

500 111

11 26 พ

93

ผลงานการตั้งและความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด

ปริญญาโท

ของ

สุพจน์ มุศิริ

7 ก.ย. 2536

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์

ตุลาคม 2535

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

185353

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญาโทฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการควบคุม

.....*สุทัศน์ ยุกส์ัน*.....ประธาน
(ศ.ดร.สุทัศน์ ยุกส์ัน)

.....*ภรณ์ ตรี*.....กรรมการ
(ผศ.ดร.ภรณ์ ตรี)

คณะกรรมการสอบ

.....*สุทัศน์ ยุกส์ัน*.....ประธาน
(ศ.ดร.สุทัศน์ ยุกส์ัน)

.....*ภรณ์ ตรี*.....กรรมการ
(ผศ.ดร.ภรณ์ ตรี)

.....*ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ*.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รศ.ดร.ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญาโทฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....*สมพร บัวทอง*.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ศ.ดร.สมพร บัวทอง)

วันที่...*9*...เดือน.....*ตุลาคม*.....พ.ศ. 2535

ประกาศคุณประการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความเมตตาจาก ศาสตราจารย์ ดร.สุทัศน์ ยุกส์ัน
ที่ให้คำปรึกษา แนะนำช่วยเหลือตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ด้วยความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัย
รู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ และ ผู้ช่วย
ศาสตราจารย์ ดร.ณัฏวรรค์ ผลโกล ที่กรุณาให้คำแนะนำ และแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณ คุณพงษ์แก้ว อุดมสมบูรณ์วิทย์ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลือทางด้านคอมพิวเตอร์
เป็นอย่างดี

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่เป็นกำลังใจในการศึกษาของผู้วิจัย

สุนันต์ มุศิริ

สารบัญ

| บทที่ | หน้า |
|---------------------------------------|------|
| 1 ประวัติการค้นพบสภาพน้ำแข็งยาวด..... | 1 |
| 2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง..... | 15 |
| 3 วิธีดำเนินงานวิจัย..... | 29 |
| 4 ผลงานวิจัย..... | 60 |
| 5 สรุป อภิปราย และเสนอแนะ..... | 76 |
| สรุปผลการวิจัย..... | 76 |
| อภิปรายผล..... | 77 |
| ข้อเสนอแนะ..... | 79 |
| บรรณานุกรม..... | 80 |
| ภาคผนวก..... | 83 |
| ประวัติย่อผู้วิจัย..... | 117 |

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

| | | |
|---|---|----|
| 1 | อุณหภูมิวิกฤตของธาตุบางชนิด..... | 3 |
| 2 | อุณหภูมิวิกฤตของสารประกอบบางชนิด..... | 4 |
| 3 | เปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของโลหะนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำกับ La-Sr-Cu-O | 13 |

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | กราฟการคำนวณสภาพนำยิ่งยวดในปรอท..... | 2 |
| 2 | กราฟอุณหภูมิวิกฤตของสารกับปีคัมพ..... | 5 |
| 3 | ปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์..... | 6 |
| 4 | กราฟระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ..... | 7 |
| 5 | กราฟความจุความร้อนของอิลีกตรอนกับอุณหภูมิ..... | 8 |
| 6 | กราฟการนำความร้อนของโลหะผสม(Pb+10% Bi)กับอุณหภูมิ..... | 9 |
| 7 | กราฟพลังงานกระตุ้นของอิลีกตรอนที่มีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์ ($l=0$) เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$, k_F เป็นเลขคลื่นเฟอร์มี(Fermi wave number), a เป็นรัศมีทรงกลมพารามิเตอร์ $\Delta_0/E_F=0.001$, Δ_0 เป็นช่องว่างพลังงานที่ $T=0$ K และ E_F คือพลังงานเฟอร์มี..... | 17 |
| 8(ก) | กราฟความหนาแน่นสถานะเฉลี่ยเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_0 พารามิเตอร์ $k_F a = 300$ และ $\Delta_0/E_F = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_0 = 0.390$ | 17 |
| 8(ข) | กราฟความหนาแน่นสถานะเฉลี่ยเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_0 พารามิเตอร์ $k_F a = 450$ และ $\Delta_0/E_F = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_0 = 0.285$ และแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_0 = 0.830$ | 18 |
| 9(ก) | กราฟพลังงานกระตุ้นของอิลีกตรอนที่มี $l=0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\Delta_1/E_F = 0.001, 0.005$ และ 0.01 และ $\Delta_1/\Delta_2 = 0.2$ | 19 |
| 9(ข) | กราฟพลังงานกระตุ้นของอิลีกตรอนที่มี $l=0$ แถบที่ 2 เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\Delta_2/E_F = 0.001, 0.005$ และ 0.01 และ $\Delta_1/\Delta_2 = 0.2$ | 19 |
| 10(ก) | กราฟความหนาแน่นสถานะของอิลีกตรอนที่เป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $\Delta_0/E_F = 0.01$ และ $Z = 0$ โดย Z คือ Δ_1/Δ_2 แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.390$ | 20 |
| 10(ข) | กราฟความหนาแน่นสถานะของอิลีกตรอนที่เป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $Z = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.647$ | 20 |
| 10(ค) | กราฟความหนาแน่นสถานะของอิลีกตรอนที่เป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $\Delta_2/E_F = 0.01$ และ $Z = 0.8$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.917$ | 21 |

- 11(ก) กราฟความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 450$, $\Delta_2/E_F = 0.01$ และ $Z = 0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.284$22
- 11(ข) กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 450$, $\Delta_2/E_F = 0.01$ และ $Z = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.566$...22
- 11(ค) กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $k_F a = 450$, $\Delta_2/E_F = 0.01$ และ $Z = 0.8$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\epsilon/\Delta_2 = 0.883$...23
- 12 กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon = a_2/\epsilon = 30$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8 สำหรับกรณีที่ $Z = 0$ ความหนาแน่นสถานะสูงสุดคือ 8.52, ϵ คือความยาวอาพันซ์, a_1 และ a_2 คือความหนาของแผ่นประกบ....24
- 13 กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon = a_2/\epsilon = 3$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.824
- 14 กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon = a_2/\epsilon = 0.3$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.825
- 15 กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon = 3.0$, $a_2/\epsilon = 30$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.825
- 16 กราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon = 3.0$, $a_2/\epsilon = 0.3$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.826
- 17 กราฟพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของความต่างเฟสของความแปรปรวน(ϕ) พารามิเตอร์ $k_F a = 4, 400$ และ $\Delta_0/E_F = 0.3$, Δ_0 ในที่นี้คืออิมพลิจิตของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ.....27
- 18 กราฟพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\Delta_0/E_F = 0.01$ และ $\phi = \pi$27
- 19 แบบจำลองของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด.....30
- 20 กราฟพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของความต่างเฟส มีพารามิเตอร์คือ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ และ 3 , $\Delta_1/\Delta_2 = 0.4$, $\theta = 0$ และ $\Delta_2/E_F = 0.1$..68
- 21 กราฟพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2$ ที่มีค่าพารามิเตอร์คือ $\Delta_1/\Delta_2 = 0.4$ และ 0 , $\phi = 0$, $\theta = 0$ และ $\Delta_2/E_F = 0.1$..69
- 22(ก) กราฟความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 ในที่นี้พารามิเตอร์ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 0.3$, $\Delta_1/\Delta_2 = 0$, $\phi = 0$ และ $\Delta_2/E_F = 0.1$ พลังงานกระตุ้นที่มีค่าความหนาแน่นสถานะสูงสุดคือ 3.06.....70

- 26(ง) กราฟความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ ϵ/Δ_2 ในที่นี้พารามิเตอร์
 $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 20$, $\Delta_1/\Delta_2 = 0.4$, $\phi = \pi$ และ $\Delta_2/E_F = 0.1$75
- 27 แบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงรูปทรงกลม ที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง
 ขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง.....97
- 28 กราฟพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2$ ในที่นี้
 พารามิเตอร์ $\Delta_1/\Delta_2 = 0.4$ และ 0, $\phi = 0$, $\theta = 0$ และ $\Delta_2/E_F = 0.1$...116

บทที่ 1

ประวัติการค้นพบสถานะนำยิ่งยวด

ลาร์ว็วี่เยร์ (Lavoisier) นักเคมีชาวฝรั่งเศสได้เคยกล่าวไว้เมื่อราวศตวรรษที่ 18 ว่าหากเราสามารถลดอุณหภูมิของก๊าซลง ก๊าซจะเป็นของเหลวชนิดใหม่ที่มีคุณสมบัติแบบที่เราไม่เคยคาดฝันได้ ในปี ค.ศ. 1908 ฮอนเนส (Onnes. 1911 : 1226) สามารถทำก๊าซฮีเลียมให้เป็นของเหลวได้สำเร็จ

ในกระบวนการ การเปลี่ยนก๊าซเป็นของเหลว นักวิทยาศาสตร์จะใช้วิธีการเพิ่มความดัน เพราะความดันจะทำให้โมเลกุลของก๊าซอยู่ใกล้ชิดกันมากขึ้น เป็นผลให้แรงยึดเหนี่ยว (cohesive force) ระหว่างโมเลกุลมีมากขึ้นส่งผลให้ก๊าซเปลี่ยนสถานะ อย่างไรก็ตามหากขณะทดลองอุณหภูมิของก๊าซสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตแล้ว เราไม่สามารถจะเปลี่ยนก๊าซเป็นของเหลวได้แม้ว่าความดันที่กระทำต่อก๊าซจะมากเพียงใดก็ตาม

ก่อนปี ค.ศ. 1879 นักวิทยาศาสตร์สามารถเปลี่ยนก๊าซหลายชนิดให้เป็นของเหลวได้ แต่ก๊าซไฮโดรเจน ไนโตรเจน และออกซิเจน นั้นยังไม่อาจจะทำให้เป็นของเหลวได้ จึงทำให้นักวิทยาศาสตร์คิดว่า ก๊าซทั้งสามชนิดนี้เป็นก๊าซถาวร (permanent gas) จนกระทั่งถึงปี ค.ศ. 1877 แคลลิลีเตก (Cailletet) นักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศสสามารถทำให้ออกซิเจนเป็นของเหลวได้ที่อุณหภูมิ 90.2 K และอีกหกปีต่อมา นักวิทยาศาสตร์ประสบความสำเร็จในการทำไนโตรเจนเป็นของเหลวได้ที่อุณหภูมิ 77.4 K ในปี ค.ศ. 1898 เซอร์เจมส์ ดีวาร์ (Sir James Dewar) ก็สามารถทำให้อิโตรเจน เป็นของเหลวได้ที่อุณหภูมิ 20.4 K

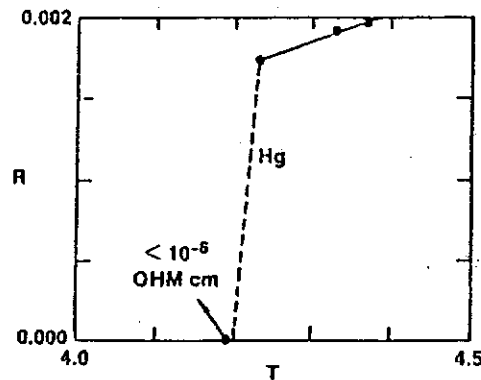
โดยปกติแล้ว เวลาอุณหภูมิลดลงการสั่นของอนุภาคเนื่องจากความร้อนจะน้อยลง ยังผลให้อันตรกิริยาของแรงยึดเหนี่ยวระหว่างอนุภาคเพิ่มขึ้น จนถึงระดับที่สามารถเปลี่ยนของเหลวเป็นของแข็งได้ แต่ความรู้ในแง่ฟิสิกส์ดั้งเดิม (classical physics) ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมที่พิเศษของฮีเลียมได้ กล่าวคือฮีเลียมยังคงสภาพเป็นของเหลวที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ได้ถึงแม้จะตอมจะไม่มีการเคลื่อนไหวเนื่องจากความร้อนเลย ในการทดลองระยะแรก ๆ ฮอนเนสรู้สึกประหลาดใจกับความหนาแน่นที่น้อยมากของฮีเลียมเหลว ซึ่งน้อยกว่าน้ำถึงแปดเท่า จากการมีความหนาแน่นน้อยนั้นแสดงว่าอะตอมฮีเลียมเหลวอยู่ห่างกันมาก ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะทำให้อีเลียมเป็นของแข็งได้

หลังจากที่นักวิทยาศาสตร์ประสบความสำเร็จ ในการทำอุณหภูมิให้ต่ำใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ และทำฮีเลียมเหลวได้ ฮอนเนสก็ยังได้พบอีกว่าในอาณาจักรของฟิสิกส์อุณหภูมิต่ำมีปรากฏการณ์แปลกๆ ที่ไม่พบในฟิสิกส์สาขาอื่น ฮอนเนสจึงเริ่มศึกษาสมบัติของสารที่มีอุณหภูมิต่ำ ๆ ในเวลาต่อมา

การพบสภาพนำยิ่งยวด

สมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของโลหะ คือ ความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้า กับ อุณหภูมิ ออนเนสได้ศึกษาสมบัติทางด้านนี้ของปรอทบริสุทธิ์ เพราะปรอทเป็นสารที่ทำให้บริสุทธิ์ได้ง่าย

ใน ค.ศ. 1911 ออนเนสได้พบปรากฏการณ์สภาพนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิ 4 K ว่าความต้านทานไฟฟ้าของปรอทที่อุณหภูมิดังกล่าวนั้น จะหมดไปอย่างฉับพลันโดยความต้านทานลดลงเป็นหนึ่งวินาทีที่อุณหภูมิ 4.2 K และเป็นหนึ่งในล้านที่อุณหภูมิ 1.5 K ของความต้านทานที่อุณหภูมิกปกติ เรียกอุณหภูมิที่สารเปลี่ยนสภาพจากตัวนำธรรมดาเป็นตัวนำยิ่งยวดว่า อุณหภูมิวิกฤต T_c (critical temperature) ดังนั้น ปรอทที่ 4 K จึงเป็นปรอทที่ไร้ความต้านทานไฟฟ้า เรียกสภาพปรอทในสถานะนี้ว่าสภาพนำยิ่งยวด



ภาพประกอบ 1 กราฟการค้นพบสภาพนำยิ่งยวดในปรอท

คงมีหลายคนสงสัยว่าความต้านทานของสารใดๆจะเป็นค่าศูนย์ได้อย่างไรในเมื่อเครื่องมือที่ใช้วัดทุกชนิดมีขีดจำกัดขั้นต่ำในการวัด และความไม่แน่นอนในการทดลองวัดความต้านทานจะมีอยู่เสมอ แต่การทดลองในเวลาต่อมา ออนเนสก็ได้แสดงให้เห็นว่า ความต้านทานของสภาพนำยิ่งยวดมีค่าต่ำกว่า 10^{-27} โอห์ม (ความต้านทานของทองแดงในสภาวะปกติเป็น 10^{-9} โอห์ม) จึงทำให้ไม่มีข้อสงสัยว่าสิ่งที่ออนเนสพบเป็นตัวนำไฟฟ้ายิ่งยวด

หลังการค้นพบของออนเนสแล้ว นักวิทยาศาสตร์ได้ทดลองหาวัตถุใหม่ ๆ มาทำเป็นตัวนำยิ่งยวดมากขึ้น และพบว่า มีสารต่างๆ มากมายที่สามารถเป็นตัวนำยิ่งยวดได้

ตาราง 1 อุณหภูมิวิกฤตของธาตุบางชนิด

| ธาตุ | อุณหภูมิวิกฤต (T_c , K) |
|--------------|----------------------------|
| Al | 1.196 |
| Cd | 0.56 |
| Ga | 1.091 |
| Hf | 0.09 |
| α -Hg | 4.15 |
| β -Hg | 3.95 |
| In | 3.40 |
| Ir | 0.14 |
| α -La | 4.9 |
| β -La | 6.06 |
| Nb | 9.26 |
| W | 0.012 |

สารในสภาพนำยิ่งยวด

ตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า ธาตุบริสุทธิ์ที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงสุดคือ ไนโอเบียม (Nb , อุณหภูมิวิกฤต 9.26 K) และธาตุบริสุทธิ์ที่มีอุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดคือ ทังสเตน (W, อุณหภูมิ 0.012 K) อุณหภูมิวิกฤตของสารมีได้ขึ้นกับองค์ประกอบทางเคมีของสารเท่านั้น แต่ยังขึ้นกับโครงสร้างผลึกของมันอีกด้วย มีสารหลายชนิดที่มีโครงสร้างผลึกแตกต่างกัน และมีคุณสมบัติทางกายภาพต่างกัน เช่น ดีบุกเทา (gray tin) เป็นสารกึ่งตัวนำ ส่วนดีบุกขาว (white tin) เป็นโลหะซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤต 3.72 K แลนทานัมมีโครงสร้างผลึกต่างกันสองรูปแบบคือ α -La และ β -La โดย α -La มีอุณหภูมิวิกฤต 4.9 K และ β -La มีอุณหภูมิวิกฤต 6.06 K เป็นต้น เบอริลเลียมเป็นตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีลักษณะเป็นฟิล์มบาง ๆ เท่านั้น และธาตุบางชนิดจะกลายสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ภายใต้ความกดดันสูง เช่น แบริียมจะเป็นตัวนำยิ่งยวดที่ 150×10^3 บรรยากาศ โดยที่มีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 5 K เป็นต้น

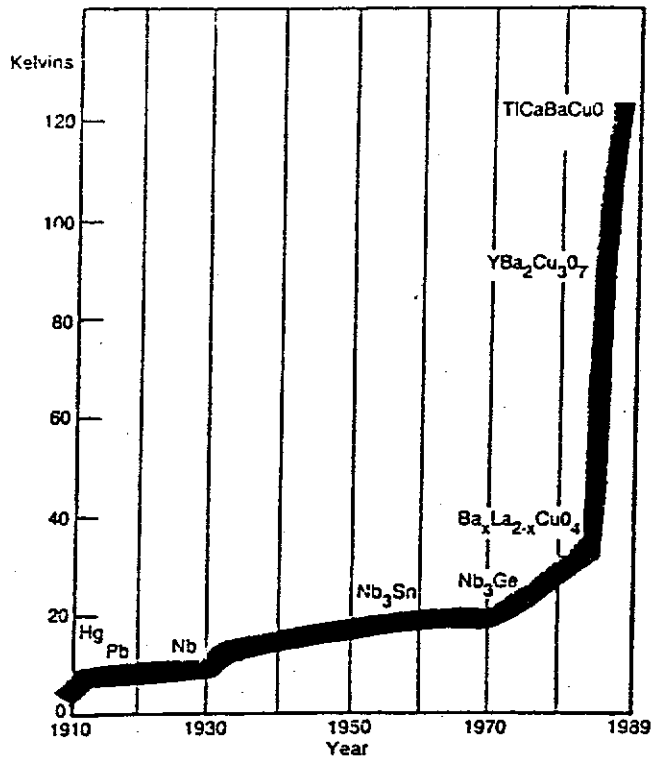
ดังนั้นจะเห็นว่าสภาพนำยิ่งยวดไม่ได้ขึ้นกับสมบัติของอะตอมโดด ๆ แต่จะขึ้นกับโครงสร้างทั้งหมดของสารนั้น ๆ

เราอาจจะคาดคะเนได้ว่าโลหะตัวนำที่ดี เช่น ทองแดง ทอง เงิน ซึ่งมีความต้านทานต่ำที่อุณหภูมิปกติ น่าจะเป็นตัวนำยิ่งยวดได้โดยมีอุณหภูมิวิกฤตสูง แต่ตามที่จริงแล้วโลหะเหล่านั้น มิได้เป็นอย่างที่คาดไว้

สารที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูง มักเป็นพวกโลหะผสมและสารประกอบ เช่น Nb_3Sn มีอุณหภูมิวิกฤตเป็น 18.1 K Nb_3Ge ที่เป็นฟิล์มบาง ๆ เป็นตัวนำยิ่งยวดได้ที่อุณหภูมิต่ำกว่า 22.3 K เป็นต้น (Kersin and Wolf. 1990 : 7)

ตาราง 2 อุณหภูมิวิกฤตของสารประกอบบางชนิด

| สารประกอบ | อุณหภูมิวิกฤต, K | สารประกอบ | อุณหภูมิวิกฤต, K |
|--------------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| Nb_3Sn | 18.05 | $Pb_{0.7}Bi_{0.3}$ | 8.45 |
| Nb_3Ge | 22.3 | V_3Si | 17.1 |
| NbN | 16 | $(SN)_x$ | 0.26 |
| NbO | 1.2 | $(BEDT)_2Cu(NCS)_2$ | 10 |
| $BaPb_{0.75}B_{0.25}O_3$ | 11 | $La_{1.8}Sr_{0.2}CuO_4$ | 38 |
| UBe_{13} | 0.75 | $Bi_2CaSr_2Cu_2O_{8+x}$ | 90 |



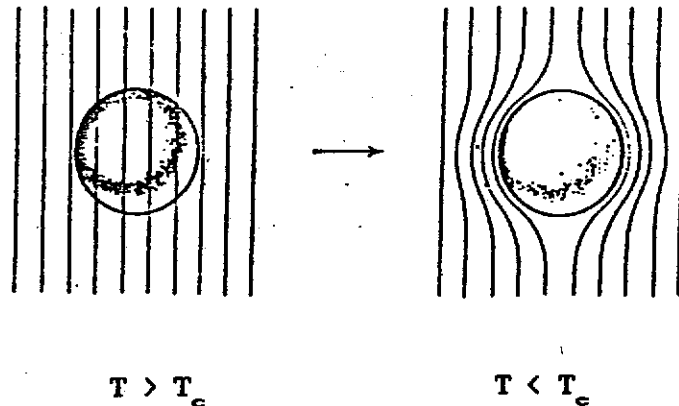
ภาพประกอบ 2 กราฟอุณหภูมิวิกฤตของสารกับปีค้นพบ

ในปี ค.ศ. 1986 เบ็ดเนอร์ซ์ และ มุลเลอร์ (Bednorz and Muller. 1986 : 189) พบว่า สาร La-Ba-Cu-O เป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิ 40 K

การค้นพบของ เบ็ดเนอร์ซ์และมุลเลอร์ ได้กระตุ้นนักวิทยาศาสตร์ให้มีการค้นคว้าอย่างไม่เคยมีมาก่อนในประวัติของการศึกษาสภาพนำยิ่งยวด ใน ค.ศ.1987 ชู, วู และคนอื่นๆ (Chu, Wu and others. 1987 : 908) ประกาศว่าสารประกอบ Y-Ba-Cu-O สามารถจะเป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิสูงกว่าจุดเดือดของไนโตรเจนเหลว คือมีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 90 K เวลาต่อมา เฮร์มันน์ และ เซ็ง (Hermann and Sheng. 1988 : 55) พบสารประกอบ Tl-Ca-Ba-Cu-O เป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิ 125 K

ตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก

ในปี ค.ศ. 1933 ไมสส์เนอร์และออกเซนเฟลด์ (Meissner and Ochsenfeld. 1958 : 606) ได้พบสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของตัวนำยิ่งยวดคือสมบัติที่ว่าสนามแม่เหล็กไม่สามารถพุ่งผ่านเข้าไปในสารที่เป็นตัวนำยิ่งยวดได้ เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต ที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กสามารถทะลุทะลวงเข้าไปในเนื้อสารได้ แต่เมื่ออุณหภูมิลดลงจนสารเปลี่ยนเป็นตัวนำยิ่งยวดสารจะขับสนามแม่เหล็กออกมาทำให้สนามแม่เหล็กภายในมีค่าเป็นศูนย์ ($B = 0$)



ภาพประกอบ 3 ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์

เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกมารบกวน สนามแม่เหล็กอันเกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในโลหะมีทิศทางอลวนจนทำให้สนามล้นรัศมีกลางกันหมด แต่ถ้ามีสนามแม่เหล็ก (H) ภายนอกมารบกวนจะเกิดสนามเหนี่ยวนำภายในโลหะเป็น $B = \mu_0 \mu_r H$ เรียก μ_0 ว่า ค่าซาบซึมแม่เหล็กสัมบูรณ์ (absolute magnetic permeability) และเรียก μ_r ว่า ค่าซาบซึมแม่เหล็กสัมพัทธ์ (relative magnetic permeability)

สำหรับกรณีสารพาราแมกเนติก (paramagnetic, $\mu_r > 1$) สนามเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นจะเสริมสนามแม่เหล็กภายนอก แต่ในสารไดอาแมกเนติก (diamagnetic, $\mu_r < 1$) สนามเหนี่ยวนำจะต้านสนามแม่เหล็กภายนอก ในกรณีตัวนำยิ่งยวดมีค่า $B = 0$ ตั้งแต่นั้นค่า $\mu_r = 0$ ค่าอ่อนไหวทางแม่เหล็ก (magnetic susceptibility, χ) มีค่า $\chi = -1$ นี้เป็นสมบัติของสารไดอาแมกเนติกอุดมคติ (ideal diamagnetism) (โดยปกติสารไดอาแมกเนติกมีค่า $\chi < 0$)

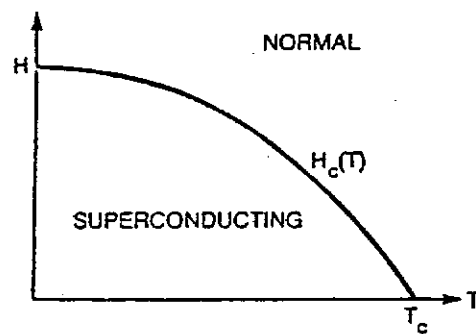
สภาพไดอาแมกเนติกอุดมคติ ในตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นเมื่อเราเอาสารตัวนำยิ่งยวดวางในสนามแม่เหล็ก จะมีกระแสอิเล็กตรอนไหลที่ผิวที่ไหลออกตัวนำในลักษณะที่ทำให้สนามแม่เหล็กอันเกิดจากกระแสอิเล็กตรอนต่อต้านสนามภายนอกที่เข้าไปกระทำ ด้วยเหตุนี้สนามเหนี่ยวนำแม่เหล็กภายในจึงเป็นศูนย์

เป็นที่ทราบกันดีว่า สนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลที่ผิวที่ไหลออกไม่มีอิทธิพลต่ออิเล็กตรอนภายใน ในโลหะปกติสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะผลักดันอิเล็กตรอนทำให้กระแสไฟฟ้าไหล แต่ในกรณีของตัวนำยิ่งยวดที่เป็นสารไดอาแมกเนติกจะมีกระแสไฟฟ้าไหลที่ผิวที่ไหลออกเท่านั้น และในกรณีของตัวนำปกติการกระทบกันของอิเล็กตรอนทำให้เกิดการสูญเสียพลังงาน

ดังนั้น ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์และสภาพนำยิ่งยวดจึงมีความสัมพันธ์กันโดยปรากฏการณ์ทั้งสองมีกำเนิดมาจากสาเหตุเดียวกัน และได้กลายเป็นสมบัตินี้ฐานที่สำคัญยิ่งของสภาพนำยิ่งยวด

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า สนามแม่เหล็กไม่สามารถเจาะผ่านเข้าไปในสารที่อยู่ในสภาวะนำยิ่งยวดได้ แต่จะยังมีสนามแม่เหล็กบ้างที่ผิวหน้าของตัวนำยิ่งยวดในบริเวณที่กระแสที่ไหลจะส่งอิทธิพลต่อต้านสนามแม่เหล็กภายนอก ความหนาของชั้นกระแสนี้เรียกว่า ความลึกในการเจาะทะลุทะลวงของสนาม (field penetration depth, λ) สมบัตินี้เป็นเอกลักษณ์ที่สำคัญของสภาวะนำยิ่งยวดคือ สนามแม่เหล็กจะลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามความลึก โดยปกติแล้วจะมีค่าอยู่ในช่วงหลายร้อยแองสตรอม (angstroms) หมายความว่า สนามแม่เหล็กจะเจาะผ่านเข้าไปในตัวนำยิ่งยวดได้เป็นระยะทางลึกหลายร้อยอะตอมจากผิว

ถ้าเราเพิ่มความเข้มสนามแม่เหล็กจนถึงค่าหนึ่งคือ H_c ซึ่งเรียกว่า สนามวิกฤต (critical field) แล้วสภาวะนำยิ่งยวดจะถูกทำลาย สารจะกลับสู่สภาวะปกติ ค่าวิกฤตนี้ขึ้นกับอุณหภูมิ ซึ่งอุณหภูมิมีค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤตเท่าใดความเข้มของสนามวิกฤต ก็จะมีค่าน้อยลงเท่านั้น ดังภาพประกอบ 4 แสดงสนามวิกฤตที่แปรตามอุณหภูมิ



ภาพประกอบ 4 กราฟระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ

ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ค่าสนามวิกฤตมีค่ามากที่สุด ที่อุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กมีค่าเป็นศูนย์ เชื่อกันความสัมพันธ์ของสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ (Kersin and Wolf, 1990 : 10) ได้ดังนี้

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

เมื่อ $H_c(0)$ เป็นสนามวิกฤตที่มีอุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

ดังนั้น ในการเปลี่ยนตัวนำยิ่งยวดเป็นตัวนำปกติ เราอาจจะทำได้โดยเพิ่มความเข้มของสนามแม่เหล็ก โดยไม่จำเป็นต้องเพิ่มอุณหภูมิ

/ สมบัติเชิงความร้อน

ตามที่กล่าวมาแล้วว่าสภาพนำยิ่งยวดนั้น ไม่เพียงแต่หมายความว่าสารไม่มีความต้านทานไฟฟ้าเท่านั้น แต่สารยังมีสมบัติพิเศษอื่น ๆ อีกได้แก่ สมบัติเชิงความร้อนเป็นต้น ถ้าความจุความร้อนของโลหะเป็นค่าที่ได้จากค่าความจุความร้อนของแลททิซกับของอิเล็กตรอน ที่อุณหภูมิต่ำค่าความจุความร้อนของอิเล็กตรอนจะสูงและ เมื่ออุณหภูมิลดลงค่าความจุความร้อนของอิเล็กตรอน C_{e1} จะลดตามอุณหภูมิกำลังหนึ่ง ในขณะที่ความจุความร้อนของแลททิซ C_{l1} จะลดลงอย่างรวดเร็วตามอุณหภูมิกำลังสาม

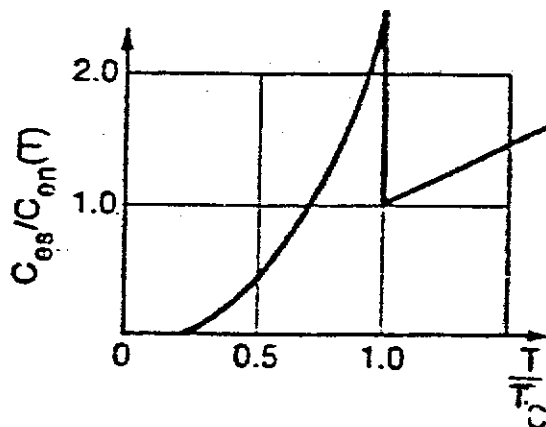
ส่วนในตัวนำยิ่งยวดความจุความร้อนของอิเล็กตรอนจะเข้าใกล้ศูนย์ แบบเลขยกโปเนนเชียล ดังนั้น อาจเขียนได้ว่า

$$\frac{C_{ee}}{\alpha T_c} = ae^{-b(T_c/T)}$$

a, b, α เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

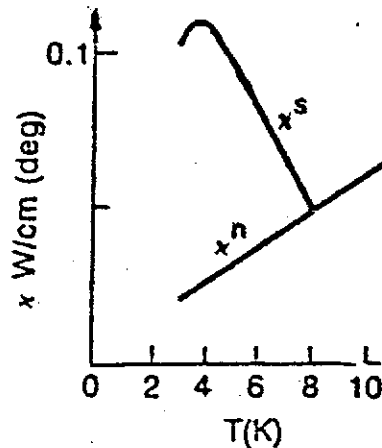
ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์ของสารธรรมดา สารที่เป็นตัวนำยิ่งยวดจะอ่อนไหวต่อกระบวนการส่งผ่านความร้อนมาก เช่น การสูญเสียความร้อนเพียงเล็กน้อย จะทำให้สารเย็นลงมาก

