# การเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

ปริญญานิพนธ์

ของ

ทรงกิต เหมะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

เมษายน 2551

# การเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

ปริญญานิพนธ์

ของ

ทรงกิต เหมะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

เมษายน 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

# การเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

บทคัดย่อ

ของ

ทรงกิต เหมะ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551

ทรงกิต เหมะ (2551). *การเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น.* ปริญญานิพนธ์ วศ.ม. (เครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแกล้ว, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง.

ในงานวิจัยนี้ทั้งการใช้พลังงานที่น้อยที่สุดและนิ่มนวลที่สุดกับการกำหนดฟังก์ชันของความกระด้าง ซึ่งความนิ่มนวลเป็นที่ต้องการในหลายระบบพลศาสตร์ด้วยกัน อาทิเช่น ความนิ่มนวลของการขับขี่รถยนต์ ความนิ่มนวลในการทำงานของหุ่นยนต์ที่เกี่ยวข้องกับวัสดุที่เปราะบาง เสียรูปทรงได้ง่าย แต่อย่างไรก็ตามได้มีนักวิจัยส่วนมากสนใจศึกษาเกี่ยวกับการใช้พลังงานน้อยที่สุด และนักวิจัยอีกหลายท่านให้ความสนใจในเรื่องของความนิ่มนวลของระบบหรือทั้งความนิ่มนวลและประหยัดพลังงาน ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำเสนอความสัมพันธ์ที่ง่าย ไม่ซับซ้อน และใกล้เคียงกันระหว่างการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดทางตรง และการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อม โดยกำหนดให้ระบบและตัวแปรขึ้นกับเวลา เพื่อเป็นทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดในการแก้ปัญหา การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดสำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของความนิ่มนวลที่สุดทางตรงและความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อมเป็นวิธีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ร่วมกันกับการหาผลลัพธ์จากระเบียบวิธีทางตัวเลข ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล 2ก้อน สปริง และตัวหน่วง เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าผลเฉลยความนิ่มนวลที่สุดใกล้เคียงกันหรือไม่

จากการวิจัยพอสรุปได้ว่า ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมให้ผลลัพธ์จากระเบียบวิธีทางตัวเลขได้อย่างเหมาะสม ง่ายกว่า เร็วกว่า และผลลัพธ์ที่ได้เหมือนกันกับปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง

# COMPARISON BETWEEN MINIMUM DIRECT AND INDIRECT JERK OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

AN ABSTRACT

BY

SONGKIT HEAMA

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering

at Srinakharinwirot University

April 2008

Songkit Heama. (2008). *Comparison between Minimum Direct and Indirect Jerk of Linear Dynamic Systems.* Master thesis, M.Eng. (Mechnical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew : Lt.Col. Assist. Prof. Dr. Anotai Suksangpanomrung.

In this thesis, Both the minimum energy consumption and smoothness, which is quantified as a function of jerk, are generally needed in many dynamic systems such as the automobile and the pick-and-place robot manipulator that handles fragile equipments. Nevertheless, many researchers come up with either solely concerning on the minimum energy consumption or minimum jerk trajectory. This research paper proposes a simple yet very interesting relationship between the minimum direct and indirect jerks approaches in designing the time-dependent system yielding an alternative optimal solution. Extremal solutions for the cost functions of direct and indirect jerks are found using the dynamic optimization methods together with the numerical approximation. This is to allow us to simulate and compare visually and statistically the time history of control inputs employed by minimum direct and indirect jerk designs.

By considering minimum indirect jerk problem, the numerical solution becomes much easier and yields to the similar results as minimum direct jerk problem

# ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือแก้ไขความบกพร่องและปัญหาต่างๆ อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ คุณแม่ รัชภร เหมะ ที่เลี้ยงดู อบรม สั่งสอนและส่งเสริมสนับสนุนในการศึกษาของลูกเป็นอย่างดีตลอดมา และคุณ วิศิษฐ์ ตยางคนนท์ ที่ส่งเสริมและสนับสนุนในด้านการศึกษาควบคู่กับการทำงาน อีกทั้งเพื่อนร่วมงานทุกท่านที่ให้กำลังใจเสมอมา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 4 และรุ่นพี่รุ่นน้องในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร.จปร. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

ทรงกิต เหมะ

# สารบัญ


| บทที่ | | หน้า |
|---|---|---|
| 1 | **บทนำ** | 1 |
| | ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา | 1 |
| | วัตถุประสงค์ของการวิจัย | 2 |
| | ขอบเขตของการวิจัย | 2 |
| | วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ | 2 |
| | ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ | 3 |
| 2 | **ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง** | 4 |
| | ทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง | 4 |
| | ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง | 6 |
| 3 | **วิธีดำเนินการวิจัย** | 36 |
| | การกำหนดปัญหา (State of the Problem) | 36 |
| | เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition) | 38 |
| | กำหนดสมการ Two Degree-of-Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง | 41 |
| | ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) | 43 |
| | ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) | 43 |
| 4 | **ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ** | 50 |
| | ผลการทดสอบ | 50 |
| | วิเคราะห์ผลการทดสอบ | 65 |
| 5 | **สรุปและวิจารณ์** | 66 |
| | สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ | 66 |
| | ข้อเสนอแนะ | 67 |
| **บรรณานุกรม** | | 68 |

# สารบัญ(ต่อ)


| บทที่ | หน้า |
|---|---|
| **อภิธานศัพท์**..... | 71 |
| **ประวัติย่อผู้วิจัย**..... | 78 |

# บัญชีภาพประกอบ

**ภาพประกอบ** **หน้า**


1 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ..... 34

2 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ..... 41

3 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ..... 50

4 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ..... 56

5 กราฟเปรียบเทียบ $x_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 60

6 กราฟเปรียบเทียบ $\dot{x}_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 61

7 กราฟเปรียบเทียบ $x_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 62

8 กราฟเปรียบเทียบ $\dot{x}_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 63

9 กราฟเปรียบเทียบ $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 64

10 กราฟเปรียบเทียบ $u_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา ..... 65

# บทที่ 1
# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำวิจัย

ในปัจจุบันหุ่นยนต์และเทคโนโลยียานยนต์ได้ออกแบบโดยให้ความสำคัญของการประหยัดพลังงานหรือความนิ่มนวลที่ดีที่สุดของการเคลื่อนที่ ซึ่งได้มีการพิจารณาในหลายๆวิธีในการออกแบบของหุ่นยนต์และความนิ่มนวลที่สุดของการขับขี่รถยนต์ซึ่งรวมทั้งวิธีใช้พลังงานน้อยที่สุดและความนิ่มนวลที่สุด อย่างไรก็ตามในการศึกษาของหุ่นยนต์คือความต้องการที่จะทำงานให้ราบเรียบ นิ่มนวล เพื่อไม่ให้เกิดความเสียหายทั้งตัวอุปกรณ์และวัสดุที่เปราะบางที่ถูกหยิบ จับ อีกทั้งยังต้องการการประหยัดพลังงานในบางช่วงหรือตลอดการทำงาน ในลักษณะของงานที่กล่าวมานั้นผู้วิจัยต้องการหาค่าต่ำสุดของความกระด้าง (Jerk) ในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์เพื่อให้เกิดการเคลื่อนที่ที่นิ่มนวลและจะได้นำไปหาความเหมาะสมสูงสุดของในการใช้พลังงานของหุ่นยนต์ได้ต่อไป

โดยทั่วไปรูปแบบของปัญหาระบบพลศาสตร์จะประกอบด้วยสมการการเคลื่อนที่ เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขต ส่วนในงานวิจัยนี้ได้สนใจที่จะรวมปัญหาทั้งหมดเข้ากับเงื่อนไข Two-Point-Boundary-Value-Problem ซึ่งทั้งหมดของปัญหาได้รวมเป็นวัตถุประสงค์ของการแก้ปัญหาจุดมุ่งหมายหลักของหุ่นยนต์คือการวิ่งให้ได้ค่าของพลังงานที่ต่ำที่สุดเพื่อนำไปออกแบบให้มีค่าตัวแปรในการเคลื่อนที่ที่ต่ำที่สุดตลอดการเคลื่อนที่ ในการค้นคว้าได้แสดงให้เห็นว่ามีผู้วิจัยหลายท่านที่ได้ทำการวิจัยเรื่องการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของพลังงานตลอดจนความนิ่มนวลที่สุดตลอดการทำงานของระบบ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ได้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งกับผลรวมของแรงซึ่งรวมถึง Control Input ของทุกๆระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นโดยทำการ Differentiation เทียบกับเวลาดังนั้นจึงได้ความสัมพันธ์ระหว่าง อนุพันธ์ของความเร่ง ซึ่งเรียกว่า Jerk และอนุพันธ์ของผลรวมของแรงทั้งหมดซึ่งรวมถึงอนุพันธ์ของ Control Input ของระบบพลศาสตร์ ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้ผู้วิจัยกำหนดอนุพันธ์ของ Control Input ที่ขึ้นกับเวลาว่า Indirect Jerk

อย่างไรก็ตามจุดมุ่งหมายในงานวิจัยชิ้นนี้คือการหาความสัมพันธ์ระหว่าง Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk โดยการใช้วิธีการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดในหลักการการใช้ความนิ่มนวลที่สุดของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณทั้งทางตรง (Direct Jerk) และทางอ้อม (Indirect Jerk) จะมีค่าผลเฉลยความนิ่มนวลที่สุดใกล้เคียงกันหรือไม่ เพื่อเป็นแนวทางเลือกใหม่ในการศึกษาเรื่องความนิ่มนวลต่อไป

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อนำเอาเทคนิควิธีแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดมาประยุกต์ใช้ในการเปรียบเทียบการหาความนิ่มนวลทางตรงและทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

1.2.2 เพื่อพิสูจน์ถึงทฤษฎีหลักการปัญหาการใช้ความนิ่มนวลที่สุดทั้งทางตรงและทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

## 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 การศึกษาวิจัยครั้งนี้จะนำเอาปัญหาความเหมาะสมสูงสุดในหลักการการใช้ความนิ่มนวลที่สุดของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ( Cost Functional )

1.3.2 ใช้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล 2 ก้อน ที่มีสปริงและตัวหน่วงมาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.3.3 กำหนดสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Derivative)

1.3.4 ใช้โปรแกรม แมทแลป (Matlab) ในการโปรแกรมการแก้ปัญหา

## 1.4 วิธีดำเนินการวิจัยโดยย่อ

1.4.1 สืบค้นข้อมูลและทบทวนเอกสารบทปริทรรศน์ของทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและสรุปแนวทางที่น่าสนใจในการดำเนินการวิจัย

1.4.2 ศึกษาลักษณะจำเพาะสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางพลศาสตร์ หลักการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่

1.4.3 สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือสมการการเคลื่อนที่ระบบทางพลศาสตร์ สมการอสมการเงื่อนไข กำหนดสภาวะเริ่มต้นและสภาวะสุดท้าย เงื่อนไขขอบ และสร้างคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional)

1.4.4 ใช้โปรแกรม แมทแลป (Matlab) เพื่อหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์ จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.4.5 สรุปวิเคราะห์ผลการวิจัย

1.4.6 เรียบเรียงเนื้อหาของบทความและรายงานผลการดำเนินการวิจัย

1.4.7 จัดทำรูปเล่มปริญญานิพนธ์และตีพิมพ์เอกสารงานวิจัย

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1.5.1 ผลการวิจัยครั้งนี้จะให้ข้อมูลสำหรับการประยุกต์เอาหลักการความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) ไปใช้งานกับปัญหาด้านพลศาสตร์และเป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นๆ

1.5.2 ผลการวิจัยครั้งนี้จะทำให้การใช้ประโยชน์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้คำนวณหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาและยังสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 ทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการสืบค้นข้อมูลและศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องสำหรับการดำเนินการวิจัยครั้งนี้เป็นการทบทวนผลงานวิจัยของบุคคลต่าง ๆ ที่ผ่านมาและมีลักษณะคล้ายคลึงทั้งส่วนภายในประเทศและต่างประเทศมีบุคคลที่ได้ศึกษาทำวิจัยดังนี้

พลอยไพลิน พิรมโสภา; และคนอื่นๆ. (2005) กล่าวถึง การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์โดยใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนหาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุดและจากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาทั้งการใช้พลังงานน้อยที่สุดและการใช้ความนิ่มนวลที่สุด จะเห็นได้ว่าปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดจะอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น (Linear) แต่ปัญหาของความนิ่มนวลที่สุดนั้นไม่สามารถหาคำตอบในรูปแบบของสมการเชิงเส้นเนื่องจากเงื่อนไขขอบเขตมีไม่เพียงพอ จึงได้นำระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่มีชื่อเรียกว่า Linear Programing มาใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จากการพิจารณาหาค่าความนิ่มนวลสูงสุดนั้นมีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุด กล่าวคือได้ทั้งความนิ่มนวลและประหยัดพลังงาน

ซันนีล เค. อักราวอล; ที. วีระแกล้ว; และ บี. ซี. ฟาเบียน (Sunil K. Agrawal; T. Veerakleaw; & B.C. Fabien. 1998) กล่าวถึง การวิเคราะห์หาคำตอบของระบบสมการการเคลื่อนที่ที่เป็นเส้นตรงและสัมประสิทธิ์ในสมการการเคลื่อนที่เป็นค่าคงที่ซึ่งถูกกำหนดให้เคลื่อนที่ระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ในระยะเวลาที่กำหนดจากทฤษฎีที่มีอยู่เดิมคำตอบที่ได้จะต้องทำให้สมการการเคลื่อนที่ และสมการควบคู่เป็นจริงในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแต่ในบทความฉบับนี้ผู้เขียนได้เสนอวิธีการใหม่โดยการเปลี่ยนรูปที่สามารถแทนค่าตัวแปรสถานะและตัวแปร ควบคุม (State and Control Variable) เข้าไปในฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดได้ผลที่ได้สามารถที่จะนำวิธีการทางตรงและทางอ้อมมาแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

ซันนีล เค. อักราวอล; ที. วีระแกล้ว; และ บี. ซี. ฟาเบียน (Sunil K. Agrawal; T. Veerakleaw; & B.C. Fabien. 1998) ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็น

