

511.8

พ. 516.11

9.8

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญานิพนธ์

ของ

ชานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

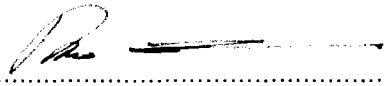
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2542

ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

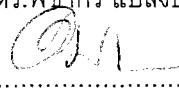
คณะกรรมการควบคุม

 ประธาน

(รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ)

 กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค)

 กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิตวงศ์)

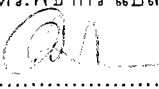
คณะกรรมการสอบ

 ประธาน

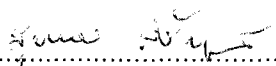
(รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ)

 กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แปลงประสพโชค)

 กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิตวงศ์)

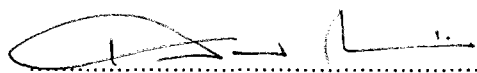
 กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภาพร ศรีบุรินทร์)

กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปันนัม)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

 คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)

วันที่ เดือน พ.ศ. 2542

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจาก
รองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ รองศาสตราจารย์ ดร.พิชากร แผลงประสพโชค และ
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิตติวงศ์ โดยกรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ ที่มีประโยชน์ต่อการ
วิจัยตลอดจนตรวจแก้ ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอกราบ
ขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นวรรตน์ อดิษฐ์ชื่น และอาจารย์บัณฑิตย์ อันยงค์
ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจแก้เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปิ่นนิม และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภาพร
ศรีบุรินทร์ ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการ และคณะครูหมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมสาธิต สถาบัน
ราชภัฏสวนสุนันทา ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือ และเก็บรวบรวม
ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ โกลและแม่ อย่างสุดซึ้งที่ได้ให้กำลังใจ และกำลังใจทรัพย์ สนับสนุน
การศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด จนกระทั่งทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ชานินทร์ ลิขิตวิรัชธรรม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย.....	4
ขอบเขตของการวิจัย.....	4
คำนิยามศัพท์เฉพาะ.....	4
สมมุติฐานของการวิจัย.....	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
โครงการคณิตศาสตร์ศึกษา เพื่อพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์	
ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา.....	6
ประวัติความเป็นมาของทฤษฎีกราฟ.....	7
มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ เกรด 9-12 และเนื้อหา	
วิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา.....	8
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน	
ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น.....	10
โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น	
พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533).....	11
ขอบเขตเนื้อหาของทฤษฎีกราฟเบื้องต้น และบทประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ.....	13
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	16
กลุ่มตัวอย่าง.....	16
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	16
วิธีดำเนินการวิจัย.....	17
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	18
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	18
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	19
ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน	
ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	
ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	19

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	23
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	23
ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจาก การทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม.....	24
ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	25
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	26
สังเขปความมุ่งหมาย สมมุติฐาน วิธีการดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ผลข้อมูล.....	26
สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	27
อภิปรายผล.....	28
ข้อเสนอแนะ.....	29
บรรณานุกรม.....	30
ภาคผนวก.....	33
ภาคผนวก ก. การวิเคราะห์ผลข้อมูล.....	34
ภาคผนวก ข. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น และ แบบทดสอบอัตนัย.....	39
ภาคผนวก ค. บทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	50
ภาคผนวก ง. แผนการสอนรายคาบ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	104
ภาคผนวก จ. รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	120
ประวัติวิทยุวิจัย.....	122

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม.....	20
2	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	23
3	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนน จากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	24
4	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจาก การทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม.....	24
5	ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	25
6	ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น.....	35
7	การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	36
8	การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (คะแนนเต็ม 15 คะแนน).....	37

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้เจริญก้าวหน้าไปอย่างรวดเร็ว จะเห็นได้ว่ามีสิ่งประดิษฐ์ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต่างๆ มากมายซึ่งสิ่งเหล่านี้ได้ช่วยอำนวยความสะดวกและเพิ่มประสิทธิภาพให้แก่มนุษย์ ทำให้คุณภาพของมนุษย์ได้รับการพัฒนา และยกระดับสูงขึ้น วิชาคณิตศาสตร์เป็นเครื่องนำทางไปสู่ความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ ทั้งนี้เนื่องจากความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ต้องอาศัยหลักการใหม่ๆ ทางคณิตศาสตร์ อย่างขาดไม่ได้ (กรมวิชาการ. 2509 : 41) ด้วยเหตุนี้นานาประเทศจึงเล็งเห็นความสำคัญในการที่จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มนการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษา เพื่อให้สอดคล้องและทันกับความต้องการของโลกปัจจุบัน

Stone ได้กล่าวถึงความจำเป็นในการที่จะต้องปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ในชั้นมัธยมศึกษาว่ามีสาเหตุสำคัญอยู่ 2 ประการ คือ

1. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในปัจจุบันได้ขยายออกไปอย่างกว้างขวาง
2. ความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ และศาสตร์สาขาอื่นๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้ทาง

คณิตศาสตร์มากกว่าแต่ก่อน (ชวลิต เอี่ยมเจริญ. 2519 : 2 ; อ้างอิงมาจาก Stone. n.d.)

อีกทั้ง ออร์ศรี ปุราคำ ได้กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ ได้เริ่มในระดับอุดมศึกษาก่อนมีการเพิ่มรายวิชาใหม่ๆ และเน้นทางทฤษฎีมากขึ้น ผู้สอนคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัย ไม่พึงพอใจในพื้นฐานที่นักเรียนได้รับมาในระดับมัธยมศึกษา เพราะสอดคล้องกับหลักสูตรในระดับอุดมศึกษาไม่ติด ดังนั้น นักการศึกษาจึงเริ่มยื่นมือเข้าช่วยในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา (ออร์ศรี ปุราคำ. 2527 : 15) ในปัจจุบัน อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ในมหาวิทยาลัยของรัฐบาล มีความพอใจค่อนข้างมากในการจัดโครงสร้างของหลักสูตรเพื่อตอบสนองต่อการศึกษาระดับอุดมศึกษา (กรมวิชาการ. 2539 : 122-124) แต่แนวโน้มของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยังคงดำเนินไป กล่าวคือ มีการเพิ่มสาระเดิม และเพิ่มเนื้อหาใหม่ เนื่องจากมีการค้นพบหรือวิจัยพบปัญหาใหม่ ที่นำมาออกเป็นโจทย์ในโอลิมปิกวิชาการ ทำให้นักเรียนต้องขวนขวายเรียนรู้เพิ่มมากขึ้น ดังนั้นในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ยังมีการพิจารณานำเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา ลงมาสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยปรับปรุงให้เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน

คณิตศาสตร์ดิสครีต เป็นรากฐานเชิงทฤษฎีสำหรับงานขั้นสูงในคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์เชิงทฤษฎี (วนิดา เหมะกุล. 2535 : 4) และเทคโนโลยีที่ก้าวหน้าของโลกปัจจุบันอันประกอบด้วย computer hardware หรือ software สมัยใหม่ ระบบสื่อสาร การประมวลผล สัญญาณเชิงตัวเลข ทฤษฎีสารสนเทศ ระบบควบคุม (Control System) วิจัยการดำเนินการ (Operations Research) เป็นต้น ด้วยเหตุนี้ทำให้ในปัจจุบันคนจึงมีความสนใจในคณิตศาสตร์ดิสครีตเป็นอย่างมาก

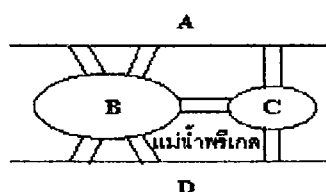
ทฤษฎีกราฟ มีบทบาทในคณิตศาสตร์ดิสครีต อีกทั้งยังเป็นวิชาหนึ่งในคณิตศาสตร์ ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆได้มากมาย เช่น สาขาวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ สาขาวิศวกรรมศาสตร์

รวมทั้งสาขาทางด้านสังคมศาสตร์ เช่น จิตวิทยา และสังคมวิทยา ทั้งนี้เพราะว่าปัญหาต่างๆ ที่เกิดขึ้นจะสามารถจัดให้อยู่ในรูปของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการจัดการของ คน วัตถุสิ่งของ และความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านั้น ดังนั้น ปัญหาเหล่านี้จะสามารถนำเอากฎไปใช้ในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

(Mathematical Model) เราพบว่า กราฟมีโครงสร้างง่ายๆ ซึ่งประกอบด้วย จุด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด จึงทำให้การนำเอากฎไปใช้ในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นไปได้โดยง่าย ตัวอย่างหนึ่งที่เห็นได้ชัดเจน คือ ข่ายงานการสื่อสาร (Communication Network) ซึ่งประกอบไปด้วย ศูนย์การสื่อสาร และเครือข่ายการติดต่อระหว่างศูนย์ ในการจำลองตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เรานำกราฟไปใช้โดยให้ จุด แทน ศูนย์การสื่อสาร และเส้น แทน เครือข่ายการติดต่อระหว่างศูนย์ (นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2539 : 1) เหตุผลอีกข้อหนึ่งที่ทำให้มีคนสนใจในทฤษฎีกราฟมากในปัจจุบันคือ ในด้านการประยุกต์ กราฟยังมีบทบาทเชื่อมโยงกับ เมตริกซ์ ทฤษฎีเกม ทฤษฎีกลุ่ม เซต ตรรกวิทยา พีชคณิตบูลเลียน ปริภูมิเวกเตอร์ ทฤษฎีความน่าจะเป็น ทฤษฎีภาษาทางด้านคอมพิวเตอร์ บริหารธุรกิจ จะเห็นได้ว่าทฤษฎีกราฟนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งเรื่องที่เกี่ยวข้องกับค่าลำดับชั้น ค่าสูงสุด-ต่ำสุด และข่ายงาน (คาบุญ. 2535 : 21)

อีกทั้งชีวิตความเป็นอยู่ของคนเราหรืออาชีพบางอาชีพ สามารถใช้ประโยชน์จากทฤษฎีกราฟได้ โดยจะยกตัวอย่างแนวคิดที่ได้จากปัญหาที่ใช้ประโยชน์จากทฤษฎีกราฟช่วยในการตัดสินใจได้ ดังนี้

ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก



เกาะ 2 เกาะ อยู่กลางแม่น้ำพริเกล ในเมืองเคอนิกส์เบิร์ก (ปัจจุบัน คือเมืองเลนินกราดในสหภาพโซเวียต) เชื่อมด้วยสะพานติดต่อกัน และมีสะพานเข้าฝั่งแม่น้ำด้วย รวมทั้งหมด 7 สะพาน ดังรูป

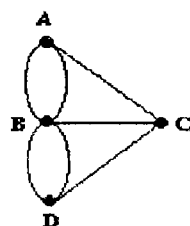
ปัญหาคือ เริ่มเดินที่จุดใดก็ได้ (A,B,C,D) จะสามารถเดินข้ามสะพานได้ครบทุกสะพาน และแต่ละสะพานเดินผ่านได้ครั้งเดียวแล้วเดินกลับมาที่จุดเดิมได้หรือไม่

ถ้ามีทางเดินดังกล่าว เราจะเรียกทางเดินนั้นว่า วงออยเลอร์เรียน (Eulerian Circuit)

เราสามารถแปลงสถานการณ์นี้เป็น กราฟ เมื่อ จุด แทน ตำแหน่งสถานที่ และ

เส้น แทน สะพาน

ดังกราฟ ต่อไปนี้



เมื่อเราจำลองสถานการณ์ดังกล่าวเป็นกราฟแล้ว เราก็ใช้ความรู้เรื่องวงออยเลอร์เรียนตรวจสอบว่ามีเส้นทางเดินดังกล่าวหรือไม่ ความรู้ในเรื่องวงออยเลอร์เรียนสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมายในสถานการณ์จริง ถ้าเราจำลองแผนที่ถนนของเมืองด้วยกราฟ โดยให้ จุด แทน สามแยกหรือสี่แยก และ

เส้น ถนน จะได้ว่าคนกวาดถนน คนเก็บขยะ บุรุษไปรษณีย์ พนักงานจดมิเตอร์น้ำประปาหรือไฟฟ้า ฯลฯ ต่างก็ได้รับประโยชน์จากวงล้อเรียน เพราะช่วยให้บุคคลเหล่านี้ปฏิบัติหน้าที่ของตนให้สำเร็จ ลุส่งไปอย่างมีประสิทธิภาพ นั่นคือ บุคคลเหล่านี้สามารถปฏิบัติหน้าที่ของตนได้โดยผ่านถนนแต่ละสาย เพียงครั้งเดียว หรือถ้าจำเป็นต้องผ่านถนนบางสายซ้ำ ผลรวมของระยะทางที่ต้องผ่านซ้ำต้องมีค่าน้อยที่สุด

ปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่คล้ายคลึงกับการหาวงล้อเรียน คือ การหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian Cycle) วัฏจักรแฮมิลโทเนียนในกราฟ G คือ ทางเดินที่เริ่มต้นและจบที่จุดเดียวกัน แต่ต้องผ่านจุดแต่ละจุดใน G เพียงครั้งเดียว และครบทุกจุด ตัวอย่างปัญหาคือ ปัญหาการเดินทางของเซลแมน (Traveling Salesman Problem) ปัญหาที่มีอยู่ว่า กำหนดเซตของเมืองและระยะทางระหว่างเมือง 2 เมือง จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่เซลแมนจะใช้เยี่ยมทุกเมืองแต่ละเมืองเพียงครั้งเดียว และกลับมายังเมืองที่เริ่มต้นอีกครั้ง ยังมีปัญหาอีกมากมายที่ใช้ความรู้เรื่องวัฏจักรแฮมิลโทเนียนในการแก้ปัญหา เช่น การออกแบบระบบคอมพิวเตอร์ ปัญหาการจัดลำดับงาน (Job Sequencing) และการจัดเส้นทางการเดินรถ (Vehicle Routing) เป็นต้น

จากตัวอย่างปัญหาดังกล่าวจะเห็นว่า ในสังคมชีวิตของคนเรานั้นสามารถที่จะนำความรู้ในเรื่อง ทฤษฎีกราฟ ไปใช้แก้ปัญหามากมายที่เกิดขึ้นได้ อีกทั้งทฤษฎีกราฟยังเกี่ยวข้องกับศาสตร์สาขาต่าง ๆ อีกมากมาย หรืออาจกล่าวได้ว่าทฤษฎีกราฟสามารถที่จะประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวแล้ว ข้างต้น ดังนั้น ผู้วิจัยจึงมีความคิดที่จะนำทฤษฎีกราฟมาสอนในชั้นมัธยมศึกษา เนื่องจากจะเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตแล้ว ยังเป็นพื้นฐานที่นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้ในการศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ในการนำความรู้เรื่องคณิตศาสตร์ดิสครีต ทฤษฎีกราฟ ลงมาสอนในระดับมัธยมศึกษาชั้น ตรี มอนต์ (Drummond, 1989 :641-A) ได้ทำการพัฒนาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต ซึ่งประกอบไปด้วยเรื่อง เมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับและความน่าจะเป็น ทฤษฎีกราฟ ทรี (Tree) และ Recursion สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา ผลการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้ และต่อมาทาง สมาคมครูคณิตศาสตร์ ประเทศสหรัฐอเมริกา (NTCM) ได้นำเรื่องทฤษฎีกราฟ บรรจุในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย ในวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต (Kenny, 1991) แสดงให้เห็นว่า ในต่างประเทศก็มีความคิดที่จะนำทฤษฎีกราฟมาสอนในระดับมัธยมศึกษา แต่ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะขยายกลุ่มตัวอย่างออกไปเป็น มัธยมศึกษาตอนต้นว่าจะสามารถเรียนได้หรือไม่ ซึ่งตามหลักการพัฒนาการทางสติปัญญาของ เพียเจต์ ได้จัดเด็กอายุ 11-15 ปี อยู่ในขั้นคิดตามแบบแผนของตรรกวิทยา (Formal Operational Thinking) เป็นขั้นที่เด็กสามารถสร้างความคิดรวบยอดและให้เหตุผลในสิ่งที่ซับซ้อนได้ เป็นความคิดที่อาศัยเหตุผลประกอบในการตัดสินใจ สามารถเข้าใจสัญลักษณ์ต่างๆ และสามารถสรุปเรื่องราวเป็นกฎเกณฑ์ได้ โดยไม่ต้องอาศัยการจัดกระทำกับวัตถุ (Carroll, 1964 : 78-79) และสำหรับประเทศไทย ออปเปอร์ (Oppen, 1971) ได้ศึกษาพบว่า พัฒนาการด้านความคิดตามแบบแผนของตรรกวิทยา ของเด็กไทย ช้ากว่าที่เพียเจต์ กล่าวไว้ประมาณ 2-3 ปี นั่นคือ สำหรับประเทศไทยแล้ว นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีอายุ 14-15 ปี จึงเป็นช่วงอายุที่เหมาะสมที่สุดที่เริ่มมีพัฒนาการทางสติปัญญาอยู่ในขั้นคิดตามแบบแผนของตรรกวิทยา ซึ่งน่าจะมีความสามารถในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เนื้อหาค่อนข้างเป็นนามธรรมได้

จากความสำเร็จและเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น โดยเน้นการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลที่ได้จากงานวิจัย อาจนำไปใช้ในการพิจารณาเนื้อหาที่จะบรรจุลงในวิชาเลือกเสรี ว่ามีความเป็นไปได้มากน้อยเพียงใด และเพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น
2. เพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหา เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมาสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในรายวิชาเลือกเสรี
2. ทำให้ได้ต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่สำหรับใช้สอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 โรงเรียนมัธยมศึกษาสัตตสถานราษฎร์ศรัทธา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 1 ห้องเรียน 45 คน ซึ่งสุ่มมาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน ทั้งหมด 3 ห้องเรียน 137 คน
2. การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้
 - 2.1 ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ
 - 2.2 กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโทเนียน
3. ตัวแปรที่ศึกษา คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 โรงเรียนมัธยมศึกษาสัตตสถานราษฎร์ศรัทธา ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541
2. ผลสัมฤทธิ์ หมายถึง คะแนนที่นักเรียนได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ในเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

3. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

สมมุติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไป ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. โครงการทางคณิตศาสตร์ศึกษา เพื่อพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา
2. ประวัติความเป็นมาของ ทฤษฎีกราฟ
3. มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ เกรด 9-12 และเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่สคริปต์ของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
5. โครงสร้างหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533)
6. ขอบเขตเนื้อหาของ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น และบทประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ

โครงการทางคณิตศาสตร์ศึกษา เพื่อพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา

ในหลายๆ ประเทศ ได้มีความพยายามที่จะพัฒนาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเห็นได้จากการจัดตั้งโครงการทางคณิตศาสตร์ศึกษาต่างๆ มากมาย อาทิเช่น โครงการทางคณิตศาสตร์ศึกษาของประเทศในแถบยุโรปและอเมริกา ซึ่ง สิริพร ทิพย์คง ได้รวบรวมไว้ เช่น ในประเทศเนเธอร์แลนด์ (The Netherlands : IOWO and Wiskobas Project) โครงการนี้เริ่มตั้งแต่ พ.ศ.2513 เน้นการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาเพื่อชีวิตประจำวัน สอนการคิดเลขโดยใช้ลูกคิด ส่วนในประเทศสวีเดน มีการจัดตั้งกลุ่ม Analysis of the Consequences of the Use of Pocket Calculators in School โดยในปี พ.ศ.2522 ได้ทำการศึกษาโครงการ 2 โครงการ คือ การศึกษาการใช้เครื่องคิดเลข และการใช้คอมพิวเตอร์ ซึ่งโครงการดังกล่าวเสร็จสิ้นในปี พ.ศ.2525 นอกจากนี้ในประเทศอังกฤษมีโครงการ Nuffield Mathematics Teaching Project เน้นวิธีการสอนแบบค้นพบ โดยใช้สื่อการสอน ต่อมาโครงการ SMP (The School Mathematics Project) เป็นโครงการที่มุ่งพัฒนาแบบเรียนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา และโครงการ CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science Project) เป็นโครงการเพื่อสำรวจปัญหาและความเข้าใจเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์ในเรื่องต่างๆ สำหรับประเทศสหรัฐอเมริกา ในปี พ.ศ.2500 มีโครงการ MSG (School Mathematics Study Group) ซึ่งเป็นโครงการที่ปรับปรุงและแก้ไขการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนระดับต่างๆ ได้มีการผลิตตำราคณิตศาสตร์ขึ้นทดลองใช้ โดยเน้นความสำคัญของโครงสร้างคณิตศาสตร์ การให้เหตุผล การใช้ภาษาคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องและรัดกุม ต่อมาโครงการที่สำคัญได้แก่ Midlands Mathematics Project และ โครงการ UICSM (University of Illinois Committee on School Mathematics) ต่อมาในปี พ.ศ.2532 The Council of Teachers of Mathematics (NCTM) ซึ่งเป็นองค์กรที่มีบทบาทมากที่สุดในด้านการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับ

โรงเรียนในสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดจุดมุ่งหมายตลอดจนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนในสหรัฐอเมริกาควรเรียน โดยเฉพาะในเกรด 9-12 ซึ่งมุ่งหวังให้นักเรียนที่เรียนทั้ง 4 ปี ได้ศึกษามีอาทิเช่น การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การสื่อสารโดยใช้คณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ พหุคณิต และความเกี่ยวข้องสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์ เป็นต้น (สิริพร ทิพย์คง. 2533 : 27-45) นอกจากนี้ในปี พ.ศ.2536 Western Michigan University (WMU) ได้ตั้งโครงการ CPMP (The Core-Plus Mathematics Project) เพื่อพัฒนาปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ใหม่ 4 ปี ในเกรด 9-12 ตามข้อกำหนดของ NCTM โครงการดังกล่าวได้รับทุนอุดหนุนจากมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา และเริ่มดำเนินการในระดับ 9 มาตั้งแต่ปี 2536 (University Join Forces to Revamp 9-12 Mathematics Curriculum. 1993 : 2)

ส่วนประเทศในแถบเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ ก็มีการร่วมกันจัดตั้งศูนย์เพื่อการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ คือ องค์การ SEAMEO (Southeast Asian Ministers of Education Organization) มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาหลักสูตร และค้นคว้าวิธีการสอนแผนใหม่ ตลอดจนสาธิตเทคนิคใหม่ๆ ของการใช้อุปกรณ์ต่างๆ ในการสอนวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ แก่โรงเรียนระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษาในกลุ่มของประเทศสมาชิกขององค์การ SEAMEO ประกอบด้วยสมาชิก 9 ประเทศ คือ ไทย มาเลเซีย สิงคโปร์ ฟิลิปปินส์ อินโดนีเซีย สาธารณรัฐกัมพูชา สาธารณรัฐประชาชนลาว สาธารณรัฐเวียดนาม และบรูไนดารุสซาลาม และสมาชิกสมทบอีก 5 ประเทศ คือ ออสเตรเลีย ฝรั่งเศส นิวซีแลนด์ แคนาดา และเยอรมัน และจัดตั้งโครงการ RECSAM (Regional Center of Education in Science and Mathematics) ขึ้นที่ป็นัง ประเทศมาเลเซีย เพื่อทำการศึกษาวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ ในภูมิภาคแถบนี้ (SEAMEO. 1990 : 1-12)

จะเห็นได้ว่า นักคณิตศาสตร์ศึกษาที่มีความพยายามที่จะปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา เป็นอย่างมาก นั่นเป็นการแสดงว่า หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นอยู่ยังไม่เป็นที่พึงพอใจของนักคณิตศาสตร์ศึกษามากนัก อาจเนื่องมาจากโลกวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น นักคณิตศาสตร์ศึกษาจึงต้องพยายามปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์อยู่ตลอดเวลา เพื่อให้ทันต่อการเปลี่ยนแปลงของวิวัฒนาการสมัยใหม่

ประวัติความเป็นมาของทฤษฎีกราฟ

การค้นพบทฤษฎีกราฟ มักจะพบในส่วนที่เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งการค้นพบแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระไม่เกี่ยวข้องกัน และไม่ได้นำมารวมกันไว้ ดังนั้นถ้าจะนับการเกิดทฤษฎีกราฟจริงๆ แล้ว จะถือเป็นการค้นพบในปี ค.ศ.1736 โดยผลงานของนักคณิตศาสตร์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler. 1707-1783) ซึ่งเป็นผู้แก้ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก (The Königsberg Bridge Problem.) ดังนั้นออยเลอร์ จึงได้ชื่อว่าเป็น บิดาของทฤษฎีกราฟ

ในปี ค.ศ.1847 ได้มีผู้ขยายทฤษฎีกราฟขึ้นอีก คือ เคอร์ชอฟ (G.Kirchhoff. 1824-1887) ซึ่งได้พยายามแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับวงจรไฟฟ้าจึงทำให้เกิดการขยายความรู้เบื้องต้น และทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทรี (Tree) ซึ่งเป็นกราฟชนิดหนึ่ง และในปี ค.ศ.1857 เคย์เลย์ (Arthur Cayley. 1821-1895) ได้ศึกษาทรีเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการหาจำนวนโมเลกุลของสารเคมี นอกจากนั้นก็ยังมีปริศนาที่เกี่ยวข้องกับกราฟ คือ เกมการท่องเที่ยว (Around The World) ได้ตั้งขึ้นในปี ค.ศ.1859 โดยแฮมิลตัน (Sir William Rowan Hamilton. 1805-1865) และปัญหาการระบายสีเพียงสี่สี (The Four Colour Problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่มีชื่อเสียงมากที่สุดในทฤษฎีกราฟ ปัญหานี้เกิดขึ้นในปี ค.ศ.1852 และค้นพบคำตอบเมื่อปี

ค.ศ.1976 โดยแอปเพล (Appel) และฮาเคน (Haken) ปัจจุบันนี้ทฤษฎีกราฟได้รับการพัฒนาขึ้น และมีการค้นพบทฤษฎีกราฟอีกมากมาย (นิตยา ชิงชัย. ม.ป.ป. : 1-8)

มาตรฐาน (Standard) วิชาคณิตศาสตร์ เกรด 9-12 และเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ดิสครีต ของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา

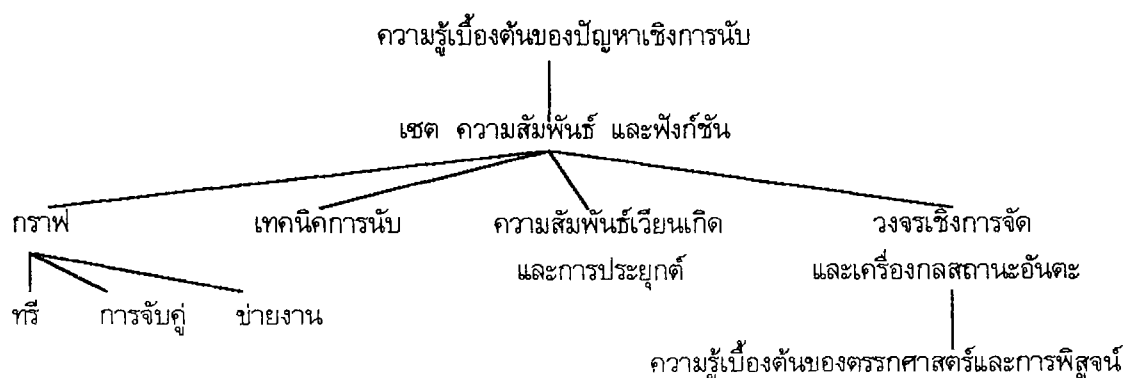
ในปี ค.ศ.1989 สมาคมครูคณิตศาสตร์ (NTCM) ได้กำหนดหลักสูตรมาตรฐานที่เรียกว่า "Standard" เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเกรด 9-12 ควรจะเรียนไว้ดังนี้

1. การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
2. การสื่อสารโดยใช้คณิตศาสตร์
3. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
4. พีชคณิต
5. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
6. เรขาคณิตสังเคราะห์
7. เรขาคณิตวิเคราะห์
8. ตรรกศาสตร์
9. สถิติ
10. ความน่าจะเป็น
11. **คณิตศาสตร์ดิสครีต**
12. แคลคูลัส
13. โครงสร้างทางคณิตศาสตร์
14. ความเกี่ยวข้องสัมพันธ์ของคณิตศาสตร์

สำหรับรายวิชา **คณิตศาสตร์ดิสครีต** กำหนดเนื้อหาดังนี้ (Dossey. 1987)

- บทที่ 1 : ความรู้เบื้องต้นของปัญหาเชิงการนับ
 - บทที่ 2 : เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
 - บทที่ 3 : ทฤษฎีกราฟ
 - บทที่ 4 : ทรี (Tree)
 - บทที่ 5 : การจับคู่ (Matching)
 - บทที่ 6 : ข่ายงาน (Network Flows)
 - บทที่ 7 : เทคนิคการนับ (Counting Techniques)
 - บทที่ 8 : ความสัมพันธ์เวียนเกิดและการประยุกต์ (Recurrence Relation and Its Applications)
 - บทที่ 9 : วงจรเชิงการจัด และเครื่องกลสถานะอันตะ (Combinatorial Circuits and Finite State Machines)
- ภาคผนวก : ความรู้เบื้องต้นของตรรกศาสตร์และการพิสูจน์

ซึ่งแสดงเป็นแผนภูมิลำดับหมวดหมู่ได้ ดังนี้



สำหรับการเรียนการสอนรายวิชา คณิตศาสตร์คิตสิริต สามารถเลือกเรียนได้ 2 แบบ คือ แบบที่เน้นหนักทางทฤษฎีกราฟ และแบบที่ไม่เน้นหนักทางทฤษฎีกราฟ ดังจะแสดงเนื้อหาและจำนวนชั่วโมงในการเรียน ดังนี้

แบบเน้นหนักทางทฤษฎีกราฟ		แบบไม่เน้นหนักทฤษฎีกราฟ	
บทที่	จำนวนชั่วโมง	บทที่	จำนวนชั่วโมง
1	3	1	4
2	6	2	6
3	6	3	6
4	6	4	7
7	8	5	6
8	5	6	4
ภาคผนวก	3	7	8
9	4	รวม	41
รวม	41		

จะเห็นว่า ในการเรียน **ทฤษฎีกราฟ** มีพื้นฐานในเรื่อง เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน เนื่องจากบทนิยามต่างๆ จะอธิบายอยู่ในรูปดังกล่าว แต่บทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จะนิยามบทนิยามต่างๆ ในรูปของคำอธิบายแจกแจง เพราะว่าในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ยังไม่ได้เรียนเรื่อง เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน อีกทั้งเนื้อหาที่ผู้วิจัยกำหนดลงในบทเรียนจะมี บทที่ 3 เท่านั้น เนื่องจาก ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะให้นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีพื้นฐานความรู้ในเรื่องทฤษฎีกราฟ เพื่อที่จะศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น และการนำไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่างๆ ในสถานการณ์จริงที่นักเรียนพบได้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ ความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับ มัธยมศึกษาตอนต้น

จากความพยายามที่นักคณิตศาสตร์ศึกษา ได้พยายามที่จะปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้น จึงมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ อยู่มากมาย ซึ่งงานวิจัยดังกล่าวมีองค์ประกอบที่จะทำการศึกษาอยู่ 3 องค์ประกอบ ได้แก่ ผู้สอน กระบวนการเรียนการสอน และผู้เรียน (ประพนธ์ เจริญกุล, 2533 : 43) งานวิจัยที่ผู้วิจัยรวบรวมมานี้เป็นงานวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการเรียนการสอนเกี่ยวกับหลักสูตรในด้านความเหมาะสมของเนื้อหาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งได้แก่

