

การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออคเตอร์ พารามิเตอร์ ในสารตัวนำยิ่งยวด

ที่วัดสิ่ง: จีออเมตริกแม่เหล็ก

ปริญญาโท

ของ

เลื่อน กล้าหาญ

26 ส.ย. 2523

สำนักหอสมุดกลาง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
สุขุมวิท 23 พระโขนง กรุงเทพฯ 11 โทร. 3921575, 3915058

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาโทศึกษามหาบัณฑิต

กันยายน 2523

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออคเตอร์ พารามิเตอร์ ในสารตัวนำยิ่งยวด
ที่มีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก

บทคัดย่อ

ของ

เลื่อน กล้าหาญ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กันยายน 2523

การวิจัยครั้งนี้ได้คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ ใน ลาร์ตัวนาอิงยวด ที่มีสิ่ง เสีปนแบบแม่เหล็กเพียงอะตอมเดียว โดยแก้สมการของกอร์คอฟ แบบ เพลย์ คอนซิลเตนท์ และใช้ฟังก์ชันปกติของกรีนของอนุภาคเดี่ยว ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่า ที่ระยะไกลจากสิ่ง เสีปนมาก ๆ หรือที่ระยะทางมากกว่าระยะอาพันธ์ และที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์แปรผกผันกับระยะทางจากสิ่ง เสีปน ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา และที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ ได้ผลว่า การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ มีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว ผกผันกับระยะทาง จากสิ่ง เสีปนยกกำลังสาม ที่ระยะทางใกล้ ๆ กับสิ่ง เสีปน และที่ทุก ๆ อุณหภูมิ ได้ผลว่า การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ อยู่ในรูป $\{a + b \cos(2k_F r)\}/r^2$

SPATIAL VARIATIONS OF THE ORDER PARAMETER IN SUPERCONDUCTORS
CONTAINING A MAGNETIC IMPURITY

AN ABSTRACT

BY

LUAN GLAHARN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
September 1980

The spatial variation of the superconductor order parameter in the presence of a magnetic impurity has been analyzed by solving self-consistently the Gor'kov equation for the anomalous thermodynamical one-particle Green's function. At large distances from the impurity, $r \gg \xi_0$ (ξ_0 is the superconductor coherence length at zero temperature), $\Delta(r)$ varies like $1/r$ near the transition temperature, $T \lesssim T_c$, as is expected from the Ginzburg-Landau theory and at low temperature, $T \ll T_c$, the spatial variation is oscillatory and decreases as $1/r^3$. At short distances from the impurity, $r \ll \xi_0$, the deviation of the order parameter from the bulk value is of the form $\{a + b \cos(2k_F r)\}/r^2$.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิติได้พิจารณาอนุญาตฉบับนี้แล้ว
เห็นสมควรรับเป็นล่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

สุทัศน์ ยกส้าน

ประธาน

สมศรี ศรีบุญเรือง

กรรมการ

ปริญญาโทฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยด้วยเงินงบประมาณแผ่นดิน และได้รับการเผยแพร่
โดยลงพิมพ์ในวารสารต่างประเทศ ชื่อ Physics Letters A.

ประกาศขอบคุณ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุทัศน์ ยกุลیان ประธานกรรมการที่ปรึกษา และ รองศาสตราจารย์ ดร.ประยงค์ พงษ์ทอง เจริญ กรรมการที่ปรึกษา ซึ่งได้ให้ความช่วยเหลือและแนะนำอย่างดียิ่ง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

เลื่อน กล้าหาญ

สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	5
	ความสำคัญของการวิจัย	5
	ข้อตกลงเบื้องต้น	6
	ขอบเขตของการวิจัย	6
	คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ	6
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
	ทฤษฎี ปี ซี เอล	8
	ทฤษฎีพื้นฐานที่นำไปสู่ทฤษฎี ปี ซี เอล	8
	ลัทธิฐานเบื้องต้นของทฤษฎี ปี ซี เอล	9
	คู่ดูเปอร์	10
	สาเหตุการเกิดอันตรกิริยาแรงดึงดูด	12
	การคำนวณของทฤษฎี ปี ซี เอล	14
	สภาพตัวนำยิ่งยวดและสนามแม่เหล็ก	22
	สภาพแม่เหล็กในขอบเขตจำกัด	26
	แอมัลโกเนียนของแอนเดอร์สัน	27
	ทฤษฎีของอาร์ทรี-ฟอค	29
	ฟังก์ชันของกรีนของสมการอีเลกตรอนหนึ่งอนุภาค	30
	เงื่อนไขของเชลฟ์ คอนซิลเตนซ์ สำหรับโมเมนต์ในขอบเขตจำกัด	33
	สิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก	41
	ทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา-กอร์คอฟ	45
	เอกสารการวิจัยในต่างประเทศ	49

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการ	54
4 ผลการวิจัย	56
การคำนวณโดยการกะประมาณขั้นแรก	56
การคำนวณโดยวิธีเพลย์ คอนซีลเตนท์	74
5 บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	82
บทย่อ	82
ความมุ่งหมายของการวิจัย	82
วิธีดำเนินการวิจัย	82
การวิเคราะห์ผล	82
สรุปผลการวิจัย	82
อภิปรายผลการวิจัย	84
ข้อเสนอแนะในการวิจัย	85
บรรณานุกรม	86
ภาคผนวก	90

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

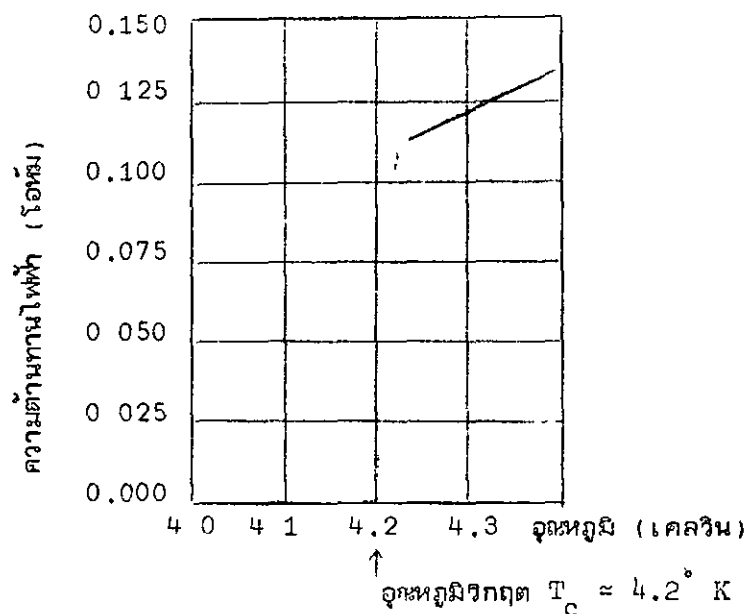
หน้า

- 1 กราฟแสดงค่าความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ที่ทำการทดลอง โดย
 ออนเนส 1
- 2 แสดงการชนกันของอิเล็กตรอน 13
- 3 กราฟแสดงความหนาแน่นของสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน กับพลังงานของอิเล็กตรอน
 (พลังงานวัดจากพลังงานเฟอร์มิ) 20
- 4 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิในทฤษฎี ซี ซี เอส และ
 ผลการทดลองของ เกียเอเวอร์ และ เมเกอเร 21
- 5 กราฟแสดงความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิของตะกั่ว
 ($T_c = 7.19 \text{ K}$, $H_0 = 603 \text{ gauss}$) 23
- 6 แสดงการพุ่งผ่านของสนามแม่เหล็กในตัวนำยิ่งยวด และตัวนำปกติ ซึ่งเรียกว่า
 ผลของไมสส์เนอร์ 24
- 7 กราฟแสดงผลตอบสนองของสารตัวนำยิ่งยวด เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอก H ในรูป
 ของแมกเนโตเซชัน M จากสมการ $B = \mu(H + M)$ เส้นประแสดงพฤติกรรมของ
 สารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 1 (ปกติได้แก่พวกสารบริสุทธิ์) เส้นทึบแสดงพฤติกรรม
 ของสารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 2 โดยที่ $H_{c1} < H_c < H_{c2}$ 26
- 8 กราฟแสดงการกระจายของความหนาแน่น ในกรณีที่สิ่งเจือปนเป็นแม่เหล็ก บริเวณ
 ปุ่มที่ระดับพลังงาน $E + U\langle n_- \rangle$ และ $E - U\langle n_+ \rangle$ เป็นระดับ ดี-เสมือน
 (virtual d levels) ซึ่งมีความกว้าง 2Δ กราฟนี้แสดงความหนาแน่นของ
 อิเล็กตรอนที่มีสปินขึ้นและลงตามลำดับ จำนวนของอิเล็กตรอน $\langle n_+ \rangle$ และ
 $\langle n_- \rangle$ สามารถคำนวณได้จากพื้นที่ส่วนที่ไม่ได้แรเงาที่อยู่ต่ำกว่าผิวเฟอร์มิ 34

- 9 (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_+ \rangle$ และ $\langle n_- \rangle$ กรณีที่สิ่งเล็บบนเป็นแม่เหล็ก $y = \frac{U}{\Delta} = 5$, $x = (\epsilon_F - \epsilon)/U = \frac{1}{2}$ มีคำตอบที่เป็นไปได้สามค่า 35
- (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_{d+} \rangle$ และ $\langle n_{d-} \rangle$ กรณีที่สิ่งเล็บบนไม่เป็นแม่เหล็ก $y = 1$, $x = \frac{1}{4}$ มีคำตอบได้เพียงค่าเดียว 35
- 10 กราฟแสดงบริเวณการเป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก เส้นโค้งแสดงค่า x_c และ $\frac{\eta}{y_c} = \frac{\eta \Delta}{U}$ 40
- 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_+ \rangle$ และ $\langle n_- \rangle$ กับ $\frac{\eta}{y} = \frac{\eta \Delta}{U}$ โดยที่ $\langle n_+ \rangle - \langle n_- \rangle$ คือค่าสปินผลลัพธ์ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์เมื่อถึงค่าวิกฤต y_c ในกรณี $x = \frac{1}{2}$ (รูป ก) และเมื่อ $x = \frac{3}{4}$ (รูป ข) 40
- 12 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงค่าจุดวิกฤตของสารบริสุทธิ์ และสารที่ผสมด้วยสิ่งเล็บบน 42
- 13 (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิสัมบูรณ์ ซึ่งเรียกว่า "ผลของคอนโด" และอุณหภูมิที่มีค่าความต้านทานต่ำสุด หรืออุณหภูมิคอนโด 43
- (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความต้านทานไฟฟ้ากับลอการิทึมของอุณหภูมิสัมบูรณ์ แสดงให้เห็นการแปรแบบเส้นตรงในค่าของ $\log T$ กับ R 44

ภูมิหลัง

ในปี ค.ศ. 1911 ฮอนเนส (Onnes. 1911 1206, 1226) พบสภาพตัวนำยิ่งยวด (superconductivity) ซึ่งสภาพการนำไฟฟ้ายิ่งยวดของสาร เป็นคุณสมบัติของสารที่ไร้ความต้านทานไฟฟ้า (electrical resistance) สภาพจะเช่นนี้เกิดขึ้นได้ในโลหะบริสุทธิ์ และในโลหะผสมที่มีสิ่งเจือปน (impurity) เมื่อสารอยู่ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature, T_c หรือ transition temperature)



ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงค่าความต้านทานไฟฟ้า กับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ที่ทำการทดลองโดย ฮอนเนส

สารตัวนำยิ่งยวดนี้เมื่ออยู่ในสนามแม่เหล็ก สนามแม่เหล็กไม่สามารถพุ่งผ่านเข้าไปในตัวนำยิ่งยวดได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าความหนาแน่นของฟลักซ์ (flux density) ภายในตัวนำยิ่งยวดเป็นศูนย์ ปรากฏการณ์นี้เป็นที่รู้จักกันดี เรียกว่าผลของไมสส์เนอร์ (Meissner effect) ซึ่งค้นพบ

โดยไมสส์เนอร์ และ ออชเชนเฟลด์ (Meissner and Ochsenfeld. 1933 787) ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมาได้มีผู้ตั้งทฤษฎีต่าง ๆ มากมาย เพื่อที่จะอธิบายปรากฏการณ์ตัวนำยิ่งยวดนี้ แต่ทุก ๆ ทฤษฎีก็ไม่สามารถอธิบายคุณสมบัติของตัวนำยิ่งยวดได้ครบถ้วนและถูกต้อง เป็นต้นว่า ทฤษฎีของเบคเกอร์ (Becker's theory) โดย เบคเกอร์ เฮลเลอร์ และเฮาเตอร์ (Becker, Heller and Sauter. 1933 : 772) แต่ทฤษฎีนี้ก็ไม่สามารถอธิบายผลของไมสส์เนอร์ได้ และทฤษฎีของสองพี่น้องตระกูลลอนดอน คือ เอฟ และ เอช ลอนดอน (F. and H. London. 1935 . 71) อธิบายคุณสมบัติทางไฟฟ้า (electrodynamics) ของสารตัวนำยิ่งยวดได้บ้างเป็นบางส่วน ทฤษฎีของเขาทั้งสองได้ชี้ถึงสถานะควอนตัมมหภาค (macroscopic quantum state) ของอิเล็กตรอน ปีปาร์ด (Pipard. 1953 547) ได้เพิ่มเติมทฤษฎีของลอนดอน โดยใส่สิ่งเกี่ยวกับระยะ coherence length เข้ามาเกี่ยวข้องกับ กอเตอร์ และคาสิมิร์ (Gorter and Casimir. 1934 963, 539) ได้เสนอแบบจำลองของไหลคู่ (two-fluid model) ซึ่งชี้ให้เห็นถึงสถานะของอิเล็กตรอนว่ามีสองสถานะ คือ สถานะพื้นฐาน (ground state) และสถานะที่ถูกกระตุ้น (excited state) ในปี ค.ศ. 1950 กิ้นส์เบิร์ก และ แลนเดา (Ginzburg and Landau. 1950 : 1064) ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับการเปลี่ยนเฟส (phase transitions) ระดับที่สอง (second order) ในทฤษฎีนี้ เขาได้พิจารณาสภาพตัวนำยิ่งยวดที่ระดับมหภาค (macroscopic scale) และพบว่าในระบบที่เป็นตัวนำยิ่งยวดนี้มีตัวแสดงคุณสมบัติหนึ่งที่เราเรียกว่า ออเดอร์ พารามิเตอร์ (order parameter) ซึ่งแสดง "ระดับของสภาพตัวนำยิ่งยวด" (degree of superconductivity) ว่ามีค่าเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องขณะที่อุณหภูมิลดลงต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต และจะเป็นศูนย์เมื่ออุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต ทฤษฎีนี้ประสบความสำเร็จในการอธิบายปรากฏการณ์สภาพตัวนำยิ่งยวดได้เป็นอย่างมาก เช่น สามารถอธิบายสภาพตัวนำยิ่งยวดของสารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 2 (type II superconductor) ได้ เป็นต้น

แบบจำลองและทฤษฎีดังกล่าวมาทั้งหมดยังไม่สามารถอธิบายได้ว่าสถานะตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นได้อย่างไร หรือขึ้นอยู่กับโครงสร้างของสารหรือไม่อย่างไร ทำไมสารบางชนิดจึงอยู่ในสถานะตัวนำยิ่งยวด ณ ที่อุณหภูมิสัมบูรณ์สูง ๆ ได้ ขณะที่สารอื่น ๆ บางชนิดยังอยู่ในสภาพปกติ ไม่เปลี่ยนเป็นตัวนำยิ่งยวด ทำไมสารบางชนิดจึงหมดความต้านทานได้อย่างสิ้นเชิง ทำไมพลังงาน

การกลั่นตัว (condensation energy) ของอิเล็กตรอนจึงมีค่าน้อย และทำไมค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) ของสารตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำ ๆ จึงเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล (exponential dependence) ทฤษฎีที่ค้นคว้ากันขึ้นมาไม่สามารถแก้ปัญหาลำนี้ได้เลย

ขั้นตอนที่เป็นก้าวสำคัญในการศึกษาทางทฤษฎีจุลภาค (microscopic theory) และเป็นทฤษฎีที่จะพยากรณ์เกี่ยวกับผลของไอโซโทป (isotope effect) ได้คือ ทฤษฎีของโฟรฮลิช (Fröhlich. 1950 845) ซึ่งเสนอผลวิเคราะห์ทางทฤษฎีที่ได้ผลสอดคล้องกับการทดลองของ แมกซ์เวลล์ (Maxwell. 1950 477) และของเรย์โนลด์ และคนอื่น ๆ (Reynolds. and others. 1950 487) ทฤษฎีของโฟรฮลิช สามารถแสดงให้เห็นปรากฏการณ์สภาพตัวนำยิ่งยวดเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอน (electron-phonon interaction) นอกจากนี้ยังมีนักฟิสิกส์อื่น ๆ อีกหลายท่าน เช่น บาร์ดีน (Bardeen. 1950 167, 567, 829) บาร์ดีน และ พายน์ส (Bardeen and Pines. 1955 . 1140) ได้พยายามที่จะสร้างทฤษฎีควอนตัมของสารตัวนำยิ่งยวด โดยมุ่งความสนใจไปยังอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในตัวนำ แต่ก็ได้รับผลสำเร็จเพียงเล็กน้อย

ในปี ค.ศ. 1956 คูเปอร์ (Cooper. 1956 . 1189) ได้ใช้ทฤษฎีควอนตัมวิเคราะห์ พบว่าจะมีอันตรกิริยาเป็นแรงดึงดูดอย่างอ่อน ๆ ระหว่างอิเล็กตรอนที่ถูกกระตุ้นให้หลุดจากทะเลเฟอร์มิ (Fermi sea) ปรากฏการณ์นี้นำไปสู่การจับคู่ของอิเล็กตรอน การจับคู่นี้เป็นไปอย่างไร้เสถียรภาพ โดยที่อิเล็กตรอนทั้งสองมีค่าของโมเมนตัม (momentum) กลับกันแต่มีขนาดเท่ากัน และ สปิน (spin) ของอิเล็กตรอนทั้งสองก็มีทิศทางกลับกันด้วยเช่นกัน

การวิเคราะห์หาเหตุผลโดยวิธีการคำนวณ เพื่อจะอธิบายการเกิดปรากฏการณ์สภาพตัวนำยิ่งยวด ที่สำคัญยิ่งเป็นของ บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชรียเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer. 1957 1175) ทฤษฎีของเขาเรียกโดยย่อว่า ทฤษฎี บี ซี เอส (BCS theory) ได้อธิบายสภาพตัวนำยิ่งยวดว่าเกิดจากอันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน โดยการแลกเปลี่ยนโฟนอนกัน (electron - phonon - electron coupling) ทฤษฎี บี ซี เอส นี้ ได้คำนวณหาค่าของปริมาณต่าง ๆ ไว้มากมาย เป็นต้นว่า หาค่าความรุนแรงของศักย์ในการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนและคำนวณหาระยะอุณหภูมิ T_c ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ได้ ในทฤษฎีนี้มีการใช้

โอเปอเรเตอร์ชนิดต่าง ๆ เพื่อคำนวณหาเวฟฟังก์ชัน และใช้แฮมิลโทเนียน การจับคู่ (pairing Hamiltonian) เพื่อหาค่าพลังงานที่ระดับพื้นฐาน (ground state) และอื่น ๆ อีกมากมาย

ทฤษฎี บี ซี เอลส์ ยังสามารถอธิบายถึงผลที่เกิดขึ้นจากการนำเอาอะตอมของสิ่งเจือปนเข้าไปเจือปนในโลหะ แล้วทำให้อุณหภูมิวิกฤตของโลหะนั้นเปลี่ยนไป เนื่องจากอะตอมของสิ่งเจือปนมีโมเมนต์แม่เหล็ก (magnetic moment) มีแรงผลักรับอิเล็กตรอนในคู่อุปเปอร์ ซึ่งจะไปทำลายแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในคู่อุปเปอร์ หรือกล่าวได้ว่าสิ่งเจือปนทำลายสภาวะตัวนำยิ่งยวดของสารนั้น หรือทำให้สารนั้นมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ยาก ผลเหล่านี้ทำให้ความถี่ของโฟนอน ω_D ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มิ $N(0)$ และความแรงของศักยในการชนเปลี่ยนแปลงไป นอกจากนี้แล้วทฤษฎี บี ซี เอลส์ ยังอธิบายไว้อีกด้วยว่า ค่าอุณหภูมิวิกฤตที่เปลี่ยนไป เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มข้นหรือจำนวนอะตอมของสิ่งเจือปนอีกด้วย

ปัญหาที่มักค้นคว้าสนใจมากคือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก (magnetic impurity) ในสารตัวนำยิ่งยวด เพราะสิ่งเจือปนแบบนี้มีผลต่อการเกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดคือ มันจะขัดขวางการจับคู่ของอิเล็กตรอน นักฟิสิกส์ได้พยายามวิเคราะห์โดยการคำนวณหาออเดออร์ พาราเมเตอร์ ซึ่งเป็นตัวแสดงคุณสมบัติบ่งชี้ระดับของการเป็นสภาพตัวนำยิ่งยวด ชูซูกิ และ ชูเนโต (Tsuzuki and Tsuneto. 1967 1 - 12) เป็นคนแรกที่ได้พิจารณาหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดออร์ พาราเมเตอร์ $\Delta(r)$ แต่วิธีของเขาไม่ได้คำนึงถึงผลของคอนโดเลย หลังจากนั้นจึงมีงานวิจัยอีกมากมายหลายฉบับที่ได้คำนวณหา $\Delta(r)$ เหตุผลของแต่ละวิธีแตกต่างกัน ทำให้ผลของ $\Delta(r)$ ขัดแย้งกันบ้าง สอดคล้องกันบ้าง ผลการวิจัยที่เสน่อออกมาเป็นรายงานฉบับล่าสุดที่นับว่าสำคัญเป็นของ ชลือตแมน (Schlottmann. 1976 1 - 7) และของ ยกส์อัน กับ ซิมาเนค (Yoksan and Šimánek 1978 4768 - 4779, 1978 874 - 875) ให้ผลที่สอดคล้องกันมาก กล่าวคือ ออเดออร์ พาราเมเตอร์ จะแปรผกผันกับระยะทางจากสิ่งเจือปนยกกำลังสอง งานวิจัยทั้งสองใช้คณิตศาสตร์และสมมติฐานในการคำนวณที่แตกต่างกัน ชลือตแมนยอมรับสมมติฐานของกอร์คอฟ (Gor'kov. 1959 · 1918) ใช้ฟังก์ชันของกรีนของอนุภาคเดี่ยว และสิ่งเจือปนมีสปินแบบเก่า แต่ของ ยกส์อัน และ ซิมาเนค ใช้ทฤษฎีโลหะผลผสมของแอนเดอร์สัน (Anderson. 1961 · 41) ประกอบกับผลของ คอนโด (Kondo. 1964 37) และ

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ $\Delta(r)$ ที่อุณหภูมิใกล้ T_c

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยต้องการขยายงานวิจัยข้างต้นให้สามารถหาการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta(r)$ ที่ระยะทางต่าง ๆ ได้ทุกระยะ และครอบคลุมที่ทุก ๆ อุณหภูมิจากศูนย์ถึง T_c โดยยอมรับความถูกต้องของทฤษฎี บี ซี เอส ทฤษฎีโสมะผล่มของแอนเดอร์สัน ทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา และกอร์คอฟ การคำนวณกระทำโดยใช้ฟังก์ชันของกรีน ที-แมตริกซ์ (t-matrix) โดยควอนตัมสปิน (quantum spin) ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนของสิ่งเสียบกับอิเล็กตรอนในตัวนำ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการเปลี่ยนแปลงของออเดอร์ พารามิเตอร์ $\Delta(r)$ ที่ตำแหน่งต่าง ๆ

1.1 ที่ระยะทางไกลจากสิ่งเสียบ หรือเมื่อ $r \gg \xi_0$

1.2 ที่ระยะทางใกล้กับสิ่งเสียบ หรือเมื่อ $r \ll \xi_0$

โดยที่ r คือ ระยะทางวัดจากสิ่งเสียบถึงตำแหน่งที่ต้องการ

ξ_0 คือ ระยะทางอาพันธ์ของสารตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์ที่อุณหภูมิศูนย์ค่าสัมบูรณ์

2. เพื่อขยายขอบเขตของผลงานเดิมที่เคยมีผู้วิจัยไว้แล้ว ให้ครอบคลุมที่ทุก ๆ อุณหภูมิ

ทั้งในกรณีที่สิ่งเสียบมีคุณสมบัติ เป็นแม่เหล็กได้และไม่เป็นแม่เหล็กเลย

3. เพื่อตรวจสอบว่าออเดอร์ พารามิเตอร์ ที่วิเคราะห์ได้มีผลต่อสิ่งต่อไปหรือไม่ อย่างไร

และเพียงใด

3.1 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิวิกฤต T_c

3.2 การสันตามปกติของนิเวศยลของสิ่งเสียบ

ความสำคัญของการวิจัย

การวิจัยโดยวิเคราะห์ด้วยการคำนวณ มีความสำคัญดังนี้

1. จะทำให้ได้ทฤษฎี เกี่ยวกับสารตัวนำยิ่งยวดในแนววิเคราะห์ใหม่ อันเป็นการพัฒนาทฤษฎี

ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

2. เป็นการเปรียบเทียบให้เห็นว่า ผลที่ได้จากการวิเคราะห์หาค่าให้ผลการวิจัยเก่า ๆ นำเชื่อถือ มีเหตุผล และควรเป็นที่ยอมรับใดหรือไม่เพียงใด

ข้อตกลงเบื้องต้น

การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์นี้ ยอมรับว่า ทฤษฎี บี ซี เอส ทฤษฎีโลหะผลึกของแอนเดอร์สัน ทฤษฎีของกินส์เบิร์ก แลงเดา และกอร์คอฟ เป็นจริง และใช้ได้

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มุ่งวิเคราะห์หาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ $\Delta(r)$ ในสารตัวนำยิ่งยวด ที่มีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กเพียงอะตอมเดียวเท่านั้น การวิจัยจะไม่พิจารณาถึงกรณีที่มีสิ่งเจือปนหลาย ๆ อะตอม เพราะจะต้องคิดอันตรกิริยาระหว่างอะตอมของสิ่งเจือปนด้วย ซึ่งจะเป็นเรื่องที่ยุ่งยากมาก

คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ

1. ออเดอร์ พารามิเตอร์ (order parameter) คือเวฟฟังก์ชันของอิเล็กตรอนที่อยู่ในสภาวะตัวนำยิ่งยวด (superconducting wave function, ψ) เป็นค่าที่กำหนดคุณสมบัติที่แสดงถึง "ระดับของความเป็นสภาวะตัวนำยิ่งยวด" (order parameter characterizes the "degree of superconductivity") และ $|\psi|^2$ จะบอกค่าความหนาแน่นของการควบแน่นของอิเล็กตรอนในสภาวะตัวนำยิ่งยวด

2. สารตัวนำยิ่งยวด (superconductors) คือโลหะบริสุทธิ์ หรือโลหะผลึกที่มีสิ่งเจือปนอย่างเจือจาง ที่ไร้ความต้านทานไฟฟ้าเมื่ออยู่ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

3. สิ่งเจือปนแบบแม่เหล็ก (magnetic impurity) คือสารแม่เหล็กซึ่งถูกนำไปผสมในสารอื่น ๆ ตามปกติอะตอมหรือไอออนส่วนใหญ่มีคุณสมบัติทางแม่เหล็ก เนื่องจากสปินของอิเล็กตรอนทุกตัว ถ้าสปินที่มันหักล้างกันไม่หมด จะทำให้อะตอมหรือไอออนนั้นแสดงคุณสมบัติเชิง

แม่เหล็ก คือ มีไดโพล โมเมนต์ (dipole moment) แต่ถ้าสปีนที่มันหักล้างกันพอดีจะทำให้อะตอมหรืออิออนนั้นไม่เป็นแม่เหล็ก เช่นอะตอมของกาซเฉื่อย ทองแดง เป็นต้น

4. อุณหภูมิวิกฤต (critical temperature, T_c) คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ที่โลหะหรือโลหะผสมที่มีสิ่งเจือปนอย่างเจือจางเปลี่ยนสภาพจากสภาพตัวนำปกติเป็นสภาพตัวนำยิ่งยวด ซึ่งสภาพนี้เป็นสภาพที่สารไร้ความต้านทาน

5. ระยะอาพันธ์ (coherence length, ξ) คือระยะทางระหว่างอิเล็กตรอนในคู่อุปเปอร์ (Cooper pairs) ของสารตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิใด ๆ ที่ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