ทวิวัชร วีระแกล้ว (2000) ทำการศึกษาการพัฒนาทางด้านทฤษฎีของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดและวิธีการในการหาคำตอบแบบใหม่ (Extensions of Optimization Theory and Computational Approaches for Higher-Order Dynamic Systems) เป็นการใช้ทฤษฎีระบบเชิงเส้น (Linear Systems) และไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear Systems) เขียนให้อยู่ในรูปแบบแคโนนิคอล (Canonocal Forms) ซึ่งมีประโยชน์มากเมื่อเปรียบเทียบรูปแบบของลำดับที่หนึ่ง (First-Order Form) โดยสมการลำดับที่สูงกว่าเป็นเงื่อนไขบังคับของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (General Nonlinear Constraints) นอกจากนี้การควบคุมแบบย้อนกลับที่ต่อเนื่องเป็นเส้นตรง (Linear Continuous Feedback Control) ใช้อธิบายระบบลำดับที่สูงกว่า (Higher Order Systems) แนวความคิดที่ใกล้เคียงกับ Extremals และความแปรปรวนที่สอง (Second Variation) โดยสภาวะที่เพียงพอ (Suffcient Condition) จะต้องสามารถแสดงเป็นคำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าต่ำสุด (Minimum Trajectories) ได้โดยสภาวะที่เหมาะสมที่สุด (Optimality Conditions) สำหรับระบบลำดับที่สูงกว่าถูกอธิบายได้สองแบบคือ แคลคูลัสความแปรปรวน (Variation Calculus) ของลำดับที่สูงกว่าถูกขยายในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) และทฤษฎีของ Hamilton-Jacobi เป็นทฤษฎีที่ใช้หลักการของพรอนทริยากิน (Pontryagin's Principle) ต่อจากนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากสองวิธีนี้ถูกพิสูจน์โดยผ่านโปรแกรมการคำนวณของแคลคูลัสความแปรปรวน โดยทฤษฎีรูปแบบของลำดับที่หนึ่ง สภาวะเหล่านี้ถูกใช้เพื่อการแก้ปัญหากระบวนการคำนวณเพื่อให้เข้าใกล้ระบบลำดับที่สูงกว่า โปรแกรมถูกพัฒนาให้ใช้เป็นเครื่องมือตรวจสอบความถูกต้อง (Benchmark Computations) ระหว่างระบบลำดับที่สูงกว่าและทฤษฎีรูปแบบของลำดับที่หนึ่ง โปรแกรมใช้การวิเคราะห์ทั้งวิธีตรง วิธีอ้อม และใช้วิธีคอลโลเคชัน (Collocation Method) ร่วมกับการเขียนโปรแกรมไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Programming Solver)

ทวิวัชร วีระแกล้ว (2004) ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The Minimum Time Problem of Linear Dynamic Optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีในการที่ช่วยให้การวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิง

เอ็ม. ซี. เรโนลด์; และ พี. เอช. เมิร์ก (M.C.Renolds; & P.H.Meckl. 1998) เอกสารฉบับนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาความเหมาะสมค่าต่ำที่สุด (Minimum optimization) สูงสุดโดยเปลี่ยนให้เป็นปัญหาไทม์ออปติมอลคอนโทล (Time Optimal Control Problem) แล้วใช้ทั้งสมการกำลังสอง (Quadratic) และใช้การโปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) จะสามารถคาดเดาการค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาการควบคุมที่ได้ผลสูงสุด (Optimal Control) ของระบบที่ประกอบไปด้วยมวล 2 ก้อนและสปริง แสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติที่น่าสนใจในการเปลี่ยนสมการเดิมให้เป็นสมการกำลังสองหรือที่เรียกว่าควอดราติคโปรแกรมมิ่ง (Quadratic Programming)

จากที่ได้นำเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้องมาทั้งหมดนั้น พบว่าได้มีการศึกษาถึงระบบการเคลื่อนที่ซึ่งได้ผลมาพอสมควรทำให้เกิดแนวทางการทำงานวิจัยใหม่เกิดขึ้นทั้งแนวทางใหม่เรื่อง Minimum Energy , Maximum Energy , Minimum Time โดยใช้ทฤษฎีของ Optimization of Dynamic Systems เข้ามาแก้ปัญหาในระบบทั้งที่เป็นระบบเชิงเส้น (Linear Systems) และระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Systems) ซึ่งได้ทดสอบและสรุปมาให้เห็นตามงานวิจัยที่ผ่านมา แต่ยังไม่มีงานวิจัยที่เปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นแนวทางใหม่ในการพิสูจน์ว่าวิธี Indirect Jerk สามารถใช้คำนวณหาผลลัพธ์ได้เหมือนกับวิธี Direct Jerk ได้

## 2.2 ทฤษฎีที่เกียวข้อง

### 2.2.1 แคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt \tag{2.1}$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือ ถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or Numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1,x_2,\ldots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x_1,x_2,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\ldots,\dot{x}_n)dt \tag{2.2}$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.2) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากสุด (Sufficient Conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations) มาใช้กับไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

**2.2.1.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)**

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

**2.2.1.1.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)**

ถ้าฟังก์ชัน $F(t,x,\dot{x})$ สามารถเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)=x_0$ และ $x(t_f)=x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]=\int_{t_0}^{t_f} F(t,x,\dot{x})\,dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary

$$h(t_0) = h(t_f) = 0$$

$\Delta J$

$$\Delta J = J\left[x+h\right] - J\left[x\right] = \int_{t_0}^{t_f} \left[ F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) - F\left(t, x, \dot{x}\right) \right] dt \qquad (2.3)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \qquad (2.4)$$

เมื่อ $\delta J$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\Delta J$ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.4) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_f} - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_0} \qquad (2.5)$$

เมื่อเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า $F$ จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \qquad (2.6)$$

ซึ่งสมการ (2.6) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.1.1.2 **กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้** (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.2.1.1.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.3-2.5) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0 \tag{2.9}$$

ซึ่งสมการ (2.7-2.9) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

2.2.1.1.3 **เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้** (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคลายๆ กับกรณี (2.2.1.1.1) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) $\Delta J$ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) dt - \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x, \dot{x}\right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left[ F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) - F\left(t, x, \dot{x}\right) \right] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right) dt
\end{aligned} \tag{2.10}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_f} \delta t_f - F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_0} \delta t_0 \tag{2.11}$$

เมื่อ $\delta J$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\Delta J$ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.11) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_f} - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right)\Big|_{t_0} + F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_f} \delta t_f - F\left(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}\right)\Big|_{t_0} \delta t_0 \tag{2.12}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x\Big|_{t_0} - \dot{x}\Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x\Big|_{t_f} - \dot{x}\Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.12) เขียนได้เป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right)\Big|_{t_f} - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right)\Big|_{t_0} + \left[ F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_f} \delta t_f - \left[ F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_0} \delta t_0 \tag{2.13}$$

เมื่อเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x\Big|_{t_f}$, $\delta x\Big|_{t_0}$, $\delta t_f$ และ $\delta t_0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0, \ \left[ F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_f} = 0, \ \left[ F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]\Big|_{t_0} = 0 \tag{2.15}$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ $t_0, t_f$ และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

#### 2.2.1.2 **ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน** (Functionals of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.2.1.2.1 **กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว** (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F\left(t, x_1, \ldots x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) $x_i(t), i = 1, \ldots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J\left[x\right] = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x, \dot{x}\right)dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) คือ

$$J\left[x_1, \ldots, x_n\right] = \int_{t_0}^{t_f} F\left(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right)dt \tag{2.16}$$

ถ้า $x_i(t), i = 1, \ldots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i = 1, \ldots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) $\Delta J$ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J\left[x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n\right] - J\left[x_1, \ldots, x_n\right] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} F\left(t, x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n + \dot{h}_n\right) \\ -F\left(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\right) \end{bmatrix} dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \tag{2.18}$$

เมื่อ $\delta J$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\Delta J$ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.18) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \tag{2.19}$$

เมื่อเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) และกำหนดไว้อีกว่า $F$ จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.20}$$

ซึ่งสมการ (2.20) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้

**2.2.1.2.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)**

แตกต่างกับกรณี (2.2.1.2.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2.17-2.19) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_f} = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{2.23}$$

ซึ่งสมการ (2.21-2.23) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอชี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.2.1.2.3 **เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้** (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.2.1.2.1) ถ้า $x_i(t),\ i=1,\ldots,n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire Function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1,\ldots,x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) $\Delta J$ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\left[x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n\right]-J\left[x_1,\ldots,x_n\right]\\ &=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\\ &\quad-\int_{t_0}^{t_f} F\left(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\right)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta J\ &=\int_{t_0}^{t_f}\begin{bmatrix}F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\\-F\left(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\right)\end{bmatrix}dt\\ &\quad+\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\\ &\quad-\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)dt\end{aligned}\qquad(2.24)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\delta J &=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}h_i+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{h}_i\right)dt\\ &\quad+F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_f}\delta t_f\\ &\quad-F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\Big|_{t_0}\delta t_0\end{aligned}\qquad(2.25)$$

เมื่อ $\delta J$ เป็นค่าโดยประมาณของ $\Delta J$ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรดบายพาร์ท (Integrating By Parts) สมการ (2.25) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}\delta J &=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\Big|_{t_f}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}h_i\right)\Big|_{t_0}\\ &\quad+\left[F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\right]\Big|_{t_f}\delta t_f\\ &\quad-\left[F\left(t,x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n,\dot{x}_1+\dot{h}_1,\ldots,\dot{x}_n+\dot{h}_n\right)\right]\Big|_{t_0}\delta t_0\end{aligned}\qquad(2.26)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i\Big|_{t_0} - \dot{x}_i\Big|_{t_0}\delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i\Big|_{t_f} - \dot{x}_i\Big|_{t_f}\delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2.26) จะเป็น

$$\begin{aligned}\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)\Big|_{t_0} \\ + \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Big|_{t_f}\delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Big|_{t_0}\delta t_0\end{aligned} \tag{2.27}$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i\Big|_{t_f}$, $\delta x_i\Big|_{t_0}$, $\delta t_f$ และ $\delta t_0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทำให้ได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0,\ i = 1,\ldots,n \tag{2.28}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) เป็น

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_f} = 0,\ i = 1,\ldots,n \\ &\left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Big|_{t_f} = 0,\ \left[F - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right]\Big|_{t_0} = 0,\ i = 1,\ldots,n\end{aligned} \tag{2.29}$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ $t_0, t_f$ และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ทั้ง 4 นี้นั่นเอง

### 2.2.2 **ไดนามิกส์ออปติไมเซชัน** (Dynamic Optimization)

ระบบควบคุมทางวิศวกรรมทั้งหมดเป็นระบบที่ขึ้นอยู่กับเวลา โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้มาจากกฎของฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนของยานยนต์สามารถหาได้โดยกฎของกลศาสตร์หรือกฎของเทอร์โมไดนามิกส์ระบบที่กล่าวถึงเรียกโดยรวมว่าระบบพลศาสตร์ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m,t\right),\ i = 1,\ldots,n \tag{2.30}$$

เมื่อ $t$ คือเวลา, $x_i$ คือตัวแปรสถานะ (State Variable)ของระบบดังเช่น พิกัดเจนเนอเรไลซ์ โคออดิเนต , $u_i$ ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control Input) $f_i$ คือ ฟังก์ชันทั่วไปที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัว

$x_i$ $u_i$

$u_1(t),\ldots,u_m(t)$

$x_i(t)$

$\ddot{x}=u$ $x$

$\dot{x}_1=x_2$ $\dot{x}_2=u$

$u_1(t),\ldots,u_m(t)$

$$J=\Phi\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}L\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)dt \qquad (2.31)$$

เมื่อ $t_0$ คือเวลาเริ่มต้น, $t_f$ คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และสภาวะสุดท้าย (Final State) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f}L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของตัวแปรสถานะ (State Variables) และตัวแปรควบคุม (Control Variables) โดยที่ $\Phi$ และ $L$ คือฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear Functions) ของตัวแปรสถานะ(State Variables) และตัวแปรควบคุมหรือคอนโทรลวาริเอเบิล (Control Variables) และเป็นความสัมพันธ์กันทางฟิสิกส์ไปสู่ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไป

การแก้ปัญหาความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์หรือไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นความรู้จาก สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations) จากหัวข้อ 2.2 เป็นอย่างมากอีกด้วย ปัญหาของการหาเวลาที่ผ่านไปของตัวแปรควบคุมป้อนเข้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับของสมการที่ (2.30) สามารถหาคำตอบได้จากวิธีแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์

ระบบทางพลศาสตร์ (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-Stage Systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage Systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีตรงหรือวิธีไดเรคท์ (Direct Methods) และวิธีอ้อมหรือวิธีอินไดเรคท์ (Indirect Methods)

**2.2.2.1 ปัญหาการกำหนดเวลาสุดท้ายคงที่ (Fixed Final Time)**

ข้อปัญหาที่กล่าวถึงในตอนนี้เป็นไปตามสาระสำคัญดังนี้ (1) ระบบพลศาสตร์ที่อธิบายดังสมการที่ (2.30), (2) คอสฟังก์ชันนอลสำหรับค่าที่น้อยที่สุดกำหนดโดยสมการที่ (2.31), (3) เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายกำหนดไว้ตายตัว และ (4) ต้องระบุสถานะเริ่มต้น (Initial States) $x_1(t_0),.....,x_n(t_0)$ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่เคลื่อนขบวนไปมาระหว่างสองเมือง และกำหนดเวลาเข้าและเวลาออกจากแต่ละสถานี ซึ่งอาจจะวางแผนการเดินรถโดยกำหนดเป้าประสงค์ในเรื่องการใช้เวลาที่น้อยที่สุด หรือ ในทางกลับกันอาจะกำหนดการใช้กำลังงานให้คุ้มค่าที่สุด ต่อเราจะมาพิจารณาปัญหาสามประเภทในตอนนี้คือ (a) ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย $x_1(t_f),.....,x_n(t_f)$ , (b) ปัญหาที่สถานะสุดท้าย $x_1(t_f),.....,x_n(t_f)$ ถูกบังคับให้อยู่ในแนวของพื้นผิวที่กำหนด, (c) ตัวแปรควบคุม (Control Variables) และตัวแปรสถานะ (State Variables) สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่มีความสัมพันธ์กับทุกช่วงเวลา

**2.2.2.1.1 ปัญหาที่กำหนดสถานะสุดท้าย (Final State are Prescribed)**

เป็นปัญหาที่มีการกำหนดเวลาและจุดสุดท้ายไว้ตายตัว เทอม $\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)$ ในสมการ จะคงที่และไม่มีผลเกี่ยวข้องใดๆกับการหาความเหมาะสมที่สุดหรือออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เทอม $\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)$ จะถูกตัดทิ้งไปในสมการที่ (2.31) ซึ่งเราจะได้ฟังก์ชันนอลใหม่ (Functional) เป็น

$$J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m]=\int_{t_0}^{t_f} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt \tag{2.32}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m) &= L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)+ \\ &\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)-\dot{x}_i] \end{aligned} \tag{2.33}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J' = &\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}\,dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}\,dt\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_0}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}h_{x_j}\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}h_{x_j}\Big|_{t_0}\right)\end{aligned} \tag{2.34}$$

แต่ว่ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $t_0$ และ $t_f$, $h_{x_j}\big|_{t_f}=h_{x_j}\big|_{t_0}=0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆ ของสมการ (2.34) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial x_j}&=\frac{\partial L}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}=-\lambda_j,\\\frac{\partial L'}{\partial u_k}&=\frac{\partial L}{\partial u_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k},\ \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}=0\end{aligned}$$

(2.35)

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ $h_{x_j}$ และ $h_{u_k}$, $\delta J'=0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}=0$ และ $\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}=0$ สำหรับ $j=1,\ldots,n$ และ $k=1,\ldots,m$ ด้วยการแทนสมการ (2.35) กลับเข้าไปในสมการดังกล่าวทำให้เราได้เงื่อนไขที่จำเป็นหรือเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j=-\frac{\partial L}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}=0,\ k=1,\ldots,m \tag{2.37}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)) และตัวแปรควบคุมป้อนเข้าหรือคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สมการสถานะหรือสเตทอีเควชัน (State Equations) คือ สมการ (2.30) จำนวน $n$ สมการ, สมการโคสเตทหรือสมการสถานะร่วม (Costate Equations) คือ

$n$

$m$

$2n$ $m$

$2n$ $t_0$ $_f$

$$H = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

2.2.2.1.2 **สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ** (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l\left(t, x_1, \ldots, x_n\right)_{t_f} = 0$ เมื่อ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$\begin{aligned} J'\left[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right] = \Phi\left(t, x_1, \ldots, x_n\right)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l\left(t, x_1, \ldots, x_n\right)_{t_f} \\ + \int_{t_0}^{t_f} L'\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right) dt \end{aligned} \tag{2.38}$$

เมื่อ $\upsilon_l$ ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ $L'$ เขียนเป็น

$$\begin{aligned} L'\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right) = L\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right) \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(t\right)\left[f_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right) - \dot{x}_i\right] \end{aligned} \tag{2.39}$$

เมื่อ $\lambda_i\left(t\right)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\delta J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}\Big|_{t_0} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right)\Big|_{t_f} \qquad (2.40)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right)\Big|_{t_f} h_{x_j}\Big|_{t_f}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ $h_{x_j}$ , $h_{u_k}$ และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}\Big|_{t_f}$ จะทำให้ $\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$, ค่าการเปลี่ยนแปลง $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[ \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, n$$

(2.41)

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1, \ldots, m \qquad (2.42)$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j} \right]_{t_f},\ j = 1, \ldots, n \qquad (2.43)$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ และคอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) จำนวน $n$ สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.41) จำนวน $n$ สมการ และแอดดิชันนอลอีเควชัน (Additional optimality equations) คือสมการ (2.42) จำนวน $m$ สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะสุดท้าย $x_j(t_f)$ ด้วย ส่วน โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.43) ส่วนค่า $\upsilon_l$ สามารถหาได้โดยการแทนค่าในผลเฉลย ณ $t_f$ ในสมการ $s_l\Big|_{t_f} = 0$

2.2.2.1.3 **อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์** (Ailiary Constraints)

สำหรับกรณีปัญหาที่สเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)_{t_f}=0$ และ $r=1,\ldots,p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง $t_0$ และ $t_f$ ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}=0$ และ $l=1,\ldots,p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$\begin{aligned}J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m]=\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}\\+\int_{t_0}^{t_f}L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt\end{aligned}\tag{2.44}$$

เมื่อ $\upsilon_l$ ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ $L'$ เขียนเป็น

$$\begin{aligned}L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)=L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)\\+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)-\dot{x}_i]\\+\sum_{r=1}^{p'}\mu_r(t)g_r(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)\end{aligned}\tag{2.45}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อทำการกำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J'=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}dt\\+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}h_{u_k}\Big|_{t_0}\right)+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}h_{x_j}\right)\Big|_{t_f}\\+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right)\Big|_{t_f}h_{x_j}\Big|_{t_f}\end{aligned}\tag{2.46}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนแปลงค่าของ $h_{x_j}$ , $h_{u_k}$ และค่าขอบ (Boundary Values) $h_{x_j}\Big|_{t_f}$ จะทำให้เกิดค่าการเปลี่ยนแปลงของ $\delta J' = 0$ ถ้า $\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0$, $\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0$ และ $\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f} = 0$ ทำให้เราได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) เป็น

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial x_j},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} + \sum_{l=1}^{p'} \mu_r \frac{\partial g_r}{\partial u_k} = 0, k = 1,\ldots,m \tag{2.48}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l \frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f},\ j = 1,\ldots,n \tag{2.49}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และ $\upsilon_l$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) จำนวน $n$ สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.48) จำนวน $n$ สมการ และแอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.46) จำนวน $m$ สมการ, คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t, x_1,\ldots,x_n, u_1,\ldots,u_m)_{t_f} = 0$ จำนวน $p'$ สมการ และคอนสเทรนท์อีเควชันที่จุดสุดท้าย (End-Point Constraint Equations) จำนวน $p$ สมการ ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m + p' + p$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่ $t_0$ และโคสเตต (Costate) $\lambda_j(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.49)

#### 2.2.2.2 **เวลาสุดท้ายแปรผัน** (Variable Final Time)

เวลาเริ่มต้นคือ $t_0$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Start Time) แต่เวลาสุดท้าย $t_f$ มีการแปรผัน (Variable End Time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0),\ldots,x_n(t_f)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกส์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f),\ldots,x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และ

2.2.2.2.1 **สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว** (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'\left[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right]=\Phi\left(t,x_1,\ldots,x_n\right)_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}L'\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)dt$$

(2.50)

เมื่อ

$$L'\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)=L\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\left[f_i\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)-\dot{x}_i\right]$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบุสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J'=&\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}dt\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_0}\right)\\&+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+L'-\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}-\sum_{k=1}^{n}\dot{u}_k\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right]_{t_f}\delta t_f\end{aligned}\qquad(2.51)$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ (2.51) ก็จะทำให้เราสามารถหาเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j=-\frac{\partial L}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n$$

(2.52)

$$\frac{\partial L}{\partial u_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}=0, k=1,\ldots,m \tag{2.53}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right]_{t_f}=0 \tag{2.54}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเตต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย $t_f$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) จำนวน $n$ สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.52) จำนวน $n$ สมการ และแอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.53) จำนวน $m$ สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.54) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา $t_0$ และ $t_f$ ด้วย

2.2.2.2.2**สภาวะสุดท้ายต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ** (Final States Lie On a Constraint Surface)

ปัญหานี้ให้อยู่ในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้เป็น $s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}=0$ เมื่อ $l=1,\ldots,p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$\begin{aligned}J'[x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m]=\Phi(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}&+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l s_l(t,x_1,\ldots,x_n)_{t_f}\\&+\int_{t_0}^{t_f}L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)dt\end{aligned} \tag{2.55}$$

เมื่อ $\upsilon_l$ ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ $L'$ เขียนเป็น

$$\begin{aligned}L'(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)&=L(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)\\&+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)[f_i(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)-\dot{x}_i]\end{aligned} \tag{2.56}$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาเมื่อเวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันและได้เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J' = &\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}\,dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}\,dt\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_0}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right)\Bigg|_{t_f}\\&+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{t_f}\delta x_j\Big|_{t_f}\\&+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial t}+L'-\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}-\sum_{k=1}^{n}\dot{u}_k\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right]_{t_f}\delta t_f\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\dot{\lambda}_j=-\frac{\partial L}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}=0,k=1,\ldots,m \tag{2.59}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f}=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f},\ j=1,\ldots,n \tag{2.60}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial t}+L+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right]_{t_f}=0 \tag{2.61}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, โคสเตต (Costates) $\lambda_j(t)$, คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย $t_f$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.30) จำนวน $n$ สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.58) จำนวน $n$ สมการ และแอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.59) จำนวน $m$ สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.61) มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+1$ สมการ การหาผลเฉลยนี้มี

$2n$

$t_0$ $\lambda_j(t_f)$

2.2.2.2.3 **อ๊อกซิลเลียรีคอนสเทรนท์** (Auxiliary Constraints)

สเตตวาริเอเบิลและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and Control Variables) จำเป็นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่งเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)_{t_f} = 0$ และ $r = 1, \ldots, p'$ โดยอยู่ในช่วงระหว่าง $t_0$ และ $t_f$ ซึ่งที่สภาวะสุดท้ายจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่เขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์เป็น $s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} = 0$ และ $l = 1, \ldots, p$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J'[x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m] = \Phi(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \sum_{l=1}^{p} \upsilon_l s_l(t, x_1, \ldots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)dt \quad (2.62)$$

เมื่อ $\upsilon_l$ ก็คือค่าคงตัวลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Constant Lagrange Multipliers) และ $L'$ เขียนเป็น

$$L'(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = L(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[f_i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) - \dot{x}_i] + \sum_{r=1}^{p'} \mu_r(t) g_r(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) \quad (2.63)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ และ $\mu_r(t)$ คือลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อเวลาสุดท้ายมีการแปรผัน (Variable End Time) ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta J' = &\int_{t_0}^{t_f}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right)h_{x_j}\,dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial u_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right)h_{u_k}\,dt\\ &+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_f}-\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\delta u_k\Big|_{t_0}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right)\Bigg|_{t_f}\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right)\Bigg|_{t_f}\delta x_j\Big|_{t_f}\\ &+\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial t}+L'-\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L'}{\partial x_j}-\sum_{k=1}^{n}\dot{u}_k\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right]_{t_f}\delta t_f\end{aligned} \tag{2.64}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการก็จะทำให้เราสามารถหาเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\sum_{r=1}^{p'}\mu_r\frac{\partial g_r}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}+\sum_{r=1}^{p'}\mu_r\frac{\partial g_r}{\partial u_k}=0,\ k=1,\ldots,m \tag{2.66}$$

$$\lambda_j\Big|_{t_f}=\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial x_j}\right]_{t_f},\ j=1,\ldots,n \tag{2.67}$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\sum_{l=1}^{p}\upsilon_l\frac{\partial s_l}{\partial t}+L+\sum_{r=1}^{p'}\mu_r g_r+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right]_{t_f}=0 \tag{2.68}$$

ผลเฉลยของสเตตวาริเอเบิล (State Variables) $x_j(t)$, โคสเตต (Costate) $\lambda_j(t)$,คอนโทรลอินพุต (Control Inputs) $u_k(t)$, ลากรานซ์มัลติไพลเออร์ (Lagrange Multipliers) $\mu_l(t)$ และเวลาสุดท้าย $t_f$ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีเควชัน (State Equations) คือสมการ (2.30) จำนวน $n$ สมการ, โคสเตตอีเควชัน (Costate Equations) คือสมการ (2.65) จำนวน $n$ สมการ และแอดดิชันนอลอีเควชันคือสมการ (2.66) จำนวน $m$ สมการ คอนสเทรนท์อีเควชัน (Constraint Equations) $g_r(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)_{t_f}=0$ จำนวน $p'$ สมการ และสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือสมการ (2.68) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์ (Different Equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary Equations) จำนวน $m+p'+1$ สมการ มีเงื่อนไขขอบเขต

$2n$ $t_0$

$\lambda_j(t_f)$

### 2.2.3 การเพิ่มของหลักการน้อยที่สุด (Extensions of The Minimum Principle)

จุดประสงค์ของหัวข้อนี้เป็นการเสนอให้หลักการน้อยที่สุดสำหรับค่าเหมาะสมที่สุดในการควบคุมในกรณี $p>1$ . หลักการน้อยที่สุดจะกลายมาจากการใช้ทฤษฎีฮามิลตัน-จาโคบี เป็นการเริ่มต้นที่กว้างออกไปจากของหลักการพรอนทริยากินที่สามารถนำไปใช้ได้กับระบบอนุพันธ์อันดับสูง

#### 2.2.3.1 ทฤษฎีฮามิลตัน-จาโคบี (Hamilton-Jacobi Theory)

ในกลุ่มนี้แหล่งที่มาซึ่งกว้างออกไปจากหลักการพรอนทริยากินเป็นการแสดงใน2 ขั้นตอน ขั้นแรก กำหนดเงื่อนไขบังคับของตัวแปรควบคุมไม่ขึ้นกับเวลาและตัวแปร นั่นคือ $u\in U$ ที่ $U$ เป็นที่รับได้ของ $u(t)$ ความเหมาะสมของเงื่อนไขในกรณีนี้ได้นำมาจากการพิสูจน์ ขั้นสอง กำหนดเงื่อนไขที่พิจารณาให้ขึ้นกับเวลาและตัวแปร นั่นคือ $u\in A\left[t,x(t),x^{(1)}(t),...,x^{(p-1)}(t)\right]$ ในคำสั่งได้ทำให้สั้นลงโดยกำหนด $\mathrm{x}(t)=\left(x(t)^T\,x^{(1)}(t)^T...x^{(p-1)}(t)^T\right)$

##### 2.2.3.1.1 กำหนดเงื่อนไขบังคับ $U$

เราฝังปัญหาในปัญหาที่ใหญ่กว่าโดยกำหนด

$$J\left(\mathrm{x}(t),t,u(\tau)\right)=\phi\left(\mathrm{x}(t_f),t_f\right)+\int_t^{t_f}L\left(\mathrm{x}(\tau),u(\tau),\tau\right)d\tau \qquad (2.69)$$

เมื่อ $\mathrm{x}(t)$ เป็นจุดเริ่มต้นที่ยอมรับได้ที่ $t$ และ $u(\tau)$ และอยู่ในเส้นสถานะที่รับได้ นั่นคือ $u(\tau)\in U$ และกำหนด $t\le\tau\le t_f$ สำหรับที่จุดเริ่มต้น $(t,\mathrm{x}(t))$ ได้กำหนด

$$J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\phi\left(\mathrm{x}(t_f),t_f\right)+\int_t^{t_f}L\left(\mathrm{x}(\tau),u(\tau),\tau\right)d\tau\right\} \qquad (2.70)$$

โดยการแบ่งช่วงเวลา $(t,t_f)$ ไป $t\le\tau\le t+\Delta t$ และ $t+\Delta t\le\tau\le t_f$ จากหลักการของความเหมาะสมที่สุด สามารถเขียนสมการที่ (2.70) ได้เป็น

$$J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta t}Ld\tau+J^*\left(\mathrm{x}(t+\Delta t),t+\Delta t\right)\right\} \qquad (2.71)$$

บนช่วงย่อยของสมการที่ (2.71) โดยใช้อนุกรมของเทเลอร์กับ $\left(\mathrm{x}(t),t\right)$ ได้ดังนี้

$$J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\int_t^{t+\Delta t}Ld\tau+J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial J^*}{\partial t}\left(\mathrm{x}(t),t\right)\Delta t+\frac{\partial J^*}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)\mathrm{x}^{(1)}(t)\Delta t+h.o.t.\right\} \quad (2.72)$$

