

คุณหม่วิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร
เมื่อสนามแลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ



ปริญญานิพนธ์
ของ
วัชรินทร์ บุญเอียด

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

เมษายน 2557

คุณหม่วิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร
เมื่อสนามแลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

เมษายน 2557

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คุณหม่วิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร
เมื่อสนามแลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

เมษายน 2557

วัชรินทร์ บุญเอียด. (2557). อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อสนาม
แลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ. ปรินซ์นิพนธ์ ประ.ด. (ฟิสิกส์).

กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย,

อาจารย์ ดร. สุพิชญ์ เขมมณี, อาจารย์ ดร. อนุศิษฐ์ ทองนำ.

การวิจัยเรื่องอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อสนาม
แลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ โดยสนามแลกเปลี่ยนหมุนด้วยมุม ϕ คงที่เทียบกับแกน z และมุม θ
โดย $\theta = Qy$ กับระนาบ xy ตามทิศแกน y เมื่อ Q เป็นเวกเตอร์คลื่น ประมาณมุม ϕ มีค่าน้อย ๆ วัด
จากระนาบ xy และจากแกน z ใช้ทฤษฎีของอุสเดลคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของระบบแผ่นประกบคู่
ที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร

ผลการวิจัยแสดงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิวิกฤตสัมพันธ์กับความหนาของแม่เหล็กเฟอร์โร
ขึ้นกับเลขคลื่นไร้หน่วย ($Q\xi_r$) พารามิเตอร์ความโปร่งใส (γ_b) และพารามิเตอร์แสดงความรุนแรงของ
ปรากฏการณ์พร็อกซิมีตี (γ) และในการคำนวณยังพบว่าอุณหภูมิวิกฤตแสดงพฤติกรรมความเป็นเอก
พันธ์ไม่เป็นเอกพันธ์และปรากฏการณ์ re-entrance ขึ้นกับพารามิเตอร์ที่กำหนด โดยความไม่เป็นเอก
พันธ์เกิดขึ้นเมื่อ γ_b หรือ $Q\xi_r$ มีค่าน้อยๆ และปรากฏการณ์ re-entrance ถูกพบเมื่อ γ มีค่ามาก

คำสำคัญ: ตัวนำยวดยิ่ง อุณหภูมิวิกฤต

CRITICAL TEMPERATURE OF SUPERCONDUCTOR / FERROMAGNETIC BILAYERS
WITH AN INHOMOGENEOUS EXCHANGE FIELD



Presented in Partial Fulfillment of Requirements for the
Doctor of Philosophy Degree in Physics
at Srinakharinwirot University
April 2014

Watcharin Boonied. (2014). *Critical Temperature of Superconductor / Ferromagnetic*

Bilayers With an Inhomogeneous Exchange Field. Ph.D. (Physics).

Bangkok : Graduated School, Srinakharinwirot University.

Advisor committee : Assoc. Prof. Dr. Pongkaew Udomsamuthirun, Dr. Supitch

Khemmani, Dr. Anusit Thongnam.

This research is critical temperature of a superconductor / ferromagnetic bilayer with an inhomogeneous exchange field. The exchange field rotates with constant angle ϕ respect to the z- axis and θ , $\theta = Qy$, varies in xy-plane along the y direction that Q is a spiral wave vector. We approximate ϕ in two small angle case measured from the xy-plane and z-axis. We calculate critical temperature within the framework of the Usadel equations analytically. The critical temperature of the system consisting of superconductor/ferromagnetic versus thickness of ferromagnetic layer with varies $Q\xi_s$, the transparency (γ_b) and the proximity effect (γ) are shown. We can find the monotonic and non-monotonic behavior and re-entrance effect in our calculations. The non-monotonic behavior is found with low γ_b and $Q\xi_s$ and the re-entrance effect is found with large γ .

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อสนามแม่เหล็กเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ

ของ

วัชรินทร์ บุญเอียด

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่.....เดือน มีนาคม พ.ศ. 2557

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน

.....ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ)

.....กรรมการ

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ เขมมณี)

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริชัย)

.....กรรมการ

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อนุศิษฐ์ ทองนำ)

(อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ เขมมณี)

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร. อนุศิษฐ์ ทองนำ)

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อารียา เขียวมณี)

ประกาศคุณูปการ

เนื่องด้วยปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยฟิสิกส์ทฤษฎี ซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะและ
ชี้นำการทำงานจาก รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริบุญ จนทำให้งานลุล่วงได้ด้วยดี และ
รวม ทั้งความเมตตาและน้ำใจอันประเสริฐของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของการทำวิจัยที่ผ่าน
มา ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เชิดศักดิ์ คุณสมบัติ อาจารย์ ดร. สุพิชญ์
แซมณี อาจารย์ ดร. อนุศิษฐ์ ทองนำ และอาจารย์ ดร. อาริยา เอี่ยมมณี ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็น
คณะกรรมการในการสอบปากเปล่า รวมทั้งคำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพิ่มเติมเกี่ยวกับ
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้และ
ให้คำปรึกษาแก่ผู้วิจัยตลอดการศึกษาที่ผ่านมา

ขอบคุณนิสิตปริญญาโท ปริญญาเอก วิชาเอกฟิสิกส์ทุกท่าน รวมทั้งพนักงานในภาควิชา
ฟิสิกส์ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในหลาย ๆ เรื่อง แก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ผ่านมา

วัชรินทร์ บุญเอียด

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	33
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	33
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	40
3 วิธีคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต.....	61
4 ผลการวิจัย.....	83
5 สรุป อภิปรายผลการวิจัย	96
สรุปผลการวิจัย.....	96
อภิปรายผลการวิจัย.....	98
บรรณานุกรม.....	99
ภาคผนวก.....	104
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	141

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงอุณหภูมิวิกฤตในตารางธาตุที่เป็นตัวนำยวดยิ่ง.....	3
2 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปในสารตัวนำยวดยิ่ง.....	9
3 แสดงความยาวอาพันธ์ และระยะทะลวงลึกที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์.....	15



บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทาน (p) กับอุณหภูมิ (T) ของโลหะปกติกับโลหะ สมบูรณ์.....	1
2 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทานกับอุณหภูมิสมบูรณ์ของปรอท.....	2
3 อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งของธาตุต่าง ๆ.....	4
4 ผลของการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กต่อตัวนำยวดยิ่งรูปวงแหวน.....	5
5 (a) ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤติกับอุณหภูมิ (b) กราฟแสดงค่า สนามแม่เหล็กวิกฤติของตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งได้แก่ตะกั่ว ดีบุก และอลูมิเนียม กับอุณหภูมิ.....	6
6 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤติกับส่วนกลับของรากที่สองของมวลอะตอม ของ Hg.....	7
7 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์.....	9
8 ผลการทดลองของดีเวอร์และแฟร์แบงส์ แสดงฟลักซ์แม่เหล็กในดีบุกรูปทรง กระบอก.....	11
9 ความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่ง (C_s) และโลหะปกติ (C_N) เป็นฟังก์ชันของ อุณหภูมิ.....	12
10 ระบบรอยต่อของโจเซฟสันที่เกิดจากการนำตัวนำยวดยิ่งสองตัวประกบกันโดยมี ฉนวนบาง ๆ คั่น.....	13
11 การเจาะทะลุของสนามแม่เหล็กสู่ชั้นตัวนำยวดยิ่ง.....	15
12 ค่าสนามแม่เหล็กภายใน (B) และสนามแม่เหล็กภายนอก (H) วิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง ชนิดที่ 1.....	16
13 สนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1.....	17
14 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ของสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1.....	17
15 สนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2	18
16 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ของสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2.....	18
17 คู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่ง (S).....	21
18 พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Ψ) ในตัวนำยวดยิ่ง (S) และโลหะปกติ (N).....	22

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
19 คู่คูเปอร์จากตัวนำยวดยิ่ง (S) และอิเล็กตรอนจากโลหะปกติ (N) ที่ทะลุ ข้ามรอยต่อของระบบแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่ง/โลหะปกติ (S/N).....	22
20 พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่งบริเวณใกล้รอยต่อ ระหว่างตัวนำยวดยิ่ง (S) กับโลหะปกติ (N).....	22
21 การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตลดทอนกับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Pb (d_S) และความหนาของแผ่นโลหะปกติ Cu (d_N) ของระบบแผ่นประกบ S/N.....	23
22 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตลดทอนกับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Pb เมื่อแผ่นโลหะปกติ Cu มีความหนาคงที่ ของระบบแผ่นประกบ S/N.....	24
23 คู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งที่มีสปินของอิเล็กตรอนสวนทิศกันกับโมเมนต์แม่เหล็กที่ชี้ใน ทิศทางเดียวกันในแม่เหล็กเฟอร์โร.....	25
24 คู่คูเปอร์ที่ทะลุทะลวงลงสู่แม่เหล็กเฟอร์โรถูกโน้มน้าวให้มีสปินในทิศเดียวกับทิศ โมเมนต์แม่เหล็กในแม่เหล็กเฟอร์โร.....	25
25 การทะลุทะลวงของคู่คูเปอร์และการแพร่ซึมของอนุภาคควาซิอนุภาคมารวมตัวของ แผ่นประกบ S/F	26
26 พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ลดลงแบบไม่สม่ำเสมอในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรของ แผ่นประกบ S/F.....	26
27 การลดลงแบบไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับความหนาของแผ่น แม่เหล็กเฟอร์โร (d_F) ในระบบแผ่นประกบ S/F.....	27
28 การเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Nb (d_{Nb}) ของระบบแผ่นประกบ S/F.....	27
29 ระยะทะลวงลึกของตัวนำยวดยิ่งจับคู่แบบเดี่ยวและจับคู่แบบสามเมื่อแม่เหล็กเฟอร์โร มีแกนนี้ไตเซชันไม่สม่ำเสมอ.....	28
30 ระยะทะลวงลึกของตัวนำยวดยิ่งจับคู่แบบเดี่ยวและจับคู่แบบสามเมื่อแม่เหล็กเฟอร์โร มีแกนนี้ไตเซชันไม่สม่ำเสมอ.....	29
31 รูปแบบของระบบแผ่นประกบต่าง ๆ ที่ใช้ศึกษาปรากฏการณ์พรีอักษิมิตี.....	29
32 แผ่นประกบสอง F/S มีแกนนี้ไตเซชันของแผ่น F หมุนวนในระนาบ (y, z) โดยทำมุม กับแกน x คงตัว	30

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
33 แผ่นประกบสอง F/S มีโมเมนต์แม่เหล็กหมุนวนในแผ่น F.....	30
34 แผ่นประกบสาม FSF มีแกนไวด์เซชันวางตัวในระนาบ y-z มีมุมระหว่างระนาบ ในแผ่น F ทั้งสองเท่ากับ 2α	30
35 แผ่นประกบสอง F/S มีแกนไวด์เซชันของแผ่น F หมุนวนในระนาบ (y, z).....	31
36 แผ่นประกบสาม S/F ₁ /F ₂ มีสนามแลกเปลี่ยนวางตัวในระนาบ (y, z).....	31
37 ฟังก์ชันของกรีนเกลดิช $\tilde{G} = G_{\alpha\beta}$ นิยามบนเส้นเวลาของเกลดิช.....	37
38 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c / T_{cs} เป็นฟังก์ชันของ (a) ความหนาลดทอน (d_s / ξ_s) ของแผ่น S และ (b) ความหนาลดทอน (d_m / ξ_m) ของแผ่น F	42
39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t = T_c / T_{cs}$ กับความหนา ลดทอน d_F / a_F ของแผ่น F ในระบบประกบ 2 ชั้น S/F	44
40 แผ่นประกบ S/F โดย และ $0 < x < d_s$	45
41 เปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของอุซาเดลกับผลการทดลองของ Ryazanov, et al.	47
42 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน (T_c / T_{cs}) กับความหนาลดทอนของแผ่น F	47
43 แผ่นประกบสาม FSF ศูนย์กลางของแผ่น S อยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$ สนามแลกเปลี่ยน $\tilde{h}$ วางตัวในระนาบ y-z มีมุมระหว่างระนาบในแผ่น F ทั้งสองเท่ากับ 2α	48
44 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับความหนาของแผ่น F เมื่อถูกทำให้เป็นปกติกับความยาว คลื่นขององค์ประกอบซิงเกต $\lambda_h = 2\pi / k_h$	49
45 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับมุมในระนาบ 2α	49
46 แผ่นประกบ S/F มีแกนไวด์เซชันในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรหมุนวนเป็นรูปกรวยใน ระนาบ (y,z)	50
47 (a) คำนวณจากส่วนจริงขององค์ประกอบแบบคู่สาม และ (b) องค์ประกอบ แบบคู่เดี่ยว โดยมีมุม $S = \sin \theta$ องค์ประกอบแบบคู่สามไม่ขึ้นกับมุม θ	51
48 แสดงการหมุนของโมเมนต์แม่เหล็กในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร.....	52
49 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับความหนาแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f โดยกำหนดให้ $d_s = 7$ nm และ $d_f \approx 5$ nm.....	53

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
50 คุณหมุมิวิกฤต T_c กับ $Q\xi_s$ เมื่อความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์.....	53
51 ระบบประกบสามชั้น $S/F_1/F_2$ ที่รอยต่อระหว่าง S/F_1 มีพิกัดเป็น $x = 0$ สนาม แลกเปลี่ยน h วางตัวในระนาบ (y, z)	54
52 คุณหมุมิวิกฤตลดทอนกับมุม α แปรผันตามความหนาของแผ่น F_1 ลดทอน.....	55
53 คุณหมุมิวิกฤตลดทอนกับมุม α แปรผันตามความหนาของแผ่น F_1 และแผ่น S ลดทอน.....	56
54 คุณหมุมิวิกฤตลดทอน $t_c = \frac{T_c}{T_{c0}}$ เป็นฟังก์ชันของเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$	58
55 คุณหมุมิวิกฤตลดทอน $t_c = \frac{T_c}{T_{c0}}$ เป็นฟังก์ชันของความหนาของแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ d_f / ξ_f	59
56 กราฟของเส้นโค้ง $t_c(d_f / \xi_f)$ โดยแปรผัน γ_b	60
57 รูปแบบของแผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง (S) กับแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (F).....	61
58 แผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง (S) กับแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (F) เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$	79
59 แผ่นประกบคู่ตัวนำยวดยิ่ง (S) กับแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (F) เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์....	81
60 คุณหมุมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วยมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$	90
61 คุณหมุมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ เมื่อความโปร่งใสที่รอยต่อ γ_b มีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$	91
62 คุณหมุมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ เมื่อความรุนแรงของ ปรากฏการณ์พรีออกซิมีตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$	92
63 คุณหมุมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วยมีค่า ต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$	93

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

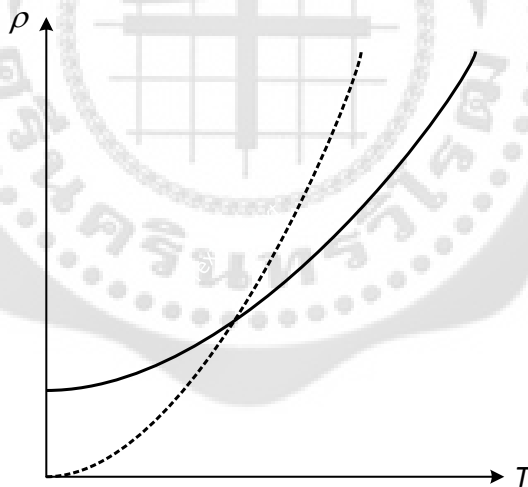
ภาพประกอบ	หน้า
64 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อความโปร่งใสที่รอยต่อ γ_b มีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$	94
65 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$	95
66 $\alpha_+(\eta, \delta = 0)$ กับ η	118
67 $\alpha_+(\eta, \delta = 0)$ กับ η	119
68 $\alpha_-(\eta, \delta = 0)$ กับ η	120
69 $\alpha_-(\eta, \delta = 0)$ กับ η	120
70 $\alpha_+(\eta, \phi = 0)$ กับ η	127
71 $\alpha_+(\eta, \phi = 0)$ กับ η	127
72 $\alpha_-(\eta, \phi = 0)$ กับ η	128
73 $\alpha_-(\eta, \phi = 0)$ กับ η	129

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

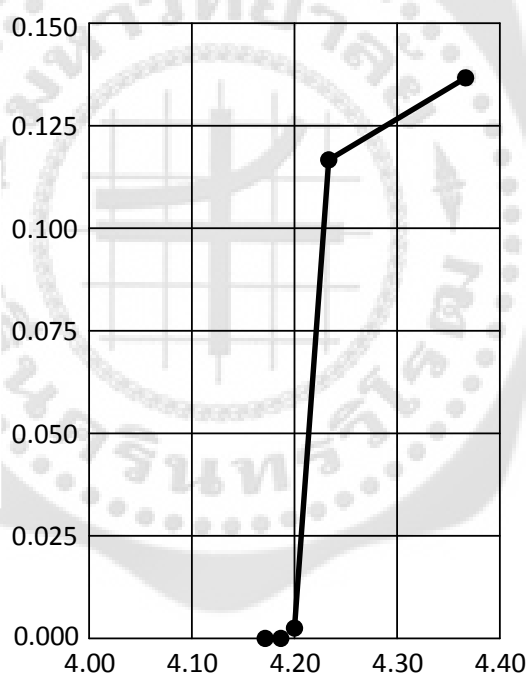
ตามปกติ เมื่ออุณหภูมิของโลหะลดจนถึงอุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์ มันจะคงสภาพต้านทานไฟฟ้าต่ำที่สุดค่าหนึ่ง (ρ_0) ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ เราเรียกสภาพต้านทานค่านี้ว่าสภาพต้านทานตกค้าง (residual resistivity) แสดงดังภาพประกอบ 1 ซึ่งค่านี้ขึ้นกับสภาพสมบูรณ์ของโครงสร้างโลหะนั้น สำหรับตัวนำที่สมบูรณ์แบบ (perfect conductor) สภาพต้านทานตกค้างที่อุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์เท่ากับศูนย์ แต่สำหรับตัวนำยวดยิ่ง (superconductor) เมื่ออุณหภูมิลดจนถึงอุณหภูมิหนึ่งที่ยังไม่ถึงศูนย์สัมบูรณ์ ซึ่งเรียกว่าอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature) สภาพต้านทานไฟฟ้าจะมีค่าเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด แสดงดังภาพประกอบ 2 ปรากฏการณ์นี้ถูกพบเป็นครั้งแรกโดยนักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์ ชื่อ ไฮค์ คาเมอริงห์ ออนเนส (Heike Kamerlingh Onnes) แห่งมหาวิทยาลัยไลเดน (Leiden University)



ภาพประกอบ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทาน (ρ) กับอุณหภูมิ (T) ของโลหะปกติกับโลหะสมบูรณ์แบบ

ที่มา : Bennesman; & Ketterson. (2003). *The Physics of Superconductor*. p. 385.