ξ_0 คือ ระยะทางอาพันธ์ระหว่างอิเล็กตรอนในสารตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำยิ่งยวดค่าสัมบูรณ์ จากผลการวิเคราะห์โดยทฤษฎี บี ซี เอล (BCS Theory) ได้ผลลัพธ์ว่า

$$\xi_0 \approx \frac{\hbar v_F}{kT_c}$$

โดยที่ v_F คือ ค่าความเร็วเฟอร์มิ (Fermi velocity)

k คือ ค่าคงที่ของโบลทซ์แมนน์ (Boltzmann constant)

$\hbar$ คือ ค่าคงที่ของพลังค์ (Planck constant)/ 2π

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎี บี ซี เอส

ในปี ค.ศ. 1957 บาร์ดีน คูเปอร์ และشريฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper and Schrieffer, 1957 1175) ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับสภาพตัวนำยิ่งยวดโดยอาศัยพื้นฐานทางทฤษฎีที่คูเปอร์เคยเสนอไว้ในปี ค.ศ. 1956 เรียกโดยย่อว่าทฤษฎี บี ซี เอส (BCS theory) ทฤษฎีจุลภาคของสภาพตัวนำยิ่งยวดของเขาทั้งสามสามารถอธิบายได้ว่า สภาพตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นได้อย่างไร และอิเล็กตรอนมีเวฟฟังก์ชัน (wave function) อย่างไร รวมทั้งสามารถอธิบายการจับคู่ของอิเล็กตรอนเพื่อทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด และยังอธิบายคุณสมบัติอื่น ๆ ของสภาพนี้ได้ถูกต้องอีกด้วย

ทฤษฎีพื้นฐานที่นำไปสู่ทฤษฎี บี ซี เอส

ผลงานวิจัยในอดีตทั้งในทางทฤษฎี และในทางการทดลองที่เป็นที่ยอมรับว่าเป็นพื้นฐานของทฤษฎี บี ซี เอส มีดังนี้

1. ทฤษฎีมหภาคของลอนดอน (London, 1950 . 10) กล่าวว่า สภาพวะตัวนำยิ่งยวดเป็นสภาวะควอนตัมมหภาค (macroscopic quantum state) ซึ่ง เวฟ ฟังก์ชัน บอกลักษณะการจับคู่ของอิเล็กตรอน ยังผลให้ผลรวมของโมเมนตัมของอิเล็กตรอนทั้งคู่เป็นศูนย์ และสภาวะตัวนำยิ่งยวดต่อต้านกับอิทธิพลของสนามแม่เหล็กจากภายนอก
2. ปีปปาร์ด (Pippard, 1953 547) พบว่ากระแสกับสนามไม่ขึ้นต่อกันโดยตรงในช่วงระยะทางอาพันธ์ที่มีระดับขนาดประมาณ 10^{-6} เมตร ในสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์
3. สภาวะตัวนำยิ่งยวดสามารถอธิบายได้ด้วยค่าออเดอร์ พารามิเตอร์ ซึ่งเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอ และต่อเนื่อง ออเดอร์ พารามิเตอร์ มีค่าเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิวิกฤติ T_c และมีค่าเป็นหนึ่ง ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ (Ginzburg and Landau, 1950 . 1064)

4. ความแตกต่างระหว่างพลังงานอิสระ (free energy) ของสภาพตัวนำยิ่งยวดและสภาพตัวนำปกติมีค่าน้อย และน้อยกว่าพลังงานการจับคู่ของอิเล็กตรอนอยู่หลายระดับขนาด

5. ช่องว่างพลังงาน (energy gap) มีค่าประมาณ $k_B T_c$ โดยที่ k_B คือ ค่าคงที่ของโบลท์ซมานน์ (Boltzmann constant) (Giaever and Megerle. 1961 1101)

6. อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน เป็นกลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด และเป็นสาเหตุสำคัญในการกำหนดค่าของอุณหภูมิวิกฤต (Fröhlich. 1950 · 845)

สมมติฐานเบื้องต้นของทฤษฎี บี ซี เอลส์

ทฤษฎี บี ซี เอลส์ นั้น นอกจากจะยอมรับและคำนึงถึงผลทางทฤษฎี และทางการทดลองที่ได้มาก่อน ๆ แล้ว ยังได้ตั้งสมมติฐานที่สำคัญ ๆ อีกว่า

1. สภาวะปกติของสภาพตัวนำยิ่งยวด (superconducting - ground state) เกิดขึ้นโดยการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นแบบซิงเกิลท์ (singlet) และเป็นสภาวะแบบกลับเวลา (time reversed) โมเมนตัมรวมของอิเล็กตรอนทุกคู่มีค่าเท่ากัน และเท่ากับศูนย์

2. อิเล็กตรอนทั้งคู่มีพลังงานสูงกว่าพลังงานเฟอร์มิ แรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนเป็นผลเนื่องมาจากการแลกเปลี่ยนโฟนอนระหว่างกัน มีค่ามากกว่าแรงผลักรังที่เกิดจากอันตรกิริยาแบบคูลอมบ์ (Coulomb interaction) ระหว่างอิเล็กตรอนซึ่งมีค่าน้อย แรงลัพธ์จึงเป็นแรงดึงดูดทำให้เกิดการจับคู่ของอิเล็กตรอน อันเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดสภาวะสารตัวนำยิ่งยวด ทฤษฎี บี ซี เอลส์ นี้ในตอนแรกไม่คำนึงถึงการแปรเปลี่ยนทิศทางของสปินของอิเล็กตรอน และพลังงานของอิเล็กตรอนนั้นถือว่าคงที่ โดยมีค่าประมาณ $\hbar\omega_c$ ทั้งนี้โดยวัดจากระดับพลังงานเฟอร์มิ E_F และโฟนอนที่ใช้ในอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนมีความถี่ตั้งแต่ศูนย์ไปจนถึงความถี่เดบาย ω_D (Debye frequency)

3. ถ้าไม่คำนึงถึงการจับคู่แล้ว คุณสมบัติอื่น ๆ ทางจุลภาคของอิเล็กตรอนทั้งในสภาพตัวนำปกติ และในสภาพตัวนำยิ่งยวดเหมือนกันหมดทุกประการ สำหรับโลหะชนิดเดียวกัน

คูเปอร์ (Cooper pairs)

คูเปอร์ได้ศึกษาว่าอิเล็กตรอนสองตัวมีแรงยึดเหนี่ยวกันได้อย่างไร เขาได้พิจารณาแบบจำลองง่าย ๆ ที่มีอิเล็กตรอนสองตัว อยู่เหนือทะเลเฟอร์มิ (Fermi sea) ที่อุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์ เมื่อมีแรงดึงดูดเกิดขึ้นระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองนั้น เท่านั้น โดยไม่คำนึงถึงแรงกระทำจากอิเล็กตรอนตัวอื่น ๆ เขาคำนวณหาเวฟฟังก์ชันของอิเล็กตรอนทั้งสองตัว (two-electron wave function) นั้น ที่สถานะพลังงานต่ำสุด (lowest energy state) ซึ่งมีโมเมนตัมรวมเป็นศูนย์ โดยให้อิเล็กตรอนทั้งสองนั้นมีโมเมนตัมเท่ากัน แต่ทิศทางข้ามกัน เขาได้สมมติว่าเวฟ ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนทั้งสองนั้นเป็น

$$\psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - i\vec{k} \cdot \vec{r}_2}$$

ψ_0 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\cos \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ กับฟังก์ชันสปินฟังก์ชันแบบไม่สมมาตร (antisymmetric singlet spin function) $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$ หรือในรูปของ $\sin \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ กับฟังก์ชันสปินฟังก์ชันแบบสมมาตร (symmetric triplet spin function) $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2, \beta_1\beta_2$ โดยที่ α_1 แทนสปินขึ้น (spin up) ของอิเล็กตรอนตัวที่ 1 และ β_1 แทนสปินลง (spin down) ของอิเล็กตรอนตัวที่ 1 แรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในการจับคู่แบบฟังก์ชัน (singlet coupling) จะมีพลังงานต่ำกว่า (lower energy) ระบบเดี่ยวซึ่งเป็นระบบที่เสถียรกว่า และเวฟ ฟังก์ชันแบบฟังก์ชันของอิเล็กตรอนสองตัวที่จะนำมาพิจารณาจะเป็นดังนี้คือ

$$\psi_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left[\sum_{\vec{k} > k_F} g_{\vec{k}} \cos \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) \dots (1)$$

เมื่อนำสมการ 1 แทนลงในสมการไฮโดรเจนเจอร์ (Schrödinger equation) เขาสามารถหา $g_{\vec{k}}$ และค่าเฉพาะของพลังงาน E (energy eigenvalue) ได้

$$(E - 2\epsilon_{\vec{k}}) g_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}' > k_F} V_{\vec{k}\vec{k}'} g_{\vec{k}'} \dots (2)$$

ในที่นี้ $\epsilon_{\vec{k}}$ คือ พลังงานของคลื่นระนาบที่สภาวะปกติ (unperturbed plane-wave energy)

$V_{\vec{k}\vec{k}'}$ คือ แมตริกซ์ อีเลเมนต์ (matrix element) ของศักย์อันตรกิริยา (interaction potential)

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \Omega^{-1} \int V(\vec{r}) e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad \dots (3)$$

โดยที่ $\vec{r}$ คือ ระยะทางระหว่างอิเล็กตรอนสองตัว

Ω คือ ปริมาตรนอร์มัลไลซ์ (normalization volume)

$V_{\vec{k}\vec{k}'}$ แสดงถึงคุณสมบัติความรุนแรงของศักย์ (strength of the potential) สำหรับการชนกัน (scattering) ระหว่างอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $(\vec{k}', -\vec{k}')$ เป็นโมเมนตัม $(\vec{k}, -\vec{k})$ ถ้าเขาสามารถหาค่า $g_{\vec{k}}$ ให้เหมาะสมกับสมการที่(2)ได้ และค่า $E < 2E_F$ แล้ว การสับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนจะเกิดขึ้น

ในการหาค่า $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ นั้น คูเปอร์ได้หาโดยวิธีกะประมาณ คือ กำหนดว่า $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V$ สำหรับที่สถานะ $\vec{k}$ อิเล็กตรอนจะมีพลังงานอยู่ในช่วง $E_F \pm \hbar\omega_D$ และ $V_{\vec{k}\vec{k}'} = 0$ สำหรับอิเล็กตรอนที่มีพลังงานมากกว่า $\hbar\omega_D$ ดังนั้นสมการ(2)จึงให้ผลว่า

$$g_{\vec{k}} = V \frac{\sum_{\vec{k}'} g_{\vec{k}'}}{2\epsilon_{\vec{k}} - E} \quad \dots (4)$$

หาผลรวมทั้งสองข้างและตัด $\sum g_{\vec{k}}$ ทั้งจะได้

$$\frac{1}{V} = \sum_{\vec{k} > k_F} (2\epsilon_{\vec{k}} - E)^{-1} \quad \dots (5)$$

แทน summation ด้วยการอินทิเกรต

$$\frac{1}{V} = N(0) \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_c} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E}$$

$$= \frac{1}{2} N(0) \ln \left(\frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_c}{2E_F - E} \right)$$

โดยที่ $N(0)$ คือสถานะความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ

เมื่ออันตรกิริยาในการจับคู่เป็นแบบแรงอ่อน $N(0)V \ll 1$ พลังงาน E จะประมาณค่าได้เป็น

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_c e^{-2/N(0)V} \quad \dots (6)$$

สาเหตุการเกิดอันตรกิริยาแรงดึงดูด

ในการคำนวณค่าของ $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ เขากำหนดให้ $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ มีค่าเป็นลบ ($V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V$)

เงื่อนไขนี้เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด ถ้าทราบพลังงานศักย์ใน อันตรกิริยาคูลอมบ์ $V(\vec{r}) = \frac{e^2}{r}$ แล้วคำนวณหาฟูรีเยทรานส์ฟอร์ม (Fourier transforms) ของ $V(\vec{r})$ จะได้เป็น

$$V(\vec{q}) = V(\vec{k} - \vec{k}') = V_{\vec{k}\vec{k}'} = \Omega^{-1} \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad \dots (7)$$

เมื่อแทนค่า $V(\vec{r}) = \frac{e^2}{r}$ ในสมการที่ (7) จะได้

$$V(\vec{q}) = \frac{4\pi e^2}{\Omega q^2} = \frac{4\pi e^2}{q^2} \quad \dots (8)$$

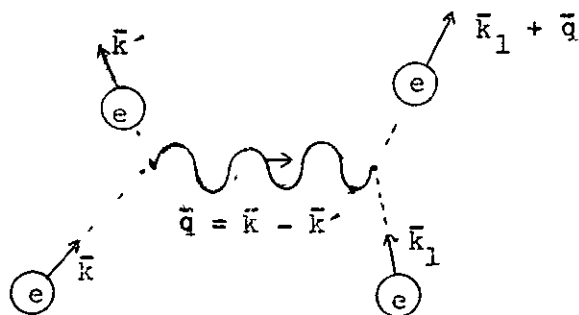
สมการที่ (8) นี้ ได้มาจากการที่เขากำหนดให้ปริมาตร (Ω) ของระบบเป็น 1 จะเห็นว่า ถ้าพิจารณาอันตรกิริยาทางไฟฟ้าแต่เพียงอย่างเดียวแล้ว ค่า $V(\vec{q})$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอ

สำหรับฟังก์ชันไดอิเล็กตริก (dielectric function) $\epsilon(\vec{q}, \omega)$ ที่เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ถ้าระยะการกำบังป้องกัน (screening length) ของระบบคือ $\frac{1}{k_s} = L_A$ ในการกะประมาณของ เฟอร์มิ-โรมาส (Fermi-Thomas) ϵ มีค่าเป็น $1 + k_s^2/q^2$ และ

$$V(\vec{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2}$$

นี้ก็แสดงให้เห็นว่า $V_{\vec{k}\vec{k}}$ ยังมีค่าเป็นบวกอยู่ ซึ่งจะไม่ผลทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวดได้ การที่ค่า $V_{\vec{k}\vec{k}}$ จะเป็นลบได้นั้น โฟรฮลิช ได้เสนอความคิดว่า จะต้องเกิดจากการที่ประจุลบเคลื่อนที่เข้าไปในกลุ่มของไอออนบวก (positive ion) เมื่อเกิดแรงดึงดูดระหว่างกัน ไอออนบวกเคลื่อนที่เข้าไปหาประจุลบ ประจุลบอื่น ๆ ที่อยู่รอบ ๆ ไอออนบวกจะเคลื่อนที่ตามไปด้วย ทำให้ดูคล้ายกับว่ามีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนขึ้น ถ้าแรงดึงดูดนี้มากพอก็จะชนะแรงผลักทางคูลอมบ์ได้ แรงสัฟรระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองจึงจะกลายเป็นแรงดูด อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับแลตทิส (electron-lattice interaction) นี้ ได้ถูกนำเสนอเป็นครั้งแรกโดย โฟรฮลิช ในปี ค.ศ. 1950 (Fröhlich. 1950 845) และผลของทฤษฎีนี้ได้รับการสนับสนุนจากการทดลองของแมกซ์เวล (Maxwell. 1950 . 477) และของเรย์โนลด์ กับคนอื่น ๆ (Reynolds and others. 1950 487) ที่เกี่ยวกับเรื่องผลของไอโซโทป (isotope effect) ที่กล่าวว่าอุณหภูมิวิกฤต T_c และสนามแม่เหล็กวิกฤต H_c เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $M^{-1/2}$ ของแต่ละไอโซโทป โดยที่ M คือมวลของนิวเคลียสของแต่ละไอโซโทปของสารหนึ่ง ๆ

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านแลตทิส จะทำให้แลตทิสเสียรูปทรง (deformation) และอาศัยเหตุผลที่ว่าแลตทิสมีความยืดหยุ่น (elastic) จะเกิดการสั่นไหว (vibration) เป็นคลื่นในรูปโฟนอน (phonon) จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม (momentum conservation) เราสามารถกล่าวได้ว่า อิเล็กตรอนที่วิ่งผ่านแลตทิสเปลี่ยนโมเมนตัมของมันจาก $\vec{k}$ เป็น $\vec{k}'$ โฟนอนที่เกิดจากการชนครั้งนี้จะมีโมเมนตัมเท่ากับ $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ และความถี่โฟนอน (phonon frequency) เท่ากับ $\omega_{\vec{q}}$



ภาพประกอบ 2 แสดงการชนกันของอิเล็กตรอน

หลังจากที่ โฟรฮัลย์ เสนอแนวคิดเรื่องอันตรกิริยาแบบอิเล็กตรอน-โฟนอนนี้แล้ว ได้มีนักฟิสิกส์พยายามค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ต่อไปอีก เช่น บาร์ดีน และพายนัล (Bardeen and Pines. 1955 1140) เขาได้แสดงให้เห็นว่าค่า $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ เป็นลบได้เมื่อ $\omega < \omega_D$ ยังผลให้เกิดแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพตัวนำยิ่งยวด งานวิจัยของบาร์ดีน และ พายนัล ยังได้ผลอีกว่า ถ้าพลังงานของคู่อิเล็กตรอนน้อยกว่า $\hbar\omega_D$ แล้วจะมีแรงดึงดูดเสมอ พลังงานคัทออฟ $\hbar\omega_c$ (cutoff energy) ของแรงดึงดูดแบบคูเปอร์ -V มีค่าประมาณพลังงานเดบาย $\hbar\omega_D$ (Debye energy)

การคำนวณของทฤษฎี บี ซี เอส

ในทฤษฎี บี ซี เอส ซึ่งเป็นรากฐานของการอธิบายสภาวะที่อิเล็กตรอนจับคู่กันด้วยแรงดึงดูด ทฤษฎีนี้มีแฮมิลโทเนียน H (Hamiltonian) ที่ประกอบด้วยคิกขอันตรกิริยาแรงดึงดูด V (attractive interaction potential) ทฤษฎีนี้ได้กำหนดโอเปอเรเตอร์ (operator) ขึ้น 2 ชนิด คือ

1. ครีเอชัน โอเปอเรเตอร์ $c_{\vec{k}\sigma}^+$ (creation operator) ซึ่งเป็นโอเปอเรเตอร์ที่สร้างอนุภาคที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ และสปิน σ
2. แอนนิฮิเลชัน โอเปอเรเตอร์ หรือ เดสตรักชัน โอเปอเรเตอร์ $c_{\vec{k}\sigma}$ (annihilation or destruction operator) ซึ่งเป็นโอเปอเรเตอร์ที่ทำลายอนุภาคที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ และ สปิน σ

ถ้าเป็นสปินขึ้น เราเขียนแทนด้วย $\uparrow$ หรือ $+$ และถ้าเป็นสปินลง เราเขียนแทนได้ด้วย $-\sigma$ หรือ $-$ c โอเปอเรเตอร์ดังกล่าวมีคุณสมบัติดังนี้

$$[c_{\vec{k}\sigma}, c_{\vec{k}'\sigma'}^+]_+ = c_{\vec{k}\sigma} c_{\vec{k}'\sigma'}^+ + c_{\vec{k}'\sigma'}^+ c_{\vec{k}\sigma} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$[c_{\vec{k}\sigma}, c_{\vec{k}'\sigma'}]_+ = [c_{\vec{k}\sigma}^+, c_{\vec{k}'\sigma'}^+]_+ = 0$$

$$c_{\vec{k}\sigma}^+ c_{\vec{k}\sigma} = n_{\vec{k}\sigma}$$

$n_{\vec{k}\sigma}$ คือนัมเบอร์ โอเปอเรเตอร์ (number operator) สำหรับอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ และสปิน σ

ทฤษฎี ปี ซี เอลส์ นี้กำหนดเวฟ ฟังก์ชันของอิเล็กตรอนให้อยู่ในรูป

$$|\psi\rangle = \sum_1 a_1 |\psi_1\rangle$$

โดยที่ $|\psi_1\rangle$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$|\psi_1\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ c_{2\uparrow}^+ \dots c_{k\uparrow}^+ \dots c_{k\downarrow}^+ \dots |0\rangle$$

$|0\rangle$ คือสภาวะสุญญากาศ (vacuum state)

โอเปอเรเตอร์ที่ใช้แทนศักยอันตรกิริยาแรงดึงดูด V มีค่า

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{r}, \vec{r}', \vec{q} \\ \sigma, \sigma'}} V(\vec{q}) c_{\vec{k}+\vec{q}, \sigma}^+ c_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma'} c_{\vec{k}'\sigma'} c_{\vec{k}\sigma}$$

เทอมศักยอันตรกิริยานี้แสดงถึงการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนสองตัว ซึ่งอยู่ในสภาวะที่มีค่า $\vec{k}, \sigma$ และ $\vec{k}', \sigma'$ ในการชนกันนี้มีการแลกเปลี่ยนโฟนอนที่มีโมเมนตัม $\vec{q}$

จากสมมติฐานของการสับคู่อิเล็กตรอน เวฟ ฟังก์ชัน ที่ถูกต้องขึ้นอยู่กับค่าสัมบูรณ์อยู่ในรูป

$$\Phi_N = A \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \dots \phi(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) (1\uparrow)(2\uparrow) \dots (N-1\uparrow)(N\uparrow)$$

โดยที่ A เป็นโอเปอเรเตอร์การทำให้ไม่ล้นมาตรการ (antisymmetrization operator)

$\phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_j)$ เป็นเวฟ ฟังก์ชันของคู่อิเล็กตรอนที่อยู่ที่ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_j$

เมื่อเขียนเวฟ ฟังก์ชันใหม่ให้อยู่ในรูปครีเอชัน และแอนนิฮิเลชันโอเปอเรเตอร์ใน

โมเมนตัมสเปซ (momentum space) เราจะได้

$$\Phi_N = \sum_{k_1 \dots k_{N/2}} g_{k_1} \dots g_{k_{N/2}} c_{k_1\uparrow}^+ c_{-k_1\uparrow} \dots c_{k_{N/2}\uparrow}^+ c_{-k_{N/2}\uparrow} |0\rangle$$

ϵ_k คือฟูเรียรทรานส์ฟอร์มของเวฟ ฟังก์ชัน ψ ของโฟนอนรอบ ๆ นิวเคลียส

เวฟ ฟังก์ชันนี้ไม่เป็นไปตามสถิติของโบส (Bose statistics) และเวฟ ฟังก์ชัน

$|\psi\rangle = \sum_N \lambda_N \Phi_N$ แสดงว่าอีเลกตรอนมีจำนวนจำกัด สัมประสิทธิ์ $|\lambda_N|^2$ จะบอกค่าการกระจายความน่าจะเป็น (probability distribution) ของอีเลกตรอน เมื่อ $N \approx \langle N \rangle$ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนอนุภาคจากค่าเฉลี่ย $\frac{\Delta N}{N}$ มีค่าเป็น $\frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$ และจะมีค่าน้อยจนตัดทิ้งได้ ในระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก เวฟ ฟังก์ชันโดยประมาณนี้จึงเป็นเรื่องสำคัญในวิธีการวิเคราะห์หาค่าต่าง ๆ

ทฤษฎี พี ซี เอลส์ กำหนดโอเปอเรเตอร์ขึ้นใหม่ดังนี้

$$b_k^+ = c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+$$

$$b_k = c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow}$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ใน $|\psi\rangle$ จะได้

$$|\psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k b_k^+) |0\rangle$$

$$\text{โดยที่ } v_k/u_k = \epsilon_k$$

$$u_k = \frac{1}{(1 + \epsilon_k^2)^{1/2}}$$

$$v_k = \frac{\epsilon_k}{(1 + \epsilon_k^2)^{1/2}}$$

$$u_k^2 + v_k^2 = 1$$

ทำให้แฮมิลโทเนียนใหม่เขียนได้เป็น

$$H = 2 \sum_k \epsilon_k b_k^+ b_k + \sum_{kk'} V_{kk'} b_{k'}^+ b_k$$

โดยที่เทอมแรก คือ พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนอิสระ เทอมที่สอง คือ พลังงานศักย์ของอันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน พลังงานต่ำสุด (ground state) ในสถานะเสถียรภาพหาได้จากค่าที่คาดหวัง (expectation value)

$$W = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

$$= 2 \sum_k \epsilon_k v_k^2 + \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} V_{kk'}$$

การหาค่า W ซึ่งเป็นค่าต่ำสุดต้องอยู่ภายใต้ข้อบังคับที่ว่า $u_k^2 + v_k^2 = 1$ เรากำหนดให้

$$u_k = \sin \theta_k$$

$$v_k = \cos \theta_k$$

$$\therefore W = \sum_k \epsilon_k (1 + \cos 2\theta_k) + \frac{1}{2} \sum_{kk'} V_{kk'} \sin 2\theta_k \sin 2\theta_{k'}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_k} = 0$$

$$= -2\epsilon_k \sin 2\theta_k + \sum_{k'} V_{kk'} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_{k'}$$

$$\therefore \tan 2\theta_k = \frac{\sum_{k'} V_{kk'} \sin 2\theta_{k'}}{2\epsilon_k}$$

กำหนดให้

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sin 2\theta_{k'} = -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}}$$

$$E_k = (\Delta_k^2 + \epsilon_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

Δ_k คือ พารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงาน (energy gap parameter) และ E_k คือ พลังงานของอนุภาคที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ เมื่อระบบนั้นกำลังอยู่ในสภาวะที่วุ่นวาย

$$\tan 2\theta_k = -\frac{\Delta_k}{\epsilon_k}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เพื่อว่า } 2u_k v_k &= \sin 2\theta_k = \frac{\Delta_k}{\epsilon_k} \\
 \text{และ } v_k^2 - u_k^2 &= \cos 2\theta_k = -\frac{\epsilon_k}{E_k} \\
 \text{เราจะได้ } v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon_k}{(\Delta_k^2 + \epsilon_k^2)^{1/2}} \right] \quad \dots (a) \\
 u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right)
 \end{aligned}$$

เมื่อ $\epsilon_k \rightarrow \infty$ แล้ว $v_k^2 \rightarrow 0$ ถ้าเราแทน $\sin 2\theta_k$ เพื่อให้ได้ค่า Δ_k จะเห็นว่า

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{E_{k'}} v_{kk'} = \frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{(\Delta_{k'}^2 + \epsilon_{k'}^2)^{1/2}} v_{kk'} \quad \dots (b)$$

ถ้าเราต้องหาคำตอบในกรณีที่ $\Delta_k = 0$ สมการ a จะให้ผลกันว่า $v_k^2 = 1$ เมื่อ $\epsilon_k < 0$ และ $v_k^2 = 0$ เมื่อ $\epsilon_k > 0$

$$\text{เราทราบว่า } v_{kk'} = \begin{cases} -V & \text{เมื่อ } |\epsilon_k| \text{ และ } |\epsilon_{k'}| \leq \hbar\omega_c \\ 0 & \text{เมื่อ } \epsilon_k \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ω_c คือความถี่คัตออฟ (cutoff frequency) เป็นความถี่สูงสุดของโฟนอนที่เข้าในการยึดอิเล็กตรอนทั้งสองไว้ เมื่อแทนค่าใน b จะได้

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta & \text{เมื่อ } |\epsilon_k| \text{ และ } |\epsilon_{k'}| \leq \hbar\omega_c \\ 0 & \text{เมื่อ } \epsilon_k \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อแทนค่าใน Δ_k ที่กำหนดให้ จะได้

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 &= -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \\
 &= \frac{V\Delta}{2} \sum_{k'} \frac{1}{E_{k'}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{d\epsilon}{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} \frac{\hbar\omega_c}{\Delta}$$

ผลลัพธ์สุดท้ายได้มาโดยเปลี่ยนจากผลรวมเป็นอินทิเกรตและ $N(0)$ เป็นความหนาแน่นของสถานะอิเล็กตรอน (density of electron state) ที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_c}{\sinh(1/N(0)V)}$$

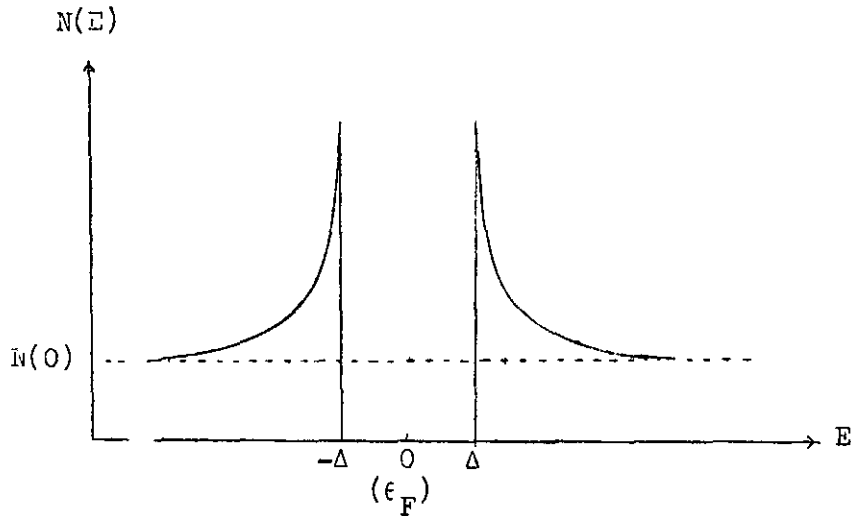
$$\Delta = 2\hbar\omega_c e^{-1/N(0)V}$$