การยกเลิก $\mathrm{x}(t)=\left(x(t)^T\ x^{(1)}(t)^T\ldots x^{(p-1)}(t)^T\right)$ และสำหรับ $\Delta t$

$$J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)=\min_{u(t)\in U}\left\{J^*\left(\mathrm{x}(t),t\right)\right.$$
$$+\left[L\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right)+\frac{\partial J^*}{\partial t}\left(\mathrm{x}(t),t\right)+\frac{\partial J^*}{\partial x}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(1)}(t)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-2)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(p-1)}(t)+\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)f\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right)\right]\Delta t$$
$$\left.+0\left(\Delta t\right)\right\} \quad (2.73)$$

ตัดอนุพันธ์อันดับสูงในเทอมของ $\Delta t$ และแยกเทอมที่ขึ้นกับ $u(t)$ สามารถเขียนใหม่ได้

$$0=\frac{\partial J^*}{\partial t}\left(\mathrm{x}(t),t\right)+\frac{\partial J^*}{\partial x}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(1)}(t)+\ldots$$
$$+\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-2)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(p-1)}(t)$$
$$+\min_{u(t)\in U}\left\{L\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right)+\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)f\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right)\right\} \quad (2.74)$$

กำหนดให้ H (Hamiltonian)

$$H\left(\mathrm{x}(t),u(t),\left(\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\right)^T,t\right)=L\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right)$$
$$+\frac{\partial J^*}{\partial x^{(p-1)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)f\left(\mathrm{x}(t),u(t),t\right) \quad (2.75)$$

และ

$$H\left(\mathrm{x}(t),u^{*}\left(\mathrm{x}(t),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right)= \min_{u(t)\in U} H\left(\mathrm{x}(t),u(t),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right) \quad (2.76)$$

ซึ่งค่าต่ำสุดในการควบคุมขึ้นกับ $\mathrm{x}(t),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T}\left(\mathrm{x}(t),t\right)$ และ $t$ จากสมการที่ (2.74) และ (2.76) ได้ขยายจากสมการของแฮมิลตัน-จาโคบี เป็น

$$\frac{\partial J^{*}}{\partial t}\left(\mathrm{x}(t),t\right)+\frac{\partial J^{*}}{\partial x}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(1)}(t)+\ldots+\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-2)}}\left(\mathrm{x}(t),t\right)x^{(p-1)}(t) +H\left(\mathrm{x}(t),u^{*}\left(\mathrm{x}(t),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right)=0 \quad (2.77)$$

เมื่อสภาวะขอบเขตที่เหมาะสม ($J$)

$$J^{*}\left(\mathrm{x}\left(t_f\right),t_f\right)=\phi\left(\mathrm{x}\left(t_f\right),t_f\right) \quad (2.78)$$

สรุปคือ หนึ่ง ค่าเหมาะสมที่สุดในการควบคุม $u^{*}\left(\mathrm{x}(t),\left(\frac{\partial J^{*}}{\partial x^{(p-1)}}\right)^{T},t\right)$ ให้ได้ค่าต่ำสุดของฮามิลโตเนียน กำหนดไว้ในสมการที่ (2.76) และ สอง ค่าเหมาะสมของ Return Function ที่แสดงในสมการที่ (2.77) ถ้า $p=1$ จะได้ผลลัพธ์ที่ง่ายขึ้นจากสมการ ฮามิลตัน-จาโคบี และสมการที่ (2.76) ก็จะค่าเท่ากับการแสดงผลด้วย พรอนทริยากิน

### 2.2.3.2**หลักการของพรอนทริยากิน** (Pontryagin's Principle)

ทฤษฎีของพอนทริยากินจะยังคงใช้สมการข้อกำหนดของปัญหาคือสมการ

$$J=\Phi\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)_{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}L\left(t,x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m\right)dt \quad (2.79)$$

และสมการ

$$J\left[x_1,\ldots..,x_n\right]=\int_{t_0}^{t_f}F\left(t,x_1,\ldots..,x_n,\dot{x}_1,\ldots..,\dot{x}_n\right)dt. \quad (2.80)$$

กับเงื่อนไขของสภาวะที่เพิ่มเข้ามานั่นคือ $u(t) \in U$ สำหรับช่วงเวลา $t_0 \le t \le t_f$ เมื่อ $U$ คือ เซ็ตของตัวแปรควบคุมที่ยอมรับได้ ขั้นแรกจะหาค่าที่เข้าใกล้ค่าของสมการแฮมมิลตัน-จาโคบี-เบลแมน โดยใช้หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The Principle of Optimality)

หลักการของความเหมาะสมที่สุด (The Principle of Optimality) กล่าวว่า ถ้าตัวแปรควบคุม (Control Input); $u(t)$ ) เป็นค่าที่เหมาะสมในสภาวะเริ่มต้น $x(t)$ ที่อยู่ในช่วงเวลา $[t_0, t_f]$ ในทำนองเดียวกับการควบคุมในช่วง $[t+\Delta t, t_f]$ และยังคงมีความเหมาะสมกับเหมือนกันกับ $x(t+\Delta t)$ เมื่อ $\Delta t \ge 0$ และ $x(t+\Delta t)$ คือจุดที่อยู่บนเส้นสถานะที่เหมาะสม จากสมการที่ (2.79) พิจารณาสมการ

$$J(x(t),t,\underset{t\le\tau\le t_f}{u(\tau)} = \phi(x(t_f),t_f) + \int_t^{t_f} L(x\tau),u(\tau),\pi d\tau, \tag{2.81}$$

เมื่อ x(t) สถานะที่ยอมรับได้และ $t \le t_f$ เรากำหนดให้ค่าดัชนีสมรรถนะขึ้นอยู่กับ $x(t)$ และ $t$ อยู่ใน ช่วง $\lfloor t_o, t_f \rfloor$ สำหรับค่า $x(t)$ และ $t \le t_f$ ใช้สมการควบคุมที่ค่าต่ำสุดจะได้คอสฟังก์ชันนอล (Cost Function) หรือเรียกว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) กำหนดเป็น

$$J^*(x(t),t,) = \min_{t\le\tau\le t_f}\left\{\phi(x(t_f),t_f) + \int_f^{t_f} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right\} \tag{2.82}$$

บนช่วงย่อย และใช้คุณสมบัติการบวกของการอินทิเกรตจะได้ว่า

$$J^*(x(t),t,) = \min_{t\le\tau\le t_f}\left\{\phi(x(t_f),t_f + \int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right\} \tag{2.83}$$

หลักการของความเหมาะสมที่สุดจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} J^*(x(t),t,) = \min_{t\le\tau\le t_f}\{ & \int L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau \\ & + J^*(x(t+\Delta t),t+\Delta t\} \end{aligned} \tag{2.84}$$

เมื่อ $J^*(x(t+\Delta t),t+\Delta t)$ คือค่าต่ำสุดจากค่าสถานะเริ่มต้น $x(t+\Delta t)$ ที่อยู่นอกช่วงเวลา $J(t+\Delta t),t_f$ ในการขยายความที่เกี่ยวกับ (x(t),t) โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์ ได้ดังนี้

$$J^*(x(t),t,) = \min_{t\le\tau\le t_f}\left\{\int_t^{t+\Delta t} L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t),t)\Delta t \right.$$
$$\left. + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t),t)\,f(x(t),t)x^{(1)}\Delta t + \text{ higher order terms } \right\} \quad (2.85)$$

เมื่อตัดเทอม $\Delta t$ และทำการแยกเทอมที่ขึ้นอยู่กับ $u(t)$ ดังนี้

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u(t)}\left\{L(x(t),u(t,t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t),t)\,f(x(t),u(t),t)\right\} = 0 \quad (2.86)$$

กำหนดให้ H (Hamiltonian) เป็น

$$H(x(t),u(t),\left(\frac{\partial J^*}{x}\right)^{(T)},t) = L(x(t),u(t),t) + \frac{\partial J^*}{\partial x}(x(t),t)\,f(x(t),u(t),t) \quad (2.87)$$

และ

$$H\left(x(t),u^*(x(t),\left(\frac{\partial J^*}{x}\right)^{(T)},t),\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T,t\ \right) = \min_{u(t)}\left\{H\left(x(t),u(t),\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T,t\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T,t\ \right\}\right. \quad (2.88)$$

สมการ แฮมมิลตัน-จาโคบิ-เบลแมนหาได้จาก

$$\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t),t) + H\left(x(t),u^*(x(t),\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T,t\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T,t\right) = 0 \quad (2.89)$$

เมื่อสภาวะขอบเขตที่เหมาะสม $(J)$

$$J^*(x(t_f),t_f) = \phi(x(t_f),t_f) \quad (2.90)$$

กำหนดให้อยู่ในรูป สเกลาร์ แฮมมิลตัน (H)

$$H(x(t),u(t),\lambda(t),t) = L(x(t),u(t) + \lambda(t)^T\ f(x(t),u(t),t) \tag{2.91}$$

เมื่อ $\lambda(t) \in R^n$ และเท่ากับ $\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T$ เมื่อ $\lambda(t)$ เรียกว่าผลคูณลากรานจ์หรือตัวแปรสถานะร่วม, โคสเตทวาริเอเบิล (Co-State Variables) ถ้าหากว่า $u^*(t)$ เป็นวิถีหรือเส้นทางที่เหมาะสมสำหรับปัญหาแล้ว $x^*(t)$ ก็จะเป็นสถานะที่เหมาะสมด้วย ดังนั้นวิธีการโดยอ้อม (Indirect Approaches) ใช้ทฤษฎีของพรอนทิยากิน (Pontryagin's Theory) สมการแสดงสถานะ (State Equations) เป็นดังนี้ $\lambda(t)$ ก็จะยังคงเป็นเวคเตอร์ที่ไม่เท่ากับศูนย์เช่นดังต่อไปนี้

$$x^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = f(x^*,u^*,t) \tag{2.92}$$

$$\lambda^{(1)*}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^T = (x^*,u^*,\lambda^*,t) \tag{2.93}$$

$$H(x^*,u^*,\lambda^*,t) \le H(x^*,u,\lambda^*,t) \tag{2.94}$$

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T - \lambda\right]_{t_f} = 0 \tag{2.95}$$

$$\left[H + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \tag{2.96}$$

สำหรับการควบคุมที่ยอมรับได้ และทุกค่าของ $t \in [t_0,t_f]$ สมการที่ (2.96) จะกลายเป็น

$$H(x^*,u^*,\lambda^*,t) = \min_{u(t)\in U} H(x^*,u,\lambda^*,t) \tag{2.97}$$

ถ้าปัญหาที่ไร้ขอบเขต ตัวแปรควบคุม (Control Input, $u(t)$) จากสมการที่ (2.97) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T = 0 \tag{2.98}$$

ซึ่งหลักการและทฤษฎีของพรอนทริยากินนี้เป็นวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาโดยทางอ้อม (Indirect) ได้ผลเช่นเดียวกับวิธีแคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variation)

ใช้ทฤษฎีของพรอนทริยากิน (Pontryagin's Theory) สมการสภาวะที่จำเป็นคือสมการที่ (2.97) สิ่งที่จะได้คือเช่นสมการสถานะ (State Equations)

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T,$$

(2.99)

$$H_{t_f} = 0, \tag{2.100}$$

และ

$$H\left(x^*, u^*, \lambda^*, t\right) = \min_{u(t)\in U} H\left(x^*, u, \lambda^*, t\right). \tag{2.101}$$

เมื่อ $H$ (Hamiltonian) กำหนดให้เป็น

$$H\left(x(t), u(t), \lambda(t)\right) = 1 + \lambda(t)^T f(x,u,t) \tag{2.102}$$

$\lambda(t) \in R^n$ คือตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multipliers) สภาวะที่จำเป็น (Necessary Condition) ที่จำเป็นสำหรับวิธีโดยอ้อม สมการที่ (2.102) เป็นที่รู้จักกันดีในเรื่องของสภาวะการที่เหมาะสม ซึ่งปัญหาของโครงสร้างที่เป็นแบบสวิตชิ่ง (Switching Structure) สามารถที่จะหาค่าได้

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T, \tag{2.103}$$

$$H_{t_f} = 0, \tag{2.104}$$

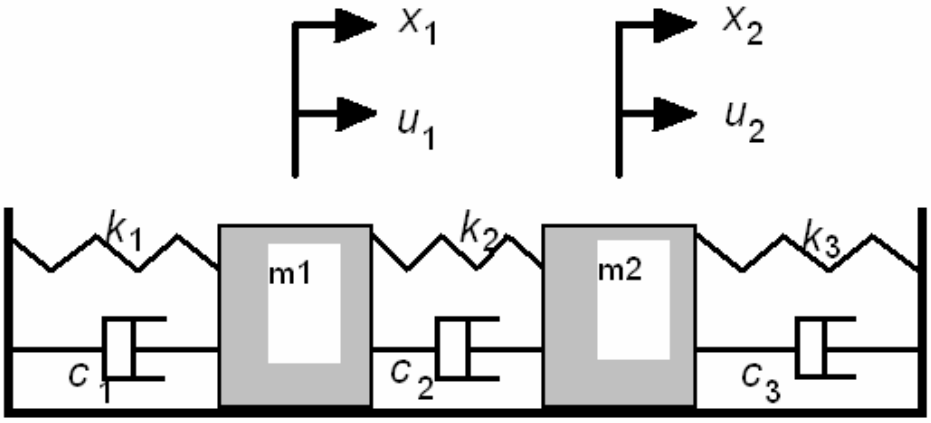
และ

$$H\left(x^*,u^*,\lambda^*,t\right)=\min_{u(t)\in U} H\left(x^*,u,\lambda^*,t\right) \tag{2.105}$$

เมื่อแฮมมิลตันเนียน ,$H$ (Hamiltonian) กำหนดเป็น

$$H\left(x(t),u(t),\lambda(t)\right)=-\left(\sum_{i=1}^{m}u_i^2\right)+\lambda(t)^T\ f(x,u,t)\,. \tag{2.106}$$

### 2.2.4 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)




ภาพประกอบ 1 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System

การควบคุมจุดต่อจุดของระบบสปริง-ก้อนมวล-ตัวหน่วง พิจารณาดังแสดงตามรูป สมการการเคลื่อนที่ของระบบดังนี้

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=Bu \tag{2.107}$$

จากสมการ (2.107) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

เมื่อ $x_1 > x_2$ และ

$m_1 = m_2 = 1.0$ , $c_1 = c_3 = 1.0$ , $c_2 = 2.0$ , $k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$

ดังนั้นสมการระบบสามารถกำหนดได้โดย

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \tag{2.108}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \tag{2.109}$$

จากสมการที่ (2.108) และ (2.109) สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสเตท (State – Space) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1 \quad ; \; u_1 = x_5$$

$$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + x_6 \quad ; \; u_2 = x_6 \tag{2.110}$$

$$\dot{x}_5 = \tilde{u}_1$$

$$\dot{x}_6 = \tilde{u}_2$$

# บทที่ 3
# วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Problem Statement)
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)
3. กำหนดสมการ Two Degree-of-Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring-Mass-Damper
4. ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem)
5. ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem)

