

การศึกษาลักษณะในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

ปริญญานิพนธ์

ของ

พิชากร แปงประสพโชค

ทอสมเดศกลาง
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

๗ มีนาคม ๒๕๖๔

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับ
เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาระดับหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ได้

..... สทศ. รัตนกุล ประธาน

..... สทศ. รัตนกุล กรรมการ

๗ มีนาคม ๒๕๑๔

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เนื่องจากผู้วิจัยได้รับความช่วยเหลือจากผู้ทรงคุณวุฒิหลายท่าน โดยเฉพาะท่านอาจารย์ที่ปรึกษาสองท่าน คือ รองศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ รัตนกุล และ ดร.ปรีชา ธรรมมา ซึ่งได้กรุณาให้แนวคิดในการศึกษาครั้งนี้ การเรียบเรียงเนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง ตลอดจนการเขียนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ นอกจากนี้ยังได้กรุณาอบรมและให้คำแนะนำในการทำงานแก่ผู้วิจัย ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอบพระคุณในน้ำใจ และความกรุณาของท่านอาจารย์ทั้งสองท่านเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์สมบูรณ์ จิตพงศ์ ที่ได้กรุณาแนะนำการใช้สถิติ ท่านอาจารย์สุวรรณา มุ่งเกษม ที่กรุณาแปลภาษาและส่วนในการเขียนปริญญานิพนธ์ และท่านอาจารย์ในหมวดคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่กรุณาให้กำลังใจและคำแนะนำบางประการแก่ผู้วิจัย ขอขอบคุณคุณสมวงศ์ ทรัพย์เจริญ ที่ได้ให้ความช่วยเหลืออย่างมากและสนับสนุนให้กำลังใจตลอดมา ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ใหญ่ และคณะอาจารย์ โรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร โรงเรียนสิงห์ราชพิทยาคม เขตบางขุนเทียน กรุงเทพมหานคร ได้ให้ความร่วมมือและความสะดวกต่าง ๆ ตลอดเวลาที่ทำการศึกษาทดลองสอนและทดสอบ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จเป็นรูปเล่มได้เพราะความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจากคุณธงไชย สิงห์โคออน กองส่งเสริมและเผยแพร่ กรมการพัฒนาชุมชน กระทรวงมหาดไทย จึงขอขอบคุณไว้ ณ ที่นี้.

พินิจกร แปลงประสพโชค

สารบัญ

บทที่		หน้า
๑	บทนำ	๑
	จุดมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า	๕
	ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า	๖
	สมมุติฐานของการศึกษาค้นคว้า	๖
	ขอบเขตของเรื่อง	๖
	ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า	๗
	คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ	๗
๒	การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	๘
	ทฤษฎีการจัดหลักสูตร	๘
	สัจพจน์วิธี	๑๔
	งานวิจัยและโครงการต่าง ๆ	๑๕
๓	วิธีดำเนินการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล	๑๘
	แหล่งข้อมูลและกลุ่มตัวอย่าง	๑๘
	เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง	๑๘
	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	๒๐
	การวิเคราะห์ข้อมูล	๒๑
๔	ผลของการศึกษาค้นคว้า	๒๒
	ขอบเขตเกี่ยวกับการวิเคราะห์และแปลผล	๒๒
	ผลของการศึกษาค้นคว้า	๒๒
๕	บทขอ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ	๓๒
	ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า	๓๒

บทที่

หน้า

กลุ่มตัวอย่าง
เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
การดำเนินการทดลอง
การวิเคราะห์ข้อมูล
ผลการทดลอง
สรุปผลของการศึกษาครั้งนี้
อภิปรายผล
ข้อเสนอแนะ

๓๒

๓๒

๓๒

๓๓

๓๓

๓๔

๓๕

๓๗

บรรณานุกรม

๓๘

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

(๑)

ภาคผนวก ข.

(๑๕)

ภาคผนวก ค.

(๒๑)

ภาคผนวก ง.

(๔๐)

ภาคผนวก จ.

(๔๗)

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
๑ แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ๒ แสดงเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนน ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป โดยจำแนกตามชั้น ๓ แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ ๔ แสดงค่าที (t-test) จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของ นักเรียนครึ่งละสองชั้น ๕ แสดงค่า P_H, P_L, p, r และ Δ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนโครงสร้างของคณิตศาสตร์ที่วิเคราะห์แล้ว	๒๗ ๒๘ ๒๙ ๓๐ (๒๐)

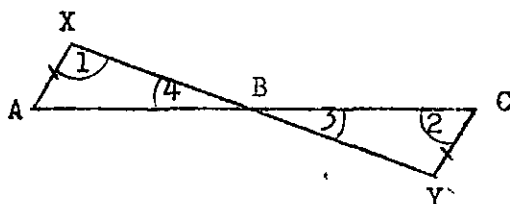
การเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยทั่วไปในระดับมัธยมศึกษาในปัจจุบันนี้ก่อให้เกิดปัญหาต่างๆ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัด คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาส่วนใหญ่ไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ และสอบตกในวิชาคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมาก (ทัศนีย์ อ่องโพนาลัย, ๒๕๑๓ : ๑๘) ปัญหาเหล่านี้มีผลกระทบกระเทือนถึงการเรียนของนักเรียนในระดับชั้นที่สูงขึ้นไปด้วย ตัวอย่างเช่น ในสถานฝึกหัดครู มีผู้เลือกเรียนคณิตศาสตร์เป็นจำนวนน้อย และนักศึกษาที่สอบตกส่วนมากจะตกในวิชาคณิตศาสตร์ (การฝึกหัดครู, ๒๕๐๘ : ๓ - ๔) ส่วนในสถาบันอุดมศึกษาซึ่งรับนักเรียนที่จบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ห้าเข้าเรียน นักเรียนที่เข้ามาเรียนส่วนมากขาดความรู้ความเข้าใจในความคิดรวบยอดต่างๆ ตลอดจนวิธีการให้เหตุผล ถนัดแต่การคิดคำนวณเท่านั้น ทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับนี้เป็นไปโดยยากลำบาก (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ๒๕๑๖ : ๒๑) ปัญหาดังกล่าวมานี้สะท้อนให้เห็นการวางรากฐานที่ไม่ดีในการสอนคณิตศาสตร์

ในการสอนคณิตศาสตร์ปัจจุบันนี้ เราได้เน้นเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (วิชาการ, ๒๕๐๘ : ๔.๓ - ๑) แต่กลับไปเน้นวิธีหรือแบบสำหรับแก้โจทย์ปัญหาและเน้นกฎเกณฑ์ต่างๆ โดยมิได้ออกเหตุผลหรือที่มาของกฎเกณฑ์เหล่านั้นแก่นักเรียน (Butler and Wren, 1960 : 91) ทำให้นักเรียนเรียนโดยขาดความเข้าใจ ขาดความซาบซึ้งอย่างถ่องแท้ในธรรมชาติหรือวิธีการของคณิตศาสตร์ และมีทัศนคติว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่คล้ายกับการเล่นกล มีกลเม็ด อีกทั้งมีกฎเกณฑ์ต่างๆ ที่ต้องท่องจำมาก การที่ต้องจดจำหลักเกณฑ์เหล่านั้นโดยขาดความเข้าใจ บ่อมมีผลเสียต่อการเรียนของนักเรียน กล่าวคือทำให้นักเรียนเบื่อหน่าย และนักเรียนมักทำงานผิดพลาดได้ง่าย การที่นักเรียนทำผิดพลาดเสมอๆ ทั้งมีทัศนคติต่อคณิตศาสตร์ในทางที่ผิด ทำให้นักเรียนหมดกำลังใจและหมดความสามารถที่จะเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีผลให้นักเรียนเกลียดกลัวคณิตศาสตร์และสอบตกในวิชานี้ การสอบตกทางคณิตศาสตร์มีส่วนทำให้ผลการเรียนของนักเรียนตกต่ำ และการขาดความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทำให้หมดโอกาสที่จะศึกษาต่อในบางสาขาวิชา ผลที่ปรากฏในปัจจุบันจึงเป็นเสมือนว่าคณิตศาสตร์เป็นเครื่องถ่วงความก้าวหน้าของนักเรียนด้วย

สำหรับวิชาเรขาคณิตซึ่งเคยเป็นวิชาที่ใช้ฝึกคนให้มีความคิดหาเหตุผลแบบอนุมาน (deductive reasoning) มาตั้งแต่สมัยโบราณ กลับเป็นวิชาที่ล้าหลังมากที่สุดในบรรดาวิชาคณิตศาสตร์ทั้งสามแขนง (เลขคณิต พีชคณิต เรขาคณิต) กล่าวคือ ครูยังใช้วิธีสอนแบบที่ส่งเสริมให้นักเรียนท่องจำโดยไม่เข้าใจมาก่อน และดำเนินการสอนไปตามทฤษฎีบทต่าง ๆ อย่างเคร่งครัด พร้อมควยรายละเอียดต่าง ๆ มากเกินไป (พนัส, ม.ป.ป. : ๑๒๒) ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ซึ่งเป็นชั้นที่เริ่มเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ผู้สอนวิชาเรขาคณิตมักพบปัญหาที่ว่า นักเรียนเรียนวิชานี้ไม่รู้เรื่อง และพิสูจน์ไม่เป็น เช่น พิสูจน์โดยให้เหตุผลและผลไปคนละทางบ้าง การนำสิ่งที่จะต้องพิสูจน์มาเป็นข้ออ้างบาง หรือเขียนรูปผิดแล้วก็หักเอาตามรูปบ้าง ฯลฯ ซึ่งเรายังไม่ได้หาแนวทางสำหรับแก้ไขปัญหานี้

✕ ตัวอย่างการพิสูจน์ของนักเรียนคนหนึ่ง (จากกระดาษคำตอบในการสอบไล่ชั้น ม.ศ.๑ ของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร)

ถ้าเส้นตรง AB และ CB พบกับเส้นตรง XY ที่จุด B ทำให้มุม $\angle ABX = \angle CBY$
จงพิสูจน์ว่า AB กับ CB เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน



กำหนดให้ เส้นตรง XY มีเส้น AB มาพบกับ CB ที่จุด B $\angle ABX = \angle CBY$

จะต้องพิสูจน์ว่า AB และ CB เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน

สร้างเพื่อพิสูจน์ ลาก AX, CY ให้ยาวเท่ากัน $\therefore \hat{1} = \hat{2}$

พิสูจน์ ๑. $\hat{1} = \hat{2}$ (สร้าง)

๒. $\hat{3} = \hat{4}$ (กำหนดให้)

๓. $XA = CY$ (สร้าง)

๔. $\therefore \triangle XAB \cong \triangle CBY$ (ม.ค.ม.)

๕. $AB = BC$ (จากข้อ ๔.)

๖. $AB + CB = AC$ (จากข้อ ๕)

๗. AB และ CB เป็นเส้นตรงเส้นเดียวกัน (จากข้อ ๖)

สาเหตุหนึ่งของปัญหาดังกล่าว อาจเป็นเพราะการ เรียนเรขาคณิตในชั้นนี้เป็นการ เริ่มต้นที่ ยากเกินไปสำหรับนักเรียน ดังผลการวิจัยของพายัพ เรื่องทัศนคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ที่มีต่อวิชาเรขาคณิต นักเรียนส่วนใหญ่มีความเห็นว่าวิชาเรขาคณิตในระดับนี้ยากเกินไป และเนื้อหา ไม่น่าสนใจควย (พายัพ, ๒๕๐๔ : ๑๐๑) X

ที่กล่าวมาแล้วนี้ สรุปได้ว่า ในการสอนคณิตศาสตร์ เรายังใช้วิธีสอนที่มดลให้นักเรียนเกิด ทัศนคติต่อคณิตศาสตร์ในทางที่ตรงข้ามกับความเป็นจริง เราได้เน้นในจุดมุ่งหมายสำคัญของการ เรียนคณิตศาสตร์ และเราอาจสอนเนื้อหาบางอย่างที่ยากเกินไปสำหรับนักเรียน หรืออาจสอนเนื้อหา บางอย่างโดยข้ามขั้นตอนที่สำคัญคือ การให้ความรู้พื้นฐานอย่างกว้าง ๆ ในเรื่องนั้นเสียก่อน

เหตุผลต่าง ๆ ดังกล่าวมาแล้วนี้ ทำให้ผู้วิจัยคิดที่จะเรียบเรียง เนื้อหาทางคณิตศาสตร์บาง เรื่อง โดยมีจุดประสงค์ให้เป็นพื้นฐานสำหรับนักเรียนในอันที่จะเข้าใจธรรมชาติและวิธีการของ คณิตศาสตร์ปัจจุบันประการหนึ่ง เพื่อเตรียมนักเรียนให้พร้อมที่จะเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ซึ่ง จำเป็นสำหรับคณิตศาสตร์ทุกสาขาอีกประการหนึ่ง สำหรับการเลือกเนื้อหาวิชานี้ ผู้วิจัยได้ศึกษา ทัศนคติการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ (Glennon, 1963 : 19 - 21) ประกอบกับความคิดเห็นต่างๆ ที่เกี่ยวกับการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์ มาประมวลกันเข้าให้ได้ออกสรุป แล้วเลือกเนื้อหาวิชาให้ สอดคล้องกับข้อสรุปที่ได้จากการศึกษานี้ ข้อสรุปมี ๓ ข้อ คือ

๑. ทฤษฎีความจำเป็นทางสังคม (Social Theory) ทฤษฎีนี้เน้นการจัดหรือปรับปรุง หลักสูตร โดยคำนึงถึงประโยชน์ที่จะนำไปใช้ในสังคม ให้สอดคล้องกับสภาพการ เปลี่ยนแปลงของ สังคม เช่นตัดทอนเนื้อหาบางเรื่องที่ไม่ล้าสมัยและเพิ่มเนื้อหาบางเรื่องที่มีความจำเป็นในอันที่จะนำไป ใช้ประโยชน์ให้กว้างขวาง ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์นับว่าเป็นสิ่งที่จำเป็นยิ่ง ประการหนึ่ง เพราะโครงสร้างและหลักการทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่แยกจากกันมิได้ และทั้งสอง อย่างนี้เราศึกษาในลักษณะของสัจพจน์วิธี (axiomatic method) สัจพจน์วิธีเป็นรากฐาน เบื้องต้นของการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเป็นรากฐานของการวิจัยสาขาวิชาต่าง ๆ ควย (พจน์, ๒๕๑๖ : ๑๔ - ๒๔) นักเรียนจึงควรจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๒. ทฤษฎีทางจิตวิทยา (Psychological Theory) ทฤษฎีนี้เน้นการจัดหลักสูตรโดยคำนึงถึงพัฒนาการและความต้องการของเด็ก ตลอดจนคำนึงถึงการฝึกฝนให้เด็กมีความสามารถต่าง ๆ ที่จำเป็น ความเข้าใจในโครงสร้างทางจิตศาสตร์นับว่าเป็นสิ่งจำเป็น เพราะเป็นหลักการพื้นฐานที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อเรื่องต่าง ๆ ทางจิตศาสตร์ได้ และช่วยให้เข้าใจหลักการทางวิทยาศาสตร์ด้วย การคิดของมนุษย์เริ่มด้วยความรู้เดิมและความคิดรวบยอดในสิ่งต่าง ๆ ก่อน มนุษย์จะใช้สิ่งเหล่านี้เป็นพื้นฐานในการศึกษาเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์ความรู้ใหม่ ๆ โครงสร้างทางจิตศาสตร์เป็นเรื่องการจำลองแบบการคิดของมนุษย์ แล้วนำมาจัดเป็นระบบเพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาเรื่องราวต่าง ๆ

การศึกษาโครงสร้างทางจิตศาสตร์ต้องอาศัยเหตุผลด้านการอนุมาน ซึ่งนักเรียนโดยทั่วไปจะมีความสามารถเรียนรู้การใช้เหตุผลที่เป็นแบบแผนเช่นนี้ได้ตั้งแต่อายุ ๑๑ - ๑๒ ปี (Adler, 1966 : 707 - 715) หรืออาจมากกว่านั้นประมาณ ๒ - ๓ ปี สำหรับนักเรียนไทย (Oppen, 1971 : 265) ซึ่งในวัยนี้กำลังเรียนอยู่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย หรือมัธยมศึกษาตอนต้น

๓. ทฤษฎีซึ่งเน้นโครงสร้างของวิชา (Logical Organization Theory) ทฤษฎีนี้เน้นการจัดหลักสูตรโดยคำนึงถึงความเข้าใจในโครงสร้างทางจิตศาสตร์ และเน้นการเรียนรู้โดยเข้าใจความหมายของสัจพจน์ต่าง ๆ นิยามและทฤษฎีบท ฯลฯ

ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับโครงสร้างทางจิตศาสตร์สอดคล้องกับแนวคิดทั้งสามทฤษฎี และสอดคล้องกับจุดประสงค์ของการเรียบเรียงเนื้อหาจิตศาสตร์ของผู้นี้ด้วย ทำให้ผู้นี้จัดเรียบเรียงเนื้อหาวิชาที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจโครงสร้างทางจิตศาสตร์ขึ้นเพื่อศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นจะเรียนได้หรือไม่ ถ้ามีบางชั้นเรียนได้ ควรให้เริ่มต้นเรียนในชั้นใด

เหตุผลที่ผู้นี้เลือกศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางจิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะผลการวิจัยและความคิดเห็นในปัญหาที่ว่าควรเริ่มสอนจิตศาสตร์โดยวิธีการที่เป็นแบบแผนในชั้นใดนั้น ยังหาข้อยุติไม่ได้ และผู้นี้ยังสนใจที่จะศึกษากับนักเรียนระดับนี้ ซึ่งเป็นระดับที่นักเรียนเริ่มเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ หากนักเรียนได้เข้าใจลักษณะโครงสร้างทางจิตศาสตร์ตลอดจนความคิดพื้นฐานของการพิสูจน์แล้ว ปัญหาต่าง ๆ ในการพิสูจน์ของนักเรียนน่าจะ

ลดลง และจะมีผลต่อการเรียนในระดับชั้นสูงขึ้นไปด้วย สำหรับข้อสงสัยที่ว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายจะสามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่นั้นเป็นเรื่องที่ต้องศึกษาต่อไป

✕ เหตุผลที่ผู้วิจัยไม่ใช้เรขาคณิตยูคลิดเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองทั้ง ๆ ที่เรขาคณิตยูคลิดเป็นสิ่งที่ครูและนักเรียนในระดับมัธยมศึกษามีความคุ้นเคยอยู่แล้ว คือ ประการแรกเรขาคณิตยูคลิดเป็นระบบคณิตศาสตร์ที่มีขนาดใหญ่เกินไปสำหรับการเริ่มต้นของนักเรียน กล่าวคือ ในเรขาคณิตยูคลิดมีเนื้อหาที่ต้องศึกษามากซึ่งต้องใช้เวลานานในการศึกษาเนื้อหาเหล่านั้นให้สมบูรณ์ อีกทั้งเริ่มต้นด้วยสัจพจน์ หลักเบื้องต้น และการให้คำนิยามสิ่งต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก การที่จะให้นักเรียนมีความคิดรวบยอด (concept) ในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ควรใช้ระบบคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาไม่มากนัก ประการที่สองเรขาคณิตยูคลิดมีข้อความหลายตอนซึ่งยากแก่การเข้าใจ ทำให้นักเรียนเบื่อและกลัวเสียก่อนที่จะเรียนรู้เรื่องอื่น ๆ ต่อไป (UNESCO, 1965 : 45) ประการสุดท้ายเนื่องจากการเรียนการพิสูจน์แบบแผนหรือการเริ่มต้นด้วยสัจพจน์วิธี (axiomatic method) นั้นเงื่อนไขที่จำเป็นคือการกำหนดสิ่งต่าง ๆ ให้ชัดเจนและครบถ้วน เพราะเป็นเงื่อนไขสำคัญที่ทำให้นักเรียนเข้าใจความคิดในค่านสัจพจน์วิธีได้ถูกต้อง เรขาคณิตยูคลิดมีรากฐานอยู่บนความบกพร่องหลายประการในเงื่อนไขดังกล่าว (Eves and Newsom, 1958 : 37-41, 48-49) ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือ การใช้ข้อความนอกเหนือจากสัจพจน์เป็นข้ออ้างอิงในการพิสูจน์ และสัจพจน์บางข้อกล่าวไว้ไม่แจ่มชัด ในบางข้อกล่าวไว้อย่างหนึ่ง แต่นำไปใช้อีกอย่างหนึ่ง ซึ่งดูเผิน ๆ น่าจะแทนกันได้ แต่ความจริงแทนไม่ได้ ดังนั้นแม้แต่เด็กเก่งเมื่อเรียนก็มีปัญหาเพราะเขาไม่สามารถแยกแยะได้เลยว่าข้อใดเป็นสิ่งที่เรายอมรับมาใช้โดยไม่ต้องการพิสูจน์ และข้อใดเป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์เสียก่อนจึงจะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ต่อไปได้

จุดมุ่งหมายในการศึกษาครั้งนี้

๑. เพื่อศึกษาว่า นักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (mathematical structure) ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้หรือไม่
๒. เพื่อศึกษาว่า ควรเริ่มต้นสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นชั้นใด

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

๑. การศึกษาค้นคว้าเป็นการ เสนอแนะแนวทางอย่างหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์และการใช้เหตุผลแบบอนุมาน อันจะเป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ ข้อความ การสรุป และการพิสูจน์ต่าง ๆ ในการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิชาอื่น ๆ ที่ต้องใช้ความสามารถเหล่านี้

๒. เนื้อเรื่องที่ทำการวิจัยเป็นรากฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และการวิจัยทั่ว ๆ ไป

๓. ผลของการศึกษาค้นคว้าอาจใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศไทย

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

๑. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นทุกชั้นมีความสามารถที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๒. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่เรียนอยู่ในชั้นที่สูงกว่า มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียน โครงสร้างทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนในชั้นต่ำกว่า

ข้อตกลงเบื้องต้น

๑๑. การศึกษาเรื่องนี้อยู่ในลักษณะงานวิจัยแบบทดลอง (Experimental Research) เพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นในการ เรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๑๒. เนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นในการวิจัยครั้งนี้มีมาตรฐานเพียงพอสำหรับใช้สอน

๑๓. ผลการศึกษาค้นคว้า ถือจากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นสำคัญ

๑๔. ถ้านักเรียนกลุ่มใดได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป และนักเรียนในกลุ่มที่ได้คะแนน ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป มีจำนวนไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนนักเรียนในกลุ่มถือว่านักเรียนในชั้นที่มิ นักเรียนกลุ่มนั้นเป็นตัวแทนมีความสามารถเพียงพอในการ เรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๑๕. เกณฑ์สำหรับตัดสินว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใดนั้น มีดังต่อไปนี้ คือ ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสามชั้นเป็นกลุ่ม ก. กลุ่ม ข. และกลุ่ม ค.

๕.๑ ถ้ากลุ่ม ก. ไค้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ข. และกลุ่ม ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ถือว่า ควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่กลุ่ม ก. เป็นตัวแทน

๕.๒ ถ้ากลุ่ม ก. และ ข. ไค้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่กลุ่ม ก. มีคะแนนเฉลี่ยไม่แตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ข. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และ นักเรียนกลุ่ม ข. เป็นนักเรียนในชั้นที่ต่ำกว่ากลุ่ม ก. ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่กลุ่ม ข. เป็นตัวแทน

๕.๓ ถ้ากลุ่ม ก., ข. และ ค. ไค้คะแนนเฉลี่ยไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่ม ค. เป็นนักเรียนในชั้นที่ต่ำที่สุด ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่กลุ่ม ค. เป็นตัวแทน

อนึ่ง ในการสรุปว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใดนั้นจะถือเกณฑ์กล่าวไว้ในข้อ ๔ ประกอบด้วย

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

๑. การศึกษาเรื่องนี้ กระทำกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ ในปีการศึกษา ๒๕๓๗ โรงเรียนสิงหราชพิทยาคม บางขุนเทียน กรุงเทพมหานคร จำนวนชั้นละ ๑ ห้อง ห้องละประมาณ ๓๐ คน รวม ๙๐ คน

๒. การศึกษาครั้งนี้ มุ่งศึกษาความสามารถของนักเรียนในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นโดยเฉพาะ

คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ

๑. โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้เป็นแนวทางในการสอน (ดูภาคผนวก ก.)

๒. ระบบคณิตศาสตร์ (mathematical system) หมายถึง โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่จัดเป็นระบบสัจพจน์ (axiomatic system) อันประกอบด้วย

ก. กัมพพื้นฐานซึ่งเราไม่ไ้กำหนดความ เรียกว่า อนิยาม (primitive terms หรือ undefined terms)

ข. ศัพท์ที่กำหนดความหมายโดยอาศัยนิยาม เรียกว่า นิยาม (defined terms หรือ definitions)

ค. ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับอ้างอิงในการอนุมาน (deduce) หรือพิสูจน์ข้อความในระบบคณิตศาสตร์แต่ละระบบ เรียกว่า สัจพจน์ (axioms หรือ postulates)

ง. ข้อความที่อนุมานได้จากนิยามหรือสัจพจน์ ในระบบคณิตศาสตร์ เรียกว่า ทฤษฎีบท (theorems)

๓. ผลสัมฤทธิ์หมายถึงคะแนนที่นักเรียนได้จากการทำข้อสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

การศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ทฤษฎีการจัดหลักสูตร

จากการศึกษาแนวคิดตามทฤษฎีการจัดหลักสูตรดังกล่าวในบทนำ กับแนวคิดในเรื่อง
สัจพจน์วิธี อาจจะประมวลความคิดที่สำคัญได้ดังนี้

๑) ในการจัดหลักสูตร เพื่อให้สอดคล้องกับความจำเป็นทางสังคม เราจำเป็นต้องทราบว่า
สังคมปัจจุบันเป็นอย่างไร และมีแนวโน้มที่จะเป็นอย่างไรในอนาคต สภาพของสังคมปัจจุบันกำลัง
เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วอย่างไม่เคยปรากฏมาแต่ก่อน ทั้งในด้านประเพณีและพฤติกรรมของสังคม
ความเจริญก้าวหน้าทั้งทางวิทยาการและทางเทคนิคของวิทยาศาสตร์ทำให้เกิดผลิตภัณฑ์ใหม่ ๆ และ
อาชีพใหม่ ทั้งยังเปลี่ยนความเชื่อ เปลี่ยนรูปพฤติกรรมของมนุษย์และสร้างจุดประสงค์ใหม่ของสังคม
ด้วย มนุษย์จำเป็นต้องมีความสามารถมากขึ้นเพื่อที่จะปรับตัวให้เข้ากับการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ ซึ่งทำ
ได้โดยการศึกษา และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า ความสามารถทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้แก่การ
วิเคราะห์ การสังเคราะห์ และความคิดในค่านามธรรม ทำให้บุคคลมีความสามารถในการรับรู้สูง
ขึ้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ๒๕๑๖ : ๗๗) และความสามารถในการ
รับรู้เป็นสิ่งจำเป็นในการปรับตัวให้เข้ากับการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว ในการจัดหลักสูตร คณิตศาสตร์จึง
ควรมีจุดมุ่งหมายเด่นชัดประการหนึ่ง คือเพื่อพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ในการเตรียมการสำหรับอนาคตเราต้องจัดวางโครงสร้างของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ให้
สอดคล้องกับการค้นพบและการเปลี่ยนแปลงใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเตรียมพื้นฐานทาง
คณิตศาสตร์สำหรับการศึกษาคือของนักเรียนด้วย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี,
๒๕๑๖ : ๑ - ๔)

อนึ่ง เนื่องจากการเพิ่มขยายของระบบสัจพจน์ก่อให้เกิดแขนงใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์เป็น
จำนวนมาก (Allendoerfer, 1957 : 65 - 99) จึงมีเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่ต้องเรียน
มากขึ้นด้วย แต่ช่วงเวลาเรียนตามหลักสูตรตั้งแต่ชั้นอนุบาลจนถึงชั้นอุดมศึกษามีจำกัด การปรับปรุง
หลักสูตรคณิตศาสตร์จึงต้องคำนึงถึงการประหยัดเวลา และคำนึงถึงประสิทธิภาพของเรื่องที่เรียน

นั่นคือต้องตัดเนื้อหาที่ไม่จำเป็นออก หาวิธีการนำเข้าสู่คณิตศาสตร์ที่คลุมไปถึงความคิดใหม่ ๆ ได้กว้างขวาง และเป็นสากลมากกว่าเป็นวิธีการเฉพาะเรื่อง และพยายามรวมความคิดรวบยอดต่างๆ เข้าเป็นหน่วยเดียวกัน

งานทดลองและงานวิจัยคนคว่ำในต่างประเทศแสดงให้เห็นอย่างแจ่มชัดว่า เนื้อหาและวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่สอนอยู่ในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาแต่เดิมนั้นไม่เพียงพอสำหรับความต้องการของโลกปัจจุบัน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ๒๕๑๕ : ๒๒) ปัจจุบันหลายประเทศจึงมีแนวโน้มที่จะนำเนื้อหาต่าง ๆ ซึ่งแต่เดิมเป็นคณิตศาสตร์ที่สอนในระดับอุดมศึกษามาสอนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา หลังจากที่ได้ปรับปรุงให้เหมาะสมกับวัยของนักเรียนแล้ว วิธีการดังกล่าวมีผลดีที่พอสรุปได้ดังนี้

(๑) ช่วยลดระดับความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษากับคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ทำให้สถาบันอุดมศึกษาต่าง ๆ สามารถยกมาตรฐานการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นอุดมศึกษาได้ เป็นการเพิ่มโอกาสที่จะผลิตนักคณิตศาสตร์ให้เพียงพอับความต้องการของประเทศ ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าประเทศเราขาดแคลนบุคคลประเภทนี้ รวมทั้งบุคคลที่มีความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีด้วย (คณะวิชาการศึกษา, ๒๕๑๓ : ๒๕)

(๒) เป็นการเตรียมนักวิชาการแขนงอื่น ๆ ให้เข้าใจหลักการและมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ออยู่ในโรงเรียน เพื่อที่จะได้นำหลักการเหล่านั้นไปใช้ในแขนงวิชาของตนได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ซึ่งเป็นที่ทราบว่าวิชาการแขนงต่าง ๆ เช่นวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ เทคโนโลยีสังคมวิทยา ตลอดจนงานวิจัยทุกประเภทในปัจจุบันนี้ โดยทั่วไปอาศัยภาษาและวิธีการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือทั้งสิ้น (การฝึกหัดครู, ๒๕๐๕ : ๓)

(๓) คนส่วนมากที่ไม่มีโอกาสเข้าเรียนในมหาวิทยาลัย จะได้มีโอกาสเรียนรู้หลักการทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะช่วยให้เข้าใจการเปลี่ยนแปลงของโลกปัจจุบันดีขึ้น เพราะผลการวิจัยคนคว่ำต่าง ๆ ตลอดจนให้ข่าวสารและความรู้โดยทั่วไปอธิบายให้แจ่มแจ้งชัดเจนได้โดยอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์

การศึกษาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ต้องอาศัยหลักการที่เรียกว่า สัจพจน์วิธี (axiomatic method) สัจพจน์วิธีเป็นรากฐานเบื้องต้นของการศึกษาวิทยาศาสตร์ และเป็น

รากฐานของการวิจัย (พจน์, ๒๕๖๖ : ๑๔ - ๒๔) ดังนั้นการศึกษาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์จึงมีผลใหญ่เรียนเข้าใจรากฐานเบื้องต้นของการศึกษาวิทยาศาสตร์สาขาต่าง ๆ และการวิจัยทุกประเภท

อนึ่ง อาจกล่าวได้ว่าโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มีบทบาทในคณิตศาสตร์ทุกสาขา เพราะการศึกษาคณิตศาสตร์เป็นการศึกษาเรื่องโครงสร้างและการที่จะนำโครงสร้างไปใช้ นักเรียนที่จะเข้าใจลักษณะอันแท้จริงของคณิตศาสตร์จำเป็นต้องเข้าใจแนวคิดข้อนี้ด้วย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, ๒๕๖๓ : ๑๒๖)

ที่กล่าวมานี้สรุปได้ว่าโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่จะช่วยในการจัดหลักสูตรคณิตศาสตร์บรรลุจุดหมายดังกล่าวดังกล่าวมาแล้วข้างต้น และเป็นแนวคิดสำคัญของการศึกษาคณิตศาสตร์

✓ ๒) ในคานจิติวิทยา / สุชาติ (๒๕๐๕ : ๓) ได้กล่าวว่า "คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ต้องใช้ความคิดจินตนิมิตสมเหตุผลเพื่อเรียนรู้และเข้าใจโครงสร้างของคณิตศาสตร์ การสอนคณิตศาสตร์จึงเป็นการสอนที่ต้องอาศัยหลักจิตวิทยามาก การอธิบายแต่ละชั้นในแต่ละหัวข้อจำต้องสอดคล้องกับจิตวิทยาแห่งการคิด การเรียนรู้ และพัฒนาการด้านต่าง ๆ ของเด็ก"

ในการสอนคณิตศาสตร์สมัยใหม่ เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า ระบบความคิดต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์นั้นมีลักษณะที่ซับซ้อนกว้างขวาง และมีความคิดรวบยอดต่าง ๆ เป็นโครงสร้างสำคัญเบื้องต้น ในการเรียนคณิตศาสตร์ต้องเรียนด้วยความเข้าใจ เราไม่อาจเรียนโดยวิธีจำแบบอย่างสำหรับแก้ปัญหาเป็นกรณี ๆ ได้ วิธีที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจความคิดทางคณิตศาสตร์ได้ดี คือการจัดสร้างสถานการณ์สำหรับการเรียนรู้ให้แก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนมีโอกาสได้คิดหรือค้นพบได้ด้วยตนเอง กล่าวโดยสรุปได้ว่า

"ความนึกคิด (thought) อาศัยความคิดรวบยอด (concepts) ต่าง ๆ และความคิดรวบยอดเกิดขึ้นจากการกระทำ (actions)"

✓ เพียเจต์ (Piaget) ได้ศึกษาพัฒนาการการเรียนรู้ของเด็ก และแบ่งชั้นต่าง ๆ ของการเรียนรู้เป็นช่วงอายุ ดังนี้ (Adler, 1966 : 707 - 715)

ขั้นแรก (ตั้งแต่เกิดถึงอายุ ๑๘ เดือน) เรียกว่า the sensori-motor stage ในขั้นนี้เด็กได้เรียนรู้การตอบสนองสิ่งเร้าต่าง ๆ การตอบสนองนี้จะเริ่มเป็นพฤติกรรมที่ซับซ้อนขึ้น

ความสนใจของเด็กจะค่อย ๆ เบนออกจากตัวเด็กไปสู่วัตถุรอบตัว และเด็กจะเริ่มรับรู้ในกรณีที่มีของหาย ซึ่งในวัยก่อนหน้านี้ ถ้าเด็กไม่เห็นอะไรจะไม่นึกถึงสิ่งนั้นอีก

ขั้นที่สอง (อายุ ๑๘ เดือนถึง ๒ ปี หรือ ๓ ปี) เรียกว่า the preparational stage ในขั้นนี้เด็กสามารถใช้สัญลักษณ์สื่อสารได้ แต่การสรุปหรือการตัดสินใจอะไรมักจะยึดถือเฉพาะองค์ประกอบที่ตนเห็นชัดและละเลยองค์ประกอบอื่น เป็นต้นว่าเมื่อเอาดินเหนียวที่ปั้นเป็นลูกกลมมาใหญ่ แล้วนำมาคลึงให้ยาวออก เด็กจะตอบว่ามีดินเหนียวเพิ่มขึ้นเพราะมีความยาวมากกว่า แต่เด็กวัยนี้ยังมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อยกับส่วนรวม ระหว่างสมาชิกกับเซตหรือระหว่างสับเซต (subset) กับเซต

ขั้นที่สาม (อายุ ๓ ปีถึง ๑๑ ปี) เรียกว่า the stage of concrete operations เด็กสามารถแยกมวลกับความยาวได้ แยกจำนวนนับกับความยาวได้ และเริ่มรับรู้เมื่อวัตถุเปลี่ยนรูปร่าง มวลของวัตถุไม่เพิ่มขึ้นหรือลดลง นอกจากนี้เด็กยังสามารถเข้าใจคุณสมบัติเกี่ยวกับลำดับและลักษณะสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one correspondence) ด้วย

ขั้นที่สี่ (อายุ ๑๑ ปีหรือ ๑๒ ปี) เรียกว่า the stage of formal operation) ซึ่งเป็นขั้นของการให้เหตุผลแบบผู้ใหญ่ ในขั้นนี้เด็กจะสามารถวิเคราะห์หาองค์ประกอบต่าง ๆ ของปัญหา และสามารถตั้งสมมุติฐานทดลองจนสามารถทดสอบสมมุติฐานกับสภาพความเป็นจริงได้ นอกจากนี้เด็กยังสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อความควย กล่าวโดยย่อคือสามารถคิดแบบวิทยาศาสตร์และให้เหตุผลชนิดที่มีแบบแผนทางคณิตศาสตร์ได้

การวิจัยในประเทศไทยโดยทั่วไป แสดงให้เห็นว่าเด็กในเมืองหลวงมีลำดับขั้นของพัฒนาการตามทฤษฎีของเพียเจต์ (UNESCO, 1972 : 52) ดังนั้นจึงน่าจะให้เด็กเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายซึ่งมีอายุ ๑๑ หรือ ๑๒ ปี เรียนรู้วิธีการให้เหตุผลที่เป็นแบบแผนได้ แต่ถ้ามองผลการวิจัยของออปเปอร์ (Oppen, 1971 : 265) ซึ่งปรากฏว่าเด็กไทยส่วนใหญ่ซึ่งเป็นเด็กชนบทมีขั้นของพัฒนาการช้ากว่าเด็กในเมืองหลวง ๒ - ๓ ปี ก็น่าจะสอนวิธีการดังกล่าวแก่เด็กในชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กล่าวโดยสรุปคือควรเริ่มสอนวิธีการให้เหตุผลที่เป็นแบบแผนในชั้นต้นที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ เพราะเมื่อสอนให้นักเรียนเกิดความเข้าใจหลักหรือทฤษฎีแห่งการให้เหตุผลเสียแต่ในชั้นต้นแล้ว การเรียนคณิตศาสตร์ทุกแขนงย่อมเป็นเรื่องที่น่าสนใจสำหรับนักเรียน (สุชาติ, ๒๕๓๑ : ๒)

ปัญหาที่ว่าควรเริ่มสอนคณิตศาสตร์ (โดยเฉพาะวิชาเรขาคณิต) โดยใช้ระบบสัจพจน์ในชั้นใดนั้นยังไม่มีข้อยุติ แอดเลอร์มีความเห็นว่า ควรจะเน้นการให้เหตุผลแบบอนุมานโดยอ้างอิงจากสัจพจน์ในการสอนวิชาเรขาคณิต เกรด ๑๐ (เทียบเท่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓) (Adler, 1968 : 229) คณะอนุกรรมการซึ่งจัดตั้งโดย Committee of Ten on Secondary School Subjects ของสหรัฐอเมริกาเสนอว่า ควรเริ่มสอนวิชาเรขาคณิตแบบที่มีการพิสูจน์ และควรสอนพีชคณิตควบคู่ไปด้วยกันในเกรด ๑๑ เพื่อให้ครุมีโอกาสรวมสองวิชานี้เข้าด้วยกันอันจะทำให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างวิชาทั้งสองได้ดียิ่งขึ้น แต่ในเวลาต่อมาปรากฏว่าคณะกรรมการอีกชุดหนึ่งคือ Committee on College Entrance Requirements ได้เสนอให้ลดลงมาสอนในระดับที่ต่ำกว่าเดิม กล่าวคือให้สอนเรขาคณิตในลักษณะที่เป็นรูปธรรมในเกรด ๙ และให้สอนเรขาคณิตที่มีการพิสูจน์ในเกรด ๘ ซึ่งสอดคล้องกับข้อเสนอแนะของนักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์หลายท่านในการประชุมที่เมืองเกนนิคส์ เมื่อปี พ.ศ.๒๕๐๖ (Adler, 1966 : 210-217)

นักคณิตศาสตร์จำนวนไม่น้อยวิจารณ์ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่เปลี่ยนแปลงจากชั้นรูปธรรมเป็นนามธรรมมากเกินไป นักคณิตศาสตร์อเมริกัน ๒๕ ท่าน มีความเห็นว่านักเรียนจะมีความซาบซึ้งในเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ก็ต่อเมื่อนักเรียนได้เรียนเรื่องที่ตรงกับประสบการณ์และพื้นความรู้ แต่ถ้าหากให้นักเรียนเรียนเนื้อหาในลักษณะที่เป็นแบบแผนมากเกินไปทั้ง ๆ ที่นักเรียนยังไม่มีความรู้พร้อม อาจทำให้นักเรียนกลัวและไม่ชอบคณิตศาสตร์ได้ (Kinsella, 1965 : 195) แฟร์ (Fehr) ก็ไม่เห็นด้วยที่จะให้นักเรียนประถมศึกษาและมัธยมศึกษาตอนต้นเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ในลักษณะดังกล่าว ด้วยเหตุนี้ท่านผู้นี้หลายท่านจึงเสนอแนะให้สอนสัจพจน์และโครงสร้างของการอนุมานแก่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ส่วนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและระดับประถมศึกษาควรให้นักเรียนมีโอกาสเตรียมความรู้พื้นฐานให้พร้อม โดยการฝึกใช้ความคิดทางด้านรูปธรรม และการศึกษาเรื่องการแปลงสภาพ (transformations) เสียก่อน (UNESCO, 1966:33)

ไครกาวสกา (Krykowska, 1971 : 116) ได้ศึกษางานและความคิดเห็นของบุคคลหลายฝ่ายเกี่ยวกับปัญหานี้ และสรุปว่า ปัญหาดังกล่าวยังเป็นเรื่องที่ขัดแย้งกันอยู่ ฝ่ายหนึ่งเห็นว่าสัจพจน์วิธีหรือการศึกษาคณิตศาสตร์อย่างมีแบบแผนเป็นส่วนสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกระดับ และเป็นสิ่งจำเป็นที่ทำให้การสอนคณิตศาสตร์ทันสมัยขึ้น อีกฝ่ายหนึ่งเห็นว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ไม่สามารถเข้าใจความคิดรวบยอดต่าง ๆ เกี่ยวกับสัจพจน์ต่าง ๆ ได้เลย และไม่จำเป็นต้องเรียนเรื่องเหล่านี้ด้วย ซึ่งใคร่ทราบดีว่า การที่บุคคลเหล่านี้ไม่เห็นด้วย อาจเป็นเพราะบุคคลเหล่านี้ตัดสินปัญหาโดยการสังเกตการสอนเรขาคณิตแบบเก่าซึ่งไม่ถูกต้อง เพราะความคิดรวบยอดในเรื่องสัจพจน์และสัจพจน์วิธีในปัจจุบันแตกต่างกับความคิดรวบยอดเดิม แต่บุคคลฝ่ายแรกที่เห็นด้วยยังไม่สามารถแสดงให้เห็นประโยชน์และวิธีการสอนสัจพจน์วิธีที่ดีได้ เนื่องจากยังมีความคิดที่ไม่ชัดเจนว่าควรสอนอย่างไร และยังมีได้ปรับปรุงเนื้อหาที่จะใช้สอนให้เหมาะสมกับระดับชั้นของนักเรียน

๓. ในด้านทฤษฎีซึ่งเน้นโครงสร้างของวิชานั้น เดิมหลักสูตรคณิตศาสตร์คำนึงแต่ด้านความต้องการของสังคมและจิตวิทยาเท่านั้น ต่อมาในกลางปี พ.ศ. ๒๔๖๓ ถึง พ.ศ. ๒๔๘๓ นักการศึกษาคณิตศาสตร์ เริ่มเน้นการเรียนรู้แบบเข้าใจ และตั้งแต่นั้นมาก็มีแนวโน้มที่จะเน้นโครงสร้างของคณิตศาสตร์มากขึ้น ดังจะเห็นได้จากข้อเสนอแนะและการดำเนินงานของคณะกรรมการในโครงการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่สำคัญของสหรัฐอเมริกา เช่น โครงการ CEEB, UICSM และ SMSG (NCTM, 1959 : 3) ตลอดจนโครงการของประเทศอื่น ๆ รวมทั้งของประเทศไทยด้วย ดังปรากฏในรายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ พ.ศ. ๒๕๐๔ (วิชาการ, ๒๕๐๔ : ๓.๔ - ๔) ซึ่งได้กล่าวถึงลักษณะการสอนคณิตศาสตร์ที่พึงปรารถนาไว้ข้อหนึ่งว่า ให้นักเรียนได้เข้าใจลักษณะโครงสร้างของคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นการง่ายและไม่สับสนเมื่อจะเรียนเนื้อหาใหม่ และในขณะเดียวกันก็ไม่ลืมเรื่องเก่าที่เรียนมาแล้ว

ปัจจุบันนี้ปัญหาของในวงการศึกษาคณิตศาสตร์ต่างสนใจและเน้นเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ แลงฟอร์ด (Langford, 1955 : 401) กล่าวว่า นักเรียนเป็นจำนวนมากที่เข้าใจหลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ย่อมมีความสนใจที่จะศึกษาคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น แม้ว่าเรื่องที่เรียนนั้นจะทวีความยากขึ้นเป็นลำดับ บัตเลอร์ และ เรน ก็มีความคิดเห็นทำนองเดียวกัน (Butler and Wren, 1960 : 116)

สัจพจน์วิธี (axiomatic method)

กระบวนการของสัจพจน์วิธีมีลักษณะสอดคล้องกับกระบวนการคิดของมนุษย์ จนอาจกล่าวได้ว่า กระบวนการของสัจพจน์วิธีเป็นแบบจำลองของการคิดของมนุษย์ มนุษย์ใช้ประสบการณ์พื้นฐาน

เพิ่มอยู่เสมอในการศึกษาสิ่งใหม่เสมอ และกระบวนการของสัจพจน์วิธีช่วยให้นักเรียนรู้เข้าใจความคิดทางนามธรรมได้ง่ายขึ้น

ชาวกรีกใช้วิธีการของสัจพจน์วิธีมาตั้งแต่โบราณ ผลงานสำคัญที่ถือเป็นแบบฉบับของสัจพจน์วิธีในระยะแรกได้แก่ ต้นฉบับเรขาคณิตยูคลิด (The Elements) ในระยะต่อมาได้มีผู้นำวิธีการนี้ไปใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ มากขึ้น และนักคณิตศาสตร์ได้สนใจและศึกษาสัจพจน์วิธีอย่างจริงจัง จนในที่สุดได้ตระหนักว่า สัจพจน์วิธีจำเป็นต้องอาศัยตรรกวิทยาเป็นเครื่องมือสำคัญ นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ยังได้สนใจศึกษาเกี่ยวกับลักษณะต่าง ๆ ของระบบสัจพจน์ เช่น ความเป็นอิสระ (independence) ของสัจพจน์ ความคงเส้นคงวา (consistency) และความสมบูรณ์ (completeness) ของระบบสัจพจน์ ตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่างระบบสัจพจน์กับแบบอย่าง (models) ในธรรมชาติ เป็นต้น

ไกรกาวัสกา (Krygowska, 1971 : 149) ได้ให้คำแนะนำในการสอนสัจพจน์วิธีไว้ดังนี้

(๑) ควรใช้ตัวอย่างง่าย ๆ เป็นการนำเข้าสู่เรื่อง และใช้ระบบสัจพจน์ที่แทนเนื้อหาได้หลายแบบที่นักเรียนคุ้นเคยมาแล้ว

(๒) ควรฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้สัจพจน์ในการนิยามโครงสร้างต่าง ๆ ให้มากที่สุด

(๓) ควรให้นักเรียนเรียนทฤษฎีที่ยังยากซับซ้อน หรือทฤษฎีที่มีรากฐานมาจากรูปธรรมตามลักษณะสัจพจน์วิธีหลังจากที่นักเรียนเข้าใจลักษณะโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แล้ว

กรอสแมน (Grossman, 1957 : 3181-B) กล่าวว่า ควรใช้เรขาคณิตขนาดจำกัด (finite geometry) ในการแสดงคุณสมบัติของระบบคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม เพราะเรขาคณิตขนาดจำกัดมีลักษณะที่เอื้ออำนวยต่อการศึกษาสัจพจน์วิธี

งานวิจัยและโครงการต่าง ๆ

จากการศึกษางานวิจัยและโครงการต่าง ๆ ที่ทำการวิจัยเกี่ยวกับการสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ประมวลได้ดังนี้

๑. ในประเทศโปแลนด์ได้มีผู้ทดลองสอนให้นักเรียนที่มีอายุ ๑๔ - ๑๕ ปี เรียนรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของเรขาคณิตโดยพยายามจัดประสบการณ์ให้นักเรียนได้เรียนจากเรื่องง่ายที่สุดและ

ค่อย ๆ ยากขึ้นเป็นลำดับ ผลการทดลองปรากฏว่านักเรียนมีความสามารถพอที่จะเรียนตามวิธีการดังกล่าวได้ (UNESCO, 1965 : 173-175) .

๒. Nordic committee ซึ่งเป็นคณะกรรมการของโครงการพัฒนาหลักสูตรแผนใหม่ของประเทศเดนมาร์ก ฟินแลนด์ นอร์เวย์ และสวีเดน ได้ทดลองสร้างแบบเรียนเกี่ยวกับระบบสัจพจน์ และทดลองใช้สัจพจน์วิธีในการสอนคณิตศาสตร์แก่นักเรียนเกรด ๗ - ๘ ผลปรากฏว่าเนื้อหาดังกล่าวเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียน (UNESCO, 1966 : 303)

๓. นักศึกษาในวิทยาลัยครูชั้นสูงแห่งมหาวิทยาลัยครากัวอีกคนหนึ่งได้ทดลองสอนระบบสัจพจน์ทางคณิตศาสตร์แก่เด็กกลางอายุ ๑๖ ปีกลุ่มหนึ่ง โดยให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ในลักษณะที่ไม่มีการศึกษาความสัจพจน์ดังกล่าวออกมาเป็นสถานการณ์ในชีวิตจริง ผลปรากฏว่านักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีง่าย ๆ บางทฤษฎีได้เอง แต่นักเรียนไม่เห็นด้วยกับวิธีการเช่นนี้ โดยกล่าวว่า เป็นวิธีการที่ทำให้เขามีสภาพคล้ายกับคนตาบอด (Krygowska, 1966:187)

๔. เคอร์คแพตริก (Kirkpatrick, 1971 : 306-A) ได้ทดลองสอนระบบคณิตศาสตร์ขนาดจำกัด (finite mathematical systems) แก่นักเรียนเกรด ๖ (เทียบเท่าชั้นประถมศึกษาปีที่หก) จำนวน ๓๐๐ คน ซึ่งเลือกอย่างสุ่มจากโรงเรียนจำนวน ๖ โรงเรียน จุดประสงค์ของการสอน คือ

๑. ให้เกิดสุนทรียวิจักษ์ (appreciation) ในธรรมชาติ และโครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์

๒. ให้เข้าใจวิธีการศึกษาคนควาตามแบบคณิตศาสตร์

๓. ให้เข้าใจธรรมชาติของโครงสร้างพื้นฐานอันได้แก่คุณสมบัติปิด คุณสมบัติการสลับที่ คุณสมบัติการรวมหมู่ หรือจัดหมู่ และคุณสมบัติการกระจาย

๔. ให้เข้าใจลักษณะอินเวอร์สของโอเปอเรชั่น และความสัมพันธ์ระหว่างอินเวอร์สกับเอกลักษณ์

๕. เพื่อใหม่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

ในการทดลองนี้เคอร์คแพตริกได้แบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม คือ กลุ่ม B และกลุ่ม A เรียนเนื้อหาของระบบคณิตศาสตร์ขนาดจำกัด และกลุ่ม B เรียนระบบคณิตศาสตร์ของจำนวน

ธรรมชาติ และจำนวนที่เป็นเศษส่วนบวก ซึ่งเป็นระบบที่ขนาดไม่จำกัด (infinite mathematical systems) ใช้เวลา ๑๐ วัน โดยการควบคุมตัวแปรอื่น ๆ เช่น เวลา การให้งานเพิ่มเติม ฯลฯ ผลการทดลองปรากฏว่า

๑. นักเรียนกลุ่ม B มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่ม A อย่างมีนัยสำคัญ ในด้านโครงสร้างพื้นฐานตามจุดประสงค์ข้อ ๓ และสุนทรียะวิจิตรตามจุดประสงค์ข้อ ๑

๒. นักเรียนกลุ่ม A มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่ม B อย่างมีนัยสำคัญ ด้านความสามารถในการหาแบบแผนทางคณิตศาสตร์ตามจุดประสงค์ข้อ ๒

สำหรับจุดประสงค์ข้อ ๔ และข้อ ๕ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

๕. เดียร์ (Deer, 1969 : 2284-B) ได้ศึกษาผลการเรียนตรรกวิทยาที่ต่อความสามารถในการพิสูจน์ทฤษฎีบททางเรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษา โดยแบ่งนักเรียนเป็นสองกลุ่ม กลุ่มละ ๑๓ คน กลุ่มแรกให้เรียนตรรกวิทยาเบื้องต้น รวมทั้งแบบของการให้เหตุผลที่สำคัญด้วย กลุ่มที่สองศึกษาเกมต่าง ๆ ปัญหา (puzzles) รหัส (codes) และเลขคณิตในระบบมอดูลาร์ (modular arithmetic) โดยไม่สอนพาดพิงถึงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเลยเป็นเวลา ๑ ภาคเรียน จากนั้นจึงรวมเด็กทั้งสองกลุ่มเข้าด้วยกัน แล้วสอนวิธีพิสูจน์ทางเรขาคณิตทั้งวิธีพิสูจน์ทางตรงและทางอ้อม โดยใช้เวลาสอน ๔ วัน หลังจากนั้นจึงทดสอบด้วยข้อทดสอบสองฉบับ ฉบับหนึ่งให้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่นักเรียนไม่เคยพบมาก่อน อีกฉบับหนึ่งให้พิสูจน์ทฤษฎีบทจำนวน ๕ ทฤษฎีบท จากระบบสัจพจน์ที่ตั้งขึ้น ใช้เวลาสอบฉบับละหนึ่งชั่วโมง ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง สรุปได้ว่า ความคิดในเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มีลำดับพัฒนาการมาตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ และในปัจจุบันความคิดในเรื่องโครงสร้างทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญต่อการศึกษาคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก มีผู้สนใจในเรื่องนี้ใ้คนคว่ำวิจัยและให้ข้อเสนอแนะไว้หลายประการ ผลการวิจัยส่วนใหญ่ปรากฏว่า ผลการเรียนโดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์กับผลการเรียนตามแนวเดิมไม่แตกต่างกัน และนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเฉพาะใน

ระดับชั้นต่ำ ๆ ยังไม่พร้อมที่จะเรียนตามแบบแผนของสัจพจนวิธี ส่วนความคิดเห็นที่ว่าควรใช้
สัจพจนวิธีในการสอนชั้นใดชั้น ยังเป็นเรื่องที่หาข้อยุติไม่ได้

วิธีดำเนินการทดลอง และการวิเคราะห์ข้อมูล

แหล่งข้อมูลและกลุ่มตัวอย่าง แบ่งเป็น ๒ ประเภท คือ

๑. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองสอนและวิเคราะห์ข้อสอบ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ - ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ ของโรงเรียนมัธยมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร กรุงเทพมหานคร ชั้นละ ๓๐ คน รวมนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างประเภทนี้ ๙๐ คน

๒. กลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ - ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ ของโรงเรียนสังหาราชพิทยาคม เขตบางขุนเทียน กรุงเทพมหานคร ชั้นละ ๓๐ คน รวมนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างประเภทนี้ ๙๐ คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างมีวิธีการดังต่อไปนี้

๑. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองสอนและวิเคราะห์ข้อสอบใช้วิธีสุ่ม (Random Sampling) ชั้นละ ๓๐ คน

๒. กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยใช้วิธีสุ่ม โดยแบ่งเป็น ๒ ชั้น ดังต่อไปนี้

ชั้นที่ ๑ สุ่มห้องสำหรับทดสอบสอน ๒ ห้องในแต่ละชั้น

ชั้นที่ ๒ หลังจากสอนแล้ว เลือกนักเรียนโดยวิธีสุ่มชั้นละ ๓๐ คน

เพื่อใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

๑. บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น (ดูภาคผนวก ก.) ตามหัวข้อต่อไปนี้

ก. การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์

ข. ส่วนประกอบของระบบคณิตศาสตร์ : อนิยาม นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบท

ค. การพิสูจน์และแบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์ : วิธีพิสูจน์ทางตรง วิธีพิสูจน์ทางอ้อม

Proof of Existence, Disproof by Counterexample, Proof by Enumeration, Proof by Cases, Proof by Elimination และ Proof by Contrapositive.

- ง. ตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์ขนาดจำกัด (Finite Mathematical Systems)
๒. ภาพเพื่อใช้ประกอบการสอน
๓. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ จำนวน ๔๐ ข้อ

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

๑. สร้างบทเรียน โดยศึกษาจากหนังสือและบทความในวารสารทางคณิตศาสตร์ แล้วรวบรวมความคิด ตลอดจนตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์มาเรียบเรียงเป็นบทเรียน หนังสือที่ผู้วิจัยใช้เป็นบรรทัดฐานในการเรียบเรียงบทเรียน ได้แก่

- ก. คณิตศาสตร์แผนปัจจุบัน เล่ม ๒ (สุชาติ, ๒๕๑๒)
- ข. ตรรกวิทยาเบื้องต้น (สุเทพ, ๒๕๑๖)
- ค. An Introduction to the Foundations of Mathematics (Wilder, 1965)
- ง. An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics (Eves and Newsom, 1958)

๒. จัดทำภาพจำนวน ๕ ชุด เพื่อใช้เป็นตัวอย่างประกอบการอธิบาย เป็นต้นว่าการอธิบายความคิดทางนามธรรม สัจพจน์ และการพิสูจน์

๓. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ตามเนื้อหาที่ได้เรียบเรียงไว้ จำนวน ๔๐ ข้อ

๔. ทดลองสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองสอนและวิเคราะห์ข้อสอบในต้นภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ ผู้วิจัยเป็นผู้สอนโดยสอนพร้อมกันทั้งสามชั้น ใช้เวลาสอนทั้งสิ้น ๑๒ ชั่วโมง เมื่อทดลองสอนครบตามเนื้อหาวิชาแล้ว จึงทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบที่สร้างขึ้นในข้อ ๓ โดยใช้เวลาสอบ ๓ ชั่วโมง

๕. วิเคราะห์ข้อสอบ ตามหลักการสร้างแบบทดสอบโดยใช้วิธีการตามลำดับขั้นดังนี้

๕.๑ คัดเลือกนักเรียนที่ทำคะแนนได้จากมากที่สุดไปหาน้อยตามลำดับจำนวน ๒๗ % ของนักเรียนทั้งหมด เรียกนักเรียนกลุ่มนี้ว่า กลุ่มคะแนนสูง แล้วหาค่า P_H ในแต่ละข้อ

๕.๒ คัดเลือกนักเรียนที่ทำคะแนนได้จากน้อยที่สุดไปหามากตามลำดับ จำนวน ๒๗ %

ของนักเรียนทั้งหมด เรียกนักเรียนกลุ่มนี้ว่า กลุ่มคะแนนต่ำ แล้วหาค่า P_L ในแต่ละข้อ

๕.๓ เปิดตารางสำเร็จของฟาน (Fan, 1952 : 3-32) โดยใช้ค่า P_H และ P_L เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) อำนาจจำแนก (r) และความยากง่ายมาตรฐาน (Δ) ของแต่ละข้อ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่ทำได้ใช้จำนวน ๔๐ ข้อ (ข้อทดสอบและตารางแสดงค่า P_H, P_L, p, r, Δ คูณในภาคผนวก ก. และ ข.) ข้อทดสอบที่คัดเลือกไว้ ๔๐ ข้อนี้ มีความยากง่ายตั้งแต่ ๐.๑๔ ถึง ๐.๘๘ ค่าความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ ๐.๔๘๗ และมีอำนาจจำแนกตั้งแต่ ๐.๑๖ ถึง ๐.๖๖ ค่าอำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ ๐.๔๐๕

๕.๔ คำนวณหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (r_{tt}) และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (SE_{meas}) ของข้อทดสอบที่คัดเลือกไว้ทั้ง ๔๐ ข้อนั้น ซึ่งปรากฏว่า ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (r_{tt}) เท่ากับ ๐.๗๐ และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (SE_{meas}) เท่ากับ ๒.๘๗

๖. จัดเรียงข้อของแบบทดสอบที่ได้วิเคราะห์แล้วตามลำดับเนื้อหาและความยากง่าย

๗. ทดลองสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนที่เลือกไว้ทั้งหมดทั้งในปลายภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ ผู้วิจัยเป็นผู้สอน โดยใช้วิธีสอนแบบเดียวกันทั้งสามชั้น และใช้เวลาในการสอนห้องละ ๔ ชั่วโมงเท่ากัน รวมชั่วโมงที่ใช้สอนทั้งสิ้น ๕๔ ชั่วโมง (ดูตัวอย่างแผนการสอนอย่างละเอียดในภาคผนวก ง.)

๘. เมื่อสอนเนื้อหาวิชาครบแล้ว จึงทำการทดสอบนักเรียนทั้งสามชั้นพร้อมกัน ด้วยแบบทดสอบซึ่งจัดเรียงไว้แล้วในข้อ ๖ ใช้เวลาทดสอบ ๑ ชั่วโมง

๙. คัดเลือกกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยโดยวิธีสุ่ม แล้ววิเคราะห์ผลจากการทดสอบกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย เพื่อตรวจสอบตามเกณฑ์ที่ได้ตั้งไว้ในข้อตกลงเบื้องต้น ดังต่อไปนี้

๙.๑ หากคะแนนเฉลี่ย ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากแบบทดสอบและเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปในแต่ละชั้น

๙.๒ วิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) เพื่อดูว่าคะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบของนักเรียนแต่ละชั้นแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้ (t-test) ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้ง ๓ ชั้นพร้อมกัน

ถ้าพบความแตกต่างของความแปรปรวนในข้อ ๔.๒ ใช้ t-test เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ที่ละคู่ เช่น คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองกับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม เพื่อจะได้ทราบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นใดแตกต่างกันจริง และหาข้อยุติว่า ควรเริ่มสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ชั้นใดจึงจะเหมาะสมที่สุด

การวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูล

๑. หมายเฉลี่ย (Mean) ของคะแนน จำนวนจากสูตร (Garrett, 1958 : 27)

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ $\bar{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

๒. ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) จำนวนจากสูตร (Ferguson, 1966 : 67)

$$S = \sqrt{\frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ S แทน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sum X$ แทน ผลรวมของคะแนน

$\sum X^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนน

N แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มทดลอง

๓. ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (Reliability) คำนวณจากสูตรคูเปอร์-ริชาร์ดสัน (Anastasi, 1961 : 122)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sigma_t^2 - \sum pq}{\sigma_t^2}$$

เมื่อ r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

σ_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ (ซึ่งเท่ากับกำลังสองของค่า s ในข้อ ๒)

p แทน อัตราส่วนระหว่างจำนวนนักเรียนที่ทำถูกแต่ละข้อต่อจำนวนนักเรียนทั้งหมด

q แทน $1 - p$

๔. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด (Standard Error of Measurement) คำนวณจากสูตร (Gullikson, 1950 : 63)

$$SE_{meas} = S_x \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ SE_{meas} แทน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

S_x แทน ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (จากข้อ ๒)

r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (จากข้อ ๓)

* ๕. ระบุความยากง่าย และอำนาจจำแนกของข้อสอบโดยเปิดตารางสำเร็จของฟาน (Fan, 1952)

๖. การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) ของคะแนน เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสามกลุ่มพร้อมกัน ด้วยค่า F ดังนี้ (Freund, 1962 : 138)

Source of Variation	df	Sum of Squares	Mean of Squares	F
Between Treatments	k-1	SS_B	$MS_B = \frac{SS_B}{k-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
Error	k(n-1)	SS_E	$MS_E = \frac{SS_E}{k(n-1)}$	
Total	kn-1	SS_T	-	

เมื่อ k แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

n แทน จำนวนสมาชิกในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง (จำนวนเท่ากันทุกกลุ่ม)

df แทน Degree of Freedom

$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}$ แทน ผลรวมของคะแนนแต่ละตัว

$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2$ แทน ผลรวมของกำลังสองของคะแนน

$$SS_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^n X_{ij} \right]^2 - \frac{1}{kn} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij} \right]^2$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{1}{kn} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij} \right]^2$$

$$SS_E = SS_T - SS_B$$

๗. การวิเคราะห์ค่าที (t-test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนครึ่งละ ๒ กลุ่ม จำนวนจากสูตร (Edward, 1950 : 94)

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ แทน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มที่ ๑ และกลุ่มที่ ๒ ตามลำดับ
 S_1^2, S_2^2 แทน ค่าความแปรปรวนของกลุ่มที่ ๑ และกลุ่มที่ ๒ ตามลำดับ
 N_1, N_2 แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มที่ ๑ และกลุ่มที่ ๒ ตามลำดับ

ผลของการศึกษาค้นคว้า

ข้อทดลองเกี่ยวกับการวิเคราะห์ผลและการแปลผล

๑. ถ้านักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นใดใดคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป และนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างนั้นที่ใดคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปมีจำนวนไม่น้อยกว่าครึ่งหนึ่ง ถือว่านักเรียนชั้นนั้นมีความสามารถเพียงพอในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๒. เกณฑ์สำหรับตัดสินว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใดนั้น มีดังต่อไปนี้ คือให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสามชั้น เป็นกลุ่ม ก. กลุ่ม ข. และกลุ่ม ค.

๒.๑ ถ้ากลุ่ม ก. ได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ข. และ ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ถือว่า ควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่มีกลุ่ม ก. เป็นตัวแทน

๒.๒ ถ้ากลุ่ม ก. และ ข. ได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่คะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ก. ไม่แตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ข. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่ม ข. เป็นกลุ่มนักเรียนชั้นที่ต่ำกว่ากลุ่ม ก. ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่มีกลุ่ม ข. เป็นตัวแทน

๒.๓ ถ้ากลุ่ม ก., ข. และ ค. ได้คะแนนเฉลี่ยไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่ม ก. เป็นกลุ่มของนักเรียนในชั้นที่ต่ำที่สุด ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่มีกลุ่ม ค. เป็นตัวแทน

อนึ่ง ในการสรุปว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใดนั้น จะถือเกณฑ์กล่าวไว้ในข้อ ๑. ประกอบด้วย

ผลของการศึกษาค้นคว้า

๑. การวิเคราะห์หาคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

ผู้วิจัยได้คำนวณหาคะแนนเฉลี่ยและความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ปรากฏผลดังแสดงในตาราง ๑

ตาราง ๑ แสดงคะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ของคะแนน
ของกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย

ระดับชั้น การศึกษา	กาสดิติ	คะแนนเฉลี่ย		ความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)
		$\bar{X}$	$\bar{X}$ คิดเป็น %	
มัธยมศึกษาปีที่ ๑		๑๘.๐๖	๔๕.๑๕ /	๕.๒๓
มัธยมศึกษาปีที่ ๒		๒๐.๒๐	๕๐.๕๐ /	๓.๘๓
มัธยมศึกษาปีที่ ๓		๒๔.๕๖	๖๑.๔๐ /	๓.๓๕
เฉลี่ยทั้งหมด		๒๐.๕๑	๕๒.๒๗	๕.๐๖

จากการาง ๑ แสดงให้เห็นว่า

๑. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งได้คะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) ๑๘.๐๖ คะแนน จากคะแนน
เต็ม ๔๐ คะแนน หรือคิดเป็น เปอร์เซนต์ได้เท่ากับ ๔๕.๑๕ %

๒. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง ได้คะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) ๒๐.๒๐ คะแนน จากคะแนน
เต็ม ๔๐ คะแนน หรือคิดเป็น เปอร์เซนต์ได้เท่ากับ ๕๐.๕๐ %

๓. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม ได้คะแนนเฉลี่ย ($\bar{X}$) ๒๔.๕๖ คะแนน จาก
คะแนนเต็ม ๔๐ คะแนน หรือคิดเป็น เปอร์เซนต์ได้เท่ากับ ๖๑.๔๐ %

ซึ่งสรุปได้ดังนี้

๑. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งต่ำกว่า ๕๐ % ส่วนคะแนนเฉลี่ยของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง และชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม สูงกว่า ๕๐ %

๒. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้น
มัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งด้วย

การวิเคราะห์หาเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างแต่ละชั้น ที่ได้คะแนนจากการทดสอบตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป ปรากฏผลดังแสดงในตาราง ๒

ตาราง ๒ แสดง เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป โดยจำแนกตามชั้น

ระดับชั้น	จำนวนนักเรียนทั้งหมด	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป	เปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป
มัธยมศึกษาปีที่ ๑	๓๐	๑๐	๓๓.๓๓
มัธยมศึกษาปีที่ ๒	๓๐	๑๗	๕๖.๖๗
มัธยมศึกษาปีที่ ๓	๓๐	๒๙	๙๖.๖๗
เฉลี่ยทั้งหมด	๓๐	๑๘.๖๗	๖๒.๒๓

จากตาราง ๒ แสดงให้เห็นว่า

๑. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป มีจำนวน ๑๐ คน จากจำนวนนักเรียนทั้งหมด ๓๐ คน แสดงว่าจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปในชั้นนี้ เท่ากับ ๓๓.๓๓ %

๒. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปมีจำนวน ๑๗ คน จากจำนวนนักเรียนทั้งหมด ๓๐ คน แสดงว่าจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปในชั้นนี้ เท่ากับ ๕๖.๖๗ %

๓. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม ที่ทำคะแนนได้ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปมีจำนวน ๒๙ คน แสดงว่าจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปในชั้นนี้เท่ากับ ๙๖.๖๗ %

ซึ่งสรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป มีจำนวนต่ำกว่า ๕๐ % ของจำนวนนักเรียนในชั้น ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สามที่ได้คะแนนจากการ

ทดสอบตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป มีจำนวนมากกว่า ๕๐ % ของจำนวนนักเรียนในชั้น

จากการาง ๑ และ ๒ สรุปได้ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สาม มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๓. การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่สาม โดยใช้วิธีวิเคราะห์แบบวันเวย์ (One Way Analysis of Variance) ปรากฏผลดังแสดงไว้ในตาราง ๓

ตาราง ๓ แสดงผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนจากแบบทดสอบ

Source of Variation	df	SS	MS	F
Between	2	784.25	392.125	22.758*
Error	87	1499.04	17.230	
Total	89	2283.29	-	

* มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑

จากตาราง ๓ แสดงให้เห็นว่าความแปรปรวน (Variance) ของคะแนนจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่สาม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับความเชื่อมั่น ๙๙ % ($F = 22.758$) หมายความว่า ความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่ ๓ แต่ละชั้นแตกต่างกัน

๔. การวิเคราะห์ค่าที (t-test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนแต่ละชั้น ที่ตะกั่ว ปรางค์ดงแสดงไว้ในตาราง ๔

ตาราง ๔ แสดงค่าที (t-test) จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนครึ่งละสองชั้น

ระดับชั้น	มัธยมศึกษาปีที่ ๑	มัธยมศึกษาปีที่ ๒	มัธยมศึกษาปีที่ ๓
มัธยมศึกษาปีที่ ๑	—	๑.๘๐๗	๕.๗๕๒ *
มัธยมศึกษาปีที่ ๒	—	—	๔.๖๘๘ *

* มีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑

จากตาราง ๔ แสดงให้เห็นว่า

๑. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และถ้าพิจารณาจากคะแนนเฉลี่ย จะพบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งเล็กน้อย จึงไม่ควรถือว่าความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนสองชั้นนี้แตกต่างกัน

๒. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑ แสดงว่าความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามสูงกว่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง

๓. คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง กับคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑ แสดงว่าความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามสูงกว่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง

* จึงสรุปได้ว่า ความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา

ศึกษาปีที่หนึ่งกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองไม่แตกต่างกัน หรืออยู่ในระดับเดียวกัน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามมีความสามารถในการเรียนเนื้อหาวิชาที่สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งและปีที่สอง

บทที่ ๕

บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายในการศึกษาค้นคว้า

๑. เพื่อศึกษาวรรณกรรมนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่
๒. เพื่อศึกษาวรรณกรรมนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นชั้นใด สามารถเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ดีที่สุด

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม ของโรงเรียนสิงหราชพิทยาคม อำเภอบางขุนเทียน กรุงเทพมหานคร จำนวนนักเรียนชั้นละ ๓๐ คน รวมจำนวนนักเรียนที่ใช้ในการวิจัยทั้งหมด ๙๐ คน

การเลือกกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยใช้วิธีสุ่ม (Random Sampling)

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

๑. เนื้อหาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นประกอบด้วยหัวข้อที่สำคัญ รวม ๔ หัวข้อ คือ การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ ส่วนประกอบของระบบคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ และแบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์ และตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์ขนาดจำกัด

๒. แบบทดสอบสำหรับวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ จำนวน ๔๐ ข้อ กำหนดเวลาทดสอบ ๑ ชั่วโมง มีความยากง่ายเฉลี่ยเท่ากับ ๐.๔๕๗ อำนาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ ๐.๐๔๕ ความยากง่ายมาตรฐานเฉลี่ยเท่ากับ ๑๓.๔๕ ความเชื่อมั่นเท่ากับ ๐.๙๐ และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ ๒.๘๗

การดำเนินการทดลอง

๑. ทดลองสอนเนื้อหาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยในปลายภาคเรียนที่ ๓ ปีการศึกษา ๒๕๑๗ ผู้วิจัยเป็นผู้สอนโดยใช้วิธีสอนแบบเดียวกัน และใช้

เวลานั้นละ ๕ ชั่วโมงเท่ากัน

๒. ทดสอบนักเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัยเมื่อทดลองสอนเนื้อหาครบแล้ว ภาย
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยสอบพร้อมกัน ใช้เวลาในการ
ทดสอบ ๑ ชั่วโมงเท่ากัน

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลใช้วิธีการทางสถิติดังต่อไปนี้

๑. หาคะแนนเฉลี่ย (Mean) ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม
๒. หาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่ม
๓. วิเคราะห์ความแปรปรวน เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้ง
สามกลุ่ม โดยใช้ F-test
๔. ทดสอบความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยทีละ ๒ กลุ่ม โดยใช้ t-test

ผลการทดลอง

๑. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่สาม ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ได้คะแนนเฉลี่ย
จากการทดสอบเท่ากับ ๔๘.๐๖, ๒๐.๒๐ และ ๒๔.๕๖ คะแนนตามลำดับ จากคะแนนเต็ม ๔๐ คะแนน
ซึ่งคิดเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้เท่ากับ ๔๕.๑๕ %, ๕๐.๕๐ % และ ๖๑.๔๐ % ตามลำดับ จากผล
ดังกล่าวสรุปได้ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ได้คะแนนเฉลี่ยจากการทดสอบต่ำกว่า
๕๐ % ส่วนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สามได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่า ๕๐ %
๒. จำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่สาม ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการวิจัย ที่ทำ
คะแนนได้ตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปเท่ากับ ๑๐, ๑๗ และ ๒๔ คน ตามลำดับ จากจำนวนนักเรียนกลุ่ม
ตัวอย่างชั้นละ ๓๐ คน ซึ่งคิดเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ได้เท่ากับ ๓๓.๓๓ %, ๕๖.๖๗ % และ ๕๖.๖๗ %
ตามลำดับ จากผลดังกล่าวสรุปได้ว่านักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งที่ได้คะแนนจาก
การทดสอบตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป มีจำนวนไม่ถึงครึ่งหนึ่งของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มนั้น ส่วน
นักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สามที่ได้คะแนนจากการทดสอบสูงกว่า ๕๐ % มี
มากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนนักเรียนทั้งหมดในกลุ่มนั้น

๓. ผลการเปรียบเทียบคะแนนระหว่างกลุ่ม ปรากฏว่า

๓.๑ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามได้คะแนนเฉลี่ยสูงสุดคือ ๒๔.๘๖ คะแนน นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองได้คะแนนเฉลี่ย ๒๐.๒๐ คะแนน และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งได้คะแนนเฉลี่ยต่ำสุด คือ ๑๘.๐๖ คะแนน แสดงว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนสูงขึ้นหรือต่ำลงโดยสัมพันธ์กับระดับชั้น

๓.๒ คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑ แต่คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑ และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สอง อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ณ ระดับ .๐๑ เช่นกัน

สรุปผลของการศึกษาครั้งนี้

๑. ผู้วิจัยตั้งเกณฑ์ไว้ว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นใดสามารถทำคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไป และนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ ๕๐ % ขึ้นไปในกลุ่มตัวอย่างนั้นมีจำนวนไม่มากกว่าครึ่งหนึ่ง ถือว่านักเรียนชั้นนั้นมีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ผลการทดลองสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สาม มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และจากการ เปรียบเทียบคะแนนระหว่างชั้น ปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองมีความสามารถอยู่ในระดับเดียวกัน แต่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามมีความสามารถในการเรียน เนื้อหาวิชาที่สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งและปีที่สอง

๒. ผู้วิจัยตั้งเกณฑ์สำหรับตัดสินว่า ควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใด ดังต่อไปนี้

ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสามชั้นเป็นกลุ่ม ก. กลุ่ม ข. และกลุ่ม ค.

๒.๑ ถ้ากลุ่ม ก. ได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ข. และ ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ถือว่า ควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่สี่กลุ่ม ก. เป็นตัวแทน

๒.๒ ถ้ากลุ่ม ก. และ ข. ได้คะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่ม ค. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ แต่คะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ก. ไม่แตกต่างจากคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม ข. อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และ กลุ่ม ข. เป็นกลุ่มนักเรียนชั้นที่ต่ำกว่ากลุ่ม ก. ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่สี่กลุ่ม ข. เป็นตัวแทน

๒.๓ ถ้ากลุ่ม ก., ข. และ ค. ได้คะแนนเฉลี่ยไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และกลุ่ม ก. เป็นกลุ่มของนักเรียนในชั้นที่ต่ำที่สุด ถือว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในชั้นที่สี่กลุ่ม ก. เป็นตัวแทน

อนึ่ง ในการสรุปว่าควรสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นใดนั้น จะถือเกณฑ์กล่าวไว้ในข้อ ๑. ประกอบด้วย

ผลการทดลองสรุปได้ว่าควร เริ่มสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม

อภิปรายผล

๑. ผลการทดลองสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งได้คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ ๔๕.๑๕ % นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองได้คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ ๕๐.๕๐ % และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามได้คะแนนเฉลี่ย ๖๑.๕๐ % นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามได้คะแนนเฉลี่ยสูงสุด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามมีประสบการณ์และพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง และปีที่สอง โดยเฉพาะด้านการพิสูจน์ อีกประการหนึ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามกำลังอยู่ในระยะที่ควรเตรียมตัวสอบเพื่อให้จบหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น และเตรียมตัวสอบคัดเลือกเพื่อศึกษาต่อ ดังนั้นนักเรียนในชั้นนี้จึงอาจมีโอกาสร่ำรวยหรือทบทวนความรู้ที่ได้เรียนมาแล้วมากกว่านักเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งและปีที่สอง ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่สามจึงสูงกว่าของนักเรียนอีกสองชั้น

ขอสรุปที่ว่า ควรเริ่มสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม สอดคล้องกับความคิดเห็นของแอดเลอร์ (Adler, 1968 : 229) ที่ว่า ควรจะเน้นการให้เหตุผลแบบอนุมาน

โดยอ้างอิงจากสัจพจน์ในการสอนวิชาเรขาคณิตในเกรด ๑๐ ซึ่งเทียบเท่าชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม และสอดคล้องกับความคิดเห็นของนักคณิตศาสตร์หลายคนที่ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ควรเปลี่ยนแปลงจากรูปธรรมเป็นนามธรรมเร็วเกินไป ควรรอให้นักเรียนมีโอกาสรวบรวมความรู้ทางรูปธรรมให้ไดกว้างพอเสียก่อน (UNESCO, 1966 : 33)

๒. ผลการทดลองปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ

๒.๑ เนื้อหาที่สอนอาจเป็นของใหม่และยากเกินไปสำหรับนักเรียนชั้นนี้

๒.๒ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่ง ยังมีความรู้พื้นฐานโดยเฉพาะการพิสูจน์โดยวิธีอนุมานน้อยมาก ดังนั้นนักเรียนจึงอาจปรับตัวไม่ทัน อนึ่ง ความสนใจตลอดจนขอบเขตการรับรู้ของนักเรียนอาจจะยังไม่กว้างพอ ถ้าหากนักเรียนชั้นนี้ประสบการณทั้งทางความรู้รูปธรรมและการใช้เหตุผลอย่างง่าย ๆ มาแล้วอย่างกว้างขวาง อาจจะเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้

๒.๓ ลักษณะของกลุ่มตัวอย่างในชั้นมัธยมศึกษาปีที่หนึ่งแตกต่างจากนักเรียนกลุ่มตัวอย่างอีกสองชั้น กล่าวคือ กลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มนักเรียนรอบบาย ส่วนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่สองและปีที่สามเป็นนักเรียนที่เรียนเต็มวัน

๓. ผลของการวิเคราะห์ข้อมูลครั้งนี้อาจมีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากสาเหตุหลายประการ เช่น

๓.๑ เนื้อหาที่สอนไม่ได้เป็นเนื้อหาที่กำหนดไว้ในหลักสูตรโดยตรง จึงไม่ทำให้นักเรียนเกิดแรงจูงใจในการเรียนเท่าที่ควร

๓.๒ วิธีสอนที่ผู้วิจัยใช้สอนแตกต่างจากวิธีสอนของครูส่วนใหญ่ในปัจจุบัน กล่าวคือ ผู้วิจัยพยายามส่งเสริมให้นักเรียนมีโอกาสได้รวมในกิจกรรมการเรียนการสอนมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ซึ่งการสอนคณิตศาสตร์ตามปกติของครูมิได้เน้นในเรื่องนี้ หากนักเรียนเคยชินกับวิธีการสอนเช่นนี้มาแล้ว ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนคงจะสูงกวานี้

๓.๓ แบบทดสอบที่สร้างขึ้นสำหรับการวิจัยครั้งนี้อาจไม่ได้มาตรฐานเท่าที่ควร กล่าวคือ มีความเชื่อมั่นเท่ากับ ๐.๗๖ อ่านาจจำแนกเฉลี่ยเท่ากับ ๐.๔๐๕ และมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ ๒.๔๓ หากปรับปรุงให้แบบทดสอบมีความเชื่อมั่นและอ่านาจจำแนกสูงกวานี้ และ

ซักถามคลาเคลื่อมากรฐานในการวัดดังกล่าวให้หมดไป หรือให้เหลือน้อยที่สุด จะทำให้ผลการวิจัยสมบูรณ์ขึ้น

๓.๔ สาเหตุอื่น ๆ เช่น การจัดการเรียนไม่เหมาะสม มีบางครั้งที่มีนักเรียนต้องเรียนสองชั่วโมงติดต่อกัน และนักเรียนในบางห้องต้องเรียนในเวลาบ่ายหรือหลังจากที่เพิ่งรับประทานอาหารเสร็จ เป็นต้น นอกจากนี้จำนวนชั่วโมงที่ใช้เรียนอาจจะน้อยเกินไป และการที่นักเรียนต้องเรียนเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพิ่มเติมจากเนื้อหาที่โรงเรียนอยู่แล้ว อาจเป็นภาระที่หนักเกินไปสำหรับนักเรียนในระดับนี้

ข้อเสนอแนะ

ก. สำหรับการปรับปรุงหลักสูตรและส่งเสริมการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

๑. ควรบรรจุเนื้อหาเกี่ยวกับ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ไว้ในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นเรื่องกว้าง ๆ ที่ครอบคลุมความคิดหลักและเป็นความรู้พื้นฐานที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ตลอดจนวิชาอื่น ๆ ที่อาศัยหลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์

๒. ผู้ที่เกี่ยวข้องในวงการศึกษาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะครูผู้สอนคณิตศาสตร์ ควรปรับตัวให้ทันกับพัฒนาการของความรู้ทางคณิตศาสตร์และวิทยาการสาขาต่าง ๆ ซึ่งขยายตัวอย่างรวดเร็วและกว้างขวาง เพื่อให้สามารถปรับปรุงวิธีการสอนตลอดจนเนื้อหาที่จะใช้สอนให้มีประสิทธิภาพ นอกจากนี้หน่วยงานต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ และสถาบันอุดมศึกษาควรมีส่วนช่วยเหลือครูในเรื่องนี้ด้วย ซึ่งอาจทำได้หลายทาง เช่น ทำการวิจัยเพื่อคิดค้นเทคนิคการสอนใหม่ ๆ และเผยแพร่ความรู้ในด้านเนื้อหาวิชาให้แก่ครู เป็นต้น

ข. สำหรับการศึกษาคนกว่าต่อไป

๑. ควรจะได้มีการทดลองเรื่องนี้ซ้ำอีก ให้กว้างขวางเพื่อได้ผลที่แน่นอนยิ่งขึ้น

๒. ควรทดลองสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาตอนปลายเพื่อหาข้อสรุปว่าควรบรรจุเนื้อหาเกี่ยวกับ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรระดับชั้นใด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

การฝึกหัดครู, กรม เอกสารสัมมนาผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง ระดับ
วิทยาลัยครู ๒๕๐๘, หน้า ๓ - ๔.

ชอเยอร์, คัมเบิลยู. คัมเบิลยู. คณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ พร้อม วานิชศักดิ์ แปล สภาวิจัยแห่งชาติ
๒๕๑๐, ๓๑๐ หน้า.

ทัศนีย์ อ่องไพฑูริย์, ร.ต.หญิง "การสืบทอดปัญหาที่เป็นอุปสรรคในการเรียนจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ศึกษาของโรงเรียนรัฐบาล" การวิจัยการศึกษา ๔ : ๑๔ สิงหาคม ๒๕๑๓.

พจน์ สะเพียรชัย หลักเบื้องต้นสำหรับการวิจัยทางการศึกษา เล่ม ๑ วิทยาลัยวิชาการศึกษา
ประสานมิตร พิมพ์โรเนียว ๒๕๑๖, ๑๗๑ หน้า.

พนัส หันมาภิรินทร์ วิธีสอนคณิตศาสตร์ ตำราวิชาครูครูมัธยมของคุรุสภา วิชาคณิตศาสตร์ โรงพิมพ์
คุรุสภา ม.ป.ป., ๑๕๗ หน้า.

พายัพ นุปผาคำ ทัศนคติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๑ ต่อวิชาเรขาคณิต วิทยานิพนธ์ครุศาสตร์
บัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ๒๕๐๔, ๘๖ หน้า.

วิชาการศึกษา, คณะ, วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร การมัธยมศึกษา โรงพิมพ์มิตรสยาม
๒๕๑๓, ๒๐๓ หน้า.

วิรุฬห์ บุญสมบัติ โน้ตวิชาคณิตศาสตร์ ๑๐๑ ตอนที่ ๑ แผนกคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
๒๕๑๐, ๑๐๖ หน้า.

ศึกษาธิการ, กระทรวง กรมวิชาการ รายงานการสัมมนาครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา แผนก
การพิมพ์วิทยาลัยครูสวนสุนันทา ๒๕๐๘, ๑๐๔ หน้า.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี การสัมมนาวิชาคณิตศาสตร์ ระหว่างวันที่ ๑๕ - ๒๒ พฤษภาคม ๒๕๑๕ โรงพิมพ์คุรุสภา ๒๕๑๖, ๑๖๒ หน้า.

สุชาติ รัตนกุล คณิตศาสตร์แบบปัจจุบัน เล่ม ๒ พิมพ์ครั้งที่ ๒ โรงพิมพ์คุรุสภา ๒๕๑๖, ๑๑๘ หน้า.

สุชาติ รัตนกุล วิธีสอนคณิตศาสตร์ ตำราวิชาชุดครูประกาศนียบัตรวิชาการศึกษา โรงพิมพ์คุรุสภา ๒๕๑๕, ๑๘๕ หน้า.

สุวรรณก มุ่งเกษม พัฒนาการของการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา ปรินฤพานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร ๒๕๑๓, ๑๙๓ หน้า.

สุเทพ จันทรมัสศักดิ์ ตรรกวิทยาเบื้องต้น พิมพ์ครั้งที่ ๒ โรงพิมพ์ศึกษาสัมพันธ์ ๒๕๑๖, ๘๖ หน้า.

สุเทพ จันทรมัสศักดิ์ "เรขาคณิตสมัยแรกเริ่ม" วารสารคณิตศาสตร์ ๑๖๔ - ๑๖๕ : ๓๓ - ๓๕ มกราคม - กุมภาพันธ์ ๒๕๑๕.

อำพล ชรรณเจริญ การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ปรินฤพานิพนธ์ กศ.ม. วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร ๒๕๑๖, ๘๖ หน้า.

Adler, Irving, "The Cambridge Conference Report . Blue Print Or Fantasy?", The Mathematics Teacher 59 : 210-217, March, 1966.

Adler, Irving, "Mental Growth and Art of Teaching", The Mathematics Teacher 59 : 707-715, December, 1966.

Adler, Irving, "What Shall We Teach in High School Geometry ?", The Mathematics Teacher 61 : 226-238, March, 1968.

Alberty, Elsie J., "Mathematics in General Education", The Mathematics Teacher 59 : 428, May, 1966.

Allendoerfer, Carl B., "Deductive Methods in Mathematics" in Insights into Modern Mathematics, pp.65-99, 23rd Yearbook, NCTM., Inc., Washington D.C., 1957.

Anastasi, Anne, Psychological Testing, 2nd Edition, The Macmillan Company, New York, 1961, 657 pp.

- Avishalom, Dov Isaachar, "The Axiomatic Processes in the Foundations of Geometry and Their Translation into Reality and Education", Dissertation Abstracts 28 : 255-B, July, 1967.
- Becker, Gerald Anthony, "The Development and Organization of Teaching Materials in a Collegiate Mathematics Program for Students of Non-Physical Sciences", Dissertation Abstract 20 : 4119, April, 1960.
- Bell, Max S., "What does "Everyman" Really Need from School Mathematics?", The Mathematics Teacher 63 : 196-202, March, 1974.
- Carney, James D., Introduction to Symbolic Logic, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970, 252 pp.
- Chicago, University, College, Concepts and Structure of Mathematics, The University of Chicago Press, 1954, 429 pp.
- Deer, George Wendell, "The Effects of Teaching an Explicit Unit in Logic on Students' Ability to Prove Theorems in Geometry", Dissertation Abstracts 30 : 2284-B, November, 1969.
- Eves, Howard, A Survey of Geometry, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1952, 422 pp.
- Fan, Chung-Teh, Item Analysis Table, Educational Testing Service, Princeton, New Jersey, 1952, 32 pp.
- Freud, John E., Mathematical Statistics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1962, 390 pp.
- Fujii, John N., An Introduction to the Element of Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961, 312 pp.
- Ferguson, George A., Statistical Analysis in Psychology and Education, McGraw-Hill, New York, 1966, 446 pp.
- Garrett, Henry E., Statistics in Psychology and Education, Longman Green and Co., New York, 1958, 478 pp.
- Glennon, Vencent J., "Enrichment for the Elementary Grades", in Enrichment Mathematics for the Grades, pp.19 - 40, 27th Yearbook, N.C T M , Inc., Washington D.C., 1963.
- Grossman, Anne Shirley, "Finite Geometries", Dissertation Abstracts 27 : 3181-B, January-March, 1967.
- Gulliksen, Harold, Theory of Mental Test, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950, 486 pp.

- Hallerberg, Arthur E., "A Form of Proof", The Mathematics Teacher 64 : 201-213, March, 1971.
- Keedy, Mervin L., A Modern Introduction to Basic Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963, 326 pp.
- Kinsella, John J., Secondary School Mathematics, The Center for Applied Research in Education, Inc., New York, 1965, 116 pp.
- Kirkpatrick, Joan Elizabeth, "The Use of Finite Mathematical Systems to Achieve Selected Mathematics Objectives in Grade Six", Dissertation Abstracts 32 : 306-A, July, 1971.
- Kneebone, K.T., Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics, D. Van Nostrand Company Limited, London, 1963, 435 pp.
- Krygowska, A.Z., "Treatment of the Axiomatic Method in Class" in Teaching School Mathematics, pp.124-150, Penguin Books-Unesco, edited by W. Servais and T. Varga, Penguin Education, 1971.
- Lane, William, "Abstract Mathematics for Upside-Down Readers", in Enrichment Mathematics for High School, pp.141-149, 28th Yearbook, N C T M , Inc., Washington D.C., 1963.
- Langford, Francis G., Jr., "Practical Mathematics Is Challenging to Student", The Mathematics Teacher 48:401-405, October, 1955.
- Langford, Francis G., "A Logical Beginning for High School Geometry", The Mathematics Teacher 50:462-463, October, 1957.
- Myers, Robert Harold, Jr., "The Role of the Axiomatic Method in Secondary School Mathematics" Dissertation Abstracts 32:665-A, August, 1971.
- N.C.T M., "The Secondary Mathematics Curriculum", The Mathematics Teacher 52:389-417, May, 1959.
- Newsom, Carrall V., Mathematical Discourse, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964, 121 pp.
- O' Brien, Katharine E., editor, Successful Devices in Teaching Geometry, J. Weston Walch, Publisher, Portland, Maine, 1955, 165 pp.
- Oppen, P. Sylvia, Intellectual Development in Thai Children, Doctor's Thesis, Faculty of the Graduate School, Cornell University, Cornell, 1971, 325 pp.
- Springer, C.E., "The Meaning of Mathematics", The Mathematics Teaching 48:453-459, October, 1955.

- Stabler, E.R., An Introduction to Mathematical Thought, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1953, 268 pp.
- Swain, Robert L., "Logic : for Teacher, for Pupil" in Enrichment Mathematics for the Grades, pp.282-301, 27th yearbook, N C T M , Inc., Washington D.C., 1963.
- UNESCO, New Trends in Mathematics Teaching, Vol.1, The International Commission of Mathematical Instruction, 1966, 438 pp.
- UNESCO, The Teaching of Mathematics at Secondary Level, Department of School and Higher Education, UNESCO, Place de Fontenoy, Paris, 1965, 442 pp.
- Wilder, Raymond L., Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1965, 327 pp.
- Wiseman, John D., Jr., "A Logical Beginning for High School Geometry", Mathematics Teacher, 50:161-162, October, 1957.
- Bloom, Benjamin S., Hastings, J.Thomas, and Madaus, George F., Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1971, 923 pp.
- Butler, Charles H., and Wren, F.Lynwood, The Teaching of Secondary Mathematics, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960, 624 pp.
- Courant, Richard and Robbins, Herbert, What Is Mathematics?, Oxford University Press, 9th printed, 1958, 521 pp.
- Eves, Howard, and Newsom, Carroll V., An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, 1958, 363 pp.
- Hall, H.S., and Stevens, F.H., A School Geometry, Thai Watana Panich, Bangkok, 1966, 442 pp.
- Kinney, Lucien Blair, and Purdy, C.Richard, Teaching Mathematics in the Secondary School, Rinehart & Company, Inc., New York, 1952, 381 pp.
- Sterling, Theodor D., and Pollack, Seymour V., Introduction to Statistical Data Processing, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1968, 663 pp.
- Bundrick, Charles M., Frazier, Robert C., and Gerber, Homer C., "Developing a Finite Geometry : A Math Club Approach", The Mathematics Teacher 63:487-492, October, 1970.

UNESCO, UNICEF, and CEDO, Asian Expert Seminar on the Development of Science and Mathematics Concepts in Children, 29 May-10 June 1972, Final Report, Unesco Regional Office for Education in Asia, Bangkok, 102 pp.

ภาคผนวก ก.

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการ เรีนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

- (1) ข้อทดสอบทั้งหมดมี 40 ข้อ แต่ละข้อมีคำตอบที่เหมาะสมที่สุดเพียงคำตอบเดียว
- (2) นักเรียนเลือกคำตอบข้อใด ให้กาเครื่องหมาย $\times$ หั้วตัวอักษรที่กำกับคำตอบนั้น ในแผ่นกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

- ๐ ในขณะนี้จังหวัดใดในประเทศไทย มีพลเมืองมากที่สุด
- ก. เชียงใหม่
 - ข. นครราชสีมา
 - ค. กรุงเทพมหานคร
 - ง. นครปฐม
 - จ. สงขลา

คำตอบที่ถูกต้อง คือ กรุงเทพมหานคร ดังนั้นนักเรียนต้องกาเครื่องหมาย $\times$ ในกระดาษคำตอบ ดังนี้

- ๐ ก ข $\times$ ง จ
- (3) เวลาในการทำแบบทดสอบ 1 ชั่วโมง

พิชاجر แปลงประสพโชค

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

4. ข้อใดใช้วิธีอุปมาน (induction)

- ก. ร่างของเขายาวใหญ่โตราวกับยักษ์ปักหลั่น
- ข. เขาทำเช่นนั้น เหมือนกับฆ่าตัวเองซัก ๆ
- ค. งูทุกตัวไม่มีขา
- ง. จำนวนคู่ ทุกจำนวน เป็นจำนวนเต็ม
- จ. ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 จะเป็นจำนวนคู่ด้วย

5. ข้อใดใช้การให้เหตุผลแบบอุปมาน

- ก. ผลไม้ทุกชนิดเป็นงู งูทุกชนิดเป็นอาหาร ดังนั้น ผลไม้ทุกชนิดเป็นอาหาร
- ข. การสรุปผลจากการสังเกตทดลอง
- ค. การสรุปผลโดยอ้างอิงจากสมมุติฐานที่ตั้งไว้
- ง. ข้อ ก. และ ค.
- จ. ข้อ ข. และ ค.

6. ให้นักเรียนสำรวจว่าตั้งแต่ a ถึง o ข้อความใดที่เป็นลักษณะผลสรุปจากการอุปมาน

- a เป็นจริงเสมอไม่มีการเปลี่ยนแปลง
- b เป็นจริง หากว่าเหตุหรือสมมุติฐานเป็นจริง
- c สรุปไม่ได้ว่าเป็นจริงเสมอไป เพราะไม่ได้สรุปจากข้อมูลทั้งหมด
- d น่าจะเป็นจริง เพราะข้อมูลต่าง ๆ ที่ได้จากการสังเกตทดลองให้ผลอย่างนั้นเหมือนกัน
- o ไม่จริง เป็นการเทียบเคียงเท่านั้น

- ก. ข้อ a
- ข. ข้อ a และ b
- ค. ข้อ b และ c
- ง. ข้อ c และ d
- จ. ข้อ c และ o

7. ลักษณะทางนามธรรม คือข้อใด

- ก. เป็นเรื่องที่ยากแก่การเข้าใจ
- ข. เป็นเรื่องลึกซึ้ง
- ค. เป็นเรื่องกว้าง ๆ เกิดจากกระบวนการละเอียดองค์ประกอบที่ไม่สำคัญ
- ง. เป็นเรื่องที่อยู่ใมนภาพของมนุษย์ เกิดจากเรื่องราวต่าง ๆ ที่มนุษย์ได้ผ่านมาแล้ว
- จ. เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับศาสนา ปรัชญา และคณิตศาสตร์

8. ระบบคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ประกอบด้วยอะไรบ้าง

- ก. คำนิยาม สิ่งที่เกิดขึ้นจริงแล้ว สัจพจน์ และทฤษฎีบท
- ข. คำนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท
- ค. สัจพจน์ การพิสูจน์ต่าง ๆ และบทสร้าง
- ง. วิชาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ที่เรานำมาแยกเป็นหมวดหมู่ใหม่ตามวิธีการศึกษาปัจจุบัน
- จ. สิ่งที่เกิดขึ้นจริงแล้ว สัจพจน์ ทฤษฎีบท บทแทรก และบทสร้าง

9. สัจพจน์ (postulates หรือ axioms) หมายถึงข้อใด

- ก. สิ่งที่เป็นจริงในวิชาเรขาคณิตซึ่งนักคณิตศาสตร์ได้กำหนดขึ้น
- ข. สิ่งที่ทุกคนยอมรับโดยทั่ว ๆ ไปว่าเป็นจริง
- ค. สิ่งที่เกิดขึ้นแล้ว
- ง. ข้อความหรือสมมุติฐานที่เรายอมรับโดยไม่มี การพิสูจน์เพื่อใช้เป็นที่ยึดอิงในการหาความรู้หรือพิสูจน์ข้อความในระบบคณิตศาสตร์
- จ. ข้อความหรือหลักเกณฑ์ต่าง ๆ ซึ่งนักคณิตศาสตร์โดยทั่วไปเห็นพ้องต้องกันให้ใช้เป็นที่ยึดอิงในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ

10. อนิยาม (undefined terms) หมายถึงข้อใด

- ก. ศัพท์หรือข้อความที่เรากำหนดความหมายหรือให้คำจำกัดความ
- ข. ศัพท์พื้นฐานในระบบคณิตศาสตร์ซึ่งเราใช้ในการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกระบบ
- ค. ศัพท์พื้นฐานในระบบคณิตศาสตร์ซึ่งเราไม่กำหนดความหมาย
- ง. ศัพท์พื้นฐานในระบบคณิตศาสตร์ซึ่งเราต้องตีความให้เข้าใจ แม้ว่าจะไม่มีการให้คำนิยาม
- จ. ศัพท์ในระบบคณิตศาสตร์ซึ่งเราต้องให้ความหมายเองได้

11. ข้อใดต่อไปนี้ ถือเป็นกรให้คำนิยามได้

- ก. กระจก คือ สัตว์สี่เท้าที่มีหางเป็นพวง
- ข. กรุงเทพฯ คือ เมืองหลวงของประเทศไทยในปัจจุบัน
- ค. เงิน หมายถึง โลหะที่มีค่าชนิดหนึ่ง
- ง. ทอง หมายถึง โลหะที่มีค่าที่ไม่ใช่เงิน
- จ. กุหลาบ คือ ดอกไม้ชนิดหนึ่ง มีกลิ่นหอม มีหลายสี

12. คำใดที่เราสามารถให้คำนิยามได้

- ก. สีเหลือง
- ข. ความกลม
- ค. จุก
- ง. สามเหลี่ยม
- จ. เส้น

13. ในการศึกษาคณิตศาสตร์นั้น หลักที่พึงยึดถือคือข้อใด

- ก. เราต้องยอมรับนิยามที่มีอยู่ ไม่ควรด่วนสร้างนิยามในภาพเอาเอง
- ข. เราไม่จำเป็นต้องยอมรับนิยามที่มีอยู่ก็ได้ ควรถือเอาความเข้าใจของเราเองเป็นหลัก
- ค. หากเราเข้าใจแล้วก็ไม่จำเป็นต้องใช้นิยาม แต่ถ้าเรายังไม่เข้าใจต้องใช้นิยามที่มีอยู่
- ง. นิยามที่มีอยู่ ยากแก่การเข้าใจควรสร้างนิยามขึ้นมาเองใหม่
- จ. ข้อ ก. และ ง.

14. เราสามารถให้นิยามโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ โครงสร้างใดโครงสร้างหนึ่งโดยใช้อะไร

ก. ระบบสัจพจน์

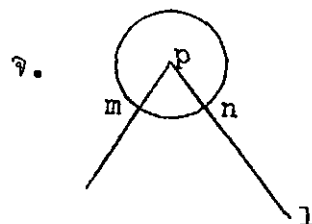
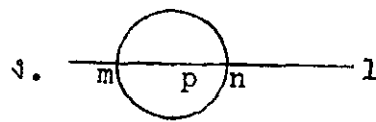
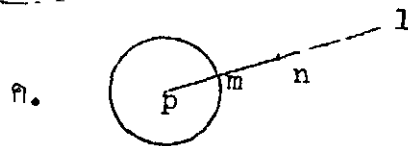
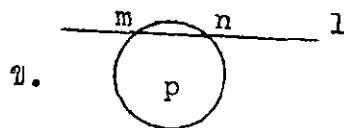
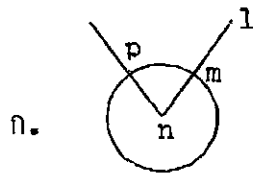
ข. (อนิยาม

ค. นิยาม

ง. สัจพจน์

จ. ทฤษฎีบท

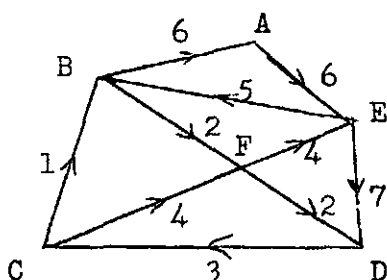
15. เส้นตรง l ตัดวงกลมวงหนึ่ง (ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง p) ที่จุด m และ n ระยะ m ถึง n เท่ากับรัศมีของวงกลมวงนี้ รูปใดเป็นรูปที่ถูกต้อง



คำชี้แจง

นิยาม จุดคู่ หมายถึงจุดที่มีเส้นแยกออกไปเป็นจำนวนคู่ เช่น จุดที่มีเส้นแยกออกไป 2 เส้น, 4 เส้น ฯลฯ เป็นจุดคู่

นิยาม จุดคี่ หมายถึงจุดที่มีเส้นแยกออกไปเป็นจำนวนคี่ เช่น จุดที่มีเส้นแยกออกไป 1 เส้น, 3 เส้น, 5 เส้น ฯลฯ เป็นจุดคี่



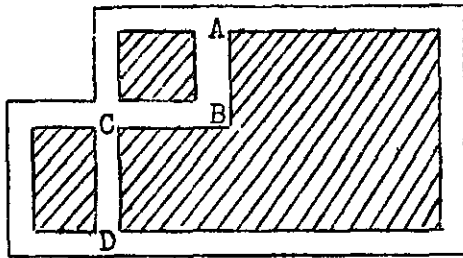
รูปนี้ มีจุดคู่ 4 จุด มีจุดคี่ 2 จุด นักเรียนสามารถใช้จินตนาการไปตามเส้นโดยไม่ต้องยกดินสอและไม่ซ้ำกับเส้นเดิมที่ลากไปแล้วได้ ลองเริ่มที่จุด C ไปตามหมายเลข 1 ถึงจุด B ไปตามหมายเลข 2 ผ่านจุด F ถึงจุด D ไปตามหมายเลข 3 ถึงจุด C ไปตามหมายเลข 4 ผ่านจุด F ถึงจุด E ไปตามหมายเลข 5 ถึงจุด B ไปตามหมายเลข 6 ผ่านจุด A ถึงจุด E ไปตามหมายเลข 7 ถึงจุด D เป็นอันเสร็จ

นักเรียนอาจเริ่มที่จุดอื่น ๆ หรือลากไปทางอื่น อาจทำได้เหมือนกันสำหรับบางจุด

มีทฤษฎีบทเกี่ยวกับเรื่องนี้ว่า ถ้ารูปใดมีจำนวนจุดคี่ไม่เกินสองจุดแล้ว เราจะสามารถลากเส้นผ่านเส้นทุกเส้นโดยไม่ต้องยกดินสอและไม่ซ้ำรอยเดิมได้ แต่ถ้ามีจุดคี่มากกว่า 2 จุดแล้ว เราไม่สามารถทำเช่นนั้นได้

วงตอบคำถามต่อไปนี้

16. ถ้าต้องการเดินผ่านถนนทุกสายทั้งรูป คนที่จู่ใจจะเหนื่อยน้อยที่สุดเมื่อเดินอย่างฉลาด ?



ก. A หรือ B

ข. A หรือ D

ค. B หรือ C

ง. A หรือ C

จ. จู่ใจก็ได้

คำชี้แจง นักเรียนรู้จักเครื่องหมาย " $>$ " (มากกว่า), " $<$ " (น้อยกว่า) มาแล้วเป็นอย่างดี เรานิยามเครื่องหมาย " $<$ " ว่าดังนี้

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง $a < b$ หมายความว่า a มีจำนวนจริงบวก, c ซึ่ง $a + c = b$

ตัวอย่างเช่น $2 < 5$ เพราะมีจำนวนจริงบวก 3 ซึ่ง $2 + 3 = 5$

17. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว คุณสมบัติข้อใดถูกต้อง

ก. $a + c < b + d$

ข. $a + b < c + d$

ค. $a + d < b + c$

ง. $b + d < a + c$

จ. ไม่มีข้อถูก

18. เราจะให้นิยาม " $>$ " โดยมีแบบอย่างทำนองเดียวกับนิยามของ " $<$ " ว่าอย่างไร

ก. $a > b$ หมายความว่า a มีจำนวนจริงบวก, c ซึ่ง $a + c = b$

ข. $a > b$ หมายความว่า a มีจำนวนจริงบวก, c ซึ่ง $a + b = c$

ค. $a > b$ หมายความว่า a มีจำนวนเต็มบวก, c ซึ่ง $a = b + c$

ง. $a > b$ หมายความว่า a มีจำนวนจริงบวก, c ซึ่ง $a = b + c$

จ. ถูกทั้งข้อ ก., ข. และ ค.

19. ถ้า aRb หมายความว่า มีจำนวนเต็ม, c ซึ่ง $a \neq c = b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง ?

ก. 5 R 3

ข. 3 R 5

ค. 4 R 2

ง. 2 R 4

จ. 6 R 8

คำชี้แจง ต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุมของห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า (regular pentagon) ย่อมยาวกว่าด้านหนึ่ง ๆ ของห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า นั้น ตามรูป

1. ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

2. $\hat{AED} > \hat{AEB}$

3. $\hat{AED} = \hat{A}$

4. $\hat{A} > \hat{AEB}$

5. $EB > AB$

6. $AB = BC = CD = DE = EA$

7. $EB > BC, EB > CD, EB > DE, EB > EA$

จงตอบคำถามข้อ 20 - 21

20. ข้อความในขั้นที่ 6 ของการพิสูจน์นี้เป็นผลมาจากข้อความในขั้นที่เท่าไร

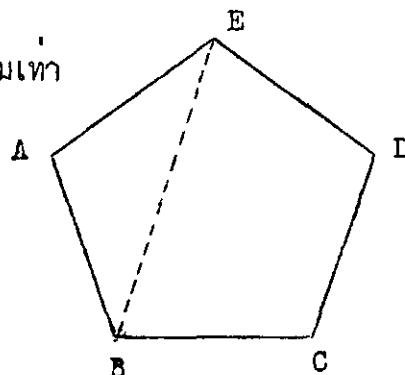
ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. 4

จ. 5



21. ข้อความในชั้นที่ 4 ของการพิสูจน์ ควรอ้างจากข้อความในชั้นที่เท่าไร

- ก. 1
- ข. 1 และ 2
- ค. 1 และ 3
- ง. 2 และ 3
- จ. 3

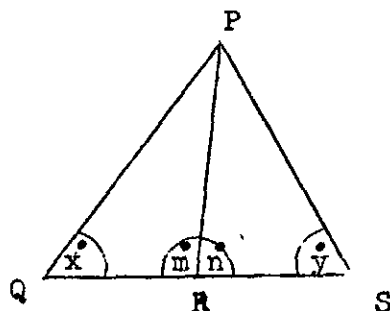
คำชี้แจง ในการพิสูจน์ต่อไปนี้ เราใช้ลูกศรแสดงแบบแผนของการพิสูจน์ในแต่ละตอน ถ้าเป็นแบบ (3) $\rightarrow$ (5) หมายความว่าเราใช้ข้อความ (3) อ้างในการสรุปข้อความ (5) และถ้าเป็นแบบ $\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \rightarrow (5)$ หมายความว่า การสรุปข้อความ (5) ต้องอาศัยข้อความ (2) และ (3) จะใช้แค่ข้อความ (2) หรือ (3) เพียงอย่างเดียว ไม่เพียงพอที่จะสรุปข้อความ (5) ได้ ในข้อ 22-23 ให้นักเรียนศึกษาแบบแผนของการพิสูจน์แล้วเลือกแบบแผนข้อที่ตรงกับกรพิสูจน์

22. กำหนดให้ สามเหลี่ยม QPS (กึ่งรูป) มี $QR = RS$ และ $m = n$

จะตองพิสูจน์ว่า $x = y$

ลำดับขั้นของการพิสูจน์ (เว้นเหตุผล)

- 1. $QR = RS$ และ $PR = PR$
- 2. $m = n$
- 3. $\triangle PRQ \cong \triangle PRS$
- 4. $x = y$



- ก. $\begin{matrix} (1) & & (2) \\ & \searrow & \searrow \\ & (3) & \rightarrow (4) \end{matrix}$

- ข. $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4)$

- ค. $(1) \rightarrow (3) \rightarrow (4)$

- ง. $\begin{matrix} (1) & & (2) \\ & \searrow & \searrow \\ & (3) & \rightarrow (4) \end{matrix}$

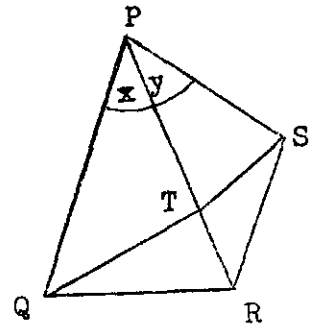
- จ. $\begin{matrix} & & (2) \\ & & \searrow \\ (1) & \rightarrow & (3) & \rightarrow & (4) \end{matrix}$

23. กำหนดให้ สามเหลี่ยม PQR และ PTS เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีมุมยอด P ร่วมกัน และ $\triangle PQR$ คล้ายกับ $\triangle PTS$, ซึ่ง QR สมัย (Correspond) กับ TS

จะพิสูจน์ว่า $QT = RS$

ลำดับขั้นตอนของการพิสูจน์ (เว้นเหตุผล)

1. $\triangle PQR$ และ $\triangle PTS$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีมุมยอดเป็น P
2. $\triangle PQR \sim \triangle PTS$ ซึ่ง QR สมัยกับ TS ($\sim$ แทน "คล้ายกับ")
3. $PQ = PR$ และ $PT = PS$
4. $x = y$
5. $\triangle PTQ \cong \triangle PSR$
6. $QT = RS$



ก. $(1) \rightarrow (3) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$
 $(2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$

ข. $(1) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$
 $(2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$

ค. $(1) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$
 $(3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$

ง. $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$
 $(3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$

จ. $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$
 $(4) \rightarrow (3) \rightarrow (5) \rightarrow (6)$

24. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้น มีแนวทางการพิสูจน์อย่างไร

- ก. เริ่มต้นจากเหตุไปสู่ผลเสมอ
- ข. อาจเริ่มด้วยการตั้งสมมุติฐานว่า ข้อความที่จะพิสูจน์ไม่จริงแล้วหาข้อขัดแย้งที่เป็นผลมาจากการตั้งสมมุติฐานนี้
- ค. อาจเริ่มด้วยการตั้งสมมุติฐานว่า เหตุเป็นเท็จ เพื่อสรุปว่าผลเป็นจริง
- ง. อาจพิสูจน์ข้อความที่มีความหมายเท่ากัน (ทางตรรกวิทยา) แทนได้
- จ. ขอ ข. และขอ ง.

25. บทแทรก (corollary) จัดอยู่ในจำพวกอะไร

- ก. สัจพจน์พิเศษ
- ข. สัจพจน์
- ค. นิยาม
- ง. ทฤษฎีบท
- จ. ข้อตกลงในการใช้สัญลักษณ์

26. หลักกว้าง ๆ ของการอนุมาน คือข้อใด

- ก. ถ้ากรณีย่อย ๆ เป็นจริงแล้ว กรณีทั่วไปย่อมเป็นจริง
- ข. ถ้า P เป็นจริง และ P ทำให้เกิดผลสรุป Q แล้ว Q ย่อมเป็นจริง
- ค. ถ้า P เป็นจริง และ Q ทำให้เกิดผลสรุป P Q ย่อมเป็นจริงด้วย
- ง. ถ้า P เป็นจริง และถ้า P เทียบเท่ากับ Q เราต้องพิสูจน์ Q แทนหากว่าพิสูจน์ P ได้ยาก
- จ. ขอ ข. และ ก.

27. ข้อความใดที่เป็น Contrapositive ของข้อความ"ถ้าฝนตก ฉันจะถือร่มไปรับเธอ" คือข้อใด

- ก. ถ้าฝนตก ฉันจะไม่ถือร่มไปรับเธอ
- ข. ถ้าฉันไม่ถือร่มไปรับเธอ แสดงว่าฝนไม่ตก
- ค. ถ้าฉันถือร่มไปรับเธอ แสดงว่าฝนตก
- ง. ถ้าฝนไม่ตก ฉันจะไม่ถือร่มไปรับเธอ
- จ. ถ้าฝนไม่ตก ฉันจะถือร่มไปรับเธอ

28. ข้อความใดที่เป็น Contrapositive ของข้อความ "ถ้าฝนตก ฉันจะไม่ไปโรงเรียน"

- ก. ถ้าฝนตก ฉันจะไปโรงเรียน
- ข. ถ้าฉันไปโรงเรียน แสดงว่าฝนไม่ตก
- ค. ถ้าฉันไม่ไปโรงเรียน แสดงว่าฝนตก
- ง. ถ้าฝนไม่ตกแล้ว ฉันจะไปโรงเรียน
- จ. ถ้าฝนไม่ตกแล้ว ฉันจะไม่ไปโรงเรียน

29. ประโยคแบบ (pattern sentence) ของ "มีจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วมากกว่าหนึ่ง" คือข้อใด

- ก. $x^2 > 1$
- ข. x เป็นจำนวนจริง
- ค. $x^2 = 1$
- ง. $a^2 > 1$
- จ. ข้อ ก. หรือ ง. ก็ได้

30. อะไรที่สอดคล้องกับประโยคแบบในข้อ 29 ?

- ก. x
- ข. -3
- ค. 1
- ง. -1
- จ. a

31. โดยเงื่อนไข x, y เป็นจำนวนเต็มบวก และ $3x + y = 5$ เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$x = 1$ และ $y = 2$ โดยวิธีใด

- ก. Proof of Existence
- ข. Disproof by Counterexample
- ค. Proof by Cases
- ง. Proof by Elimination
- จ. Proof by Enumeration

32. ถ้าจะเปรียบเทียบการศึกษาระบบคณิตศาสตร์กับการเล่นกีฬา กติกาของกีฬาเทียบได้กับอะไร

- ก. ोनินยาม
- ข. นินยาม
- ค. สัจพจน์
- ง. ทฤษฎีบท
- จ. บทแทรก

33. การศึกษาระบบคณิตศาสตร์และการเล่นเกมกีฬาเหมือนกันหรือไม่

- ก. ไม่มีส่วนเหมือนกันเลย
- ข. ไม่เหมือนกันตรงที่ในการเล่นเกมกีฬาจะไม่เกิดกติกาไม่ได้ แต่ผู้ศึกษาคณิตศาสตร์อาจจะเกิดกฎเกณฑ์ได้ในบางโอกาส
- ค. เหมือนกันตรงที่ผู้ศึกษาหรือผู้เล่น ต้องศึกษาตามกรอบหรือกฎเกณฑ์ที่วางไว้ จะละเมิดมิได้
- ง. เหมือนกันตรงที่ผู้ศึกษาหรือผู้เล่นต้องใช้ความพยายามและสมาธิอย่างมากเพื่อแก้ปัญหาหรือเอาชนะ
- จ. เหมือนกันที่การใช้ไหวพริบและการสังเกต

34. การสรุปความต่อไปนี้ ข้อใดผิด

- ก. ทุกวันศุกร์ที่บ้านฉันมีน้ำพริกผัดจิ้ม วันนั้นวันศุกร์ดังนั้นวันนี้มีน้ำพริกผัดจิ้ม
- ข. ถ้านักเรียนขยันแล้วย่อมสอบได้ แต่คนที่สอบได้บางคนอาจเกียจคร้าน
- ค. x มากกว่า y และ y มากกว่าหรือเท่ากับ z ดังนั้น x มากกว่า z
- ง. คอยอายุเกิน 18 ปี ค่อมอายุน้อยกว่า 14 ปี ดังนั้นค่อมมีอายุมากกว่าค้อม
- จ. ฉันแก่กว่าน้องชายของคุณ ฉันยอมแก่กว่าคุณ

พิจารณาระบบคณิตศาสตร์ระบบหนึ่ง แล้วตอบคำถามข้อ 35

นิยาม จุด, เส้น

(A₁) สัจพจน์ที่ 1 มีจุดอย่างน้อยสองจุด

(A₂) สัจพจน์ที่ 2 ถ้า p และ q เป็นจุด จะมีเส้นที่มี p และ q อยู่ เส้นเดียว

(A₃) สัจพจน์ที่ 3 ถ้า L เป็นเส้น จะมีจุดจุดหนึ่งไม่อยู่บน L

(D₁) นิยาม เส้น A กับ B จะขนานกันก็ต่อเมื่อ A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

(A₄) สัจพจน์ที่ 4 ถ้า L เป็นเส้น และ p เป็นจุดที่ไม่อยู่บน L จะมีเส้น M ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

1. p อยู่ใน M

2. M ขนานกับ L

เส้น M ดังกล่าวจะมีเพียงเส้นเดียว

(T₁) ทฤษฎีบทที่ 1 จุดแต่ละจุด เป็นสมาชิกของเส้นอย่างน้อย 2 เส้น

(T₂) ทฤษฎีบทที่ 2 เส้นแต่ละเส้นมีสมาชิกละอย่างน้อย 1 จุด

35. ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 เราต้องใช้สัจพจน์อะไรบ้างจึงจะเพียงพอ ?

ก. (A₂) และ (A₄)

ข. (A₁) และ (A₂) และ (A₃)

ค. (A₂) และ (A₃) และ (A₄)

ง. (A₃) และ (A₄) และ (A₁)

จ. (A₁) และ (A₂) และ (A₃) และ (A₄)

36. ข้อความใดต่อไปนี้ "ตอนหลังเป็นเหตุของตอนแรก"

ก. เส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางไปจรดเส้นรอบวงทั้งสองข้างเรียกว่าเส้นผ่าศูนย์กลาง
ดังนั้น เส้นผ่าศูนย์กลางจึงยาวเป็นสองเท่าของรัศมี

ข. ขนาดของมุมไม่ขึ้นกับความยาวของแขนของมุม ดังนั้น ขนาดของมุมซึ่งเกิดจากเข็มนาฬิกาข้อมือย่อมเล็กกว่าของนาฬิกาเข็มนาฬิกาในเวลาที่เดียวกัน

ค. เส้นตรงสองเส้น พกกันที่จุดจุดหนึ่ง มุมประชิดที่เกิดขึ้นมีขนาดรวมกันเป็น 180°

ง. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

จ. จะเขียนวงกลมได้ เมื่อกำหนดขนาดของรัศมีและจุดศูนย์กลาง

37. ข้อความในข้อ 36 ข้อใดที่ตอนหลังเป็นผลของตอนแรก

ก. ข้อ ก. และ ข. และ ง.

ข. ข้อ ก. และ ค. และ ง.

ค. ข้อ ข. และ ค. และ จ.

ง. ข้อ ค. และ ง. และ จ.

จ. ข้อ ข. และ จ.

38. $A = \{\star, \bigcirc, \square, \triangle, \text{รูปอื่น}\}$ เซต A กับ B มีลักษณะร่วมกันอย่างหนึ่ง เซต
 $B = \{\text{ก, ข, ค, ง, จ}\}$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่มีลักษณะร่วมกับเซต A และ B ?

ก. {ขนม, ข้าว, น้ำตาล, เนย}

ข. {2, 3, 4, 5, 6}

ค. { $\bigcirc, \odot, \ominus, \oplus, \otimes, \ominus$ }

ง. { $\bigcirc, \triangle, \star, \blacktriangle$ }

จ. { $\triangle, \text{จ}, \star$ }

39. น้ำตาลทราย กระดาษที่พิมพ์หนังสือพิมพ์และคอกมะลิ มีลักษณะหรือคุณสมบัติร่วมกันอย่างหนึ่ง ลักษณะร่วมกันมีข้อใด

ก. น้ำหอม

ข. นาน

ค. แป้ง

ง. ประเทศ

จ. บะหมี่

40.

L K O หมายความว่า "ฉันรักเธอ"

Δ K O หมายความว่า "ฉันเกลียดเธอ"

O ★ □ หมายความว่า "เธอพ่ายเรือ"

คำว่า "ฉันพ่ายเรือ" จะเขียนได้อย่างไร

ก. L ★ □

ข. K ★ □

ค. O ★ □

ง. O □ ★

จ. K ★ O

ภาคผนวก ข.

ตารางแสดงค่า P_H , P_L , p , r และ Δ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ทั่วไคราะห์แล้ว

ภาคผนวก ข.

ตาราง ๕ แสดงค่า P_H, P_L, p, r และ Δ ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการ
เรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ทั่วไประยะหนึ่ง

ข้อ	P_H	P_L	p	r	Δ
๑	.๕๖	.๘๐	.๘๘	.๓๕	๘.๑
๒	.๕๖	.๒๔	.๕๐	.๓๓	๑๕.๑
๓	.๕๒	.๑๖	.๓๓	.๕๐	๑๕.๘
๔	.๓๖	.๒๔	.๕๐	.๕๒	๑๓.๐
๕	.๕๖	.๒๔	.๕๐	.๓๓	๑๕.๑
๖	.๔๔	.๒๐	.๓๒	.๒๘	๑๔.๕
๗	.๔๔	.๔๘	.๖๓	.๕๐	๑๑.๒
๘	.๕๖	.๖๘	.๘๔	.๔๔	๕.๐
๙	.๘๐	.๑๖	.๔๓	.๖๓	๑๓.๓
๑๐	.๖๐	.๓๖	.๔๔	.๒๔	๑๓.๒
๑๑	.๕๖	.๖๐	.๘๑	.๕๔	๕.๕
๑๒	.๕๖	.๔๘	.๓๖	.๖๒	๑๐.๒
๑๓	.๕๒	.๐๘	.๒๔	.๕๓	๑๕.๔
๑๔	.๖๔	.๔๔	.๕๔	.๒๐	๑๒.๖
๑๕	.๓๒	.๐๘	.๑๕	.๓๖	๑๖.๕
๑๖	.๖๔	.๓๒	.๔๔	.๓๒	๑๓.๒
๑๗	.๘๘	.๖๘	.๓๕	.๒๘	๕.๘
๑๘	.๖๘	.๓๖	.๕๒	.๓๒	๑๒.๘
๑๙	.๕๒	.๓๖	.๖๓	.๖๑	๑๑.๓
๒๐	.๕๒	.๓๖	.๖๓	.๖๑	๑๑.๓

ข้อ	P_H	P_L	p	r	Δ
๒๑	.๕๒	.๖๔	.๓๕	.๕๐	๕.๓
๒๒	.๘๘	.๕๐	.๖๕	.๕๑	๑๑.๔
๒๓	.๓๒	.๑๖	.๒๔	.๒๑	๑๕.๕
๒๔	.๘๐	.๔๔	.๓๕	.๓๕	๑๑.๕
๒๕	.๖๐	.๒๔	.๕๒	.๓๓	๑๓.๕
๒๖	.๕๐	.๐๘	.๒๒	.๔๓	๑๖.๑
๒๗	.๖๐	.๑๖	.๓๓	.๔๓	๑๔.๓
๒๘	.๖๐	.๑๒	.๓๕	.๕๒	๑๔.๖
๒๙	.๕๖	.๕๐	.๔๔	.๑๖	๑๓.๒
๓๐	.๒๔	.๐๔	.๑๔	.๕๒	๑๓.๔
๓๑	.๕๖	.๐๘	.๒๕	.๕๖	๑๕.๒
๓๒	.๖๔	.๒๘	.๔๖	.๓๖	๑๓.๔
๓๓	.๘๔	.๖๐	.๓๓	.๒๕	๑๐.๖
๓๔	.๘๐	.๖๐	.๓๖	.๒๔	๑๐.๕
๓๕	.๔๔	.๑๖	.๒๕	.๓๓	๑๕.๒
๓๖	.๓๖	.๑๖	.๔๔	.๖๐	๑๓.๕
๓๗	.๓๒	.๐๘	.๓๓	.๖๖	๑๔.๓
๓๘	.๖๘	.๔๔	.๕๓	.๒๒	๑๒.๓
๓๙	.๖๐	.๒๐	.๓๕	.๕๒	๑๕.๑
๔๐	.๔๔	.๒๐	.๓๓	.๓๑	๑๕.๓

ภาคผนวก ค.

บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงเพื่อใช้ในการวิจัย

ภาคผนวก ก.
บทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงเพื่อใช้ในการวิจัย

โครงสร้างทางคณิตศาสตร์

๑. พัฒนาการของความคิดทางคณิตศาสตร์

๒. ส่วนประกอบของระบบคณิตศาสตร์ : อนิยาม (undefined terms)

นิยาม (defined terms)

สัจพจน์ (axioms or postulates)

ทฤษฎีบท (theorems)

๓. แบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์ : Proof of Existence,

Proof by Counterexample,

Proof by Enumeration,

Proof by Cases,

Proof by Elimination,

Proof by Contrapositive.

๔. ตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์ที่มีขนาดจำกัด (finite mathematical systems)

ระบบเรียง

ระบบโครงรูป

ระบบหกหัวตั้ง (upside-down)

๑. การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์เป็นนามธรรม มีลำดับความคิดตามประวัติของคณิตศาสตร์ว่า เริ่มเกิดขึ้นด้วยความเข้าใจความหมายของจำนวน เกิดความคิดหรือมโนภาพในรูปทรงทางเรขาคณิตของสิ่งต่าง ๆ และเกิดการรับรู้ลักษณะนามธรรมอื่น ๆ เช่น ลำดับ การเท่ากันของจำนวน มากกว่า น้อยกว่า ฯลฯ ความคิดทางนามธรรมเหล่านี้เกิดจากกระบวนการที่เราละเลยองค์ประกอบที่ไม่สำคัญ สนใจแต่โครงสร้างด้านใดด้านหนึ่ง หรือลักษณะร่วมที่มีในสิ่งต่าง ๆ เหตุผลที่มนุษย์คิดในแง่นามธรรม คือ

มนุษย์ได้ความคิดว่าอาจจะใช้วิธีการที่คล้ายคลึงกันแก้ปัญหาได้หลาย ๆ อย่าง จึงต้องหาวิธีการที่ใช้ได้ทั่วไปและกว้างขวางเพียงพอ นั่นคือ คิดในค่านามธรรมนั่นเอง มนุษย์จะสะสมความคิดค่านามธรรมไว้สำหรับพิจารณาเรื่องราวต่าง ๆ รวมทั้งการสร้างมโนภาพในสิ่งที่มีมนุษย์ไม่เคยพบเห็นด้วย

ความคิดหรือการค้นพบความรู้ใหม่ ๆ ในสมัยเริ่มได้จากการลองผิดลองถูก ตัวอย่างเช่น ชาวอียิปต์โบราณทราบว่า ถ้าใช้เชือกมาซึ่งให้เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมีด้านทั้งสามยาว ๕, ๔, ๓ หน่วย แล้วจะไดมุมฉากซึ่งเกิดจากด้านที่ยาว ๓ และ ๔ หน่วยประกอบกัน เชือกนี้ทำเป็นขมวดต่าง ๆ กัน เป็นเครื่องมือที่ชาวอียิปต์โบราณนำไปใช้ในงานต่าง ๆ เป็นต้นว่า การแบ่งพื้นที่การเกษตร การสร้างวิหาร วัง ตลอดจนปิระมิด ชาวอียิปต์รู้จักใช้สูตรคำนวณพื้นที่และปริมาตรของรูปทรงทางเรขาคณิตด้วย ชาวบาบิโลเนียซึ่งอยู่ในยุคสมัยเดียวกับชาวอียิปต์ได้ความรู้จากการลองผิดลองถูกเช่นกัน ความรู้ในสมัยนั้นไม่มีการให้เหตุผล เพียงแต่นอกวิธีการปฏิบัติเป็นลำดับขั้น สำหรับวิชาเรขาคณิตสมัยนั้นความรู้ที่ได้บางครั้งไม่ถูกต้อง

เมื่อมีความรู้ทางคณิตศาสตร์มากพอสมควร มนุษย์เริ่มมองหาเหตุและผลของความรู้เหล่านี้ วิธีการศึกษาหาความรู้จึงเริ่มเป็นวิธีที่ใช้เหตุผล-ตามหลักตรรกวิทยา เนื่องจากความคิดซับซ้อนขึ้น การกล่าวถึงสิ่งที่ซับซ้อนอาจต้องใช้คำพูดที่ยาว ซึ่งบางครั้งอาจทำให้ผู้ฟังหรือผู้อธิบายเองเกิดความรำคาญใจ มนุษย์จำเป็นต้องตกลงใช้ศัพท์ สำหรับสิ่งต่าง ๆ เช่นสามเหลี่ยม วงกลม ตั้งฉาก ฯลฯ ไปใช้ในการศึกษาเหตุและผล อันนี้เพื่อเป็นการจัดระเบียบความคิด มนุษย์จะประดิษฐ์ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (ซึ่งมีลักษณะเด่น คือชัดเจนและรัดกุม) ขึ้นใช้ มีการแก้ไข ดัดแปลง หรือเปลี่ยนใหม่จนถึงปัจจุบัน เรามีแบบภาษาคณิตศาสตร์โดยเฉพาะ ของอาศัยการเรียนรู้จึงจะเข้าใจ

ในการศึกษาเหตุและผล เราจำเป็นต้องจัดความรู้และความคิดให้เป็นระบบ ซึ่งอาจทำได้โดยการวางกฎเบื้องต้นเป็นความรู้พื้นฐานไว่ก่อน และใช้เหตุผลหรือหลักทางตรรกวิทยาเป็นเครื่องช่วยหาความรู้ใหม่ ความรู้ที่ได้อาจมีไว้เพื่อประทับสติปัญญาหรือสำหรับนำไปใช้ในงานด้านต่าง ๆ หรือแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน ฯลฯ ขณะที่ใช้ความรู้เหล่านี้มนุษย์อาจพบว่าความรู้ที่นึกคิด หรือยังไม่รัดกุมพอ หรือมนุษย์ได้ความคิดใหม่ที่กว้างขวางลึกซึ้งกว่าเดิม เขาจะแก้ไข ปรับปรุง หรือเปลี่ยนแปลงเสียใหม่เพื่อไว้ใช้ต่อไป แนวทางดังกล่าวได้วิวัฒนาการเป็นวิธีการอย่างหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า สัจพจน์วิธี (axiomatic method) ซึ่งในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ ตลอดจนนักวิจัย

นิยมใช้กันมาก ลำดับชั้นของสัจพจน์วิธีเริ่มจากการพิจารณาเนื้อหาวิชา แล้วเลือกเนื้อหาส่วนหนึ่ง ซึ่งเป็นหลักเกณฑ์เบื้องต้นมาจัดเป็นระบบ เรียกว่า ระบบสัจพจน์ (axiomatic system) ในระบบนี้ ประกอบด้วย

๑. คำศัพท์พื้นฐานซึ่งเราไม่ได้ให้ความหมาย เรียกว่า อนิยาม (undefined terms หรือ primitive terms)

๒. ศัพท์ที่เราให้ความหมายโดยอาศัยคำศัพท์พื้นฐานหรืออนิยาม เพื่อความสะดวกในการศึกษาหาความรู้ในระบบ เรียกว่า นิยาม (defined terms)

๓. กฎเกณฑ์พื้นฐาน ซึ่งถือเป็นข้อตกลงเบื้องต้นในการหาความรู้ในระบบ เรียกว่า สัจพจน์ (axioms หรือ postulates)

จากนั้นใช้ตรรกวิทยาเป็นเครื่องมือสำหรับพิสูจน์หรืออนุมาน (deduce) ความรู้ต่าง ๆ ในระบบ โดยมีสัจพจน์ทั้งไว้เท่านั้น เป็นข้ออ้างอิง จะใช้ข้อเท็จจริงอื่น ๆ ที่เราทราบนอกเหนือระบบมาใช้อ้างอิงมิได้

สัจพจน์วิธีนี้ อาจใช้ได้กับวิชาต่าง ๆ มากมาย อาทิเช่น กลศาสตร์ ทฤษฎีเซต ตรรกวิทยา คณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ แม้แต่เรื่องพันธุกรรม ก็อาจศึกษาจากระบบสัจพจน์ซึ่งได้จากผลสรุปของเมนเดล (Mendel) ได้ ปัจจุบันนี้สัจพจน์วิธีนี้มีความสำคัญต่อการที่จะศึกษาคณิตศาสตร์เป็นอันมาก และยังเป็นรากฐานของการศึกษาวิทยาศาสตร์ ตลอดจนการวิจัยด้วย

สัจพจน์วิธีนี้มีลักษณะเด่นหลายประการ กล่าวคือ

๑. ในการพิสูจน์ เราไม่ต้องการจะกล่าวถึงข้อสมมุติฐานอื่นเพิ่มเติมจากสัจพจน์หมอบู่ เพราะเรามีสัจพจน์เป็นข้อตกลงสำหรับหาความรู้ครบถ้วนแล้ว

๒. หาข้อพิพาทในระบบสัจพจน์ได้ง่าย เพราะถ้ามีทฤษฎีขัดหรือแย้งกัน แสดงว่านิคที่ระบบสัจพจน์ที่เราตั้งขึ้นเ็นเอง

๓. การที่ไม่ได้กำหนดความหมายของอนิยามไว้แต่แรก ทำให้เราสามารถตีความหมายของอนิยามในรูปต่าง ๆ ได้ ถ้าสิ่งนั้นสอดคล้องกับข้อตกลงที่เราตั้งขึ้น เท่ากับว่าเราจะรู้สิ่งอื่นเพิ่มเติมด้วยในคราวเดียวกันโดยไม่ตองพิสูจน์ใหม่ (ความคิดนี้เป็นเหตุผลของการเขียนกราฟเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในสมการ เนื่องจากเป็นวิธีที่เห็นชัดกว่าการศึกษาความสัมพันธ์โดยตรง)

๔. ช่วยเพิ่มความเข้าใจเหตุผล เพราะการอนุมานเป็นไปอย่างรัดกุม ขึ้นอยู่กับเหตุผลเท่านั้น ไม่มีการใช้ความเห็น (intuition) ซึ่งอาจผิดได้

๕. มีลักษณะที่เอื้ออำนวยต่อการตรวจสอบ ความคงเส้นคงวา (consistency) และความสมบูรณ์ (Completeness) ของระบบ ตลอดจนความเป็นอิสระของสัจพจน์ การตรวจสอบเช่นนี้กระทำกันในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูง

สัจพจน์วิธี เป็นผลเนื่องมาจากการพัฒนาการทางความคิดของมนุษย์ โดยเริ่มต้นตั้งแต่สมัยกรีกโบราณ ชาวกรีกในสมัยนั้นรู้จักใช้วิธีการให้เหตุผลแบบที่เรียกว่า การอนุมาน (deductive reasoning) คือการพิสูจน์ ผล จาก เหตุหรือสมมติฐาน ที่ตั้งขึ้น (ซึ่งมีไวยากรณ์แบบรวมทั้งที่เรียกว่า reductio ad absurdum กวย) ชาวกรีกนั่นเองจึงได้เล็งเห็นถึงความจำเป็นที่การพิสูจน์ต้องมีจุดตั้งต้น กล่าวคือ ยอมรับกฎเกณฑ์หรือความรู้พื้นฐานอย่างหนึ่งเสียก่อนเป็นจุดตั้งต้นในการพิสูจน์ มิฉะนั้นจะหลงพิสูจน์ย้อนหลังหาที่สิ้นสุดมิได้

ตัวอย่างของการอนุมาน

เหตุ ๑. คนทุกคนต้องตาย

๒. โสกราตีสเป็นคน

ผล โสกราตีสต้องตาย

ยูคลิด (Euclid) ได้รวบรวมความรู้ทาง ๆ ทางเรขาคณิต (และเลขคณิต) มาเรียบเรียงตามแนวคิดข้างต้นเป็นตำราชื่อ "Elements" โดยเริ่มต้นด้วยการให้นิยาม, axioms และ postulates แล้วอนุมานขอความต่อ ๆ มาโดยใช้ตรรกวิทยาเป็นเครื่องมือ เรียกเรขาคณิตว่าเรขาคณิตยูคลิด (Euclidean Geometry)

การค้นพบเรขาคณิตนอกแบบยูคลิด (non-Euclidean Geometry เกิดจากการทดลองเปลี่ยนสัจพจน์แห่งการขนาน) ทำให้นักคณิตศาสตร์เริ่มหันมาศึกษา สัจพจน์วิธี อย่างจริงจัง และนำวิธีการนี้ไปใช้กับคณิตศาสตร์ทุกสาขาวิชา ความคิดเห็นเกี่ยวกับ axioms และ postulates ได้เปลี่ยนไป ผลอีกประการหนึ่งคือนักคณิตศาสตร์เห็นความจำเป็นที่ต้องมีนิยาม (หัวข้อต่อไปเราจะ

ไต่ถามความหมายของอนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท ในทัศนะปัจจุบัน)

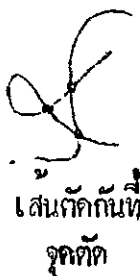
๒. ส่วนประกอบของระบบคณิตศาสตร์

๒.๑ อนิยาม (Undefined terms) คำบางคำเราไม่อาจให้คำจำกัดความได้ เช่น สีแดง สีเหลือง ความกลม ความงาม ความยาว ความสูง เหลี่ยม ฯลฯ แม้ว่าเราจะพยายามให้คำจำกัดความสักเท่าไร ก็ไม่อาจทำให้ผู้อื่นเข้าใจอย่างถ่องแท้ได้ เราถือคำเหล่านี้เป็นศัพท์รากฐานสำหรับให้คำจำกัดความศัพท์อื่น แต่ไม่พยายามที่จะอธิบายความหมายของศัพท์รากฐานเหล่านี้

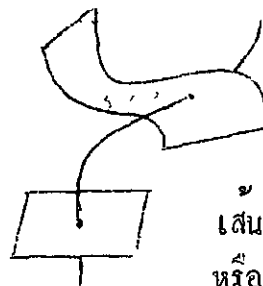
ศัพท์ทางคณิตศาสตร์บางคำ เช่น จุด และเส้น เป็นศัพท์ที่เราไม่ให้คำนิยาม หรือคำจำกัดความ เพราะอย่างหนึ่ง เมื่อให้คำนิยามแล้วไม่อาจทำให้ผู้อื่นเข้าใจอย่างถ่องแท้ได้ แต่กลับจะทำให้สับสนหนักขึ้น อีกอย่างหนึ่ง การนิยามศัพท์ใด ๆ ต้องอาศัยศัพท์อื่น ถ้าเราไม่เข้าใจศัพท์อื่นเหล่านั้น ก็ต้องสืบความหมายต่อไปอีก จนในที่สุดวกกลับมาคำเดิมหรือเลยออกไปไม่สิ้นสุด การให้คำนิยามศัพท์เหล่านี้จึงหาประโยชน์มิได้ เราตกลงใช้ศัพท์เหล่านี้โดยไม่ให้ความหมาย เราเรียกศัพท์เหล่านี้ว่า อนิยาม (ถ้านักเรียนเรียนคณิตศาสตร์ชั้นสูงขึ้นไปจะพบว่าเราใช้คำบางคำในฐานะที่เป็นอนิยาม เพื่อเปิดโอกาสให้คำเหล่านั้นแทนสิ่งต่าง ๆ ได้กว้างขึ้น ไม่เจาะจงเป็นสิ่งใดสิ่งหนึ่งโดยเฉพาะ และการพิสูจน์ที่แท้จริงนั้นเราจะไม่คำนึงถึงความหมายของอนิยามเลย จึงจะเป็นการพิสูจน์ที่รัดกุม)

ปัญหาที่เกิดขึ้นจากการไม่ให้คำจำกัดความของสิ่งหนึ่งสิ่งใด คือทำอย่างไรจึงจะเข้าใจสิ่งนั้น ๆ ได้ การแก้ปัญหานี้เป็นเรื่องไม่ยากเย็นแถมอย่างใด เราทราบว่าการศึกษาจะมีความเข้าใจสิ่งใดก็ตาม ต้องผ่านการสังเกตวิเคราะห์และผ่านประสาทสัมผัสหลาย ๆ ครั้ง ดังนั้นวิธีที่ทำได้คือการยกตัวอย่างมาก ๆ เช่น ถ้าต้องการให้นักเรียนเข้าใจคำว่าจุด ผู้สอนอาจยกตัวอย่าง เช่น

รอยปลายดินสอหรือปลายปากกาเป็นจุด



เส้นตัดกันที่จุดตัด



เส้นตัดกับระนาบหรือผิวใดจุด

หากเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่ จุดตั้งต้นคือกรุงเทพฯ จุดปลายทางคือเชียงใหม่ ที่ผู้สอนยืนอยู่ก็ถือเป็นจุด กรุงเทพฯ เป็นจุดจุดหนึ่งบนโลก ฯลฯ (เมื่อเรากล่าวถึงจุด เราไม่

คำนึงถึงขนาดของมัน)

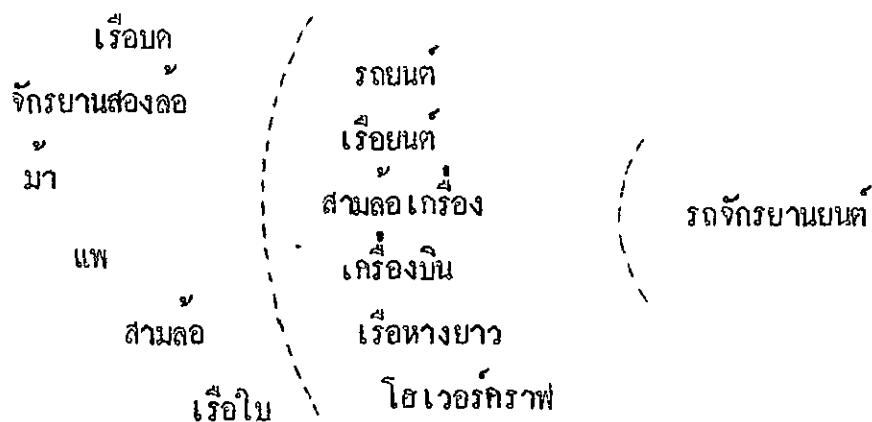
หลักข้อหนึ่ง ก็เราจะไม่รู้อะไรเลย ถ้าไม่มีการกำหนดรู้อะไรมาก่อน เราต้องกำหนดรู้อันใดบางอย่างเพื่อเป็นเครื่องช่วยให้เข้าใจสิ่งอื่น ๆ นอกเหนือออกไป ดังเช่นการเรียนรู้ของเด็ก เริ่มต้นที่การกำหนดรู้ว่า พ่อ แม่ หมา ฯลฯ หมายถึงอะไร ในคณิตศาสตร์เราถือหลักเดียวกัน คือใช้คำบางคำโดยไม่ให้ความหมาย เช่น จุด เส้น เซต เป็นศัพท์พื้นฐาน

๖.๒ คำนิยาม (defined terms) ศัพท์หรือข้อความใดที่เรากำหนดความหมายหรือให้นิยามในทางคณิตศาสตร์เราถือว่าเป็นนิยาม การนิยามศัพท์หรือข้อความใดของอาศัยนิยามซึ่งเป็นศัพท์รากฐานในเรื่องนั้น ๆ การใช้นิยามจะช่วยอำนวยความสะดวกในการพิสูจน์และทำให้การพิสูจน์มีน้ำหนักขึ้น

คนที่มโนภาพในคำใดคำหนึ่งต่างกันย่อมพูดกันไม่รู้เรื่อง ในการเรียนคณิตศาสตร์ให้เข้าใจได้ เราจำเป็นต้องมีมโนภาพของคำในภาษาคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องกับที่นักคณิตศาสตร์มีกัน เมื่อได้พบคำศัพท์ในคณิตศาสตร์ครั้งแรก เราควรยอมรับความหมายหรือนิยามที่เขาให้ไว้ ไม่ควรด่วนสร้างมโนภาพเอาเอง

การนิยามสิ่งใดอาจทำได้โดยกำหนดขอบข่ายของมันกว้าง ๆ เสียก่อน แล้วจึงจำกัดลักษณะลงทีละอย่างจนกระทั่งไม่มีสิ่งอื่นที่สอดคล้องกับลักษณะดังกล่าว นอกจากสิ่งที่เราต้องการ เช่น

รถจักรยานยนต์ เป็น พาหนะ ที่ขับเคลื่อนโดยกำลังเครื่องยนต์และมีสองล้อ



นิยามที่ดี ต้องสละบทข้อความใด เช่น "สี่เหลี่ยมคางหมู คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกัน ๒ ด้านเท่านั้น" สละไปแล้วยังเป็จริง : "สี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกัน ๒ ด้านเท่านั้น คือสี่เหลี่ยมคางหมู"

ตัวอย่างคำนิยามที่เราไม่ได้ : "กระรอกคือสัตว์สี่เท้าหางเป็นพวง" เพราะสัตว์สี่เท้าหางเป็นพวงอาจไม่ใช่กระรอกก็ได้

๒.๓ สัจพจน์ (Axioms หรือ Postulates) ได้กล่าวแล้วว่าการพิสูจน์จะต้องมีจุดเริ่มต้นในที่แห่งใดแห่งหนึ่ง ในระบบคณิตศาสตร์เราจะเริ่มต้นด้วยการยอมรับข้อความชุดหนึ่งโดยไม่พิสูจน์ เพื่อใช้เป็นหลักสำหรับอ้างอิงในการพิสูจน์หรือหาความรู้ในระบบ เราเรียกข้อความแต่ละข้อนี้ว่า สัจพจน์ ในระบบหนึ่งอาจมีสัจพจน์ได้หลายข้อ เราต้องการให้มีสัจพจน์น้อยที่สุดซึ่งอาจทำได้โดยตัดสัจพจน์ที่เกินความจำเป็นออกเสียในเมื่อเห็นว่าสัจพจน์ดังกล่าวพิสูจน์ได้โดยใช้สัจพจน์อื่นๆ

สัจพจน์ได้มาจากประสบการณ์หรือสิ่งที่เราเห็นว่าเป็นจริง แต่ในบางที่เรอาจตั้งสัจพจน์ซึ่งขัดกับความรู้สึกของเรา เพื่อศึกษาว่าอะไรจะเกิดขึ้น เหตุที่เราต้องทำเช่นนี้เพราะประสบการณ์หรือสิ่งที่เราเห็นว่าเป็นจริงนั้นอาจผิดก็ได้ ตัวอย่างคนสมัยโบราณมีความเชื่อว่าโลกแบนและคิดว่าโลกอยู่กับที่ซึ่งความจริงมิได้เป็นเช่นนั้น สิ่งที่เราเชื่ออยู่ในปัจจุบันก็อาจผิดได้เช่นกัน ไม่มีหลักประกันอะไรว่าสัจพจน์ที่เราตั้งขึ้นจะเป็นจริง เราจึงทำได้แต่เพียงใช้สัจพจน์เหล่านี้เป็นจุดตกลงเบื้องต้นก่อนหาความรู้ต่อไป และถาความรู้ที่เราได้มาขัดแย้งกันเอง เราจะถือว่าสัจพจน์ของเราชอบไม่ถูกต้อง

ในการศึกษาความรู้ในระบบหนึ่ง เราอาจนำทฤษฎีจากระบบอื่นมาตั้งเป็นสัจพจน์ได้ เพื่อความสะดวกและประหยัดเวลา แม้แต่ในระบบเดียวกันถ้าการพิสูจน์ยุ่งยากเกินไปหรือไม่สามารถหาวิธีพิสูจน์ได้ เราอาจใช้ทฤษฎีนั้นเป็นสัจพจน์ ตัวอย่างเช่น เราใช้ข้อความข้างล่างนี้เป็นสัจพจน์ "ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านต่อด้าน และมุมในระนาบด้านดังกล่าวเท่ากัน สามเหลี่ยมสองรูปนั้นย่อมเท่ากันทุกประการ"

(คำว่า Axioms หรือ Postulates ซึ่งเราเรียกรวม ๆ ว่า สัจพจน์นั้น นักปรัชญากรีกแยกจากกันโดยให้ความหมายต่าง ๆ กัน เช่น Axioms เป็นข้อความที่ทุกคนเห็นชัดอยู่แล้ว ส่วน Postulates อาจมีบางอันไม่เห็นด้วยไม่จำเป็นที่ทุกคนต้องเห็นชัด ฯลฯ ในปัจจุบันเราใช้ในความหมายเดียวกัน ถือเป็นข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการหาความรู้ในระบบ)

๒.๔ ทฤษฎีบท (Theorems) เป็นความรู้ในระบบที่ได้จากสัจพจน์โดยการอนุมานตามหลักตรรกวิทยาโดยมีสัจพจน์กับนิยามเป็นพื้นฐาน และจากทฤษฎีบทแรก ๆ อาจพิสูจน์หรือหา

ทฤษฎีบทต่อไปได้อีก (แต่เนื่องจากทฤษฎีบทแรก ๆ ก็ได้มาจากสัจพจน์หรือนิยามเท่านั้น จึงอาจกล่าวได้ว่า สัจพจน์กับนิยามเป็นสิ่งที่เพียงพอที่จะใช้อ้างอิงในการพิสูจน์จากทฤษฎีบท) หากทฤษฎีบทหลังเป็นกรณีพิเศษของบทแรกเราจะเรียกทฤษฎีบทหลังว่า บทแทรก (Corollary)

๓. การพิสูจน์และแบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์

๓.๑ จุดมุ่งหมายของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คือเพื่อยืนยันหรือทำให้แน่ใจว่าผลสรุปถูกต้อง หากว่าเหตุหรือสมมุติฐานเป็นจริง กล่าวอีกนัยหนึ่ง คือการแสดงให้เห็นว่าการสรุปผลเป็นไปอย่างสมเหตุสมผล (valid) นั่นเอง การพิสูจน์มี ๒ ประเภท คือ การพิสูจน์อย่างไม่มีแบบแผน และการพิสูจน์อย่างมีแบบแผนหรือพิสูจน์ตามทฤษฎีของการพิสูจน์ ในการพิสูจน์ประเภทหลัง เราใช้วิธีการให้เหตุผลที่เรียกว่า การอนุมาน (deductive reasoning) กล่าวคือ เป็นการพิสูจน์โดยมีข้อความที่เรายอมรับมาก่อน เช่น สัจพจน์ นิยาม ทฤษฎีบท หรือเงื่อนไขที่กำหนดให้ เป็นที่อ้างอิง และการอ้างอิงนี้ต้องสอดคล้องกับหลักของการให้เหตุผลทางตรรกวิทยา หลักกว้าง ๆ ในการอนุมานข้อหนึ่ง คือ "ถ้า P เป็นจริง และถ้า P ทำให้เกิดผลสรุป Q แล้ว Q ย่อมเป็นจริง" การอนุมานนี้ถือเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ (mathematical method) ผลสรุปจากการพิสูจน์แบบนี้มีความแน่นอนไม่มีข้อยกเว้น

วิธีการให้เหตุผลอีกอย่างหนึ่งเรียกว่า การอุปมาน (inductive reasoning) เป็นการสรุปผลจากการสังเกตหรือการทดลองหลาย ๆ หน เช่น เราเคยสังเกตุ เท้าที่ผ่านมาเราเห็นว่างูไม่มีขา ดังนั้นเราสรุปเอาว่า งูทุกตัวไม่มีขา นี่เป็นการอุปมาน ผลการสรุปในทำนองนี้ไม่สมบูรณ์ ดังตัวอย่างนี้เราไม่ได้ดูงูทุกตัว เป็นเพียงแต่การคาดคะเนว่าน่าจะเป็นเช่นนั้น เรานิยมใช้วิธีการอุปมานในทางวิทยาศาสตร์ แต่ในทางคณิตศาสตร์ (นอกจากจะเป็นการสรุปผลจากข้อมูลทุกหน่วย) จะไม่ยอมรับวิธีการเช่นนี้ว่าเป็นการพิสูจน์ อย่างไรก็ตาม เรายังใช้วิธีการนี้ในการหาความรู้หรือคาดคะเนความรู้ใหม่ ๆ แล้วใช้วิธีการอุปมานเพื่อยืนยันอีกครั้งหนึ่ง

๓.๒ วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ข้อความตามแบบแผนหรือตามทฤษฎีของการพิสูจน์ โดยทั่วไปมีวิธีการพิสูจน์

๒ วิธี คือ

ก. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof)

ข. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof หรือ Reductio ad Absurdum)

การพิสูจน์ทางตรง เราตั้งต้นจากเหตุหรือสมมุติฐานหรือข้อความที่เรายอมรับมาก่อน ซึ่งเรานำมาจัดเรียงตามลำดับเหตุผล เชื่อมโยงไปสู่ผลสรุปตามต้องการโดยตรง

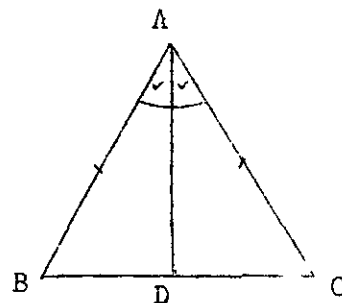
ตัวอย่างที่ ๑

เหตุ ๑. ABC เป็นสามเหลี่ยม

๒. $AB = AC$

๓. AD เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม A พบฐาน BC ที่ D

ผล $AD \perp BC$



แนวทางการพิสูจน์

$AB = AC$
 $AD = AD$
 $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD แบ่งครึ่งมุม A)
 $\rightarrow$ สัจพจน์ $\rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD$ $\xrightarrow{\text{นิยาม}}$ $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$ $\xrightarrow{\text{นิยาม}}$ $AD \perp BC$

จะเห็นว่าเราเริ่มต้นจากเหตุ อาศัยสิ่งที่เรากดลงยอมรับมาประกอบกันเข้าเกี่ยวโยงกันเป็นลำดับจนถึงผลสรุป ตอนแรกเราประมวลเงื่อนไขให้เพียงพอแล้วสรุปว่าสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการ เพื่อให้อ้างว่ามุม ADB เท่ากับมุม ADC ซึ่งความรู้ข้อนี้ทำให้เราทราบว่าทั้งสองมุมทางก็เป็นมุมฉาก หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง AD ตั้งฉากกับ BC นั้นเอง โปรดสังเกตว่าทุกข้อที่เราอ้างหรือสรุปผล เราต้องมีการอ้างอิง เช่น เหตุที่เราว่าสามเหลี่ยม ABD เท่ากับสามเหลี่ยม ADC ทุกประการ เพราะเรามีเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับสรุปผลตามสัจพจน์ซึ่งกล่าวว่า สามเหลี่ยมคู่นี้มีด้านเท่ากันสองด้าน ด้านสองด้าน และมุมในระหว่างด้าน ที่กล่าวถึงในแต่ละสามเหลี่ยมนั้นเท่ากัน สามเหลี่ยมสองรูปนี้ยอมรับเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างที่ ๒ จงพิสูจน์ว่า ถ้า m เป็นจำนวนคู่แล้ว m^2 จะเป็นจำนวนคู่

เหตุ คือ m เป็นจำนวนคู่

ผล คือ m^2 เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์ต้องใช้นิยามของจำนวนคู่ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

นิยาม m เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $m = 2n$

แนวทางการพิสูจน์

เป็นจำนวนคู่ $\longrightarrow$ มีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $m = 2n \longrightarrow m^2 = 4n^2$
 $\longrightarrow m^2 = 2(2n^2) \longrightarrow$ มีจำนวนเต็มซึ่งคูณกับ 2 ได้เป็น $m^2 \longrightarrow m^2$
 เป็นจำนวนคู่

การพิสูจน์ทางอ้อม วิธีนี้มิได้เริ่มจากเหตุ แต่เริ่มจากผลสรุป กล่าวคือ เราคาดว่าถ้าผลสรุปไม่จริงจะเกิดอะไรขึ้นบ้าง หากว่าการที่ผลสรุปไม่จริงนำไปสู่การขัดแย้งกัน กล่าวคือ ใดข้อความข้อความหนึ่งที่เป็นจริงและเท็จในขณะเดียวกันแล้ว เราจะสรุปว่า สมมุติฐานที่ว่า ผลสรุปไม่จริงนั้นเป็นไปได้ไม่ได้ นั่นคือผลสรุปของจริงเป็นการเสร็จสิ้นการพิสูจน์

มีตัวอย่างในชีวิตประจำวันที่ใช้การพิสูจน์แบบนี้ เช่นตัวอย่างหนึ่ง ภายหลังจากงานเลี้ยงสองสามวัน ในวงสนทนาแห่งหนึ่ง เกิดการสงสัยว่าพิชัยไปในงานหรือไม่ บังเอิญเจ้าภาพมาพบพอดีจึงได้ถามไถ่กันขึ้น เจ้าภาพบอกว่าพิชัยไม่ได้ไปในงานนี้ และแสดงเหตุผลที่ทุกคนยอมรับ ดังนี้

ผลสรุป : พิชัยไม่ไปในงานนี้

พิสูจน์ : ถ้าพิชัยไปในงานนี้ จะต้องเห็นพิชัย เพราะจะต้องพบแขกทุกคน แต่ผมไม่เห็นพิชัย จึงเป็นไปได้ที่พิชัยจะไปในงานนี้ นั่นคือ พิชัยไม่ไปในงานนี้

ตัวอย่างในเรขาคณิต จงพิสูจน์ว่า ถ้ามุมสองมุมในสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เท่ากับด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมเท่าๆ ย่อมยาวเท่ากัน

สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ มีมุม

ABC เท่ากับมุม ACB

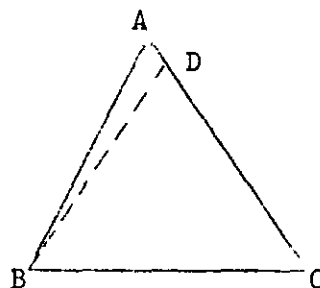
ผล $AB = AC$

พิสูจน์

ถ้า $AB \neq AC$ ต้องมีด้านใดด้านหนึ่งในสองด้านนี้เป็นด้านที่

ยาวกว่า ใ้ด้านที่ยาวกว่าเป็น AC ดังนั้นจะมีจุด D ในระหว่าง AC

ซึ่ง $CD = AB$ และเราพิสูจน์ได้ว่าสามเหลี่ยม ABC เท่ากับสามเหลี่ยม DCB ทุกประการ ขัดแย้งกับสัจพจน์ที่ว่าส่วนรวมย่อมใหญ่กว่าส่วนย่อย สามเหลี่ยม DCB เป็นส่วนหนึ่งของสามเหลี่ยม ABC จะเท่ากับสามเหลี่ยม ABC ไม่ได้ ขอสงสัยว่า $AC \neq AB$ จึงเป็นไปได้ ดังนั้น $AC = AB$



๓.๓ แบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์

การพิสูจน์ข้อความมีหลายแบบ แต่จะนำมากล่าวเฉพาะแบบสำคัญ ๆ เท่านั้น โปรดสังเกตรวข้อความบางข้อความจะมีแบบการพิสูจน์เฉพาะแบบหนึ่ง และการพิสูจน์แบบใดก็ตามหาว่าซับซ้อนเกินกว่าที่จะแสดงให้เห็นโดยง่าย อาจต้องใช้วิธีพิสูจน์ทางตรงหรือวิธีพิสูจน์ทางอ้อม หรือทั้งสองอย่างมาช่วย แบบการพิสูจน์ที่จะกล่าวถึง ได้แก่

๓.๓.๑ Proof of Existence เป็นวิธีพิสูจน์ข้อความแบบ "สำหรับเซตที่นำมาพิจารณา มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวที่สอดคล้องกับลักษณะอย่างหนึ่งที่กำหนดให้" ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยการยกตัวอย่างสมาชิกที่สอดคล้องกับลักษณะมาทดสอบเพียงหนึ่งตัว ย่อมเป็นการเพียงพอแล้ว

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนซึ่งยกกำลังสองแล้ว ผลลัพธ์เท่ากับ 1

ในที่นี้เซตที่นำมาพิจารณา คือ เซตของจำนวนลักษณะที่กำหนดให้อาจเขียนได้เป็น $x^2 = 1$ (ซึ่งเราเรียกว่า ประโยคแบบ หรือ ประโยคเปิด ตัว x เป็นตัวแปรหรืออักษรรูปหนึ่งตำแหน่งสำหรับสมาชิกใด ๆ ในเซต) ถ้าเราสามารถหาสมาชิกซึ่งสอดคล้องกับสมการดังกล่าวนี้ได้ นับว่าการพิสูจน์เกือบเสร็จแล้ว เรามีภาระเพิ่มเพียงแค่ว่าทดสอบให้เห็นจริง เท่านั้นเป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์

ในที่นี้ ตัวอย่างสมาชิกที่สอดคล้องกับประโยคแบบ ได้แก่จำนวน 1

พิสูจน์ พิจารณาจำนวน 1 (ยกตัวอย่าง)

$$\therefore (1)^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{หรือ } (1)^2 = 1 \quad (\text{การทดสอบให้เห็นจริง})$$

ดังนั้น 1 สอดคล้องกับประโยคแบบ $x^2 = 1$

$\therefore$ มีจำนวนซึ่งยกกำลังสองแล้วผลลัพธ์เท่ากับ 1

แบบฝึกหัด ๑) จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มที่ยกกำลังสองแล้วผลลัพธ์อยู่ระหว่าง 130 กับ 150

๒) จากนิยาม : a หาร b ลงตัว หมายความว่า a มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$

จงพิสูจน์ว่า 9 หาร 4977 ลงตัว

๓.๓.๒ Disproof by Counterexample เป็นวิธีการพิสูจน์คัดค้านข้อความแบบ "สำหรับเซตที่นำมาพิจารณา สมาชิกทุกตัวต้องสอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้" หรืออักษรรูปหนึ่ง พิสูจน์ว่า ข้อความดังกล่าวเป็นเท็จ วิธีการพิสูจน์ก็ยกตัวอย่างสมาชิกที่ไม่สอดคล้องกับลักษณะดังกล่าว

เพียงกรณีเดียว ย่อมเป็นการเพียงพอ

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า "จำนวนเต็มทุกตัวมากกว่า ๐" เป็นเท็จ
ในเซตที่นำมาพิจารณา คือ เซตของจำนวนเต็ม, $\{\dots, -๓, -๒, -๑, ๐, ๑, ๒, ๓, \dots\}$ ประโยคแบบ
คือ $x > 0$ เราเห็นว่าสมาชิกของเซตที่ไม่สอดคล้องกับประโยคแบบข้างใดแก่ ๐, -๑, -๒ ฯลฯ
เลือกมาหนึ่งตัว

พิสูจน์ พิจารณาจำนวนเต็ม -๑

$\therefore -๑ < 0$ ดังนั้น $-๑ > 0$ เป็นข้อความเท็จ

นั่นคือ -๑ ไม่สอดคล้องกับประโยคแบบ $x > 0$

$\therefore$ ข้อความที่ว่า "จำนวนเต็มทุกตัวมากกว่า ๐" เป็นเท็จ

แบบฝึกหัด ๑. จงพิสูจน์ข้อความที่ว่า สัตว์ทุกชนิดมี ๒ ขา

๒. จงพิสูจน์ข้อความที่ว่า x^2 มากกว่า 1 สำหรับทุกจำนวนจริง x

๓. จงพิสูจน์ข้อความ : $n^2 - n + 41$ เป็นจำนวนเฉพาะสำหรับทุกค่าจำนวน
เต็มบวก n

๓.๓.๓ Proof by Enumeration เป็นการพิสูจน์ข้อความว่า สำหรับเซตที่นำ
มาพิจารณา สมาชิกทุกตัวสอดคล้องกับลักษณะที่กำหนดให้ โดยแสดงใหญ่ทีละสิ่ง การพิสูจน์แบบนี้ทำได้
เมื่อเซตดังกล่าวเป็นเซตจำกัด (finite set) (เซตที่เราทราบจำนวนสมาชิก) และมีจำนวน
สมาชิกไม่มากนัก

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b เป็นสมาชิกของเซต $U = \{0, 1\}$ แล้ว

$$a + b = b + a$$

วิธีพิสูจน์ วิธีหนึ่งอาจสร้างตารางใหญ่ดังนี้

a	b	a + b	b + a
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	2	2

จากตารางจะเห็นว่า

$$a + b = b + a$$

- แบบฝึกหัด
๑. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b เป็นสมาชิกของเซต $U = \{5, 7\}$ แล้ว $a + b < 20$
 ๒. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b เป็นสมาชิกของเซต $U = \{0, 1\}$ และ $a * b = a + b - ab$ แล้ว $a * b = b * a$

๓.๓.๔ Proof by Cases วิธีนี้คล้ายกับการพิสูจน์แบบ Proof by Enumeration แตกต่างตรงที่การพิสูจน์แบบนี้นั้นแบ่งสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นกรณี ๆ แล้วพิสูจน์ทีละกรณี

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า จำนวนที่แยกกำลังสองแล้วเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์ จำนวนที่ต้องการลงท้ายด้วย ๑ หรือ ๓ หรือ ๕ หรือ ๗ หรือ ๙
 ถาลงท้ายด้วย ๑ ยกกำลังสองแล้วลงท้ายด้วย ๑ เป็นจำนวนคี่
 " ๓ " " ๙ เป็นจำนวนคี่
 " ๕ " " ๕ เป็นจำนวนคี่
 " ๗ " " ๙ เป็นจำนวนคี่
 " ๙ " " ๑ เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น จำนวนที่ทุกจำนวน ยกกำลังสองแล้วเป็นจำนวนคี่

- แบบฝึกหัด
๑. จงพิสูจน์ว่าจำนวนยกกำลังสองแล้วเป็นจำนวนคู่
 ๒. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $3a + a^2$ จะเป็นจำนวนคู่

๓.๓.๕ Proof by Elimination เป็นการพิสูจน์โดยแยกกรณีของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ออกแล้วใช้เหตุผลในการพิจารณาตัดกรณีที่ไปไม่ได้ทิ้งไป จนเหลือกรณีที่ต้องการซึ่งเป็นที่ที่เราแสดงว่าใช้ได้ ในการนี้เราอาจใช้เหตุผลพิจารณาอย่างหยาบ ๆ ตัดกรณีที่ไปไม่ได้ทิ้งไป เพื่อจำกัดขอบเขตของคำตอบหรือกรณีไหนอย่งลงเสียขั้นหนึ่งก่อนได้

ตัวอย่างที่ ๑ มีแสตมป์ดวงละ ๓ บาท และ ๔ บาท ต้องการหึ่งจดหมายค่าส่ง ๑๐ บาท
 ต้องเลือกใช้แสตมป์ชนิดอย่างละเท่าไรจึงครบ ๑๐ บาทพอดี
 จะเห็นว่า เราจะใช้แสตมป์ดวงละ ๓ บาท ได้ไม่เกิน ๓ ดวง เพราะถ้าเกินจะใช้แสตมป์เกิน ๑๐ บาท หันองเดียวกันเราจะใช้แสตมป์ดวงละ ๔ บาทได้ไม่เกิน ๒ ดวง

		จำนวนเลขที่มีตัวเลข ๓ บาท			
จำนวนเลขที่มี ตัวเลข ๔ บาท	จำนวนเลขที่มี	๐	๑	๒	๓
	๐	๐	๓	๖	๕
	๑	๔	๗	๑๐	๑๓
	๒	๘	๑๑	๑๔	๑๗
		เงินรวม			

จากการวางจะเห็นได้ว่าเราตัดกรณีนอกไปได้อีก เหลือกรณเดียว คือใช้เลขที่มีตัวเลข

๓ บาท สองตัว กวลง ๔ บาท หนึ่งตัว

ตัวอย่างที่ ๒

สี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน $AB = AD = t$

และ $\angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$

จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม $AC = t$

พิสูจน์ มีทางเป็นไปได้โดยกรณีใดกรณีหนึ่งใน

๓ กรณี ดังนี้

1. $AC > t$

2. $AC < t$

3. $AC = t$

กรณีที่ $AC > t$ เป็นไปไม่ได้ เพราะทำให้มุม $\angle BCD < \angle ABC + \angle ADC$

กรณีที่ $AC < t$ เป็นไปไม่ได้ เพราะทำให้มุม $\angle BCD > \angle ABC + \angle ADC$

กรณีที่ $AC = t$ เป็นไปได้ เพราะ $\angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$

$\therefore AC = t$

แบบฝึกหัด จงพิสูจน์หาค่าจำนวนเต็มบวก x, y ซึ่ง $3x + 11y = 17$

๓.๓.๖ Proof by Contrapositive ใช้พิสูจน์ข้อความแบบ "เหตุ $\rightarrow$ ผล"

โดยพิสูจน์ข้อความ "ผลไม่จริง ทำให้เหตุไม่จริง" แทน เราเรียกข้อความหลังนี้ว่า

contrapositive ของข้อความแรก เป็นข้อความที่มีความหมายตรงกับ "เหตุทำให้เกิดผล"

ตามหลักตรรกวิทยา ขอยกตัวอย่างประกอบการเข้าใจดังนี้

จ. "ถ้าลูกวิ่งแฉ่ง แม่จะตีลูก" มีความหมายว่า "ถ้าแม่ไม่เฝ้าตีลูก แสดงว่าลูกไม่เคยวิ่งแฉ่ง"

ข. ถ้าพอทะเลาะกับแม่ ลูกจะไม่มีความสุข" มีความหมายว่า "ถ้าลูกมีความสุข พ่อทองไม่ทะเลาะกับแม่"

ตัวอย่าง ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่แล้วจึงพิสูจน์ว่า n จะเป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ขอความ

"ถ้า n ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 จะไม่เป็นจำนวนคู่" หรือ

"ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว n^2 จะไม่เป็นจำนวนคี่" แทนข้อความในใจหม

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned}\rightarrow n^2 &= (2m + 1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $2m^2 + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนคี่

นั่นคือ ถ้า n ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว n^2 จะไม่เป็นจำนวนคู่ หรือ

ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว n จะเป็นจำนวนคู่

แบบฝึกหัด จงพิสูจน์ว่าถ้า a^3 เป็นจำนวนคู่แล้ว a จะเป็นจำนวนคู่

4. ตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์แบบโย

การศึกษาระบบคณิตศาสตร์ใด ๆ มีลักษณะเหมือนกับการเล่นเกมกีฬา ผู้เล่นต้องเล่นตามกฎเกณฑ์ที่วางไว้ มิฉะนั้นจะเกิดการขัดแย้งกันเองและไม่สามารถดำเนินการเล่นต่อไปได้ ตัวอย่างหนึ่งที่จะช่วยให้เราเข้าใจได้แก่ เกมที่เรียกว่า "ไลแคะไทย" มีรายละเอียดดังนี้

ไล่เตะไทย

ผู้เล่น ไม่มีเครื่องเล่น ที่เล่นใช้สนามกว้างพอเหมาะกับจำนวนผู้เล่น
ให้ผู้เล่นคนหนึ่งคน ผู้ที่เล่นเหลืออยู่นั้น เป็นผู้หนึ่งกระจายออกไปในบริเวณที่กำหนด ให้ผู้เล่นอยู่
ภายนอกอาณาเขตที่กำหนดคานใดคานหนึ่ง

วิธีเล่น เมื่อได้ยินเสียงสัญญาณ ให้ผู้เล่นออกวิ่งไล่เตะผู้หนึ่ง เมื่อผู้หนึ่งจวนตัววิ่งลงกับพื้นได้ และ
ครองรอกกว่าพวกของตนคนใดคนหนึ่งมาช่วยเตะจึงจะออกวิ่งต่อไปได้ ในกรณีผู้หนึ่งนั่งลง
กับพื้นหมดทุกคน ไม่สามารถไปช่วยเตะผู้อื่นได้ ให้ผู้เล่นไปตีผู้หนึ่งผู้ใดให้ผู้เล่นคนนั้นลุกขึ้น
แล้วจึงดำเนินการเล่นต่อไป

- กติกา
๑. เมื่อผู้หนึ่ง ผู้ใดจะเตะไม่ได้
 ๒. เมื่อผู้หนึ่งถูกเตะ ผู้หนึ่งต้องกลับเป็นผู้ไล่ต่อไป
 ๓. เมื่อผู้หนึ่งนั่งลงแล้ว ลุกขึ้นเองต้องกลับเป็นผู้ไล่

จากรายละเอียดที่ให้ไว้ เราทราบอะไรเพิ่มเติมและทำอะไรได้โดยไม่ผิดกติกา ?

- สิ่งที่เราทราบได้แก่
๑. มีผู้เล่นอย่างน้อย ๒ คน
 ๒. ขณะที่ผู้หนึ่งนั่งลง ไม่ต้องเป็นผู้ไล่
 ๓. เมื่อผู้หนึ่งถูกเตะ หรือ นั่งลงแล้วลุกขึ้นเอง ผู้หนึ่งต้องกลับเป็นผู้ไล่
 ๔. หากผู้หนึ่งไม่ต้องการเป็นผู้ไล่ ต้องไม่ให้ถูกเตะ และ ถ้านั่งลงแล้วไม่ลุก
ขึ้นเอง

ฯลฯ

จะเห็นว่าความรู้ที่ได้เพิ่มเติมมีได้บอกไว้ในรายละเอียดที่ให้ แต่เป็นความรู้ที่ได้จากการ
พิจารณาและใช้เหตุผล สิ่งที่เรารับแต่ละข้อนั้นมีเหตุผลประกอบอยู่เสมอ และเหตุผลเหล่านี้เรา
ได้มาจากกติกาหรือรายละเอียดอื่น ๆ ระบบคณิตศาสตร์ใดก็ตาม มีวิธีการแบบเดียวกัน กล่าวคือเริ่ม
ด้วยกฎเกณฑ์หรือความรู้พื้นฐานก่อน กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เขียนได้กับ กติกา ของการเล่น ความรู้
พื้นฐานเขียนได้กับ คำจำกัดความ ของการเล่น ทางระบบคณิตศาสตร์เราจะรวมทั้งกฎเกณฑ์และความรู้พื้นฐาน
เป็นหมวดหมู่ด้วยกัน เรียกรวม ๆ ว่า สัจพจน์ ซึ่งเราจะนำมาจัดเป็นระบบเพื่อสะดวกแก่การ
หาความรู้และการอ้างอิง ในระบบคณิตศาสตร์ที่จะนำมาแสดงนี้นักเรียนจะได้ศึกษาอนิยาม นิยาม

สัจพจน์ และทฤษฎีบท ตลอดจนได้ศึกษาภาษาคณิตศาสตร์ และศึกษาการพิสูจน์ที่รองรับไว้ในกรอบของระบบสัจพจน์เหมือนกับการเล่นเกมกีฬาที่รองรับไว้ในกรอบของกฎเกณฑ์ทางไว

๑. ระบบวงฝัง (System S)

อนิยาม	ฝัง, ฝัง
สัจพจน์ ๑	ฝังทุกฝัง เป็นที่อยู่ของฝัง
สัจพจน์ ๒	ถ้า H_1 และ H_2 เป็นฝัง จะมีฝังตัวเดียวที่อยู่ได้ทั้งฝัง H_1 และ H_2
สัจพจน์ ๓	ถ้า b เป็นฝัง b จะมีฝังอยู่ ๒ ฝัง (ฝังแต่ละตัวมีฝังอยู่ ๒ ฝัง)
สัจพจน์ ๔	มีฝังฝัง ๔ ฝัง

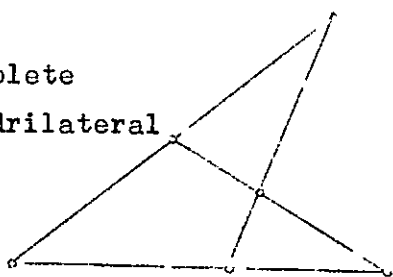
ทฤษฎีบท ๑ มีฝัง ๒ ตัว

ทฤษฎีบท ๒ ในแต่ละฝังมีฝัง ๓ ตัว

ทฤษฎีบท ๓ ถ้า b_1 เป็นฝัง จะมีฝังที่ไม่อยู่รวมฝังกับ b_1 หนึ่งตัว

ในระบบนี้ไม่มีนิยาม โปรดสังเกตว่าเรานิยามเพื่อสะดวกแก่การพูดหรือพิสูจน์เท่านั้น แม้ว่าจะขาดนิยามไป เรายังสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทได้อีก เนื่องจากเราอาศัยความหมายของอนิยามเป็นอะไร ๆ ได้ ถ้าเราให้ฝังเป็นจุด และฝังเป็นเส้นตรงในระนาบ รูปร่างของระบบนี้จะ

Complete
Quadrilateral



ซึ่งเราอาจนำไปใช้แก้ปัญหาที่ว่า
มีต้นไม้ ๒ ต้น จะปลูกให้ได้ ๔ แนว
แนวละ ๓ ต้น จะปลูกอย่างไร

(3)

ระบบโคจรรูป (nine points geometry)

สโมสรคณิตศาสตร์ ณ โรงเรียนแห่งหนึ่ง ต้องการจัดงานซึ่งต้องอาศัยบรรดาสมาชิกทั้งหมด จึงได้ตกลงจัดตั้งคณะกรรมการโดยใช้สมาชิกเป็นกรรมการในการจัดครั้งนี้ จัดตามกฎ ๘ ข้อ ดังนี้

- P_1 สมาชิกใด ๆ สองคนจะต้องได้ทำงานร่วมกันในอย่างน้อย ๑ คณะ
- P_2 สมาชิกใด ๆ สองคน จะทำงานร่วมกันในคณะกรรมการได้ไม่เกิน ๑ คณะ
- P_3 ถ้าสมาชิกคนใดไม่ได้อะไรในงานในคณะกรรมการคณะหนึ่งแล้ว จะมีคณะกรรมการซึ่งไม่มีสมาชิกร่วมกับคณะกรรมการชุดนี้ที่สมาชิกคนนั้นร่วมทำงานด้วย
- P_4 ถ้าสมาชิกคนใด ไม่ได้อะไรในงานในคณะกรรมการคณะหนึ่งแล้ว จะมีคณะกรรมการซึ่งไม่มีสมาชิกร่วมอยู่ในคณะกรรมการชุดนี้ มีสมาชิกคนนั้นร่วมทำงานด้วยอย่างมาก ๑ คณะ
- P_5 แต่ละคณะกรรมการมีกรรมการอย่างน้อย ๓ คน
- P_6 ไม่มีคณะกรรมการคณะใด ที่เอาสมาชิกทั้งหมดมาเป็นกรรมการ
- P_7 แต่ละคณะกรรมการมีกรรมการได้ไม่เกิน ๓ คน
- P_8 การจัดครั้งนี้ ต้องมีคณะกรรมการอย่างน้อย ๑ คณะ

จากกฎทั้ง ๘ ข้อนี้ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่ทำให้เราบอกได้ว่า สโมสรคณิตศาสตร์แห่งนี้ สมาชิก ๘ คน ในการหาคำตอบนี้นักเรียนจำเป็นต้องสร้างทฤษฎีบทตามลำดับขึ้นหลายทฤษฎีบท ก่อนอื่นเราจะถือว่ากฎทั้งแปดข้อนี้เป็นสัจพจน์ เขียนความภาษาคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

นิยาม สมาชิก, คณะกรรมการ

สัจพจน์ที่ ๑ ถ้า m และ n เป็นสมาชิกใด ๆ สองคน จะมีคณะกรรมการอย่างน้อย ๑ คณะ ที่มีทั้ง m และ n อยู่ด้วย

สัจพจน์ที่ ๒ ถ้า m และ n เป็นสมาชิกใด ๆ สองคน จะมีคณะกรรมการได้อย่างมาก ๑ คณะ ที่มีทั้ง m และ n อยู่ด้วย

สัจพจน์ที่ ๓ ถ้า A เป็นคณะกรรมการ และ m เป็นสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A จะมีคณะกรรมการ B ซึ่งมี m อยู่ และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกับ A ($A \cap B = \emptyset$) อย่างน้อย ๑ คณะ

สัจพจน์ที่ ๔ ถ้า A เป็นคณะกรรมการ และ m เป็นสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A จะมีคณะกรรมการ B ซึ่งมี m อยู่ และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกับ A ($A \cap B = \emptyset$) ได้อย่างมาก

๑ คณะ

สัจพจน์ที่ ๕ ถ้า A เป็นคณะกรรมการแล้ว A จะมีสมาชิกได้อย่างน้อย ๓ คน

สัจพจน์ที่ ๖ (กฎข้อ ๓) ถ้า A เป็นคณะกรรมการแล้ว A จะมีสมาชิกได้ไม่เกิน ๓ คน

สัจพจน์ที่ ๗ (กฎข้อ ๒) ถ้า A เป็นคณะกรรมการ จะมี m ซึ่ง m ไม่อยู่ใน A .

สัจพจน์ที่ ๘ มีคณะกรรมการอย่างน้อย ๑ คณะ

จากสัจพจน์เหล่านี้ เราอนุมาน (deduce) ทฤษฎีบท ได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ ๑ ถ้า m และ n เป็นสมาชิกใด ๆ สองคน จะมีคณะกรรมการที่มี m และ n ได้

๑ คณะ

ทฤษฎีบทที่ ๒ ถ้า A เป็นคณะกรรมการ และ m เป็นสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A จะมีคณะกรรมการ B ซึ่งมี m อยู่ และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกับ A ได้ ๑ คณะ

ทฤษฎีบทที่ ๓ ถ้า A เป็นคณะกรรมการ A จะมีสมาชิก ๓ คน

ทฤษฎีบทที่ ๔ มีสมาชิกละอย่างน้อย ๒ คน

มีทฤษฎีบทไปหรือไม่ ? เราอาจมองไม่เห็นทาง แต่เนื่องจากคำว่า "สมาชิก" และ "คณะกรรมการ" เป็นนิยาม เราสามารถแทน "สมาชิก" ด้วย "จุด" และคณะกรรมการด้วย "เส้น" เพื่อใช้ศึกษาต่อ

นิยาม ๑ เส้น (คณะกรรมการ) A และ B จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ A ไม่มีสมาชิกร่วมกับ B

เราจะใช้นิยามนี้เพื่ออำนวยความสะดวกในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ ๕ จะมีจุดอย่างน้อย ๕ จุด

ทฤษฎีบทที่ ๖ ถ้า A เป็นเส้นแล้ว จะมีเส้นขนานกับ A ได้สองเส้น

ทฤษฎีบทของเจอนี ถ้า L, M, N, เป็นเส้นใด ๆ ๓ เส้น และ L ขนานกับ M, M ขนานกับ N แล้ว L จะขนานกับ N

ทฤษฎีบทที่ ๗ มีจุด ๔ จุด

ทฤษฎีบทที่ ๘ แต่ละจุดอยู่ในเส้น ๔ เส้น (สมาชิกแต่ละคนจะต้องเป็นกรรมการของคณะกรรมการ

ถึง ๔ คณะ)
ทฤษฎีบทที่ ๕ มีเส้น ๑๖ เส้น

ระบบหกหัวตั้ง (Upside-down)

แบบหนึ่งของระบบนี้ไดแกเซต $\{0, 1, 6, 8, 9\}$ และโอเปอเรชัน "หมุน ๑๘๐°"

นิยาม (แทนด้วยตัว) $1, 6, \dots$ และ $-$ (อ่านว่า "หกหัวตั้ง" แทน $\bar{i}$ หมายถึงรูปของ i เมื่อ "หกหัวตั้ง" แล้ว) เป็นโอเปอเรชันที่เราไม่ได้ให้ความหมาย

ให้ E เป็นเซตของนิยาม นั่นคือ $E = \{1, 6, \dots\}$

สัจพจน์ที่ ๑ ถ้า $1 \in E$ แล้ว $\bar{1} \in E$

สัจพจน์ที่ ๒ ถ้า $1 \in E$ แล้ว $\bar{\bar{1}} = 1$

ทฤษฎีบทที่ ๑ ถ้า $1 \in E$ แล้ว $\bar{\bar{1}} = 1$

ทฤษฎีบทที่ ๒ สมาชิก i แต่ละตัวของ E ถ้าหกหัวตั้งมีจำนวนครั้งเป็นจำนวนคู่ จะมีรูปเป็นตัวเดิม และถ้าจำนวนครั้งเป็นเลขคี่ จะมีรูปเช่นเดียวกับ $\bar{i}$

นิยาม ถ้า $1_1 \in E$ และ $\bar{1}_1 = 1_1$ เราเรียก 1_1 ว่า สมาชิกสมบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ ๑ ถ้า 1_1 เป็นสมาชิกสมบูรณ์

ก. $\bar{\bar{1}}_1 = 1_1$

ข. $\bar{1}_1 = 1_1$

ทฤษฎีบทที่ ๒ ถ้า 1_1 เป็นสมาชิกสมบูรณ์

$$1_1^{(n)} = 1_1$$

เมื่อ $1_1^{(n)}$ หมายถึง 1_1 หกหัวตั้ง n ครั้ง

ภาคผนวก ง.

ตัวอย่างแผนการสอน

ภาคผนวก ง.
ตัวอย่างแผนการสอน

พัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์

๑. แนะนำให้นักเรียนทราบว่า คณิตศาสตร์เป็นนามธรรมซึ่งเป็นเรื่องที่นักเรียนเคยมีประสบการณ์มาแล้ว ความคิดซึ่งเป็นนามธรรมนี้เกิดจากกระบวนการละเอียดขององค์ประกอบบางอย่าง เพ่งเล็งแต่โครงสร้างภายในใดคนหนึ่ง หรือลักษณะรวมของสิ่งต่าง ๆ

๒. ให้ตัวอย่างความคิดทางนามธรรม โดยให้นักเรียนหาลักษณะรวมของสิ่งต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

๑) ตึก บ้าน กระทอม ถ้ำ (คำตอบคือ เป็นที่อยู่อาศัย)

๒) จาน ลอรยนต์ ภาพวงจันทร์เต็มดวง ห่วง hula-hoop พวงมาลัยรยนต์
(คำตอบคือ มีรูปร่างเป็นวงกลม)

๓) นิ้วมือบนมือหนึ่ง กับเข็ม바สดเกทบอล (คำตอบคือ มีจำนวนเท่ากัน)

ให้นักเรียนสังเกตตัวอย่างทั้งสามนี้ จะเห็นว่าเราได้ละเอียดขององค์ประกอบบางอย่าง ดังตัวอย่างข้อ ๑) เราไม่ได้คำนึงถึงว่า ตึก บ้าน กระทอม ถ้ำ ประกอบด้วยอะไร และมีวิธีการสร้างอย่างไร เราคำนึงแต่เฉพาะด้านประโยชน์

๓. ให้ตัวอย่างสำหรับฝึกความคิดทางค่านามธรรมเพิ่มเติมโดยให้หาลักษณะรวมของแต่ละข้อต่อไปนี้

๑) เหล็ก อะลูมิเนียม ทองแดง

(คำตอบคือ เป็นธาตุ)

๒) กบ ผึ้ง หนอน

(คำตอบคือ เป็นสิ่งมีชีวิต)

๓) นา รยนต์ เครื่องบิน

(คำตอบคือ เป็นพาหนะ)

๔) น้ำมัน น้ำ น้ำเชื่อม ซอส น้ำปลา

(คำตอบคือ เป็นของเหลว)

๕) ของแข็ง ของเหลว ก๊าซ

(คำตอบคือ เป็นสสาร)

๖) { ☐ , ☐ , ☐ }

(คำตอบคือ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส)

๗) { ☐ , ☐ , ☐ }

(คำตอบคือ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า)

- ๘) { , , ,  } (คำตอบ คือ เป็นสี่เหลี่ยม)
- ๙) { , ,  } (คำตอบ คือ เป็นรูปหลายเหลี่ยม)
- ๑๐) { , ,  } (คำตอบ คือ เป็นรูปเว้า)
- ๑๑) { , ,  } (คำตอบ คือ เป็นรูปนูนออก)
- ๑๒) { , , ,  } (คำตอบ คือ เป็นรูปปิด)
- ๑๓) { , ,  } (คำตอบ คือ เป็นรูปผิวปิด)
- ๑๔) เช้ทแต่ละคู่ทอไปมีลักษณะรวมกันคืออะไร
- ก. เช้ทของนิ้วมือซ้ายของคนปกติ
- ข. เช้ทของนิ้วเท้าขวาของคนปกติ
- ค. { a, b, c, d, e }
- ง. { หิน ๑ ก้อน, ต้นไม้ ๑ ต้น, ฃว ๑ ตัว, คน ๑ คน, ดาว ๑ ดวง }
- (คำตอบคือ มีจำนวน ๕ เทากัน)

๔. เลาประวัติพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ ๑ ๆ และการใช้ภาษาคณิตศาสตร์ตามแนวที่เรียบเรียงไว้ในเนื้อหาหัวขอการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างภาษาคณิตศาสตร์

ภาษาพูด : แดงและดำไปโรงเรียน

ภาษาคณิตศาสตร์ : แดงไปโรงเรียน และ ดำไปโรงเรียน

ภาษาพูด : สมบูรณ์สอบได้ แต่ สมชัยสอบตก

ภาษาคณิตศาสตร์ : สมบูรณ์สอบได้ และ สมชัยสอบตก

ฯลฯ

ข้อสังเกต ภาษาคณิตศาสตร์จะมีวิธีการสัมพันธ์ประพจน์ หรือเชื่อมประพจน์ ๒ ประพจน์ ๔ วิธีการ คือ ...และ... ...หรือ... ถ้า...แล้ว... ...ก็ต่อเมื่อ... ไม่จริงที่ว่า...

ภาษาพูด : ซางโสดหนึ่ง ขณะนักเรียน นกกระจาบอยู่หนึ่ง ฯลฯ

ภาษาคณิตศาสตร์ : ซางเซ้ทหนึ่ง เซ้ทของนักเรียน นกกระจาบเซ้ทหนึ่ง ฯลฯ

ข้อสังเกต ทางคณิตศาสตร์จะใ้ชื่อว่า เซต แทนลักษณะนามเช่น โขลง คณะ ฝูง หมู่ เหล่า พวก สมาคม ฯลฯ

ตัวอย่างสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

๑. สัญลักษณ์แทนจำนวนของกรีก อียิปต์ โรมัน

กรีก α แทน ๑

μ แทน ๒

ตัวอย่างเช่น ๗๒ เขียนเป็น $\psi \kappa \beta$

อียิปต์ | แทน ๑

|| แทน ๑๐

๑ แทน ๑๐๐ ฯลฯ

ตัวอย่างเช่น ๗๒๔ เขียนเป็น ๑ ๑ ๑ ||||

โรมัน I แทน ๑

V แทน ๕

X แทน ๑๐ ฯลฯ

ตัวอย่างเช่น ๒๕๑๔ เขียนเป็น MMDXVIII

๒. สัญลักษณ์อื่น ๆ

(ก) แทนอัตราส่วนของเส้นรอบวงและเส้นผ่าศูนย์กลาง ถอดมาใช้เป็น π

(ข) แทนรากที่สอง ถอดมาใช้เป็น $\sqrt{\quad}$ ซึ่งดัดแปลงมาจากอักษร r จากคำว่า root

$\sqrt{\quad}$ แทนรากที่สาม ถอดมาใช้เป็น $\sqrt[3]{\quad}$

ฯลฯ

๓. อธิบายการจัดความรู้ และความคิดให้เป็นระบบ โดยตามนักเรียนถึงวิธีการจดจำความรู้ทาง ๆ ที่นักเรียนเรียนในแคลคูลัส แล้วสรุปว่า การจดจำความรู้ทาง ๆ นั้นเราอาจจะจดจำโดยเลือกลักษณะที่สำคัญ ๆ เป็นจำนวนเล็กน้อยสำหรับจำ ซึ่งลักษณะที่สำคัญ ๆ เหล่านี้เพียงพอที่จะทำให้เรารู้เรื่องอื่น ๆ ต่อไป และในทางคณิตศาสตร์จะถือหลักเดียวกัน กล่าวคือ จะ

เลือกลักษณะสำคัญบางอย่างเป็นข้อตกลงเบื้องต้น แล้วใช้ข้อตกลงเหล่านี้ไปเป็นข้ออ้างอิงในการพิสูจน์ความรู้อื่น ๆ แนววิธีการทางคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากกว่า กล่าวคือจะใช้วิธีการที่เรียกว่า
 สัจพจน์วิธี (Axiomatic method)

๖. แนะนำ สัจพจน์วิธี (Axiomatic method) และระบบสัจพจน์ตามที่ได้เรียบเรียงไว้

ภาคผนวก จ.

ตารางกำหนดเวลาสอน และ โครงสร้างการสอน
สำหรับการสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

ภาคผนวก จ. ตารางกำหนดเวลาสอน

ชั้น ปีที่ วันที่	ม.ศ. ๑		ม.ศ. ๒		ม.ศ. ๓	
	ของ ๑	ของ ๒	ของ ๑	ของ ๒	ของ ๑	ของ ๒
๑๕ ม.ศ.	๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๓.๒๐๑๔.๑๐	๑๐.๓๐๑๑.๓๐			
๑๖ ม.ศ.		๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๓.๒๐๑๔.๒๐			
๑๗ ม.ศ.			๑๒.๒๐๑๓.๒๐	๑๓.๒๐๑๔.๒๐	๑๐.๒๐๑๑.๒๐	๑๕.๒๐๑๔.๒๐
๑๘ ม.ศ.						
๒๐ ม.ศ.	๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๖.๑๐๑๗.๐๐		๑๒.๒๐๑๓.๒๐		
๒๑ ม.ศ.				๑๕.๒๐๑๔.๒๐		๑๓.๒๐๑๔.๒๐
๒๒ ม.ศ.			๑๐.๓๐๑๑.๓๐		๑๒.๒๐๑๓.๒๐	
๒๓ ม.ศ.	๑๕.๑๐๑๕.๐๐	๑๕.๒๐๑๖.๑๐				
๒๔ ม.ศ.	๑๓.๒๐๑๔.๑๐	๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๒.๒๐๑๓.๒๐			
๒๕ ม.ศ.	๑๐.๒๐๑๒.๐๐	๑๓.๒๐๑๔.๑๐				
๒๗ ม.ศ.	๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๖.๒๐๑๗.๑๐		๑๒.๒๐๑๓.๒๐	๑๕.๒๐๑๔.๒๐	
๒๘ ม.ศ.				๑๕.๒๐๑๔.๒๐		๑๓.๒๐๑๔.๒๐
๒๙ ม.ศ.			๑๐.๓๐๑๑.๓๐		๑๒.๒๐๑๓.๒๐	๑๓.๒๐๑๔.๒๐
๓๐ ม.ศ.		๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๓.๒๐๑๔.๒๐	๑๒.๒๐๑๓.๒๐		
๓๑ ม.ศ.			๑๒.๒๐๑๓.๒๐	๑๓.๒๐๑๔.๒๐	๑๐.๓๐๑๑.๓๐	๑๕.๒๐๑๔.๒๐
๑ ป.พ.	๑๐.๒๐๑๑.๑๐					
๓ ป.พ.	๑๕.๒๐๑๖.๑๐	๑๖.๑๐๑๗.๐๐		๑๒.๒๐๑๓.๒๐	๑๐.๓๐๑๑.๓๐	๑๕.๒๐๑๑.๓๐
๔ ป.พ.	๑๓.๒๐๑๔.๐๐			๑๕.๒๐๑๔.๒๐	๑๕.๒๐๑๑.๓๐	๑๒.๒๐๑๔.๒๐
๕ ป.พ.			๑๐.๓๐๑๑.๓๐		๑๕.๒๐๑๑.๓๐	๑๕.๒๐๑๑.๓๐
๖ ป.พ.		๑๕.๒๐๑๗.๑๐				

ภาคผนวก จ. โครงการสอนสำหรับการสอนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

ชั่วโมงที่	รายการสอน	หมายเหตุ
๑	พัฒนาการของความคิดทางคณิตศาสตร์	
๒	ส่วนประกอบของระบบคณิตศาสตร์ - อนิยาม (undefined terms) - นิยาม (defined terms) - สัจพจน์ (axioms หรือ postulates) - ทฤษฎีบท (theorems)	!
๓	การพิสูจน์และแบบต่าง ๆ ของการพิสูจน์ (หัวข้อ) - วิธีพิสูจน์ทางตรง และวิธีพิสูจน์ทางอ้อม	
๔	- Proof of Existence - Proof by Counterexample	
๕	- Proof by Enumeration - Proof by Cases	
๖	- Proof by Elimination - Proof by Contrapositive	
๗	ตัวอย่างระบบคณิตศาสตร์ที่มีขนาดจำกัด (หัวข้อแนะนำ) (Finite Mathematical Systems) - เกม "ไลแตะไทย"	
๘	ระบบเรียง ระบบหักหัวตั้ง	
๙	ระบบโครงรูป	