อำพล ธรรมเจริญ (2516 : 40-45) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จากการวิเคราะห์ข้อมูล ปรากฏว่า นักเรียนชั้น มศ.2 และ มศ.3 มีความสามารถในการคิดเชิงนามธรรมในวิชาคณิตศาสตร์ พอที่จะเรียน เรื่องโทโพโลยี และเรขาคณิตแปลงสภาพ เรื่องพีชคณิตแนวใหม่ เรื่องตรีโกณมิติและกราฟ และเรื่องสถิติและความน่าจะเป็นได้ สำหรับนักเรียนชั้น มศ.1 ปรากฏว่า มีความสามารถในการเรียน เรื่องสถิติและความน่าจะเป็น ส่วนเรื่องอื่นๆ ยังสรุปไม่ได้ นอกจากนี้ผลที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า ยังปรากฏว่า นักเรียนชายมีความสามารถในการคิดเชิงนามธรรมสูงกว่านักเรียนหญิง และนักเรียนในกรุงเทพมหานคร มีความสามารถดังกล่าวมากกว่านักเรียนในต่างจังหวัด และ วิทยา รุ่งอรุณพิศาล (2517 : 39) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพ (Transformation Geometry) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพเบื้องต้นได้ โดยที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ต่อมา ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล (2519 : 24) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ไม่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาดังกล่าว และในปีเดียวกัน ชวลิต เอี่ยมเจริญ (2519 : 25) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตโพรงคัพเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 มีความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตโพรงคัพเบื้องต้น ได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนที่มีพื้นฐานความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เพียงเล็กน้อยก็สามารถเรียน วิชาเรขาคณิตโพรงคัพเบื้องต้นได้ ต่อมา สุมานะ อาจหาญ (2521 : 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง พีชคณิตเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องพีชคณิตเบื้องต้นได้ และ บุญเกิด ชำนาญการคำ (2526 : 34-35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น หรือไม่ ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นได้ ในปีถัดมา ศุภชัย ทองศิริ (2527 : 36-37) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้นได้ อีก 2 ปีต่อมา วันชัย ทัพพะบุรณะ (2529 : 29-31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ หรือไม่ ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง เมตริกซ์ และอีกหลายปีต่อมา อำพล ได้ตอบ

(2539 : 29) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศนั้น มีผู้วิจัยไว้มากมายแต่จะขอยกตัวอย่างเพียง 2 งานวิจัย ได้แก่ ไวท์ (White. 1974 : 1969-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และ 8 ในการเรียนโน้มนำเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 7 และ 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องโน้มนำเบื้องต้นของความน่าจะเป็นได้ และไวท์ ได้เสนอให้นำเนื้อหา เรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้น บรรจุในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และ 8 นอกจากนี้ กัปรีด (Gubrud. 1971 : 6468-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8-10 ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 8 และ 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ , นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจน มากกว่า นักเรียนเกรด 8 และ 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับที่สูงกว่า มีความสามารถในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่า นักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

จากการวิจัยดังกล่าวข้างต้น ชี้ให้เห็นว่า เนื้อหาใหม่ๆ ที่เป็นนามธรรม สามารถนำมาพัฒนาให้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้ โดยเฉพาะชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 ซึ่งเป็นการสนับสนุนคำกล่าวของ บรูเนอร์ (Bruner. 1966 : 30) ที่ว่า ครูสามารถสอนวิชาใดๆ ให้แก่นักเรียนระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหา และวิธีการสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนก่อน งานวิจัยดังที่กล่าวมาแล้วชี้ให้เห็นความชัดเจนถึงความสามารถของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาก่อนที่จะทำการพัฒนา และปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์

โครงสร้างของหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ใช้ในประเทศไทย ตั้งแต่เริ่มมีประกาศหลักสูตรปี พ.ศ.2445 จนถึงปี พ.ศ.2524 ตลอดระยะเวลาดังกล่าวได้มีการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นหลายครั้ง ในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในแต่ละครั้ง ต่างก็มุ่งหวังที่จะให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ สอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจและสังคมของประเทศและทันต่อความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการต่างๆ ซึ่งมีการพัฒนาไปอย่างรวดเร็ว จากสภาพการณ์ดังกล่าว ในปี พ.ศ.2533 กระทรวงศึกษาธิการจึงได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ทำการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นขึ้น และประกาศใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ในปีการศึกษา 2534 ซึ่งมี 2 โครงสร้าง ดังนี้

โครงสร้างที่ 1 วิชาบังคับ**วิชาบังคับแกน****ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1**

ค 101 คณิตศาสตร์ 1	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 102 คณิตศาสตร์ 2	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

ค 203 คณิตศาสตร์ 3	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 204 คณิตศาสตร์ 4	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

โครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี

ค 011 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 012 คณิตศาสตร์	5 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	2.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 021 คณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 022 คณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 031 เสริมทักษะคณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 032 เสริมทักษะคณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 033 เสริมทักษะคณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 034 เสริมทักษะคณิตศาสตร์	2 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1 หน่วยการเรียนรู้
ค 041 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้
ค 042 คณิตศาสตร์	3 คาบ / สัปดาห์ / ภาค	1.5 หน่วยการเรียนรู้

หมายเหตุ

1. ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 จะเลือกเรียนวิชาเลือกเสรี ค 031 – ค 034 ทุกรายวิชาหรือบางรายวิชาก็ได้ ในกรณีที่เลือกเรียนให้เลือก ดังนี้

ค 031 คู่กับ ค 101 ค 032 คู่กับ ค 102

ค 033 คู่กับ ค 203 ค 034 คู่กับ ค 204

2. ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ถ้าต้องการเลือกเรียนรายวิชา ค 022 ให้เรียนคู่กับรายวิชา ค 012 และถ้าเลือกเรียนรายวิชา ค 041 ต้องผ่านการเรียนรายวิชา ค 204 และถ้าเลือกเรียนรายวิชา ค 042 ต้องผ่านการเรียนรายวิชา ค 041

3. ผู้เรียนที่มีความประสงค์จะเรียนต่อในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และมุ่งเน้นหนักไปทางคณิตศาสตร์ ให้เลือกเรียนรายวิชา ค 011 และ ค 012

จะเห็นว่าในโครงสร้างที่ 2 วิชาเลือกเสรี นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ต้องการมุ่งเน้นหนักทางคณิตศาสตร์ ในข้อ 3. ควรจะเลือกเรียนรายวิชา ค 021 และ ค 022 ด้วยซึ่งจะเป็นการเสริมสร้างพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

จากความสำคัญของทฤษฎีกราฟ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะนำทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มาทดลองสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ อาจนำไปใช้ในการพิจารณาเนื้อหาที่จะบรรจุลงในวิชาเลือกเสรี เพื่อให้นักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในข้อ 3. เลือกเพิ่มจากรายวิชา ค 021 และ ค 022 ที่มีอยู่

ขอบเขตเนื้อหาของ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น และบทประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ

(นวรัตน์ อนันต์ชื่น. 2539)

บทนำ

คำว่า "กราฟ" ในคณิตศาสตร์มีความหมายแตกต่างกัน ก่อนหน้านี้เรารู้จัก "กราฟ" ของฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และกราฟแท่งทางสถิติ เป็นต้น แต่เราจะใช้คำว่า "กราฟ" ในความหมายที่แตกต่างกันออกไปซึ่งจะกล่าวต่อไป

กราฟ

บทนิยาม : กราฟ $G = (V, E)$ ประกอบด้วยเซต $V \neq \emptyset$ และเซต E ซึ่งเป็นเซตของคู่อันดับที่ไม่เป็นลำดับ (unordered pair) ของสมาชิกที่ต่างกันของ V เราเรียกสมาชิกของ V ว่า จุด (vertex หรือ point หรือ node) และเรียกสมาชิกของ E ว่า เส้น (edge หรือ line)

บทนิยาม : ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า u **ประชิด (adjacent)** กับ v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเขียนเส้นดังกล่าวด้วย uv และจะเรียก u และ v ว่า จุดปลายของเส้น uv

ถ้า $e=uv$ เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่าจุด u **ตกกระทบ (incident)** กับเส้น e หรือเส้น e ตกกระทบกับจุด u

บทนิยาม : กราฟ G เป็น **กราฟทริวิเอล (trivial graph)** ก็ต่อเมื่อ $V(G)$ มีจุดเพียง 1 จุด

บทนิยาม : เราเรียกเส้นตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดคู่เดียวกันว่า **เส้นหลายชั้น (multiple edges)** และเรียกกราฟที่มีเส้นหลายชั้นในกราฟว่า **กราฟหลายชั้น (multigraph)**

บทนิยาม : เรากล่าวว่า กราฟ G เป็น **กราฟไม่ขาดตอน** เมื่อ 2 จุดใดๆใน G มีวิถีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว และเป็น **กราฟขาดตอน** เมื่อ มีอย่างน้อย 2 จุด ใน G ไม่มีวิถีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว

ดีกรี (degree)

บทนิยาม : ดีกรีของจุด v ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $d(v)$ คือ จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด v

บทนิยาม : เราเรียกจุด u ใน G ว่า **จุดคู่ (even vertex)** เมื่อ $d(u)$ เป็นจำนวนคู่ และ **จุดคี่ (odd vertex)** เมื่อ $d(u)$ เป็นจำนวนคี่

ทฤษฎีบท : ผลบวกของดีกรีของจุดของกราฟใดๆ เป็นสองเท่าของจำนวนเส้นในกราฟ

ทฤษฎีบท : จำนวนจุดคี่ ต้องเป็นจำนวนคู่

ภาวะเชื่อมโยง

บทนิยาม : **ทางเดิน (walk)** คือ ลำดับสลับของจุดและเส้น $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$ เมื่อ e_i แต่ละเส้นตกกระทบกับ v_{i-1} และ v_i โดยที่ ความยาวของทางเดิน คือ n ซึ่งก็คือจำนวนเส้นในทางเดิน ถ้า $v_0 = v_n$ เราเรียกทางเดินนั้นว่า **ทางเดินปิด (closed walk)**

บทนิยาม : ทางเดินไม่ซ้ำ (trail) คือ ทางเดินที่เส้นทุกเส้นแตกต่างกันหมด

บทนิยาม : วิธี (path) คือ ทางเดินที่จุดทุกจุดแตกต่างกันหมด

บทนิยาม : วง (circuit) คือ ทางเดินไม่ซ้ำแบบปิดที่ไม่ใช่ทางเดินทริเวียน

บทนิยาม : วัฏจักร (cycle) คือ วง $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$; $n \geq 3$ โดยที่จุด v_i แต่ละจุดไม่ซ้ำกัน

กราฟออยเลอร์เรียน และกราฟแฮมิลโทเนียน

บทนิยาม : กราฟออยเลอร์เรียน คือ กราฟไม่ขาดตอนที่สามารถหา **วง** ซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นในกราฟได้

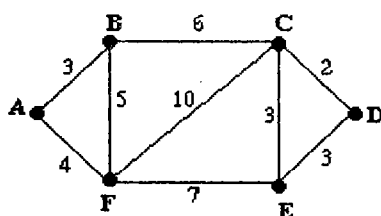
ทฤษฎีบท : กราฟ G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เมื่อ G เป็นกราฟไม่ขาดตอนทุกจุดทุกจุดใน G เป็นจุดคู่

บทนิยาม : กราฟแฮมิลโทเนียน คือ กราฟไม่ขาดตอนที่สามารถหา **วัฏจักร** ซึ่งผ่านจุดทุกจุดในกราฟได้

บทประยุกต์ของกราฟออยเลอร์เรียน

ความรู้เรื่องวงออยเลอร์เรียนสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมายในสถานการณ์จริง โดยถ้าเราจำลองแผนที่ถนนของเมืองด้วยกราฟ โดยให้ เส้น แทน ถนน และจุด แทน สามแยกหรือสี่แยก เราจะเห็นประโยชน์ได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเราจำลองสถานการณ์ ด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก โดยที่ น้ำหนัก อาจแทน ระยะทาง หรือค่าใช้จ่ายก็ได้

ตัวอย่าง สมมติว่าตำรวจทางหลวงคนหนึ่งมีงานที่ต้องรับผิดชอบ คือ ขับรถตรวจดูความเรียบร้อยบนถนนไฮเวย์ทุกสาย ดังแสดงในรูป ถ้าตำรวจคนนี้อยู่ที่เมือง A จงหาเส้นทางที่เขาจะขับรถจากเมือง A ไปสิ้นสุดที่เมือง A โดยที่เขาต้องการขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว หรือถ้าซ้ำ จงหาเส้นทางที่ใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุด



วิธีทำ จากกราฟที่กำหนดให้ จะเห็นว่า มีจุดคี่ คือ จุด B และ E เพียง 2 จุด

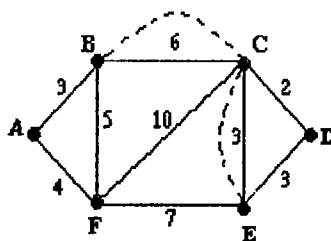
ดังนั้น เราจึงต้องหาเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดนี้

แต่ ในกราฟที่กำหนดให้ จะเห็นว่า ไม่มีเส้นที่เชื่อมจุด B และ E

นั่นคือ เราต้องหา วิธี B-E ที่สั้นที่สุด เพื่อหาเส้นทางที่จะเชื่อมจุดทั้งสองดังกล่าว

เราได้ วิธี B-E ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ B, C, E

เราจะได้กราฟใหม่ที่เป็น กราฟออยเลอร์เรียน ดังนี้



จากกราฟออยเลอร์เรียนดังกล่าว จะได้ว่า เราจะต้องใช้เส้น BC , CE ซ้ำ

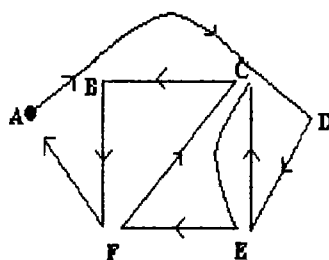
นั่นคือ นายตำรวจผู้นี้จะต้องเดินทางในถนน BC และ CE ซ้ำนั่นเอง

∴ ระยะทางทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทาง = ผลรวมของน้ำหนักในกราฟเดิม + น้ำหนักของเส้นที่เพิ่มเข้ามา

$$= [3+4+8+6+10+7+3+2+3] + [6+3]$$

$$= 45 + 9 = 54 \text{ กิโลเมตร}$$

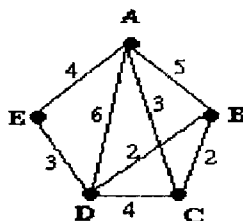
จากขั้นตอนวิธีของฟลูรี (Fleury's Algorithm) ทำให้เราได้เส้นทางที่ต้องการ ดังนี้



บทประยุกต์ของกราฟแฮมิลโทเนียน

ประโยชน์จากการศึกษาเรื่องกราฟแฮมิลโทเนียน สามารถแก้ปัญหาการออกแบบระบบคอมพิวเตอร์ ปัญหาการจัดลำดับงาน หรือปัญหาการจัดลำดับการเดินทาง ซึ่งเป็นปัญหาที่มีแนวความคิดเหมือนกับ **ปัญหาการเดินทางของเซลแมน** ปัญหาเป็นดังนี้ เซลแมนคนหนึ่งต้องการเสนอขายสินค้าไปยังเมืองต่างๆ และกลับมาสู่เมืองเริ่มต้น (ซึ่งอาจเป็นสำนักงานใหญ่) ถ้ามัวเซลแมนคนนี้จะวางแผนการเดินทางอย่างไรจึงจะทำให้ระยะทางในการเดินทางสั้นที่สุด

โดยหลักการแล้วสามารถแก้ปัญหาได้โดย การหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียนที่มีระยะทางรวมน้อยที่สุด ตัวอย่างเช่น ถ้าเรามีเมืองอยู่ 5 เมือง คือ A,B,C,D,E โดยแสดงแทนได้ด้วย กราฟที่มีน้ำหนัก โดยให้ จุด แทน เมือง , เส้น แทน ถนนที่เชื่อมระหว่างเมือง และน้ำหนัก แทน ระยะทาง ดังนี้



จากกราฟ เซลแมนควรเลือกเส้นทางที่มีลำดับ A,B,C,D,E,A หรือ A,E,D,B,A เนื่องจากเป็นวัฏจักรที่มีผลรวมของระยะทางน้อยที่สุด คือ 14 หน่วย

แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า เมื่อจำนวนเมืองมากขึ้นความยุ่งยากในการแก้ปัญหาจะเกิดขึ้น เนื่องจากในปัจจุบันยังไม่มีขั้นตอนวิธีใดๆ เลยที่ช่วยในการหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพ และทำได้ง่ายสำหรับปัญหานี้

บทที่ 3

วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 1 ห้องเรียน 45 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม (Cluster Sampling) โดยใช้วิธีจับสลากมา 1 ห้องเรียนจากทั้งหมด 3 ห้องเรียน จำนวน 137 คน สาเหตุที่ใช้วิธีสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม เพราะทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูง ระดับปานกลาง และระดับต่ำ เข้าชั้นเรียนในแต่ละห้องแบบคละกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนใน 15 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1.1.1 ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ 8 คาบ

1.1.2 กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโทเนียน 7 คาบ

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เป็นแบบทดสอบปรนัย ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหาที่กำหนด จำนวน 30 ข้อ

1.3 แบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ

2. ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

2.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เพื่อสร้างบทเรียนและคู่มือครู โดยศึกษาจากหนังสือและตำราที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1.1 การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ (นิตยา ชิงชัย)

2.1.2 คณิตศาสตร์ดิสครีต (วนิดา เหมะกุล)

2.1.3 ทฤษฎีกราฟ I. (นวรัตน์ อนันต์ชื่น)

2.1.4 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics. (Lipschutz.)

2.1.5 Discrete Mathematics. (Dossey.)

2.1.6 Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12. (Kenny.)

2.2 กำหนดจุดประสงค์ โดยมีจุดประสงค์ของการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นมุ่งให้นักเรียนสามารถ

2.2.1 บอกนิยามและยกตัวอย่างของกราฟต่าง ๆ ได้

2.2.2 บอกสมบัติของกราฟต่างๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบได้

2.2.3 นำสมบัติของกราฟต่างๆ ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้

2.3 สร้างบทเรียนและคู่มือครู ตามลำดับขั้น ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เขียนบทเรียนและคู่มือครู เนื้อหาเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เพื่อใช้สอนใน 15 คาบ คาบละ 50 นาที ในแต่ละคาบประกอบด้วย จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เนื้อหา และแบบฝึกหัด สำหรับคู่มือครู ประกอบด้วย คำนำประจำบท จำนวนคาบที่ใช้สอนโดยประมาณ จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม กิจกรรม คำตอบของแบบฝึกหัด

ขั้นที่ 2 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้คณะกรรมการควบคุม ปรินูณานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ตรวจสอบแก้ไข ปรับปรุง เพื่อวิจารณ์และชี้แนะข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำบทเรียนและคู่มือครู ที่ปรับปรุงไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งไม่ใช่ นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ซึ่งนักเรียนทั้ง 10 คนนี้เป็นอาสาสมัคร โดยใช้เวลาสอนรวม 15 คาบ คาบละ 50 นาที หลังจากทดลองสอนแล้วผู้วิจัยสังเกตบันทึกข้อบกพร่องในด้านความยากง่าย ภาษา และเวลา ของบทเรียนและคู่มือครู แล้วนำมาปรับปรุงและให้คณะกรรมการควบคุม ปรินูณานิพนธ์ ตรวจสอบแก้ไขอีกครั้ง เป็นการปรับปรุงเพื่อนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือกจำนวน 45 ข้อ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุม ปรินูณานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจสอบคัดเลือก เพื่อให้ได้ข้อทดสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา จากนั้นนำแบบทดสอบที่ได้ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มเดิมที่ได้ทดลองสอนมาแล้ว จำนวน 10 คน ใช้เวลา 1:30 ชั่วโมง

2.5 วิเคราะห์แบบทดสอบปรนัยหา ค่าความยากง่าย (p) และหาค่าอำนาจจำแนก (r)

2.6 คัดเลือกข้อสอบแบบปรนัยที่มี ค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 30 ข้อ จาก 45 ข้อ

2.7 ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัย โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน เท่ากับ 0.91

2.8 สร้างแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ และนำแบบทดสอบชุดนี้ไปให้คณะกรรมการควบคุม ปรินูณานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ ตรวจสอบแก้ไข 3 ครั้ง โดยแก้ไขฉบับเดิม 2 ครั้งก่อนการทดสอบกับนักเรียนจำนวน 10 คน และแก้ไขหลังทดสอบอีกครั้งหนึ่ง เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหา แล้วจึงนำไปทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 45 คน โดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 15 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 15 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เป็นแบบทดสอบปรนัย 30 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและปรับปรุงแล้ว และแบบทดสอบอัตนัย 5 ข้อ ใช้เวลา 1:30 ชั่วโมง

3. วิเคราะห์ผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน โดยการตรวจให้คะแนนแบบทดสอบปรนัย ข้อที่ถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 คำตอบ ในแต่ละข้อให้ 0 คะแนน ส่วนแบบทดสอบอัตนัยให้ข้อละ 3 คะแนน โดยพิจารณาจาก 3 ส่วน คือ การสร้างแบบจำลองด้วยกราฟ ถูกต้อง การเลือกใช้ขั้นตอนวิธีต่างๆ ไปใช้ในการแก้ปัญหา และการคำนวณถูกต้อง โดยให้น้ำหนักคะแนน แต่ละส่วนเท่ากัน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (C.V.)
2. ทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นได้มากกว่า ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ในการทดสอบ (Z-Test Population Proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (C.V.)
2. สถิติหาค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคำนวณจากสูตร KR-20
3. สถิติเพื่อการทดสอบสมมุติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 1 ห้องเรียน 45 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ตอนที่ 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ตอนที่ 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ตอนที่ 4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ตอนที่ 5 ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 1 ห้องเรียน 45 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น แบบปรนัย 30 ข้อ และแบบอัตนัย 5 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

ตอนที่ 1 : ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหาได้ ดังนี้

กรณีที่จุดประสงค์ใดมี ข้อคำถามที่เป็นข้อสอบ 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละ คือ ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้น

และ กรณีที่จุดประสงค์ใดมี ข้อคำถามที่เป็นข้อสอบมากกว่า 1 ข้อ ค่าเฉลี่ยร้อยละ หาได้จาก ผลบวกของค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ผ่านจุดประสงค์ในข้อนั้นหารด้วยจำนวนข้อคำถามที่เป็นข้อสอบ ในจุดประสงค์นั้น ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่าน แต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อที่	จำนวนนักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียนที่ ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของ จำนวนนักเรียนที่ผ่าน
<u>จุดประสงค์ที่ 1</u> นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลอง แทนสถานการณ์ต่างๆ ได้	1	45	100.00	78.89
	2	26	57.78	
<u>จุดประสงค์ที่ 2</u> นักเรียนสามารถแก้ไขปัญหาดังกล่าว โดยการใช้องศาเป็นแบบจำลองได้	3	33	73.33	82.22
	4	41	91.11	
<u>จุดประสงค์ที่ 3</u> นักเรียนสามารถบอก $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ใดๆ ได้	5	39	86.67	86.67
<u>จุดประสงค์ที่ 4</u> นักเรียนสามารถบอกถึงความ สัมพันธ์ การประชิดและตกกระทบ ใน กราฟใดๆ ได้	6	37	82.22	82.22
<u>จุดประสงค์ที่ 5</u> นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟ ใดเป็นกราฟหลายชั้น	7	42	93.33	93.33
<u>จุดประสงค์ที่ 6</u> นักเรียนสามารถบอกดีกรีของจุด ใดๆในกราฟได้ และสามารถบอกได้ ว่า จุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่	8	43	95.56	95.56
<u>จุดประสงค์ที่ 7</u> นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎี บทที่ 1 ไปแก้ปัญหาก็เกี่ยวข้องได้	9	29	64.44	53.33
	10	19	42.22	

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อที่	จำนวนนักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของ จำนวนนักเรียนที่ผ่าน
<u>จุดประสงค์ที่ 8</u> นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 2 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้	11	35	77.78	77.78
<u>จุดประสงค์ที่ 9</u> นักเรียนสามารถบอกถึงความแตกต่างของทางเดิน , ทางเดินปิด , ทางเดินไม่ซ้ำ และวิถี ได้	12 13	35 21	77.78 46.67	62.22
<u>จุดประสงค์ที่ 10</u> นักเรียนสามารถหาทางเดิน , ทางเดินไม่ซ้ำ และวิถี เมื่อกำหนดความยาวให้ได้	14 15	38 16	84.44 35.56	60.00
<u>จุดประสงค์ที่ 11</u> นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟไม่ขาดตอน	16	26	57.78	57.78
<u>จุดประสงค์ที่ 12</u> นักเรียนสามารถหา $d(u,v)$ ใดๆ ของกราฟไม่ขาดตอนที่มีน้ำหนักได้	17	31	68.89	68.89
<u>จุดประสงค์ที่ 13</u> นักเรียนสามารถหาวิถีที่สั้นที่สุดได้	18	39	86.67	86.67
<u>จุดประสงค์ที่ 14</u> นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในการหาวิถีที่สั้นที่สุด ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้	19 20	27 7	60.00 15.56	37.78
<u>จุดประสงค์ที่ 15</u> นักเรียนสามารถบอกถึงความแตกต่างของ วง และวัฏจักร ได้	21	21	46.67	46.67
<u>จุดประสงค์ที่ 16</u> นักเรียนสามารถหา วง และวัฏจักร ของกราฟใดๆ ได้	22	24	53.33	53.33

ตาราง 1 (ต่อ)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม	ข้อที่	จำนวนนักเรียน ที่ผ่าน (คน)	ร้อยละของ นักเรียนที่ผ่าน	ค่าเฉลี่ยร้อยละของ จำนวนนักเรียนที่ผ่าน
<u>จุดประสงค์ที่ 17</u> นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์เรียน และสามารถหาวงออยเลอร์เรียนจากกราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีได้	23	40	88.89	88.89
<u>จุดประสงค์ที่ 18</u> นักเรียนสามารถหา วิธีที่ดีที่สุดของการจับคู่จุดคู่ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟไม่ขาดตอนได้ และสามารถหาทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้	24	23	51.11	51.11
<u>จุดประสงค์ที่ 19</u> นักเรียนสามารถหา ความยาวของทางเดินออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้	25	7	15.56	15.56
<u>จุดประสงค์ที่ 20</u> นักเรียนสามารถใช้ความรู้เรื่องกราฟออยเลอร์เรียนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้	26	15	33.33	33.33
<u>จุดประสงค์ที่ 21</u> นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟใดเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน	27	13	28.89	28.89
<u>จุดประสงค์ที่ 22</u> นักเรียนสามารถหา วัฏจักรแฮมิลโทเนียนจากกราฟแฮมิลโทเนียนได้	28 29	32 27	71.11 60.00	65.56
<u>จุดประสงค์ที่ 23</u> นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในเรื่องกราฟแฮมิลโทเนียนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้	30	26	57.78	57.78

จากตาราง 1 แสดงค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม พบว่า จุดประสงค์ที่ 6 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 95.56 รองลงมาคือ จุดประสงค์ที่ 5 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 93.33 และลดหลั่นไปถึงจุดประสงค์ที่ 19 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 15.56 ซึ่งในภาพรวมพบว่า มีจุดประสงค์ที่ 14, 15, 19, 20 และ 21 มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยน้อยกว่าร้อยละ 50 นอกนั้นมีนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยมากกว่าร้อยละ 50

ตอนที่ 2 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	45	30	19.49	64.97	4.03	20.68 %

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 19.49 คิดเป็นร้อยละ 64.97 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.03 และมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนเป็น 20.68 %

ตอนที่ 3 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	45	15	9.29	61.93	4.06	43.70 %

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 9.29 คิดเป็นร้อยละ 61.93 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.06 และมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนเป็น 43.70 %

ตอนที่ 4 : ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	45	38	84.44 %

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม หรือตั้งแต่ 15 คะแนน ขึ้นไปใน 30 คะแนน มีจำนวนถึงร้อยละ 84.44 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้น 45 คน

ตอนที่ 5 : ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าสถิติ Z ที่แสดงผลการทดสอบจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบ
ผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 3	45	38	4.56 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 มีจำนวนถึงร้อยละ 84.44 ของจำนวนนักเรียน
ทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น
2. เพื่อพัฒนาต้นแบบของบทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

สมมุติฐานของการวิจัย

นักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไป ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีการดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 จำนวน 1 ห้องเรียน 45 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. บทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนใน 15 คาบ คาบละ 50 นาที
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่วัดผลสัมฤทธิ์ตามสัดส่วนของเนื้อหาที่กำหนด เป็นแบบทดสอบปรนัย จำนวน 30 ข้อ
3. แบบทดสอบอัตนัยจำนวน 5 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน โดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาทั้งหมด 15 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 15 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เป็นแบบทดสอบปรนัย 30 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้คัดเลือกและปรับปรุงแล้ว และแบบทดสอบอัตนัย 5 ข้อ ใช้เวลา 1:30 ชั่วโมง

การวิเคราะห์ผลข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับ ดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม โดยการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
4. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
5. ผลการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการศึกษาทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปรากฏผลดังนี้

1. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน ที่ผ่านแต่ละจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม พบว่า จุดประสงค์ที่ 6 (ให้นักเรียนสามารถบอกทิศทางของจุดใดๆในกราฟ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมากที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 95.56 รองลงมาคือ จุดประสงค์ที่ 5 (ให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟหลายชั้น) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 93.33 และลดหลั่นไปถึงจุดประสงค์ที่ 19 (ให้นักเรียนสามารถหาความยาวของทางเดินฮอยเลอร์เรียน จากกราฟที่ไม่ใช่กราฟฮอยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นที่มีความยาวน้อยที่สุดได้) มีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมน้อยที่สุด คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 15.56 ซึ่งเมื่อยกเว้นจุดประสงค์ที่ 14, 15, 19, 20 และ 21 ซึ่งมีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คิดเป็นค่าเฉลี่ยร้อยละ 37.78, 46.67, 15.56, 33.33 และ 28.89 ตามลำดับ จะมีจำนวนนักเรียนผ่านจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมแต่ละข้อที่เหลือใน 18 ข้อ คิดเป็นค่าเฉลี่ยมากกว่าร้อยละ 50
2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 19.49 คิดเป็นร้อยละ 64.97 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.03 และมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนเป็น 20.68 %
3. คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 9.29 คิดเป็นร้อยละ 61.93 ของคะแนนเต็ม มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.06 และมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนเป็น 43.70 %
4. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวนถึงร้อยละ 84.44 ซึ่งมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในชั้น 45 คน
5. จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น จากบทเรียนและคู่มือครู ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้เนื่องจาก

1.1 ระดับอายุของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีพัฒนาการทางสติปัญญาอยู่ในขั้นคิด ตามแบบแผนของตรรกวิทยา ซึ่งสามารถเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่มีเนื้อหาค่อนข้างเป็นนามธรรมได้

1.2 ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาในบทเรียนค่อนข้างมีลักษณะรูปธรรมที่เข้าใจง่าย มีการยก ตัวอย่างประกอบอย่างชัดเจน โดยเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อน แล้วจึงนำเสนอเนื้อหาที่ยากขึ้นไป ตามลำดับ

1.3 นักเรียนมีความสนใจและตั้งใจเรียนดีมาก ซึ่งจะเห็นได้จากการซักถามในชั้นเรียนและ การทำแบบฝึกหัด อีกทั้งไม่มีนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างคนใดขาดเรียนตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยทำการทดลอง เป็นไปได้ว่า เหตุของความสนใจอาจมาจากลักษณะของทฤษฎีกราฟ เป็นเนื้อหาวิชาใหม่ ที่มีลักษณะท้าทาย ความสามารถของผู้เรียน จะเห็นได้ว่ามี เกม , รูปภาพ และปัญหาน่าคิดมากมาย อีกทั้งยังสามารถเห็น ประโยชน์ได้อย่างชัดเจน สามารถประยุกต์ใช้ได้กับหลาย ๆ สถานการณ์ และไม่ใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ขั้นสูงมากนัก

1.4 การจัดกิจกรรมการสอน ได้พยายามเน้นกิจกรรม เพื่อให้ให้นักเรียนทดลองและค้นพบ ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด , วิเคราะห์ และแก้ปัญหาได้

2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบอัตนัย ของกลุ่มตัวอย่างแตกต่างกันค่อนข้างมาก ทั้งนี้เนื่องจาก กลุ่มตัวอย่างอาจยังไม่คุ้นเคยกับการทำโจทย์ประเภทแสดงวิธีทำ แต่ในภาพรวม คะแนนเฉลี่ยในการทำแบบทดสอบอัตนัย ของกลุ่มตัวอย่างมีค่ามากกว่า 50 % แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมี ทักษะกระบวนการคิดแบบเป็นขั้นเป็นตอน

3. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ที่มีจำนวนนักเรียนผ่านน้อยซึ่งคิดเป็นค่าเฉลี่ยน้อยกว่าร้อยละ 50 มีดังนี้

จุดประสงค์ที่ 14 : ในข้อที่ 20 (โจทย์ปัญหาในการใช้ความรู้ในการหาวิถีที่สั้นที่สุด ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้อง) เป็นโจทย์การแก้ปัญหาที่มีลักษณะของข้อสอบซับซ้อน จึงไม่สามารถทำให้ เสร็จภายในเวลาที่กำหนด

การแก้ปัญหาอาจจะทำได้โดย สร้างข้อทดสอบที่มีลักษณะตรงไปตรงมาไม่ซับซ้อน

จุดประสงค์ที่ 15 : ในข้อที่ 21 (โจทย์ปัญหาในการบอกความแตกต่างของวง และ วัฏจักร) ใช้เวลาในการสอนเรื่องดังกล่าว (คาบที่ 8) น้อยเกินไป สอนเพียงครึ่งคาบเท่านั้น การแก้ปัญหาอาจจะทำได้โดย สอนเรื่องดังกล่าวโดยใช้เวลาหนึ่งคาบ

จุดประสงค์ที่ 19 : ในข้อที่ 25 (โจทย์ปัญหาในการหาความยาวของทางเดิน ออยเลอร์เรียนใด ๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุด) ซึ่งเป็นจุดประสงค์ที่มีเด็กนักเรียนตกมากที่สุด ใช้ เวลาในการสอนเรื่องดังกล่าว (คาบที่ 11) น้อยเกินไป สอนเพียงหนึ่งคาบเท่านั้น การแก้ปัญหาอาจจะทำได้โดย สอนเรื่องดังกล่าวโดยใช้เวลาหนึ่งคาบครึ่ง หรือสองคาบ

จุดประสงค์ที่ 20 : ในข้อที่ 26 (โจทย์ปัญหาในการใช้ความรู้เรื่องกราฟ
ออยเลอร์เรียน ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้) กำหนดกราฟที่มีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้การคำนวณ
ระยะทางต่าง ๆ มีการคลาดเคลื่อน

การแก้ปัญหาอาจกระทำได้โดย กำหนดกราฟให้มีขนาดเล็กลง

จุดประสงค์ที่ 21 : ในข้อที่ 13 (โจทย์ปัญหาในการบอกว่ากราฟใดเป็นกราฟ
แฮมิลโทเนียน) บทเรียนเรื่องดังกล่าว ได้กล่าวไว้ก่อนว่า เมื่อกราฟมีขนาดใหญ่ขึ้นจะยุ่งยากมาก เนื่องจาก
ยังไม่มีขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาที่แน่นอนที่ใช้ได้กับทุกกรณี จึงทำให้นักเรียนไม่สนใจที่จะแก้ปัญหาเรื่อง
ดังกล่าว การแก้ปัญหาอาจกระทำได้โดย นำเสนอแต่โจทย์ที่สามารถแก้ปัญหาได้ก่อน แล้วจึงนำเสนอเรื่อง
ดังกล่าวไว้เป็นหมายเหตุ ในตอนท้ายของเรื่อง

4. การที่มีข้อสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น บางข้อยากเกินไปนั้น
อาจมีสาเหตุมาจาก ข้อทดสอบดังกล่าวพัฒนาโดยใช้ให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่อาสาสมัคร 10 คน
มีจำนวนน้อยเกินไป ซึ่งเมื่อสำรวจแล้ว ปรากฏว่า เป็นนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง 4 คน
ปานกลาง 4 คน และต่ำ 2 คน ซึ่งนับว่าเป็นกลุ่มเด็กที่เก่งเกินไป

5. นักเรียนยังไม่สามารถนำความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟ ไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาลักษณะอื่น ๆ ใน
สถานการณ์จริงที่นักเรียนพบได้ คงได้แค่พอรู้แนวทางในการแก้ปัญหาเท่านั้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มี
ความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ดังนั้น ผลการวิจัยนี้จะเป็นแนวทางให้ผู้จัดทำ
หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พิจารณาเลือกเนื้อหาเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
นำมาบรรจุในรายวิชาเลือกเสรี โครงสร้างที่ 2 ของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งตรงกับ
เกรด 9 สอดคล้องกับ NTCM ที่ให้บรรจุใน เกรด 9 – เกรด 12

1.2 ในการจัดการเรียนการสอนในเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียน
ได้เรียนรู้ด้วยตนเองให้มากที่สุด การสอนควรมุ่งที่จะให้นักเรียนทุกคนเกิดความสามารถที่จะ สังเกต
วิเคราะห์ คิดค้นทดลอง และค้นพบด้วยตนเอง จนสามารถสรุปเป็นกฎเกณฑ์และสร้างวิธีการทาง
คณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ได้ ผู้สอนควรมีบทบาทเป็นเพียงผู้แนะนำ และสนับสนุนให้ผู้เรียนบรรลุจุดมุ่งหมาย
ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุด

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ขึ้น และมี
ขอบเขตกว้างขวางขึ้น เพื่อหาข้อสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยเรื่องทฤษฎีกราฟ โดยขยายเนื้อหาเพิ่มขึ้นไปอีก เพื่อศึกษาว่า นักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนได้หรือไม่ โดยพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหาที่มีวิธีการแก้ปัญหาที่
ชัดเจน แต่ถ้ามีวิธีการแก้ปัญหาไม่ชัดเจน ไม่ควรนำมาทดลอง หรือให้ทดลองกับเด็กเก่ง เพื่อที่จะบรรจุใน
รายวิชาเลือกเสรี ซึ่งเป็นแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ, กรม. เอกสารสมมนาผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพการศึกษาระดับ
วิทยาลัยครู. ม.ป.ท., 2509.
- กรมวิชาการ, กรม. การศึกษาการใช้หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช
2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). 2539.
- ชวลิต เอี่ยมเจริญ. การศึกษามลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา เรขาคณิตโปรเจกทีฟ ของนักเรียนระดับมัธยม
ศึกษาตอนต้น. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร,
2519. อัดสำเนา.
- ดาบุญ. "ความเป็นมาของทฤษฎีกราฟ," วารสารคณิตศาสตร์. 36(410-411) : พฤศจิกายน - ธันวาคม 2535.
- นวรรตน์ อนันต์ชื่น. ทฤษฎีกราฟ I. กรุงเทพฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2539.
- นิตยา ชิงชัย. การประยุกต์ของทฤษฎีกราฟ. เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่,
ม.ป.ป.
- บุญเกิด ชำนาญการคำ. การศึกษามลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา แคลคูลัสเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.
- ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล. การศึกษามลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาตอนต้น. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา
ประสานมิตร, 2519. อัดสำเนา.
- ประพนธ์ เจียรกุล. "การวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สมัยปัจจุบัน และแนวโน้มใน
- ทศวรรษหน้า," วารสารสโทยธรรมาธิราช. 3(3) : กันยายน - ธันวาคม 2533.
- วนิดา เหมะกุล. คณิตศาสตร์ดิสครีต. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น, 2535.
- วิทยา รุ่งอรุณพิศาล. การศึกษามลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา เรขาคณิตแปลงสภาพ ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนต้น. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร,
2517. อัดสำเนา.
- ✓ วันชัย หัพพะบูรณ์. การทดลองสอนแวกเตอร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม.
กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2529. อัดสำเนา.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. รายงานผลวิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์.
กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย, 2537.
- สุมานะ อาจหาญ. การศึกษามลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง พิกัดเชิงเส้นเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาปีที่ 2 และ 3. ปริญญาโท กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร, 2521. อัดสำเนา.
- สิริพร ทิพย์คง. เอกสารประกอบการสอนวิชา กศ.คณิต. 526 : แนวโน้มการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ :
ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2533. อัดสำเนา.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช
2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2534.
- ศึกษาธิการ, กระทรวง. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533).
พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2535.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542. การประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
และมัธยมศึกษาตอนปลาย
ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533)
พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2535.

- ศุภชัย ทองศิริ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.
วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2527. อัดสำเนา.
- อรศรี ปุวคำ. " ก้าวแรกของคณิตศาสตร์แนวใหม่ ในหลักสูตรมัธยมศึกษาของไทย, " ในรายงานผลการ
วิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์. หน้า 14-27. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย, 2527.
- อำพล โตตอบ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง การหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการ
พหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2539. อัดสำเนา.
- อำพล ธรรมเจริญ. การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยม
ศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร,
2516. อัดสำเนา.
- Bruner, Jerome Seymour. The Process of Education. Cambridge : Harvard University Press.
1966.
- Carroll, John B. Language and Thought. New Jersey : Prentice-Hall Inc., 1964.
- Dosssey, John A. Discrete mathematics. Scott, Foresman and Company, Illinois. 1987.
- Drummond, Pamela Johnson. " The Design, Implementation and Evaluation of a Course in
Discrete Mathematics for High School Students," Dissertation Abstracts. 50(3) : 641-A;
1989.
- Gubrud, Allam Roy. " The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning
the Concept of Vectors in Junior and Senior High School, " Dissertation Abstracts
International. 31(12) : 6468-A; June, 1971.
- Kenney, Margaret J. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12. The National Council of
Teacher of Mathematics, Inc, Virginia. 1991 Year Book.
- Lipschutz, Seymour. 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics. Singapore : Mc Graw-
Hill Inc., 1992.
- Opper, P. Sylvai, Intellectual Development in Thai Children. Doctor's Thesis, Faculty of the
Graduate School, Cornell University, Cornell, 1971.
- SEAMEO Organizational Profile. Bangkok : SEAMEO, 1990.
- " Universities Join Forces to Revamp 9-12 Mathematics Curriculum, " NCTM News Bulletin.
2 ; January, 1993.
- White, Charles William. " A Study of the Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn
Basic Concepts of Probability and the Relationship between Achievement in Probability
and Selected Factors, " Dissertation Abstracts International. 35(4) : 1969-A; October,
1974.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 6 ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่น ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	1.0	0	16	0.7	0.2
2	0.4	0.4	17	0.6	0.8
3	0.6	0.4	18	0.8	0.4
4	0.8	0.4	19	0.8	0.4
5	0.9	0.2	20	0.2	0.4
6	0.8	0.4	21	0.5	1
7	0.7	0.6	22	0.6	0.4
8	1.0	0	23	1.0	0
9	0.6	0.8	24	0.4	0.4
10	0.6	0.4	25	0.3	0.2
11	0.7	0.6	26	0.2	0.4
12	0.7	0.6	27	0.2	0.4
13	0.6	0.4	28	0.6	0.4
14	0.8	0.4	29	0.5	0.2
15	0.4	0	30	0.5	0.2

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR – 20)

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{N}{N - 1} \cdot \left[1 - \frac{\sum pq}{S^2} \right] \\
 &= \frac{30}{29} \cdot \left[1 - \frac{5.57}{48.01} \right] \\
 &= \frac{30}{29} \cdot [0.88] \\
 &= 0.91
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ S คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน

ตาราง 7 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน ของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

X	f	fX	X ²	fX ²
27	1	27	729	729
25	2	50	625	1250
24	3	72	576	1728
23	8	184	529	4232
22	5	110	484	2420
21	2	42	441	882
20	4	80	400	1600
19	3	57	361	1083
18	2	36	324	648
17	2	34	289	578
16	3	48	256	768
15	3	45	225	675
14	3	42	196	588
13	2	26	169	338
12	2	24	144	288
$\sum f = 45$		$\sum fX = 877$	$\sum fX^2 = 17807$	

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{877}{45} = 19.49$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{45(17807) - (877)^2}{45 \cdot 44}} \\
 &= \sqrt{\frac{32186}{1980}} \\
 &= \sqrt{16.26} \\
 &= 4.03
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C.V. &= \frac{s}{\bar{X}} \times 100 \% \\
 &= \frac{4.03}{19.49} \times 100 \% \\
 &= 20.68 \%
 \end{aligned}$$

ตาราง 8 การคำนวณหา ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของ คะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบอัตร้อย ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (คะแนนเต็ม 15 คะแนน)

X	f	fX	X ²	fX ²
15	5	75	225	1125
14	2	28	196	329
13	7	91	169	1183
12	3	36	144	432
11	3	33	121	363
10	3	30	100	300
9	3	27	81	243
8	4	32	64	256
7	4	28	49	196
6	3	18	36	108
4	4	16	16	64
3	1	3	9	9
1	1	1	1	1
0	2	0	0	0
$\sum f = 45$		$\sum fX = 418$	$\sum fX^2 = 4609$	

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{418}{45} = 9.29$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{\frac{N \sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{45(4609) - (418)^2}{45 \cdot 44}} \\
 &= \sqrt{\frac{32681}{1980}} \\
 &= \sqrt{16.51} \\
 &= 4.06
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C.V. &= \frac{s}{\bar{X}} \times 100 \% \\
 &= \frac{4.06}{9.29} \times 100 \% \\
 &= 43.70 \%
 \end{aligned}$$

การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งใช้
ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z- test for Population Proportion)

สมมุติฐาน คือ $H_0 : P \leq 0.50$

$H_1 : P > 0.50$

ค่าสถิติทดสอบ
$$Z = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 (1 - P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนน
ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม

$$\hat{p} = \frac{38}{45} = 0.84$$

$$P_0 = 0.50$$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 45 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{0.84 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1 - 0.50)}{45}}} \\ &= \frac{0.34}{\sqrt{0.00556}} \\ &= 4.56 \\ Z_{.01} &= 2.33 \end{aligned}$$

เพราะว่า $4.56 > 2.33$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนร้อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ได้ เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3**

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ (แบบปรนัย 4 ตัวเลือก)

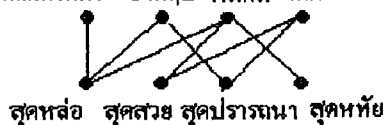
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 1 : นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์ต่างๆได้

- 1) โรงเรียนมัธยมบ้านป่า ต้องการรับสมัครครูสอนวิชา 4 วิชา มีคนมาสมัคร 4 คน ซึ่งแต่ละคนมีความสามารถในการสอนวิชาต่างๆ ดังนี้

	คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ	ฟิสิกส์	เคมี
สุดหล่อ	✓	-	✓	✓
สุดสวย	-	-	✓	✓
สุดปราวณา	✓	-	-	✓
สุดหทัย	-	✓	-	-

จงหาว่ากราฟในข้อใดเป็นแบบจำลองของสถานการณ์นี้

- ก. คณิตศาสตร์ อังกฤษ ฟิสิกส์ เคมี



- ข. คณิตศาสตร์ อังกฤษ ฟิสิกส์ เคมี



- ค. คณิตศาสตร์ อังกฤษ ฟิสิกส์ เคมี



- ง. คณิตศาสตร์ อังกฤษ ฟิสิกส์ เคมี



- 2) จากข้อ 1) ถ้าหากทางโรงเรียนรับทั้ง 4 คน จงหาว่าจะมีวิธีจัดให้บุคคลต่างๆ ได้สอนครบทั้ง 4 วิชา

ก. 1 วิธี

ข. 2 วิธี

ค. 3 วิธี

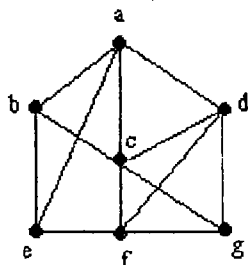
ง. ไม่สามารถจัดได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 2 : นักเรียนสามารถแก้ไขปัญหาต่างๆ โดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้

3) พญานาคในปัจจุบันมีอยู่ 27 สายพันธุ์ ซึ่งเป็นวิวัฒนาการมาจากบรรพบุรุษพญานาค ที่สามารถมีวิวัฒนาการกลายเป็น 3 สายพันธุ์ ใช้เวลา 100,000 ล้านปี (ก่อนที่บรรพบุรุษพญานาคจะสูญพันธุ์) จงหาว่าต้องใช้เวลากี่ปีที่จะมีพญานาค 27 สายพันธุ์ ดังเช่นปัจจุบัน

- ก. 9,000,000 ล้านปี ข. 3,000,000 ล้านปี ค. 900,000 ล้านปี ง. 300,000 ล้านปี

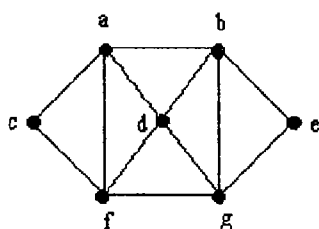
4) ถ้ากราฟที่กำหนดให้เป็นแบบจำลองของหมู่บ้านแห่งหนึ่ง อยากทราบว่าสถานที่ตำรวจควรอยู่ที่จุดใด เพื่อที่ว่าเมื่อมีเหตุร้ายขึ้น เจ้าหน้าที่ตำรวจสามารถไปที่เกิดเหตุเร็วที่สุด



- ก. จุด a
ข. จุด c
ค. จุด d
ง. จุด f

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 3 : นักเรียนสามารถบอก $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ใดๆ ได้

5) กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องที่สุด



- ก. จุดในกราฟ G คือ a, b, c, d, e, g
ข. ag และ af เป็นเส้นในกราฟ G
ค. bd และ bg เป็นเส้นในกราฟ G
ง. cd และ cf ไม่เป็นเส้นในกราฟ G

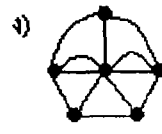
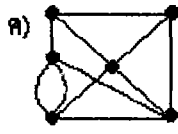
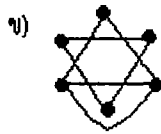
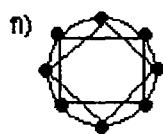
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 4 : นักเรียนสามารถบอกถึงความสัมพันธ์ การประชิด และตกกระทบในกราฟใดๆได้

6) จากกราฟในข้อ 5) จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องที่สุด

- ก. จุด a ประชิดกับจุด g
ข. จุด a ตกกระทบกับเส้น dg
ค. จุด b ประชิดกับจุด g
ง. จุด b ตกกระทบกับเส้น dg

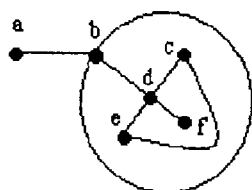
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 5 : นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟใดเป็นกราฟหลายชั้น

7) กราฟในข้อต่อไปนี้เป็น ไม่เป็น กราฟหลายชั้น



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 6 : นักเรียนสามารถบอกดีกรีของจุดใด ๆ ในกราฟได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่หรือจุดคี่

8) กำหนดกราฟ ดังรูป จงหาว่าจุดในข้อใดเป็นจุดคู่ทั้งหมด



ก. จุด b, f

ข. จุด a, d

ค. จุด c, f

ง. จุด b, e

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 7 : นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 1 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

9) กราฟที่มี 60 เส้น และดีกรีของทุก ๆ จุดเป็น 3 จงหาว่ากราฟนี้มีจำนวนจุดทั้งหมดกี่จุด

ก. 20 จุด

ข. 30 จุด

ค. 40 จุด

ง. 60 จุด

10) กราฟที่มี 45 เส้น มีจุดที่มีดีกรี 3 อยู่ 14 จุด นอกนั้นมีดีกรี 6 จงหาว่ากราฟนี้มีจุดทั้งหมดกี่จุด

ก. 8 จุด

ข. 14 จุด

ค. 20 จุด

ง. 22 จุด

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 8 : นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 2 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

11) กราฟในข้อต่อไปนี้เป็น ที่ไม่สามารถสร้าง (วาด) ได้

ก. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 4,3,2,2,1

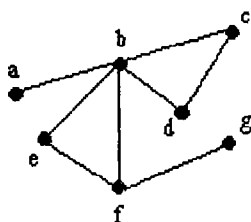
ข. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 3,3,2,2,2

ค. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 5,3,3,2,1

ง. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 4,3,2,1,1

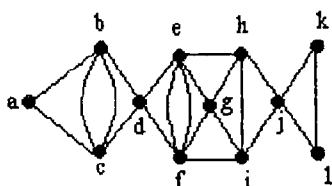
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 9 : นักเรียนสามารถบอกถึงความแตกต่างของ ทางเดิน , ทางเดินปิด , ทางเดินไม่ซ้ำ และวิถีได้

12) กำหนดกราฟ ดังรูป พิจารณาลำดับ f,e,b,d,c,b,a



- ก. ไม่เป็นทางเดิน
- ข. เป็นทางเดินปิด
- ค. เป็นทางเดินไม่ซ้ำ
- ง. เป็นวิถี

13) กำหนดกราฟดังรูป จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็น



- ก. ลำดับ a,b,d,f,e,h เป็นทางเดิน
- ข. ลำดับ l,j,i,h,j,k เป็นทางเดินไม่ซ้ำ
- ค. ลำดับ e,f,g,h,g,e เป็นทางเดินปิด
- ง. ลำดับ a,b,c,b,d,e เป็นวิถี

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 10 : นักเรียนสามารถหาทางเดิน ,ทางเดินไม่ซ้ำ และวิถี เมื่อกำหนดความยาวให้ได้

14) จากข้อ 13) จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็น

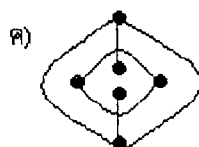
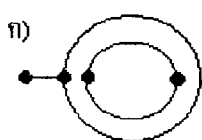
- ก. สามารถหาทางเดิน a-j ที่มีความยาว 11
- ข. สามารถหาทางเดินไม่ซ้ำ a-j ที่มีความยาว 11
- ค. สามารถหาวิถี d-l ที่มีความยาว 4
- ง. สามารถหาวิถี c-k ที่มีความยาว 4

15) จากข้อ 13) วิถี a-d ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่วิถี

- ก. 4 วิถี
- ข. 5 วิถี
- ค. 6 วิถี
- ง. 8 วิถี

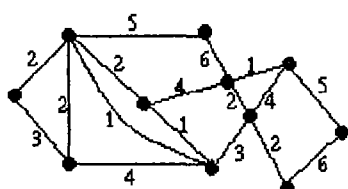
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 11 : นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟขาดตอน

16) กราฟในข้อใดต่อไปนี้เป็น กราฟไม่ขาดตอน



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 18 : นักเรียนสามารถหา วิธีที่สั้นที่สุดของการจับคู่ จุดคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟไม่ขาดตอนใดๆได้ และสามารถหา ทางเดินฮอยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่ใช่กราฟฮอยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้

24) กำหนดกราฟที่มีน้ำหนัก ดังรูป ถ้าเราสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟฮอยเลอร์เรียน จงหาจำนวนเส้นทั้งหมด ที่เพิ่มเข้ามา



- ก. 3 เส้น
- ข. 4 เส้น
- ค. 5 เส้น
- ง. 6 เส้น

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 19 : นักเรียนสามารถหาความยาวของทางเดินฮอยเลอร์เรียน จากกราฟที่ไม่ใช่กราฟฮอยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุด

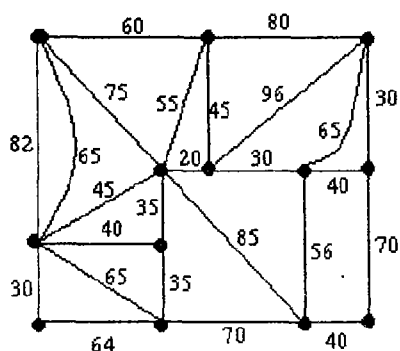
25) จากกราฟในข้อ 24) จงหาความยาวของ ทางเดินฮอยเลอร์เรียน ที่หาได้ มีค่าเท่าไร

- ก. 57
- ข. 58
- ค. 59
- ง. 60

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่ 20 : นักเรียนสามารถใช้ความรู้เรื่อง กราฟฮอยเลอร์เรียน ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

26) นายชวลิต ต้องการจะเลือกตั้งนายกรัฐมนตรี จึงต้องหาเสียงไปทั่วประเทศ จงหาว่าเขาจะเดินทางทั้งหมดเป็นระยะทางกี่กิโลเมตร จึงจะผ่านทางหลวงแต่ละทางหลวงเพียงครั้งเดียว แต่ถ้าต้องผ่านซ้ำก็ให้ใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุด และกลับมายังจุดเริ่มต้นเหมือนเดิม

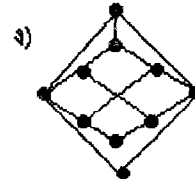
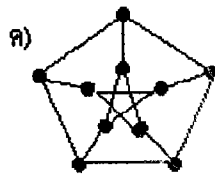
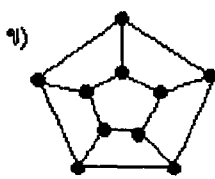
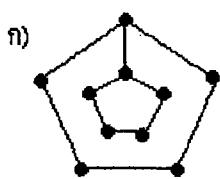
กราฟที่มีน้ำหนัก ข้างล่างแทน แผนที่ทางหลวงในประเทศไทย และ น้ำหนัก แทน ระยะทาง (กิโลเมตร) ดังนี้



- ก. 1378 กิโลเมตร
- ข. 1503 กิโลเมตร
- ค. 1579 กิโลเมตร
- ง. 1593 กิโลเมตร

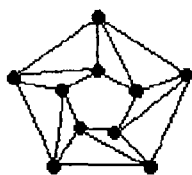
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อที่ 21 : นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟใดเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

27) กราฟในข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน



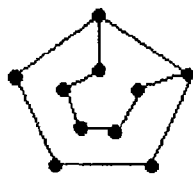
จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อที่ 22 : นักเรียนสามารถหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียนจากกราฟแฮมิลโทเนียนได้

28) กำหนดกราฟ ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นวัฏจักรแฮมิลโทเนียน



- ก. เป็นกราฟออยเลอร์เรียน แต่ไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน
- ข. ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน แต่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน
- ค. เป็นทั้งกราฟออยเลอร์เรียน และกราฟแฮมิลโทเนียน
- ง. ไม่เป็นทั้งกราฟออยเลอร์เรียน และกราฟแฮมิลโทเนียน

29) กำหนดกราฟ ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นวัฏจักรแฮมิลโทเนียน



- ก. เป็นกราฟออยเลอร์เรียน แต่ไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน
- ข. ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน แต่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน
- ค. เป็นทั้งกราฟออยเลอร์เรียน และกราฟแฮมิลโทเนียน
- ง. ไม่เป็นทั้งกราฟออยเลอร์เรียน และกราฟแฮมิลโทเนียน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อที่ 23 : นักเรียนสามารถให้ความรู้เรื่อง กราฟแฮมิลโทเนียนไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

30) ในการประชุมสมาคมแห่งหนึ่ง มีการจัดสมาชิกนั่งโต๊ะกลมโดยคนที่นั่งติดกันต้องรู้จักกัน ดังตารางแสดงความสัมพันธ์รู้จักกันของคนทั้ง 5 คน

จงหาวิธีการจัดให้สมาชิกนั่ง เป็นไปตามเงื่อนไข โดยเรียงชื่อคนไปตามลำดับ

	จิว	แจ้ว	จำ	จุ่ม	จ๊ิบ
จิว	-	✓	-	✓	✓
แจ้ว	✓	-	✓	-	✓
จำ	-	✓	-	✓	✓
จุ่ม	✓	-	✓	-	-
จ๊ิบ	✓	✓	✓	-	-

- ก) จิว จำ จุ่ม แจ้ว จ๊ิบ
- ข) จ๊ิบ จิว แจ้ว จำ จุ่ม
- ค) จุ่ม จิว แจ้ว จ๊ิบ จำ
- ง) ไม่สามารถจัดได้

แบบทดสอบอัตนัย

1) กลุ่มเพื่อนสนิท 6 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมี หนึ่ง , นุ่น , แนน , นัท , หนู และนิด ชอบกระจายข่าวลือในกลุ่ม ในวันหนึ่งๆ หนึ่ง จะคุยกับ นุ่นและนิด , นุ่น จะคุยกับ หนึ่ง แนน และนัท , แนน จะคุยกับ นุ่น นัท และหนู , นัท จะคุยกับ นุ่น แนน และหนู , หนู จะคุยกับ แนน , นัท และนิด , นิด จะคุยกับ หนึ่ง และหนู คนที่ได้รับข่าวอะไรมาในวันไหนก็จะ กระจายข่าวในวันถัดไป

จงสร้างแบบจำลองแทน การกระจายข่าวข้างต้น และจะต้องใช้ระยะเวลาอย่างรวดเร็วที่สุดกี่วัน ในการกระจายข่าวจาก หนึ่งไปนัท

2) ในการแข่งขันฟุตบอลโลกรอบ 8 ทีมสุดท้าย ถ้าจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด

จงสร้างแบบจำลองแทน การจัดการแข่งขันดังกล่าว และหาว่าจะมีการแข่งขันในรอบนี้ทั้งหมดกี่รอบ

3) กำหนดตาราง ดังรูป แสดง จำนวนรถเฉลี่ย (ร้อยคัน) บนช่วงถนน ของเส้นทางของถนนในกรุงเทพฯ

จงหาว่า นายธงชาติจะออกจากบ้าน (จุด A) ไปห้างเดอะมอลล์บางกะปิ (จุด G) จะใช้เส้นทางใดที่รถติดน้อยที่สุด โดยสมมุติว่า ถนนแต่ละสายมีความยาวเท่ากัน

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	10	-	-	-	10	-
B	10	-	10	-	-	-	-
C	-	10	-	15	-	8	10
D	-	-	15	-	5	-	15
E	-	-	-	5	-	20	-
F	10	-	8	-	20	-	-
G	-	-	10	15	-	-	-

หมายเหตุ เครื่องหมาย “ - ” หมายถึง ไม่มีถนนเชื่อมจุด 2 จุด ดังกล่าว

4) จากตารางในข้อ 3) ถ้าให้แสดง ระยะทาง (กิโลเมตร) ของเส้นทางของถนน

ถ้านายธงชาติ ต้องการพาแฟนสาวชาวญี่ปุ่น ขับรถเที่ยวรอบกรุงเทพฯ ตอนที่ 3 จงหาเส้นทางที่นายธงชาติจะขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว หรือผ่านซ้ำ โดยมีระยะทางรวมน้อยที่สุด

5) กำหนดตาราง ดังรูป แสดง ระยะทาง (กิโลเมตร) ของเส้นทางการติดต่อของจังหวัดต่างๆ ทางภาคเหนือ อยากทราบว่า ถ้าน้องพรต้องการเดินทางไปจังหวัดต่างๆ เพื่อขายเครื่องสำอางมียี่ห้อ โดยผ่านจังหวัดต่างๆ เพียงครั้งเดียว แล้วกลับมายังจังหวัดเดิมที่เริ่มต้น น้องพรจะเดินทางโดยใช้เส้นทางใด และมีผลรวมของระยะทางเท่าไร

	ลำพูน	ลำปาง	พิษณุโลก	พิจิตร	แพร่
ลำพูน	-	2	7	1	-
ลำปาง	2	-	-	2	5
พิษณุโลก	7	-	-	3	-
พิจิตร	1	2	3	-	7
แพร่	-	5	-	7	-

ภาคผนวก ค
บทเรียนและคู่มือครูเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

คำชี้แจงในการใช้บทเรียนและคู่มือครู เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทเรียนและคู่มือครูฉบับนี้ จัดทำขึ้นเป็นต้นแบบบทเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เนื้อหาทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่สอนในชั้นนี้ เป็นการนำเสนอเรื่อง ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโทเนียน

ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นมาตั้งแต่ศตวรรษที่ 18 และได้รับความสนใจอย่างมากในศตวรรษที่ 20 มีการนำความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้งานได้มากมาย ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ การวิจัยการดำเนินการ พาณิศาสตร์ ภาษาศาสตร์ และด้านอื่นๆ กราฟเป็นตัวแทนที่เหมาะสมในการสร้างแบบจำลองปัญหา ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่างๆ ได้มีการใช้กราฟในการวิเคราะห์ขั้นตอนวิธีแก้ไขปัญหา และการค้นหาคำตอบ การที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงบทเรียนและคู่มือครูเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีวัตถุประสงค์เพื่ออำนวยความสะดวกในการเตรียมสอน และในการสอนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