๑

สมการของ Δ นี้ใช้ได้ภายในเงื่อนไขของการจับคู่กันอย่างอ่อน คือ $N(0)V \ll 1$ จาก $E_{k_0} = (\Delta^2 + \epsilon_{k_0}^2)^{1/2}$ จะเห็นว่าอิเล็กตรอนมีพลังงานในสถานะที่ถูกกระตุ้น (excitation) ที่น้อยที่สุดเท่ากับ Δ และ Δ คือ ช่องว่าง (gap) ในแถบ (spectrum) ของพลังงาน ดังนั้นการทำให้คู่อิเล็กตรอนแยกจากกันจะต้องใช้พลังงานอย่างน้อยที่สุด 2Δ

ความหนาแน่นของสถานะ

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dE} = N(0) \frac{d\epsilon}{dE} \\ &= \frac{N(0)}{dE/d\epsilon} \\ &= \begin{cases} N(0) \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & \text{เมื่อ } E \geq \Delta \\ 0 & \text{เมื่อ } E < \Delta \end{cases} \end{aligned}$$



ภาพประกอบ 3 กราฟแสดงความหนาแน่นของสถานะต่อหนึ่งหน่วยพลังงาน กับพลังงานของอิเล็กตรอน (พลังงานวัดจากพลังงานเฟอร์มิ)

พลังงานการกลั่นตัว (condensation energy) ของอิเล็กตรอนที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

$$\begin{aligned} W &= W_s - W_n \\ &= -\frac{1}{2}N(0)\Delta^2(1 - e^{-2/N(0)V}) \\ &\approx -\frac{1}{2}N(0)\Delta^2 \end{aligned}$$

กรณีที่อุณหภูมิสูงกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์

สิ่งหนึ่งที่ต้องนำมาพิจารณาเมื่ออุณหภูมิสูงกว่าศูนย์องศาสัมบูรณ์คือ สถานะที่ถูกปิดครอง จะรบกวนการกระจายของเฟอร์มิ $f_k(T)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ (Fermi distribution function) เข้ามาเกี่ยวข้อง โดยที่ $f_k(T) = \frac{1}{[e^{E_k/k_B T} + 1]}$ การคำนวณในทฤษฎี บี ซี เอส แสดงให้เห็นว่า

$$\Delta_k(T) = \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f_{k'})$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าพลังงานช่องว่างลดลงเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น นอกจากนั้นพลังงานของอิเล็กตรอนที่ถูกกระตุ้นมีค่าเป็น

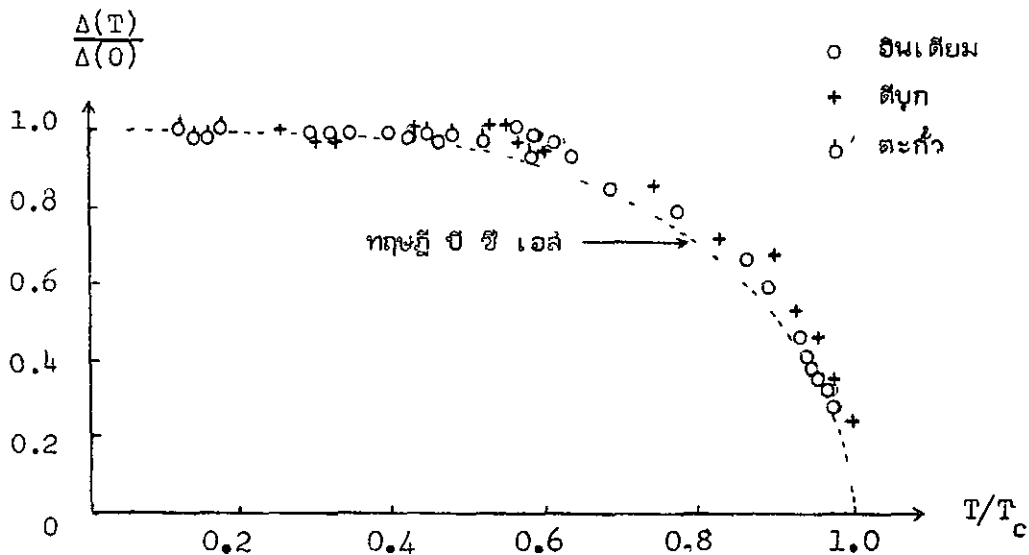
$$E_k = [\epsilon_k^2 + \Delta_k^2(T)]^{1/2}$$

การหาความสัมพันธ์ระหว่างช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)$ กับอุณหภูมิ T

โดยการแทนค่า u_k , v_k และ f_k ใน Δ_k และใช้วิธีประมาณ คือ การอินทิเกรตแทนการรวม จะได้

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{\tanh ([\epsilon^2 + \Delta^2(T)]^{1/2}/2k_B T)}{[\epsilon^2 + \Delta^2(T)]^{1/2}} d\epsilon$$

ค่า $\Delta(T)$ มีค่าเปลี่ยนแปลงไปดังแสดงในกราฟข้างล่างนี้



ภาพประกอบ 4 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิในทฤษฎี บี ซี เอส และผลการทดลองของ เกียเอเวอร์ และเมเกอร์ (Glaeuer and Megerle, 1961 · 1101)

การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต T_c

จากกราฟข้างบนจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ขณะที่ $\Delta(T)$ มีค่าเป็นศูนย์นั้น อุณหภูมิขณะนั้น จะเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต T_c ของสภาพตัวนำยิ่งยวด ดังนั้น จะได้ผลว่า

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_c} \frac{\tanh[\epsilon/2k_B T_c]}{\epsilon} d\epsilon$$

$$k_B T_c \approx 1.14 \hbar\omega_c e^{-1/N(0)V}$$

แต่ในอันตรกิริยาอิเล็กตรอน-โฟนอนนั้น พลังงานคัทออฟ เป็นค่าพลังงานตีบาย

$\hbar\omega_D$ (Debye energy)

$$\hbar\omega_c = \hbar\omega_D = k_B \Theta_D$$

โดยที่ Θ_D คือ อุณหภูมิตีบาย (Debye temperature) ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่มีค่าสัมพันธ์กับค่าความถี่ตีบาย ดังสมการ $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$

$$\therefore T_c \approx \Theta_D e^{-1/N(0)V}$$

ณ ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ($T = 0$) ค่าช่องว่างพลังงาน $\Delta(0)$ จะสัมพันธ์กับ T_c ดังนี้

$$2\Delta(0) = 3.53 k_B T_c$$

$$\Delta(0) \approx 1.76 k_B T_c$$

สภาพตัวนำยิ่งยวดและสนามแม่เหล็ก

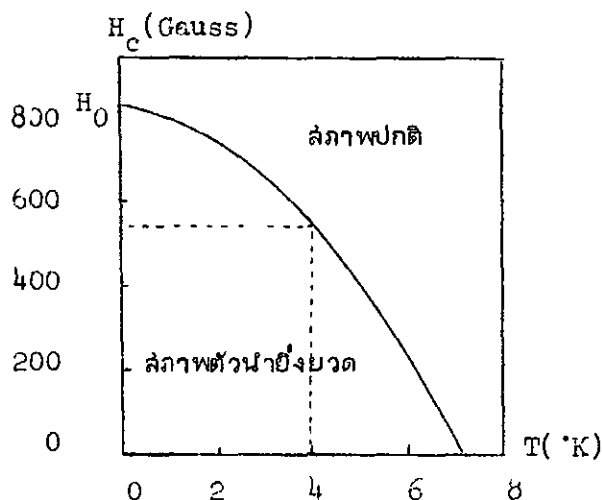
อนเนลส์ ค้นพบว่าสนามแม่เหล็กจากภายนอก สามารถบังคับให้สารที่กำบังอยู่ในสภาพตัวนำยิ่งยวด กลับสภาพไปเป็นสารตัวนำปกติได้ สภาพตัวนำยิ่งยวดจะเกิดขึ้นได้เฉพาะเมื่อสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าไม่เกินค่า ๆ หนึ่งเท่านั้น สนามแม่เหล็กนั้นเรียกว่า สนามแม่เหล็กวิกฤต H_c

(critical magnetic field) ค่า H_c ของสารหนึ่ง ๆ จะมีค่าได้ตั้งแต่ศูนย์ไปจนถึง H_0 โดยที่ H_0 คือสนามแม่เหล็กวิกฤตที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ต่อมา ไทน์ (Tuyn) ได้แสดงความสัมพันธ์ของสนามแม่เหล็กกับอุณหภูมิไว้ เรียกว่า กฎของไทน์ (Tuyn's law) ในปี ค.ศ. 1924 ว่า (Blakemore. 1969 . 238 - 244)

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right]$$

โดยที่ H_c คือ สนามแม่เหล็กวิกฤต ณ อุณหภูมิใด ๆ

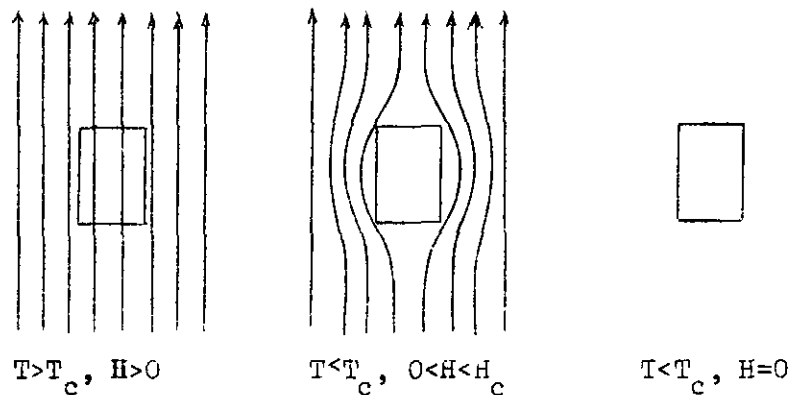
H_0 คือ สนามแม่เหล็กวิกฤต ณ อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์



ภาพประกอบ 5 กราฟแสดงความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิของตะกั่ว ($T_c \approx 7.19^\circ\text{K}$, $H_0 \approx 803 \text{ gauss}$)

เดกเคอร์ (Decker. 1958 : 1888) ทดลองกับตะกั่ว ได้ผลการทดลองใกล้เคียงกับสมการของไทน์ดังกล่าวมาก เช่น ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ ตะกั่วอยู่ในสภาวะตัวนำยิ่งยวด ถ้าสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าความเข้มต่ำกว่า 540 เกาส์ ตะกั่วก็ยังคงอยู่ในสภาวะตัวนำยิ่งยวดอย่างเต็ม แต่ถ้าเมื่อใดที่สนามแม่เหล็กมีค่าความเข้มสูงกว่า 540 เกาส์ เมื่อนั้น ตะกั่วจะกลับกลายเป็นสภาวะปกติทันที

ไมสส์เนอร์ และ ออชเชนเฟลด์ (Meissner and Ocnsenfeld, 1933 787) ได้พบปรากฏการณ์นี้มาก่อนที่ ไทน์ จะได้ถูกจากการวิเคราะห์โดยทางคำนวณเสียอีก เขาแสดงให้เห็นอีกอย่างหนึ่งคือ ณ ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต สสารแม่เหล็กภายนอกนั้นไม่สามารถพุ่งผ่านสารตัวนำยิ่งยวดได้ กล่าวคือ สารนั้นจะผลักสนามแม่เหล็กให้เบนออกจากตัวนำยิ่งยวด และเขายังอธิบายต่อไปอีกด้วยว่า สาเหตุที่เป็นเช่นนั้นนี้ เกิดจากกระแสเหนี่ยวนำที่ผิวของสารตัวนำยิ่งยวด สร้างสนามแม่เหล็กต่อต้าน การผ่านเข้ามาของเส้นแรงแม่เหล็กภายนอกไว้ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า "ผลของไมสส์เนอร์" (Meissner effect)



ภาพประกอบ 6 แสดงการพุ่งผ่านของสนามแม่เหล็กในตัวนำยิ่งยวดและตัวนำปกติ ซึ่งเรียกว่า ผลของไมสส์เนอร์

ผู้ที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ต่ออีก คือ ลอนดอน (London, 1935 : 71) ได้อธิบายไว้ว่าสนามแม่เหล็กทะลุผ่านสารตัวนำยิ่งยวดไม่ได้ นั่นจริง ๆ แล้วเขาได้แสดงให้เห็นว่า มีสนามแม่เหล็กส่วนหนึ่งที่ซึมผ่านผิวของสารตัวนำยิ่งยวดนั้นได้บ้าง จากผลการคำนวณเขาได้ว่า

$$\lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

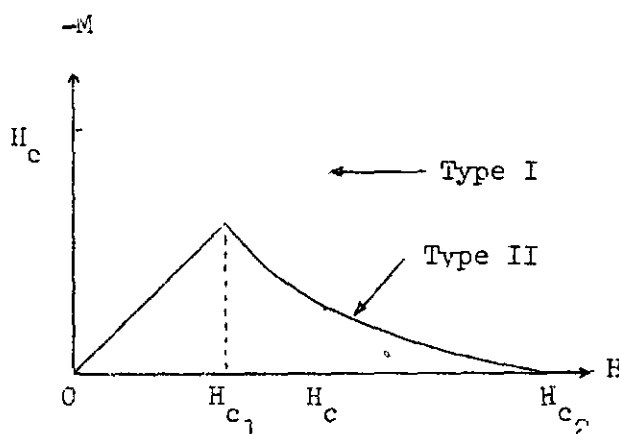
โดยที่ λ คือ ระยะทางที่สนามแม่เหล็กซึมผ่านเข้าไปในสารตัวนำยิ่งยวดได้

n_s คือ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่มีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวด (density of superconducting electron)

ไมส์สเนอร์ ได้ทำการทดลองกับสารต่าง ๆ มากชนิด และสรุปว่า สารตัวนำยิ่งยวด เหล่านั้น แบ่งออกได้เป็นสองพวก คือ

1. สารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 1 (type I superconductor) มีคุณสมบัติที่สำคัญ คือ เมื่อนำสารตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้วางในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มต่ำกว่าความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤตแล้ว จะมีกระแสเหนี่ยวนำที่ผิวตัวนำนั้นไหลวนเวียนทำให้สนามแม่เหล็กสัฟฟ B ภายในสาร มีค่าเป็นศูนย์ กระแสเหนี่ยวนำทำให้เกิด แมกเนไทเซชัน M (magnetization) ในสารมีค่าเป็นลบ เมื่อเทียบกับสนามแม่เหล็กภายนอก H โดยที่ $B = \mu(H + M)$ ซึ่งหมายความว่า H และ M จะต้องมีค่าเท่ากัน จึงทำให้ B เป็นศูนย์ได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า M มีค่าแปรตาม H ในช่วงที่ความเข้มสนามแม่เหล็กภายนอกยังไม่ถึงค่าวิกฤต H_c ปรากฏการณ์นี้ก็คือการที่ไม่มีเส้นแรงแม่เหล็กในสารตัวนำยิ่งยวด หรือ คือการที่ตัวนำยิ่งยวดไม่ยอมให้เส้นแรงแม่เหล็กจากภายนอกผ่านตัวของมันได้ สารตัวนำยิ่งยวดในสภาวะอย่างนี้ เรียกว่า เป็นสารแม่เหล็กชนิดไดอาแมกเนติกอย่างสมบูรณ์ (perfect diamagnetic) ปรากฏการณ์เช่นนี้จะหมดไป เมื่อสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าวิกฤต H_c หรือสูงกว่าจะทำให้ M เป็นศูนย์โดยทันที และตลอดไป B จะเท่ากับ μH ทันที และสารตัวนำนั้น จะกลับสภาพเป็นตัวนำปกติด้วย

2. สารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 2 (type II superconductor) เป็นสารที่มีคุณสมบัติ เช่นเดียวกับแบบที่ 1 ในช่วงแรกของค่าสนามแม่เหล็กภายนอก ไปจนถึงค่าสนามแม่เหล็ก H_{c1} หลังจากนั้นสนามแม่เหล็ก B มีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยที่ค่า $-M$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ เช่นกัน จนในที่สุดเมื่อสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่า H_{c2} จะทำให้ $B = \mu H_{c2}$ แสดงว่าค่าสนามแม่เหล็กสัฟฟ B ภายในสารมีค่าไม่เป็นศูนย์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่ามีสนามแม่เหล็กผ่านผิวของสารตัวนำยิ่งยวดเข้าไปได้บ้าง ดังแสดงในภาพประกอบ



ภาพประกอบ 7 กราฟแสดงผลตอบสนองของสารตัวนำยิ่งยวด เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอก H ในรูปของแมกเนโตเซชัน M จากสมการ $B = \mu(H + M)$ เส้นประแสดงพฤติกรรมของสารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 1 (ปกติได้แก่พวกสารบริสุทธิ์) เส้นทึบแสดงพฤติกรรมของสารตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 2 โดยที่ $H_{c1} < H < H_{c2}$

สภาพแม่เหล็กในขอบเขตจำกัดในโลหะ (localized magnetic state in metal)

ได้มีผู้ทดลอง (Matthias and others. 1960 : 542) เกี่ยวกับโมเมนต์แม่เหล็กที่อยู่ในขอบเขตจำกัด (localized magnetic moment) ซึ่งเกิดจากการใส่สารเจือปนเข้าไปในโลหะที่ไม่เป็นสารแม่เหล็ก (nonmagnetic metal) กันมากมาย อย่างไรก็ตาม สาเหตุที่เกิดปรากฏการณ์ที่ยังยากนี้ก็ยังไม่มีผู้ใดอธิบายได้อย่างแจ่มชัด โดยเฉพาะโลหะที่มีเหล็ก โคบอลต์ และนิกเกิล ผสมอยู่อย่างเจือจางมีสมบัติคล้าย ๆ กันว่าโมเมนต์แม่เหล็กของสารเจือปนดังกล่าวขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะเจ้าบ้าน (host metal) ผลที่ได้จากการทดลองเหล่านี้กลายเป็นสิ่งที่นักวิทยาศาสตร์ต้องยอมรับโดยปราศจากทฤษฎีที่จะอธิบายให้เหตุผลว่า โมเมนต์แม่เหล็กเหล่านั้นเกิดขึ้นได้หรือสลายไปเพราะเหตุใด

แอนเดอร์สัน (Anderson. 1961 : 41) ได้พิจารณาปัญหาเหล่านี้ และเสนอแนะว่าสภาพแม่เหล็กในขอบเขตจำกัดขึ้นอยู่กับแรงปฏิกิริยาแบบคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนในอะตอมของสิ่งเจือปน และแรงคูลอมบ์นี้มีความสำคัญยิ่งในปัญหานี้ เขาอธิบายว่ามีอิเล็กตรอนอยู่สองชนิดที่มี

อันตรกิริยากันคือ เอส-อีเลกตรอน (s-electron) ซึ่งเป็นอีเลกตรอนอิสระ (free electron) ในโลหะเจ้าบ้าน และ ดี-อีเลกตรอน (d-electron) ซึ่งเป็นอีเลกตรอนบนสิ่งเสียบ แรงคูลอมบ์ระหว่างอีเลกตรอนทำให้มีการแลกเปลี่ยนระหว่างเอส-อีเลกตรอน และ ดี-อีเลกตรอน ทฤษฎีที่เขาเสนอแนะขึ้นมานี้สามารถอธิบายปรากฏการณ์โมเมนต์แม่เหล็กในโลหะให้เข้าใจได้ และในการคำนวณ เขาได้กำหนดแฮมิลโทเนียนขึ้น

แฮมิลโทเนียนของแอนเดอร์สัน (Anderson's Hamiltonian)

แอนเดอร์สันได้วางรูปแบบการคำนวณโดยกำหนดแฮมิลโทเนียนของเขาเป็น

$$H = H_{of} + H_{od} + H_{corr} + H_{sd}$$

H_{of} คือ พลังงานปกติ (unperturbed energy) ของอีเลกตรอนอิสระในขบวนการควอนไทซ์ที่สอง (second quantized) H_{of} เขียนได้ในฟอร์มต่อไปนี้

$$H_{of} = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma}$$

$$n_{k\sigma} = c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma}$$

โดยที่ ϵ_k คือ พลังงานของอีเลกตรอนอิสระที่มีโมเมนตัม k

$c_{k\sigma}^+$, $c_{k\sigma}$ และ $n_{k\sigma}$ เป็นโอเปอเรเตอร์เช่นเดียวกับในทฤษฎี บี ซี เอส

แอนเดอร์สัน ถือว่าอีเลกตรอนอิสระมีความหนาแน่นของสถานะ $\rho(E)$ คงที่ เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ โดยเขาคิดว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของความหนาแน่นของสถานะ $\rho(E)$ มีผลกระทบกระเทือนต่อผลลัพธ์น้อยมาก

โลหะธรรมดาอย่างง่ายมีอีเลกตรอนชนิด เอส และ พี (s and p electron) ซึ่งเป็นอีเลกตรอนกึ่งอิสระ (quasi-free electron) ดังเช่นที่ สเลเตอร์ และ วูด (Slater and Wood, 1960 : 744) ได้แสดงให้เห็นแล้วว่า ที่บริเวณระดับพลังงานเฟอร์มิ ดี-อีเลกตรอนมีความหนาแน่นสูงกว่า เอส-อีเลกตรอนมาก

H_{od} คือ พลังงานปกติของ ดี-อีเลกตรอน ที่อยู่ในอะตอมของสารเสื่อม

$$H_{od} = E(n_{d+} + n_{d-})$$

n_{d+} คือ ความหนาแน่นเชิงจำนวน (number density) ของ ดี-อีเลกตรอนที่มีสปินขึ้น

n_{d-} คือ ความหนาแน่นเชิงจำนวนของ ดี-อีเลกตรอนที่มีสปินลง

E คือ พลังงานของดี-อีเลกตรอนอิสระ

H_{corr} คือ พลังงานที่เกิดจากแรงผลักระหว่าง ดี-อีเลกตรอนที่มีสปินตรงกันข้าม

ในที่นี้คือแรงผลักแบบคูลอมบ์ แอนเดอร์สันกำหนด H_{corr} ให้อยู่ในลักษณะ

$$H_{corr} = U n_{d+} n_{d-}$$

$$U = \int |\psi_d(\vec{r}_1)|^2 |\psi_d(\vec{r}_2)|^2 e^2 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-1} d\tau_1 d\tau_2$$

โดยที่ $\psi(\vec{r})$ คือ เวกฟังก์ชันของดี-อีเลกตรอนที่อยู่ $\vec{r}$

U คือ พลังงานแลกเปลี่ยนในตนเอง (exchange self energy)

ระหว่าง ดี-อีเลกตรอนที่มีเวกฟังก์ชันอยู่ในสถานะ ψ_d

H_{sd} เป็นพลังงานที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง เอล และ ดี-อีเลกตรอน หรือ ระหว่างคอนดักชัน อีเลกตรอน (conduction electron) ซึ่งเป็นอีเลกตรอนที่เคลื่อนที่ได้ โดยอิสระ กับ ดี-อีเลกตรอนในขอบเขตจำกัด (localized d-electron) ซึ่งเป็นอีเลกตรอนที่เคลื่อนที่ไปมาได้อบ ๆ อะตอมของสารเสื่อมเท่านั้น เขาเขียน H_{sd} ให้อยู่ในรูป

$$H_{sd} = \sum_{k,\sigma} V_{dk} (c_{k\sigma}^+ c_{d\sigma} + c_{d\sigma}^+ c_{k\sigma})$$

โดยที่ V_{dk} คือ กำลังของอันตรกิริยาการผสมกัน (Strength of mixing interaction) และถือว่าเป็นค่าคงที่เพื่อสะดวกในการคำนวณตามแบบจำลองของแอนเดอร์สัน

ทฤษฎีของฮาร์ทรี-ฟอค (Hartree-Fock theory)

เพื่อให้การคำนวณมีเหตุผลเพียงพอ และได้ค่าถูกต้อง เราจะใช้วิธีประมาณแบบฮาร์ทรี-ฟอค ถึงแม้ว่าในวิธีนี้เวฟฟังก์ชันที่ใช้จะเป็นแบบไม่สมมาตร (antisymmetrized) คือ

$$\Phi_0 = \prod_{\epsilon_n < \epsilon_F} c_n^+ \Phi_{vac} \quad \dots (1)$$

โดยที่ c_n^+ คือ ครีเอชัน โอเปอเรเตอร์ และ ϵ_n คือ พลังงานของอิเล็กตรอนหนึ่งตัวที่สถานะ n ซึ่งเป็นไปตามสมการ

$$[H, c_{n\sigma}^+] |_{av} \Phi_0 = \epsilon_{n\sigma} c_{n\sigma}^+ \Phi_0 \quad \dots (2)$$

"av" หมายถึง ค่าเฉลี่ยของพจน์ที่มีสามเฟอร์มิออน (three fermion term)

ในคอมมิวเตเตอร์ (commutator) ที่ใช้สำหรับเวฟฟังก์ชัน Φ_0

แอนเดอร์สันทำการวิเคราะห์ต่อไปอีก โดยกำหนดให้

$$c_{n\sigma}^+ = \sum_k (n|k)_\sigma c_{k\sigma}^+ + (n|d)_\sigma c_{d\sigma}^+ \quad \dots (3)$$

และสมการสำหรับโอเปอเรเตอร์ในสถานะที่ไม่ถูกรบกวนเป็นดังนี้ คือ

$$[H, c_{k\sigma}^+] |_{av} = \epsilon_k c_{k\sigma}^+ + V_{kd} c_{d\sigma}^+ \quad \dots (4)$$

$$[H, c_{d\sigma}^+] |_{av} = [E + U \langle n_{d,-\sigma} \rangle] c_{d\sigma}^+ + \sum_k V_{dk} c_{k\sigma}^+ \quad \dots (5)$$

เมื่อแทนค่า (3), (4), (5) ใน (2) จะได้

$$\epsilon_{n-\sigma} (n|k)_\sigma = \epsilon_k (n|k)_\sigma + V_{kd} (n|d)_\sigma \quad \dots (6a)$$

$$\epsilon_{n\sigma} (n|d)_\sigma = [E + U \langle n_{d,-\sigma} \rangle] (n|d)_\sigma + \sum_k V_{dk} (n|k)_\sigma \quad \dots (6b)$$

ฟังก์ชันของกรีนของสมการอีเลกตรอนหนึ่งอนุภาค (Green's function of one electron equation)

ฟังก์ชันของกรีน เป็นฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษาวิชาทฤษฎีสถานามควอนตัม (quantum field theory) ของระบบอนุภาคที่มีแรงอันตรกิริยาที่ยุ่งยากซับซ้อน เช่น ในวิชาฟิสิกส์สาขาโซลิด สเตต (solid state) ได้ดี แอนเดอร์สันนำเอาฟังก์ชันนี้มาใช้เพื่อหา $(n|k)_\sigma$ และระดับพลังงาน $\epsilon_{n\sigma}$ ถ้าความหนาแน่นเฉลี่ยของการผสมกันของสถานะ $d\sigma$ ที่ระดับพลังงาน ϵ เป็น

$$\rho_{d\sigma}(\epsilon) = \sum_n \delta(\epsilon_n - \epsilon) |(n|d)_\sigma|^2$$

ปริมาณนี้เป็นปริมาณที่สำคัญที่ใช้ในการคำนวณหาจำนวนการปิดครองของ ดี-อีเลกตรอน ปริมาณนี้หาได้โดยใช้ฟังก์ชันของกรีน

$$G(\epsilon + i\eta) = 1/(\epsilon + i\eta - H) \quad \dots (7)$$

ถ้าเรามี n โอเกนสเตต (eigenstate) G จะเป็นพจน์ที่อยู่ในแนวเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์ G

$$G_{nn}(\epsilon + i\eta) = 1/(\epsilon + i\eta - \epsilon_{n\sigma}) \quad \dots (7a)$$

แต่ในการแสดงถึงสถานะปกติที่ไม่ถูกรบกวน แต่ละพจน์ของเมตริกซ์จะให้ค่าความหนาแน่นที่ต้องการได้ ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} \rho_{d\sigma}(\epsilon) &= \frac{1}{\eta} \sum_n |(d|n)_\sigma|^2 \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\eta^2 + (\epsilon - \epsilon_{n\sigma})^2} \quad \dots (8) \\ &= -\left(\frac{1}{\eta}\right) \text{Im} [G_{dd}(\epsilon)] \end{aligned}$$

ความหนาแน่นทั้งหมดของสถานะเป็น

$$\rho_{\sigma}(\epsilon) = -\left(\frac{1}{\pi}\right) \text{Im}[\text{Tr } G_{\sigma}(\epsilon)]'$$

