

การศึกษาเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้งทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องเมทริกซ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้
การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนปกติ

ปริญญานิพนธ์

ของ

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม

22 ค.ศ. 2523

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

เสนอขอมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

กุมภาพันธ์ 2523

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง เมตริกซ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้
การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอนกับการสอนปกติ

บทคัดย่อ

ของ

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2523

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้กับการสอนปกติ

กลุ่มตัวอย่างซึ่งได้จากการสุ่มได้แก่ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2522 จำนวน 60 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 30 คน และกลุ่มควบคุม 30 คน นักเรียนในกลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอน ส่วนนักเรียนในกลุ่มควบคุม ได้รับการสอนปกติ เนื้อหาเดียวกันคือเรื่องเมตริกซ์ และใช้เวลาในการทดลอง 12 ชั่วโมง เมื่อสิ้นสุดการทดลองแล้วทดสอบนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนในกลุ่มทดลอง สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนในกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A COMPARATIVE STUDY OF MATRIX LEARNING ACHIEVEMENT
OF STUDENTS IN MATHAYOM SUKSA 5 BY
MODULAR AND CONVENTIONAL TEACHING

AN ABSTRACT
BY
SUPHALAK PONGSUTHAM

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
Srinakharinwirot University
February, 1980

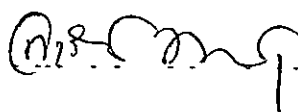
The purpose of this experiment was to compare the mathematical learning achievement of students being taught by modular teaching and those being taught by conventional teaching.

The subjects were the 60 Mathayom Suksa 5 students of the Secondary Demonstration School of Srinakharinwirot University, Prasanmitr, Bangkok. This experiment was made during the second semester of the 1979 academic year. The 30 students were randomly selected as the experimental group and the rest as the controlled group. The students selected as the experimental group were taught by modular teaching and the controlled group were taught by conventional teaching. Both groups took twelve periods in studying the same content. That was Matrix. At the end of the experiment, the subjects had the test on the matrix learning achievement made by the researcher.

It was found that the matrix learning achievement of the experimental group was higher than that of the controlled group at the significant level of .01

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิติได้พิจารณาปัญหานี้อย่างรอบคอบแล้ว
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้


..... ประธาน


..... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลือ ค่ายน้ำใจอันดียิ่งจาก ศาสตราจารย์สุพจน์ ชะนะมา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ คร.ลาวัลย์ พลกลา ตลอดจนท่านอาจารย์ไกรฤณสละเวลาอันมีค่า และให้ข้อคิดอันเป็นประโยชน์ ทั้งในแง่วิชาการ และการปฏิบัติงาน ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจในการศึกษาค้นคว้า และเขียน ปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์ไว้ด้วยความเคารพเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประกิจ รัตนสุวรรณ อาจารย์ใหญ่โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่ไกรฤณสนับสนุน และอนุญาตให้ผู้วิจัยใช้ กลุมตัวอย่าง

ขอขอบคุณอาจารย์พุทธศักดิ์ เทศนิยม หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้อำนวย ความสะดวกในทุกด้าน และให้ความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง ตลอดเวลาของการทดลองและ ขอขอบคุณอาจารย์สันต์ วรศิริ ที่ได้อำนวยความสะดวกในการใช้เครื่องมือวัสดุ ไปรแสง และเทพบันเทิงเสียง

ขอขอบคุณสำนักงานเลขาธิการคุรุสภา ที่กรุณาให้ทุนกระดุมเงินในการทำวิจัย นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์ทุกท่าน รวมทั้ง พี่ เพื่อน และน้องทุกคน ซึ่งให้ความช่วยเหลือในต่าง ๆ จนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงด้วยดี

และผู้วิจัยขอระลึกในพระคุณของพ่อแม่ผู้อุปการะคุณทุกท่าน ซึ่งให้ทั้งข้อคิด กำลังใจ และกำลังทรัพย์ตลอดเวลาของการศึกษาและการทำปริญญานิพนธ์

สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	5
ความสำคัญของการวิจัย	6
ขอบเขตของการวิจัย	6
นิยามศัพท์เฉพาะ	6
สมมติฐานของการวิจัย	7
2 เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน	8
ลักษณะของหน่วยการเรียนรู้การสอน	9
รูปแบบของหน่วยการเรียนรู้การสอน	9
การสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน	13
การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในต่างประเทศ	16
การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในประเทศไทย	19
3 วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	22
กลุ่มตัวอย่าง	22
เครื่องมือในการทดลอง	22
วิธีดำเนินการทดลอง	25
การวิเคราะห์ข้อมูล	26
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	26

บทที่	หน้า
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	29
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	32
ความมุ่งหมายของการวิจัย	32
สมมติฐานของการวิจัย	32
วิธีดำเนินการวิจัย	32
สรุปผลการวิจัย	34
อภิปรายผล	34
ข้อเสนอแนะ	36
บรรณานุกรม	38
ภาคผนวก	

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

- 1 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนรวมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่อง เมตริกซ์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้คะแนนผลการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรรวม 30
- 2 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง
เมตริกซ์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม 30

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1 แผนภูมิแสดงขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน

16

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญต่อมนุษย์ทั้งในด้านกระบวนการทางสมองและ
กิจกรรมในการดำเนินชีวิต เกี่ยวกับกระบวนการทางสมอง วิธีการทางคณิตศาสตร์ สามารถ
พิสูจน์อย่างมีเหตุผลได้ว่า ผลสรุปของทุกความคิดของมนุษย์ สมเหตุสมผลหรือไม่ และ
สามารถตรวจสอบได้ว่าขั้นตอนใดของความคิดที่ทำให้ผลสรุปไม่สมเหตุสมผล คุณลักษณะของ
คณิตศาสตร์ดังกล่าว จะช่วยกล่อมเกลามนุษย์ให้มีกระบวนการทางสมองที่เป็นระเบียบ ช่วย
ให้การพิจารณาปัญหาต่าง ๆ คำนึงไปอย่างถูกต้องและยุติธรรม ภายใต้ขอบเขตและเงื่อนไข
ของข้อมูลเท่าที่มีอยู่ โดยปราศจากอคติมาเกี่ยวข้อง ซึ่งคุณสมบัติข้อนี้เป็นรากฐานสำคัญ
ก่อให้เกิดบุคลิกภาพที่ดีขึ้นกับบุคคล เหมาะแก่การดำรงอยู่ในทุกยุคสมัย

เกี่ยวกับกิจกรรมในการดำเนินชีวิตนั้น วิชาคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญไม่เพียงแต่
ใช้ประโยชน์ภายในบ้าน วงการธุรกิจ การอุตสาหกรรม การปกครองและวิทยาศาสตร์
เท่านั้น แต่ยังเป็นประโยชน์ในการทำโปรแกรมการใช้เครื่องจักรกลคำนวณชนิดต่าง ๆ และ
กิจกรรมอื่นอีกมาก (Bruekner, 1964 : 3) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการนำคณิตศาสตร์ไป
ใช้ในงานเหล่านั้นจะเป็นผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าผลลัพธ์ซึ่งได้มาโดยปราศจากการ
ใช้คณิตศาสตร์เสมอ (Berkeley, 1966 : 34)

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต้องประสบกับปัญหาอยู่ตลอดเวลา โครงการซีราคิวส์
(Syracuse Plan) ของมหาวิทยาลัยซีราคิวส์ ในมลรัฐนิวยอร์ก ได้ศึกษาพบว่า ปัญหาที่
สำคัญในการสอนวิชาคณิตศาสตร์คือ ครูคณิตศาสตร์ส่วนมากมีชั่วโมงสอนมากเกินไป ทำให้
ต้องทำงานหนักจนไม่มีเวลาให้ความสนใจ และความเอาใจใส่ต่อผู้เรียนแต่ละคนอย่าง
เพียงพอ และไม่มีเวลาเขียนหรืออ่านตำราที่ดี (กรมวิชาการ 2509 : 3.9-11-3.9-
12) สภาพเช่นนี้ทำให้ครูมีเวลาในการเตรียมการสอนน้อยลง ความผิดพลาดในการถ่ายทอด
ความรู้ให้กับผู้เรียนจึงมีโอกาสดังกล่าวมากขึ้น นับเป็นผลเสียต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเป็น
อย่างยิ่ง ตัวอย่างของความผิดพลาดดังกล่าวมีดังนี้

ในการสอนเรื่องการให้เหตุผลซึ่งจะต้องเสนอไปตามลำดับเพราะเนื้อหา
คณิตศาสตร์เป็นเหตุเป็นผลต่อเนื่องกันโดยตลอด (ประเทิน มหาจันทร์ 2521 : 1)
นั้น ครูมักไม่อดทนกับการที่นักเรียนไม่สามารถค้นพบกระบวนการของเหตุผลและมักจะสอน
ข้ามขั้นต่าง ๆ ของการให้เหตุผลไป ทั้งนี้อาจเป็นเพราะครูไม่มีเวลาเตรียมการสอนที่ดี
มาก่อน หรืออาจเห็นว่าขั้นที่ข้ามไปนั้น ง่ายและชัดเจนเพียงพอแล้วโดยพิจารณาจากความรู้สึก
ของตัวครูเองเป็นเกณฑ์ วิธีการสอนเช่นนี้อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับผู้เรียนที่ฉลาดแต่จะเป็น
ปัญหายาวยิ่งสำหรับผู้เรียนที่เรียนอ่อน เพราะผู้เรียนที่เรียนอ่อนจะไม่ทราบขั้นต่าง ๆ ที่ครู
เว้นไว้ และการเรียนเนื้อหาเหล่านั้นจะเป็นไปด้วยความไม่เข้าใจ (พรหมพิพย์ ม้ามณี
2520 : 21) ซึ่งผู้เรียนส่วนใหญ่จะแก้ปัญหาความไม่เข้าใจด้วยการจดจำไปโดยมิได้เกิด
การเรียนรู้ ภาวะเช่นนี้นับเป็นต้นเหตุหนึ่งที่น่าไปสู่ความเกลียดและกลัววิชาคณิตศาสตร์
(สุชาติ รัตนกุล 2514 : 6)

เกี่ยวกับการสอนเรื่องโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ แม้จะมีข้อวินิจฉัยที่ครูผู้สอนควร
ตระหนักว่า "คำตอบของโจทย์ปัญหาไม่ได้มีความสำคัญเท่ากับวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบ"
(Whirl, 1973 : 551) และ "ครูควรส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้พินความรู้ที่ได้เรียนมา
แล้วคิดแก้ปัญหาเองโดยไม่เลียนแบบวิธีคิดจากครูหรือตำราเรียน และไม่ควรเร่งรัดให้
ผู้เรียนทำวิธีลัด เพราะจะเป็นอุปสรรคต่อการใช้ความคิด" (อำพล ชรรณเจริญ
2516 : 5) แต่ในสภาพที่เป็นจริง การที่ครูต้องทำงานหนักเพราะมีชั่วโมงสอนมากเกินไป
ควร อาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ครูมองข้ามหรือไม่ได้ให้ความสำคัญกับข้อวินิจฉัยเหล่านี้
เท่าที่ควร ผู้วิจัยจึงสังเกตว่า ผู้เรียนที่มุ่งจะใช้วิธีลัด หรือผู้เรียนที่มุ่งแก้โจทย์ปัญหาเพียง
เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบโดยเลียนแบบวิธีที่ปรากฏในตำราเรียนนั้นยังมีอยู่มากในปัจจุบัน
และผู้เรียนเหล่านี้มักจะไม่สามารถแก้ปัญหาได้เมื่อเผชิญกับโจทย์ที่แปลกและใหม่ การไม่
สามารถแก้ปัญหาโจทย์ใหม่ ๆ ได้ ย่อมมีผลให้กำลังใจและความกระตือรือร้นในการเรียน
ของผู้เรียนลดน้อยลง อาจเกิดความเบื่อหน่าย และอาจส่งผลให้มีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชา
คณิตศาสตร์

นอกจากนี้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยทั่วไปยังคงใช้วิธีสอนแบบบรรยาย คือครูเป็นผู้สอน และมีบทบาทสำคัญเป็นส่วนใหญ่ในห้องเรียน ส่วนผู้เรียนจะอยู่ในลักษณะ รับฟังการบอกเล่า ทำตามคำสั่งโดยเลียนแบบวิธีคิดและวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ จากครู และจดจำเนื้อหาที่ครูสอน ซึ่งมักจะเป็นการจำเพียงเพื่อนำไปใช้ในการสอบเท่านั้น วิธีสอน เช่นนี้ เอื้ออารี ยศโสภณ (เอื้ออารี ยศโสภณ 2516 : 50-51) ให้ทัศนะว่าก่อให้เกิดผลเสียหลายประการ คือทำให้ผู้เรียนขาดความเป็นตัวของตัวเอง ขาดความคิดริเริ่ม และขาดความกระตือรือร้น นับเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์

อีกประการหนึ่ง การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันยังมิได้คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล กล่าวคือ หลักสูตร ประมวลการสอน หนังสือแบบเรียน และคู่มือครู ที่จัดขึ้นนั้น จัดขึ้นสำหรับให้ผู้เรียนทุกคนซึ่งมีความสามารถในระดับต่างกัน เรียนในเนื้อหาเดียวกัน มีแบบฝึกหัดเหมือนกัน และมีหลักเกณฑ์ในการประเมินผลแบบเดียวกัน จึงเกิดปัญหาขึ้นกับผู้เรียน คือ ผู้ที่เรียนเก่งจะถูกกีดกันความสามารถ ส่วนผู้ที่เรียนอ่อนจะเกิดความเบื่อหน่าย และทอดถอนใจไม่อยากเรียน (สนธิ ไกรสินธุ์ 2516 : 32)

ปัญหาดังกล่าวข้างต้นเป็นสาเหตุทำให้ผู้เรียนไม่เกิดการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์เท่าที่ควร วิธีหนึ่งซึ่งน่าจะปรับปรุงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นได้คือ การนำเครื่องมือหรือวิธีการที่เหมาะสมมาประยุกต์ใช้ โดยที่เครื่องมือหรือวิธีการเหล่านั้น สามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้

หน่วยการเรียนการสอน (Instructional Module) เป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาที่น่าสนใจ เพราะหน่วยการเรียนการสอนมีกระบวนการที่เป็นระเบียบแบบแผน (Lawrence. 1973 : 1) ช่วยส่งเสริมการศึกษาเล่าเรียนของผู้เรียนให้สอดคล้องกับธรรมชาติของมนุษย์ หลักจิตวิทยา และหลักการเรียนรู้ (ฐชาติ นาแสง 2521 ก.44) หน่วยการเรียนการสอนสามารถปรับให้เข้ากับผู้เรียนได้ และทำให้ผู้เรียนประสบผลสำเร็จตามความสามารถของตน (Parson and others. 1975 : 3)

ข้อดีของหน่วยการเรียนการสอนมีหลายประการ สรุปได้ดังนี้

1. ช่วยประหยัดเวลาและกำลังงานได้มาก
2. ส่งเสริมความแตกต่างระหว่างบุคคล เพราะเป็นบทเรียนที่รวมแบบการสอนไว้หลายแบบ เพื่อให้ผู้เรียนเลือกเรียนได้ตามความถนัดและความสนใจ
3. ช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้โดยมีประสิทธิภาพได้ด้วยตนเอง เพราะการวางแผนการเรียนของหน่วยการเรียนการสอนได้กระทำอย่างรอบคอบรัดกุม และการเรียงลำดับความต่อเนื่องจะเป็นไปอย่างเหมาะสมไม่สับสน
4. ช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาตนเองได้ง่ายเพราะในหน่วยการเรียนการสอนมีการประเมินผลอยู่ตลอดเวลา ทั้งการประเมินผลเบื้องต้นก่อนการเรียน เพื่อให้ทราบว่าผู้เรียนมีพื้นฐานความรู้ความสามารถเพียงใด การประเมินผลในระหว่างการเรียนและการประเมินผลหลังการเรียนเพื่อให้ทราบว่า ผู้เรียนได้บรรลุตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้แล้วหรือไม่เพียงใด

บุญมี ก้อนทอง (บุญมี ก้อนทอง 2518 : 21) กล่าวว่า หน่วยการเรียนการสอนเป็นความคิดใหม่ที่สามารถนำมาเป็นประโยชน์อย่างสูงต่อการเรียนการสอนในประเทศไทย อุปสรรคต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอนสามารถแก้ไขได้โดยใช้หน่วยการเรียนการสอน เพราะหน่วยการเรียนการสอนเป็นบทเรียนที่ผู้เรียนศึกษาได้ด้วยตนเอง ทั้งเรื่องที่ผู้เรียนมีพื้นฐานไม่เพียงพอ หรือเรื่องที่เรียนไม่เข้าใจในชั้นเรียนตามปกติเวลาที่จะใช้ในการศึกษาก็ไม่จำเป็นต้องเป็นเวลาเรียนปกติในชั้นเรียน อาจใช้เวลาใดที่สะดวกและพอใจนอกเวลาเรียนก็ได้

จากข้อดีของหน่วยการเรียนการสอน และจากคำกล่าวของ บุญมี ก้อนทอง ที่ว่า หน่วยการเรียนการสอนเป็นความคิดใหม่ที่สามารถนำมาเป็นประโยชน์อย่างสูงต่อการเรียนการสอนในประเทศไทย และอุปสรรคต่าง ๆ เกี่ยวกับการเรียนการสอนสามารถแก้ไขได้โดยใช้หน่วยการเรียนการสอน ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะสร้างหน่วยการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์ขึ้นเพื่อทดลองสอนเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ถ้าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอน แบบหน่วยการเรียนการสอน สูงกว่าหรือไม่แตกต่างกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ ก็จะทำหน่วยการเรียนการสอน

ที่สร้างขึ้นไปใช้เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งเพื่อช่วยปรับปรุงประสิทธิภาพของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ต่อไป

ผู้วิจัยเลือกศึกษากับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งอยู่ในเกณฑ์ที่เหมาะสมจะนำหน่วยการเรียนการสอนมาใช้ กล่าวคือสอดคล้องกับการค้นพบของ ลอเรนซ์ (Lawrence. 1973 : 1) ที่ว่าหน่วยการเรียนการสอนสามารถนำไปใช้ได้กับผู้เรียนตั้งแต่วัยเด็กจนถึงผู้ใหญ่ โดยมีข้อสังเกตว่า อายุและประสบการณ์ของผู้เรียนยิ่งมากขึ้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือความสำเร็จในการเรียนของผู้เรียนจะยิ่งสูงขึ้น ทั้งนี้เพราะผู้เรียนที่มีอายุมากย่อมมีคุณสมบัติสำหรับการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนอยู่ในระดับสูงแล้วโดยธรรมชาติ คุณสมบัติเหล่านี้ได้แก่ ความอดทน ประสบการณ์ ความรู้พื้นฐาน ความสนใจ และความสามารถในการอ่าน เป็นต้น

สำหรับเนื้อหาที่ผู้วิจัยนำมาสร้างเป็นหน่วยการเรียนการสอนนั้น ผู้วิจัยสนใจเรื่องเมทริกซ์ (Matrix) เพราะเป็นเรื่องที่มีความสำคัญและเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงหลายสาขา แบรินฟิลด์ (Brandfield. 1972 : 561) กล่าวว่า ไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับวิชาคำนวณแขนงใดที่สมบูรณ์ได้โดยปราศจากความรู้และการใช้วิธีการของเมทริกซ์ แม้แต่การคำนวณจำนวนเลขอันมหากาลของสมองกล (Electronic brains) ก็ใช้วิธีคำนวณแบบเมทริกซ์ (Schwarz. 1961 : 2) เรื่องเมทริกซ์จึงมีประโยชน์อย่างกว้างขวางทั้งในด้านการบิน วิศวกรรมไฟฟ้า การใช้เครื่องจักรกล การคำนวณทางสถิติ การเกษตร เศรษฐศาสตร์ สังคมศาสตร์ คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ จิตวิทยา เคมี ฟิสิกส์ และอื่น ๆ (Finkbiner and David. 1966 : 19)

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอน แบบหน่วยการเรียนการสอนกับการสอนปกติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. เป็นแนวทางในการสร้าง และทดลองนำหน่วยการเรียนรู้การสอนไปใช้ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ
- ✓ 2. เป็นแนวทางในการปรับปรุงวิธีสอนให้เหมาะสมกับผู้เรียนและเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
3. เป็นการเสริมสร้างแนวความคิดผู้บริหารและผู้มีส่วนเกี่ยวข้องกับการศึกษาให้นำหน่วยการเรียนรู้การสอนไปแก้ปัญหาทางการศึกษา
- / 4. เป็นแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาให้เหมาะสมยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

๑. การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเมตริกซ์ จากการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ

2. การทดลองกระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร จำนวน 60 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2522

นิยามศัพท์เฉพาะ

หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง หน่วยการเรียนรู้สอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเมตริกซ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ตามหลักสูตรประโยคมัธยมศึกษาตอนปลาย ของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ

การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ หมายถึง การสอนที่กำหนดให้ผู้เรียนได้ศึกษาด้วยตนเองโดยการปฏิบัติกิจกรรมเกี่ยวกับการอ่านเอกสารประกอบการเรียน การดูแผ่นโปร่งใสจากเครื่องฉายวัสดุโปร่งแสง (Overhead projector) ประกอบกับการฟังคำบรรยายจากเทป และการอ่านบทเรียนประเภทบทเรียนโปรแกรม ทั้งนี้ผู้สอนเป็นผู้เข้าร่วมกิจกรรมในบางโอกาสตามความเหมาะสม

การสอนปฎิบัติ หมายถึง การสอนซึ่งผู้สอนเป็นผู้ถ่ายทอดความรู้ให้กับผู้เรียน ด้วยวิธีบรรยายโดยใช้เนื้อหาเกี่ยวกับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทดสอบหลังสิ้นสุดการเรียน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สมมุติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนปฎิบัติ

เอกสารและการวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอน

มีผู้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนไว้หลายท่าน เช่น ชูชาติ นาสแสง (ชูชาติ นาสแสง 2521 ข. 10) กล่าวว่า หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) หมายถึง เครื่องมือหรือชุดการเรียนรู้หรือประสบการณ์การเรียนรู้ซึ่งจัดขึ้นเพื่ออำนวยความสะดวกแก่ผู้สอนและผู้เรียนให้ประสบผลสำเร็จบรรลุจุดหมายที่ตั้งไว้ให้มากที่สุด ทั้งนี้รวมถึงกระบวนการเรียนการสอนด้วย

สถาบันวางแผนการศึกษาและพัฒนาหลักสูตร (Regional Planning Workshop on Teacher Education and Curriculum for Development) สรุปความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนว่า เป็นบทเรียนที่สำเร็จในตัวเอง ประกอบด้วยคำบรรยาย และคำแนะนำซึ่งทำขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้มากกว่าที่จะทำให้ผู้สอนใช้ เป็นกลุ่มของอุปกรณ์การเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วยส่วนประกอบหลักของบทเรียนคือ ความมุ่งหมาย กิจกรรม และการประเมินผล (APEID. 1975 : 19-31) ความหมายนี้สอดคล้องกับคำกล่าวของบุญมี ก้อนทอง (บุญมี ก้อนทอง 2518 : 22) ที่ว่าหน่วยการเรียนรู้การสอนเป็นบทเรียนที่สำเร็จในตัวเอง สร้างขึ้นสำหรับให้ผู้เรียนได้ศึกษาดูด้วยตนเองโดยมีวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้แน่นอน

นอกจากนี้ ชมพันธุ์ ฤทธิชัย ฌ อยุธยา (ชมพันธุ์ ฤทธิชัย ฌ อยุธยา 2519 : 1) ได้ให้ความหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนว่า หมายถึง กิจกรรมการเรียนรู้ที่จัดขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเรียนรู้และแสดงสมรรถภาพในการเป็นครูอย่างใดอย่างหนึ่งหรือหลายอย่าง เค็ม หน่วยการเรียนรู้การสอนสร้างขึ้นเพื่อใช้ในหลักสูตรการฝึกหัดครูแบบสมรรถฐาน (Competency-based Teacher Education) แต่ก็สามารถนำไปสร้างเป็นบทเรียนในระดับอื่นได้ เพื่อช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ในบทเรียนนั้นอย่างแท้จริง

ฉะนั้นอาจสรุปได้ว่า หน่วยการเรียนรู้การสอน หมายถึง ชุดของประสบการณ์การเรียนรู้ที่จัดขึ้นเพื่อช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง ช่วยอำนวยความสะดวกให้กับทั้งผู้สอน

และผู้เรียนโดยผู้เรียนสามารถเรียนได้ด้วยตนเอง เพราะมีกระบวนการเรียนการสอนที่เป็นระเบียบแบบแผน และมีส่วนประกอบหลัก คือ ความมุ่งหมาย กิจกรรม และการประเมินผลอันเป็นส่วนประกอบที่สำคัญในการเรียนรู้

ลักษณะของหน่วยการเรียนรู้การสอน

ฮุสตัน และคณะ (Houston and others. 1972 : 47) ได้สรุปลักษณะสำคัญของหน่วยการเรียนรู้การสอนดังนี้

1. เป็นบทเรียนสำเร็จรูป (total program)
2. เน้นตัวผู้เรียนเป็นสำคัญ (learner emphasis)
3. มีจุดมุ่งหมายชัดเจน (focus an objectives)
4. เป็นการเรียนรายบุคคลตามความสามารถของแต่ละบุคคล

(individualized and personalized) เป็นการส่งเสริมให้เด็กช่วยตัวเอง

5. เลือกกระทำกิจกรรมได้ตามความสนใจ (variety of modes)
6. เน้นที่กระบวนการ (process)

รูปแบบของหน่วยการเรียนรู้การสอน

หน่วยการเรียนรู้การสอนมีรูปแบบที่ไม่คงที่แน่นอน ยืดหยุ่นและเปลี่ยนแปลงได้ตามความมุ่งหมายของการเรียนการสอน ลักษณะเนื้อหาวิชาและความเหมาะสมกับผู้เรียนรวมทั้งวิจารณ์ญาณของผู้สร้าง แมว่าส่วนประกอบของหน่วยการเรียนรู้การสอนที่มีใช้ทั่วโลกจะไม่เหมือนกัน (ชูชาติ นาสแสง 2521 ข. 18) แต่โดยทั่วไปแล้วทุกรูปแบบจะมีส่วนประกอบสำคัญ 5 ส่วน (Houston and others. 1972 : 125) คือ

1. หลักการและเหตุผล (Rationale)
2. จุดมุ่งหมาย (Objectives)
3. การประเมินผลเบื้องต้น (Pre-assessment)

4. กิจกรรมการเรียนรู้ (Learning activities)

5. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post - assessment)

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง เมตริกซ์ โดยพิจารณาตามรูปแบบซึ่งสมบูรณ์มาก และกำลังเป็นที่นิยมอย่างแพร่หลายที่สุดในประเทศไทย คือรูปแบบของหน่วยการเรียนรู้การสอนที่มีส่วนประกอบ 7 ประการ (ชมพันธุ์ คุญชร ณ อยุธยา 2518 : 1-9) ดังนี้

1. หลักการและเหตุผล (Rationale)
2. จุดมุ่งหมาย (Objectives)
3. ความรู้พื้นฐาน (Prerequisites)
4. การประเมินผลเบื้องต้น (Pre-assessment)
5. กิจกรรมการเรียนรู้ (Instructional activities)
6. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post-assessment)
7. การเรียนซ่อมเสริม (Remediation)

หลักการและเหตุผล (Rationale)

หลักการและเหตุผลมีวัตถุประสงค์ 2 ประการ คือ

1. เพื่ออธิบายวัตถุประสงค์และความสำคัญของจุดมุ่งหมายของหน่วยการเรียนรู้การสอนในแง่การสำรวจข้อมูล ทฤษฎี และการปฏิบัติ
2. เพื่อจัดหน่วยการเรียนรู้การสอนและจุดมุ่งหมายให้สอดคล้องกับหลักสูตรทั้งหมด

หลักการและเหตุผลจะช่วยอธิบายถึงความสำคัญของหน่วยการเรียนรู้การสอนและช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจความสัมพันธ์ของเนื้อหาของหน่วยการเรียนรู้การสอนที่กำลังเรียนอยู่ กับเนื้อหาในหน่วยอื่น ๆ

จุดมุ่งหมาย (Objectives)

จุดมุ่งหมายแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. จุดมุ่งหมายในการเรียนการสอน (instructional objectives) เป็นการระบุความสามารถที่ผู้เรียนต้องแสดงออก

2. จุดมุ่งหมายในการแสดงออก (expressive objectives) จะระบุเหตุการณ์ที่ผู้เรียนต้อง มีประสบการณ์

จุดมุ่งหมายจึงเป็นส่วนที่ช่วยวางโครงสร้างของหน่วยการเรียนการสอน และช่วยเสนอแนะกิจกรรมการเรียน ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนได้บรรลุถึงสมรรถภาพตามที่ระบุไว้