## 3.1 การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Derivative Function) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n,u_1,...u_m,t); \quad i=1,...,n \tag{3.1}$$

โดยที่ $x \in R^n$ , $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States , Control Input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้ก็คือการหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการพลังงานน้อยที่สุดหรือความนิ่มนวลสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$ , $t_0$ คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$ , $t_f$ คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} u_i^2 dt \tag{3.2}$$

ในรูปแบบที่คล้ายกันกับปัญหาการใช้พลังงานน้อยที่สุดนั้น ปัญหาของความนิ่มนวลสูงสุดได้มีข้อแตกต่างกันดังนี้ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของแรงที่เทียบกับเวลา คือ อนุพันธ์อันดับที่สามที่เทียบกับ

$$Jerk = \dddot{x} \propto \dot{u} \tag{3.3}$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \tag{3.4}$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_{n+m}, \tilde{u}_1, ...\tilde{u}_m, t); \quad i = 1, ..., n+m \tag{3.5}$$

ในที่นี้ $\tilde{u}$ คือค่าตัวแปร Control Input ของระบบพลศาสตร์ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i^2 dt \tag{3.6}$$

ในลักษณะคล้ายกัน เมื่อเปรียบเทียบกับตัวแปรปัญหา การใช้พลังงานน้อยที่สุด (3.2) สามารถเขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหา ความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \dddot{x}_i^2 dt \tag{3.7}$$

$J$ เป็น Cost Function ของความกระด้าง (Jerks)

## 3.2 เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา (Necessary Condition)

ในการศึกษางานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations) หาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาทางการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทางกายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงานให้ฟังก์ชันนอลเป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \phi(t, x_1, ..., x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt \tag{3.8}$$

ซึ่ง

$$\phi(t, x_1, ..., x_n)_{t_f} \tag{3.9}$$

จะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และ สภาวะสุดท้าย (Final States) ของระบบ
และ

$$\int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt \tag{3.10}$$

เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของสเตตและคอนโทรลวาริเอเบิล (State and Control Variables)

ในการหาค่าความเหมาะสมของฟังก์ชันในระบบพลศาสตร์ได้เพิ่มตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) เข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) จะได้สมการดังนี้

$$J'(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L'(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt \tag{3.11}$$

ซึ่ง

$$L'(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_m) = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i) \tag{3.12}$$

โดยที่ $\lambda_i(t)$ คือตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้น สมการ (3.11) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J'(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m) = \int_{t_i}^{t_f} [L(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_m) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[\dot{x}_i - f_i(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_m)]]dt \tag{3.13}$$

การเลือกใช้เงื่อนไขใดนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล ในการศึกษานี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and End Points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น $t_0$ และเวลาสุดท้าย $t_f$ รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไว้แล้ว ความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable Functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0)= x_0$, $x(t_f)= x_f$ , $u(t_0)= u_0$ and $u(t_f)= u_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_i \le t \le t_f$

ให้ฟังก์ชัน $L(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)$ แสดงฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1,...,x_n,u_1,...,u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)\,dt \tag{3.14}$$

ถ้าให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{xj}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{uk}(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_{xj}(t_0) = h_{xj}(t_f) = h_{uk}(t_0) = h_{uk}(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล $\Delta J$ เป็น

$$\Delta J = J[x_1 + h_{x1},...,x_n + h_{xj},u_1 + h_{u1},...,u_m + h_{uk}] - J[x_1,...,x_n,u_1,...,u_m] \tag{3.15}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[ \begin{array}{l} L\left( \begin{array}{l} t, x_1 + h_{x1}, ..., x_n + h_{xj}, \dot{x}_1 + \dot{h}_{x1}, ..., \dot{x}_n + \dot{h}_{xj}, \\ u_1 + h_{u1}, ..., u_m + h_{uk}, \dot{u}_1 + \dot{h}_{u1}, ..., \dot{u}_m + \dot{h}_{uk} \end{array} \right) \\ -L\left(t, x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n, u_1, ..., u_m, \dot{u}_1, ..., \dot{u}_m\right) \end{array} \right] dt \quad (3.16)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher Order Terms) ทิ้ง จะได้ว่า

$$\delta J' = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j}\right) h_{x_j} \, dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k}\right) h_{u_k} \, dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{u_k}|_{t_i}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j}|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{x_j}|_{t_i}\right) \quad (3.17)$$

แต่ว่ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $h_{x_j}|_{t_f} = h_{x_j}|_{t_i} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆของ สมการ (3.17) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad (3.18)$$

และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (3.19)$$

สำหรับ $j = 1, \ldots, n$ และ $k = 1, \ldots, m$.

สมการ(3.18) และ สมการ(3.19) เป็นเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่จะนำไปแก้ปัญหาร่วมกับตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$, และ Control Inputs $u_k(t)$ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้หลายทาง

สำหรับ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n,u_1,...u_m,t), \qquad i=1,...,n \tag{3.20}$$

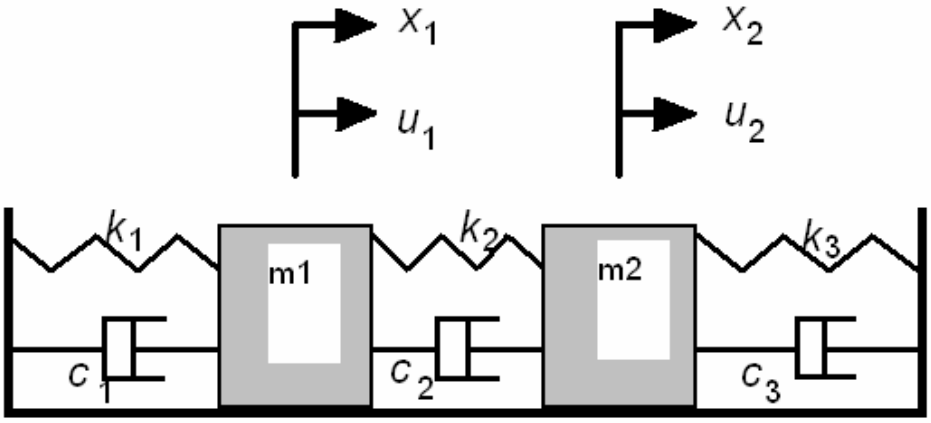
เนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ของสมการ (3.20)

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad j=1,...,n \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \qquad k=1,...,m \tag{3.22}$$

จากเนสเซสเซอรีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการพีชคณิต (Differential and Algebraic Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลาแบบนี้ จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขของเขตสองจุด (TPBVP : Two Point Boundary Valued Problem)

## 3.3 กำหนดสมการ Two Degree-of-Freedom ของสปริง มวลและตัวหน่วง Spring-Mass-Damper




ภาพประกอบ 2 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System

ในงานศึกษาวิจัยนี้สำหรับการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ได้นำตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่ของ สปริง ก้อนมวล และ ตัวหน่วง A Spring – Mass – Damper System ของการเคลื่อนที่ Two Degree-of-Freedom ซึ่งจะได้สมการดังนี้

$$A\dot{x} = Bu \tag{3.23}$$

จัดรูปให้อยู่ในเมตริกซ์ $A$ และ$B$

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

จัดรูปเมตริกซ์ของ$M$ , $C$ และ $K$ เป็น

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

จากสมการ(3.23) สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อันดับที่สองได้ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Second Law of Newton) ส่วนตัวแปรก็ใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$m_1 = m_2 = 1.0$ , $c_1 = c_3 = 1.0$ , $c_2 = 2.0$ ,$k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

$x(t_0) = (1\,2\,0\,0)^T$ และ $x(t_f) = (0\,0\,0\,0)^T$

ที่ $t_0 = 0$ และ $t_f = 1.0$

## 3.4 ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem)

Cost Function ของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 \dddot{x}_1^2 + \dddot{x}_2^2 \, dt \tag{3.29}$$

สำหรับการกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3.29) ได้ทำการมินิไมซ์ (Minimized) โดยใช้แคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations) หาตัวแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมา

## 3.5 ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem)

Cost Function ของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 \, dt \tag{3.30}$$

สำหรับการกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3.30) ได้ทำการมินิไมซ์ (Minimized) โดยใช้แคลคูลัสออฟวาริเอชั่นส์ (Calculus of Variations) หาตัวแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมา

**ตัวอย่างของปัญหาที่1**

วิศวกรต้องการสร้างระบบรางรถไฟใต้ดินให้มีความราบเรียบที่สุด โดยกำหนดให้รถไฟมี 3 ขบวน ขบวนละ20,000 กิโลกรัม และออกแบบให้เคลื่อนที่ไปบนรางรถไฟและหยุดที่สถานีหนึ่งโดยใช้เวลา 5 นาที ระยะทางระหว่างทั้งสองสถานี1,000 เมตร จงหาแรงภายนอกที่กระทำต่อรถไฟ

กำหนด Distance $x_1(t)$

Velocity $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$

Acceleration $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$

Jerk $\tilde{u}_1(t) = \dot{x}_3(t)$

คอสฟังก์ชันของ Jerk เขียนได้ดังนี้

$$J = \int_0^{300} \tilde{u}_i^2 dt, i = 1,2,3,\ldots,m$$

จากการใช้ Calculus of Variations ในการแก้ปัญหาจะได้สมการดังนี้

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\tilde{u}_1 - \dot{x}_3)$$
$$= \tilde{u}_1^2 + \lambda_1 x_2 - \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_3 - \lambda_2 \dot{x}_2 + \lambda_3 \tilde{u}_1 + \lambda_3 \dot{x}_3$$

กำหนดเงื่อนไขของค่าเริ่มต้น

$$t_0 = 0,\ t_f = 300,\ x_1(t_0) = 0,\ x_1(t_f) = 1000$$
$$x_2(t_0) = 0,\ x_2(t_f) = 0,\ x_3(t_0) = 0,\ x_3(t_f) = 0$$

ทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้สมการออยเลอร์

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}=0$$
$$0-\frac{d}{dt}\left(-\lambda_1\right)=0$$
$$\dot{\lambda}_1=0\Rightarrow\lambda_1=c_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}=0$$
$$\lambda_1-\frac{d}{dt}(-\lambda_2)=0$$
$$\lambda_1+\dot{\lambda}_2=0\Rightarrow\dot{\lambda}_2=-\lambda_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}=0$$
$$\lambda_2-\frac{d}{dt}(-\lambda_3)=0$$
$$\lambda_2+\dot{\lambda}_3=0\Rightarrow\dot{\lambda}_3=-\lambda_2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1}=0$$
$$2\tilde{u}_1+\lambda_3=0\Rightarrow\tilde{u}_1={}^{-\lambda_3}\!\!\diagup\!\!_{2} \quad (4)$$

ทำการ Integration ย้อนกลับ

$$\lambda_1=c_1$$
$$\lambda_2=-\lambda_1 t+c_2=-c_1 t+c_2$$
$$\lambda_3=-\lambda_2 t+c_3=c_1 t^2+-c_2 t+c_3$$

$$\dot{x}_3=\frac{-\lambda_3}{2}$$
$$x_3=\frac{-\lambda_3}{2}t+c_4$$
$$x_3=-\frac{(c_1 t^2+-c_2 t+c_3)}{2}t+c_4$$

$$x_3 = -\frac{c_1}{2}t^3 + \frac{c_2}{2}t^2 - \frac{c_3}{2}t + c_4$$

$$x_2 = -\frac{c_1}{8}t^4 + \frac{c_2}{6}t^3 - \frac{c_3}{4}t^2 + c_4 t + c_5$$

$$x_1 = -\frac{c_1}{40}t^5 + \frac{c_2}{24}t^4 - \frac{c_3}{12}t^3 + \frac{c_4}{2}t^2 + c_5 t + c_6$$

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow c_6 = 0$$
$$x_2(0) = 0 \Rightarrow c_5 = 0$$
$$x_3(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$$

$$x_1(300) = 1000$$
$$x_2(300) = 0$$
$$x_3(300) = 0$$

$$c_1 = -9.877 \times 10^{-8}$$
$$c_2 = -4.444 \times 10^{-5}$$
$$c_3 = -4.444 \times 10^{-3}$$

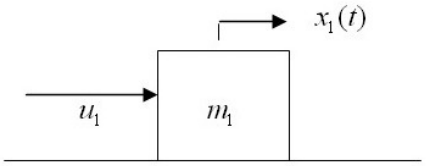
สุดท้ายสมการที่ได้เขียนอยู่ในรูป

$$x_1(t) = 2.469 \times 10^{-9}t^5 - 1.852 \times 10^{-6}t^4 + 3.703 \times 10^{-4}t^3$$
$$x_2(t) = 1.234 \times 10^{-8}t^4 - 7.407 \times 10^{-6}t^3 + 1.111 \times 10^{-3}t^2$$
$$x_3(t) = 4.936 \times 10^{-8}t^3 - 2.222 \times 10^{-5}t^2 + 2.222 \times 10^{-3}t$$
$$\tilde{u}_1 = 1.480 \times 10^{-7}t^2 - 4.444 \times 10^{-5}t + 2.222 \times 10^{-3}$$

Newton's Law of Motion : $\sum F = ma$

$$F(t) = 60\,000 x_3(t)$$
$$F(t) = 2.961 \times 10^{-3}t^3 - 1.333t^2 + 1.333 \times 10^2 t$$

**ตัวอย่างของปัญหาที่2**




ปัญหานี้ประกอบด้วยก้อนมวลหนึ่งก้อนอย่างง่าย (A Simple One Mass Problem) พิจารณาระบบที่มวลหนึ่งก้อนเป็นส่วนที่ป้อนเข้า (Input) ระบบมี 1องศาอิสระ เมื่อ $u_1(t)$ คือ ตัวกระตุ้นป้อนเข้า (Actuator Input) และกำหนดให้ $m_1$ =1 กิโลกรัมเพื่อความสะดวกกำหนดให้ใช้หน่วยเป็นระบบ MKS ให้หาเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา คอสฟังก์ชันของ Minimum Jerk จากกฎของ Newton's Law จะได้สมการการเคลื่อนที่ของระบบในรูป

$$\ddot{x}_1 = u_1 \tag{1}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \end{aligned} \tag{2}$$

และกำหนดให้

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0 \qquad x_1(1) = 1 \\ \dot{x}_1(0) &= 0 \qquad \dot{x}_1(1) = 0 \\ \ddot{x}_1(0) &= 0 \qquad \ddot{x}_1(1) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ปัญหาของความนิ่มนวลที่สุดในรูปแบบของปัญหานี้จะต้องเขียนใหม่ให้มี Jerk อยู่ในระบบดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 = u \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 = \dddot{x}_1 \end{aligned} \tag{4}$$

เมื่อเรากำหนดให้

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป สมการดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 \, dt = \int_0^1 \dddot{x}_1^2 dt \tag{6}$$

$\dddot{x}_1$ ขึ้นกับ $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t)$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน จะได้

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\tilde{u}_1 - \dot{x}_3) \tag{7}$$

โดยใช้วิธีการของ Euler- Lagrange Equation

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial \dot{x}_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \ddot{x}_1}\right) - \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial u}{\partial \dddot{x}_1}\right) = 0 \tag{8}$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Condition) มีดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1 &= -\lambda_3 / 2 \end{aligned} \tag{9}$$

จากฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 \, dt$$

$$J = \int_0^1 \left[ -\lambda_3 \big/ 2 \right]^2 dt \tag{10}$$

ทำให้ได้ Necessary Condition ในการแก้ปัญหา Minimum Jerk ทั้งหมด 7 สมการ

# บทที่ 4
# ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

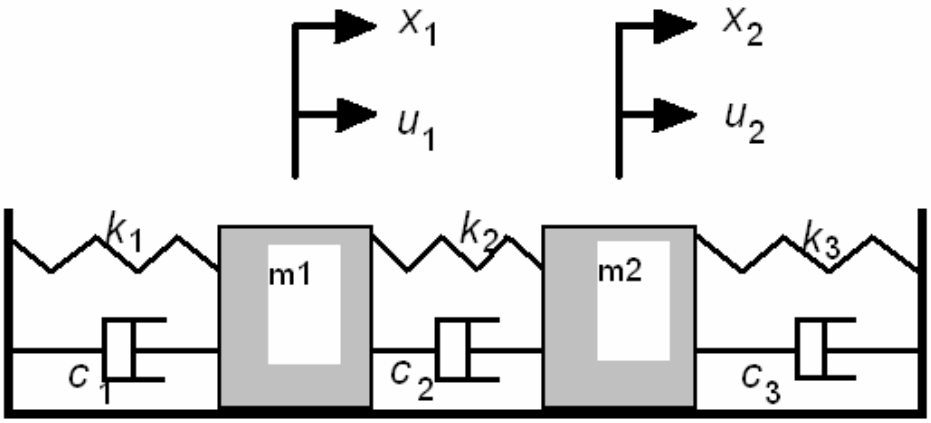
ในการวิจัยศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

## 4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบในงานวิจัยนี้ได้ทำการเปรียบเทียบผลของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk) กับ การหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk) โดยกำหนดให้ระบบการเคลื่อนที่มี 2 องศาอิสระ (Two Degree-of-Freedom) ของระบบ สปริง มวล และ ตัวหน่วง (Spring-Mass-Damper) ในรูปแบบของ Fully Actuators โดยกำหนดสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Derivative) ของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear of Dynamic Systems) ดังที่จะนำมาสู่ผลการทดลองดังนี้

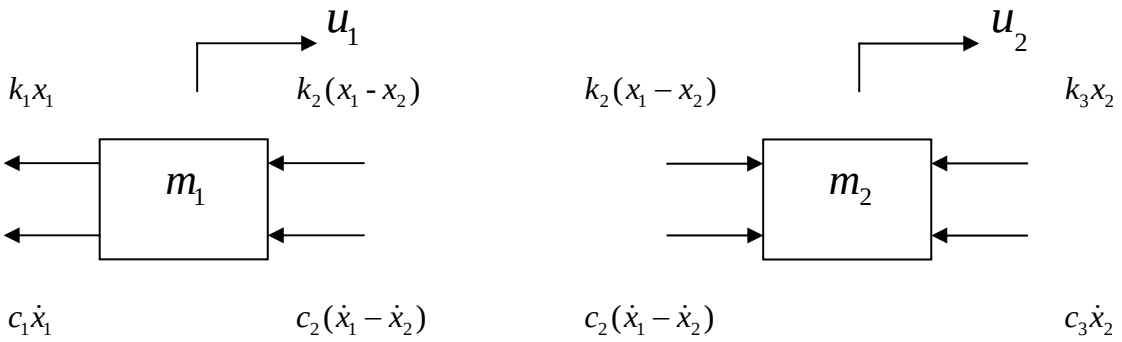
### 4.1.1 การทดสอบของการแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem)




ภาพประกอบ 3 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

$x_1 > x_2$




จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Low)

$$\sum F = ma \tag{4.1}$$

$$\sum F = m\ddot{x} \tag{4.2}$$

คิดที่มวล $m_1$

$$u_1 - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \tag{4.3}$$

คิดที่มวล $m_2$

$$k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3x_2 - c_3\dot{x}_2 = m_2\ddot{x}_2 \tag{4.4}$$

จากสมการ (4.3)

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = u_1 \tag{4.5}$$

จากสมการ (4.4)

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = u_2 \tag{4.6}$$

กำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$m_1 = m_2 = 1.0$ , $c_1 = c_3 = 1.0$ , $c_2 = 2.0$ , $k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion : EOM) ของระบบ Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ดังนี้

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \tag{4.7}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \tag{4.8}$$

ปัญหาของความนิ่มนวลที่สุดในรูปแบบของปัญหานี้จะต้องเขียนใหม่ให้มี Jerk อยู่ในระบบ จากสมการอนุพันธ์อันดับสองให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยรูปแบบ ปริภูมิ-สเตท (State Space : st – sp) ได้หกสมการคือ

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{4.9}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{4.10}$$

$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1$ โดยกำหนดให้ $u_1 = x_5$ จะได้

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + x_5 \tag{4.11}$$

$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + u_2$ โดยกำหนดให้ $u_2 = x_6$ จะได้

$$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + x_6 \tag{4.12}$$

$$\dot{x}_5 = \tilde{u}_1 \tag{4.13}$$

$$\dot{x}_6 = \tilde{u}_2 \tag{4.14}$$

เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$ , $t_0$ คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$ , $t_f$ คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

Boundary Condition

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_f &= 1 \\ x_1(0) &= 1 & x_1(1) &= 0 \\ x_2(0) &= 2 & x_2(1) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 & x_3(1) &= 0 \\ x_4(0) &= 0 & x_4(1) &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป สมการดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 \, dt \tag{4.16}$$

จากการใช้แคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations)

$$\begin{aligned} F = \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 &+ \lambda_1(x_3 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_4 - \dot{x}_2) + \lambda_3(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + x_5 - \dot{x}_3) \\ &+ \lambda_4(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + x_6 - \dot{x}_4) + \lambda_5(\tilde{u}_1 - \dot{x}_5) + \lambda_6(\tilde{u}_2 - \dot{x}_6) \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} F = \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 &+ \lambda_1 x_3 - \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 x_4 - \lambda_2 \dot{x}_2 - 3\lambda_3 x_3 + 2\lambda_3 x_4 - 6\lambda_3 x_1 + 3\lambda_3 x_2 \\ &+ \lambda_3 x_5 - \lambda_3 \dot{x}_3 + 2\lambda_4 x_3 - 3\lambda_4 x_4 + 3\lambda_4 x_1 - 6\lambda_4 x_2 + \lambda_4 x_6 - \lambda_4 \dot{x}_4 + \lambda_5 \tilde{u}_1 \\ &- \lambda_5 \dot{x}_5 + \lambda_6 \tilde{u}_2 - \lambda_6 \dot{x}_6 \end{aligned} \tag{4.18}$$

โดยใช้วิธีการของสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation)

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.19}$$

เข้าไปแก้สมการ (4.18) จึงได้สมการดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}=0$$
$$-6\lambda_3+3\lambda_4-\frac{d}{dt}(-\lambda_1)=0$$
$$-6\lambda_3+3\lambda_4+\dot{\lambda}_1=0$$
$$\dot{\lambda}_1=6\lambda_3-3\lambda_4 \qquad (4.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}=0$$
$$3\lambda_3-6\lambda_4-\frac{d}{dt}(-\lambda_2)=0$$
$$3\lambda_3-6\lambda_4+\dot{\lambda}_2=0$$
$$\dot{\lambda}_2=-3\lambda_3+6\lambda_4 \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3}=0$$
$$\lambda_1-3\lambda_3+2\lambda_4-\frac{d}{dt}(-\lambda_3)=0$$
$$\lambda_1-3\lambda_3+2\lambda_4+\dot{\lambda}_3=0$$
$$\dot{\lambda}_3=-\lambda_1+3\lambda_3-2\lambda_4 \qquad (4.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_4}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_4}=0$$
$$\lambda_2+2\lambda_3-3\lambda_4-\frac{d}{dt}(-\lambda_4)=0$$
$$\lambda_2+2\lambda_3-3\lambda_4+\dot{\lambda}_4=0$$
$$\dot{\lambda}_4=-\lambda_2-2\lambda_3+3\lambda_4 \qquad (4.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_5}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_5}=0$$
$$\lambda_3-\frac{d}{dt}(-\lambda_5)=0$$
$$\lambda_3+\dot{\lambda}_5=0$$
$$\dot{\lambda}_5=-\lambda_3 \qquad (4.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_6}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_6}=0$$
$$\lambda_4-\frac{d}{dt}(-\lambda_6)=0$$
$$\lambda_4+\dot{\lambda}_6=0$$
$$\dot{\lambda}_6=-\lambda_4 \tag{4.25}$$

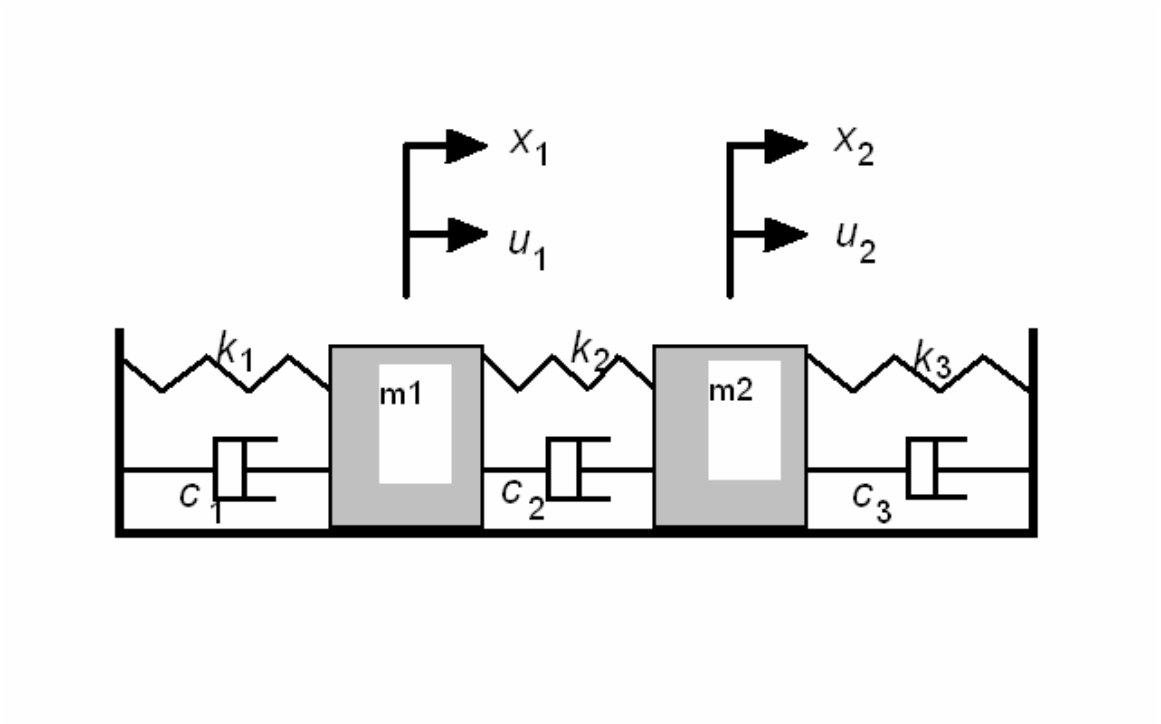
$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1}=0$$
$$2\tilde{u}_1+\lambda_5=0$$
$$\tilde{u}_1=-\lambda_5/2 \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{u}_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}_2}=0$$
$$2\tilde{u}_2+\lambda_6=0$$
$$\tilde{u}_2=-\lambda_6/2 \tag{4.27}$$

ทำให้เงื่อนไขที่จำเป็น (Necessary Condition) มีดังนี้

$$\dot{\lambda}_1=6\lambda_3-3\lambda_4$$
$$\dot{\lambda}_2=-3\lambda_3+6\lambda_4$$
$$\dot{\lambda}_3=-\lambda_1+3\lambda_3-2\lambda_4$$
$$\dot{\lambda}_4=-\lambda_2-2\lambda_3+3\lambda_4$$
$$\dot{\lambda}_5=-\lambda_3$$
$$\dot{\lambda}_6=-\lambda_4$$
$$\dot{x}_1=x_3 \tag{4.28}$$
$$\dot{x}_2=x_4$$
$$\dot{x}_3=-3x_3+2x_4-6x_1+3x_2+x_5$$
$$\dot{x}_4=2x_3-3x_4+3x_1-6x_2$$
$$\dot{x}_5=\tilde{u}_1=-\lambda_5/2$$
$$\dot{x}_6=\tilde{u}_2=-\lambda_6/2$$

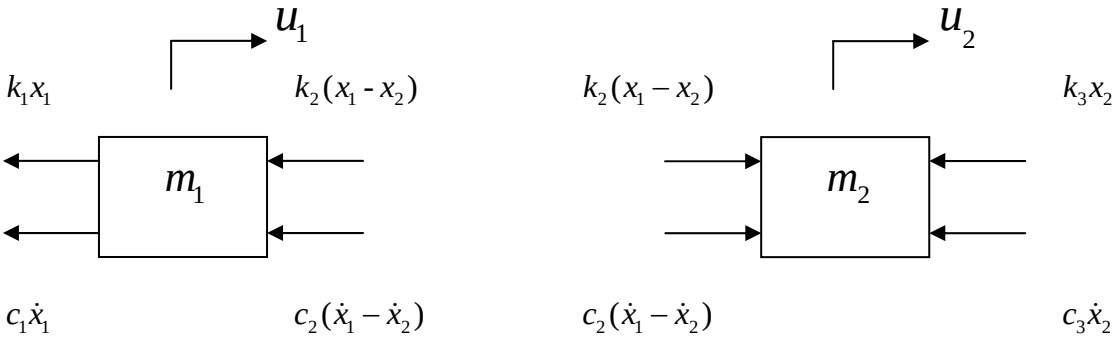
### 4.1.2 การทดสอบของการแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem)




ภาพประกอบ 4 Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System

เริ่มต้นจากการคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ของระบบ (Equation of Motion : EOM)

$x_1 > x_2$




จากกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Low)

$$\sum F = ma \tag{4.29}$$

$$\sum F = m\ddot{x} \tag{4.30}$$

คิดที่มวล $m_1$

$$u_1 - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1 \tag{4.31}$$

คิดที่มวล $m_2$

$$k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_3 x_2 - c_3\dot{x}_2 = m_2\ddot{x}_2 \tag{4.32}$$

จากสมการ (4.31)

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = u_1 \tag{4.33}$$

จากสมการ (4.32)

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = u_2 \tag{4.34}$$

กำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

$m_1 = m_2 = 1.0$ , $c_1 = c_3 = 1.0$ , $c_2 = 2.0$ , $k_1 = k_2 = k_3 = 3.0$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion : EOM) ของระบบ Two Degree of-Freedom of Spring Mass and Damper System ดังนี้

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 6x_1 - 3x_2 = u_1 \tag{4.35}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 - 3x_1 + 6x_2 = u_2 \tag{4.36}$$

ปัญหาของความนิ่มนวลที่สุดในรูปแบบของปัญหานี้จะต้องเขียนใหม่ให้มี Jerk อยู่ในระบบ จากสมการอนุพันธ์อันดับสองให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยรูปแบบ ปริภูมิ-สเตท (State Space : st – sp) ได้หกสมการคือ

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{4.37}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{4.38}$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1 \tag{4.39}$$

$$\dot{x}_4 = 2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 \tag{4.40}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_3 = \dot{x}_5 = -3\dot{x}_3 + 2\dot{x}_4 - 6\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + \tilde{u}_1$$

$$= -3(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1) + 2(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + u_2)$$
$$-6x_3 + 3x_4 + \tilde{u}_1$$

$$= 9x_3 - 6x_4 + 18x_1 - 9x_2 - 3u_1 + 4x_3 - 6x_4 + 6x_1 - 12x_2$$
$$+2u_2 - 6x_3 + 3x_4 + \tilde{u}_1$$

$$\dot{x}_5 = 7x_3 - 9x_4 + 24x_1 - 21x_2 - 3u_1 + 2u_2 + \tilde{u}_1 \tag{4.41}$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_4 = \dot{x}_6 = 2\dot{x}_3 - 3\dot{x}_4 + 3\dot{x}_1 - 6\dot{x}_2 + \tilde{u}_2$$

$$= 2(-3x_3 + 2x_4 - 6x_1 + 3x_2 + u_1) - 3(2x_3 - 3x_4 + 3x_1 - 6x_2 + u_2)$$
$$+3x_3 - 6x_4 + \tilde{u}_2$$

$$= -6x_3 + 4x_4 - 12x_1 + 6x_2 + 2u_1 - 6x_3 + 9x_4 - 9x_1 + 18x_2$$
$$-3u_2 + 3x_3 - 6x_4 + \tilde{u}_2$$

$$\dot{x}_6 = -9x_3 + 7x_4 - 21x_1 + 24x_2 + 2u_1 - 3u_2 + \tilde{u}_2 \tag{4.42}$$

เรากำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$ , $t_0$ คือเวลาเริ่มต้น และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$ , $t_f$ คือเวลา ณ จุดสุดท้ายที่พิจารณา

Boundary Condition

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 0 & t_f &= 1 \\
x_1(0) &= 1 & x_1(1) &= 0 \\
x_2(0) &= 2 & x_2(1) &= 0 \\
x_3(0) &= 0 & x_3(1) &= 0 \\
x_4(0) &= 0 & x_4(1) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดอยู่ในรูป สมการดังนี้

$$J = \int_0^1 \dddot{x}_1^2 + \dddot{x}_2^2 \, dt \tag{4.44}$$

### 4.1.3 เปรียบเทียบสมการก่อนหาผลลัพธ์ระเบียบวิธีทางตัวเลข

Minimum Direct Jerk

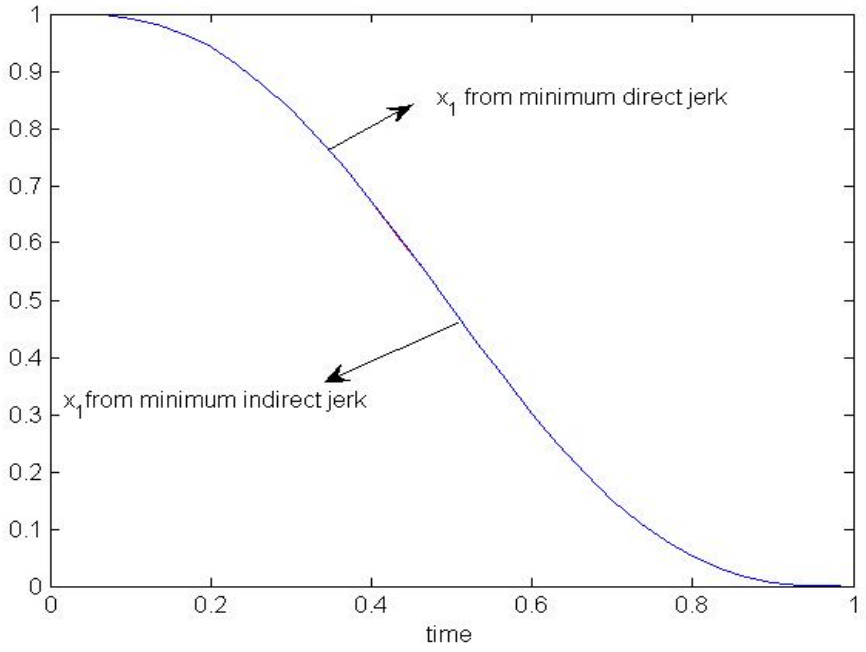
$$J = \int_0^1 \left[ (7x_3 - 9x_4 + 24x_1 - 21x_2 - 3u_1 + 2u_2 + \tilde{u}_1)^2 + (-9x_3 + 7x_4 - 21x_1 + 24x_2 + 2u_1 - 3u_2 + \tilde{u}_2)^2 \right] dt$$

Minimum Indirect Jerk

$$J = \int_0^1 \left[ \left( -\lambda_5 / 2 \right)^2 + \left( -\lambda_6 / 2 \right)^2 \right] dt$$

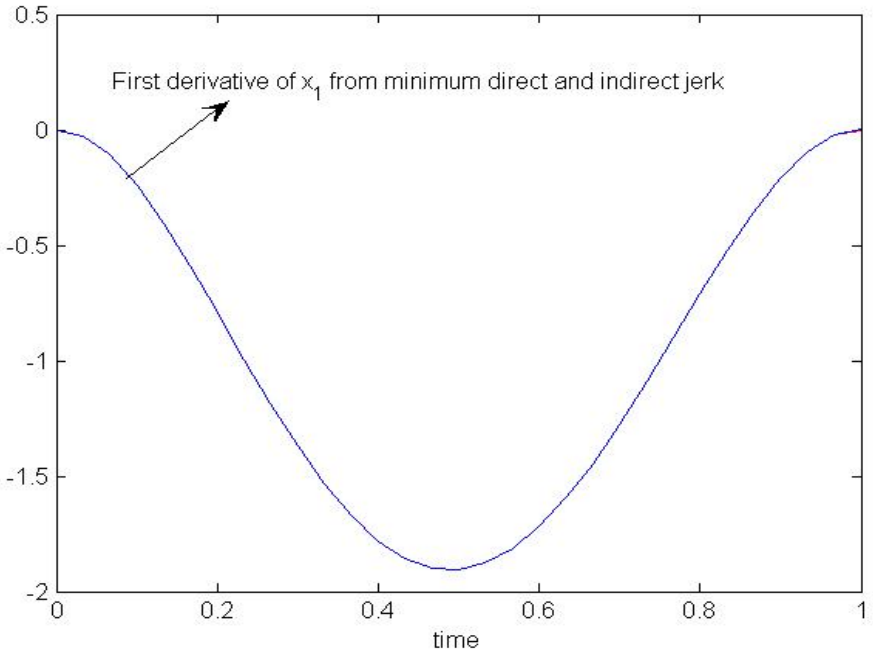
จะพบว่าวิธี Minimum Direct Jerk จะมีตัวแปรในการแก้ปัญหามากกว่าวิธี Minimum Indirect Jerk ซึ่งน่าจะแก้ปัญหาได้ง่ายกว่า ในขั้นตอนต่อไปจึงจะนำสมการทั้งสองวิธีไปแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรม Linear Programing ที่พัฒนาซอฟต์แวร์โดย ทวิวัชร วีระแกล้ว ซึ่งจะได้ผลดังต่อไปนี้

### 4.1.4 ผลการทดสอบการเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อม (Comparison Between Minimum Direct and Indirect Jerk)



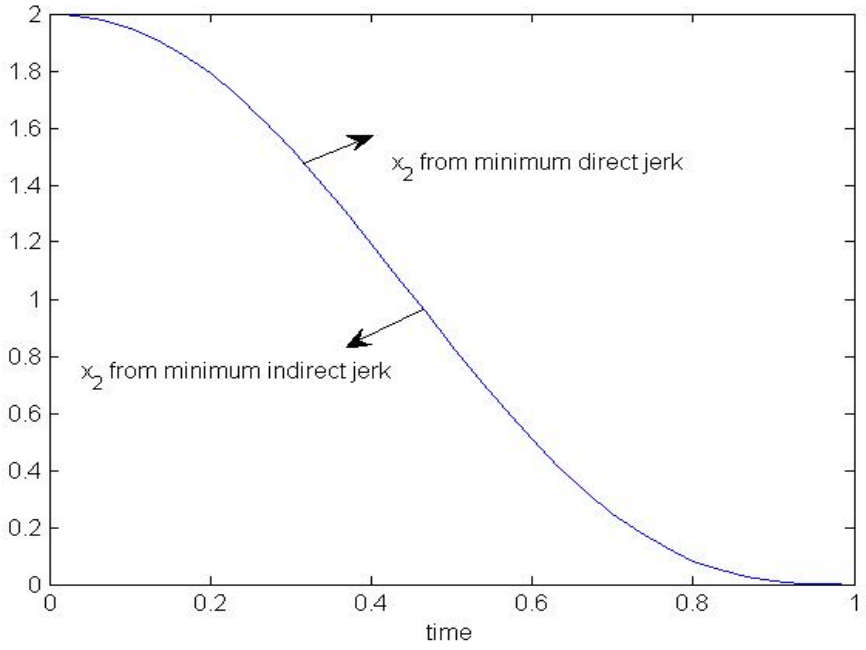

ภาพประกอบ 5 เปรียบเทียบ $x_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 5 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 ระยะทางเริ่มต้น=1 และระยะทางที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First State Variables $x_1(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 5 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว



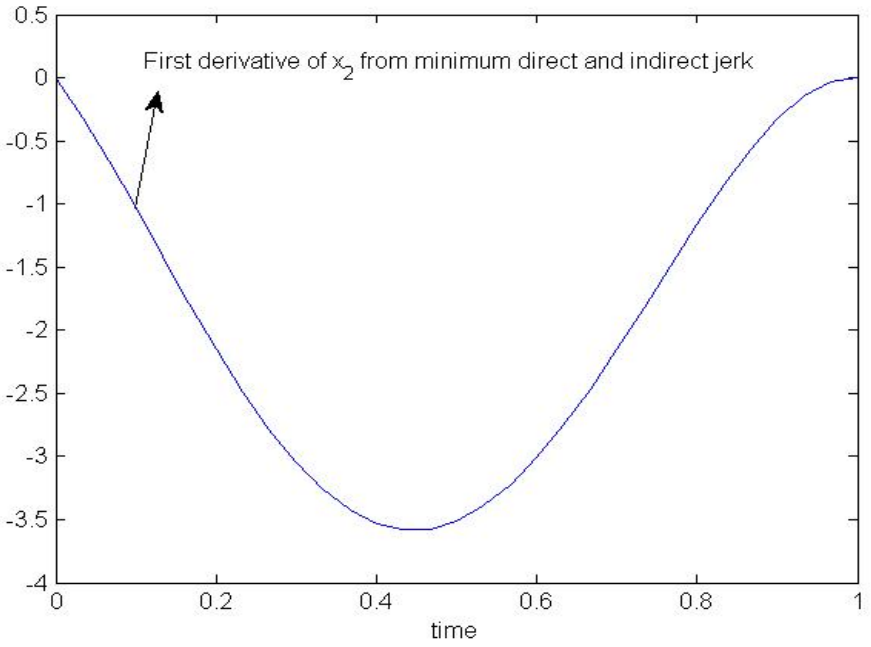

ภาพประกอบ 6 เปรียบเทียบ $\dot{x}_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 6 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 ความเร็วเริ่มต้น=0 และความเร็วที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First Derivative of First State Variables $\dot{x}_1(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 6 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว



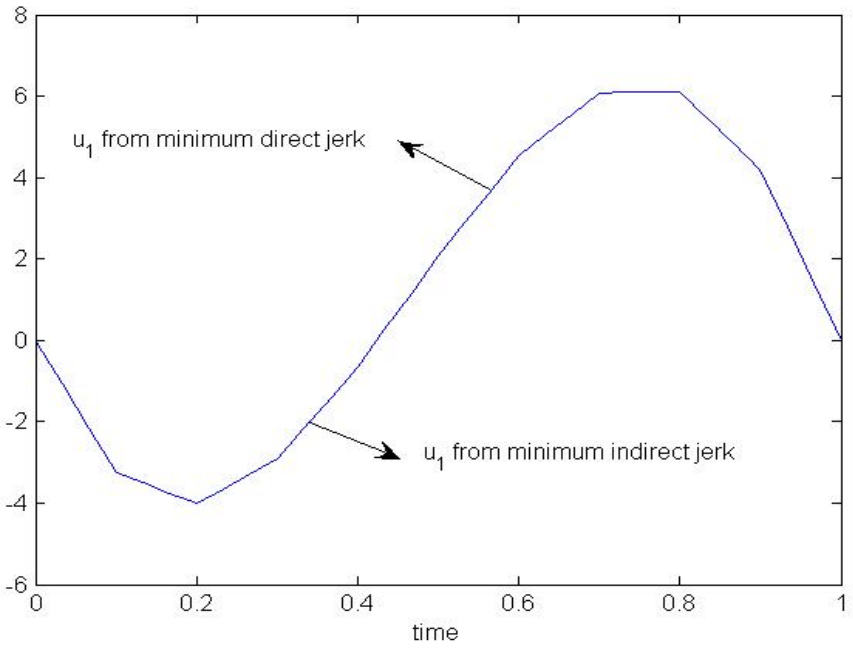

ภาพประกอบ 7 เปรียบเทียบ $x_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 7 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 ระยะทางเริ่มต้น=2 และระยะทางที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า Second State Variables $x_2(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 7 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว



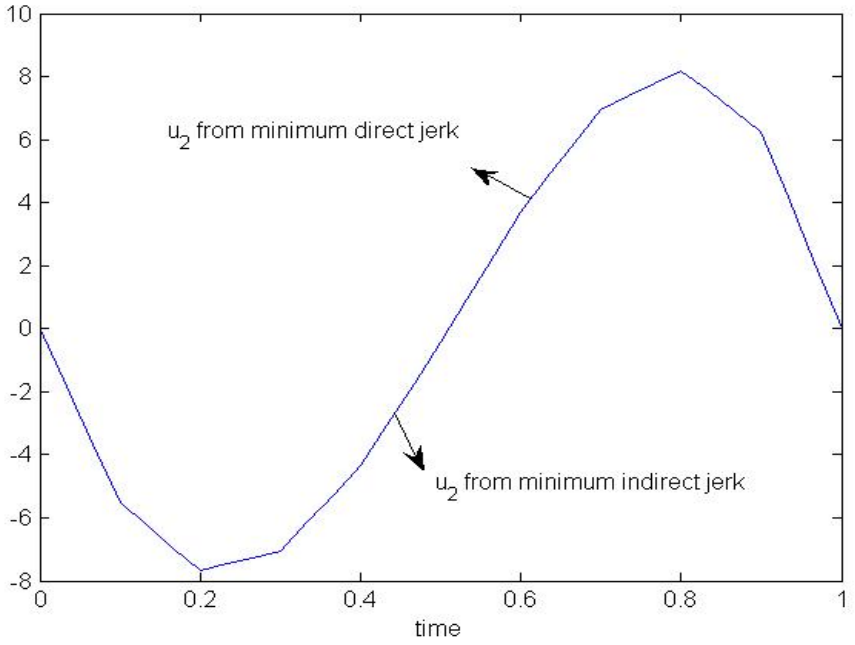

ภาพประกอบ 8 เปรียบเทียบ $\dot{x}_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 8 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 ความเร็วเริ่มต้น=0 และความเร็วที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First Derivative of Second State Variables $\dot{x}_2(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 8 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว




ภาพประกอบ 9 เปรียบเทียบ $u_1(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 9 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 แรงกระทำที่จุดเริ่มต้น=0 และแรงกระทำที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า First Control Variables $u_1(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 9 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว




ภาพประกอบ 10 เปรียบเทียบ $u_2(t)$ ที่ได้จากทั้งสองปัญหาเทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 10 เป็นการเปรียบเทียบ Minimum Direct/Indirect Jerk โดยกำหนดเวลาเริ่มต้น=0 และเวลาที่จุดสุดท้าย=1 แรงกระทำที่จุดเริ่มต้น=0 และแรงกระทำที่จุดสุดท้าย=0 ได้ทำการเขียนกราฟของผลเฉลยของปัญหา Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk ของทั้งสองปัญหาไว้ในกราฟเดียว ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า Second Control Variables $u_2(t)$ ของเส้นวิถี Minimum Direct Jerk และเส้นวิถี Minimum Indirect Jerk ซ้อนทับกันพอดี ทำให้เห็นว่าภาพประกอบ 10 มีเส้นกราฟแสดงไว้เพียงเส้นเดียว

## 4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปร $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ จากปัญหาทั้งสองแบบคือการเปรียบเทียบวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงและวิธีทางอ้อมที่เป็นเชิงเส้นของระบบพลศาสตร์ สังเกตได้จากภาพประกอบ 5-10 ที่เปรียบเทียบปัญหาทั้งสองวิธีโดยกำหนดให้ตัวแปร States คือ $x_1(t), x_2(t)$ Velocity $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)$ และ Control Input คือ $u_1(t), u_2(t)$ เทียบกับเวลา โดยเปรียบเทียบวิธี Minimum Direct Jerk และ Minimum Indirect Jerk โดยพล็อตกราฟให้มีตัวแปรค่าเดียวกัน จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นกราฟแต่ละค่าตัวแปร States และ Control Input ให้ผลเฉลยเหมือนกันทุกค่าเพราะเส้นวิถีทั้งสองทับซ้อนกันพอดี

# บทที่ 5
# สรุปและวิจารณ์

## 5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ได้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งกับผลรวมของแรงซึ่งรวมถึง Control Input ของทุกๆระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นโดยทำการ Differentiation เทียบกับเวลา ดังนั้น จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่าง อนุพันธ์ของความเร่ง ซึ่งเรียกว่า Jerk และอนุพันธ์ของผลรวมของแรงทั้งหมดซึ่งรวมถึงอนุพันธ์ของ Control Input ของระบบพลศาสตร์ ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้ผู้วิจัยกำหนดอนุพันธ์ของ Control Input ที่ขึ้นกับเวลาว่า Indirect Jerk ส่วนการแก้ปัญหาการหาค่าความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นมีลักษณะของปัญหาเป็นแบบ Two Point Boundary Value Problem (TPBVP) เริ่มจากการกำหนดเป้าหมายที่ต้องการ (Objective) และรวบรวมเงื่อนไขต่างๆของระบบในสภาวะ หรือ ณ เวลาที่สนใจ โดยในการหาค่าเหมาะสมที่สุดมาใช้ร่วมกับปัญหาของโปรแกรมเชิงเส้น เนื่องจากปัญหาเป็นพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับเวลา จึงต้องทำการแปลงปัญหาทางออฟติไมเซชั่นผ่านวิธีทางแคลคูลัสของความแปรปรวนที่สนใจในกรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองอยู่ทางผู้วิจัยจึงจัดสมการให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในงานวิจัยนี้ใช้การพัฒนาโปรแกรมจากงานวิจัยของ Veeraklaew ในส่วนของแคลคูลัสของความแปรปรวนซึ่งเป็นวิธีอ้อมพัฒนาบนโปรแกรม MATLAB ประกอบกับการแก้ปัญหาระเบียบวิธีทางตัวเลขที่มีชื่อว่า Linear Programming ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการทางตัวเลขที่ใช้ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดมาใช้ในการหาคำตอบที่ต้องการ

จากการใช้ระเบียบวิธีทางตัวเลขเพื่อนำมาแก้ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ง่ายกว่า รวดเร็ว และให้ผลลัพธ์ที่เหมือนกันกับปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ตั้งแต่จำนวนของตัวแปร Control Input ในระบบพลศาสตร์ ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนของตัวแปร State Variables เพราะฉะนั้นตัวแปรซึ่งถูกใช้ใน ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Cost Function) ของปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมจะน้อยกว่าปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง เมื่อพิจารณาระบบพลศาสตร์ที่เป็น Fully Actuator หรือระบบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ (Robotic Systems)

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากผลงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า การหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) สามารถใช้แทนวิธีการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) สำหรับระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear Dynamic Systems) ได้อย่างแน่นอน อย่างไรก็ตามในอนาคตผู้วิจัยที่สนใจในเรื่อง Jerk อาจจะเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาในรูปอนุพันธ์อันดับสูงของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้วนำผลมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งคาดว่าผลการทดลองของทั้งสองจะมีผลที่ใกล้เคียงกัน

# บรรณานุกรม

# บรรณานุกรม

มนัส สังวรศิลป์; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.

สุธรรม ศรีเกษม; เมธินทร์ ทรงชัยกุล; และ สง่า ศรีศุภปรีดา. (2545). *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.

ธนัญชัย ลีภักดิ์ปรีดา. (2543). *การหาค่าเหมาะสมที่สุด: หลักการพื้นฐานและขั้นตอนวิธีการ.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

Agrawal, SK.; & Fabien, BC. (1999). *Optimization of Dynamic Systems.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Bock, HG. (1978). *Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems with Application to Optimal Control.* ZAMM. P. 58.

Chapra, S.; & Canale, R. (2002). *Numerical Methods for Engineers.* McGraw-Hill Inc.

Craig, JJ. (1986). *Introduction to Robotic: Mechanics and Control.* Addision-Wesley Publishing Company.

Fabien, BC.; Agrawal, SK.; & Veeraklaew, T. (1998). Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations. *Optimal Control Applications and Methods*. Vol. 19, pp.393-410.

Kane, TR.; & Levinson, DA. (1985). *Dynamics: Theory and Applications.* McGraw-Hill Inc.

Kirk, DE. (1970). *Optimal Control Theory: An Introduction,* Prentice Hall Electrical Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey.

Mark, WS. (1989). *Robot Dynamics and Control.* University of Illinois at Urbana-Champaign.

Pirosopa, P.; et al. (2005). *A Study on the Comparison between Minimum Jerk and Minimum Energy of Dynamic Systems.* Proceedings of the 2005 International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, and International Conference Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce.

Saneewong Na Ayuttaya S. (2005). *The Development of Program for Designing the Structure of Automatic Car Cloth Cover.* Dissertation, M.Eng. (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Photocopied.

Spong, MW.; & Vidyasagar, M. (1986). *Robot Dynamics and Control,* John Wiley and Sons.

Veeraklaew, T. (2000). *Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-Order Dynamic Systems*. Dissertation, Ph.D. (Mechanical Engineering). Delaware: The University of Delaware. Photocopied.

Veeraklaew, T.; & Salaluk, P. (2005). *The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems.* The 19 th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.

Ying, SJ. (1997). *Advanced Dynamics,* University of South Florida, AIAA Education Series.

# อภิธานศัพท์

# อภิธานศัพท์

$A_{ij}$

คือแมตริกซ์ความเฉื่อย

Algebraic Equation

สมการทางพีชคณิต

Boundary Conditions , $x_i(t_0) = x_{i1}, x_i(t_f) = x_{i2}$

เงื่อนไขขอบเขต

Calculus of variation

แคลคูลัสความแปรปรวน

Constant Lagrange Multipliers , $\upsilon_l$

ค่าคงตัวลากรานจ์มัลติไพลเออร์

Constraints , $C_L \le C(x(t),u(t),t) \le C_U$

เงื่อนไขบังคับ

Continuous Derivatives

อนุพันธ์ต่อเนื่อง

Continuous Time

เวลาต่อเนื่อง

Control Input , $u_i$

ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า

Control Variable , $u_1(t)$ , $u_2(t)$

ตัวแปรควบคุม

Cost Functional , $J$

คอสฟังก์ชันนอล

Damping , $C$

ตัวหน่วง

Differential Equations

สมการเชิงอนุพันธ์

Direct Method

วิธีตรง

Displacement , $x(t)$

การเคลื่อนที่

Dynamics Constraints

ขอบเขตทางพลศาสตร์

Dynamic Equation

สมการทางพลศาสตร์

Dynamic Optimization Problem

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์

Dynamic System

ระบบพลศาสตร์

Equation of Motion , $EOM$

สมการการเคลื่อนที่ของระบบ

Equality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ

Extremize

คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

Extremum

ค่าเหมาะสมสูงสุด

Final Time , $t_f$

เวลาสุดท้าย

First Order Condition

เงื่อนไขอันดับหนึ่ง

First Order Forms

รูปแบบของลำดับที่หนึ่ง

Functional , $J[x]$

ฟังก์ชันนอล

Hessian Matrix , $H$

เฮสเซียนแมตริกซ์

Independent Variable

ตัวแปรอิสระ

Indirect Method

วิธีอ้อม

Inequality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ

Initial Condition

เงื่อนไขเริ่มต้น

Initial Time , $t_0$

เวลาเริ่มต้น

Interval , $t_0 \le t \le t_f$

ช่วงเวลา

Initial Guess

ค่าเริ่มต้นค่าแรกที่ได้จากการสุ่มเดา

Jacobian

จาโคเบียน

Jacobian Matrix

จาโคเบียนแมตริกซ์

Jerk , $\dddot{x}$ , $\tilde{u}$

ความกระด้าง

Lagrange Method , $\lambda_l$

วิธีของลากรางจ์

Lagrange Multipliers , $\lambda_i(t)$ , $\mu_r(t)$

ตัวคูณลากรางจ์

Linear Dynamics

พลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

Mass , $M$

มวล

Maximum Trajectories

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าสูงสุด

Minimum Trajectories

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าต่ำสุด

Minimum Direct Jerk , $\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \dddot{x}_i^2 dt$

ความนิ่มนวลที่สุดทางตรง

Minimum Indirect Jerk , $\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i^2 dt$

ความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อม

Minimum Principle

หลักการการหาค่าที่ต่ำที่สุด

Mobile Robot

หุ่นยนต์ชนิดที่เคลื่อนที่ได้

Necessary Condition , $\delta J = 0$

เงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด

Nonlinear Dynamics

พลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Nonlinear Functions , $f_i$

ฟังก์ชันทั่วไปที่ไม่เป็นเชิงเส้นของตัวแปรสถานะและตัวแปรควบคุม

Nonlinear Programming , $\Phi$ , $L$

โปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Nonlinear Systems

ระบบไม่ใช่เชิงเส้น

Numerical Method

วิธีเชิงตัวเลข

Objective

เป้าหมายที่ต้องการ

Objective Function

ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ

Optimality Conditions

สภาวะที่เหมาะสมที่สุด

Optimal Control

การหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม

Optimization

ออฟติไมเซชัน

Optimum

ค่าที่เหมาะสมที่สุด

Optimum Solution

คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

Pick-and-Place

งานที่ต้องหยิบยกชิ้นงาน

Pontriyakin's Principle

หลักการของพอนทริยากิน

Position , $x_1(t)$ , $x_2(t)$

ระยะทาง

Second Variation

ความแปรปรวนที่สอง

State Equation

สมการแสดงสถานะ

Statement of Problem

สเตทเมนท์ออฟพรอบเบิ้ม

State Variable , $x_i$

ตัวแปรสถานะ

Stiffness , $K$

สปริง

Sufficient Condition

สภาวะที่เพียงพอ

Terminal Condition

สภาวะที่ปลายทาง

Time Derivative

อนุพันธ์ของเวลา

Time Variant

ฟังก์ชันของเวลา

Two Degree of Freedom , $2DOF$

การเคลื่อนที่ที่มี2องศาอิสระ

Upper Bounded

ขอบเขตบน

Variations , $\delta$

ความแปรปรวน

Velocity , $\dot{x}_1(t)$ , $\dot{x}_2(t)$

ความเร็ว

Weight Residual , $\psi_i(t)$

ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักอิสระ

# ประวัติย่อผู้วิจัย

# ประวัติย่อผู้วิจัย

| | |
|---|---|
| ชื่อ ชื่อสกุล | นายทรงกิต เหมะ |
| วันเดือนปีเกิด | 19 กันยายน 2521 |
| สถานที่เกิด | กรุงเทพมหานคร |
| สถานที่อยู่ปัจจุบัน | 367/41 ถ.ประชาราษฎร์1 บางซื่อ กทม. 10800 |
| ประวัติการศึกษา | |
| พ.ศ. 2537 | มัธยมศึกษาตอนต้น<br>จากโรงเรียนสุวรรณสุทธารามวิทยา กรุงเทพมหานคร |
| พ.ศ. 2540 | มัธยมศึกษาตอนปลาย<br>จากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัยนนทบุรี จ.นนทบุรี |
| พ.ศ. 2545 | อุดมศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. ไฟฟ้า)<br>จากมหาวิทยาลัยรังสิต |
| พ.ศ. 2551 | บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล)<br>จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |