

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตร
วิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ

บทคัดย่อ
ของ
นางสาวนฤกัญญา เจริญเกียรติบวร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
กุมภาพันธ์ 2547

นักกัญญา เจริญเกียรติบวร. (2547). การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือ. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ.อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์:รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมัลย์.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ก่อนการทดลองและหลังการทดลอง โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือ

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปี การศึกษา 2546 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผู้วิจัย ได้ทดลองใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือกับกลุ่มตัวอย่าง เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ แบบแผนการวิจัยที่ใช้คือ One – Group Pretest – Posttest Design สถิติที่ใช้วิเคราะห์ ข้อมูล คือ t – test Dependent

ผลการศึกษาพบว่า

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากใช้การเรียนรู้แบบ ร่วมมือ สูงกว่าก่อนใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF MATHEMATICAL PROBLEM - SOLVING
ABILITIES IN "FUNCTIONS" OF THE SECOND – YEAR
VOCATIONAL STUDENTS THROUGH COOPERATIVE LEARNING

AN ABSTRACT
BY
MISS NATKANYA JAREARNKIETBOWORN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University
February 2004

Natkanya Jarearnkietboworn.(2004). *A Study of Mathematical Problem – Solving Abilities in “Functions” of The Second – Year Vocational Students Through Cooperative Learning*. Master Project, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Project Advisor : Assoc. Prof. Dr. Chaweewan Sawetamalya.

The purpose of this research was to study mathematical problem – solving abilities in “functions” of the second – year vocational students before and after the experiment through cooperative learning.

The subjects were 40 second – year vocational students in the first semester of the 2003 academic year at Assumption Commercial College, Satorn District, Bangkok. The experimental group was learnt through cooperative learning, and their Mathematical problem – solving abilities were investigated. The One - Group Pretest – Posttest Design was used in this study. The t – test Dependent was used to analyze data.

The results of this study revealed that :

The students’ mathematical problem – solving abilities after using Cooperative Learning were higher than that before using Cooperative Learning at the .01 level of significance.

การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตร
วิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ

สารนิพนธ์

ของ

นางสาวนันทกัญญา เจริญเกียรติบวร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา

กุมภาพันธ์ 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อาจารย์ที่ปรึกษา ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร และคณะกรรมการสอบ
ได้พิจารณาสารนิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมัลย์)

ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมัลย์)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ)

อนุมัติให้รับสารนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีคณะศึกษาศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.คมเพชร ฉัตรสุภากุล)
วันที่ เดือน พ.ศ. 2547

ประกาศคุณูปการ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาเป็นอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมัลย์ รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ รองศาสตราจารย์ ดร.ชาญวิทย์ เทียมบุญประเสริฐ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ชัยศักดิ์ สิลจารัสกุล ซึ่งให้คำปรึกษาแนะนำแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ในการทำวิจัยมาโดยตลอด ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชค อาจารย์สุวันเพ็ญ สิริทรัพย์ไพบูลย์ และอาจารย์ Harrold F. Neri ที่กรุณาให้เกียรติเป็นผู้เชี่ยวชาญให้คำปรึกษา คำแนะนำ ในการตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการและคณะอาจารย์โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ ที่ให้ความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือ ตลอดจนทำการทดลองเพื่อเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ และขอขอบใจนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 3 และ ปีที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ที่ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดียิ่งในการทดลอง

นอกจากนี้ยังได้รับความอนุเคราะห์ในด้านต่างๆ จากผู้ที่เกี่ยวข้องที่ไม่สามารถเอ่ยนามได้หมดในที่นี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ญาติพี่น้อง รุ่นพี่ เพื่อนๆ ที่คอยให้ความช่วยเหลือ และให้กำลังใจ ในการทำสารนิพนธ์ฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์ที่พึงมีของสารนิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณของบิดา มารดา ครูอาจารย์และผู้มีพระคุณทุกท่าน

นักกัญญา เจริญเกียรติบวร

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	2
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	2
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	2
ประชากร.....	2
กลุ่มตัวอย่าง	3
ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	3
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	3
ตัวแปรที่ศึกษา	3
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบร่วมมือ	7
ความหมายของการเรียนแบบร่วมมือ	7
องค์ประกอบพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ	8
ลำดับขั้นตอนการเรียนแบบร่วมมือ	9
รูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ	10
การเรียนแบบร่วมมือกับการสอนคณิตศาสตร์	18
ความแตกต่างระหว่างการเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม	20
บทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือ	21
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบร่วมมือ	22
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	24
ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์	24
ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์	25
องค์ประกอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	26
ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	28
ยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	32

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
2 (ต่อ) ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	34
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์....	35
3 วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	40
การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	40
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	41
ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	41
เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	41
แบบแผนการทดลอง	45
วิธีดำเนินการทดลอง	45
การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล	45
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	48
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	48
การวิเคราะห์ข้อมูล	48
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	48
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	50
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	50
สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า	50
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	50
ประชากร	50
กลุ่มตัวอย่าง	50
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	51
ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	51
เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า	51
วิธีดำเนินการทดลอง	51
การวิเคราะห์ข้อมูล	52
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า	52

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 (ต่อ) อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า	52
ข้อสังเกตจากการทดลอง	55
ข้อเสนอแนะ	56
ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย.....	56
 บรรณานุกรม.....	 57
 ภาคผนวก.....	 63
ภาคผนวก ก ผลการวิเคราะห์เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง.....	64
ภาคผนวก ข แผนการสอนการเรียนรู้แบบร่วมมือ เรื่องฟังก์ชัน.....	69
ภาคผนวก ค ใบความรู้และใบงานตามขั้นตอนของโพลยา.....	96
ภาคผนวก ง แบบทดสอบย่อยและแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์.....	156
ภาคผนวก จ ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือในการทดลอง.....	174
 ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์.....	 176

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 การสร้างแบบทดสอบย่อยที่แสดงถึง หัวข้อที่สอน จำนวนคาบที่สอน และจำนวนข้อสอบที่ต้องการจะวัด	43
2 วิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถที่ต้องการวัด และจำนวนข้อสอบที่ใช้วัดการแก้ปัญหาในแต่ละความสามารถ.....	44
3 แบบแผนการทดลองแบบ One – Group Pretest – Posttest Design	45
4 ผลการวิเคราะห์การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ก่อนและหลังการทดลอง	48
5 ค่าความยาก (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	65
6 ค่า p ค่า q ค่า pq และค่าความเชื่อมั่น r_{tt} ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	66
7 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ Pretest และ Posttest ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน.....	67

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

อาชีวศึกษาเป็นรูปแบบหนึ่งที่มีความสำคัญยิ่งต่อการพัฒนากำลังคนของประเทศชาติ เพราะเป็นการศึกษาที่ได้จัดไว้เพื่อเตรียมบุคคลให้มีอาชีพเป็นหลักฐานในอนาคตอย่างเหมาะสมต่อความต้องการของตัวและประเทศชาติ ซึ่งถ้าพลเมืองของประเทศมีอาชีพที่เป็นหลักฐานเหมาะสมและมั่นคงก็จะเป็นผลให้เศรษฐกิจของชาติมั่นคงและนำมาซึ่งความเจริญของบ้านเมือง (วิรัช กุมุทมาศ. 2528 : 49 - 50) การจัดหลักสูตรอาชีวศึกษาจำเป็นต้องสอดคล้องและสัมพันธ์กับโปรแกรมการศึกษาโดยส่วนรวม ทั้งนี้เพื่อเป็นส่วนขยายความรู้และประสบการณ์ทั้งในแนวดิ่งและแนวนอนให้สัมพันธ์กับการศึกษาสายอื่น ๆ ฉะนั้นการที่กำหนดหลักสูตรโดยใช้เพียงวิชาเดียวหรือวิชาสามัญ อย่างเดียวประการใดประการหนึ่งย่อมเป็นการยาก ดังนั้นวิชาสามัญ เช่น วิชาคณิตศาสตร์ นับว่ามีความสำคัญและสัมพันธ์กับการประกอบอาชีพในภาคอาชีวศึกษา อีกทั้งวิชาต่างๆ เหล่านั้นยังจำเป็นต้องใช้ประโยชน์ในการศึกษาต่อหรือศึกษาเพิ่มเติมระหว่างปฏิบัติงานในวิชาชีพอีกด้วย (ศิริชัย ชินะตังกูร และเกษตร สิทธิภูประเสริฐ. 2525: 24 - 25)

โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการเป็นโรงเรียนพาณิชยแห่งแรกในประเทศไทยที่เปิดทำการสอน โดยใช้สื่อการเรียนการสอนเป็นภาษาอังกฤษ และได้กำหนดเนื้อหาในแต่ละวิชาที่สอนของแต่ละชั้นเรียนเป็นภาษาอังกฤษ ยกเว้นวิชาภาษาไทยและสุขศึกษา หลักสูตรที่ใช้เป็นหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยการ โดยปรับปรุง เปลี่ยนแปลงและแก้ไขให้สอดคล้องกับเนื้อหาที่เป็นภาษาอังกฤษโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งทางโรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ ได้เล็งเห็นถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ จึงได้มีการเสริมวิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนในระดับชั้น ปวช. 2 จากประสบการณ์ด้านการสอนของผู้วิจัยพบว่า นักเรียนในระดับชั้น ปวช. 2 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ เมื่อพิจารณาถึงสาเหตุที่ทำให้นักเรียนในระดับชั้น ปวช. 2 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำนั้นมีหลายสาเหตุ โดยสาเหตุที่สำคัญ คือ นักเรียนคิดไม่เป็นและไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นคิดแก้ปัญหาอย่างไร อ่านโจทย์แล้วไม่เข้าใจว่าจะดำเนินการในทิศทางใด (เสริมศักดิ์ สุรวัลลภ. ม.ป.ป. :119) นักเรียนไม่เข้าใจในข้อความที่เป็นโจทย์ปัญหา นักเรียนไม่สามารถเปลี่ยนโจทย์ปัญหามาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และนักเรียนไม่สามารถคิดคำนวณตามที่โจทย์ต้องการได้ (West. 1977 : 57 - 58) อีกทั้งธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอดและทักษะ มีโครงสร้างแสดงความเป็นเหตุเป็นผลกัน สื่อความหมายโดยใช้สัญลักษณ์ ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรม จึงยากต่อการเรียนรู้และทำความเข้าใจอย่างรวดเร็วได้ จึงเป็นปัญหาสำหรับครูผู้สอนในการที่จะเลือกวิธีสอนที่เหมาะสมมาใช้สอนในแต่ละเนื้อหา เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 1 - 3) ดังนั้นจึงเป็นหน้าที่ที่

สำคัญที่สุดของครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่จะต้องหาวิธีการต่าง ๆ มาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การเรียนแบบต่าง ๆ ที่จะสามารถช่วยแก้ปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้นั้น ควรจะเป็นการเรียนที่จะช่วยส่งเสริมพัฒนาการของผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้และพัฒนาทั้งทางร่างกาย อารมณ์ สังคมและสติปัญญา (Johnson and Johnson. 1987 : 30) คือการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative Learning) ซึ่งเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อย ส่งเสริมให้นักเรียนทำงานร่วมกัน โดยในกลุ่มประกอบด้วยสมาชิกที่มีความสามารถแตกต่างกัน มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น มีการช่วยเหลือพึ่งพซึ่งกันและกัน และมีความรับผิดชอบร่วมกัน ทั้งในส่วนตนและส่วนรวม เพื่อให้ตนเองและสมาชิกทุกคนในกลุ่มประสบความสำเร็จตามเป้าหมายที่กำหนด (กรมวิชาการ. 2544 : 4) นอกจากนี้การใช้การเรียนแบบร่วมมือจะส่งผลให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาวิชา มีทักษะการทำงานร่วมกัน เกิดการยอมรับซึ่งกันและกัน และมีความเชื่อมั่นในตนเอง (สมเดช บุญประจักษ์. 2540 : 55)

จากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพสูงสุด

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นปวช. 2 ก่อนการทดลองและหลังการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลของการศึกษาค้นคว้านี้จะเป็นแนวทางสำหรับครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์และผู้ที่เกี่ยวข้องสามารถนำเอาการเรียนแบบร่วมมือมาใช้ในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกทั้งเพื่อใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ ชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 8 ห้องเรียน รวม 323 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ ชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่มจากการจับฉลากมา 1 ห้องเรียน จำนวน 40 คน

ดำเนินการจัดการเรียนสอนด้วยวิธีการเรียนแบบร่วมมือ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันตามอัตราส่วนของความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 1 : 2 : 1 โดยพิจารณาจากคะแนนสอบของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์

ระดับความสามารถสูง คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ขึ้นไป

ระดับความสามารถปานกลาง คือนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ถึง 75

ระดับความสามารถต่ำ คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ลงมา

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาในการทดลอง 14 คาบ คาบเรียนละ 50 นาที โดยทำการทดสอบก่อนเรียน 1 คาบ ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน 12 คาบ และทำการทดสอบหลังเรียน 1 คาบ

4. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ชั้น ปวช.2 ฉบับภาษาอังกฤษ โดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

- | | | | |
|----------------------------------|---|-------|-------|
| 1. Domain and Range of Relations | } | 4 คาบ | |
| 2. Function Notation | | | |
| 3. Inverse Functions | | | 2 คาบ |
| 4. Algebra of Functions | | | 3 คาบ |
| 5. Composite Functions | | | 3 คาบ |

5. ตัวแปรที่ศึกษา

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative Learning) หมายถึง การจัดการเรียนการสอนที่แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันตามอัตราส่วนของความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำเป็น 1 : 2 : 1 สำหรับทำกิจกรรมร่วมกัน สมาชิกต้องช่วยเหลือพึ่งพาร่วมกันและกัน และรับผิดชอบการทำงานของตนเองเท่า ๆ กับรับผิดชอบการทำงาน of สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มด้วย เพราะคะแนนของสมาชิกแต่ละคนส่งผลต่อคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มและรางวัลที่จะได้รับเพื่อให้กิจกรรมต่าง ๆ บรรลุวัตถุประสงค์ ผู้วิจัยจึงได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอน 5 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นเตรียม

- 1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คน ตามความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำเป็น 1 : 2 : 1 โดยพิจารณาจากคะแนนสอบของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

- 2.1 ครูทบทวนความรู้เดิม
- 2.2 ครูสอนเนื้อหาในบทเรียนที่นักเรียนต้องศึกษา
- 2.3 ครูแจกใบความรู้และใบงาน
- 2.4 ครูแนะนำทักษะการทำงานกลุ่มร่วมกัน

3. ขั้นทำงานกลุ่ม

- 3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้และทำใบงาน
- 3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย
- 3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน
- 3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

4. ขั้นทดสอบ

- 4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล โดยนักเรียนห้ามปรึกษารื้อหรือชักถามกัน
- 4.2 ครูประเมินผลการเรียนของนักเรียน โดยนำคะแนนสอบที่ได้จากการทำแบบทดสอบของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม และถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

- 5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน
- 5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม
- 5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยที่ผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบปรนัยจำนวน 25 ข้อ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามแนวความคิดของโพลยา (Polya) ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ

- 2.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
- 2.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา
- 2.3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา
- 2.4 ขั้นตรวจสอบคำตอบ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองใช้การเรียนแบบร่วมมือ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบร่วมมือ

- 1.1 ความหมายของการเรียนแบบร่วมมือ
- 1.2 องค์ประกอบพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ
- 1.3 ลำดับขั้นตอนการเรียนแบบร่วมมือ
- 1.4 รูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ
- 1.5 การเรียนแบบร่วมมือกับการสอนคณิตศาสตร์
- 1.6 ความแตกต่างระหว่างการเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม
- 1.7 บทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนแบบร่วมมือ
- 1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบร่วมมือ

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.2 ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.3 องค์ประกอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.4 ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.5 ยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.6 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบร่วมมือ

1.1 ความหมายของการเรียนแบบร่วมมือ (Cooperative Learning)

ได้มีผู้ให้ความหมายของการเรียนแบบร่วมมือไว้ ดังนี้

สลาวิน (Slavin. 1987 : 8) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือ คือ การเรียนแบบหนึ่ง ซึ่งนักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก โดยปกติ 4 คน และการจัดกลุ่มต้องคำนึงถึงความสามารถของนักเรียน เช่น นักเรียนที่มีความสามารถสูง 1 คน ความสามารถปานกลาง 2 คน และความสามารถต่ำ 1 คน หน้าที่ของนักเรียนในกลุ่มจะต้องช่วยกันทำงาน รับผิดชอบและช่วยเหลือเกี่ยวกับการเรียนซึ่งกันและกัน สมาชิกกลุ่มจะได้รับรางวัล ถ้ากลุ่มทำคะแนนเฉลี่ยได้ถึงเกณฑ์ที่ตั้งไว้

สุรศักดิ์ หลาบมาลา (2531 : 4) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือ หมายถึง วิธีการสอนอีกแบบหนึ่ง ซึ่งกำหนดให้นักเรียนที่มีความสามารถต่างกัน ทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ปกติจะมี 4 คน ต่อกลุ่ม เป็นเด็กเรียนเก่ง 1 คน เรียนปานกลาง 2 คน และเรียนอ่อน 1 คน ผลการเรียนรู้ของเด็กจะพิจารณาเป็น 2 ตอน ตอนแรกจะดูค่าเฉลี่ยของทั้งกลุ่ม ตอนที่สองจะพิจารณาคะแนนสอบเป็นรายบุคคล การสอบทั้งสองครั้งเด็กต่างคนต่างสอบ แต่เวลาเรียนต้องร่วมมือกัน ดังนั้นเด็กเก่งจึงพยายามช่วยเด็กอ่อนเพราะจะทำให้คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มดีขึ้น และทางโรงเรียนมีรางวัลเป็นการเสริมแรงให้ด้วย หากค่าเฉลี่ยของกลุ่มใดได้เกินเกณฑ์ที่โรงเรียนตั้งไว้

ชาญชัย อาจิณสมจาร (2533 : 19) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือ หมายถึง การใช้วิธีการสอนเป็นกลุ่มเล็ก เพื่อว่านักเรียนจะได้ทำงานร่วมกันเพื่อให้ได้มาซึ่งการเรียนรู้ของตนเองและของกลุ่มสูงสุด

ชูศรี สนิทประชากร (2534 : 48) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือนั้น เป็นการเรียนที่มีลักษณะตรงกันข้ามกับการเรียนรู้ที่เป็นการแข่งขัน เพราะการเรียนแบบร่วมมือเป็นการสอนที่มีแนวความคิดว่า ครูจะทำการแนะนำนักเรียน ให้เขาทำงานร่วมกันได้จนประสบความสำเร็จตามมุ่งหมายของการเรียนนั้นร่วมกันทุกคน

ปาสัน กงตาล (2535 : 19) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือหมายถึง การจัดการเรียนการสอน ที่มีลักษณะให้ผู้เรียนจับกลุ่มกันเป็นกลุ่มย่อย สำหรับทำงานร่วมกัน แก้ปัญหาและทำกิจกรรม ให้บรรลุวัตถุประสงค์ตามที่ครูผู้สอนกำหนด โดยที่สมาชิกในกลุ่มตระหนักว่า แต่ละคนเป็นส่วนหนึ่งของกลุ่ม ดังนั้นความสำเร็จหรือความล้มเหลวที่เกิดขึ้น สมาชิกในกลุ่มนั้นจะต้องรับผิดชอบร่วมกัน สมาชิกจะต้องมีการพูดคุย และช่วยเหลือซึ่งกันและกันในการทำกิจกรรมต่าง ๆ

เปรมจิตต์ ขจรภัยลาร์เซน (2536 : 1) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือ หมายถึง วิธีการจัดการเรียนการสอนโดยนักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย นักเรียนในกลุ่มมีความรับผิดชอบในการเรียนรู้เนื้อหา และช่วยกันในการเรียนเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของกลุ่ม

อารี สันทนต์ (2539 : 89) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือ หมายถึง วิธีการเรียนที่ให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ทั้งด้านความรู้และทางด้านจิตใจ ช่วย

ให้นักเรียนเห็นคุณค่าในความแตกต่างระหว่างตัวนักเรียนและเพื่อน ๆ เคารพความคิดเห็น และความสามารถของผู้คนที่แตกต่างกันจากตนเองจนช่วยเหลือและสนับสนุนเพื่อน ๆ

เอนก ศิลปนิลมาลย์ (2540 : 63) กล่าวว่า การเรียนแบบร่วมมือหมายถึง วิธีการสอนแบบหนึ่งซึ่งกำหนดให้ผู้เรียนที่มีความสามารถต่างกัน ทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก ๆ โดยนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 1 คน และเรียนอ่อน 1 คน ผลการเรียนรู้ของผู้เรียนจะพิจารณาเป็น 2 ตอน คือ ตอนแรกจะพิจารณาคะแนนรายบุคคล และตอนที่สองจะพิจารณาคะแนนเฉลี่ยรายกลุ่ม เวลาเรียนร่วมมือกันแต่เวลาสอบจะต่างคนต่างสอบ

จากความหมายของการเรียนแบบร่วมมือดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า การเรียนแบบร่วมมือก็คือ การจัดการเรียนการสอนที่แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันมาทำงานร่วมกัน ช่วยเหลือ ซึ่งกันและกันและรับผิดชอบการทำงานของตนเองเท่า ๆ กับรับผิดชอบการทำงานของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มด้วย เพื่อกิจกรรมต่าง ๆ บรรลุวัตถุประสงค์ตามที่ครูกำหนด ครูมีบทบาทเป็นเพียงผู้คอยให้ความช่วยเหลือ จัดหา และชี้แนะแหล่งข้อมูลในการเรียนรู้ให้กับนักเรียน

1.2 องค์ประกอบพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ

กรมวิชาการ (2544 : 5 - 8) กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือจะมีประสิทธิภาพ ถ้าสมาชิกภายในกลุ่มมองเห็นคุณค่าของการทำงานร่วมกันและช่วยเหลือซึ่งกันและกัน โดยมีแนวทางสำคัญ 5 ประการคือ

1. มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในทางบวก (Positive Interdependence) หมายถึง การที่สมาชิกในกลุ่มทำงานอย่างมีเป้าหมายร่วมกัน มีการทำงานร่วมกัน โดยที่สมาชิกทุกคนมีส่วนร่วมในการทำงานนั้น มีการแบ่งปันวัสดุ อุปกรณ์ ข้อมูลต่าง ๆ ในการทำงาน ทุกคนมีบทบาท หน้าที่ และประสบความสำเร็จร่วมกัน ครูผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในทางบวก มีหลายวิธี เช่น

- การกำหนดเป้าหมายของกลุ่ม (แต่ละคนลงมือเรียนและต้องแน่ใจว่าสมาชิกคนอื่นเรียนรู้ไปพร้อม ๆ กัน)
- การกำหนดรางวัลร่วมกัน (ถ้าทุกคนทำได้ตามเกณฑ์ที่ครูผู้สอนกำหนดไว้ แต่ละคนจะได้รับคะแนน Bonus เท่าเทียมกันทุกคน)
- การกำหนดให้ใช้วัสดุ อุปกรณ์ หรือสื่อการเรียนอื่น ๆ ร่วมกัน (แต่ละคนจะได้วัสดุเพียง 1 ส่วนของทั้งหมดที่จำเป็นต้องใช้ในการทำงานกลุ่ม)
- การกำหนดบทบาทสมาชิกในกลุ่ม แต่ละคนจะมีบทบาทในกลุ่ม เช่น ผู้อ่าน ผู้ตรวจสอบ ผู้บันทึก ผู้ให้กำลังใจ ผู้จัดหาวัสดุ

2. การมีปฏิสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิดในระหว่างการทำงานกลุ่ม (Face to Face Promotive Interaction) เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มให้ประสบความสำเร็จ โดยทำกิจกรรมต่อไปนี้

- แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน
- อธิบายความรู้ให้เพื่อนในกลุ่มฟัง

กิจกรรมดังกล่าวจะทำให้ให้นักเรียนได้ติดต่อกันโดยตรง เป็นการแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดและการให้ข้อมูลย้อนกลับ

3. การตรวจสอบความรับผิดชอบของสมาชิกแต่ละคน (Individual Accountability) เป็นการจัดกิจกรรมเพื่อให้แน่ใจว่าสมาชิกทุกคนมีความรับผิดชอบต่องานกลุ่มซึ่งทำได้หลายวิธี เช่น

- กำหนดหน้าที่ของสมาชิกทุกคนในกลุ่มตามความเหมาะสม
- สุ่มถามปากเปล่าสมาชิกในกลุ่ม หรือสุ่มตรวจงานของสมาชิกในกลุ่ม
- สังเกตและบันทึกการทำงานกลุ่มของสมาชิก
- กำหนดให้สมาชิก 1 คนในกลุ่มเป็นผู้ตรวจสอบความเข้าใจของสมาชิกเกี่ยวกับงานกลุ่ม
- ให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่ตนเรียนรู้ให้เพื่อนฟัง
- ทดสอบรายบุคคล

4. การใช้ทักษะระหว่างบุคคลและทักษะการทำงานกลุ่มย่อย (Interdependence and Small Group Skills) นักเรียนควรได้รับการฝึกทักษะที่จะช่วยให้งานกลุ่มประสบความสำเร็จได้แก่

- การทำความเข้าใจและไว้วางใจผู้อื่น
- การสื่อสาร
- การยอมรับและช่วยเหลือกัน
- การวิจารณ์ความคิดเห็น โดยไม่วิจารณ์เจ้าของความคิด
- การแก้ปัญหาขัดแย้ง
- การให้ความสำคัญ และการเอาใจใส่ต่อทุกคนเท่าเทียมกัน

5. กระบวนการกลุ่ม (Group Process) สมาชิกจะต้องร่วมกันรับผิดชอบต่อการเรียนรู้ของสมาชิกในกลุ่ม ดังนั้นผลงานของกลุ่มจะได้รับอิทธิพลจากการแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับกระบวนการทำงานของสมาชิกในกลุ่มซึ่งสามารถกระทำได้โดย

- ให้อธิบายการกระทำของสมาชิกที่มีประโยชน์และไม่มีประโยชน์
- ให้ตัดสินใจว่าการกระทำใดของกลุ่มที่ควรรักษาไว้และการกระทำใดควรเลิกปฏิบัติ
- ให้เล่าเหตุการณ์ในกลุ่ม ปัญหาของกลุ่ม หรือวิพากษ์วิจารณ์การทำงานของกลุ่ม

องค์ประกอบพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ สมาชิกต้องมีความสัมพันธ์และต้องพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกันในการที่จะช่วยให้การดำเนินกิจกรรมการจัดการเรียนการสอนดำเนินไปด้วยดีและบรรลุเป้าหมายที่กำหนด ดังนั้นครูผู้สอนจะต้องพยายามจัดกิจกรรมให้ได้ครบทั้ง 5 องค์ประกอบพื้นฐานของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ

1.3 ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้แบบร่วมมือ

เปรมจิตต์ ขจรภัยลาร์เซน (2536 : 8 - 9) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการเรียนรู้แบบร่วมมือ โดย

ทั่ว ๆ ไป นั้นมีขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นเตรียม
 - 1.1 ครูสอนทักษะในการเรียนรู้ร่วมกัน
 - 1.2 จัดกลุ่มนักเรียน
 - 1.3 บอกวัตถุประสงค์ของบทเรียน
 - 1.4 บอกวัตถุประสงค์ของการทำงานร่วมกัน
2. ขั้นสอน
 - 2.1 ครูสอนเนื้อหาหรือบทเรียนใหม่ด้วยวิธีสอนที่เหมาะสม
 - 2.2 ให้งาน ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะและทบทวนร่วมกัน
3. ขั้นทำงานกลุ่ม

นักเรียนเรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่มย่อย แต่ละคนมีบทบาท หน้าที่ของตนช่วยกัน
แก้ปัญหา อภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็น เพื่อหาคำตอบที่ดีที่สุด มากกว่าดูคำตอบ หรือ รอ
คำตอบจากครู
4. ขั้นตรวจสอบผลงานและทดสอบ
 - 4.1 ตรวจสอบผลงาน (กลุ่มและ / หรือ รายบุคคล) ถ้าเป็นงานกลุ่มสมาชิกในกลุ่ม
เซ็นชื่อในผลงานที่ส่งครู อาจจะประเมินด้วยการหยิบผลงานของกลุ่มนั้นมา แล้วถามสมาชิกกลุ่มคน
ใดคนหนึ่งเกี่ยวกับงานชิ้นนั้น และถ้าเป็นงานเดี่ยว ครูอาจให้นักเรียนคนใดคนหนึ่งในกลุ่มอธิบายวิธี
หาคำตอบของเขาที่ได้จากการเรียนรู้ร่วมกันภายในกลุ่ม
 - 4.2 ครูทดสอบนักเรียนเป็นรายบุคคล โดยไม่มีการช่วยเหลือกัน และเมื่อครู
ตรวจสอบแล้ว จะคำนวณคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มให้นักเรียนทราบ และถือว่าเป็นคะแนนของ
นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย
5. ขั้นสรุปบทเรียนและประเมินผลการทำงานกลุ่ม
 - 5.1 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียน
 - 5.2 ครูและนักเรียนประเมินผลการทำงานกลุ่ม

1.4 รูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ

ได้มีนักการศึกษาพัฒนารูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือไว้หลากหลาย ในที่นี้จะขอ
เสนอการจัดการเรียนรู้ฯ ดังกล่าว ดังนี้ (กรมวิชาการ. 2544 : 8 - 22)

1. คิดและคุยกัน (Think - Pairs -Share) เพื่อนเรียน (Partners) และผลัดกันพูด
(Say and Switch) ทั้ง 3 รูปแบบ เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่คล้ายคลึงกัน คือ ใ้
นักเรียนจับคู่ในการตอบคำถาม อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับประเด็น สถานการณ์
หรือทำความเข้าใจเนื้อหาที่เป็นความคิดรวบยอดที่กำหนดให้ นอกจากนี้รูปแบบคิดและคุยกัน
นักเรียนจะได้มีโอกาสคิดหาคำตอบด้วยตนเองก่อนเกี่ยวกับคำถาม ประเด็นหรือสถานการณ์ที่
กำหนดให้ ส่วนรูปแบบเพื่อนเรียนจะเปิดโอกาสให้นักเรียนขอคำแนะนำหรือคำอธิบายจากเพื่อนคู่อื่น

ที่มีความเข้าใจในเรื่องที่กำหนดให้อย่างแจ่มแจ้งก่อน แล้วจึงตอบคำถาม อภิปรายหรือแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับคู่ของตนเองทั้งรูปแบบคิดและคุยกันและเพื่อนเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนนำเสนอที่สำคัญที่ได้รับรู้มาไปเล่าให้เพื่อนคู่อื่นฟังสัก 2-3 คู่ หรือครูผู้สอนอาจสุ่มเรียกนักเรียนบางคู่ให้นำเสนอรายงานหน้าชั้น ส่วนรูปแบบผลัดกันพูด นักเรียนจะต้องผลัดกันตอบคำถามหรือประเด็นต่าง ๆ ภายในเวลาที่กำหนดและจะมีสัญญาณเตือนการหมดเวลาในการดำเนินกิจกรรมและในช่วงนี้เองยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เสนอแนวคิดหรือประเด็นใหม่เพื่อการอภิปรายในหัวข้อต่อไป

2. กิจกรรมโต๊ะกลม (Roundtable หรือ Roundrobin) เป็นรูปแบบการสอนที่จัดกลุ่มนักเรียนที่มีจำนวนมากกว่า 2 คนขึ้นไปและเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนในกลุ่มเขียนความคิดเห็นของตน เล่าประสบการณ์ความรู้ สิ่งที่น่าสนใจที่ศึกษาด้วยดินสอหรือปากกาสีลงบนกระดาษแล้วเขียนให้เพื่อนคนถัดไปโดยเวียนไปทางด้านใดด้านหนึ่ง สมาชิกทุกคนจะใช้เวลาเท่า ๆ กัน หรือใกล้เคียง ซึ่งรูปแบบดังกล่าวเรียกว่า Roundtable หรืออาจดัดแปลงรูปแบบการสอนดังกล่าวจากการเขียนมาเป็นการพูดแทน โดยให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มเล่าเรื่องประสบการณ์ ความรู้ สิ่งที่น่าสนใจ ศึกษาศึกษา แสดงความคิดเห็น หรือเรื่องอื่น ๆ ที่กำหนด โดยเวียนไปทางด้านใดด้านหนึ่งจนครบทุกคน ซึ่งรูปแบบดังกล่าวเรียกว่า Roundrobin

3. คู่ตรวจสอบ (Pairs Check) มุมสนทนา (Corners) ร่วมกันคิด (Numbered Heads Together) เป็นรูปแบบการสอนที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันคือ เป็นการจัดการเรียนการสอนที่แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ กลุ่มละ 2 - 6 คน โดยนักเรียนในแต่ละกลุ่มต้องคละเพศและความสามารถให้ช่วยกันตอบคำถาม แก้อรรถหรือทำแบบฝึกหัด เมื่อสมาชิกทุกคนในกลุ่มย่อยสามารถตอบปัญหาหรือแก้โจทย์ปัญหาได้แล้ว ก็เปิดโอกาสให้แลกเปลี่ยนหรือตรวจสอบคำตอบกับนักเรียนในกลุ่มอื่น ๆ หรือครูผู้สอนอาจสุ่มเรียกนักเรียนให้ตอบ อย่างไรก็ดีทั้ง 3 รูปแบบ ก็มีข้อแตกต่างกัน คือ คู่ตรวจสอบส่วนใหญ่เน้นให้สมาชิกจับคู่กันทำงาน แก้อรรถหรือแก้โจทย์ทางคณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนคนหนึ่งจะเป็นผู้แก้ปัญหาลงและอีกคนหนึ่งมีหน้าที่เสนอแนะวิธีการแก้ปัญหาลง และเมื่อสิ้นปัญหา 1 ข้อ จะต้องมีการสลับหน้าที่กันในขณะที่มุมสนทนา เน้นวิธีการจัดกลุ่มนักเรียน โดยให้นักเรียนไปนั่งในมุมต่าง ๆ ของห้องเรียน ส่วนรูปแบบร่วมกันคิดจะใช้กับการทบทวนหรือการตรวจสอบความเข้าใจ นอกจากนี้ทั้ง 3 รูปแบบอาจจะมีขั้นตอนเพิ่มขึ้น คือ หลังจากที่ครูเรียกนักเรียนคนใดคนหนึ่งตอบแล้ว นักเรียนในกลุ่มอื่นสามารถยกมือแสดงการสนับสนุนหรือคิดคำตอบนั้นได้ ในกรณีที่คำตอบมากกว่า 1 คำตอบ ครูผู้สอนอาจให้นักเรียนกลุ่มอื่นช่วยตอบหรือถ้าคำตอบนั้นไม่สมบูรณ์ ครูผู้สอนให้นักเรียนคนอื่นช่วยเสริมได้

