

ผลของความไม่สมมาตรของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ปริญญานิพนธ์
ของ
สุวัฒน์ รักพาณิชย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

537.623

๘ 8๗6๘

๘.๘

ผลของความไม่สมมาตรของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

บทคัดย่อ

ของ

สุวัฒน์ รักพาณิชย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒเพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2547

สุวัฒน์ รักพาณิชย์. (2547). ผลของความไม่สมมาตรของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์. ปรินซ์นิพนธ์ วท.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทร หิรัญ, รองศาสตราจารย์ ดร.ณสรณ์ ผลโคก.

งานวิจัยนี้จะหาสมการความจุความร้อนที่อุณหภูมิใดๆและสมการของการกระโดดของความร้อน $\frac{\Delta C}{C_N}$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์แบบคลื่นเฮลที่มีความไม่สมมาตรในระนาบภายใต้ขอบเขตการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส โดยพบว่าได้ค่า $\frac{\Delta C}{C_N}$ น้อยกว่าที่ได้จากทฤษฎีบีซีเอส และผลของความไม่สมมาตรในระนาบทำให้ค่าที่ได้มีค่ามากขึ้นหรือน้อยลงกว่าในกรณีที่มีสมมาตรในระนาบทั้งนี้ขึ้นอยู่กับขนาดของพารามิเตอร์ สำหรับผลของ $C(T)$ กราฟที่ได้มีความสอดคล้องกับการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ

EFFECT OF ANISOTROPY ON SPECIFIC HEAT
CAPACITY OF MgB_2 SUPERCONDUCTORS

AN ABSTRACT
BY
SUWAT RAKPANICH

Presented in partial fulfillment of the requirements for the
Master of Science degree in Physics
at Srinakharinwirot University
May 2004

Suwat Rakpanich. (2004). *Effect Of Anisotropy On Specific Heat Capacity Of MgB₂ Superconductors*, M.S. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Dr.Pongkaew Udomsamuthirun, Assoc. Prof. Nason Phonpoke

An analytical result for the normalization , the jump of the heat capacity $\frac{\Delta C}{C_N}$ and equation of heat capacity $C(T)$ has derived for an in-plane anisotropic s-wave superconductors MgB₂ which based on the framework of weak-coupling BCS approach.

Our results show that , within anisotropy gap model , the value of $\frac{\Delta C}{C_N}$ received is less than the value of BCS's theory. The effect from in-plane asymmetry may reduce or increase the value of $\frac{\Delta C}{C_N}$ which depend on the size parameter. For the graph of $C(T)$ corresponds to the experimentation of Wang and Boguet

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

ผลของความไม่สมมาตรของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ของ
นายสุวัฒน์ รักพาณิชย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

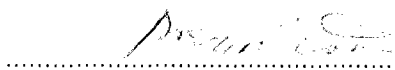
(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาพรณี หะวานนท์)

วันที่.....เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2547

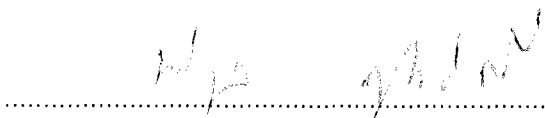
คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.....ประธาน

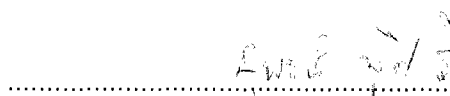
(อาจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริ)

.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณสรณ์ ผลโคก)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นพภูล สุทธิศิริ)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณา คำแนะนำ ความช่วยเหลือ และด้วยความอนุเคราะห์อย่างดีจากคณาจารย์หลายท่านผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอาจารย์พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริ ประธานควบคุมปริญญานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์.ดร.ณสรณ์ ผลโคก กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา และแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ นพปฎล สุทธิศิริ และอาจารย์.ดร.สุพจน์ มุศิริ ในการเป็นกรรมการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ ตลอดจนให้คำแนะนำและแก้ไขปริญญานิพนธ์จนทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณ คุณศรีกมล ดอกเข็มกลาง คุณอดุลย์ บุราคร และเพื่อนๆนิสิตปริญญาโท วิชาเอกฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำงานวิจัยตลอดมา

สุดท้ายนี้ขอโน้มรำลึกถึงพระคุณของ บิดา มารดา และน้องชายทั้งสองที่ให้กำลังใจและช่วยเหลือในการศึกษาแก่ข้าพเจ้าจนสามารถทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สุวัฒน์ รักพาณิชย์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 ประวัติการค้นพบสภาพนำวดยิ่ง	1
ภูมิหลัง	1
สารในสภาพนำวดยิ่ง	2
ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูง	3
ตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์	4
สมบัติของตัวนำวดยิ่ง	6
ช่องว่างพลังงาน	6
สมบัติเชิงความร้อน	6
ตัวนำวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก	9
ตัวนำวดยิ่งแบบ I และแบบ II	11
ปรากฏการณ์ไอโซโทป	12
จุดมุ่งหมายของการวิจัย	13
ความสำคัญของการวิจัย	13
ขอบเขตของการวิจัย	13
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	14
ทฤษฎีบีซีเอส	14
ความจุความร้อนตามทฤษฎีบีซีเอส	16
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องของตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์	19
ช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสกับอุณหภูมิวิกฤต	28
3 วิธีดำเนินการวิจัย	40
สมการทั่วไปของความจุความร้อน	41
ความจุความร้อนในช่วงกระโดดเมื่อมีแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตร	58
4 ผลการวิจัย	66

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ.....	88
อภิปรายผลการวิจัย.....	88
สรุป.....	90
ข้อเสนอแนะ.....	90
ภาคผนวก.....	91
บรรณานุกรม.....	109
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....	111

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของธาตุที่เป็นตัวนำวดยิ่งบางชนิด.....	2
2 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของสารประกอบบางชนิด.....	3
3 สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปในสารตัวนำวดยิ่ง.....	12
4 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	22

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

1	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทาน (R) และอุณหภูมิ (T) สำหรับ สารตัวนำยวดยิ่งในปรอทที่มีสภาพต้านทานเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิ 4.2 K	1
2	แสดงค่าพารามิเตอร์สภาพนำยวดยิ่งของธาตุต่างๆ โดยค่าบนแสดงถึงอุณหภูมิวิกฤต ค่าล่างแสดงถึงสนามแม่เหล็กวิกฤต ธาตุที่เครื่องหมายดอกจัน(*) เป็นสารตัวนำ ยวดยิ่งแบบฟิล์มบางที่ความดันสูงๆ.....	4
3	รูปโครงสร้างผลึก Hexagonal close packed.....	5
4	รูปแสดงช่องว่างพลังงาน	5
5	ความจุความร้อนกับอุณหภูมิในสารตัวนำยวดยิ่ง	7
6	กราฟการนำความร้อนของโลหะผสม (Pb+10%Bi) กับอุณหภูมิ.....	8
7	แสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์	8
8	แสดงกราฟระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ.....	10
9	ตัวนำยวดยิ่งแบบ I และตัวนำยวดยิ่งแบบ II เมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กจนถึงค่าสนามวิ กฤต	10
10	แสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซตามข้อเสนองของฟรอนท์ลีซ และบาร์ดีน	13
11	แสดงช่องว่างพลังงานในตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานไม่ขึ้นกับทิศทาง.....	14
12	แสดงช่องว่างพลังงานในตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทาง	15
13	ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่มีอุณหภูมิจาก 15-300 K ภายใต้สนาม แม่เหล็ก B=0, 10 และ 14 T ซึ่งทับกันเป็นเส้นเดียวกัน	19
14	ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติในสนามแม่เหล็ก B=14 และ 16 T และความจุความร้อนที่สถานะนำยวดยิ่งใน B = 0	19
15	ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติและที่สถานะนำยวดยิ่ง สำหรับ B=0 , 0.5 , 1, 2 และ 3 T ภาพเล็กเป็นไดอะแกรมในระนาบ H-T วัด ความชันของ $(dB_{c2} / dT)_{T_c}$ ได้เป็น 0.56 T / K	20
16	แสดงกราฟระหว่าง $[C(H) - C(9T)] / \gamma(9) \text{ mJ mol}^{-1} \text{K}^{-2}$ กับอุณหภูมิ T(K).....	21
17	แสดงช่องว่างพลังงานสองช่องในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์	23
18	กราฟระหว่างความจุความร้อน $C/\gamma T$ กับอุณหภูมิ T/ T_c	24

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

- 19 กราฟระหว่างความจุความร้อน $C/\gamma_N T$ กับอุณหภูมิ T/T_c เมื่อปราศจาก
สนามแม่เหล็กของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์บริเวณแรกจะเป็น
ช่วงอุณหภูมิต่ำมาก..... 25
- 20 แสดงช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงาน
ขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของฮาสส์และมากิที่เขียนในปริภูมิโมเมนตัม..... 26
- 21 ช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับ
ทิศทางตามแบบจำลองของ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และมากิที่เขียนใน
ปริภูมิโมเมนตัม..... 26
- 22 แสดงช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงาน
ขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของฮาสส์และมากิที่ปรับปรุงใหม่ เขียนในปริ
ภูมิโมเมนตัม โดยมี $\Delta_c \neq \Delta_s \neq \Delta_b$ และ $\Delta_c > \Delta_s$ และ Δ_b 63
- 23 ช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับ
ทิศทางตามแบบจำลองของ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และมากิที่ปรับปรุง
ใหม่เขียนในปริภูมิโมเมนตัม โดยมี $\Delta_c \neq \Delta_s \neq \Delta_b$ และ $\Delta_c > \Delta_s$ และ Δ_b 64
- 24 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C/C_N$ กับพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน a โดยแปรตาม
ค่า δ/a สำหรับแบบจำลองช่องว่างพลังงานตามสมการ (3.48)..... 67
- 25 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C/C_N$ กับพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน a โดยแปรตาม
ค่า δ/a สำหรับแบบจำลองช่องว่างพลังงานตามสมการ (3.49)..... 68
- 26 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความ
ไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส 69
- 27 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตาม
แบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส..... 70
- 28 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตาม
แบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส..... 71
- 29 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความ
ไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ เทียบ
กับทฤษฎีบีซีเอส..... 72

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
30 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตาม แบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และมากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	73
31 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตาม แบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	74
32 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความ ไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบ กับทฤษฎีบีซีเอส.....	75
33 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตาม แบบจำลองของฮาส์และมากิเมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	76
34 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตาม แบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎี บีซีเอส.....	77
35 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของ ความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคมและมากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	78
36 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตาม แบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	79
37 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตาม แบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุง ใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส.....	80
38 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนสำหรับแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ กับ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส.....	81
39 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่างๆสำหรับแบบจํ ลองของ ฮาส์ และมากิ กับ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ และ ทฤษฎีบีซีเอส.....	82

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

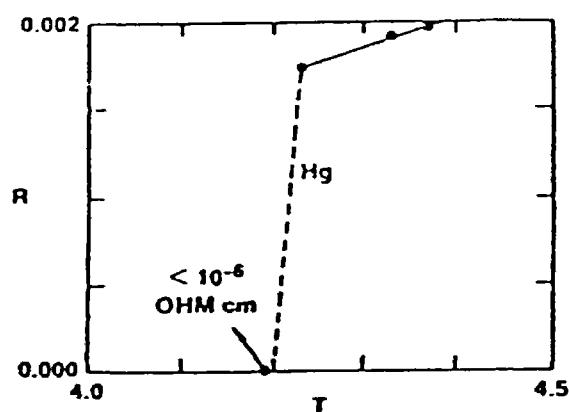
ภาพประกอบ	หน้า
40 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่ T ใกล้ T_c สำหรับแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ กับ พอลิตซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส	83
41 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนระหว่างแบบจำลองตามแบบจำลองของ MO – HM และ MO – PDM และทฤษฎีบีซีเอส	84
42 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่ำๆระหว่างแบบจำลองของ MO – HM และ MO – PDM และทฤษฎีบีซีเอส	85
43 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่ T ใกล้ T_c ระหว่างแบบจำลองของ MO – HM และ MO – PDM และทฤษฎีบีซีเอส	86

บทที่ 1

ประวัติการค้นพบสภาพนำยวดยิ่ง

ภูมิหลัง

สภาพนำยวดยิ่งถูกค้นพบครั้งแรกโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวเนเธอร์แลนด์ ชื่อ แคเมอร์ลิงก์ ออนเนส (Kamerlingh Onnes, 1911 : 1226) ที่เมืองไลเดน (Leiden) ในปี ค.ศ. 1911 ขณะทำการทดลองวัดสภาพนำไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิต่ำๆ โดยนำปรอทบริสุทธิ์ใส่ลงในภาชนะรูปวงแหวนแล้วแช่ลงในฮีเลียมเหลว เมื่ออุณหภูมิของปรอทลดลงถึง 4.2 K ความต้านทานไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ทันที ซึ่งต่างจากโลหะทั่วไปที่มีความต้านทานไฟฟ้าแปรผันตรงตามอุณหภูมิ อุณหภูมิที่ทำให้ความต้านทานไฟฟ้าของวัสดุเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด เรียกว่า อุณหภูมิวิกฤติ (Critical temperature) และเรียกสารที่มีการเปลี่ยนสถานะทางไฟฟ้าแบบนี้ว่า สารตัวนำยวดยิ่ง (Superconductors) ในสภาพนำยวดยิ่ง สารจะมีสมบัติทางแม่เหล็กไฟฟ้า ความจุความร้อนจำเพาะ (Specific heat capacity) เปลี่ยนไป นอกจากนี้ยังพบว่าสภาพนำยวดยิ่งของโลหะถูกทำลายได้ด้วยกระแสไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็กค่าสูงๆ ที่มีค่าแน่นอนค่าหนึ่งจะเรียกกระแสไฟฟ้าสูงที่สุดที่ทำให้สภาพนำยวดยิ่งเปลี่ยนไปเป็นสภาพปกติว่า กระแสวิกฤติ (Critical current) และเรียกสนามแม่เหล็กวิกฤติสูงที่สุดที่ทำให้สภาพนำยวดยิ่งเปลี่ยนไปเป็นสภาพปกติว่าสนามแม่เหล็กวิกฤติ (Critical magnetic field) การทำลายสภาพนำยวดยิ่งด้วยกระแสไฟฟ้าเรียกว่า ปรากฏการณ์ซิลบี (Silsbee effect)



ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทาน (R) และอุณหภูมิ (T) สำหรับ สารตัวนำยวดยิ่งในปรอทที่มีสภาพต้านทานเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิ 4.2 K

ที่มา: Ketterson, & Song. (1990). *Superconductivity*. p. 1.

สารในสภาพนำยวดยิ่ง

อุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งไม่ได้ขึ้นกับองค์ประกอบทางเคมีของสารแต่เพียงอย่างเดียวแต่ยังขึ้นอยู่กับลักษณะของโครงสร้างอีกด้วย มีสารหลายชนิดที่เป็นสารชนิดเดียวกันแต่มีโครงสร้างต่างกันเป็นสารตัวนำยวดยิ่งเช่น ดีบุกเทา (Gray tin) เป็นสารกึ่งตัวนำ ส่วนดีบุกขาว (White tin) เป็นโลหะที่เป็นตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤต 37.2 K แลนทานัมแบบ α -La มีอุณหภูมิวิกฤต 4.9 K ส่วน β -La มีอุณหภูมิวิกฤต 6.06 K เป็นต้น เบอริลเลียมจะเป็นตัวนำยวดยิ่งเมื่อมีลักษณะเป็นฟิล์มบางเท่านั้นและธาตุบางชนิดจะกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ภายใต้ความกดดันสูง เช่นแบเลียมจะเป็นตัวนำยวดยิ่งที่ 150×10^3 บรรยากาศ โดยมีอุณหภูมิวิกฤต 5 K

ตาราง 1 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของธาตุที่เป็นตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

ธาตุ	อุณหภูมิวิกฤต (K)
Al	1.196
Cd	0.56
Ga	1.091
Hf	0.09
α -Hg	4.15
β -Hg	3.95
In	3.40
Ir	0.14
α -La	4.9
β -La	6.06
Nb	9.26
W	0.012

ที่มา: ดำรงค์ยศ มณีพงษ์สวัสดิ์. (2538). ฟิสิกส์ของแข็ง 2. หน้า. 136.

เนื่องจากสารที่อยู่ในสภาพนำยวดยิ่งมีการนำไฟฟ้าที่ดีมาก อาจคาดได้ว่าโลหะตัวนำที่ดี เช่น เงิน ทองแดง ทอง ซึ่งมีความต้านทานไฟฟ้าต่ำที่อุณหภูมิปกติน่าจะเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ โดยมีอุณหภูมิ

วิกฤตสูง แต่ตามความเป็นจริงแล้วโลหะเหล่านั้นไม่ได้เป็นอย่างที่คาดไว้ สารที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูง มักจะเป็นพวกโลหะผสมและสารประกอบ เช่น Nb_3Sn มีอุณหภูมิวิกฤตเป็น 18.1 K Nb_3Ge เป็น ตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤต 22.3 K

ตาราง 2 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของสารประกอบบางชนิด

สารประกอบ	อุณหภูมิวิกฤต , K	สารประกอบ	อุณหภูมิวิกฤต , K
Nb_3Sn	18.05	$\text{Pb}_{0.7}\text{Bi}_{0.3}$	8.45
Nb_3Ge	22.3	V_3Si	17.1
NbN	16	SN_x	0.26
NbO	1.2	$(\text{BEDT})_2\text{Cu}(\text{NCS})_2$	10
$\text{BaPb}_{0.7}\text{B}_{0.25}\text{O}_3$	11	$\text{La}_{1.8}\text{Sr}_{0.2}\text{CuO}_4$	38
Ube_{13}	0.75	$\text{Bi}_2\text{CaSr}_2\text{Cu}_2\text{O}_{8-x}$	90

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. P.338.

ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูง (High temperature superconductors)

ก่อนปี ค. ศ.1986 อุณหภูมิวิกฤตในการเกิดสภาพนำยวดยิ่งที่สูงที่สุดพบใน Nb_3Ge โดยมี อุณหภูมิวิกฤต 22.3 K แต่จากการค้นพบของเบ็คเนอร์ชและมุลเลอร์ (Bednorg, & Muller. 1986 :189) ในปี 1986 พบว่าสาร La-Ba-Cu-O เป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤต 40 K

การค้นพบของ เบ็คเนอร์ชและมุลเลอร์ ได้กระตุ้นนักวิทยาศาสตร์ทั่วโลกให้มีการค้นคว้าหาสาร ตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นกว่านี้อีก ในปี 1987 ชู , วู และคณะ (Chu, Wu, & et al. 1987: 908) ประกาศว่าสารประกอบ Y-Ba-Cu-O สามารถเป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิสูงกว่าจุดเดือดของ ไนโตรเจนเหลว คือมีอุณหภูมิวิกฤต 90 K จากนั้น เฮร์แมนและเซ็ง (Hermann, & Sheng. 1988 : 55) พบว่าสารประกอบ Ti-Ca-Ba-Cu-O เป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤต 125 K

ในปัจจุบันอุณหภูมิวิกฤตที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งทำได้สูงถึง 164 K สำหรับสารประกอบ $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_2\text{O}_3$ ที่ความดันสูงในปี ค.ศ 1999 นอกจากนี้ยังมีสารประกอบพวกอัทเทรียมแบเรียมคิวเปรท $\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{9-x}$ มีอุณหภูมิวิกฤตที่ 91 K จนถึงอุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดที่ 0.01 K สำหรับสารกึ่งตัวนำ โลหะบางตัวไม่สามารถเกิดสภาพนำยวดยิ่งได้ถึงแม้จะลดอุณหภูมิต่ำกว่า 1 K เช่น ลิเทียม ซีเดียม

และไปแช่แข็ง โดยลดอุณหภูมิต่ำกว่า 0.08 K, 0.09 K และ 0.08 K ตามลำดับ โลหะทั้งสามยังคงเป็นสารตัวนำธรรมดา ในทำนองเดียวกันทองแดง เงินและทองคำที่เป็นตัวนำที่ดีในอุณหภูมิปกติเมื่อได้ทำการลดอุณหภูมิจนต่ำกว่า 0.05 K, 0.35 K และ 0.05 K ธาตุทั้งสามยังคงเป็นตัวนำธรรมดา จากการคำนวณทางทฤษฎีทำนายได้ว่าธาตุโซเดียมจะกลายเป็นสารตัวนำยิ่งยวดตลอดทั้งก้อนจะต้องมีอุณหภูมิต่ำกว่า 10^{-5} K

Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	Transition temperature in K Critical magnetic field at absolute zero in gauss (10^{-4} tesla)										Al	Si*	P*	S	Cl	Ar
1.140 109																	
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr*	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge*	As*	Se*	Br	Kr
			0.39 100	5.38 1420							0.875 53	1.091 51					
Rb	Sr	Y*	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn (w)	Sb*	Te*	I	Xe
			0.546 47	9.50 1980	0.92 95	7.77 1410	0.51 70				0.56 30	3.4035 293	3.722 309				
Cs*	Ba*	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg (w)	Tl	Pb	Bi*	Po	At	Rn
		6.00 1100	0.12	4.483 830	0.012 1.07	1.4 198	0.655 65	0.14 19				4.153 412	2.39 171	7.193 803			
Fr	Ra	Ac															
			Ce*	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	0.1
			Th	Pa	U*(w)	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	
			1.368 1.62	1.4													

ภาพประกอบ 2 แสดงค่าพารามิเตอร์สภาพนำยิ่งยวดของธาตุต่างๆ โดยค่าบนแสดงถึงอุณหภูมิวิกฤต ค่าล่างแสดงถึงสนามแม่เหล็กวิกฤต ธาตุที่เครื่องหมายดอกจัน(*)เป็นสารตัวนำยิ่งยวดแบบฟิล์มบางที่ความดันสูงๆ

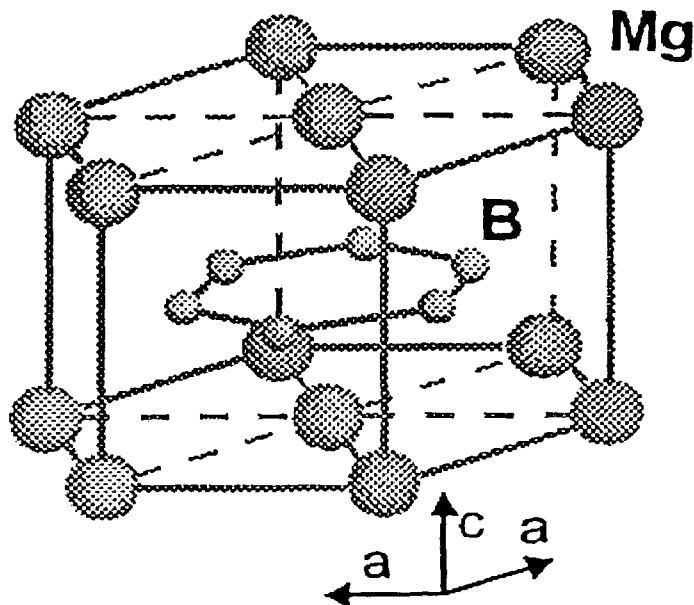
ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. P.320.

จากการสังเกตพบว่าธาตุที่มีโมเมนต์แม่เหล็กของอะตอม (Atomic magnetic moment) ซึ่งเป็นพวกที่มีอิเล็กตรอนสปีนไม่จับคู่ จะไม่เป็นสารตัวนำยิ่งยวด ส่วนพวกที่เป็นตัวนำที่ดีในอุณหภูมิปกติจะทำได้ไม่ดี แต่ถ้าจะทำให้เกิดสภาพนำยิ่งยวดต้องมีอุณหภูมิวิกฤตต่ำมากๆ สำหรับสารประกอบระหว่างโลหะจะทำให้เป็นสารตัวนำยิ่งยวดได้ง่ายกว่าพวกธาตุบริสุทธิ์

ตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB₂ Superconductors)

แมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นวัสดุที่รู้จักกันมานานตั้งแต่ก่อนปี ค.ศ.1950 แต่ในเดือนมกราคมปี ค.ศ.2001 อะคิมิชิและนาแกมัตสึ (Akimisu, & Nagamatsu. 2001 : 63) ได้ค้นพบว่าแมกนีเซียมไดโบ

ไบรต์สามารถเป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤต 40 K โดยมีโครงสร้างแบบเฮกซะโกนอลไครส แพค (hexagonal close packed)



ภาพประกอบ 3 รูปโครงสร้างแบบ Hexagonal close packed

ที่มา: Buzea & Yamashita. (2001). *Superconductors, Science & Technology*. P. 2.

การค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์ ก่อให้เกิดความสนใจในตัวนำยวดยิ่งที่ปราศจากออกไซด์ ทำให้มีการค้นพบตัวนำยวดยิ่งหลากหลายชนิดที่มีโบรอนเป็นส่วนประกอบ เช่น TaB₂ มีอุณหภูมิวิกฤต 9.5 K, BeB_{2.75} มีอุณหภูมิวิกฤต 0.7 K, MgCni₃ มีอุณหภูมิวิกฤต 8 K

มีคำถามว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีอะไรพิเศษถึงต้องนำมาศึกษาวิจัย คำตอบคือแมกนีเซียมไดโบไรด์ประกอบด้วยธาตุที่เป็นโลหะเพียงสองชนิด มีอุณหภูมิวิกฤตสูง โครงสร้างหลักไม่ซับซ้อน ความยาวอาพันธ์ (Coherence length) กว้างและความหนาแน่นของกระแสวิกฤตสูง

$$C_v = \gamma T + AT^3 \quad (1.1)$$

โดยเทอม γT เกิดจากความไม่สมบูรณ์ของผลึก

AT^3 เกิดจากผลึกมีโฟนอน (Phonon) หรือการสั่นของแลตทิซ (Lattice vibration)

C_V เป็นความจุความร้อน

สำหรับตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ให้ค่า $C_V = 0$ และจะมีค่าสูงกว่ำนี้ในสถานะปกติ เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากศูนย์องศาสัมบูรณ์จนถึงอุณหภูมิวิกฤตความจุความร้อนจะมีค่าลดลงทันทีจนเท่ากับในสถานะปกติ แสดงว่าที่อุณหภูมิวิกฤต เมื่อเพิ่มอุณหภูมิแก่ตัวนำยิ่งยวด ตัวนำนั้นสามารถรับอุณหภูมิได้โดยไม่กระตุ้นให้อิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะแต่จะรับอุณหภูมิได้จนถึงอุณหภูมิค่าหนึ่ง คืออุณหภูมิวิกฤต ถ้าเกินกว่าอุณหภูมินี้ อิเล็กตรอนจะถูกกระตุ้นจนเปลี่ยนสถานะกลายเป็นสถานะปกติ แสดงว่าในสถานะนำยิ่งยวดมีแถบช่องว่างพลังงานอยู่ต้องให้พลังงานเข้าไปพอดีเท่ากับแถบช่องว่างพลังงานนี้จึงสามารถกระตุ้นอิเล็กตรอนได้

สำหรับกรณีตัวนำยิ่งยวดตามทฤษฎีบีซีเอสมีความจุความร้อนเป็น

$$C_{es} = e^{-(\Delta/k_B T)} \quad (1.2)$$

หรืออาจเขียนได้ว่า

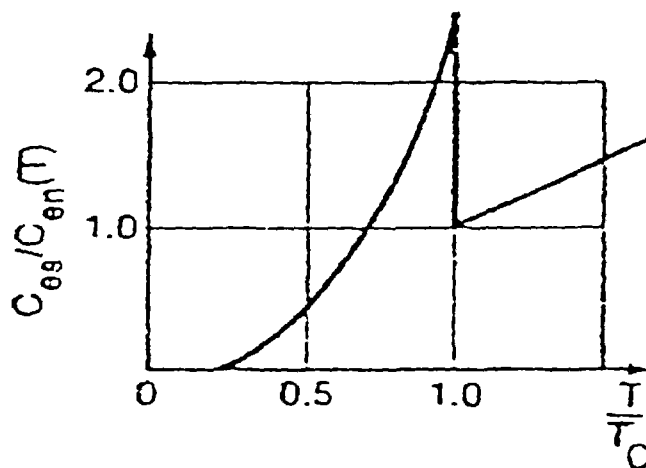
$$\frac{C_{es}}{\alpha T_c} = a e^{-b(T_c/T)} \quad (1.3)$$

a, b, α เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

C_{es} คือความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภานำยิ่งยวด

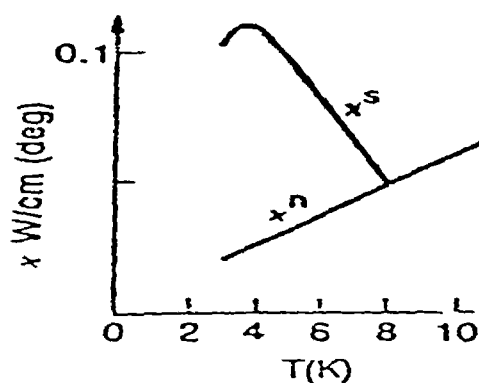
สมการนี้หมายความว่าเมื่ออุณหภูมิในสภานำยิ่งยวดลดลงความจุความร้อนจะเข้าใกล้ศูนย์โดยลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

จากภาพประกอบ 5 เมื่อตัวนำยิ่งยวดกลับสู่สภาพปกติความจุความร้อนของอิเล็กตรอนจะแปรผันตรงกับอุณหภูมิแต่ที่ช่วงอุณหภูมิวิกฤต การเปลี่ยนแปลงสภาพความร้อนจะไม่ต่อเนื่องเรียกบริเวณนี้ว่า เกิดการไม่ต่อเนื่องของความจุความร้อน (Specific heat jump)



ภาพประกอบ 5 ความจุความร้อนกับอุณหภูมิในสารตัวนำยิ่งยวด โดย C_{es} เป็นความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภานำยิ่งยวด C_{en} เป็นความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภาพปกติ
ที่มา: สุพจน์ มุศิริ. (2535). พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกอบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด. หน้า. 8.

ทางด้านการนำความร้อนได้มีการทดลองพบว่า สภาพการนำความร้อนของโลหะผสมลดลงตามอุณหภูมิแต่หลังจากได้มีการเปลี่ยนสภาพไปเป็นตัวนำยิ่งยวดแล้วค่าการนำความร้อนมีค่าสูงมากจนถึงค่าสูงสุดจากนั้นก็เริ่มลดลงอีกดังภาพประกอบ 6

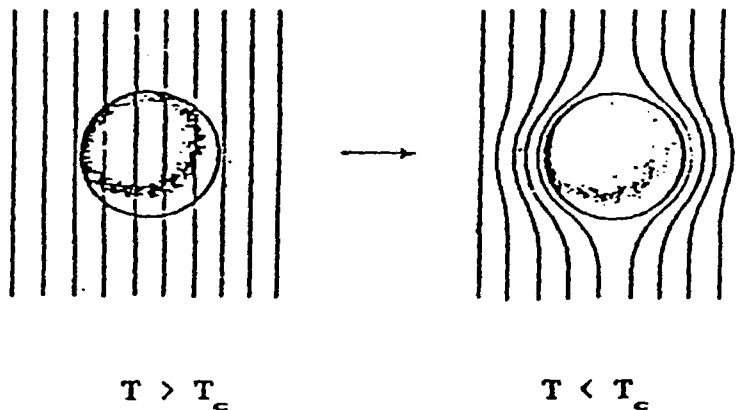


ภาพประกอบ 6 กราฟการนำความร้อนของโลหะผสม (Pb+10%Bi) กับอุณหภูมิโดย x' คือ ค่าการนำความร้อนของโลหะผสมในสภานำยิ่งยวดและ x'' คือ ค่าการนำความร้อนในสภาพตัวนำปกติ

ที่มา: สุพจน์ มุศิริ.(2535). พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกอบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด. หน้า. 9.

ตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก

ในปีค.ศ.1933 ไมสเนอร์และออกเซนเฟลด์ (Meissner, & Ochsenfeld.1958: 606) ได้พบสมบัติที่สำคัญของตัวนำยิ่งยวดคือ สนามแม่เหล็กไม่สามารถผ่านเข้าไปในสารที่เป็นตัวนำยิ่งยวดได้ เมื่อมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตแต่ที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กสามารถผ่านเข้าไปในเนื้อสารได้เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect)



ภาพประกอบ 7 แสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. P. 344.

วัตถุทั่วไปเมื่อใส่สนามแม่เหล็กเข้าไปจะเหนี่ยวนำให้เกิดแมกนีไทเซชัน (Magnetization) ขึ้น ดังนั้นสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำภายในของตัวนำยิ่งยวดจึงตามปรากฏการณ์ไมสเนอร์เป็น

$$\vec{B} = \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = 0 \quad (1.4)$$

หรือ

$$\frac{\vec{M}}{\vec{H}_a} = -\frac{1}{\mu_0} \quad (1.5)$$

เมื่อ $\vec{M}$ คือแมกนีไทเซชัน ซึ่งเป็นจำนวนโมเมนต์แม่เหล็กต่อหน่วยปริมาตร

$\vec{H}_a$ คือสนามแม่เหล็กภายนอก

μ_0 คือค่าซาบซึมแม่เหล็กสมบูรณ์ (Absolute magnetic permeability)

พิจารณาปริมาณหนึ่งคือสภาพรับไว้ได้ทางแม่เหล็ก (Magnetic susceptibility) มีค่าเป็น

$$\chi = \frac{\vec{M}}{\vec{H}_a} \quad (1.6)$$

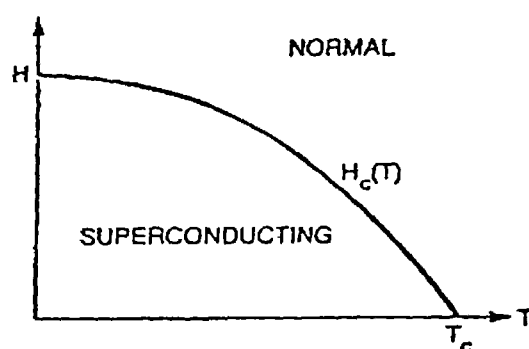
จะเห็นว่าจากสมการ (1.5)

$$\chi = -\frac{1}{\mu_0} \quad (1.7)$$

สำหรับสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งที่ χ มีเครื่องหมายเป็นลบแสดงว่าแมกนีไทเซชันมีทิศตรงข้ามกับสนามภายนอก ดังนั้นสภาพนำยิ่งยวดจึงมีสมบัติเป็นไดอะแมกเนติก (Diamagnetism) ที่สมบูรณ์จากสมการ (1.6) จะเห็นว่าแมกนีไทเซชันภายในแปรตามสนามแม่เหล็กภายนอก

สภาพไดอะแมกเนติกที่สมบูรณ์ในตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นเมื่อเอาสารตัวนำยิ่งยวดวางในสนามแม่เหล็กจะมีกระแสเล็กตรอนไหลอยู่ที่ผิวชั้นนอกของตัวนำและก่อให้เกิดสนามแม่เหล็กในลักษณะที่ไปต่อต้านสนามภายนอกที่เข้าไปกระทำ ด้วยเหตุนี้สนามแม่เหล็กภายนอกจึงไม่สามารถผ่านเข้าไปในสารที่อยู่ในสภาพนำยิ่งยวดได้ แต่ก็ยังมีสนามแม่เหล็กภายนอกผ่านเข้าไปในผิวของตัวนำยิ่งยวดได้บ้าง ความลึกเนื่องจากสนามภายนอกทะลุเข้าไปในตัวนำยิ่งยวดเรียกว่า ความลึกในการเจาะทะลุทะลวงของสนาม (Field penetration depth, λ) สนามแม่เหล็กนี้จะลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลตามความลึกที่ทะลุเข้าไป

ถ้าเพิ่มความเข้มสนามแม่เหล็กจนถึงค่าหนึ่ง คือ H_c เรียกว่าสนามวิกฤต (Critical Field) แล้วสภาพนำยิ่งยวดจะถูกทำลาย ค่าสนามวิกฤตนี้ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิด้วย คือเมื่ออุณหภูมิมียุคค่าเข้าใกล้ อุณหภูมิวิกฤตเท่าใดความเข้มสนามวิกฤตก็จะมีค่าน้อยลงเท่านั้น ดังภาพประกอบ 8

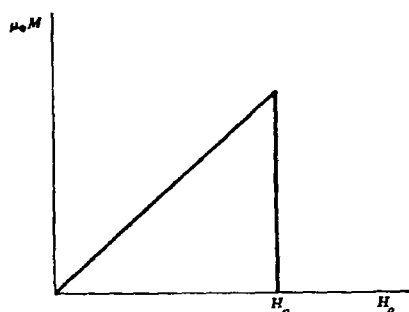


ภาพประกอบ 8 แสดงกราฟระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ

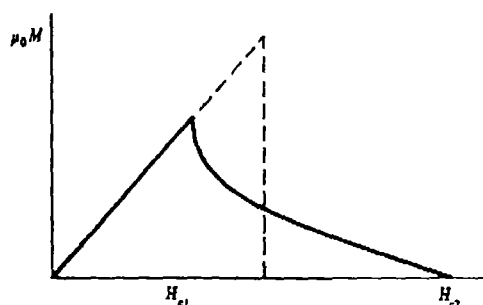
ที่มา: Kresin, & Wolf. (1990). *Fundamentals Superconductivity*. p. 10.

ตัวนำยวดยิ่งแบบ I และแบบ II

จากการทดลองของไมส์เนอร์ และโอเซนเฟลด์ แสดงดังภาพประกอบ 9 เขาพบว่าตัวนำยวดยิ่งหลายชนิดเมื่อนำมาวางในสนามแม่เหล็กจะแสดงลักษณะตามกราฟทั้งสองนี้อย่างใดอย่างหนึ่ง



ก)



ข)

ภาพประกอบ 9 ก) ตัวนำยวดยิ่งแบบ I เมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กจนถึงค่าสนามวิกฤตตัวนำยวดยิ่งแบบจะเปลี่ยนไปเป็นวัสดุธรรมดาในสถานะปกติ ข) ตัวนำยวดยิ่งแบบ II ที่ค่าสนามระหว่าง H_{c1} กับ H_{c2} ตัวนำยวดยิ่งจะอยู่ในสถานะ vortex ถ้ามีฟลักซ์แม่เหล็กเริ่มแทรกเข้าไปในเนื้อสาร H_{c1} ที่ช่วงนี้ตัวนำยังคงเป็นตัวนำยวดยิ่งจนถึงค่า H_{c2} ถ้าเพิ่มสนามมากไปกว่านี้ตัวนำยวดยิ่งจะกลับสู่สภาพปกติ

ที่มา: Taylor, & Francis. (1996). *Solid State Physics*. P. 427-428.

ตัวนำยวดยิ่งแบบ I ค่าของ H_c มีค่าน้อยมาก ตัวนำยวดยิ่งแบบ II ส่วนใหญ่เป็นโลหะผสมหรืออโลหะทรานซิชันที่มีสภาพต้านทานไฟฟ้าในสถานะปกติสูงโดยค่าของสนาม H_{c2} มีค่าค่อนข้างสูงในระหว่างค่าสนามวิกฤต H_{c1} กับ H_{c2} สนามแม่เหล็กไม่เท่ากับศูนย์ แสดงว่าปรากฏการณ์ไมส์เนอร์เป็นไปในลักษณะที่ไม่สมบูรณ์คือมีเส้นแรงแฟลักซ์พุ่งผ่านเข้าไปในเนื้อของตัวนำยวดยิ่งได้เรียกได้ว่าการเกิดนี้ว่า สถานะ vortex

ตัวนำยวดยิ่งแบบ I ที่ดีจะขจัดสนามออกไปจากเนื้ออย่างสมบูรณ์จนกว่าสภาพนำยวดยิ่งจะถูกทำลาย ส่วนตัวนำยวดยิ่งแบบ II ที่ดีจะขจัดสนามออกจากเนื้ออย่างสมบูรณ์เมื่อสนามมีค่าน้อยกว่า H_{c1} แต่ถ้าเพิ่มสนามเข้าไปมากกว่า H_{c1} ตัวนำยวดยิ่งจะขจัดสนามออกไปได้บางส่วนเท่านั้นแต่ยังคงสภาพนำยวดยิ่งต่อไปและเมื่อสนามมีค่ามากกว่า H_{c2} สภาพนำยวดยิ่งจะถูกทำลาย

ปรากฏการณ์ไอโซโทป

ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect) คือปรากฏการณ์ที่อุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งแปรตามมวลไอโซโทป เช่น ในปรอทอุณหภูมิวิกฤตมีการเปลี่ยนแปลงจาก 4.185 K ไปเป็น 4.146 K ขณะที่มวลอะตอมเฉลี่ย M เปลี่ยนแปลงจาก 199.5 ไปเป็น 203.4 หน่วยมวลอะตอม (Atomic mass unit) จากผลการทดลองภายในแต่ละอนุกรมของไอโซโทปได้ความสัมพันธ์เป็น

$$M^\alpha T_c = \text{ค่าคงตัว} \quad (1.8)$$

โดย M คือมวลของไอโซโทปสำหรับธาตุชนิดเดียวกัน

α คือสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป

ค่าของ α ในธาตุต่าง ๆ กำหนดไว้ในตารางที่ 3 จากการที่มวลของไอโซโทปขึ้นกับอุณหภูมิวิกฤต ทำให้ทราบว่าการสั่นของแลตทิซและอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซมีอิทธิพลต่อในสภาพนำยวดยิ่งเช่นในทฤษฎีบีซีเอสให้ผลลัพธ์ของ $T_c \propto \theta_{\text{Debye}}$ และ $\theta \propto M^{-1/2}$ ดังนั้น $\alpha = \frac{1}{2}$ แต่ในวัสดุจริง ๆ มีอันตรกิริยาคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนรวมอยู่ด้วยทำให้ α ต่ำกว่าที่ทำนายไว้ในทฤษฎี

ตาราง 3 สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปในสารตัวนำยวดยิ่ง

ธาตุ	α	ธาตุ	α
Zn	0.45 ± 0.05	Ru	0.00 ± 0.05
Cd	0.32 ± 0.07	Os	0.15 ± 0.05
Sn	0.47 ± 0.02	Mo	0.33
Hg	0.50 ± 0.03	Nb ₃ Sn	0.08 ± 0.02
Pb	0.49 ± 0.02	Zr	0.00 ± 0.05

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. P. 347.

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาความจุความร้อนที่ไม่ปกติโดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานที่ไม่สมมาตร สำหรับ
อันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอสของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่ออธิบายความจุความร้อนที่ไม่ปกติของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์
2. เพื่อนำผลงานวิจัยที่ได้นี้เปรียบเทียบกับผลการทดลอง และงานวิจัยทางทฤษฎีอื่นๆที่มีอยู่

ขอบเขตของการวิจัย

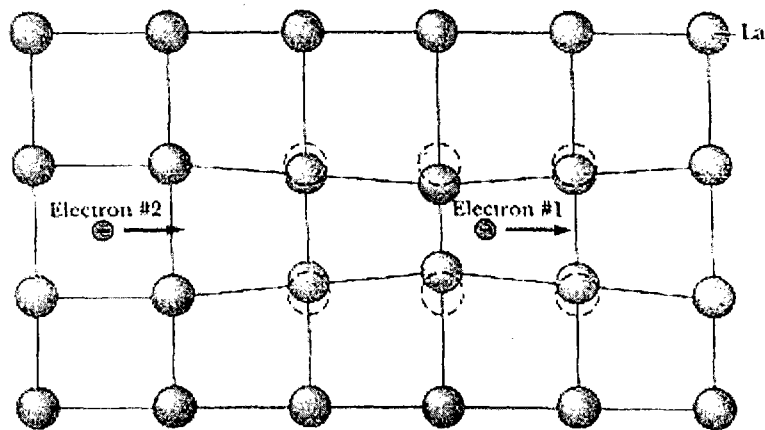
1. หาสมการของความจุความร้อนที่อุณหภูมิใดๆ และการกระโดดของความจุความร้อนโดยใช้
แบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรสองแบบจำลอง สำหรับอันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อน
ตามทฤษฎีบีซีเอส
2. ใช้การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีการทำซ้ำแบบนิวตันสำหรับสมการความจุความร้อนและ
สมการการกระโดดของความจุความร้อน ทั้งสองแบบจำลองแล้วเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ
แมกนีเซียมไดโบไรด์

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบีซีเอส

ในปี ค.ศ.1950 ฟร็อห์ลิช (Fröhlich) และบาร์ดีน (Bardeen) ได้อธิบายว่าสารตัวนำที่ไม่ดีสามารถทำเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ดี ส่วนพวกตัวนำที่ดีกลับเอามาทำเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ไม่ดีนักเพราะที่อุณหภูมิปกติจะมีอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนกันน้อยส่วนพวกตัวนำที่ไม่ดีจะมีอันตรกิริยากันมาก สภาพนำยวดยิ่งเกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนกับโฟนอนและจะเหนี่ยวนำให้อิเล็กตรอนอีกตัวเข้ามาทำอันตรกิริยาด้วยซึ่งดูเหมือนกับว่าอิเล็กตรอนทั้งสองทำอันตรกิริยาต่อกันโดยเป็นอันตรกิริยาทางอ้อมผ่านแลตทิซคือเมื่อแลตทิซสั่น ไอออนบวกของ แลตทิซจะดึงดูดอิเล็กตรอนรอบๆ ให้เข้ามาใกล้กันเสมือนกับว่าอิเล็กตรอนทั้งสองวิ่งเข้าหากัน แต่มีผู้โต้แย้งว่าที่อุณหภูมิต่ำๆ โฟตอนมีค่าน้อยไม่เพียงพอต่อการเกิดอันตรกิริยา

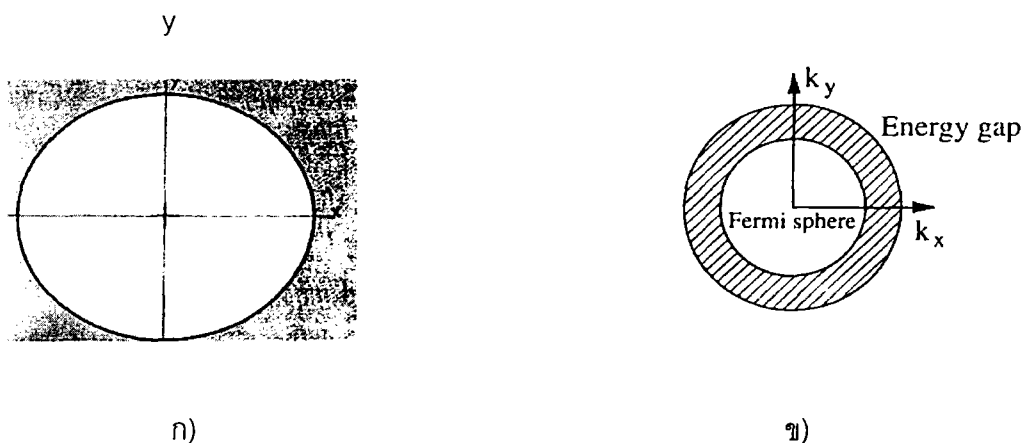


ภาพประกอบ 10 แสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิซตามข้อเสนอของฟร็อห์ลิชและบาร์ดีน
ที่มา: Tsuei, & Kertley. (1996). Scientific American. 50. p. 6.

ต่อมาในปี ค.ศ.1956 คูเปอร์ (Cooper) ได้เสนอว่าถ้าอิเล็กตรอนสองตัวที่ทำอันตรกิริยากับโฟนอนมีสปินในทิศตรงข้ามกันที่บริเวณผิวเฟอร์มิ อันตรกิริยาอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอน จะมีค่าเสถียร เรียกอิเล็กตรอนคู่นี้ว่าคูคูเปอร์ (Cooper pair) ดังนั้นจากแนวคิดนี้นำมาสู่การอธิบายสภาพนำยวดยิ่งที่ถูกเสนอโดย บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชิฟเฟอร์ (Schrieffer) ในปี 1987 ซึ่งต่อมาเรียกทฤษฎีบีซีเอส

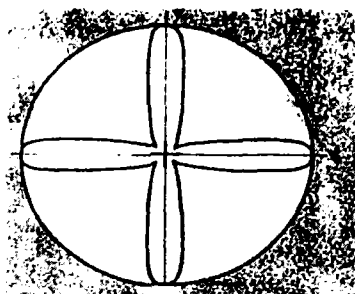
อิเล็กตรอนในสารตัวนำยวดยิ่งจะเกิดอันตรกิริยากันเป็นคู่เรียกว่าคูคูเปอร์ อันตรกิริยานี้เป็นแบบ อิเล็กตรอน-แลตทิซ-อิเล็กตรอน ถ้าอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์มีเวกเตอร์คลื่น (Wave vector) ตรงข้ามกันและสปินตรงข้ามกัน พลังงานของอิเล็กตรอนที่อยู่แถบบริเวณเฟอร์มีจะมีอันตรกิริยาแบบเสถียรภาพ อิเล็กตรอนที่แถบบริเวณเฟอร์มีมีสปินในทิศตรงข้ามกันพลังงานของอิเล็กตรอนจะลดลง ทำให้สถานะพื้นและสถานะกระตุ้นห่างกันเกิดเป็นแถบช่องว่างขึ้น สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอสอิเล็กตรอนที่เป็นคูคูเปอร์กันจะมีโมเมนตัมเชิงมุม ($l = 0$) เป็นศูนย์ เรียกตัวนำยวดยิ่งนี้ว่าตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส (s-wave) โดยมีช่องว่างพลังงานที่มีผิวเฟอร์มีได้สองลักษณะคือช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง (Isotropic s-wave) และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง (Anisotropy s-wave)

ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานไม่ขึ้นกับทิศทางค่าของช่องว่างพลังงานจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทุกทาง ดังภาพประกอบ 11

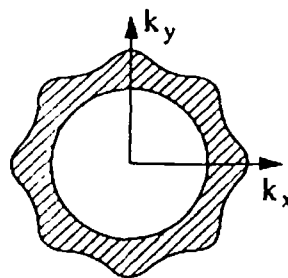


ภาพประกอบ 11 รูปแสดงช่องว่างพลังงานในตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานไม่ขึ้นกับทิศทาง ก) เขียนในปริภูมิจริง (Real space) ข) เขียนในปริภูมิโมเมนตัม (Momentum space) ที่มา: ดวงมณี ลอออรรถพงศ์. (2540). อุณหภูมิกวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่แถบพลังงานมีค่าจำกัดเมื่อมีสิ่งเจือปนประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก. หน้า. 19.

ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางค่าของช่องว่างพลังงานเป็นบวกในบางตำแหน่งและเกือบเป็นศูนย์ในบางตำแหน่ง ดังนั้นค่าของช่องว่างพลังงานจึงไม่คงที่โดยมีค่าขึ้นกับทิศทาง ดังภาพประกอบ 12



ก)



ข)

ภาพประกอบ 12 รูปแสดงช่องว่างพลังงานในตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับ

ทิศทาง ก) เขียนในปริภูมิจริง (Real space) ข) เขียนในปริภูมิโมเมนตัม (Momentum space) ที่มา: ดวงมณี ลอฮอร์รทพงศ์. (2540). อุณหภูมิกวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่แถบพลังงานมีค่าจำกัดเมื่อมีสิ่งเจือปนประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก. หน้า. 19.

ความจุความร้อนตามทฤษฎีบีซีเอส

ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงกราฟความจุความร้อนที่ต่ำกว่าและสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาแล้ว พิจารณابริเวณที่ความจุความร้อนกระโดด (jump) ดังภาพประกอบ 5 ในบทที่ 1 ในช่วงที่ความจุความร้อนกำลังจะเปลี่ยนไปเป็นสภาวะนำยวดยิ่งอิเล็กตรอนมีแนวโน้มเป็นไปตามทฤษฎีของเดอบาย (Debye theorem)

การคำนวณความจุความร้อนของอนุภาคที่มีประจุในช่วงกระโดดตามทฤษฎีบีซีเอส เริ่มจาก สมการเอนโทรปี $S(T)$ ของระบบอนุภาคเสมือนเฟอร์มิออน (Walecka, 1969 : 49)

$$S(T) = -2k_B \sum_k [f_k \ln f_k + (1-f_k) \ln (1-f_k)] \quad (2.1)$$

โดยที่ตัวเลข 2 ในสมการ (2.1) เกิดจากการคิดทิศทางสปินทั้งสองทิศคือขึ้นกับลง f_k คือฟังก์ชันการกระจายของเฟอร์มิ-ดิแรก (Fermi-Dirac) มีสมการเป็น

$$f_k = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} + 1} \quad (2.2)$$

โดย $\beta = \frac{1}{T}$ และ

$$\epsilon_k = \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} \quad (2.3)$$

ϵ_k เป็นพลังงานของคูคูเปอร์

E_k เป็นพลังงานของอิเล็กตรอน

จากสมการความจุความร้อน

$$C(T) = \frac{TdS(T)}{dT} \quad (2.4)$$

ใช้กฎลูกโซ่กับ $\frac{dS(T)}{dT}$ และรวมไปทุกค่าในปริภูมิ k สมการ (2.4) เป็น

$$\frac{dS(T)}{dT} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial T}$$

พิจารณาเทอม $\frac{\partial S}{\partial f_k}$,

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = -2k_B \ln \frac{f_k}{1-f_k}$$

$$= \frac{2}{T} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}$$

และเทอม $\frac{\partial f_k}{\partial T}$,

$$\frac{\partial f_k}{\partial T} = \frac{1}{T^2} \frac{\exp(\epsilon_k/T)}{[\exp(\epsilon_k/T)+1]} \left[\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} - T \frac{d}{dT} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} \right]$$

นำสมการข้างบนไปแทนในสมการ (2.4) จะได้ค่าความจุความร้อนเป็น

$$C(T) = \frac{2}{T^2} \sum_k \frac{\exp(\epsilon_k/T)}{[\exp(\epsilon_k/T)+1]^2} \left[E_k^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2} \frac{d}{dT} \Delta^2(T) \right]$$

ซึ่งเป็นสมการความจุความร้อนของอนุภาคในสภาพนำยวดยิ่ง โดยรวมทุกค่าในปริภูมิ k และสามารถแทนได้ด้วยเทอมอินทิกรัลที่แปรตามพลังงาน E_k แล้วคูณด้วยความหนาแน่นสถานะที่ผิวของเฟอร์มิ $N_0(E_F)$ โดยให้ $N_0(E_F) = N_0$ ซึ่ง N_0 เป็นความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวในระดับชั้นพลังงานเล็กๆ

ที่ผิวเฟอร์มิและขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็นค่าจำกัดคือเท่ากับพลังงานคัตออฟ (cut-off) ของเดอบาย ω_D ดังนั้นเขียนสมการข้างบนได้ใหม่เป็น

$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\exp\left(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}/T\right)}{\left[\exp\left(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}/T\right) + 1\right]} \left[E^2 + \Delta^2(T) - \frac{T}{2} \frac{d}{dT} \Delta^2(T) \right] dE_k \quad (2.5)$$

สมการ (2.5) เป็นสมการของความจุความร้อนที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ

ในกรณี $T > T_c$ มี $\Delta(T) = 0$ อินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มิจะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสำหรับกรณี $\omega_D \gg T_c$ จะใช้การประมาณขอบเขตการอินทิเกรตเป็นอนันต์ได้ดังนั้นสมการ (2.5) จะเป็น

$$C(T) = \frac{4}{T^2} N_0 \int_0^{\infty} \frac{\exp(E_k/T)}{[\exp(E_k/T) + 1]^2} E^2 dE_k \quad (2.6)$$

ให้ $x = E_k/T$ แทนค่าลงใน (2.6)

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{4}{T^2} N_0 \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} T^3 x^2 dx \\ &= \frac{\pi^2}{3} N_0 k_B^2 T \end{aligned} \quad (2.7)$$

สมการ (2.7) เป็นสมการความจุความร้อนสำหรับโลหะธรรมดาซึ่งมีค่าแปรผันตามอุณหภูมิ

ในกรณี $T = T_c$ จะเกิดความไม่ต่อเนื่องในความจุความร้อนเพราะเกี่ยวข้องกับเทอม $d\Delta^2(T)/dT$ ในสมการ (2.5)

จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

$$\Delta(T) = 3.06 T_c \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

เพราะฉะนั้นค่าความไม่ต่อเนื่องนี้ตาม (2.5) เป็น

$$\begin{aligned}\Delta C(T_c) &= 9.36 T_c N_0 2 \int_0^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \\ &= 4.68 N_0 k_B^2 T_c\end{aligned}\quad (2.9)$$

ที่อุณหภูมิวิกฤตผลต่างของความจุความร้อนที่มีการกระโดดไปจากสภานำยวดยิ่งไปเป็นโลหะในสภาพปกติ หาค่าโดย ความจุความร้อนของโลหะในสภาพปกติ

$$\frac{\Delta C}{C_N} = \frac{C_S - C_N}{C_N} \Big|_{T=T_c} = \frac{4.68 N_0 T_c}{\frac{\pi^2}{3} N_0 T_c} = \frac{4.68 \times 3}{\pi^2} = 1.42 \quad (2.10)$$

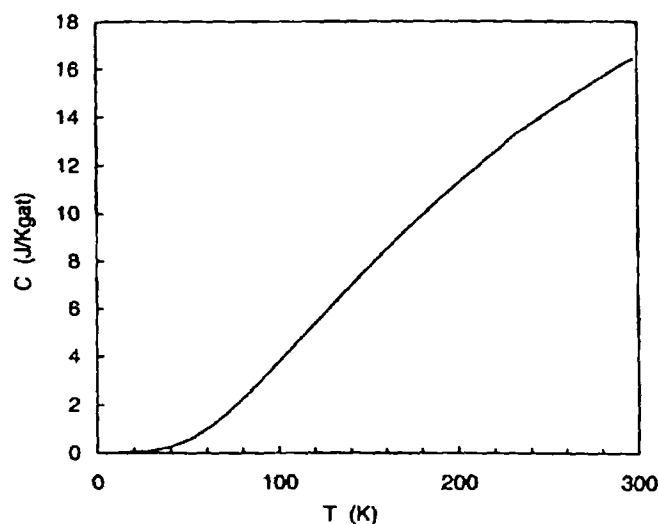
สำหรับ $T \ll T_c$ ตามทฤษฎีบีซีเอสสมการ (2.5) จะได้ความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งลดลงอย่างเอ็กซ์โปเนนเชียล โดยอยู่ในรูป $C(T) \approx e^{-\beta \Delta(0)} = e^{-1.76 T_c / T}$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ในเดือนมกราคมปี ค.ศ.2001 อะคิมิซึและนาแกมาตสึ (Akimisu, & Nagamatsu. 2001: 63) ได้รายงานว่แมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤต 40 K หลังจากได้เสนอข้อมูลนี้ออกไปก็ได้สร้างความน่าสนใจอย่างมากในวงการวิทยาศาสตร์เพราะตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์มีอุณหภูมิวิกฤตสูงมากที่สุดในบรรดาตัวนำยวดยิ่งที่ประกอบด้วยธาตุสองชนิด (Binary compound)

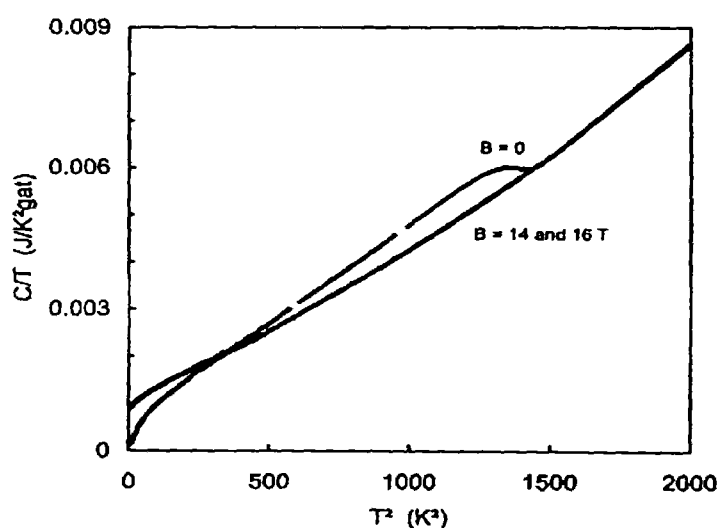
หวัง พลาคลอสกีและจูนอด (Wang, Plackowski, & Junod. 2001: 179-193) ได้รายงานผลการวัดค่าต่างๆของแมกนีเซียมไดโบไรด์ในรูปแบบก้อนได้ค่าต่างๆ ดังนี้ สนามวิกฤต $B(0)=0.26$ เทสลา ความชันของกราฟระหว่างสนามวิกฤตที่เพิ่มตามอุณหภูมิเป็น $(dB_{c2}/dT)_{T_c} = 0.56$ T/K พารามิเตอร์ของกิลเบอร์ก-แลนเดาว์ $\kappa = 38$ ความยาวอาพันธ์ $\xi \approx 5$ nm สนามวิกฤต $B_{c1} \approx 0.018$ T ความลึกแทรกซึมลอนดอน $\lambda(0) \approx 180$ nm จากค่าต่างๆ ที่วัดได้พวกนี้ แสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์จัดอยู่ในพวกตัวนำยวดยิ่งแบบที่สองและพบว่าที่ $T < T_c$ ค่าคงตัวของการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนโฟนอน λ_{cp} ที่หาได้โดยวิธีรีนอร์มอลไลต์ (Renormalization) ของความหนาแน่นสถานะอิเล็กตรอนและจากสมการของแมคมิลแลน (McMillan's equation) สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางไม่ตรงกันซึ่งวิธีแรกได้ $\lambda_{cp} \approx 0.6$ วิธีที่สองได้ $\lambda_{cp} \approx 1.1$ ค่าที่ไม่สอดคล้องกันนี้บ่งชี้ว่า

ตัวนำยิ่งยวดนี้เชื่อมไดโพลไรต์มีช่องว่างพลังงานแบบไม่ขึ้นกับทิศทางสองช่องว่างพลังงาน นอกจากนี้ยังได้วัดความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโพลไรต์ทั้งสภานำยิ่งยวดและสภาพปกติในช่วงอุณหภูมิ 2-300 K ภายใต้สนามแม่เหล็ก 0-16 T แล้วเขียนกราฟระหว่างความจุความร้อนกับอุณหภูมิ ภายใต้สนามแม่เหล็กค่าต่างๆ ดังภาพประกอบ 13 และ 14



ภาพประกอบ 13 ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโพลไรต์ที่มีอุณหภูมิจาก 15-300 K ภายใต้สนามแม่เหล็ก $B=0, 10$ และ 14 T ซึ่งทับกันเป็นเส้นเดียวกัน

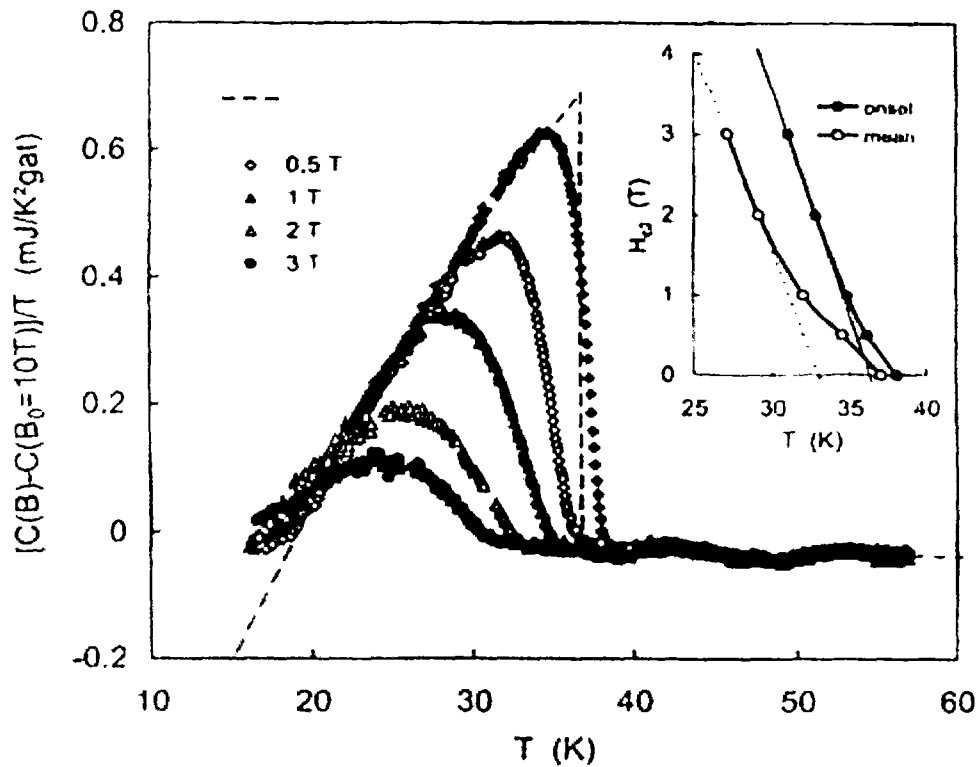
ที่มา: Wang, Plackowski, & Junod. (2001, May). *Physica C*. 355. P. 184.



ภาพประกอบ 14 ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโพลไรต์ที่สถานะปกติในสนามแม่เหล็ก

$B=14$ และ 16 T และความจุความร้อนที่สถานะนำยิ่งยวดใน $B=0$

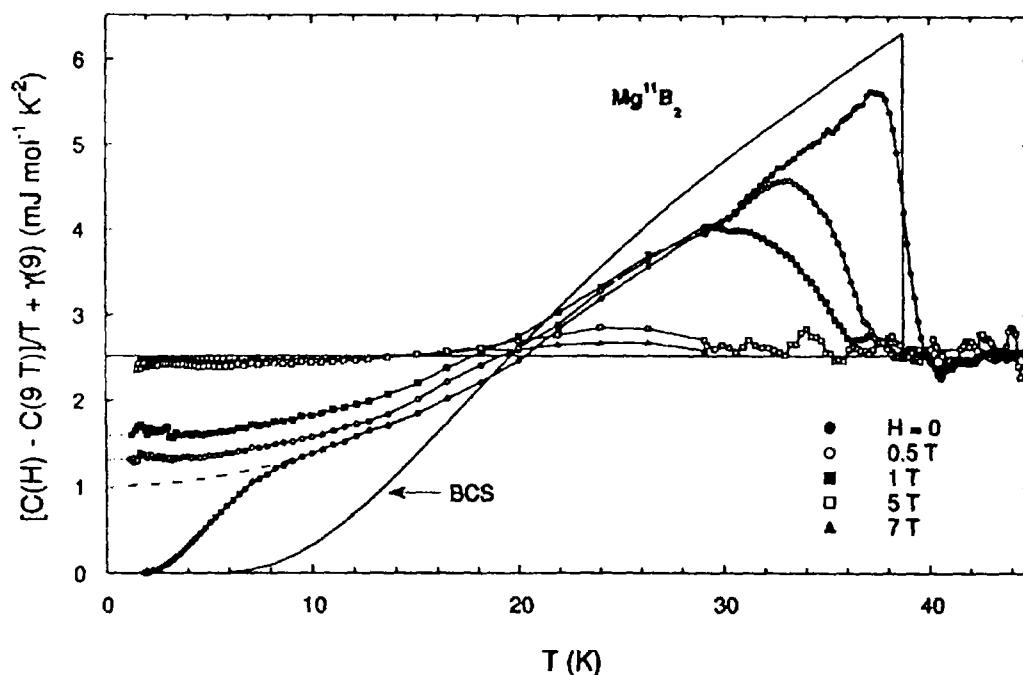
ที่มา: Wang, Plackowski, & Junod. (2001, May). *Physica C*. 355. P. 187.



ภาพประกอบ 15 ความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่สถานะปกติและที่สถานะนำยวดยิ่ง
สำหรับ $B=0, 0.5, 1, 2$ และ 3 T ภาพเล็กเป็นไดอะแกรมในระนาบ H - T วัดความชันของ
 $(dB_{c2}/dT)_{T_c}$ ได้เป็น 0.56 T/K

ที่มา: Wang, Plackowski, & Junod. (2001, May). *Physica C*. 355. P. 187.

บาวเกจและคณะ (Bouquet, et al. 2001 : 047001-1-047001-4) ทำการทดลองวัดความจุ
ความร้อนของ MgB_2 ในช่วงอุณหภูมิ 1 ถึง 50 K ในสนามแม่เหล็ก 9 T อุณหภูมิเดอบาย
 $\omega_D = 1050\text{ K}$ สัมประสิทธิ์การให้อิเล็คตรอนในสถานะปกติ $\gamma_n = 2.6\text{ mJ mol}^{-1}\text{K}^{-2}$ และเขียนกราฟ
ระหว่างอุณหภูมิกับความจุความร้อนที่ขึ้นกับสนามแม่เหล็กดังภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 แสดงกราฟระหว่าง $[C(H) - C(9T)]/T + \gamma(9)$ $\text{mJ mol}^{-1} \text{K}^{-2}$ กับอุณหภูมิ $T(\text{K})$ สเกลที่เลื่อนไป $\gamma(9T)$ เป็นตัวกำหนดความพอดีของกราฟโดยมีค่าเป็น $a \exp(-b/T)$ เมื่อ a และ b ขึ้นอยู่กับสนามแม่เหล็ก H

ที่มา: Bouquet, et al. (2001 July). *Physical Review Letters*. 87(4) : 047001-2

จากกราฟในภาพประกอบ 16 ที่บริเวณอุณหภูมิต่ำลักษณะของความจุความร้อนขึ้นอยู่กับสนามแม่เหล็กอย่างมากสิ่งนี้บ่งชี้ว่าตัวนำยวดยิ่ง Mg^{11}B_2 มีช่องว่างพลังงานอันที่สองโดยมีขนาดเล็กกว่าช่องว่างพลังงานแรก

ในเดือนสิงหาคม ปี 2001 โคทีกาวาและคณะ (Kotegawa, et al. 2001 : 127001-1-127001-4) ใช้เทคนิค NMR (Nuclear Magnetic Resonance) ศึกษาโครงสร้างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์และวัดอัตราการผ่อนคลายสปิน-โครงตาข่าย (Spin-lattice relaxation rate) ของโบรอน ($1/T_1$) พบว่าช่องว่างพลังงานที่มีขนาดใหญ่ที่สุดมีขนาด $\frac{2\Delta}{k_B T_c} \approx 5$ ซึ่งเป็นหลักฐานแสดงว่าตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์มีการจับคู่ของอิเล็กตรอน-โฟนอนอย่างแรง (Strong-coupling)

วอลติและคณะ (Wälti, et al. 2001 : 172515-1-172515-4) ได้ทำการวัดความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์อยู่ในช่วงอุณหภูมิ 3 ถึง 220 K โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของเดอบาย-ไฮสไตน์ ทำให้มีการวัดความจุความร้อนรวมทั้งหมดถูกต้องมากยิ่งขึ้น จากผลการทดลองความจุความร้อนของอิเล็กตรอนแสดงถึงค่าคงที่การจับคู่อิเล็กตรอนโฟนอน ข้อมูลของงานวิจัยนี้บ่งชี้

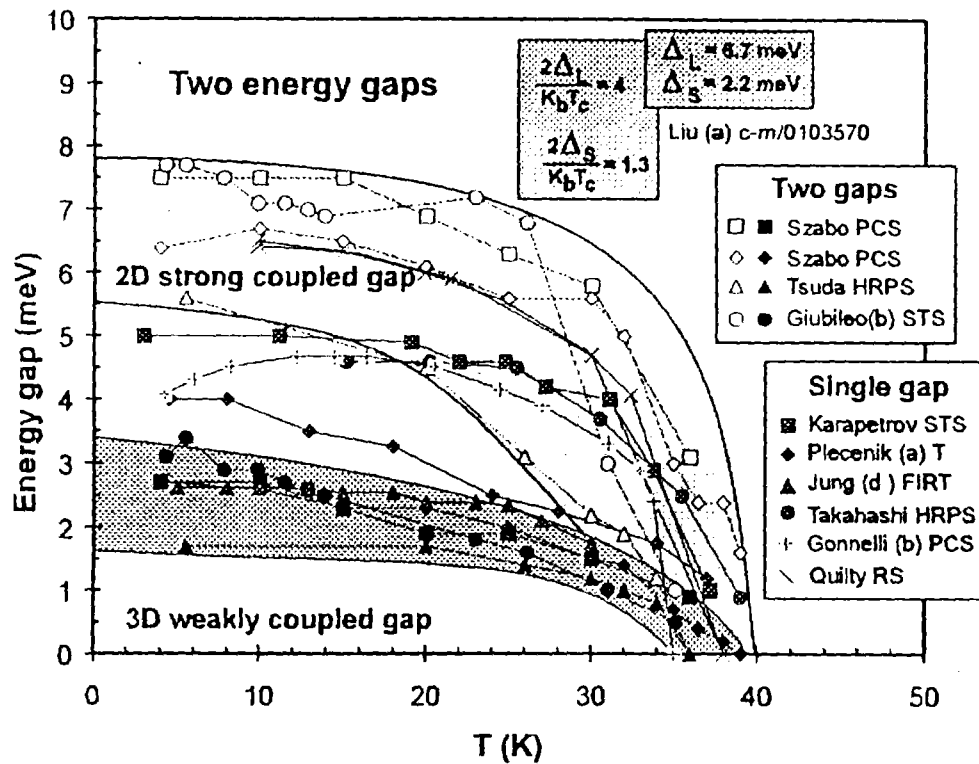
ว่าความจุความร้อนในสถานะนำยวดยิ่งของแมกนีเซียมไดโบไรด์สามารถใช้ได้กับแบบจำลองตามทฤษฎีบีซีเอสชนิดคลื่นเอส

ในเดือนสิงหาคม ปี ค.ศ.2001 บูเซะและยามาชิตะ (Buzea, & Yamashita. 2001: 1-35) ได้รวบรวมข้อมูลต่างๆของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่มีผู้วิจัยเอาไว้ทั่วโลกตั้งแต่การเตรียมตัวนำยวดยิ่งในแบบฟิล์มบาง ก้อน ผง เส้นลวด เทปและในความดันสูง จนถึงค่าพารามิเตอร์ต่างๆรวมทั้งการมีอยู่ของช่องว่างพลังงานสองช่อง

ตาราง 4 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

พารามิเตอร์(Parameter)	ค่า(Values)
อุณหภูมิวิกฤต	$T_c = 39 - 40 \text{ K}$
พารามิเตอร์แลตทิซของHexagonal	$a = 0.3086 \text{ nm}$, $b = 0.3524 \text{ nm}$
ความหนาแน่น	$\rho = 2.55 \text{ g/cm}^3$
ปรากฏการณ์ไอโซโทป	$\alpha_T = \alpha_B + \alpha_{Mg} = 0.3 - 0.02$
สภาพต้านทานใกล้อุณหภูมิวิกฤต	$\rho(40K) = 0.4 - 16 \text{ } \mu\Omega\text{cm}$
อัตราส่วนสภาพต้านทาน	$RP = \rho(40K)/\rho(300K) = 1 - 27$
สนามวิกฤตที่สอง	$H_{c2} // ab(0) = 14 - 39 \text{ T}$ $H_{c2} // c(0) = 2 - 24 \text{ T}$
สนามวิกฤตที่หนึ่ง	$H_{c1}(0) = 27 - 48 \text{ mT}$
ความยาวอาพันธ์	$\xi_{ab}(0) = 3.7 - 12 \text{ nm}$ $\xi_c(0) = 1.6 - 3.6 \text{ nm}$
ความลึกการเจาะทะลุทะลวงของสนาม	$\lambda(0) = 85 - 180 \text{ nm}$
ช่องว่างพลังงาน	$\Delta(0) = 1.8 - 7.5 \text{ meV}$
อุณหภูมิเดอบาย	$\omega_D = 750 - 880 \text{ K}$
กระแสไฟฟ้าวิกฤต	$J_c(4.2K, 0T) > 10^7 \text{ A/cm}^2$

ที่มา: Buzea; Yamashita. (2001). *Physical Review Letters*. 87(4). P. 26.



ภาพประกอบ 17 แสดงช่องว่างพลังงานสองช่องในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยจากกราฟเป็นการนำผลการวิจัยที่ผู้วิจัยใช้วิธีต่างๆ กันในการวัดช่องว่างพลังงานมารวมกันเป็นกราฟเดียว ที่มา

Δ_L แทน ช่องว่างพลังงานที่มีขนาดใหญ่

Δ_S แทน ช่องว่างพลังงานที่มีขนาดเล็ก

PCS แทน point contact spectroscopy

HRPS แทน high-resolution photoemission spectroscopy

STS แทน scanning tunneling spectroscopy

T แทน tunneling

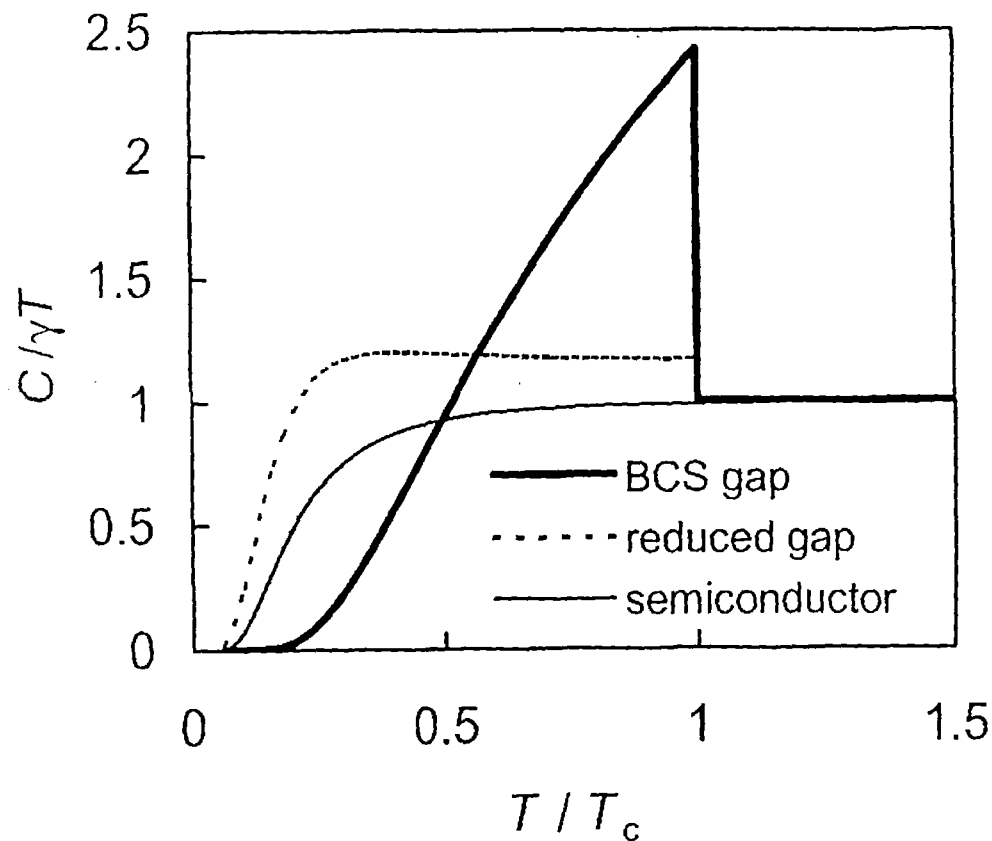
FIRT แทน far-infrared transmission

RS แทน Raman spectroscopy

ที่มา: Buzea, & Yamashita. (2001). *Physical Review Letters*. 87(4). P. 26.

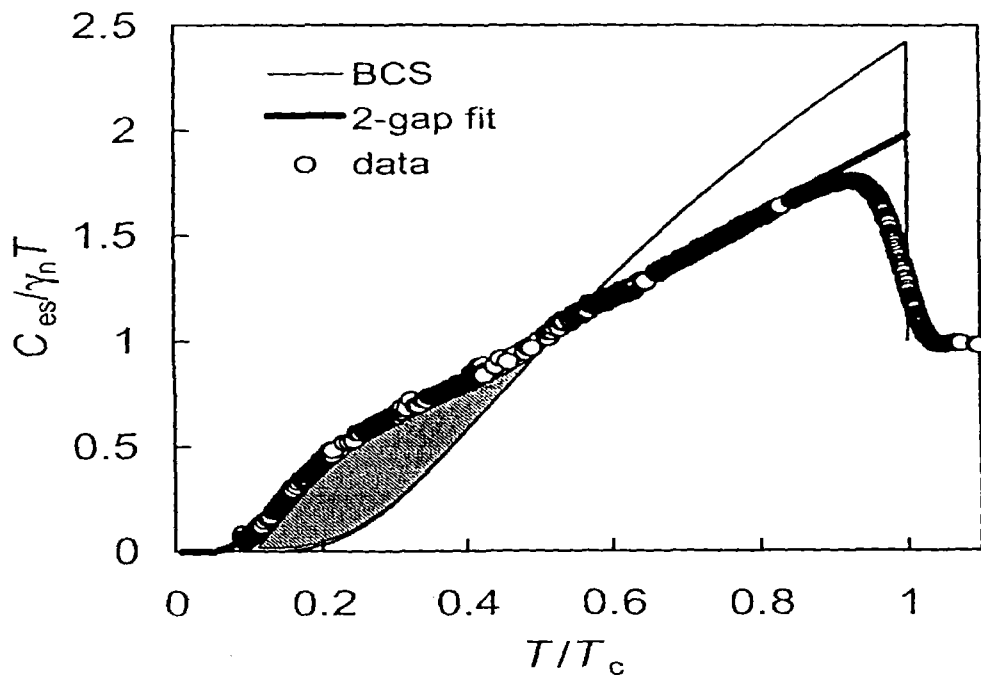
บาวเกจและคณะ (Bouquet, et al. 2002 : 1-31) ได้วัดค่าความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์พบว่ามีการวัดค่าความจุความร้อนแตกต่างไปจากกราฟความจุความร้อนตามทฤษฎี

ปีซีเอสคือแอมพลิจูดและความแหลม (sharpness) ของกราฟไม่ตรงกับในทฤษฎีปีซีเอสดังภาพประกอบ 19



ภาพประกอบ 18 กราฟระหว่างความจุความร้อน $C/\gamma T$ กับอุณหภูมิ T/T_c เส้นจาง (thin line) เป็นเส้นของช่องว่างพลังงานขนาดเล็กมีค่าเป็น $\Delta_\pi = \Delta_{0,\text{BCS}}/3$ ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับของสารกึ่งตัวนำเส้นประเป็นช่องว่างพลังงานตามแบบจำลอง α

ที่มา: Bouquet, et al. (2002, October). *Physica C*. 14(10). p. 25.

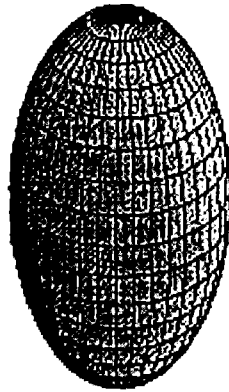


ภาพประกอบ 19 กราฟระหว่างความจุความร้อน $C/\gamma_n T$ กับอุณหภูมิ T/T_c เมื่อปราศจากสนามแม่เหล็กของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์บริเวณแรกจะเป็นช่วงอุณหภูมิต่ำมาก

ที่มา: Bouquet, et al. (2002, October). *Physica C*. 14(10). p. 24

กอนเนลลีและคณะ (Gonnelli, et al. 2002 : 1-7) ได้ทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ Δ_π และ Δ_σ ด้วยวิธี PCS (point-contact spectroscopy) ได้ค่า $\Delta_\sigma = 7.1 \pm 0.1$ meV, $\Delta_\pi = 2.80 \pm 0.05$ meV และ Δ_σ มีกราฟเป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอสส่วน Δ_π มีกราฟต่างไปจากทฤษฎีโดยวัดที่อุณหภูมิ $T < 25$ K โดยมีอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน (gap ratio) ของ Δ_π และ Δ_σ เป็น $\frac{2\Delta_\sigma}{k_B T_c} \approx 4.18$, $\frac{2\Delta_\pi}{k_B T_c} \approx 1.59$ ซึ่ง Δ_σ สัมพันธ์กับแถบพลังงาน σ 2 มิติ เนื่องจากอิเล็กตรอนตามแกน p_x, p_y, p_z ของอะตอมโบรอน อิเล็กตรอนต่างๆมีการไฮบริดอย่างอ่อนกับอิเล็กตรอนของอะตอมแมกนีเซียม ภายใต้พฤติกรรมที่ไม่ปกติของความจุความร้อนของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์นี้เกิดจากอิทธิพลของแถบพลังงานและช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทาง

ในเดือนธันวาคมปี ค.ศ.2001 ฮาสและมากิ (Haas, & Maki. 2001:020502-1-020502-4) เสนอแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางเพื่อนำไปใช้อธิบายพฤติกรรมทางเทอร์โมไดนามิกส์ โดยสมมติว่าพื้นผิวเฟอร์มีมีลักษณะเป็นรูปทรงรีดงรูป



ภาพประกอบ 20 แสดงช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำวยอดยั้งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของฮาสและมากิที่เขียนในปริภูมิโมเมนตัม

ที่มา: Haas, & Maki. (2001, December). *Physical Review B* . 65. p. 020502-1.

มีสมการช่องว่างพลังงานเป็น

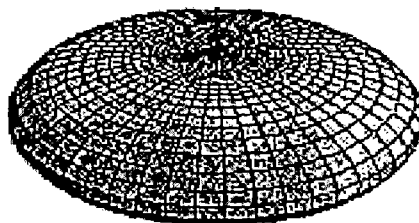
$$\Delta(k) = \Delta(0) \left(\frac{1 + a'z^2}{1 + a'} \right) \quad (2.11)$$

เมื่อ $z = \cos \theta$

θ เป็นมุมโพลาร์

a' เป็นตัวแปรของความไม่สมมาตรระหว่างแกน c กับระนาบ ab

ในเดือนพฤษภาคมปี ค.ศ.2002 พอสซาเซเฮนนิคอฟา แดม และ มากิ (Posazhennikova, Dahm, & Maki. 2002, May : 0204272-1-0204272-7) เสนอแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทางโดยสมมติว่าพื้นผิวเฟอร์มีมีลักษณะเป็นรูปแพนเค้กดังภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ 21 ช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำวยอดยั้งชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของ พอสซาเซเฮนนิคอฟา แดม และมากิที่เขียนในปริภูมิโมเมนตัม

ที่มา: Posazhennikova, Dahm, & Maki. (2002. May). *Europhysics Letters* . 61(4) 0204272-2

มีสมการช่องว่างพลังงานเป็น

$$\Delta(k) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a'z^2}} \quad (2.12)$$

มิสโชนอฟ ฟินีปและอินเดคยู (Mischonov; Penev; & Indekeu.2002:066501-1) ใช้วิธีนอร์มอลไลต์วิเคราะห์ช่วงกระโดดของกราฟความจุความร้อนในตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์โดย

ใช้แบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ $\Delta(k) = \Delta(0) \left(\frac{1 + a'z^2}{1 + a'} \right)$

ช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสกับอุณหภูมิวิกฤต

การพิจารณาช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิต่างๆจะใช้ order parameter Δ ซึ่งกำหนดไว้ว่าเป็นช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอสโดยมีความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบีซีเอสดังนี้

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k \quad (2.13)$$

โดยสามารถพิจารณาเป็นกรณีต่างๆได้ดังนี้

1. ที่ $T = T_c$ ได้ $\Delta(T_c) = 0$ ทำให้หา T_c ได้ตามสมการ

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh(E_k/2T_c)}{E_k} dE_k$$

ให้ $u = \frac{E_k}{2T_c} \rightarrow du = \frac{dE_k}{2T_c}$

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{\tanh u}{u} du$$

อินทิเกรตทีละส่วน(By part)

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln u \tanh u \Big|_0^{\omega_D/T_c} - \int_0^{\omega_D/T_c} \ln u \operatorname{sech}^2 u \, du$$

เนื่องจาก $\omega_D \gg T$ ดังนั้น $\tanh(\omega_D / 2T_c) \approx 1$ และ $\frac{\omega_D}{2T_c} \approx \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0 V_0} &= \ln \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) - \int_0^{\infty} \ln u \operatorname{sech}^2 u \, du \\ &= \ln \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) - \ln \left(\frac{\pi}{4\gamma} \right) \\ &= \ln \left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

ดังนั้น

$$e^{1/N_0 V_0} = \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c}$$

$$T_c = \frac{2\gamma\omega_D e^{-1/N_0 V_0}}{\pi}$$

โดยที่ $\gamma = e^C = 1.781$, C เป็นค่าคงที่ของออยเลอร์(Euler) ซึ่งเท่ากับ $C = 0.577$ ดังนั้น

$$T_c = 1.134\omega_D e^{-1/N_0 V_0}$$

2. ที่ $T=0$ จะได้ $\tanh \infty \approx 1$ และ $\Delta = \Delta(0)$ ทำให้หา $\Delta(0)$ ได้ตามสมการ

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh \infty}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(0)}} dE_k$$

ให้ $E_k = \Delta(0) \sinh x$, $dE_k = \Delta(0) \cosh x \, dx$ ดังนั้น

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\sinh^{-1}(\omega_D/\Delta(0))} \frac{\Delta(0) \cosh x}{\sqrt{\Delta^2(0) \sinh^2 x + \Delta^2(0)}} dx$$

$$= \int_0^{\sinh^{-1}(\omega_D/\Delta(0))} \frac{\Delta(0) \cosh x}{\Delta(0) \sqrt{1 + \sinh^2 x}} dx$$

จาก $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$= \int_0^{\sinh^{-1}(\omega_D/\Delta(0))} dx$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)}\right)$$

จาก $\sinh^{-1}(x) \approx \ln(2x)$ เมื่อ $x \gg 1$ ซึ่งสำหรับกรณีนี้ $\omega_D \gg \Delta(0)$ แทนค่าจะได้

$$\frac{1}{N_0 V_0} \approx \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right)$$

ซึ่งจะได้

$$\Delta(0) = 2\omega_D e^{-1/N_0 V_0} \quad (2.15)$$

3. ที่บริเวณ T ใกล้ T_c หา $\Delta(T)$ ได้จากสมการ

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k$$

จาก
$$\frac{\tanh x}{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \left[\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0 V_0} &= \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)}{\frac{2T\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}} dE_k \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^{\omega_D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{E_k^2 + \Delta^2(T)}{4T^2} + \left[\pi(n + \frac{1}{2})\right]^2} dE_k \\
&= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega_D} \frac{4T^2}{E_k^2 + \Delta^2(T) + 4T^2 \left[\pi(n + \frac{1}{2})\right]^2} dE_k \\
&= 2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{E_k^2 + \Delta^2(T) + [\pi T(2n+1)]^2} \\
&= 4T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{E_k^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2}
\end{aligned}$$

where $\omega_n = \pi T(2n+1)$ for $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
&= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{E_k^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2} dE_k \\
&= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{(E_k^2 + \omega_n^2)} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta^2(T)}{E_k^2 + \omega_n^2}} \right) dE_k \\
&= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{(E_k^2 + \omega_n^2)} \left(1 - \frac{\Delta^2(T)}{E_k^2 + \omega_n^2} \right) dE_k \\
&= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \left[\int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{E_k^2 + \omega_n^2} - \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta^2(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k \right] \tag{2.16}
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอม $4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \left[\int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{E_k^2 + \omega_n^2} \right]$

$\therefore \frac{\omega_D}{T_c} \rightarrow \infty$ หรือ $\omega_D \gg T_c$ เปลี่ยน ω_D ที่เครื่องหมายอินทิเกรตเป็น ∞

$$\begin{aligned} 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{E_k^2 + \omega_n^2} &= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\infty} \frac{dE_k}{E_k^2 + \omega_n^2} \\ &= 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{\pi}{2\omega_n} \\ &= 2T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{\pi}{\pi T(2n+1)} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{1}{(2n+1)} \end{aligned}$$

โดยที่ ω_D เป็นความถี่เดอบายที่ cutoff ซึ่งขึ้นอยู่กับการอันตรกิริยา อิเล็กตรอน-โฟนอน และเนื่องจาก

$\frac{\omega_D}{T_c} \rightarrow \infty$ ทำให้ $\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2} \rightarrow \infty$ ด้วย ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \frac{1}{(2n+1)} &= 2 \sum_{n=0}^{(\omega_D/2\pi T)-1/2} \frac{1}{(2n+1)} \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{(\omega_D/\pi T)} \right] \\ &= 2 \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(\omega_D/\pi T)} \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{(\frac{\omega_D}{\pi T} - 1)} \right] \right\} \\ &= 2 \left[\sum_{n=0}^{\omega_D/\pi T} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{(\omega_D/\pi T)-1/2} \frac{1}{n} \right] \end{aligned}$$

จาก $\sum_{m=1}^N \frac{1}{m} = C + \ln N$ เมื่อ $N \rightarrow \infty$ และ $C = 0.5772156649$ ซึ่งค่า $C = \ln \gamma$, $\gamma = e^C$

(Janhnke and Emde ; 1945) ดังนั้น

$$= 2\left\{C + \ln\left(\frac{\omega_D}{\pi T}\right) - \frac{1}{2}\left[C + \ln\left(\frac{\omega_D}{2\pi T - \frac{1}{2}}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left[C + \ln\left(\frac{\omega_D}{\pi T}\right) - \frac{C}{2} + \ln\left(\frac{\omega_D}{2\pi T - \frac{1}{2}}\right)^{-1/2}\right]$$

$$= 2\left\{\frac{C}{2} + \ln\left[\left(\frac{\omega_D}{\pi T}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_D}{2\pi T}} \sqrt{1 - \frac{\pi T}{\omega_D}}}\right)\right]\right\}$$

$$\therefore \frac{\omega_D}{T_c} \rightarrow \infty \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{T_c}{\omega_D} \rightarrow 0$$

$$= C + 2 \ln \left(\left(\frac{\omega_D}{\pi T} \right) \left(\frac{2\pi T}{\omega_D} \right)^{1/2} \right)$$

$$= \ln \gamma + \ln \left(\frac{2\omega_D}{\pi T} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T} \right) \quad (2.17)$$

พิจารณาเทอม $4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta^2(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k$ เปลี่ยน $\omega_D \rightarrow \infty$ และ $\sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}$ จะได้

$$4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta^2(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k = 4T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Delta^2(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k$$

$$= 4T \Delta^2(T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{4\omega_n^3}$$

$$\begin{aligned}
\text{โดยใช้ } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{\pi}{4a^3} \\
&= T\Delta^2(T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\pi^3 T^3 (2n+1)^3} \\
&= \frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}
\end{aligned}$$

จากรีมันน์ซีตาฟังก์ชัน $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ดังนั้น เทอม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ เป็น

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} &= 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots - \left[\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots \right] \\
&= \zeta(3) - \frac{1}{2^3} \left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right] \\
&= \zeta(3) - \frac{1}{8} \zeta(3) \\
&= \frac{7}{8} \zeta(3)
\end{aligned}$$

แทนค่าจะได้

$$4T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Delta^2(T)}{(\epsilon^2 + \omega_n^2)^2} d\epsilon = \frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2} \frac{7}{8} \zeta(3) \quad (2.18)$$

พิจารณาเทอมทางซ้ายของสมการ (2.15) นำ $\frac{1}{N_0 V_0}$ ที่ $T = T_c$ มาแทนลงไปจะได้

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{T_c}\right) \quad (2.19)$$

นำสมการ (2.17),(2.18) และ (2.19) แทนลงใน (2.16)

$$\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{T_c}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{T}\right) - \frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = -\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

$$\ln\left(1 + \frac{T - T_c}{T_c}\right) = -\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T^2}$$

จาก $x = \ln(1+x)$ เมื่อ $x \ll 1$

เนื่องจากพิจารณาที่ T ใกล้ T_c ดังนั้น

$$\frac{T_c - T}{T_c} = \frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2T_c^2}$$

$$\Delta^2(T) = \frac{T_c - T}{T_c}\pi^2T_c^2\frac{8}{7\zeta(3)}$$

$$\Delta(T) = \pi\sqrt{T_c(T_c - T)\frac{8}{7\zeta(3)}}$$

$$= 3.06\sqrt{T_c(T_c - T)} \quad (2.20)$$

โดย $\zeta(3) = 1.20206$

4. ที่ T ใกล้ ศูนย์ หา $\Delta(T)$ ได้จากสมการ

$$\frac{1}{N_0V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k$$

พิจารณาเทอม $\tanh \frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}$ ให้ $x = \frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{T}$ ถ้า T ใกล้เคียง ศูนย์ ทำให้ $x \rightarrow \infty$ ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned}\tanh \frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T} &= \tanh \frac{x}{2} \\ &= \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1}{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})} \\ &= \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\end{aligned}$$

จาก $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$ ดังนั้นกระจายเทอม $(1+e^{-x})^{-1}$ จะได้

$$(1+e^{-x})^{-1} = 1 - 2e^{-x} + 2e^{-2x} - 2e^{-3x} + \dots$$

เนื่องจาก $e^{-x} \ll 1$ ดังนั้น

$$(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1} \approx 1 - 2e^{-x}$$

$$\approx 1 - 2 \exp\left(-\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}}{T}\right)$$

$$\approx 1 - 2 \exp\left[-\frac{1}{T}\left(\Delta(T) + \frac{E_k^2}{2\Delta(T)} + \dots\right)\right]$$

$$\approx 1 - 2 \exp\left[-\left(\frac{\Delta(T)}{T} + \frac{E_k^2}{2T\Delta(T)}\right)\right]$$

จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_0 V_0} &= \int_0^{\omega_D} \frac{1 - 2 \exp[-(\frac{\Delta(T)}{T} + \frac{E_k^2}{2T\Delta(T)})]}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k \\ &= \int_0^{\omega_D} \frac{dE_k}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} - 2 \int_0^{\omega_D} \frac{\exp[-(\frac{\Delta(T)}{T} + \frac{E_k^2}{2T\Delta(T)})]}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k\end{aligned}$$

เทอมแรกทางขวามือจากข้อ 2 ให้ $E_k = \Delta(T) \sinh x$ และ $\sinh^{-1}(x) \approx \ln(2x)$ เมื่อ $x \gg 1$ จะได้

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \int_0^{\omega_D} \frac{e^{-E_k^2/2T\Delta(T)}}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} dE_k$$

เทอมที่สองทางขวา ให้ $x = \frac{E_k}{\sqrt{2T\Delta(T)}} \rightarrow dx = \frac{dE_k}{\sqrt{2T\Delta(T)}}$

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)}} \sqrt{2T\Delta(T)} dx$$

$$= \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2 + \Delta(T)/2T}} dx$$

$\therefore T$ ใกล้ศูนย์ทำให้ $\frac{\omega_D}{T} \rightarrow \infty$ ดังนั้น $\int_0^{\omega_D/\sqrt{2T\Delta(T)}} \rightarrow \int_0^{\infty}$ และที่ $T \rightarrow 0$ พลังงานจลน์ของ

อิเล็กตรอนมีค่าน้อยมาก $E_k \rightarrow 0$ ทำให้เทอม $\frac{\Delta(T)}{2T} \gg \frac{E_k}{2T\Delta(T)}$ ดังนั้นเทอม $\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{\Delta(T)}{2T}}}$ เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{E_k}{2T\Delta(T)} + \frac{\Delta(T)}{2T}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta(T)}{2T}}} \approx \sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}}$$

$$\therefore \frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \int_0^\infty e^{-x^2} \sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}} dx$$

จากสมการในข้อ 2

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right)$$

ดังนั้น

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

จาก $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ จะได้

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)}\right) - 2e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2T}{\Delta(T)}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\ln\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\right) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(T)}}$$

ให้ $\Delta(T) = \Delta(0) + \Delta_1(T)$ เมื่อเทอม $\Delta_1(T)$ มีค่าน้อยๆ

$$\ln\left(\frac{\Delta(0) + \Delta_1(T)}{\Delta(0)}\right) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0) + \Delta_1(T)}}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta_1(T)}{\Delta(0)}\right) = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0) + \Delta_1(T)}}$$

จาก $e^x \approx 1+x \rightarrow x = \ln(1+x)$ เมื่อ $x \ll 1$ ดังนั้น

$$\frac{\Delta_1(T)}{\Delta(0)} = -e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta(0) + \Delta_1(T)}}$$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta_1(T)$ และ $\Delta(0)$ ตามสมการ

$$\Delta(T) = \Delta(0) - e^{-\frac{\Delta(T)}{T}} \sqrt{\Delta(0)2\pi T} \quad (2.21)$$

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

1. หาสมการทั่วไปของความจุความร้อนในสถานะนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิใดๆ $C_s(T)$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรสำหรับอันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อน (Weak couple) ตามทฤษฎีบีซีเอส
2. นำแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรมาแทนในสมการตามข้อ 1) โดยใช้
 - 2.1 แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาสส์ และ มากิ ตามสมการ (2.11)

$$\Delta(k) = \Delta(0) \left(\frac{1 + a'z^2}{1 + a'} \right)$$

- 2.2 แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอสซาสเฮนนิโควา, แดม และ มากิ ตามสมการ (2.12)

$$\Delta(k) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a'z^2}}$$

โดยแบบจำลองทั้งสอง พิจารณาว่า $\Delta_a = \Delta_b \neq \Delta_c$ และมี $z = \cos\theta$ โดย θ เป็นมุมในระนาบ a และ b มีค่า 0 ถึง π

3. พิจารณาที่ $T = T_c$ ของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์หาสมการ $\left. \frac{\Delta C}{C_N} \right|_{T=T_c}$ ในรูปแบบแม่นยำตรงทั้งสองแบบจำลอง

4. นำแบบจำลองทั้งสองมาปรับปรุงเพื่อนำไปใช้แสดงผลกับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์แบบช่องว่างพลังงานไม่สมมาตรในแกนทั้งสามโดย $\Delta_a \neq \Delta_b \neq \Delta_c$

5. นำแบบจำลองที่ได้ปรับปรุงแล้วหาสมการ $C_s(T)$ และ $\left. \frac{\Delta C}{C_N} \right|_{T=T_c}$

6. ใช้การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีการทำซ้ำกับสมการ $C_s(T)$ และ $\left. \frac{\Delta C}{C_N} \right|_{T=T_c}$ ที่ได้ตามข้อ 2. และ

ข้อ 5.

7. เปรียบเทียบ $C_s(T)$ และ $\left. \frac{\Delta C}{C_N} \right|_{T=T_c}$ ที่ได้จากการคำนวณตามข้อ 6) กับทฤษฎีบีซีเอสและผลการทดลองที่เกี่ยวข้องกับตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์
8. สรุปและวิจารณ์ผล

สมการทั่วไปของความจุความร้อน

เนื่องจากแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอส ดังนั้นสมการช่องว่างพลังงานจึงสามารถใช้ตามทฤษฎีบีซีเอสได้ดังนี้ (Walecka ; 1969 : 331)

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{V_{kk'} \Delta_{k'}}{\sqrt{E_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{E_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}{2T}\right) \quad (3.1)$$

โดย $E_{k'}$ เป็นพลังงานของอิเล็กตรอน

$V_{kk'}$ เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากการจับคู่ของอิเล็กตรอน

จากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนและโฟนอน (electron - phonon interaction) กำหนดให้พลังงานศักย์ของการจับคู่เป็น

$$V_{kk'} = V_0 f(k) f(k') \quad (3.2)$$

V_0 เป็นค่าคงตัวของการจับคู่ของอิเล็กตรอนและช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรจะเป็น

$$\Delta_k = \Delta(T) f(k) \quad (3.3)$$

โดย $\Delta(T)$ เป็นช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

$f(k)$ เป็นฟังก์ชันที่แสดงถึงความไม่สมมาตรของผิวเฟอร์มิที่ขึ้นกับเวกเตอร์ k

การหาสมการทั่วไปของความจุความร้อนในสภานำยิ่งยวดที่อุณหภูมิใดๆ เริ่มจากสมการเอนโทรปี $S(T)$ ของระบบอนุภาคเสมือนเฟอร์มิออนตามสมการ (2.1)

$$S(T) = -2 \sum_k [f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k)] \quad (3.4)$$

โดย f_k เป็นฟังก์ชันการกระจายของเฟอร์มีดิแรก

เลข 2 ที่นำมาคูณมาจากการคิดทิศทางการสปินทั้งสองคือขึ้นกับลง

พิจารณาฟังก์ชันการกระจายของเฟอร์มีดิแรก

$$f_k = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} + 1} \quad (3.5)$$

โดย $\beta = \frac{1}{T}$ เมื่อ ϵ_k มีความสัมพันธ์เป็น

$$\epsilon_k = \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(k)} \quad (3.6)$$

และ ϵ_k เป็นพลังงานของคู่อิเล็กตรอนที่บริเวณผิวของเฟอร์มี

จากสมการความจุความร้อน

$$C(T) = T \frac{dS(T)}{dT} \quad (3.7)$$

ใช้กฎลูกโซ่กับ $\frac{dS(T)}{dT}$ และรวมไปทุกค่าในปริภูมิ k

$$\frac{dS(T)}{dT} = \sum_k \frac{\partial S}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial T} \quad (3.8)$$

พิจารณาเทอม $\frac{\partial S}{\partial f_k}$,

$$\frac{\partial S}{\partial f_k} = -2 \frac{\partial}{\partial f_k} [f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k)]$$

$$= -2 \ln \frac{f_k}{(1 - f_k)}$$

$$= -2 \ln e^{-\epsilon_k/T}$$

$$= \frac{2}{T} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k) \quad (3.9)$$

พิจารณาเทอม $\frac{\partial f_k}{\partial T}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{(e^{\epsilon_k/T} + 1)} \\ &= -\frac{e^{\epsilon_k/T}}{(e^{\epsilon_k/T} + 1)^2} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial T} + \epsilon_k \frac{\partial(1/T)}{\partial T} \right] \\ &= \frac{1}{T} \frac{e^{\epsilon_k/T}}{(e^{\epsilon_k/T} + 1)} [\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k)] \\ &\quad - T \frac{d}{dT} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

นำสมการ (3.9) และ (3.10) แทนลงใน (3.8) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dS(T)}{dT} &= \left(\frac{2}{T} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k) \right) \frac{1}{T^2} \frac{e^{\epsilon_k/T}}{(e^{\epsilon_k/T} + 1)^2} [\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k)] \\ &\quad - T \frac{d}{dT} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

นำสมการ (3.11) แทนลงในสมการ (3.7) จะได้

$$C(T) = \frac{2}{T^2} \sum_k \frac{e^{\epsilon_k/T}}{(e^{\epsilon_k/T} + 1)^2} [E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(k) - \frac{T}{2} f^2(k) \frac{d\Delta^2(T)}{dT}] \quad (3.12)$$

สมการ (3.12) เป็นสมการความจุความร้อนของอนุภาคในสภานำยวดยิ่ง โดยรวมทุกค่าในปริภูมิ k ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยเทอมอินทิกรัลที่แปรตามพลังงาน E_k แล้วคูณด้วยความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มี $N_0(E_F)$ โดยให้ $N_0(E_F) = N_0$ เมื่อ N_0 เป็นความหนาแน่นสถานะซึ่งถือว่าเป็นค่าคงที่ในระดับชั้นพลังงานเล็กๆที่ผิวเฟอร์มี และขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็นค่าจำกัดคือเท่ากับพลังงานคัตออฟ (cut-off) ของเดอบาย ω_D และค่าเฉลี่ยทั่วผิวเฟอร์มีแบบไม่สมมาตรและเป็นคลื่นเอสซึ่งมีผิว

เฟอร์มีแบบทรงกลม การอินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มีแบบทรงกลมสมการการสมมาตร $f(k)$ จะเป็น $f(\theta, \phi)$ ในพิกัดทรงกลม ดังนั้นสมการ (3.12) เขียนใหม่ได้เป็น

$$C(T) = \frac{2N_0}{T^2} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\exp(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T)}{[\exp(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T) + 1]^2} \cdot$$

$$[E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi) - \frac{T}{2} f^2(\theta, \phi) \frac{d}{dT} \Delta^2(T)] dE_k \quad (3.13)$$

เมื่อ $\frac{1}{4\pi}$ เป็นนอร์มอลไลต์แฟคเตอร์ (Normalize factor)

สมการ (3.13) เป็นสมการความจุความร้อนแบบที่มีช่องว่างพลังงานไม่สมมาตรในรูปทั่วไปที่ครอบคลุมทุกอุณหภูมิ

ในกรณีวัสดุอยู่ในสภาพปกติ $T > T_c$, $\Delta(T) = 0$ การอินทิเกรตทั่วผิวเฟอร์มีจะมีค่าเท่ากับหนึ่งและสำหรับ $\omega_D \gg T_c$ จะใช้การประมาณขอบเขตการอินทิเกรตเป็นอนันต์ได้ดังนั้นสมการ (3.13) เป็น

$$C(T) = \frac{4N_0}{T^2} \int_0^\infty \frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T} + 1)^2} E_k^2 dE_k$$

ให้ $x = \frac{E_k}{T}$,

$$C(T) = \frac{4N_0}{T^2} \int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} x^2 T^3 dx$$

$$= 4N_0 T \int_0^\infty x^2 e^{-x} (1 + e^{-x})^{-2} dx$$

$$= 4N_0 T \int_0^\infty x^2 e^{-x} (1 - 2e^{-x} + 3e^{-3x} + \dots) dx$$

จาก $\int_0^\infty x^n e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}$ เมื่อ $p > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
C(T) &= 8N_0T[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots] \\
&= 2N_0 \frac{\pi^2}{3} T
\end{aligned} \tag{3.14}$$

สมการ (3.14) เป็นสมการความจุความร้อนสำหรับวัสดุในสภาพปกติโดยที่ $T > T_c$

ในกรณีวัสดุอยู่ในสภานำยวดยิ่งสมการ (3.13) จะเกี่ยวข้องกับเทอม $\Delta^2(T)$ สามารถหาเทอม $\Delta^2(T)$ ได้โดยเริ่มจากนำสมการ (3.2) และ (3.3) แทนลงใน (3.1) จะได้สมการ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0 V_0} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} \frac{f^2(\theta, \phi)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}} \cdot \\
&\quad \tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}}{2T}\right) dE_k
\end{aligned} \tag{3.15}$$

จาก $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + [\pi(n + \frac{1}{2})]^2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_0 V_0} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} \frac{f^2(\theta, \phi)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}} \cdot \\
&\quad \sum_0^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}}{2T}}{\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}}{4T^2} + [\pi(n + \frac{1}{2})]^2} dE_k \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} f^2(\theta, \phi) 4T \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_k^2 + \omega_n^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} \right) dE_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi \{f^2(\theta, \phi) [4T \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E_k^2 + \omega_n^2} dE_k \\
&\quad - 4T \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k] \} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

โดยที่ $\omega_n = 2\pi T(n + \frac{1}{2})$, $n=0,1,2,\dots$ เรียก ω_n ว่าความถี่ Matsubara frequency)

จากสมการ (2.17) และ (2.18) เมื่อพิจารณาเทอม $f^2(\theta, \phi)$ ด้วยสมการ (2.18) จะเป็น

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi f^2(\theta, \phi) \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_c}\right)$$

ดังนั้นสมการ (3.16) เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi f^2(\theta, \phi) \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_c}\right) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi [f^2(\theta, \phi) \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T}\right) \\
&\quad - f^4(\theta, \phi) \frac{7}{8} \frac{\Delta^2(T) \zeta(3)}{\pi^2 T^2}]
\end{aligned}$$

$$\text{ให้ } \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi f^2(\theta, \phi) = \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \text{ ดังนั้น}$$

$$\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_c}\right) = \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T_*}\right) - \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \Delta^2(T) \frac{7}{8} \frac{\zeta(3)}{\pi^2 T^2}$$

$$\Delta^2(T) = \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \ln(T_c/T)}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle \left(\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2}\right)}$$

$$= - \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \ln(T/T_c)}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle \left(\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2}\right)}$$

$$\therefore \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) = -\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) \text{ และเนื่องจาก } x = \ln(1+x) \text{ ดังนั้น } \ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = \ln\left(1 + \frac{T-T_c}{T_c}\right) = \frac{T-T_c}{T_c}$$

ในกรณี T ใกล้ T_c จะได้

$$\Delta^2(T) = \left(\frac{T_c - T}{T_c}\right) \frac{8\pi^2 T_c^2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{7\zeta(3) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \quad (3.17)$$

สมการ (3.17) เป็นสมการช่องว่างพลังงานที่ T ใกล้ T_c หา $\frac{d\Delta^2(T)}{dT}$ ได้เป็น

$$\frac{d\Delta^2(T)}{dT} = -\frac{8\pi^2 T_c \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{7\zeta(3) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \quad (3.18)$$

พิจารณาสมการ (3.13) เทอมแรกเป็นความจุความร้อนในวัสดุปกติธรรมดา $C_N(T)$ ที่ $T = T_c$ มีสมการเป็น

$$C_N(T) = \frac{2N_0}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T} + 1)} E_k^2 dE_k$$

ส่วนเทอมที่สองเป็นความจุความร้อนในวัสดุที่อยู่ในสภาวะนำยวดยิ่ง นำ $C_N(T)$ ลบออกจากสมการ (3.13) และแทนสมการ (3.18) ลงไปจะได้

$$C_S(T) - C_N(T) = \frac{2N_0 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{4\pi T^2 \langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T)}{\exp(\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T) + 1} \cdot \left[\frac{T}{2} f^2(\theta, \phi) \frac{8\pi^2 T_c}{7\zeta(3)}\right] dE_k$$

และที่ $T = T_c$ ได้ $\Delta(T_c) = 0$ ดังนั้น

$$C_S(T) - C_N(T) = \frac{N(0)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{E_k/T}}{(e^{E_k/T} + 1)^2} \frac{8\pi^2 T_c \langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{7\zeta(3) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle} dE_k$$

$$\text{ให้ } x = \frac{E_k}{T},$$

$$C_S(T) - C_N(T) = \frac{N_0}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{8\pi^2 T_c}{7\zeta(3)} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} T dx$$

$$\text{ให้ } u = e^x + 1 \rightarrow du = e^x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_1^{\infty}$$

$$C_S(T) - C_N(T) = N_0 \frac{8\pi^2 T_c}{7\zeta(3)} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2}$$

$$= N_0 \frac{8\pi^2 T_c}{7\zeta(3)} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle}$$

นำ $C_N(T)$ จากสมการ (3.14) หาค่าลบ

$$\begin{aligned} \left. \frac{C_S(T) - C_N(T)}{C_N(T)} \right|_{T=T_c} &= \frac{12}{7\zeta(3)} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \\ &= 1.43 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \end{aligned} \quad (3.19)$$

สำหรับสมการ (3.19) ยังสามารถหาได้อีกวิธีซึ่งสุดท้ายจะได้รูปแบบสมการที่เหมือนกัน การหาเริ่มจากสมการผลต่างระหว่างศักย์ทางเทอร์โมไดนามิก Ω ของวัสดุในสภานำยวดยิ่งกับสภาพปกติ (Walecka, 1969 : 450)

$$\frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} = \int_0^{\Delta} d\Delta' (\Delta')^2 \frac{d(1/V_0)}{d\Delta'} \quad (3.20)$$

เมื่อ $\frac{1}{V_0}$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $\Delta(T)$ โดยมีสมการเป็น

$$\frac{1}{V_0} = \frac{N_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta f^2(\theta, \phi) d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{E_k^2 + \Delta'^2(T)} f^2(\theta, \phi)}{2T}\right)}{\sqrt{E_k^2 + \Delta'^2(T)} f^2(\theta, \phi)} dE_k$$

ให้ $E' = \sqrt{E_k^2 + \Delta'^2(T)f^2(\theta, \phi)}$ สมการข้างบนจะได้เป็น

$$\frac{1}{V_0} = \frac{N_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} f^2(\theta, \phi) \frac{\tanh(E'/2T)}{E'} dE_k$$

แทนลงในสมการ (3.20) จะได้

$$\frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} = \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \int_0^{\omega_D} dE_k \int_0^\Delta d\Delta' (\Delta')^2 \frac{\partial}{\partial \Delta'} \left(\frac{\tanh(E'/2T)}{E'} \right) \quad (3.21)$$

อินทิเกรตสมการ (3.21) ด้วยเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} = \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \int_0^{\omega_D} dE_k \left[\frac{\Delta(T)^2}{E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) - 2 \int_0^\Delta \frac{\Delta'}{E'} \tanh\left(\frac{E'}{2T}\right) d\Delta' \right] \quad (3.22)$$

พิจารณาเทอมที่สองทางขวา $2 \int_0^\Delta \frac{\Delta'}{E_k} \tanh\left(\frac{E'}{2T}\right) d\Delta'$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = \frac{1}{2T} \sqrt{E_k^2 + \Delta'^2(T)f^2(\theta, \phi)}$

$$du = \frac{1}{2T} (E_k^2 + \Delta'^2(T)f^2(\theta, \phi))^{-1/2} \Delta' f^2(\theta, \phi) d\Delta'$$

ที่ขอบเขต $\int_0^\Delta \rightarrow \int_{E_k/2T}^{E/2T}$ เมื่อ $E = \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)f^2(\theta, \phi)}$ ดังนั้นอินทิกรัลเทอมที่สองเป็น

$$\begin{aligned} \frac{4T}{f^2(\theta, \phi)} \int_{E_k/2T}^{E/2T} \tanh u du &= \frac{4T}{f^2(\theta, \phi)} \left[\ln\left(\cosh \frac{E}{2T}\right) - \ln\left(\cosh \frac{E_k}{2T}\right) \right] \\ &= \frac{4T}{f^2(\theta, \phi)} \ln\left(\frac{\cosh E/2T}{\cosh E_k/2T}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (3.22) เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} &= \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \left[\int_0^{\omega_D} \frac{\Delta^2(T)}{E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) dE_k \right. \\
&\quad \left. - \frac{4T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln\left(\frac{\cosh(\frac{E}{2T})}{\cosh(\frac{E_k}{2T})}\right) dE_k \right] \\
&= \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \frac{\Delta^2(T)}{V_0} - \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} [\ln(1 + e^{-E/T}) \\
&\quad + \frac{(E - E_k)}{2T}] dE_k + \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E_k/T}) dE_k \quad (3.23)
\end{aligned}$$

พิจารณาเทอม $-\frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E_k/T}) dE_k$ เนื่องจาก $\omega_D \gg T$ ทำให้ขอบเขต

การอินทิเกรตเข้าสู่อินฟินิตี้และให้ $x = 1 + e^{-E_k/T} \rightarrow e^{-E_k/T} = x - 1$, $dx = -\frac{e^{-E_k/T}}{T}$ จะได้

$$\frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \int_2^1 \frac{\ln x}{e^{-E_k/T}} dx = \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \int_2^1 \frac{\ln x}{(x-1)} dx$$

ให้ $y = x - 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \int_2^1 \frac{\ln x}{(x-1)} dx &= \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy \\
&= \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \frac{\pi^2}{12} \\
&= \frac{1}{3} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} N_0 \pi^2 T^2 \\
&\approx -\frac{[\Omega_N(T) - \Omega_N(0)]}{V} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{พิจารณาเทอม } -\frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \frac{(E - E_k)}{2T} dE_k \\
& -\frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \frac{(E - E_k)}{2} dE_k = -2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} (\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)} - E_k) dE_k \\
& = -2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \left[\int_0^{\omega_D} \sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)} dE_k \right. \\
& \quad \left. - \frac{\omega_D^2}{2} \right] \\
& \text{ให้ } E_k = \Delta(T) f(\theta, \phi) \sinh \theta, \quad \int_0^{\omega_D} \rightarrow \int_0^{\sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)}} \\
& = -2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \left[\int_0^{\frac{\sinh^{-1} \omega_D}{\Delta(T) f^2(\theta, \phi)}} \sqrt{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi) \sinh^2 \theta + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)} \cdot \right. \\
& \quad \left. \Delta(T) f(\theta, \phi) \cosh \theta d\theta - \frac{\omega_D^2}{2} \right] \\
& = -\frac{2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \frac{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}{2} \left[\sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)} - \omega_D^2 \right. \\
& \quad \left. + \sinh(\sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)}) \cosh(\sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)}) \right] \\
& \approx -\frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} N_0 \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi) \left[\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)}\right) + \frac{\omega_D^2}{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)} + \frac{1}{2} - \omega_D^2 \right] \\
& = -\langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \left[\Delta^2(T) \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T) f(\theta, \phi)}\right) + \frac{\Delta^2(T)}{2} \right] \tag{3.25}
\end{aligned}$$

จากสมการ (2.15) โดยพิจารณาเทอม $f^2(\theta, \phi)$ จะเป็น

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)f(\theta, \phi)}\right)$$

นำ $\Delta^2(T) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle$ คูณตลอด

$$\frac{\Delta^2(T) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{V_0} = N_0 \Delta^2(T) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)f(\theta, \phi)}\right)$$

นำเทอมนี้บวกเข้าและลบออกที่สมการ (3.25)

$$\begin{aligned} -\frac{2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} (E - E_k) dE_k &= -\frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) + \frac{\Delta^2(T) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{V_0} \\ &\quad - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(T)f(\theta, \phi)}\right) \\ &\quad - \frac{\Delta^2(T) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{V_0} \\ &= -\frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) - \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \Delta^2(T)}{V_0} \\ &\quad - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ดังนั้นสมการ (3.23) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} &= \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \Delta^2(T)}{V_0} - \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E/T}) dE_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} N_0 \pi^2 T^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \left[-\frac{N_0 \Delta^2(T)}{2} - N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) - \frac{4N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E/T}) dE_k \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.24)

$$\begin{aligned}
-\frac{[\Omega_N(T) - \Omega_N(0)]}{V} &\approx \frac{1}{3} N_0 \pi^2 T^2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} \\
\frac{[\Omega_N(0) - \Omega_N(T)]}{V} &\approx \frac{1}{3} N_0 \pi^2 T^2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)}
\end{aligned}$$

แทนลงในสมการ (3.27)

$$\begin{aligned}
\frac{[\Omega_N(0) - \Omega_N(T)]}{V} &= -\frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) \\
&\quad - \frac{4 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E/T}) dE_k + \frac{\Omega_N(0)}{V} - \frac{\Omega_N(T)}{V} \\
\frac{\Omega_S(T)}{V} &= \frac{\Omega_N(0)}{V} - \frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) \\
&\quad - 4 \frac{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle N_0 T}{f^2(\theta, \phi)} \int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E/T}) dE_k \quad (3.28)
\end{aligned}$$

ในขณะที่อุณหภูมิต่างๆสามารถประมาณได้ว่า $\omega_D \rightarrow \infty$ ทำให้เทอมอินทิกรัลในสมการ (3.28) หาค่าได้โดยใช้ $x = \ln(1 + x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\ln(1 + e^{-E/T}) &= \ln[1 + \exp(-\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T)] \\
&= \exp(-\sqrt{E_k^2 + \Delta^2(T)} f^2(\theta, \phi)/T)
\end{aligned}$$

และ $[E_k^2 + \Delta^2(T)f^2(\theta, \phi)]^{1/2} = \Delta(T)f(\theta, \phi) + \frac{E_k^2}{2\Delta(T)f(\theta, \phi)} + \dots$

$$\approx \Delta(T)f(\theta, \phi) + \frac{E_k^2}{2\Delta(T)f(\theta, \phi)}$$

เทอม $\int_0^{\omega_D} \ln(1 + e^{-E/T}) dE_k$ จะเป็น

$$\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\Delta(T)f(\theta, \phi)}{T} + \frac{E_k^2}{2T\Delta(T)f(\theta, \phi)}\right)\right] dE_k$$

$$\approx \exp\left[-\frac{\Delta(T)f(\theta, \phi)}{T}\right] \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{E_k^2}{2T\Delta(T)f(\theta, \phi)}\right] dE_k$$

$$\approx \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{\Delta(T)f(\theta, \phi)}{T}\right] (2\pi T\Delta(T)f(\theta, \phi))^{1/2}$$

ดังนั้นสมการ (3.28) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_s(T)}{V} &= \frac{\Omega_N(0)}{V} - \frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) - \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(T) \ln\left(\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)}\right) \\ &\quad - \frac{2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} (2\pi T^3 \Delta(T) f(\theta, \phi))^{1/2} e^{-\Delta(T)f(\theta, \phi)/T} \end{aligned} \quad (3.29)$$

ประมาณให้ $\Delta(T) \approx \Delta(0)$ สมการ (3.29) เป็น

$$\frac{\Omega_s(T)}{V} = \frac{\Omega_N(0)}{V} - \frac{2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0}{f^2(\theta, \phi)} (2\pi T^3 \Delta(0) f(\theta, \phi))^{1/2} e^{-\Delta(0)f(\theta, \phi)/T}$$

$$- \frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(0)$$

พิจารณาสมการ (3.27) ถ้า $T \rightarrow 0$ จะประมาณว่าเป็น

$$\frac{\Omega_s(T) - \Omega_N(T)}{V} = -\frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(0) + \frac{1}{3} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \pi^2 N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \quad (3.30)$$

ประมาณให้ $\Omega_s(T) - \Omega_N(T) \approx F_s - F_N$ สมการ (3.30) จะเป็น

$$\frac{F_s - F_N}{V} \approx -\frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(0) + \frac{1}{3} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle \pi^2 N_0 T^2}{f^2(\theta, \phi)} \quad (3.31)$$

โดย F_s และ F_N เป็นพลังงานเสรีของเฮมทโฮลต์ (Helmholtz free energy) ในสภานำยวดยิ่งและสภาพปกติจากสมการ (Walecka. 1969 : 419)

$$F_s(T, 0) = F_N(T, 0) - \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (3.32)$$

โดย H_c เป็นสนามแม่เหล็กวิกฤต (Critical magnetic field) และสมการ

$$\frac{\Delta(0)f(\theta, \phi)}{T_c} = \pi e^{-\gamma} f(\theta, \phi) \approx 1.76 f(\theta, \phi) \quad (3.33)$$

ดังนั้นสมการ (3.31) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{H_c^2}{8\pi} &= \frac{1}{2} \langle f^2(\theta, \phi) \rangle N_0 \Delta^2(0) - \frac{1}{3} \pi^2 N_0 T^2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} \\ &= 4\pi N_0 \Delta^2(0) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle - \frac{8}{3} \pi^3 N_0 T^2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{f^2(\theta, \phi)} \\ H_c &= \sqrt{4\pi N_0 \Delta^2(0) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \left[1 - \frac{e^{2\gamma}}{3} \left(\frac{T}{T_c f^2(\theta, \phi)} \right)^2 \right]} \\ &\approx H_c(0) \left[1 - 1.06 \left(\frac{T}{T_c f^2(\theta, \phi)} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

เมื่อ $H_c(0) = \sqrt{4\pi N_0 \Delta^2(0) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}$ เป็นสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ $T = 0$

โดยพิจารณาว่า $\frac{\Delta(T)}{T} \gg 1$ จากสมการในบทที่สองที่ T ใกล้ T_c

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_0} &= 4N_0 T \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^2(\theta, \phi)}{E_k^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi) + \omega_n^2} dE_k \\ &\approx 4N_0 T \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} f^2(\theta, \phi) \left[\frac{1}{E_k^2 + \omega_n^2} - \frac{\Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} \right] dE_k \end{aligned}$$

นำไปหาอนุพันธ์เทียบกับ Δ

$$\frac{d}{d\Delta} \left(\frac{1}{V_0} \right) = -4N_0 T \langle f^2(\theta, \phi) \rangle \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Delta(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k$$

แทนลงในสมการ (3.20) โดยพิจารณาว่า Δ' เป็น Δ

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} &= - \int_0^{\Delta} d\Delta (\Delta(T))^2 [4N_0 T \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Delta(T)}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} dE_k] \\ &= - \langle f^4(\theta, \phi) \rangle 2\Delta^4(T) N_0 T \int_0^{\omega_D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dE_k}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\omega_D \gg T_c$ สามารถประมาณได้ว่าขอบเขตของการอินทิเกรตเข้าสู่อินฟินิตี้

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} &= -2N_0 T \Delta^4(T) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dE_k}{(E_k^2 + \omega_n^2)^2} \\ &= -2N_0 T \Delta^4(T) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{4\omega_n^3} \\ &= -\frac{7\zeta(3)}{8} \frac{N_0 \Delta^4(T)}{T^2} \frac{1}{2\pi^2} \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \end{aligned} \tag{3.35}$$

จากสมการความจุความร้อนที่สถานะปกติ (Walecka. 1969 : 451) จะได้ C_N เป็น

$$C_N = \frac{1}{3} \pi^2 T V N_0 V_0$$

V_0 เป็นแฟคเตอร์สำหรับสภาพซ้อนสถานะ (degeneracy factor) และ $V_0 = 2$ สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออนที่มีสปิน $-\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น

$$C_N = \frac{2}{3} \pi^2 N_0 V T \quad (3.36)$$

จากสมการ (3.35) แทน $\Delta^4(T)$ ลงไปซึ่ง $\Delta^4(T)$ ได้หามาแล้วคือสมการ (3.17) ดังนั้น

$$\frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} = -\frac{8}{7\zeta(3)} N_0 (\pi T_c)^2 \frac{1}{2} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \quad (3.37)$$

จากสมการ (3.32)

$$\begin{aligned} \frac{F_S(T, 0) - F_N(T, 0)}{V} &= \frac{\Omega_S - \Omega_N}{V} = -\frac{1}{8\pi} H_c^2 \\ H_c^2 &= \frac{8}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 4\pi N_0 V (\pi T_c)^2 \frac{\Delta^2(0) \langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\Delta^2(0) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \\ H_c &= \left(\frac{8}{7\zeta(3)}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) H_c(0) e^{\gamma} V^{1/2} \left(\frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

สมการ (3.38) ใช้อธิบายช่วงกระโดดของกราฟความจุความร้อนที่ T_c ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสมการ

$$\begin{aligned} C_S - C_N &= \frac{T_c}{4\pi} \left[\left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{T_c} \right]^2 \\ &= \frac{T_c}{4\pi} \left[\sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} H_c(0) e^{\gamma} V^{1/2} \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \frac{d}{dT} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{7\zeta(3)} N_0 \pi^2 T_c V \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \quad (3.39)$$

นำสมการ (3.36) หาสสมการ (3.39)

$$\begin{aligned} \frac{C_S - C_N}{C_N} &= \frac{8}{7\zeta(3)} N_0 \pi^2 T_c V \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \frac{3}{2\pi^2 N_0 V T_c} \\ &= 1.43 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle} \end{aligned} \quad (3.40)$$

จะเห็นว่าสมการ (3.19) และ (3.40) ได้สมการของ $\frac{C_S - C_N}{C_N}$ ที่ $T = T_c$ เหมือนกัน

ความจุความร้อนที่ช่วงกระโดดเมื่อมีแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตร

1. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาสส์ และ มากิ

$$\Delta(k) = \Delta(0) \left(\frac{1 + a' z^2}{1 + a'} \right) \quad (3.41)$$

สำหรับแบบจำลองนี้จะเห็นว่า $\Delta(k) \propto 1 + a' z^2$; เมื่อ $z = \cos \theta$

โดยที่ a' เป็นพารามิเตอร์ของความไม่สมมาตร

θ เป็นมุมในระนาบ ab มีค่าจาก 0 ถึง π

นั่นคือ

$$f(\theta) = \frac{1 + a' \cos^2 \theta}{(1 + a')} \quad (3.42)$$

แทนสมการ (3.42) ลงใน (3.40) จะได้

$$\left. \frac{C_S - C_N}{C_N} \right|_{T=T_c} = 1.43 \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + a' \cos^2 \theta)^2 d\theta d\phi \right)^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + a' \cos^2 \theta)^4 d\theta d\phi} \quad (3.43)$$

พิจารณาเทอมบน

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + a' \cos^2 \theta)^2 d\theta d\phi \right)^2 &= \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + 2a' \cos^2 \theta + a'^2 \cos^4 \theta) d\theta d\phi \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{4a'}{3} + \frac{2a'^2}{5} \right) d\phi \right)^2 \\ &= 1 + \frac{4a'}{3} + \frac{38a'^2}{45} + \frac{4a'^3}{15} + \frac{a'^2}{25} \end{aligned}$$

พิจารณาเทอมล่าง

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + a' \cos^2 \theta)^4 d\theta d\phi &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + 4a' \cos^2 \theta + 6a'^2 \cos^4 \theta + 4a'^3 \cos^6 \theta \\ &\quad + a'^4 \cos^8 \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \theta + 4a' \sin \theta \cos^2 \theta + 6a'^2 \sin \theta \cos^4 \theta \\ &\quad + 4a'^3 \sin \theta \cos^6 \theta + a'^4 \sin \theta \cos^8 \theta) d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{8a'}{3} + \frac{12a'^2}{5} + \frac{8a'^3}{7} + \frac{2a'^4}{9} \right) d\phi \\ &= 1 + \frac{4a'}{3} + \frac{6a'^2}{5} + \frac{4a'^3}{7} + \frac{a'^4}{9} \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการ (3.43) เป็น

$$\left. \frac{C_S - C_N}{C_N} \right|_{T=T_c} = 1.43 \frac{(1 + 4a'/3 + 38a'^2/45 + 4a'^3/15 + a'^4/25)}{(1 + 4a'/3 + 6a'^2/5 + 4a'^3/7 + a'^4/9)} \quad (3.44)$$

2. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอลซาสเฮนนิโควา , แดม และ มากิ

$$\Delta(k) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a'z^2}}$$

เมื่อ $z = \cos \theta$ โดย θ เป็นมุมในระนาบ ab ซึ่งมีค่าจาก 0 ถึง π
นั่นคือ

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \quad (3.45)$$

แทนสมการ (3.45) ลงใน (3.40)

$$\left. \frac{C_S - C_N}{C_N} \right|_{T=T_c} = 1.43 \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \right)^2 d\theta d\phi \right)^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \right)^4 d\theta d\phi} \quad (3.46)$$

พิจารณาเทอมบน

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \right)^2 d\theta d\phi \right)^2 = \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{1 + a' \cos^2 \theta} \right) d\theta d\phi \right)^2$$

$$\text{ให้ } z = \cos \theta \text{ ที่ขอบเขต } \int_0^\pi \rightarrow -2 \int_0^1$$

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \right)^2 d\theta d\phi \right)^2 = \left(\int_0^1 \frac{dz}{1 + za'^2} \right)^2$$

$$\text{ให้ } z = \frac{1}{\sqrt{a'}} \tan \theta \text{ ที่ขอบเขต } \int_0^1 \rightarrow \int_0^{\tan^{-1} \sqrt{a'}}$$

$$\left(\int_0^1 \frac{dz}{1+za'^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a'}} \int_0^{\tan^{-1}\sqrt{a'}} \frac{\sec^2 \theta}{1+\tan \theta} d\theta \right)^2$$

$$= \frac{(\tan^{-1} \sqrt{a'})^2}{a'}$$

พิจารณาเทอมล่าง

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1+a' \cos^2 \theta}} \right)^4 d\theta d\phi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1+a' \cos^2 \theta)^2} d\theta$$

ให้ $z = \cos \theta$ ที่ขอบเขต $\int_0^\pi \rightarrow -2 \int_0^1$

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{(1+a' \cos^2 \theta)^2} d\theta = \int_0^1 \frac{dz}{(1+a'z^2)^2}$$

ให้ $a'z^2 = \tan \theta$ ที่ขอบเขต $\int_0^1 \rightarrow \int_0^{\tan^{-1}\sqrt{a'}}$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(1+a'z^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \int_0^{\tan^{-1}\sqrt{a'}} \frac{d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1+a'} \tan^{-1} \sqrt{a'} + \sqrt{a'}}{(2\sqrt{a'})\sqrt{1+a'}}$$

∴ สมการ (3.46) เป็น

$$\frac{C_S - C_N}{C_N} \bigg|_{T=T_c} = \frac{\frac{(\tan^{-1} \sqrt{a'})^2}{a'}}{\frac{\sqrt{1+a'} (\tan^{-1} \sqrt{a'}) + \sqrt{a'}}{2\sqrt{a'}\sqrt{1+a'}}}$$

$$= 1.43 \frac{2(1+a')(\arctan \sqrt{a'})^2}{a' + \sqrt{a'}(1+a') \arctan \sqrt{a'}} \quad (3.47)$$

3. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่

ในแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ ช่องว่างพลังงานขึ้นอยู่กับมุม θ เพียงอย่างเดียวหรือพิจารณาความไม่สมมาตรในลักษณะ $\Delta_a = \Delta_b \neq \Delta_c$ การปรับปรุงจะเพิ่มมุมอะซิมุสเข้าไปทำให้ความไม่สมมาตรเป็น

$$\Delta(\theta, \phi) = \Delta(0) \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2 \right) \quad (3.48)$$

ดังนั้นฟังก์ชันความไม่สมมาตรเป็น

$$f(\theta, \phi) = \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2 \right) \quad (3.49)$$

โดยที่ $\Delta(0)$, a และ b เป็นพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานในแกนผลึก c , a และ b ตามลำดับ

ภายใต้แบบจำลองนี้ $\Delta_c = \Delta(0)$, $\Delta_a = \Delta(0)(1+a)$ และ $\Delta_b = \Delta(0)(1+b)$ ให้ $b = a + \delta$

โดย δ เป็นค่าที่แสดงผลต่างของ a และ b ในกรณีนี้ให้ δ มีค่าน้อยๆ แทนสมการ (3.49) ลงใน (3.40)

$$\left. \frac{C_S - C_N}{C_N} \right|_{T=T_c} = 1.43 \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + (a + \delta)(\sin \theta \sin \phi)^2 \right)^2 d\theta d\phi \right)^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + (a + \delta)(\sin \theta \sin \phi)^2 \right)^4 d\theta d\phi} \quad (3.50)$$

พิจารณาเทอมบน

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + (a + \delta)(\sin \theta \sin \phi)^2 \right)^2 d\theta d\phi \right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (1 + a \sin^2 \theta + \delta \sin^2 \theta \sin^2 \phi)^2 d\theta d\phi \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{16a^2}{15} + \frac{16\delta^2}{15} \sin^4 \phi + \frac{8a}{5} + \frac{8\delta}{3} \sin^2 \phi + \frac{32a\delta}{15} \sin^2 \phi \right) d\phi \right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3}a + \frac{8}{15}a^2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{8}{15}a\delta + \frac{1}{5}\delta^2 \right)^2$$

พิจารณาเทอมล่าง

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + (a+\delta)(\sin \theta \sin \phi)^2 \right)^4 d\theta d\phi =$$

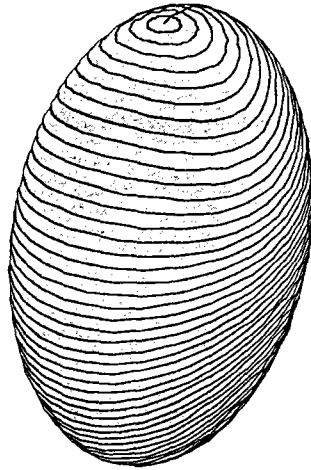
$$\left(\begin{aligned} &1 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{5}a^2 + \frac{64}{35}a^3 + \frac{128}{315}a^4 + \frac{4}{3}\delta + \frac{16}{5}a\delta + \frac{96}{35}a^2\delta \\ &+ \frac{256}{315}a^3\delta + \frac{6}{5}\delta^2 + \frac{72}{35}a\delta^2 + \frac{32}{35}a^2\delta^2 + \frac{4}{7}\delta^3 + \frac{32}{63}a\delta^3 + \frac{1}{9}\delta^4 \end{aligned} \right)$$

$\therefore$ สมการ (3.50) เป็น

$$\left. \frac{C_S - C_N}{C_N} \right|_{T=T_c} = 1.43 \frac{\left(1 + \frac{2}{3}a + \frac{8}{15}a^2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{8}{15}a\delta + \frac{1}{5}\delta^2 \right)^2}{\left(\begin{aligned} &1 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{5}a^2 + \frac{64}{35}a^3 + \frac{128}{315}a^4 + \frac{4}{3}\delta + \frac{16}{5}a\delta + \frac{96}{35}a^2\delta \\ &+ \frac{256}{315}a^3\delta + \frac{6}{5}\delta^2 + \frac{72}{35}a\delta^2 + \frac{32}{35}a^2\delta^2 + \frac{4}{7}\delta^3 + \frac{32}{63}a\delta^3 + \frac{1}{9}\delta^4 \end{aligned} \right)} \quad (3.51)$$

สมการ (3.48) สามารถลดรูปลงไปเป็นสมการ (3.43) ได้ด้วยการให้ $\delta = 0$ และ $a = \frac{-a'}{(1+a')}$; เมื่อ

a' เป็นพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานในแบบจำลองของฮาสส์และมากี



ภาพประกอบ 22 แสดงช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำวงยิ่งยวดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงาน
ขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของฮาสและมากีที่ปรับปรุงใหม่ เขียนในปริภูมิโมเมนตัม โดย
มี $\Delta_c \neq \Delta_a \neq \Delta_b$ และ $\Delta_c > \Delta_a$ และ Δ_b

4. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอลซาสเฮนนิโควา , แคม และ มากี เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่
การปรับปรุงแบบจำลองช่องว่างพลังงานชนิดนี้จะเพิ่มการพิจารณาว่ามีความไม่สมมาตรของ
ช่องว่างพลังงานทั้งสามแกน $\Delta_a \neq \Delta_b \neq \Delta_c$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\Delta(\theta, \phi) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}} \quad (3.52)$$

ดังนั้นฟังก์ชันของความไม่สมมาตรเป็น

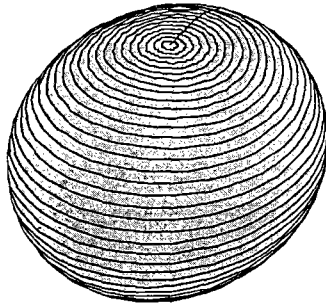
$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}} \quad (3.53)$$

ภายใต้แบบจำลองนี้ $\Delta_c = \Delta(0)$, $\Delta_a = \frac{\Delta(0)}{(1+a)}$ และ $\Delta_b = \frac{\Delta(0)}{(1+b)}$ ให้ $b = a + \delta$ แทน

สมการ (3.53) ลงใน (3.40)

$$\begin{aligned}
\frac{C_S - C_N}{C_N} &= 1.43 \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1+a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}} \right)^2 d\theta d\phi \right)^2}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{1}{\sqrt{1+a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}} \right)^4 d\theta d\phi} \\
&= 1.43 \times 2 \left[\frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)}} + \frac{\delta}{2} \left(-\frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)^{3/2}}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ka^{k-1}}{(2k+1)(1+a)^{k+2}} \right) \right]^2 \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{(1+a)(1+a+\delta)}} + \frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)^{3/2}}} + \frac{\delta}{2} \left(-\frac{2 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)^{5/2}}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ka^{k-1}}{(2k+1)(1+a)^{k+3}} \right) \right]^2 \quad (3.54)
\end{aligned}$$

สมการ (3.51) สามารถลดรูปไปเป็นสมการ (3.45) ได้ด้วยการแทน $\delta = 0$ และ $a = \frac{-a'}{(1+a')}$; a' เป็นพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานตามแบบจำลองของ พอสชาสเฮนนิโควา แดม และมากิ



ภาพประกอบ 23 ช่องว่างพลังงานสำหรับตัวนำเวดจ์ชนิดคลื่นเอสที่มีช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางตามแบบจำลองของ พอสชาสเฮนนิโควา แดม และมากิที่ปรับปรุงใหม่เขียนในปริภูมิโมเมนตัม โดยมี $\Delta_c \neq \Delta_a \neq \Delta_b$ และ $\Delta_c > \Delta_a$ และ Δ_b

บทที่ 4

ผลงานวิจัย

จากการวิจัยในบทก่อน ได้คำนวณหาสมการเชิงคณิตศาสตร์ของความจุความร้อนที่ช่วงกระโดดเมื่อใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตร 4 แบบจำลองได้แก่

1. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาส์ และ มากิ (HM)

$$\Delta(k) = \Delta(0) \left(\frac{1 + a'z^2}{1 + a'} \right)$$

โดยมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรเป็น

$$f(\theta) = \frac{1 + a' \cos^2 \theta}{(1 + a')} \quad (4.1)$$

2. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอลชาสเฮนนี่โควา , แดม และ มากิ (PDM)

$$\Delta(k) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a'z^2}}$$

โดยมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรเป็น

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + a' \cos^2 \theta}} \quad (4.2)$$

3. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ (MO-HM)

$$\Delta(\theta, \phi) = \Delta(0) \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2 \right)$$

โดยมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรเป็น

$$f(\theta, \phi) = \left(1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2 \right) \quad (4.3)$$

4. แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอลชาสเฮนนิโควา , แดม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ (MO – PDM)

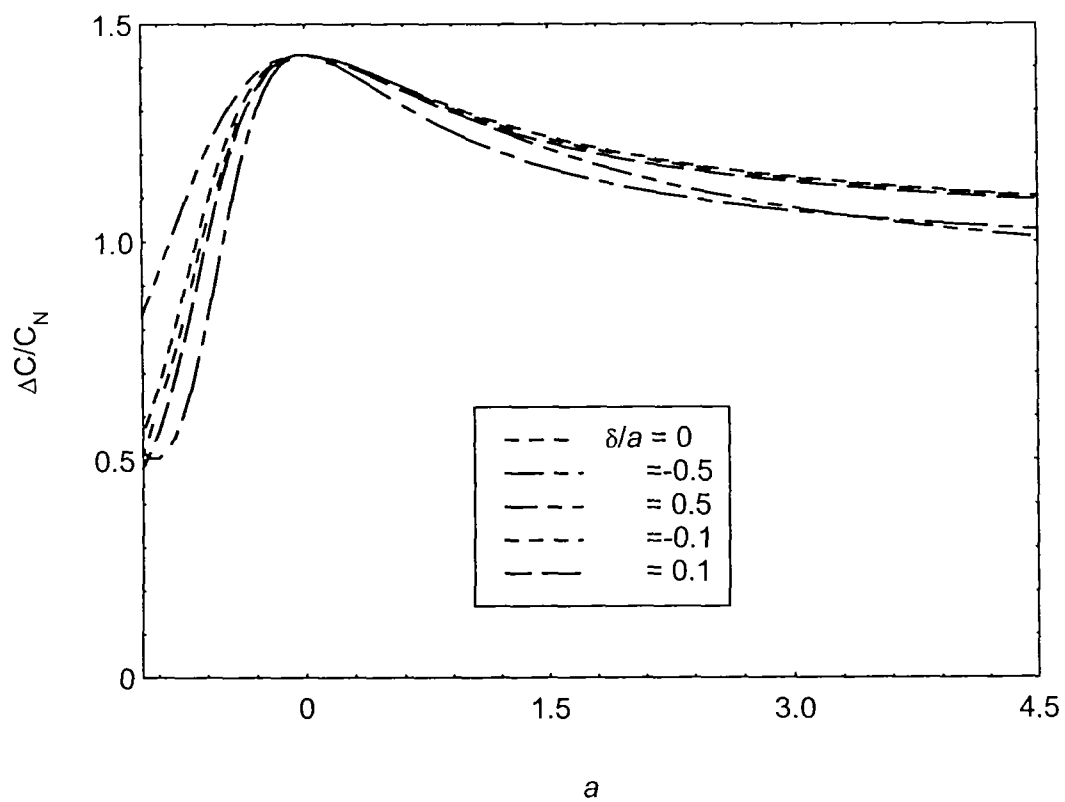
$$\Delta(\theta, \phi) = \frac{\Delta(0)}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}}$$

โดยมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรเป็น

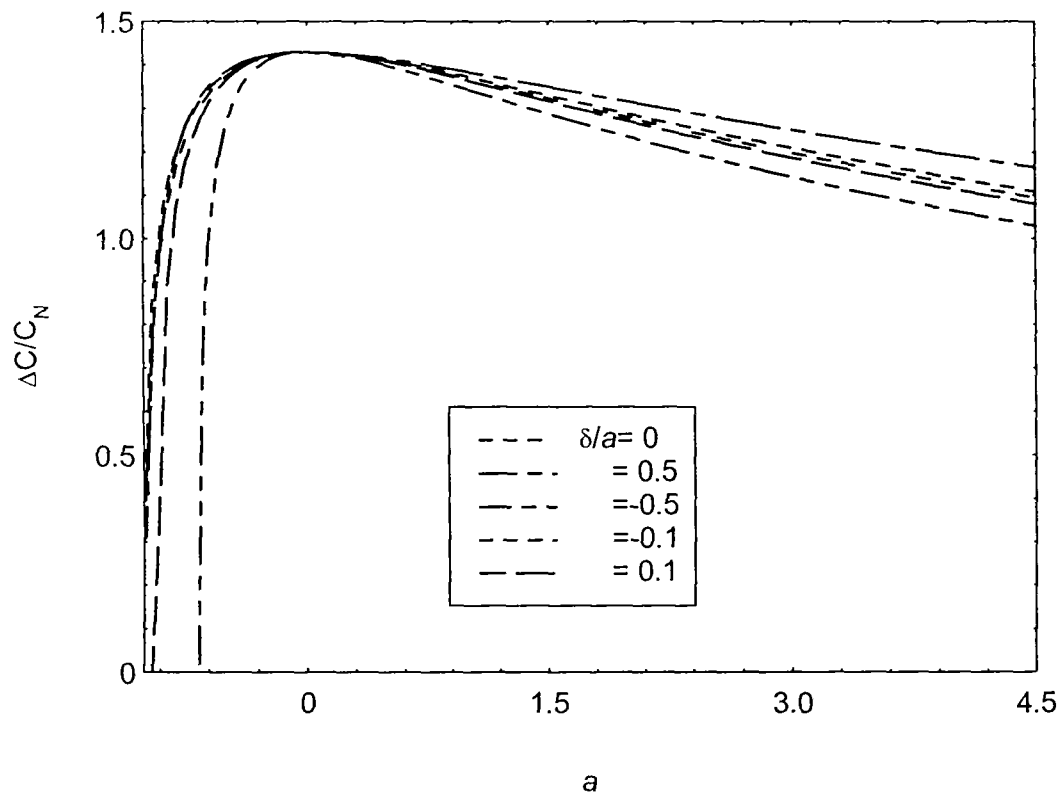
$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}} \quad (4.4)$$

ผลการวิจัยจากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีทำซ้ำกับสมการ $C(T)$ และสมการ $\left. \frac{\Delta C}{C_N} \right|_{T=T_c}$ เมื่อ

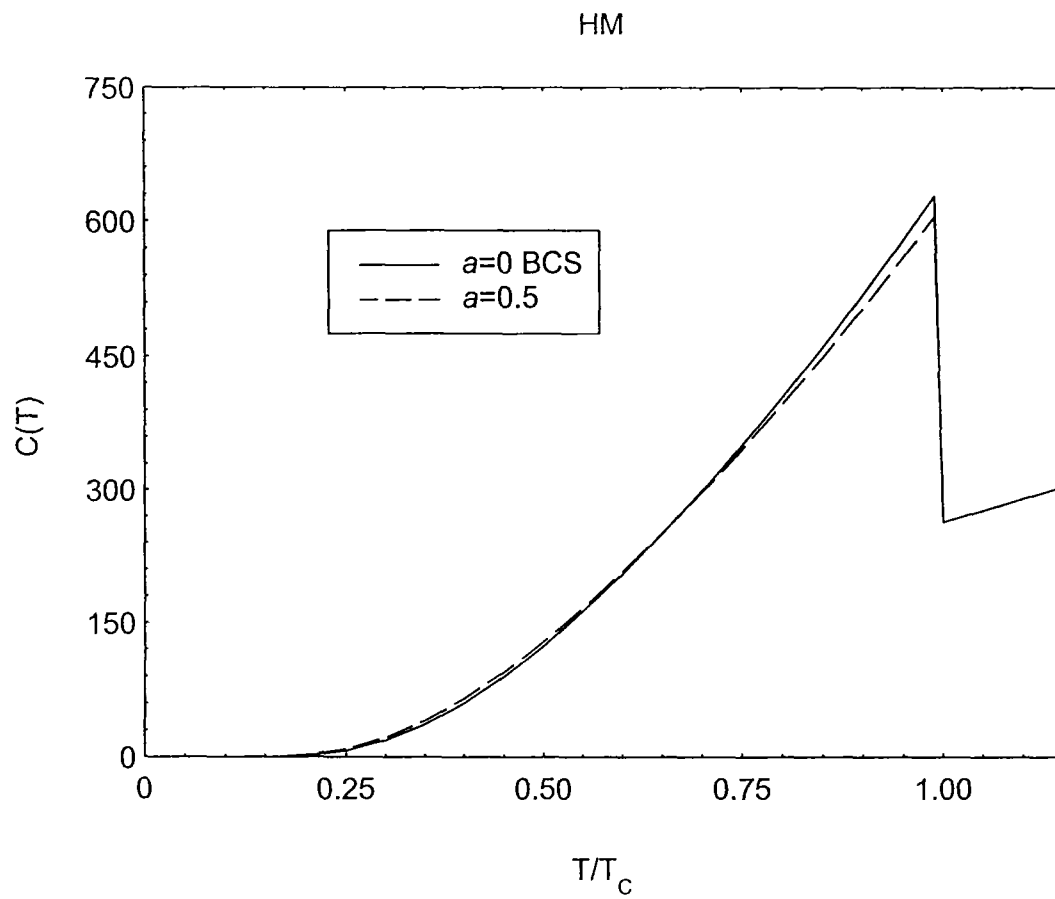
พิจารณาถึงแบบจำลองช่องว่างพลังงานทั้งสี่แบบ ผลที่ได้นำมาเขียนกราฟได้ดังนี้



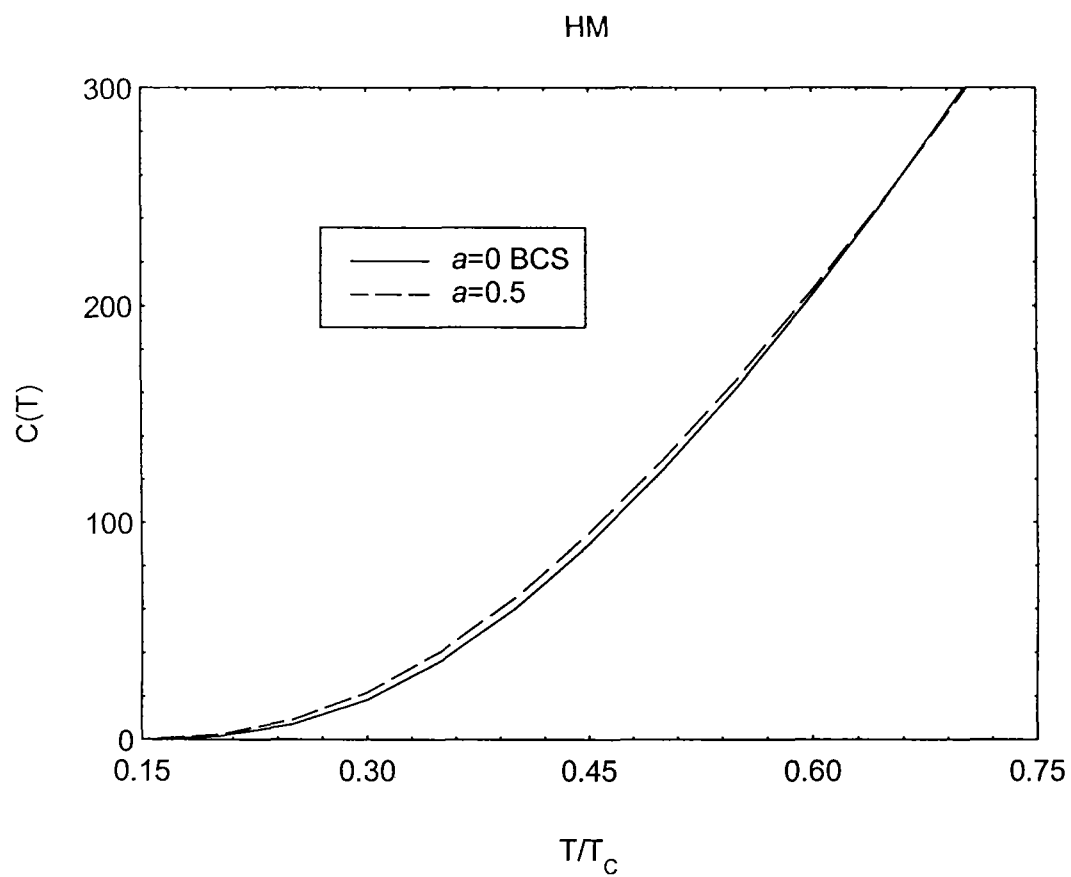
ภาพประกอบ 24 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C/C_N$ กับพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน a โดยแปรตามค่า δ/a สำหรับแบบจำลองช่องว่างพลังงานตามสมการ (3.48)



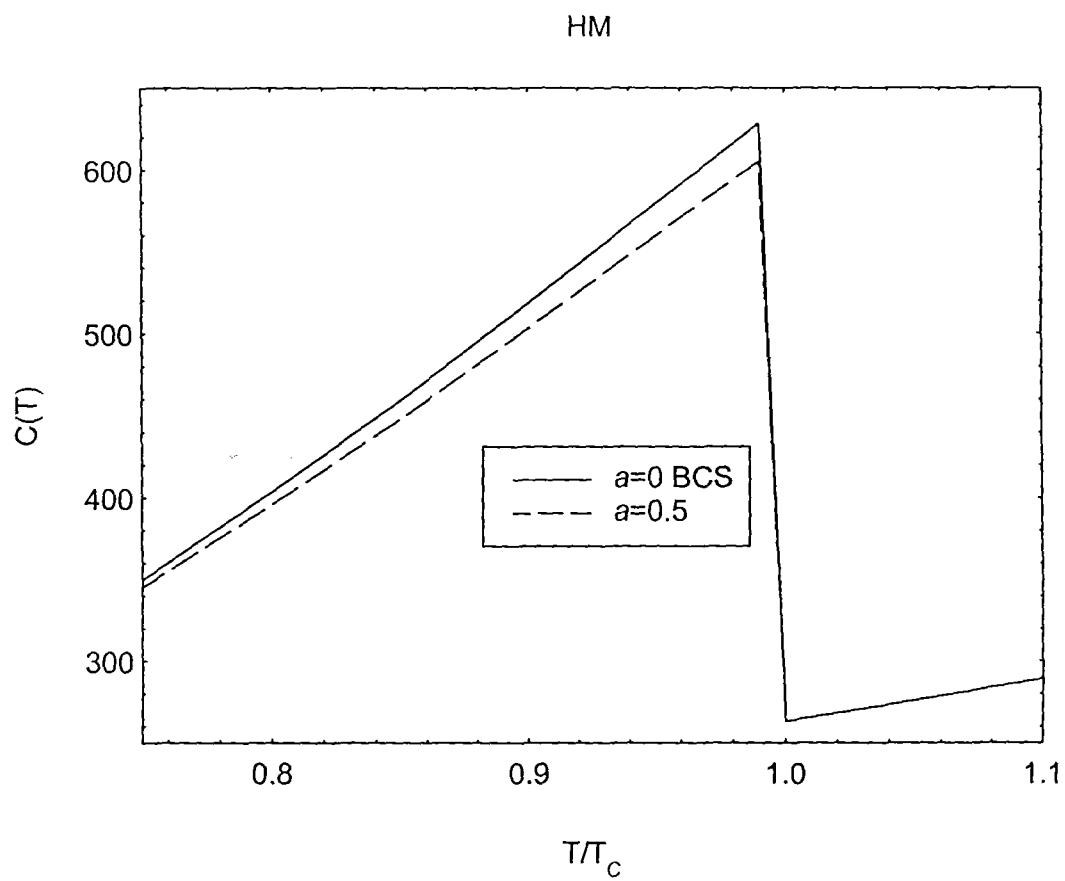
ภาพประกอบ 25 แสดงกราฟระหว่าง $\Delta C/C_N$ กับพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน a โดยแปรตามค่า δ/a สำหรับแบบจำลองช่องว่างพลังงานตามสมการ (3.52)



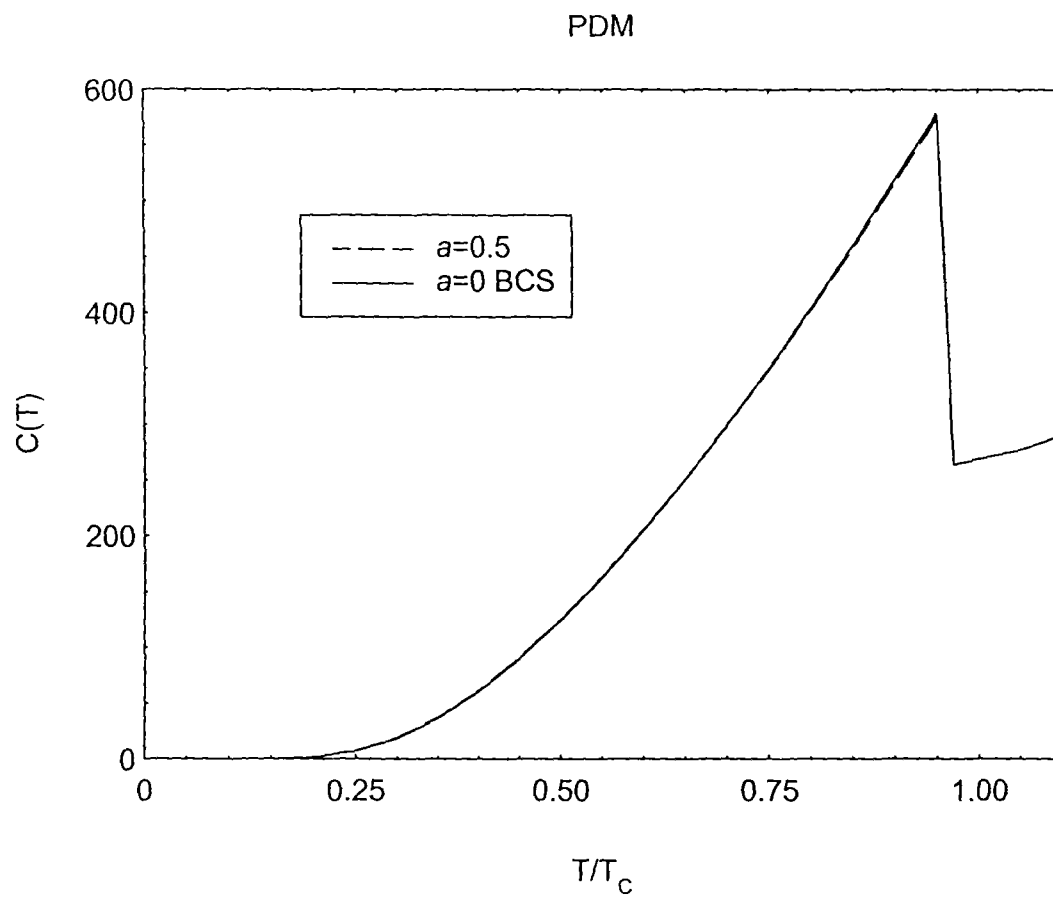
ภาพประกอบ 26 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส หน่วยของ $C(T)$ เป็นหน่วยใดๆ



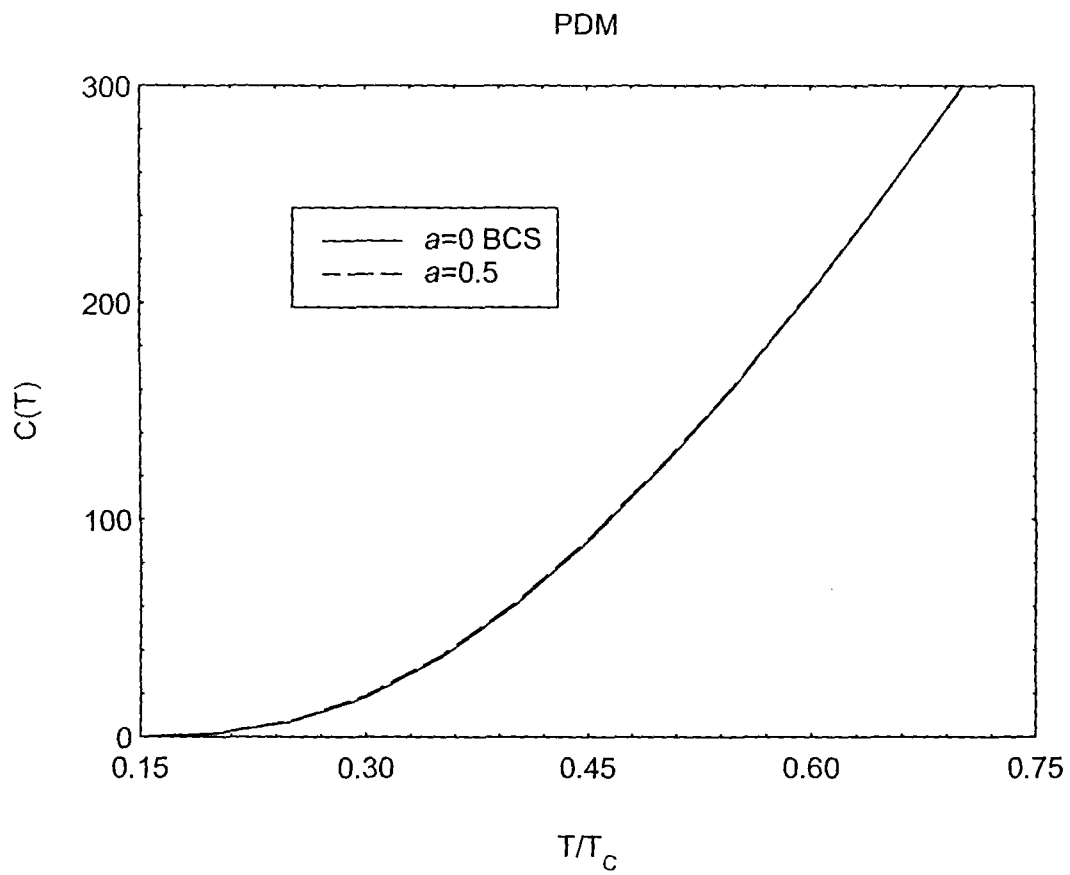
ภาพประกอบ 27 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



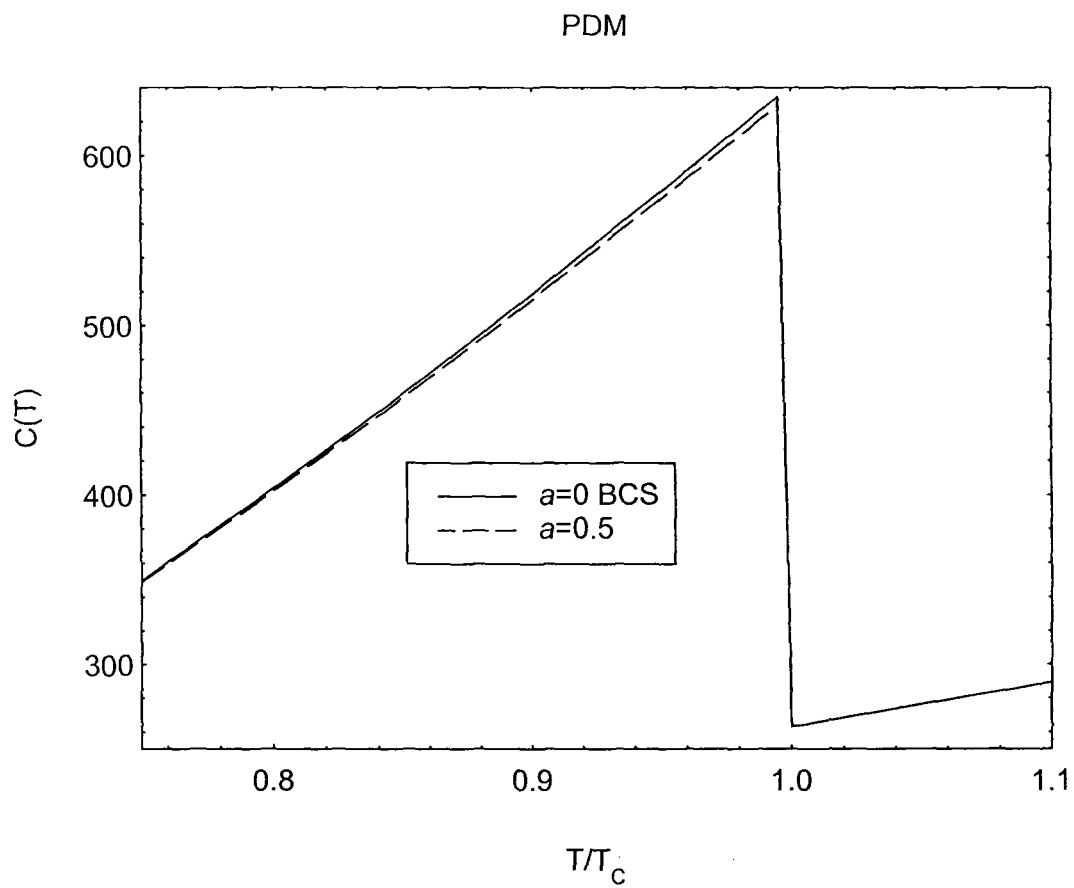
ภาพประกอบ 28 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



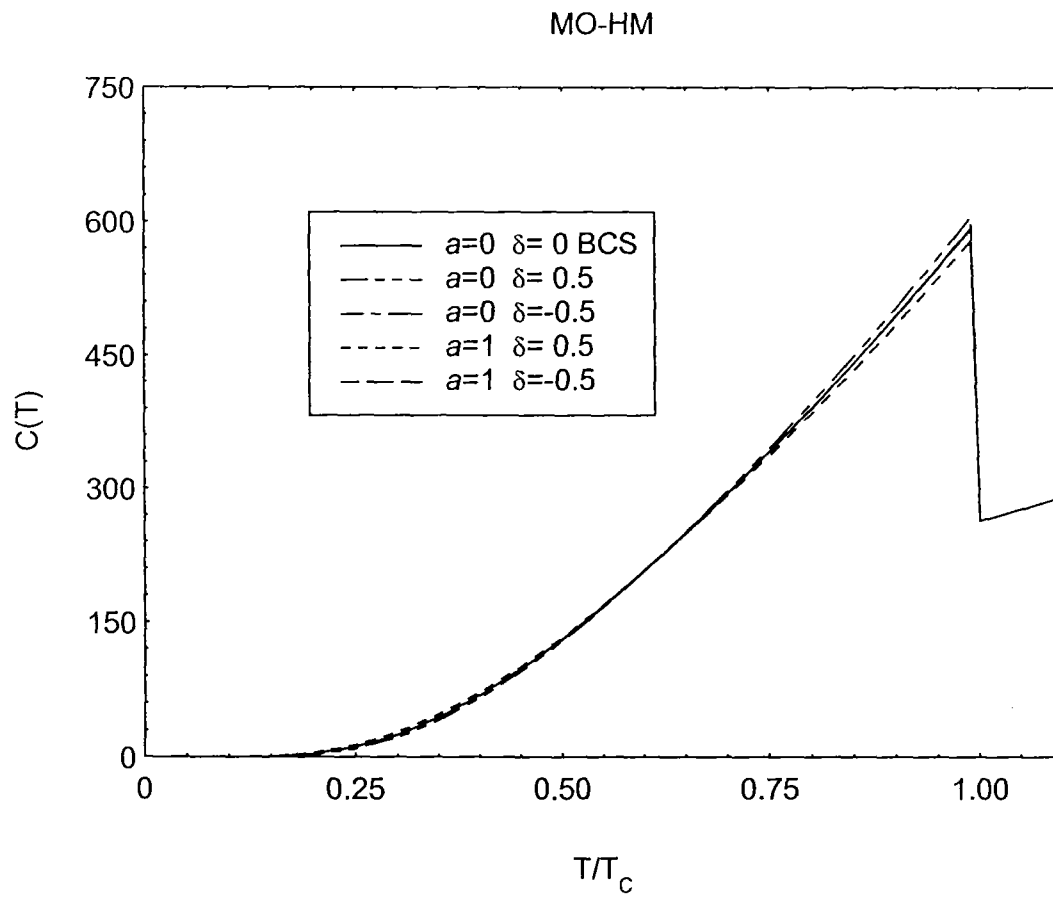
ภาพประกอบ 29 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



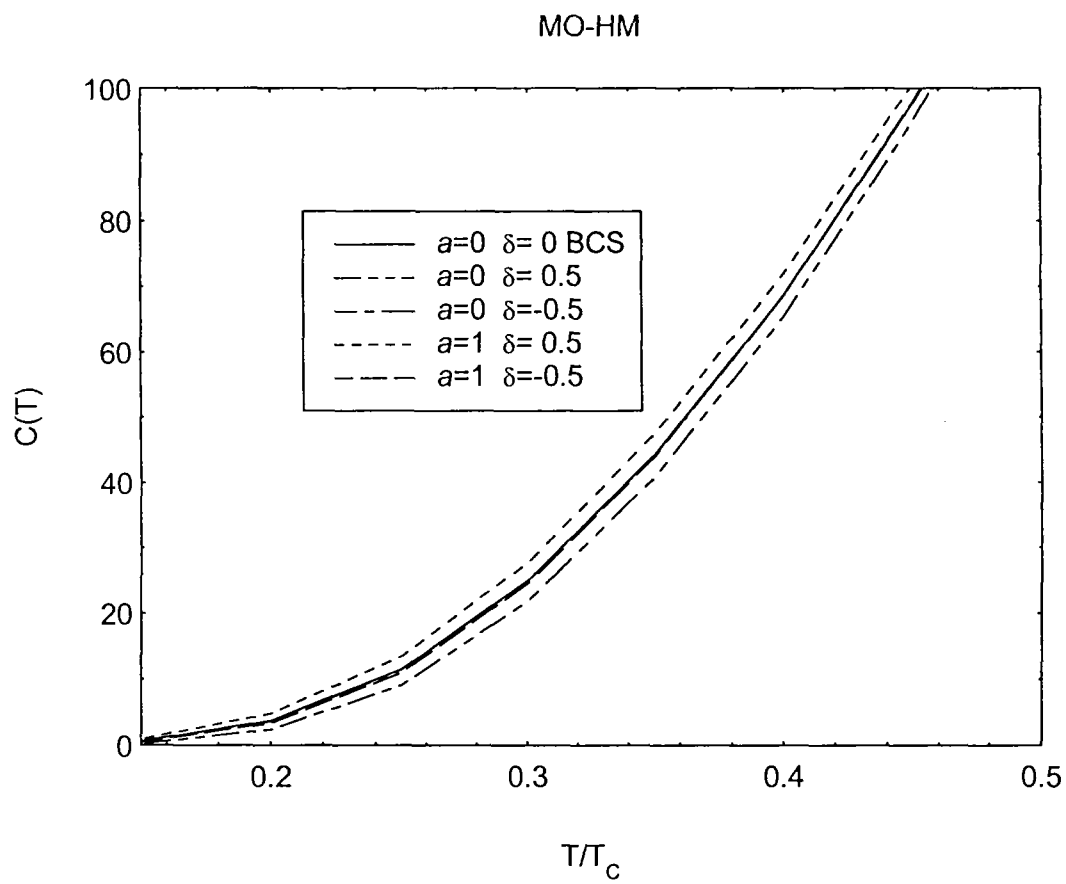
ภาพประกอบ 30 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตามแบบจำลองของ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



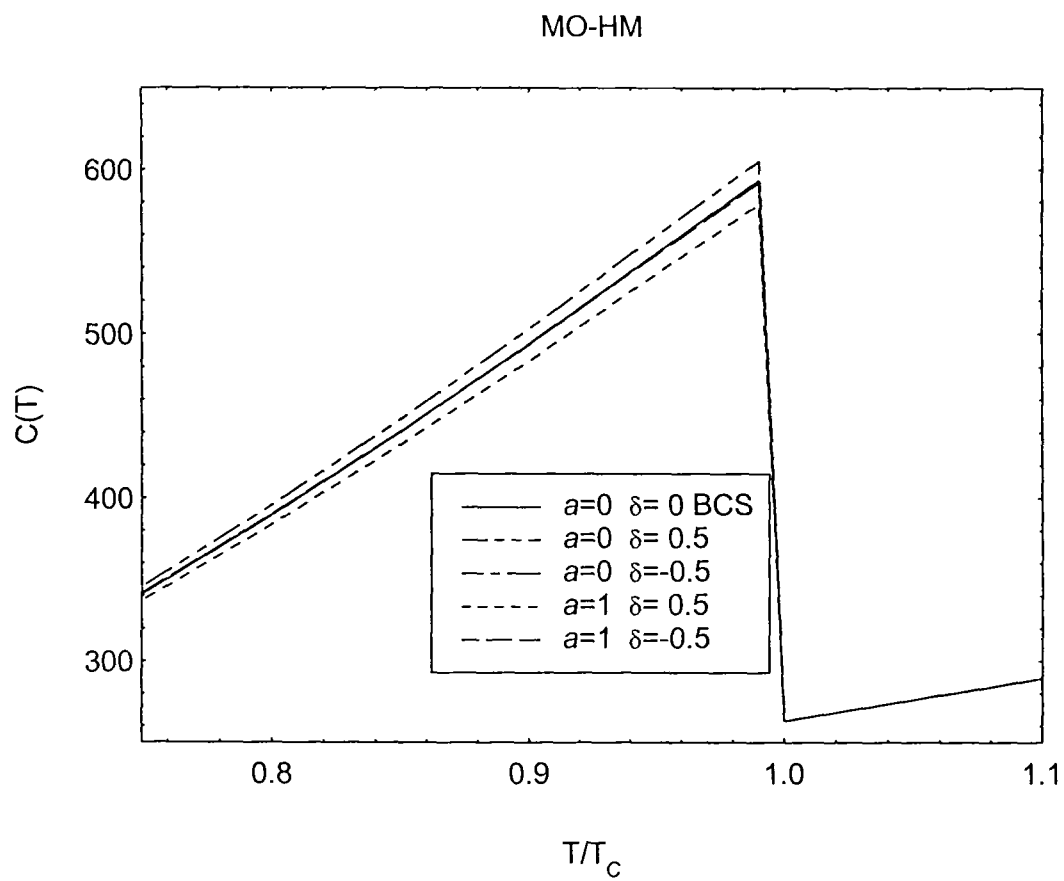
ภาพประกอบ 31 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตามแบบจำลองของ พอลซาสเฮนนี่โควา แคม และ มากิ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



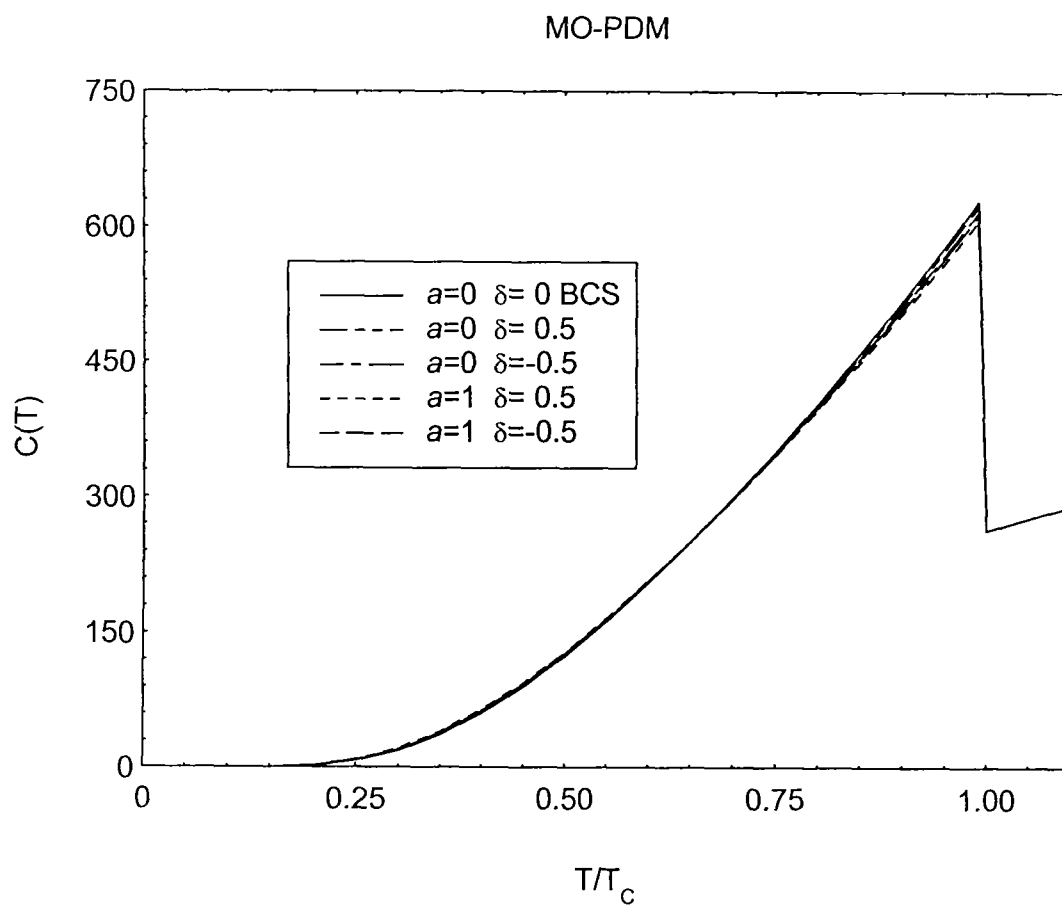
ภาพประกอบ 32 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส หน่วยของ $C(T)$ เป็นหน่วยใดๆ



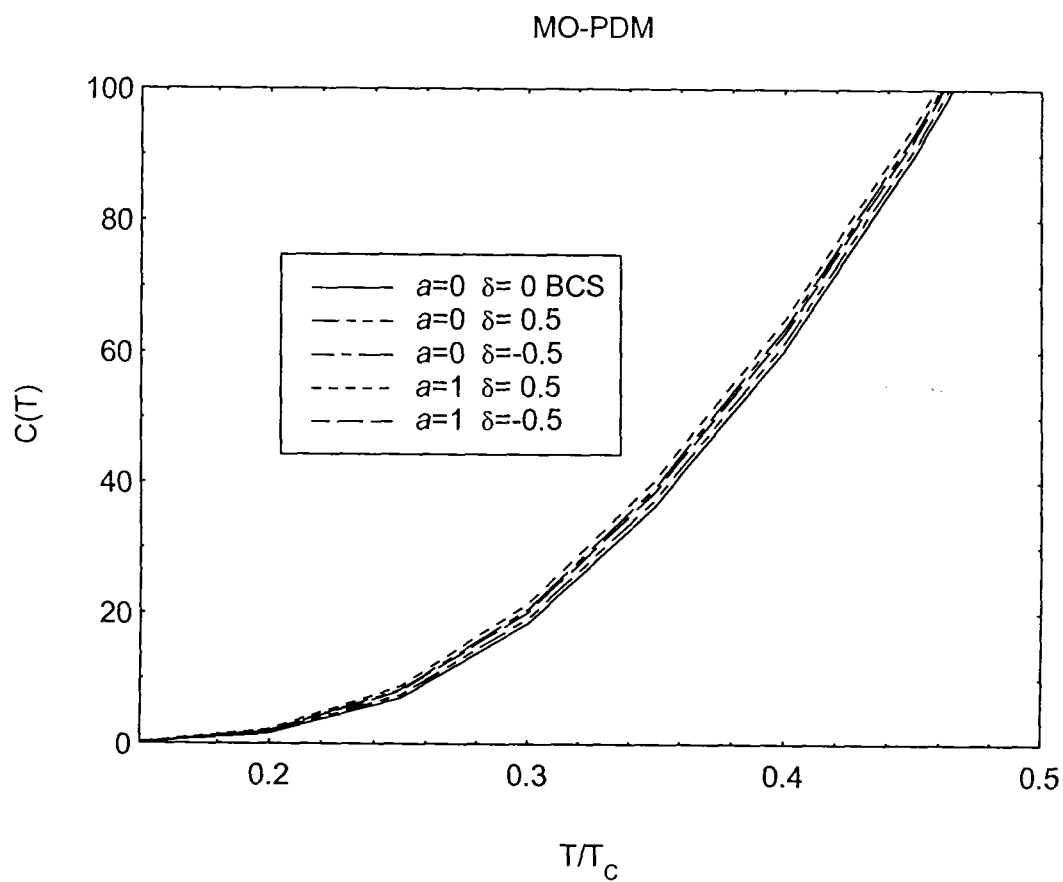
ภาพประกอบ 33 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



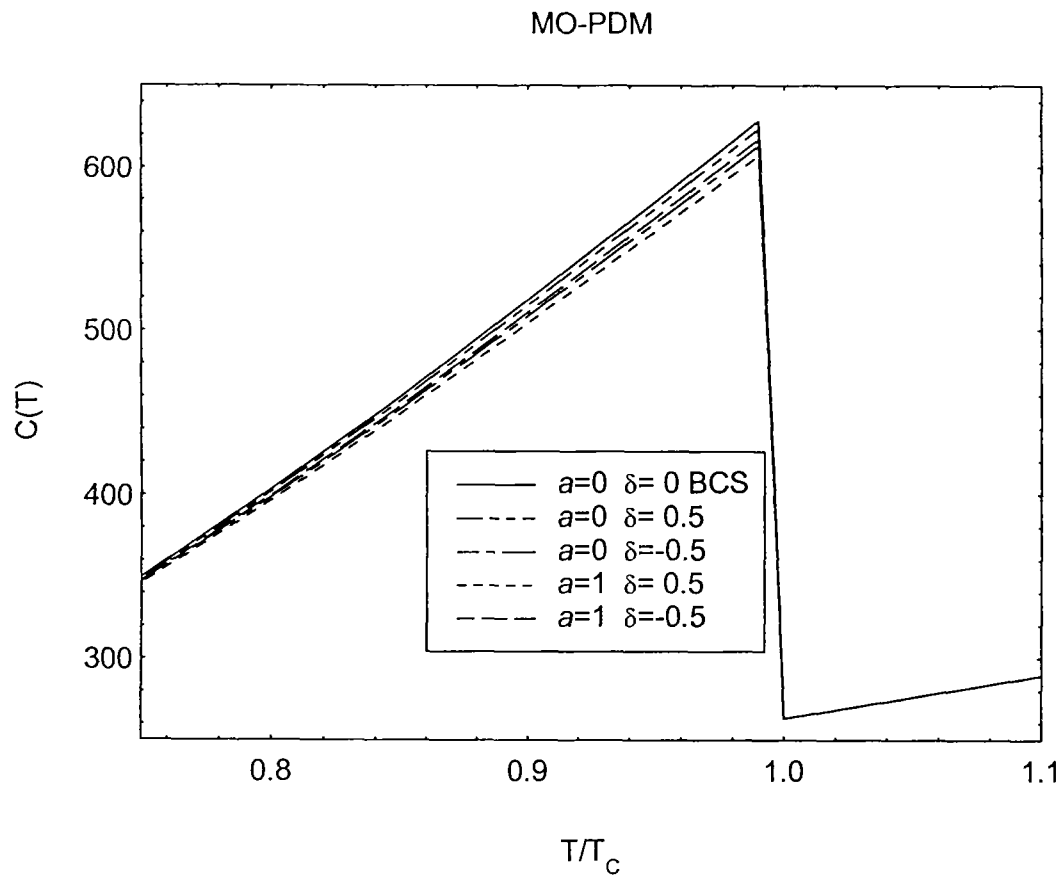
ภาพประกอบ 34 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตามแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



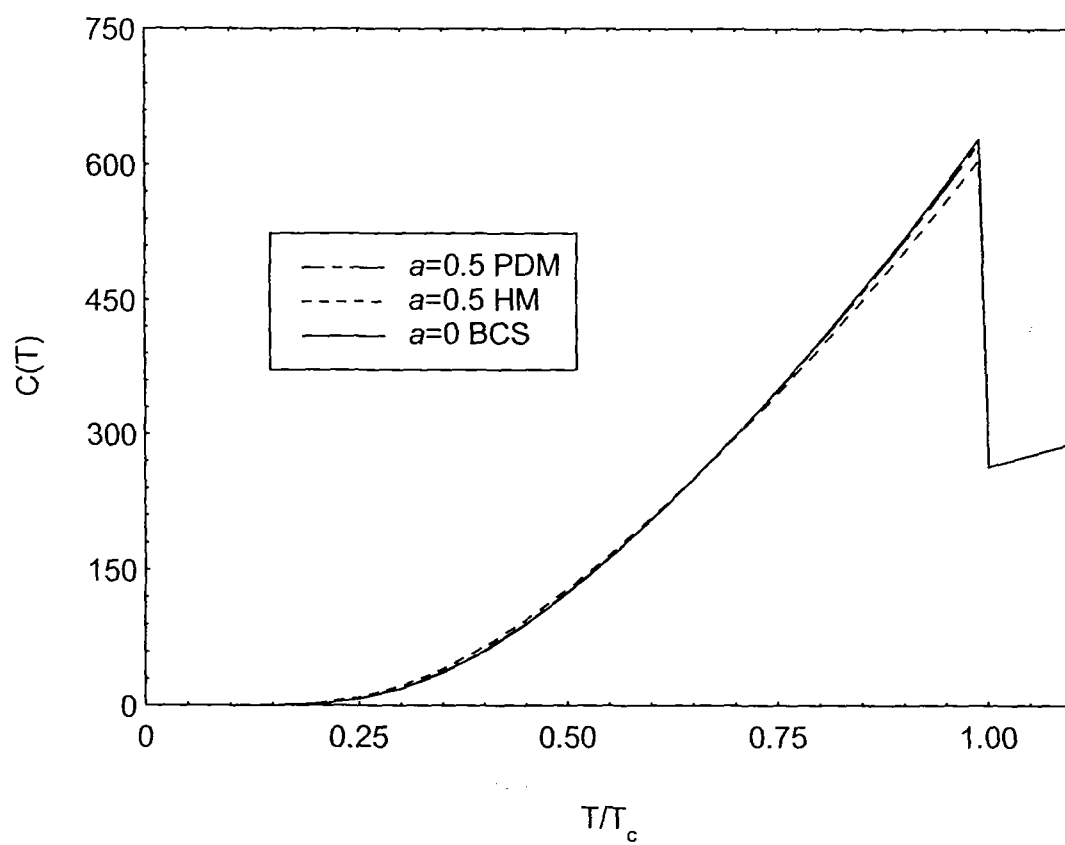
ภาพประกอบ 35 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เมื่อมีฟังก์ชันของความไม่สมมาตรตามแบบจำลองของ พอสซาสเฮนนี่โควา แคม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส หน่วยของ $C(T)$ เป็นหน่วยใดๆ



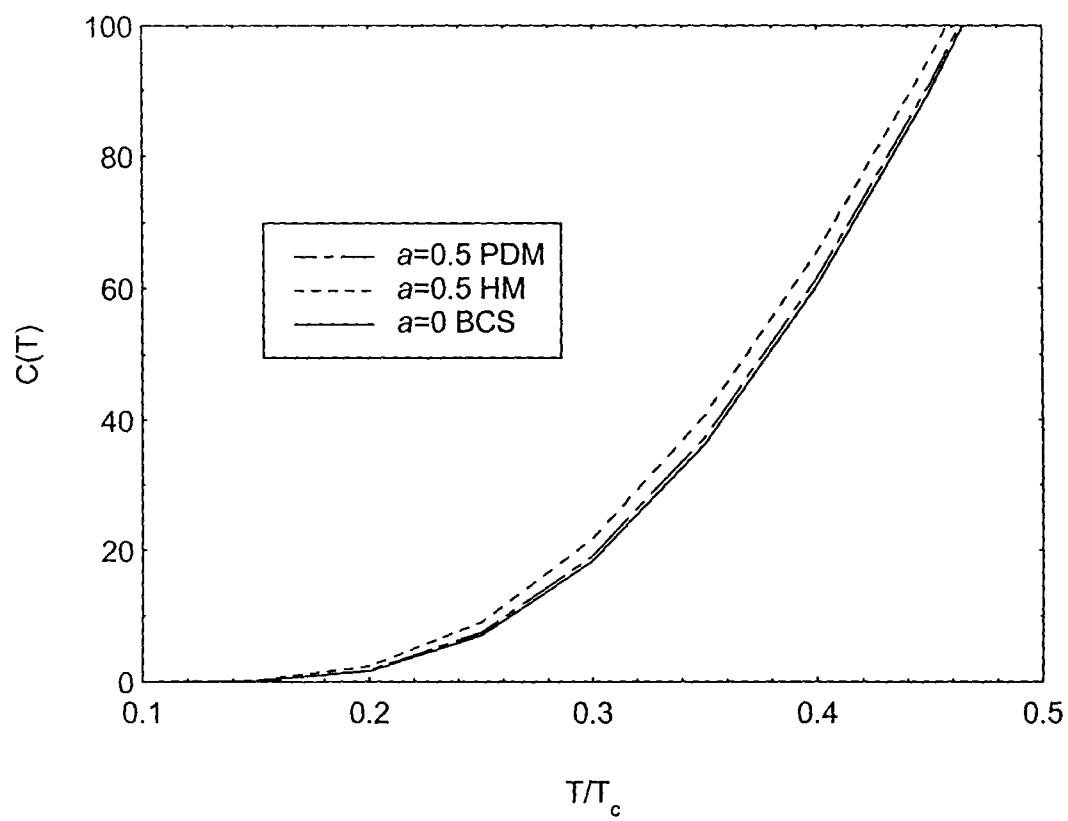
ภาพประกอบ 36 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิต่างๆ ตามแบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



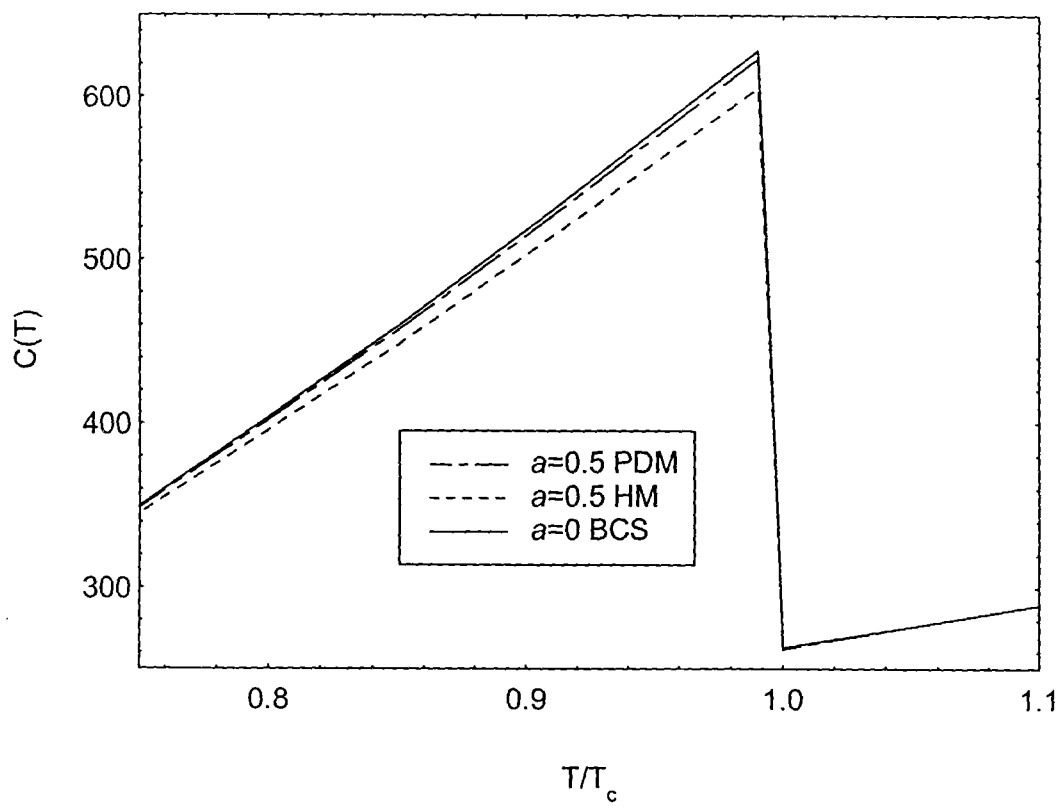
ภาพประกอบ 37 แสดงความจุความร้อน $C(T)$ ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่ T ใกล้ T_c ตามแบบจำลองของ พอลซาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เทียบกับทฤษฎีบีซีเอส



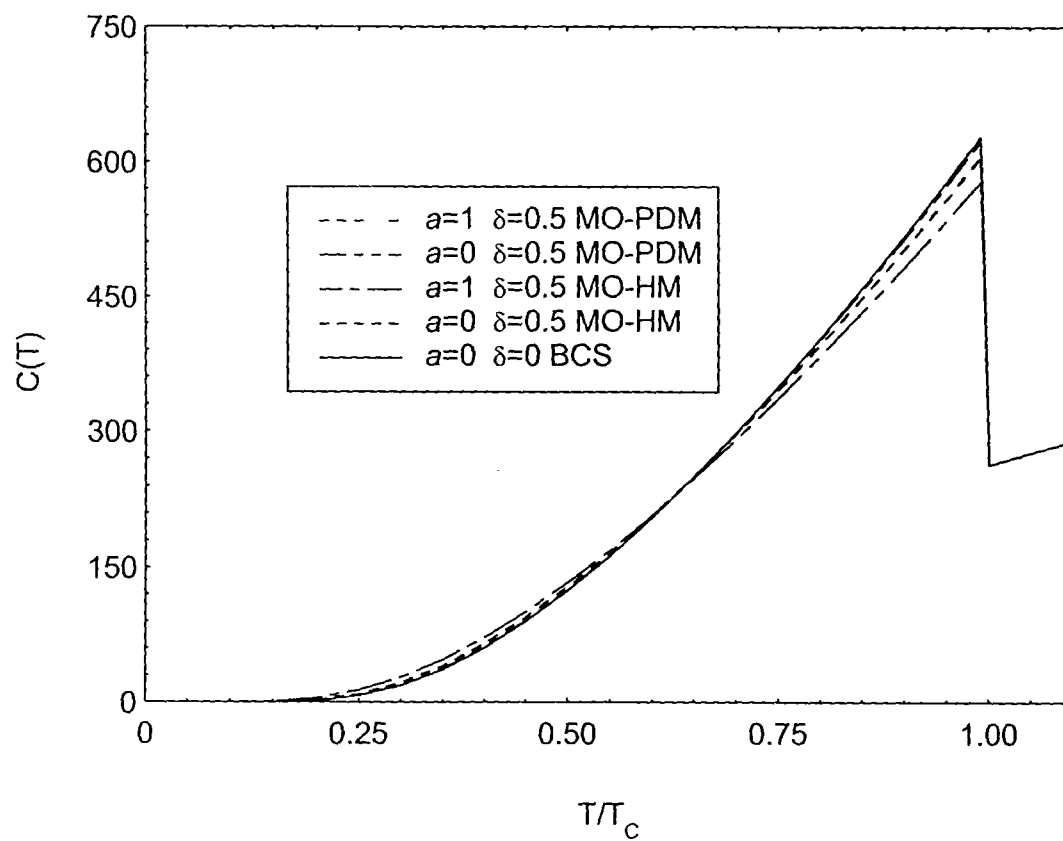
ภาพประกอบ 38 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนสำหรับแบบจำลองของ ฮาสส์ และ
 มากิ กับ พอดชาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส



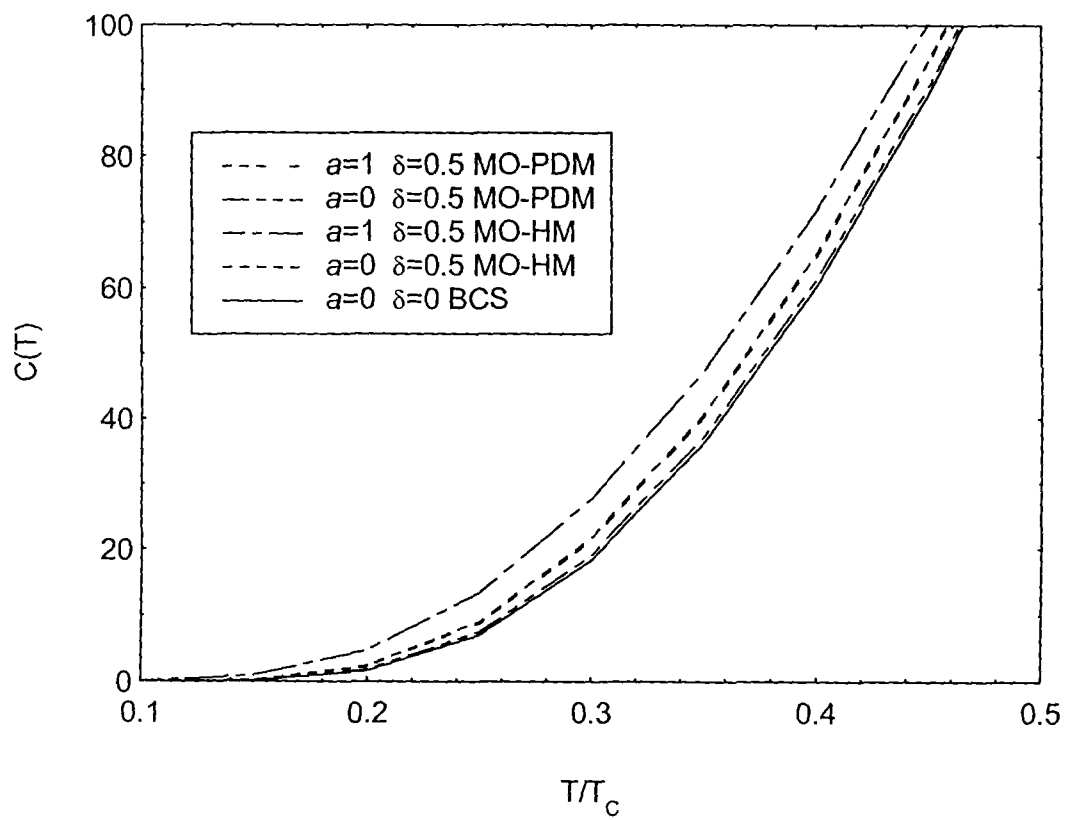
ภาพประกอบ 39 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่างๆสำหรับแบบจำลองของ ฮาส์ และมากิ กับ พอลซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส



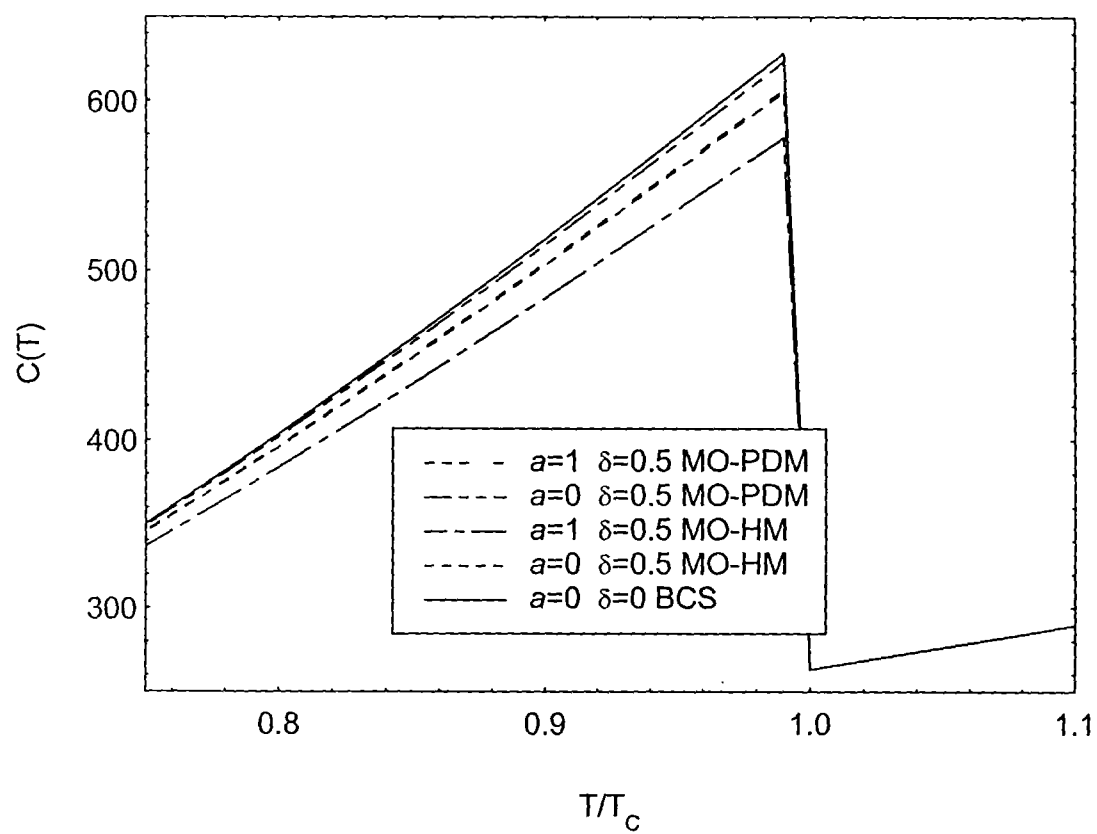
ภาพประกอบ 40 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่ T ใกล้ T_c สำหรับแบบจำลองของ ฮาสส์ และ มากิ กับ พอสชาสเฮนนิโควา แคม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 41 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนระหว่างแบบจำลองตามแบบจำลองของ MO-HM และ MO-PDM และทฤษฎีบีซีเอสหน่วยของ $C(T)$ เป็นหน่วยใดๆ



ภาพประกอบ 42 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่อุณหภูมิต่ำๆระหว่างแบบจำลองของ MO-HM และ MO-PDM และทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 43 แสดงการเปรียบเทียบกราฟความจุความร้อนที่ T ใกล้ T_c ระหว่างแบบจำลองของ MO-HM และ MO-PDM และทฤษฎีบีซีเอส

บทที่ 5

สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ

อภิปรายผลการวิจัย

สำหรับแบบจำลองช่องว่างพลังงานที่ปรับปรุงแล้วทั้งสองแบบจำลองได้ถูกนำไปหาผลของความไม่สมมาตรตามสมการ $\frac{\Delta C}{C_N}$ ถ้าพิจารณาว่า $a=b$ จะได้ $f(\theta)=1+a'\sin^2\theta/1+a'$ และ $f(\theta)=1/\sqrt{1+a'\sin^2\theta}$ ซึ่งเป็นไปตามแบบจำลองตามสมการ (2.11) และสมการ (2.12) จากภาพประกอบ 24 และ 25 ค่าของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ มีค่ามากที่สุดที่ $a=0$ สำหรับทุกค่า δ ซึ่งเท่ากับ 1.43 ตามทฤษฎีบีซีเอส ในภาพประกอบทั้งสองได้ทำการพิจารณาค่า a ระหว่าง $-1 < a < 0$ จะเห็นว่า $\frac{\Delta C}{C_N}$ ลดลงตาม $\frac{\delta}{a}$ ที่เพิ่มขึ้น ผลที่ได้นี้เป็นตัวบ่งชี้ถึงผลของความไม่สมมาตรที่ลดลงในระนาบ ab

จากภาพประกอบที่ 26 ถึง 43 เป็นกราฟที่เขียนขึ้นระหว่างความจุความร้อน $C(T)$ กับ T/T_c ของแมกนีเซียมไดโบไรด์เมื่อมีแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตร โดยที่แต่ละแบบจำลองได้แสดงการเปรียบเทียบกับกราฟความจุความร้อนตามทฤษฎีบีซีเอสและนำกราฟที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ ดังภาพประกอบที่ 15 ,16 และ 19 เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบไม่สมมาตรที่เสนอมาสอดคล้องกับผลการทดลองหรือไม่

ภาพประกอบ 26 ถึง 28 เป็นกราฟความจุความร้อนเมื่อใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาส์ และ มากิ เลือกวารามิเตอร์ของความไม่สมมาตร $a=0.5$ ปรากฏว่าเส้นกราฟเป็นไปในแนวเดียวกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ

ภาพประกอบ 29 ถึง 31 เป็นกราฟของความจุความร้อนเมื่อใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอลซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ เลือกวารามิเตอร์ของความไม่สมมาตร $a=0.5$ เส้นกราฟเกือบจะทับกันสนิทกับทฤษฎีบีซีเอส แสดงว่าไม่สอดคล้องกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ

ภาพประกอบ 32 ถึง 34 เป็นกราฟความจุความร้อนเมื่อใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ ฮาส์ และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เลือกวารามิเตอร์ของความไม่สมมาตร $a=0$, $a=1$ และ $\delta=0.5$, $\delta=-0.5$ เส้นกราฟที่เป็นไปในแนวเดียวกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ คือเส้นที่ $a=1$ และ $\delta=0.5$

ภาพประกอบ 35 ถึง 37 เป็นกราฟของความจุความร้อนเมื่อใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานของ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ เมื่อนำมาปรับปรุงใหม่ เลือกพารามิเตอร์ของความไม่สมมาตร $a=0$, $a=1$ และ $\delta=0.5$, $\delta=-0.5$ เส้นกราฟที่เป็นไปในแนวเดียวกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ คือเส้นที่ $a=1$ และ $\delta=0.5$

ภาพประกอบ 38 และ 40 เป็นกราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างความจุความร้อนเมื่อมีแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ กับ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ และทฤษฎีบีซีเอส จากกราฟจะเห็นว่าแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ ใกล้เคียงกับผลการทดลองของ หวัง และ บาวเกจ มากกว่า

ภาพประกอบ 41 ถึง 43 เป็นกราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างความจุความร้อนเมื่อมีแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ กับ พอสซาสเฮนนิโควา แดม และ มากิ ที่ได้ปรับปรุงแล้วทั้งสองแบบจำลอง และทฤษฎีบีซีเอส จากกราฟของ หวัง และ บาวเกจ ถ้าทำการปรับเกลให้ตรงกันกับภาพประกอบ 41 พบว่าเส้นกราฟที่ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุดคือ $a=1$ และ $\delta=0.5$ ตามแบบจำลองของฮาส์ และ มากิ ที่ได้ปรับปรุงแล้ว

จากผลการทดลองของ ซีเนียร์และคณะ (Seneor, et al. 2002) ช่องว่างพลังงานตามแกน c มีค่ามากที่สุดเป็น $\Delta_c = 8$ meV และช่องว่างพลังงานในระนาบ ab เป็น $\Delta_{ab} = 5$ meV โดยมีอัตราส่วนระหว่าง Δ_{ab} และ Δ_c มีค่าเป็น $\Delta_{ab}/\Delta_c = 0.625$ แบบจำลองช่องว่างพลังงานของงานวิจัยนี้ได้ทำนายไว้ว่า ถ้าช่องว่างพลังงานมีความสมมาตรในระนาบ ab นั่นคือ $a=b$ ค่าของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ ควรจะเป็น 1.28 ไม่ใช่ 1.43 ตามทฤษฎีบีซีเอสและถ้าช่องว่างพลังงานไม่มีความสมมาตรในระนาบ ab คือ $a \neq b$ ค่าของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ ควรจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 1.28 ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a และ b จากภาพประกอบ 41 พบว่าเส้นกราฟที่ใกล้เคียงกับผลการทดลองมากที่สุดคือ $a=1$ และ $\delta=0.5$ ตามแบบจำลองของฮาส์ และ มากิ ที่ได้ปรับปรุงแล้วดังนั้นแทนค่า a และ δ ลงไปที่สมการ (3.51)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{C_N} &= \frac{1.43 \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{0.25}{5}\right)^2}{1 + \frac{8}{3} + \frac{16}{5} + \frac{64}{35} + \frac{128}{315} + \frac{2}{3} + \frac{8}{5} + \frac{48}{35} + \frac{128}{315} + \frac{1.5}{5} + \frac{18}{35} + \frac{8}{35} + \frac{0.5}{7} + \frac{4}{63} + 0.0625} \\ &= 1.43 \times \frac{12.25}{14.39} = 1.22 \end{aligned}$$

ถ้าเทียบกับแบบจำลองของฮาส์ และ มากิ ตามสมการ (3.44) โดยเลือก $a=1$

$$\frac{\Delta C}{C_N} = 1.43 \times \frac{1 + \frac{4}{3} + \frac{38}{45} + \frac{4}{15} + \frac{1}{25}}{1 + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{4}{7} + \frac{1}{9}}$$

$$= 1.43 \times \frac{3.48}{4.21} = 1.18$$

จะเห็นว่าแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ ที่ได้ปรับปรุงแล้วคำนวณได้ค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองของ ซีนีออร์ มากกว่า

สรุป

จากการวิเคราะห์ที่มาของกราฟความจุความร้อนของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ ที่บริเวณวัสดุกำลังเปลี่ยนจากสภาพปกติมาเป็นสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตหรือเรียกสั้นๆว่าช่วงกระโดดสำหรับแมกนีเซียมไดโบไรด์ พบว่าเกี่ยวข้องกับความไม่สมมาตรในระนาบของช่องว่างพลังงาน การวิเคราะห์ทำภายใต้กรอบการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอสและคำนึงถึงความไม่สมมาตรของช่องว่างพลังงานทั้งสามแกน ค่าของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ ที่ได้ตามวิธีการนี้ได้ค่าน้อยกว่าค่า $\frac{\Delta C}{C_N}$ ของทฤษฎีบีซีเอส ส่วนผลของความไม่สมมาตรในระนาบคือค่าของ $\frac{\Delta C}{C_N}$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงก็ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a และ b ส่วนกราฟของ $C(T)$ ที่สอดคล้องกับผลการทดลองของหวังและบาวเกจมากที่สุดคือกราฟตามแบบจำลองของ ฮาส์ และ มากิ ที่ได้ปรับปรุงแล้ว แต่ก็ไม่มากนัก

ข้อเสนอแนะ

1. ที่บริเวณ T ใกล้ T_c กราฟของ $C(T)$ ยังไม่สอดคล้องกับการทดลองของหวังและบาวเกจมากนัก เนื่องจากผลการทดลองค่าของ $C(T)$ จะโค้งเข้าหาจุดกระโดดแต่จากการคำนวณได้ $C(T)$ เข้าหาจุดกระโดดอย่างทันทีทันใด ซึ่งอาจจะเป็นผลของตัวแปรอย่างอื่นที่นอกเหนือจากความไม่สมมาตรของช่องว่างพลังงาน
2. ที่บริเวณ T ต่ำมากๆ แม้ว่าผลการคำนวณได้ $C(T)$ มากกว่าของทฤษฎีบีซีเอส แต่ยังมีค่าไม่ชัดเจนมากนักซึ่งอาจเป็นไปได้ที่มีผลของตัวแปรอื่นๆเข้ามาเกี่ยวข้อง

ภาคผนวก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Mathematica

ภาพประกอบ 22

```

ClearAll[r];
r[n_,m_]:=Re[(1+.5 (Sin[m Pi/50]*Cos[2 n*Pi/50])^2
+ 0.3 (Sin[m Pi/50]*Sin[2 n*Pi/50])^2)];

poly = Polygon[
Flatten[ Table[N[{r[n,m]*Sin[m Pi/50] Sin[2*n Pi/50],
r[n,m]* Sin[m Pi/50] Cos[2*n Pi/50],
r[n,m]*Cos[ m Pi/50]},5], {m,0, 50},{n,0,50}],1]];
Graphics3D[ {GrayLevel[0.81], poly} ]
InputForm[%]
Show[%,Axes ->False,Boxed->False]

```

ภาพประกอบ 23

```

ClearAll[r];
r[n_,m_]:=Re[(1+ .5 (Sin[m Pi/50]*Cos[2 n*Pi/50])^2
+ 0.3 (Sin[m Pi/50]*Sin[2 n*Pi/50])^2)]; ^(-1/2);

poly = Polygon[
Flatten[ Table[N[{r[n,m]*Sin[m Pi/50] Sin[2*n Pi/50],
r[n,m]* Sin[m Pi/50] Cos[2*n Pi/50],
r[n,m]*Cos[ m Pi/50]}],5], {m,0, 50},{n,0,50}],1]];
Graphics3D[ {GrayLevel[0.81], poly} ]
InputForm[%]
Show[%,Axes -> False,Boxed->False

```

ภาพประกอบที่ 24

```
ClearAll[ff22, ff44, dcdcn];
```

```
 $\delta = 0.0;$ 
```

```
ff22[a_] :=  $\left( \frac{1}{(4 * \text{Pi})} \right) * \text{NIntegrate}[\text{Sin}[\theta] * (1 + a * (\text{Sin}[\theta])^2 + \delta * a * (\text{Sin}[\theta] * \text{Sin}[\phi])^2)^2$ 
```

```
, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 * Pi}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
ff44[a_] :=  $\left( \frac{1}{(4 * \text{Pi})} \right) * \text{NIntegrate}[\text{Sin}[\theta] * (1 + a * (\text{Sin}[\theta])^2 + \delta * a * (\text{Sin}[\theta] * \text{Sin}[\phi])^2)^4$ 
```

```
, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 * Pi}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
dcdcn[a_] :=  $1.43 * \left( \frac{(\text{ff22}[a])^2}{\text{ff44}[a]} \right);$ 
```

```
a = -5;
```

```
While[a < 5.3,
```

```
Print[a, " ", N[dcdcn[a]]];
```

```
a = a + 0.2;
```

```
];
```

ภาพประกอบที่ 25

```
ClearAll[ff22, ff44, dcdcn];
```

```
 $\delta = 0.5$ 
```

```
ff22[a_] :=  $\left( \frac{1}{(4 * \text{Pi})} \right) * \text{NIntegrate}[\text{Sin}[\theta] * (1 + a * (\text{Sin}[\theta])^2 + \delta * a * (\text{Sin}[\theta] * \text{Sin}[\phi])^2)^{-1}$ 
```

```
, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 * Pi}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
ff44[a_] :=  $\left( \frac{1}{(4 * \text{Pi})} \right) * \text{NIntegrate}[\text{Sin}[\theta] * (1 + a * (\text{Sin}[\theta])^2 + \delta * a * (\text{Sin}[\theta] * \text{Sin}[\phi])^2)^{-2}$ 
```

```
, { $\theta$ , 0, Pi}, { $\phi$ , 0, 2 * Pi}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
dcdcn[a_] :=  $1.43 * \left( \frac{(\text{ff22}[a])^2}{\text{ff44}[a]} \right);$ 
```

```
a = -0.66655;
```

```
While[a < 5.3,
```

```
Print[a, " ", N[dcdcn[a]]];
```

```
a = a + 0.1];
```

ภาพประกอบ 26

```
ClearAll[ff11, fais, wd, dt, ttcc, tc, aa, sff, ssf1, ze, pl, duu, dow, dd2t, ccstn, cn];
```

```
aa = 0.5;
```

```
wd = 750;
```

```
tc = 40;
```

```
fais[ze_] := (1 + aa * (Cos[ze]) ^ 2) / (1 + aa);
```

```
ff11[ttcc_, dt_] :=
```

```
(1/2) * NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^2
```

```
* ( (Tanh[ x / (2*tc) ] - Tanh[ (sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2) / (2*ttcc*tc) ] ) / (x - sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2) ) ),
```

```
{ze, 0, pi}, {x, 0, wd}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
duu[ttcc_, dt_] := (1 / (2*2 * (tc*ttcc)^2)) *
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^2 * (Sech[ (sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2) / (2*ttcc*tc) ) ] ^ 2,
```

```
{ze, 0, pi}, {x, 0, wd}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
dow[ttcc_, dt_] :=
```

```
(1/2) *
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^4 *
```

```
( (Sech[ (sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2) / (2*ttcc*tc) ) ] ^ 2 / (4*ttcc*tc * (x^2 + (dt*fais[ze])^2) ) -
```

```
Tanh[ (sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2) / (2*ttcc*tc) ) ] / (2 * (x^2 + (dt*fais[ze])^2)^(3/2) ) ), {ze, 0, pi}, {x, 0, wd}, MinRecursion -> 5,
```

```
MaxRecursion→15];
```

```
dd2t[ttcc_, dt_] := du[ttcc, dt] / dow[ttcc, dt];
```

```
ccstn[ttcc_, dt_, vadd2t_] :=
```

$$\left(\frac{2 * 2 * \text{Pi}}{4 * \text{Pi} * (\text{tc} * \text{ttcc})^2} \right) *$$

$$\text{NIntegrate}[\text{Sin}[\text{ze}] * \frac{\text{Exp}[\sqrt{x^2 + (\text{dt} * \text{fais}[\text{ze}])^2} / (\text{ttcc} * \text{tc})]}{(\text{Exp}[\sqrt{x^2 + (\text{dt} * \text{fais}[\text{ze}])^2} / (\text{ttcc} * \text{tc})] + 1)^2} *$$

$$(x^2 + (\text{dt} * \text{fais}[\text{ze}])^2 - \frac{\text{ttcc} * \text{tc}}{2} * (\text{fais}[\text{ze}])^2 * \text{vadd2t}), \{\text{ze}, 0, \pi\}, \{x, -\text{wd}, \text{wd}\},$$

```
MinRecursion→5, MaxRecursion→15];
```

```
cn[ttcc_] := (2/3) * (Pi^2) * ttcc * tc;
```

```
ttcc = 0.95;
```

```
h = 0.000001;
```

```
dt = 70.7;
```

```
While[ttcc < 1.2, b = 3;
```

```
If[ttcc > 1, b = 0.0000001, b = 3];
```

```
While[b > 0.01,
```

```
pl = dt;
```

```
sff = ff11[ttcc, dt];
```

```
ssf1 = ff11[ttcc, dt + h];
```

$$dt = dt - \frac{sff * h}{ssfl - sff};$$

$$b = \text{Abs}[dt - p1];$$

```
;
```

```
vadd2t = dd2t[ttcc, dt];
```

```
If[ttcc > 1, cttt = cn[ttcc], cttt = ccstn[ttcc, dt, vadd2t];
```

```
Print[ttcc, " ", N[cttt]];
```

```
ttcc = ttcc + 0.01;;
```

ภาพประกอบ 29

```
ClearAll[ff11, fais, wd, dt, ttcc, tc, aa, sff, ssf1, ze, pl, duu, dow, dd2t, ccstn, cn];
```

```
aa = 0.5;
```

```
wd = 750;
```

```
tc = 40;
```

```
fais[ze_] := (1 + aa * (Cos[ze])^2)^(-1/2);
```

```
ff11[ttcc_, dt_] :=
```

```
(1/2) * NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^2
```

```
* (Tanh[x/(2*tc)] - Tanh[(sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2)/(2*ttcc*tc))] /
```

$$\frac{\frac{\tanh\left[\frac{x}{2*tc}\right]}{x} - \frac{\tanh\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt*fais[ze])^2}}{2*ttcc*tc}\right]}{\sqrt{x^2 + (dt*fais[ze])^2}}}{},$$

```
{ze, 0, pi}, {x, 0, wd}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
duu[ttcc_, dt_] :=
```

```
(1/(2*2*(tc*ttcc)^2) *
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^2 * (Sech[(sqrt(x^2 + (dt*fais[ze])^2)/(2*ttcc*tc))]^2,
```

```
{ze, 0, pi}, {x, 0, wd}, MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
dow[ttcc_, dt_] :=
```

```
(1/2) *
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze])^4 *
```

$$\left(\frac{\text{Sech}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze])^2}}{(2 * ttcc * tc)}\right]}{4 * ttcc * tc (x^2 + (dt * fais[ze])^2)} \right)^2$$

$$\frac{\text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze])^2}}{(2 * ttcc * tc)}\right]}{2 * (x^2 + (dt * fais[ze])^2)^{(3/2)}} \Bigg|, \{ze, 0, \pi\}, \{x, 0, wd\}$$

, MinRecursion → 5, MaxRecursion → 15];

dd2t[ttcc_, dt_] := duu[ttcc, dt] / dow[ttcc, dt];

ccstn[ttcc_, dt_, vadd2t_] :=

$$\left(\frac{2 * 2 * \text{Pi}}{4 * \text{Pi} * (tc * ttcc)^2} \right) *$$

$$\text{NIntegrate}\left[\text{Sin}[ze] * \frac{\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze])^2}}{(ttcc * tc)}\right]}{\left(\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze])^2}}{(ttcc * tc)}\right] + 1\right)^2} * \right.$$

$$\left. \left(x^2 + (dt * fais[ze])^2 - \frac{ttcc * tc}{2} * (fais[ze])^2 * vadd2t \right), \{ze, 0, \pi\}, \{x, -wd, wd\}, \right.$$

MinRecursion → 5, MaxRecursion → 15];

cn[ttcc_] := (2/3) * (Pi^2) * ttcc * tc;

ttcc = 0.1;

h = 0.000001;

dt = 70.7;

While[ttcc < 1.2, b = 3;

If[ttcc > 1, b = 0.0000001, b = 3];

While[b > 0.01,

```

p1 = dt;

sff = ff11[ttcc, dt];
ssf1 = ff11[ttcc, dt + h];
dt = dt -  $\frac{sff * h}{ssf1 - sff}$ ;
b = Abs[dt - p1];

;

vadd2t = dd2t[ttcc, dt];

If[ttcc > 1, cttt = cn[ttcc], cttt = ccstn[ttcc, dt, vadd2t]];

Print[ttcc, " ", N[cttt]];

ttcc = ttcc + 0.05;];

```

ภาพประกอบ 32

```

ClearAll ff11, fais, wd, dt, ttcc, tc, aa, sff, ssf1, pl
, duu, dow, dd2t, ccstn, cn, dee];

aa = 0.5; dee = 0;

wd = 750;
tc = 40;

fais[ze_, fi_] := (1 + aa * (Sin[ze] * Cos[fi]) ^ 2 + (aa + dee) * (Sin[ze] * Sin[fi]) ^ 2);

ff11[ttcc_, dt_] :=  $\left( \frac{1}{4 * \text{Pi}} \right) * \text{NIntegrate}[\text{Sin}[ze] * (\text{fais}[ze, fi])^2 * \left( \frac{\text{Tanh}\left[\frac{x}{2 * tc}\right]}{x} - \frac{\text{Tanh}\left[\left(\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}\right) / (2 * ttcc * tc)\right]}{\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}} \right), \{ze, 0, \pi\}, \{fi, 0, 2 * \pi\}, \{x, 0, wd\}, \text{Method} \rightarrow \text{QuasiMonteCarlo}, \text{MaxPoints} \rightarrow 5000];$ 

duu[ttcc_, dt_] :=  $\left( \frac{1}{4 * \text{Pi} * 2 * (tc * ttcc)^2} \right) *$ 

NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze, fi])^2

* (Sech[( $\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}$ ) / (2 * ttcc * tc)]) ^ 2,

{ze, 0,  $\pi$ }, {fi, 0, 2 *  $\pi$ }, {x, 0, wd}

, Method  $\rightarrow$  QuasiMonteCarlo, MaxPoints  $\rightarrow$  5000];

dow[ttcc_, dt_] :=

 $\left( \frac{1}{4 * \text{Pi}} \right) *$ 

NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze, fi])^4 *

```

$$\left(\frac{\left(\text{Sech}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}}{(2 * ttcc * tc)} \right] \right)^2}{4 * ttcc * tc (x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2)} - \frac{\text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}}{(2 * ttcc * tc)} \right]}{2 * (x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2)^{3/2}} \right), \{ze, 0, \pi\}, \{fi, 0, 2 * \pi\},$$

```
{x, 0, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
dd2t[ttcc_, dt_] := dm[ttcc, dt] / dow[ttcc, dt];
```

```
ccstn[ttcc_, dt_, vadd2t_] :=
```

$$\left(\frac{2}{4 * \text{Pi} * (ttcc * tc)^2} \right) *$$

```
NIntegrate[Sin[ze] *  $\frac{\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}}{(ttcc * tc)}\right]}{\left(\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}}{(ttcc * tc)}\right] + 1\right)^2} *$ 
```

$$\left(x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2 - \frac{ttcc * tc}{2} * (fais[ze, fi])^2 * vadd2t \right)$$

```
, {ze, 0, \pi}, {fi, 0, 2 * \pi},
```

```
{x, -wd, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
cn[ttcc_] := (2/3) * (Pi^2) * ttcc * tc;
```

```
ttcc = 0.96;
```

```
h = 0.0001;
```

```
dt = 40.7;
```

```
While[ttcc < 1.2, b = 3;
```

```
If[ttcc > 1, b = 0.0000001, b = 3];
```

```

While[b > 0.001,
    p1 = dt;
    sff = ff11[ttcc, dt];
    ssf1 = ff11[ttcc, dt + h];
    dt = dt -  $\frac{sff * h}{ssf1 - sff}$ ;
    b = Abs[dt - p1];

];

vadd2t = dd2t[ttcc, dt];

If[ttcc > 1, cttt = cn[ttcc], cttt = ccstn[ttcc, dt, vadd2t]];

Print[ttcc, "    ", N[cttt]];

ttcc = ttcc + 0.01;];

```

ภาพประกอบ 35

```
ClearAll[ff11, fais, wd, dt, ttcc, tc, aa, sff, ssf1, pl, dnu, dow, dd2t, ccstn, cn];
```

```
aa = 1; dee = 0.5;
```

```
wd = 750;
```

```
tc = 40;
```

```
fais[ze_, fi_] := (1 + aa * (Sin[ze] * Cos[fi])^2 + (aa + dee) * (Sin[ze]
* Sin[fi])^2)^(-1/2);
```

```
ff11[ttcc_, dt_] :=
```

```
 $\left(\frac{1}{4 * \text{Pi}}\right) *$ 
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze, fi])^2 *
 $\left(\frac{\text{Tanh}\left[\frac{x}{2 * \text{tc}}\right]}{x} - \frac{\text{Tanh}\left[\left(\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}\right) / (2 * \text{ttcc} * \text{tc})\right]}{\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}}\right), \{ze, 0, \pi\},$ 
```

```
{fi, 0, 2 *  $\pi$ }, {x, 0, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
dnu[ttcc_, dt_] :=  $\left(\frac{1}{4 * \text{Pi} * 2 * (\text{tc} * \text{ttcc})^2}\right) *$ 
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze, fi])^2
*  $\left(\text{Sech}\left[\left(\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}\right) / (2 * \text{ttcc} * \text{tc})\right]\right)^2,$ 
```

```
{ze, 0,  $\pi$ }, {fi, 0, 2 *  $\pi$ }, {x, 0, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
dow[ttcc_, dt_] :=
```

```
 $\left(\frac{1}{4 * \text{Pi}}\right) *$ 
```

```
NIntegrate[Sin[ze] * (fais[ze, fi])^4 *
```

```
 $\left(\frac{\left(\text{Sech}\left[\left(\sqrt{x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2}\right) / (2 * \text{ttcc} * \text{tc})\right]\right)^2}{4 * \text{ttcc} * \text{tc} * (x^2 + (dt * fais[ze, fi])^2)} -$ 
```

$$\frac{\text{Tanh}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}}{(2 * \text{ttcc} * \text{tc})}\right]}{2 * (x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2)^{(3/2)}} \Bigg|, \{ze, 0, \pi\}, \{fi, 0, 2 * \pi\},$$

```
{x, 0, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
dd2t[ttcc_, dt_] := duu[ttcc, dt] / dow[ttcc, dt];
```

```
ccstn[ttcc_, dt_, vadd2t_] :=
```

$$\left(\frac{2}{4 * \text{Pi} * (\text{ttcc} * \text{tc})^2} \right) *$$

$$\text{NIntegrate Sin}[ze] * \frac{\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}}{(\text{ttcc} * \text{tc})}\right]}{\left(\text{Exp}\left[\frac{\sqrt{x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2}}{(\text{ttcc} * \text{tc})}\right] + 1\right)^2}$$

$$\left(x^2 + (dt * \text{fais}[ze, fi])^2 - \frac{\text{ttcc} * \text{tc}}{2} * (\text{fais}[ze, fi])^2 * \text{vadd2t}\right)$$

```
, {ze, 0, \pi}, {fi, 0, 2 * \pi},
```

```
{x, -wd, wd}, Method -> QuasiMonteCarlo, MaxPoints -> 5000];
```

```
cn[ttcc_] := (2/3) * (Pi^2) * ttcc * tc;
```

```
ttcc = 0.96;
```

```
h = 0.000001;
```

```
dt = 70.7;
```

```
While[ttcc < 1.2, b = 3;
```

```
If[ttcc > 1, b = 0.0000001, b = 3];
```

```

While[b > 0.01,
    p1 = dt;
    sff = ff11[ttcc, dt];
    ssf1 = ff11[ttcc, dt + h];
    dt = dt -  $\frac{sff * h}{ssf1 - sff}$ ;
    b = Abs[dt - p1];

];

vadd2t = dd2t[ttcc, dt];

If[ttcc > 1, cttt = cn[ttcc], cttt = ccstn[ttcc, dt, vadd2t]];

Print[ttcc, "    ", N[cttt]];

ttcc = ttcc + 0.01;];

```

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ดวงมณี ลออรรถพงศ์. (2540). อุณหภูมิจุดวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่แถบพลังงานมีค่าจำกัด เมื่อมีสิ่งเจือปนประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก. กรุงเทพฯ : ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ดำรงศักดิ์ มณีพงษ์สวัสดิ์. (2538). ฟิสิกส์ของแข็ง 2. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง
- สุพจน์ มุศิริ. (2535). พลังงานกระตุ้นและความหนาแน่นสถานะของแผ่นประกบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงสองชนิด . กรุงเทพฯ : ภาควิชาฟิสิกส์. มหาวิทยาลัยมหาวชิราลงกรณศรีนครินทรวิโรฒ
- Alexander. L. Fetter and John Dirk Walecka (1971). *Quantum Theory Of Many-Particle Systems*. Mc Graw Hill.
- Bardeen. J, Cooper. N, & Schrieffer, J.R. (1959, January). "Theory of Superconductivity", *Physical Review*. 108(5) : 1175 - 1204.
- Bouquet, F. and others. (2001 July). " Specific heat of MgB_2 : "Evidence for a second energy gap", *Physical Review Letters*. 87(4) : 047001-1-047001-4
- Bouquet, F. and others. (2001 October). "Unusual effects of anisotropy on the specific heat of ceramic and single crystal MgB_2 ", *Physica C*. 14(10) : 1-31
- Buzea; & Yamashita . (2001). "Review of Superconducting Properties of MgB_2 ", *Superconductors, Science & Technology*. 14(11) : R115-R146.
- Giuseppe Grosso and Giuseppe Pastori Parravicini (1999). "*Solid State Physics*" Academic Press
- Gonnelli, R.S.; and others. (2002 October). " Independent determination of the two gaps by directional point-contact spectroscopy in MgB_2 single crystal ", *arXiv : cond-mat /0209472 v2* : 1-7
- Haas, Stephan, and Maki, Kasumi. (2001 December). " Anisotropic s-wave superconductivity in MgB_2 ", *Physical Review B* . 65, 020502(R) : 1-4
- Ketterson, J.B. ; and Song, S.N. (1998) "*Superconductivity*". Cambridge
- Kitel, C. (1997) "*Introduction to solid state Physics*". 7th edition; John Wiley & Sons.
- Mishonov, Todor, and Penev, Evgeni. (2002 January). "Thermodynamics of anisotropic-gap and multiband clean BCS superconductors", *Physics B* : 1-14

- Mishonov, Todor, and other. (2002 august). "Comment on anisotropic s-wave superconductivity in MgB_2 ", *Physical Review B*, 65, 066501-1
- Posazhennikova, A.I. and other. (2002 May). " Anisotropic s-wave superconductivity : comparison with experiments on MgB_2 single crystals", *Europhysics Letters* : 1-7
- Wang, Y ; and other. (2001 May). "Specific heat in the superconductivity and normal state (2-300 K , 0-16 T), and magnetic susceptibility of the 38 K superconductor MgB_2 : Evidence for a multi component gap", *Physica C*. 355(2001) : 179-193
- Wälti, C.; and others. (2001). "Strong Electron - Phonon Coupling in Superconducting MgB_2 : A Specific Heat Study," *Physical Review B*. 64 : 172515 - 172519.

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายสุวัฒน์ รักพาณิชย์
เกิดวันที่ 20 เดือน มกราคม พุทธศักราช 2515
สถานที่เกิด เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร ฯ
สถานที่อยู่ปัจจุบัน 33/466 ซอยโชคชัย4 ถนนลาดพร้าว เขตลาดพร้าว
แขวงลาดพร้าว กรุงเทพมหานคร 10230

ประวัติการศึกษา

ปีการศึกษา 2533	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนมัธยมวัดบึง ทองหลวง
ปีการศึกษา 2542	วท.บ วิทยาศาสตร์ สาขาฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัย รามคำแหง
ปีการศึกษา 2546	วท.ม วิทยาศาสตร์ สาขาฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ

Effect of in-plane anisotropy on specific heat jump of MgB_2

P. Udomsamuthirun*, S. Rakpanich, and S. Yoksan

Department of Physics, Faculty of Science, Srinakhariwrot University,
Sukumvit 23 Road, Bangkok 10110, Thailand

Received by P. Deák 17 March 2003, revised 23 July 2003, accepted 5 August 2003

Published online 10 October 2003

PACS 65.40.Ba, 74.20.Fg, 74.70.Ad

An analytical result for the normalized jump of the heat capacity $\Delta C/C_N$ is derived for in-plane anisotropic s-wave superconductors within the framework of the weak-coupling BCS approach. Our results show that within the anisotropy gap model the value of $\Delta C/C_N$ must be less than the BCS value and the effect of in-plane asymmetry will reduce or increase the value of $\Delta C/C_N$ of in-plane symmetry depending on its parameters.

© 2003 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Introduction

The specific heat of MgB_2 [1] has shown the difference of amplitude and sharpness between the BCS curve and the data and has been interpreted that MgB_2 is a two-gap superconductor. One gap is found to be larger (Δ_o) and the other smaller (Δ_π) than $1.76 k_B T_c$ [2]. Δ_o approximately follows the BCS-like curve with non-standard gap ratio $2\Delta_o/k_B T_c \approx 4.18$ but Δ_π shows a marked reduction with respect to BCS-like behavior with $2\Delta_\pi/k_B T_c \approx 1.59$ [3]. A larger gap Δ_o is associated with a two-dimensional σ band due to p_x and p_y electrons of B atoms and the smaller Δ_π is associated with a three-dimensional π band due to p_z electrons of B atoms. These are weakly hybridized with electron orbitals of Mg atoms. The σ band is strongly coupled to in-plane B-atom vibration and the inter-band impurity scattering is strongly reduced due to the different symmetry of σ and π bands [4]; therefore the diffusion from one band to the other is inhibited. This preserves the T_c suppression and the large anisotropy of the energy gaps. Within these observations, MgB_2 has shown the influence of both two bands and gap anisotropy. The concept of multiband superconductivity was first introduced by Suhl et al. [5] and Moskalenko [6] in the case of large disparity of the electron–phonon interaction for the different Fermi-surface sheets. The isotope effect of MgB_2 established that the interaction responsible for the formation of pairing is mediated by phonons [7, 8] and nuclear magnetic resonance showed that the symmetry of Cooper pairs is s-wave [9].

In Senere et al.'s paper [10], they found that the order parameter of MgB_2 must be of the anisotropic s-wave with uniaxial symmetry or of the anisotropic s-wave with in-plane anisotropy. Mishonov et al. [11, 12] considered the temperature dependence of the specific heat of a clean anisotropic gap superconductor, which is applicable to MgB_2 . In Hass and Maki [13] and Posazhennikova et al. [14], models for the anisotropy gap with uniaxial symmetry in MgB_2 were proposed. The central issue in their research is to propose an analytical model for analyzing the thermodynamic behavior by assuming a spherical Fermi surface; the anisotropy gap functions are introduced as $\Delta(k) = \Delta(1 + az^2)/(1 + a)$ in [13] and $\Delta(k) = \Delta/\sqrt{1 + az^2}$ in [14], where $z = \cos \theta$, θ is the polar angle, and a is an anisotropy parameter that

* Corresponding author: e-mail: udomsamut55@yahoo.com

can be determined experimentally from the ratio of the gap in the z -axis and the gap in the ab -plane. Using these two models, Mishonov et al. [15, 16] derived analytical results for the normalized jump of the heat capacity $\Delta C/C_N$. They find that the anisotropy parameter a decreases the BCS $\Delta C/C_N$ result.

In order to describe the three-dimensional superconducting nature in MgB₂, we consider the gap function of MgB₂ depending on its axis parameters in three dimensions and follow the weak-coupling BCS approach to derive an analytical expression for $\Delta C/C_N$ for an anisotropic s -wave with in-plane anisotropy.

2 Anisotropy gap model

Because MgB₂ is an anisotropic s -wave superconductor, we can use the BCS gap equation as

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{V_{kk'}}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}{2T} \right), \quad (1)$$

where every symbol has its usual meaning.

We assume the pairing interaction as

$$V_{kk'} = V_0 f(k) f(k'). \quad (2)$$

Here $f(k)$ is the anisotropy function and V_0 is the coupling constant.

Based on the pairing interaction, an anisotropy gap is given by

$$\Delta_k = \Delta(T) f(k), \quad (3)$$

where $\Delta(T)$ is temperature dependent and $f(z) = (1 + az^2)/(1 + a)$ as in [13] or $f(z) = 1/\sqrt{1 + az^2}$ as in [14]. These two models consider only the effect of anisotropy in the c -axis.

Inserting Eqs. (2) and (3) into Eq. (1), we get the gap equation averaged over all directions of Δ_k as

$$\frac{1}{N_0 V_0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\phi \int_0^{\varepsilon_0} d\varepsilon \frac{f^2(\theta, \phi)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(T) f^2(\theta, \phi)}}{2T} \right). \quad (4)$$

Here we use a constant density of states N_0 , θ is the polar angle, ϕ is the azimuthal angle, and the factor $1/4\pi$ is the normalization factor.

In the vicinity of T_c where $(T_c - T)/T_c \ll 1$ the gap is small compared with temperature. Let $\ln(T/T_c) \approx (T - T_c)/T_c$; we find that

$$\Delta^2(T) = \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \frac{8\pi^2 T_c^2 \langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{7\zeta(3) \langle f^4(\theta, \phi) \rangle}, \quad (5)$$

where $\langle f^2(\theta, \phi) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta \, d\phi \sin \theta f^2(\theta, \phi)$ and $\zeta(x)$ is the Riemann zeta function.

The thermodynamic potential density in the normal state and the superconducting state are Ω_n and Ω_s respectively. Their relation can be written as [17]

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{7}{16} \frac{\zeta(3) N_0}{\pi^2 T_c^2} \langle f^4(\theta, \phi) \rangle \Delta^4(T). \quad (6)$$

Inserting Eq. (5) into Eq. (6), we get

$$\Omega_3 - \Omega_n = -\frac{8N_0\pi^2T_c^2}{14\zeta(3)}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle}. \quad (7)$$

By the relation $\Omega_3 - \Omega_n = -(1/8\pi)H_c^2$ with H_c the critical magnetic field, we get

$$H_c(T) = \sqrt{\frac{32\pi N_0}{7\zeta(3)}}\pi T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle}{\sqrt{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle}}. \quad (8)$$

And, by the relation $\Delta C = \frac{T_c}{4\pi} \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 \Big|_{T=T_c}$, the normalized jump of the heat capacity at $T = T_c$ is found to be

$$\frac{\Delta C}{C_N} = 1.43 \frac{\langle f^2(\theta, \phi) \rangle^2}{\langle f^4(\theta, \phi) \rangle}. \quad (9)$$

Equation (9) is Pokrovskii's result for the reduced heat-capacity jump [12, 16, 18].

3 The specific heat jump of MgB₂

To show the effect of the type of in-plane anisotropy on $\Delta C/C_N$, we make some comparisons between different models applied to MgB₂. We first consider the case of the symmetry gap $f(\theta, \phi) = 1$. Equation (9) then gives $\Delta C/C_N = 1.43$, which is the BCS result.

In the case of

$$\Delta(\theta, \phi) = \Delta_0(1 + a(\sin \theta \cos \theta)^2 + b(\sin \theta \sin \theta)^2), \quad (10)$$

this gives

$$f(\theta, \phi) = 1 + a(\sin \theta \cos \theta)^2 + b(\sin \theta \sin \theta)^2. \quad (11)$$

Here Δ_0 , a , and b are the gap parameters in the c -axis, a -axis, and b -axis, respectively. Within this model, we get $\Delta_c = \Delta_0$, $\Delta_x = \Delta_0(1 + a)$, and $\Delta_y = \Delta_0(1 + b)$. For $a = b$, we get $f(\theta) = 1 + a \sin^2 \theta$, which agrees with Hass and Maki's model [13] in the case of an anisotropic s -wave with uniaxial symmetry.

Next we let $b = a + \delta$ and insert Eq. (11) into Eq. (9); the normalized jump of the heat capacity is

$$\frac{\Delta C}{C_N} = 1.43 \frac{\left(1 + \frac{4}{3}a + \frac{8}{15}a^2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{8}{15}a\delta + \frac{1}{5}\delta^2\right)^2}{\left[1 + \frac{8}{3}a + \frac{16}{5}a^2 + \frac{64}{35}a^3 + \frac{128}{315}a^4 + \frac{4}{3}\delta + \frac{16}{5}a\delta + \frac{96}{35}a^2\delta + \frac{256}{315}a^3\delta + \frac{6}{5}\delta^2 + \frac{72}{35}a\delta^2 + \frac{32}{35}a^2\delta^2 + \frac{4}{7}\delta^3 + \frac{32}{63}a\delta^3 + \frac{1}{9}\delta^4\right]}. \quad (12)$$

Our Eq. (12) can be reduced to Eq. (1) of [14] by putting $\delta = 0$ and $a = -a'/(1 + a)$; a' is the gap parameter of [15]. The numerical calculation of Eq. (12) is shown in Fig. 1, where $\Delta C/C_N$ shows the maximum value when $a = 0$ for all δ . When $-1 < a < 0$, $\Delta C/C_N$ decreases with increasing δ/a and, as $a > 0$, $\Delta C/C_N$ also decreases with increasing $|\delta/a|$.

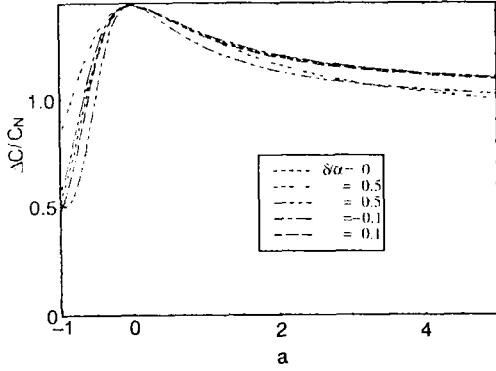


Fig. 1 Plot of $\Delta C/C_N$ versus gap parameter a in the a -axis at various values of δ/a in the case $\Delta(\theta, \phi) = \Delta_0(1 + a(\sin \theta \cos \theta)^2 + b(\sin \theta \sin \theta)^2)$, where $b = a + \delta$. At $\delta/a = 0$, we get Mishonov et al. [15] result.

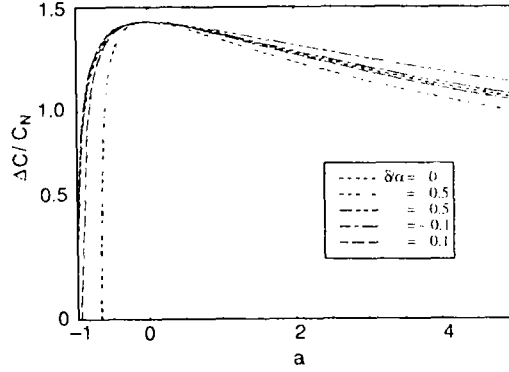


Fig. 2 Plot of $\Delta C/C_N$ versus gap parameter a in the a -axis at various values of δ/a in the case $\Delta(\theta, \phi) = \Delta_0/\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}$, where $b = a + \delta$. At $\delta/a = 0$, we get Mishonov et al. [16] result.

For another case of interest, we consider the anisotropy gap in the form

$$\Delta(\theta, \phi) = \frac{\Delta_0}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}}, \quad (13)$$

which gives

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + a(\sin \theta \cos \phi)^2 + b(\sin \theta \sin \phi)^2}}. \quad (14)$$

Here Δ_0 , a , and b are the gap parameters along the c -axis, a -axis, and b -axis, respectively. Within this model, we get $\Delta_c = \Delta_0$, $\Delta_x = \Delta_0/(1+a)$, and $\Delta_y = \Delta_0/(1+b)$. For $a = b$, we get $f(\theta) = 1/\sqrt{1 + a \sin^2 \theta}$, which agrees with Posazhennikova et al.'s model [14] in the case of an anisotropic s -wave with uniaxial symmetry.

As before, we let $b = a + \delta$ and insert Eq. (14) into Eq. (9); the normalized jump of the heat capacity is

$$\frac{\Delta C}{C_N} = 1.43 \times 2 \left[\frac{\left[\frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)}} + \frac{\delta}{2} \left(-\frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)}^{3/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ka^{k-1}}{(2k+1)(1+a)^{k+2}} \right) \right]^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{(1+a)(1+a+\delta)}} + \frac{\tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)}^{3/2}} + \frac{\delta}{2} \left(-\frac{2 \tanh^{-1} \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{a(1+a)}^{5/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ka^{k-1}}{(2k+1)(1+a)^{k+3}} \right) \right]} \right]. \quad (15)$$

Equation (15) can be reduced to Eq. (1) of [16] by putting $\delta = 0$ and $a = -a'/(1+a')$; a' is the gap parameter of [16]. Numerical calculations of Eq. (15) are shown in Fig. 2. The maximum value of $\Delta C/C_N$ occurs at $a = 0$. When $-1 < a < 0$ and $\delta/a > 0$, $\Delta C/C_N$ decreases while δ/a increases but there is no change in $\Delta C/C_N$ in the case $\delta/a < 0$ and $a = 0$. Figure 2 shows that $\Delta C/C_N$ decreases as δ/a increases.

4 Discussion and conclusions

In both cases under consideration, we find an anisotropy effect on $\Delta C/C_N$, which shows a maximum value at $a = 0$ and, when $\delta/a > 0$, $\Delta C/C_N$ will decrease as δ/a increases. This result indicates that the effect of anisotropy in the ab -plane decreases $\Delta C/C_N$.

Based on the experimental data on MgB_2 of Seneor et al. [10], they found a maximum gap $\Delta_c = 8$ meV for the c -axis film and a minimum gap $\Delta_{ab} = 5$ meV; this gives $\Delta_{ab}/\Delta_c = 0.625$. Our model predicts that if there is a gap symmetry in the ab -plane, i.e. $a = b$, the value of $\Delta C/C_N$ should be 1.28 and, if there is an asymmetry of the gap in the ab -plane, $a \neq b$, the value of $\Delta C/C_N$ should be slightly more or less than this depending on its a and b parameters. Because of $\Delta C/C_N$ depending on the parameter, we think that the effect of in-plane asymmetry may be the cause of non-sharpness in the specific heat curve at T_c .

In conclusion, we have derived analytical results for the normalized jump of the heat capacity of $\Delta C/C_N$ of MgB_2 with an anisotropy gap by including the effect of in-plane gap anisotropy within the framework of the weak-coupling BCS approach. We find that, within the three-dimensional anisotropy, the value of $\Delta C/C_N$ is less than the BCS value, and the effect of the in-plane asymmetry will reduce or increase the value of $\Delta C/C_N$ of the in-plane symmetry depending on its parameters.

Acknowledgement We acknowledge financial support by the Thai Research Fund.

References

- [1] F. Bouquet, Y. Wang, R. A. Fisher, et al., *Europhys. Lett.* **56**, 856 (2001).
F. Bouquet, R. A. Fisher, N. E. Phillips, et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 047001 (2001).
Y. Wang, T. Plackowski, and A. Junod, *Physica C* **355**, 179 (2001).
F. Bouquet, Y. Wang, I. Sheikin, et al., *Physica C* **385**, 192 (2003).
- [2] R. Combescot, *Europhys. Lett.* **43**, 701 (1998).
- [3] R. S. Gonnelli, et al., *cond-mat/0209472v2*.
- [4] I. I. Mazin, et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 107002 (2002).
- [5] H. Suhl, B. T. Matthias, and L. R. Walker, *Phys. Rev. Lett.* **3**, 552 (1959).
- [6] V. A. Moskalenko, M. E. Palistrant, and V. M. Vakalyuk, *Sov. Phys. Usp.* **34**, 717 (1991).
- [7] S. L. Budko, G. Lapertot, C. Petrovic, et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1877 (2001).
- [8] D. H. Hinks, H. Claus, and J. D. Jorgensen, *Nature* **411**, 457 (2001).
- [9] H. Kotegawa, K. Ishida, Y. Kitaoka, et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 127001 (2001).
- [10] P. Seneor, et al., *Phys. Rev. B* **65**, 012505 (2002).
- [11] T. M. Mishonov, et al., *cond-mat/0212491v3*.
- [12] T. M. Mishonov and E. Penev, *Int. J. Mod. Phys. B* **16**, 3573 (2002).
- [13] S. Hass and K. Maki, *Phys. Rev. B* **65**, 020502(R) (2001).
- [14] A. I. Posazhennikova, T. Dahm, and K. Maki, *cond-mat/0204272*.
- [15] T. M. Mishonov, E. S. Penev, and J. O. Indekeu, *cond-mat/0204545v1*.
- [16] T. M. Mishonov, E. S. Penev, and J. O. Indekeu, *cond-mat/0205104v3*.
- [17] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [18] V. L. Pokrovskii and M. S. Ryvkin, *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **43**, 92 (1962).
V. L. Pokrovskii, *Zh. Exp. Teor. Fiz.* **40**, 641 (1961).