บทเรียนและคู่มือครู ประกอบด้วย

1. คำนำประจำบท ซึ่งจะบอกหัวเรื่องของบทเรียน จำนวนคาบที่ใช้สอนในแต่ละหัวข้อ พร้อมทั้งคำอธิบายภาพรวมของเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบท
2. บทเรียนของนักเรียนปรากฏอยู่ในกรอบของคู่มือครู
3. ส่วนที่อยู่นอกกรอบ จะมีคำอธิบายเกี่ยวกับเนื้อหาในลักษณะต่างๆ กัน ดังนี้
 - 3.1 ในบางหัวข้อ อาจมีคำอธิบายเหตุผลในการนำเนื้อหาดังกล่าวมาสอน ซึ่งอาจเป็นการช่วยให้ให้นักเรียนสนใจในหัวข้อที่กำลังจะศึกษา
 - 3.2 จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของการสอนในแต่ละหัวข้อ ได้ระบุสิ่งที่ต้องการให้นักเรียนได้เรียนรู้เอาไว้
 - 3.3 เชิงอรรถที่มีอยู่แต่ละหัวข้อ จะใช้เลขไทยกำกับไว้หรือบรรทัดหรือข้อความในบทเรียนของนักเรียน ในเชิงอรรถจะมีคำอธิบายที่เป็นส่วนเพิ่มเติมนอกเหนือจากบทเรียนหรืออาจเป็นคำตอบ หรือเสนอแนวการสอนเฉพาะตอน
 - 3.4 คำอธิบายเพิ่มเติม เพื่อให้ความรู้แก่ผู้สอน
 - 3.5 คำตอบของแบบฝึกหัดในชั้นเรียน แบบฝึกหัดประจำหัวข้อและวิธีทำของแบบฝึกหัดบางข้อ
 - 3.6 กิจกรรมเสริม ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมเสนอแนะ ปัญหาชวนคิด เกม

ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น (15 คาบ)

บทเรียนมี 2 หัวข้อ ดังนี้

1. ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ
 - 1.1 บทนิยามของกราฟและตัวอย่าง (3 คาบ)
 - 1.2 ดีกรีของจุดในกราฟ (2 คาบ)
 - 1.3 วิธีและวัฏจักร (3 คาบ)
2. กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโทเนียน
 - 2.1 กราฟออยเลอร์เรียน (4 คาบ)
 - 2.2 กราฟแฮมิลโทเนียน (3 คาบ)

เนื้อหาเป็นการนำเสนอเรื่อง กราฟ ซึ่งเป็นตัวแบบจำลองประเภทหนึ่งในการแก้ปัญหาแบบต่าง ๆ ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นมาตั้งแต่ศตวรรษที่ 18 และได้รับความสนใจอย่างมากในศตวรรษที่ 20 มีการนำความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟไปประยุกต์ใช้งานได้มากมาย ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ การวิจัย การดำเนินการ พาณิศาสตร์ ภาษาศาสตร์ และด้านอื่นๆ กราฟเป็นตัวแทนที่เหมาะสมในการสร้างแบบจำลองปัญหา เพราะมีโครงสร้างง่าย ๆ ประกอบด้วย จุดและเส้น เท่านั้น กราฟจะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้มีการใช้กราฟในการวิเคราะห์ขั้นตอนวิธีแก้ปัญหา และการค้นหาคำตอบ

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อ โดยคำนึงถึงระดับสติปัญญา และความสามารถของผู้เรียน บางหัวข้ออาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง หรืออาจเป็นผู้อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ร่วมกันทำกิจกรรมในห้องเรียน ถ้าเป็นไปได้ในแต่ละหัวข้อควรให้นักเรียนสรุปบทเรียนเอง โดยครูอาจเสริมแต่งบ้างตามความเหมาะสม

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

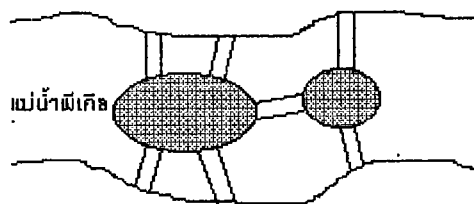
ให้นักเรียนสามารถ

- 1) บอกบทนิยามและยกตัวอย่างของกราฟต่าง ๆ
- 2) บอกสมบัติของกราฟต่าง ๆ พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
- 3) นำสมบัติของกราฟต่าง ๆ ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

1. ความรู้เบื้องต้นในทฤษฎีกราฟ

ทฤษฎีกราฟ มีประวัติความเป็นมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1736 จากผลงานของนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ ชื่อ **เลออนฮาร์ด ออยเลอร์** (Leonhard Euler) ที่ได้แก้ปัญหา **การเดินข้ามสะพานที่เมืองเคอนิกส์เบิร์ก** (Königsberg Bridge Problem) ปัญหานี้มีอยู่ว่า ที่เมืองเคอนิกส์เบิร์กมีเกาะกลางแม่น้ำอยู่ 2 เกาะ และมีสะพานเชื่อมระหว่างเกาะกับตัวเมือง 7 สะพานด้วยกัน ดังรูป



ชาวเมืองได้ตั้งคำถามว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินข้ามสะพานทั้ง 7 นี้ โดยไม่ซ้ำกัน ถ้าเริ่มต้นที่จุดใด ก็ให้กลับมาที่จุดนั้น^๑

ออยเลอร์ ได้ตอบปัญหานี้ว่า เป็นไปไม่ได้ที่จะหาเส้นทางดังกล่าว นอกจากนั้น ท่านยังให้แนวคิดในการตอบคำถามปัญหาประเภทเดียวกันนี้ และแนะนำโมเดลซึ่งเป็นที่ยึดกันในปัจจุบันว่า กราฟออยเลอร์เรียน (Eulerian graph) (ซึ่งเราจะศึกษากันในหัวข้อที่ 2)

ผลงานของออยเลอร์ เป็นจุดเริ่มต้นของสาขาใหม่ทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า ทฤษฎีกราฟ (Graph Theory) ทฤษฎีกราฟได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างแบบจำลอง และแก้ปัญหามากมายใน สาขาวิชาต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ จิตวิทยา สังคมศาสตร์ ภาษาศาสตร์ และอื่นๆ ในหัวข้อนี้จะแนะนำบทนิยามที่สำคัญ พร้อมทั้งตัวอย่างการนำทฤษฎีกราฟ ไปใช้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

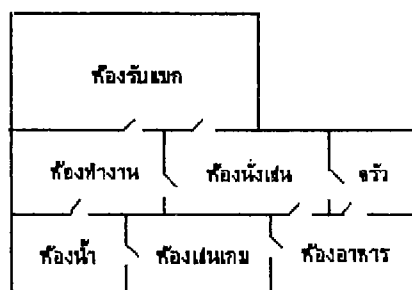
- 1) นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์ต่าง ๆ ได้
- 2) นักเรียนสามารถแก้ไขปัญหาดังกล่าวโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้
- 3) นักเรียนสามารถบอก $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ใดๆ ได้
- 4) นักเรียนสามารถบอกถึงความสัมพันธ์ การประชิด และตกระทบ ในกราฟใดๆ ได้
- 5) นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟหลายชั้น

^๑ ครูให้นักเรียนลองหาเส้นทางดังกล่าว เพื่อเป็นการรื้อให้นักเรียนสนใจทฤษฎีกราฟ (โดยสร้างแบบจำลองเพื่อให้พิจารณาหาเส้นทางดังกล่าวได้สะดวกขึ้น)

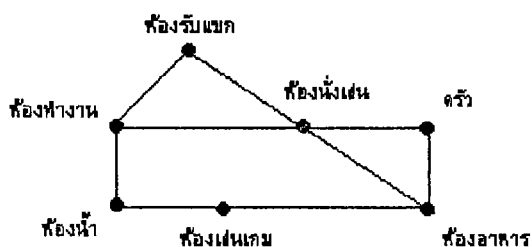
1.1 บทนิยามของกราฟและตัวอย่าง

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่าง ต่อไปนี้ ^๒

ตัวอย่างที่ 1 สมมุติว่า มีแปลนบ้านชั้นล่างของบ้านหลังหนึ่ง ดังรูป



เราสามารถสร้างแบบจำลอง ในการแสดงว่ามีห้องใดบ้างที่มีทางเข้าออกร่วมกัน โดยให้ จุด แทน ห้อง
เส้น แทน ประตูทางเข้าออก ดังรูปต่อไปนี้



แบบจำลองดังกล่าว สถาปนิกรู้จักกันในชื่อว่า “แผนภาพหมุนเวียน” ทั้งนี้สถาปนิกใช้แผนภาพหมุนเวียนในการวิเคราะห์ความเคลื่อนไหวของคนในตึกใหญ่ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการออกแบบสนามบิน การวางผังรูปเปอร์มาเก็ต แผนภาพดังกล่าวจะเป็นประโยชน์ในการแสดงให้เห็น การเชื่อมโยงระหว่างห้องต่างๆ แต่ไม่ได้บอกเกี่ยวกับขนาดของห้อง

^๒ ครูตั้งคำถามง่าย ๆ เพื่อให้นักเรียนใช้กราฟ ช่วยในการตอบคำถาม เช่น ตัวอย่างที่ 1 ถามว่า “ถ้าเราอยู่ห้องอาหาร จะเดินไปห้องรับแขก ได้อย่างไรโดยที่ผ่านห้องอื่นๆน้อยที่สุด”

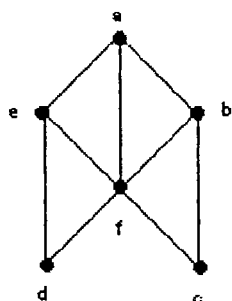
3

ตัวอย่างที่ 2 ในการเตรียมรบของทหารประเทศหนึ่ง จะมีการวางแผน และเตรียมการต่อสู้ที่จุดต่างๆ ซึ่งจะติดต่อและส่งสัญญาณโดยตรง ระหว่าง ทหาร 2 หน่วยใดๆ ดังนี้

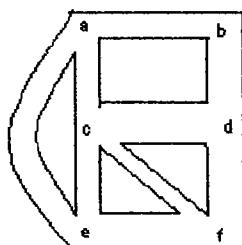
ทหารหน่วย	a	สามารถติดต่อกับทหารหน่วย	b, e, f
ทหารหน่วย	b	สามารถติดต่อกับทหารหน่วย	a, c, f
ทหารหน่วย	c	สามารถติดต่อกับทหารหน่วย	b, f
ทหารหน่วย	d	สามารถติดต่อกับทหารหน่วย	e, f
ทหารหน่วย	e	สามารถติดต่อกับทหารหน่วย	a, d, f

เราสามารถสร้างแบบจำลอง แทน สถานการณ์ดังกล่าว เพื่อ แสดงการติดต่อสื่อสารระหว่างหน่วยทหาร

โดยให้ จุด แทน หน่วยทหาร
เส้น แทน การติดต่อสื่อสาร ดังรูปต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3 สมมติว่า มีแผนที่ของเมืองๆ หนึ่ง เป็นดังนี้



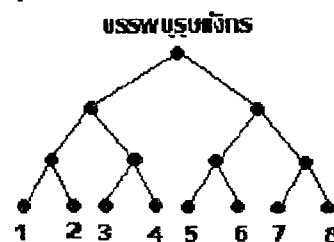
ปัญหาน่าคิด



สมมติว่า ในปัจจุบันมีมังกร อยู่ 8 ชนิด ซึ่งมาจากการ วิวัฒนาการของบรรพบุรุษมังกร ชนิดดั้งเดิมชนิดหนึ่ง โดยจะใช้ เวลาประมาณ 10,000 ปี ในการ ที่มังกรแต่ละชนิดจะกลายพันธุ์ ไปสู่มังกรพันธุ์ใหม่ 2 ชนิด (ก่อนที่มังกรชนิดเดิมจะสูญ พันธุ์)
จงหาว่า จะต้องใช้เวลา ประมาณกี่ปี กว่าที่จะมีมังกรอยู่ 8 ชนิด

เฉลยปัญหา น่าคิด

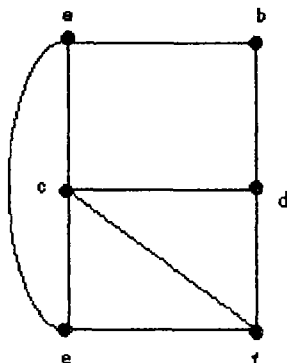
จากสถานการณ์ดังกล่าว เราสามารถสร้างแบบจำลองได้ ดังรูป



จากรูปข้างต้น จะได้ว่า กว่าจะมีมังกร 8 ชนิด ต้องเป็นการวิวัฒนาการรุ่นที่ 3
ดังนั้น ต้องใช้เวลาประมาณ 30,000 ปี

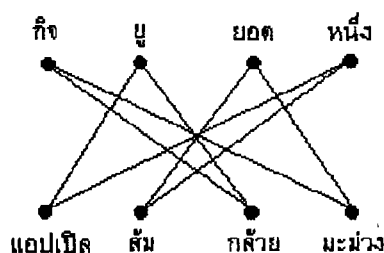
4

เราสามารถสร้างแบบจำลอง แผนแผนที่เมืองดังกล่าว
โดยให้ จุด แทน แยกต่างๆ
เส้น แทน ถนนสายต่างๆ ดังรูปต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 4 สมมติว่าเรามีตะกร้าผลไม้ใบหนึ่ง ซึ่งมี แอปเปิ้ล ส้ม กล้วย และมะม่วง อย่างละ 1 ผล และมีเด็กอยู่ 4 คน คือ กิจ ยู ยอด และ หนึ่ง เราทราบว่า กิจชอบกล้วยและมะม่วง ยูชอบแอปเปิ้ลและกล้วย ยอดชอบส้มและมะม่วง หนึ่งชอบแอปเปิ้ลและส้ม เมื่อสร้างแบบจำลองแล้วอยากทราบว่า ควรจะแจกผลไม้ ให้เด็กทั้ง 4 คน อย่างไรโดยที่เด็กแต่ละคนได้รับผลไม้ที่ตนเองชอบ

เราสามารถสร้างแบบจำลองได้โดยให้ จุด แทน คนและผลไม้ ; เส้น แทน ความชอบของคนต่อผลไม้



จากแบบจำลอง เราอาจแจกผลไม้ให้เด็ก ๆ ได้ดังนี้

กิจ	ได้รับ	กล้วย
ยู	ได้รับ	แอปเปิ้ล
ยอด	ได้รับ	มะม่วง
หนึ่ง	ได้รับ	ส้ม

ให้นักเรียนพิจารณาว่า สามารถแจกผลไม้ให้เด็ก ๆ เหล่านี้
โดยวิธีที่แตกต่างจากนี้หรือไม่ ^๓

ปัญหาคิด

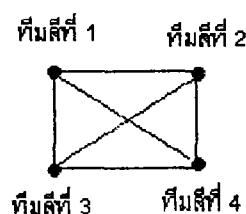


การแข่งขันฟุตบอลในกีฬาของ
โรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งแบ่งเป็น 4 สี
กำหนดให้ทีมฟุตบอลแต่ละสีแข่งขัน
แบบพบกันหมด จงหาว่าจะมีการจัด
การแข่งขันกี่รอบ

เฉลยปัญหาคิด

เราจะจำลองสถานการณ์นี้โดยให้

จุด แทน ทีมสีต่างๆ
เส้น แทน การจัดการแข่งขัน



จากรูปข้างต้น

จะเห็นว่า มี เส้นอยู่ 6 เส้น

ดังนั้น จะมีการแข่งขันทั้งหมด 6 รอบ

^๓ สามารถหาคำตอบได้อีกวิธี ดังนี้
กิจ ได้รับ มะม่วง, ยู ได้รับ กล้วย,
ยอด ได้รับ ส้ม, หนึ่ง ได้รับ แอปเปิ้ล

5

ตัวอย่างที่ 5 คนงาน 6 คน มีคุณสมบัติที่จะทำงาน 6 งาน ดังตาราง

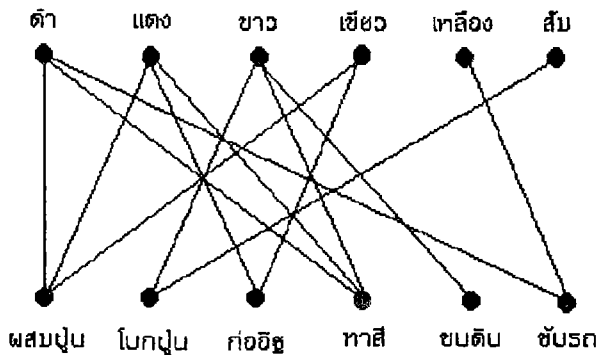
งาน คน	ผสมปูน	โบกปูน	ก่ออิฐ	ทาสี	ขบตีบ	ขับรถ
ดำ	✓			✓		✓
แดง	✓		✓	✓		
ขาว		✓		✓	✓	
เขียว	✓		✓			
เหลือง						✓
ส้ม		✓				

เราสามารถสร้างแบบจำลองได้

โดยให้ จุด แทน คนและงาน

เส้น แทน ความสามารถในการทำงานของแต่ละคน

ดังนี้



ให้นักเรียนหา การมอบหมายงานเพื่อให้ทุกคนมีงานทำจากสถานการณ์ ดังกล่าว

การณ ดังกล่าว

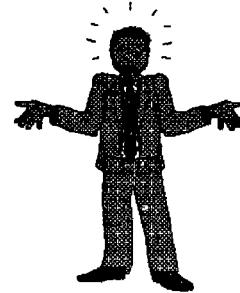
การมอบหมายงานดังกล่าว เป็นดังนี้

ดำ-ผสมปูน, แดง-ทาสี, ขาว-ขบตีบ, เขียว-ก่ออิฐ, เหลือง-ขับรถ, ส้ม-โบกปูน หรือ

ดำ-ทาสี, แดง-ก่ออิฐ, ขาว-ขบตีบ, เขียว-ผสมปูน, เหลือง-ขับรถ, ส้ม-โบกปูน หรือ

ดำ-ทาสี, แดง-ผสมปูน, ขาว-ขบตีบ, เขียว-ก่ออิฐ, เหลือง-ขับรถ, ส้ม-โบกปูน

ปัญหาน่าคิด โครขโมยส้ม ?



กีฟ, กราฟ, กี้, เก่ง, โก้ และ

ก้องเป็นผู้ต้องหาในการ
ขโมยส้ม โดยจากการตรวจ
สอบของ ตำรวจพบว่า มีขโมย
2 คน

แต่จากคำให้การ ต่อไปนี้

กีฟ : " โก้, เก่ง เป็นขโมย "

กราฟ : " กี้, ก้อง เป็นขโมย "

กี้ : " โก้, ก้อง เป็นขโมย "

เก่ง : " โก้, กีฟ เป็นขโมย "

โก้ : " กี้, กราฟ เป็นขโมย "

ก้อง : " ผมไม่ทราบ "

ตำรวจได้ใช้เครื่องจับเท็จ
พิสูจน์พบว่า มี 4 คนเท่านั้นที่
กล่าวชื่อขโมยได้ถูก 1 ชื่อและ
ไม่ถูก 1 ชื่อ แต่มีคนหนึ่งที่
กล่าวไม่ถูกเลย

6

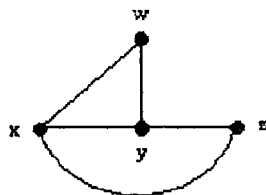
จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วจะเห็นว่า **จุดในแบบจำลอง อาจแสดงแทนด้วย จุดในระนาบ** ซึ่งหมายถึง สิ่งที่เราต้องการจะศึกษา เช่น ห้องต่างๆ , คน , สิ่งของ ฯลฯ และ **เส้นในแบบจำลอง แสดงแทนด้วย เส้นในระนาบ** ซึ่งหมายถึง ความสัมพันธ์ของสิ่งที่เราต้องการจะศึกษา เช่น ประตูทางเข้าออก , ความสามารถในการทำงาน , ถนน ฯลฯ

สิ่งเหล่านี้ก่อให้เกิดแนวความคิดว่า สถานการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ได้โดยใช้แบบจำลองที่ประกอบไปด้วย จุด และเส้น ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจุด สามารถนำไปสู่สมมติฐานของกราฟ ดังนี้

บทนิยาม 1

กราฟ G ประกอบไปด้วย $V(G)$ และ $E(G)$ ซึ่ง $V(G)$ คือ กลุ่มของสิ่งที่เรียกว่า **จุด (vertex)** โดยที่ $V(G)$ มีจุดอย่างน้อย 1 จุด $E(G)$ คือ กลุ่มของสิ่งที่เรียกว่า **เส้น (edge)** โดยที่เส้นแต่ละเส้นนี้เชื่อมระหว่าง 2 จุดใดๆใน $V(G)$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดกราฟ S ดังรูป



จะได้ว่า จุดในกราฟ S คือ w, x, y และ z
เส้นในกราฟ S คือ wx, wy, xy, xz และ yz

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดกราฟ G ดังรูป

u

•

จะได้ว่า จุดในกราฟ G คือ u
ไม่มี เส้นในกราฟ G
เราเรียกกราฟที่มีจุด 1 จุด ว่า **กราฟทริเวียล**
 $\therefore$ กราฟ G เป็น กราฟทริเวียล

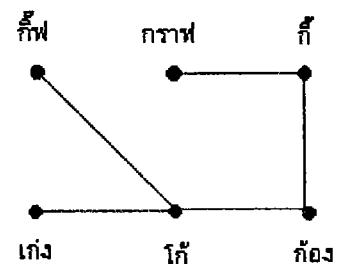
เฉลยปัญหา หน้าคิด

เราจะจำลองสถานการณ์นี้
โดยให้

จุด แทน ชื่อคน

เส้น แทน การถูกกล่าวหา
ว่าเป็นขโมย

ดังรูปต่อไปนี้



จากกราฟ ถ้าโก้ ไม่ใช่
ขโมย จะได้ว่า ก๊ฟ, เก้ง, ก้อง
ต้องเป็นขโมย
ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (ต้องมีขโมย
2 คน)

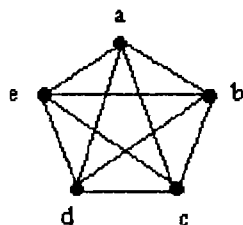
$\therefore$ โก้ ต้องเป็นขโมย และ
ก๊ฟ, เก้ง, ก้อง ต้องไม่ใช่ขโมย

ถ้าก๊ ไม่ใช่ขโมย จะได้ว่า
กราฟ และ ก้อง เป็นขโมย แต่
ก้องไม่ได้เป็นขโมย (ข้างบน)

นั่นคือ ก๊ต้องเป็นขโมย

$\therefore$ ก๊และโก้ ต้องเป็นขโมย

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดกราฟ T ดังรูป

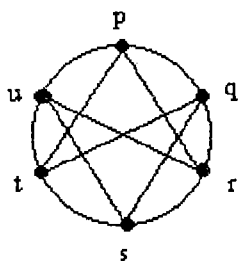


จะได้ว่า จุดในกราฟ T คือ a, b, c, d และ e

เส้นในกราฟ T คือ ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce และ de

บทนิยาม 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า
จุด u ประชิดกับ จุด v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v
และจะเรียก จุด u และจุด v ว่า จุดปลายของเส้น uv
ถ้า $e = uv$ เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่า
จุด u และ v ตกกระทบกับ เส้น e หรือ
เส้น e ตกกระทบกับ จุด u และ v

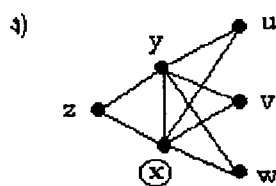
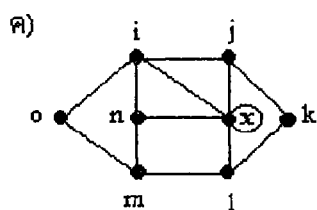
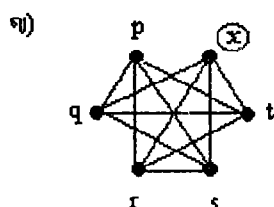
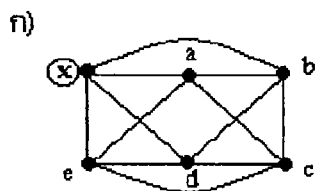
ตัวอย่างที่ 9 กำหนดกราฟ ดังรูป



จะได้ว่า จุด p ประชิดกับ จุด q, r, t และ u
และตกกระทบกับ เส้น pq, pr, pt และ pu
จุด u ประชิดกับ จุด p, r, s และ t
และตกกระทบกับ เส้น up, ur, us และ ut

๕ ครูให้นักเรียนหาว่า
จุดอื่นๆในกราฟประชิด
กับจุดใดบ้าง หรือตก
กระทบกับเส้นใดบ้าง

ให้นักเรียนหาว่า จุด x ประชิดกับจุดใดบ้าง และตกกระทบกับเส้นใดบ้าง จากกราฟ ต่อไปนี้



นักเรียนสังเกตเห็นสิ่งเหล่านี้หรือไม่

- 1) เส้นที่เชื่อมจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟ จะเป็นเส้นตรง หรือ เส้นโค้งก็ได้
- 2) ไม่มีเส้นใดในกราฟ ตัดกับตัวมันเอง หรือ ลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น
- 3) เส้นสองเส้นในกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันโดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่

ตัวอย่างที่ 10 จากปัญหา “การเดินทางข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์ก” เราสามารถสร้างกราฟ G_0 แทนสถานการณ์นี้

กำหนดให้ จุด a, d แทน ฝั่งแม่น้ำ

จุด b, c แทน เกว่งทั้ง 2 เกว่ง

และ เส้น แทน สะพานทั้ง 7 สะพาน

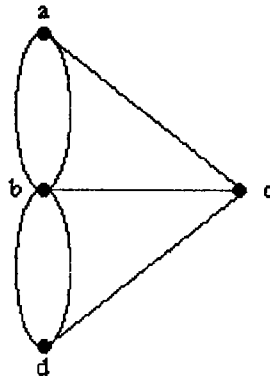
๖ ก) จุด x ประชิดกับจุด a, b, d, e และ ตกกระทบกับเส้น xa, xb, xd, xe

ข) จุด x ประชิดกับจุด q, r, s, t และ ตกกระทบกับเส้น xq, xr, xs, xt

ค) จุด x ประชิดกับจุด i, j, k, l และ ตกกระทบกับเส้น xi, xj, xn, xl

ง) จุด x ประชิดกับจุด z, y, u, v, w และ ตกกระทบกับเส้น xz, xy, xu, xv, xw

ดังกราฟต่อไปนี้



จากกราฟ G_0 จะเห็นว่าเส้นที่เชื่อมจุด a กับจุด b มี 2 เส้น

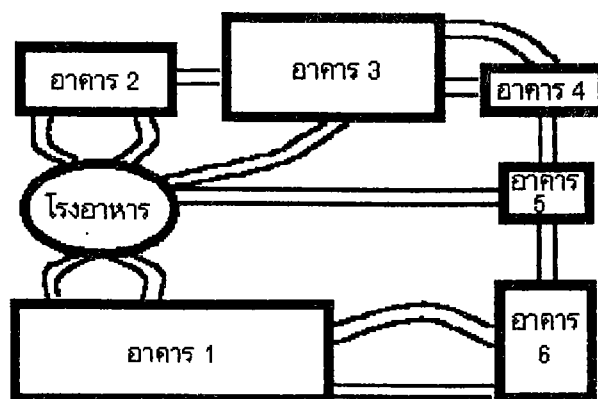
และเส้นที่เชื่อมจุด b กับจุด d มี 2 เส้น

เราเรียก เส้นตั้งแต่ 2 เส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดเดียวกันว่า เส้นหลายชั้น
และเรียก กราฟที่ยอมให้มีเส้นหลายชั้นอยู่ในกราฟได้ ว่า **กราฟหลายชั้น**

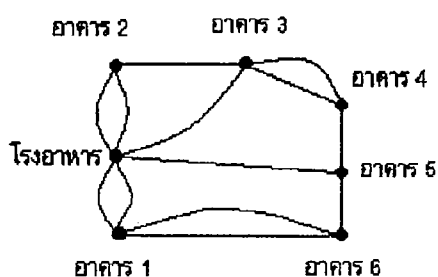
นั่นคือ กราฟ G_0 เป็น กราฟหลายชั้น

ในบางสถานการณ์การใช้ กราฟหลายชั้น เป็นแบบจำลอง จะทำให้สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงมากขึ้น เช่น ในแผนที่ถนน อาจมีถนนมากกว่าหนึ่งสายที่เชื่อมสถานที่สองแห่งเข้าด้วยกัน

ตัวอย่างที่ 11 สมมติว่า มีแผนที่ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

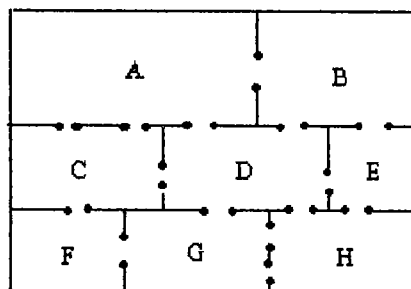


เราสามารถสร้างแบบจำลอง แทนโรงเรียนดังกล่าว โดยให้
จุด แทน อาคารต่าง ๆ และ เส้น แทน ถนนเชื่อมระหว่างอาคาร ซึ่งเป็น
กราฟหลายชั้น ดังนี้



แบบฝึกหัด 1.1

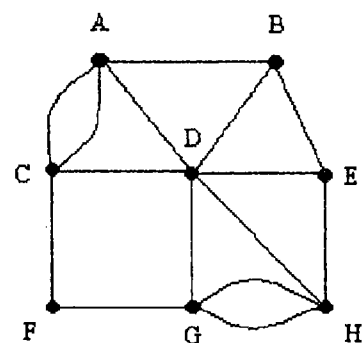
- 1.) แปลนห้างสรรพสินค้าชั้นล่างแห่งหนึ่ง แสดงดังรูป



จงสร้างกราฟเพื่อจำลองสถานการณ์ดังกล่าว

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

- 1) จากแบบแปลน เราสามารถ
สร้างกราฟเป็นแบบจำลอง
โดยให้ จุด แทน ล็อก และ
เส้น แทน ประตู ได้ดังนี้



11

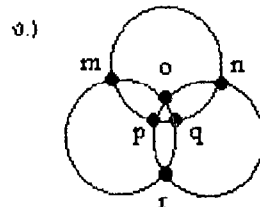
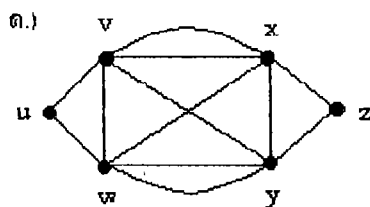
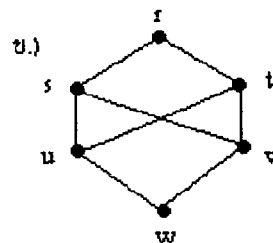
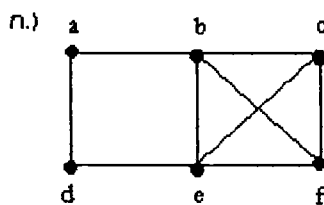
2) แมว นก ปลา ไก่ เป็นเพื่อนกันและต้องการจะไปงานแต่งงานแห่งหนึ่ง แต่มีเงื่อนไขว่า ผู้ที่จะเข้าไปในงานนี้ต้องไปเป็นคู่ชาย-หญิงเท่านั้น หญิงสาวเหล่านี้จึงต้องชวนเพื่อนชายไปด้วย กลุ่มเพื่อนชายที่หญิงสาวแต่ละคนอยากชวนไปงานแต่งงานด้วยเป็นไปดังนี้

แมว อยากชวน สมชาย การุณ
นก อยากชวน สมชาย พจน์
ปลา อยากชวน การุณ ชชาติชาย
ไก่ อยากชวน ชชาติชาย พจน์

ถ้าไม่มีเพื่อนชายคนใดปฏิเสธเมื่อหญิงสาวเหล่านี้ชวน จงสร้างแบบจำลองของสถานการณ์ดังกล่าว และนักเรียนคิดว่าหญิงสาวเหล่านี้ จะได้ไปงานทุกคนหรือไม่ ถ้าได้ไปทุกคนพวกเธอเหล่านี้จะไปกับใครบ้าง

3) ให้นักเรียนยกตัวอย่างเหตุการณ์หรือปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันสัก 3 ตัวอย่าง ซึ่งสามารถจำลองได้ด้วยกราฟ

4.) จากกราฟที่กำหนดให้ จงหา $V(G)$ และ $E(G)$ ใดๆ



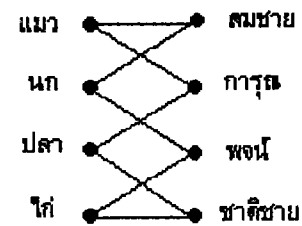
5.) จงวาดกราฟ G ใดๆ ต่อไปนี้ เมื่อกำหนด $V(G)$ และ $E(G)$ ใดๆ ดังนี้

ก.) จุดใน G คือ 1,2,3,4,5 เส้นใน G คือ 12,15,25,34

ข.) จุดใน G คือ a,b,c,d,e,f เส้นใน G คือ ab,ab,cd,de, ef,af,ce

ค.) จุดใน G คือ w,x,y,z แต่ไม่มีเส้นใน G

2) จากสถานการณ์ดังกล่าว เราสามารถสร้างกราฟได้ ดังนี้



จากกราฟ เราจะจับคู่ได้ ดังนี้

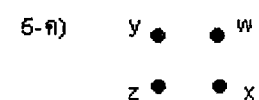
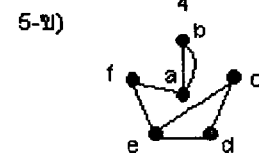
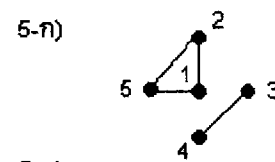
แมว-สมชาย, นก-พจน์,
ปลา-การุณ, ไก่-ชาติชาย หรือ
แมว-การุณ, นก-สมชาย,
ปลา-ชาติชาย, ไก่-พจน์

4-ก) จุดใน G คือ a,b,c,d,e,f
เส้นใน G คือ ab,ad,bc,
be,bf,ce,cf,de,ef

4-ข) จุดใน G คือ r,s,t,u,v,w
เส้นใน G คือ rs,rt,su,sv,
tu,tv,uw,vw

4-ค) จุดใน G คือ u,v,w,x,y,z
เส้นใน G คือ uv,uw,vx,
vx,vw,vy,xw,xy,xz,wy,wy,yz

4-ง) จุดใน G คือ m,n,o,p,q,r
เส้นใน G คือ mn,mo,mp,
mr,on,op,oq,nq,nr,pq,pr,qr

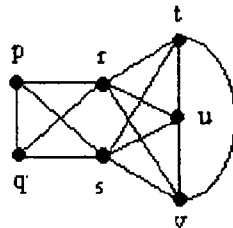


1.2 ดีกรีของจุดในกราฟ

บทนิยาม 1 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G
ดีกรีของ u ใน G คือ จำนวนของเส้นที่ติดกระทบกับจุด u
 เขียนแทนด้วย $d(u)$

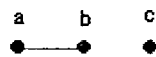
เรากล่าวว่ **u เป็นจุดคู่** ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็นจำนวนคู่
 u เป็นจุดคี่ ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็นจำนวนคี่
 และ **u เป็นจุดเอกเทศ** ก็ต่อเมื่อ ดีกรีของ u เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดกราฟ ดังรูป



จะได้ว่า	$d(p) = 3$	ดังนั้น	p เป็นจุดคี่
	$d(q) = 3$	ดังนั้น	q เป็นจุดคี่
	$d(r) = 5$	ดังนั้น	r เป็นจุดคี่
	$d(s) = 5$	ดังนั้น	s เป็นจุดคี่
	$d(t) = 4$	ดังนั้น	t เป็นจุดคู่
	$d(u) = 4$	ดังนั้น	u เป็นจุดคู่
	$d(v) = 4$	ดังนั้น	v เป็นจุดคู่

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดกราฟ ดังรูป



จะได้ว่า	$d(a) = 1$	ดังนั้น	a เป็นจุดคี่
	$d(b) = 1$	ดังนั้น	b เป็นจุดคี่
	$d(c) = 0$	ดังนั้น	c เป็นจุดเอกเทศ

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- 6) นักเรียนสามารถบอกดีกรีของจุดใดๆในกราฟได้ และสามารถบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่ หรือ จุดคี่
- 7) นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 1 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
- 8) นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 2 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่าง จำนวนของเส้น
ใน G และผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ G ^๑

ทฤษฎีบท 1

$$\text{ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ} = 2 \times \text{จำนวนเส้น}$$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้ากราฟ G มีเส้น 20 เส้น และดีกรีของทุกๆ จุดใน G
เป็น 4 จงหาว่ากราฟ G มีจำนวนจุดเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1

$$\begin{aligned} \text{ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ } G &= 2 \times \text{จำนวนเส้นใน } G \\ 4 \times \text{จำนวนจุดใน } G &= 2 \times 20 \\ \text{จำนวนจุดใน } G &= \frac{2 \times 20}{4} \\ &= 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟ G มีจุดทั้งหมด 10 จุด

ตัวอย่างที่ 4 ถ้ากราฟ H มีเส้น 30 และมีจุดที่มีดีกรี 2 อยู่ 12 จุด
นอกนั้นเป็นดีกรี 3 จงหาว่ากราฟ H มีจำนวนของจุดเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จากทฤษฎีบท

$$\begin{aligned} \text{ผลรวมของดีกรีของจุดในกราฟ } H &= 2 \times \text{จำนวนเส้นใน } H \\ (2 \times \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 2}) + (3 \times \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3}) &= 2 \times 30 \\ (2 \times 12) + (3 \times \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3}) &= 60 \\ 3 \times \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3} &= 60 - 24 \\ \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3} &= \frac{36}{3} \\ &= 12 \text{ จุด} \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟ H มีจุดทั้งหมด $12 + 12 = 24$ จุด

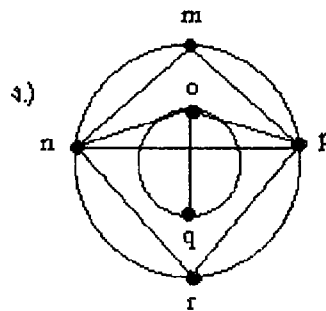
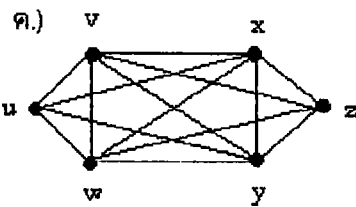
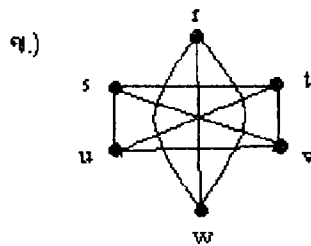
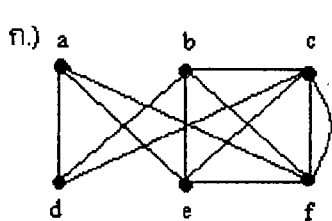
^๑ ครูวาดกราฟหลายๆ รูปให้นักเรียนพิจารณา แล้วสรุปออกมาเป็นทฤษฎีบท

14

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ^๒

- 1) ถ้ากราฟ G มีจุด 12 จุด, มีเส้น 14 เส้น และจุดแต่ละจุดมีดีกรี 2 หรือ 3 เท่านั้น แล้วจงหาจำนวนจุดที่มีดีกรี 2
- 2) ถ้ากราฟ G มีเส้น 20 เส้น และมีดีกรีของจุดทุกจุดเท่ากันหมด แล้วจงหาจำนวนจุดที่ G มีโอกาสเป็นไปได้ทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณากราฟ ต่อไปนี้



จากกราฟ ก.) จะได้ว่า จุดที่เป็นจุดตัด คือ จุด a, c, d และ f
รวมทั้งหมด 4 จุด

จากกราฟ ข.) จะได้ว่า จุดที่เป็นจุดตัด คือ จุด r, s, t, u, v และ w
รวมทั้งหมด 6 จุด

จากกราฟ ค.) จะได้ว่า ไม่มีจุดที่เป็นจุดตัด

จากกราฟ ง.) จะได้ว่า จุดที่เป็นจุดตัด คือ จุด o และ p
รวมทั้งหมด 2 จุด

จะเห็นว่า กราฟทั้งหมดมีจุดที่เป็นจำนวนคู่

ทฤษฎีบท 2 ในกราฟ G ใดๆ จำนวนจุดที่มีเป็นจำนวนคู่

^๒ 1) ให้ จุดที่มีดีกรี 2 มีจำนวน

A จุด

$$[2 \times A] + [(12 - A) \times 3] = 2 \times 14$$

$$2A + 36 - 3A = 28$$

$$A = 36 - 28 = 8$$

∴ จุดที่มีดีกรี 2 มีจำนวน 8 จุด

2) ผลรวมของดีกรีทั้งหมด

$$= 2 \times \text{จำนวนเส้น}$$

$$= 2 \times 20 = 40$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$40 = \text{ดีกรีของจุด} \times \text{จำนวนจุด}$$

$$40 = 1 \times 40 = 2 \times 20 = 4 \times 10$$

$$= 5 \times 8 = 10 \times 4 = 20 \times 2$$

$$= 40 \times 1 \text{ (ซึ่งเป็นไปไม่ได้)}$$

เพราะกราฟทรีเวียลจะไม่มีเส้น)

∴ จะมีโอกาสที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

ถ้าจุดมีดีกรี 1 จะต้องไม่มี 40 จุด

ถ้าจุดมีดีกรี 2 จะต้องไม่มี 20 จุด

ถ้าจุดมีดีกรี 4 จะต้องไม่มี 10 จุด

ถ้าจุดมีดีกรี 5 จะต้องไม่มี 8 จุด

ถ้าจุดมีดีกรี 8 จะต้องไม่มี 5 จุด

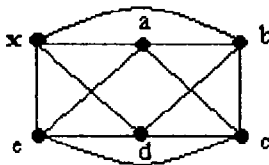
ถ้าจุดมีดีกรี 10 จะต้องไม่มี 4 จุด

ถ้าจุดมีดีกรี 20 จะต้องไม่มี 2 จุด

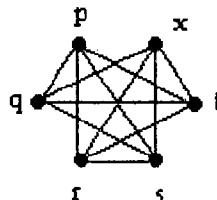
แบบฝึกหัด 1.2

- 1.) จากกราฟต่อไปนี้จงหาดีกรีของจุดทั้งหมด รวมทั้งระบุว่าจุดใดเป็นจุดตัดหรือจุดคู่

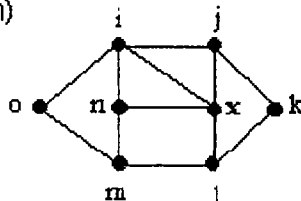
ก)



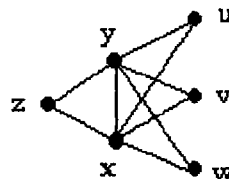
ข)



ค)



ง)



- 2.) กราฟต่อไปนี้ไม่มีจำนวนจุดที่จุด เมื่อกำหนด
 ก.) มีเส้น 40 เส้น และ ดีกรีของทุกจุดเป็น 2
 ข.) มีเส้น 13 เส้น และ มีจุดที่มีดีกรี 2 อยู่ 4 จุด นอกนั้นมีดีกรี 3
 3.) ถ้าจุดในกราฟ S มีดีกรี 3 และ 5 เท่ากัน โดยมีจุด 14 จุด และมีเส้น 25 เส้น แล้วจงหาจำนวนจุดใน S ที่มีดีกรี 3
 4.) กราฟที่มี 6 จุด โดยมีดีกรีเป็น 1,2,3,3,4,5 จะมีเส้นในกราฟอยู่ที่เส้น
 5.) กราฟจะมี 8 จุด โดยมีดีกรีเป็น 2,2,3,4,5,5,6,8 ได้หรือไม่ ถ้าได้ให้วาดกราฟดังกล่าว ถ้าไม่ได้ให้เหตุผลประกอบ
 6.) วาดกราฟที่มี 5 จุด และทุกจุดมีดีกรีเป็น 3 ได้หรือไม่

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

$$1-ก) d(x) = d(a) = d(b) = d(c) =$$

$$d(d) = d(e) = 4$$

จุดทั้งหมดเป็นจุดคู่

$$1-ข) d(x) = d(p) = d(q) = d(r) =$$

$$d(s) = d(t) = 4$$

จุดทั้งหมดเป็นจุดคู่

$$1-ค) d(o) = 2, d(i) = 4, d(n) = 3$$

$$d(m) = 3, d(j) = 3, d(x) = 4$$

$$d(l) = 3, d(k) = 2$$

จุดคู่ คือ o, i, x, k

จุดคี่ คือ m, n, j, l

$$1-ง) d(x) = 5, d(y) = 5, d(z) = 2$$

$$d(u) = 2, d(v) = 2, d(w) = 2$$

จุดคู่ คือ z, u, v, w

จุดคี่ คือ x, y

2-ก) ผลรวมของดีกรีของจุดใน

กราฟ $G = 2 \times$ จำนวนเส้นจะได้ว่า $2 \times$ จำนวนจุด $= 2 \times 40$

$$\text{จำนวนจุด} = 40$$

2-ข) $[2 \times 4] + [3 \times \text{จำนวนจุดที่มี}$

$$\text{ดีกรี 3}] = 2 \times 13$$

$$3 \times \text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3} = 26 - 8$$

$$\text{จำนวนจุดที่มีดีกรี 3} = \frac{18}{3}$$

$$= 6$$

$$\therefore \text{มีจุดทั้งหมด } 4 + 6 = 10 \text{ จุด}$$

$$3) \text{ ให้จำนวนจุดที่มีดีกรี 3} = Z$$

$$\therefore [3 \times Z] + [5 \times (14 - Z)] = 2 \times 25, 3Z + 70 - 5Z = 50, 2Z = 70 - 50, Z = \frac{20}{2} = 10$$

$$4) 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \times \text{จำนวนเส้น}, \text{ จำนวนเส้น} = \frac{18}{2} = 9 \therefore \text{มีเส้นทั้งหมด 9 เส้น}$$

5) เราไม่สามารถวาดกราฟดังกล่าวได้ เพราะ มีจุดคี่ 3 จุด (จากทบท. จุดคี่มีเป็นจำนวนคู่)

6) เราไม่สามารถวาดกราฟดังกล่าวได้ เนื่องจากถ้าทุกจุดมีดีกรีเป็น 3 จะทำให้มีจุดคี่ 5 จุด

16

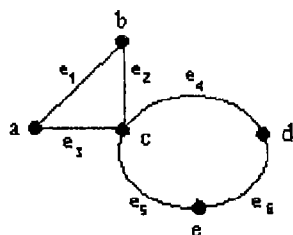
1.3 วิธีและวัฏจักร

ทฤษฎีกราฟสามารถนำมาประยุกต์ใช้ใน ปัญหาหลาย ๆ ปัญหาที่เป็นปัญหาเกี่ยวกับ “การเคลื่อนที่จากจุด ๆ หนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ ในกราฟ” ยกตัวอย่างเช่น การหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากเมือง ๆ หนึ่งไปยังอีกเมืองหนึ่ง หรือการวางสายโทรศัพท์จากชุมสายไปยังแหล่งต่าง ๆ ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาโมเดลที่เกี่ยวข้องกับแนวความคิดเหล่านี้ เพื่อที่จะใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าว ก่อนอื่นเราต้องศึกษานิยาม ต่อไปนี้

บทนิยาม 1 ให้ u และ v เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G
ทางเดิน $u - v$ ใน G คือ ลำดับสลับของจุด และ เส้น โดยที่เส้นแต่ละเส้น ตกกระทบ กับจุดที่อยู่ระหว่างในลำดับที่ติดกัน
ความยาวของทางเดิน $u - v$ คือ จำนวนเส้นในทางเดิน $u - v$

ในกรณีที่จุด u และ v ในทางเดิน $u - v$ เป็นจุดเดียวกัน เราจะเรียกทางเดินดังกล่าวว่า **ทางเดินปิด** และถ้าทางเดินดังกล่าวมีความยาวเป็นศูนย์ เราจะเรียกทางเดินดังกล่าวว่า **ทางเดินเอกเทศ**

ตัวอย่างที่ 1 จากกราฟต่อไปนี้



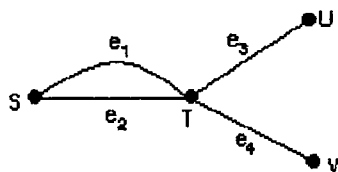
จะได้ว่า ทางเดิน $a - d$ คือลำดับ

- | | | |
|-------------------------------------|-------------|------|
| a, e_3, c, e_4, d | มีความยาว 2 | หรือ |
| $a, e_1, b, e_2, c, e_4, d$ | มีความยาว 3 | หรือ |
| $a, e_3, c, e_5, e, e_6, d$ | มีความยาว 3 | หรือ |
| $a, e_1, b, e_2, c, e_5, e, e_6, d$ | มีความยาว 4 | |

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- 9) นักเรียนสามารถบอกถึงความแตกต่างของทางเดิน, ทางเดินปิด, ทางเดินไม่ซ้ำ และวิถี ได้
- 10) นักเรียนสามารถหาทางเดิน, ทางเดินไม่ซ้ำ และ วิถี เมื่อกำหนดความยาวให้ได้
- 11) นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟไม่ขาดตอน
- 12) นักเรียนสามารถหา $d(u,v)$ ใดๆของกราฟไม่ขาดตอนที่มีน้ำหนักได้
- 13) นักเรียนสามารถหา วิธีที่สั้นที่สุดได้
- 14) นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในการหาวิธีที่สั้นที่สุดไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
- 15) นักเรียนสามารถบอกถึงความแตกต่างของ วง และ วัฏจักรได้
- 16) นักเรียนสามารถหา วง และ วัฏจักร ของกราฟใดๆได้

ตัวอย่างที่ 2 จากกราฟต่อไปนี้



ทางเดิน S - U คือลำดับ S, e_1 , T, e_3 , U หรือ S, e_2 , T, e_3 , U

จากตัวอย่างที่ 2 จะเห็นว่าเป็น **กราฟหลายชั้น** ซึ่งมีเส้นที่เชื่อม

จุด S และ T สองเส้น คือ e_1 , e_2 เราจึงต้องระบุในลำดับว่าเส้นใช้เส้นใดในทางเดิน และจากตัวอย่างที่ 1 ซึ่งเป็นกราฟที่ไม่ใช่กราฟหลายชั้น ซึ่งจะไม่มีเส้นหลายชั้นในกราฟ ดังนั้น จึงไม่เกิดปัญหาที่ว่า จะใช้เส้นใดในทางเดิน

นั่นคือ เราสามารถเขียนลำดับเฉพาะจุดในทางเดิน เท่านั้น เมื่อเป็นที่เข้าใจตรงกันว่า ระหว่างจุด 2 จุดในลำดับนั้นมีเส้นที่เชื่อมกันเพียงเส้นเดียว

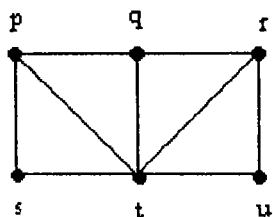
นักเรียนสังเกตเห็นสิ่งเหล่านี้หรือไม่

- 1) ความยาวของทางเดินใดๆ ในกราฟ อาจมีค่าไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับว่าพิจารณาเส้นทางใดในกราฟ
- 2) จุดและเส้นในทางเดินอาจเกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันได้

บทนิยาม 2 เรากล่าวว่า ทางเดิน u - v

เป็น **ทางเดินไม่ซ้ำ** เมื่อ เส้นในทางเดิน u - v ไม่ซ้ำกัน และเป็น **วิถี** เมื่อ จุดไม่ซ้ำ

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณากราฟรูปต่อไปนี้



พิจารณา ลำดับของทางเดิน s - u ต่อไปนี้

ลำดับ s, p, q, t, p, q, r, u

ไม่เป็นทางเดินไม่ซ้ำ เพราะ ใช้เส้น pq ซ้ำ

ไม่เป็นวิถี เพราะ ใช้จุด p และ q ซ้ำ

ลำดับ s, p, t, q, r, t, u

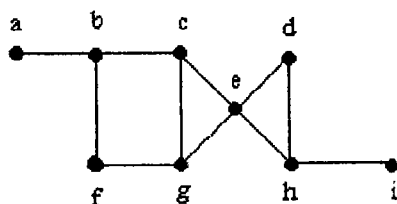
เป็นทางเดินไม่ซ้ำ เพราะ ไม่มีเส้นใดถูกใช้ซ้ำ
ไม่เป็นวิถี เพราะ ใช้จุด t สองครั้ง

ลำดับ s, p, t, q, r, u

เป็นทางเดินไม่ซ้ำ เพราะ ไม่มีเส้นใดถูกใช้ซ้ำ
เป็นวิถี เพราะ ไม่มีจุดใด ถูกใช้ซ้ำเลย

- ข้อสังเกต**
- 1) ถ้าทางเดินใดเป็นวิถี ทางเดินนั้นจะเป็นทางเดินไม่ซ้ำด้วย
 - 2) ถ้าทางเดินใดเป็นทางเดินไม่ซ้ำ ทางเดินนั้นอาจจะไม่ใช่วิถี

ตัวอย่างที่ 4 ให้กราฟ ดังรูปต่อไปนี้



- จะได้ว่า ทางเดินไม่ซ้ำ a - h ที่มีความยาว 5 ได้แก่ a, b, c, e, d, h
ทางเดินไม่ซ้ำ g - f ที่มีความยาว 4 ได้แก่ g, e, c, g, f
ทางเดินไม่ซ้ำแบบปิด e - e ที่มีความยาว 5 ได้แก่ e, c, b, f, g, e
วิถี a - h ที่มีความยาว 5 ได้แก่ a, b, c, e, d, h
วิถี g - f ที่มีความยาว 4 ได้แก่ g, e, c, b, f

ให้นักเรียนหาคำตอบต่อไปนี้

- 1.1 ทางเดิน a - f ที่มีความยาวเท่ากับ 7
- 1.2 ทางเดินปิด c - c ที่มีความยาวเท่ากับ 8
- 1.3 ทางเดินไม่ซ้ำ b - f ที่มีความยาวเท่ากับ 7
- 1.4 วิถี a - g ที่มีความยาวเท่ากับ 4
- 1.5 วิถี a - e ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

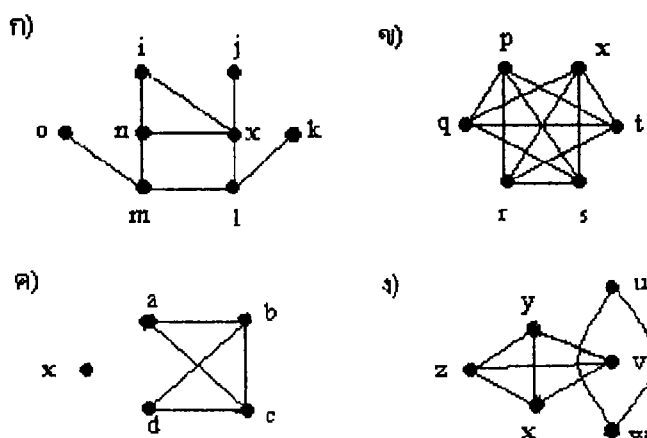
- 1.1) a,b,c,g,e,c,b,f
- 1.2) c,b,f,g,e,d,h,e,c
- 1.3) b,c,e,h,d,e,g,f
- 1.4) a,b,c,e,g
- 1.5) a,b,c,e หรือ
a,b,c,g,e
a,b,f,g,e หรือ
a,b,f,g,c,e

บทนิยาม 3 เรากล่าวว่า กราฟ G

เป็น **กราฟไม่ขาดตอน** เมื่อ 2 จุดใดๆ ใน G มีวิถีเชื่อม 2 จุด ดังกล่าว

เป็น **กราฟขาดตอน** เมื่อ มีอย่างน้อย 2 จุด ใน G ไม่มีวิถี
เชื่อม 2 จุดดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 5 จงพิจารณากราฟในข้อต่อไปนี้



จะได้ว่า กราฟในข้อ ก. และ ข. เป็นกราฟไม่ขาดตอน เนื่องจาก 2 จุดใดๆ ใน กราฟ มีวิถีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว

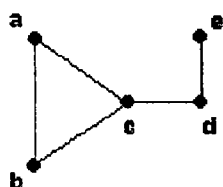
กราฟในข้อ ค. เป็นกราฟขาดตอน เนื่องจาก จุด x ไม่มีวิถีเชื่อมไปยังจุด a, b, c และ d และ

กราฟในข้อ ง. เป็นกราฟขาดตอน เนื่องจาก จุด u และจุด w ไม่มีวิถีเชื่อมไปยังจุด v, x, y และ z

บทนิยาม 4

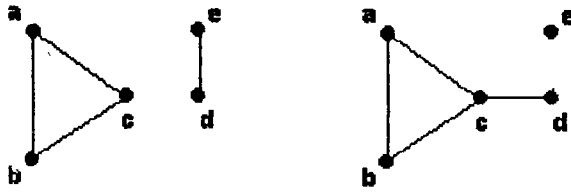
เส้นตัด คือ เส้น ซึ่งถ้ากำจัดออกไปแล้ว จะทำให้กราฟที่เกิดจากการเอาเส้นนั้นออกไป กลายเป็นกราฟขาดตอน

ตัวอย่างที่ 6 จงหาเส้นตัด ในกราฟต่อไปนี้



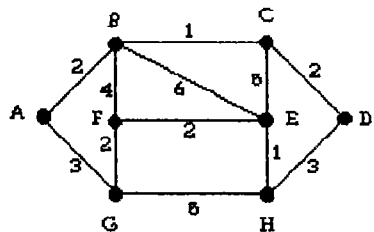
จะได้ว่า ถ้ากำจัดเส้น cd และ de ออกจากกราฟ จะทำให้กราฟที่เหลือกลายเป็นกราฟขาดตอน

ดังรูป ต่อไปนี้



นั่นคือ เส้น od และ de เป็นเส้นตัด ในกราฟดังกล่าว

ในบางสถานการณ์ การใช้กราฟเป็นแบบจำลองจะเหมาะสมมากยิ่งขึ้น ถ้าเราสามารถระบุสถานภาพความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุลงไปในกราฟได้ เช่น แผนที่ของเมืองในประเทศหนึ่ง อาจจำลองได้ด้วยกราฟ ซึ่งเราให้ จุด แทนเมือง และ เส้น แทน ถนนระหว่างเมือง ระยะทางระหว่างเมืองควรถูกกำหนดลงไปในกราฟด้วย เพื่อที่จะให้ได้แบบจำลองที่ชัดเจนขึ้น เราอาจทำได้โดยกำหนด ตัวเลขระยะทางเหล่านี้ลงไปในเส้นในกราฟ ดังกราฟต่อไปนี้



เราเรียกกราฟที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ว่า **กราฟที่มีน้ำหนัก** โดยทั่วไปค่าที่กำหนดให้กับเส้นในกราฟ อาจแทน ค่าใช้จ่าย, ระยะทาง, เวลา และอื่นๆ

เราจะให้บทนิยามที่ชัดเจนของ กราฟที่มีน้ำหนัก ดังนี้

บทนิยาม 5

เรากล่าวว่า กราฟ G เป็น **กราฟที่มีน้ำหนัก** เมื่อ เส้นแต่ละเส้นถูกกำหนดด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และเรียก จำนวนจริงดังกล่าวนี้ว่า น้ำหนักของเส้น

จากตัวอย่างกราฟที่มีน้ำหนัก เราจะได้ว่า

น้ำหนักของเส้น AG คือ 3

น้ำหนักของเส้น DH คือ 3

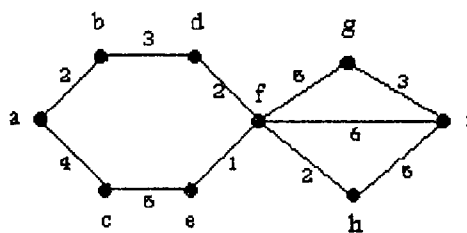
น้ำหนักของเส้น FE คือ 2

น้ำหนักของเส้น GF คือ 2

บทนิยาม 6 ความยาวของวิถี ในกราฟที่มีน้ำหนัก คือ ผลรวมของ น้ำหนักของเส้นทั้งหมดในวิถีนั้น

บทนิยาม 7 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน u และ v เป็นจุดใน G ระยะทางจาก u ไป v จะมีค่าเท่ากับ ความยาวของวิถี $u - v$ ที่สั้นที่สุด เขียนแทนด้วย $d(u,v)$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดกราฟต่อไปนี้ จงหา $d(a, i)$



จะได้ว่า วิถี $a - i$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด มีลำดับดังนี้

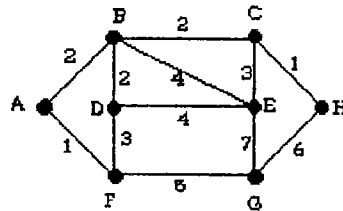
- a, b, d, f, i มีความยาว $2+3+2+6 = 13$
- a, b, d, f, g, i มีความยาว $2+3+2+5+3 = 15$
- a, b, d, f, h, i มีความยาว $2+3+2+2+5 = 14$
- a, c, e, f, i มีความยาว $4+5+1+6 = 16$
- a, c, e, f, g, i มีความยาว $4+5+1+5+3 = 18$
- a, c, e, f, h, i มีความยาว $4+5+1+2+5 = 17$

ดังนั้น $d(a, i) = 13$

ปัญหาการหา **วิถีที่สั้นที่สุด** ระหว่าง 2 จุดใดๆ ในกราฟที่มีน้ำหนัก (ซึ่งก็คือ การหาระยะทางระหว่าง 2 จุดใดๆ ที่สั้นที่สุดในกราฟ) เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยมากในชีวิตประจำวัน เช่น เส้นทางการบินของสายการบินแห่งหนึ่งถูกจำลองได้โดยใช้กราฟที่มีน้ำหนัก ซึ่งมี จุด แทน เมือง , เส้น แทน เส้นทางบิน และ น้ำหนักของเส้น แทน ระยะทาง , ค่าใช้จ่าย หรือ เวลาในการเดินทาง การหาวิถีที่สั้นที่สุดในกราฟที่มีน้ำหนักจะบ่งบอกถึงการหาเส้นทางที่สั้นที่สุด , ค่าใช้จ่ายที่ถูกลงที่สุด หรือ เวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุด (ขึ้นอยู่กับ น้ำหนัก กำหนดเกี่ยวกับอะไร)

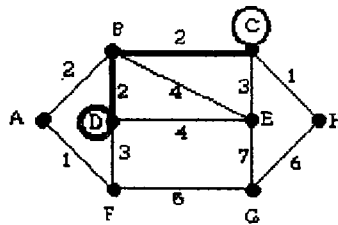
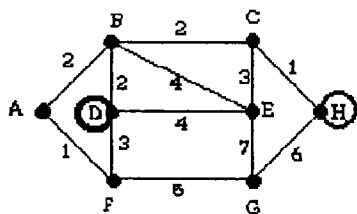
ตัวอย่างที่ 8 กำหนดกราฟที่มีน้ำหนัก แสดงแผนที่ของถนนของเมืองๆหนึ่ง โดยที่น้ำหนักของกราฟ แทน ระยะทาง (กิโลเมตร)

อยากทราบว่า ถ้าเราอยู่ที่จุด D ต้องการไปที่จุด H เราจะต้องผ่านถนนสายใดที่ทำให้ระยะทางน้อยที่สุด



วิธีทำ ปัญหาดังกล่าว ก็คือ การหาวิถี D-H ที่สั้นที่สุด

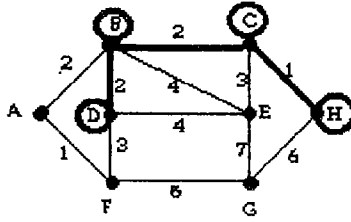
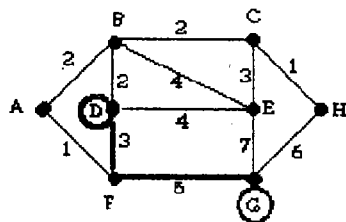
เราจะใช้รูปต่อไปนี้แสดงขั้นตอนวิธีในการทำ และจะแสดงเส้นที่อยู่ในวิถีที่สั้นที่สุดด้วยเส้นทึบ



- 1) จุดที่ประชิดกับจุด H
คือ จุด C และจุด G

- 2) วิถี D-C ที่สั้นที่สุดยาว 4

$$\therefore \text{ความยาววิถี D-C} + \text{น้ำหนัก CH} \\ = 4 + 1 = 5 = \text{ความยาววิถี D-H}$$