4. การสัมภาษณ์แบบสามขั้นตอน (Three - Step - Interview) รูปแบบการจัดการเรียนการสอนแบบนี้มี 3 ขั้นตอนและเหมาะสำหรับกลุ่มย่อยที่มีสมาชิกจำนวน 3 - 4 คน โดยมีครูกำหนดคำถามหรือประเด็นโจทย์ปัญหาให้นักเรียนตอบ มีหลักการดังนี้

1. นักเรียนจับคู่กัน คนที่ 1 เป็นผู้สัมภาษณ์โดยถามคำถามที่ครูตั้ง นักเรียนคนที่ 2 เป็นผู้ตอบ
2. นักเรียนสลับบทบาทกัน จากผู้ถามเป็นผู้ตอบ และจากผู้ตอบเป็นผู้ถาม

3. นักเรียนแต่ละกลุ่มย่อย ผลัดกันเล่าสิ่งที่ตนรู้จากคู่ของตนให้กลุ่มทราบ

กรณีที่กลุ่มมีสมาชิก 3 คน

นักเรียนคนหนึ่งจะเป็นผู้สัมภาษณ์ โดยถามคำถามที่ครูผู้สอนตั้งหรือเป็นผู้ตั้งประเด็นคำถามเอง นักเรียนคนที่ 2 เป็นผู้ตอบ และนักเรียนคนที่ 3 จะจดประเด็นหรือคำอภิปรายแสดงความคิดเห็น

หลังจากการสัมภาษณ์หรืออภิปรายตามหัวข้อจบลงเรื่องหนึ่ง นักเรียนแต่ละกลุ่มย่อยจะสลับบทบาทกันในการสัมภาษณ์หรือสนทนาหัวข้ออื่น ๆ

เมื่อการสัมภาษณ์หรืออภิปรายครบทุกหัวข้อแล้วนักเรียนแต่ละกลุ่มย่อยผลัดกันเล่าสิ่งที่ได้รู้ให้กลุ่มทราบ

กรณีที่กลุ่มมีสมาชิก 4 คน

สมาชิกภายในกลุ่มหนึ่ง ๆ จะจับคู่กันเป็น 2 คู่ โดยมีการสัมภาษณ์และตอบคำถามไปพร้อม ๆ กันทั้ง 2 คู่

หลังจากประเด็นสัมภาษณ์ในหัวข้อหนึ่งแล้วจะมีการสลับบทบาทผู้ถามเป็นผู้ตอบทั้ง 2 คู่ทำเช่นเดียวกัน

เมื่อการสัมภาษณ์หรือการอภิปรายครบทุกหัวข้อแล้ว นักเรียนทั้ง 4 คน จะพูดคุยแลกเปลี่ยนคำตอบของเพื่อนคู่สนทนา

การสัมภาษณ์แบบ 3 ขั้นตอน เป็นเทคนิคการสอนที่จะช่วยพัฒนาทักษะทางสังคมทางด้านการฟัง การสื่อความหมาย การสลับผลัดเปลี่ยนบทบาท ฯลฯ และเรื่องที่จะนำมาใช้ในการสัมภาษณ์ควรเป็นเรื่องที่ใกล้ตัวนักเรียนหรือเป็นเรื่องที่น่าสนใจ ตัวอย่าง

การแลกเปลี่ยนประสบการณ์หรือการแสดงความคิดเห็น เช่น อาจตั้งประเด็นอภิปรายว่า "ถ้าหากว่าเธอสามารถกลับชาติไปสู่อีตใดได้ เธออยากไปอยู่ที่ไหน ช่วงเวลาใดที่เธออยากกลับชาติและเธออยากเปลี่ยนแปลงสังคมในช่วงนั้นอย่างไร"

การสรุปบทเรียน อาจตั้งประเด็นว่า "เธอจะนำความรู้ที่ได้เรียนในวันนี้ไปประยุกต์ใช้อย่างไร"

บทวนการบ้าน อาจตั้งคำถามว่า "สาระสำคัญที่ได้จากการอ่านเมื่อคืนนี้คืออะไร"

สำรวจความคิดเห็นในเรื่องต่างๆ "ครอบครัวของเธอคิดอย่างไรต่อปัญหาสิ่งแวดล้อม" "คุณจะทำปัญหาวิทยาศาสตร์นี้อย่างไร"

5. การแข่งขันระหว่างกลุ่มด้วยเกม (Team Games Tournament หรือ TGT) และการ

แบ่งกลุ่มสัมฤทธิ์ (Student Team Achievement Division หรือ STAD) เป็นรูปแบบการสอนที่มีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคล้ายคลึงกัน แต่ทั้ง 2 รูปแบบจะมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ในขั้นตอนที่ 3 รายละเอียดในการดำเนินกิจกรรมของทั้ง 2 รูปแบบ มีดังนี้

1. การนำเสนอบทเรียน (Class Presentation) นำเสนอความคิดรวบยอดใหม่หรือบทเรียนใหม่ โดยการบรรยายจากครูผู้สอนหรืออภิปรายโดยใช้สื่อวีดิทัศน์และสื่ออื่น ๆ ในการนำเสนอความคิดรวบยอดหรือบทเรียน

2. การจัดทีม (Team) จัดนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 4 - 5 คน โดยสมาชิกของกลุ่มจะต้องมีเพศ และความสามารถต่างกัน เพื่อร่วมกันศึกษาเนื้อหา และปฏิบัติตามกิจกรรมตามกติกากิจการการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ เช่น เป็นผู้อ่าน เป็นผู้หาคำตอบ เป็นผู้สนับสนุน เป็นผู้จัดบันทึก เป็นต้น สมาชิกทุกคนในกลุ่มต้องช่วยเหลือกันเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ และสมาชิกทุกคนจะต้องพยายามทำให้ดีที่สุดเพื่อความสำเร็จร่วมกันของทีม เพื่อความสัมพันธ์อันดีต่อกัน เพื่อความภาคภูมิใจและเพื่อให้ได้การยอมรับ

3. การแข่งขัน / การทดสอบ ในขณะที่รูปแบบ TGT ใช้การแข่งขัน รูปแบบ STAD จะใช้การทดสอบย่อยเพื่อวัดความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาที่เรียนมาแล้ว

4. การยอมรับความสำเร็จของทีม (Team Recognition) ทั้งรูปแบบ TGT และรูปแบบ STAD เมื่อเสร็จการแข่งขันหรือทดสอบจะนำคะแนนของแต่ละคนในกลุ่มมารวมกันเป็นคะแนนของทีมและหาค่าเฉลี่ย ทีมที่มีคะแนนหรือค่าเฉลี่ยสูงที่สุด จะได้รับการยอมรับให้เป็นทีมชนะเลิศ และทีมที่ได้อันดับรองลงมา และควรประกาศผลการแข่งขันหรือคะแนนทดสอบในที่สาธารณะ เช่น ติดบอร์ดในชั้นเรียน บอร์ดของโรงเรียนในหนังสือพิมพ์หรือวารสารของโรงเรียน และควรบันทึกสถิติไว้ด้วย

6. ปริศนาความรู้ (Jigsaw) เป็นการจัดการเรียนการสอนที่แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ทุกกลุ่มจะได้รับมอบหมายให้ทำกิจกรรมเดียวกัน โดยครูผู้สอนแบ่งเนื้อหาของเรื่องที่จะเรียนออกเป็นหัวข้อย่อยเท่าจำนวนสมาชิกแต่ละกลุ่ม และมอบหมายให้นักเรียนแต่ละกลุ่มค้นคว้าคนละหัวข้อ โดยนักเรียนแต่ละคนจะเป็นผู้เชี่ยวชาญเฉพาะเรื่องที่ตนได้รับมอบหมายจากกลุ่ม สมาชิกต่างกลุ่มที่ได้รับมอบหมายในหัวข้อเดียวกันจะร่วมกันศึกษา จากนั้นแต่ละคนจะกลับเข้ากลุ่มเดิมของตนเพื่ออธิบายหัวข้อที่ตนศึกษาให้เพื่อนร่วมกลุ่มฟัง เพื่อให้เพื่อนทั้งกลุ่มได้รู้เนื้อหาครบทุกหัวข้อ

7. การสืบสอบเป็นกลุ่ม (Group Investigation) เป็นการเรียนการสอนที่เน้นบรรยากาศการทำงานร่วมกัน เพื่อส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ และการเรียนรู้ที่จะดำเนินชีวิตอยู่ในสังคมประชาธิปไตยได้อย่างเหมาะสม ในการสอนแบบสืบสอบเป็นกลุ่ม (Group Investigation) ครูผู้สอนจะแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 5 คน หรือน้อยกว่านี้ แต่ละกลุ่มจะวางแผนกันเองว่าจะศึกษาหัวเรื่องอะไร และจะศึกษาอย่างไร สมาชิกแต่ละคนหรือสมาชิกแต่ละคู่ในกลุ่มจะเลือกหัวข้อย่อยและเลือกวิธีแสวงหาคำตอบในเรื่องนั้น ๆ ด้วยตนเอง หลังจากนั้นสมาชิกแต่ละคนหรือแต่ละคู่จะรายงานความก้าวหน้าและผลการทำงานให้กลุ่มของตนเองทราบ กลุ่มจะอภิปรายเกี่ยวกับ

รายงานของสมาชิกและจัดทำรายงานของกลุ่มให้เพื่อนทั้งชั้นฟัง ขั้นตอนการจัดกิจกรรม ขั้นตอนสำคัญในการจัดกิจกรรมมี 6 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 Identifying the Topic and Organizing Pupils into Groups

- 1.1 ครูผู้สอนเสนอปัญหาแก่นักเรียนทั้งชั้นแล้วให้นักเรียนช่วยกันเสนอสิ่งที่ตนอยากรู้เกี่ยวกับปัญหาดังกล่าว
- 1.2 นักเรียนปรึกษาหารือกันเกี่ยวกับเรื่องที่ตนเองสนใจ และเสนอหัวข้อให้แก่สมาชิกในชั้นทราบ นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันกำหนดหัวข้อที่สนใจ
- 1.3 นักเรียนจัดกลุ่มเพื่อศึกษาหัวข้อที่สนใจเพียง 1 หัวข้อ

ขั้นตอนที่ 2 Planning the Investigation in Group ครูผู้สอนและนักเรียนวางแผนร่วมกันเกี่ยวกับกระบวนการดำเนินงานภาระงานที่ต้องทำ และเป้าหมายของงานในแต่ละหัวข้อย่อยตามปัญหาที่เลือก เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนในขั้นตอนที่ 2 ได้ผล ครูผู้สอนอาจใช้คำถาม

ปัญหาที่กลุ่มเลือกทำคืออะไร
สมาชิกในกลุ่มได้แก่ใคร
กลุ่มต้องการศึกษาค้นคว้าอะไร
แหล่งความรู้ที่จะศึกษาคืออะไร
จะแบ่งงานกันทำอย่างไร

ขั้นตอนที่ 3 Carrying Out the Investigation ขั้นตอนนี้ เป็นขั้นตอนที่นักเรียนใช้เวลานานที่สุด นักเรียนดำเนินงานตามแผนการที่วางไว้ในขั้นตอนที่ 2 กิจกรรมและทักษะต่างๆที่นักเรียนต้องศึกษาควรมาจากแหล่งข้อมูลทั้งภายในและภายนอกโรงเรียน ครูผู้สอนให้ความช่วยเหลือกับกลุ่มตามความต้องการของกลุ่มเมื่อแต่ละคนหรือแต่ละคู่ทำเสร็จแล้วจะนำเสนอข้อมูลกับกลุ่มของตนเพื่อให้สมาชิกได้อภิปรายและหาข้อมูลสรุปในแต่ละข้อ

ขั้นตอนที่ 4 Preparing Final Report นักเรียนแต่ละกลุ่มรวบรวมข้อมูลที่สมาชิกในกลุ่มตนได้จัดทำ ช่วยกันแก้ไขแล้วสรุปเป็นรายงานของกลุ่ม เพื่อเสนอต่อนักเรียนทั้งชั้น สมาชิกช่วยกันเตรียมการเสนอรายงานให้น่าสนใจและมีประสิทธิภาพ เพื่อให้การนำเสนอรายงานของกลุ่มย่อยมีประสิทธิภาพ ครูผู้สอนควรแนะนำนักเรียนให้เตรียมพร้อมเกี่ยวกับ

- 4.1 การเน้นสาระสำคัญของการค้นคว้า
- 4.2 แหล่งความรู้หรือวิธีการที่กลุ่มศึกษา
- 4.3 การเปิดโอกาสให้มีการซักถาม
- 4.4 การให้นักเรียนในชั้นมีกิจกรรมร่วมด้วย ไม่ควรให้นั่งฟังนาน ๆ
- 4.5 ความร่วมมือของสมาชิกในการนำเสนอผลงาน
- 4.6 อุปกรณ์และวัสดุที่จำเป็นต้องใช้ในการนำเสนอรายงาน

ขั้นตอนที่ 5 Present the Final Report นักเรียนแต่ละกลุ่มเสนอผลงานในกลุ่มของตนให้สมาชิกในชั้นเรียนทราบตามที่เตรียมไว้ในขั้นตอนที่ 4 ควรให้นักเรียนในชั้นมีกิจกรรมร่วมด้วย เช่น การถามตอบปัญหาการทำกิจกรรมที่ผู้รายงานกำหนดให้ทำ

ขั้นตอนที่ 6 Evaluating Achievement ครูผู้สอนและนักเรียนประเมินผลการรายงานกลุ่มย่อย และประเมินงานรวมของทั้งชั้น การประเมินนี้รวมถึงการประเมินเป็นรายบุคคลด้วย สิ่งที่ต้องประเมินได้แก่

- 6.1 ความสามารถในการคิดระดับสูง
- 6.2 วิธีการที่ใช้ในการศึกษา
- 6.3 การประยุกต์ใช้ความรู้
- 6.4 การใช้หลักฐานอ้างอิง
- 6.5 วิธีการที่ใช้ในการสรุปข้อมูล

วิธีการที่ใช้ในการประเมินควรเป็นการประเมินแบบสะสม โดยดูวิธีการทำงานของนักเรียนแต่ละคนตั้งแต่เริ่มจนจบโครงการ และควรมีการแจ้งผลการประเมินให้นักเรียนทราบเป็นระยะ ๆ นักเรียนควรได้รับ Feedback จากเพื่อนนักเรียนและจากครูผู้สอน การประเมินผลที่ใช้ควรช่วยให้นักเรียนเกิดผลสัมฤทธิ์ด้านเนื้อหาและกระบวนการหรือช่วยพัฒนาความสามารถในการวางแผนการศึกษาเรื่องต่าง ๆ ในอนาคตได้ นอกจากนี้ครูผู้สอนควรมีการประเมินผลด้านจิตพิสัย เช่น ความรู้สึกต่อเรื่องที่เรียน งานที่ทำ แรงจูงใจ และเจตคติที่มีต่อครูผู้สอนต่อเพื่อน

8. การเรียนรู้เป็นกลุ่มเพื่อช่วยเหลือเพื่อนเป็นรายบุคคล (Team Assisted Individualization หรือ TAI) เป็นการเรียนการสอนที่ผสมผสานระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือและการเรียนการสอนรายบุคคลเข้าด้วยกัน เน้นการสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยตนเองตามความสามารถและส่งเสริมความร่วมมือภายในกลุ่ม มีการแลกเปลี่ยนประสบการณ์การเรียนรู้ และปฏิสัมพันธ์ทางสังคม การจัดการเรียนการสอนรูปแบบนี้เหมาะสมกับทุกวิชาและทุกระดับชั้น โดยเฉพาะสำหรับวิชาคณิตศาสตร์โดยมีองค์ประกอบที่น่าสนใจ ดังนี้

1. มีการทดสอบความรู้ก่อนเรียน ครูผู้สอนจะต้องทดสอบความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเพื่อแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มตามคะแนนผลสัมฤทธิ์ในการสอบก่อนเรียน
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 - 5 คน ในแต่ละกลุ่มประกอบด้วยสมาชิก ซึ่งมีความสามารถแตกต่างกันในเรื่องผลการเรียน เพศ และสภาพครอบครัว
3. การจัดกลุ่มค้นคว้า หลังจากการทดสอบก่อนเรียน นักเรียนแต่ละคนจะได้รับมอบหมายให้เรียน ณ จุดเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ตามพื้นฐานของนักเรียน อย่างไรก็ตาม แต่ละคนยังคงเรียนและทำงานในกลุ่มย่อย โดยมีเงื่อนไขว่าให้สมาชิกภายในกลุ่มคอยช่วยเหลือกัน
4. การสอนกลุ่มย่อย ในแต่ละวันครูผู้สอนจะสอนในกลุ่มย่อย ๆ ซึ่งประกอบด้วยนักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกัน แต่จะเรียนเนื้อหาเดียวกัน ครูผู้สอนจะเลือกเทคนิคในการนำเสนอความคิดรวบยอดที่สำคัญ วัตถุประสงค์สำคัญของการสอนกลุ่มย่อยก็เพื่อให้ นักเรียนได้รับรู้ มอบหมายให้ทำงานในกลุ่ม และตรวจการบ้านกันเอง จัดเก็บอุปกรณ์และตำราเข้าที่เอง

5. หลังจากนักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อยได้เรียนจากครูผู้สอน นักเรียนจะทำงานเป็นกลุ่ม ๆ โดยใช้ตำรา วัสดุ และอุปกรณ์ที่ได้รับจากครูผู้สอน ซึ่งจะครอบคลุมเนื้อหาเรื่องการบวก ลบ ทศนิยม เศษส่วน โจทย์ปัญหา สถิติ และพีชคณิต

6. การทดสอบความรู้ ทุก ๆ 2 สัปดาห์จะมีการทดสอบความคิดรวบยอด เพื่อวัดความรู้ของนักเรียน แต่เป็นการทดสอบที่ใช้เวลาประมาณ 3 นาทีต่อครั้ง

7. การสอนนักเรียนทั้งชั้น ทุก ๆ 3 สัปดาห์ ครูผู้สอนจะสอนนักเรียนเป็นกลุ่มใหญ่เต็มทั้งสัปดาห์ โดยเนื้อหาที่สอนจะครอบคลุมเนื้อหาเรขาคณิต การวัด ระบบจำนวน และเทคนิคการทำโจทย์ปัญหา

8. คะแนนและความสำเร็จของกลุ่ม ในวันสุดท้ายของแต่ละสัปดาห์ ครูผู้สอนจะรวมคะแนนจากการสอบย่อยของสมาชิกทุกคนในกลุ่มย่อย โดยกำหนดเกณฑ์ไว้ล่วงหน้าว่าทีมที่ได้คะแนนเฉลี่ยรวมกันตั้งแต่เท่าใดขึ้นไปจึงจะได้ชื่อว่าเป็น "Superteam", "Greatteam" และ "Goodteam" ตามลำดับ

9. การเรียนรู้แบบร่วมมือผสมผสานการอ่านและการเขียน (Cooperative Integrated Reading and Composition หรือ CIRC) เป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสมกับนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 3 ขึ้นไป เพราะการจัดการเรียนรู้ดังกล่าว นักเรียนต้องมีความสามารถในการอ่านพอสมควรและสามารถตัดสินใจเลือกหนังสืออ่านตามที่สนใจได้ในขณะปฏิบัติกิจกรรม โดยแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มเก่งกับกลุ่มอ่อนให้จับคู่กัน ครูผู้สอนแยกทีละกลุ่ม ขณะที่ครูสอนกลุ่มหนึ่ง ที่เหลือให้จับคู่กันทำกิจกรรมที่ครูกำหนดให้ เช่น ฝึกอ่านออกเสียง เขียนสะกดคำ สรุปเรื่อง ตอบคำถาม องค์กรประกอบที่น่าสนใจของรูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือผสมผสานการอ่านและการเขียน CIRC ได้แก่

1. การสร้างกลุ่มการอ่าน ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 - 3 กลุ่มต่อห้อง โดยในแต่ละกลุ่มจะมีนักเรียนประมาณ 8 - 15 คน ตามระดับความสามารถทางการอ่าน

2. การจัดกลุ่มย่อย นักเรียนในแต่ละกลุ่มจะทำหน้าที่เป็นคู่ ๆ หรือกลุ่มละ 3 คน ตามความเหมาะสม หลังจากนั้นจะนำกลุ่มย่อยที่สร้างขึ้นใหม่ไปจับคู่กับกลุ่มย่อยจากกลุ่มการอ่านกลุ่มอื่น เพื่อให้แต่ละกลุ่มมีสมาชิกที่มีความสามารถละกันทั้งสมาชิกที่มีความสามารถทางการอ่านสูง ความสามารถทางการอ่านปานกลาง และความสามารถทางการอ่านต่ำ

3. กิจกรรมการอ่านพื้นฐาน นักเรียนทุกคนจะต้องอ่านหนังสือที่บังคับตามหลักสูตร นอกจากนั้นครูผู้สอนจะเล่าเรื่องให้นักเรียนฟังวันละประมาณ 20 นาที หลังจากการเล่าเรื่อง ครูผู้สอนจะนำตำรามาเสนอแนะให้นักเรียนเกิดความสนใจและอยากอ่านอย่างใดอย่างหนึ่ง ในขณะที่ครูผู้สอนกำลังทำงานกับกลุ่มย่อยใดกลุ่มย่อยหนึ่ง

4. การหาเพื่อนช่วยตรวจสอบ หลังจากทำกิจกรรมตามที่ครูผู้สอนมอบหมายสำเร็จ นักเรียนจะต้องให้เพื่อนเซ็นชื่อรับรองว่าได้ทำกิจกรรมและเรียนรู้ตามวัตถุประสงค์ที่ครูกำหนด ทั้งนี้ครูผู้สอนจะกำหนดวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนแต่ละคนว่าเขาควรทำกิจกรรมอะไรบ้าง

ในแต่ละวัน นักเรียนแต่ละคนสามารถก้าวไปข้างหน้าตามความสามารถของตนเอง โดยบางคนอาจทำกิจกรรมเสร็จก่อนคนอื่นแล้วใช้เวลาที่เหลือในการอ่านหนังสือนอกเวลา

5. การทดสอบ หลังจากเรียนแต่ละชั่วโมงจะมีการสอบย่อยโดยใช้เวลาสั้น ๆ

6. การสอนอ่าน ในแต่ละสัปดาห์ครูผู้สอนจะสอนการอ่านให้แก่นักเรียนหนึ่งครั้ง โดยเน้นการสอนอ่านเพื่อจับใจความภายหลังการสอน ซึ่งครูผู้สอนจะมอบหมายให้นักเรียนไปฝึกอ่านจับใจความ

7. การสอนเขียน ครูผู้สอนจะใช้บทเรียนที่พัฒนาขึ้น โดยนักเรียนยังคงทำงานเป็นกลุ่มย่อยที่จัดไว้แต่ต้น หลังจากเรียนในห้อง 3 ชั่วโมง นักเรียนจะเข้าร่วมโครงการฝึกปฏิบัติการเขียน โดยต้องเขียนเรื่องที่ตนสนใจและชอบ

รูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือที่กล่าวข้างต้น สามารถจัดได้หลากหลายวิธี แต่ทุกรูปแบบมีลักษณะที่สำคัญร่วมกันคือ การจัดแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ ประมาณ 2 - 6 คน โดยสมาชิกทุกคนต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน มีการฝึกฝนการทำงานกลุ่ม กระบวนการกลุ่ม และการประเมินผลเป็นรายบุคคล ซึ่งแต่ละรูปแบบครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับระดับชั้นเรียน ความสามารถของนักเรียนตลอดจนเนื้อหาอันจะก่อให้เกิดประโยชน์แก่นักเรียน

ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอน 5 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นเตรียม

1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คน ตามความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 1 : 2 : 1 โดยพิจารณาจากคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 เป็นเกณฑ์

1.2 ครูแจ้งวัตถุประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

2.1 ครูทบทวนความรู้เดิม

2.2 ครูสอนเนื้อหา ในบทเรียนที่นักเรียนต้องการศึกษา

2.3 ครูแจกใบความรู้และใบงาน

2.4 ครูแนะนำทักษะการทำงานร่วมกัน

3. ขั้นทำงานกลุ่ม

3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้และทำใบงาน

3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน

3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

4. ขั้นทดสอบ

4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล โดยนักเรียนห้ามปรึกษาหรือชักถามกัน

4.2 ครูประเมินผลการเรียนของนักเรียน โดยนำคะแนนสอบที่ได้จากการทำแบบทดสอบของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มและถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน

5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม

5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

1.5 การเรียนแบบร่วมมือกับการสอนคณิตศาสตร์

จอห์นสัน และ จอห์นสัน (สมเดช บุญประจักษ์. 2540 : 56 - 57 ; อ้างอิงจาก Johnson and Johnson. 1989 : 235 - 237) กล่าวว่า การสอนแบบเรียนร่วมมือใช้ได้เป็นอย่างดีกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เป็นการกระตุ้นให้นักเรียนคิดทางคณิตศาสตร์ เข้าใจการเชื่อมโยงระหว่างมโนคติและกระบวนการ และสามารถที่จะประยุกต์ใช้อย่างคล่องแคล่วและมีความหมายด้วยเหตุผลดังนี้

1. มโนคติและทักษะทางคณิตศาสตร์สามารถเรียนได้ดีในกระบวนการที่เป็นพลวัต (Dynamic Process) ที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมอย่างแข่งขัน การเรียนคณิตศาสตร์ควรเป็นลักษณะที่ผู้เรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรม มากกว่าที่จะเป็นเพียงผู้คอยรับความรู้ การสอนคณิตศาสตร์โดยปกติ พื้นฐานที่ว่า นักเรียนเป็นผู้คอยดูดซับข้อมูลความรู้ จากการฝึกซ้ำและการให้แรงเสริม การมีส่วนร่วมในการเรียนอย่างแข่งขันเป็นการท้าทายทางสมองสำหรับนักเรียนทุกคน และการอยากรู้ อยากเห็นจะช่วยกระตุ้นให้มีการอภิปรายกับคนอื่น

2. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นการอาสาซึ่งกันและกัน (Interpersonal Enterprise) การพูดผ่านปัญหาทางคณิตศาสตร์กับเพื่อนช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างชัดเจนว่าจะแก้ปัญหาได้ถูกต้องได้อย่างไร การอธิบายยุทธวิธีแก้ปัญหาให้เหตุผลและวิเคราะห์ปัญหากับเพื่อน จะทำให้เกิดการหยั่งรู้ (Insight) มีวิธีการให้เหตุผลระดับสูง และเกิดการเรียนรู้ระดับสูง ในกลุ่มย่อยนักเรียนมีความสะดวกในการอภิปราย และแลกเปลี่ยนความคิดเห็นมากกว่าการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้น

3. การเรียนเป็นกลุ่ม มีโอกาสในการสร้างความร่วมมือในการสื่อสารอย่างมีประสิทธิภาพ แต่ในโครงสร้างของการแข่งขัน และการเรียนรายบุคคลนักเรียนไม่มีการสื่อสารแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน จะทำให้นักเรียนหลีกเลี่ยงการแลกเปลี่ยน การวิเคราะห์ปัญหาและเลือกยุทธวิธีร่วมกับคนอื่น ในการสื่อสารแลกเปลี่ยนข้อมูลก็จะเป็นไปแบบไม่เต็มใจหรือให้ข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์

4. การร่วมมือส่งเสริมความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าการแข่งขัน และการเรียนแบบรายบุคคล การเรียนแบบร่วมมือส่งเสริมการค้นพบ การเลือกใช้ยุทธวิธีการให้เหตุผลที่มีประสิทธิภาพ การสร้างแนวคิดใหม่ การถ้อยแถลงยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์ และข้อเท็จจริงกับปัญหาย่อย ๆ ไปสู่รายบุคคล (นั่นคือถ้อยแถลงจากกลุ่มไปสู่รายบุคคล)

5. การทำงานร่วมมือกัน นักเรียนจะเพิ่มความมั่นใจในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเอง เป็นการสนับสนุนให้เกิดความพยายามในการเรียนรู้มโนคติกระบวนการและยุทธวิธีทาง

คณิตศาสตร์ นอกจากนี้ที่นักเรียนที่ทำงานร่วมกันในกลุ่มมีแนวโน้มที่จะชอบและเห็นคุณค่าของแต่ละคน และเห็นความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของคนอื่น มีความสัมพันธ์กันทางบวกระหว่างเพื่อน เกิดการเรียนรู้ในระดับสูง ตระหนักในคุณค่าของตนเอง (Self - esteem) เกิดการยอมรับความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา

6. การเลือกรายวิชาเรียนและการเลือกอาชีพ เพื่อนมีอิทธิพลต่อนักเรียน หากมีนักเรียนบางคนในชั้นเลือกวิชาเรียนไม่เหมาะสมกับตัวเขา การช่วยเหลือให้เขาได้พัฒนาจะเกิดขึ้นในสถานการณ์การเรียนแบบร่วมมือ นักเรียนมีแนวโน้มที่ชอบและสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์มากกว่าและถ้าได้รับการกระตุ้นอย่างต่อเนื่องในการเรียน ความสำเร็จที่เกิดจากการทำงานร่วมกันของนักเรียนในการแก้ปัญหา จะทำให้เกิดการเรียนรู้ใหม่และการวิเคราะห์มากขึ้น ซึ่งเป็นความรู้ที่จำเป็นในการอภิปราย อธิบายและวางแผนในการเรียนรู้สถานการณ์ใหม่ เป็นการเพิ่มความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ การสนับสนุนกัน การช่วยเหลือกันและการเชื่อมโยงกันภายในกลุ่มแบบร่วมมือมีผลทางบวกต่อความสัมพันธ์ในกลุ่มต่อเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และความมั่นใจในตนเอง (Self - confidence)

เพื่อให้การสอนแบบเรียนร่วมมือเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพและมีประสิทธิผล บารูดี (สมเดช บุญประจักษ์. 2540 : 37 - 38 ; อ้างอิงจาก Barody. 1993 : 2 ; 105 - 106) ได้ให้ข้อเสนอแนะไว้ดังนี้

1. เริ่มทีละน้อย ในตอนเริ่มต้นใช้การเรียนแบบร่วมมือเป็นบางครั้งแล้วใช้ถี่มากขึ้น
2. ใช้กลุ่มละ 4 คน กลุ่มเล็กเกินไปจะไม่เกิดการอภิปราย กลุ่มใหญ่เกินไปทำให้การมีส่วนร่วมในการมีปฏิสัมพันธ์ลดลง ในกลุ่ม 4 คน นักเรียนรู้สึกสะดวกและปลอดภัยที่จะขยายแนวคิดหรืออธิบายเหตุผลกันในกลุ่ม
3. เตรียมประสบการณ์การแก้ปัญหาของนักเรียนอย่างหลากหลาย เตรียมโอกาสให้นักเรียนได้แก้ปัญหาทั้งรายบุคคล ทั้งชั้น และกิจกรรมกลุ่ม
4. เน้นปัญหาของกลุ่ม โดยสนับสนุนให้นักเรียนได้อภิปรายและสรุปปัญหาโดยกลุ่มและควรให้มีการอภิปรายประเด็นทางสังคมด้วย
5. ต้องมั่นใจว่าสมาชิกแต่ละคนมีความรับผิดชอบ ซึ่งนักเรียนต้องเข้าใจก่อนว่าข้อผิดพลาดของกลุ่มก็คือ ข้อผิดพลาดของทุกคนในกลุ่ม ผลงานของกลุ่มเป็นผลมาจากสมาชิกทุกคน การสอบถามนักเรียนเป็นรายบุคคลจะช่วยให้เกิดความรับผิดชอบ
6. ส่งเสริมความพยายามร่วมกัน กลุ่มต้องรับผิดชอบต่อการพัฒนาของสมาชิกทุกคน
7. ส่งเสริมให้เกิดทักษะทางสังคมโดยการช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ทักษะการทำงานร่วมกัน การร่วมมือกัน ลดข้อขัดแย้งหรือความสับสนต่าง ๆ
8. ส่งเสริมให้นักเรียนได้เขียนสรุป เพราะการเขียนสรุปทำให้ครูได้ติดตามและควบคุมการร่วมมือกันในกลุ่ม

1.6 ความแตกต่างระหว่างการเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม

สมเดช บุญประจักษ์ (2544 : 49 - 50) ได้เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างการเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิมมีหลายประการดังนี้

1. การเรียนแบบร่วมมือ สมาชิกกลุ่มมีความรับผิดชอบในการเรียนร่วมกัน สนใจการทำงานของตนเองเท่า ๆ กับการทำงานของสมาชิกกลุ่ม ส่วนการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิมนั้น สมาชิกไม่ได้รับผิดชอบร่วมกัน
2. สมาชิกกลุ่มแต่ละคนรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมาย มีการให้คำแนะนำเสนอแนะชมเชย การทำงานกลุ่มของสมาชิกภายในกลุ่ม ในการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม สมาชิกแต่ละคนไม่รับผิดชอบการทำงานของตนเองเสมอไป บางครั้งก็ใส่ชื่อของตนเองโดยไม่ได้ทำงาน
3. การเรียนแบบร่วมมือ สมาชิกกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน แต่การเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม สมาชิกกลุ่มมีความสามารถใกล้เคียงกัน
4. มีการเปลี่ยนบทบาทของผู้ภายในกลุ่มการเรียนแบบร่วมมือ ในขณะที่ผู้นำหรือหัวหน้ากลุ่มจะได้รับการคัดเลือกจากสมาชิกกลุ่มแบบเดิม
5. สมาชิกกลุ่มในการเรียนแบบร่วมมือ ช่วยเหลือ สนับสนุน ให้กำลังใจกันในการทำงานกลุ่ม ช่วยกันรับผิดชอบการเรียนรู้ของสมาชิกในกลุ่ม และแน่ใจว่าสมาชิกทุกคนทำงานของกลุ่ม ส่วนการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม สมาชิกรับผิดชอบการทำงานของตนเองเท่านั้น อาจแบ่งงานกันไปทำแล้วนำผลงานมารวมกัน
6. จุดมุ่งหมายของการเรียนแบบร่วมมือ คือการให้สมาชิกทุกคนใช้ความสามารถอย่างเต็มที่ในการทำงานกลุ่มโดยยังรักษาสัมพันธภาพที่ดีต่อสมาชิกกลุ่ม ในการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิมนั้นจุดมุ่งหมายอยู่ที่การทำงานให้สำเร็จเท่านั้น
7. นักเรียนจะได้รับการสอนทักษะทางสังคม (Social Skills) ที่จำเป็นขณะทำงานกลุ่ม แต่ทักษะเหล่านี้ถูกละเลยสำหรับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม
8. การเรียนแบบร่วมมือ ครูจะเป็นผู้ให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ สังเกตการทำงานของสมาชิกในกลุ่ม ในขณะที่การเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิมครูจะให้ความสนใจนักเรียนในขณะที่ทำงานกลุ่มน้อย
9. การเรียนแบบร่วมมือ ครูเป็นผู้กำหนดวิธีการในการทำงานกลุ่ม เพื่อให้กลุ่มดำเนินงานไปอย่างมีประสิทธิภาพ ส่วนการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม ครูจะให้สมาชิกในกลุ่มจัดการกันเอง จึงทำให้กลุ่มดำเนินงานไปได้ไม่ค่อยดี

เปรียบเทียบการเรียนแบบร่วมมือกับการเรียนเป็นกลุ่มแบบเดิม

การเรียนรู้แบบร่วมมือ

1. มีความรับผิดชอบร่วมกันในกลุ่ม
2. สมาชิกแต่ละคนรับผิดชอบงานของตนเอง และของสมาชิกในกลุ่ม
3. สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกัน มีทั้งเก่ง ปานกลาง และอ่อน
4. สมาชิกผลัดเปลี่ยนกันเป็นผู้นำ
5. สมาชิกแบ่งความรับผิดชอบซึ่งกันและกัน
6. เน้นวิธีการและผลงาน
7. มีการสอนทักษะทางสังคม
8. ครูเป็นผู้สังเกตการณ์ แนะนำ ช่วยเหลือ การทำงานกลุ่ม
9. มีวิธีการทำงานกลุ่ม

การเรียนรู้เป็นกลุ่มแบบเดิม

1. ไม่ได้รับผิดชอบร่วมกันในกลุ่ม
2. สมาชิกบางคนอาจไม่รับผิดชอบงานในส่วนของตนเองและของสมาชิกในกลุ่ม
3. สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถใกล้เคียงกัน
4. สมาชิกเลือกผู้นำ
5. สมาชิกรับผิดชอบเฉพาะของตนเอง
6. เน้นที่ผลงาน
7. ทักษะทางสังคมถูกละเลย ไม่ได้สอน
8. ครูไม่ค่อยได้สนใจการทำงานกลุ่ม คอยตรวจผลงานที่สำเร็จแล้ว
9. ไม่มีวิธีการที่ชัดเจนในการทำงานกลุ่ม

1.7 บทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

สมเดช บุญประจักษ์ (2544 : 51) ได้กล่าวถึง บทบาทของครูผู้สอนที่ใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือจะเปลี่ยนจากการเป็นผู้ควบคุมชั้น มาเป็นเพียงผู้คอยแนะนำให้นักเรียนใช้ข้อมูล ความรู้ วัสดุอุปกรณ์ต่าง ๆ ดำเนินการให้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ต้องการ และเป็นผู้จัดบรรยายที่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งนักเรียนเรียนรู้ได้ดีจากบรรยากาศที่เป็นกันเอง ที่ทั้งครูและนักเรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและความรู้สึกซึ่งกันและกันโดย

ให้งานที่ทำท้าทายความสามารถของนักเรียนมากกว่าที่จะเป็นงานที่แข่งขันกัน

ให้นักเรียนได้มีโอกาสเลือกและตัดสินใจในงานที่ทำ

ยอมรับความคิดและสนใจความรู้สึกของนักเรียน

เห็นว่าความคิดเห็นของนักเรียนมีความหมายและมีคุณค่า ถึงแม้ว่าจะเป็นความคิดที่จำกัด

ส่งเสริมให้นักเรียนได้แสดงออกซึ่งความคิดของตนเอง ซึ่งอาจออกมาในรูปแบบต่าง ๆ เช่น วาดภาพ ระบายสี แสดงละคร บทบาทสมมติ เขียนบรรยาย และอื่น ๆ

ยอมรับความผิดพลาดของนักเรียนและหาทางช่วยเหลือ

เผยแพร่ผลงานของนักเรียน อาจเป็นในรูปจดหมายข่าว หนังสือของห้องหรือหนังสือพิมพ์ของโรงเรียน

กระตุ้นส่งเสริมทักษะทางด้านความคิดแก่นักเรียน โดยใช้แหล่งข้อมูลต่าง ๆ และสื่อการสอน เช่น หนังสืออ้างอิง วารสาร

1.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนแบบเรียนร่วมมือ

งานวิจัยต่างประเทศ

สลาวิน (Slavin. 1983 : 45) ได้ศึกษาผลของการเรียน TAI ในวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ ทักษะและพฤติกรรมของผู้เรียนกับนักเรียนระดับ 3 - 6 จำนวน 1,997 คน ผลการวิจัยพบว่า การเรียนแบบ TAI เพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่าการสอนโดยปกติ ถึงแม้ว่าการวิเคราะห์ทางสถิติจะไม่แตกต่างกัน

วิลเลียมส์ (Williams. 1988 : 3611 - A) ได้ศึกษาผลของการเรียนร่วมโดยใช้เทคนิคผสมผสานระหว่าง STAD และ TGT ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในรัฐโอลาบามา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคผสมผสานระหว่าง STAD และ TGT มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ดูบอยส์ (Dubois. 1990 : 408) ได้ศึกษาวิธีสอนแบบ STAD และ TGT โดยทำการศึกษาจากกลุ่มตัวอย่าง 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 นักเรียนเรียนรู้จากครูที่ผ่านการอบรมการสอนทั้งสองแบบและใช้วิธีสอนทั้งสองแบบ กลุ่มที่ 2 นักเรียนเรียนรู้จากครูที่ผ่านการอบรม การสอนทั้งสองแบบแต่ไม่ใช้วิธีสอนทั้งสองแบบ กลุ่มที่ 3 นักเรียนเรียนรู้จากครูที่ไม่ผ่านการอบรมวิธีสอนทั้งสองแบบ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ 1 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกับกลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่เจตคติทั้ง 3 กลุ่มไม่แตกต่างกัน

ดูเรน และเชอริงตัน (Duren and Cherington. 1992 : 80 - 83) ได้ศึกษานักเรียนเกรด 7 และ 8 จำนวน 126 คน 4 ห้องเรียน ในรายวิชา Pre - algebra โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มฝึกแก้ปัญหาโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค 4 คน และอีกกลุ่มหนึ่งให้แก้ปัญหเป็นรายบุคคล ทั้งสองกลุ่มได้รับการสอนเทคนิคการแก้ปัญหาก่อน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ทำงานร่วมมือกันสามารถจดจำและประยุกต์ใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหได้ดีกว่ากลุ่มที่ฝึกแก้ปัญหเป็นรายบุคคล

นิโคลส์ (Nichols. 1994 : 460 - A) ได้ศึกษาประสิทธิภาพโครงสร้างของการเรียนแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายที่เรียนเรขาคณิต จำนวน 81 คน สุ่มเข้ากลุ่มกิจกรรมการเรียนร่วมและสอนปกติโดยการบรรยาย ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มที่ใช้กิจกรรมการเรียนร่วมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนปกติโดยการบรรยาย

งานวิจัยในประเทศ

ขวัญใจ บุญฤทธิ์ (2535 : 108) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความมีวินัยในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องจำนวนเต็มลบ ที่ได้รับการสอนแบบ TAI กับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. ผลการวิจัย พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบ TAI มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูของ สสวท. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อาภาภรณ์ หวัดสูงเนิน (2536 : 98) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง เศษส่วนและร้อยละ โดยวิธีเรียนแบบร่วมมือกับวิธีเรียนแบบปกติ ผลการวิจัย พบว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีเรียนแบบร่วมมือ สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีเรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ผ่องใส ห่อทอง (2538 : 76) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่อง ตัวประกอบของจำนวนนับ ที่ได้รับการสอนแบบพัฒนารายบุคคลที่ร่วมทำงานเป็นคณะกับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบพัฒนารายบุคคลที่ร่วมทำงานเป็นคณะ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

กาญจนา สุจินะพงษ์ (2539 : 35) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความเท่ากันทุกประการ ที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ร่วม ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ร่วมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สมเดช บุญประจักษ์ (2540 : 96) ได้ศึกษาการพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในวิชาคณิตศาสตร์เสริมทักษะ (ค 032) ที่ได้รับการสอนแบบเรียนร่วมมือ กับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านการแก้โจทย์ การให้เหตุผล และการใช้คณิตศาสตร์สื่อสารของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบเรียนร่วมมือ สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุนันท์ แสงงามมงคล (2541 : 32) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลอการิทึม โดยใช้ชุดการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1 ผลการวิจัย พบว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้ชุดการเรียนการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยวิธีสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ศรีภรณ์ ณะวงศ์ษา (2542 : 73) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น โดยทำการศึกษาจากกลุ่มตัวอย่าง 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 ได้รับการสอนโดยวิธีเรียนแบบ TGT กลุ่มที่ 2 แบบ STAD และกลุ่มที่ 3 ตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้การ

สอนแบบ TGT และแบบ STAD มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนแบบ TGT กับแบบ STAD มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

จากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับการเรียนแบบร่วมมือทั้งในประเทศและต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการเรียนแบบร่วมมือทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความสามารถทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผลและการใช้คณิตศาสตร์สื่อสารของนักเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีการเรียนแบบปกติ นอกจากนี้การเรียนแบบร่วมมือยังมีขั้นตอนที่น่าสนใจ ทำให้นักเรียนเกิดทักษะทางสังคม รู้จักวิธีการทำงานกลุ่ม และมีความรับผิดชอบทั้งในงานของตนเองและของกลุ่ม ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำเอาวิธีการเรียนแบบร่วมมือ มาใช้สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน (2525 : 520) กล่าวว่า "ปัญหา หมายถึง ข้อสงสัย" บรูคเนอร์ (Bruckner. 1957 : 301) กล่าวว่า "ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณที่นักเรียนไม่สามารถตอบได้ทันทีโดยวิธีที่เคยชิน และสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียนเมื่อเวลานี้อาจจะไม่ใช่ปัญหาในวันนี้ก็ได้"

แอนเดอร์สัน และพิงกรี (Anderson and Pingry. 1973 : 228) กล่าวว่า "ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการวิธีการแก้ไขหรือหาคำตอบผู้ตอบจะทำได้ดีต้องมีวิธีการที่เหมาะสม ใช้ความรู้ ประสบการณ์และการตัดสินใจ"

อดัมส์ เอลลิส และบีสัน (สมเดช บุญประจักษ์. 2540 : 12 ; อ้างอิงจาก Adams, Ellis and Beeson. 1977. *Teaching Mathematics with Emphasis on the Diagnostic Approach*. p.173-174) ได้ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ว่า คือ สถานการณ์ที่เป็นประโยคภาษา คำตอบจะเกี่ยวข้องกับปริมาณซึ่งปัญหานั้นไม่ได้ระบุวิธีการหรือการดำเนินการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ผู้แก้ปัญหาต้องค้นหาวินิจฉัยวิธีการใดในการหาคำตอบของปัญหา นั่นคือการได้มาซึ่งคำตอบของปัญหา จะได้จากการพิจารณาว่าจะต้องทำอะไร

จากความหมายดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์คือปัญหาที่เกี่ยวกับสถานการณ์หรือคำถาม ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องค้นคว้าวิธีการมาแก้ปัญหาเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ โดยไม่มีการระบุวิธีการในการแก้ปัญหาไว้อย่างชัดเจน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวิธีการ การใช้ความรู้ ประสบการณ์ และการตัดสินใจของผู้แก้ปัญหาอย่างเหมาะสม

2.2 ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์

ชาร์ลส์และเลสเตอร์ (Charles and Lester. 1982 : 6 - 10) ได้พิจารณาจำแนกประเภทของปัญหาและเป้าหมายของการฝึกแก้ปัญหาแต่ละประเภทดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ฝึก (Drill Exercise) เป็นปัญหาที่ใช้ฝึกขั้นตอนวิธีและการคำนวณเบื้องต้น
2. ปัญหาข้อความอย่างง่าย (Simple Translation Problem) เป็นปัญหาข้อความที่เคยพบ เช่น ปัญหาในหนังสือเรียน ต้องการฝึกให้คุ้นเคยกับการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาลำดับขั้นตอนเดียวมุ่งให้เข้าใจนิยามทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดคำนวณ
3. ปัญหาข้อความที่ซับซ้อน (Complex Translation Problem) คล้ายกับปัญหาอย่างง่าย แต่เพิ่มเป็นปัญหาที่มีสองขั้นตอน หรือมากกว่าสองขั้นตอน หรือมากกว่าสองการดำเนินการ
4. ปัญหาที่เป็นกระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อนไม่สามารถเปลี่ยนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ทันที จะต้องจัดปัญหาให้ง่ายขึ้น หรือแบ่งเป็นขั้นตอนย่อย ๆ แล้วหารูปแบบทั่วไปของปัญหา ซึ่งนำไปสู่การคิดและการแก้ปัญหาเป็นการพัฒนาวิธีการต่าง ๆ เพื่อความเข้าใจ วางแผนการแก้ปัญหาและการประเมินผลคำตอบ
5. ปัญหาประยุกต์ (Applied Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะ ความรู้ มโนคติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยวิธีทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ เช่น การจัดกระทำ การรวบรวม และการแทนข้อมูล และต้องการตัดสินใจเกี่ยวกับข้อมูลในเชิงปริมาณ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ทักษะ กระบวนการ มโนคติ และข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งจะทำให้นักเรียนเห็นประโยชน์และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริง
6. ปัญหาปริศนา (Puzzle Problem) เป็นปัญหาที่บางครั้งได้คำตอบจากการเดาสุ่มไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา บางครั้งต้องใช้เทคนิคเฉพาะ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความคิดสร้างสรรค์ มีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาและเป็นปัญหาที่มองได้หลายมุมมอง

โพลยา (Polya. 1985 : 123 - 128) ได้แบ่งปัญหาวางออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาให้ค้นพบ (Problem to Find) เป็นปัญหาให้ค้นพบสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจจะเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎี หรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจจะเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้ แบ่งเป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ และเงื่อนไข
2. ปัญหาให้พิสูจน์ (Problem to Prove) เป็นปัญหาที่ให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงเป็นเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหานี้ แบ่งเป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537 : 62 - 63) ได้กล่าวถึงประเภทของปัญหา ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. การแบ่งประเภทของปัญหา โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา ทำให้สามารถแบ่งปัญหาได้ 2 ประเภท คือ

- 1.1 ปัญหาให้ค้นพบ เป็นปัญหาที่ให้ค้นพบคำตอบ ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปปริมาณจำนวน หรือ ให้หาวิธีการ คำอธิบาย พร้อมให้เหตุผล
- 1.2 ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่า ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จ

2. การแบ่งประเภทของปัญหา โดยพิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหา และความซับซ้อนของปัญหาทำให้สามารถแบ่งปัญหาได้ 2 ประเภท คือ

- 2.1 ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา
- 2.2 ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามองประมวลความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

จากประเภทของปัญหาที่กล่าวมาดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่ามี 2 ประเภท คือ ปัญหาธรรมดาที่พบในหนังสือเรียน และปัญหาที่ซับซ้อน ต้องอาศัยทักษะ กระบวนการ มโนคติ และข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหา

2.3 องค์ประกอบในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ออสซูเบล (Ausubel, 1968:538) กล่าวว่า "ในการแก้ปัญหาโดยทั่วไปนั้นต้องใช้องค์ประกอบหลายอย่าง เช่น สถิติปัญญา และองค์ประกอบทางการคิด เช่น ความยืดหยุ่นทางการคิด การรวบรวมความคิด ความตั้งใจ"

ทบวงมหาวิทยาลัย (2524 : 141) กล่าวว่าไว้ สรุปได้ว่า นักเรียนควรได้รับการฝึกให้มีความรู้ความสามารถขั้นพื้นฐาน และมีเจตคติที่ดีในการแก้ปัญหา ซึ่งประกอบด้วย

1. มีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจ มีความคิดรวบยอดและทักษะที่เกี่ยวข้องกับปัญหา
2. มีความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความ และการขยายความ
3. มีความสามารถในการแปลงข้อความเป็นสัญลักษณ์หรือแผนภาพ
4. มีความสามารถในการวิเคราะห์ความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่มีอยู่และหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มีอยู่กับประสบการณ์เดิม
5. มีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน วิเคราะห์หารูปแบบ และหาข้อสรุป
6. มีความใฝ่ใจใคร่รู้ มีความกระตือรือร้น อยากรู้ อยากเห็น
7. มีศรัทธา มีกำลังใจ และมีความอดทนในการคิดแก้ปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537 : 81 - 82) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบของความสามารถในการแก้ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ปัจจัยสำคัญที่ส่งผลโดยตรงต่อความสามารถด้านนี้ คือ ทักษะการอ่านและการฟัง การทำความเข้าใจปัญหาต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับ ศัพท์ นิยาม มโนคติ และข้อเท็จจริงต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ซึ่งแสดงถึง ศักยภาพทางสมองของนักเรียนในการระลึกถึงและความสามารถนำมาเชื่อมโยงกับปัญหาที่กำลัง เผชิญอยู่ ปัจจัยอีกประการหนึ่งที่ช่วยให้การทำความเข้าใจปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ คือ การรู้จัก เลือกใช้กลวิธีมาช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การขีดเส้นใต้ข้อความสำคัญ การแบ่งวรรค ตอน การจดบันทึกเพื่อแยกแยะประเด็นสำคัญ การเขียนภาพ หรือแผนภูมิ การสร้างแบบจำลอง การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา และการเขียนปัญหาใหม่ด้วยคำพูดของตนเอง

2. ทักษะในการแก้โจทย์ปัญหา ทักษะเกิดขึ้นจากการฝึกฝนทำบ่อย จนเกิดความ ชำนาญ มีประสบการณ์ในการเลือกกลวิธีต่าง ๆ เพื่อนำไปใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา ผู้แก้ปัญหามี ทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาจะสามารถวางแผนเพื่อกำหนดกลวิธีในการแก้ปัญหาดังกล่าวได้อย่างรวดเร็ว และเหมาะสม

3. ความสามารถในการคิดคำนวณและความสามารถในการให้เหตุผล การคิดคำนวณ นับว่าเป็นองค์ประกอบสำคัญของการแก้ปัญห เพราะถึงแม้ว่าจะทำความเข้าใจได้อย่างแจ่มชัด วาง แผนการแก้ปัญหาก็ได้เหมาะสมแต่เมื่อลงมือแก้ปัญหาลแล้วคิดคำนวณไม่ถูกต้อง การแก้ปัญหานั้นก็ไม่ ประสบผลสำเร็จ โดยเฉพาะอย่างยิ่งทักษะพื้นฐานในการบวก ลบ คูณ และหาร

สำหรับปัญหาที่ต้องการคำอธิบายให้เหตุผล ต้องอาศัยพื้นฐานในการเขียนและการพูด มี ความเข้าใจในกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ความหมายของการพิสูจน์ และวิธีพิสูจน์แบบ ต่าง ๆ เท่าที่จำเป็นและเพียงพอในการนำไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา

4. แรงขับ เนื่องจากโจทย์ปัญหาเป็นสถานการณ์ที่แปลกใหม่ ไม่สามารถหาคำตอบ ได้ในทันทีทันใด ผู้แก้ปัญหาก็ต้องคิดวิเคราะห์อย่างเต็มที่เพื่อที่จะให้ได้คำตอบ ผู้แก้ปัญหาก็ต้องมี แรงขับที่จะสร้างพลังในการคิด ซึ่งแรงขับนี้ได้แก่ เจตคติ ความสนใจ แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ ความสำเร็จ ตลอดจนความซาบซึ้งในการแก้ปัญห ซึ่งปัจจัยเหล่านี้จะต้องใช้ระยะเวลานานในการปลูกฝังให้ เกิดขึ้น โดยผ่านกิจกรรมต่าง ๆ ในการเรียนการสอน

5. ความยืดหยุ่น ผู้แก้ปัญหาก็ที่ดีต้องมีความยืดหยุ่นในการคิด คือ ไม่ยึดติดในรูปแบบ ที่ตนเองคุ้นเคย แต่จะยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ ๆ อยู่เสมอ ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถใน การปรับกระบวนการการคิดแก้ปัญหโดยบูรณาการความเข้าใจ ทักษะและความสามารถในการ แก้ปัญหา ตลอดจนแรงขับที่มีอยู่เชื่อมโยงเข้ากับสถานการณ์ของปัญหาใหม่ สร้างความรู้ที่สามารถ ปรับใช้เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า องค์ประกอบในการแก้ปัญหาคือสิ่งที่ต้องสร้างให้เกิด ในตัวของผู้แก้ปัญห ประกอบด้วย สติปัญญาของผู้แก้ปัญห ทักษะพื้นฐานในการคิดคำนวณ

ทักษะในการแก้โจทย์ปัญหา แรงขับภายในตัวผู้เรียนและความยืดหยุ่นในการคิด ซึ่งเป็นปัจจัยที่จำเป็นที่จะทำให้แก้โจทย์ได้สำเร็จ

2.4 ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ครูลิก และเรส์ (Krulik and Reys. 1980) กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาวัดดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ในการแก้ปัญหานั้น จะต้องทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งต้องพิจารณาว่า อะไรที่เป็นตัวไม่ทราบค่า มีข้อมูลหรือเงื่อนไขอะไรบ้าง สิ่งโจทย์บอกนั้นมีเพียงพอในการแก้ปัญหหรือไม่ ในการพิจารณา อาจจะสร้างภาพประกอบความเข้าใจ แยกแยะส่วนต่าง ๆ ของสิ่งที่โจทย์บอก แล้วเขียนลงไปว่ามีอะไรบ้าง
2. วางแผนในการแก้ปัญหา จะต้องหาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่โจทย์บอก กับตัวที่ไม่ทราบค่า พิจารณาปัญหาย่อยทั้งหลาย เทียบเคียงโจทย์ปัญหาใหม่กับโจทย์ปัญหาเก่า
3. ดำเนินการตามแผน เมื่อวางแผนแล้วก็ดำเนินการตามแผนที่ได้วางไว้ ควรจะได้ตรวจสอบที่ละขั้นตอนว่า ถูกต้องหรือไม่ และไม่ควรดำเนินการข้ามขั้นตอน
4. ขั้นตรวจสอบ เมื่อทำเสร็จแล้ว จะต้องตรวจสอบอีกครั้งว่าใช้ข้อมูลหมดหรือยัง และได้ผลตามที่ต้องการหรือไม่

เบลล์ (Bell. 1978 : 312) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาวัด 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. นำเสนอปัญหาในรูปทั่วไป
2. เสนอปัญหาในรูปที่สามารถดำเนินการได้
3. ตั้งสมมติฐานและเลือกวิธีดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา
4. ตรวจสอบสมมติฐานและดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบ หรือชุดของคำตอบที่เป็นไปได้

5. วิเคราะห์และประเมินคำตอบ รวมถึงวิธีซึ่งนำไปสู่การค้นพบยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

โพลยา (Polya. 1985:87) ได้จัดขั้นตอนการแก้ปัญหาวัด 4 ประการคือ

1. ทำความเข้าใจในปัญหา สิ่งแรกที่ต้องทำความเข้าใจคือ สัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะต้องสรุปปัญหาในภาษาของตนเองได้ สามารถบอกได้ว่าโจทย์ถามหาอะไร อะไรเป็นสิ่งที่ให้หา อะไรคือเงื่อนไข และถ้าจำเป็นจะต้องใช้ข้อมูลต่าง ๆ เขาจะเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสมได้ นักเรียนจะต้องพิจารณาปัญหาย่างตั้งใจ ช้าแล้วช้าอีก จนกระทั่งสามารถสรุปออกมาได้

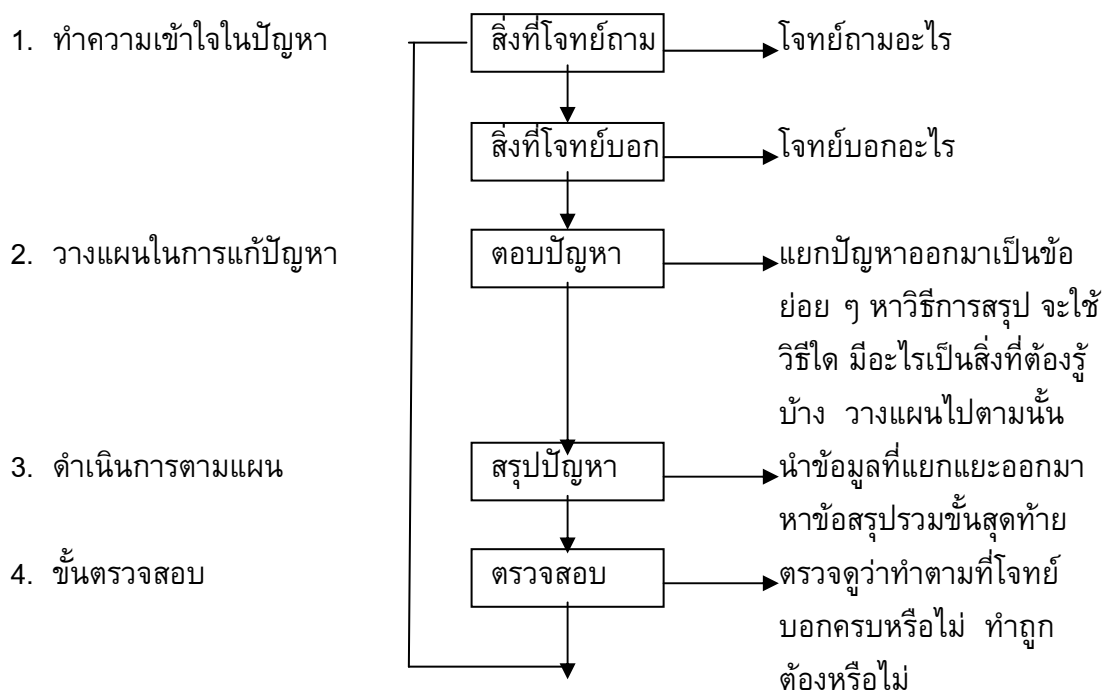
2. วางแผนในการแก้ปัญหา ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ในปัญหาให้ชัดเจนเสียก่อน สิ่งที่ต้องหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่ให้มาอย่างไร สิ่งสำคัญที่นักเรียนจะต้องทำในขั้นนี้คือ การนึกทบทวนความรู้ที่มี มีความรู้อะไรบ้าง ที่มีส่วนสัมพันธ์กับปัญหานั้น ๆ เทคนิคหนึ่งที่จะช่วยในการวางแผนแก้ปัญหา ได้แก่ การพยายามนึกถึงปัญหาที่เคยแก้มาก่อนซึ่งมีลักษณะใกล้เคียงกัน ในการวางแผนนั้นควรจะแบ่งเป็นขั้นๆ โดยแบ่งออกเป็นขั้นตอน

ใหญ่ๆ และในขั้นตอนใหญ่แต่ละขั้นตอนก็จะแบ่งออกเป็นขั้นเล็ก ๆ อีกมากมาย นอกจากนั้นในขั้นนี้ นักเรียนต้องมองเห็นว่า ถ้าเขาต้องการสิ่งหนึ่งเขาจะต้องใช้เหตุผลหรือข้ออ้างอะไร เพื่อที่จะให้ได้สิ่งนั้นมาตามต้องการ

3. ดำเนินการตามแผน ขั้นนี้เป็นขั้นที่นักเรียนลงมือทำการคิดคำนวณตามแผนการที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อที่จะให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่นักเรียนจะต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคำนวณ การรู้จักเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสมมาใช้

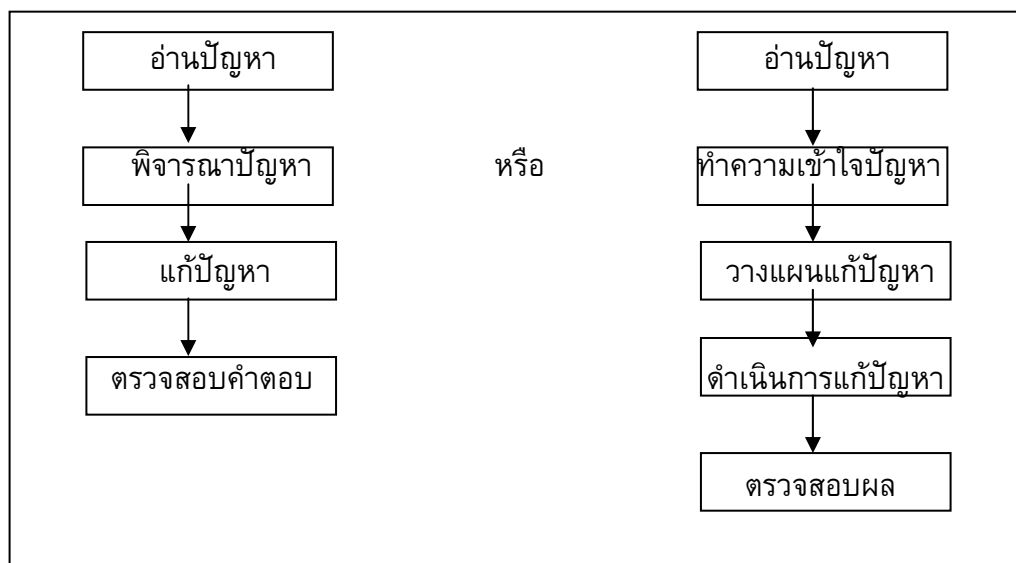
4. ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตรวจวิธีการและคำตอบ ขั้นนี้เป็นขั้นการตรวจสอบเพื่อความแน่ใจว่าถูกต้องสมบูรณ์ โดยการพิจารณาและสำรวจดูผล ตลอดจนขบวนการในการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องรวบรวมความรู้ของเขา และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกัน เพื่อทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น

ขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา แสดงในรูปแผนภูมิได้ดังนี้



ภาพประกอบ 1 แผนภูมิแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา (Polya. 1985 : 87)

วิลสัน เฟอร์นันเดซ และ ฮาดาเวย์ (Wilson, Fernandez and Hadaway. 1993 : 60 - 62) กล่าวถึง กระบวนการแก้ปัญหาโดยทั่วไปว่า มักนำเสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาเป็นขั้น ๆ ในลักษณะที่เป็นกรอบการแก้ปัญหที่เป็นแนวตรงดังนี้



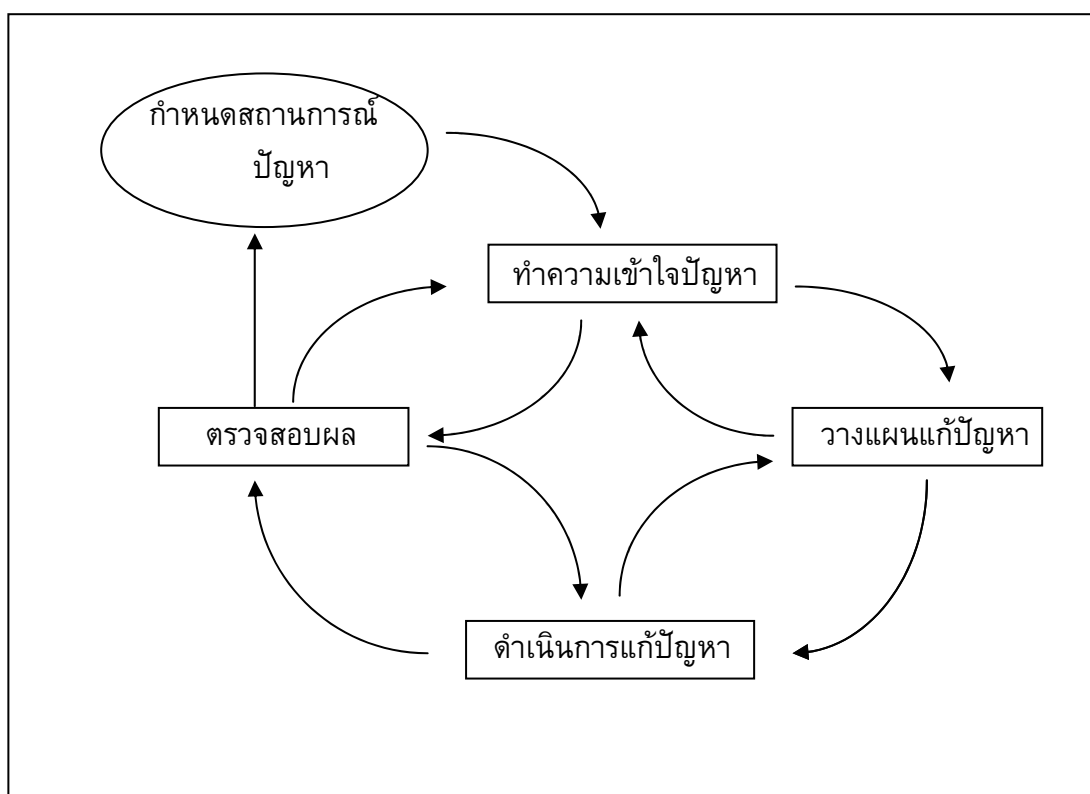
ภาพประกอบ 2 แสดงกระบวนการแก้ปัญหที่เป็นแนวตรง

(Wilson, Fernandez and Hadaway. 1993 : 61)

รูปแบบดังกล่าวเป็นเสมือนชุดของขั้นตอนการแก้ปัญห ซึ่งต้องดำเนินการตามขั้นตอนเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง จะเห็นว่าการดำเนินการในลักษณะแนวตรงเช่นนี้ทำให้ขาดการสืบสวนในการแก้ปัญห ขาดการช่วยเหลือตนเอง ขาดการวางระบบความคิดและ การวัดผลตนเอง (Self-assessment) ซึ่งรูปแบบเช่นนี้ วิลสัน เฟร์นันเดซ และฮาดาเวย์ (Wilson, Fernandez and Hadaway. 1993 : 60 - 62) มองว่ามีข้อบกพร่องดังนี้

1. ทำให้เข้าใจว่าการแก้ปัญหเป็นกระบวนการในแนวตรงเสมอ
2. การแก้ปัญหเป็นดังเช่นชุดของขั้นตอน
3. ทำให้เข้าใจว่าการแก้ปัญหเป็นกระบวนการที่ต้องจำต้องฝึกและต้องกระทำซ้ำ ๆ
4. เป็นการเน้นการได้มาเพียงคำตอบ

จากข้อบกพร่องข้างต้น วิลสัน เฟร์นันเดซ และ ฮาดาเวย์ (Wilson, Fernandez and Hadaway. 1993 : 60 - 62) ได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญห 4 ขั้นตอนของโพลยา โดยเสนอเป็นกรอบแนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหที่แสดงความเป็นพลวัต (Dynamic) และเป็นวงจรของขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญห ดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบ 3 แสดงกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตร
(Wilson, Fernandez and Hadaway. 1993 : 62)

ลูกศรเป็นการแสดงการพิจารณาตัดสินใจที่เป็นการเคลื่อนการทำงาน จากขั้นตอนที่หนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรืออาจจะพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนเดิม หากมีปัญหหรือข้อสงสัยจะเห็นว่ากระบวนการไม่จำเป็นต้องเป็นแนวตรงดังรูปแบบเดิม เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรก คือ ทำความเข้าใจปัญหาแล้วเคลื่อนไปสู่ขั้นตอนการวางแผนระหว่างการทำนั้น นักเรียนอาจค้นพบสิ่งที่ทำให้เข้าใจปัญหาได้ดียิ่งขึ้น หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้แต่ไม่สามารถดำเนินการได้ นักเรียนอาจจะกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ ซึ่งการดำเนินการดังกล่าวเป็นการดำเนินการที่เป็นไปได้ในการแก้ปัญหาโดยไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นใหม่ในขั้นทำความเข้าใจปัญหาเสมอไป

สำหรับงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้กำหนดแนวทางในการพัฒนาความสามารถ ในการแก้ปัญหาที่เป็นการผสมผสานแนวทางต่าง ๆ โดยอาศัยกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยาที่ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตรตามแนวคิดของวิลสัน เฟอร์นันเดซ และฮาตาเวย์ ซึ่งมีวงจรของขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ดังภาพประกอบ 3 ทั้งนี้เพราะว่าการแก้ปัญหาสำหรับงานวิจัยนี้ได้รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหาทั้งหมด ไม่ใช่เน้นการได้มาเพียงคำตอบเท่านั้น

2.5 ยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ฮาร์ทฟิลด์และคนอื่นๆ (Hartfield and others. 1993 : 55 - 60) ได้เสนอว่าในการแก้ปัญหานักเรียนต้องรู้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหามากมายอันได้แก่

1. การคาดคะเนและตรวจสอบ
2. การค้นหารูปแบบ
3. การพิจารณาว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่
4. การเขียนภาพประกอบ เขียนกราฟ และสร้างตาราง
5. การตัดข้อมูลที่ไมเกี่ยวข้องออก
6. การพัฒนาสูตรและเขียนสมการ
7. การสร้างแบบจำลองของปัญหา
8. การดำเนินการแบบย้อนกลับ
9. การเทียบเคียงกับปัญหาอื่น
10. การเขียนผังขั้นตอนการดำเนินงาน
11. การทำให้เป็นปัญหาง่ายๆ

ทบทวมหาวิทยาลัย (2524 : 44) ได้เสนอยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. วิธีการคาดคะเนหรือเดาคำตอบไว้ล่วงหน้า
2. การทำให้เป็นอย่างง่าย
 - 2.1 ทำโจทย์ให้เป็นกรณีที่ย่าง ๆ เท่าที่จะทำได้แล้วลองหารูปแบบและความสัมพันธ์ เพื่อขยายไปเป็นโจทย์ที่ซับซ้อนขึ้น
 - 2.2 แยกแยะโจทย์เดิม วิเคราะห์ปัญหาย่อย ๆ แล้วรวบรวมผลเข้าสู่ปัญหาเดิม
3. การทดลอง เช่น การสร้างรูป การวัด การคำนวณ ฯลฯ
4. การสร้างภาพ ช่วยทำให้ปัญหาเป็นรูปธรรมที่เห็นได้ชัดเจน ช่วยในการหาคำตอบได้
5. การทำตารางเก็บข้อมูลจากโจทย์ปัญหา และจัดทำเป็นตารางให้เห็นความเหมือนความแตกต่าง นำไปสู่การสรุปการแก้ปัญหานั้นได้
6. การเขียนกราฟ ช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล

ดังนั้นการสอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนต้องช่วยให้นักเรียนสามารถทำโจทย์ปัญหาได้เอง นำโจทย์ปัญหาต่าง ๆ มาให้นักเรียนฝึกหัดทำโดยพยายามให้เด็กมีความเชื่อมั่นในการทำงาน สามารถแยกแยะทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาเป็นตอน ๆ และหาคำตอบได้ด้วยตนเอง และแล้วเด็กย่อมจะมีทัศนคติที่ดีต่อการคิดคำนวณโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น

ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ (2542 : 30 - 38) ได้สรุปยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1. กำหนดคุณลักษณะของปัญหา (Characterize the Problem) อะไรคือสิ่งที่กำหนดอะไร คือสิ่งที่ต้องการ อะไรขาดหายไป ท่านกำลังค้นหาอะไรอยู่ ข้อมูลที่จำเป็นกำหนดมาให้หรือไม่ จดดูตัวอย่างหลาย ๆ ข้อ มีกรณีพิเศษใดหรือไม่ที่กำหนดขอบข่ายของคำตอบที่เป็นไปได้ ท่าน

สามารถทำปัญหานั้นให้ง่ายลง โดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตรหรือทำข้อความ "โดยไม่สูญเสียความเป็นกรณีทั่วไป" เพื่อย่อเจตน์ทั้งข้อให้เป็นกรณีเฉพาะได้หรือไม่

2. ท่านเคยเห็นปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ (Have you seen this before?) หรือท่านเคยเห็นปัญหานี้ในรูปแบบที่แตกต่างไปเพียงเล็กน้อยไหม ถ้าเคย ท่านสามารถถ่ายทอดไปสู่ปัญหานี้แล้วใช้วิธีการบางตอนที่เคยแก้ปัญหามาใช้ได้หรือไม่ จงตั้งปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่มีตัวแปรน้อยกว่าแล้วแก้ดูโดย "การคล้าย" เงื่อนไขในข้อหนึ่ง หรือมากกว่านั้น ท่านสามารถเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับปัญหาเดิมบ้างหรือไม่

3. ค้นหารูปแบบ (Look for a Pattern) โดยการพิจารณาลักษณะโดยภาพรวมของอนุกรม $1 + 2 + \dots + 100$ หนูน้อย Frederick Gauss ก็สร้างรูปแบบนี้ได้ : $1 + 100 = 2 + 99 = \dots = 101$ ความเข้าใจยังรู้นี้ได้นำไปสู่การสังเกตทันทีว่า ตัวเลขอีก 50 คู่ เช่นนี้ก็สามารถสร้างขึ้นมาได้ โจทย์การหาผลบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 ก็กลายเป็นงานหาผลคูณอย่างง่าย, $50 \times 101 = 5,050$

4. การทำให้ง่ายลง (Simplification) บางครั้งความสัมพันธ์หรือรูปแบบง่าย ๆ อาจถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบหรือนิพจน์ที่ "ยุ่งเหยิง" จงพยายามแทนค่ารูปที่ยุ่งเหยิงด้วยสัญลักษณ์ง่าย ๆ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ที่อยู่เบื้องหลัง การจัดพจน์ในนิพจน์ที่ซับซ้อนเสียใหม่อาจจะนำไปสู่ผลสำเร็จที่ปลายทางเดียวกัน

5. การลดลง (Reduction) ปัญหาของท่านสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะแก้ไขได้ง่ายขึ้นหรือไม่

6. การทำย้อนกลับ (Work Backwards) เมื่อท่านพยายามจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ท่านทราบอยู่แล้วว่าเป็นจริง อาจจะง่ายขึ้นถ้าเริ่มต้นทำจากข้อสรุปขึ้นไปหาเหตุผล

7. จัดทำรายการ (Make a List) ถ้าท่านใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ มันอาจจะเป็นไปได้ที่จะจัดทำรายการทั้งหมดของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทุกขั้นตอนของกระบวนการบางอย่าง ถ้าท่านสนใจในผลลัพธ์ใดโดยเฉพาะของกระบวนการนั้น มันก็ควรจะรวบรวมอยู่ในรายการทั้งหมดนั้น

8. สถานการณ์จำลอง (Simulation and Modeling) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาจสร้างได้โดยการเลียนแบบกระบวนการที่ซับซ้อนในคณิตศาสตร์ หรือในโลกแห่งความเป็นจริงนั้น ถ้าผลที่ได้รับโดยใช้สถานการณ์จำลองถูกต้องแม่นยำแล้ว สถานการณ์จำลองนั้นคือความสำเร็จ

9. ตรรกศาสตร์ทางการ (Formal Logic) อุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพในคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่นเดียวกับเทคนิคที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยอ้อม (Indirect Prove) ซึ่งเป็นที่รู้กันว่าเป็นการพิสูจน์แบบ Contrapositive ด้วย

10. คำตอบของท่านมีความหมายหรือไม่ ตรวจสอบคำตอบของท่านโดยใช้สามัญสำนึกและการให้เหตุผลแบบมีทางเลือก

11. ข้อสุดท้าย เมื่อใดก็ตามที่ท่านพยายามจะแก้ปัญหา จงค้นหาวิธีหลาย ๆ วิธี เพื่อเป็นตัวแทนลักษณะของปัญหา จงสร้างรูป และระบุข้อประกอบ จัดทำรายการคุณลักษณะ เขียนรายการแสดงความสัมพันธ์ เป็นต้น ยิ่งท่านมีวิธีแทนปัญหาได้มากเท่าใด ก็ยังมีแนวโน้มที่ท่านจะค้นพบความสัมพันธ์แอบแฝงอยู่ ซึ่งจะเป็นกุญแจไขไปสู่คำตอบได้มากเท่านั้น

นอกจากยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ทั่ว ๆ ไปดังกล่าวแล้ว ครูคณิตศาสตร์อาจจะสอนทักษะการแก้ปัญหาแก่นักเรียน เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้รวดเร็วขึ้นแทนที่จะใช้แต่ความคิดฉับพลันทันที

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นมีหลายวิธี ดังนั้นการเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสมกับปัญหา ย่อมส่งผลในการแก้ปัญหาได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น

2.6 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

บาร์เน็ต (Barnett. 1975) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหามีการพัฒนาได้โดยการเรียนการสอนเกี่ยวกับภาษา (Linguistic) การคำนวณ (Computation) การดำเนินการ (Operation) และกระบวนการปฏิบัติ (Procedural) โดยตรง

กาเย่ (Gagne . 1970 : 186 – 187) กล่าวถึงสาระสำคัญของความสามารถในการแก้ปัญหาวางคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1. ทักษะทางปัญญา (Intellectual Skills) หมายถึง ความสามารถในการนำกฎ สูตร ความคิดรวบยอด และ/หรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ทักษะทางปัญญาคือความรู้ที่ผู้เรียนเคยเรียนมาก่อน

2. ลักษณะของปัญหา(Problem Schemata) หมายถึง ข้อมูลในสมองที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาซึ่งทำให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์ต้องการกับสิ่งที่กำหนดให้ได้ ข้อมูลเหล่านี้ได้แก่ คำศัพท์ และวิธีการแก้ปัญหาลักษณะต่าง ๆ

3. การวางแผนหาคำตอบ (Planning Strategies) หมายถึง ความสามารถในการใช้ทักษะทางปัญญาและลักษณะของปัญหาในการวางแผนแก้ปัญหา การวางแผนหาคำตอบเป็นกลวิธีการคิด (Cognitive Strategies) อย่างหนึ่ง

4. การตรวจสอบคำตอบ (Validating the Answer) หมายถึง ความสามารถในการตรวจสอบย้อนเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการแก้ปัญหาลดลดกระบวนการ

ในการสอนคณิตศาสตร์นั้น เมื่อผู้เรียนฝึกทำแบบฝึกหัด ถ้าเป็นเรื่องง่ายและผู้เรียนสามารถทำได้ ก็จะฝึกไปจนเกิดความชำนาญ (Skill) และใช้ข้อเท็จจริงหรือหลักการ และความคิดรวบยอดที่ไม่ซับซ้อน อาจจะใช้เพียงข้อเท็จจริงหรือหลักการหรือความคิดรวบยอดเพียงฝึกซ้ำ ๆ จนเกิดทักษะ อย่างไรก็ตามในแบบฝึกหัดนั้นเมื่อใช้หลาย ๆ ข้อเท็จจริง หรือ หลายหลักการ หรือ หลายความคิดรวบยอด นักเรียนก็ไม่สามารถจะทำได้จึงพบ “ปัญหา” ว่าจะทำอย่างไร

เมื่อผู้เรียนพบ “ปัญหา” ก็จะเกิดการแก้ปัญหา ก็จะต้องถามต่อไปอีกว่าจะแก้ปัญหายังไง การแก้ปัญหานั้น มี “กระบวนการแก้ปัญหา” เมื่อผู้เรียนสามารถดำเนินการตามกระบวนการแก้ปัญหาก็จะแก้ปัญหานั้นได้ เมื่อได้ฝึกการแก้ปัญหาย่อย ๆ ก็จะเกิดทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving Skill)

สิริพร ทิพย์คง (2536 : 157-159) เสนอแนะกิจกรรมเสริมสร้างทักษะการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. เลือกปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ซึ่งเป็นโจทย์ที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านี้
2. ทดสอบความรู้พื้นฐานและทบทวนทักษะที่ขาดไปก่อนลงมือสอนการแก้ปัญหา
3. ให้อิสระในการคิดแก่นักเรียน และกระตุ้นให้นักเรียนคิดว่าจะสามารถใช้ความคิดรวบยอด ทักษะและหลักการใดในการแก้ปัญหาโจทย์นั้น ๆ
4. สอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยให้มีแบบฝึกหัดหลายระดับ ทั้งยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้ นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเป็นการเสริมกำลังใจให้กับนักเรียน
5. ทดสอบว่านักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหานั้น ๆ โดยการถามถึงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการ
6. ฝึกให้นักเรียนรู้จักหาคำตอบโดยการประมาณก่อนคิดคำนวณ
7. แนะนำให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาโดยการวาดรูปหรือแผนภาพ
8. ช่วยนักเรียนในการหาข้อมูลจากการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และเทียบเคียงกับโจทย์ที่นักเรียนเคยพบมาก่อน
9. สนับสนุนให้นักเรียนคิดวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีของตนเอง แล้วอภิปรายหาวิธีการที่ถูกต้องเหมาะสม

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น เป็นความสามารถในการทำความเข้าใจถึงลักษณะของปัญหา รู้จักใช้ทักษะทางปัญญามาแก้ปัญหา โดยการวางแผนหาคำตอบและเมื่อได้คำตอบแล้ว จึงทำการตรวจสอบคำตอบ ความสามารถดังกล่าวสามารถพัฒนาได้โดยการจัดการเรียนการสอนที่เกี่ยวกับภาษา การคิดคำนวณ การดำเนินการและกระบวนการปฏิบัติโดยตรง เพื่อเสริมสร้างให้ผู้เรียนเกิดทักษะการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด

2.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาวทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

สโตนวอเตอร์ (Stonewater.1956 : 2602 –2603–A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหากับความถนัดทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาที่เรียนเทอมแรกของคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมิชิแกน จำนวน 27 คน เมื่อวิเคราะห์ผลโดยการหาค่าสหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหากับความถนัดทางคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

จอห์น (John. 1966 : 994 – 995 – A) ได้ศึกษาผลการเรียนของนักเรียนวิทยาศาสตร์เกรด 8 จากการใช้วิธีการสอนสองวิธีโดยแบ่งเป็นสองกลุ่ม กลุ่มควบคุมได้รับการสอนแบบบรรยายและ

แบบสาริตให้มีส่วนร่วมในการทดลอง และทำการบ้านตามที่ครูกำหนดให้ กลุ่มทดลองให้เรียนโดยวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเอง มีแต่เพียงเอกสารแนะแนวทางนำกิจกรรมที่นักเรียนจะเลือกนำไปปฏิบัติ อันก่อให้เกิดความรู้ ข้อเท็จจริง และมีโมโนภาพด้วยตนเอง ผลการวิจัยพบว่ากลุ่มทดลองคิดหาเหตุผลแก้ปัญหาได้ดีกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

มาฮัน (Mahan. 1970 : 309 – 316) ได้ศึกษาผลการสอนของครูสองแบบ คือการสอนแบบบรรยายประกอบอภิปราย และวิธีสอนแบบแก้ปัญหา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 จำนวน 4 ห้องเรียน เป็นชาย 48 คน หญิง 21 คน ใช้เกณฑ์ในการคัดเลือก คือ ระดับสติปัญญา คุณวุฒิของผู้สอน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์อยู่ในระดับใกล้เคียงกัน ใช้เวลาทดลองหนึ่งปีทำการทดลองความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า เด็กชายที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหามีความสามารถในการแก้ปัญหาและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่าเด็กชายที่ได้รับการสอนแบบบรรยายประกอบการอภิปราย ส่วนในเด็กหญิงไม่พบความแตกต่าง

เว็บ (Webb. 1975 : 2689 – A) ได้ศึกษาเรื่องการสำรวจกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถทางความรู้ ความจำ ซึ่งได้แก่ ภาษา แบบการคิด มิติสัมพันธ์ เหตุผลและการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง

ฮอลล์ (Hall. 1977 : 6324 – A) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลของการสอนการวิเคราะห์ และความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มควบคุม อีกกลุ่มเป็นกลุ่มทดลอง โดยกลุ่มทดลองได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์ 8 บทเรียน บทเรียนละครึ่งชั่วโมง โดยทั้งสองกลุ่มได้รับการทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบวัดความสามารถในการวิเคราะห์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์สูงมีความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ

คลาร์กสัน (Clarkson. 1979 : 4101–A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะการแปลความหมายโจทย์คณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้ปัญหากับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ทำการทดสอบความสามารถในการแปลโจทย์ปัญหาสามแบบ คือ สัญลักษณ์ที่เป็นภาษา สัญลักษณ์ที่เป็นสัญลักษณ์ และสัญลักษณ์ที่เป็นรูปภาพ ผลการวิจัยพบว่า การแปลความหมายโจทย์คณิตศาสตร์ทั้งสามแบบมีความสัมพันธ์กับการแก้ปัญหา และคนที่มีความสามารถในการแปลความหมายต่างกันจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และทักษะการแปลความหมายโจทย์เป็นองค์ประกอบที่สำคัญอย่างหนึ่งในการแก้ปัญหา

ฮอปคินส์ (Hopkins. 1985 : 2790) ได้ศึกษารูปแบบของห้องเรียนที่ส่งผลต่อทักษะการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบของห้องเรียนที่ส่งผลต่อทักษะการคิดแก้ปัญหาของนักเรียนจะต้องเป็นห้องเรียนที่มีข่าวสารน่าสนใจ นักเรียนได้อ่านและวิเคราะห์ข่าวอยู่เสมอ มีภาพอุปกรณ์หรือสัญลักษณ์ที่เคยกล่าวจากข่าวสารนั้นๆ และนักเรียนมีโอกาสดูความคิดเห็นของตนเองอย่างอิสระ เมื่อได้พบเห็นสิ่งเหล่านั้น จึงส่งผลต่อทักษะการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน

เรโนลด์ส (Reynolds. 1993 : 1274 – A) ได้ศึกษาถึงจินตนาการของนักเรียนเกรด 4 และ 5 กับกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า จินตนาการในการทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นหัวใจของการทำความเข้าใจและการแก้ปัญหา

เทย์เลอร์ (Taylor. 1994 : 633) ได้ศึกษาถึงความเข้าใจในโมดิตและการใช้ยุทธวิธีการสังเคราะห์ความคิด (Metacognition Strategies) ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้การเรียนรู้ที่เป็นความช่วยเหลือกันเชิงสังคม (Socially Assisted Learning) กับนักเรียนเกรด 4 จำนวน 36 คน โดยกิจกรรมของกลุ่มทดลองที่หนึ่งให้เรียนรู้ที่เป็นการช่วยเหลือกันเชิงสังคม กลุ่มทดลองสองให้เป็นการเรียนแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD ส่วนกลุ่มที่สามเป็นกลุ่มควบคุม ได้รับการสอนตามปกติในแต่ละกลุ่มย่อยของทั้งสามกลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนที่มีความสามารถละกันกลุ่มละ 4 คน ผลการทดลองปรากฏว่า คะแนนสอบของกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่ม สูงกว่ากลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองที่หนึ่งได้คะแนนการสอบวัดการประยุกต์ใช้ความรู้และการยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาสูงกว่ากลุ่มทดลองที่สอง นอกจากนี้ยังพบว่ากลุ่มที่เป็นการช่วยเหลือกันเชิงสังคมมีการวางแผนการแก้ปัญหา และแสดงการได้คำตอบของปัญหาได้ชัดเจนกว่ากลุ่มที่ใช้การเรียนแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD

งานวิจัยในประเทศ

สิริมาศ สิทธิหล่อ (2534 : 94 – 97) ได้ศึกษาการพัฒนาวิธีการวัดกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีการคิดออกเสียงในเรื่องสมการ อัตราส่วนและร้อยละ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า วิธีการวัดกระบวนการแก้ปัญหาโดยวิธีการคิดออกเสียงมีความตรงเชิงเกณฑ์ และพบว่านักเรียนกลุ่มเก่งจะแสดงพฤติกรรมการแก้ปัญหาเกือบทุกขั้นตอน ในขณะที่กลุ่มปานกลางและกลุ่มอ่อนแสดงพฤติกรรมไม่ครบขั้นตอน และกลุ่มเก่งแสดงพฤติกรรมคิดออกเสียงที่ให้ข้อมูลมากกว่า

สุพิศา แก้วสุวรรณ (2535 : 77 – 79) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบกระบวนการคิดแก้ปัญหา โจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนช่วงอุตสาหกรรมระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน เรื่องเศษส่วนและทศนิยม อัตราส่วนและสัดส่วน ร้อยละ ตรีโกณมิติ และสมการ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน มีกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยที่นักเรียนกลุ่มเก่งมีคะแนนกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อนทุกขั้นตอน สำหรับนักเรียนกลุ่มปานกลางมีคะแนนกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์

สูงกว่ากลุ่มอ่อนในขั้นตอนที่ 2 คือ ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนที่ 3 คือ ขั้นตอนการตามแผน และขั้นตอนที่ 4 คือ ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ สำหรับขั้นตอนที่ 1 คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มอ่อนมีคะแนนกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มปานกลาง

สุมาลี วงศ์ยะรา (2536 : 60 – 63) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยใช้ภาพกับไม่ใช้ภาพ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพ ซึ่งจะมีการเขียนแผนภาพในขณะที่แก้โจทย์ปัญหา เพื่อช่วยให้เข้าใจโจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยไม่ใช้ภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพมีความสามารถในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา การหาคำตอบของโจทย์ปัญหา และแสดงวิธีทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกว่านักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาโดยไม่ใช้ภาพ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คนธรรส รสหวาน (2539 : 45 – 48) ได้ศึกษาการพัฒนารูปแบบการสอนแบบกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์ปัญหาการบวก ลบ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนโครงการนาร่องศูนย์พัฒนาอัจฉริยะภาพเด็กและเยาวชน ผลการวิจัยพบว่า รูปแบบการสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากคะแนนการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน และคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์สูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ 80 / 80

วิโชติ พงษ์ศิริ (2540 : 68 – 69) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบคอนสตรัคติวิซึมด้วยวิธีสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหา โดยใช้กิจกรรมคอนสตรัคติวิซึม มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วิมล พงษ์पालิต (2541 : 89) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง สมการและอสมการที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

สุนันท์ จิมวัย (2543 : 60 – 62) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาวางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและวงกลม ที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการมีค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และพบว่านักเรียนที่ได้รับการ

สอนแบบปฏิบัติการมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ .05

ปฐมพร บุญลี (2545 : 68) ได้ศึกษาการสร้างแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะสูงกว่าก่อนการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.01 และพบว่าประสิทธิภาพของชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรโดยภาพรวมมีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80 / 80

จากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งในประเทศและต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การสอนแบบแก้ปัญหาในแต่ละรูปแบบทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ทักษะกระบวนการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีการเรียนแบบปกติ ซึ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้สอนจะต้องรู้จักวิธีในการส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้เกิดขึ้นกับผู้เรียน อันจะส่งผลให้การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองหรือไม่ อย่างไร โดยการใช้การเรียนแบบร่วมมือ ซึ่งในประเทศไทยยังไม่มีผู้ใดทำการวิจัยไว้ ในหัวข้อ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง ฟังก์ชัน ชั้น ปวช.2 ฉบับภาษาอังกฤษ โดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการศึกษาค้นคว้าตามลำดับ ดังนี้

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
4. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
5. แบบแผนการทดลอง
6. วิธีดำเนินการทดลอง
7. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

1. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 8 ห้องเรียน รวม 323 คน

1.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่มจากการจับฉลากมา 1 ห้องเรียนจำนวน 40 คน

ดำเนินการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการเรียนแบบร่วมมือ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันตามอัตราส่วนของความสามารถ สูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 1 : 2 : 1 โดยพิจารณาจากคะแนนสอบของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์

ระดับความสามารถสูง	คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ขึ้นไป
ระดับความสามารถปานกลาง	คือนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ถึง 75
ระดับความสามารถต่ำ	คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ลงมา

2. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษโดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรมซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

1. Domain and Range of Relations	}	4 คาบ
2. Function Notation		
3. Inverse Functions		2 คาบ
4. Algebra of Functions		3 คาบ
5. Composite Functions		3 คาบ

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาในการทดลอง 14 คาบ คาบเรียนละ 50 นาที โดยทำการทดสอบก่อนเรียน 1 คาบ ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน 12 คาบ และทำการทดสอบหลังเรียน 1 คาบ

4. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าประกอบด้วย

1. แผนการสอนการเรียนรู้แบบร่วมมือเรื่องฟังก์ชัน
2. ใบความรู้และใบงาน
3. แบบทดสอบย่อย
4. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

4.2 การสร้างและการหาคุณภาพเครื่องมือ

ผู้วิจัยสร้างและหาคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แยกเป็นรายข้อ ดังนี้

4.2.1 แผนการสอนการเรียนรู้แบบร่วมมือ เรื่อง ฟังก์ชัน ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษโดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม

2. ศึกษาวิธีการสร้างแผนการสอนจำนวน 4 ชุด จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้แบบร่วมมือ

3. จัดทำแผนการสอนจำนวน 4 ชุดให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชัน

4. นำแผนการสอนจำนวน 4 ชุด ที่สร้างเสร็จไปให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์

การสอนวิชาคณิตศาสตร์ เป็นเวลาไม่น้อยกว่า 3 ปี จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสม โดยผู้วิจัยเสนอเกณฑ์ไว้ดังนี้

4.1 ความชัดเจนและความถูกต้องของจุดประสงค์การเรียนรู้

4.2 ความสอดคล้องของเนื้อหากิจกรรมและสื่อการสอน

4.3 ความสอดคล้องในเรื่องของจุดประสงค์การเรียนรู้กับการวัดและประเมินผล

5. นำแผนการสอนจำนวน 4 ชุด ที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองกับนักเรียน ชั้น ปวช. 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างในครั้งนี้จำนวน 10 คน เพื่อหาข้อบกพร่องเกี่ยวกับสื่อการเรียนการสอน เวลาและปริมาณเนื้อหาที่นำมาจัดกิจกรรม เพื่อเป็นแผนการสอนที่สมบูรณ์แล้วสามารถนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

4.2.2 ใบความรู้และใบงาน ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษโดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม

2. สร้างใบความรู้และใบงานจำนวน 4 ชุดให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ตั้งไว้ และตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya)

3. นำใบความรู้และใบงานจำนวน 4 ชุด ที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ ด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา

4. นำใบความรู้และใบงานจำนวน 4 ชุดที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียน ชั้น ปวช. 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานครที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างในครั้งนี้จำนวน 10 คน เพื่อหาข้อบกพร่องเกี่ยวกับภาษา และกำหนดเวลาที่เหมาะสม แล้วนำมาปรับปรุงอีกครั้งก่อนนำไปใช้ทดลองจริง

4.2.3 แบบทดสอบย่อย เป็นแบบทดสอบที่ใช้หลังจากสอนจบแต่ละเนื้อหา และจำนวนคาบที่กำหนดไว้ ซึ่งเป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือกจำนวน 4 ชุด ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษ โดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลง และแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม

2. ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎี และวิธีสร้างแบบทดสอบย่อย

3. สร้างตารางแบบทดสอบย่อยที่แสดงถึง หัวข้อที่สอน จำนวนคาบที่สอนและจำนวนข้อสอบที่ต้องการจะวัด

ตาราง 1 การสร้างแบบทดสอบย่อยที่แสดงถึง หัวข้อที่สอน จำนวนคาบที่สอนและจำนวนข้อสอบที่ต้องการจะวัด

ชุด	หัวข้อ	จำนวนคาบที่สอน	จำนวนข้อสอบ
1	Domain and Range of Relations Function Notation	4	10
2	Inverse Functions	2	5
3	Algebra of Functions	3	10
4	Composite Functions	3	5
รวม		12	30

4. นำตารางในข้อ 3 มาพิจารณาสร้างแบบทดสอบย่อย เรื่องฟังก์ชัน ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก โดยสร้างขึ้นตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ดังนี้คือ

4.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

4.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

4.3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา

4.4 ขั้นตรวจสอบคำตอบ

5. นำแบบทดสอบย่อยทั้ง 4 ชุด ที่สร้างขึ้นไปให้กับผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความสอดคล้องของเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และความครอบคลุมของคำถาม แล้วนำเสนอต่อท่านอาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

6. นำแบบทดสอบย่อยทั้ง 4 ชุด ที่ผู้เชี่ยวชาญตรวจและปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองกับนักเรียนชั้น ปวช.2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในครั้งนี้

4.2.4 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษ โดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรม
2. ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎีและวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
3. สร้างตารางวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถที่ต้องการวัดและจำนวนข้อสอบที่ใช้วัดการแก้ปัญหาในแต่ละความสามารถ

ตาราง 2 วิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถที่ต้องการวัดและจำนวนข้อสอบที่ใช้วัดการแก้ปัญหาในแต่ละความสามารถ

พฤติกรรมที่วัด	จำนวนข้อสอบที่ใช้จริง	จำนวนข้อสอบที่ออก
ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	3	5
ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา	10	20
ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา	9	20
ขั้นตรวจสอบคำตอบ	3	5
รวม	25	50

4. สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ โดยสร้างขึ้นตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ดังนี้คือ

- 4.1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
- 4.2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา
- 4.3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา
- 4.4 ขั้นตรวจสอบคำตอบ

5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความสอดคล้องของจุดประสงค์การเรียนรู้และตรวจสอบความเที่ยงตรงตามเนื้อหาของข้อสอบแต่ละข้อ โดยใช้เกณฑ์ IOC (พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2531 : 124)

6. นำแบบทดสอบที่แก้ไขปรับปรุงแล้วไปทดสอบกับนักเรียนชั้น ปวช. 3 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ที่ได้เรียนเนื้อหานี้ไปแล้ว จำนวน 100 คน แล้วตรวจให้คะแนนแบบทดสอบที่นักเรียนทำ ให้ 1 คะแนนสำหรับข้อที่ตอบถูก และให้ 0 คะแนน สำหรับข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบเกิน 1 คำตอบ แล้วนำมาวิเคราะห์เป็นรายข้อ เพื่อหาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) โดยใช้เทคนิค 27% ของจุง เตห์ ฟาน

7. เลือกแบบทดสอบเฉพาะข้อที่มีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.29 – 0.79 และมีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.22 – 0.70 โดยคัดเลือกข้อสอบไว้จำนวน 25 ข้อ

8. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยนำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้แล้ว 25 ข้อ ไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้น ปวช. 3 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ที่ได้เรียนเนื้อหานี้ไปแล้วและไม่ใช้กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 100 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตร KR-20 (Kuder Richardson-20) (พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2531 : 130) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.79

5. แบบแผนการทดลอง

ผู้วิจัยใช้แบบแผนการทดลองแบบ One-Group Pretest-Posttest Design (ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ. 2538 : 248 – 250) ดังตารางแบบแผนการทดลองดังนี้

ตาราง 3 แบบแผนการทดลองแบบ One-Group Pretest-Posttest Design

สอบก่อน	ตัวแปรอิสระ	สอบหลัง
T_1	X	T_2
สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง		
X	แทน การเรียนแบบร่วมมือ	
T_1	แทน การทดสอบก่อนการทดลอง (Pretest)	
T_2	แทน การทดสอบหลังการทดลอง (Posttest)	

6. วิธีดำเนินการทดลอง

ในการทดลองผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองดังนี้

1. ทำการทดสอบก่อนเรียน (Pretest) โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปทำการทดสอบกับนักเรียนชั้น ปวช.2 ที่เป็นกลุ่มทดลอง ใช้เวลา 50 นาที
2. ดำเนินการทดลองโดยวิธีเรียนแบบร่วมมือซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง
3. ทำการทดสอบหลังเรียน (Posttest) กับกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบชุดเดียวกับที่ใช้ทดสอบก่อนเรียน
4. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แล้วนำผลที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อทดสอบสมมติฐาน

7. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ประกอบด้วย

1. สถิติพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1.1 ค่าเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยของคะแนน

ΣX แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

1.2 ความแปรปรวน (Variance) โดยคำนวณจากสูตร

$$S^2 = \frac{n \sum x^2 - (\sum x)^2}{n - 1}$$

เมื่อ S^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนกลุ่มตัวอย่าง

ΣX แทน ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

n แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

$n - 1$ แทน จำนวนตัวแปรอิสระ (Degree of Freedom)

ΣX^2 แทน คะแนนแต่ละตัวในกลุ่มตัวอย่าง

ΣX^2 แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

2. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพเครื่องมือ

2.1 หาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เทคนิค 27% จากตารางของ จุง เตห์ ฟาน

2.2 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คำนวณจากสูตร KR-20 (Kuder Richardson-20) (พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2531 : 130)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum pq}{S_t^2} \right)$$

เมื่อ r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

p แทน สัดส่วนของคนที่ทำถูกในแต่ละข้อ

q แทน สัดส่วนของคนที่ทำผิดในแต่ละข้อ = $1 - p$

S_t^2 แทน คะแนนความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ

2.3 หาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตร (พวงรัตน์ ทวีรัตน์. 2531 : 124)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์
 R แทน ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชา
 ทั้งหมด
 N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

3. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

3.1 สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบสมมติฐานทดสอบความแตกต่างของความ
 สามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่าง โดยวัดก่อนการสอนกับหลังการสอน
 โดยคำนวณจากสูตร $t - \text{test dependent}$ (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2540 : 248)

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n \sum D^2 - (\sum D)^2}{n - 1}}}; df = n - 1$$

เมื่อ t แทน ค่าที่ใช้พิจารณา
 D แทน ความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่
 n แทน จำนวนคู่
 D^2 แทน ผลรวมของ D แต่ละตัวยกกำลังสอง
 $(\sum D)^2$ แทน ผลรวมของ D ทั้งหมดยกกำลังสอง

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลและการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อความเข้าใจตรงกัน ผู้วิจัยจึงขอใช้สัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

N	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
$\bar{X}$	แทน คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มทดลอง
D	แทน ผลรวมของความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่
D^2	แทน ผลรวมของกำลังสองความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่
t	แทน ค่า t - Dependent Sample

การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ก่อนการเรียนแบบร่วมมือกับหลังการเรียนแบบร่วมมือ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ ปรากฏผลในตาราง 4 ดังนี้

ตาราง 4 ผลการวิเคราะห์การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ก่อนและหลังการทดลอง

	N	$\bar{X}$	D	D^2	t
Pretest	40	8.78			
			339	3431	14.17**
Posttest	40	17.25			

$$t_{0.01,39} = 2.426$$

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากตาราง 4 ปรากฏว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ก่อนการทดลองและหลังการทดลอง โดยใช้

การเรียนรู้แบบร่วมมือ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ โดยความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือสูงกว่าก่อนการทดลองโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ฟังก์ชัน ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือ ซึ่งสามารถสรุปสาระสำคัญและผลการศึกษาได้ดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นปวช.2 ก่อนการทดลองและหลังการทดลองโดยการเรียนรู้แบบร่วมมือ

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 8 ห้องเรียน รวม 323 คน

2. กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยมีห้องเรียนเป็นหน่วยการสุ่มจากการจับฉลากมา 1 ห้องเรียนจำนวน 40 คน

ดำเนินการจัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการเรียนรู้แบบร่วมมือ โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันตามอัตราส่วนของความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 1 : 2 : 1 โดยพิจารณาจากคะแนนสอบของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์

ระดับความสามารถสูง คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ขึ้นไป

ระดับความสามารถปานกลาง คือนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่างเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ถึง 75

ระดับความสามารถต่ำ คือนักเรียนที่ได้คะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ลงมา

3. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน ชั้น ปวช. 2 ฉบับภาษาอังกฤษโดยปรับปรุงเปลี่ยนแปลงและแก้ไขตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพพุทธศักราช 2538 กรมอาชีวศึกษา สาขาพาณิชยกรรมซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

- | | |
|----------------------------------|-------|
| 1. Domain and Range of Relations | 4 คาบ |
| 2. Function Notation | |
| 3. Inverse Functions | 2 คาบ |
| 4. Algebra of Functions | 3 คาบ |
| 5. Composite Functions | 3 คาบ |

4. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 ใช้เวลาในการทดลอง 14 คาบ คาบเรียนละ 50 นาที โดยทำการทดสอบก่อนเรียน 1 คาบ ดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน 12 คาบ และทำการทดสอบหลังเรียน 1 คาบ

5. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

5.1 แผนการสอนการเรียนรู้แบบร่วมมือเรื่องฟังก์ชันจำนวน 4 ชุด

5.2 ใบความรู้และใบงาน จำนวน 4 ชุด โดยสร้างขึ้นตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya)

5.3 แบบทดสอบย่อย จำนวน 4 ชุด โดยสร้างขึ้นตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบปรนัยเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก

5.4 แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามathematics โดยสร้างขึ้นตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบปรนัยเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ แล้วนำไปหาค่าความยาก (p) ได้ค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.29 – 0.79 ค่าอำนาจจำแนก (r) อยู่ระหว่าง 0.22 – 0.70 และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.79

6. วิธีดำเนินการทดลอง

6.1 สุ่มกลุ่มตัวอย่างจากประชากรมาเป็นกลุ่มทดลอง จำนวน 40 คน

6.2 ทดสอบก่อนเรียน (Pretest) กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามathematics

6.3 ผู้วิจัยดำเนินการทดลองสอนเองโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ

6.4 เมื่อสิ้นสุดการทดลองแล้วทำการทดสอบหลังเรียน (Posttest) กับนักเรียนกลุ่มตัว

อย่างด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นฉบับเดียวกันกับที่ใช้ทดสอบก่อนเรียน

6.5 นำกระดาษคำตอบแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มาตรวจให้คะแนน แล้วนำไปวิเคราะห์ผลโดยวิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูล ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตัวอย่างก่อนการเรียนแบบร่วมมือกับหลังการเรียนแบบร่วมมือ โดยใช้วิธีการทางสถิติแบบ $t - test$ Dependent

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

จากผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยสามารถสรุปผลได้ว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 หลังการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือสูงกว่าก่อนการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมืออย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผลการศึกษาค้นคว้า

จากการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ พบว่าหลังการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการทดลอง โดยใช้การเรียนแบบร่วมมืออย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้ อาจมีสาเหตุมาจาก

1. การเรียนแบบร่วมมือ เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่แบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน โดยที่สมาชิกในกลุ่มมีความสามารถแตกต่างกันมาทำงานร่วมกัน ช่วยเหลือซึ่งกันและกันและรับผิดชอบการทำงานของตนเองเท่ากับรับผิดชอบการทำงานของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มด้วย เพื่อให้กิจกรรมต่างๆ บรรลุวัตถุประสงค์ตามที่ครูกำหนด ครูมีบทบาทเป็นเพียงผู้คอยให้ความช่วยเหลือ จัดหาและชี้แนะแหล่งข้อมูลในการเรียนรู้ให้กับนักเรียน ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอน 5 ขั้นตอน คือ *ขั้นเตรียม* ครูจัดกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คนในแต่ละกลุ่ม มีนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อนคละอยู่ในกลุ่มเดียวกัน เพื่อจะได้ช่วยเหลือซึ่งกันและกัน *ขั้นสอน* ครูทบทวนความรู้เดิมก่อนที่จะสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียน เพื่อให้ให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้เดิมกับเนื้อหาใหม่ และสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง *ขั้นทำงานกลุ่ม* สมาชิกในกลุ่มมีการซักถาม พูดคุย อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและช่วยเหลือซึ่งกันและกัน ภายในกลุ่มเกี่ยวกับใบความรู้และใบงานแต่ละชุด โดยนักเรียนที่มีความสามารถสูง ซึ่งจะสามารถเข้าใจ ใบความรู้ และใบงานแต่ละชุดได้ดีนั้นจะช่วยอธิบายให้นักเรียนที่มีความสามารถต่ำ ซึ่งอาจจะ

ไม่เข้าใจในใบความรู้ และใบงานได้ดีเท่าที่ควรให้มีความเข้าใจมากยิ่งขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับฮิลการ์ด (Hilgard.1967:328) ซึ่งได้กล่าวไว้ว่า การที่นักเรียนได้เรียนเป็นกลุ่มจะสามารถใช้พลังกลุ่มเป็นพลังผลักดันให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ โดยที่นักเรียนเก่งจะเป็นผู้ช่วยเหลือนักเรียนอ่อนในกลุ่มของตน เพื่อเป้าหมายและความสำเร็จของกลุ่ม *ขั้นตอนที่ 3* ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล โดยนักเรียนห้ามปรึกษาหรือซักถามกัน จากนั้นนำคะแนนสอบที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม และถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย และสุดท้าย *ขั้นตอนที่ 4* นักเรียนและครูร่วมกันสรุปบทเรียนและอภิปรายการทำงานกลุ่มจากนั้นครูให้การเสริมแรงทางบวกโดยการชมเชยและให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด จากการทำแบบทดสอบย่อยแต่ละครั้ง ดังนั้นจึงทำให้นักเรียนมีความสนใจในการเรียนและร่วมกิจกรรมกลุ่มมากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะนักเรียนที่มีความสามารถสูง ได้พยายามที่จะให้ความร่วมมือและความช่วยเหลือแก่สมาชิกในกลุ่มของตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดพื้นฐานด้านจิตวิทยา ที่กล่าวว่า การเสริมแรงเป็นสิ่งที่สำคัญมากในการกระตุ้นให้นักเรียนต้องการที่จะเรียนมากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งคือการเสริมแรงทางบวก (กมลรัตน์ หล้าสุวรรณ. 2528 : 49) ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้นน่าจะส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนที่ได้รับการทดลองโดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของอาภาภรณ์ หวัดสูงเนิน (2536:98) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยวิธีเรียนแบบร่วมมือกับวิธีเรียนแบบปกติ พบว่าความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยวิธีเรียนแบบร่วมมือ สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีเรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และสมเดช บุญประจักษ์ (2540 : 96) ได้ศึกษาการพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบเรียนร่วมมือ กับการสอนตามคู่มือครู พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ให้เหตุผล และการใช้คณิตศาสตร์สื่อสารของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบเรียนร่วมมือสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตามขั้นตอนของโพลยา ในการทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างใบความรู้ ใบงาน แบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา คือ *ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา และ ขั้นตรวจสอบคำตอบ* ในการจัดกิจกรรมของกลุ่มทดลองนี้ เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนทำการแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มเล็กๆ เพื่อให้บรรลุเป้าหมายของกลุ่มสมาชิกทุกคนต้องพูดอธิบายแนวคิด และช่วยเหลือกันให้เกิดการเรียนรู้ในการแก้ปัญหา (สมเดช บุญประจักษ์. 2544 : 40 ; อ้างอิงจาก Artzt and Newman. 1990 : 448 – 449) ซึ่งการพูดผ่านปัญหาคณิตศาสตร์กับเพื่อนนั้นช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจอย่างชัดเจนว่าจะแก้ปัญหาให้ถูกต้องได้อย่างไร การอธิบายยุทธวิธีการแก้ปัญหาให้เหตุผลและการวิเคราะห์ปัญหากับเพื่อน จะทำให้เกิดการหยั่งรู้และมีวิธีการให้เหตุผลระดับสูง และเกิดการเรียนรู้ระดับสูง (สมเดช บุญประจักษ์. 2540 : 56 – 57 ; อ้างอิงจาก Johnson and Johnson. 1989 : 235

– 237) ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของปรีชา เนาว์เย็นผล (2543 : 35) ที่กล่าวว่ากิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องให้ความสำคัญกับการอภิปรายร่วมกันของนักเรียนเพื่อกำหนดแนวทางหาวิธีการแก้ปัญหาเน้นการร่วมมือกันแก้ปัญหา ทั้งนี้เพราะการให้นักเรียนทำงานทางด้านคณิตศาสตร์ร่วมกัน จะช่วยส่งเสริมการใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร ส่งเสริมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการมีปฏิสัมพันธ์ต่อกัน การร่วมกันคิดแก้ปัญหาทำให้ได้แนวความคิดที่หลากหลาย นักเรียนได้เรียนรู้วิธีคิด ได้เห็นแบบแผนวิธีการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ ช่วยให้ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาดีกว่าการคิดโดยลำพังคนเดียว ซึ่งการที่ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในกลุ่มเพื่อแก้ปัญหาเป็นการสร้างบรรยากาศในการเรียนที่ดี นักเรียนไม่เพียงแต่พัฒนาทักษะการแก้ปัญหาเท่านั้น แต่ยังช่วยสร้างเจตคติที่ดี ซึ่งเอื้อประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา เจตคติที่ดีหรือเจตคติทางบวกมีผลต่อความเชื่อมั่นในความสามารถที่จะแก้ปัญหา ส่งผลให้มีความเต็มใจ พอใจ มุ่งมั่นที่จะแก้ปัญหาที่ยากโดยไม่ย่อท้อ และยังสอดคล้องกับผลงานการศึกษาของวีทลีย์ (Wheatley. 1991 : 9 – 21) ที่พบว่า การคบค้าสมาคม (Socialization) เป็นหนึ่งในสี่ขององค์ประกอบที่ทำให้เกิดความงอกงามทางปัญญา นักเรียนที่ทำงานเป็นคู่และเป็นกลุ่มในการหาคำตอบของปัญหาจะมีวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมกว่าการทำงานตามลำพัง การดูถึงความสมเหตุสมผลของแนวคิดตนเองจะไม่เกิดขึ้น เมื่อนักเรียนทำงานโดยลำพัง และการทำงานเป็นกลุ่มย่อยจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหามากขึ้น ทำให้นักเรียนเกิดความเชื่อมั่นในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเองเพิ่มขึ้น การแก้ปัญหาร่วมกันเป็นกลุ่มย่อยภาระงานของนักเรียนมี 2 ประการ คือ ประการแรก พยายามแก้ปัญหาโจทย์ ประการที่สอง การแก้ปัญหการทำงานร่วมกันให้มีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลงานการวิจัยของ สุนันท์ จิมวัย (2543 : 60 – 62) ซึ่งได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับการสอนตามคู่มือครู พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการมีค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และพบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ สอดคล้องกับปฐมพร บุญลี (2545 : 68) ซึ่งได้ศึกษาการสร้างแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะสูงกว่าก่อนการทดลองสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และพบว่าประสิทธิภาพของชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยภาพรวมมีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 ดังนั้นด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น อาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ส่งผลให้นักเรียนหลังการทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนการทดลอง

ข้อสังเกตจากการทดลอง

1. การทดลองโดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ ในระยะแรกของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนของแผนการสอนที่ 1 ค่อนข้างใช้เวลามาก ทั้งนี้เพราะเป็นวิธีการเรียนแบบใหม่ ทำให้นักเรียนเกิดความสับสน ไม่เข้าใจในวิธีการเรียนแบบร่วมมือ ต่างคนต่างไม่ยอมซักถาม ไม่ปรึกษาหารือกัน ไม่กล้าแสดงความคิดเห็น แต่จะมอบหมายให้ความไว้วางใจกับนักเรียนที่เรียนเก่งให้เป็นผู้ทำกิจกรรมมากกว่า แต่เมื่อใช้แผนการสอนที่ 2 – 4 นักเรียนเริ่มคุ้นเคยและเข้าใจวิธีการเรียนเพิ่มมากขึ้น ทำให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนดำเนินไปได้อย่างรวดเร็วและราบรื่น

2. นักเรียนให้ความสนใจ ตั้งใจ และมีความกระตือรือร้น ในการเข้าร่วมกิจกรรม กล้าซักถามปรึกษาหารือกัน กล้าแสดงความคิดเห็นให้ความช่วยเหลือซึ่งกันและกันในกลุ่ม ซึ่งสังเกตได้จากบทบาทของนักเรียนที่เรียนปานกลางและนักเรียนที่เรียนอ่อนจะเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่มมากขึ้น โดยมีได้จำกัดบทบาทเฉพาะอยู่เพียงนักเรียนที่เรียนเก่งเท่านั้น ทั้งนี้เพราะทุกคนจะต้องถูกประเมินโดยการทดสอบย่อยเป็นรายบุคคล หลังจากนั้นน่าจะเสนอข้อที่ได้ของแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มและถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

3. นักเรียนที่เรียนอ่อนส่วนใหญ่ชอบขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา เพราะเป็นการฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหาไปที่ละขั้นตอนโดยเริ่มจากขั้นตอนที่ง่ายไปหายากตามลำดับคือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา วางแผนในการแก้ปัญหา ดำเนินการตามแผน และตรวจสอบคำตอบ โดยเฉพาะขั้นทำความเข้าใจปัญหาและวางแผนในการแก้ปัญหา นักเรียนที่เรียนอ่อนจะทำคะแนนได้ดี ซึ่งสังเกตได้จากการทำแบบทดสอบย่อยแต่ละชุด จึงทำให้ได้คะแนนรวมไม่ต่ำกว่าครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็มของแต่ละครั้ง ส่วนคะแนนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนจะแตกต่างกันมากคือ ก่อนเรียนจะได้คะแนนน้อย หลังเรียนจะได้คะแนนมาก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนได้ฝึกการแก้ปัญหาไปที่ละขั้นตอน โดยเริ่มจากขั้นตอนที่ง่ายไปหายากตามลำดับ ส่วนก่อนที่นักเรียนจะได้รับการทดสอบโดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา พบว่าส่วนใหญ่ครูออกข้อสอบเป็นแบบปรนัย ในลักษณะที่ต้องการคำตอบอย่างเดียว แต่ไม่ต้องการขั้นตอนการแก้ปัญหาของนักเรียน ซึ่งเด็กอ่อนจำนวนมากสามารถแก้ปัญหาไปที่ละขั้นตอนโดยเริ่มจากขั้นตอนที่ง่าย พอถึงขั้นตอนที่ยากที่ต้องการคำตอบเด็กหลายคนไม่สามารถแก้ปัญหาได้ จึงทำให้ได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์ตามที่ครูกำหนด

4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเป็นกลุ่มย่อย พบว่ากลุ่มใดที่มีสมาชิกเป็นเพศชายล้วน การให้ความสนใจ ความตั้งใจ ความกระตือรือร้น การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมกลุ่มมีน้อยกว่ากลุ่มที่มีเพศหญิงรวมอยู่ด้วย และถ้ากลุ่มใดที่มีสมาชิกเป็นเพื่อนสนิทกัน การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมกลุ่มจะมีมากกว่ากลุ่มที่มีสมาชิกไม่ค่อยสนิทกัน

5. นักเรียนที่เรียนอ่อนและปานกลางส่วนใหญ่ยังไม่สามารถแปลโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษได้ แต่สามารถแปลและเข้าใจขั้นตอนต่าง ๆ ของโพลยาได้ ซึ่งสังเกตได้จากการอ่านใบความรู้ที่ 1 และการทำแบบฝึกที่ 1 ส่วนใบความรู้ที่ 2 , 3 และแบบฝึกที่ 2 ,3 นั้นไม่มีโจทย์

ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษ แต่ไปความรู้ที่ 4 และแบบฝึกที่ 4 นั้น มีโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาอังกฤษ ดังนั้นผู้วิจัยจึงแก้ปัญหาดังกล่าวโดยการอธิบายตัวอย่างโจทย์ปัญหาก่อนที่จะให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่ม และให้ข้อเสนอแนะรวมทั้งให้ความช่วยเหลือขณะทำกิจกรรมกลุ่ม จึงทำให้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนดำเนินไปด้วยดี

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า

1. ก่อนศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ ครูควรมีการชี้แนะให้นักเรียนเข้าใจขั้นตอนการเรียนรู้และการทำกิจกรรมกลุ่มย่อยก่อน เพื่อให้การเรียนการสอนประสบผลสำเร็จมากที่สุด
2. ครูควรนำการเรียนรู้แบบร่วมมือไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนให้มากขึ้น และสม่ำเสมอ โดยอาจนำไปใช้กับรายวิชาอื่น หรือระดับอื่นๆ บ้าง ดังนั้นผู้บริหารการศึกษาควรจะให้การสนับสนุนในการทำสื่อการเรียนการสอน เพราะเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญในการดำเนินการจัดกิจกรรม
3. ครูต้องเตรียมการจัดกิจกรรมของการเรียนรู้แบบร่วมมือให้เหมาะสม สอดคล้องกับเนื้อหา สถานที่ นักเรียน และอื่นๆ เพื่อทำให้นักเรียนสนใจ ตั้งใจ และมีความกระตือรือร้นในการเข้าร่วมกิจกรรม
4. ครูต้องพยายามศึกษาหาความรู้และทำความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้ปัญหของโพลยา ซึ่งใช้เป็นองค์ประกอบในการสร้างใบความรู้ ใบงาน แบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อทำให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

1. ควรทำการศึกษาค้นคว้าในลักษณะเช่นนี้กับนักเรียน เนื้อหาและรายวิชาที่ต่างไปจากนี้ เพื่อจะได้ทราบว่ากิจกรรมการเรียนการสอนแต่ละแบบมีความเหมาะสมกับนักเรียนในระดับชั้นใด เนื้อหาอะไร และรายวิชาอะไรบ้าง
2. ควรศึกษาเปรียบเทียบระหว่างการจัดกลุ่มแบบคละชาวยหญิงกับการจัดกลุ่มแบบแยกชายหญิงที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และวิชาอื่นๆ
3. ควรทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับตัวแปรอื่นๆ นอกเหนือจากความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เช่น ทักษะการทำงานร่วมกัน บรรยากาศในการเรียน และความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กมลรัตน์ หล้าสูงษ์.(2528).จิตวิทยาการศึกษา(ฉบับปรับปรุง). พิมพ์ครั้งที่ 2.กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัดศรีเตชะ.
- กรมวิชาการ, กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์การศาสนา.
- กาญจนา สุจินะพงษ์. (2539). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่2ที่เรียนโดยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนร่วม. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ขวัญใจ บุญฤทธิ์. (2535). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความมีระเบียบวินัยในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบ TAI กับการสอนตามคู่มือของ สสวท. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- คนธรรส รสหวาน. (2539). การพัฒนารูปแบบการสอนแบบกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์ปัญหา บวก ลบ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนโครงการนำร่องศูนย์พัฒนาอัจฉริยะภาพเด็กและเยาวชน. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การศึกษาพิเศษ). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.ถ่ายเอกสาร.
- ฉวีวรรณ เศวตมัลย์. (2542). “การแก้ปัญหา,” เอกสารประกอบการอบรมกิจกรรมค่ายคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : สาขาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ชาญชัย อาจินสมอาจ. (2533,มีนาคม). “การเรียนรู้แบบร่วมมือ,” ประชากรศึกษา.40 (6): 19 - 21.
- ชูศรี สนิทประชากร. (2534,กรกฎาคม - ธันวาคม). “การเรียนรู้โดยการร่วมมือ,” จันทรเกษมสาร. 2 (4) : 48 - 49.
- ทบวงมหาวิทยาลัย. (2524). ชุดการเรียนการสอนสำหรับครูคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ทบวงมหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- ปฐมพร บุญลี. (2545). การสร้างแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). “หน่วยที่ 12 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์,” ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยวิธีทางคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 12 - 15. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

- ปรีชา เนาว์เป็นผล. (2543,กันยายน). "กิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา
ปลายเปิด," วารสารคณิตศาสตร์. 43 (ฉบับพิเศษ) : 35.
- ปสาส์น กงตาล. (2535,กันยายน). "การร่วมมือกันเรียนรู้," วารสารศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัย
ขอนแก่น. 15 (1).
- เปรมจิตร ขจรภัยลาร์เซ่น. (2536). "วิธีสอนแบบการเรียนรู้ร่วมกัน," เอกสารหมายเลข 6. กรุงเทพฯ
: สถาบันราชภัฏเพชรบุรีวิทยาเขต.
- ผ่องใส ห่อทอง. (2538). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น
ประถมศึกษาปีที่ 6 โดยการสอนแบบพัฒนารายบุคคลที่ร่วมทำงานเป็นคณะกับการสอน
ปกติ. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พวงรัตน์ ทวีรัตน์. (2531). วิธีการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์และสังคมศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2.
กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2530). การสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ:คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2525). พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ.2525. กรุงเทพฯ : อักษร-
เจริญทัศน์.
- ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา.พิมพ์ครั้งที่ 3.กรุงเทพฯ:
ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.
- _____. (2540). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- วิโชติ พงษ์ศิริ. (2540). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ กิจกรรมการเรียนรู้แบบคอนสตรัคทีวิซึ่ม
ด้วยวิธีสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา).
กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วิมล พงษ์पालิต. (2541). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบแก้ปัญหากับการสอนตามคู่มือครู.
ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วิรัช กมูทมาศ. (2528,สิงหาคม). "หลักการอาชีวศึกษา," วารสารอาชีวศึกษา. 11 : 49 - 50.
- ศิริชัย ชินะตั้งกูร และ เกษตร สิทธิภูประเสริฐ. (2525,ตุลาคม - พฤศจิกายน). "ปรัชญาอาชีวศึกษา,"
วารสารการศึกษาแห่งชาติ. 5 : 24 - 25.
- ศรีภรณ์ ณะวงศ์ษา. (2542). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบ
TGT แบบ STAD และการสอนตามคู่มือครู. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา).
กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- _____. (2544,สิงหาคม - ตุลาคม). “ความรู้เกี่ยวกับการเรียนแบบร่วมมือ,” วารสารคณิตศาสตร์. 45 (515 - 517) : 40 - 51.
- สิริพร ทิพย์คง.(2536). เอกสารคำสอนวิชา 158522 ทฤษฎีและวิธีการสอนคณิตศาสตร์.กรุงเทพฯ : ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- สิริมาศ สิทธิหล่อ. (2534). การพัฒนาวิธีการวัดกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยวิธีการคิดออกเสียง. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- สุนันท์ จิมวัย. (2543). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปฏิบัติการกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูในระดับมัธยมศึกษาปีที่3.ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุนันท์ แสงงามมงคล. (2541). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลอการิทึม โดยใช้ชุดการเรียนการสอน และกิจกรรมการเรียนรู้ร่วมของนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุพิศา แก้วสุวรรณ. (2535). การเปรียบเทียบกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนช่วงอุตสาหกรรมระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- สุมาลี วงศ์ยะรา. (2536). การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมปีที่4 ที่เรียนโดยใช้ภาพกับไม่ใช้ภาพ. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- สุรศักดิ์ หลาบมาลา. (2531,กุมภาพันธ์). “การเรียนการสอนแบบร่วมมือ,” วิทยาสาร.86 (2) : 4 – 8.
- เสริมศักดิ์ สุรวัดลก. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา. กรุงเทพฯ : ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- อาภาภรณ์ หวัดสูงเนิน. (2536). ผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.
- อารี สันตหจวี. (2539,กันยายน). “การเรียนแบบร่วมมือ,” สารานุกรมศึกษาศาสตร์. 15 : 89.
- เอนก ศิลปนิลมาลย์. (2540,เมษายน - มิถุนายน). “สอนแปลก,” สารพัฒนาหลักสูตร. 16 : 60 - 68.
- Anderson, K.B. and Pingry, R.E. (1973). *Problem - Solving in Mathematics : Its Theory and*

- Practise*. Washington, D.C. :The National Council of Teachers of Mathematics.
- Ausubel, David P. (1968). *Educational Psychology : A Cognitive View*. New York : Holt Rinehart and Winston, Inc.
- Barnett, J.C. (1975,January). "Toward a Theory of Sequencing : Study 3-7 : An Investigation of the Relationships of Structural Variables, Instruction, and Difficulty in Verbal, Arithmetic Problem solving," *Dissertation Abstracts International*. 35(7): 4299 – A.
- Bell, Frederick H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary)*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Company Publishers.
- Bruckner, Leo J. and Grossnickle, Faster E. (1957). *How to Make Arithmetic*. Philadelphia : The John C. Winston Co.
- Charles, Randall & Lester, Frank K. (1982). *Teaching Problem Solving What, Why & How*. Dale Seymour Publications.
- Clarkson, S.P. (1979, January). "A Study of the Relationships among Translation and Problem Solving Abilities," *Dissertation Abstracts International*. 39 (7): 4101 - A.
- Dubois, Dion Joseph. (1990, August). "The Relationship Between Selected Student Team Learning Strategies and Student Achievement and Attitude In Middle School Mathematics Cooperative Learning, Learning Strategies," *Dissertation Abstracts International*. 52 : 408 - A.
- Duren, Phillip E. & April, Cherington. (1992, February). "The Effect of Cooperative Group Work Versus Independent Practice on the Learning of Some Problem Solving Strategies," *School Science and Mathematics*. 92 (2): 80 - 83.
- Gagne , R.M. (1970). *The Condition of Learning*. New York: CBS College Publishing.
- Hall, W.D. (1977, April) "A Study of the Relationship between Estimation and Mathematics Problem Solving among Fifth Grade Students," *Dissertation Abstracts International*. 37: 6324 - 6325 - A.
- Hartfield, Mary M., Edwards, Noney and Bitter, Gury G.(1993) *Mathematics Method for the Elementary and Middle Schools*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Hilgard, E.R. (1967). *Introduction to Psychology*. New York: Harcourt Brace World, Inc
- Hopkins, M.H. (1985, March). "A Classroom Model for Diagnosing the Problem Solving of Elementary School Students," *Dissertation Abstracts International*. 45:1790 - A.
- John, K.W. (1966, October). "A comparison of Two Methods of Teaching Eighth Grade General Science : Traditional and Structures Problem Solving," *Dissertation Abstracts International*. 27 (24): 994 - 995 A.

- Johnson, David W. & Johnson, Roger T. (1987, November), "Research Shows the Benefits of Adult Cooperation," *Educational Leadership*.
- Krulik, Stephen & Reys, Robert E. (1980). *Problem Solving in School Mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Mahan, Luther A. (1970, October-December). "Which Extreme Variant of the Problem Solving Method of Teaching Should Be More Characteristic of the Many Teacher Variations of Problem-Solving Teaching?," *Science Education*. 54: 309 - 316.
- Nichols, Joey Del. (1994, September). "The Effect of Cooperative Learning on Student Achievement and Motivation in a High School Geometry Class," *Dissertation Abstracts International*. 55 (3): 460 - A.
- Polya, George. (1985). *How to Solve it*. 2nd ed. Princeton : University Press.
- Reynolds, Anne Marie. (1993, October). "Imaging in Children's Mathematical Activity (Problem Solving), " *Dissertation Abstracts International*. 54 (4): 1274 - A.
- Slavin, Robert E. (1983). *Cooperative Learning*. New York : Longman.
- _____. (1987, November). "Cooperative learning and Cooperative School, " *Educational Leadership*.
- Stonewater, J.K. (1956, September). "Instruction in Problem Solving and Piaget Theory of Cognitive Development," *Dissertation Abstracts International*. 38: 2602 - 2603 - A.
- Taylor, Jill. (1994, August). "Socially Assisted Learning and Mathematical Problem-Solving (Vygotskian)," *Dissertation Abstracts International*. 55 (2): 633-B.
- Webb, N.L. (1975, November). "An Exploration of Mathematical Problem Solving Process," *Dissertation Abstracts International*. 36: 2689 - A.
- West, Tonic A. (1977, November), "Rx For Verbal Problem : A Diagnostic-Prescriptive Approach," *Arithmetic Teacher*. 25 (12): 57 - 58.
- Wheatley, Grayson H. (1991, January). "Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning," *Science Education*. 75(1): 9-21.
- Williams, Mary Susan. (1988, June). "The Effect of Cooperative Team Learning on Achievement and Student Attitude in the Algebra Classroom," *Dissertation Abstracts International*. 49 (12): 3611 - A.
- Wilson, James W., Fernandez, Maria L. & Hadaway, Nelda. (1993). "Mathematical Problem Solving," in *Research Ideas for the Classroom, High School*. p. 57-58. New York : Macmillan Publishing Company.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ตาราง 5 ค่าความยาก (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการ
แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	0.79	0.25	14	0.57	0.70
2	0.29	0.22	15	0.55	0.59
3	0.61	0.25	16	0.70	0.51
4	0.59	0.44	17	0.70	0.59
5	0.59	0.44	18	0.57	0.70
6	0.62	0.66	19	0.74	0.51
7	0.53	0.40	20	0.57	0.62
8	0.62	0.59	21	0.48	0.66
9	0.68	0.62	22	0.38	0.40
10	0.51	0.51	23	0.29	0.29
11	0.53	0.70	24	0.64	0.55
12	0.37	0.29	25	0.57	0.62
13	0.50	0.40			

ตาราง 6 ค่า p ค่า q ค่า pq และค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	p	q	pq	ข้อที่	p	q	pq
1	0.87	0.13	0.11	14	0.70	0.30	0.21
2	0.28	0.72	0.20	15	0.66	0.34	0.22
3	0.67	0.33	0.22	16	0.74	0.26	0.19
4	0.78	0.22	0.17	17	0.71	0.29	0.21
5	0.85	0.15	0.13	18	0.73	0.27	0.20
6	0.52	0.48	0.25	19	0.76	0.24	0.18
7	0.36	0.64	0.23	20	0.84	0.16	0.13
8	0.78	0.22	0.17	21	0.79	0.21	0.17
9	0.33	0.67	0.22	22	0.44	0.56	0.26
10	0.70	0.30	0.21	23	0.35	0.65	0.23
11	0.45	0.55	0.25	24	0.77	0.23	0.18
12	0.44	0.56	0.25	25	0.52	0.48	0.25
13	0.64	0.36	0.23				

$$\sum pq = 5.07$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

$$r_{tt} = \frac{K}{K-1} \cdot 1 \cdot \frac{\sum pq}{S^2}$$

$$K = 25, \sum pq = 5.07, S^2 = 20.70$$

$$r_{tt} = \frac{25}{25-1} \cdot 1 \cdot \frac{5.07}{20.70}$$

$$r_{tt} = 0.79$$

ตาราง 7 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ Pretest และ Posttest
ของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 2 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 40 คน

คะแนนเต็ม 25 คะแนน							
คนที่	ก่อนเรียน Pretest	หลังเรียน Posttest	ผลต่าง	คนที่	ก่อนเรียน Pretest	หลังเรียน Posttest	ผลต่าง
1	6	14	8	21	8	13	5
2	11	21	10	22	10	17	7
3	9	17	8	23	8	16	8
4	9	21	12	24	7	16	9
5	9	14	5	25	3	18	15
6	11	20	9	26	11	23	12
7	16	18	2	27	14	20	6
8	5	14	9	28	14	22	8
9	7	19	12	29	7	17	10
10	13	18	5	30	3	17	14
11	5	22	17	31	14	17	3
12	11	17	6	32	7	13	6
13	14	19	5	33	7	13	6
14	10	15	5	34	5	16	11
15	3	20	17	35	5	18	13
16	9	18	9	36	9	19	10
17	13	16	3	37	9	15	6
18	9	18	9	38	9	15	6
19	4	14	10	39	11	19	8
20	13	15	2	40	3	16	13

สถิติที่ใช้ในการตรวจสอบสมมติฐานทดสอบความแตกต่างของความสามารถในการแก้ปัญหา

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{n \sum D^2 - (\sum D)^2}{n-1}}}$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าที่ใช้พิจารณา
	D	แทน	ความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่
	n	แทน	จำนวนคู่
	$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของ D แต่ละตัวยกกำลังสอง
	$(\sum D)^2$	แทน	ผลรวมของ D ทั้งหมดยกกำลังสอง

ดังนั้นจากสูตรจะได้

$$\sum D = 339, \sum D^2 = 3,431, (\sum D)^2 = 114,921$$

$$t = \frac{339}{\sqrt{\frac{40(3431) - 114921}{40-1}}}$$

$$t = \frac{339}{\sqrt{\frac{22319}{39}}}$$

$$t = \frac{339}{\sqrt{572.28}}$$

$$t = \frac{339}{23.92}$$

$$t = 14.17$$

ภาคผนวก ข

แผนการสอนที่ 1

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้น ปวช. 2

เรื่อง 1. Domain and Range of Relations

จำนวน 4 คาบ

2. Function Notation

สาระสำคัญ

1. ความสัมพันธ์เป็นเซตของคู่อันดับ ซึ่งเซตของสมาชิกตัวหน้า และเซตของสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับของความสัมพันธ์คือโดเมน (Domain) และเรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์นั้นตามลำดับ
2. ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน
3. Function Notation
 If a function f assigns a value y to a certain x in the domain , we write

$$y = f(x)$$

 We read $f(x)$ as “ f of x ” ; it is called the value of f at x .
 Note that $f(x)$ is not the product of f and x .
 If a function f is expressed by a relation of the type $y = f(x)$, then x is called the independent variable or argument of f and y is called the dependent variable.

