

กิด 23
5/0.11
26/11/11
3.5

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนิสิต ระดับปริญญาตรี ปีที่ 1
เรื่องเซต และระบบจำนวน โดยการสอนที่เน้น
การยกตัวอย่างคำาน กับ การสอนปกติ

ปริญญาโท

ของ

นวัตน์ ศุภสินธุ์

๕1 พ.ค. 2535

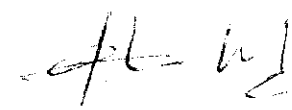
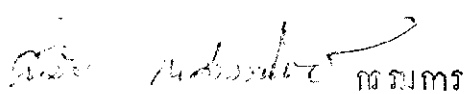
เสนอขอมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้า
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
พุทธาพันธ์ 2525

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

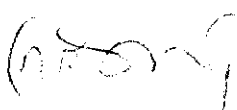
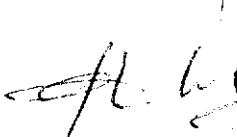
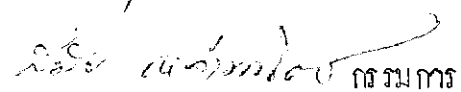
177959

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำวันนี้ และคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานพนธ์
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตรปริญญาการศึกษาหาบัณฑิต
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

 ประธาน
 กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

 ประธาน
 กรรมการ
 กรรมการ

ประกาศนุญการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำบางสิ่งจาก
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุเทพ ทองอัญ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สมัย เหล่าวานิชย์
ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ บุญมา จาริก อาจารย์พิพัทธม เหล่าวานิชย์
และ อาจารย์สุณี เสงี่ยมศักดิ์ ที่กรุณาให้ความร่วมมือในการดำเนินการวิจัย และ
อาจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาทางเทคนิคที่ใช้ในการวิจัย

ท้ายสุด ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณถึงพระคุณของบิดาและมารดา ที่ได้อบรมเลี้ยงดู
ให้ความอุปการะทั้งในทางกำลังใจ และกำลังทรัพย์ สืบเนื่องการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา
พระคุณหาที่เปรียบมิได้.

นาวีตา ฤกษ์พันธุ์

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	3
	ขอบเขตของการวิจัย	3
	นิยามศัพท์เฉพาะ	3
	สมมติฐานของการวิจัย	4
2	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	5
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการบอกตัวอย่างงาน	5
	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎี	8
3	วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	14
	กลุ่มตัวอย่าง	14
	เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	14
	วิธีดำเนินการทดลอง	16
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	17
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	19

บทที่	หน้า
5	
สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	22
ความมุ่งหมายของการวิจัย	22
สมมติฐานของการวิจัย	22
วิธีดำเนินการ	22
สรุปผลการวิจัย	23
อภิปรายผล	23
ข้อเสนอแนะ	24
บรรณานุกรม	25
ภาคผนวก	30

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	กะเนนเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 1 และ กลุ่มทดลองที่ 2	19
2	ค่าสถิติ F สำหรับค่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 1 และ กลุ่มทดลองที่ 2	20
3	ค่าสถิติ t สำหรับกะเนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 1 และ กลุ่มทดลองที่ 2	21

บทนำ

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในวงการธุรกิจ อุตสาหกรรม การปกครอง วิทยาศาสตร์ จิตวิทยา ตลอดจนสังคมวิทยา ซึ่งวงการต่าง ๆ เหล่านี้ของอาศัยหลักทางคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น นอกจากนั้นคณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาบุคคลให้เป็นคนรู้จักคิด มีเหตุผล มีความสามารถในการแก้ปัญหา ในประเทศไทยคณิตศาสตร์ถูกจัดไว้ในหลักสูตรทุกระดับชั้น ตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาจนถึงอุดมศึกษา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ก่อให้เกิดสมรรถภาพทางสมองสูงกว่าสมรรถภาพในการจำ ครูคณิตศาสตร์จึงต้องหาวิธีสอนที่จะช่วยนักเรียนให้เรียนด้วยความเข้าใจและมีเหตุผล โดยธรรมชาติแล้วลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ค่อนข้างจะเป็นนามธรรม จึงทำให้นักเรียนเกิดความวิตกกังวลและขาดความมั่นใจในวิชาคณิตศาสตร์ เป็นสำคัญ (จินนากา สัมบุต 2512 : 2) ครูคณิตศาสตร์ที่ระมัดระวังในการสอนคณิตศาสตร์ จำเป็นที่จะต้องหาวิธีการต่าง ๆ มาใช้ในการอธิบายเนื้อหาวิชา เพื่อให้ นักเรียนสามารถทำความเข้าใจเนื้อหาวิชาได้อย่างรวดเร็ว วิธีการหนึ่งซึ่งนิยมกันมาก คือการยกตัวอย่าง ตัวอย่างที่ครูผู้สอนใช้ในการอธิบายนั้นมีทั้งตัวอย่างที่ใช้เพื่อให้เกิดความเข้าใจในความวิตกกังวลนั้น ตัวอย่างที่ชวนให้สงสัยหรือการนำไปใช้ และตัวอย่างค้าน (Counter example) (Gelbaum and Olmsted, 1964 : unpages) ผู้วิจัยมีความเห็นว่า การสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้าน จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ มีเหตุผล และการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยยังไม่ไ้เน้นเรื่องนี้เท่าที่ควร

การยกตัวอย่างค้าน เป็นการพิสูจน์หนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์คือ พิสูจน์ข้อความ เป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างที่ค้านข้อความนั้น การยกตัวอย่างค้านจะช่วยให้ผู้เรียนทำความเข้าใจทฤษฎีได้ยิ่งขึ้น เช่น ในทฤษฎีจำนวน มีทฤษฎีหนึ่งซึ่งมีข้อความว่า "ถ้า a เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า a^2 เป็นจำนวนคู่" แต่ทฤษฎีของทฤษฎีนี้คือ "ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่

แล้ว a เป็นจำนวนคู่ เป็นเท็จ ซึ่งสามารถจะแสดงได้ด้วยการยกตัวอย่างค้าน คือ $(\sqrt{2})^2 = 2$ เป็นจำนวนคู่ แต่ $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนคู่ จากตัวอย่างของทฤษฎีนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขบางประการคือ "กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม" จะทำให้บทกลับของทฤษฎีนี้เป็นจริง (สุเทพ จันทรมศักดิ์ 2521 : 85) ดังนั้น จะเห็นว่าเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ มีความสำคัญมาก การที่เรานำนิยามหรือทฤษฎีต่าง ๆ ไปใช้ ควรจะระวังในเรื่องเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎีว่าจะสามารถนำไปใช้ได้กรณีใดบ้าง หรือใช้ไม่ได้ในกรณีใด ตัวอย่างเช่น คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณในทฤษฎีจำนวน มีข้อความว่า "ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $ab = ac$ จะได้ว่า $b = c$ " ซึ่งบางครั้งการนำเอาคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณไปใช้ ผู้ใช้มักเผลอที่จะวางคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณจะใช้ได้ ก็ต่อเมื่อ $a \neq 0$ เช่นตัวอย่างต่อไปนี้

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$x(x - x) = (x + x)(x - x)$$

$$(1) \dots\dots\dots x = x + x$$

โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับ

การคูณ

$$x = 2x$$

$$(2) \dots\dots\dots 1 = 2$$

โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับ

การคูณ

(สุเทพ จันทรมศักดิ์ 2517 : 58) ซึ่งถ้าพิจารณาให้ถี่ถ้วน (1) และ (2) ผู้ใช้เห็นว่าคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณมาใช้ โดยมีเงื่อนไขว่า $x - x$ หรือ x อาจจะเท่ากับศูนย์ ทำให้สามารถแสดงได้ว่า $1 = 2$ ทั้งที่ความจริงแล้วเลขสองจำนวนนั้นไม่เท่ากัน จากที่กล่าวมาทั้งหมด การยกตัวอย่างค้านมีความสำคัญยิ่งในการ เรียนการสอนคณิตศาสตร์ และการยกตัวอย่างค้านจะต้องพิจารณาเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎี โดยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยมีความประสงค์ที่จะศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับปริญญาตรี ที่เรียนจากการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างค้าน กับการสอนปกติ ว่าจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียนแตกต่างกันหรือไม่

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เซต และระบบจำนวนของนิสิตระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 จากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างควบคู่กับการสอนปกติ
2. เพื่อสร้างแบบเรียนเรื่อง เซตและระบบจำนวนที่เน้นในเรื่องการยกตัวอย่างควบคู่

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแนะแนวทางในการปรับปรุงการเรียน การสอนวิชาคณิตศาสตร์
2. เพื่อส่งเสริมให้ยูเรียนคณิตศาสตร์ เรียนด้วยความเข้าใจ มีเหตุผล และมีความรอบคอบ ระมัดระวัง
3. เพื่อเป็นข้อเสนอแนะในการปรับปรุงหลักสูตร และตำราเรียนคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ทำการทดลองกับนิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2524 และเนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง คือ เซต และระบบจำนวน ตามหลักสูตร คณิต. 101 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การยกตัวอย่างควบคู่ หมายถึง การพิสูจน์ว่าขอความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างที่แสดงว่าขอความนั้นเป็นเท็จ
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. นิสิต หมายถึง นิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนคณิต. 101 ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2524
4. คณิต.101 หมายถึง วิชาคณิตศาสตร์ เบื้องต้น หลักสูตรมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปีการศึกษา 2524

สมมติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างคำ กับ
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนปกติ ในเรื่องเพศ และระบบจำนวน
ไม่แตกต่างกัน.

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เนื่องจากข้อความเป็นที่พบเห็นสำคัญในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่สัมพันธ์กับใจของนิยามและทฤษฎีอย่างใกล้ชิด การสอนที่เน้นการยกตัวอย่างความจริงในเกี่ยวกับเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎี โดยแท้จริงแล้วมีหน้าที่สำคัญคือการหาความระมัดระวังในการใช้นิยามและทฤษฎี ส่วนการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างความเป็นวิธีที่จะแก้ปัญหาที่ถึงนี้จึงควรพิจารณาเกี่ยวกับเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎีควบคู่กับการยกตัวอย่าง

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการยกตัวอย่าง

เกอแบม และ โอลิสเตด กล่าวว่า การศึกษาในคณิตศาสตร์จะมี 2 ลักษณะใหญ่ ๆ คือ การศึกษาเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นจริงกับการศึกษาเกี่ยวกับการยกตัวอย่าง ยกตัวอย่างในทางคณิตศาสตร์มี 2 แบบคือ ตัวอย่างที่อธิบาย (Illustrative examples) และตัวอย่างค้าน (Counter examples) เขาเห็นว่ากรยกตัวอย่างค้านเป็นวิธีที่สำคัญและจำเป็น เพราะปัญหาทางคณิตศาสตร์บางปัญหาไม่สามารถแก้ได้โดยการพิสูจน์ ต้องใช้การยกตัวอย่างค้าน (Gelbaum and Olmsted, 1964 : unpages)

ซูเปส กล่าวว่า ความสามารถในการยกตัวอย่างมีความสำคัญเท่า ๆ กับความสามารถในการพิสูจน์ว่า การให้เหตุผลนั้นในสมเหตุสมผล และให้ความหมายของคำว่า "การให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล" ทั้งนี้ การให้เหตุผลจะไม่สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ มีวิธีแสดงได้ว่า สมมติฐานเป็นจริง แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ (Suppes, 1957 : 69)

ไวทซิตต์ กล่าวว่า การพิสูจน์กฎการสลับ กฎการจัดหมู่ หรือกฎการกระจาย เป็นจริงสำหรับการดำเนินการบนเซต จำเป็นจะต้องพิสูจน์ว่าเป็นจริงสำหรับสมาชิกทุกตัวในเซต ส่วนการพิสูจน์ว่ากฎใดกฎหนึ่งไม่จริง ต้องยกตัวอย่างให้เห็นว่ากฎนั้นไม่จริงอย่างน้อยหนึ่งกรณี วิธีการพิสูจน์แบบนี้เรียกว่า การยกตัวอย่างค้าน (Whitesitt, 1964 : 22)

ฮอลล์ กล่าวว่า ถ้าข้อความซึ่งดูเหมือนว่าจริง แต่ความจริงแล้วข้อความนี้เป็นเท็จ จิตที่คล่องแคล่วในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ ก็คือการหาตัวอย่างซึ่งแสดงว่า

ข้อความนั้นเป็นเท็จ ตัวอย่างที่หาได้เร็วกว่าตัวอย่างค้าน ฮอลล์ โยบทัวอย่างคอนเจกเจอร์ (Conjecture) ของแฟร์มาท ซึ่งมีข้อความว่า " $2^{2^n} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับจำนวนเต็ม n ทุกตัว" แฟร์มาทเชื่อว่าข้อความนี้เป็นจริง แต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ ต่อมาในปี ค.ศ. 1732 ออยเลอร์ โยบทัวอย่างค้าน โดยแสดงว่า กรณีที่ $n = 5$, $2^{2^5} + 1$ เป็นจำนวนคอมโพสิทไม่ใช่จำนวนเฉพาะ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าคอนเจกเจอร์ของแฟร์มาทเป็นเท็จ และฮอลล์โยบทัวอย่างคอมพิวเกี่ยวกับอนุกรมของจำนวนจริงซึ่งมีข้อความว่า "ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว a_n จะลู่เข้าสู่อะไร" แทนที่ฮอลล์โยบทัวอย่างค้านข้อความว่า "ถ้า a_n ลู่เข้าสู่อะไรแล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้า" เป็นเท็จ โยบทัวอย่างค้านของฮอลล์โยบทัวอย่างค้านว่า ถ้า $a_n = \frac{1}{n}$ จะได้ว่า a_n ลู่เข้าสู่อะไร และอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ไม่ลู่เข้า ฮอลล์สรุปว่า ตัวอย่างค้านสามารถแก้ปัญหาที่สำคัญ ๆ ในคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก (Hall, 1972 : 6)

สตีเวน และ ซีบาช กล่าวไว้ว่า การค้นพบตัวอย่างค้านเป็นสิ่งสำคัญและเป็นการกระทำที่มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างค้านจะสามารถช่วยแก้ปัญหาคอนเจกเจอร์ที่สำคัญ ๆ ได้ ประโยชน์ของตัวอย่างค้านจะช่วยให้มีความระมัดระวังในการที่จะสรุปข้อความว่าเป็นจริงโดยที่ตัวอย่างค้านมีอยู่มาก ๆ เพราะในบางครั้งข้อความบางข้อความถึงแม้จะมีตัวอย่างสนับสนุนมาก ๆ แล้วข้อความนั้นอาจเป็นเท็จ (Steen and Seebach, 1970 : wpages)

ดี เซ็คโค ได้ให้คำอธิบายในการสอนเพื่อให้เด็กไม่รู้สึกว่า การจะได้การยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งตัวอย่างนั้นจะมีทั้งตัวอย่างที่ถูกและตัวอย่างที่ผิดควบคู่กันไป จะได้ลดความรู้สึกว่าตัวอย่างที่ถูกอย่างเดียว หรือตัวอย่างที่ผิดอย่างเดียว (De Cecco, 1968 : 407)

เกจ ได้ศึกษาถึงผลของตัวอย่างถูกและตัวอย่างผิดต่อการเรียนรู้ในมิติระหว่างกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม โดยให้กลุ่มหนึ่งได้รับแต่ตัวอย่างถูก และอีกกลุ่มหนึ่งได้รับทั้งตัวอย่างถูกและตัวอย่างผิด ผลปรากฏว่านักเรียนที่ได้รับทั้งตัวอย่างถูกและตัวอย่างผิดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่านักเรียนที่ได้รับตัวอย่างถูกเพียงอย่างเดียว อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติระดับ .05 (Gage, 1977 : 4929)

ฮาคี เมืองนาโพรี และ ฮันนิบเล ปาเนลลอส กล่าวว่า การพิสูจน์ว่าประพจน์

บางอย่างเป็นเท็จ กระทำได้โดยพิสูจน์ว่า นิเสธของประพจน์นั้นเป็นจริง ซึ่งส่วนใหญ่เราใช้กับประพจน์ที่อยู่ในรูป $\forall x [Px]$ การพิสูจน์ว่า $\forall x [Px]$ เป็นเท็จกระทำได้โดยหาตัวอย่างสิ่งจริงในเอกภพที่ขัดแย้งเพียงตัวเดียวแทนตัวแปร แล้วทำให้ Px เป็นเท็จ การพิสูจน์แบบนี้เรียกว่า "Disproof by counter example" เช่น จงพิสูจน์ว่า " $\forall x \forall y [x \neq y]$ " เป็นเท็จ (เอกภพที่ขัดแย้ง : เลขจำนวนเต็ม) ให้ $x = 2, y = 2$ เป็นตัวอย่างค้าน จะได้ $x = y$ ดังนั้น ประพจน์นี้เป็นเท็จ (ชาติ เมืองนาโพธิ์ และ ชัยวัฒน์ ปานพลอย 2507 : 112 - 113)

ฌอร์ บันทึบย ก้าวว่า จากข้อโต้แย้งที่กล่าวเหนือให้ ถ้าสามารถหาประพจน์มาแสดงให้เห็นว่า เหตุทั้งหมดของข้อโต้แย้งมีความจริงเป็นจริง และค่าความจริงของบทสรุปเป็นเท็จ แล้วประพจน์ที่แสดงในข้อนี้ เรียกว่า ตัวอย่างค้าน และจะสรุปได้ทันทีว่า ข้อโต้แย้งนี้เป็นข้อโต้แย้งที่ไม่สมเหตุสมผล (ฌอร์ บันทึบย 2521 : 130)

บุญมา จาริก กล่าวว่าการพิสูจน์โดยใช้ตัวอย่างค้าน ซึ่งเรียกว่าตัวอย่างค้าน การพิสูจน์ตามนัยใช้เพื่อแสดงว่า ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณชนิดตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (Universal quantifier) เป็นเท็จ เช่นจะพิสูจน์ประโยคในรูปแบบ $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$ เป็นเท็จพิจารณา จากเหตุผลต่อไปนี้ การที่จะแสดงว่า $\forall x (Px \Rightarrow Qx)$ เป็นเท็จ เหมือนกับแสดงว่า $\sim (\forall x) (Px \Rightarrow Qx)$ เป็นจริง นั่นคือ ต้องแสดงให้เห็นว่า $\exists x (Px \wedge \sim Qx)$ เป็นจริง เช่น พิสูจน์ว่า "สำหรับทุก x ถ้า $x^2 = 9$ แล้ว $x = 3$ " เป็นเท็จ พิสูจน์โดยใช้ตัวอย่างค้านเพื่อแสดงว่า มีบางค่าของ x ที่ $x^2 = 9$ และ $x \neq 3$ คือให้ $x = -3$ เพราะ $(-3)^2 = 9$ และ $-3 \neq 3$ ดังนั้นสรุปว่าประโยคนี้เป็นเท็จ (บุญมา จาริก 2522 : 106 - 107)

บังอร ภุมมขันธ์ขวัญ ได้ศึกษาดังอิทธิพลของตัวอย่างนิเสธ และตัวอย่างนิเสธ ที่ใช้ในการเรียนรู้สิ่งที่มีลักษณะ และสิ่งที่มีลักษณะ โดยให้นักเรียนที่มีชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนเสฉริก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 120 คน เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยแบ่งเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 30 คน ในกลุ่มตัวอย่าง กลุ่มที่ 1, กลุ่มที่ 2, กลุ่มที่ 3 และกลุ่มที่ 4 เรียนรู้สิ่งที่มีลักษณะ และสิ่งที่มีลักษณะ จากตัวอย่างนิเสธและตัวอย่างนิเสธ ด้วย

อัตราส่วน $100 : 0$, $75 : 25$, $50 : 50$ และ $25 : 75$ ตามลำดับ ผลการวิจัย
ปรากฏว่านักเรียนสามารถเรียนรู้สิ่งที่ประมวลและ และสิ่งที่แยกกันและด้วยตัวอย่างนิยาม และ
ตัวอย่างนี้แสดงในอัตราส่วนเดียวกันนี้โดยแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ ที่ระดับ $.01$ และนักเรียน
สามารถเรียนรู้สิ่งที่ประมวลและสิ่งที่แยกกันและจากตัวอย่างนิยาม และตัวอย่างนี้แสดง
ในอัตราส่วน $75 : 25$ ใกล้เคียงอัตราส่วนอื่น ๆ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ $.01$
(บังอร ภูวรินทร์ชัย 2518)

เกรียง อรรถวิเศษ ได้ศึกษาเปรียบเทียบแบบองค์รวมวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ โดยให้กลุ่มทดลองจำนวน
29 คน เรียนโดยให้ทั้งตัวอย่างถูกและตัวอย่างผิด ส่วนกลุ่มควบคุมจำนวน 29 คน เรียนโดย
ให้ตัวอย่างถูกอย่างเดียว ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มทดลอง และ
กลุ่มควบคุม ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ที่ระดับ $.01$ (เกรียง อรรถวิเศษ 2522)

บุญ ภูภูมิ ได้ศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยก
ตัวอย่างคำถามของปี 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษามัธยมศึกษา มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ พบว่า นิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่าง
คำถาม ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 (บุญ ภูภูมิ 2524)

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎี

ลาสเนอร์ และ นิวแมน กล่าวว่า คนจำนวนมากมักจะสับสนเกี่ยวกับการพิสูจน์ให้ $1 = 2$
และการพิสูจน์สองจำนวนใด ๆ ที่ไม่เท่ากันให้เท่ากัน เป็นผลเนื่องจากความผิดพลาดที่เกิดจาก
การเอาศูนย์ไปหาร ซึ่งเป็นเรื่องบกพร่อง และยังได้กล่าวว่า การนำเอากฎและคุณสมบัติของ
เลขคณิตจำกัด (Finite arithmetic) ไปใช้กับเลขคณิตเชิงอนันต์ (Transfinite
arithmetic) ขอบเขตในลักษณะที่กล่าวได้ เช่น $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots$
ถ้าจัดเทอมเสียใหม่ โดยใช้คุณสมบัติของเลขคณิตจำกัด เราจะได้ว่า

$$\text{Log } 2 = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \text{Log } 2 &= [(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \dots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots)] \\ &\quad - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots) \\ &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่จากการวางลอการิทึม จะได้ว่า $\text{Log } 2 = 0.69315$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$0 = \text{Log } 2 = 0.69315 \quad (\text{Kasner and Newman, 1955 : 208 - 211})$$

ข้อ: การวางของออยเลอร์ ในสูตรวันที่ 16 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นถึงการทำความเข้าใจหรือกฎโดยไม่ว่าสิ่งถึงมีมิติ และกฎต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมอนันต์ ออยเลอร์ได้ใช้ทฤษฎีบทที่นำมากระจาย $(1 - 2)^{-1}$ เขาจะได้ออกมาว่า

$$(1 - 2)^{-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots \quad \text{ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากผลบวกของจำนวนเต็มบวก ย่อมเท่ากับจำนวนเต็มบวก (Eves, 1964 : 360)}$$

ปีเตอร์สัน ได้กล่าวเตือนนักเรียนให้ระวังข้อผิดพลาดที่จะเกิดจากการนำเอากฎทางคณิตศาสตร์ที่เคยใช้ ไปใช้กับเนื้อหาที่ต่างออกไป โดยได้ยกตัวอย่างดังนี้

$$n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$n = 1 + (2 + 4 + 8 + 16 + \dots)$$

$$n = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + \dots)$$

$$n = 1 + 2n$$

$$\text{ดังนั้น } n = -1 \quad \text{ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากอนุกรม } 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

ไมรูเฮา ดังนั้นอนุกรมนี้ไม่มีผล (Peterson, 1972 : 709)

เคปเนอร์ กล่าวว่า ปัญหาที่สำคัญอย่างหนึ่งในการเรียนพีชคณิต คือการหาค่าของ $\sqrt{a^2}$ เป็นเท่าไร $\sqrt{2^2} = ?$ หรือ $\sqrt{(-2)^2} = ?$ คำตอบที่ถูกต้องคือ 2 นั่นคือ ถ้า $a \geq 0$ จะได้ว่า $\sqrt{a^2} = a$ และถ้า $a < 0$ จะได้ว่า $\sqrt{a^2} = -a$ แทนที่ค่าในจำกัความว่า $\sqrt{a^2} = |a|$ แต่จากการเรียนพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา หรือชั้นอุดมศึกษากลับ มักจะปลูกฝังความคิดอันไม่ถูกต้องให้แก่ผู้เรียน และเรื่องของการหาค่าของ $\sqrt{a^2}$ ก็เป็นเรื่องหนึ่งที่มีปัญหา เพราะในตำราเรียนก็ทิ้งหรือลงจากที่ครูสอนก็ มักจะเขียนหรือสอนโดยมิได้คำนึงถึงความถูกต้องในหลักทางคณิตศาสตร์ โดยมักจะทำให้ผู้เรียนเข้าใจว่า $\sqrt{a^2} = a$ เสมอไม่ว่า $a \geq 0$ หรือ $a < 0$ (Kempner, 1974 : 365 - 368)

เบรมฟีล กล่าวว่า ในการสอนเรื่องค่าสัมบูรณ์ จากนิยามซึ่งมีข้อความว่า "ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $|x| = x$ และถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = -x$ นักเรียนไม่ค่อยจะเข้าใจ และไม่สามารถที่จะนำนิยามไปใช้ ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนมักจะคิดว่า $-x$ เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนลบ มากกว่าจะคิดว่า $-x$ เป็นสัญลักษณ์แทนทั้งค่า

(Brumfiel, 1990 : 24)

ซีวาลย์ อับบาคิมดี และ สุชาติ สุเกียรติ์ กล่าวว่า คณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่ของการรวมกันของคณิตศาสตร์ ซึ่งถ้าเมื่อหรือหลงลืมกฎเกณฑ์เล็ก ๆ น้อย ๆ ไปเสีย อาจทำให้คำตอบที่ได้เป็นไปไม่ตรง ๆ งาม ๆ เช่น อาจทำให้เลขเหลี่ยมใด ๆ กลายเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือทำให้ $1 = 2$ เป็นต้น ซึ่งข้อผิดพลาดเหล่านี้เกิดขึ้นเพราะผู้คิดเลขกฎบางข้อไปนั่นเอง (ซีวาลย์ อับบาคิมดี และ สุชาติ สุเกียรติ์ 2503 : 463)

สอาด ชูเนโรวาท กล่าวว่า ความรู้เท่าไม่ถึงการณ์เป็นเหตุให้ผู้เรียนคณิตศาสตร์หลายต่อหลายคนละเมิดข้อจำกัดที่แท้จริงโดยไม่รู้ตัว เช่น สามารถแสดงได้ว่า

$$1 = -1 \text{ เนื่องจาก } 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = (i)(i) = (i)^2 = -1$$

