

THE LIBRARY  
COLLEGE OF EDUCATION  
BANGKOK THAILAND

การศึกษาความสามารถในการเขียนเรื่องกรู๊ป (Group) เบื้องต้น  
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

ปริญญานิพนธ์

ของ

ทวีชัย สิริหิร

เสนอต่อวิทยาลัยวิชาการศึกษา  
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร  
ปริญญามหาบัณฑิต

ธันวาคม 2516

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญาบัตรฉบับนี้แล้ว  
เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต  
ของวิทยาลัยวิชาการศึกษา ได้

ส.ท. ๗๑ รัตนกุล

ประธาน

ส.ท. ๗๑ รัตนกุล

กรรมการ

ธันวาคม 2516

## ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ เพราะผู้วิจัยได้รับคำแนะนำและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร. สุชาติ รัตนกุล และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุพจน์ ชะนะมา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณอาจารย์ใหญ่ และคณะครูของโรงเรียนชุมชน อำเภอสุนทรจิระ จังหวัดศรีสะเกษ ที่ได้ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีในการวิจัยครั้งนี้ และขอขอบคุณทุกท่านที่มีส่วนช่วยเหลือในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้.

ทวีชัย สิริพิตร

## สารบัญ

| บทที่                                                       | หน้า |
|-------------------------------------------------------------|------|
| 1    บทนำ                                                   | 1    |
| ความมุ่งหมายในการศึกษาคนควา                                 | 5    |
| สมมุติฐานในการศึกษาคนควา                                    | 5    |
| ความสำคัญของการศึกษาคนควา                                   | 5    |
| ขอบเขตของการศึกษาคนควา                                      | 6    |
| คำนินยัมศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาคนควา                     | 6    |
| ขอบคกกลง เบื้องต้นในการศึกษาคนควา                           | 6    |
| ประโยชน์จากการศึกษาคนควา                                    | 7    |
| 2    การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง                            | 8    |
| 3    วิธีดำเนินการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล                | 14   |
| กลุ่มตัวอย่าง                                               | 14   |
| เครื่องมือในการทดลอง                                        | 15   |
| การสร้างเครื่องมือในการทดลอง                                | 16   |
| วิธีดำเนินการทดลอง                                          | 18   |
| การวิเคราะห์ข้อมูล                                          | 19   |
| 4    ผลการทดลอง                                             | 22   |
| การวิเคราะห์ข้อมูลหาคะแนนเฉลี่ยและความ เบี่ยง เบินมากร ฐาน  | 22   |
| ของคะแนนจากการทดสอบ                                         | 22   |
| การวิเคราะห์ข้อมูลหาความแตกต่างระหว่างความสามารถของนักเรียน | 23   |
| แต่ละระดับชั้น                                              | 23   |

| บทที่      | หน้า                           |
|------------|--------------------------------|
| 5          | สรุป อภิปรายผล และขอเสนอแนะ    |
|            | ความมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้ |
|            | กลุ่มตัวอย่าง                  |
|            | เครื่องมือในการทดลอง           |
|            | การดำเนินการทดลอง              |
|            | การวิเคราะห์ข้อมูล             |
|            | ผลการทดลอง                     |
|            | สรุปผลการทดลอง                 |
|            | อภิปรายผล                      |
|            | ขอเสนอแนะ                      |
| บรรณานุกรม | 31                             |
| ภาคผนวก    | 35                             |

## บัญชีตาราง

| ตาราง                                                                                                                                | หน้า |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1 จำนวนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย จำแนกตามเพศและระดับชั้น                                                                               | 14   |
| 2 ค่า $p$ เฉลี่ย ค่า $r$ เฉลี่ย ค่า $\Delta$ เฉลี่ย ค่า $r_{tt}$<br>และค่า $SE_{meas}$                                               | 18   |
| 3 คะแนนเต็ม คะแนนเฉลี่ย ( $\bar{X}$ ) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( $S$ )<br>ของคะแนนจากการทดสอบ                                         | 22   |
| 4 ค่าที่ ( $t$ -test) ในการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง<br>จากแบบทดสอบฉบับที่ 1                                            | 23   |
| 5 ค่าที่ ( $t$ -test) ในการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง<br>จากแบบทดสอบฉบับที่ 2                                            | 24   |
| 6 ค่า $P_H$ , $P_L$ , $p$ , $r$ และ $\Delta$ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ใน-<br>การเรียนรู้เรื่องกรุปเบี่ยงตน ฉบับที่ 1 ที่วิเคราะห์แล้ว | 36   |
| 7 ค่า $P_H$ , $P_L$ , $p$ , $r$ และ $\Delta$ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ใน-<br>การเรียนรู้เรื่องกรุปเบี่ยงตน ฉบับที่ 2 ที่วิเคราะห์แล้ว | 37   |

คริสต์ศตวรรษที่ 20 นับได้ว่าเป็นศตวรรษแรกเริ่มแห่งการปฏิรูปการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ วิจัยทางการทางวิชาการและเทคโนโลยีก่อให้เกิดความตื่นตัวทางคณิตศาสตร์ นักวิชาการสาขาอื่น ๆ เช่น นักชีววิทยา นักฟิสิกส์ และนักสังคมวิทยาที่ต้องการใช้หลักการของ คณิตศาสตร์ทั้งแขนงเดิมและแขนงใหม่ในการศึกษาเรื่องต่าง ๆ ความตื่นตัวดังกล่าวก่อให้เกิด ความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนแปลงและปรับปรุง เนื้อหาคอนวีนชันวิธีการทางคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ เพื่อเตรียมเยาวชนให้เป็นผู้ที่มีความสามารถในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้เป็นประโยชน์ ในการทำงานตามตำแหน่งหน้าที่ ให้อยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุข และให้เป็นคนที่มีประโยชน์ต่อ สังคมมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้<sup>1</sup>

งานทดลองและงานวิจัยค้นคว้าในต่างประเทศแสดงอย่างแจ่มชัดว่า เนื้อหาและวิธีการ ทางคณิตศาสตร์ที่สอนอยู่ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาแต่เดิม ไม่เพียงพอสำหรับความ - ต้องการของโลกปัจจุบัน ประเทศต่าง ๆ จึงตระหนักในความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนแปลงและ ปรับปรุงหลักสูตร คอนวีนชันวิธีสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาอย่างรีบด่วน<sup>2</sup> เป็นที่น่าสังเกตว่า นำเอาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับ ประถมศึกษาและมัธยมศึกษา หลังจากที่ได้ปรับปรุงให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนแล้ว<sup>3</sup> การกระทำ เช่นนี้มีผลดีหลายประการ ประการหนึ่งคือ ลดความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา เป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตนักคณิตศาสตร์ให้พอเพียงกับความ-

<sup>1</sup> สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รายงานการดำเนินงานตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2513 ถึง 30 กันยายน 2514 หน้า 21 - 22.

<sup>2</sup> ก.

<sup>3</sup> Joseph Criscimbuni, Teaching the New Mathematics, p. 3.

ต้องการ อีกประการหนึ่ง นักวิชาการแขนงอื่น ๆ ที่ต้องการใช้หลักการทางคณิตศาสตร์จะได้เรียนรู้หลักการเหล่านั้นบ้างในโรงเรียน ซึ่งจะทำให้การเรียนรู้สูงขึ้น สามารถนำไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น และสำหรับคนส่วนมากที่ไม่มีโอกาสเรียนในระดับอุดมศึกษา หลักการทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนในระดับมัธยมศึกษาจะช่วยให้ความเข้าใจถึงความเคลื่อนไหวของโลกปัจจุบันได้ดีขึ้น<sup>1</sup> การที่นักการศึกษาเอาเนื้อหาทางคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับหนึ่งมาสอนในระดับที่ต่ำกว่าเพราะมีความเชื่อว่า ผู้เรียนต่างระดับชั้นสามารถเรียนรู้เนื้อหาอย่างเดียวกันได้ โดยปรับปรุงเนื้อหาเหล่านั้นให้เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน<sup>2</sup>

ปัจจุบันการสอนคณิตศาสตร์ต้องการ เน้นความสำคัญของโครงสร้างและบทบาทของคณิตศาสตร์มากกว่าการใช้สูตรและการกีดคำนวณแบบกลไก<sup>3</sup> แต่การเรียนการสอนในประเทศไทยโดยทั่วไปยังไม่ได้ปรับปรุงให้ทันกับความเจริญก้าวหน้าของวิทยาการ / การสอนยังยึดในแนวเดิมเป็นส่วนใหญ่ กล่าวคือ เน้นทักษะในการคำนวณและการแก้ปัญหาโจทย์ โดยไม่ได้เน้นความเข้าใจในโครงสร้างของคณิตศาสตร์ และหลักการให้เหตุผลแก่ผู้เรียน การสอนจึงเป็นปัญหาหนักทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาโดยทั่วไป<sup>4</sup> ถึงผลการศึกษาก่อนหน้านี้ของ ทศนิยม อ่องไพฑูริย์<sup>5</sup> ในเรื่องการศึกษาสืบทอดปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการเรียนจากนักเรียนชั้นมัธยมของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดพระนครศรีอยุธยา

<sup>1</sup> กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ รายงานการสัมมนาการคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา หน้า (1.1-1) - (1.1-2).

<sup>2</sup> W. Servais, and T. Varga, Teaching School Mathematics, p. 21.

<sup>3</sup> กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ด.ก. หน้า (3.6-1).

<sup>4</sup> ประเทิน มหาจันทร์ วิธีสอนคณิตศาสตร์แผนใหม่ในชั้นประถมศึกษา หน้า 2 - 3.

<sup>5</sup> ร.ต.หญิง ทศนิยม อ่องไพฑูริย์ "การสืบค้นปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการเรียนจากนักเรียนชั้นมัธยมของโรงเรียนรัฐบาล ในจังหวัดพระนครศรีอยุธยา" การวิจัยการศึกษา 4 : 1 - 27 สิงหาคม 2503.

ปรากฏว่า วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนไม่ชอบและสอบตกมากที่สุด ผลการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่า การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ของเรายังมีข้อบกพร่องอยู่ ควรที่จะได้ปรับปรุงในด้านการเรียนการสอนและเนื้อหาให้เป็นที่น่าสนใจ และกว้างขวางยิ่งขึ้น

สปิตเซอร์<sup>1</sup> (Spitzer) พบว่า วิธีสอนคณิตศาสตร์ที่ผลใหญ่เรียนเข้าใจเหตุผล และรู้จักนำไปใช้นั้น ควรเน้นความหมายและความเข้าใจในนิยาม (Concept) เกี่ยวกับโครงสร้างของคณิตศาสตร์ การฝึกหัดควรจะทำหลังจากผู้เรียนเข้าใจดีแล้ว

แลงเยอร์<sup>2</sup> (Langer) กล่าวว่า การสอนพีชคณิตควรเน้นที่ความเข้าใจในนิยามของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มากกว่าเทคนิคในการคิดคำนวณ การเรียนพีชคณิตจึงจะสามารถช่วยให้ผู้เรียนมีความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ซึ่งสอดคล้องกับความคิดของ โมเดอร์<sup>3</sup> (Moder) ที่กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ควรเปลี่ยนจากการเน้นทักษะมาเป็นการเน้นความเข้าใจในโครงสร้างของคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากการวางพื้นฐานทางตรรกศาสตร์ แล้วจึงศึกษาเกี่ยวกับนิยามของกลุ่ม (Group) รিং (Ring) และฟิลด์ (Field)

วิลสัน<sup>4</sup> (Wilson) กล่าวว่า "โครงสร้าง" ได้เข้ามามีบทบาทในคณิตศาสตร์ทุกแขนง เพราะที่จริงแล้ว คณิตศาสตร์เป็นการศึกษาวิธีการคิดโครงสร้างและการนำโครงสร้างไปใช้ หากผู้เรียนยังไม่เข้าใจความคืบหน้าแล้ว ก็จะไม่เข้าใจถึงลักษณะที่แท้จริงของคณิตศาสตร์ โครงสร้างของพีชคณิตแนวปัจจุบันได้แก่ กลุ่ม เวกเตอร์ (Vector) รিং และ ฟิลด์

<sup>1</sup> Herbert F. Spitzer, "Learning and Teaching Arithmetic", The Teaching of Arithmetic, p. 19.

<sup>2</sup> Sasanne K. Langer, "Algebra and the Development of Reason", The Mathematics Teacher, 59 : 158 - 166, February, 1966.

<sup>3</sup> Albert E. Moder, "Modern Mathematics and Its Place in Secondary School", The Mathematics Teacher, 50 : 421, October, 1957.

<sup>4</sup> คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ หน้า 126.

ซึ่งเป็นนามธรรม และจะเป็นของยากที่จะนำมาสอนนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา แต่ถ้าจะหาตัวอย่างที่ง่าย ๆ เกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้ เช่น เรื่องกรุป ก็สามารถหาได้จากวิชาคณิตศาสตร์ที่สอนอยู่ในโรงเรียน การที่นักเรียนได้คุ้นเคยกับระบบจำนวน เกี่ยวกับจำนวนเต็ม จำนวนคี่และจำนวนจริง ตลอดจนวิธีการทางเลขคณิตอย่างง่าย ๆ ก็เป็นการอธิบายโครงสร้างอยู่ในตัวแล้ว

โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่เห็นว่าเข้าใจได้ง่ายที่สุดอย่างหนึ่งคือ เรื่องกรุป<sup>1</sup> จากการศึกษาพบว่า ในต่างประเทศได้นำเอาเนื้อหาเรื่องนี้ไปทดลองสอนนักเรียนในระดับต่าง ๆ กัน เช่น สหรัฐอเมริกาสอนในเกรด 10 เดนมาร์ก สอนในเกรด 10 - 12 (อายุ 16 - 18 ปี) และเบลเยียม สอนในเกรด 6 - 4\* (อายุ 12 - 14 ปี)<sup>2</sup> สำหรับประเทศไทยมีแนวโน้มที่จะนำเอาเนื้อหาเรื่องนี้ไปทดลองสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย<sup>3</sup> ปิยรัตน์<sup>4</sup> ได้ให้ข้อเสนอแนะสำหรับกระทรวงศึกษาธิการว่า ควรบรรจุคณิตศาสตร์แผนใหม่บางเรื่อง เช่น กรุป ริง ฟิลด์ ระบบจำนวน เซตเบื้องต้น และฟังก์ชัน (Function) เป็นส่วนหนึ่งในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา และมัธยมศึกษา

ควมเหตุผลดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า การสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันเน้นความเข้าใจมโนภาพในเรื่องที่สอนและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ เพราะถ้าไม่นำเอาความคิดเรื่องโครงสร้าง

<sup>1</sup> John J. Kinsella, Secondary School Mathematics, p. 20.

\*การจัดการศึกษาระดับมัธยมศึกษาสายสามัญของประเทศเบลเยียม แบ่งออกเป็น 2 ประโยก คือ ประโยกมัธยมศึกษาตอนต้น (Lower Secondary) 3 ชั้น จากเกรด 6 - 4 (อายุ 12 - 14 ปี) และประโยกมัธยมศึกษาตอนปลาย (Upper Secondary) 3 ชั้น จากเกรด 3 - 1 (อายุ 15 - 18 ปี)

<sup>2</sup> W. Servias, and T. Varga, op. cit., p. 126 - 183.

<sup>3</sup> สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ล.ค. หน้า 25.

<sup>4</sup> ปิยรัตน์ กองกิตติไพศาล "การใช้ตรรกศาสตร์ในการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง" ปริชญานิพนธ์ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513 หน้า 47.

เข้ามาในการสอนแล้ว นักเรียนจะไม่เข้าใจถึงลักษณะที่แท้จริงของคณิตศาสตร์ได้เลย โครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่เน้นว่าเข้าใจได้ง่ายที่สุดอย่างหนึ่งคือ เรื่องกรุป ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความคิดว่า ควรจะให้ให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้เรียนเรื่องนี้ เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจในโครงสร้างของคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจจะช่วยแก้ปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่กำลังประสบอยู่ได้ การที่ผู้วิจัยมีความสนใจในการศึกษาเรื่องนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะพิจารณาเห็นว่า นักเรียนในระดับชั้นพื้นฐานเพียงพอที่จะเรียนเรื่องกรุปบางเรื่องได้ และเรื่องนี้ก็ไม่ยากเกินไป สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังมีความเชื่อว่า นักเรียนต่างระดับชั้นกัน สามารถเรียนรู้เนื้อหาวิชาอย่างเดียวกันได้ โดยปรับปรุงเนื้อหาเหล่านั้นให้เหมาะสมกับนักเรียนในแต่ละระดับชั้น

### ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น
  - 1.1 เพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นใคร่หรือไม่
  - 1.2 เพื่อเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น
2. เพื่อเสนอแนะการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องกรุป ในระดับมัธยมศึกษา

### สมมุติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้
2. นักเรียนในระดับชั้นสูงกว่า มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นสูงกว่านักเรียนในระดับชั้นต่ำกว่า

### ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

1. ผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ จะทำให้ทราบถึงระดับความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น

2. ผลจากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ อาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกเนื้อหา เรื่องกรุป เพื่อบรรจุเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

### ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ กระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนชุมชน อำเภอยะรัง จังหวัดศรีสะเกษ จำนวนชั้นละ 40 คน รวมทั้งหมด 120 คน
2. การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ มุ่งศึกษาเกี่ยวกับการ เรียนรู้โมโนพเรื่องกรุปเบื้องต้นเท่านั้น

### คำนิยามศัพท์เฉพาะที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. กรุป (Group) คือระบบซึ่งประกอบด้วยเซต  $G$  และไบนารีโอเปอเรชัน (Binary Operation)  $*$  ในเซต  $G$  ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้
  - 1) สำหรับสมาชิก  $a, b, c$  ใด ๆ ของ  $G$ ,  $(a*b)*c = a*(b*c)$
  - 2) มีสมาชิก  $e$  อยู่ใน  $G$  หนึ่งตัว ซึ่งสำหรับสมาชิก  $a$  ใด ๆ ของ  $G$   $a*e = a$  เรียก  $e$  ว่า เอกลักษณ์ (Identity) ของ  $G$
  - 3) สำหรับสมาชิก  $a$  ทุกตัวของ  $G$  จะมี  $a^{-1}$  หนึ่งตัว อยู่ใน  $G$  ซึ่ง  $a*a^{-1} = e$  เรียก  $a^{-1}$  ว่า อินเวอร์ส (Inverse) ของ  $a$
2. ความสามารถ หมายถึง ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยถือเอาคะแนนเฉลี่ย (Mean) ที่นักเรียนแต่ละระดับชั้นทำได้ จากแบบทดสอบ สำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้น

### ข้อตกลงเบื้องต้นในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนในระดับชั้นใดที่สามารถทำคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้ตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป ถือว่าสามารถเรียนเรื่องนี้ได้

---

<sup>1</sup> Howard Eves, and Carroll V. Newsom, An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, p. 129.

2. ในการศึกษาทฤษฎีการเรียงสับเปลี่ยนและแบบทดสอบสำหรับจัดกลุ่มสิ่งใน การเรียง  
เรื่องกลุ่มเบืองต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. ผลจากการศึกษาทฤษฎีการเรียงสับเปลี่ยน การวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากแบบทดสอบเป็นสำคัญ

4. เนื่องจากศัพท์บางคำในเนื้อหาที่ผู้วิจัยนำไปทดลอง ยังไม่มีการบัญญัติศัพท์เป็น  
ภาษาไทย ผู้วิจัยจึงจำเป็นต้องใช้ภาษาเดิม ได้แก่ โอเปอเรชัน (Operation) ไบนารี-  
โอเปอเรชัน (Binary Operation) อินเวอร์ส (Inverse) ไคลน์ส์โฟร์กรุป  
(Klein's Four Group) อับเลียนกรุป (Abelian Group) ซับกรุป (Subgroup)  
ไซคลิกกรุป (Cyclic Group) เจเนอเรเตอร์ (Generator) และไอโซมอร์ฟิซึม  
(Isomorphism)

#### ประโยชน์จากการศึกษาทฤษฎีการเรียงสับเปลี่ยน

1. เป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับ  
มัธยมศึกษา
2. เป็นแนวทางสำหรับผู้ที่จะเขียนบทเรียนเรื่องกลุ่มสำหรับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา
3. เป็นแนวทางสำหรับผู้ทำการวิจัยต่อไป

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง

(1) เนื่องจากหลายประเทศได้เล็งเห็นถึงความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนแนวโน้มของการศึกษา วิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา เพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการของโลก ปัจจุบัน จึงได้มีการจัดตั้งโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงหลักสูตร และการสอนคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก ทั้งในยุโรปและอเมริกา ที่สำคัญได้แก่ School Mathematics Study Group<sup>1</sup> (SMSG) ซึ่งเป็นโครงการทดลองเพื่อปรับปรุงและแก้ไขการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่าง ๆ ที่ใหญ่ที่สุดของสหรัฐอเมริกา ได้เรียบเรียงตำราคณิตศาสตร์ชั้นทดลองใช้ ตำราดังกล่าว เน้นความสำคัญของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Deduction) การให้เหตุผลแบบอุปมา (Induction) และการใช้ภาษาคณิตศาสตร์ อย่างถูกต้องและรัดกุม /

The Commission on Mathematics of the College Entrance Examination Board<sup>2</sup> (CEEB) ของสหรัฐอเมริกา ได้เสนอเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด 12 ซึ่งมีทั้งหมด 3 รายการ (Programme) แต่ให้เลือกเพียงรายการเดียว รายการหนึ่งใน 3 รายการ คือ ให้เรียนเรื่องฟังก์ชันเบื้องต้น (Elementary Function) ในภาคเรียนที่ 1 และพีชคณิตแนวใหม่เบื้องต้น (Introduction to Modern Algebra) ในภาคเรียนที่ 2 สำหรับเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตแนวใหม่เบื้องต้น ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ฟิวด์ (Field)
2. ออร์เดอร์ฟิวด์ (Order Field)
3. อับเลียนกรุป (Abelian Group)

<sup>1</sup> กรบววิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ด.ก. หน้า (3.9) - 9.

<sup>2</sup> John J. Kinsella, op. cit., p. 64 - 65.

4. ทรานส์ฟอร์เมชัน (Transformation) และคอมโพสิชัน (Composition)
5. กรุ๊ป (Group)

คณะกรรมการโครงการ Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study<sup>1</sup> (SSMCIS) ซึ่งเป็นโครงการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา (เกรด 7 - 12) ระยะยาว แห่งมหาวิทยาลัยโคลัมเบีย สหรัฐอเมริกา ได้บรรจุเรื่องกรุ๊ปไว้เป็นส่วนหนึ่งในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ สำหรับนำไปทดลองสอนนักเรียนเกรด 8 ดังจะเห็นได้จากรายงานฉบับที่ 3 เดือนตุลาคม ค.ศ. 1968 ซึ่งได้กล่าวถึงเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่สอนในเกรด 8 ไว้ดังนี้ คือ<sup>2</sup>

1. ภาษาและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
2. กรุ๊ป
3. An Introduction to Axiomatic Affine Geometry
4. ฟิสิกส์
5. ระบบจำนวนจริง
6. เรขาคณิตวิเคราะห์
7. ฟังก์ชันจำนวนจริง (Real Function)
8. สถิติเชิงพรรณนา (Descriptive Statistics)
9. ทรานส์ฟอร์เมชันในระนาบ . ไอโซเมตริก (Transformation in the Plane : Isometrics)
10. ความยาว (Length) พื้นที่ และปริมาตร
11. คอมบินेटอรี (Combinatory)

ผลจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการ เรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง 6 ห้องเรียน

<sup>1</sup> SSMCIS, Teachers College, Columbia University, Summary of Objectivity and Activity 3 September, 1965 to January 1968, p. 3.

<sup>2</sup> SSMCIS, Teachers College, Columbia University, Information Bulletin, (3) (2 - 19), October, 1968.

จำนวน 111 คน ค่ายแบบทดสอบฉบับที่ 1 ซึ่งเป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับเรื่อง กรุป ฟิลด์ ภาษา และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และ An Introduction to Axiomatic Affine Geometry ปรากฏว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มทำคะแนนเฉลี่ยได้เท่ากับ 32.5, 39.4, 39.8, 40.0, 40.3 และ 40.6 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน คะแนนเฉลี่ยทั้งหมดเท่ากับ 38.6 คะแนน แสดงว่า นักเรียนเกรด 8 สามารถทำคะแนนเฉลี่ยได้สูงกว่า 50 %

คณะกรรมการโครงการ The School Mathematics Project (S.M.P.) ซึ่งเป็นโครงการทดลองสอนคณิตศาสตร์แผนปัจจุบันของอังกฤษ ได้ร่างหลักสูตรสำหรับนักเรียน ระดับ 0-Level ซึ่งได้รวมเอาเนื้อหาเรื่อง กรุป เวกเตอร์ และเมทริกซ์ (Matrix) เข้ามารวบรวม หลักสูตรของโครงการนี้เน้นความสำคัญในโครงสร้างของพีชคณิต

คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี<sup>2</sup> ของประเทศไทย ได้เสนอเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และมัธยมศึกษาปีที่ 5 สายวิทยาศาสตร์จะต้องเรียนร่วมกัน คือ เซต และฟังก์ชัน แกลลูลัสเบื้องต้น ตรรกศาสตร์ ระบบจำนวน กรุป รিং ฟิลด์ ความน่าจะเป็น (Probability) และสถิติ และเรขาคณิตแฟร์<sup>3</sup> (Fehr) กล่าวว่า คณิตศาสตร์แผนปัจจุบันที่จัดสอนในโรงเรียนของประเทศที่มีการปฏิรูปทางการศึกษาคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. ทฤษฎีเซตเบื้องต้น
2. ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น
3. พีชคณิตแนวปัจจุบัน เช่น เรื่อง กรุป รিং และฟิลด์
4. ความน่าจะเป็น (Probability) และสถิติ

ปัจจุบันการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกแขนง เน้นความสำคัญในโครงสร้างของคณิตศาสตร์

<sup>1</sup> กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ล.ค. (3.7 - 1) - (3.7 - 5).

<sup>2</sup> สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ล.ค. หน้า 21 - 25.

<sup>3</sup> Howard F. Fehr, "Reform of Mathematics Education Around the World", The Mathematics Teacher, 58 : 37 - 44, January, 1965.

ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางตรรกศาสตร์ ดังนั้นจึงมีการสอนตรรกศาสตร์ด้วยลักษณะนี้จากการสอนเซตเบื้องต้น ต่อจากนั้นจึงขยายความเข้าใจในโครงสร้างของคณิตศาสตร์ โดยให้ศึกษาเรื่อง กรุป รัง และฟิลด์<sup>1</sup>

บัคเลอร์ (Butler)<sup>2</sup> กล่าวว่า กรุป เป็นโครงสร้างทางพีชคณิตที่สำคัญและง่ายที่สุด อาจจะให้นิยามของกรุปเพื่อให้เหมาะกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาได้ 2 ทาง คือ

1. กรุปสำหรับการคูณ (Multiplicative Group) ที่ระบบปิด (Closure System) ที่ประกอบด้วยเซต  $G$  และโอเปอเรชันคูณ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ 4 ประการ ดังต่อไปนี้

$G_1$ : ถ้า  $a, b$  เป็นสมาชิกของ  $G$  แล้ว  $a \times b = b \times a$

$G_2$ : ถ้า  $a, b, c$  เป็นสมาชิกของ  $G$  แล้ว  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

$G_3$ : มี  $1$  เป็นสมาชิกของ  $G$  ซึ่งถ้า  $a$  เป็นสมาชิกของ  $G$  แล้ว  $a \times 1 = a$

$G_4$ : ถ้า  $a$  เป็นสมาชิกของ  $G$  แล้วจะมี  $a^{-1}$  อยู่ใน  $G$  ซึ่ง  $a^{-1} \times a = 1$

2. กรุปสำหรับการบวก (Additive Group) ที่ระบบปิดที่ประกอบด้วยเซต  $G'$  ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ 4 ประการ ดังต่อไปนี้

$G'_1$ : ถ้า  $a, b$  เป็นสมาชิกของ  $G'$  แล้ว  $a + b = b + a$

$G'_2$ : ถ้า  $a, b, c$  เป็นสมาชิกของ  $G'$  แล้ว  $a + (b + c) = (a + b) + c$

$G'_3$ : มี  $0$  เป็นสมาชิกของ  $G'$  ซึ่งถ้า  $a$  เป็นสมาชิกของ  $G'$  แล้ว  $a + 0 = a$

$G'_4$ : ถ้า  $a$  เป็นสมาชิกของ  $G'$  แล้วจะมี  $-a$  อยู่ใน  $G'$  ซึ่ง  $(-a) + a = 0$

วิลสัน<sup>3</sup> (Wilson) กล่าวว่า ในการสอนโครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้น จะต้องเน้นถึง

<sup>1</sup> Howard F. Fehr, op. cit.

<sup>2</sup> Charles H. Butler, and F. Lynwood Wren, The Teaching of Secondary School Mathematics, p. 67 - 68.

<sup>3</sup> คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
ล.ก. หน้า 129.

โครงสร้างของกลุ่ม วิธีการสอนที่ใช้กันก็คือ เริ่มต้นด้วยการนิยามสมาชิกของเซตที่จะพิจารณา พร้อมด้วยโอเปอเรชั่น (Operation) และสร้างตารางโอเปอเรชั่น (Operation Table) สำหรับเซตนั้น แล้วให้นักเรียนสำรวจคุณสมบัติต่าง ๆ เช่น คุณสมบัติปิด (Closure) การจับหมู่ (Associativity) การสลับที่ (Commutativity) เอกลักษณ์ (Identity) อินเวอร์ส (Inverse) และไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism) ถ้าเพิ่มโอเปอเรชั่นที่สองเข้ามา ก็อาจจะให้นักเรียนสำรวจคุณสมบัติเกี่ยวกับการกระจาย (Distributive Law) ด้วย

แมทธิวส์<sup>1</sup> (Matthews) กล่าวว่า เด็กอายุ 9 ขวบ สามารถเข้าใจตารางที่แสดงให้เห็นว่า ถ้าบวกเลขคู่ (E) สองจำนวนเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์จะเป็นเลขคู่ ถ้าบวกเลขคี่ (O) สองจำนวนเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์จะเป็นเลขคี่ และถ้าเอาเลขคู่บวกกับเลขคี่ หรือเลขคี่บวกกับเลขคู่ ผลลัพธ์จะเป็นเลขคี่ เด็กสามารถเข้าใจข้อสรุปนี้ ตลอดจนเรื่องทำนองนี้

| + | E | O |
|---|---|---|
| E | E | O |
| O | O | E |

ตารางเดียวกันนี้ อาจจะใช้ในเรื่องอื่น ๆ ได้ เช่น การหมุนเส้นตรง  $AB$  ไปครึ่งรอบ โดยใช้  $O$  เป็นจุดหมุน (H) การหมุนครึ่งรอบสองครั้งจะเท่ากับการหมุนหนึ่งรอบ (F)

| * | F | H |
|---|---|---|
| F | F | H |
| H | H | F |

A  $\xrightarrow{O}$  B

ดังนั้น  $H * H = F$  ในทำนองเดียวกัน  $F * F = F$  และ  $F * H = H = H * F$  ดังแสดงใน-

---

<sup>1</sup> คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
 ล.ค. หน้า 21 - 30.

ตารางข้างต้น เห็นทั้งตอนนี้เป็นตัวอย่างของกลุ่มที่มีสมาชิก 2 ตัว และเป็นกลุ่มที่ไอโซมอร์ฟิก (Isomorphic) กันด้วย

ยัง<sup>1</sup> (Young) ได้สร้างแบบเรียนโปรแกรมเรื่องกลุ่ม ประกอบด้วยเนื้อหาดังนี้ คือ  
 ไบนารี โอเปอเรชัน (Binary Operation) หลักการจับหมู่ (Associative Law)  
 หลักการสลับที่ (Commutative Law) สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity Element)  
 สมาชิกอินเวอร์ส (Inverse Element) กลุ่มที่มีสมาชิกจำกัดและไม่จำกัด (Finite and  
 Infinite Group) กลุ่มทางเรขาคณิต (Geometrical Group) ไซคลิกกรุป (Cyclic  
 Group) อบีเลียนกรุป (Abelian Group) ไกลน์สโฟร์กรุป (Klein's Four Group)  
 ซับกรุป (Subgroup) ไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism) และตารางกรุป (Group  
 Table) สมาชิกของเมทริกซ์มาพิจารณาในแบบเรียนโปรแกรมเล่มนี้ ส่วนใหญ่เกี่ยวกับ  
 Modular Arithmetic และทรานส์ฟอร์มเมชันทางเรขาคณิต (Geometric Transfor-  
 mation) ยัง (Young) ได้นำแบบเรียนโปรแกรมนี้ไปทดลองกับนักเรียนซึ่งมี ไอ - คิว  
 (I.Q.) 100<sup>+</sup> มีอายุตั้งแต่ 12 - 18 ปี ปรากฏว่าใช้เวลาทำ 5 - 8 ชั่วโมง.

---

<sup>1</sup>

Robert G. Young, Groups : A programmed course, p. 113.

## วิธีดำเนินการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล

### กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการทดลองเครื่องมือ เพื่อคัดเลือกข้อทดสอบที่มีความเชื่อมั่นสูง และเพื่อปรับปรุงเนื้อหาให้สมบูรณ์และเหมาะสมกับนักเรียน กับกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนชุมชน อำเภوخันธ์ จังหวัดศรีสะเกษ จำนวนกลุ่มละ 120 คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างใช้วิธีการสุ่ม (Random Sampling) จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 มาชั้นละ 2 ห้องเรียนเพื่อนำมาใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างในการทดลองเครื่องมือ จำนวน 1 ห้องเรียน และเป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย จำนวน 1 ห้องเรียน

ตาราง 1 จำนวนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย จำแนกตามเพศและระดับชั้น

| เพศ<br>ระดับชั้น  | ชาย | หญิง | รวม |
|-------------------|-----|------|-----|
| มัธยมศึกษาปีที่ 1 | 22  | 18   | 40  |
| มัธยมศึกษาปีที่ 2 | 20  | 20   | 40  |
| มัธยมศึกษาปีที่ 3 | 25  | 15   | 40  |
| รวม               | 67  | 53   | 120 |

### เครื่องมือในการทดลอง

1. เนื้อหาเรื่องกรุป (Group) ในการทดลองครั้งนี้ใช้เนื้อหาเรื่องกรุปเบื้องต้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างไม่เคยเรียนมาก่อนเลย เนื้อหาคงกล่าวผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

1) ไบนารีโอเปอเรชัน (Binary Operation) และคุณสมบัติปิด (Closure Law)

2) หลักการจับหมู่ (Associative Law)

3) สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity Element)

4) สมาชิกอินเวอร์ส (Inverse Element)

5) กรุปไฟไนต์สมาชิกจำกัด (Finite Group)

6) กรุปทางเรขาคณิต (Geometrical Group)

7) ไคลน์ส์โฟร์กรุป (Klein's Four Group)

8) หลักการสลับที่ (Commutative Law)

9) อบีเลียนกรุป (Abelian Group)

10) สับกรุป (Subgroup)

11) ไซคลิกกรุป (Cyclic Group)

12) ไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism)

2. แบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น ประกอบด้วยแบบ-ทดสอบย่อย 2 ฉบับ คือ

ฉบับที่ 1 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับนิยามพื้นฐานเรื่อง กรุป และกรุปทางเรขาคณิต จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง

ฉบับที่ 2 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับเรื่องไคลน์ส์โฟร์กรุป อบีเลียนกรุป สับกรุป ไซคลิกกรุป และไอโซมอร์ฟิซึม จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง

### การสร้างเครื่องมือในการทดลอง

1. การสร้างเนื้อหาเรื่องกรุปเบื้องต้น ผู้วิจัยได้สร้างเนื้อหาเรื่องขึ้น โดยศึกษา  
มาจากหนังสือดังต่อไปนี้

- 1) Groups<sup>1</sup>
- 2) ทฤษฎีกรุปเบื้องต้น<sup>2</sup>
- 3) Higher Algebra for the Undergraduate<sup>3</sup>
- 4) Modern Algebra<sup>4</sup>
- 5) Mathematics Grade 11<sup>5</sup>

ผู้วิจัยได้นำเอาเนื้อหาที่โครงสร้างขึ้น ไปทดลองสอนกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการทดลอง  
เครื่องมือ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2516 การทดลองนี้ผู้วิจัยเป็นผู้สอนเพียงผู้เดียว  
ใช้เนื้อหาอย่างเดียวกัน และใช้เวลาในการสอนเท่ากันหมดทุกชั้น คือชั้นละ 16 ชั่วโมง  
แบ่งออกเป็น 2 ระยะ คือ ระยะแรก 8 ชั่วโมง และระยะหลังอีก 8 ชั่วโมง ในระหว่าง  
ที่สอนนี้ ผู้วิจัยได้ปรับปรุงและแก้ไขเนื้อหาต่าง ๆ เพื่อให้เหมาะสมกับนักเรียนและสมบูรณ์มาก  
ยิ่งขึ้น และไ้รวบรวมเนื้อหาที่ปรับปรุงและแก้ไขแล้ว เป็นเนื้อหาสำหรับทดลองสอนกับนักเรียน  
กลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

2. การสร้างแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการ เรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น ผู้วิจัย-

<sup>1</sup> Robert G. Young, op. cit., 111 p.

<sup>2</sup> สุเทพ จันทรมัตถกิจ ทฤษฎีกรุปเบื้องต้น หน้า 1 - 45.

<sup>3</sup> Marie J. Weiss, and Roy Dubisch, Higher Algebra for the Undergraduate, p. 1 - 57.

<sup>4</sup> Frank Ayres, Modern Algebra, p. 1-100.

<sup>5</sup> Unesco mathematics project for the Arab States, Mathematics Grade 11, p. 49 - 84.

โครงสร้างแบบทดสอบชั้น 2 ฉบับ คือ ฉบับที่ 1 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับเนื้อหาที่สอนในระยะแรก ซึ่งได้แก่ ไบนารีโอเปอเรชัน คุณสมบัติปิด หลักการจัดหมู่ สมาชิกเอกลักษณ์ สมาชิกอินเวอร์ส กรุปที่มีสมาชิกจำกัด และกรุปทางเรขาคณิต และฉบับที่ 2 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับเนื้อหาที่สอนในระยะหลัง ซึ่งได้แก่ ไคลน์สี่ไฟร์กรุป หลักการสลับที่ อับเลียนกรุป สัมกรุป ไชคลิกกรุป และไอโซมอร์ฟิซึม เมื่อสอนครบระยะแรกแล้วก็ทดสอบด้วยแบบทดสอบฉบับที่ 1 และเมื่อสอนครบระยะหลังก็ทดสอบอีกครั้งหนึ่ง ด้วยแบบทดสอบฉบับที่ 2 แบบทดสอบแต่ละฉบับมี 70 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที เท่ากัน หลังจากนั้นได้วิเคราะห์แบบทดสอบตามหลักการสร้างแบบทดสอบจากหนังสือวัดผลการศึกษา<sup>1</sup> กล่าวคือ กัดเลือกนักเรียนที่ทำได้คะแนนไวกามากที่สุดไปหา นอยตามลำดับ ออกมาเป็นจำนวน 27 % ของนักเรียนทั้งหมด เรียกว่า นักเรียนกลุ่มสูง และ คัดเลือกนักเรียนที่ทำได้คะแนนน้อยที่สุดไปหาตามลำดับ เป็นจำนวนอีก 27 % ของนักเรียนทั้งหมด เรียกว่า นักเรียนกลุ่มต่ำ แล้ววิเคราะห์ผลการทดสอบของนักเรียนทั้ง 2 ประเภท ต่อจากนั้นนำผลของการวิเคราะห์ไปเปิดตารางสำเร็จ<sup>2</sup> เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) อำนาจจำแนก (r) และความยากมาตรฐาน ( $\Delta$ ) หลังจากนั้นได้คัดเลือกข้อทดสอบดังนี้

- 1) คัดข้อทดสอบที่มีค่าความยากง่ายสูงเกินไป หรือต่ำเกินไปออก
- 2) กัดข้อทดสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกต่ำออก

การทดลองใช้แบบทดสอบปรากฏผลว่า สามารถคัดเลือกข้อทดสอบได้ฉบับละ 40 ข้อ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ฉบับที่ 1 ข้อทดสอบที่คัดเลือกได้ 40 ข้อ มีค่าความยากง่าย ตั้งแต่ .34 ถึง .67 ความยากง่ายเฉลี่ย เท่ากับ .54 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .28 ถึง .75 อำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .55

ฉบับที่ 2 ข้อทดสอบที่คัดเลือกได้ 40 ข้อ มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ .33 ถึง .67 ความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ .52 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .33 ถึง .80

<sup>1</sup> ขวาล แพร่สกุล เทคนิคการวัดผล หน้า 131 - 318.

<sup>2</sup> Chung-Teh Fan, Item Analysis Table, p. 6 - 32.

อำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ .51

หลังจากคัดเลือกข้อทดสอบแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบที่ทดลองสอบทั้ง 2 ฉบับมาตรวจและให้คะแนนใหม่ เฉพาะข้อทดสอบที่คัดเลือกสำหรับการวิจัย ฉบับละ 40 ข้อ แล้วคำนวณหาความเชื่อมั่น (Reliability) ( $r_{tt}$ ) และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด ( $SE_{meas}$ ) โดยใช้สูตรของ คูเดอร์ - ริชาร์ดสัน (Kuder-Richardson) ได้ค่าความเชื่อมั่น .78 และ .93 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด 4.16 และ 3.62 ตามลำดับ ค่าสถิติต่าง ๆ ของแบบทดสอบได้แสดงไว้ในตาราง 2

ตาราง 2 ค่า  $p$  เฉลี่ย ค่า  $r$  เฉลี่ย ค่า  $\Delta$  เฉลี่ย ค่า  $r_{tt}$   
และค่า  $SE_{meas}$

| แบบทดสอบ  | จำนวนข้อ | $p$ เฉลี่ย | $r$ เฉลี่ย | $\Delta$ เฉลี่ย | $r_{tt}$ | $SE_{meas}$ |
|-----------|----------|------------|------------|-----------------|----------|-------------|
| ฉบับที่ 1 | 40       | .54        | .55        | 12.61           | .78      | 4.16        |
| ฉบับที่ 2 | 40       | .52        | .51        | 12.76           | .93      | 3.62        |

### วิธีดำเนินการทดลอง

ในการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังนี้

1. ผู้วิจัยสอนเรื่องเซตเบื้องต้น เฉพาะที่จำเป็นจะต้องนำไปใช้ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เพราะนักเรียนกลุ่มตัวอย่างยังไม่เคยเรียนเรื่องเซตมาก่อน เนื้อหาที่สอนได้แก่ ความหมายของเซต การเรียกชื่อเซต และการเขียนสัญลักษณ์แทนเซต สมาชิก (Element) ของเซต เซตว่าง (Empty Set) เซตจำกัด (Finite Set) เซตไม่จำกัด (Infinite Set) และสับเซต (Subset) ใช้เวลาสอนชั้นละ 2 ชั่วโมง
2. นำเรื่องกรุปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ไปทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2516 การทดลองนี้ผู้วิจัยเป็นผู้สอนคนเดียวทุกชั้น โดยใช้เนื้อหาอย่างเดียวกัน และใช้เวลาในการสอนเท่ากัน คือสอนชั้นละ 16 ชั่วโมง

3. เวลาในการสวน 16 ชั่วโมงนี้แบ่งออกเป็น 2 ระยะ คือ ระยะแรก 8 ชั่วโมง และระยะหลัง 8 ชั่วโมง
4. เมื่อสอนครบระยะแรกแล้วทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเมืองต้น ฉบับที่ 1 ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง เท่ากันทุกชั้น
5. เมื่อสอนครบระยะที่ 2 แล้ว ทำการทดสอบอีกครั้งหนึ่ง ด้วยแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเมืองต้น ฉบับที่ 2 ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง เท่ากันทุกชั้น

#### การวิเคราะห์ข้อมูล

1. คะแนนเฉลี่ย (Mean) คำนวณจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ  $\bar{X}$  แทนคะแนนเฉลี่ย

$\sum X$  แทนผลรวมของคะแนน

$N$  แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

2. ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) คำนวณจากสูตร

$$S = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}} \quad (2)$$

เมื่อ  $S$  แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$  แทนผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$  แทนผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

$N$  แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่ม

<sup>1</sup> Henry E. Garrett, Statistics in Psychology and Education, p. 27.

<sup>2</sup> George A. Ferguson, Statistical Analysis in Psychology and Education, p. 67.

### 3. ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคำนวณจากสูตร

$$r_{tt} = \frac{NS_t^2 - M(N - M)}{S_t^2 (N - 1)}$$

เมื่อ  $r_{tt}$  แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ  
 $N$  แทนจำนวนของข้อสอบในแบบทดสอบ  
 $S_t^2$  แทนความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบ  
 $M$  แทนคะแนนเฉลี่ย

### 4. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานจากการวัด (Standard Error of Measurement)

คำนวณจากสูตร

$$SE_{meas} = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ  $SE_{meas}$  แทนความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด  
 $S_x$  แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทดสอบ  
 $r_{tt}$  แทนความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

---

<sup>1</sup> M. W. Richardson, and G. F. Kuder, "The Calculation of Test Reliability Coefficients Based Upon the Method of Rational Equivalence", Journal of Educational Psychology, 30 : 681 - 687, 1939.

<sup>2</sup> Harold Gulliksen, Theory of Mental Test, p. 63.

5. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ย (Mean) โดยใช้ t-test จากสูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

เมื่อ  $\bar{X}_1$  และ  $\bar{X}_2$  แทนคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ

$$S_p = \sqrt{\frac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

$S_1^2$  และ  $S_2^2$  แทนค่าความแปรปรวนของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ

$N_1$  และ  $N_2$  แทนจำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ

# บทที่ 4

## ผลการทดลอง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองมีดังต่อไปนี้

### 1. การวิเคราะห์ข้อมูลหาคะแนนเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทดสอบ

ผลการทดลองสอนเรื่องกรุปเบื้องต้นในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3  
ใช้คะแนนเฉลี่ย และความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทดสอบ ปรากฏผลดังแสดง  
ในตาราง 3

ตาราง 3 คะแนนเต็ม คะแนนเฉลี่ย ( $\bar{X}$ ) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)  
ของคะแนนจากการทดสอบ

| ชั้น<br>แบบทดสอบ | คะแนนเต็ม | มัธยมศึกษาปีที่ 1 |       | มัธยมศึกษาปีที่ 2 |       | มัธยมศึกษาปีที่ 3 |       |
|------------------|-----------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|
|                  |           | $\bar{X}$         | S     | $\bar{X}$         | S     | $\bar{X}$         | S     |
| ฉบับที่ 1        | 40        | 20.25             | 6.10  | 24.98             | 8.16  | 27.43             | 7.83  |
| ฉบับที่ 2        | 40        | 20.10             | 5.60  | 23.50             | 8.70  | 25.68             | 7.08  |
| รวมทั้ง 2 ฉบับ   | 80        | 40.35             | 11.20 | 48.48             | 15.77 | 53.10             | 14.00 |

ตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า ในแบบทดสอบฉบับที่ 1 ซึ่งมีคะแนนเต็ม 40 คะแนน  
คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 เท่ากับ 20.25,  
24.98 และ 27.43 ตามลำดับ และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.10, 8.16 และ 7.83 ตามลำดับ  
สำหรับแบบทดสอบฉบับที่ 2 ซึ่งมีคะแนนเต็มเท่ากับ 40 คะแนน คะแนนเฉลี่ยของ  
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 เท่ากับ 20.10, 23.50

และ 25.68 ตามลำดับ และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 5.60, 8.70 และ 7.08 ตามลำดับ

ผลการทดลองทั้งหมดแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้

## 2. การวิเคราะห์ข้อมูลหาความแตกต่างระหว่างความสามารถของนักเรียนแต่ละระดับชั้น

ในการเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียนแต่ละระดับชั้นนั้น ผู้วิจัยใช้ค่าที (t-test) ✓ เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบทั้ง 2 ฉบับ ปรากฏผลดังแสดงในตาราง 4 และ 5

ตาราง 4 ค่าที (t-test) ในการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง จากแบบทดสอบฉบับที่ 1

| ระดับชั้น         | มัธยมศึกษาปีที่ 1 | มัธยมศึกษาปีที่ 2 | มัธยมศึกษาปีที่ 3 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| มัธยมศึกษาปีที่ 1 | -                 | 2.90**            | 4.57**            |
| มัธยมศึกษาปีที่ 2 | -                 | -                 | 1.37              |

\*\* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01

ตาราง 4 แสดงให้เห็นว่า สำหรับการทดสอบควยแบบทดสอบฉบับที่ 1 คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แตกต่างกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 กล่าวคือ คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 4.73 คะแนน และ 7.18 คะแนน ตามลำดับ แสดงว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุปและกรุปทางเรขาคณิต สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หมายความว่า

โดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียน เรื่องกรุปและกรุปทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกัน

ตาราง 5 ค่าที (t-test) ในการ เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง จากแบบทดสอบฉบับที่ 2

| ระดับชั้น         | มัธยมศึกษาปีที่ 1 | มัธยมศึกษาปีที่ 2 | มัธยมศึกษาปีที่ 3 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| มัธยมศึกษาปีที่ 1 | -                 | $(2.20)^*$        | 3.91**            |
| มัธยมศึกษาปีที่ 2 | -                 | -                 | 1.23              |

\* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05

\*\* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01

ตาราง 5 แสดงให้เห็นว่า สำหรับการทดสอบด้วยแบบทดสอบฉบับที่ 2 คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แตกต่างกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05 และ .01 ตามลำดับ กล่าวคือ คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 3.40 คะแนน และ 5.58 คะแนน ตามลำดับ แสดงว่าโดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ไคลน์สไฟร์กรุป อบีเลี่ยนกรุป สับกรุป ไชคลิกกรุป และไอโซมอร์ฟิซึม สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ แสดงว่า โดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ไคลน์สไฟร์กรุป อบีเลี่ยนกรุป สับกรุป ไชคลิกกรุป และ ไอโซมอร์ฟิซึม ไม่แตกต่างกัน

## บทที่ 5

### สรุป อภิปรายผล และขอเสนอแนะ

#### ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น
  - 1.1 เพื่อศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้หรือไม่
  - 1.2 เพื่อเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น
2. เพื่อเสนอแนะการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องกรุปในระดับมัธยมศึกษา

#### กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนชุมชน อำเภوخุขัน จังหวัดศรีสะเกษ จำนวนชั้นละ 40 คน รวมนักเรียนที่ทดลองทั้งหมด 120 คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยใช้วิธีสุ่ม (Random Sampling)

#### เครื่องมือในการทดลอง

1. เนื้อหาเรื่องกรุปเบื้องต้น เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้เป็นเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นประกอบด้วย ไมนาร์โอเปอเรชันและคุณสมบัติปิด หลักการจับหมู่ สมาชิกเอกลักษณ์ สมาชิกอินเวอร์ส กรุป กรุปทางเรขาคณิต ไคลน์สไฟร์กรุป หลักการสลับที่ อปีไลนกรุป สับกรุป ไซคลิกกรุป และ ไอโซมอร์ฟิซึม ทั้งนี้โดยยึดแบบเรียนเรื่องกรุปของยัง (Young) เป็นหลัก

## 2. แบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น 2 ฉบับ

ฉบับที่ 1 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับ กรุปและกรุปทางเรขาคณิต จำนวน 40 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง มีค่าความยากง่ายเฉลี่ย .54 อำนาจจำแนกเฉลี่ย .55 ความยากมาตรฐานเฉลี่ย 12.61 ความเชื่อมั่น .78 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน 4.16

ฉบับที่ 2 เป็นแบบทดสอบเกี่ยวกับ ไคลน์สไฟร์กรุป อบีเลียนกรุป สับกรุป ไซคลิกกรุป และไอโซมอร์ฟิซึม จำนวน 40 ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง มีความยากง่ายเฉลี่ย .52 อำนาจจำแนกเฉลี่ย .51 ความยากมาตรฐานเฉลี่ย 12.76 ความเชื่อมั่น .93 และความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน 3.62

### การดำเนินการทดลอง

1. สอนเรื่องเซตเบื้องต้นเฉพาะที่จำเป็นจะต้องนำไปใช้ในการเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้น ให้แก่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เพราะนักเรียนกลุ่มนี้ยังไม่เคยเรียนเรื่องเซตมาก่อน ใช้เวลาสอน 2 ชั่วโมง

2. ทดลองสอนเรื่องกรุปเบื้องต้นแก่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ในภาคเรียนที่ 1 ของปีการศึกษา 2516 โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนคนเดียว ใช้เนื้อหาอย่างเดียวกัน และใช้เวลาในการสอนเท่ากัน คือสอนชั้นละ 16 ชั่วโมง

3. ทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยทุกชั้น ด้วยแบบทดสอบฉบับเดียวกัน ใช้เวลาในการทดสอบเท่ากัน โดยกำหนดเวลาในการทดสอบไว้ดังนี้

3.1 ทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ด้วยแบบทดสอบฉบับที่ 1 เมื่อสอนครบระยะ 8 ชั่วโมงแรก

3.2 ทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ด้วยแบบทดสอบฉบับที่ 2 เมื่อสอนครบระยะ 8 ชั่วโมงหลัง

## การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดสอบทั้ง 2 ครั้ง ได้วิเคราะห์หาค่าสถิติต่าง ๆ ดังนี้

1. คะแนนเฉลี่ย
2. ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน
3. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยโดยใช้ t-test

### ผลการทดลอง

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ทดลองสอนใช้คะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบฉบับที่ 1 เท่ากับ 20.25, 24.98 และ 27.43 คะแนนตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน และใช้คะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบฉบับที่ 2 เท่ากับ 20.10, 23.50 และ 25.68 คะแนนตามลำดับ จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน ผลดังกล่าวทำให้อาจสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถทำแบบทดสอบได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่า 50 % ทั้ง 2 ฉบับ

2. เมื่อเปรียบเทียบกันในเรื่องกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยทุกระดับชั้น ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบฉบับที่ 1 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .01 แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบฉบับที่ 2 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น .05 และ .01 ตามลำดับ แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

### สรุปผลการทดลอง

ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องรูปเบื้องต้นได้ ในการทัศนศึกษาวิจัยทั้งเกณฑ์ไว้ว่า นักเรียนชั้นใดสามารถทำคะแนนเฉลี่ยได้ตั้งแต่ 50 % ขึ้นไป ถือว่าสามารถเรียนเรื่องนี้ได้ จากการเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนระหว่างชั้นปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องรูปเบื้องต้นไม่แตกต่างกัน แต่มีความสามารถในการเรียนเรื่องสูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

### อภิปรายผล

1. ปัจจุบันเนื้อหาเรื่องรูป เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรในระดับอุดมศึกษาของประเทศไทยเท่านั้น แต่จากการทดลองครั้งนี้พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องรูปเบื้องต้นได้ ผลการทดลองนี้สนับสนุนคำกล่าวของ บรูเนอร์<sup>1</sup> (Bruner) ที่ว่านักเรียนต่างระดับชั้นกันสามารถเรียนรู้เนื้อหาอย่างเดียวกันได้ โดยปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้สอดคล้องกับระดับสติปัญญาและความสามารถของนักเรียนเสียก่อน การที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยสามารถเรียนเรื่องรูปเบื้องต้นได้ อาจเป็นเพราะประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีส่วนช่วยในการเรียนเรื่องนี้ ดังที่ วิลสัน<sup>2</sup> (Wilson) ได้กล่าวไว้ว่า การเรียนเรื่องระบบจำนวนและวิธีการทางเลขคณิตอย่างง่าย ๆ ช่วยให้นักเรียนเข้าใจเรื่องโครงสร้างของคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาได้เป็นอย่างดี ดังนั้นผลการทดลองนี้จึงสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้

2. เมื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรื่องรูปเบื้องต้นของนักเรียนแต่ละระดับชั้น ปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการ-

<sup>1</sup> Jerome Bruner, The Process of Education, 97 p.

<sup>2</sup> คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
 ล.ก. หน้า 126.

เรียนเรื่องนี้ สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องนี้ไม่แตกต่างกัน ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้ อาจเนื่องมาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีภูมิหลังทางคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวกับเรื่องกรุปเบื้องต้นไม่แตกต่างกัน

### ✓ ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยสรุปข้อเสนอแนะได้ดังนี้

#### ก. ข้อเสนอแนะสำหรับการปรับปรุงหลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา

##### ตอนต้น

1. ในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ควรเน้นให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างของกรุป ซึ่งเป็นพื้นฐานของความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไป

2. ควรสอนเรื่องกรุปเบื้องต้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเป็นวิชาบังคับ เพื่อให้ นักเรียนทุกคนเข้าใจลักษณะที่แท้จริงของวิชาคณิตศาสตร์ และควรเริ่มสอนเรื่องนี้แก่นักเรียนตั้งแต่ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เป็นต้นไป เพราะจากการทดลองพบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สามารถเรียนเรื่องกรุปเบื้องต้นได้ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการ เรียนเรื่องนี้ได้ ไม่แตกต่างกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีความสามารถในการเรียนเรื่องนี้อยู่ในเกณฑ์ต่ำ

3. ควรช่วยเหลือและส่งเสริมให้ทำารเรียน เรื่องกรุป ตลอดจนคณิตศาสตร์ แผนใหม่อื่น ๆ สำหรับครูและนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

4. ในการพิจารณาปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตร ตลอดจนวิธีสอนคณิตศาสตร์ ในระดับต่าง ๆ ควรใช้ผลงานวิจัยเป็นหลักในการพิจารณาด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งผลงาน วิจัยของประเทศไทย

5. ควรช่วยเหลือและส่งเสริมให้มีการวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนวิชา คณิตศาสตร์ให้มาก เพื่อปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตร ตลอดจนวิธีสอนคณิตศาสตร์ในระดับ ต่าง ๆ ให้มีความเหมาะสมทัดเทียมกับนานาประเทศ

ข. ข้อเสนอแนะในการวิจัย

1. ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้อีก เพื่อหาผลที่แน่นอนยิ่งขึ้น
2. ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้กับนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย - โดยปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสม
3. ควรจะได้มีการทดลองสอนเรื่องอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับโครงสร้างของคณิตศาสตร์ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นควบ เช่น รัง และฟิลด์

บรรณานุกรม

### บรรณานุกรม

คณะกรรมการบัญญัติศัพท์ บัญญัติศัพท์ โรงพิมพ์พิมพ์เนส 2516, 312 หน้า.

ชวาล แพทย์กุล เทคนิคการวัดผล วัฒนาพานิช 2508, 452 หน้า.

ทศีย์ย์ อ่องไพบูลย์, ร.ต. หฤัง "การสืบค้นปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการเรียนจากนักเรียน  
ชั้นมัธยมของโรงเรียนรัฐบาลในจังหวัดพระนคร" การวิจัยการศึกษา  
4 : 1 - 27 สิงหาคม 2503.

ปิยรัตน์ กองกิตติไพศาล "การใช้ตรรกศาสตร์ในการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง"  
ปริญฐานิพนธ์ วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร 2513.

ประเทิน มหาชนธ์ วิธีสอนคณิตศาสตร์แบบใหม่ในชั้นประถมศึกษา โรงพิมพ์การศาสนา 2512,  
104 หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง, กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา  
18 เมษายน - 6 พฤษภาคม 2509, 108 หน้า.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รายงานการดำเนินงานตั้งแต่ 1 ตุลาคม  
2513 ถึง 30 กันยายน 2514 37 หน้า.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, คณะกรรมการสาขาวิชาคณิตศาสตร์  
การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ โรงพิมพ์คุรุสภาพระสุเมรุ 2516, 162 หน้า.

สุเทพ จันทรสมศักดิ์ ทฤษฎีกรุปเบื้องต้น โรงพิมพ์เจริญกิจ 2514, 68 หน้า.

Ayres, Frank, Modern Algebra, Schaum Publishing Co., New York, 1965,  
245 pp.

Bruner, Jerome, The Process of Education, Harvard University Press,  
1960, 97 pp.

- Butler, Charles H., and Wren, F. Lynwood, The Teaching of Secondary School Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965, 613 pp.
- Byrne, J. Richard, Elementary Mathematics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966, 444 pp.
- Criseimbuni, Joseph, Teaching the New Mathematics, Parker Publishing Company Inc., New York, 1966, 205 pp.
- Eves, Howard, and Newsom, Carroll V., An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt. Rinehart and Winston, New York, 1958, 363 pp.
- Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Education Testing Service, New York, 1952, 32 pp.
- Fehr, Howard F., "Reform of Mathematics Education Around the World", The Mathematics Teacher, 58 : 37 - 44, January, 1965.
- Ferguson, George A., Statistical Analysis in Psychology and Education, McGraw-Hill, New York, 1966, 446 pp.
- Garrett, Henry E., Statistical in Psychology and Education, Vakils, Jeffer and Simons Private Ltd., Bombay, 1966, 491 pp.
- Gulliksen, Harold, Theory of Mental Test, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, 486 pp.
- Kinsella, John J., Secondary School Mathematics, The Center of Applied Research in Education, Inc., New York, 1965, 116 pp.
- Langer, Sasanne K., "Algebra and the Development of Reason", The Mathematics Teacher, 59 : 158 - 166, February, 1966.
- <sup>Modern</sup>  
<sub>Nedor</sub> Moder, Albert E., "Modern Mathematics and Its Place in Secondary School", The Mathematics Teacher, 50 : 421, October, 1957.
- Richardson, M.W., and Kuder, G.F., "The Calculation of Test Reliability Coefficients Based Upon Method of Rational Equivalence", Journal of Educational Psychology, 30 : 621 - 678, 1939.
- Servais, W., and Varga, T., Teaching School Mathematics. Comton Printing Ltd., Aylesbury, 1971, 308 pp.
- Spitzer, Herbert F., The Teaching of Arithmetic, University of Chicago, Chicago, 1963, 416 pp.
- SSMCIS, Teachers College, Columbia University, Information Bulletin, 3 : 2 - 19, October, 1968.

- SSMCIS, Teachers College, Columbia University, Summary of Objectivity and Activity, 3 September, 1965 to January, 1968.
- Unesco mathematics project for the Arab States, Mathematics Grade 11, May, 1971, 354 pp.
- Walpole, Ronald E., Introduction to Statistics, 4<sup>th</sup> ed., Wing Tai Cheung Printing Co., Ltd., Hong Kong, 1972, 365 pp.
- Weaver, Jay D., and Wolf, Charles T., Modern Mathematics for Elementary Teachers, International Textbook Company, Seranton, Pennsylvania, 1968, 274 pp.
- Weiss, Marie J., and Dubisch, Roy, Higher Algebra for the Undergraduate, 2nd ed., Toppan Printing Company Ltd., Tokyo, 1962, 171 pp.
- Winer, B.T., Statistical Principle in Experimental Design, McGraw-Hill, New York, 1962, 672 pp.
- Young, Robert G., Groups : A programmed course, Ballantyne & Co. Ltd., London, 1969, 111 pp.

ภาพผนวก

ตาราง 6 ค่า  $P_H$ ,  $P_L$ ,  $p$ ,  $r$  และ  $\Delta$  ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน  
เรื่องกรุปเบื้องต้น หน้าที่ 1 ที่วิเคราะห์แล้ว

| ข้อ | $P_H$ | $P_L$ | $p$ | $r$ | $\Delta$ | ข้อ | $P_H$ | $P_L$ | $p$ | $r$ | $\Delta$ |
|-----|-------|-------|-----|-----|----------|-----|-------|-------|-----|-----|----------|
| 1   | .81   | .34   | .58 | .48 | 12.2     | 21  | .86   | .30   | .59 | .57 | 12.0     |
| 2   | .72   | .28   | .50 | .44 | 13.0     | 22  | .95   | .23   | .63 | .74 | 11.7     |
| 3   | .79   | .09   | .42 | .70 | 13.8     | 23  | .93   | .30   | .65 | .66 | 11.5     |
| 4   | .74   | .26   | .50 | .48 | 13.0     | 24  | .88   | .23   | .57 | .65 | 12.3     |
| 5   | .79   | .40   | .60 | .41 | 12.0     | 25  | .74   | .14   | .43 | .60 | 13.7     |
| 6   | .93   | .16   | .57 | .75 | 12.3     | 26  | .86   | .28   | .58 | .59 | 12.1     |
| 7   | .79   | .23   | .51 | .55 | 12.9     | 27  | .88   | .28   | .60 | .61 | 12.0     |
| 8   | .84   | .42   | .64 | .45 | 11.5     | 28  | .88   | .14   | .51 | .72 | 12.9     |
| 9   | .53   | .21   | .36 | .34 | 14.4     | 29  | .84   | .30   | .38 | .55 | 12.2     |
| 10  | .72   | .26   | .49 | .49 | 13.1     | 30  | .74   | .23   | .48 | .51 | 13.2     |
| 11  | .77   | .21   | .49 | .55 | 13.1     | 31  | .84   | .28   | .57 | .56 | 12.3     |
| 12  | .88   | .34   | .63 | .57 | 11.7     | 32  | .84   | .37   | .62 | .49 | 11.8     |
| 13  | .74   | .34   | .54 | .40 | 12.6     | 33  | .93   | .33   | .66 | .65 | 11.3     |
| 14  | .81   | .26   | .54 | .55 | 12.6     | 34  | .86   | .14   | .50 | .70 | 13.0     |
| 15  | .79   | .14   | .46 | .64 | 13.5     | 35  | .95   | .30   | .67 | .70 | 11.3     |
| 16  | .74   | .14   | .43 | .60 | 13.7     | 36  | .88   | .40   | .66 | .52 | 11.4     |
| 17  | .67   | .40   | .54 | .28 | 12.6     | 37  | .67   | .28   | .47 | .39 | 13.3     |
| 18  | .79   | .28   | .54 | .51 | 12.6     | 38  | .84   | .21   | .53 | .62 | 12.7     |
| 19  | .65   | .09   | .34 | .60 | 14.6     | 39  | .72   | .34   | .53 | .38 | 12.7     |
| 20  | .72   | .16   | .43 | .56 | 13.7     | 40  | .91   | .26   | .61 | .66 | 11.9     |

ตาราง 7 ค่า  $P_H$ ,  $P_L$ ,  $p$ ,  $r$  และ  $\Lambda$  ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน  
เรื่องรูปเบื้องต้น ชั้นที่ 2 ที่วิเคราะห์แล้ว

| ข้อ | $P_H$ | $P_L$ | $p$ | $r$ | $\Lambda$ | ข้อ | $P_H$ | $P_L$ | $p$ | $r$ | $\Lambda$ |
|-----|-------|-------|-----|-----|-----------|-----|-------|-------|-----|-----|-----------|
| 1   | .91   | .38   | .67 | .58 | 11.2      | 21  | .81   | .15   | .47 | .65 | 13.0      |
| 2   | .89   | .38   | .66 | .55 | 11.4      | 22  | .50   | .18   | .33 | .36 | 14.7      |
| 3   | .97   | .18   | .63 | .80 | 11.7      | 23  | .56   | .24   | .40 | .33 | 14.1      |
| 4   | .94   | .32   | .67 | .67 | 11.3      | 24  | .71   | .12   | .40 | .60 | 14.0      |
| 5   | .89   | .38   | .66 | .55 | 11.4      | 25  | .71   | .35   | .53 | .36 | 12.7      |
| 6   | .84   | .24   | .55 | .60 | 12.5      | 26  | .91   | .29   | .63 | .64 | 11.7      |
| 7   | .84   | .35   | .61 | .51 | 11.9      | 27  | .71   | .35   | .53 | .36 | 12.7      |
| 8   | .84   | .29   | .58 | .55 | 12.2      | 28  | .76   | .41   | .59 | .36 | 12.1      |
| 9   | .91   | .32   | .64 | .62 | 11.5      | 29  | .84   | .32   | .59 | .53 | 12.1      |
| 10  | .89   | .24   | .58 | .65 | 12.2      | 30  | .76   | .29   | .53 | .47 | 12.7      |
| 11  | .76   | .18   | .46 | .57 | 13.4      | 31  | .76   | .26   | .51 | .50 | 12.9      |
| 12  | .84   | .32   | .59 | .53 | 12.1      | 32  | .68   | .32   | .50 | .36 | 13.0      |
| 13  | .71   | .18   | .44 | .53 | 13.6      | 33  | .68   | .24   | .46 | .44 | 13.4      |
| 14  | .76   | .18   | .46 | .57 | 13.4      | 34  | .71   | .26   | .48 | .45 | 13.2      |
| 15  | .76   | .26   | .51 | .50 | 12.9      | 35  | .76   | .21   | .48 | .55 | 13.2      |
| 16  | .76   | .12   | .42 | .64 | 13.8      | 36  | .59   | .32   | .45 | .28 | 13.5      |
| 17  | .89   | .26   | .59 | .64 | 12.0      | 37  | .82   | .32   | .58 | .51 | 12.2      |
| 18  | .76   | .24   | .50 | .52 | 13.0      | 38  | .76   | .26   | .51 | .50 | 12.9      |
| 19  | .56   | .24   | .40 | .33 | 14.1      | 39  | .71   | .26   | .48 | .45 | 13.2      |
| 20  | .65   | .15   | .39 | .52 | 14.2      | 40  | .65   | .29   | .47 | .36 | 13.3      |

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการ เรียน เรื่องกรุปเบื้องต้น  
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

คำอธิบาย

1. แบบทดสอบชุดนี้ เป็นแบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการ เรียน เรื่องกรุปเบื้องต้น ของ-  
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ประกอบด้วยแบบทดสอบย่อย 2 ฉบับ คือ  
ฉบับที่ 1 กรุปและกรุปทางเรขาคณิต มีจำนวน 40 ข้อ ให้เวลาทำ 1 ชั่วโมง  
ฉบับที่ 2 ไคลน์สไฟร์กรุป อบีเลียนกรุป สับกรุป ไชกลิกกรุป และ  
ไอโซมอร์ฟิซึม มีจำนวน 40 ข้อ ให้เวลาทำ 1 ชั่วโมง
2. แบบทดสอบชุดนี้ เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบทั้งสิ้น ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด  
หรือเหมาะสมที่สุด จาก ก. ข. ค. หรือ ง. ที่ให้ไว้ เมื่อเลือกข้อใด ก็ให้ไปขีด  
กากบาท (X) ใต้อักษรนั้นในกระดาษคำตอบ และพึงระวังอย่าให้สลับข้อกัน
3. หากต้องการจะเปลี่ยนคำตอบใหม่ ก็ให้ขีดเส้นทแยงสองเส้นตัดกับกากบาทเดิม แล้วไปกากบาท  
ใต้อักษรตัวใหม่ที่ต้องการจะตอบ ตัวอย่างการเปลี่ยนคำตอบจาก ก. เป็น ข. ดังนี้  

ก.      ข          ค.      ง.

~~X~~    ( )    (X)    ( )
4. ถ้าต้องการขีดเขียนสิ่งต่าง ๆ เพื่อช่วยในการคิด ก็จงขีดเขียนลงบนแผ่นกระดาษว่างที่แนบ  
มาให้ โปรดอย่าขีดเขียนเครื่องหมายหรือข้อความใด ๆ ลงบนแบบทดสอบ
5. ในแบบทดสอบบางข้อจะมีคำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงให้เข้าใจดีเสียก่อน จึงลงมือทำ
6. ถ้าพบข้อยากให้ข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน และจงพยายามทำให้เสร็จทุกข้อ

ทวีชัย สิริหิสร

วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร

แบบทดสอบฉบับที่ 1

กลุ่ม (Group) และกลุ่มทางเรขาคณิต (Geometrical Group)

---

1.  $\{0,1\}$  ถูกปิดโดยโอเปอเรชันใด ?
 

|           |           |
|-----------|-----------|
| ก. การบวก | ค. การคูณ |
| ข. การลบ  | ง. การหาร |
2. เซตในข้อใดที่ถูกปิดโดยการลบ ?
 

|            |              |
|------------|--------------|
| ก. $\{0\}$ | ก. $\{0,1\}$ |
| ข. $\{1\}$ | ง. $\{1,2\}$ |
3. การบวก เป็นไบนารีโอเปอเรชันในเซตใด ?
 

|              |              |
|--------------|--------------|
| ก. $\{1\}$   | ค. $\{0\}$   |
| ข. $\{1,2\}$ | ง. $\{0,2\}$ |
4. เซตในข้อใดที่ถูกปิดโดยการหาร ?
 

|            |              |
|------------|--------------|
| ก. $\{0\}$ | ก. $\{0,1\}$ |
| ข. $\{1\}$ | ง. $\{1,2\}$ |
5.  $\{\text{จำนวนคู่}\} = \{1,3,5,\dots\}$  ถูกปิดโดยโอเปอเรชันใด ?
 

|           |           |
|-----------|-----------|
| ก. การบวก | ค. การคูณ |
| ข. การลบ  | ง. การหาร |
6. โอเปอเรชันใด เป็นไบนารีโอเปอเรชันในเซต  $\{1\}$  ?
 

|           |                    |
|-----------|--------------------|
| ก. การบวก | ค. การคูณ          |
| ข. การลบ  | ง. การคูณและการหาร |
7. เซตและโอเปอเรชันที่กำหนดให้ในข้อใด เป็นไบนารีโอเปอเรชัน ?
 

|                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| ก. $\{1\}, -$   | ก. $\{1\}, +$        |
| ข. $\{0,1\}, +$ | ง. $\{0,1\}, \times$ |



16. เซ็ตในข้อใดที่เป็นกรุปสำหรับการบวก ?

ก.  $\{0\}$

ค.  $\{0,1\}$

ข.  $\{1\}$

ง.  $\{1,2\}$

17.  $\{1\}$  เป็นกรุปสำหรับโอเปอเรชันใด ?

ก. การบวกและการลบ

~~ค.~~ การคูณและการหาร

ข. การลบและการคูณ

ง. การหารและการบวก

18. เซ็ตและโอเปอเรชันที่กำหนดให้ในข้อใดที่เป็นกรุป ?

ก.  $\{0\}$  , -

ค.  $\{1\}$  , +

~~ข.~~  $\{0\}$  , -

ง.  $\{1\}$  , -

คำชี้แจง กำหนดให้  $R = \{1,3,7,9\}$  และถ้า  $a, b \in R$  และ  $a \otimes b$  หมายถึง ผลคูณของ  $a$  และ  $b$  แต่เอาเฉพาะหลักหน่วยเท่านั้น เช่น

$$7 \times 7 = 49 \text{ ดังนั้น } 7 \otimes 7 = 9 \text{ เป็นต้น}$$

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบคำถามข้อ 19 - 22

19. สมาชิกเอกลักษณ์ของ  $R$  คืออะไร ?

ก. 1

ค. 7

ข. 3

ง. 9

20. อินเวอร์สของ 3 คืออะไร ?

ก. 1

~~ค.~~ 7

ข. 3

ง. 9

21. 9 เป็นอินเวอร์สของอะไร ?

ก. 1

ค. 7

ข. 3

~~ง.~~ 9

22. B, ~~8~~ เป็นกรุปหรือไม่ ?

- ก. เป็นเพราะ B มีคุณสมบัติของกรุปครบทุกข้อ  
 ข. ไม่เป็นเพราะ B ไม่ถูกปิดโดยโอเปอเรชัน ~~๗~~  
 ค. ไม่เป็นเพราะ B ไม่มีสมาชิกเอกลักษณ์  
 ง. ไม่เป็นเพราะสมาชิกบางตัวของ B ไม่มีอินเวอร์ส

คำชี้แจง กำหนดตารางโอเปอเรชัน  $\circ$  สำหรับเซต  $C = \{p, q, r, s\}$  เป็นดังนี้

| $\circ$ | p        | q        | r        | s        |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| p       | r        | s        | p        | <u>q</u> |
| q       | s        | <u>p</u> | q        | <u>r</u> |
| r       | <u>p</u> | q        | <u>r</u> | s        |
| s       | q        | r        | s        | p        |

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้ตอบคำถามข้อ 23 - 27

23. So  $\square = p$  ?

ก. p

ก. q

~~ข. s~~

ง. r

24. q เป็นผลลัพธ์ของข้อใด ?

ก. pop

ค. por

ข. poq

~~ค. pos~~

25. สมาชิกเอกลักษณ์ของ C คืออะไร ?

ก. p

~~ค. r~~

ข. q

ง. s

26. อินเวอร์สของ  $q$  คืออะไร ?

ก.  $s$

ค.  $q$

ข.  $r$

ง.  $p$

27.  $C, o$  เป็นกรุปหรือไม่ ?

ก. เป็นเพราะ  $C$  ถูกปิดโดยโอเปอเรชัน  $o$

ข. เป็นเพราะ  $C$  มีคุณสมบัติของกรุปครบทุกข้อ

ค. ไม่เป็นเพราะสมาชิกบางตัวของ  $C$  ไม่มีอินเวอร์ส

ง. ไม่เป็นเพราะ  $C$  ไม่มีคุณสมบัติการจัตุรมุข

คำชี้แจง กำหนดให้  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  ซึ่ง 1, 2, 3 และ 4 เป็นเลขบนหน้าปัทม์นาฬิกา ดังรูป และถ้า  $a, b \in S$  แล้ว  $a \oplus b$  หมายถึงตั้งเข็ม

ให้ตรงกับหมายเลข  $a$  แล้วหมุน (ตามเข็มนาฬิกา)

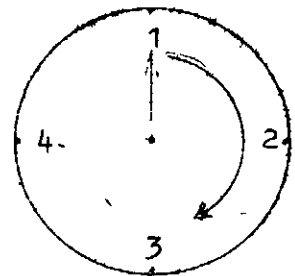
ไป  $b$  ของ เข็มชี้ตรงกับหมายเลขใด เลขนั้นคือ

ผลลัพธ์ของ  $a \oplus b$  เช่น  $1 \oplus 2$  หมายถึง ตั้งเข็ม

ที่เลข 1 แล้วหมุนไป 2 ของ เข็มจะชี้ตรงกับเลข 3

ดังนั้น  $1 \oplus 2 = 3$  เป็นต้น จงใช้ข้อตกลงนี้

ตอบคำถามข้อ 28 - 30



28. สมาชิกเอกลักษณ์ของ  $S$  คืออะไร ?

ก. 1

ค. 3

ข. 2

ง. 4

29. อินเวอร์สของ 3 คืออะไร ?

ก. 1

ค. 3

ข. 2

ง. 4

30. เลขอะไรที่เป็นอินเวอร์สของ 2 ?

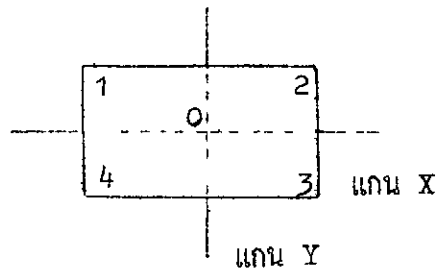
ก. 1

ค. 3

ข. 2

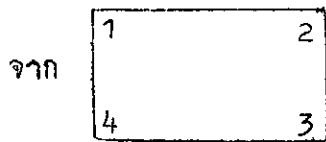
ง. 4

คำชี้แจง พิจารณาการ เปลี่ยนตำแหน่งจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ดังต่อไปนี้

ก. ย้ายจุด

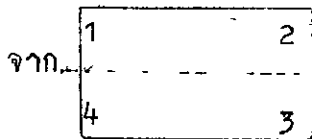


จะได้



เขียนแทนด้วย a -

ข. หมุนรูปครึ่งรอบโดยรอบแกน X เป็นแกนหมุน

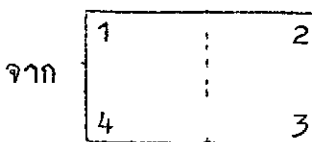


จะได้

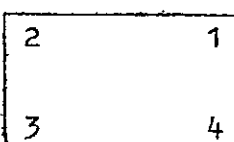


เขียนแทนด้วย b

ค. หมุนรูปครึ่งรอบโดยรอบแกน Y เป็นแกนหมุน

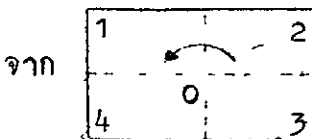


จะได้

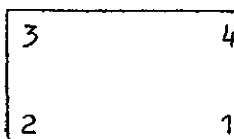


เขียนแทนด้วย c

ง. หมุนรูปทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยรอบ O เป็นจุดหมุน



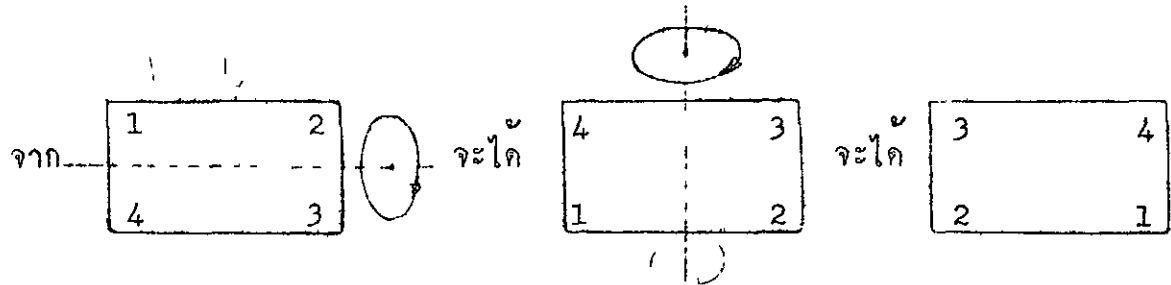
จะได้



เขียนแทนด้วย d

กำหนดให้  $R = \{a, b, c, d\}$  และ  $\circ$  เป็นโอเปอเรชันอย่างหนึ่ง ซึ่ง

$b \circ c$  หมายถึง หมุนรูปครึ่งรอบโดยใช่  $X$  เป็นแกนหมุนก่อน แล้วจึงหมุนต่อ  
อีกครึ่งรอบ โดยใช่  $Y$  เป็นแกนหมุน ดังรูป



ซึ่งมีผลเหมือนกับ การหมุนรูปทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยใช่  $O$  เป็นจุดหมุน

ดังนั้น  $b \circ c = d$  เป็นต้น

จงใช้ข้อถกเถียงนี้ตอบคำถามข้อ 31 - 37

31.  $c \circ d$  หมายความว่าอย่างไร ?

- ก. หมุนรูปครึ่งรอบโดยใช่  $X$  เป็นแกนหมุนก่อน แล้วจึงหมุนทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยใช่  $O$  เป็นจุดหมุน
- ข. หมุนรูปทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยใช่  $O$  เป็นจุดหมุนก่อน แล้วจึงหมุนต่ออีกครึ่งรอบ โดยใช่  $X$  เป็นแกนหมุน
- ✓ ค. หมุนรูปครึ่งรอบโดยใช่  $Y$  เป็นแกนหมุนก่อน แล้วจึงหมุนทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยใช่  $O$  เป็นจุดหมุน
- ง. หมุนรูปทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยใช่  $O$  เป็นจุดหมุนก่อน แล้วจึงหมุนต่ออีกครึ่งรอบ โดยใช่  $Y$  เป็นแกนหมุน

32.  $b \circ d$  ได้ผลลัพธ์เป็นอะไร ?

- ✓ ก. c
- ข. d
- ค. a
- ง. b

33.  $d \circ \square = b$  ?

ก. a

ค. b

ข. c

ง. d

34.  $\square \circ c = a$  ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

35. สมาชิกเอกลักษณ์ของ R คืออะไร ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

36. อินเวอร์สของ b คืออะไร ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

37. ผลลัพธ์ของข้อใดที่เป็นอินเวอร์สของ d

ก.  $b \circ a$

ค.  $b \circ c$

ข.  $b \circ b$

ง.  $b \circ d$

38. ถ้า  $\{x, y\}, \#$  เป็นกรุปซึ่งมี y เป็นสมาชิกเอกลักษณ์แล้ว  $x \# x$  ใดผลลัพธ์เป็นอะไร ?

ก. x

ค.  $2x$

ข. y

ง. สรุปไม่ได้

39. ถ้า  $\{x, y\}, \#$  เป็นกรุปเดียวกันกับข้อ 38 แล้ว อินเวอร์สของ x คืออะไร ?

ก. x

ค.  $2x$

ข. y

ง. สรุปไม่ได้

40. ถ้า  $\{e, a, b\}, *$  เป็นกรุปซึ่งมี e เป็นสมาชิกเอกลักษณ์แล้ว  $a * c$  ใดผลลัพธ์เป็นอะไร ?

ก. e

ค. b

ข. a

ง. c

แบบทดสอบฉบับที่ 2

ไคลน์โฟร์กรุป (Klein's Four Group)    อับเลียนกรุป (Abelian Group)  
 สับกรุป (Subgroup)    ไซคลิกกรุป (Cyclic Group)  
 และไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism)

คำชี้แจง    กำหนดกรุปสี่เหลี่ยมและวงกลมดังนี้



พิจารณาการเปลี่ยนสีและรูปร่าง 4 ครั้ง ดังต่อไปนี้

ก. ให้สีและรูปร่างคงเดิม

จาก  เปลี่ยนเป็น  แทนด้วย  $p$

ข. เปลี่ยนเฉพาะสีเท่านั้น

จาก  เปลี่ยนเป็น  แทนด้วย  $q$

ค. เปลี่ยนเฉพาะรูปร่างเท่านั้น

จาก  เปลี่ยนเป็น  แทนด้วย  $r$

ง. เปลี่ยนทั้งสีและรูปร่าง

จาก  เปลี่ยนเป็น  แทนด้วย  $s$

กำหนดให้  $A = \{p, q, r, s\}$  และ  $*$  เป็นโอเปอเรชันอย่างหนึ่ง ซึ่ง  
 $q * r$  หมายถึง เปลี่ยนเฉพาะสีอย่างเดียวก่อน แล้วจึงเปลี่ยนเฉพาะรูปร่างอีกครั้งหนึ่ง

ดังรูป

จาก  เปลี่ยนเป็น  เปลี่ยนเป็น 

ผลที่ได้จะเหมือนกับ การเปลี่ยนทั้งสีและรูปร่างพร้อมกัน

ดังนั้น  $q * r = s$  เป็นต้น

จงใช้ข้อตกลงนี้ตอบคำถามข้อ 1 - 7

1.  $r * s$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก.  $p$

ค.  $r$

~~ข.  $q$~~

ง.  $s$

2.  $r$  เป็นผลลัพธ์ของข้อใด ?

ก.  $q * p$

ค.  $q * r$

ข.  $q * q$

~~ง.  $q * s$~~

3.  $s * \square = p$  ?

~~ก.  $s$~~

ค.  $q$

ข.  $r$

ง.  $p$

4. อินเวอร์สของ  $q$  คืออะไร ?

ก.  $p$

~~ค.  $q$~~

ข.  $r$

ง.  $s$

5.  $r^3$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก.  $p$

~~ค.  $r$~~

ข.  $q$

ง.  $s$

6.  $q^2 * s^3$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก.  $p$

ค.  $r$

ข.  $q$

ง.  $s$

7. เซตในข้อใดที่เป็นสับกรุปของ  $A$  ?

ก.  $\{q, r\}$

ค.  $\{q, s\}$

ข.  $\{q, p\}$

ง.  $\{r, s\}$

คำชี้แจง กำหนดให้  $K = \{a, b, c, d\}$ ,  $*$  เป็นไคลน์สไฟร์กรุป และตาราง-  
โอเปอเรชัน  $*$  สำหรับ  $K$  เป็นดังนี้

| $\odot$ | a            | b | c            | d |
|---------|--------------|---|--------------|---|
| a       | <del>x</del> | a |              | y |
| b       | a            | b | <del>c</del> | d |
| c       |              | c | x            | - |
| d       | y            | d |              | b |

จงตอบคำถามข้อ 8 - 18

8. ข้อใดเป็นค่าของ  $x$  ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

9.  $a \odot c$  ไคลน์สไฟร์เท่าใด ?

ก. d

ค. c

ข. b

ง. a

10. a เป็นผลลัพธ์ของข้อใด ?

ก.  $a \odot c$

ก.  $c \odot c$

ข.  $b \odot c$

ง.  $d \odot c$

11. y มีค่าเป็นเท่าใด ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

12. อินเวอร์สของ d คืออะไร ?

ก. a

ค. b

ข. c

ง. d

13.  $a^4$  ไคมัลพัทธ์เท่าใด ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

14.  $c^5$  ไคมัลพัทธ์เท่าใด ?

ก. c

ค. a

ข. d

ง. b

15.  $b^3 \otimes d^2$  ไคมัลพัทธ์เท่าใด ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

16. b เป็นมัลพัทธ์ของข้อใด ?

ก.  $d^3$

ค.  $d^4$

ข.  $d^5$

ง.  $d^7$

17. เซตในข้อใดที่เป็นสับกรุปของ K ?

ก.  $\{a, b\}$

ค.  $\{a, d\}$

ข.  $\{a, c\}$

ง.  $\{c, d\}$

18. เซตในข้อใดที่ไม่เป็นสับกรุปของ K ?

ก.  $\{b, c\}$

ค.  $\{b\}$

ข.  $\{b, d\}$

ง.  $\{a, b, c\}$

คำชี้แจง กำหนดให้  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  .. เป็นอับเลี่ยนกรุป และตารางโอเปอเรชั่น .  
สำหรับ B เป็นดังนี้

| . | 1 | 3 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 4 |

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้นี้ ตอบคำถามข้อ 19-24

19.  $4^3$  ไคมลล์ทซ์เท่าใด ?

ก. 1

ค. 3

ข. 2

ง. 4

20.  $3^2 \cdot 4^3$  ไคมลล์ทซ์เท่าใด ?

ก. 1

ค. 2

ข. 3

ง. 4

21. เซตในข้อใดที่เป็นสับกรุปของ  $B$  ?

ก.  $\{1, 2\}$

ค.  $\{1, 4\}$

ข.  $\{1, 3\}$

ง.  $\{2, 3\}$

22. สับกรุปของ  $B$  มีทั้งหมดเท่าใด ?

ก. 2 สับกรุป

ค. 4 สับกรุป

ข. 3 สับกรุป

ง. 5 สับกรุป

23.  $B$  เป็นโมดูลิกรุปหรือไม่ ?

ก. เป็นโดยมี 1 เป็น generator

ค. เป็นโดยมี 4 เป็น generator

ข. เป็นโดยมี 3 เป็น generator

ง. ไม่เป็นเพราะไม่มี generator

24.  $\{1, 2, 3\}$  เป็นสับกรุปของ  $B$  หรือไม่ ?

ก. เป็นเพราะ  $\{1, 2, 3\} \subseteq B$

ค. ไม่เป็นเพราะ 2 ไม่มีอินเวอร์ส

ข. เป็นเพราะมี generator

ง. ไม่เป็นเพราะ  $\{1, 2, 3\} \dots$   
ไม่เป็นกรุป

คำชี้แจง กำหนดตารางโอเปอเรชัน  $\Delta$  สำหรับ  $S = \{a, b, c, x, y, z\}$  เป็นดังนี้

| $\Delta$ | a | b | c | x | y | z |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | x | y | z |
| b        | b | c | a | y | z | x |
| c        | c | a | b | z | x | y |
| x        | x | z | y | a | c | b |
| y        | y | x | z | b | a | c |
| z        | z | y | x | c | b | a |

จงใช้ตารางนี้ตอบคำถามข้อ 25 - 27

25.  $b^3$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. d

26.  $\square \Delta y^2 = x$  ?

ก. z

ค. b

ข. x

ง. a

27. เซตในข้อใดที่เป็นสับกรุปของ S ?

ก.  $\{a, b\}$

ค.  $\{a, x\}$

ข.  $\{a, c\}$

ง.  $\{b, c\}$

คำชี้แจง กำหนดให้กรุปแสดงในตารางต่อไปนี้ ไอโซมอร์ฟิกกับ

| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|-----------|---|---|---|---|
| 1         | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3         | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7         | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 | 1 |

| $\oplus$ | a | b | c | d |
|----------|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | d |
| b        |   | y | a | x |
| c        |   | a |   |   |
| d        | d |   |   | a |

ตาราง 1

ตาราง 2

จงใช้สิ่งที่กำหนดให้ตอบคำถามข้อ 28 - 36

28.  $c \oplus d$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก. a

ค. c

ข. b

ง. ☒ d

29. x มีค่าเป็นเท่าใด ?

ก. a

ก. ☒ c

ข. b

ง. d

30. y มีค่าเป็นเท่าใด ?

ก. ☒ d

ค. b

ข. c

ง. a

31.  $c \oplus c$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก. a

ค. b

ข. c

ง. ☒ d

32. b เป็นผลลัพธ์ของข้อใด ?

ก.  $c^2$

ค.  $c^4$

ข.  $c^3$

ง.  $c^5$

33. กรุปข้างแสดงในตาราง 2 เป็นไซคลิกกรุปหรือไม่ ?

ก. เป็นโดยมี a เป็น generator

ค. เป็นโดยมี d เป็น generator

ข. เป็นโดยมี b เป็น generator

ง. ไม่เป็นเพราะไม่มี generator

34. เซตในข้อใดที่เป็นสับกรุปของกรุปในตาราง 2 ?

ก.  $\{a, c\}$

ก.  $\{a, d\}$

ข.  $\{a, b\}$

ง.  $\{b, c\}$

35. เซตในข้อใดที่ไม่เป็นสับกรุปของกรุปในตาราง 1 ?

ก.  $\{1\}$

ค.  $\{1, 3, 7\}$

ข.  $\{1, 9\}$

ง.  $\{1, 3, 7, 9\}$

36. กรุปข้างแสดงในตาราง 1 เป็นกรุปชนิดใด ?

ก. ไคลน์สี่ไฟร์กรุป

ค. ไซคลิกกรุป

ข. ไคลน์สี่ไฟร์กรุปและมีเปลี่ยนกรุป

ง. ไซคลิกกรุปและมีเปลี่ยนกรุป

คำชี้แจง กำหนดให้กรุปข้างแสดงในตารางต่อไปในไอโซมอร์ฟิกกัน

| $\square$ | k | l | m | n |
|-----------|---|---|---|---|
| k         | k | l | m | n |
| l         | l | k | n | m |
| m         | m | n | k | l |
| n         | n | m | l | k |

| $\Delta$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|---|---|---|---|
| 1        | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2        | 2 |   |   |   |
| 3        | 3 |   |   |   |
| 4        | 4 |   |   |   |

โดยมี n สมัยกับ 2

m สมัยกับ 3

l สมัยกับ 4

จงตอบคำถามข้อ 37 - 40

37.  $2 \Delta 3$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก. 4

ค. 2

ข. 3

ง. 1

38.  $4 \Delta 4$  ได้ผลลัพธ์เท่าใด ?

ก. 1

ค. 3

ข. 2

ง. 4

39. 3 เป็นผลลัพธ์ของข้อใด ?

ก.  $2 \Delta 1$

ค.  $2 \Delta 3$

ข.  $2 \Delta 2$

ง.  $2 \Delta 4$

40. อินเวอร์สของ 2 คืออะไร ?

ก. 1

ค. 3

ข. 2

ง. 4

เนื้อหาเรื่องกรุป (Group) เกี่ยวกับที่ใช้ในการทดลองอย่างสังเขป

## บทที่ 1

เซต (Set)เบื้องต้น  
( 2 ชั่วโมง )

## 1.1 ความหมายของเซต

ในภาษาไทยของเรามีคำว่า หมู่ พวก ฝูง คณะ กลุ่ม ไขลง ฯลฯ คำเหล่านี้เป็นลักษณะนามซึ่งแสดงถึง สิ่งต่าง ๆ ที่รวมกันอยู่เป็นกลุ่มก้อน เป็นพวก ๆ หรือเป็นหมู่ ในภาษาคณิตศาสตร์ใช้คำว่า "เซต" แทนลักษณะนามจำพวกนี้ทั้งหมด เช่น ฝูงวัว เราก็พูดว่า เซตของวัว ไขลงช้าง เราก็พูดว่า เซตของช้าง เป็นต้น

## 1.2 การเรียกชื่อเซต และการเขียนสัญลักษณ์แทนเซต

โดยทั่วไป เรานิยมใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C ฯลฯ เรียกชื่อเซต เช่น ถ้ากล่าวว่า A เป็นเซตของเลขคี่ที่น้อยกว่า 10 ก็หมายความว่า A เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยเลขคี่ทุกจำนวน ที่ค่าน้อยกว่า 10 ในการเขียนเราเขียนว่า

$$A = \{ \text{เลขคี่ที่น้อยกว่า 10} \}$$

หรือ 
$$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

การเขียนแบบแรกเรียกว่า เขียนโดยบรรยายลักษณะของเซต A ก็บอกลักษณะพิเศษที่สมาชิกทุกตัวของ A มีร่วมกัน ในที่นี้ลักษณะพิเศษคือ การเป็นเลขคี่ที่น้อยกว่า 10 ในการเขียนเราเขียนวงเล็บปีกกาล้อมรอบคำบรรยายลักษณะของเซต

การเขียนแบบหลังเรียกว่า เขียนโดยแจกแจงสมาชิกของเซต A คือแจกแจงออกไปให้ชัดเจนว่า เซต A มีสมาชิกอะไรบ้าง แบบนี้เราเขียนเซตที่กล่าวถึง โดยเขียนวงเล็บปีกกาล้อมรอบสมาชิกทั้งหมดของเซตไว้ และใช้เครื่องหมายจุลภาค ( , ) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว

ตัวอย่าง  $B = \{ \text{ชื่อเดือนที่ลงท้ายด้วย "ยน"} \}$   
 หรือ  $B = \{ \text{เมษายน, มิถุนายน, พฤศจิกายน, กันยายน} \}$   
 $C = \{ \text{จำนวนที่ไม่เกิน 100 และหารด้วย 10 ลงตัว} \}$   
 หรือ  $C = \{ 10, 20, 30, \dots, 100 \}$

หมายเหตุ 1. การเขียนสมาชิกของเซตนั้น เราอาจจะเรียงลำดับ สมาชิกตัวใดก่อนหลังก็ได้  
 2. จุด ( ... ) บอกให้รู้ว่า ยังมีสมาชิกของเซตอีกมากมาย ซึ่งละไว้ในฐาน  
 ที่เข้าใจ

### 1.3 สมาชิก (Element) ของเซต และสัญลักษณ์แทนสมาชิกของเซต

สมาชิกของเซต คือสิ่งต่าง ๆ ที่กล่าวถึงในเซต เช่น  $e$  เป็นสมาชิกตัวหนึ่งของ  $\{e, a, i, o, u\}$  เราจะใช้สัญลักษณ์ " $\in$ " แทนคำว่า "เป็นสมาชิก" เช่น  
 $a \in \{a, e, i, o, u\}$  อ่านว่า  $a$  เป็นสมาชิกของเซต  $\{a, e, i, o, u\}$   
 และใช้สัญลักษณ์ " $\notin$ " แทนคำว่า "ไม่เป็นสมาชิก" เช่น  
 $b \notin \{a, e, i, o, u\}$  อ่านว่า  $b$  ไม่เป็นสมาชิกของเซต  $\{e, a, i, o, u\}$

### 14. เซตว่าง (Empty Set)

เซตว่าง หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เราจะใช้สัญลักษณ์ " $\{ \}$ " หรือ  
 " $\emptyset$ " แทนคำว่า "เซตว่าง" เช่น  
 $E = \{ \text{ชื่อวันในหนึ่งสัปดาห์ที่ชนกันด้วย ก.} \}$  เราทราบว่าไม่มีชื่อของวันใดที่ชนกัน  
 ด้วย ก. เลย ดังนั้น  $E$  จึงไม่มีสมาชิก นั่นคือ  $E = \{ \}$  หรือ  $E = \emptyset$

### 1.5 เซตจำกัด (Finite Set)

เซตจำกัด หมายถึง เซตที่เราสามารถนับจำนวนสมาชิกของเซตได้ จากสมาชิกตัวแรก  
 จนถึงตัวสุดท้าย และสามารถเขียนสมาชิกทั้งหมดของเซตได้ เช่น  
 $D = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$  เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกอยู่ 5 ตัว  
 $E = \{ 2, 4, 6, \dots, 100 \}$  เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกอยู่ 50 ตัว

หมายเหตุ

เซ็ทว่าง เราถือว่าเป็นเซ็ทจำกัดด้วย เพราะสามารถนับจำนวนสมาชิกได้

1.6 เซ็ทไม่จำกัด (Infinite Set)

เซ็ทไม่จำกัด หมายถึง เซ็ทที่เราไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกของเซ็ทได้ และไม่สามารถเขียนสมาชิกของเซ็ทได้ทั้งหมด เช่น

$$F = \{1, 2, 3, \dots\}$$

1.7 สับเซ็ท (Subset)

ถ้า A และ B เป็นเซ็ท ซึ่งสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย เราจะเรียกว่า "A เป็นสับเซ็ทของ B" จะใช้สัญลักษณ์ " $\subseteq$ " แทนคำว่า "เป็นสับเซ็ท" และใช้สัญลักษณ์ " $\not\subseteq$ " แทนคำว่า "ไม่เป็นสับเซ็ท"

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้  $A = \{1, 2\}$  และ  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

จะเห็นว่าสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย ดังนั้น  $A \subseteq B$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $C = \{\text{คน}\}$  และ  $D = \{\text{ผู้หญิง}\}$

เนื่องจากผู้หญิงทั้งหมดเป็นคน ดังนั้น  $D \subseteq C$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  และ  $F = \{1, 3, 7, 9\}$

จะเห็นว่าสมาชิกบางตัวของ E ก็คือ 2 และ 4 ไม่ได้เป็นสมาชิกของ F

ดังนั้น  $E \not\subseteq F$

ตัวอย่าง 4 จงหาสับเซ็ททั้งหมดของ  $\{1, 2, 3\}$

สับเซ็ทของ  $\{1, 2, 3\}$  ได้แก่

$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$  และ  $\{1, 2, 3\}$

หมายเหตุ

เซ็ทว่าง เราถือว่าเป็นสับเซ็ทของทุกเซ็ท

## บทที่ 2

ไบนารีโอเปอเรชัน (Binary Operation) และคุณสมบัติปิด (Closure Law)

( 2 ชั่วโมง )

2.1 โอเปอเรชัน (Operation)

โอเปอเรชัน หมายถึง การกระทำในทางคณิตศาสตร์ เช่น

$2 + 3$  หมายถึง เราเอา 2 และ 3 มากระทำกันโดยการบวก เราเรียกการบวกว่าเป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง

$4 \times 8 = 32$  โอเปอเรชันคือการคูณ

โอเปอเรชันที่นักเรียนรู้จักได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร เป็นต้น

2.2 ไบนารีโอเปอเรชัน

ไบนารีโอเปอเรชัน หมายถึง การกระทำ (Operation) ระหว่างสมาชิก 2 ตัวใด ๆ ที่อยู่<sup>๒</sup>ในเซตเดียวกัน และผลลัพธ์เป็นสมาชิกของเซตนั้นเสมอ

นั่นคือถ้า  $a, b \in A$  แล้ว  $a * b \in A$  เราจะเรียกว่า โอเปอเรชัน  $*$  เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน  $A$

ตัวอย่าง 1 การบวก การลบ และการคูณ เป็นไบนารีโอเปอเรชันในเซต  $\{0\}$

แต่การหารไม่เป็นไบนารีโอเปอเรชันในเซต  $\{0\}$

โอเปอเรชันในทางคณิตศาสตร์นั้นไม่ได้มีเฉพาะ การบวก การลบ การคูณ และการหาร และสมาชิกของเซตก็ไปจำเป็นจะต้องเป็นตัวเลขเสมอไป เราอาจจะกำหนดสมาชิกของเซต และโอเปอเรชันขึ้นมาเองได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $B = \{\oplus, \ominus, \oplus\}$  และ  $*$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง แทนการประกอบกัน เช่น  $\ominus * \oplus$  หมายถึงให้กรุป  $\ominus$  ซ้อนกรุป  $\oplus$  จะได้กรุป  $\oplus$

ดังนั้น  $\ominus * \oplus = \oplus$

ในทำนองเดียวกัน  $\ominus * \ominus = \ominus$

$$\ominus * \oplus = \oplus \quad \text{ ฯลฯ }$$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าเราจะยกเอารูปใดมาซ้อนกัน ผลลัพธ์ที่ได้จะยังคงเป็นสมาชิกของ B เสมอ ดังนั้น \* จึงเป็นไบนารีโอเปอเรชันใน B

### 2.3 คุณสมบัติปิด

ได้กล่าวมาแล้วว่า ถ้า  $a, b \in A$  แล้ว  $a * b \in A$  เราเรียกว่า \* เป็นไบนารีโอเปอเรชันใน A เราจะเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า " A ถูกปิดโดยโอเปอเรชัน \* "

ดังนั้นเซต  $\{0\}$  ในตัวอย่าง 1 ถูกปิดโดยการบวก, การลบ และการคูณ แต่ไม่ถูกปิดโดยการหาร

เซต B ในตัวอย่าง 2 ถูกปิดโดยโอเปอเรชัน \*

บทที่ 3

หลักการจับคู่ ( $\Gamma$ -sociative Law)

( 40 นาที )

ถ้า  $a, b, c \in A$  ซึ่งมีคุณสมบัติว่า  $(a * b) * c = a * (b * c)$  แล้ว เราจะเรียกว่า " A มีคุณสมบัติการจับคู่สำหรับโอเปอเรชัน \* "

หมายเหตุ เครื่องหมายวงเล็บเราใช้แสดงลำดับในการกระทำ เช่น  $(2 + 3) + 4$  หมายถึงให้เอา 2 และ 3 บวกกันก่อน ได้ผลลัพธ์ 5 แล้วจึงนำ 5 และ 4 บวกกัน

ตัวอย่าง 1 ให้  $A = \{1\}$  จะเห็นว่า

A มีคุณสมบัติการจับคู่สำหรับการบวก การคูณ และการหาร เพราะ

$$(1 + 1) + 1 = 3 = 1 + (1 + 1)$$

$$(1 \times 1) \times 1 = 1 = 1 \times (1 \times 1)$$

$$(1 \div 1) \div 1 = 1 = 1 \div (1 \div 1)$$

แต่ A ไม่มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการลบ เพราะ

$$(1 - 1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$$

ดังนั้น  $(1 - 1) - 1 \neq 1 - (1 - 1)$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $B = \{ \oplus, \ominus, \oplus \}$  และ  $*$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง

ดังที่กล่าวมาแล้วในตัวอย่าง 2 บทที่ 2

จะเห็นว่า B มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับโอเปอเรชัน  $*$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้  $C = \{ 2, 4, 6, \dots \}$  จะเห็นว่า C มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับ

การบวกและการคูณ แต่ไม่มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการลบ และการหาร เพราะถ้ามีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการลบ  $(a - b) - c$  กับ  $a - (b - c)$  จะต้องมีความเท่ากันเสมอ

ไม่ว่า  $a, b, c$  จะมีค่าเป็นเท่าใด สมมุติ  $a = 8, b = 4, c = 2$

$$(a - b) - c = (8 - 4) - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$a - (b - c) = 8 - (4 - 2) = 8 - 2 = 6$$

$$(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า C ไม่มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับ

การหาร

## บทที่ 4

สมาชิกเอกลักษณ์ (Identity Element)

( 40 นาที )

พิจารณา  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  เราทราบแล้วว่า

$$0 + 0 = 0$$

$$2 + 0 = 2$$

$$1 + 0 = 1$$

$$3 + 0 = 3$$

จะเห็นได้ว่า การบวกสมาชิกของ  $A$  ด้วย 0 ผลลัพธ์ไม่เปลี่ยนแปลง เราจะเรียก 0 ว่าเป็น "สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ  $A$ "

ดังนั้น  $i \in A$  ซึ่งมีคุณสมบัติว่า  $a * i = a$  เมื่อ  $a \in A$  แล้วเราจะเรียกว่า " $i$  เป็นสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชัน  $*$  ของ  $A$ "

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้  $M = \{e, o\}$  เมื่อ  $e$  แทนจำนวนคู่ และ  $o$  แทนจำนวนคี่

เราทราบว่าจำนวนคู่บวกกับจำนวนคู่ ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่

$$\text{ดังนั้น } e + e = e$$

จำนวนคี่บวกกับจำนวนคี่ ผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่

$$\text{ดังนั้น } o + e = o$$

เพราะฉะนั้น  $e$  จึงเป็นสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ  $M$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $B = \{ \bigcirc, \ominus, \oplus, \oplus \}$  และ  $*$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง แทนการยกกรุปซ้อนกัน ดังต่อไปนี้แล้ว และเราทราบว่า

$$\bigcirc * \bigcirc = \bigcirc$$

$$\bigcirc * \oplus = \oplus$$

$$\bigcirc * \ominus = \ominus$$

$$\bigcirc * \oplus = \oplus$$

ดังนั้นสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชัน  $*$  ของ  $A$  คือ  $\bigcirc$  หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า สมาชิกเอกลักษณ์ของ  $A$  คือ  $\bigcirc$  โดยละ "โอเปอเรชัน  $*$ " ไว้ในฐานที่เข้าใจ

## บทที่ 5

สมาชิกอินเวอร์ส (Inverse Element)

( 40 นาที )

พิจารณา  $I = \{\text{จำนวนเต็ม}\}$  หรือ  $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$   
 เราทราบว่า สมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ  $I$  คือ 0 และทราบอีกว่า

$$2 + (-2) = 0$$

เช่นนี้ เราจะเรียก  $-2$  ว่าเป็น "อินเวอร์ส" ของ 2 หรือ 2 และ  $-2$  เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

ในทำนองเดียวกัน 1 เป็นอินเวอร์สของ  $-1$  เพราะ  $-1 + 1 = 0$

อินเวอร์สของ  $a$  ก็คือตัวที่มากกระทำกับ  $a$  แล้วได้ผลลัพธ์เป็นสมาชิกเอกลักษณ์

ดังนั้น ถ้า  $a \in A$  ซึ่งมี  $i$  เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ แล้วเราจะเรียกว่า " $b$  เป็นอินเวอร์สของ  $a$ " หรือ " $a$  และ  $b$  เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน" ก็ต่อเมื่อ  $a * b = 1$

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้  $M = \{e, o\}$  เมื่อ  $e$  แทนจำนวนคู่ และ  $o$  แทนจำนวนคี่ ดังได้กล่าวมาแล้ว

เราทราบว่าสมาชิกเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ  $M$  คือ  $e$

ดังนั้น อินเวอร์สของ  $e$  คือ  $e$  เพราะว่า  $e + e = e$

อินเวอร์สของ  $o$  คือ  $o$  เพราะว่า  $o + o = e$

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $B = \{\bigcirc, \ominus, \oplus, \otimes\}$  และ  $*$  แทนการยกกำลังกัน  
 ดังได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งเราทราบว่า สมาชิกเอกลักษณ์ของ  $B$  คือ  $\bigcirc$

ดังนั้น อินเวอร์สของ  $\bigcirc$  คือ  $\bigcirc$  เพราะว่า  $\bigcirc * \bigcirc = \bigcirc$

แต่  $\ominus, \oplus$  และ  $\otimes$  ไม่มีอินเวอร์ส เพราะไม่มีรูปใดที่เมื่อยกกับอันรูปเหล่านี้แล้วได้ผลลัพธ์เป็นรูป  $\bigcirc$

## บทที่ 6

## กรุป (Group)

( 3 ชั่วโมง )

## 6.1 นิยาม

$G$  จะเรียกว่าเป็น "กรุปสำหรับโอเปอเรชัน  $*$ " เขียนย่อ ๆ ว่า " $G, *$  เป็นกรุป" ก็ต่อเมื่อ  $G$  มีคุณสมบัติ 4 ประการดังนี้

1.  $G$  ถูกปิดโดยโอเปอเรชัน  $*$  (นั่นคือถ้า  $a, b \in G$  แล้ว  $a * b \in G$ )
2.  $G$  มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับโอเปอเรชัน  $*$  (นั่นคือถ้า  $a, b, c \in G$  แล้ว  $(a * b) * c = a * (b * c)$ )
3. มีสมาชิกเอกลักษณ์หนึ่งตัวอยู่ใน  $G$  (นั่นก็จะมีสมาชิกเอกลักษณ์  $1 \in G$  ซึ่งถ้า  $a \in G$  แล้ว  $a * 1 = a$ )
4. สมาชิกทุกตัวของ  $G$  จะต้องมียินเวอร์สอยู่ใน  $G$  (นั่นคือถ้า  $a \in G$  แล้ว จะต้องมี  $b \in G$  ซึ่ง  $a * b = 1$ )

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้  $M = \{e, o\}$  เมื่อ  $e$  แทนจำนวนคู่ และ  $o$  แทนจำนวนคี่

1. เราทราบแล้วว่า  $e + e = e$        $o + e = o$   
 $e + o = o$        $o + o = e$

จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าเราจะนำสมาชิกตัวใดของ  $M$  มาบวกกัน ผลลัพธ์ที่ได้ยังคงเป็นสมาชิกของ  $M$  เสมอ ดังนั้น  $M$  จึงถูกปิดโดยการบวก

2.  $M$  มีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับการบวก เช่น

$$(o + e) + o = o + o = e$$

$$o + (e + o) = o + o = e$$

o

$$\text{ดังนั้น } (o + e) + o = o + (e + o)$$

3. มีสมาชิกเอกลักษณ์หนึ่งตัวอยู่ใน  $M$  คือ  $e$  เพราะว่า

$$e + e = e$$

$$o + e = o$$

4. สมาชิกทุกตัวของ  $M$  มีอินเวอร์สอยู่ใน  $M$  กล่าวคือ

อินเวอร์สของ  $e$  คือ  $e$  เพราะว่า  $e + e = e$

อินเวอร์สของ  $o$  คือ  $o$  เพราะว่า  $o + o = e$

ดังนั้น  $M, +$  เป็นกรุป

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $B = \{ \bigcirc, \ominus, \oplus, \oplus \}$  และ  $*$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง  
จะเห็นว่า  $B, *$  ไม่เป็นกรุป เพราะ  $\ominus, \oplus$  และ  $\oplus$  ไม่มีอินเวอร์ส

## 6.2 ตารางโอเปอเรชัน (Operation Table)

เราสามารถบวกจำนวนคู่หนึ่ง ซึ่งเลือกมาจาก 0, 1 และ 2 ใดหลาย ๆ ทาง คือ

$$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 1 \quad 2 + 0 = 2$$

$$0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 2 \quad 2 + 1 = 3$$

$$0 + 2 = 2 \quad 1 + 2 = 3 \quad 2 + 2 = 4$$

ผลจากการบวกจำนวนเหล่านี้ เราสามารถเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

| +   | ตัวที่  |
|-----|---------|
| บวก |         |
|     | ผลลัพธ์ |

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 4 |

เราเรียกตารางนี้ว่า ตารางบวกสำหรับเซต  $\{0, 1, 2\}$

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้  $G = \{1, 3, 7, 9\}$  และถ้า  $a, b \in G$  แล้ว

$a \otimes b$  หมายถึง ผลคูณของ  $a$  และ  $b$  เอาเฉพาะหลักหน่วยเท่านั้น เช่น

$$5 \times 9 = 45 \quad \text{ดังนั้น} \quad 5 \otimes 9 = 5$$

ถ้าจะสร้างตารางโอเปอเรชัน  $\otimes$  สำหรับ  $G$  ก็จะได้ดังนี้

|           |   |   |   |   |          |
|-----------|---|---|---|---|----------|
| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 | แถวบนสุด |
| 1         | 1 | 3 | 7 | 9 | แถวที่ 1 |
| 3         | 3 | 9 | 1 | 7 | แถวที่ 2 |
| 7         | 7 | 1 | 9 | 3 | แถวที่ 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 | 1 | แถวที่ 4 |

### 6.3 การพิจารณาคุณสมบัติปิดจากตาราง

เนื่องจากตารางโอเปอเรชัน แสดงผลลัพธ์ของการกระทำระหว่างสมาชิกของเซต 2 ตัว ทุกกรณี ดังนั้น ถ้าหากผลลัพธ์ในตารางทุกตัวยังคงเป็นสมาชิกของเซตนั้นอยู่ เราสามารถบอกได้ทันทีว่า เซตนั้นถูกปิดโดยโอเปอเรชันที่กำหนดให้

ดังนั้น  $G$  ในตัวอย่าง 3 จึงถูกปิดโดยโอเปอเรชัน  $\otimes$

### 6.4 การหาสมาชิกเอกลักษณ์จากตาราง

จากตารางโอเปอเรชัน  $\otimes$  สำหรับ  $G$  ในตัวอย่าง 3 จะเห็นว่าแถวบนสุดเหมือนกับ

แถวที่ 1 ทุกประการ นั่นคือ  $1 \otimes 1 = 1$        $3 \otimes 1 = 3$

$$7 \otimes 1 = 7 \qquad 9 \otimes 1 = 9$$

ดังนั้นสมาชิกเอกลักษณ์ของ  $G$  คือ 1

ดังนั้นเราอาจจะตั้งข้อสังเกตได้ว่า ถ้าสมาชิกแถวบนสุดเหมือนกับแถวใด เราก็จะบอกได้ทันทีว่า สมาชิกตัวใดเป็นสมาชิกเอกลักษณ์

### 6.5 การหาอินเวอร์สของสมาชิกแต่ละตัวจากตาราง

ในการหาอินเวอร์สของสมาชิกแต่ละตัวจากตารางนั้น จะต้องพิจารณาในช่องผลลัพธ์ที่เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ เราจะสามารถบอกได้ทันทีว่า อินเวอร์สของสมาชิกแต่ละตัวนั้นคืออะไร

| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|-----------|---|---|---|---|
| 1         | ① | 3 | 7 | 9 |
| 3         | 3 | 9 | ① | 7 |
| 7         | 7 | ① | 9 | 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 | ① |

จากตารางจะเห็นว่า  $1 \otimes 1 = 1$  ดังนั้นอินเวอร์สของ 1 คือ 1

$7 \otimes 3 = 1 = 3 \otimes 7$  ดังนั้น 3 และ 7 เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน

และ  $9 \otimes 9 = 1$  ดังนั้น อินเวอร์สของ 9 คือ 9

นอกจากนั้น  $G$  ยังมีคุณสมบัติการจับหมู่สำหรับโอเปอเรชัน  $\otimes$  เช่น

$$(3 \otimes 7) \otimes 9 = 1 \otimes 9 = 9$$

$$3 \otimes (7 \otimes 9) = 3 \otimes 3 = 9$$

ดังนั้น  $G, \otimes$  เป็นกรุป

ตัวอย่าง 4 กำหนดให้  $S = \{1, 2, 3\}$  ซึ่ง 1, 2 และ 3 เป็นเลขบนหน้าปัทมาฬิกา  
กรุป

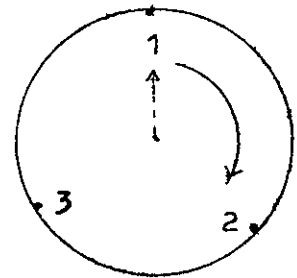
ถ้า  $a, b \in S$  แล้ว  $a \oplus b$  หมายถึง ตั้งเข็มที่  
หมายเลข  $a$  แล้วหมุน (ตามเข็มนาฬิกา) ไป  $b$  ช่อง เข็ม  
ชี้ตรงกับหมายเลขใด หมายเลขนั้นคือผลลัพธ์ของ  $a \oplus b$  เช่น

$2 \oplus 2$  หมายถึง ตั้งเข็มที่เลข 2 แล้วหมุนเข็มไป

2 ช่อง เข็มจะชี้ตรงกับเลข 1

ดังนั้น  $2 \oplus 2 = 1$  เป็นต้น

ตารางโอเปอเรชัน  $\oplus$  สำหรับ  $S$  จะเป็นดังนี้



| $\oplus$ | 1 | 2 | 3 |
|----------|---|---|---|
| 1        | 2 | 3 | 1 |
| 2        | 3 | 1 | 2 |
| 3        | 1 | 2 | 3 |

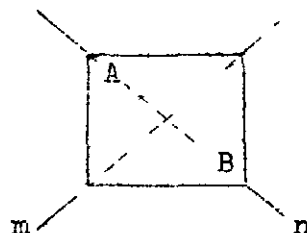
จากการวางจะเห็นว่า

1. S ถูกปิดโดยโอเปอเรชั่น  $\oplus$
2. สมาชิกเอกลักษณ์ของ S คือ 3
3. สมาชิกทุกตัวของ S มีอินเวอร์สอยู่ใน S กล่าวคือ  
อินเวอร์สของ 1 คือ 2  
และ อินเวอร์สของ 3 คือ 3
4. S ยังมีคุณสมบัติการจัตุรมุขสำหรับโอเปอเรชั่น  $\oplus$   
ดังนั้น S,  $\oplus$  เป็นกรุป.

บทที่ 7

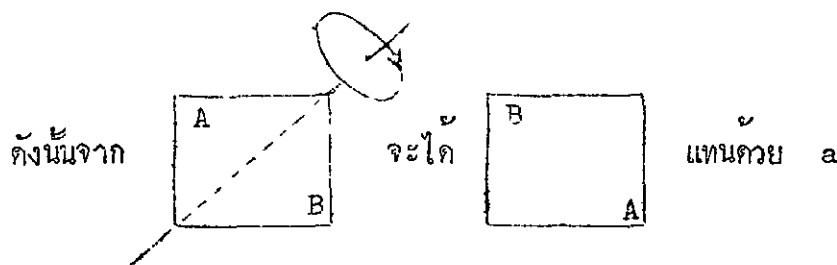
กลุ่มทางเรขาคณิต (Geometrical Group)  
( 1 ชั่วโมง )

ตัวอย่าง 1 พิจารณาการ เปลี่ยนตำแหน่งของจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

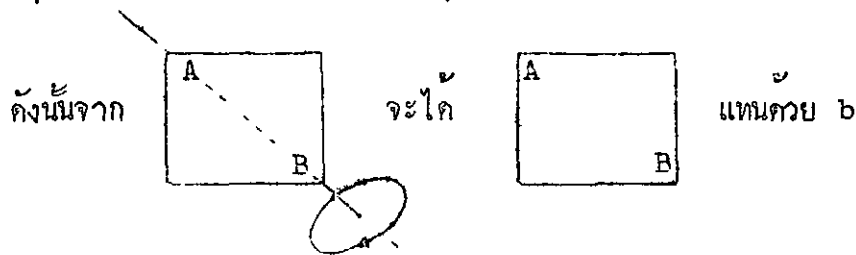


ดังนี้

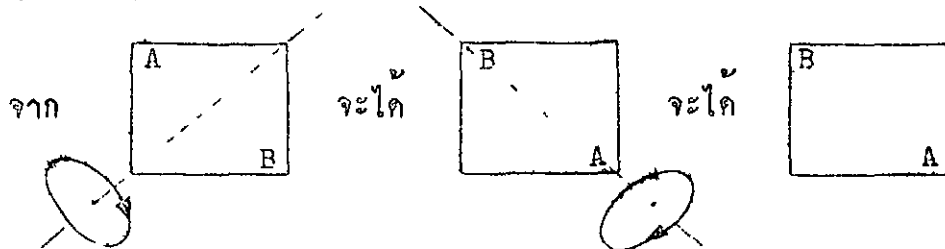
1. หมุนครึ่งรอบโดยใช้ m เป็นแกนหมุน



2. หมุนครึ่งรอบโดยใช่  $n$  เป็นแกนหมุน



กำหนดให้  $R = \{a, b\}$  และ  $\circlearrowright$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง ซึ่ง  
 $a \circlearrowright b$  หมายถึง หมุนรูปโดยใช่  $m$  เป็นแกนหมุนก่อนแล้วจึงหมุนต่ออีกโดยใช่  $n$  เป็น  
 แกนหมุน ดังรูป



ซึ่งมีผลเหมือนกับการหมุนโดยใช่  $m$  เป็นแกนหมุนอย่างเดียว

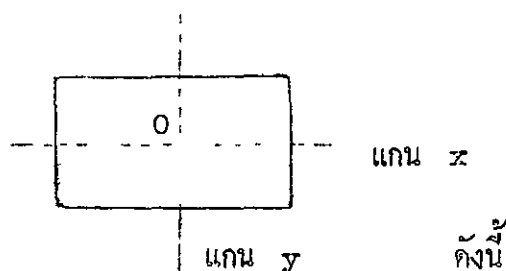
ดังนั้น  $a \circlearrowright b = a$  เป็นต้น

ตารางโอเปอเรชัน  $\circlearrowright$  สำหรับ  $R$  จะเป็นดังนี้

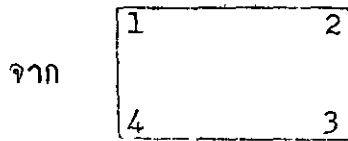
| $\circlearrowright$ | $a$ | $b$ |
|---------------------|-----|-----|
| $a$                 | $b$ | $a$ |
| $b$                 | $a$ | $b$ |

จากตารางจะเห็นได้ว่า  $R, \circlearrowright$  เป็นกรุป

ตัวอย่าง 2 พิจารณาการ เปลี่ยนตำแหน่งจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



1. อยู่คงที่

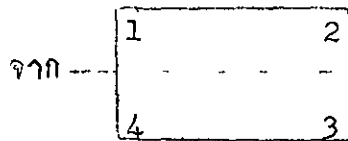


จะได้



แทนด้วย a

2. หมุนครึ่งรอบโดยรอบใช้  $x$  เป็นแกนหมุน

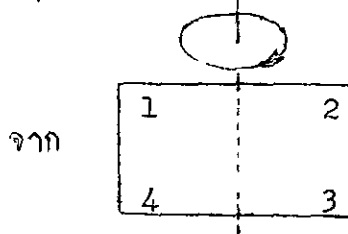


จะได้

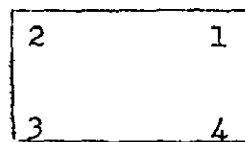


แทนด้วย b

3. หมุนครึ่งรอบโดยรอบใช้  $y$  เป็นแกนหมุน

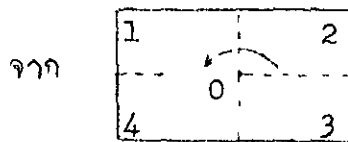


จะได้



แทนด้วย c

4. หมุนทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยรอบใช้  $o$  เป็นจุดหมุน



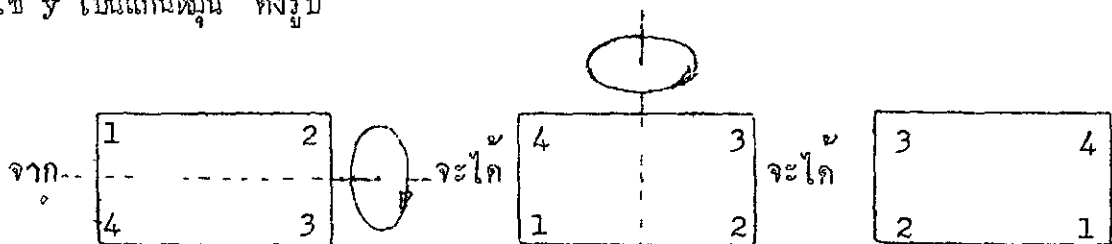
จะได้



แทนด้วย d

กำหนดให้  $S = \{a, b, c, d\}$  และ  $\otimes$  เป็นโอเปอเรชันชนิดหนึ่ง ซึ่ง

$b \otimes c$  หมายถึง หมุนรูปครึ่งรอบโดยรอบใช้  $x$  เป็นแกนหมุนก่อน แล้วจึงหมุนครึ่งรอบโดยรอบใช้  $y$  เป็นแกนหมุน ดังรูป



ซึ่งมีผลเหมือนกับการหมุนรูปทวนเข็มนาฬิกา  $180^\circ$  โดยรอบใช้  $o$  เป็นจุดหมุน อย่างเดียว

ดังนั้น  $b \circ c = d$  เป็นต้น  
จากข้อตกลงข้างต้นเราสามารถสร้างตารางโอเปอเรชัน  $\circ$  สำหรับ  $S$  ได้ดังนี้

| $\circ$ | a | b | c | d |
|---------|---|---|---|---|
| a       | a | b | c | d |
| b       | b | a | d | c |
| c       | c | d | a | b |
| d       | d | c | b | a |

จากตารางจะเห็นว่า  $S, \circ$  เป็นกรุป

บทที่ 8

### ไคลน์สไฟร์กรุป (Klein's Four Group) ( 2 ชั่วโมง )

ไคลน์สไฟร์กรุป คือกรุปชนิดหนึ่ง ประกอบไปด้วยเซตซึ่งมีสมาชิก 4 ตัว และโอเปอเรชันอย่างหนึ่ง สำหรับสมาชิก 4 ตัวนั้น มีลักษณะดังนี้

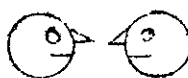
1. สมาชิก 3 ตัวนอกจากสมาชิกเอกลักษณ์ ถ้านำสองตัวมากระทำกัน ผลลัพธ์จะเป็นตัวที่เหลือเสมอ
2. อินเวอร์สของสมาชิกแต่ละตัว คือ ตัวมันเอง

ดังนั้น ถ้า  $K = \{e, a, b, c\}$  ,  $*$  เป็นไคลน์สไฟร์กรุป ซึ่งมี  $e$  เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ จากคุณสมบัติของไคลน์สไฟร์กรุปข้างต้น เราสามารถสร้างตารางโอเปอเรชัน  $*$  สำหรับ  $K$  ได้ดังนี้

| $*$ | e | a | b | c |
|-----|---|---|---|---|
| e   | e | a | b | c |
| a   | a | e | c | b |
| b   | b | c | e | a |
| c   | c | b | a | e |

สำหรับสมาชิกของเซต และโอเปอเรชันของไคลน์สไฟร์กรุ๊ป เราอาจจะกำหนดขึ้นมาเอง  
 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 ให้คนสองคนหันหน้าเข้าหากัน ดังรูป

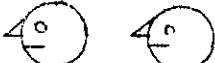


พิจารณากการกระทำของคนทั้งสองดังต่อไปนี้

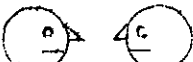
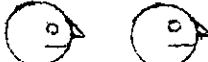
1. ให้ทั้งสองคนอยู่เฉย

ดังนั้นจาก  เป็น  แทนด้วย  $o$

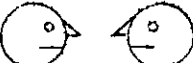
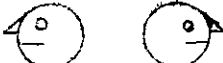
2. ให้คนที่ 1 หันหลังกับคนเคียว

ดังนั้นจาก  เป็น  แทนด้วย  $x$

3. ให้คนที่ 2 หันหลังกับคนเคียว

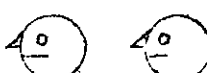
ดังนั้นจาก  เป็น  แทนด้วย  $y$

4. ให้ทั้งสองคนหันหลังกลับพร้อมกัน

ดังนั้นจาก  เป็น  แทนด้วย  $z$

กำหนดให้  $K' = \{o, x, y, z\}$  และ  $\wedge$  เป็นโอเปอเรชันอย่างหนึ่ง ซึ่ง

$x \wedge y$  หมายถึง ให้คนที่ 1 หันหลังกับคนเคียวก่อน แล้วจึงให้คนที่ 2 หันหลัง  
 กับคนเคียวอีกครั้งหนึ่ง ดังรูป

จาก  เป็น  เป็น 

ซึ่งมีผลเหมือนกับให้ทั้งสองคนหันหลังกลับพร้อมกัน

ดังนั้น  $x \wedge y = z$  เป็นกัน

ตารางโอเปอเรชั่น  $\wedge$  สำหรับ  $K^*$  จะเป็นดังนี้

| $\wedge$ | o | x | y | z |
|----------|---|---|---|---|
| o        | o | x | y | z |
| x        | x | o | z | y |
| y        | y | z | o | x |
| z        | z | y | x | o |

จากตารางจะเห็นว่า

1.  $K^*$ ,  $\wedge$  เป็นกรุป
  2.  $K^*$  มีสมาชิก 4 ตัว
  3. สมาชิก 3 ตัวของ  $K^*$  นอกจากสมาชิกเอกลักษณ์ o คือ x, y และ z ถ้านำสองตัวมากระทำกัน ผลลัพธ์จะเป็นตัวที่เหลือเสมอ
  4. อินเวอร์สของสมาชิกแต่ละตัวคือตัวมันเอง
- ดังนั้น  $K^*$ ,  $\wedge$  เป็นไคลน์สไฟร์กรุป

ตัวอย่าง 2  $S_3$ ,  $\otimes$  ในตัวอย่าง 2 บทที่ 7 เป็นไคลน์สไฟร์กรุป แต่  $G$ ,  $\otimes$  ในตัวอย่าง 3 บทที่ 6 ไม่เป็นไคลน์สไฟร์กรุป

บทที่ 9

อบีเลียนกรุป (Abelian Group)  
( 1 ชั่วโมง )

### 9.1 หลักการสลับที่ (Commutative Law)

ถ้า  $a, b \in A$  ซึ่งมีคุณสมบัติว่า  $a * b = b * a$  แล้วเราจะเรียกว่า

"A" มีคุณสมบัติการสลับที่สำหรับโอเปอเรชั่น  $*$  "

ตัวอย่าง 1 กำหนดให้  $C = \{2, 4, 6, 8\}$  จะเห็นได้ว่า  $C$  มีคุณสมบัติการสลับสำหรับการบวก และการคูณ แต่ไม่มีคุณสมบัติการสลับสำหรับการลบ และการหาร เพราะถ้ามีการสลับสำหรับการลบ แล้ว  $a - b$  จะต้องมีความเท่ากับ  $b - a$  เสมอไม่ว่า  $a$  และ  $b$  จะมีค่าเป็นเท่าใด

สมมติให้  $a = 4, b = 2$

$$a - b = 4 - 2 = 2$$

$$b - a = 2 - 4 = -2$$

$$\therefore 4 - 2 \neq 2 - 4$$

ดังนั้น  $C$  จึงไม่มีคุณสมบัติการสลับสำหรับการลบ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า  $C$  ไม่มีคุณสมบัติการสลับสำหรับการหาร

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้ตารางโอเปอเรชัน  $\oplus$  สำหรับ  $C^*$  เป็นดังนี้

| $\oplus$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|---|---|---|---|
| 1        | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 2        | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 3        | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 4        | 1 | 2 | 3 | 4 |

จากตารางจะเห็นว่า

$$1 \oplus 2 = 3 = 2 \oplus 1$$

$$2 \oplus 3 = 1 = 3 \oplus 2$$

$$1 \oplus 3 = 4 = 3 \oplus 1$$

$$2 \oplus 4 = 2 = 4 \oplus 2$$

$$1 \oplus 4 = 1 = 4 \oplus 1$$

$$3 \oplus 4 = 3 = 4 \oplus 3$$

จะเห็นว่า ถ้า  $a, b \in C^*$  แล้ว  $a \oplus b = b \oplus a$  เสมอไม่ว่า  $a, b$  จะมีค่าเป็นเท่าใด

ดังนั้น  $C^*$  จึงมีคุณสมบัติการสลับสำหรับโอเปอเรชัน  $\oplus$

## 9.2 อับเลียนกรุป (Abelian Group)

อับเลียนกรุป คือกรุปที่มีคุณสมบัติการสลับที่

นั่นคือ ถ้า  $A, *$  เป็นกรุป ซึ่งมีคุณสมบัติเพิ่มขึ้นอีกประการหนึ่ง คือ  $a*b = b*a$  เมื่อ  $a, b \in A$  แล้ว เราจะเรียกว่า  $A, *$  เป็นอับเลียนกรุป

ตัวอย่าง 3 เราทราบว่า  $C^*, \oplus$  ดังแสดงในตัวอย่าง 2 เป็นกรุป และมีคุณสมบัติการสลับที่ ด้วย ดังนั้น  $C^*, \oplus$  จึงเป็นอับเลียนกรุป

## 9.3 การตรวจสอบอับเลียนกรุปจากตาราง

จากตารางโอเปอเรชัน เราสามารถบอกได้ว่า เซตใดมีคุณสมบัติการสลับที่ ซึ่งมีวิธีการพิจารณาดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4 กำหนดกรุป  $A = \{a, b, c\}$ ,  $*$  ดังแสดงในตาราง

| $*$ | a | b | c |
|-----|---|---|---|
| a   | a | b | c |
| b   | b | c | a |
| c   | c | a | b |

พิจารณาผลลัพธ์ของ  $a*b$  และ  $b*a$  จะเห็นว่า มีผลลัพธ์เป็น b เหมือนกัน ดังตาราง

| $*$ | a | b | c |
|-----|---|---|---|
| a   |   | b |   |
| b   | b |   |   |
| c   |   |   |   |

นอกจากนั้น  $a*c = c = c*a$

| $*$ | a | b | c |
|-----|---|---|---|
| a   |   | b | c |
| b   | b |   |   |
| c   | c |   |   |

และ  $b*c = a = c*b$

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| $*$ | a | b | c |
| a   |   | b | c |
| b   | b |   | a |
| c   | c | a |   |

จุด ( . ) แสดงผลลัพธ์ของ  $a*a$ ,  $b*b$  และ  $c*c$  ซึ่งไม่จำเป็นต้องนำมาพิจารณา ดังนั้น A จึงเป็นคุณสมบัติการสลับที่สำหรับโอเปอเรชั่น \* นั่นแสดงว่า A, \* เป็น ออปีเลียนกรุป

ถ้าเราถือว่า เส้นทะแยงตามแนวจุดทั้งสามเป็นกระจกเงา จะเห็นได้ว่า a,b,c ของคานหนึ่ง จะเป็นเงาของอีกคานหนึ่ง และถ้าพิจารณาตามแนวเส้นทะแยงนี้ สมาชิกแต่ละตัวของคานหนึ่ง จะพบกับตัวมันเองของอีกคานหนึ่งเสมอ เราเรียกว่าตารางนี้ สมมาตร (Symmetry) เมื่อเทียบกับเส้นทะแยง โดยทั่ว ๆ ไป เรียกเส้นทะแยงนี้ว่า main diagonal

ดังนั้น ถ้าหากกรุปใดมีตารางโอเปอเรชั่นสมมาตรกับ main diagonal แล้ว เราย่อมบอกได้ทันทีว่า กรูปก้นั้นเป็นออปีเลียนกรุป

ตัวอย่าง 5 พิจารณากรุป  $G = \{1,3,7,9\}$  ,  $\otimes$

จากตาราง

จะเห็นได้ว่า ตารางสมมาตรกับ main diagonal  
ดังนั้น  $G, \otimes$  เป็นออปีเลียนกรุป

|           |   |   |   |   |
|-----------|---|---|---|---|
| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 1         |   | 3 | 7 | 9 |
| 3         | 3 |   | 1 | 7 |
| 7         | 7 | 1 |   | 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 |   |

ตัวอย่าง 6 จงตรวจสอบดูว่า กรุป  $A = \{a, b, c, x, y, z\}$ ,  $\Delta$  เป็นอับเลียนกรุปหรือไม่

| $\Delta$ | a | b | c | x | y | z |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | x | y | z |
| b        | b | c | a | y | z | x |
| c        | c | a | b | z | x | y |
| x        | x | z | y | a | c | b |
| y        | y | x | z | b | a | c |
| z        | z | y | x | c | b | a |

จะเห็นว่า ตารางไม่สมมาตรกับเส้นทะแยง  
ดังนั้น  $A, \Delta$  ไม่เป็นอับเลียนกรุป.

บทที่ 10

สับกรุป (Subgroup)  
( 1 ชั่วโมง )

พิจารณากรุป  $S = \{0, 1, 2\}$ ,  $\oplus$  จากตาราง

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|----------|---|---|---|
| 0        | 0 | 1 | 2 |
| 1        | 1 | 2 | 0 |
| 2        | 2 | 0 | 1 |

เราทราบว่าสับเซตของ  $S$  ได้แก่  $\{\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$  และ  $\{0, 1, 2\}$  จะเห็นได้ว่า

$\{\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะไม่มีสมาชิก  
 $\{0\}$ ,  $\oplus$  เป็นกรุป  
 $\{1\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะขาดคุณสมบัติปิด

| $\oplus$ | 0 |
|----------|---|
| 0        | 0 |
| $\oplus$ | 1 |
| 1        | 2 |

$\{2\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะขาดคุณสมบัติปิด

| $\oplus$ | 2 |
|----------|---|
| 2        | 1 |

$\{0,1\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะขาดคุณสมบัติปิด

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| 0        | 0 | 1 |
| 1        | 1 | 2 |

$\{0,2\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะขาดคุณสมบัติปิด

| $\oplus$ | 0 | 2 |
|----------|---|---|
| 0        | 0 | 2 |
| 2        | 2 | 1 |

$\{1,2\}$ ,  $\oplus$  ไม่เป็นกรุป เพราะขาดคุณสมบัติปิด

| $\oplus$ | 1 | 2 |
|----------|---|---|
| 1        | 2 | 0 |
| 2        | 0 | 1 |

$\{0,1,2\}$ ,  $\oplus$  เป็นกรุป ตามที่โจทย์กำหนดให้

จะเห็นว่าสับเซตของกรุป  $S$  ที่มีคุณสมบัติเป็นกรุปได้แก่  $\{0\}$  และ  $\{0,1,2\}$

เราเรียกสับเซตเหล่านี้ว่า "สับกรุป" ของ  $S$

ดังนั้น สับกรุป ก็คือ สับเซตของกรุป ที่มีคุณสมบัติเป็นกรุป เมื่อเทียบกับโอเปอเรชันเดียวกัน

นั่นคือ  $G'$  จะเรียกว่าเป็น "สับกรุป" ของกรุป  $G$ , \* ก็ต่อเมื่อ

$$1. G' \subseteq G$$

และ 2.  $G', *$  เป็นกรุป

ตัวอย่าง 1 กำหนด ตารางโอเปอเรชัน  $*$  สำหรับ  $K = \{e, a, b, c\}$  เป็นดังนี้

| $*$ | e | a | b | c |
|-----|---|---|---|---|
| e   | e | a | b | c |
| a   | a | e | c | b |
| b   | b | c | e | a |
| c   | c | b | a | e |

| $*$ | e | b |
|-----|---|---|
| e   | e | b |
| b   | b | e |

จงหาสับกรุปของ  $K$  มาทั้งหมด

สับเซตทั้งหมดของ  $K$  ได้แก่  $\{\}, \{e\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{e, a, b\}, \{e, b, c\}, \{a, b, c\}, \{e, a, c\}$  และ  $\{e, a, b, c\}$   
 แต่สับเซตของ  $K$  ที่เป็นกรุป ได้แก่  $\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$  และ  $\{e, a, b, c\}$

ดังนั้นสับกรุปของ  $K$  มีทั้งหมด 5 สับกรุป คือ  $\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}$  และ  $\{e, a, b, c\}$

ตัวอย่าง 2 จงหาสับกรุปของกรุป  $A = \{a, b, c, x, y, z\}$ ,  $\Delta$  ดังแสดงในตาราง

| $\Delta$ | a | b | c | x | y | z |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | x | y | z |
| b        | b | c | a | y | z | x |
| c        | c | a | b | z | x | y |
| x        | x | z | y | a | c | b |
| y        | y | x | z | b | a | c |
| z        | z | y | x | c | a | b |

สับกรุปของ  $A$  ได้แก่  $\{a\}, \{a, z\}, \{a, y\}, \{a, x\}, \{a, b, c\}$  และ  $\{a, b, c, x, y, z\}$

บทที่ 11

### ไซคลิกกรุป

( 2 ชั่วโมง )

นิยาม  $a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_{n \text{ ตัว}}$  (มี  $a$  อยู่  $n$  ตัว)

เช่น  $1^3$  เมื่อโอเปอเรชันคือการบวก หมายถึง  $1 + 1 + 1 = 3$

$1^3$  เมื่อโอเปอเรชันคือการคูณ หมายถึง  $1 \times 1 \times 1 = 1$

$2^5$  เมื่อโอเปอเรชันคือการบวก หมายถึง  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

$2^5$  เมื่อโอเปอเรชันคือการคูณ หมายถึง  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

พิจารณา กรุป  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $\oplus$  ดังตาราง

| $\oplus$ | 1 | 2 | 3 |
|----------|---|---|---|
| 1        | 2 | 3 | 1 |
| 2        | 3 | 1 | 2 |
| 3        | 1 | 2 | 3 |

จากตาราง

$$2^2 = 2 \oplus 2 = 1$$

$$2^3 = (2 \oplus 2) \oplus 2 = 2^2 \oplus 2 = 1 \oplus 2 = 3$$

$$2^4 = (2 \oplus 2 \oplus 2) \oplus 2 = 2^3 \oplus 2 = 3 \oplus 2 = 2$$

$$2^5 = (2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2) \oplus 2 = 2^4 \oplus 2 = 2 \oplus 2 = 1$$

$$2^6 = (2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2) \oplus 2 = 2^5 \oplus 2 = 1 \oplus 2 = 3$$

$$2^7 = (2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2) \oplus 2 = 2^6 \oplus 2 = 3 \oplus 2 = 2$$

ฯลฯ

จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของ  $A$  สามารถเขียนอยู่ในรูป  $2^n$  ได้ กล่าวคือ

$$1 = 2^2 \text{ หรือ } 2^5 \text{ หรือ } 2^8 \text{ ฯลฯ}$$

$$2 = 2^4 \text{ หรือ } 2^7 \text{ หรือ } 2^{10} \text{ ฯลฯ}$$

$$3 = 2^3 \text{ หรือ } 2^6 \text{ หรือ } 2^9 \text{ ฯลฯ}$$

เราเรียกกลุ่มที่มีคุณสมบัติเช่นนี้ว่า "ไซคลิกกรุป" และเรียก 2 ว่า "เจนเนอเรเตอร์" (Generator) ดังนั้น  $A, \oplus$  จึงเป็นไซคลิกกรุป โดยมี 2 เป็นเจนเนอเรเตอร์

นั่นคือ  $C, *$  จะเรียกว่า "ไซคลิกกรุป" ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวสามารถเขียนอยู่ในรูปของ  $a^n$  - เมื่อ  $a^n = a * a * a * \dots * a$  (มี  $a$  อยู่  $n$  ตัว) และ  $a \in C$

ในไซคลิกกรุปหนึ่ง ๆ อาจจะมีเจนเนอเรเตอร์หลายตัวก็ได้ ลองพิจารณากรุป  $A$  ว่าจะมีเจนเนอเรเตอร์อีกหรือไม่

$$1^2 = 1 \oplus 1 = 2$$

$$1^3 = 1^2 \oplus 1 = 2 \oplus 1 = 3$$

$$1^4 = 1^3 \oplus 1 = 3 \oplus 1 = 1$$

จะเห็นได้ว่า สมาชิกทุกตัวของ  $A$  สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ  $1^n$  ได้ ดังนั้น 1 จึงเป็นเจนเนอเรเตอร์ตัวหนึ่ง

$$3^2 = 3 \oplus 3 = 3$$

$$3^3 = 3^2 \oplus 3 = 3 \oplus 3 = 3$$

$$3^4 = 3^3 \oplus 3 = 3 \oplus 3 = 3$$

$$3^5 = 3^4 \oplus 3 = 3 \oplus 3 = 3$$

จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวของ  $A$  ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปของ  $3^n$  ได้ ดังนั้น 3 จึงไม่เป็นเจนเนอเรเตอร์

~~\*~~ เราอาจจะตั้งข้อสังเกตได้ว่า สมาชิกเอกลักษณ์จะไม่เป็นเจนเนอเรเตอร์

ตัวอย่าง 1 จงสำรวจว่ากรุป  $B = \{1, 3, 7, 9\}, \otimes$  เป็นไซคลิกกรุปหรือไม่

| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|-----------|---|---|---|---|
| 1         | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3         | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7         | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 | 1 |

พิจารณา

$$3^2 = 3 \otimes 3 = 9$$

$$7^2 = 7 \otimes 7 = 9$$

$$9^2 = 9 \otimes 9 = 1$$

$$3^3 = 3^2 \otimes 3 = 9 \otimes 3 = 7$$

$$7^3 = 7^2 \otimes 7 = 9 \otimes 7 = 3$$

$$9^3 = 9^2 \otimes 9 = 1 \otimes 9 = 9$$

$$3^4 = 3^3 \otimes 3 = 7 \otimes 3 = 1$$

$$7^4 = 7^3 \otimes 7 = 3 \otimes 7 = 1$$

$$9^4 = 9^3 \otimes 9 = 9 \otimes 9 = 1$$

$$3^5 = 3^4 \otimes 3 = 1 \otimes 3 = 3$$

$$7^5 = 7^4 \otimes 7 = 1 \otimes 7 = 7$$

$$9^5 = 9^4 \otimes 9 = 1 \otimes 9 = 9$$

ดังนั้น  $B, \otimes$  เป็นไซคลิกกรุป โดยมี 3 และ 7 เป็นเจนเนอเรเตอร์

ตัวอย่าง 2 จงสำรวจว่ากรุป  $K = \{e, a, b, c\}$ ,  $*$  เป็นไซคลิกกรุปหรือไม่

| $*$ | e | a | b | c |
|-----|---|---|---|---|
| e   | e | a | b | c |
| a   | a | e | c | b |
| b   | b | c | e | a |
| c   | c | b | a | e |

พิจารณา

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a * a = e$$

$$a^3 = a^2 * a = e * a = a$$

$$a^4 = a^3 * a = a * a = e$$

จะเห็นว่า สมาชิกทุกตัวไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ  $a^n$  ได้

ดังนั้น  $a$  จึงไม่เป็นเจนเนอเรเตอร์ ในทำนองเดียวกัน เราสามารถ

แสดงให้เห็นได้ว่า  $e, b$  และ  $c$  ก็ไม่เป็นเจนเนอเรเตอร์

นั่นคือ  $K, *$  ไม่เป็นไซคลิกกรุป

## บทที่ 12

## ไอโซมอร์ฟิซึม (Isomorphism)

( 2 ชั่วโมง )

พิจารณากรุป 2 กรุป ดังต่อไปนี้

| + | e | o |
|---|---|---|
| e | e | o |
| o | o | e |

ตาราง 1

และ

| $\oplus$ | a | b |
|----------|---|---|
| a        | a | b |
| b        | b | a |

ตาราง 2

ลองเปรียบเทียบตารางทั้งสองนี้ จะเห็นว่าเหมือนกัน ต่างกันเฉพาะตัวอักษรและ  
 โอเปอเรชันเท่านั้น ถ้าเราแทน e ด้วย a  
 แทน o ด้วย b  
 และ แทน + ด้วย  $\oplus$  ในตาราง 1 จะได้

| $\oplus$ | a | b |
|----------|---|---|
| a        | a | b |
| b        | b | a |

จะเห็นว่าเหมือนกับตาราง 2 ทุกประการ กรุปที่มีรูป (Form) เหมือนกันเช่นนี้เราเรียกว่า  
 "ไอโซมอร์ฟิก" หรือ "กรุปทั้งสองนี้ไอโซมอร์ฟิกกัน"

ตัวอย่าง 1 จงสำรวจว่า กรุปดังแสดงในตารางต่อไปนี้ไอโซมอร์ฟิกกันหรือไม่

| $\cdot$ | 0 | 1 | 2 |
|---------|---|---|---|
| 0       | 0 | 1 | 2 |
| 1       | 1 | 2 | 0 |
| 2       | 2 | 0 | 1 |

| $\odot$ | l | m | n |
|---------|---|---|---|
| l       | l | m | n |
| m       | m | n | l |
| n       | n | l | m |

ลองแทนสิ่งดังต่อไปนี้ ลงในตารางแรก

แทน ๐ ด้วย

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 1 |   |   |
| 1 | 1 |   |   |
|   |   |   | 1 |
|   |   | 1 |   |

แทน 1 ด้วย m

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 1 | m |   |
| 1 | 1 | m |   |
| m | m |   | 1 |
|   |   | 1 | m |

แทน 2 ด้วย n และแทน • ด้วย ๐

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| ๐ | 1 | m | n |
| 1 | 1 | m | n |
| m | m | n | 1 |
| n | n | 1 | m |

จะเห็นว่าเหมือนกับตารางหลังทุกประการ แสดงว่ากรุปทั้งสองนี้ไอโซมอร์ฟิกกัน

ตัวอย่าง 2 จงสำรวจว่า กรุปทั้งสองในตารางต่อไปนี้ ไอโซมอร์ฟิกกันหรือไม่

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| * | e | a | b | c |
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| (*) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1   | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 2   | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 3   | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 4   | 1 | 2 | 3 | 4 |

ตาราง 1

ตาราง 2

แทน e ด้วย 1

แทน a ด้วย 2

แทน b ด้วย 3

แทน c ด้วย 4

และแทน \* ด้วย (๖) ในตาราง 1 จะได้

จะเห็นว่าตารางที่ได้ ไม่เหมือนกับตาราง 2

ดังนั้น กรุปทั้งสองนี้จึงไม่ไอโซมอร์ฟิกกัน

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| (๖) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1   | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2   | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3   | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4   | 4 | 3 | 2 | 1 |

เรามีวิธีที่จะตรวจสอบว่า กรุป 2 กรุป ไอโซมอร์ฟิกหรือไม่อีกวิธีหนึ่ง ก็จะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3 พิจารณากรุป 2 กรุป ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

| $\odot$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|---------|---|---|---|---|
| 1       | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3       | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7       | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9       | 9 | 7 | 3 | 1 |

ตาราง 1

| $\oplus$ | a | b | c | d |
|----------|---|---|---|---|
| a        | a | b | c | d |
| b        | b | c | d | a |
| c        | c | d | a | b |
| d        | d | a | b | c |

ตาราง 2

ดูที่ตาราง 1 จะเห็นว่า 1 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และมี 1 ปรากฏอยู่ในช่องผลลัพธ์ 4 ตัว คือที่เป็นผลลัพธ์ของ  $1 \odot 1$ ,  $7 \odot 3$ ,  $3 \odot 7$  และ  $9 \odot 9$

ดูตาราง 2 จะเห็นว่า a เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ และมี a ปรากฏอยู่ในช่องผลลัพธ์ 4 ตัว คือที่เป็นผลลัพธ์ของ  $a \oplus a$ ,  $d \oplus b$ ,  $c \oplus c$  และ  $b \oplus d$

1 และ a ต่างก็เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ ดังนั้น 1 สมัยกับ a เขียนแทนด้วย  $1 \leftrightarrow a$   
 อินเวอร์สของ 9 คือ 9 และอินเวอร์สของ c คือ c ดังนั้น 9 สมัยกับ c  
 หรือ  $9 \leftrightarrow c$

3 กับ 7 เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน และ b กับ d เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกัน ดังนั้น 3 สมัยกับ b หรือ  $3 \leftrightarrow b$  และ 7 สมัยกับ d หรือ  $7 \leftrightarrow d$  (หรือ  $3 \leftrightarrow d$  และ  $7 \leftrightarrow b$ )

ลองเรียงสมาชิกของกรุปในตาราง ที่สมัยกันแต่ละตัวให้อยู่ในลำดับเดียวกัน โดยยึดการเรียงลำดับสมาชิกในตาราง 1 เป็นหลัก นั่นคือต้องเรียงลำดับสมาชิกในตาราง 2 เป็น a, b, d และ c ดังนั้นจะได้ตาราง 2 ใหม่ ดังนี้

$$f(a) = \bar{e}$$

$$f(a^{-1}) = \overline{f(a)}_{86}$$

| $\oplus$ | a | b | d | c |
|----------|---|---|---|---|
| a        | a | b | d | c |
| b        | b | c | a | d |
| d        | d | a | c | b |
| c        | c | d | b | a |

ลองแทน a ด้วย 1

แทน b ด้วย 3

แทน d ด้วย 7

แทน c ด้วย 9

และแทน  $\oplus$  ด้วย  $\otimes$  ในตาราง 3

| $\otimes$ | 1 | 3 | 7 | 9 |
|-----------|---|---|---|---|
| 1         | 1 | 3 | 7 | 9 |
| 3         | 3 | 9 | 1 | 7 |
| 7         | 7 | 1 | 9 | 3 |
| 9         | 9 | 7 | 3 | 1 |

ตาราง 3 จะได้

จะเห็นว่า ผลที่ได้เหมือนกับตาราง 1 ทุกประการ แสดงว่ากลุ่มทั้งสองนี้ ไอโซมอร์ฟิกกัน  
 ดังนั้น ถ้าสมาชิกของสองกรุปใด ๆ ทุกตัว สมัยกันแล้ว เราสามารถโต้แย้งได้ว่า กลุ่ม  
 ทั้งสองนั้นไอโซมอร์ฟิกกัน โดยที่เราไม่จำเป็นต้องแทนที่สมาชิกของกรุปใดกรุปหนึ่ง ด้วยสมาชิก  
 ของอีกกรุปหนึ่ง ในตาราง

ตัวอย่าง 4 กรุปทั้งสองในตารางข้างล่างนี้สมัยกันหรือไม่

| $\times$ | 1   | i   | -1  | -i  |
|----------|-----|-----|-----|-----|
| 1        | (1) | i   | -1  | -i  |
| i        | i   | -1  | -i  | (1) |
| -1       | -1  | -i  | (1) | i   |
| -i       | -i  | (1) | i   | -1  |

และ

| $\vee$ | w   | x   | y   | z   |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| w      | (w) | x   | y   | z   |
| x      | x   | y   | z   | (w) |
| y      | y   | z   | (w) | x   |
| z      | z   | (w) | x   | y   |

ตาราง 1

สมาชิกเอกลักษณ์คือ 1

$$1 \times 1 = 1$$

$$-1 \times i = 1$$

$$-1 \times (-1) = 1$$

$$i \times (-i) = 1$$

ตาราง 2

สมาชิกเอกลักษณ์คือ w

$$w \vee w = w$$

$$z \vee x = w$$

$$y \vee y = w$$

$$x \vee z = w$$

ดังนั้น  $1 \leftrightarrow w, -1 \leftrightarrow z, 1 \leftrightarrow x$  และ  $-1 \leftrightarrow y$  นั้นแสดงว่ากรุปทั้งสองนี้  
ไอโซมอร์ฟิกกัน

ตัวอย่าง 5 จงสำรวจว่ากรุปที่แสดงในตารางต่อไปนี้ไอโซมอร์ฟิกกันหรือไม่

| $\otimes$ | ก | ข | ค | ง |
|-----------|---|---|---|---|
| ก         | ค | ง | ก | ข |
| ข         | ง | ค | ข | ก |
| ค         | ก | ข | ค | ง |
| ง         | ข | ก | ง | ค |

และ

| $\otimes$ | k | l | m | n |
|-----------|---|---|---|---|
| k         | k | l | m | n |
| l         | l | m | n | k |
| m         | m | n | k | l |
| n         | n | k | l | m |

ตาราง 1

สมาชิกเอกลักษณ์คือ ค.

$$ค * ค = ค$$

$$ก * ก = ค$$

$$ข * ข = ค$$

$$ง * ง = ค$$

ตาราง 2

สมาชิกเอกลักษณ์คือ k

$$k \otimes k = k$$

$$n \otimes l = k$$

$$m \otimes m = k$$

$$l \otimes n = k$$

จะได้

$$ค \leftrightarrow k$$

$$ค \leftrightarrow m$$

แต่สมาชิกที่เหลือไม่สมนัยกัน

ดังนั้น กรุปทั้งสองนี้จึงไม่ ไอโซมอร์ฟิกกัน