- 3) วิถี D-G ที่สั้นที่สุดยาว 8

- 4) เลือกวิถี D-H ในข้อ 2)

$$\therefore \text{ความยาววิถี D-G} + \text{น้ำหนัก GH} \\ = 8 + 6 = 14 = \text{ความยาววิถี D-H}$$

นั่นคือ เราจะได้วิถี D-H ที่สั้นที่สุด
ดังรูป

$\therefore$ เราจะได้ วิถี D-H ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ D,B,C,H

ดังนั้น เราต้องผ่านถนนสาย D,B,C และ H โดยมีระยะทางรวม 5 กิโลเมตร

จากวิธีทำข้างต้น เราจะได้แนวคิดในการหาวิถีที่สั้นที่สุด คือ สมมติว่าถ้าเราต้องการหาวิถี A-X ที่สั้นที่สุด

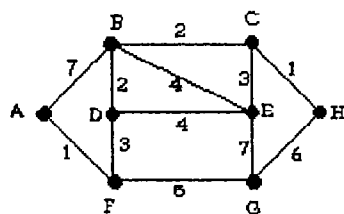
- 1) เราจะต้องหาวิถี A-Y ที่สั้นที่สุด โดยที่จุด Y ต้องประชิดกับจุด X ,
จุด Y ดังกล่าวอาจมีมากกว่า 1 จุดก็ได้
- 2) ความยาวของวิถี A-X ที่สั้นที่สุด =
ความยาวของวิถี A-Y ที่สั้นที่สุด + น้ำหนักของเส้น XY ที่น้อยที่สุด

เช่น ในการหาวิถี D-H ในตัวอย่างข้างต้น

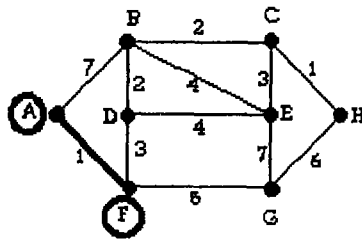
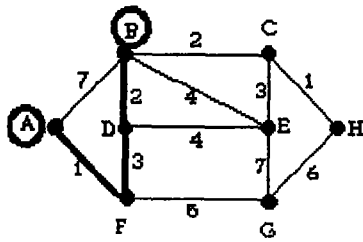
- 1) เราจะต้องหาวิถี D-C หรือ วิถี D-G ที่สั้นที่สุดก่อน
- 2) นำความยาวของวิถีที่ได้รวมกับน้ำหนักของเส้น CH หรือ GH ตามลำดับ ถ้าค่าใดน้อยที่สุด แสดงว่าค่านั้นเป็นความยาวของวิถี D-H ที่สั้นที่สุด

แต่ถ้ากราฟที่เราพิจารณา มีจุดและเส้นที่มากขึ้น ก็จะทำให้การคำนวณโดยวิธีดังกล่าวเป็นไปได้ยากและสับสน ดังนั้นจึงมีผู้คิดค้นขั้นตอนวิธีที่เป็นระบบขึ้น แต่อย่างไรก็ดีก็จะใช้แนวความคิดดังกล่าวเหมือนเดิมนั่นเอง ซึ่งเราจะศึกษาในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

ตัวอย่างที่ 9 จากกราฟที่มีน้ำหนักต่อไปนี้ จงหาวิถี A-X ที่สั้นที่สุด (X คือจุด B, C, D, E, F, G และ H)

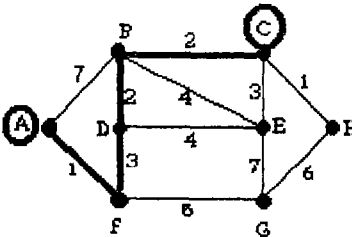
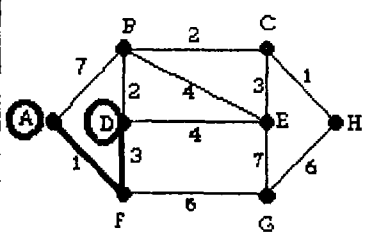


วิธีทำ แสดงเส้นที่อยู่ในวิธีที่สั้นที่สุดด้วย เส้นทึบ



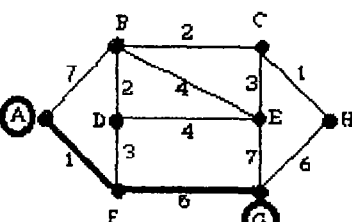
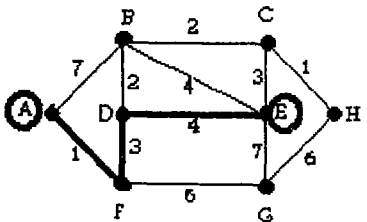
วิธี A-B : ลำดับ A,F,D,B เป็นวิธีที่สั้นที่สุด

วิธี A-F : ลำดับ A,F เป็นวิธีที่สั้นที่สุด



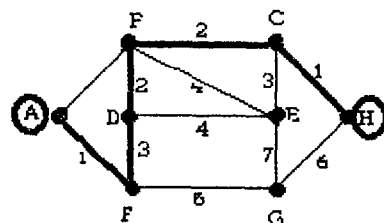
วิธี A-D : สร้างจากวิธี A-F และเส้น FD

วิธี A-C : สร้างจากวิธี A-B และเส้น BC



วิธี A-E : สร้างจากวิธี A-D และเส้น DE

วิธี A-G : สร้างจากวิธี A-F และเส้น FG

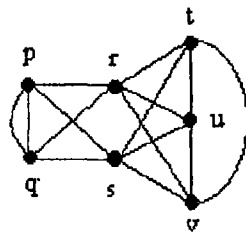


วิธี A-H : สร้างจากวิธี A-C และเส้น CH

บทนิยาม 8

เราเรียก ทางเดินไม่ซ้ำแบบปิดที่ไม่ใช่ทางเดินแยกเทศ ว่า วง
และเรียก วงที่จุดในวงไม่ซ้ำกันว่า วัฏจักร

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดกราฟ ดังนี้

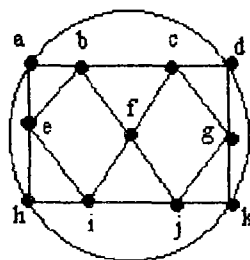


พิจารณา ลำดับต่อไปนี้

- ลำดับ p, r, v, u, r, q, p เป็น วง เพราะใช้เส้นไม่ซ้ำ
ไม่เป็น วัฏจักร เพราะใช้จุด r ซ้ำ
- ลำดับ p, q, s, t, r, u, s, p เป็น วง เพราะใช้เส้นไม่ซ้ำ
ไม่เป็น วัฏจักร เพราะใช้จุด s ซ้ำ
- ลำดับ p, s, v, u, t, r, p เป็น วง เพราะใช้เส้นไม่ซ้ำ
เป็น วัฏจักร เพราะใช้จุดไม่ซ้ำ
- ลำดับ p, r, u, s, q, p เป็น วง เพราะใช้เส้นไม่ซ้ำ
เป็น วัฏจักร เพราะใช้จุดไม่ซ้ำ
- ลำดับ p, q, r, u, r, p ไม่เป็น วง เพราะใช้เส้น ru ซ้ำ
ไม่เป็น วัฏจักร เพราะใช้จุด r ซ้ำ

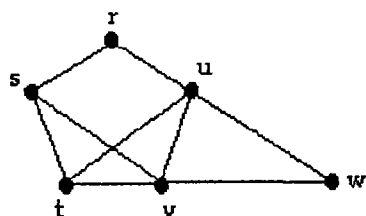
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

จากกราฟต่อไปนี้ ให้นักเรียนหาตัวอย่างของ วงและวัฏจักร



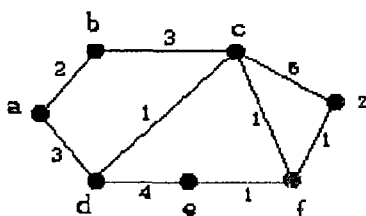
แบบฝึกหัดที่ 1.3

1) จากกราฟต่อไปนี้ จงหา

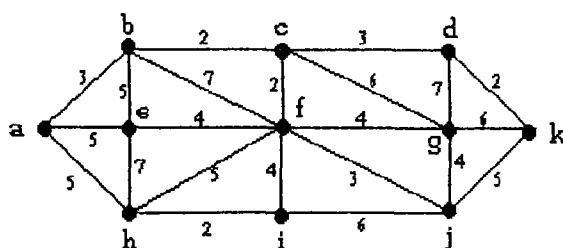


- ก) ทางเดิน r-v ที่มีความยาว 4
 ข) ทางเดินปิด w-w ที่มีความยาว 5
 ค) ทางเดินไม่ซ้ำ u-v ที่มีความยาว 3
 ง) ทางเดินปิดไม่ซ้ำ t-t ที่มีความยาว 4
 จ) วิธี s-w ที่มีความยาว 5
 ฉ) วิธี r-v ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

2) จากกราฟที่มีน้ำหนัก ที่ไม่ขาดตอนต่อไปนี้ จงหา $d(a,z)$



3) จากกราฟที่มีน้ำหนัก ที่ไม่ขาดตอนต่อไปนี้ จงหาวิธีที่สั้นที่สุดระหว่างคู่จุดต่อไปนี้



ก) a,f

ข) a,k

ค) h,d

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

1-ก) r,s,t,u,v

1-ข) w,u,t,u,v,w

1-ค) u,t,s,v

1-ง) t,s,r,u,t

1-จ) s,r,u,t,v,w

1-ฉ) r,s,v หรือ r,s,t,v หรือ

r,s,t,u,v หรือ r,u,v หรือ

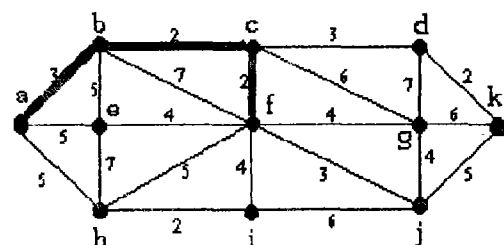
r,u,t,v หรือ r,u,t,s,v หรือ

r,u,w,v

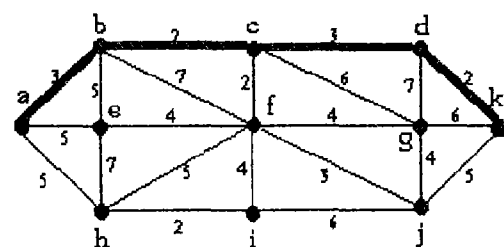
2) ลำดับ a,d,c,f,z เป็นวิธี a-z ที่สั้น

ที่สุด $\therefore d(a,z) = 3+1+1+1 = 6$

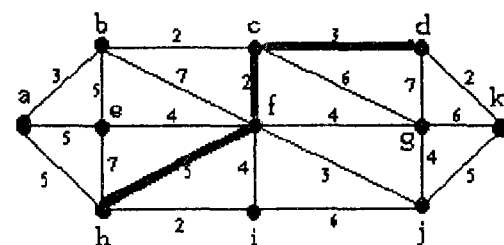
3-ก)



3-ข)

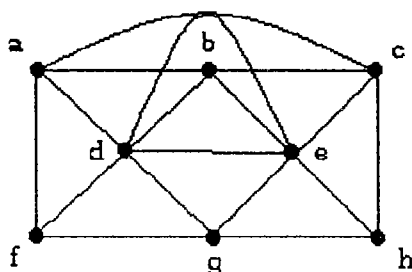


3-ค)



27

4) จากกราฟต่อไปนี้ ให้นักเรียนหา วงและวัฏจักร มาอย่างละ 2 ลำดับ



4) วง ได้แก่ ลำดับ d,e,b,c,d หรือ ลำดับ a,f,d,b,e,h,c,e,g,d,a

วัฏจักร ได้แก่ ลำดับ d,b,e,g,d หรือ ลำดับ a,b,c,e,d,a

(นักเรียนอาจตอบแตกต่างจากนี้ ให้ครูพิจารณาว่าถูกต้องหรือไม่)

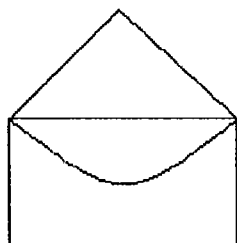
2. กราฟออยเลอร์เรียนและกราฟแฮมิลโทเนียน

2.1 กราฟออยเลอร์เรียน

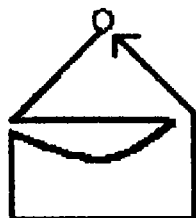
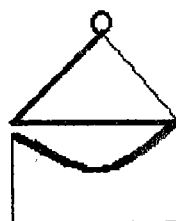
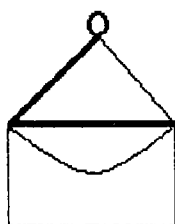
เราได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1 ว่า **เลออนฮาร์ด ออยเลอร์** ได้ตอบปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก และได้ให้แนวความคิดในการตอบคำถามปัญหาประเภทเดียวกันนี้ นอกจากนั้นท่านยังได้แนะนำนิยามใหม่ของกราฟ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในปัจจุบันว่า **กราฟออยเลอร์เรียน**

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาที่คล้ายคลึงกัน ดังนี้ ^๑

“ จงหาว่าจะสามารถวาดรูปข้างล่างนี้โดยไม่ยกดินสอและ
ไม่ให้วาดเส้นซ้ำกัน ได้หรือไม่ ”



เราจะกระทำดังนี้



การแก้ปัญหากระทำได้โดย การลากเส้นไม่ให้ซ้ำกัน แต่จุดซ้ำกันได้
ซึ่งก็คือ การหาวงซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นในกราฟ (รูป) นั้นเอง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

17) นักเรียนสามารถบอกได้ว่า กราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์เรียน และสามารถหา วงออยเลอร์เรียน จากกราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีรี่ได้

18) นักเรียนสามารถหา วิธีที่สั้นที่สุดของการจับคู่ จุดคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟ ไม่ขาดตอนใดๆ ได้ และสามารถหาทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่กราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้

19) นักเรียนสามารถหา ความยาวของทางเดินออยเลอร์เรียน จากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุดได้

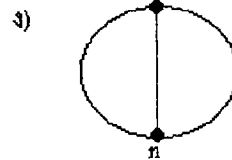
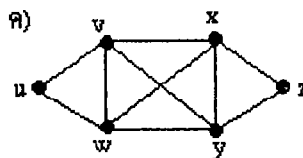
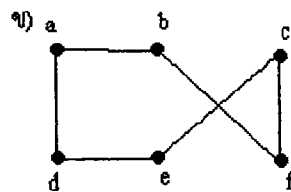
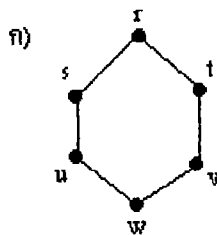
20) นักเรียนสามารถใช้ ความรู้เรื่อง กราฟออยเลอร์เรียน ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

^๑ ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา ก่อน แล้วครูจึงสรุป

นั่นคือ เราจะได้บทนิยามของ **กราฟออยเลอร์เรียน** ดังนี้

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (G อาจเป็นกราฟหลายชั้น)
 G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เมื่อ G มีวงซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นใน G
 และเรียกวงดังกล่าวว่า **วงออยเลอร์เรียน**

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่ากราฟใดต่อไปนี้ เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

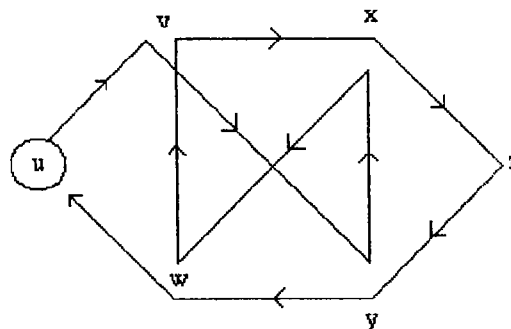


จากกราฟทั้ง 4 ข้อ จะได้ว่า

กราฟในข้อ ก) เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ที่มีวงออยเลอร์เรียน คือ
 ลำดับ r, t, v, w, u, s, r

กราฟในข้อ ข) เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ที่มีวงออยเลอร์เรียน คือ
 ลำดับ a, b, f, c, e, d, a

กราฟในข้อ ค) เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ที่มีวงออยเลอร์เรียน คือ
 ลำดับ $u, v, y, x, w, v, x, z, y, w, u$ ดังรูป



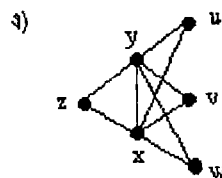
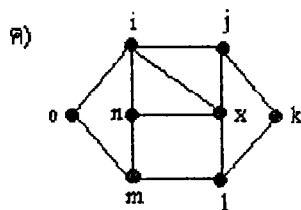
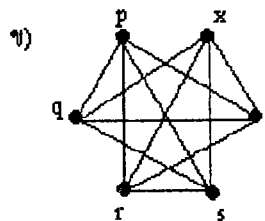
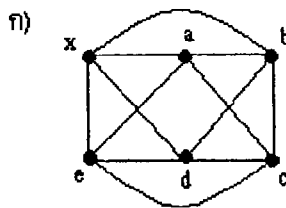
กราฟในข้อ ง) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

เพราะ ไม่สามารถหาวงที่ผ่านเส้นทุกเส้นในกราฟได้

เนื่องจาก ถ้ากราฟมีจำนวนจุดและเส้นมากขึ้น เป็นการยากที่จะพิจารณาหาวงย่อยเลอร์เรียน เพื่อตอบว่า กราฟนั้นเป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน ดังนั้น จึงจำเป็นที่จะต้องมียกข้อยกเว้นเพื่อพิจารณาการเป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน^๒

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน ที่ไม่ใช่กราฟทรีเวียล G เป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน ก็ต่อเมื่อ จุดทุกจุดใน G เป็นจุดคู่

ตัวอย่างที่ 2 จากทฤษฎีบท กราฟในข้อใดบ้างเป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน



จะได้ว่า กราฟในข้อ ก) เป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน

เพราะ จุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่

กราฟในข้อ ข) เป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน

เพราะ จุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่

กราฟในข้อ ค) ไม่เป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน

เพราะ จุด n, m, j และ l เป็นจุดคี่

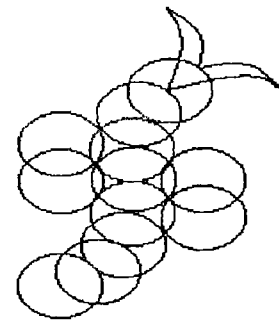
กราฟในข้อ ง) ไม่เป็นกราฟย่อยเลอร์เรียน

เพราะ จุด x และ y เป็นจุดคี่

เกมวาดภาพ

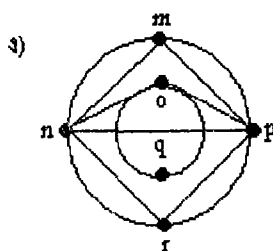
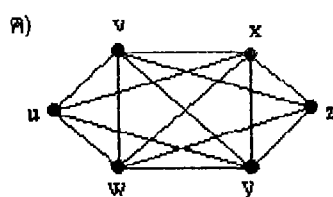
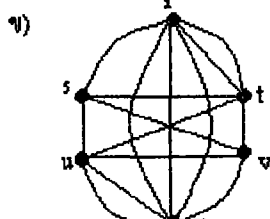
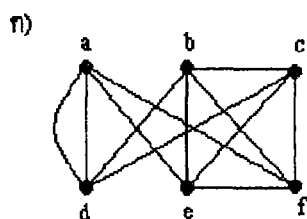


สมัยเด็กนักเรียนทุกคนคงเคยเล่นเกมนี้ เกมที่ว่านี้คือการวาดรูปโดยไม่ยกดินสอ



^๒ ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟในตัวอย่างที่ 1 เพื่อสรุปเป็นทฤษฎีบท

ให้นักเรียนพิจารณาว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์เรียน ^๓



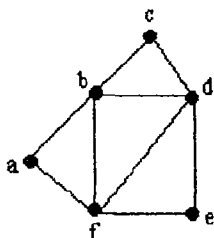
ขั้นตอนวิธีของฟลูรี

จากทฤษฎีบท เมื่อเราทราบว่ากราฟใดเป็น กราฟออยเลอร์เรียน แล้ว เราจะสามารถหาวงออยเลอร์เรียน ได้จาก ขั้นตอนวิธีของฟลูรี ดังนี้

ให้ G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

- 1) เริ่มที่จุดใดๆ ในกราฟ จากนั้นเดินตามเส้นใน G ไปเรื่อยๆ เมื่อเดินผ่านเส้นใด ก็ให้กำจัดเส้นนั้นออกจากกราฟ
- 2) ในการเลือกเส้นที่ผ่านนั้น จะต้องไม่เลือก **เส้นตัด** เว้นแต่ไม่มีเส้นอื่น

ตัวอย่างที่ 3 ให้กราฟออยเลอร์เรียนต่อไปนี้ จงหาวงออยเลอร์เรียน



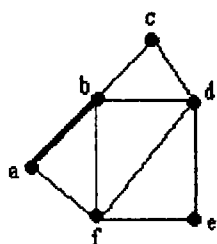
^๓ ก) เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เพราะ จุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่

ข) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เพราะ จุด u และ t เป็นจุดคี่

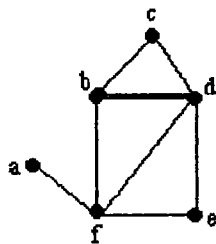
ค) ไม่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เพราะ จุด v, w, x และ y เป็นจุดคี่

ง) เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เพราะ จุดทุกจุดในกราฟ เป็นจุดคู่

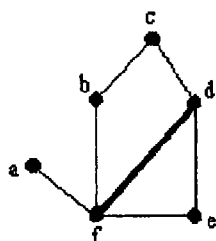
วิธีทำ



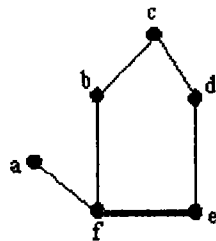
- 1) เริ่มต้นที่จุด a
เลือกเส้น ab



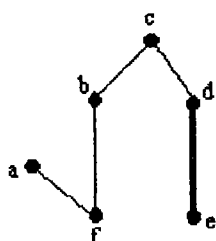
- 2) เลือกเส้น bd



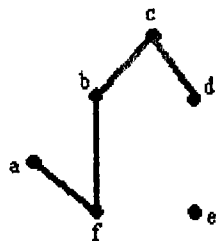
- 3) เลือกเส้น df



- 4) เลือกเส้น fa ไม่ได้
เพราะ เส้น fa เป็นเส้นตัด
 $\therefore$ เลือกเส้น fe

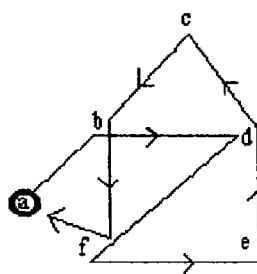


- 5) จะเห็นว่า เส้น ed
เป็นเส้นตัด แต่มีทางเลือกเดียว
 $\therefore$ เลือกเส้น ed

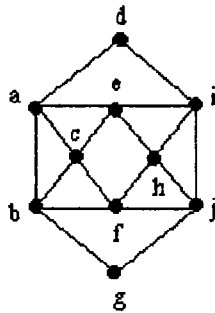


- 5) ทำนองเดียวกัน เลือกเส้น
dc, cb, bf, fa ตามลำดับ

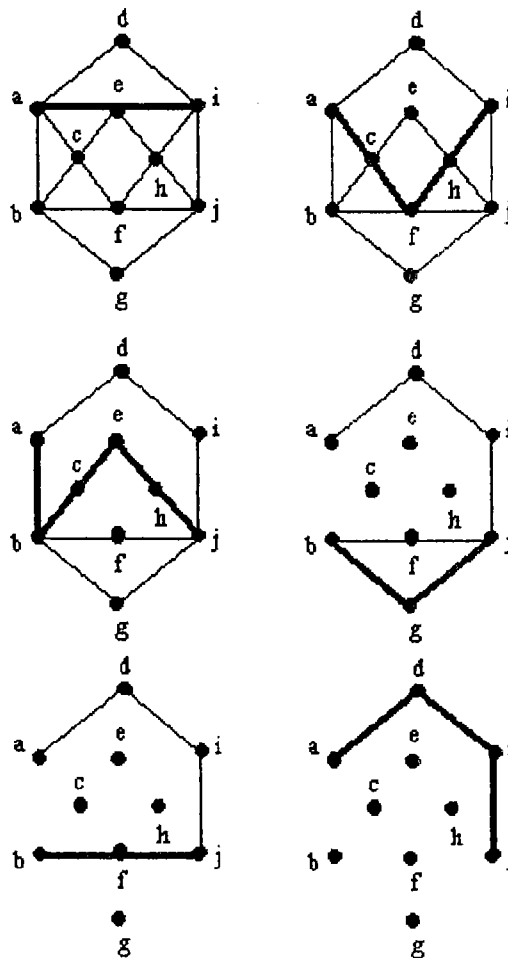
นั่นคือ เราได้วงฮอยเลอร์เรียนที่มีลำดับเป็น a, b, d, f, e, d,
c, b, f, a ดังรูป



ตัวอย่างที่ 4 สมมติว่าตำรวจทางหลวงคนหนึ่งมีงานที่ต้องรับชอบคือ
 ขับรถตรวจดูความเรียบร้อยบนถนนไฮเวย์ทุกสาย ดังแสดงในรูป ถ้า
 ตำรวจคนนี้อยู่ที่เมือง a เขาจะหาเส้นทางที่ขับรถจากเมือง a ไปสิ้นสุด
 ที่เดิมได้หรือไม่ โดยที่เขาต้องการขับรถผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียว

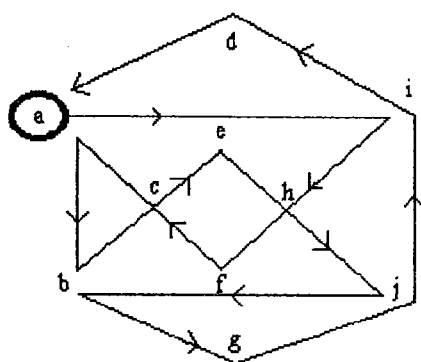


วิธีทำ เนื่องจากกราฟมีจุดทุกจุดเป็นจุดคู่ ดังนั้นเป็นกราฟออยเลอร์เรียน
 นั่นคือ เราสามารถหาเส้นทางดังกล่าวให้ตำรวจคนนั้นได้ ตามขั้นตอน
 วิธีของฟลูรีรี่ ดังนี้

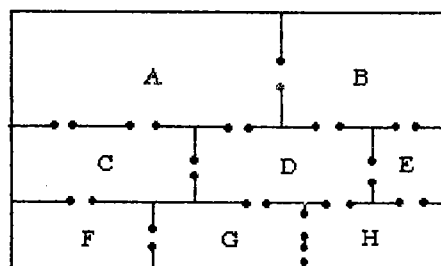


นั่นคือ เราได้เส้นทางที่นายตำรวจต้องการ คือ

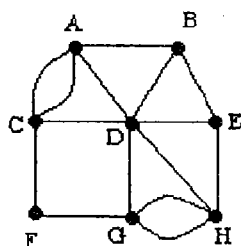
ลำดับ a, e, i, h, f, c, a, b, c, e, h, j, f, b, g, j, i, d, a ดังรูป



ตัวอย่างที่ 5 แปลนห้างสรรพสินค้าชั้นล่างแห่งหนึ่ง แสดงดังรูป
จงหาว่า ถ้าจะเดินดูของครบทุกล็อก โดยผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้ง
เดียว แล้วกลับออกมาข้างนอกเหมือนเดิมได้หรือไม่



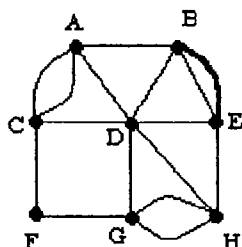
วิธีทำ จากแบบแปลน เราสามารถจำลองเป็นกราฟ โดยให้
จุดแทน ล็อก และเส้น แทน ประตู ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า **กราฟนี้ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียน**
เพราะว่า จุด B และจุด E เป็นจุดคี่
ดังนั้น เราไม่สามารถหาทางออยเลอร์เรียนได้
นั่นคือ เราจึงไม่สามารถหาทางเดินดังกล่าวได้

แต่ถ้าเราต้องการเดินดูของครบทุกกล่อง โดยยอมให้ผ่านประตูบางประตูได้มากกว่า 1 ครั้ง แต่จำนวนครั้งในการเดินผ่านประตูซ้ำให้น้อยที่สุด

เราอาจทำได้โดย พิจารณากราฟต่อไปนี้



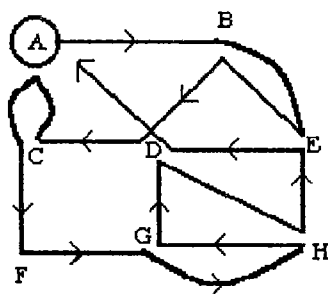
จะเห็นว่า **กราฟใหม่นี้ เป็นกราฟออยเลอร์เรียน**

เพราะว่า เราลากเส้นเชื่อมจุด B และ E ทำให้จุดทั้งสองกลายเป็นจุดคู่

∴ จุดทุกจุด ในกราฟใหม่ จึงเป็นจุดคู่ทั้งหมด (จากทฤษฎีบท)

ดังนั้น เราจึงสามารถหาวงออยเลอร์เรียนใน **กราฟใหม่** นี้ได้ และ **วงออยเลอร์เรียนในกราฟใหม่** นั้น จะเป็นทางเดินใน **กราฟเดิม** ที่เราต้องการ โดยผ่านเส้น BE ซ้ำกัน 2 ครั้ง

∴ เราจะได้ทางเดินที่โจทย์ต้องการ ตามขั้นตอนวิธีของฟลูรีรี่ ดังนี้



นั่นคือ ทางเดินที่โจทย์ต้องการ คือ ลำดับ A, B, E, B, D, C, A, C, F, G, H, G, D, H, E, D, A

บทนิยาม 2 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอนใดๆ

ทางเดินออยเลอร์เรียน คือ ทางเดินปิด ที่ผ่านเส้นทุกเส้นใน G

∴ ทางเดินในตัวอย่างข้างต้น จึงเป็น **ทางเดินออยเลอร์เรียน** ในกราฟเดิม

ในกรณีทั่วไป ถ้ากราฟที่เป็นตัวแบบจำลอง ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียน แต่เราต้องการหาทางเดินออยเลอร์เรียนในกราฟดังกล่าว เราก็สามารถที่จะหาทางเดินดังกล่าวได้ **โดยสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน** โดยการเชื่อมคู่ของจุดที่ ด้วยวิธีที่สั้นที่สุดในกราฟ

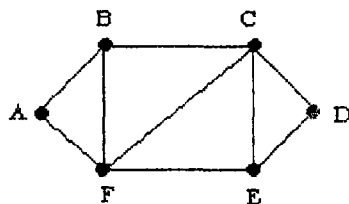
∴ **วงออยเลอร์เรียนจากกราฟใหม่ คือ ทางเดินออยเลอร์เรียนในกราฟเดิม**

ในกรณีที่ **กราฟมีจุดคู่ เพียง 2 จุด** : กราฟใหม่ จะเกิดจากการเชื่อมคู่ของจุดที่ด้วยวิธีที่สั้นที่สุด ซึ่งจะมีได้แบบเดียวเท่านั้น

แต่ถ้า **กราฟมีจุดคู่ มากกว่า 2 จุด** : อาจเป็น 4, 6, 8, ... (จาก ทฤษฎีบท : จุดคู่มีเป็นจำนวนคู่) ในการสร้างกราฟใหม่ เราต้องจับคู่จุดคู่เหล่านี้ก่อน และหาวิธีที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดคู่แต่ละคู่ ที่จัดไว้ แต่การจับคู่ของจุดคู่ดังกล่าวมีได้มากกว่า 1 แบบ เราจึงต้องเลือก การจับคู่ที่มีผลรวมของวิธีที่สั้นที่สุด ที่เชื่อมจุดคู่แต่ละคู่ มีค่าน้อยที่สุด

ให้นักเรียนศึกษาจากตัวอย่าง ต่อไปนี้

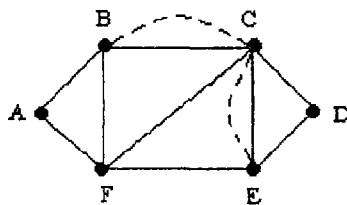
ตัวอย่างที่ 6 กำหนดกราฟ P ดังรูป จงหาทางเดินออยเลอร์เรียน