สาเหตุที่ทำให้เกิดความผิดพลาดเช่นนี้เนื่องจาก $\sqrt{(-1)(-1)} \neq \sqrt{-1} \sqrt{-1}$

(สอาด ชูเนโรวาท 2510 : 189 - 191)

ฮอด เฟิรเชมบัค กล่าวถึงข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาที่กล่าวว่า ผู้ที่ศึกษาคณิตศาสตร์และเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เสมอ ๆ มักจะพบปัญหาที่เห็นว้างๆ แต่แท้จริงแล้วกลับพบว่า

เกิดปัญหา ทั้งวิธีการทำไมไม่คิด แก้ไขคำตอบไม่ตรงกับที่โจทย์เคยไว้ ทั้งนี้เนื่องจากผู้ตอบ
ปัญหาหาความรอบคอบ นำเอากฎเกณฑ์ ทฤษฎีมาใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่คำนึงถึงนิยาม
รอยกเว้นต่าง ๆ (สอบ เพิ่มสมมติ 2516 : 43)

ผู้สอน ชะเนมา กล่าวว่ามีจำนวนมากสงสัยว่า $\sqrt{9}$ มีค่าเท่าไร และส่วนมาก
มักจะตอบว่า มีค่าเท่ากับ ± 3 คำตอบนี้ไม่ถูก คำตอบที่ถูกต้อง $+ 3$ นอกจากนั้นผู้หา
ที่พบเสมอ ๆ ในวิชาพีชคณิต ก็คือปัญหาที่ขอยาว เราทราบว่า $(3)^2 = 9$ และทราบอีก
ว่า $(-3)^2 = 9$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (+3)^2 &= (-3)^2 \\ \sqrt{(+3)^2} &= \sqrt{(-3)^2} \\ +3 &= -3 \end{aligned}$$

แสดงว่า $+3 = -3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เลย ๆ ข้อบกพร่องในปัญหาการหาคำของ $\sqrt{(-3)^2}$
ซึ่งค่าของ $\sqrt{(-3)^2}$ จะเท่ากับ -3 ไม่ได้ ดังนั้นข้อความที่ว่า "ถ้าต้องการจะหาคำแทนที่
ที่สองของผลคูณของจำนวนที่เหมือนกันสองจำนวนใด ๆ ก็ได้เอาจำนวนที่เหมือนกันนั้นออกมา
หนึ่งจำนวน" จึงเป็นข้อความที่ไม่ถูกต้อง (ผู้สอน ชะเนมา 2516 : 12 - 13)

ผู้สอน ชะเนมา กล่าวถึงการหารด้วยศูนย์ว่า จำนวนใดก็ตามที่หารด้วยศูนย์
จะไม่มีควาหมายในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกสัญลักษณ์ " $\frac{x}{0}$ " ว่า สัญลักษณ์ที่ไร้
ความหมาย (Meaningless) ดังนั้นในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถจะใช้ศูนย์เป็น
ตัวหารได้ ถ้าใช้ศูนย์เป็นตัวหาร จะก่อให้เกิดปัญหาลังตัวอย่าง

$$\text{จงแก้สมการ} \quad x^2 - x = 0$$

$$\text{หารด้วย } x \text{ ทั้งสองข้าง} \quad x - 1 = 0$$

$$\text{บวกด้วย } 1 \text{ ทั้งสองข้าง} \quad x = 1$$

ถ้าพิจารณาให้ดีแล้ว สมการ $x^2 - x = 0$ เป็นสมการกำลังสองมีราก 2 ราก
คือ 1 และ 0 การที่คำตอบหายไปคำตอบหนึ่ง ก็เพราะนำ x ซึ่งไม่ทราบว่าเป็นศูนย์
หรือไม่ไปหารทั้งสองข้าง การที่จะนำจำนวนใดไปหาร ต้องแน่ใจก่อนว่า จำนวนที่นำมาหาร

จะคงไม่มีโอกาสเป็นศูนย์แน่ ๆ ไม่เช่นนั้นจะก่อให้เกิดปัญหาค้างที่กล่าวมาแล้ว (สูตร 2521 : 236 - 237) ซึ่งปัญหาเรื่องการหารด้วยศูนย์ในสอคล้องกับตัวอย่างที่ ประถม สุวัฑฒ์ และ มาโนชญ์ อัจฉราพันธ์ ได้ยกมาแสดงให้เห็นการพิสูจน์ $a = b$ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5 คนหนึ่ง ซึ่งทำการพิสูจน์ดังนี้

พิสูจน์ บรรทัดที่ 1 กำหนดให้ a และ b เป็นเลขจำนวนใด ๆ

บรรทัดที่ 2 เพราะว่า $(a)(0) = 0$

บรรทัดที่ 3 เพราะว่า $(b)(0) = 0$

บรรทัดที่ 4 เพราะฉะนั้น $(a)(0) = (b)(0)$

บรรทัดที่ 5 เอาศูนย์หารตลอด $a = b$

(ประถม สุวัฑฒ์ และ มาโนชญ์ อัจฉราพันธ์ 2518 : 11) ซึ่งจะเห็นว่าเด็กคนนี้ใช้ศูนย์หารโดยมีใจคิดว่าอะไรจะเกิดขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากความเข้าใจผิดพลาดเกี่ยวกับการหารด้วยศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ สุชาติ รัตนกุล ที่ว่า หนังสือคณิตศาสตร์ส่วนมากมักได้อธิบายการหารซึ่งเกี่ยวข้องกับ 0 ไว้ได้อย่างแจ่มแจ้ง และจะทำให้ผู้อ่านเข้าใจผิดพลาดได้ง่าย ๆ (สุชาติ รัตนกุล 2514 : 138)

ไสว นวลศรี ได้ขอคำแนะนำการแก้สมการ เรื่องค่าสัมบูรณ์ของนักเรียนซึ่งถามมาว่า ทำไมคำตอบที่ได้ก็จริงไม่เหมือนกับที่เฉลยไว้ ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนไม่ได้เอาเงื่อนไขของค่าสัมบูรณ์มาพิจารณาในการที่จะสรุปคำตอบ และได้กล่าวเตือนไว้ว่า ในการนำเอากฎเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ที่ว่า $|x| < a \iff -a < x < a$ และ $|x| > a \iff (x > a) \vee (x < -a)$ ไม่ใช่ กฎเหล่านี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น (ไสว นวลศรี 2522 : 74 - 76)

ศักดิ์กานต์ บุญโต กล่าวว่า ในการสอนกฎเกณฑ์หรือทฤษฎีต่าง ๆ ครูควรจะต้องให้นักเรียนเห็นถึงข้อผิดพลาดในกรณีที่กฎเกณฑ์ หรือทฤษฎีนั้นจะไม่ใช่ได้ เช่น ในเรื่องคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ ซึ่งมีข้อความว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a, b, c ใด ๆ ถ้า $ab = ac$ แล้วจะได้ว่า $b = c$ เมื่อ $a \neq 0$ " ครูอาจเริ่มทบทวน โดยให้

$$\begin{aligned}
 5(3) &= 5(3) \quad \text{หารด้วย } 5 \text{ ทั้งสองข้าง จะได้ } 3 = 3 \\
 -5(3) &= -5(3) \quad \text{หารด้วย } -5 \text{ ทั้งสองข้าง จะได้ } 3 = 3 \\
 -3(-5) &= -3(-5) \quad \text{หารด้วย } -3 \text{ ทั้งสองข้าง จะได้ } -5 = -5 \\
 -8(4) &= -8(2+2) \quad \text{หารด้วย } -8 \text{ ทั้งสองข้าง จะได้ } 4 = 2+2
 \end{aligned}$$

จากข้อความเหล่านี้ นักเรียนจะสรุปว่า ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
 ถ้า $ab = ac$ แล้วจะได้ว่า $b = c$ ซึ่งการสรุปเช่นนี้ทำให้เกิดข้อผิดพลาด เพราะใน
 กรณีที่ $a = 0$ กฎเกณฑ์จะใช้ไม่ได้ ครูควรจะทำให้เห็นถึงข้อผิดพลาดในข้อนี้
 (ศึกษา บุญโต 2524 : 33) จะเห็นว่าเงื่อนไขของนิยาม ทฤษฎีและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ
 มีความสำคัญมาก ควรจะได้แนะนำให้นักเรียนเข้าใจและนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง การเน้นในเรื่อง
 เงื่อนไขของนิยามและทฤษฎีมีความจำเป็นที่จะต้องพิจารณาปรับปรุงการสอในในประเทศไทย
 ในปัจจุบัน เพราะจากผลการศึกษาของ วิรัตน์ ชาตศิริวิธาน ที่ศึกษาความสามารถในการใช้
 นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 พบว่า นักเรียนมีความ
 สามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีในวิชาคณิตศาสตร์ต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01
 (วิรัตน์ ชาตศิริวิธาน 2524)

วิธีการในการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ สัณนิษฐานระดับชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2524 ที่เรียนคณิต.101 โดยใช้วิธีสุ่มมา 4 ห้อง จากจำนวนทั้งหมด 8 ห้อง จากนั้นสุ่มเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 จำนวน 1 ห้อง ซึ่งมี 33 คน และกลุ่มทดลองที่ 2 จำนวน 3 ห้อง ซึ่งมี 115 คน โดยในกลุ่มทดลองที่ 1 เป็นกลุ่มที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำาน ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอน และกลุ่มทดลองที่ 2 เป็นกลุ่มที่เรียนจากการสอนปกติ ซึ่งอาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต.101 เป็นผู้สอน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 และแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 เนื่องจากแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 และแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 มีเนื้อหา ตัวอย่าง และลำดับหัวข้อเหมือนกัน ต่างกันเฉพาะตัวอย่างคำาน ดังนั้นในตอนแรก ผู้วิจัยจึงดำเนินการสร้างแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 และแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 เหมือนกัน โดยใช้วิธีการตามลำดับขั้นดังนี้

1.1 ศึกษาเนื้อหาเรื่องเซตและระบบจำนวน ตามหลักสูตรคณิต.101 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ แล้วแบ่งเนื้อหาเป็นหัวข้อย่อยดังนี้

- 1.1.1 ความหมายของเซต การเขียนเซต เซตที่เท่ากัน จำนวนสมาชิกในเซต
- 1.1.2 เซตว่าง เซตจำกัด เซตอนันต์
- 1.1.3 เอกภพสัมพัทธ์
- 1.1.4 สับเซต เพาเวอร์เซต

1.1.5 โอเปอเรชันบนเซต

1.1.6 แผนภาพของเวนน - ออยเลอร์

1.1.7 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

1.1.8 สัจพจน์และคุณสมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง

1.1.9 จำนวนจริงบวก

1.1.10 จำนวนเต็ม และจำนวนตรรกยะ

1.1.11 เส้นจำนวน การสับฐาน และการแก้อสมการ

1.2 ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบเรียนตามหัวข้อดังกล่าว โดยศึกษาจาก

หนังสือต่อไปนี้

1.2.1 คณิตศาสตร์เบื้องต้น (สุเทพ จันทระศักดิ์ 2521 : 158 หน้า)

1.2.2 คณิตศาสตร์เบื้องต้น (ปราโมทย์ มาบุญ มปป : 169 หน้า)

1.2.3 คณิตศาสตร์เบื้องต้น (เมธี สิมอักษ 2521 : 163 หน้า)

1.2.4 คณิตศาสตร์พื้นฐาน (สมศรี บุณยวงศ์ มปป : 206 หน้า)

จากที่ได้อธิบายมาแล้วว่า แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ต่างจากแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 ที่การเน้นตัวอย่างงาน ดังนั้นเฉพาะแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการต่อไปนี้

1.3 ผู้วิจัยสร้างตัวอย่างงานแทรกลงไปในแต่ละหัวข้อของแบบเรียน สำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ในทุกหัวข้อที่จะสามารถแทรกตัวอย่างงานลงไปได้

1.4 นำแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ที่ได้แทรกตัวอย่างงานลงไปในแบบเรียนแล้ว และแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 ไปให้คณะกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ และอาจารย์ผู้สอนคณิต. 101 ตรวจสอบความถูกต้อง และปรับปรุงแก้ไขให้ยิ่งขึ้น จากนั้นนำแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ไปทดลองใช้กับสัปดาห์ที่ 101 จำนวน 3 คน เพื่อหาข้อบกพร่อง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมประกันคุณภาพ

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผู้วิจัยสร้างแบบทดสอบเรื่องเซตและระบบจำนวน โดยศึกษาจากหนังสือที่ใช้ในการสร้างแบบเรียน พร้อมทั้งศึกษาข้อสอบเข้า-

มหาวิทยาลัย แล้วสร้างแบบทดสอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 100 ข้อ โดยมีข้อสอบเรื่องเขต
จำนวน 60 ข้อ และเรื่องระบบจำนวน จำนวน 40 ข้อ จากนั้นนำไปทดสอบกับนิสิตชั้นปีที่ 2
ที่เรียนคณิต.101 มาแล้ว มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตบางเขน จำนวน 26 คน
วิทยาเขตบางแสน จำนวน 57 คน และวิทยาเขตพญาวัน จำนวน 22 คน เพื่อนำผลมา
วิเคราะห์หาค่าอำนาจจำแนก (r) ค่าความยากง่าย (p) ค่าความเชื่อมั่น และค่า
ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ

การวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย และค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ ใช้หลักการคักกลุ่ม
27 เปอร์เซนต์ เป็นกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ เป็นตารางสำเร็จรูปของ จุง เทห์ ฟาน (Fan,
1952 : 6 - 32) โดยเลือกข้อสอบที่มีค่า p ระหว่าง .20 - .80 และค่า r ตั้งแต่
.20 ขึ้นไปเป็นข้อสอบที่ดี คักเลือกข้อสอบเขตจำนวน 30 ข้อ ข้อสอบระบบจำนวน 20 ข้อ
รวม 50 ข้อ แล้วหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยใช้สูตรของ คูเดอร์ ริชาร์ดสัน
(Kuder-Richardson) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .86 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
ในการวัด ได้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 3.18

วิธีดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มทดลองที่ 1 โดยใช้แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 ซึ่ง
ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที
2. อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต.101 เป็นผู้สอนนิสิตกลุ่มทดลองที่ 2 โดยใช้แบบเรียน
สำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที
3. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนทั้งสองกลุ่มแล้วทดสอบนิสิตทั้งสองกลุ่ม ด้วยแบบทดสอบวัดผล
สัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 60 นาที
4. การตรวจให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ข้อที่เลือกตอบถูกต้อง
ให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกตอบผิด หรือไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 คำตอบในแต่ละข้อ
ให้ 0 คะแนน นำคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตทั้งสองกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลอง
ที่ 2 มาเปรียบเทียบหาความแตกต่าง โดยใช้ t -test

สถิติใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าเฉลี่ยของคะแนน จำนวนจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad (\text{Ferguson, 1976 : 47})$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

2. หาค่าความแปรปรวนของคะแนน จำนวนจากสูตร

$$s^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \quad (\text{Ferguson, 1976 : 64})$$

เมื่อ s^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนน

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัวยกกำลังสอง

N แทน จำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

3. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวนจากสูตร

K-R 20

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_x^2 - \sum pq}{s_x^2} \right] \quad (\text{Ferguson, 1976 : 428})$$

เมื่อ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n แทน จำนวนข้อสอบของแบบทดสอบ

p แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบถูกในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

q แทน อัตราส่วนของคนที่ตอบผิดในแต่ละข้อของแบบทดสอบ

s_x^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ

4. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด คำนวณจากสูตร

$$S_e = S_x \sqrt{1 - r_{tt}} \quad (\text{Ferguson. 1976 : 432})$$

เมื่อ S_e แทน ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด
 S_x แทน ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
 r_{tt} แทน ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

5. ทดสอบความแตกต่างระหว่างความแปรปรวน คำนวณจากสูตร

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (\text{Ferguson. 1976 : 178})$$

เมื่อ F แทน ค่าสถิติในการกระจายแบบ เอฟ
 S_1^2, S_2^2 แทน ความแปรปรวนจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสองโดย $S_1^2 > S_2^2$

6. การทดสอบเพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t-test คำนวณจากสูตร

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right]}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2 \quad (\text{Walpole. 1972 : 228})$$

เมื่อ t แทน ค่าสถิติในการกระจายแบบ ที
 $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ แทน ค่าเฉลี่ยของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ
 S_1^2, S_2^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ
 n_1, n_2 แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ตามลำดับ

ผลการวิเคราะห์ผล

ผลการวิเคราะห์ผล

ข้อมูลด้านวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เซต และระบบจำนวน จำนวน 50 ข้อ ค่าเฉลี่ยการวิเคราะห์ผลจึงต่อไปนี้

1. ทาคัดเฉลี่ย และความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ผลปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{x}$	s^2
กลุ่มทดลองที่ 1	33	39.39	32.62
กลุ่มทดลองที่ 2	115	27.18	65.94

2. ทดสอบความแปรปรวนของคะแนนจากกรวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ซึ่งปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าสถิติ F สำหรับความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	N	S ²	F
กลุ่มทดลองที่ 1	33	32.62	2.0214
กลุ่มทดลองที่ 2	115	65.94	

$$F_{.005}(114, 32) = 2.108$$

$$F_{1-.005}(114, 32) = .5384$$

จากตาราง 2 จะเห็นว่า $2.0214 < 2.108$ แสดงว่าความแปรปรวนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .01

3. นำคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2 มาเปรียบเทียบความแตกต่าง ซึ่งปรากฏดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าสถิติ t สำหรับคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มทดลองที่ 1 และกลุ่มทดลองที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\bar{X}$	S^2	t
กลุ่มทดลองที่ 1	33	39.39	32.62	8.0743**
กลุ่มทดลองที่ 2	115	27.18	65.94	

$$t_{(146, .01)} = 2.326$$

จากตาราง 3 จะเห็นว่า $8.0743 > 2.326$ แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่ 1 สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองที่ 2 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

สรุป อภิปรายผล และขอเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเซตและระบบจำนวนของนิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 จากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำถาม กับ การสอนปกติ
2. เพื่อสร้างแบบเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวนที่เน้นในเรื่องการยกตัวอย่างคำถาม

สมมติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำถาม กับ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนปกติ ในเรื่องเซตและระบบจำนวน ไม่แตกต่างกัน

วิธีดำเนินการ

1. กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ที่เรียนคณิต.101 ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2524 จำนวน 148 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 ซึ่งเรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำถาม 33 คน และกลุ่มทดลองที่ 2 ซึ่งเรียนจากการสอนปกติ 115 คน
2. เครื่องมือในการทดลอง
 - 2.1 แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 เป็นแบบเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวนที่เน้นในเรื่องการยกตัวอย่างคำถาม ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการสอน 14 คาบ คาบละ 50 นาที
 - 2.2 แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 เป็นแบบเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวน

ที่มีเนื้อหา ตัวอย่าง และคำอธิบายเหมือนกับแบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 แต่ไม่เน้นในเรื่องการยกตัวอย่างงานซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.3 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเซตและระบบจำนวน เป็นแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ ซึ่งมีความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ .86

3. วิธีการดำเนินการทดลอง

3.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองที่ 1 โดยใช้แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1 และใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที

3.2 อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิต.101 เป็นผู้สอนกลุ่มทดลองที่ 2 โดยใช้แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 2 และใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที

สรุปผลการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเซตและระบบจำนวน ของนิสิตที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างงาน สูงกว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวน ของนิสิตที่เรียนจากการสอนปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่านิสิตที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างงาน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านิสิตที่เรียนจากการสอนปกติ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1. การสอนที่เน้นการยกตัวอย่างงาน ช่วยให้นิสิตสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีต่าง ๆ ในเรื่องเซต และระบบจำนวนได้เป็นอย่างดี และช่วยให้นิสิตเข้าใจถึงความสำคัญของเงื่อนไขของนิยามและทฤษฎี สามารถนำนิยามและทฤษฎีต่าง ๆ ไปใช้ได้อย่างถูกต้องรอบคอบ และระมัดระวัง

2. จำนวนนิสิตในกลุ่มทดลองที่ 1 มีจำนวน 33 คน ในขณะที่จำนวนนิสิตในกลุ่มทดลองที่ 2 มีจำนวน 115 คน ซึ่งมากกว่าจำนวนนิสิตในกลุ่มทดลองที่ 1 ประมาณ 3 เท่า

ซึ่งจำนวนนิสิตที่แตกต่างก็มาก อาจส่งผลกระทบต่อความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ย

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำนวณ สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่เรียนจากการสอนปกติ ดังนั้นในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ควรจะมีการส่งเสริมการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำนวณให้แพร่หลาย เพื่อจะได้เกิดประโยชน์ในด้านการปรับปรุงการเรียนการสอน

1.2 ในวงการศึกษาคณิตศาสตร์ ควรเผยแพร่ความรู้เกี่ยวกับการยกตัวอย่างคำนวณ เพื่อจะไปปรับปรุงหนังสือและตำราเรียนคณิตศาสตร์ และเพื่อจะได้ให้ครูผู้สอนนำไปใช้ประกอบการสอน

1.3 ควรจะมีการสร้างบทเรียนที่เน้นการยกตัวอย่างคำนวณ ในเนื้อหาวิชาที่ต่างออกไปจากเรื่องเซตและระบบจำนวน

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยใหม่ขอบเขตกว้างขวางยิ่งขึ้น เพื่อหาผลสรุปที่แน่นอน

2.2 ควรทำการวิจัยเรื่องการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำนวณในระดับชั้นอื่น ๆ และในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่ต่างจากเรื่องเซตและระบบจำนวน

2.3 ควรทำการวิจัยว่าองค์ประกอบใดบ้างที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการยกตัวอย่างคำนวณ และศึกษาว่าควรเริ่มสอนโดยเน้นการยกตัวอย่างคำนวณในระดับใด จึงจะเหมาะสมกับพัฒนาการและความสามารถของผู้เรียน .

นร รณานุกุล

บรรณานุกรม

- จินนากา สัตบุทร การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่ไม่ผ่านการสอบย่อย ปริญญาโท กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2521, 71 หน้า อัสสัมชัญ
- ชัชวาลย์ อำนาคณีย์ และ สุชาติ สุเกียรติ "นิคตรงโนน" คณิตศาสตร์ 47 : 463 สิงหาคม 2503
- ชาติ เมืองนาโหล และ ชัยวัฒน์ ปานพลอย Symbolic Logic พิมพ์ครั้งที่ 2 เจริญผลกรพิมพ์ 2507, 114 หน้า
- บุญชัย ภูอุบล การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จ โดยการยกตัวอย่างค้าน ของนักเรียนปี 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตร การศึกษาคณิตศาสตร์ ปริญญาโท กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2524, 27 หน้า อัสสัมชัญ
- บึงอร ภูภิรมย์ขวัญ อิทธิพลของตัวอย่างงานและเนื้อหาบทเรียนสู่การรับรู้ ปริญญาโท ก.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2518, 65 หน้า อัสสัมชัญ
- บุญมา จาริก ตรรกศาสตร์เบื้องต้น ม.ป.ท. 2522, 130 หน้า
- ประชุม สุวัดี และ มาโนชญ์ วิษยานนท์ "เสริมทักษะคณิตศาสตร์" คณิตศาสตร์ 198 - 199 : 11 มีนาคม - เมษายน 2518
- ปราโมทย์ มาคง คณิตศาสตร์เบื้องต้น ม.ป.ท. ม.ป.ป., 169 หน้า
- เมธี ลิ้มอักษร คณิตศาสตร์เบื้องต้น ม.ป.ท. 2521, 163 หน้า
- ลออ พิมพ์สมบัติ "ขอบทพจน์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์" คณิตศาสตร์ 176 - 177 : 43 มกราคม - กุมภาพันธ์ 2516
- วิรัตน์ ชาดุศิริวัฒนา การศึกษาความสามารถในการใช้ภาษาและเหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ปริญญาโท กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ 2524, 23 หน้า อัสสัมชัญ

ศรีสมุทร อรรถจินต การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษาระหว่างนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1

จากกรณีศึกษาที่ให้อายุงานแตกต่างกัน 2 แบบ ปริญญาโท ปศ.ม. มหาวิทยาลัย

เกษตรศาสตร์ 2522, 67 หน้า อักษรย่อ

ศัลลภ บุญโต "เหตุผลแบบอุปนัยและอุปทาน" คณิตศาสตร์ 272 - 273 : 29 - 33

พฤษภาคม - มิถุนายน 2524

สมศรี ยุทธจรต คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.ป.ท. 2524, 206 หน้า

สอาด ชูทวีโรวาท "คณิตศาสตร์อาชีวกรรม" คณิตศาสตร์ 127 : 189 - 191

เมษายน 2510

สุชาติ รัตนกุล "อินทิกรัล (1)" คณิตศาสตร์ 155 - 157 : 13 เมษายน - มิถุนายน 2514

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ คณิตศาสตร์เบื้องต้น ม.ป.ท. 2521, 156 หน้า

คณิตศาสตร์ศึกษา ศึกษาสัมพันธ์ 2517, 100 หน้า

สุนทร ณะกอด "ทำไมจึงหาคำตอบไม่ได้" คณิตศาสตร์ 236 - 237 : 42

พฤษภาคม - มิถุนายน 2521

สุพจน์ วัฒนธนา "แปลกใหม่ จริงใหม่" วิทยุวิทยุวิทยาศาสตร์ 61 : 12 - 13

มกราคม 2518

ไสว นวอรรถ "วงกลม สาม - ทศ" คณิตศาสตร์ 250 - 251 : 74 - 76

ธันวาคม - สิงหาคม 2522

อวร มาทวีชัย ทฤษฎีการศึกษาคณิตศาสตร์ เอกสารการสัมมนาการศึกษา ฉบับที่ 206

หน่วยศึกษานิเทศ์ การประชุมวิชาการ 2521, 156 หน้า

Brumfiel, Charles. "Teaching the Absolute Value Function,"

The Mathematics Teacher. 73 : 24, January 1980.

De Cecco, John P. The Psychology of Learning and Instruction.

Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1968. 800 p.

- Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics. 2 nd. ed., New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1964. 439 p.
- Fan, Chung Teh. Item Analysis Table. New Jersey, Education Testing Service, Princeton, 1952. 32 p.
- Ferguson, George A. Statistical Analysis in Psychology and Education. 4 th. ed., Tokyo, Mc Graw-Hill, 1976. 529 p.
- Gage, Rita Lena. "A Study of the Effects of Positive and Negative Instances on the Acquisition of Selected Algebra Concepts as a Function of Cognitive Style," Dissertation Abstracts. 37 : 4929 - 4930, February, 1977.
- Gelbaum, Bernard R. and John M.H. Olmsted. Counterexample in Analysis. San Francisco, Holden-Day Inc., 1964. 194 p.
- Hall, F.M. An Introduction to Abstract Algebra. Cambridge, The University Press, 1972. 300 p.
- Kasner, Edward. and James Newman. Mathematics and the Imagination. New York, Simon and Schuster, 1955. 380 p.
- Kepner, James L. "Some Implications of $\sqrt{a^2} = |a|$," The Mathematics Teacher. 67 : 365 - 368, April 1974.
- Peterson, Wayne. "Beware of Persuasive Arguments," The Mathematics Teacher. 65 : 709, December 1972.
- Steen, Lynn A. and J. Arthur Seebach, Jr. Counterexample in Topology. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970. 210 p.
- Suppes, Patrick. Introduction to Logic. New Delhi, Affiliated East-West Press Private Limited, 1978. 312 p.

Walpole, Ronald E. Introduction to Statistics. New York, The
Macmillan Company, 1972. 365 p.

Whitesitt, Eldon J. Principle of Modern Algebra. Massachusetts,
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1964. 262 p.

07000000

ภาคผนวก ก.
การวิเคราะห์ข้อมูล

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เซตและระบบจำนวน

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 50 ข้อ ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง
2. คำตอบทุกข้อเป็นแบบกรณฑ์เลือกตอบ แต่ละคำถามมี 4 ตัวเลือก ในหนังสือเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว จากตัวเลือก ก. ข. ค. หรือ ง.
ข้อใดข้อหนึ่ง เมื่อเลือกใดแล้วให้ทวงเครื่องหมาย $\times$ ในขณะทำคำตอบ ดังตัวอย่าง
(อ) ก. $\times$ ค. ง.
3. ถ้าในข้อใดของการเปลี่ยนคำตอบ ให้ทวงเครื่องหมาย $\times$ กับคำตอบเดิมเสียก่อน แล้วจึงเลือกตอบตัวเลือกใหม่ดังนี้
ก. $\times$ $\times$ ง.
4. ข้อใดข้อหนึ่งและข้อใดจะมีคำตอบถูกต้องเพียงคำตอบเดียว ข้อใดมีคำตอบที่ถูกต้องมากกว่า
1 คำตอบ ข้อใด } จงจำไว้ และไม่ต้องคะแนน
5. ถ้ามี ข้อใดยากกว่าข้อใด จงข้ามไปทำข้ออื่นเสียก่อน มีเวลาให้ลืมนัดขอยก
กันมาทำข้อนี้ แล้วกลับมาทำใหม่

1. เซตคำตอบของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ คือเซตในข้อใด

- ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 1 < x < 4\}$
- ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง, } 1 < x < 4\}$
- ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่, } 1 < x < 4\}$
- ง. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคี่, } 1 < x < 4\}$

2. เซตต่อไปนี้เซตใดเป็นเซตจำกัด

- ก. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x \geq 0\}$
- ข. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริง, } 2 \leq x \leq 4\}$
- ค. $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 2 < x < 3\}$
- ง. $\{x \mid x = 2y \text{ โดยที่ } y \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

3. กำหนด $A \subset B$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

- ก. ถ้า B เป็นเซตจำกัด แล้ว A เป็นเซตจำกัด
- ข. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว B เป็นเซตอนันต์
- ค. ถ้า B เป็นเซตอนันต์ แล้ว A เป็นเซตอนันต์
- ง. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว $P(A)$ เป็นเซตอนันต์

4. กำหนด $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } 2 < x < 4\}$

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่ซึ่ง } 2 < x < 4\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนจริงซึ่ง } x^2 = 3\}$$

ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

- ก. A และ C เป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว และ B เป็นเซตว่าง
- ข. A, B และ C เป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว
- ค. A, B และ C เป็นเซตที่มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว
- ง. A เป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว, B เป็นเซตว่าง และ C เป็นเซตที่มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว

5. ถ้า $A \subset \{A\}$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

ก. $A = \emptyset$

ข. $A = U$ โดยที่ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

ค. A เป็นเซตใด ๆ

ง. A เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \neq \emptyset$

6. กำหนด $A = \{a, \{a, b\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

ก. $\{a\} \in A$

ข. $\{\{a\}\} \subset A$

ค. $\{a, b\} \in P(A)$

ง. $\{\{a, b\}\} \in P(A)$

7. กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3, 4\}$

$D = \{1, 2, 4\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

ก. $(B \cap D) \not\subset C$

ข. $3 \in A - D$

ค. $(A \cap D) \subset D$

ง. $[(A \cap C) \cup B] \not\subset D$

8. กำหนด A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

ก. $A - B = A$

ข. $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$

ค. $B' \subset A$

ง. $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

9. กำหนด A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U แล้ว $A - A$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. A

ข. A'

ค. U

ง. U'

10. กำหนด A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

ก. $U' = U - U$

ข. $U' = A \cap A'$

ค. $U = A \cap \emptyset$

ง. $U = A \cup \emptyset$

16. กำหนด A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $A = \emptyset$ และ $B = \emptyset$

ข. ถ้า $A \cap B = \emptyset$ และ $A \cup B = U$ แล้ว $A' = B$

ค. ถ้า $x \in C$ และ $B \subset C$ แล้ว $x \notin B$

ง. ถ้า $A \cup B = B$ แล้ว $B - A \neq \emptyset$

17. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. ถ้า $A \subset B$ และ $B \neq \emptyset$ แล้ว $A \neq \emptyset$

ข. ถ้า $A \cap B = A$ แล้ว $A = B$

ค. ถ้า $A - B = A$ แล้ว $B = \emptyset$

ง. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $(A \cap C) \subset (B \cap C)$

18. กำหนด A, B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

ก. ถ้า $(A \cap B)' = U$ แล้ว $A - B = \emptyset$

ข. ถ้า $A \cap B = U$ แล้ว $A = B$

ค. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

ง. ถ้า $A \cup B = A \cap B$ แล้ว $A = B = \emptyset$

19. กำหนด A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

ก. $(A - B) \cup B = A \cup B$ ข. $(A \cup B) - B = A - B$

ค. $A - (B - C) = A \cap (B \cap C)'$ ง. $(B - A)' = B \cup A'$

20. กำหนด A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

ก. $[A \cup (B \cap C)]' = A' \cap (B' \cup C')$

ข. $[(A \cup B)' \cup C] = (A \cup B) \cap C'$

ค. $(A \cap B) \cap C' = (A' \cap B') \cup C'$

ง. $(A \cup B)' \cup A' = A'$

21. กำหนด A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ข. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

ค. $(A \cup B) - A = B$

ง. $(B - A)' = B' \cup A$

22. กำหนด $A \subset B$ และ $B \subset C$ ถ้า $a \in A, b \in B, c \in C, d \notin A, e \notin B$ และ $f \notin C$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

ก. $b \in A$

ข. $c \notin A$

ค. $d \in B$

ง. $e \notin A$

23. กำหนด A, B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $U, (A' \cup B)'$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $(A \cup B)'$

ข. $(A \cap B)'$

ค. $A \cup B$

ง. $A \cap B$

จากข้อความที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงตอบคำถามข้อ 24 - 25

กำหนด $A = [-10, 8), B = (0, 3), C = (-4, 7)$ และ

$U = (-\infty, \infty)$

24. $(A \cup B)' \cap C'$ เท่ากับเซตในข้อใด

ก. $(-\infty, -4] \cup [7, \infty)$

ข. $(-\infty, -4) \cup (7, \infty)$

ค. $(-\infty, -10) \cup [8, \infty)$

ง. $(-\infty, 10] \cup [8, \infty)$

25. $(C - A) \cap B'$ เท่ากับเซตในข้อใด

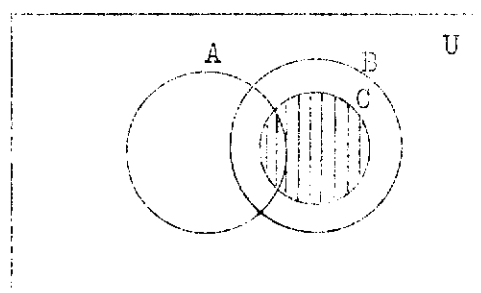
ก. $\emptyset$

ข. $[-10, 8)$

ค. $(-4, 7)$

ง. $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$

26. ส่วนที่แรเงาในภาพหมายถึงเซตในข้อใด



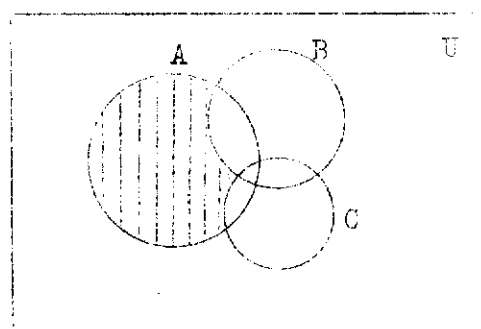
ก. $A \cap B$

ข. $A \cap C$

ค. $B \cap C$

ง. $(A \cap C) \cap B$

27. ส่วนที่แรเงาในภาพหมายถึงเซตในข้อใด



ก. $(A - B) \cap C$

ข. $B' \cap A$

ค. $(A - B) - C$

ง. $(B - C) \cap (B - C)'$

28. กำหนด A, B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ซึ่ง U, A, B และ $A \cap B$ มีจำนวนสมาชิก 100, 40, 25 และ 6 ตามลำดับ หมายความว่า $(A \cup B)'$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่าไร

ก. 29

ข. 35

ค. 41

ง. 59

33. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็นจริง

- ก. ถ้า $ab = b$ แล้ว $a = 1$
- ข. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$
- ค. ถ้า $ab = 1$ แล้ว $a = b^{-1}$
- ง. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0 \wedge b = 0$

34. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็นจริง

- ก. ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- ข. ถ้า $a > b$ แล้ว $-a > -b$
- ค. ถ้า $a^2 > 0$ แล้ว $b > 0$
- ง. ถ้า $a < b \wedge c < 0$ แล้ว $ac < bc$

35. กำหนด a, b, c, d เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็นจริง

- ก. ถ้า $|a| = |b|$ แล้ว $a = b$
- ข. ถ้า $a \leq b \wedge c \geq d$ แล้ว $a - c \leq b - d$
- ค. ถ้า $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$
- ง. ถ้า $0 \leq a \leq b$ แล้ว $a^2 \leq b^2$

36. กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง $|a + b| = |a| + |b|$ ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขใดต่อไปนี้ ไม่เป็นจริง

- ก. $a \leq 0 \wedge b \geq 0$
- ข. $a \geq 0 \wedge b \leq 0$
- ค. $ab \geq 0$
- ง. $ab \leq 0$

37. ข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็นเท็จ

- ก. มีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ
- ข. มีจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม
- ค. จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
- ง. จำนวนอตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง

38. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

- ก. ถ้า $ac = bc$ แล้ว $a = b$
- ข. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงลบ และ $a^2 = b^2$ จะได้ $a = b$
- ค. ถ้า $a^2 \leq b^2$ จะได้ $a \leq b$
- ง. ถ้า $a \leq b$ จะได้ $a^2 \leq b^2$

39. กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $a^2 \leq b^2$ แล้ว $|a| \leq |b|$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$
3. $|a| \geq a$

ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

- ก. ถูกทั้ง 3 ข้อ
- ข. ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ 1 และ ข้อ 2
- ค. ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ 1 และ ข้อ 3
- ง. ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ 2 และ ข้อ 3

40. กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

- ก. ถ้า $a + b = 0$ จะได้ $a = -b$
- ข. ถ้า $x - a = -3$ จะได้ $x < a$
- ค. ถ้า $x + a < x - a$ จะได้ $a < 0$
- ง. ถ้า $a < b$ จะได้ $ac < bc$

41. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ และ $a = bc$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

- ก. $a \mid b$
- ข. $b \mid c$
- ค. $c \mid a$
- ง. $c \mid b$

42. กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ และ $c < 0$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. $a + c < b + |c|$

2. $ac < bc$

3. $ac > bc$

ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

ก. ถูกเพียงข้อเดียว คือข้อ 2.

ข. ถูกเพียงข้อเดียว คือข้อ 3.

ค. ถูก 2 ข้อ คือข้อ 1. และข้อ 2.

ง. ถูก 2 ข้อ คือข้อ 1. และข้อ 3.

43. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนเต็มซึ่งต่างไม่เท่ากับศูนย์ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

ก. ถ้า $a + b \mid c$ แล้ว $a \mid c \wedge b \mid c$

ข. ถ้า $ab \mid c$ แล้ว $a \mid c \wedge b \mid c$

ค. ถ้า $a \mid b + c$ แล้ว $a \mid b \wedge a \mid c$

ง. ถ้า $a \mid b + c$ และ $a \mid b - c$ แล้ว $a \mid b$

44. กำหนด a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

ก. ถ้า $a \leq b, c \leq d, a \neq 0, d \neq 0$ แล้ว $\frac{c}{a} \leq \frac{b}{d}$

ข. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0 \wedge b = 0$

ค. ถ้า $a^3 b^2 < 0$ แล้ว $a < 0$

ง. ถ้า $(a - 3)^2 > 0$ แล้ว $a > 0$

45. กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเท็จ

ก. ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

ข. ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

ค. ถ้า a เป็นจำนวนคู่ และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว ab เป็นจำนวนคู่

ง. ถ้า a, b เป็นจำนวนคี่ แล้ว ab เป็นจำนวนคี่

การคำนวณค่า (p) และค่าความสัมพันธ์ (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.66	.20	21	.31	.49	41	.27	.55
2	.56	.40	22	.35	.32	42	.60	.39
3	.54	.21	23	.27	.43	43	.35	.56
4	.67	.45	24	.34	.54	44	.60	.46
5	.36	.50	25	.33	.36	45	.36	.22
6	.61	.31	26	.57	.37	46	.48	.37
7	.60	.41	27	.48	.21	47	.70	.59
8	.67	.28	28	.55	.33	48	.52	.44
9	.32	.25	29	.43	.29	49	.36	.50
10	.39	.22	30	.33	.45	50	.35	.29
11	.45	.50	31	.30	.48			
12	.48	.39	32	.52	.37			
13	.50	.22	33	.35	.36			
14	.46	.30	34	.68	.51			
15	.50	.50	35	.60	.46			
16	.48	.25	36	.79	.57			
17	.54	.43	37	.69	.29			
18	.46	.43	38	.54	.55			
19	.44	.48	39	.54	.27			
20	.42	.51	40	.69	.29			

ค่า p ค่า q และค่า Σpq ของแบบทดสอบ

ข้อ ที่	p	q	pq	ข้อ ที่	p	q	pq	ข้อ ที่	p	q	pq
1	.69	.31	.21	21	.33	.67	.22	41	.31	.69	.21
2	.57	.43	.25	22	.37	.63	.23	42	.62	.38	.24
3	.56	.44	.25	23	.30	.70	.21	43	.38	.62	.24
4	.69	.31	.21	24	.37	.63	.23	44	.62	.38	.24
5	.39	.61	.24	25	.35	.65	.23	45	.40	.60	.24
6	.63	.37	.23	26	.60	.40	.24	46	.50	.50	.25
7	.61	.39	.24	27	.50	.50	.25	47	.69	.31	.21
8	.69	.31	.21	28	.57	.43	.25	48	.54	.46	.25
9	.33	.67	.22	29	.44	.56	.25	49	.40	.60	.24
10	.41	.59	.24	30	.35	.65	.23	50	.37	.63	.23
11	.48	.52	.25	31	.33	.67	.22	$\Sigma pq = 11.73$			
12	.50	.50	.25	32	.54	.46	.25				
13	.52	.48	.25	33	.37	.63	.23				
14	.48	.52	.25	34	.70	.30	.21				
15	.52	.48	.25	35	.62	.38	.24				
16	.50	.50	.25	36	.79	.21	.17				
17	.55	.45	.25	37	.71	.29	.21				
18	.48	.52	.25	38	.56	.44	.25				
19	.46	.54	.25	39	.56	.44	.25				
20	.44	.56	.25	40	.71	.29	.21				

การคำนวณค่าความแปรปรวนของคะแนนจากการทดสอบครั้งที่ 104 คน

X	f	fX	X ²	fX ²
71	1	71	5041	5041
68	1	68	4624	4624
63	1	63	3969	3969
62	2	124	3844	7688
61	1	61	3721	3721
56	2	116	3136	6272
57	1	57	3249	3249
56	5	280	3136	15680
55	1	55	3025	3025
54	1	54	2916	2916
53	5	265	2809	14045
52	3	156	2704	8112
51	4	204	2601	10404
50	5	250	2500	12500
49	3	147	2401	7203
48	3	144	2304	6912
47	4	188	2209	8836
46	12	552	2116	25392
45	8	360	2025	16200
44	3	132	1936	5808

X	f	fX	X ²	fX ²
43	8	344	1849	14792
42	3	126	1764	5292
41	3	123	1681	5043
40	4	160	1600	6400
38	5	190	1444	7220
37	3	111	1369	4107
36	4	144	1296	5184
35	1	35	1225	1225
34	1	34	1156	1156
32	1	32	1024	1024
29	2	58	841	1682
27	1	27	729	729
25	1	25	625	625
23	1	23	529	529
	104	4779		227061

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{N \sum f(X^2) - (\sum fX)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{(104)(227061) - (4779)^2}{(104)(103)} \\
 &= \frac{23614344 - 22838841}{10712} \\
 &= \frac{775503}{10712} \\
 &= 72.40
 \end{aligned}$$

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{s_1^2 - \sum pq}{s_1^2} \right] \\
 &= \frac{50}{49} \left[1 - \frac{11.73}{72.40} \right] \\
 &= \frac{50}{49} (1 - .1620) \\
 &= \frac{50}{49} (.838) \\
 &= \frac{41.9}{49} \\
 &= .86
 \end{aligned}$$

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซต และระบบจำนวนมีความเชื่อมั่น = .86
ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

$$\begin{aligned}
 s_e &= s_x \sqrt{1 - r_{tt}} \\
 &= \sqrt{72.40} \cdot \sqrt{1 - .86} \\
 &= \sqrt{72.40 \times 0.14} \\
 &= \sqrt{10.136} \\
 &= 3.18
 \end{aligned}$$

ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด = 3.18

ภาคผนวก ข.
แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองที่ 1

เซต

1. ความหมายของเซต การเขียนเซต เซตที่เท่ากัน จำนวนสมาชิกในเซต

1.1 ความหมายของเซต

ในชีวิตประจำวันเราใช้คำต่าง ๆ เมื่อกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ เช่น ผู้คน กลุ่มนักกีฬา คณะกรรมการ เป็นต้น ในวิชาคณิตศาสตร์เราใช้คำว่า "เซต" (Set) เมื่อกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ เช่น เซตของจำนวนเต็ม เซตของเดือนในหนึ่งปี โดยตกลงกันว่า เซตเป็นคำที่ไม่ต้องให้นิยาม เราเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า "สมาชิก" (Elements or Members) เช่น มิถุนายนเป็นสมาชิกของเซตของเดือนในหนึ่งปี

เซตที่จะนำมาศึกษาจะต้องเป็นเซตที่แจ่มชัด (Well-defined set) คือ ต้องสามารถบอกได้ว่า สิ่งที่กำหนดเป็นสมาชิกของเซตนั้นหรือไม่ เช่น เซตของจังหวัดในประเทศไทยเป็นเซตที่แจ่มชัด สามารถบอกได้ว่า สงขลาเป็นสมาชิกของเซตของจังหวัดในประเทศไทย และสามารถบอกได้ว่า พระตะบองไม่เป็นสมาชิกของเซตของจังหวัดในประเทศไทย

พิจารณาเซตต่อไปนี้ เซตของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงที่สุดของโลก 5 คน เซตของผลไม้ที่ชอบที่สุด 10 ชนิด เซตทั้งสองที่กล่าวไม่เป็นเซตที่แจ่มชัด เพราะถ้าเลือกนักคณิตศาสตร์คนใดคนหนึ่งขึ้นมา เราไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นสมาชิกของนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงที่สุดของโลก 5 คนหรือไม่ เพราะไม่มีเกณฑ์ที่แน่นอน ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราเลือกผลไม้มาชนิดหนึ่ง เราก็ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นสมาชิกของเซตของผลไม้ที่ชอบที่สุด 10 ชนิดหรือไม่

1.2 การเขียนเซต

ในการเขียนเซตนิยมใช้กันอยู่ 2 แบบ คือ

1.2.1 แบบแจกแจงสมาชิก (Tabular form) วิธีดังกล่าวคือเขียน

สมาชิกทุกตัวของเซตลงในวงเล็บปีกกา และคั่นระหว่างแต่ละสมาชิกด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) ในกรณีที่สมาชิกในเซตจำนวนมาก อาจใช้วิธีย่อโดยเขียนแต่สมาชิกตัวแรก ๆ แล้วทอดด้วยจุดสามจุด โดยต้องแน่ใจว่าเขาใจตรงกันว่าสมาชิกถัด ๆ ไปคืออะไร และในกรณีที่สมาชิก

ตัวอย่าง เราจะเขียนสมาชิกสองหรือสามตัวสุดท้ายหลังจุดสามจุด เช่น

ถ้า A เป็นเซตของสระในภาษาอังกฤษ อาจเขียนดังนี้

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

ถ้า B เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ อาจเขียนดังนี้

$$B = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

ถ้า C เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่บวกที่น้อยกว่า 100

$$C = \{ 1, 3, 5, \dots, 99 \}$$

1.2.2 แบบกำหนดเงื่อนไขของสมาชิกในเซต (Set-builder form)

ใช้ตัวแปรแทนสมาชิกของเซต และบอกเงื่อนไขของตัวแปร เขียนอธิบายไว้ในวงเล็บปีกก และใช้ ":" หรือ "|" คั่นระหว่างตัวแปร กับเงื่อนไข ตัวแปรที่ใช้นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเขียนเล็ก เช่น

$D = \{ x \mid x \text{ เป็นสระในภาษาอังกฤษ} \}$ อ่านว่า D เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นสระในภาษาอังกฤษ

$E = \{ a : a \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \}$ อ่านว่า E เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก a โดยที่ a เป็นจำนวนเต็ม

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตโดยทั่วไปนิยมใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ในภาษาอังกฤษ เช่น A, B, C และนิยมใช้อักษรตัวพิมพ์เล็กหรือตัวเขียนเล็กในภาษาอังกฤษ เช่น a, b, c แทนสมาชิกของเซต

เราใช้สัญลักษณ์ " $\in$ " (Epsilon) แทนความหมาย "เป็นสมาชิกของ" และใช้ " $\notin$ " แทนความหมาย "ไม่เป็นสมาชิกของ"

ตัวอย่าง 3 เป็นสมาชิกของเซต $\{ 1, 2, 3 \}$ เขียนแทนด้วย $3 \in \{ 1, 2, 3 \}$
 4 ไม่เป็นสมาชิกของเซต $\{ 1, 2, 3 \}$ เขียนแทนด้วย $4 \notin \{ 1, 2, 3 \}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{ a \}$
 จะได้ว่า $a \in A$ แต่ $b \notin A$

ตัวอย่าง ให้ $B = \{\{a\}\}$
จะได้ว่า $\{a\} \in B$ แต่ $a \notin B$

ตัวอย่าง ให้ $C = \{1, \{2\}\}$
จะได้ว่า $1 \in C$ และ $\{2\} \in C$
แต่ $2 \notin C$ และ $\{1\} \notin C$

หมายเหตุ เรียกเซต $\{\{a\}\}$ ว่า เซตของเซตของ a

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ
กำหนด A, B และ C เป็นเซต ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$
จะได้ว่า $A \in C$
ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้
ให้ $A = \{a\}$
 $B = \{\{a\}\}$
 $C = \{\{\{a\}\}\}$
จะได้ว่า $A \in B$ และ $B \in C$
แต่ $A \notin C$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ
กำหนด A, B และ C เป็นเซต ถ้า $A \notin B$ และ $B \notin C$
จะได้ว่า $A \notin C$
ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้
ให้ $A = \{1\}$
 $B = \{2\}$
 $C = \{\{1\}\}$
จะได้ว่า $A \notin B$ และ $B \notin C$
แต่ $A \in C$

1.3 เซตที่เท่ากัน (Equal set)

นิยาม 1

เซตสองเซตจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

ตัวอย่าง

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 1\}$

$C = \{1, 3, 2, 3\}$

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{1, 2\}$

จะได้ว่า $A = B = C$

แต่ $A \neq D$ เนื่องจาก $4 \in D$ แต่ $4 \notin A$

และ $A \neq E$ เนื่องจาก $3 \in A$ แต่ $3 \notin E$

ตัวอย่าง

กำหนด $A = \{1\}$

$B = \{\{1\}\}$

จะได้ว่า $A \neq B$ เพราะ $1 \in A$ แต่ $1 \notin B$ โปรดสังเกตว่า สมาชิกของ A มีเพียง 1 เท่านั้น และสมาชิกของ B มีเพียง $\{1\}$ เท่านั้น

ตัวอย่าง

กำหนด $C = \{5\}$

$D = \{7\}$

จะได้ว่า $C \neq D$ เนื่องจาก $5 \neq 7$

ข้อสังเกต

จากนิยามการเท่ากันของเซต จะได้ว่า

(1) $\{1, 2\} = \{1, 2, 2\}$ ดังนั้นเราไม่นิยมเขียนสมาชิกของเซตซ้ำกัน เช่นไม่นิยมเขียน $A = \{1, 2, 2\}$ แต่จะเขียน $A = \{1, 2\}$

(2) $\{3, 1, 5\} = \{1, 3, 5\}$ ดังนั้นลำดับของสมาชิกไม่เป็นสิ่งสำคัญ ในการเขียนเซต เช่น อาจเขียน $B = \{1, 3, 5\}$ หรือ $B = \{3, 5, 1\}$ หรือ $B = \{5, 3, 1\}$ ได้ทั้งนั้น

ทฤษฎี 1 กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) \quad A = A$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } A = B \text{ แล้ว } B = A$$

$$(3) \quad \text{ถ้า } A = B \text{ และ } B = C \text{ แล้ว } A = C$$

พิสูจน์

$$(1) \quad \text{เนื่องจากสมาชิกของ } A \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } A \text{ ทุกตัว}$$

$$\text{ดังนั้น } A = A$$

$$(2) \quad \text{เนื่องจาก } A = B \text{ ดังนั้นสมาชิกของ } A \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } B$$

ทุกตัว

$$\text{นั่นคือ สมาชิกของ } B \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } A \text{ ทุกตัว}$$

$$\text{ดังนั้น } B = A$$

$$(3) \quad \text{เนื่องจาก } A = B \text{ ดังนั้นสมาชิกของ } A \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } B$$

ทุกตัว

$$\text{และ } B = C \text{ จะได้ว่าสมาชิกของ } B \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } C$$

ทุกตัว

$$\text{นั่นคือ สมาชิกของ } A \text{ เหมือนกับสมาชิกของ } C \text{ ทุกตัว}$$

$$\text{ดังนั้น } A = C$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซต ถ้า $A \neq B$ และ $B \neq C$ จะได้ว่า

$$A \neq C$$

ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{a, b\}$$

$$B = \{b, c\}$$

$$C = \{a, b\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \neq B \text{ และ } B \neq C$$

$$\text{แต่ } A = C$$

ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

ถ้า $\{a, b, c\} = \{a, b, d\}$ จะได้ว่า $c = d$

ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $a = 3, b = 4, c = 4$ และ $d = 3$

จะได้ว่า $\{a, b, c\} = \{3, 4, 4\}$

$\{a, b, d\} = \{3, 4, 3\}$

ดังนั้น $\{a, b, c\} = \{a, b, d\}$

แต่ $c \neq d$

1.4 จำนวนสมาชิกในเซต

กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า A มีสมาชิก 3 ตัว

$B = \{\text{จันทร์, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์}\}$ จะได้ว่า B มีสมาชิก 4 ตัว

$C = \{1, 3, 5, \dots\}$ จะได้ว่า C มีสมาชิกไม่จำกัดจำนวน

ในการนับจำนวนสมาชิก เราจะนับสมาชิกที่เหมือนกันเพียงครั้งเดียว แม้ว่า

จะเขียนซ้ำกันหลายครั้งก็ตาม เช่น

$D = \{a, a, a, a\}$ จะได้ว่า D มีสมาชิก 1 ตัว คือ a

$E = \{3, 5, 3, 5, 3, 5\}$ จะได้ว่า E มีสมาชิก 2 ตัว

คือ 3 และ 5

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้ โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

1. เซตของจำนวนเต็มมากกว่า 10
2. เซตของจำนวนเต็มซึ่งหารด้วย 5 ลงตัว
3. เซตของจำนวนเต็มลบสองหลัก
4. เซตของจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^2 + 5x + 6 = 0$
5. เซตของจำนวนเต็มคู่ที่น้อยกว่า 10

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้ โดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิก

1. $A = \{ 2, 4, 6 \}$
2. $B = \{ n, n, \dots, n \}$
3. $C = \{ 3, 6, 9, \dots \}$
4. $D = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \}$
5. $E = \{ 1, 4, 9, 16, 25, 36 \}$

3. ให้ E แทนเซตของจำนวนคู่ D แทนเซตของจำนวนคี่

P^+ แทนเซตของจำนวนเฉพาะที่เป็นบวก

จงเติมสัญลักษณ์ $\in$ หรือ $\notin$ เพื่อให้ข้อความที่ถูกต้อง

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $0 \underline{\hspace{1cm}} E$ | 4. $10 \underline{\hspace{1cm}} P^+$ |
| 2. $5 \underline{\hspace{1cm}} P^+$ | 5. $27 \underline{\hspace{1cm}} P^+$ |
| 3. $5 \underline{\hspace{1cm}} D$ | 6. $3 \underline{\hspace{1cm}} E$ |

4. จงพิจารณาว่าแต่ละข้อต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1. $x \in \{\{x\}, y\}$
2. $\{1\} \in \{1\}$
3. $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1,2\}$
4. ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \in \{A\}$
5. กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \in B$ และ $B \in C$ แล้ว $A \in C$
6. $\{1,2,3\} = \{x \mid x \in I \wedge (x-1)^2(x-2)^2(x-3) = 0\}$
7. $\{3,9\} = \{\{9,3\}\}$
8. $10 = \{10\}$
9. $\{1,2,3\} \neq \{2,3,4\}$
10. $\{x \in I^+ \mid x < 5\} = \{x \in I^+ \mid (x+1)^2 \leq 29\}$

2. เซตว่าง เซตจำกัด และเซตอนันต์

นิยาม 2 เซตว่าง (Empty set or Null set) คือเซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วย $\{ \}$ หรือ $\emptyset$ (Phi)

ตัวอย่าง กำหนด R แทน เซตของจำนวนจริง
ให้ $A = \{ x \in R \mid x = x + 1 \}$
จะได้ว่า $A = \{ \}$ หรือ $A = \emptyset$

ตัวอย่าง กำหนด I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก
ให้ $B = \{ x \in I^+ \mid 0 < x < 1 \}$
จะได้ว่า $B = \{ \}$ หรือ $B = \emptyset$

ข้อสังเกต เซตว่างมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0

ข้อสังเกต $\{ \}$ เป็นเซตว่างที่ไม่มีสมาชิก
 $\{0\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ 0
 $\{\emptyset\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว คือ $\emptyset$
 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ $\emptyset$ และ $\{\emptyset\}$

นิยาม 3 เซตจำกัด (Finite set) คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ หรือจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง ให้ $A = \{ 3, 5, 7, 9 \}$
จะได้ว่า A เป็นเซตจำกัดเพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 4

ตัวอย่าง กำหนด I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก
ให้ $B = \{ x \in I^+ \mid x < 10 \}$
จะได้ว่า B เป็นเซตจำกัดเพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 9

ตัวอย่าง ให้ $C = \emptyset$
จะได้ว่า C เป็นเซตจำกัดเพราะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0

นิยาม 4 เซตอนันต์ (Infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

ตัวอย่าง เซตของจำนวนเต็มหารด้วย 2 ลงตัว เป็นเซตอนันต์
เซตของจำนวนจริงเป็นเซตอนันต์

3. เอกภพสัมพัทธ์

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ไม่ว่าจะเป็นแขนงวิชาใดก็ตาม จำเป็นต้องมีการกำหนดขอบเขตของสิ่งที่ศึกษา เช่น ในการศึกษาเกี่ยวกับการแก้สมการในระบับัน ๆ ผลลัพธ์ที่ได้ต้องเป็นจำนวนจริงเท่านั้น ดังนั้นขอบเขตของจำนวนที่เราศึกษาได้แก่เซตของจำนวนจริง และเรียกเซตที่กำหนดขอบเขตสิ่งที่ศึกษาว่า "เอกภพสัมพัทธ์" (Relative universe)
นิยมใช้อักษร "U" แทน เอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่าง กำหนด U แทน เซตของจำนวนเต็ม
 I^+ แทน เซตของจำนวนเต็มบวก
 I^- แทน เซตของจำนวนเต็มลบ

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา } (1) \{x \in I^+ : x^2 = 1\} &= \{1\} \\ (2) \{x \in I^- : x^2 = 1\} &= \{-1\} \\ (3) \{x \in I : x^2 = 1\} &= \{1, -1\}\end{aligned}$$

พิจารณาเงื่อนไข $x^2 = 1$

- ข้อ (1) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น I^+
- ข้อ (2) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น I^-
- ข้อ (3) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็น I

จากตัวอย่างจะพบว่าเงื่อนไขของตัวแปรจะเหมือนกัน แต่หากำหนดเอกภพสัมพัทธ์ต่างกัน เซตอาจจะไม่เท่ากัน

4. สับเซต เพาเวอร์เซต

4.1 สับเซต (Subset)

$$\begin{aligned}\text{กำหนด } A &= \{0, 1\} \\ B &= \{0, 1, 7, 9\} \\ C &= \{0, 1, 2\}\end{aligned}$$

จะไ้กาสมาชิทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เราจะกล่าวว่า เซต A เป็นสับเซตของเซต B ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$ และจากที่กำหนดจะไ้กาสมาชิทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต C เราได้ว่า เซต A เป็นสับเซตของเซต C ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset C$

พิจารณาเซต C และเซต B 2 เป็นสมาชิกของเซต C แต่ 2 ไม่เป็นสมาชิกของเซต B ในกรณีเช่นนี้เราได้ว่า C ไม่เป็นสับเซตของเซต B ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $C \not\subset B$

นิยาม 5 เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$A \subset B \iff \forall x [x \in A \implies x \in B]$$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{4, 5, 6\}$

$$B = \{4, 5, 6, 7\}$$

จะไ้กา $A \subset B$

ตัวอย่าง กำหนด R แทน เซตของจำนวนจริง

I แทน เซตของจำนวนเต็ม

Q แทน เซตของจำนวนตรรกยะ

N แทน เซตของจำนวนธรรมชาติ

จะไ้กา $I \subset R$ $I \subset Q$ $I \subset I$ $I \not\subset N$

$Q \subset R$ $Q \subset Q$ $Q \not\subset I$ $Q \not\subset N$

$N \subset R$ $N \subset Q$ $N \subset I$ $N \subset N$

$R \subset R$ $R \not\subset Q$ $R \not\subset I$ $R \not\subset N$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A และ B เป็นเซต ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \in B$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \subset B \text{ แต่ } A \not\subseteq B$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซต ถ้า $A \in B$ และ $B \notin C$ แล้ว $A \notin C$
 ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, b, \{a, b\}\}$$

$$C = \{a, b, d, e\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \in B \text{ และ } B \notin C \text{ (เนื่องจาก } \{a, b\} \text{ เป็นสมาชิกของ } B$$

$$\text{แต่ } \{a, b\} \text{ ไม่เป็นสมาชิกของ } C)$$

$$\text{แต่ } A \subset C \text{ เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ } A \text{ เป็นสมาชิกของ } C$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

$$\text{กำหนด } A, B \text{ และ } C \text{ เป็นเซต ถ้า } A \subset B \text{ และ } B \in C \text{ แล้ว } A \in C$$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{ก\}$$

$$B = \{ก, ข\}$$

$$C = \{\{ก, ข\}, ค\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \subset B \text{ และ } B \in C$$

$$\text{แต่ } A \notin C$$

ตัวอย่าง กำหนด $D = \{ก, ข, ค\}$

$$E = \{ก, ข, ค, ง\}$$

$$\text{จะได้ว่า } D \subset E \text{ เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของเซต } D \text{ เป็นสมาชิกของเซต } E$$

$$\text{แต่ } D \neq E \text{ เนื่องจาก "ง" เป็นสมาชิกของเซต } E \text{ แต่ "ง" ไม่เป็นสมาชิกของเซต } D$$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า เซต D เป็นสับเซตแท้ของเซต E

นิยาม 6 ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ เซต A เป็นสับเซตแท้ (Proper subset)

ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

หมายเหตุ มีหนังสือบางเล่มใช้สัญลักษณ์ต่างกันระหว่างสับเซต และสับเซตแท้ กล่าวคือใช้สัญลักษณ์ " $\subseteq$ " แทน "เป็นสับเซตของ" และใช้สัญลักษณ์ " $\subset$ " แทน "เป็นสับเซตแท้ของ" แต่ในที่นี้และการกล่าวครั้งต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ " $\subset$ " เพียงอย่างเดียวแทน "เป็นสับเซตของ" และในกรณีสับเซตแท้ เช่น A เป็นสับเซตแท้ของ B จะเขียนแทนด้วย $A \subset B \wedge A \neq B$

ทฤษฎี 2 เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะแสดงว่า $\emptyset \subset A$

เนื่องจาก $\emptyset \subset A$ หรือ $\emptyset \not\subset A$ อย่างใดอย่างหนึ่งต้องเป็นจริง

พิจารณา $\emptyset \not\subset A$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อมีสมาชิก x บางตัว ซึ่ง $x \in \emptyset$

แต่ $x \notin \emptyset$

แต่ $\emptyset$ ไม่มีสมาชิก จึงหาสมาชิกดังกล่าวไม่ได้ ดังนั้น $\emptyset \not\subset A$ ไม่เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\emptyset \subset A$ เป็นจริง

ข้อสังเกต ข้อความ "เซตทุกเซตเป็นสับเซตของเซตว่าง" เป็นเท็จ เพราะมีเซต A

บางเซตซึ่ง $A \not\subset \emptyset$ เช่น $A = \{1\}$

ทฤษฎี 3 กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

(1) $A \subset A$

(2) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้วจะได้ว่า $A \subset C$

พิสูจน์ (1) เนื่องจากสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ A

ดังนั้น $A \subset A$

(2) เนื่องจาก $A \subset B$ ดังนั้น สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

และ $B \subset C$ ดังนั้น สมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ C

จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ C

นั่นคือ $A \subset C$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \not\subset B$ และ $B \not\subset C$ จะได้ว่า $A \not\subset C$
 ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{a, b\}$$

$$B = \{b, c\}$$

$$C = \{a, b, d\}$$

จะได้ว่า $A \not\subset B$ เนื่องจาก $a \in A$ แต่ $a \notin B$

และ $B \not\subset C$ เนื่องจาก $c \in B$ แต่ $c \notin C$

แต่ $A \subset C$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \subset B$ และ $B \not\subset C$

แล้วจะได้ว่า $A \not\subset C$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{ก, ข\}$$

$$B = \{ก, ข, ก, ง\}$$

$$C = \{ก, ข, ค\}$$

จะได้ว่า $A \subset B$ และ $B \not\subset C$ เนื่องจาก $ง \in B$ แต่ $ง \notin C$

แต่ $A \subset C$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{10, 11\}$

$$B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม, } 9 < x < 12\}$$

จะได้ว่า $A \subset B$, $B \subset A$

และ $A = B$

ทฤษฎี 4 กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ $A \subset B$ และ $B \subset A$ ทอเมื่อ $A = B$

พิสูจน์ ข้อที่ 1 ให้ $A \subset B$ และ $B \subset A$

เนื่องจาก $A \subset B$ จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B

และจาก $B \subset A$ จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A
 นั่นคือ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของ
 เซต B เป็นสมาชิกของเซต A ดังนั้น เซต A และเซต B มีสมาชิกเหมือนกัน
 ทุกตัว

นั่นคือ $A = B$ (จากนิยามการเท่ากันของเซตสองเซต)

ทฤษฎี 2 ให้ $A = B$

เนื่องจาก $A = B$ จะได้ว่าเซต A และเซต B มีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว

ดังนั้น ถ้า $x \in A$ จะได้ $x \in B$ นั่นคือ $A \subset B$

และถ้า $x \in B$ จะได้ $x \in A$ นั่นคือ $B \subset A$

ตัวอย่าง

ให้ $A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ว่า $A \subset B$ แต่ $B \not\subset A$ และ $A \neq B$

ตัวอย่าง

ให้ $A = \{ก, ข, ค, ง\}$

$B = \{ก, ค\}$

จะได้ว่า $B \subset A$ แต่ $A \not\subset B$ และ $A \neq B$

ตัวอย่าง

ให้ $A = \{3, 5, 7, 9\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

จะได้ว่า $A \not\subset B$, $B \not\subset A$ และ $A \neq B$

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \leftrightarrow \sim q$

และ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ดังนั้น $A \neq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$

ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ

(ก) ถ้า $A \subset B$ และ $B \not\subset C$ จะได้ว่า $A \not\subset C$

(ข) ถ้า $A \subset B$ และ $B \in C$ จะได้ว่า $A \in C$

(ค) ถ้า $A \not\subset B$ และ $A \neq B$ จะได้ว่า $B \not\subset A$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{5, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

$$C = \{\{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$$

จะได้ว่า $A \subset B$ และ $B \notin C$

แต่ $A \in C$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1\}$$

$$B = \{0, 1\}$$

$$C = \{0, 1, \{0, 1\}\}$$

จะได้ว่า $A \subset B$ และ $B \in C$

แต่ $A \notin C$

(ค) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2\}$$

จะได้ว่า $A \not\subset B$ และ $A \neq B$

แต่ $B \subset A$

4.2 เพาเวอร์เซต (Power set)

$$\text{กำหนด } A = \{1, 2\}$$

สับเซตของ A ได้แก่ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

เซตของสับเซตทั้งหมดของ A คือ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

นิยาม 7 เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย

สัญลักษณ์ $P(A)$

$$\text{นั่นคือ } P(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

$$\text{และ } X \in P(A) \iff X \subset A$$

$$X \notin P(A) \iff X \not\subset A$$

ตัวอย่างกำหนด $A = \{3, 4\}$ สับเซตของ A ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}$ ดังนั้น $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ ตัวอย่างกำหนด $B = \{ก, ข, ค\}$ สับเซตของ B ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $\emptyset, \{ก\}, \{ข\}, \{ค\}, \{ก, ข\},$ $\{ก, ค\}, \{ข, ค\}, \{ก, ข, ค\}$ ดังนั้น $P(B) = \{\emptyset, \{ก\}, \{ข\}, \{ค\}, \{ก, ข\}, \{ก, ค\}, \{ข, ค\}, \{ก, ข, ค\}\}$ ตัวอย่างกำหนด $C = \{\emptyset\}$ สับเซตของ C ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $\emptyset, \{\emptyset\}$ ดังนั้น $P(C) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ จากตัวอย่างที่กล่าวมาทั้งหมดจะพบว่า C มีสมาชิก 1 ตัว $P(C)$ มีสมาชิก $2 = 2^1$ ตัว A มีสมาชิก 2 ตัว $P(A)$ มีสมาชิก $4 = 2^2$ ตัว และ B มีสมาชิก3 ตัว $P(B)$ มีสมาชิก $8 = 2^3$ ตัวดังนั้น ถ้า A มีสมาชิก n ตัว $P(A)$ จะมีสมาชิก 2^n ตัวหมายเหตุ(1) $\emptyset \in P(A)$ สำหรับทุก ๆ เซต A (2) $A \in P(A)$ สำหรับทุก ๆ เซต A (3) จาก (1) หรือ (2) จะได้ว่า $P(A) \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ เซต A

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ เซตใดเป็นเซตจำกัด เซตอนันต์ กำหนด

R แทน เซตของจำนวนจริง

I แทน เซตของจำนวนเต็ม

I^+ แทน เซตของจำนวนเต็มบวก

I^- แทน เซตของจำนวนเต็มลบ

1. $\{ x \mid x \in R, x \geq 0 \}$

2. $\{ x \mid x \in I, 5 < x < 7 \}$

3. $\{ y \mid y \in I^+, y \leq 0 \}$

4. $\{ x \mid x \in R, x^2 - x - 12 = 0 \}$

5. $\{ z \mid z \in I^- \}$

2. ให้ A แทน เซตของสัตว์เลื้อยคลาน

B แทน เซตของสัตว์เลื้อยคลานทะเล

C แทน เซตของสัตว์เลื้อยคลานหน้าจาว

D แทน เซตของสัตว์เลื้อยคลานไม่เท้า

จงเขียนสัญลักษณ์ $\subset$ หรือ $\not\subset$ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตสองเซตในข้อต่อไปนี้

1. A, A

6. C, D

2. A, B

7. B, D

3. A, C

8. D, D

4. A, D

9. C, C

5. B, C

10. B, B

3. จงหาเพาเวอร์เซตของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\}$

5. $\{\{n\}\}$

2. $\{a, b\}$

6. $\{n, \{n\}\}$

3. $\emptyset$

7. $\{\{\emptyset\}\}$

4. $\{3, 4, 5\}$

8. $\{3, 8\}$

4. จงหาจำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เมื่อ A มีสมาชิก

1. 4 ตัว

2. 5 ตัว

3. 6 ตัว

5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

1. $2 \subset \{\{2\}\}$

2. $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}\}$

กำหนดให้ $A = \{p, q, r\}$

3. $A \subset \{p, q, r\}$

4. $\{p\} \in A$

5. $\{A\} \subset P(A)$

6. $\{\emptyset\} \subset P(A)$

5. โอเปอเรชันบนเซต

5.1 ยูเนียน (Union)

$$\text{กำหนด } A = \{5, 6, 8, 9\} \quad \text{และ } B = \{2, 6, 9\}$$

พิจารณา

- (1) สมาชิกของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B ได้แก่ 5, 8
- (2) สมาชิกของ B ที่ไม่เป็นสมาชิกของ A ได้แก่ 2
- (3) สมาชิกของ A ที่เป็นสมาชิกของ B ได้แก่ 6, 9

ให้ $C = \{2, 5, 6, 8, 9\}$ จะได้ว่า C เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B... สมาชิกของ B ที่ไม่เป็นสมาชิกของ A และสมาชิกของ A ที่เป็นสมาชิกของ B

เรียกเซต C ว่า ยูเนียนของ A และ B

นิยาม 8 ยูเนียนของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A หรือ

สมาชิกของเซต B เขียนแทนยูเนียนของเซต A และเซต B ด้วย "A $\cup$ B"

$$\text{นั่นคือ } A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 4, 6\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 7, 9, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B \cup D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

$$C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ จะได้ว่า

$$A \cup B \subset A \cup C$$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{ก, ข\}$$

$$B = \{ก, ข, ค\}$$

$$C = \{ก, ข, ง\}$$

$$A \cup B = \{ก, ข, ค\}$$

$$A \cup C = \{ก, ข, ง\}$$

จะได้ว่า $A \subset B$ และ $A \subset C$

แต่ $A \cup B \not\subset A \cup C$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{5, 7, 9\}$

$$B = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cup B = \{4, 5, 6, 7, 9\}$$

จะได้ว่า $A \subset A \cup B$

และ $B \subset A \cup B$

ทฤษฎี 5 ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) A \subset A \cup B$$

$$(2) B \subset A \cup B$$

พิสูจน์ (1) $x \in A \implies x \in A \vee x \in B \quad (p \implies p \vee q)$
 $\implies x \in A \cup B$

จะได้ว่า $A \subset A \cup B$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

จากทฤษฎี 5 จะได้ว่า $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$ แต่ $A \cup B \subset A$ และ

$A \cup B \subset B$ เป็นเท็จ ดังตัวอย่างข้างต้นต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

จะได้ว่า $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

แต่ $A \cup B \not\subset A$ และ $A \cup B \not\subset B$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

(ก) ถ้า $C \cup A \subset C \cup B$ แล้ว $A \subset B$

(ข) ถ้า $A \cup B = A \cup C$ แล้ว $B = C$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$C \cup A = \{1, 2, 3\}$$

$$C \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

จะได้ว่า $C \cup A \subset C \cup B$

แต่ $A \not\subset B$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{a, e, i\}$$

$$B = \{o, u\}$$

$$C = \{a, o, u\}$$

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A \cup C = \{a, e, i, o, u\}$$

จะได้ว่า $A \cup B = A \cup C$

แต่ $B \neq C$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $B = \{2, 4, 6\}$
 $C = \{5\}$
 $D = \emptyset$

จะได้ว่า $A \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$
 และ $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 จะได้ว่า $A \cup B = B \cup A$
 $B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$
 $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 จะได้ว่า $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

ทฤษฎี 6 ถ้า A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

- (1) $A \cup A = A$
- (2) $A \cup \emptyset = A$
- (3) $A \cup B = B \cup A$ (คุณสมบัติการสลับที่ของยูเนียน)
- (4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (คุณสมบัติการแจกแจงของยูเนียน)

พิสูจน์

(1) (ก) $A \subset A \cup A$ (โดยทฤษฎี 5)

(ข) $x \in A \cup A \implies x \in A \vee x \in A$

$\implies x \in A$ ($p \vee p \implies p$)

จะได้ว่า $A \cup A \subset A$

จาก (ก) และ (ข) สรุปว่า $A \cup A = A$

(2) (ก) $A \subset A \cup \emptyset$ (โดยทฤษฎี 5)

$$\begin{aligned} (ข) \quad x \in A \cup \emptyset &\implies x \in A \vee x \in \emptyset \\ &\implies x \in A \quad (\because x \in \emptyset \text{ เป็นเท็จ}) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $A \cup \emptyset \subset A$

จาก (ก) และ (ข) สรุปว่า $A \cup \emptyset = A$

การพิสูจน์ (3) - (4) ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 7
พิสูจน์ ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$
ตอนที่ 1 ให้ $A \subset B$

(ก) $B \subset A \cup B$ (โดยทฤษฎี 5)

$$\begin{aligned} (ข) \quad x \in A \cup B &\implies x \in A \vee x \in B \\ &\implies x \in B \vee x \in B \quad (\because A \subset B) \\ &\implies x \in B \end{aligned}$$

จะได้ว่า $A \cup B \subset B$

จาก (ก) และ (ข) สรุปว่า $A \cup B = B$

ตอนที่ 2 ให้ $A \cup B = B$

$$\begin{aligned} x \in A &\implies x \in A \vee x \in B \quad (\because p \implies p \vee q) \\ &\implies x \in A \cup B \\ &\implies x \in B \quad (\because A \cup B = B) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $A \subset B$

จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สรุปได้ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

หมายเหตุ จากทฤษฎี 7 นี้ จะได้ว่า

$$(1) \quad \text{ถ้า } A \not\subset B \text{ แล้ว } A \cup B \neq B$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } A \cup B \neq B \text{ แล้ว } A \not\subset B$$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{3, 5\}$

$B = \{2, 4, 6\}$
จะได้ว่า $A \not\subseteq B$

และ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \neq \{2, 4, 6\} = B$

5.2 อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

กำหนด $A = \{3, 4, 7, 10\}$ และ $B = \{3, 5, 7, 9\}$

พิจารณา

(1) สมาชิกของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B ได้แก่ 4, 10

(2) สมาชิกของ B ที่ไม่เป็นสมาชิกของ A ได้แก่ 5, 9

(3) สมาชิกของ A ที่เป็นสมาชิกของ B ได้แก่ 3, 7

ให้ $C = \{3, 7\}$ จะได้ว่า C เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A ที่เป็นสมาชิกของ B

เรียกเซต C ว่า อินเตอร์เซกชันของ A และ B

นิยาม 9 อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต

A และเซต B เขียนแทนอินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B ด้วย " $A \cap B$ "

นั่นคือ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{3, 5, 7, 9\}$

$B = \{9, 10, 11, 12\}$

$C = \{11, 13, 15\}$

$A \cap B = \{9\}$

$B \cap C = \{11\}$

$A \cap C = \emptyset$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า ข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A \cap B \neq \emptyset$ และ $B \cap C \neq \emptyset$

แล้วจะได้ว่า $A \cap B \cap C \neq \emptyset$

ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้ } A &= \{1\} \\ B &= \{1, 2\} \\ C &= \{2, 3\} \\ A \cap B &= \{1\} \neq \emptyset \\ B \cap C &= \{2\} \neq \emptyset \\ \text{แต่ } A \cap B \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned} \text{กำหนด } A &= \{3, 5, 10, 11\} \\ B &= \{5, 10, 15\} \\ A \cap B &= \{5, 10\} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B \subset A$$

$$\text{และ } A \cap B \subset B$$

ทฤษฎี 8 ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) A \cap B \subset A$$

$$(2) A \cap B \subset B$$

พิสูจน์ (1) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$$\Rightarrow x \in A$$

$$(\because p \wedge q \Rightarrow p)$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B \subset A$$

(2) ให้เป็นแบบฝึกหัด

ข้อความที่กล่าวว่า ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) A \subset A \cap B$$

$$(2) B \subset A \cap B$$

เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้ $A = \{3, 5\}$

$$B = \{5, 7\}$$

$$A \cap B = \{5\}$$

จะได้ว่า $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

แต่ $A \not\subset A \cap B$ และ $B \not\subset A \cap B$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ถ้า $A \cap B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

และ $B \subset C$

ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $A = \{2, 3\}$

$$B = \{3, 4\}$$

$$C = \{3, 5\}$$

จะได้ $A \cap B = \{3\}$

ดังนั้น $A \cap B \subset C$

แต่ $A \not\subset C$ เนื่องจาก $2 \in A$ แต่ $2 \notin C$

และ $B \not\subset C$ เนื่องจาก $4 \in B$ แต่ $4 \notin C$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$C = \{a, r, m, n\}$$

$$D = \emptyset$$

จะได้ว่า $A \cap A = \{a, b, c, d, e\} = A$

$$A \cap D = A \cap \emptyset = \emptyset = D$$

$$A \cap B = \{a, e\}$$

$$B \cap A = \{a, e\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap C = \{a\}$$

$$B \cap C = \{a\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{a\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ทฤษฎี 9 ถ้า A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) A \cap A = A$$

$$(2) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(3) A \cap B = B \cap A \quad (\text{คุณสมบัติการสลับที่ของอินเตอร์เซกชัน})$$

$$(4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{คุณสมบัติการจับคู่ของอินเตอร์เซกชัน})$$

พิสูจน์

$$(1) (n) A \cap A \subset A \quad (\text{โดยทฤษฎี 8})$$

$$(ข) x \in A \implies x \in A \wedge x \in A \quad (p \implies p \wedge p)$$

$$\implies x \in A \cap A$$

$$\text{จะได้ว่า } A \subset A \cap A$$

$$\text{จาก (ก) และ (ข) สรุปว่า } A = A \cap A$$

$$(2) \text{ เนื่องจาก } A \cap \emptyset \subset \emptyset \quad (\text{โดยทฤษฎี 7})$$

$$\text{แต่ } \emptyset \subset A \cap \emptyset \quad (\because \text{เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต})$$

$$\text{ดังนั้น } A \cap \emptyset = \emptyset$$

การพิสูจน์ (3) - (4) ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง

$$\text{กำหนด } A = \{ก, ข, ค\}$$

$$B = \{ก, ข, ค, ง, จ\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \subset B$$

$$\text{และ } A \cap B = \{ก, ข, ค\} = A$$

ทฤษฎี 10 ถ้า A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

พิสูจน์ตอนที่ 1ถ้า $A \subset B$ (ก) $A \cap B \subset A$ (โดยทฤษฎี 8)(ข) $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A$ $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ ($\because A \subset B$) $\Rightarrow x \in A \cap B$ นั่นคือ $A \subset A \cap B$ จาก (ก) และ (ข) สรุปว่า $A \cap B = A$ ตอนที่ 2 ถ้า $A \cap B = A$ $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ $\Rightarrow x \in B$ $(\because p \wedge q \Rightarrow q)$ นั่นคือ $A \subset B$ จาก (1) และ (2) สรุปว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$ ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ(ก) ถ้า $A \cap C \subset B \cap C$ แล้ว $A \subset B$ (ข) ถ้า $A \cap C = B \cap C$ แล้ว $A = B$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $A = \{a, d\}$ $B = \{a, b\}$ $C = \{a, b, c\}$ $A \cap C = \{a\}$ $B \cap C = \{a, b\}$ จะได้ว่า $A \cap C \subset B \cap C$ แต่ $A \not\subset B$ เนื่องจาก $d \in A$ แต่ $d \notin B$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างข้างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$C = \{2\}$$

$$A \cap C = \{2\}$$

$$B \cap C = \{2\}$$

$$\text{จะได้ } A \cap C = B \cap C$$

$$\text{แต่ } A \neq B$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(ก) (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

$$(ข) (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B \cap C = \{2, 4\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$\text{จะได้ } (A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{ \text{จันทร์, อังคาร} \}$$

$$B = \{ \text{อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี} \}$$

$$C = \{ \text{เสาร์, อาทิตย์} \}$$

$$A \cap B = \{ \text{อังคาร} \}$$

$$(A \cap B) \cup C = \{ \text{อังคาร, เสาร์, อาทิตย์} \}$$

$$B \cup C = \{ \text{อังคาร, พุธ, ศุกร์, เสาร์, อาทิตย์} \}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{ \text{อังคาร} \}$$

$$\text{จะได้ว่า } (A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$$

ตัวอย่าง

กำหนด $A = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$

$$B = \{ 0, 2, 4, 8 \}$$

$$C = \{ 4, 6, 8, 10 \}$$

$$\text{จะได้ว่า } B \cap C = \{ 4, 8 \}$$

$$A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

$$A \cup C = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10 \}$$

$$B \cup C = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10 \}$$

$$A \cap B = \{ 2, 4 \}$$

$$A \cap C = \{ 4, 6 \}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 8 \}$$

$$A \cap (B \cup C) = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{และ } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ทฤษฎี 11

คุณสมบัติการกระจาย

ถ้า A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

$$(1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

พิสูจน์

$$(1) x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \vee (x \in B \cap C)$$

$$\iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

$$\iff (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$$

$$\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

5.3 คอมพลีเมนต์ (Complement)

นิยาม 10 ถ้าเซต A เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U คอมพลีเมนต์ของ A เมื่อเทียบกับ U คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ U ซึ่งไม่ใช่สมาชิกของ A เขียนแทนคอมพลีเมนต์ของ A เมื่อเทียบกับ U ด้วย " A' "

$$\text{นั่นคือ } A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มอาจใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทน A'

$$C(A), A^C, \bar{A}, \tilde{A}, U - A$$

ตัวอย่าง กำหนด U แทน เซตของจำนวนเต็ม

A แทน เซตของจำนวนเต็มคู่

B แทน เซตของจำนวนเต็มที่น้อยกว่า 1

$$\text{จะได้ว่า } A' = \text{เซตของจำนวนเต็มคี่}$$

$$B' = \text{เซตของจำนวนเต็มที่ไม่มากกว่าหรือเท่ากับ 1}$$

นิยาม 11 ถ้าเซต A และเซต B ต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U ผลต่างระหว่าง A และ B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ซึ่งไม่ใช่สมาชิกของเซต B เขียนแทนผลต่างระหว่างเซต A และเซต B ด้วย " $A - B$ "

$$\text{นั่นคือ } A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ตัวอย่าง กำหนด $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 15 \}$

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$B = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

$$C = \{ 6, 7, 8, \dots, 15 \}$$

$$A - B = \{ 1, 2 \}$$

$$B - A = \{ 6, 7, 8, 9 \}$$

$$A - C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$C - A = \{ 6, 7, 8, \dots, 15 \}$$

$$B - C = \{ 3, 4, 5 \}$$

$$C - B = \{ 10, 11, \dots, 15 \}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างจะพบว่า $A - B \neq B - A$

$$A - C \neq C - A$$

$$B - C \neq C - B$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $A - B = A - C$ แล้วจะได้ว่า $B = C$
 ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้

ให้ $A = \{ 2, 4, 8 \}$

$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$C = \{ 2, 5, 9 \}$$

$$A - B = \{ 4, 8 \}$$

$$A - C = \{ 4, 8 \}$$

จะได้ว่า $A - B = A - C$

แต่ $B \neq C$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ $A - (B - C) = (A - B) - C$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{e, f, g, h, i\}$$

$$C = \{a, e, i, o, u\}$$

$$B - C = \{f, g, h\}$$

$$A - (B - C) = \{a, b, c, d\}$$

$$A - B = \{a, b, c, d\}$$

$$(A - B) - C = \{b, c, d\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A - (B - C) \neq (A - B) - C$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ $P(A - B) = P(A) - P(B)$ เมื่อ

$P(A - B)$ หมายถึงเพาเวอร์เซตของ $(A - B)$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 5\}$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$P(A - B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$$

$$P(A) - P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\text{จะได้ว่า } P(A - B) \neq P(A) - P(B)$$

ทฤษฎี 12 กำหนด $A \subset U$ จะได้ว่า

$$(1) (A')' = A$$

$$(2) \emptyset' = U$$

$$(3) U' = \emptyset$$

$$(4) A \cap A' = \emptyset$$

$$(5) A \cup A' = U$$

พิสูจน์

$$(1) x \in (A')' \iff x \in U \wedge x \notin A'$$

$$\iff x \in U \wedge \sim(x \in A')$$

$$\iff x \in U \wedge \sim(x \notin A)$$

$$\iff x \in U \wedge \sim(\sim(x \in A))$$

$$\iff x \in U \wedge x \in A$$

$$\iff x \in A$$

$$(A')' = A$$

$$(2) x \in \emptyset' \iff x \in U \wedge x \notin \emptyset$$

$$\iff x \in U \quad (\because x \notin \emptyset \text{ เป็นจริง})$$

$$\emptyset' = U$$

$$(3) U' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin U\}$$

$$= \emptyset$$

$$(4) A \cap A' = \{x \mid x \in A \wedge x \in A'\}$$

$$= \{x \mid x \in A \wedge (x \in U \wedge x \notin A)\}$$

$$= \{x \mid x \in U \wedge x \in A \wedge x \notin A\}$$

$$= \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad x \in A \cup A' &\iff x \in A \vee x \in A' \\
 &\iff x \in A \vee (x \in U \wedge x \notin A) \\
 &\iff (x \in A \vee x \in U) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \\
 &\iff x \in U \wedge (x \in A \vee \sim(x \in A)) \\
 &\iff x \in U [x \in A \vee \sim(x \in A) \text{ เป็นจริงเสมอ}]
 \end{aligned}$$

$$A \cup A' = U$$

ตัวอย่าง

กำหนด

$$U = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$A = \{3, 5, 9\}$$

$$B = \{5, 10\}$$

$$A - B = \{3, 9\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap B' = \{3, 9\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \cap B' = A - B$$

ทฤษฎี 13

กำหนด A และ B

เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า $A - B = A \cap B'$

พิสูจน์

$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

$$\iff x \in A \wedge x \in B'$$

$$\iff x \in A \cap B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

ตัวอย่าง

กำหนด

$$U = \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$A = \{2, 4, 8\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A' = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$$

$$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A \subset B \text{ และ } B' \subset A'$$

$$\text{แต่ } A' \not\subset B'$$

ทฤษฎี 14 กำหนดให้ $A \subset U$ และ $B \subset U$ จะได้ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

พิสูจน์

$$A \subset B \iff x \in A \implies x \in B$$

$$\iff \sim (x \in B) \implies \sim (x \in A)$$

$$\iff x \notin B \implies x \notin A$$

$$\iff x \in B' \implies x \in A'$$

$$\iff B' \subset A'$$

$$A \subset B \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad B' \subset A'$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่งต่างก็เป็นสับเซตของ U

$$(ก) (A \cup B)' = A' \cup B'$$

$$(ข) (A \cap B)' = A' \cap B'$$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{2, 5, 9, 14, 20\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 20\}$$

$$(A \cup B)' = \{4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

$$A' = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$B' = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

$$A' \cup B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

17, 18, 19, 20}

$$\text{จะได้ว่า } (A \cup B)' \neq A' \cup B'$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างข้างต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } U &= \{ a, b, c, \dots, x, y, z \} \\
 A &= \{ a, c, d, e, o, u \} \\
 B &= \{ a, e, i, o, u \} \\
 A \cap B &= \{ a, e, o, u \} \\
 (A \cap B)' &= \{ b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, \\
 &\quad x, y, z, \} \\
 A' &= \{ b, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, \\
 &\quad y, z \} \\
 B' &= \{ b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, \\
 &\quad x, y, z \} \\
 A' \cap B' &= \{ b, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z \}
 \end{aligned}$$

	จะได้ว่า	$(A \cap B)' \neq A' \cap B'$
ตัวอย่าง	กำหนด	$U = \{ 1, 2, \dots, 10 \}$
		$A = \{ 1, 2, 3, 6, 9 \}$
		$B = \{ 2, 4, 5, 7, 9, 10 \}$
		$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 \}$
		$A \cap B = \{ 2, 9 \}$
		$A' = \{ 4, 5, 7, 8, 10 \}$
		$B' = \{ 1, 3, 6, 8 \}$
		$(A \cup B)' = \{ 8 \}$
		$A' \cap B' = \{ 8 \}$
		$(A \cap B)' = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 \}$
$A' \cup B' = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 \}$		

$$\text{จะได้ว่า } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ทฤษฎี 15 De Morgan's laws

กำหนด $A \subset U$ และ $B \subset U$ จะได้ว่า

$$(1) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(2) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} (1) \quad x \in (A \cup B)' &\iff x \notin A \cup B \\ &\iff \sim (x \in A \cup B) \\ &\iff \sim (x \in A \vee x \in B) \\ &\iff \sim (x \in A) \wedge \sim (x \in B) \\ &\iff x \notin A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in A' \wedge x \in B' \\ &\iff x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(2) (A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' \quad (\text{โดยทอน 1})$$

(โดยทฤษฎี 10)

$$\text{ดังนั้น } [(A' \cup B')]' = A \cap B$$

$$\text{แต่ } [(A' \cup B')]' = A' \cup B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ตัวอย่าง

$$\text{กำหนด } U = \{1, 2, \dots, 15\}$$

$$A = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$$C = \{1, 2, 4, 7, 11, 15\}$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$B \cap C = \{1, 7, 11\}$$

$$A - B = \{8, 12\}$$

$$A - C = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$A - (B \cup C) = \{3, 12\}$$

$$(A-B) \cap (A-C) = \{8, 12\}$$

$$A - (B \cap C) = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$(A-B) \cup (A-C) = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$\text{จะได้ว่า } A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$\text{และ } A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

ทฤษฎี 16 กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ จะได้ว่า

$$(1) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$(2) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} (1) \quad A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' \\ &= A \cap (B' \cap C') \\ &= (A \cap A) \cap (B' \cap C') \\ &= A \cap [A \cap (B' \cap C')] \\ &= A \cap [(B' \cap C') \cap A] \\ &= (A \cap B') \cap (C' \cap A) \\ &= (A \cap B') \cap (A \cap C') \\ &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)' \\ &= A \cap (B' \cup C') \\ &= (A \cap B') \cup (A \cap C') \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ

$$(ก) \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$(ข) \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างนี้

$$\text{ให้} \quad A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$C = \{5, 6, 7\}$$

$$B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A - (B \cup C) = \{1, 2\}$$

$$A - B = \{1, 2\}$$

$$A - C = \{1, 2, 3\}$$

$$(A - B) \cup (A - C) = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{จะได้} \quad A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างนี้

$$\text{ให้} \quad A = \{ก, ข, ค\}$$

$$B = \{ง, จ\}$$

$$C = \{ข, ง\}$$

$$B \cap C = \{ง\}$$

$$A - (B \cap C) = \{ก, ข, ค\}$$

$$A - B = \{ก, ข, ค\}$$

$$A - C = \{ก, ค\}$$

$$(A - B) \cap (A - C) = \{ก, ค\}$$

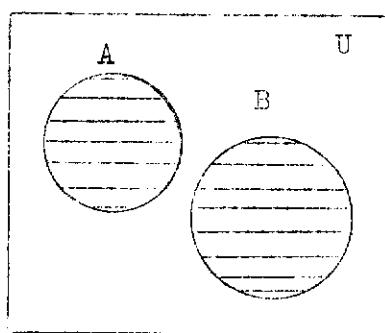
$$\text{จะได้} \quad A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$$

6. แผนภาพของเวเน-ออยเลอร์ (Venn - Euler diagram)

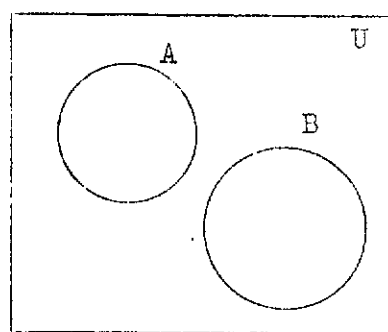
เรียกการเขียนภาพแทนเซตว่า แผนภาพของเวเน-ออยเลอร์ โดยปกตินิยมเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมมุมฉาก และแทนเซตต่าง ๆ ซึ่งเป็นสับเซตของ U ด้วยวงกลม หรือ วงรี หรือรูปทึบพื้นที่จำกัดใด ๆ

ใน 5 แผนภาพต่อไปนี้ ส่วนแรเงาแสดงถึง $A \cup B$, $A \cap B$

กรณีที่ 1 เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

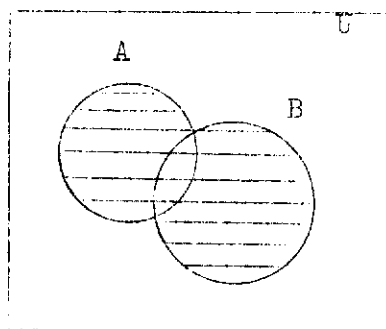


$A \cup B$

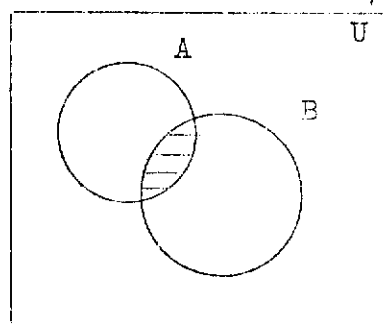


$A \cap B = \emptyset$

กรณีที่ 2 เซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกันบ้าง แต่ $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$

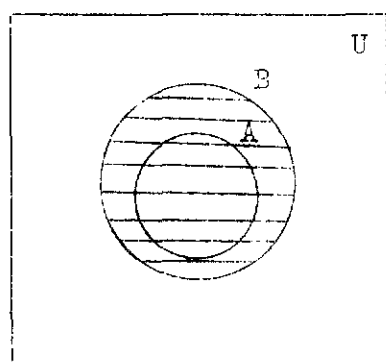


$A \cup B$

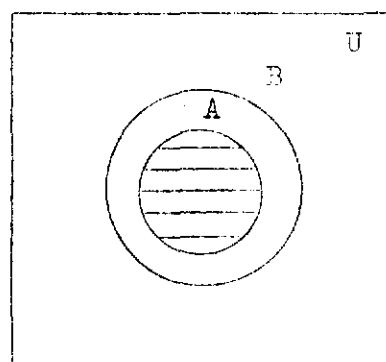


$A \cap B$

กรณี 3 เขต A เป็นสับเซตของเขต B แต่เขต B ไม่เป็นสับเซตของเขต A

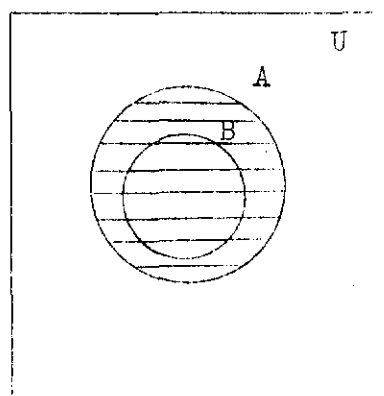


$$A \cup B$$

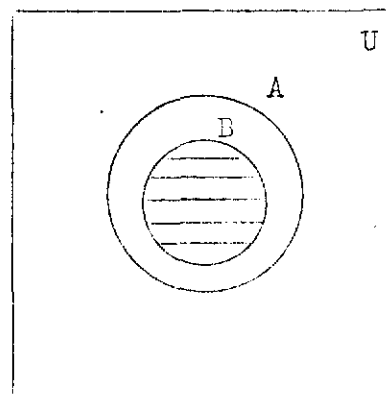


$$A \cap B$$

กรณี 4 เขต B เป็นสับเซตของเขต A แต่เขต A ไม่เป็นสับเซตของเขต B

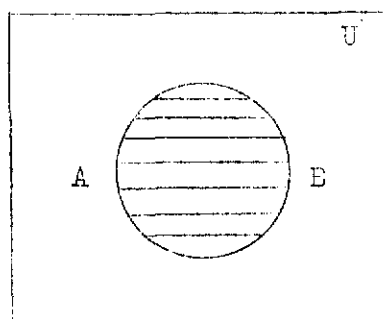


$$A \cup B$$

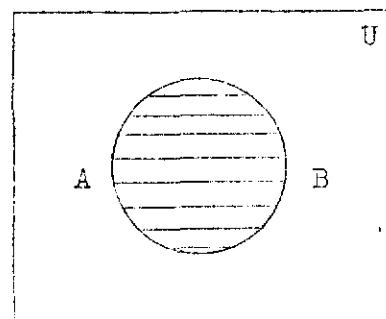


$$A \cap B$$

กรณี 5 เขต A เท่ากับเขต B

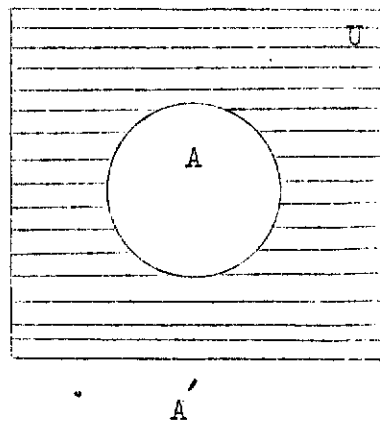


$$A \cup B$$

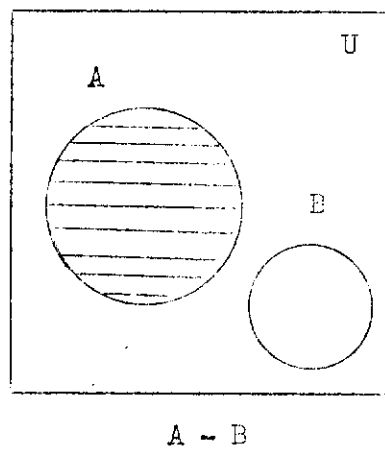


$$A \cap B$$

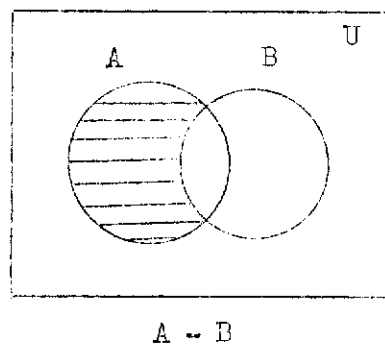
ในแผนภาพต่อไปนี้ ส่วนแรเงาแสดงถึง A'



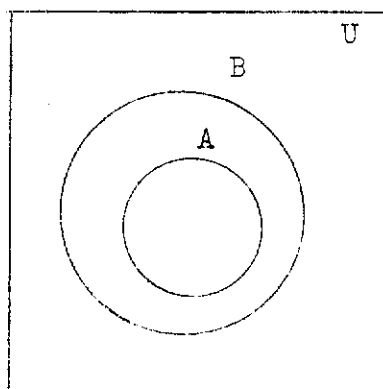
ใน 5 แผนภาพต่อไปนี้ ส่วนแรเงาแสดงถึง $A - B$
กรณี 1 เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



กรณี 2 เซต A และเซต B มีสมาชิกร่วมกันบ้าง แต่ $A \not\subseteq B$ และ $B \not\subseteq A$

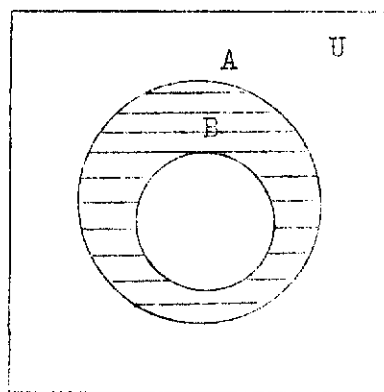


กรณี 3 เขต A เป็นสับเซตของเขต B แต่เขต B ไม่เป็นสับเซตของเขต A



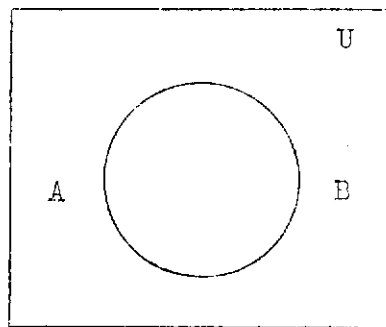
$$A - B = \emptyset$$

กรณี 4 เขต B เป็นสับเซตของเขต A แต่เขต A ไม่เป็นสับเซตของเขต B



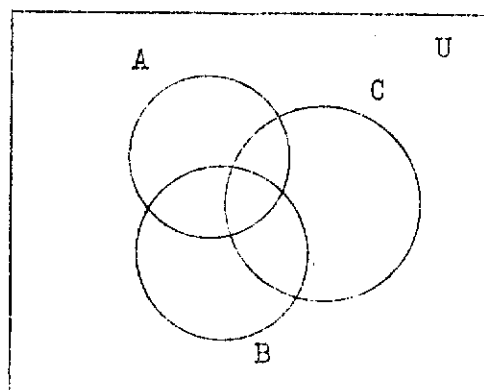
$$A - B$$

กรณี 5 เขต A เท่ากับเขต B



$$A - B = \emptyset$$

ตัวอย่าง สำหรับแต่ละข้อ จงวาดแผนภาพต่อไปนี้ และแรเงาตามที่กำหนดให้

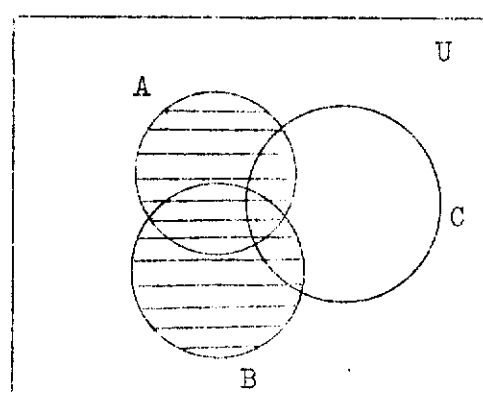


(ก) $A \cup B$

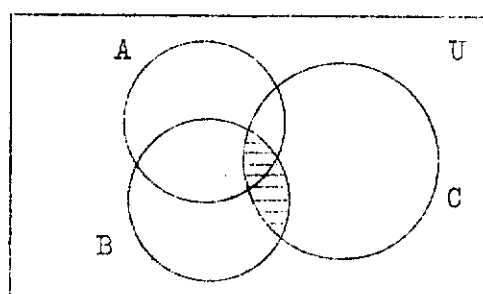
(ข) $B \cap C$

(ค) $(A \cap B) \cup C$

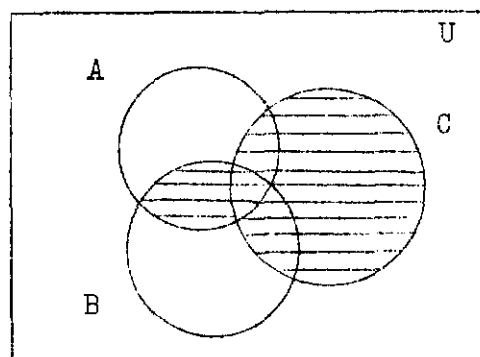
(ง) $A \cup B$



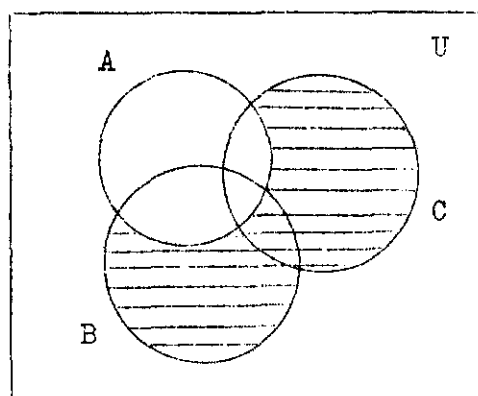
(ข) $B \cap C$



(ก) $(A \cap B) \cup C$



ตัวอย่าง จงหาส่วนที่แรเงาในแผนภาพต่อไปนี้



จากแผนภาพส่วนที่แรเงา คือ $(B \cup C) - A$

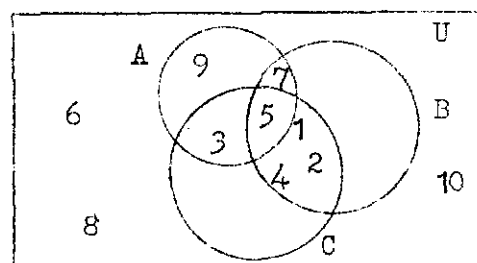
ตัวอย่าง กำหนด $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$

$A = \{ 3, 5, 7, 9 \}$

$B = \{ 1, 2, 4, 5, 7 \}$

$C = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

เขียนแผนภาพเวนน - ออยเลอร์ข้างตนต่อไปนี้



7. จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

ถ้า A เป็นเซตจำกัด ใช้สัญลักษณ์ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของ A เช่น กำหนด
 $A = \{3, 4, 5, 6\}$ จะได้ว่า $n(A) = 4$ และกำหนด $B = \{0\}$
 จะได้ว่า $n(B) = 1$

$$\text{พิจารณา } A \cup B = \{0, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(A \cup B) = 5$$

ในกรณีที่เซต A และเซต B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน จะได้ว่า

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \{a, e, i, o, u\}$

$$B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

จะได้ว่า $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$

$$A \cap B = \{a, e\}$$

$$n(A) = 5, n(B) = 6, n(A \cup B) = 9, n(A \cap B) = 2$$

$$\text{แต่ } n(A) + n(B) \neq n(A \cup B)$$

ทฤษฎี 13 ถ้าเซต A และเซต B เป็นเซตจำกัดใด ๆ จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) -$

พิสูจน์ $n(A \cap B)$
 เนื่องจาก $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

และเนื่องจาก $A \cap B$ และ $A - B$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น

$$n(A) = n(A \cap B) + n(A - B) \quad (1)$$

เนื่องจาก $A \cup B = (A - B) \cup B$

และ $A - B$ กับ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ดังนั้น

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$$

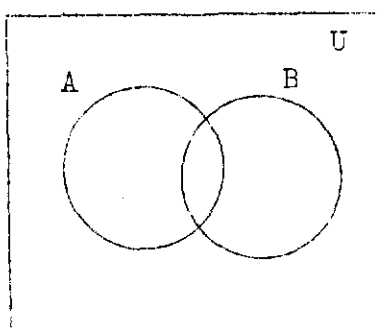
$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) $n(A) = n(A \cap B) + n(A \cup B) - n(B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ตัวอย่าง จากการสำรวจนิสิต 850 คน พบว่านิสิตที่นิยมอ่านหนังสือพิมพ์ ประชาธิปไตย 211 คน นิยมอ่านหนังสือพิมพ์ประชาธิปไตย 173 คน ไม่นิยมอ่านทั้งสองฉบับ 570 คน จงหาจำนวนนิสิตที่นิยมอ่านทั้งสองฉบับ

วิธีทำ ให้ A แทน เซตของนิสิตที่นิยมอ่านหนังสือพิมพ์ประชาธิปไตย
 B แทน เซตของนิสิตที่นิยมอ่านหนังสือพิมพ์ประชาธิปไตย
 $A \cap B$ แทน เซตของนิสิตที่นิยมอ่านหนังสือพิมพ์ประชาธิปไตยและหนังสือพิมพ์ประชาธิปไตย
 สร้างแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์



$$\text{จากสูตร} \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$850 - 570 = 211 + 173 - n(A \cap B)$$

$$280 = 384 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 104$$

จำนวนนิสิตที่นิยมอ่านทั้งสองฉบับ 104 คน

ตัวอย่าง จากการสอบถามนักเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งจำนวน 75 คน มี 37 คนที่ชอบนก 33 คนที่ชอบแมว 40 คนที่ชอบสุนัข 16 คนที่ชอบทั้งนกและแมว 11 คนชอบแมวและสุนัข 12 คนชอบนกและสุนัข ถ้าไม่มีเด็กอนุบาลคนใดเลยที่เกลียดสัตว์ทั้ง 3 อย่าง จงหาจำนวนนักเรียนที่ชอบทั้ง 3 ชนิด

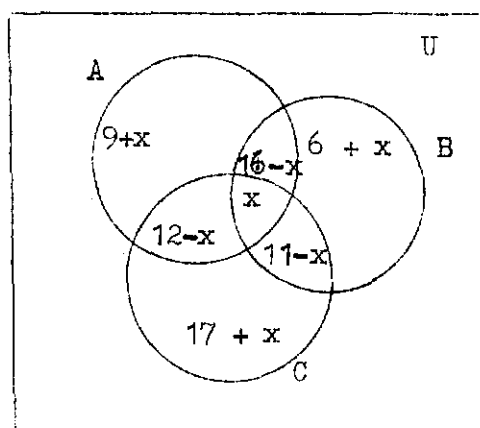
วิธีทำ

ให้ A แทน เซตของนักเรียนที่ชอบนก

B แทน เซตของนักเรียนที่ชอบแมว

C แทน เซตของนักเรียนที่ชอบสุนัข

สร้างแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ โดยให้ x แทนจำนวนนักเรียนที่ชอบสัตว์ทั้ง 3 ชนิด



$$37 + (6 + x) + (11 - x) + (17 + x) = 75$$

$$71 + x = 75$$

$$x = 4$$

มีนักเรียน 4 คนที่ชอบสัตว์ทั้ง 3 ชนิด

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์

$$U = \{x \mid x \in I, -10 \leq x \leq 10\}$$

$$\text{และ } A = \{x \in U \mid x = 2k, k \in I\}$$

$$B = \{x \in U \mid x = 2k + 1, k \in I\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$$

$$\text{จงหา } 1. A \cup B, B \cup C, C \cup D, A \cup B \cup D$$

$$2. A \cap B, B \cap C, A \cap D, B \cap D \cap C$$

$$3. A \cup (B \cap C), A \cap (B \cup D), B \cap (C \cup D), C \cup (B \cap A)$$

$$4. A', B', C', D', (A \cap B)', (C \cup D)', A' \cap C', B' \cup D'$$

$$5. A - B, B - C, D - C, D - A, B - B, A - (C - B),$$

$$B - (A - D), (C - A) - B$$

2. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

$$1. P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

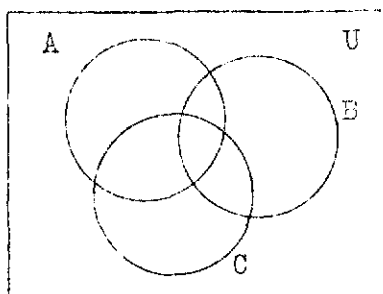
$$2. P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$3. P(A - B) = P(A) - P(B)$$

$$4. A - (B \cup C) = (A - B) \cup C$$

$$5. A \cup B = B \iff A \cap B = A$$

3. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงแรเงาในแผนภาพต่อไปนี้



1. $A', A \cup C, B \cap C, A - B, C - A$
2. $A \cap (A \cup C), B \cup (A \cap C)$
3. $A - (B \cap C), B - (A \cap C), (A \cap B) - (B \cap C)$
4. กำหนด A, B, C เป็นสับเซตของ U จงพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้
 1. $A \cup (A \cap B) = A$
 2. $A \cap (A \cup B) = A$
 3. ถ้า $C \subset A$ จะได้ว่า $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
 4. $(A - B) \cup B = A$
 5. $A - (A \cap B) = A - B$
 6. $(A \cap B) - B = \emptyset$
 7. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
 8. $(A - B) - C = (A - C) - B$
5. นิสิตกลุ่มหนึ่งมี 115 คน ทุกคนต้องเรียนวิชาภาษาไทย ภาษาอังกฤษ หรือ คณิตศาสตร์ อย่างน้อยหนึ่งวิชา ที่เรียนภาษาไทยมี 60 คน ที่เรียนภาษาอังกฤษมี 50 คน ที่เรียนคณิตศาสตร์ 45 คน ที่เรียนภาษาไทยและคณิตศาสตร์มี 20 คน ที่เรียนทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ มี 10 คน ที่เรียนภาษาไทยเพียงอย่างเดียวมี 35 คน จงหาจำนวนนักเรียนที่
 1. เรียนภาษาอังกฤษ และคณิตศาสตร์ แต่ไม่เรียนภาษาไทย
 2. เรียนภาษาไทย และภาษาอังกฤษ แต่ไม่เรียนคณิตศาสตร์
 3. เรียนภาษาไทยและคณิตศาสตร์ แต่ไม่เรียนภาษาอังกฤษ
 4. เรียนทั้งสามวิชา
6. นักเรียนโรงเรียนแห่งหนึ่งมี 1000 คน มีนักเรียนที่ชอบอ่านหนังสือการ์ตูน 512 คน ชอบร้องเพลง 448 คน ชอบเขียนภาพ 415 คน ชอบร้องเพลงและอ่านหนังสือการ์ตูน 218 คน ชอบเขียนภาพและอ่านหนังสือการ์ตูน 127 คน ชอบเขียนภาพอย่างเดียว 150 คน และชอบตั้งแต่ 2 อย่างขึ้นไป 315 คน จงหา

1. จำนวนนักเรียนที่ชอบอ่านหนังสือการ์ตูนอย่างเดียวเท่านั้น
 2. จำนวนนักเรียนที่ชอบร้องเพลงและเขียนภาพสองอย่างเท่านั้น
 3. จำนวนนักเรียนที่ชอบทั้งสามอย่าง
 4. จำนวนนักเรียนที่ไม่ชอบทั้งสามอย่าง
7. ในโรงเรียนชายแห่งหนึ่งมีนักเรียน 500 คน นักเรียนทุกคนต้องเล่นกีฬาต่อไปนี้อย่างน้อย 1 ประเภท ได้แก่ ฟุตบอล บาสเกตบอล และ เทนนิส ปรากฏว่า 200 คน ไม่เล่นฟุตบอล 190 คน ไม่เล่นเทนนิส 217 คน ไม่เล่นบาสเกตบอล 147 คน เล่นทั้งเทนนิสและบาสเกตบอล 139 คน เล่นทั้งฟุตบอลและเทนนิส และ 195 คน เล่นทั้งฟุตบอลและบาสเกตบอล จงหา
1. จำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาทั้งสามประเภท
 2. จำนวนนักเรียนที่เล่นเทนนิสอย่างเดียว
 3. จำนวนนักเรียนที่เล่นทั้งฟุตบอลและบาสเกตบอล
 4. จำนวนนักเรียนเล่นทั้งเทนนิสและบาสเกตบอล แต่ไม่เล่นฟุตบอล
 5. จำนวนนักเรียนที่เล่นกีฬาประเภทเดียว

ระบบจำนวน

1. สัจพจน์และคุณสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง R การบวก การคูณ ซึ่งเป็นไปตามสัจพจน์ต่อไปนี้

สัจพจน์ที่ 1 (คุณสมบัติปิดของการบวก)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b$ เป็นจำนวนจริง

สัจพจน์ที่ 2 (คุณสมบัติการจับหมู่ของการบวก)

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$

สัจพจน์ที่ 3 (การมีเอกลักษณ์การบวก)

มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $0 + a = a + 0 = a$ สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว

และเรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก

สัจพจน์ที่ 4 (การมีอินเวอร์สการบวก)

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่ง $(-a) + a = a + (-a)$

$= 0$ เรียก $-a$ ว่าอินเวอร์สการบวกของ a

สัจพจน์ที่ 5 (คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $a + b = b + a$

สัจพจน์ที่ 6 (คุณสมบัติปิดของการคูณ)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว ab เป็นจำนวนจริง

สัจพจน์ที่ 7 (คุณสมบัติการจับหมู่ของการคูณ)

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $(ab)c = a(bc)$

สัจพจน์ที่ 8 (การมีเอกลักษณ์การคูณ)

มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $1 \neq 0$ และ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ สำหรับทุก

จำนวนจริง a ทุกตัว เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ

สัจพจน์ที่ 9 (การมีอินเวอร์สการคูณ)

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว ซึ่ง $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง a^{-1} ซึ่ง

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 \quad \text{เรียก } a^{-1} \text{ ว่า อินเวอร์สการคูณของ } a$$

สัจพจน์ที่ 10 (คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงแล้ว $ab = ba$

สัจพจน์ที่ 11 (คุณสมบัติการกระจายทางซ้าย)

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงแล้ว $a(b + c) = ab + ac$

คุณสมบัติเกี่ยวกับการใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) ในระบบจำนวนจริง

1. คุณสมบัติสะท้อน ถ้า a เป็นจำนวนจริงแล้ว $a = a$

2. คุณสมบัติสมมาตร ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = b$ จะได้ว่า

$$b = a$$

3. คุณสมบัติถ่ายทอด ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = b$ และ

$$b = c \quad \text{จะได้ว่า} \quad a = c$$

4. คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = b$ จะได้ว่า $a + c = b + c$

5. คุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = b$ จะได้ว่า $ac = bc$

ทฤษฎี 1 (คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก)

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง

$$(1) \quad \text{ถ้า } a + b = a + c \quad \text{จะได้} \quad b = c$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } b + a = c + a \quad \text{จะได้} \quad b = c$$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก a เป็นจำนวนจริง ดังนั้นจากสัจพจน์ที่ 4 จะมีจำนวนจริง $-a$

$$a + b = a + c$$

$$\Rightarrow -a + (a + b) = -a + (a + c) \quad \text{โดยคุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน}$$

$$\Rightarrow (-a + a) + b = (-a + a) + c \quad \text{โดยคุณสมบัติการจับคู่ของการบวก}$$

$$\Rightarrow 0 + b = 0 + c \quad \text{โดยคุณสมบัติของอินเวอร์สการบวก}$$

$$\Rightarrow b = c \quad \text{โดยคุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวก}$$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $ab = ac$ จะได้ $b = c$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $a = 0, b = 15, c = 9$

$$ab = 0(15) = 0$$

$$ac = 0(9) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } ab = ac$$

$$\text{แต่ } b \neq c$$

ทฤษฎี 2 (คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ)

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$

$$(1) \text{ ถ้า } ab = ac \quad \text{จะได้ } b = c$$

$$(2) \text{ ถ้า } ba = ca \quad \text{จะได้ } b = c$$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $a \neq 0$ ดังนั้นจากสัจพจน์ที่ 9 จะมีจำนวนจริง a^{-1}

$$ab = ac$$

$$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \quad \text{โดยคุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน}$$

$$\Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \quad \text{โดยคุณสมบัติการจับคู่ของการคูณ}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot b = 1 \cdot c \quad \text{โดยคุณสมบัติของอินเวอร์สการคูณ}$$

$$\Rightarrow b = c \quad \text{โดยคุณสมบัติของเอกลักษณ์การคูณ}$$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงพิจารณาพิสูจน์ต่อไปนี้ว่าบรรทัดใดไม่ถูกต้อง

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x(x - x) = (x + x)(x - x)$$

$$\Rightarrow x = x + x \quad \text{โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ}$$

$$\Rightarrow x = 2x$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \quad \text{โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ}$$

นิพจน์บรรทัดที่ 3 และบรรทัดที่ 5 เพราะคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ มีข้อความว่า

$$\text{ถ้า } ba = ca \quad \text{และ } a \neq 0 \quad \text{จะได้ } b = c$$

บรรทัดที่ 3 ผิด เพราะ a ในที่นี้ คือ $x - x$ ซึ่งเท่ากับศูนย์

บรรทัดที่ 5 ผิด เพราะ a ในที่นี้ คือ x ซึ่งไม่ทราบว่าเท่ากับศูนย์หรือไม่

ตัวอย่าง จงพิจารณาพิสูจน์ต่อไปนี้ว่าผิดที่ใด

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = b + c$

$$\text{เนื่องจาก } a = b + c$$

$$a(a - b) = (b + c)(a - b)$$

$$a^2 - ab = ab - b^2 + ac - bc$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

$$a = b$$

การพิสูจน์ผิดที่บรรทัดสุดท้าย เพราะนำคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณมาใช้โดยมิได้

$$\text{กันว่า } a - b - c = 0$$

ข้อความ "ถ้า $a = b + c$ แล้วจะได้ว่า $a = b$ " เป็นเท็จทั้งตัวอย่างกำหนด

ต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 3, b = 2, c = 1$$

$$\text{จะได้ว่า } a = b + c$$

แต่ $a \neq b$

ทฤษฎี 3 กำหนด x และ a เป็นจำนวนจริง

$$(1) \text{ ถ้า } x + a = a \quad \text{จะได้ } x = 0$$

$$(2) \text{ ถ้า } a + x = a \quad \text{จะได้ } x = 0$$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $0 + a = a$

$$\text{แต่ } x + a = a$$

$$\text{ดังนั้น } x + a = 0 + a$$

$$x = 0 \quad \text{โดยคุณสมบัติการหักล้างสำหรับการบวก}$$

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด x และ a เป็นจำนวนจริง

$$(ก) \text{ ถ้า } xa = a \quad \text{จะได้ } x = 1$$

$$(ข) \text{ ถ้า } ax = a \quad \text{จะได้ } x = 1$$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 0, x = 25$$

$$\text{จะได้ } xa = (25)(0) = 0 = a$$

$$\text{และ } ax = (0)(25) = 0 = a$$

$$\text{แต่ } x \neq 1$$

ทฤษฎี 4 กำหนด x และ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$

$$(1) \text{ ถ้า } xa = a \quad \text{จะได้ } x = 1$$

$$(2) \text{ ถ้า } ax = a \quad \text{จะได้ } x = 1$$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $1 \cdot a = a$

$$\text{แต่ } xa = a$$

$$\text{ดังนั้น } xa = 1 \cdot a$$

เนื่องจาก $a \neq 0$

ดังนั้น $x = 1$

โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับค่าบวก

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงพิจารณาบทพิสูจน์ต่อไปนี้ว่าผิดที่ใด

กำหนด $a = 2$

ดังนั้น $2a - 4 = a - 2$

$$2(a - 2) = a - 2$$

$$2 = 1$$

ผิดที่บรรทัดสุดท้ายเพราะนำเอาทฤษฎี 4 มาใช้ โดยมีคำอ้างว่า $a - 2 = 0$

ตัวอย่าง จงพิจารณาบทพิสูจน์ต่อไปนี้ว่าผิดที่ใด

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง มี $a + b + c = 0$

จะได้ $a = -b - c$

$$b = -a - c$$

$$c = -a - b$$

$$a + b + c = -2(a + b + c)$$

$$1 = -2$$

ผิดที่บรรทัดสุดท้ายเพราะนำเอาทฤษฎี 4 มาใช้ โดยมีคำอ้างว่า

$$a + b + c = 0$$

ทฤษฎี 5 กำหนด x และ a เป็นจำนวนจริง

(1) ถ้า $x + a = 0$ จะได้ $x = -a$

(2) ถ้า $a + x = 0$ จะได้ $x = -a$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $-a + a = 0$

$$\text{แต่ } x + a = 0$$

จะได้ $x + a = -a + a$

$x = -a$ โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 6 ถ้า a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0 + 0 = 0$ โดยคุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวก

$\rightarrow a(0 + 0) = a(0)$ โดยคุณสมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน

$\Rightarrow (a \cdot 0) + (a \cdot 0) = a \cdot 0$ โดยคุณสมบัติการกระจายทางซ้าย

$\Rightarrow (a \cdot 0) + (a \cdot 0) = (a \cdot 0) + 0$ โดยคุณสมบัติของเอกลักษณ์การบวก

$\rightarrow a \cdot 0 = 0$ โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

โดยสัจพจน์ที่ 10 จะได้ว่า $a \cdot 0 = 0 \cdot a$

ดังนั้น $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ทฤษฎี 7 กำหนด x และ a เป็นจำนวนจริง

(1) ถ้า $xa = 1$ จะได้ $x = a^{-1}$

(2) ถ้า $ax = 1$ จะได้ $x = a^{-1}$

พิสูจน์ (1) ถ้า $xa = 1$ จะได้ว่า $a \neq 0$ (เพราะถ้า $a = 0$

โดยทฤษฎี 6 จะได้ $xa = 0$)

เนื่องจาก $a \neq 0$ ดังนั้น $a^{-1} \in R$

พิจารณา $a^{-1}a = 1$

ดังนั้น $xa = a^{-1}a$

$x = a^{-1}$ โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 8 ถ้า a เป็นจำนวนจริง จะได้ $-(-a) = a$

พิสูจน์ เนื่องจาก $-(a) + (-a) = 0$

และ $a + (-a) = 0$

ดังนั้น $-(-a) + (-a) = a + (-a)$

$-(-a) = a$ โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ทฤษฎี 9 ถ้า a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ จะได้ $(a^{-1})^{-1} = a$

พิสูจน์ เนื่องจาก $(a^{-1})^{-1}(a^{-1}) = 1$

$$\text{และ} \quad a(a^{-1}) = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad (a^{-1})^{-1}(a^{-1}) = a(a^{-1})$$

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ}$$

ทฤษฎี 10 คุณสมบัติการกระจายทางขวา

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า $(b + c)a = ba + ca$

$$(b + c)a = a(b + c) \quad \text{โดยคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ}$$

$$= ab + ac \quad \text{โดยคุณสมบัติการกระจายทางซ้าย}$$

$$= ba + ca \quad \text{โดยคุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ}$$

ทฤษฎี 11 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้

$$(1) \quad a(-b) = -(ab)$$

$$(2) \quad (-a)b = -(ab)$$

$$(3) \quad (-a)(-b) = ab$$

พิสูจน์ (1) $a(-b) + ab = a(-b + b)$ โดยคุณสมบัติการกระจายทางซ้าย

$$a(-b) + ab = a \cdot 0$$

$$a(-b) + ab = 0$$

$$a(-b) = -(ab) \quad \text{โดยทฤษฎี 5 ตอน (1)}$$

(2) $(-a)b + ab = (-a + a)b$ โดยคุณสมบัติการกระจายทางขวา

$$(-a)b + ab = 0 \cdot b$$

$$(-a)b + ab = 0$$

$$(-a)b = -(ab) \quad \text{โดยทฤษฎี 5 ตอน (1)}$$

(3) $(-a)(-b) = -\{(-a)b\}$ โดยทฤษฎี 11 ตอน (1)

$$(-a)(-b) = -\{-(ab)\} \quad \text{โดยทฤษฎี 11 ตอน (2)}$$

$$(-a)(-b) = ab \quad \text{โดยทฤษฎี 8}$$

ทฤษฎี 12 กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $ab = 0$ จะได้ $a = 0$

หรือ $b = 0$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ แล้วข้อความ "ถ้า $ab = 0$ จะได้ $a = 0$

หรือ $b = 0$ " เป็นจริง

กรณีที่ 2 ถ้า $a \neq 0$ จะได้ $a^{-1} \in \mathbb{R}$

$$\text{แต่ } ab = 0$$

$$\text{และ } a \cdot 0 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } ab = a \cdot 0$$

$$b = 0$$

โดยคุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

ดังนั้นข้อความ "ถ้า $ab = 0$ จะได้ $a = 0$ หรือ $b = 0$ " เป็นจริง

ทฤษฎีนี้ ประโยชน์ในการหาคำตอบของสมการ

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 18 = 0$

วิธีทำ $x^2 + 3x - 18 = 0$

$$(x + 6)(x - 3) = 0$$

$$x + 6 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -6 \quad \text{หรือ} \quad x = 3$$

นั่นคือ -6 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + 3x - 18 = 0$

ข้อสังเกต ทฤษฎี 12 สัมมูลกับข้อความ "ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ $ab \neq 0$ "

ข้อตกลง เขียน $\frac{1}{b}$ แทน b^{-1}

$a - b$ แทน $a + (-b)$

$\frac{a}{b}$ แทน $a b^{-1}$

ทฤษฎี 13 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ และ

$$d \neq 0 \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ad = bc$$

พิสูจน์

ตอนที่ 1

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow a b^{-1} = c d^{-1}$$

$$\Rightarrow (a b^{-1})d = (c d^{-1})d$$

$$\Rightarrow a(b^{-1}d) = c(d^{-1}d)$$

$$\Rightarrow a(d b^{-1}) = c \cdot 1$$

$$\Rightarrow [a(d b^{-1})] b = c b$$

$$\Rightarrow (a d)(b^{-1} b) = c b$$

$$\Rightarrow (a d)(1) = c b$$

$$\Rightarrow ad = cb$$

$$\Rightarrow ad = bc$$

ตอนที่ 2 $ad = bc$

$$\Rightarrow (ad)b^{-1} = (bc)b^{-1}$$

$$\Rightarrow a(db^{-1}) = (cb)b^{-1}$$

$$\Rightarrow a(b^{-1}d) = c(bb^{-1})$$

$$\Rightarrow (ab^{-1})d = c(1)$$

$$\Rightarrow (ab^{-1})d = c$$

$$\Rightarrow [(ab^{-1})d] d^{-1} = c d^{-1}$$

$$\Rightarrow (ab^{-1})(dd^{-1}) = c d^{-1}$$

$$\Rightarrow (ab^{-1})(1) = c d^{-1}$$

$$\Rightarrow ab^{-1} = c d^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ทฤษฎี 14 กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง $a - b = c - d$

ก็ต่อเมื่อ $a + d = c + b$

พิสูจน์

ตอนที่ 1

$$a - b = c - d$$

$$\Rightarrow a + (-b) = c + (-d)$$

$$\Rightarrow [a + (-b)] + b = [c + (-d)] + b$$

$$\Rightarrow a + [(-b) + b] = b + [c + (-d)]$$

$$\Rightarrow a + 0 = (b + c) + (-d)$$

$$\Rightarrow a = (c + b) + (-d)$$

$$\Rightarrow a + d = [(c + b) + (-d)] + d$$

$$\Rightarrow a + d = (c + b) + [(-d) + d]$$

$$\Rightarrow a + d = (c + b) + 0$$

$$\Rightarrow a + d = c + b$$

ตอนที่ 2

$$a + d = c + b$$

$$\Rightarrow (a + d) + (-b) = (c + b) + (-b)$$

$$\Rightarrow (-b) + (a + d) = c + [b + (-b)]$$

$$\Rightarrow [(-b) + a] + d = c + 0$$

$$\Rightarrow [a + (-b)] + d = c$$

$$\Rightarrow \{ [a + (-b)] + d \} + (-d) = c + (-d)$$

$$\Rightarrow [a + (-b)] + [d + (-d)] = c + (-d)$$

$$\Rightarrow [a + (-b)] + 0 = c + (-d)$$

$$\Rightarrow a + (-b) = c + (-d)$$

$$\Rightarrow a - b = c - d$$

ทฤษฎี 15 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

$$\text{จะได้ } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ ดังนั้น $a^{-1} \in R$ และ $b^{-1} \in R$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = [(b^{-1}a^{-1})a]b$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = [b^{-1}(a^{-1}a)]b$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = (b^{-1} \cdot 1)b$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}b$$

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = 1$$

$$\text{ดังนั้น } b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} \quad \text{โดยทฤษฎี 7 ตอน (1)}$$

ทฤษฎี 16 ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 17 ถ้า b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ } \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 18 ถ้า c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $c \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ } \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 19 ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0, c \neq 0$ และ

$$d \neq 0 \quad \text{จะได้} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 20 ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนด a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

1.1 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $b + a = c + a$ จะได้ $b = c$

1.2 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $ba = ca$ จะได้ $b = c$ เมื่อ $a \neq 0$

1.3 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a + x = a$ จะได้ $x = 0$

1.4 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $ax = a$ จะได้ $x = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

1.5 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a + x = 0$ จะได้ $x = -a$

1.6 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $ax = 1$ จะได้ $x = a^{-1}$

1.7 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

1.8 จงพิสูจน์ว่า $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

1.9 จงพิสูจน์ว่า $\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$ เมื่อ $d \neq 0, c \neq 0$

1.10 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

1.11 จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

2. จงพิสูจน์ว่า 2.1 $-0 = 0$

2.2 $1^{-1} = 1$

3. ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

3.1 $(-1)(a) = -a$

3.2 $-(a + b) = -a + (-b)$

3.3 $-(a - b) = b - a$

3.4 $(a - b) + (b - c) = a - c$

และ ถ้า $b \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$3.5 \quad \frac{-a}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$3.6 \quad -b^{-1} = -(b^{-1})$$

$$3.7 \quad \frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$3.8 \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$3.9 \quad \left(\frac{1}{b}\right)^{-1} = b$$

$$3.10 \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad \text{เมื่อ } b \neq 0, d \neq 0$$

2. จำนวนจริงบวก

สัจพจน์ที่ 12 มี $R^+ \subset R$ ซึ่งสำหรับจำนวนจริง a ทุก ๆ ตัว จะได้ว่า a จะมีคุณสมบัติต่อไปนี้เพียงข้อหนึ่งและข้อเดียวเท่านั้น

$$(1) a \in R^+$$

$$(2) a = 0$$

$$(3) -a \in R^+$$

สัจพจน์ที่ 13 ถ้า $a \in R^+$ และ $b \in R^+$ จะได้ $a + b \in R^+$

สัจพจน์ที่ 14 ถ้า $a \in R^+$ และ $b \in R^+$ จะได้ $ab \in R^+$

นิยาม 1 ถ้า $a \in R^+$ เรียก a ว่า จำนวนจริงบวก

ถ้า $-a \in R^+$ เรียก a ว่า จำนวนจริงลบ

ข้อสังเกต (1) จำนวนจริงที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนจริงลบ

เช่น $-(-3)$ เป็นจำนวนจริงบวกเพราะ $-(-3) = 3$

(2) 0 ไม่ใช่จำนวนจริงบวก และ 0 ไม่ใช่จำนวนจริงลบ

ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ R^- แทน เซตของจำนวนจริงลบ ดังนั้น

$$a \in R^- \iff -a \in R^+$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) ให้ $a \in R^+$, $b \in R$ จะได้ $a + b \in R^+$

(ข) ให้ $a \in R$, $b \in R^+$ จะได้ $a + b \in R^+$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จก็ตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 5, b = -6$$

$$a + b = 5 + (-6) = -1 \notin R^+$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จก็ตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = -9, b = 3$$

$$a + b = -9 + 3 = -6 \notin R^+$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) ให้ $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$ จะได้ $ab \in \mathbb{R}^+$

(ข) ให้ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ จะได้ $ab \in \mathbb{R}^+$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $a = 5$, $b = -4$

$$ab = 5(-4) = -20 \notin \mathbb{R}^+$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $a = -3$, $b = 7$

$$ab = (-3)7 = -21 \notin \mathbb{R}^+$$

ทฤษฎี 21 (1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ b เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ ab เป็นจำนวนจริงลบ

(2) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ ab เป็นจำนวนจริงบวก

พิสูจน์

(1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ และ b เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $-a \in \mathbb{R}^+$ และ $b \in \mathbb{R}^+$

ดังนั้น $(-a)(b) \in \mathbb{R}^+$

$$\text{แต่ } (-a)(b) = -(ab)$$

ดังนั้น $-(ab) \in \mathbb{R}^+$ จะได้ ab เป็นจำนวนจริงลบ

(2) ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงลบ

จะได้ $-a \in \mathbb{R}^+$ และ $-b \in \mathbb{R}^+$

ดังนั้น $(-a)(-b) \in \mathbb{R}^+$

$$\text{แต่ } (-a)(-b) = ab$$

ดังนั้น $ab \in \mathbb{R}^+$ จะได้ ab เป็นจำนวนจริงบวก

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) ถ้า $a \in \mathbb{R}^-$, $b \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ $ab \in \mathbb{R}^-$

(ข) ถ้า $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^-$ แล้วจะได้ $ab \in \mathbb{R}^-$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = -4, \quad b = 0$$

$$a b = (-4)(0) = 0 \notin \mathbb{R}^-$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = -10, \quad b = -3$$

$$a b = (-10)(-3) = 30 \notin \mathbb{R}^-$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) ถ้า $a \in \mathbb{R}^+, b \notin \mathbb{R}^-$ แล้วจะได้ $ab \in \mathbb{R}^+$

(ข) ถ้า $ab \in \mathbb{R}^+$ แล้วจะได้ $a \in \mathbb{R}^-$ และ $b \in \mathbb{R}^-$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 8, \quad b = 0$$

$$a b = (8)(0) = 0 \notin \mathbb{R}^+$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 3, \quad b = 2$$

$$a b = (3)(2) = 6 \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{แต่ } a = 3 \notin \mathbb{R}^- \quad \text{และ } b = 2 \notin \mathbb{R}^-$$

ทฤษฎี 22 ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ จะได้ $a \cdot a$ เป็นจำนวนจริงบวก

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $a \in \mathbb{R}^+$ โดยสัจพจน์ที่ 14 จะได้ $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$

กรณีที่ 2 ถ้า $a \in \mathbb{R}^-$ โดยทฤษฎี 21 ตอน (2) จะได้ $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$

ข้อทกลง เขียน a^2 แทน $a \cdot a$

ทฤษฎี 23 1 เป็น จำนวนจริงบวก

พิสูจน์ เนื่องจาก $1 \neq 0$ และ $1 \in \mathbb{R}$

โดยทฤษฎี 22 จะได้ $(1) \cdot (1) \in \mathbb{R}^+$

$$\text{แต่ } 1 = (1)(1)$$

$$\text{ดังนั้น } 1 \in \mathbb{R}^+$$

ทฤษฎี 24 ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ a^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก

พิสูจน์ ถ้า $a \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $a \neq 0$

ถ้า $a^{-1} = 0$ จะได้ $a^{-1}a = 0 \cdot a = 0$ แต่ $a^{-1}a = 1$

ดังนั้น $1 = 0$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $a^{-1} \neq 0$

สมมติว่า a^{-1} เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ $a \cdot a^{-1}$ เป็นจำนวนจริงลบ โดยทฤษฎี

21 ทอน (1)

แต่ $a \cdot a^{-1} = 1$ ดังนั้น 1 เป็นจำนวนจริงลบซึ่งขัดกับทฤษฎี 23

ดังนั้น a^{-1} เป็นจำนวนจริงบวก

นิยาม 2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง a มากกว่า b (หรือ b น้อยกว่า a)

ก็ต่อเมื่อ $a - b$ เป็นจำนวนจริงบวก

ข้อกอลง เขียน $a > b$ แทน a มากกว่า b

$a < b$ แทน a น้อยกว่า b

$a \geq b$ แทน a ไม่น้อยกว่า b

$a \leq b$ แทน a ไม่น้อยกว่า b

เนื่องจาก $-(b - a) = a - b$ สามารถสรุปจากสัจพจน์ที่ 12 ว่า

คุณสมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อหนึ่งและข้อเดียวเท่านั้น นั่นคือ สำหรับทุก ๆ

$a, b \in \mathbb{R}$

(1) $a - b$ เป็นจำนวนจริงบวก

(2) $a - b = 0$

(3) $a - b$ เป็นจำนวนจริงลบ

ดังนั้นคุณสมบัติต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อหนึ่งและข้อเดียวเท่านั้น นั่นคือ สำหรับทุก ๆ

$a, b \in \mathbb{R}$

(1) $a > b$

(2) $a = b$

$$(3) a < b$$

ตัวอย่าง

จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง

(ก) ถ้า $a > b$ แล้วจะได้ $-a > -b$

(ข) ถ้า $a > b$ แล้วจะได้ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างที่ต่อไปนี้

ให้ $a = 7, b = 5$

$$-a = -7, -b = -5$$

จะได้ว่า $a > b$ แต่ $-a < -b$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างที่ต่อไปนี้

ให้ $a = 10, b = 2$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{10}, \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

จะได้ว่า $a > b$ แต่ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

ทฤษฎี 25 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a < b$ และ $b < c$

แล้ว $a < c$

พิสูจน์

เนื่องจาก $a < b$ และ $b < c$

จากนิยาม 2 จะได้ $b - a \in \mathbb{R}^+$ และ $c - b \in \mathbb{R}^+$

ดังนั้น $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$

แต่ $(b - a) + (c - b) = c - a$

จะได้ $c - a \in \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $a < c$

ทฤษฎี 26 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $a < b$ จะได้ $a + c < b + c$

พิสูจน์

เนื่องจาก $a < b$

จากนิยาม 2 จะได้ $b - a \in \mathbb{R}^+$

แต่ $(b + c) - (a + c) = b - a$

ดังนั้น $(b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$

นั่นคือ $a + c < b + c$

ทฤษฎี 27 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า $a < b$ และ $c < d$
จะได้ $a + c < b + d$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a < b$ ดังนั้น $a + c < b + c$
เนื่องจาก $c < d$ ดังนั้น $b + c < b + d$
ดังนั้นโดยทฤษฎี 25 จะได้ $a + c < b + d$

ทฤษฎี 28 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(1) ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนจริงบวกจะได้ $ca < cb$

(2) ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ $ca > cb$

พิสูจน์ (1) ถ้า $a < b$ จะได้ $b - a \in \mathbb{R}^+$

และ $c \in \mathbb{R}^+$

จะได้ $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$

แต่ $c(b - a) = cb - ca$

ดังนั้น $cb - ca \in \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $ca < cb$

(2) ถ้า $a < b$ จะได้ $b - a \in \mathbb{R}^+$

และ $c \in \mathbb{R}^-$ จะได้ $-c \in \mathbb{R}^+$

ดังนั้น $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$

แต่ $-c(b - a) = ca - cb$

ดังนั้น $ca - cb \in \mathbb{R}^+$ นั่นคือ $ca > cb$

นิยาม 3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$

หรือ $a = b$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
2. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริงลบ จงพิสูจน์ว่า $b < a$
3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก c ซึ่ง $a + c = b$
4. ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ จงพิสูจน์ว่า a^{-1} เป็นจำนวนจริงลบ
5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ จงพิสูจน์ว่า $a < \frac{a+b}{2} < b$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \leq b$, $b \leq c$ และ $a = c$ แล้ว $b = c$

3. จำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะ

ในการสร้างระบบจำนวนเต็มบวก เราเริ่มด้วยจำนวน 1 ซึ่งทราบว่ามีโดยสัญพจน์ที่ 8 เขียนแทนจำนวน $1 + 1$ ด้วย 2 เขียนแทนจำนวน $2 + 1$ ด้วย 3 และต่อ ๆ ไป จำนวน $1, 2, 3, \dots$ ซึ่งสร้างขึ้นโดยการบวกด้วย 1 ซ้ำ ๆ กันนี้ ต่างก็เป็นจำนวนบวก เรียกจำนวนเหล่านี้ว่า จำนวนเต็มบวก แต่ในการพัฒนาระบบจำนวนจริงที่ยึดหลักสัญพจน์อย่างแท้จริง จำเป็นจะต้องนิยามจำนวนเต็มบวกให้รัดกุมกว่านี้ วิธีการที่ใช้ก็คือ เซตอินดักทีฟ (inductive set)

นิยาม 4 ให้ S เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ S จะเป็นเซตอินดักทีฟ ก็ต่อเมื่อ S มีคุณสมบัติ 2 ประการต่อไปนี้

$$(1) \quad 1 \in S$$

$$(2) \quad \text{ถ้า } n \in S \text{ จะได้ว่า } n + 1 \in S$$

เห็นได้ชัดว่า $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{R}^+$ ต่างก็เป็นเซตอินดักทีฟ

นิยาม 5 จำนวนจริง a จะเป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ a เป็นสมาชิกของเซตอินดักทีฟทุกเซต

เรียกอินเตอร์สัการบวก ของจำนวนเต็มบวกว่า จำนวนเต็มลบ และให้เซตของจำนวนเต็มประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และศูนย์

ข้อตกลง ให้สัญลักษณ์ I แทน เซตของจำนวนเต็ม
 I^+ แทน เซตของจำนวนเต็มบวก
 I^- แทน เซตของจำนวนเต็มลบ

$$\text{ดังนั้น } I = I^+ \cup I^- \cup \{0\}$$

นิยาม 6 กำหนด a, b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a \neq 0$ a หาร b ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $ac = b$

ถ้า a หาร b ลงตัว เรียก a ว่า "ตัวหาร" (divisor) หรือ "ตัวประกอบ" (factor) ของ b และเรียก b ว่า "พหุคูณ" (multiple) ของ a

เขียน $a \mid b$ แทน a หาร b ลงตัว

และเขียน $a \nmid b$ แทน a หาร b ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง $6 \mid 18$ เพราะ $18 = (6)(3)$

$-9 \mid 720$ เพราะ $720 = (-9)(-80)$

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนเต็ม a ทุกตัว

จะได้ $1 \mid a$ และ $-1 \mid a$

เพราะ $a = 1 \cdot a$ และ $a = (-1)(-a)$

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนเต็ม b ทุกตัว ซึ่ง $b \neq 0$ จะได้

$b \mid 0$ เพราะ $0 = b \cdot 0$

$b \mid b$ เพราะ $b = b \cdot 1$

$-b \mid b$ เพราะ $b = (-b)(-1)$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $b \mid a$ แล้วจะได้ $b \leq a$

ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $a = -49$, $b = 7$

จะได้ $7 \mid -49$ เพราะ $-49 = (7)(-7)$

แต่ $b > a$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด a , b และ c เป็นจำนวนเต็ม

(ก) ถ้า $a \mid b$ จะได้ว่า $b \mid a$

(ข) ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid b$ จะได้ว่า $a = c$

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

ให้ $a = 4$, $b = 12$

จะได้ว่า $a \mid b$ เพราะ $12 = (4)(3)$

แต่ $b \nmid a$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างนี้

$$\text{ให้ } a = 3, b = 36, c = 4$$

$$\text{จะได้ } 3 \mid 36 \text{ และ } 4 \mid 36$$

$$\text{แต่ } 3 \nmid 4$$

ทฤษฎี 29 กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

$$(1) \text{ ถ้า } a \mid b \text{ และ } b \mid c \text{ แล้วจะได้ } a \mid c$$

$$(2) \text{ ถ้า } a \mid b \text{ และ } b \mid a \text{ แล้วจะได้ } a = b \text{ หรือ } a = -b$$

พิสูจน์

$$(1) \text{ เนื่องจาก } a \mid b \text{ ดังนั้นมีจำนวนเต็ม } d \text{ ซึ่ง } ad = b$$

$$\text{และ } b \mid c \text{ ดังนั้นมีจำนวนเต็ม } m \text{ ซึ่ง } bm = c$$

$$\text{เนื่องจาก } c = bm$$

$$\text{ดังนั้น } c = (ad)m$$

$$c = a(dm)$$

$$\text{เนื่องจาก } d \text{ และ } m \text{ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น } dm \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{จะได้ } a \mid c$$

$$(2) \text{ ให้เป็นแบบฝึกหัด}$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

$$\text{กำหนดให้ } a, b \text{ และ } c \text{ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า } a \mid b \text{ และ } b \nmid c$$

$$\text{จะได้ } a \nmid c$$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างด้านล่างนี้

$$\text{ให้ } a = 3, b = 27, c = 30$$

$$\text{จะได้ } 3 \mid 27 \text{ เพราะ } 27 = (3)(9)$$

$$\text{และ } 27 \nmid 30$$

$$\text{แต่ } 3 \mid 30 \text{ เพราะ } 30 = (3)(10)$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$

จะได้ $a = b$

ข้อความนี้เป็นเท็จดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $a = 5$, $b = -5$

จะได้ว่า $5 \mid -5$ เพราะ $-5 = (5)(-1)$

และ $-5 \mid 5$ เพราะ $5 = (-5)(-1)$

แต่ $5 \neq -5$

นิยาม 7 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่งอย่างน้อยหนึ่งตัวต้องไม่เท่ากับศูนย์

d จะเป็นตัวหารร่วมมาก (Greatest common divisor) ของ a และ b

ก็ต่อเมื่อ d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง

(1) $d \mid a$ และ $d \mid b$ และ

(2) ถ้า c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $c \mid a$ และ $c \mid b$ จะได้ $c \mid d$

เขียน (a, b) แทน ตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม a และ b และ

นิยมเขียน ห.ร.ม. แทน ตัวหารร่วมมาก

ตัวอย่าง $3 = (12, -15)$

$36 = (72, 108)$

$1 = (9, 31)$

นิยาม 8 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์ t จะเป็นตัวคูณ

ร่วมน้อย (Least common multiple) ของ a และ b ก็ต่อเมื่อ t เป็นจำนวน

เต็มบวกซึ่ง

(1) $a \mid t$ และ $b \mid t$ และ

(2) ถ้า c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a \mid c$ และ $b \mid c$ จะได้ $t \mid c$

เขียน $[a, b]$ แทน ตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนเต็ม a และ b และนิยมเขียน

ค.ร.น. แทน ตัวคูณร่วมน้อย

ตัวอย่าง $44 = [4, 22]$

นิยาม 9 จำนวนจริง a จะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม m และ n ,
 $n \neq 0$ ที่ $a = \frac{m}{n}$

เขียน Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

นิยาม 10 เรียกจำนวนจริงซึ่งไม่ใช่จำนวนตรรกยะว่า จำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ก) ถ้า a, b เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ ab เป็นจำนวนอตรรกยะ

(ข) ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ b เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ ab เป็น

จำนวนอตรรกยะ

(ก) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{5}$$

$$ab = (\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5 \quad \text{เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

(ข) ข้อความนี้เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = 0, \quad b = \sqrt{6}$$

$$ab = (0)(\sqrt{6}) = 0 \quad \text{เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

นิยาม 11 จำนวนเต็ม a จะเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $a = 2n$

จำนวนเต็ม a จะเป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $a = 2m + 1$

ทฤษฎี 30 ถ้า a เป็นจำนวนคู่ จะได้ a^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ถ้า a เป็นจำนวนคู่ จะมีจำนวนเต็ม c ซึ่ง

$$a = 2c$$

$$\text{ดังนั้น } a^2 = 4c^2$$

$$a^2 = 2(2c^2)$$

เนื่องจาก $2c^2$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคู่

จากทฤษฎี 30 จะพบว่าทกลับของทฤษฎีที่กล่าวไว้ว่า "ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ a เป็นจำนวนคู่" เป็นเท็จ ดังตัวอย่างค้านต่อไปนี้

$$\text{ให้ } a = \sqrt{2}$$

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{เป็นจำนวนคู่}$$

$$\text{แต่ } a = \sqrt{2} \quad \text{ไม่เป็นจำนวนคู่}$$

ซึ่งบทกลับของทฤษฎี จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ มีข้อความบางอย่างเพิ่มเติม ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 31 กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า a เป็น

จำนวนคู่

พิสูจน์ สมมติว่า a เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นจะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง

$$a = 2m + 1$$

$$a^2 = (2m + 1)^2$$

$$a^2 = 4m^2 + 4m + 1$$

$$a^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

เนื่องจาก $2m^2 + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคี่ขัดกับที่กำหนดให้ ดังนั้น a ต้องเป็นจำนวนคู่

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาตัวหารรวมมาก และ ตัวคูณร่วมน้อย ของจำนวนต่อไปนี้
 - (1) 15 และ 60
 - (2) 7 และ 56
 - (3) 10 และ -29
 - (4) 26 และ 118
 - (5) -16 และ -72
2. ถ้ามีจำนวนจริง a ซึ่ง $a^2 = 3$ จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนอตรรกยะ
3. จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของจำนวนตรรกยะ เป็นจำนวนตรรกยะ
4. จงพิสูจน์ว่า ผลคูณ ของจำนวนอตรรกยะ และจำนวนตรรกยะซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ เป็นจำนวนอตรรกยะ
5. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ

กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ

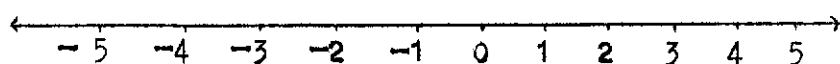
 - 5.1 ถ้า $a < b$ แล้ว $ac < bc$
 - 5.2 ถ้า $a + b + c < a + b + d$ แล้ว $c < d$
 - 5.3 ถ้า $ab \leq ac$ แล้ว $b \leq c$
 - 5.4 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a^2 \leq b^2$
 - 5.5 ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก, b เป็นจำนวนจริงแล้ว ab เป็นจำนวนจริงบวก
 - 5.6 ก.ร.น. ของ 18, 42, 23 คือ 2898
 - 5.7 ห.ร.ม. ของ -3, 6 และ 9 คือ -3
 - 5.8 ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ ก.ร.น. ของ a และ b แล้ว $a = b$
 - 5.9 ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid bc$
 - 5.10 ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$

- 5.11 ถ้า $a \mid (b + c)$ แล้ว $a \mid b$ และ $a \mid c$
- 5.12 ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$
- 5.13 ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว a^2 เป็นจำนวนตรรกยะ
- 5.14 ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว a^2 เป็นจำนวนอตรรกยะ
- 5.15 ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะ, b เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว ab เป็นจำนวนอตรรกยะ

4. เส้นจำนวน ภาคนิพจน์ และการแกสมการ

4.1 เส้นจำนวน

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่ง แล้วเลือกจุดหนึ่งเรียกว่า จุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์
เลือกหน่วยความยาว ใดๆ ทางขวาของ 0 ซึ่งอยู่ห่างจาก 0 1, 2, 3, ... หน่วย แทน
จำนวน 1, 2, 3, ... ตามลำดับ ใดๆ ทางซ้ายของ 0 ซึ่งอยู่ห่างจาก 0 1, 2, 3, ...
หน่วย แทนจำนวน $-1, -2, -3, \dots$ ตามลำดับ



นักคณิตศาสตร์ตกลงกันว่า จำนวนจริงทุกจำนวนจะมีจุดบนเส้นตรงนี้จับคู่ด้วยเพียงจุดเดียว
และในทางตรงข้ามทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะจับคู่กับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว เรียกเส้นตรง
นี้ว่า "เส้นจำนวน"

นิยาม 12 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ เขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนสับเซต
ของ R

$$(a, b) = \{ x \in R \mid a < x < b \}$$

$$[a, b] = \{ x \in R \mid a \leq x \leq b \}$$

$$[a, b) = \{ x \in R \mid a \leq x < b \}$$

$$(a, b] = \{ x \in R \mid a < x \leq b \}$$

$$(a, \infty) = \{ x \in R \mid a < x \}$$

$$[a, \infty) = \{ x \in R \mid a \leq x \}$$

$$(-\infty, a) = \{ x \in R \mid x < a \}$$

$$(-\infty, a] = \{ x \in R \mid x \leq a \}$$

$$(-\infty, \infty) = R$$

หมายเหตุ (1) เรียกช่วง (a, b) ว่า ช่วงเปิด

ช่วง $[a, b]$ ว่า ช่วงปิด

ช่วง $[a, b)$ และ ช่วง $(a, b]$ ว่า ช่วงกึ่งเปิด หรือช่วง

กึ่งปิด

(2) เรียกช่วง (a,b) , $[a,b]$, $[a,b)$ และ $(a,b]$ ว่าช่วงจำกัด

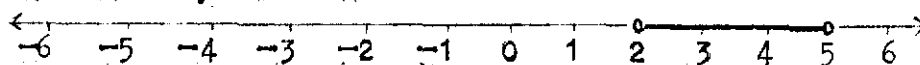
(3) เรียกช่วง (a, ∞) , $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ และ $(-\infty, \infty)$

ว่า ช่วงอนันต์

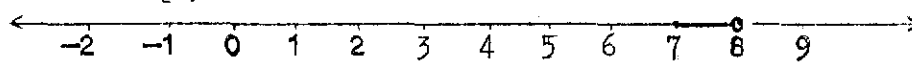
เมื่อกำหนดค่าของ a และ b อาจเขียนแสดงช่วงต่าง ๆ บนเส้นจำนวนและเรียกว่า

กราฟของช่วงนั้น ๆ เช่น

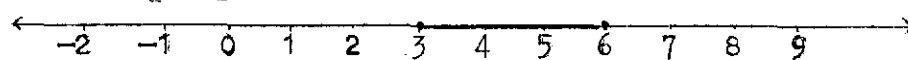
กราฟของช่วง $(2,5)$ คือ



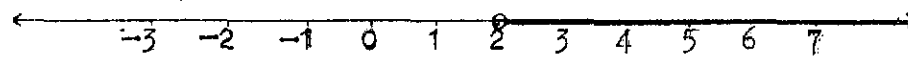
กราฟของช่วง $[7,8)$ คือ



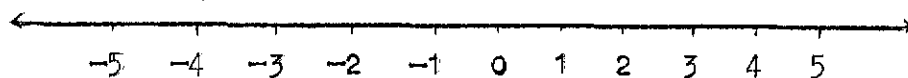
กราฟของช่วง $[3,6]$ คือ



กราฟของช่วง $(2, \infty)$ คือ



กราฟของช่วง $(-\infty, \infty)$ คือ



หมายเหตุ (1) จุดปิดในกราฟ หมายถึง รวมจุดปลายด้วย

(2) จุดเปิดในกราฟ หมายถึง ไม่รวมจุดปลาย

(3) กราฟของ R คือ เส้นจำนวนทั้งเส้น

4.2 การทดสอบการ

4.2.1 การหาคำของอสมการเชิงอนุกรม

$$(1) (A_1x - B_1)(A_2x - B_2)(A_3x - B_3) \dots (A_nx - B_n) < 0$$

$$(2) (A_1x - B_1)(A_2x - B_2)(A_3x - B_3) \dots (A_nx - B_n) > 0$$

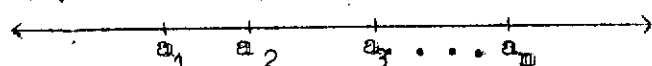
$$(3) (A_1x - B_1)(A_2x - B_2)(A_3x - B_3) \dots (A_nx - B_n) \leq 0$$

$$(4) (A_1x - B_1)(A_2x - B_2)(A_3x - B_3) \dots (A_nx - B_n) \geq 0$$

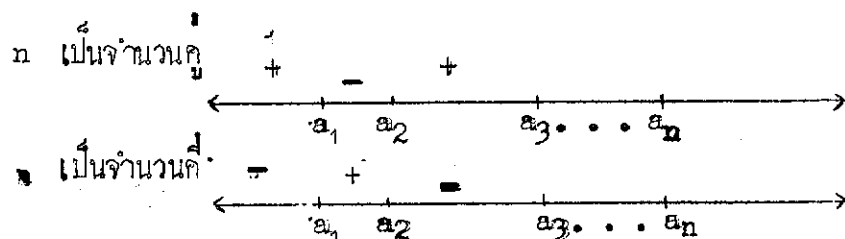
เมื่อ $A_i > 0$ สำหรับทุก i และ $\frac{B_i}{A_i} \neq \frac{B_j}{A_j}$ สำหรับทุก i และ j ซึ่ง $i \neq j$ มีวิธีดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ทหารากของสมการ $(A_1x - B_1)(A_2x - B_2)(A_3x - B_3) \dots (A_nx - B_n) = 0$ จะได้ $x = \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \frac{B_3}{A_3}, \dots, \frac{B_n}{A_n}$

ขั้นที่ 2 นำค่า x ที่ได้ไปกำหนดบนเส้นจำนวน สมมติว่าค่า x ทั้ง n ค่าเรียงลำดับจากน้อยไปมากดังนี้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (a_i คือรากหรือค่าของ x ที่เรียงลำดับแล้ว) จะได้อกราฟดังนี้



ขั้นที่ 3 ใส่เครื่องหมาย + และ - สลับกันไปโดยยึดหลักดังนี้ คือ
 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ (นั่นคือ จำนวนเต็มที่คูณกันเป็นจำนวนคู่) ให้เริ่ม
 ภาย +
 ถ้า n เป็นจำนวนคี่ (นั่นคือจำนวนเต็มที่คูณกันเป็นจำนวนคี่) ให้เริ่ม
 ภาย -



ขั้นที่ 4 จะได้ว่ารากของสมการดังต่อไปนี้

รากของสมการ (1) คือ x ทุกค่าในช่วงที่เครื่องหมายลบ
 รากของสมการ (2) คือ x ทุกค่าในช่วงที่เครื่องหมายบวก
 รากของสมการ (3) คือ x ทุกค่าในช่วงที่เครื่องหมายลบ และ

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

รากของสมการ (4) คือ x ทุกค่าในช่วงที่เครื่องหมายบวก และ

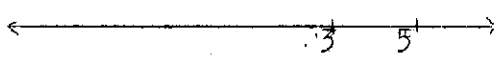
$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

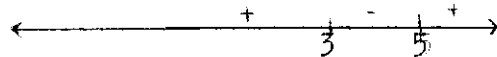
ตัวอย่าง จงหารากของสมการ

(ก) $(x - 3)(x - 5) < 0$

(ข) $(x - 3)(x - 5) \geq 0$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 รากของสมการ $(x - 3)(x - 5) = 0$ คือ $x = 3, 5$

ขั้นที่ 2 

ขั้นที่ 3 

ขั้นที่ 4 รากของสมการ $(x - 3)(x - 5) < 0$ คือ $3 < x < 5$

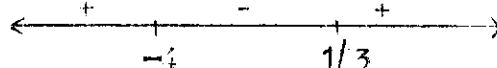
รากของสมการ $(x - 3)(x - 5) \geq 0$ คือ $x \leq 3$ หรือ $x \geq 5$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ

(ก) $(3x - 1)(2x + 8) > 0$

(ข) $(3x - 1)(2x + 8) \leq 0$

วิธีทำ รากของสมการ $(3x - 1)(2x + 8) = 0$ คือ $x = \frac{1}{3}, -4$

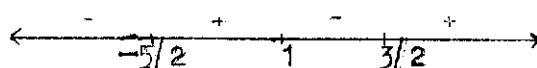


ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ $(3x - 1)(2x + 8) > 0$ คือ $(-\infty, -4) \cup (1/3, \infty)$

และเซตคำตอบของสมการ $(3x - 1)(2x + 8) \leq 0$ คือ $[-4, 1/3]$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $(x - 1)(2x + 5)(4x - 6) \geq 0$

วิธีทำ รากของสมการ $(x - 1)(2x + 5)(4x - 6) = 0$ คือ $x = 1, -5/2, 3/2$



ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ $(x - 1)(2x + 5)(4x - 6) \geq 0$ คือ

$[-5/2, 1] \cup [3/2, \infty)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $3x^2 - 2 \geq 4x + 5$

วิธีทำ

$$3x^2 - 2 \geq 4x + 5$$

$$3x^2 - 4x - 7 \geq 0$$

$$(3x - 7)(x + 1) \geq 0$$

$$\text{รากของสมการ } (3x - 7)(x + 1) = 0 \quad \text{คือ } x = 7/3, -1$$



$$\text{ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ } 3x^2 - 2 \geq 4x + 5 \quad \text{คือ } (-\infty, -1]$$

$$\cup [7/3, \infty)$$

เทคนิคการดำเนินการแยกตัวประกอบกำลัง

$$\text{ให้ } f(x) = (A_1x - B_1)(A_2x - B_2) \dots (A_nx - B_n) \quad \text{เมื่อ}$$

$$\frac{B_i}{A_i} \neq \frac{B_j}{A_j} \quad \text{สำหรับทุก } i \text{ และ } j \text{ เมื่อ } i \neq j \quad \text{และ } A_1 > 0$$

สำหรับทุก i

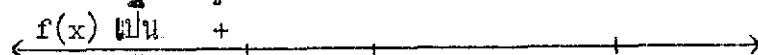
$$\text{รากของสมการ } f(x) = 0 \quad \text{คือ } x = \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \dots, \frac{B_n}{A_n}$$

เมื่อเรียงลำดับจากน้อยไปมากให้ $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ พิจารณา

$$\text{ช่วงที่ 1} \quad \text{ถ้า } x < a_1 \quad \text{จะได้ } x < a_1, x < a_2, \dots, x < a_n$$

$$\text{ดังนั้น } (x - a_1) < 0, (x - a_2) < 0, \dots, (x - a_n) < 0$$

$$\text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่ จะได้ } f(x) > 0 \quad \text{นั่นคือ } f(x) \text{ เป็น } +$$



$$\text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่ จะได้ } f(x) < 0 \quad \text{นั่นคือ } f(x) \text{ เป็น } -$$

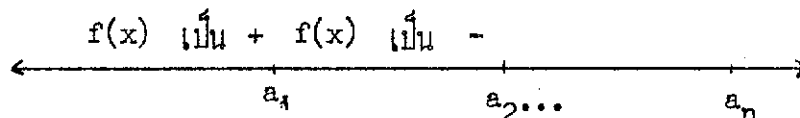


$$\text{ช่วงที่ 2} \quad \text{ถ้า } a_1 < x < a_2 \quad \text{จะได้ } x > a_1, x < a_2, \dots, x < a_n$$

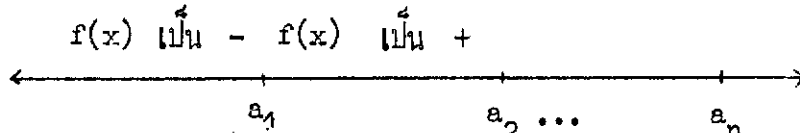
$$\text{ดังนั้น } (x - a_1) > 0, (x - a_2) < 0, \dots, (x - a_n) < 0 \quad \text{ดังนั้น } f(x) \text{ ในช่วง}$$

$$\text{ที่ 2 จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกับ } f(x) \text{ ในช่วงที่ 1}$$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่



ถ้า n เป็นจำนวนคู่



พิจารณาทางของเส้นวกั้นไปจนถึงช่วงสุดท้ายคือ $x > a_n$ จะได้เครื่องหมายของ

$f(x)$ ในแต่ละช่วงเป็น $+$ และ $-$ สลับกันไปตลอด

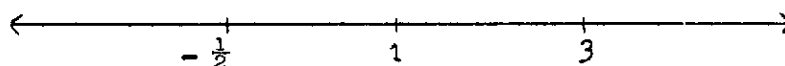
ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(2x + 1)(1 - x)(x - 3) > 0$

วิธีทำ $(2x + 1)(1 - x)(x - 3) > 0$

$$-(2x + 1)(x - 1)(x - 3) > 0$$

$$(2x + 1)(x - 1)(x - 3) < 0$$

รากของสมการ $(2x + 1)(x - 1)(x - 3) = 0$ คือ $x = -1/2, 1, 3$



ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการ $(2x + 1)(1 - x)(x - 3) > 0$ คือ

เซตคำตอบของอสมการ $(2x + 1)(x - 1)(x - 3) < 0$ ซึ่งเท่ากับ

$$(-\infty, 1/2) \cup (1, 3)$$

ข้อสังเกต ถอนจะใช้วิธีการดังกล่าวจะต้องจัดให้อยู่ในรูป

$$(A_1x - B_1)(A_2x - B_2) \dots (A_nx - B_n) \quad \text{โดยที่ } A_i \text{ ทุกตัวเป็นบวก}$$

4.2.2 ในกรณีสมการ $(A_1x - B_1)(A_2x - B_2) \dots (A_nx - B_n) = 0$ มีรากซ้ำ

เช่น $(2x - 1)(2x - 1)(3x - 2) = 0$ พิจารณากัน

$$\text{ให้ } f(x) = (Ax - B)^m(A_1x - B_1) \dots (A_nx - B_n)$$

$$g(x) = (A_1x - B_1)(A_2x - B_2) \dots (A_nx - B_n)$$

$$h(x) = (Ax - B)(A_1x - B_1)(A_2x - B_2) \dots (A_nx - B_n)$$

กรณี 1 ถ้า m เป็นจำนวนคู่บวก นั่นคือ $m = 2k$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว

$$(Ax - B)^m = (Ax - B)^{2k} = [(Ax - B)^2]^k \geq 0$$

ถ้า $f(x) \neq 0$ จะได้ว่า $(Ax - B)^m \neq 0$ ดังนั้น $(Ax - B)^m > 0$

ดังนั้น อสมการ $f(x) < 0$ และ $g(x) < 0$ มีเซตคำตอบเหมือนกัน และ

อสมการ $f(x) > 0$ และ $g(x) > 0$ มีเซตคำตอบเหมือนกัน (โดยการ

เอา $(Ax - B)^m$ คูณหรือหารทั้งสองข้าง)

กรณี 2 ถ้า m เป็นจำนวนคี่บวก นั่นคือ $m = 2k + 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว ซึ่ง $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(Ax - B)^m = (Ax - B)^{2k + 1} = (Ax - B)^{2k}(Ax - B)$$

เนื่องจาก $(Ax - B)^{2k} \geq 0$ ดังนั้นถ้า $f(x) \neq 0$

จะได้ $(Ax - B)^{2k} > 0$ ดังนั้น อสมการ $f(x) < 0$ และ

$h(x) < 0$ มีเซตคำตอบเหมือนกัน และอสมการ $f(x) > 0$ และ

$h(x) > 0$ มีเซตคำตอบเหมือนกัน

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(2x - 3)^2(4x - 5) > 0$

วิธีทำ พิจารณาอสมการ $(4x - 5) > 0$

เซตคำตอบของอสมการ $(4x - 5) > 0$ คือ $(5/4, \infty)$

แกวรากของอสมการ $(2x - 3)^2 = 0$ คือ $3/2$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการ $(2x - 3)^2(4x - 5) > 0$ คือ

$$(5/4, \infty) - \{3/2\} = (5/4, 3/2) \cup (3/2, \infty)$$

หมายเหตุ การหาเซตคำตอบของอสมการ $(2x - 3)^2 = 0$ มาลบออกจาก

เซตคำตอบของอสมการ $(4x - 5) > 0$ เพราะหาเซตคำตอบของ

อสมการ $(2x - 3)^2(4x - 5) > 0$ โดยพิจารณา $(4x - 5) > 0$

จะคงพิจารณา $(2x - 3)^2$ ควบคู่กัน และเนื่องจาก $(2x - 3)^2 \geq 0$

มี $x = 3/2$ ที่ไม่ใช่รากของอสมการ $(2x - 3)^2(4x - 5) > 0$ รวมอยู่ด้วย

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(x-3)(3x-1)^2(2x-1)^3 < 0$

วิธีทำ พิจารณาอสมการ $(x-3)(2x-1) < 0$

เซตคำตอบของอสมการ $(x-3)(2x-1) < 0$ คือ $(1/2, 3)$

แตรากของสมการ $(3x-1)^2 = 0$ คือ $1/3$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการ $(x-3)(3x-1)^2(2x-1) < 0$ คือ

$$(1/2, 3) - \{1/3\} = (1/2, 3)$$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(x-1)^2(2x-3)^3(3x+4)^4(4x+5) \leq 0$

วิธีทำ พิจารณาอสมการ $(2x-3)(4x+5) < 0$

เซตคำตอบของอสมการ $(2x-3)(4x+5) < 0$ คือ $(-5/4, 3/2)$

แตรเซตคำตอบของสมการ $(x-1)^2(2x-3)^3(3x+4)^4(4x+5) = 0$

คือ $\{1, 3/2, -4/3, -5/4\}$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการ $(x-1)^2(2x-3)^3(3x+4)^4(4x+5) \leq 0$

คือ $(-5/4, 3/2) \cup \{1, 3/2, -4/3, -5/4\} = [-5/4, 3/2] \cup \{-4/3\}$

โดยคุณสมบัติของจำนวนจริงที่ $a \in \mathbb{R}^+$ แล้วจะได้ว่า $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$

และถ้า $a \in \mathbb{R}^-$ แล้วจะได้ $a^{-1} \in \mathbb{R}^-$ ดังนั้นอสมการในรูป $(A_1x - B_1)^{m_1} \dots$

$(A_nx - B_n)^{m_n} < 0$ และ $(A_1x - B_1)^{m_1}(A_2x - B_2)^{m_2} \dots (A_nx - B_n)^{m_n} > 0$

เมื่อ m_i เป็นจำนวนเต็ม จงหาเซตคำตอบเช่นเดียวกับกรณี m_i เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยพิจารณา $(A_1x - B_1)^{-m}$ มีเครื่องหมายเหมือนกับ $(A_1x - B_1)^m$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x-1)(3x-2)}{(x-4)} > 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{(2x-1)(3x-2)}{(x-4)} = \frac{(x-4)}{(x-4)}^{-1}(2x-1)(3x-2)$ เมื่อ $x \neq 4$

พิจารณาอสมการ $(x-4)(2x-1)(3x-2) > 0$

เซตคำตอบของอสมการ $(x-4)(2x-1)(3x-2) > 0$ คือ $(1/2, 2/3) \cup$

$(4, \infty)$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x-1)(3x-2)}{(x-4)} > 0$ คือ
 $(1/2, 2/3) \cup (4, \infty)$

4.3 ค่าสัมบูรณ์

นิยาม 13 ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $|x|$ มีความหมายดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง

$$|5| = 5$$

$$|-9| = -(-9) = 9$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{เมื่อ } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 1-x & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

ตัวอย่าง

จงแก้สมการ $|x-2| = 5$

วิธีทำ

$$|x-2| = 5 \quad \text{หมายถึง} \quad x-2 = 5 \quad \text{หรือ}$$

$$-(x-2) = 5$$

กรณีที่ 1 $x-2 = 5$

จะได้ $x = 7$

กรณีที่ 2 $-(x-2) = 5$

$$x-2 = -5$$

จะได้ $x = -3$

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $\{7, -3\}$

ทฤษฎี 32 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1. |x| \geq 0$$

$$2. |x| = |-x|$$

$$3. |x| = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = 0$$

$$4. |x|^2 = x^2$$

$$5. -|x| \leq x \leq |x|$$

$$6. |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$7. |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$8. |xy| = |x| |y|$$

$$9. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{โดยที่} \quad y \neq 0$$

$$10. x^2 < y^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad |x| < |y|$$

$$11. |x| = |y| \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = y \quad \text{หรือ} \quad x = -y$$

$$12. |x| = |y| \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x^2 = y^2$$

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x + 1| = x$

วิธีทำ ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า $|x + 1| < 0$

แต่ $|x + 1| \geq 0$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

ดังนั้น $|x + 1| = x$ ไม่มีราก

ถ้า $x \geq 0$ จะได้ว่า $x + 1 \geq 0$

ดังนั้น $|x + 1| = x + 1$

จะได้ $x + 1 = x$

แต่ $x + 1 = x$ ไม่มีราก

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x + 1| = x$ คือ $\emptyset$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x - 1| = 3|x - 2|$

วิธีทำ วิธีที่ 1 $|x - 1| = 3|x - 2|$

ดังนั้น $x - 1 = 3(x - 2)$ หรือ $x - 1 = -3(x - 2)$

$x - 1 = 3x - 6$ หรือ $x - 1 = -3x + 6$

$x = 5/2$ หรือ $x = 7/4$

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = 3|x - 2|$ คือ $\{5/2, 7/4\}$

วิธีที่ 2 $|x - 1| = 3|x - 2|$

$(x - 1)^2 = [3(x - 2)]^2$

$x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 36x + 36$

$8x^2 - 34x + 35 = 0$

$(4x - 7)(2x - 5) = 0$

$x = 7/4, 5/2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = 3|x - 2|$ คือ $\{5/2, 7/4\}$

ทฤษฎี 33 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ $|x| < a$

กล่าวคือ $-a < x < a$

พิสูจน์ ตอนที่ 1 ถ้า $|x| < a$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ จะได้ $|x| = x$

ดังนั้น $x < a$ เนื่องจาก $|x| < a$

กรณีที่ 2 $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$

ดังนั้น $-x < a$ เนื่องจาก $|x| < a$

นั่นคือ $-a < x$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ถ้า $|x| < a$ แล้ว $-a < x < a$

ตอนที่ 2 ถ้า $-a < x < a$

กรณีที่ 1 $x \geq 0$ จะได้ $|x| = x$

และ $|x| < a$ เนื่องจาก $x < a$

กรณีที่ 2 $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$

แต่ $-a < x$ จะได้ $a > -x$

นั่นคือ $|x| < a$

จะได้ว่า ถ้า $-a < x < a$ แล้ว $|x| < a$

ตัวอย่าง $|x| < 5$ ก็คือ $-5 < x < 5$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x - 2| < 5$

วิธีทำ $|x - 2| < 5$

จะได้ $-5 < x - 2 < 5$

ดังนั้น $-5 + 2 < x < 5 + 2$

นั่นคือ $-3 < x < 7$

เซตคำตอบของสมการ $|x - 2| < 5$ คือ $(-3, 7)$

ทฤษฎี 34 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ $|x| \geq a$

ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

พิสูจน์ จากทฤษฎี 33 จะได้ว่า $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x$ และ $x < a$

ถ้าข้อความ $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x$ และ $x < a$

สมมูลกับข้อความ $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \geq x$ หรือ $x \geq a$

ดังนั้น จะได้ว่า $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

หมายเหตุ (1) จากทฤษฎี 33 สามารถพิสูจน์ได้ว่า $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ

$$-a \leq x \leq a$$

(2) จากทฤษฎี 34 สามารถพิสูจน์ได้ว่า $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x > a$

หรือ $x < -a$

ตัวอย่าง $|x| \geq 3$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq 3$ หรือ $x \leq -3$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|2x - 1| \geq 3$

วิธีทำ โดยทฤษฎี 34 $|2x - 1| \geq 3$

จะได้ $2x - 1 \geq 3$ หรือ $2x - 1 \leq -3$

ดังนั้น $x \geq 2$ หรือ $x \leq -1$

เซตคำตอบของสมการ $|2x - 1| \geq 3$ คือ $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $-1 < \frac{1}{x+2} < 1$

วิธีทำ $-1 < \frac{1}{x+2} < 1$

จากทฤษฎี 33 จะได้ว่า $\left| \frac{1}{x+2} \right| < 1$

$$\frac{1}{|x+2|} < 1$$

$$|x+2| > 1$$

จากทฤษฎี 34 จะได้ว่า

$$x + 2 > 1 \quad \text{หรือ} \quad x + 2 < -1$$

$$x > -1 \quad \text{หรือ} \quad x < -3$$

เซตคำตอบของสมการ $-1 < \frac{1}{x+2} < 1$ คือ $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $|3x + 10| |x - 1| \leq 10$

วิธีทำ $|3x + 10| |x - 1| \leq 10$

$$|(3x + 10)(x - 1)| \leq 10$$

$$|3x^2 + 7x - 10| \leq 10$$

$$-10 \leq 3x^2 + 7x - 10 \leq 10$$

พิจารณาในกรณี $-10 \leq 3x^2 + 7x - 10$

$$0 \leq 3x^2 + 7x$$

$$0 \leq x(3x + 7)$$

รากของสมการ $x(3x + 7) = 0$ คือ $x = 0, -7/3$

เขตคำตอบของอสมการ $-10 \leq 3x^2 + 7x - 10$ คือ $(-\infty, -7/3]$

$\cup [0, \infty)$

พิจารณาในกรณีที่ $3x^2 + 7x - 10 \leq 10$

$$3x^2 + 7x - 20 \leq 0$$

$$(3x - 5)(x + 4) \leq 0$$

รากของสมการ $(3x - 5)(x + 4) = 0$ คือ $x = 5/3, -4$

เขตคำตอบของอสมการ $3x^2 + 7x - 10 \leq 10$ คือ $[-4, 5/3]$

แต่เขตคำตอบของอสมการ $-10 \leq 3x^2 + 7x - 10 \leq 10$ คือ

$(\text{เขตคำตอบของอสมการ } -10 \leq 3x^2 + 7x - 10) \cap (\text{เขตคำตอบของอสมการ } 3x^2 + 7x - 10 \leq 10)$

ดังนั้น เขตคำตอบของอสมการ คือ $[-4, 7/3] \cup [0, 5/3]$

แบบฝึกหัด 4

1. จงหาเซตคำตอบของ อสมการต่อไปนี้

$$1.1 \quad (x + 4)(x - 3)(x + 5) > 0$$

$$1.2 \quad (x - 1)(2x - 5)(3x - 10) \leq 0$$

$$1.3 \quad \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x - 1)(x - 2)} \geq 16$$

$$1.4 \quad \frac{x}{x^2 + 9} - \frac{5}{x - 3} < 0$$

$$1.5 \quad |x + 6| = 8$$

$$1.6 \quad |x^2 - 3x - 4| \geq 3$$

$$1.7 \quad |x^2 - 7x + 10| < 5$$

$$1.8 \quad \frac{|3x + 4|}{|5x - 2|} < 7$$

$$1.9 \quad |(x - 9)(x + 1)| < 13$$

$$1.10 \quad \frac{|(x - 7)(3x + 5)|}{|x - 1|} \geq 5$$

2. จงหา 2.1 $[-9, -2) \cap (-5, 1)$

2.2 $\{(-\infty, 6) \cap (0, \infty)\}$

2.3 $[-5, 3)' \cup (5, 7)$

2.4 $[-2, 7) \cap [3, -4]$

2.5 $(0, 7)' \cap (-3, 2)'$

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนิสิตระดับปริญญาตรี ปีที่ 1
เรื่องเซต และ ระบบจำนวน โดยการสอนที่เน้น
การยกตัวอย่างคำาน กับการสอนปกติ

บทคัดย่อ

ของ

นวรัตน์ ศุภสินธุ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2525

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเซต และระบบจำนวน ของนิสิตระดับปริญญาตรี ปีที่ 1 ที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำกับการสอนปกติ

กลุ่มตัวอย่างได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรี ปีที่ 1 ที่เรียนคณิต.101 คณิตศาสตร์เบื้องต้น ในภาคการศึกษาที่ 1 ปีการศึกษา 2524 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 148 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 จำนวน 33 คน และกลุ่มทดลองที่ 2 จำนวน 115 คน นิสิตในกลุ่มทดลองที่ 1 ได้รับการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำ นิสิตในกลุ่มทดลองที่ 2 ได้รับการสอนปกติ ใช้เนื้อหาเดียวกันคือ เซต และระบบจำนวน ใช้เวลาในการทดลอง 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการทดลองแล้วทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเซตและระบบจำนวน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซต และระบบจำนวนของนิสิตที่เรียนจากการสอนที่เน้นการยกตัวอย่างคำ สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซต และระบบจำนวนของนิสิตที่เรียนจากการสอนปกติอย่างมีนัยสำคัญ ที่ระดับ .01

A COMPARATIVE STUDY OF FRESHMEN'S LEARNING
ACHIEVEMENT ON SET AND NUMBER SYSTEM
BY USING COUNTER EXAMPLE APPROACH
AND CONVENTIONAL TEACHING

AN ABSTRACT
BY
NAWARAT SUPASIN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education Degree
at Srinakharinwirot University
February 1982

The purpose of this study was to compare two groups of student who were taught Set and Number System by giving counter example approach and conventional teaching.

The subjects were 148 college freshmen registered for Math.101 Basic Concepts of Mathematics in the first semester of the academic year 1981 at Srinakharinwirot Prasarnmitr. The first experimental group consisted of 33 students and the second experimental group consisted of 115 students. Subjects in both groups were taught Set and Number System for 14 periods. Each period is 50 minutes. The first group was taught by counter example approach and the second group by the conventional teaching. The achievement tests on Set and Number System were administered to both groups at the end of the experiment.

Result indicated that the achievement in learning Set and Number System of the students who were taught by counter example treatments were significantly higher than those who were taught by the conventional teaching at .01 level.