หน่วยการเรียนการสอนแต่ละหน่วยจะแตกต่างกันตามจำนวนของจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้ แต่จุดมุ่งหมายในการเรียนการสอน (instruction objectives) ควรจะอธิบายไว้อย่างชัดเจนถึงผลการเรียนที่คาดหวังและจุดมุ่งหมายควรเขียนในลักษณะที่สามารถประเมินผลได้

ความรู้พื้นฐาน (Prerequisites)

ความรู้พื้นฐานแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

1. ความสามารถพื้นฐานทั่วไปที่จำเป็นในการเรียนหน่วยการเรียนการสอน

2. สมรรถภาพเฉพาะซึ่งได้เรียนมาแล้วในหน่วยการเรียนการสอนก่อนๆ โดยทั่วไปผู้สร้างหน่วยการเรียนการสอนควรพยายามจัดให้มีความรู้พื้นฐานที่ต้องเรียนก่อนให้น้อยที่สุด ทั้งนี้เพื่อยืดหยุ่นโปรแกรมการเรียน นอกจากนี้การสร้างแบบประเมินผลของตนควรให้ครอบคลุมถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นด้วย

การประเมินผลเบื้องต้น (Pre-assessment)

การประเมินผลเบื้องต้น หมายถึง การวัดในเรื่องต่าง ๆ โดยมีจุดมุ่งหมายดังนี้

1. เพื่อว่าคุณผู้เรียนสามารถแสดงความรู้พื้นฐานนั้น ๆ ก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้ การสอนใดหรือไม่ หรือควรจะมีพื้นฐานความรู้ที่เป็นพื้นฐานก่อนเริ่มเรียน

2. เพื่อว่าคุณผู้เรียนมีความรู้ความสามารถที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้ การสอนที่กำลังจะเรียนแล้วหรือไม่ หรือคุณผู้เรียนควรจะได้รับความช่วยเหลือในกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้บรรลุถึงจุดหมายของหน่วยการเรียนรู้ การสอน

3. เพื่อว่าคุณผู้เรียนมีความรู้ความสามารถในบางส่วนที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้ การสอนหรือไม่ บทเรียนตอนที่คุณผู้เรียนมีความรู้แล้ว คุณผู้เรียนอาจจะเข้าร่วมในกิจกรรม การเรียนเพียงบางกิจกรรมซึ่งยังไม่ได้เรียนรู้เท่านั้น

โดยปกติการประเมินผลเบื้องต้นมักจะใช้การทดสอบโดยการเขียน อย่างไรก็ตาม ผู้สร้างหน่วยการเรียนรู้ควรพิจารณาถึงประโยชน์ของการทดสอบอย่างอื่นด้วย

กิจกรรมการเรียนรู้ (Instructional activities)

กิจกรรมการเรียนรู้ หมายถึง งานที่จะให้ผู้เรียนทำเพื่อช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ และบรรลุถึงจุดหมายที่ระบุไว้ กิจกรรมการเรียนรู้ควรมีลักษณะดังนี้

1. กิจกรรมการเรียนรู้ควรช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ตามความสามารถของตน
2. กิจกรรมการเรียนรู้ควรจะได้สนองความต้องการ ความสามารถ เจตคติ และความพร้อมของผู้เรียนแต่ละคน
3. กิจกรรมการเรียนรู้ควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเลือกกิจกรรมได้หลาย ๆ อย่าง
4. กิจกรรมแต่ละอย่างควรให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และมีทัศนคติที่ดีเกี่ยวกับ หมายความว่า กิจกรรมแต่ละชนิดควรจะได้ผลเท่าเทียมกัน

การประเมินผลหลังการเรียนรู้ (Post-assessment)

การประเมินผลหลังการเรียนรู้อาจจะเหมือนหรือแตกต่างจากการประเมินผลเบื้องต้น การประเมินผลหลังการเรียนรู้ควรมีลักษณะดังนี้

1. ประเมินผลความรู้ความสามารถทั้งหมดที่ระบุไว้ในจุดมุ่งหมายด้วยวิธีการที่เชื่อถือได้
2. ประเมินผลเฉพาะความรู้ที่ระบุไว้ในจุดมุ่งหมายหรือที่ระบุไว้เป็นพื้นฐานก่อนเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอน
3. การประเมินผลหลังการเรียนรู้การจัดทำทั้งในระหว่างเรียน (formative) และหลังการเรียนรู้ (summative)
4. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ จะต้องเป็นจริงและมีเหตุผล โดยคำนึงถึงเวลาทั้งหมดของผู้สอนและผู้เรียน

การเรียนรู้ซ่อมเสริม (Remediation)

การเรียนรู้ซ่อมเสริมจะกำหนดไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนหรือไม่ก็ได้ เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่จะช่วยเหลือผู้เรียนซึ่งไม่ผ่านการทดสอบหลังการเรียนรู้ การเรียนรู้ซ่อมเสริมอาจใช้กิจกรรมแบบเดิมหรือเปลี่ยนแปลงได้ โดยทั่วไปผู้สอนและผู้เรียนจะกำหนดร่วมกัน โดยพิจารณาจากความสามารถของผู้เรียนกับการประเมินผลหลังการเรียนรู้ แล้วช่วยกันตัดสินใจว่าจะใช้วิธีสอนอย่างไรจึงจะเป็นประโยชน์และได้ผลที่สุด

การสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน

ขั้นตอนในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนมี 4 ขั้นตอน (Houston and others. 1972 : 2-3) คือ

1. การวางแผน (Planning)

ในการวางแผนผู้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนจะต้องพิจารณาสิ่งต่อไปนี้

- 1.1 ทรัพยากรที่มีอยู่ในการเรียนการสอน
- 1.2 ปัญหาของการเรียนการสอน
- 1.3 จำนวนที่แน่นอนของผู้เรียน
- 1.4 แหล่งความรู้ที่พอจะหาได้
- 1.5 จุดมุ่งหมายขั้นสุดท้าย
- 1.6 จุดมุ่งหมายของแต่ละหน่วย
- 1.7 กิจกรรมการเรียนการสอน
- 1.8 ทางเลือกในกิจกรรมต่าง ๆ
- 1.9 วัสดุประกอบการเรียนการสอน
- 1.10 วิธีการประเมินผลและพิจารณาผลที่ได้
- 1.11 รายละเอียดสำหรับอุปกรณ์ประกอบการเรียนการสอนรวมถึง

คำแนะนำในการใช้

การวางแผนขั้นต้นจะจบลงด้วยการเขียนรายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้การสอน

2. การผลิต (Production)

เป็นขั้นตอนที่ผู้ผลิตจะต้องรวบรวมวัสดุอุปกรณ์ และเครื่องมือต่าง ๆ ที่จะใช้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนเข้าไว้ด้วยกัน ซึ่งอาจจะได้มาโดยการซื้อ การขอหรือขอยืมจากแหล่งผลิตอื่น ๆ การสร้างขึ้นเอง หรือจากการดัดแปลงสิ่งที่มีอยู่แล้วให้เข้ารูปแบบที่ได้วางแผนไว้ ในขั้นนี้อาจจะต้องมีการวิเคราะห์งาน (task analysis) หรือวิเคราะห์ราคา (cost analysis) ผู้ผลิตอาจต้องทำการทดสอบกิจกรรมบางอย่างหรือวัสดุอุปกรณ์บางอย่าง กับกลุ่มตัวอย่างของประชาชนตามเป้าหมาย ก่อนที่จะนำกิจกรรมหรือวัสดุอุปกรณ์นั้นมาใช้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน กิจกรรมและวัสดุอุปกรณ์ทุกอย่างจะต้องสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายและเหมาะสมกับผู้เรียน

3. การทดลองต้นฉบับ (Prototype testing)

เมื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเสร็จแล้วก็นำไปใช้จริง ต้องทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนของนักเรียนที่จะใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนนี้เสียก่อน ระหว่างการทดลอง ผู้สร้างต้องเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการประเมินผลประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนรู้การสอนทั้งหมด และในขณะเดียวกันเพื่อประเมินผลกิจกรรมเฉพาะอย่างด้วย

4. การประเมินผล (Evaluation)

การประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอนจะเริ่มขึ้นทันทีเมื่อเก็บข้อมูลได้เพียงพอ และเที่ยงตรง ข้อมูลจะถูกวิเคราะห์ออกมาในรูปของจุดมุ่งหมายและความสัมพันธ์ระหว่างจุดมุ่งหมาย ยุทธวิธี วัสดุอุปกรณ์ กระบวนการและผลที่ได้รับ การประเมินผลดำเนินการโดยนำผลที่ได้รับจริงกับผลที่คาดว่าจะได้รับมาเปรียบเทียบกัน โดยทั่วไปการประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอนจะต้องพิจารณาถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ปฏิบัติการของนักเรียนที่มีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอน ซึ่งพิจารณาได้จากกิจกรรมการเรียนรู้การสอนที่นักเรียนเลือก และเวลาที่ใช้ในการเรียนหน่วยการเรียนรู้การสอนประกอบด้วย

พิมพ์ดิฉันน้ำ

๑๖

เพื่อนำไปช่วยเหลือและให้บริการแก่ครูอาจารย์ผู้สอนวิชาการศึกษา ต่อมาในปี 1969 โครงการเดียวกันนี้ได้นำหน่วยการเรียนรู้การสอนที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้ ทำการวิจัยและเผยแพร่ (Charistians. 1970 : 1-5)

หลังจากนั้นได้มีผู้ผลิตหน่วยการเรียนรู้การสอนขึ้นใช้อย่างแพร่หลายดังเช่น เทรไซส์ (Trezise. 1972 : 2019-A) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนขึ้นเพื่อศึกษาทัศนคติของนักศึกษาในระดับวิทยาลัยที่มีต่อการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนปรากฏว่านักศึกษาสวนใหญ่เห็นด้วยกับการเรียนโดยวิธีนี้ และมีทัศนคติเหมาะสมที่จะนำหน่วยการเรียนรู้การสอนมาใช้ในระดับวิทยาลัย ต่อมา โทโด (Todo. 1973 : 4078-A) ได้ให้ข้อเสนอแนะว่าควรนำหน่วยการเรียนรู้การสอนไปใช้ในระดับอื่น ๆ ด้วย ทั้งนี้เพราะโทโดได้ศึกษาพบว่า หน่วยการเรียนรู้การสอนสามารถช่วยผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถตรงตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้ทุกประการ ✕

สตีเฟน (Stephens. 1974 : 4973-A) ได้พัฒนาอุปกรณ์ที่ใช้ในหน่วยการเรียนรู้การสอนอันรวมกับอาจารย์มหาวิทยาลัยจอร์เจียซึ่งเป็นผู้พัฒนาหลักสูตรรายวิชาการอ่าน จากนั้นได้นำหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ไปทดลองสอนกับนักศึกษาระดับสูงกว่าปริญญาตรี (graduates) ที่กำลังเรียนวิชาการอ่าน จำนวน 37 คน ปรากฏว่านักศึกษาทั้งหมดประสบผลสำเร็จทางการเรียนในระดับสูง กล่าวคือ สามารถหาคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ได้ถึงร้อยละ 90 ของคะแนนเต็ม เป็นอย่างต่ำ มีนักศึกษาเพียง 1 คนเท่านั้นที่มีทัศนคติไม่คัดต่อการอ่านอีก 1 คน มีทัศนคติแบบกลาง (indifferent) ส่วนอีก 35 คน มีทัศนคติที่ดีต่อการอ่าน

ซาสเซอร์ (Sasscer. 1974 : 6957 - 6958 -A) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาชีววิทยาโดยแยกเป็นหน่วยย่อย แต่ละหน่วยย่อยกำหนดความรู้พื้นฐานและแบบฝึกหัดประจำหน่วยไว้ และนำไปทดลองสอนกับนักศึกษาเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีสอนตามปกติซึ่งมีครูเป็นผู้บรรยาย ผลปรากฏว่า นักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่ได้รับการสอนตามปกติ แต่ผลการวิจัยนี้ไม่สอดคล้อง

กับผลการศึกษาของบาวเลอร์ (Bower. 1975 : 1445-A) ซึ่งพบว่า ในการสอน นักเรียนฝึกหัดครูให้ตั้งคำถามสำหรับดำเนินการอภิปรายวิชาศีลธรรมนั้น นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนการสอนกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามปกติโดยมีครูเป็นผู้บรรยาย มีความสามารถในการตั้งคำถามแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

กิลด์ (Guidice. 1977 : 2377-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียน วิชาสังคมศึกษาจากการเรียนเป็นกลุ่มกับการเรียนเป็นรายบุคคล โดยใช้หน่วยการเรียน การสอนทั้ง 2 วิธี กลุ่มตัวอย่างได้แก่ นักศึกษาของวิทยาลัย เซนต์ โอลาฟ (St. Olaf College) แห่งมลรัฐมินเนโซตา (Minnesota) จำนวน 14 คน แบ่งเป็นกลุ่มควบคุม ซึ่งเรียนเป็นรายบุคคลและกลุ่มทดลองซึ่งเรียนเป็นกลุ่ม ปรากฏว่า นักศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม มีผลการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

สำหรับหน่วยการเรียนการสอนทางคานคณิศาสตร์ หลังจากทีโครงการ EPDA ได้สร้างหน่วยการเรียนการสอนเกี่ยวกับสมรรถภาพในการสอนคณิตศาสตร์ ออกเผยแพร่ในปี ค.ศ. 1975 ถึง 22 หน่วยการเรียนการสอน (Turlington. 1975 : 1) แล้ว ในปีเดียวกัน แมกเฮล และวิทซ์ (McHale and Witzke. 1976) แห่งวิทยาลัยเทคนิค มิลวอกกีแอเรีย (Milwaukee Area Technical College) มลรัฐวิสคอนซิน สหรัฐ อเมริกา ได้สร้างหน่วยการเรียนการสอนวิชาเลขคณิตชั้น โดยแบ่งเป็น 5 หน่วยย่อยดังนี้

หน่วยย่อยที่ 1 จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

หน่วยย่อยที่ 2 เศษส่วน

หน่วยย่อยที่ 3 ทศนิยม

หน่วยย่อยที่ 4 ร้อยละ อัตราส่วน และสัดส่วน

หน่วยย่อยที่ 5 การประมาณค่าและการคำนวณโดยใช้ค่าประมาณ

หน่วยการเรียนการสอนเลขคณิตชุดนี้ ใช้ให้ทั้งผู้ที่เริ่มเรียนเลขคณิตใหม่ ๆ และผู้ที่ ต้องการจะเรียนรวมเสริมหลังจากที่ได้เรียนจากการสอนปกติมาแล้ว

นอกจากนี้โรเบิร์ตสัน (Robertson, 1976 : 512- A) ได้ทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์กับการสอนโดยใช้ตารางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างคือ นักเรียนเกรด 3, 4 และ 5 โรงเรียนแกรี (The Gary Public School) กลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน และกลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยใช้ตารางคณิตศาสตร์ใช้เวลาในการทดลอง 4 เดือน จากการใช้ ANOVA วิเคราะห์ผลการทดสอบของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ปรากฏว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนในประเทศไทย

หน่วยการเรียนรู้การสอนเริ่มเข้ามามีบทบาทสำคัญในวงการศึกษไทย เมื่ออาจารย์สมศักดิ์ แสนสุข และศาสตราจารย์ ดร.อีคอส (E. Kos) ได้จัดให้มีการสัมมนาปฏิบัติการเกี่ยวกับการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเพื่อใช้ในการสอนชีววิทยาและวิทยาศาสตร์สาขาอื่น ๆ ขึ้นในวันที่ 28 ตุลาคม ถึง 2 พฤศจิกายน พ.ศ. 2517 ที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทร-วิโรฒ ประสานมิตร จากการประเมินผลการสัมมนาในภายหลังพบว่า ผู้เข้าร่วมสัมมนาร้อยละ 97 มีความเห็นว่าหน่วยการเรียนรู้การสอนช่วยให้การสอนมีคุณภาพสูงขึ้น ช่วยให้ผู้เรียนมีความรับผิดชอบในการเรียนดีขึ้น และควรนำไปใช้กับวิชาอื่น ๆ ต่อไป สมาชิกร้อยละ 94 เห็นด้วยว่าหน่วยการเรียนรู้การสอนช่วยให้ผู้เรียนกระปรี้กระเปร่าขึ้น เพราะผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียน และได้กระทำกิจกรรมต่าง ๆ ด้วยตนเองมากขึ้น สมาชิกร้อยละ 91 มีความเห็นว่าควรนำหน่วยการเรียนรู้การสอนมาใช้ในประเทศไทย ไม่ว่าจะเป็นการศึกษภายในหรือภายนอกโรงเรียน หรือการศึกษานอกระบบ (ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย 2517 : 1-2)

จากผลการสัมมนาครั้งนี้ทำให้มีผลงานวิจัยเกิดขึ้นมากมายเริ่มด้วย ชีระ จิตต์จนะ (ชีระ จิตต์จนะ 2519 : 21-25) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิชาจิตวิทยาาสตร์เรื่องไฟฟ้า กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ปรากฏว่า กลุ่มทดลองซึ่งได้รับการสอนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มควบคุมซึ่งได้รับการสอนตามปกติ และนักเรียนในกลุ่มทดลองมีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอน

นิยม ทองอุคม (นิยม ทองอุคม 2520 : 26-28) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้ การสอนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องบรรยากาศ แล้วนำไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 1 เพื่อเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติ ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ การสอนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ ระดับ .01 และมีทัศนคติในทางสนับสนุนต่อการเรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนอย่าง มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .02

แตงผลการวิจัยของ ชีระ จิตต์จนะ และ นิยม ทองอุคม ชัดแย้งกับผลการวิจัย ของ เบ็ญจา โสทรโยม (เบ็ญจา โสทรโยม 2520 : 31-35) ซึ่งพบว่าในการ เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 นักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนและนักเรียนที่เรียนตาม ปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

ความนิยมในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอน ขยายวงกว้างออกไปทุกขณะโดยเฉพาะ ในปี 2521 ปรากฏผลการวิจัยเกี่ยวกับเรื่องนี้กระจายไปในหลายสาขาวิชา เช่น

สุมาลี ศรีทองกิติกุล (สุมาลี ศรีทองกิติกุล 2521 : 56-58) ได้ศึกษาผล การเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ในวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่องการเปลี่ยนแปลงโดยใช้ หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอนปกติ ดำเนินการตามแบบแผนการทดลอง Randomized Control Group Pretest-Posttest Design ปรากฏผลว่า นักเรียนในกลุ่มทดลอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติทางวิทยาศาสตร์สูงกว่านักเรียนในกลุ่มควบคุมอย่างมี นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ .05 ตามลำดับ

ชัยพร วงศ์วรรณ (ชัยพร วงศ์วรรณ 2521 : 47-52) ได้ศึกษาพบว่า ในการเรียนวิชาประวัติศาสตร์ เรื่องเหตุการณ์สำคัญต่าง ๆ ในสมัยรัตนโกสินทร์ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นั้น นักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนมีผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนแตกต่างจากนักเรียนที่เรียนจากการสอนตามปกติอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนทั้งสองกลุ่มมีทัศนคติทางประวัติศาสตร์ที่ขึ้นจากเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ

สำหรับงานวิจัยในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สุทธิพงษ์ พะลัง (สุทธิพงษ์ พะลัง 2521 : 32-35) ได้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องโปรแกรมเส้นตรง (Linear Programming) ขึ้นซึ่งเนื้อหาเรื่องนี้ไม่ได้บรรจุอยู่ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา แล้วนำไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ 5 สายพาณิชยการ ปรากฏว่า นักเรียนทั้ง 2 ระดับชั้น สามารถเรียนเรื่องโปรแกรมเส้นตรงโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นได้ โดยที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้ง 2 ระดับชั้นแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

นอกจากนี้ เสถียร ศิริสถิตย์กุล (เสถียร ศิริสถิตย์กุล 2521 : 36-39) ศึกษาพบว่า ในการสอนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันให้กับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูงปีที่ 1 นักศึกษาที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่า นักศึกษาที่เรียนจากการสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ $.05$ แต่ผลการวิจัยนี้ขัดแย้งกับผลการวิจัยของ เวช มงคล (เวช มงคล 2521 : 40-42) ซึ่งปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาปริมาตรของรูปทรงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนตามปกติแตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ และนักเรียนที่เรียนโดยใช้หน่วยการเรียนรู้ มีทัศนคติที่ดีต่อหน่วยการเรียนรู้การสอน

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2522 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร จำนวน 60 คน จากนักเรียนทั้งหมด 180 คน ได้มาโดยวิธีสุ่มดังนี้

1. สุ่มห้องเรียนมา 2 ห้องเรียน จากทั้งหมด 6 ห้องเรียน
2. สุ่มแยก 2 ห้องเรียนที่ได้ออกเป็นกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน และกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน

เครื่องมือในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองประกอบด้วย

1. หน่วยการเรียนรู้การสอน
 2. คู่มือสำหรับการสอนปกติ
 3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์
1. หน่วยการเรียนรู้การสอน ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้
 - 1.1 ศึกษารูปแบบ การสร้าง และการประเมินผลหน่วยการเรียนรู้การสอน พร้อมทั้งศึกษาตัวอย่างหน่วยการเรียนรู้การสอนเพื่อรวบรวมความรู้และแนวคิดสำหรับนำไปใช้สร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์
 - 1.2 ศึกษาเนื้อหาเรื่องเมตริกซ์จากหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 514 ประโยชน์มัธยมศึกษาตอนปลาย ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และหนังสืออื่น ๆ ประกอบแล้วแบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 หน่วยย่อยดังนี้

- หน่วยย่อยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 2 การบวกเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 3 การคูณเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 4 คีโอรมินันต์
- หน่วยย่อยที่ 5 การใช้เมตริกซ์ในระบบสมการเชิงเส้น

1.3. กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในแต่ละหน่วยย่อย

1.4 สร้างแบบทดสอบประเมินผลการเรียนในแต่ละหน่วยย่อยให้สอดคล้องกับ

จุดมุ่งหมาย

1.5 รวบรวมรายละเอียดข้างต้น เรียบเรียงขึ้นเป็นหน่วยการเรียนการสอน
ซึ่งมีส่วนประกอบ ดังนี้

- 1.5.1 หลักการและเหตุผล
- 1.5.2 จุดมุ่งหมาย
- 1.5.3 ความรู้พื้นฐาน
- 1.5.4 การประเมินผลเบื้องต้น
- 1.5.5 กิจกรรมการเรียน
- 1.5.6 การประเมินผลหลังการเรียน
- 1.5.7 การเรียนซ่อมเสริม

1.6 ปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอนโดยให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบทั้งในด้าน
ความเหมาะสมของเนื้อหาเรื่องเมตริกซ์ และด้านคุณภาพของหน่วยการเรียนการสอน

1.7 ปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอน ให้มีคุณภาพสูงขึ้นโดยนำหน่วยการเรียน
การสอนที่ปรับปรุงแล้วจากข้อ 1.6 ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน
40 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนเรื่องเมตริกซ์มาก่อน 3 ครั้ง ดังนี้

ครั้งที่ 1 ทดลองแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one-try-out) นำ
หน่วยการเรียนการสอนไปทดลองใช้กับนักเรียน 2 คน เพื่อรวบรวมข้อบกพร่องของบทเรียน
ได้แก่ การใช้ภาษา ลำดับขั้นตอนในการทำกิจกรรม ความเหมาะสมของเนื้อหาและระยะเวลา
ที่ใช้ในการเรียน แล้วนำมาปรับปรุง

ครั้งที่ 2 ทดลองกลุ่มย่อย (small group try-out) นำหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงแล้วจากครั้งที่ 1 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่จำนวน 8 คน เพื่อค้นหาข้อบกพร่องสำหรับปรับปรุงหน่วยการเรียนการสอนเช่นเดียวกับครั้งที่ 1

ครั้งที่ 3 ทดลองภาคสนาม (field try-out) นำหน่วยการเรียนการสอนที่ปรับปรุงแล้วจากครั้งที่ 2 ไปทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มใหม่อีกกลุ่มหนึ่ง จำนวน 30 คน เพื่อศึกษาสถานการณ์การเรียนการสอนที่ใกล้เคียงกับการทดลองจริง

หน่วยการเรียนการสอนที่ได้จากการปรับปรุงหลังการทดลองครั้งที่ 3 เป็นหน่วยการเรียนการสอนที่พร้อมจะนำไปใช้จริงกับกลุ่มทดลองไคตันที่

2. คู่มือสำหรับการสอนปกติ ได้แก่ เอกสารที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นซึ่งมีรายละเอียดเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน เนื้อหาเรื่องเมตริกซ์ และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนการสอน

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์

ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์เป็นแบบปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 80 ข้อ ให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม โดยศึกษาวิธีสร้างและเทคนิคการวิเคราะห์ข้อสอบจากหนังสือเทคนิคการวัดผลของ ชวาล แพริตกุล (ชวาล แพริตกุล 2508 : 44-311) แล้วนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางภาษาศาสตร์ คณิตศาสตร์ตรวจสอบเพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแล้วไปทดสอบกับนักศึกษาประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาระดับสูง ปีที่ 1 ซึ่งผ่านการเรียนเรื่องเมตริกซ์มาแล้วจำนวน 100 คน นำผลมาวิเคราะห์เพื่อปรับปรุงแบบทดสอบก่อนนำไปใช้จริง กับกลุ่มตัวอย่างดังนี้

3.3.1 วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อโดยใช้เทคนิค 27% กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ และเปิดตารางวิเคราะห์ข้อสอบของ จุง-เตห์ฟาน (Chung-Teh Fan, 1952 : 6-32) เพื่อหาความยากง่าย (p) และกาอ่านาจำแนก (r) ของข้อสอบแต่ละข้อ แล้วคัดเลือกเฉพาะข้อที่มีค่า p อยู่ระหว่าง .20-.80 และค่า r ตั้งแต่ .20 ขึ้นไป

พร้อมทั้งแก้ไขข้อสอบบางข้อให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ปรากฏว่าค่าข้อสอบที่มีคุณภาพตามเกณฑ์จำนวน 50 ข้อ มีความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ .47 และค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .42

3.3.2 หาค่าความเชื่อมั่น (reliability) ของแบบทดสอบทั้งฉบับ ซึ่งประกอบด้วยข้อสอบที่คัดเลือกไว้ 50 ข้อ ด้วยวิธีหาคะแนนของนักศึกษาทั้ง 100 คน คัดเฉพาะคะแนนซึ่งได้จากการทำแบบทดสอบ 50 ข้อดังกล่าว มาวิเคราะห์ โดยใช้สูตร 20 ของ กูเตอร์ รัชาร์ดสัน (K-R 20) (Ferguson. 1971 : 367) พร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (SE_{meas}) ปรากฏว่าค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .82 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 3.11 ดังรายละเอียดในภาคผนวก

3.3.3 หาค่าความเที่ยงตรง (validity) ของแบบทดสอบทั้งฉบับ ด้วยวิธีหาค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

วิธีดำเนินการทดลอง

1. สุ่มห้องเรียนมา 2 ห้องเรียนจากห้องเรียนทั้งหมด 6 ห้อง แล้วสุ่มแยกเป็นกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน และกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน
2. รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม
3. ดำเนินการสอนเรื่องเมตริกซ์โดยให้กลุ่มควบคุมได้รับการสอนปกติและกลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 1 ท่าน เป็นผู้สอนทั้งสองกลุ่ม ผู้วิจัยเป็นผู้ช่วยควบคุมและให้ความสะดวกในการเรียนการสอน
4. ทดสอบนักเรียนทั้งสองกลุ่มด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์
5. นำคะแนนที่รวบรวมได้จากข้อ 2 และ 4 ไปทำการวิเคราะห์

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน

1.1 คะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนน คำนวณจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad (\text{Ferguson. 1971 : 54})$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่ม

1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนน คำนวณจากสูตร

$$S^2 = \frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \quad (\text{Ferguson. 1971 : 62})$$

เมื่อ S^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนน

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

N แทน จำนวนของนักเรียนในกลุ่ม

2. ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความยากมาตรฐานของแบบทดสอบ

วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้ตารางวิเคราะห์ข้อสอบของ จุง-เตห์ฟาน (Jung-Teh Fan. 1952 : 6-32)

3. ค่าความเชื่อมั่น (reliability) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คำนวณจากสูตร $K-R$ 20 ของคูเตอร์ ริชาร์ดสัน คือ

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right] \quad (\text{Ferguson. 1971 : 367})$$

เมื่อ r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
n	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
s^2	แทน	ค่าความแปรปรวนของคะแนนรวมทั้งฉบับ
p	แทน	สัดส่วนของคนตอบถูกในแต่ละข้อ
q	แทน	สัดส่วนของคนตอบผิดในแต่ละข้อ ($q = 1-p$)

4. ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement) คำนวณจากสูตร

$$SE_{meas} = S_x \sqrt{1 - r_{tt}} \quad (\text{Ferguson. 1971 : 371})$$

เมื่อ SE_{meas}	แทน	ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
S_x	แทน	ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
r_{tt}	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

5. วิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยมีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรรวม โดยใช้สูตร

$$F = \frac{MS'_A}{MS'_W} \quad (\text{Landquist. 1953 : 320-323})$$

เมื่อ F	แทน	ค่าวิกฤติที่ใช้พิจารณาใน F-distribution
MS'_A	แทน	ค่าปรับแก้ของค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนระหว่างกลุ่ม
MS'_W	แทน	ค่าปรับแก้ของค่าเฉลี่ยของผลบวกกำลังสองของคะแนนภายในกลุ่ม

6. คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมทริกซ์ของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม คำนวณโดยใช้สูตร

$$\bar{Y}_j' = b_w(\bar{X} - \bar{X}_j) + \bar{Y}_j \quad (\text{Ferguson. 1971 : 297})$$

เมื่อ $\bar{Y}_j'$ แทน คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมทริกซ์ของกลุ่ม j

$\bar{Y}_j$ แทน คะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมทริกซ์ของกลุ่ม j

$\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ยของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของกลุ่มตัวอย่าง

$\bar{X}_j$ แทน คะแนนเฉลี่ยของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของกลุ่ม j

$$b_w = \frac{SP_w}{SS_{wx}}$$

7. เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมทริกซ์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1' - \bar{X}_2'}{\sqrt{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \left[\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right]}}$$

เมื่อ t แทน ค่าวิกฤติที่ใช้พิจารณาใน t-distribution

$\bar{X}_1'$ แทน คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่มทดลอง

$\bar{X}_2'$ แทน คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่มควบคุม

S_1^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนนของกลุ่มทดลอง

S_2^2 แทน ค่าความแปรปรวนของคะแนนของกลุ่มควบคุม

N_1 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

N_2 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มควบคุม

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล

SS	แทน	ผลบวกของกำลังสองของคะแนน
SS'	แทน	ค่าปรับแล้วของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
SP	แทน	ผลบวกของผลคูณของคะแนน
MS	แทน	ค่าเฉลี่ยของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
MS'	แทน	ค่าปรับแล้วของค่าเฉลี่ยของผลบวกของกำลังสองของคะแนน
X	แทน	คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1
Y	แทน	คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์
$\bar{Y}'$	แทน	คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์
S^2	แทน	ค่าความแปรปรวนของคะแนน
N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่ม
F	แทน	ค่าวิกฤติที่ใช้พิจารณาใน F-distribution
t	แทน	ค่าวิกฤติที่ใช้พิจารณาใน t-distribution

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ซึ่งเป็นคะแนนที่ได้จากการทดสอบภายหลังสิ้นสุดการทดลองของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมมาวิเคราะห์ด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม โดยวิเคราะห์คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรร่วม ปรากฏผลดังแสดงในตาราง 1

ตาราง 1 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนรวมของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องเมทริกซ์ของกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยใช้คะแนนผลการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เป็นตัวแปรรวม

Source of Variation	SS_x	SS_y	SP	SS'_y	df	MS'_y	F
between	220.4167	763.2667	410.1667	414.0565	1	414.0565	30.93**
within	2078.5667	1128.7333	871.8333	763.0519	57	13.3869	
total	2298.9833	1892.00	1282.00	1177.1083	58		

**มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 $F_{.01}(1,57) = 7.12$

จากตาราง 1 แสดงว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมทริกซ์ของกลุ่มทดลองและ
กลุ่มควบคุม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ต่อไปเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่รับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง
เมทริกซ์ของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t-test ปรากฏผลดังแสดงในตาราง 2

ตาราง 2 เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่รับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่อง เมทริกซ์ของกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{y}$	s^2	t
กลุ่มทดลอง	30	43.76	6.25	3.43**
กลุ่มควบคุม	30	38.23	32.69	

**มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 $t_{(58, .01)} = 2.39$

จากตาราง 2 แสดงว่า คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่มทดลองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้กับการสอนปกติ

สมมุติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2522 ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร จำนวน 60 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 30 คน และกลุ่มควบคุม 30 คน
2. เครื่องมือในการทดลอง
 - 2.1 หน่วยการเรียนรู้การสอน หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเมตริกซ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งผ่านการปรับปรุงประสิทธิภาพแล้ว ประกอบด้วย หน่วยย่อย 5 หน่วย ดังนี้
 - หน่วยย่อยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์
 - หน่วยย่อยที่ 2 การบวกเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์
 - หน่วยย่อยที่ 3 การคูณเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์
 - หน่วยย่อยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์
 - หน่วยย่อยที่ 5 การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

2.2 คู่มือสำหรับการสอนปกติ ได้แก่อเอกสารที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีรายละเอียดเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน เนื้อหาเรื่องเมตริกซ์ และแบบฝึกหัด เช่นเดียวกับที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน

2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ เป็นแบบปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ คุณภาพของแบบทดสอบเป็นดังนี้

ค่าความยากง่ายเฉลี่ย เท่ากับ .47

ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย เท่ากับ .42

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ เท่ากับ .82

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 3.11

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 สุ่มห้องเรียนมา 2 ห้องเรียนจากห้องเรียนทั้งหมด 6 ห้อง แล้วสุ่มแยกเป็นกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียน และกลุ่มทดลอง 1 ห้องเรียน

3.2 รวบรวมคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 ของนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

3.3 ดำเนินการสอนเรื่องเมตริกซ์โดยให้กลุ่มควบคุมได้รับการสอนปกติ และกลุ่มทดลองได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมัธยมสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 1 หาด เป็นผู้สอนทั้ง 2 กลุ่ม ผู้วิจัยเป็นผู้ช่วยควบคุม และให้ความสะดวกในการเรียนการสอน

3.4 ทดสอบนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สรุปผลการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผล

การที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอน สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้นั้น น่าจะเนื่องมาจากสาเหตุดังต่อไปนี้

1. หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเมตริกซ์ที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นผลสรุปที่ได้มาจากการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ภายหลังการนำไปทดลองใช้ตามกระบวนการสร้างและการปรับปรุงประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนรู้การสอนแล้วทุกประการ อาทิเช่น การจัดเรียงลำดับเนื้อหาของบทเรียนทุกบทเป็นไปอย่างเหมาะสม และต่อเนื่องสัมพันธ์กัน โดยผ่านการตรวจสอบของผู้เชี่ยวชาญทั้งในด้านความถูกต้องของเนื้อหาและความรัดกุมของภาษาที่ใช้ นอกจากนี้การเสนอบทเรียนเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ อันเป็นบทเรียนหนึ่งซึ่งค่อนข้างยาก และนักเรียนอาจเกิดความสับสนได้ง่าย ด้วยวิธีให้นักเรียนดูเนื้อหาจากแผ่นโปร่งใส ซึ่งฉายด้วยเครื่องฉายวัสดุโปร่งแสง (Overhead projector) ควบคู่กับการฟังคำบรรยายจากเทปบันทึกเสียง นับเป็นการจัดความยากของบทเรียนและความสับสนของนักเรียนได้เป็นอย่างดี ทั้งนี้เพราะเทคนิคการฉายภาพบนแผ่นโปร่งใส ช่วยให้นักเรียนสามารถแยกแยะรายละเอียดเกี่ยวกับกระบวนการในการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ได้อย่างชัดเจน รวดเร็วและถูกต้อง มากกว่าการสอนด้วยวิธีบรรยายตามปกติ ด้วยเหตุนี้ การสอนเรื่อง เมตริกซ์โดยให้หน่วยการเรียนรู้การสอนจึงช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

อย่างแท้จริง มากกว่าการสอนปกติ

✓ 2. ในการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การเรียนการสอน นักเรียนสามารถประเมินตนเองได้ตลอดเวลา ทั้งนี้เพราะบทเรียนแต่ละบทมีแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำพร้อมทั้งมีคำตอบเฉลย ซึ่งนักเรียนสามารถตรวจคำตอบของตนเองได้ทันทีที่ทำแบบฝึกหัดเรียบร้อยแล้ว ผู้ที่ตอบถูกจะมีกำลังใจในการศึกษาต่อไป ส่วนผู้ที่ตอบผิดก็สามารถทราบข้อบกพร่องได้ด้วยตนเอง อันเป็นเหตุให้เกิดการปรับปรุงและแก้ไขในข้อบกพร่องเหล่านั้น นอกจากนี้เมื่อประเมินผลหลังการเรียนในแต่ละหน่วยย่อยแล้ว ผู้ที่ไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินผลยังสามารถเรียนซ่อมเสริมนอกเวลาเรียนได้อีกด้วย วิธีการดังกล่าวข้างต้นต่างก่อให้เกิดผลดีแก่นักเรียนมากกว่าการสอนปกติทั้งสิ้น

3. ในการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การเรียนการสอน อาจารย์ผู้สอนมีเวลาและโอกาสได้ใกล้ชิดนักเรียนเป็นรายบุคคลมากกว่าการสอนปกติ นักเรียนก็สามารถปรึกษาหรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอนเพื่อขจัดปัญหาหรือข้อสงสัยต่าง ๆ ในบทเรียนได้ทันที ทำให้ความเข้าใจในบทเรียนต่อเนื่องกันไปโดยตลอด และไปเกิดการขัดแย้งในตนเองซึ่งเป็นลักษณะอันพึงปรารถนาอย่างยิ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ด้วยสาเหตุดังกล่าวข้างต้น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การเรียนการสอน จึงสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนปกติ

ข้อสังเกตบางประการจากการวิจัย

1. ข้อสังเกตเกี่ยวกับกิจกรรมการเรียน

แม้ว่าหน่วยการเรียนรู้ การเรียนการสอนนี้จะเน้นให้นักเรียนใช้ทักษะการอ่านเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งได้แก่การอ่านเอกสารประกอบการเรียนประเภทต่าง ๆ แต่เนื่องจากเอกสารเหล่านี้มีลักษณะสอดคล้องกับหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ กล่าวคือ ไม่เพียงแต่ระบุเฉพาะเนื้อหา

ของบทเรียนเท่านั้น แต่ยังมีแบบฝึกหัดแทรกไว้สำหรับให้นักเรียนได้ประเมินตนเอง ทั้งชนิดที่ประเมินได้ทุกครั้ง และชนิดที่ประเมินเป็นช่วง ๆ อีกด้วย ซึ่งสามารถนำนักเรียนไปสู่การเรียนรู้ได้อย่างแท้จริง โดยไม่ทำให้นักเรียนเกิดความรู้สึกเบื่อหน่าย ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงตั้งข้อสังเกตว่าเราสามารถนำกิจกรรมการอ่านมาใช้ได้เป็นอย่างดี ถ้าเอกสารที่สร้างขึ้นสำหรับการอ่านนั้นมีการบวนการในการสร้างสอดคล้องกับหลักจิตวิทยาการเรียนรู้ และมีความเหมาะสม ความวัยของผู้เรียนเพียงพอ

✓ 2. ข้อสังเกตเกี่ยวกับความสนใจในเอกสารประกอบการเรียน

ผู้วิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ให้ความสนใจกับเอกสารประกอบการเรียนทุกฉบับ แต่จะให้ความสนใจเป็นพิเศษกับเอกสาร 2 ประเภทคือ

2.1 เอกสารซึ่งมีแบบฝึกหัดชนิดเติมคำ และมีคำตอบเฉลยแทรกไว้เป็นข้อ ๆ สลับกับข้อความที่เป็นเนื้อหาของบทเรียน

2.2 เอกสารซึ่งระบุเนื้อหาสั้น ๆ และมีแบบฝึกหัดประเภทปรนัยชุดหนึ่งสำหรับวัดความรู้ หลังจากให้นักเรียนอ่านเนื้อหาสั้น ๆ นั้นจบแล้ว

ที่เป็นเช่นนี้เพราะ การศึกษาเอกสารประเภทที่ 1 ผู้เรียนสามารถประเมินตนเองได้ตลอดเวลา ทำให้เกิดกำลังใจในการศึกษาบทเรียนต่อไป และเกิดความเชื่อมั่นในความรู้ความเข้าใจของตนเอง ส่วนการทำแบบฝึกหัดในเอกสารประเภทที่ 2 นั้น เป็นการท้าทายให้ผู้เรียนนำความสามารถในการจับใจความสำคัญ หลังจากอ่านเนื้อหาสั้น ๆ มาใช้ ผู้เรียนจึงกระตือรือร้นและสนใจเป็นพิเศษ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. เนื่องจากผลการทดลองปรากฏว่า การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ให้ผลดีกับผู้เรียนมากกว่าการสอนปกติ ฉะนั้นครูผู้สอนควรมีความรู้ และความสามารถในการสร้างและการพัฒนาหน่วยการเรียนรู้การสอนให้มีประสิทธิภาพจนถึงระดับที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ ได้

2. ผู้บริหารและผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการศึกษาในทุกสถาบัน ควรให้การสนับสนุน และส่งเสริมในการสร้าง และการวิจัยเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอน

3. ควรนำเทคนิคเกี่ยวกับหน่วยการเรียนรู้การสอนไปประยุกต์ใช้กับการศึกษา
นอกระบบ

4. ในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนไม่ว่าจะเกี่ยวข้องกับสาขาวิชาใด ควรคำนึงถึงหลักการประหยัด ความเป็นประสิทธิภาพและความกว้างของขอบเขตในการนำไปประยุกต์ใช้ให้มากที่สุด

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

ผู้วิจัยขอเสนอแนะว่า น่าจะทำการวิจัยในลักษณะต่อไปนี้

1. นำหน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเมทริกซ์ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มอื่น ๆ หรือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยเปรียบเทียบกับการสอนปกติ ทั้งนี้ เพื่อให้ทราบผลที่เกิดขึ้นเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงกลุ่มตัวอย่าง และเพื่อรวบรวมข้อมูลอันจะเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

2. สำนวญเนื้อหาในวิชาคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้ การสอนมากกว่าการสอนปกติ

3. ศึกษาอิทธิพลของการสอน แบบหน่วยการเรียนรู้การสอนที่มีต่อการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนซึ่งมีระดับสติปัญญาแตกต่างกัน

4. วิเคราะห์องค์ประกอบความสามารถในการสร้างหน่วยการเรียนรู้การสอนที่มีประสิทธิภาพ

5. เปรียบเทียบพัฒนาการในด้านต่าง ๆ ของนักเรียนที่เรียนสอนโดยใช้การสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน กับการสอนแบบอื่น ๆ

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- /ชมพันธ์ กุญชร ณ อยุธยา หน่วยการเรียนรู้การสอน 2519, 12 หน้า อักสำเนา
ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล โรงพิมพ์วัฒนาพานิช 2516, 434 หน้า
ชัยพร วงศ์วรรณ การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาประวัติศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์ กท.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 53 หน้า อักสำเนา
- /ชูชาติ นาสแสง การเปรียบเทียบผลการเรียนการสอนวิชาภาษาไทยระดับ ป.กศ.สูง
เรื่องราชาศัพท์และคำสุภาพโดยใช้หน่วยการเรียนรู้กับการสอนตามปกติ
ปรินิพนธ์ กท.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 46 หน้า อักสำเนา
_____ หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องหน่วยการเรียนรู้สอน คณะวิชาครุศาสตร์
วิทยาลัยครูอุตรธานี 2521, 98 หน้า
- ธีระ จิตต์จนะ การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
เรื่องไฟฟ้า โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์ กท.ม. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ 2519, 25 หน้า อักสำเนา
- นิยม ทองอุดม การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนวิทยาศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1
เรื่องบรรยากาศ โดยใช้บทเรียนแบบโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์ กท.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 35 หน้า อักสำเนา
- บุญมี ก่อนทอง "บทเรียนโมดูลเพื่อเสริมความรู้" วิทยาสาร 26 : 21 - 23
มกราคม 2518
- /เบ็ญจา ไสตรโยม การทดลองเปรียบเทียบผลการสอนสมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปรโดยใช้
หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module) กับการสอนปกติ ปรินิพนธ์
กท.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2520, 37 หน้า อักสำเนา
- /ประเทิน มหาพันธ์ โฉมหน้าของคณิตศาสตร์แผนใหม่ ชลบุรี วิทยาลัยวิชาการศึกษา
บางแสน 2511, 89 หน้า

พรณทิพย์ ม้ามณี การสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ในระดับมัธยมศึกษา โรงพิมพ์สารศึกษา
2520, 105 หน้า

เวช มงคล การเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหาปริมาตรของรูปทรง
เรขาคณิต ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์
กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 46 หน้า อัครสำเนา

ศรีนครินทรวิโรฒ, มหาวิทยาลัย การประเมินผลสัมมนาปฏิบัติการ ใช้โมดูลในการสอน
2517, 6 หน้า อัครสำเนา

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
18 เมษายน - 6 พฤษภาคม 2509 วิทยาลัยครูสวนสุนันทา อัครสำเนา

สนธิ ไกรสินธุ์ "การสอนเด็กโดยแบ่งกลุ่มตามความสามารถ" วิทยาสาร 24 : 32-
33 ธันวาคม 2516

สุชาติ รัตนกุล การเตรียมครูเพื่อสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ในระดับประถมศึกษา วิทยานิพนธ์
วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2514, 93 หน้า อัครสำเนา

สุทธิพงษ์ พะลัง การศึกษาค้นคว้าผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาโปรแกรมเส้นตรง (Linear
Programming) โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอน (Instructional Module)
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และปีที่ 5 สายพลศึกษา ปรินิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 36 หน้า อัครสำเนา

สุมาลี ศรีทองดีกุล การเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ เรื่อง การเปลี่ยนแปลง
ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ ปรินิพนธ์ กศ.ม.
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 61 หน้า อัครสำเนา

เสถียร ศิริสถิตย์กุล การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาประกาศนียบัตร
วิชาการศึกษาชั้นสูง เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยใช้หน่วยการเรียนรู้การสอนกับการสอน
ตามปกติ ปรินิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 48 หน้า อัครสำเนา

เอื้ออารี ยกโสมณ "เขวชนในชนบท" เขวชนไผ่ 32 : 41 - 43

สถาบันวิจัยทางสังคมศาสตร์ ภาควิชาสังคมวิทยา 2516

อำพล ชรรณเจริญ การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ของ

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ปริญญาโท กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา

ประสานมิตร 2516, 50 หน้า อักษรย่อ

APEID Regional Planning Workshop on Teacher Education and Curriculum for Development. Modules on the Construction of Modules. Quezon City, 1975. 45 p.

Berkeley, Edmund C. A Guide to Mathematics for the Intelligent Nonmathematician. New York, Simon and Schuster, 1966. 352 p.

Bower, Kenneth P. "Evaluation of a Competency-Based Self-Instructional Module Designed to Prepare Pre-Service Elementary Teachers to Use Questioning Skills in Conducting Moral Discussions in the Elementary School Classroom," Dissertation Abstracts. 36(3): 1445-A, September, 1975.

Brandfield, John R. "Teaching Matrices Via Networks," The Mathematics Teacher. 6 : 561, October, 1972.

Brueckner, J.J. and Foster E. Grossnikle. Discovering Meaning in Elementary School Mathematics. The John C. Wenston, 1964. 513 p.

Charistian, Floyd T. Florida Modules on Individualized Teacher Education Materials. Tallahassee, Florida, The State of Florida Department of Education, 1970

Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. Princeton, New Jersey, Educational Services, 1952. 32 p.

Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. New York, McGraw-Hill, 1971. 605 p.

Finkbeiner, Daniel T. Introduction to Matrices and Linear Transformation. San Francisco, W.H. Freeman, 1969. 297 p.

Guidice, Thomas Lo. "A Comparison of Modular/ Peer and Self-Training Instruction as Approaches to Teacher Training in Confluent Education," Dissertation Abstracts. 38(4) : 2377-A, October, 1977.

Houston, Robert W. Performance Education : Strategies and Resource for Development a Competency-Based Teacher Education Department. Houston, Texas, University of Houston, 1972. 188 p.

- Lawrence, Gordon. Florida Modules on Generic Teacher Competencies : Module on Modules. Gainesville, Florida, University of Florida, 1973. 26 p.
- Lindquist, E.F. Design and Analysis of Experiments in Psychology and Education. Boston, Houghton Mifflin Company, 1956. 393 p.
- McHale, Thomas J. and Paul T. Witzke. Arithmetic Module Series. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1976. 5v.
- Parsons, Jerry, and others, "Criteria for Selecting Evaluation or Development Learning Modules," Educational Technology. 4 : 31-32, February, 1976.
- Robertson, Joseph Devert. "An Experimental Evaluation of the Comparison of Mathematics Modules with an Individualized Guide and Textbook for Mathematics," Dissertation Abstracts. 36(8) : 5112-A, February, 1976.
- Sasscer, John Clarence. "The Development, Implementation and Evaluation of a Modularized, Student-Centered. General Biology Curriculum at the College Level," Dissertation Abstracts. 34(11) : 6957-6958-A, May, 1974.
- Schwartz, Jacob E. Introduction to Matrices and Vectors. New York, McGraw-Hill, 1961. 163 p.
- Stephen, Carolyn Anderson. "Developing and Field Testing a Content Area Reading Proficiency Modular-based In-Service Program," Dissertation Abstracts. 4(8) : 4973-A, February, 1974.
- Todo, Peggy Smith. "The Development and Evaluation of a Module for Individualized Self-Directed Instruction at the College Level," Dissertation Abstracts. 33(3) : 4078-A, February, 1973.
- Treize, Marilyn Joan. "A Study of the Feasibility of Using Instructional Modules in a Children's Literature Class," Dissertation Abstracts. 33(5) : 2091-A, November, 1972.
- Turlington, Ralph D. Florida Modules on Mathematics Teaching Competencies. Florida, The Florida Education Research and Development Program, Department of Education, 32304, 1975.
- Whirl, Robert T. "Problem Solving-Solution or Technique," The Mathematics Teacher. 66 : 551, October, 1973.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ข้อมูลในการวิเคราะห์

คะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องเมตริกซ์ของกลุ่มทดลอง

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)		เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)	
	ภาคเรียนที่ 1	เรื่องเมตริกซ์		ภาคเรียนที่ 1	เรื่องเมตริกซ์
1	18	37	16	20	47
2	21	45	17	27	44
3	35	44	18	25	42
4	30	44	19	28	43
5	31	45	20	30	46
6	29	45	21	24	44
7	24	43	22	23	44
8	25	46	23	29	45
9	31	45	24	16	44
10	16	42	25	22	40
11	32	44	26	25	49
12	29	45	27	34	48
13	26	48	28	32	47
14	27	45	29	20	43
15	44	49	30	20	44

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เท่ากับ 26.43

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ เท่ากับ 44.57

คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ เท่ากับ 43.76

ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเมตริกซ์ เท่ากับ 6.25

คะแนนผลการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียนเรื่อง เมตริกซ์ของกลุ่มควบคุม

เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)		เลขที่	คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ (50)	
	ภาคเรียนที่ 1	เรื่อง เมตริกซ์		ภาคเรียนที่ 1	เรื่อง เมตริกซ์
1	12	29	16	36	44
2	16	30	17	17	31
3	22	40	18	22	35
4	19	41	19	25	41
5	19	37	20	19	39
6	17	29	21	17	31
7	18	37	22	32	42
8	18	38	23	17	19
9	25	42	24	23	37
10	23	38	25	21	42
11	30	39	26	19	44
12	24	42	27	20	36
13	25	39	28	23	38
14	33	45	29	31	39
15	23	35	30	32	44

คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ภาคเรียนที่ 1 เท่ากับ 22.60
 คะแนนเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนเรื่อง เมตริกซ์ เท่ากับ 37.43
 คะแนนเฉลี่ยที่ปรับแล้วของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนเรื่อง เมตริกซ์ เท่ากับ 38.23
 ค่าความแปรปรวนของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนเรื่อง เมตริกซ์ เท่ากับ 32.69

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนเรื่องเมตริกซ์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง เมทริกซ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที คะแนนเต็ม 50 คะแนน

จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยเขียนเครื่องหมาย X ทับลงบนอักษร ก. , ข. , ค. หรือ ง. หน้าคำตอบที่ถูกต้องซึ่งมีเพียงคำตอบเดียว

- (1) ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีมิติเดียวกัน และ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ แล้ว ข้อความใดถูก

ก. B มีมิติ 6

ข. B มีมิติ 3×2

ค. B มี 2 แถว 3 หลัก

ง. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

- (2) ให้ A เป็น $p \times q$ เมทริกซ์ B เป็น $q \times r$ เมทริกซ์ข้อความใดถูก

ก. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส B จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสด้วย

ข. ถ้า $p = q$ และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสแล้ว , $p = r$

ค. ถ้า $p = r$, A และ B จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัส

ง. ถ้า $p = r$ จะได้ $r = q$

- (3) ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา a_{21} และ b_{31}

ก. $a_{21} = 2$, $b_{31} = 5$

ข. $a_{21} = 4$, $b_{31} = 5$

ค. $a_{21} = 2$, ส่วน b_{31} ไม่มีคำตอบ

ง. $a_{21} = 4$, ส่วน b_{31} ไม่มีคำตอบ

(4) จะเขียนเมทริกซ์ A ซึ่งมี 3 แถว 2 หลัก ในรูปทั่วไปได้อย่างไร

ก. $A = [a_{ij}]$

ข. $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$

ค. $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ ง. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

(5) ถ้า $x = 2, y = -1$ ต่อไปนี้เมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์ศูนย์ (0)

ก. $\begin{bmatrix} x + 2y & 0 \\ y + 2x & 0 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x - y & 0 \\ 0 & 2y + x \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & -x - 2y \\ 4y + 2x & 0 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}x - y \end{bmatrix}$

(6) เมทริกซ์ใดเป็นทรานสโพสซึ่งกันและกัน

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

(7) ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $(A^t)^t$ คือเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B สอดคล้องตามเงื่อนไขใด

- ก. A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน
- ข. A และ B มีมิติเดียวกัน และทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน
- ค. A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน
- ง. A และ B ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แต่ทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

(9) ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ ข้อใดผิด

- ก. $A^t = B$
- ข. $A = B^t$
- ค. $(A^t)^t = A$
- ง. $(A^t)^t = (B^t)^t$

(10) เมทริกซ์ใดมีทรานสโพสเท่ากับตัวเอง

- ก. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
- ข. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
- ค. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
- ง. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(11) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ต่อไปนี้ข้อความใดถูก

- ก. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะหา $A + B$ ได้เสมอ
- ข. สามารถหา $A + B$ ได้ ถ้า A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
- ค. สามารถหา $A + B^t$ ได้เสมอ ถ้า $A = B$
- ง. ไม่สามารถหา $A + B$ ได้ ถ้า A และ B มีจำนวนแถวไม่เท่ากัน

(12) ผลบวกของ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เท่ากับเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 2+1 & -3+2 & 4 \\ 1+3 & -5+5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 2+1 & -3+3 \\ 1+2 & -5+5 \\ 4+4 & 2+6 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 2+1 & 1+2 & 4+4 \\ -3+3 & -5+5 & 2+6 \end{bmatrix}$ ง. ไม่มีข้อใดถูก

(13) ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

$D = \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

ก. $A + C = \begin{bmatrix} a_{1j} + c_{1j} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

ข. $B + C^t = \begin{bmatrix} b_{1j} + c_{j1} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

ค. $C + D^t = \begin{bmatrix} c_{1j} + d_{j1} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

ง. $D^t + B = \begin{bmatrix} d_{j1} + b_{1j} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

(14) ถ้า $X = \begin{bmatrix} x_1+3 \\ 2-x_2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x_1 และ x_2 ที่ทำให้ $3X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

ก. $x_1 = -3$ $x_2 = 3$

ข. $x_1 = -3$ $x_2 = 1$

ค. $x_1 = -3$ $x_2 = -1$

ง. $x_1 = 3$ $x_2 = -1$

(15) ให้ A เป็น $2 \times m$ เมตริกซ์ และ B เป็น $n \times 2$ เมตริกซ์, m, n เป็นจำนวนเต็มบวก, ข้อความใดถูก

- ก. ถ้า $m \neq n$ จะหา BA ไม่ได้
- ข. ถ้าหา AB ได้ และ $m = 3$ แล้ว จะได้ว่า $n = 2$
- ค. ถ้า $m = n$ จะหาได้ทั้ง AB และ BA
- ง. ถ้าหา A^2 ได้ จะหา B^2 ได้เสมอ

(16) กำหนดให้ $C = AB$ ข้อความใดถูก

- ก. ถ้า A มี 2 หลัก และ B มี 3 แถว จะได้ว่า C เป็น 2×3 เมตริกซ์
- ข. ถ้า A มี 4 แถว และ B มี 3 หลัก จะได้ว่า C เป็น 3×4 เมตริกซ์
- ค. ถ้า C เป็น 2×3 เมตริกซ์ และ A เป็น 2×1 เมตริกซ์แล้ว B จะเป็น 3×1 เมตริกซ์
- ง. ถ้า C เป็น 1×1 เมตริกซ์ และ B เป็น 3×1 เมตริกซ์แล้ว A จะเป็น 1×3 เมตริกซ์

