \int_0^1 \left[\begin{aligned} &(0.5[\dot{u}_1 - \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + \dot{x}_2])^2 \\ &+ (\dot{u}_2 + 2\ddot{x}_1 - 5\ddot{x}_2 + \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 3\ddot{x}_3 + \dot{x}_3)^2 \\ &+ (0.5[\dot{u}_3 + 3\ddot{x}_2 - 7\ddot{x}_3 + \dot{x}_2 - 3\dot{x}_3 + 4\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_4])^2 \\ &+ (\dot{u}_4 + 4\ddot{x}_3 - 9\ddot{x}_4 + 2\dot{x}_3 - 4\dot{x}_4)^2 \end{aligned} \right] dt \quad (4.7)$$

เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

เงื่อนไขขอบเขต

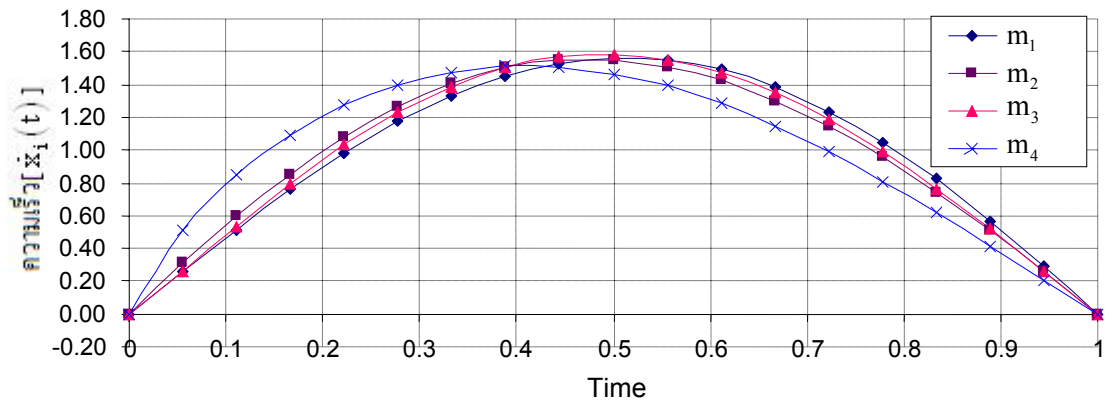
$$\begin{array}{ll}
 t_0 = 0 & t_f = 1 \\
 x_1(0) = 0 & x_1(1) = 1 \\
 x_2(0) = 0 & x_2(1) = 1 \\
 x_3(0) = 0 & x_3(1) = 1 \\
 x_4(0) = 0 & x_4(1) = 1 \\
 \dot{x}_1(0) = 0 & \dot{x}_1(1) = 0 \\
 \dot{x}_2(0) = 0 & \dot{x}_2(1) = 0 \\
 \dot{x}_3(0) = 0 & \dot{x}_3(1) = 0 \\
 \dot{x}_4(0) = 0 & \dot{x}_4(1) = 0
 \end{array} \tag{4.8}$$

ในขั้นตอนนี้ต่อไปจึงจะนำสมการทั้งสองวิธีไปแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ที่พัฒนาซอฟต์แวร์โดย ทวีวัชร วีระแก้ว ซึ่งจะได้ผลดังต่อไปนี้



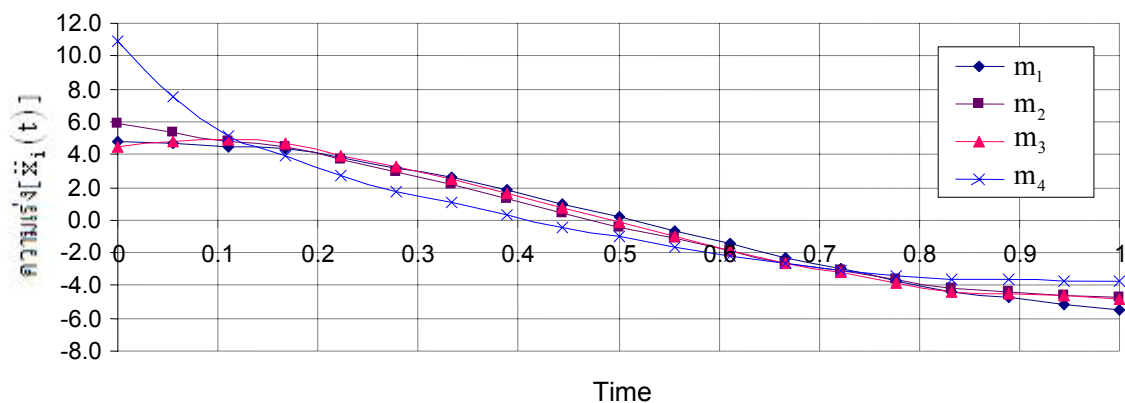
ภาพประกอบ 21 กราฟแสดงการกระจัด $[x_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเร็วอันดับสี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$

