การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ป (Group) ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7

ปริญญานิพนธ์

ของ

นิยม ยอดมนต์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
พฤษภาคม 2520

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

.....ประธาน

.....กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงด้วยดี เพราะผู้วิจัยได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ศาสตราจารย์ สุพจน์ ชะนะมา และผู้ช่วยศาสตราจารย์จรินทร์ ประสงค์สม ซึ่งผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอบพระคุณที่ท่านได้ให้แนวคิด และช่วยแนะนำอย่างใกล้ชิดโดยตลอด ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ลาวัลย์ พลกล้า ที่ช่วยตรวจแก้แบบเรียนที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ทดลองสอน

ขอขอบพระคุณอาจารย์ใหญ่ คณะอาจารย์ของโรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร และโรงเรียนสาธิตวิทยาลัยครูพิบูลสงคราม พิษณุโลก ที่ได้ให้ความร่วมมืออย่างดียิ่งในการวิจัยครั้งนี้ และขอขอบคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้.

นิยม ยอดมนต์

สารบาญ

บัญชีตาราง

บทที่ 1

บทนำ

คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่มีความเจริญงอกงามและเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ทั้งทางด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ ซึ่งมีผลทำให้แขนงวิชาต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ธรรมชาติและสังคมศาสตร์ ตลอดจนสภาพการณ์ในสังคมเปลี่ยนแปลงไปด้วย (สุวรรณา มุ่งเกษม, 2513 : 132) เหตุการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นทั่วโลกในปัจจุบันทั้งในด้านเศรษฐกิจและสังคม แสดงให้เห็นว่ามีความจำเป็นที่จะต้องปฏิรูปหลักสูตรคณิตศาสตร์และการดำเนินการสอนใหม่โดยสิ้นเชิง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2515 : 1) เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาถึงระบบคณิตศาสตร์ (ประกอบด้วย อนิยาม นิยาม กติกาหรือสัจจพจน์ และทฤษฎี) และการนำระบบเหล่านี้ไปใช้ตามที่มนุษย์จะสามารถทำได้ ดังนั้นถ้าจะศึกษาโครงสร้างคณิตศาสตร์จึงต้องศึกษาถึงระบบคณิตศาสตร์ นั่นคือจะต้องศึกษาลักษณะของกติกา คุณสมบัติสมาชิก โอเปอเรชั่นและความสัมพันธ์ที่ได้จากกติกา (Wheeler, 1969 : 15)

การศึกษาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้มุ่งให้เข้าใจเรื่องโครงสร้าง (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2515 : 1) เนื่องจากการสอนโครงสร้างเบื้องต้นของแต่ละวิชานั้นจะให้ประโยชน์อย่างน้อย 4 ประการด้วยกัน คือ (วิจิตร สินสิริ และคนอื่น ๆ, 2515 : 36 – 39)

ประการที่หนึ่ง การที่เข้าใจความคิดพื้นฐานเบื้องต้นของวิชาจะทำให้เข้าใจวิชานั้น ๆ มากยิ่งขึ้น ที่กล่าวเช่นนี้มิใช่แต่จะเป็นจริงในวิชาฟิสิกส์และคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่จะเป็นจริงกับวิชาอื่น ๆ เช่น สังคมศึกษาและวรรณคดีด้วย

ประการที่สอง จากการศึกษาและวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความจำของมนุษย์พบว่าสิ่งใดที่ไม่ได้จัดไว้ให้เป็นระเบียบมักจะลืมง่าย คนอาจจะจดจำได้แม้กระทั่งรายละเอียดปลีกย่อย ถ้าหากรู้จักหาวิธีง่าย ๆ ที่จะใช้อะไรบางอย่างแทนสิ่งนั้นอาจเรียกว่า "ทำเอาใหม่ได้" (Regenerative Character) ตัวอย่างเห็นได้ง่าย ๆ ก็คือ นักวิทยาศาสตร์จะใช้วิธีจำสูตร แทนที่จะต้องไปจดจำรายละเอียด เมื่อได้สูตรแล้วก็อาจจะไปหารายละเอียดเอาเองได้ภายหลัง การเรียนรู้หลักเบื้องต้นและหลักทั่วไปนั้น จะช่วยประกันการลืมได้เป็นอย่างดี เมื่อได้หลักก็อาจจะนำไปขยายหารายละเอียดปลีกย่อยได้ในภายหลัง ทฤษฎีที่ดีนั้นเป็นพาหนะที่มิใช่เพียงแต่จะนำไปสู่ความเข้าใจปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในปัจจุบันเท่านั้น แต่ยังช่วยความจำในอนาคตอีกด้วย

ประการที่สาม ความเข้าใจ ความคิด หลักการเบื้องต้นดังกล่าวมาแล้วว่าเป็นทางสำคัญที่จะนำไปสู่ "การถ่ายโยงความรู้" การที่เข้าใจของบางสิ่งบางอย่างได้ จากสิ่งที่เป็นเรื่องเฉพาะของเรื่องทั่ว ๆ ไป หมายถึงว่าการที่ได้เรียนรู้ไม่เฉพาะแต่ในเรื่องนั้นเท่านั้น แต่ยังได้เรียนรู้และเข้าใจถึงโครงสร้างทั้งหมด ซึ่งสามารถนำไปแก้ปัญหากับสิ่งอื่น ๆ ได้ในภายหน้าอีกด้วย ความคิดในเรื่อง "หลัก" และ "สังกัป" (ความคิดรวบยอด) ที่ใช้เป็นรากฐานของการถ่ายโยงความรู้มิใช่เป็นของใหม่ ได้ศึกษากันมานานแล้ว แต่ก็ยังคงต้องการการวิจัยในเรื่องนี้อีกมาก

ประการที่สี่ ที่เน้นให้เห็นความสำคัญในเรื่องการสอนหลักและโครงสร้าง ก็คือ จากการตรวจสอบวัสดุอุปกรณ์ที่ใช้สอนนักเรียนชั้นประถมและมัธยมอยู่เสมอ ๆ จะช่วยทำให้ช่องว่างระหว่างความรู้ "เบื้องต้น" และความรู้ "ชั้นสูง" ลดน้อยลง ปัญหายุ่งยากอันหนึ่งที่พบอยู่ในปัจจุบันก็คือ ความรู้ที่สอนกันอยู่ในชั้นประถมศึกษาก็ดี มัธยมศึกษา แม้กระทั่งในวิทยาลัย และมหาวิทยาลัยก็ดี สิ่งที่ใช้เรียนใช้สอนกันอยู่นั้นบางก็ล้าสมัย บางก็ทำให้เกิดความเข้าใจผิดห่างไกลไปจากความเจริญก้าวหน้าทางวิชาการของแต่ละสาขาวิชา ช่องว่างดังกล่าวอาจจะลดน้อยลงได้หากได้เน้นให้เห็นความสำคัญดังที่ได้อภิปรายมาแล้ว

สุชาติ (สุชาติ รัตนกุล, 2505 : 3) กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ต้องใช้ความคิดชนิดสมเหตุสมผลเพื่อเรียนรู้และเข้าใจโครงสร้างของคณิตศาสตร์ การสอนคณิตศาสตร์จึงเป็นการสอนที่ต้องอาศัยหลักจิตวิทยาม ก ก ก รอบ เยแต่ละขั้นในแต่ละหัวข้อจำเป็นต้องสอดคล้องกับจิตวิทยาแห่งการคิดและการเรียนรู้และพัฒนาการด้านต่าง ๆ ของเด็ก เพียเจต์ (Piaget) ได้ศึกษาพัฒนาการทางด้านสติปัญญาและความคิดของเด็กโดยเฉพาะเด็กอายุ 2 ปีถึง 12 ปี ซึ่งเป็นช่วงที่พัฒนาอย่างรวดเร็วมาก ได้แบ่งขั้นต่าง ๆ ของการเรียนรู้เป็นขั้น ๆ ดังนี้ (Adler, 1966 : 707-715)

ขั้นแรก (ตั้งแต่แรกเกิดถึง 18 เดือน) เรียก the sensori-motor stage ในขั้นนี้เด็กได้เรียนรู้การตอบสนองสิ่งเร้าต่าง ๆ การตอบสนองนี้จะค่อย ๆ เป็น พฤติกรรมที่ซับซ้อน ความสนใจของเด็กจะค่อย ๆ เบนออกจากตัวเด็กไปสู่วัตถุรอบตัวและเด็กจะเริ่มรับรู้ในกรณีที่มีของหาย

ขั้นที่สอง (18 เดือน ถึง 6 หรือ 7 ปี) เรียก the preoperational stage ในขั้นนี้เด็กสามารถใช้สัญญลักษณ์สื่อสารได้ แต่การสรุปหรือการตัดสินใจอะไรมักจะยึดถือเฉพาะองค์ประกอบที่ตนเองเห็นชัด และละเลยองค์ประกอบอื่น เป็นต้นว่า เมื่อเอาดินเหนียวที่ปั้นเป็นลูกกลมมาให้ดู แล้วทำให้ยาวออก เด็กก็จะตอบว่ามีดินเหนียวเพิ่มขึ้น เพราะมีความยาวมากกว่า แต่เด็กวัยนี้ยังมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อยของส่วนรวม ระหว่างสมาชิกกับเซ็ท หรือระหว่างเซ็ทกับเซ็ท

ขั้นที่สาม (อายุ 6 หรือ 7 ปี ถึง 11 ปี) เรียก the stage of concrete operation เด็กสามารถแยกมวลกับความยาวได้ แยกจำนวนนับกับความยาวได้ และเริ่มรู้ว่าเมื่อวัตถุเปลี่ยนรูปร่าง มวลสารของวัตถุไม่เพิ่มหรือลด นอกจากนี้เด็กยังสามารถเข้าใจคุณสมบัติที่เกี่ยวกับลำดับและการจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง

ขั้นที่สี่ (อายุ 11 ปีถึง 14 หรือ 15 ปี) เรียก the stage of formal operation เป็นขั้นของการให้เหตุผลคล้ายผู้ใหญ่ เด็กสามารถวิเคราะห์หาองค์ประกอบต่างๆ ของปัญหาและสามารถตั้งสมมุติฐานตลอดจนสามารถทดสอบสมมุติฐานกับสภาพความเป็นจริงได้ นอกจากนี้เด็กยังสามารถเห็นความสำคัญระหว่างข้อความหรืออาจกล่าวได้ว่าสามารถคิดแบบวิทยาศาสตร์ และให้เหตุผลชนิดที่มีแบบแผนทางคณิตศาสตร์ได้

ที่กล่าวมาพอสรุปได้ว่า การเรียนโครงสร้างของคณิตศาสตร์ช่วยทำความเข้าใจในเนื้อหาวิชาได้มากขึ้น ไม่ต้องจดจำรายละเอียดมาก ไม่ลืมง่าย สามารถนำไปแก้ปัญหากับสิ่งอื่น ๆ ได้ เบอร์ลิงฮอฟ (Berlinghoff, 1967 : 45) กล่าวว่าโครงสร้างซึ่งเต็มไปด้วยผลที่เป็นทฤษฎีอย่างลึกซึ้งและมีที่ใช้อย่างกว้างขวางได้แก่ "กรุ๊ป" คุณสมบัติของกรุ๊ปมีความสำคัญเกี่ยวกับการสรุป "นัย" ทั่วไปของกฎทางเลขคณิต ดังนั้นถ้านักเรียนได้เรียนรู้เรื่องกรุ๊ปก็จะช่วยให้เข้าใจโครงสร้างคณิตศาสตร์ และกฎเบื้องต้นทางเลขคณิตได้ดียิ่งขึ้น จากการศึกษาของ Piaget เด็กในช่วงอายุ 12 – 15 ปี สามารถให้เหตุผลชนิดที่มีแบบแผนทางคณิตศาสตร์ได้ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการนำเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นมาสอนนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

<u>ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า</u>

1. เพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายสามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้หรือไม่

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นของนักเรียนแต่ละชั้นในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ผลการค้นคว้าครั้งนี้จะทำให้ทราบระดับความสามารถของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 – 7 เกี่ยวกับการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้น

2. ผลการค้นคว้าอาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกเนื้อหาเรื่องกรุ๊ปเพื่อบรรจุเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา

สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนประถมศึกษาปีที่ 5 – 7 มีความสามารถที่จะเรียนเรื่องกรุ๊ปได้

2. นักเรียนประถมศึกษาตอนปลายที่เรียนอยู่ชั้นสูงกว่า มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นสูงกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ กระทำกับนักเรียนชั้นประถมปีที่ 5 – 7 ในปีการศึกษา 2519 โรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวนชั้นละ 1 ห้องเรียน ชั้นประถมปีที่ 5 จำนวน 41 คน ชั้นประถมปีที่ 6 จำนวน 34 คน และชั้นประถมปีที่ 7 จำนวน 33 คน รวมทั้งหมด 108 คน

2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ มุ่งศึกษาความสามารถในการเรียนรู้เรื่องกรุ๊ปเท่านั้น

กำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นถือเอาคะแนนเฉลี่ย (Mean) ของนักเรียนทั้งชั้นที่ทำแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ป

2. ผลสัมฤทธิ์ หมายถึงคะแนนที่นักเรียนได้จากการทำข้อสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. กรุ๊ป คือระบบคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซ็ทของสมาชิก และโอเปอเรชั่นสอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้ (Wheeler, 1969 : 251)

3.1 เซ็ทปิดภายใต้โอเปอเรชั่น

3.2 สมาชิกในเซ็ทสอดคล้องตามคุณสมบัติการจัดหมู่

3.3 มีสมาชิกเอกลักษณ์เพียงตัวเดียว สำหรับโอเปอเรชั่นในเซ็ท

3.4 แต่ละสมาชิกในเซ็ทจะมีสมาชิกอินเวอร์สเพียงหนึ่งตัวในความสัมพันธ์ตามโอเปอเรชั่นนั้น

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. ผลการค้นคว้าได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นสำคัญ

2. คะแนนเฉลี่ยชั้นใดมีค่าตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป และมีผู้ที่สอบได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไปมีจำนวนไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งชั้น ถือว่านักเรียนชั้นนั้นสามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้

บทที่ 2

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

<u>เกี่ยวกับการสอน</u>

เด็กไทยเรามักเรียนคณิตศาสตร์โดยการทำแบบฝึกหัดมาก ๆ จนสามารถจดจำวิธีทำวิธีคิดได้ ทั้งนี้เป็นการจดจำโดยไม่ได้เกิดความเข้าใจเลย เด็กสามารถคิดคำนวณได้เหมือนกับเครื่องยนต์กลไก ด้วยเหตุนี้เองเด็กจึงเกิดความเบื่อหน่าย เพราะไม่เกิดความเพลิดเพลิน โดยธรรมชาติแล้วเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์สามารถฝึกให้ผู้เรียนเป็นคนมีเหตุผล แต่ทั้งนี้ต้องอยู่ที่วิธีสอนเป็นสำคัญ (ประเทิน มหาขันธ์, 2512 : 1 – 2) สิ่งที่ต้องคำนึงถึงอยู่เสมอในการสอนคณิตศาสตร์ได้แก่ ความมุ่งหมาย แคพเพอร์ (Kaper, 1968 : 323) กล่าวว่าความมุ่งหมายของการเรียนคณิตศาสตร์ปัจจุบันควรประกอบด้วย

1. เพื่อพัฒนาความคิดของผู้เรียน
2. เพื่อพัฒนาการคิดหาเหตุผล
3. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

การที่จะสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนพัฒนาความคิด ครูต้องมีบทบาทเพียงจัดหาวัสดุสิ่งของที่เร้าให้เกิดความคิด ให้กำลังใจ และส่งเสริมให้คำปรึกษา แนะนำสาธิตและประเมินผลงานของนักเรียน (สุมิตร คุณานุกร, 2518 : 144) วิธีสอนคณิตศาสตร์ที่มีผลให้ผู้เรียนได้รู้เหตุผลและสามารถนำไปใช้นั้นควรเน้นความหมายและความเข้าใจในสังกัปเกี่ยวกับโครงสร้างคณิตศาสตร์ การฝึกหัดควรให้ฝึกหลังจากผู้เรียนเข้าใจดีแล้ว (Spitzer, 1963 : 19) นอกจากนั้นยังมีแนวความคิดเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ที่ผู้รู้ได้เสนอไว้มากมาย เช่น

ฮูเฟอร์ (ศึกษาธิการ, 2509 : 3.4 – 4) แห่ง International school of Bangkok ให้ข้อคิดเห็นว่าการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันควรมีลักษณะดังนี้

1. ควรสอนให้เข้าใจโครงสร้างคณิตศาสตร์ เพื่อให้เป็นการง่ายและไม่สับสนเมื่อผู้เรียนต้องรับเนื้อหาใหม่ และในขณะเดียวกันก็ไม่ควรลืมเรื่องที่เรียนมาแล้ว นั่นก็คือ ไม่ควรสอนคณิตศาสตร์เป็นตอน ๆ โดยไม่เกี่ยวข้องกัน

2. ควรสอนคณิตศาสตร์แก่นักเรียนแบบที่ให้เกิดศิลปในการค้นพบ แทนที่จะป้อนวิธีที่สำเร็จรูปแล้ว

3. ควรรวมเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตเข้าด้วยกัน แทนที่จะแยกสอนอย่างที่ทำกันอยู่

โซเวลล์ (Sowell, 1974 : 211) กล่าวว่า สังกัปเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เป็นสิ่งใหม่สำหรับเด็กควรเริ่มจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมและนักเรียนจะมีความเข้าใจยิ่งขึ้นเรื่อย ๆ ถ้าจัดประสบการณ์ประเภทรูปธรรม รูปธรรม–นามธรรม และรูปภาพ–นามธรรม ให้กับเด็กก่อนแล้วจึงเสนอประสบการณ์นามธรรมล้วน

เบอร์เกเลย์ (Berkeley, 1966 : 285) เสนอหลักเบื้องต้นของการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนไว้ดังนี้

1. <u>ตัวอย่าง</u> ครูควรให้และอธิบายตัวอย่างที่ดีและน่าสนใจ ถ้าเป็นไปได้ตัวอย่างควรอยู่บนรากฐานแห่งความเป็นอยู่ของมนุษย์หรือสัตว์

2. <u>การฝึกหัด</u> นักเรียนควรฝึกการใช้ความคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากตัวอย่าง และฝึกการแก้ปัญหาในตัวอย่าง แต่มีข้อควรคำนึงอยู่ว่าการฝึกมาก ๆ สำหรับนักเรียนคนหนึ่ง อาจทำให้คนอื่นตามไม่ทันหรือเกินความจำเป็นสำหรับเขา

3. <u>การสรุป</u> นักเรียนควรสร้างข้อสรุปที่สมบูรณ์ถูกต้อง เนื่องจากว่าที่สุดแห่งความเข้าใจในสิ่งใดสิ่งหนึ่งจะสามารถสรุปสาระสำคัญได้

4. <u>การเข้าสู่ด้วยการนำไปใช้ทั่วไป</u> (Generalized Approach) นักเรียนควรจะได้ฝึกว่าจะนำหัวข้อทางคณิตศาสตร์ที่เรามีความรู้อยู่ เพื่อให้ได้สิ่งใหม่อย่างสมบูรณ์ได้อย่างไร เนื่องจากเราไม่สามารถทราบว่าหัวข้อใดบ้างที่จะต้องทำความเข้าใจเพื่ออนาคต เราจึงควรเรียนวิธีการทั่ว ๆ ไปสำหรับทำความเข้าใจหัวข้อต่าง ๆ ในทางคณิตศาสตร์

5. <u>ตรวจสอบความถูกต้อง</u> ครูควรฝึกนักเรียนจนเป็นนิสัย เกี่ยวกับการตรวจสอบงานที่เขาทำ เพื่อความแน่ใจว่าถูกต้อง

แฟร์ (Fehr, 1971 : 17) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาที่ดีนั้น ควรประกอบด้วยการทำให้นักเรียนได้รับวิชาความรู้สำหรับตัวของเขาเองด้วยวิธีการซักถามเชิงวิทยาศาสตร์ (Scientific inquiry) โดยทั่วไปแล้ววิธีการนี้

จะให้เด็กนักเรียนทำกิจกรรมสำคัญ 4 ประการด้วยกัน คือให้สังเกต ให้เลือก เชื่อมโยงสู่ข้อสรุปทั่วไปด้วยนามธรรม แล้วจึงสร้างสังกัปของผลที่ได้

โครงการ UICSA (University of Illinois Arithmetic Project) ตั้งขึ้นเมื่อ พ.ศ.2501 เป็นโครงการทดลองสำหรับวิชาเลขคณิตโดยเฉพาะ คือ ทดลองกับนักเรียนตั้งแต่เกรด 1 ถึงเกรด 6 (เทียบเท่าชั้นประถมปีที่ 1 ถึงชั้นประถมปีที่ 6) โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะปรับปรุงเนื้อหาวิชาที่สอนให้ดีขึ้น และช่วยครูที่สอนวิชานี้ให้ปรับปรุงแก้ไขวิธีสอนให้เป็นที่เร้าใจและเร้าความกระตือรือร้นของเด็กมากยิ่งขึ้น จากการทดลองปรากฏผลซึ่งสรุปได้ดังนี้ (ศึกษาธิการ, 2509 : 3.9-2)

ก. เด็กในระดับชั้นประถมศึกษามีความสามารถเรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้มากกว่าที่เด็กต้องเรียนอยู่ในขณะนี้

ข. โดยหลักธรรมชาติแล้ว วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าสนใจวิชาหนึ่งสำหรับเด็ก

ค. บางเรื่องหรือบางหัวข้อในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งนักคณิตศาสตร์หรือนักการศึกษาเคยคิดว่ายากเกินวัยของเด็กชั้นประถม จึงประวิงไว้เพื่อสอนในชั้นมัธยมนั้น โครงการทดลองนี้ให้ผลทดลองว่าควรจะจัดสอนเสีย ได้ในระดับประถมศึกษา ไม่ควรรอไว้สอนในชั้นมัธยมศึกษา เพราะอาจจะช้าหรือสายเกินไปสำหรับเด็ก ฉะนั้นตามหลักสูตรทดลองของโครงการ UICSA เด็กจะได้มีโอกาสได้เรียนวิชาพีชคณิตและวิชาเรขาคณิตเบื้องต้นตั้งแต่เกรด 5 และอาจจะได้เรียนวิชาตรีโกณมิติเบื้องต้นด้วย

ง. การยอมรับว่าเด็กมีความสามารถในการเรียนภาษา มีผลต่อเนื่องว่าเด็กมีความสามารถอย่างสูงในการเรียนภาษาคณิตศาสตร์

<u>เกี่ยวกับกรุ๊ป</u>

แฟร์ (Fehr, 1965 : 38) กล่าวว่า คณิตศาสตร์แผนปัจจุบันที่จัดสอนในโรงเรียนของประเทศที่มีการปฏิรูปการศึกษาคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. ทฤษฎีเซ็ทเบื้องต้น
2. ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์เบื้องต้น
3. พีชคณิตแนวปัจจุบัน ได้แก่ กรุ๊ป ริง และฟิลด์

4. ความน่าจะเป็นและสถิติ

โคลแมน (Canadian Teachers' Federation, 1967 : 24) คาดหวังว่าในช่วง 5-10 ปีข้างหน้านี้แนวคิดเกี่ยวกับ "กรุ๊ป" หรือระบบคณิตศาสตร์" จะต้องเป็นสิ่งคุ้นเคยสำหรับนักเรียน ป.6 และเรื่องกรุ๊ปจะทำให้นักเรียนรู้จักและชอบแนวคิดที่เป็นนามธรรม นอกจากนั้น วิลสัน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2516 : 129) ยังกล่าวว่าในการสอนโครงสร้างคณิตศาสตร์นั้นจะต้องเน้นโครงสร้างของกรุ๊ป วิธีสอนที่ใช้ก็คือเริ่มต้นด้วยการนิยามสมาชิกของเซ็ทที่จะพิจารณาพร้อมด้วยโอเปอเรชั่น และสร้างตารางโอเปอเรชั่น (operation table) สำหรับเซ็ทนั้น แล้วนักเรียนสำรวจคุณสมบัติต่าง ๆ เช่น คุณสมบัติปิด (Closure) การจัดหมู่ (Associativity) การสลับที่ (Commutativity) เอกลักษณ์ (Identity) อินเวอร์ส (Inverse) และไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism) ถ้าเพิ่มโอเปอเรชั่นที่สองเข้ามาก็อาจให้นักเรียนสำรวจคุณสมบัติเกี่ยวกับการกระจาย (Distributive law) ด้วย

เคอร์กแพตริก (Kirkpatrick, 1971 : 306-A) ได้ทดลองสอนระบบคณิตศาสตร์ขนาดจำกัด (finite mathematical systems) แก่นักเรียนเกรด 6 (เทียบเท่าชั้นประถมปีที่ 6) จำนวน 300 คน ซึ่งเลือกอย่างสุ่มจากโรงเรียน 6 โรงเรียน โดยมีจุดมุ่งหมายการสอนดังนี้

1. เพื่อให้เกิดสุนทรียวิจักษณ์ (appreciation) ในธรรมชาติ และโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์
2. เพื่อให้เข้าใจวิธีการศึกษาค้นคว้าตามแบบแผนทางคณิตศาสตร์
3. เพื่อให้เข้าใจธรรมชาติของโครงสร้างพื้นฐานอันได้แก่ คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการสลับที่ คุณสมบัติการจัดหมู่ และคุณสมบัติการกระจาย
4. เพื่อให้เข้าใจลักษณะอินเวอร์สในโอเปอเรชั่น และความสัมพันธ์ระหว่างอินเวอร์สกับเอกลักษณ์
5. เพื่อให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

ในการทดลองแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่กลุ่ม A และ B กลุ่ม A เรียนเนื้อหาระบบคณิตศาสตร์จำกัด กลุ่ม B เรียนระบบคณิตศาสตร์ของจำนวนธรรมชาติและจำนวน

ที่เป็นเศษส่วนบวก ซึ่งเป็นระบบคณิตศาสตร์ที่ไม่จำกัด ใช้เวลา 10 วัน โดยควบคุมตัวแปรอื่น ๆ เช่น เวลาให้งานเพิ่มเติม ฯลฯ ผลการทดลองปรากฏว่า

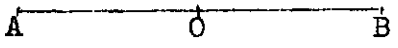
1. นักเรียนกลุ่ม B มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่ม A อย่างมีนัยสำคัญในด้านโครงสร้างพื้นฐานตามจุดมุ่งหมายข้อ 3 และสุนทรียวิจักษณ์ตามจุดมุ่งหมายข้อ 1

2. นักเรียนกลุ่ม A มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่ม B อย่างมีนัยสำคัญด้านความสามารถในการหาแบบแผนทางคณิตศาสตร์ ตามความมุ่งหมายข้อ 2 ส่วนความมุ่งหมายข้อ 4 และ 5 ผลสัมฤทธิ์ของการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

แมทธิวส์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2516 : 21-30) กล่าวว่า เด็กอายุ 9 ขวบ สามารถเข้าใจตารางที่แสดงให้เห็นว่า ถ้าบวกเลขคู่สองจำนวนเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์จะเป็นเลขคู่ และถ้าเอาเลขคู่บวกกับเลขคี่หรือเลขคี่บวกกับเลขคู่ ผลลัพธ์จะเป็นเลขคี่ เด็กสามารถเข้าใจข้อสรุปนี้ ตลอดทั้งเรื่องทำนองนี้

+	E	O
E	E	O
O	O	E

ตารางเดียวกันนี้อาจจะใช้ในเรื่องอื่น ๆ ได้ เช่น การหมุนเส้นตรง AB ไปครึ่งรอบ โดยใช้ O เป็นจุดหมุน (H) การหมุนครึ่งรอบสองครั้งจะเท่ากับการหมุนหนึ่งรอบ (F)



*	F	H
F	F	H
H	H	F

ย่อมได้ว่า H * H = F ในทำนองเดียวกัน F * F = F และ F * H = H * F ดังแสดงในตารางข้างต้น เซ็ททั้งสองนี้เป็นตัวอย่างของกรุ๊ปที่มีสมาชิก 2 ตัว และเป็นกรุ๊ปที่ไอโซมอร์ฟิค (Isomorphic) กัน

ยัง (Young, 1969 : 113) ได้สร้างบทเรียนโปรแกรมเรื่องกรุ๊ป ประกอบด้วยเนื้อเรื่องดังต่อไปนี้ ไบนารีโอเปอเรชั่น คุณสมบัติการจัดหมู่ คุณสมบัติการสลับที่ สมาชิกเอกลักษณ์ สมาชิกอินเวอร์ส กรุ๊ปที่มีสมาชิกจำกัด และไม่จำกัด (finite and infinite group) กรุ๊ปทางเรขาคณิต ไซคลิคกรุ๊ป (cyclic group) อบิเลียนกรุ๊ป (Abelian group)

Klein's Four Group สับกรุ๊ป ไอโซมอร์ฟิซึม และตารางกรุ๊ป สมาชิกของเซ็ทที่ยกขึ้นมาพิจารณาในแบบเรียนโปรแกรมเล่มนี้ส่วนใหญ่เป็นเรื่องเกี่ยวกับเลขนาฬิกา (Modular Arithmetic) และทรานฟอร์เมชั่นทางเรขาคณิต (Geometric Tranformation) ยังได้นำแบบเรียนโปรแกรมนี้ไปทดลองกับนักเรียนซึ่งมี I.Q. 100^{+} มีอายุตั้งแต่ 12–18 ปี ปรากฏว่าใช้เวลาทำ 5–8 ชั่วโมง

แอนธอนี (Anthony, 1959 : 3160-A) ทำการวิจัยเรื่องกลยุทธในการเรียนโครงสร้างคณิตศาสตร์ โดยสร้างกิจกรรมขึ้น 3 อย่าง กิจกรรมแรกเป็นเกมส์เกี่ยวกับสี กิจกรรมที่สองเป็นเกมส์แผนที่ กิจกรรมที่สามเป็นเกมส์สีโดยใช้หลอดไฟ ทั้งสามกิจกรรมล้วนเป็นสังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปทั้งสิ้น

T. Varga ได้สร้างบทเรียนเกี่ยวกับสังกัปกรุ๊ป แล้วให้ M. Delmontle เป็นผู้นำไปสอนนักเรียนอายุ 12 ปี จำนวน 26 คน ใช้เวลา 50 นาที กิจกรรมที่จัดอาศัยเด็ก 3 คนให้เปลี่ยนตำแหน่งที่อยู่เพื่ออธิบายถึงสังกัปของเพอร์มิวเตชั่นแล้วนำเข้าสู่สังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ป เมื่อสอนจบได้ให้ความเห็นไว้ว่า (Servais and Varga, 1971 : 298)

1. เรื่องกรุ๊ปที่ใช้สอนนักเรียนอายุ 12 ปีนี้ เดิมมีอยู่เฉพาะในหลักสูตรมหาวิทยาลัยเท่านั้น

2. การที่นำสังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปมาสอนเด็กในระดับนี้ มีเหตุผลว่า กรุ๊ปเป็นสังกัปพื้นฐานอันสำคัญที่จะช่วยเชื่อมโยงหรือประสานเลขคณิต พีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน นอกจากนั้นยังเป็นวิถีทางที่จะเสนอบทเรียนซึ่งเดิมเราแบ่งกัน แต่ปัจจุบันเราไม่พึงประสงค์เช่นนั้น สังกัปนี้ไม่เพียงแต่จะสำคัญเท่านั้นแต่ยังอยู่ในวิสัยที่เด็กอายุ 12 ปีจะสามารถเข้าใจได้ด้วย

3. บทเรียนที่เสนอนี้เป็นแต่เพียงการเริ่มเท่านั้น เด็กมีความคุ้นเคยเพียงเล็กน้อย จึงนับว่ายังต้องการบทเรียนมากขึ้นจนกว่านักเรียนจะเข้าใจสังกัปสมบูรณ์ยิ่งขึ้น ถึงกระนั้นก็ตามนับว่าบทเรียนได้บรรลุถึงจุดมุ่งหมายขั้นแรกที่ช่วยให้บุคคลสามารถเข้าใจสังกัปของกรุ๊ปได้

4. ครูส่วนมากมักประวิงเวลาการแนะนำคำว่า "กรุ๊ป" ผ่านไป จนกระทั่งเด็กทราบข้อแตกต่างระหว่างเพอร์มิวเตชั่นกับกรุ๊ป อาจมีบางท่านโต้แย้งได้ว่า "กรุ๊ป" และสังกัปของเพอร์มิวเตชั่นนั้นใกล้ชิดกันมาก จึงก่อให้เกิดสิ่งที่น่าคิดและควรแก่การพิจารณา (เนื่องจากยังมีตัวอย่างอื่น ๆ อีกมากเช่น จำนวนเต็มกับการบวก จำนวนเต็มระบบมอดูโล

การพลิกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นต้น แต่ก็ไม่มีผู้ใดที่จะสนับสนุนว่าควรจะจำกัดวิธีการที่จะเสนอบทเรียนเกี่ยวกับเพอร์มิวเตชั่น)

5. การใช้สีเข้าช่วยและวิธีที่ง่าย ๆ ในการเสนอบทเรียน ทำให้เห็นชัดขึ้นและเป็นเครื่องมือสำคัญที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจในสังกัปนามธรรม

6. สัญญลักษณ์อย่างเป็นทางการทั่ว ๆ ไปและถ้อยคำที่ผู้ใหญ่เข้าใจเกี่ยวกับกรุ๊ป เป็นสิ่งที่เราไม่จาเป็นต้องหลีกเลี่ยงเพราะถ้านักเรียนตั้งใจจริง ก็สามารถรับได้

จากการศึกษาค้นคว้าข้างต้นนี้ ทำให้ทราบว่าสังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปน่าจะสอนในชั้นประถมศึกษาตอนปลายได้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล

<u>กลุ่มตัวอย่าง</u>

1. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองสอนเพื่อวิเคราะห์ข้อสอบและปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสม เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7 ปีการศึกษา 2519 ของโรงเรียนสาธิตวิทยาลัยครูพิบูลสงคราม พิษณุโลก ชั้นละ 25 คน รวม 75 คน

2. กลุ่มตัวอย่างเพื่อการทดลองวิจัย เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7 ปีการศึกษา 2519 ของโรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร ซึ่งเลือกมาโดยวิธีสุ่ม ชั้นละ 1 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียน 108 คน จากนักเรียนทั้งหมด 216 คน

<u>เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง</u>

1. บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้
   1) เซ็ท
   2) โอเปอเรชั่นและตารางโอเปอเรชั่น
   3) คุณสมบัติปิด
   4) คุณสมบัติการจัดหมู่
   5) สมาชิกเอกลักษณ์
   6) สมาชิกอินเวอร์ส
   7) กรุ๊ป
   8) สับกรุ๊ป
   9) ไอโซมอร์ฟิซึม

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ป จำนวน 50 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง

<u>วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า</u>

1. สร้างบทเรียน โดยศึกษาจากหนังสือต่อไปนี้

1) คณิตศาสตร์ใหม่ (เลิศ เกษรคำ, 2518 : 98-100)

2) พีชคณิตแนวใหม่ (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2514 : 7-26)

3) ทฤษฎีเซ็ท (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2514 : 1)

4) Elementary Mathematics (Wilson, 1967 : 320-330)

5) Elementary School Mathematics Book 5 (Eicholz and O'Daffer, 1968 : 314-319)

6) Extending Mathematics (Deans and others, 1966:1-8)

7) Learning Mathematics Book 3m (Heritage and Lewis, 1968 : 202 - 208)

8) Modern Mathematics for Elementary Teachers (Weaver and Wolf, 1970 : 252-260)

2. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุป ตามเนื้อหาที่ได้เรียบเรียงไว้จำนวน 90 ข้อ

3. ทดลองสอนเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นกับกลุ่มที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์ข้อสอบ และปรับปรุงบทเรียนในต้นภาคเรียนที่สอง ปีการศึกษา 2519 โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนทั้งสามชั้น แต่ละชั้นใช้เวลาสอน 10 ชั่วโมง เมื่อทดลองสอนครบตามเนื้อหาที่กำหนดไว้แล้ว จึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่สร้างขึ้นในข้อ 2 โดยใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง

4. วิเคราะห์ข้อทดสอบ ตามหลักการสร้างแบบทดสอบ ใช้วิธีการตามลำดับขั้นดังนี้

4.1 คัดเลือกนักเรียนที่ทำคะแนนได้จากมากที่สุดไปหาน้อยตามลำดับ ออกมาเป็นจำนวน 27 % ของนักเรียนทั้งหมด เรียกนักเรียนกลุ่มนี้ว่า กลุ่มคะแนนสูง แล้วหาค่า P_H ของแต่ละข้อ

4.2 คัดเลือกนักเรียนที่ทำคะแนนได้จากน้อยที่สุดไปหามากตามลำดับ จำนวน 27 % ของนักเรียนทั้งหมด นักเรียนกลุ่มนี้เรียกว่า กลุ่มคะแนนต่ำ แล้วหาค่า P_L ของแต่ละข้อ

4.3 เปิดตารางสำเร็จของฟาน (Fan, 1952 : 3-32) เพื่อหาความยากง่าย (p) อำนาจจำแนก (r) และความยากมาตรฐาน (△) แล้วคัดเลือกข้อสอบที่เข้าเกณฑ์ไว้ 50 ข้อ ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ข้อทดสอบที่คัดเลือกไว้นี้มีความยากง่ายตั้งแต่ 0.23 ถึง 0.57 ค่าความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ 0.44 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ถึง 0.68 ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ 0.43

4.4 คำนวณหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (r_{tt}) และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (SD_{meas}) ของข้อทดสอบที่คัดเลือกไว้ทั้ง 50 ข้อ ปรากฏว่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.92 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 2.26

5. ทำการทดลองสอนเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างการวิจัย ในตอนกลางภาคเรียนที่สอง ปีการศึกษา 2519 ผู้วิจัยเป็นผู้สอน โดยใช้วิธีสอนแบบเดียวกันทั้งสามชั้น และใช้เวลาในการสอนห้องละ 10 ชั่วโมงเท่ากัน

6. เมื่อสอนเนื้อหาวิชากรบตามที่กำหนดไว้แล้ว จึงทำการทดสอบนักเรียนทั้งสามชั้นด้วยแบบทดสอบที่วิเคราะห์แล้วในข้อ 4 โดยใช้เวลา 1 ชั่วโมง

7. วิเคราะห์ผลจากการทดสอบกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ดังนี้

7.1 หาคะแนนเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐานจากแบบทดสอบ

7.2 วิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) เพื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบของนักเรียนแต่ละชั้นว่าแตกต่างกันหรือไม่ โดยอาศัย F-test ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสามชั้นพร้อมกัน

เมื่อพบความแตกต่างของความแปรปรวนในข้อ 7.2 ใช้ t-test เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ละคู่ ได้แก่ คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 เพื่อจะได้ทราบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นใดแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

<u>การวิเคราะห์ข้อมูล</u>

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. คะแนนเฉลี่ย (Mean) ของคะแนนคำนวณจากสูตร (Garrett, 1958 : 27)

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

ΣX แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

2. ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) คำนวณจากสูตร (Ferguson, 1966 : 67)

$$S = \sqrt{\frac{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ΣX แทนผลรวมของคะแนน

ΣX^2 แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนน

N แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

3. ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (Reliability) คำนวณจากสูตรคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Richardson and Kuder, 1939 : 681-687)

$$r_{tt} = \frac{NS_t^2 - M(N-M)}{S_t^2(N-1)}$$

เมื่อ r_{tt} แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

N แทนจำนวนของแบบทดสอบ

S_t^2 แทนความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ (ซึ่งเท่ากับกำลังสองของค่า S ในข้อ 2)

M แทนคะแนนเฉลี่ย

4. หาความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement) (Gulliksen, 1950 . 63)

$$SE_{meas} = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ SE_{meas} แทนความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

S_x แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

r_{tt} แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

5. หาระดับความยากง่ายและอำนาจจำแนกของข้อสอบ โดยเปิดตารางสำเร็จของฟาน (Fan, 1962 : 3-32)

6. การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) ของคะแนนเพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสามกลุ่มพร้อมกันด้วยค่า F ดังนี้ (Harnett and Murphy, 1975 : 380-385)

Source of Variation	df	Sum of Square	Mean Square	$F(J-1, \Sigma n_J - J)$
Between Samples (treatments)	$J-1$	SSB	$MSB = \frac{SSB}{J-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
Within Samples	$\sum_{j=1}^{J} n_J - 1$	SSW	$MSW = \frac{SSW}{\sum_{j=1}^{J} n_j - 1}$	
Total	$\sum_{j=1}^{J} n_J - 1$	SST		

เมื่อ J แทนจำนวนของกลุ่มตัวอย่าง

$\sum_{j=1}^{J} n_J$ แทนผลรวมของจำนวนสมาชิกทั้งหมด J กลุ่ม

df แทน Degree of Freedom

$\sum_{j}^{J} \sum_{i}^{n_j} Y_{ij}$ แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัว

$\sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{J} Y^2_{ij}$ แทนผลรวมของกำลังสองของคะแนน

Correction factor : $C.F. = \sum_{j}^{J} \sum_{i}^{n_j} Y^2_{ij}/n$

Sum of squares total : $SST = \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{J} Y^2_{ij} - C.F.$

Sum of squares between : $SSB = \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij} \right)^2}{n_j} \right] - C.F.$

Sum of squares within : $SSW = SST - SSB$

7. การวิเคราะห์หาค่า t (t-test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนครั้งละสองกลุ่ม คำนวณจากสูตร (Sterling, 1968 : 316-317)

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่หนึ่งและกลุ่มที่สอง

S_1^2 , S_2^2 แทนค่าความแปรปรวนของกลุ่มที่หนึ่งและกลุ่มที่สอง

N_1 , N_2 แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มที่หนึ่งและกลุ่มที่สองตามลำดับ

บทที่ 4

ผลการศึกษาค้นคว้า

ในการทดลอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนคณิตศาสตร์เรื่องกรุป กับกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม รวมนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด 108 คน ผลการศึกษาค้นคว้ามีดังต่อไปนี้

ตาราง 1 แสดงคะแนนเฉลี่ยและเปอร์เซนต์ของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบ	คะแนนเฉลี่ย (คะแนนเต็ม 50)	เปอร์เซนต์ของนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	41	16.15	4.88
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	34	25.41	52.94
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7	33	25.64	54.55

จากตาราง 1 จะเห็นว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ได้คะแนนเฉลี่ย 16.15 จากข้อตกลงเบื้องต้นแสดงว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องกรุปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ส่วนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 ได้คะแนนเฉลี่ย 25.41 และ25.64 ตามลำดับ จากข้อตกลงเบื้องต้นแสดงว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องกรุปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ถึงปีที่ 7 โดยใช้วิธีวิเคราะห์แบบวันเวย์ (One Way Analysis of Variance) ปรากฏผลดังแสดงไว้ในตาราง 2

ตาราง 2 แสดงผลวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ

Source of Variation	df	SS	MS	$F_{(2, 105)}$
Between	2	SSB = 2236.86	1118.00	22.92*
Within	105	SSW = 5120.99	48.77	
Total	107	SST = 7357.85		

*มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ถึงปีที่ 7 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น 99 % ($F_{(2,105)} = 22.92$) หมายความว่าความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 แต่ละชั้นแตกต่างกันอย่างน้อยหนึ่งคู่

เพื่อทราบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนแต่ละชั้นทีละคู่ จึงทำการวิเคราะห์หาค่า t (t-test) ปรากฏผลดังแสดงไว้ในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงค่า t จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนครั้งละสองชั้น

ระดับชั้น	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	–	6.75*	5.40*
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6		–	0.11
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 7			–

*มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า

1. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01 แสดงว่าความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สูงกว่าความสามารถในการเรียนเรื่องดังกล่าวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5

2. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 ไม่แตกตางกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่าความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 ใกล้เคียงกัน

3. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01 แสดงว่าความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สูงกว่าความสามารถในการเรียนเรื่องดังกล่าวของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5

จึงสรุปได้ว่า ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ต่ำสุด ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ใกล้เคียงกับความสามารถของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปสูงสุด

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายสามารถเรียนเรื่องกรุ๊ป ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้หรือไม่

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปของนักเรียนแต่ละชั้นในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนประถมศึกษาปีที่ 5–7 มีความสามารถที่จะเรียนเรื่องกรุ๊ปได้

2. นักเรียนประถมศึกษาตอนปลายที่เรียนอยู่ชั้นสูงกว่ามีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ปสูงกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้กระทำกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7 โรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2519 โดยมุ่งศึกษาความสามารถในการเรียนรู้เรื่องกรุ๊ปเท่านั้น

ข้อตกลงเบื้องต้น

ผลการค้นคว้าได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบ ถ้านักเรียนชั้นใดได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป และมีผู้ที่สอบได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป มีจำนวนไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งชั้น ถือว่านักเรียนชั้นนั้นสามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7 ปีการศึกษา 2519 ของโรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ชั้นละ 1 ห้องเรียน รวมจำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมด 108 คน

<u>เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง</u>

1. บทเรียนเกี่ยวกับครุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. แบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุป จำนวน 50 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง มีความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ 0.44 อำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ 0.43 ความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.92 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 2.26

<u>การดำเนินการทดลอง</u>

1. ผู้วิจัยทำการสอนเรื่องกรุปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแก่กลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่ม ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2519 โดยใช้วิธีสอนแบบเดียวกัน

2. เมื่อสอนเนื้อหาครบโดยใช้เวลาสอน 10 ชั่วโมงเท่ากัน จึงทดสอบนักเรียนด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุป จำนวน 50 ข้อ เวลา 1 ชั่วโมง

<u>การวิเคราะห์ข้อมูล</u>

ในการวิเคราะห์ข้อมูลใช้วิธีการทางสถิติดังต่อไปนี้

1. หาคะแนนเฉลี่ย (Mean) ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม

2. หาความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม

3. วิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสามกลุ่ม โดยใช้ F-test

4. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยครั้งละสองกลุ่ม โดยใช้ t-test

<u>ผลการทดลอง</u>

1. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5–7 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ได้คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบเท่ากับ 16.15, 25.41 และ 25.64 ตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน จากผลดังกล่าวสรุปได้ว่า

1.1 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปตามที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นต่ำ

1.2 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และปีที่ 7 สามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2. ผลการเปรียบเทียบคะแนนระหว่างกลุ่มปรากฏผลดังนี้

2.1 นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 ได้คะแนนเฉลี่ยสูงสุดคือ 25.64 นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ได้คะแนนเฉลี่ย 25.41 และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ได้คะแนนเฉลี่ย 16.15 แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยสูงสุดหรือต่ำสุดโดยสัมพันธ์กับระดับชั้น

2.2 คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01 แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01 และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .01

<u>สรุปผลการทดลอง</u>

ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาชั้นปีที่ 7 สามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ โดยถือเกณฑ์ว่าถ้านักเรียนชั้นใดได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป และมีผู้ที่สอบได้คะแนนตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป มีจำนวนไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งชั้น ถือว่าสามารถเรียนได้ จากการเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนระหว่างชั้นปรากฏว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปไม่แตกต่างกัน แต่มีความสามารถในการเรียนเรื่องนี้สูงกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5

<u>อภิปรายผล</u>

1. ผลการทดลองสอนเรื่องกรุ๊ปแก่นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ถึงปีที่ 7 ปรากฏว่าได้คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 16.15, 25.41 และ 25.64 ตามลำดับ

1.1 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และปีที่ 7 สามารถเรียนเรื่องกรุ๊ปได้ แม้ว่าเดิมเรื่องกรุ๊ปเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรในระดับอุดมศึกษาก็ตาม ผลการทดลองนี้จึงสนับสนุนคำกล่าวของบรูเนอร์ (ศึกษาธิการ, 2517 : 218) ที่ว่า "ปัญหาในการสอนเด็กให้รู้เนื้อแท้ของวิชาอยู่ที่วิธีการจัดเนื้อหาและวิธีสอน ไม่ว่าเด็กจะมีอายุเท่าไร ก็อาจจะสอนให้เข้าใจเนื้อแท้ของวิชาเป็นบางส่วนได้" นอกจากนั้น W. Servais (Servais, W., and Varga, T., 1971 : 52) ยังกล่าวอีกว่า สังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปไม่เพียงแต่สำคัญเท่านั้น แต่ยังอยู่ในวิสัยที่นักเรียนอายุ 12 ปีจะเข้าใจได้ด้วย

1.2 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และปีที่ 7 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไม่แตกต่างกัน ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 มีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับกรุ๊ปไม่แตกต่างกัน

2. ผลการทดลองปรากฏว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ไม่มีความสามารถพอที่จะเรียนเรื่องกรุ๊ปตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ

2.1 นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 นี้มีระดับอายุในช่วง 10 ปี เริ่มจะเข้าสู่ระยะ the state of formal operation ตามหลักพัฒนาการด้านสติปัญญาและความคิดของ Piaget เด็กสามารถให้เหตุผลชนิดมีแบบแผนทางคณิตศาสตร์ได้ไม่ดีเท่าที่ควร

2.2 การเรียนเนื้อหาเรื่องกรุ๊ปที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ต้องอาศัยความสามารถในการคิดซับซ้อน แต่นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถในการคิดซับซ้อนต่ำสุด เมื่อเทียบกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และปีที่ 7 (สงคราม เชาวน์ศิลป, 2518 : 119)

<u>ข้อเสนอแนะ</u>

1. ควรมีการทดลองสอนเรื่องเกี่ยวกับโครงสร้างคณิตศาสตร์ที่มีสองโอเปอเรชั่น (เช่น ริง, ฟิลด์ เป็นต้น) กับนักเรียนประถมศึกษาตอนปลาย

2. ควรจะเริ่มสอนสังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

3. ควรมีการทดลองสอนเรื่องนี้ซ้ำอีกให้กว้างขวาง เช่นสอนกับนักเรียนประถมศึกษาตอนปลายในโรงเรียนทุกประเภท เพื่อหาผลสรุปที่แน่นอนยิ่งขึ้น

4. ควรมีการทดลองวิจัยเป็นคณะ โดยมีผู้ที่ชำนาญในด้านการสอน และการวัดผลวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาตอนปลายร่วมด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ทวีชัย สิทธิศร การศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ป(Group) เบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2516, 87 หน้า.

ประเทิน มหาขันธ์ วิธีสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่ในชั้นประถมศึกษา โรงพิมพ์การศาสนา 2512, 104 หน้า.

พิชากร แปลงประสพโชค การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2518, 93 หน้า.

เลิศ เกษรคำ คณิตศาสตร์ใหม่ วัฒนาพานิชสำราญราษฎร์ 2518, 142 หน้า.

วิจิตร สินสิริ, สุภรณ์ ศรีพหล และสวัสดิ์ ปุษปาคม กระบวนการการศึกษา สตรีเนติศึกษา 2512, 131 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา 18 เมษายน – 6 พฤษภาคม 2509 แผนกการพิมพ์วิทยาลัยครูสวนสุนันทา 2509, 108 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมสามัญศึกษา ชุมทางวิชาการ คุรุสภาลาดพร้าว 2517, 311 หน้า.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, คณะกรรมการสาขาคณิตศาสตร์ การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ โรงพิมพ์คุรุสภา 2515, 162 หน้า.

สุชาติ รัตนกุล วิธีสอนคณิตศาสตร์ ตำราชุดครูประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา คุรุสภา 2515, 184 หน้า.

สุมิตร คุณานุกร หลักสูตรและการสอน โรงพิมพ์ชวนการพิมพ์ 2518, 259 หน้า.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ ทฤษฎีเซ็ท อักษรเจริญทัศน์ 2514, 92 หน้า.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ พีชคณิตแนวใหม่ อักษรเสรี 2515, 143 หน้า.

สุวรรณา มุ่งเกษม พัฒนาการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513, 173 หน้า.

สงคราม เชาวน์ศิลป์ พัฒนาการของสมรรถภาพทางสมองด้านการคิดซับซ้อนกับการประเมินผลสัมฤทธิ์ในวิชาเลขคณิต ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2518, 127 หน้า.

Adler, Irving, "Mental Growth and Art of Teaching", The Mathematics Teacher, 59 : 707-715, December, 1966.

Anthony, Nicholas, "Strategies in Learning Mathematical Structures", Dissertation Abstracts, 31 : 3160-A, January, 1959.

Berkeley, Edmund C., A Guide to Mathematics for the Intelligent Nonmathematician, Simon and Schuster, New York, 1966, 351 pp.

Berlinghoff, William P., Mathematic; The Art of Reason, D. C. Heath and Company, Boston, 1967, 260 pp.

Canadian Teachers' Federation, Mathematics and the Teachers, ___, Ottowa, 1967, 52 pp.

Deans, Edwina, and others, Extending Mathematics, American Book Company, New York, 1966, 571 pp.

Eicholz, Robert E., and O'Daffer, Phares G., Elementary School Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Canada, 1968, 348 pp.

Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, New York, 1952, 32 pp.

Fehr, Howard F., and Phillips, Jo McKeeby, Teaching Modern Mathematics in the Elementary School, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1971, 505 pp.

Fehr, Howard F., "Reform of Mathematics Education Around the world", The Mathematics Teacher, 58 : 37-44, January, 1965.

Garrett, Henry E., Statistics in Psychology and Education, Longman Green and Co., New York, 1958, 478 pp.

Gulliksen, Harold, Theory of Mental Test, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954, 486 pp.

Harnett, Donald L., and Murphy, James L., Introductory Statistical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Menlo Park, 1975, 564 pp.

Heritage, Raymond S., and Lewis, William T., Learning Mathematics Book 3m, St. Paul's Press Ltd., Malta, 1968, 250 pp.

Kaper, J. N., "Some Recent Effect of Improvement of School Mathematics in India" The Mathematics Teacher, 61 : 321-327, March, 1968.

Kirkpatrick, Joan Elizabeth, "The Use of Finite Mathematical System to Achieve Selected Mathomatics Objectives in Grade Six", Dissertation Abstracts, 32 : 306 - A, July, 1971.

Marks, John L., and others, Teaching Elementary School Mathematics for Understanding, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965, 500 pp.

Richardson, M. W., and Kuder, G. F., "The Calculation of Test Reliability Coefficients Based Upon Method of Rational Equivalence", Journal of Educational Psychology, 30 : 621-678, 1939.

Servais, W., and Varga, T., Teaching School Mathematics, Comton Printing Ltd., Aylesbury, 1971, 308 pp.

Sowell, Evelyn., "Another Look at Materials in Elementary School Mathematics", School Science and Mathematics, LXXIV, 207-211, March, 1974.

Spitzer, Herbert F., "Learning and Teaching Arithmetics" The Teaching of Arithmetic, University of Chicago, Chicago, 1963, 416 pp.

Sterling, Theodor D., and Pollack, Seymour V., Introduction to Statistical Data Processing, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968, 663 pp.

Weaver, Jay D., and Wolf, Charles T., Modern Mathematics for Elementary Teachers, International Textbook Company, Pennsylvania, 1970, 274 pp.

Wheeler, Ruric E., Modern Mathematics an Elementary Approach, Brooks/Cole Publishing Company, California, 1969, 438 pp.

Wilson, Jack D., Elementary Mathematics: A Modern Approach, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967, 389 pp.

Young, Robert G., Groups : A Programmed Course, Ballantyne & Co., Ltd., London, 1969, 111 pp.

ภาคผนวก ก.

ตารางแสดงค่า P_H, P_L, **p**, **r** และ Δ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ในการเรียนเรื่องกรุ๊ปที่วิเคราะห์แล้ว

ภาคผนวก ก.

ตาราง 4 แสดงค่า P_H, P_L, p, r และ △ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุป

ข้อที่	P_H	P_L	p	r	△
1	.58	.12	**.35**	.48	14.6
2	.48	.27	.38	.21	14.2
3	.59	.30	.44	.29	13.6
4	.48	.24	.35	.25	14.5
5	.62	.30	.46	.33	13.4
6	.75	.21	.48	.55	13.2
7	.46	.24	.35	.24	14.6
8	.41	.14	.27	.33	15.5
9	.50	.14	.30	.41	15.0
10	.93	.30	.65	.66	11.5
11	.48	.27	.38	.21	14.2
12	.75	.29	.52	.46	12.8
13	.86	.27	.58	.59	12.1
14	.51	.27	.39	.24	14.1
15	.93	.62	.65	.66	11.5
16	.89	.29	.61	.61	11.9
17	.82	.30	.57	.54	12.2
18	.93	.27	.64	.68	11.6
19	.49	.30	.39	.20	14.1
20	.75	.31	.53	.45	12.7
21	.65	.24	.44	.42	13.6
22	.58	.18	.38	.43	14.3
23	.55	.31	.42	.26	13.8
24	.55	.21	.37	.36	14.3
25	.51	.13	.32	.43	14.9
26	.72	.31	.51	.42	12.9
27	.41	.18	**.29**	**.27**	15.2
28	.51	.31	.41	.23	13.9
29	.45	.24	.34	.23	**14.6**
30	.79	.20	.50	.58	12.9
31	.48	.27	.37	.25	**14.3**
32	.44	.07	.23	.49	15.9
33	.68	.28	.48	.40	13.2
34	.83	.21	.52	.61	12.8
35	.76	.31	.53	.46	12.7
36	.68	.28	.48	.40	13.2
37	.48	.21	.34	.30	14.7
38	.58	.21	.39	.40	14.1
39	.72	.17	.44	.54	13.6
40	.76	.30	.53	.46	12.7
41	.76	.28	.52	.48	12.8
42	.45	.24	.34	.24	16.6

ตาราง 4 ต่อ

ข้อที่	P_H	P_L	p	r	Δ
43	.72	.18	.44	.54	13.6
44	.58	.21	.39	.40	14.1
45	.58	.07	.30	.59	15.1
46	.76	.21	.48	.55	13.2

ข้อที่	P_H	P_L	p	r	Δ
47	.69	.18	.43	.52	13.7
48	.72	.21	.46	.51	13.4
49	.69	.10	.37	.61	14.3
50	.76	.21	.48	.55	13.2

ภาคผนวก ข.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ป
สำหรับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ป
สำหรับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

คำอธิบาย

1. แบบทดสอบนี้มีจำนวนข้อ 50 ข้อ ใช้เวลา 1 ชั่วโมง
2. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบทั้งหมด ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด จาก ก. ข. ค. หรือ ง. โดยทำเครื่องหมาย ▨ ตรงกับข้อที่ต้องการ ในกระดาษคำตอบ ระวังจะสลับข้อกัน
3. ถ้าท่านต้องการเปลี่ยนคำตอบใหม่ เช่นเปลี่ยนจากข้อ ค. เป็นข้อ ง. ก็ทำดังนี้

ก	ข	ค	ง
▨	/ /	/ /	▨

4. ห้าม เขียนข้อความใด ๆ ลงในข้อสอบนี้
5. ในแบบทดสอบบางตอนมี คำชี้แจง ขอให้นักเรียนอ่านให้เข้าใจเสียก่อน
6. จงพยายามทำให้ครบทุกข้อ และขอให้โชคดีทุกท่าน.

นิยม ยอดมนต์

1. {1} ถูกปิดโดยโอเปอเรชั่นใด

ก. การบวก ข. การลบ

ค. การบวกและการคูณ ง. การหาร

2. {0,1} ถูกปิดโดยโอเปอเรชั่นใด

ก. การบวก ข. การลบ

ค. การคูณ ง. การหาร

3. เซ็ทในข้อใดที่ปิดด้วย "การลบ"

ก. {0} ข. {1}

ค. {0,1} ง. {1,2}

4. เซ็ทของจำนวนคี่บวก = {1,3,5,...} ถูกปิดโดยโอเปอเรชั่นใด

ก. การหาร ข. การลบ

ค. การบวก ง. การคูณ

<u>คำชี้แจง</u> กำหนดโอเปอเรชั่น o และ * ในเซ็ทของจำนวนธรรมชาติดังนี้

a o b = a, x * y = y เช่น

7 o 8 = 7, 7 * 8 = 8

จงใช้ข้อกำหนดนี้ทำข้อ 5 – 6

5. (405) o6 = ?

ก. 5 ข. 6

ค. 5 * 4 ง. 4 * 2

6. (403) * (809) = ?

ก. 4 ข. 8

ค. 3 ง. 9

7. {1,2} มีคุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับโอเปอเรชั่นใด

ก. การบวก ข. การลบ

ค. การคูณและการลบ ง. การหาร

8. {1} <u>ไม่</u>มีคุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับโอเปอเรชั่นใด

ก. การบวก ข. การลบ

ค. การคูณ ง. การหาร

9. ข้อความข้อใดต่อไปนี้ที่เป็นจริง

ก. (8 ÷ 4) ÷ 2 = 8 ÷ (4 – 2)

ข. (15 – 5) – 5 = 15 – (5 – 5)

ค. (3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1)

ง. 4 ÷ 2 = 2 – 4

10. เซ็ทของเลขนาฬิกา 4 ตัว ได้แก่ {0, 1, 2, 3} สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกได้แก่ค่าใด

ก. 0 ข. 3

ค. 2 ง. 1

11. เซ็ทของเลขนาฬิกา 4 ตัว ได้แก่ {0, 1, 2, 3} กับ + , อินเวอร์สสำหรับสมาชิก 3 ได้แก่ค่าใด

ก. 3 ข. 2

ค. 1 ง. 0

<u>คำชี้แจง</u> กำหนด {○, ⊖, ⦶, ⊕} และโอเปอเรชั่น * แทน "ยกรูปซ้อนกัน" เช่น

○ * ○ = ○ , ⦶ * ⊖ = ⊕

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบข้อ 12 – 14

12. ⊕ * ⊖ = ?

ก. ○ ข. ⦶

ค. ⊕ ง. ไม่มี

13. สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับ * ได้แก่คำใด

ก. ⊖ ข. ⦶

ก. ⊕ ง. ○

14. คุณสมบัติใดที่<u>ไม่เป็นจริง</u>

ก. คุณสมบัติปิด

ข. สมาชิกเอกลักษณ์

ก. สมาชิกอินเวอร์ส

ง. คุณสมบัติการจัดหมู่

<u>คำชี้แจง</u> กำหนด นต. แทน หน้าตรง

ซ แทน ซ้ายหัน, ข. แทน ขวาหัน

ล แทน กลับหลังหัน และ

* แทน "ตามด้วย" ตารางโอเปอเรชั่น

* เป็นดังนี้

*	นต	ข	ซ	ล
นต				
ข				
ซ				
ล				X

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบข้อ 15 – 20

15. นต * นต ได้คำใด

ก. นต ข. ซ

ค. ล ง. ข

16. ผลจากการกระทำ * ผลลัพธ์ในตารางตรงเครื่องหมาย X ได้แก่คำใด

ก. นต ข. ซ

ค. ล ง. ข

17. (นต * นต) * ซ = ?

ก. ซ ข. ล

ค. ข ง. ไม่มี

18. สมาชิกเอกลักษณ์ใน {นต, ข, ซ, ล} ภายใต้ * ได้แก่คำใด

ก. ข ข. นต

ค. ล ง. ไม่มี

19. ข้อใดเป็นสับกรุ๊ปของ {นต, ข, ซ, ล}, *

ก. {นต, ข}, * ข. {นต, ล}, *

ค. {นต, ซ}, * ง. ไม่มี

20. ถ้า ซ * ซ = $ซ^2$ จงหา $ซ^2$

ก. ล ข. นต

ค. ซ ง. ข

21. เซ็ทของเลขนาฬิกา 3 ตัว ได้แก่ {0, 1, 2} กับการบวก (+) เป็นกรุ๊ป ต่อไปนี้ข้อใดเป็นกรุ๊ป

ก. {1}, + ข. {1, 2}, +

ค. {2}, + ง. {0}, +

22. เซ็ทของเลขนาฬิกา 4 ตัว เมื่อเอา 0 ออก $\{1,2,3\}$, x เป็นกรุ๊ป สับเซ็ทของ $\{1,2,3\}$ ที่เป็นกรุ๊ปภายใต้ x ได้แก่ข้อใด

ก. $\{1\}$ ข. $\{0\}$

ค. $\{2\}$ ง. $\{3\}$

<u>คำชี้แจง</u> กำหนดรูปสี่เหลี่ยมและวงกลม

พิจารณาการเปลี่ยนสีและรูปร่าง 4 แบบ ดังนี้

<u>ให้สีและรูปร่างคงเดิม</u> เช่น

จาก □ เป็น □ แทนด้วย p

<u>เปลี่ยนเฉพาะสีเท่านั้น</u> เช่น

จาก □ เป็น ▨ แทนด้วย q

<u>เปลี่ยนเฉพาะรูปร่างเท่านั้น</u> เช่น

จาก □ เป็น ○ แทนด้วย r

<u>เปลี่ยนทั้งสีและรูปร่าง</u> เช่น

จาก □ เป็น ● แทนด้วย s

กำหนด

$A = \{p, q, r, s\}$ และ * เป็น

โอเปอเรชั่น "ตามด้วย" เช่น

q * r หมายถึง เปลี่ยนเฉพาะสีอย่างเดียวก่อน แล้วก็เปลี่ยนเฉพาะรูปร่างอีกครั้งหนึ่ง ดังรูป

จาก □ เป็น ▨ และเปลี่ยนเป็น ●

ผลที่ได้จะเหมือนกับการเปลี่ยนทั้งสีและรูปร่างพร้อมกัน ดังนั้น

q * r = s

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบคำถามข้อ 23–29

23. r * s ได้ผลลัพธ์ค่าใด

ก. p ข. q

ค. r ง. s

24. r เป็นผลลัพธ์ของข้อใด

ก. q * p ข. q * r

ค. q * q ง. q * s

25. s * [?] = p

ก. s ข. r

ค. q ง. p

26. เอกลักษณ์สำหรับ * ได้แก่ค่าใด

ก. q ข. p

ค. r ง. s

27. อินเวอร์สของ q ได้แก่ค่าใด

ก. p ข. r

ค. q ง. s

28. ถ้า $r^3 = (r * r) * r$, $r^3 = ?$

ก. p ข. q

ค. r ง. s

29. เซ็ทในข้อใดที่เป็นสับกรุ๊ปของ A

ก. $\{q, r\}$ ข. $\{q, s\}$

ค. $\{q, p\}$ ง. $\{r, s\}$

<u>คำชี้แจง</u> กำหนด $\{a, b, c\}$, $\oplus$ และ $\{0, 1, 2\}$, $+$ เป็นกรุ๊ปที่ไอโซมอร์ฟิคกัน

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบคำถามข้อ 30 – 32

30. สมาชิกใกเป็นเอกลักษณ์สำหรับ $\oplus$

ก. a ข. b

ค. c ง. ไม่มี

31. สมาชิก b มีอินเวอร์สหรือไม่ ถ้ามี ได้แก่คำใด

ก. a ข. b

ค. c ง. ไม่มี

32. ถ้า c จับคู่กับ 1, ถามว่า $a \oplus c$ จับคู่กับสมาชิกใด

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. 0

<u>คำชี้แจง</u> กำหนดตารางโอเปอเรชั่น $*$ บนเซ็ท $S = \{p, q, r, s\}$ ดังนี้

*	p	q	r	s
p	r	s	p	q
q	s	p	q	r
r	p	q	r	s
s	q	r	s	p

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้นี้ตอบคำถามข้อ 33 – 37

33. $s * \boxed{?} = p$

ก. p ข. s

ค. q ง. r

34. q เป็นผลลัพธ์ของข้อใด

ก. $p * p$ ข. $p * q$

ค. $p * r$ ง. $p * s$

35. สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชั่น $*$ ได้แก่คำใด

ก. p ข. q

ค. r ง. s

36. $(p * q) * r = ?$

ก. p ข. q

ค. r ง. s

37. S, $*$ เป็นกรุ๊ปหรือไม่

ก. ไม่เป็น เพราะสมาชิกบางตัวไม่มีอินเวอร์ส

ข. ไม่เป็น เพราะ $*$ ไม่มีคุณสมบัติการจัดหมู่

ค. เป็น เพราะไม่มีคุณสมบัติปิด

ง. เป็น เพราะมีคุณสมบัติกรุ๊ปครบ

<u>คำชี้แจง</u> พิจารณารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีเลข 1, 2, 3, 4 พิมพ์ทั้งสี่ของด้านหน้า – หลังตรงกัน กำหนดการเคลื่อนรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้

<u>กงที่</u> แทนด้วย a

$$\boxed{\begin{matrix}4 & 3\\1 & 2\end{matrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}4 & 3\\1 & 2\end{matrix}}$$

<u>พลิกรูปตามแนวนอน</u> แทนด้วย b

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>พลิกรูปตามแนวตั้ง</u> แทนด้วย c

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>หมุนรูปตามเข็มนาฬิกา $\frac{1}{2}$</u> แทนด้วย d

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$R = \{a, b, c, d\}$

$\oplus$ แทนโอเปอเรชั่น "ตามด้วย"

เช่น $b \oplus c$ หมายถึงกระทำ b ก่อน แล้วตามด้วย c ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{b} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าผลเหมือนกับกระทำ d อย่างเดียว

ดังนั้น $b \oplus c = d$

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบข้อ 38 – 43

38. $c \oplus d$ หมายถึงข้อความใด

ก. พลิกรูปตามแนวตั้งแล้วหมุนตามเข็มนาฬิกา $\frac{1}{2}$

ข. หมุนรูปตามเข็มนาฬิกา $\frac{1}{2}$ แล้วพลิกรูปตามแนวตั้ง

ค. พลิกรูปตามแนวตั้งแล้วไม่พลิก

ง. พลิกรูปตามแนวตั้งแล้วพลิกรูปตามแนวนอน

39. $b \oplus a = ?$

ก. c ข. d

ค. a ง. b

40. $d \oplus ? = b$

ก. a ข. c

ค. b ง. d

41. สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับ $\oplus$ ได้แก่ค่าใด

ก. a ข. b

ค. c ง. d

42. สมาชิกใดที่เป็นอินเวอร์สของ b

ก. a ข. c

ค. b ง. d

43. ข้อใดที่เป็นอินเวอร์สของ d

ก. $b \oplus b$ ข. $b \oplus c$

ค. $b \oplus a$ ง. $a \oplus a$

<u>คำชี้แจง</u> กำหนด $\{a, b, c, d\}$, o และ $\{1, 2, 3, 4\}$, Δ เป็นกรุ๊ปที่ไอโซมอร์ฟิกกัน

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2			
3	3			
4	4			

โดย d จับคู่กับ 2

c จับคู่กับ 3

b จับคู่กับ 4

จงใช้ข้อกำหนดนี้ตอบข้อ 44 – 46

44. 2 △ 3 ได้ผลลัพธ์ค่าใด

ก. 4 ข. 3

ค. 2 ง. 1

45. 3 เป็นผลลัพธ์ของข้อใด

ก. 2 △ 1 ข. 2 △ 2

ค. 2 △ 3 ง. 2 △ 4

46. เอกลักษณ์สำหรับ △ ได้แก่ค่าใด

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. 4

<u>คำชี้แจง</u> กำหนดกรุ๊ป {1,3,7,9}, ⊗ และ {a,b,c,d}, ⊕ ดังตาราง ไอโซมอร์ฟิกกัน โดย 9 จับคู่กับ d

⊗	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

⊕	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b				
c		ⓨ		⊗
d	d			a

จงใช้ข้อกำหนดนี้ตอบข้อ 47 – 50

47. b ⊕ c = ?

ก. a ข. b

ค. c ง. d

48. ⊗ ในตารางเป็นค่าใด

ก. a ข. b

ค. c ง. d

49. ⓨ ในตารางเป็นค่าใด

ก. a ข. b

ก. c ง. d

50. สมาชิก b เป็นผลลัพธ์ของข้อใด

ก. a ⊕ c ข. a ⊕ b

ค. a ⊕ a ง. a ⊕ d

ภาคผนวก ค.

แบบเรียนเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

สังกัปเกี่ยวกับกรุ๊ปเบื้องต้น

1. เซ็ท
2. โอเปอเรชั่นและตารางโอเปอเรชั่น
3. คุณสมบัติปิด
4. คุณสมบัติการจัดหมู่
5. สมาชิกเอกลักษณ์
6. สมาชิกอินเวอร์ส
7. กรุ๊ป
8. สับกรุ๊ป
9. ไอโซมอร์ฟิซึม

1. <u>เซ็ท</u> (Set)

1.1 <u>ความหมายของคำว่าเซ็ท</u> ในชีวิตประจำวันเรามีคำที่ใช้เรียกกลุ่มของสิ่งของอยู่หลายคำด้วยกัน เช่น ฝูง, หมู่, โขลง, คณะ สำรับ (ไพ่) เป็นต้น ในภาษาคณิตศาสตร์ใช้คำว่า "เซ็ท" แทนคำเหล่านี้ เช่น เซ็ทของช้างในเขาดิน, เซ็ทของนักเรียนในห้องเรียน เซ็ทของชอล์คที่อยู่ในกล่องที่กระดานดำ เป็นต้น เราสามารถกล่าวถึงเซ็ทของสิ่งใดก็ได้ แต่ต้องบ่งให้แน่ชัดพอตัดสินได้ว่ามีสิ่งใดบ้างที่อยู่ในเซ็ทนั้น (โดยทั่วไปทางคณิตศาสตร์จะไม่ให้ความหมายของคำว่าเซ็ท)

<u>ตัวอย่าง</u> 1) เซ็ทของกนจน (ไม่เด่นชัด)

2) เซ็ทของหนังสือในห้องสมุด (เด่นชัด)

3) เซ็ทของเก้าอี้ในห้องเรียน

4) เซ็ทของคนที่ประสพความสำเร็จในชีวิต

1.2 <u>การเขียนสัญลักษณ์แทนเซ็ท</u>

โดยทั่วไปเราใช้อักษรตัวใหญ่แทนเซ็ท เช่น A, B, C เป็นต้น สิ่งที่อยู่ภายในเซ็ทเรียก <u>สมาชิกของเซ็ท</u> แทนด้วยอักษรตัวเล็ก เช่น a, b, c เป็นต้น การเขียนสัญลักษณ์แทนเซ็ทเราจะใช้วงเล็บปีกกา และเครื่องหมายจุลภาคคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว หรือเขียนบอกลักษณะร่วมกันของสมาชิกในเซ็ทก็ได้ เช่น เซ็ทของพยัญชนะของคำว่า "สินชัย" แทนด้วย

{ส, น, ช, ย}

หรือ {พยัญชนะของคำว่า "สินชัย"}

สำหรับวิธีที่ใช้ในชั้นประถมศึกษามักจะใช้วิธีแจกแจงสมาชิกภายในเซ็ท นั่นคือการใช้วงเล็บปีกกาและเครื่องหมายจุลภาคนั่นเอง

<u>ตัวอย่าง</u>

1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

2) B = {มกราคม, กุมภาพันธ์, มีนาคม}

3) D = {จอย, จุ๋ม, จิ๋ม}

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนความเป็นสมาชิกของ แทนด้วย

$\in$

$b \in A$ อ่านว่า b เป็นสมาชิกของเซ็ท A

หรือ b อยู่ในเซ็ท A

$b \notin A$ อ่านว่า b ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ท A

หรือ b ไม่อยู่ในเซ็ท A

<u>ข้อสังเกต</u>

$A = \{a, b, c, d\}$ หมายความว่า ทั้ง A และ $\{a, b, c, d\}$ เป็นชื่อสองชื่อที่แทนเซ็ทเดียวกัน

<u>กิจกรรมที่ 1</u>

ก. จงเขียนเซ็ทของสมาชิกในเซ็ท A, B, C, D, E, F, H ต่อไปนี้

1) A = เซ็ทของนักเรียนแถวหน้าในชั้นเรียนนี้

...

2) B = เซ็ทของสีของชอล์คที่ครูเขียนบนกระดานดำ

...

3) C เป็นเซ็ทของเดือนที่ลงท้ายด้วย "ยน"

...

4) D เป็นเซ็ทของจำนวนธรรมชาติที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 10

...

5) E เป็นเซ็ทของจำนวนธรรมชาติที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 10 และ 4 หารลงตัว

...

6) F เป็นเซ็ทของจำนวนธรรมชาติที่มากกว่า 4 และน้อยกว่า 8

...

7) H เซ็ทของจำนวนทั้งหลายที่บวกกับ 12 แล้วได้ 120

...

8) เซ็ทของจำนวนธรรมชาติและศูนย์ (Whole number)

...

ข. จงเขียน T หน้าข้อที่เห็นว่าถูก และ F หน้าข้อที่เห็นว่าผิด

สำหรับข้อ 9 – 16 กำหนด $A = \{4,8,12,16\}$, $B = \{3,8,12,14\}$

9) $4 \in A$ 10) $12 \in A$

11) $3 \in A$ 12) $12 \notin B$

13) $16 \notin A$ 14) $14 \notin B$

15) $16 \notin B$ 16) $10 \notin B$

17) $3 \in$ เซ็ทของเลขคี่

18) $4 \notin$ เซ็ทของเลขคู่

19) อ. บางกะปิ $\in$ เซ็ทของอำเภอในจังหวัดพิษณุโลก

20) $4 \in \{1,2,3,4\}$

21) มากกว่าครึ่งหนึ่งของ 4 อยู่ $3 \in \{1,2,3,4\}$

22) ถ้า $a \in$ {สุนัข} แล้วละก็ $a \in$ {สัตว์}

23) ถ้า $a \in$ {พยาบาล} แล้วละก็ $a \in$ {ผู้หญิง}

24) ถ้า $a \in$ {ผู้หญิง} แล้วละก็ $a \in$ {ครู}

25) ถ้า $a \in$ {สามเหลี่ยมด้านเท่า} แล้วละก็ $a \in$ {สามเหลี่ยมหน้าจั่ว}

(ข้อ 22 – 25 ครูควรอธิบายเพิ่มเติมโดยเฉพาะ ป.5)

1.3 <u>สับเซ็ท</u> (Subset)

ถ้า $M = \{1,2,3,4,5\}$

และ $N = \{1,2,3\}$ จะสังเกตเห็นว่าสมาชิกแต่ละตัวของ N เป็นสมาชิกของเซ็ท M เช่นนี้เราเรียกว่า เซ็ท N เป็น <u>สับเซ็ท</u> ของเซ็ท M เขียนแทนด้วย

$$N \subseteq M$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1) ถ้า $R = \{2,3,5\}$

และ $S = \{2,3,4,5\}$ จะได้ว่า $R \subseteq S$

<u>ตัวอย่าง</u> 2) ถ้า $A = \{$นกเขา$\}$

และ $B = \{$นก$\}$

เราทราบว่านกเขาทั้งหลายเป็นนก จึงได้ว่า $A \subseteq B$

<u>ตัวอย่าง</u> 3) ถ้า $X = \{a, b, c, d\}$

และ $Y = \{a, b, c, d\}$

จะได้ว่า $X \subseteq Y$ และ $Y \subseteq X$

<u>ข้อสังเกต</u> เซ็ทสองเซ็ทที่เป็นสับเซ็ทของกันและกัน เช่นตัวอย่างสุดท้ายนี้ เราเรียกว่า เซ็ทสองเซ็ทนั้นเท่ากัน

<u>กิจกรรมที่ 2</u>

1) กำหนด $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

1.1 สับเซ็ทที่สมาชิกเป็นเลขคี่ คือ ...

1.2 สับเซ็ทที่สมาชิกเป็นเลขคู่น้อยกว่า 7 คือ ...

1.3 สับเซ็ทที่สมาชิกหารลงตัวด้วย 3 คือ ...

1.4 สับเซ็ทที่สมาชิกมีค่ามากกว่า 10 คือ ...

1.5 สับเซ็ทที่มีสมาชิก 10 ตัว คือ ...

2) ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

2.1 $\{2,3,4\} \subseteq \{2,3\}$ 2.2 $\{2,3\} \subseteq \{2,3,4\}$

2.3 $\{1\} \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$ 2.4 $\phi \subseteq \{1,2,3\}$

(ϕ แทนเซ็ทว่างเป็นเซ็ทที่ไม่มีสมาชิก)

2.5 $\{$สุนัข$\} \subseteq \{$สัตว์$\}$ 2.6 $\{$พยาบาล$\} \subseteq \{$ผู้หญิง$\}$

2.7 $\{$ผู้หญิง$\} \subseteq \{$พยาบาล$\}$ 2.8 $\{$สามเหลี่ยมด้านเท่า$\} \subseteq \{$สามเหลี่ยมหน้าจั่ว$\}$

3) จงเขียนสับเซ็ทของ $\{\triangle, \square, \bigcirc\}$ ให้ได้ 5 เซ็ท

...

...

1.4 <u>เซ็ทจำกัดและเซ็ทไม่จำกัด</u>

<u>เซ็ทจำกัด</u> (finite set) คือเซ็ทที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด

<u>เซ็ทไม่จำกัด</u> (infinite set) คือเซ็ทที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด

<u>ตัวอย่าง</u> 1) เซ็ทของอักษรในภาษาอังกฤษ

2) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

3) เซ็ทของจำนวนธรรมชาติ เขียนได้เป็น

$\{1,2,3,4,\ldots\}$

4) เซ็ทของคนที่เกิดขึ้นในอนาคต

1.5 <u>เซ็ทเทียบเท่า</u> (Equivalent sets)

ถ้าสมาชิกของเซ็ทหนึ่งสามารถจับคู่กับสมาชิกของอีกเซ็ทหนึ่งได้แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เราเรียกเซ็ทสองเซ็ทเทียบเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> $\{1,3,5\}$ อาจจับคู่แบบอื่นได้อีกเช่น $\{1,3,5\}$

$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow$

$\{a,b,c\}$ $\qquad\qquad$ $\{a,b,c\}$

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{a,b,c,d\}$

$B = \{3,5,7,9\}$

A เทียบเท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$

<u>ตัวอย่าง</u>

$C = \{k,m,n\}$

$D = \{2,4,6,8\}$

C เทียบเท่ากับ D หรือไม่

<u>กิจกรรมที่ 3</u>

1) กำหนด $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$

$C = \{b,c,a\}$, $D = \{3,2,1\}$

ข้อความต่อไปนี้ผิดหรือถูก

1.1 $A = C$ 1.2 $A = B$

1.3 $A \sim B$ 1.4 $B \sim D$

2) จงแสดงว่า $\{2,4,6\}$ เทียบเท่ากับ $\{1,3,5\}$ และมีวิธีการจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง เป็นแบบต่าง ๆ ได้กี่แบบ

...

...

...

---

2. <u>โอเปอเรชั่นและตารางโอเปอเรชั่น</u>

2.1 <u>โอเปอเรชั่น</u> (Operations)

โอเปอเรชั่น คือการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่งกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือหลายสิ่ง โดยมีกฎเกณฑ์อันแน่นอน โอเปอเรชั่นทางคณิตศาสตร์ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ การหาร การถอดรูท เป็นต้น

ไบนารีโอเปอเรชั่น (Binary Operation) คือ โอเปอเรชั่นที่จะกระทำได้เมื่อมี 2 จำนวน หรือ 2 สิ่ง เช่น การบวก การลบ คูณ และ หาร เป็นต้น

2.2 <u>ตารางโอเปอเรชั่น</u>

ถ้ามี $S = \{0,1,2,3\}$ และโอเปอเรชั่น "การบวก" เราอาจนำ 2 สมาชิกใด ๆ มาบวกกันได้หลายคู่ ได้แก่

$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$
$0 + 2 = 2$	$1 + 2 = 3$	$2 + 2 = 4$	$3 + 2 = 5$

0 + 3 = 3	1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6
0 + 0 = 0	1 + 0 = 1	2 + 0 = 2	3 + 0 = 3

ต่อไปนี้จะขอแนะนำการใช้ตารางแสดงผลของโอเปอเรชั่นข้างต้น

+	0	1	2	3
0				
1				
2		3		
3				

2 + 1 = 3

1) ที่มุมซ้ายเป็นเครื่องหมาย "โอเปอเรชั่น"

2) คอลัมน์ซ้ายและแถวบนเป็นสมาชิกของเซ็ทที่กำหนดให้

3) สมาชิกในตารางได้จากการกระทำสมาชิกตัวหน้าได้จากคอลัมน์ซ้ายมือกับสมาชิกตัวหลังได้จากแถวบน เช่น เมื่อนำ 2 ของคอลัมน์ซ้ายมือกระทำกับ 1 ที่อยู่แถวบน ผลที่ได้เติมในช่องดังแสดงในตารางข้างต้น นั่นคือ 2 + 1 = 3 ถ้าจะแสดงโอเปอเรชั่นให้ครบทุกสมาชิกในเซ็ท จะได้ดังนี้

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

<u>หมายเหตุ</u> การตีตารางบนกระดานดำใช้ชอล์คสีแทนเส้นดู

<u>กิจกรรมที่ 4</u>

1) จากตารางโอเปอเรชั่น o ที่กำหนดให้ จงหาผลลัพธ์

⊙	△	?	#	□
△	△	?	#	□
?	?	#	□	△
#	#	□	△	?
□	□	△	?	#

1.1 △ o ? = ...

1.2 ? o □ = ...

1.3 ? ⊙ # = ...

1.4 # o □ = ...

1.5 □ o □ = ...

2) จงบอกโอเปอเรชั่น * จากที่ให้ต่อไปนี้ว่าคืออะไร

2.1 0 * 1 = 1 , 2 * 3 = 5 , 3 * 4 = 7,

* หมายถึง ...

2.2 1 * 2 = 1 , 2 * 3 = 2 , 3 * 1 = 3

* หมายถึง ...

2.3 1 * 2 = 2 , 4 * 2 = 4 , 3 * 2 = 3

* หมายถึง ...

3) ถ้า $a, b \in S = \{0, 1, 2, 3, 4,\}$ และ $a * b = b$ (ได้ผลลัพธ์ตัวหลัง) จงเติมตารางโอเปอเรชั่นให้สมบูรณ์

*	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

จากตาราง $3 * 4 =$, $4 * 3$ ...

$(2 * 4) * 3$ ... , $2 * (4 * 3)$ ...

4) กำหนด $x \triangle y = 2x + y$ จงหาค่า $4 \triangle 12$ และ $12 \triangle 4$

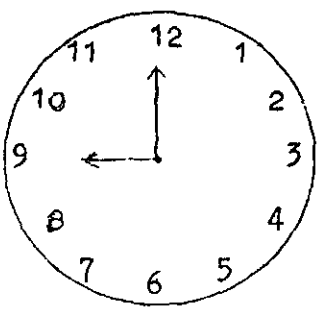
...

...

2.3 <u>เลขนาฬิกา</u> (Clock Arithmetic)

นักเรียนส่วนมากคุ้นกับนาฬิกาบอกเวลา สมมุติว่าขณะนี้เวลา 9 นาฬิกา ต่อไปอีก 5 ชั่วโมงจะเป็นเวลาเท่าไร

เราสามารถหาคำตอบได้ด้วยการนับต่อไปอีก 5 ครั้ง ได้แก่ 10, 11, 12, 1, 2 คำตอบก็คือเวลา 2 นาฬิกา และเขียนเป็นสมการได้ดังนี้



$$9 + 5 = 2$$

<u>ปัญหาในชั้นเรียน</u>

1) จงอธิบายว่าทำไม $9 + 12 = 9$ ในระบบเลขนาฬิกา

2) ครูเขียนว่า $9 + 6 = 3$ ผิดหรือไม่

$9 - 6 = 3$ ผิดหรือไม่

3) สมการในข้อ 2 ถูกต้อง และต่อไปเราจะศึกษาเลขคณิตแบบนี้

4) ท่านคิดได้หรือไม่ว่า 2×12 มีค่าเท่าไร

<u>กิจกรรมที่ 5</u>

1) จงบอกเวลาตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 4 ชม. หลังจาก 9 น.

1.2 2 ชม. หลังจาก 11 น.

1.3 8 ชม. หลังจาก 8 น.

1.4 3 ชม. หลังจาก 6 น.

1.5 9 ชม. หลังจาก 6 น.

2) จงเขียนสมการจากข้อ 1) เช่น 1.1 9 + 4 = 1

2.2 2.3

2.4 2.5

3) ในเลขคณิต "ธรรมดา" ผลบวกของจำนวนใดกับศูนย์ ได้เลขจำนวนนั้นเสมอ ในเลขนาฬิกาจำนวนใดมีบทบาทเหมือนกับศูนย์ (0)

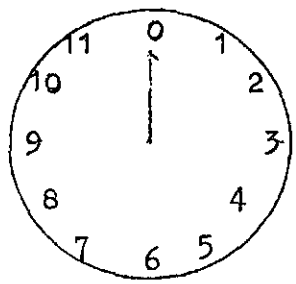
4) คำถามสำหรับคุณพ่อ "เราสามารถหาเลขนาฬิกาตัวหนึ่งที่ใส่ในช่องสี่เหลี่ยมแต่ละช่องได้" □ + □ = □ ท่านหาได้หรือไม่

ในเลขนาฬิกาธรรมดาซึ่งมี 12 ชม. พิจารณา 12 จากสมการ

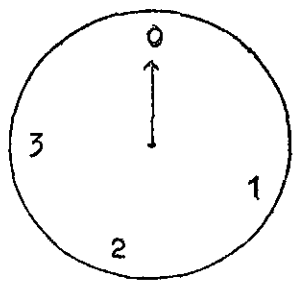
5 + 12 = 5

9 - 9 = 12

จะเห็นว่า 12 มีบทบาทเหมือน 0 ถ้าแทน 12 ด้วย 0 นาฬิกาเราจะได้เป็น



ต่อไปเราลองพิจารณานาฬิกาที่มีเลขเพียง 4 จำนวน ได้แก่ 0, 1, 2, 3 (นาฬิกา 4 ชม.)



<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า 2 + 3

<u>วิธีทำ</u> เริ่มให้เข็มนาฬิกาอยู่ที่ 2 แล้วหมุนเข็ม (ตามเข็มนาฬิกา) ไป 3 หน่วย เข็มจะหยุดตรงเลข 1 พอดี นั่นคือ

$$2 + 3 = 1$$

<u>กิจกรรมที่ 6</u>

1) พึงระลึกเสมอว่านาฬิกาของท่านต่อไปนี้มีเลขเพียง 4 ตัว ได้แก่ 0,1,2 และ 3 เท่านั้น จงบอกเวลาเมื่อกำหนดเงื่อนไขดังนี้

1.1 2 ชม. หลังจาก 0 นาฬิกา

1.2 1 ชม. หลังจาก 2 นาฬิกา

1.3 2 ชม. หลังจาก 2 นาฬิกา

1.4 3 ชม. หลังจาก 2 นาฬิกา

1.5 2 ชม. หลังจาก 1 นาฬิกา

1.6 3 ชม. หลังจาก 3 น.

2) จงเขียนสมการแต่ละข้อใน 1)

1.1 1.2 1.3

1.4 1.5 1.6

3) จงเติมตารางการบวกและการคูณ (เลขนาฬิกา 4 ชม.) ให้สมบูรณ์

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

x	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

4) จากตารางการบวกเลขนาฬิกา 4 ชม. ในข้อ 3 จงหาค่าเติมลงในช่องว่าง แล้วทำให้สมการเป็นจริง

4.1	□ + 2 = 3	4.2	□ + 3 = 0
4.3	□ + 3 = 3	4.4	2 + □ = 1
4.5	1 + △ = 0	4.6	△ + 3 = 2
4.7	2 x △ = 2	4.8	□ x 3 = 2

---

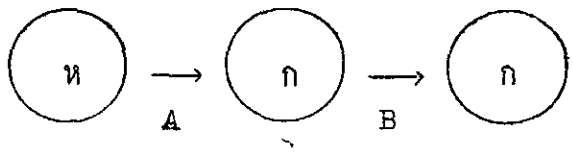
3. <u>คุณสมบัติปิด</u> (Closure)

พิจารณาเซ็ทของการกระทำเกี่ยวกับเหรียญ 2 อย่าง ได้แก่ A และ B

พลิกกลับ , เหมือนเดิม

โอเปอเรชั่น ⊖ แทน "ตามด้วย"

A ⊖ B หมายความว่า กระทำ A ก่อน แล้วตามด้วยกระทำ B



จะเห็นว่าเมื่อกระทำแล้วผลเหมือนกับกระทำ A อย่างเดียวนั่นเอง

นั่นคือ A ⊕ B = A

ในทำนองเดียวกันสามารถสร้างตารางโอเปอเรชั่นใน A,B ได้ดังนี้

⊖	A	B
A	B	A
B	A	B

จากตารางจะเห็นว่าเมื่อนำสมาชิก 2 ตัวใด ๆ ในเซ็ทมากระทำกันแล้ว ผลลัพธ์ก็ยังอยู่ในเซ็ทเดิม เราเรียกว่าเซ็ทนี้มีคุณสมบัติปิด

<u>ตัวอย่าง</u>

$\{0,1,2,3\}$ มีคุณสมบัติปิดภายใต้โอเปอเรชั่น + (เลขนาฬิกา 4 ตัว)

<u>ตัวอย่าง</u>

$\{1,2\}$, โอเปอเรชั่นบวกธรรมดา

+	1	2
1	1	3
2	3	4

จะเห็นว่ามีผลลัพธ์บางตัวไม่อยู่ในเซ็ทที่ให้มา

$\therefore$ $\{1,2\}$ ไม่ปิดสำหรับการบวก

<u>กิจกรรมที่ 7</u>

1) เซ็ทและโอเปอเรชั่นที่กำหนดให้ดังตารางข้างล่างนี้ มีคุณสมบัติปิดหรือไม่

1.1 $\{2,4,6\}$, +

+	2	4	6
2	4	6	8
4	6	8	10
6	8	10	12

1.2 $\{1,2\}$, $\times$

x	1	2
1	1	2
2	2	1

1.3 $\{1,2,3,4\}$, $\oplus$

$\oplus$	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

1.4 $\{1,2,3\}$, $\oplus$

$\oplus$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	2	1

1.5 $\{0,1,2\}$, $\otimes$

$\otimes$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	1

1.6 $\{0,1,2\}$, $\odot$

$\odot$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	3	4
2	2	4	5

2) เซ็ทต่อไปนี้กับการบวก (ธรรมดา) มีคุณสมบัติปิดหรือไม่

2.1 $\{0,1,2,3,5,8,12,\}$ 2.2 $\{0,1\}$

2.3 $\{0\}$ 2.4 $\{10,20,30,40,50,\ldots\}$

3) เซ็ทไม่จำกัดต่อไปนี้มีคุณสมบัติปิดภายใต้โอเปอเรชั่นที่กำหนดให้หรือไม่

3.1 $\{0,1,2,\ldots\}$, + 3.2 จำนวนธรรมชาติ , −

3.3 เซ็ทของจำนวนธรรมชาติ, x 3.4 เซ็ทของจำนวนคี่, +

3.5 เซ็ทของจำนวนคี่ , x 3.6 เซ็ทของจำนวนคู่ ,+

3.7 เซ็ทของจำนวนคู่ , x 3.8 เซ็ทของจำนวนธรรมชาติ , -

4) เซ็ทของเลขนาฬิกา 5 ชม. กับการบวกมีคุณสมบัติปิดหรือไม่ จงแสดง

5) เซ็ทของเลขนาฬิกา 5 ชม. ปิดภายใต้การคูณหรือไม่

...

---

4. <u>คุณสมบัติการจัดหมู่</u> (Associative law)

เราทราบมาว่า เลขคู่บวกเลขคู่ได้เลขคู่ (ครูอธิบายเพิ่มเติม)

เลขคู่บวกเลขคี่ได้เลขคี่

เลขคี่บวกเลขคู่ได้เลขคี่

เลขคี่บวกเลขคี่ได้เลขคู่

ถ้าให้ E แทนเลขคู่

O แทนเลขคี่ (ตัวโอ)

และ $S = \{E,O\}$

ให้นิยามการบวกในเซ็ท S ดังนี้ $E + E = E$

$E + O = O = O + E$

$O + O = E$

จึงสร้างตารางโอเปอเรชั่นได้ดังนี้

+	E	O
E	E	O
O	O	E

จากตาราง $(E + E) + O = \ldots$, $E + (E + O) = \ldots$

$(E + O) + E = \ldots$, $E + (O + E) = \ldots$

$(E + O) + O = \ldots$, $E + (O + O) = \ldots$

$(O + E) + E = \ldots$, $O + (E + E) = \ldots$

$(O + E) + O = \ldots$, $O + (E + O) = \ldots$

$(O + O) + E = \ldots$, $O + (O + E) = \ldots$

จะเห็นว่าสำหรับสมาชิก a, b, c ทุกตัวที่อยู่ใน S จะได้ว่า

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

เช่นนี้เราเรียกว่าโอเปอเรชั่นที่ให้มามีคุณสมบัติการจัดหมู่

<u>ตัวอย่าง</u> $S = \{0, 1\}$, x สร้างตารางได้เป็น

x	0	1
0	0	0
1	0	1

สามารถตรวจสอบได้ว่า ถ้า $a, b, c \in S$ ย่อมได้ว่า

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

<u>ตัวอย่าง</u> $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, -

$$(6 - 3) - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$6 - (3 - 2) = 6 - 1 = 5$$

จะเห็นว่า $(6 - 3) - 2 \neq 6 - (3 - 2)$

$\therefore$ การลบบนเซ็ท W ไม่มีคุณสมบัติการรวมหมู่

<u>กิจกรรมที่ 8</u>

1) ท่านว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

1.1 $8 - (4 \div 2) = (8 - 4) - 2$

1.2 $10 - (8 - 6) = (10 - 8) - 6$

2) จงใส่วงเล็บเพื่อทำให้ประโยคเป็นจริง

2.1 $16 - 4 - 2 = 8$, $16 - 4 - 2 = 2$

2.2 $15 - 5 - 5 = 15$, $15 - 5 - 5 = 5$

3) สำหรับเลขนาฬิกา 5 ชม. จงหาค่า

3.1 $(2 + 1) + 3 = \ldots$, $2 + (1 + 3) = \ldots$

3.2 $(4 + 2) + 2 = \ldots$, $4 + (2 + 2) = \ldots$

3.3 $(3 + 3) + 2 = \ldots$, $3 + (3 + 2) = \ldots$

3.4 $(4 + 4) + 3$ กับ $4 + (4 + 3)$ เท่ากันหรือไม่

3.5 $(1 + 4) + 4$ กับ $1 + (4 + 4)$ เท่ากันหรือไม่

3.6 $(3 \times 4) \times 2$ กับ $3 \times (4 \times 2)$ เท่ากันหรือไม่ ถ้าเท่ามีค่าเท่าไร.

---

5. <u>สมาชิกเอกลักษณ์</u> (Identity)

เรื่องเลขนาฬิกา 4 ตัว มีเลขจำนวน 0,1,2,3, ถ้าให้ $A = \{0,1,2,3\}$ และมีโอเปอเรชั่น "การบวก" เราได้ตารางดังนี้

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

จะเห็นว่า

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$2 + 0 = 0 + 2 = 2$$

$$3 + 0 = 0 + 3 = 3$$

จะเห็นว่าทุกสมาชิก $a \in A$ มี 0 ซึ่ง $a + 0 = 0 + a = a$ เราเรียก 0 ว่าเป็นสมาชิกเอกลักษณ์ ในกรณีทั่วไปถ้ามีเซ็ท S และโอเปอเรชั่น o, $\imath$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชั่น o ก็ต่อเมื่อทุกค่าของ $a \in S$, $a \, o \, \imath = \imath \, o \, a = a$

<u>ตัวอย่าง</u> $\{0,1\}$, $\times$
มี 1 เป็นเอกลักษณ์

<u>ตัวอย่าง</u> $\{0,1,2,3,4\}$, $\times$ (เลขนาฬิกา 5 ตัว)
มี 1 เป็นเอกลักษณ์

<u>กิจกรรมที่ 9</u>

ให้ T เป็นเซ็ทของการกระทำตามคำสั่ง มีดังนี้

นต. แทน หน้าตรง , ซ แทน ซ้ายหัน

ข แทน ขวาหัน , ล แทน กลับหลังหัน

และ $\oplus$ แทน "ตามด้วย"

เช่น นต. $\oplus$ ซ = ซ , ซ $\oplus$ ล = ข

$T = \{$นต., ข, ซ, ล$\}$, $\oplus$

1) เติมตารางโอเปอเรชั่นให้สมบูรณ์

$\oplus$	นต.	ข	ซ	ล
นต.				
ข				
ซ				
ล				

2) เซ็ท T มีคุณสมบัติปิดภายใต้ ⊕ หรือไม่ เพราะอะไร

...

3) ⊕ มีคุณสมบัติการจัดหมู่หรือไม่

ข ⊕ (ซ ⊕ ล) ... , (ข ⊕ ซ) ⊕ ล = ...

4) เอกลักษณ์สำหรับ ⊕ ได้แก่ ...

เพราะอะไรจึงเรียกว่าเอกลักษณ์ ...

...

---

6. <u>สมาชิกอินเวอร์ส</u> (Inverse)

เมื่อพิจารณาเซ็ทของเลขนาฬิกา 4 ตัว พยายามหาสมาชิกคู่ใด ๆ ที่กระทำกันแล้วได้ผลเป็นเอกลักษณ์ของการกระทำนั้น

สำหรับ 0 มี 0 ซึ่ง 0 + 0 = 0

สำหรับ 1 มี 3 ซึ่ง 1 + 3 = 0 = 3 + 1

สำหรับ 2 มี 2 ซึ่ง 2 + 2 = 0

สำหรับ 3 มี 1 ซึ่ง 3 + 1 = 0 = 1 + 3

เราเรียกว่า อินเวอร์ส ของ 0 ได้แก่ 0

อินเวอร์ส ของ 1 ได้แก่ 3

อินเวอร์ส ของ 2 ได้แก่ 2

อินเวอร์ส ของ 3 ได้แก่ 1

กรณีทั่วไป สมาชิก a และ b จะเป็นอินเวอร์สกันภายใต้ ⊕ ต่อเมื่อ a ⊕ b = b ⊕ a = ı (ı เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ในเซ็ทนี้)

<u>ตัวอย่าง</u> จากกิจกรรมที่ 9

อินเวอร์สของ นต. ได้แก่ นต.

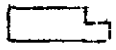
อินเวอร์สของ ซ ได้แก่ ข

อินเวอร์สของ ข ได้แก่ ซ

อินเวอร์สของ ล ได้แก่ ล

<u>กิจกรรมที่ 10</u>

มีแผ่นกระดาษแข็งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งถูกตัดมุมดังรูป



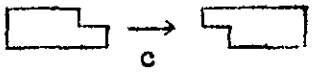
กำหนดการกระทำ 4 อย่าง เป็น a, b, c, d ดังนี้

<u>กระทำ a</u> "เคลื่อนมุมที่ตัดจากขวาไปซ้ายหรือจากซ้ายไปขวา"

<u>กระทำ b</u> "เคลื่อนมุมที่ตัดจากบนไปล่าง หรือจากล่างไปสู่บน"

เช่น 

<u>กระทำ c</u> "เคลื่อนมุมที่ตัดไปสู่มุมตรงข้าม"

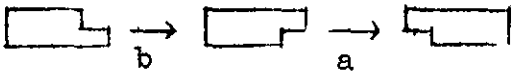
เช่น 

<u>กระทำ d</u> "ให้มุมที่ตัดอยู่ตำแหน่งเดิม"

ข้อตกลง ก. ในการเริ่มของการกระทำให้มุมตัดอยู่ตำแหน่งบนขวาเสมอ

ข. a * b หมายถึง "กระทำ a" แล้ว "กระทำ b"

เช่น b * a = ?



จะเห็นว่าผลสุดท้ายเหมือนกับ "กระทำ c กับรูปตำแหน่งเดิม"

นั่นคือ b * a = c

1) จงสร้างตารางโอเปอเรชั่น * สำหรับ a, b, c, d

...

...

...

...

2) เซ็ทนี้ปิดภายใต้ * หรือไม่

3) มีเอกลักษณ์สำหรับ * หรือไม่ ถ้ามีได้แก่ค่าใด

4) แต่ละสมาชิกมีอินเวอร์สหรือไม่ ถ้ามีจงหา

...

...

---

7. <u>กรุ๊ป</u> (Groups)

กรุ๊ป คือ ระบบคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซ็ทและไบนารีโอเปอเรชั่น สอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้ (Wheeler, 1969 : 251)

1) เซ็ทปิดภายใต้โอเปอเรชั่น

2) สมาชิกในเซ็ทสอดคล้องตามคุณสมบัติการจัดหมู่

3) มีสมาชิกเอกลักษณ์เพียงตัวเดียวเท่านั้นสำหรับโอเปอเรชั่น

4) แต่ละสมาชิกในเซ็ทจะมีอินเวอร์สเพียงหนึ่งตัวสัมพันธ์กันตามโอเปอเรชั่น

หรืออาจพูดในรูปสัญญลักษณ์ดังนี้

กรุ๊ป คือระบบซึ่งประกอบด้วยเซ็ท G และไบนารีโอเปอเรชั่น * มีคุณสมบัติดังนี้ (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2514 : 31)

1) <u>คุณสมบัติปิด</u>

สำหรับสมาชิก a และ b ทุกตัวของ G, $a * b \in G$

2) <u>คุณสมบัติการจัดหมู่</u>

สำหรับสมาชิก a,b และ c ทุกตัวของ G

$(a * b) * c = a * (b * c)$

3) <u>เอกลักษณ์</u> มี i ซึ่ง $i * a = a = a * i$

4) <u>อินเวอร์ส</u> สำหรับสมาชิก a ทุกตัวของ G จะมี a^{-1} ซึ่ง

$a^{-1} * a = i = a * a^{-1}$

<u>ตัวอย่าง</u> $G = \{0,1,2,3,4\}$, ไบนารีโอเปอเรชั่น + (เลขนาฬิกา 5 ตัว)

G, + เป็นกรุ๊ปเพราะ

1) G ปิดภายใต้ +

2) กฎการจัดหมู่ใช้ได้สำหรับ +

3) เอกลักษณ์ได้แก่ 0

4) อินเวอร์สของ 1 คือ 4

อินเวอร์สของ 0 คือ 0

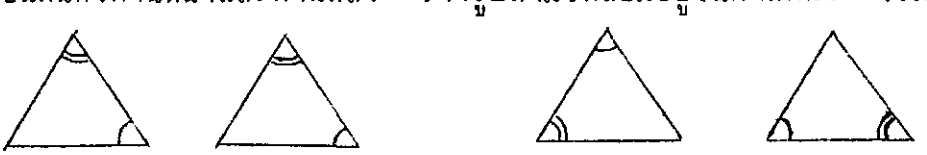
อินเวอร์สของ 2 คือ 3

อินเวอร์สของ 3 คือ 2

อินเวอร์สของ 4 คือ 1

<u>กิจกรรมที่ 11</u>

เมื่อตัดกระดาษแข็งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาวอย่างน้อย 2 นิ้ว ทำเครื่องหมายที่มุมเหมือนกันทั้งด้านหน้าและด้านหลัง วางรูปสามเหลี่ยมอยู่ในตำแหน่ง "เริ่ม"



เริ่ม I II III

1) ท่านเคลื่อนรูปอย่างไรจึงจะได้รูปที่อยู่ตำแหน่ง I

2) ท่านจะพลิกรูปอย่างไรจึงจะได้รูปดังตำแหน่ง II

3) ท่านจะพลิกรูปอย่างไรจึงจะได้ตำแหน่ง III

ก่อนที่ท่านจะทำแต่ละครั้งต่อไปนี้ให้วางรูปไว้ตำแหน่ง "เริ่ม"

4) ถ้าหมุนรูปทิศตามเข็มนาฬิกาไป $\frac{1}{3}$ จะได้ตำแหน่งใด

5) ถ้าหมุนรูปทิศตามเข็มนาฬิกาไป $\frac{2}{3}$ จะได้ตำแหน่งใด

6) ถ้าหมุนรูปทวนเข็มนาฬิกาไป $\frac{2}{3}$ จะได้ตำแหน่งใด

ต่อไปจะแทนชื่อ <u>ขบวนการ</u>หมุน ดังนี้

"เริ่ม" $\longrightarrow$ I (ไม่หมุน) แทนด้วย I

"เริ่ม" $\longrightarrow$ II (หมุนทวนไป $\frac{1}{3}$) แทนด้วย A

"เริ่ม" $\longrightarrow$ III (หมุนทวนไป $\frac{2}{3}$) แทนด้วย B

พึงสังเกตว่า I,A,B มิใช่ตำแหน่งสุดท้ายแต่เป็น<u>ขบวนการ</u>เปลี่ยน

7) กระทำ I แล้วตามด้วย A จะเหมือนกับกระทำอะไรเพียงครั้งเดียว

8) กระทำ B แล้วตามด้วย I จะเหมือนกับกระทำอะไรเพียงครั้งเดียว

ถ้าให้ $\oplus$ แทนโอเปอเรชั่น "ตามด้วย" กระทำ A แล้วตามด้วยกระทำ B จึงแทนด้วย $A \oplus B$ เมื่อกระทำแล้วผลจะเหมือนกับกระทำ I เพียงครั้งเดียว จึงเขียนว่า

$A \oplus B = I$

9) จงเติมตารางโอเปอเรชั่น $\oplus$ บน $\{I,A,B\}$ ให้สมบูรณ์

$\oplus$	I	A	B
I			
A			
B			

10) โอเปอเรชั่น $\oplus$ มีคุณสมบัติปิดหรือไม่

11) $(A \oplus A) \oplus B$, $A \oplus (A \oplus B)$ เท่ากันหรือไม่
กฎการจัดหมู่ใช้ได้หรือไม่

12) มีสมาชิกเอกลักษณ์หรือไม่ ถ้ามีได้แก่สมาชิกใด

13) แต่ละสมาชิกมีอินเวอร์สหรือไม่

14) $\{A, B, I\}$, $\oplus$ เป็นกรุ๊ปหรือไม่

ต่อไปจะขยายระบบเดิมข้างต้นโดยใช้การพลิกด้านของสามเหลี่ยม ให้สังเกตรูปภาพข้างล่างนี้ มีเลขกำกับประกอบด้วย

เริ่ม I II III

IV V VI

เมื่อสังเกตจะเห็นว่า จาก "เริ่ม" ⟶ IV, มุมยอกอยู่ตำแหน่งเดิม

"เริ่ม" ⟶ V, มุมขวาอยู่ตำแหน่งเดิม

"เริ่ม" ⟶ VI, มุมซ้ายอยู่ตำแหน่งเดิม

และจะแทนขบวนการพลิกรูปใหม่ดังนี้

"เริ่ม" ⟶ IV, (พลิกตามแนวตั้ง) แทนด้วย C

"เริ่ม" ⟶ V (พลิกตามแนวทะแยงซ้าย) แทนด้วย D

"เริ่ม" ⟶ VI (พลิกตามแนวทะแยงขวา) แทนด้วย E

15) จงเติมตารางโอเปอเรชั่นให้สมบูรณ์

⊕	I	A	B	C	D	E
I						
A						
B						
C						
D						
E						

16) พยายามตรวจดูว่า $\{I,A,B,C,D,E\}$, ⊕ เป็นกรุ๊ปหรือไม่ โดยตรวจคุณสมบัติการจัดหมู่เพียง 2-3 กรณีเท่านั้น

8. <u>สับกรุ๊ป</u> (Subgroup)

จากตารางใน 15 หัวข้อ (7) ข้างบนนี้ เมื่อนำ I,C มาพิจารณาจะสังเกตเห็นว่า $\{I, C\}$, $\oplus$ เป็นกรุ๊ป และ $\{I, C\}$ เป็นสับเซ็ทของ $\{I,A,B,C,D,E\}$ เช่นนี้เราเรียกว่า $\{I, C\}$, $\oplus$ เป็นสับกรุ๊ป

S เป็นสับกรุ๊ปของ G ก็ต่อเมื่อ

1) S เป็นสับเซ็ทของ G

2) S กับไบนารีโอเปอเรชั่นของ G เป็นกรุ๊ป

<u>ตัวอย่าง</u> $\{0,1,2\}$, + เป็นกรุ๊ป

$\{0\}$, + เป็นสับกรุ๊ป

$\{1,2\}$, +ไม่เป็นสับกรุ๊ป เพราะเซ็ทไม่ปิด

9. <u>ไอโซมอร์ฟิซึม</u> (Isomorphism)

1) เติมตารางโอเปอเรชั่นทั้งสองนี้ให้สมบูรณ์

$\{0, 1\}$, +

+	0	1
0		
1		

$\{I, C\}$, $\oplus$

$\oplus$	I	C
I		
C		

2) ลองแทนสิ่งดังต่อไปนี้ลงในตารางแรก (โดยเขียนตารางใหม่)

แทนด้วย 0 ด้วย I แทน 1 ด้วย C

จะเห็นว่าผลในตารางเหมือนกับตารางหลังทุกประการ กรุ๊ปที่มีรูป (Form) เหมือนกัน เช่นนี้เรียกไอโซมอร์ฟิค หรือ "กรุ๊ปทั้งสองนี้ไอโซมอร์ฟิคกัน" ความเหมือนกันในลักษณะข้างต้นนี้ เรียก ไอโซมอร์ฟิซึม เป็นสิ่งที่มักพบบ่อยในทางคณิตศาสตร์ นับว่าเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญมากสำหรับวิชาพีชคณิตใหม่ อาจพูดในอีกลักษณะหนึ่งดังนี้

3) เมื่อ $S = \{0,1\}$ และ $S' = \{I,C\}$ และจับคู่สมาชิกทั้งสองเซ็ทดังนี้ $0 \longleftrightarrow I$, $1 \longleftrightarrow C$ ท่านสังเกตได้อะไรบ้าง (0 + 1 จับคู่กับอะไร)

ในกรณีทั่วไป S, * และ S' , o เป็นกรุ๊ป S ไอโซมอร์ฟิคกับ S' ก็ต่อเมื่อ

1) S และ S' เทียบเท่ากัน (สมาชิกในเซ็ทจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งได้)

2) ถ้า $x \longleftrightarrow x'$, $y \longleftrightarrow y'$ ย่อมได้ว่า $x * y \longleftrightarrow x' \, o \, y'$ โดยที่ $x, y \in S$ และ $x', y' \in S'$

<u>ตัวอย่าง</u> กรุ๊ป $\{0,1,2\}$, + และ $\{I, A, B\}$, $\oplus$ เป็นกรุ๊ปที่ไอโซมอร์ฟิคกัน

โดยที่ $0 \longleftrightarrow I$

$1 \longleftrightarrow A$

$2 \longleftrightarrow B$

จงตรวจดูว่า 0 + 1, 1 + 2, 2 + 1, 1 + 0 จับคู่กับอะไร

<u>กิจกรรมที่ 12</u>

1) $\{0,1\}$, + (นาฬิกา 2 ชม.) กับ $\{1,2\}$, x (นาฬิกา 3 ชม.) ไอโซมอร์ฟิคกันหรือไม่

2) $S = \{a, b, c\}$ และไบนารีโอเปอเรชั่น $\oplus$ ดังตาราง

$\oplus$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

S, $\oplus$ เป็นกรุ๊ป

ก. เอกลักษณ์ได้แก่ค่าใด

ข. อินเวอร์สของแต่ละสมาชิกมีอะไรบ้าง

ค. จงแสดงว่า S ไอโซมอร์ฟิคกับเซ็ทของเลขนาฬิกา 3 ชม. (การบวก)

3) จงแสดงว่า $\{0,1,2,3\}$, + (4 ชม.) กับ $\{1,2,3,4\}$, x (5 ชม.) ไอโซมอร์ฟิคกัน

4) $\{1, a, b, c\}$, * กับ $\{1, x, y, z\}$, o ไอโซมอร์ฟิคกันหรือไม่

*	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

o	1	x	y	z
1	1	x	y	z
x	x	y	z	1
y	y	z	1	x
z	z	1	x	y

<u>กิจกรรมที่ 13</u> (ตัวอย่างกรุ๊ปที่ไม่เป็นอบิเลียนกรุ๊ป)

พิจารณาเซ็ทของ "รูปทรง" การเรียงไม้จิ้มฟันแบบต่าง ๆ ดังนี้

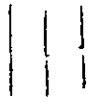
I =  , A =  , B = 

C =  , D =  , E = 

ให้ $S = \{I,A,B,C,D,E\}$ และโอเปอเรชั่น # กำหนดดังนี้

<u>คำนิยาม</u> ถ้า x,y เป็นสมาชิกใด ๆ ของ S, x # y เป็นสัญญลักษณ์แทนรูปทรงซึ่งเกิดจากนำ x และ y มาต่อกัน โดยนำส่วนบนของ y มาต่อส่วนล่างของ x และสุดท้ายให้<u>เคลื่อนจุดที่ต่อกัน</u> เพื่อให้แต่ละแนวขึงตรง

<u>ตัวอย่าง</u>

A # B หมายถึง  =  = I

A # C หมายถึง  =  = D

1) จงสร้างและเติมตารางโอเปอเรชั่นให้สมบูรณ์

2) S ปิดภายใต้ # หรือไม่เพราะอะไร

3) # มีคุณสมบัติการจัดหมู่ จงตรวจสอบโดย

หาค่า (A # B) # C

A # (B # C)

(B # D) # E

B # (D # E)

4) การแสดงว่า I เป็นเอกลักษณ์จะต้องแสดงว่า

สำหรับแต่ละสมาชิก x ใน S, x # I = I # x = x

จงแสดง ...

...

...

5) สำหรับแต่ละค่าของ x ใน S, จะมีอินเวอร์สใน S แทนด้วย x^{-1} ซึ่ง $x \# x^{-1} = x^{-1} \# x = I$, จงหาอินเวอร์สของแต่ละสมาชิกใน S

...

...

6) จงหา x, y ใน S อย่างน้อยหนึ่งคู่ที่ทำให้ $x \# y \neq y \# x$ (เราเรียกว่า # <u>ไม่มี</u>คุณสมบัติการสลับที่)

...

...

7) จงหาสับกรุ๊ปของ S

...

<u>หมายเหตุ</u> ถ้ากรุ๊ปใดก็ตามมีคุณสมบัติเพิ่มได้แก่คุณสมบัติการสลับที่ เราเรียกกรุ๊ปนี้ว่า <u>อบีเลียนกรุ๊ป</u> หรือ Commutative group แล้วครูอธิบายการตรวจคุณสมบัตินี้ จากตารางโอเปอเรชั่น โดยอาศัยเส้นทะแยงมุมที่ลากจากมุมบนซ้าย