จากกราฟ P ที่กำหนดให้ มีจุดคู่ คือ จุด B และ E เพียง 2 จุด ดังนั้น เราจึงต้องหาวิธีที่สั้นที่สุดเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดนี้

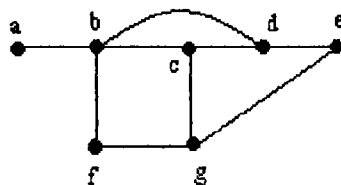
เราได้วิธี B-E ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ B, C, E หรือ B, F, E

∴ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ได้ดังนี้



จะได้ว่า **วงออยเลอร์เรียนในกราฟใหม่ จะเป็นทางเดินออยเลอร์เรียนในกราฟ P** ดังนั้น เราจึงสามารถหาทางเดินออยเลอร์เรียนในกราฟ P ได้โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีต่อไป

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดกราฟ Y ดังรูป จงหาทางเดินฮอยเลอร์เรียน



จะได้ว่า จุดคี่ใน Y คือ a, c, d, g

เราสามารถจับคู่จุดคี่เหล่านี้ และหาวิถีที่สั้นที่สุดเชื่อมคู่ของจุดคี่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ดังนี้

กรณีที่ 1 : a, c และ d, g

ความยาวที่สั้นที่สุดของวิถีที่เพิ่มเข้ามา $= d(a,c) + d(d,g) = 2+2 = 4$

กรณีที่ 2 : a, d และ c, g

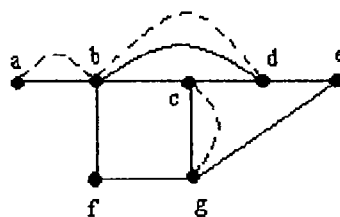
ความยาวที่สั้นที่สุดของวิถีที่เพิ่มเข้ามา $= d(a,d) + d(c,g) = 2+1 = 3$

กรณีที่ 3 : a, g และ c, d

ความยาวที่สั้นที่สุดของวิถีที่เพิ่มเข้ามา $= d(a,g) + d(c,d) = 3+1 = 4$

จะได้ว่า การจับคู่ในกรณีที่ 2 ให้ความยาวของวิถีที่เพิ่มเข้ามาสั้นที่สุด

$\therefore$ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟฮอยเลอร์เรียน ได้ดังนี้



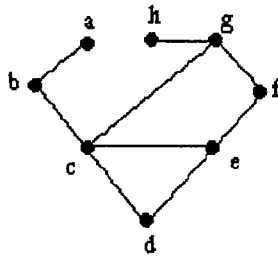
กราฟใหม่นี้ มีความยาวเท่ากับ จำนวนเส้นเดิม + จำนวนเส้นใหม่ที่เพิ่มเข้ามา $= 9+3 = 12$

จะได้ว่า **พอยเลอร์เรียนในกราฟใหม่ จะเป็นทางเดินฮอยเลอร์เรียนในกราฟ Y** ดังนั้น เราจึงสามารถหาทางเดินฮอยเลอร์เรียนจากกราฟ Y ได้โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีย์ ต่อไป

38

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ ๒

- 1) จากปัญหา “ การเดินทางข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์ก ” จงหาเส้นทางเดินดังกล่าว โดยที่เดินข้ามสะพานน้อยที่สุด
- 2) จากกราฟต่อไปนี้ จงหาทางเดินออยเลอร์เรียน



ความรู้ในเรื่องกราฟออยเลอร์เรียนสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมายในสถานการณ์จริง ถ้าเราจำลองแผนที่ถนนของเมืองด้วยกราฟ โดยให้ เส้น แทน ถนน และจุด แทน สามแยกหรือสี่แยกแล้ว คนกวาดถนน คนเก็บขยะ บุรุษไปรษณีย์ พนักงานจัดมิเตอร์ไฟฟ้าและประปา ต่างได้รับประโยชน์จากความรู้ในเรื่องกราฟออยเลอร์เรียน เพราะช่วยให้บุคคลเหล่านี้ ปฏิบัติหน้าที่ของตนได้โดยผ่านถนนแต่ละสายเพียงครั้งเดียว หรือถ้าจำเป็นต้องผ่านถนนบางสายซ้ำ ผลรวมของระยะทางที่ผ่านซ้ำต้องมีค่าน้อยที่สุด

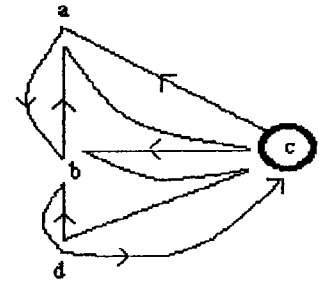
เราจะเห็นประโยชน์ได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเราจำลองสถานการณ์ ด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก โดยที่ น้ำหนัก อาจแทน ระยะทาง หรือค่าใช้จ่ายก็ได้

ตัวอย่างที่ 7 ในการเดินทางของนายหนึ่ง เพื่อท่องเที่ยวชมจังหวัด พิจิตร โดยเริ่มต้นจากจุด A ไปยังถนนต่างๆในตัวเมือง จงหาเส้นทางที่นายหนึ่งจะเที่ยวชมเมืองพิจิตรได้ทั้งหมด โดยผ่านถนนแต่ละสายเพียงครั้งเดียว หรือถ้าจำเป็นก็ให้ผ่านถนนซ้ำน้อยที่สุด ซึ่งการเดินทางครั้งนี้จะต้องมีผลรวมของระยะทางที่น้อยที่สุด

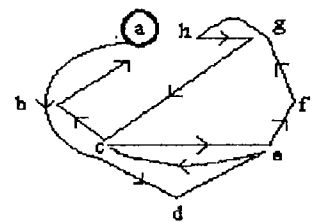
กำหนดกราฟที่มีน้ำหนัก (P) ดังรูป โดยน้ำหนัก แทน ระยะทาง (เมตร) ; จุด แทน ตำแหน่งทางแยกต่างๆ
เส้น แทน ถนนต่างๆ ในจังหวัดพิจิตร

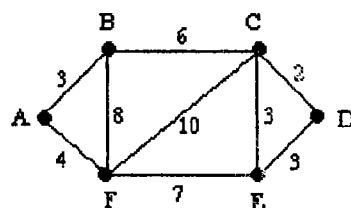
๒

- 1) เส้นทางดังกล่าวเป็นดังนี้



- 2) ทางเดินออยเลอร์เรียน ที่ต้องการเป็นดังนี้

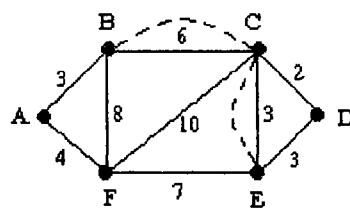




จากกราฟ P ที่กำหนดให้ มีจุดคือ คือ จุด B และ E เพียง 2 จุด
ดังนั้น เราจึงต้องหาวิธีที่สั้นที่สุดเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดนี้

เราได้วิธี B-E ที่สั้นที่สุด คือ ลำดับ B, C, E

∴ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า เราจะต้องใช้เส้น BC, CE ซ้ำ

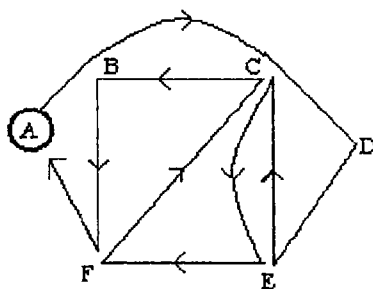
นั่นคือ นายหนึ่งจะต้องเดินทางในถนน BC และ CE ซ้ำ

∴ ระยะทางทั้งหมดที่ใช้ในการเดินทาง คือ

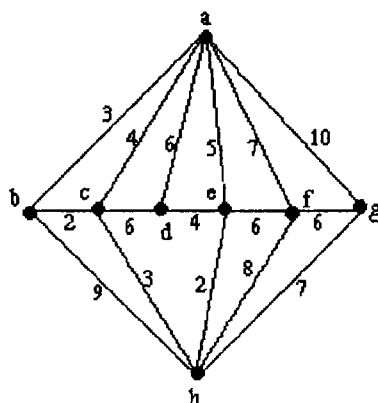
ผลรวมของน้ำหนักในกราฟเดิม + น้ำหนักของเส้นที่เพิ่มเข้ามา =

$$[3+4+8+6+10+7+3+2+3] + [6+3] = 45+9 = 54 \text{ กิโลเมตร}$$

จากขั้นตอนวิธีของฟลูรีรี่ ทำให้เราเส้นทางที่นายหนึ่งต้องการ ดังนี้



ตัวอย่างที่ 8 ถ้ากราฟที่มีน้ำหนัก (H) ดังรูป เป็นแผนที่ในการเดินทาง รอบสวนสาธารณะแห่งหนึ่ง จงหาว่าจะสามารถที่จะเดินเล่นรอบสวนนี้ โดยผ่านทางเดินแต่ละสายเพียงครั้งเดียว ถ้าไม่ได้ จงหาว่าเส้นทางในการเดินรอบสวนที่จะเดินผ่านทางเดินซ้ำ โดยทำให้ระยะทางรวมน้อยที่สุด มีระยะทางรวมเท่าไร , น้ำหนัก แทน ระยะทาง (เมตร)



วิธีทำ จะได้ว่า จุดตัดในกราฟ H คือ b, d, g, h

ดังนั้น ความยาวของวิถีที่สั้นที่สุด ของการจับคู่แต่ละคู่ เป็นดังนี้

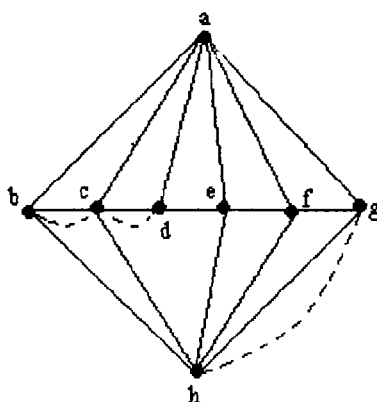
(b,d) และ (g,h) , ความยาวของวิถี $\chi = d(b,d) + d(g,h) = 8+7 = 15$

(b,g) และ (d,h) , ความยาวของวิถี $\chi = d(b,g) + d(d,h) = 13+4 = 17$

(b,h) และ (d,g) , ความยาวของวิถี $\chi = d(b,h) + d(d,g) = 5+11 = 16$

จะได้ว่า การจับคู่ (b,d) และ (g,h) ทำให้มีความยาวของวิถี $\chi = 15$

$\therefore$ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ได้ดังนี้



ดังนั้น ระยะทางรวมที่น้อยที่สุด คือ

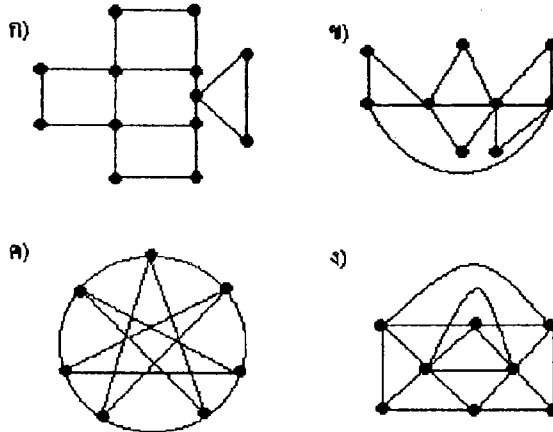
น้ำหนักรวมของกราฟ H + น้ำหนักของเส้นใหม่ที่เพิ่มเข้ามา

$$= [3+4+6+5+7+10+2+6+4+6+6+9+3+2+8+7] + [2+6+7]$$

$$= 88 + 15 = 103 \text{ เมตร}$$

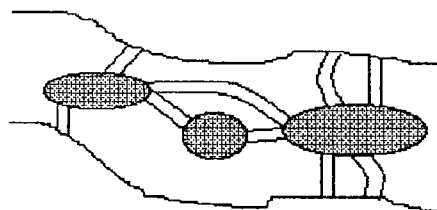
แบบฝึกหัด 2.1

1) กราฟใดต่อไปนี้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

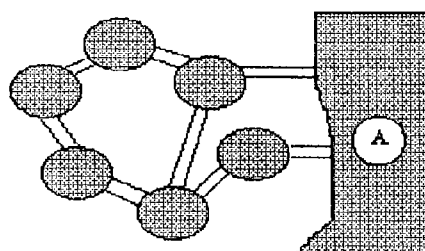


2) จากข้อ 1) ถ้ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์เรียน จงหาวงออยเลอร์เรียน (โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรี)

3) จากรูป เป็นแผนผังของเมืองๆ หนึ่ง ซึ่งมีเกาะอยู่ 3 เกาะ และแต่ละเกาะมีสะพานเชื่อม ดังรูป จงหาว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเดินทางไปเที่ยวทุกเกาะ และข้ามสะพานทุกสะพานเพียงครั้งเดียว ถ้าได้จงหาทางเดินดังกล่าว



4) จากรูป เป็นแผนที่เกาะต่างๆ และกำหนดให้เส้นเป็น เส้นทางเดินเรือที่เชื่อมระหว่างเกาะเหล่านี้ จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะหาเส้นทางเดินเรือจากฝั่ง A ไปยังเกาะทุกเกาะ และเดินทางตามเส้นทางเดินเรือทุกเส้นเพียงครั้งเดียว หรือซ้ำเส้นทางเดินให้น้อยที่สุด แล้วกลับมาที่ฝั่ง A เหมือนเดิม

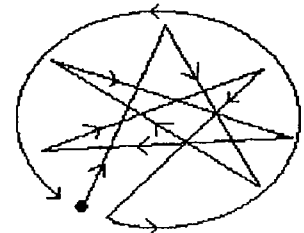


เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

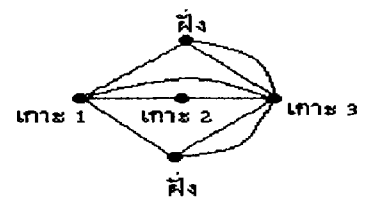
1) กราฟที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน คือ ค)

2) วงออยเลอร์เรียนของ

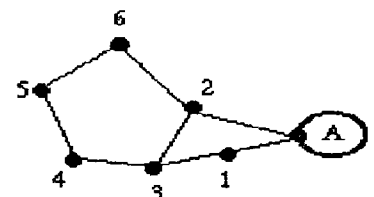
ค) เป็นดังนี้



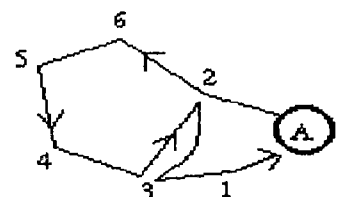
3) เราสร้างกราฟได้ดังนี้



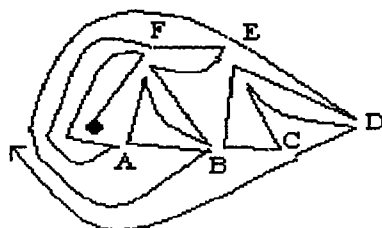
4) เราสร้างกราฟได้ ดังนี้



จะเห็นว่า เกาะ 2,3 เป็นจุดตัด เราจึงสร้างใหม่และหาเส้นทางที่ซ้ำสะพานน้อยที่สุด ดังรูป



นั่นคือ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ได้
 จากนั้น เราก็สามารถหาทางเดินออยเลอร์เรียนได้ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูว์รี่ ดังรูป



7) จากกราฟ จะได้ว่า จุดคี่ในกราฟ Y คือ a,c,g,h

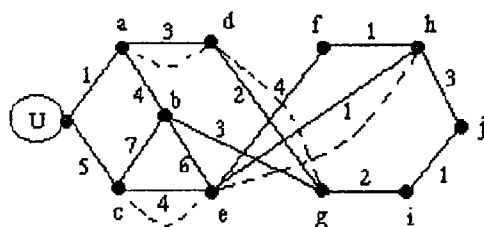
กรณีที่ 1 : (a,c) และ (g,h) , $d(a,c) + d(g,h) = 6+6 = 12$

กรณีที่ 2 : (a,g) และ (c,h) , $d(a,g) + d(c,h) = 5+5 = 10$

กรณีที่ 3 : (a,h) และ (c,g) , $d(a,h) + d(c,g) = 11+10 = 21$

∴ การจับคู่ในกรณีที่ 2 ทำให้มีความยาวของวิถีที่เพิ่มเข้ามาสั้นที่สุด = 10

นั่นคือ เราสามารถสร้างกราฟใหม่ ที่เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ได้ดังนี้



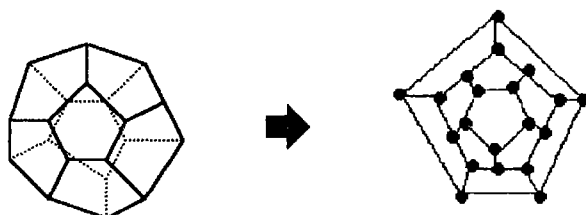
จากกราฟ เราจะได้ระยะทางรวมที่น้อยที่สุดคือ $47 + 10 = 57$ กิโลเมตร

จากนั้น เราก็หาเส้นทางดังกล่าว ตามขั้นตอนวิธีของฟลูว์รี่ ต่อไป

2.2 กราฟแฮมิลโทเนียน

เราได้ทราบมาแล้วว่า กราฟออยเลอร์เรียนเกิดขึ้นจากความพยายามในการแก้ ปริศนาปัญหาสะพานแคอนิกส์เบิร์ก ในทำนองเดียวกันสิ่งที่ก่อให้เกิดมโนคติในเรื่อง กราฟแฮมิลโทเนียน คือ **เกมรอบโลก (Around the word)** ซึ่งประดิษฐ์โดยนักคณิตศาสตร์ชาวไอริช ชื่อ **เซอร์ วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (Sir William Rowan Hamilton)**

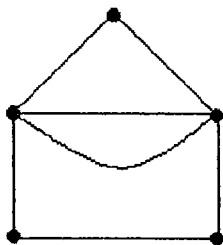
เกมดังกล่าวประกอบด้วย แท่งไม้รูปทรงสิบสองหน้าปกติ (รูปทรงดังกล่าว เป็นรูปเรขาคณิตที่มี 20 จุดมุม 30 เส้นขอบ และ 12 หน้า) ; หมุด 20 ตัว และเชือก 1 ขด แต่ละมุมของรูปทรงตันนี้ถูกแทนด้วยชื่อเมืองสำคัญในยุคนั้น



เราสามารถจำลอง แท่งไม้รูปทรงสิบสองหน้าปกติ เป็น **กราฟด้านขวามือ** โดยให้ จุด แทน เมือง , เส้น แทน เส้นทาง

จุดประสงค์ของเกม มีอยู่ว่า จะต้องหาทางเดินตามขอบของรูปนี้ โดยให้ผ่านเมืองแต่ละเมืองเพียงครั้งเดียว แล้วโยงเชือกนี้ไปยังหมุดตัวต่อๆ ไป ตามลำดับเมืองในเส้นทางที่ผู้เล่นเลือกเดิน สุดท้ายต้องวนกลับสู่เมืองที่ตั้งต้น

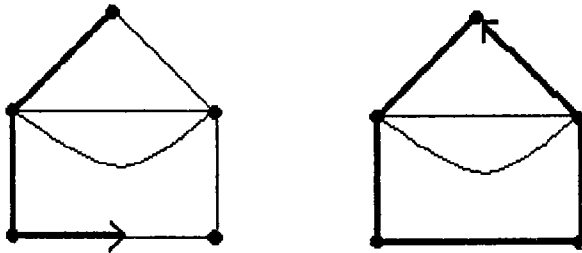
ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาดังกล่าว จากกราฟต่อไปนี้



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

- 21) นักเรียนสามารถบอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน
- 22) นักเรียนสามารถหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียนจากกราฟแฮมิลโทเนียนได้
- 23) นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในเรื่อง กราฟแฮมิลโทเนียนไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

เราจะกระทำดังนี้



การแก้ปัญหากระทำได้โดย การใช้เส้นและจุดไม่ซ้ำกัน
ซึ่งก็คือ การหาวัฏจักรซึ่งผ่านจุดทุกจุดในกราฟ นั่นเอง

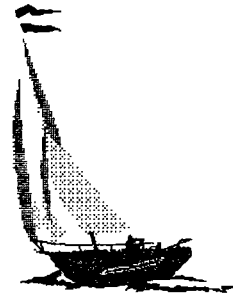
ในหัวข้อที่แล้ว เราศึกษากราฟที่มีวงซึ่งซึ่งผ่านเส้นทุกๆ เส้นใน
กราฟ ที่เรียกว่า **กราฟออยเลอร์เรียน** ในหัวข้อนี้เราจะศึกษา **กราฟ**
ที่มีวัฏจักรซึ่งผ่านจุดทุกๆ จุดในกราฟ ซึ่งเราจะเรียกวัฏจักรดังกล่าวว่า
วัฏจักรแฮมิลโทเนียน และเรียกกราฟที่มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียนว่า
กราฟแฮมิลโทเนียน

บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (G อาจเป็นกราฟหลายชั้น)
 G เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน เมื่อ G มี **วัฏจักร** ซึ่งผ่านจุดทุกจุด
ใน $V(G)$ และเรียกวัฏจักรดังกล่าวว่า **วัฏจักรแฮมิลโทเนียน**

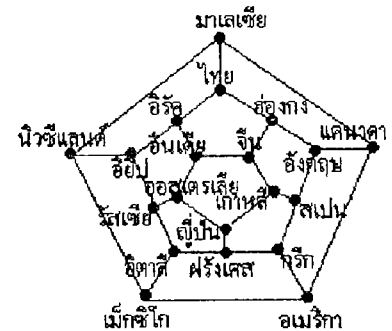
แต่เนื่องจากการพิจารณาหาเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นของการที่
จะเป็น กราฟแฮมิลโทเนียนนั้น ในปัจจุบันยังเป็นปัญหาที่ยังไม่มีคำตอบ
ในทฤษฎีกราฟ อย่างไรก็ตาม ก็ยังมี **กฎบางประการที่เกี่ยวกับคุณสมบัติ**
และความสัมพันธ์ของจุดและเส้นของกราฟแฮมิลโทเนียน
ดังต่อไปนี้

- กฎข้อที่ 1** ถ้าจุด $\times$ มีดีกรีเป็นสอง เส้นที่ตกกระทบกับจุด $\times$ ทั้งสอง
เส้นนั้น จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวัฏจักรแฮมิลโทเนียน
- กฎข้อที่ 2** วัฏจักรแฮมิลโทเนียนใดๆ จะต้องไม่ประกอบด้วย
วัฏจักรย่อย
- กฎข้อที่ 3** ในขณะที่สร้างวัฏจักรแฮมิลโทเนียนนั้น ถ้าเส้นทางเดิน
ของวัฏจักรแฮมิลโทเนียนผ่านจุด $\times$ ใช้เส้น 2 เส้นที่ตก
กระทบกับจุด $\times$ แล้วเราสามารถกำจัดเส้นอื่นที่เชื่อมกับ
จุด $\times$ ที่ไม่ได้ใช้เป็นเส้นทางผ่านในวัฏจักร ออกจากการ
พิจารณาได้

เกมการท่องเที่ยว

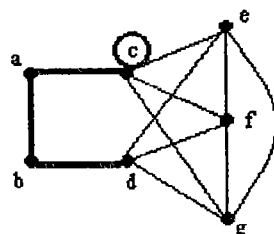
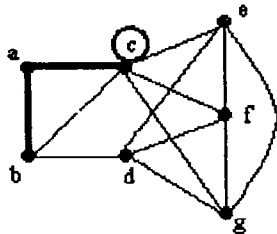


นายชวน ต้องการท่องเที่ยว
ทั่วโลก โดยผ่านประเทศที่
สำคัญต่างๆ รวม 20 ประเทศ
ดังแผนที่ ดังรูป

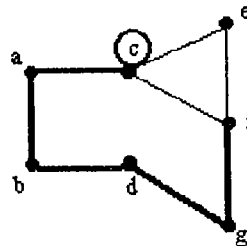
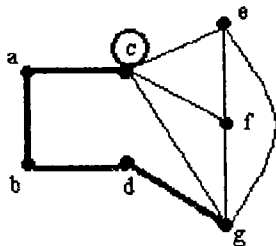


ให้หาเส้นทางที่นายชวนจะ
เดินทางไปประเทศต่างๆ เพียง
ครั้งเดียว แล้วกลับมายัง
ประเทศไทยตามเดิม

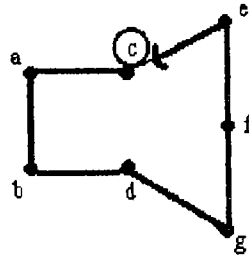
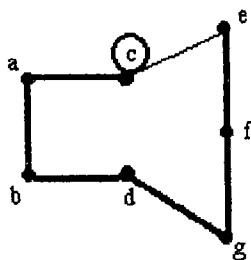
วิธีทำ เนื่องจากไม่มีจุดใดที่มีดีกรี 2
ดังนั้น จึงเลือกจุด c เป็นจุดเริ่มต้น



- 1) เลือกเส้น ca, ab ตามลำดับ 2) เลือกเส้น bd



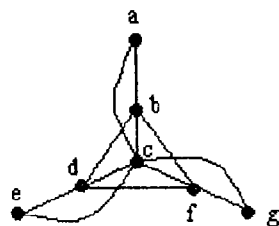
- 3) เลือกเส้น dg 4) เลือกเส้น gf



- 5) เลือกเส้น fe 6) เลือกเส้น ec

นั่นคือ เราได้วัฏจักรแฮมิลโทเนียนที่มีลำดับเป็น c, a, b, d, g, f, e, c
ดังนั้น กราฟนี้เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

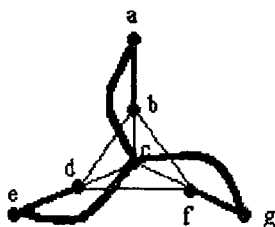
ตัวอย่างที่ 3 กราฟดังรูปต่อไปนี้ เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน หรือไม่



จากกราฟ จะได้ว่า

จากกฎข้อที่ 1 : มีจุดที่มีดีกรี 2 คือ จุด a, e, g

ดังนั้น เส้น ab, ac, ec, ed, gc และ gf จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังกราฟต่อไปนี้



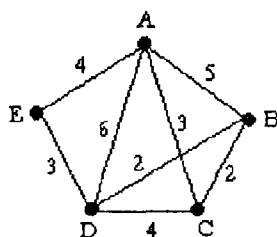
จะเห็นว่า ส่วนหนึ่งของวัฏจักรแฮมิลโทเนียนที่ได้มา ผ่านจุด c ซ้ำกัน นั่นคือ กราฟดังกล่าวไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

ประโยชน์จากการศึกษาเรื่องกราฟแฮมิลโทเนียน สามารถแก้ปัญหาที่เรียกว่า **ปัญหาการเดินทางของเซลแมน** ปัญหาเป็นดังนี้ เซลแมนคนหนึ่งต้องการเสนอขายสินค้าไปยังเมืองต่างๆ และกลับมาสู่เมืองเริ่มต้น (ซึ่งอาจเป็นสำนักงานใหญ่) ถ้ามองว่า เซลแมนคนนี้จะวางแผนการเดินทางอย่างไร จึงจะทำให้ระยะทางในการเดินทางสั้นที่สุด

ปัญหานี้สามารถแทนได้ด้วย **กราฟที่มีน้ำหนัก** โดยที่ให้ จุด แทนเมือง, เส้น แทน ถนนที่เชื่อมระหว่างเมือง และ น้ำหนัก แทน ระยะทาง

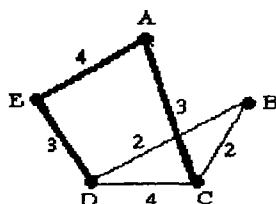
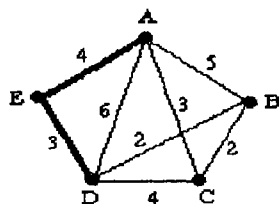
โดยหลักการแล้วสามารถแก้ปัญหาได้โดย การหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียนทั้งหมด แล้วเลือกวัฏจักรที่มีระยะทางรวมน้อยที่สุด ตัวอย่างเช่น

ถ้าเรามีเมืองอยู่ 5 เมือง คือ A, B, C, D, E โดยที่ระยะทางระหว่างเมืองเหล่านี้ แสดงได้ด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก ดังนี้



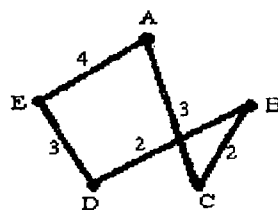
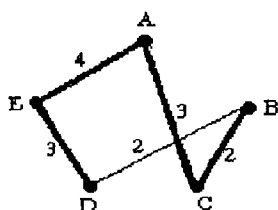
จากกราฟ จะเห็นว่า จุด E เป็นจุดที่มีดีกรี 2

∴ จุด E ต้องเป็นจุดเริ่มต้น



1) เลือกเส้น EA, ED

2) เลือกเส้น AC

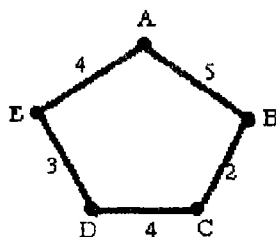


3) เลือกเส้น CB

4) เลือกเส้น BD

∴ วัฏจักรนี้มีระยะทางรวม 14 หน่วย

แต่เราสามารถหา วัฏจักรแฮมิลโทเนียนได้อีกวัฏจักรหนึ่ง
ที่มีระยะทางรวม 18 หน่วย ดังนี้

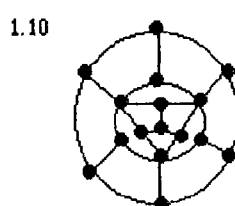
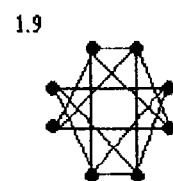
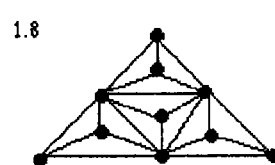
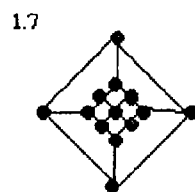
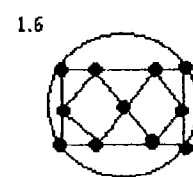
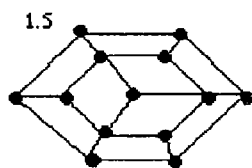
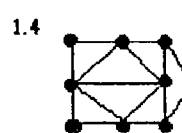
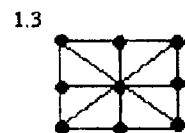
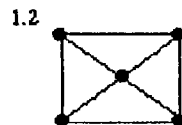
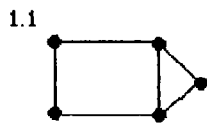


นั่นคือ ถ้าเชลแมนจะเริ่มออกเดินทางที่เมือง A แล้ว เชลแมนคนนี้
ควรเลือกเส้นทางที่มีลำดับ A, C, B, D, E, A หรือลำดับ A, E, D, B, C, A
เนื่องจากเป็นวัฏจักรที่มีผลรวมของระยะทางน้อยที่สุดคือ 14 หน่วย

แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า ถ้าจำนวนเมืองมากขึ้น หรือกราฟที่เราพิจารณา
ไม่ใช่กราฟแฮมิลโทเนียนแล้ว ความยุ่งยากในการแก้ปัญหาจะเกิดขึ้น อีก
ทั้ง ปัจจุบันยังไม่มีขั้นตอนวิธีใดๆ เลย ที่ช่วยในการหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพ
และทำได้ง่ายสำหรับปัญหานี้

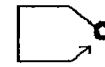
แบบฝึกหัด 2.2

1) จงหาว่า กราฟใดต่อไปนี้เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน พร้อมทั้งหา
วัฏจักรแฮมิลโทเนียนของกราฟนั้นด้วย



เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

1.1) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้



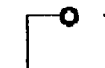
1.2) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้



1.3) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้



1.4) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้

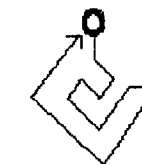


1.5) ไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

1.6) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้



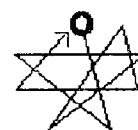
1.7) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้



1.8) ไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

1.9) มีวัฏจักรแฮมิลโทเนียน ดังนี้

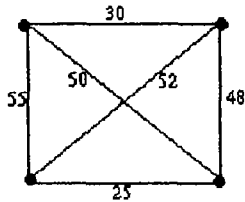
1.10) ไม่เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน



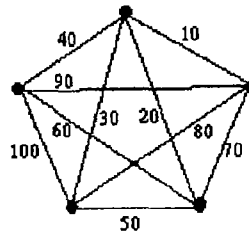
50

2) จงหาคำตอบปัญหาการเดินทางของเซลแมน ที่จะไปขายของตามเมืองต่างๆ โดยที่ ค่าใช้จ่ายในการเดินทางน้อยที่สุด ซึ่งน้ำหนัก แทนค่าใช้จ่าย (พันบาท)

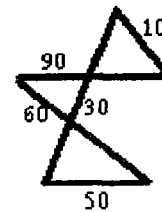
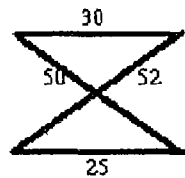
ก)



ข)



ก) วิเคราะห์แฮมิลโทเนียนที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด ดังนี้ ข) วิเคราะห์แฮมิลโทเนียนที่มีน้ำหนักน้อยที่สุด ดังนี้



∴ เราเสียค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด คือ 157,000 บาท

∴ เราเสียค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด คือ 240,000 บาท

ภาคผนวก ง
แผนการสอนรายคาบ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

แผนการสอนรายคาบที่ 1

หัวเรื่อง 1.1 บทนิยามของกราฟและตัวอย่าง (1)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้ว

1. นักเรียนสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์ต่างๆได้

เนื้อหา กราฟ เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ที่เหมาะสมในการสร้างแบบจำลองปัญหาต่างๆ ที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปที่เกี่ยวข้องกับการจัดการของ คน วัตถุสิ่งของ และความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านั้น เพราะกราฟมีโครงสร้างง่าย ๆ ซึ่งประกอบไปด้วย จุด และ เส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด โดยที่ จุด แทน คนหรือวัตถุสิ่งของ และ เส้น แทน ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านั้น

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

- ขั้นนำ** 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหา การเดินข้ามสะพานที่เมืองเคอนิกส์เบิร์ก
2. ครูสร้างสถานการณ์ต่างๆ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสร้างแบบจำลอง
- ขั้นสอน** 1. ครูสอนตัวอย่างที่ 1
2. ครูสอนตัวอย่างที่ 2
3. ครูสอนตัวอย่างที่ 3
- ขั้นสรุป** 1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป โครงสร้างของแบบจำลองว่ามีอะไรบ้าง

สื่อการเรียนรู้การสอน

การวัดผล ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ข้อ 1.1

การประเมินผล นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 2

หัวเรื่อง 1.1 บทนิยามของกราฟและตัวอย่าง (2)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

2. แก้ไขปัญหาต่างๆโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้
3. บอก $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ใดๆได้

เนื้อหา 1. ปัญหาต่างๆที่สามารถจำลองสถานการณ์ได้ด้วยกราฟ เราจะสามารถใช้กราฟในการวิเคราะห์ขั้นตอนวิธีแก้ไขปัญหา และค้นหาคำตอบ

2. **บทนิยาม 1** กราฟ G ประกอบไปด้วย $V(G)$ และ $E(G)$ ซึ่ง
 $V(G)$ คือ กลุ่มของสิ่งที่เราเรียกว่า จุด (vertex) โดยที่ G มีจุดอย่างน้อย 1 จุด
 $E(G)$ คือ กลุ่มของสิ่งที่เราเรียกว่า เส้น (edge) โดยที่ เส้นแต่ละเส้นนี้เชื่อมระหว่าง 2 จุดใดๆใน $V(G)$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาหน้าคิดเรื่อง มังกร และการแข่งขันฟุตบอล

ขั้นสอน 1. ครูสอนตัวอย่างที่ 4 และ 5
 2. ครูให้บทนิยาม 1
 3. ครูสอนตัวอย่างที่ 6 , 7 และ 8

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปถึงโครงสร้างของกราฟอีกครั้งหนึ่ง

สื่อการเรียนรู้การสอน 1. ปัญหาหน้าคิดเรื่อง มังกร

2. ปัญหาหน้าคิดเรื่อง การแข่งขันฟุตบอล
3. ปัญหาหน้าคิดเรื่อง ไครบโมยซัม

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มแก้ปัญหาหน้าคิด ไครบโมยซัม ตอนท้ายชั่วโมง

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 2 , 3 และ 4

การประเมินผล 1. สังเกตว่า นักเรียนมีความสนใจ และแก้ไขปัญหสำเร็จหรือไม่

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 3

หัวเรื่อง 1.1 บทนิยามของกราฟและตัวอย่าง (3)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

4. บอกถึงความสัมพันธ์ การประชิด และตกกระทบของกราฟ G ใดๆได้
5. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟหลายชั้น

เนื้อหา

1. บทนิยาม 2 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G เรากล่าวว่า
จุด u *ประชิดกับ* จุด v เมื่อมีเส้นใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v
และเรียก จุด u และจุด v ว่า จุดปลายของเส้น uv
ถ้า $e = uv$ เป็นเส้นในกราฟ G แล้ว เรากล่าวว่า
จุด u และ v *ตกกระทบกับ* เส้น e หรือ
เส้น e *ตกกระทบกับ* จุด u และ v
2. กราฟหลายชั้น คือ กราฟที่มีเส้นหลายชั้นอยู่ในกราฟดังกล่าว

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนบทนิยามของกราฟ

ขั้นสอน 1. ครูให้บทนิยาม 2

2. ครูสอนตัวอย่างที่ 9

3. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาในหน้า 8 และช่วยสรุปข้อสังเกตเหล่านี้

- เส้นที่เชื่อมจุด 2 จุดใดๆ ในกราฟ จะเป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้งก็ได้
- ไม่มีเส้นใดในกราฟ ตัดกับตัวมันเอง หรือ ลากผ่านจุดที่ไม่ใช่จุดปลายของเส้นนั้น
- เส้นสองเส้นในกราฟอาจลากผ่านกันหรือตัดกันโดยไม่ทำให้เกิดจุดใหม่

4. ครูสอนตัวอย่างที่ 10 แล้วสามารถตอบได้ว่ากราฟดังกล่าวเป็นกราฟ

หลายชั้น

5. ครูสอนตัวอย่างที่ 11

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างสถานการณ์ ที่แสดงได้ด้วยกราฟหลายชั้น

สื่อการเรียนรู้การสอน

การวัดผล 1. จากการแก้ปัญหาในหน้า 8 และสรุป ข้อสังเกต

2. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 5

การประเมินผล 1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ แก้ปัญหาสำเร็จ และหาข้อสังเกตได้หรือไม่

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 4

หัวเรื่อง 1.2 ดิจรีของจุดในกราฟ (1)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

6. บอกดิจรีของจุดใด ๆ ในกราฟได้ และบอกได้ว่าจุดใดเป็นจุดคู่ หรือ จุดคี่
7. ใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 1 ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

เนื้อหา 1. บทนิยาม 1 ให้ u เป็นจุดในกราฟ G

ดิจรี ของ u ใน G คือ จำนวนเส้นที่ตกกระทบกับจุด u

เขียนแทนด้วย $d(u)$

2. ทฤษฎีบทที่ 1 ผลรวมของดิจรีของจุดในกราฟ $= 2 \times$ จำนวนเส้น

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูวาดกราฟหลาย ๆ กราฟ บนกระดานดำ แล้วถามนักเรียนว่า จุดแต่ละจุดมีเส้นผ่านทั้งหมดกี่เส้น

ขั้นสอน 1. ครูให้บทนิยาม 1
 2. ครูสอนตัวอย่างที่ 2
 3. จากกราฟที่วาดบนกระดานดำ ให้นักเรียนนับผลรวมของดิจรีทั้งหมด และจำนวนเส้นของแต่ละกราฟ แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปความสัมพันธ์

4. ครูให้ทฤษฎีบท 1
5. ครูสอนตัวอย่างที่ 3 และ 4

ขั้นสรุป 1. ครูตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ ได้แก่ กราฟที่มี 5 เส้นจะสามารถมีจำนวนจุดเท่าไรได้บ้าง

สื่อการเรียนรู้การสอน

การวัดผล 1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกัน ตอบคำถามในหน้า 14

2. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 1, 2 และ 3

การประเมินผล 1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และแก้ปัญหาสำเร็จ หรือไม่

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 5

หัวเรื่อง 1.2 คีร์ของจุดในกราฟ (2)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

8. ใช้ความรู้ในทฤษฎีบทที่ 2 ไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

เนื้อหา ทฤษฎีบทที่ 2 ในกราฟ G ใดๆ จำนวนจุดคี่มีเป็นจำนวนคู่

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูวาดกราฟหลายๆกราฟ บนกระดานดำ และให้นักเรียนช่วยกันนับจำนวนจุดคี่ ของแต่ละกราฟ แล้วให้นักเรียนสรุปถึงความสัมพันธ์

ขั้นสอน 1. ครูให้ทฤษฎีบท 2
2. ครูสอนตัวอย่างที่ 5

ขั้นสรุป 1. ครูตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบ ได้แก่ กราฟที่มี 5 จุด ในแต่ละจุดจะสามารถมีดีกรีเป็นเท่าไรได้บ้าง

สื่อการเรียนรู้การสอน -

การวัดผล 1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.2 ข้อ 1 , 2 และ 3 ในชั้นเรียน

การประเมินผล 1. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 6

หัวเรื่อง 1.3 วิธีและวัฏจักร (1)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

9. บอกถึงความแตกต่างของทางเดิน , ทางเดินปิด , ทางเดินไม่ซ้ำ และ วิธีได้
10. หาทางเดิน , ทางเดินปิด , ทางเดินไม่ซ้ำ และ วิธี เมื่อกำหนดความยาวได้
11. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟไม่ขาดตอน

เนื้อหา

1. **บทนิยาม 1** ให้ u และ v เป็นจุดใดๆในกราฟ G
ทางเดิน $u-v$ ใน G คือ ลำดับสลับของจุด และ เส้น โดยที่
เส้นแต่ละเส้น ตกกระทบ กับจุดที่อยู่ระหว่างในลำดับ
ความยาวของทางเดิน $u-v$ คือ จำนวนของเส้นในทางเดิน $u-v$
2. **บทนิยาม 2** เรากล่าวว่า ทางเดิน $u-v$
เป็น ทางเดินไม่ซ้ำ เมื่อ เส้นในทางเดิน $u-v$ ไม่ซ้ำกัน และ
เป็น วิธี เมื่อจุดไม่ซ้ำ
3. **บทนิยาม 3** เรากล่าวว่า กราฟ G เป็น
กราฟไม่ขาดตอน เมื่อ 2 จุดใดๆในกราฟ G มีวิธีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว
กราฟขาดตอน เมื่อ มีอย่างน้อย 2 จุดใน G ไม่มีวิธีเชื่อม 2 จุดดังกล่าว
4. **บทนิยาม 4** เส้นตัด คือ เส้นซึ่งถ้ากำจัดออกไปแล้ว จะทำให้กราฟที่เกิดจากการ
กำจัดเส้นนั้นออกไปแล้ว กลายเป็นกราฟขาดตอน

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ 1. ครูวาดกราฟที่มีจำนวนจุดและเส้นมากๆ โดยให้กราฟนี้แสดงแทนแผนที่เมืองๆหนึ่ง แล้ว
ลองถามนักเรียนว่า จากจุดๆหนึ่งไปยังจุดอีกจุดหนึ่ง จะเลือกเส้นทางไหนโดยที่ใช้จำนวนเส้นน้อยที่สุด
จากนั้นครูจึงสรุปว่าสถานการณ์เหล่านี้สามารถใช้กราฟในการตอบคำถามได้ดีที่สุดและรวดเร็วที่สุด ดังนั้น
จึงจำเป็นต้องศึกษานิเทศน์ที่เกี่ยวข้องก่อน

ขั้นสอน 1. ครูให้บทนิยาม 1 และให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 1 และ 2 แล้วให้ศึกษาข้อสังเกต
2. ครูให้บทนิยาม 2 และให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่าง 3 แล้วศึกษาข้อสังเกต
3. ครูสอนตัวอย่างที่ 4 และให้ช่วยกันตอบคำถามในตัวอย่างที่ 4
4. ครูให้บทนิยาม 3 และให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่าง 5
5. ครูให้บทนิยาม 4 และให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่าง 6

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนบอกถึงนิยามของทางเดิน , ทางเดินปิด , ทางเดินเปิดไม่ซ้ำ และวิธี

สื่อการเรียนการสอน

การวัดผล 1. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 1

การประเมินผล 1. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 7

หัวเรื่อง 1.3 วิธีและวัฏจักร (2)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

12. หา $d(u,v)$ ได้ของกราฟไม่ขาดตอนที่มีน้ำหนักได้
13. หาวิธีที่สั้นที่สุดได้

- เนื้อหา**
1. บทนิยาม 5 เรากล่าวว่า กราฟ G เป็น กราฟที่มีน้ำหนัก เมื่อ เส้นแต่ละเส้นถูกกำหนดด้วยจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ และเรียก จำนวนจริงดังกล่าวนี้ว่า น้ำหนักของเส้น
 2. บทนิยาม 6 ความยาวของวิถี ในกราฟที่มีน้ำหนัก คือ ผลรวมของน้ำหนักของเส้นทั้งหมดในวิถีนั้น
 3. บทนิยาม 7 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน u และ v เป็นจุดใน G ระยะทางจาก u ไป v จะมีค่าเท่ากับ ความยาววิถี $u-v$ ที่สั้นที่สุด เขียนแทนด้วย $d(u,v)$
 4. วิธีที่สั้นที่สุด คือ การหาระยะทางระหว่าง 2 จุดใดๆที่สั้นที่สุดในกราฟ

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนทบทวนบทนิยามของวิถี

- ขั้นสอน**
1. ครูกล่าวถึงความเป็นจริงที่ว่า ในการจำลองสถานการณ์จริงๆแล้วจะมีการกำหนดระยะทาง ค่าใช้จ่าย หรือเวลา ลงในกราฟด้วยซึ่งจะกำกับที่เส้นในกราฟ
 2. ครูให้บทนิยาม 5, 6 และ 7
 3. ครูสอนตัวอย่างที่ 7
 4. ครูยกตัวอย่างปัญหาที่เกี่ยวกับการหา ระยะทางที่สั้นที่สุด , ค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด หรือเวลาที่สั้นที่สุด จะเป็นปัญหาที่สามารถแก้ได้ด้วยการหาวิถีที่สั้นที่สุด
 5. ครูสอนตัวอย่างที่ 8

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปแนวคิดในการหาวิถีที่สั้นที่สุด

สื่อการเรียนการสอน

- การวัดผล**
1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกันหาวิถี B-G ที่สั้นที่สุด (ในตัวอย่างที่ 8)
 2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 2 และ 3

- การประเมินผล**
1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่
 2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 8

หัวเรื่อง 1.3 วิธีและวัฏจักร (3)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

14. ใช้ความรู้ใน การหาวิธีที่สั้นที่สุดไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้
15. บอกความแตกต่างของวง และ วัฏจักรได้
16. หาวง และวัฏจักร ของกราฟใดๆได้

เนื้อหา

1. ปัญหาการหาวิธีที่สั้นที่สุด ระหว่าง 2 จุดใดๆ ในกราฟที่มีน้ำหนัก เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยมากในชีวิตประจำวัน เช่น เส้นทางการบินของสายการบินแห่งหนึ่งถูกจำลองได้กราฟที่มีน้ำหนัก การหา วิธีที่สั้นที่สุดในกราฟที่มีน้ำหนักจะบ่งบอกถึงการหาเส้นทางที่สั้นที่สุด , ค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด หรือ เวลาในการเดินทางที่สั้นที่สุด (ขึ้นอยู่กับว่า น้ำหนัก กำหนดเกี่ยวกับอะไร)
2. บทนิยาม 8 เราเรียก ทางเดินไม่ซ้ำแบบปิดที่ไม่ใช่ทางเดินเอกเทศ ว่า วง และเรียก วงที่จุดในวงไม่ซ้ำกันว่า วัฏจักร

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนสรุปถึงแนวคิดในการหาวิธีที่สั้นที่สุดอีกครั้งหนึ่ง

ขั้นสอน

1. ครูสอนตัวอย่างที่ 9
2. ครูให้นักเรียนหาวิธีที่สั้นที่สุดอื่นๆ ในตัวอย่างที่ 9 เช่น วิธี C-F
3. ครูให้บทนิยาม 8
4. ครูสอนตัวอย่างที่ 10

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนบอกความแตกต่างของ วงและวัฏจักร

สื่อการเรียนการสอน

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาในหน้า 24

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 5

การประเมินผล

1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 9

หัวเรื่อง 2.1 กราฟออยเลอร์เรียน (1)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

17. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟออยเลอร์เรียน

เนื้อหา 1. บทนิยาม 1 ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (G อาจเป็นกราฟหลายชั้น)

G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน เมื่อ G มีวงซึ่งผ่านเส้นทุกเส้นใน G และ
เรียกวงดังกล่าวว่า วงออยเลอร์เรียน

2. ทฤษฎีบท ในกราฟ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน ที่ไม่ใช่กราฟทรีเวียล

G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน ก็ต่อเมื่อ จุดทุกจุดใน G เป็นจุดคู่

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก ได้แก่
“ปัญหาการวาดภาพโดยไม่ยกดินสอและไม่ให้วาดเส้นซ้ำกัน” แล้วให้ช่วยกันสรุปหลักวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นสอน 1. ครูให้บทนิยาม 1
2. ครูสอนตัวอย่างที่ 1
3. ครูวาดกราฟที่ใหญ่ขึ้น แล้วให้นักเรียนตอบว่าเป็นกราฟออยเลอร์เรียนหรือไม่
4. ครูให้ทฤษฎีบท
5. ครูสอนตัวอย่างที่ 2

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกันเล่นเกมการวาดภาพ

สื่อการเรียนรู้การสอน 1. เกมการวาดภาพ

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนแก้ปัญหาในหน้า 30

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 1

การประเมินผล 1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 10

หัวเรื่อง 2.1 กราฟออยเลอร์เรียน (2)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

17 (ต่อ). และหาวงออยเลอร์เรียนจากกราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้ขั้นตอนวิธีของฟลูรีได้

18. หาวิธีที่สั้นที่สุดของการจับคู่จุดคู่ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟไม่ขาดตอนใดๆได้

เนื้อหา

1. ขั้นตอนวิธีของฟลูรี ให้ G เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

1) เริ่มที่จุดใดๆในกราฟ จากนั้นเดินตามเส้นใน G ไปเรื่อยๆ เมื่อเดินผ่านเส้นใดก็ให้กำจัดเส้นนั้นออกจากกราฟ

2) ในการเลือกเส้นที่ผ่านนั้น จะต้องไม่เลือก เส้นตัด เว้นแต่ไม่มีเส้นอื่น

2. เนื่องจาก กราฟออยเลอร์เรียน จะมีจุดทุกจุดเป็นจุดคู่ ดังนั้น ถ้ากราฟที่เรา กำลังพิจารณาเป็นกราฟที่ไม่ขาดตอนที่ไม่ใช่กราฟทรีเวียล แต่มีจุดคี่อยู่ ดังนั้นเราจะต้องทำให้จุดคี่เหล่านี้เป็นจุดคู่ โดยการหาวิธีเชื่อมจุดคี่ 2 จุดใดๆ เพื่อเพิ่มดีกรีอีก 1 ดีกรี ซึ่งจะทำให้จุดเหล่านี้ กลายเป็นจุดคู่

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนบทนิยามของกราฟออยเลอร์เรียน
2. ครูวาดกราฟออยเลอร์เรียนใดๆ แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาวงออยเลอร์เรียน

ขั้นสอน

1. ครูให้ขั้นตอนวิธีของฟลูรี
2. ครูสอนตัวอย่างที่ 3 แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาวงออยเลอร์เรียนที่แตกต่างกันมีได้อีกหรือไม่

ไม่

3. ครูสอนตัวอย่างที่ 4

4. ครูสอนตัวอย่างที่ 5 ซึ่งเป็นการหา ทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียน

เรียน

ขั้นสรุป

1. ครูให้กราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียนอีกกราฟหนึ่งแล้วให้นักเรียนหาทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟดังกล่าวโดยให้ใช้เส้นซ้ำน้อยที่สุด

สื่อการเรียนรู้การสอน

การวัดผล

1. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 2

การประเมินผล

1. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 11

หัวเรื่อง 2.1 กราฟออยเลอร์เรียน (3)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

18. (ต่อ) และหาทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟ ที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุด
19. หาความยาวของทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียนใดๆ โดยใช้เส้นซ้ำที่มีความยาวน้อยที่สุด

เนื้อหา

1. ถ้ากราฟที่เป็นตัวแบบจำลองไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียน แต่เราต้องการที่จะหาทางเดินออยเลอร์เรียนในกราฟดังกล่าว เราก็สามารถที่จะหาทางเดินดังกล่าวได้ **โดยสร้างกราฟใหม่ให้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน** ดังเช่นตัวอย่างที่ 5 (โดยมีแนวความคิดว่า เส้นเชื่อมต่อจุดที่ 2 จุดนั้นต้องมีจำนวนน้อยที่สุด) แต่ถ้ากราฟที่เราพิจารณามี
 - จุดที่ 2 จุดนั้นไม่มีเส้นเชื่อมเดิมอยู่
 - จุดที่มากกว่า 2 จุดขึ้นไป อาจเป็น 4, 6, 8, ... (จาก ทบ. จุดที่มีเป็นจำนวนคู่)
 การหาทางเดินออยเลอร์เรียนจากกราฟที่มีลักษณะดังกล่าวจะยุ่งยากมากขึ้น แต่ก็ใช้แนวความคิดเดิมที่ว่า **หาเส้นเชื่อมต่อจุดที่ทั้งหมดที่อยู่ในกราฟทำให้เป็นจุดคู่โดยใช้เส้นเชื่อมให้น้อยที่สุด** ซึ่งก็คือ หาวิธีที่สั้นที่สุด เชื่อมจุดที่ทั้งหมดนั่นเอง)
2. ความยาวของวงออยเลอร์เรียนจากกราฟใหม่ = จำนวนเส้นเดิม + จำนวนเส้นใหม่ที่เพิ่มเข้ามา

กิจกรรมการเรียนการสอน

- ขั้นนำ**
1. ครูทบทวนการหาออยเลอร์เรียนจากกราฟที่ไม่ใช่กราฟออยเลอร์เรียน และมีจุดที่ 2 จุด นอกนั้นเป็นจุดคู่ แต่จุดที่ 2 จุดนั้นมีเส้นเชื่อมกัน
 2. ครูวาดกราฟที่มีจุดที่ 2 จุด นอกนั้นเป็นจุดคู่ แต่จุดที่ทั้งสองไม่มีเส้นเชื่อมกัน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาวิธีที่จะทำให้กราฟนี้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

ขั้นสอน

1. ครูสอนตัวอย่างที่ 6
2. ครูวาดกราฟที่มีจุดที่ 4 จุด นอกนั้นเป็นจุดคู่ แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาวิธีที่จะทำให้กราฟนี้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน
3. ครูสอนตัวอย่างที่ 7

ขั้นสรุป

1. ครูวาดกราฟที่มีจุดที่ 6 จุด นอกนั้นเป็นจุดคู่ แล้วให้นักเรียนแบ่งกลุ่มช่วยกันหาวิธีที่จะทำให้กราฟนี้เป็นกราฟออยเลอร์เรียน

สื่อการเรียนการสอน

การวัดผล

1. ครูให้นักเรียนแก้ปัญหาในหน้า 38
2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 3, 4 และ 5

การประเมินผล

1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่
2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 12

หัวเรื่อง 2.1 กราฟออยเลอร์เรียน (4)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

20. ใช้ความรู้เรื่องกราฟออยเลอร์เรียนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

เนื้อหา 1. ความรู้ในเรื่องวงออยเลอร์เรียนสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมายในสถานการณ์จริง ถ้าเราจำลองแผนที่ถนนของเมืองด้วยกราฟ โดยให้ เส้น แทน ถนน และจุด แทน สามแยก หรือสี่แยกแล้ว คนกวาดถนน คนเก็บขยะ บุรุษไปรษณีย์ พนักงานจัดมิเตอร์ไฟฟ้าและประปา ต่างได้รับประโยชน์จากความรู้ในเรื่องวงออยเลอร์เรียนเพราะจะช่วยให้บุคคลเหล่านั้นปฏิบัติหน้าที่ของตนได้โดยผ่านถนนแต่ละสายเพียงครั้งเดียว หรือ ถ้าจำเป็นต้องผ่านถนนบางสายซ้ำ ผลรวมของระยะทางที่ผ่านซ้ำต้องมีค่าน้อยที่สุด เราจะเห็นประโยชน์ได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเราจำลองสถานการณ์ ด้วยกราฟที่มีน้ำหนัก โดยที่ น้ำหนัก อาจแทน ระยะทาง หรือค่าใช้จ่ายก็ได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มช่วยกันยกตัวอย่างสถานการณ์ที่สามารถใช้ความรู้เรื่องกราฟออยเลอร์เรียนไปแก้ปัญหาได้

ขั้นสอน 1. ครูสอนตัวอย่างที่ 7
2. ครูสอนตัวอย่างที่ 8

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกัน (กลุ่มเดิม) แสดงขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กลุ่มสร้างขึ้น

สื่อการเรียนการสอน

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 6 และ 7

การประเมินผล 1. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 13

หัวเรื่อง 2.2 กราฟแฮมิลโทเนียน (1)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

21. บอกได้ว่ากราฟใดเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

เนื้อหา บทนิยาม ให้ G เป็นกราฟไม่ขาดตอน (G อาจเป็นกราฟหลายชั้น)

G เป็นกราฟแฮมิลโทเนียน เมื่อ G มีวัฏจักรซึ่งผ่านจุดทุกจุดใน $V(G)$

และเรียก วัฏจักรดังกล่าวว่า วัฏจักรแฮมิลโทเนียน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกันเล่นเกมการท่องเที่ยว

ขั้นสอน 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกับเกมการท่องเที่ยว โดยวาดกราฟที่มีขนาดไม่ใหญ่มาก แล้วให้ช่วยกันสรุปหลักวิธีการแก้ปัญหา

2. ครูให้บทนิยาม

ขั้นสรุป 1. ครูวาดกราฟหลาย ๆ กราฟบนกระดานดำ แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่ากราฟใดบ้างเป็นกราฟแฮมิลโทเนียน

สื่อการเรียนรู้การสอน 1. เกมการท่องเที่ยว

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนช่วยแก้ปัญหาหน้าคิด

การประเมินผล 1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่

แผนการสอนรายคาบที่ 14

หัวเรื่อง 2.2 กราฟแอมัลโทเนียน (2)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

22. หาวัฏจักรแอมัลโทเนียนจากกราฟแอมัลโทเนียนได้

เนื้อหา 1. กฎที่เกี่ยวกับคุณสมบัติ และความสัมพันธ์ของจุดและเส้นของกราฟแอมัลโทเนียน

กฎข้อที่ 1 ถ้าจุด X มีดีกรีเป็นสอง เส้นที่ตัดกระทบกับจุด X ทั้งสองเส้นนั้น จะต้องเป็นส่วนหนึ่งของวัฏจักรแอมัลโทเนียน

กฎข้อที่ 2 วัฏจักรแอมัลโทเนียนใดๆ จะต้องไม่ประกอบด้วย วัฏจักรย่อย

กฎข้อที่ 3 ในขณะที่สร้างวัฏจักรแอมัลโทเนียนนั้น ถ้าเส้นทางเดินของวัฏจักรแอมัลโทเนียน ผ่านจุด X ใช้เส้นเชื่อม 2 เส้นที่เชื่อมกับจุด X แล้วเราสามารถลบเส้นอื่นที่เชื่อมกับจุด X ที่ไม่ได้ใช้เป็นทางผ่านในวัฏจักร ออกจากการพิจารณาได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ 1. ครูให้นักเรียนทบทวนบทนิยามของกราฟแอมัลโทเนียน

ขั้นสอน 1. ครูให้กฎบางประการที่เกี่ยวกับคุณสมบัติ และความสัมพันธ์ของจุดและเส้นของกราฟแอมัลโทเนียน

2. ครูสอนตัวอย่างที่ 1

3. ครูสอนตัวอย่างที่ 2

4. ครูสอนตัวอย่างที่ 3

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปถึงวิธีการหาวัฏจักรแอมัลโทเนียน

สื่อการเรียนการสอน 1. ปัญหาคิด

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนช่วยแก้ปัญหาคิด

2. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 1

การประเมินผล 1. สังเกตว่านักเรียนมีความสนใจ และ แก้ปัญหาสำเร็จหรือไม่

2. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

แผนการสอนรายคาบที่ 15

หัวเรื่อง 2.2 กราฟแฮมิลโทเนียน (3)

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

23. ใช้ความรู้ในเรื่อง กราฟแฮมิลโทเนียนไปใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้

เนื้อหา 1. ประโยชน์จากการศึกษาเรื่องกราฟแฮมิลโทเนียน สามารถนำไปปัญหาที่มีลักษณะเหมือนกับ ปัญหาการเดินทางของเซลแมน ปัญหาเป็นดังนี้ เซลแมนคนหนึ่งต้องการเสนอขายสินค้าไปยังเมืองต่างๆ และกลับมาสู่เมืองเริ่มต้น (ซึ่งอาจเป็นสำนักงานใหญ่) ถ้าว่าเซลแมนคนนี้จะวางแผนการเดินทางอย่างไรจึงจะทำให้ระยะทางในการเดินทางสั้นที่สุด

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ 1. ครูทบทวนการหาวัฏจักรแฮมิลโทเนียน
2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มและช่วยกันยกสถานการณ์ที่สามารถใช้ความรู้เรื่อง กราฟแฮมิลโทเนียน ไปใช้ในการแก้ปัญหา

ขั้นสอน 1. ครูให้นักเรียนพิจารณาปัญหาการเดินทางของเซลแมน

ขั้นสรุป 1. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มกัน (กลุ่มเดิม) แสดงขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กลุ่ม สร้างขึ้น

สื่อการเรียนรู้การสอน

การวัดผล 1. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 2

การประเมินผล 1. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้องมากกว่า 50% ของนักเรียนทั้งหมด

ภาคผนวก จ.

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู และแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

**รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู และแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น**

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ อนันต์ชื่น
 อาจารย์ประจำ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
 มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์
 จังหวัดนครปฐม

2. อาจารย์ บัณฑิตย์ อึ้งยงค์
 อาจารย์ประจำ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
 สถาบันราชภัฏสวนสุนันทา
 จังหวัดกรุงเทพมหานคร

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นาย ธานินทร์ สิทธิวีระธรรม
วันเดือนปีเกิด	23 มิถุนายน 2516
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดพิจิตร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	58/1 ถนนราษฎร์เกษมอุทิศ อำเภอเมือง จังหวัดพิจิตร โทร. (056) 611245
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2528	ประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนอนุบาลพิจิตร
พ.ศ.2534	มัธยมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนพิจิตรพิทยาคม
พ.ศ.2538	ค.บ. (คณิตศาสตร์) จากสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา
พ.ศ.2542	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ

ของ

ชานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2542

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น และพัฒนาต้นแบบบทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เน้นทางด้านคณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา จังหวัดกรุงเทพมหานคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2541 1 ห้องเรียน จำนวน 45 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่ระดับนัยสำคัญ .01

A STUDY OF ACHIEVEMENT IN LEARNING ELEMENTARY GRAPH THEORY
OF MATHAYOM SUKSA III STUDENTS

AN ABSTRACT
BY
THANIN SITHIWIRATTHAM

Presented in partial fulfillment of the requirements for the Master
of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
March 1999

The objective of this research was to study the achievement of Mathayom Suksa III students in learning elementary graph theory.

The sample consisted of forty-five students, studied in Mathayom Suksa III, of math - intensive program, in the Secondary Demonstration School of Rajabat Institute Suan Sunandha in Bangkok. The investigation was executed during the first semester of 1998. The students were taught some lessons on elementary graph theory, designed by the researcher. The guidelines as stipulated in the handbook accompanying these lessons were strictly followed. The teaching part of the study covered fifteen 50-minute periods. The subjects then were given a test at the end of the instruction.

The results indicated that the Mathayom Suksa III students were able to learn the elementary graph theory at the alpha level of .01.