(17) $A = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, AB เท่ากับเมตริกซ์ใด

- ก. $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$
- ข. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$
- ค. $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$
- ง. ไม่มีข้อใดถูก

(18) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, AB เท่ากับเมตริกซ์ใด

- ก. $\begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$
- ข. $\begin{bmatrix} 2 & 12 \end{bmatrix}$
- ค. $\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix}$
- ง. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

(19) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, AB เท่ากับเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

(20) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, AB เท่ากับเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 29 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

(21) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, AB เท่ากับเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & -9 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

ง. ไม่มีข้อใดถูก

(22) เมตริกซ์ A และ B ในข้อใดที่ทำให้ $AB = 0$

ก. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ง. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(23) ถ้า $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ และ $B = [b_{ij}]_{3 \times 4}$ AB มีจำนวนสมาชิกเท่าไร

ก. 9

ข. 12

ค. 16

ง. 24

(24) ถ้า A มีมิติ 2×4 ข้อความใดถูก

ก. $A^t A$ มีมิติ 2×2

ข. $\frac{1}{2}A^t$ มีมิติ 2×4

ค. $A(A^t A)$ มีมิติ 2×4

ง. $(A^t A)A^t$ มีมิติ 4×4

(25) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(AB)^t$ เท่ากับเมตริกซ์ใด

ก. AB

ข. BA

ค. $A^t B^t$

ง. $B^t A^t$

(26) ข้อใดไม่ใช่คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์

ก. คุณสมบัติการจับคู่

ข. คุณสมบัติการสลับที่

ค. คุณสมบัติการกระจาย

ง. คุณสมบัติการตัดออก

(27) ให้ S เป็นเซตของ 3×3 เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{เอกลักษณ์การบวกของ } S \text{ คือเมทริกซ์ใด}$$

ก. $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -8 \\ -4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

(28) ให้ A, B, C, D และ E เป็น 2×2 เมทริกซ์ ข้อใดแสดงคุณสมบัติการจัดหมู่ของการคูณเมทริกซ์

ก. $((A + B) C) (DE) = (A + B) (C (DE))$

ข. $(A + B) C + (A + B) D = (A + B) (C + D)$

ค. $((A + C) B) + D = (A + C) (B + D)$

ง. ถูกทุกข้อ

(29) ให้ A, B และ C เป็น 2×2 เมทริกซ์

$$\text{จาก } "AB + AC = A (B + C) = A (C + B) = AC + AB = CA + BA"$$

ขั้นตอนใดผิด

ก. $AB + AC = A (B + C)$

ข. $A (B + C) = A (C + B)$

ค. $A (C + B) = AC + AB$

ง. $AC + AB = CA + BA$

(30) เซตของ 2×2 เมทริกซ์กับการคูณเมทริกซ์ ไม่มีคุณสมบัติใด

- ก. คุณสมบัติการจับหมู่ และคุณสมบัติการสลับที่
- ข. คุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติการตัดออก
- ค. คุณสมบัติการตัดออก และคุณสมบัติปิด
- ง. คุณสมบัติปิด และคุณสมบัติการจับหมู่

(31) ให้ S เป็นเซตของ 2×3 เมทริกซ์ ข้อใดข้อความไม่ถูกต้อง

- ก. S มีคุณสมบัติปิดสำหรับการบวก และการคูณเมทริกซ์
- ข. S มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการบวก และการคูณเมทริกซ์
- ค. S มีคุณสมบัติปิดและคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการบวกเมทริกซ์
- ง. S มีคุณสมบัติปิด และคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการคูณเมทริกซ์

(32) สัญลักษณ์ใดแทนเอกลักษณ์การคูณของ เมทริกซ์จัตุรัส

- ก. 0
- ข. I
- ค. $-A$
- ง. A^{-1}

(33) ถ้า $A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ ค่าใดคือดีเทอร์มิแนนต์ของ A

- ก. $-rq + ps$
- ข. $-ps + rq$
- ค. $pr - qs$
- ง. $pq - rs$

(34) ถ้า $\det \left(\begin{bmatrix} x & y \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right) = 5$ และ $\det \left(\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & x \end{bmatrix} \right) = -10$

จงหาค่า x และ y

- ก. $x = -\frac{1}{2}, y = -2$
- ข. $x = -\frac{1}{2}, y = 2$
- ค. $x = \frac{1}{2}, y = 2$
- ง. $x = 2, y = -\frac{1}{2}$

จงหาคำตอบในข้อ 35 และ 36 โดยพิจารณาจากสิ่งกำหนดให้ต่อไปนี้

ให้ A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่ง $\det(A) = -2$

และ $\det(B) = 6$

(35) $\det(-3B)$ มีค่าเท่าไร

ก. -18

ข. -2

ค. 18

ง. 54

(36) $\det(A^2B)$ มีค่าเท่าไร

ก. -24

ข. 3

ค. 11

ง. 24

(37) ข้อความใดถูก

ก. ถ้า $\det(A) = \det(B)$ แล้ว $A = B$ เสมอ

ข. ถ้า $A = B$ แล้ว $\det(A) = \det(B)$ เสมอ

ค. ถ้า $A = B$ แล้ว $\det(A + B) = 2 \det(A)$

ง. ข้อ ข และ ค ถูก

(38) เมทริกซ์ใดเป็นอินเวอร์สเมทริกซ์

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ง. เมทริกซ์ในข้อ ก. และ ค.

(39) เมทริกซ์ใดมีอินเวอร์สการคูณ

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(40) ค่า x และ y ในข้อใดที่ทำให้ $\begin{bmatrix} -x & 6 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

ก. $x = -2, y = -3$

ข. $x = 2, y = 3$

ค. $x = 3, y = -2$

ง. $x = 6, y = 1$

(41) อินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ คือเมทริกซ์ใด

ก. $-\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

ข. $-14 \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ค. $\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

ง. $14 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(42) อินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ คือเมทริกซ์ใด

ก. $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

ข. $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

ค. $-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ง. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(43) ถ้า A, B เป็น 2×2 นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ ต่อไปนี้ข้อใดถูก

ก. $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

ข. $(BA)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ค. $(AB^{-1})^{-1} = A^{-1}B$

ง. $(AB^{-1})^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(44) ให้ A เป็น 2×2 นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ และ B, C เป็น 2×2 เมทริกซ์ใด ๆ ข้อความใดถูก

ก. ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้ว $B = \underline{0}$

ข. ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$

ค. ถ้า $AB = I$ แล้ว $A^{-1} = B$

ง. ถูกทุกข้อ

(45) เมทริกซ์ใดมีอินเวอร์สการคูณเท่ากับตัวเอง

ก. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(46) ถ้า A เป็น 2×2 นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ อินเวอร์สการคูณของ $2A$ คือเมทริกซ์ใด

ก. $\frac{1}{2} (A^{-1})$

ข. $2 (A^{-1})$

ค. $\frac{1}{4} (A^{-1})$

ง. $4 (A^{-1})$

(47) ถ้า B เป็น 2×2 นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ และ $\det(B) = -7$

$\det(B^{-1})$ มีค่าเท่าไร

ก. -7

ข. $-\frac{1}{7}$

ค. $\frac{1}{7}$

ง. $\frac{1}{7}$

(48) จากระบบสมการเชิงเส้น $3x + 9y = -15$

$$-2x - 6y = 10$$

จงเขียนในให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์

ก. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \end{bmatrix}$

(49) พิจารณาสมการเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \end{bmatrix}$ เนื่องจากอินเวอร์สการคูณของ

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$, $\therefore$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = I$ $\therefore$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$ $\therefore$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\text{ก.} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ข.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค.} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ง.} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

(50) จากสมการเมทริกซ์ในข้อ 49 จงหาค่าของ x และ y

$$\text{ก.} \quad x = -2, \quad y = -4$$

$$\text{ข.} \quad x = -2, \quad y = 4$$

$$\text{ค.} \quad x = 2, \quad y = -4$$

$$\text{ง.} \quad x = 2, \quad y = 4$$

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.61	.43	21	.46	.78	41	.43	.52
2	.63	.40	22	.54	.34	42	.25	.38
3	.67	.33	23	.54	.56	43	.28	.71
4	.68	.41	24	.63	.25	44	.36	.25
5	.52	.30	25	.40	.32	45	.42	.35
6	.52	.45	26	.22	.22	46	.27	.23
7	.77	.60	27	.31	.22	47	.33	.25
8	.58	.42	28	.33	.25	48	.44	.31
9	.73	.42	29	.56	.24	49	.30	.30
10	.60	.60	30	.32	.34	50	.47	.45
11	.38	.29	31	.36	.41			
12	.68	.41	32	.48	.38			
13	.76	.50	33	.60	.46			
14	.49	.41	34	.42	.42			
15	.55	.31	35	.21	.62			
16	.40	.24	36	.59	.23			
17	.32	.51	37	.29	.27			
18	.39	.55	38	.68	.51			
19	.52	.58	39	.42	.50			
20	.58	.42	40	.40	.24			

ค่าความยากง่ายเฉลี่ย .47

ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ย .42

ค่า p (จำนวน % ของคนถูกใจในแต่ละข้อ) , q (จำนวน % ของคนไม่ถูกใจในแต่ละข้อ)

และค่า $\sum pq$ ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	q	pq
1	.70	.30	.21
2	.64	.36	.23
3	.72	.28	.20
4	.75	.25	.19
5	.35	.65	.23
6	.38	.62	.24
7	.80	.20	.16
8	.64	.36	.23
9	.76	.24	.18
10	.39	.61	.24
11	.28	.72	.20
12	.73	.27	.20
13	.72	.28	.20
14	.37	.63	.23
15	.70	.30	.21
16	.38	.62	.24
17	.29	.71	.21
18	.42	.58	.24
19	.39	.61	.24
20	.43	.57	.25

ข้อที่	p	q	pq
21	.45	.55	.25
22	.40	.60	.24
23	.66	.34	.22
24	.74	.26	.19
25	.32	.68	.22
26	.26	.74	.19
27	.30	.70	.21
28	.30	.70	.21
29	.66	.34	.22
30	.28	.72	.20
31	.27	.73	.20
32	.67	.33	.36
33	.71	.29	.21
34	.43	.57	.25
35	.18	.82	.15
36	.68	.32	.22
37	.23	.77	.18
38	.74	.26	.19
39	.35	.65	.23
40	.33	.67	.22

ข้อที่	p	q	pq
41	.30	.70	.21
42	.21	.79	.17
43	.20	.80	.16
44	.28	.72	.20
45	.34	.66	.22
46	.21	.79	.17
47	.24	.76	.18
48	.34	.66	.22
49	.21	.79	.17
50	.36	.64	.23

$$\sum pq = 10.62$$

การคำนวณค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบนักศึกษา 100 คน

X	f	fX	X ²	fX ²
41	1	41	1681	1681
39	2	78	1521	3042
36	5	180	1296	6480
34	3	102	1156	3468
33	5	165	1089	5445
32	2	64	1024	2048
31	5	155	961	4805
30	1	30	900	900
29	2	58	841	1682
28	2	56	784	1568
27	1	27	729	729
26	6	156	676	4056
25	5	125	625	3125
24	8	192	576	4608
23	3	69	529	1587
22	4	88	484	1936
21	7	147	441	3087
20	5	100	400	2000
19	3	57	361	1083
18	4	72	324	1296
17	9	153	289	2601
16	3	48	256	768
15	3	45	225	675

X	f	fX	X ²	fX ²
14	3	42	196	588
13	3	39	169	507
12	2	24	144	288
11	1	11	121	121
10	1	10	100	100
9	1	9	81	81
	100	2343		60355

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{N \sum f (X^2) - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{100(60355) - (2343)^2}{100(99)} \\
 &= \frac{6035500 - 5489649}{9900} \\
 &= \frac{545851}{9900} \\
 &= 55.136
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right] \\
 &= \frac{50}{49} \left[1 - \frac{10.62}{55.14} \right] \\
 &= \frac{50}{49} (1 - 0.1926) \\
 &= \frac{50}{49} (0.8074) \\
 &= .8237
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 SE_{meas} &= S_x \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= \sqrt{55.14} \sqrt{1 - 0.8237} \\
 &= (7.4254)(0.4198) \\
 &= 3.11
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ค.

หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเมตริกซ์
คู่มือสำหรับการสอนปกติ

หน่วยการเรียนรู้
เรื่อง
เมตริกซ์

คู่มือสำหรับการสอนแบบหน่วยการเรียนรู้การสอน เรื่อง เมตริกซ์

หลักการและเหตุผล

เรื่องเมตริกซ์เป็นบทเรียนที่มีความสำคัญยิ่งและเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้นไป เราสามารถนำความรู้เรื่องเมตริกซ์ไปประยุกต์ใช้กับวิทยาการแขนงต่าง ๆ ได้อย่างกว้างขวางทั้งในด้าน เศรษฐศาสตร์ สังคมศาสตร์ การเกษตร การบริหารธุรกิจ จิตวิทยา เคมี ฟิสิกส์ และการคำนวณทางสถิติขั้นสูง ฯลฯ

การศึกษาเรื่องเมตริกซ์ จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในหลักการและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ชัดเจนยิ่งขึ้น นอกจากนี้นักเรียนจะเห็นได้ว่า ระบบเมตริกซ์เป็นระบบหนึ่งซึ่งการคูณเมตริกซ์ไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่ ซึ่งความรู้ดังกล่าวนี้อาจช่วยให้มองเห็นความจำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณในระบบจำนวนจริงได้เป็นอย่างดี

หน่วยการเรียนรู้การสอนเรื่องเมตริกซ์นี้แบ่งเป็น 5 หน่วยย่อย คือ

- หน่วยย่อยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 2 การบวกเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 3 การคูณเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์
- หน่วยย่อยที่ 4 ทฤษฎีบท
- หน่วยย่อยที่ 5 การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

เนื่องจากเนื้อหาเรื่องเมตริกซ์ในหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ต่อเนื่องกันโดยตลอด ฉะนั้นนักเรียนจะต้องศึกษาไปตามลำดับตั้งแต่หน่วยย่อยที่ 1 จนถึงหน่วยย่อยที่ 5 กล่าวคือ เริ่มต้นควยการศึกษาหน่วยย่อยที่ 1 เมื่อผ่านเกณฑ์ประเมินผลในหน่วยย่อยที่ 1 แล้ว จึงศึกษาหน่วยย่อยที่ 2 ต่อไป และต้องผ่านเกณฑ์ประเมินผลในหน่วยย่อยที่ 2 เสียก่อน จึงจะศึกษาหน่วยย่อยที่ 3 ได้ เช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผลในหน่วยย่อยที่ 5

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบการศึกษาหน่วยการเรียนรู้แล้ว นักเรียนต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกมิติของ เมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนสัญลักษณ์แทนสมาชิกในตำแหน่งต่าง ๆ ของ เมตริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนทรานสโพสของ เมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
4. บอกได้อย่างถูกต้องว่า เมตริกซ์ที่กำหนดให้สอง เมตริกซ์ เท่ากันหรือไม่
5. บอกได้อย่างถูกต้องว่า เมตริกซ์ที่กำหนดให้สอง เมตริกซ์ บวกกัน ได้หรือไม่ และถ้าบวกกันได้ สามารถหาผลบวกของ เมตริกซ์ทั้งสองได้อย่างถูกต้อง
6. หาผลคูณของ เมตริกซ์กับจำนวนจริงใด ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
7. แสดงไวยากรณ์การบวกเมตริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ มี :- คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการสลับที่ คุณสมบัติการจับหมู่ เอกลักษณ์การบวก อินเวอร์สการบวก (สำหรับแต่ละ $m \times n$ เมตริกซ์) และคุณสมบัติการตัดออก
8. บอกได้อย่างถูกต้องว่า เมตริกซ์ที่กำหนดให้สอง เมตริกซ์ คูณกัน ได้หรือไม่ และถ้าคูณกันได้ สามารถหาผลคูณของ เมตริกซ์ทั้งสองได้อย่างถูกต้อง
9. แสดงไวยากรณ์การคูณเมตริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ 2×2 เมตริกซ์ มี :- คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการจับหมู่ เอกลักษณ์การคูณ และคุณสมบัติการกระจาย
- แต่ไม่มี :- คุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติการตัดออก
10. หาค่าเทอรัมินันต์ของ เมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
11. บอกได้อย่างถูกต้องว่า เมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้เป็นเชิงกูลาร์เมตริกซ์ หรืออนเชิงกูลาร์เมตริกซ์
12. บอกได้อย่างถูกต้องว่า เมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้มีอินเวอร์สการคูณหรือไม่ และถ้ามีสามารถหาอินเวอร์สการคูณของ เมตริกซ์เหล่านั้นได้อย่างถูกต้อง
13. บอกคุณสมบัติของฟังก์ชันที่เทอรัมินันต์ได้อย่างถูกต้อง
14. นำความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของ เมตริกซ์มิติ 2×2 ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปรได้อย่างถูกต้อง

ความรู้พื้นฐาน

ผู้ที่เรียนหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ต้องมีความรู้เรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวก และการคูณจำนวนจริง และเรื่องฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไค่ผ่านการศึกษาเนื้อหาในหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 411 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

การประเมินผลเบื้องต้น

ก่อนเริ่มศึกษาหน่วยการเรียนรู้การสอนนี้ ให้นักเรียนทำแบบทดสอบสำหรับประเมินผลเบื้องต้น ซึ่งเป็นประเภทเก็บค่าจำนวน 20 ข้อ จะได้ว่าว่านักเรียนมีความรู้เรื่องเมตริกซ์ อยู่แล้วหรือไม่เพียงพอ นอกจากนี้ผลการทดสอบยังช่วยในการพิจารณาหลังจากสิ้นสุดการศึกษา หน่วยการเรียนรู้การสอนแล้วด้วยว่า นักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นเพียงพอ

สื่อการเรียนรู้และกิจกรรมการเรียนรู้

ในแต่ละหน่วยย่อยมีสื่อการเรียนรู้และกิจกรรมสำหรับนักเรียนดังนี้

หน่วยย่อยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 1 :
บทเรียนโปรแกรมเรื่องความรู้เบื้องต้น
เกี่ยวกับเมตริกซ์
2. แบบฝึกหัดที่ 1
3. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

กิจกรรมการเรียนรู้

1. อ่านเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 1
2. ทำแบบฝึกหัดที่ 1
3. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

หน่วยย่อยที่ 2 การบวกเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์

สื่อการเรียน

1. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 2.1 เรื่อง การบวกเมตริกซ์
2. แบบฝึกหัดที่ 2.1
3. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 2.2 เรื่อง คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์
4. แบบฝึกหัดที่ 2.2
5. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

กิจกรรมการเรียน

1. อ่านเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 1
2. ทำแบบฝึกหัดที่ 2.1
3. อ่านเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 2.2
4. ร่วมอภิปรายกับอาจารย์ผู้สอนในการสรุปบทเรียน
5. ทำแบบฝึกหัดที่ 2.2
6. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

หน่วยย่อยที่ 3 การคูณเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์

สื่อการเรียน

1. แผนโป่งใสเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ จำนวน 15 แผน
2. เทปคำบรรยายเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
3. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.1 :- คู่มือสำหรับนักเรียนในการศึกษาบทเรียนจากแผนโป่งใสเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
4. แบบฝึกหัดที่ 3.1

กิจกรรมการเรียนรู้

5. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.2
เรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์
6. แบบฝึกหัดที่ 3.2
7. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 3
1. ศึกษาบทเรียนเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
โดยดูเนื้อหาจากแผ่นโปรงใส ประกอบกับฟัง
คำบรรยายจากเทปบันทึกเสียง พร้อมทั้งทำ
แบบฝึกหัด (จากแผ่นโปรงใส) ลงในเอกสาร
ประกอบการเรียนฉบับที่ 3.1
2. ทำแบบฝึกหัดที่ 3.1
3. อ่านเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.2
4. รวบรวมอภิปรายกับอาจารย์ผู้สอนในการสรุป
บทเรียน
5. ทำแบบฝึกหัดที่ 3.2
6. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

หน่วยย่อยที่ 4 คีเทอรัมินันต์

สื่อการเรียนรู้

1. แผ่นโปรงใส เรื่องคีเทอรัมินันต์จำนวน
10 แผ่น
2. เทปคำบรรยายเรื่องคีเทอรัมินันต์
3. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 4 :-
คู่มือสำหรับนักเรียนในการศึกษาบทเรียนจาก
แผ่นโปรงใส เรื่องคีเทอรัมินันต์
4. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ศึกษาบทเรียนเรื่องคี่เทอร์มินัลโดยดูเนื้อหาจากแผ่นโปรงใส ประกอบกับฟังคำบรรยายจากเทปบันทึกเสียง พร้อมทั้งทำแบบฝึกหัด (จากแผ่นโปรงใส) ลงในเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 4
2. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

หน่วยย่อยที่ 5 การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

สื่อการเรียนรู้

1. เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 5 :- บทเรียนโปรแกรมเรื่องการใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น
2. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 5

กิจกรรมการเรียนรู้

1. อ่านเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 5
2. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 5

การประเมินผลหลังการเรียนรู้

1. การประเมินผลหลังการเรียนรู้ในแต่ละหน่วยย่อย

ใช้แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 เพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้ในหน่วยย่อยที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ

หมายเหตุ เกณฑ์ในการประเมินผลของแต่ละหน่วยย่อยคือ 80% ของคะแนนเต็ม

2. การประเมินผลหลังการเรียนรู้เมื่อนักเรียนจบบทเรียนเรื่องเมตริกซ์

ใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

ในทุกหน่วยย่อยอาจารย์ผู้สอนจะช่วยวินิจฉัยนักเรียนที่ไม่ผ่านเกณฑ์ประเมินผลแต่ละคนว่ายังไม่บรรลุตามจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมข้อใด และจะให้คำแนะนำตามความเหมาะสมเพื่อให้นักเรียนศึกษาหน่วยย่อยนั้นใหม่ โดยอาจให้ปฏิบัติกิจกรรมใดกิจกรรมหนึ่งดังนี้

1. ศึกษาบทเรียนในหน่วยย่อยนั้น ๆ ด้วยตนเองซ้ำอีกครั้ง
2. ฟังคำอธิบายจากอาจารย์ผู้สอน

จากนั้น จึงให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยที่ใช้ประเมินผลชุดเดิมจนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผล

แบบทดสอบสำหรับประเมินผลเบื้องต้น

แบบทดสอบสำหรับประเมินผลเบื้องต้น
เรื่อง เมทริกซ์

จงเขียนคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

1.1 เมทริกซ์ A มีมิติเป็น

เมทริกซ์ B มีมิติเป็น และเมทริกซ์ C มีมิติเป็น

1.2 เมทริกซ์จัตุรัสได้แก่เมทริกซ์

1.3 $a_{13} = \dots\dots\dots$, $b_{21} = \dots\dots\dots$, $c_{23} = \dots\dots\dots$

1.4 เมทริกซ์ศูนย์ได้แก่เมทริกซ์

1.5 ทรานสโพสของเมทริกซ์ C , $C^t = \dots\dots\dots$

2. เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

.....

3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่มี 2 แถว 4 หลัก จะเขียนเมทริกซ์ A ในรูปทั่วไป
แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ $A = \dots\dots\dots$

4. เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะบวกกันได้ก็ต่อเมื่อ

.....

5. เมทริกซ์แต่ละคู่ต่อไปนี้ ถ้าบวกกันได้จงหาผลบวก ถ้าบวกกันไม่ได้จงบอกเหตุผล

5.1 $\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ ตอบ ผลบวกคือ

5.2 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ ตอบ ผลบวกคือ

6. ถ้า $C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $-2C = \dots\dots\dots$
7. ให้ S เป็นเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง, m, n เป็นจำนวนเต็มบวก เซต S มีคุณสมบัติใดเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์
ตอบ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
8. ถ้า M เป็นเซตของ 1×3 เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า เอกลักษณ์การบวกของเซต M คือ $\dots\dots\dots$
9. อินเวอร์สการบวกของ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ คือ $\dots\dots\dots$
10. เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
11. จงหาผลคูณ AB จากเมตริกซ์ A และ B ต่อไปนี้ ถ้าหาไม่ได้จงบอกเหตุผล
- 11.1 $A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ตอบ $AB = \dots\dots\dots$
- 11.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ตอบ $AB = \dots\dots\dots$
12. ให้ S เป็นเซตของ 2×2 เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง เซต S มีและไม่มีคุณสมบัติใดเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์
ตอบ $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
13. เอกลักษณ์การคูณของเซต S ในข้อ 12 คือ $\dots\dots\dots$
14. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \det(A) = \dots\dots\dots$

15. ให้ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ใด ๆ
 ถ้า $\det(B) = 0$, จะเรียกเมทริกซ์ B ว่าเป็นเมทริกซ์
 แต่ถ้า $\det(B) \neq 0$, จะเรียกเมทริกซ์ B ว่าเป็นเมทริกซ์
16. จากข้อ 14 ถ้า B เป็นเมทริกซ์, B จะมีอินเวอร์สการคูณ
 แต่ถ้า B เป็นเมทริกซ์, B จะไม่มีอินเวอร์สการคูณ
17. อินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ คือ
18. ถ้า A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ซึ่ง $\det(A) = 2$ และ
 $\det(B) = -5$ แล้ว จะได้ว่า
 $\det(A^t) = \dots\dots\dots$ $\det(-3A) = \dots\dots\dots$
 $\det(B^{-1}) = \dots\dots\dots$ $\det(AB) = \dots\dots\dots$
19. จากระบบสมการเชิงเส้น $2x + 3y = 2$ เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์
 $4y - 5x = -5$
 ได้ดังนี้

20. เมื่อนำความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของ 2×2 เมทริกซ์ มาใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้น
 ในข้อ 19 จะได้ว่า $x = \dots\dots\dots$ และ $y = \dots\dots\dots$
-

หน่วยย่อยที่ 1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้วนักเรียนต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกมิติของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้เป็นเมตริกซ์จัตุรัสหรือไม่
3. เขียนสัญลักษณ์แทนสมาชิกในตำแหน่งต่าง ๆ ของเมตริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนเมตริกซ์ในรูปทั่วไปได้อย่างถูกต้อง
5. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้เป็นเมตริกซ์ศูนย์หรือไม่
6. เขียนทรานสโพสของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
7. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้สองเมตริกซ์เท่ากันหรือไม่

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนต้องมีความรู้เรื่อง จำนวนจริง

กิจกรรมการเรียนรู้

ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังนี้

1. อ่านบทเรียนโปรแกรมเรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์จากเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 1
2. ทำแบบฝึกหัดที่ 1
3. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

การประเมินผล

พิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1 ผู้ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ 80% ของคะแนนเต็มขึ้นไป ถือว่าผ่าน ให้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 2 ต่อไป ส่วนผู้ที่ทำคะแนนได้น้อยกว่า 80% ถือว่าไม่ผ่านให้เรียนซ่อมเสริม

การเรียนซ่อมเสริม

ให้ผู้ที่ไม่ผ่านศึกษาบทเรียนอีกครั้ง หรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน จากนั้นทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1 จนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผล

บทเรียนโปรแกรม
เรื่อง
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์

คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน

1. บทเรียนนี้เป็นบทเรียนโปรแกรม (Programmed textbook) วิชาคณิตศาสตร์ สำหรับให้ผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ศึกษาด้วยตนเอง มีขอบเขตของเนื้อหาเฉพาะเรื่อง "ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมตริกซ์"

2. เนื้อหาในบทเรียนนี้แบ่งเป็นชั้นเล็ก ๆ เรียกว่า กรอบ มีทั้งสิ้น 30 กรอบ ผู้เรียนจะต้องศึกษาไปตามลำดับ โดย ต้องไม่ข้ามกรอบใดกรอบหนึ่ง เพราะทุกกรอบจัดเรียงไว้อย่างเหมาะสมแล้วตามความต่อเนื่องของเนื้อหา

3. ในแต่ละกรอบแบ่งออกเป็น 2 ช่อง คือ

3.1 ช่องขวามือ เป็นช่องที่ระบุข้อความให้ผู้เรียนอ่านและทำความเข้าใจ และมีแบบฝึกหัดประเภทเติมคำให้ผู้เรียนทำเพื่อทดสอบความเข้าใจของตนเอง

3.2 ช่องซ้ายมือ เป็นช่องที่ระบุคำตอบเฉลยของแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง แสดงลักษณะการเสนอบทเรียน (ในกรอบที่ 2 และ 3)

