ความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญานิพนธ์

ของ

พฤหัส กำภูศิริ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2537

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

..................................ประธาน

(ผศ.สุภาพร ศรีบุรินทร์)

..................................กรรมการ

(ผศ.อภิชัย บวรกิติวงศ์)

คณะกรรมการสอบ

..................................ประธาน

(ผศ.สุภาพร ศรีบุรินทร์)

..................................กรรมการ

(ผศ.อภิชัย บวรกิติวงศ์)

..................................กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อ.ละเอียด ปรารถนาดี)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..................................คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ดร.ศิริยุภา พูลสุวรรณ)

วันที่..4..เดือน..พ.ค...........พ.ศ..37....

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ เนื่องจากได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำอย่างดีจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์สุภาพร ศรีบุรินทร์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์อภิชัย บวรกิติวงศ์ และ อาจารย์ละเอียด ประรถนาดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ ผู้ช่วยผู้อำนวยการ และคณะครู-อาจารย์ โรงเรียนสุรนารีวิทยา อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา โรงเรียนนครพนมวิทยาคม อำเภอเมือง จังหวัดนครพนม และโรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม ที่ได้ให้ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการดำเนินการวิจัย

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา ครู-อาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านของผู้วิจัย

พฤหัส กำภูศิริ

สารบาญ

บทที่ หน้า

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆควรจะได้รับการพัฒนา ปรับปรุง และเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้ก็เพื่อให้มีความเพียงพอและสอดคล้องกับสภาพความเปลี่ยนแปลง และความต้องการด้านเศรษฐกิจ สังคม และความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน ดังคำกล่าวของ เฉลียว มณีเลิศ ซึ่งได้กล่าวถึงการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับต่างๆเอาไว้ว่า หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ควรจะต้องได้รับการพัฒนาและปรับปรุงอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้มีความเพียงพอและสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2536 : ก) วิธีการอย่างหนึ่งที่นักการศึกษาในประเทศต่าง ๆ ใช้ในการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ก็คือ การนำเอาเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เคยสอนในระดับหนึ่งลงมาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า เพราะมีความเชื่อว่า ผู้เรียนต่างระดับชั้นสามารถเรียนรู้เนื้อหาอย่างเดียวกันได้ โดยปรับปรุงเนื้อหาเหล่านั้นให้เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน (Servais and Varga. 1971 : 21)

หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) กำหนดให้เรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 134) และในขณะเดียวกัน หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ก็กำหนดให้เรียนเรื่องวงกลม และพาราโบลา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่เรียนเรื่อง วงกลมในรูปเรขาคณิตยุคลิด และเรียนเรื่อง พาราโบลา เฉพาะสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ เท่านั้น (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 43) และเนื่องจากหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) กำหนดให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรียนทั้งเรขาคณิตและพีชคณิต จึงควรให้นักเรียนในระดับชั้นนี้ได้เรียนเรขาคณิตให้เกี่ยวเนื่องและสัมพันธ์กับพีชคณิต เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิชาที่ใช้เรื่องพีชคณิตมาช่วยศึกษาข้อเท็จจริงทางเรขาคณิต และใช้ความรู้เรื่องเรขาคณิตมาช่วยทำให้การเรียนพีชคณิตเป็นรูปธรรมเข้าใจง่าย ดังที่ ลาวัลย์ พลกล้า ได้กล่าวไว้ว่า เมื่อผู้เรียนได้เรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์แล้ว จะสามารถมองเห็นความสัมพันธ์หรือฟังก์ชันต่างๆที่กำหนดโดยสมการ

หรือสมการที่มีรูปแบบต่างกันเป็นรูปในระนาบหรือรูปทรงสามมิติในปริภูมิ รู้จักส่วนประกอบที่สำคัญของรูปต่าง ๆ ที่จะนำมาหาความสัมพันธ์ในเชิงพีชคณิตได้ วิชานี้จึงเป็นพื้นฐานสำคัญอย่างหนึ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้น (ลาวัลย์ พลกล้า. ม.ป.ป. : 1)

ด้วยเหตุผลดังกล่าว ประกอบกับคำกล่าวของ บรูเนอร์ (Bruner. 1960 : 33) ซึ่งได้กล่าวถึงการปรับปรุงหลักสูตร โดยวิธีการนำเอาเนื้อหาวิชาในระดับหนึ่งลงมาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่าว่า ครูสามารถสอนวิชาใด ๆ ให้แก่นักเรียนในระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหาและวิธีสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนในระดับนั้น ๆ เสียก่อน ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา หรือไม่ เพื่อใช้ผลจากการศึกษาครั้งนี้เป็นแนวทางในการเสนอแนะให้นำเอาเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา บรรจุในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2. เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่องวงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

2. ทำให้ทราบความแตกต่างของความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่องวงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3. ผลจากการวิจัย อาจเป็นแนวทางในการพิจารณาเลือกเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เพื่อบรรจุให้เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

1.กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 โรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม จำนวนทั้งหมด 64 คน โดยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน ซึ่งเลือกจากนักเรียนทั้งหมด 122 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน ซึ่งเลือกจากนักเรียนทั้งหมด 138 คน

2.ตัวแปรที่ศึกษาคือ ความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3.การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาความสามารถของนักเรียนในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยเนื้อหาต่อไปนี้

3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

3.1.1 ระบบพิกัดฉาก จุดกึ่งกลางและระยะระหว่างจุดสองจุด

3.1.2 ความชันของเส้นตรง

3.1.3 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

3.1.4 สมการของเส้นตรง

3.1.5 ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง ระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน

3.2 วงกลม

3.2.1 สมการแบบมาตรฐานของวงกลม

3.2.2 สมการแบบทั่วไปของวงกลม

3.3 พาราโบลา

3.3.1 พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่บนแกน X หรือแกน Y

3.3.2 พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) และโฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y

นิยามศัพท์เฉพาะ

1.วงกลม และพาราโบลา หมายถึง วงกลม และพาราโบลา ซึ่งนิยามในเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์

2.ความสามารถ หมายถึง คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบทดสอบเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3.เกณฑ์ หมายถึง เกณฑ์ของกระทรวงศึกษาธิการ(กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 24) ซึ่งกำหนดไว้ว่า นักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไปของคะแนนรวมถือว่า ผ่านเกณฑ์

<u>สมมุติฐานของการวิจัย</u>

1.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลาไม่แตกต่างกัน

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1.ในการวิจัยครั้งนี้ บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นมีความเหมาะสมที่จะนำไปทดลองสอนได้

2.ผลการวิจัยถือจากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3.การเรียนการสอนเป็นไปภายใต้ภาวะปกติในชั้นเรียนของครูโดยทั่วๆไปที่มีต่อนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตามลำดับต่อไปนี้

1.หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ของกระทรวงศึกษาธิการ

2.งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัยในประเทศ

2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

<u>หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ของกระทรวงศึกษาธิการ</u>

ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) ของกระทรวงศึกษาธิการ กำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นวิชาเลือกเสรี ประกอบด้วยรายวิชา จำนวนคาบที่ใช้ในการสอนและจำนวนหน่วยการเรียนดังนี้

1.วิชาคณิตศาสตร์ ค 011	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5	หน่วยการเรียน
2.วิชาคณิตศาสตร์ ค 012	5 คาบ/สัปดาห์/ภาค	2.5	หน่วยการเรียน
3.วิชาคณิตศาสตร์ ค 021	2 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1	หน่วยการเรียน
4.วิชาคณิตศาสตร์ ค 022	2 คาบ/สัปดาห์/ภาค	1	หน่วยการเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ ค 011 มีเนื้อหาวิชาที่กำหนดให้เรียน ได้แก่ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง รากที่สอง รากที่สาม เลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม เอกนาม พหุนาม การบวกลบคูณหารพหุนาม สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการเชิงเส้นสองตัวแปร ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ทฤษฎีบทปีทาโกรัสและบทกลับ วงกลม ไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคเซแคนต์ เซแคนต์ และโคแทนเจนต์ของมุม $0^\circ - 90^\circ$ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 42) การเรียนเรื่องวงกลม ในรายวิชา ค 011 นี้ เป็นการเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับวงกลม ได้แก่ วงกลมที่เท่ากัน คอร์ด เส้นสัมผัสวงกลม มุมในครึ่งวงกลม มุมใน

ส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ได้ และสามารถสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าโดยใช้วงเวียนตามที่กำหนดให้ได้ โดยมีกิจกรรมการเรียนการสอนและนำเสนอในรูปเรขาคณิตยุคลิด (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2536 : 119)

วิชาคณิตศาสตร์ ค 012 มีเนื้อหาวิชาที่กำหนดให้เรียน ได้แก่ การแยกตัวประกอบของพหุนาม สมการกำลังสอง กราฟของสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ ระบบสมการที่สมการมีกำลังไม่เกินสอง พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลม ความน่าจะเป็น ตารางแจกแจงความถี่ ฮิสโทแกรม และรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ ค่ากลางของข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่แจกแจงความถี่ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 43) การเรียนกราฟของสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นการเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถบอกลักษณะของกราฟที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ และสามารถเขียนกราฟของสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ ได้ถูกต้อง (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2530 : 119)

วิชาคณิตศาสตร์ ค 021 มีเนื้อหาวิชาที่กำหนดให้เรียน ได้แก่ การพิสูจน์ทฤษฎีบทและข้อสรุปเบื้องต้นทางเรขาคณิตในเรื่อง รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และวงกลม (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 43) การเรียนเรื่องวงกลม ในรายวิชา ค 021 นี้ นักเรียนจะได้เรียนทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม เช่น ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัสวงกลม โดยมีการนำเสนอเนื้อหาเหล่านี้ในรูปเรขาคณิตยุคลิด (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2536 : 38-90)

วิชาคณิตศาสตร์ ค 022 มีเนื้อหาวิชาที่กำหนดให้เรียน ได้แก่ การแปรผัน เศษส่วนของพหุนาม และการแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535 : 43)

จะเห็นได้ว่าการเรียนเรื่อง วงกลมและพาราโบลา ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) นั้น เป็นการเรียนเรื่อง วงกลม ในรูปเรขาคณิตยุคลิด โดยเน้นสมบัติบางประการของวงกลม และเรียนเรื่อง พาราโบลา เฉพาะสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ เพื่อให้ทราบลักษณะและสามารถเขียนกราฟของสมการในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ ได้ โดยไม่ได้นำเสนอในรูปเรขาคณิตวิเคราะห์แต่อย่างใด ดังนั้นถ้ามีการนำเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา มาบรรจุในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพื่อใช้

สอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก็น่าเป็นผลดีต่อนักเรียน ทำให้นักเรียนในระดับชั้นนี้ได้เรียนเนื้อหาเรื่องวงกลม และพาราโบลา โดยใช้วิธีการทางเรขาคณิตวิเคราะห์ อันจะเป็นผลให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาเรื่องวงกลม และพาราโบลาได้กว้างขวางขึ้น ได้เรียนเรขาคณิตสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับพีชคณิต สามารถใช้ความรู้ทางพีชคณิตมาช่วยศึกษาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับเรขาคณิต ใช้ความรู้ทางเรขาคณิตมาช่วยทำให้การเรียนพีชคณิตเป็นรูปธรรมเข้าใจง่ายขึ้น และเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้น

การเรียนเรื่องวงกลม และพาราโบลา ในรูปของเรขาคณิตวิเคราะห์ สามารถจะเรียนได้จากเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวยซึ่งเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์วิชาอื่นเช่น วิชาแคลคูลัส ในต่างประเทศก็ได้มีการเรียนการสอนเรื่องภาคตัดกรวยในระดับมัธยมศึกษา เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาแคลคูลัส ดังมีเอกสารที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงการเรียนการสอนเรื่องภาคตัดกรวย เอาไว้ดังต่อไปนี้

ในปี ค.ศ. 1983 มอนต์โกเมอรี เคาน์ตี พับลิค สกูลส์ (Montgomery County Public Schools. 1983) ได้ตีพิมพ์คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียนแคลคูลัสในเรื่อง Pre-Calculus Instructional Guide for Elementary Functions, Analytic Geometry เพื่อใช้สอนนักเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษาของเทศบาลเมืองรอควิล (Rockville) รัฐคอนเนกติกัต (Connecticut) สหรัฐอเมริกา คู่มือครูนี้ได้บรรจุเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวยและความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์เอาไว้ด้วย ต่อมาในปี ค.ศ. 1985 คาสต์เนอร์ (Kastner. 1985) ได้เขียนบทความเรื่อง Spacemathematics : A Resource for Secondary School Teachers เพื่อเสนอสิ่งพิมพ์ที่เสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา สิ่งพิมพ์นี้ได้บรรจุเนื้อหาวิชาและกิจกรรมต่างๆซึ่งมุ่งเพิ่มพูนความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนเข้าใจในเทคโนโลยีและความสำเร็จเกี่ยวกับการบินของสหรัฐอเมริกา สิ่งพิมพ์นี้ได้บรรจุเนื้อหาเรื่องภาคตัดกรวย และในภาคผนวกของสิ่งพิมพ์ยังประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องการวิเคราะห์แรงโน้มถ่วงของโลก และทางโคจรที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้งของภาคตัดกรวยอีกด้วย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการปรับปรุงและพัฒนาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์โดยการนำเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับหนึ่งมาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่านั้น จำเป็นต้องมีการประเมินและศึกษาความสามารถของนักเรียนในการเรียนเนื้อหาเหล่านั้นเสียก่อนว่า นักเรียนมีความสามารถเพียงพอในการเรียน

หรือไม่ เพื่อให้ทราบถึงปัญหาและอุปสรรคต่าง ๆ ซึ่งเป็นข้อมูลประกอบการพิจารณาหาแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรให้ตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของสภาพทางเศรษฐกิจ สังคม และความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีในปัจจุบัน นักวิจัยทางการศึกษาหลายท่านได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงกว่าของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาเอาไว้ดังต่อไปนี้

1. งานวิจัยในประเทศ

สุมานะ อาจหาญ (2521 : 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นหรือไม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนบ้านหมอพัฒนานุกูล อำเภอบ้านหมอ จังหวัดสระบุรี จำนวนชั้นละ 35 คน รวม 70 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น และความสามารถในการเรียนเรื่องพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ของนักเรียนทั้งสองชั้นไม่แตกต่างกัน สุมานะ อาจหาญ ได้เสนอแนะว่าควรเริ่มสอนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้นแก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ต่อมาในปี พ.ศ.2526 เฉลียว เทศกลั่น (2526 : 31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อนหรือไม่และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ของนักเรียนทั้งสองระดับชั้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเบญจมเทพอุทิศ จังหวัดเพชรบุรี จำนวนชั้นละ 35 คน รวม 70 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ไม่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องจำนวนเชิงซ้อน และผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ศรัน ประกิจเพชร (2526 : 35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หรือไม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนปัญญาวรคุณ กรุงเทพมหานคร จำนวน 72 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ บุญเกิด ชำนาญค้า (2526 : 34-35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น หรือไม่ และเพื่อเป็นแนวทาง

ในการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 โรงเรียนวัดไร่ขิงวิทยา อำเภอสามพราน จังหวัดนครปฐม จำนวน 29 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น และบุญเกิด ชำนาญค้า ได้เสนอแนะว่ามีความเป็นไปได้ในการที่จะเริ่มสอนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้นในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ในปี พ.ศ.2527 ศุภชัย ทองศิริ (2527 : 36-37) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้น หรือไม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 โรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา จำนวน 35 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้น และมีความเป็นไปได้ในการที่จะเริ่มสอนเรื่อง กรุปเบื้องต้น กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 และ นวลสวาท ปิ่นแก้ว (2527 : 25) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม หรือไม่ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนศรีศักดิ์สุวรรณวิทยา อำเภอบางระจัน จังหวัดสิงห์บุรี จำนวน 40 คน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม และสามารถเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ในปี พ.ศ. 2529 วันชัย ทัพพะปุรณะ (2529 : 29-31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องเวกเตอร์ หรือไม่ และเพื่อเป็นแนวทางในการเสนอแนะการปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 โรงเรียนดีบุกพังงาวิทยายน จังหวัดพังงา จำนวน 72 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง เวกเตอร์ และมีความเป็นไปได้ที่จะเริ่มสอนเรื่อง เวกเตอร์ ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการศึกษางานวิจัยในประเทศที่ได้ศึกษาความสามารถของนักเรียนไทยในระดับชั้นมัธยมศึกษาในการเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สูงกว่า ดังกล่าวข้างต้น พบว่า นักเรียนไทยมีความสามารถที่จะเรียนเนื้อหาที่สูงกว่าได้ และทำนองเดียวกันก็มีงานวิจัยต่างประเทศที่ชี้ให้เห็นว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาสามารถเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สูงกว่าได้ ดังงานวิจัยต่อไปนี้

2. งานวิจัยในต่างประเทศ

ในปี ค.ศ. 1970 เดวิส (Davis. 1970 : 2246-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาถึงผลของการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ในระดับมัธยมศึกษา โดยเปรียบเทียบกับวิชาเรขาคณิตอีก 2 วิชา คือ เรขาคณิตแบบเก่า (Traditional Geometry) และเรขาคณิตแบบใหม่ (Modern Geometry) ว่า มีผลต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แตกต่างกันอย่างไร กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในรัฐแคลิฟอร์เนีย (California) ประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวน 425 คน โดยแบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม นักเรียนกลุ่มที่ 1 เรียนเรขาคณิตแบบเก่า กลุ่มที่ 2 เรียนเรขาคณิตแบบใหม่ และกลุ่มที่ 3 เรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ หลังจากนั้นจัดให้นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสามกลุ่มเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ตามตำราของโครงการ School Mathematics Study Group (SMSG) ที่มีชื่อว่า SMSG Intermediate Mathematics แล้วทำการทดสอบ 2 ครั้ง ครั้งที่ 1 ทำการทดสอบหลังจากที่เรียนไปแล้ว 3 เดือน โดยทดสอบเกี่ยวกับเรื่อง ระบบจำนวน เศษส่วน และทศนิยม เรขาคณิต พีชคณิต และประโยคพีชคณิต ครั้งที่ 2 ทำการทดสอบหลังจากที่เรียนไปแล้ว 1 ปี โดยทดสอบเกี่ยวกับเรื่องความรู้ในวิชาพีชคณิต ความรู้ในวิชาเรขาคณิต พีชคณิตประยุกต์ และเรขาคณิตประยุกต์ ผลการวิจัยปรากฏว่า การทดสอบครั้งที่ 1 กลุ่มที่เรียนเรขาคณิตวิเคราะห์มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องต่างๆ ที่ทดสอบ (ยกเว้นเรื่องเศษส่วน) สูงกว่าอีกสองกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และผลจากการทดสอบครั้งที่ 2 กลุ่มที่เรียนเรขาคณิตวิเคราะห์มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนทุกเรื่องสูงกว่าอีกสองกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ยกเว้นผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรขาคณิตประยุกต์ ซึ่งผลสัมฤทธิ์ของทั้งสามกลุ่มไม่แตกต่างกัน และเดวิสได้ให้ข้อเสนอแนะว่า วิชาเรขาคณิตวิเคราะห์มีวิธีการที่เราสามารถนำไปใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์แขนงอื่นๆ ได้อย่างกว้างขวาง จึงควรสอนวิชานี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย ต่อมาในปี ค.ศ.1971 กัลลิค (Gallick. 1971 : 4035-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ของนักเรียน เกรด 5 เกรด 6 เกรด 9 และเกรด 10 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5 เกรด 6 เกรด 9 และเกรด 10 จากโรงเรียนประถมศึกษา และโรงเรียนมัธยมศึกษาในเมือง แลนซิง (Lansing) รัฐมิชิแกน (Michigan) ประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวน 398 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่ 1 เป็นนักเรียนเกรด 5 จำนวน 77 คน และนักเรียนเกรด 6 จำนวน 83 คน รวม 160 คน และกลุ่มที่ 2 เป็นนักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 จำนวน 238 คน ทั้งสองกลุ่มเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เนื้อหาเดียวกัน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยมีความสามารถในการเรียนไม่แตกต่างกัน นักเรียนเกรด 9 และ เกรด 10

มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยนักเรียนเกรด 9 มีความสามารถในการเรียนมากกว่านักเรียนเกรด 10 นักเรียนเกรด 9 มีความสามารถในการเรียนมากกว่านักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 และนักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 มีความสามารถในการเรียนมากกว่านักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 กัลลิคได้เสนอแนะว่า ควรสอนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ใน เกรด 9

