

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการ
แก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2547

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการ
แก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2547

อัมราพร บุญประทะทอง (2547). การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง-กุตตา. ปรินญานิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: พันตรี ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า, ดร. สโรช ไทรเมฆ.

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่ต้องการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Dynamic optimal control) ที่มีรูปแบบของปัญหาเป็นสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential algebraic equation) ซึ่งการแก้ปัญหานั้นต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เท่านั้น แต่เนื่องจากการแก้ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เป็นการแก้ปัญหของพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นจึงต้องทำการแปลงปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Dynamic optimal control) ให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Parameterized) เสียก่อน โดยนำหลักการของคอลโลเคชัน (Collocation) ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) เข้ามาช่วยในการแปลง หลักการดังกล่าวมีวิธีแก้ปัญหหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งในงานวิจัยนี้จะนำวิธีการหาค่าอินทิเกรตของ รุงเง – กุตตา (Runge – Kutta) มาใช้ เพื่อลดจำนวนของตัวแปรโดยเฉพาะตัวแปรสเตท (States) และ โคสเตท (Costates) วิธีคอลโลเคชันนี้จะแปลงสเตท (States) โคสเตท (Costates) และเงื่อนไขต่างๆ ที่อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Dynamic optimal control problem) ให้เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมสถิตยศาสตร์ (Static optimal control problem) และสามารถแก้ปัญหาต่อไปด้วยหลักการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ได้ ซึ่งกระบวนการหาคำตอบทั้งหมดใช้หลักการของวิธีตรง (Direct approach) ซึ่งทำได้โดยสมมุติค่าเริ่มต้นขึ้นมาก่อนโดยไม่ต้องผ่านหลักการทางคณิตศาสตร์อื่นๆ และดำเนินการหาคำตอบที่ตรงตามเงื่อนไขทั้งหมดของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ไปเรื่อยๆ ตามระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จนกว่าจะได้คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

คำตอบที่ได้จากกระบวนการข้างต้นเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับหาคำตอบด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) แล้ว ปรากฏว่าคำตอบส่วนใหญ่มีความใกล้เคียงกันมาก แม้จะมีความแม่นยำน้อยกว่าแต่ข้อได้เปรียบของวิธีตรง (Direct approach) คือ สามารถหาคำตอบสำหรับบางปัญหาที่ไม่สามารถหาคำตอบด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) ได้ หรือหากต้องการความแม่นยำที่สูงขึ้นก็สามารถนำคำตอบที่ได้จากวิธีตรง (Direct approach) มาใช้เป็นคำตอบเริ่มต้น (Initial guess) กับการหาคำตอบด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) ได้เช่นกัน

The Direct Approach of General Dynamic Optimal Control : Nonlinear
Programming and Rung-Kutta Method



Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Engineering degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

March 2004

Amaraporn Boonpratong. (2004). *The Direct approach of general dynamic optimal control :nonlinear programming and Runge-Kutta* . Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering).Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Gen. Dr. Tawiwat Veerakleaw , Dr. Saroj Saimek .

Solving optimal control problems in the way of numerical is very important scheme. However, some methods are hard to implement into computer programming or some require solvers to have the advance knowledge of calculus of variation represented as maximum principle. One of popular numerical method to avoid those problems is the direct transcription method with nonlinear programming. This scheme is good to implement in the programming and also solvers are required only to know some optimization techniques. The purpose of this research is to implement the general-purposes program in MATLAB code to solve all classical cases of optimal control and some realistic problems. Solvers can select many forms of direct transcription. In this research, direct transcription method in the form of Rung-Kutta is used to implement in this general software called the general purposes-program. Also the graphic user interface is provided in the general-purposes program. The selected classical optimal control problems are solved by this program and compare the results from the general purposes-program program with the analytical solutions, and the applications of the practical problems are shown.

The numerical solutions of the optimal solutions show that most numerical solution of state variables are really close to those from analytical results. However, the numerical solutions of control inputs are quietly different from those of analytical solution since they are not confined by the solution of co-state variables or Lagrange multipliers as in the analytical method.

In the application of the general purposes-program, this program perform may not well in some large-scaled nonlinear optimal control problems because the deficiency of the nonlinear programming solver. However, the general purposes program can perform

well in solving small nonlinear optimal control problems in either fixed end time or variable end time optimal control problem.



การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการ
แก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่
เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง-กูดตา.

ของ

นางสาว อัมราพร บุญประทะทอง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวិชากรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาพร หะวานนท์)

วันที่ เดือน พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน

(พันตรี ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า)

..... กรรมการ

(ดร. สโรช ไทรเมฆ)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(พันเอก สุภโชค สัมปัตตะวนิช)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ดร. สิ้นชัย ชินวรรตน์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันตรี ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ ดร. สโรช ไทรเมฆ กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ พันเอกสุภโชค สัมปัตตะวนิช รองศาสตราจารย์ วิจิต บัวแก้ว ดร.พิชัย อัมฤมมงคล พันตรี ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง และ ดร.สินชัย ชินวรรตน์ ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ บริษัท เอส คอมเพรสแอร์ จำกัด ที่ให้โอกาสในการศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณบิดา มารดา ครอบครัวชัยมงคล และ ครอบครัวบุญยะประภัศร ในความสนับสนุนช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้น โครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร. จปร.สาขาวิศวกรรมเครื่องกล รุ่น1 ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ

อัมราพร บุญประทะทอง

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
	วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย.....	2
	ขอบเขตของโครงการวิจัย.....	2
	วิธีดำเนินการวิจัย.....	2
	แผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย.....	3
	งบประมาณของโครงการวิจัย.....	4
	ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับและหน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์.....	4
2	ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	
	ปริทัศน์วรรณกรรม.....	5
	ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	7
	Transcription method สำหรับปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic optimal control problem).....	8
3	วิธีตรง(Direct scheme)	
	วิธีตรง (Direct method) หรือ Direct transcription.....	20
4	การออกแบบและวิธีใช้โปรแกรม	
	การออกแบบโปรแกรม.....	36
	โครงสร้างของโปรแกรม.....	38
	วิธีใช้โปรแกรม.....	39
5.	ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ	
	ประเภทของปัญหา.....	52

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5(ต่อ) ทดสอบเจนเนอรัลโพรโพสโปรแกรม (General-Purposes Program) ด้วยปัญหา คลาสสิกอล(Classical Problem).....	54
สรุปผลการทดสอบโปรแกรม	95
6 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ	
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	97
ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยต่อไป.....	98
บรรณานุกรม.....	99
ภาคผนวก.....	102
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	207

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

หน้า

3.1	แสดงคอนทัวร์ (Contour) และกราฟสามมิติกับระนาบที่สัมผัสจุดต่ำสุดของกราฟรูป ตาข่ายสำหรับปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ(Constraints).....	30
3.2	แสดงคอนทัวร์ (Contour) และเกรเดียนท์ (Gradient) ของปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับเป็น อสมการ (Inequality constraints).....	32
4.1	แสดงโฟลชาร์ท (Flowchart) ของ general proposes program.....	37
4.2	แสดงหน้าต่างแรกของ General purpose-program.....	40
4.3	แสดงหน้าต่างที่สองของกรณีที่มีรู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time).....	41
4.4	แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีไม่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Variable end time)	41
4.5	แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time).....	42
4.6	แสดงการกำหนดจำนวนของสเตทวารีเอเบิล (State variable).....	43
4.7	แสดงการกำหนดสเตทอิเคชัน (State equation).....	43
4.8	แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้งสองเงื่อนไข ที่ t_0 และ t_f ...	44
4.9	แสดงการกำหนดจำนวนของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable).....	45
4.10	แสดงการกำหนดขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input).....	46
4.11	แสดงการกำหนดค่าเงื่อนไขบังคับ (Constraints) คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial time) เวลาปลายทาง(Final time) ช่วงเวลา(Interval) และ เกรเดียน (Gradient).....	47
4.12	แสดงการแสดงค่าที่ปรากฏบนหน้าจอคอมมานด์ (Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วน ออฟไลน์ (Off-line) เสร็จสิ้น.....	48
4.13	แสดงการแสดงค่าบนหน้าจอคอมมานด์ (Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วนออนไลน์ (On-line) เสร็จสิ้น	49
4.14	แสดงกราฟความสัมพันธ์ของสเตท (State) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) เทียบกับเวลา เปรียบเทียบระหว่างคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical) และ คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical).....	50
5.1	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 1.....	58
5.2	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t	

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
5.2(ต่อ) สำหรับตัวอย่างที่1.....	59
5.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 2.....	64
5.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่2.....	65
5.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่2.....	66
5.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 3.....	70
5.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 3.....	71
5.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 3.....	72
5.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 4.....	74
5.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่4.....	75
5.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 5.....	78
5.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 5.....	79
5.13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 5.....	80
5.14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 6.....	83
5.15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t	

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
5.15(ต่อ) สำหรับตัวอย่างที่ 6.....	84
5.16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 7.1.....	85
5.17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.1.....	88
5.18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 7.1	89
5.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.1.....	90
5.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.1.....	91
5.21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 7.2.....	93
5.22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 7.2.....	93
5.23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_3(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับ ตัวอย่างที่ 7.2.....	94
5.24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.2.....	94
5.25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.2.....	95

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1.5 แผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย.....	3
3.1 แสดงค่าตัวแปรต่างๆ สำหรับวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta).....	25
4.1 แสดงรูปแบบของตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรม	42



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Optimal control) พบเห็นได้ทั่วไปในชีวิตประจำวันของคนเรา โดยเฉพาะการควบคุมการเคลื่อนไหวของร่างกาย เช่น สมองของคนสามารถคาดคะเนได้โดยอัตโนมัติว่าควรใช้แรงเท่าใดในการเตะลูกฟุตบอลให้กลิ้งไปถึงเป้าหมายระยะต่างๆ ตามความต้องการ (Objective) รวมไปถึงในอุตสาหกรรมการผลิต หรือแม้กระทั่งในระบบเศรษฐศาสตร์ เป้าหมายที่อาจเปลี่ยนไปตามระยะเวลาและสถานการณ์ ทำให้ต้องมีการเปลี่ยนแปลงการควบคุมเพื่อให้ได้ภาวะที่เหมาะสมที่สุดที่จะบรรลุเป้าหมายในขณะนั้น การหาคำตอบสำหรับปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม (Optimal control problem) โดยทั่วไปจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการคำนวณ ซึ่งในปัจจุบันมีโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์มากมายที่เอื้ออำนวยในการคำนวณดังกล่าวพร้อมกับความสามารถพิเศษด้านการคำนวณทางวิศวกรรมด้วย เช่น MATLAB Mathematica เป็นต้น งานวิจัยนี้จึงนำโปรแกรม MATLAB มาใช้หาคำตอบดังกล่าว แต่เนื่องจากค่าที่ต้องกำหนดให้โปรแกรมในแต่ละปัญหานั้นแตกต่างกันไป และค่อนข้างซับซ้อน อาจเป็นอุปสรรคให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างล่าช้าและเกิดความผิดพลาดได้ง่าย จึงเพิ่มการพัฒนาโปรแกรมให้ติดต่อกับผู้ใช้ได้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) พร้อมกับแสดงผลการวิเคราะห์ออกมาในรูปของกราฟแสดงผล ซึ่งเข้าใจง่ายและยังสะดวกแก่ผู้ใช้ที่ไม่มีความรู้ทางด้านวิศวกรรมมาก่อนอีกด้วย

ในการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ โดยทั่วไปจำเป็นต้องกำหนดเป้าหมายที่ต้องการ (Objective) ให้ระบบเสียก่อน และรวบรวมเงื่อนไขต่างๆ ของระบบในสถานะหรือ ณ เวลาที่สนใจ เช่น ณ เวลาเริ่มต้น และ ณ เวลาสุดท้าย เพื่อนำมาพิจารณาร่วมกันในการหาคำตอบ ซึ่งวิธีการหาคำตอบสามารถทำได้หลายวิธี ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาว่าจะเหมาะสมกับวิธีใด แต่โดยทั่วไปจะนำหลักทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดมาใช้ร่วมกับการปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจากการศึกษางานวิจัยต่างๆ ที่เกี่ยวข้องพบว่า มีการนำการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มาใช้กันอย่างหลากหลายตามความเหมาะสมของแต่ละงานวิจัย แต่ปัจจัยที่สำคัญที่มักจะเป็นปัญหาสำหรับความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาคำตอบดังกล่าวคือ ค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ในการคำนวณ ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำหลักการหาค่าอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของรุงเง-คุตตา (Rung-Kutta) มาใช้เพื่อลดผลกระทบของ

ปัญหาดังกล่าว เนื่องจากวิธีนี้เป็นการอินทิเกรตแบบไปข้างหน้า (Forward) ซึ่งคำนวณหาค่าเริ่มต้นได้เอง ซึ่งผู้วิจัยตั้งสมมุติฐานว่าจะส่งผลให้การคำนวณมีความแม่นยำและรวดเร็วมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

- 1.2.1 เพื่อสร้างโปรแกรมคำนวณสำหรับแก้ปัญหาระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมโดยวิธีตรง(Direct Method)
- 1.2.2 เพื่อศึกษาแนวทางที่จะลดปัญหาในการกำหนดค่าเริ่มต้น(Initial guesses) ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อระยะเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ รวมทั้งโอกาสที่จะหาคำตอบได้

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

- 1.3.1 ใช้วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในการอินทิเกรตหาค่าของสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ต่างๆ
- 1.3.2 ใช้วิธีการแก้ปัญหาระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ในการหาค่าเหมาะสมที่สุด
- 1.3.3 เขียนโปรแกรมคำนวณที่ง่ายสำหรับผู้ใช้งาน โดยใช้หน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface) ในโปรแกรม MATLAB

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

- 1.4.1 ศึกษาทฤษฎีการหาคำตอบที่เหมาะสมของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ โดยวิธีการตรง (Direct method)
- 1.4.2 ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาคำตอบของการอินทิเกรตของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)
- 1.4.3 ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาระบบสมการด้วยวิธีการแก้ปัญหาระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear programming)
- 1.4.4 ศึกษาหลักการของโปรแกรม Matlab ทั้งในส่วนการคำนวณและการสร้างหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface)

1.6 งบประมาณของโครงการวิจัย

7.1 ค่าเอกสาร , แหล่งข้อมูล	3,000	บาท
7.2 ค่าเดินทาง	2,000	บาท
7.3 ค่าจัดทำรายงาน	2,000	บาท

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับและหน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

ได้โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์หาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมพลศาสตร์ ซึ่งสามารถลดปัญหาของค่าเริ่มต้น (Initial guesses) หรือนำมาเป็นค่าเริ่มต้นที่ดีของการหาคำตอบในวิธีทางอ้อม (Indirect method) ได้ นำมาใช้เพื่อส่งเสริมการศึกษาในทางวิศวกรรม ซึ่งสามารถเผยแพร่และพัฒนาต่อไปเพื่อให้สอดคล้องกับแนวทางการศึกษาในกรณีต่างๆ ได้อย่างอิสระ เป็นประโยชน์ต่อหน่วยงานทางการศึกษาที่เกี่ยวข้องทุกหน่วยงาน และสามารถร่วมกันพัฒนาโปรแกรมให้มีความสะดวก แม่นยำมากขึ้น

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature Review)

Eric Neavdal.⁽²²⁾ ศึกษา “การแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของการควบคุมแบบต่อเนื่องด้วย spreadsheet ” (Solving continuous time optimal control problems with a spreadsheet) สร้างรูปแบบการคำนวณ สำหรับแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของการควบคุมแบบต่อเนื่อง (Continuous time optimal control) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ประกอบกับวิธีแก้ปัญหของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งคำนวณบน สเปรดชีท (Spreadsheet) ใน Microsoft excel เหมาะสำหรับผู้ใช้ที่เข้าใจการทำงานในสเปรดชีท (Spreadsheet) ได้ดีกว่าอัลกอริทึม (Algorithm) การใช้งานทำได้โดยกำหนดค่าต่างๆ ลงในสเปรดชีท (Spreadsheet) ที่มีสูตรการคำนวณสำหรับปัญหาแต่ละกรณี ซึ่งผู้ใช้งานต้องเลือกประเภทการคำนวณให้เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ และเน้นทำการทดสอบปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ ผลที่ได้คือ โปรแกรมสามารถใช้แก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ได้อย่างหลากหลายและแม่นยำ แต่ยังมีข้อจำกัดและไม่สะดวกในการกำหนดข้อมูลเริ่มต้น

Arsit Boonyaprapasorn ⁽⁷⁾ ศึกษา “การแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์และ MATLAB” (Solving optimal control problems using mathematical programming and Matlab) สร้างโปรแกรมการคำนวณ หาคำตอบของปัญหาโดยการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) และใช้วิธีของHermit-Simpsonในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของสมการเชิงอนุพันธ์ (ODE) ประกอบกับการแก้ปัญหของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) การคำนวณใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้งาน (Graphic user interface) และเน้นทำการทดสอบกับระบบทางวิศวกรรม ผลที่ได้คือ โปรแกรมสามารถใช้แก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ได้อย่างหลากหลาย และค่อนข้างแม่นยำ แต่ยังมีข้อจำกัดสำหรับปัญหาบางประเภทเพราะใช้เวลาในการหาคำตอบนานเกินไป

TTI GmbH⁽²⁹⁾ ศึกษา “GESOP การแสดงกราฟฟิกสำหรับจำลองเหตุการณ์และหาค่าที่เหมาะสมที่สุด” (Graphical environment for simulation and optimization) ออกแบบซอฟต์แวร์สำหรับการวิเคราะห์ระบบทางพลศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Ordinary nonlinear differential equations) และเงื่อนไขต่างๆ ของระบบ โดยมีหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้งาน (Graphic user interface) ซอฟต์แวร์จะสร้างข้อมูลโครงสร้างเบื้องต้นของแผนการเคลื่อนที่และ

นำมาหาค่าที่เหมาะสมที่สุดเพื่อนำค่าที่ได้ไปปรับปรุงแนวการเคลื่อนที่นั้นอีกครั้ง ก่อนจะแสดงผลออกมาเป็นภาพจำลองเหตุการณ์ สิ่งที่ใช้ต้องกำหนดให้โปรแกรมคือ เงื่อนไขต่างๆของระบบและ คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เท่านั้น และสามารถเลือกรูปแบบการแก้ปัญหาได้ 4 รูปแบบคือ ไดรেকต์มัลติเพิลชู้ตติ้ง (Direct multiple shooting) ไดรেকต์คอลโลเคชัน (Direct collocation) ไฮบริดออปติไมเซอร์ (Hybrid optimizer) และสเปิร์สโซลเวอร์ (Sparse solver) ผลที่ได้คือ โปรแกรมใช้งานได้สะดวกและให้คำตอบที่เข้าใจง่าย แต่ในปัญหาบางประเภทยังใช้เวลาหาคำตอบนานเกินไป

TTI GmbH⁽²⁸⁾ ศึกษา “ASTOS ซอฟต์แวร์สำหรับหาแนวการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมที่สุดของอากาศยาน” (Aerospace trajectory optimization software) ออกแบบซอฟต์แวร์สำหรับจำลองแนวการเคลื่อนที่และหาค่าที่เหมาะสมที่สุดในการปล่อย การลงจอด และวงโคจรของอากาศยาน ซึ่งเกิดจากการนำฐานข้อมูลของอากาศยานทั้งหมดมาใช้ร่วมกับซอฟต์แวร์สำหรับหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (GESOP) มีหน้าต่างรับข้อมูลจากผู้ใช้งาน (Graphic user interface) ซึ่งผู้ใช้งานสามารถเลือกโครงสร้างตามรายการที่มีในซอฟต์แวร์หรือถ่ายโอนข้อมูลโครงสร้างจากไฟล์ โปรแกรมสามารถกำหนดคุณสมบัติและสมการที่สำคัญของระบบนั้นๆ พร้อมทั้งตรวจสอบเช็คความสอดคล้องของข้อมูลได้โดยอัตโนมัติ โดยไม่จำเป็นต้องรับคำสั่งจากผู้ใช้งานเพิ่มเติมอีก ผลที่ได้คือ โปรแกรมใช้งานได้สะดวกและให้คำตอบที่เข้าใจง่าย แต่ในปัญหาบางประเภทยังหาคำตอบไม่ได้

J.T. Betts⁽⁵⁾ ศึกษา “ลักษณะการลู่เข้าหาคำตอบของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในปัญหาการควบคุมเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่สุด” (Convergence of nonconvergent IRK discretizations of optimal control problems) เปรียบเทียบผลการหาคำตอบของค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ เมื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ แทรปิซอยดอล (Trapezoidal) กับการใช้สูตรของ รุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในการหาค่าอินทิเกรตโดยวิธีแรกใช้ซอฟต์แวร์ของ SOCS (Sparse optimal control software) ของบริษัท Boeing และวิธีที่สองใช้สูตรของ รุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เงื่อนไขของการวิเคราะห์เปรียบเทียบคือ แนวโน้มการลู่เข้าหาคำตอบ (Converge) และโอกาสที่จะหาคำตอบได้ของแต่ละวิธี ผลที่ได้คือวิธีแทรปิซอยดอล (Trapezoidal) จะให้คำตอบที่ใกล้เคียงและใช้เวลาสั้นกว่า วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ระบบพลศาสตร์ (Dynamic system) ในทางวิศวกรรมส่วนใหญ่จะแสดงสมการของระบบอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) เช่น ในการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นเส้นตรง โดยมีแรงภายนอกกระทำต่ออนุภาค มีสมการการเคลื่อนที่เป็น $\ddot{x} = u$ โดยที่ x แทนตำแหน่งในการเคลื่อนที่ของอนุภาค และ u แทนแรงภายนอกที่กระทำ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้สองสมการคือ

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (2.2)$$

โดยที่ x_2 คือ ความเร็วของอนุภาค และทั้งค่า x_1 และ x_2 สามารถคำนวณหาได้ถ้าทราบ u หรือ แรงภายนอกที่กระทำ ดังนั้นจากระบบพลศาสตร์ทั่วไปเราสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบให้อยู่ในรูปของ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n$$

โดยที่ t คือ เวลา x_i คือ state variables ของระบบ เช่น เจนเนอรัลไรซ์โคออร์ดิเนต (Generalized coordinates) และ u_i คือ control variable หรือ อินพุตที่ใส่ให้ระบบ และ f_i คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x u และ t

จากAscher(1) กล่าวว่าปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถแบ่งได้สองประเภทคือ
 1. ปัญหาแบบเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) 2. ปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ในระบบทั่วไปสภาวะเริ่มต้นหรือเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ มักเป็นค่าที่ทราบอยู่ก่อนแล้ว เช่น “อนุภาคเริ่มเคลื่อนที่จากสภาวะหยุดนิ่ง ที่เวลาเริ่มต้น 0 วินาที” เขียนได้เป็น $x(t_0)=0$ นั่นคือเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\psi[x(t_0), u(t_0), t_0] = \psi_0 \quad (2.3)$$

และเช่นเดียวกันสำหรับสภาวะที่ปลายทาง (Terminal condition)

$$\psi[x(t_f), u(t_f), t_f] = \psi_f \quad (2.4)$$

หรือเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\psi_0 \leq 0 \quad (2.5)$$

และ

$$\psi_f \leq 0 \quad (2.6)$$

นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขขอบเขตของ State variable คือ

$$x_L \leq x(t) \leq x_u \quad (2.7)$$

โดยที่ x_L และ x_u คือ ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของสเตทวารีเอเบิล (State variable) ตามลำดับ
เช่นเดียวกันสำหรับเงื่อนไขขอบเขตของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

(2.8)

$$u_L \leq u(t) \leq u_u$$

โดยที่ u_L และ u_u คือค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ control variable ตามลำดับ
เงื่อนไขสุดท้าย คือ เงื่อนไขบังคับ (Constraints) คือ

$$c_L \leq c(x(t), u(t), t) \leq c_u \quad (2.9)$$

เงื่อนไขบังคับทางกายภาพนี้หมายถึง ข้อจำกัดทางกายภาพของระบบ เช่น ในแขนกล จะมีชิ้นส่วนบางชิ้นไม่สามารถหมุนรอบตัวได้ถึง 360 องศา อาจหมุนได้เพียง 120 องศา เนื่องจากผลของการหมุนของชิ้นส่วนที่อยู่ใกล้เคียงและตำแหน่งของชิ้นส่วนนั้นๆ ด้วย

มีหลายวิธีในการกำหนดรูปแบบของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ขึ้นอยู่กับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับ สมรรถนะ เงื่อนไขจำกัดทางกายภาพ (Constraints) หรือปลายทางที่ต้องการให้ไปถึง ซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาในความสนใจได้ทั้งหมดคือ

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.10)$$

ซึ่งสามารถพิจารณาให้มีค่ามากที่สุด หรือ น้อยที่สุดได้ตามลักษณะของปัญหา โดยทั่วไปจะเรียกสมการเช่นนี้ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ซึ่ง สามารถแบ่งพิจารณาได้เป็นสองค่าคือ

- $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ขึ้นอยู่กับเวลาที่ปลายและสถานะของระบบ ณ เวลาดังกล่าว
- $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นค่าอินทิกรัลซึ่งขึ้นกับเวลาเริ่มต้นสเตทวารีเอเบิล (State

variable) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ฟังก์ชัน Φ และฟังก์ชัน L เป็นฟังก์ชันของสเตทวารีเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

สมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]$ เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) คือ J เป็นฟังก์ชันของหลายตัวแปร โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวนั้นก็จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอื่นด้วย และเมื่อรวม

คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เข้ากับเงื่อนไขต่างๆแล้ว เราจะได้โจทย์ปัญหาของการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) คือ

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$$

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

$$\psi_0 = 0$$

$$\psi_f = 0$$

$$c_L \leq c(x(t), u(t), t) \leq c_u$$

$$x_L \leq x(t) \leq x_u$$

$$u_L \leq u(t) \leq u_u$$

การเลือกใช้เงื่อนไขที่เป็นสมการ หรือ อสมการนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณา คำตอบที่ต้องการจากปัญหานี้ คือ สเตทวารีเอเบิล (State variable) และ control variable ที่เป็นทั้งคำตอบของคอสฟังก์ชันนอล (คำตอบที่ทำให้มีค่าต่ำที่สุด หรือ สูงที่สุด) และสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดของปัญหา

2.3 Transcription method สำหรับปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic optimal control problem)

จากหลักการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอธิบายได้ว่า วิธีทรานสคริปชัน (Transcription) คือการแปลงปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ไปเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ด้วยการทำให้ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นช่วงๆ (Parameterize) ตามวิธีของการอินทิเกรตโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข หรือ เทคนิคของคอลโลเคชัน (Collocation)

เนื่องจาก $x(t)$ และ $u(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์สามารถแปลงหรืออธิบายได้ในรูปของอินฟินิต (Infinite) หรือไฟไนต์ไดเมนชันนอลนอนลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง (Finite dimensional nonlinear programming) และโดยทั่วไปจะใช้วิธีการวนซ้ำของนิวตัน (Newton iterative) ในการหาคำตอบสำหรับปัญหาไดเมนชันนอล (dimensional problem)

ขั้นตอนพื้นฐานของวิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) คือ ขั้นแรกแปลงปัญหาทางพลศาสตร์ให้เป็นปัญหาทางสถิติศาสตร์สำหรับไฟไนต์ไดเมนชันนอลพารามิเตอร์ (Finite -

dimensional parameter) ขั้นที่สองหาคำตอบของปัญหาทางสถิติศาสตร์ โดยใช้การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ ด้วยวิธีการทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameter) ซึ่งสามารถเลือกวิธีแก้ปัญหาได้สองแบบคือ วิธีตรง (Direct approach) และ วิธีอ้อม (Indirect approach) ขึ้นอยู่กับปัญหาที่จะนำมาพิจารณา ซึ่งสามารถเปรียบเทียบความแตกต่างได้ดังนี้

วิธีอ้อม (Indirect approach) จะจัดรูปแบบของปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาที่ประกอบด้วย เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) หลังจากนั้นใช้แคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations) ในการหาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) ในการหาคำตอบด้วยวิธีนี้ใช้วิธีของออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler Lagrange) หรือวิธีของคุน-ทักเกอร์ (Kuhn-Tucker) ทำให้ได้ระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างซับซ้อนมาช่วยในการแก้ปัญหา ในขณะที่วิธีตรง (Direct method) ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีดังกล่าว แต่ใช้วิธีการแปลงปัญหาให้มีลักษณะเป็นช่วงๆ โดยใช้การจัดสเตทอิเคชัน (State equations) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และคอนสเตรนส์ (Constraints) ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไป (ODE) ต่อจากนั้นใช้วิธีคอลโลเคชัน (Collocation method) แทนความสัมพันธ์ของจุดสำคัญ ที่สอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขต่างๆ ซึ่งจะทำให้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์กลายเป็นการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) และข้อได้เปรียบอีกอย่างของวิธีตรง คือ สามารถหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยประมาณได้จากค่าเริ่มต้นที่สมมุติขึ้นมาอย่างหยาบๆ ได้

2.3.1 วิธีอ้อม (Indirect method) หรือ Indirect transcript

ใช้หลักการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations) หลักการของการหาค่าต่ำสุด (Minimum principle) หรือ (Pontryagin's minimum principle) ในการหาคำตอบของฟังก์ชัน โดยการหาเงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดหรือที่เรียกว่า Necessary conditions ซึ่งทำให้รูปแบบของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ถูกเปลี่ยนจากสมการอินทิกรัลมาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งสมการอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งในที่นี้ใช้หลักการของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations) ในการพิจารณาหาค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด

2.3.1.1 แคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations)

ฟังก์ชันที่จะนำมาหาค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดโดยวิธีนี้จะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งสุดท้ายคำตอบจะเป็นสเกลาร์ วิธีนี้แบ่งการพิจารณาปัญหาเป็น 3 กรณี ได้แก่

2.3.1.1.1 กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งปลายทางที่แน่นอน (Fixed end times and end points)

ให้ฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับตัวแปรแต่ละตัวได้ในช่วงของ $t_0 \leq t \leq t_f$ รวมทั้งมีค่าตรงกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) - $x_i(t_0) = x_{i1}, x_i(t_f) = x_{i2}$ หากค่า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน F มีค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.11)$$

สมมติให้ $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นค่าที่ทำให้ $J[x_1, \dots, x_n]$ มีค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด ถ้าเพิ่มค่าให้ $x_i(t)$ ด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ค่า $x_i(t)$ ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ค่า $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ คือ

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1+h_1, \dots, x_n+h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)] dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

จากกฎการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor) โดยตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆทิ้ง จะได้

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i dt \quad (2.13)$$

โดยที่ δJ เป็นค่าประมาณของ ΔJ เมื่อเทอมที่มีดีกรีสูงๆถูกตัดทิ้งไป และทำการอินทิเกรตพาร์ต (By part) เทอมที่สองจะได้

$$\delta J = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \quad (2.14)$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าที่ต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด คือ $\delta J = 0$ สำหรับทุกๆ ค่าที่ของ $h_i(t)$ และเนื่องจาก $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นเงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด – (Necessary condition) สำหรับ $\delta J = 0$ คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

2.3.1.1.2 กรณีมีเวลาที่ปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed end times and variable end points)

ในกรณีนี้ต่างจากในกรณีแรกคือ $x_i(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่เป็นค่าคงที่อีกต่อไป ซึ่งสมการที่ 2.11 และ 2.14 ยังคงใช้ได้ แต่เนื่องจาก $h_i(t_0)$ และ $h_i(t_f)$ จะมีค่าแปรผันได้ ดังนั้นเงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จึงกลายเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.18)$$

2.3.1.1.3. กรณีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าแปรผันได้ (Variable end time and end points)

สมการที่ 2.11 ยังคงใช้ได้แต่ค่าของ ΔJ จะต้องเปลี่ยนไป คือ

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x_1+h_1, \dots, x_n+h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \\
&\quad - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) dt
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ได้

โดยใช้กฎการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor) และการตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆทิ้ง จะ

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\
&\quad + F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

โดยที่ δJ เป็นค่าประมาณของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆทิ้ง แล้วอินทิเกรต
 บายพาร์ท(By part) เทอมที่สองในอินทิกรัลจะได้

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + \left[F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - \left[F(t, x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

และสำหรับกรณีนี้จะได้ว่า $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ
 $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ เราสามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + F \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} \delta t_f - F \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

เงื่อนไขสำหรับพิจารณาการเป็นค่าสูงสุดต่ำสุดคือ $\delta J = 0$ สำหรับทุกค่าของ $h_i(t), \delta x_i|_{t_f}, \delta x_i|_{t_0}, \delta t_f, \delta t_0$ ดังนั้นสมการที่ 2.22 เมื่อเป็นเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.24)$$

$$F \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.25)$$

$$F \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.26)$$

2.3.1.2 แคลคูลัสของฟาริเอชัน (Calculus of variation) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

พิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional)

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$$

โดยที่ฟังก์ชันสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ(Constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$, $j=1, \dots, m$ และ $m < n$ ซึ่งค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสามารถหาได้โดยกำหนดฟังก์ชันใหม่ $J'[x_1, \dots, x_n]$

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_f}^{t_0} [F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)] dt \quad (2.27)$$

โดยที่ $\lambda_j(t)$ คือ ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ จะนำมาใช้แทน F ในการคำนวณหาเงื่อนไขการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) ซึ่งใช้ได้กับทั้งสามกรณีคือ 1. กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งปลายทางที่แน่นอน (Fixed end times and end points) 2. กรณีที่มีเวลาที่ปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed end times and variable end points) และ 3. กรณีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าแปรผันได้ (Variable end time and end points)

2.3.1.2.1 กรณีเมื่อค่าต่าง ๆ ที่จุดปลายทางเป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

$$\text{พิจารณาฟังก์ชันของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด} - J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$$

เมื่อ ฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ - $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$, $k = 1, \dots, p$ ณ เวลาที่จุดปลาย ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ด้วยการกำหนดฟังก์ชันใหม่ $J'[x_1, \dots, x_n]$ ดังนี้

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p v_k s_k \quad (2.28)$$

โดยที่ v_k คือ ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) สำหรับกรณีที่เวลาและตำแหน่งที่ปลายมีค่าแปรผันได้ ดังนั้นสมการที่ 2.22 จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}
J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \delta x_i \Big|_{t_f} \\
& \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_0} + F \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \delta t_f \\
& F \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \delta t_0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด (Necessary conditions) ในดีกรีหนึ่ง คือ $\delta J' = 0$ ที่เป็นจริงสำหรับค่าเหล่านี้ $h_i(t), \delta x_i|_{t_f}, \delta x_i|_{t_0}, \delta t_f$ และ δt_0

จะได้ เงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด (Necessary conditions) สำหรับดีกรีหนึ่ง ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} = 0 ; \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \\
& F \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} = 0 ; F \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นรวมทั้งเงื่อนไข $s_k=0$ คือ คำตอบที่ให้ค่าสูงที่สุดหรือต่ำที่สุดสำหรับในกรณีนี้

2.3.1.2.2 กรณีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทั่วไป

กรณีนี้เป็นการรวมผลของกรณีข้างต้นทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน โดยพิจารณา

ฟังก์ชัน

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$$

โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) - $g_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$, $j=1, \dots, m$ และเงื่อนไขบังคับที่เกี่ยวข้องกับจุดปลาย - $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0$, $k=1, \dots, p$ โดยที่ $p < m$ ดังนั้นฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นมาใหม่จึงเป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_f}^{t_0} [F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{k=1}^p v_k s_k] dt \quad (2.31)$$

โดยที่ $\lambda_j(t)$ และ v_k คือ ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers)

สำหรับกรณีทั่วไปที่เวลาและตำแหน่งที่จุดปลายมีค่าแปรผันได้ สมการที่ 2.22

จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} h_i dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \delta x_i \Big|_{t_f} \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_0} + F' \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \delta t_f \\ & F' \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

โดยที่ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$

และเงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือ

$$\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \Big|_{t_g} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

$$F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2.36)$$

$$F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial x_i} \dot{x}_i \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.37)$$

คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดรวมทั้งเงื่อนไขที่ -

$g_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k(t, x_1, \dots, x_n) \Big|_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ คือ คำตอบที่ให้ค่าสูงที่สุดหรือต่ำที่สุด

บทที่ 3

Direct scheme

จากทฤษฎีที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ทำให้ทราบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่ตรงเป็นวิธีที่ง่ายกว่า ซึ่งหลักการของวิธีดังกล่าวสามารถอธิบายได้ดังนี้

3.1 วิธีตรง (Direct method) หรือ Direct transcription

พิจารณาปัญหาซึ่งต้องการหาค่า control variable $\bar{u}$ ที่ทำให้ปริมาณของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าต่ำที่สุด

$$J' = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t, \bar{x}, \bar{u}) dt \quad (3.1)$$

ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(t, \bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{x}(0) &= \bar{x}_0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ในที่นี้สแตทวาริเอเบิล (State variables) คือ $\bar{x}(t) \in R^n$ ซึ่งเวลาที่จุดปลายคือ t_f มีค่าแน่นอนและรู้สภาวะเริ่มต้นทั้งหมด ในทำนองเดียวกันกับในบทที่ 2 เงื่อนไขบังคับพลศาสตร์ (Dynamic constraints) จะถูกนำมารวมไว้ในคอสฟังก์ชันนอล (Cost function) ผ่านตัวคูณลากรางจ์ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ จะได้

$$J = \Phi + \int_0^{t_f} [L + \bar{\lambda}^T (\bar{f} - \dot{\bar{x}})] dt \quad (3.4)$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นค่าแรกที่ได้จากการสุ่มเดา (Initial guess) คือ $\bar{u}_0(t)$ จะได้ค่า control input $\bar{u}^1(t)$ และปรับปรุงค่านี้ไปเรื่อยๆ ในแนวทางที่จะทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าลดลง ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองคือ $\bar{u}^1(t) = \bar{u}^0(t) + \bar{h}_u(t)$ โดยที่ $\bar{h}_u(t)$ คือ ค่าที่เพิ่มขึ้นของค่าเริ่มต้น (Initial guess)

หลักการของไดเรกทรานสคริปชัน (Direct transcription) คือ การทำปัญหาให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameter) จะทำให้ปัญหากลายเป็นปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ทำได้โดยนำวิธีคำนวณค่าอินทิเกรตบนพื้นฐานของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) มาใช้

โดเมนของเวลาของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นจำนวน N เฟส (Phase) และ N+1 โหนด (Node) ตัวแปรทั้งหมด $x(t)$ $u(t)$ และ t ในปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ จะถูกกำหนดให้ตรงกับแต่ละเฟส (Phase) ในแต่ละช่วงเวลา (Interval)

ตัวแปรแรกที่จะนำมาพิจารณาคือ เวลา(t) ในแต่ละช่วงเวลา(Interval) k เวลาเริ่มต้น (Initial- time) t_{in}^k และเวลาที่จุดสุดท้าย t_f^k จะกำหนดได้ดังนี้ $t_{in}^k \leq t \leq t_f^k$ หรือ $t_{in}^{k+1} = t_f^k$ ต่อจากนั้นกลุ่มของตัวแปรที่ไม่เป็นอิสระ(Dependent variable) , state variable และ control variable จะถูกกำหนดขึ้นเป็นเซตของตัวแปรใหม่คือ Z ซึ่งเวกเตอร์ของตัวแปร Z สำหรับแต่ละ phase(k) เขียนได้ดังนี้

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} x^k(t) \\ u^k(t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

โดยที่ $x^{(k)}$ คือ เวกเตอร์ที่มีมิติ $n^{(k)} \times 1$ และ $u^{(k)}$ คือ เวกเตอร์ที่มีมิติ $m^{(k)} \times 1$ ซึ่งแทนสแตทวาริเอเบิล (State variables) และ control variables ตามลำดับ หรือในบางปัญหาอาจมีตัวแปรอิสระที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Independent variables) และ p^k ซึ่งมีมิติ $n_p^{(k)} \times 1$ ยกตัวอย่างเช่น แรงดึงดูดของโลก ความหนาแน่นของของไหล คำนิจสปริง เป็นต้น

เงื่อนไขบังคับพลศาสตร์ (Dynamic constraints) หรือ state equation ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามารถเขียนในรูปของพารามิเตอร์ (Parameter) สำหรับช่วงเวลา (Time -interval) k ใดๆ

$$y^k = f^k(x^k(t), u^k(t), p^k, t) \quad (3.6)$$

ตัวแปร p ในสมการจะถูกกำหนดสำหรับแต่ละเฟส (Phase) k

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะถูกกำหนดไว้ที่เวลาเริ่มต้นของเฟส (Phase)

แรก ($k=1$) และ เฟสสุดท้าย($k=n$) ซึ่งก็คือ

$$\begin{aligned} & x^{(1)}(t_0^{(1)}), u^{(1)}(t_0^{(1)}), p^{(1)}, t_0 \\ & x^{(1)}(t_f^{(1)}), u^{(1)}(t_f^{(1)}), p^{(1)}, t_f \\ & \psi_L \leq \begin{aligned} & x^{(2)}(t_0^{(2)}), u^{(2)}(t_0^{(2)}), p^{(2)}, t_0 \\ & x^{(2)}(t_f^{(2)}), u^{(2)}(t_f^{(2)}), p^{(2)}, t_0 \end{aligned} \leq \psi_u \\ & x^{(N)}(t_0^{(N)}), u^{(N)}(t_0^{(N)}), p^{(N)}, t_0 \\ & x^{(N)}(t_f^{(N)}), u^{(N)}(t_f^{(N)}), p^{(N)}, t_f \end{aligned} \quad (3.7)$$

เพื่อความสะดวกฟังก์ชันทั้งหมดที่อยู่ในเทอมอินทิกรัล ของอินทิกรัลคอส (Integral cost) L สามารถเขียนอยู่ในรูปของควอดราเจอร์ (Quadrature)

$$\int_{t_0}^{t_f} \overline{W}^{(k)} \left[\underline{x}^{(k)}(t), \underline{u}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k)}, t \right] dt. \quad (3.8)$$

โดยที่ $\overline{W}^{(k)}$ คือ ฟังก์ชันในรูปของควอดราเจอร์ (Quadrature) ซึ่ง $\underline{f}$ และ $\underline{g}$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องด้วย ให้ $\underline{Q}^{(k)}(t)$ คือ เป็นคอลโลเคชัน (Collocation) ของฟังก์ชันต่อเนื่องเขียนได้ดังนี้

$$\underline{Q}^{(k)}(t) = \frac{\underline{f}^{(k)}}{\underline{g}^{(k)}}, \quad (3.9)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับกันแล้ว ψ จึงเหมือนเป็นฟังก์ชันของค่าเป็นจุดๆ ไม่ต่อเนื่อง
 ในทำนองเดียวกันเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทั้งหมดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ
 พารามิเตอร์ (Parameter) ได้ดังนี้

$$\underline{g}_L^k \leq \underline{g}^k(\underline{x}^k(t), \underline{u}^k(t), \underline{p}^k, t) \leq \underline{g}_U^k \quad (3.10)$$

โดยที่ $\underline{g}^k$ คือเวกเตอร์ (Vector) ของเงื่อนไขบังคับ(Constraints) มีมิติ $n_g \times 1$ ซึ่งในบาง
 ปัญหาเงื่อนไขบังคับ (Constraints) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของขอบเขต(Bounds)หรือช่วง
 (Ranges) ของ state หรือ control variables.

$$\underline{x}_L^k \leq \underline{x}^k(t) \leq \underline{x}_U^k \quad (3.11)$$

$$\underline{u}_L^k \leq \underline{u}^k(t) \leq \underline{u}_U^k \quad (3.12)$$

จุดประสงค์หลักของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ คือ การคำนวณ
 หรือเลือกเวกเตอร์ (Vector) $\underline{u}^{(k)}(t)$ และเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $\underline{p}^{(k)}$ สำหรับทำให้คอสฟังก์ชัน
 นอล (Cost functional) มีค่าต่ำที่สุด นั่นคือ เมื่อทำเป็นพารามิเตอร์ (Parameter) แล้วเป็นดังนี้

$$J = \varphi(\underline{x}^{(N)}(t_f^{(N)}), \underline{u}^{(N)}(t_f^{(N)}), \underline{p}^{(N)}, t_f) + \sum_{j=1}^N \int_{t_{in}}^{t_F^{(j)}} L^{(j)}(\underline{x}^{(j)}(t), \underline{u}^{(j)}(t), \underline{p}^{(j)}, t) dt \quad (3.13)$$

โดยที่ $L^{(j)}$ คือ ฟังก์ชันของพหุนาม

3.1.1 วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

เนื่องจากการหาค่าอินทิเกรตแบบไปข้างหน้า (Forward) จึงตัดปัญหาในเรื่องของค่าเริ่มต้นไปได้และยังให้ความแม่นยำค่อนข้างสูง การนำวิธีมาใช้ในการหาค่าอินทิเกรตจะต้องลด สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองลงเป็นสมการอันดับหนึ่งสองสมการดังนี้

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} [F(t) - kx - c\dot{x}] = f(x, \dot{x}, t) \quad (3.14)$$

เมื่อกำหนดให้ $\dot{x} = y$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\dot{x} = y \quad (3.15)$$

$$\dot{y} = f(x, y, t) \quad (3.16)$$

ซึ่งทั้ง x และ y รอบๆ x_i และ y_i สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กำหนดให้ $h = \Delta t$ จะได้

$$x = x_i + \frac{dx}{dt}_i h + \frac{d^2x}{dt^2}_i \frac{h^2}{2} + \dots \quad (3.17)$$

$$y = y_i + \frac{dy}{dt}_i h + \frac{d^2y}{dt^2}_i \frac{h^2}{2} + \dots \quad (3.18)$$

เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆ ทั้งและแทนเทอมอนุพันธ์ด้วยค่าเฉลี่ยของความชัน จะได้

$$x = x_i + \frac{dx}{dt}_{iav} h \quad (3.19)$$

$$y = y_i + \frac{dy}{dt}_{iav} h$$

วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) นั้นค่อนข้างง่ายสำหรับการคำนวณ เพียงแต่ในเทอมกลางของสมการข้างต้นจะต้องแตกเป็นสองเทอมและจะต้องคำนวณค่า t, x, y, f ทั้งสี่ค่าของแต่ละจุด

ตาราง 3.1 แสดงค่าตัวแปรต่างๆ สำหรับวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

t	x	$y = \dot{x}$	$f = \dot{y}$
$T_1 = t_i$	$X_1 = x_i$	$Y_1 = y_i$	$F_1 = f(T_1, X_1, Y_1, u)$
$T_2 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_2 = x_i + F_1 \frac{h}{2}$	$Y_2 = y_i + F_1 \frac{h}{2}$	$F_2 = f(T_2, X_2, Y_2, u)$
$T_3 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_3 = x_i + F_2 \frac{h}{2}$	$Y_3 = y_i + F_2 \frac{h}{2}$	$F_3 = f(T_3, X_3, Y_3, u)$
$T_4 = t_i + h$	$X_4 = x_i + F_3 h$	$Y_4 = y_i + F_3 h$	$F_4 = f(T_4, X_4, Y_4, u)$

ซึ่งค่าต่างๆ ข้างต้น จะคำนวณตามสมการดังนี้

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} [Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4] \quad (3.20)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4] \quad (3.21)$$

จะเห็นว่าค่าของ Y ทั้ง 4 ค่าจะถูกแบ่งเป็น 6 ส่วน ในช่วงของความชัน $\frac{dx}{dt}$ และจะเห็นว่าค่าของ F ทั้ง 4 ค่าจะถูกแบ่งเป็น 6 ส่วน ในช่วงของความชัน $\frac{dy}{dt}$

แม้วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ทำได้โดยไม่จำเป็นต้องทราบค่าต่างๆ ของอนุพันธ์ แต่หากต้องการความแม่นยำที่สูงขึ้น ทำได้โดยคำนวณหาค่า 4 ค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งตามวิธีของอนุกรมเทย์เลอร์ให้อยู่ในเทอมของ h^4 นอกจากนั้นวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ยังสามารถใช้กับเวกเตอร์ (Vector) ได้ ดังในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.22)$$

ถ้ามี 2 ตัวแปร x และ y สามารถกำหนด $z = \frac{x}{y}$ และเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ได้สองสมการดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x, y, t) = F(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

หรือ

$$\dot{z} = F(x, y, t) \quad (3.24)$$

ซึ่งหาตอบได้ด้วยวิธีเดียวกันกับสมการหนึ่งตัวแปร

3.1.2 การแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming problem)

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดซึ่งมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Math model) ที่อธิบายด้วยสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เราเรียกว่าการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming problem) ซึ่งปัญหาเกี่ยวกับการออกแบบทางวิศวกรรมส่วนใหญ่ก็เป็น สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นแทบทั้งสิ้น ในการพิจารณาว่าปัญหาใดเป็นการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือไม่นั้น ไม่จำเป็นที่ปัญหานั้นจะต้องเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั้งหมด ถ้ามีเพียง สมการใดสมการหนึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็สามารถพิจารณาเป็นแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นมักจะถูกนำมาใช้กับปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบด้วยเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints) และเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality constraints) ถ้าฟังก์ชันที่พิจารณาเป็นสมการเชิงเส้น การแก้ปัญหาก็จะเป็นการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้น (Linear programming) ถ้านอกเหนือจากนั้นจะพิจารณาให้เป็นปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น แม้ว่าการแก้ปัญหของระบบสมการเชิงเส้นง่ายกว่าระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่ไม่สามารถครอบคลุมปัญหาที่มี คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ

(Constraints) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ ดังนั้นการจะแก้ปัญหาระบบสมการดังกล่าวจึงต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น

มีตัวอย่างมากมายของปัญหาแบบนี้ที่มีเพียงคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เท่านั้นที่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในขณะที่เงื่อนไขบังคับ (Constraints) อื่นๆ เป็นสมการเชิงเส้น ในทางคณิตศาสตร์ คำตอบของปัญหาคือสิ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) ซึ่งขึ้นอยู่กับแต่ละระดับของปัญหา ในเบื้องต้นเมื่อได้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จะถือว่าคำตอบนั้นเป็นคำตอบหนึ่งที่สามารถเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) ได้ และถ้าค่านี้ยังสามารถสอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient condition) ได้ด้วยจะเรียกว่าเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) อย่างแท้จริง นั่นคือคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Optimum solution) ต้องสอดคล้องทั้งเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) พร้อมๆ กัน

รูปแบบทั่วไปของระบบสมการที่ใช้แก้ปัญหาระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \text{Subject to} && h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \\ & && g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & && x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{3.25}$$

หรือ ในรูปของเวกเตอร์ (Vector)

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && f(X), [X]_n \\ & \text{Subject to} && [h(X)]_l = 0 \\ & && [g(X)]_m \leq 0 \\ & && X^{low} \leq X \leq X^{up} \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.1.2.1 ปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints)

$$\text{Minimize } f(x_1, x_2) : x_1 x_2$$

ในกรณีนี้การออกแบบตัวแปรเป็นสิ่งที่สำคัญ เช่น ถ้าไม่มีการกำหนดขอบเขตบนให้กับตัวแปร คำตอบที่ได้ก็คือ ค่าบวกที่มีค่ามากที่สุด ดังนั้นขอบเขตบนและล่างของตัวแปรจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้ได้คำตอบตามวัตถุประสงค์ เช่น $0 \leq x_1 \leq 3$; $0 \leq x_2 \leq 3$

3.1.2.2 ปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (Equality constraints)

กรณีนี้จะมีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นสมการเพียงอย่างเดียว เช่น

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x_1, x_2) : x_1 x_2 \\ & h_1(x_1, x_2) : 20x_1 + 15x_2 - 30 = 0 \\ \text{Subject to } & h_2(x_1, x_2) : (x_1^2 / 4) + (x_2^2) - 1 = 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3; 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (3.27)$$

โดยปกติแล้ว ปัญหาดังกล่าวมักไม่สามารถหาค่าเหมาะสมที่สุดได้เนื่องจากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทั้งสองสมการสามารถให้คำตอบสำหรับปัญหาแบบสองตัวแปรได้ด้วยตัวมันเองอยู่แล้วและปัญหาประเภทนี้มักมีหลายคำตอบซึ่งเป็นลักษณะที่พบบ่อยในการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในกรณีนี้ตัวแปรที่จะทำให้คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีค่าต่ำสุดจะเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด และปัญหาประเภทนี้มักจะหาคำตอบด้วยการตรวจสอบหาคำตอบมากกว่าที่จะได้คำตอบมาจากเงื่อนไขต่างๆ ได้โดยตรง

3.1.2.3 พิจารณาปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับเป็นอสมการ (Inequality constraints)

กรณีนี้จะมีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นอสมการเพียงอย่างเดียว เช่น

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & f(x_1, x_2) : x_1 x_2 \\ & h_1(x_1, x_2) : 20x_1 + 15x_2 - 30 \leq 0 \\ \text{Subject to } & h_2(x_1, x_2) : (x_1^2 / 4) + (x_2^2) - 1 \leq 0 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3; 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

โดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (Equality constraints) เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาที่แก้ได้ง่าย แต่ยากสำหรับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและคำตอบค่อนข้างอยู่ในวงจำกัด ในขณะที่เงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (Inequality constraints) เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วแก้ได้ยากกว่าแต่มีความยืดหยุ่นมากกว่าในแง่ของการค้นหาคำตอบที่เหมาะสม เนื่องจากขอบเขตของคำตอบที่ใช้ได้กว้างกว่า

3.1.3 หลักการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ (Mathematical concept)

Matlab มีซิมโบลิกทูลบ็อกซ์ (Symbolic toolbox) ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อำนวยและครอบคลุมสำหรับการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งช่วยผู้ใช้ในการวินิจฉัยปัญหาทางด้านแคลคูลัส พีชคณิตเชิงเส้น การหาคำตอบของระบบสมการและในสาขาอื่นๆได้ง่ายขึ้นโดยไม่ต้องใช้ความรู้ทางการคำนวณทางคอมพิวเตอร์มากนัก ซึ่งหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น คือ อนุพันธ์ต่างๆ อนุพันธ์ย่อย เวกเตอร์ เมตริก อนุพันธ์ของเมตริก และการหาคำตอบของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น จาคอบีเยน (Jacobian) และ เฮสเซียน (Hessian) ซึ่งเราสามารถใช้อิมโบลิก (Symbolic) ใน Matlab คำนวณหาค่าเหล่านี้ได้โดยไม่ต้องกำหนดขึ้นมาใหม่

3.1.3.1 การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ด้วยวิธีการวิเคราะห์

วิธีนี้จะนำเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) และเงื่อนไขของเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) มาใช้เพื่อสร้างเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด แล้วจึงใช้เทคนิคของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาคำตอบ จนกระทั่งได้คำตอบซึ่งอยู่ในขอบเขตที่นำมาใช้ได้ แล้วจึงเลือกใช้ค่าที่ต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดนั้นๆ

พิจารณาปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints)

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - x_1 x_2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

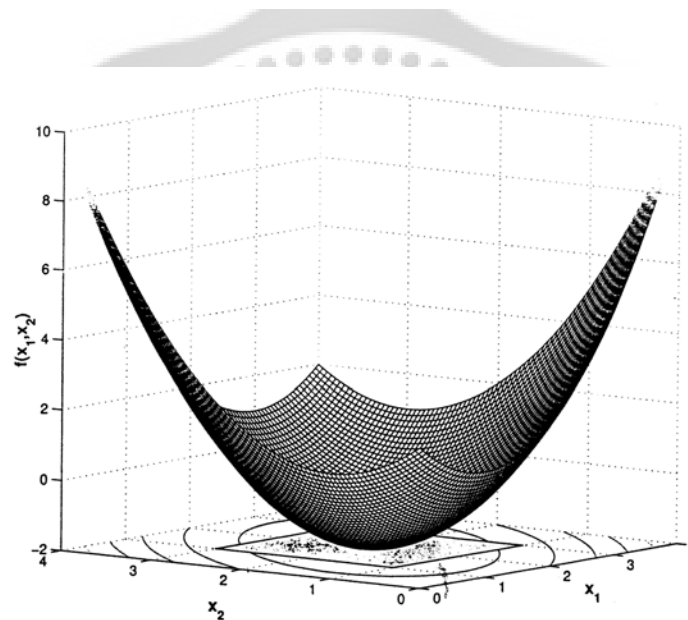
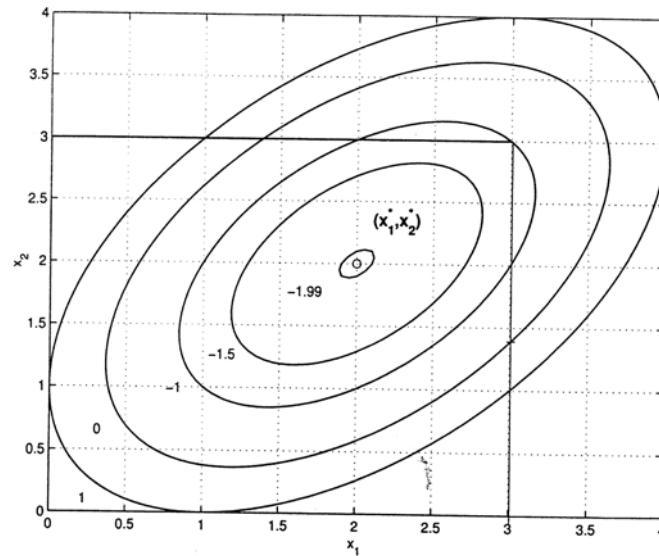


Figure 4.9 Three-dimensional plot of Figure 4.6.

ภาพประกอบ 3.1 แสดงคอนทัวร์ (Contour) และกราฟสามมิติกับระนาบที่สัมผัสสุดต่ำสุดของกราฟรูป

ตาข่ายสำหรับปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints) ข้างต้น

จากภาพประกอบ 3.1 การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต้นสำหรับการเคลื่อนที่ คือ ∇x และการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวคือ ∇f ซึ่งจากรูปเราสามารถสรุปได้ว่าคำตอบที่เหมาะสมที่สุดจะต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\nabla f > 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } x$$

เงื่อนไขอันดับหนึ่ง (First order condition) เมื่อค่าการเปลี่ยนแปลงของ dx_1 และ dx_2 มีค่าน้อยๆ ค่าของฟังก์ชัน ณ จุดนั้นสามารถประมาณได้จากอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และเมื่อพิจารณาจุดต่างๆ ในระนาบนั้นเพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ที่ไม่ทำให้ค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนแปลง คือ $df=0$ และจากการเลื่อนหาค่าดังนั้น dx_1 และ dx_2 ต้องไม่เท่ากับศูนย์ด้วย ทำให้ได้สมการดังนี้

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (3.29)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_1}{dx_2} = 0 \quad (3.30)$$

เนื่องจาก $dx_1 \neq 0$ และ $dx_2 \neq 0$ จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad (3.31)$$

หรือ เรียกได้ว่าเกรเดียน (Gradient) ของจุดที่เหมาะสมจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

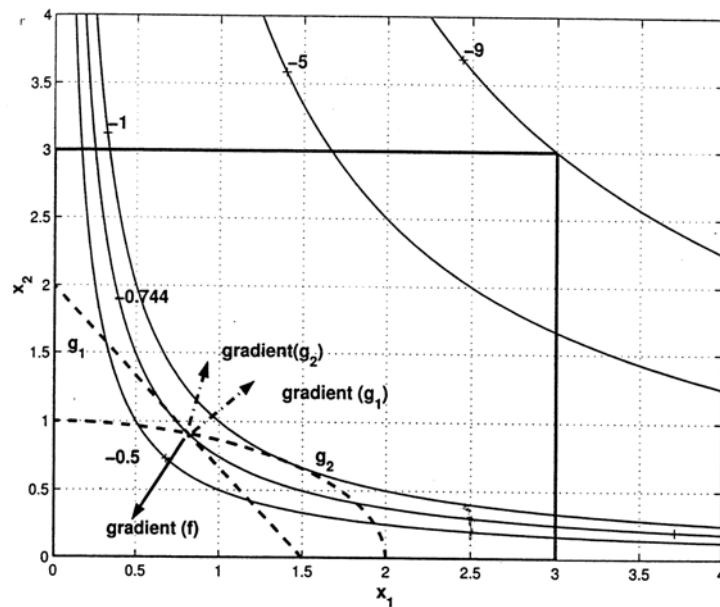
$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \quad (3.32)$$

สมการข้างต้นเรียกได้อีกอย่างว่าเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) หรือ (First order conditions) สำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

พิจารณาปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

ปัญหาที่มี (Inequality constraints)

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f(x_1, x_2): x_1 x_2 \\
 &\text{subject to} && h_1(x_1, x_2): 20x_1 + 15x_2 - 30 = 0 \\
 &&& h_2(x_1, x_2): x_1^2 / 4 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\
 &&& 0 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 3
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$



ภาพประกอบ 3.2 แสดงคอนทัวร์ (Contour) และเกรเดียนท์ (Gradient) ของปัญหาแบบที่มีเงื่อนไข

บังคับเป็นอสมการ (Inequality constraints)

ทิศทางของเกรเดียนท์ (Gradient) สำหรับคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และ (Constraints) จากรูป 3.2 พบว่าบริเวณที่เป็นคำตอบนั้นเกรเดียนของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ขนานกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งในบริเวณนี้จะพบว่าเกรเดียนแต่ละเส้นจะเป็นสัดส่วนกันด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่ง กำหนดให้เป็น λ_1 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเกรเดียนดังนี้

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla h_1 \text{ หรือ } \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 = 0$$

3.1.3.1.1 วิธีของลากรางจ์ (Lagrange)

วิธีนี้เป็นการแปลงปัญหาโดยขยายบางส่วนออกไป เรียกว่า Lagrangian คือ เมื่อพิจารณาฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่มีอยู่ เราสามารถสร้าง Lagrangian ได้จากการนำฟังก์ชันนอล (Cost functional) เดิมมารวมกับแบบเชิงเส้นกับ ฟังก์ชันนอล (Cost functional) ซึ่งค่าคงที่หลังจากการรวมจะเรียกว่า “Lagrange multipliers”

$$\text{Minimize} \quad F(x_1, x_2, \lambda_1) = f(x_1, x_2) + \lambda_1 h_1(x_1, x_2) \quad (3.34)$$

$$\text{หรือ} \quad F(X, \lambda) = f(X) + \sum_{k=1}^l \lambda_k h_k(X)$$

หาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) โดยพิจารณาฟังก์ชัน $F(x_1, x_2, \lambda_1)$ เป็นแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints) ซึ่งมีตัวแปร คือ x_1, x_2, λ_1 ซึ่งจะต้องหาค่า $x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = h_1 = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{หรือ} \quad \nabla F = \nabla f + [\nabla h_1 \nabla h_2 \cdots \nabla h_l] \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_l \end{matrix} = 0 \quad (3.38)$$

เนื่องจากฟังก์ชันมีตัวแปรต้นสองตัวจึงมีเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) สองสมการ ซึ่งเทอมที่อยู่ทางซ้ายของสมการคือ เกรเดียนของฟังก์ชันลากราง-เจียน (Lagrangian) และสมการสุดท้ายก็คือเงื่อนไขบังคับ (Constraints) นั่นเอง

3.1.3.1.2 วิธีของคุน-ทักเกอร์ (Kuhn-Tucker)

วิธีนี้คล้ายกับที่กล่าวมาแล้วในวิธีของลากรางจ์ (Lagrange)

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} && f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
& \text{Subject to} && h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, l \\
& && g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\
& && x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

ทำเป็นลากรางเจียน (Lagrangian)

$$\begin{aligned}
& \text{Minimize} \\
& F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l, \beta_1, \dots, \beta_m) = f(x_1, \dots, x_n) \\
& \quad + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_l h_l + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_m g_m
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ดังนั้นจึงมีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด $n+l+m$ ตัว ซึ่งต้องการสมการจำนวนเท่ากันในการหาคำตอบ จึงนำเงื่อนไขสำหรับดีกรีหนึ่ง (First order) มาใช้ จะได้ n สมการจาก

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{h_1}{x_i} + \dots + \lambda_l \frac{h_l}{x_i} + \beta_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \dots + \beta_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \\
i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.40}$$

จะได้ l สมการจากเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints)

$$h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, l \tag{3.41}$$

และจะได้ m สมการจาก

$$\beta_j g_j = 0 \rightarrow \text{if } \beta_j = 0 \text{ then } g_j \prec 0$$

$$\text{if } g_i = 0 \text{ then } \beta_j \succ 0$$
(3.42)

คำตอบที่สอดคล้องสมการทั้งหมด $n+l+m$ สมการจะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด



บทที่ 4

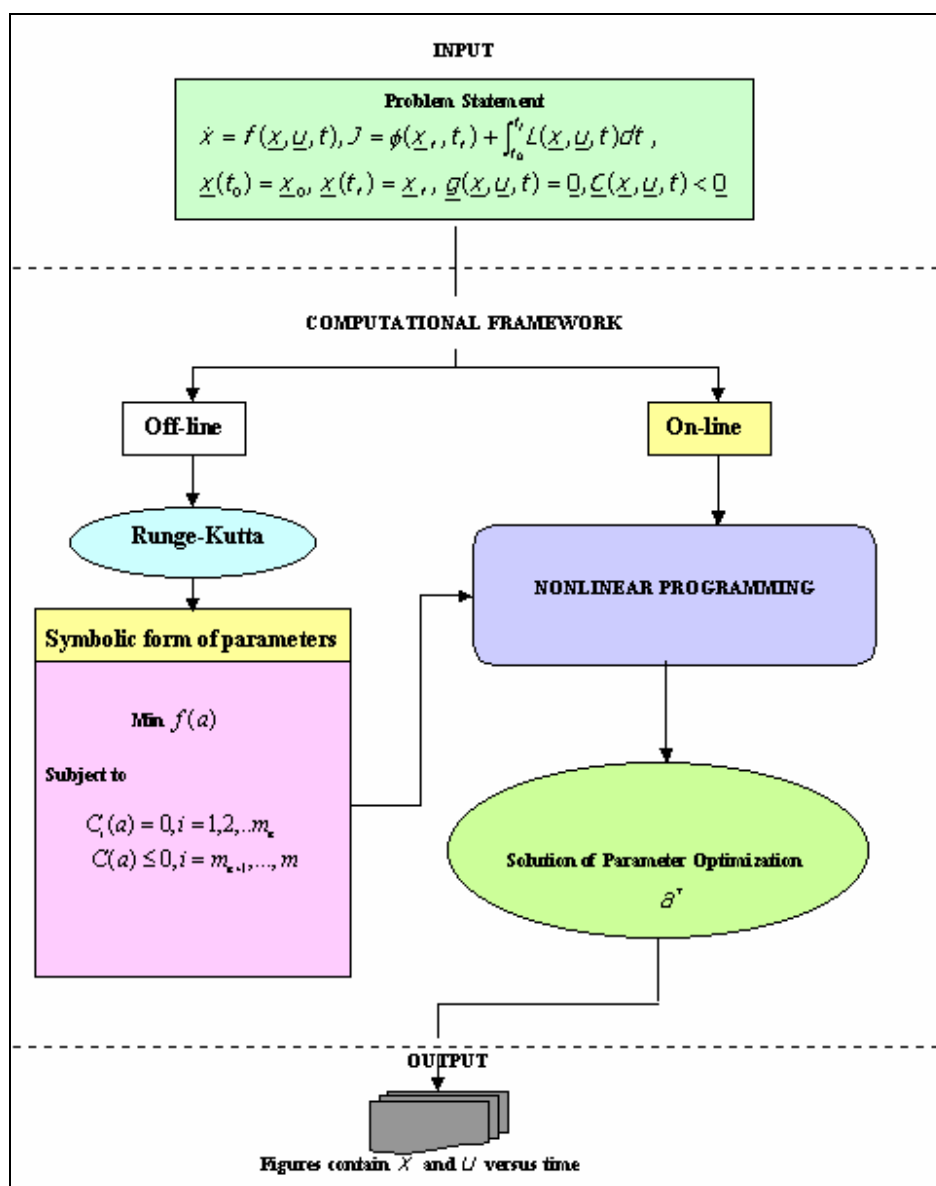
การออกแบบและวิธีใช้โปรแกรม

4.1 การออกแบบโปรแกรม

จุดประสงค์ในการออกแบบโปรแกรม คือ ต้องการให้ใช้งานกับอินพุต (Input) ที่อยู่ในรูปแบบต่างๆ (General) ได้โดยสร้างส่วนรองรับข้อมูล (Graphical user interface) ที่เหมาะสมขึ้นจาก MATLAB (GUI) และเชื่อมโยงกับกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ต่าง ๆ ของ MATLAB โดยเก็บค่าพารามิเตอร์ (Parameters) ต่างๆ ในการคำนวณไว้ในรูปของซิมโบลิก (Symbolic) กล่าวคือ โปรแกรมนำความสามารถของ MATLAB มาใช้ 3 ส่วนได้แก่ 1.Symbolic 2.Optimization solver 3. Graphic user interface ซึ่งทั้งหมดทำงานสัมพันธ์กันตลอดเวลา โปรแกรมจะแบ่งปัญหาเป็น 3 ประเภทโดยใช้เวลาเป็นเกณฑ์ในการพิจารณา คือ 1.กรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) 2. กรณีไม่รู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Variable end time) 3.กรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) ซึ่งผู้ใช้งานจะต้องเป็นผู้กำหนดประเภทของปัญหาเอง หลังจากโปรแกรมได้รับปัญหาจากผู้ใช้งานแล้วจะแบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอน

1. โปรแกรมจะใช้วิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) ด้วยวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) โดยการทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) แปลงปัญหาที่รับเข้ามาให้อยู่ในรูปของซิมโบลิก (Symbolic)สำหรับนำไปใช้ในส่วนของแก้ปัญหโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) และเก็บสมการพีชคณิต (Algebraic equation) ทั้งหมดไว้ในแฟ้มข้อมูล ในทำนองเดียวกันสำหรับคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โปรแกรมก็จะทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) ด้วยซิมป์สัน (Simpson rule)

- 2.โปรแกรมจะแก้ปัญหโดยใช้การแก้ปัญหของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ดังที่อธิบายไว้ในบทที่ 3 และใช้เกรเดียน (Gradient) เป็นสิ่งบ่งชี้ที่จะทำให้ได้ทิศทางของคำตอบเร็วขึ้น โดยผู้ใช้งานสามารถเลือกให้โปรแกรมคำนวณโดยใช้เกรเดียน (Gradient) หรือไม่ก็ได้ และเมื่อได้คำตอบ โปรแกรมจะรองรับคำสั่งในการแสดงกราฟซึ่งแสดงผลของสเตทวารีเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) เทียบกับ เวลา (t)



ภาพประกอบ 4.1 แสดงโฟลชาร์ท (Flowchart) ของ General proposes program

4.2 โครงสร้างของโปรแกรม

4.2.1 อินพุต(Input)สำหรับโปรแกรม

โปรแกรมจะรับค่าต่างๆ ที่เป็นองค์ประกอบของปัญหาตามที่ได้กล่าวไว้แล้วใน บทที่ 2 ซึ่งค่าอินพุตทั้งหมดโปรแกรมจะรับจากการป้อนของผู้ใช้ผ่านหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface)

4.2.2 ขอบข่ายการทำงาน

โครงสร้างของโปรแกรมแบ่งเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ เช่นเดียวกับในหัวข้อ 4.1

4.2.2.1 ขั้นตอนที่ 1 เรียกว่าส่วนออฟไลน์ (Off-line) ทำงานในส่วนของการแปลงปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ไปเป็นปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

4.2.2.2 ขั้นตอนที่ 2 เรียกว่าส่วนออนไลน์ (On-line) ทำงานในส่วนของการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

4.2.3 โครงสร้างการทำงานของส่วนออฟไลน์ (Off-line)

ส่วนออฟไลน์ (Off-line) จะรับข้อมูลต่างๆ ของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Optimal control problem) จากหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) ในรูปของข้อมูลแบบสตริง (String data) และเปลี่ยนเป็นข้อมูลแบบเวกเตอร์ ในรูปของข้อมูลซิมโบลิก (Symbolic data)

โปรแกรมจะทำตัวแปรต่างๆ ให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) เช่น state variables control variables และ เวลา (t) หลังจากนั้นจะสร้างเวกเตอร์ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ด้วย คอลโลเคชัน (Collocation) ของรุงเง-กุตตา (Rung-Kutta) และ กำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ซึ่งข้อมูลทั้งหมดจะถูกแยกเก็บไว้ในไฟล์ต่างๆ ตามประเภทของข้อมูล ซึ่งไฟล์ดังกล่าวจะกลายเป็นอินพุตไฟล์ (Input file) สำหรับเอ็นแอลพีโซลเวอร์ (NLP solver) ที่มีอยู่ในโปรแกรม MATLAB คือ เอฟมินคอน (fmincon) และฟังก์ชันภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำการอ่านข้อมูลและคืนค่าที่คำนวณได้ออกมาไว้ในไฟล์

อินพุตไฟล์ (Input file) ทั้งหมดมีองค์ประกอบดังนี้

$$\text{Min } F(\underline{a})$$

Subject to

$$c_i(\underline{a}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e$$

$$c_i(\underline{a}) \leq 0, \quad i = m_e + 1, m_e + 2, \dots, m_c$$

โดยที่ m_e = จำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints) รวมกับจำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality constraints) m_c = จำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints)

4.2.4 โครงสร้างการทำงานของส่วนออนไลน์ (On-line)

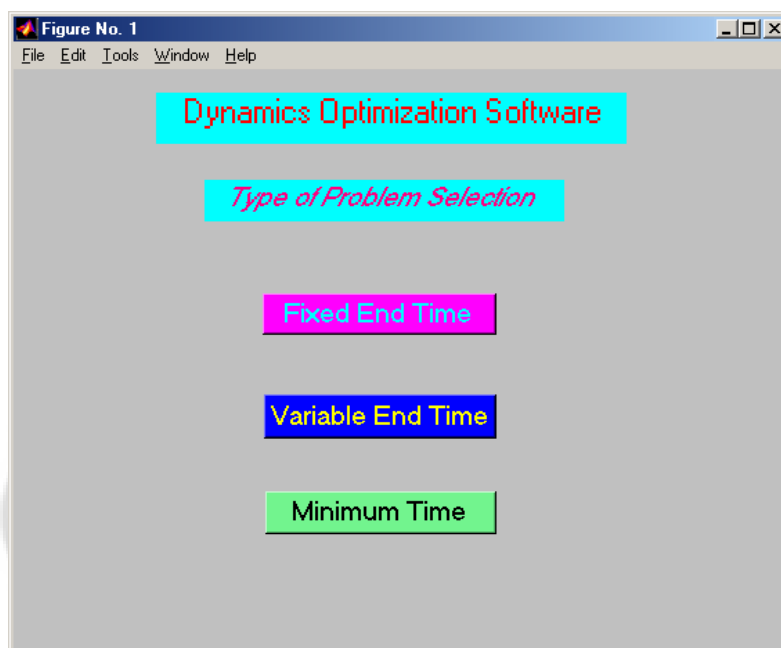
ส่วนออนไลน์(On-line) เป็นส่วนหลักการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) ใช้ฟังก์ชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งเป็นกล่องเครื่องมือที่ใช้หาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วใน MATLAB เป็น ฟังก์ชันหลักในการแก้ปัญหา ซึ่งฟังก์ชันต่างๆ ภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำหน้าที่ดังนี้ ขั้นแรกเมื่อรับอินพุต (Input) มาแล้วจะคืนค่าของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (equality) และไม่เป็นสมการ (Inequality constraints) ซึ่งแทนค่าพารามิเตอร์สำหรับการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization parameter) $\underline{a}$ ลงไปแล้ว ขั้นที่สองเป็นการแทนค่าของ $F(\underline{a})$ ขั้นที่สามเป็นการรับค่าจากสองขั้นตอนแรกนำมาคำนวณจนกว่าจะได้คำตอบ $\underline{a}^*$

โดยทั่วไปการหาคำตอบของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) จะมีการปรับเปลี่ยนค่าเกรเดียน (Gradient) ของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และจาโคเบียน (Jacobian) ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ตลอดเวลาซึ่งในที่นี้ใช้การคำนวณแบบแบ่งช่วงตรงกลาง (Central difference) ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเกรเดียน (Gradient) และจาโคเบียน (Jacobian) ไว้แล้วการคำนวณจะรวดเร็วขึ้น

4.3 วิธีใช้โปรแกรม

ก่อนการเริ่มใช้งาน ผู้ใช้ต้องทำความเข้าใจส่วนของหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) เสียก่อน

หน้าต่างแรกของโปรแกรมแสดงตัวเลือกสำหรับระบุชนิดของปัญหา โดยพิจารณาจากเวลาที่ปลายทาง (Final time) t_f และคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ซึ่งแบ่งเป็นกรณีที่อยู่เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time) กรณีไม่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Variable end time) และกรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time)



ภาพประกอบ 4.2 แสดงหน้าต่างแรกของ General purpose-program

เมื่อกำหนดประเภทของปัญหาโดยคลิกที่ปุ่มแล้ว จะปรากฏหน้าต่างที่สองซึ่งแสดงส่วนรับข้อมูลต่างๆ ของปัญหาในแต่ละกรณี เมื่อใส่ข้อมูลในหน้าต่างนี้และกด enter หน้าต่างสำหรับรับรายละเอียดของแต่ละส่วนจะปรากฏขึ้นต่อไป

Figure No. 2
File Edit Tools Window Help

Dynamics Optimization Software

Fixed End Time

Number of State Variables (Equations)	0	Initial Time	0
Number of control Variables (Inputs)	0	Final Time	0
Number of Auxiliary Inequality Constraints	0 BC	Number of Interval	0
Number of Auxiliary Equality Constraints	0 BC	☐ Gradient Provided	

Cost Functional to be Minimized Off-line On-line

Terminal Cost	Input State Variables as x1,x2,...,xn Input Control Variables as u1,u2,...,um For power let use power(x,n) instead of x^n Also use times(x1,x2) instead of x1*x2 Other instruction please see the manual
0	
Integrand Cost	
0	Plot Result

ภาพประกอบ 4.3 แสดงหน้าต่างที่สองของกรณีรู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time)

Figure No. 2
File Edit Tools Window Help

Dynamics Optimization Software

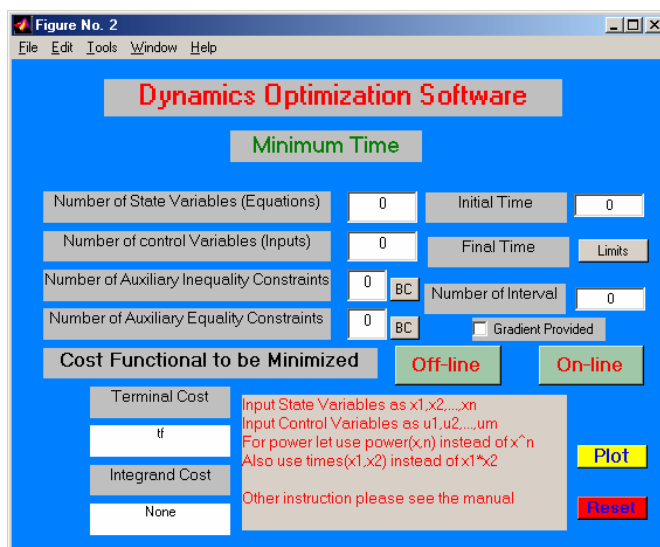
Variable End Time

Number of State Variables (Equations)	0	Initial Time	0
Number of control Variables (Inputs)	0	Final Time	Limits
Number of Auxiliary Inequality Constraints	0 BC	Number of Interval	0
Number of Auxiliary Equality Constraints	0 BC	☐ Gradient Provided	

Cost Functional to be Minimized Off-line On-line

Terminal Cost	Input State Variables as x1,x2,...,xn Input Control Variables as u1,u2,...,um For power let use power(x,n) instead of x^n Also use times(x1,x2) instead of x1*x2 Other instruction please see the manual
0	
Integrand Cost	
0	Plot Result

ภาพประกอบ 4.4 แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีไม่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Variable end time)



ภาพประกอบ 4.5 แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time)

4.3.1 ตัวอย่างในการใช้โปรแกรม

$$J = \int_0^{t_f} (2x_1^2 - 2x_1u_1 - u_1^2) dt \quad (4.1)$$

สมการของเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด(Necessary condition) คือ

$$f(x_1, u_1) \quad \dot{x}_1 \quad x_1 \quad u_1 \quad (4.2)$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

$$x_1(t_0) = 5 \quad (4.3)$$

$$x_1(t_f) = 1 \quad (4.4)$$

เวลาที่ปลาย (Final time)

$$t_f = \ln(2). \quad (4.5)$$

กำหนดข้อมูลข้างต้นทั้งหมดให้โปรแกรมดังนี้

1. หน้าต่างที่ 1 ดังในภาพประกอบ 4.2 เลือกปัญหากรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) เนื่องจากทราบเวลาที่ปลาย (Final time)
2. โปรแกรมจะปรากฏหน้าต่างที่ 2 ดังในภาพประกอบ 4.3 รวบรวมจำนวนของสเตทวารีเอเบิล (State variable) สำหรับในปัญหานี้คือ “1” แล้วเอนเทอร์ (Enter)

The screenshot shows the 'Dynamics Optimization Software' window. The title bar is 'Figure No. 2'. The menu bar includes 'File', 'Edit', 'Tools', 'Window', and 'Help'. The main window has a blue background with a red title bar. The text 'Fixed End Time' is displayed in a green box. Below this, there are several input fields and buttons:

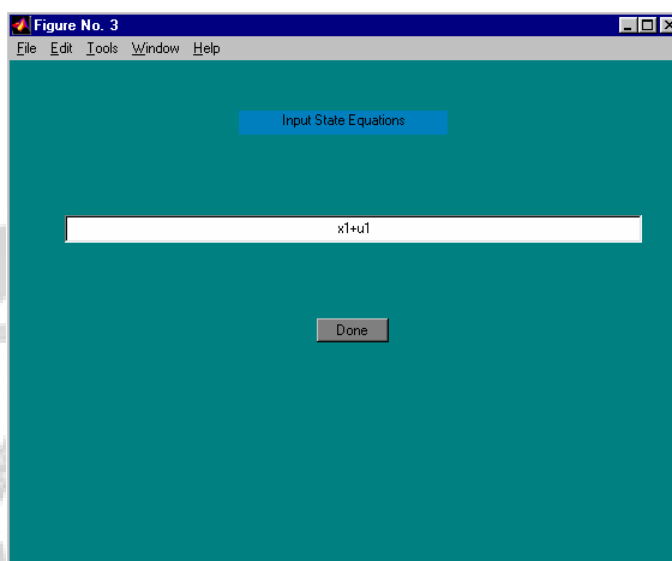
- Number of State Variables (Equations):** 1
- Initial Time:** 0
- Number of control Variables (Inputs):** 0
- Final Time:** 0
- Number of Auxiliary Inequality Constraints:** 0
- BC:** (button)
- Number of Interval:** 0
- Number of Auxiliary Equality Constraints:** 0
- BC:** (button)
- ☐ Gradient Provided
- Cost Functional to be Minimized:**
 - Off-line** (button)
 - On-line** (button)
- Terminal Cost:** 0
- Integrand Cost:** power(u1,2)
- Plot** (button)
- Run** (button)

Instructions on the right side of the window:

Input State Variables as x1,x2,...,xn
 Input Control Variables as u1,u2,...,um
 For power let use power(x,n) instead of x^n
 Also use times(x1,x2) instead of x1*x2
 Other instruction please see the manual

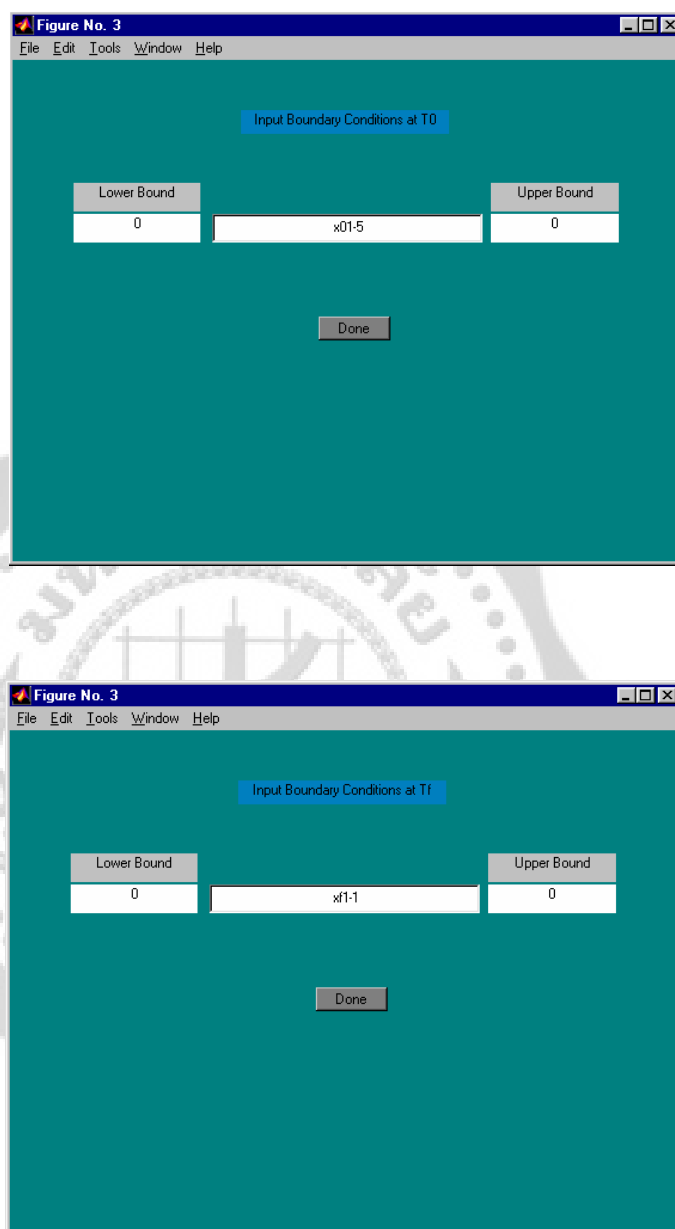
ภาพประกอบ 4.6 แสดงการกำหนดจำนวนของสเตทวารีเอเบิล (State variable)

3. หน้าต่างที่ 3 จะปรากฏขึ้นรอรับสมการของสเตทวารีเอเบิล (State variable) ดังในสมการ 4.2 ซึ่งในที่นี้ต้องกำหนดเป็น “ $x1+u1$ ” เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อยแล้วให้คลิกที่ปุ่ม “Done”



ภาพประกอบ 4.7 แสดงการกำหนดสเตทอิควชัน (State equation)

4. หน้าต่างที่ 4 จะปรากฏขึ้นรอรับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ต่างๆ ซึ่งในที่นี้มีทั้งหมดสองเงื่อนไข ดังในสมการที่ 4.3 และ 4.4 ในที่นี้ต้องกำหนดเป็น “ $x01-5$ ” และ “ $xf1-1$ ” ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อยแล้วให้คลิกที่ปุ่ม “Done”



ภาพประกอบ 4.8 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้งสองเงื่อนไข ที่ t_0 และ t_f

5. โปรแกรมจะกลับมายังหน้าต่างที่สองเพื่อรอรับจำนวนของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ซึ่ง ในที่นี้คือ "1" แล้วเอนเทอร์ (Enter)

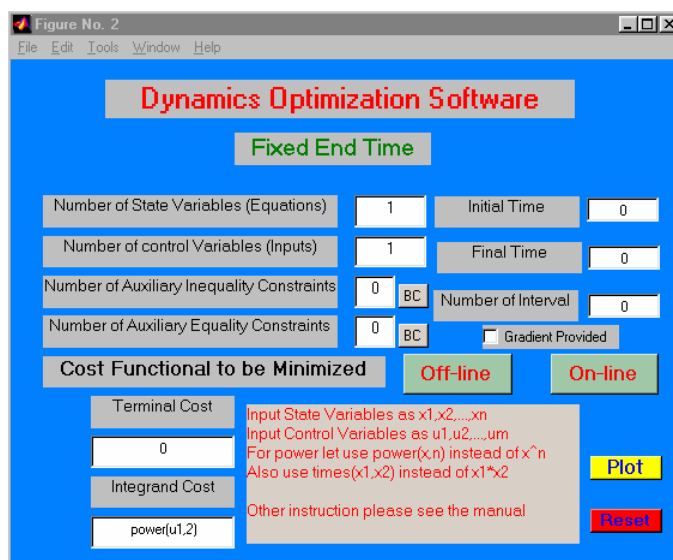


Figure No. 2

File Edit Tools Window Help

Dynamics Optimization Software

Fixed End Time

Number of State Variables (Equations) 1 Initial Time 0

Number of control Variables (Inputs) 1 Final Time 0

Number of Auxiliary Inequality Constraints 0 BC Number of Interval 0

Number of Auxiliary Equality Constraints 0 BC ☐ Gradient Provided

Cost Functional to be Minimized Off-line On-line

Terminal Cost 0

Integrand Cost power(u1,2)

Input State Variables as x1,x2,...xn
Input Control Variables as u1,u2,...um
For power let use power(x,n) instead of x^n
Also use times(x1,x2) instead of x1*x2

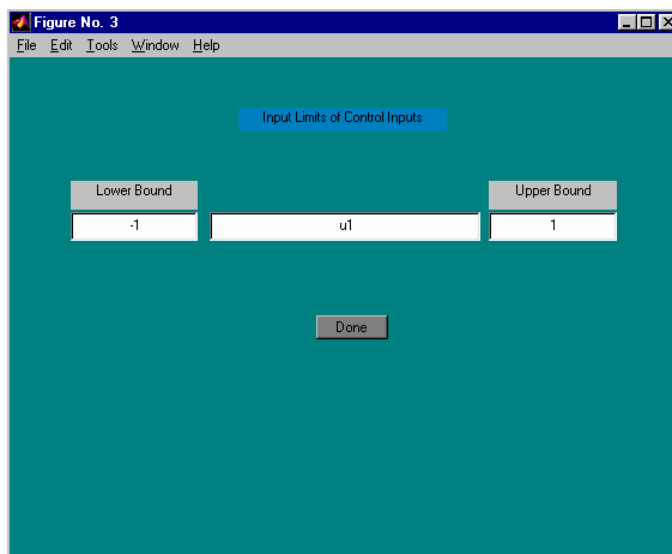
Plot

Reset

Other instruction please see the manual

ภาพประกอบ 4.9 แสดงการกำหนดจำนวนของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

6. หน้าต่างที่ 5 จะปรากฏขึ้นเพื่อรอรับขอบเขตของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ในที่นี้กำหนดให้เป็น -1 ถึง 1 เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อยแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม "Done"

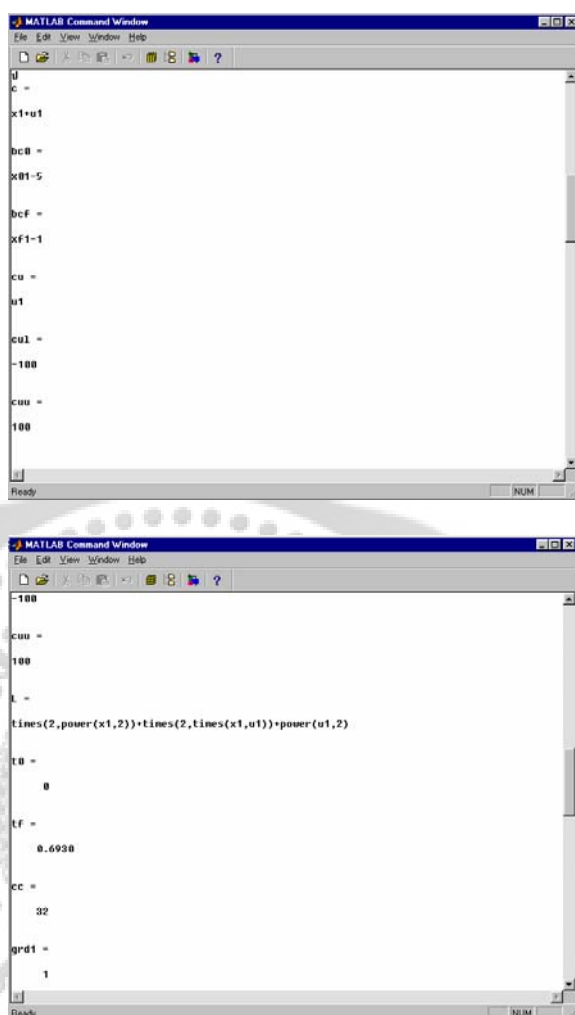


ภาพประกอบ 4.10 แสดงการกำหนดขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input)

7. โปรแกรมจะกลับมายังหน้าต่างที่สองเพื่อรอรับค่าเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ต่างๆ ซึ่ง ในที่นี้ไม่มี จึงกำหนดให้เป็น “0” แล้วเอนเทอร์ enter ต่อจากนั้นต้องกำหนดสมการของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ทั้งสองส่วนคือเทอร์มินอลคอส (Terminal cost) และ อินติเกรนดคอส (Integrand cost) ดังในสมการที่ 4.1 ซึ่งในที่นี้ เทอร์มินอลคอส (Terminal cost) คือ “0” และ อินติเกรนดคอส (Integrand cost) คือ $\text{times}(2, \text{power}(x1, 2)) + \text{times}(2, \text{times}(x1, u1)) + \text{power}(u1, 2)$ แล้ว เอน เท อ ร์ (Enter) ต่อจากนั้นต้องกำหนดเวลาเริ่มต้น (Initial time) และเวลาที่ปลายทาง (Final time) ซึ่งในที่นี้คือ “0” และ “0.693” ตามลำดับ ต่อจากนั้นกำหนดจำนวนช่วงของเวลา (Interval) ซึ่งในที่นี้ใช้ “32” เนื่องจากต้องการค่าที่ค่อนข้างละเอียด และสุดท้ายในส่วนของเกรเดียน (Gradient) ในปัญหาส่วนใหญ่ การใช้เกรเดียน (Gradient) จะทำให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็วขึ้น ซึ่งในที่นี้เลือกใช้โดยคลิกที่เช็คบ็อก (Check box) ให้เกิดเครื่องหมายถูก

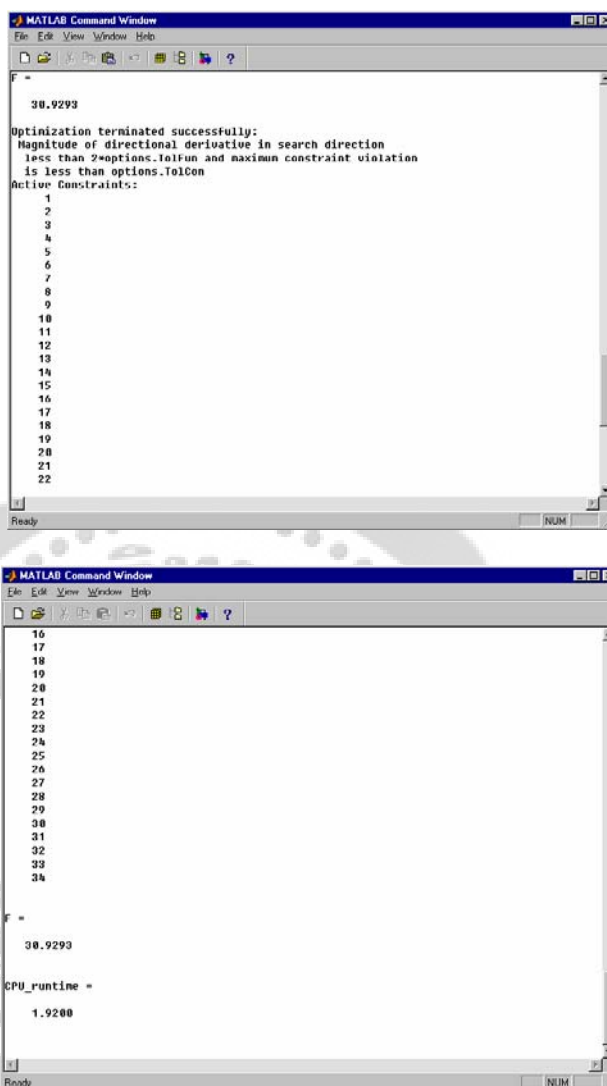
ภาพประกอบ 4.11 แสดงการกำหนดค่าเงื่อนไขบังคับ (Constraints) คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial time) เวลาที่ปลาย(Final time) ช่วงเวลา(Interval) และเกรเดียน (Gradient)

8. เมื่อกำหนดค่าต่างๆ ครบถ้วนแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม “Off-line” เพื่อสั่งให้โปรแกรมทำการคำนวณในส่วนออฟไลน์ (Off-line) แล้วรอจนกระทั่งการคำนวณในส่วนนี้เสร็จสิ้น (สังเกตจากปุ่มที่ขึ้นขึ้นมาเหมือนเดิม) ที่หน้าคอมมานด์ (Command) จะปรากฏข้อความดังนี้



ภาพประกอบ 4.12 แสดงการแสดงผลค่าที่ปรากฏบนหน้าคอมมานด์ (Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วนออฟไลน์ (Off-line) เสร็จสิ้น

แล้วจึงคลิกที่ปุ่ม “On-line” เพื่อสั่งให้โปรแกรมทำการคำนวณในส่วนออนไลน์ (On-line) รอจนกระทั่งการคำนวณในส่วนนี้เสร็จสิ้น(สังเกตจากปุ่มที่หมุนขึ้นมาเหมือนเดิมและที่หน้าคอมมานด์ (Command) จะปรากฏผลการคำนวณที่เสร็จสิ้นแล้ว)



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help

30.9293

Optimization terminated successfully:
  Magnitude of directional derivative in search direction
  less than 2*options.TolFun and maximum constraint violation
  is less than options.TolCon
Active Constraints:
  1
  2
  3
  4
  5
  6
  7
  8
  9
  10
  11
  12
  13
  14
  15
  16
  17
  18
  19
  20
  21
  22

Ready NUM

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help

16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34

f =
30.9293

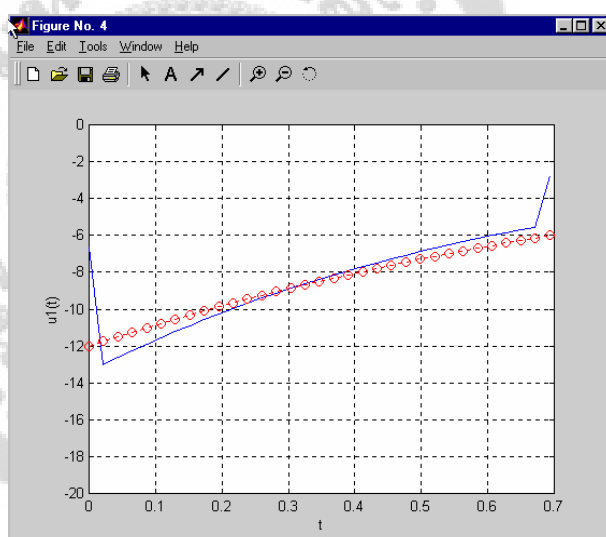
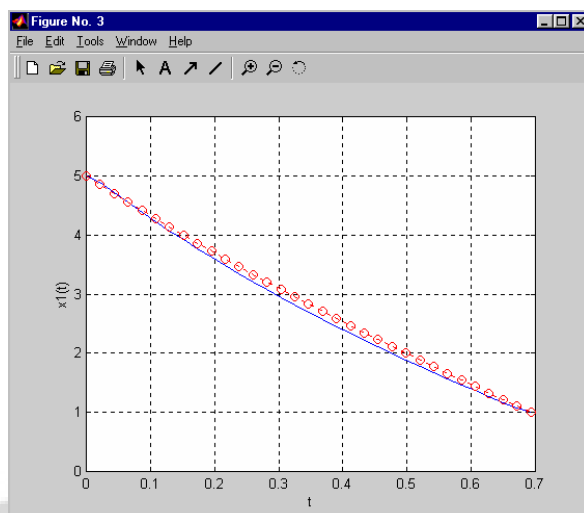
CPU_runtime =
1.9200

Ready NUM

```

ภาพประกอบ 4.13 แสดงการแสดงผลค่าบนหน้าต่างคอมมานด์ (Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วนออนไลน์ (On-line) เสร็จสิ้น

แล้วจึงคลิกที่ปุ่ม “Plot” เพื่อสั่งให้โปรแกรมแสดงกราฟของคำตอบของสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x(t)$ และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา



ภาพประกอบ 4.14 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของสเตต (State) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) เทียบกับเวลา เปรียบเทียบระหว่างคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical)

4.3.2 รูปแบบของการกำหนดตัวแปรสำหรับใช้กับเจเนอรัลโพรโพส (General proposes program)

ตาราง 4.1 แสดงรูปแบบของตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรม

Argument	Original Problem	Input form of general- purposes program
1. state variables	$x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), \dots$	x1, x2, x3,x4,....
2. control variable	$u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), \dots$	u1, u2, u3,u4,....
3. initial state variable	$x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t_0), \dots$	x01,x02,x03,x04,....
4. final state variable	$x_1(t_f), x_2(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f), \dots$	xf1,xf2,xf3,xf4,....
5. การคูณของ state variables และ control variables	ตัวอย่าง $x_1(t) \cdot x_2(t)$ $u_1(t) \cdot u_2(t)$ $x_1(t) \cdot u_1(t)$	times(x1,x2) times(u1,u2) times(x1,u1)
6. การหารของ state variables และ control variables	ตัวอย่าง $x_1(t) \div x_2(t)$ $u_1(t) \div u_2(t)$ $x_1(t) \div u_1(t)$	rdivide(x1,x2) rdivide(u1,u2) rdivide(x1,u1)
7.การยกกำลัง	ตัวอย่าง $x_1(t)^2$ $u_1(t)^8$	power (x1,2) power(u1,8)

บทที่ 5

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพ ความสามารถของเจเนอรัลโพสิโพรแกรม (General-purposes program) และผลการทดสอบโปรแกรม โดยพิจารณาจากการทดสอบโปรแกรมนี้กับ ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ทั้งหมด 6 กรณีด้วยกัน ซึ่งแต่ละกรณีก็จะแตกต่างกันด้วยเงื่อนไขของ เวลาที่จุดปลาย t_f และสเตทวารีเอเบิล (State variable) ที่ t_f คือ $\underline{x}(t_f)$

5.1 ประเภทของปัญหา

กรณีที่ 1: t_f มีค่าแน่นอน $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

กรณีที่ 2: t_f มีค่าแน่นอนแต่มีบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ที่ไม่ทราบค่า

กรณีที่ 3: t_f มีค่าแน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) หรืออยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve)

กรณีที่ 4: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

กรณีที่ 5: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนและบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

กรณีที่ 6: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) หรืออยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve)

กรณีที่ 7: ปัญหาของเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time)

โดยทำการทดสอบเปรียบเทียบผลระหว่างคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) กับ คำตอบที่ได้จากโปรแกรมซึ่งเป็นวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method)

คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จะแสดงผลออกมาเป็นกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลของ คำตอบทั้งสองแบบ และหาความแตกต่างระหว่างคำตอบทั้งสองแบบนี้

$$\Delta(x) = \sqrt{(\underline{x}_a - \underline{x}_n)^2}$$

$$\Delta(u) = \sqrt{(\underline{u}_a - \underline{u}_n)^2}$$

โดยที่ $\Delta(x)$ คือ ค่าสมบูรณ์ของความแตกต่างของข้อมูลทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทางการวิเคราะห์ของสเตทวารีเอเบิล (State variable)

$\Delta(u)$ คือ ค่าสมบูรณ์ของความแตกต่างของข้อมูลทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทางการวิเคราะห์คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

$\underline{x}_a$ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ของสเตทวารีเอเบิล (State variable)

$\underline{x}_n$ คือ คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสเตทวารีเอเบิล (State variable)

$\underline{u}_a$ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

$\underline{u}_n$ คือ คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable)

หลังจากนั้นนำค่า $\Delta(x)$ และ $\Delta(u)$ มาหาค่า “norm” (ดูในภาคผนวก)

ซึ่ง norm มีความหมายดังนี้

$$\text{norm}(\underline{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

โดยที่ n มีค่า 1,2,3.....

$\underline{x}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเป็น $1 \times n$

$$\text{ดังนั้น } \text{norm}(\Delta(x)) = \sqrt{\Delta(x_1)^2 + \Delta(x_2)^2 + \dots + \Delta(x_n)^2}$$

เมื่อคำตอบทั้งสองประเภทยังมีค่าใกล้เคียงกันมาก จะได้ค่า $\Delta(x)$ ที่ยิ่งมีค่าน้อย และจะส่งผลให้ค่า norm มีค่าน้อยด้วย ดังนั้นค่า $\Delta(x)$ ที่แสดงถึงความแม่นยำของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือ ค่าที่มีความใกล้เคียงศูนย์มากที่สุดหรือ เท่ากับศูนย์ และค่า norm ที่ดีที่สุดต้องมีค่าใกล้เคียงศูนย์เช่นกัน

คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solutions) หาได้จากการใช้เงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) ด้วยวิธีของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variation) และ

หลักการของค่าสูงสุด (Maximum principles) หรือหลักการของค่าต่ำสุด (Minimum principle) ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 2

5.2 ทดสอบเจนเนอรัลโพสโปรแกรม (General-Purposes Program) ด้วยปัญหาคลาสสิกอล (Classical Problem)

5.2.1 กรณีที่ 1: t_f มีค่าแน่นอน $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

ปัญหานี้ต้องการค่าที่เหมาะสมที่สุดของสเตทวารีเอเบิล (State variables) คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) ที่จะควบคุมระบบให้ดำเนินจากเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0 ไปสู่เวลาที่ปลาย (Final time) t_f ด้วยค่าที่จุดปลายที่ทราบค่าแน่นอน ปัญหานี้เรียกได้อีกอย่างว่า ปัญหาแบบ “Fixed end time- fixed end point “

ตัวอย่างที่ 1

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ทำให้ (Cost functional) มีค่าน้อยที่สุด

$$J = \int_0^{t_f} (2x_1^2 + 2x_1u_1 + u_1^2) dt \quad (5.1)$$

จะได้สมการสำหรับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดดีกรีหนึ่ง (First order) คือ

$$f(x_1, u_1) = \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \quad (5.2)$$

โดยที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลอินพุต (Control input) และสเตทวารีเอเบิล (State variable) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ดังนี้

$$x_1(t_0) = 5 \quad (5.3)$$

$$x_1(t_f) = 1 \quad (5.4)$$

$$t_f = \ln(2). \quad (5.5)$$

5.2.1.2 ลักษณะของปัญหา

เป็นปัญหาแบบรู้เวลาและตำแหน่งที่ปลายที่แน่นอน (Fixed end time-fixed end point) ที่มีหนึ่งคอนโทรลอินพุต (Control input) และหนึ่งสเตทวารีเอเบิล (State variable) ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ในรูปของตัวแปรใด ๆ จากหลักการของค่ามากที่สุด (Maximum principle) หรือหลักการของค่าน้อยที่สุด (Minimum principle) เราสามารถหาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) สำหรับปัญหานี้ได้ดังนี้

$$(i) \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \text{ กับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)}$$

$$(ii) \quad \dot{\underline{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \text{ โดยที่ } H = \underline{F} + \underline{\lambda}^T \underline{f}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0 \text{ and } H = \text{เป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ}$$

5.2.1.3 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytical calculation)

เนื่องจากเป็นปัญหาของการหาค่าต่ำสุด ดังนั้นจะได้ (i), (ii), (iii) อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ตามลำดับดังนี้

$$H = 2x_1^2 - 2x_1u_1 - u_1^2 + \lambda(x_1 + u_1) \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda} = 4x_1 + 2u_1 - \lambda \quad (5.8)$$

$$u_1 = (\lambda - 2x_1)/2 \quad (5.9)$$

จากสมการข้างต้น จะได้ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) $u_1(t)$ และ
เส้นทางควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control path) $x_1(t)$

$$x_1^*(t) = Ae^t + Be^{-t} \quad (5.10)$$

$$\lambda^*(t) = 2Ae^t - 2Be^{-t} \quad (5.11)$$

$$u_1^*(t) = -2Be^{-t} \quad (5.12)$$

โดยที่ A และ B คือค่าคงที่สำหรับคำตอบทั่วไป

สุดท้ายจะหาค่า A และ B ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ที่ $t = 0$ และ $t_f = \ln(2)$

$$x_1(0) = 5$$

$$A + B = 5 \quad (5.13)$$

$$x_1(t_f) = 1$$

$$Ae^{\ln(2)} + Be^{-\ln(2)} = 1 \quad (5.14)$$

$A = 1$ และ $B = 6$ ดังนั้นจะได้เส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) และ ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) ดังนี้

$$x_1^*(t) = 6e^{-t} - e^t \quad (5.15)$$

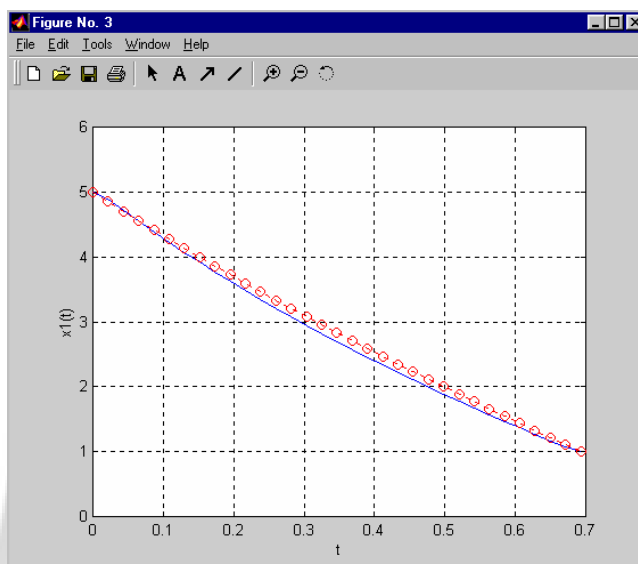
$$u_1^*(t) = -12e^{-t} \quad (5.16)$$

5.2.1.4 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัญหาแบบที่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจนเนอรัลโพสิทีฟ (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input) จึงเป็น $[-\infty, \infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[10000, 10000]$

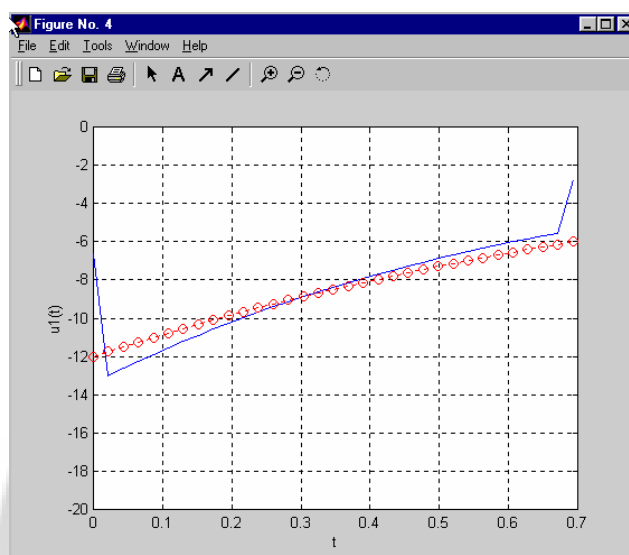
ที่ช่วงเวลา (Time interval) $N = 32$ ค่าที่เหมาะสมที่สุดของสเตต (State) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) สามารถแสดงได้ดังภาพประกอบ 5.1 ถึง 5.2 คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมจะแสดงเป็นเส้นต่อเนื่อง

ภาพประกอบ 5.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสแตทวาริเอเบิล (State variable) $x(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 1



จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต(Boundary condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 1.1331$ ซึ่งมีค่าน้อย หมายความว่าค่าทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 1



กราฟของ $u_1(t)$ และ t แสดงให้เห็นว่าแนวโน้มของคำตอบทั้งสองค่อนข้างใกล้เคียงกัน ในช่วงกลางๆ ของเวลาทั้งหมด แต่มีความแตกต่างในสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้าย ได้ค่า norm ของ $\Delta(u_1) = 16.798$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ค่อนข้างมาก หมายความว่ามีส่วนของคำตอบที่แตกต่างกัน แต่ก็ยังอยู่ในค่าที่ยอมรับได้ (คำตอบแบบ วิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และ คำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.2 กรณีที่ 2: t_f มีค่าแน่นอนแต่มีบางส่วนของ $x(t_f)$ ที่ไม่ทราบค่า

กรณีนี้ต่างกับกรณีแรกเนื่องจากทราบเวลาที่จุดสุดท้ายที่แน่นอนแต่ไม่ทราบสเตทวารีเอเบิล (State variable) ที่เวลาสุดท้าย

ตัวอย่างที่ 2

$$\min J = x_1(t_f)^2 + \int_0^{\pi/2} u_1^2 dt \quad (5.17)$$

Subject to

สเตทวารีเอเบิล (State equations)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.18)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_1. \quad (5.19)$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ต่างๆ ดังนี้

$$\text{ที่ } t_0 = 0$$

$$x_1(t_0) = 0 \text{ และ } x_2(t_0) = 1 \quad (5.20)$$

$$\text{ที่ } t_f = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1(t_f) \text{ และ } x_2(t_f) \text{ ไม่ทราบค่า} \quad (5.21)$$

ต้องการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด โดยที่สภาวะที่จุดสุดท้ายไม่ทราบค่า

5.2.2.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้ประกอบด้วยสองสเตทวารีเอเบิล (State variables) กับหนึ่งคอนโทรลอินพุท (Control input) และไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ในรูปของตัวแปรใดๆ และที่สภาวะสุดท้าย t_f ค่าสเตทวารีเอเบิล (State variables) ทั้งสองมีค่าอิสระ

5.2.2.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytical calculation)

จากคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการฮามิลโตเนียน (Hamiltonian) ได้ดังนี้

$$H = u_1^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-x_1 + u_1) \quad (5.22)$$

ดังนั้นเงื่อนไขในการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$(i) \quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

เงื่อนไขขอบเขต(Boundary conditions)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.23)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_1 \quad (5.24)$$

$$(ii) \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \quad (5.25)$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \quad (5.26)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0 \quad (5.27)$$

$$u_1^* = \frac{\lambda_2}{2}$$

สเตทวารีเอเบิล (State variable) โคสเตท (Co-state) และคอนโทรลอินพุท (Control input) สามารถหาค่าได้ในรูปของค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) ทั่วไปจากสมการ (i), (ii), (iii) ดังนี้

คำตอบของโคสเตท (Co-state) ในรูปของค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) k กับ l

$$\lambda_1(t) = k \cos(t + l) \quad (5.28)$$

$$\lambda_2(t) = k \sin(t + l) \quad (5.29)$$

$$x_1(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + (kt \sin(t)) / 4 \quad (5.30)$$

$$x_2(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + k(\sin(t) + t \cos(t)) / 4 \quad (5.31)$$

$$\lambda_1(t_f) = 0 \text{ และ } \lambda_2(t_f) = 0.$$

ที่ $t_f = \pi/2$ โคสเตท (Co-state) จะเป็น

$$\lambda_1 = 2x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ and } \lambda_2(t_f) = 0 \quad (5.32)$$

ดังนั้น $l = 0$ และ ความสัมพันธ์ระหว่าง λ_2 และ u_1 คือ

$$u_1 = k \cos(t) / 2. \quad (5.33)$$

สเตทอีควชัน (State equation) จะกลายเป็น

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.34)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + k \cos(t) / 2 \quad (5.35)$$

และเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) $x_1(t)$ and $x_2(t)$ สามารถหาค่าอยู่ในรูปของค่าคงที่ A และ B

$$x_1(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + (kt \sin(t)) / 4 \quad (5.36)$$

$$x_2(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + k(\sin(t) + t \cos(t)) / 4 \quad (5.37)$$

เนื่องจาก $\lambda_2(t_f) = 0$ ที่ $t = \pi/2$ จึงสามารถหาค่าคงที่ A B และ k จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่ $t = 0$, $x_1(t_f) = 0$, $x_2(t_f) = 1$

$$A = 0 \quad (5.38)$$

$$B = 1 \quad (5.39)$$

$$k = 8/(4 + \pi) \quad (5.40)$$

ดังนั้นจะได้

$$x_1(t) = \sin(t) + \frac{2}{(4 + \pi)} t \sin(t) \quad (5.41)$$

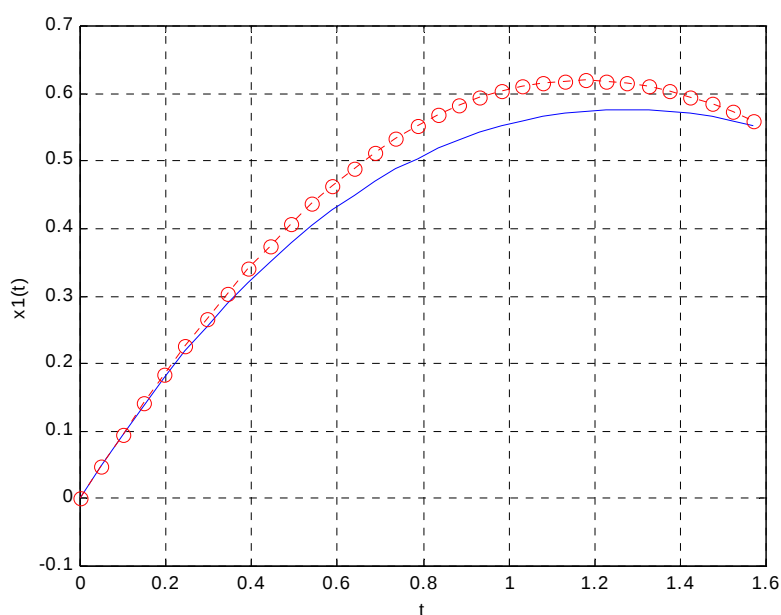
$$x_2(t) = \cos(t) + \frac{2}{(4 + \pi)} (\sin(t) + t \cos(t)) \quad (5.42)$$

$$u_1(t) = \frac{4}{(4 + \pi)} \cos(t) \quad (5.43)$$

5.2.2.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

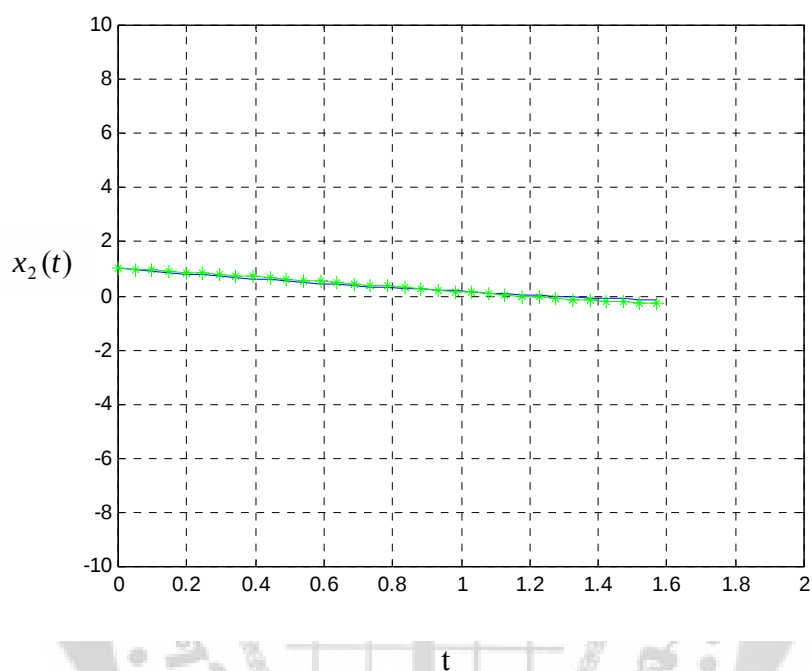
ปัญหากรณีนี้รู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input) จึงเป็น $[-\infty, \infty]$ ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 2



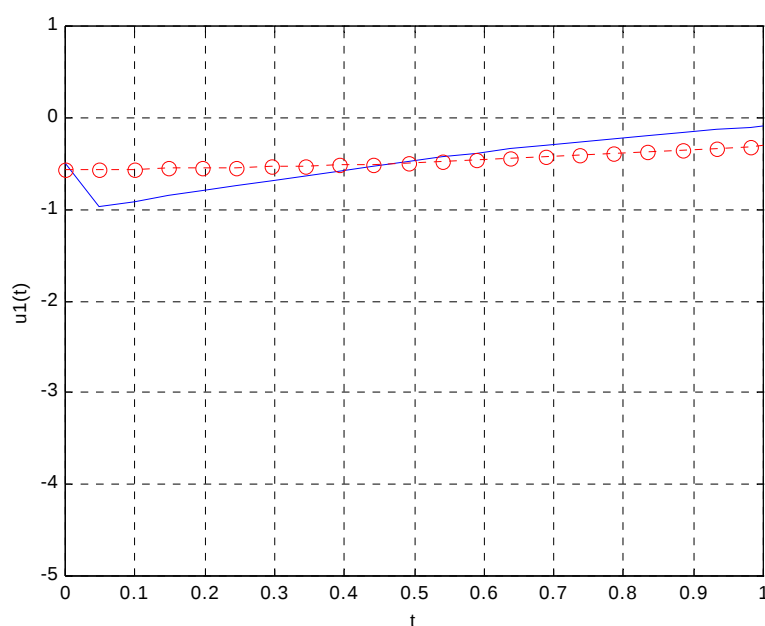
จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.0637$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์มาก หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 2



จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.1699$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 2



จะเห็นได้ว่ากราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ค่อนข้างแตกต่างกันโดยเฉพาะ ณ เวลาที่เวลาเริ่มต้นและที่ปลาย ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_2) = 0.4686$ ซึ่งมีค่าค่อนข้างน้อย หมายความว่าคำตอบทั้งสองมีค่าที่แตกต่างกันบางส่วน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.3 กรณีที่ 3: t_f มีค่าแน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) หรืออยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve)

ในกรณีนี้อธิบายได้ว่าสแตทวาริเอเบิล (State variable) สามารถหาค่าได้ตามเวลาเริ่มต้น (Initial time) หรือเวลาสุดท้าย (Final time) แต่เป็นค่าที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve) $g(\underline{x}(t_f), t_f)$ นั่นเอง ซึ่งในตัวอย่างนี้สแตทวาริเอเบิล (State variables) นั้นหาค่าได้แน่นอนสำหรับเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0 แต่เป็นฟังก์ชันที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเซอร์เฟซ (Target surface) หรือทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve) สำหรับเวลาที่ปลายที่ทราบค่าแน่นอน t_f .

ตัวอย่างที่ 3

ระบบเป็นดีกรีสอง มีสเตทอิควชัน (State equation) ดังนี้

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad x_2 \quad (5.43)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 \quad (5.44)$$

โดยที่ u_1 เป็นค่าที่ควบคุมได้ เราต้องการหาคำตอบที่ทำให้ระบบเคลื่อนที่จากสภาวะ $(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0, 0)$ ที่เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ ไปสู่สภาวะหรือตำแหน่งที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve) $x_1(t_f) + x_2(t_f) = 0$ ที่ $t_f = 2$ และทำให้ค่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) $J = \int_0^2 u_1^2 dt$ มีค่าต่ำที่สุด

5.2.3.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้มีสองสแตทวาริเอเบิล (State variables) และหนึ่งคอนโทรล (Control input) ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ซึ่ง ณ เวลาที่ปลาย t_f สแตทวาริเอเบิล (State variable) จะมีค่าสอดคล้องตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ของทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve)

5.2.3.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytic calculation)

$$H = u_1^2 + \lambda_1(u_1 - x_2) + \lambda_2(-u_1) \quad (5.45)$$

$$H = \text{คงที่}, \forall t \quad (5.46)$$

หาค่าที่เหมาะสมที่สุดตามเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions)

(i) $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ กับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และทาร์เก็ตเคิร์ฟ (Target curve)

$$\dot{x}_1 = u_1 - x_2 \quad (5.47)$$

$$\dot{x}_2 = -u_1 \quad (5.48)$$

$$x_{01} = 0 \quad (5.49)$$

$$x_{02} = 0 \quad (5.50)$$

$$g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = x_1(t_f) + x_2(t_f) = 0 \quad (5.51)$$

$$(ii) \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.52)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \quad (5.53)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$$

$$u_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \quad (5.54)$$

$$(iv) \quad \underline{\lambda}(t_f) = \sum_{j=1}^p \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial \underline{x}} \text{ ที่ } t_f \text{ โดยที่ } p \text{ คือ จำนวนของทาร์เก็ตเคิร์ฟ (Target curve)}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$\begin{matrix} \lambda_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) \end{matrix} = \mu_1 \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \quad (5.56)$$

ดังนั้น

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) \quad (5.57)$$

จาก (i), (ii), (iii) สเตทวารีเอเบิล (State variable) คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) และ โคสเตท (Co-state) กับค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constants) จะได้

$$\lambda_1(t) = A \quad (5.58)$$

$$\lambda_2(t) = Be^t + A \quad (5.59)$$

$$x_1(t) = De^{-t} + \frac{A}{2}t + \frac{B}{4}e^t + E \quad (5.60)$$

$$x_2(t) = De^{-t} + \frac{A}{2} + \frac{B}{4}e^t \quad (5.61)$$

$$u_1(t) = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}e^t \quad (5.62)$$

โดยที่ A B D และ E คือค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constants)

จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และ $g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = 0$ สามารถหา

ค่าคงที่ต่างได้คือ $A = 1, B = 0, D = 1$, and $E = \frac{3}{2}$ ดังนั้น

เส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal trajectory) ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control input) และ คอสมฟังก์ชันนอล (Cost functional) คือ

$$x_1(t) = 1/2e^{-t} - 1/2t + (1+1/2) \quad (5.63)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2} \quad (5.64)$$

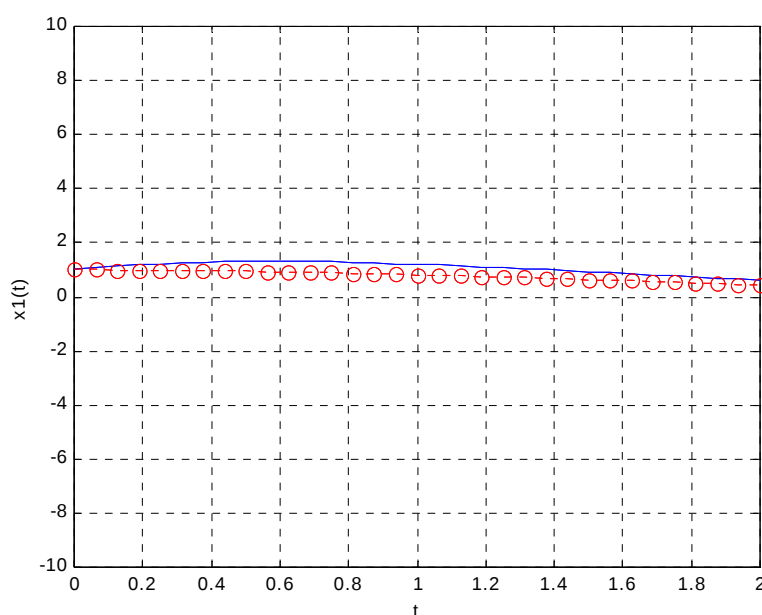
$$\lambda_1(t) = 1 \quad (5.65)$$

$$\lambda_2(t) = 1 \quad (5.66)$$

5.2.3.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

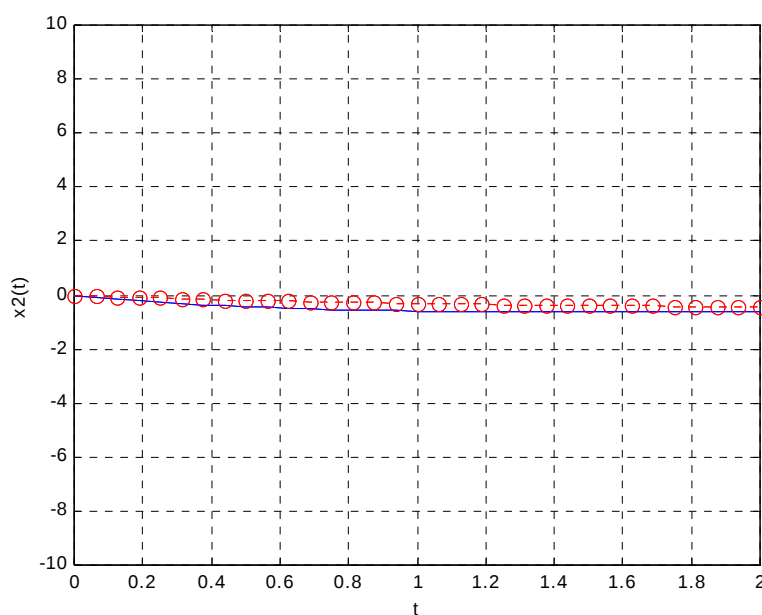
ปัญหากรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจเนอรัลไพโรพอส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input) จึงเป็น $[-\infty, \infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 3



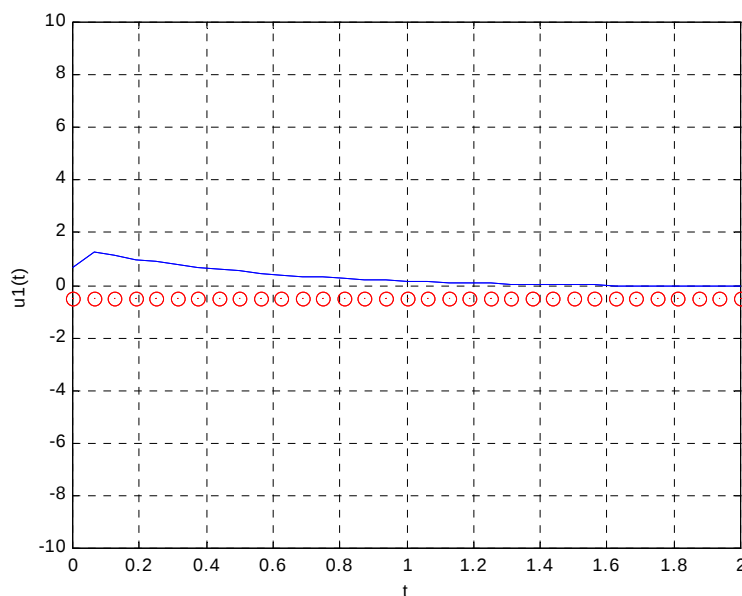
กราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.1545$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 3



กราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ของปัญหา ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.1545$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาร์เอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 3



กราฟของคอนโทรลวาร์เอเบิล (Control variable) $u_1(t)$ และ t แสดงให้เห็นความแตกต่างเล็กน้อยของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) โดยเฉพาะเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial time) และเงื่อนไขที่ปลาย (Final time) แต่เมื่อพิจารณาจาก $t=1$ ถึง $t=2$ แนวโน้มของค่า $u_1(t)$ ของคำตอบทั้งสองค่อนข้างใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ $\Delta(u_1) = 1.2586$ (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.4 กรณีที่ 4: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

ปัญหาประเภทนี้คือการควบคุมระบบจากสถานะเริ่มต้น $\underline{x}(t_0)$ ที่ทราบเวลาเริ่มต้นที่แน่นอน t_0 ไปสู่สภาวะปลายทาง $\underline{x}(t_f)$ ที่ไม่ทราบเวลาที่ปลาย t_f

ตัวอย่างที่ 4

พิจารณาคอสมฟังก์ชันนอล (Cost functional)

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x_1^2 + u_1^2) dt \quad (5.71)$$

Subject to

$$\dot{x}_1 = x_1 + \sqrt{3}u_1 \quad (5.72)$$

ต้องการหาค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) $u_1(t)$ และเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) $x_1(t)$ ที่จะทำให้ $x_1(t_0) = 2$ ที่ $t = 0$ และ $x_1(t_f) = 4$, u_1 ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

5.2.4.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้มีลักษณะคล้ายกับในตัวอย่างที่ 1 ที่ทราบค่าต่างๆ ที่สภาวะเวลาสุดท้าย ไม่มีเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ในรูปของคอนโทรลอินพุต (Control input) และไม่ทราบค่าเวลาสุดท้าย t_f

5.2.4.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytical calculation)

จากคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และ สเตทอีควเชัน (State equation) สามารถหาสมการฮามิลโตเนียน (Hamiltonian) ได้ดังนี้

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \lambda_1(x_1 + \sqrt{3}) \quad (5.73)$$

ได้คำตอบทั่วไปคือ

$$\lambda_1(t) = Ae^{2t} - Be^{-2t} / 3 \quad (5.74)$$

$$x_1(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad (5.75)$$

$$u_1(t) = \sqrt{3}(Ae^{2t} - Be^{-2t} / 3) \quad (5.76)$$

จาก initial condition $x_{01} = 2$ จะได้

$$A + B = 0. \quad (5.77)$$

จาก necessary condition จะได้

$$AB = 0. \quad (5.78)$$

เมื่อแก้สมการทั้งสองข้างต้น จะได้ $A = 2$, $B = 0$, และ $t_f = \frac{1}{2} \ln(2)$ ดังนั้นจะได้คำตอบของ $x_1(t), u_1(t)$ ดังนี้

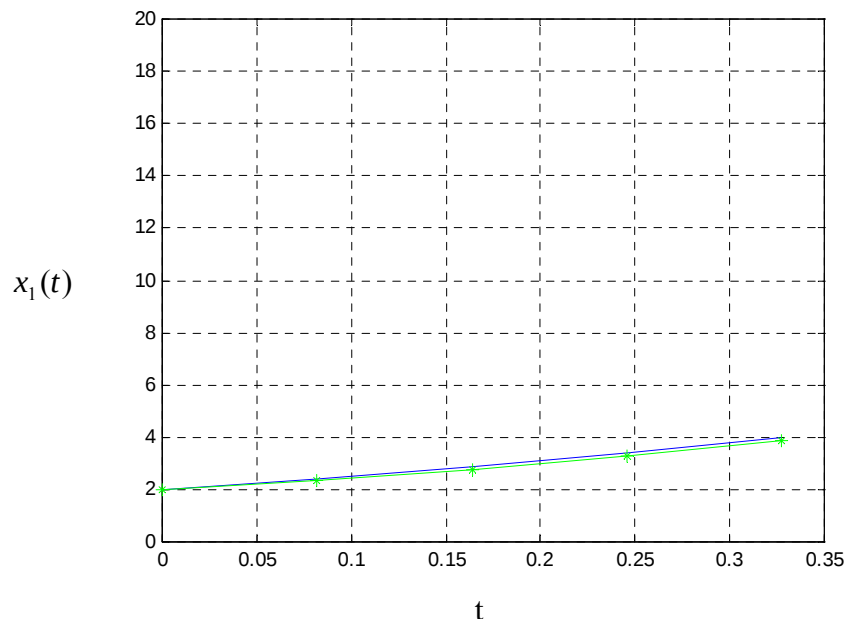
$$x_1^*(t) = 2e^{2t} \quad (5.79)$$

$$u_1^*(t) = 2\sqrt{3}e^{2t} \quad (5.80)$$

5.2.4.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

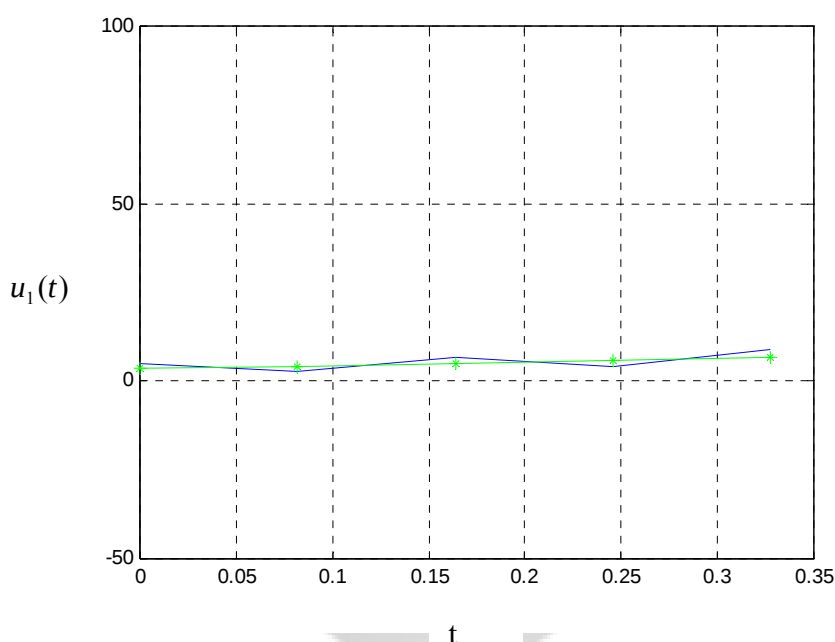
ปัญหาแบบ fixed end time ที่นำมาใช้ในโปรแกรม general-purpose นี้ เนื่องจากไม่มีค่า constraints ที่อยู่ในรูปของ control variable u_1 ดังนั้นขอบเขตของ control input จึงเป็น $[-\infty, \infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง state variable $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 4



กราฟแสดงให้เห็นว่า $x_1(t)$ ที่ เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และวิธีทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่คล้ายคลึงกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.1477$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง control variable $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 4



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $u_1(t)$ ที่ เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และวิธีทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.3278$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.5 กรณีที่ 5: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนและบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

ปัญหาประเภทนี้คือ การควบคุมให้ระบบดำเนินจากสถานะเริ่มต้น $\underline{x}(t_0)$ ไปสู่สถานะสุดท้ายที่ไม่ทราบค่าแน่นอน $\underline{x}(t_f)$ ณ เวลาสุดท้าย t_f ที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

ตัวอย่างที่ 5

สำหรับระบบที่มี $t_0 = 0$ และไม่ทราบค่า t_f ที่แน่นอน

$$x_1 = x_2 \quad (5.87)$$

$$x_2 = u_1 \quad (5.88)$$

$$x_1(t_0) = 0 \quad (5.89)$$

$$x_2(t_0) = 1 \quad (5.90)$$

$$x_1(t_f) = 1 \quad (5.91)$$

$$x_2(t_f) = \text{ไม่ทราบค่า} \quad (5.92)$$

คอสฟังก์ชันนอล(Cost functional)

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt \quad (5.93)$$

โดยที่ control input u_1 เป็น constrained คือ $|u_1| \leq 1$ แต่ไม่มี constrained สำหรับ state variable ต้องการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดที่สอดคล้องกับคำตอบทั้งหมด

5.2.5.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้มีขอบเขตจำกัดในส่วนของคนโทรลอินพุท (Control input) u_1 ไม่ได้เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์อันดับสอง แต่สามารถจัดให้อยู่ในประเภทของปัญหาที่รู้เวลาที่ปลาย โดยที่ไม่ทราบเวลาสุดท้าย t_f ที่แน่นอน

5.2.5.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytic calculation)

$$H = u_1^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1 \quad (5.94)$$

หลังจากแก้สมการของเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) ทั้งหมดแล้วจะได้โคสเทท (Co-states) สเตทวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุท (Control input) ดังนี้

$$\lambda_1^*(t) = c_1 \quad (5.95)$$

$$\lambda_2^*(t) = c_1 t + c_2 \quad (5.96)$$

$$x_1^*(t) = \frac{c_1}{12} t^3 + \frac{c_2}{4} t^2 + c_3 t + c_4 \quad (5.97)$$

$$x_2^*(t) = 3 \frac{c_1}{12} t^2 + \frac{c_2}{2} t + t \quad (5.98)$$

$$u_1^*(t) = (c_1 t + c_2) / 2 \quad (5.99)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สามารถหาค่าคงที่และได้คำตอบของเส้นทางการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมที่สุด (Optimal trajectories) และค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control input) และ t_f ได้ดังนี้

$$x_1(t) = t \quad (5.100)$$

$$x_2(t) = 1 \quad (5.109)$$

$$u_1(t) = 0 \quad (5.110)$$

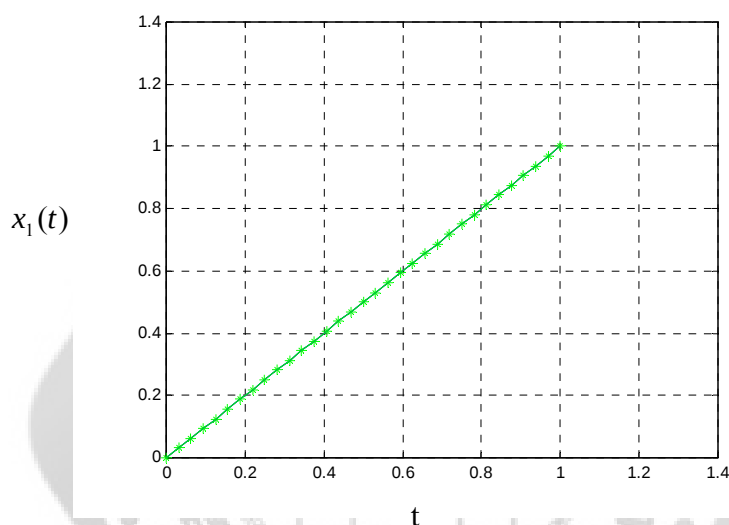
$$t_f = 1 \quad (5.111)$$

5.2.5.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัญหากรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรม เจนเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของ

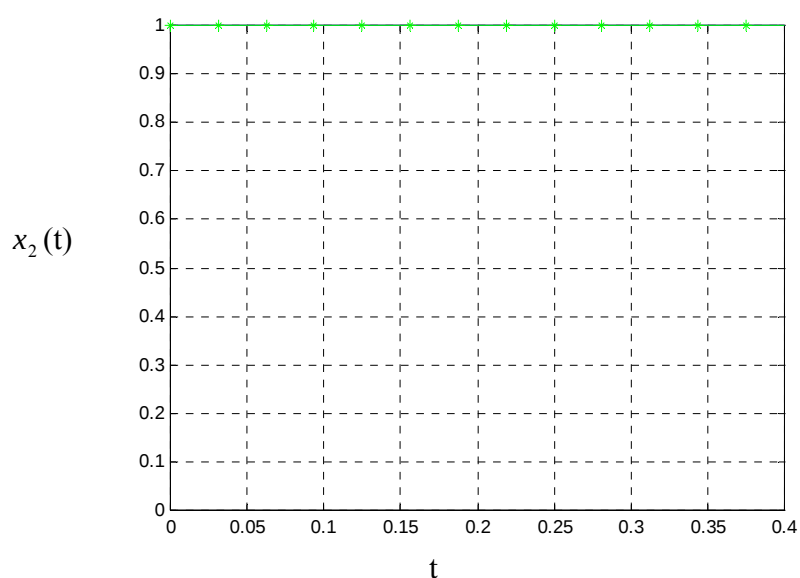
คอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input) จึงเป็น $[-\infty, \infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 5



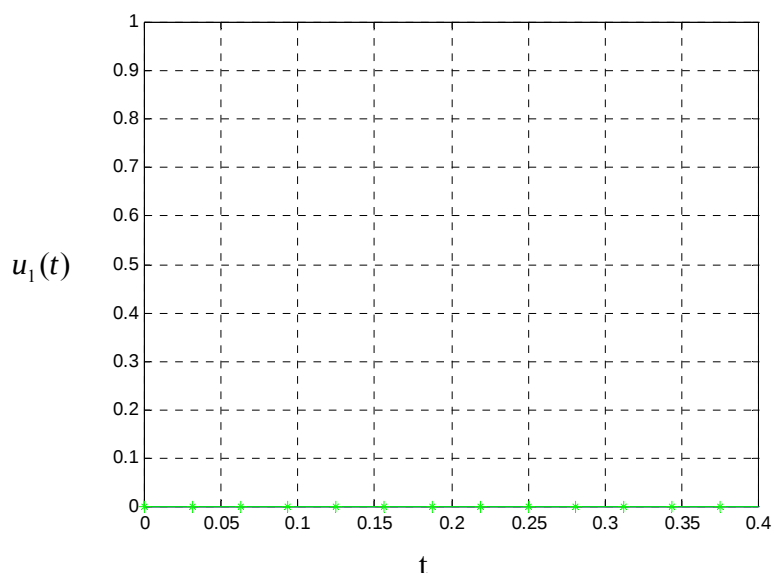
กราฟแสดงสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.1250$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 5



กราฟแสดงสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_2) = 0.001$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์มาก หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกันจนเกือบจะเท่ากันทั้งหมด (คำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 5



กราฟแสดงผล $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical solution) นั้นใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ $\Delta(u_1) = 0.2605$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.6 กรณีที่ 6: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบเขต (Boundary constraints) หรือวางตัวอยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve)

ปัญหาประเภทนี้มีสเตทวารีเอเบิล (State variable) ที่ทราบค่าแน่นอน ณ เวลาสุดท้ายที่ไม่ทราบค่า t_f แต่สเตทวารีเอเบิล (State variable) วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target curve) $g(\underline{x}(t_f), t_f)$ ซึ่งในตัวอย่างนี้สเตทวารีเอเบิล (State variables) ณ เวลาเริ่มต้น t_0 นั้นทราบค่าแน่นอน ในขณะที่สเตทวารีเอเบิล (State variable) ที่ t_f ซึ่งไม่ทราบค่า เป็นฟังก์ชันที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคิร์ฟ (Target surface)

ตัวอย่างที่ 6

ยานเคลื่อนที่ด้วยความเร็วหนึ่งหน่วยในทิศทาง u_1 สัมพัทธ์กับความเร็ว V ในทิศทาง , มีสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\dot{x}_1 = \cos(u_1) - V \quad (5.112)$$

$$\dot{x}_2 = \sin(u_1) \quad (5.113)$$

ยานเคลื่อนที่จากจุดกำเนิด ($x_{01} = 0, x_{02} = 0$) ที่ $t_0 = 0$ ไปยังจุดสุดท้ายที่มีตำแหน่งอยู่บนเส้น $xf_1 + xf_2 = k$ และทำให้ค่าต่อไปนี้มีค่าต่ำที่สุด

$$J = \int_0^{t_f} (1 + \sin(u_1)) dt \quad (5.114)$$

ต้องการหาคำตอบที่เป็นค่าเหมาะสมที่สุดของสเตทวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control input) สำหรับกรณีที่ $V = 1 + \sqrt{3}$, $k = 1$ และมี u_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\sin(u_1) + 1 = (1 + V) \cos(u_1) \quad (5.115)$$

5.2.6.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้ประกอบด้วยสองสเตทวารีเอเบิล (State variables) และหนึ่งคอนโทรลอินพุต (Control input) และมีหนึ่งทาร์เก็ตเคิร์ฟ (Target curve) ที่เวลาสุดท้าย t_f ซึ่งไม่ทราบค่า

5.2.6.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytical calculation)

ปัญหามีเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ดังนี้

$$(i) \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

$$\dot{x}_1 = \cos(u_1) \quad (1 + \sqrt{3}) \quad (5.116)$$

$$\dot{x}_2 = \sin(u_1) \quad (5.117)$$

$$x_1(t_0) = 0 \quad (5.118)$$

$$x_2(t_0) = 0 \quad (5.119)$$

$$g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = x_1(t_f) + x_2(t_f) - 1 = 0 \quad (5.120)$$

$$(ii) \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.121)$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0 \quad (5.122)$$

$$(iii) \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\cos(u_1) + \lambda_1(-\sin(u_1)) + \lambda_2(\cos(u_1)) = 0. \quad (5.123)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $g(x_{f_1}, x_{f_2}, t)$ สามารถหาคำตอบของ
สแตทวาริเอเบิล (State variables) คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) และเวลาที่ปลาย (Final time)
 t_f ได้ดังนี้

$$x_1^*(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) (1 + \sqrt{3})\right)t \quad (5.124)$$

$$x_2^*(t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)t \quad (5.125)$$

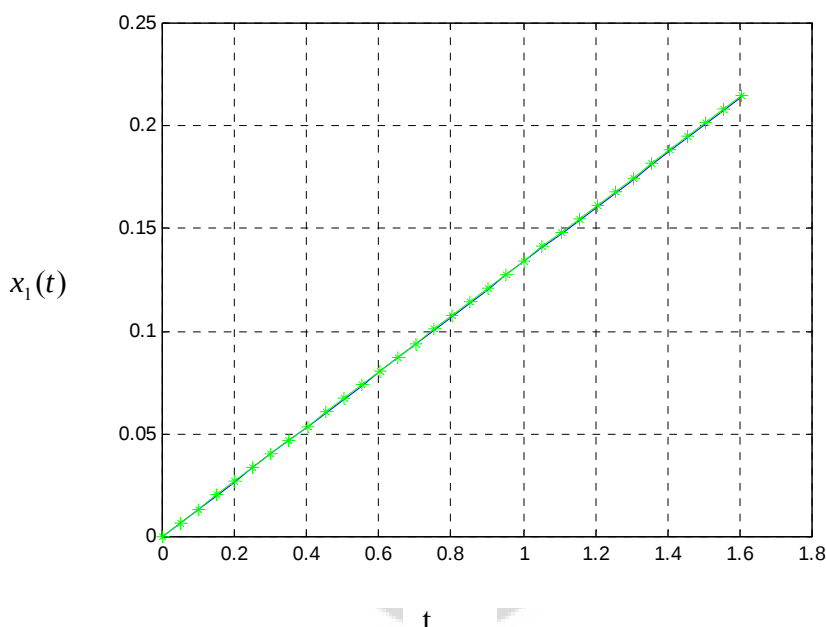
$$u_1^*(t) = \frac{\pi}{6} \quad (5.126)$$

$$t_f = \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (5.127)$$

5.2.6.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

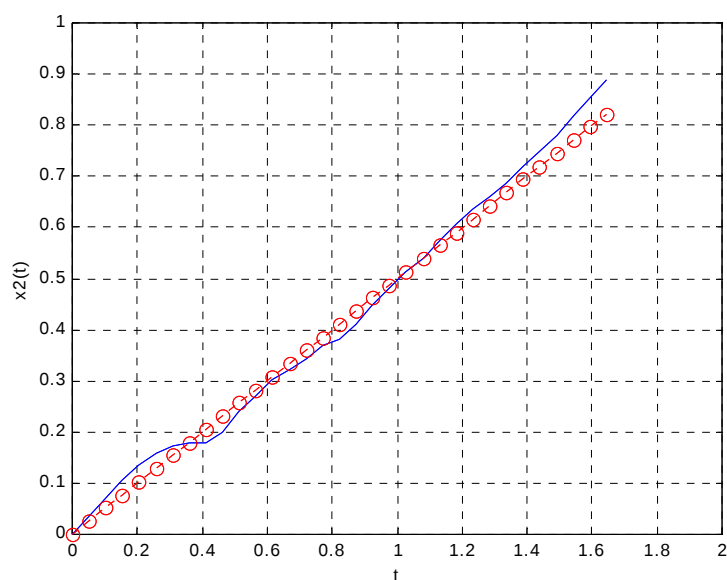
ปัญหาการหาค่าที่ทราบเวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรม เจนเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุต (Control input) จึงเป็น , . ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ 10000, 10000

ภาพประกอบ 5.14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 6



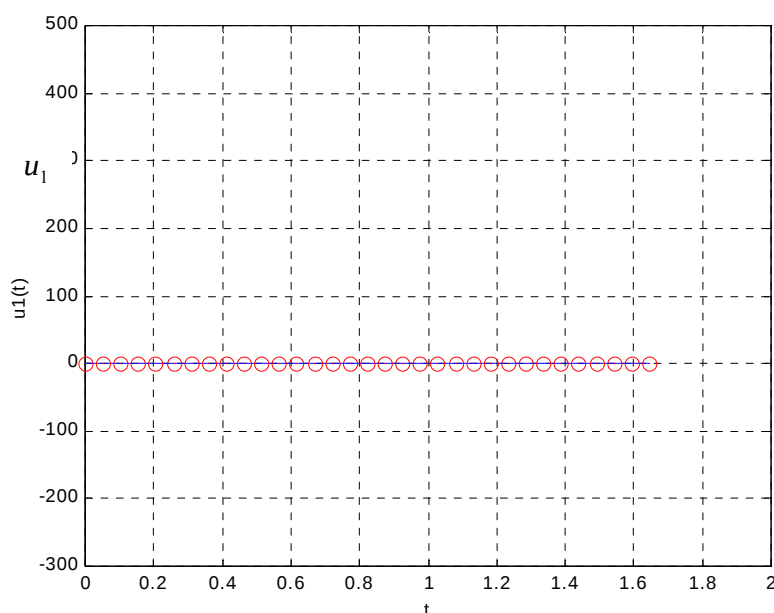
กราฟแสดงสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทาง numerical สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_1) = 0.4216$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟของคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวารีเอเบิล (state variable) $x_2(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ของปัญหา ได้ค่า norm ของ $\Delta(x_2) = 0.4494$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟแสดงผล $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และทางวิเคราะห์ (Analytical solution) นั้นใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นค่าเดียวกัน ได้ค่า norm ของ $\Delta(u_1) = 1.3036$ ซึ่งมีค่าค่อนข้างน้อย หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประสลับกับวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.7 กรณีที่ 7: ปัญหาของเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time)

ปัญหาประเภทนี้จะมีคอสฟังก์ชันนอล (Cost function) $\int_0^{t_f} 1 \, dt = t_f$ และต้องการหาคำตอบที่

ทำให้ค่าดังกล่าวมีค่าน้อยที่สุด

5.2.7.1 การหาเวลาน้อยที่สุดของระบบควบคุมมวลเดียว

ตัวอย่างที่ 7.1

ระบบควบคุมดีกรีสอง

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.128)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 \quad (5.129)$$

คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional)

$$\min J = \int_0^{t_f} (1) dt \quad (5.130)$$

ในปัญหานี้คอนโทรลอินพุต (Control input) u_1 มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) คือ $|u_1| \leq 1$ แต่สเตตวารีเอเบิล (State variables) ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constrained) ต้องการหาคำตอบของคอนโทรลอินพุต (Control input) และ คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) สำหรับกรณี $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$ and $x_1(t_f) = 1$, $x_2(t_f) = 0$.

5.2.7.1.1 ลักษณะของปัญหา

เป็นปัญหาเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 5 แต่มีคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) เป็น

$$\min J = \int_0^{t_f} (1) dt$$

5.2.7.1.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytic calculation)

ค่าที่เหมาะสมที่สุดหาได้จากเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จาก

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1 \quad (5.131)$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition)

$$(i) \underline{\dot{x}} = \underline{f}(x, u)$$

$$x_1 = x_2 \quad (5.132)$$

$$x_2 = u_1 \quad (5.133)$$

$$(ii) \lambda = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (5.134)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \quad (5.135)$$

$$(iii) \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$$

$$\lambda_2 = 0. \quad (5.136)$$

(iv) เนื่องจาก t_f ไม่ทราบค่า เงื่อนไขที่จะต้องเพิ่มเข้ามาคือ

$$H = \text{ค่าคงที่}$$

เมื่อแก้สมการ (i), (ii), (iii), (iv), (v) จะได้คำตอบที่เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดของสแตทวาริเอเบิล (State variables) คอนโทรลวาริเอเบิล (Control input) และเวลาที่ปลาย (Final time)

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq t_s \\ \frac{t^2}{2} + 2t - 1, & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (5.137)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq t_s \\ t + 2, & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (5.138)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_s \\ 0, & t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (5.139)$$

$$t_f = 2 \quad (5.140)$$

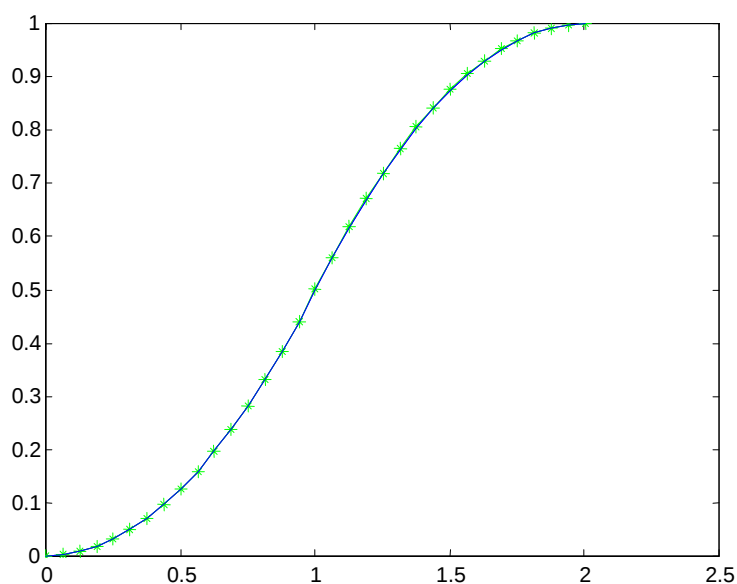
$$t_s = 1 \quad (5.141)$$

โดยที่ t_s = ช่วงเปลี่ยนของเวลา (Switching time)

5.2.7.1.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

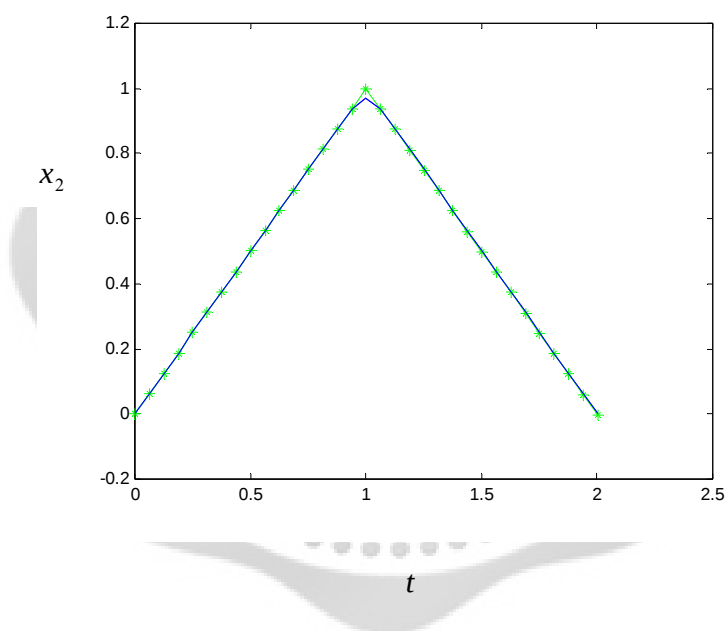
กรณีของการหาเวลาที่น้อยที่สุดนี้ จากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทำให้ค่าของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) u_1 อยู่ในช่วง $[-1, 1]$

ภาพประกอบ 5.17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.1



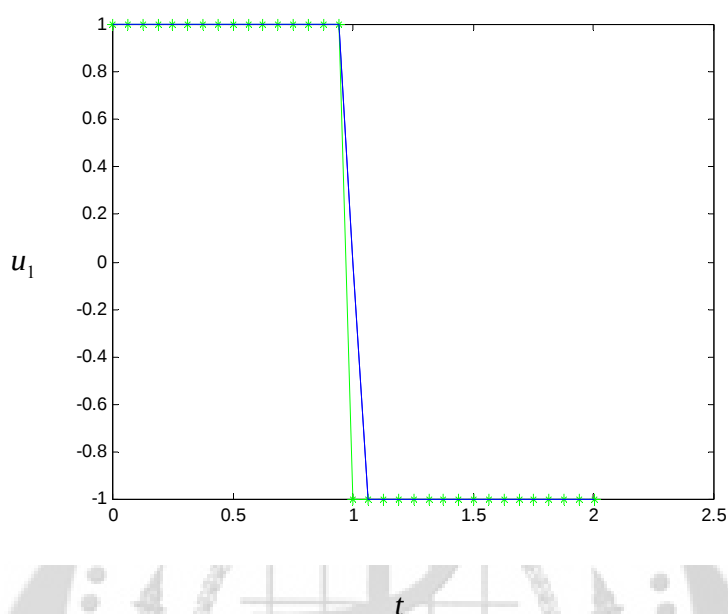
กราฟในภาพประกอบที่ 5.16 แสดงสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7



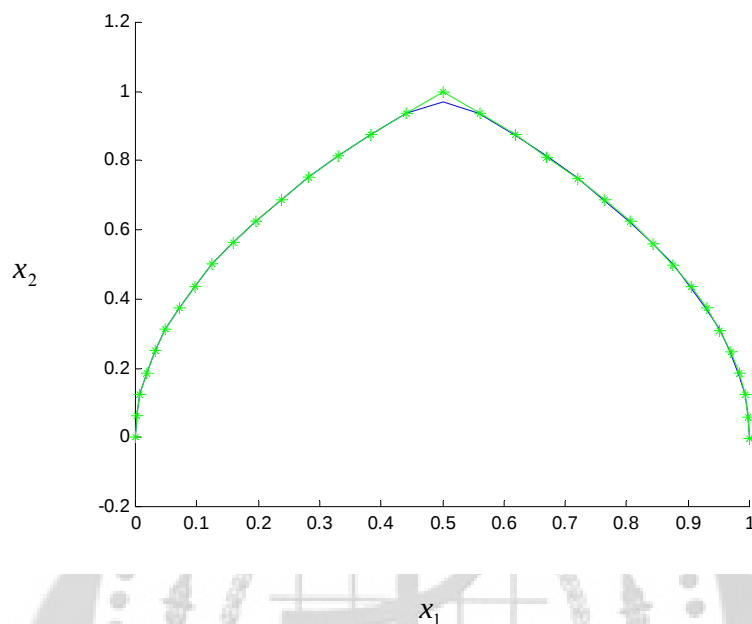
กราฟแสดงสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟแสดงคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) มีแนวโน้มและค่าที่ใกล้เคียงกับ คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) แต่มีความแตกต่างเกิดขึ้นเล็กน้อยบริเวณใกล้ช่วงเปลี่ยนเวลา (Switching time) t_s (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง state variable $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.1



กราฟในภาพประกอบ 5.17 แสดงเฟสเพลน (Phase plane) ของ x_1 และ x_2 แนวโน้มของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ใกล้เคียงกันมาก (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.7.2 ปัญหา Barchistochrone

คำจำกัดความของปัญหา คือ ปัญหานี้เป็นปัญหาประเภทการหาเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time) และมีเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

$$\min J = t_f \quad (5.142)$$

$$\dot{x}_1 = x_3 \cos(u_1) \quad (5.143)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \sin(u_1) \quad (5.144)$$

$$\dot{x}_3 = g \sin(u_1) \quad (5.145)$$

$$x_{02} = 0 \quad (5.146)$$

$$x_{03} = 0 \quad (5.147)$$

$$xf_1 = l \quad (5.148)$$

$$t_0 = 0. \quad (5.149)$$

$$x_1 \tan(\theta) - x_2 + \bar{h} \geq 0$$

และ $x_2(t_f)$ และ $x_3(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

ซึ่งตัวแปรทำสำคัญต่างๆ มีค่าดังนี้: $\tan(\theta) = 0.5$, $l = 10$ และ $g = 32.174$

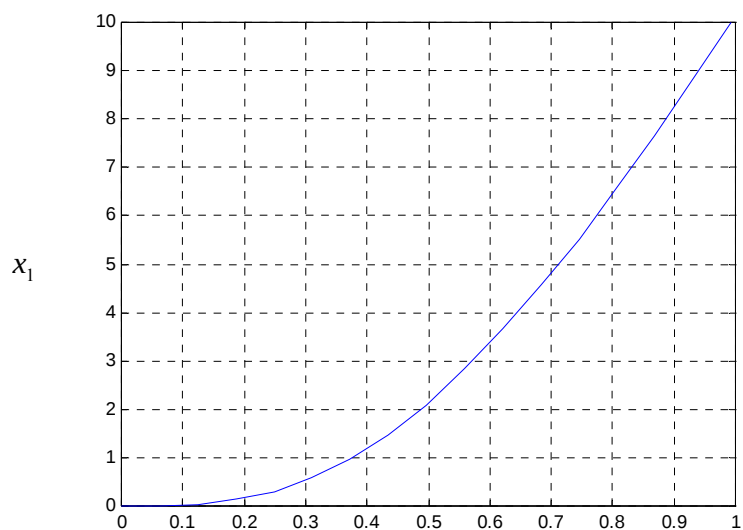
คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ของปัญหาแบบเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) t_f ส่วนใหญ่จะหาจากหลักการของค่ามากที่สุด (Maximum Principle) ใน Bryson and Ho [11] และรายละเอียดของปัญหานี้อยู่ในงานวิจัยของBrenane [9] ได้เวลาน้อยที่สุดคือ

$$t_f = \frac{2}{g} (l + \bar{h} \cot(\theta)) (\theta + \cot(\theta))^{1/2} - \left(\frac{2\bar{h}}{g} \cot(\theta) \left(\theta - \frac{\pi}{2} + \cot(\theta) \right) \right)^{1/2} = 0.993077078. \quad (5.150)$$

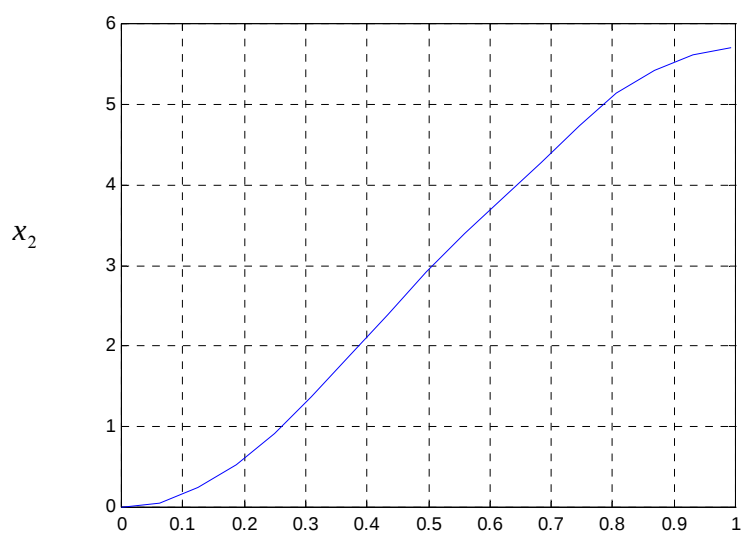
5.2.7.2.1 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

กรณีของการหาเวลาที่น้อยที่สุดนี้ จากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทำให้ค่าของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 อยู่ในช่วง $[-\pi, \pi]$

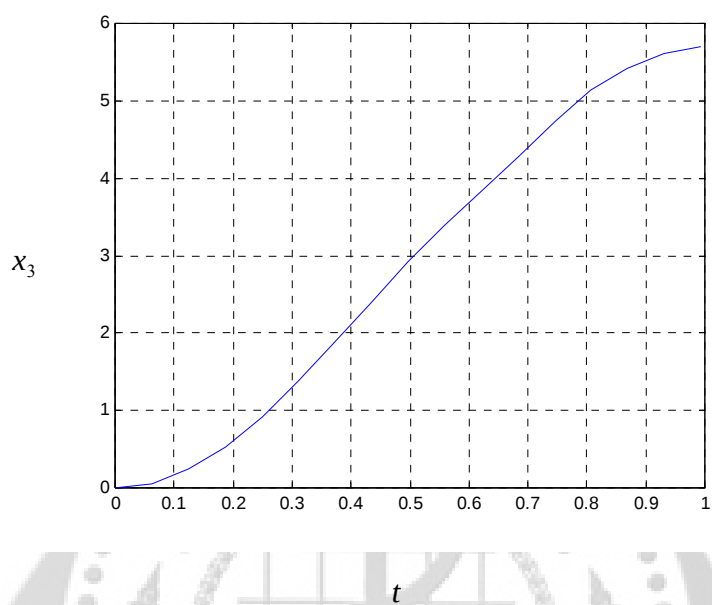
ภาพประกอบ 5.21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



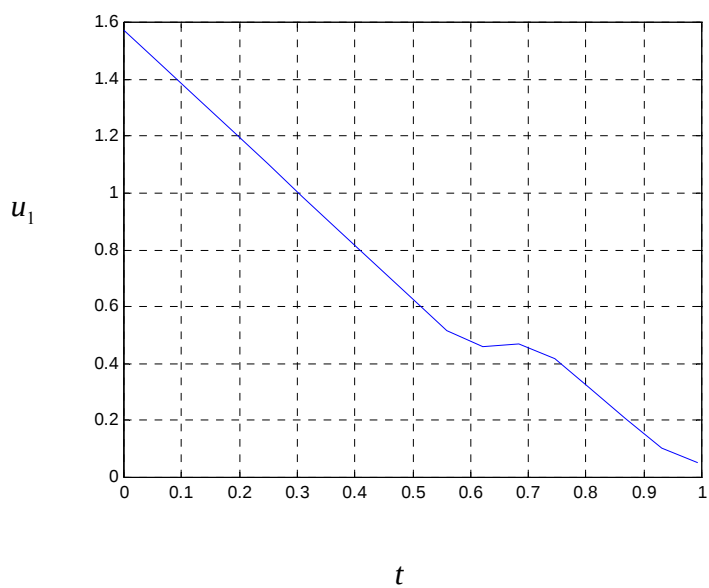
ภาพประกอบ 5.22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



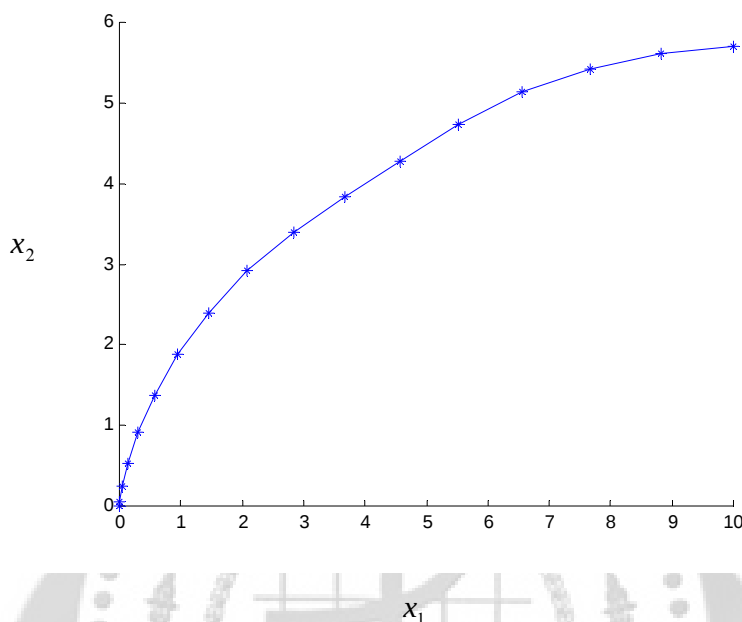
ภาพประกอบ 5.23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_3(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



ภาพประกอบ 5.24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) $u(t)$ เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



ภาพประกอบ 5.25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวารีเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



กราฟในภาพประกอบที่ 5.23 แสดงว่าเฟสเพลน (Phase plane) ของ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากโปรแกรมนี้ มีค่าใกล้เคียงกับเฟสเพลน (Phase plane) ในงานวิจัยของ Brenane[9].

5.3 สรุปผลการทดสอบ

สิ่งที่นำมาพิจารณาเปรียบเทียบประสิทธิภาพ ความสามารถ ของโปรแกรมนี้ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งคำนวณด้วยแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variation) หลักการการเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด (Minimum and maximum principle) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ซึ่งคำนวณด้วยเจเนอรัลโพสโปรแกรม (General-purpose program) ผลที่ได้คือ โดยส่วนใหญ่คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันทั้งแนวโน้มและค่าบริเวณขอบเขตต่างๆ

แต่อย่างไรก็ตาม ยังมีบางส่วนของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ที่แตกต่างจากคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) เนื่องจากกระบวนการของไดเรกทรานสคริปชัน (Direct transcription) ของวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ยังไม่มีการควบคุมคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ที่ดีพอ เมื่อเทียบกับกระบวนการของอินไดเรกทรานสคริปชัน

(Indirect transcription) ที่มีฟังก์ชันต่างๆ เข้ามาช่วย เช่น สมการของลากรางจ์ (Lagrange) ซึ่งความคลาดเคลื่อนนี้จะพบได้บ่อยในปัญหาของเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) และปัญหาที่ไม่ทราบเวลาที่ปลายแน่นอน (Variable endtime) เช่น ในตัวอย่างที่ 7 กรณีของเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) แสดงให้เห็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นบริเวณช่วงเปลี่ยนเวลา (Switching time)

นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบความใกล้เคียงของคำตอบของคอนโทรลอินพุต (Control input) กับคำตอบของสเตทวารีเอเบิล (State variable) จะเห็นว่าคำตอบของคอนโทรลอินพุต (Control input) จะมีส่วนที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ มากกว่า คำตอบของสเตทวารีเอเบิล (State variable) เช่น ในตัวอย่างที่ 1 ซึ่งจะเห็นความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นบริเวณเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0



บทที่ 6

สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

6.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์(Dynamic optimization problem) ด้วยวิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) คือ การแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปที่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ได้ เนื่องจากการหาค่าสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic optimization) มีลักษณะของปัญหาเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous) แต่วิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เป็นการแก้ปัญหาแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) ดังนั้นกระบวนการจึงแบ่งเป็นสองขั้นตอนด้วยกัน คือ ขั้นแรกทำการแปลงปัญหาจากปัญหาที่ขึ้นกับเวลาต่อเนื่อง (Continuous time) เป็นปัญหาที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete) โดยใช้เทคนิคของคอลโลเคชัน (Collocation) ในการหาค่าอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical integration) ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีของ รุงเง – กุตตา(Rung-Kutta) ในการแก้ปัญหา ซึ่งในส่วนนี้ปัญหาก็จะถูกแปลงจากการหาค่าเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Dynamic optimization) ไปเป็นการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบพารามิเตอร์ (Parameter optimization) หรือการหาค่าเหมาะสมที่สุดทางสถิตยศาสตร์ (Static optimization) ขั้นที่สอง นำปัญหาที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาหาคำตอบด้วยวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

ในงานวิจัยนี้สร้างกระบวนการหาคำตอบตามขั้นตอนข้างต้นบนโปรแกรม MATLAB และใช้หน้าต่างรับข้อมูล(Graphic user interface) (GUI) ของ MATLAB สร้างส่วนที่ติดต่อกับผู้ใช้งาน เพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานและเปิดกว้างแก่ผู้ที่เริ่มศึกษาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) กระบวนการคำนวณใช้การคำนวณผ่านซิมโบลิค (Symbolic) ประกอบกับ กล่องเครื่องมือสำหรับหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization toolbox) ในโปรแกรม MATLAB ที่มีอยู่แล้ว คือ ฟังก์ชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งจะหาคำตอบในส่วนของวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ด้วยกระบวนการของซีควเอนเชียลควอดราติกโปรแกรมมิ่ง (Sequential quadratic programming (SQP)) ร่วมกับของควอซี-นิวตัน (Quasi-Newton)

จากผลการทดสอบกับปัญหากลศาสตร์คลาสสิก (Classical problem) ทั้งที่เป็นปัญหาที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นพบว่าเจเนอราลโปรโพสโปรแกรม (General proposes-program) สามารถให้คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวาริเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ที่ค่อนข้างแม่นยำเมื่อเทียบกับคำตอบทาง

การวิเคราะห์ (Analytical solution) ที่ได้จากวิธีของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variation) และหลักการของการเป็นค่าต่ำสุด (Minimum principle) แต่เมื่อพิจารณาในปัญหาบางประเภทจะเห็นว่าคำตอบของคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ที่ได้จากโปรแกรมยังค่อนข้างแตกต่างกับคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) เนื่องจากวิธีการของไดเรกทรานสคริปชัน (Direct transcription) นั้นยังไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เข้ามาช่วยควบคุมคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variable) ในขณะที่วิธีการของอินดิเรกทรานสคริปชัน (Indirect transcription) มีฟังก์ชันต่างๆ เข้ามาช่วยควบคุม เช่น สมการของลากรางจ์ (Lagrange)

การออกแบบโปรแกรมนี้เน้นการแก้ปัญหาของการหาค่าเริ่มต้น (Initial guess) และลดจำนวนของพารามิเตอร์ (Parameter) ที่ใช้ในการหาคำตอบ ด้วยวิธีการหาค่าอินทิเกรตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical integration) ของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ซึ่งทำให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็ว และเป็นประโยชน์ในการนำคำตอบที่ได้นำมาใช้เป็นค่าเริ่มต้น (Initial guess) สำหรับปัญหาที่มีขนาดใหญ่กว่าได้ต่อไป

6.2 ข้อแนะนำสำหรับการวิจัยต่อไป

เนื่องจาก ฟังก์ชันเอฟมินคอน (fmincon) สามารถแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) ได้ดีในกรณีที่ปัญหามีขนาดไม่ใหญ่เกินไป ดังนั้นในการแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่มากๆ ควรมีการเพิ่มเติมทางเลือกวิธีอื่นในการหาคำตอบในส่วนของการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) โดยสามารถนำมาเชื่อมกับส่วนไดนามิคลิงค์ (Dynamic link) ที่มีอยู่ของ MATLAB ได้



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวอัมราพร บุญประทะทอง
วันเดือนปีเกิด	19 มิถุนายน 2520
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	40/93 ซ.โชคชัย4 ถ.ลาดพร้าว ต.ลาดพร้าว อ.ลาดพร้าว จ. กรุงเทพฯ 10230
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2535	มัธยมศึกษาตอนต้น สุรศักดิ์มนตรี
พ.ศ. 2538	มัธยมศึกษาตอนปลาย สันติราษฎร์วิทยาลัย
พ.ศ. 2543	อุดมศึกษา(วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี
พ.ศ. 2547	บัณฑิตศึกษา(วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