เนื้อหาและแบบฝึกหัดของกรอบที่ 2

เนื้อหาและแบบฝึกหัดของกรอบที่ 3

หมายเหตุ แบบฝึกหัดในแต่ละกรอบจะมีคำตอบเฉลยอยู่ในช่องซ้ายมือของกรอบถัดไปเสมอ

การศึกษบทเรียนนี้ ผู้เรียนต้องใช้กระดานปิดคำตอบในช่องซ้ายมือเสียก่อน และเมื่อทำแบบฝึกหัดกรอบหนึ่ง ๆ เรียบร้อยแล้ว จึงตรวจคำตอบได้ โดยเลื่อนกระดานที่ปิดไว้ลงไปเล็กน้อยแล้วดูคำตอบเฉลยจากช่องซ้ายมือของกรอบถัดไป ถ้าคำตอบถูกต้องให้ศึกษากรอบต่อไป แต่ถ้า

คำตอบผิดให้ศึกษากรอบนั้นใหม่อีกครั้งจนมีความเข้าใจถูกต้อง เช่นนี้เรื่อยไปจนจบ
บทเรียน

5. ความซื่อสัตย์ต่อตนเองเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ถ้าผู้เรียนเปิดดูคำตอบเฉลยก่อน
หรือเปิดดูในขณะที่กำลังทำแบบฝึกหัด การเรียนจะไม่ได้ผลแต่อย่างใด เพราะผู้เรียน
ไม่ได้ใช้ความคิดของตนเองอย่างแท้จริง ฉะนั้น ถ้ายังทำแบบฝึกหัดในแต่ละกรอบไม่เสร็จ
ต้องไม่เปิดดูคำตอบเฉลยที่ปิดไว้โดยเด็ดขาด

6. เมื่อศึกษาครบทั้ง 30 กรอบแล้ว ให้ผู้เรียนตรวจสอบความรู้ความเข้าใจ
ของตนเอง โดยการทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1

ถ้าผู้เรียนปฏิบัติตามคำสั่งข้างต้นโดยเคร่งครัดทุกประการแล้ว จะประสบ
ผลสำเร็จในการศึกษาบทเรียนโปรแกรมนี้อย่างสมบูรณ์

25 18 36
19 22 43
24 20 45

หรือ

25 18 36
19 22 43
24 20 45

2

ทำนองเดียวกัน ข้อมูลที่อยู่ในรูปตาราง เช่น
ตารางแสดงจำนวนเสื้อเป็นโหลที่โรงงาน 2 แห่งผลิตต่อ 1 วัน

	จำนวนเสื้อที่ผลิตได้ต่อ 1 วัน			
	ขาว	น้ำเงิน	เหลือง	แดง
โรงงาน ก	3	7	4	5
โรงงาน ข	6	2	10	3

เราก็สามารถเขียนแทนด้วยเมตริกซ์ได้เช่นกัน

นั่นคือ $\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$

3 7 4 5
6 2 10 3

หรือ

3 7 4 5
6 2 10 3

3

ในการศึกษาเรื่องเมตริกซ์ มีข้อตกลงให้ใช้คำว่า "แถว" และ "หลัก" ดังนี้

	หลักที่ 1	หลักที่ 2	หลักที่ 3	หลักที่ 4
แถวที่ 1	1	2	3	9
แถวที่ 2	4	0	7	6
แถวที่ 3	3	5	0	2

จะเห็นว่าเมตริกซ์นี้มี 3 แถว 4 หลัก

ต่อไป $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มี ___ แถว ___ หลัก

2, 3

4

โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ คือ A, B, C, ..., Z เป็นสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = [3]$$

ดังนั้น เมตริกซ์ A มี ___ แถว ___ หลัก

เมตริกซ์ B มี ___ แถว ___ หลัก

และ เมตริกซ์ C มี ___ แถว ___ หลัก

5 เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลักเรียกว่า " $m \times n$ เมทริกซ์"
 (อ่านว่า เอ็มคูณเอ็นเมทริกซ์) และกล่าวว่า เมทริกซ์นี้มี "มิติ"
 (order) เป็น $m \times n$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็น 2×1 เมทริกซ์ และมีมิติเป็น 2×1

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ เป็น _____ เมทริกซ์ และมี _____ เป็น 1×3

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix}$ และ

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ A เป็น _____ เมทริกซ์และมี _____ เป็น 1×1

เมทริกซ์ B เป็น _____ เมทริกซ์และมี _____ เป็น 2×1

เมทริกซ์ C เป็น _____ เมทริกซ์และมีมิติ เป็น _____

เมทริกซ์ D เป็น _____ เมทริกซ์และมีมิติ เป็น _____

8

จำนวนแต่ละจำนวนในเมตริกซ์เรียกว่า "สมาชิกของเมตริกซ์"

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

สมาชิกในแถวที่ 1 ของ A คือ 1, 2, -3

" 2 " —, —, —

สมาชิกในหลักที่ 1 ของ A คือ 1, 0

" 2 " —, —

" 3 " —, —

ในการกล่าวถึงสมาชิกแต่ละตัวจะต้องระบุให้ชัดเจนว่าสมาชิกตัวนั้น
อยู่ในตำแหน่งใด กล่าวคือ ต้องระบุว่าอยู่ในแถวใดและหลักใด

สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของ A คือ 2

" 2 " 1 " —

" 2 " 3 " —

-2, 0, 1, 9

5, 1, 8

3

9

2, 2

3, 3

10

บทเรียนนี้จะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก คือ a, b, c, ..., ที่มีตัวเลขสองตัวต่อท้ายในระดับต่ำลงไปเล็กน้อย เป็นสัญลักษณ์แทนสมาชิกของเมตริกซ์ A, B, C, ..., Z ตามลำดับ ตัวเลขตัวแรกแสดงว่าสมาชิกตัวนั้นอยู่แถวใด และตัวเลขตัวหลังแสดงว่าอยู่หลักใด เช่น

a_{11} (อ่านว่าเอหนึ่งหนึ่ง)

เป็นสมาชิกของเมตริกซ์ A ที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 1

a_{12} " " A " 1 " 2

a_{23} " " A " " "

a_{ij} " " A " " "

2, 3

1, j

สำหรับเมตริกซ์ B

b_{14} เป็นสมาชิกของเมตริกซ์ B ที่อยู่ในแถวที่ _____ หลักที่ _____

b_{22} " " B " " "

" " B " i " j

$$b_{14} = 5, b_{11} = -1$$

$$b_{22} = 7, b_{23} = 6$$

ในกรณีที่ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ถ้าเขียนเมตริกซ์ A แบบแจกแจงสมาชิกในรูปทั่วไป จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & \cdots & - & \cdots & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ - & - & \cdots & - & \cdots & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แต่ถ้าเขียนแบบสั้น ๆ จะได้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

สัญลักษณ์สั้น ๆ นี้ i แปรเปลี่ยนจาก 1 ถึง m

และ j แปรเปลี่ยนจาก 1 ถึง n

หุ้มนองเดียวกัน สำหรับเมตริกซ์ B ซึ่งเป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ถ้าจะเขียนสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์ B แบบสั้น ๆ จะได้

$$B = [b_{ij}] \quad \text{---} \times \text{---}$$

$B = [b_{ij}]_{m \times n}$	17 ให้ C เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ D เป็น $p \times q$ เมตริกซ์ จะเขียนสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์ C และ D แบบสั้น ๆ ได้ดังนี้ $C = [\quad] \quad \times \quad$ และ $D = [\quad] \quad \times \quad$
$C = [c_{ij}]_{m \times n}$ $D = [d_{ij}]_{p \times q}$	18 เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า "เมตริกซ์ศูนย์" (zero matrix) ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ แต่ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ พิจารณาเมตริกซ์ต่อไปนี้ $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $E = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่าเมตริกซ์ $\quad$ และ $\quad$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ แต่เมตริกซ์ $\quad$ ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์
D และ E	19 ถ้า $\begin{bmatrix} x_1-5 & x_2+1 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ศูนย์ จะได้ $x_1 = \quad$, $x_2 = \quad$ และ $x_3 = \quad$
$\begin{matrix} 1 & = & 5 \\ 2 & = & -1 \\ 3 & = & 0 \end{matrix}$	20 ไม่ว่าเมตริกซ์ศูนย์จะมีมิติเท่าใด จะใช้สัญลักษณ์ "<u>0</u>" แทน เมตริกซ์ศูนย์เสมอ นั่นคือ $\underline{0} = [0]_{m \times n}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก ฉะนั้น $[0 \ 0]$ เขียนแทนด้วย $\underline{0}$ หรือ $[0]_{1 \times 3}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ " $\quad$ หรือ $\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}_{\quad \times \quad}$

$$\underline{0} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

21

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เขียนแทนด้วย $\underline{\hspace{1cm}}$ หรือ $\begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}_{\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}}$

22

$$\underline{0} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

เรามีนิยามเกี่ยวกับเมทริกซ์ศูนย์ดังนี้

นิยาม เมทริกซ์ศูนย์หมายถึง เมทริกซ์ที่มี $\underline{\hspace{1cm}}$ เป็นศูนย์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{\hspace{1cm}}$ ไม่ว่าเมทริกซ์ศูนย์จะมีมิติเท่าใดนั่นคือ $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}}}$, เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก

สมาชิกทุกตัว

23

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ให้ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ ถ้าเขียนเมทริกซ์ใหม่โดยเอาสมาชิกในแถวที่ $1, 2, \dots, m$ ของ A มาเขียนเรียงเป็นสมาชิกในหลักที่ $1, 2, \dots, n$ ของเมทริกซ์ใหม่กล่าวลำดับ จะเรียกเมทริกซ์ใหม่นี้ได้ว่า "ทรานสโพสของ A "(transpose of A) เขียนแทนด้วย A^t

$$\text{ฉะนั้น ถ้า } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ถ้า } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

24

$$\text{ให้ } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } C^t = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}, D^t = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$A^t, n \times m$
แถว

พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{4} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า A มีมิติเป็น _____ B มีมิติเป็น _____ ดังนั้น
 A และ B มีมิติเท่ากัน (มีมิติเดียวกัน) . (ก)

เนื่องจาก $a_{11} = b_{11}$ $a_{12} = \underline{\hspace{1cm}}$
 $a_{21} = \underline{\hspace{1cm}}$ $a_{22} = \underline{\hspace{1cm}}$

ดังนั้น A และ B มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากับ . (ข)
 หรืออาจเขียนได้ดังนี้

$a_{ij} = \underline{\hspace{1cm}}$ เมื่อ $i = 1, 2$ และ $j = 1, 2$

2 x 2 , 2 x 2

 b_{12} b_{21} b_{22} b_{ij}

28

จาก (ก) และ (ข) ในกรอบที่ 27 กล่าวไว้ว่า "เมทริกซ์ A

เท่ากับเมทริกซ์ B" และเขียนแทนด้วย " $A = B$ "

นิยาม เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

หรืออาจพิจารณาการเท่ากันของเมทริกซ์โดยใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$

และ $j = 1, 2, \dots, n$

ฉะนั้น $\begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \end{bmatrix}$

แต่ $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
($=, \neq$)

และ $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
($=, \neq$)

 $\begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}$
 $\neq$ $\neq$

29

ถ้า $\begin{bmatrix} x + 4 \\ 1 - y \\ z + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

จะได้ $x = _$

$y = _$

และ $z = _$

สรุปใจความสำคัญของบทเรียนนี้

$$x = -4$$

$$y = -7$$

$$z = 7$$

1. เมตริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เรียกว่า $m \times n$ เมตริกซ์ (อ่านว่า เอ็ม - คูณ - เอ็น เบตริกซ์) และกล่าวว่ามีมิติ $m \times n$
2. เมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือเมตริกซ์ที่มีมิติเป็น $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก (หรือมีจำนวนแถว เท่ากับจำนวนหลัก)
3. กวรีซ์สัญลักษณ์ นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่คือ $A, B, C, \dots, Z$ แทนเมตริกซ์ และใช้อักษรตัวเล็กคือ $a, b, c, \dots$ ที่มีตัวเลขสองตัวต่อท้ายในระดับต่ำลงไปเล็กน้อย แทนสมาชิกของเมตริกซ์ $A, B, C, \dots, Z$ ตามลำดับ
4. เมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัว เป็นศูนย์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 0 เสมอไม่ว่าเมตริกซ์ศูนย์ จะมีมิติเป็นเท่าไร
นั่นคือ $0 = [0]_{m \times n}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก
5. ถ้า A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ทรานสโพสของ A เขียนแทน ด้วย A^t คือ $n \times m$ เมตริกซ์ที่มีหลักที่ i เหมือนกับแถว ที่ i ของเมตริกซ์ A เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$
6. เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติ เท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

แบบฝึกหัดที่ 1

1.

ให้ $A =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 11 & 8 & 5 \\ 9 & 3 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงเขียน

- 1.1 สมาชิกในแถวที่ 2 ของ A
- 1.2 สมาชิกในหลักที่ 3 ของ A
- 1.3 ค่าของ a_{23} , a_{14} , และ a_{42}
- 1.4 สัญลักษณ์แทนสมาชิกต่อไปนี้ 11, 1 และ -7
- 1.5 มิติของ A
- 1.6 จำนวนสมาชิกของ A
- 1.7 A^t

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

- 2.1 $A = \{a_{ij} \mid i = 1 \text{ และ } j = 1, 2, 3, 4\}$
- 2.2 $B = \{b_{ij} \mid i = 4 \text{ และ } j = 1, 2, \dots, n\}$
- 2.3 $C = \{c_{ij} \mid i = 1, 2 \text{ และ } j = 1, 2, 3\}$

3. ถ้า A เป็น 3×4 เมตริกซ์ B เป็น 4×2 เมตริกซ์
 C เป็น $q \times r$ เมตริกซ์ และ D เป็น $r \times s$ เมตริกซ์

- 3.1 จงเขียนเมตริกซ์ A และ B แบบแจกแจงสมาชิกในรูปทั่วไป
- 3.2 จงเขียนเมตริกซ์ A, B, C และ D ในรูปทั่วไปแบบสั้น ๆ

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 A เท่ากับ B หรือไม่ เพราะเหตุใด

4.2 B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสหรือไม่ เพราะเหตุใด

4.3 A เป็นเมตริกซ์ศูนย์หรือไม่ เพราะเหตุใด

4.4 พิจารณาเมตริกซ์ A

สำหรับ $a_{ij} \neq 0$, i และ j มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

สำหรับ $a_{ij} = 0$, i และ j มีความสัมพันธ์กันอย่างไร

4.5 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

" $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$ "

4.6 จงหา A^t , A กับ A^t เท่ากันหรือไม่

4.7 พิจารณาเมตริกซ์ B ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

" $b_{ij} = b_{ji}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3$ และ $j = 1, 2, 3$ "

4.8 จงหา B^t , B กับ B^t เท่ากันหรือไม่

4.9 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอไปหรือไม่

"ให้ C เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $c_{ij} = c_{ji}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ และ $j = 1, \dots, n$ แล้ว $C = C^t$ เสมอ"

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, a, b, c, d, e และ f

เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่า $(A^t)^t = A$

หมายเหตุ ไม่ว่าจะกำหนดให้ A มีมิติเท่าไร เราสามารถแสดงได้เสมอว่า

$$(A^t)^t = A$$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. 1.1 9, 3, 2, 7

1.2 8, 2, 6, 0

1.3 2, 5 และ 0

1.4 a_{12}, a_{31} และ a_{24}

1.5 4×4

1.6 16

1.7 $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 & 0 \\ 11 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & -7 & 12 & 0 \end{bmatrix}$

2. 2.1 $A = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}$

2.2 $B = \{b_{41}, b_{42}, \dots, b_{4n}\}$

2.3 $C = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23}\}$

หรือ $C = \{c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23}\}$

3. 3.1 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$

3.2 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 4}, B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{4 \times 2}$

$C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{q \times r}, D = \begin{bmatrix} d_{ij} \end{bmatrix}_{r \times s}$

4. 4.1 $A \neq B$ เพราะแม้ว่า A และ B จะมีมิติเดียวกัน คือ มีมิติ 3×3 แต่สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันไม่เท่ากัน

4.2 เป็น เพราะ B มีจำนวนแถว = จำนวนหลัก = 3
(หรือเพราะมีมิติเป็น 3×3)

4.3 ไม่เป็น เพราะ A มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์

4.4 $i = j$

$i \neq j$

4.5 เป็นจริง

$$4.6 \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = A^t$$

4.7 เป็นจริง

$$4.8 \quad B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = B^t$$

4.9 เป็นจริงเสมอ

$$5. \quad \text{จาก} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้} \quad A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \text{ และ } (A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (A^t)^t = A$$

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

คำสั่ง จงเขียนเครื่องหมาย $\times$ ลงบนตัวอักษรหน้าคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งมีเพียงคำตอบเดียวในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ข้อความใดถูก

- ก. A มีมิติเป็น 2×3
- ข. C มีมิติเป็น 2×1
- ค. มิติของ $A =$ มิติของ $B +$ มิติของ C
- ง. มิติของ B เป็นสองเท่าของมิติของ C

2. ให้ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์, B เป็น $n \times p$ เมตริกซ์
ข้อความใดผิด

- ก. ถ้า $m = n$, A จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัส
- ข. ถ้า $m = n$ และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว $m = p$
- ค. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว $m = p$
- ง. ถ้า $m = p$, A และ B จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัส

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x & 3 & 0 \\ 1 & y & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ $a_{11} + a_{23} = 2$
 $a_{12} - a_{22} = a_{21}$

จงหาค่า x และ y

- ก. $x = 0, y = -2$
- ข. $x = 0, y = 2$
- ค. $x = 4, y = -2$
- ง. $x = 4, y = 2$

4. ถ้า B เป็น 2×3 เมตริกซ์ จะเขียนเมตริกซ์ B แบบแจกแจงสมาชิกในรูปทั่วไปได้อย่างไร

$$\text{ก. } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\text{ข. } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{ค. } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{ง. } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix}$$

5. ถ้า C เป็นเมตริกซ์ที่มี 4 แถว 5 หลัก จะเขียนเมตริกซ์ C ในรูปทั่วไปแบบสั้น ๆ ได้อย่างไร

$$\text{ก. } C = [c_{ij}]_{4 \times 5}$$

$$\text{ข. } C = [c_{ij}]_{5 \times 4}$$

$$\text{ค. } C = [c_{ii}]_{4 \times 5}$$

$$\text{ง. } C = [c_{ij}]$$

6. เมตริกซ์ใดเป็นเมตริกซ์ศูนย์

$$\text{ก. } O$$

$$\text{ข. } [0]_{m \times n}$$

$$\text{ค. } \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & c & 0 \end{bmatrix}, \quad a = b = c = 0$$

ง. เป็นเมตริกซ์ศูนย์ทั้งในข้อ ก. ข. และ ค.

7. เมตริกซ์ใดเป็นทรานสโพสซึ่งกันและกัน

$$\text{ก. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ข. } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ค. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ง. } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีคุณสมบัติอย่างไร

ก. A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

ข. A และ B มีมิติเดียวกันและทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

ค. A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน

ง. A และ B ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสแต่ทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

9. เมทริกซ์ใด มีทรานสโพสเท่ากับตัวเอง

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. จงหาค่า x, y, z ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+6 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-2 & 0 \\ 3+z & x-2 \end{bmatrix}$

ก. $x = 0, y = -2, z = 3$

ข. $x = 0, y = 2, z = 3$

ค. $x = 2, y = 0, z = 3$

ง. $x = 3, y = -2, z = 0$

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

หน่วยย่อยที่ 2

การบวกเมทริกซ์และคุณสมบัติ เกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกได้ถูกต้องว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้สอง เมทริกซ์บวกกันได้หรือไม่ และถ้าบวกกันได้ สามารถหาผลบวกของเมทริกซ์ทั้งสองได้ถูกต้อง
2. หาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริงใด ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลต่างของเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันสอง เมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
4. แสดงให้เห็นว่าการบวกเมทริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ $m \times n$ เมทริกซ์ มี :- คุณสมบัติปิด คุณสมบัติสลับที่ คุณสมบัติการจับหมู่
เอกลักษณ์การบวก อินเวอร์สการบวก (สำหรับ
แต่ละ $m \times n$ เมทริกซ์) และคุณสมบัติการตัดออก
5. เขียนเอกลักษณ์การบวกของเซตของเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันได้อย่างถูกต้อง
6. หาอินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนต้องมีความรู้เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์ และคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกจำนวนจริง

กิจกรรมการเรียนรู้

ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังนี้

1. อ่านบทเรียนเรื่องการบวกเมทริกซ์ จากเอกสารประกอบการเรียน
ฉบับที่ 2.1

2. ทำแบบฝึกหัดที่ 2.1
3. อ่านบทเรียนเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ จากเอกสารประกอบ
การเรียนรู้ที่ 2.2
4. ร่วมอภิปรายกับอาจารย์ผู้สอนในการสรุปบทเรียน
5. ทำแบบฝึกหัดที่ 2.2
6. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

การประเมินผล

พิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2 ผู้ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ 80% ของคะแนน
เต็มขึ้นไป ถือว่าผ่าน ให้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 3 ต่อไป ส่วนผู้ที่ทำคะแนนได้ต่ำกว่า 80% ถือว่า
ไม่ผ่าน ให้เรียนซ่อมเสริม

การเรียนซ่อมเสริม

ให้ผู้ที่ไม่ผ่านศึกษาบทเรียนอีกครั้ง หรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน จากนั้น
ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2 จนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผล

เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 2 1
เรื่องการบวกเมตริกซ์

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

ถ้าบวกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B เข้าด้วยกันจะได้

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

เราเรียกเมตริกซ์ C ว่า "ผลบวกของเมตริกซ์ A และ B" และเขียนแทนด้วย "A + B" นั่นคือ $C = A + B$

นิยาม ถ้าเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

จะได้ว่า $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

ข้อสังเกต

1. เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะบวกกันได้ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากันและวิธีการบวกก็คือการเอาสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{บวกกันได้เพราะต่างก็มีมิติเป็น } 3 \times 2$$

$$\text{และเมตริกซ์ผลบวกคือ} \quad \begin{bmatrix} 2+0 & 0+1 \\ 3+1 & 1+0 \\ 4+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{แต่ } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

บวกกันไม่ได้เพราะเมตริกซ์ทั้งสองมีมิติไม่เท่ากัน
คือเมตริกซ์แรกมีมิติเป็น 2×2 แต่เมตริกซ์หลังมี
มิติเป็น 2×1

2. เมตริกซ์ผลบวกจะมีมิติเท่ากับมิติของเมตริกซ์ที่บวกกัน

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงเขียนเครื่องหมาย $\checkmark$ หน้าข้อความที่ถูกต้อง และ $\times$ หน้าข้อความที่ผิด
 -1.1 สามารถหาผลบวกของเมทริกซ์ใด ๆ สองเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากันได้เสมอ
 -1.2 เมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จะบวกกันได้เสมอ
 -1.3 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากัน และมีจำนวนหลักเท่ากันแล้ว จะสามารถหา $A + B$ ได้
 -1.4 การบวกเมทริกซ์ (ที่สามารถบวกกันได้) เข้าด้วยกัน ก็คือ การเอาสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน
 -1.5 ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{1j} \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{1j} \end{bmatrix}_{3 \times 4}$ จะได้ว่า $B + A = \begin{bmatrix} b_{1j} + a_{1j} \end{bmatrix}_{4 \times 3}$
 -1.6 ถ้า A เป็น 2×3 เมทริกซ์ และ B เป็น 3×2 เมทริกซ์ จะได้ $A + B$ เป็น 2×3 เมทริกซ์
2. เมทริกซ์แต่ละคู่ต่อไปนี้ ถ้าบวกกันได้จงหาผลบวก ถ้าบวกกันไม่ได้จงให้เหตุผล
 - 2.1 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$
 - 2.2 $\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$
 - 2.3 $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
 - 2.4 $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 - 2.5 $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$2.6 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3. ให้ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก จะหาผลบวกของเมตริกซ์ A กับเมตริกซ์ A^t ได้เสมอไปหรือไม่ , ถ้าไม่เสมอไปจะหาได้เมื่อมีเงื่อนไขใด
4. ให้ A และ B เป็น 1×3 เมตริกซ์ใด ๆ
จงแสดงว่า $(A + B)^t = A^t + B^t$

หมายเหตุ

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน ไม่ว่าจะมิติเป็นเท่าใด คุณสมบัติข้อนี้ยังคงเป็นจริงเสมอ

5. ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีมิติเป็น 2×2
จงแสดงว่า $(A + B^t)^t = A^t + B$
-

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.1

1. $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.1 $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.2 $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.3 $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.4 $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.5
 $\begin{matrix} \times & \times & \checkmark & \checkmark & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ 1.6

2. 2.1
$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2 เมทริกซ์คู่นี้บวกกันไม่ได้ เพราะมิติไม่เท่ากัน กล่าวคือเมทริกซ์แรกมีมิติเป็น 1×2 แต่เมทริกซ์หลังมีมิติเป็น 2×1

2.3 เมทริกซ์คู่นี้บวกกันไม่ได้ เพราะมิติไม่เท่ากัน กล่าวคือ เมทริกซ์แรกมีมิติเป็น 3×2 แต่เมทริกซ์หลังมีมิติเป็น 2×2

2.4
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

2.5
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \sqrt{2} \\ y - 1 \\ z + 5 \end{bmatrix}$$

3. ไม่เสมอไป, จะหาผลบวกของเมทริกซ์ A (ซึ่งมีมิติเป็น $m \times n$; m, n เป็นจำนวนเต็มบวก) กับเมทริกซ์ A^t ได้เมื่อ $m = n$ คือเมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

4. ให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (A + B)^t &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \\ a_{31} + b_{31} \end{bmatrix}^t \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & a_{31} + b_{31} \end{bmatrix} \\
 A^t + B^t &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & a_{31} + b_{31} \end{bmatrix} \\
 \text{ดังนั้น} \quad (A + B)^t &= A^t + B^t
 \end{aligned}$$

5. ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$(A + B^t)^t = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \right)^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{21} \\ a_{21} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{12} \\ a_{12} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^t + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{12} \\ a_{12} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(A + B^t)^t = A^t + B$

เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 2.2

เรื่อง คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์

สำหรับการศึกษาหัวข้อนี้ จะต้องใช้ความรู้เรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกจำนวนจริง เราทราบว่า จำนวนจริงมีคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกดังนี้

- ก. คุณสมบัติปิด
- ข. คุณสมบัติการสลับที่
- ค. คุณสมบัติการจับหมู่
- ง. มีเอกลักษณ์การบวก
- จ. มีอินเวอร์สการบวกสำหรับจำนวนจริงแต่ละจำนวน
- ฉ. คุณสมบัติการตัดออก

เพื่อเป็นการทบทวนใจความสำคัญของแต่ละคุณสมบัติ ให้นักเรียนเลือกเขียนเฉพาะอักษร ก. ถึง ฉ. ที่อยู่หน้าคุณสมบัติข้างต้นลงในช่องว่างหน้าข้อความที่สัมพันธ์กันต่อไปนี้

...1 ในเซตของจำนวนจริง จะมีจำนวนจริง 0 ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$a + 0 = a = 0 + a \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } a$$

...2 สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b , $a + b = b + a$ เสมอ

...3 สำหรับแต่ละจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

...4 สำหรับทุกจำนวนจริง a, b จะได้ว่า $a + b$ เป็นจำนวนจริงเสมอ

...5 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a + b = a + c$ แล้วจะได้ว่า

$$b = c \quad \text{เสมอ}$$

...6 สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c , $(a + b) + c = a + (b + c)$ เสมอ
(เมื่อทำเสร็จแล้วให้ดูคำตอบเฉลยในหน้าถัดไป)

เฉลย ... (1) ... (2) ... (3) ... (4) ... (5) ... (6)
--

ให้ S เป็นเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง

ต่อไปนี้จะศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์ในเซต S จากนั้นจะพิจารณาว่า เซต S กับเซตของจำนวนจริงมีคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเหมือนกันหรือแตกต่างกันอย่างไร

หมายเหตุ

โดยทั่วไป เมตริกซ์อาจมีสมาชิกเป็นจำนวนจริง, จำนวนเชิงซ้อน หรืออาจมีสมาชิกเป็นสมาชิกของระบบทางพีชคณิต ฯลฯ ก็ได้ แต่ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรณีของเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริงเท่านั้น

1. คุณสมบัติปิดของการบวก

"ถ้า A และ B เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า $A + B$ เป็นสมาชิกของ S เสมอแล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติปิดของการบวก"

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติปิดของการบวก

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{และ} \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{นิยามการบวกเมตริกซ์})$$

จะเห็นว่า $A + B$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ ----- ①

$\therefore a_{ij}$ และ b_{ij} เป็นจำนวนจริง

$\therefore a_{ij} + b_{ij}$ เป็นจำนวนจริง (คุณสมบัติปิดของการบวกจำนวนจริง)

จาก ① และ ② $A + B$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $A + B$ เป็นสมาชิกของ S

นั่นคือ S มีคุณสมบัติปิดของการบวก

2. คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก

"ถ้า A และ B เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า $A+B = B+A$ เสมอแล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการสลับที่ของการบวก"

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติการสลับที่ของการบวก

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{และ } B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{นิยามการบวกเมทริกซ์}) \\ &= [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{คุณสมบัติการสลับที่ของการบวกจำนวนจริง}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{นิยามการบวกเมทริกซ์}) \\ &= B + A \end{aligned}$$

ดังนั้น S มีคุณสมบัติการสลับที่ของการบวก

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A+B = B+A$

วิธีทำ $\therefore A + B = \begin{bmatrix} 5+2 & 4+(-1) \\ 2+3 & (-2)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$\text{และ } B + A = \begin{bmatrix} 2+5 & (-1)+4 \\ 3+2 & 0+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = B + A$$

3. คุณสมบัติการจัดหมู่ของการบวก

"ถ้า A, B และ C เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า $(A+B)+C = A+(B+C)$ เสมอแล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการจัดหมู่ของการบวก"

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } A &= [a_{ij}]_{m \times n} \quad B = [b_{ij}]_{m \times n} \quad \text{และ } C = [c_{ij}]_{m \times n} \\
 (A+B)+C &= [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมตริกซ์)} \\
 &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมตริกซ์)} \\
 &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{m \times n} && \text{(คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวกจำนวนจริง)} \\
 &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}+c_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมตริกซ์)} \\
 &= A + (B + C)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น S มีคุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า $(A + B) + C = A + (B + C)$

วิธีทำ $\therefore (A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 + (-4) \\ 2 + 0 \\ 3 + 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) + 6 \\ 2 + (-2) \\ 8 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

และ $A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-4) + 6 \\ 0 + (-2) \\ 5 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 2 + (-2) \\ 3 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\therefore (A + B) + C = A + (B + C)$

4. เอกลักษณ์การบวก

"ถ้ามีสมาชิก X ในเซต S ที่มีคุณสมบัติว่า $A + X = A = X + A$ สำหรับทุกสมาชิก A ในเซต S แล้ว จะกล่าวว่า S มีเอกลักษณ์การบวกและเอกลักษณ์การบวกของ S คือ เมตริกซ์ X "

จะแสดงว่า S มีเอกลักษณ์การบวก (โดยขั้นแรกสมมติให้ X เป็นเอกลักษณ์การบวกของ S จากนั้นนำคุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวกมาใช้เพื่อแสดงให้เห็นว่า สามารถหาเมตริกซ์ X ใน S ได้จริง)

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$\text{สมมติให้เอกลักษณ์การบวก คือ } X = [x_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore A + X = [a_{ij} + x_{ij}]_{m \times n} \text{ และ } X + A = [x_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} \quad (\text{นิยามการบวกเมตริกซ์})$$

$$\text{แต่ } A + X = A \text{ และ } X + A = A \quad (\text{คุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวก})$$

$$\therefore \text{จาก } A + X = A \text{ จะได้}$$

$$[a_{ij} + x_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$\therefore a_{ij} + x_{ij} = a_{ij} \quad (\text{นิยามการเท่ากันของเมตริกซ์})$$

$$\text{จะได้ } x_{ij} = 0 \quad (\text{คุณสมบัติของ } 0 \text{ ในระบบจำนวนจริง})$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาจาก $X + A = A$ จะได้ $x_{ij} = 0$ เช่นกัน

$$\text{ดังนั้น } X = [0]_{m \times n}$$

จะเห็นว่า X เป็นสมาชิกของ S เพราะมีมิติ $m \times n$ และทุกสมาชิกของ X (ซึ่งต่างก็เท่ากับ 0) เป็นจำนวนจริง

****** นั่นคือ S มีเอกลักษณ์การบวก และเอกลักษณ์การบวกของ S คือ $[0]_{m \times n}$

**** ข้อสังเกต.** เมื่อบวกเมตริกซ์ใดในเซต S กับ $[0]_{m \times n}$ จะได้ผลบวกเป็นเมตริกซ์เดิมเสมอ

ตัวอย่าง ถ้า M เป็นเซตของ 2×3 เมตริกซ์ และ N เป็นเซตของ 3×2 เมตริกซ์ ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริงจงเขียนเอกลักษณ์การบวกของเซต M และ N

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{เอกลักษณ์การบวกของเซต } M \text{ คือ } \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{เอกลักษณ์การบวกของเซต } N \text{ คือ } \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A+O = A = O+A$

วิธีทำ $\therefore A + O = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0+0 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A$

และ $O + A = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+2 \\ 0+0 & 0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A$

ดังนั้น $A + O = A = O + A$.

ก่อนจะศึกษาคุณสมบัติต่อไป คือคุณสมบัติเกี่ยวกับอินเวอร์สการบวก นักเรียนควรมีความรู้เรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริงเสียก่อนดังนี้

การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ให้ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสามารถคูณเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c ได้ โดยใช้นิยามต่อไปนี้

นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\therefore cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$$

นั่นคือ $cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$

$\therefore 5 + 0 =$

ข้อสังเกต เมตริกซ์ cA เป็นเมตริกซ์ที่ได้มาจากการเอาจำนวนจริง c คูณเข้ากับสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์ A

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา $3A$

วิธีทำ $3A = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times (-1) & 3 \times 2 \\ 3 \times 0 & 3 \times 8 & 3 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 24 & 18 \end{bmatrix}$

4) กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา $(-1)B$

วิธีทำ $(-1)B = \begin{bmatrix} (-1)(5) & (-1)(1) \\ (-1)(7) & (-1)(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

หมายเหตุ นิยมเขียน $(-1)B$ เป็น $-B$

** ในกรณีทั่วไป ถ้า $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ จะได้ $-B = [-b_{ij}]_{m \times n}$

5. อินเวอร์สการบวก

"ให้ A เป็นสมาชิกใน S ถ้ามีสมาชิก Y ใน S ที่มีคุณสมบัติว่า $A + Y = \underline{0} = Y + A$ แล้ว จะกล่าวว่า A มีอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการบวกของ A คือ เมทริกซ์ Y "

จะแสดงว่า ทุกสมาชิกใน S มีอินเวอร์สการบวก (โดยขั้นแรกกำหนดให้ A เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S แล้วสมมติให้ Y เป็นอินเวอร์สการบวกของ A จากนั้นนำคุณสมบัติของอินเวอร์สการบวกมาใช้เพื่อแสดงให้เห็นว่า สามารถหา Y ใน S ได้จริง)

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

สมมติให้อินเวอร์สการบวกของ A คือ $Y = [y_{ij}]_{m \times n}$

$\therefore A + Y = [a_{ij} + y_{ij}]_{m \times n}$ และ $Y + A = [y_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}$ (นิยามการบวกเมทริกซ์)

แต่ $A + Y = \underline{0}$ และ $Y + A = \underline{0}$ (คุณสมบัติของอินเวอร์สการบวกเมทริกซ์)

$\therefore$ จาก $A + Y = \underline{0}$ จะได้

$$[a_{ij} + y_{ij}]_{m \times n} = [\underline{0}]_{m \times n}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } a_{ij} + y_{ij} &= 0 & (\text{นิยามการเท่ากันของเมทริกซ์}) \\ \text{จะได้ } y_{ij} &= -a_{ij} & (\text{คุณสมบัติของอินเวอร์สการบวกในระบบจำนวนจริง}) \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาจาก $Y + \underline{0} = \underline{0}$ จะได้ $y_{ij} = 0$ เช่นกัน

$$\text{ดังนั้น } Y = \begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

จะเห็นว่า Y เป็นสมาชิกของ S เพราะ Y มีมิติ $m \times n$ และทุกสมาชิกของ Y เป็นจำนวนจริง

ฉะนั้น Y เป็นอินเวอร์สการบวกของ A

จากความรู้เรื่องการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงเราทราบว่า $\begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = -A$

** นั่นคือ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ เป็นสมาชิกของ S แล้ว, A จะมีอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการบวกของ A คือ $-A = \begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ข้อสังเกต เมื่อบวกเมทริกซ์ในเซต S กับอินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์นั้น จะได้ผลบวกเป็นเอกลักษณ์การบวก ($\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$) ของเซต S เสมอ

$$\text{ตัวอย่าง} \quad \text{ให้ } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

จงเขียนอินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์ A และ B

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{อินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์ } A \text{ คือ } -A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{และ}$$

$$\text{อินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์ } B \text{ คือ } -B = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 8 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 0 & -y \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $B = \begin{bmatrix} -x & -2 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ A

วิธีทำ $\therefore A + B = \begin{bmatrix} x + (-x) & 2 + (-2) \\ 0 + 0 & (-y) + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

และ $B + A = \begin{bmatrix} (-x) + x & (-2) + 2 \\ 0 + 0 & y + (-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

ดังนั้น $A + B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = B + A$

นั่นคือ $B = \begin{bmatrix} -x & -2 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 0 & -y \end{bmatrix}$

6. คุณสมบัติการตัดออกของการบวก

ถ้าสมาชิกใน S สอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

"สำหรับทุก A, B และ C ที่เป็นสมาชิกของ S

(1) ถ้า $A' + B = A + C$ แล้ว $B = C$

(2) ถ้า $B + A = C + A$ แล้ว $B = C$

เช่นนี้ จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการตัดออกของการบวก

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติการตัดออกของการบวก

ให้ A, B และ C เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

(1) ถ้า $A + B = A + C$ (กำหนดให้)

จะได้ $-A + (A + B) = -A + (A + C)$ (บวก $-A$ เข้าทั้งสองข้าง)

$(-A + A) + B = (-A + A) + C$ (คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก)

$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{m \times n} + B = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{m \times n} + C$ (คุณสมบัติของอินเวอร์สการบวก)

ดังนั้น $B = C$ (คุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวก)

(2) ถ้า $B + A = C + A$ (กำหนดให้)
 จะได้ $A + B = A + C$ (คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก)
 ดังนั้น $B = C$ (จากทวน (1))

นั่นคือ S มีคุณสมบัติการตัดออกของการบวก

สรุป เซต S (ซึ่งเป็นเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง) กับการบวกเมตริกซ์ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. คุณสมบัติปิด
2. คุณสมบัติการจับคู่
3. มีเอกลักษณ์การบวก
4. มีอินเวอร์สการบวก (สำหรับแต่ละ $m \times n$ เมตริกซ์)
5. คุณสมบัติการสลับที่
6. คุณสมบัติการตัดออก

*** คุณสมบัติ 4 ข้างแรก ทำให้เซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ กับการบวกเมตริกซ์เป็น

กรุป (group)

ข้อสังเกต คำว่า "เอกลักษณ์การบวก" หมายถึง "เอกลักษณ์การบวกของเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์" แต่คำว่า "อินเวอร์สการบวก" หมายถึง "อินเวอร์สการบวกของเมตริกซ์"

**นอกจากนี้ จะเห็นว่า เซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง และเซตของจำนวนจริง ต่างก็มีคุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกครบทั้ง 6 ประการ ดังกล่าวข้างต้นเหมือนกัน

หมายเหตุ เกี่ยวกับการหาผลต่างของเมตริกซ์ ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน เราสามารถหาผลต่างของเมตริกซ์ A และ B ได้โดยใช้นิยามต่อไปนี้

นิยาม ถ้า A และ B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์แล้ว $A - B = A + (-B)$
 หรือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว
 $A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$ จงหา $A - B$

วิธีทำ $A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 9 + (-7) \\ -6 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.1 จงหา $-3A$ และ $\frac{1}{2}B + 4C$

1.2 จงแสดงว่า $A - B \neq B - A$ และ $(A-B)-C \neq A-(B-C)$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

จงหา 2.1 $2\{A-(3B-2C)\}$

2.2 เมทริกซ์ X จากสมการเมทริกซ์ $3X - A = C - 2(B - X)$

3. จงแสดงว่า ถ้า A, B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ และ c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

3.1 $(c + d)A = cA + dA$

3.2 $c(A + B) = cA + cB$

4. ถ้า A เป็น 3×2 เมทริกซ์ใด ๆ จงแสดงว่า $-(A^t) = (-A)^t$

5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ให้ M เป็นเซตของ 2×2 เมทริกซ์ในรูป

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่าเซต M กับการบวกเมทริกซ์มี

(1) คุณสมบัติปิด

(2) คุณสมบัติสลับที่

(3) คุณสมบัติการจับคู่

(4) เอกลักษณ์การบวก

(5) อินเวอร์สการบวกสำหรับแต่ละเมทริกซ์ใน M

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2.2

$$1. \quad 1.1 \quad -3A = \begin{bmatrix} (-3)(5) \\ (-3)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}B + 4C = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})(6) \\ (\frac{1}{2})(-8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (4)(-1) \\ (4)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$1.2 \quad A - B = \begin{bmatrix} 5-6 \\ 4-(-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 6-5 \\ -8-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A - B \neq B - A$

$$(A - B) - C = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)-(-1) \\ (12)-(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A - (B - C) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6-(-1) \\ -8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(A - B) - C \neq A - (B - C)$

$$\begin{aligned} 2. \quad 2.1 \quad 2 \{A - (3B - 2C)\} &= 2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -6 & 18 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 28 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 8 & -24 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -48 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2.2 \quad \text{ให้ } X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{จาก } 3X - A = C - 2(B - X)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \begin{bmatrix} 3x_1 & 3x_2 \\ 3x_3 & 3x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & -x_1 & 6-x_2 \\ 1 & -x_3 & -x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3x_1-2 & 3x_2-4 \\ 3x_3-3 & 3x_4+1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -2x_1 & 12-2x_2 \\ 2 & -2x_3 & -2x_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3x_1-2 & 3x_2-4 \\ 3x_3-3 & 3x_4-1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4+2x_1 & -17+2x_2 \\ 2+2x_2 & 2x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

โดยนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{aligned} x_1 &= 6, & x_2 &= -13 \\ x_3 &= 5, & x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } X = \begin{bmatrix} 6 & -13 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{และ } B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad 3.1 \quad (c+d)A &= (c+d) [a_{ij}]_{m \times n} \\ &= [(c+d)a_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง)} \\ &= [ca_{ij} + da_{ij}]_{m \times n} && \text{(คุณสมบัติการกระจายในระบบจำนวนจริง)} \\ &= [c a_{ij}]_{m \times n} + [d a_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมทริกซ์)} \\ &= c [a_{ij}]_{m \times n} + d [a_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง)} \\ &= cA + dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3.2 \quad c(A + B) &= c[a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมตริกซ์)} \\
 &= [c(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} && \text{(นิยามการคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง)} \\
 &= [ca_{ij} + cb_{ij}]_{m \times n} && \text{(คุณสมบัติการกระจายในระบบจำนวนจริง)} \\
 &= [ca_{ij}]_{m \times n} + [cb_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการบวกเมตริกซ์)} \\
 &= c[a_{ij}]_{m \times n} + c[b_{ij}]_{m \times n} && \text{(นิยามการคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง)} \\
 &= cA + cB
 \end{aligned}$$

$$4. \text{ ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$-(A^t) = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \end{bmatrix}$$

$$(-A)^t = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } -(A^t) = (-A)^t$$

$$5. \text{ ให้ } M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ} \right\}$$

(1) คุณสมบัติปิดของการบวก

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \quad \text{เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ใน } M$$

$$\text{จะได้ } A + B = \begin{bmatrix} m + x & n + y \\ -(n + y) & m + x \end{bmatrix}$$

$\therefore m, n, x, y$ เป็นจำนวนจริง $\therefore (m+x), (n+y)$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $A + B$ เป็นสมาชิกของ M

นั่นคือ M มีคุณสมบัติปิดของการบวก

(2) คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} m+x & n+y \\ -(n+y) & m+x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+m & y+n \\ -(y+n) & x+m \end{bmatrix} \\ &= B + A \end{aligned}$$

ดังนั้น M มีคุณสมบัติการสลับที่ของการบวก

(3) คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก

ให้ $C = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ใน M

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \begin{bmatrix} m+x & n+y \\ -(n+y) & m+x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (m+x)+p & (n+y)+q \\ -(n+y)+q & (m+x)+p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m+(x+p) & n+(y+q) \\ -n+(-y-q) & m+(x+p) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x+p & y+q \\ -(y+q) & x+p \end{bmatrix} \\ &= A + (B + C) \end{aligned}$$

ดังนั้น M มีคุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก

(4) สมมติให้ $D = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของ M

$$\therefore A + D = A = D + A$$

เมื่อพิจารณาจาก $A + D = A$

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} m+r & n+s \\ -(n+s) & m+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $m+r = m$ และ $n+s = n$ (นิยามการเท่ากันของเมทริกซ์)

$$\therefore r = 0 \text{ และ } s = 0$$

ทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาจาก $D + A = A$ จะได้ $r = 0$ และ $s = 0$

เช่นกัน

$$\text{ดังนั้น } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เอกลักษณ์การบวกของ M คือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(5) อินเวอร์สการบวก

ให้ $A = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ใน M

ถ้า A มีอินเวอร์สการบวก

ให้ $E = \begin{bmatrix} e & f \\ -f & e \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ A

$$\text{ดังนั้น } A + E = \underline{0} = E + A$$

เมื่อพิจารณาจาก $A + E = \underline{0}$

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} m+e & n+f \\ -(n+f) & m+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $m+e = 0$ และ $n+f = 0$ (นิยามการเท่ากันของเมทริกซ์)

$$\therefore e = -m \text{ และ } f = -n$$

ทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาจาก $E + A = A$ จะได้

$$e = -m \text{ และ } f = -n \text{ เช่นกัน}$$

$$\text{ดังนั้น } E = \begin{bmatrix} -m & -n \\ n & -m \end{bmatrix}$$

และเมื่อทดสอบเมทริกซ์ E จะได้ว่า $A + E = \underline{0} = E + A$ จริง

นั่นคือ E เป็นอินเวอร์สการบวกของ A

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

จงเขียนวงกลมรอบตัวอักษรหน้าคำตอบที่ถูกต้องในแต่ละข้อ

1. ถ้า $A = [a_{ij}]_{r \times s}$, $B = [b_{ij}]_{s \times r}$ ข้อความใดผิด
- ก. สามารถหา $A + B^t$ ได้เสมอ
- ข. สามารถหา $A^t + B$ ได้เสมอ
- ค. สามารถหา $A + B^t$ และ $A^t + B$ ได้แล้ว $A + B^t = A^t + B$
- ง. สามารถหา $A + B$ ได้ ถ้า $r = s$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ เท่ากับผลบวกของเมตริกซ์คู่ใด

ก. $\begin{bmatrix} -4 & x \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 2-x \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ง. ถูกทุกข้อ

3. ถ้า $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3x \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{y}{2} \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y

ก. $x = 4$, $y = -4$

ข. $x = 4$, $y = 1$

ค. $x = 4$, $y = 4$

ง. $x = 9$, $y = 4$

4. ให้ S เป็นเซตของ 2×2 เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง จงหาค่า x, y และ z ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 2+x & 0 \\ y-3 & 2z+1 \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของ S

ก. $x = -2$, $y = -3$ และ $z = \frac{1}{2}$

ข. $x = -2$, $y = 3$ และ $z = -\frac{1}{2}$

ค. $x = -2$, $y = 3$ และ $z = \frac{1}{2}$

ง. $x = -2$, $y = 3$ และ $z = -1$

5. จงหาค่า a, b และ c ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} a \\ -b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

ก. $a = 3$, $b = 2$ และ $c = -5$

ข. $a = 3$, $b = -2$ และ $c = -5$

ค. $a = 3$, $b = 2$ และ $c = 5$

ง. $a = -3$, $b = 2$ และ $c = -5$

จงจับคู่คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ต่อไปนี้กับแต่ละข้อความในข้อ 6-10 โดยเขียนอักษร ก, ข, ค หรือ ง. ลงในช่องว่างหน้าข้อความที่สัมพันธ์กัน

ให้ A, B, C และ D เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง

ก. คุณสมบัติการสลับที่

ข. คุณสมบัติการจับหมู่

ค. คุณสมบัติการตัดออก

ง. คุณสมบัติปิด

-6 $((A + B) + C) + D = (A + B) + (C + D)$
-7 $(B + C)$ และ $(C + B)$ เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ที่ทุกสมาชิก
ของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง
-8 $((A + B) + C) + D = (C + (A + B)) + D$
-9 ถ้า $(B + A) + D = (B + A) + C$ แล้วจะได้ $D = C$
-10 $C + D = D + C$
-

6. ๗	7. ๖	8. ๗	9. ๘	10. ๗
1. ๗	2. ๖	3. ๗	4. ๗	5. ๗

หน่วยย่อยที่ 3

การคูณเมตริกซ์และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนต้องมีความสามารถ ดังต่อไปนี้

1. บอกได้ถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้สองเมตริกซ์คูณกันได้หรือไม่ และถ้าคูณกันได้ สามารถหาผลคูณของ เมตริกซ์ทั้งสองได้ถูกต้อง
2. แสดงได้ว่า การคูณเมตริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ 2×2 เมตริกซ์ มี :- คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการจับหมู่ เอกลักษณ์การคูณ และคุณสมบัติการกระจาย
แต่ไม่มี :- คุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติการตัดออก
3. หาค่าเทอรัมินันต์ของเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง
4. บอกได้ถูกต้องว่าเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้เป็นเชิงกลูาร์ เมตริกซ์ หรืออนเชิงกลูาร์ เมตริกซ์
5. บอกได้ถูกต้องว่าเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้ห้อินเวอร์สการคูณหรือไม่ และถ้ามีสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์เหล่านั้นได้ถูกต้อง

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนต้องมีความรู้ เรื่องการบวกเมตริกซ์ และคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณจำนวนจริง

กิจกรรมการเรียนรู้

ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังนี้

1. ศึกษาบทเรียนเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์โดยปฏิบัติกิจกรรมย่อยให้สอดคล้องกันไป 4 กิจกรรมคือ

- 1.1 คุ้เนื้อหาของบทเรียนจากแผ่นโปรงใสจำนวน 15 แผ่น
- 1.2 ฟังคำบรรยายประกอบบทเรียนจากเทปบันทึกเสียง
- 1.3 เขียนคำตอบของแบบฝึกหัดจากแผ่นโปรงใส (มีให้นักเรียนทำเป็นช่วง ๆ สลับกับการฟังคำบรรยาย) ลงในคู่มือสำหรับนักเรียนซึ่งเป็นเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.1
- 1.4 ตรวจคำตอบของแบบฝึกหัดในแต่ละช่วงด้วยตนเองโดยดูคำตอบเฉลยจากแผ่นโปรงใส
2. ทำแบบฝึกหัดที่ 3.1
3. อ่านบทเรียนเรื่องคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณแบบทริกซ์จากเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.2
4. รวบรวมอภิปรายกับอาจารย์ผู้สอนในการสรุปบทเรียน
5. ทำแบบฝึกหัดที่ 3.2
6. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

การประเมินผล

พิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3 ผู้ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ 80% ของคะแนนเต็มขึ้นไปถือว่าผ่าน ให้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 4 ต่อไป ส่วนผู้ที่ทำคะแนนได้ต่ำกว่า 80% ถือว่าไม่ผ่าน ให้เรียนซ่อมเสริม

การเรียนซ่อมเสริม

ให้ผู้ที่ไม่ผ่านศึกษาบทเรียนอีกครั้ง หรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน จากนั้นทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3 จนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผล

เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.1

คู่มือสำหรับนักเรียนในการศึกษาบทเรียนจากแผ่นโปร่งใส

เรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

จงเขียนคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

$$1) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[(__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \right] = \left[__ \right]$$

$$2) \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \left[(__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \right] = \left[__ \right]$$

$$3) \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[(__ \times __) + (__ \times __) \right] = \left[__ \right]$$

$$4) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[(__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \right] \\ = \left[__ \right]$$

การคูณเมตริกซ์เมื่อตัวตั้งเป็นเมตริกซ์ที่มี 2 แถว และตัวคูณเป็นเมตริกซ์ที่มี 1 หลัก

$$1) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \\ (__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} __ \\ __ \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \\ (__ \times __) + (__ \times __) + (__ \times __) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} __ \\ __ \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 2 & -10 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

การคูณเมทริกซ์เมื่อตัวคูณเป็นเมทริกซ์ที่มี 2 หลัก

12 เป็นสมาชิกในตำแหน่ง

30 " "

c_{11} ได้จากสมาชิกแถวที่ 1 ของ A คูณกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของ B

c_{21} " " 2 " " 1 "

c_{12} " " " " "

c_{22} " " " " "

สรุป

c_{ij} " " " " "

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{4cm}}$$

แบบฝึกหัดทบทวน

$$1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \\ \underline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} \end{bmatrix}$$

มิติของเมทริกซ์			
	ตัวตั้ง	ตัวคูณ	ผลคูณ
ข้อ 1	1 x 2	2 x 1	1 x 1
ข้อ 2	__ x 3	3 x __	__ x __
ข้อ 3	__ x __	__ x __	__ x __
ข้อ 4	__ x __	__ x __	__ x __
ข้อ 5	__ x __	__ x __	__ x __

มิติของเมทริกซ์			
	ตัวตั้ง	ตัวคูณ	ผลคูณ
ข้อ 1	1 x 3	3 x 2	__ x __
ข้อ 2	3 x 2	2 x 1	__ x __
ข้อ 3	__ x 4	4 x __	2 x 3
ข้อ 4	__ x 2	2 x __	3 x 1
ข้อ 5	1 x 4	__ x 2	__ x __
ข้อ 6	2 x __	3 x 4	__ x __

มิติของเมทริกซ์			
	ตัวตั้ง	ตัวคูณ	ผลคูณ
ข้อ 7	3 x 2	__ x __	__ x 3
ข้อ 8	4 x 1	__ x __	__ x 1
ข้อ 9	__ x __	3 x 2	2 x __
ข้อ 10	__ x __	4 x 1	3 x __
ข้อ 11	__ x 3	__ x 2	3 x __
ข้อ 12	2 x __	5 x __	__ x 4

		B 4 x 4			
		หลักที่ 1	หลักที่ 2	หลักที่ 3	หลักที่ 4
A 3 x 4	แถวที่ 1	c_{11}			
	แถวที่ 2			c_{23}	
	แถวที่ 3		c_{32}		

หมายเหตุ ข้อต่อไปให้นักเรียนแสดงวิธีทำบนกระดาษขาว

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. จงเขียนเครื่องหมาย $\checkmark$ หน้าข้อความที่ถูกต้อง และ $\times$ หน้าข้อความที่ผิด
ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใด ๆ

- ___ 1.1 จะหา AB ได้ถ้าจำนวนแถวของ A เท่ากับจำนวนหลักของ B
- ___ 1.2 จะหา BC ได้ถ้าจำนวนหลักของ B เท่ากับจำนวนแถวของ C
- ___ 1.3 ถ้า A และ B เป็น 4×4 เมทริกซ์จะหาได้ทั้ง AB และ BA
- ___ 1.4 ถ้า B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันจะหา BC ได้เสมอ
- ___ 1.5 ถ้า $C = AB$, C จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของ A และ
จะมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของ B
- ___ 1.6 ถ้า A เป็น 2×3 เมทริกซ์ และ C เป็น 3×2 เมทริกซ์
จะได้ AC เป็น 2×2 เมทริกซ์ และ CA เป็น 3×3
เมทริกซ์
- ___ 1.7 ถ้า $A = BC$, สมาชิกของ A ในตำแหน่ง a_{ij} ได้มาจากการ
เอาสมาชิกในหลักที่ i ของ B คูณกับสมาชิกในแถวที่ j ของ
 C เป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน

2. จงหาเมทริกซ์ผลคูณในข้อที่หาได้ ข้อที่หาไม่ได้จงบอกเหตุผล

2.1 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$

2.2 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

2.3 $\begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2.4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

2.5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$2.6 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2.7 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ ให้ } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $AI = A = IA$

$$4. \text{ กำหนดให้ } f(x) = x^2 - x^3 \text{ และ } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{จงหา } f(A)$$

5. จงหาค่า x และ y ที่ทำให้สมการเมตริกต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$6. \text{ ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า $(AB)^t = B^t A^t$

หมายเหตุ ไม่ว่า A และ B จะมีมิติเท่าไร ถ้า A และ B คูณกันได้แล้ว

เราสามารถแสดงได้เสมอว่า $(AB)^t = B^t A^t$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $B = AA^t$ แล้วจะได้ $B^t = B$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.1

1. ~~1.1~~ 1.2 1.3 ~~1.4~~ 1.5 1.6 ~~1.7~~

$$\begin{aligned} 2. \quad 2.1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 1 \times (-3) \\ 3 \times 2 & 3 \times (-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.2 หาคูณไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้ง (เท่ากับ 3 หลัก) ไม่เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ (ซึ่งเท่ากับ 1 แถว)

$$\begin{aligned} 2.3 \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (3 \times 0) + (-5 \times 1) & (3 \times 2) + (-5 \times 0) & (3 \times 0) + (-5 \times 3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 6 & -15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 หาคูณไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้ง (เท่ากับ 4 หลัก) ไม่เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ (ซึ่งเท่ากับ 3 แถว)

$$\begin{aligned} 2.5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 \times 0) + (1 \times 1) & (1 \times 1) + (1 \times 0) \\ (0 \times 0) + (0 \times 1) & (0 \times 1) + (0 \times 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.6 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (0 \times 1) + (1 \times 0) & (0 \times -5) + (1 \times 4) \\ (3 \times 1) + (5 \times 0) & (3 \times -5) + (5 \times 4) \\ (4 \times 1) + (-1 \times 0) & (4 \times -5) + (-1 \times 4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & -24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.7 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 \times -2) + (1 \times 5) + (1 \times 1) \\ (2 \times -2) + (2 \times 5) + (2 \times 1) \\ (3 \times -2) + (3 \times 5) + (3 \times 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \text{เนื่องจาก} \quad AI &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A \\
 \text{และ} \quad IA &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A \\
 \text{ดังนั้น} \quad AI &= A = IA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad f(A) &= A^2 - A^3 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$5. \quad \text{จาก} \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้} \quad \begin{bmatrix} 2x + 6y \\ 3x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

โดยนัยการเท่ากันของเมตริกซ์

$$\text{จะได้} \quad 2x + 6y = 10$$

$$\text{และ} \quad 3x - y = -8$$

$$\therefore \quad x = 1.9 \quad \text{และ} \quad y = 2.3$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad (AB)^t &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix}^t \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{21}b_{11} \\ a_{11}b_{12} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} \\
 \text{และ } B^t A^t &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{21}b_{11} \\ a_{11}b_{12} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(AB)^t = B^t A^t$

7. พิสูจน์ $\therefore B = AA^t$

$$\begin{aligned}
 \therefore B^t &= (AA^t)^t \\
 &= (A^t)^t (A^t) \\
 &= AA^t \\
 \text{นั่นคือ } B^t &= B
 \end{aligned}$$

อธิบาย การพิสูจน์ข้อนี้ใช้ความรู้ 2 ประการคือ

1. สำหรับทุกเมทริกซ์ A และ B ที่สามารถคูณกันได้

$$(AB)^t = B^t A^t \quad \text{เสมอ}$$

2. ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ

$$(A^t)^t = A \quad \text{เสมอ}$$

เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 3.2

เรื่อง คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ใด ๆ จากเรื่องการคูณเมทริกซ์เราพบว่า อาจหาผลคูณได้ทั้ง AB และ BA หรือ อาจหาได้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรืออาจหาไม่ได้ทั้งสองอย่าง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับมิติของ A และ B แต่มีข้อสังเกตว่า ถ้า A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์, n เป็นจำนวนเต็มบวก (กล่าวคือ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเท่ากัน) แล้ว จะหาผลคูณได้ทั้ง AB และ BA เสมอ

ต่อไปนี้จะศึกษาคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ในเซตของ $n \times n$ เมทริกซ์ สำหรับบทเรียนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่เข้าใจได้ง่ายที่สุด คือเมื่อ $n = 2$ นั่นคือจะศึกษาในเซตของ 2×2 เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง นอกจากนี้จะพิจารณาว่าเซตดังกล่าวกับเซตของจำนวนจริงมีคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเหมือนกัน หรือแตกต่างกันอย่างไร เราทราบว่าจำนวนจริงมีคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณดังนี้

1. คุณสมบัติปิดของการคูณ

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว จะได้ว่า ab เป็นจำนวนจริงเสมอ

2. คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

สำหรับทุกจำนวนจริง a และ b จะได้ว่า $ab = ba$ เสมอ

3. คุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ

สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c , $(ab)c = a(bc)$ เสมอ

4. มีเอกลักษณ์การคูณ

ในเซตของจำนวนจริง มีจำนวนจริง 1 ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$(a)(1) = a = (1)(a) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } a$$

เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณในเซตของจำนวนจริง

5. มีอินเวอร์สการคูณสำหรับแต่ละจำนวนจริงที่ไม่ใช่ 0

สำหรับแต่ละจำนวนจริง a ที่ $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{a}$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$(a)\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)(a)$$

เรียก $\frac{1}{a}$ ว่าอินเวอร์สการคูณของ a

6. คุณสมบัติการหักออกของการคูณ

ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq 0$ และ $ab = ac$ แล้ว จะได้ว่า
 $b = c$ เสมอ

7. คุณสมบัติการกระจาย

สำหรับทุกจำนวนจริง a, b และ c จะได้ว่า

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{หรือ} \quad (b + c)a = ba + ca \quad \text{เสมอ}$$

ให้ S เป็นเซตของ 2×2 เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง

1. คุณสมบัติปิดของการคูณ

"ถ้า A และ B เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า AB เป็นสมาชิกของ S เสมอแล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติปิดของการคูณ"

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติปิดของการคูณ

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า AB เป็น 2×2 เมทริกซ์ (ก)

∴ สมาชิกทุกตัวของ A และ B เป็นจำนวนจริง

∴ สมาชิกทุกตัวของ AB เป็นจำนวนจริง (ข)

(คุณสมบัติปิดของการบวกและการคูณจำนวนจริง)

จาก (ก) และ (ข) จะได้ว่า AB เป็นสมาชิกของ S

* นั่นคือ S มีคุณสมบัติปิด

2. คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

"ถ้า A และ B เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า $AB = BA$ เสมอ แล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ"

เนื่องจากมี 2×2 เมทริกซ์ A และ B ซึ่ง $AB \neq BA$ เช่น

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $AB \neq BA$

* ดังนั้นสรุปได้ว่า S ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ

หมายเหตุ ยังมี 2×2 เมทริกซ์ A และ B อีกหลายคู่ซึ่ง $AB \neq BA$ ให้นักเรียน ยกตัวอย่าง 1 คู่

ตอบ ให้ $A = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } BA = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $AB \neq BA$

(นักเรียนทราวจสอบความถูกต้องของคำตอบได้ด้วยตนเอง)

ต่อไปถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } A(BC) &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (AB)C = A(BC)$$

(ดูคำตอบเฉลยในหน้าถัดไป)

3. คุณสมบัติการจับคู่อของการคูณ

"ถ้า A, B และ C เป็นสมาชิกใดๆ ของ S และปรากฏว่า

$(AB)C = A(BC)$ เสมอแล้ว จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการจับคู่อของการคูณ"

หมายเหตุ วิธีแสดงว่า S มีคุณสมบัติการจับคู่อของการคูณ ให้นักเรียนศึกษาจากหนังสือ

แบบเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค.514 หน้า 176 - 177

4. เอกลักษณ์การคูณ

"ถ้ามีสมาชิก I ใน S ที่มีคุณสมบัติว่า $IA = A = AI$ สำหรับทุกสมาชิก A ใน S แล้ว จะกล่าวว่า S มีเอกลักษณ์การคูณและเอกลักษณ์การคูณของ S คือเมทริกซ์ I "

จะแสดงว่า S มีเอกลักษณ์การคูณ (โดยขั้นแรกสมมติให้ I เป็นเอกลักษณ์การคูณของ S จากนั้นนำคุณสมบัติของเอกลักษณ์การคูณมาใช้ เพื่อแสดงให้เห็นว่าสามารถหา I ใน S ได้จริง)

$$\begin{aligned} \text{โดย} \quad & \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -28 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -28 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \\ & = \end{aligned}$$

ให้ A เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S , $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

สมมติให้เอกลักษณ์การคูณคือ $I = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$$\therefore IA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \\ ax_3 + cx_4 & bx_3 + dx_4 \end{bmatrix}$$

แต่ $IA = A$ เพราะ I เป็นเอกลักษณ์การคูณ

$$\therefore \begin{bmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \\ ax_3 + cx_4 & bx_3 + dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

โดยนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้

$$ax_1 + cx_2 = a \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$bx_1 + dx_2 = b \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$ax_3 + cx_4 = c \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$bx_3 + dx_4 = d \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(1) \times d - (2) \times c \quad \text{ได้} \quad (ad - bc)x_1 = ad - bc \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$(1) \times b - (2) \times a \quad \text{ได้} \quad (bc - da)x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$(4) \times c - (3) \times d \text{ ได้ } (bc - da)x_3 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$(4) \times a - (3) \times b \text{ ได้ } (ad - bc)x_4 = ad - bc \dots\dots\dots (8)$$

พิจารณาสมการ (5) และ (8) จะเห็นว่า ถ้า x_1 และ x_4 ที่ทำให้สมการ (5)

และ (8) เป็นจริงเสมอ ไม่ว่า $ad - bc$ จะเป็นศูนย์หรือไม่

$$\text{คือ } x_1 = x_4 = 1$$

พิจารณาสมการ (6) และ (7) จะเห็นว่า ถ้า x_2 และ x_3 ที่ทำให้สมการ (6) และ (7)

เป็นจริงเสมอ ไม่ว่า $bc - da$ จะเป็นศูนย์หรือไม่

$$\text{คือ } x_2 = x_3 = 0$$

$$\therefore I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อทดสอบคุณสมบัติของเมทริกซ์ I โดยหาผลคูณ IA และ AI จะได้

$$IA = A = AI$$

จะเห็นว่า I เป็นสมาชิกของ S เพราะ I เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่งสมาชิกทุกตัว
ของ I เป็นจำนวนจริง

** นั่นคือ S มีเอกลักษณ์การคูณ และเอกลักษณ์การคูณของ S คือ

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

** หมายเหตุ 1. เมื่อคูณเมทริกซ์ใดใน S กับเอกลักษณ์การคูณ จะได้ผลคูณเป็นเมทริกซ์เดิม
เสมอ

2. เราเรียกเมทริกซ์ I ใหม่ว่า "ยูนิตเมทริกซ์" (unit matrix)

3. ถ้า S เป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n ยูนิตเมทริกซ์จะมีลักษณะเกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ I ข้างต้น กล่าวคือ มีสมาชิกในแนวเส้นทะแยงมุมจากบนซ้าย
ถึงล่างขวา เป็น 1 โดยตลอด และสมาชิกในตำแหน่งอื่นเป็น 0 เช่น

$$\text{ยูนิตเมทริกซ์มิติ } 3 \times 3 \text{ คือ } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เรานิยามของยูนิตเมทริกซ์ ดังนี้

นิยาม $I = [I_{pq}]_{n \times n}$ เป็นยูนิตเมทริกซ์เมื่อ $I_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } p = q \\ 0 & \text{เมื่อ } p \neq q \end{cases}$

และ ถ้า A, B ไม่เป็นเมทริกซ์จัตุรัส บัดะ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{ij}]_{n \times m}$

แล้ว จะได้ $AI = A$ และ $IB = B$, เมื่อ I เป็นยูนิตเมทริกซ์มิติ $n \times n$

- (1) ถ้า S เป็นเซตของ 4×4 เมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง จงเขียนเอกลักษณ์การคูณของ S

ตอบ เอกลักษณ์การคูณของ S คือ $I =$

- (2) ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $IA = A = AI$

วิธีทำ $\therefore IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = A$

และ $AI = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \text{---}$

ดังนั้น $IA = A = AI$

(ดูคำตอบเฉลยในหน้าถัดไป)

5. คุณสมบัติการตัดออกของการคูณ

"ถ้า A, B และ C เป็นสมาชิกใดๆ ของ S และ $AB = AC$ โดยที่ $A \neq 0$ แล้วปรากฏว่า $B = C$ เสมอ เช่นนี้กล่าวว่า S มีคุณสมบัติการตัดออกของการคูณ"

พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

เฉลย (1) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = A$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ $AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $AB = AC$ โดยที่ $A \neq 0$ แต่ $B \neq C$

*ดังนั้นสรุปได้ว่า S ไม่มีการสมบัติการตัดออกของการคูณ

ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า (1) $A(B + C) = AB + AC$

(2) $(B + C)A = BA + CA$

(1) $\therefore A(B + C) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right)$
 $= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{และ } AB + AC &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } A(B + C) = AB + AC$$

$$\begin{aligned}(2) \therefore (B + C)A &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } BA + CA &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (B + C)A = BA + CA$$

6. คุณสมบัติการกระจาย

"ถ้า A , B และ C เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S และปรากฏว่า

$$(1) A(B + C) = AB + AC$$

$$(2) (B + C)A = BA + CA \quad \text{เสมอแล้ว}$$

จะกล่าวว่า S มีคุณสมบัติการกระจายของเมตริกซ์"

จะแสดงว่า S มีคุณสมบัติการกระจายของเมตริกซ์

$$\begin{aligned}(1) A(B + C) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{Ans} \quad (1) \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 14 & 43 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 22 & 37 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 13 & 43 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 20 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 22 & 37 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12})+a_{12}(b_{22}+c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+c_{11})+a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12}+c_{12})+a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) + \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})+(a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) + \\ & (a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}) \\ & (a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= AB + AC$$

$$\therefore A(B+C) = AB + AC$$

$$(2) (B+C)A = \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (b_{11}+c_{11})a_{11}+(b_{12}+c_{12})a_{21} & (b_{11}+c_{11})a_{12}+(b_{12}+c_{12})a_{22} \\ (b_{21}+c_{21})a_{11}+(b_{22}+c_{22})a_{21} & (b_{21}+c_{21})a_{12}+(b_{22}+c_{22})a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}) + (c_{11}a_{11}+c_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}) + (c_{11}a_{12}+c_{12}a_{22}) \\ (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}) + (c_{21}a_{11}+c_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}) + (c_{21}a_{12}+c_{22}a_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}a_{11}+c_{12}a_{21} & c_{11}a_{12}+c_{12}a_{22} \\ c_{21}a_{11}+c_{22}a_{21} & c_{21}a_{12}+c_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= BA + CA
\end{aligned}$$

$$\therefore (B + C)A = BA + CA$$

แบบฝึกหัด ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า (1) $(A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$

(2) $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad (A + B)(A + B) = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } (A + B)(A + B) \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(4) \quad (A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } (A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$$

7. อินเวอร์สการคูณ

จากเรื่องการคูณจำนวนจริง ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a \times b = 1 = b \times a$ (1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ) แล้ว จะกล่าวว่า b เป็นอินเวอร์สการคูณของ a

ในการคูณเมทริกซ์มิติ $n \times n$ ก็เช่นเดียวกัน ถ้าเมทริกซ์ A และ B คูณกันได้ ยูนิตเมทริกซ์ (ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การคูณ) กล่าวคือ ถ้า $AB = I = BA$ แล้ว เราจะกล่าวว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A และเขียนแทน B ด้วยสัญลักษณ์ A^{-1} (อ่านว่า เอ อินเวอร์ส)

เฉลย (3), (4) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A-B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

และ $BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

นั่นคือ $AB = I = BA$

ดังนั้น B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A หรือ $A^{-1} = B$

เรานิยามของอินเวอร์สการคูณของ $n \times n$ เมทริกซ์ ดังนี้

นิยาม เมทริกซ์ B ซึ่งมีมิติ $n \times n$ เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A ซึ่งมีมิติ $n \times n$ ก็ต่อเมื่อ $AB = I = BA$ เมื่อ I คือยูนิตเมทริกซ์ มิติ $n \times n$ ในกรณีเช่นนี้ นิยมใช้ A^{-1} แทน B

ต่อไปจะศึกษาว่า เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะมีอินเวอร์สการคูณเสมอไปหรือไม่ ถ้าไม่
เสมอไป เงื่อนไขใดที่ทำให้เมทริกซ์จัตุรัสหนึ่ง ๆ มีหรือไม่มีอินเวอร์สการคูณ (ในเรื่องจำนวน
จริงมีจำนวนจริงบางจำนวนที่ไม่มีอินเวอร์สการคูณ จำนวนนั้นคือ 0) นอกจากนี้จะได้ศึกษา
ทฤษฎีว่า ถ้าทราบว่า A มีอินเวอร์สการคูณเป็น A^{-1} แล้ว จะหา A^{-1} ได้อย่างไร

ในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเป็น 2×2
เท่านั้น

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมทริกซ์ใด ๆ

สมมติว่า A มีอินเวอร์สการคูณ ให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

ต่อไปจะนำคุณสมบัติของการเป็นอินเวอร์สเมทริกซ์มาใช้ เพื่อหาค่า x_1, x_2, x_3 และ x_4

$$\therefore AA^{-1} = I$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้

$$ax_1 + bx_3 = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$ax_2 + bx_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$cx_1 + dx_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$cx_2 + dx_4 = 1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } (ad - bc)x_1 = d \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{และ } (ad - bc)x_3 = -c \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{จาก (3) และ (4) จะได้ } (ad - bc)x_2 = -b \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{และ } (ad - bc)x_4 = a \quad \dots\dots\dots (8)$$

พิจารณาสมการ (5) ถึง (8) จะเห็นว่า

ถ้า $ad - bc = 0$ แล้ว จะไม่สามารถหาค่า x_1, x_2, x_3 และ x_4 ได้

นั่นคือ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc = 0$ แล้ว A จะไม่มีอินเวอร์สการคูณ เราเรียกเมทริกซ์ A ซึ่งไม่มีอินเวอร์สการคูณเช่นนี้ว่า ซิงกูลาร์เมทริกซ์ (singular matrix)

แต่ถ้า $ad - bc \neq 0$ แล้ว จากสมการ (5) ถึง (8) สามารถหาค่า

x_1, x_2, x_3 และ x_4 ได้เสมอ โดยที่

$$x_1 = \frac{d}{ad-bc}, \quad x_2 = \frac{-b}{ad-bc}, \quad x_3 = \frac{-c}{ad-bc} \quad \text{และ} \quad x_4 = \frac{a}{ad-bc}$$

นั่นคือ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$ แล้ว A จะมีอินเวอร์สการคูณ

และอินเวอร์สการคูณของ A คือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

เราเรียกเมทริกซ์ A ซึ่งมีอินเวอร์สการคูณว่า นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ (non-singular matrix)

หมายเหตุ จาก $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เราเรียกจำนวนจริง $ad - bc$ ว่า ดีเทอร์มิแนนต์ของ A
เขียนแทนด้วย $\det(A)$

*** สรุป เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะหา A^{-1} ได้หรือไม่ ขึ้นอยู่กับค่า

ดีเทอร์มิแนนต์ของ A

ถ้า $\det(A) = 0$ คือ $ad - bc = 0$ แล้ว A จะเป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์
คือไม่มีอินเวอร์สการคูณ

แต่ถ้า $\det(A) \neq 0$ คือ $ad - bc \neq 0$ แล้ว A จะเป็นอินเวอร์ส
เมทริกซ์ คือมีอินเวอร์สการคูณ และวิธีหา A^{-1} กระทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1

โดยการใช้สูตร

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

มีข้อสังเกตซึ่งจะช่วยให้จำสูตรนี้ได้ง่าย คือ เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ในสูตร ซึ่งคูณกับ $\frac{1}{ad-bc}$ นั้น ได้มาจากเมทริกซ์ A โดยการสลับที่สมาชิก a

และ d ของ A ส่วน b และ c ยังคงตำแหน่งเดิม แต่เปลี่ยนเครื่องหมาย
เป็นตรงข้าม (คือคูณด้วย -1)

วิธีที่ 2

โดยการสมมติให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ (อาจใช้ตัวแปรอื่น ๆ เช่น y, z ฯลฯ)

แล้วนำคุณสมบัติของ A^{-1} ที่ว่า $A^{-1}A = I$ หรือ $AA^{-1} = I$ มาใช้ในการ
หาค่า x_1, x_2, x_3 และ x_4

หมายเหตุ ไม่ว่าจะหา A^{-1} โดยวิธีใดควรตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์ A^{-1} ที่ทำได้
ทุกครั้ง ด้วยการทดสอบว่า AA^{-1} และ $A^{-1}A$ เป็นยูนิทเมทริกซ์ (I) หรือไม่

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, จงพิจารณาว่า A และ B เป็น
อินเวอร์สเมทริกซ์ หรืออินเวอร์สการคูณหรือไม่

วิธีทำ

$$\therefore \det(A) = (6 \times 5) - (3 \times 10) = 0$$

ดังนั้น A เป็นอินเวอร์สการคูณ

$$\therefore \det(B) = (5 \times 2) - (-2 \times -4) = 2 \neq 0$$

ดังนั้น B เป็นอินเวอร์สการคูณ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A และ B ในตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์ จึงไม่สามารถหา A^{-1} ได้ แต่ B เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ คือมีอินเวอร์สการคูณ ฉะนั้นหา B^{-1} ได้ดังนี้

วิธีที่ 1 โดยการใช้อยู่สตร จะได้

$$B^{-1} = \frac{1}{(5 \times 2) - (-2 \times -4)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 2 สมมติให้ $B^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$$\therefore B^{-1}B = I$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x_1 - 4x_2 & -2x_1 + 2x_2 \\ 5x_3 - 4x_4 & -2x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยนัยการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้

$$5x_1 - 4x_2 = 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$5x_3 - 4x_4 = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$-2x_3 + 2x_4 = 1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $x_1 = 1$ และ $x_2 = 1$

จาก (3) และ (4) จะได้ $x_3 = 2$ และ $x_4 = 5/2$

ดังนั้น $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix}$

ทดสอบคุณสมบัติของ B^{-1}

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นอินเวอร์สการคูณของ } B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{จริง}$$

เพื่อประเมินความเข้าใจเรื่องอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด โดยเขียนคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

$$\text{ถ้า } A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) $\det(A) = \dots = \dots$

(2) $\det(B) = \dots$ และ $\det(C) = \dots = \dots$

(3) จักรกู่การเมทริกซ์ ไคแก เมทริกซ์

(4) นอนนิงกู่การเมทริกซ์ ไคแก เมทริกซ์

(5) เมทริกซ์อินเวอร์สการคูณไคแก เมทริกซ์

(6) เมทริกซ์ที่ไม่อินเวอร์สการคูณไคแก เมทริกซ์

ถ้าจะหาอินเวอร์สการคูณโดยการใชสูตรจะหาได้ดังนี้

(7) $A^{-1} = \frac{1}{\dots} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

(8) $B^{-1} = \dots$

(9) $C^{-1} = \dots$

ต่อไปจะพิจารณาว่า $(AB)^{-1}$ และ $B^{-1}A^{-1}$ เท่ากันหรือไม่ ตามลำดับขั้นดังนี้

(10) $(AB)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

(11) $= \frac{1}{\dots} \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

$$(12) \quad B^{-1} \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$(13) \quad (\Lambda B)^{-1} \dots\dots\dots B^{-1} \Lambda^{-1} \quad (= \text{หรือ} \neq)$$

(ดูคำตอบเฉลยข้อ 1 ถึงข้อ 13 ในหน้าถัดไป)

****สรุป** เวกเตอร์ของ 2×2 เมทริกซ์ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง กับการคูณเมทริกซ์.-

1. มีคุณสมบัติปิดของการคูณ
2. มีคุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ
3. มีเอกลักษณ์การคูณ
4. มีคุณสมบัติการกระจาย
5. ไม่มีคุณสมบัติสลับที่ของการคูณ
6. ไม่มีคุณสมบัติการตัดออกของการคูณ
7. เกี่ยวกับอินเวอร์สการคูณ บางเมทริกซ์มีอินเวอร์สการคูณ แต่บางเมทริกซ์ไม่มี

***** หมายเหตุ** ระบบเมทริกซ์เป็นระบบหนึ่ง ซึ่งไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่ของการคูณ และ เวกเตอร์ของ 2×2 เมทริกซ์ กับการคูณเมทริกซ์ไม่เป็นกลุ่ม (group).

ให้นักเรียนเปรียบเทียบคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณในเวกเตอร์ของ 2×2 เมทริกซ์ (ดังที่สรุปไว้) กับคุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณจำนวนจริง (ดังที่ระบุไว้ในตอนต้นของบทเรียน) ด้วยตนเอง

จากการหาคุณสมบัติบางประการเกี่ยวกับการคูณเหล่านี้ ทำให้นักต้องระมัดระวังในการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์ ดังข้อสังเกตต่อไปนี้

เฉลย (1) $\det(B) = (1 \times 4) - (2 \times 3) = -2$

$\det(C) = (6 \times 4) - (2 \times 12) = 0$

(2) C

(3) A, B

(4) A, B

(5) C

(7) $A^{-1} = \frac{1}{(2 \times 5) - (6 \times 1)} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 & -3/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

(8) $B^{-1} = \frac{1}{(1 \times 4) - (2 \times 3)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(9) ทหา C^{-1} ไม่ได้ เพราะ C เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์

(10) $\begin{bmatrix} 20 & 28 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}^{-1}$

(11) $\frac{1}{(20 \times 22) - (28 \times 16)} \begin{bmatrix} 22 & -28 \\ -16 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/4 & 7/2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$

(12) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & -3/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/4 & 7/2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$

(13) =

ข้อสังเกต

1) เกี่ยวกับสมการเมทริกซ์ ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ $A = B$ แล้วจะได้ $AC = BC$ และ $CA = CB$ เสมอ แต่ CA กับ BC ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

2) เกี่ยวกับเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ ซึ่งคูณกันได้ผลคูณเป็นเมตริกซ์ศูนย์

เรามีตัวอย่างจริงใดศึกษาจนมาแล้ว ในเรื่องการคูณเมตริกซ์ว่า ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วไม่จำเป็นที่เมตริกซ์ A หรือ B จะต้องเป็น $\underline{0}$ แต่ในกรณีที่ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ (คือ A มีอินเวอร์สการคูณ) ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วจะได้ว่า $B = \underline{0}$ เสมอ ซึ่งพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ดังนี้

พิสูจน์ เนื่องจาก A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นจะมี A^{-1}

$$\therefore AB = \underline{0}$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1}(AB) = A^{-1}\underline{0} \quad (\text{เอา } A^{-1} \text{ คูณเข้าทั้งสองข้าง})$$

$$(A^{-1}A)B = \underline{0} \quad (\text{คุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ และคุณสมบัติของเมตริกซ์ศูนย์})$$

$$IB = \underline{0} \quad (\text{คุณสมบัติของอินเวอร์สเมตริกซ์})$$

$$\therefore B = \underline{0} \quad (\text{คุณสมบัติของเอกลักษณ์การคูณ})$$

นั่นคือ ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $AB = \underline{0}$ แล้ว

$$B = \underline{0} \text{ เสมอ}$$

3) เกี่ยวกับคุณสมบัติการตัดออกของการคูณ

เราทราบว่า ถ้า $AB = AC$ (โดยที่ $A \neq \underline{0}$) แล้ว B และ C ไม่จำเป็นที่ต้องเท่ากันเสมอไป

แต่ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ (คือ A มีอินเวอร์สการคูณ) และ $AB = AC$ แล้ว จะได้ว่า $B = C$ เสมอ ซึ่งพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ดังนี้

พิสูจน์ $\therefore AB = AC$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \quad (\text{เอา } A^{-1} \text{ คูณเข้าทั้งสองข้าง})$$

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \quad (\text{คุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ})$$

$$IB = IC \quad (\text{คุณสมบัติของอินเวอร์สเมตริกซ์})$$

$$\therefore B = C \quad (\text{คุณสมบัติของเอกลักษณ์การคูณ})$$

นั่นคือ ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $AB = AC$ แล้ว $B = C$ เสมอ

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1.1 จงหา A^{-1}

1.2 จงหา A^{-2} อธิบาย A^{-2} หมายถึง $(A^{-1})^2$

1.3 จงแสดงว่า $(A^{-1})^{-1} = A$

2. ถ้า A และ B เป็น 2×2 เมทริกซ์ผกผันเวกซ์การคูณทั้งคู่
จงพิสูจน์ว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ผกผันเวกซ์การคูณ
จงพิสูจน์ว่า $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

4. ให้ S^* เป็นเซตของ 2×2 เมทริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, a และ b เป็น
จำนวนจริงใดๆ จงแสดงว่าเซต S^* มีคุณสมบัติการคูณต่อไปนี้ คือ

4.1 คุณสมบัติปิด

4.2 คุณสมบัติสลับที่

4.3 คุณสมบัติการจับหมู่

4.4 มีเอกลักษณ์การคูณ

4.5 สำหรับเมทริกซ์ที่ไม่ใช่ 0 ทุกเมทริกซ์จะมีอินเวอร์สการคูณ

4.6 คุณสมบัติการกระจาย

5. จงตรวจสอบว่า เซตต่อไปนี้ มีการคูณเมทริกซ์เป็นกรุปหรือไม่

5.1 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

5.2 $\left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, t \neq 0 \right\}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3.2

$$1. \quad 1.1 \quad \therefore \det(A) = 2 \quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad A^{-2} &= (A^{-1})^2 = (A^{-1})(A^{-1}) \\ &= \frac{1}{(2)^3} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & -28 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$1.3 \quad \text{จาก } 1.1 \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

$$\text{ดังนั้น } (A^{-1})^{-1} = A$$

$$\begin{array}{lcl} 2. \quad \text{พิสูจน์ } (AB)(B^{-1}A^{-1})' & = & A(BB^{-1})A^{-1} \\ & = & AIA^{-1} \\ & = & AA^{-1} \\ & = & I \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} (B^{-1}A^{-1})(AB) & = & B^{-1}(A^{-1}A)B \\ & = & B^{-1}IB \\ & = & B^{-1}B \\ & = & I \end{array} \right.$$

$$\text{จะเห็นว่า } (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I = (B^{-1}A^{-1})(AB)$$

$$\text{ดังนั้น } (B^{-1}A^{-1}) \text{ เป็นอินเวอร์สการคูณของ } (AB)$$

$$\text{นั่นคือ } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3. \text{ พิสูจน์ } \begin{array}{l} (A^t)(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t \\ = I^t \\ = I \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (A^{-1})^t(A^t) = (AA^{-1})^t \\ = I^t \\ = I \end{array} \right.$$

จะเห็นว่า $(A^t)(A^{-1})^t = I = (A^{-1})^t(A^t)$

ดังนั้น $(A^{-1})^t$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ A^t

นั่นคือ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$4. S^* = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

4.1 คุณสมบัติของการคูณ

ให้ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ ใน S^*

$$BC = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp - yq & xq + yp \\ -yp - xq & -yq + xp \end{bmatrix}$$

$\therefore x, y, p, q$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น สมาชิกทุกตัวของ BC เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น S^* มีคุณสมบัติของการคูณ

4.2 คุณสมบัติสลับที่ของการคูณ

$$CB = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xp - yq & xq + yp \\ -yp - xq & -yq + xp \end{bmatrix} = BC$$

นั่นคือ $BC = CB$

ดังนั้น S^* มีคุณสมบัติสลับที่ของการคูณ

4.3 คุณสมบัติการจับคู่อของการคูณ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$

เป็นเมทริกซ์ใดๆ ใน S^*

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p(ax - by) - q(ay + bx) & q(ax - by) + p(ay + bx) \\ p(-bx - ay) - q(by + ax) & q(-bx - ay) + p(-by + ax) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} pax - byp - qay - bq x & aqx - bqy + apy + bpx \\ -bpx - apy + bqy - aqx & -bqx - aqy - bpy + apx \end{bmatrix} \\
A(BC) &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xp - yq & xq + yp \\ -yp - xq & -yq + xp \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(xp - yq) + b(-yp - xq) & a(xq + yp) + b(-yq + xp) \\ -b(xp - yq) + a(-yp - xq) & -b(xq + yp) + a(-yq + xp) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} pax - byp - qay - bq x & aqx - bqy + apy + bpx \\ -bpx - apy + bqy - aqx & -bqx - aqy - bpy + apx \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore (AB)C = A(BC)$$

ดังนั้น S^* มีคุณสมบัติการจัดหมู่ของการคูณ

4.4 เอกลักษณ์การคูณ

ให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ ใน S^*

$$\text{พิจารณา } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งเป็นเมทริกซ์ในเซต } S$$

$$\therefore AD = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = A$$

$$\text{และ } DA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = A$$

$$\therefore AD = DA = A$$

ดังนั้น S^* มีเอกลักษณ์การคูณ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.5 อินเวอร์สการคูณ

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ใน S^*

พิจารณา $X = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$

$$\therefore AX = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } XA = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AX = XA = I$$

ดังนั้น $X = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

นั่นคือ สมาชิกทุกตัวใน S มีอินเวอร์สการคูณ

4.6 คุณสมบัติการกระจาย

$$\begin{aligned}
 A(B + C) &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + p & y + q \\ -y - q & x + p \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ax + ap - by - bq & ay + aq + bx + bp \\ -bx - bp - ay - aq & -by - bq + ax + ap \end{bmatrix} \\
 AB + AC &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & -by + ax \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ap - bq & aq + bp \\ -bp - aq & -bq + ap \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ax + ap - by - bp & ay + aq + bx + bp \\ -bx - bp - ay - aq & -by - bq + ax + ap \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จะได้ $A(B + C) = AB + AC$

ดังนั้น S^* มีคุณสมบัติการกระจาย

5. 5.1 ให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

เนื่องจาก $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

แต่ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ไม่เป็นสมาชิกของ S

ดังนั้น S ไม่มีคุณสมบัติปิดของการคูณ

สรุปได้ว่า เซต S กับการคูณเมตริกไม่เป็นกรุป

$$5.2 \text{ ให้ } S = \left\{ \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mid t \neq 0 \right\}$$

ให้ A, B, C เป็นสมาชิกของ S

$$\text{และ } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{และ } C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

ก. คุณสมบัติปิด

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}, \quad ab \neq 0$$

ดังนั้น S มีคุณสมบัติปิดของการคูณ

ข. คุณสมบัติการจับหมู่

$$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} abc & 0 \\ 0 & abc \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(BC) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} abc & 0 \\ 0 & abc \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore (AB)C = A(BC)$$

ดังนั้น S มีคุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ

$$\text{ค. มี } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นเอกลักษณ์การคูณ}$$

ง. อินเวอร์สการคูณ

ให้ $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, X เป็นสมาชิกของ S

พิจารณา $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$, Y เป็นสมาชิกของ S
จะได้ $XY = I = YX$

นั่นคือ Y เป็นอินเวอร์สการคูณของ X

หรือ สมาชิกทุกตัวของ S มีอินเวอร์สการคูณ

จากข้อ ก., ข., ค. และ ง. สรุปได้ว่า S กับการคูณเมทริกซ์ เป็นกรุป

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

คำสั่ง จงเขียนวงกลมรอบตัวอักษรหน้าข้อความที่ถูกต้องในแต่ละข้อ

1 ถ้า $A = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ข้อใดถูก

ก. $A = \frac{1}{5} C$

ข. $B = -3 A$

ค. $\frac{1}{5} A = \frac{-5}{3} B$

ง. $5C = -3B$

2 ถ้า $A = [a_{ij}]_{p \times q}$ และ $B = [b_{ij}]_{r \times s}$ ข้อความใดผิด

ก. ถ้า $q = r$ จะหา AB ได้

ข. ถ้า $p = r$ จะหา BA ได้

ค. ถ้า $p = s$ จะหา BA ได้

ง. ถ้า $q = s$ และ $s = r$ จะหา AB ได้

3 ถ้า $A = [a_{ij}]_{4 \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times r}$, ข้อความใดถูก

ก. ถ้าหา AB ได้, AB มีมิติ $4 \times r$

ข. ถ้าหา AB ได้, AB มีมิติเป็น $m \times n$

ค. ถ้าหา BA ได้, BA มีมิติเป็น $m \times n$

ง. ถ้าหา BA ได้, BA มีมิติเป็น $n \times 4$

4 สมการ $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6$ ตรงกับสมการใด

ก. $x^2 + 4xy + 5y^2 = 6$

ข. $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 6$

ค. $2x^2 + 4xy - 5y^2 = 6$

ง. $2x^2 + 12xy - 5y^2 = 6$

5. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นผลคูณของเมตริกซ์ในข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ เท่ากับเมตริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

7. ให้ S เป็นเซตของ 2×2 เมตริกซ์ ที่ทุกสมาชิกของเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง เซต S กับการคูณเมตริกซ์ มีคุณสมบัติใด

- ก. คุณสมบัติปิดและคุณสมบัติสลับที่
- ข. คุณสมบัติสลับที่และคุณสมบัติการตัดออก
- ค. คุณสมบัติการตัดออกและคุณสมบัติการจับหมู่
- ง. คุณสมบัติการจับหมู่และคุณสมบัติปิด

8. เซต S ในข้อ 7 ไม่มีคุณสมบัติใดเกี่ยวกับการคูณ
- คุณสมบัติปิดและคุณสมบัติสลับที่
 - คุณสมบัติสลับที่และคุณสมบัติการตัดออก
 - คุณสมบัติการตัดออกและคุณสมบัติการจับหมู่
 - คุณสมบัติการจับหมู่ และคุณสมบัติปิด
9. จงหาค่าของ a , b และ c ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} a & -b \\ 2 & 4c \\ 0 & 4c \end{bmatrix}$ เป็นเอกลักษณ์การคูณในเซตของ 2×2 เมทริกซ์ ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง
- $a = 0$, $b = 0$ และ $c = 0$
 - $a = 2$, $b = 0$ และ $c = -\frac{1}{4}$
 - $a = 2$, $b = 0$ และ $c = \frac{1}{4}$
 - $a = 2$, $b = -1$ และ $c = \frac{1}{4}$
10. ให้ A , B , C และ D เป็น 2×2 เมทริกซ์ใด ๆ ข้อใดเกี่ยวกับคุณสมบัติการกระจายของเมทริกซ์
- $(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D)$
 - $AB(C + D) = A(C + D) + B(C + D)$
 - $(C + D)AB = ((C + D)A)((C + D)B)$
 - $A(B + C) + D = ((AB) + D) + ((AC) + D)$
11. เมทริกซ์ในข้อใดเป็น นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ทั้งคู่
- $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

12. จงหาค่า t ที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ เป็นนิจกูลาร์เมทริกซ์

ก. $t = 0$

ข. $t = 1$ หรือ -1

ค. t เป็นจำนวนจริงใดๆ

ง. ไม่มี t ที่ทำให้เมทริกซ์ข้างต้นเป็นนิจกูลาร์เมทริกซ์

13. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, A^{-1} คือเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

ง. ไม่มีข้อใดถูก

14. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, A^{-1} คือเมทริกซ์ใด

ก. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

ง. ไม่มีข้อใดถูก

15. จงหาค่า x, y ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} x & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} y & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ก. $x = 8, y = 5$

ข. $x = -8, y = \frac{5}{4}$

ค. $x = 8, y = \frac{5}{4}$

ง. $x = -8, y = -\frac{5}{4}$

16) ถ้าทั้ง A และ B เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ข้อใดถูก

ก. $A^{-1}B = B^{-1}A$

ข. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

ค. $(A^{-1}B)^{-1} = AB^{-1}$

ง. $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$

17. ถ้าอินเวอร์สการคูณของ A คือ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $(A^t)^{-1}$

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

ง. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

12. ง	13. ก	14. ง	15. ค	16. ง	17. ข
6. ก	7. ง	8. ข	9. ค	10. ก	11. ข
1. ง	2. ข	3. ก	4. ข	5. ค	

หน่วยย่อยที่ 4 ทีเทอมนันท์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้วนักเรียนต้องสามารถบอกคุณสมบัติของฟังก์ชันทีเทอมนันท์ได้ถูกต้อง

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนควรมีความรู้เรื่องฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง การบวกเมตริกซ์ การคูณเมตริกซ์ และอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์มิติ 2×2

กิจกรรมการเรียนรู้

ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังนี้

1. ศึกษาบทเรียนเรื่องทีเทอมนันท์ โดยปฏิบัติตามกิจกรรมย่อยให้สอดคล้องกันไป 4 กิจกรรม คือ

- 1.1 ดูเนื้อหาของบทเรียนจากแผ่นโปรงใสจำนวน 10 แผ่น
- 1.2 ฟังกาบรรยายประกอบบทเรียนจากเทปบันทึกเสียง
- 1.3 เขียนคำตอบของแบบฝึกหัดจากแผ่นโปรงใส (มีให้นักเรียนเป็นช่วง ๆ สลับกับการฟังกาบรรยาย) ลงในคู่มือสำหรับนักเรียน ซึ่งเป็นเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 4
- 1.4 ทตรวจคำตอบของแบบฝึกหัดในแต่ละช่วงด้วยตนเอง โดยดูคำตอบเฉลยจากแผ่นโปรงใส

2. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

การประเมินผล

พิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4 ผู้ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ 80% ของคะแนนเต็มขึ้นไป ถือว่าผ่านให้ศึกษาหน่วยย่อยที่ 5 ต่อไป ส่วนผู้ที่ทำคะแนนได้ต่ำกว่า 80% ถือว่าไม่ผ่าน ให้เรียนซ่อมเสริม

การเรียนซ่อมเสริม

ให้ผู้ที่ไม่ผ่านศึกษาบทเรียนอีกครั้ง หรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน จากนั้นทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4 จนกระทั่งผ่านเกณฑ์ประเมินผล

เอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 4

คู่มือสำหรับนักเรียนในการศึกษาบทเรียนจากแผ่นโปร่งใส

เรื่อง คีเทอริมันต์

จงเขียนคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 7 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \det(B) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(C) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(D) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

ถ้า $\det(A) = -5$, $\det(B) = -7$, และ $\det(C) = 4$

ดังนั้น $\det(AB) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\det(CB) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\det(AC) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\det((BC)A) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\det(A^2) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$\det(BC^2) = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

ถ้า $\det(B) = \frac{3}{4}$, $\det(B^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$

ถ้า $\det(C^{-1}) = -6$, $\det(C) = \underline{\hspace{2cm}}$

ถ้า $\det(D) = 3x$, $\det(D^{-1}) = 7$

$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\text{ข้อ ๖} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (0 \times 3) - \left(\frac{1}{2} \times 8\right) = -4$$

$$\det(2A) = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\det(-3A) = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\det\left(\frac{1}{4}A\right) = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\text{ข้อ ๗} \quad \det(A) = -20$$

$$\frac{3}{2} \det(A^t) = \underline{\hspace{1cm}} \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

แบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

1. จงเขียนคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้

$$1.1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 6 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1.2 \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1.3 \quad \text{ถ้า } \begin{vmatrix} 2 & -x \\ 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \end{vmatrix} = 6 \quad \text{แล้ว } x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1.4 \quad \text{ถ้า } \begin{vmatrix} y & 9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{แล้ว } y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1.5 \quad \text{ให้ } \det(A) = 2, \det(B) = -10 \text{ และ } \det(C) = 5$$

$$\det(A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\det(B^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(BC) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\det(B^t) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(B^2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\det(C^t) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(A^t C^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\det(\frac{1}{2}C) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(3C^t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\det(-A) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \det(-2CB^t A^{-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. จากเมทริกซ์ A และ B ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหา $\det(A+B)$ และ $\det(A) + \det(B)$ พร้อมทั้งพิจารณาว่าทั้งสองค่านี้เท่ากันหรือไม่

$$2.1 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2.2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

เฉลยแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

$$1. \quad 1.1 \quad \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 6 \end{vmatrix} = (1 \times 6) - (-\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 9$$

$$1.2 \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0) - (-1 \times 5) = 5$$

$$1.3 \quad x = -14$$

$$1.4 \quad y = 16$$

$$1.5 \quad \begin{array}{ll} \det(A^{-1}) = \frac{1}{2} & \det(AB) = -20 \\ \det(B^{-1}) = -\frac{1}{10} & \det(BC) = -50 \\ \det(B^t) = -10 & \det(B^2) = 100 \\ \det(C^t) = 5 & \det(A^t C^{-1}) = \frac{2}{5} \\ \det(\frac{1}{2}C) = \frac{5}{4} & \det(3C^t) = 45 \\ \det(-A) = 2 & \det(-2CB^t A^{-1}) = -100 \end{array}$$

$$2. \quad 2.1 \quad \det(A + B) = \det \left(\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \right) = -20$$

$$\det(A) + \det(B) = 3 + (-43) = -40$$

$$\text{ดังนั้น} \det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$2.2 \quad \det(A + B) = \det \left(\begin{bmatrix} \frac{11}{4} & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right) = -10 \frac{3}{4}$$

$$\det(A) + \det(B) = -2 + (-\frac{35}{4}) = -10 \frac{3}{4}$$

$$\text{ดังนั้น} \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

หน่วยย่อยที่ 5

การใช้เมทริกซ์ในระบบสมการเชิงเส้น

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนต้องสามารถนำความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ 2×2 ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปร ได้ถูกต้อง

ความรู้พื้นฐาน

นักเรียนต้องมีความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ 2×2

กิจกรรมการเรียนรู้

ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมดังนี้

1. อ่านบทเรียนโปรแกรมเรื่องการใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้นจากเอกสารประกอบการเรียนฉบับที่ 5
2. ทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 5

การประเมินผล

พิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 5 ซึ่งมี 2 ข้อ ผู้ที่ทำได้ถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 2 ข้อ ถือว่าผ่านบทเรียนนี้ ส่วนผู้ที่ทำข้อบกพร่องให้เรียนซ่อมเสริม

การเรียนรู้ซ่อมเสริม

ให้ผู้ที่ไม่ผ่านศึกษาบทเรียนอีกครั้งหรือขอคำแนะนำจากอาจารย์ผู้สอน จากนั้นทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 5 จนกระทั่งสามารถทำได้ถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 2 ข้อ

$$2 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{|l} 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{ถ้ากำหนดให้} \quad \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = C$$

โดยนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ว่า สมาชิกในตำแหน่งเดียวกัน
ของเมทริกซ์ทั้งสองเท่ากัน

นั่นคือ

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

3 จากกรอบที่ 1 และ 2 เราสามารถเขียนได้ในรูปสมการเมทริกซ์

$$AX = C$$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ทั้งนี้เพราะเมื่อคูณเมทริกซ์ทางซ้ายเข้าด้วยกัน จะได้

$$\begin{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ซึ่งสอดคล้องกับการกำหนดในกรอบที่ 2

นอกจากนี้เมื่อนำนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ต่อไป จะเขียนได้

ในรูปสมการ 2 สมการ คือ

$$\begin{aligned} \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 1$$

$$2x + y = 5$$

4 ในกรณีที่ 3 เป็นการเปลี่ยนจากระบบสมการเมทริกซ์ให้อยู่ในระบบ

สมการเชิงเส้น ซึ่งมี 2 สมการ 2 ตัวแปร

ในทางกลับกันถ้ามีระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร เราก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ เช่น

$$3x - y = 1$$

จาก

$$x + 4y = 9$$

เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

เราสามารถตรวจสอบว่า สมการเมทริกซ์ที่ได้นี้ เขียนแทนระบบสมการข้างต้นได้จริงหรือไม่ โดยขั้นแรก คูณเมทริกซ์ทางซ้าย (ของเครื่องหมาย =) เข้าด้วยกัน

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ต่อไปให้นิยามการเท่ากันของเมทริกซ์

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} 3x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าสมการเมทริกซ์ที่ได้นี้เขียนแทนระบบสมการข้างต้นได้จริง

$$\begin{bmatrix} 3x - y \\ x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1

$$x + 4y = 9$$

วิธีเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = C$ มีข้อสังเกตดังนี้

1. A ต้องเป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร
2. B ต้องเป็นเมทริกซ์ที่มี 1 หลัก และมีสมาชิกเป็นตัวแปร ซึ่งจัดเรียงตามลำดับจากบนลงล่าง
3. C ต้องเป็นเมทริกซ์ของตัวคงที่

6

จากระบบสมการ

$$-x + 6y = 5$$

$$4x - 3y = 1$$

เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$$

7

จากระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2x - y = 4$$

$$x + 3y = -5$$

เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

จากระบบสมการ

$$2x - 5y = 3$$

$$-x + 3y = -1$$

เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

10

พิจารณา ระบบสมการ $3x + 2y = 1$

$$2x + y = 0$$

เราสามารถแก้ระบบสมการหาค่า x และ y ได้ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้
ขั้นแรกเขียนระบบสมการข้างต้น ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ จะได้

(A) (X) (C)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

เราทราบว่า ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้ว A จะมี

$$\text{อินเวอร์สการคูณ} \text{ ซึ่งหาได้จากสูตร } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ต่อไปพิจารณาเมทริกซ์ A ในระบบสมการ

$$\text{เนื่องจาก } \det(A) = (\quad \times \quad) - (\quad \times \quad) = \quad$$

ดังนั้น A มีอินเวอร์สการคูณ และ

$$A^{-1} = \frac{1}{\quad} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 1) - (2 \times 2) = -1$$

$$\frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

11

จากกรอบที่ 10 เราได้สมการเมทริกซ์ $A X = C$

ถ้าคูณ A^{-1} เข้าทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C$$

$$\therefore (A^{-1}A) X = A^{-1}C \quad (\text{คุณสมบัติการจับคู่ของการคูณ})$$

$$IX = A^{-1}C \quad (\text{คุณสมบัติของอินเวอร์สการคูณของ } A)$$

$$\text{ดังนั้น } X = A^{-1}C \quad (\text{คุณสมบัติของเอกลักษณ์การคูณในเซตของ } 2 \times 2 \text{ เมทริกซ์})$$

เมื่อแทนค่า X , A^{-1} และ C จากกรอบที่ 10 ลงในสมการสุดท้าย

(X) (A⁻¹) (C)

$$\text{จะได้ } \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = -1$$

$$y = 2$$

13

แทนค่าเมทริกซ์ผลคูณ (จากกรอบที่ 12) ลงในสมการ (2) ของกรอบที่ 11 จะได้

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

โดยนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะได้ค่า x และ y ดังนี้

$$x = -1$$

$$y = 2$$

**** สรุป** ลำดับขั้นตอนในการแก้ระบบสมการโดยใช้เมทริกซ์

1. เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์

$$AX = C$$

2. หาคอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A , (A^{-1})

3. เขียนเมทริกซ์ X , A^{-1} และ C ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์

$$X = A^{-1}C$$

4. คูณเมทริกซ์ A^{-1} และ C เข้าด้วยกัน จากนั้นใช้นิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะหาค่าตัวแปรทุกตัวตามต้องการ

**** ข้อสังเกต** สำหรับทุก ๆ สมการ $AX = C$ ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ จะได้ว่า $X = A^{-1}C$ เสมอ

หมายเหตุ เมื่อเขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = C$ และหาค่า A^{-1} ได้แล้ว อาจใช้วิธีคูณ A^{-1} เข้าทางซ้ายทั้งสองข้างของสมการ (แทนที่จะใช้วิธีแทนค่าในสมการเมทริกซ์ $X = A^{-1}C$) ก็ได้ ก็จะแสดงในตัวอย่างต่อไป

15 ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \text{จงแก้ระบบสมการ} \quad & 2x + y = 2 \\ & 3x + 2y = 4 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์

$$(A) \quad (X) \quad (C)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

หาอินเวอร์สการคูณของ A , (A^{-1})

$$A^{-1} = \frac{1}{(2 \times 2) - (3 \times 1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$(X) \quad (A^{-1}) \quad (C)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 0$, $y = 2$

(หรือ) จากสมการ (1) คูณ A^{-1} เข้าทางซ้ายทั้งสองข้างจะได้ Ans.

$$(A^{-1}) \quad (A) \quad (X) \quad (A^{-1}) \quad (C)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 0$, $y = 2$

Ans

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 5

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์

$$1. \quad \begin{aligned} x + y &= -1 \\ 3x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{aligned} 6x - 3y + 2 &= -10 \\ 3y - 5 - 3 &= 7 \end{aligned}$$

หมายเหตุ

สำหรับข้อ 2 ก่อนจะเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ จะต้องจัดระบบสมการใหม่ ให้ทั้งสองสมการเรียงลำดับตัวแปรเหมือนกัน และให้ตัวคงที่ของแต่ละสมการอยู่ทางขวาของเครื่องหมาย = เสียก่อน

เฉลยแบบทดสอบย่อยครั้งที่ 5

1. จากระบบสมการ $x + y = 1$

$$3x + 4y = 6$$

เขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

เนื่องจากอินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1 \times 4) - (1 \times 3)} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมื่อคูณ $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ เข้าทางซ้ายทั้งสองข้างของสมการ (1) จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = -2$ และ $y = 3$

Ans

2. จากระบบสมการ

$$\begin{aligned} 6x - 3y + 2 &= -4 \\ 3y - 5x - 3 &= 4 \end{aligned}$$

จัดระบบสมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= -6 \\ -5x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

เบื้องหน้า เกณฑ์เวกเตอร์การคูณของ

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(6 \times 3) - (-3 \times -5)} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมื่อกำหนด $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$ เข้าทางซ้ายทั้งสองข้างของสมการ (1) จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 1$ และ $y = 4$

Ans

คู่มือสำหรับการสอนปกติ

คู่มือสำหรับการสอนปกติ
เรื่องเมตริกซ์

จุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม

เมื่อจบบทเรียนเรื่องเมตริกซ์แล้ว นักเรียนต้องมีความสามารถดังต่อไปนี้

1. บอกมิติของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนสัญลักษณ์แทนสมาชิกในตำแหน่งต่าง ๆ ของเมตริกซ์ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนทรานสโพสของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
4. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้สองเมตริกซ์เท่ากันหรือไม่
5. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้สองเมตริกซ์บวกกันได้หรือไม่ และถ้าวกกันได้ สามารถหาผลบวกของเมตริกซ์ทั้งสองได้อย่างถูกต้อง
6. หาผลคูณของเมตริกซ์กับจำนวนจริงใด ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
7. แสดงได้ว่าการบวกเมตริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์มี :— คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการสลับที่ คุณสมบัติการจับหมู่
เอกลักษณ์การบวก อินเวอร์สการบวก (สำหรับ
แต่ละ $m \times n$ เมตริกซ์) และคุณสมบัติการตัดออก
8. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์ที่กำหนดให้สองเมตริกซ์คูณกันได้หรือไม่ และถ้ายกกันได้ สามารถหาผลคูณของเมตริกซ์ทั้งสองได้อย่างถูกต้อง
9. แสดงได้ว่าการคูณเมตริกซ์ในเซต S ซึ่งเป็นเซตของ 2×2 เมตริกซ์
มี :— คุณสมบัติการปิด คุณสมบัติการจับหมู่ เอกลักษณ์การคูณ
และคุณสมบัติการกระจาย
แต่ไม่มี :— คุณสมบัติการสลับที่ และคุณสมบัติการจับหมู่
10. หาคีเทอรัมินันต์ของเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
11. บอกได้อย่างถูกต้องว่าเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ หรือนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

12. บอกได้ถูกต้องว่าเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ที่กำหนดให้มีอินเวอร์สการคูณหรือไม่ และถ้ามีสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์เหล่านั้นได้ถูกต้อง
13. บอกคุณสมบัติของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ได้ถูกต้อง
14. นำความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์มิติ 2×2 ไปใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปรได้ถูกต้อง

เนื้อหา

บทเรียนเรื่องเมตริกซ์ประกอบด้วยเนื้อหาซึ่งจัดเรียงตามลำดับดังนี้

1. นิยามของเมตริกซ์
2. เมตริกซ์จัตุรัส
3. การเขียนสัญลักษณ์แทนสมาชิกของเมตริกซ์
4. การเขียนเมตริกซ์ในรูปท้าวไป
5. เมตริกซ์ศูนย์
6. ทรานส์โพสของเมตริกซ์
7. การเท่ากันของเมตริกซ์
8. เงื่อนไขที่ทำให้สองเมตริกซ์บวกกันได้
9. การหาผลบวกของสองเมตริกซ์
10. การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง
11. การหาผลต่างของสองเมตริกซ์
12. คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวกเมตริกซ์ในเซตของ $m \times n$ เมตริกซ์ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก
13. เงื่อนไขที่ทำให้สองเมตริกซ์คูณกันได้
14. การหาผลคูณของสองเมตริกซ์

15. คุณสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ในเซตของ 2×2 เมทริกซ์ ที่ทุกสมาชิกของเมทริกซ์เป็นจำนวนจริง (ยกเว้นเรื่องอินเวอร์สการคูณ)
16. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของ 2×2 เมทริกซ์
17. นิพจน์ของเมทริกซ์และอนิพจน์ของเมทริกซ์
18. เงื่อนไขที่ทำให้ 2×2 เมทริกซ์มีอินเวอร์สการคูณ
19. การหาอินเวอร์สการคูณของ 2×2 เมทริกซ์
20. คุณสมบัติบางประการ เกี่ยวกับฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์
21. การเขียนสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปรให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์
22. การหาค่าตัวแปรของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ความรู้เรื่องอินเวอร์สการคูณของ เมทริกซ์มิติ 2×2

หมายเหตุ แต่ละเนื้อหาที่บรรยายละเอียดเช่นเกี่ยวกับที่ระบุไว้ในหน่วยการเรียนรู้การสอน

กิจกรรมการสอน

1. บรรยายเนื้อหาของบทเรียนตามลำดับหัวข้อที่ระบุไว้ข้างต้น
2. จัดแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำสลับกับการฟังคำบรรยายโดยอาจใช้แบบฝึกหัดจากหน่วยการเรียนรู้การสอน หรือแบบฝึกหัดจากหนังสือแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 514 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
3. ตรวจสอบแบบฝึกหัดและรวบรวมข้อบกพร่องของนักเรียนสำหรับนำไปชี้แจงให้นักเรียนทราบ เพื่อการปรับปรุงและแก้ไขต่อไป
4. อธิบายเพิ่มเติม หรือให้คำแนะนำ เมื่อนักเรียนมีปัญหาหรือข้อสงสัย

หมายเหตุ เวลาที่ใช้ในการสอนยึดหยุ่นได้ แต่ไม่ควรเกิน 12 ชั่วโมง

การประเมินผล

หลังจากจบบทเรียนเรื่อง เมตริกซ์แล้ว ให้ประเมินความรู้ความเข้าใจของนักเรียน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง เมตริกซ์

ภาคผนวก ง.

แผนโปร่งใส และเพื่อกำบรรยาย

เรื่อง

1. การคุมเมตริกซ์ควมเมตริกซ์
2. คีเฮอร์มินันต์

(ผู้สนใจขอใ้ที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร)