ผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม

ปริญญานิพนธ์

ของ

ญานิน กองทิพย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

กุมภาพันธ์ 2544

ผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม

บทคัดย่อ

ของ

ญานิน กองทิพย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
กุมภาพันธ์ 2544

ญานิน กองทิพย์. (2544). *ผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่ม, รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ.

นอร์ดฮอสและแกดดัมได้แสดงว่า สำหรับทุกกราฟ G ที่มีอันดับ n สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

และ

$$n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

เราพิจารณาปัญหาของการหา c ทุก ๆ ค่า ซึ่งทำให้มีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ที่มีอันดับ n และ $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = c$ เราหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของ c สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่กำหนดให้ กล่าวคือ เราพิสูจน์ว่า ถ้า
$\Re(n) = \left\{ G \,\middle|\, G \text{ เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ} |V(G)| = n \geq 2 \right\}$ และ
$X(n) = \left\{ \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \,\middle|\, G \in \Re(n) \right\}$ จะได้ว่า $c \in X(n)$ ก็ต่อเมื่อ มี $r, s \in Z^+$ ซึ่ง $c = r \cdot s$ และ $2\sqrt{n} \leq r + s \leq n + 1$

THE PRODUCT OF CHROMATIC NUMBER OF GRAPH AND ITS COMPLEMENT

AN ABSTRACT

BY

YANIN KONGTHIP

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
February 2001

Yanin Kongthip. (2001). *The Product of Chromatic Number of Graph and Its Complement.* Master Thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Narong Punnim , Assoc. Prof. Kamon Eakthaichareon.

Nordhaus and Gaddum have shown the following inequalities :

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1 \quad \text{and}$$

$$n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

for all graphs G of order n.

We consider the problem of determining all integers c in which there exists a simple connected graph G of order n such that $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = c$. We found a necessary and sufficient condition on c for a given integer n. More precisely, we prove that if $\Re(n) = \left\{ G \,\middle|\, G \text{ is connected and } |V(G)| = n \geq 2 \right\}$ and $X(n) = \left\{ \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \,\middle|\, G \in \Re(n) \right\}$, then

$c \in X(n)$ if and only if there exist r, s $\in Z^+$ such that $c = r \cdot s$ and $2\sqrt{n} \leq r + s \leq n+1$

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

ผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเดิมเต็ม

ของ

นางสาวญานิน กองทิพย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)
วันที่ 27 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2544

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์สายัณห์ โสธะโร)

ประกาศคุณูปการ

การศึกษาปริญญาโทครั้งนี้ ผู้วิจัยได้รับทุนสนับสนุนจาก "ทบวงมหาวิทยาลัย" โครงการพัฒนาอาจารย์สาขาขาดแคลน

ผู้วิจัยขอน้อมระลึกถึงพระคุณครู – อาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาการแก่ผู้วิจัย

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดี เนื่องมาจากได้รับความอนุเคราะห์จากผู้ที่มีพระคุณหลายท่าน รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่มและรองศาสตราจารย์กมล เอกไทยเจริญ กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ซึ่งได้มอบเอกสารที่มีคุณค่าและเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่องานวิจัย และได้เสียสละเวลาอันมีค่ายิ่งของท่านให้คำปรึกษา คำแนะนำ แนวคิด และตรวจอ่านปริญญานิพนธ์ ทำให้งานวิจัยฉบับนี้มีความชัดเจน สมบูรณ์ และก่อให้เกิดประโยชน์แก่ผู้วิจัยเป็นอย่างยิ่ง ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ และอาจารย์สายัณห์ โสธะโร ที่ได้กรุณาเป็นกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัยครั้งนี้

ขอขอบคุณอาจารย์กฤติกา ชิดชู อาจารย์ 1 ระดับ 3 โรงเรียนป่าบอนวิทยาคม ที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือแก่ผู้วิจัย

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบให้ดวงวิญญาณของบิดาที่ได้ล่วงลับไปแล้ว

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบระลึกถึงในพระคุณของคุณแม่ และทุกคนในครอบครัว รวมทั้งเพื่อนทุกท่านที่ให้ความสนับสนุนและเป็นกำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

ญานิน กองทิพย์

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญมากต่อการดำเนินชีวิตของมนุษย์ เป็นกระบวนการที่เกี่ยวกับความคิด โครงสร้างที่มีเหตุผล การพิสูจน์ในทางคณิตศาสตร์เริ่มต้นด้วย อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ทำให้เกิดการคิดที่เป็นกระบวนการ มีแบบแผน เป็นระเบียบ เป็นรากฐานในการพิสูจน์เรื่องอื่นๆ ต่อไป คณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาหลายสิ่งหลายอย่างได้เป็นอย่างดี ปัญหาหลายอย่างที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวัน เราสามารถแปลงให้อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์และใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ช่วยแก้ปัญหานั้นได้ เราเรียกปัญหาที่อยู่ในรูปปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์(Mathematical Model) ซึ่งในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ใดๆ นั้นอาจจะสร้างได้หลายแบบ บางครั้งอาจจะเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ ซึ่งก็แล้วแต่ว่าเราจะเลือกใช้วิธีใดให้เหมาะสมกับความต้องการของเรามากที่สุด (นิตยา ชิงชัย. มปป : 1-11 , ยุพิน พิพิธกุล. 2524 : 1-2)

ทฤษฎีกราฟ(Graph Theory) เป็นสาขาหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้รับความสนใจเป็นอย่างมากในปัจจุบัน และยอมรับว่าเป็นสาขาที่มีการนำไปประยุกต์ใช้กับสาขาอื่นๆ ได้มากมายเช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิทยาศาสตร์แผนใหม่ วิศวกรรมไฟฟ้า จิตวิทยา เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา รวมทั้งทางด้านโทรคมนาคม คอมพิวเตอร์ และเรื่องอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับเทคโนโลยี นอกจากนั้นทฤษฎีกราฟยังเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แขนงอื่นอีก เช่น ทฤษฎีกลุ่ม(Group Theory) ทฤษฎีเมตริกซ์(Matrix Theory) โทโพโลยี (Topology) และทฤษฎีแลททิส(Lattice Theory) เป็นต้น (Caccetta. 1996 : 1-22 , Truss. 1992 : 313-315 , นิตติยา ปภาพจน์. 2529 : 1-2 , วนิดา เหมะกุล. 2521 :4-112)

การพบทฤษฎีกราฟมักจะพบในส่วนที่เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งการค้นพบแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกันและไม่ได้นำมารวบรวมกันไว้ ดังนั้นถ้าจะนับการเกิดทฤษฎีกราฟจริงๆ แล้วจะถือว่าเป็นการค้นพบในปี ค.ศ.1736 ซึ่งเป็นความพยายามในการตอบปริศนา(Puzzle) ต่างๆ และปัญหาที่เป็นที่รู้จักกันดีคือ ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก(KÖnigsberg Bridge Problem) โดยเป็นผลงานของนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสที่ชื่อเลออนฮาร์ด ออยเลอร์(Euler. 1703-1783) นับตั้งแต่นั้นมา ทฤษฎีกราฟได้ถูกพัฒนามาเรื่อยๆ ดังนั้นออยเลอร์จึงได้ชื่อว่าเป็นบิดาของทฤษฎีกราฟ (Harary. 1972 : 1-5 , นิตยา ชิงชัย. มปป: 1-8)

ต่อมา ในปี ค.ศ.1847 ได้มีผู้ขยายทฤษฎีกราฟอีกคือ เคอร์ชอฟ(Kirchhoff. 1824-1887) ในความพยายามแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับวงจรไฟฟ้า จึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีที่เกี่ยวกับทรี(Tree) ซึ่งเป็นกราฟชนิดหนึ่ง และในปี ค.ศ.1857 เคเลย์(Cayley. 1821-1895) ได้ศึกษาทรีเพื่อนำไปแก้ปัญหาจำนวนโมเลกุลของสารเคมี และยังมีนักคณิตศาสตร์อีกหลายท่านได้นำทฤษฎีกราฟโดยการศึกษาเพื่อนำไปแก้ปัญหาต่างๆ (นิตติยา ปภาพจน์. 2529 : 1-2 , นิตยา ชิงชัย. มปป: 1-8) นอกจากนั้นยังมีปริศนาที่เกี่ยวข้องกับกราฟเช่น เกมการท่องเที่ยว(Around The World) ซึ่งถูกตั้งขึ้นในปี ค.ศ.1859 โดยแฮมิลตัน(Hamilton. 1805-1865) (นิตยา ชิงชัย. มปป : 1-8) ปริศนาการเดินทางของม้าหมากรุก(Knight Tour Puzzle) ซึ่งพบคำตอบในปี ค.ศ.1759 โดยเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ปัญหาการส่งจดหมายของบุรุษไปรษณีย์จีน(The Chinese Postman Problem) ปัญหานี้ได้ถูกเสนอครั้งแรกในปี

ค.ศ.1962 โดยเหมย ชู(Meigu) ปัญหาการระบายสีโดยใช้สีเพียงสี่สี(The Four Color Problem) เป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุด โดยจุดเริ่มต้นของปัญหาเกิดขึ้นในช่วงต้นปี ค.ศ.1850 โดยกัทร์ทรี(Guthrie) จนกระทั่งในปี ค.ศ.1976 มีผู้ค้นพบคำตอบของปัญหานี้ โดยแอพเพลและฮาเคน (Appel and Haken) ซึ่งได้แบ่งปัญหานี้เป็น 2,000 กรณี แล้วใช้คอมพิวเตอร์วิเคราะห์ในแต่ละกรณี โดยใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า 1,200 ชั่วโมง(Mott. 1986. : 558-576 , นิตติยา ปภาพจน์. 2529 : 1-2 , นิตยา ชิงชัย. มปป: 1-8 และ นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2540 : 1-250) ปัจจุบันนี้ได้มีการพัฒนาทฤษฎีกราฟขึ้นอย่างต่อเนื่องทำให้มีการค้นพบทฤษฎีบทอื่นๆ อีกมากมาย

กราฟ G เป็นกราฟ k - สี(k – Colorable Graph) เมื่อเราสามารถกำหนดสีให้กับจุด(Vertex) ทั้งหมดในกราฟ G โดยใช้สีไม่เกิน k สี และมีข้อแม้ว่าจุดสองจุดใดๆ ในกราฟ G ที่ประชิด(Adjacent) กันจะต้องได้รับการกำหนดสีที่ต่างกัน เรียกค่า k ที่ต่ำที่สุดที่ทำให้กราฟ G เป็นกราฟ k - สีว่าจำนวนโครมาติค (Chromatic Number) ของกราฟ G และใช้สัญลักษณ์คือ $\chi(G)$ ถ้า $\chi(G)=k$ เราจะเรียกกราฟ G ว่า k - โครมาติค(k - Chromatic) การหาจำนวนโครมาติคของกราฟมีบทประยุกต์มากมายได้แก่ การจัดตารางสอน การจัดตารางการประชุม การแก้ปัญหาในการแบ่งเป็นต้น จากบทบาทดังกล่าว ทำให้การหาจำนวนโครมาติคของกราฟได้รับความสนใจจากนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ซึ่งจะเห็นได้จากผลการวิจัยของนักคณิตศาสตร์ที่ได้รวบรวมโดยคาเซตตา(Caccetta. 1996 : 98-128) นอกจากนี้เจ็นเซ็นและทอฟท์ (Jensen and Toft. 1995 : 1-272) ได้รวบรวมปัญหาที่เกี่ยวกับปัญหาการกำหนดสีบนกราฟ (Graph Coloring Problems) ไว้มากมาย

ในปี ค.ศ.1956 นอร์ดฮอสและแกดดัม(Nordhaus and Gaddum) ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกและผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็มได้ดังอสมการต่อไปนี้

$$1.\ 2\sqrt{n} \le \chi(G)+\chi(\overline{G}) \le n+1$$

$$2.\ n \le \chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

เมื่อ G เป็นกราฟอย่างง่ายและ $|V(G)|=n$

จากผลการค้นพบของนอร์ดฮอสและแกดดัมต่อมาในปี ค.ศ.1968 ฟินค์(Fink) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่ $|V(G)|=n$ ที่ทำให้

$$\chi(G)+\chi(\overline{G})=n+1$$

และกราฟ G ทั้งหมดที่ $|V(G)|=n$ และ

$$\chi(G)+\chi(\overline{G})=n+1$$

และในปีค.ศ.1990 อชูฐานและคณะ (Achuthan, et al.) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่ $|V(G)|=n$ และ

$$\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=\lceil 2\sqrt{n}\rceil$$

และกราฟทั้งหมดที่ $|V(G)|=n$ และ

$$\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=n$$

จากผลการวิจัยของเนอร์ดฮอสและแกดดัมที่กล่าวว่า ถ้า G เป็นกราฟอย่างง่ายและ $|V(G)|=n$ แล้ว

1. $2\sqrt{n}\le\chi(G)+\chi(\overline{G})\le n+1$
2. $n\le\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

ประกอบกับงานวิจัยของนักคณิตศาสตร์ที่ได้กล่าวมาแล้วเกี่ยวกับการค้นหากราฟ G ทั้งหมดซึ่ง $|V(G)|=n$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\chi(G)+\chi(\overline{G})=\lceil 2\sqrt{n}\rceil$
2. $\chi(G)+\chi(\overline{G})=n+1$
3. $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=n$
4. $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=\left\lfloor\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\rfloor$

และจากผลงานของกฤติกา ชิดชู ที่กล่าวว่า เมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ จะมีกราฟไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$ เขาได้พิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยการสร้างกราฟต่อเนื่อง G ซึ่ง $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$

ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาปัญหาต่อไปนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ต้องการหาจำนวนเต็มบวก c ทุกๆ ค่า ซึ่ง $n \leq c \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่ทำให้มีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = c$

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ เพื่อตอบปัญหาดังต่อไปนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ต้องการหาจำนวนเต็มบวก c ทุกๆ ค่า ซึ่ง $n \leq c \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่ทำให้มีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = c$

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาทฤษฎีกราฟให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ศึกษาเฉพาะกรณีที่กราฟเป็นกราฟอย่างง่าย กราฟจำกัด และกราฟไม่ขาดตอน

นิยามศัพท์เฉพาะ

กราฟ (Graph) จุด (Vertex) เส้น (Edge)

กราฟ G คือ (V(G), E(G)) โดยที่ V(G) เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ E(G) คือเซตของอันดับของสมาชิกที่อยู่ในรูป {a, b} เมื่อ $a, b \in V(G)$ เรียกสมาชิกในเซตV(G) ว่า**จุด** และเรียกสมาชิก {a, b} ที่อยู่ในอันดับ E(G) ว่า**เส้น** เซตของจุดของกราฟ G เขียนแทนด้วย V(G) และ $|V(G)|$ แทนจำนวนจุดของกราฟ G เรียก $|V(G)|$ ว่า**อันดับ**(Order) ของกราฟ G เขียน E(G) แทนเซตของเส้นในกราฟ G และ $|E(G)|$ แทนจำนวนเส้นของกราฟ G เรียก $|E(G)|$ ว่า**ขนาด**(Size) ของ G โดยที่มี $\Delta(G)$ เป็นดีกรีที่มากที่สุด และ $\delta(G)$ เป็นดีกรีน้อยที่สุด

ประชิด (Adjacent) ตกกระทบ (Incident)

ให้ G = (V(G), E(G)) แทนกราฟ $u, v \in V(G)$ เรากล่าวว่า u และ v ประชิดกันในกราฟ G ถ้ามี $e = \{u, v\} \in E(G)$ ในกรณีเช่นนี้เราเรียกเส้น e และจุด u ตกกระทบกันในกราฟ G

ทางเดิน (Path)

ให้ G แทนกราฟ u, v เป็นจุดของ G **ทางเดิน** จาก u ไป v ในกราฟ G คืออันดับของจุด $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ เมื่อ $v_0 = u$ และ $v_k = v$ และ $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}$ จะต้องเป็นเส้นในกราฟ G ที่แตกต่างกันทั้งหมด ในกรณีเช่นนี้เราเรียกทางเดิน
$u = v_0 - v_1 - v_2 \ldots - v_{k-1} - v_k = v$ นี้ว่าเป็นทางเดินจาก u ไป v ในกราฟ G ที่มีความยาว k

กราฟอย่างง่าย(Simple Graph) กราฟจำกัด(Finite Graph) และกราฟไม่ขาดตอน (Connected Graph)

กราฟอย่างง่าย คือ กราฟ G ที่มีสมาชิกในอันดับ E(G) ไม่ซ้ำกัน และไม่มีสมาชิก {a, a} ปรากฏอยู่ในอันดับ E(G)

เราเรียกกราฟ G ว่าเป็น**กราฟจำกัด** ก็ต่อเมื่อ $|V(G)|$ และ $|E(G)|$ ของกราฟ G เป็นเซตจำกัด

และเรียกกราฟ G ว่าเป็น**กราฟไม่ขาดตอน** ก็ต่อเมื่อทุกๆ u, v ที่เป็นจุดของ G ซึ่ง $u \neq v$ จะมีทางเดินในกราฟ G จาก u ไป v มิฉะนั้นแล้ว G เป็นกราฟขาดตอน(Disconnected Graph)

สับกราฟ (Subgraph) และอินดิวซ์สับกราฟ (Induce Subgraph)

ให้ G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟ เราจะเรียกกราฟ H = (V(H), E(H)) ว่า สับกราฟของ G ก็ต่อเมื่อ $V(H) \subseteq V(G)$ และ $E(H) \subseteq E(G)$ และให้ $\varnothing \neq X \subseteq V(G)$ อินดิวซ์สับกราฟของ G ที่มี X แทนเซตของจุด เขียนแทนด้วย G[X] คือสับกราฟของ G ซึ่ง V(G[X]) = X และทุก ๆ $u, v \in X$, ถ้า $\{u, v\} \in E(G)$ แล้ว $\{u, v\} \in E(G[X])$

จำนวนโครมาติคของกราฟ (Chromatic Number of a Graph)

ให้ G = (V(G), E(G)) เป็นกราฟอย่างง่าย และ k เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะเรียกกราฟ G ว่าเป็น**กราฟที่ให้สีบนจุด k สีได้** ก็ต่อเมื่อเราสามารถกำหนดจำนวนเต็มบวกที่เลือกจาก 1, 2, 3, ..., k ลงบนจุดของกราฟ G จุดละ 1 จำนวน และจุดคู่ใดที่มีเส้นเชื่อมจุดต้องได้รับการกำหนดจำนวนเต็มดังกล่าวที่ต่างกัน และเรียกกราฟ G ว่าเป็นกราฟที่ให้สีบนจุดน้อยที่สุด k สี ก็ต่อเมื่อ k **เป็น**จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ G เป็นกราฟที่ให้สีบนจุด k สี ในกรณีเช่นนี้เราเขียน $k = \chi(G)$ และเรียก $\chi(G)$ ว่า**จำนวนโครมาติค**ของกราฟ G

กราฟเติมเต็ม (Complementary Graph)

ให้ G เป็นกราฟอย่างง่ายกำหนด**กราฟเติมเต็ม**ของ G และเขียนแทนด้วย $\overline{G}$ โดย $\overline{G}$ เป็นกราฟอย่างง่าย ซึ่ง $V(\overline{G}) = V(G)$ และจุดสองจุดใดๆ จะเป็นจุดประชิดกันในกราฟ $\overline{G}$ ก็ต่อเมื่อจุดสองจุดนั้นไม่ประชิดกันในกราฟ G

กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph)

ถ้า $E(G) = \left\{ \{x, y\} \,\middle|\, x, y \in V(G) \text{ และ } x \neq y \right\}$ เราเรียกกราฟ G ว่า **กราฟบริบูรณ์** ในกรณีที่ G เป็นกราฟบริบูรณ์ และ $|V(G)| = n$ เราจะใช้สัญลักษณ์ K_n แทนกราฟบริบูรณ์ที่มีอันดับ n

คลิก(Clique)

ให้ G เป็นกราฟ และ H เป็นสับกราฟของ G เรียก H ว่า **คลิก** ก็ต่อเมื่อ H เป็นกราฟบริบูรณ์ จำนวนคลิกของกราฟ G เขียนแทนด้วย $\omega(G)$ กำหนดโดยขนาดที่มากที่สุดของคลิกในกราฟ G

กราฟต่างสมาชิกกัน (Disjoint Graph)

กราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่างสมาชิกกัน ถ้ากราฟทั้งสองไม่มีจุดร่วมกัน

ยูเนียน (Union)

กำหนดให้กราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟต่างสมาชิกกัน กำหนดยูเนียนของกราฟ G_1 และ G_2 คือกราฟ $G_1 \cup G_2$ โดยที่ $V(G_1 \cup G_2)$ และ $E(G_1 \cup G_2)$ ของกราฟ $G_1 \cup G_2$ คือ $V(G_1) \cup V(G_2)$ และ $E(G_1) \cup E(G_2)$ ตามลำดับ ในกรณีที่ $G_1, G_2, \ldots, G_t$ แทนกราฟที่แต่ละคู่ต่างสมาชิกกัน กำหนด $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$ แทนกราฟ $(G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{t-1}) \cup G_t$ นอกจากนั้น
ถ้า $G_1 \cong G_2 \cong \ldots \cong G_t \cong G$ โดยสัญลักษณ์ $\cong$ แทน กราฟถอดแบบกัน (isomorphic) เราจะเขียน tG แทนกราฟ $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t$

สัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ และ $\lfloor x \rfloor$

ให้ x เป็นจำนวนจริงกำหนดสัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ หมายถึงจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ x และกำหนดสัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

งานวิจัย

ค.ศ.1936 เคอนิกส์(KÖnig) พิสูจน์ได้ว่ากราฟจะสามารถระบายสีได้ 2 สี ก็ต่อเมื่อ กราฟนั้นไม่มีวัฏจักร(Cycle) ที่มีความยาวเป็นจำนวนคี่ (Harary. 1972 : 126-127)

ต่อมาในปี ค.ศ.1941 บรูคส์(Brooks) พิสูจน์ได้ว่า $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ สำหรับทุกๆ กราฟ G นอกจากนั้น $\chi(G)=\Delta(G)+1$ ก็ต่อเมื่อ $\Delta(G) \neq 2$ และ G มี $K_{\Delta(G)+1}$ ที่เป็นคอมโพเนนท์ไม่ขาดตอน(Connected Component) หรือ $\Delta(G)=2$ และ G มีวัฏจักรคี่เป็นคอมโพเนนท์ไม่ขาดตอน (Brooks. 1941 : 194-197)

ค.ศ.1954 เคลลี่และเคลลี่(J.B.Kelly and L.M.Kelly) และเดสคาร์ทส(Descartes) ได้แสดงโครงสร้างของกราฟที่มีจำนวนโครมาติคและเกิร์ท (Girth หมายถึง ความยาวของวัฏจักรที่สั้นที่สุดใน G) มากกว่า 5 ต่อมาในปี ค.ศ.1968 โลวาสซ์(Lovasz) แสดงโครงสร้างของกราฟที่มีจำนวนโครมาติค $n \geq 2$ และเกิร์ท $g \geq 2$ (J.B.Kelly and L.M.Kelly 1954 : 786-792, Descartes. 1954 : 352)

ค.ศ.1955 มายเซียลสกี(Mycielski) พิสูจน์ว่า มีกราฟ G ที่มี n-โครมาติคโดยปราศจากวัฏจักรที่มีความยาวสาม สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n (Mycielski. 1955 : 161-162)

ค.ศ.1956 นอร์ดฮอสและแกดดัมได้พบความสัมพันธ์ของผลบวกและผลคูณของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็มที่มีอันดับ n ดังนี้

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$
2. $n \leq \chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

(Caccetta. 1996 : 114-123)

ค.ศ.1964 เออร์ดอสและกาลไล(ErdÖs and Gallai) แสดงให้เห็นว่ากราฟปรกติ (Regular Graph)บน n จุดมีจำนวนโครมาติค $k \leq \dfrac{3n}{5}$ ยกเว้นกราฟบริบูรณ์ (ErdÖs and Gallai.1964 : 167-168)

ต่อมา ค.ศ.2000 ณรงค์ ปั้นนิ่ม สามารถที่จะขยายผลงานของเออร์ดอสและกาลไล โดยการพิจารณาปัญหาของการค้นหากราฟปกติ G ที่มีดีกรี $j-1$ ที่มีอันดับน้อยที่สุด f(j) ซึ่งจำนวนโครมาติคของ

$\overline{G}$ มากกว่า $\frac{f(j)}{2}$ เขาเรียกกราฟชนิดนี้ว่ากราฟ F(j) เขาได้สร้างกราฟ F(j) ทุกๆ j ที่เป็นจำนวนเต็มบวกคี่และแสดงได้ว่า

$$\text{ถ้า } j \equiv 3 \pmod 4 \text{ แล้ว } f(j) = \frac{5(j-1)}{2}$$

$$\text{และ ถ้า } j \equiv 1 \pmod 4 \text{ แล้ว } f(j) = 1 + \frac{5(j-1)}{2}$$

(Punnim. 2000.)

และ ค.ศ.1990 คาเซตตาและพูลแมน(Caccetta and Pullman) ได้ดำเนินการพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

1. ถ้า $k \geq 1$ แล้ว สำหรับทุก $n \geq \left\lceil \frac{5k}{3} \right\rceil$ จะมีกราฟปกติ k โครมาติคไม่ขาดตอน (Regular Connected Graph) บน n จุด
2. มีกราฟปกติไม่ขาดตอน G บน n จุดที่บรรจุ k - คลิก(k - Clique) ก็ต่อเมื่อ $n \geq 2k$ หรือ G เป็นกราฟบริบูรณ์ และ n = k + 1

(Caccetta and Pullman. 1990 : 65-71)

คาเซตตาและพูลแมน(Caccetta and Pullman) สนใจปัญหาต่อไปนี้ให้ G(n, k, d) คือเซตของกราฟ k - โครมาติค,ดีกรีปรกติ d (d - Regular,k - Chromatic Graph) บน n จุด เมื่อกำหนด n, k มาให้ เขาต้องการหาจำนวนเต็มบวก d ทั้งหมดซึ่งทำให้ $G(n, k, d) \neq \varnothing$ เขาได้ตอบปัญหาข้างต้นได้ในกรณีที่ $n \equiv 0 \pmod k$ และ $n > k^2$ เมื่อ $n \not\equiv 0 \pmod k$ (Caccetta and Pullman. Preprint)

และในปี ค.ศ.1998 ณรงค์ ปั้นนิ่มได้หาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ทุกกรณี นั่นคือเขาสามารถหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวได้ทุกๆ n, k เมื่อ $3 \leq k \leq d \leq n-2$ (ณรงค์ ปั้นนิ่ม. 1998 : 161-173)

ค.ศ.1964 ฮาลิน, เซคเคอร์ริสและวิลฟ์(Halin, Szekeres and Wilf) ได้แสดงว่า สำหรับกราฟ G ใดๆ $\chi(G) \leq 1 + \max\left\{\delta(G') \,\middle|\, G' \text{เป็นอินดิวซ์สับกราฟของ} G\right\}$ (Caccetta. 1996 : 116-117)

ต่อมาฮีเด็ทไนมิ (Hedetniemi) ได้แสดงว่า

ถ้ามีเส้นบางเส้นของกราฟ G ไม่อยู่บนวัฏจักรแฮมิลโทเนียล (Hamiltonian Cycle) แล้ว

$$\chi(G) \leq 1 + \frac{p}{2} \quad \text{เมื่อ } p = |V(G)|$$

(Harary. 1972 : 127)

ค.ศ.1966 ฟินค์(Fink) ได้แสดงว่า กราฟปรกติจากเงื่อนไขที่ ฮีเด็ทไนมิได้แสดงไว้มีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

1. $\chi(G)+\chi(\overline{G})=n+1$ เป็นจริงเฉพาะ G คือ $K_n,\overline{K}_n$ และ C_5 เท่านั้น
2. $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=\left\lfloor\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\rfloor$ เป็นจริงเฉพาะ G คือ $K_1,K_2,\overline{K}_2$ และ C_5 เท่านั้น
3. ถ้า p = $|v(G)|$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=p$ สำหรับ $K_p,\overline{K}_p$ เท่านั้น
4. $(\chi(G))^2+(\chi(\overline{G}))^2=n^2+1$ ก็ต่อเมื่อ G = K_n หรือ $\overline{K}_n$

(Fink. 1966 : 243-251)

ค.ศ.1967 เวลช์และเพาเวล(Welsh and Powell) ได้แสดงให้เห็นว่า กำหนดให้ G เป็นกราฟที่มี $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ และ $d(v_i)\geq d(v_{i+1})$ สำหรับ i = 1, 2, . . . , n – 1 จะได้ว่า

$$\chi(G)\leq\max_i\{\min\{i,d(v_i)+1\}\}$$

(Gould. 1988 : 221-248)

หลังจากนั้นในปี ค.ศ.1968 ฟินค์(Fink) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่ $|v(G)|=n$ ที่ทำให้

$$\chi(G)+\chi(\overline{G})=n+1$$

และกราฟ G ทั้งหมดที่ $|V(G)|=n$ และ

$$\chi(G)\cdot\chi(\overline{G})=\left\lfloor\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right\rfloor$$

และในปี ค.ศ.1990 อชูฐานและคณะ(Achuthan, et al.) ได้ค้นหากราฟ G ทั้งหมดที่ $|V(G)| = n$ และ

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$$

และกราฟทั้งหมดที่ $|V(G)| = n$ และ

$$\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = n$$

(Caccetta. 1996 : 125-130)

ปี ค.ศ.1970 สาชส์(Sachs.) ตอบปัญหาที่ว่า สำหรับทุกๆ กราฟ G ที่ $\chi(G) \geq \omega(G)$ โดยที่ $\omega(G)$ เป็นจำนวนของจุดในคลิก(clique) ที่มากที่สุด (Sachs. 1970 : 377-384)

และในปี พ.ศ.2543 กฤติกา ชิดชู ได้แสดงว่า เมื่อกำหนดจำนวนเต็มบวก n และ c ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq c \leq n+1$ จะมีกราฟไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = c$ ได้ (กฤติกา ชิดชู. 2543 : 10-18)

บทที่ 3
ผลการวิจัย

สำหรับในบทที่ 3 นี้ จะกล่าวถึงการตอบปัญหาที่ผู้วิจัยได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 และแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อตอบปัญหาดังต่อไปนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ต้องการหาจำนวนเต็มบวก c ทุกๆ ค่า ซึ่ง $n \le c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่ทำให้มีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) = c$

คำตอบของปัญหาข้างต้น คือผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ r และ s เป็นจำนวนเต็มบวก จะมีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ $\chi(G) = s$ และ $\chi(\overline{G}) = r$ ก็ต่อเมื่อ $2\sqrt{n} \le r + s \le n+1$ และ $n \le r \cdot s \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ข้างต้น ผู้วิจัยมีความจำเป็นที่จะต้องพัฒนาบทนิยาม และทฤษฎีบทนำ และจะเห็นได้ชัดว่าทางหนึ่งของทฤษฎีบทที่ 1 เป็นผลสืบเนื่องจากทฤษฎีบทของนอร์ดฮอสและแกดดัมที่เป็นเครื่องกำหนดขอบเขตของผลบวกและผลคูณของ $\chi(G)$ และ $\chi(\overline{G})$ ซึ่งจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 สำหรับกราฟ G ใด ๆ ซึ่ง $|V(G)| = n$ ผลบวกและผลคูณของ $\chi(G)$ และ $\chi(\overline{G})$ สอดคล้องกับสมบัติดังต่อไปนี้

1. $2\sqrt{n} \le \chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n+1$
2. $n \le \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะไม่ขอกล่าวถึงในที่นี้ ผู้สนใจสามารถดูรายละเอียดการพิสูจน์ได้จากหนังสือชื่อ Graph Theory. ของ F.Harary. หน้า 129.

ผลจากทฤษฎีบทที่ 2 คือการพิสูจน์ทางหนึ่งของทฤษฎีบทที่ 1 ดังนั้นในการพิสูจน์ข้อความที่ได้กล่าวในทฤษฎีบทที่ 1 จะเป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก r, s ซึ่ง $2\sqrt{n} \leq r+s \leq n+1$ และ $n \leq r \cdot s \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ จะมีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ ที่ทำให้ $\chi(G) = s$ และ $\chi(\overline{G}) = r$

การที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป จำเป็นจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับผลแบ่งกั้น คัฟเวอร์ริง และจำนวนคัฟเวอร์ริง ซึ่งจะขอกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 3 ให้ G เป็นกราฟ และ $P = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ เป็น "ผลแบ่งกั้น (partition)" ของ V(G) เรียก P ว่าคัฟเวอร์ริง(covering) ของ G ก็ต่อเมื่อ $G[V_i]$ เป็นคลิก ทุก ๆ i = 1 , 2 , ... , k

กำหนดจำนวนคัฟเวอร์ริงของ G เขียนแทนด้วย c(G) คือ

$$c(G) = \min \left\{ |P| \;\middle|\; P \text{ เป็นคัฟเวอร์ริงของ } G \right\}$$

จากบทนิยามข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่า สำหรับกราฟ G ใด ๆ $c(G) = \chi(\overline{G})$ เมื่อ $\overline{G}$ คือกราฟเติมเต็มของ G

ดังนั้นในการหา $\chi(G)$ สำหรับกราฟ G ใด ๆ ก็เหมือนกับการหา $c(\overline{G})$ ของ $\overline{G}$ และในกราฟบางประเภท การหา $c(\overline{G})$ อาจทำได้ง่ายกว่าการหา $\chi(G)$

บทนิยามที่ 4 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $A \cap B = \varnothing$ $|A| = m$ และ $|B| = n$ กำหนด

$K_{m,n}$ คือกราฟที่ $V(K_{m,n}) = A \cup B$ และ $E(K_{m,n}) = \left\{ \{a,b\} \;\middle|\; a \in A \text{ และ } b \in B \right\}$

เรียก $K_{m,n}$ ว่า **กราฟไบพาร์ไทบริบูรณ์** (complete bipartite graph)

นอกจากนั้น ในกรณีที่ $A_1, A_2, \ldots, A_t$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

$$|A_1| = n_1, |A_2| = n_2, \ldots, |A_t| = n_t$$

กำหนดกราฟ $K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ โดย

$$V(K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t \text{ และ}$$

$$E(K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}) = \left\{ \{a,b\} \;\middle|\; a \in A_i \text{ และ } b \in A_j \text{ ทุกๆคู่ของ } A_i, A_j \text{ ที่ } 1 \leq i < j \leq t \right\}$$

เรียก $K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ ว่า **กราฟ t-พาร์ไทบริบูรณ์** (complete t-partite graph)

เพื่อความสะดวก จะเขียน $K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ เป็นกราฟ t-พาร์ไทบริบูรณ์ โดยกำหนดว่า $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$

ทฤษฎีบทนำที่ 5 กราฟ G และ $\overline{G}$ จะมีอย่างน้อย 1 กราฟที่เป็นกราฟไม่ขาดตอน

พิสูจน์ ให้ G เป็นกราฟขาดตอน และ $G = G_1 \cup G_2$ โดยที่

$\left|V(G_1)\right| = m \geq 1$, $\left|V(G_2)\right| = n \geq 1, V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ และ $E(G_1) \cap E(G_2) = \varnothing$

ดังนั้น $\overline{G}$ จะมีกราฟไบพาร์ไทบริบูรณ์ $K_{m,n}$ เป็นสับกราฟ

แต่ $K_{m,n}$ เป็นกราฟไม่ขาดตอน

เพราะฉะนั้น $\overline{G}$ เป็นกราฟไม่ขาดตอน

นั่นคือ G และ $\overline{G}$ จะมีอย่างน้อย 1 กราฟที่เป็นกราฟไม่ขาดตอน

□

ทฤษฎีบทนำที่ 6 ถ้า $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ โดยที่ $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$ และ $G = K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ แล้ว $\chi(G) = t$ และ $\chi(\overline{G}) = n_1$

พิสูจน์ ให้ $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t$ โดยที่ $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$ และ $G = K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$

เพราะว่า G เป็นกราฟ t – พาร์ไทบริบูรณ์ แต่ละ n_i ซึ่ง i = 1, 2, ..., t จะต้องได้รับการให้สีที่แตกต่างกัน ดังนั้น $\chi(G) = t$

จาก $\overline{G}$ เป็นกราฟที่ประกอบด้วย t คอมโพเนนท์ และในแต่ละคอมโพเนนท์เป็นกราฟบริบูรณ์

แต่เนื่องจากที่กำหนดให้ว่า $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$ จะได้ว่า $\chi(\overline{G}) = n_1$

นั่นคือ ถ้า $G = K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ แล้ว $\chi(G) = t$ และ $\chi(\overline{G}) = n_1$

□

บทนิยามต่อไปจะกล่าวถึง บทนิยามของ vertex – glueing ของกราฟ G และ H ซึ่งผู้วิจัยจะนำผลที่ได้ไปประกอบการพิสูจน์ในช่วงต่อไป

บทนิยามที่ 7 ให้ G และ H เป็นกราฟ ซึ่ง $V(G) \cap V(H) = \varnothing$ $u \in V(G)$ และ $v \in V(H)$ กำหนด $G * H$ เป็นกราฟที่เกิดจากการกำหนดให้ u และ v เป็นจุดเดียวกัน เรียก $G * H$ ว่า vertex – glueing ของกราฟ G และ H ที่ u = v

<u>ข้อสังเกต</u>

1) $|V(G * H)| = |V(G)| + |V(H)| - 1$
2) $|E(G * H)| = |E(G)| + |E(H)|$
3) $\chi(G * H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$

จากบทนิยาม 7 ทำให้เกิดทฤษฎีบทนำที่ 8 และ 9 ซึ่งจะกล่าวต่อไป

ทฤษฎีบทนำที่ 8 ให้ G , H เป็นกราฟ ซึ่ง $V(G) \cap V(H) = \varnothing$ $u \in V(G)$ และ $v \in V(H)$ แล้ว

$$\chi(\overline{G * H}) \leq \chi(\overline{G}) + \chi(\overline{H})$$

พิสูจน์ ให้ K เป็นกราฟใด ๆ และ $v \in V(K)$

กราฟ $K - \{v\}$ คือกราฟที่เกิดจากการตัด v ออกจากกราฟ K และเส้นทุกเส้นที่มีจุดปลายที่ v

จะได้ $$\chi\left(\overline{K - \{v\}}\right) = c(K - \{v\}) \leq c(K) = \chi(\overline{K})$$

จาก $\chi(\overline{G * H}) \leq \chi(\overline{G}) + \chi\left(\overline{H - \{v\}}\right)$ และ

$$\chi(\overline{G * H}) \leq \chi\left(\overline{G - \{u\}}\right) + \chi(\overline{H})$$

ดังนั้น $\chi(\overline{G * H}) \leq \chi(\overline{G}) + \chi(\overline{H})$

□

ทฤษฎีบทนำที่ 9 ให้ K_k คือ กราฟบริบูรณ์บน k จุด และ P_{n-k+1} แทนทางเดินที่มี n-k+1 จุด จะได้

$K_k * P_{n-k+1}$ เป็นกราฟที่มี n จุด และ $\chi\left(\overline{K_k * P_{n-k+1}}\right) = 1 + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil$

พิสูจน์
$$\chi\left(\overline{K_k * P_{n-k+1}}\right) = c(K_k * P_{n-k+1})$$
$$= 1 + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil$$

□

ทฤษฎีบทนำที่ 10 ให้ $\mathfrak{R}(n) = \left\{G \middle| \; G \text{เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ} |V(G)| = n \geq 2\right\}$ จะได้ว่า ทุก ๆ k ซึ่ง $2 \leq k \leq n$ จะมี $G_k \in \mathfrak{R}(n)$ ที่ทำให้ $\chi(G_k) = k$

พิสูจน์ ให้ $\mathfrak{R}(n) = \left\{G \middle| \; G \text{เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ} |V(G)| = n \geq 2\right\}$

สำหรับ k ซึ่ง $2 \leq k \leq n$

เลือก $G_k = K_k * P_{n-k+1}$

จะเห็นได้ชัดว่า $\chi(G_k) = \max\{\chi(K_k), \chi(P_{n-k+1})\} = k$

□

จากนอร์ดฮอสและแกดดัม และการพิสูจน์ของฟินด์ และอชูฐานและคณะทำให้ผู้วิจัยทราบว่า ถ้า $G \in \mathfrak{R}(n)$ แล้ว $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ มีขอบเขต ณ จุดปลายทั้งสองด้านของอสมการที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งขอกล่าวถึงทฤษฎีบทนำต่อไปนี้

ทฤษฎีบทนำที่ 11 มีกราฟ $G_1, G_2 \in \mathfrak{R}(n)$ ซึ่ง

$$\chi(G_1) \cdot \chi(\overline{G}_1) = n \text{ และ } \chi(G_2) \cdot \chi(\overline{G}_2) = \left\lfloor \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \right\rfloor$$

ทฤษฎีบทนำที่ 12 ให้ $\mathfrak{R}(n, r) = \left\{G \in \mathfrak{R}(n) \,\middle|\, \chi(\overline{G}) = r\right\}$ จะได้ว่า ทุก ๆ $G \in \mathfrak{R}(n,r)$,

$\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \leq \chi(G) \leq n - r + 1$ นอกจากนั้น จะมี $G_1 \in \mathfrak{R}(n,r)$ และ $G_2 \in \mathfrak{R}(n,r)$

ซึ่ง $\chi(G_1) = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ และ $\chi(G_2) = n - r + 1$

พิสูจน์ ให้ $G \in \mathfrak{R}(n,r)$ ดังนั้น $\chi(\overline{G}) = r$

จะได้ $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) \geq \frac{n}{r}$

และ $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

เพราะฉะนั้น $\chi(G) \leq n - r + 1$

การแสดงว่า $G_1, G_2 \in \mathfrak{R}(n,r)$ ที่ทำให้ $\chi(G_1) = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ และ $\chi(G_2) = n - r + 1$

สามารถแสดงได้โดยการสร้างกราฟ G_1 และ G_2 ดังนี้

ให้ $n = rq + u$, $0 \leq u \leq r - 1$

$$t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = \begin{cases} q & \text{เมื่อ } u = 0 \\ q + 1 & \text{เมื่อ } 1 \leq u \leq r - 1 \end{cases}$$

เลือก $G_1 = K_{n_1, n_2, \ldots, n_t}$ โดยที่ $r = n_1 = n_2 = \ldots = n_t$ ถ้า $u = 0$ และ

$r = n_1 = n_2 = \ldots = n_{t-1}, n_t = u$ ถ้า $1 \leq u \leq r - 1$

ดังนั้น จากทฤษฎีบทนำที่ 6 จะได้ว่า $\chi\left(\overline{G_1}\right) = r$ และ $\chi\left(G_1\right) = t = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$

เลือก $G_2 = K_{r, 1, 1, \ldots, 1}$ โดยที่มี 1 ซ้ำกัน $n - r$ ตัว

ดังนั้น $\chi\left(\overline{G_2}\right) = r$ และ $\chi(G_2) = n - r + 1$

$\square$

จากการเลือกกราฟ G_1 และ G_2 ในทฤษฎีบทนำที่ 12 ข้างต้น จะเห็นว่า $\chi(G_1)$ และ $\chi(G_2)$ มีค่าน้อยที่สุด และมากที่สุดใน $\mathfrak{R}(n,r)$ ตามลำดับ ทฤษฎีบทนำต่อไปจะแสดงว่า ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก s ซึ่ง $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \leq s \leq n - r + 1$ จะมี $G_s \in \mathfrak{R}(n,r)$ ที่ทำให้ $\chi(G_s) = s$

ทฤษฎีบทนำที่ 13 ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก s ซึ่ง $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \le s \le n-r+1$ จะมี $G_s \in \Re(n,r)$ ที่ทำให้

$$\chi(G_s)=s$$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนำที่ 13 นี้ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า สมการ

$$n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_s$$

มีคำตอบ $x_i=n_i$, $1\le i\le s$ ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $r=n_1\ge n_2\ge\ldots\ge n_s\ge 1$

ก็ต่อเมื่อ $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \le s \le n-r+1$

ทฤษฎีบทนำที่ 12 ข้างต้นได้แสดงทางหนึ่งของข้อความข้างต้นแล้ว นอกจากนั้น ในกรณีที่ $s=\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ และ $s=n-r+1$ ก็ได้แสดงแล้วเช่นกันในทฤษฎีบทนำที่ 12

ให้ s เป็นจำนวนเต็ม $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \le s \le n-r+1$

สมมติว่า สมการ

$n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_s$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็ม $x_i=n_i$, $1\le i\le s$ โดยที่ $r=n_1\ge n_2\ge\ldots\ge n_s\ge 1$ ทุก ๆ s ซึ่ง

$$s=\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil+1, \ldots, \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil+i < n-r+1$$

พิจารณาสมการ

$$n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_s+x_{s+1}$$

จาก $n=n_1+n_2+\ldots+n_s$ โดยที่ $r=n_1\ge n_2\ge\ldots\ge n_s\ge 1$

เลือก j ที่มากที่สุด ซึ่ง $1\le j\le s$ และ $n_j>1$

$$\therefore \quad n=n_1+n_2+\ldots+n_j-1+n_{j+1}+\ldots+n_s+1$$

ดังนั้น สมการ $n=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_s+x_{s+1}$ มีคำตอบคือ

$$n_1, n_2, \ldots, n_j-1, n_{j+1}, \ldots, n_s, 1$$

□

จากที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ชัดว่า ทฤษฎีบทที่ 1 เป็นจริง นอกจากนั้น ให้ $X(n)=\left\{ \chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \,\middle|\, G\in\Re(n) \right\}$ จะได้ว่า

$$X(n)=\left\{ c\in Z^+ \,\middle|\, \text{มี } r, s\in Z^+ \text{ ซึ่ง } c=r\cdot s \text{ และ } 2\sqrt{n}\le r+s\le n+1 \right\}$$

บทที่ 4
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย

เพื่อตอบปัญหาต่อไปนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ต้องการหาจำนวนเต็มบวก c ทุกๆ ค่า ซึ่ง $n \le c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่ทำให้มีกราฟอย่างง่ายและไม่ขาดตอน G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) = c$

วิธีดำเนินการพิสูจน์

จากการพิจารณาการหาค่า c ทุก ๆ ค่า ซึ่ง $n \le c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่ทำให้มีกราฟ $G \in \mathfrak{R}(n)$ และ $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) = c$ โดยการนำข้อความข้างต้นมาสร้างทฤษฎีบทที่สมมูลกับคำตอบของปัญหา จากการใช้ทฤษฎีบทของนอร์ดฮอสและแกดดัมในการพิสูจน์ทางหนึ่งของทฤษฎีบท และใช้การสร้างกราฟและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องเพื่อพิสูจน์อีกทางหนึ่ง

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยสรุปได้ว่า กำหนดให้

$\mathfrak{R}(n) = \{ G \mid G \text{ เป็นกราฟไม่ขาดตอน และ } |V(G)| = n \ge 2 \}$ และ $X(n) = \{ \chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) \mid G \in \mathfrak{R}(n) \}$

จะได้ว่า $c \in X(n)$ ก็ต่อเมื่อ มี $r, s \in Z^+$ ซึ่ง $c = r\cdot s$ และ $2\sqrt{n} \le r + s \le n+1$

ข้อเสนอแนะ

จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 และปัญหาของผู้วิจัย มีเรื่องน่าสนใจที่จะศึกษาและตอบปัญหาที่คล้ายคลึงกันต่อไปนี้

1) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงหา c ทุก ๆ ค่า ซึ่ง $n \le c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ ที่มีกราฟ $G, \overline{G} \in \mathfrak{R}(n)$ ที่ทำให้ $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) = c$

2) กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงหา c ทุก ๆ ค่า ซึ่ง $n \le c \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ และมีกราฟปกติ G ซึ่ง $|V(G)| = n$ และ $\chi(G)\cdot\chi(\overline{G}) = c$

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กฤติกา ชิดชู. (2543). *ผลบวกของจำนวนโครมาติคของกราฟและกราฟเติมเต็ม.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. (2542). "Vertex Coloring," in *Workshop on Discrete Mathematics.* หน้า 1-37. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

นิตติยา ปภาพจน์. (2529). *การศึกษาเรื่องเกรซฟูลกราฟของยูเนียนของสองไซเคิลที่มีจุดร่วมกัน k จุด.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นิตยา ชิงชัย. (มปป). *ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.* เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

นิตยา ชิงชัย. (มปป). *การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ.* เชียงใหม่: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

นวรัตน์ อนันต์ชื่น. (2540). *ทฤษฎีกราฟ 1* . กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

ยุพิน พิพิธกุล. (2524). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : บพิธการพิมพ์ .

วนิดา เหมะกุล. (2521). *คณิตศาสตร์ดีสครีต.* กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น.

Brooks, R.L. (1941). "On Coloring the Nodes of a Network," *Proc.Camb.Philos.Soc.* 37 : 194-197.

Caccetta, L. (1996). "Vertex Coloring," in *Workshop Silpakorn University.* 98-130. Perth : School of Mathematics and Statistics Curtin University of Technology.

Caccetta, L. and Pullman, N.J. (1990). "Regular Graphs with Prescribed Chromatic Number," *Journal of Graph Theory.* 1(14) : 65-71.

Caccetta, L. and Pullman, N.J. (Preprint). "Colouring Regular Graphs,"

Descartes, B. (1954). "Solution to advanced problem," *Am. Math. Mon.* 4526(61) : 352.

ErdÖs, P. and Gallai, T. (1964). "Solution of a problem of Dirac," *Theory of Graphs and its applications.*: Proceedings of the Symposium , Smolenice , June. 1963. Publishing House of the Czechoslavian Academy of Science , Prague. 167-168.

Fink, H.J. (1966). "Über die chromatischen Zahlen eines Graphen und Seines Komplements I,II," *Wiss.Z.T.H.Ilmenau.* 12 : 243-251.

Gould, Ronald. (1988). *Graph Theory.* U.S.A. : Benjamin / Cummigo Pub. .

Harary, F. (1972). *Graph Theory.* 3rd.: Addison Westey.

Jensen, T.R. and Toft, B. (1995). *Graph Coloring Problems.* :A Wiley Interscience Pub.

Kelly, J.B. and Kelly, L.M. (1954). "Paths and circuits in critical graphs," *Am.J.Math.* (76) : 786-792.

Lovasz, L. (1968). "On chromatic numbers of finite set system," *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.* (19) : 59-67.

Mott, Joe L. , Kandel, Abraham and Baker, Thedore P. (1986). *Discrete Mathematics for computer scientists & Mathematicians.* 2nd. U.S.A. : Prentice-Hall. 558-576.

Mycielski, J. (1955). "Sur le coloriage des graphs," *Collog.Math.* (3). : 161-162.

Punnim, N. (1998). "Coloring Regular Graphs," in *Proceeding of the Conference on General Algebra and Discrete Mathematics.* 161-173. Potsdam.

Punnim, N. (2000). " On F(j)-Graphs and their Applications," to appear in J*ournal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.*

Sachs, H. (1970). *On the Berge Conjecture concerning perfect graphs, in Combinatorial Structures and their Applications.* U.S.A. : Gordon and Breach. 377-384.

Truss, J.K. (1992). *Discrete Mathematics for computer scientists.* 2nd. :Addison Westey.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวญานิน กองทิพย์
วันเดือนปีเกิด	1 พฤษภาคม 2513
สถานที่เกิด	อำเภอพระนครศรีอยุธยา จังหวัดพระนครศรีอยุธยา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	ง.23/4 หมู่ 4 ตำบลหอรัตนไชย ถนนจักรพรรดิ์ อำเภอพระนครศรีอยุธยา จังหวัดพระนครศรีอยุธยา 13000
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สุขุมวิท 23 เขตวัฒนา กรุงเทพมหานคร 10110

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2526	ประถมศึกษาจากโรงเรียนเทศบาลวัดเขียน
พ.ศ. 2532	มัธยมศึกษาจากโรงเรียนจอมสุรางค์อุปถัมภ์
พ.ศ. 2538	ครุศาสตร์บัณฑิต จาก วิทยาลัยครูพระนครศรีอยุธยา จังหวัดพระนครศรีอยุธยา
พ.ศ. 2544	การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