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้
2. บอกได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่
3. หาค่าของฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

คาบที่ 1

Pretest 1 คาบก่อนทดลอง

คาบที่ 2

1. ขั้นเตรียม

1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 4 คน ตามความสามารถสูง ปานกลาง และต่ำ เป็น 1:2:1 โดยพิจารณาจากคะแนนสอบของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 วิชาคณิตศาสตร์เป็นเกณฑ์

1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

2.1 ครูยกตัวอย่างคนในครอบครัวกับการรับประทานอาหาร 1 อย่าง อันประกอบด้วย พ่อ แม่ ลูก ผักกระเพราหมู ต้มจืด และ ผัดผัก จากนั้นให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า พ่อ แม่ ลูก ผักกระเพราหมู ต้มจืด และ ผัดผัก เกี่ยวข้องกันอย่างไรบ้าง ซึ่งอาจออกมาในหลายแบบ เช่น

พ่อชอบรับประทานอาหารต้มจืด

แม่เลือกรับประทานอาหารผักกระเพราหมู

ลูกบอกว่าการรับประทานอาหารผัดผักจะให้คุณค่าสูง

แล้วครูช่วยสรุปถึงคำว่า “ชอบรับประทานอาหาร” , “เลือกรับประทานอาหาร” , “บอกว่าการรับประทานอาหาร” เป็นคำที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งสองสิ่ง ดังนั้นความสัมพันธ์จึงเกิดจากสิ่งสองสิ่งมาเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งในที่นี้ คือคนในครอบครัวกับการรับประทานอาหาร 1 อย่าง และสิ่งสองสิ่งนี้จะเขียนในรูปคู่อันดับได้เสมอ เช่น(พ่อ,ต้มจืด), (แม่,ผักกระเพราหมู) , (ลูก,ผัดผัก)

2.2 ครูยกตัวอย่าง โดยกำหนดให้เซต $A = \{ 1, 2, 4, 7 \}$ แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเขียนคู่อันดับภายใต้กฎเกณฑ์ของการเกี่ยวข้องกันในเซต A คือ “มากกว่า” ดังนั้นจะได้คำตอบ คือ $(2, 1), (4, 1), (4, 2), (7, 1), (7, 2), (7, 4)$

ถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่อยู่ภายใต้กฎเกณฑ์นี้

$$r = \{ (2, 1), (4, 1), (4, 2), (7, 1), (7, 2), (7, 4) \}$$

เราเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์

แต่ถ้านักเรียนบางคนเขียน $r = \{ 2, 1, 4, 1, 4, 2, 7, 1, 7, 2, 7, 4 \}$

เราจะเรียก r ว่าไม่เป็นความสัมพันธ์

- 2.3 ครูสุ่มนักเรียน 1 คน จากกลุ่มใดก็ได้ ให้นำตัวอย่างความสัมพันธ์ในข้อ 2.2 มาเขียนเซตใหม่ โดยที่เซตที่หนึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ และเซตที่สองเป็นเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ ซึ่งจะได้ดังนี้ $\{ 2,4,7 \}$ และ $\{ 1,2,4 \}$ จากนั้นครูจึงบอกนักเรียนว่า เซตที่หนึ่งเรียกว่าโดเมนของความสัมพันธ์ เขียนได้ว่า D_r และเรียกเซตที่สองว่าเรนจ์ของความสัมพันธ์ เขียนได้ว่า R_r
- 2.4 นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์จากตัวอย่างข้อ 2.1 , 2.2 และ 2.3
- 2.5 ครูสรุปนิยามของความสัมพันธ์โดเมนและเรนจ์ให้นักเรียนอีกครั้ง

Definition of a relation

A relation is a set of ordered pairs. The set of all first coordinates is called the domain of the relation. The set of all second coordinates is called the range.

- 2.6 ครูซักถามและอธิบายความสัมพันธ์โดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

Example1 State the domain and the range of each relation. Determine whether the relation is a function.

- (a) $r_1 = \{(\text{พ่อ}, \text{ต๋มจี๊ด}), (\text{แม่}, \text{ผัดกระเพราหมู}), (\text{ลูก}, \text{ผัดผัก})\}$
- (b) $r_2 = \{(3,5), (6,6), (-10,6)\}$
- (c) $r_3 = \{(2,1), (4,1), (4,2), (7,1), (7,2), (7,4)\}$
- (d) $r_4 = \{(\text{ปากกา}, \text{ไม้บรรทัด}), (\text{ปากกา}, \text{ยางลบ}), (\text{ดินสอ}, \text{ยางลบ})\}$

Solution (a) $r_1 = \{(\text{พ่อ}, \text{ต๋มจี๊ด}), (\text{แม่}, \text{ผัดกระเพราหมู}), (\text{ลูก}, \text{ผัดผัก})\}$

$$D_{r_1} = \{ \text{พ่อ}, \text{แม่}, \text{ลูก} \}$$

$$R_{r_1} = \{ \text{ต๋มจี๊ด} , \text{ผัดกระเพราหมู} , \text{ผัดผัก} \}$$

The relation r_1 is a function (See fig.1)

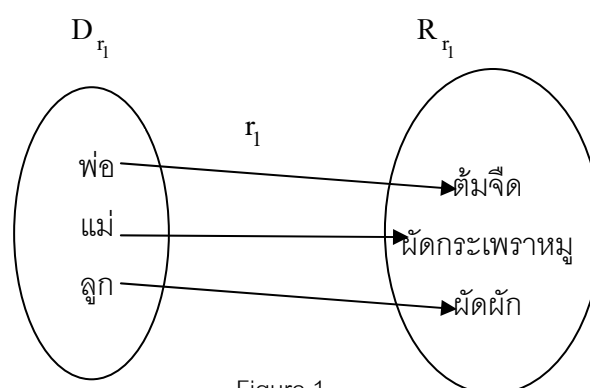


Figure 1

$$(b) \quad r_2 = \{(3,5),(6,6),(-10,6)\}$$

$$D_{r_2} = \{3, 6, 10\}$$

$$R_{r_2} = \{5, 6\}$$

The relation is a function (See fig.2)

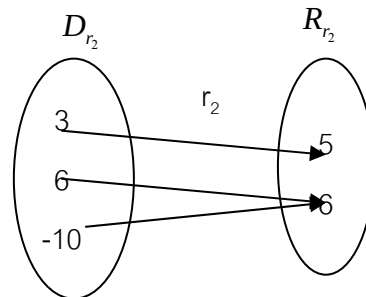


Figure 2

$$(c) \quad r_3 = \{(2,1),(4,1),(4,2),(7,1),(7,2),(7,4)\}$$

$$D_{r_3} = \{2, 4, 7\}$$

$$R_{r_3} = \{1, 2, 4\}$$

The relation is not a function (See fig.3)

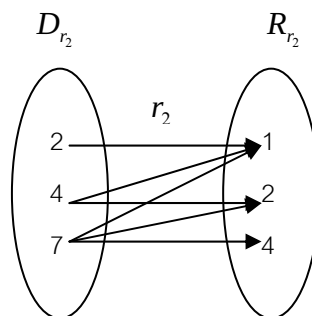


Figure 3

$$(d) \quad r_4 = \{(\text{ปากกา}, \text{ไม้บรรทัด}), (\text{ปากกา}, \text{ยางลบ}), (\text{ดินสอ}, \text{ยางลบ})\}$$

$$D_{r_4} = \{\text{ปากกา}, \text{ดินสอ}\}$$

$$R_{r_4} = \{\text{ไม้บรรทัด}, \text{ยางลบ}\}$$

The relation is not a function (See fig.4)

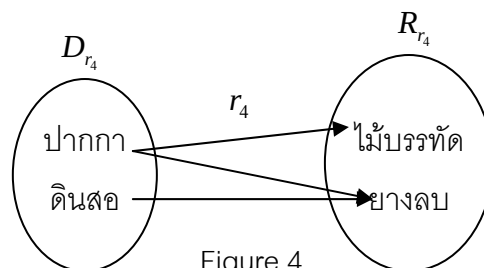


Figure 4

2.7 นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของฟังก์ชัน จากตัวอย่างข้อ 2.6

2.8 ครูสรุปนิยามของฟังก์ชันให้นักเรียนอีกครั้ง

Definition of a function

A function is a relation in which each first coordinate corresponds to exactly one second coordinate.

2.9 ครูเปรียบฟังก์ชันใน Figure 3 เหมือนกับเครื่องจักรชนิดหนึ่ง สิ่งที่เราใส่ลงไปเครื่องจักรจะเรียกว่าโดเมน และผลผลิตที่ออกมาจะเรียกว่าเรนจ์ดังรูป Figure 5

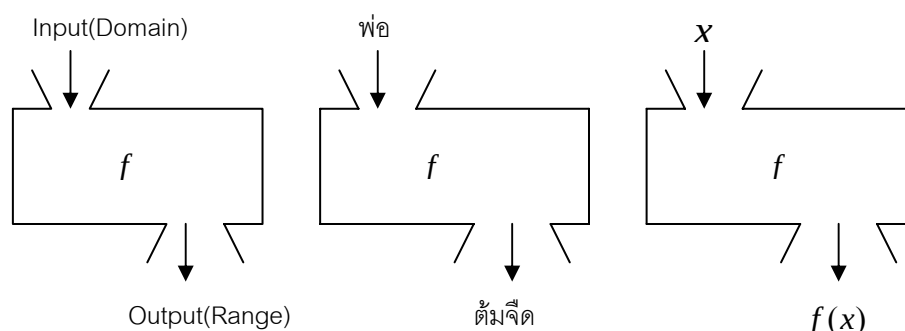


Figure 5

จากภาพที่ 5 เรากำหนด y คือ ฟังก์ชันของ x ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า $y = f(x)$

สัญลักษณ์ $f(x)$ อ่านว่า “ f ของ x ” ไม่ใช่หมายความว่า f คูณ x

2.10 ครูสุ่มนักเรียน 1 คน จากกลุ่มใดก็ได้ ให้ยกตัวอย่างสมการของพาราโบลา เช่นสมมติ

นักเรียนยกตัวอย่างว่า $y = 3x^2$ ครูกำหนด $x = 2$ ดังนั้น นักเรียนจะหาค่า y ได้เท่ากับ

12 ซึ่งอธิบายได้ว่า $f(x) = 3x^2$ แล้วถ้า $f(2) = 3(2)^2 = 12$ เป็นต้น ข้อสังเกต $f(2)$

คือค่าของเรนจ์ ซึ่งสัมพันธ์กับค่าของโดเมน คือ 2 ส่วน $f(2)$ เรียกว่าค่าของฟังก์ชัน f ที่ 2 ดังรูป Figure 6

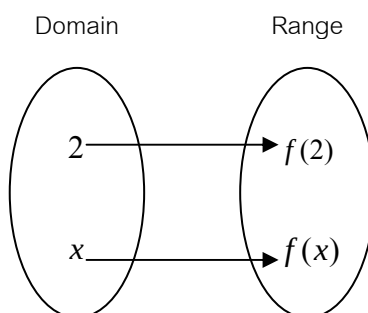


Figure 6

ถ้าเปรียบฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2$ เหมือนกับเครื่องจักรชนิดหนึ่ง สิ่งที่เราใส่ลงไปในเครื่องจักรจะเรียกว่า โดเมนและผลผลิตที่ออกมาจะเรียกว่าเรนจ์ ดังรูป Figure 7

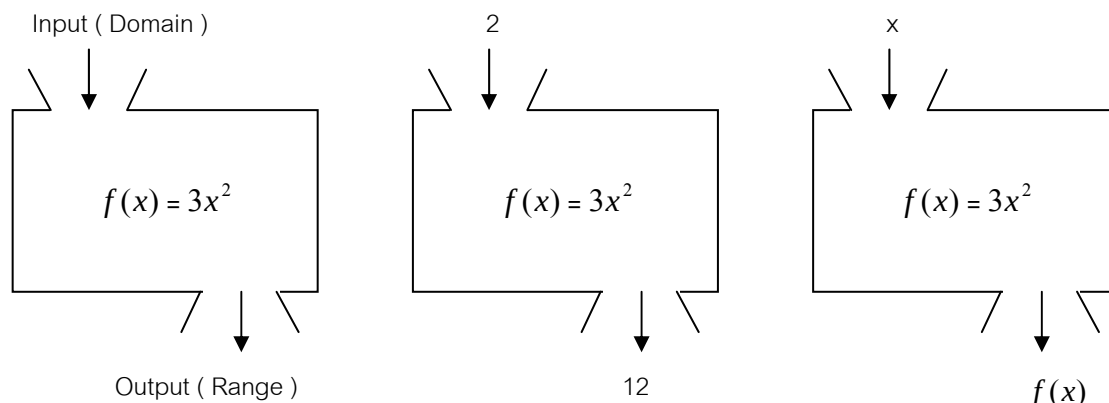


Figure 7

2.11 นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของ Function Notation จากรูปที่ 7

Example2 A radio manufacturing firm has fixed cost of \$ 2,500 and the cost of labor and material is \$ 20 per radio. Determine the cost function, that is, the total cost as a function of number of radios manufactured. If each radio is sold for \$ 30, determine the revenue function and the profit function. If the firm sold 400 radios, how much profit will the firm get ?

Solution

Give variable

Number of radios sold = x

Cost function = $C(x)$

Revenue function = $R(x)$

Profit function = $P(x)$

Translate the verbal sentence to symbols.

The cost function = Fixed cost + Cost of labor and material for x radio.

$$C(x) = 2500 + 20x$$

The revenue function = Price per radio $\times$ Number of radios sold

$$R(x) = 30x$$

Find the connection between the data and the unknown.

$$\begin{aligned} \text{Thus } P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 30x - (2500 + 20x) \end{aligned}$$

Solving for x by simplifying $P(x)$ and replacing x with 400 in $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= 30x - (2500 + 20x) \\ &= 30x - 2500 - 20x \\ &= 10x - 2500 \end{aligned}$$

Replace x with 400 in $P(x)$

$$\begin{aligned} P(400) &= 10(400) - 2500 \\ &= 4000 - 2500 \\ &= \$1500 \end{aligned}$$

So the profit is \$1500

Examine the solution obtained

Replace $P(x)$ with 1500 in $P(x) = R(x) - C(x)$

$$\begin{aligned} 1500 &= 30x - (2500 + 20x) \\ 1500 &= 30x - 2500 - 20x \\ 1500 + 2500 &= 10x \\ 4000 &= 10x \\ x &= \frac{4000}{10} = 400 \end{aligned}$$

So the firm sold 400 radios.

2.12 โครงสร้างนิยามของ Function Notation อีกครั้งดังนี้

Function Notation

If a function f assigns a value y to a certain x in the domain, we write

$$y = f(x)$$

We read $f(x)$ as “ f of x ”; it is called the value of f at x .

Note that $f(x)$ is not the product of f and x .

If a function f is expressed by a relation of the type $y = f(x)$, then x is called the independent variable or argument of f and y is called the dependent variable.

คาบที่ 3

2.13 ครูซักถามและอธิบายตัวอย่างการใช้ Function Notation และการหาค่าของฟังก์ชันดังนี้

Example 3. Let $f(x) = 3x + 1$ and $g(x) = 2x^2 + 1$. Find the requested values.

1. $f(0)$

Solution $f(x) = 3x + 1$
 $f(0) = 3(0) + 1$
 $= 1$

2. $g(2)$

Solution $g(x) = 2x^2 + 1$
 $g(2) = 2(2)^2 + 1$
 $= 9$

3. $f(t)$

Solution $f(x) = 3x + 1$
 $f(t) = 3(t) + 1$
 $= 3t + 1$

4. $g(w)$

Solution $g(x) = 2x^2 + 1$
 $g(w) = 2(w)^2 + 1$
 $= 2w^2 + 1$

5. $f(3 + \sqrt{2})$

Solution $f(x) = 3x + 1$
 $f(3 + \sqrt{2}) = 3(3 + \sqrt{2}) + 1$
 $= 3 + 3\sqrt{2} + 1$
 $= 4 + 3\sqrt{2}$

6. $g(\sqrt{2})$

Solution $g(x) = 2x^2 + 1$
 $g(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 1$
 $= 2(2) + 1$
 $= 4 + 1$
 $= 5$

2.14 นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของความสัมพันธ์ ฟังก์ชันและ Function Notation และการหาค่าของฟังก์ชันจากที่เรียนทั้งหมดในคาบนี้

คาบที่ 4

2.15 ครูแจกใบความรู้ที่ 1 และใบงานที่ 1

2.16 ครูแนะนำทักษะการทำงานกลุ่มร่วมกัน

3. ขั้นตอนทำงานกลุ่ม

3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้ที่ 1 และทำใบงานที่ 1

3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน

3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

คาบที่ 5

4. ขั้นทดสอบ

- 4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อย ชุดที่ 1 จำนวน 10 ข้อ 20 นาที โดยให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล ห้ามปรึกษาหรือซักถามกัน
- 4.2 ครูตรวจให้คะแนนแบบทดสอบย่อย โดยให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ถ้าตอบถูก และให้คะแนนเป็น 0 (ศูนย์) ถ้าตอบข้อนั้นผิด
- 4.3 ครูนำคะแนนสอบของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มและถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

- 5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน
- 5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม
- 5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้ที่ 1
2. ใบงานที่ 1
3. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 1
4. แผ่นใสของ Example 2

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน การอภิปรายและการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการเข้าร่วมกิจกรรมของกลุ่ม
3. ผลจากการตรวจแบบทดสอบย่อยชุดที่ 1

แผนการสอนที่ 2

วิชา คณิตศาสตร์

ชั้น ปวช. 2

เรื่อง Inverse Functions

จำนวน 2 คาบ

สาระสำคัญ

Definition of the inverse of a function

Let f be a one-to-one function. The inverse of f , denoted f^{-1} , is the set of all ordered pairs of the form (b, a) , where (a, b) belongs to f .

To Find the Inverse of the Function $y = f(x)$

1. Verify that f is a one-to-one function.
2. Replace $f(x)$ with y .
3. Interchange x and y .
4. Solve the equation resulting from step 3 for the new y .
5. Replace the new y with $f^{-1}(x)$

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. ตรวจสอบฟังก์ชัน 1-1 ได้
2. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่
3. หาอินเวอร์สของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. ตรวจสอบได้ว่า 2 ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกันหรือไม่
5. เปลี่ยนฟังก์ชันอินเวอร์สให้เป็นฟังก์ชันเดิมได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

คาบที่ 6

1. ขั้นเตรียม

- 1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนเหมือนเดิม

1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

2.1 ครูทบทวนเรื่องฟังก์ชันโดยการสุ่มนักเรียนประมาณ 2 คน จากกลุ่มใดก็ได้ ให้ออกมาเขียนฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก คนละ 1 ฟังก์ชัน บนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนคนอื่น ๆ ในห้องเรียนช่วยกันหาโดเมนและเรนจ์

2.2 ครูยกตัวอย่างประกอบดังนี้

$f = \{(1,3),(2,4),(3,5)\}$ is a one-to-one function.

Inverse of $f : f^{-1} = \{(3,1),(4,2),(5,3)\}$ is a function

$g = \{(-1,1),(0,2),(1,6)\}$ is a one-to-one function.

Inverse of $g : g^{-1} = \{(1,-1),(2,0),(6,1)\}$ is a function

หรือเขียนเป็นแผนภาพดังนี้

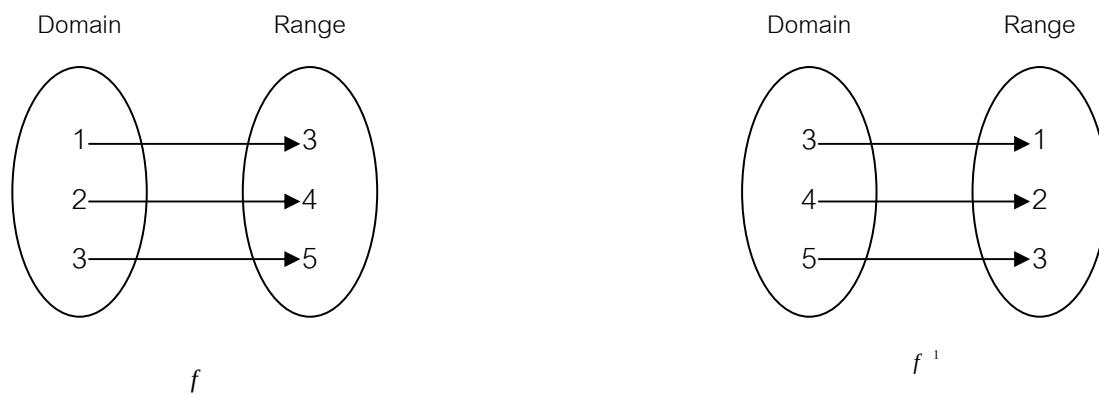


Figure 1

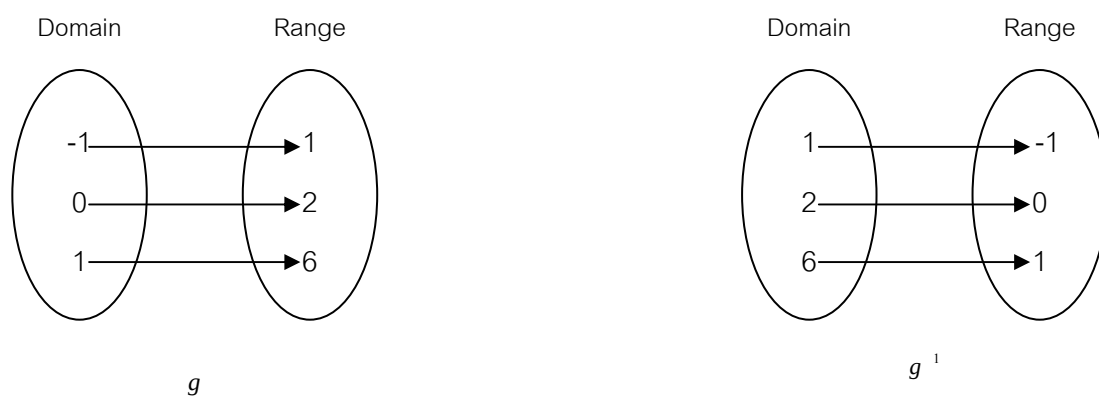


Figure 2

2.3 ครูให้นักเรียน 2 คน จากกลุ่มใดก็ได้ทำสัณนิษฐานเกี่ยวกับฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก และหาอินเวอร์สของฟังก์ชันด้วย คนละ 1 ฟังก์ชัน บนกระดานดำ เช่น สมมตินักเรียน คนที่ 1 ยกตัวอย่างดังนี้

$f = \{(4, -1), (6, 3), (8, 5)\}$ is a one-to-one function.

$f^{-1} = \{(-1, 4), (3, 6), (5, 8)\}$ is a function

สามารถเขียนแบบแผนภาพดังนี้

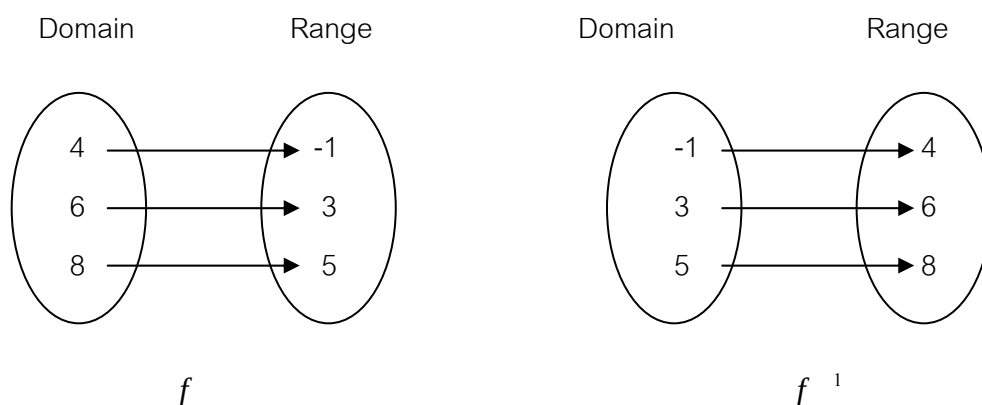


Figure 3

สมมตินักเรียนคนที่ 2 ยกตัวอย่างดังนี้

$g = \{(10, 2), (9, 3), (8, 2)\}$ is not a one-to-one function , so it has no inverse function.

2.4 นักเรียนช่วยกันสรุป การหาฟังก์ชันอินเวอร์สว่าทำได้อย่างไรและเมื่อใดจะไม่สามารถหาฟังก์ชันอินเวอร์สได้ ตลอดจนสรุปนิยามของฟังก์ชันอินเวอร์สจากตัวอย่าง 2.3

2.5 ครูสรุปนิยามของ Inverse Function ให้นักเรียนอีกครั้ง

Definition of the inverse of a function

Let f be a one-to-one function. The inverse of f , denoted f^{-1} , is the set of all ordered pairs of the form (b, a) , where (a, b) belongs to f .

To Find the Inverse of the function $y = f(x)$

1. Verify that f is one-to-one.
2. Replace $f(x)$ with y .
3. Interchange x and y .
4. Solve the equation resulting from step 3 for the new y .
5. Replace the new y with $f^{-1}(x)$.

2.6 ตรวจสอบและอธิบาย Inverse Function ดังนี้

Example 1 Find an equation for each inverse and solve for $f^{-1}(x)$.

(a) $f(x) = x + 3$

Solution Step1 Check one-to-one function of $f(x)$ by supposing
 $f(a) = f(b)$, if you prove $a = b$ then f is a one-to-one function.

$$f(x) = x + 3$$

$$f(a) = a + 3$$

$$f(b) = b + 3$$

if $f(a) = f(b)$

then $a + 3 = b + 3$

$$a = b$$

So $f(x) = x + 3$ is a one-to-one function.

Step2 Replace $f(x)$ with y .

$$y = x + 3$$

Step3 Interchange x and y

$$x = y + 3$$

Step4 Solve for y

$$x = y + 3$$

$$x - 3 = y$$

$$y = x - 3$$

Step5 Replace the new y with $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = x - 3$$

Step6 Examine the solution obtained.

$$y = x - 3$$

$$x = y + 3$$

$$x + 3 = y$$

$$y = x + 3$$

$$(b) \ g(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

Solution Step1 Check one-to-one function of $g(x)$ by supposing $g(a) = g(b)$, if you prove $a = b$ then g is a one-to-one function.

$$g(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$g(a) = \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}$$

$$g(b) = \frac{2}{5}b + \frac{3}{5}$$

$$\text{if } g(a) = g(b)$$

$$\text{then } \frac{2}{5}a + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}b + \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}a = \frac{2}{5}b$$

$$10a = 10b$$

$$a = b$$

So $g(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ is a one-to-one function.

Step2 Replace $g(x)$ with y .

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

Step3 Interchange x and y

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}$$

Step4 Solve for y

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{3}{5}$$

$$x - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}y$$

$$\frac{5}{2}x - \frac{3}{5} = y$$

$$\frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = y$$

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

Step5 Replace the new y with $g^{-1}(x)$

$$g^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

Step6 Examine the solution obtained.

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}$$

$$x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}y$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{2} = y$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} = y$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

2.7 นักเรียนช่วยกันสรุปการหา Inverse Function จากตัวอย่างทั้งหมดที่เรียนในคาบนี้

2.8 ครูแจกใบความรู้ที่ 2 และใบงานที่ 2

2.9 ครูแนะนำทักษะการทำงานกลุ่มร่วมกัน

3. ขั้นทำงานกลุ่ม

3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้ที่ 2 และทำใบงานที่ 2

3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

คาบที่ 7

3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน

3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

4. ขั้นทดสอบ

4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2 จำนวน 5 ข้อ 10 นาที โดยให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล ห้ามปรึกษาหรือซักถามกัน

4.2 ครูตรวจให้คะแนนแบบทดสอบย่อย โดยให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ถ้าตอบถูก และให้คะแนนเป็น 0 (ศูนย์) ถ้าตอบข้อนั้นผิด

4.3 ครูนำคะแนนสอบของนักเรียน แต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม และถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

- 5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน
- 5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม
- 5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้ที่ 2
2. ใบงานที่ 2
3. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน การอภิปราย และการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการเข้าร่วมกิจกรรมของกลุ่ม
3. ผลจากการตรวจแบบทดสอบย่อยชุดที่ 2

แผนการสอนที่ 3

วิชา คณิตศาสตร์
เรื่อง Algebra of Functions

ชั้น ปวช. 2
จำนวน 3 คาบ

สาระสำคัญ

พีชคณิตของฟังก์ชัน คือ การสร้างฟังก์ชันใหม่ โดยนำฟังก์ชันสองฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันในเซตของจำนวนจริง

$$f + g = \{(x, y) | y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f - g = \{(x, y) | y = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f \cdot g = \{(x, y) | y = f(x) \cdot g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f / g = \{(x, y) | y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\}$$

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามพีชคณิตของฟังก์ชันได้
2. หาฟังก์ชันใหม่โดยการบวก ลบ คูณ และหาร ฟังก์ชันต่าง ๆ ได้
3. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผลลัพธ์ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

คาบที่ 8

1. ขั้นเตรียม

- 1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนเหมือนเดิม
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

- 2.1 ครูและนักเรียนร่วมกันทบทวนเรื่อง Function Notation โดยระบุให้นักเรียนกลุ่มที่ 1 ยกตัวอย่าง เช่น สมมติ $f(x) = x^2$ จงหาค่า $f(3)$

2.2 ครูให้นักเรียน 1 คน จากกลุ่มได้ก็ได้อาสาสมัครมาเฉลยคำตอบข้อ 2.1 โดยการเขียนเป็นแผนภาพ เปรียบ $f(x) = x^2$ เหมือนกับเครื่องจักรชนิดหนึ่ง ดังรูป fig.1

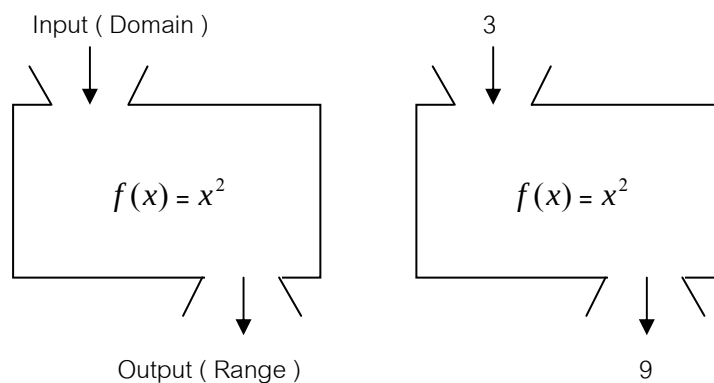


Figure 1

2.3 ครูระบุให้นักเรียน 2 คน จากกลุ่ม 2 มายกตัวอย่างฟังก์ชัน คนละ 1 ฟังก์ชัน เช่น สมมตินักเรียนคนที่ 1 ให้ $f(x) = 3x$ นักเรียนคนที่ 2 ให้ $g(x) = 2x^2$ จากนั้นครูกำหนดให้หา ข้อ 1 $f(5) + g(5)$ ข้อ 2 $f(0) - g(0)$ ข้อ 3 $f(-3) \cdot g(-3)$ และข้อ 4 $f(-2)/g(-2)$ แล้วสุ่มนักเรียน 4 คนจากกลุ่มทั้งหมดส่งตัวแทนทีละคนมาเฉลยคำตอบบนกระดานดำ

If f and g are functions and x is in the domain of both function, then :

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; g(x) \neq 0$

จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปตัวอย่างข้อ 2.3 ที่กำหนด $f(x) = 3x$ และ $g(x) = 2x^2$ จงหา $f(5) + g(5)$ โดยการเขียนเป็นแผนภาพ เปรียบ $f(x) = 3x$ เป็นเครื่องจักรชนิดที่หนึ่ง ส่วน $g(x) = 2x^2$ เป็นเครื่องจักรชนิดที่สอง สิ่งที่ได้ลงไปเครื่องจักรแต่ละชนิดเรียกว่าโดเมน และผลผลิตที่ออกมาจะเรียกว่าเรนจ์ดังรูป fig.2

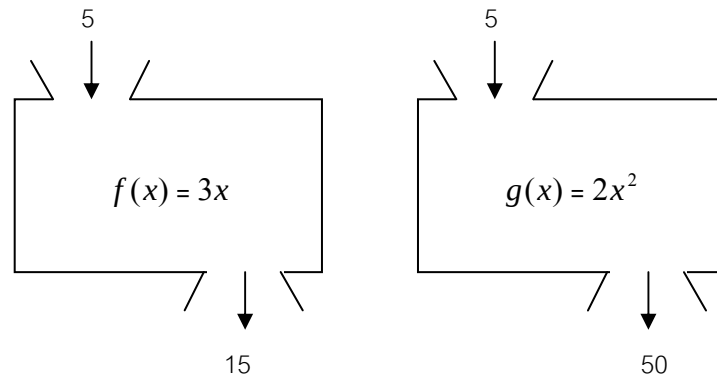


Figure 2

จากนั้นนำผลผลิตที่ออกมาจากเครื่องจักรมารวมกันจะได้ $f(5) + g(5) = 15 + 50 = 65$ เป็นต้น

2.6 ครูซักถามและอธิบายตัวอย่างการบวก ลบ คูณ และหารของฟังก์ชันต่างๆ โดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

Example 1 Let $f(x) = x^3 - 1$ and $g(x) = x - 1$ Find :

(a) $(f + g)(x)$

Solution

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= x^3 - 1 + x - 1 \\ &= x^3 + x - 2 \end{aligned}$$

(b) $(f - g)(x)$

Solution

$$\begin{aligned} (f - g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 1 - (x - 1) \\ &= x^3 - 1 - x + 1 \\ &= x^3 - x \end{aligned}$$

(c) $(f \cdot g)(x)$

Solution

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (x^3 - 1)(x - 1) \\ &= x^4 - x^3 - x + 1 \end{aligned}$$

(d) $\Rightarrow f/g(x)$

Solution $\Rightarrow f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad ; x \neq 1$$

$$= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

$$= x^2 + x + 1$$

Example 2 Let $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$ and $g(x) = x^2 - x - 2$. Find :

(a) $(f + g)(x)$

Solution $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{x - 2}{x + 1} + x^2 - x - 2 \quad ; x \neq -1$$

$$= \frac{x - 2 + (x + 1)(x^2 - x - 2)}{x + 1}$$

$$= \frac{x - 2 + x^3 - x^2 - 2x + x^2 - x - 2}{x + 1}$$

$$= \frac{x^3 - 2x - 4}{x + 1}$$

(b) $(f - g)(x)$

Solution $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= \frac{x - 2}{x + 1} - (x^2 - x - 2) \quad ; x \neq -1$$

$$= \frac{x - 2 - [(x + 1)(x^2 - x - 2)]}{x + 1}$$

$$= \frac{x - 2 - [x^3 - x^2 - 2x + x^2 - x - 2]}{x + 1}$$

$$= \frac{x - 2 - [x^3 - 3x - 2]}{x + 1}$$

$$= \frac{x - 2 - x^3 + 3x + 2}{x + 1}$$

$$= \frac{-x^3 + 4x}{x + 1}$$

$$(c) (f \cdot g)(x)$$

Solution $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{x+1} \cdot (x^2 - x - 2) ; x \neq -1 \\
 &= \frac{x-2}{x+1} \cdot (x-2)(x+1) \\
 &= (x-2)(x-2) \\
 &= x^2 - 4x + 4
 \end{aligned}$$

$$(d) f/g(x)$$

Solution $f/g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x-2}{x+1} ; x \neq -2, -1 \\
 &= \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{1}{x^2 - x - 2} \\
 &= \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{1}{(x-2)(x+1)} \\
 &= \frac{1}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{1}{x^2 + 2x + 1}
 \end{aligned}$$

2.7 นักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับการสร้างฟังก์ชันที่เกิดจากการบวก ลบ คูณ และหาร ของฟังก์ชันต่าง ๆ จากตัวอย่างทั้งหมดที่เรียนในคาบนี้

คาบที่ 9

2.8 ครูแจกใบความรู้ที่ 3 และใบงานที่ 3

2.9 ครูแนะนำทักษะการทำงานกลุ่มร่วมกัน

3. ขั้นตอนทำงานกลุ่ม

3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้ที่ 3 และทำใบงานที่ 3

3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน

3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

คาบที่ 10

4. ขั้นทดสอบ

- 4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3 จำนวน 10 ข้อ 20 นาที โดยให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล ห้ามปรึกษาหรือซักถามกัน
- 4.2 ครูตรวจให้คะแนนแบบทดสอบย่อย โดยให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ถ้าตอบถูก และให้คะแนนเป็น 0 (ศูนย์) ถ้าตอบข้อนั้นผิด
- 4.3 ครูนำคะแนนสอบของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม และถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

- 5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน
- 5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม
- 5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้ที่ 3
2. ใบงานที่ 3
3. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน การอภิปรายและการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการเข้าร่วมกิจกรรมของกลุ่ม
3. ผลจากการตรวจแบบทดสอบย่อยชุดที่ 3

แผนการสอนที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์
เรื่อง Composite Functions

ชั้น ปวช. 2
จำนวน 3 คาบ

สาระสำคัญ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันและ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ กำหนดโดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่ง $f(x) \in D_g$

จุดประสงค์การเรียนรู้ มุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทได้
2. หาฟังก์ชันคอมโพสิทของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

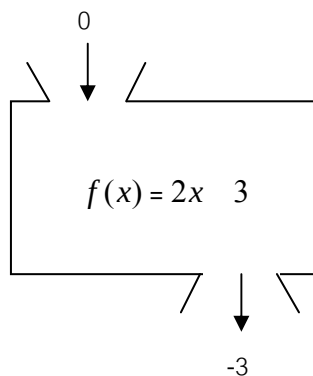
คาบที่ 11

1. ขั้นเตรียม

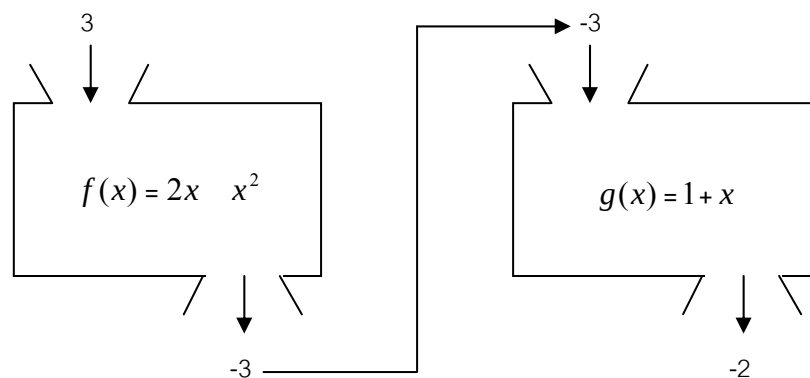
- 1.1 ครูจัดกลุ่มนักเรียนเหมือนเดิม
- 1.2 ครูแจ้งจุดประสงค์ของบทเรียน

2. ขั้นสอน

- 2.1 ครูให้นักเรียน 1 คน จากกลุ่มใดก็ได้ อาสาสมัครมายกตัวอย่างโจทย์การหาค่า Function Notation และเฉลยคำตอบ โดยการเขียนแผนภาพบนกระดานดำ เช่น สมมติ $f(x) = 2x + 3$ จงหาค่า $f(0)$



2.2 ครุยกตัวอย่าง $f(x) = 2x - x^2$ และ $g(x) = 1 + x$ จงหา $(g \circ f)(3)$



2.3 ครุุ่มให้นักเรียน 1 คน ลองยกตัวอย่างอีก 1 ตัวอย่าง เช่น $f(x) = x^2 + 1$ และ

$g(x) = 3x$ จงหา $(g \circ f)(4)$

2.4 นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันปรึกษาหารือจากนั้นครูขออาสาสมัครนักเรียน 1 คน มาเฉลยบนกระดานดำ

2.5 นักเรียนช่วยกันสรุปตัวอย่าง $(g \circ f)(3), (g \circ f)(4)$ ให้ออกมาเป็นคำนิยามของ $(g \circ f)(x)$ หรือฟังก์ชันคอมโพสิท

2.6 ครุสรุปนิยามของ Composite Functions ให้นักเรียนอีกครั้ง

Let f and g be functions. The composite function or composition of g and f , written $g \circ f$, is defined by

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

for all x in the domain of f such that $f(x)$ is in the domain of g and $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

2.7 ครูชักถามและอธิบายฟังก์ชันคอมโพสิท โดยใช้ตัวอย่างประกอบดังนี้

Example 1 Let $f(x) = x^2$ and $g(x) = x + 2$. Find :

(a) $(g \circ f)(x)$

Solution Step1 Check $R_f = [0, \infty)$ and $D_g = R$
 $\therefore R_f \cap D_g = [0, \infty)$, So $g \circ f$ exists.

$$\begin{aligned} \text{Step2} \quad (g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[x^2] \\ &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

(b) $(f \circ g)(x)$

Solution Step1 Check $R_g = R$ and $D_f = R$
 $\therefore R_g \cap D_f = R$, So $f \circ g$ exists.

$$\begin{aligned} \text{Step2} \quad (f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[x + 2] \\ &= (x + 2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Example2 Let $f = \{0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 9 \rightarrow \}$

$$g = \{0, 5 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \}$$

find (a) $g \circ f$

Solution Step1 Check $R_f = \{0, 1, 5, 9\}$ and $D_g = \{0, 1, 2, 5\}$
 $\therefore R_f \cap D_g = \{0, 5\}$, So $g \circ f$ exists.

$$\begin{aligned} \text{Step2} \quad f &= \{0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 9 \rightarrow \} \\ g &= \{0, 5 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \} \end{aligned}$$

$$\text{So } g \circ f = \{0, 5 \rightarrow 2, 2 \rightarrow \}$$

(b) $f \circ g$

Solution Step1 Check $R_g = \{5, 0, 3, 2\}$ and $D_f = \{0, 1, 2, 3\}$
 $\therefore R_g \cap D_f = \{0, 3, 2\}$, So $f \circ g$ exists.

$$\begin{aligned} \text{Step2} \quad f &= \{0, 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 9 \rightarrow \} \\ g &= \{0, 5 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 5, 2 \rightarrow \} \end{aligned}$$

$$\text{So } f \circ g = \{0, 1, 0 \rightarrow 2, 9 \rightarrow 5, 5 \rightarrow \}$$

2.8 นักเรียนช่วยกันสรุปการหาฟังก์ชันคอมโพสิทจากตัวอย่างทั้งหมดที่เรียนในคาบนี้

2.9 ครูแจกใบความรู้ที่ 4 และใบงานที่ 4

2.10 ครูแนะนำทักษะการทำงานกลุ่มร่วมกัน

คาบที่ 12

3. ขั้นทำงานกลุ่ม

3.1 นักเรียนทุกคนในกลุ่มร่วมกันศึกษาใบความรู้ที่ 4 และทำใบงานที่ 4

3.2 ครูให้คำแนะนำช่วยเหลือ เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัย

คาบที่ 13

3.3 ครูให้แต่ละกลุ่มตรวจสอบคำตอบกัน

3.4 ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนมานำเสนอคำตอบ

4. ขั้นทดสอบ

4.1 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4 จำนวน 5 ข้อ 10 นาที โดยให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล ห้ามปรึกษาหรือชักถามกัน

4.2 ครูตรวจให้คะแนนแบบทดสอบย่อย โดยให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ถ้าตอบถูก และให้คะแนนเป็น 0 (ศูนย์) ถ้าตอบข้อนั้นผิด

4.3 ครูนำคะแนนสอบของนักเรียนแต่ละคนมาคิดเป็นคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม และถือว่าเป็นคะแนนของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มด้วย

5. ขั้นสรุป

5.1 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปบทเรียน

5.2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายการทำงานกลุ่ม

5.3 ให้รางวัลแก่กลุ่มที่ได้คะแนนเฉลี่ยมากที่สุด

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้ที่ 4
2. ใบงานที่ 4
3. แบบทดสอบย่อยชุดที่ 4

การวัดและประเมินผล

1. สังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียน การอภิปรายและการตอบคำถามของนักเรียน
2. สังเกตการเข้าร่วมกิจกรรมของกลุ่ม
3. ผลจากการตรวจแบบทดสอบย่อยชุดที่ 4
- 4.

คาบที่ 14

Posttest 1 คาบ หลังทดลอง

Knowledge Sheet I

Definition of a relation

A relation is a set of ordered pairs. The set of all first coordinates is called the domain of the relation. The set of all second coordinates is the range.

Definition of a function

A function is a relation in which each first coordinate corresponds to exactly one second coordinate.

Example 1 State the domain and the range of $r_1 = \{(-2,2), (-1,2), (0,3)\}$. Determine whether the relation r_1 is a function.

Solution **Step1** Understanding the problem

"What are the data?"

$$r_1 = \{(-2,2), (-1,2), (0,3)\}$$

"What is the unknown?"

Domain and range of the function.

Step2 Devising a plan

Identify the definitions of a relation, a function, domain and range.

Definition of a relation

A relation is a set of ordered pairs. The set of all first coordinates is called the domain of the relation. The set of all second coordinates is the range.

Definition of a function

A function is a relation in which each first coordinate corresponds to exactly one second coordinate.

Step3 Carrying out the plan

$$D_{r_1} = \{-2, -1, 0\}$$

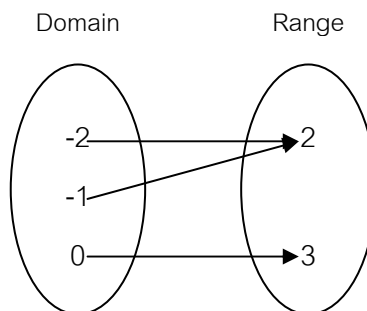
$$R_{r_1} = \{2, 3\}$$

The relation is a function : each first coordinate corresponds to

exactly one second coordinate.

Step4 Looking back

Trying other method to check if the results are the same or not.



The relation is a function.

Example 2 You earn \$ 8.5 an hour. These daily earnings depend on the number of hours each day you work. Write your daily earnings y as a function of the number of hours x that you work each day. Then state the range if the domain is $\{3,5\}$.

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

You earn \$ 8.5 an hour.

"What is the unknown?"

The range if the domain is $\{3,5\}$.

Step2 Devising a plan

Find the connection between the data and the unknown, and write the equation.

$$y = 8.5x, \text{ when } x \text{ is ?}$$

Replace x with 3 and 5 .

Step3 Carrying out the plan

$$y = 8.5x$$

Replace x with 3 in $y = 8.5x$

$$\text{Thus } y = 8.5(3) = \$ 25.5$$

Replace x with 5 in $y = 8.5x$

$$\text{Thus } y = 8.5(5) = \$ 42.5$$

So the range is $\{25.5, 42.5\}$

Step4 Looking back

Examine the solution obtained.

$$y = 8.5x$$

Replace y with \$ 25.5 in $y = 8.5x$

$$25.5 = 8.5x$$

$$\text{Thus } x = \frac{25.5}{8.5} = 3$$

Replace y with \$ 42.5 in $y = 8.5x$

$$42.5 = 8.5x$$

$$\text{Thus } x = \frac{42.5}{8.5} = 5$$

So the domain $\{3, 5\}$ is correct.

Function Notation

If a function f assigns a value y to a certain x in the domain, we write

$$y = f(x)$$

We read $f(x)$ as “ f of x ”; it is called the value of f at x .

Note that $f(x)$ is not the product of f and x .

If a function f is expressed by a relation of the type $y = f(x)$, then x is called the independent variable or argument of f and y is called the dependent variable.

Example 3 Let $f(x) = 2x - 3$ and $g(x) = 2x^2 + 1$. Determine

(a) $3f(a) - h$

(b) $4f(x+5)$

(c) $\frac{g(t+0.3)}{2}$

Solution (a) $3f(a) - h$

Step1 Understanding the problem

“What are the data?”

$$f(x) = 2x - 3 \text{ and } g(x) = 2x^2 + 1$$

“What is the unknown?”

$$3f(a) - h$$

Step2 Devising a plan

Planning the method of solving the problem.

● Method 1

Step1 Replace x with a in $f(x)$

Step2 Step 1 multiply by 3

● Method 2

Replace x with $a + h$ in $f(x)$ and multiply by 3 simultaneously.

Step3 Carrying out the plan

$$\begin{aligned} \text{Method1} \quad f(x) &= 2x - 3 \\ f(a + h) &= 2(a + h) - 3 \\ &= 2a + 2h - 3 \\ 3f(a + h) &= 3(2a + 2h - 3) \\ &= 6a + 6h - 9 \end{aligned}$$

Step4 Looking back

Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned} \text{Method2} \quad 3f(a + h) &= 3[2(a + h) - 3] \\ &= 3[2a + 2h - 3] \\ &= 6a + 6h - 9 \end{aligned}$$

Solution (b) $4f(x + 5)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = 2x - 3 \text{ and } g(x) = 2x^2 + 1$$

"What is the unknown?"

$$4f(x + 5)$$

Step2 Devising a plan

Planning the method of solving the problem.

● Method 1

Step1 Replace x with $x + 5$ in $f(x)$

Step2 Step1 multiply by - 4

● Method 2

Replace x with $x + 5$ in $f(x)$ and multiply by - 4 simultaneously.

Step3 Carrying out the plan

$$\begin{aligned} \text{Method1} \quad f(x) &= 2x - 3 \\ f(x + 5) &= 2(x + 5) - 3 \\ &= 2x + 10 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x + 7 \\
 4f(x+5) &= 4(2x + 7) \\
 &= 8x + 28
 \end{aligned}$$

Step4 Looking back

Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2

$$\begin{aligned}
 4f(x+5) &= 4[2(x+5) - 3] \\
 &= 4[2x+10-3] \\
 &= 4[2x+7] \\
 &= 8x + 28
 \end{aligned}$$

Solution (c) $\frac{g(t+0.3)}{2}$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = 2x - 3 \text{ and } g(x) = 2x^2 + 1$$

"What is the unknown?"

$$\frac{g(t+0.3)}{2}$$

Step2 Devising a plan

Planning the method of solving the problem.

● Method 1

Step1 Replace x with $t+0.3$ in $g(x)$

Step2 Step1 divide by 2

● Method 2

Replace x with $t+0.3$ in $g(x)$ and divide by 2 simultaneously.

Step3 Carrying out the plan

Method1

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 2x^2 + 1 \\
 g(t+0.3) &= 2(t+0.3)^2 + 1 \\
 &= 2(t^2 + 0.6t + 0.09) + 1 \\
 &= 2t^2 + 1.2t + 0.18 + 1 \\
 &= 2t^2 + 1.2t + 1.18 \\
 \frac{g(t+0.3)}{2} &= \frac{2t^2 + 1.2t + 1.18}{2} \\
 &= t^2 + 0.6t + 0.59
 \end{aligned}$$

Step4 Looking back

Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}
 \text{Method2} \quad \frac{g(t+0.3)}{2} &= \frac{2(t+0.3)^2 + 1}{2} \\
 &= \frac{2(t^2 + 0.6t + 0.09) + 1}{2} \\
 &= \frac{2t^2 + 1.2t + 0.18 + 1}{2} \\
 &= t^2 + 0.6t + 0.59
 \end{aligned}$$

Example 4 An open box is to be formed from a rectangular sheet of tin 14×20 in². by cutting equal squares, from the four corners and turning up the sides. Express the volume V of the box as a function of x and find the volume when the height is 5 in.

Solution **Step1** Understanding the problem

"What are the data?"

An open box is to be formed from a rectangular sheet of tin 14×20 in². by cutting equal squares, from the four corners and turning up the sides.

"What is the unknown?"

The volume when the height is 5 in.

Step2 Devising a plan

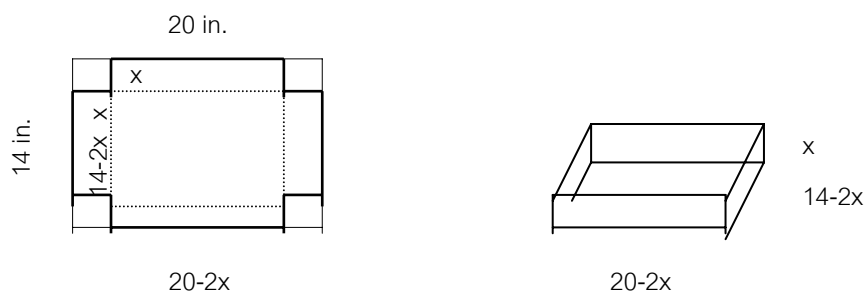
Give variable.

Height = x

Width = $14 - 2x$

Length = $20 - 2x$

Draw a figure



Identify the formula of volume of a rectangular box.

Volume = width x length x height

Translate the verbal sentence to symbols.

Express the volume V of the box as a function of $x = V(x)$

Find the connection between the data and the unknown.

$$V(x) = (14 - 2x)(20 - 2x)x$$

Step3 Carrying out the plan

$$\begin{aligned} v(x) &= (14 - 2x)(20 - 2x)x \\ &= 280x - 28x^2 - 40x^2 + 4x^3 \\ &= 280x - 68x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Replace x with 5 in $v(x)$

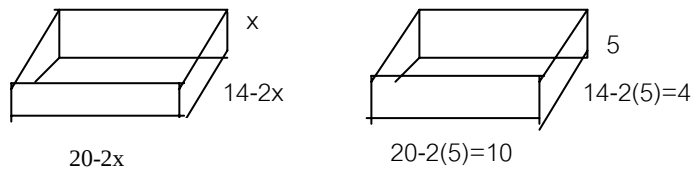
$$\begin{aligned} v(5) &= 280(5) - 68(5)^2 + 4(5)^3 \\ &= 1400 - 68(25) + 4(125) \\ &= 1400 - 1700 + 500 \\ &= -300 + 500 \\ &= 200 \text{ in}^3 \end{aligned}$$

So the volume is 200 in^3 .

Step4 Looking back

Examine the solution obtained.

Replace x with 5 in the figure



Height = 5

Width = $14 - 2(5) = 14 - 10 = 4$

Length = $20 - 2(5) = 20 - 10 = 10$

So the volume = width x length x height

$$= 4 \times 10 \times 5 = 200 \text{ in}^3$$

Knowledge Sheet II

Definition of the inverse of a function

Let f be a one-to-one function. The inverse of f , denoted f^{-1} , is the set of all ordered pairs of the form (b, a) , where (a, b) belongs to f .

To Find the Inverse of the Function $y = f(x)$

1. Verify that f is a one-to-one function.
2. Replace $f(x)$ with y .
3. Interchange x and y .
4. Solve the equation resulting from step 3 for the new y .
5. Replace the new y with $f^{-1}(x)$.

Example1 Let $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$, determine an equation of the inverse and solve for $f^{-1}(x)$.

Solution **Step1** Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

"What is the unknown?"

The equation of the inverse and the value of y .

Step2 Devising a plan

Planning the method of solving inverse function.

Step1 Check one-to-one function.

Step2 Replace $f(x)$ with y .

Step3 Interchange x and y .

Step4 Solve for y

Step5 Replace the new y with $f^{-1}(x)$.

Step3 Carrying out the plan

Check one-to-one function of $f(x)$ by supposing $f(a) = f(b)$,

if you prove $a = b$ then f is a one-to-one function.

Method 1

$$f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$f(a) = \frac{7}{3}a + \frac{2}{3}$$

$$f(b) = \frac{7}{3}b + \frac{2}{3}$$

if $f(a) = f(b)$

then $\frac{7}{3}a + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}b + \frac{2}{3}$

$$\frac{7}{3}a = \frac{7}{3}b$$

$$21a = 21b$$

$$a = b$$

So $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ is a one-to-one function.

$$f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

Replace $f(x)$ with y

$$y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$$

Interchange x and y

$$x = \frac{7}{3}y + \frac{2}{3}$$

Solve for y

$$x - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}y$$

$$\frac{3}{7}\left(x - \frac{2}{3}\right) = y$$

$$\frac{3}{7}x - \frac{2}{7} = y$$

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$$

Replace the new y with $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$$

Step4 Looking back

Examine the solution obtained.

Method 2

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{3}{7}x + \frac{2}{7} \\
 x &= \frac{3}{7}y + \frac{2}{7} \\
 x + \frac{2}{7} &= \frac{3}{7}y \\
 \frac{7}{3}\left(x + \frac{2}{7}\right) &= y \\
 \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} &= y \\
 y &= \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Example 2 Let $f(x) = \frac{1}{x+3}$ and $g(x) = \frac{1}{x} - 3$. Determine whether the functions are inverse with each other.

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \text{ and } g(x) = \frac{1}{x} - 3.$$

"What is the unknown?"

The given functions are inverse with each other or not.

Step2 Devising a plan

Planning the method of solving inverse function

Method 1

Step1 Check one-to-one function of $f(x)$

Step2 Replace $f(x)$ with y

Step3 Interchange x and y in $f(x)$

Step4 Solve for y

Step5 Replace the new y with $f^{-1}(x)$

Method 2

Step1 Check one-to-one function of $g(x)$

Step2 Replace $g(x)$ with y

Step3 Interchange x and y in $g(x)$

Step4 Solve for y

Step5 Replace the new y with $g^{-1}(x)$

Step3 Carrying out the plan

- Check one-to-one function of $f(x)$ by supposing $f(a) = f(b)$,
if you prove $a = b$ then f is a one-to-one function.

Method 1

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$f(a) = \frac{1}{a+3}$$

$$f(b) = \frac{1}{b+3}$$

$$\text{If } f(a) = f(b)$$

$$\text{Then } \frac{1}{a+3} = \frac{1}{b+3}$$

$$b+3 = a+3$$

$$\therefore b = a$$

$$\text{So } f(x) = \frac{1}{x+3} \text{ is a one-to-one function.}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

- Replace $f(x)$ with y

$$y = \frac{1}{x+3}$$

- Interchange x and y

$$x = \frac{1}{y+3}$$

- Solve for y

$$y+3 = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} - 3$$

$$y = \frac{1-3x}{x}$$

- Replace the new y with $f^{-1}(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x}$$

So the function is inverse.

Step4 Looking back

- Check one-to-one function of $g(x)$ by supposing $g(a) = g(b)$,
if you prove $a = b$ then g is a one-to-one function.

Method 2

$$g(x) = \frac{1-3x}{x}$$

$$g(a) = \frac{1-3a}{a}$$

$$g(b) = \frac{1-3b}{b}$$

If $g(a) = g(b)$

Then $\frac{1-3a}{a} = \frac{1-3b}{b}$

$$b(1-3a) = a(1-3b)$$

$$b-3ab = a-3ab$$

$$\therefore b = a$$

So $g(x) = \frac{1-3x}{x}$ is a one-to-one function.

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$g(x) = \frac{1-3x}{x}$$

- Replace $g(x)$ with y

$$y = \frac{1-3x}{x}$$

- Interchange x and y

$$x = \frac{1-3y}{y}$$

- Solve for y

$$xy = 1-3y$$

$$xy+3y = 1$$

$$y(x+3) = 1$$

$$y = \frac{1}{x+3}$$

- Replace the new y with $g^{-1}(x)$

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}$$

So the function is inverse.

Knowledge Sheet III

The Algebra of Functions

If f and g are functions and x is in the domain of both functions, then:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, provided $g(x) \neq 0$

Example 1 Let $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ and $g(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Determine

(a) $(f+g)(3)$

(b) $(f-g)(5)$

(a) $(f \cdot g)(10)$

(b) $(f/g)(9)$

Solution (a) $(f+g)(3)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ and } g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(f+g)(3)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- Planning the method of solving the problem.

- Method 1

Step1 Use the definition of $(f+g)(x)$

Step2 Replace x with 3 in Step1

● Method 2

Replace x with 3 in $f(x) + g(x)$ and then determine the value of $f(x) + g(x)$.

Step3 Carrying out the plan

Method1 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{2x+1}{x-2} + 2x^2 - 3x - 2; x \neq 2$$

$$= \frac{2x+1+(x-2)(2x^2-3x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{2x+1+2x^3-3x^2-2x-4x^2+6x+4}{x-2}$$

$$= \frac{2x^3-7x^2+6x+5}{x-2}$$

$$\therefore (f + g)(3) = \frac{2(3)^3 - 7(3)^2 + 6(3) + 5}{3 - 2}$$

$$= 2(27) - 7(9) + 18 + 5$$

$$= 54 - 63 + 18 + 5$$

$$= 14$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2 $(f + g)(x) = \frac{2x+1}{x-2} + 2x^2 - 3x - 2; x \neq 2$

$$(f + g)(3) = \frac{2(3)+1}{3-2} + 2(3)^2 - 3(3) - 2$$

$$= 6 + 1 + 2(9) - 9 - 2$$

$$= 7 + 18 - 9 - 2$$

$$= 14$$

Solution (b) $(f - g)(5)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ and } g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(f - g)(5)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

- Planning the method of solving the problem.

- Method 1

Step1 Use the definition of $(f - g)(x)$

Step2 Replace x with 5 in Step1

- Method 2

Replace x with 5 in $f(x) - g(x)$ and then determine the value of $f(x) - g(x)$.

Step3 Carrying out the plan

Method1 $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x+1}{x-2} (2x^2 - 3x - 2); x \neq 2 \\ &= \frac{2x+1}{x-2} [(x-2)(2x^2 - 3x - 2)] \\ &= \frac{2x+1}{x-2} [2x^3 - 3x^2 - 2x - 4x^2 + 6x + 4] \\ &= \frac{2x+1}{x-2} [2x^3 - 7x^2 + 4x + 4] \\ &= \frac{2x+1}{x-2} [2x^3 + 7x^2 - 4x - 4] \\ &= \frac{2x+1}{x-2} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{1} \\ &= \frac{2x^3 + 7x^2 - 2x - 3}{x-2} \\ &= \frac{2(5)^3 + 7(5)^2 - 2(5) - 3}{5-2} \\ \therefore (f - g)(5) &= \frac{2(125) + 7(25) - 10 - 3}{3} \\ &= \frac{250 + 175 - 10 - 3}{3} \\ &= \frac{88}{3} \end{aligned}$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2 $(f \cdot g)(x) = \frac{2x+1}{x-2} (2x^2 - 3x - 2); x \neq 2$

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(5) &= \frac{2(5)+1}{5-2} [2(5)^2 - 3(5) - 2] \\ &= \frac{10+1}{3} [2(25) - 15 - 2] \\ &= \frac{11}{3} [50 - 15 - 2] \\ &= \frac{11}{3} \cdot 33 \\ &= \frac{11 \cdot 99}{3} \\ &= \frac{88}{3} \end{aligned}$$

Solution (c) $(f \cdot g)(10)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ and } g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(f \cdot g)(10)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

- Planning the method of solving the problem.

- Method 1

Step1 Use the definition of $(f \cdot g)(x)$

Step2 Replace x with 10 in Step1

- Method 2

Replace x with 10 in $f(x) \cdot g(x)$ and then determine the value of $f(x) \cdot g(x)$.

Step3 Carrying out the plan

Method1 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2x+1)}{(x-2)} (2x^2 - 3x - 2); x \neq 2 \\
&= \frac{(2x+1)}{(x-2)} (2x+1)(x-2) \\
&= (2x+1)(2x+1) \\
&= (2x+1)^2 \\
\therefore (f \circ g)(10) &= [2(10)+1]^2 \\
&= (20+1)^2 \\
&= (21)^2 \\
&= 441
\end{aligned}$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= \frac{(2x+1)}{(x-2)} (2x^2 - 3x - 2); x \neq 2 \\
(f \circ g)(10) &= \frac{2(10)+1}{10-2} [2(10)^2 - 3(10) - 2] \\
&= \frac{20+1}{8} [2(100) - 30 - 2] \\
&= \frac{21}{8} (200 - 30 - 2) \\
&= \frac{21}{8} (168) \\
&= (21)(21) \\
&= 441
\end{aligned}$$

Solution (d) $(f \circ g)(9)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \text{ and } g(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(f \circ g)(9)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f \circ g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ provided } g(x) \neq 0$$

- Planning the method of solving the problem.

● Method 1

Step1 Use the definition of $(f/g)(x)$

Step2 Replace x with 9 in Step1

● Method 2

Replace x with 9 in $f(x)/g(x)$ and then determine the value of $f(x)/g(x)$.

Step3 Carrying out the plan

Method1 $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, provided $g(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{x^2-3x-2}; x \neq 2 \\ &= \frac{2x+1}{x^2-3x-2} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{2x+1}{x^2-3x-2} \cdot \frac{1}{(2x+1)(x-2)} \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} \\ \therefore (f/g)(9) &= \frac{1}{(9-2)^2} \\ &= \frac{1}{7^2} \\ &= \frac{1}{49} \end{aligned}$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2 $(f/g)(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x-2}; x \neq 2$

$$\begin{aligned} (f/g)(9) &= \frac{2(9)+1}{2(9)^2-3(9)-2} \\ &= \frac{18+1}{2(81)-27-2} \\ &= \frac{19}{161} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{19}{7}}{\frac{162}{27} \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\frac{19}{7}}{\frac{133}{2}} \\
 &= \frac{19}{7} \cdot \frac{2}{133} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} \\
 &= \frac{2}{49}
 \end{aligned}$$

Example 2 Let $f = \{(1,1), (2,4), (1,3), (2,4)\}$ and $g = \{(1,0), (2,2), (0,6), (1,7)\}$

Determine

- (a) $(f+g)(1)$
- (b) $(f-g)(2)$
- (c) $(f \cdot g)(1)$
- (d) $(f/g)(2)$

Solution (a) $(f+g)(1)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f = \{(1,1), (2,4), (1,3), (2,4)\} \text{ and } g = \{(1,0), (2,2), (0,6), (1,7)\}$$

"What is the unknown?"

$$(f+g)(1)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Step3 Carrying out the plan

$$f+g = \{(1,1), (2,6), (1,4)\}$$

So the answer is -4 .

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}
 (f+g)(1) &= f(1)+g(1) \\
 &= 3+(-7) \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

Solution (b) $(f - g)(-2)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f = \{(-1,1), (-2,4), (1,3), (2,4)\} \text{ and } g = \{(-1,0), (-2,2), (0,6), (1, -7)\}$$

"What is the unknown?"

$$(f - g)(-2)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Step3 Carrying out the plan

$$f - g = \{(-1,1), (-2,2), (1,10)\}$$

So the answer is 2.

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}
 (f - g)(-2) &= f(-2) - g(-2) \\
 &= 4 - 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Solution (c) $(f - g)(-1)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f = \{(-1,1), (-2,4), (1,3), (2,4)\} \text{ and } g = \{(-1,0), (-2,2), (0,6), (1, -7)\}$$

"What is the unknown?"

$$(f - g)(-1)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Step3 Carrying out the plan

$$f - g = \{(-1, 0), (-2, 8), (1, -21)\}$$

So the answer is 0.

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}(f - g)(-1) &= f(-1) - g(-1) \\ &= (1)(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Solution (d) $(f / g)(-2)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f = \{(-1, 1), (-2, 4), (1, 3), (2, 4)\} \text{ and } g = \{(-1, 0), (-2, 2), (0, 6), (1, -7)\}$$

"What is the unknown?"

$$(f / g)(-2)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

$$(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ provided } g(x) \neq 0$$

Step3 Carrying out the plan

$$f / g = \{(-2, 2), 1, \frac{3}{-7}\}$$

So the answer is 2.

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}(f/g)(2) &= \frac{f(2)}{g(2)} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

Knowledge Sheet IV

The composite functions

Let f and g be functions. The composite function or composition of g and f , written $g \circ f$, is defined by

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

for all x in the domain of f such that $f(x)$ is in the domain of g and $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

Example 1 Let $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ and $g(x) = x^2 + x - 2$. Determine

(a) $(f \circ g)(2)$

(b) $(g \circ f)(-1)$

Solution (a) $(f \circ g)(2)$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ and } g(x) = x^2 + x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(f \circ g)(2)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \text{ and } R_g \cap D_f \neq \emptyset$$

- Check $R_g \cap D_f \neq \emptyset$
- Planning the method of solving the problem.

- Method 1

Step1 Use the definition of $(f \circ g)(x)$

Step2 Replace x with 2 in Step1

- Method 2

Step1 Replace x with 2 in $g(x)$

Step2 Replace x in Step1 $f(x)$

Step3 Carrying out the plan

• Check $R_g \cap D_f$

$$\text{If } g(x) = x^2 + x - 2$$

$$y = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = y$$

$$x^2 + x = y + 2$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = y + 2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{Then } x + \frac{1}{2} = y + \frac{9}{4}$$

$$\text{So } x + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ and } y + \frac{9}{4} \geq 0$$

$$\text{Express in term of } y : y + \frac{9}{4} \geq 0$$

$$y \geq -\frac{9}{4}$$

$$\therefore R_g = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$$

$$\text{If } f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\text{Then } D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

$$\therefore R_g \cap D_f = \left[-\frac{9}{4}, 1\right) \cup (1, \infty),$$

So $f \circ g$ exists.

Method1 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$$= f[x^2 + x - 2]$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 + 2}{x^2 + x - 2 - 1}$$

$$= \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 3}$$

$$(f \circ g)(2) = \frac{2^2 + 2}{2^2 + 2 - 3}$$

$$= \frac{4 + 2}{4 + 2 - 3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2 $(f \circ g)(2) = f[g(2)]$

$$= f[2^2 + 2 - 2]$$

$$= f[4 + 2 - 2]$$

$$= f(4)$$

$$= \frac{4+2}{4-1}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

Solution (b) $(g \circ f)(-1)$ Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ and } g(x) = x^2 + x - 2$$

"What is the unknown?"

$$(g \circ f)(-1)$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(g \circ f)(x)$
 $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ and $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
- Check $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
- Planning the method of solving the problem.

- Method 1

Step1 Use the definition of $(g \circ f)(x)$

Step2 Replace x with -1 in Step1

- Method 2

Step1 Replace x with -1 in $f(x)$

Step2 Replace x in Step1 $g(x)$

Step3 Carrying out the plan

- Check $R_f \cap D_g$

$$\text{If } f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$y = \frac{x+2}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+2$$

$$yx - y = x+2$$

$$yx - x = y+2$$

$$x(y-1) = y+2$$

$$\text{Then } x = \frac{y+2}{y-1}$$

$$\therefore R_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

$$\text{If } g(x) = x^2 + x - 2$$

$$\text{Then } D_g = (-\infty, \infty)$$

$$\therefore R_f \cap D_g = (-\infty, 1) \cup (1, \infty),$$

So $g \circ f$ exists.

Method1 $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$$= g \frac{x+2}{x-1}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}^2 + \frac{x+2}{x-1} - 2$$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} + \frac{(x+2)}{(x-1)} - 2$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 + (x-1)(x+2) - 2(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x - x - 2 - 2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x - x - 2 - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{9x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(g \circ f)(-1) = \frac{9(-1)}{(-1)^2 - 2(-1) + 1}$$

$$= \frac{9}{1+2+1}$$

$$= \frac{9}{4}$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Method2 $(g \circ f)(1) = g[f(1)]$

$$\begin{aligned}
 &= g \frac{1+2}{1-1} \\
 &= g \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2} - 2 \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 \\
 &= \frac{1-2-8}{4} \\
 &= -\frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

Example 2 Let $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,0)\}$ and $g = \{(0, 3), (1,1), (2,5), (3,4)\}$ Determine

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

Solution (a) $f \circ g$

Step1 Understanding the problem

“What are the data?”

Let $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,0)\}$ and

$g = \{(0, 3), (1,1), (2,5), (3,4)\}$

“What is the unknown?”

$$f \circ g$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(f \circ g)(x)$.
 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ and $R_g \cap D_f \neq \emptyset$
- Check $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

Step3 Carrying out the plan

- Check $R_g \cap D_f$
 $R_g = \{3,1,5,4\}$ and $D_f = \{0,1,2,4\}$
 $\therefore R_g \cap D_f = \{4\}$, So $f \circ g$ exists.

g	f	$f \circ g$
$0 \longrightarrow -3$	$\longrightarrow$ Not defined	$(1, 2)$ $(-3, 0)$
$1 \longrightarrow 1$	$\longrightarrow 1 \longrightarrow 2$	
$2 \longrightarrow 5$	$\longrightarrow$ Not defined	
$-3 \longrightarrow 4$	$\longrightarrow 4 \longrightarrow 0$	

So $f \circ g = \{(1,2), (-3,0)\}$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,0)\}$$

$$g = \{(0, 3), (1,1), (2,5), (-3,4)\}$$

$$f \circ g = R_g \cap D_f \neq \emptyset$$

$$f \circ g = \{(1,2), (-3,0)\}$$

Solution (b) $g \circ f$

Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

Let $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,0)\}$ and $g = \{(0, 3), (1,1), (2,5), (-3,4)\}$

"What is the unknown?"

$$g \circ f$$

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \text{ and } R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

- Check $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

Step3 Carrying out the plan

- Check $R_f \cap D_g$

$$R_f = \{1, 2, 3, 0\} \text{ and } D_g = \{0, 1, 2, -3\}$$

$$\therefore R_f \cap D_g = \{0, 1, 2\}, \text{ So } g \circ f \text{ exists.}$$

f		g	g o f
0	→ 1	1 → 1	(0, 1)
1	→ 2	2 → 5	(1, 5)
2	→ 3	Not defined	
4	→ 0	0 → -3	(4, -3)

So $g \circ f = \{(0,1), (1,5), (4, -3)\}$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,0)\}$$

$$g = \{(0,-3), (1,1), (2,5), (3,4)\}$$

$$g \circ f = R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

$$\therefore g \circ f = \{(0,1), (1,5), (4, -3)\}$$

Example 3 Jeffy Leshnock is an employee at Grill's Department Store. As one of his benefits, he receives at 10% employee discount on his purchases at the store. During the Midnight Sale, Jeffy bought a necktie that was on sale for 15% off. The original price of the necktie was \$ 200. How much did Jeffy pay?

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

1. Jeffy receives at 10% employee discount on his purchases at the store.
2. Jeffy bought a necktie that was on sale for 15% off.
3. The original price of the necktie was \$ 200.

"What is the unknown?"

Net price

Step2 Devising a plan

- Give variable.
1. The original price = x
 2. 10% employee discount = $f(x)$
 3. 15% off sale price = $g(x)$

- Identify the formula for calculating discount and net price.

Step1 Discount = rate x list price

Step2 Net price = list price - discount

- Find the connection between the data and the unknown.

$$f(x) = x - 0.1x = 0.9x$$

$$g(x) = x - 0.15x = 0.85x$$

- Planning the method of solving the problem.

- Method 1 choose $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

- Method 2 choose $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Step3 Carrying out the plan

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[0.85x] \\ &= 0.9(0.85x) \\ &= 0.765x\end{aligned}$$

- Replace x with 200 in $0.765x$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (0.765)(200) \\ &= \$ 153\end{aligned}$$

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g[0.9x] \\ &= 0.85(0.9x) \\ &= 0.765x \\ &= 0.765(200) \\ &= \$ 153\end{aligned}$$

So Jeffy pays \$ 153.

Work Sheet I

Show all working and state clearly what is being calculated at each step.

1. State the domain and the range of $r_1 = \{(-1,1),(0,3),(2,5)\}$. Determine whether the relation r_1 is a function.

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of a relation and a function.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

2. The maximum pulse rate R that a healthy person aged 18 to 55 should attain while exercising is determined by subtracting the person's age a from 210. Write R as a function of a . Then state the range if the domain is $\{20, 50\}$.

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Find the connection between the data and the unknown, and write the equation.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Examine the solution obtained.

3. Let $f(x) = 4x + 1$ and $g(x) = 3x^2$ 1. Determine

(a) $2f(\sqrt{3} + 1)$

(b) $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$

(c) $\frac{g(t - 0.4)}{3}$

Solution(a)Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(b) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(c) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

4. An open box is to be formed from a square sheet of tin $18 \times 18 \text{ in}^2$. by cutting equal squares, from the four corners and turning up the sides. Express the volume V of the box as a function of x and find the volume when the height is 4 in.

Solution Step1 Understanding the problem

“what are the data?”

“What is the unknown?”

Step2 Devising a plan

- Give variable.

- Draw a figure.

- Identify the formula.

- Translate the verbal sentence to symbols.

- Find the connection between the data and the unknown.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Examine the solution obtained.

Work Sheet II

Show all working and state clearly what is being calculated at each step.

1. $f(x) = \frac{5}{3}x + 5$, determine an equation of the inverse and solve for $f^{-1}(x)$

Solution Step1 Understanding the problem

“What are the data?”

“What is the unknown?”

Step2 Devising a plan

- Planning the method of solving inverse function.

Step3 Carrying out the plan

- Check one-to-one function of $f(x)$ by supposing $f(a) = f(b)$, if you prove $a = b$ then f is a one-to-one function.

- Examine the solution obtained.

[illegible]

Solution Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Planning the method of solving inverse function

Step3 Carrying out the plan

- Check one-to-one function of $f(x)$ by supposing $f(a) = f(b)$,
if you prove $a = b$ then f is a one-to-one function.

Step4 Looking back

- [illegible]

- Trying other method to check if the results are the same or not.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Work Sheet III

Show all working and state clearly what is being calculated at each step.

1. Let $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ and $g(x) = x^2 - 4x + 3$. Determine

- (a) $(f+g)(5)$
- (b) $(f-g)(2)$
- (c) $(f \cdot g)(101)$
- (d) $(f/g)(33)$

Solution(a)Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(b) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

- Planning the method of solving the problem.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- Trying other method to check if the results are the same or not.

“What are the data?”

"What is the unknown?"

- Identify the definition of algebra of function.

- Planning the method of solving the problem.

[illegible]

- Trying other method to check if the results are the same or not.

[illegible]

“What are the data?”

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

2. Let $f = \{(1,2), (2,3), (3,1), (2,6)\}$ and $g = \{(2,4), (1,7), (2,5), (3,4)\}$. Determine

- (a) $(f+g)(2)$
- (b) $(f-g)(1)$
- (c) $(f-g)(2)$
- (d) $(f/g)(3)$

Solution(a) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(b) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.
-

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.
-
-
-
-

(c) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.
-

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(d) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of algebra of function.

Step3 Carrying out the plan

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

Work Sheet IV

Show all working and state clearly what is being calculated at each step.

1. Let $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ and $g(x) = x^2 - 2x + 1$. Determine

(a) $(f \circ g)(3)$

(b) $(g \circ f)(-5)$

Solution(a) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(f \circ g)(x)$.

- Planning the method of solving the problem.

Step3 Carrying out the plan

- Check if $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ or not.

- Trying other method to check if the results are the same or not.

- [illegible]

“What are the data?”

-

-
-
-
-
-
-

- Check if $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ or not.

[illegible]

- Trying other method to check if the results are the same or not.

- [illegible]

(a) $f \circ g$

(b) $g \circ f$

“What are the data?”

- Identify the definition of $(f \circ g)(x)$.

Step3 Carrying out the plan

- Check if $R_g \cap D_f \neq \emptyset$ or not.

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

(b) Step1 Understanding the problem

"What are the data?"

"What is the unknown?"

Step2 Devising a plan

- Identify the definition of $(g \circ f)(x)$.

Step3 Carrying out the plan

- Check if $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ or not.

Step4 Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

3. The Appliance Warehouse is having trouble moving the fashion-smart neon color appliances that its former sales manager ordered. The bright pink dryer originally sold for \$ 600. It was first marked down 30%, then further reduced 20%. What is the final reduced price of the bright dryer?

Solution Step1 Understanding the problem

“What are the data?”

"What is the unknown?"

Step2

Devising a plan

- Give variable.

- Identify the formula of calculating discount and net price.

- Find the connection between the data and the unknown.

Step3

Carrying out the plan

Step4

Looking back

- Trying other method to check if the results are the same or not.

ภาคผนวก ค

Quiz I

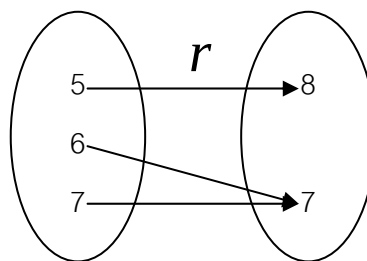
Domain and Range of Relations

Function Notation (20 minutes)

Name..... Class..... Admission No..... Class No.....

Choose the correct answer and mark **X** on a, b, c or d.

Use this figure to answer questions 1 - 2



1. What is the domain of r ?

- | | |
|--------------|------------------------|
| a. {5,6,7} | b. {8,7} |
| c. {5,6,7,8} | d. {(5,8),(6,7),(7,7)} |

2. What is the range of r ?

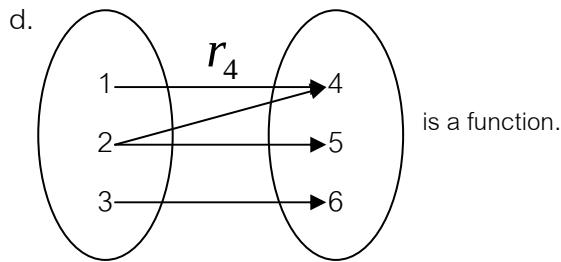
- | | |
|--------------|------------------------|
| a. {5,6,7} | b. {8,7} |
| c. {5,6,7,8} | d. {(5,8),(6,7),(7,7)} |

3. Which one is true ?

a. r_1 $\{(1,2),(1,2)\}$ is not a function.

b. is a function.

c. r_3 $\{(-1,-3),(-2,-4),(-2,-5)\}$ is a function.



Use this information to answer questions 4 - 6

A radio manufacturing firm has fixed cost of \$ 3,000 and the cost of labor and material is \$ 25 per radio. Determine the cost function, that is, the total cost as a function of number of radios manufactured. If each radio is sold for \$ 32, determine the revenue function and the profit function.

4. What is the unknown ?

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a. Cost function | b. Revenue function |
| c. Profit function | d. a, b and c |

5. Which one is false ?

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a. $C(x) = 3000 + 25x$ | b. $R(x) = 32x$ |
| c. $P(x) = R(x) - C(x)$ | d. $P(x) = C(x) - R(x)$ |

6. If the firm sold 600 radios, how much profit will the firm get ?

- | | |
|--------------|---------------|
| a. \$ 19,200 | b. \$ 18,000 |
| c. \$ 1,200 | d. \$ - 1,200 |

Use this information to answer questions 7 – 10

Let $f(x) = x^2 - 4$ and $g(x) = (2x+1)^2 - 1$

7. What is the first step in solving $4g(x+1)$?

- Replace x with $x+1$ in $g(x)$
- Replace x with $x+1$ in $f(x)$
- Replace x with $x+1$ in $g(x)$ and multiply by 4 simultaneously
- a. and c. are correct

8. Which one is the answer of the question 7. ?

- $4x^2 + 12x + 8$
- $4x^2 + 12x + 9$
- $16x^2 + 48x + 32$

d. $x^2 + 2x - 3$

9. The steps of calculation $\frac{g(t - 0.6)}{4}$ are as follows :

1. Replace x with $t - 0.6$ in $g(x)$

$$2. g(t - 0.6) = [2(t - 0.6) + 1]^2 - 1$$

$$= (2t - 1.2 + 1)^2 - 1$$

$$3. \frac{g(t - 0.6)}{4} = t^2 - 0.2t - \frac{0.03}{2}$$

$$4. g(t - 0.6) = (2t - 0.2)^2 - 1$$

$$= 4t^2 - 0.8t + 0.04 - 1$$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

a. 1,2,3,4

b. 1,2,4,3

c. 1,3,2,4

d. 1,4,2,3

10. Besides the method of computing in question 9, we can use the following 4 steps as the other method.

$$1. \frac{g(t - 0.6)}{4} = \frac{(2t - 1.2 + 1)^2 - 1}{4}$$

$$2. \frac{g(t - 0.6)}{4} = \frac{[2(t - 0.6) + 1]^2 - 1}{4}$$

$$3. \frac{g(t - 0.6)}{4} = \frac{4t^2 - 0.8t - 0.06}{4}$$

$$= t^2 - 0.2t - \frac{0.03}{2}$$

$$4. \frac{g(t - 0.6)}{4} = \frac{(2t - 0.2)^2 - 1}{4}$$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

a. 1, 2, 3, 4

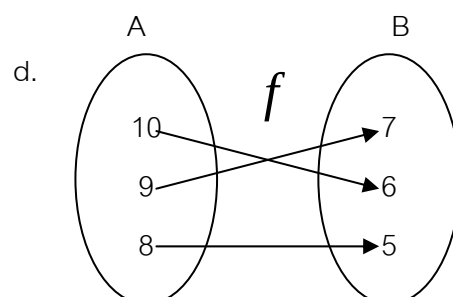
b. 1, 3, 2, 4

c. 4, 1, 2, 3

d. 2, 1, 4, 3

Inverse Function (10 minutes)

Choose the correct answer and mark X on a, b, c or d.



Quiz III

Algebra of Functions (20 minutes)

Name..... Class..... Admission No..... Class No.....

Choose the correct answer and mark X on a, b, c or d.

Use this information to answer questions 1 - 2

Let $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 6x - 4$, determine $(f - g)(5)$

1. What is the unknown ?

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a. $(f - g)(5)$ | b. $f(x)$ and $g(x)$ |
| c. x is the domain value | d. $f(x)$ is the range value |

2. The steps of calculation $(f - g)(5)$ are as follows :

1. $(f - g)(5) = 5^2 + 2 - [6(5) - 4]$
2. $(f - g)(5) = f(5) - g(5)$
3. $(f - g)(5) = 25 + 2 - (30 - 4)$
4. $(f - g)(5) = 27 - 26 = 1$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

- | | |
|---------------|---------------|
| a. 2, 3, 1, 4 | b. 2, 1, 3, 4 |
| c. 1, 2, 3, 4 | d. 1, 3, 2, 4 |

3. Let $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ and $g(x) = x^2 - x + 1$, determine $(f + g)(5)$

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a. $\frac{49}{2}$ | b. $\frac{49}{2}$ |
| c. 7 | d. 14 |

Use this information to answer questions 4-5

Let $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ and $g(x) = x^2 - 2$

4. How do you plan to solve the problem of $(f - g)(4)$?

- a. Use the definition of $(f \circ g)(x)$ and replace x with 4
 - b. Use the definition of $(g \circ f)(x)$ and replace x with 4
 - c. Use the definition of $(f - g)(x)$ and replace x with 4
 - d. Use the definition of $(f / g)(x)$ and replace x with 4
5. Besides planning to solve the problem as in question 4, which is the other method of planning ?
- a. Replace x with 4 in $(f \circ g)(x)$ and then determine the value of $(f \circ g)(x)$
 - b. Replace x with 4 in $(g \circ f)(x)$ and then determine the value of $(g \circ f)(x)$
 - c. Replace x with 4 in $f(x) - g(x)$ and then determine the value of $f(x) - g(x)$
 - d. Replace x with 4 in $f(x) / g(x)$ and then determine the value of $f(x) / g(x)$

Use this information to answer question 6 – 7

Let $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 2}$, $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$, determine $(f / g)(-3)$

6. How do you plan to solve the problem of $(f / g)(-3)$?
- a. Replace x with -3 in $f(x) + g(x)$ and then determine the value of $f(x) + g(x)$
 - b. Replace x with -3 in $f(x) - g(x)$ and then determine the value of $f(x) - g(x)$
 - c. Replace x with -3 in $f(x) \cdot g(x)$ and then determine the value of $f(x) \cdot g(x)$
 - d. Replace x with -3 in $f(x) / g(x)$ and then determine the value of $f(x) / g(x)$
7. Which one is the answer of the question 6 ?
- a. 9
 - b. -9
 - c. 36
 - d. -36

Use this information to answer questions 8 - 10

Let $f = \{(0,4), (1,5), (-1,6), (-2,7), (9,3)\}$ and $g = \{(0, 1), (-1, 4), (-2, 5), (3, 7), (4,5)\}$

8. What is the domain of $f - g$?
- a. $\{0, -1, -2\}$
 - b. $\{0, -1, 1, -2, 3, 4\}$
 - c. $\{5, 10, 12\}$
 - d. $\{-3, 2\}$
9. What is the range of $f - g$?

Quiz IV
The Composite Functions (10 minutes)

Name..... Class..... Admission No..... Class No.....

Choose the correct answer and mark **X** on a, b, c or d.

Use this information to answer questions 1 - 2

Foxy's Furs has experienced problems moving its coats. One mink jacket that originally sold for \$ 1,600 was first marked down 35% and then further reduced 20%.

What is the final reduced price ?

1. How do you solve the problem ?

- a. Give variable
- b. Identify the formula of calculating discount and net price
- c. Find the connection between the data and the unknown
- d. Do all steps from a – c

2. Which one is the answer of the above problem ?

- a. \$ 832
- b. \$ 823
- c. \$ 283
- d. \$ 238

3. Let $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$, the steps of calculation $(f \circ g)(3)$ are as

follows :

1. $(f \circ g)(3) = f[3^2 + 3(3) + 2]$

2. $(f \circ g)(3) = \frac{20}{20+1} = \frac{17}{21}$

3. $(f \circ g)(3) = f(20)$

4. $(f \circ g)(3) = f[g(3)]$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

- a. 1,2,3,4
- b. 4,1,3,2
- c. 1,4,3,2
- d. 3,4,2,1

Use this information to answer questions 4 - 5

Let $f = \{(1,1), (2,1), (3,4), (0,5)\}$ and $g = \{(1,2), (2,3), (1,0), (4,5)\}$

4. What is the domain of $g \circ f$?

a. $\{-1,2,3\}$

b. $\{2,5\}$

c. $\{1,-2,-1\}$

d. $\{1,4,5\}$

5. What is the range of $f \circ g$?

a. $\{-1,2,3\}$

b. $\{2,5\}$

c. $\{1,-2,-1\}$

d. $\{1,4,5\}$

The test of mathematical problem solving ability

Name..... Class Admission No. Class No.

Choose the correct answer and mark X on a, b, c and d (50 minutes).

No.	a	b	c	d
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

The test of mathematical problem solving ability

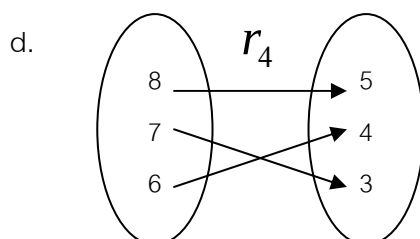
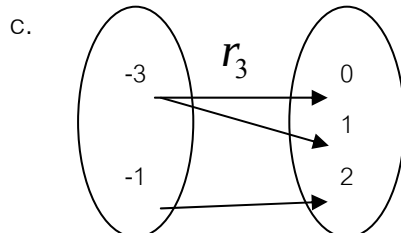
Name..... Class Admission No. Class No.

Choose the correct answer and mark X on a, b, c and d (50 minutes).

1. Which one is a function ?

a. $r_1 = \{(-1,1),(-2,2),(-1,3)\}$

b. $r_2 = \{(a,x),(b,x),(b,y)\}$



Use this information to answer questions 2 - 3

Let $f(x) = 9x^2 - 2x$ and $g(x) = (x - 1)^2 + 2$

2. How do you solve the first step of $3f(t+2)$?

- a. Replace x with $t+2$ in $f(x)$
- b. Replace x with $t+2$ in $g(x)$
- c. Replace x with $t+2$ in $f(x)$ and multiply by 3 simultaneously
- d. a. and c. are correct

3. Which one is the answer of the question 2. ?

- a. $9t^2 + 34t + 32$
- b. $27t^2 + 102t + 96$

- c. $t^2 + 2t + 3$
- d. $3t^2 + 6t + 9$

Use this information to answer questions 4 - 7

A company produces product A for which the variable cost per unit is \$ 20 and fixed cost is \$ 30,000. Each unit has a selling price of \$ 35. Determine the number of units that must be sold for the company to earn a profit of \$ 15,000. (Hint : Total cost is the sum of variable cost and fixed cost, total revenue is the price per unit of output times the number of units sold and profit is total revenue minus total cost.)

4. What is the unknown ?
 - a. Number of units
 - b. Fixed costs
 - c. Variable cost
 - d. Profit
5. How do you solve the problem ?
 - a. Give variable
 - b. Translate the verbal sentence to symbols
 - c. Find the connection between the data and the unknown
 - d. Do all steps from a – c
6. Which one is false ?
 - a. $C(x) = 20x + 30000$
 - b. $R(x) = 35x$
 - c. $P(x) = C(x) - R(x)$
 - d. $P(x) = R(x) - C(x)$
7. How do you check the result ?
 - a. Replace x with 30,000 in $P(x)$
 - b. Replace x with 3,000 in $P(x)$
 - c. Replace x with 300 in $P(x)$
 - d. Replace x with 30 in $P(x)$
8. What is an equation of the inverse of $f(x) = \frac{3}{7}x - \frac{2}{5}$?
 - a. $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{5}$
 - b. $y = \frac{7}{3}x - \frac{2}{5}$

c. $y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{15}$

d. $y = \frac{3}{7}x + \frac{14}{15}$

9. The steps checking the result in question 8. is

1. $\frac{3}{7}x + \frac{14}{15} = y$

2. $y = \frac{3}{7}x + \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15}$
 $= \frac{3}{7}x + \frac{2}{5}$

3. $y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{15}$

4. $x = \frac{7}{3}y + \frac{14}{15}$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

a. 3,4,2,1

b. 3,4,1,2

c. 2,4,1,3

d. 2,1,4,3

Use this information to answer questions 10 - 11

Let $f(x) = \frac{3x-11}{2}$ and $g(x) = \frac{2x+11}{3}$. Determine whether the functions are inverse with each other.

10. What are the data ?

a. $y = \frac{3x-11}{2}$

b. Equation of the inverse

c. $y = \frac{2x+11}{3}$

d. a and c are correct

11. What is the first step in solving inverse of $f(x)$ and $g(x)$?

a. Check one-to-one function of $f(x)$

b. Check one-to-one function of $g(x)$

c. Interchange x and y in $f(x)$ or $g(x)$

d. a. and b. are correct

12. Which pair of functions is inverse with each other ?

- a. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}$ and $g(x) = \frac{3}{3x-1} + 2$
- b. $f(x) = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3}$ and $g(x) = \frac{6x-5}{1-3x}$
- c. $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{1}{3}$ and $g(x) = \sqrt[5]{2x - \frac{2}{3}}$
- d. $f(x) = 5x - \frac{1}{3}$ and $g(x) = \frac{5(3x+1)}{3}$

13. What is the first step in solving equation of $f^{-1}(x) = x^3 + 5$?

- a. Interchange either x or y in $f^{-1}(x)$
- b. Interchange x and y in $f^{-1}(x)$
- c. Interchange x only in $f^{-1}(x)$
- d. Interchange y only in $f^{-1}(x)$

Use this information to answer questions 14 - 15

Let $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, $g(x) = x^2 + x - 12$, determine $(f \circ g)(3)$.

14. What is the unknown ?

- a. $f(x)$ and $g(x)$
- b. x is the domain value
- c. $(f \circ g)(3)$
- d. $f(x)$ is the range value

15. Which one is the answer of the question 14. ?

- a. Undefined
- b. 0
- c. - 18
- d. 18

Use this information to answer questions 16 - 19

Let $f(x) = \frac{2x^2 + x - 15}{x - 2}$ and $g(x) = x^2 + x - 6$

16. How do you solve the problem of $(f \circ g)(27)$?

- Use the definition of $(f \circ g)(x)$ and replace x with 27
- Use the definition of $(g \circ f)(x)$ and replace x with 27
- Use the definition of $(f \cdot g)(x)$ and replace x with 27
- Use the definition of $(f / g)(x)$ and replace x with 27

17. Besides planning to solve the problem as in question 16, which is the other method ?

- Replace x with 27 in $(f \circ g)(x)$ and then determine the value of $(f \circ g)(x)$
- Replace x with 27 in $(g \circ f)(x)$ and then determine the value of $(g \circ f)(x)$
- Replace x with 27 in $f(x) \cdot g(x)$ and then determine the value of $f(x) \cdot g(x)$
- Replace x with 27 in $f(x) / g(x)$ and then determine the value of $f(x) / g(x)$

18. The steps of calculation $(f / g)(57)$ are as follows :

$$\begin{aligned}
 1. \quad (f / g)(x) &= \frac{2x^2 + x - 15}{x^2 + x - 6} \\
 &= \frac{2x^2 + x - 15}{x - 2} \cdot \frac{1}{x^2 + x - 6} \\
 2. \quad (f / g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
 3. \quad (f / g)(x) &= \frac{2(57) - 5}{(57 - 2)^2} \\
 &= \frac{109}{55^2} \\
 &= \frac{109}{3025} \\
 4. \quad (f / g)(x) &= \frac{2x - 5}{x + 3} \cdot \frac{1}{x - 2}
 \end{aligned}$$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

- 3,4,1,2
- 3,1,4,2
- 2,4,1,3
- 2,1,4,3

19. Besides the method of computing in question 18, we can use the following 4 steps as the other method

$$\begin{aligned}
 1. \quad (f/g)(57) &= \frac{\frac{2(57)^2 + 57}{57^2 + 57} \cdot \frac{15}{6}}{\frac{57}{57^2 + 57} \cdot \frac{2}{6}} \\
 2. \quad (f/g)(57) &= \frac{\frac{2(3249) + 57}{3249 + 57} \cdot \frac{15}{6}}{\frac{55}{3249 + 57} \cdot \frac{1}{3300}} \\
 3. \quad (f/g)(57) &= \frac{f(57)}{g(57)} \\
 4. \quad (f/g)(57) &= \frac{6540}{55} \cdot \frac{1}{3300} \\
 &= \frac{109}{3025}
 \end{aligned}$$

Which one is the correct arrangement of steps in solving this problem ?

- | | |
|------------|------------|
| a. 4,2,1,3 | b. 4,1,2,3 |
| c. 3,1,2,4 | d. 3,2,1,4 |

Use this information to answer questions 20 - 21

Let $f(x) = \frac{x+3}{2}$, $g(x) = x^3 + 2$, determine $(g \circ f)(-5)$

20. How do you plan to solve the problem of $(g \circ f)(-5)$?

- Use the definition of $(g \circ f)(x)$ and replace x with -5
- Use the definition of $(f \circ g)(x)$ and replace x with -5
- Use the definition of $(g - f)(x)$ and replace x with -5
- Use the definition of $(g \cdot f)(x)$ and replace x with -5

21. Which one is the answer of the question 20 ?

- | | |
|------|------|
| a. 0 | b. 1 |
| c. 2 | d. 3 |

Use this information to answer questions 22 - 23

Let $f = \{(0, 2), (10, 5), (1, 7), (4, 9)\}$ and $g = \{(4, 0), (2, 9), (6, 10), (5, 1)\}$

22. Which one is the method of checking $f \circ g$?

- a. Check $R_g \cap D_f \neq \emptyset$
- b. Check $R_f \cap D_g \neq \emptyset$
- c. Check $R_g \cap R_f \neq \emptyset$
- d. Check $D_f \cap D_g \neq \emptyset$

23. What is the range of $g \circ f$?

- a. $\{0, 10\}$
- b. $\{9, 1\}$
- c. $\{4, 6, 5\}$
- d. $\{-2, 5, 7\}$

Use this information to answer questions 24 - 25

The Clothes Rack add a 80% markup to the wholesale price of merchandise to determine the selling price. If a jacket that costs \$ 120 wholesale is on sale for 20% off, what would a customer pay for it ?

24. How do you solve the problem ?

- a. Give variable
- b. Find the connection between the data and the unknown
- c. Planning the method of solving the problem
- d. Do all steps from a – c

25. Which one is the answer of the above problem ?

- a. \$ 172.8
- b. \$ 115.2
- c. \$ 28.8
- d. \$ 19.2

ภาคผนวก ง

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แผนการสอนการเรียนรู้แบบร่วมมือ เรื่องฟังก์ชัน

1. รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชค
ประธานโปรแกรมบัณฑิตศึกษาศาขาคณิตศาสตร์ศึกษา สถาบันราชภัฏพระนคร
3. อาจารย์สุวันเพ็ญ สิริทรัพย์ไพบูลย์
หัวหน้าหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญคอนแวนต์

ใบความรู้ ใบงาน แบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมวงษ์ แปลงประสพโชค
ประธานโปรแกรมบัณฑิตศึกษาศาขาคณิตศาสตร์ศึกษา สถาบันราชภัฏพระนคร
3. อาจารย์ Harrold F. Neri
อาจารย์ประจำหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวนัทธ์กัญญา เจริญเกียรติบวร
วันเดือนปีเกิด	20 พฤษภาคม พ.ศ. 2513
สถานที่เกิด	เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	186/42 ซอยเพชรเกษม 68 ถนนเพชรเกษม เขตบางแค กรุงเทพมหานคร 10160
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์คณิตศาสตร์
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนอัสสัมชัญพาณิชยการ สาทร กรุงเทพมหานคร 10120
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2532	มัธยมศึกษาปีที่6 จากโรงเรียนสตรีวัดอัมพรสวรรค์ กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2537	ศึกษาศาสตร์บัณฑิต จากมหาวิทยาลัย เกษตรศาสตร์
พ.ศ. 2546	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนคริน- ทรวิโรฒ