จากภาพประกอบ 21 พบว่า m_1 , m_2 , m_3 และ m_4 ถูกกระทำให้เคลื่อนที่จากจุด $t_0=0$ ไปยัง $t_f=1$ ด้วยแรงกระทำ $[u_1(t)]$, $[u_2(t)]$, $[u_3(t)]$ และ $[u_4(t)]$ ผลที่ได้คือค่าการกระจัดของ $m_4 > m_2 > m_3 > m_1$ ตลอดระยะเวลา $0 < t < 1$



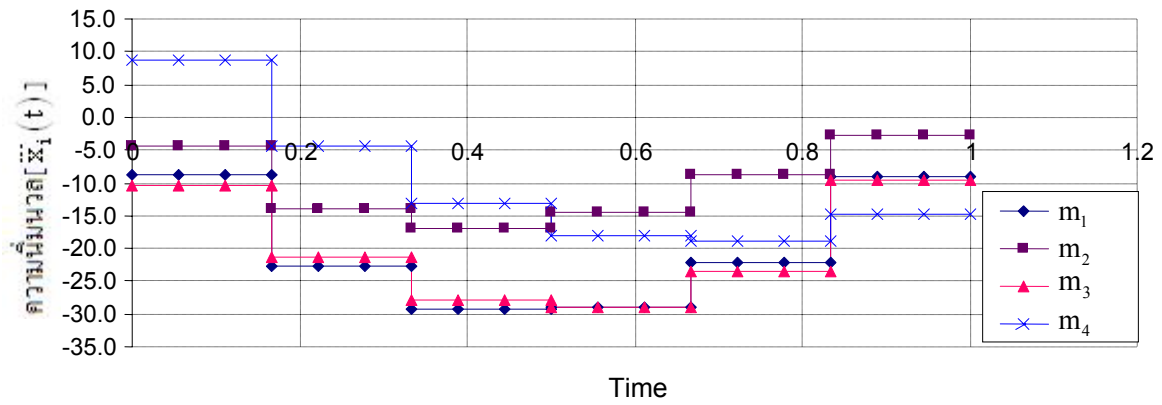
ภาพประกอบ 22 กราฟแสดงความเร็ว $[\dot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์
สี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$

จากภาพประกอบ 22 พบว่าค่าความเร็วของ $m_4 > m_2 > m_3 > m_1$ ในช่วง $0 < t < 0.43$ จนกระทั่งค่าความเร็วเท่ากันและหลังจากนั้นค่าความเร็วลดลงโดยที่ค่าของ $m_4 < m_2 < m_3 < m_1$ ในช่วง $0.43 < t < 1$ และทั้งหมดเป็นศูนย์ เมื่อ $t_f=1$



ภาพประกอบ 23 กราฟแสดงความเร็ว $[\ddot{x}_1(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสียดันต์
สี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$

จากภาพประกอบ 23 พบว่าค่าความเร่งของ m_1, m_2, m_3 และ m_4 ลดลงตลอดช่วง $0 < t < 1$ หรือเกิดค่าความหน่วงและมีค่าความหน่วงมากที่สุดที่ $t_f=1$ โดย $m_1 > m_3 > m_2 > m_4$



ภาพประกอบ 24 กราฟแสดงความโน้มถ่วง $[\ddot{x}_i(t)]$ เทียบกับเวลา กรณีระบบระดับชั้นความเสี
 ้อันดับสี่ที่ค่า $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$

จากภาพประกอบ 24 พบว่าค่าความโน้มถ่วงของ m_1 มีค่าความโน้มถ่วงใกล้เคียง m_3
 และแตกต่างจากค่าของ m_2 และ m_4 อย่างชัดเจน ตลอดการเคลื่อนที่

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

สรุปผล

จากการใช้ซอฟต์แวร์เชิงเส้นที่พัฒนาโดย พ.ท.ผศ.ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า มาแก้ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงด้วยการพิจารณาโดยตรง (Minimum Direct Jerk) ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการ ในการแก้ปัญหาพลศาสตร์ความเหมาะสมที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูง รูปแบบของปัญหาที่ทำการกำหนดขึ้นนี้เพื่อหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่กำหนดเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยกำหนดให้ทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขขอบเขตสำหรับแก้ปัญหา โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0)=x_0$ และเวลาสุดท้ายที่พิจารณา $x(t_f)=x_f$ การระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ เรียกว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP : Two Point Boundary Valued Problem) การวิจัยนี้ทำการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ของสมการการเคลื่อนที่ของระบบ สปริง มวล และตัวหน่วง (A Spring – Mass – Damper System) ที่เป็นสมการอันดับสูงที่เป็นระดับชั้นความเสียดันดับสองและระดับชั้นความเสียดันดับสี่

จากการใช้วิธีการระเบียบเชิงตัวเลขมาแก้ปัญหานี้จะ ง่าย รวดเร็ว และหาผลลัพธ์ของปัญหาความนิ่มนวลที่สุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงด้วยการพิจารณาโดยตรง (Minimum Direct Jerk) สามารถคำนวณหาค่าตัวแปร States คือค่าการกระจัด $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ ค่าความเร็ว $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)$ ค่าความเร่ง $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4(t)$ และค่าความนิ่มนวล $\ddot{\ddot{x}}_1(t), \ddot{\ddot{x}}_2(t), \ddot{\ddot{x}}_3(t), \ddot{\ddot{x}}_4(t)$ ได้ ในขณะที่เดียวกันเราสามารถคำนวณหาค่า Control Input คือ $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ เทียบกับเวลาได้เช่นเดียวกัน โดยสามารถหาคำตอบของสมการอันดับสูงที่เป็นเชิงเส้นได้ เมื่อพิจารณาระบบพลศาสตร์ที่มีแรงกระทำตลอดทั้งระบบ (Fully Actuated System) ดังเช่นระบบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ (Robotic Systems)

อภิปรายผล

จากการวิจัยและใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า วิธีการหาค่าความนิ่มนวลสูงสุดด้วยการพิจารณาโดยตรงในการแก้ปัญหาที่เป็นเชิงเส้นของระบบพลศาสตร์ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงที่มีระดับชั้นความเสียดันดับสองและอันดับสี่ของระบบสปริง มวลและตัวหน่วงนั้นสามารถนำวิธีการนี้ไปใช้แก้ปัญหาได้ โดยสามารถคำนวณหาค่าตัวแปร States คือค่าการ

กระจัด $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ ค่าความเร็ว $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t), \dot{x}_4(t)$ ค่าความเร่ง $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4(t)$ และ ค่าความโน้มถ่วง $\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4(t)$ ได้ ในขณะที่เดียวกันเราสามารถคำนวณหา Control Input คือภาระ $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ เทียบกับเวลาได้เช่นเดียวกัน โดยสามารถหาคำตอบของ สมการอันดับสูงที่เป็นระดับสองชั้นความเร็วระดับสี่ชั้นความเร็วได้

การวิจัยนี้ทำการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ของสมการการเคลื่อนที่ของระบบ สปริง มวล และตัวหน่วง (A Spring – Mass – Damper System) ที่เป็นสมการอันดับสูงที่เป็นระดับชั้นความเร็วอันดับสองและระดับชั้นความเร็วอันดับสี่ โดยกำหนดให้เป็นสองกรณีคือ กรณีที่ $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ และกรณีที่ $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ พบว่าค่าการกระจัด ความเร็ว ความเร่งและค่าความโน้มถ่วง นั้นสามารถใช้โปรแกรมคำนวณค่าได้หมด แต่ลักษณะกราฟจะมีค่าแตกต่างกันอันเป็นผลมาจากค่าตัวหน่วงที่เรากำหนดให้ กล่าวคือระบบที่มีค่าความหน่วงที่แตกต่างกัน จะทำให้ค่าความโน้มถ่วงเริ่มต้นและค่าความโน้มถ่วงสุดท้ายมีค่าแตกต่างกันมากกว่าระบบที่มีค่าความหน่วงเท่ากัน เมื่อดูจากกราฟแสดงค่าความโน้มถ่วงแต่ละกรณีในบทที่ 4

ข้อเสนอแนะ

จากผลงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่าการหาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงด้วยการพิจารณาโดยตรง (Minimum Direct Jerk) หาค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการ สำหรับระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear Dynamic Systems) ได้อย่างแน่นอน อย่างไรก็ตามในปัญหาของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Dynamic Systems) ก็สามารถมาใช้เพื่อหาผลลัพธ์ของปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นในอนาคต โดยคาดว่า การหาคำตอบจะมีความสอดคล้องหรือใกล้เคียงกัน นอกจากนี้วิธีการการหาค่าความโน้มถ่วงสูงสุดที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสูงด้วยการพิจารณาโดยอ้อม (Minimum Indirect Jerk) ก็น่าจะทำให้การหาคำตอบได้ง่ายและรวดเร็วขึ้นและคาดว่าจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- พันตรี ทวีวัชร วีระเกล้า. (2547). *บทความเชิงวิชาการ การเคลื่อนที่ที่มีความเหมาะสมสูงสุด*. นครนายก: ส่วนการศึกษา โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า.
- มนัส สังวรศิลป์, วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- ยศศักดิ์ สายสนิท. (2548). *การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งห้าระดับชั้นความเร็ว*. ปรินญา-นิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ. สืบค้นเมื่อ 10 ตุลาคม 2550, จากฐานข้อมูลปรินญา-นิพนธ์ มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ
- สุธรรม ศรีเกษม, เมธินทร์ ทรงชัยกุล, สง่า ศรีสุภปริดา. (2545). *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทาง วิศวกรรม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.
- Agrawal SK., Fabien BC. (1999). *Optimization of Dynamic Systems*. Boston: Kluwer Academic Publishers. DIN 51309. Feb1998.
- Arthur E. Bryson, Jr. and Yu-Chi Ho. (1969). *Applied Optimal Control*. United States of America: Ginn and Company.
- Bock HG. (1978). *Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems With Application to Optimal Control*. ZAMM. p. 58.
- Craig JJ. (1986). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Evtim VZ. (1997). *Dynamics and optimization of controlled mechanical systems*. Bulgaria: Institute of mechanics bulgarian academy of sciences acad. G. Bonchev Street, bl. 4 1113 Sofia.
- Jonh H. Mathews 2005. *Module for Galerkin's Method*. Retrieved September 1, 2007, from <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/GalerkinMod.html>
- Reza Shadmehr. *A Minimum Jerk Trajectory*. Retrieved September 1, 2007. From http://webhost5.nts.jhu.edu/reza/book/minimum_jerk/minimumjerk.htm
- Veeraklaew T. (2000). *Extensions of optimization theory and new computational approaches for higher-order dynamic systems [Dissertation]*. Delaware: The University of Delaware.
- Veeraklaew T. and Salaluk P., *The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems*. The 19th conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ นามสกุล	นาย อรุณ พงษ์ประณีติ
วันเดือนปีเกิด	6 ธันวาคม 2518
สถานที่เกิด	จังหวัดสงขลา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	338/249 ม.สุขสบายวิลล่า ถ.ลาดพร้าว87 แขวงวังทองหลาง เขต วังทองหลาง กรุงเทพฯ 10310
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2534	มัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนแดนศิลป์ประชาสรรค์
พ.ศ. 2537	มัธยมศึกษาตอนปลาย หาดใหญ่วิทยาลัย
พ.ศ. 2541	อุดมศึกษา(วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต) วิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
พ.ศ. 2551	บัณฑิตศึกษา(วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต)วิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