เมื่อตัวนำยิ่งยวดกลับสู่สภาพปกติ ความจุความร้อนของอิเล็กตรอนจะแปรผันโดยตรงกับอุณหภูมิอีกครั้งหนึ่ง แต่ที่อุณหภูมิก่อนการเปลี่ยนสภาพความจุความร้อนจะไม่ต่อเนื่อง ดังภาพประกอบ 5 (Kersin and Wolf, 1990 : 11) โดย C_{ee} คือความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภาพนำยิ่งยวด และ C_{en} คือความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภาพปกติ



ภาพประกอบ 5 กราฟความจุความร้อนของอิเล็กตรอนกับอุณหภูมิ

ในด้านการนำความร้อนได้มีการทดลองและพบว่า สภาพการนำความร้อนของโลหะผสมลดลงตามอุณหภูมิแต่หลังจากได้มีการเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดแล้ว ค่าการนำความร้อนมีค่าพุ่งสูงขึ้นมากจนถึงค่าสูงสุด จากนั้นก็จะเริ่มลดลงอีก ดังภาพประกอบ 6 (Kersin and Wolf. 1990 : 12) x^s คือ ค่าการนำความร้อนของโลหะผสมในสภาพนำยิ่งยวด และ x^n คือ ค่าการนำความร้อนของโลหะผสมในสภาพปกติ



ภาพประกอบ 6 กราฟการนำความร้อนของโลหะผสม (Pb+10% Bi) กับอุณหภูมิ

ความลึกกลับของปรากฏการณ์สภาพนำยิ่งยวด

การค้นพบสภาพนำยิ่งยวดได้กระตุ้นความสนใจของนักฟิสิกส์ให้สร้างทฤษฎีที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ไร้ความต้านทานไฟฟ้า และสมบัติต่าง ๆ ของตัวนำยิ่งยวด

กอร์เตอร์และคาสิมียร์ (Gorter and Casimir. 1934 : 306) ได้เสนอแบบจำลองของไหลสองชนิด (two-fluid model) โดยสมมติว่าตัวนำยิ่งยวดประกอบด้วยของไหลสองชนิดคือของไหลปกติกับของไหลยิ่งยวด สมบัติของไหลปกติเกิดจากอิเล็กตรอนปกติ ส่วนของไหลยิ่งยวดนี้มีสมบัติที่แตกต่างไป การลดอุณหภูมิทำให้ของไหลยิ่งยวดมีปริมาณมากขึ้น และของไหลปกติมีปริมาณลดลงจนหมดสิ้นไปที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ที่อุณหภูมิวิกฤต $T=T_c$ ปริมาณของไหลยิ่งยวดจะหมดไปและสารจะเริ่มมีสมบัติของความต้านทานไฟฟ้า และสมบัติของความร้อน ตามลักษณะของไหลปกติ

แบบจำลองของไหลสองชนิดนี้ สามารถอธิบายสมบัติทางความร้อนของตัวนำยิ่งยวดได้ ความหมายของแบบจำลองนี้ กระจ่างขึ้นหลังจากที่มีการพบทฤษฎีเชิงควอนตัมของสภาพนำยิ่งยวด (the microscopic theory of superconductivity) เพราะโดยแท้จริงแล้ว ไม้อาจจะใช้คำกล่าวว่า มีของไหลอยู่สองชนิดในสาร เนื่องจากไม่สามารถแบ่งอิเล็กตรอนออกเป็นสองชนิดได้ สภาพนำยิ่งยวดนั้น เป็นปรากฏการณ์รวมของสารทั้งระบบที่ไม่สามารถแยกจากกันเป็นแต่ละส่วนได้

สมการลอนดอน (London equation) ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในการอธิบายปรากฏการณ์อำนาจแม่เหล็กไดอะที่ผิดปกติ (anomalous diamagnetism) ของตัวนำยิ่งยวดได้ ตามธรรมชาติ

เวลาเราเพิ่มกระแสไฟฟ้าในตัวนำปกติ สนามแม่เหล็กที่เกิดจะมีความเข้มสูงขึ้นแต่ในขณะเดียวกันตัวนำจะมีการสูญเสียพลังงานในรูปความร้อนมากขึ้นด้วย จนเมื่อผลทำให้ตัวนำหลอมละลายในที่สุด แต่เหตุการณ์เช่นนี้ไม่เกิดในตัวนำยิ่งยวด เพราะในตัวนำยิ่งยวดจะไม่มี การสูญเสียพลังงานในรูปความร้อน อย่างไรก็ตามเมื่อสนามแม่เหล็กที่เกิดมีค่ามากถึงค่าสนามวิกฤตแล้วสภาพนำยิ่งยวดจะถูกทำลาย แต่ถึงกระนั้นก็ยังมีส่วนหลายชนิดที่มีค่าสนามวิกฤตสูงและสามารถนำกระแสได้สูงอีกด้วย

ปัญหาเกี่ยวกับสาเหตุการเกิดสภาพนำยิ่งยวดนี้ ได้ทำทฤษฎีทฤษฎีวิทยาศาสตร์ชั้นนำของโลก เช่น ไฮน์สไตน์ (Einstein) ไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg) แลนเดา (Landau) บล็อก (Bloch) แฟรงเกิล (Frenkel) เป็นต้น แต่ก็ไม่มีนักวิทยาศาสตร์ท่านใดประสบความสำเร็จ ในการอธิบายสมบัติต่างๆ ของสภาพนำยิ่งยวดได้หมดซึ่งนับเป็นการแสดงให้เห็นถึงความยากของปัญหานี้ ใน ค.ศ. 1957 ทฤษฎีของสภาพนำยิ่งยวดเชิงจุลภาคได้กำเนิดขึ้นซึ่งนับเป็นเวลาเกือบครึ่งศตวรรษ ตั้งแต่ได้มีการค้นพบปรากฏการณ์นี้ ใน ค.ศ. 1911 จึงเป็นการยากที่จะสรุปเป็นอย่างอื่นนอกจากว่าปริศนาสภาพนำยิ่งยวดเป็นเรื่องลึกลับที่สุดปัญหาหนึ่งในประวัติศาสตร์ของฟิสิกส์ยุคใหม่

/ ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect)

ฟรอลิช (Frohlich. 1950 : 845) ได้ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปในสภาพนำยิ่งยวดทางทฤษฎี ต่อจากนั้นก็ได้มีการทดลองพบว่า

$$T_c \cdot M^{1/2} = \text{ค่าคงที่}$$

เมื่อ T_c คืออุณหภูมิวิกฤต และ M คือมวลของไอออน

ไอโซโทปเป็นสมบัติเอกลักษณ์อย่างหนึ่งของแลตทิซ ในผลึกนั้นความถี่ในการสั่น (Ω) ของอะตอมในแลตทิซมีความสัมพันธ์กับมวลไอออนเป็น

$$\Omega \sim M^{-1/2}$$

ดังนั้น ปรากฏการณ์ไอโซโทปชี้ให้เห็นว่า สภาพนำยิ่งยวดเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซนั่นเอง

ทฤษฎี บี ซี เอส (BCS - Theory) ของ บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชวีฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 : 1175) สามารถอธิบายปรากฏการณ์สภาพนำยิ่งยวดได้ ซึ่งการพบทฤษฎีนี้ถือว่าเป็นความก้าวหน้าที่สำคัญของวงการฟิสิกส์

ทฤษฎีบีบีเอสได้อธิบายว่า ที่อุณหภูมิต่ำๆ เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในผลึกอิเล็กตรอนจะโพลาไรซ์(polarize) แลทิสผลึก โดยอันตรกิริยาทางไฟฟ้าทำให้บริเวณรอบๆอิเล็กตรอนจะมีความหนาแน่นของอิเล็กตรอนมากขึ้น ทำให้มีผลกระทบต่อกับอิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้เคียง ดังนั้นแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนจึงเกิดขึ้นได้ และอันตรกิริยาแบบดึงดูดจะต้องมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาแบบผลักกันระหว่างอิเล็กตรอนจึงทำให้อิเล็กตรอนจับคู่กันได้

เมื่ออุณหภูมิของผลึกเป็นศูนย์องศาสัมบูรณ์ จากทฤษฎีควอนตัม เราทราบว่าอิเล็กตรอนในแลทิสของโลหะ ยังคงมีการสั่นอยู่ถึงแม้ว่าจะอยู่ในสถานะพื้นฐาน เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในผลึกมันจะรบกวนอิเล็กตรอนในแลทิสผลึกที่สั่นอยู่ แต่ขณะแลทิสผลึกสั่นอยู่นั้น พลังงานของคลื่นผลึกจะปรากฏในรูปของโฟนอน(phonon) ซึ่งอิเล็กตรอนอีกตัวจะรับโฟนอนไว้ เรียกสภาวะกระตุ้นของแลทิสผลึกว่าโฟนอน ปรากฏการณ์การแพร่โฟนอนโดยอิเล็กตรอนตัวหนึ่งไปสู่อิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งเป็นการรับและคายโฟนอนระหว่างอิเล็กตรอน ทำให้เกิดอันตรกิริยาดึงดูดแบบอ่อน

ที่อุณหภูมิต่ำๆ อิเล็กตรอนในแลทิสผลึกมีการสั่นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนมากกว่าจึงเป็นผลให้คู่อิเล็กตรอนแตกออกจากกัน เพราะแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนอ่อนกว่าแรงผลักรวมกัน

ที่อุณหภูมิต่ำๆ อันตรกิริยาแบบดึงดูดมีค่าสูงกว่าอันตรกิริยาผลักระหว่างอิเล็กตรอน ฉะนั้นเราจึงต้องพิจารณาระบบเป็นคู่อิเล็กตรอน เนื่องจากอิเล็กตรอนมีการจับคู่ทำให้อิเล็กตรอนต้องลดพลังงานรวมลง จึงเป็นผลให้เกิดช่องว่างพลังงาน(Δ) ขึ้น และระยะความแตกต่างของค่าพลังงานที่สถานะพื้นฐานกับสถานะกระตุ้นมีค่าเท่ากับช่องว่างพลังงาน

เป็นที่ทราบกันดีว่า ความต้านทานไฟฟ้าเกิดจากการสูญเสียพลังงานของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ไปในแลทิสผลึก แต่ถ้ามีช่องว่างพลังงานเกิดขึ้นในแถบพลังงานอิเล็กตรอน การชนกันระหว่างอิเล็กตรอนก็ไม่ทำให้เกิดมีการเปลี่ยนแปลงสภาพควอนตัม อิเล็กตรอนจึงสามารถเคลื่อนที่ไปได้โดยไม่มีมีการเปลี่ยนแปลงสภาพ แสดงให้เห็นถึงการไม่มีความต้านทานตัวเอง

ในการเข้าคู่ของอิเล็กตรอน อิเล็กตรอนจะแลกเปลี่ยนโมเมนตัมและสปินตรงกันข้ามกัน มีพลังงานการจับคู่เป็น $2\Delta(0)$, $\Delta(0)$ เป็นช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ซึ่งจะขึ้นกับพารามิเตอร์การจับคู่ λ ค่า λ จะเป็นค่ากำหนดว่าอันตรกิริยานี้เป็นแบบแข็งหรือแบบอ่อน (strong or weak coupling)

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda}$$

ω_D คือ ความถี่เดอบาย (Debye frequency)

λ คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน

ตามทฤษฎี บีบีเอส ระยะทางระหว่างคู่อิเล็กตรอนหรือขนาดคู่อิเล็กตรอน (Cooper pair) คือ ξ_0

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$$

ในที่นี้ v_F คือความเร็วที่ผิวเฟอร์มิของโลหะ

โดย $\xi_0 \approx 10^{-6}$ m

แต่ระยะทางอิออนบวกในผลึก 10^{-10} m

เพราะฉะนั้น คู่คูเปอร์จะมีขนาดใหญ่มาก เมื่อเทียบระยะระหว่างอิออนในผลึกถึง 10^4 เท่า ตามทฤษฎีบีซีเอส พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน

$$E_k = (\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}$$

เมื่อ ϵ_k คือ พลังงานของอิเล็กตรอน โดย $\epsilon_k = p^2/2m^* - E_F$ และมีโมเมนตัมเป็น $\hbar k$, m^* คือมวลยังผลของอิเล็กตรอน, E_F คือพลังงานเฟอร์มิ

โดย
$$T_c = 1.14 \hbar \bar{\omega} e^{-1/\lambda}$$

ซึ่ง
$$T_c \sim \Omega \quad \text{และจาก} \quad \Omega \sim M^{-1/2}$$

ทำให้ทราบว่า $T_c M^{1/2} =$ ค่าคงที่

สมการนี้สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ไอโซโทปได้ นั่นคือ $T_c \sim M^{-\alpha}$ โดยค่า α เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าประมาณ 0.5

ค่า λ เป็นค่าที่ขึ้นกับความถี่ของโฟนอนอย่างเดี่ยว ซึ่งเป็นอันตรกิริยาแบบดึงดูด แต่ถ้าพิจารณาอันตรกิริยาแบบผลักของคูลอมบ์ด้วยจะได้ค่า T_c (Kersin and Wolf. 1990 : 25) เป็น

$$T_c = 1.14 \hbar \bar{\omega} e^{-1/(\lambda - U^*)}$$

$$U^* = \frac{V_c}{1 + V_c \ln(w/\bar{\omega})}$$

$$w \approx E_F, \quad E_F \gg \bar{\omega}$$

V_c เป็นค่าเฉลี่ยของอันตรกิริยาคูลอมบ์

U^* เป็นศักย์เสมือน (pseudopotential) ที่ใช้แทน V_c

โดย $U^* \approx 0.1$ ในโลหะทั่ว ๆ ไป

อัตราส่วนระหว่าง $\Delta(0)$ กับ T_c เป็น $\frac{\Delta(0)}{T_c} = 1.76$ (Kersin and Wolf. 1990
: 26) และความหนาแน่นสถานะตามทฤษฎี บี ซี เอส คือ

$$N(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{d\epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{dE} = \frac{N(0)}{dE/d\epsilon}$$

$$= N(0) \cdot \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}}, \quad E > \Delta$$

$$= 0, \quad E < \Delta$$

$N(0)$ คือความหนาแน่นสถานะที่ E_F

ตาราง 3 เปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของโลหะนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำกับ La-Sr-Cu-O

| ค่าพารามิเตอร์ | โลหะนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ | La-Sr-Cu-O |
|----------------------------|--------------------------|-------------------|
| m^* | 1-15 m_e | 5 m_e |
| k_F (cm^{-1}) | 10^9 | 3.5×10^7 |
| V_F (cm/s) | $(1-2) \times 10^8$ | 8×10^6 |
| E_F (eV) | 5-10 | 0.1 |

จากตาราง 3 หาค่าประมาณ ϵ_0 (λ) ได้จาก

$$\epsilon_0 = \frac{0.18\hbar V_F}{k_B T_c}$$

หรือ $\Delta(0) = a k_B T_c$, ($a \approx 1.76$ สำหรับทฤษฎี บี ซี เอส)

โดยการแทนค่าจากตาราง 3 จะได้ว่า

$$\epsilon_0 \approx 20 \text{ \AA} = 2 \times 10^{-9} \text{ m}$$

แสดงให้เห็นว่า ϵ_0 ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีค่าน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ ϵ_0 ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ (10^{-8} เมตร)

การที่ ϵ_0 มีค่าน้อยก็จะมีผลต่อปรากฏการณ์สภาพนำยิ่งยวดมาก พารามิเตอร์ $\frac{\Delta(0)}{E_F}$ ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำมีค่าประมาณ 10^{-4} แต่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีค่าประมาณ $\frac{\Delta(0)}{E_F} = 10^{-1}$ แสดงให้เห็นว่าช่องว่างพลังงานมีขนาดกว้างขึ้นเนื่องจาก ϵ_0 มีขนาดเล็กลงนั่นเอง ✓

แบบจำลองที่ใช้อธิบาย Y-Ba-Cu-O เป็นแบบจำลองที่มีช่องว่างพลังงานอยู่สองช่องว่างว่างซึ่ง $\frac{2\Delta_1(0)}{T_c} = 6$, $\frac{2\Delta_2(0)}{T_c} = 3.5$ และมีค่าคงที่การจับคู่เป็น λ_s , λ_b และ λ_{sb} สำหรับ La-Sr-Cu-O เกิดจากการแทนที่ Ba ด้วย Sr มี $\lambda_s = 2.5$ (Kersin and Wolf. 1990 : 217)

เครซิน (Kresin. 1987 : 434) ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด (T_c) สำหรับทุกค่าของ λ จากสมการ

$$T_c = \frac{0.25 \bar{\Omega}}{(e^{2\lambda} - 1)^{1/2}}$$

เมื่อแทนค่า $T_c = 40$ K , $\bar{\Omega} = 15$ meV พบว่า $\lambda = 5$

แต่ถ้าแทน $\bar{\Omega} = 10$ meV แล้ว $\lambda > 5$

ค่า λ_{ph} ของโฟนอนมีค่าตั้งแต่ 2.25 ถึง 2.5 และ λ_{p1} ของพลาสมอน (plasmon) มีค่า $\lambda_{p1} = 0.25$ ($\bar{\Omega}_{p1} = 60$ meV) จะเห็นสภาพนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ซึ่งส่วนมากเกิดขึ้นในสารประกอบของทองแดง น่าจะมีแรงดึงดูดชนิดอื่นรวมอยู่ด้วยนอกจากโฟนอน

บทที่ 2
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1960 ไมสส์เนอร์ (Meissner. 1960 : 672) ได้ผ่านกระแสไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำยิ่งยวด ซึ่งมีแผ่นทองคำบางๆที่มีสภาพเป็นโลหะปกติคั่นอยู่ ผลการทดลองที่บอกว่าโลหะปกติสามารถกลายสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ เนื่องจากมีการทะลุทะลวงของคู่อิเล็กตรอนจากตัวนำยิ่งยวด และช่องแถบพลังงานของอิเล็กตรอนในโลหะปกติจะเกิดช่องว่างขึ้น ซึ่งคุณสมบัตินี้เป็นลักษณะเฉพาะของตัวนำยิ่งยวด เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์พรอกซีมิตี (proximity effect)

ต่อมาในปี ค.ศ. 1961 สมิท และ คนอื่นๆ (Smith and others. 1961 : 686) ได้ทดลองวัดกระแส และ ความต้านทานของรอยต่อ (junction) ซึ่งประกอบด้วย ตะกั่ว-เจอร์เมเนียม-ตะกั่ว (Pb-I-Ag-Pb) พบว่าเกิดช่องว่างพลังงานขึ้นในเงิน และช่องว่างพลังงานของสารตัวนำยิ่งยวดซึ่งได้แก่ตะกั่วจะลดน้อยลงเมื่อถูกนำไปประกบกับโลหะปกติ

ฮิลช (Hilsch. 1962 : 511) ได้วัดอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดกับตัวนำปกติ พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงเมื่อความหนาของตัวนำปกติเพิ่มขึ้นหรือ เมื่อความหนาของแผ่นตัวนำยิ่งยวดลดลงทั้งนี้ภายใต้เงื่อนไขว่าความหนาของแผ่นตัวนำปกติจะต้องน้อยกว่าความยาวอาพันธ์

ในปี ค.ศ. 1965 ฟุลเด กับ มากี (Fulde and Maki. 1965 : 675) และ เดอเจเนนเนส กับ เมาโร (de Gennes and Mauro. 1965 : 381) ได้เสนอทฤษฎีของปรากฏการณ์พรอกซีมิตี ซึ่งใช้อธิบายได้ดีในช่วงอุณหภูมิใกล้อุณหภูมิวิกฤต

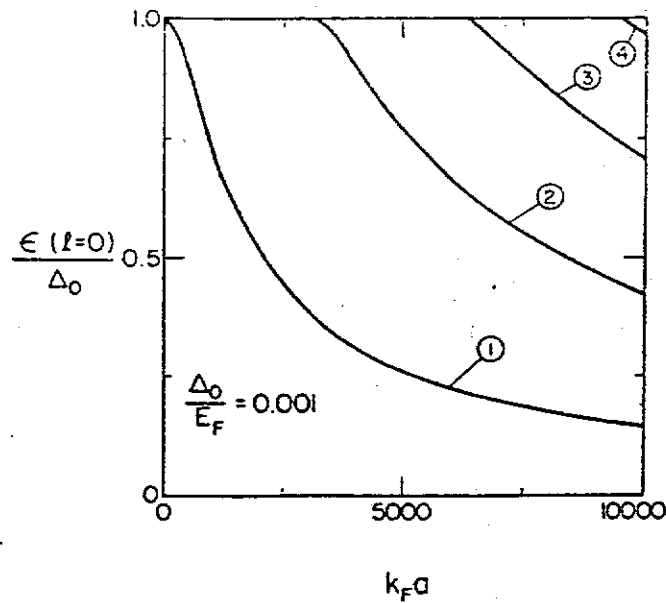
ทฤษฎีที่ได้นำมาให้คำอธิบายในช่วงเวลาต่อมาคือ ทฤษฎีของแมคมิลแลน (McMillan's theory. 1968 : 559) ซึ่งสามารถใช้ในการคำนวณหาความหนาแน่นสถานะ (density of states) และอุณหภูมิวิกฤตของระบบที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำยิ่งยวดกับแผ่นตัวนำปกติ โดยกำหนดว่าแผ่นตัวนำปกติและแผ่นตัวนำยิ่งยวดบางมาก เมื่อเทียบกับความยาวอาพันธ์ของตัวนำยิ่งยวด และในการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนระหว่างแผ่นตัวนำปกติไปยังแผ่นตัวนำยิ่งยวดนั้น อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านกำแพงศักย์ (potential barrier) ซึ่งสูตรการคำนวณของแมคมิลแลนสอดคล้องกับสูตรการคำนวณของซิลเวอร์แมนและคูเปอร์ (Silvert and Cooper. 1966 : 334)

ในปี ค.ศ. 1969 แอดกินส์ และ คิงตัน (Adkins and Kington. 1969 : 777) ได้ทำการทดลองเรื่องปรากฏการณ์พรอกซีมิตี และได้พบว่าผลการทดลองสอดคล้องกับทฤษฎีของแมคมิลแลน เป็นอย่างดีในด้านที่เกี่ยวกับช่องว่างพลังงานในโลหะปกติ โดยพบว่าช่องว่างพลังงานนั้นหาได้จากการวัดสภาพนำไฟฟ้าเมื่อความต่างศักย์เท่ากับศูนย์ และใช้ความหนาแน่นสถานะตาม

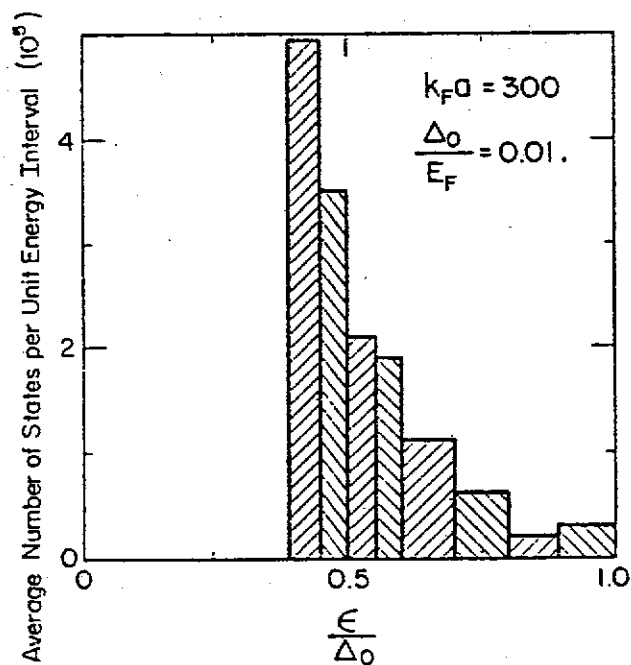
ทฤษฎีพีเอส กับ เงื่อนไขที่ว่าโอกาสการทะลุทะลวงกำแพง (barrier penetration probability) เปลี่ยนแปลงได้

ในปี ค.ศ. 1971 ชิโต และ แวน ดูเซอร์ (Seto and Van Duzer. 1971 : 488) พบปรากฏการณ์พรอกซีมิตีระหว่างสารตัวนำยิ่งยวดกับสารกึ่งตัวนำ ในเวลาต่อมา คลาก (Clark. 1980 : 2736) ได้เสนอแบบจำลองของทรานซิสเตอร์สภาพนำยิ่งยวด (superconducting transistor) โดย นิชิโน, ยามาดา และ คาวาเบะ (Nishino, Yamada and Kawabe. 1986 : 2449), ทากายามาจิ กับ คาวาคามิ (Takayamagi and Kawakami. 1985 : 2449) และ ฟุกุยามาจิ กับ มาเอคาวา (Fukuyama and Maekawa. 1986 : 1814) ได้ทดลองตามแบบของคลาก และพบว่า สามารถควบคุมกระแสนำยิ่งยวด (supercurrent) และ ศักย์คู่ (pair potential คือศักย์ที่ใช้ในการดันคู่คูเปอร์จากตัวนำยิ่งยวดไปยังสารกึ่งตัวนำ) ได้ด้วยการเปลี่ยนแปลงแรงดันเกต (gate voltage) ทางด้านสารกึ่งตัวนำ

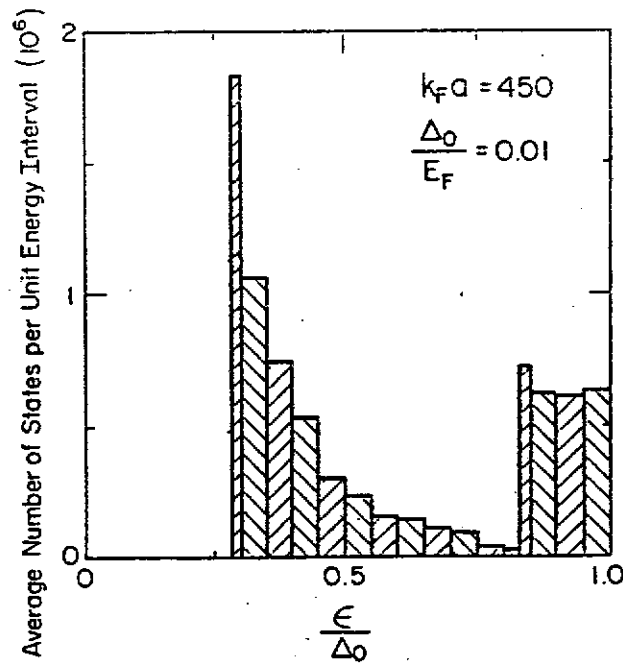
ในปี ค.ศ. 1985 ฮุย และ สเตรูด (Hui and Stroud. 1985 : 584) ได้คำนวณหา พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในโลหะปกติรูปทรงกลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ พบว่า มีแถบพลังงานซึ่งมีค่าน้อยกว่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นในบริเวณช่องว่างพลังงาน และ เมื่อโลหะปกติรูปทรงกลมมีขนาดใหญ่ขึ้น แถบพลังงานดังกล่าวจะมีค่าลดลง ดังภาพประกอบ 7 และ 8



ภาพประกอบ 7 แสดงพลังงานสถานะของอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์ ($l=0$) เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$, k_F เป็นเลขคลื่นเฟอร์มี (Fermi wave number), a เป็นรัศมีของทรงกลมพารามิตอร์ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.001$, Δ_0 เป็นช่องว่างพลังงานที่ $T=0$ K และ E_F คือพลังงานเฟอร์มี



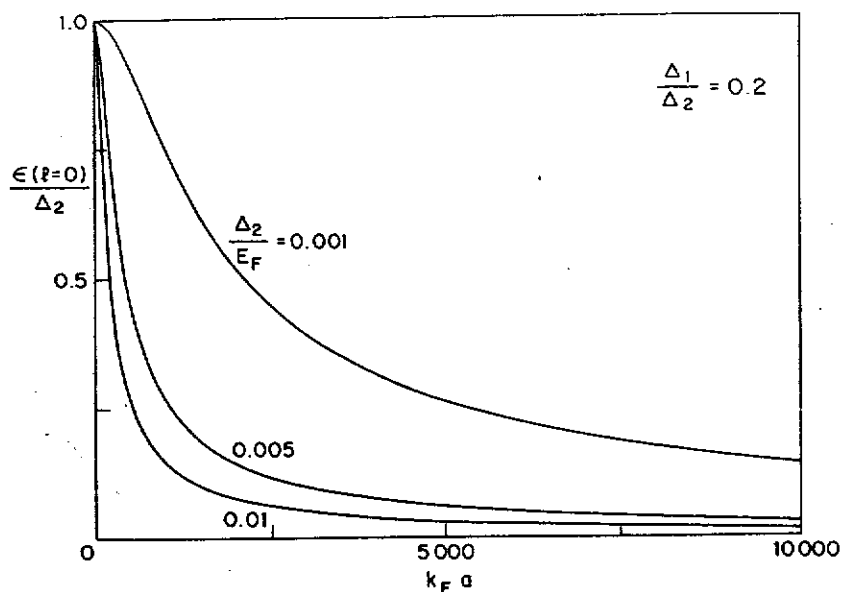
ภาพประกอบ 8(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะเฉลี่ยเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_0}$ พารามิตอร์ $k_F a = 300$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.390$



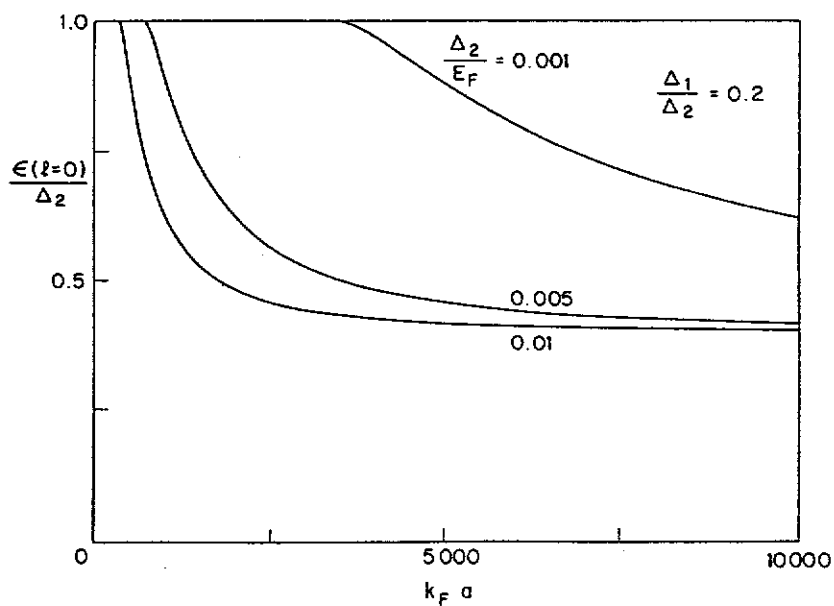
ภาพประกอบ 8(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะเฉลี่ยที่เป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_0}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 450$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.285$ และแถบพลังงานแถบที่สองเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_0} = 0.830$

โดยการเปรียบเทียบภาพประกอบ 8(ก) กับ 8(ข) จะเห็นว่าเมื่อ $k_F a$ เพิ่มขึ้นคือขนาดทรงกลมใหญ่ขึ้น แถบพลังงานขยายขนาดขึ้น และช่องว่างพลังงานลดขนาดลง

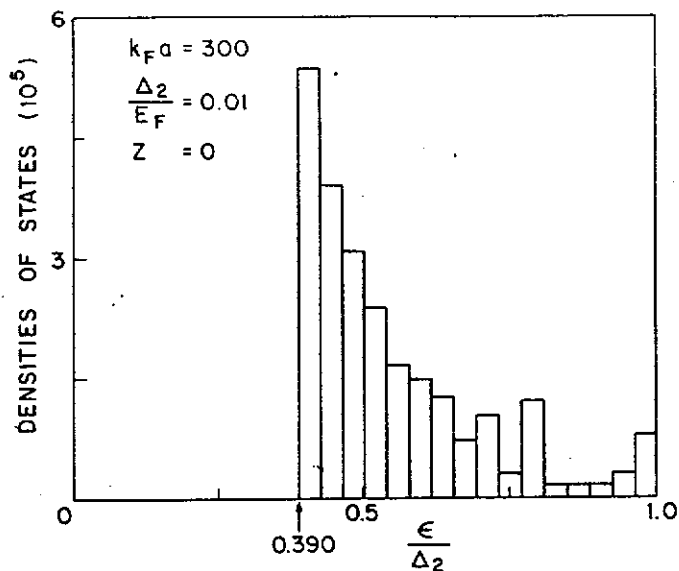
ในปี ค.ศ. 1985 ยกसान และ นาจิ (Yoksan and Nagi. 1986 : 447) ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่กว่าอีกชนิดหนึ่ง เมื่อช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดทรงกลม (Δ_1) มีค่าน้อยกว่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่ (Δ_2) จะพบว่าในกรณีอิเล็กตรอนสถานะ S (คือมีโมเมนตัมเชิงมุมเป็นศูนย์, $l = 0$) พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนจะมีค่าต่ำกว่าช่องว่างพลังงาน Δ_2 และพลังงานนี้เป็นฟังก์ชันของรัศมีทรงกลม ถ้าพารามิเตอร์ $Z = \Delta_1/\Delta_2$ หรือ Δ_2/E_F มีค่ามากขึ้นพลังงานกระตุ้นก็จะมากขึ้นตามไปด้วย นอกจากนี้ยังพบอีกว่าพลังงานกระตุ้นในช่องว่างพลังงานมีหลายแถบพลังงาน ส่วนความหนาแน่นสถานะนั้นจะมีค่ามากขึ้นเมื่ออัตราส่วน Δ_1/Δ_2 มีค่ามากขึ้น ดังภาพประกอบ 9(ก), 9(ข), 10(ก), 10(ข), 10(ค), 11(ก), 11(ข) และ 11(ค)



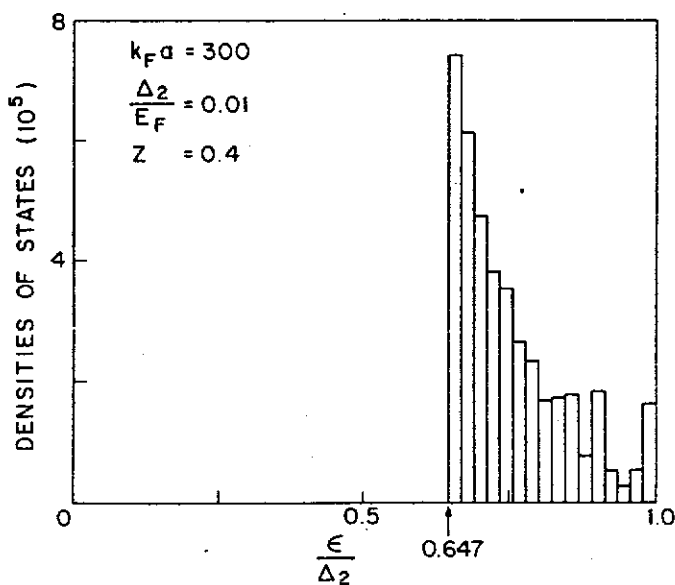
ภาพประกอบ 9(ก) แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01 และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$



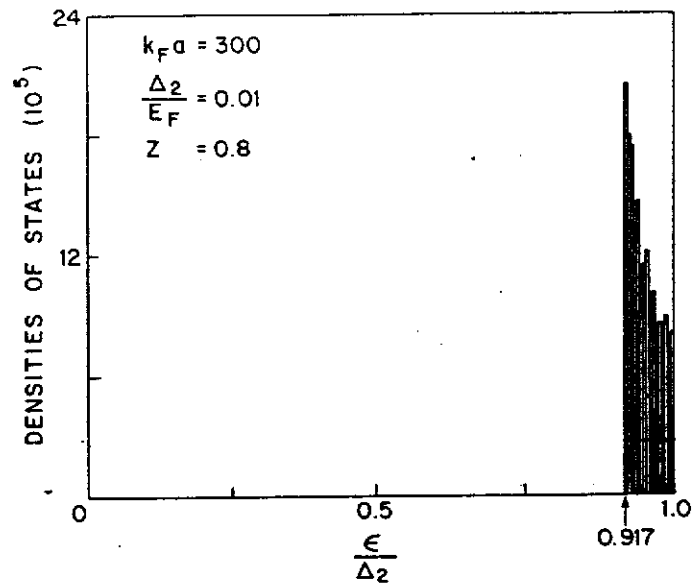
ภาพประกอบ 9(ข) แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ แถบที่ 2 เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.001, 0.005$ และ 0.01 และ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.2$



ภาพประกอบ 10(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $Z = 0$ โดย Z คือ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.390$

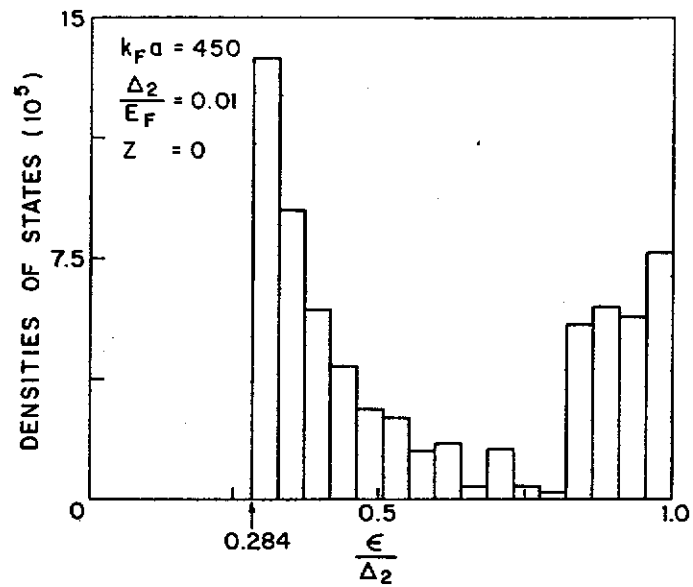


ภาพประกอบ 10(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $Z = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.647$

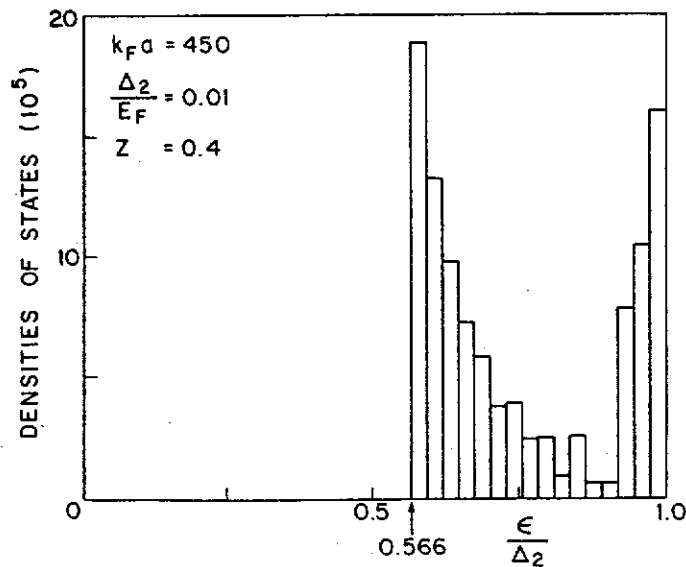


ภาพประกอบ 10(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 300$, $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $Z = 0.8$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.917$

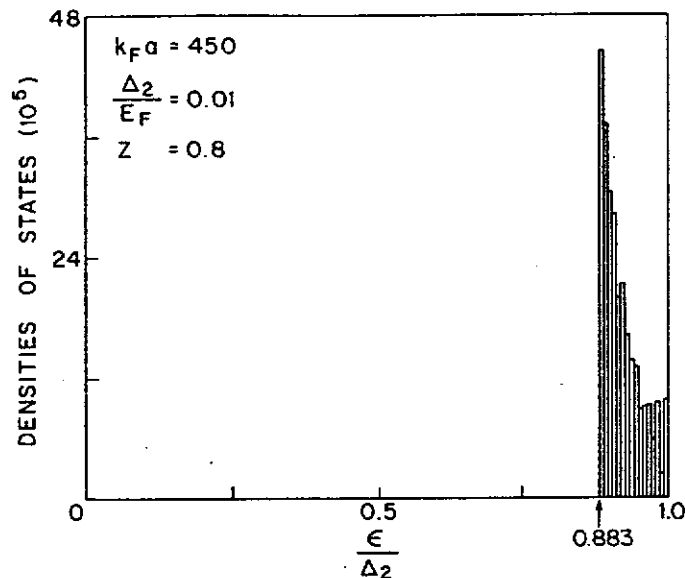
จากภาพประกอบ 10(ก), (ข) และ (ค) จะเห็นได้ว่าแถบพลังงานหลายแถบอยู่ในช่องว่างพลังงานของ Δ_2 และเมื่อ Z มีค่ามากขึ้น ช่องว่างพลังงานจะขยายกว้างขึ้นและแถบพลังงานที่เกิดขึ้นภายในแต่ละแถบนั้นจะอยู่ใกล้ชิดกันมากขึ้น



ภาพประกอบ 11(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 450$
 $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $Z = 0$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.284$



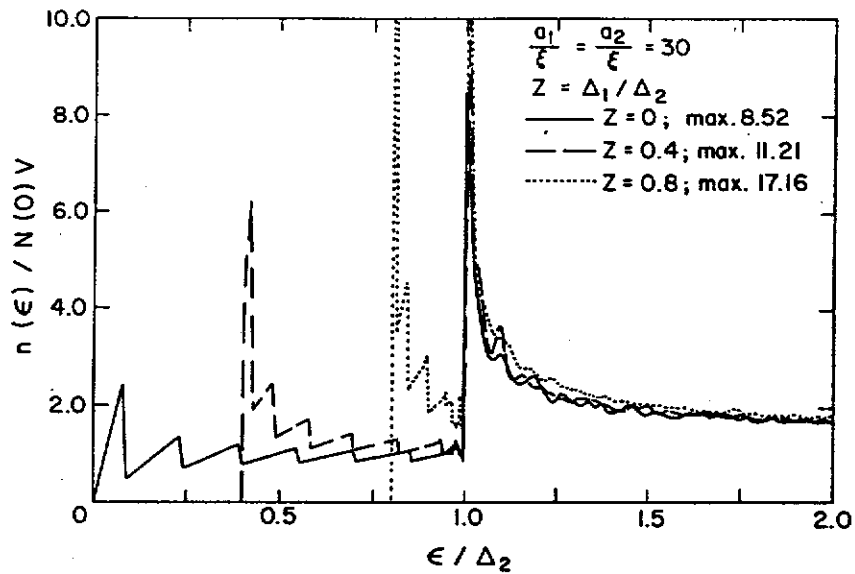
ภาพประกอบ 11(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 450$
 $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $Z = 0.4$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.566$



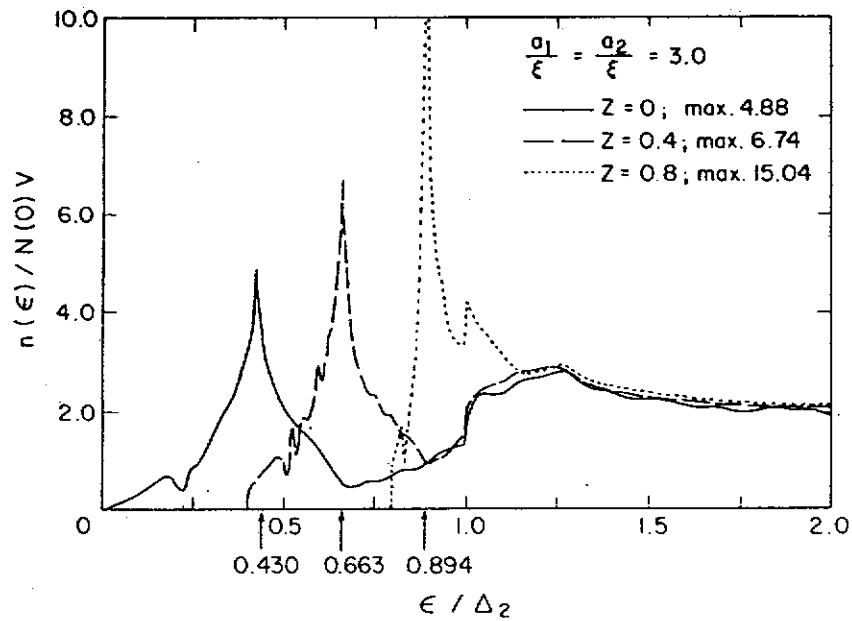
ภาพประกอบ 11(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $k_F a = 450$ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.01$ และ $Z = 0.8$ แถบพลังงานแถบแรกเริ่มต้นที่ $\frac{\epsilon}{\Delta_2} = 0.883$

จากการเปรียบเทียบค่าแถบพลังงานเริ่มต้นเมื่อ $k_F a$ ต่างกัน คือ $k_F a = 300$ ในภาพประกอบที่ 10 กับ $k_F a = 450$ ในภาพประกอบ 11 ปรากฏว่าเมื่อ $k_F a$ มีค่ามากขึ้น ช่องว่างพลังงานลดขนาดลง

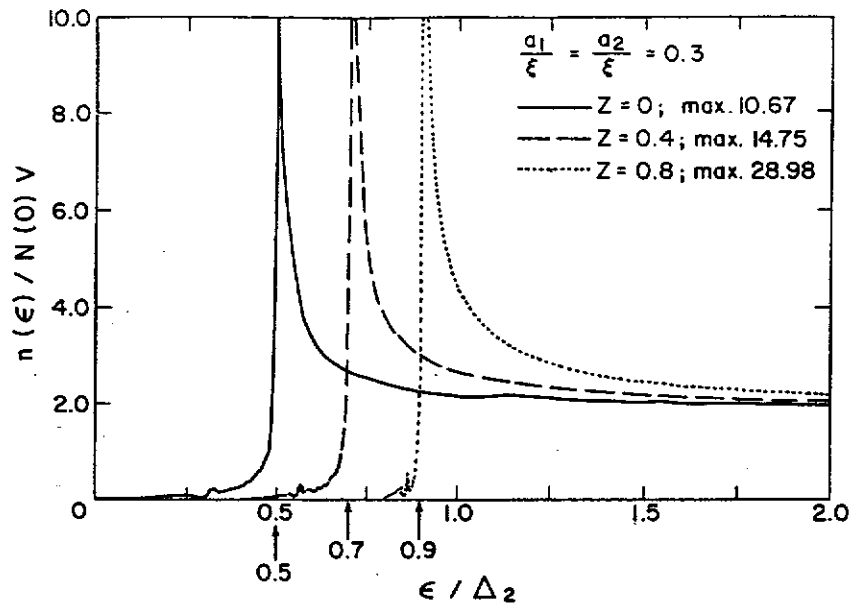
ในปี ค.ศ. 1986 ยุกส์ัน และ นาگی (Yuksan and Nagi. 1987 : 115) ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนและความหนาแน่นสถานะ ในกรณีที่มีแผ่นตัวนำยิ่งยวดต่างชนิดกันมาประกบกัน พบว่ามีแถบพลังงานส่วนแถบที่มีค่าต่ำกว่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Δ_2) โดยขนาดช่องว่างที่เกิดขึ้นในกรณีนี้จะขึ้นกับค่า Z และเมื่อ Z มีค่ามากขึ้น ช่องว่างพลังงานจะกว้างขึ้นและค่าสูงสุดของความหนาแน่นสถานะก็จะมากขึ้นตามดังภาพประกอบ 12, 13, 14, 15 และ 16



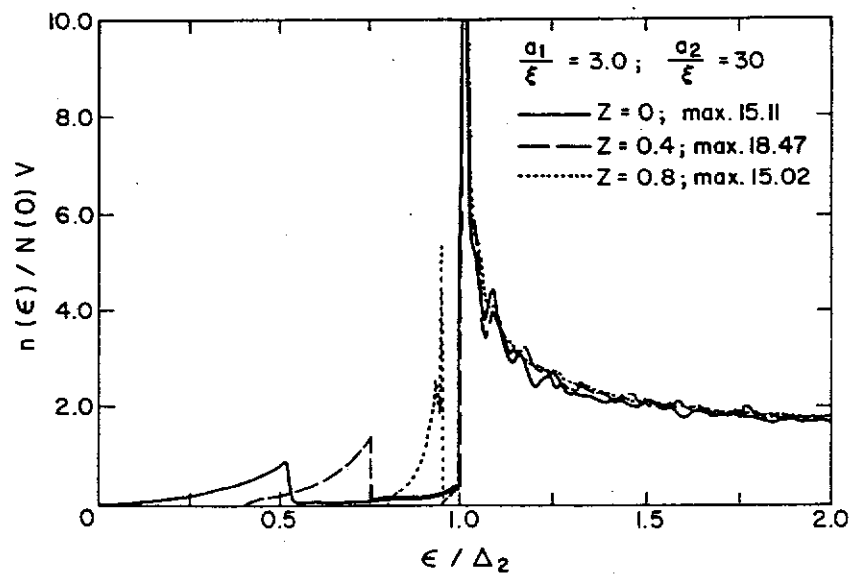
ภาพประกอบ 12 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon} = \frac{a_2}{\epsilon} = 30$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8 สำหรับกรณี $Z = 0$ ความหนาแน่นสถานะสูงสุดคือ 8.52, ϵ คือ ความยาวอาพันธ์, a_1 และ a_2 คือความหนาของแผ่นประกบ



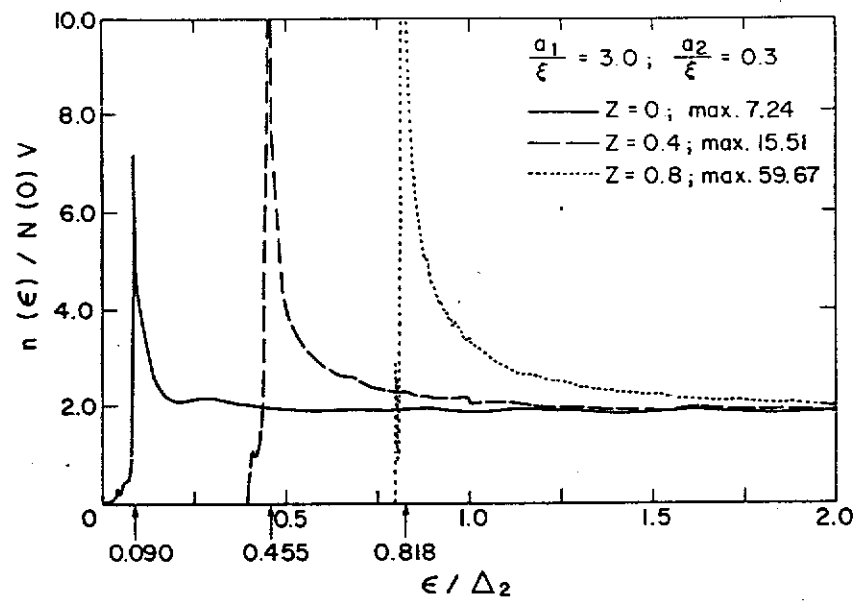
ภาพประกอบ 13 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon} = \frac{a_2}{\epsilon} = 3.0$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8



ภาพประกอบ 14 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi} = \frac{a_2}{\xi} = 0.3$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8



ภาพประกอบ 15 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi} = 3.0, \frac{a_2}{\xi} = 30$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8



ภาพประกอบ 16 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของ $\frac{\epsilon}{\Delta_2}$ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon} = 3.0, \frac{a_2}{\epsilon} = 0.3$ และ $Z = 0, 0.4$ และ 0.8

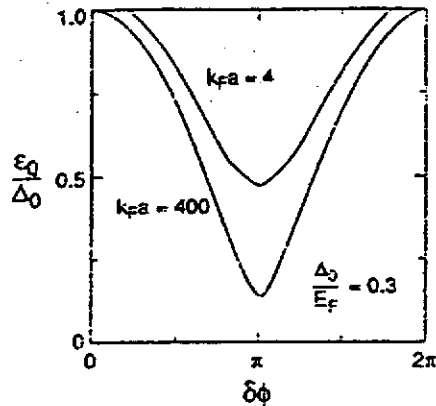
จากการเปรียบเทียบภาพประกอบ 12 ถึง 16 พอสรุปได้ว่า ค่าความหนาแน่นสถานะขึ้นกับความหนาของแผ่นตัวนำยิ่งยวดด้านที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสูงกว่าอีกด้าน ($\Delta_2 > \Delta_1$) มากกว่าที่จะขึ้นกับความหนาของด้านที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบต่ำกว่า

เมื่อกลางปี ค.ศ. 1991 ฮุย และ สเตราด์ (Hui and Stroud. 1991 : 6139) ได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน ในตัวนำยิ่งยวดทรงกลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง โดยพิจารณาว่าในตัวนำยิ่งยวดทั้งสองชนิด มีความแปรปรวนทางเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบคือ $\Delta_1(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\phi_1}$ และ $\Delta_2(\vec{r}) = \Delta_0 e^{i\phi_2}$ ตามลำดับ หรือ

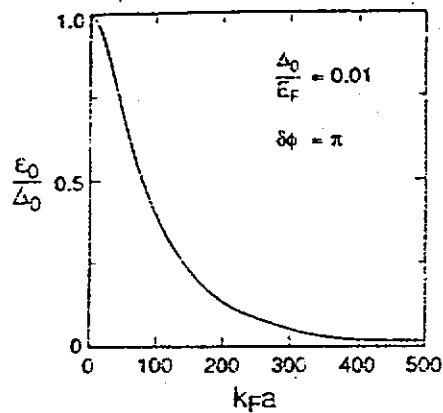
$$\Delta(\vec{r}) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\phi_1}, & r < a \\ \Delta_0 e^{i\phi_2}, & r > a \end{cases}$$

$\Delta(\vec{r})$ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) ที่ขึ้นกับค่าโคออร์ดิเนต (coordinate) ปริมาณนี้ทำหน้าที่เป็นพลังงาน โดยทั่วไปแล้ว $\Delta(\vec{r})$ ไม่ใช่ค่าที่คงที่ทั่วทั้งพลังงาน แต่จะเป็นค่าเดียวกับช่องว่างพลังงาน เมื่อสารตัวนำยิ่งยวดเป็นเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous)

โดยที่ ϕ_1, ϕ_2 คือเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในตัวนำยิ่งยวดทั้งสองชนิด สำหรับกรณีของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง เนื่องจากอัตราส่วน $\frac{\Delta}{E_F}$ ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิ ต่ำมีค่าประมาณ 10^{-4} และค่า $\frac{\Delta}{E_F}$ ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง (สารประกอบออกไซด์) มีค่าประมาณ 10^{-1} ดังนั้นค่าระยะอาพันธ์ของคู่เปอร์จะสั้นลง ($\epsilon = 10^\circ \text{A}$ ในระนาบ a-b และมีค่าประมาณ 2-3 $^\circ \text{A}$ ตามแนวแกน c) และเมื่ออุณหภูมิใกล้จุดวิกฤต (T_c), $\Delta(T)$ จะมีความแปรปรวนของเฟส เนื่องจากอิทธิพลของความร้อน ซึ่งทำให้สมบัติทางกายภาพต่าง ๆ เช่น ความจุความร้อนของระบบกระทบกระเทือนด้วย



ภาพประกอบ 17 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของความต่างเฟสระหว่างพารามิเตอร์ของความเป็นระเบียบ ($\delta\phi = \phi_1 - \phi_2$) พารามิเตอร์ $k_F a = 4, 400$ และ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.3$, Δ_0 ในที่นี้คืออัมพลิจูดของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ และ E_F คือพลังงานเฟอร์มิ



ภาพประกอบ 18 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนที่มี $l = 0$ เป็นฟังก์ชันของ $k_F a$ พารามิเตอร์ $\frac{\Delta_0}{E_F} = 0.01$ และ $\delta\phi = \pi$

จากกราฟจะพบว่า เมื่อความแตกต่างเฟสเป็นศูนย์ พลังงานกระตุ้นมีค่าเท่ากับช่องว่างพลังงาน (Δ_0) และพลังงานกระตุ้นจะมีค่าต่ำสุดเมื่อความแตกต่างเฟสเท่ากับ π ดังภาพประกอบ 17 และขณะที่ T เข้าใกล้ T_c ค่า $k_F a$ จะมีค่ามากขึ้น (เพราะว่า $k_F \propto T$) แล้วทำให้ $\frac{\epsilon_0}{\Delta_0}$ เข้าสู่ศูนย์ (ดังภาพประกอบ 18) เมื่อพิจารณภาพประกอบที่ 17 ตำแหน่งต่ำสุดของ $\frac{\epsilon}{\Delta_0}$ คือที่ $\phi = \phi_1 - \phi_2 = \pi$ และเมื่อ $T = T_c$ แล้ว $\langle \Delta e^{i\phi} \rangle = 0$

งานวิจัยของ ฮุส และ เสตราร์ด ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กทรอนิกส์อันเกิดจากความแตกต่างทางเฟส ในตัวนำยิ่งยวดทรงกลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง โดยวิธีการแกสมการ โบโกลีวอฟ (Bogoliubov equations)

ในส่วนที่ยังไม่ได้มีการวิจัยเลย คือกรณีที่มีแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด ซึ่งมีขนาด และเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบต่างกัน ซึ่งความแตกต่างทางเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบจะเกิดขึ้นในกรณีของสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมี $\frac{\Delta}{E_F} = 10^{-1}$ จึงน่าจะมีการศึกษาระบบที่ประกอบด้วยแผ่นประกบที่ทำจากตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด

ประเด็นที่จะศึกษาคือ ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นสถานะและพลังงานกระตุ้น กับความแตกต่างเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ ความหนาของแผ่นประกบ อัตราส่วนระหว่างพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบทั้งสองชนิด ($\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$) และอัตราส่วนระหว่างพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบกับพลังงานเฟอร์มี ($\frac{\Delta}{E_F}$)

ความรู้ที่ได้จะทำให้เราเข้าใจสมบัติต่างๆ ของสภาวะนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงยิ่งขึ้น และช่วยให้เข้าใจว่าสเปกตรัมของพลังงาน อันเกิดจากการนำแผ่นตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิดมาประกบกันนั้นว่าขึ้นกับปัจจัยอะไรบ้าง อีกทั้งยังเป็นแนวทางให้สามารถนำวิธีการนี้ใช้ในการศึกษาซูเปอร์แลตทิซ (superlattice) ซึ่งมีแผ่นประกบหลายรูปแบบเช่น ISINISINI... หรือ $IS_1IS_2IS_1IS_2!$... เป็นต้น

บทที่ 3
วิธีการวิจัย

วิธีการที่ใช้ในการคำนวณหา พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะสำหรับแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิดที่มีความหนาเป็น a_1 และ a_2 คือการแก้สมการโบโกลิบอฟที่มีรูปแบบเป็น

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - E_F \right) u + \Delta v = \epsilon u \quad (3.1 ก)$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_F \right) v + \Delta^* u = \epsilon v \quad (3.1 ข)$$

ในที่นี้ u คือ ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน

v คือ ฟังก์ชันคลื่นของโฮล

ϵ คือ ค่าไอเกน

E_F คือ พลังงานเฟอร์มี

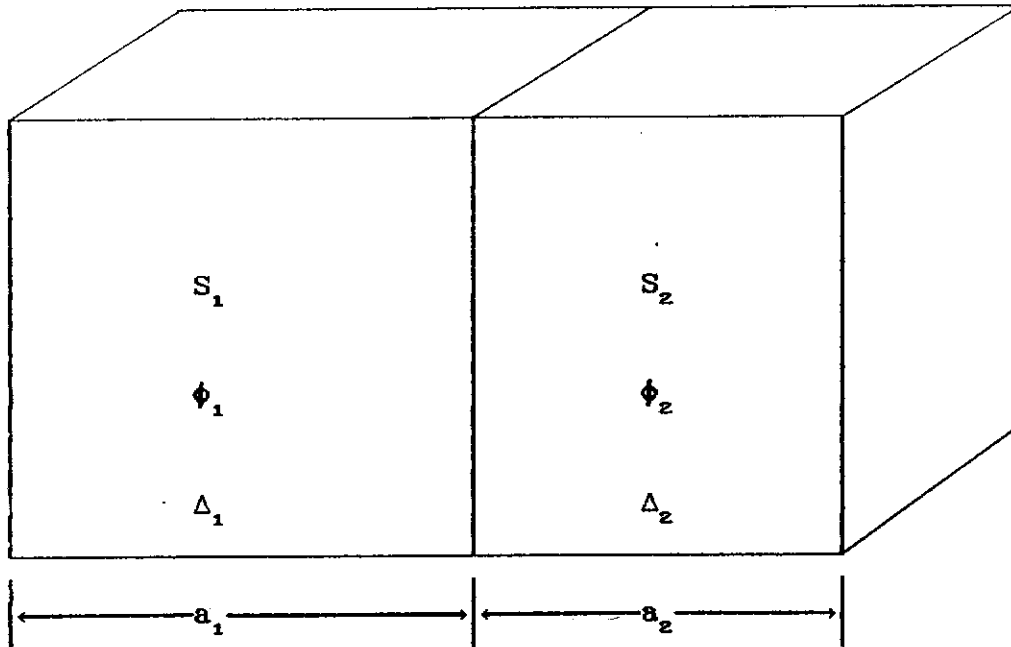
Δ คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ

ในการแก้สมการโบโกลิบอฟนี้ เรากำหนดให้ u และ v เป็นปฏิภาคโดยตรงกัน ทั้งนี้เนื่องจากการกระตุ้นของอิเล็กตรอนทำให้เกิดสถานะว่าง เหมือนกับการมีอนุภาคประจุบวกเกิดขึ้นที่เราเรียกว่าโฮลนั่นเอง ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่จะมีฟังก์ชันคลื่นรูปแบบเดียวกัน ในที่นี้เราให้ $v = \alpha u$ โดยที่ α เป็นค่าคงที่ที่แสดงว่าฟังก์ชันคลื่นทั้งสองมีเฟสและแอมพลิจูดต่างกัน เมื่อพารามิเตอร์ของความเป็นระเบียบมีค่าดังนี้ คือ

$$\Delta(\vec{r}) = \Delta(x) = \begin{cases} \Delta_1 e^{i\phi_1} & \text{เมื่อ } -a_1 < x < 0 \text{ ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงชนิดที่ 1} \\ \Delta_2 e^{i\phi_2} & \text{เมื่อ } 0 < x < a_2 \text{ ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงชนิดที่ 2} \end{cases} \quad (3.2)$$

a_1 คือ ความหนาของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงชนิดที่ 1

a_2 คือ ความหนาของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงชนิดที่ 2



ภาพประกอบ 19 แสดงแบบจำลองของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด

กรณี $-a_1 \leq x \leq 0$ ใน S_1

กำหนดให้ $v_1 = \alpha_1 u_1$ แล้วแทนลงในสมการ (3.1 ก) และ (3.1 ข) จะได้ว่า

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - E_F \right) u_1 + \Delta \alpha_1 u_1 = \epsilon u_1 \quad (3.3 \text{ ก})$$

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_F \right) \alpha_1 u_1 + \Delta^* u_1 = \epsilon \alpha_1 u_1 \quad (3.3 \text{ ข})$$

เขียนสมการ (3.3 ข) ใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + E_F \right) u_1 + \frac{\Delta^* u_1}{\alpha_1} = \epsilon u_1 \quad (3.4)$$

นำสมการ (3.3 ก) และ (3.4) มารวมกันจะได้เป็น

$$\Delta \alpha_1^2 - 2\epsilon \alpha_1 + \Delta^* = 0$$

หาค่า α_1 ได้จากการแก้สมการควอดราติก และแทนค่า Δ จากสมการ (3.2) จะได้

$$\alpha_{1\pm} = e^{-i\phi_1} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm \left[\frac{\epsilon^2}{\Delta_1^2} - 1 \right]^{1/2} \right]$$

โดย $\Delta_1 < \epsilon$ หรือ $1 < \frac{\epsilon}{\Delta_1}$ จากสมการ (3.1 ก) แทนค่า $v_1 = \alpha_1 u_1$ แล้วเขียนใหม่เป็น

$$\nabla^2 u + \frac{2m}{\hbar^2} (E_F - \Delta \alpha_{1\pm} + \epsilon) u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_F - \Delta \alpha_{1\pm} + \epsilon) u = 0 \quad (3.5)$$

โดย $u = X(x)Y(y)Z(z)$

คูณสมการ (3.5) ด้วย $u(x,y,z)$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_F - \Delta \alpha_{1\pm} + \epsilon) = 0 \quad (3.6)$$

พิจารณาเทอมสุดท้ายทางซ้ายมือของสมการ (3.6) โดยการแทนค่า $\alpha_{1\pm}$ และ ค่า Δ_1 ลงไป

$$\begin{aligned} & \frac{2m}{\hbar^2} (E_F - \Delta \alpha_{1\pm} + \epsilon) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_F \mp (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2} \right] \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_F \mp \Omega_1 \right] \\ &= k_{F\mp}^2 \mp \frac{2m\Omega_1}{\hbar^2} \end{aligned}$$

โดย $\Omega_1 = (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2}$

$$k_F^2 = \frac{2mE_F}{\hbar^2}$$

แต่ $k_F^2 = k_{11}^2 + k_{\perp}^2$

$$= k_F^2 \sin^2 \theta + k_F^2 \cos^2 \theta$$

θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ \vec{k} ทำกับแกน x มีค่าอยู่ในช่วง $0 \leq \theta \leq \pi$
เขียนสมการ (3.6) ใหม่เป็น

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_F^2 \cos^2 \theta \mp \frac{2m\Omega_1}{\hbar^2} = 0 \quad (3.7)$$

และ
$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_F^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (3.8)$$

จากสมการ (3.7)

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_{\pm}^2 \cos^2 \theta \mp \frac{2m\Omega_1}{\hbar^2} = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_{\pm}^2 X = 0 \quad (3.9 ก)$$

โดย
$$k_{\pm}^2 = k_F^2 \cos^2 \theta \pm \frac{2m\Omega_1}{\hbar^2}$$

$$k_{\pm} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[E_F \cos^2 \theta \pm \Omega_1 \right]^{1/2} \quad (3.9 ข)$$

สามารถหาคำตอบของสมการ (3.7) และ (3.8) โดยแทนเงื่อนไขขอบเขต $X(x = -a_1) = 0$
และจาก $u = X(x)Y(y)Z(z)$ แล้วจะได้ว่า

$$u = \left[A \sin k_{+}(x+a_1) + B \sin k_{-}(x+a_1) \right] e^{i\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{r}}$$

\vec{k}_{\perp} คือ เลขคลื่น (wave number) ในแนวที่ตั้งฉากกับแกน x
 A และ B เป็นค่าคงที่ที่ได้จากเงื่อนไขขอบเขต

จากสมการ (3.1 ก) และ (3.9 ข) จะได้ว่า

$$\Delta v = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + E_F u + \epsilon u$$

แล้ว
$$v_1 = \alpha_{1\pm} u_1$$

เนื่องจาก u เป็นผลรวมของ $\text{sink}_+(x+a_1)$ กับ $\text{sink}_-(x+a_1)$ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน
จะเห็นได้ว่า

$$v_{1-} = \alpha_{1-} A \text{sink}_+(x+a_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

$$v_{1+} = \alpha_{1+} B \text{sink}_-(x+a_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

แล้ว $v_1 = v_{1-} + v_{1+}$

$$= \left[\alpha_{1-} A \text{sink}_+(x+a_1) + \alpha_{1+} B \text{sink}_-(x+a_1) \right] e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

จาก $\alpha_{1\pm} = e^{-i\phi_1} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm \left(\frac{\epsilon^2}{\Delta_1^2} - 1 \right)^{1/2} \right]$

$$= e^{-i\phi_1} \left[\frac{\epsilon \pm \Omega_1}{\epsilon \mp \Omega_1} \right]^{1/2}$$

เขียน v_1 ใหม่ได้

$$v_1 = e^{-i\phi_1} \left[\left(\frac{\epsilon - \Omega_1}{\epsilon + \Omega_1} \right)^{1/2} A \text{sink}_+(x+a_1) + \left(\frac{\epsilon + \Omega_1}{\epsilon - \Omega_1} \right)^{1/2} B \text{sink}_-(x+a_1) \right] e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$$

โดย $u_1 = \left[A \text{sink}_+(x+a_1) + B \text{sink}_-(x+a_1) \right] e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}$

กรณี $0 \leq x \leq a_2$

จากสมการ (3.1 ก) และ (3.1 ข)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right) u + \Delta v = \epsilon u$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) v + \Delta^* u = \epsilon v$$

แทนค่า $v_2 = \alpha_2 u_2$ สามารถค้นหา $\alpha_{2\pm}$ ได้เป็น

$$\alpha_{2\pm} = e^{-i\phi_2} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm \left(\frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} - 1 \right)^{1/2} \right]$$

ในทำนองเดียวกันกรณี $0 < x < a_2$ สามารถหาคำตอบของสมการได้โดยให้

$$u = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + q_{\pm}^2 X = 0$$

$$q_{\pm} = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[E_F \cos^2 \theta \pm \Omega_2 \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

$$u_2 = \left[C \sin q_+(x-a_2) + D \sin q_-(x-a_2) \right] e^{i\Delta_2 x}$$

$$v_2 = e^{-i\phi_2} \left[\left(\frac{\epsilon - \Omega_2}{\epsilon + \Omega_2} \right)^{1/2} C \sin q_+(x+a_2) + \left(\frac{\epsilon + \Omega_2}{\epsilon - \Omega_2} \right)^{1/2} D \sin q_-(x+a_2) \right] e^{i\Delta_2 x}$$

$$\Omega_2 = (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{1/2}$$

\vec{q}_\perp คือเวกเตอร์คลื่นที่ตั้งฉากกับแกน x

C และ D เป็นค่าคงที่หาได้จากรูปทรงของระบบ

การคำนวณหาพลังงานกระตุ้น

ใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่ $x = 0$ คือ

$$1. \quad u_1(0) = u_2(0)$$

$$2. \quad v_1(0) = v_2(0)$$

$$3. \quad \frac{d}{dx} u_1(x) \Big|_{x=0^-} = \frac{d}{dx} u_2(x) \Big|_{x=0^+}$$

$$4. \quad \frac{d}{dx} v_1(x) \Big|_{x=0^-} = \frac{d}{dx} v_2(x) \Big|_{x=0^+}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$Asink_{+a_1} + Bsink_{-a_1} = -Csinq_{+a_2} - Dsinq_{-a_2}$$

$$e^{-i\phi_1} [AT_1^- sink_{+a_1} + BT_1^+ sink_{-a_1}] = -e^{-i\phi_2} [CT_2^- sinq_{+a_2} + DT_2^+ sinq_{-a_2}]$$

$$Ak_+ cosk_{+a_1} + Bk_- cosk_{-a_1} = Cq_+ cosq_{+a_2} + Dq_- cosq_{-a_2}$$

$$e^{-i\phi_1} [AT_1^- k_+ cosk_{+a_1} + BT_1^+ k_- cosk_{-a_1}] = e^{-i\phi_2} [CT_2^- q_+ cosq_{+a_2} + DT_2^+ q_- cosq_{-a_2}]$$

โดยสมมติสัญลักษณ์ใหม่เป็น

$$T_1^+ = \left(\frac{\epsilon + \Omega_1}{\epsilon - \Omega_1} \right)^{1/2}$$

$$T_1^- = \left(\frac{\epsilon - \Omega_1}{\epsilon + \Omega_1} \right)^{1/2}$$

$$T_2^+ = \left(\frac{\epsilon + \Omega_2}{\epsilon - \Omega_2} \right)^{1/2}$$

$$T_2^- = \left(\frac{\epsilon - \Omega_2}{\epsilon + \Omega_2} \right)^{1/2}$$

$$E_1 = sink_{+a_1}$$

$$E_2 = sink_{-a_1}$$

$$E_3 = sinq_{+a_2}$$

$$E_4 = sinq_{-a_2}$$

$$F_1 = k_+ cosk_{+a_1}$$

$$F_2 = k_- cosk_{-a_1}$$

$$F_3 = -q_+ cosq_{+a_2}$$

$$F_4 = -q_- cosq_{-a_2}$$

$$G_1 = e^{-i\phi_1} T_1^- sink_{+a_1}$$

$$G_2 = e^{-i\phi_1} T_1^+ sink_{-a_1}$$

$$G_3 = e^{-i\phi_2} T_2^- sinq_{+a_2}$$

$$G_4 = e^{-i\phi_2} T_2^+ sinq_{-a_2}$$

$$H_1 = e^{-i\phi_1} T_1^- k_+ cosk_{+a_1}$$

$$H_2 = e^{-i\phi_1} T_1^+ k_- cosk_{-a_1}$$

$$H_3 = -e^{-i\phi_2} T_2^- q_+ cosq_{+a_2}$$

$$H_4 = -e^{-i\phi_2} T_2^+ q_- cosq_{-a_2}$$

เมื่อดำรงที่ A, B, C, และ D ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ทำให้ได้ดีเทอร์มิแนนต์ของตัวแปรต่าง ๆ เท่ากับศูนย์ดังนี้

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

กระจายดีเทอร์มิแนนต์แล้วแทนค่าตัวแปรต่างๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & H_1 \left[G_2 (F_3 E_4 - F_4 E_3) - G_3 (F_2 E_4 - F_4 E_2) + G_4 (F_2 E_3 - F_3 E_2) \right] \\ & - H_2 \left[G_1 (F_3 E_4 - F_4 E_3) - G_3 (F_1 E_4 - F_4 E_1) + G_4 (F_1 E_3 - F_3 E_1) \right] \\ & + H_3 \left[G_1 (F_2 E_4 - F_4 E_2) - G_2 (F_1 E_4 - F_4 E_1) + G_4 (F_1 E_2 - F_2 E_1) \right] \\ & - H_4 \left[G_1 (F_2 E_3 - F_3 E_2) - G_2 (F_1 E_3 - F_3 E_1) + G_3 (F_1 E_2 - F_2 E_1) \right] \\ & = 0 \\ & (H_1 G_2 - H_2 G_1) (F_3 E_4 - F_4 E_3) + (H_3 G_1 - H_1 G_3) (F_2 E_4 - F_4 E_2) \\ & + (H_1 G_4 - H_4 G_1) (F_2 E_3 - F_3 E_2) + (H_2 G_3 - H_3 G_2) (F_1 E_4 - F_4 E_1) \\ & + (H_4 G_2 - H_2 G_4) (F_1 E_3 - F_3 E_1) + (H_3 G_4 - H_4 G_3) (F_1 E_2 - F_2 E_1) \\ & = 0 \end{aligned}$$

แทนค่าตัวแปรต่างๆ ลงในสมการ

$$\begin{aligned}
 & (e^{-2i\phi_1} T_1^+ T_1^- + e^{-2i\phi_2} T_2^+ T_2^-) (k_+ \cos k_+ a_1 \sin k_- a_1 - k_- \cos k_- a_1 \sin k_+ a_1) \\
 & \quad \times (q_- \cos q_- a_2 \sin q_+ a_2 - q_+ \cos q_+ a_2 \sin q_- a_2) \\
 & - e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} (T_1^- T_2^- + T_1^+ T_2^+) (k_+ \cos k_+ a_1 \sin q_+ a_2 + q_+ \cos q_+ a_2 \sin k_+ a_1) \\
 & \quad \times (k_- \cos k_- a_1 \sin q_- a_2 + q_- \cos q_- a_2 \sin k_- a_1) \\
 & + e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} (T_1^- T_2^+ + T_1^+ T_2^-) (k_+ \cos k_+ a_1 \sin q_- a_2 + q_- \cos q_- a_2 \sin k_+ a_1) \\
 & \quad \times (k_- \cos k_- a_1 \sin q_+ a_2 + q_+ \cos q_+ a_2 \sin k_- a_1) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

แทนค่า T_1^+, T_1^-, T_2^+ และ T_2^- จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 T_1^+ T_1^- &= T_2^+ T_2^- = 1 \\
 T_1^- T_2^- + T_1^+ T_2^+ &= 2 \left(\frac{\epsilon^2 + \Omega_1 \Omega_2}{\Delta_1 \Delta_2} \right) \\
 T_1^- T_2^+ + T_1^+ T_2^- &= 2 \left(\frac{\epsilon^2 - \Omega_1 \Omega_2}{\Delta_1 \Delta_2} \right)
 \end{aligned}$$

คูณสมการด้วย $e^{-i(\phi_1 + \phi_2)}$ และจัดรูปสมการใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
 & [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [k_+ \cos k_+ a_1 \sin k_- a_1 - k_- \cos k_- a_1 \sin k_+ a_1] \\
 & \quad \times [q_+ \cos q_+ a_2 \sin q_- a_2 - q_- \cos q_- a_2 \sin q_+ a_2] \\
 -\Omega_1 \Omega_2 & \left[\begin{aligned}
 & \frac{k_+ k_-}{2} [\cos(k_+ - k_-) a_1 + \cos(k_+ + k_-) a_1] \\
 & \quad \times [\cos(q_+ - q_-) a_2 - \cos(q_+ + q_-) a_2] \\
 & + \frac{q_+ q_-}{2} [\cos(q_+ - q_-) a_2 + \cos(q_+ + q_-) a_2] \\
 & \quad \times [\cos(k_+ - k_-) a_1 - \cos(k_+ + k_-) a_1] \\
 & + [k_+ \cos k_+ a_1 \sin k_- a_1 + k_- \cos k_- a_1 \sin k_+ a_1] \\
 & \quad \times [q_- \cos q_- a_2 \sin q_+ a_2 + q_+ \sin q_+ a_2 \cos q_- a_2]
 \end{aligned} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$(k_+ + k_-) = \bar{k}$$

$$(k_+ - k_-) = \Delta k$$

$$(q_+ + q_-) = \bar{q}$$

$$(q_+ - q_-) = \Delta q$$

$$\phi = \phi_1 - \phi_2$$

จัดรูปสมการ และ เขียนใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
 & \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
 & - \Omega_1 \Omega_2 \left[\begin{aligned} & 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\ & + 2(k_+ k_- - q_+ q_-) \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\ & + \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \end{aligned} \right] \\
 & = 0 \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

สมการ (3.12) เป็นสมการของพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในกรณี $\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$ โดยที่

$$k_{\pm} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E_F \cos^2 \theta \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2} \right) \right]^{1/2}$$

$$q_{\pm} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E_F \cos^2 \theta \pm (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{1/2} \right) \right]^{1/2}$$

$$\text{กรณี } \Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$$

เขียนค่าของ q_+ และ q_- ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 q_{\pm} &= \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E_F \cos^2 \theta \pm i(\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2} \right) \right]^{1/2} \\
 &= k_F \cos \theta \left[1 \pm i \frac{\Delta_2}{E_F} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{\pm} &= k_F \cos \theta \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right) \right)^{1/2} e^{\pm i\alpha} \right]^{1/2} \\
 &= k_F \cos \theta \left[1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right) \right]^{1/4} e^{\pm i\alpha/2}
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{\Delta_2}{E_F} \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan\alpha = B \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2}\right)^{1/2}$$

เพราะฉะนั้นค่าของ $\frac{q_{\pm}}{k_F} \frac{1}{\cos\theta}$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{q_{\pm}}{k_F} \frac{1}{\cos\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2}\right)^{1/2} + 1 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2}\right)^{1/2} - 1 \right)^{1/2} \right] \right] \end{aligned}$$

$$q_{\pm} = x_2 \pm ix_3$$

$$x_2 = \frac{k_F \cos\theta}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2}\right)^{1/2} + 1 \right)^{1/2} \right]$$

$$x_3 = \frac{k_F \cos\theta}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2}\right)^{1/2} - 1 \right)^{1/2} \right]$$

$$\Omega_2 = i(\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2} = i\rho$$

$$\rho = (\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2}$$

แทนค่า q_+ , q_- และ Ω_2 ลงในสมการ (3.12) แล้วจัดสมการใหม่เป็น

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos\phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\ & - \Omega_1 \rho \left[\begin{aligned} & (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \left[\cos \Delta k a_1 \cosh 2x_3 a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos 2x_2 a_2 \right] \\ & + (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \left[\cos \bar{k} a_1 \cosh 2x_3 a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos 2x_2 a_2 \right] \\ & + \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2 \right] \end{aligned} \right] \\ & = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

สมการ (3.13) เป็นสมการพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนในกรณี $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$

ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน คำนวณหาได้จากสมการ

$$N(\epsilon) = \sum_j n_j(\epsilon) \quad (3.14)$$

$$n_j(\epsilon) = \frac{2\pi N(0)V}{k_F(a_1 + a_2)} E_F \left| \cos\theta \frac{d}{d\epsilon}(\cos\theta_j) \right| \quad (3.15)$$

$N(\epsilon)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานเป็น ϵ

$n_j(\epsilon)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่มีพลังงานเป็น ϵ และมีมุมตกกระทบเป็น θ

$N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ

V คือ ปริมาตรของแผ่นประกบ

ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในกรณี $\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$ สามารถคำนวณได้โดยนำสมการ (3.12) มาหาอนุพันธ์เทียบกับพลังงาน แล้วแทนค่าลงในสมการ (3.14) และ (3.15) ตามลำดับ

กำหนดให้

$$X = 2E_F \left| \cos\theta \frac{d}{d\epsilon} \cos\theta_j \right|$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_+} + \frac{1}{k_-}$$

$$\frac{\Delta}{k} = \frac{1}{k_+} - \frac{1}{k_-}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_+} + \frac{1}{q_-}$$

$$\frac{\Delta}{q} = \frac{1}{q_+} - \frac{1}{q_-}$$

ดังนั้น
$$\frac{d}{d\epsilon} k_{\pm} = \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(E_F \cos^2\theta \pm \Omega_1 \right) \right]^{1/2}$$

$$= \frac{m}{\hbar^2 k_{\pm}} \left[X \pm \frac{\epsilon}{\Omega_1} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} (k_+ + k_-) = \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{k} X + \frac{\Delta}{k} \frac{\epsilon}{\Omega_1} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} (k_+ - k_-) = \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k} X + \frac{1}{k} \frac{\epsilon}{\Omega_1} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} q_{\pm} = \frac{m}{\hbar^2 q_{\pm}} \left[X \pm \frac{\epsilon}{\Omega_2} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} (q_+ + q_-) = \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{q} X + \frac{\Delta}{q} \frac{\epsilon}{\Omega_2} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} (q_+ - q_-) = \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{q} X + \frac{1}{q} \frac{\epsilon}{\Omega_2} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} k_+ k_- = \frac{4m^2}{\hbar^4 k_+ k_-} \left[E_F \cos^2 \theta X - \epsilon \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} q_+ q_- = \frac{4m^2}{\hbar^4 q_+ q_-} \left[E_F \cos^2 \theta X - \epsilon \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[k_+ k_- \pm q_+ q_- \right] = \frac{4m^2}{\hbar^4} \left[E_F \cos^2 \theta X - \epsilon \right] \left(\frac{1}{k_+ k_-} \pm \frac{1}{q_+ q_-} \right)$$

หาอนุพันธ์ของสมการ 3.12 เทียบกับ ϵ

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \right\}$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \Omega_2 \left[\begin{array}{l} 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\ + 2(k_+ k_- - q_+ q_-) \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\ + \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \end{array} \right]$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi] \right\} \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
& + \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \right\} \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
& + \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \right\} \\
& - \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \Omega_2 \right\} \left[\begin{aligned}
& 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& + 2(k_+ k_- - q_+ q_-) \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& + \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right]
\end{aligned} \right] \\
& - \Omega_1 \Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \right\} \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& - \Omega_1 \Omega_2 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \right\} \\
& - \Omega_1 \Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} 2(k_+ k_- - q_+ q_-) \right\} \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& - \Omega_1 \Omega_2 2(k_+ k_- - q_+ q_-) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \right\} \\
& - \Omega_1 \Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \right\} \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \\
& - \Omega_1 \Omega_2 \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \right\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

พิจารณาเทอมแรกของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] \right\} [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] \\ &= [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] 2\epsilon \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สองของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned} & [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \right\} [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] \\ &= [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] \\ & \quad \times \frac{m}{h^2} \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \times \\ & + [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] \end{aligned}$$

$$\times \frac{m}{h^2} \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \frac{\epsilon}{\Omega_1}$$

พิจารณาเทอมที่สามของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned} & [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2] \right\} \\ &= [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \\ & \quad \times \frac{m}{h^2} \left[\frac{\Delta}{q} (\sin \bar{q} a_2 - \bar{q} a_2 \cos \Delta q a_2) - \frac{1}{q} (\sin \Delta q a_2 - \Delta q a_2 \cos \bar{q} a_2) \right] \times \\ & + [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \end{aligned}$$

$$\times \frac{m}{h^2} \left[\frac{1}{q} (\sin \bar{q} a_2 - \bar{q} a_2 \cos \Delta q a_2) - \frac{\Delta}{q} (\sin \Delta q a_2 - \Delta q a_2 \cos \bar{q} a_2) \right] \frac{\epsilon}{\Omega_2}$$

พิจารณาเทอมที่สี่ของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \Omega_2 \right\} \left[\begin{aligned} & 2(k_+ k_- + q_+ q_-) [\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2] \\ & + 2(k_+ k_- - q_+ q_-) [\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2] \\ & + [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] \end{aligned} \right] \\
 & = - \epsilon \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \left[\begin{aligned} & 2(k_+ k_- + q_+ q_-) [\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2] \\ & + 2(k_+ k_- - q_+ q_-) [\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2] \\ & + [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] \end{aligned} \right] \\
 & = - \epsilon \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{1}{\Omega_1 \Omega_2} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \theta \right] \\
 & \quad \times [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] [\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2]
 \end{aligned}$$

โดยการแทนค่าสมการ (3.12) ลงในสมการข้างบน

พิจารณาเทอมที่ห้าของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} 2(k_+ k_- + q_+ q_-) \right\} [\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2] \\
 & = - \Omega_1 \Omega_2 \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \frac{8m^2}{\hbar^4} E_F \cos^2 \theta \left(\frac{1}{k_+ k_-} + \frac{1}{q_+ q_-} \right) \epsilon \\
 & \quad + \Omega_1 \Omega_2 \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \frac{8m^2}{\hbar^4} \left(\frac{1}{k_+ k_-} + \frac{1}{q_+ q_-} \right) \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่หกของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & -\Omega_1\Omega_2 2(k_+k_- + q_+q_-) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cos\Delta ka_1 \cos\Delta qa_2 - \cos\bar{k}a_1 \cos\bar{q}a_2 \right] \right\} \\
 &= -\Omega_1\Omega_2 (k_+k_- + q_+q_-) \frac{m}{\hbar^2} \left[\begin{aligned} & -\frac{\Delta}{k} a_1 \sin\Delta ka_1 \cos\Delta qa_2 - \frac{\Delta}{q} a_2 \cos\Delta ka_1 \sin\Delta qa_2 \\ & + \frac{1}{k} a_1 \sin\bar{k}a_1 \cos\bar{q}a_2 + \frac{1}{q} a_2 \cos\bar{k}a_1 \sin\bar{q}a_2 \end{aligned} \right] 2X \\
 & -\Omega_1\Omega_2 (k_+k_- + q_+q_-) \frac{m}{\hbar^2} \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin\Delta ka_1 \cos\Delta qa_2 - \frac{1}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos\Delta ka_1 \sin\Delta qa_2 \\ & + \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_2} \sin\bar{k}a_1 \cos\bar{q}a_2 + \frac{\Delta}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos\bar{k}a_1 \sin\bar{q}a_2 \end{aligned} \right] 2\epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เจ็ดของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & -\Omega_1\Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} 2(k_+k_- - q_+q_-) \right\} \left[\cos\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \cos\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 \right] \\
 &= -\Omega_1\Omega_2 \left[\cos\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \cos\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 \right] \frac{8m^2}{\hbar^4} E_F \cos^2 \theta \left(\frac{1}{k_+k_-} - \frac{1}{q_+q_-} \right) X \\
 & + \Omega_1\Omega_2 \left[\cos\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \cos\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 \right] \frac{8m^2}{\hbar^4} \left(\frac{1}{k_+k_-} - \frac{1}{q_+q_-} \right) \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่แปดของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & -\Omega_1\Omega_2 2(k_+k_- - q_+q_-) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cos\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \cos\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 \right] \right\} \\
 &= -\Omega_1\Omega_2 (k_+k_- - q_+q_-) \frac{m}{\hbar^2} \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{k} a_1 \sin\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \frac{\Delta}{q} a_2 \cos\bar{k}a_1 \sin\Delta qa_2 \\ & + \frac{\Delta}{k} a_1 \sin\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 + \frac{1}{q} a_2 \cos\Delta ka_1 \sin\bar{q}a_2 \end{aligned} \right] 2X \\
 & -\Omega_1\Omega_2 (k_+k_- - q_+q_-) \frac{m}{\hbar^2} \left[\begin{aligned} & -\frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin\bar{k}a_1 \cos\Delta qa_2 - \frac{1}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos\bar{k}a_1 \sin\Delta qa_2 \\ & + \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin\Delta ka_1 \cos\bar{q}a_2 + \frac{\Delta}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos\Delta ka_1 \sin\bar{q}a_2 \end{aligned} \right] 2\epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เก้าของสมการ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \Omega_2 \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \right\} [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] \\
 &= - \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \\
 &\quad \times [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] X \\
 & - \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \\
 &\quad \times [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] \frac{\epsilon}{\Omega_1}
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สิบของสมการที่ (3.16)

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \Omega_2 [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2] \right\} \\
 &= - \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{q} (\sin \bar{q} a_2 + \bar{q} a_2 \cos \bar{q} a_2) - \frac{\Delta}{q} (\sin \Delta q a_2 + \Delta q a_2 \cos \Delta q a_2) \right] \\
 &\quad \times [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] X \\
 & - \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{q} (\sin \bar{q} a_2 + \bar{q} a_2 \cos \bar{q} a_2) - \frac{1}{q} (\sin \Delta q a_2 + \Delta q a_2 \cos \Delta q a_2) \right] \\
 &\quad \times [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \frac{\epsilon}{\Omega_2}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสามารถเขียนสมการ (3.16) ใหม่ในเทอมของ X และ ϵ เป็น

$$T_1 X - S_1 \epsilon = 0$$

$$X = \frac{S_1 \epsilon}{T_1}$$

โดยกำหนดให้ S_1 และ T_1 เป็นผลรวมของสัมประสิทธิ์ของ X และ ϵ ในแต่ละเทอมในสมการ (3.16) ตามลำดับ ซึ่ง S_1 และ T_1 มีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
S_1 = & \left[2 - \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{(\Omega_1\Omega_2)^2} (\epsilon^2 - \Delta_1\Delta_2 \cos\phi) \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \times \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
& + \frac{m}{\hbar^2 \Omega_1} \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \\
& \times \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
& + \frac{m}{\hbar^2 \Omega_2} \left[\frac{1}{q} (\sin \bar{q} a_2 - \bar{q} a_2 \cos \Delta q a_2) - \frac{\Delta}{q} (\sin \Delta q a_2 - \Delta q a_2 \cos \bar{q} a_2) \right] \\
& \times \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& + 8 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m^2}{\hbar^4} \left(\frac{1}{k_+ k_-} + \frac{1}{q_+ q_-} \right) \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& - 2 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- + q_+ q_-) \left[\begin{aligned} & - \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \frac{1}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & + \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_2} \sin \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 + \frac{\Delta}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos \bar{k} a_1 \sin \bar{q} a_2 \end{aligned} \right] \\
& + 8 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m^2}{\hbar^4} \left(\frac{1}{k_+ k_-} - \frac{1}{q_+ q_-} \right) \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& - 2 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- - q_+ q_-) \left[\begin{aligned} & - \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \frac{1}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos \bar{k} a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & + \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \sin \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 + \frac{\Delta}{q} \frac{a_2}{\Omega_2} \cos \Delta k a_1 \sin \bar{q} a_2 \end{aligned} \right] \\
& - \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \\
& \times \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \\
& - \Omega_1 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{q} (\sin \bar{q} a_2 + \bar{q} a_2 \cos \bar{q} a_2) - \frac{1}{q} (\sin \Delta q a_2 + \Delta q a_2 \cos \Delta q a_2) \right] \\
& \times \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
T_1 = & -\frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \\
& \times \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left[\Delta q \sin \bar{q} a_2 - \bar{q} \sin \Delta q a_2 \right] \\
& - \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{q} (\sin \bar{q} a_2 - \bar{q} a_2 \cos \Delta q a_2) - \frac{1}{q} (\sin \Delta q a_2 - \Delta q a_2 \cos \bar{q} a_2) \right] \\
& \times \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& + 8 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m^2}{\hbar^4} E_F \cos^2 \theta \left(\frac{1}{k_+ k_-} + \frac{1}{q_+ q_-} \right) \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& + 2 \Omega_1 \Omega_2 \left(k_+ k_- + q_+ q_- \right) \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k_1} a_1 \sin \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \frac{\Delta}{q_2} a_2 \cos \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k_1} a_1 \sin \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 + \frac{1}{q_2} a_2 \cos \bar{k} a_1 \sin \bar{q} a_2 \right] \\
& + 8 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m^2}{\hbar^4} E_F \cos^2 \theta \left(\frac{1}{k_+ k_-} - \frac{1}{q_+ q_-} \right) \left[\cos \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \\
& + 2 \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left(k_+ k_- - q_+ q_- \right) \left[-\frac{1}{k_1} a_1 \sin \bar{k} a_1 \cos \Delta q a_2 - \frac{\Delta}{q_2} a_2 \cos \bar{k} a_1 \sin \Delta q a_2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta}{k_1} a_1 \sin \Delta k a_1 \cos \bar{q} a_2 + \frac{1}{q_2} a_2 \cos \Delta k a_1 \sin \bar{q} a_2 \right] \\
& + \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \\
& \quad \times \left[\bar{q} \sin \bar{q} a_2 - \Delta q \sin \Delta q a_2 \right] \\
& + \Omega_1 \Omega_2 \frac{m}{\hbar^2} \left[\frac{1}{q} (\sin \bar{q} a_2 + \bar{q} a_2 \cos \bar{q} a_2) - \frac{\Delta}{q} (\sin \Delta q a_2 + \Delta q a_2 \cos \Delta q a_2) \right] \\
& \quad \times \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

จากสมการ (3.14) และ (3.15) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\begin{aligned}
 N(\epsilon) &= \frac{\pi N(0)V}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j X_j \\
 &= \frac{\epsilon \pi N(0)V}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j \frac{S_1(\theta_j)}{T_1} \\
 \frac{N(\epsilon)}{N(0)V} &= \frac{\epsilon \pi}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j \frac{S_1(\theta_j)}{T_1} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

ความหนาแน่นสถานะในกรณีที่ $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$ หาได้โดยนำสมการ (3.13) มาหาอนุพันธ์เทียบกับพลังงานแล้วแทนค่าลงในสมการ (3.14) และ (3.15) ตามลำดับ โดย

$$\frac{d}{d\epsilon} \bar{k} a_1 = \frac{m a_1}{\hbar^2} \left[\frac{1}{k} X + \frac{\Delta}{k} \Omega_1 \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \Delta k a_1 = \frac{m a_1}{\hbar^2} \left[\frac{\Delta}{k} X + \frac{1}{k} \Omega_1 \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} k_+ k_- = \frac{4m^2}{\hbar^4 k_+ k_-} \left[E_F \cos^2 \theta X - \epsilon \right]$$

$$\begin{aligned}
 2x_2 a_2 &= \frac{2}{\sqrt{2}} k_F a_2 \cos \theta \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right) \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2} \\
 &= 2a_2 \left[\frac{m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[\left(E_F^2 \cos^4 \theta + (\Delta_2^2 - \epsilon^2) \right)^{1/2} + E_F \cos^2 \theta \right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\epsilon} 2x_2 a_2 &= \frac{m a_2}{\hbar^2 x_2} \left[\frac{1}{w} (E_F \cos^2 \theta X - \epsilon) + X \right] \\
 &= \frac{m a_2}{\hbar^2 x_2} \frac{1}{w} \left[(E_F \cos^2 \theta + w) X - \epsilon \right]
 \end{aligned}$$

กำหนดให้ $w = \left[E_F^2 \cos^4 \theta + \Delta_2^2 - \epsilon^2 \right]^{1/2}$

$$2x_3 a_2 = 2a_2 \left[\frac{m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[\left(E_F^2 \cos^4 \theta + \Delta_2^2 - \epsilon^2 \right)^{1/2} - E_F \cos^2 \theta \right]^{1/2}$$

$$\frac{d}{d\epsilon} 2x_3 a_2 = \frac{m a_2}{\hbar^2 x_3} \frac{1}{w} \left[(E_F \cos^2 \theta - w) X - \epsilon \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \rho = \frac{\rho}{\Omega_1} - \frac{\Omega_1}{\rho}$$

$$x_2^2 = \frac{m}{\hbar^2} [(E_F^2 \cos^4 \theta + \Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2} + E_F \cos^2 \theta]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} x_2^2 = \frac{m}{\hbar^2 w} [(E_F \cos^2 \theta + w)X - \epsilon]$$

$$x_3^2 = \frac{m}{\hbar^2} [(E_F^2 \cos^4 \theta + \Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2} - E_F \cos^2 \theta]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} x_3^2 = \frac{m}{\hbar^2 w} [(E_F \cos^2 \theta - w)X - \epsilon]$$

จากสมการ (3.13)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon} \left\{ [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] [x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2] \right\} \\ & - \frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \rho \left[\begin{aligned} & (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) [\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1] \\ & + (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) [\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1] \\ & + (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \end{aligned} \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] \right\} [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] [x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2] \\ & + [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \right\} [x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2] \\ & + [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi] [\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2] \right\} \\ & - \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \rho \right\} \left[\begin{aligned} & (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) [\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1] \\ & + (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) [\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1] \\ & + (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \right\} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \\
& - \Omega_1 \rho (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \right\} \\
& - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \right\} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \\
& - \Omega_1 \rho (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \right\} \\
& - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \right\} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \\
& - \Omega_1 \rho (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \right\} \\
& = 0 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมแรกของสมการ (3.20)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \right\} \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& = 2\epsilon \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right]
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สอง

$$\begin{aligned}
& \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \right\} \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& = \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& \quad \times \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \frac{m}{\hbar^2} x \\
& + \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \frac{m}{\hbar^2} \frac{\epsilon}{\Omega_1}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สาม

$$\begin{aligned}
& \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \right\} \\
& = \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{2x_3} (\sin 2x_2 a_2 - 2x_2 a_2 \cosh 2x_3 a_2) (E_f \cos^2 \theta - w) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2x_2} (2x_3 a_2 \cos 2x_2 a_2 - \sinh 2x_3 a_2) (E_f \cos^2 \theta + w) \right] \frac{m}{h^2} \frac{X}{w} \\
& - \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \quad \times \left[\frac{1}{2x_3} (\sin 2x_2 a_2 - 2x_2 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2x_2} (2x_3 a_2 \cos 2x_2 a_2 - \sinh 2x_3 a_2) \right] \frac{m}{h^2} \frac{\epsilon}{w}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สี่

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{d}{d\epsilon} \Omega_1 \rho \right) \left[\begin{aligned} & (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \\ & + (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \\ & + (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \end{aligned} \right] \\
& = - \left(\frac{\rho}{\Omega_1} - \frac{\Omega_1}{\rho} \right) \left[\begin{aligned} & (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \\ & + (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \\ & + (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \end{aligned} \right] \\
& = - \frac{(\rho^2 - \Omega_1^2)}{(\Omega_1 \rho)^2} \left[\epsilon^2 - \cos \phi \Delta_1 \Delta_2 \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \quad \times \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right]
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่ ๓

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \right\} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \\
 & = - \Omega_1 \rho \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} + \frac{2}{w} \right) E_F \cos^2 \theta \frac{m}{\hbar^2} X \\
 & \quad + \Omega_1 \rho \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} + \frac{2}{w} \right) \frac{m}{\hbar^2} \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่ ๔

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \rho (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \right\} \\
 & = - \Omega_1 \rho (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \\
 & \quad \times \left[\begin{aligned} & \frac{a_2}{x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \frac{\Delta}{k} a_1 \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\ & + \frac{a_2}{x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) \sin 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 + \frac{1}{k} a_1 \cos 2x_2 a_2 \sin \bar{k} a_1 \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} X \\
 & - \Omega_1 \rho (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \\
 & \quad \times \left[\begin{aligned} & - \frac{a_2}{x_3 w} \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\ & - \frac{a_2}{x_2 w} \sin 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 + \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cos 2x_2 a_2 \sin \bar{k} a_1 \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่ ๕

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \right\} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \\
 & = - \Omega_1 \rho \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} - \frac{2}{w} \right) E_F \cos^2 \theta \frac{m}{\hbar^2} X \\
 & \quad + \Omega_1 \rho \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} - \frac{2}{w} \right) \frac{m}{\hbar^2} \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่แปด

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \rho (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \right\} \\
 & = - \Omega_1 \rho (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \\
 & \quad \times \left[\begin{aligned} & \frac{a_1}{x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) \sinh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \frac{1}{k} a_1 \cosh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\ & \frac{a_2}{x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) \sin 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 + \frac{\Delta}{k} a_1 \cos 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} X \\
 & - \Omega_1 \rho (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \\
 & \quad \times \left[\begin{aligned} & - \frac{a_2}{x_3 w} \sinh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cosh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\ & - \frac{a_2}{x_2 w} \sin 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 + \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cos 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่เก้า

$$\begin{aligned}
 & - \Omega_1 \rho \left\{ \frac{d}{d\epsilon} (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \right\} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \\
 & = - \Omega_1 \rho \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \\
 & \quad \times \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) (\sin 2x_2 a_2 + 2x_2 a_2 \cos 2x_2 a_2) \\ & + \frac{1}{2x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) (\sinh 2x_3 a_2 + 2x_3 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} X \\
 & + \Omega_1 \rho \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2x_2 w} (\sin 2x_2 a_2 + 2x_2 a_2 \cos 2x_2 a_2) \\ & + \frac{1}{2x_3 w} (\sinh 2x_3 a_2 + 2x_3 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \end{aligned} \right] \frac{m}{\hbar^2} \epsilon
 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมที่สี่

$$- \Omega_1 \rho (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \left\{ \frac{d}{d\epsilon} [\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1] \right\}$$

$$= - \Omega_1 \rho (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2)$$

$$\times \left[\frac{1}{\bar{k}} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{\Delta}{\bar{k}} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \frac{m}{h^2} X$$

$$- \Omega_1 \rho (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2)$$

$$\times \left[\frac{\Delta}{\bar{k}} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{1}{\bar{k}} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right] \frac{m}{h^2} \frac{\epsilon}{\Omega_1}$$

เพราะฉะนั้นสามารถเขียนสมการ (3.20) ใหม่ในเทอมของ X และ ϵ เป็น

$$T_2 X - S_2 \epsilon = 0$$

$$X = \frac{S_2 \epsilon}{T_2}$$

โดยกำหนดให้ S_2 และ T_2 เป็นผลรวมของสัมประสิทธิ์ของ X และ ϵ ในแต่ละเทอมในสมการ (3.20) ตามลำดับ ซึ่ง S_2 และ T_2 มีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
S_2 = & \left[2 - \left(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right) \left(\frac{\rho^2 - \Omega_1^2}{(\rho \Omega_1)^2} \right) \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \times \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& + \frac{m}{\hbar^2 \Omega_1} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right] \\
& \times \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right] \\
& - \frac{m}{\hbar^2 w} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \delta \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \times \left[\frac{1}{2x_3} (\sin 2x_2 a_2 - 2x_2 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2x_2} (2x_3 a_2 \cos 2x_2 a_2 - \sinh 2x_3 a_2) \right] \\
& + \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} + \frac{2}{w} \right) \\
& - \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2) \\
& \times \left[- \frac{a_2}{x_3 w} \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2}{x_2 w} \sin 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 + \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cos 2x_2 a_2 \sin \bar{k} a_1 \right] \\
& + \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} - \frac{2}{w} \right) \\
& - \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \\
& \times \left[- \frac{a_2}{x_3 w} \sinh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \frac{\Delta}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cosh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_2}{x_2 w} \sin 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 + \frac{1}{k} \frac{a_1}{\Omega_1} \cos 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \right]
\end{aligned}$$

$$+ \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2 w} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2x_2} (\sin 2x_2 a_2 + 2x_2 a_2 \cos 2x_2 a_2) \\ + \frac{1}{2x_3} (\sinh 2x_3 a_2 + 2x_3 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \end{array} \right]$$

$$- \rho \frac{m}{\hbar^2} (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2)$$

$$\times \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right]$$

(3.21)

$$T_2 = - \frac{m}{\hbar^2} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[x_3 \sin 2x_2 a_2 - x_2 \sinh 2x_3 a_2 \right]$$

$$\times \left[\frac{\Delta}{k} (\sin \bar{k} a_1 - \bar{k} a_1 \cos \Delta k a_1) - \frac{1}{k} (\sin \Delta k a_1 - \Delta k a_1 \cos \bar{k} a_1) \right]$$

$$- \frac{m}{\hbar^2 w} \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \cos \phi \right] \left[\Delta k \sin \bar{k} a_1 - \bar{k} \sin \Delta k a_1 \right]$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2x_3} (\sin 2x_2 a_2 - 2x_2 a_2 \cosh 2x_3 a_2) (E_F \cos^2 \theta - w) \\ + \frac{1}{2x_2} (2x_3 a_2 \cos 2x_2 a_2 - \sinh 2x_3 a_2) (E_F \cos^2 \theta + w) \end{array} \right]$$

$$+ \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} E_F \cos^2 \theta \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} + \frac{2}{w} \right)$$

$$+ \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- + x_2^2 + x_3^2)$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \frac{a_2}{x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \frac{\Delta}{k_1} a_1 \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\ + \frac{a_2}{x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) \sin 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \frac{1}{k_1} a_1 \cos 2x_2 a_2 \sin \bar{k} a_1 \end{array} \right]$$

$$+ \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} E_F \cos^2 \theta \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 \right] \left(\frac{4m}{\hbar^2} \frac{1}{k_+ k_-} - \frac{2}{w} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} (k_+ k_- - x_2^2 - x_3^2) \\
& \times \left[\begin{aligned} & \frac{a_1}{x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) \sinh 2x_3 a_2 \cos \bar{k} a_1 - \frac{1}{k} a_1 \cosh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\ & \frac{a_2}{x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) \sin 2x_2 a_2 \cos \Delta k a_1 + \frac{\Delta}{k} a_1 \cos 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \end{aligned} \right] \\
& + \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} \left[\bar{k} \sin \bar{k} a_1 - \Delta k \sin \Delta k a_1 \right] \\
& \times \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) (\sin 2x_2 a_2 + 2x_2 a_2 \cos 2x_2 a_2) \\ & + \frac{1}{2x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) (\sinh 2x_3 a_2 + 2x_3 a_2 \cosh 2x_3 a_2) \end{aligned} \right] \\
& + \Omega_1 \rho \frac{m}{\hbar^2} (x_2 \sin 2x_2 a_2 + x_3 \sinh 2x_3 a_2) \\
& \times \left[\frac{1}{k} (\sin \bar{k} a_1 + \bar{k} a_1 \cos \bar{k} a_1) - \frac{\Delta}{k} (\sin \Delta k a_1 + \Delta k a_1 \cos \Delta k a_1) \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

จากสมการ (3.14) และ (3.15)

$$\begin{aligned}
N(\epsilon) &= \frac{\pi N(0)V}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j X_j \\
&= \frac{\epsilon \pi N(0)V}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j \frac{S_{\mathbf{E}}(\theta_j)}{T_2} \\
\frac{N(\epsilon)}{N(0)V} &= \frac{\epsilon \pi}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j \frac{S_{\mathbf{E}}(\theta_j)}{T_2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

บทที่ 4
ผลงานวิจัย

จากแบบจำลองแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิดที่แตกต่างกัน สามารถคำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน ในกรณี $\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$ กับ กรณี $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$ และความหนาแน่นสถานะ โดยทำการตรวจสอบผลการคำนวณที่ได้กับผลการวิจัยอื่นๆ เช่น ผลงานวิจัยของ ยกसान และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) ซึ่งได้คำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน ในแบบจำลองแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำสองชนิด

ในการคำนวณเราจะประมาณว่า

$$\epsilon \ll E_F \cos^2 \theta \quad , \quad \frac{\Delta}{E_F \cos^2 \theta} \simeq 10^{-4} \ll 1$$

โดย $\cos \phi = 0$ เพราะ $E_F \gg \Delta$

จากสมการ (3.9 ข) และ (3.10) เราอาจเขียนค่า k_{\pm} และ q_{\pm} ใหม่ได้ว่า

$$k_{\pm} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[E_F \cos^2 \theta \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$\simeq \left[\frac{2mE_F}{\hbar^2} \right]^{1/2} \cos \theta = k_F \cos \theta$$

$$q_{\pm} = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right]^{1/2} \left[E_F \cos^2 \theta \pm (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$\simeq k_F \cos \theta$$

เพราะฉะนั้น $k_+ \simeq k_- \simeq q_+ \simeq q_-$

หรือ $\bar{k} = k_+ + k_- = \bar{q} = q_+ + q_- = 2k_F \cos \theta$

และ $\Delta k = k_+ - k_- = \Delta q = q_+ - q_- = 0$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (3.12) (สมการพลังงานกระตุ้น ในกรณี $\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$) จะได้

$$\begin{aligned}
& \left[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2 \right] \sin \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \\
& - \Omega_1 \Omega_2 \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 + \sin \bar{k} a_1 \sin \bar{q} a_2 \right] = 0 \\
& \left[\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \Omega_2} \right] \sin \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 + \cos(\bar{k} a_1 + \bar{q} a_2) = \cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ตรงตามสมการที่ (15) ในงานวิจัยแม่ประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำของยอกสัน และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115)

พิจารณากรณีที่ $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$ จากการกำหนดให้

$$q_{\pm} = x_2 \pm ix_3$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2x_2 a_2 = \bar{q} a_2 &= \frac{2}{\sqrt{2}} k_F a_2 \cos \theta \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right) \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2} \\
&\simeq 2k_F a_2 \cos \theta
\end{aligned}$$

$$i2x_3 a_2 = \Delta q a_2 = i \frac{2}{\sqrt{2}} k_F a_2 \cos \theta \left[\left(1 + B^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} \right) \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2}$$

$$2x_3 a_2 \simeq \frac{2a_2 (\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2}}{\pi \epsilon \Delta_2 \cos \theta}$$

ซึ่งเราใช้

$$\epsilon = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta_2} \quad \text{และ} \quad E_F = \frac{\hbar k_F v_F}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\bar{k} a_1 \simeq 2k_F a_2 \cos \theta$$

$$\Delta k a_1 \simeq \frac{2a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2}}{\pi \epsilon \Delta_2 \cos \theta}$$

เมื่อแทนค่าต่างลงในสมการ (3.13) เราจะได้

$$\left[\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \rho} \right] \sinh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 + \cos(\bar{k} a_1 + 2x_2 a_2) = \cos \Delta k a_1 \cosh 2x_3 a_2 \quad (4.2)$$

ตรงตามสมการที่ (17) ในงานวิจัยแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดออกฤทธิ์ต่ำของยกล้าน และนาگی (Yoksan and Nagi. 1987 : 115)

พิจารณา ความหนาแน่นสถานะ กรณี $\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$

จากการประมาณในแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดออกฤทธิ์ต่ำ จะได้ว่า

$$q_+ \simeq q_- \simeq k_+ \simeq k_- \simeq k_F \cos \theta$$

ดังนั้น
$$\frac{\Delta}{k} = \frac{\Delta}{q} = \Delta k = \Delta q = 0$$

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{q}} = \frac{2}{k_F \cos \theta} \quad \bar{k} = \bar{q} = 2k_F \cos \theta$$

$$k_F = \left[\frac{2m}{\hbar^2} E_F \right]^{1/2} \quad \text{และ} \quad E_F = \frac{\pi \Delta_2 \xi k_F}{2}$$

เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (3.17) เพื่อหาค่า S_1 จะได้

$$\begin{aligned} S_1 = & \frac{8mk_F \cos \theta}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{\Omega_1} [a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_1^2] \cos \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \right. \\ & + \frac{1}{\Omega_2} [a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_1 \Omega_2^2] \sin \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 \\ & + \frac{\pi \Delta_2 \xi \cos \theta}{2} \left[2 - \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{(\Omega_1 \Omega_2)^2} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2] \right] \sin \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & - \frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) \sin \bar{k} a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & - \frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_2} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \Delta k a_1 \sin \bar{q} a_2 \\ & \left. + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{k_F E_F} \frac{1}{\cos^3 \theta} \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

และเมื่อแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (3.18) เพื่อหาค่า T_1 จะได้

$$T_1 = \frac{8m}{\hbar^2} \left\{ -[\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2] \sin \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 + \Omega_1 \Omega_2 \sin \bar{k} a_1 \sin \bar{q} a_2 \right. \\ \left. + \Omega_1 \Omega_2 [\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2] \right. \\ \left. + \Omega_1 \Omega_2 k_F \cos \theta (a_1 + a_2) \sin(\bar{k} a_1 + \bar{q} a_2) \right\}$$

จากสมการข้างบน เมื่อแทนค่าสมการพลังงานกระตุ้นสมการ (4.1) ($\Delta_1 < \Delta_2 < \epsilon$) ของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดสองชนิดต่ำของยอกสัน และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) ลงในสมการข้างบน จะได้ว่า

$$T_1 = \frac{8m}{\hbar^2} k_F \Omega_1 \Omega_2 \cos \theta (a_1 + a_2) \sin(\bar{k} a_1 + \bar{q} a_2)$$

แทนค่า S_1 และ T_1 ลงในสมการ (3.19) เพื่อหาค่าความหนาแน่นสถานะ

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)V} = \sum_j \pi \epsilon \left[\begin{aligned} & \frac{1}{\Omega_1} [a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_1^2] \cos \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & + \frac{1}{\Omega_2} [a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_1 \Omega_2^2] \sin \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 \\ & + \frac{\pi \Delta_2 \xi \cos \theta}{2} \left[2 - \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{(\Omega_1 \Omega_2)^2} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2] \right] \sin \Delta k a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & - \frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) \sin \bar{k} a_1 \sin \Delta q a_2 \\ & - \frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_2} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \Delta k a_1 \sin \bar{q} a_2 \\ & + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{k_F E_F} \frac{1}{\cos^3 \theta} [\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2] \end{aligned} \right] \\ k_F (a_1 + a_2)^2 \Omega_1 \Omega_2 \sin(\bar{k} a_1 + \bar{q} a_2) \quad (4.3)$$

มีเทอมเพิ่มขึ้นมาสามเทอม ใน S_1 ที่ไม่เหมือนในกรณีแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดสองชนิดต่ำของยอกสัน และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) คือ

$$\frac{8mk_F \cos \theta}{\hbar^2} \left\{ -\frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) \sin \bar{k} a_1 \sin \Delta q a_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2k_F \cos \theta \Omega_2} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \Delta k a_1 \sin \bar{q} a_2 \right. \\ \left. + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{k_F E_F} \frac{1}{\cos^3 \theta} \left[\cos \Delta k a_1 \cos \Delta q a_2 - \cos \bar{k} a_1 \cos \bar{q} a_2 \right] \right\}$$

จากเงื่อนไข $\epsilon \ll E_F \cos^2 \theta$ และ $\Delta \ll E_F \cos^2 \theta$ อาจประมาณได้ว่าสามเทอมที่เพิ่มขึ้นมามีค่าเป็นศูนย์ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ เพราะจะเกิดการประมาณนี้ก็จะตรงตามสมการที่(21) ในการคำนวณในแง่ประกัปตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำของยอกสัน และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115)

ความหนาแน่นสถานะ กรณี $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$

จากการหาค่าอนุพันธ์ของ $2x_2$ และ $2x_3$ เกี่ยวกับพลังงานกระตุ้น มีค่าเป็น

$$\frac{d}{d\epsilon} 2x_2 = \frac{d}{d\epsilon} \bar{q} = \frac{1}{x_2 w} \frac{m}{\hbar^2} [(E_F \cos^2 \theta + w)X - \epsilon]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} 2x_3 = \frac{d}{d\epsilon} \Delta q = \frac{1}{x_3 w} \frac{m}{\hbar^2} [(E_F \cos^2 \theta - w)X - \epsilon]$$

เมื่อใช้เงื่อนไขการประมาณดังกล่าวที่ผ่านมา จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\epsilon} \bar{q} \approx \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k_F \cos \theta} \left[2X - \frac{\epsilon}{E_F \cos^2 \theta} \right]$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \Delta q \approx \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k_F \cos \theta} \left[\frac{-\rho}{E_F \cos^2 \theta} X - \frac{2}{\rho} \epsilon \right]$$

โดยการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ X และ ϵ เราจะได้

$$\frac{1}{x_2 w} (E_F \cos^2 \theta + w) \approx \frac{2}{k_F \cos \theta}, \quad \frac{1}{x_2 w} \approx \frac{1}{E_F k_F} \frac{1}{\cos^3 \theta}$$

$$\frac{1}{x_3 w} (E_F \cos^2 \theta - w) \approx \frac{-\rho}{E_F k_F} \frac{1}{\cos^3 \theta}, \quad \frac{1}{x_3 w} \approx \frac{2}{\rho} \frac{1}{k_F \cos \theta}$$

และ $q_+ q_- = x_2^2 + x_3^2, \quad \frac{1}{w} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{q_+ q_-}$

และ $\frac{1}{k} \approx \frac{2}{k_F \cos \theta}$, $\frac{\Delta}{k} \approx \frac{\Omega_1}{k_F} \frac{1}{E_F \cos^3 \theta}$

แทนค่าต่าง ๆ และสมการพลังงานกระตุ้นของ ยกส์สัน และนากิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) ($\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$) ลงในสมการ(3.21) เพื่อหา S_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{2m}{\hbar^2} k_F \cos \theta \left\{ \frac{\Omega_1 \rho (a_1 + a_2)}{E_F \cos^2 \theta} \sin(\bar{k} a_1 + 2x_2 a_2) \right. \\
 & + \epsilon \Delta_2 \pi \cos \theta \left[2 - \frac{(\rho^2 - \Omega_1^2)}{(\rho \Omega_1)^2} (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) \right] \sin \Delta k a_1 \sinh 2x_3 a_2 \\
 & + \frac{2}{\rho} \left[\rho^2 a_1 - a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) \right] \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & + \frac{2}{\Omega_1} \left[a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_1^2 \right] \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 \\
 & + \frac{1}{k_F \cos \theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1) \sinh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\
 & + \frac{1}{k_F \cos \theta \rho} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & \left. + \frac{1}{k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \rho \left[\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

และแทนค่าต่าง ๆ กับสมการพลังงานกระตุ้นของแผ่นประกบตัวนำซึ่งยาวตลอดหนุมิต่ำสมการ (4.2) ($\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$) ลงในสมการ(3.22) เพื่อหา T_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 T_2 = & \frac{2m}{\hbar^2} k_F \cos \theta \left\{ 2\Omega_1 \rho (a_1 + a_2) \sin(\bar{k} a_1 + 2x_2 a_2) \right. \\
 & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \rho \left[(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_2 + a_1 \Omega_1^2 \right] \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \Omega_1 \left[(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_1 - a_2 \rho^2 \right] \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 \\
 & - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \bar{k} a_1 \sinh 2x_3 a_2 \\
 & \left. - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \rho \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_1) \sin \bar{q} a_2 \sin \Delta k a_1 \right\}
 \end{aligned}$$

เมื่อแทน S_2 และ T_2 ลงในสมการความหนาแน่นสถานะ (3.23) ($\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Omega_1 \rho (a_1 + a_2)}{E_F \cos^2 \theta} \sin(\bar{k}a_1 + 2x_2 a_2) \\
 & + \epsilon \Delta_2 \pi \cos \theta \left[2 - \frac{(\rho^2 - \Omega_1^2)}{(\rho \Omega_1)^2} (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) \right] \sin \Delta k a_1 \sinh 2x_3 a_2 \\
 & + \frac{2}{\rho} \left[\rho^2 a_1 - a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) \right] \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & + \frac{2}{\Omega_1} \left[a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_1^2 \right] \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 \\
 & + \frac{1}{k_F \cos \theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1) \sinh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\
 & + \frac{1}{k_F \cos \theta \rho} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & + \frac{1}{k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \rho [\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1]
 \end{aligned}$$

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)V} = \sum_j \frac{\pi \epsilon}{k_F (a_1 + a_2)}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\Omega_1 \rho (a_1 + a_2) \sin(\bar{k}a_1 + 2x_2 a_2) \\
 & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \rho \left[(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_2 + a_1 \Omega_1^2 \right] \cosh 2x_3 a_2 \sin \Delta k a_1 \\
 & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \Omega_1 \left[(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_1 - a_2 \rho^2 \right] \sinh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 \\
 & - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \bar{k} a_1 \sinh 2x_3 a_2 \\
 & - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \rho \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) \sin \bar{q} a_2 \sin \Delta k a_1
 \end{aligned}$$

(4.4)

S_2 มีเทอมที่เกิดขึ้นจากผลการคำนวณแผ่นประกบตัวซึ่งยาวดกอนุมิต่ำของชกส์อัน และนาภิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) คือ

$$\frac{2m}{\hbar^2} k_F \cos\theta \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k_F \cos\theta \Omega_1} \Delta_1 (\Delta_2 - \Delta_1) \sinh 2x_3 a_2 \sin \bar{k} a_1 \\ & + \frac{1}{k_F \cos\theta \rho} \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin 2x_2 a_2 \sin \Delta k a_1 \\ & + \frac{1}{k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \rho [\cosh 2x_3 a_2 \cos \Delta k a_1 - \cos 2x_2 a_2 \cos \bar{k} a_1] \end{aligned} \right\}$$

และที่เกิดขึ้นใน T_2 คือ

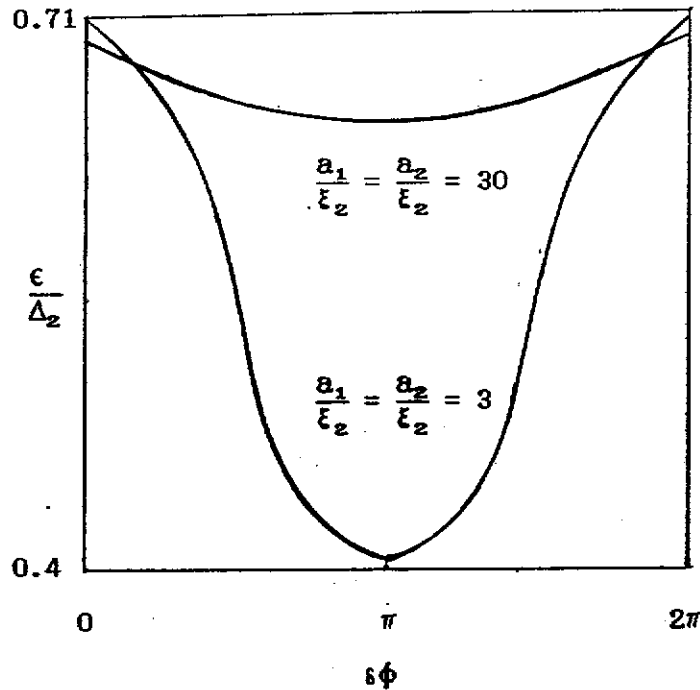
$$\frac{2m}{\hbar^2} k_F \cos\theta \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \Omega_1 \Delta_2 (\Delta_2 - \Delta_1) \sin \bar{k} a_1 \sinh 2x_3 a_2 \\ & - \frac{1}{2k_F E_F \cos^3 \theta} \rho \Delta_1 (\Delta_1 - \Delta_2) \sin \bar{q} a_2 \sin \Delta k a_1 \end{aligned} \right\}$$

ในการประมาณในแผ่นประกบตัวนำซึ่งยาวดกอนุมิต่ำ นั้น

$$\epsilon \ll E_F \cos^2 \theta \quad \text{และ} \quad \frac{\Delta}{E_F \cos^2 \theta} \ll 1$$

ดังนั้น ทั้งห้าเทอมที่เกิดขึ้นจะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ ทำให้เทอมที่เหลือมีค่าตรงตามสมการความหนาแน่นสถานะ คือ สมการที่ (22) ในงานวิจัยแผ่นประกบตัวนำซึ่งยาวดกอนุมิต่ำของ ชกส์อัน และนาภิ (Yoksan and Nagi. 1987 : 115)

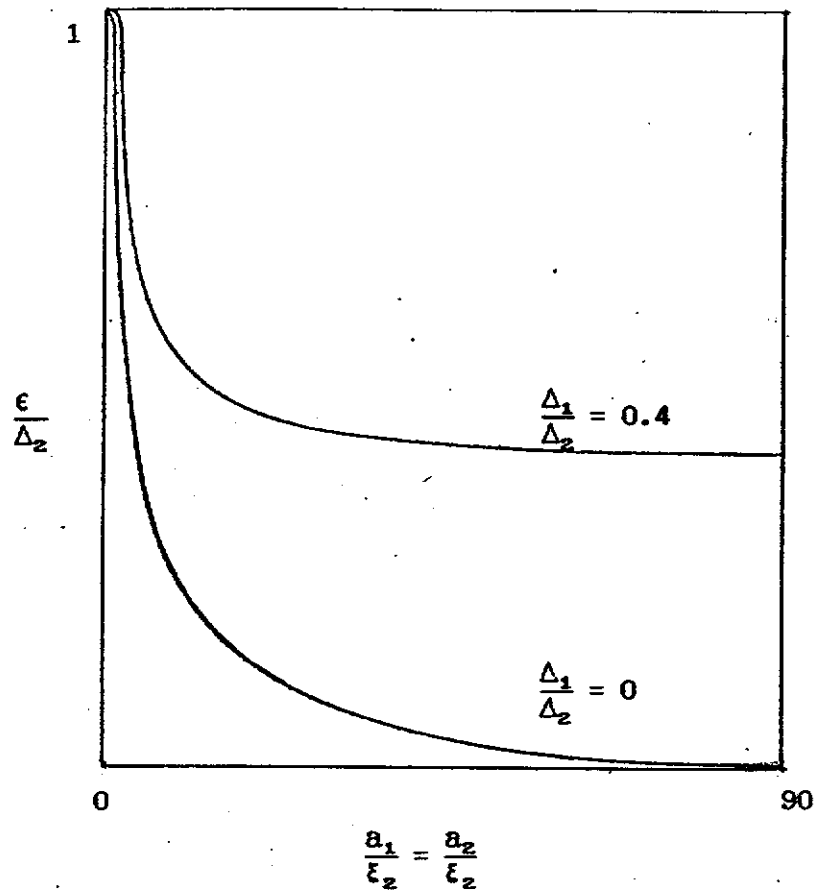
สมการพลังงานกระตุ้น (3.13) บอกความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกระตุ้น ϵ/Δ_2 กับความต่างเฟส ϕ ดังภาพประกอบ 20 และความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกระตุ้นกับความหนาของแผ่นตัวนำซึ่งยาวทั้งสองชนิด a_1/ϵ_2 , a_2/ϵ_2 ดังภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ 20 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของความต่างเฟส ในกรณีที่พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2} = 30$ และ 3 , $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\theta = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

ภาพประกอบ 20 แสดงให้เห็นว่า ความต่างเฟสทำให้พลังงานกระตุ้นมีค่าลดลงโดยมีค่าต่ำสุดที่ $\phi = \pi$ และพลังงานกระตุ้นที่มีพารามิเตอร์ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 3$ คือมีความหนาแน่นจะลดลงเร็วกว่าพลังงานกระตุ้นที่มีพารามิเตอร์ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ ซึ่งมีความหนาแน่นมาก โดยกราฟเส้นบนเป็น พลังงานกระตุ้นในแถบที่ 4 ของแถบประกบตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนาเป็น $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ ส่วนเส้นกราฟเส้นล่างเป็นพลังงานกระตุ้นที่มีความหนาเป็น $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 3$ ซึ่งเป็นแถบพลังงานกระตุ้นแถบแรก สาเหตุที่ต้องเลือกแถบพลังงานกระตุ้นที่มีชั้นพลังงานต่างกัน (คือ แถบที่ 4 กับ แถบที่ 1) เพราะต้องการเปรียบเทียบให้พลังงานกระตุ้น (ที่ $\phi = 0$) มีค่าใกล้เคียงกัน

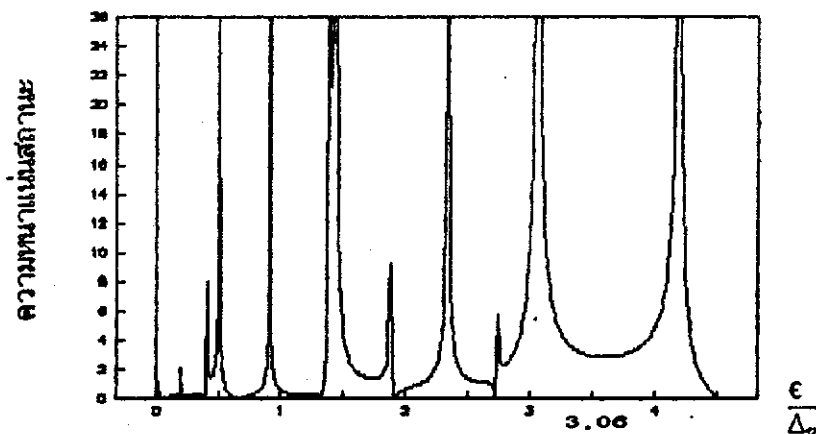
แต่หากเราเปรียบเทียบพลังงานกระตุ้นที่มีแถบพลังงานเดียวกันแล้ว เช่น แถบแรกของ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 3$ มีค่าพลังงานกระตุ้นเป็น 0.711 กับ แถบแรกของ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ คือ 0.43 ($\phi = 0$) จะเห็นได้ว่าในตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนาแน่นมาก พลังงานกระตุ้นจะมีค่าต่ำกว่า (ดังภาพประกอบ 21) และเมื่อมีความต่างเฟสเกิดขึ้น พลังงานกระตุ้นของตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนาแน่นมากก็จะลดลงเร็วกว่า พลังงานกระตุ้นของตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนาแน่นน้อยกว่า



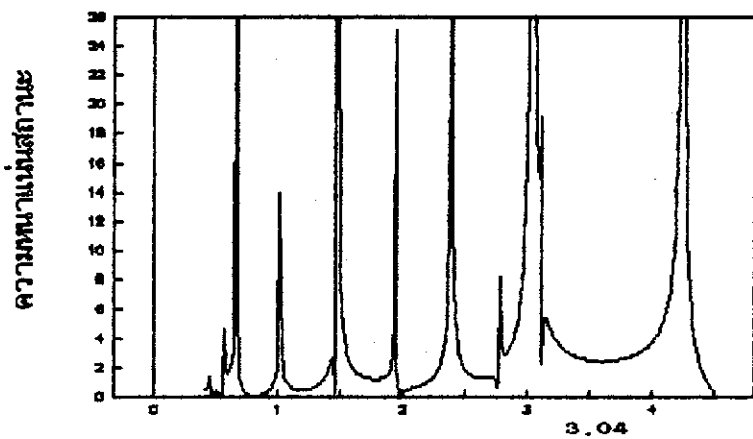
ภาพประกอบ 21 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2}$ ในที่นี้เราใช้พารามิเตอร์ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ และ 0 , $\phi = 0$, $\theta = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

จากภาพประกอบ 21 จะเห็นได้ว่า เมื่อแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนามากขึ้น พลังงานกระตุ้นจะมีค่าลดลง โดยพลังงานกระตุ้นที่มีค่า Δ_1/Δ_2 ต่ำจะลดลงเร็วกว่าพลังงานกระตุ้นที่มีค่า Δ_1/Δ_2 สูงกว่า ระบบที่มี $\Delta_1/\Delta_2 = 0$ จะเป็นระบบของตัวนำปกติประกบกับตัวนำยิ่งยวด และเมื่อ $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2$ มีค่าน้อย จะเกิดหลุมพลังงานขึ้น (ภาคผนวก จ)

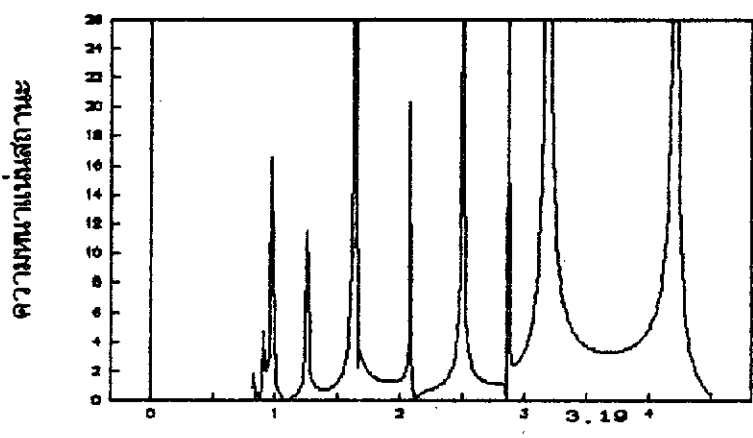
สำหรับภาพประกอบ 22 ถึง ภาพประกอบ 26 แสดงความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของพลังงานกระตุ้น สมการที่เราใช้ในตารางเขียนกราฟ คือสมการที่ (3.19) และ (3.23)



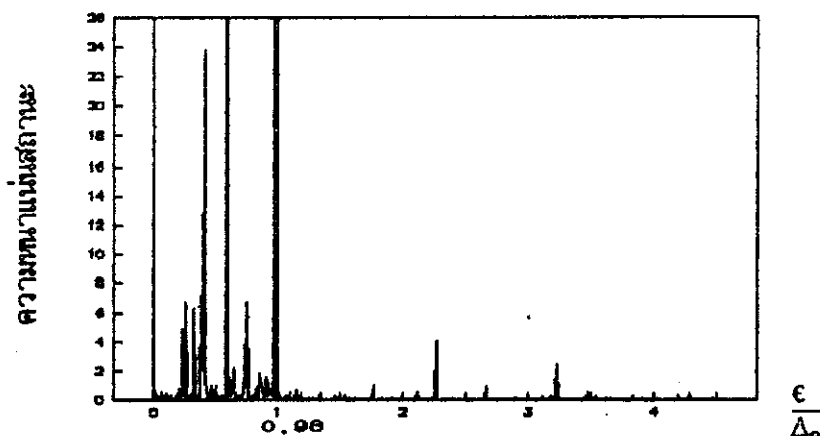
ภาพประกอบ 22(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g_2}{g_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$ พลังงานการกระตุ้นที่ค่าความหนาแน่นสถานะสูงสุดคือ 3.06 เราใช้



ภาพประกอบ 22(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g_2}{g_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$ เราใช้



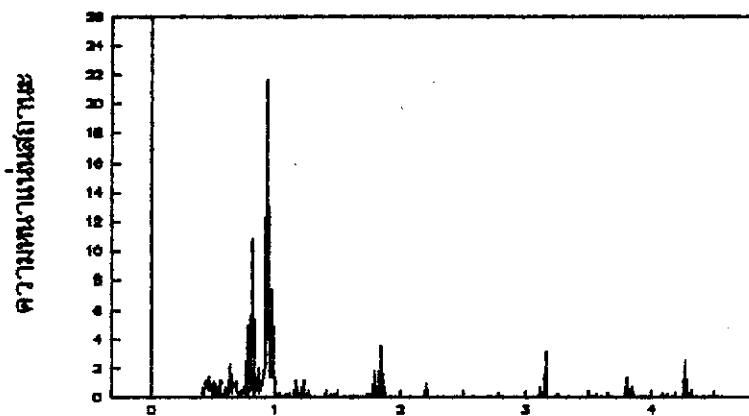
ภาพประกอบ 22(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{g_1}{g_2} = \frac{g_2}{g_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.8$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$ เราใช้



ภาพประกอบ 23(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

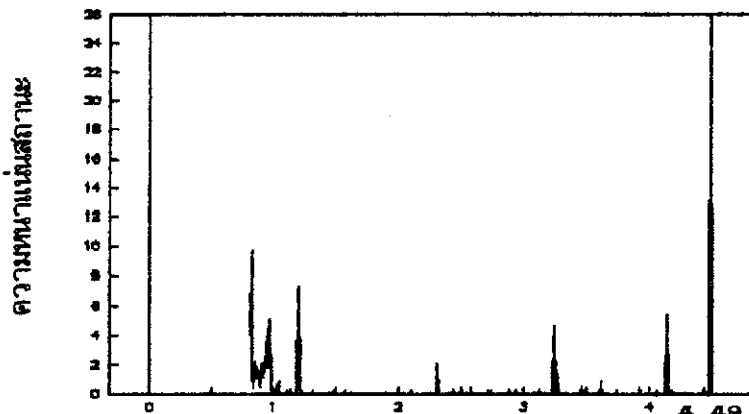
เราใช้



ภาพประกอบ 23(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

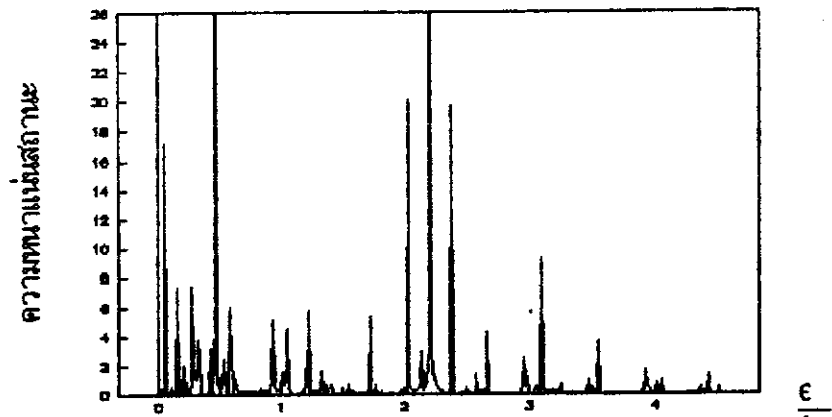
เราใช้



ภาพประกอบ 23(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.8$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

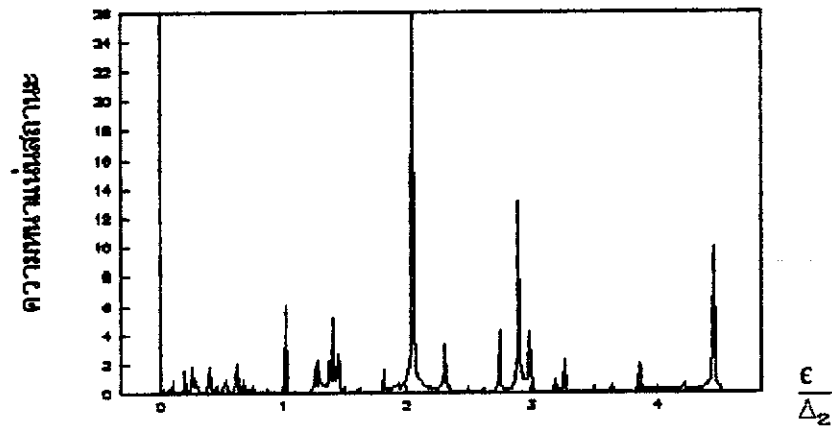
เราใช้



ภาพประกอบ 24(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = \frac{a_2}{\xi_2} = 3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

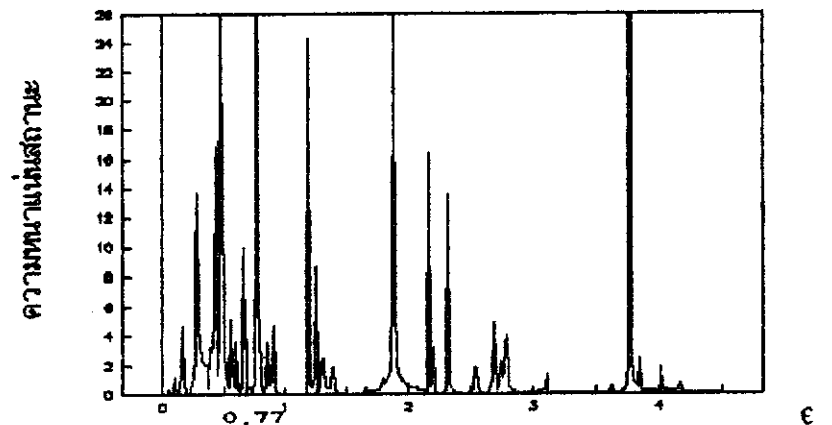
เราใช้



ภาพประกอบ 24(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = 3$, $\frac{a_2}{\xi_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

เราใช้

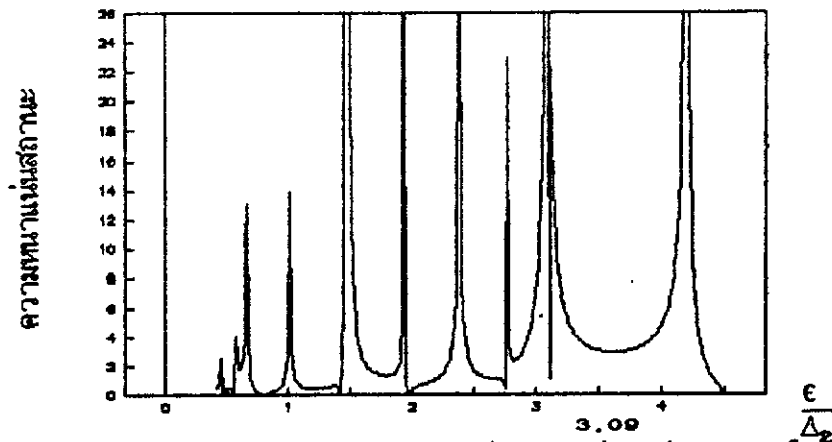


ภาพประกอบ 24(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ

พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = 0.3$, $\frac{a_2}{\xi_2} = 3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0$, $\phi = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

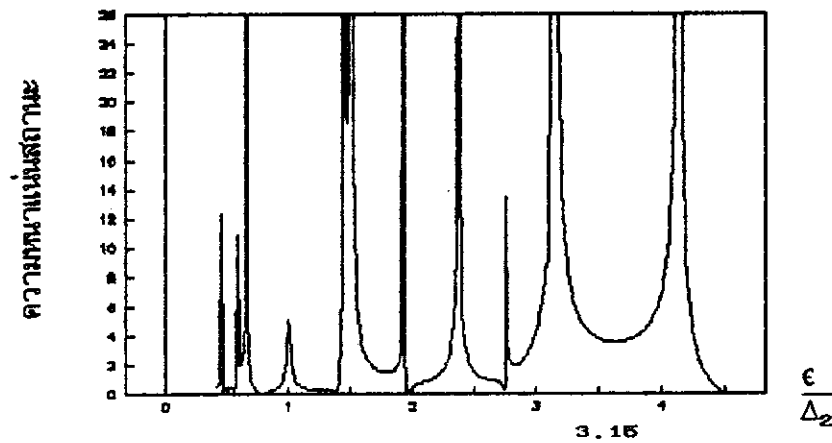
$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

เราใช้



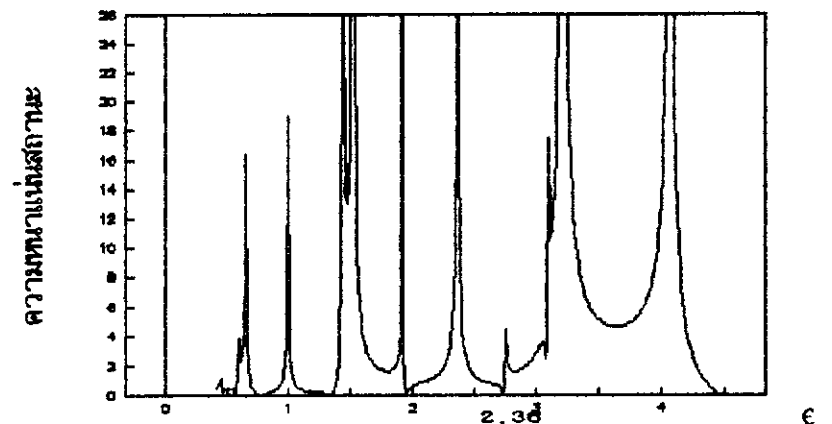
ภาพประกอบ 25(ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{c_2} = \frac{a_2}{c_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

เราใช้



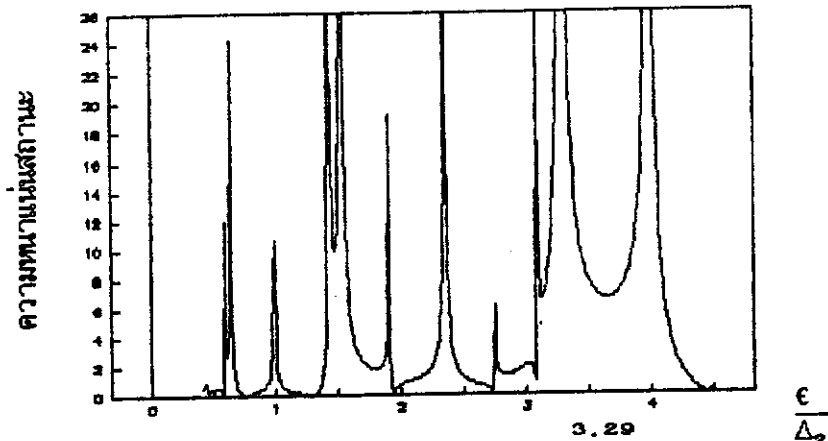
ภาพประกอบ 25(ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{c_2} = \frac{a_2}{c_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

เราใช้



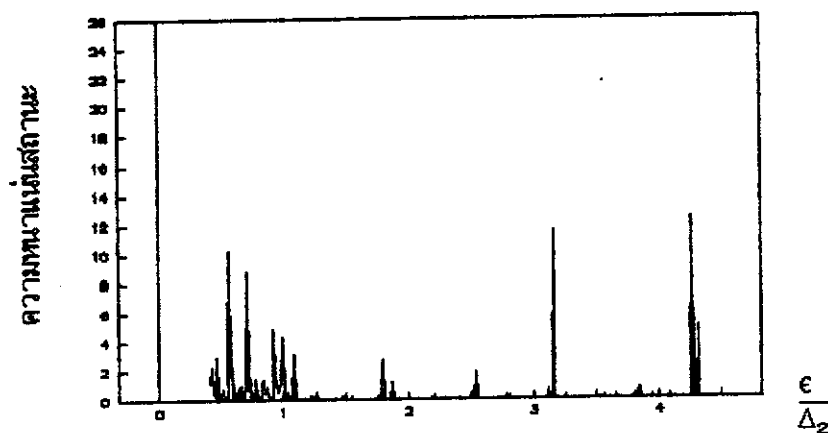
ภาพประกอบ 25(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{c_2} = \frac{a_2}{c_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

เราใช้



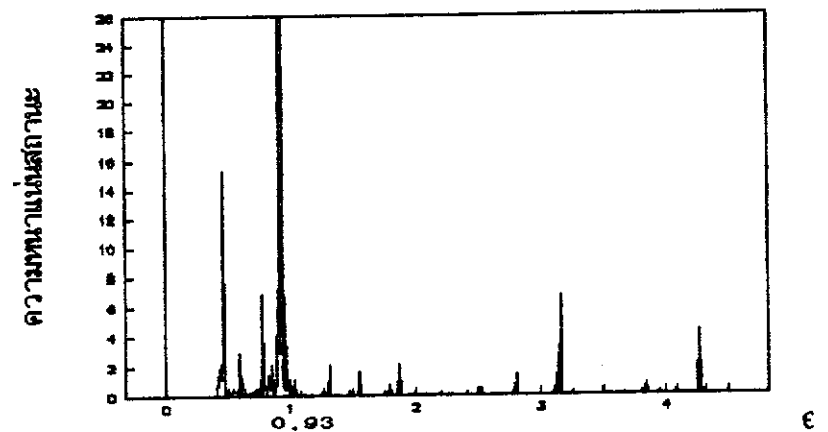
ภาพประกอบ 25 (ง) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = \frac{a_2}{\xi_2} = 0.3$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \pi$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

เราใช้



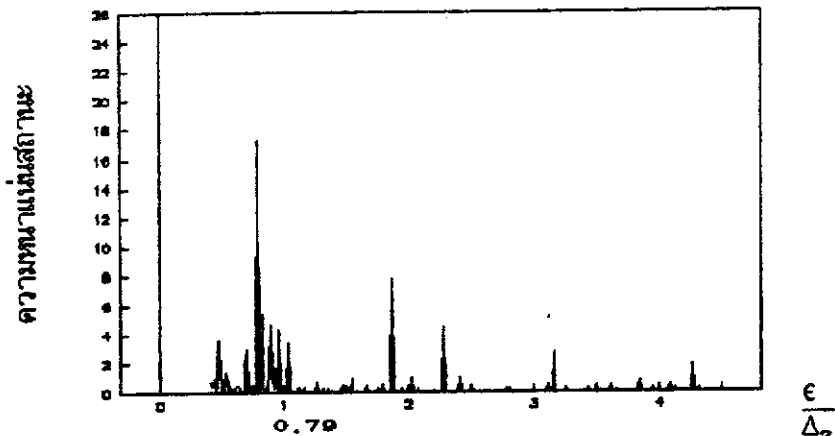
ภาพประกอบ 26 (ก) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = \frac{a_2}{\xi_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

เราใช้



ภาพประกอบ 26 (ข) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ พารามิเตอร์ $\frac{a_1}{\xi_2} = \frac{a_2}{\xi_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

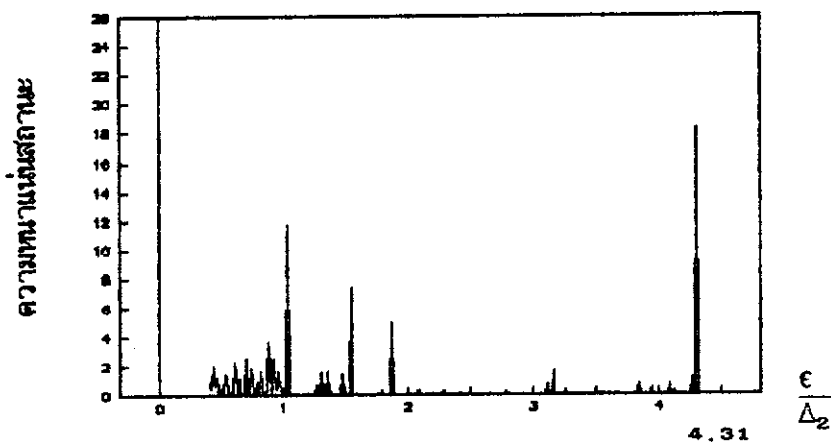
เราใช้



ภาพประกอบ 26(ค) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ $\frac{g_1}{\xi_2} = \frac{g_2}{\xi_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $s\phi = \frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

เราใช้



ภาพประกอบ 26(ง) แสดงความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ $\frac{g_1}{\xi_2} = \frac{g_2}{\xi_2} = 20$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$, $s\phi = \pi$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

$\frac{\epsilon}{\Delta_2}$

เราใช้

สรุป อภิปราย และ เสนอแนะ

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณหา สมการพลังงานกระตุ้น และความหนาแน่นสถานะ ในแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด โดยขั้นตอนในการคำนวณมีดังนี้

1. แก้อสมการโบโกลิบอฟเพื่อหาฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน และฟังก์ชันคลื่นของโฮลโดยใช้เงื่อนไขที่ว่า พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงทั้งสองชนิดมีขนาดไม่เท่ากัน และมีเฟสต่างกันด้วย

2. หาเมตริกซ์ของตัวแปรต่างๆ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ว่า ฟังก์ชันคลื่นและความชันของฟังก์ชันคลื่นมีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อของตัวนำยิ่งยวดทั้งสอง

3. กระจายดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ของตัวคงที่ในสมการที่หาได้ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อหาสมการพลังงานกระตุ้นและนำพลังงานกระตุ้น ไปหาค่าความหนาแน่นสถานะต่อไป

4. นำสมการพลังงานกระตุ้น และความหนาแน่นสถานะที่หาได้มาเปรียบเทียบกับ กราฟของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ ซึ่งพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีขนาดไม่เท่ากันและความต่างเฟสเป็นศูนย์ ว่าผลที่ได้มีว่าแตกต่างกันอย่างไร

สรุปผลงานวิจัย

สูตรการคำนวณหา ค่าพลังงานกระตุ้น และความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิดคือสมการ (3.12), (3.13), (3.19) และ (3.23) สามารถนำมาเขียนกราฟพลังงานกระตุ้นเป็นฟังก์ชันของความต่างเฟสกับขนาดของตัวนำยิ่งยวดดังภาพประกอบ 20 และ 21 และกราฟความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของพลังงานกระตุ้นดังภาพประกอบ 22 ถึง 26 ซึ่งสามารถสรุปงานวิจัยได้ดังนี้คือ

1. จากภาพประกอบ 20 จะเห็นว่าเมื่อมีความต่างเฟสเกิดขึ้น พลังงานกระตุ้นจะลดลงจนถึงค่าต่ำสุดที่ $\phi = \pi$ และ พลังงานกระตุ้นที่มีค่า $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 3$ จะลดลงเร็วกว่า พลังงานกระตุ้นที่มีค่า $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ โดยเป็นการเปรียบเทียบแถบพลังงานที่ 1 กับที่ 4 แต่ถ้าจะเปรียบเทียบแถบพลังงานที่เท่ากันแล้วเช่น พลังงานกระตุ้นแถบแรกที่มีค่า $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 30$ จะลดลงเร็วกว่าพลังงานกระตุ้นแถบแรกที่มีค่า $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 3$ ซึ่งจะกลับกันกับกรณีที่พลังงานกระตุ้นมีค่าใกล้เคียงกันแต่มีแถบพลังงานต่างกัน

2. จากภาพประกอบ 21 จะพบว่าเมื่อตัวนำยิ่งยวดมีขนาดใหญ่ขึ้นพลังงานกระตุ้นจะลดลงและลู่อเข้าสู่ค่า Δ_1/Δ_2 ในที่สุดพลังงานกระตุ้นที่มีค่า Δ_1/Δ_2 มากกว่าจะลดลงช้ากว่าพลังงานกระตุ้นที่มีค่า Δ_1/Δ_2 น้อยกว่า

3. จากภาพประกอบ 22(ก) ถึง 23(ก) จะพบว่าเมื่อ $a_1/\varepsilon_2 = a_2/\varepsilon_2$ มีค่ามากขึ้น แอมพลิจูดงานกระตุ้นจะอยู่กระจัดกระจายมากขึ้นและความหนาแน่นสถานะมีค่าลดลง เช่นเดียวกับกรณี ภาพประกอบ 22(ข) ถึง 23(ข) และ 22(ค) ถึง 23(ค)

4. จากภาพประกอบ 23(ก), 23(ข) และ 23(ค) จะพบว่าเมื่อค่า Δ_1/Δ_2 มีค่ามากขึ้นแล้วแอมพลิจูดงานกระตุ้นจะอยู่กระจัดกระจายมากขึ้น และความหนาแน่นสถานะมีค่าลดลง แต่ในกรณี ที่ค่า $a_1/\varepsilon_2 = a_2/\varepsilon_2$ มีค่าน้อยปรากฏการณ์เช่นนี้จะไม่ปรากฏชัด ดังภาพประกอบ 22(ก), 22(ข) และ 22(ค)

5. จากภาพประกอบ 24(ก) ถึง 24(ข) ที่มีค่า $a_2/\varepsilon_2 = 3$ กับ 0.3 ตามลำดับ และ ภาพประกอบ 24(ก) ถึง 24(ค) ที่มี $a_1/\varepsilon_2 = 3$ กับ 0.3 ตามลำดับนั้นจะเห็นได้ว่าลักษณะ กราฟความหนาแน่นสถานะจะขึ้นกับขนาดของตัวนำยิ่งยวดที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสูง ($\Delta_2 > \Delta_1$) แต่เมื่อเปรียบเทียบงานวิจัยของยอกซัน และนากิ (Yoksan and Nagi, 1987:115) (ดังภาพ ประกอบ 14, 15 และ 16) จะพบว่าอิทธิพลของ Δ_2 ในระบบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำจะมีมากกว่า อิทธิพลของ Δ_2 ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง แต่ในขณะเดียวกันอิทธิพลของ Δ_1 ในตัวนำยิ่งยวด อุณหภูมิสูงก็จะมีอิทธิพลมากกว่า Δ_1 ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ

6. ภาพประกอบ 25(ก) ถึง 25(ค) แสดงให้เห็นว่าความต่างเฟสมีผลต่อความ หนาแน่นสถานะอย่างไร (เราทราบว่าความต่างเฟสทำให้พลังงานกระตุ้น ในช่วง $\Delta_1/\Delta_2 < \varepsilon/\Delta_2 < 1$ มีค่าลดลง) ในกรณี $\varepsilon/\Delta_2 > 1$ ความต่างเฟสก็ยังทำให้พลังงานกระตุ้นมีค่าลดลง แต่เมื่อ พลังงานกระตุ้นมีค่ามากขึ้นอิทธิพลของความต่างเฟสก็จะน้อยลงด้วย และในกรณีที่ความหนาของ แผ่นประกบมีค่าน้อย ความต่างเฟสก็มีอิทธิพลต่อความหนาแน่นสถานะน้อยด้วย

7. จากภาพประกอบ 26(ก) ถึง 26(ค) เมื่อความหนาของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวด มีค่ามากขึ้น ($a_1/\varepsilon_2 = a_2/\varepsilon_2 = 20$) เทียบกับภาพประกอบ 25(ก) ถึง 25(ค) ($a_1/\varepsilon_2 = a_2/\varepsilon_2 = 0.3$) นั้นจะพบว่าเมื่อ $\varepsilon/\Delta_2 > 1$ จะเกิดความแปรปรวนทั้งขนาดและรูปแบบของความ หนาแน่นสถานะ และพลังงานกระตุ้น เนื่องมาจากความต่างเฟส

อภิปรายผล

งานวิจัยนี้คำนวณหา พลังงานกระตุ้น และ ความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกบ ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด ซึ่งเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ ฮุย และสตรูด (Hui and Stroud, 1991 : 6139) (คืองานวิจัยหาพลังงานกระตุ้นของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงรูปทรง กลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่งซึ่งมี $0 < \varepsilon/\Delta_2 < 1$) ปรากฏว่ามีความ แตกต่างกันคือ ในงานวิจัยนี้ เมื่อมีความต่างเฟสเกิดขึ้นพลังงานกระตุ้นในตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนา น้อยจะลดลงเร็วกว่า พลังงานกระตุ้นในตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนามาก แต่ในงานวิจัยของ

ฮุย และเสตราร์ด (Hui and Stroud. 1991 : 6139) จะกลับกันคือ พลังงานกระตุ้นในตัวนำยิ่งยวดที่มีขนาดเล็กกว่าจะลดลงช้ากว่าพลังงานกระตุ้นในตัวนำยิ่งยวดที่มีขนาดใหญ่กว่า

ผลงานวิจัยมีส่วนที่เหมือนกันกับงานวิจัยของฮุยและเสตราร์ดคือ ที่ความต่างเฟสเท่ากับ π พลังงานกระตุ้นจะมีค่าต่ำสุด และ ตัวนำยิ่งยวดที่มีความหนาหรือขนาดใหญ่กว่าจะมีค่าพลังงานกระตุ้นต่ำกว่า

จากการเปรียบเทียบจะเห็นได้ว่า เมื่อเปลี่ยนรูปร่างของแบบจำลอง สมบัติของระบบก็จะเปลี่ยนไปด้วย ซึ่งที่กับรูปร่างของแบบจำลองที่นิจารณา

จากข้อสรุปที่ได้จะพบว่าใน กรณี $\Delta_1/\Delta_2 < \epsilon/\Delta_2 < 1$ นั้นเมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะจะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่ค่อนข้างแน่นอนเนื่องจากมีเทอมของ ค่าไฮเปอร์โบลิกไซน์(hyperbolic sine) กับ ไฮเปอร์โบลิกโคไซน์(hyperbolic cosine) ในสมการ(3.13) และ (3.23) เช่น เมื่อความหนาของตัวนำยิ่งยวดเพิ่มขึ้น พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะก็จะมีค่าลดลง แต่ในกรณีที่ $\epsilon/\Delta_2 > 1$ เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะมักจะเกิดความแปรปรวน โดยเฉพาะเมื่อขนาดของตัวนำยิ่งยวดมีขนาดใหญ่ขึ้น เช่น เมื่อกำหนดให้ขนาดมีค่ามาก($a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 = 20$) แล้วเปลี่ยนค่า Δ_1/Δ_2 จะพบว่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะมีความแปรปรวนเกิดขึ้น

จากสมการพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะ (สมการ(3.12) และ (3.19)) จะเห็นได้ว่าประกอบด้วยฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีคาบกันจะทำให้ พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะมีการเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางที่แน่นอน แต่เมื่อนิจารณาสมการพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะใหม่ โดยเริ่มจากค่า k_{\pm} คือ

$$\begin{aligned} k_{\pm} a_1 &= a_1 \left[\frac{2m}{\hbar^2} \right] \left[E_F \cos^2 \theta \pm (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2} \right]^{1/2} \\ &= k_F a_1 \left[1 \pm \frac{\Delta_2}{E_F} \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\epsilon^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\text{sink} \bar{a}_1 = \sin((k_+ + k_-) a_1) \quad \text{ถ้าให้ } T \text{ เป็นคาบแล้ว}$$

$$\text{sink}(a_1 + T) = \text{sink} \bar{a}_1 \quad \text{และ}$$

$$\sin \Delta k(a_1 + T) = \sin \Delta k a_1$$

เพราะฉะนั้น $\bar{k}T = 2m\pi$ และ $\Delta kT = 2n\pi$ เมื่อ m, n เป็นเลขจำนวนเต็ม

$$\frac{\bar{k}}{\Delta k} = \frac{m}{n}$$

แต่ \bar{k} และ Δk เป็นปริมาณที่ติดรากที่สอง ฉะนั้นจึงมีโอกาสเป็นจำนวนอตรรกยะได้ ถ้า \bar{k} และ Δk เป็นจำนวนอตรรกยะแล้วผลหารระหว่างเลขสองจำนวนจะเป็นจำนวนอตรรกยะด้วย เพราะทั้ง \bar{k} และ $1/\Delta k$ ไม่มีตัวยกกำลังการคูณของแต่ละตัวประกอบอยู่เลขทำให้ $\bar{k}/\Delta k$ เป็นจำนวนอตรรกยะนั่นคือ ไม่สามารถเขียนผลหารของ \bar{k} กับ Δk เป็นจำนวนเต็มหารจำนวนเต็มได้จึงขัดแย้งกับสิ่งที่สมมติเบื้องต้นซึ่งหมายความว่า ระบบจะมีพฤติกรรมแบบไม่มีคาบหรือมีความแปรปรวนแปรตนเอง

เทอม $\Delta_2/E_F \cos^2 \theta$ เป็นพารามิเตอร์สำคัญที่ทำให้เกิดความแปรปรวน ในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำค่า $\Delta_2/E_F \cos^2 \theta$ มีค่าน้อยคือประมาณ 0.001 จะส่งผลให้ค่า $\bar{k}/\Delta k$ มีค่าเข้าใกล้ 1 แต่ในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงนั้น $\Delta_2/E_F \cos^2 \theta$ มีค่าประมาณ 0.1 จึงมีผลทำให้อิทธิพลของรากกำลังสองมากขึ้น หมายถึงมีความแปรปรวนมากขึ้นนั่นเอง

ตัวอย่างเช่น เมื่อตัวนำยิ่งยวดมีขนาดใหญ่ขึ้น อิทธิพลของรากกำลังสองก็จะมากขึ้น ทำให้ระบบเกิดความแปรปรวนมากขึ้น ซึ่งจะเห็นได้จากกราฟความหนาแน่นสถานะ เป็นฟังก์ชันของความต่างเฟสว่าจะเกิดความแปรปรวน เมื่อตัวนำยิ่งยวดมีขนาดใหญ่ ดังภาพประกอบ 26(ก) ถึง 26(ง)

เมื่อนำผลงานวิจัยนี้ ไปเปรียบเทียบกับผลงานคำนวณการขึ้นแก่ประกอบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำของ ยุกส์สัน และนาگی (Yoksan and Nagi. 1987 : 115) โดยการประมาณว่า $\Delta \ll E_F \cos^2 \theta$ และ $\epsilon \ll E_F \cos^2 \theta$ จะพบว่าผลการประมาณนี้ตรงกับงานวิจัยของแก่นประกอบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ และสมการพลังงานกระตุ้นกับสมการความหนาแน่นสถานะในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่คำนวณได้นี้ ครอบคลุมสมการพลังงานกระตุ้น และสมการความหนาแน่นสถานะในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ จึงน่าจะเป็นที่ยอมรับได้

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้คำนวณหา พลังงานกระตุ้น และความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ที่ยังมีข้อจำกัดอยู่หลายข้อ เช่น แก่นประกอบเป็นตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ แก่นประกอบเพียงสองชั้น พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบเป็นค่าคงที่ ความต่างเฟสไม่ได้ขึ้นกับอุณหภูมิ เป็นต้น ฉะนั้นในการวิจัยต่อไปสมควรไปสมมติอื่นๆ เช่น อุณหภูมิวิกฤต ความร้อนจำเพาะ การนำความร้อน สนามแม่เหล็กวิกฤต เป็นต้น น่าจะได้รับการศึกษา โดยอาจจะพิจารณาแบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่มีสารเจือ แบบจำลองของแก่นประกอบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงหลายๆ ชั้นหรือ แบบจำลองที่มีรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ แบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบไม่คงที่ หรือความต่างเฟสเป็นฟังก์ชันกับอุณหภูมิ เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Adkins, C.J and B.W. Kington. Physical Review. 177 : 777 ; 1969.
- Bardeen, J., L.N. Cooper and J.R. Schrieffer. Physical Review.
180 : 1175 ; 1957.
- Bednordz and K.A.Muller. Review of Modern Physics. 64 : 189 ;
1986.
- Chu, C., J. Wu and others. Physical Review Letters. 58 : 908 ;
1987.
- Clark, T.D. Journal of Applied Physics. 51 : 2736 ; 1980.
- de Gennes, P.G. and S. Mauro. Solid State Communications. 3 :
381 ; 1950.
- Frohlich, H. Physical Review. 79 : 845 ; 1950.
- Fukuyama, H. and S. Maekawa. Journal of the Physical Society of
Janpan. 55 : 1814 ; 1986.
- Fulde, P. and K. Maki. Physical Review Letters. 15 : 675 ; 1965.
- Gorter, C. and H. Casimir. Physica. 1 : 306 ; 1934.
- Hermann, A. and Z.Sheng. Nature. 332 : 55 ; 1988.
- Hilsch, P.Z. Physica. 167 : 511 ; 1962.
- Hui, P.M. and D. Stroud. Physical Review B. 31 : 584 ; 1985.
- Hui, P.M. and D. Stroud. Physical Review B. 43 : 6139 ; 1991.
- Kresin, H. Physics Letters A. 122 : 434 ; 1987.

- Kersin, H. and V.Z. Wolf. Fundamentals of Superconductivity.
New York ; Plenum Publishing Corporation, 1990.
- McMillan, W.L. Physical Review. 175 : 559 ; 1968.
- Meissner, H. Physical Review. 109 : 806 ; 1958.
- Meissner, H. Physical Review. 117 : 672 ; 1960.
- Nishino, T., E. Yamada and U. Kawabe. Physical Review B. 33 :
2042 ; 1986.
- Onnes, H.K. Communication-Laboratory of Leiden. 119 : 1226 ;
1911.
- Seto, P. and T. Van Duzer. Applied Physical Letters. 19 : 488 ;
1971.
- Silvert, W. and L.N. Cooper. Physical Review. 141 : 334 ;
1966.
- Smith, P.H. and others. Physical Review Letters. 6 : 686 ;
1961.
- Suthat Yoksan and A.D.S. Nagi. Journal of Low Temperature
Physics. 63 : 447 ; 1986.
- Suthat Yoksan and A.D.S. Nagi. Journal of Low Temperature
Physics. 66 : 115 ; 1987.
- Takayanagi, H. and T. Kawakami. Physical Review Letters.
54 : 2449 ; 1985.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

สมการโบลิวบอฟ

ฮามิลโทเนียนยังผล (Effective Hamiltonian) มีรูปเป็น

$$H_{eff} = \int d\vec{r} \left\{ \sum_{\alpha} \psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) H_0(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \alpha) + U(\vec{r}) \psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) \psi(\vec{r}, \alpha) \right. \\ \left. + \Delta(\vec{r}) \psi^{\dagger}(\vec{r}, \uparrow) \psi(\vec{r}, \downarrow) + \Delta^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \downarrow) \psi^{\dagger}(\vec{r}, \uparrow) \right\} \quad (1)$$

$$H_0(\vec{r}) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - U_0(\vec{r}) - E_F$$

H_0 คือ ฮามิลโทเนียนของอิเล็กตรอน

U คือ พลังงานศักย์ของอิเล็กตรอน

Δ คือ พารามิเตอร์ของความเป็นระเบียบ

$\psi(\vec{r}, \alpha)$ คือ ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนที่มีสปินดัชนี (index spin) เป็น $\alpha = \uparrow$ หรือ \downarrow ซึ่ง $\psi(\vec{r}, \alpha)$ มีสมบัติผลบวกของการสลับลำดับที่การคูณ (anticommutation) เป็นดังนี้คือ

$$\psi(\vec{r}, \alpha) \psi(\vec{r}', \beta) + \psi(\vec{r}', \beta) \psi(\vec{r}, \alpha) = 0 \quad (2.1)$$

$$\psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) \psi^{\dagger}(\vec{r}', \beta) + \psi^{\dagger}(\vec{r}', \beta) \psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) = 0 \quad (2.2)$$

$$\psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) \psi(\vec{r}', \beta) + \psi(\vec{r}', \beta) \psi^{\dagger}(\vec{r}, \alpha) = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.3)$$

กระจายเทอม $\psi(\vec{r}, \uparrow)$ และ $\psi(\vec{r}, \downarrow)$ ใหม่นิยามของตัวดำเนินการ u และ v ดังนี้

$$\psi(\vec{r}, \uparrow) = \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}\uparrow} u_{\mathbf{n}}(\vec{r}) - v_{\mathbf{n}\downarrow}^+ v_{\mathbf{n}}^*(\vec{r}) \quad (3.1)$$

$$\psi(\vec{r}, \downarrow) = \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}\downarrow} u_{\mathbf{n}}(\vec{r}) + v_{\mathbf{n}\uparrow}^+ v_{\mathbf{n}}^*(\vec{r}) \quad (3.2)$$

สมการ (3.1) และ (3.2) คือ $\psi(\vec{r}, \uparrow)$ และ $\psi(\vec{r}, \downarrow)$ ที่เป็นเมตริกซ์กะแวงแล้ว

$u_{\mathbf{n}}$ และ $v_{\mathbf{n}}$ คือ ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน และ โวลล์ ตามลำดับ โดย

$$v_{m\uparrow}^+ = u_m a_{m\uparrow}^+ - v_m a_{-m\downarrow} \quad (3.3)$$

$$v_{m\downarrow}^+ = u_m a_{m\downarrow}^+ + v_m a_{-m\uparrow} \quad (3.4)$$

เมื่อ $a_{m\alpha}^+$ คือ ตัวดำเนินการที่สร้างอิเล็กตรอนให้มีสถานะเป็น $m\alpha$

$a_{-m\alpha}$ คือ ตัวดำเนินการที่ทำลายอิเล็กตรอนในสถานะ $m\alpha$

ถ้านำสมการ (2.1) ลง (2.3) และจาก (3.1) กับ (3.2) สามารถแสดงสมบัติผลบวกของการสลับลำดับที่การคูณ (anticommutation) ของ v ได้เป็น

$$v_{m\alpha}^+ v_{m\beta} + v_{m\alpha} v_{m\beta}^+ = \delta_{m\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.1)$$

$$v_{m\alpha} v_{m\beta} + v_{m\alpha} v_{m\beta} = 0 \quad (4.2)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบิร์ก

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} F \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle [F, H] \rangle$$

จากสมการ (1) , (3.3) และ (3.4)

$$[H_{eff}, v_{m\alpha}] = -\epsilon_n v_{m\alpha} \quad (5.1)$$

$$[H_{eff}, v_{m\alpha}^+] = \epsilon_n v_{m\alpha}^+ \quad (5.2)$$

จากการหาผลต่างของการสลับลำดับที่การคูณ (commutation) ระหว่าง ψ กับ H_{eff}

$$\begin{aligned} [\psi(\vec{r}\uparrow), H_{eff}] &= \int d\vec{r}' \left\{ \sum_{\alpha} \psi(\vec{r}\uparrow) \psi^+(\vec{r}'\alpha) H_{\alpha}(\vec{r}') \psi(\vec{r}'\alpha) - \sum_{\alpha} \psi^+(\vec{r}'\alpha) H_{\alpha}(\vec{r}') \psi(\vec{r}'\alpha) \psi(\vec{r}\uparrow) \right. \\ &\quad + U(\vec{r}') \psi(\vec{r}\uparrow) \psi^+(\vec{r}'\alpha) \psi(\vec{r}'\alpha) - U(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}'\alpha) \psi(\vec{r}'\alpha) \psi(\vec{r}\uparrow) \\ &\quad \left. + \Delta(\vec{r}') \psi(\vec{r}\uparrow) \psi^+(\vec{r}'\uparrow) \psi(\vec{r}'\downarrow) - \Delta(\vec{r}') \psi^+(\vec{r}'\uparrow) \psi(\vec{r}'\downarrow) \psi(\vec{r}\uparrow) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta^*(\vec{r}')\psi(\vec{r}\downarrow)\psi(\vec{r}'\downarrow)\psi(\vec{r}'\uparrow) - \Delta^*(\vec{r}')\psi(\vec{r}'\downarrow)\psi(\vec{r}'\uparrow)\psi(\vec{r}\uparrow) \Big\} \\
& = \left(H_0 + U(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}\uparrow) + \Delta(\vec{r})\psi^+(\vec{r}\downarrow) \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ } \left[\psi(\vec{r}\uparrow) , H_{\text{eff}} \right] &= \left[\left(\sum_n v_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) - v_{n\downarrow}^+ v_n^*(\vec{r}) \right) , H_{\text{eff}} \right] \\
&= \sum_n \epsilon_n v_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) + \epsilon_n v_{n\downarrow}^+ v_n^* \quad (7)
\end{aligned}$$

แต่ (6) = (7) เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_n \epsilon_n v_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) + \epsilon_n v_{n\downarrow}^+ v_n^* &= \left(H_0 + U(\vec{r}) \right) \left(\sum_n v_{n\uparrow} u_n(\vec{r}) - v_{n\downarrow}^+ v_n^*(\vec{r}) \right) \\
&+ \Delta(\vec{r}) \left(\sum_n v_{n\downarrow}^+ u_n(\vec{r}) + v_{n\uparrow} v_n(\vec{r}) \right) \quad (8)
\end{aligned}$$

เลือกสัมประสิทธิ์ของ v_n ในสมการ (8) มาเขียนเป็น

$$\epsilon_n u_n(\vec{r}) = \left(H_0 + U(\vec{r}) \right) u_n(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) v_n(\vec{r}) \quad (9)$$

ต่อไปพิจารณา

$$\begin{aligned}
\left[\psi(\vec{r}\downarrow) , H_{\text{eff}} \right] &= \int d\vec{r}' \left\{ \sum \left[\psi(\vec{r}\downarrow)\psi^+(\vec{r}'\alpha)H_0(\vec{r}')\psi(\vec{r}'\alpha) - \psi^+(\vec{r}'\alpha)H_0\psi(\vec{r}'\alpha)\psi(\vec{r}\downarrow) \right] \right. \\
&+ U(\vec{r}')\psi(\vec{r}\downarrow)\psi^+(\vec{r}'\alpha)\psi(\vec{r}'\alpha) - U(\vec{r}')\psi^+(\vec{r}'\alpha)\psi(\vec{r}'\alpha)\psi(\vec{r}\downarrow) \\
&+ \Delta(\vec{r}')\psi(\vec{r}\downarrow)\psi^+(\vec{r}'\uparrow)\psi^+(\vec{r}'\downarrow) - \Delta(\vec{r}')\psi^+(\vec{r}'\uparrow)\psi^+(\vec{r}'\downarrow)\psi(\vec{r}\downarrow) \\
&\left. + \Delta^*(\vec{r}')\psi(\vec{r}\downarrow)\psi(\vec{r}'\downarrow)\psi(\vec{r}'\uparrow) - \Delta^*(\vec{r}')\psi(\vec{r}'\downarrow)\psi(\vec{r}'\uparrow)\psi(\vec{r}\downarrow) \right\} \\
&= \left(H_0 + U \right) \psi(\vec{r}\downarrow) - \Delta(\vec{r})\psi^+(\vec{r}\uparrow) \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{และ } \left[\psi(\vec{r}\downarrow) , H_{\text{eff}} \right] &= \left[\sum_n v_{n\downarrow} u_n(\vec{r}) + v_{n\uparrow}^+ v_n^*(\vec{r}) , H_{\text{eff}} \right] \\
&= \sum_n \epsilon_n u_n(\vec{r}) v_{n\downarrow} - \epsilon_n v_n^+(\vec{r}) v_{n\uparrow}^+ \quad (11)
\end{aligned}$$

แต่ (10) = (11) เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \sum_n \epsilon_n u_n(\vec{r}) v_{n\downarrow} - \epsilon_n v_n^+(\vec{r}) v_{n\uparrow}^+ &= \left(H_0 + U \right) \psi(\vec{r}\downarrow) - \Delta(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}\uparrow) \\ &= \left(H_0 + U \right) \left(\sum_n v_{n\downarrow} u_n(\vec{r}) + v_{n\uparrow}^+ v_n^*(\vec{r}) \right) \\ &\quad - \Delta(\vec{r}) \left(\sum_n v_{n\uparrow}^+ u_n^*(\vec{r}) - v_{n\downarrow} v_n(\vec{r}) \right) \end{aligned}$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $v_{n\uparrow}^+$ เป็น

$$\epsilon_n v_n(\vec{r}) = - \left(H_0^* + U(\vec{r}) \right) v_n(\vec{r}) + \Delta^* u_n(\vec{r}) \quad (12)$$

เรียกสมการ (9) และ (12) ว่าสมการโบโกลิบอฟ (Bogoliubov equations)

$$\epsilon_n u_n(\vec{r}) = \left(H_0 + U(\vec{r}) \right) u_n(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) v_n(\vec{r}) \quad (9)$$

$$\epsilon_n v_n(\vec{r}) = - \left(H_0^* + U(\vec{r}) \right) v_n(\vec{r}) + \Delta^* u_n(\vec{r}) \quad (12)$$

ภาคผนวก ข

การคำนวณพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะในแถบประภาตังนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ

พิจารณาแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดที่ประกอบด้วย ตัวยิ่งยวดชนิดแรก S_1 ที่มีความหนาเป็น a_1 และตัวนำยิ่งยวดอีกชนิดหนึ่งที่มีความหนาเป็น a_2 ซึ่งกำหนดให้พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีค่าเป็น

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_1, & -a_1 \leq x \leq 0 \\ \Delta_2, & 0 \leq x \leq a_2 \end{cases}$$

พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนสามารถหาได้จากการแก้สมการโบโกลิวบอฟ คือ

$$\epsilon \psi = -\sigma_z \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right) \psi + \sigma_x \Delta(x) \psi \quad (1)$$

โดย

$$\psi = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

และมี σ_x กับ σ_z เป็นเมตริกซ์เพาลี

สมมติให้ออมพลิจูดของอิเล็กตรอนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอมพลิจูดของโฮลนั่นคือกำหนดให้

$$v = \alpha_1 u$$

และแทนค่า v ลงในสมการ(1) แล้วจะได้ค่า α_1 สองค่าคือ $\alpha_{1\pm}$ ($-a_1 \leq x \leq 0$)

$$\alpha_{1\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_1} \pm \left(\frac{\epsilon^2}{\Delta_1^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (4)$$

แทนเงื่อนไขขอบเขต $\psi(-a_1) = 0$ แล้วสามารถหาค่า u และ v ได้คือ

$$u_1(x) = \left[A \operatorname{sink}_+(x+a_1) + B \operatorname{sink}_-(x+a_1) \right] \exp^{(\epsilon \mp \Omega_1 x)} \quad (5)$$

$$v_1(x) = \left[\left(\frac{\epsilon - \Omega_1}{\epsilon + \Omega_1} \right)^{1/2} A \operatorname{sink}_+(x+a_1) + \left(\frac{\epsilon + \Omega_1}{\epsilon - \Omega_1} \right)^{1/2} B \operatorname{sink}_-(x+a_1) \right] \exp^{(\epsilon \mp \Omega_1 x)} \quad (6)$$

$$k_{\pm} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (E_F \cos^2 \theta \pm \Omega_1)^{1/2} \quad (7)$$

$$\Omega_1 = (\epsilon^2 - \Delta_1^2)^{1/2} \quad (8)$$

สำหรับในตำนำยังหาชนิดที่สองที่มีวิธีการเดียวกับ ในกรณีแรกจะทำให้ได้ว่า

$$\alpha_{2\pm} = \frac{\epsilon}{\Delta_2} \pm i \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{\Delta_2}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

$$u_2(x) = \left[C \sin q_+(x-a_2) + D \sin q_-(x-a_2) \right] \exp(\alpha_{2\pm} x) \quad (10)$$

$$v_2(x) = \left[\left(\frac{\epsilon - \Omega_2}{\epsilon + \Omega_2}\right)^{1/2} C \sin q_+(x-a_2) + \left(\frac{\epsilon + \Omega_2}{\epsilon - \Omega_2}\right)^{1/2} D \sin q_-(x-a_2) \right] \exp(\alpha_{2\pm} x) \quad (11)$$

$$q_{\pm} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (E_F \cos^2 \theta \pm \Omega_2)^{1/2} \quad (12)$$

$$\Omega_2 = (\epsilon^2 - \Delta_2^2)^{1/2} \quad (13)$$

จากสมบัติของฟังก์ชันคลื่นที่ว่าจะต้องมีค่าต่อเนื่อง ดังนั้นค่า u และ v จะต้องต่อเนื่องที่ $x = 0$ และอนุพันธ์อันดับหนึ่งต้องมีค่าเท่ากันที่ $x = 0$ ด้วย จะทำให้ได้สมการพลังงานกระตุ้มคือ

$$\begin{aligned} & \Delta_1 \Delta_2 \left[(q_- \sin q_+ a_2 \cos q_- a_2 - q_+ \sin q_- a_2 \cos q_+ a_2) \right. \\ & \quad \left. \times (k_+ \sin k_- a_1 \cos k_+ a_1 - k_- \sin k_+ a_1 \cos k_- a_1) \right] \\ & - (\epsilon^2 + \Omega_1 \Omega_2) \left[(q_- \sin k_- a_1 \cos q_- a_2 + k_- \cos k_- a_1 \sin q_- a_2) \right. \\ & \quad \left. \times (q_+ \sin k_+ a_1 \cos q_+ a_2 + k_+ \cos k_+ a_1 \sin q_+ a_2) \right] \\ & + (\epsilon^2 - \Omega_1 \Omega_2) \left[(q_+ \sin k_- a_1 \cos q_+ a_2 + k_- \cos k_- a_1 \sin q_+ a_2) \right. \\ & \quad \left. \times (q_- \sin k_+ a_1 \cos q_- a_2 + k_+ \cos k_+ a_1 \sin q_- a_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำนั้น จะประมาณได้ว่า
เพราะฉะนั้นจะประมาณสมการ 14 ใหม่เป็น

$$\frac{\epsilon}{E_F \cos^2 \theta} \approx 10^{-3} \ll 1$$

$$\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \Omega_2} \sin \Delta q \sin \Delta k + \cos(\bar{k} + \bar{q}) = \cos \Delta k \cos \Delta q \quad (15)$$

โดยที่

$$\Delta k = (k_+ - k_-) a_1 = \frac{2a_1 \Omega_1}{\pi \epsilon \Delta_2} \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\Delta q = (q_+ - q_-) a_2 = \frac{2a_2 \Omega_2}{\pi \epsilon \Delta_2} \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\bar{k} = (k_+ + k_-) a_1 \approx 2k_F a_1 \cos \theta \quad (16)$$

$$\bar{q} = (q_+ + q_-) a_2 \approx 2k_F a_2 \cos \theta$$

$$\epsilon = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta_2}$$

สำหรับกรณี $\epsilon < \Delta_2$

กำหนดว่า $\rho = i\Omega_2 = (\Delta_2^2 - \epsilon^2)^{1/2}$ แล้วแทนค่าลงในสมการ (15) จะได้ว่า

$$\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \rho} \sin \Delta q \sin \Delta q' + \cos(\bar{k} + \bar{q}) = \cos \Delta k \cos \Delta q' \quad (17)$$

$$\Delta q' = i \Delta q \quad (18)$$

สำหรับความหนาแน่นสถานะสามารถหาได้จากสมการ (19)

$$n_j(\epsilon) = \frac{2\pi N(0) V}{k_F (a_1 + a_2) E_F} \left| \cos \theta \frac{d}{d\epsilon} \cos \theta_j \right| \quad (19)$$

ความหนาแน่นสถานะรวมมีค่าเป็น

$$n(\epsilon) = \sum_j n_j(\epsilon) \quad (20)$$

ความหนาแน่นสถานะในช่วง $\epsilon > \Delta_2$ มีค่าเป็น

$$\frac{n(\epsilon)}{N(0)V} = \sum_j \pi \epsilon \frac{\left[\begin{aligned} & \frac{1}{\Omega_1} [a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_2^2] \cos \Delta k \sin \Delta q \\ & + \frac{1}{\Omega_2} [a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_1 \Omega_1^2] \sin \Delta k \cos \Delta q \\ & + \frac{\pi \Delta_2 \epsilon \cos \theta}{2} \left[2 - \frac{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}{(\Omega_1 \Omega_2)^2} [\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2] \right] \sin \Delta k \sin \Delta q \end{aligned} \right]}{k_F (a_1 + a_2)^2 \Omega_1 \Omega_2 \sin(k + q)} \quad (21)$$

ความหนาแน่นสถานะในช่วง $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$ มีค่าเป็น

$$\frac{n(\epsilon)}{N(0)V} = \sum_j \frac{\pi \epsilon}{k_F (a_1 + a_2)} \frac{\left[\begin{aligned} & \frac{\Omega_1 \rho (a_1 + a_2)}{E_F \cos^2 \theta} \sin(\bar{k} + \bar{q}) \\ & + \epsilon \Delta_2 \pi \cos \theta \left[2 - \frac{(\rho^2 - \Omega_1^2)}{(\rho \Omega_1)^2} (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) \right] \sin \Delta k \sinh \Delta q' \\ & + \frac{2}{\rho} [\rho^2 a_1 - a_2 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2)] \cosh \Delta q' \sin \Delta k \\ & + \frac{2}{\Omega_1} [a_1 (\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) + a_2 \Omega_1^2] \sinh \Delta q' \cos \Delta k \end{aligned} \right]}{\left[\begin{aligned} & 2\Omega_1 \rho (a_1 + a_2) \sin(\bar{k} + \bar{q}) \\ & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \rho [(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_2 + a_1 \Omega_1^2] \cosh \Delta q' \sin \Delta k \\ & + \frac{1}{E_F \cos^2 \theta} \Omega_1 [(\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2) a_1 - a_2 \rho^2] \sinh \Delta q' \cos \Delta k \end{aligned} \right]} \quad (22)$$

สามารถแสดงความสัมพันธ์ของ

ความหนาแน่นสถานะเป็นฟังก์ชันของพลังงานอิสระ

ได้ ดังภาพประกอบ 12 ถึง 16

ต่อไปจะทำการประมาณว่า ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่สองมีขนาดใหญ่มากเมื่อเปรียบเทียบกับ ϵ คือ $a_2/\epsilon \gg 1$ โดยเราจะพิจารณาในช่วง $\Delta_1 < \epsilon < \Delta_2$ จะได้ว่า

$$\sinh \Delta q' \simeq \cosh \Delta q' \simeq \frac{\exp(\Delta q')}{2}$$

เพราะฉะนั้นเขียนสมการ (17) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \rho} \sin \Delta k \left[\exp(\Delta q') \right] + \cos(\bar{k} + \bar{q}) = \cos \Delta k \left[\exp(\Delta q') \right]$$

$$\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \rho} \sin \Delta k - \cos \Delta k = - \frac{\cos(k + q)}{\exp(\Delta q')}$$

เมื่อ $\Delta q' \rightarrow \infty$ แล้ว

$$\frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\Omega_1 \rho} \sin \Delta k - \cos \Delta k = 0 \quad (23)$$

ถ้ากำหนดให้ $\tan \beta = \frac{\Omega_1 \rho}{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}$

แล้ว $\cos \beta = \frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\epsilon(\Delta_2 - \Delta_1)}$

จากสมการ (23) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sin \left(\Delta k - \cos^{-1} \frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\epsilon(\Delta_2 - \Delta_1)} \right) = 0$$

$$\sin \left(\Delta k - \left(\cos^{-1} \frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\epsilon(\Delta_2 - \Delta_1)} \mp 2m\pi \right) \right) = 0 \quad (24)$$

นั่นคือ $\Delta k - \left(\cos^{-1} \frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\epsilon(\Delta_2 - \Delta_1)} \mp 2m\pi \right) = n\pi \quad (25)$

$$\Delta k = n\pi \pm 2m\pi + \cos^{-1} \frac{\epsilon^2 - \Delta_1 \Delta_2}{\epsilon(\Delta_2 - \Delta_1)}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad , \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

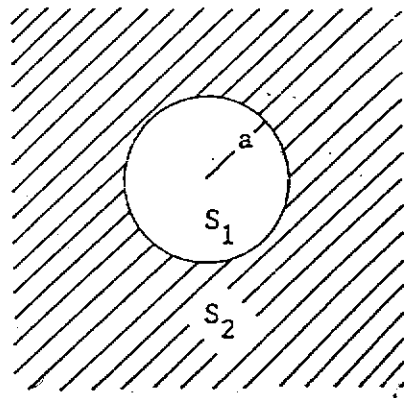
โดยอาจจะเขียนสมการ (25) ใหม่เป็น

$$z = \frac{\pi \cos \theta}{2(y^2 - A^2)^{1/2}} \left[n\pi \pm 2m\pi + \cos^{-1} \frac{y^2 - A}{y(1 - A)} \right] \quad (26)$$

$$z = \frac{a_1}{\xi_2}, \quad y = \frac{\epsilon}{\Delta_2}, \quad A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

ภาคผนวก ค

แบบจำลองของฮิวและเสตรัค์ในการคำนวณหาพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอน



ภาพประกอบ 27 แสดงแบบจำลองของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงรูปทรงกลมที่ฝังตัวอยู่ในตัวยิ่งยวดอุณหภูมิสูงขนาดใหญ่อีกชนิดหนึ่ง

จาก
$$\Delta(\vec{r}) = \begin{cases} \Delta_0 e^{i\phi_1} & , r < a \\ \Delta_0 e^{i\phi_2} & , r > a \end{cases} \quad (1)$$

และจากสมการโบโกลิวอฟ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F \right] u + \Delta v = \epsilon u \quad (2.1)$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_F \right] v + \Delta^* u = \epsilon v \quad (2.2)$$

โดยสมมติให้ $v = \alpha u$ แล้วแทนค่าลงในสมการ (2) จะได้ว่า
กรณี $r > a$

$$\alpha_1 = e^{-i\phi_2} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_0} + i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.1)$$

$$\alpha_2 = e^{-i\phi_2} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_0} - i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.2)$$

จากสมการ(2.2) เขียนใหม่เป็น

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (4)$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_F - \Delta \alpha + \epsilon \right)$$

เขียนสมการ (4) ใหม่เป็น

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0$$

ให้ $u = h(r)Y(\theta, \phi)$ แทนค่าลงในสมการข้างบนแล้วจัดการแยกตัวแปร

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + k^2 r^2 &= \frac{-1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \\ &= \text{constant} = c \end{aligned} \quad (5)$$

ให้ $Y = W(\theta)I(\phi)$ แทนค่าลงในสมการ (5) แล้วจัดรูปใหม่เป็น

$$\frac{\sin \theta}{W} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + c \sin^2 \theta = \frac{1}{I} \frac{\partial^2 I}{\partial \phi^2} = m^2 \quad (6)$$

$$I'' + m^2 I = 0$$

$$\frac{\sin \theta}{W} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + c \sin^2 \theta - m^2 = 0 \quad (7)$$

ให้ $x = \cos \theta$, $\sin^2 \theta = 1 - x^2$ แทนค่าลงในสมการ (7) แล้วจัดรูปใหม่

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial W}{\partial x} + \left[c - \frac{m^2}{(1 - x^2)} \right] W = 0 \quad (8)$$

สมการ(8) คือ ฟังก์ชันพหุนามเลขของสมการ (Associated Legendre Polynomia Function) มีค่า c เป็น

$$c = l(l + 1)$$

จากสมการ (5) จัดรูปแยกตัวแปร r จะได้ว่า

$$(kr)^2 h'' + 2krh' + ((kr)^2 - c)h = 0$$

ให้ $p = kr$ จะได้ว่า

$$p^2 h'' + 2ph' + (p^2 - c)h = 0 \quad (9)$$

และให้
$$h = \frac{Z(p)}{p^{1/2}}$$

แทนค่า h ลงในสมการ (9)

$$p^2 Z'' + pZ' + (p^2 - v^2)Z = 0 \quad (10)$$

สมการ (10) เป็น ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function) ที่มี $v^2 = \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2$

โดยคำตอบสมการ (10) เป็น

$$Z(p) = H_{\ell+1/2}^{(1)} = J_{\ell+1/2} + i(-1)^{\ell+1} J_{-\ell-1/2} \quad (11)$$

$$J_{\ell+1} = \sum_m \frac{(-1)^m}{m!(m+\ell+1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\ell+1/2}$$

แต่คำตอบของสมการ (9) เป็น $h = \frac{Z}{p^{1/2}}$

นั่นคือ
$$h = \frac{H_v}{p^{1/2}} = \frac{J_{\ell+1/2}}{p^{1/2}} + \frac{i(-1)^{\ell+1} J_{-\ell-1/2}}{p^{1/2}}$$

กำหนดให้
$$h_{\ell}^{(1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (j_{\ell} + in_{\ell}) \quad (12)$$

โดย
$$j_{\ell} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x)$$

$$= (2x)^{\ell} \sum_m \frac{(m+\ell)! (-1)^m}{m!(2m+2\ell+1)!} x^{2m}$$

$$n_{\ell} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+1/2}(x)$$

$$= \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell} x^{\ell+1}} \sum_m \frac{(-1)^m (m-\ell)!}{m!(2m-2\ell)!} x^{2m}$$

ในที่นี้
$$N_{\ell+1/2}(p) = (-1)^{\ell+1} J_{-\ell-1/2}(p)$$

จาก $u = h(kr)Y(\theta, \phi)$ ที่มีค่า k สองค่าคือ k_1 และ k_2 และ Y ขึ้นกับค่า m และ ℓ ขึ้น ทำให้เขียนค่า u ใหม่ได้เป็น

$$u = (h_\ell^1(k_1 r) + h_\ell^1(k_2 r)) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (13)$$

โดย $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ และ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

แต่คำตอบของสมการ (9) จะต้องรวมทุกค่าที่เป็นไปได้ของ u คือจะต้องรวมทุกค่าของ ℓ และ m

$$u = \sum_{\ell, m} [A_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_1 r) + B_{\ell m} h_\ell^{(1)}(k_2 r)] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (14)$$

จากการกำหนด $v = \alpha u$ ทำให้ได้ว่า

$$v = \sum_{\ell, m} [A_{\ell m} \alpha_1 h_\ell^{(1)}(k_1 r) + B_{\ell m} \alpha_2 h_\ell^{(1)}(k_2 r)] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (15)$$

กรณี $r < a$ สามารถหา u และ v ได้ในทำนองเดียวกัน โดยพิจารณาว่าที่ $r = 0$ u และ v หาได้ เพราะฉะนั้น h_ℓ^1 เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ j แล้ว

$$u = \sum_{\ell, m} [C_{\ell m} j_\ell(\kappa_1 r) + D_{\ell m} j_\ell(\kappa_2 r)] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (16)$$

$$v = \sum_{\ell, m} [C_{\ell m} \beta_1 j_\ell(\kappa_1 r) + D_{\ell m} \beta_2 j_\ell(\kappa_2 r)] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (17)$$

โดยที่

$$\kappa_{2,1} = \pm \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[E_F \pm i\Delta_0 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$\alpha_{1,2} = e^{-i\phi_2} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_0} \pm i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\kappa_{1,2} = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[E_F \pm i\Delta_0 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

$$\beta_{1,2} = e^{-i\phi_1} \left[\frac{\epsilon}{\Delta_0} \pm i \left(1 - \frac{\epsilon^2}{\Delta_0^2} \right)^{1/2} \right]$$

$A_{\ell m}$ $B_{\ell m}$ $C_{\ell m}$ และ $D_{\ell m}$ คือ ค่าคงที่ที่ได้จากเงื่อนไขขอบเขตต่อไปจะหาพลังงานสถานะต้นจาก ฟังก์ชันคลื่น u และ v โดยอาศัยเงื่อนไขที่ว่าที่ผิวสัมผัสระหว่างตัวนำยิ่งยวดชนิดที่หนึ่งกับชนิดที่สอง u และ v มีค่าต่อเนื่อง และอนุพันธ์อันดับหนึ่งต้องมีค่าต่อเนื่องด้วย นั่นคือ

$$u(r = a^-) = u(r = a^+) \quad (18.1)$$

$$v(r = a^-) = v(r = a^+) \quad (18.2)$$

$$\nabla u(r = a^-) = \nabla u(r = a^+) \quad (18.3)$$

$$\nabla v(r = a^-) = \nabla v(r = a^+) \quad (18.4)$$

แก้มสมการ (18.1) ถึง (18.4) สามารถเขียนเมตริกซ์ขนาดสี่คูณสี่ของตัวแปรต่างๆคู่กับเมตริกซ์ขนาดสี่คูณหนึ่งของค่าคงที่มีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นสามารถเขียนดีเทอร์มิแนนต์ของตัวแปรต่างๆได้เป็น

$$\begin{vmatrix} ik_1 & ik_2 & k_1 & k_2 \\ 1 & 1 & \tan k_1 a & \tan k_2 a \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 \tan k_1 a & \beta_2 \tan k_2 a \\ ik_1 \alpha_1 & ik_2 \alpha_2 & k_1 \beta_1 & k_2 \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

เขียนสมการ (19) ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) [k_2 a - ik_2 \tan(k_2 a)] [k_1 a - ik_1 \tan(k_1 a)] \\ & - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) [k_2 a - ik_1 \tan(k_2 a)] [k_1 a - ik_2 \tan(k_1 a)] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

สมการ (20) คือ สมการพลังงานกระตุ้นของอิเล็กทรอนิกส์ที่มีโมเมนต์เชิงมุมเป็นศูนย์

ภาคผนวก ง

วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับคำนวณหาค่าความหนาแน่นสถานะ

จากสมการความหนาแน่นสถานะ

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)V} = \frac{\epsilon\pi}{k_F(a_1 + a_2)} \sum_j S_j(\theta_j)$$

แต่ θ_j เป็นค่าต่อเนื่องจะนับเขียนใหม่เป็น

$$\frac{N(\epsilon)}{N(0)V} = \frac{\epsilon\pi}{k_F(a_1 + a_2)} \frac{1}{1 - (\cos\theta)_{\min}} \int_{\cos\theta_{\min}}^1 \frac{S(\cos\theta)}{1 - (\cos\theta)_{\min}} d\cos\theta$$

เราจะหาค่าการอินทิเกรตได้โดยเริ่มจากสมการการหาค่าแทรกของนิวตัน (Newton's Formula for Interpolation)

| | | | | | | |
|---------|---------|------------------|--------------------|---------|---------|----------------|
| x | y | Δy | $\Delta^2 y$ | \dots | \dots | $\Delta^n y$ |
| x_0 | y_0 | | | | | |
| | | Δy_0 | | | | |
| x_1 | y_1 | | $\Delta^2 y_0$ | | | |
| | | Δy_1 | | \cdot | | |
| x_2 | y_2 | | $\Delta^2 y_1$ | \cdot | \cdot | |
| | | Δy_2 | | \cdot | \cdot | \cdot |
| x_3 | y_3 | | $\Delta^2 y_2$ | \cdot | \cdot | $\Delta^n y_0$ |
| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |
| \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot | \cdot |
| \cdot | \cdot | \cdot | $\Delta^2 y_{n-2}$ | \cdot | \cdot | \cdot |
| \cdot | \cdot | Δy_{n-1} | | \cdot | \cdot | \cdot |
| x_n | y_n | | | | | |

วิธีการนี้เป็นวิธีการหาค่าแทรกของ y ในช่วง $x_0 \leq x \leq x_n$ ซึ่ง $x_n = x_0 + nh$, h เป็นช่วงห่างระหว่าง x_1 กับ x_{1+1} โดยการสร้างโพลิโนเมียลดีกรี $n + 1$

$$y_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

แล้วแทนค่าต่างๆ ลงไปจะได้ว่า

$$x = x_0 \quad \text{แล้ว} \quad y_n(x_0) = a_0$$

$$x = x_1 \quad \text{แล้ว} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$x = x_2 \quad \text{แล้ว} \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} \quad \dots$$

$$x = x_{n-1} \quad \text{แล้ว} \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

$$y_n = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (1)$$

กำหนดลักษณะใหม่เพื่อความสะดวกในการอินทิเกรต คือ

$$x = x_0 + uh$$

โดยกำหนดให้ u เป็นค่าต่อเนื่องทำให้ x เป็นค่าต่อเนื่องในช่วง x_0 ถึง x_n แทนค่าลงในสมการ (1) จะได้ว่า

$$y_n(x) = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2)$$

นำสมการ (2) ไปหาค่าอินทิเกรต

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y_n dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \right. \\ \left. + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \right] dx$$

$$\begin{aligned}
&= h \int_0^n \left[y_0 + u \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \right] du \\
\int_{x_0}^{x_0+nh} y dx &= h \left[n y_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2 \right) \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \dots \right] \quad (3)
\end{aligned}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

ในงานวิจัยที่กำหนดให้ $n = 6$ ฉะนั้นเขียนสมการ (3) ใหม่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+6h} y dx &= h \left[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^4 y_0 + \frac{33}{10}\Delta^5 y_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{41}{140}\Delta^6 y_0 \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

แทนเทอมสุดท้ายด้วย $3\Delta^6 y_0 / 10$ ซึ่งจะผิดไป $h/140$ เมื่อ h มีค่าน้อยสามารถตัดทิ้งไปได้ ฉะนั้นสามารถเขียนสมการ (4) ใหม่ได้เป็น

$$\int_x^{x+6h} y dx = \frac{3}{10h} [y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6]$$

ในงานวิจัยแบ่ง $1 - (\cos \theta)_{\min}$ ออกเป็น 3 ช่วง ช่วงละ 6 ส่วน เป็น 18 ส่วน

$$\int_{c(\min)}^1 y dx = \int_{c(-9)}^{c(-3)} y dx + \int_{c(-3)}^{c(3)} y dx + \int_{c(3)}^{c(9)} y dx$$

$$\int_{c(-9)}^{c(-3)} y dx = \frac{3}{10h} [y_{-9} + 5y_{-8} + y_{-7} + 6y_{-6} + y_{-5} + 5y_{-4} + y_{-3}]$$

$$\int_{c(-3)}^{c(3)} y dx = \frac{3}{10h} [y_{-3} + 5y_{-2} + y_{-1} + 6y_0 + y_1 + 5y_2 + y_3]$$

$$\int_{c(3)}^{c(9)} y dx = \frac{3}{10h} [y_3 + 5y_4 + y_5 + 6y_6 + y_7 + 5y_8 + y_9]$$

สามารถเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้เป็นดังนี้

```
C   MAINPROGRAM
      REAL J1,J2,J3,J4,L1,L2,M,N
      A=0.4
      B=0.1
      D=0.3
      E=0.3
      M=0.5
      AP=3.1415927
      H1=0.01
75  IA=(1.-A)/H1-1.
      Y=A+H1
      DO 20  I=1,IA
      CM=(B*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)
      CN=(1.-CM)/18.
      AS1=0.
      AS2=0.
      AS3=0.
      AS4=0.
      AS5=0.
      AS6=0.
      R=0.
      DO 10  J=1,3
      R=R+1.
      CR1=CM+(6.*R-5.)*CN
      AS1=AN1(CR1,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS1
      CR2=CM+(6.*R-4.)*CN
      AS2=AN1(CR2,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS2
      CR3=CM+(6.*R-3.)*CN
      AS3=AN1(CR3,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS3
      CR4=CM+(6.*R-2.)*CN
      AS4=AN1(CR4,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS4
      CR5=CM+(6.*R-1.)*CN
```

```

AS5=AN1(CR5,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS5
CR6=CM+6.*R*CN
IF(R.EQ.3.) GO TO 30
AS6=AN1(CR6,Y,A,B,D,E,M,AP)+AS6
GO TO 10
30 AS7=AN1(CR6,Y,A,B,D,E,M,AP)
10 CONTINUE
  AI1=B*AP**2/(60.*(D+E))*(1.+5.*AS1+AS2+6.*AS3+AS4+5.*AS5+2.*AS6+AS
*7)
  AI=ABS(AI1)
  WRITE(2,15)Y,AI
15 FORMAT (10X,F10.3,T31,F10.3)
  Y=Y+H1
20 CONTINUE
  IB=(1./B**2+1.)**(1./2.)/H1-102.
  Y=1.+H1
  DO 50 I=1,IB
    CM=(B*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)
    CN=(1.-CM)/18
    BS1=0.
    BS2=0.
    BS3=0.
    BS4=0.
    BS5=0.
    BS6=0.
    R=0.
    DO 55 J=1,3
      R=R+1
      CR1=CM+CN*(6.*R-5.)
      BS1=AN2(CR1,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS1
      CR2=CM+CN*(6.*R-4.)
      BS2=AN2(CR2,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS2

```

```

CR3=CM+CN*(6.*R-3.)
BS3=AN2(CR3,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS3
CR4=CM+CN*(6.*R-2.)
BS4=AN2(CR4,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS4
CR5=CM+CN*(6.*R-1.)
BS5=AN2(CR5,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS5
CR6=CM+CN*6.*R
IF(R.EQ.3.) GO TO 60
BS6=AN2(CR6,Y,A,B,D,E,M,AP)+BS6
GO TO 55
60 BS7=AN2(CR6,Y,A,B,D,E,M,AP)
55 CONTINUE
  BI1=Y*B*AP**2/(60.*(D+E))*(1.+5.*BS1+BS2+6.*BS3+BS4+5.*BS5+2.*BS6+
  *BS7)
  BI=ABS(BI1)
  WRITE(2,70)Y,BI
70 FORMAT (10X,F10.3,T31,F10.3)
  Y=Y+H1
50 CONTINUE
  A=A+0.4
  IF(ABS(A).LE.0.8) GO TO 75
  STOP
  END
C  SUBFUNCTION
  FUNCTION AN1(C,Y,A,B,D,E,M,AP)
  REAL J3,J4,M,N
  F1=(1.+B/C**2*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)
  F2=(1.-B/C**2*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)
  W2=(1.+B**2/C**4*(1.-Y**2))**(1./2.)
  U2=(2.*(W2+1.))**(1./2.)
  U3=(2.*(W2-1.))**(1./2.)
  F3=F1+F2

```

$F4=F1-F2$
 $J3=(2.*D*C*F3)/(AP*B)$
 $J4=2.*D*C*F4/(AP*B)$
 $T2=(2.*E*C*U2)/(AP*B)$
 $T3=2.*E*C*U3/(AP*B)$
 $F5=1./F1+1./F2$
 $F6=1./F1-1./F2$
 $W3=1./W2+1.$
 $W4=1./W2-1.$
 $H=(Y**2-A**2)**(1./2.)$
 $N=(1.-Y**2)**(1./2.)$
 $A1=Y**2-A*M$
 $A2=F4*SIN(J3)-F3*SIN(J4)$
 $A3=U3/2.*SIN(T2)-U2/2.*SINH(T3)$
 $A4=COSH(T3)*COS(J4)-COS(T2)*COS(J3)$
 $A5=F1*F2+(U2**2+U3**2)/4.$
 $A6=COSH(T3)*COS(J3)-COS(T2)*COS(J4)$
 $A7=F1*F2-(U2**2+U3**2)/4.$
 $A8=F3*SIN(J3)-F4*SIN(J4)$
 $A9=U2/2.*SIN(T2)+U3/2.*SINH(T3)$
 $B1=SIN(J3)-J3*COS(J4)$
 $B2=SIN(J4)-J4*COS(J3)$
 $B3=SIN(T2)-T2*COSH(T3)$
 $B4=T3*COS(T2)-SINH(T3)$
 $B5=SIN(T2)+T2*COS(T2)$
 $B6=SINH(T3)+T3*COSH(T3)$
 $B7=SIN(J3)+J3*COS(J3)$
 $B8=SIN(J4)+J4*COS(J4)$
 $R5=F6*D/H*COS(T2)*SIN(J3)-2.*E*B/(U3*W2*C**2)*SINH(T3)*COS(J4)-F5*$
 $*D/H*COSH(T3)*SIN(J4)-2.*E*B/(U2*W2*C**2)*SIN(T2)*COS(J3)$
 $R6=F5*D/H*COS(T2)*SIN(J4)-2.*E*B/(U3*W2*C**2)*SINH(T3)*COS(J3)-F6*$
 $*D/H*COSH(T3)*SIN(J3)-2.*E*B/(U2*W2*C**2)*SIN(T2)*COS(J4)$

R7=2.*E*W4/U3*SINH(T3)*COS(J4)-F6*D*COSH(T3)*SIN(J4)+2.*E*W3/U2*SI
*N(T2)*COS(J3)+F5*D*COS(T2)*SIN(J3)

R8=2.*E*W4/U3*SINH(T3)*COS(J3)-F5*D*COSH(T3)*SIN(J3)+2.*E*W3/U2*SI
*N(T2)*COS(J4)+F6*D*COS(T2)*SIN(J4)

S2=(2.-A1*(N**2-H**2)/(N*H)**2)*A2*A3*Y*C**2+A1*A3*(F5*B1-F6*B2)*B
Y/(2.*H)-A1*A2*(B3/U3+B4/U2)*B2*Y/(2.*C**2*W2)+H*N*B**2/C**2*Y*
A4(1./(F1*F2)+1./W2)-A5*R5*N*H*C/AP*Y+H*N*B**2/C**2*Y*A6*(1./(F1*
*F2)-1./W2)-N*H*Y*C/AP*A7*R6+H*N*B**2/(2.*W2*C**2)*Y*A8*(B5/U2+B6/U
*3)-N*B*Y/2.*A9*(F6*B7-F5*B8)

AT2=A1*A3*(F5*B2-F6*B1)*B/2.-B*A1*A2/2.*(B3/U3*W4+B4*W3/U2)+N*H*B*
*(1./(F1*F2)+1./W2)*A4+N*H*C*A5*R7/AP+N*H*B*(1./(F1*F2)-1./W2)*A6+N
*H*C*A7*R8/AP+N*H*B*A8/2.*(W3*B5/U2+W4*B6/U3)+N*H*B*A9*(F5*B7-F6*B
*8)/2.

AN1=S2/AT2

RETURN

END

C

SUBFUNCTION

FUNCTION AN2(C, Y, A, B, D, E, M, AP)

REAL J1, J2, L1, L2, M, N

H=SQRT(Y**2-A**2)

N=SQRT(Y**2-1.)

F1=(1.+B/C**2*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)

F2=(1.-B/C**2*(Y**2-A**2)**(1./2.))**(1./2.)

F3=F1+F2

F4=F1-F2

F5=1./F1+1./F2

F6=1./F1-1./F2

G1=(1.+B/C**2*(Y**2-1.))**(1./2.))**(1./2.)

G2=(1.-B/C**2*(Y**2-1.))**(1./2.))**(1./2.)

G3=G1+G2

G4=G1-G2

G5=1./G1+1./G2

$G6=1./G1-1./G2$
 $J1=2.*D*C*F3/(B*AP)$
 $J2=2.*D*C*F4/(B*AP)$
 $L1=2.*E*C*G3/(B*AP)$
 $L2=2.*E*C*G4/(B*AP)$
 $P1=Y**2-A*M$
 $P2=F4*SIN(J1)-F3*SIN(J2)$
 $P3=G4*SIN(L1)-G3*SIN(L2)$
 $P4=COS(J2)*COS(L2)-COS(J1)*COS(L1)$
 $P5=COS(J1)*COS(L2)-COS(J2)*COS(L1)$
 $P6=F1*F2+G1*G2$
 $P7=F1*F2-G1*G2$
 $P8=G3*SIN(L1)-G4*SIN(L2)$
 $P9=F3*SIN(J1)-F4*SIN(J2)$
 $Q1=SIN(J1)-J1*COS(J2)$
 $Q2=SIN(J2)-J2*COS(J1)$
 $Q3=SIN(L1)-L1*COS(L2)$
 $Q4=SIN(L2)-L2*COS(L1)$
 $Q5=SIN(J1)+J1*COS(J1)$
 $Q6=SIN(J2)+J2*COS(J2)$
 $Q7=SIN(L1)+L1*COS(L1)$
 $Q8=SIN(L2)+L2*COS(L2)$
 $R1=F6*N*D*SIN(J1)*COS(L1)+G6*H*E*COS(J1)*SIN(L1)-F5*N*D*SIN(J2)*CO$
 $*S(L2)-G5*H*E*COS(J2)*SIN(L2)$
 $R2=F5*N*D*SIN(J2)*COS(L1)+G6*H*E*COS(J2)*SIN(L1)-F6*N*D*SIN(J1)*CO$
 $*S(L2)-G5*H*E*COS(J1)*SIN(L2)$
 $R3=F5*D*SIN(J1)*COS(L1)+G5*E*COS(J1)*SIN(L1)-F6*D*SIN(J2)*COS(L2)-$
 $*G6*E*COS(J2)*SIN(L2)$
 $R4=F6*D*SIN(J2)*COS(L1)+G5*E*COS(J2)*SIN(L1)-F5*D*SIN(J1)*COS(L2)-$
 $*G6*E*COS(J1)*SIN(L2)$
 $S1=(2.-(H**2+N**2)/(H*N)**2*P1)*P2*P3*C**2+P1*P3*(F5*Q1-F6*Q2)*B/($
 $*H*2.)+P1*P2*B/(2.*N)*(G5*Q3-G6*Q4)+H*N*B**2/C**2*(1./(F1*F2)+1./(G$

$$*1*G2))*P4*2.+2.*H*N*B**2/C**2*P5*(1./(F1*F2)-1./(G1*G2))-2.*C/AP*P$$

$$*6*R1-2.*C/AP*P7*R2-N*B/2.*P8*(F6*Q5-F5*Q6)-H*B/2.*P9*(G6*Q7-G5*Q8)$$

$$AT1=2.*H*N*B*P4*(1./(F1*F2)+1./(G1*G2))+2.*H*N*C/AP*P6*R3-P1*P3*(F$$

$$*6*Q1-F5*Q2)*B/2.-B/2.*P1*P2*(G6*Q3-G5*Q4)+2.*H*N*B*P5*(1./(F1*F2)-$$

$$*1./(G1*G2))+2.*H*N*C/AP*P7*R4+B/2.*H*N*P8*(F5*Q5-F6*Q6)+B/2.*H*N*P$$

$$*9*(G5*Q7-G6*Q8)$$

AN2=S1/AT1

RETURN

END

สำหรับค่าความผิดพลาดหาได้โดย

$$E = A - I$$

A คือค่าประมาณที่เราคำนวณหาได้

$$A = \frac{3}{10h} \left[y_{-9} + 5y_{-8} + y_{-7} + 6y_{-6} + y_{-5} + 5y_{-4} + 2y_{-3} + 5y_{-2} \right. \\ \left. + y_{-1} + 6y_0 + y_1 + 5y_2 + 2y_3 + 5y_4 + y_5 + 6y_6 \right. \\ \left. + y_7 + 5y_8 + y_9 \right]$$

สามารถเขียน y_{-9} ถึง y_9 ในรูปของ y_0 ด้วยการกระจายอนุกรมเทเลอร์จะได้ว่า

$$A = 18hy_0 + \frac{6}{10} \sum_{n=1} \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} y_0^{(2n)} \left[1 + 5(2)^{2n} + 2(3)^{2n} + 5(4)^{2n} + 5^{2n} \right. \\ \left. + 6(6)^{2n} + 7^{2n} + 5(8)^{2n} + 9^{2n} \right] \quad (5)$$

I คือค่าที่แท้จริงของการอินทิเกรต

$$I = Y_9 - Y_{-9}$$

โดยกำหนดให้ $Y' = y$ เอง เพราะจะได้สามารถเขียน I ในรูปของ y_0 ได้เป็น

$$I = 18hy_0 + 2 \sum_{n=1} \frac{(9h)^{2n+1}}{(2n+1)!} y_0^{(2n)} \quad (6)$$

แล้ว

$$E = A - I$$

$$= 2 \sum_{n=1} h^{2n+1} y_0^{(2n)} \left\{ \frac{9^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{3}{10(2n)!} \left[1 + 5(2)^{2n} + 2(3)^{2n} + 5(4)^{2n} \right. \right. \\ \left. \left. + 5^{2n} + 6(6)^{2n} + 7^{2n} + 5(8)^{2n} + 9^{2n} \right] \right\} \quad (7)$$

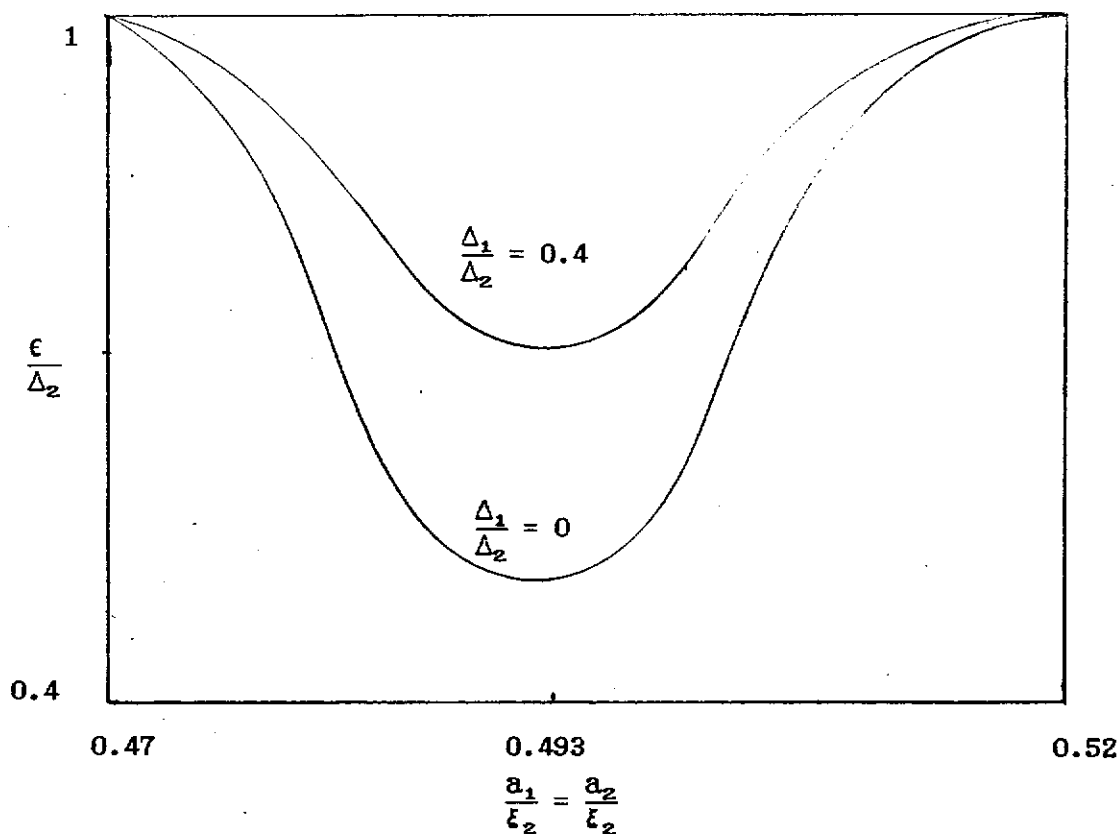
ที่ค่า $n = 1$ และ 2 สัมประสิทธิ์ของ $h^{2n+1} y_0^{(2n)}$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสามารถเขียน E ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} E &= -\frac{108}{7!} h^{2n+1} y_0^{(2n)} \pm \dots \\ &= -2.14 \times 10^{-11} y_0^{(2n)} \pm \dots \end{aligned}$$

โดยที่ค่า h สูงสุดคือ $1/18 = 0.05555\dots$ เพราะฉะนั้นถ้าต้องการให้ผลการอินทิเกรตมีค่าถูกต้องถึงตำแหน่งทศนิยมที่ 2 แล้วค่า $y_0^{(6)} < 10^9$

ภาคผนวก จ

หลุมพลังงานที่เกิดจากการเปลี่ยนความหนาของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดที่มีค่าน้อยๆ



ภาพประกอบ 28 แสดงพลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนเป็นฟังก์ชันของ $\frac{a_1}{\epsilon_2} = \frac{a_2}{\epsilon_2}$ ในที่นี้ใช้พารามิเตอร์ $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0.4$ และ 0 , $\phi = 0$, $\theta = 0$ และ $\frac{\Delta_2}{E_F} = 0.1$

จากภาพประกอบ 28 พบว่าในช่วง $0.47 \leq a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2 \leq 0.52$ พลังงานกระตุ้นของอิเล็กตรอนมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วจนถึงค่าต่ำสุดคือประมาณ 0.5 สำหรับ $\Delta_1/\Delta_2 = 0$ และประมาณ 0.7 สำหรับ $\Delta_1/\Delta_2 = 0.4$ จากนี้พลังงานกระตุ้นก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนมีค่าเท่าเดิมคือ 1 (Δ_2) และค่า $a_1/\epsilon_2 = a_2/\epsilon_2$ ที่ทำให้พลังงานกระตุ้นมีค่าต่ำสุด (ในช่วง 0.47 ถึง 0.52) คือ 0.493 หรืออาจจะกล่าวได้ว่ามีหลุมพลังงานเกิดขึ้นมาจากการเปลี่ยนแปลงความหนาของแผ่นประกบที่มีค่าน้อยๆ ไปเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นาย สุนันต์ มุศิริ

เกิดวันที่ 16 พฤศจิกายน พุทธศักราช 2510

สถานที่เกิด จังหวัด นครราชสีมา

สถานที่อยู่ปัจจุบัน 59 ซอยรามคำแหง 29 หัวหมาก บางกะปิ

กรุงเทพมหานคร 10240

สถานที่ทำงานปัจจุบัน ---

ประวัติการศึกษา

| | | |
|-----------|------------------------|---|
| พ.ศ. 2528 | มัธยมศึกษาตอนปลาย | จากโรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย |
| พ.ศ. 2531 | วท.บ. (วิชาเอกฟิสิกส์) | จากมหาวิทยาลัยรามคำแหง |
| พ.ศ. 2535 | วท.ม. (วิชาเอกฟิสิกส์) | จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร |

พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของแก๊สอะตอมโพแทสเซียมสองชนิด

บทคัดย่อ
ของ
สุพจน์ มุสิริ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกฟิสิกส์

ตุลาคม 2535

การวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อหาค่าพลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน
ในแถบประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ โดยสมมติว่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีขนาดคงที่แต่ไม่
เท่ากัน และมีเฟสต่างกัน ในการแก้สมการโบโกลิบอฟเพื่อหาสมการพลังงานกระตุ้น และความ
หนาแน่นสถานะได้พบว่า เมื่อระบบมีความต่างเฟส พลังงานกระตุ้นจะมีค่าลดลง สำหรับตัวนำ
ยิ่งยวดที่มีความหนาแน่นน้อยกว่าพลังงานกระตุ้นจะลดลงเร็วกว่าพลังงานกระตุ้นของตัวนำยิ่งยวดที่มีความ
หนาแน่นมากกว่า พลังงานกระตุ้นจะมีค่าต่ำสุดที่ความต่างเฟสเท่ากับ π และถ้ากำหนดให้ความ
ต่างเฟสมีค่าคงที่แล้ว พลังงานกระตุ้นจะมีค่าลดลงเมื่อแผ่นตัวนำยิ่งยวดมีความหนาแน่นเพิ่มขึ้นหรือเมื่อ
อัตราส่วนของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบลดลง และความหนาแน่นสถานะจะมีค่าลดลงเมื่อ
ความหนาแน่นหรืออัตราส่วนของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของตัวนำยิ่งยวดมีค่าเพิ่มขึ้น ความ
หนาแน่นสถานะขึ้นกับความหนาแน่นของตัวนำยิ่งยวดที่พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสูงกว่าอีกด้วย
เมื่อพลังงานกระตุ้นมีค่ามากกว่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ จะพบว่า พลังงานกระตุ้น
และความหนาแน่นสถานะ เกิดความแปรปรวน

EXCITATION ENERGY AND DENSITY OF STATES IN HIGH
TEMPERATURE SUPERCONDUCTOR BILAYER

AN ABSTRACT

BY

SUPHOT MUSIRI

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Science degree in Physics
at Srinakharinwirot University
October 1992

The purpose of this research is to study the excitation energy and the density of states of a high temperature superconductor bilayer, by assuming that the order parameters of the bilayer have constant values but different magnitudes and phases. By solving the Bogoliubov equations, we find that when the phases are different the excitation energy decreases, and the excitation energy of the layer with smaller thickness decreases more quickly than the thicker one. The excitation energy is lowest, when the phase difference is π . For a fixed phase difference, the excitation energy decreases as the thickness of bilayer increases or the ratio of the order parameters decreases, and the density of states decreases as the thickness of the bilayer or the ratio of the order parameters increases. The density of states depends on the thickness of the superconductor with larger order parameter.

When the excitation energy is greater than the order parameter, the excitation energy and the density of states always fluctuate.