นอกจากนี้ กับรัด (Gubrud. 1971 : 6468-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8 เกรด 9 และเกรด 10 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 8 เกรด 9 และเกรด 10 ในรัฐไอโอวา (Iowa) ประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวน 288 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่ 1 เป็นนักเรียนเกรด 8 และนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ กลุ่มที่ 2 เป็นนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 ทั้งสองกลุ่มเรียนเนื้อหาเรื่องการบวกเวกเตอร์ เนื้อหาเดียวกัน ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 8 และนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และ นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ แต่นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูงและนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการรวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 และนักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และนักเรียนในระดับชั้นที่สูงกว่ามีความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ มากกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า ต่อมาในปี ค.ศ.1974 ไวท์ (White. 1974 : 1969-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 ในการเรียนมโนภาพเบื้องต้นของความน่าจะเป็น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในเมืองโคราโอโพลิส (Coraopolis) รัฐเพนซิลเวเนีย (Pennsylvania) ประเทศสหรัฐอเมริกา จำนวน 306 คน โดยเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 153 คน และนักเรียนเกรด 8 จำนวน 153 คน ผู้วิจัยใช้แบบเรียนของโครงการ School Mathematics Study Group (SMSG) ที่มีชื่อว่า Introduction to Probability Part I Basic Concepts ในการทดลองสอนกลุ่มตัวอย่าง ผลการวิจัยสรุปได้ว่า นักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนมโนภาพเบื้องต้นของความน่าจะเป็น และไวท์ได้เสนอแนะให้นำเนื้อหาเรื่อง ความน่าจะเป็นเบื้องต้นมาบรรจุลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และ เกรด 8

ในปี ค.ศ. 1985 ไคลน์ (Kline. 1985 : 2429-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อสำรวจความคิดเห็นของครูผู้สอนทางด้านคณิตศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ ในรัฐนิวเมกซิโก (New Mexico) ประเทศสหรัฐอเมริกา เกี่ยวกับเรื่องต่าง ๆ ที่ควรเลือกเพื่อบรรจุลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ก่อนการเรียนแคลคูลัส โดยเรื่องที่ให้เลือกได้แก่ ลอการิทึม ภาคตัดกรวย สถิติ ความน่าจะเป็น เมตริกซ์ และดีเทอร์มินันต์ ผู้วิจัยส่งแบบสอบถามไปยังกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นครูผู้สอนทางด้านคณิตศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ทุกคนในสถาบันการศึกษาระดับวิทยาลัย 3 แห่ง ในรัฐนิวเมกซิโก ผลการวิจัยปรากฏว่า ภาคตัดกรวย เป็นเรื่องหนึ่งที่ได้รับการสนับสนุนให้บรรจุลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาก่อนการเรียนวิชาแคลคูลัส และไคลน์ ได้เสนอแนะว่า ควรสอนภาคตัดกรวยกับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา ต่อมาในปี ค.ศ.1986 ชเวค (Shweck. 1986 : 820-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อสำรวจความคิดเห็นของครูคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศลิเบีย (Libya) ที่มีต่อหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่ใช้กันอยู่ในขณะนั้น และเพื่อเป็นข้อมูลในการวางแผนปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นในประเทศลิเบีย ผู้วิจัยได้ส่งแบบสอบถามไปยังกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นครูคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทุกคนในเมือง ตริโปลิ (Tripoli) ประเทศลิเบีย ครูตอบแบบสอบถามจำนวน 128 คน และผู้วิจัยสัมภาษณ์ครูเพิ่มอีกจำนวน 17 คน ผลการวิจัยปรากฏว่า เนื้อหาเรื่อง ภาคตัดกรวยได้รับการสนับสนุนให้สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยดังกล่าวพบว่า นักการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศได้มีการทดลองนำเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเคยสอนในระดับหนึ่งมาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่าเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเนื้อหาเหล่านี้ของนักเรียน ซึ่งนับว่างานวิจัยเหล่านี้มีความสำคัญ เพราะจะทำให้ทราบถึงความสามารถของนักเรียนในการเรียนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ก่อนที่จะทำการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ให้ตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีทั้งในปัจจุบันและอนาคต

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2536

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 โรงเรียนสหราษฎร์วิทยาคม อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม โดยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน ซึ่งได้มาโดยการสุ่มแบบแบ่งชั้น (Stratified Random Sampling) จากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 122 คน และ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 138 คน โดยมีขั้นตอนของการสุ่มดังนี้

1. จำแนกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งหมด 122 คน ออกเป็น 3 ห้อง โดยใช้เกรดเฉลี่ยสะสมเป็นเกณฑ์ จำแนกได้เป็นห้องที่นักเรียนมีระดับความสามารถในการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ คือ ห้อง 3/1 , 3/2 และ3/3 ตามลำดับ จากนั้นทำการสุ่มตัวอย่างนักเรียนในแต่ละห้องโดยวิธีการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยทำการสุ่มมาห้องละ 1 ใน 4 ของจำนวนนักเรียนในแต่ละห้อง รวมจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 30 คน

2. จำแนกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งหมด 138 คน ออกเป็น 3 ห้อง โดยใช้เกรดเฉลี่ยสะสมเป็นเกณฑ์ จำแนกได้เป็นห้องที่นักเรียนมีระดับความสามารถในการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ คือ ห้อง 4/1 , 4/2 และ4/3 ตามลำดับ จากนั้นทำการสุ่มตัวอย่างนักเรียนในแต่ละห้องโดยวิธีการสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) โดยทำการสุ่มมาห้องละ 1 ใน 4 ของจำนวนนักเรียนในแต่ละห้อง รวมจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง 34 คน

<u>เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย</u>

1.ลักษณะของเครื่องมือ

1.1 บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1.1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ (6 คาบ)

ก.ระบบพิกัดฉาก จุดกึ่งกลางและระยะระหว่างจุดสองจุด (1 คาบ)

ข.ความชันของเส้นตรง (1 คาบ)

ค.เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก (2 คาบ)

ง.สมการของเส้นตรง (1 คาบ)

จ.ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง ระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน (1 คาบ)

1.1.2 วงกลม (7 คาบ)

ก.สมการแบบมาตรฐานของวงกลม (3 คาบ)

ข.สมการแบบทั่วไปของวงกลม (4 คาบ)

1.1.3 พาราโบลา (7 คาบ)

ก.พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและโฟกัสอยู่บนแกน X หรือแกน Y (3 คาบ)

ข.พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) และโฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y (4 คาบ)

1.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลมและพาราโบลา จำนวน 40 ข้อ

2.ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือ

ในการเรียบเรียงบทเรียนและการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับขั้นดังนี้

2.1 ศึกษาหลักสูตรและเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลาตลอดจนเนื้อหาที่เกี่ยวข้องจากหนังสือต่อไปนี้

ก.หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533) (กระทรวงศึกษาธิการ. 2535)

ข.หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2535)

ค.หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2535)

ง.คู่มือ–เตรียมสอบ คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1 ค 011 (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และสุเทพ ทองอยู่. 2534)

จ.คู่มือ–เตรียมสอบ คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 ค 012 (สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และสุเทพ ทองอยู่. 2534)

ฉ.แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 (กมล เอกไทยเจริญ. 2524)

ช.Calculus with Analytic Geometry (Ellis and Gulick. 1982)

2.2 กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยที่จุดประสงค์การเรียนรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา นั้น มุ่งให้นักเรียนสามารถ

2.2.1 หาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม เมื่อกำหนดสมการของวงกลมให้ได้

2.2.2 เขียนสมการของวงกลม เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ได้

2.2.3 หาจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา เมื่อกำหนดสมการของพาราโบลาให้ได้

2.2.4 เขียนสมการของพาราโบลา เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ได้

2.3 เรียบเรียงบทเรียนตามลำดับขั้นดังนี้

2.3.1 เขียนบทเรียนให้มีเนื้อหาครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้

2.3.2 นำบทเรียนไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์และครูประจำวิชาตรวจแก้ แล้วนำมาปรับปรุง

2.4 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา โดยผู้วิจัยสร้างตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ

2.5 นำแบบทดสอบชุดที่สร้างขึ้นในข้อ 2.4 ไปให้คณะกรรมการที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิตรวจคัดเลือกเพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำไปทดสอบกับกลุ่มนักเรียนที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อสอบ ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 โรงเรียนสุรนารีวิทยา ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา ทุกห้องเรียน จำนวนทั้งหมด 336 คน โดยใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง

2.6 วิเคราะห์ข้อสอบเพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ .20 ถึง .80 และค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ .20 ขึ้นไปเป็นจำนวน 40 ข้อ ซึ่งในจำนวนข้อสอบ 40 ข้อนี้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้เรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

2.7 หาค่าความเชื่อมั่นและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบชุดที่ได้จากการคัดเลือกข้อสอบในข้อ 2.6 โดยนำไปทดลองกับกลุ่มนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียน วิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 โรงเรียนนครพนมวิทยาคม ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดนครพนม จำนวน 79 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ โดยใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 20 นาทีได้ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.83 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบเท่ากับ 2.71

วิธีดำเนินการทดลอง

1.นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปสอนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน ใช้เวลาในการสอน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอน

2.นำบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นไปสอนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอน และเนื่องจากกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้เรียนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์จากการสอนตามปกติในโรงเรียนในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2536 แล้ว ผู้วิจัยจึงไม่สอนหัวข้อ 1.1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งมีอยู่ในบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อให้กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีพื้นฐานในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เท่าเทียมกัน

3. เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดไว้แล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ได้วิเคราะห์แล้วทั้งสองกลุ่มพร้อมกัน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 20 นาที

4. ตรวจข้อสอบ เพื่อให้คะแนนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยแบบทดสอบแต่ละข้อ ถ้าตอบถูกได้ 1 คะแนน ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบได้ 0 คะแนน เพื่อนำคะแนนที่ได้ไปทำการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ทำการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Population Proportion)

3. ทำการทดสอบสมมุติฐานที่ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกัน โดยดำเนินการตามลำดับดังนี้

3.1 ทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้การทดสอบ โคล์โมโกรอฟ-สไมร์นอฟ (Kolmogorov - Smirnov Test)

3.2 ถ้าคะแนนจากข้อ 3.1 มีการแจกแจงปกติ จะเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับการทดสอบผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากร ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Testing the difference between Two Population Means) ถ้าคะแนนจากข้อ 3.1 ไม่มีการแจกแจงปกติ จะเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ การทดสอบ แมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney Test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

2. ค่าสถิติอื่น ๆ และการทดสอบสมมุติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z การทดสอบ

โคล์โมโกรอฟ-สไมร์นอฟ (Kolmogorov - Smirnov Test) การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร การทดสอบผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Testing the difference between Two Population Means) หรือ การทดสอบ แมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney Test)

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และเปรียบเทียบความแตกต่างความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นนั้น ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ตามลำดับดังนี้

1.ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป

2.ค่าเฉลี่ยเลขคณิต($\bar{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน(s) ของคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3.ผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

4.ผลการทดลอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

5.ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

<u>ผลการวิเคราะห์ข้อมูล</u>

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน และกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา จำนวน 40 ข้อ ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1.หาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตั้งแต่ 50% ขึ้นไป จำแนกตามระดับชั้น ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	30	20	66.67
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	34	23	67.65

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไปมีจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนในแต่ละระดับชั้น

2. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียน (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{X}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	30	40	20.47	51.18	2.60
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	34	40	20.85	52.13	3.09

จากตาราง 2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 มากกว่า 50% ของคะแนนเต็ม 40 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 น้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มากกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

3. ผลการทดลอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้การทดสอบ โคล์โมโกรอฟ-สไมร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test) ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ค่าสถิติ D สำหรับทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	ค่าสถิติ D ของคะแนนจากแบบทดสอบ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	0.0874
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	0.1272

จากตาราง 3 พบว่า คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

4. ผลการทดสอบจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ 50% ขึ้นไป (คน)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	30	20	1.83*

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง 4 จะเห็นว่า จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา มีจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

5. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนักเรียน (คน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)	ค่าสถิติ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	30	20.47	2.60	0.53
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4	34	20.85	3.09	

จากตาราง 5 ชี้ให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

<u>ความมุ่งหมายของการวิจัย</u>

1. เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2. เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

<u>สมมุติฐานของการวิจัย</u>

1.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

2.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกัน

<u>วิธีดำเนินการวิจัย</u>

1.กลุ่มตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 โรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

2.2 แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ซึ่งค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบเท่ากับ 0.83 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 2.71

3. วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 นำบทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัย

เรียบเรียงขึ้น ไปสอนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ใช้เวลาในการสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที โดยเมื่อสอนแต่ละหัวข้อจบแล้ว ผู้วิจัยจะทำการทดสอบย่อยท้ายคาบที่สอน

3.2 นำบทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นยกเว้นหัวข้อ 1.1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ไปสอนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที โดยเมื่อสอนแต่ละหัวข้อจบแล้ว ผู้วิจัยจะทำการทดสอบย่อยท้ายคาบที่สอน

3.3 เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ทั้งสองกลุ่มพร้อมกัน ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 20 นาที

สรุปผลการวิจัย

1.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

2.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนทั้งสองระดับชั้นนี้มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เท่าเทียมกัน

อภิปรายผล

ผลการวิจัยปรากฏว่า

1.นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา จากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1.1 ผู้วิจัยได้เรียบเรียงเนื้อหาในบทเรียนให้เกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน โดยเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานก่อน แล้วจึงสอนเนื้อหาซึ่งเริ่มจากเนื้อหาง่ายไปเนื้อหายากขึ้นตามลำดับ

1.2 นักเรียนมีความสนใจและตั้งใจเรียนดีมาก ซึ่งจะเห็นได้จากการซักถามเนื้อหาที่เรียนเมื่อไม่เข้าใจ การทำแบบฝึกหัดจนเสร็จเรียบร้อยทุกครั้ง การทำความเข้าใจและติดตามเนื้อหาที่เรียนทั้งในและนอกห้องเรียน และไม่มีนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างคนใดขาดเรียน

ตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยทำการทดลองสอน

1.3 ผู้วิจัยใช้วิธีสอนโดยยึดหลักในการทำให้เนื้อหาเป็นรูปธรรม เข้าใจง่ายและสะดวกต่อการเรียนรู้ จัดให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองมากที่สุด ตลอดจนการใช้อุปกรณ์การสอนที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจเนื้อหาที่เรียน

1.4 ผู้วิจัยใช้เวลาในการทดลองสอน 2 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 10 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งเพียงพอและเหมาะสมสำหรับกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มนี้

1.5 เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแต่ละหัวข้อแล้ว ผู้วิจัยจะทำการทดสอบย่อยเพื่อตรวจสอบว่า นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนมากน้อยเพียงใด แล้วนำผลที่ได้ไปปรับปรุงการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้น ทำให้นักเรียนเตรียมตัวพร้อมอยู่เสมอทั้งในด้านการเรียน และการทดสอบ

1.6 นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีความพร้อมพอที่จะเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ได้

2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

2.1 นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างทั้งสองระดับชั้นมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์เท่าเทียมกัน โดยผู้วิจัยสอนเนื้อหาเรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ให้กับกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แต่จะไม่สอนเนื้อหานี้ให้กับกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื่องจากกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เคยเรียนเนื้อหานี้มาแล้วในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2536 ผู้วิจัยจึงเพียงแต่ทบทวนให้เท่านั้น นอกจากนี้ บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา นี้ยังเป็นบทเรียนใหม่ที่กลุ่มตัวอย่างทั้งสองระดับชั้นนี้ยังไม่เคยเรียนมาก่อน

2.2 กลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีอายุใกล้เคียงกันคือมีอายุประมาณ 14-15 ปี จึงน่าจะมีวุฒิภาวะใกล้เคียงกัน ดังนั้นเมื่อมีความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และความรู้พื้นฐานอื่น ๆ ใกล้เคียงกัน ได้เรียนเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ซึ่งเป็นเนื้อหาที่ทั้งสองกลุ่มตัวอย่างไม่เคยเรียนมาก่อนเหมือนกัน โดยวิธีสอนเดียวกัน และผู้วิจัยเป็นผู้สอนทั้งสองกลุ่มตัวอย่าง จึงอาจเป็นสาเหตุทำให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มนี้มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกัน

<u>ข้อเสนอแนะ</u>

1.ข้อเสนอแนะทั่วไป

จากผลการวิจัยซึ่งปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลาไม่แตกต่างกัน ดังนั้นผลการวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางให้ผู้จัดทำหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาพิจารณาเลือกเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เพื่อบรรจุให้เป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเนื้อหาเรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่มีอยู่ในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นั้นยังคงมีอยู่ตามเดิม เพราะจะเป็นพื้นฐาน และช่วยทำให้นักเรียนเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ได้เข้าใจง่ายขึ้น การนำเนื้อหาเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา มาสอนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จะทำให้นักเรียนในระดับชั้นนี้สามารถแก้ปัญหาในเรื่อง วงกลม และพาราโบลา ได้กว้างขวางขึ้น ได้เรียนเรขาคณิตเกี่ยวเนื่องสัมพันธ์กับพีชคณิต สามารถนำความรู้ทางพีชคณิตมาช่วยศึกษาข้อเท็จจริงทางเราขาคณิต และใช้ความรู้เรื่องเรขาคณิตมาช่วยทำให้การเรียนพีชคณิตเป็นรูปธรรมเข้าใจง่ายขึ้น นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานสำคัญอย่างหนึ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นสูงขึ้นอีกด้วย

2.ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรทำการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีขนาดใหญ่ขึ้น และมีขอบเขตกว้างขวางขึ้น

2.2 ควรทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงรี และไฮเพอร์โบลา หรือไม่

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : กราฟิคอาร์ต, 2524.

เฉลียว เทศกลั่น. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.

นวลสวาท ปิ่นแก้ว. การทดลองสอนเรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

บุญเกิด ชำนาญค้า. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.

ลาวัลย์ พลกล้า. เรขาคณิตวิเคราะห์. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, ม.ป.ป.

วันชัย ทัพพะปุรณะ. การทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2529. ถ่ายเอกสาร.

ศรัน ประกิจเพชร. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526. อัดสำเนา.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. คู่มือประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2534.

______. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2521(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2535.

______. หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2535.

ศุภชัย ทองศิริ. ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง กรุปเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2527. อัดสำเนา.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ค 011. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2536.

______. คู่มือครู วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ค 312. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์, 2530.

______. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 021 ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2536.

______. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2535.

______. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2535.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และสุเทพ ทองอยู่. คู่มือ-เตรียมสอบ คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1 ค 011. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต, 2534.

______. คู่มือ-เตรียมสอบ คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 ค 012. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ภูมิบัณฑิต, 2534.

สุมานะ อาจหาญ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521. อัดสำเนา.

Bruner, Jerome. The Process of Education. Harvard : Harvard University Press, 1960.

Davis, John Newton. "The Effects of High School Coordinate Geometry," Dissertation Abstracts International. 31(5) : 2246-A; November, 1970.

Ellis, Robert and Denny Gulick. Calculus with Analytic Geometry. 2nd ed. New York : Harcourt Brace Jovanovich, 1982.

Gallick, Mary Catherine. "Achievement of Fifth, Sixth, Ninth and Tenth Grades in Coordinate Geometry," Dissertation Abstracts International. 31(8) : 4035-A; February, 1971.

Gubrud, Allan Roy. "The Effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School," Dissertation Abstracts International. 31(12) : 6468-A; June, 1971.

Kastner, Bernice. Spacemathematics : A Resource for Secondary School Teachers. Washington, D.C. : National Aeronautics and Space Administration, 1985.

Kline, Thomas Peter. "A Survey of the Opinions of Mathematics and Engineering Instructors in the State of New Mexico Concerning Selected Topics of the Pre-Calculus Mathematics Curriculum," Dissertation Abstracts International. 45(8) : 2429-A; February, 1985.

Montgomery County Public Schools. Pre-Calculus Instructional Guide for Elementary Functions, Analytic Geometry. Rockville : Montgomery County Public School, 1983.

Servais, W. and T. Varga. Teaching School Mathematics. Aylesbury : Comton Printing, 1971.

Shweck, Mohamed Hadi. "A Comparative Study of the Libyan Secondary School Mathematics Program," Dissertation Abstracts International. 47(3) : 820-A; September, 1986.

White, Charles William. "A Study of the Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn Basic Concepts of Probability and the Relationship between Achievement in Probability and Selected Factors," Dissertation Abstracts International. 35(4) : 1969-A; October, 1974.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การวิเคราะห์ข้อมูล

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

ข้อที่	p	r	ข้อที่	p	r
1	.67	.38	21	.63	.55
2	.69	.55	22	.42	.40
3	.74	.60	23	.45	.54
4	.53	.43	24	.48	.45
5	.49	.39	25	.22	.43
6	.67	.45	26	.43	.43
7	.57	.47	27	.66	.74
8	.62	.31	28	.70	.73
9	.48	.34	29	.59	.62
10	.69	.61	30	.72	.71
11	.33	.28	31	.68	.54
12	.42	.21	32	.57	.52
13	.36	.32	33	.58	.55
14	.48	.35	34	.58	.46
15	.56	.38	35	.29	.29
16	.56	.41	36	.51	.47
17	.42	.37	37	.40	.53
18	.44	.46	38	.58	.42
19	.65	.38	39	.23	.32
20	.65	.43	40	.31	.43

ค่า p ค่า q และ Σpq ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

ข้อที่	p	q	pq
1	.59	.41	.2419
2	.23	.77	.1771
3	.22	.78	.1716
4	.19	.81	.1539
5	.35	.65	.2275
6	.38	.62	.2356
7	.27	.73	.1971
8	.33	.67	.2211
9	.42	.58	.2436
10	.34	.66	.2244
11	.20	.80	.1600
12	.44	.56	.2464
13	.29	.71	.2059
14	.34	.66	.2244
15	.39	.61	.2379
16	.27	.73	.1971
17	.35	.65	.2275
18	.32	.68	.2176
19	.33	.67	.2211
20	.39	.61	.2379

ข้อที่	p	q	pq
21	.29	.71	.2059
22	.15	.85	.1275
23	.19	.81	.1539
24	.23	.77	.1771
25	.20	.80	.1600
26	.33	.67	.2211
27	.42	.58	.2436
28	.33	.67	.2211
29	.37	.63	.2331
30	.44	.56	.2464
31	.30	.70	.2100
32	.35	.65	.2275
33	.22	.78	.1716
34	.25	.75	.1875
35	.29	.71	.2059
36	.38	.62	.2356
37	.28	.72	.2016
38	.43	.57	.2451
39	.23	.77	.1771
40	.33	.67	.2211

$\Sigma pq = 8.3423$

การคำนวณหาความเชื่อมั่นและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

X	f	fX	X^2	fX^2
37	1	37	1369	1369
32	1	32	1024	1024
30	1	30	900	900
28	1	28	784	784
26	1	26	676	676
25	1	25	625	625
24	3	72	576	1728
19	2	38	361	722
18	2	36	324	648
16	7	112	256	1792
15	3	45	225	675
14	2	28	196	392
13	4	52	169	676
12	7	84	144	1008
11	3	33	121	363
10	8	80	100	800
9	10	90	81	810
8	10	80	64	640
7	4	28	49	196
6	6	36	36	216
5	1	5	25	25
4	1	4	16	16
	$\sum f=79$	$\sum fX=1001$		$\sum fX^2=16085$

<u>ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u>

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{79(16085)-(1001)^2}{79(78)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1270715-1002001}{6162}}$$

$$= \sqrt{\frac{268714}{6162}}$$

$$s^2 = 43.61$$

$$s = 6.60$$

<u>ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ</u> (KR-20)

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1}\left\{1-\frac{\sum pq}{s^2}\right\}$$

$$r_{tt} = \frac{40}{39}\left\{1-\frac{8.3423}{43.61}\right\}$$

$$= \frac{40}{39}\left(\frac{35.2677}{43.61}\right)$$

$$= \frac{40}{39}\left(\frac{352677}{436100}\right)$$

$$= \frac{14107080}{17007900}$$

$$= 0.83$$

<u>ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ</u>

$$SE_{meas} = s_x\sqrt{1-r_{tt}}$$

$$SE_{meas} = 6.60\sqrt{1-0.83}$$

$$= 6.60\sqrt{0.17}$$

$$= 6.60(0.41)$$

$$= 2.71$$

คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

เลขที่	คะแนน (40)
1	22
2	24
3	21
4	27
5	24
6	23
7	22
8	23
9	20
10	23
11	20
12	22
13	21
14	20
15	21
16	22
17	21
18	20
19	21
20	18
21	16
22	18
23	15
24	19
25	19
26	18
27	19
28	19
29	16
30	20
	614

การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากรนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งใช้ตัวสถิติ Z ทดสอบ (Z-test for Population Proportion)

สมมุติฐานคือ H_o : $P \leq 0.5$

H_1 : $P > 0.5$

α = .05

ตัวสถิติสดสอบ $Z = \dfrac{\hat{P} - P_o}{\sqrt{P_o(1-P_o)/n}}$

$$= \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)/30}}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{1}{30}}}$$

$$= \frac{1}{6} \times 2\sqrt{30}$$

$$= \frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$= 1.83$$

$$Z_{.05} = 1.64$$

เพราะว่า $1.83 > 1.64$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_o

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา เป็นจำนวนมากกว่า 50% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

X	f	fX	X^2	fX^2
15	1	15	225	225
16	2	32	256	512
18	3	54	324	972
19	4	76	361	1444
20	5	100	400	2000
21	5	105	441	2205
22	4	88	484	1936
23	3	69	529	1587
24	2	48	576	1152
27	1	27	729	729
	$\sum f = 30$	$\sum fX = 614$		$\sum fX^2 = 12762$

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{614}{30} = 20.47$$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fX^2 - (\sum fX)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{30(12762) - (614)^2}{30(29)}}$$

$$= \sqrt{\frac{382860 - 376996}{870}}$$

$$= \sqrt{\frac{5864}{870}}$$

$$s = 2.60$$

$$s^2 = 6.74$$

การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้การทดสอบโคล์โมโกรอฟ-สไมร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test)

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

H_o : คะแนนของกลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

H_1 : คะแนนของกลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่ไม่มีการแจกแจงปกติ

1. คำนวณหาค่า $\bar{X}$ และ s^2

$\bar{X} = 20.47$

$s^2 = 6.74$

$s = 2.60$

2. คำนวณหาค่าคะแนนมาตรฐาน (Z) สำหรับคะแนนดิบ (X) แต่ละตัว โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X-\bar{X}}{s}$$

$X = 15 \longrightarrow \quad Z = \frac{15-20.47}{2.60} = -2.10$

$X = 16 \longrightarrow \quad Z = \frac{16-20.47}{2.60} = -1.72$

$X = 18 \longrightarrow \quad Z = \frac{18-20.47}{2.60} = -0.95$

$X = 19 \longrightarrow \quad Z = \frac{19-20.47}{2.60} = -0.57$

$X = 20 \longrightarrow \quad Z = \frac{20-20.47}{2.60} = -0.18$

$X = 21 \longrightarrow \quad Z = \frac{21-20.47}{2.60} = 0.20$

$X = 22 \longrightarrow \quad Z = \frac{22-20.47}{2.60} = 0.59$

$X = 23 \longrightarrow \quad Z = \frac{23-20.47}{2.60} = 0.97$

$X = 24 \longrightarrow \quad Z = \frac{24-20.47}{2.60} = 1.36$

$X = 27 \longrightarrow \quad Z = \frac{27-20.47}{2.60} = 2.51$

3. เรียงลำดับค่าของคะแนนมาตรฐาน (Z_j) จากน้อยไปหามาก หาค่า $F_o(X)$, j/n และ $\lvert j/n - F_o(x) \rvert$

X	Z	$F_o(X)$	j/n	$\lvert j/n - F_o(X) \rvert$
15	-2.10	0.0179	0.0333	$\lvert 0.0333 - 0.0179 \rvert = 0.0154$
16	-1.72	0.0427	0.0667	$\lvert 0.0667 - 0.0427 \rvert = 0.0240$
16	-1.72	0.0427	0.1000	$\lvert 0.1000 - 0.0427 \rvert = 0.0573$
18	-0.95	0.1711	0.1333	$\lvert 0.1333 - 0.1711 \rvert = 0.0378$
18	-0.95	0.1711	0.1667	$\lvert 0.1667 - 0.1711 \rvert = 0.0044$
18	-0.95	0.1711	0.2000	$\lvert 0.2000 - 0.1711 \rvert = 0.0289$
19	-0.57	0.2843	0.2333	$\lvert 0.2333 - 0.2843 \rvert = 0.0510$
19	-0.57	0.2843	0.2667	$\lvert 0.2667 - 0.2843 \rvert = 0.0176$
19	-0.57	0.2843	0.3000	$\lvert 0.3000 - 0.2843 \rvert = 0.0157$
19	-0.57	0.2843	0.3333	$\lvert 0.3333 - 0.2843 \rvert = 0.0490$
20	-0.18	0.4286	0.3667	$\lvert 0.3667 - 0.4286 \rvert = 0.0619$
20	-0.18	0.4286	0.4000	$\lvert 0.4000 - 0.4286 \rvert = 0.0286$
20	-0.18	0.4286	0.4333	$\lvert 0.4333 - 0.4286 \rvert = 0.0047$
20	-0.18	0.4286	0.4667	$\lvert 0.4667 - 0.4286 \rvert = 0.0381$
20	-0.18	0.4286	0.5000	$\lvert 0.5000 - 0.4286 \rvert = 0.0714$
21	0.20	0.5793	0.5333	$\lvert 0.5333 - 0.5793 \rvert = 0.0460$
21	0.20	0.5793	0.5667	$\lvert 0.5667 - 0.5793 \rvert = 0.0126$
21	0.20	0.5793	0.6000	$\lvert 0.6000 - 0.5793 \rvert = 0.0207$
21	0.20	0.5793	0.6333	$\lvert 0.6333 - 0.5793 \rvert = 0.0540$
21	0.20	0.5793	0.6667	$\lvert 0.6667 - 0.5793 \rvert = 0.0874$
22	0.59	0.7224	0.7000	$\lvert 0.7000 - 0.7224 \rvert = 0.0224$
22	0.59	0.7224	0.7333	$\lvert 0.7333 - 0.7224 \rvert = 0.0109$
22	0.59	0.7224	0.7667	$\lvert 0.7667 - 0.7224 \rvert = 0.0443$
22	0.59	0.7224	0.8000	$\lvert 0.8000 - 0.7224 \rvert = 0.0776$
23	0.97	0.8340	0.8333	$\lvert 0.8333 - 0.8340 \rvert = 0.0007$
23	0.97	0.8340	0.8667	$\lvert 0.8667 - 0.8340 \rvert = 0.0327$
23	0.97	0.8340	0.9000	$\lvert 0.9000 - 0.8340 \rvert = 0.0660$
24	1.36	0.9131	0.9333	$\lvert 0.9333 - 0.9131 \rvert = 0.0202$
24	1.36	0.9131	0.9667	$\lvert 0.9667 - 0.9131 \rvert = 0.0536$
27	2.51	0.9940	1.0000	$\lvert 1.0000 - 0.9940 \rvert = 0.0060$

4. จากการพิจารณาค่าของ $\lvert j/n-F_o(X) \rvert$ จะเห็นว่า ค่าสูงสุดของ $\lvert j/n-F_o(X) \rvert$ เท่ากับ D = 0.0874 แต่ค่า D ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ที่ df = 30 - 2 = 28 มีค่าเท่ากับ $D_{.05,28} = 0.24993$

เนื่องจาก $D_{comp.} < D_{.05,28}$ ดังนั้นจึงไม่สามารถปฏิ[illegible] H_o

นั่นคือ คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี[illegible]จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์ เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

เลขที่	คะแนน (40)
1	21
2	20
3	25
4	21
5	27
6	22
7	20
8	29
9	23
10	26
11	23
12	21
13	19
14	25
15	20
16	22
17	23
18	20
19	22
20	18
21	20
22	22
23	21
24	19
25	18
26	17
27	17
28	19
29	21
30	16
31	19
32	15
33	20
34	18
	709

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

X	f	fX	X^2	fX^2
15	1	15	225	225
16	1	16	256	256
17	2	34	289	578
18	3	54	324	972
19	4	76	361	1444
20	6	120	400	2400
21	5	105	441	2205
22	4	88	484	1936
23	3	69	529	1587
25	2	50	625	1250
26	1	26	676	676
27	1	27	729	729
29	1	29	841	841
	$\sum f = 34$	$\sum fX = 709$		$\sum fX^2 = 15099$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{709}{34} = 20.85$$

$$s = \sqrt{\frac{N\sum fX^2 - (\sum fx)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{34(15099) - (709)^2}{34(33)}}$$

$$= \sqrt{\frac{513366 - 502681}{1122}}$$

$$= \sqrt{\frac{10685}{1122}}$$

$$s = 3.09$$

$$s^2 = 9.52$$

การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้การทดสอบโคล์โมโกรอฟ-สไมร์นอฟ (Kolmogorov - Smirnov Test)

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

H_0 : กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

H_1 : กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่ไม่มีการแจกแจงปกติ

1. คำนวณหาค่า $\bar{X}$ และ s^2

$$\bar{X} = 20.85$$

$$s = 3.09$$

$$s^2 = 9.52$$

2. คำนวณหาค่าคะแนนมาตรฐาน (Z) สำหรับคะแนนดิบ (X) แต่ละตัวโดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X-\bar{X}}{s}$$

$$X = 15 \longrightarrow Z = \frac{15-20.85}{3.09} = -1.89$$

$$X = 16 \longrightarrow Z = \frac{16-20.85}{3.09} = -1.57$$

$$X = 17 \longrightarrow Z = \frac{17-20.85}{3.09} = -1.25$$

$$X = 18 \longrightarrow Z = \frac{18-20.85}{3.09} = -0.92$$

$$X = 19 \longrightarrow Z = \frac{19-20.85}{3.09} = -0.60$$

$$X = 20 \longrightarrow Z = \frac{20-20.85}{3.09} = -0.28$$

$$X = 21 \longrightarrow Z = \frac{21-20.85}{3.09} = 0.05$$

$$X = 22 \longrightarrow Z = \frac{22-20.85}{3.09} = 0.37$$

$$X = 23 \longrightarrow Z = \frac{23-20.85}{3.09} = 0.70$$

$$X = 25 \longrightarrow Z = \frac{25-20.85}{3.09} = 1.34$$

$$X = 26 \longrightarrow Z = \frac{26-20.85}{3.09} = 1.67$$

$$X = 27 \longrightarrow Z = \frac{27-20.85}{3.09} = 1.99$$

$$X = 29 \longrightarrow Z = \frac{29-20.85}{3.09} = 2.64$$

3. เรียงลำดับคะแนนมาตรฐาน (Z_j) จากน้อยไปหามาก หาค่า $F_o(X)$, j/n และ $\lvert j/n - F_o(X)\rvert$

X	Z	$F_o(X)$	j/n	$\lvert j/n - F_o(X)\rvert$
15	-1.89	0.0294	0.02941	$\lvert 0.02941 - 0.0294\rvert = 0.00001$
16	-1.57	0.0582	0.0588	$\lvert 0.0588 - 0.0582\rvert = 0.0006$
17	-1.25	0.1056	0.0882	$\lvert 0.0882 - 0.1056\rvert = 0.0174$
17	-1.25	0.1056	0.1176	$\lvert 0.1176 - 0.1056\rvert = 0.0120$
18	-0.92	0.1788	0.1471	$\lvert 0.1471 - 0.1788\rvert = 0.0317$
18	-0.92	0.1788	0.1765	$\lvert 0.1765 - 0.1788\rvert = 0.0023$
18	-0.92	0.1788	0.2059	$\lvert 0.2059 - 0.1788\rvert = 0.0271$
19	-0.60	0.2743	0.2353	$\lvert 0.2353 - 0.2743\rvert = 0.0390$
19	-0.60	0.2743	0.2647	$\lvert 0.2647 - 0.2743\rvert = 0.0096$
19	-0.60	0.2743	0.2941	$\lvert 0.2941 - 0.2743\rvert = 0.0198$
19	-0.60	0.2743	0.3235	$\lvert 0.3235 - 0.2743\rvert = 0.0492$
20	-0.28	0.3897	0.3529	$\lvert 0.3529 - 0.3897\rvert = 0.0368$
20	-0.28	0.3897	0.3824	$\lvert 0.3824 - 0.3897\rvert = 0.0073$
20	-0.28	0.3897	0.4118	$\lvert 0.4118 - 0.3897\rvert = 0.0221$
20	-0.28	0.3897	0.4412	$\lvert 0.4412 - 0.3897\rvert = 0.0515$
20	-0.28	0.3897	0.4706	$\lvert 0.4706 - 0.3897\rvert = 0.0809$
20	-0.28	0.3897	0.5000	$\lvert 0.5000 - 0.3897\rvert = 0.1103$
21	0.05	0.5199	0.5294	$\lvert 0.5294 - 0.5199\rvert = 0.0095$
21	0.05	0.5199	0.5588	$\lvert 0.5588 - 0.5199\rvert = 0.0389$
21	0.05	0.5199	0.5882	$\lvert 0.5882 - 0.5199\rvert = 0.0683$
21	0.05	0.5199	0.6176	$\lvert 0.6176 - 0.5199\rvert = 0.0977$
21	0.05	0.5199	0.6471	$\lvert 0.6471 - 0.5199\rvert = 0.1272$
22	0.37	0.6443	0.6765	$\lvert 0.6765 - 0.6443\rvert = 0.0322$
22	0.37	0.6443	0.7059	$\lvert 0.7059 - 0.6443\rvert = 0.0616$
22	0.37	0.6443	0.7353	$\lvert 0.7353 - 0.6443\rvert = 0.0910$
22	0.37	0.6443	0.7647	$\lvert 0.7647 - 0.6443\rvert = 0.1204$
23	0.70	0.7580	0.7941	$\lvert 0.7941 - 0.7580\rvert = 0.0361$
23	0.70	0.7580	0.8235	$\lvert 0.8235 - 0.7580\rvert = 0.0655$
23	0.70	0.7580	0.8529	$\lvert 0.8529 - 0.7580\rvert = 0.0949$
25	1.34	0.9099	0.8824	$\lvert 0.8824 - 0.9099\rvert = 0.0275$
25	1.34	0.9099	0.9118	$\lvert 0.9118 - 0.9099\rvert = 0.0019$
26	1.67	0.9525	0.9412	$\lvert 0.9412 - 0.9525\rvert = 0.0113$
27	1.99	0.9767	0.9706	$\lvert 0.9706 - 0.9767\rvert = 0.0061$
29	2.64	0.9959	1.0000	$\lvert 1.0000 - 0.9959\rvert = 0.0041$

4. $D_{comp} = 0.1272$ และ D ที่ α .05 ที่ df = 34 - 2 = 32 มีค่าเท่ากับ 0.23424

เนื่องจาก $D_{comp} < D_{.05, 32}$ เพราะฉะนั้นจึงไม่สามารถปฏิเสธ H_o นั่นคือ คะแนนของกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติที่ระดับนัยสำคัญ .05

การทดสอบผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ตัวสถิติ Z ทดสอบ

ทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

$H_o : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$\bar{X}_1 = 20.85, \bar{X}_2 = 20.47$

$s_1^2 = 9.52 , s_2^2 = 6.74$

$n_1 = 34 , n_2 = 30$

$$Z = \frac{20.85-20.47}{\sqrt{\frac{9.52}{34}+\frac{6.74}{30}}}$$

$$= \frac{0.38}{\sqrt{\frac{285.6+229.16}{(34x30)}}}$$

$$= \frac{0.38}{\sqrt{\frac{514.76}{1020}}}$$

$$= \frac{0.38}{0.7103989}$$

$$= 0.53$$

$Z_{.025} = \pm 1.96$

$-1.96 < 0.53 < 1.96$

เราไม่สามารถปฏิเสธ H_o

แสดงว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

ภาคผนวก ช

แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

แบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

<u>คำสั่ง</u> จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. วงกลมซึ่งมีสมการ $x^2 + y^2 = 6x - 4y + 3$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดใด

ก. (2,-3)

ข. (-2,3)

ค. (3,-2)

ง. (-3,2)

2. รัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 + 12x = 16y + 11$ มีขนาดเท่าใด

ก. 3 หน่วย

ข. 5 หน่วย

ค. 7 หน่วย

ง. 9 หน่วย

3. สมการในข้อใดมีกราฟเป็นจุดวงกลม (point circle)

ก. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 11 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$

4. กราฟของสมการในข้อใดเป็นเซตว่าง (empty set)

ก. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 6 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 26 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 75 = 0$

5. กราฟของสมการในข้อใดเป็นวงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle)

ก. $x^2 + y^2 + x - y + 1 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 17 = 0$

6. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งมีส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(-2,4) และ B(1,-3) เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ก. $x^2 + y^2 + x - y + 14 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - x + y + 14 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + x - y - 14 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - x + y - 14 = 0$

7. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด P(1,4) และ Q(3,6) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x - y - 5 = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 3 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 3 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 12x + 2y - 3 = 0$

8. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด (1,0), (0,-1) และ (0,0)

ก. $x^2 + y^2 + x + y = 0$

ข. $x^2 + y^2 - x - y = 0$

ค. $x^2 + y^2 + x - y = 0$

ง. $x^2 + y^2 - x + y = 0$

9. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 2 สัมผัสแกน X และแกน Y และมีรัศมียาว 10 หน่วย

ก. $x^2 + y^2 - 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 10\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 10\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y = 0$

10. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุดกำเนิด รัศมียาว 5 หน่วย และพิกัดแรกของจุดศูนย์กลางเท่ากับ -4

ก. $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$

11. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งล้อมรอบสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามเกิดจากเส้นตรง $x = 0$, $y = 0$ และ $2x + 3y = 6$

ก. $x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$

12. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งแนบในสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามเกิดจากเส้นตรง $x + 3y - 10 = 0$, $x - 3y - 10 = 0$ และ $3x + y + 10 = 0$

ก. $x^2 + y^2 + 20x - 60 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 20x + 60 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 10 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 11 = 0$

13. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และสัมผัสเส้นตรง

$2x - 3y - 5 = 0$

ก. $13x^2 + 13y^2 = 25$

ข. $5x^2 + 5y^2 = 13$

ค. $3x^2 + 3y^2 = 5$

ง. $x^2 + y^2 = 1$

14. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมที่ผ่านจุด $(-5,3)$ สัมผัสแกน X และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง

$x + y = 1$

ก. $x^2 + y^2 + 28x - 30y - 196 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 28x + 30y + 196 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$

15. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมที่ผ่านจุด $A(-2,1)$ และสัมผัสเส้นตรง $x - y = 1$ ที่จุด

$B(1,0)$

ก. $2x^2 + 2y^2 - x + 5y + 3 = 0$

ข. $2x^2 + 2y^2 + x - 5y - 3 = 0$

ค $x^2 + y^2 - x + 5y + 3 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + x - 5y - 3 = 0$

16. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $y = 2$ ผ่านจุด $(1,4)$ และมีจุดศูนย์กลาง

อยู่บนเส้นตรง $x - y + 2 = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 49 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 49 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 9 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$

17. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $x = 4$, $x = -2$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = 2$

ก. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 14 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 14 = 0$

18. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งสัมผัสเส้นตรง $3x + 4y - 16 = 0$ ที่จุด$(0,4)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย

ก. $x^2 + y^2 + 6x - 16y - 48 = 0$

ข. $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 48 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$

ง. $x^2 + y^2 - 6x + 16 = 0$

19. สมการในข้อใดคือสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(1,6)$ และสัมผัสเส้นตรง $x - y - 1 = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 19 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 2x + 12y + 19 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 19 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 12x - 2y - 19 = 0$

20. จุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 6x - 4y + 10 = 0$ อยู่ที่จุดใด

ก. $(-2,-1)$

ข. $(-1,-2)$

ค. $(2,1)$

ง. $(1,2)$

21. จุดยอดของพาราโบลา $2y^2 + 4y - x - 4 = 0$ อยู่ที่จุดใด

ก. (1,6)

ข. (6,1)

ค. (-1,-6)

ง. (-6,-1)

22. พาราโบลา $4y^2 - 3x = 0$ มีโฟกัสอยู่ที่จุดใด

ก. $(\frac{3}{16}, 0)$

ข. $(0, \frac{3}{16})$

ค. $(\frac{3}{4}, 0)$

ง. $(0, \frac{3}{4})$

23. โฟกัสของพาราโบลา $x^2 + 6x - 8y + 41 = 0$ อยู่ที่จุดใด

ก. (-3,2)

ข. (-3,6)

ค. (-3,4)

ง. (3,-4)

24. สมการในข้อใดคือสมการของไดเรกติกซ์ของพาราโบลา $x^2 = -16y$

ก. $x = 4$

ข. $x = -4$

ค. $y = 4$

ง. $y = -4$

25. สมการในข้อใดคือสมการของไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

ก. $x = \frac{23}{12}$

ข. $x = \frac{13}{12}$

ค. $y = -\frac{4}{3}$

ง. $y = -\frac{13}{6}$

26. เลตัสเรกตัมของพาราโบลา $3y^2 + 12y + 16 = 4x$ มีขนาดเท่าใด

ก. $\frac{4}{3}$ หน่วย

ข. 1 หน่วย

ค. $\frac{2}{3}$ หน่วย

ง. $\frac{1}{3}$ หน่วย

27. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,3)$ และเส้นตรง $y = -3$ เป็นไดเรกตริกซ์

ก. $y^2 - 12x = 0$

ข. $y^2 - 3x = 0$

ค. $x^2 - 12y = 0$

ง. $x^2 - 3y = 0$

28. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(7,0)$ และเส้นตรง $x = -7$ เป็นไดเรกตริกซ์

ก. $y^2 - 7x = 0$

ข. $y^2 - 28x = 0$

ค. $x^2 - 7y = 0$

ง. $x^2 - 28y = 0$

29. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-5,0)$ และเส้นตรง $x = 5$ เป็นไดเรกตริกซ์

ก. $x^2 - 20y = 0$

ข. $x^2 + 20y = 0$

ค. $y^2 - 20x = 0$

ง. $y^2 + 20x = 0$

30. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด (1,-11) และเส้นตรง $y - 11 = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์

ก. $y^2 + 44x = 0$

ข. $y^2 + 11x = 0$

ค. $x^2 + 44y = 0$

ง. $x^2 + 11y = 0$

31. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกน X เป็นแกนของพาราโบลา และผ่านจุด (4,5)

ก. $16y^2 - 25x = 0$

ข. $4y^2 - 25x = 0$

ค. $16x^2 - 25y = 0$

ง. $4x^2 - 25y = 0$

32. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกน Y เป็นแกนของพาราโบลา และผ่านจุด (-3,-6)

ก. $2x^2 + 3y = 0$

ข. $3x^2 + 2y = 0$

ค. $2y^2 + 3x = 0$

ง. $3y^2 + 2x = 0$

33. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด เลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ 8 และรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

ก. $y^2 + 8x = 0$

ข. $y^2 - 8x = 0$

ค. $x^2 + 8y = 0$

ง. $x^2 - 8y = 0$

34. สมการในข้อใดคือสมการของจุด $P(x,y)$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(-4,0)$ และเส้นตรง $x = 4$ เป็นระยะทางเท่ากัน

ก. $x^2 - 16y = 0$

ข. $x^2 + 16y = 0$

ค. $y^2 - 16x = 0$

ง. $y^2 + 16x = 0$

35. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6,3)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-2,3)$

ก. $y^2 + 16x - 6y + 105 = 0$

ข. $y^2 - 16x - 6y - 87 = 0$

ค. $x^2 - 6x + 16y + 102 = 0$

ง. $x^2 - 6x - 16y - 90 = 0$

36. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-2,4)$ และสมการของไดเรกตริกซ์เป็น $y = -4$

ก. $y^2 - 4x + 16y + 4 = 0$

ข. $y^2 + 4x - 16y + 4 = 0$

ค. $x^2 + 4x - 16y + 4 = 0$

ง. $x^2 - 4x + 16y + 4 = 0$

37. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีแกนขนานกับแกน X และผ่านจุด $(-2,1)$, $(1,2)$ และ $(-1,3)$

ก. $5x^2 - 9x - 2y - 20 = 0$

ข. $5x^2 + 21x + 2y + 20 = 0$

ค. $5y^2 - 2x + 9y - 20 = 0$

ง. $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$

38. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (3,5) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y และผ่านจุด (6,8)

ก. $x^2 + 6x + 3y - 6 = 0$

ข. $x^2 - 6x - 3y + 24 = 0$

ค. $y^2 - 6x + 3y - 6 = 0$

ง. $y^2 + 6x - 3y + 24 = 0$

39. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (-4,3) แกนของพาราโบลามีสมการเป็น $y = 3$ และผ่านจุด (0,7)

ก. $x^2 - 8x + 4y - 28 = 0$

ข. $x^2 + 8x - 4y + 28 = 0$

ค. $y^2 - 4x - 6y - 7 = 0$

ง. $y^2 + 4x - 6y + 7 = 0$

40. สมการในข้อใดคือสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (3,-5) แกนของพาราโบลามีสมการเป็น $x = 3$ และเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ 8

ก. $x^2 - 6x - 8y - 31 = 0$

ข. $x^2 - 6x + 8y - 49 = 0$

ค. $y^2 - 8x - 10y - 31 = 0$

ง. $y^2 + 8x + 10y - 49 = 0$

ภาคผนวก ค

บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดสมการของวงกลมให้ นักเรียนสามารถหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลมได้

2. เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ นักเรียนสามารถเขียนสมการของวงกลมได้

3. เมื่อกำหนดสมการของพาราโบลาให้ นักเรียนสามารถหาจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาได้

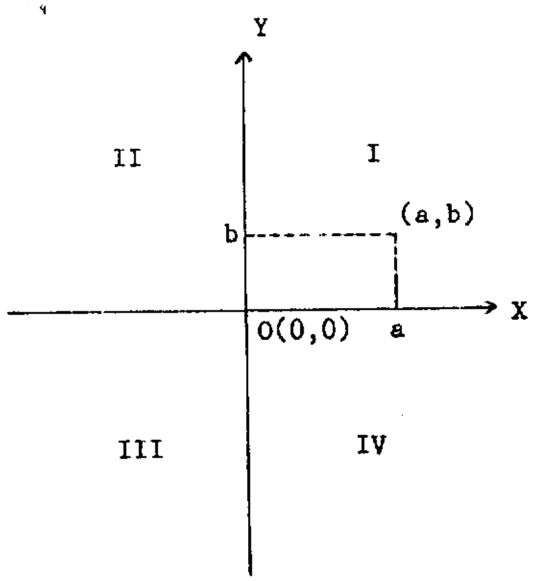
4. เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้ นักเรียนสามารถเขียนสมการของพาราโบลาได้

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

1.1 ระบบพิกัดฉาก จุดกึ่งกลางและระยะระหว่างจุดสองจุด

ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)

เลือกเส้นตรงในแนวตั้งและแนวนอนคู่หนึ่ง เรียกเส้นตรงในแนวนอนว่า แกน X และเรียกเส้นตรงในแนวตั้งว่า แกน Y ให้แกน X และแกน Y ตัดกันที่จุดกำเนิด O จับคู่จุดกำเนิดกับคู่อันดับ (0,0) กำหนดหน่วยความยาวโดยให้ทางขวาของแกน Y เป็นบวก ทางซ้ายของแกน Y เป็นลบ เหนือแกน X เป็นบวก และใต้แกน X เป็นลบ คู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) จับคู่กับจุดซึ่งอยู่ห่างจากแกน Y เท่ากับ a และห่างจากแกน X เท่ากับ b แกน X และแกน Y แบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่ จตุภาคที่ 1 จตุภาคที่ 2 จตุภาคที่ 3 และจตุภาคที่ 4



ข้อตกลง ข้อความต่อไปนี้มีความหมายเหมือนกัน

1. จุด P จับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับคู่อันดับ (x, y)

2. จุด P(x,y)

3. จุด P มีพิกัด (x, y)

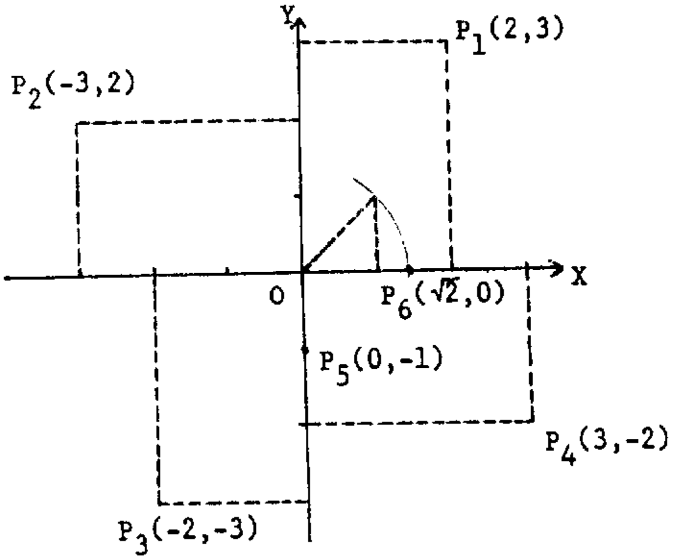
4. พิกัดของจุด P เท่ากับ (x, y)

5. P มีพิกัดที่หนึ่งเท่ากับ x และพิกัดที่สองเท่ากับ y

ตัวอย่าง จงแสดงตำแหน่งของจุดซึ่งมีพิกัดต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$P_1(2,3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(-2,-3)$, $P_4(3,-2)$, $P_5(0,-1)$ และ $P_6(\sqrt{2},0)$

วิธีทำ



แบบฝึกหัด

1. จงหาตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$P(2,5)$, $Q(-3,7)$, $R(1,-6)$, $S(-9,-4)$, $T(0,-10)$ และ $U(0,\sqrt{2})$

2. กำหนดให้ (-3,-2), (-3,3) และ (5,3) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง จงหาจุดยอดจุดที่สี่

3. กำหนดให้ (0,4) และ (0,-2) เป็นจุดยอดสองจุดของสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง จงหาจุดยอดจุดที่สาม

4. สี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีแกน X และแกน Y เป็นเส้นทแยงมุม ถ้าด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ยาว 2 หน่วย จงหาพิกัดของจุดยอดทั้งสี่

<u>ระยะระหว่างจุดสองจุด</u> (Distance Between Two Points)

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.1-1 ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2 เท่ากับ $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

<u>พิสูจน์</u>

กรณีที่ 1 ถ้า P_1 และ P_2 อยู่บนแกน X หรืออยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้ว่า

$$y_1 = y_2 \text{ และ } y_1 - y_2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $|\overline{P_1P_2}| = |x_1 - x_2|$

แต่ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$

ดังนั้น $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

กรณีที่ 2 ถ้า P_1 และ P_2 อยู่บนแกน Y หรืออยู่บนเส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y

จะได้ว่า $x_1 = x_2$ และ $x_1 - x_2 = 0$

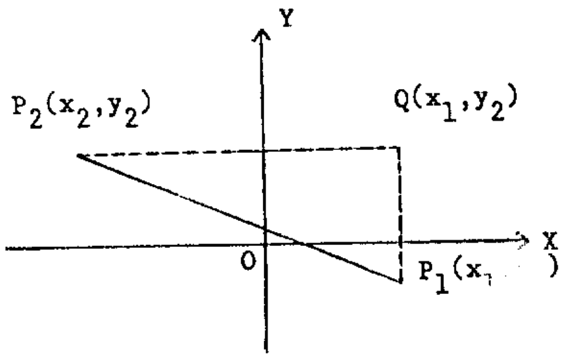
เพราะฉะนั้น $|\overline{P_1P_2}| = |y_1 - y_2|$

แต่ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|$

ดังนั้น $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

กรณีที่ 3 ถ้า P_1 และ P_2 อยู่บนเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

ให้ Q เป็นจุดซึ่งมีพิกัด (x_1, y_2)



จากทฤษฎีบทของปีทาโกรัส (Pythagoras) จะได้ว่า

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{P_1Q}|^2 + |\overline{P_2Q}|^2$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{P_1Q}|^2+|\overline{P_2Q}|^2}$$

$$= \sqrt{|y_1 - y_2|^2+|x_1 - x_2|^2}$$

ดังนั้น $$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2+(y_1 - y_2)^2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะระหว่างจุด A(-4,3) และ จุด B(2,5)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(-4,3) = (x_1,y_1)$ และ $(2,5) = (x_2, y_2)$

จากทฤษฎีบท 1.1-1 จะได้ว่า

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4-2)^2+(3-5)^2}$$

$$= \sqrt{36+4}$$

$$= \sqrt{40}$$

$$= 2\sqrt{10}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

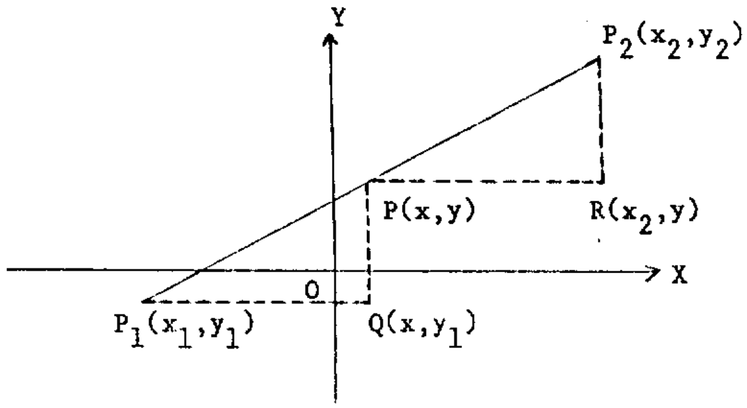
จงหาระยะระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. (1,3), (4,7)
2. (-3,4), (2,-8)
3. (-2,-3), (1,0)
4. (5,-12), (0,0)
5. (0,-4), (3,0)
6. (2,7), (-1,4)

<u>จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด</u> (Midpoint Between Two Points)

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.1-2 ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ แล้ว $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

<u>พิสูจน์</u>



ให้ Q และ R มีพิกัด (x,y_1) และ (x_2, y) ตามลำดับ

จะได้ว่า ΔP_1PQ คล้ายกับ ΔPP_2R

$$\frac{|\overline{P_1P}|}{|\overline{PP_2}|} = \frac{|\overline{P_1Q}|}{|\overline{PR}|} = 1$$

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = 1$$

เนื่องจากจุด $P(x,y)$ อยู่ระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$
เพราะฉะนั้น $x-x_1$ และ x_2-x เป็นจำนวนจริงบวกเหมือนกัน หรือเป็นจำนวนจริงลบเหมือนกัน

ดังนั้น $\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = 1$

หรือ $$x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า

$$y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (-3,5) กับจุด (4,-1)

<u>วิธีทำ</u> ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางตามต้องการ

จากทฤษฎีบท 1.1-2 จะได้ว่า

$$x = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{5+(-1)}{2} = 2$$

ดังนั้นจุดกึ่งกลางคือ จุด $(\frac{1}{2},2)$

<u>ตัวอย่าง</u> $P(2,3)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(5,4)$ และจุด P_2 จงหาพิกัดของจุด P_2

<u>วิธีทำ</u> ให้ P_2 มีพิกัด (x_2, y_2)

เนื่องจาก $P(2,3)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(5,4)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$

จากทฤษฎีบท 1.1-2 จะได้ว่า

$$2 = \frac{5+x_2}{2} \text{ และ } 3 = \frac{4+y_2}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x_2 = -1$ และ $y_2 = 2$

ดังนั้น P_2 มีพิกัด $(-1,2)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $A(-2,6)$, $B(4,-6)$
2. $C(7,-2)$, $D(-3,10)$
3. $E(-6,12)$, $F(12,0)$
4. $P(0,-7)$, $Q(3,10)$
5. $R(3,-\frac{5}{2})$, $S(-3,-9)$

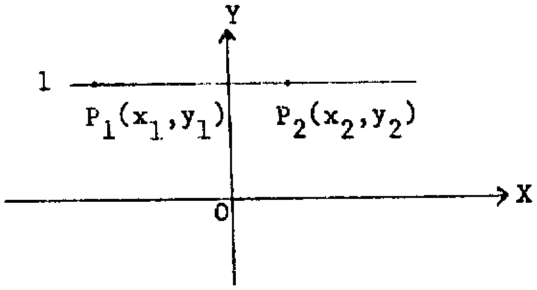
1.2 <u>ความชันของเส้นตรง</u> (Slope of a Line)

<u>บทนิยาม</u> 1.2-1 ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$, m เป็นความชันของเส้นตรง l ก็ต่อเมื่อ $m = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

<u>ข้อสังเกต</u>

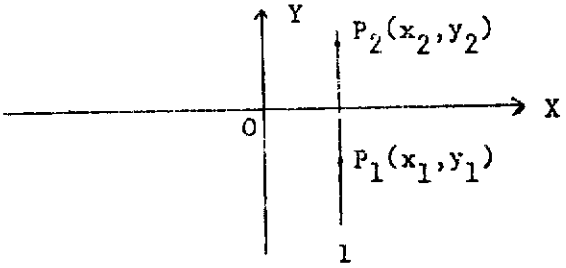
1. ถ้า l ขนานกับแกน X หรือทับแกน X จะได้ว่า $y_1 = y_2$ และ $y_1 - y_2 = 0$

ดังนั้น $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0$

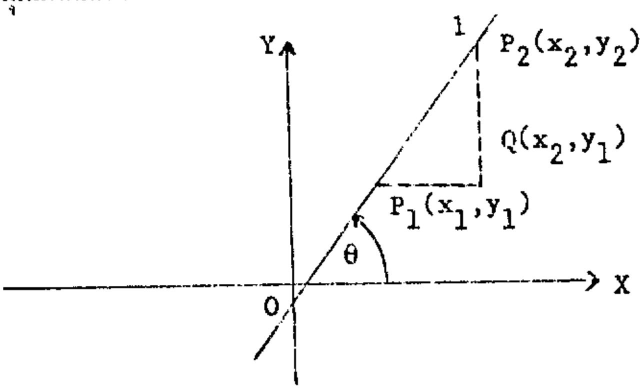


2. ถ้า l ขนานกับแกน Y หรือทับแกน Y จะได้ว่า $x_1 = x_2$ และ $x_1 - x_2 = 0$

ดังนั้น $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{0}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้



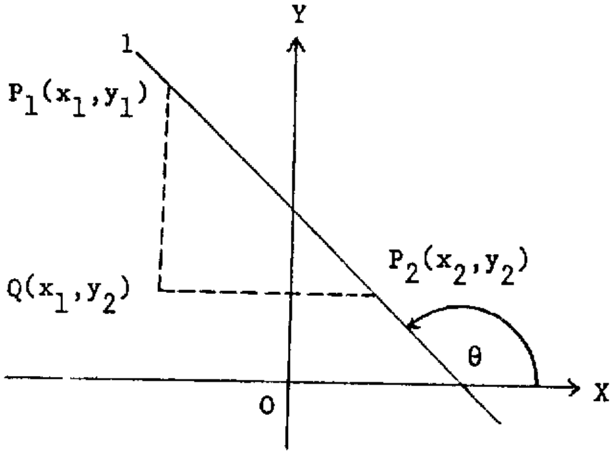
3. ถ้า l ทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา จะได้ว่า



จำนวนจริง $x_1 - x_2$ และ $y_1 - y_2$ เป็นจำนวนบวกเหมือนกัน หรือจำนวนลบเหมือนกัน

ดังนั้น $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ เป็นจำนวนจริงบวก

4. ถ้า l ทำมุมป้านกับแกน X เมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา จะได้ว่า



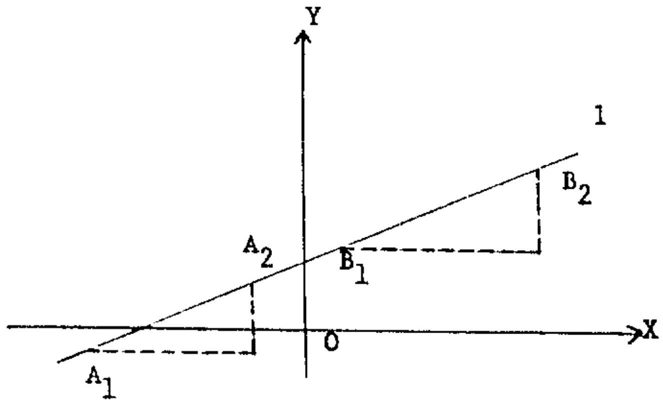
จำนวนจริง $x_1 - x_2$ และ $y_1 - y_2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ เป็นจำนวนจริงลบ

5. เนื่องจาก $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

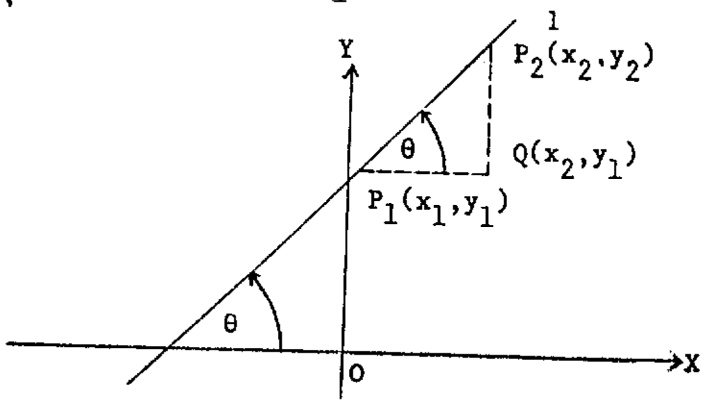
ดังนั้น เมื่อกำหนดจุดให้สองจุด จะถือว่าจุดใดเป็น P_1 หรือ P_2 ก็ได้

6. โดยใช้สามเหลี่ยมคล้าย เราสามารถแสดงได้ว่า ความชันของเส้นตรงเดียวกันย่อมเท่ากัน



<u>บทนิยาม</u> 1.2-2 มุมเอียง (angle of inclination) ของเส้นตรง l คือ มุมบวกที่เล็กที่สุด ซึ่งวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ไปยังเส้นตรง l

ถ้า θ เป็นมุมเอียงของ l จะได้ว่า $0 \le \theta < \pi$



ให้ m เป็นความชันของ l จะได้ว่า

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta \text{ เมื่อ } \theta \neq \frac{\pi}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. (1,2), (3,7)
2. (-3,5), (2,5)
3. $(7,\sqrt{2})$, $(7,\pi)$

<u>วิธีทำ</u>

1. จากบทนิยาม 1.2-1 จะได้ว่า

$$m = \frac{2-7}{1-3} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

2. จากบทนิยาม 1.2-1 จะได้ว่า

$$m = \frac{5-5}{-3-2} = \frac{0}{-5} = 0$$

3. เนื่องจากเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(7, \sqrt{2})$ และ $(7,\pi)$ ขนานกับแกน Y ดังนั้น เส้นตรงนี้ไม่มีความชัน

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า จุด A(1,2), B(-3,10) และ C(4,-4) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

<u>วิธีทำ</u>

เส้นตรงซึ่งผ่านจุด A และ B มีความชันเท่ากับ $\frac{2-10}{1-(-3)} = -2$

และ เส้นตรงซึ่งผ่านจุด A และ C มีความชันเท่ากับ $\frac{2-(-4)}{1-4)} = -2$

ดังนั้น จุด A,B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาความชันของเส้นตรง ซึ่งผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. (4,3), (-1,2)
2. (5,6), (7,9)
3. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$, $(\frac{2}{3}, 1)$
4. (4,0), (0,3)
5. (-2,-5), (3,-5)

2. จงหาค่า x ซึ่งทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A(3,1) และ B (x,-2) มีความชันเท่ากับ 1
3. จงแสดงว่า จุด A(1,2), B(2,7) และ C(0,-3) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
4. ถ้าเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P(2,3) และ Q(2a-1,a) มีความชันเท่ากับ 2 แล้ว a มีค่าเท่าใด

1.3 <u>เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก</u> (Parallel and Perpendicular Lines)

<u>เส้นขนาน</u> (Parallel Lines)

<u>บทนิยาม</u> 1.3-1 ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงที่มีมุมเอียง θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ แล้ว l_1 ขนานกับ l_2

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3-1 เส้นตรงสองเส้นซึ่งต่างก็ไม่อยู่ในแนวตั้ง จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

<u>พิสูจน์</u>

ให้ l_1 และ l_2 เป็นเส้นตรงซึ่งไม่อยู่ในแนวตั้ง θ_1 และ θ_2 เป็นมุมเอียงของ l_1 และ l_2 และให้ m_1, m_2 เป็นความชันของ l_1 และ l_2 ตามลำดับ

ถ้า $l_1 // l_2$ จะได้ว่า $\theta_1 = \theta_2$

เพราะฉะนั้น $m_1 = \tan\theta_1 = \tan\theta_2 = m_2$

ถ้า $m_1 = m_2$ จะได้ว่า $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

แต่ θ_1, θ_2 เป็นมุมที่มีขนาด $0 \leq \theta_1 < \pi$, $0 \leq \theta_2 < \pi$

ดังนั้น $\theta_1 = \theta_2$ ซึ่งแสดงว่า $l_1 // l_2$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-2,-4) และ (3,3) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1,-2) และ (6,5)

<u>วิธีทำ</u> ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-2,-4) และ (3,3)

m_2 เป็นความชันของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1,-2) และ (6,5)

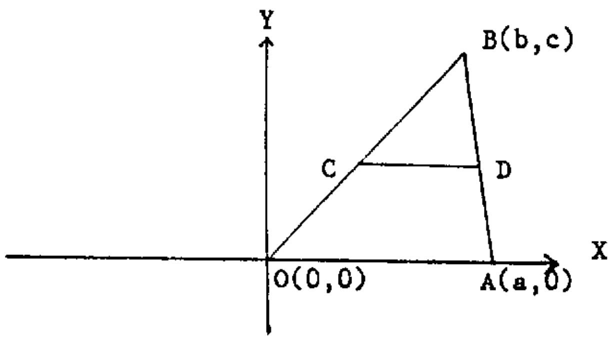
จากบทนิยาม 1.2-1 จะได้ว่า

$$m_1 = \frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5} \text{ และ } m_2 = \frac{5+2}{6-1} = \frac{7}{5}$$

ดังนั้น เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-2,-4) และ (3,3) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1,-2) และ (6,5)

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า ส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของสองด้านของสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมขนานกับด้านที่สาม

<u>พิสูจน์</u>



ให้ $\triangle$ OAB เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ สร้างระบบพิกัดฉากโดยมี O, A และ B มีพิกัด (0,0) (a,0) และ (b,c) ตามลำดับ

ให้ C และ D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน OB และ AB ตามลำดับ

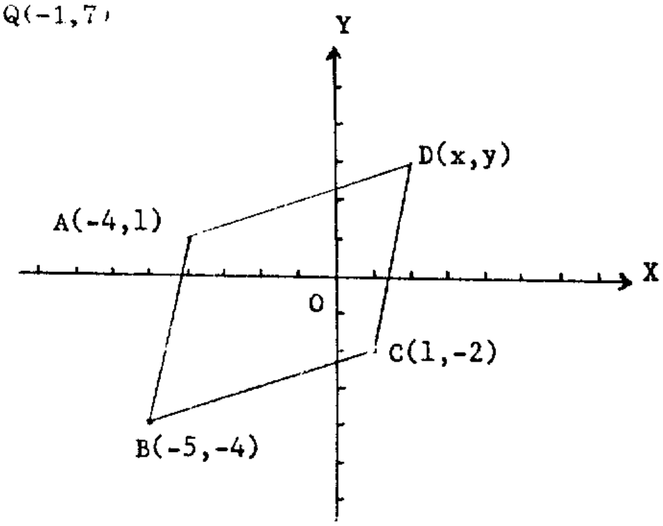
จะได้ว่า $(\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$ และ $(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$ เป็นพิกัดของ C และ D ตามลำดับ

เนื่องจากพิกัดที่สองของ C และ D เท่ากัน

ดังนั้น CD ขนานกับ OA

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแสดงว่า A(-1,-2), B(0,1), C(-3,2) และ D(-4,-1) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. จงหาจุด A ซึ่งอยู่บนแกน X ซึ่งทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B (1,2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P(-1,3) และ Q(2,-5)
3. จงหาจุด A ซึ่งอยู่บนแกน Y ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B(2,3) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P(-2,-3) และ Q(-1,7)
4.



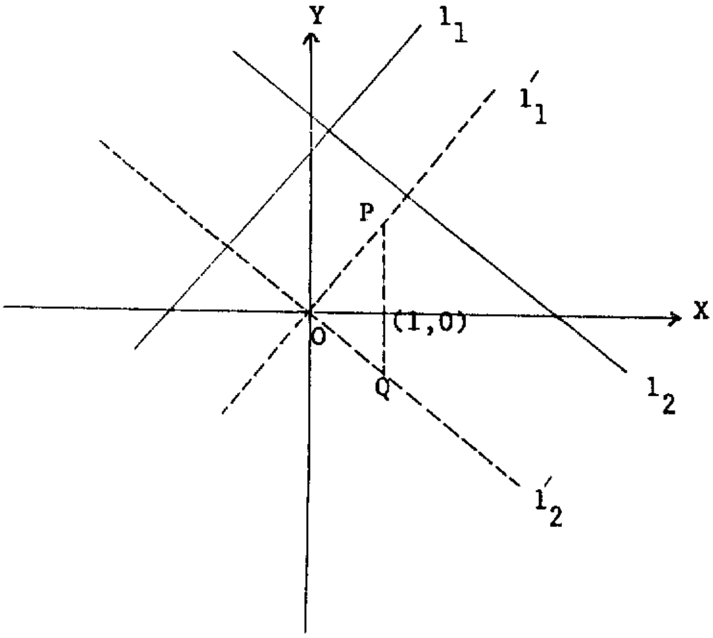
ถ้า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาพิกัดของ D

5. จงพิสูจน์ว่า ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน
6. จงพิสูจน์ว่า ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านคู่ที่ไม่ขนานกันของสี่เหลี่ยมคางหมู จะขนานกับด้านคู่ที่ขนานกัน
7. จงพิสูจน์ว่า ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านตามลำดับของสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

<u>เส้นตั้งฉาก</u> (Perpendicular Lines)

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3-2 เส้นตรงสองเส้นซึ่งไม่อยู่ในแนวตั้ง จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชัน ของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

<u>พิสูจน์</u>



ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ

ถ้า l_1 ตั้งฉากกับ l_2 ลาก l_1' และ l_2' ให้ผ่านจุดกำเนิด และขนานกับ l_1 และ l_2 ตามลำดับ

จะได้ว่า ความชันของ $l_1' = m_1$ และความชันของ $l_2' = m_2$

ลากเส้นตรงให้ผ่านจุด (1,0) และตั้งฉากกับแกน X โดยตัดเส้นตรง l_1' และ l_2' ที่ P และ Q ตามลำดับ

ให้ P มีพิกัดเป็น (1,k)

เนื่องจากเส้นตรง l'_1 ผ่านจุด (0,0) และ (1,k)

จะได้ว่า l'_1 มีความชันเท่ากับ $\frac{k-0}{1-0} = k = m_1$

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $(1,m_1)$

ให้ Q มีพิกัดเป็น (1,a)

เนื่องจากเส้นตรง l'_2 ผ่านจุด (0,0) และ (1,a)

จะได้ว่า l'_2 มีความชันเท่ากับ $\frac{a-0}{1-0} = a = m_2$

ดังนั้น พิกัดของจุด Q คือ $(1,m_2)$

เนื่องจาก PQO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จากทฤษฎีบทของปีทาโกรัส (Pythagoras)

จะได้ว่า $|\overline{PQ}|^2 = |\overline{OP}|^2+|\overline{OQ}|^2$

$$\left\{(1-1)^2+(m_1-m_2)^2\right\} = \left\{(1-0)^2+(m_1-0)^2\right\} + \left\{(1-0)^2 + (m_2-0)^2\right\}$$

$$m_1^2-2m_1m_2+m_2^2 = 1+m_1^2+1+m_2^2$$

$$-2m_1m_2 = 2$$

$$m_1m_2 = -1$$

ในทางกลับกัน ถ้า $m_1m_2 = -1$ แล้ว $m_1 \neq m_2$

แสดงว่า l_1 ไม่ขนานกับ l_2 ให้ l_1 และ l_2 ตัดกันที่จุด R ลาก l_3 มาตั้งฉากกับ l_1 ณ จุด R ให้ l_3 มีความชันเท่ากับ m_3

ดังนั้น $m_1m_2 = -1$

เพราะฉะนั้น $m_1m_2 = m_1m_3$

แต่ $m_1 \neq 0$

ดังนั้น $m_2 = m_3$

ซึ่งแสดงว่า l_2 // l_3 แต่ l_2 และ l_3 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด R

ดังนั้น l_2 และ l_3 เป็นเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ l_1 ตั้งฉากกับ l_2

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่าจุด P (2,3), Q(-4,-3) และ R(6,-1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

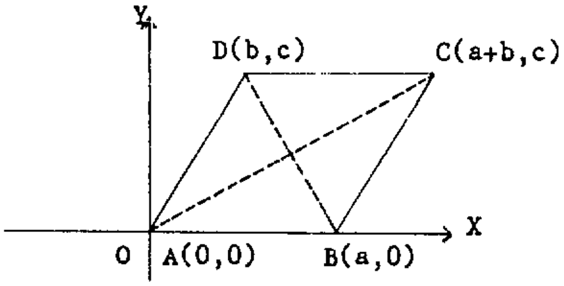
<u>วิธีทำ</u> ความชันของด้าน PQ เท่ากับ $\frac{3+3}{2+4} = 1$

ความชันของด้าน QR เท่ากับ $\frac{-3+1}{-4-6} = \frac{1}{5}$

ความชันของด้าน RP เท่ากับ $\frac{3+1}{2-6} = -1$

เนื่องจาก ผลคูณของความชันของด้าน PQ และด้าน RP เท่ากับ -1
ดังนั้น ด้าน PQ ตั้งฉากกับด้าน RP
นั่นคือ จุด P,Q และ R เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน



<u>วิธีทำ</u> ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน สร้างระบบพิกัดฉาก โดยมี A,B และ D มีพิกัด (0,0), (a,0) และ b,c) ตามลำดับ จะได้ว่า C มีพิกัดเป็น (a+b,c) และ $a^2=b^2+c^2$

ให้ m_1 = ความชันของเส้นทแยงมุม AC = $\frac{c}{a+b}$

m_2 = ความชันของเส้นทแยงมุม BD = $\frac{c}{b-a}$

จะได้ว่า $m_1m_2 = \frac{c}{a+b}\cdot\frac{c}{b-a} = \frac{c^2}{b^2-a^2} = \frac{c^2}{-c^2} = -1$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตั้งฉากซึ่งกันและกัน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1.ความชันของเส้นตรง l เท่ากับ $\frac{3}{4}$ เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง l จะมีความชันเท่าไร

2.เส้นตรง l มีความชันเท่ากับ $\frac{k}{m}$, $k \neq 0$ จงหาความชันของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับ l

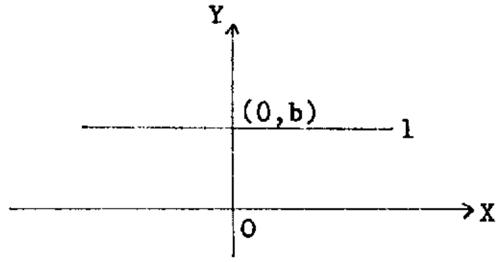
3.จงแสดงว่า จุด A(-1,1), B(5,-2) และ C(-2,-1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

4.กำหนด A(3,2) และ B(-1,4) ถ้า C(a,1) เป็นจุดที่ทำให้เส้นตรง AB ตั้งฉากกับเส้นตรง AC จงหา a

5.จงแสดงว่า เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัสตั้งฉากซึ่งกันและกัน

1.4 <u>สมการของเส้นตรง</u> (Equation of a Straight Line)

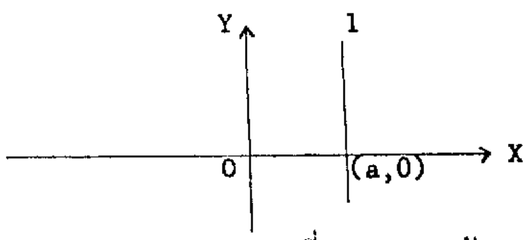
กรณีที่ 1 เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน X



เส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะตัดแกน Y ที่จุด (0,b) ถ้า b เป็นจำนวนจริงบวก เส้นตรงจะอยู่เหนือแกน X ถ้า b เป็นจำนวนจริงลบ เส้นตรงจะอยู่ใต้แกน X และถ้า b=0 เส้นตรงนี้คือ แกน X

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงในกรณีนี้ คือ $\{(x,y) \in R \times R \mid y=b\}$ และสมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X คือ $y = b$

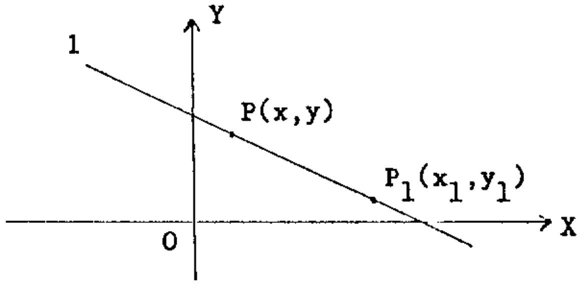
กรณีที่ 2 เส้นตรงซึ่งขนานกับแกน Y



เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y จะตัดแกน X ที่จุด (a,0) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก เส้นตรงจะอยู่ทางขวาของแกน Y ถ้า a เป็นจำนวนจริงลบ เส้นตรงจะอยู่ทางซ้ายของแกน Y และถ้า a=0 เส้นตรงนี้คือ แกน Y

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงในกรณีนี้คือ $\{(x,y)\in R\times R \mid x=a\}$ และสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y คือ $x=a$

กรณีที่ 3 เส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน X และแกน Y



กำหนดให้ m เป็นความชันของเส้นตรง l และ $P_1(x_1,y_1)$ เป็นจุดบนเส้นตรง l

ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l จะได้ว่า

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ คือ $\{(x,y)\in R\times R \mid y-y_1=m(x-x_1)\}$

และสมการของเส้นตรง l คือ $y-y_1 = m(x-x_1)$

จากสมการ $\qquad y-y_1 = m(x-x_1)$

$$y = mx+(y_1-mx_1)$$

เนื่องจาก m, x_1 และ y_1 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น ถ้าให้ $c=y_1-mx_1$ แล้ว c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $y = mx+c$

จากสมการ $y = mx+c$ ถ้า $x=0$ แล้ว $y=c$

ดังนั้น เส้นตรงที่มีสมการ $y=mx+c$ จะตัดแกน Y ที่จุด $(0,c)$

เรียกระยะที่ติดเครื่องหมายจากจุดกำเนิดถึงจุดที่เส้นตรงตัดแกน X และแกน Y ว่า ระยะตัดแกน X (x-intercept) และ ระยะตัดแกน Y (y-intercept) ตามลำดับ

พิจารณาสมการ $Ax+By+C = 0$ โดยที่ A, B และ C เป็นค่าคงตัว A และ B ไม่เป็น 0 พร้อมกัน

ถ้า $A\neq 0$ แต่ $B=0$ จะได้สมการ $x = -\frac{C}{A}$ ซึ่งเป็นสมการของ เส้นตรงที่ขนานกับแกน Y

ถ้า $B\neq 0$ แต่ $A=0$ จะได้สมการ $y = -\frac{C}{B}$ ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X

ถ้า $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ จะได้สมการ $y = -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ ซึ่งเป็นสมการของเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{A}{B}$ และผ่านจุด $(0, -\frac{C}{B})$

ดังนั้น สมการในรูป $Ax+By+C = 0$ ซึ่ง A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันคือ สมการของเส้นตรง

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนสมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และผ่านจุด (1,-2)

<u>วิธีทำ</u>

$$y-(-2) = \frac{1}{2}(x-1)$$
$$2(y+2) = x-1$$
$$2y+4 = x-1$$
$$x-2y-5 = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P(2,1) และ Q(-3,2) ในรูป $Ax+By+C = 0$

<u>วิธีทำ</u> ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q คือ $\frac{2-1}{-3-2} = -\frac{1}{5}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงนี้คือ $y-2 = -\frac{1}{5}(x+3)$

$$5y-10 = -x-3$$
$$x+5y-7 = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{3}{4}$ และสามเหลี่ยมที่เกิดจากเส้นตรงเส้นนี้และแกนทั้งสองมีพื้นที่เท่ากับ 24 ตารางหน่วย

<u>วิธีทำ</u> สมการของเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ $-\frac{3}{4}$ คือ $y = -\frac{3}{4}x+c$

เมื่อ $x=0$ จะได้ $y=c$ และเมื่อ $y=0$ จะได้ $x=\frac{4}{3}c$

พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น $= \frac{1}{2}$ (ผลคูณของขนาดของระยะตัดแกนทั้งสอง)

$$24 = \frac{1}{2}(c)(\frac{4}{3}c)$$

$$c^2 = 36$$
$$c = \pm 6$$

เพราะฉะนั้น สมการของเส้นตรงที่ต้องการคือ $y = -\frac{3}{4}x+6$ หรือ $y = -\frac{3}{4}x-6$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (7,5) และขนานกับเส้นตรง $x+2y+12 = 0$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,2) และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-2y+12 = 0$

3. จงแสดงว่า เส้นตรง $ax+by = d_1$ และเส้นตรง $ax+by = d_2$ ขนานกัน

4. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีระยะตัดแกน X เท่ากับ -5 และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 2

5. จงหาค่า k ซึ่งทำให้เส้นตรง $3kx+5y+k-2 = 0$ ผ่านจุด (-1,4)

6. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A(1,-6) และผลคูณของระยะตัดแกนทั้งสองเท่ากับ 1

7. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุดตัดของเส้นตรง

$$x+2y = 6$$

$$3x-y = 6$$

1.5 <u>ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง ระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน</u>

<u>ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง</u> (Distance Between a Point and a Line)

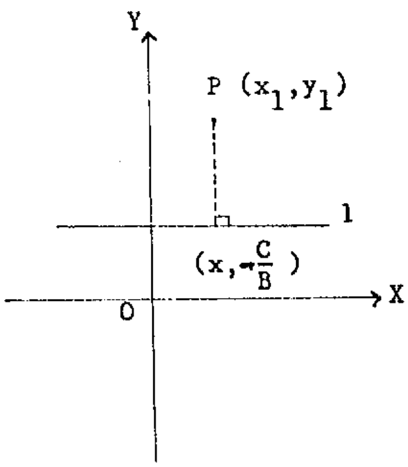
<u>ทฤษฎีบท</u> 1.5-1 ระยะทาง d ระหว่างจุด $P(x_1,y_1)$ และเส้นตรง l ซึ่งมีสมการ

$Ax+By+C = 0$ มีค่าเท่ากับ $d = \dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

<u>พิสูจน์</u>

กรณีที่ 1 เส้นตรง l ขนานกับแกน X ดังนั้น l มีสมการเป็น $By+C = 0$, $B \neq 0$

เนื่องจาก $d = |y_1+\frac{C}{B}|$

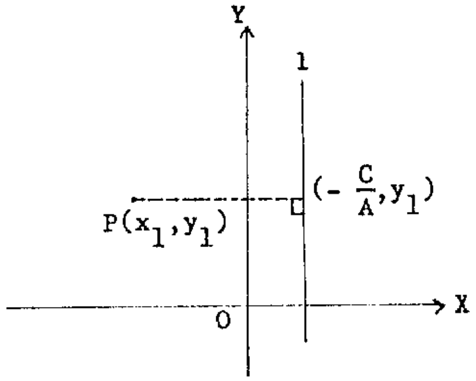


และ $\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{|By_1+C|}{\sqrt{B^2}} = \dfrac{|B(y_1+\frac{C}{B})|}{B}$

$= \dfrac{|B|\,|y_1+\frac{C}{B}|}{3} = |y_1+\frac{C}{B}|$

ดังนั้น $d = \dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

กรณีที่ 2 เส้นตรง l ขนานกับแกน Y ดังนั้น l มีสมการเป็น $Ax+C = 0$, $A \neq 0$



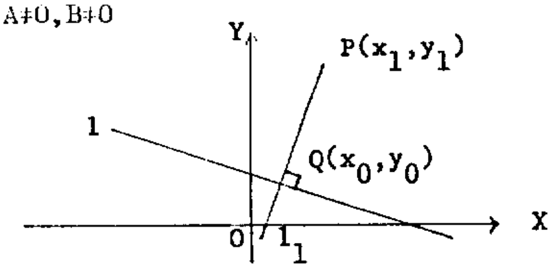
เนื่องจาก $d = |-\frac{C}{A}-x_1| = |x_1+\frac{C}{A}|$

และ $\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_1+C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|A(x_1+\frac{C}{A})|}{|A|}$

$= \frac{|A|\,|x_1+\frac{C}{A}|}{|A|} = |x_1+\frac{C}{A}|$

ดังนั้น $d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

กรณีที่ 3 เส้นตรง l ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y ดังนั้น สมการของ l คือ $Ax+By+C = 0$; $A \neq 0, B \neq 0$



จากสมการของ l จะได้ $y = -\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ แสดงว่า ความชันของ l คือ $-\frac{A}{B}$

ให้ l_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(x_1,y_1)$ และตั้งฉากกับ l เพราะฉะนั้นความชันของ $l_1 = \frac{B}{A}$

ให้ l_1 ตัดกับ l ที่จุด Q สมมุติให้ โคออร์ดิเนตของ Q คือ (x_o,y_o)

สมการของ l_1 คือ $y-y_1 = \frac{B}{A}(x-x_1)$

หรือ $Bx-Ay+Ay_1-Bx_1 = 0$

หาจุด $Q(x_o,y_o)$ ได้โดยการแก้สมการ

$Ax+By+C = 0$ ....(1)

$Bx-Ay+Ay_1-Bx_1 = 0$...............(2)

คูณ (1) ด้วย A และ คูณ (2) ด้วย B แล้วบวกสมการทั้งสองเข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$(A^2+B^2)x = B^2x_1-ABy_1-AC$$

เพราะฉะนั้น $x_o = x = \frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2}$

คูณ (1) ด้วย B และคูณ (2) ด้วย A แล้วนำมาลบกัน จะได้ว่า

$$(A^2+B^2)y = A^2y_1-ABx_1-BC$$

เพราะฉะนั้น $y_o = y = \dfrac{A^2y_1-ABx_1-BC}{A^2+B^2}$

ดังนั้น $\quad d = |PQ| = \sqrt{(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o)^2}$

จากการแทนค่า x_o และ y_o จะได้

$$d^2 = \left[x_1-\frac{B^2x_1-ABy_1-AC}{A^2+B^2}\right]^2+\left[y_1-\frac{A^2y_1-ABx_1-BC}{A^2+B^2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{A^2x_1+B^2x_1-B^2x_1+ABy_1+AC}{A^2+B^2}\right]^2+\left[\frac{A^2y_1+B^2y_1-A^2y_1+ABx_1+BC}{A^2+B^2}\right]^2$$

$$= \frac{(A^2x_1+ABy_1+AC)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2y_1+ABx_1+BC)^2}{(A^2+B^2)^2}$$

$$= \frac{A^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$$

$$= \frac{(A^2+B^2)(Ax_1+By_1+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$$

$$= \frac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}$$

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะทางระหว่างจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ กับเส้นตรง $l : 3x + 4y - 20 = 0$

(1) $A(0,1)$ (2) $B(1,-2)$ (3) $C(6,4)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบท 1.5-1 จะได้ว่า

(1) ระยะทางระหว่างจุด A และ l คือ $d_1 = \dfrac{|3(0)+4(1)-20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{16}{5}$

(2) ระยะทางระหว่างจุด B และ l คือ $d_2 = \dfrac{|3(1)+4(-2)-20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5$

(3) ระยะทางระหว่างจุด C และ l คือ $d_3 = \frac{|3(6)+4(4)-20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{14}{5}$

<u>ระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน</u> (Distance Between Two Parallel Lines)

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.5-2 กำหนดให้เส้นตรง l_1 ขนานกับ l_2 เส้นตรง l_1 และ l_2 มีสมการดังนี้

$$l_1 : Ax+By+C_1 = 0$$

$$l_2 : Ax+By+C_2 = 0$$

ระยะระหว่าง l_1 และ l_2 คือ $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(x_1,y_1)$ เป็นจุดๆหนึ่งบน l_2 จะได้ว่า ระยะจาก P ไปยัง l_1 คือ

$$\frac{|Ax_1+By_1+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

เนื่องจาก $P(x_1,y_1)$ อยู่บน l_2 ดังนั้น $Ax_1+By_1+C_2 = 0$

หรือ $Ax_1+By_1 = -C_2$

เพราะฉะนั้น ระยะจากจุด P ไปยัง l_1 คือ $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

นั่นคือ ระยะระหว่าง l_1 และ l_2 คือ $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน $x-2y+5 = 0$ กับ $x-2y-5 = 0$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีบท 1.5-2 จะได้ว่า ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน คือ

$$\frac{|5-(-5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาระยะจากจุด (6,8) ไปยังเส้นตรง 3x+4y-25 = 0
2. จงหาค่า k ซึ่งทำให้ระยะ d จากจุด P(-3,2) ไปยังเส้นตรง 5x-12y+3+k = 0 เท่ากับ 4 หน่วย
3. จงหาสมการของเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (4,-2) และอยู่ห่างจากจุดกำเนิด 2 หน่วย
4. จงหาระยะระหว่างเส้นตรง 15x+8y = 48 และ 15x+8y = 37
5. จงหาระยะระหว่างเส้นตรง 6x-8y = -18 และ 6x-8y = 2

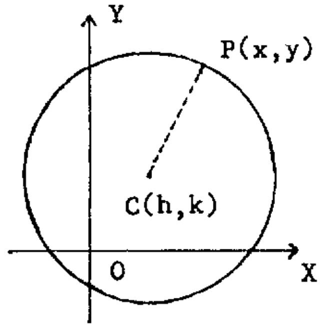
2. <u>วงกลม</u> (Circle)

<u>บทนิยาม</u> 2 วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน

เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม และเรียกระยะทางที่เท่ากันว่า รัศมีของวงกลม

2.1 <u>สมการแบบมาตรฐานของวงกลม</u> (Standard Form for the Equation of a Circle)

ให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีรัศมียาว r หน่วย และ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม



จากบทนิยาม 2 จะได้ว่า

$$|\overline{CP}| = r$$

แต่ $$|\overline{CP}| = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

เพราะฉะนั้น $$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

นั่นคือ $$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เรียกสมการ (1) ว่า สมการแบบมาตรฐานของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และรัศมียาว r หน่วย

ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว r หน่วย

จากสมการ (1) จะได้ว่า $(x-0)^2+(y-0)^2 = r^2$

หรือ

$$x^2+y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

เป็นสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว r หน่วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมียาว 3 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย

ดังนั้น สมการของวงกลมนี้ คือ $x^2+y^2 = 3^2$

หรือ $x^2+y^2 = 9$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลมซึ่งเป็นกราฟของสมการ

$$x^2+y^2-4x+6y-3 = 0$$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $x^2+y^2-4x+6y-3 = 0$

จะได้ว่า $(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = 3+4+9$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 4^2$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,-3)$ และ รัศมียาว 4 หน่วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,-1)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

<u>วิธีทำ</u>

สมการของวงกลมที่ต้องกาวคือ $(x-2)^2+(y+1)^2 = 25$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1 = 25$$

$$x^2+y^2-4x+2y-20 = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(6,4)$ และมีจุด $(3,2)$ อยู่บนวงกลม

<u>วิธีทำ</u>

ให้วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(6,4)$ มีรัศมียาว r หน่วย

ดังนั้น สมการของวงกลมนี้ คือ $(x-6)^2+(y-4)^2 = r^2$

เนื่องจากจุด $(3,2)$ อยู่บนวงกลม

ดังนั้น $(3-6)^2+(2-4)^2 = r^2$

$$9+4 = r^2$$

$$r^2 = 13$$

สมการของวงกลมที่ต้องการคือ $(x-6)^2+(y-4)^2 = 13$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(-2,3)$ และสัมผัสเส้นตรง $20x-21y-42 = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ระยะจากจุด $C(-2,3)$ ไปยังเส้นตรง $20x-21y-42 = 0$

เท่ากับ $$\frac{|20(-2)+(-21)(3)+(-42)|}{\sqrt{20^2+(-21)^2}} = \frac{145}{29}$$

$$= 5$$

แสดงว่า รัศมีของวงกลมยาว 5 หน่วย

ดังนั้น สมการของวงกลม คือ $(x+2)^2+(y-3)^2 = 5^2$

หรือ $x^2+y^2+4x-6y-12 = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $A(1,-4)$ และ $B(5,2)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x-2y+9 = 0$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

เนื่องจากจุด $C(h,k)$ อยู่ห่างจากจุด $A(1,-4)$ และจุด $B(5,2)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

เพราะฉะนั้น $\sqrt{(h-1)^2+(k+4)^2} = \sqrt{(h-5)^2+(k-2)^2}$

$$(h-1)^2+(k+4)^2 = (h-5)^2+(k-2)^2$$

$$8h+12k = 12$$

$$2h+3k = 3 \text{ ....(1)}$$

เนื่องจากจุด $C(h,k)$ อยู่บนเส้นตรง $x-2y+9 = 0$

ดังนั้น $h-2k = -9$ ....(2)

(2)x2 , $2h-4k = -18$ ....(3)

(1)-(3), $7k = 21$

$$k = 3$$

แทนค่า $k=3$ ใน (1) จะได้ว่า

$$h = -3$$

เพราะฉะนั้นรัศมีของวงกลมมีขนาดเท่ากับ $|\overline{CA}| = \sqrt{(-3-1)^2+(3+4)^2}$

$$= \sqrt{65}$$

ดังนั้น สมการของวงกลมคือ $(x+3)^2+(y-3)^2 = 65$

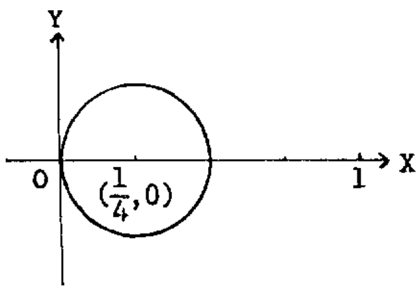
<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของวงกลม $2x^2+2y^2-x = 0$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $2x^2+2y^2-x = 0$

จะได้ว่า $x^2+y^2-\frac{1}{2}x = 0$

$$(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16})+y^2 = \frac{1}{16}$$



$$(x-\frac{1}{4})^2+(7-0)^2 = (\frac{1}{4})^2$$

ดังนั้นกราฟของสมการเป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(\frac{1}{4},0)$ และ รัศมียาว $\frac{1}{4}$

2.2 <u>สมการแบบทั่วไปของวงกลม</u> (General Form for the Equation of a Circle)

จากสมการแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2+k^2-r^2) = 0$

ถ้าให้ $-2h = D$, $-2k = E$ และ $h^2+k^2-r^2 = F$

จะได้ว่า $x^2+y^2+Dx + Ey + F = 0$ ....(1)

เรียกสมการ (1) ว่า สมการแบบทั่วไปของวงกลม

พิจารณาสมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ จะได้ว่า

$$(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}) + (y^2+Ey+\frac{E^2}{4}) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

$$(x+\frac{D}{2})^2 + (y+\frac{E}{2})^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2-4F)$$

1.ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ จะได้ว่า กราฟของสมการที่ (1) เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ และรัศมียาว $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ หน่วย

2.ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$ จะได้ว่า กราฟของสมการ (1) เป็นจุด $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ เรียกจุดนี้ว่า จุดวงกลม (point circle)

3.ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ จะได้ว่า สมการ (1) ไม่มีกราฟ

<u>ตัวอย่าง</u> กราฟของสมการต่อไปนี้เป็นวงกลม จุด หรือ เซตว่าง ถ้าเป็นวงกลม จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี

(1) $x^2+y^2-8x+6y-11 = 0$

(2) $x^2+y^2+2x+4y+5 = 0$

(3) $x^2+y^2+2x+4y+6 = 0$

<u>วิธีทำ</u>

(1) จากสมการ $x^2+y^2-8x+6y-11 = 0$

จะได้ว่า $(x^2-8x+16) + (y^2-6y+9) = 11+16+9$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 6^2$$

ดังนั้น กราฟของสมการนี้เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (4,3) และรัศมียาว 6 หน่วย

(2) จากสมการ $x^2+y^2+2x+4y+5 = 0$

จะได้ว่า $(x^2+2x+1) + (y^2+4y+4) = -5+1+4$

$$(x+1)^2+(y+2)^2 = 0$$

สมการนี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $(x+1)^2 = 0$ และ $(y+2)^2 = 0$

นั่นคือ $x = -1$ และ $y = -2$

ดังนั้น กราฟของสมการนี้คือ จุด $(-1,-2)$

(3) จากสมการ $x^2+y^2+2x+4y+6 = 0$

จะได้ว่า $(x^2+2x+1) + (y^2+4y+4) = -6+1+4$

$$(x+1)^2+(y+2)^2 = -1$$

เนื่องจาก $(x+1)^2 \geq 0$ และ $(y+2)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้นจึงไม่มีจำนวนจริง x และ y ใด ๆ ซึ่งทำให้ $(x+1)^2+(y+2)^2 = -1$

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีกราฟ (เป็นเซตว่าง)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด A(0,3), B(-4,3) และ C(-3,4)

<u>วิธีทำ</u>

ให้สมการที่ต้องการอยู่ในรูป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$

จุด A(0,3) อยู่บนวงกลม ดังนั้น

$$0+9+0+3E+F = 0$$

$$3E+F = -9 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

จุด B(-4,3) อยู่บนวงกลม ดังนั้น

$$16+9-4D+3E+F = 0$$

$$-4D+3E+F = -25 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จุด C(-3,4) อยู่บนวงกลม ดังนั้น

$$9+16-3D+4E+F = 0$$

$$-3D+4E+F = -25 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1)-(2) , $4D = 16$

$$D = 4$$

แทนค่า $D = 4$ ใน (3) , $4E+F = -13 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

(4)-(1) , $E = -4$

$$F = 3$$

ดังนั้น สมการที่ต้องการคือ $x^2+y^2+4x-4y+3 = 0$

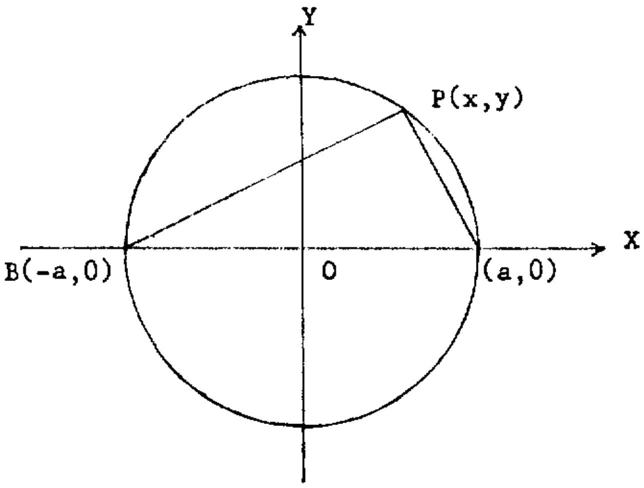
<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

<u>วิธีทำ</u>

ให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และมีรัศมี a หน่วย

P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เชื่อมจุด P กับจุด A(a,0) และ B(-a,0)

จะพิสูจน์ว่า $\overline{PA}$ ตั้งฉากกับ $\overline{PB}$



<u>พิสูจน์</u>

สมการของวงกลมคือ $x^2+y^2 = a^2$

ความชันของ $\overline{PA}$ เท่ากับ $m_1 = \frac{y}{x-a}$

ความชันของ $\overline{PB}$ เท่ากับ $m_2 = \frac{y}{x+a}$

จะได้ว่า $m_1m_2 = \frac{y^2}{x^2-a^2}$

$$= \frac{y^2}{-y^2} \qquad (x^2+y^2= a^2)$$

$$= -1$$

ดังนั้น $\overline{PA}$ ตั้งฉากกับ $\overline{PB}$

นั่นคือ มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $x^2+y^2-3x+5y-14 = 0$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$

จะได้ว่า $(x^2-3x+\frac{9}{4}) + (y^2+5y+\frac{25}{4}) = 14+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}$

$$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = \frac{90}{4}$$

$$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{5}{2})^2 = (\frac{3\sqrt{10}}{2})^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ และรัศมียาว $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ หน่วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของให้ k ซึ่งทำให้ $x^2+y^2-8x+10y+k = 0$ เป็นสมการของวงกลมที่มีรัศมียาว 7 หน่วย

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $x^2+y^2-8x+10y+k = 0$

จะได้ว่า $(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25) = 16+25-k$

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = (\sqrt{41-k})^2$$

เนื่องจากวงกลมมีรัศมียาว 7 หน่วย

ดังนั้น $\sqrt{41-K} = 7$

$$41-K = 49$$

$$k = -8$$

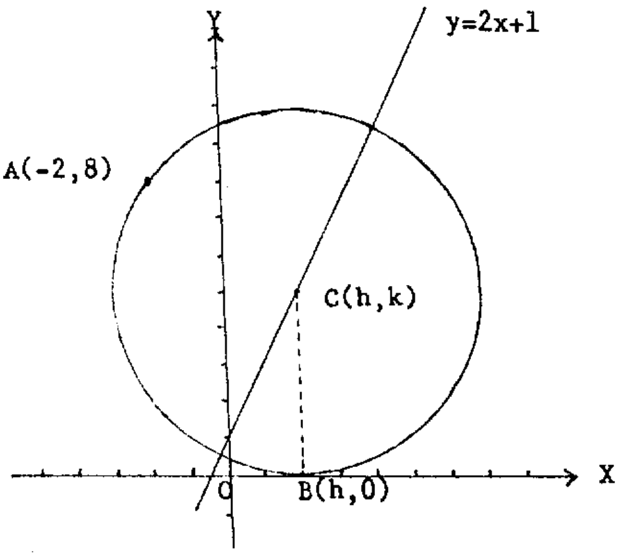
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของวงกลมซึ่งสัมผัสแกน X โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรง $y = 2x+1$ และวงกลมผ่านจุด $(-2,8)$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

เนื่องจากจุด $C(h,k)$ อยู่บนเส้นตรง $y = 2x+1$

ดังนั้น $k = 2h+1$ ....(1)



เนื่องจากวงกลมสัมผัสแกน X และผ่านจุด (-2,8)

ดังนั้น $\sqrt{(h+2)^2 + (2h+1-8)^2} = |k-0|$

$$(h^2+4h+4) + (4h^2-28h+49) = (2h+1)^2$$

$$5h^2 - 24h+53 = 4h^2 + 4h + 1$$

$$h^2 - 28h + 53 = 0$$

$$(h - 26)(h-2) = 0$$

$$h = 26,2$$

$$k = 53,5$$

ดังนั้น สมการของวงกลมคือ $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$

และ

$$(x-26)^2 + (y-53)^2 = 2809$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาสมการของวงกลมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(3,-1) และรัศมียาว 5 หน่วย

(2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(4,-1) และผ่านจุด A(-1,3)

(3) มีส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด A(-3,4) และ B(1,-2) เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

(4) ผ่านจุด A(1,5) และ B (4,6) และมีจุดศูนย์กลางบนเส้นตรง x-y-7 = 0

(5) ผ่านจุด A(3,-2), B(-1,-4) และ C(2,-5)

(6) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(-4,3) และสัมผัสแกน Y

(7) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C(3,-4) และผ่านจุดกำเนิด

(8) จุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 1 สัมผัสแกน X และแกน Y และรัศมียาว 8 หน่วย

(9) ผ่านจุดกำเนิด รัศมียาว 10 หน่วย และพิกัดที่หนึ่งของจุดศูนย์กลางเท่ากับ -6

(10) ล้อมรอบสามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรง $x-y+2 = 0$, $2x+3y-1 = 0$ และ $4x+3y-17 = 0$

(11) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและสัมผัสเส้นตรง $8x-15y-12 = 0$

(12) ผ่านจุด (-5,3) สัมผัสแกน X และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x+y = 1$

(13) ผ่านจุด A(-2,1) สัมผัสเส้นตรง $3x-2y-6 = 0$ ที่จุด (4,3)

(14) สัมผัสเส้นตรง $3x-4y+17 = 0$ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2+y^2-4x+6y = 0$

2. กราฟของสมการต่อไปนี้เป็นวงกลม จุดวงกลม หรือเซตว่าง ถ้าเป็นวงกลม จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

(1) $x^2+y^2-4x+6y-3 = 0$

(2) $x^2+y^2+6x-2y-15 = 0$

(3) $2x^2+2y^2+12x-8y+31 = 0$

(4) $x^2+y^2+2x-4y+5 = 0$

(5) $x^2+y^2+10x-2y+42 = 0$

(6) $x^2+y^2-2x+2y+2 = 0$

3. จงหาสมการของจุด P(x,y) ซึ่งผลบวกของกำลังสองของระยะจาก P ไปยังจุด A(3,2) และ B(-4,-1) เท่ากับ 14

3. พาราโบลา (Parabola)

บทนิยาม 3 พาราโบลา คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบ นอกเส้นตรงคงที่นั้นเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

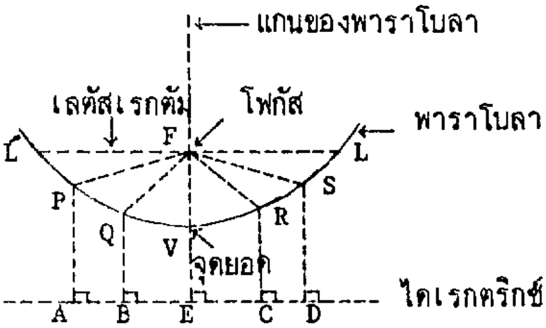
เรียกเส้นตรงคงที่ว่า ไดเรกตริกซ์ (directrix)

เรียกจุดคงที่ว่า โฟกัส (focus)

เรียกเส้นตรงที่ผ่านโฟกัส และตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ว่า แกนของพาราโบลา (axis of parabola)

เรียกจุดที่พาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลาว่า จุดยอด (vertex)

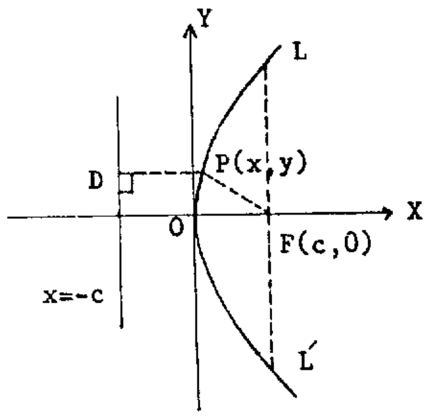
เรียกส่วนของเส้นตรงที่ผ่านโฟกัส และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา โดยมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนพาราโบลาว่า เลตัสเรกตัม (latus rectum)



จุด P,Q,V,R และ S อยู่บนพาราโบลา ดังนั้น $|\overline{AP}|=|\overline{PF}|$, $|\overline{BQ}|=|\overline{QF}|$

$|\overline{EV}|=|\overline{VF}|$, $|\overline{CR}|=|\overline{RF}|$ และ $|\overline{DS}|=|\overline{SF}|$

3.1 พาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่บนแกน X หรือแกน Y

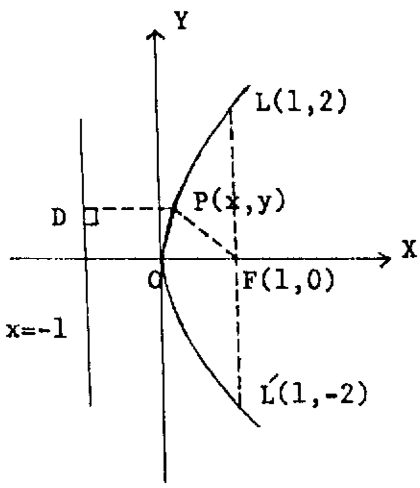


จากรูป จุด F(c,0) คือโฟกัส เส้นตรง x=-c คือไดเรกตริกซ์ แกน X เป็นแกนของพาราโบลา จุด (0,0) เป็นจุดยอด และ LL′ คือ เลตัสเรกตัม

ถ้า P เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา D เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากจากจุด P ไปบนไดเรกตริกซ์ จากบทนิยาม 3 จะได้ $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุด F(1,0) เป็นโฟกัส และเส้นตรง x=-1 เป็นไดเรกตริกซ์

<u>วิธีทำ</u>



ให้ P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา และ $\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D จากบทนิยาม 3

จะได้ว่า

$$|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = |-1-x|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = |x+1|$$

$$(x-1)^2+y^2 = (x+1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2+2x+1$$

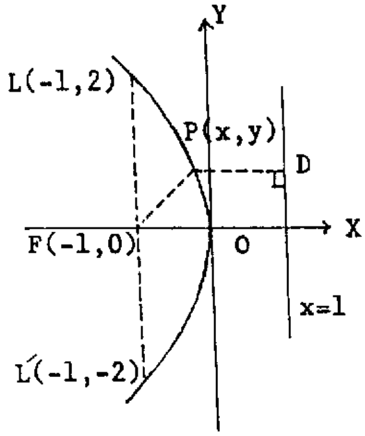
$$y^2 = 4x$$

$$y^2 = 4(1)x$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุด F(1,0) เป็นโฟกัส และเส้นตรง x = -1 เป็นไดเรกตริกซ์ คือ $y^2 = 4(1)x$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีเส้นตรง $x = 1$ เป็นไดเรกตริกซ์ และจุด $(-1,0)$ เป็นโฟกัส

<u>วิธีทำ</u>



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = |1-x|$$

$$(x+1)^2+y^2 = (1-x)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2 = 1-2x+x^2$$

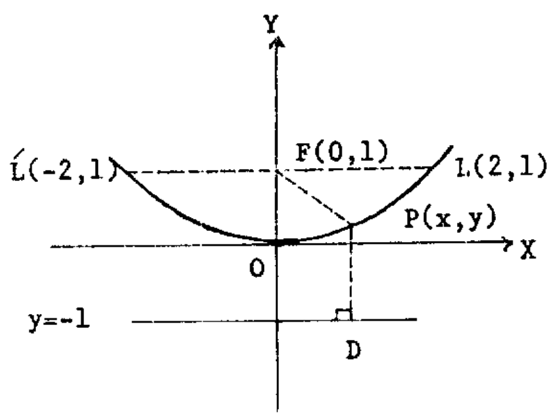
$$y^2 = -4x$$

$$y^2 = 4(-1)x$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $x=1$ เป็นไดเรกตริกซ์ และจุด $(-1,0)$ เป็นโฟกัส คือ $y = 4(-1)x$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,1)$ และเส้นตรง $y=-1$ เป็นไดเรกตริกซ์

<u>วิธีทำ</u>



ให้ P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = |-1-y|$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = |y+1|$$

$$x^2+(y-1)^2 = y^2+2y+1$$

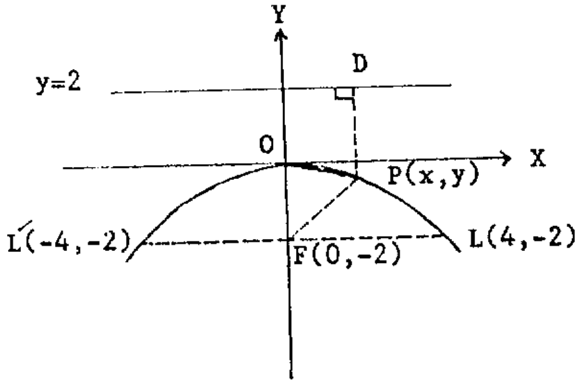
$$x^2 = 4y$$

$$x^2 = 4(1)y$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด (0,1) และเส้นตรง y=-1 เป็นไดเรกตริกซ์ คือ $x^2 = 4(1)y$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง y = 2 เป็นไดเรกตริกซ์ และจุด (0,-2) เป็นโฟกัส พร้อมทั้งหาขนาดเลตัสเรกตัมของพาราโบลานี้ด้วย

<u>วิธีทำ</u>



ให้ P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2} = |2-y|$$

$$x^2+(y+2)^2 = (2-y)^2$$

$$x^2+y^2+4y+4 = 4-4y+y^2$$

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = 4(-2)y$$

เพราะฉะนั้น สมการที่ต้องการคือ $x^2 = 4(-2)y$

เนื่องจาก LL' ผ่านโฟกัส F(0,-2) และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา จุด L และ L' อยู่บนพาราโบลา

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า LL' เป็นเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $x^2 = 4(-2)y$

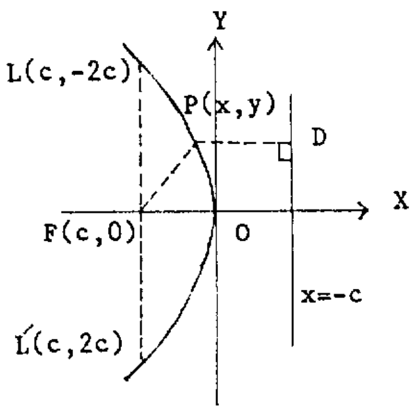
ถ้า $y = -2$ จะได้ว่า

$$x^2 = 4(-2)(-2)$$
$$x = \pm 4$$
$$= \pm\, 2(-2)$$

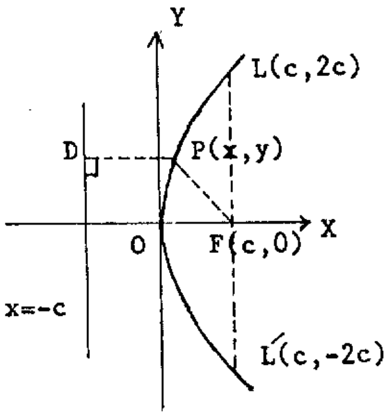
เพราะฉะนั้น จุด L และ L' มีพิกัด (4,-2) และ (-4,-2) ตามลำดับ

ขนาดเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4-(-4)| = 8 = |4(-2)|$

สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด (c,0) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา หาได้ดังนี้



เมื่อ c < 0



เมื่อ c > 0

ให้ P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา และ $\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |-c-x|$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |x+c|$$
$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2 = x^2+2cx+c^2$$
$$y^2 = 4cx$$

ดังนั้น $y^2 = 4cx$ เป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(c,0)$ ไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -c$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

<u>ข้อสังเกต</u> พาราโบลา $y^2 = 4cx$

1.จากสมการ $y^2 = 4cx$ มี $y^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $4cx \geq 0$ ด้วย

ดังนั้น ถ้า $c > 0$ จะได้ว่า $x \geq 0$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาเปิดทางขวา

ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า $x \leq 0$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

2.เนื่องจากแกน X เป็นเส้นตรงที่ผ่านโฟกัส $(c,0)$ และตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ $x = -c$ ดังนั้น แกน X เป็นแกนของพาราโบลา

3.เนื่องจากแกนของพาราโบลาตัดพาราโบลาที่จุด $(0,0)$ ดังนั้น จุด $(0,0)$ เป็นจุดยอดของพาราโบลา

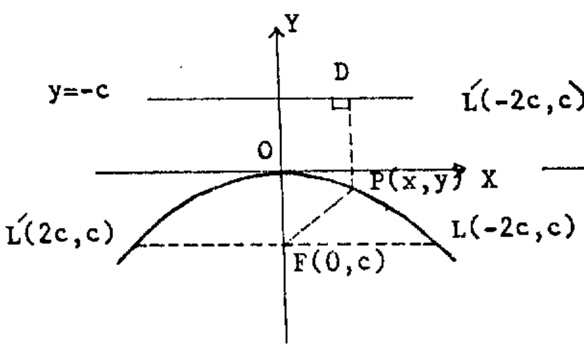
4.เนื่องจาก ถ้าจุด (x,y) อยู่บนพาราโบลาแล้ว จุด $(x,-y)$ อยู่บนพาราโบลาด้วย เพราะ $(-y)^2 = y^2 = 4cx$ ดังนั้น แกน X เป็นแกนสมมาตร

5.ถ้า $x = c$ จะได้ว่า $y^2 = 4c^2$ ดังนั้น $y = \pm 2c$ เพราะฉะนั้น จุด $(c,2c)$ และ $(c,-2c)$ เป็นจุดปลายของเลตัสเรกตัม และเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|4c|$

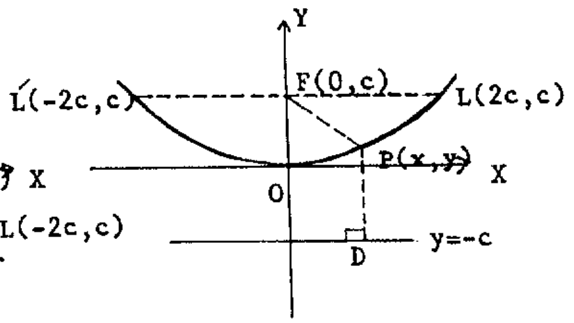
6.เนื่องจาก ถ้ากำหนดโฟกัส $(c,0)$ และจุดยอด $(0,0)$ แล้ว สามารถหาไดเรกตริกซ์ได้ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่บนแกน X คือ $y^2 = 4cx$

7.ถ้าทราบจุดยอด และจุดปลายของเลตัสเรกตัม เราสามารถเขียนกราฟอย่างคร่าวๆได้

สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด โฟกัสอยู่ที่จุด $(0,c)$ ไดเรกตริกซ์คือ เส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา หาได้ดังนี้



เมื่อ $c < 0$



เมื่อ $c > 0$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา และ $\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = |-c-y|$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = |y+c|$$

$$x^2+(y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$x^2+y^2-2cy+c^2 = y^2+2cy+c^2$$

$$x^2 = 4cy$$

ดังนั้น $x^2 = 4cy$ เป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,c)$ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา

<u>ข้อสังเกต</u> พาราโบลา $x^2 = 4cy$

1. จากสมการ $x^2 = 4cy$ มี $x^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $4cy \geq 0$ ด้วย

ดังนั้น ถ้า $c > 0$ จะได้ว่า $y \geq 0$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาหงายขึ้น

ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า $y \leq 0$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาคว่ำลง

2. เนื่องจากแกน Y เป็นเส้นตรงที่ผ่านโฟกัส $(0,c)$ และตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ $y = -c$ ดังนั้น แกน Y เป็นแกนของพาราโบลา

3. เนื่องจากแกนของพาราโบลาตัดกับพาราโบลาที่จุด $(0,0)$ ดังนั้น จุด $(0,0)$ เป็นจุดยอดของพาราโบลา

4. เนื่องจาก ถ้าจุด (x,y) อยู่บนพาราโบลาแล้ว จุด $(-x,y)$ อยู่บนพาราโบลาด้วย เพราะ $(-x^2) = x^2 = 4cy$ ดังนั้น แกน Y เป็นแกนสมมาตร

5. ถ้า $y = c$ จะได้ว่า $x^2 = 4c^2$ ดังนั้น $x = \pm 2c$ เพราะฉะนั้น $(2c,c)$ และ $(-2c,c)$ เป็นจุดปลายของเลตัสเรกตัม และเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|4c|$

6. เนื่องจากถ้ากำหนดโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,c)$ และจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ แล้วสามารถหาไดเรกตริกซ์ได้ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่บนแกน Y คือ $x^2 = 4cy$

7. ถ้าทราบจุดยอด และจุดปลายเลตัสเรกตัม เราสามารถเขียนกราฟอย่างคร่าว ๆ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาโฟกัส จุดยอด สมการของไดเรกตริกซ์ สมการของแกนของพาราโบลา จุดปลายของเลตัสเรกตัม และขนาดเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $x^2 = -12y$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $x^2 = -12y$

จะได้ว่า $x^2 = 4(-3)y$ ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,-3)$ สมการของไดเรกตริกซ์ คือ $y = -(-3)$ หรือ $y = 3$ จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ และมีแกน Y หรือเส้นตรง $x = 0$ เป็นแกนของพาราโบลา

จุดปลายของเลตัสเรกตัม อยู่ที่จุด $(6,-3)$ และ $(-6,-3)$

ขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4(-3)| = 12$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-\frac{3}{2},0)$

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-\frac{3}{2},0)$

เพราะฉะนั้น ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(-\frac{3}{2})x$

$$\text{หรือ } y^2 = -6x$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และเส้นตรง $x = -3$ เป็นไดเรกตริกซ์

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากพาราโบลามีโฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$ และมีเส้นตรง $x = -3$ เป็นไดเรกตริกซ์

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(3)x$

$$\text{หรือ } y^2 = 12x$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่ที่จุด (0,7)

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) และมีโฟกัสอยู่ที่จุด (0,7)

เพราะฉะนั้น สมการของไดเรกตริกซ์ คือ $y = -7$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = 4(7)y$

หรือ $x^2 = 28y$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกน X เป็นแกนของพาราโบลา และผ่านจุด (−6,4)

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

เพราะฉะนั้น โฟกัสอยู่ที่จุด (c,0) และไดเรกตริกซ์มีสมการ $x = -c$

ดังนั้นสมการของพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 4cx$

เนื่องจาก จุด (−6,4) อยู่บนพาราโบลา

ดังนั้น $4^2 = 4c(-6)$

$c = -\frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้น สมการของพาราโบลาที่ต้องการคือ $y^2 = 4(-\frac{2}{3})x$

หรือ $y^2 = -\frac{8}{3}x$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 4 และรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) และรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

ดังนั้น โฟกัสอยู่ที่จุด (c,0) และไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x = -c$

เพราะฉะนั้น สมการของพาราโบลาคือ $y^2 = 4cx$ โดย $c < 0$

เนื่องจาก ขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น $|4c| = 4$ และ $c = -1$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 4(-1)x$

หรือ $y^2 = -4x$

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของสมการ $y^2 = -12x$

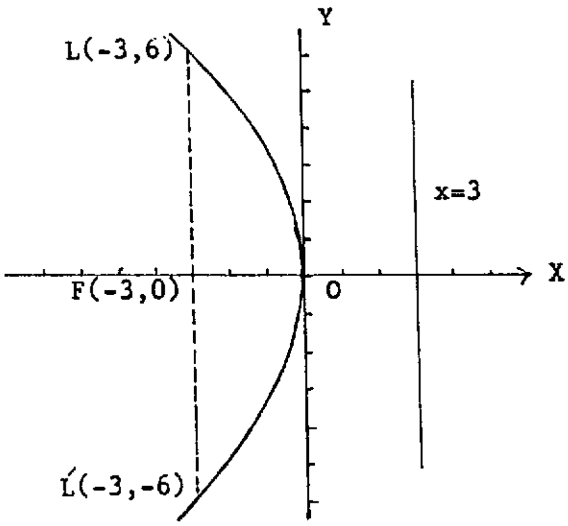
<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $y^2 = -12x$

จะได้ว่า $y^2 = 4(-3)x$

เนื่องจาก $y^2 = 4(-3)x$ เป็นสมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) โฟกัสอยู่ที่จุด (-3,0) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -(-3)$ หรือ $x = 3$ และมีแกน X เป็นแกนของพาราโบลา

จุดปลายของเลตัสเรกตัมอยู่ที่จุด (-3,6) และ (-3,-6)



<u>แบบฝึกหัด</u>

1. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาโฟกัส จุดยอด สมการของไดเรกตริกซ์ จุดปลายของเลตัสเรกตัม และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา

(1) $y^2 = 7x$ (2) $y^2 = -9x$ (3) $x^2 = 8y$

(4) $x^2 = -16y$ (5) $4y^2 - 3x = 0$ (6) $4x^2 + 5y = 0$

2. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

(1) ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = -4$ และมีจุด (4,0) เป็นโฟกัส

(2) โฟกัสอยู่ที่จุด (-6,0) และไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x = 6$

(3) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่ที่จุด (8,0)

(4) โฟกัสอยู่ที่จุด (0,-5) และเส้นตรง $y = 5$ เป็นไดเรกตริกซ์

(5) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกน X เป็นแกนของพาราโบลา และผ่านจุด (4,6)

(6) แกน Y เป็นแกนของพาราโบลา เลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ 12 และรูปพาราโบลาคว่ำลงข้างล่าง

(7) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด ขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 6 และรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

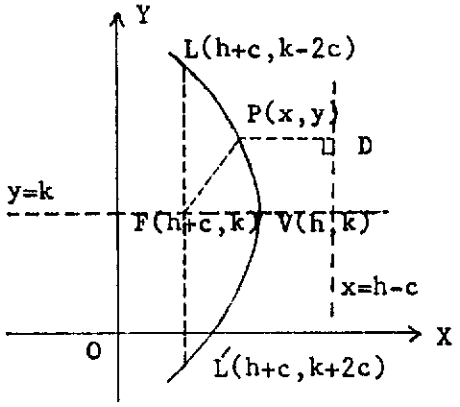
(8) จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกน Y เป็นแกนของพาราโบลา และผ่านจุด $(-2,-4)$

3. จงหาสมการของจุด $P(x,y)$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(-5,0)$ และเส้นตรง $x = 5$ เป็นระยะทางเท่ากัน

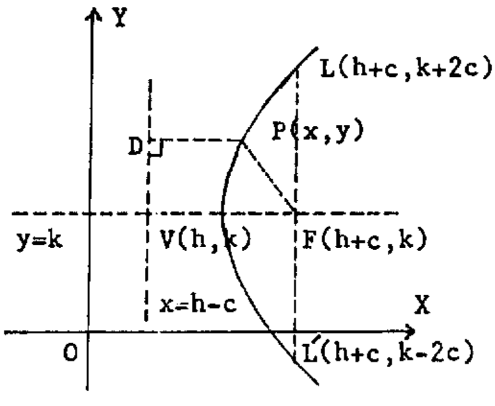
4. <u>บทนิยาม</u> รัศมีโฟกัล (focal radius) ของจุดบนพาราโบลา คือ ระยะระหว่างจุดนั้นกับโฟกัส จงพิสูจน์ รัศมีโฟกัลของจุด $P(x_1,y_1)$ บนพาราโบลา $y^2= 4cx$ เท่ากับ $|x_1+c|$

3.2 <u>พาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) และโฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือแกน Y</u>

สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) และโฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หาได้ดังนี้



เมื่อ c < 0



เมื่อ c > 0

ให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,k)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h+c,k)$

จะได้ว่า แกนของพาราโบลา มีสมการ $y = k$ และไดเรกตริกซ์มีสมการ $x = h-c$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา

$\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2} = |x-h+c|$$

$$(x-h-c)^2+(y-k)^2 = (x-h+c)^2$$

$$x^2+h^2+c^2-2hx+2hc-2cx+y^2-2ky+k^2 = x^2+h^2+c^2-2hx-2hc+2cx$$

$$y^2-2ky+k^2 = 4cx-4hc$$

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h+c,k)$ เส้นตรง $x = h-c$ เป็นไดเรกตริกซ์ และมีเส้นตรง $y = k$ เป็นแกนของพาราโบลา คือ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

ข้อสังเกต พาราโบลา $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

1. จุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)
2. โฟกัสอยู่ที่จุด $(h+c,k)$
3. ไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x = h-c$
4. แกนของพาราโบลา มีสมการเป็น $y = k$
5. ถ้า $x = h+c$ จะได้ว่า $(y-k)^2 = 4c^2$

$$y-k = \pm 2c$$

$$y = k \pm 2c$$

ดังนั้น จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือ จุด $(h+c,k+2c)$ และจุด $(h+c,k-2c)$

เพราะฉะนั้น เลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|(k+2c)-(k-2c)| = |4c|$

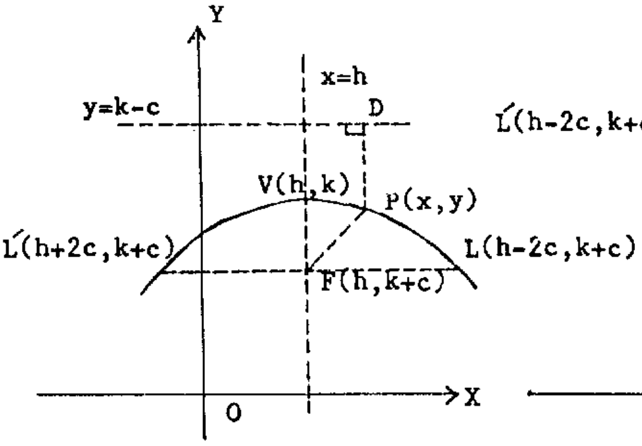
6. จากสมการ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ มี $(y-k)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $4c(x-h) \geq 0$ ด้วย

ดังนั้น ถ้า $c > 0$ จะได้ว่า $x \geq h$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาเปิดทางขวา

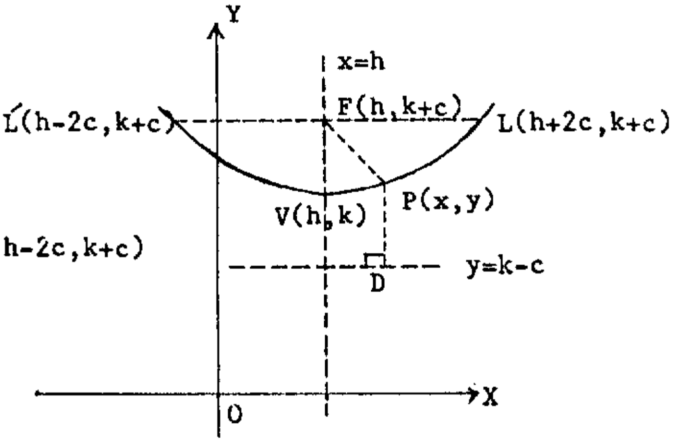
ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า $x \leq h$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย

7. ถ้าทราบจุดยอด และจุดปลายของเลตัสเรกตัม เราสามารถเขียนกราฟได้อย่างคร่าว ๆ

สมการของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) และโฟกัสอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y หาได้ดังนี้



เมื่อ $c < 0$



เมื่อ $c > 0$

ให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,k)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,k+c)$

จะได้ว่า แกนของพาราโบลามีสมการ $x = h$ และไดเรกตริกซ์มีสมการ $y = k-c$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา และ $\overline{PD}$ ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ที่จุด D

จากบทนิยาม 3 จะได้ว่า $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2} = |y-k+c|$$

$$(x-h)^2+(y-k-c)^2 = (y-k+c)^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2+k^2+c^2-2ky+2kc-2cy = y^2+k^2+c^2-2ky-2kc+2cy$$

$$x^2-2hx+h^2 = 4cy-4kc$$

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h,k+c)$ เส้นตรง $y = k-c$ เป็นไดเรกตริกซ์ และมีเส้นตรง $x = h$ เป็นแกนของพาราโบลาคือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

<u>ข้อสังเกต</u> พาราโบลา $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

1. จุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)
2. โฟกัสอยู่ที่จุด $(h,k+c)$
3. ไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $y = k-c$
4. แกนของพาราโบลามีสมการเป็น $x = h$
5. ถ้า $y = k+c$ จะได้ว่า $(x-h)^2 = 4c^2$

$$x-h = \pm 2c$$

$$x = h\pm 2c$$

ดังนั้น จุดปลายของเลตัสเรกตัม คือ จุด $(h+2c,k+c)$ และจุด $(h-2c,k+c)$

เพราะฉะนั้นเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|(h+2c)-(h-2c)| = |4c|$

6. จากสมการ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ มี $(x-h)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $4c(y-k) \geq 0$ ด้วย

ดังนั้น ถ้า $c > 0$ จะได้ว่า $y \geq k$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาหงายขึ้น

ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า $y \leq k$ เพราะฉะนั้นรูปพาราโบลาคว่ำลง

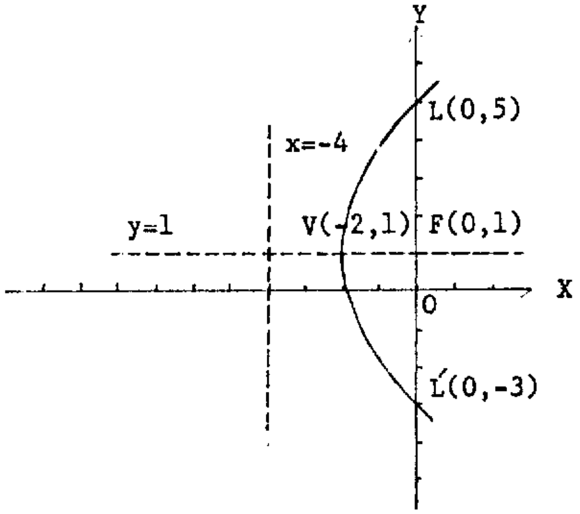
7. ถ้าทราบจุดยอด และจุดปลายของเลตัสเรกตัม เราสามารถเขียนกราฟได้อย่างคร่าวๆ

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของสมการ $(y-1)^2 = 8(x+2)$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $(y-1)^2 = 8(x+2)$

จะได้ว่า $(y-1)^2 = 4(2)(x+2)$ เป็นสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-2,1)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(0,1)$ ไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x = -4$ แกนของพาราโบลามีสมการเป็น $y = 1$ เลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|4(2)| = 8$ จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือจุด $(0,5)$ และจุด $(0,-3)$ และเนื่องจาก $c = 2 > 0$ ดังนั้น รูปพาราโบลาเปิดทางขวา



<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ จุดปลายของเลตัสเรกตัม และขนาดเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $x^2-2x-4y-7 = 0$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $x^2-2x-4y-7 = 0$

จะได้ว่า
$$x^2-2x+1 = 4y+7+1$$
$$(x-1)^2 = 4(y+2)$$
$$(x-1)^2 = 4(1)(y+2)$$

เราได้ว่า $(x-1)^2 = 4(1)(y+2)$ เป็นสมการของพารรโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(1,-2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(1,-1)$ สมการของไดเรกตริกซ์คือ $y = -3$ จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือ จุด $(3,-1)$ และจุด $(-1,-1)$ ขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4(1)| = 4$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดสมการของพาราโบลา $y^2-4y+8x = 20$ จงหาจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ สมการของแกนของพาราโบลา จุดปลายของเลตัสเรกตัม และขนาดของเลตัสเรกตัม

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ $y^2-4y+8x = 20$

จะได้ว่า $y^2-4y+4 = -8x+20+4$

$$(y-2)^2 = 4(-2)(x-3)$$

เราได้ว่า $(y-2)^2 = 4(-2)(x-3)$ เป็นสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(3,2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(1,2)$ สมการของไดเรกตริกซ์คือ $x = 5$ สมการของแกนของพาราโบลาคือ $y = 2$ จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือ จุด $(1,6)$ และจุด $(1,-2)$ และขนาดของเลตัสเรกตัมเท่ากับ $|4(-2)| = 8$

จากสมการ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h+c,k)$ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $x = h-c$ แกนของพาราโบลาคือเส้นตรง $y = k$ จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือจุด $(h+c,k+2c)$ และจุด $(h+c,k-2c)$ และเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|4c|$ จะได้ว่า

$$y^2-2ky+k^2 = 4cx-4ch \text{ เมื่อ } c \neq 0$$

$$y^2-4cx-2ky+k^2+4ch = 0$$

ถ้าให้ $-4c = D$, $-2k = E$ และ $k^2+4ch = F$

จะได้ว่า $y^2+Dx+Ey+F = 0$, $D \neq 0$ เป็นสมการของพาราโบลา ซึ่งมีแกนเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X

จากสมการ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ ซึ่งเป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h,k+c)$ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y = k-c$ แกนของพาราโบลาคือเส้นตรง $x = h$ จุดปลายของเลตัสเรกตัม คือจุด $(h+2c,k+c)$ และจุด $(h-2c,k+c)$ และเลตัสเรกตัมมีขนาดเท่ากับ $|4c|$ จะได้ว่า

$$x^2-2hx+h^2 = 4cy-4ck \text{ เมื่อ } c \neq 0$$

$$x^2-2hx-4cy+h^2+4ck = 0$$

ถ้าให้ $-2h = D$, $-4c = E$ และ $h^2+4ck = F$

จะได้ว่า $x^2+Dx+Ey+F = 0$, $E \neq 0$ เป็นสมการของพาราโบลา ซึ่งมีแกนเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งมีแกนขนานกับแกน Y และผ่านจุด (4,5),(-2,11) และ (-4,21)

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากแกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y

ดังนั้น สมการของพาราโบลา จึงอยู่ในรูป

$$x^2+Dx+Ey+F = 0$$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด (4,5) ดังนั้น

$$16+4D+5E+F = 0$$

$$4D+5E+F = -16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด (-2,11) ดังนั้น

$$4-2D+11E+F = 0$$

$$-2D+11E+F = -4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

เนื่องจากพาราโบลาผ่านจุด (-4,21) ดังนั้น

$$16-4D+21E+F = 0$$

$$-4D+21E+F = -16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1)-(2), $$6D-6E = -12$$

$$D-E = -2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(2)-(3), $$2D-10E = 12$$

$$D-5E = 6 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(4)-(5), $$4E = -8$$

$$E = -2$$

$$D = -4$$

$$F = 10$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลาที่ต้องการคือ $x^2-4x-2y+10 = 0$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาสมการของพาราโบลาซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

(1) จุดยอดอยู่ที่จุด (-4,2) และโฟกัสอยู่ที่จุด (-2,2)

(2) โฟกัสอยู่ที่จุด (-2,6) และสมการของไดเรกตริกซ์คือ $y = -4$

(3) จุดยอดอยู่ที่จุด (-1,2) และสมการของไดเรกตริกซ์คือ $x-3 = 0$

(4) จุดยอดอยู่ที่จุด (3,-2) สมการของแกนของพาราโบลาคือ $x = 3$ ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 6

(5) จุดยอดอยู่ที่จุด (-4,2) สมการของแกนของพาราโบลาคือ $y = 2$ และผ่านจุด (0,6)

(6) โฟกัสอยู่ที่จุด (6,-2) และสมการของไดเรกตริกซ์คือ $x-2 = 0$

(7) จุดยอดอยู่ที่จุด (2,3) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน Y และผ่านจุด (4,5)

(8) แกนของพาราโบลาขนานกับแกน X และผ่านจุด (-2,1),(1,2) และ (-1,3)

(9) จุดปลายของเลตัสเรกตัมคือจุด (3,5) และจุด (3,-3)

(10) แต่ละจุดบนพาราโบลาอยู่ห่างจากจุด (-2,3) เท่ากับระยะห่างจากเส้นตรง $x+6 = 0$

2. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดยอด โฟกัส สมการของไดเรกตริกซ์ ความยาวของเลตัสเรกตัม และสมการของแกนของพาราโบลา

(1) $y^2-4y-6x+10 = 0$

(2) $x^2+6x-8y+41 = 0$

(3) $3x^2+6x+5y-7 = 0$

(4) $3y^2+12y+16 = 4x$

(5) $x^2+6x+4y+8 = 0$

(6) $y^2+6x+10y+19 = 0$

(7) $2y^2= 4y-3x$

(8) $y^2-4y+6x-8 = 0$

(9) $3x^2-9x-5y-2 = 0$

(10) $y^2-6x-4y+13 = 0$

3. ประตูชัยสร้างเป็นโค้งรูปพาราโบลา โดยมีฐานห่างกัน 24 ฟุต และสูง 18 ฟุต จงหาสมการของพาราโบลานี้

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายพฤหัส ชื่อสกุล กำภูศิริ

เกิดวันที่ 11 เดือนมีนาคม	พุทธศักราช 2497
สถานที่เกิด	อำเภอท่าอุเทน จังหวัดนครพนม
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านเลขที่ 232/13 หมู่ 7 ตำบลศรีสงคราม อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม 48150
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 2
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ กรมสามัญศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม 48150

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2516 ม.ศ.5 (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย

พ.ศ. 2521 ป.กศ.สูง (วิชาเอกคณิตศาสตร์ วิชาโทวิทยาศาสตร์ทั่วไป) จากวิทยาลัยครูสกลนคร

พ.ศ. 2529 ศษ.บ. (วิชาเอกคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พ.ศ. 2537 กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

ความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ

ของ

พฤหัส กำภูศิริ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2537

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และเปรียบเทียบความแตกต่างของความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอศรีสงคราม จังหวัดนครพนม ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2536 จำนวน 64 คน แบ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน และกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 34 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้บทเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาสอน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที และสอนกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้บทเรียนเดียวกันกับกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ยกเว้นเนื้อหาเรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ใช้เวลาสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งสองกลุ่มพร้อมกัน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความสามารถในการเรียนเรขาคณิตวิเคราะห์เรื่อง วงกลม และพาราโบลา ไม่แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

THE ABILITY OF MATHAYOM SUKSA III STUDENTS TO LEARN THE CONCEPTS OF CIRCLE AND PARABOLA THROUGH THE ANALYTICAL APPROACH

AN ABSTRACT

BY

PARUHAS KAMPOOSIRI

Presented in partial fulfillment of the requirements for the

Master of Education degree in Educational Administration

at Srinakharinwirot University

May 1994

Circle and parabola are two key concepts in modern analytic geomtry and are being taugt at the upper secondary level. Some evidence has shown that they may be taught at the lower level. Based on this fact, the present study was directed to investigate the ability of ninth graders in learning the circle and parabola through the analytical approach. As part of the study, their performances were also compared to those of the tenth graders on the same topics.

Thirty ninth graders and thirty-four tenth graders from a school in the northeastern part took part in this investigation.Both groups were taught the two concepts as designed by the researcher. They were given a test on circle and parabola, also designed by the same researcher, at the end of the instruction. The data was collected and analysed, using the alpha level of .05.

The results indicated that the ninth graders were able to learn the two concepts. There was no significant difference on the performances of the two groups of students.