ค่า G หาได้จากสมการที่ (6) ในทฤษฎีของฮาร์ทร-พ็อค ที่ว่า

$$\Sigma_{\nu}(\epsilon + i\delta - H)_{\mu\nu} G_{\nu k} = \delta_{\mu k}$$

ถ้าเราใช้ตัวย่อของค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$E_{\sigma} = E + U\langle n_{d,-\sigma} \rangle \quad \dots (9)$$

$$\epsilon = \epsilon + i\delta \quad \dots (10)$$

เราจะได้

$$(\epsilon - E_{\sigma})G_{dd\sigma} - \Sigma_k V_{dk} G_{kd\sigma} = 1 \quad \dots (11a)$$

$$(\epsilon - \epsilon_k)G_{kd\sigma} - V_{kd} G_{dd\sigma} = 0 \quad \dots (11b)$$

$$(\epsilon - E_{\sigma})G_{dk\sigma} - \Sigma_{k'} V_{dk'} G_{k'k\sigma} = 0 \quad \dots (11c)$$

$$(\epsilon - \epsilon_{k'})G_{k'k\sigma} - V_{k'd} G_{dk\sigma} = \delta_{k'k} \quad \dots (11d)$$

สมการที่ (11a) และ (11b) นำมาหา G_{dd} ได้

$$G_{dd\sigma}(\epsilon) = \left[\epsilon - E_{\sigma} - \Sigma_k |V_{dk}|^2 (\epsilon - \epsilon_k)^{-1} \right]^{-1} \quad \dots (12)$$

ผลรวมของพจน์ในสมการที่ (12) สามารถคำนวณได้เป็น

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Sigma_k (V_{dk})^2 \frac{(\epsilon - \epsilon_k) - i\delta}{(\epsilon - \epsilon_k)^2 + s^2} = -i\pi \langle V_{dk}^2 \rangle_{av} \rho(\epsilon) \quad \dots (13)$$

ในสมการนี้ แอนเตอร์สันไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในสถานะ-ดี ซึ่งผิดค่า

$$\Delta E_d = P \left[\sum_k \frac{|V_{dk}|^2}{\epsilon - \epsilon_k} \right] \quad \dots (14)$$

ทั้งนี้ เพราะว่าค่า ΔE_d จะไม่เปลี่ยนแปลงไปมาก ขณะที่ E_σ เปลี่ยน ดังนั้น จะเห็นได้ว่า ถ้าเราไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนพลังงาน G_{dd} จะให้ค่าที่เหมือนกับว่ามีพลังงานสถานะหนึ่ง ที่เรียกว่า "สถานะเสมือน" (virtual state) ที่ค่า

$$\epsilon = E_\sigma + i\Delta$$

ค่า Δ ในที่นี้คือ "พารามิเตอร์ของความกว้าง" (width parameter) ของสถานะเสมือน ซึ่งมีค่า

$$\Delta = \pi \langle V^2 \rangle_{av} \rho(\epsilon) \quad \dots (15)$$

แอมเพอริสสัน สันนิษฐานว่า Δ เป็นพารามิเตอร์ที่คงที่ ไม่ขึ้นกับค่า E_d การกระจายของความหนาแน่นของสถานะ-ดีในสมการที่ (8) จึงเป็น

$$\rho_{d\sigma}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{(\epsilon - E_\sigma)^2 + \Delta^2} \quad \dots (16)$$

สมการที่ (16) นี้เป็นสมการที่สำคัญที่สุดในวิธีการคำนวณแบบเซล์ฟ คอนซิสเต้นท์ (self consistent) ของแอมเพอริสสัน

ถ้าเราพิจารณสมการที่ (11d) เฉพาะพจน์ที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมของแมทริกซ์ G จะได้ว่า

$$G_{k'k\sigma} = \frac{V_{k'd} G_{dk\sigma}}{\epsilon - \epsilon_{k'}} \quad (k' \neq k)$$

เมื่อเข้าไปแทนค่าในสมการที่ (11c) จะให้ผลว่า

$$\left[\epsilon - E_\sigma - \sum_{k' \neq k} |V_{dk'}|^2 (\epsilon - \epsilon_{k'})^{-1} \right] G_{dk\sigma} = V_{dk} G_{kk\sigma}$$

ซึ่งถ้าใช้สมการที่ (13) เข้ามาพิจารณาแล้วจะได้

$$\left[\epsilon - E_\sigma + i\Delta + |V_{dk}|^2 (\epsilon - \epsilon_k)^{-1} \right] G_{dk\sigma} = V_{dk} G_{kk\sigma} \quad \dots (17)$$

จากสมการที่ (11d) เราจะได้พจน์ที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมของแมตริกซ์ G กันก็คือว่า

$$\begin{aligned} G_{kk\sigma} &= \left[\epsilon - \epsilon_k - \frac{|V_{dk}|^2}{\epsilon - E_\sigma + i\Delta + |V_{dk}|^2 (\epsilon - \epsilon_k)^{-1}} \right]^{-1} \quad \dots (18) \\ &= (\epsilon - \epsilon_k)^{-1} + \left[|V_{dk}|^2 / (\epsilon - \epsilon_k)^2 (\epsilon - E_\sigma + i\Delta) \right] \end{aligned}$$

จากผลดังกล่าวนี้ทำให้ตีความหมายได้ว่า ถึงแม้ว่าแต่ละ G_{kk} จะมีโพล (pole)

ที่พลังงานเดียวกัน พลังงานของมันจะไม่เปลี่ยนแปลง และจะได้ผลอีกว่า

$$-\frac{1}{\pi} \text{Im } G_{kk}(\epsilon) = \frac{|V_{dk}|^2}{(\epsilon - \epsilon_k)^2} \rho_d(\epsilon) \quad \dots (19)$$

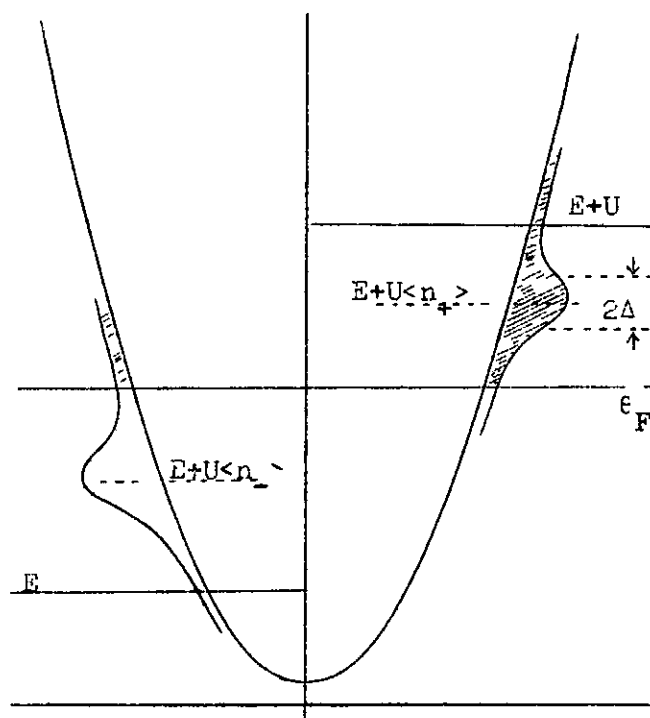
เงื่อนไขของเฮลท์ คอนซิสเต้นท์สำหรับโมเมนต์ในขอบเขตจำกัด (self-consistency conditions for localized moments)

ผลที่ได้ในตอนต้นทำให้เราทราบความหนาแน่นของ ดี-อี เลกตรอนที่มีพลังงาน ϵ ถ้าจะคำนวณหาจำนวน ดี-อี เลกตรอนที่มีสปิน σ เราจะต้องอินทิเกรตสมการที่ (16) จากช่วงพลังงาน ตั้งแต่ค่า $-\infty$ ไปถึงระดับพลังงานเฟอร์มิ ϵ_F เพราะว่าสถานะของพลังงาน ϵ_n ที่ต่ำกว่าระดับพลังงานเฟอร์มินั้นเต็ม (ที่ศูนย์สัมบูรณ์) ดังนั้น

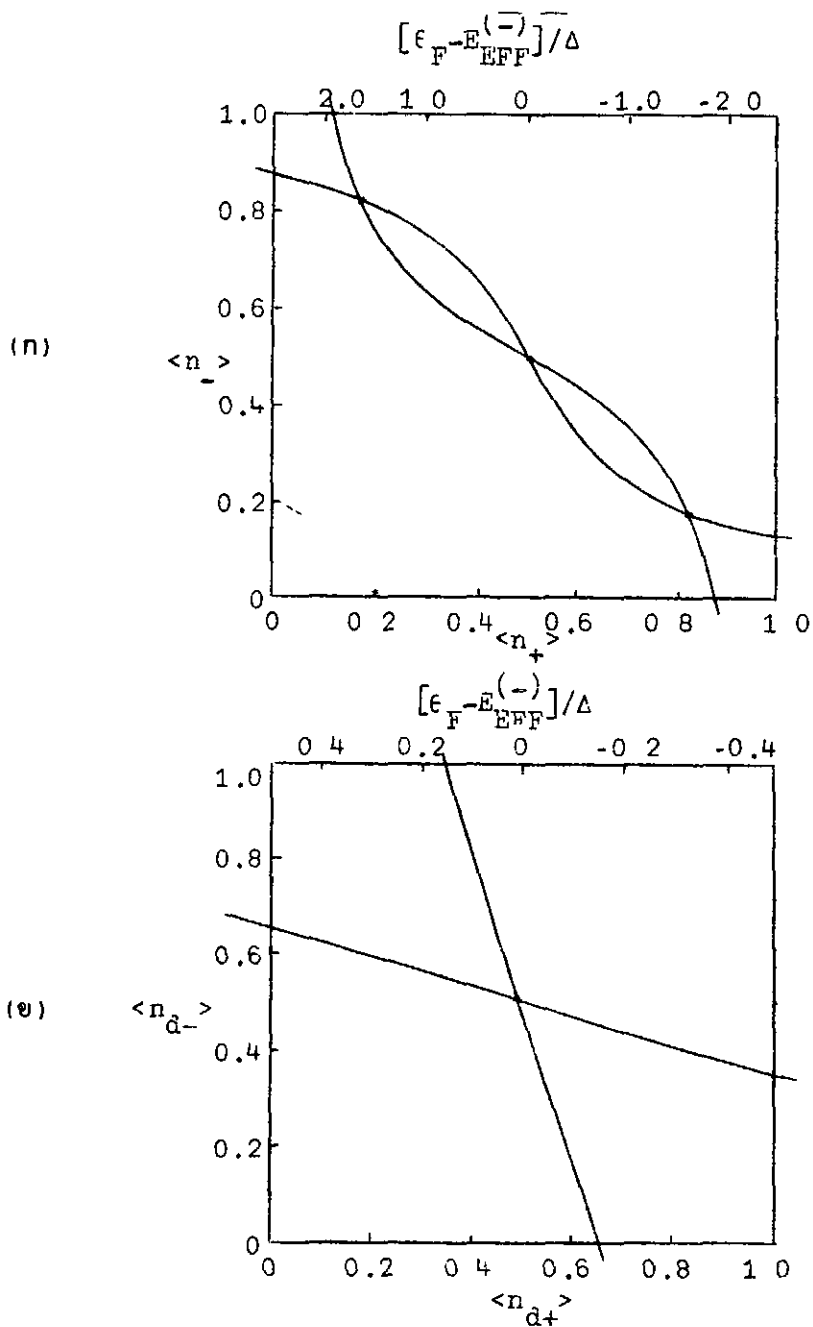
$$\begin{aligned} \langle n_{d\sigma} \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \frac{\Delta d\epsilon}{(\epsilon - E_\sigma)^2 + \Delta^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \cot^{-1} \left[\frac{E_\sigma - \epsilon_F}{\Delta} \right] \quad \dots (20) \end{aligned}$$

แอนเดอร์สัน ทำสมการให้เชลฟ์ คอนสแตนท์ โดยถอดสมการที่ (9) และ (20) พร้อม ๆ กันดังนี้

$$\begin{aligned} \langle n_{d+} \rangle &= \frac{1}{\pi} \cot^{-1} \left[\frac{E - \epsilon_F + U \langle n_{d-} \rangle}{\Delta} \right] \\ \langle n_{d-} \rangle &= \frac{1}{\pi} \cot^{-1} \left[\frac{E - \epsilon_F + U \langle n_{d+} \rangle}{\Delta} \right] \end{aligned} \quad \dots (21)$$



ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงการกระจายของความหนาแน่นในกรณีสิ่งเสียบนเป็นแม่เหล็ก บริเวณ
 ปุ่ม ที่ระดับพลังงาน $E + U \langle n_+ \rangle$ และ $E + U \langle n_- \rangle$ เป็นระดับ ดี-เสมือน (virtual d levels)
 ซึ่งมีความกว้าง $= 2\Delta$ กราฟนี้แสดงความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่มีสปินขึ้นและลงตามลำดับ
 จำนวนของอิเล็กตรอน $\langle n_+ \rangle$ และ $\langle n_- \rangle$ สามารถคำนวณได้จากพื้นที่ ส่วนที่ไม่ได้แรเงาที่อยู่
 ต่ำกว่าผิวเฟอร์มิ



ภาพประกอบ 9 (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_+ \rangle$ และ $\langle n_- \rangle$ กรณีที่สิ่งเสียนเป็น

แม่เหล็ก $y = \frac{U}{\Delta} = 5$, $x = (\epsilon_F - E)/U = \frac{1}{2}$ มีคำตอบที่เป็นไปได้สามค่า

(ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_{d+} \rangle$ และ $\langle n_{d-} \rangle$ กรณีที่สิ่งเสียน

ไม่เป็นแม่เหล็ก $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$ มีคำตอบได้เพียงค่าเดียว

เพื่อให้ง่ายขึ้น แอนเดอร์สัน กำหนดให้ค่า $\epsilon_F - E = U/2$ และค่า $\frac{U}{\Delta} = 1$ และ 5
 เมื่อ $\frac{U}{\Delta}$ ค่อนข้างน้อย เช่น กรณีที่ $\frac{U}{\Delta} = 1$ สมการที่ (21) ให้คำตอบเมื่อ $\langle n_+ \rangle = \langle n_- \rangle = \frac{1}{2}$
 แต่เมื่อ U มีค่ามากขึ้น ความชัน (slope) สูงสุดของเส้นโค้ง $\cot^{-1}(\cot^{-1} \text{ curve})$ มีค่า
 มากขึ้นด้วย และที่ $\frac{U}{\Delta} = 5$ แอนเดอร์สันพบว่า สมการที่ (21) อาจจะมีคำตอบได้สามค่า
 ค่าตอบค่าที่หนึ่ง คือ $\langle n_+ \rangle = \langle n_- \rangle = \frac{1}{2}$ และอีกสองคำตอบ $\langle n_+ \rangle = 1 - \langle n_- \rangle = 0.822$
 และ $\langle n_+ - n_- \rangle = m = 0.644$

ก่อนที่จะอธิบายเกี่ยวกับสภาพโมเมนต์ในขอบเขตจำกัด แอนเดอร์สัน ได้วิเคราะห์
 สมการที่ (21) โดยเขาได้กำหนดจำนวนที่ไม่มีหน่วยเป็น y ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างคู่ออมบ์
 อินทิกรัล U กับความกว้างของสถานะพลังงานเสมือน Δ

$$y = \frac{U}{\Delta} \quad \dots (22)$$

เมื่อ y มีค่ามาก การเกิดสภาพแม่เหล็กภายในขอบเขตจำกัดจะมีขึ้นได้ง่าย y ที่มีค่าน้อย
 แสดงว่าสิ่งเสียบนมีสถานะปกติที่ไม่เป็นแม่เหล็ก นอกจากนี้เขาได้กำหนดค่า

$$x = \frac{(e_F - E)}{U} \quad \dots (23)$$

เมื่อ $x = 0$ นี่คือสถานะ-ดี ที่ว่างเปล่า E (empty d state) อยู่ที่ระดับพลังงาน
 เฟอร์มิ เมื่อ $x = 1$ $E + U$ อยู่ที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ และเมื่อ $x = \frac{1}{2}$ E และ $E + U$
 จะอยู่ห่างจากระดับพลังงานเฟอร์มิเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน กรณีนี้เป็นกรณีที่สิ่งเสียบนมีสมบัติการ
 เป็นแม่เหล็กได้ดีที่สุด แอนเดอร์สันพบว่าในช่วงที่สิ่งเสียบนมีคุณสมบัติเป็นแม่เหล็ก x จะต้องมีค่า
 อยู่ในช่วงหนึ่งถึงหนึ่ง กล่าวคือ $0 \leq x \leq 1$ เท่านั้น และในกรณีที่สิ่งเสียบนไม่เป็นแม่เหล็ก
 x จะมีค่าอยู่นอกช่วงตัวเลขดังกล่าวแล้ว

โดยการแทนค่าสมการที่ (22) และ (23) ในสมการที่ (21) เราเขียนสมการที่ (21)
 ใหม่ ได้เป็น

$$n_{d\pm} = \cot^{-1} [y(n_{d\mp} - x)] \quad \dots (21')$$

1. กรณีที่สิ่งเจือปนมีคุณสมบัติเป็นแม่เหล็ก (magnetic limit) $y \gg 1$, x มีค่ามาก
ค่า $\cot^{-1}$ มีค่าใกล้ 0 หรือไม่ก็ใกล้ π และ $n_{d\pm}$ มีค่าใกล้ 0 หรือ 1 สมมติว่า

$n_{d+} \sim 1$ และ $n_{d-} \sim 0$ เราจะได้

$$\Re n_{d+} \approx \pi - \frac{1}{y(x - n_{d-})}$$

$$\Re n_{d-} \approx -\frac{1}{y(x - n_{d+})}$$

$$= \frac{1}{y(n_{d+} - x)}$$

ถ้าแก้สมการเหล่านี้ โดยการประมาณค่าแล้วจะได้

$$x(1 - n_{d+}) = (1 - x) n_{d-}$$

$$= 1 / \left\{ \Re y \left[1 - \frac{1}{\Re y x (1 - x)} \right] \right\} \quad \dots (24)$$

$$m = n_{d+} - n_{d-} \approx 1 - 1 / [\Re y x (1 - x) - 1]$$

2 กรณีที่ไม่เป็นแม่เหล็ก (nonmagnetic cases)

แอนเดอร์สันสมมติเอาไว้ว่า $n_{d+} = n_{d-} = n$ ซึ่งทำให้สมการที่ (21) กลายเป็น

$$\cot n\pi = y(n - x) \quad \dots (25)$$

ในกรณีที่ง่ายที่สุด n มีค่าประมาณ $\frac{1}{2}$ สถานะชั้นสุดท้ายจะอยู่ในช่วงของระดับเฟอร์มิ ทำให้

$$\cot n\pi \approx \pi(\frac{1}{2} - n) \quad \dots (26)$$

และ

$$n \approx \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + 2xy/\eta)}{(1 + y/\eta)} \right] \quad \dots (27)$$

จากสมการนี้ จะเห็นว่า n มีแนวโน้มที่จะมีค่าเป็น $\frac{1}{2}$ ซึ่งหมายความว่าระดับพลังงานจะอยู่ใกล้ ๆ กับระดับพลังงานเฟอร์มิ และค่าพลังงานของดี-อี เลกตรอน เมื่อสัมพันธ์กับพลังงานที่ระดับเฟอร์มิ มีค่าเป็น

$$E_{\text{eff}} = U(n - x) = U \frac{1 - 2x}{1 + y/\eta} = \Delta y \frac{1 - 2x}{1 + y/\eta} \quad \dots (28)$$

ดังนั้น ค่าที่ได้จากการกะประมาณนี้ดีมาก เมื่อ y มีค่าน้อย หรือเมื่อ x มีค่าประมาณ $\frac{1}{2}$ ในทางตรงกันข้าม ถ้า y มีค่ามาก x มีค่าประมาณหนึ่งหรือศูนย์ บริเวณที่น่าสนใจอย่างยิ่ง คือ บริเวณที่ x มีค่าประมาณ 0 y จะมีค่ามาก โดยที่

$$\cot n\eta \approx 1/n\eta$$

$$y(n - x) \approx 1/n\eta \quad \dots (29)$$

เมื่อแก้สมการโดยการประมาณค่าจะได้

$$n \approx \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}x + \dots \quad \dots (30)$$

3 เส้นโค้งแสดงการเปลี่ยนแปลง (transition curve)

ในที่นี้เราจะพิจารณาเส้นโค้งที่แสดงการเปลี่ยนแปลงจากสภาวะที่เป็นแม่เหล็กไปสู่สภาวะที่ไม่เป็นแม่เหล็ก บนเส้นโค้งนั้น $n_{d+} = n_{d-}$ โดยที่สมการที่ (25) เป็นเงื่อนไขอันหนึ่ง บนเส้นโค้งนั้น เงื่อนไขที่สองจะหาได้จากสมการที่ (21) คือ

$$\frac{\eta}{\sin^2 n_c \eta} = y_c \quad \dots (31)$$

อักษร c แล่งถึงว่าค่านี้เป็นค่าบนเส้นโค้งการเปลี่ยนแปลง หรืออาจจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า เส้นโค้งวิกฤต (critical curve) ของการเปลี่ยนแปลงไปสู่สภาวะแม่เหล็ก สมการที่ (31) และ (25) ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ของ y_c กับ x ได้ แต่สามารถทำให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ของ n_c และ x ได้ คือ

$$y_c = \frac{\pi}{\sin^2 n_c \pi} = \frac{\cot n_c \pi}{n_c - x}$$

หรือ

$$\sin 2n_c \pi = 2\pi(n_c - x) \quad \dots (32)$$

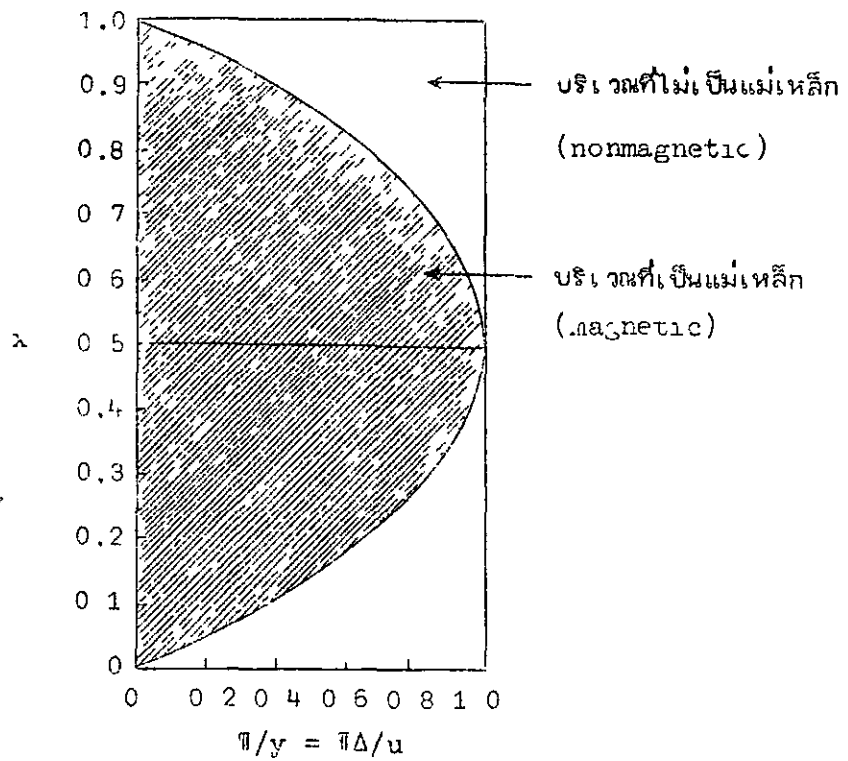
จากสมการที่ (32) และ (31) เมื่อใช้วิธีประมาณ $x \approx \frac{1}{2}$ และ $x \approx 0$ จะได้

$$y_c \approx \pi + \frac{4}{3}\pi^3(x - \frac{1}{2})^2 + \dots \quad (x \approx \frac{1}{2}) \quad \dots (33a)$$

และ

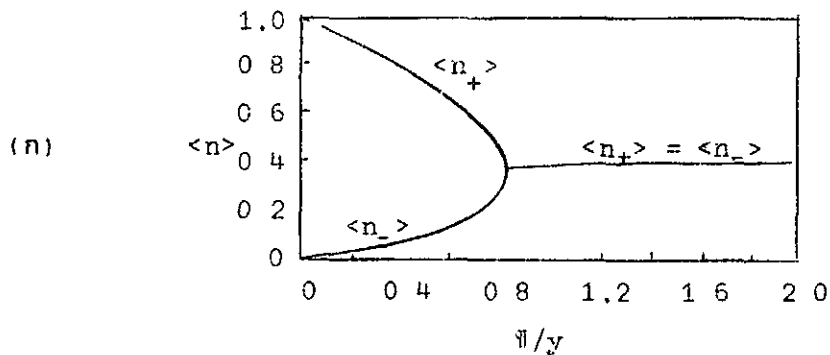
$$y_c^3 \approx 4\pi/9 x_c^2 + \dots \quad (x \approx 0) \quad \dots (33b)$$

ผลของสมการเหล่านี้สามารถสรุป และแสดงได้ด้วยรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ $\frac{\pi}{y}$ และรูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง n ซึ่งมีทั้ง $\langle n_{d+} \rangle$ และ $\langle n_{d-} \rangle$ กับ $\frac{\pi}{y}$ ในกรณี เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ และ $x = 0$



ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงบริเวณการเป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก เส้นโค้งแสดงค่า

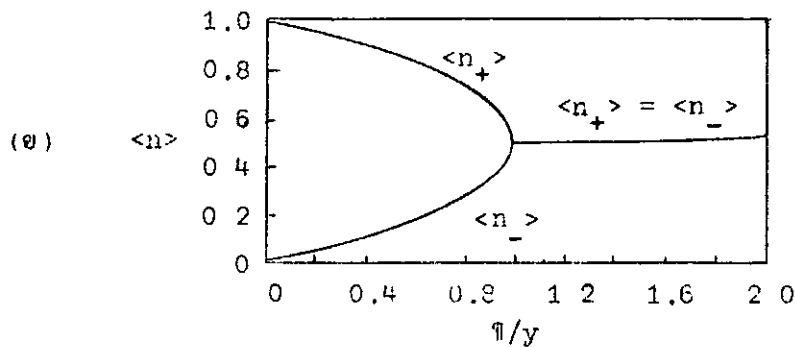
$$x_c \text{ และ } \frac{\eta}{y_c} = \frac{\eta\Delta}{U}$$



ภาพประกอบ 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\langle n_+ \rangle$ และ $\langle n_- \rangle$ กับ $\frac{\eta}{y} = \frac{\eta\Delta}{U}$ โดยที่

$\langle n_+ \rangle - \langle n_- \rangle$ คือ ค่าสปินโมเมนต์ ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์เมื่อถึงค่าวิกฤต y_c ในกรณี $\lambda = \frac{1}{2}$

(รูป ก) และเมื่อ $x = \frac{1}{4}$ (รูป ข.)



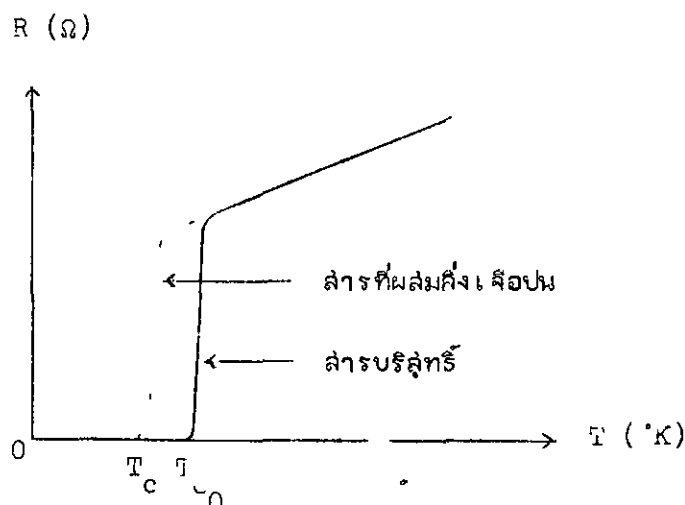
ภาพประกอบ 11 (ต่อ)

ผลงานของแอนเตอร์สันที่เสนอมาทั้งหมด เป็นการแสดงเงื่อนไขที่จำเป็น ในการเกิดและ ไม่เกิดโมเมนต์ในขอบเขตจำกัด วิถีเซลล์ คอนซิลเตนทซ์ของฮาร์ทร็อค ทำให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลง อย่างเด่นชัดจากสถานะเป็นแม่เหล็กไปสู่สถานะไม่เป็นแม่เหล็ก นอกจากจะขึ้นอยู่กับความหนาแน่น ของสถานะของอิเล็กตรอนอิสระ แล้วยังขึ้นอยู่กับพจน์ของแมทริกซ์ในการผสมระหว่าง เอส และ ซี-อีเลกตรอน และแรงทางคู่ควบกับที่กรลีนวาล์วโคจรของดี-อีเลกตรอนอีกด้วย

นอกจากที่กล่าวมาแล้วนี้ แอนเตอร์สันยังได้คำนวณโพลาไรเซชัน (polarization) ของอิเล็กตรอนอิสระ ความไวต่ออำนาจแม่เหล็ก (susceptibility) และความร้อนจำเพาะ (specific heat) อันเนื่องมาจากสิ่งเลวลงในโลหะอีกด้วย แต่ในที่นี้จะไม่กล่าวถึง

สิ่งเลวแบบแม่เหล็ก

เมื่อใส่สารเลวแม่เหล็กลงไปในสารตัวนำยิ่งยวด โมเมนต์แม่เหล็กในขอบเขตจำกัด (localized magnetic moment) ที่เกิดขึ้นจะทำให้ลายคู่อิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์ เมื่อใดที่สาร เลวแม่เหล็กนี้จะลายอยู่ในสารตัวนำยิ่งยวด จะทำให้ค่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงไป (Matthias and others. 1959 197) และจะลดลงเรื่อย ๆ เมื่อความเข้มข้นของสารเลวแม่เหล็กเพิ่มขึ้น

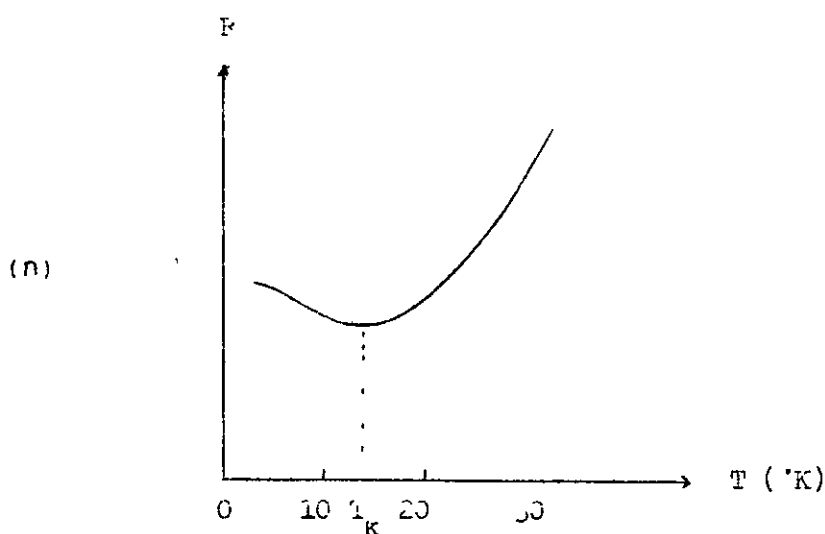


ภาพประกอบ 12 กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยิ่งยวด และสารที่ผลสมสิ่งเสื่อปน

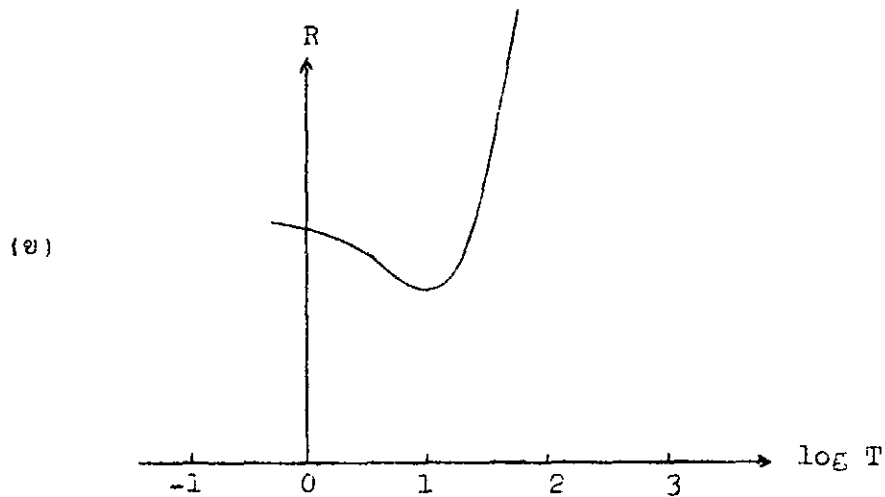
นักวิทยาศาสตร์ที่ได้ศึกษา โดยการคำนวณผลของสารตัวนำยิ่งยวดแบบแม่เหล็กในสารตัวนำยิ่งยวด เป็นคนแรก คือ วาบริโคซอฟ และ กอร์คอฟ (Abrikosov and Gor'kov, 1960 1781) เขาได้ใช้ทฤษฎี บี ซี เอลส์ ที่มีแรงอันตรกิริยาแบบ $J \vec{S} \cdot \vec{\sigma}$ ($\vec{S}$ คือ สปินของอะตอมของสิ่งเสื่อปน และ $\vec{\sigma}$ คือ สปินของอิเล็กตรอนอิสระ (conduction electron) มาคำนวณ เพื่ออธิบายผลดังกล่าว และการคำนวณนี้ได้รับการสนับสนุนจาก มากิ และ เดอ เจนเนส (Maki and de Gennes) อีกด้วย นอกจากนี้ วาบริโคซอฟ และ กอร์คอฟ ยังได้กล่าวถึงว่าน่าจะมีการเปลี่ยนแปลงเชิงระะะทางของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ เนื่องจากการมีสารตัวนำยิ่งยวดไว้อีกด้วย แต่เขาไม่ได้คำนวณไว้ให้ปรากฏ ทฤษฎีของเขาเป็นทฤษฎีโดยประมาณ เขาสร้างทฤษฎีเกี่ยวกับเรื่องนี้ขึ้น โดยตั้งสมมติฐานว่า สภาพตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเสื่อปนแบบแม่เหล็กนี้เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีอิทธิพลอันใดต่อพลังงานของว่างเลย ซึ่งทฤษฎีทั้งหลายที่มีผู้คิดค้นต่อ ๆ มาจะเน้นเรื่องนี้ด้วยกันทั้งนั้น เขาสันนิษฐานว่า สปินของสิ่งเสื่อปน $\vec{S}$ อยู่ในขอบเขตจำกัด การสับของสปินของ อิเล็กตรอนอิสระ $\vec{\sigma}$ ในตัวนำกับสปินของสิ่งเสื่อปนต้องใช้อันตรกิริยาแบบแลกเปลี่ยน $J \vec{S} \cdot \vec{\sigma}$ เมื่อสปินเกิดการหันกลับโดยทันที (flip) คู่ของอิเล็กตรอนจะแตกจากกัน เพราะเป็นการเสียสมมาตรเชิงเวลาย้อนกลับ (time reversal symmetry) คู่อิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัมเท่ากับศูนย์ และสปินที่ตรงข้ามกัน

ช่วงชีวิต T (life time) ของคู่อิเล็กตรอนเป็นระยะเวลาหนึ่ง ผลการทดลองที่กระทำในเวลาต่อมาให้ผลสอดคล้องกับการสันนิษฐานของเขา ยิ่งไปกว่านี้ ทฤษฎีนี้ยังสามารถคำนวณหาความเข้มข้นวิกฤต C_{cr} หรือความเข้มข้นของสิ่งเจือปนที่พอดี ทำให้เกิดสภาวะตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่าที่ความเข้มข้น C_{cr} สารนั้นจะมีอุณหภูมิวิกฤตเป็นศูนย์องศาสัมบูรณ์ อย่างไรก็ตาม การเป็นหรือไม่เป็นแม่เหล็กของสิ่งเจือปนในตัวนำยิ่งยวดเป็นปรากฏการณ์ที่ยุ่งยากและสับสนซับซ้อนมาก ทฤษฎีของวาอิกอร์ซอฟ และ กอร์คอฟ เอง ก็ไม่ถูกต้องทีเดียวนัก

อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนอิสระ และโมเมนต์แม่เหล็กในขอบเขตจำกัดบนอะตอมของสิ่งเจือปน ทำให้ค่าสภาพความต้านทานเปลี่ยน คอนโด (Kondo, 1964 · 37) ได้ค้นพบจากการคำนวณว่าเมื่ออุณหภูมิลด สภาพความต้านทานจะลดลงไปเรื่อย ๆ จนถึงอุณหภูมิ ๆ หนึ่ง ความต้านทานจะเพิ่มขึ้นอีก อุณหภูมิที่มีสภาพความต้านทานต่ำสุด คือ อุณหภูมิคอนโด T_K (Kondo temperature) และปรากฏการณ์นี้เรียกว่า "ผลของคอนโด" (Kondo effect) แสดงได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 13 (ก) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิสัมบูรณ์ ซึ่งเรียกว่า "ผลของคอนโด" และอุณหภูมิที่มีค่าความต้านทานต่ำสุด หรืออุณหภูมิคอนโด



ภาพประกอบ 13 (ข) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของความต้านทานไฟฟ้ากับลอการิทึมของอุณหภูมิ
สัมบูรณ์ แสดงให้เห็นการแปรแบบเส้นตรงในค่าของ $\log T$ กับ R

การคำนวณด้วยทฤษฎี perturbation ของคอนโด ใช้ไม่ได้ผลเลยกับปรากฏการณ์นี้
ที่ $T \rightarrow 0$ เพราะเมื่อคอนโดพิจารณาอันตรกิริยาเอช-ดี และอันตรกิริยาที่ได้จากการวิเคราะห์
ของรูเตอร์แมน และ คิทเทล (Ruderman and Kittel, 1967) เขาได้ค่าความต้านทาน
ดังนี้

$$R \approx R_0 \left[1 + \frac{J}{E_F} \ln \left(\frac{KT}{E_F} \right) \right]$$

$$R \propto \ln T$$

โดยที่ J คือ พารามิเตอร์ของการสับคู่ของอิเล็กตรอน

จะเห็นได้ชัดเลยว่าความยุ่งยากทั้งหลายจะเกิดขึ้น เมื่อ $T \rightarrow 0$ เพราะเมื่อนั้น $R \rightarrow \infty$
ความยุ่งยากนี้ได้มีผู้แก้ไขจนสำเร็จเมื่อไม่นานมานี้ (Wilson, 1975)

ทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา-กอร์คอฟ (The Ginsburg-Landau-Gor'kov Theory)

ทฤษฎีเบื้องต้นต่าง ๆ ส่วนมากมุ่งความสนใจไปยังผลที่เกิดขึ้นเมื่อสารตัวนำยิ่งยวดอยู่ในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างอ่อน ๆ (weak electromagnetic fields) โดยปกติในธรรมชาติเราต้องเผชิญกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างเข้ม และปัญหาต่าง ๆ เหล่านี้มักเกี่ยวข้องกับ Δ (energy-gap parameter) ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางปรากฏภายในสารนั้น ทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา (Ginsburg-Landau 1950-1964) ที่เคยเสนอไว้ในปี ค.ศ. 1950 อธิบายเรื่องราวของสภาพตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความเข้มสูงได้ดี ทฤษฎีจุลภาคที่สำคัญอีกทฤษฎีหนึ่งคือ ทฤษฎีของกอร์คอฟ (Gor'kov, 1959-1968) เขาสามารถแสดงให้เห็นว่าสมการของกินส์เบิร์ก และแลนเดานั้นมาจากทฤษฎีการจับคู่ (pairing) ณ จุดอุณหภูมิวิกฤต T_c ในสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนอย่างช้า ๆ ในช่วงระยะอาพันธ์ กอร์คอฟยังพบอีกว่าเวฟฟังก์ชัน $\psi(\vec{r})$ ของกินส์เบิร์ก-แลนเดานั้นเป็นปริมาณโดยตรงกับค่าเฉพาะตำแหน่ง (local value) ของ $\Delta(\vec{r})$ นอกจากนี้ค่าประจุไฟฟ้ายังผล e^* (effective charge) ในทฤษฎีกินส์เบิร์ก-แลนเดา เท่ากับ $2e$ ซึ่งก็คือประจุของคู่อิเล็กตรอนนั่นเอง เป็นที่น่าสังเกตว่าสำหรับค่าเหล่านี้เคยมีผู้คำนวณโดยประมาณมาแล้วก่อนที่จะกอร์คอฟจะได้สร้างทฤษฎีขึ้น บาร์เดิน (Bardeen, 1956, 1175) ได้เคยเสนอแนะว่า $\psi(\vec{r})$ และ $\Delta(\vec{r})$ เป็นค่าเดียวกัน กินส์เบิร์ก (Ginsburg, 1950-1964) ก็เคยเสนอแนะว่าค่าประจุไฟฟ้ายังผล e^* เท่ากับ $2e$ เมื่อหนึ่งปีก่อนที่ทฤษฎีบี ซี เอล จะถือกำเนิดเพื่อที่จะอธิบายผลการทดลองโดยใช้ทฤษฎีของกินส์เบิร์กและแลนเดา

ในการคำนวณ กอร์คอฟได้พิจารณาสนามศักย์แรงดึงดูดแบบพิสัยศูนย์มิติไม่หน่วงเหนี่ยว (nonretarded zero-range) เพื่ออธิบายอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอนในทฤษฎีนี้เวกเตอร์ศักย์ $\vec{A}(\vec{r})$ (vector potential) จะถูกนำมาใช้แบบเซลฟ์ คอนซิสเตนท์ (self consistent) ดังเช่นที่ทำในกรณีสนามอ่อน ๆ โดยกอร์คอฟกำหนดแอมัลโทเนียนให้อยู่ในรูป

$$H = - \sum_s \int \psi_s^\dagger(\vec{r}) \left\{ \frac{1}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} \psi_s(\vec{r}) d^3r \\ - \int \psi_\uparrow^\dagger(\vec{r}) \psi_\uparrow(\vec{r}) \psi_\downarrow^\dagger(\vec{r}) \psi_\downarrow(\vec{r}) d^3r \quad \dots (1)$$

โดยที่ $e = -|e|$ คือประจุไฟฟ้าของอิเล็กตรอน และพลังงานของอนุภาคเดี่ยวนั้นวัดสัมพันธ์กับศักย์เคมี μ (chemical potential) พังก์ชันของกรีนที่ขึ้นกับอุณหภูมิจึง (thermodynamic Green's function) เขียนได้เป็น

$$G(x, x') = - \frac{\text{Tr} \left[e^{-\beta H} T(\psi_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x')) \right]}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad \dots (2a)$$

$$\equiv - \langle T \{ \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \} \rangle$$

ถ้า τ เป็นเวลาจินตภาพโดยสมบูรณ์ (pure imaginary-time) เราจะได้

$$\psi(x) = \psi(r, \tau) = e^{H\tau} \psi(\vec{r}, 0) e^{-H\tau} \quad \dots (2b)$$

และ G เป็นค่าที่ได้จากการถอดสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion)

ดังต่อไปนี้

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} G(x, x') + V \langle T \{ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \} \rangle = \delta(x - x') \quad \dots (3)$$

ผลลัพธ์นี้ได้จากสมการที่ (1) และ (2) เมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{\uparrow}(x) = [H, \psi_{\uparrow}(x)] = \left\{ \frac{1}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} \psi_{\uparrow}(x) + V \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \quad \dots (4)$$

ในการคำนวณ กอร์ดอฟ ประมาณการสับคู่เป็นแบบสนามศักย์สลับคู่แบบ สัมพันธ์กับการแยกแฟกเตอร์ฟังก์ชันผลคูณของเวฟฟังก์ชัน 4 ตัว

$$\langle T\{\psi_{\uparrow}^+(x') \psi_{\downarrow}^+(x) \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x)\} \rangle \Rightarrow \langle T\{\psi_{\uparrow}^+(x') \psi_{\downarrow}^+(x)\} \rangle \\ \langle \psi_{\downarrow}(x) \psi_{\uparrow}(x) \rangle \quad \dots (5)$$

เพราะฉะนั้น สมการของ G จะเป็น

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m} \left[\nabla - \frac{ie}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} G(x, x') + \Delta(\vec{r}) F^+(x, x') \\ = \delta(x - x') \quad \dots (6)$$

โดยที่ "anomalous" Green's function $F^+(x, x')$ มีค่า

$$F^+(x, x') = - \langle T\{\psi_{\downarrow}^+(x) \psi_{\uparrow}^+(x')\} \rangle \quad \dots (7)$$

และค่าพลังงานช่องว่าง $\Delta(\vec{r})$ กำหนดให้เป็น

$$\Delta^*(\vec{r}) = V \langle \psi_{\downarrow}(\vec{r}) \psi_{\uparrow}(\vec{r}) \rangle^{\wedge} = V F^+(x, x') \quad \dots (8)$$

ฟังก์ชัน G และ F^+ สัมพันธ์กับ G_{11} และ G_{21} ของนัมมู (Nambu) เพราะว่า F^+ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า ดังนั้น สิ่งจำเป็นจะต้องคำนวณจากสมการเคลื่อนที่ โดยการแยกตัวประกอบดังในสมการที่ (5) เราจะได้

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m} \left[\nabla + \frac{ie}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} F^+(x, x') - \Delta^*(\vec{r}) G(x, x') = 0 \\ \dots (9)$$

กรณฟังก์ชันแบบเวลาจินตภาพโดยสมมุติสามารถกระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series) $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม เราจะพบว่า $g_{\omega}(\vec{r}, \vec{r}')$ และ $F_{\omega}(\vec{r}, \vec{r}')$ เป็นไปตามสมการ

$$\left\{ \omega_n + \frac{1}{2m} \left[v - \frac{1e}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} g_\omega(\vec{r}, \vec{r}') + \Delta(\vec{r}) F_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \\ \left\{ -\omega_n + \frac{1}{2m} \left[v + \frac{1e}{c} \bar{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} F_\omega(\vec{r}, \vec{r}') - \Delta'(\vec{r}) g_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \\ \dots (10)$$

สมการทั้งสองนี้กับเงื่อนไขสมการของสมการที่ (8) ทำให้ได้

$$\Delta'(\vec{r}) = \frac{v}{\beta} \sum_n \sum_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} \Gamma_\omega^+(\vec{r}, \vec{r}') \quad \dots (11)$$

สมการที่(11) สามารถนำมาใช้ในการคำนวณหาพฤติกรรมของสารตัวนำยิ่งยวด เมื่อ $\bar{A}$ มีค่ามาก ณ ที่อุณหภูมิใด ๆ ได้ โดยที่ $k_B T = 1/\beta$

สมการที่(10) เป็นแบบ nonlinear การแก้สมการซึ่งทำได้ยาก กอร์คอฟ ได้แนะนำการคำนวณ ณ ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต ซึ่ง ณ ที่อุณหภูมินั้น Δ มีค่าน้อยมาก ดังนั้น การกระจายของ Δ จึงสามารถจะทำได้ นอกจากนั้นระยะลึกที่สนามแม่เหล็กพุ่งผ่านเข้าไปในตัวนำยิ่งยวด λ จะมีค่ามากเมื่อเทียบกับระยะวอร์นของปีปาร์ด ξ เมื่อ $T \sim T_c$ เพราะฉะนั้น $\bar{A}$ จะแปรค่าอย่างช้า ๆ ในช่วงระยะวอร์น ในขีดจำกัดนี้ความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear) ระหว่างความหนาแน่นของกระแส และเวกเตอร์ศักยจะลดรูปกลายเป็นสมการของลอนดอน (London's equation)

ในการหาคำตอบของสมการที่ (10) กอร์คอฟได้เขียนสมการเหล่านี้ให้อยู่ในรูปเชิงกริลดังนี้

$$g_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{g}_\omega(\vec{r}, \vec{r}') - \int \tilde{g}_\omega(\vec{r}, \vec{s}) \Delta(\vec{s}) F_\omega^+(\vec{s}, \vec{r}') d^3s \quad \dots (12a)$$

$$F_\omega^+(\vec{r}, \vec{r}') = \int g_\omega(\vec{s}, \vec{r}') \Delta'(\vec{s}) \tilde{g}_\omega(\vec{s}, \vec{r}) d^3s \quad \dots (12b)$$

โดยที่ $\tilde{g}$ คือ ฟังก์ชันของกรีนสำหรับอิเล็กตรอนหนึ่งในโลหะธรรมดา (normal metal) ที่อยู่ในสนามแม่เหล็ก

$$\left\{ \omega_n + \frac{1}{2m} \left[\nabla - \frac{1e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right]^2 + \mu \right\} \tilde{g}_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \dots (13)$$

ถ้าเราแก้สมการเพื่อหา P^+ หนึ่งครั้งให้ถูกต้องถึงเทอม Δ^μ เราจะได้พบว่า สมการที่ (11) ทำให้หา Δ คือ

$$\begin{aligned} \Delta'(\vec{r}) &= \frac{V}{c} \sum_n \int \tilde{g}_\omega(\vec{r}, \vec{r}') \tilde{g}_{-\omega}(\vec{r}, \vec{r}') \Delta'(\vec{r}') d^3r' \\ &- \frac{V}{\beta} \sum_n \int \tilde{g}_\omega(\vec{s}, \vec{r}) \tilde{g}_{-\omega}(\vec{r}, \vec{I}) \tilde{g}_\omega(\vec{m}, \vec{I}) \tilde{g}_{-\omega}(\vec{m}, \vec{r}) \Delta'(\vec{s}) \\ &\quad \Delta'(\vec{I}) \Delta'(\vec{m}) d^3s d^3I d^3m \end{aligned} \quad (14)$$

สมการอินทิกรัลนี้ คือ สมการที่เราจะใช้คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ
ออเดอร์ พารามิเตอร์ ในสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเสียดทานแบบแม่เหล็ก

เอกสารการวิจัยในต่างประเทศ

นักวิทยาศาสตร์หลายคนได้ให้ความสนใจเกี่ยวกับปัญหาที่มีสิ่งเสียดทานแบบแม่เหล็กอยู่ใน
สารตัวนำยิ่งยวด เพราะมันทำลายลักษณะสมมาตรเชิงเวลาย้อนกลับ (time reversal symmetry)
ของระบบอิเล็กตรอน และทำให้คู่คูเปอร์เกิดขึ้นได้ยาก ผลที่ตามมาก็คือ จุดหมุนที่สารเปลี่ยนสภาพ
(phase-transition temperature) และขนาดความไม่ต่อเนื่องของค่าความร้อนจำเพาะ
ลดต่ำลง ในปี ค.ศ. 1960 อะบริโกซอฟ และ กอร์โกฟ (Abrikosov and Gor'kov.
1960 1761) ได้พัฒนาทฤษฎีขึ้นมาเพื่ออธิบายลักษณะและพฤติกรรมทั่ว ๆ ไปของตัวนำยิ่งยวด
เมื่อมีสิ่งเสียดทานได้อย่างถูกต้องพอประมาณ แต่การคำนวณของเขาไม่ได้คำนึงถึงปรากฏการณ์ควอนโด
นักวิจัยคนอื่น ๆ ได้พยายามขยายขอบเขตของการคำนวณนี้ออกไป โดยพิจารณาผลของคอนโดด้วย
วิธีการคำนวณที่ละเอียดขึ้น เช่น มีงานวิจัย 2 - 3 รายงาน (Muller - Hartmann and
Zittartz. 1971 423, Ludwig and Zuckermann. 1971 516 and Schlottmann

1975 - 1297) ที่อธิบายปรากฏการณ์เฟสย้อนกลับ (reentrant phase boundary) และ การสั่นของสปิน (spin fluctuation) ได้

สิ่งเล็บบนที่มีในสารตัวนำยิ่งยวดทำลาย translational invariance ของระบบ และเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ ในกรณีที่ความเข้มข้นของสิ่งเล็บบนน้อย การเปลี่ยนแปลงของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ มีน้อยมาก จนไม่ต้องคำนึงถึง อันตรกิริยาระหว่างอีเล็กตรอนกับสิ่งเล็บบน เป็นสาเหตุที่สำคัญที่ทำให้เกิดการแตกคู่ของคู่คูเปอร์ ขนาดของอันตรกิริยานี้ η ที่ขึ้นอยู่กับระยะห่างของสิ่งเล็บบนจากตำแหน่งนั้น ๆ มันจะมีค่ามากเมื่อสิ่งเล็บบนอยู่ ณ ตำแหน่งใกล้เคียงกับอีเล็กตรอน และจะไม่มีผล เมื่อสิ่งเล็บบนอยู่ห่างไกลจากอีเล็กตรอนมาก ระยะทางที่มีบทบาทสำคัญในปัญหานี้มีสามระยะทาง คือ

1. ระยะที่สั้นที่สุด คือ $\frac{1}{k_F}$ โดยที่ k_F คือ โมเมนตัมเฟอร์มิ
2. ระยะทางอาพันธ์ (coherence length) ของสารตัวนำยิ่งยวดที่ขึ้นอยู่กับค่าสัมบูรณ์ $\xi_0 = \epsilon_F / \Delta_0 k_F$ โดยที่ ϵ_F คือพลังงานเฟอร์มิ Δ_0 คือ ออร์เดอร์ พารามิเตอร์ในสารตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์ ซึ่งมีค่าคงที่ ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์
3. ระยะทาง $\eta = \epsilon_F / \omega_D k_F$ โดยที่ ω_D คือ เป็นพลังงานดีบายของโฟนอนในอันตรกิริยาระหว่างอีเล็กตรอนที่มีการถ่ายเทโฟนอนให้กันและกัน

มีงานวิจัยเรื่องการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ $\Delta(r)$ ในตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสิ่งเล็บบนแบบแม่เหล็กหลายรายงาน งานชิ้นแรกเป็นของชูซูกิ และ ชูเนโต (Tsuzuki and Suneto, 1967 1 - 12) เขาได้คำนวณหา $\Delta(r)$ ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต และพบว่าที่ระยะทางไกลมาก ๆ จากสิ่งเล็บบน (ระยะมากกว่าระยะอาพันธ์) การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางเป็นไปในลักษณะ $\frac{1}{r^2} \exp(-r/\xi_0)$ ซึ่งขัดแย้งกับสาระสำคัญทางทฤษฎีของกินส์เบิร์ก และแลนเดา กล่าวคือ กินส์เบิร์ก และแลนเดา ทำนายว่าการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\frac{1}{r}$ ผลอีกประการหนึ่งที่ ชูซูกิ และ ชูเนโต ได้คำนวณไว้ คือ การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออร์เดอร์ พารามิเตอร์ มีผลทำให้อุณหภูมิวิกฤตเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งผลอันนี้ อะบริคอฟ และ กอร์คอฟ (Abrikosov and Gor'kov, 1960 - 1781) ได้เคยคำนวณไว้ครั้งหนึ่ง โดยพิจารณาให้ออร์เดอร์ พารามิเตอร์ มีค่าคงที่

ในปี ค.ศ. 1968 ไอนริช (Heinrichs. 1968 451 - 463) ได้คำนวณหา $\Delta(r)$ โดยใช้วิธีการที่ละเอียดและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น คือ เขาได้ใช้วิธีการกะประมาณของบอร์น (Born) เข้าช่วยด้วย ผลการคำนวณของไอนริช แสดงให้เห็นชัดว่าที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต และที่ระยะทางไกลมาก ๆ $\Delta(r)$ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\frac{1}{r}$ ยิ่งไปกว่านั้นผลการคำนวณยังใช้ได้กับที่ระยะทางใกล้ ๆ อีกด้วย หลังจากนั้น คิตะมูระ (Kitamura. 1970 . 271 - 285) ได้ขยายขอบเขตผลงานของไอนริช โดยพิจารณาผลของคอนโด (Kondo effect) ในการคำนวณของเขาด้วย เขาใช้กรีนฟังก์ชันแบบดับเบิล-ไทม์ (double-time Green function) ซึ่ง ซัคเกอร์แมนน์ (Zuckermann. 1968 . 300) ทากาโน และ มาตสึโยชิ (Takano and Matsuyoshi 1969 . 45) เคยใช้มาแล้ว แล้วใช้วิธีการคำนวณคล้าย ๆ วิธีของ ซิททาร์ทซ์และ มุลเลอร์ ฮาร์ทแมนน์ (Zittartz and Müller-Hartmann. 1968 . 380) และของคอนโด เพื่อแก้สมการหาที-แมตริกซ์ (T-matrix) คิตะมูระ ได้พิจารณาในกรณีที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤตเช่นกัน และผลที่ได้ปรากฏว่า $\Delta(r)$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\frac{1}{r}$ เช่นเดียวกับผลของไอนริช

ในปีเดียวกันนั้นเอง โซดา (Soda. 1970 . 580 - 589) ได้คำนวณ $\Delta(r)$ ที่อุณหภูมิต่าง ๆ เริ่มตั้งแต่อุณหภูมิวิกฤตจนถึงอุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ เขาแก้สมการอินทิกรัลเพื่อหา $\Delta(r)$ ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ซึ่งห่างจากสารละลายปนมากกว่าระยะวอเฟอร์ การคำนวณของเขาใช้ ที-แมตริกซ์การชน (scattering t-matrix) วิธีการ perturbation และสปินแบบเก่า (classical spin) ผลการคำนวณของเขาได้ $\Delta(r)$ ที่ทุก ๆ อุณหภูมิ คือ ที่ $T = 0$, $T \geq 0$ และ $T \leq T_c$ จัดอยู่ในลักษณะของ $\frac{1}{r} + 0$ ($e^{(-\pi/4/v_F)r}/r^2$)

คุโรดา (Kuroda 1971 632) ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของวอเดอรัพารามิเตอร์ โดยคิดว่าสิ่งเล็บบนมีสปิน เมื่อเกิดกำหนดแบบคอนโดจะทำให้เกิดสภาพยึดเหนี่ยวแบบโดดเดี่ยว (isolated bound state) ภายในช่วงพลังงานของสารตัวนำยิ่งยวด คุมเมล (Kummel. 1972 2617) ได้ทำการคำนวณหา $\Delta(r)$ ที่ละเอียดยิ่งขึ้น งานวิจัยนี้ครอบคลุมทุกช่วงอุณหภูมิ คุมเมลประยุกต์วิธีการของบาร์เดิน คุมเมล เจคอบ และเทวอร์ด WKJ (Bardeen, Kummel, Jacobs and Tewordt. 1969 556) เพื่อหาค่าการเปลี่ยนแปลง

เชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ ในวิธีดังกล่าวนี้ เขาแก้สมการของโบโกลิวอฟ (Bogoliubov's equation) โดยวิธีแยกสปิน (spin decoupled) แต่การแก้ปัญหานั้นใช้วิธีประมาณแบบ WKBJ นี่เป็นวิธีการที่ยากมาก ในการคำนวณหา $\Delta(r)$ ผลงานของเขาที่น่าเชื่อถือเมื่อ $r \ll \xi_0$ แต่เมื่อ $r \gg \xi_0$ การหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางต้องหาโดยวิธีเซล์ฟคอนซิสเตนท์ (self-consistent) ที่ระยะ r ใกล้เคียง ๆ สิ่งเล็บบน คลื่น-เอส (s-wave) มีผลต่อ $\Delta(r)$ มากที่สุด ที่ระยะ r ใกล้เคียง ๆ คลื่นย่อยทุก ๆ กลิ่น มีส่วนในการแตกแยกคู่คูเปอร์ สูตรที่ได้จากการคำนวณของเขา ไม่ได้เป็นสูตรวิเคราะห์ที่มีทอมแสดงค่าควบของอีเลกตรอนอิสระกับสปินของสิ่งเล็บบน ที่เป็นเช่นนี้เพราะการคำนวณของเขาใช้วิธีประมาณ แรงดันดาเลียที่ ทำให้เขาวิเคราะห์หา $\Delta(r)$ เพราะต้องการอยากทราบค่าอุณหภูมิวิกฤตที่เปลี่ยนไป เมื่อสารตัวนำยิ่งยวดมีสิ่งเล็บบนผลลัพท์ รวมทั้งการที่ออเดอร์ พารามิเตอร์ ในตัวนำยิ่งยวดนั้นไม่คงที่นั้นจะมีลักษณะเป็นใด จากการคำนวณพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิวิกฤตมีก่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ สำหรับการคำนวณหา spin relaxation ของสิ่งเล็บบนแบบคอนโดในสารตัวนำยิ่งยวดนั้น เขาพบว่า $\Delta(r)$ ที่บริเวณใกล้เคียง ๆ สิ่งเล็บบน ไม่ได้มีบทบาทสำคัญอะไรเลย

ชลิตแมน (Schlottmann, 1976 1 - 7) วิเคราะห์หา $\Delta(r)$ เมื่อมีสิ่งเล็บบนที่มีสปินเป็นแบบสปีน เก้าอยู่ โดยใช้สมการของกอร์คอฟ กับฟังก์ชันของกรีนของอนุภาคเดี่ยว ผลสรุปของเขาสำหรับ $\Delta(r)$ แบ่งเป็นสองช่วงระยะ คือ

1 ที่ระยะทางใกล้ ๆ กับสิ่งเล็บบนมาก ๆ หรือ เมื่อ $r \ll \xi_0$ (ξ_D/ξ_F ไม่ว่าอุณหภูมิใดก็ตาม $\Delta(r)$ ที่เขาได้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $A(T) \sin^2(k_F r)/(k_F r)^2$ โดยที่ $A(T)$ เป็นฟังก์ชันขึ้นกับอุณหภูมิแต่เพียงอย่างเดียว ξ_0 คือระยะอาพันธ์ของสารตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

2 ที่ระยะทางไกล ๆ จากสิ่งเล็บบนมาก ๆ หรือเมื่อ $r \gg \xi_0$

2.1 ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต $T \leq T_c$ การเปลี่ยนแปลงของ $\Delta(r)$ จะแปรผกผันกับระยะทาง ซึ่งเป็นไปตามความคาดหวังของกินส์เบิร์ก และแลนเดา

2.2 ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ หรือต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ $T \ll T_c$ การเปลี่ยนแปลงของ $\Delta(r)$ เป็นแบบอื่น ๆ ลง ๆ และเป็นปฏิกิริยาผกผันกับระยะทางยกกำลังสาม

ในรายงานฉบับล่าสุดในปี ค.ศ. 1979 ยกส์สัน และ ซิมาเนค (Yoksan and Šimánek. 1978 4763 - 4779, 1978 874 - 875) คำนวณหา $\Delta(r)$ ของสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนผลัมน้อยที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต ($T \approx T_c$) โดยใช้แบบจำลองของแอนเดอร์สัน (Anderson. 1961 41) เป็นครั้งแรก ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าที่ระยะใกล้กับสิ่งเจือปน $\Delta(r)$ จะอยู่ในรูป $\{a + b \cos(2k_F r)\}/r^2$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ ที่ระยะทางไกล ๆ จากสิ่งเจือปน $\Delta(r)$ ที่ได้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\frac{1}{r}$ ซึ่งทั้งนี้จะเป็นได้ว่า ผลที่ได้สอดคล้องกับผลงานของชลิอิตแมนเป็นอย่างดี นอกจากนี้ ผลการวิเคราะห์ยังให้ผลอีกว่า การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ $\Delta(r)$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่า T_c ที่ลดลงด้วย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

การคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์พารามิเตอร์ $\Delta(\vec{r})$ ทำเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. หาฟังก์ชันของกรีนของสารตัวนำยิ่งยวด $\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}'; z)$ จากสมการของกอร์คอฟ (Gor'kov's equations)

$$\left[z\hat{I} - \left(\frac{v^2}{2m} + \epsilon_F \right) \hat{T}_3 + \Delta(\vec{r}) \hat{T}_1 \right] \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}', z) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{I}$$

โดยที่ $\hat{T}_1, \hat{T}_3$ คือ เมทริกซ์สปินแมตริกซ์ (Pauli spin matrices)

$\hat{I}$ คือ ยูนิตแมตริกซ์ (unit matrix)

ϵ_F คือ พลังงานเฟอร์มิ (Fermi energy)

v^2 คือ ลาปลาเซียน โอเปอเรเตอร์ (Laplacian's operator)

$\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ คือ ไดเรก เดลตา ฟังก์ชัน (Dirac delta function)

$$z = i\omega_n = i\pi(2n + 1)$$

2. และใช้ t-แมตริกซ์ (t - matrix) ของการกระเจิงโดยกาวอนดัมสปิน ของมัตสึมุระ (Matsura. 1973 713)

$$\hat{t}(z) = \frac{1}{i\rho} \frac{\left[\frac{-z}{(\Delta^2 - z^2)^{1/2}} \right] \hat{I} + \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{1/2}} - \alpha \right] \hat{T}_1}{\left[\left(\frac{\Delta - z}{\Delta + z} \right)^{1/2} - \alpha \right] \left[\left(\frac{\Delta + z}{\Delta - z} \right)^{1/2} - \alpha \right]}$$

โดยที่ Δ คือ ศักยภาพคู่ (pair potential) ของอิเล็กตรอนของสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์

ρ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ระดับเฟอร์มิ มีค่าคงที่

$$\alpha = \frac{\pi J \rho S}{2}$$

J คือ พารามิเตอร์การสับคู่ในอันตรกิริยาการแลกเปลี่ยนของอิเล็กตรอน

S คือ สปินของสิ่งเสียบน

หา $\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}', z)$ จากสมการ

$$\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}', z) = \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}', z) + \hat{G}(\vec{r}, 0, z) \hat{t}(0, 0, z) \hat{G}(0, \vec{r}', z)$$

3 หากการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์พารามิเตอร์ จากสมการ anomalous thermodynamical one-particle Green's function ที่ว่า

$$\Delta(\vec{r}) = 2\lambda T \sum_{n=0}^{\infty} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z_n) - \lambda \int_{\omega_D}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega)$$

โดยที่ λ คือ พารามิเตอร์การสับคู่ของอิเล็กตรอนในทฤษฎี บี ซี เอส

G_{12} คือ พจน์ของแมตริกซ์ G

G'_{12} คือ discontinuity ของ G บนแกนจริง

ω_D คือ ความถี่เดบาย

นำเอาสมการการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์พารามิเตอร์ที่ได้จากการคำนวณมาพิจารณา เมื่อ $T \ll T_C$ และ $T \lesssim T_C$ ทั้งกรณีระยะทางไกลจากสิ่งเสียบน และใกล้กับสิ่งเสียบน การพิจารณาในครั้งแรกจะใช้วิธีประมาณ (first approximation) แล้วจึงใช้วิธี เชลฟ์คอนซิสเตนท์ (self consistent)

การคำนวณโดยการกะประมาณขั้นแรก

ค่าออสเตอร์ พารามิเตอร์ ของสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณของกินส์เบิร์ก แลนเดา (Ginzburg-Landau, 1950 : 1964) และ กอร์คอฟ (Gor'kov, 1959 : 1968) เมื่อนำมาเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของกรน $G_{12}(\vec{r}, \vec{r}', z)$ จะได้เป็น

$$\Delta(\vec{r}) = \lambda \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\omega}{2\pi} \tanh\left(\frac{\omega}{2T}\right) G_{12}'(\vec{r}, \vec{r}', \omega) \quad \dots (1)$$

$$= 2\lambda T \sum_{n=0}^{\infty} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z_n) - \lambda \int_{\omega_D}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} G_{12}'(\vec{r}, \vec{r}, \omega) \quad \dots (1a)$$

โดยที่ λ คือพารามิเตอร์การจับคู่ของอิเล็กตรอนในทฤษฎี บี ซี เอลส์ $G_{12}'(\omega)$ คือความไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ของพจน์เมตริกซ์ G_{12} บนแกนจริง ω_D คือความถี่ตัดบาย และ $z_n = i\omega_n = i\pi T(2n + 1)$

อันตรกิริยาระหว่าง เอลส์-อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นอิเล็กตรอนอิสระของโลหะเจ้าบ้านที่มีสปิน σ และดี-อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นอิเล็กตรอนบนสิ่งเจือปนที่มีสปิน $\bar{\sigma}$ มีแฮมิลโทเนียนเป็น

$$H_{sd} = J\delta(\vec{r}) \vec{s} \cdot \vec{\sigma}$$

โดยที่ J คือพารามิเตอร์ในการจับคู่ระหว่าง เอลส์ และ ดี-อิเล็กตรอน

ฟังก์ชันของกรนของอนุภาคเดี่ยวสำหรับการชนกันของอิเล็กตรอนเขียนได้เป็น

$$\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}'; z) = \hat{G}^\circ(\vec{r}, \vec{r}', z) + \hat{G}^\circ(\vec{r}, 0, z) \hat{t}(0, 0, z) \hat{G}^\circ(0, \vec{r}', z) \quad \dots (2)$$

โดยที่ $\hat{G}^\circ$ คือฟังก์ชันของกรนในรูปเมตริกซ์ของอิเล็กตรอนในสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์

เมื่อกระจายพจน์ผลคูณของเมตริกซ์ในสมการที่ 2 เราจะได้พจน์ของเมตริกซ์ G_{12} ดังนี้

$$\begin{aligned}
G_{12}(\vec{r}, \vec{r}', z) = & G_{12}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', z) + G_{11}^{\circ}(\vec{r}, 0, z) t_{11}(z) G_{12}^{\circ}(0, \vec{r}', z) \\
& + G_{11}^{\circ}(\vec{r}, 0, z) t_{12}(z) G_{22}^{\circ}(0, \vec{r}', z) \\
& + G_{12}^{\circ}(\vec{r}, 0, z) t_{21}(z) G_{12}^{\circ}(0, \vec{r}', z) \\
& + G_{12}^{\circ}(\vec{r}, 0, z) t_{22}(z) G_{22}^{\circ}(0, \vec{r}', z) \dots (3)
\end{aligned}$$

ฟังก์ชันของกรีน $\hat{G}(\vec{r}, \vec{r}', z)$ นั้นหาได้จากสมการของกอร์ดอฟ ในสสารตัวนำยิ่งยวดที่บริสุทธิ์

$$\left[z\hat{I} - \left(\frac{v^2}{2m} + \epsilon_F \right) \hat{T}_3 + \Delta(\vec{r}) \hat{T}_1 \right] \hat{G}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', z) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{I} \dots (4)$$

ในสมการนี้พลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเป็นพลังงานจลน์ที่วัดจากระดับพลังงานเฟอร์มิ (ϵ_F) เมื่อเขียนข้างซ้ายของสมการนี้เสียใหม่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left[z\hat{I} - \left(\frac{v^2}{2m} + \epsilon_F \right) \hat{T}_3 + \Delta \hat{T}_1 \right] \hat{G}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', z) = & \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{I} \\
& + \Delta F(r) \hat{T}_1 \hat{G}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', z) \dots (5)
\end{aligned}$$

โดยที่ $F(r) = 1 - \frac{\Delta(r)}{\Delta}$ ในที่นี้ Δ คือ ออเดอร์ พารามิเตอร์ของสสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์

การคำนวณหา $\Delta(r)$ ในการกะประมาณขั้นแรกนี้เราจะไม่คำนึงถึงผลจากการรบกวนอันเนื่องมาจากสิ่งเสียดทาน ดังนั้น เทอม $F(r)$ จึงไม่มี เงื่อนไขของเชลฟ์ คอนสตันเตนซี ก็ยังไม่มีจำเป็นต้องใช้ ด้วยเหตุนี้การคำนวณขั้นนี้จึงเปรียบเสมือนกับการพิจารณาลักษณะของสภาวะถูกกระตุ้นของอิเล็กตรอนในสสารตัวนำยิ่งยวด เมื่อไม่มีผลของการรบกวนอันเนื่องมาจากสิ่งเสียดทาน

ในการวิสัยครั้งนี้เราจะพิจารณาเฉพาะว่า เอล-อีเลกตรอนเท่านั้นที่ถูกชน โดย ดี-อีเลกตรอนของสิ่งเสียดทาน และอันตรกิริยานี้เท่านั้นที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ Δ ที่จริงแล้วในการคำนวณหา $\Delta(r)$ ด้วยวิธีเชลฟ์ คอนสตันเตนซี เขาต้องพิจารณา ดี พี-อีเลกตรอนอื่น ๆ ด้วยที่เป็นสาเหตุทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ Δ แต่เพราะเหตุว่าโอกาสการพบอิเล็กตรอนประเภทอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ เอล-อีเลกตรอนที่บริเวณใกล้ ๆ สิ่งเสียดทานนั้นน้อย การกะประมาณขั้นแรกนี้จึงมีเหตุผลเพียงพอและถูกต้องมากในการหา $\Delta(r)$ ที่บริเวณใกล้ ๆ สิ่งเสียดทาน แต่จะไม่ถูกต้องนักในการหาค่า $\Delta(r)$ ที่ระยะทางไกลจากสิ่งเสียดทานมาก ๆ

สำหรับตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงแบบ translational invariant

$F(r) = 0$ ศาตออบของสมการที่ (5) จะให้เป็น

$$\hat{G}^\circ(\vec{r}, \vec{r}', z) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \frac{1}{(z^2 - \epsilon_k^2 - \Delta^2)} \begin{pmatrix} z + \epsilon_k & -\Delta \\ -\Delta & z - \epsilon_k \end{pmatrix} \dots (6)$$

เมื่ออินทิเกรต โดยสมมติว่าพลังงานของ เอล-อี เลกตรอนเป็นแบบพาราโบลา (parabolic band) $\epsilon_k = \frac{k^2}{2m}$ เราจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$\hat{G}^\circ(\vec{r}; z) = -\left[1/2(\Delta^2 - z^2)^{1/2}\right] \left\{ \left[z\hat{I} - \Delta \hat{T}_1 \right] \left[f_+(r) - f_-(r) \right] + 1(\Delta^2 - z^2)^{1/2} \hat{T}_3 \left[f_+(r) + f_-(r) \right] \right\} \dots (7)$$

โดยที่

$$f_\pm = - (m/2\pi) e^{\pm i k_\pm r/r} \dots (8)$$

$$k_\pm = \left[1 \pm 1(\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F \right]^{1/2} k_F \dots (9)$$

$$(f_+(r) - f_-(r))^2 = -4(\pi\rho)^2 \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \exp \left[-k_F r (\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F \right] \dots (10)$$

$$(f_+(r) + f_-(r))^2 = 4(\pi\rho)^2 \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \exp \left[-k_F r (\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F \right] \dots (11)$$

ρ คือ ความหนาแน่นของสถานะที่ระดับพลังงานเฟอร์มิ

$$\rho = \frac{mk_F}{2\pi^2}$$

การคำนวณนี้กำหนดให้สัญลักษณ์ $\hat{G}^\circ(\vec{r}, z) = \hat{G}^\circ(\vec{r}, 0, z) = \hat{G}^\circ(0, \vec{r}, z)$ เมื่อกระจายสมการที่ (7) จะได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$G_{11}^{\circ}(\vec{r}, z) = - \frac{1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[z(f_+(r) - f_-(r)) + 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+(r) + f_-(r)) \right] \dots (12)$$

$$G_{22}^{\circ}(\vec{r}, z) = - \frac{1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[z(f_+(r) - f_-(r)) - 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+(r) + f_-(r)) \right] \dots (13)$$

$$G_{12}^{\circ}(\vec{r}, z) = G_{21}^{\circ}(\vec{r}, z) = - \frac{1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[-\Delta(f_+(r) - f_-(r)) \right] \dots (14)$$

พจน์ในสมการที่ (7) ที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ $\hat{T}_3$ นั้นเกิดจากสมบัติของสมมาตรของแถบพลังงาน พาราโบลิคบริเวณระดับพลังงานเฟอร์มิ และโดยเหตุที่เรารักษาความกว้างจำกัด (band width cutoff) ของแถบพลังงานของเอเล-อีเลกตรอนไม่มี พจน์นี้จึงไม่มีความสำคัญในการพิจารณาด้วยการกะประมาณขั้นแรก เมื่อ $\vec{r} = \vec{r}'$ เราจะได้

$$\hat{G}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}, z) = \hat{G}^{\circ}(0, z) = - \left[\frac{\eta \rho}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] (z\hat{I} - \Delta\hat{T}_1) \dots (15)$$

$$G_{12}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}, z) = \frac{\eta \rho \Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \dots (16)$$

ในการคำนวณหาฟังก์ชันของกรีน ของเอเล-อีเลกตรอน $G(\vec{r}, \vec{r}, z)$ นั้น ฟังก์ชันที่ต้องนำมาเกี่ยวข้องกับคือ ที-แมตริกซ์ (t-matrix) ทั้งนี้ได้มีผู้คำนวณหาที-แมตริกซ์ ของควอนตัมสปิน (quantum spin) ไว้ คือ มัตสึยูระ (Matsuura. 1973 . 713) เขาพบว่า

$$\hat{t}(z) = \frac{1}{\eta \rho} \frac{\left[\frac{z}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \hat{I} + \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] \hat{T}_1}{\left[\left(\frac{\Delta - z}{\Delta + z} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \left[\left(\frac{\Delta + z}{\Delta - z} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right]} \dots (17)$$

$$t_{11}(z) = t_{22}(z) = K \left(\frac{-z}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \dots (18)$$

$$t_{12}(z) = t_{21}(z) = K \left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) \dots (19)$$

$$\text{โดยที่ } K = \frac{1}{\eta \rho \left[\left(\frac{\Delta-z}{\Delta+z} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \left[\left(\frac{\Delta+z}{\Delta-z} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right]}$$

$$\alpha = \frac{\eta \rho J_S}{2}$$

แทนค่าสมการที่ (12), (13), (14), (16), (18) และ (19) ในสมการที่ (3) เมื่อ $\vec{r} = \vec{r}'$ และ $f_{\pm}(r) = f_{\pm}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z) &= \frac{\eta \rho \Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[z(f_+ - f_-) + 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+ + f_-) \right] \\ &\times K \left[\frac{-z}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[-\Delta(f_+ - f_-) \right] + \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[z(f_+ - f_-) + 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+ + f_-) \right] K \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] \\ &\times \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[z(f_+ - f_-) - 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+ + f_-) \right] \\ &+ \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[-\Delta(f_+ - f_-) \right] K \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[-\Delta(f_+ - f_-) \right] + \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[-\Delta(f_+ - f_-) \right] \\ &\times K \left[\frac{-z}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{(-)1}{2(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \left[z(f_+ - f_-) - 1(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} (f_+ + f_-) \right] \end{aligned}$$

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } A = (f_+ - f_-)$$

$$B = (f_+ + f_-)$$

$$C = (\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

เราจะได้ว่า

$$G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z) = \frac{\eta \rho \Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{K}{4(\Delta^2 - z^2)} \left\{ \left[\left(\frac{3\Delta}{C} - \alpha \right) z^2 + \left(\frac{\Delta}{C} - \alpha \right) \Delta^2 \right] A^2 + \left[\left(\frac{\Delta}{C} - \alpha \right) C^2 \right] B^2 \right\}$$

เมื่อแทนค่า K, A, B และ C จากข้างต้น

$$G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z) = \frac{\eta \rho \Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4\eta \rho (\Delta^2 - z^2) \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\Delta/(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right]} \times \left\{ \left[\left(\frac{3\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) z^2 + \left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) \Delta^2 \right] (f_+(r) - f_-(r))^2 + \left[\left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) (\Delta^2 - z^2) \right] (f_+(r) + f_-(r))^2 \right\} \dots (20)$$

ในการหา $\Delta(r)$ โดยไม่ต้องใช้เงื่อนไขของเชลฟ์ คอนสลิเตนซี เราแทน $F(r)$ ด้วย $F_0(r)$ ดังนั้น จากการที่กำหนดไว้ว่า $F(r) = 1 - \frac{\Delta(r)}{\Delta}$ จึงเขียนได้เป็น

$$\Delta(r) = \Delta [1 - F_0(r)] \dots (21)$$

เมื่อแทนสมการที่ (21) ลงในสมการที่ (1a) จะได้ว่า

$$F_0(r) = 1 - \frac{2\lambda T}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}; z_n) + \frac{\lambda}{\Delta} \int_{\omega_D}^{\infty} \frac{d\omega}{\eta} G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega) \dots (22)$$

เมื่อแทนค่า $G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, z)$ ลงในสมการที่ (22) จะได้

$$F_0(r) = 1 - 2\eta \rho \lambda T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\lambda T}{2\eta \rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{3\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) z^2 + \left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) \Delta^2 \right] (f_+(r) - f_-(r))^2}{\Delta(\Delta^2 - z^2) \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\Delta/(\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda T}{2\eta\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - z^2)^{1/2}} - \alpha \right) (f_+(r) + f_-(r))^2 \right]}{\Delta \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\Delta/(\Delta^2 - z^2)^{1/2} \right]} \\
& + \frac{\lambda}{\Delta\eta} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}; \omega) \quad \dots (23)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนด้วยสมการที่ (10) และ (11) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ว่า

$$\begin{aligned}
F_0(r) = & 1 - 2\eta\rho\lambda T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\Delta^2 - z^2)^{1/2}} \\
& + 2\eta\rho\lambda T \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha(z^2 + \Delta^2)(\Delta^2 - z^2)^{1/2} - 3\Delta z^2 - \Delta^3 \right] \\
& \times \frac{\exp \left[-k_F r (\Delta^2 - z^2)^{1/2} / \epsilon_F \right]}{\Delta(\Delta^2 - z^2)^{3/2} (1 + \alpha^2) - 2\alpha\Delta^2(\Delta^2 - z^2)} + 2\eta\rho\lambda T \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Delta - \alpha(\Delta^2 - z^2)^{1/2} \right] \frac{\exp \left[-k_F r (\Delta^2 - z^2)^{1/2} / \epsilon_F \right]}{\Delta \left[(1 + \alpha^2)(\Delta^2 - z^2)^{1/2} - 2\alpha\Delta \right]} \\
& + \frac{\lambda}{\Delta\eta} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}; \omega) \quad \dots (23a)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า z ด้วย $1/T(2n+1)$ จะได้

$$\begin{aligned}
F_0(r) = & 1 - 2\eta\rho\lambda T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[\Delta^2 + 1/T^2(2n+1)^2 \right]^{1/2}} \\
& + 2\eta\rho\lambda T \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha \left[\Delta^2 - 1/T^2(2n+1)^2 \right] \left[\Delta^2 + 1/T^2(2n+1)^2 \right]^{1/2} \right. \\
& \left. + 3\Delta 1/T^2(2n+1)^2 - \Delta^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\exp \left[-k_F r (\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2)^{1/2} / \epsilon_F \right]}{\Delta [\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2]^{3/2} (1 + \alpha^2) - 2\alpha \Delta [\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2]} \\
& + 2\pi \rho \lambda T \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\alpha} \left\{ \Delta - \alpha [\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2]^{1/2} \right\} \\
& \times \frac{\exp \left[-k_F r (\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2)^{1/2} / \epsilon_F \right]}{\Delta \left\{ (1 + \alpha^2) [\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2]^{1/2} - 2\alpha \Delta \right\}} + \frac{\lambda}{\Delta \pi} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega) \dots (24)
\end{aligned}$$

ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต $T \leq T_c$

ณ ที่อุณหภูมิ Δ มีค่าน้อย นั่นคือ $\Delta(T) \ll T_c$ พจน์ที่ 2 ในสมการที่ (24) คือ $2\pi \rho \lambda T \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{1}{[\Delta^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2]^{3/2}}$ นั้น ตามทฤษฎี บี ซี เอส ได้แสดงว่ามีค่าเป็นหนึ่ง และเมื่อ α มีค่าน้อย พจน์อื่น ๆ ลดรูป ทำให้สมการที่ (24) มีค่าเป็น

$$\begin{aligned}
F_0(r) &= \frac{6\rho\lambda}{(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{1}{(2n + 1)} \exp \left[- e^{\gamma} (2n + 1) r / \xi_0 \right] \\
&+ \frac{2\rho\lambda}{(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{1}{(2n + 1)} \exp \left[- e^{\gamma} (2n + 1) r / \xi_0 \right] \\
&+ \frac{\lambda}{\Delta \pi} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega) \dots (25)
\end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } \frac{e^{\gamma}}{\xi_0} = \frac{\pi T k_F}{\epsilon_F}$$

γ คือ ค่าคงที่ของออยเลอร์ (Euler's constant)

$$\xi_0 = \frac{\epsilon_F}{k_F \Delta}$$

Δ คือ ออเดอร์พารามิเตอร์ของสารตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

จาก $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ เมื่อ $y \ll 1$

$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots$

เราจะได้ $\ln\left[\frac{(1+y)}{(1-y)}\right] = 2(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots)$

เมื่อ $y = e^{-a}$

นั่นก็คือ $\frac{1}{2} \ln\left[\frac{(1+e^{-a})}{(1-e^{-a})}\right] = \frac{e^{-a}}{1} + \frac{e^{-3a}}{3} + \frac{e^{-5a}}{5} + \dots$

$$\frac{1}{2} \ln(\coth \frac{a}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)}$$

$$-\frac{1}{2} \ln(\tanh \frac{a}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)}$$

ดังนั้น ถ้า $a = \frac{e^Y r}{\xi_0}$ แล้ว จะทำให้สมการที่ (25) มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} F_0(r) = & -\frac{3\rho\lambda}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r}\right)^2 \ln[\tanh(e^Y r/2\xi_0)] \\ & -\frac{\rho\lambda}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r}\right)^2 \ln[\tanh(e^Y r/2\xi_0)] \\ & + \frac{\lambda}{\Delta T} \int_{\omega_D}^{\infty} d\omega G'_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega) \end{aligned} \quad \dots (26)$$

สำหรับพจน์ที่ 3 ของสมการที่ (26) G'_{12} ซึ่งเป็น discontinuity ของ G บนแกนจริงนั้น หาได้จากส่วนที่เป็นจินตภาพ (imaginary part) ของ $G_{12}(\vec{r}, \vec{r}, \omega)$ ดังนั้น จากสมการที่ (10), (11) และ (20) เมื่อคิดเฉพาะส่วนที่เป็นจินตภาพ และ $\Delta(T) \ll T_c$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{\Delta \eta} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \, G_{12}'(\bar{r}, \bar{r}, \omega) \\
&= \frac{\lambda}{\Delta \eta} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \, \text{Im } G_{12}(\bar{r}, \bar{r}, \omega) \\
&= - \frac{\rho \lambda}{\Delta(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \left[2\alpha \sin(k_F r \omega / \epsilon_F) - 4 \frac{\Delta}{\omega} \cos(k_F r \omega / \epsilon_F) \right] \\
&\quad - \frac{\rho \lambda}{\Delta(1 + \alpha^2)(k_F r)^2} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \left[\frac{\Delta}{\omega} \cos(k_F r \omega / \epsilon_F) - \alpha \sin(k_F r \omega / \epsilon_F) \right] \\
&= - \frac{2\rho \lambda \alpha}{\Delta(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \sin(k_F r \omega / \epsilon_F) \\
&\quad + \frac{4\rho \lambda}{(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \frac{\cos(k_F r \omega / \epsilon_F)}{\omega} \\
&\quad - \frac{\rho \lambda}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^2} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \frac{\cos(k_F r \omega / \epsilon_F)}{\omega} \\
&\quad + \frac{\rho \lambda \alpha}{\Delta(1 + \alpha^2)(k_F r)^2} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \sin(k_F r \omega / \epsilon_F)
\end{aligned}$$

เมื่ออินทิเกรต และใช้คุณสมบัติของโคไซน์ อินทิกรัล (cosine integral) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{\Delta \eta} \int_{\omega_D}^{\alpha} d\omega \, G_{12}'(\bar{r}, \bar{r}, \omega) \\
&= - \frac{2\rho \lambda \alpha}{\Delta(1 + \alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \frac{\epsilon_F}{(k_F r)} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\rho\lambda}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) + \frac{\rho\lambda}{(1+\alpha^2)(k_F r)^2} \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \\
& + \frac{\rho\lambda\alpha\epsilon_F}{\Delta(1+\alpha^2)(k_F r)^3} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \\
& = \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \frac{\rho\lambda}{(1+\alpha^2)(k_F r)^2} [2\cos(2k_F r) - 1] \\
& + \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \frac{\rho\lambda\alpha\epsilon_F}{(1+\alpha^2)\Delta(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \quad \dots (27)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนสมการที่ (27) ในสมการที่ (26) เราจะได้

$$\begin{aligned}
F_0(r) = & \frac{3\rho\lambda}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \ln [\tanh(e^Y r / 2\xi_0)] - \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \\
& \times \ln [\tanh(e^Y r / 2\xi_0)] + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \times [2\cos(2k_F r) - 1] + \frac{\alpha(k_F \xi_0)}{(k_F r)^3} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \cos(2k_F r) \left. \right\} \\
& \text{เมื่อ } T \leq T_c \quad \dots (28)
\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณา $F_0(r)$ ในกรณีที่ระยะทาง r น้อย ๆ ($k_F r \ll \epsilon_F / \omega_D$) หรือตำแหน่งใกล้ ๆ กับอะตอมของสิ่งเจือปนในสารตัวนำยิ่งยวด เมื่อ $T \leq T_c$ แล้วเราได้

$$\text{Ci}(Ar) \approx \ln(Ar)$$

และสมการที่ (28) ลดรูปเป็น

$$F_0(r) = \frac{-3\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \ln [\tanh(e^Y r / 2\xi_0)] - \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln [\tanh (e^Y r / 2 \xi_0)] + \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} \ln (k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \times [2 \cos(2k_F r) - 1] + \frac{\alpha(k_F \xi_0)}{(k_F r)^3} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \cos(2k_F r) \left. \right\} \\
& = \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^2} \left\{ - [2 - \cos(2k_F r)] \ln [\tanh(e^Y r / 2 \xi_0)] \right. \\
& + \ln (k_F r \omega_D / \epsilon_F) [2 \cos(2k_F r) - 1] \left. \right\} + \frac{\lambda \rho \alpha (k_F \xi_0)}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^3} \\
& \times \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F)
\end{aligned}$$

เมื่อ r มีค่าน้อย ๆ

$$\begin{aligned}
F_0(r) &= \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^2} \left\{ - [2 - \cos(2k_F r)] \ln [\tanh (e^Y r / 2 \xi_0)] \right. \\
&+ \ln (k_F r \omega_D / \epsilon_F) [2 \cos(2k_F r) - 1] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } T \leq T_c, k_F r \ll \epsilon_F / \omega_D \quad \dots (29)$$

สำหรับในกรณีที่ระยะทาง r มาก ๆ ($r \gg \xi_0$) เมื่อ $T \leq T_c$ จะทำให้

$$\ln [\tanh (e^Y r / 2 \xi_0)] \approx 0$$

และสมการที่ (28) เปลี่ยนไปเป็น

$$\begin{aligned}
F_0(r) &= \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} C_1 (k_F r \omega_D / \epsilon_F) [2 \cos(2k_F r) - 1] \right. \\
&+ \frac{\alpha(k_F \xi_0)}{(k_F r)^3} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \cos(2k_F r) \left. \right\}
\end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $C_1(x) \approx \frac{\sin x}{x}$ เมื่อ x มีค่ามาก และจากการที่เรากำหนดให้

$\eta = \epsilon_F/k_F \omega_D$ ทำให้ $F_0(r)$ มีค่าเป็น

$$F_0(r) = \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^3} \left\{ \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) [2 \cos(2k_F r) - 1] \right. \\ \left. + \alpha(k_F \xi_0) \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \\ = \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^3} \left\{ -k_F \eta \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) + \cos(2k_F r) [2k_F \eta \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\ \left. + \alpha(k_F \xi_0) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F)] \right\}$$

ถ้า $\alpha \xi_0$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ η หรือ $\alpha \xi_0 \ll \eta$ จะทำให้ได้ผลว่า

$$F_0(r) = \frac{\lambda \rho}{(1 + \alpha^2)} \frac{k_F \eta}{(k_F r)^3} \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) [2 \cos(2k_F r) - 1]$$

$$\text{เมื่อ } T \leq T_c, r \gg \xi_0 \quad \dots (30)$$

ถ้า $\alpha \xi_0$ มีค่ามากเมื่อเทียบกับ η หรือ $\alpha \xi_0 \gg \eta$ และโดยที่ $\frac{\xi_0}{\eta} = \frac{\omega_D}{\Delta}$ จะทำให้ได้

ผลลัพธ์ว่า

$$F_0(r) = \frac{\lambda \rho \alpha k_F \xi_0}{(1 + \alpha^2)(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(r/\eta)$$

$$\text{เมื่อ } T \leq T_c, r \gg \xi_0 \quad \dots (31)$$

ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ $T \ll T_c$

เมื่อนำสมการที่ (27) แทนลงในสมการที่ (23a) และแทน z ด้วย 1ω โดยที่พจน์ที่ 2 ของสมการที่ (23a) มีค่าเป็นหนึ่งผลที่ได้จะเป็นว่า

$$\begin{aligned}
 F_0(r) = & 2\eta\rho\lambda T \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha(-\omega^2 + \Delta^2)(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} + 3\Delta\omega^2 - \Delta^3 \right] \\
 & \times \frac{\exp[-k_F r(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}/\epsilon_F]}{\Delta(\Delta^2 + \omega^2)^{3/2}(1+\alpha^2) - 2\alpha\Delta^2(\Delta^2 - \omega^2)} + 2\eta\rho\lambda T \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \\
 & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Delta - \alpha(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}] \exp[-k_F r(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}/\epsilon_F]}{\Delta[(1+\alpha^2)(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} - 2\alpha\Delta]} + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} \right. \\
 & \times [2\cos(2k_F r) - 1] C_1(k_F r\omega_D/\epsilon_F) + \frac{\alpha(\xi_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(k_F r\omega_D/\epsilon_F) \\
 & \left. \times \cos(2k_F r) \right\} \dots (32)
 \end{aligned}$$

เปลี่ยนจากการใช้ summation เป็น integration และจัดรูปสมการใหม่จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 F_0(r) = & \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ \int_0^{\infty} d\omega \frac{\exp[-k_F r(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}/\epsilon_F] \alpha(-\omega^2 + \Delta^2)}{\Delta(\Delta^2 + \omega^2) - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \Delta^2(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 & + \int_0^{\infty} d\omega \frac{\exp[-k_F r(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}/\epsilon_F] 3\Delta\omega^2}{\Delta(\Delta^2 + \omega^2)^{3/2} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \Delta^2(\Delta^2 + \omega^2)} \\
 & \left. - \int_0^{\infty} d\omega \frac{\exp[-k_F r(\Delta^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}}/\epsilon_F] \Delta^3}{\Delta(\Delta^2 + \omega^2)^{3/2} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \Delta^2(\Delta^2 + \omega^2)} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho\lambda}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ \int_0^\alpha d\omega \frac{\exp[-k_F r (\Delta^2 + \omega^2)^{1/2} / \epsilon_F]}{(\Delta^2 + \omega^2)^{1/2} - \frac{2\alpha\Delta}{(1+\alpha^2)}} \right. \\
& \left. - \int_0^\alpha d\omega \frac{\exp[-k_F r (\Delta^2 + \omega^2)^{1/2} / \epsilon_F] \alpha (\Delta^2 + \omega^2)^{1/2}}{\Delta \left[(\Delta^2 + \omega^2)^{1/2} - \frac{2\alpha\Delta}{(1+\alpha^2)} \right]} \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} \left[2\cos(2k_F r) - 1 \right] \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) + \frac{\alpha(\xi_0 k_F)}{(k_F r)^3} \right. \\
& \left. \times \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \quad \dots (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{กำหนดให้ } \omega &= \Delta \sinh \phi \\
d\omega &= \Delta \cosh \phi d\phi \\
\Delta^2 + \omega^2 &= \Delta^2 \cosh^2 \phi \\
\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} &= a \\
\text{และ } \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} &= b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0(r) &= \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ 2\alpha \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{(\cosh \phi - b)} \right. \\
& - \alpha \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi] \cosh^2 \phi}{(\cosh \phi - b)} + 3 \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi] \cosh \phi}{(\cosh \phi - b)} \\
& \left. - 4 \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{\cosh \phi (\cosh \phi - b)} \right\} + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi] \cosh\phi}{(\cosh\phi-b)} - \alpha \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi] \cosh^2\phi}{(\cosh\phi-b)} \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} [2\cos(2k_F r) - 1] \operatorname{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha(\epsilon_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \quad \dots (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_0(r) = & \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ 2\alpha \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{(\cosh\phi-b)} \right. \\
& - \alpha \int_0^\alpha d\phi \exp[-a \cosh\phi] \left(\cosh\phi + b + \frac{b^2}{(\cosh\phi-b)} \right) \\
& + 3 \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{(\cosh\phi-b)} (\cosh\phi - b + b) - 4 \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{\cosh\phi (\cosh\phi-b)} \left. \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{(\cosh\phi-b)} (\cosh\phi - b + b) \right. \\
& - \alpha \int_0^\alpha d\phi \exp[-a \cosh\phi] \left(\cosh\phi + b + \frac{b^2}{(\cosh\phi-b)} \right) \left. \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} [2\cos(2k_F r) - 1] \operatorname{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha(\epsilon_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \quad \dots (35)
\end{aligned}$$

$$\text{กำหนดให้ } I = \int_0^{\infty} \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{(\cosh\phi - b)} \quad \dots (35.1)$$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{d\phi \exp[-a \cosh\phi]}{\cosh\phi (\cosh\phi - b)} \quad \dots (35.2)$$

และแทนค่าในสมการที่ (35) ด้วยฟังก์ชันต่อไปนี้

$K_0(a)$ คือ modified Bessel function สำหรับศูนย์

$$K_0(a) = \int_0^{\infty} d\phi \exp[-a \cosh\phi]$$

$K'_0(a)$ หรือ $K_1(a)$ คือ modified Bessel function สำหรับ 1

$$K'_0(a) = K_1(a) = - \int_0^{\infty} d\phi \exp[-a \cosh\phi] \cosh\phi$$

$$\begin{aligned} F_0(r) = & \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ I[2\alpha - \alpha b^2 + 3b] - 4J - K_0(a)[\alpha b - 3] + \alpha K_1(a) \right\} \\ & + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ I[b - \alpha b^2] + K_0(a)[1 - \alpha b] + \alpha K_1(a) \right\} \\ & + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} [2\cos(2k_F r) - 1] C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha(\epsilon_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \quad \dots (36) \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก α และ b มีค่าน้อย ดังนั้น พจน์ αb และ αb^2 น้อยจนตัดทิ้งได้

$$\begin{aligned}
F_0(r) = & \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ I[2\alpha+3b] - 4J + 3K_0(a) + \alpha K_1(a) \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ Ib + K_0(a) + \alpha K_1(a) \right\} \\
& + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{1}{(k_F r)^2} [2\cos(2k_F r) - 1] C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \left. + \frac{\alpha(\xi_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \dots (37)
\end{aligned}$$

การหาค่าของ I และ J แสดงไว้ในภาคผนวก มีค่าเป็น

$$I = \eta e^{-ab} = \eta \exp \left[-\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right]$$

$$J = -\frac{\eta}{b} = -\frac{\eta(1+\alpha^2)}{2\alpha}$$

เมื่อแทนค่า I , J และ b ในสมการที่ (37) จะได้ผลว่า

$$\begin{aligned}
F_0(r) = & \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left[\left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ \left(2\alpha + \frac{6\alpha}{(1+\alpha^2)} \right) \eta \exp \left[-\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right] + \frac{2\eta(1+\alpha^2)}{\alpha} \right. \right. \\
& + 3K_0\left(\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F}\right) + \alpha K_1\left(\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F}\right) \left. \right\} + \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \left\{ \frac{2\alpha\eta}{(1+\alpha^2)} \exp \left[-\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)} \right] \right. \\
& + K_0\left(\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F}\right) + \alpha K_1\left(\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F}\right) \left. \right\} + \left\{ \frac{[2\cos(2k_F r) - 1]}{(k_F r)^2} C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha(\xi_0 k_F)}{(k_F r)^3} \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } T \ll T_c \dots (38)$$

สำหรับกรณีที่ระยะทางไกลจากอะตอมสิ่งเสียบนมาก ๆ หรือ $r \gg \xi_0$ เมื่อ $T \ll T_c$
 ทำให้พจน์เอกโพเนนเชียลมีค่าใกล้ศูนย์ และจากคุณสมบัติต่อไปนี้

$$J_1(x) \approx \frac{\sin x}{x} \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่ามาก}$$

$$K_0(x) \rightarrow 0 \text{ และ } K_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่ามาก}$$

ทำให้สมการที่ (38) มีค่าเป็น

$$F_0(r) = \frac{2\pi\lambda\rho}{\alpha} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha)^2} \frac{1}{(k_F r)^3} \left[\cos(2k_F r) \left\{ \frac{2\epsilon_F}{\omega_D} \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha(\xi_0 k_F) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} - \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right] \\ \text{เมื่อ } r \gg \xi_0, T \ll T_c \quad \dots (39)$$

การคำนวณโดยวิธีรีเซลล์ คอนซิลเตนท์

ในตอนนี้เป็น การคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ ด้วย
 วิธีรีเซลล์ คอนซิลเตนท์ โดยนำฟังก์ชันของกรีน $\hat{G}^0$ มาพิจารณา เมื่อ $F(r)$ ไม่ถูกตัดทิ้งจาก
 สมการที่ (5) ชล็อตแมน (Schlottmann. 1976 1 - 7) ได้แสดงวิธีคำนวณหา $\hat{G}^0$
 ไว้อย่างละเอียด และนำมาใช้หาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์
 ได้ตามสมมติฐานว่า

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_0(p) / \left\{ 1 - i\lambda\rho \frac{\pi m}{k_F} T \sum_{n=0}^N \frac{1}{(\Delta^2 - z^2)} \frac{1}{p} \right. \\ \times \left[\Delta^2 \ln \left(\frac{4k_F^2 + [ip - k_F(\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F]^2}{4k_F^2 + [-ip - k_F(\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F]^2} \right) \right. \\ \left. \left. - 2z^2 \ln \left(\frac{ip - k_F(\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F}{-ip - k_F(\Delta^2 - z^2)^{1/2}/\epsilon_F} \right) \right] \right\} \quad \dots (40)$$

โดยที่ $\tilde{F}_0(p)$ คือ Fourier transform ของ $F_0(r)$ ซึ่งได้คำนวณหาไว้ในตอนที่แล้ว ด้วยวิธีที่ไม่เชลล์ คอนซิลเตนท์ สมการที่ (40) นี้ จะต้องทำ Fourier transform ย้อนกลับ อีกครั้งหนึ่งจึงจะได้ $F(r)$ หรือ $\Delta(r)$ ตามที่ต้องการได้ ในการคำนวณ เราจะแยกพิจารณาที่ ระยะทางต่าง ๆ เพียงสองช่วง คือ

1 ที่ระยะทางไกลจากอะตอมของสิ่งเลือนมาก ($r \gg \xi_0$)

ในกรณีนี้ r มีค่ามาก หรือ p มีค่าน้อย จึงทำให้สมการที่ (40) ลดรูปเป็น

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_0(p) / [A(T) + (p\xi_0)^2 B(T)] \quad \dots (41)$$

โดยที่

$$A(T) = \lambda \rho 2\pi T \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^2}{(\Delta^2 - z^2)^{3/2}} \quad \dots (42)$$

และ

$$B(T) = -\lambda \rho (2/3) \pi T (\pi T_c e^{-\gamma})^2 \sum_{n=0}^N \frac{z^2}{(\Delta^2 - z^2)^{5/2}} \quad \dots (43)$$

เมื่อทำ Fourier transform ของสมการที่ (41) ย้อนกลับ เพื่อหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของ $F(r)$ จะได้ว่า

$$F(r) = \frac{1}{2rB(T)\xi_0^2\Omega} \int_0^\infty dx \, x \, F_0(x) \left\{ \exp[-\Omega|r-x|] - \exp[-\Omega|r+x|] \right\} \quad \dots (44)$$

$$\text{โดยที่ } \Omega = [A(T)/B(T)]^{1/2} / \xi_0$$

1.1 ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ อุณหภูมิวิกฤต ($T \leq T_c$ และ $r \gg \xi_0$)

๗ ที่อุณหภูมินี้ ทั้ง Ω และ $A(T)$ จากสมการที่ (42) หดไป และค่าของ

$B(T_c) = \frac{7}{12} \lambda \rho e^{-2\gamma} \zeta(3)$ โดยที่ ζ คือฟังก์ชันซีตาของรีแมน (Riemann zeta function) ดังนั้น
สมการที่ (44) เมื่อกระจายพจน์ต่าง ๆ ใหม่จะได้เป็น

$$F(r) = \frac{1}{B(T_c) \xi_0^2} \left(\frac{1}{r} \int_0^r dx x^2 F_0(x) + \int_r^\infty dx x F_0(x) \right) \dots (45)$$

สำหรับ $F_0(x)$ ที่จะใช้ ได้มาจากสมการที่ (30) เมื่อ $T \leq T_c$, $r \gg \xi_0$

เมื่อนำมาเขียนในรูปฟังก์ชันของ x จะได้ว่า

$$F_0(x) = \frac{\lambda \rho}{(1+\alpha^2)} \frac{1}{(kx)^2} C_1(k_F x \omega_D / \epsilon_F) [2\cos(2k_F x) - 1] \dots (46)$$

$F_0(r)$ เปลี่ยนค่าไปมาอย่างรวดเร็วในช่วงระยะทาง π/k_F และเปลี่ยนไม่มากนัก

ในระยะทางไกล ๆ จากสิ่งเจือปน ค่าเฉลี่ยของ $\cos(2k_F r) = 0$ เมื่อแทนค่า $F_0(x)$ และ
 $B(T_c)$ ลงในสมการที่ (45) แล้วอินทิเกรตหาผลลัพธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(r) &= - \frac{3}{14(1+\alpha^2)\zeta(3)(k_F \xi_0)^2} \left[\frac{\pi^2 e^\gamma \xi_0}{r} - \frac{\partial e^{2\gamma} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F)}{(k_F r \omega_D / \epsilon_F)} \right] \\ &= - \frac{3\pi^2 e^\gamma}{14(1+\alpha^2)\zeta(3)(k_F \xi_0)} \frac{1}{(k_F r)} + \frac{12e^{2\gamma}}{7(1+\alpha^2)\zeta(3)(k_F \xi_0)^2} \\ &\quad \frac{1}{(k_F r)} \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \end{aligned}$$

เมื่อ $T \leq T_c$ และ $r \gg \xi_0$... (47)

จากสมการนี้แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ของสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเสียดทานแบบแม่เหล็กที่ใกล้ ๆ จุดวิกฤติ และที่ระยะไกล ๆ จากสิ่งเสียดทาน เปลี่ยนแปรผกผันกับระยะทางจากสิ่งเสียดทาน หรือ $F(r) \propto \frac{1}{r}$ ซึ่งเห็นได้ชัดแจ้งในพจน์แรกของสมการที่ (47) และผลลัพธ์นี้สอดคล้องกับการคาดคะเนจากทฤษฎีของกินส์เบิร์ก-แลนเดา (Ginzburg-Landau. 1950 1064) สอดคล้องกับผลงานวิจัยของไฮนริช (Heinrich. 1968 . 451 - 463) ของชลอตต์แมน (Schlottmann. 1976 1 - 7) ของ ยอกสัน และซิมานเนค (Yoksan and Šimánek. 1978 . 4768 - 4779, 1978 874 - 875)

1.2 ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ ($T \ll T_c$ และ $r \gg \xi_0$)

ณ ที่อุณหภูมินี้ จากสมการที่ (42) เราได้ $A(T) = \lambda\rho$ สมการที่ (43) ได้

$$B(T) = \frac{\lambda\rho}{9} \text{ และผลทำให้ } \Omega = \frac{3}{\xi_0}$$

จากค่าของ $F_0(r)$ ที่ได้จากสมการที่ (39) เมื่อใส่สมการใหม่ในพจน์ของโกซายน์อินทิกรัลและ $\cos(2k_F r) = 0$ จะได้ว่า

$$F_0(r) = \frac{2\pi\lambda\rho}{\alpha} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 - \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)(k_F)^2} \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \quad \dots (48)$$

สำหรับพจน์ $\sin^2(k_F r)$ เมื่อหาค่าเฉลี่ยเชิงระยะทางแล้วมีค่าประมาณเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น $F_0(r)$ มีค่าประมาณเป็นว่า

$$F_0(r) \approx \frac{\pi\lambda\rho}{2\alpha(k_F r)^2} - \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)(k_F)^2} \text{Ci}(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \quad \dots (49)$$

หรือ

$$F_0(x) = \frac{\pi\lambda\rho}{2\alpha(k_F x)^2} - \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)(k_F)^2} \text{Ci}(k_F x \omega_D / \epsilon_F) \quad \dots (50)$$

โดยการแทนค่า $B(T)$, Ω และ $F_0(x)$ จากสมการที่ (50) ลงในสมการที่ (44)

จะได้ผลลัพธ์เป็นว่า

$$\begin{aligned}
F(r) &= \frac{3\eta}{4\xi_0\alpha k_F^2} \frac{1}{r} \int_0^\alpha \frac{dx}{x} \left\{ \exp\left[-\frac{3}{\xi_0}|r-x|\right] - \exp\left[-\frac{3}{\xi_0}|r+x|\right] \right\} \\
&\quad - \frac{3}{2\xi_0(1+\alpha^2)k_F^2} \frac{1}{r} \int_0^\alpha \frac{dx}{x} C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \left\{ \exp\left[-\frac{3}{\xi_0}|r-x|\right] - \exp\left[-\frac{3}{\xi_0}|r+x|\right] \right\} \\
&= \frac{3\eta}{4\xi_0\alpha k_F^2} \frac{1}{r} e^{-3r/\xi_0} \left[\int_0^r \frac{dx}{x} e^{3x/\xi_0} - \int_0^r \frac{dx}{x} e^{-3x/\xi_0} \right] \\
&\quad - \frac{3}{\xi_0(1+\alpha^2)k_F^2} \frac{1}{r} \left[e^{-3r/\xi_0} \int_0^r \frac{dx}{x} C_1(k_F r \omega_D / \xi_0) \sinh(3x/\xi_0) \right] \\
&= e^{-3r/\xi_0} \left[\frac{9\eta}{2\xi_0^2\alpha k_F^2} + \frac{9\eta}{4\xi_0^4\alpha k_F^2} r^2 + \frac{243}{400\xi_0^6\alpha k_F^2} r^4 + \dots \right] \\
&\quad - \frac{1}{(1+\alpha^2)} \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \frac{\sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F)}{(k_F r)^3}
\end{aligned}$$

เมื่อ r มีค่ามาก ๆ $e^{-3r/\xi_0} \approx 0$ จึงทำให้ $F(r)$ มีค่าเป็น

$$F(r) = - \frac{1}{(1+\alpha^2)} \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \frac{\sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F)}{(k_F r)^3}$$

$$\text{เมื่อ } T \ll T_c \text{ และ } r \gg \xi_0 \quad \dots (51)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ และที่ระยะทางไกลจากสิ่งเจือปนมาก ๆ เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว โดยที่แปรผกผันกับระยะทางจากสิ่งเจือปนยกกำลังสาม หรือ $F(r) \propto \frac{1}{r^3}$ ให้ผลสอดคล้องกับผลการวิจัยของชล็อตแมน (Schlottmann. 1976 . 1 - 7) อีกด้วย

2 ที่ระยะทางใกล้กับอะตอมของสิ่งเสียบน ($r \ll \xi_0$) ที่ทุก ๆ ค่าอุณหภูมิ

ในกรณีนี้ r มีค่าน้อย หรือ p มีค่ามาก ผลทำให้สมการที่ (40) เปลี่ยนแปลงเป็น

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_0(p) + \frac{\lambda \rho (k_F/\epsilon_F)^2 \sum_{n=0}^N (\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{p^2 + \lambda \rho (k_F/\epsilon_F)^2 \sum_{n=0}^N (\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \tilde{F}_0(p) \quad \dots (52)$$

เมื่อทำ Fourier transform ของสมการที่ย้อนกลับเพื่อหา $F(r)$ จะได้ว่า

$$F(r) = F_0(r) + \frac{\Omega}{2r} \int_0^\infty dx \, x F_0(x) \left\{ \exp[-\Omega |r-x|] - \exp[-\Omega |r+x|] \right\} \quad \dots (53)$$

$$\text{โดยที่ } \Omega^2 = \lambda \rho \left(\frac{k_F}{\epsilon_F} \right)^2 \sum_{n=0}^N (\Delta^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (54)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ Ω นี้จะเปลี่ยนแปลงที่อุณหภูมิต่าง ๆ เท่านั้น และค่าอย่างประมาณของ Ω^2 มีค่าเป็น $\lambda \rho (\omega_D/\epsilon_F) k_F^2$ ดังนั้น เมื่อ $\Omega \ll k_F$ แล้วสมการที่ (53) จะลดรูปเป็น

$$F(r) = F_0(r) + \Omega^2 \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r dx \, x^2 F_0(x) + \int_r^\infty dx \, x F_0(x) e^{-\Omega x} \right\} \quad \dots (55)$$

อย่างไรก็ดี สล๊อตแมน (Schlottmann. 1976 1 - 7) ได้แสดงไว้ในผลงานวิจัยของเขา และให้เหตุผลว่าการเปลี่ยนแปลงของออเดอร์ พารามิเตอร์ ในกรณีที่ระยะทางใกล้ ๆ กับสิ่งเสียบน ที่ทุก ๆ ค่าอุณหภูมิที่หาได้จากวิธี่ไมล์เชลล์ คอนซิลเตนท์ $F_0(r)$ กับวิธี่เชลล์ คอนซิลเตนท์ $F(r)$ มีผลใกล้เคียงกันมาก โดยที่ $F_0(r)$ ณ ที่อุณหภูมิใดก็ได้สามารถนำมาหา $F(r)$ ได้ทั้งสิ้น

$$F(r) \approx F_0(r) \quad \text{เมื่อ } r \ll \xi_0 \frac{\omega_D}{\epsilon_F} \quad \dots (56)$$

ด้วยเหตุผลทางการวิจัยของขลิอดแมนดังกล่าว ถ้าเราเลือก $F_0(r)$ จากสมการที่ (25) โดยการแทนพจน์สุดท้ายด้วยสมการที่ (27) เมื่อพิจารณาที่ระยะทางน้อย ๆ ($r \ll \xi_0$)

จะทำให้ตัวประกอบที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียลลดลงไปและได้ผลเป็น

$$\begin{aligned} F(r) = F_0(r) = & \frac{2\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left(\frac{\sin(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)} + \frac{2\lambda\rho}{1+\alpha^2} \left(\frac{\cos(k_F r)}{k_F r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \\ & + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left\{ \frac{[2\cos(2k_F r)-1]}{(k_F r)^2} C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) + \frac{\alpha(\xi_0 k_F)}{(k_F r)^3} \right. \\ & \left. \times \cos(2k_F r) \cos(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \right\} \end{aligned}$$

แต่ค่า α มีค่าน้อย จึงทำให้พจน์สุดท้าย มีค่าน้อยจนตัดทิ้งได้

$$F(r) \approx \frac{2\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{3\sin^2(k_F r) + \cos^2(k_F r)}{(k_F r)^2} \right] + \frac{\lambda\rho}{(1+\alpha^2)} \left[\frac{2\cos(2k_F r)-1}{(k_F r)^2} \right]$$

$$\times C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F)$$

$$\approx A(T) \left[\frac{2-\cos(2k_F r)}{(k_F r)^2} \right] + B \left[\frac{2\cos(2k_F r)-1}{(k_F r)^2} \right] C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F)$$

$$\text{เมื่อ } T \leq T_c, T \ll T_c, r \ll \xi_0 \frac{\omega_D}{\epsilon_F} \quad \dots (57)$$

เมื่อจัดรูปสมการนี้เสียใหม่เป็น $F(r) = [a + b \cos(2k_F r)]/r^2$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่แล้วจะเห็นว่า งานวิจัยนี้ให้ผลเหมือนกับผลการวิจัยของ ยุกส์ัน และซีมานิค (Yoksan and Sičanek. 1978 4768 - 4779, 1978 : 874 - 875) แต่ให้ผลแตกต่างจากการวิจัยของ ชลิตแมน (Schlottmann. 1976 . 1 - 7) ซึ่งเขาวิจัยได้ว่า

$$F(r) = A(T) \frac{\sin^2(k_F r)}{(k_F r)^2}$$

บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

บทย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้มีความมุ่งหมายที่จะศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ รอบ ๆ อะตอมของสิ่งเสียดแบบแม่เหล็กในสารตัวนำยิ่งยวด ที่ระยะทางต่าง ๆ จากสิ่งเสียด และที่ทุก ๆ อุณหภูมิ จากศูนย์องศาสัมบูรณ์ ถึงอุณหภูมิวิกฤต

วิธีดำเนินการวิจัย

ขบวนการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ เริ่มต้นโดยหาฟังก์ชันของกรีนของสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเสียด จากสมการของกอร์คอฟ แล้วใช้ ที-แมตริกซ์ ของควอนตัมสปินที่มีดลู่ระยะ ได้คำนวณไว้ ในขั้นแรกเราใช้วิธีการคำนวณโดยการกะประมาณ หลังจากนั้น จึงคำนวณโดยวิธีเซลล์ คอนซิลเตนท์

การวิเคราะห์ผล

นำเอาสมการที่ได้จากการคำนวณ มาวิเคราะห์หาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ ทั้งที่ระยะทางไกลจากสิ่งเสียด และใกล้กับสิ่งเสียด

สรุปผลการวิจัย

ในการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอรั พารามิเตอร์ของสารตัวนำยิ่งยวด ที่บริเวณรอบ ๆ สิ่งเสียดแบบแม่เหล็ก เมื่อใช้ ที-แมตริกซ์ของการกระเจิง (scattering t-matrix) โดย ควอนตัม สปิน (quantum spin) ซึ่งคำนวณโดยมัตสึอุระ (Matsuura. 1973 : 713) และฟังก์ชันของกรีน ซึ่งได้จากการคำนวณของ กิ้นส์เบิร์ก-แลนเดา (Ginzburg-Landau. 1950 : 1064) และ กอร์คอฟ (Gor'kov. 1959 : 1918) โดยวิธีเซลล์ คอนซิลเตนท์ ได้ผลต่าง ๆ ดังนี้

การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของอะตอม พารามิเตอร์ $\Delta(r)$

1. ที่ระยะทางไกลจากสิ่งเสียบน ($r \gg \xi_0$)

1.1 ที่อุณหภูมิใกล้ ๆ กับอุณหภูมิวิกฤต ($T \leq T_c$ และ $r \gg \xi_0$) ได้ผลว่า

การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของอะตอม พารามิเตอร์แปรผกผันกับระยะทางจากสิ่งเสียบน หรือ $\Delta(r) \propto \frac{1}{r}$

$$F(r) = 1 - \frac{\Delta(r)}{\Delta} = - \frac{3\pi e^{\gamma}}{14(1+\alpha^2)\zeta(3)(k_F \xi_0)} \frac{1}{(k_F r)} \quad \dots (47)$$

1.2 ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตมาก ๆ ($T < T_c$ และ $r \gg \xi_0$) ได้ผลว่า

การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของอะตอม พารามิเตอร์แปรผกผันกับระยะทางจากสิ่งเสียบน ยกกำลังสาม หรือ $\Delta(r) \propto \frac{1}{r^3} \sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F)$

$$F(r) = 1 - \frac{\Delta(r)}{\Delta} = - \frac{1}{(1+\alpha^2)} \frac{\epsilon_F}{\omega_D} \frac{\sin(k_F r \omega_D / \epsilon_F)}{(k_F r)^3} \quad \dots (51)$$

2. ที่ระยะทางใกล้ ๆ กับสิ่งเสียบน

ที่ทุก ๆ อุณหภูมิได้ผลว่า การเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของอะตอม พารามิเตอร์ อยู่ในรูปของ $[a + b \cos(2k_F r)] / r^2$

$$\begin{aligned} F(r) &= 1 - \frac{\Delta(r)}{\Delta} \\ &= A(T) \left[\frac{2 - \cos(2k_F r)}{(k_F r)^2} \right] + B \left[\frac{2 \cos(2k_F r) - 1}{(k_F r)^2} \right] C_1(k_F r \omega_D / \epsilon_F) \end{aligned} \quad \dots (57)$$

อภิปรายผลการวิจัย

ในการหาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออเดอร์ พารามิเตอร์ที่อุณหภูมิต่าง ๆ ของสารตัวนำยิ่งยวดที่มีสิ่งเจือปนแบบแม่เหล็กเชิงอะตอมเดี่ยว โดยไอวีรี เชลฟ์ คอนซิลเตนท์ ที่ระยะใกล้ ๆ กับสิ่งเจือปน และไกลจากสิ่งเจือปนมากกว่าระยะอาพันธ์ โดยไอที-แมตริกซ์ของการกระเจิงโดยควอนตัม สปิน ของมัดคู่ประ เมื่อเปรียบเทียบกับการวิจัยโดยไอที-แมตริกซ์ของการกระเจิงโดยสปินแบบเก่าของ ชิบา (Shiba. 1968 . 435) ที่วิจัยโดยชล็อตแมน (Schlottmann. 1976 . 1 - 7) ให้ผลสอดคล้องกันมากในบางกรณี กล่าวคือ ในกรณี ที่ระยะทางไกลจากสิ่งเจือปนมาก ณ จุดอุณหภูมิใกล้จุดอุณหภูมิวิกฤตได้ผลสอดคล้องกันว่า $\Delta(r) \propto \frac{1}{r}$ และ ณ จุดอุณหภูมิต่ำกว่าจุดอุณหภูมิวิกฤตได้ผลสอดคล้องกันว่า $\Delta(r) \propto \frac{\sin(k_F r w_D / \epsilon_F)}{r^3}$ แต่ในกรณีที่ระยะทางใกล้ ๆ กับสิ่งเจือปน ณ ที่ทุกอุณหภูมิ ผลที่ได้แตกต่างกัน โดยที่ผลการวิจัยฉบับนี้ ให้ผลว่า $\Delta(r)$ มีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ เป็นฟังก์ชันของ $[a + b \cos(2k_F r)] / r^2$ และผลการวิจัยของชล็อตแมน ได้ผลว่า $\Delta(r)$ มีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ เป็นฟังก์ชันของ $\sin^2(k_F r) / r^2$ แต่อย่างไรก็ดี ผลการวิจัยในกรณีนี้ ทั้งวิจัยฉบับนี้ และของ ชล็อตแมน แสดงผลเหมือนกันอยู่ส่วนหนึ่ง คือ $\Delta(r)$ มีค่าลดลง เป็นฟังก์ชันของ $\frac{1}{r^2}$ อนึ่ง ในกรณีนี้ผลการวิจัยฉบับนี้ยังสอดคล้องกับผลงานวิจัยของ ยอกสัน และชิมานะเนค (Yoksan and Šimánek. 1978 . 4768 - 4779, 1978 874 - 875) อีกด้วย

สำหรับการเปลี่ยนแปลงของ $\Delta(r)$ ในกรณีที่ระยะทางไกล ๆ จากสิ่งเจือปน และที่อุณหภูมิใกล้ ๆ จุดอุณหภูมิวิกฤต ผลงานวิจัยฉบับนี้ยังให้ผลสอดคล้องกับผลการวิจัยของ ไฮน์ริช (Heinrich. 1968 451 - 463) คิตะมูระ (Kitamura. 1970 271 - 285) โซดา (Soda. 1970 . 580 - 589) และของ ยอกสัน และชิมานะเนค (Yoksan and Šimánek. 1978 4768 - 4779, 1978 874 - 875) กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงของ $\Delta(r)$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\frac{1}{r}$

ข้อเสนอแนะในการวิจัย

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้ ผลการวิเคราะห์ผลการศึกษาที่ได้จากการคำนวณไม่สามารถสรุปผลบางประการได้ ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่าควรจะทำการศึกษาต่อไปได้อีกในเรื่องต่อไปนี้ คือ

1. ศึกษาการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออดอร์ พารามิเตอร์ ของสารตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสิ่งเสียบที่เป็นแม่เหล็กหลาย ๆ อะตอม
2. ศึกษาผลการเปลี่ยนแปลงเชิงระยะทางของออดอร์ พารามิเตอร์ ของสารตัวนำยิ่งยวด ต่อการสันตามปกติของนิวเคลียสของสิ่งเสียบ ทั้งที่เป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Abrikosov, A.A. and L.P. Gor'kov. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 39 · 1781, 1960.
- Anderson, P.W. "Localized Magnetic States in Metals," Physical Review. 124 41 - 53, October, 1961.
- Bardeen, J. Physical Review. 79 167, 1950, 80 · 567, 1950, 81 · 829, 1950.
- Bardeen, J. and others. Physical Review. 187 556, 1969.
- Bardeen, J. and D. Pines. Physical Review. 99 1140, 1955.
- Bardeen, J., L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer. Physical Review. 108 1175, 1957.
- Becker, R., G. Heller and F. Sauter. Z. Physik. 85 · 772, 1933.
- Blakemore, J.S. Solid state Physics. Philadelphia, W.B. Saunders, 1960. 391 p
- Cooper, L.N. Physical Review. 104 · 1189, 1956.
- Decker, D. Physical Review. 112 1888, 1958.
- Frohlich, J. Physical Review. 79 845, 1950.
- Glauber, I. and K. Megerle. Physical Review. 122 . 1101, 1961.
- Ginzburg, V.L. and L.D. Landau. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 20 1064, 1950.
- Gor'kov, L.P. Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 36 : 1918, 1959.
- Gorter, G.J. and H.B.G. Casimir. Z. Physik. Z. 35 · 963, 1934, Z. Tech. Phys. 15 : 539, 1934.
- Heinrichs, Jean. "Spatial Variations of the Order Parameter in Superconductors Containing Magnetic Impurities," Physical Review. 168 451 - 463, April, 1968.
- Kitamura, Toyoyuki. "Spatial Variations of the Order parameter in Superconductors Containing a Magnetic Impurities," Progress of Theoretical Physics. 43 · 271 - 285, February, 1970.
- Kondo, J. Progress of Theoretical Physics. Kyoto, 32 . 37, 1964.

- Kummel, R. Physic 1 Review. 3 · 6 2617, 1972.
- Kuroda, Y. Progress of Theoretical Physics. 46 688, 1971.
- London, F. Superfluids. New York, Willey, 1 · 10 - 235, 1950.
- London, F. and H. Proc. Roy. Soc. A 149 · 71, London, 1935.
- Ludwig, A. and M.J. Zuckermann. J. Phys. F 1 . 516, 1971.
- Matsuura, T. Progress of Theoretical Physics. 57 713, 1973.
- Matthias, B.T. and others. Physical Review. 115 . 1597, 1959.
- _____. Physical Review. 5 542, 1960.
- Maxwell, E. Physical Review. 78 477, 1950.
- Meissner, W. and R. Ochsenfeld. Naturwissenschaften. 21 : 787, 1933.
- Muller-Hartmann, E. and J. Zittartz. Physical Review. 26 . 428, 1971.
- Onnes, Kamerlingh H. Comm. Phys. Lab. Leiden. 119 . 1206-1226, 1911.
- Pippard, A.B. Proc. Roy. Soc. A 216 574, London, 1953.
- Reynolds, C.A. and others. Physical Review. 78 487, 1950.
- Schlottmann, P. Solid State Commun. 16 . 1297, 1975.
- _____. "Spatial Variations of the Order Parameter in Superconductors Containing a Magnetic Impurity," Physical Review. B.13 1 - 7, January, 1976.
- Schrieffer, J.R. Theory of Superconductivity. New York, Benjamin, 1965. 250 p.
- Shiba, H. Progress of Theoretical Physics. 40 435, 1968.
- Slater, J.C. and A.D.E. Wood. Physical Review. 117 744, 1960.
- Soda, Toshio. "Spatial Dependence of a Superconductive Order Parameter with Kondo Effect," Progress of Theoretical Physics. 44 . 580 - 589, September, 1970.
- Takano, F. and S. Matayoshi. Progress of Theoretical Physics. 41 : 45, 1969.

Tsuzuki, Toshio and Tsuneto Toshihiko. "Spatial Variation of the Order Parameter in the Vicinity of a Paramagnetic Impurity," Progress of Theoretical Physics. 37 1 - 12, January, 1967.

Yoksan, S. and Šimánek. "Spatial Variations of Order Parameter near Anderson Impurity in Superconductors," Journal de Physique. 39 874 - 875, August, 1978.

_____. "Spatial Variations of Order Parameter Near Anderson Impurity with High Kondo Temperature for $T = T_c$," Physical Review. B.18 4768 - 4779, November, 1978.

Zittartz, J. and E. Muller-Hartmann. Z. Phys. 212 · 380, 1968.

Zuckermann, M.J. Physical Review. 168 · 390, 1968.

ภาคผนวก

การหา ที-แมตริกซ์

ในการศึกษาเกี่ยวกับอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและ ดี-อีเลกตรอน เมื่อมีอะตอมของสิ่งเสียนอยู่ในโลหะเจ้าบ้าน มัตสึยูระ (Matsuuura. 1973 : 713) ได้คำนวณหา ที-แมตริกซ์ โดยพิจารณาถึงผลคอนโดด้วย แอมิลโทเนียนของระบบนี้ คือ

$$H = H_{BCS} + H_d + H_{sd}$$

ในที่นี้ H_{BCS} คือ แอมิลโทเนียนในทฤษฎี บี ซี เอลส์ ซึ่งอธิบายสภาวะของอีเลกตรอนที่สัมพันธ์ด้วยแรงดึงดูด

$$H_{BCS} = \sum_k \epsilon_k a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} - \sum (\Delta a_{k\uparrow}^+ a_{-k\downarrow}^+ + \text{h.c.})$$

H_d คือ แอมิลโทเนียนของ ดี-อีเลกตรอนที่อยู่ในอะตอมของสิ่งเสียน

$$H_d = \sum_{1\sigma} E_d^0 a_{d1\sigma}^+ a_{d1\sigma} + U \sum_1 n_{d1\uparrow} n_{d1\downarrow}$$

H_{sd} คือ แอมิลโทเนียนที่เกิดจากอันตรกิริยาชนกันระหว่างอิเล็กตรอนและ ดี-อีเลกตรอน

$$H_{sd} = \sum_{1k\sigma} (V e^{ikR_1} a_{k\sigma}^+ a_{d1\sigma} + \text{h.c.})$$

เมื่อใช้ทฤษฎีของฮาร์ทรี-ฟอค พจน์ที่สองของ H_d จะกระจายได้เป็น

$$\begin{aligned} U n_{d1\uparrow} n_{d1\downarrow} &= U \langle n_{d1\uparrow} \rangle n_{d1\downarrow} + U \langle n_{d1\downarrow} \rangle n_{d1\uparrow} \\ &\quad + U \langle a_{d1\uparrow}^+ a_{d1\downarrow}^+ \rangle a_{d1\downarrow} a_{d1\uparrow} \\ &\quad + U \langle a_{d1\downarrow}^+ a_{d1\uparrow}^+ \rangle a_{d1\downarrow}^+ a_{d1\uparrow}^+ \end{aligned}$$

ปรากฏการณ์ตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นเพราะอิเล็กตรอน จับคู่กันเท่านั้น ดังนั้น การคำนวณนี้ จะไม่คำนึงถึงการจับคู่ของ ดี-อีเลกตรอนเลย ฟังก์ชันของกรีนของ เอล-อีเลกตรอน และ ดี-อีเลกตรอน เขียนได้ดังนี้

$$G^{-1}(k, \omega) = i\omega I - \epsilon_1 T_3 - \Delta T_1 - \Sigma_S(\omega) \quad \dots (1)$$

$$G_d^{-1}(\omega) = i\omega I - \Sigma_d(\omega) \quad \dots (2)$$

โดยที่ $\Sigma_S(\omega)$ และ $\Sigma_d(\omega)$ คือ พลังงานในตนเองของ เอล และ ดี-อีเลกตรอน ตามลำดับ ถ้าเราคำนวณหาฟังก์ชันของกรีนของ เอล-อีเลกตรอน เมื่อคิดพลังงานในตนเองด้วย เราจะได้

$$\tilde{G}^{-1}(k, \omega) = (i\tilde{\omega} I - \epsilon_k T_3 - \tilde{\Delta} T_1) \quad \dots (3)$$

$$\text{หรือ } \tilde{G}(k, \omega) = - \frac{1}{(\tilde{\omega}^2 + \epsilon_k^2 + \tilde{\Delta}^2)} \begin{pmatrix} i\tilde{\omega} + \epsilon_k & \tilde{\Delta} \\ \tilde{\Delta} & i\tilde{\omega} - \epsilon_k \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_k \tilde{G}(k, \omega) = \rho N \int \tilde{G}(k, \omega) d\epsilon_k$$

โดยที่ ρN คือ ความหนาแน่นของสถานะของเอล-อีเลกตรอน ที่ระดับพลังงานเฟอร์มี และถ้าเรากำหนดให้ $u = \tilde{\omega}/\tilde{\Delta}$ เราจะได้ผลลัพธ์ว่า

$$\Sigma_k \tilde{G}(k, \omega) = - \frac{\rho N}{(u^2 + 1)^{3/2}} (iuI + T_1) = \tilde{G}(\omega) \quad \dots (4)$$

จากการคำนวณพลังงานในตนเองของ เอล-อีเลกตรอน มัตสึอูระ (Matsuura, 1973 : 713) ได้แสดงวิธีคำนวณไว้ ได้ผลลัพธ์ว่า

$$\Sigma_S(\omega) = N_1 \left(\frac{\tilde{J}(\omega)}{2N} \right)^2 s(s+1) \Sigma_k \tilde{G}(k, \omega)$$

โดยที่ N_1 คือ จำนวนอะตอมของสิ่งเสียดทาน
 N คือ จำนวนอะตอมของโลหะเจ้าบ้าน
 $\tilde{J}(\omega)$ คือ ค่าคงที่ในการจับคู่ (normalized coupling constant)
 ระหว่าง เอล-อีเลกตรอน กับ ดี-อีเลกตรอน
 s คือ สปินควอนตัมของ เอล-อีเลกตรอน

เมื่อใช้ $\tilde{G}(\kappa, \omega)$ จากสมการที่ (3) และกำหนดให้เวลาของการชนกันที่ทำให้เกิดการหันกลับของสปิน (spin-flip scattering part) = $\frac{1}{T_s}$ เราจะได้

$$\frac{1}{T_s} = N_1 \rho \tilde{J}^2(\omega) s(s+1) \quad \dots (5)$$

จะทำให้ได้ผลลัพธ์ว่า

$$\Sigma_s(\omega) = -\frac{1}{2T_s} \left(\frac{1uI+T_1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad \dots (6)$$

ในการหาฟังก์ชันกรีนของ ดี-อีเลกตรอน มัตสึบะ คำนวณได้ว่าพลังงานในตนเองของ ดี-อีเลกตรอน ซึ่งเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างกัน มีค่าเป็น

$$\Sigma_d(\omega) = v^2 T_3 \tilde{G}(\omega) T_3 + \Sigma'_d(\omega) \quad \dots (7)$$

โดยที่ V คือ ศักย์อันตรกิริยาระหว่าง ดี-อีเลกตรอน กับ เอล-อีเลกตรอน

$\Sigma'_d(\omega)$ คือ พลังงานในตนเองของ ดี-อีเลกตรอน ที่เกิดจากอันตรกิริยาทางดูลอมบ์ระหว่างกัน มีความสัมพันธ์กับค่าความซึมได้ของอำนาจแม่เหล็ก (susceptibility, $\chi_{\uparrow\uparrow}$) ของ ดี-อีเลกตรอนเอง และ

$$\Sigma'_d(\omega) = -[1uI(\tilde{\chi}_{\uparrow\uparrow}-1) + \Delta_d T_1] \quad \dots (8)$$

จากสมการที่ (4), (7) และ (8) เมื่อแทนลงในสมการ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} G_d^{-1}(\omega) &= \omega I - [V^2 T_3 \tilde{G}(\omega) T_3 - \omega I(\tilde{\chi}_{++}-1) - \Delta_d T_1] \\ &= \omega I + V^2 T_3 \mathcal{N}p \frac{(1uI+T_2)}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} T_3 + \omega I(\tilde{\chi}_{++}-1) + \Delta_d T_2 \quad \dots (9) \end{aligned}$$

แต่ความไวต่ออำนาจแม่เหล็ก เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T)

$$\tilde{\chi}_{++} = \frac{\mathcal{N}T}{4T_k}$$

โดยที่ T_k คือ อุณหภูมิคอนโด

ถ้ากำหนดให้ $\Gamma = \mathcal{N}pV^2$ และ $\tilde{\omega} = \frac{\omega \mathcal{N}T}{4\Gamma T_k}$ เราจะได้

$$G_d^{-1}(\omega) = \Gamma \left[\omega I + \frac{1uI}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta_d}{\Gamma} \right) T_1 \right] \quad \dots (10)$$

หรือ

$$\begin{aligned} G_d(\omega) &= - \frac{1}{\Gamma \left\{ \left[\tilde{\omega} + \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 + \left[\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta_d}{\Gamma} \right]^2 \right\}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1\tilde{\omega} + \frac{1u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} & \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta_d}{\Gamma} \\ \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta_d}{\Gamma} & 1\tilde{\omega} + \frac{1u}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \quad \dots (11) \end{aligned}$$

เมื่อสิ่งเลอบนมีความเข้มข้นสูง อันตรกิริยาระหว่าง เอล และ ดี-อีเลกตรอน จะทำให้ พลังงานของ เอล และ ดี-อีเลกตรอนเปลี่ยนไป นั่นคือค่า ω และ Δ จะต้องมีการเปลี่ยน

(normalized) แต่เมื่อความเข้มข้นของสิ่งเจือปนน้อย ดังเช่นในกรณีที่กำลังศึกษาอยู่ ซึ่งสิ่งเจือปนมีเพียงอะตอมเดียว ค่า ω และ Δ ถือว่าคงที่

$$u = \frac{\omega}{\Delta}$$

เมื่อใช้วิธี analytic continuation เปลี่ยนค่าความถี่จินตภาพให้เป็นความจริง โดยให้ $i\omega \rightarrow \omega$

$$\text{และกำหนดให้ } \alpha = \frac{\Delta_d}{\Gamma} = \frac{\frac{1}{4}\Delta}{\frac{1}{4}T_k} \ln \left(\frac{4T_k e}{\frac{1}{4}\Delta} \right)$$

เราได้

$$\begin{aligned} G_d(\omega) &= \frac{1}{\Gamma} \left[\omega I + \frac{\omega I}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\Delta}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right) T_1 \right]^{-1} \\ &= \frac{\left[\omega + \frac{\omega}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right] I + \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] T_1}{\Gamma \left[\omega - \alpha + \left(\frac{\Delta + \omega}{\Delta - \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\omega + \alpha - \left(\frac{\Delta - \omega}{\Delta + \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad \dots (12) \end{aligned}$$

ณ ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ω มีค่าน้อย

$$G_d(\omega) = \frac{1}{\Gamma} \frac{\left[-\frac{\omega}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right] I - \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] T_1}{\left[\left(\frac{\Delta - \omega}{\Delta + \omega} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \left[\left(\frac{\Delta + \omega}{\Delta - \omega} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right]} \quad \dots (13)$$

ดังนั้น ท-แมตริกซ์ ของการชนกันของอิเล็กตรอน มีค่าเป็น

$$t(\omega) = V T_3 G_d(\omega) T_3 V \quad \dots (14)$$

เมื่อแทนค่า $G_d(\omega)$ จากสมการที่ (13) และค่า Γ ลงในสมการนี้จะได้ผลลัพธ์ว่า

$$t(\omega) = \frac{1}{i\rho} \frac{\left[-\frac{\omega}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} \right] I + \left[\frac{\Delta}{(\Delta^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} - \alpha \right] T_1}{\left[\left(\frac{\Delta - \omega}{\Delta + \omega} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right] \left[\left(\frac{\Delta + \omega}{\Delta - \omega} \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \right]} \quad \dots (15)$$

การคำนวณหาค่า I

จาก I ที่กำหนดไว้ในสมการที่ (35.1)

$$I = \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{(\cosh \phi - b)}$$

$$\frac{dI}{da} = - \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi] (\cosh \phi - b + b)}{(\cosh \phi - b)}$$

$$= - \int_0^\alpha d\phi \exp[-a \cosh \phi] - b \int_0^\alpha \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{(\cosh \phi - b)}$$

$$\frac{dI}{da} + bI = -K_0(a)$$

อินทิเกรต โดยใช้ integrating factor = e^{ab} ได้ว่า

$$I = Ae^{-ab} - e^{-ab} \int K_0(a) e^{bx} dx \quad \text{โดยที่ } A \text{ เป็นค่าคงที่}$$

จากตาราง ทราบว่า

$$\int_0^\alpha \cosh ax K_\nu(bx) dx = \frac{\pi \cos[\nu \sin^{-1}(a/b)]}{2(b-a)^{\frac{1}{2}} \cos(\nu\pi/2)}$$

และ

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha x} K_\nu(\beta x) dx = \frac{\pi \sin \nu \theta}{\beta \sin \nu \pi \sin \theta} \quad \text{โดยที่ } \cos \theta = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha/\beta} K_0(y) \frac{dy}{\beta} = \frac{\theta}{\sin \theta}$$

หรือ

$$\int_0^{\infty} e^{by} K_0(y) dy = \frac{\theta}{\sin \theta} \quad \text{โดยที่ } \cos \theta = -b$$

$$= \frac{\cos^{-1}(-b)}{(1-b^2)^{3/2}} = \frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b^2)^{3/2}}$$

$$I(a,b) = A e^{-ab} - e^{-ab} \left[\frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b^2)^{3/2}} \right]$$

$$I(0,0) = A - \frac{\pi}{2}$$

$$A = I(0,0) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d\phi}{\cosh \phi} + \frac{\pi}{2}$$

$$I(a,b) = e^{-ab} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\phi}{\cosh \phi} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b)^{3/2}} \right]$$

$$I = e^{-ab} \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b)^{3/2}} \right]$$

$$\text{แต่ } \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ดังนั้น เมื่อ $b = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ ซึ่งมีค่าน้อย และ $a = \frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F}$ จะได้ว่า

$$I = e^{-ab} \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = \pi e^{-ab}$$

$$= \pi \exp \left[-\frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} \cdot \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \right) \right]$$

การคำนวณหาค่า J

จาก J ที่กำหนดไว้ในสมการที่ (35.2)

$$J = \int_0^{\infty} \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{\cosh \phi (\cosh \phi - b)}$$

$$\frac{dJ}{da} = - \int_0^{\infty} \frac{d\phi \exp[-a \cosh \phi]}{(\cosh \phi - b)} = -I$$

$$J = - \int_0^{\infty} I da + B \quad \text{โดยที่ } B \text{ เป็นค่าคงที่}$$

แทนค่า I และอินทิเกรต

$$J = \frac{1}{b} \left[-\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b^2)^{1/2}} \right] + B$$

$$J(\infty) = 0$$

$$B = 0$$

$$J = \frac{1}{b} \left[-\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi - \cos^{-1} b}{(1-b^2)^{1/2}} \right]$$

$$\text{แต่ } \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\text{ดังนั้น เมื่อ } b = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \text{ ซึ่งมีค่าน้อย และ } a = \frac{k_F r \Delta}{\epsilon_F} \text{ จะได้ว่า}$$

$$J = \frac{1}{b} \left[-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{b}$$

$$= -\frac{\pi(1+\alpha^2)}{2\alpha}$$