ฮอนเนสได้พบสภาวะการนำไฟฟ้ายวดยิ่งในปี ค.ศ.1911 โดยใช้โลหะปรอทบริสุทธิ์เป็นตัวทดลองในภาชนะที่หล่อเลี้ยงด้วยฮีเลียมเหลวที่อุณหภูมิ 4.2 K เขาได้พบว่าปรอทที่อยู่ในสภาพเย็นจัดนี้ทำหน้าที่เป็นตัวนำยวดยิ่งได้ หลังจากนั้นฮอนเนสได้ทดลองใช้ตะกั่วและดีบุกบริสุทธิ์บ้าง ปรากฏว่าได้ผลในทำนองเดียวกัน จากนั้นฮอนเนสได้ทดลองต่อโดยนำโลหะตัวนำเหล่านี้มาทำเป็นวงแหวน แล้วนำไปไว้ในภาชนะที่หล่อเลี้ยงด้วยฮีเลียมเหลว เขาพบว่าหลังจากปล่อยกระแสไฟฟ้าให้ไหลในวงแหวนแล้วแยกมันออกจากแหล่งกำเนิดไฟฟ้า ในอีกหนึ่งปีต่อมากระแสไฟฟ้าที่ไหลอยู่ในตัวนำยวดยิ่งรูปวงแหวนนี้ก็ยังมีค่าเหมือนเดิม เพราะความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไม่เปลี่ยนแปลงเลย นี่จึงเป็นการทดลองที่ยืนยันได้ว่าตัวนำยวดยิ่งสามารถนำกระแสไฟฟ้าได้โดยไม่มีการสูญเสียพลังงานใด ๆ การค้นพบปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งนี้ทำให้ฮอนเนสได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ในปี ค.ศ. 1913



ภาพประกอบ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทาน (Ωm) กับอุณหภูมิสัมบูรณ์ (K) ของปรอท

ที่มา : Charles Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 334.

ในการทดลองครั้งนั้น นอกจากฮอนเนสจะพบปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งแล้ว เขายังพบว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในตัวนำไฟฟ้ายวดยิ่งสามารถทำให้เกิดสนามแม่เหล็กหรือสร้างสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงได้ด้วยโดยไม่ต้องใช้แม่เหล็กขนาดใหญ่แต่อย่างใด ในทางทฤษฎีเขาจึงเชื่อว่า

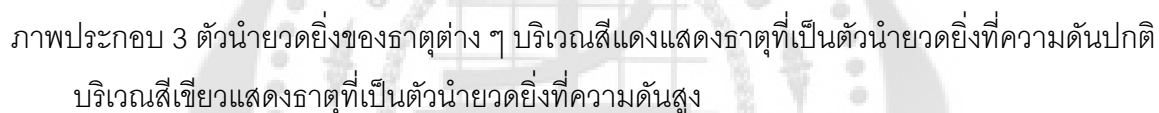
ขดลวดที่ทำด้วยตัวนำยวดยิ่งสามารถสร้างสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มปานกลางได้ หลังจากการค้นพบของฮอนเนสแล้ว ก็ได้มีการค้นพบสารที่เป็นตัวนำไฟฟ้ายวดยิ่งชนิดต่าง ๆ เพิ่มขึ้นมาก ปัจจุบันนักวิทยาศาสตร์พบว่าตัวนำไฟฟ้ายวดยิ่งที่เป็นธาตุบริสุทธิ์ มี 24 ธาตุ แสดงดังตาราง 1 และภาพประกอบ 3 นอกนั้นเป็นสารประกอบ (compound) และสารผสม (alloy) และสารตัวนำไฟฟ้ายวดยิ่งต่างชนิดกันจะมีอุณหภูมิวิกฤตแตกต่างกัน

ตาราง 1 อุณหภูมิวิกฤตในตารางธาตุที่เป็นตัวนำยวดยิ่ง

ธาตุ (element) กับอุณหภูมิวิกฤต T_c (องศาสัมบูรณ์)							
ชื่อ	T_c	ชื่อ	T_c	ชื่อ	T_c	ชื่อ	T_c
Aluminium	1.19	Cadmium	0.56	Gallium-alpha	1.09	Gallium-Beta	6.20
Gallium-gamma	7.62	Indium	3.40	Iridium	0.14	Lanthanum-alpha	4.90
Lanthanum-beta	6.06	Lead	7.19	Mercury-alpha	4.15	Mercury-beta	3.94
Molybdenum	0.92	Niobium	0.65	Osmium	9.26	Protactinium	1.40
Rhenium	1.69	Ruthenium	0.49	Tantalum	4.48	Tachnetium	8.22
Thallium	2.39	Thorium	1.36	Tin	3.72	Titanium	0.39
Tungsten	0.01	Vanadium	5.30	Uranium-beta	1.80	Uranium-alpha	0.68
Zinc	0.87	Zirconium	0.54				

ที่มา: Michigan State University. (1999). *Type 1 Superconductors And a Periodic Chart Comparison* : Online.

หลังการค้นพบของฮอนเนสแล้วได้มีนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมากที่หันมาสนใจวิจัยเรื่องนี้อย่างกว้างขวาง ทั้งทางทฤษฎีและการทดลอง เมื่อเวลาผ่านไปเขาก็ยังพบคุณสมบัติพิเศษต่าง ๆ ของตัวนำยวดยิ่งมากขึ้น รวมทั้งพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางประเภทซึ่งยังเป็นข้อที่ถกเถียงมากจนหาข้อสรุปยังไม่ได้ว่าอะไรคือสาเหตุที่ทำให้สารนั้นเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงได้



1. สมบัติของสภาพนำยวดยิ่ง

1.1 สภาพนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (perfect conductivity)

เมื่อลดอุณหภูมิของตัวนำวยดยิ่งจนถึงอุณหภูมิวิกฤต T_c สารจะเปลี่ยนจากสถานะปกติไปเป็นสถานะนำวยดยิ่ง ซึ่งค่าสภาพต้านทานจะเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด ดังแสดงในภาพประกอบ 2 และเมื่ออุณหภูมิต่ำกว่า T_c สภาพต้านทานไฟฟ้าก็ยังคงเป็นศูนย์ ดังนั้นปรอทบริสุทธิ์จึงมี T_c เท่ากับ 4.2 K เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า "สภาวะการนำไฟฟ้าวยดยิ่ง" และเรียกสารที่มีสมบัติดังกล่าวว่า "ตัวนำไฟฟ้าวยดยิ่ง"

พิจารณาโลหะรูปวงแหวนที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็ก ซึ่งการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก ($\vec{B}$) ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้า (I) ไหลวนในวงแหวนตามกฎของเลนซ์ (Lenz's law) คือ

$$-A \frac{d\vec{B}}{dt} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (1.1)$$

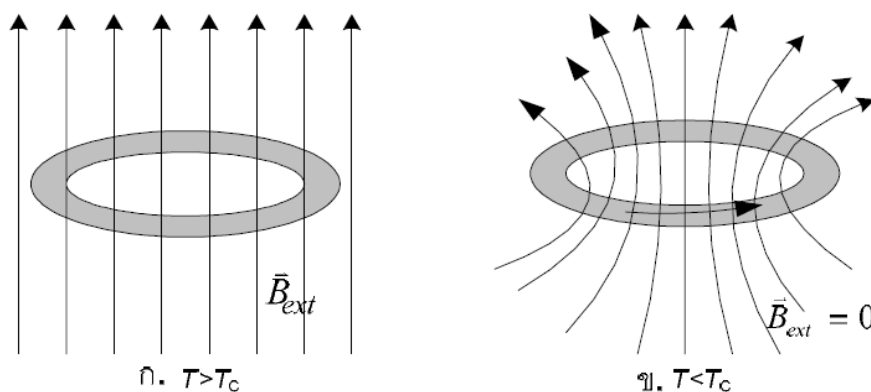
เมื่อ R คือความต้านทานของวงแหวน

L คือความเหนี่ยวนำ (inductance) ของวงแหวน

A คือพื้นที่หน้าตัดของวงแหวน และ t คือเวลา

จากนั้นลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตแล้วเอาสนามแม่เหล็กออก สมการ (1.1) ก็ยังใช้ได้ ดังนั้นเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก สมการที่ใช้ คือ

$$0 = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (1.2)$$



ภาพประกอบ 4 ผลของการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กต่อตัวนำยวดยิ่งรูปวงแหวน

ที่มา: Charles Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 358.

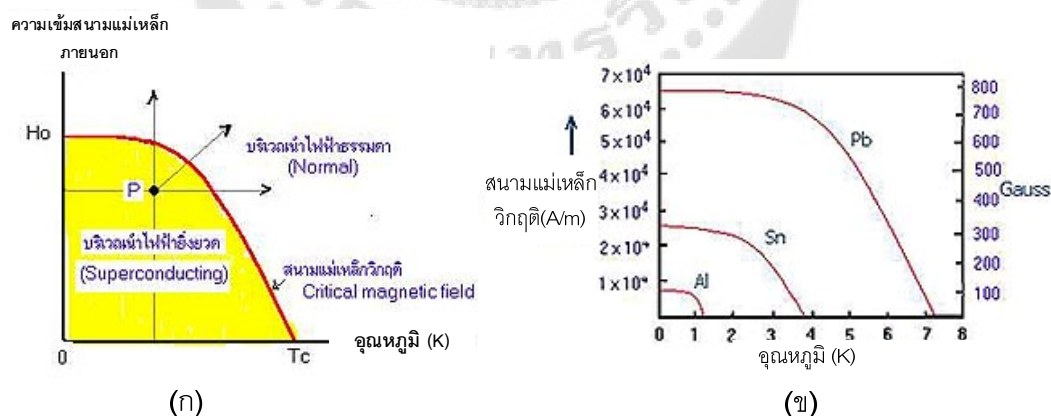
คำตอบสมการ (1.2) จะเป็น $I = I_0 e^{-Rt/L}$ เมื่อ I_0 เป็นกระแสไฟฟ้าเริ่มต้น จากคำตอบจะเห็นว่าถ้าวงจรมีความต้านทานไฟฟ้า กระแสที่ไหลวนในวงแหวนจะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลเมื่อเวลาผ่านไป แต่เนื่องจากวงแหวนอยู่ในสภาพการนำยวดยิ่งซึ่งค่าความต้านทาน R เป็นศูนย์ คำตอบจึงเป็น $I = I_0$ ดังนั้นคำตอบนี้จึงแสดงว่ากระแสที่ไหลวนในวงแหวนจะคงตัวตลอดเวลาเรียกกระแสดังนี้ว่า กระแสไฟฟ้ายืนยง (persistent current)

ในการทดลองผ่านสนามแม่เหล็กไปรอบตัวนำไฟฟ้าวยดยิ่ง ออนเนสได้พบว่าสนามแม่เหล็กดังกล่าวสามารถทำลายสภาพนำไฟฟ้าวยดยิ่งให้กลายเป็นสภาพปกติได้ เขาจึงเรียกสนามแม่เหล็กความเข้มข้นที่สุดที่สามารถทำลายสภาพการนำไฟฟ้าวยดยิ่งได้ว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต (critical magnetic field : H_c) ตามปกติความเข้มข้นสนามแม่เหล็กวิกฤตขึ้นกับอุณหภูมิ คือที่อุณหภูมิวิกฤตค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตจะเป็นศูนย์และที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิจะมีความสัมพันธ์เป็นดังสมการ

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.3)$$

กฎนี้เรียกว่ากฎของไทน์ (Tyne's law) ในที่นี้ $H_c(T)$ และ $H_c(0)$ คือความเข้มข้นสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตและที่อุณหภูมิ 0 K ตามลำดับ T และ T_c แทนอุณหภูมิและอุณหภูมิวิกฤตตามลำดับ ด้วยเหตุนี้สนามแม่เหล็กวิกฤตจึงมักถูกใช้เป็นตัวจำกัดกระแสไฟฟ้าที่จะให้ไหลผ่านตัวนำวยดยิ่ง นั่นคือกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวนำวยดยิ่งที่อุณหภูมิต่ำ จะต้องไม่ค่าไม่สูงกว่ากระแส ไฟฟ้าวิกฤตที่อุณหภูมินั้น

ภาพประกอบ 5 (ก) แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตและอุณหภูมิของโลหะ เช่นที่ตำแหน่ง P โลหะจะยังคงสภาพเป็นตัวนำวยดยิ่ง แต่ถ้าต้องการให้เป็นโลหะปกติ ก็สามารถทำได้โดยการเพิ่มสนามแม่เหล็กหรือเพิ่มอุณหภูมิหรืออาจเพิ่มทั้งสองอย่างพร้อมกัน ภาพประกอบ 5 (ข) แสดงค่าของสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิของตะกั่ว ดีบุกและอะลูมิเนียม ตามลำดับ



ภาพประกอบ 5 (ก) ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ (ข) กราฟแสดงค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำวยดยิ่ง ซึ่งได้แก่ตะกั่ว ดีบุก และอะลูมิเนียมกับอุณหภูมิ

ที่มา: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล. (2556). ตัวนำวยดยิ่ง โฮมเพจ:

คุณสมบัติของสาร: ออนไลน์.

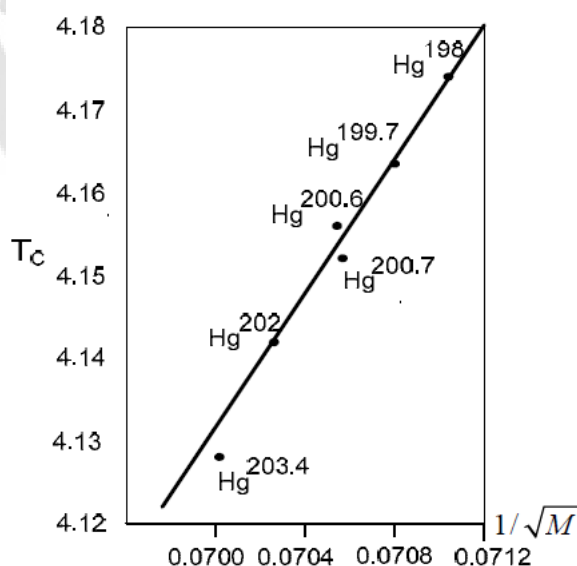
1.2 ปฏิกิริยาไอโซโทป (Isotope Effect)

ในปี ค.ศ. 1950 แมกซ์เวลล์ (Maxwell) และ เรย์โนลด์ (Reynolds) (Maxwell. 1950: 477), (Reynolds; et al. 1950: 487) ได้ทดลองวัดมวลไอโซโทปของปรอท (Hg) และอุณหภูมิวิกฤต พบว่าปริมาณทั้งสองมีความสัมพันธ์กันดังแสดงในภาพประกอบ 6 ซึ่งเห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตของธาตุขึ้นกับมวลไอโซโทปของธาตุนั้นปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปฏิกิริยาไอโซโทป เช่นในกรณีของปรอท อุณหภูมิวิกฤตมีการเปลี่ยนจาก 4.185 K ไปเป็น 4.146 เมื่อมวลอะตอม (M) ของปรอทเปลี่ยนจาก 199.5 u เป็น 203.4 u ข้อมูลนี้ได้จากการทดลองใช้ธาตุแต่ละอนุกรมของไอโซโทป โดยได้ความสัมพันธ์ดังสมการ (Erkki Thuneberg. 2005: 2)

$$T_C \propto M^{-\alpha} \quad \text{เมื่อ } \alpha \text{ เป็นตัวเลข}$$

หรือ $M^\alpha T_C = C \quad \text{เมื่อ } C \text{ เป็นค่าคงตัว}$

โดย M คือมวลของไอโซโทปสำหรับธาตุชนิดเดียวกันและ
 α คือสัมประสิทธิ์ไอโซโทป
 C คือค่าคงตัว



ภาพประกอบ 6 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับส่วนกลับรากที่สองของมวลอะตอมของ Hg

ที่มา: Maxwell. (1950). *Phys. Rev.* 78. p. 477.

เมื่อจัดรูปสมการแบบลอการิทึมและอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ T_c

$$\alpha \ln M + \ln T_c = \ln C$$

$$\frac{\alpha}{M} \frac{dM}{dT_c} + \frac{1}{T_c} = 0$$

$$\frac{dM}{dT_c} = -\frac{M}{\alpha T_c}$$

หรือ
$$\alpha = -\frac{M}{T_c} \frac{dT_c}{dM} = -\frac{d(\ln T_c)}{d(\ln M)} \quad (1.4)$$

ในตัวอย่าง $\Delta T_c = 4.146 - 4.185 = -0.039$ และ $\Delta M = 203.4 - 199.5 = 3.9$ เรานำ
ส่วนนี้ไปคำนวณในสมการที่ (1.4) ซึ่งได้ $\alpha = \frac{-199.5 \times (-0.039)}{4.185 \times 3.9} \approx 0.5$

การค้นพบปรากฏการณ์นี้ทำให้ทราบว่าอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับการสั่นของแลตทิซ เพราะจาก
สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกของไอออน $\omega = \sqrt{k/M}$ เมื่อ k คือค่าคงที่ของสปริงที่
ยึดระหว่างไอออน, M คือมวลของไอออน ทำให้ได้ $\omega_D \propto M^{-1/2}$ ซึ่ง $T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ ปรากฏการณ์นี้
แสดงให้เห็นว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (electron-phonon interaction) มีผลสำคัญ
ต่อการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง โดยอาศัยข้อมูลนี้ Bardeen, Cooper และ Schrieffer ได้สร้างทฤษฎี
BCS และพบว่า $T_c \propto \theta_{Debye} \propto M^{-1/2}$ แต่สำหรับตัวนำยวดยิ่งจำนวนมากการทดลองจะไม่ได้ค่า
 $\alpha = 1/2$ เพราะนอกเหนือจากอันตรกิริยาอิเล็กตรอน-โฟนอนแล้ว ธรรมชาติยังมีอันตรกิริยาคูโลมบ์
ระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนเข้ามามีผลต่อสถานะนำยวดยิ่งด้วย ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของสาร
ตัวนำยวดยิ่งที่สำคัญบางชนิด แสดงดังตาราง 2

ตาราง 2 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปในสารตัวนำยวดยิ่ง

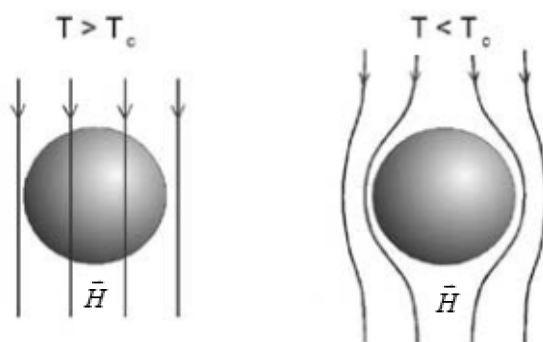
ธาตุ	α	ธาตุ	α
Zn	0.45 ± 0.05	Ru	0.00 ± 0.05
Cd	0.32 ± 0.07	Os	0.15 ± 0.05
Sn	0.47 ± 0.02	Mo	0.33
Hg	0.50 ± 0.03	Nb ₃ Sn	0.08 ± 0.02
Pb	0.49 ± 0.02	Zr	0.00 ± 0.05

ที่มา: Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 347.

1.3 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ (Meissner effect)

ในปี ค.ศ.1933 ไมสเนอร์ (Walter Meissner) และ โอคเซนเฟลด์ (Robert R. Ochsenfeld) ได้ทดลองศึกษาสมบัติของสภาพการนำยวดยิ่งในสแนมแม่เหล็ก และได้พบปรากฏการณ์ที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่ง คือ ในสภาพปกติหรือที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤติ ($T > T_c$) สแนมแม่เหล็กสามารถทะลุผ่านเข้าไปในสารตัวนำได้ แต่ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ ($T < T_c$) สแนมแม่เหล็กไม่สามารถพุ่งผ่านสารตัวนำยวดยิ่งได้ แสดงดังภาพประกอบ 7

โลหะโดยทั่วไปเมื่อไม่มีสแนมแม่เหล็กภายนอก ($\vec{H}$) มารบกวนสแนมแม่เหล็กภายในโลหะอันเกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนแต่ละตัวมีทิศทางไม่แน่นอน สแนมแม่เหล็กจึงหักล้างกันหมด ทำให้สแนมแม่เหล็กลัพธ์เท่ากับศูนย์ แต่เมื่อมีสแนมแม่เหล็กภายนอก ($\vec{H}$) มารบกวนตัวนำ สแนมรบกวนจะทำให้เกิดสแนมแม่เหล็กเหนี่ยวนำ ดังสมการ



ภาพประกอบ 7 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์

ที่มา: University of Oslo. (2013). *Basic Properties of Superconductors: Meissner effect.*: Online.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (1.5)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad ; \quad \mu_r = 1 + \chi$$

โดย $\vec{B}$ คือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก

$\vec{H}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก

$\vec{M}$ คือ สภาพแม่เหล็ก(magnetization)

χ คือ ค่าอ่อนไหวแม่เหล็ก(magnetic susceptibility)

μ_r คือ ค่าซึมซาบแม่เหล็กสัมพัทธ์ (relative magnetic permeability)

μ_0 คือ ค่าซึมซาบแม่เหล็กสัมบูรณ์ (absolute magnetic permeability)

สำหรับกรณีสารพาราแมกเนติก (paramagnetic , $\mu_r > 1$) สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นจะเสริมสนามแม่เหล็กภายนอก แต่ในสารไดอาแมกเนติก(diamagnetic, $\mu_r < 0$) สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำจะต้านสนามแม่เหล็กภายนอก การที่ตัวนำวดยิ่งผลักสนามแม่เหล็กให้เบนออกมาทำให้สนามแม่เหล็กภายในสารตัวนำวดยิ่งเป็นศูนย์ ($\vec{B} = 0$) นี่เป็นคุณสมบัติของไดอาแมกเนติกแบบสมบูรณ์ (perfect diamagnetic substance) นั่นคือ $\mu_r = 0$ และ $\vec{M} = -\vec{H}$ ทำให้ค่าความอ่อนไหวทางแม่เหล็ก(magnetic susceptibility) $\chi = -1$ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของสารไดอาแมกเนติกอุดมคติ (ideal diamagnetic)

สภาพไดอาแมกเนติกอุดมคติในตัวนำวดยิ่ง เกิดขึ้นเมื่อตัวนำวดยิ่งอยู่ในสนามแม่เหล็ก กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ไหลที่ผิวชั้นนอกตัวนำจะไหลในลักษณะที่ทำให้สนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเหนี่ยวนำมีทิศต่อต้านสนามแม่เหล็กภายนอกที่เข้าไปกระทำ ด้วยเหตุนี้สนามแม่เหล็กลัพธ์ภายในตัวนำวดยิ่งจึงเป็นศูนย์

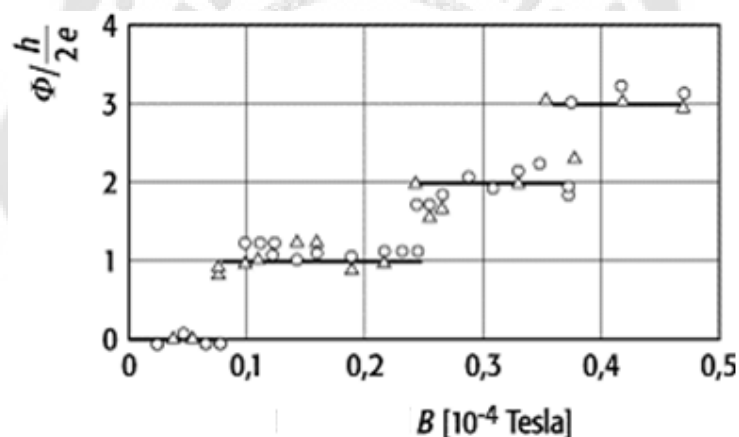
เป็นที่ทราบกันว่าสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิวชั้นนอกไม่มีผลต่ออิเล็กตรอนภายในโลหะ ซึ่งปกติสนามไฟฟ้าเวลาส่งแรงกระทำต่ออิเล็กตรอนทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลในตัวนำ แต่ในกรณีของตัวนำวดยิ่งซึ่งเป็นสารไดอาแมกเนติกจะมีกระแสไฟฟ้าไหลที่ผิวชั้นนอกเท่านั้น ดังนั้นปรากฏการณ์ไมสเนอร์และสภาพนำวดยิ่งจึงมีความสัมพันธ์กันโดยปรากฏการณ์ทั้งสองมีจุดกำเนิดมาจากสาเหตุเดียวกันและสมบัตินี้ได้กลายเป็นสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของสภาพนำวดยิ่ง

1.4 ความเป็นหน่วยของฟลักซ์แม่เหล็ก (Flux quantization)

จากการทดลองเรื่องกระแสวิกขัยในตัวนำยวดยิ่งรูปวงแหวน เราได้เห็นแล้วว่านอกจากกระแสไฟฟ้าที่ไหลในตัวนำยวดยิ่งจะมีค่าคงที่ที่ราบเท่าที่วงแหวนยังคงอยู่ในสถานะนำยวดยิ่งแล้วปรากฏการณ์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งที่ได้จากการทดลองนี้ คือ ฟลักซ์แม่เหล็กที่เกิดจากกระแสวิกขัยในวงแหวนจะมีค่าไม่ต่อเนื่อง คือมีค่าเฉพาะเป็นจำนวนเต็มเท่าของฟลักซ์ $\phi_0 = h/2e$ เมื่อ h คือค่าคงที่ของพลังค์ และ e คือประจุของอิเล็กตรอน

ในปี ค.ศ. 1961 ดีเวอร์ (Deaver) และแฟร์แบงค์ส (Fairbanks) (Deaver; & Fairbanks. 1961: 43) ได้ทดลองใช้ดีบุก (Sn) รูปทรงกระบอกกลวง ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ (ϕ) กับความเข้มสนามแม่เหล็ก จากนั้นลดอุณหภูมิลง เมื่อทรงกระบอกเป็นสารตัวนำยวดยิ่งและผลการทดลองเป็นดังกราฟ ที่มีความสัมพันธ์ตามสมการ

$$\phi = n\phi_0 = \frac{nh}{2e}, n = 1, 2, 3, \dots$$



ภาพประกอบ 8 ผลการทดลองของดีเวอร์และแฟร์แบงค์ส แสดงฟลักซ์แม่เหล็กในดีบุกรูปทรงกระบอก

ที่มา: Deaver; & Fairbank. (1961). *Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders*. p. 43.

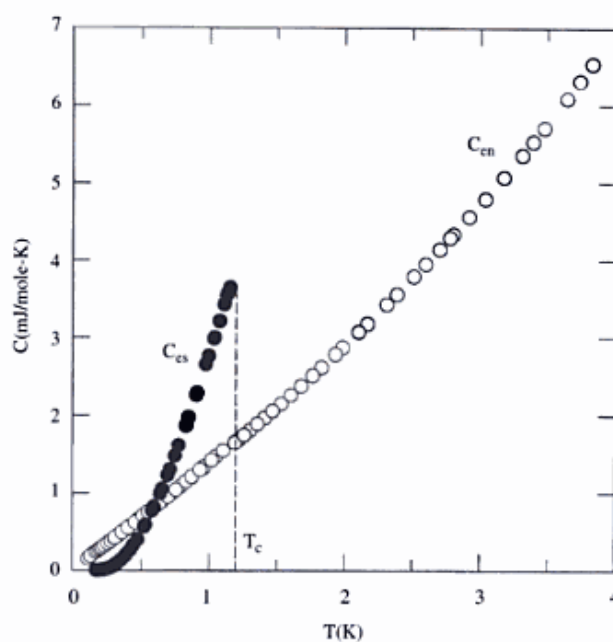
เมื่อ ϕ_0 เป็นฟลักซ์ควอนตัมที่มีขนาดเล็กที่สุด มีค่าเท่ากับ

$$\frac{h}{2e} = \frac{6.64 \times 10^{-34}}{3.2 \times 10^{-19}} \approx 2.07 \times 10^{-15} \text{ Weber}$$

เนื่องจากในสมการนี้มี $2e$ เป็นตัวหาร นั้นแสดงว่าคู่อิเล็กตรอนมีบทบาทในการเป็นตัวนำกระแสไฟฟ้าในสถานะนำยวดยิ่ง

1.5 ความร้อนจำเพาะ (specific heat)

ในความหมายทั่วไป ความร้อนจำเพาะคือปริมาณความร้อนที่ทำให้สารมวลหนึ่งกิโลกรัม มีอุณหภูมิเปลี่ยนไปหนึ่งองศา และความร้อนจำเพาะก่อนการเปลี่ยนสภาพมีค่าเท่ากับความร้อนจำเพาะหลังการเปลี่ยนสภาพ แต่ความร้อนจำเพาะของตัวนำไฟฟ้าวยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตและความร้อนจำเพาะของตัวนำปกติที่อุณหภูมิวิกฤตมีค่าไม่เท่ากัน นั่นคือแสดงพฤติกรรมไม่ต่อเนื่องแสดงดังภาพประกอบ 9 ปรากฏการณ์นี้สังเกตครั้งแรกในปี ค.ศ. 1932 โดย คีซั่ม (Keesom) และกอก (Kok) (B.D. Josephson. 1962: 251) นี่เป็นการเปลี่ยนแปลงเฟสชนิดที่ 2 ความร้อนจำเพาะในสถานะนำยวดยิ่งกับในสถานะปกติมีค่าแตกต่างกัน แสดงดังภาพประกอบ 9 และเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์สัมบูรณ์ ความร้อนจำเพาะของสถานะนำยวดยิ่งจะแปรผันตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ในรูปเอ็กซีโพเนนเชียล คือ $C_S \propto e^{-a/k_B T}$ เมื่อ a คือค่าคงตัว k_B คือค่าคงตัวของโบลซ์มานน์ และ T คืออุณหภูมิ และในสถานะปกติที่อุณหภูมิต่ำ $C_N \propto T^3$ และที่อุณหภูมิ $T = T_c$ ความร้อนจำเพาะจะมีความไม่ต่อเนื่อง คือ $C_N(T_c) \neq C_S(T_c)$ และทฤษฎี BCS ได้ทำนายว่า $\frac{C_S(T_c)}{C_N(T_c)} = 2.42$ สำหรับตัวนำยวดยิ่งทุกชนิด

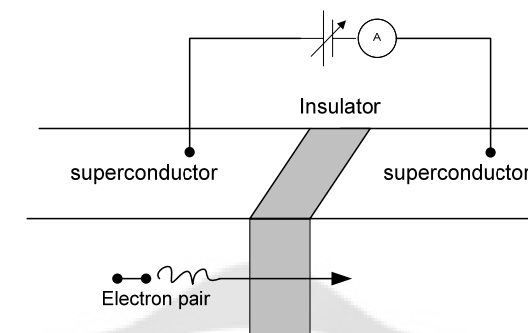


ภาพประกอบ 9 ความร้อนจำเพาะของตัวนำยวดยิ่ง (C_S) และโลหะปกติ (C_N) เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิสัมบูรณ์

ที่มา : David A. Cardwell; & David S.Ginley. (2003). *Handbook of Superconducting Material V.1*. p. 82.

1.6 ปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson effect)

ในปี ค.ศ. 1962 ไบรอัน โจเซฟสัน ได้ใช้กลศาสตร์ควอนตัมทำนายว่าหากนำแผ่นตัวนำยวดยิ่งมาประกบกันโดยมีฉนวน (insulator) บาง ๆ คั่นดังแสดงด้วยภาพประกอบ 10 จะมีกระแสไหลผ่านฉนวนทั้ง ๆ ที่ไม่มีความต่างศักย์ (B.D. Josephson. *Phys. Letters* 1. 1962: 251)



ภาพประกอบ 10 ระบบรอยต่อของโจเซฟสันที่เกิดจากการนำตัวนำยวดยิ่งสองตัวประกบกันโดยมีฉนวนบาง ๆ คั่น

เราเรียกระบบที่มีรอยต่อระหว่างตัวนำทั้งสองว่าเป็นรอยต่อโจเซฟสัน (Josephson junction) และปรากฏการณ์นี้มี 2 รูปแบบ คือ

1.6.1 ปรากฏการณ์โจเซฟสันกระแสตรง (D.C. Josephson effect) เป็นปรากฏการณ์ที่มีกระแสดวดยิ่ง (super current) ชนิดตรงไหลผ่านบริเวณรอยต่อ ถึงแม้จะไม่มีความต่างศักย์กระทำต่อระบบ ดังสมการ

$$I = I_c \sin(\Delta\phi) \quad (1.6)$$

เมื่อ I คือ กระแสโจเซฟสัน (Josephson current)

I_c คือ กระแสวิกฤต (critical current) ซึ่งเป็นกระแสสูงสุดที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสัน

$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ เป็นความต่างเฟสของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1 และ 2

ความสัมพันธ์ในสมการ (1.6) ว่าความสัมพันธ์ดี-ซี โจเซฟสัน (dc-Josephson relation)

1.6.2 ปรากฏการณ์โจเซฟสันกระแสสลับ (A.C. Josephson effect) ถ้ามีศักย์ไฟฟ้า V_s ต่อคร่อมระบบจะมีกระแสไฟฟ้าสลับข้ามรอยต่อ ซึ่งความถี่ของกระแส

$$f = \frac{2eV_s}{h} = \left(\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.64 \times 10^{-34}} V_s \right) = 5.3 \times 10^{14} V_s \text{ Hz} \quad \text{นี้ขึ้นกับ } V_s \text{ และกระแส } I \text{ ดังสมการ}$$

$$I = I_c \sin(\omega t + \Delta\phi) \quad (1.7)$$

ตามปกติแล้วการวัดความถี่ f สามารถทำได้แม่นยำ ดังนั้นเราก็สามารถหา V_s ได้ และนี่ก็คือวิธีวัดความต่างศักย์ไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าที่ดีที่สุดวิธีหนึ่ง สมการ (1.7) ยังแสดงให้เห็นอีกว่า ไม่ว่าจะใช้ตัวนำยวดยิ่งชนิดใด หาก V_s คงที่ ความถี่กระแสสลับจะมีค่าเท่ากันเสมอ

2. ชนิดของตัวนำยวดยิ่ง

ตัวนำยวดยิ่งมีทั้งประเภทที่สนามแม่เหล็กวิกฤติมีค่าต่ำซึ่งมักเป็นวัสดุที่แข็งมากและประเภทที่สนามแม่เหล็กวิกฤติมีค่าสูง ซึ่งมักเป็นวัสดุที่แข็งน้อย ดังนั้นถ้ามองด้านความแข็งของวัสดุ อาจแบ่งออกเป็นตัวนำยวดยิ่งแบบอ่อนและตัวนำยวดยิ่งแบบแข็ง แต่ในปัจจุบันประเภทของตัวนำยวดยิ่งมักแบ่งตามคุณสมบัติทางแม่เหล็กเป็น 2 ชนิด เรียกว่าตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1 (Type-I superconductor) และตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 (Type-II superconductor) ซึ่งเทียบได้กับประเภทอ่อนและประเภทแข็งตามลำดับ

สิ่งที่สำคัญที่ทำให้เกิดความแตกต่างของสภาพนำยวดยิ่งสองชนิดนอกจากปัจจัยทางด้านสนามแม่เหล็กแล้ว วิถีอิสระ (mean free path) ของอิเล็กตรอนตัวนำในสถานะปกติ ซึ่งเป็นพารามิเตอร์สำคัญในการกำหนดคุณสมบัติพื้นฐานของตัวนำยวดยิ่ง ได้แก่ ระยะทะลุวงลึก (penetration depth: λ_L) ของสนามแม่เหล็กและความยาวอาพันธ์ (coherence length: ξ) ซึ่งพารามิเตอร์ λ_L แสดงความลึกของการซึมซาบหรือทะลุทะลวงของสนามแม่เหล็กเข้าในตัวนำยวดยิ่ง ส่วนพารามิเตอร์ ξ แสดงระยะทางระหว่างคู่คูเปอร์ ซึ่งคุณสมบัติของอิเล็กตรอนที่อยู่ภายในช่วง ξ นั้นจะไม่เปลี่ยนแปลง

ให้ $\vec{B}(x)$ เป็นสนามแม่เหล็กที่เจาะทะลุเข้าสู่ชั้นของตัวนำยวดยิ่ง จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{B}(x)$ กับ ระยะทะลุวงลึก ดังนี้คือ

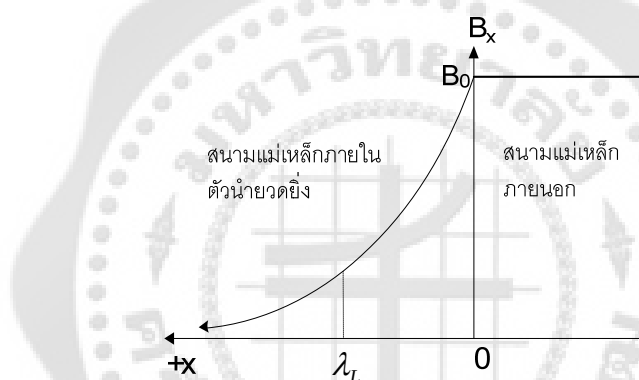
$$\vec{B}(x) = \vec{B}_0 e^{-x/\lambda_L} \quad (1.7)$$

เมื่อ $\vec{B}_0$ คือ สนามแม่เหล็กภายนอก

$$\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4}} \quad (1.8)$$

เมื่อ λ_L คือระยะทะลวงลึกที่ขึ้นกับอุณหภูมิ, λ_0 คือระยะทะลวงลึกที่อุณหภูมิ 0 K มีค่าประมาณ $30\text{-}130\text{ nm}$ ขึ้นกับชนิดของสารตัวนำยวดยิ่ง

ระยะทะลวงลึกและความยาวอาพันธ์ของธาตุตัวนำยวดยิ่งที่สำคัญ แสดงดังตาราง 3



ภาพประกอบ 11 การเจาะทะลุของสนามแม่เหล็กสู่ในตัวนำยวดยิ่ง

ที่มา: Ramesh Gupta. (2003). *Superconductivity*. p. 6.

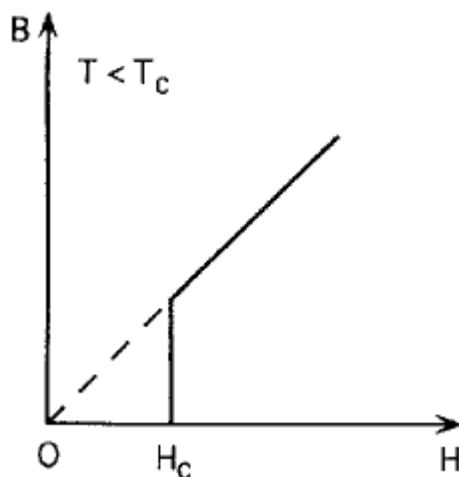
ตาราง 3 ความยาวอาพันธ์ และระยะทะลวงลึก ในหน่วย 10^{-6} cm ที่อุณหภูมิศูนย์สัมบูรณ์

ธาตุ	ความยาวอาพันธ์ ξ	ระยะทะลวงลึก λ_L	λ_L / ξ
Sn	23.	3.4	0.16
Al	160.	1.6	0.010
Pb	8.3	3.7	0.45
Cd	76.	11.0	0.14
Nb	3.8	3.9	1.02

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. p. 353.

2.1 ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (type-I superconductor)

โดยทั่วไป เมื่ออุณหภูมิและสนามแม่เหล็กที่มีค่าสูง ๆ จะสามารถทำลายสภาพนำยิ่งยวดได้ ดังนั้นถ้ามีความคุมอุณหภูมิให้มีค่าคงตัวค่าหนึ่ง โดยอุณหภูมิที่กล่าวนั้นมีค่าต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต และเมื่อเพิ่มสนามแม่เหล็กภายนอกขึ้นเรื่อยๆ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสนามแม่เหล็กภายนอกและสนามแม่เหล็กภายใน จะเป็นไปตามภาพประกอบ 12 เรียกตัวนำยิ่งยวดประเภทนี้ว่าตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1



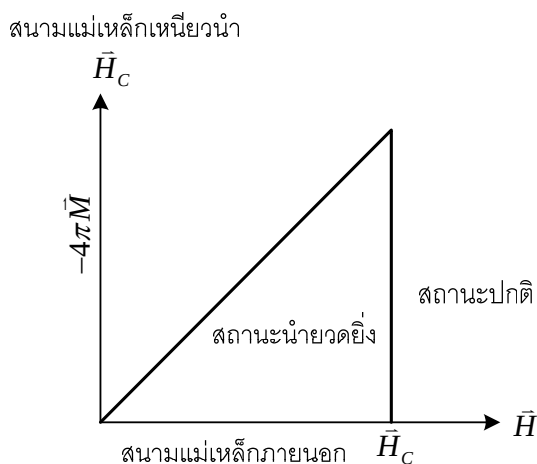
ภาพประกอบ 12 ค่าสนามแม่เหล็กภายใน (B) และสนามแม่เหล็กภายนอก (H) วิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1

ที่มา: Ketterson; & Song. (1999). *Superconductivity*. p. 13.

กล่าวคือ เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต และสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่ามากกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต (H_c) ตัวนำจะอยู่ในสถานะปกติ สนามแม่เหล็กภายนอกสามารถทะลุผ่านตัวนำเข้าไปได้ แต่ในกรณีสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าน้อยกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤตตัวนำจะอยู่ในสถานะนำยิ่งยวด สนามแม่เหล็กภายในจะมีค่าเป็นศูนย์ (พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริ. 2553: 16-17)

ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 เป็นสารที่มีจำนวนประมาณ 30 ชนิด มีความยาวอาพันธ์ (ξ) มากกว่าระยะทะลวงลึก (λ) ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต ตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Magnetization ($\bar{M}$) กับสนามแม่เหล็ก ($\bar{H}$) ดังภาพประกอบ 13

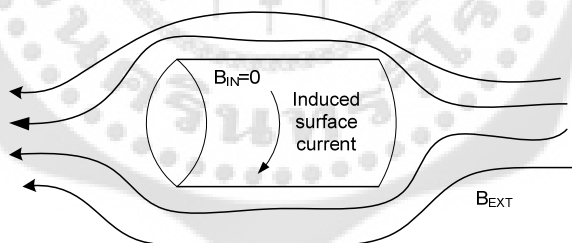
เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่า $\bar{H}_c$ สารยังคงสภาพตัวนำยิ่งยวดอยู่ได้ แต่ถ้าสนามแม่เหล็กมีค่าสูงกว่า $\bar{H}_c$ ตัวนำจะสูญเสียสภาพนำยิ่งยวดกลายเป็นตัวนำปกติทันที ถึงแม้อุณหภูมิจะยังน้อยกว่า อุณหภูมิวิกฤตก็ตาม เรียก $\bar{H}_c$ ว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต



ภาพประกอบ 13 สนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. p. 340.

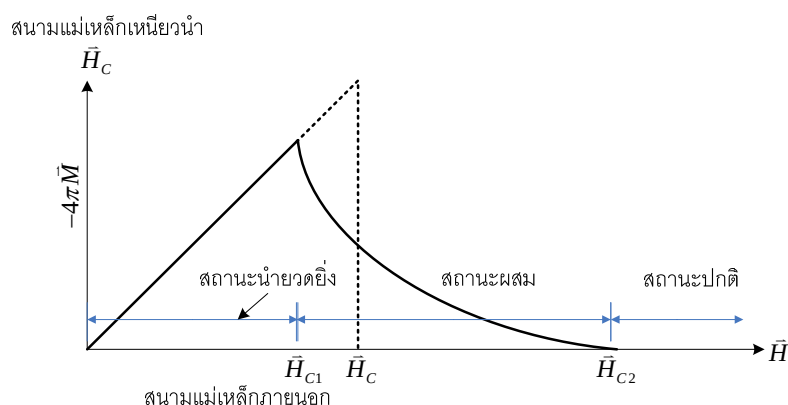
ตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้จะแสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่สมบูรณ์ คือเป็นไดอาแมกเนติกอย่างสมบูรณ์ (perfect diamagnetic) แสดงดังภาพประกอบ 14 และโดยทั่วไปค่า H_C ของตัวนำยวดยิ่งแบบที่ 1 มีค่าต่ำมากจนไม่เพียงพอสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้งาน



ภาพประกอบ 14 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ของสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1

2.2 ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 (type-II superconductor)

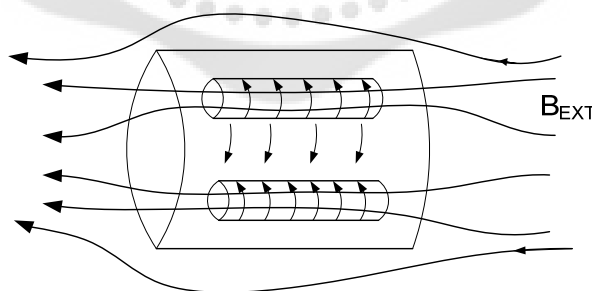
ส่วนใหญ่เป็นโลหะผสมและสารประกอบ ตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้มีความยาวอาพันธ์ (ξ) สั้นกว่าระยะทะลวงลึก (λ) และมีอุณหภูมิวิกฤติ (T_c) สนามแม่เหล็กวิกฤติ (H_C) สูงกว่าตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1 และให้ค่าสนามวิกฤติ 2 ค่า ความสัมพันธ์ระหว่าง magnetization ($\bar{M}$) กับสนามแม่เหล็ก ($\bar{H}$) เป็นดังภาพประกอบ 15



ภาพประกอบ 15 สนามแม่เหล็กวิกฤติของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. p. 340.

เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่า $\bar{H}_{c1}$ ตัวนำจะมีสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งที่สมบูรณ์ และแสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์อย่างสมบูรณ์ เช่นเดียวกับตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1 แต่เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า $\bar{H}_{c1}$ แต่น้อยกว่า $\bar{H}_{c2}$ ตัวนำจะมีสภาพนำยวดยิ่งที่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากเส้นแรงแม่เหล็กส่วนหนึ่งสามารถทะลุเข้าไปในเนื้อสารตัวนำ แสดงดังภาพประกอบ 16 ทำให้เกิดปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ เรียกสถานะนี้ว่า vortex state หรือ mixed state และเมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า $\bar{H}_{c2}$ ตัวนำจะกลายสภาพเป็นสถานะปกติ โดยทั่วไป $\bar{H}_{c2}$ จะมีค่ามาก ตัวนำบางชนิดอาจมีค่า $\bar{H}_{c2}$ มากถึง 100 เท่า ของค่า $\bar{H}_c$ เราจึงนิยมใช้ตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้มาประยุกต์ใช้ในงานที่ต้องการสนามแม่เหล็ก



ภาพประกอบ 16 ปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ของสารตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2

3. ตัวนำยวดยิ่งแบบต่างๆ

ตัวนำยวดยิ่งจำนวนมากถูกค้นพบ รวมถึงมีการค้นพบทางทฤษฎีในหลายๆ แบบ ดังนั้นการแบ่งประเภทของตัวนำยวดยิ่งจะต้องระบุว่าเป็นการแบ่งประเภทโดยคำนึงถึงสมบัติหรือทฤษฎีอะไร ในที่นี้จะกล่าวถึงตัวนำยวดยิ่งแบบต่างๆ ที่ได้มีการแบ่งประเภทไว้ตามทฤษฎีและการทดลองต่าง ๆ

3.1 ตัวนำยวดยิ่งสปินซิงเกิลต (singlet) และสปินทริปเลต (triplet)

ในทฤษฎีควอนตัม ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน 2 ตัว ในปริภูมิอิสระ (free space) จะถูกเขียนอยู่ในเทอมของผลคูณของส่วนปริภูมิ (ψ) และส่วนสปิน (χ)

$$\Psi(r_1, s_1, r_2, s_2) = \psi(r_1, r_2) \chi(s_1, s_2) \quad (1.9)$$

โดย r_i และ s_i เป็นพิกัดในส่วนช่องว่าง (spatial) และส่วนสปิน ตามลำดับ

ฟังก์ชันคลื่นรวม (total wave function) ของคู่อิเล็กตรอน ซึ่งเป็นอนุภาคเฟอร์มิออนที่มี $s = \frac{1}{2}$ และเมื่อพิจารณาการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างอิเล็กตรอน จะเป็นฟังก์ชันแบบ Antisymmetric ซึ่งสามารถเขียนได้สองแบบ คือ

$$\Psi_A^{s=1} = \psi_{\text{odd}}(r_1, r_2) \chi_{\text{even}}^{s=1}(s_1, s_2) \quad (1.10)$$

$$\Psi_A^{s=0} = \psi_{\text{even}}(r_1, r_2) \chi_{\text{odd}}^{s=0}(s_1, s_2) \quad (1.11)$$

เนื่องจากมีอิเล็กตรอนสองตัว ดังนั้นสปินรวมจะสามารถเป็นได้แค่ 2 แบบ คือ

$s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ และ $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ซึ่งกรณี $s = 0$ จะเรียกว่าเป็นสปินซิงเกิลต มีฟังก์ชันคลื่นแบบคี่ (odd) และกรณี $s = 1$ จะเรียกว่าสปินทริปเลต มีฟังก์ชันคลื่นแบบคู่ (even)

กำหนดให้ α และ β แทนสปินชี้ขึ้นและสปินชี้ลงของอิเล็กตรอน ตัวเลข 1 และ 2 แทนอิเล็กตรอนแต่ละตัว จะเขียนฟังก์ชันคลื่นรวมในส่วนสปินได้เป็น

$$\chi_{\text{even}}^{s=1} = [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)] / \sqrt{2} \quad (1.13)$$

$$\chi_{\text{odd}}^{s=0} = [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] / \sqrt{2} \quad (1.14)$$

สำหรับฟังก์ชันคลื่นสปินซึ่งเกิดตามสมการ (1.11) จะมีฟังก์ชันคลื่นรวมเป็นแบบ Antisymmetry โดยมีส่วนช่องว่างเป็นแบบ symmetry และส่วนสปินเป็นแบบ Antisymmetry ดังนั้น ส่วนวงโคจร (Orbital part) $A(\theta, \phi)$ ของฟังก์ชันคลื่นรวม $\Psi(r_1) = R(r)A(\theta, \phi)$ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของส่วนช่องว่างจะต้องเป็นฟังก์ชันคู่ด้วย ซึ่งโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจร (Orbital angular momentum) ที่เป็นไปได้คือ กรณีที่มี l เป็นเลขคู่คือ s และ d และตัวอื่น

ในทำนองเดียวกัน สำหรับฟังก์ชันคลื่นสปินทริปเลต ตามสมการ (1.10) เนื่องจากส่วนช่องว่าง เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$\Psi_{odd}(r_1, r_2) = R_{even}(r_1, r_2) A_{odd}(\theta, \phi) \quad (1.15)$$

$$\Psi_{odd}(r_1 > r_2) = R_{even}(r_1, r_2) A_{even}(\theta, \phi) \quad (1.16)$$

โดย $A(\theta, \phi)$ เป็นส่วนโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจร และ $R(r_1, r_2)$ เป็นส่วนรัศมี (Radial part)

เนื่องจากส่วนรัศมีเป็นฟังก์ชันคู่เท่านั้น ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นรวมที่เป็นไปได้คือ $\Psi_{odd}(r_1, r_2) = R_{even}(r_1, r_2) A_{odd}(\theta, \phi)$ และโมเมนตัมเชิงมุมในวงโคจรที่เป็นไปได้คือ กรณีที่มี l เป็นเลขคี่คือ $l=1(p)$ และ $l=3(f)$ และอื่น ๆ

สำหรับทฤษฎี BCS การจับคู่ของอิเล็กตรอนจะมีแบบเดียวคือ มี $l=0$ ดังนั้นจึงเป็นคลื่นแบบสปินซิงเกิลต และจากเงื่อนไขของทฤษฎี จึงสามารถสรุปได้ว่าเป็น s-state orbital angular momentum เท่านั้น ซึ่งบางครั้งจึงเรียกสั้น ๆ ว่าเป็นการจับคู่แบบ s-wave หรือคลื่น s จากผลการทดลองพบว่าตัวนำยวดยิ่งแบบ conventional ส่วนใหญ่เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่น s

3.2 ตัวนำยวดยิ่งแบบ Strong-Coupling และ Weak-coupling

ในทฤษฎี BCS จะกำหนดให้อันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน เป็นอันตรกิริยาอย่างอ่อน หรือเป็นการคู่ควบแบบอ่อน (weak-coupling interaction) แต่ถ้าตัวนำยวดยิ่งมีอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนเป็นแบบรุนแรง (strong-coupling interaction) หรือเป็นการคู่ควบแบบรุนแรงแล้ว ก็ จะไม่สามารถใช้ทฤษฎี BCS อธิบายได้ สภาพการจับคู่ของอิเล็กตรอนจะมีเวลาจำกัด ทำให้ $\Delta(0)$ และ T_c มีค่าลดลงมากกว่าปกติ ค่าของ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T}$ จะมากกว่า 3.52 และตัวชี้วัดว่าเป็นการคู่ควบแบบรุนแรงอีกอย่างคือ อัตราส่วน $\frac{T_c}{\omega_D}$ จะมีค่าไม่น้อย จึงไม่สามารถตัดทิ้งไม่ได้เหมือนดังการคำนวณตามทฤษฎี BCS และค่าของ λ จะมีค่ามากกว่าตามทฤษฎี BCS มาก โดยคำนวณได้จากสมการของ McMillan คือ

$$\lambda \equiv 2 \int_0^{\omega_{\max}} \alpha^2(\omega_q) F(\omega_q) \frac{d\omega_q}{\omega_q} \quad (1.17)$$

เมื่อ $\alpha^2(\omega_q)$ เป็นค่าเฉลี่ยของอันตรกิริยาอิเล็กตรอนที่ความถี่ ω_q

$F(\omega_q)$ เป็นความหนาแน่นของโฟนอน

$\omega_{\max}$ เป็นความถี่สูงสุดของโฟนอน

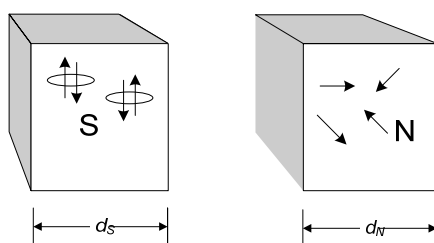
(พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริ. 2553: 50-53)

4. ปรากฏการณ์พร็อกซิมีตี (proximity effect)

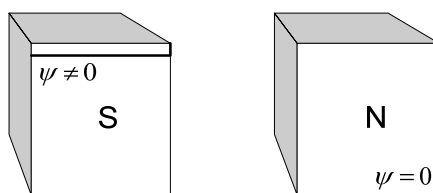
อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นจากการนำวัสดุตัวนำยิ่งยวด (S) สัมผัสกับโลหะแม่เหล็กเฟอร์โร (F) ก่อให้เกิดอิทธิพลต่อกันและกัน และเกิดการเปลี่ยนแปลงของสภาพความนำยิ่งยวดในตัวนำยิ่งยวดและสภาพแม่เหล็กในโลหะแม่เหล็กเฟอร์โร ณ ผิวรอยต่อของระบบ เราเรียกปรากฏการณ์อันเกิดจากการสัมผัสกันระหว่างวัสดุที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบแตกต่างกัน ทำให้คุณสมบัติของวัสดุทั้งสองที่บริเวณใกล้รอยต่อมีการเปลี่ยนแปลงนี้ว่า ปรากฏการณ์พร็อกซิมีตีของระบบ S/F

4.1 ปรากฏการณ์พร็อกซิมีตีของระบบ S/N

การศึกษาปรากฏการณ์พร็อกซิมีตี เริ่มจากแผ่นประกบระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับโลหะปกติ (S/N) โดยในตัวนำยิ่งยวดมีคู่คูเปอร์ที่ประกอบด้วยอิเล็กตรอนสองตัวที่มีสปินสวนทิศกัน พังค์ชันคลื่นเป็นตัวกำหนดพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีค่าสูง ขณะที่โลหะปกติมีอิเล็กตรอนอยู่อย่างกระจายทำให้ผลรวมของสปินอิเล็กตรอนมีค่าเป็นศูนย์หรือกล่าวได้ว่าไม่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบเลย แสดงดังภาพประกอบ 17-18

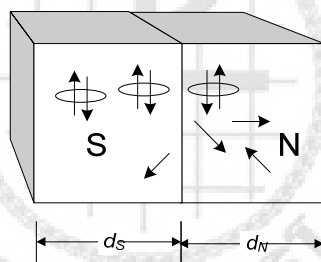


ภาพประกอบ 17 แสดงคู่คูเปอร์ในตัวนำยิ่งยวดที่มีสปินของอิเล็กตรอนสวนทิศกันเปรียบเทียบกับอิเล็กตรอนที่กระจายอยู่ในโลหะปกติ โดยที่ d_S และ d_N เป็นความหนาของตัวนำยิ่งยวดและโลหะปกติ ตามลำดับ

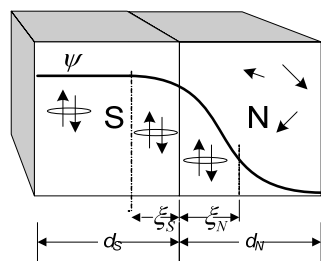


ภาพประกอบ 18 แสดงพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (ψ) ในตัวนำยวดยิ่ง (S) และโลหะปกติ (N)

เมื่อตัวนำยวดยิ่งสัมผัสโลหะปกติ ที่บริเวณรอยต่อ คู่คูเปอร์ของตัวนำยวดยิ่งจะทะลุทะลวงสู่โลหะปกติไปไกลที่ระยะหนึ่ง ถ้าการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนเป็นลักษณะแพร่ซึ่มและอยู่ในขอบเขตสเกลปรก $\tau T \ll 1$ เมื่อ τ คือเวลาการกระเจิงของอิเล็กตรอน ระยะการทะลุทะลวงนี้จะมีค่าประมาณ $\xi_N = \sqrt{D/2\pi T}$ เมื่อ D คือค่าคงตัวของ การแพร่ซึ่ม ซึ่งมีค่าเท่ากับ $vl/3$ และ $l = v\tau$ คือระยะวิถีอิสระ T คืออุณหภูมิ ในกรณีโลหะบริสุทธิ์ระยะนี้คือความยาวอาพันธ์ $\xi_N \approx v/T$ เมื่อ v คือความเร็วเฟอร์มี ดังนั้นสภาพการนำยวดยิ่งของตัวนำยวดยิ่งจะลดลงเมื่ออยู่ห่างจากบริเวณผิวรอยต่อและในโลหะปกติที่บริเวณใกล้เคียงผิวรอยต่อก็จะแสดงสภาวะการนำยวดยิ่งได้ภายในระยะอาพันธ์เช่นกัน แสดงดังภาพประกอบ 19 และ 20

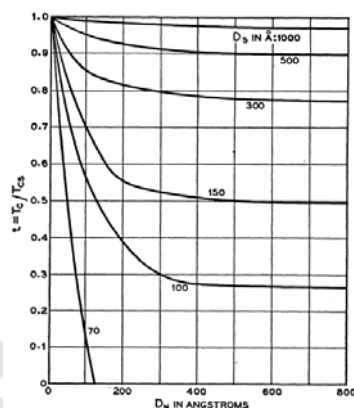


ภาพประกอบ 19 แสดงคู่คูเปอร์จากตัวนำยวดยิ่ง (S) และอิเล็กตรอนจากโลหะปกติ (N) ที่ทะลุข้ามรอยต่อของระบบแผ่นประกบ S/N



ภาพประกอบ 20 แสดงพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่งบริเวณใกล้เคียงรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่ง (S) กับโลหะปกติ (N) ของระบบแผ่นประกบ S/N โดย ξ_N และ ξ_S เป็นความยาวอาพันธ์ของโลหะปกติและตัวนำยวดยิ่งตามลำดับ

เมื่อพิจารณาอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นตัวนำยวดยิ่งบางที่สัมผัสโลหะปกติ ถ้าความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่งมีค่าน้อยกว่าความหนาค่าหนึ่งซึ่งเรียกว่าความหนาวิกฤตแล้วปรากฏการณ์พรีอ็อกซิมีตีก็จะทำลายหรือหยุดยั้งสภาพนำยวดยิ่งอย่างสมบูรณ์ แสดงดังภาพประกอบ 21

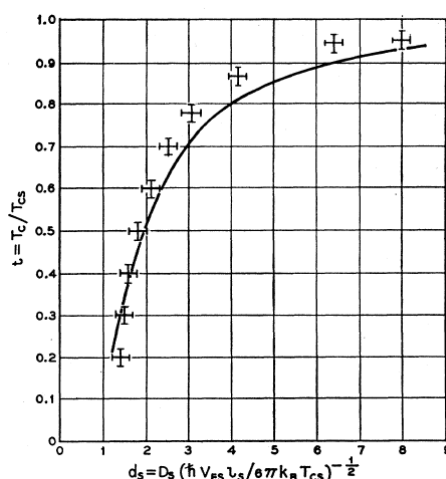


ภาพประกอบ 21 การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t = T_c / T_{cs}$ กับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Pb (D_S) และแผ่นโลหะปกติ Cu (D_N) ของระบบแผ่นประกบ S/N

ที่มา: Werthamer. (1963). *Theory of the Superconducting Transition Temperature and Energy Gap Function of Superposed Metal Films*. p. 1963.

กราฟระหว่างอุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t = T_c / T_{cs}$ เมื่อ T_c คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง และ T_{cs} คืออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นตัวนำยวดยิ่งขนาดใหญ่ กับความหนาของแผ่นโลหะปกติ (D_N) กราฟเส้นแรก แสดงให้เห็นว่าความหนาของแผ่นโลหะปกติที่มากกว่า $120 \text{ \AA}$ สภาพนำยวดยิ่งจะสิ้นสุดลง ($T_c = 0$) หากแผ่นตัวนำยวดยิ่งมีความหนา $70 \text{ \AA}$ และเส้นกราฟอื่นๆ เมื่อความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่งเพิ่มขึ้นเป็น 100, 150, 300, 500 และ $1000 \text{ \AA}$ แล้ว อุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงขึ้นตามลำดับ โดยในแต่ละเส้น กราฟถึงแม้ความหนาของแผ่นโลหะปกติจะเพิ่มแต่อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าคงตัว

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง เมื่อกำหนดให้ความหนาของแผ่นโลหะปกติมีค่าคงตัว พบว่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบแผ่นประกบ S/N นี้มีค่าสูงขึ้นเมื่อแผ่นตัวนำยวดยิ่งมีความหนาเพิ่มขึ้น แสดงดังภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 22 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตลดทอนกับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Pb เมื่อแผ่นโลหะปกติ Cu มีความหนาคงตัว ของระบบแผ่นประกบ S/N

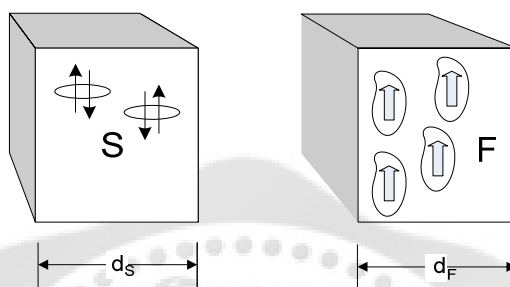
ที่มา: Ibid. p. 1964.

4.2 ปรากฏการณ์พรีออกซิมีตีของระบบ S/F

ในส่วนของการปรากฏการณ์พรีออกซิมีตีของระบบ F/S สถานะสปินของตัวนำยวดยิ่ง และแม่เหล็กเฟอร์โร มีลักษณะที่แตกต่างกัน ในกรณีของตัวนำยวดยิ่งที่สถานะการจับคู่เป็นแบบซิงเกิลต (singlet pairing state) สปินของคู่อิเล็กตรอนมีทิศตรงกันข้ามส่วนสนามแลกเปลี่ยนของแม่เหล็กเฟอร์โร จะบังคับให้สปินของอิเล็กตรอนมีทิศไปทางเดียวกัน ดังนั้นจึงเกิดการปะทะกันระหว่างสภาพนำยวดยิ่งและสภาพแม่เหล็กเฟอร์โร มีผลการทดลองที่ยืนยันการเกิดปรากฏการณ์ที่แสดงให้เห็นถึงการร่วมเฟสของสภาพนำยวดยิ่งและสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรในระบบแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร เช่นการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤต (superconducting critical temperature) และกระแสวิกฤตโจเซฟสัน (Josephson critical current) ตามชั้นความหนาของแม่เหล็กเฟอร์โรที่แปรค่าไป จากปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ทำให้เกิดคำถามว่าทำไมจึงเกิดสภาพนำยวดยิ่งเหนี่ยวนำ (induced superconductivity) ขึ้นในชั้นแม่เหล็กเฟอร์โร เนื่องจากโดยลำพังของการจับคู่แบบซิงเกิลตนั้นระยะอาพันธ์ (coherence length) ของคู่อิเล็กตรอนในชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรมีพิสัยใกล้ จึงไม่เพียงพอต่อการเหนี่ยวนำสภาพนำยวดยิ่งขึ้นในชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรได้ ในความเป็นจริงนั้นโมเมนต์แม่เหล็กเฟอร์โรมีลักษณะไม่เป็นเอกพันธ์ (inhomogeneous) จึงอนุญาตให้คู่อิเล็กตรอนมีสถานะการจับคู่แบบทริปเลต (triplet pairing state) โดยที่ฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนต้องมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันคี่ของความถี่มัตซุบารา (Matsubara's frequency) และเป็นฟังก์ชันคู่ของโมเมนต์หรือเรียกว่าสภาพนำยวดยิ่ง

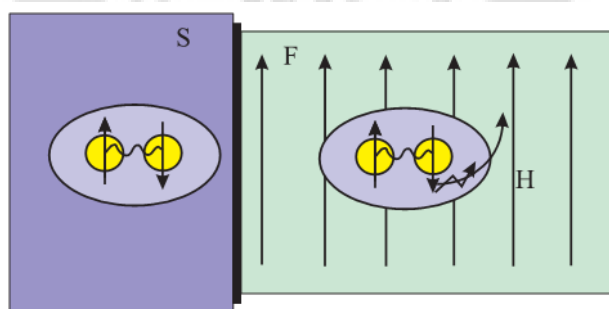
แบบทริปเลตคี่ (odd triplet superconductivity) สถานะทริปเลตคี่ทำให้สภาพนำยวดยิ่งมีอยู่ได้ในชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรและทำให้ระยะอาพันธ์มีพิสัยไกล

ดังที่กล่าวข้างต้น ในคู่คูเปอร์ สปินของอิเล็กตรอนสวนทิศกัน พังค์ชันคลื่นเป็นตัวกำหนดพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในตัวนำยวดยิ่ง ส่วนการที่โมเมนต์แม่เหล็กของอะตอมชี้ในทิศทางเดียวกันเป็นตัวกำหนดพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในแม่เหล็กเฟอร์โร ดังแสดงในภาพประกอบ 23



ภาพประกอบ 23 คู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งที่มีสปินของอิเล็กตรอนสวนทิศกับโมเมนต์แม่เหล็กที่ชี้ในทิศทางเดียวกันในแม่เหล็กเฟอร์โร

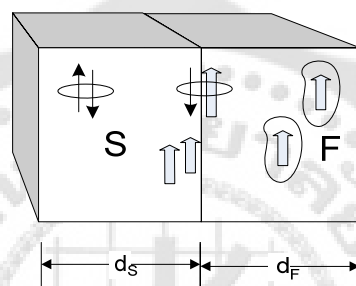
ภาพประกอบ 23 สภาพนำยวดยิ่งและสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรมีลักษณะต่อต้านกัน ในกรณีวัสดุที่มีขนาดใหญ่ โดยทั่วไปสภาพนำยวดยิ่งจะถูกสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนที่รุนแรงทำลายจนหมด เพราะสนามแลกเปลี่ยนมีความเข้มของสนามแม่เหล็กสูง จึงโน้มน้าวให้สปินของคู่คูเปอร์เรียงตัวในทิศทางเดียวกัน สนามแลกเปลี่ยนจึงต่อต้านการจับคู่ของอิเล็กตรอนที่จะเป็นคู่คูเปอร์ แสดงดังภาพประกอบ 24



ภาพประกอบ 24 คู่คูเปอร์ที่ทะลุลงสู่แม่เหล็กเฟอร์โรถูกโน้มน้าวให้มีสปินในทิศเดียวกับทิศโมเมนต์แม่เหล็กในแม่เหล็กเฟอร์โร

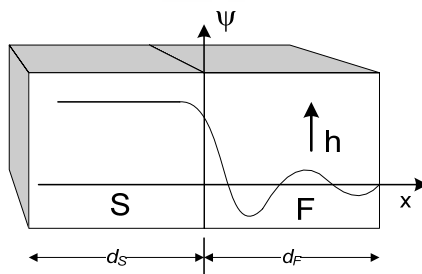
ที่มา: Anishchanka. (2008). *Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Structures. Ph.D. (Science). Bochum University.* p. 6.

ถึงแม้การอุบัติของสภานำยวดยิ่งร่วมกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรแทบจะเกิดขึ้นไม่ได้ในวัสดุที่มีขนาดใหญ่ แต่ถ้าเราสามารถสร้างระบบที่มีแผ่นประกบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร (S/F) ได้ คู่คูเปอร์จะสามารถทะลุผ่านรอยต่อของแผ่นประกบนี้ไปเหนี่ยวนำให้เกิดสภานำยวดยิ่งในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรได้ ถ้าพลังงานแลกเปลี่ยน h มีค่ามากกว่า $k_B T$ ($h \gg k_B T$) ระยะเวลาที่คู่คูเปอร์ทะลุทะลวงลงสู่แม่เหล็กเฟอร์โรมีค่า $\xi_F = \sqrt{D/h}$ ขณะเดียวกันสปินที่มีค่าแน่นชัด (spin-polarized) ของอนุภาคควาไซน์ (quasi particle) ไม่เพียงแต่จะต่อต้านพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ทะลุเข้ามายังแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร แต่จะแพร่ซึมข้ามรอยต่อไปยังแผ่นตัวนำยวดยิ่งที่ระยะหนึ่งเช่นกัน แสดงดังในภาพประกอบ 25 ทำให้ที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โรมีคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงไป



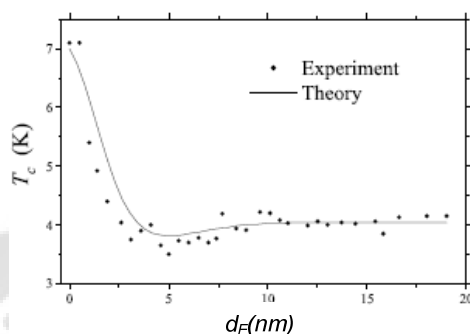
ภาพประกอบ 25 การทะลุทะลวงของคู่คูเปอร์และการแพร่ซึมของอนุภาคควาไซน์ข้ามรอยต่อของแผ่นประกบ S/F

จากเดิม อาทิ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบบริเวณใกล้รอยต่อของตัวนำยวดยิ่งลดลงและในแม่เหล็กเฟอร์โรมีการกวัดแกว่งของพารามิเตอร์แบบไม่สม่ำเสมอ ดังภาพประกอบ 26 ซึ่งเป็นผลอันเกิดจากการที่สภานำยวดยิ่งกับสภาพแม่เหล็กเฟอร์โรมีอิทธิพลต่อต้านกันและกัน ทำให้อิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์ของตัวนำยวดยิ่งมี



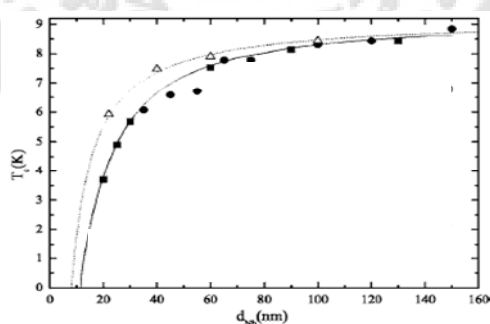
ภาพประกอบ 26 แสดงพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ลดลงแบบไม่สม่ำเสมอในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรของแผ่นประกบ S/F

พลังงานแตกต่างกันอันเนื่องจากการมีสปีนขึ้นและสปีนลงของอิเล็กตรอนถูกสนามแลกเปลี่ยนภายในแม่เหล็กเฟอร์ไรต์แตกต่างกัน และคุณสมบัติที่น่าสนใจเป็นอย่างยิ่งคือการที่อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบ S/F ลดลงแบบไม่สม่ำเสมอ (nonmonotonic) คือขึ้นกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (d_F) แสดงดังภาพประกอบ 27 และอุณหภูมิวิกฤตที่สูงขึ้นเมื่อความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่งมีค่าเพิ่มขึ้น แสดงดังภาพประกอบ 28



ภาพประกอบ 27 การลดลงแบบไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (d_F) เมื่อกำหนดให้ความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง (d_S) ในระบบแผ่นประกบ S/F มีค่าคงตัว

ที่มา: Fominov; Chtchelkatchev; & Golubov. (2002). *Physical Review B*. 66: 5



ภาพประกอบ 28 การเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง Nb (d_{Nb}) เมื่อกำหนดให้ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ (d_F) คงที่ ของระบบแผ่นประกบ S/F

ที่มา: Cirillo; et al. (2005). *Physical Review B*. 72(144511): 4.

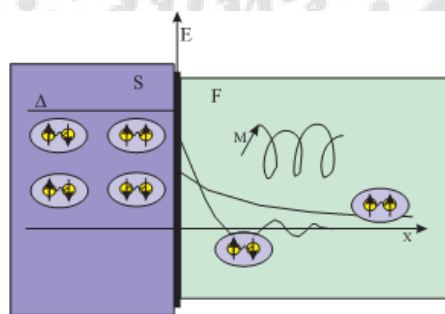
คู่คูเปอร์จากตัวนำยวดยิ่งที่มีการจับคู่แบบเดี่ยว ประกอบด้วยอิเล็กตรอนสองตัว สปินมีทิศตรงข้ามกัน เมื่อทะลุทะลวงลงสู่แม่เหล็กเฟอร์ไรต์นั้น ถ้าแมกนีไทเซชันในแม่เหล็กมีค่าสม่ำเสมอ ฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ f เข้าสู่แม่เหล็กเฟอร์ไรต์ได้ในระยะทางสั้น ๆ มีสองฟังก์ชัน คือ

$$f_0(t-t') \sim \langle \psi_\uparrow(t) \psi_\downarrow(t') - \psi_\downarrow(t) \psi_\uparrow(t') \rangle$$

$$f_3(t-t') \sim \langle \psi_\uparrow(t) \psi_\downarrow(t') + \psi_\downarrow(t) \psi_\uparrow(t') \rangle$$

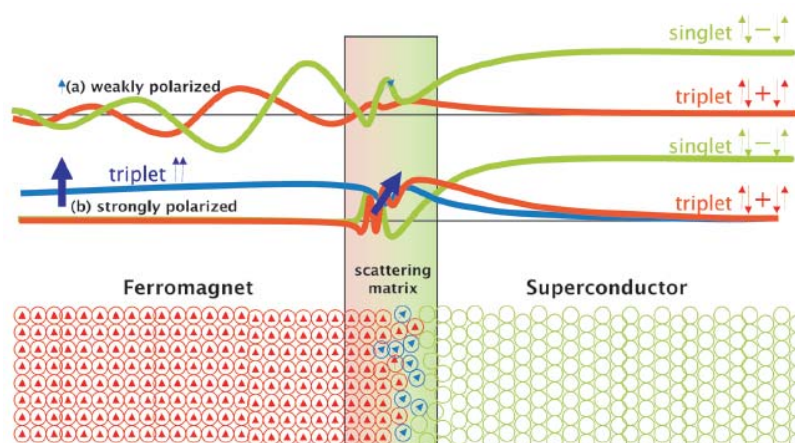
ฟังก์ชันคลื่นตัวแรกอธิบายถึงตัวนำยวดยิ่งที่มีสปินจับคู่แบบเดี่ยว (singlet) มีค่าไม่เป็นศูนย์ทั่วบริเวณตัวนำยวดยิ่งและในช่วงระยะความยาวอาพันธ์ ξ_F ในแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ ส่วนฟังก์ชันคลื่นที่สอง $f_3(t-t')$ อธิบายถึงองค์ประกอบของตัวนำยวดยิ่งที่มีสปินจับคู่แบบสาม (triplet) โดยที่ทิศการชี้สปินของคู่คูเปอร์อยู่แนวเดียวกับแมกนีไทเซชันของแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ มีค่าไม่เป็นศูนย์เฉพาะบริเวณใกล้รอยต่อของแผ่นประกบ S/F คือช่วงระยะอาพันธ์ $\xi_S = \sqrt{D/2\pi T_c}$ ทางด้านตัวนำยวดยิ่ง และช่วงระยะอาพันธ์ ξ_F ทางด้านแม่เหล็กเฟอร์ไรต์

เมื่อแมกนีไทเซชันในแม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีค่าไม่สม่ำเสมอ เช่นมีการหมุนวน หรือทำมุมใด ๆ ในระนาบ ไม่เพียงแต่มีคู่ตัวนำยวดยิ่งจับคู่แบบเดี่ยวและจับคู่แบบสามที่มีสปินชี้ในทิศเดียวกับโมเมนต์แม่เหล็กเท่านั้น ยังคงมีองค์ประกอบของตัวนำยวดยิ่งแบบจับคู่แบบสาม ที่สปินชี้ในทิศตั้งฉากกับทิศการชี้ของแมกนีไทเซชันในแม่เหล็กเฟอร์ไรต์เกิดขึ้นในระบบ คู่คูเปอร์ที่มีสปินจับคู่แบบสามที่เกิดขึ้นนี้เขียนในรูปฟังก์ชันคลื่นคือ $f_r(t-t') \sim \langle \psi_\uparrow(t) \psi_\uparrow(t') \rangle$ และ $f_r(t-t') \sim \langle \psi_\downarrow(t) \psi_\downarrow(t') \rangle$ จะทะลุทะลวง สู่แม่เหล็กเฟอร์ไรต์ได้ในระยะไกล แสดงดังภาพประกอบ 29 และภาพประกอบ 30



ภาพประกอบ 29 ระยะทะลุทะลวงลึกของตัวนำยวดยิ่งจับคู่แบบเดี่ยวและจับคู่แบบสามเมื่อแม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีแมกนีไทเซชันไม่สม่ำเสมอ

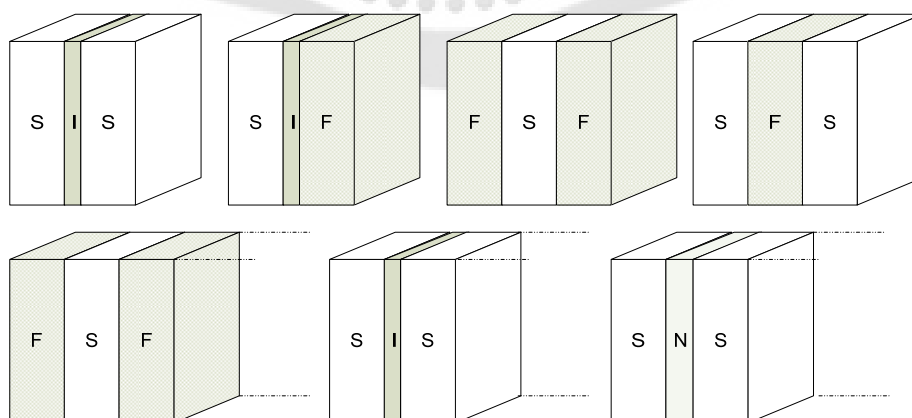
ที่มา: Anishchanka. (2008). op. cit. p 7.



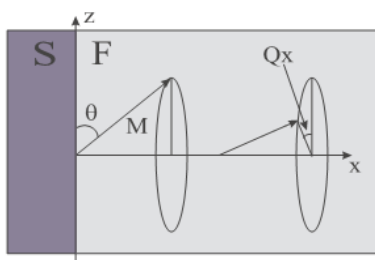
ภาพประกอบ 30 ระยะทะลวงลึกของตัวนำยิ่งยวดยิ่งจับคู่แบบเดี่ยวและเหนี่ยวนำให้เกิดตัวนำยิ่งยวดยิ่งจับคู่แบบสามที่ใกล้รอยต่อของแผ่นประกบ เมื่อแม่เหล็กเฟอร์โรมีแกนไนโตรเจนไม่สม่ำเสมอ ภาพบน แสดงการกระเจิงแบบอ่อน และภาพล่าง แสดงการกระเจิงแบบเข้ม

ที่มา: M. Eschrig ; & T. Lofwander. (2008). *Triplet Supercurrents in Clean and Disordered Half-metallic Ferromagnets*. p.138.

นอกจากระบบของแผ่นประกบ 2 ชั้น S/N และ S/F ที่กล่าวมาแล้ว ปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับแม่เหล็กเฟอร์โรยังเกิดได้ในอีกหลากหลายสถานการณ์ รวมถึงรูปแบบต่างๆ ของการวางตัวของแกนไนโตรเจนในแม่เหล็กเฟอร์โร แสดงดังภาพประกอบต่อไปนี้

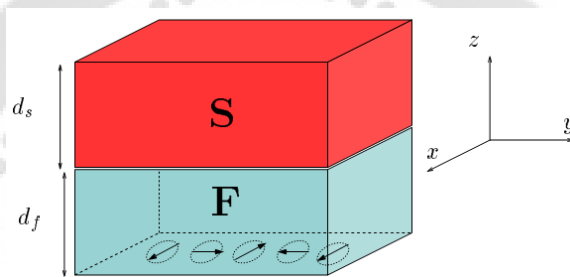


ภาพประกอบ 31 รูปแบบของแผ่นประกบต่างๆ ที่ใช้ศึกษาปรากฏการณ์พรีอักษิมิตี



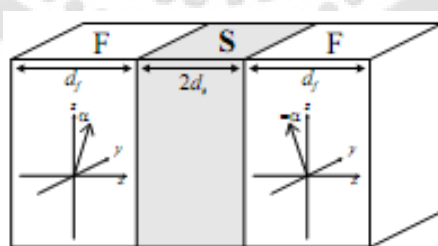
ภาพประกอบ 32 แผ่นประกบสอง F/S มีแมกนีไทเซชันของแผ่น F หมุนวนในระนาบ (y, z) โดยทำมุมกับแกน x คงตัว

ที่มา: Volkov; Anishchanka; & Efetov. (2006). Phys. Rev. B 73, 104412: p. 4.



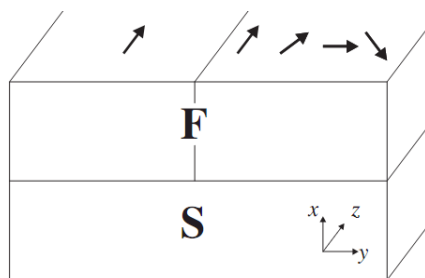
ภาพประกอบ 33 แผ่นประกบสอง F/S มีโมเมนต์แม่เหล็กหมุนวนในแผ่น F

ที่มา: Champel; & Eschrig. (2006). Physical Review B 71: p1.



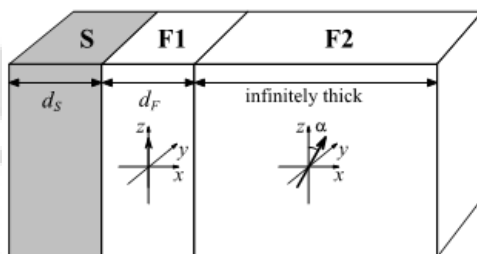
ภาพประกอบ 34 แผ่นประกบสาม FSF มีแมกนีไทเซชันวางตัวในระนาบ y-z มีมุมระหว่างระนาบในแผ่น F ทั้งสองเท่ากับ 2α

ที่มา: Fominov; Golubov; & Kupriyanov. (2003). JETP. Lett. 77, 587: p 1.



ภาพประกอบ 35 แผ่นประกบสอง F/S มีแมกนีไทเซชันของแผ่น F หมุนวนในระนาบ (y, z)

ที่มา: Volkov; Fominov; & Efetov. (2005). *Phys. Rev. B* 72, 184504: p. 2.



ภาพประกอบ 36 แผ่นประกบสาม S/F1/F2 มีสนามแลกเปลี่ยนวางตัวในระนาบ (y, z)

ที่มา: Fominov; et al. (2010). *Phys. Rev. B* 81, 214435: p 2.

ในงานวิจัยนี้ จะกล่าวถึงปรากฏการณ์ฟร็อกซิมิตีที่เกิดขึ้นในระบบของแผ่นประกบ 2 ชั้น ที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร (S/F) เมื่อแมกนีไทเซชันในแม่เหล็กเฟอร์โรมีการหมุนวนในระนาบ 3 มิติ ด้วยมุมที่มีค่าต่าง ๆ กัน

ความมุ่งหมายของงานวิจัย

เพื่อหาค่าคุณสมบัติวิกฤต ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร พลังงานแลกเปลี่ยนในแม่เหล็กเฟอร์โร ค่าความโปร่งใส (transparency) ที่ผิวรอยต่อระหว่างแผ่นประกบของระบบแผ่นประกบที่ประกอบด้วยตัวนำวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร (S/F bilayer) เมื่ออิเล็กตรอนมีการจับคู่แบบเดี่ยว และแบบสาม ที่มีโมเมนต์แม่เหล็กในรูปแบบต่าง ๆ เช่น ขนาน ตั้งฉากและทำมุมใด ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

การหาค่าอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร ใช้สมการอุสซาเดล (Usadel's equation) ในตัวนำยวดยิ่งที่มีการจับคู่แบบเดี่ยว และจับคู่แบบสาม

ความสำคัญของการวิจัย

จากการศึกษาปรากฏการณ์พรีออกซิมีติระหว่างแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่ออิเล็กตรอนมีการจับคู่แบบเดี่ยว (singlet) และแบบสาม (triplet) มีโมเมนต์แม่เหล็กในรูปแบบต่าง ๆ ทำให้สามารถทราบค่าอุณหภูมิวิกฤตของระบบขึ้นกับพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง และนำไปใช้ประโยชน์ในการเตรียมฟิล์มบาง นอกจากนี้ในงานวิจัยนี้จะมีการนำเสนอแมกนีไทเซชันที่มีการหมุนวนในสามมิติกระทำต่อคู่อิเล็กตรอนที่มีการจับคู่แบบเดี่ยวและแบบสาม และศึกษาผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร



บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนโดยใช้สมการการส่งผ่าน เริ่มในช่วงต้นทศวรรษที่ 60 ปี 1964 เกลดิช (Keldysh) ได้ประยุกต์สมการโดยใช้เทคนิคฟังก์ชันของกรีน (Green's function) เพื่อพิสูจน์ให้ได้มาซึ่งสมการทางจลนศาสตร์ของอิเล็กตรอน ตั้งแต่นั้นมาจึงเรียกว่าวิธีการนี้ว่า non-equilibrium Keldysh Green's functions method วิธีการนี้ใช้กันอย่างกว้างขวางในการอธิบายปรากฏการณ์การส่งผ่านข้อมูลความน่าจะเป็นของอนุภาคอิเล็กตรอน อธิบายการแพร่ของอนุภาคที่เกิดอันตรกิริยาต่าง ๆ ในระบบ เช่น การเกิดอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน-อิเล็กตรอน การกระเจิงของอิเล็กตรอนในโลหะที่มีสารเจือปน สภาพนำยวดยิ่งแบบไม่สมดุล คุณสมบัติของอนุภาคเดี่ยว ความหนาแน่นของสถานะ และกระแสไฟฟ้า เป็นต้น

กรณีตัวนำยวดยิ่ง ในภาพรวมตามเทคนิควิธีของเกลดิช ใช้ฟังก์ชันของกรีนซึ่งเป็นเมตริกซ์ 2×2 ในปริภูมิของลำดับเวลา (time ordered) หรือปริภูมิเกลดิช ไม่พอเพียงที่จะอธิบายสมบัติของระบบนี้ ยังต้องมีการเสริมด้วยเมตริกซ์ 2×2 ในปริภูมิอนุภาค-โฮล หรือเรียกว่าปริภูมินัมบู (Nambu space) เข้าในเทคนิควิธีของเกลดิชด้วย จึงจะช่วยอธิบายสมบัติของสภาพนำยวดยิ่งได้ดียิ่งขึ้น

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ฟังก์ชันของกรีนสำหรับตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร

ในที่นี้จะเสนอทฤษฎีกึ่งคลาสสิก สั้น ๆ โดยเริ่มจากระบบในระดับจุลภาค ฟังก์ชันของกรีน นัมบู-กอร์ดอฟ ซึ่งเป็นที่ทราบกันว่าการจับคู่ของคู่อิเล็กตรอนอยู่ในสถานะจับคู่แบบเดี่ยว อธิบายได้โดยฟังก์ชันของกรีน ที่ขึ้นกับทิศทางในปริภูมิของสปิน รวมไปถึงระบบที่มีสปินของอิเล็กตรอนซับซ้อน หรือกรณีสปินอิเล็กตรอนมีการหมุนในทิศทางใด ๆ ดังเช่น การร่วมกันเป็นระบบระหว่างสมบัติที่ต่อต้านกันสองประเภทคือสภาพนำยวดยิ่งและสภาพแม่เหล็กเฟอร์โร เริ่มโดยกำหนดสนามนัมบูสไปเนอร์ (Nambu spinor field) $\Psi(r, t)$

$$\Psi(r, t) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(x, t) \\ \psi_{\downarrow}(x, t) \\ \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \end{pmatrix}$$

เมื่อ $\uparrow, \downarrow$ หมายถึงทิศของสปินอิเล็กตรอน

ใช้สไปเนอร์นี้ยามฟังก์ชันของกรีนโดยการคูณแบบเทนเซอร์

$$\hat{G}(x', x, t', t) = -i \langle T \Psi(x', t') \Psi(x, t) \rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} -i \langle T \psi_{\uparrow}(x', t') \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}(x', t') \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}(x', t') \psi_{\uparrow}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}(x', t') \psi_{\downarrow}(x, t) \rangle \\ -i \langle T \psi_{\downarrow}(x', t') \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}(x', t') \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}(x', t') \psi_{\uparrow}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}(x', t') \psi_{\downarrow}(x, t) \rangle \\ -i \langle T \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\uparrow}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\downarrow}(x, t) \rangle \\ -i \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\uparrow}(x, t) \rangle & -i \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x', t') \psi_{\downarrow}(x, t) \rangle \end{pmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ 4X4 ประกอบด้วยปริภูมิอนุภาค-โฮล และปริภูมิสปิน หรือที่เรียกว่า ปริภูมินัมมู แบ่งเมตริกซ์นี้ออกเป็น 4 เมตริกซ์ย่อย ประกอบด้วยกรีนฟังก์ชันแบบปกติ และแบบปกติ คือ

$$\hat{G} = \hat{g} = \begin{pmatrix} g & f \\ \tilde{f} & \tilde{g} \end{pmatrix}$$

เมื่อ $f^*(x', x, t', t) = \tilde{f}(x', x, t', t)$ และ $g^*(x', x, t', t) = \tilde{g}(x', x, t', t)$ เป็นสมบัติความสมมาตรพื้นฐานและความสัมพันธ์นี้จะมีความสำคัญมากในระดับต่อไป องค์ประกอบของฟังก์ชันกรีนเหล่านี้อธิบายปริภูมิอนุภาค-โฮล จะแสดงปริภูมิสปินโดยใช้เมตริกซ์ของเพาลี $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

$$f = [f_s \sigma_0 + \vec{f}_t \cdot \vec{\sigma}] i \sigma_y$$

$$g = g_0 \sigma_0 + \vec{g} \cdot \vec{\sigma}$$

ฟังก์ชัน (f_s, g_0) และ $(\vec{f}, \vec{g})$ แสดงถึงองค์ประกอบทางสปินของคลื่นแบบซินเกรตและแบบทริปเลตซึ่งปกติแล้ว ที่ตัวนำยวดยิ่ง จะมีเฉพาะคลื่นซินเกรตเท่านั้น แต่เมื่อเข้าใกล้รอยต่อของแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร จะเกิดการโน้มน้าวสปินอิเล็กตรอนให้เกิดเป็นคลื่นทริปเลตขึ้นด้วย ฟังก์ชันกรีนที่กำหนดให้กับระบบ สามารถหาผลเฉลยได้จากสมการไดสัน (Dyson-equation)

$$[\hat{G}_0^{-1} - \hat{\Sigma}] \otimes \hat{G} = \hat{1}$$

$$\hat{G} \otimes [\hat{G}_0^{-1+} - \hat{\Sigma}] = \hat{1}$$

ซึ่งพิสูจน์ได้จากสมการโบโกลิบอฟ-เลอจอง (Bogoliubov-de-Gennes equations) (P. G. de Gennes. 1964.) เครื่องหมาย $\otimes$ เป็นการคูณเมตริกซ์เทนเซอร์ของปริภูมินัมพู และอินทิกรัลทั่วเวลา และปริภูมิของพิกัดตำแหน่ง และปริภูมินี้จะถูกปล่อยออกไปเมื่อใช้ฟังก์ชันกรีนกึ่งคลาสสิก เหลือเพียงตัวแปรของเวลาเท่านั้น สุดท้าย ในงานนี้เราจะใช้ฟังก์ชันกรีนแบบเกลดิชและมัดสุบวระต่อไปแปลงฟังก์ชันกรีนแบบกึ่งคลาสสิกในรูป

$$\hat{G}(p, R) = \int d^3r \hat{G}(R + r/2, R - r/2) e^{ipr}$$

$$r = r_2 - r_1, R = \frac{r_2 + r_1}{2}$$

ซึ่งเป็นการแปลงฟูเรียร์เทียบกับตำแหน่ง ฟังก์ชันกรีนมีค่าสูงสุดรอบๆ $p_F \pm \delta p$, $\delta p \ll p_F$ จากนั้นอินทิเกรตทั่ว $\xi = v_F (p - p_F)$ จะได้ฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่ง R โดยทั่วไป กำหนด

$$\hat{G}_0^{-1}(x, t) = i\tau_3 \partial_t - e\Phi(x) - \varepsilon \left(p - \tau_3 \frac{e}{c} A \right) - E_F$$

$$\hat{\Psi}_{n,s}^\sigma(1) = \begin{pmatrix} \psi_{n,s}^\sigma(1) \\ \tilde{\psi}_{n,s}^\sigma(1) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

เมื่อ $(1) \equiv (\bar{x}, t)$ แสดงตำแหน่ง และเวลา และ

$$\tilde{\psi}_{n,\uparrow}^\sigma(1) = -\psi_{n,\downarrow}^{\dagger\sigma'}(1) \quad (2.2)$$

$$\tilde{\psi}_{n,\downarrow}^\sigma(1) = \psi_{n,\uparrow}^{\dagger\sigma'}(1) \quad (2.3)$$

เฮอร์มิเทียนคอนจูเกตของสไปเนอร์สนามนัมพู นิยามเป็น

$$\hat{\Psi}_{n,s}^{\dagger\sigma}(1) = \begin{pmatrix} \psi_{n,s}^{\dagger\sigma}(1) \\ -\tilde{\psi}_{n,s}^{\dagger\sigma}(1) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

จากสมการข้างต้นนี้ จึงนิยามฟังก์ชันนัมพูของกรีนแบบปกติ G และแบบปกติ F จาก

$$G_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = -i \langle \psi_{n,s}^\sigma(1) \psi_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \rangle \quad (2.5)$$

$$F_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = -i \langle \psi_{n,s}^\sigma(1) \psi_{m,s'}^{\sigma'}(1') \rangle \quad (2.6)$$

$$\tilde{F}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = +i \langle \psi_{n,s}^{\dagger\sigma}(1) \psi_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \rangle \quad (2.7)$$

$$\tilde{G}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = +i \langle \psi_{n,s}^{\dagger\sigma}(1) \psi_{m,s'}^{\sigma'}(1') \rangle \quad (2.8)$$

นิยามฟังก์ชันของกรีน G และ F เป็นเมตริกซ์ $4N_m \times 4N_m$ ซึ่งเป็นปริภูมิที่ครอบคลุมถึงสปิน โหมดและ ทิศทาง เมื่อ N_m เป็นจำนวนโหมดของการแพร่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันของกรีนเหล่านี้จะต้องแสดงและอธิบายสมบัติของสปินอิเล็กตรอน เช่น สปินของการจับคู่แบบสาม โดยฟังก์ชันของกรีนแบบปกติแสดงเป็น $F_{n,\uparrow;m,\uparrow}^{\sigma,\sigma'}(F_{n,\downarrow;m,\downarrow}^{\sigma,\sigma'})$ แต่ถ้าเป็นเมตริกซ์ $8N_m \times 8N_m$ จะกล่าวถึงการแผ่คลุมของ สปิน โหมด ทิศทาง ของการจับคู่อิเล็กตรอนทั้งคู่ ดังที่แสดงในภาพประกอบ (37) ซึ่งนิยามเป็น $\hat{G}_{n,s;m,s'}^{>\sigma,\sigma'}$ ดังนี้

$$\hat{G}_{n,s;m,s'}^{>\sigma,\sigma'}(1,1') = \begin{bmatrix} G_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') & F_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') \\ \tilde{F}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') & -\tilde{G}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ซึ่งเขียนในรูปกะทัดรัด โดยใช้นิยาม จากสมการ (2.1)

$$\hat{G}_{n,s;m,s'}^{>\sigma,\sigma'}(1,1') = -i \langle \hat{\Psi}_{n,s}^{\sigma}(1) \otimes \hat{\Psi}_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \rangle \quad (2.10)$$

และยังมีฟังก์ชันของกรีนที่เกลดิชนิยามคล้าย ๆ กัน ดังต่อไปนี้

$$\hat{G}_{n,s;m,s'}^{<\sigma,\sigma'}(1',1) = i \langle \hat{\Psi}_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \otimes \hat{\Psi}_{n,s}^{\sigma}(1) \rangle \quad (2.11)$$

$$\hat{G}_{n,s;m,s'}^{C\sigma,\sigma'}(1,1') = -i \langle T_c \{ \hat{\Psi}_{n,s}^{\sigma}(1) \otimes \hat{\Psi}_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \} \rangle \quad (2.12)$$

$$\hat{G}_{n,s;m,s'}^{\tilde{C}\sigma,\sigma'}(1,1') = -i \langle \tilde{T}_c \{ \hat{\Psi}_{n,s}^{\sigma}(1) \otimes \hat{\Psi}_{m,s'}^{\dagger\sigma'}(1') \} \rangle \quad (2.13)$$

เมื่อ $T_c, \tilde{T}_c$ คือโอเปอเรเตอร์ลำดับของเวลา time-ordering และ anti- time-ordering ตามลำดับ ดังนั้นถ้ากล่าวถึงเมตริกซ์ $16N_m \times 16N_m$ จะอธิบายแผ่คลุมทั้งปริภูมิเกลดิช นัมมู สปิน โหมด ทิศทาง ฟังก์ชันของกรีนเขียนได้ ดังนี้

$$\tilde{G}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = \begin{bmatrix} \hat{G}_{n,s;m,s'}^{C\sigma,\sigma'}(1,1') & \hat{G}_{n,s;m,s'}^{<\sigma,\sigma'}(1,1') \\ \hat{G}_{n,s;m,s'}^{>\sigma,\sigma'}(1,1') & \hat{G}_{n,s;m,s'}^{\tilde{C}\sigma,\sigma'}(1,1') \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

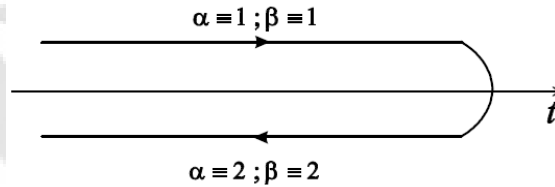
จากการแปลงเมตริกซ์ทั้งหมดรวมกัน ในที่สุดจะได้ฟังก์ชันเมตริกซ์ของกรีนกรีน $\tilde{G}$ ในเทอมย่อยที่ทราบกันดี คือรีตาร์ด ($\hat{G}^R$) แอดวานซ์ ($\hat{G}^A$) และเกลดิช ($\hat{G}^K$) กรีนฟังก์ชัน

$$\tilde{G}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1,1') = \begin{bmatrix} \hat{G}_{n,s;m,s'}^{R\sigma,\sigma'}(1,1') & \hat{G}_{n,s;m,s'}^{K\sigma,\sigma'}(1,1') \\ 0 & \hat{G}_{n,s;m,s'}^{A\sigma,\sigma'}(1,1') \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

ซึ่ง $\hat{G}^{R(A)}$ มีข้อมูลเกี่ยวกับคุณสมบัติทางสเปกตรัมสมดุลของระบบ และ $\hat{G}^K$ อธิบายการส่งผ่านของระบบที่ไม่สมดุล นิยามใหม่ให้ $\hat{G}^{\alpha\beta}$: เป็นเกลดิชกรีนฟังก์ชัน

$$\hat{G}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \hat{G}^{11} & \hat{G}^{12} \\ \hat{G}^{21} & \hat{G}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}^C & \hat{G}^< \\ \hat{G}^> & \hat{G}^{\bar{C}} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

โดย $\hat{G}^<(t,t')$ และ $\hat{G}^>(t,t')$ ถูกเรียกว่า “อนุภาค” และ “โฮล” propagator ตามลำดับ ซึ่งจะนำข้อมูลการส่งผ่านเกี่ยวกับพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน แสดงดังภาพประกอบ 37 พบว่าองค์ประกอบทั้ง 4 ตัว คือ $\hat{G}^C(t,t')$, $\hat{G}^{\bar{C}}(t,t')$, $\hat{G}^>(t,t')$ และ $\hat{G}^<(t,t')$ ไม่เป็นอิสระต่อกันแบบเชิงเส้น และเมื่อถูก



ภาพประกอบ 37 ฟังก์ชันของกรีนเกลดิช $\tilde{G} = G_{\alpha\beta}$ นิยามบนเส้นเวลาของเกลดิช (Keldysh contour)

อักษร α แทนข้อมูลที่เวลาเริ่มต้น t และ β แทนข้อมูลในเวลาที่ต่อมา t' ของ $G^{\alpha\beta}(t,t')$

ที่มา: Hernando. D. H. (2002). *Coherent Transport in Superconducting and Ferromagnetic Hybrid Systems*. p.12.

กระทำได้ด้วยการแปลง unitary Keldysh จะทำให้องค์ประกอบลดลงเหลือ 3 ตัว ที่อิสระต่อกัน คือ $\hat{G}^R(t,t')$, $\hat{G}^A(t,t')$ และ $\hat{G}^K(t,t')$ ที่มีข้อมูลเกี่ยวกับ spectral properties ที่ภาวะสมดุลของระบบ โดย $\hat{G}^K(t,t')$ จะมีข้อมูลการส่งผ่านที่ภาวะไม่สมดุลของตัวนำ

สมการอุสาคเล ระบบแพร่ซึม และการประมาณแบบคลาสสิกของอนุภาคควอไซล์

โดยการแทนสมการไดรชันและคอนจูเกต ซึ่งได้สมการการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันของกรีนใน ปริภูมิที่แผ่คลุมของเกลดิช, นัมบู, สปิน, โหมด และทิศทาง ดังนี้ (Usadel Klaus D. 1970.)

$$\left(i\tilde{\tau}_3\partial_t + \frac{(\tilde{\nabla} - ie\tilde{\tau}_3\tilde{A})^2}{2m} \tilde{1} + \mu\tilde{1} - e\varphi\tilde{1} + \tilde{\Delta} - \tilde{\Sigma} \right) \tilde{G}(\bar{x}, \bar{x}'; t, t') = \tilde{1}\delta(\bar{r} - \bar{r}')\delta(t - t') \quad (2.17)$$

$$\text{เมื่อ } \tilde{G}(\bar{x}, \bar{x}'; t, t') = \tilde{G}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'}(1, 1')$$

$$\tilde{\tau}_3 = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_3 & 0 \\ 0 & -\hat{\tau}_3 \end{bmatrix}; \quad \hat{\tau}_3 = \begin{bmatrix} 1_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} & 0 \\ 0 & -1_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta} \end{bmatrix}; \quad \hat{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} \\ -(\Delta_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'})^* & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \left(\hat{\Sigma}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} \right)^R & \left(\hat{\Sigma}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} \right)^K \\ 0 & \left(\hat{\Sigma}_{n,s;m,s'}^{\sigma,\sigma'} \right)^A \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

เมื่อ φ เป็นศักย์สเกลาร์ทางไฟฟ้าสถิต $\tilde{A}$ เป็นเวกเตอร์โพเทนเชียล μ เป็นศักย์ทางเคมี $\tilde{\Delta}$ เป็นศักย์แห่งการจับคู่ และ $\tilde{\Sigma}$ เป็น self energy สัญลักษณ σ, σ' แทนปริภูมิที่แผ่คลุม สปิน, โหมด และทิศทาง

ขั้นตอนแรกแทนสมการ (2.17) และคอนจูเกตของสมการในเทอมของศูนย์กลางมวล

$$\bar{R} = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{2}; \quad \bar{r} = \bar{x} - \bar{x}' \quad (2.21)$$

และแสดงฟังก์ชันของกรีน $\tilde{G}(\bar{r}, \bar{R}; t, t')$ ในเทอมของการแปลงฟูเรียร์

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{R}; t, t') = \int \frac{d\bar{p}}{(2\pi)^3} \exp\{i\bar{p}\bar{r}\} \tilde{G}(\bar{p}, \bar{R}; t, t') \quad (2.22)$$

แปลงโมเมนตัม $\bar{p}$ ในเทอมของตัวแปร $\xi_p = \frac{p^2}{2m} + \mu$ สมการ (2.22) เขียนเป็น

$$\int d\xi_p \Gamma(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') \tilde{G}(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = 0 \quad (2.23)$$

เมื่อ $\Gamma(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t')$ ซึ่งสอดคล้องกับเทอมผลคูณ $\check{G}(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t')$ การประมาณแบบควอไฮลด์คลาสสิกอาศัยสมมติฐานที่ว่าทุกระดับความยาวที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของการส่งผ่านในระบบจะต้องมีขนาดใหญ่กว่าความยาวคลื่นเฟอร์มี ภายใต้สมมติฐานนี้เพื่อลดความซับซ้อนฟังก์ชันของกรีนจึงเขียนในรูป $\check{G}(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = \delta(\xi_p) \check{G}(0, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t')$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของการโมเมนตัม $\bar{p}$ นอกจากนี้ยังสมมติว่า $\Gamma(\xi_p, \bar{u}_p)$ เปลี่ยนแปลงช้ามาก โดยมีความแตกต่างแตกต่างกันในระดับเดียวกับความยาวคลื่นเฟอร์มี สมการ (2.23) จึงประมาณได้เป็น

$$\begin{aligned} \int d\xi_p \Gamma(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') \check{G}(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') &= \int d\xi_p \Gamma(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') \delta(\xi_p) \check{G}(0, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') \\ &= \Gamma(0, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') \int d\xi_p \delta(\xi_p) \check{G}(\xi_p, \bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

นิยามฟังก์ชันของกรีนใหม่ เป็น

$$\check{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = \frac{i}{\pi} \int d\xi_p \check{G}(\bar{p}, \bar{R}; t, t') \quad (2.25)$$

เรียกว่าฟังก์ชันของกรีนนี้ว่าควอไฮลด์คลาสสิก สมการที่ (2.24) เขียนใหม่ เป็น

$$i\vec{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial t} \check{g} + i \frac{\partial}{\partial t'} \check{g} \vec{\tau}_3 + i\vec{v}_F \cdot \vec{\nabla}_R \check{g} + \check{H}(t) \check{g} - \check{g} \check{H}(t') + (\check{\Sigma} \square \check{g})(t, t') = 0 \quad (2.26)$$

เมื่อ $\check{H}(t) = -ep_F \bar{u}_p \check{A}(t) \vec{\tau}_3 / m - \check{\Delta}(t) + e\varphi(t) \check{I}$ และ

$$(\check{\Sigma} \square \check{g})(t, t') = \int dt'' [\check{\Sigma}(t, t'') - \check{g}(t, t'') \check{\Sigma}(t'', t')] \quad (2.27)$$

สมการ (2.27) จะเป็นคำตอบของการประมาณแบบกึ่งคลาสสิก โดยจะเป็นสมการเอกพันธ์ (homogeneous) การหาค่า $\check{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; t, t')$ จะต้องมีการกำหนดตัวบังคับเพิ่มเติมที่เรียกว่าเงื่อนไขการ normalization condition

$$\int dt'' \check{g}(t, t'') \check{g}(t'', t') = \check{I} \delta(t, t') \quad (2.28)$$

ถ้ากำหนดให้ขนาดของระบบใหญ่กว่าระยะวิถีอิสระ l_{mfp} และอิเล็กตรอนมีการกระเจิงแบบยืดหยุ่น จะเป็นตัวแปรหลักของการเกิด self energy โดยที่ตัวแปรอื่น ๆ เช่นการกระเจิงเนื่องจากสปินจะสามารถเกิดขึ้นได้ในขนาดสเกลที่ยาวกว่านี้มาก ๆ จากเงื่อนไขเหล่านี้ จะสามารถประมาณการแพร่ได้โดยการกระจายฟังก์ชันของกรีน $\check{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; t, t')$ ถึงลำดับที่ 1 ในฮาร์โมนิกทรงกลม (spherical harmonic)

$$\bar{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = \bar{g}_s(\bar{R}, t, t') + \bar{u}_p \bar{g}_p(\bar{R}, t, t') \quad (2.29)$$

และเมื่อแทนกลับไปในสมการ (2.30) และพิจารณากรณี stationary ฟังก์ชันของกรีนจะขึ้นกับผลต่างของเวลา $\tau = t - t'$ ทำให้สามารถทำการแปลงฟูเรียร์กับสมการ $\bar{g}_s = \bar{g}_s(\bar{u}_p, \bar{R}; \varepsilon)$ ได้

$$\bar{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; t, t') = \int dt \exp\{i\varepsilon(t - t')/\hbar\} \bar{g}(\bar{u}_p, \bar{R}; \varepsilon) \quad (2.30)$$

เพื่อให้ง่ายขึ้น ละทิ้งปฏิสัมพันธ์กับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เช่น $\bar{A}$ และ $\varphi = 0$ สมการ (2.27) จึงแปลงเป็น

$$D\bar{\nabla}_{\bar{R}}(\bar{g}_s \bar{\nabla}_{\bar{R}} \bar{g}_s) + i[\bar{H}, \bar{g}_s] + i[\bar{\Sigma}, \bar{g}_s] = 0 \quad (2.31)$$

โดย $\bar{H} = \varepsilon \bar{\tau}_3 - \bar{\Delta}$ และ $\bar{\Sigma}$ เป็น self energy สมการนี้เรียกว่า สมการอุสาดเอล (Usadel equation) ซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางว่าเป็นสมการที่อธิบายสมบัติการแพร่ซึมของฟังก์ชันของกรีน $\bar{g}_s$ ในควาโซคลาสสิกที่ขึ้นกับทิศทาง

สำหรับปรากฏการณ์พรีออคซิมีตีของแผ่นประกบ 2 ชั้น ระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร นั้น ได้มีการศึกษาทั้งด้านการทดลองและด้านทฤษฎี ดังต่อไปนี้

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยและทฤษฎีที่ใช้เป็นพื้นฐานในการอธิบายสมบัติการเปลี่ยนแปลงแบบไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤต ที่ดีทฤษฎีหนึ่งคือ ทฤษฎีของไอลินเบอร์เกอร์ (Eilenberger; 1968.) และสมการของอุสาดเอล (Usadel, 1970.) ด้วยเงื่อนไขว่าตัวนำยวดยิ่งสกปรก(dirty-limit) ดังนั้นเวลาในการกระเจิงของอิเล็กตรอน $\tau = l/v_F$ จึงมีค่าน้อย เมื่อ l คือระยะทาง, v_F คือความเร็วเฟอร์มี หรือเพื่อให้ระบุชัดขึ้นคือ เมื่อ $T_c \tau \ll 1$ และ $\hbar \tau \ll 1$ โดยที่ $\hbar$ คือความเข้มของสนามแลกเปลี่ยนภายใน ทำให้สมการของอุสาดเอลใช้ได้ ในกรณีที่สนามแลกเปลี่ยนมีค่ามาก ($\hbar \gg T_c$) สมการของอุสาดเอลใช้ฟังก์ชันกรีนแบบ ปกติ $G(x, \omega)$ และฟังก์ชันกรีนแบบอปกติ $F(x, \omega)$ ในการคำนวณ

งานวิจัยตามทฤษฎีอุสาดเอลที่เกี่ยวข้องกับแผ่นประกบ S/F มีดังต่อไปนี้

(1) ราโดวิกและคณะ (Radovic. et al. 1990: 759-764) ได้ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตของระบบแผ่นประกบที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร ที่มีหลายชั้นซ้อนกัน (superlattices) โดยใช้สมการอุสาดเอล (Usadel equation) ที่เริ่มจาก

$$-\frac{\hbar D}{2} \nabla^2 [G(\vec{r}, \omega) \nabla^2 F(\vec{r}, \omega) - F(\vec{r}, \omega) \nabla^2 G(\vec{r}, \omega)] = G(\vec{r}, \omega) \Delta(\vec{r}) - \hbar \omega F(\vec{r}, \omega) \quad (2.32)$$

$$-\frac{\hbar D}{2} \nabla^2 [G(\vec{r}, \omega) \nabla^2 F^+(\vec{r}, \omega) - F^+(\vec{r}, \omega) \nabla^2 G(\vec{r}, \omega)] = G(\vec{r}, \omega) \Delta^*(\vec{r}) - \hbar \omega F^+(\vec{r}, \omega) \quad (2.33)$$

$$\text{และ} \quad G^2(\vec{r}, \omega) + F(\vec{r}, \omega) F^*(\vec{r}, \omega) = 1 \quad (2.34)$$

เมื่อ D คือสัมประสิทธิ์การแพร่ซึม ($D_{S,F}$ ใน S และ F ตามลำดับ), $\omega = \pi k_B T (2n+1)$ โดย $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, T คืออุณหภูมิ $F(\vec{r}, \omega)$ และ $G(\vec{r}, \omega)$ คือฟังก์ชันของกรีนแบบปกติและแบบปกติตามลำดับ $\Delta(\vec{r})$ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (order parameter) หรือศักย์การจับคู่ (pair potential) ซึ่งขึ้นกับระยะห่าง ($\vec{r}$) ระหว่างคู่อิเล็กตรอนทั้งสองมีอันตรกิริยาอย่างอ่อน (weak coupling) ต่อกันในแผ่นตัวนำยวดยิ่งและใช้เงื่อนไข

$$\Delta(\vec{r}) = \pi k_B T \lambda \sum_{\omega} F(\vec{r}, \omega) \quad (2.35)$$

เมื่อ λ คือค่าคงตัวในการเกิดอันตรกิริยาจับคู่ที่ไม่มีหน่วย (dimensionless coupling constant) ที่ใกล้ T_c ซึ่งเป็นอุณหภูมิการเปลี่ยนเฟสในลำดับที่สอง จากสมการนำยวดยิ่งสู่สมการปกติ เพราะ $|F| \ll 1$ และ $G \approx \text{sgn } \omega$ สมการอุทกศาสตร์ (1.1) และ (1.2) ที่ลดรูปจะแสดงความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta(x)$ กับแอมพลิจูดของคู่อิเล็กตรอน $F(x, \omega)$ พิจารณาในแผ่น S สมการ (2.32) – (2.35) ลดรูปเป็น

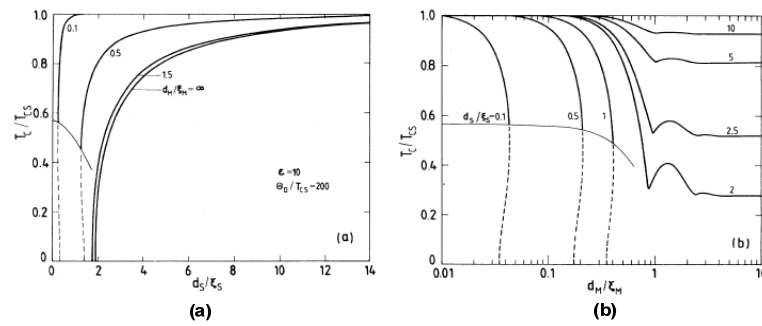
$$-\frac{\hbar D_S}{2} \frac{d^2}{dx^2} F_S(x, \omega) = \Delta_S(x) - \hbar |\omega| F_S(x, \omega) \quad (2.36)$$

$$\Delta_S(x) = \pi k_B T \lambda \sum_{\omega} F_S(x, \omega) \quad (2.37)$$

นอกจากนี้ที่ผิวรอยต่อระหว่าง S/F ก็ต้องใช้เงื่อนไขขอบเขต

$$F_S(x, \omega) = F_F(x, \omega) \quad \text{และ} \quad \frac{dF_S}{dx}(x, \omega) = \eta \frac{dF_F}{dx}(x, \omega) \quad (2.38)$$

สมการที่ (2.37) และ (2.38) ใช้เงื่อนไขขอบเขตและการแปลงฟูเรียร์ หา $t_c = T_c / T_{cs}$ เป็นฟังก์ชันของ d_S / ξ_S , d_F / ξ_F และ ε สอดคล้องกับค่าสูงสุดของ t_c เมื่อ $\theta_D = \hbar \omega_D$ แสดงดังภาพประกอบ 38



ภาพประกอบ 38 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c / T_{cs} เป็นฟังก์ชันของ (a) ความหนาลดทอน (d_S / ξ_S) ของแผ่น S และ (b) ความหนาลดทอน (d_M / ξ_M) ของแผ่น F สำหรับค่า $\varepsilon = 10$ และ $\theta_D / T_{cs} = 200$ เส้นประแสดงค่าซึ่งไม่เสถียร

ที่มา: Radovic; et al. (1991). *Transition temperature of Superconductor-Ferromagnet Superlattices*. p. 4.

(2) คูไซโนฟและโปรชิน (Khusainov; & Proshin. 1997: 14283 -14286) ได้เสนอทฤษฎีปรากฏการณ์พรีอ็อกซิมีตีของแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร โดยได้พิจารณาค่าความโปร่งใสที่ผิวรอยต่อ S/F ด้วย ได้แสดงให้เห็นการลดจำนวนของคูคูเปอร์เพราะถูกสนามแลกเปลี่ยนที่มีความเข้มสูงของแม่เหล็กเฟอร์โรกระทำและการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤตที่ขึ้นกับความหนาของแผ่น F โดยได้พิจารณาระนาบสัมผัสระหว่างแม่เหล็กเฟอร์โร ที่บริเวณ $-d_F < x < 0$ กับตัวนำยวดยิ่งที่บริเวณ $0 < x < d_S$ ที่อุณหภูมิใกล้ T_c หาอุณหภูมิวิกฤตจากสมการอินทิกรัลของกอร์คอฟ (Gor'kov) เพื่อความสะดวก ใช้ฟังก์ชันของอุสซาเดลแบบปกติ $F_{\alpha\beta}(x, \omega)$

$$\left[|\omega| + iI(x)g_{\alpha\beta} \operatorname{sgn} \omega - \frac{1}{2}D_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F_{\alpha\beta}(x, \omega) = \Delta(x) \quad (2.39)$$

เงื่อนไขขอบเขตบนแผ่น S/F ที่รอยต่อ $x = 0$

$$\begin{aligned} D_{S\alpha\beta}(x) \frac{\partial F_{\alpha\beta}(x, \omega)}{\partial x} \Big|_{x=+0} &= \frac{\sigma_S v_S}{4} [F_{\alpha\beta}(+0, \omega) - F_{\alpha\beta}(-0, \omega)] \\ D_{F\alpha\beta}(x) \frac{\partial F_{\alpha\beta}(x, \omega)}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= \frac{\sigma_F v_F}{4} [F_{\alpha\beta}(+0, \omega) - F_{\alpha\beta}(-0, \omega)] \end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อ $g_{\uparrow\downarrow} = -g_{\downarrow\uparrow} = 1$ และความโปร่งใสที่รอยต่อ S/F , σ_F และ σ_S ได้เชื่อมต่อกับ
ความสัมพันธ์ $\sigma_S v_S N_S = \sigma_F v_F N_F$ สัมประสิทธิ์การแพร่ซึม

$$D_{\alpha\beta}(x) = \frac{D(x)}{1 + 2i\tau(x)I(x)g_{\alpha\beta} \operatorname{sgn} \omega}, \quad D(x) = D_F = v_j l_j / 3 \quad (2.41)$$

เมื่อ $I(x < 0) = I$ และ $I(x > 0) = 0$

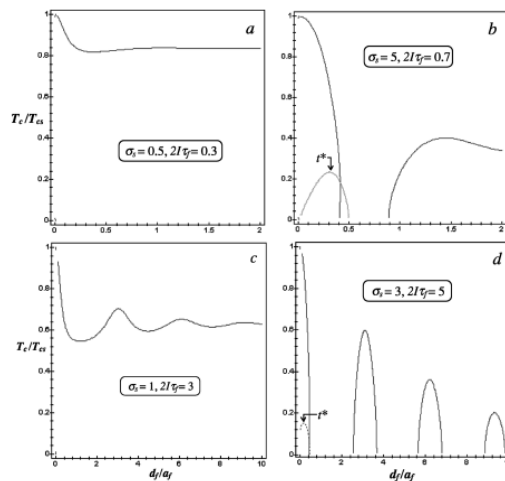
ใช้สมบัติความสมมาตรของฟังก์ชันอุสซาเดล $F_{\alpha\beta}(\omega) = F_{\beta\alpha}^*(\omega) = F_{\beta\alpha}(-\omega)$ เมื่อให้
อุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t = T_c / T_{cS}$ จะได้

$$\ln t = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Re} \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{D_S k_S^2}{4\pi T_{cS} t}\right) \quad (2.42)$$

$$D_S k_S \tan k_S d_S = \frac{\sigma_S v_S}{4 - (\sigma_F v_F / D_F^* k_F) \cot k_F d_F} \quad (2.43)$$

$$k_F^2 = -\frac{2iI}{D_F^*} = -\frac{2iI(1 + 2iI\tau_F)}{D_F} \quad (2.44)$$

เมื่อ $\Psi(x)$ เป็นไดแกมมาฟังก์ชัน จากสมการที่ (2.42) พารามิเตอร์การทำลายคู่ $D_S k_S^2$ และ
อุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับความหนาของแผ่น S/F , ความโปร่งใสของรอยต่อและความสัมพันธ์ระหว่าง
พลังงานแลกเปลี่ยนที่แยกอิเล็กตรอน 2 ชนิด เป็น $2I$ เทียบกับระดับเฟอร์มี และความถี่การชนของ
อิเล็กตรอน τ_F^{-1} กับสิ่งเจือที่ไม่เป็นแม่เหล็กในแม่เหล็กเฟอร์โร แสดงดังภาพประกอบ 39

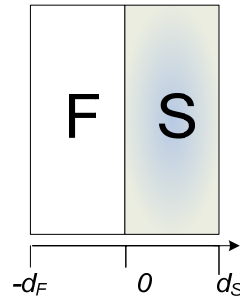


ภาพประกอบ 39 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t = T_c / T_{cs}$ กับความหนาลดทอน d_F / a_F ของแผ่น F ในระบบประกอบ 2 ชั้น S / F เมื่อ a_F คือความยาวเฟ้นเชิงสปิน พารามิเตอร์ที่สำคัญ คือ $N_S v_S = N_F v_F$, $d_S = 500 \text{ \AA}$ และ $\xi_{S_0} = 400 \text{ \AA}$ เมื่อ ξ_{S_0} คือความยาวอาพันธ์ในทฤษฎี BCS (a) อุณหภูมิวิกฤตมีค่าคงที่ (b) เกิดสภาพนำยวดยิ่งย้อนกลับ (c) เกิดการกวัดแกว่งของอุณหภูมิวิกฤตและ (d) ความเป็นคาบของการเกิดสภาพนำยวดยิ่งย้อนกลับ

ที่มา: Khusainov; & Proshin. (1997). *Possibility of Periodically Reentrance Superconductivity in Ferromagnet / Superconductors Layer Structure*. p. 14285.

กรณีการขึ้นกับ $T_c(d_F)$ เมื่อค่าความโปร่งใส σ_F น้อย ได้แสดงในภาพประกอบ 39(a) เป็นข้อมูลที่สังเกตได้จากพฤติกรรมของแผ่นประกอบ Gd / Nb และถ้าความโปร่งใสของขอบเขต S / F มีค่ามากและสนามแลกเปลี่ยนมีความเข้มสูง ระบบจะแสดงสภาพนำยวดยิ่งย้อนกลับ ดังแสดงในภาพประกอบ 39 (b) พฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $T_c(d_F)$ ในระบบ S / F แสดงอิทธิพลของสนามแลกเปลี่ยนในปรากฏการณ์แม่เหล็กพาราโดยแอมพลิจูดของคู่คูเปอร์ในแผ่น F จะเปลี่ยนแปลงเป็นคาบ เมื่อ $2l_F \tau_F > 1$ ดังแสดงในสมการ (2.44) และภาพประกอบ 39 (c) และ 39 (d)

(3) โฟมินอฟ, ชีเชคคาเซฟ และโกลูบอฟ (Fominov; Chtchelkatchev; & Golubov. 2002 : 1 -13) ได้ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกอบระหว่างตัวนำยวดยิ่งกับแม่เหล็กเฟอร์โร โดยได้ศึกษาพฤติกรรม 3 ประการของอุณหภูมิวิกฤต $T_c(d_F)$ คือ (1) การลดแบบไม่สม่ำเสมอซึ่งขึ้นกับความหนา d_F ของแผ่น F (2) การเกิดสภาพนำยวดยิ่งแบบย้อนกลับกล่าวคืออุณหภูมิวิกฤตเป็นศูนย์ในช่วงระยะหนึ่งของความหนา d_F และกลับมามีค่าในอีกช่วงหนึ่งของความหนา d_F และ (3) การลดลงของ T_c ในลักษณะไม่สม่ำเสมอจน T_c เป็นศูนย์ที่ค่าความหนา d_F ค่าหนึ่ง แสดงดังภาพประกอบ 40



ภาพประกอบ 40 แสดงแผ่นประกบ S/F โดย $-d_F < x < 0$ และ $0 < x < d_S$ ตามลำดับ

ที่มา: Fominov; Chtchelkatchev; & Golubov. (2002). *Nonmonotonic Critical Temperature in Superconductor Ferromagnet Bilayers*. p. 2.

โดยใช้ทฤษฎีสมการเชิงเส้นของอุซาเดล สำหรับแผ่น S ที่อยู่ในขอบเขต $0 < x < d_S$ และแผ่น F ที่อยู่ในขอบเขต $-d_F < x < 0$ ที่ใกล้อุณหภูมิวิกฤต T_c ฟังก์ชันกรีนแบบปกติ $G = \text{sgn } \omega_n$ และสมการอุซาเดลสำหรับฟังก์ชันกรีนแบบปกติ F อยู่ในรูป

$$\xi_S^2 \pi T_{cs} \frac{d^2 F_S}{dx^2} - |\omega_n| F_S + \Delta = 0 \quad 0 < x < d_S, \quad (2.45)$$

$$\xi_F^2 \pi T_{cs} \frac{d^2 F_F}{dx^2} - [|\omega_n| + iE_{ex} \text{sgn } \omega_n] F_F = 0 \quad -d_F < x < 0, \quad (2.46)$$

$$\Delta(x) \ln \left(\frac{T_{cs}}{T} \right) = \pi T \sum_{\omega_n} \left[\frac{\Delta(x)}{|\omega_n|} - F_S(x, \omega_n) \right] \quad (2.47)$$

ในส่วนของตัวนำยวดยิ่ง S พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Δ) ไม่เป็นศูนย์, $D_{S,F}$ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ซึมใน S และ F ตามลำดับ ที่สามารถเขียนในรูปของความเร็วเฟอร์มี (v_F) และวิถีอิสระ (l_F) ดังสมการ $D_{F,S} = \frac{1}{3} v_{F,S} l_{F,S}$, $\omega_n = \pi T(2n+1)$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ คือความถี่มาตรฐาน

$\xi_S = \sqrt{\frac{D_S}{2\pi T_{cs}}}$ และ $\xi_F = \sqrt{\frac{D_F}{2\pi T_{cs}}}$ คือความยาวอาพันธ์ใน S และ F ตามลำดับ, E_{ex} คือพลังงาน

แลกเปลี่ยน, T_{cs} คืออุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งขนาดใหญ่, $F_{S,F}$ คือฟังก์ชัน F ในบริเวณ S และ F ตามลำดับ และกำหนดให้ค่านิจของพลังค์และค่านิจของโบลซ์มานน์เท่ากับ 1 ($\hbar = k_B = 1$)

สมการ (2.45) - (2.47) มีเงื่อนไขขอบเขต ที่ผิวด้านนอกของแผ่นประกบ คือ

$$\frac{\partial F_S}{\partial x}(d_S) = \frac{\partial F_F}{\partial x}(-d_F) = 0, \quad (2.48)$$

และขอบเขตที่ผิวรอยต่อ S/F

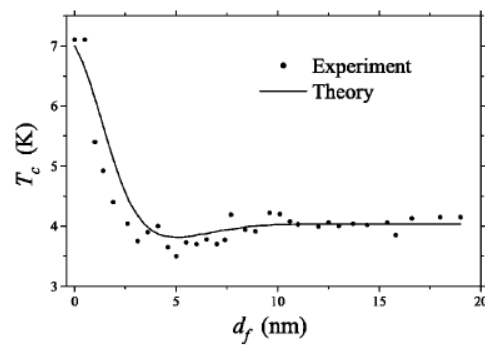
$$\xi_S \frac{dF_S(0)}{dx} = \gamma \xi_F \frac{dF_F(0)}{dx}, \quad \gamma = \frac{\rho_S \xi_S}{\rho_F \xi_F}; \quad (2.49)$$

$$\xi_F \gamma_b \frac{dF_F(0)}{dx} = F_S(0) - F_F(0), \quad \gamma_b = \frac{R_b A}{\rho_F \xi_F}. \quad (2.50)$$

เมื่อ ρ_S และ ρ_F เป็นสภาพต้านทานที่สถานะปกติของแผ่น S และ F , R_b เป็นความต้านทานที่ขอบเขตรอยต่อ S/F และ A เป็นพื้นที่ของรอยต่อ ในการคำนวณหา T_c สามารถจัดรูปโดย F_S^+ เป็นส่วนจริงของ F_S และใช้เงื่อนไขขอบเขต จะได้

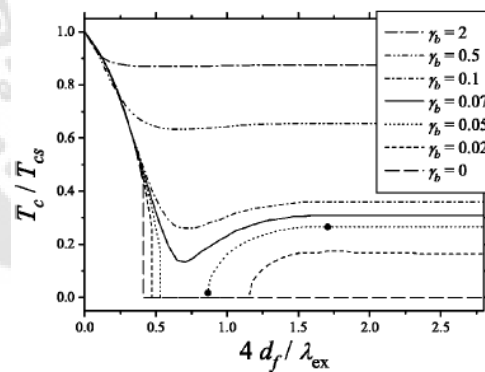
$$\xi_S^2 \pi T_{cs} \frac{d^2 F_S^+}{dx^2} - |\omega_n| F_S^+ + 2\Delta = 0 \quad (2.51)$$

เป็นสมการใช้หาคูณภูมิวิกฤตของแผ่นประกบ สามารถแก้ได้แบบ analytic โดยทั่วไปแล้วมักจะใช้วิธีคำนวณเชิงตัวเลข (numerical) แสดงผลการคำนวณและการทดลองดังภาพประกอบ 41 และภาพประกอบ 42 จะแสดงพฤติกรรมที่สำคัญสามประการ คือ 1) การลดลงแบบไม่สม่ำเสมอของคูณภูมิวิกฤตจนถึงค่าต่ำสุดค่าหนึ่ง ($\gamma_b = 2; 0.5; 0.1; 0.07$) 2) พฤติกรรมแบบภาวะนำยวดยิ่งย้อนกลับ ($\gamma_b = 0.05; 0.02$) และ 3) คูณภูมิวิกฤตลดลงอย่างสม่ำเสมอจนเป็นศูนย์ที่ความหนาจำกัด ($\gamma_b = 0$)



ภาพประกอบ 41 เปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎีของอุซาเดลกับผลการทดลองของ Ryazanov, et al. ซึ่งใช้แผ่น Nb เป็นตัวนำยวดยิ่งที่หนา 11 nm และมีอุณหภูมิวิกฤต (T_{CS}) เท่ากับ 7 K และแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรแบบเจือจาง $Cu_{0.43}Ni_{0.57}$ โดยพลังงานแลกเปลี่ยน $E_{ex} \approx 130K$ และ $\gamma_b \approx 0.3$

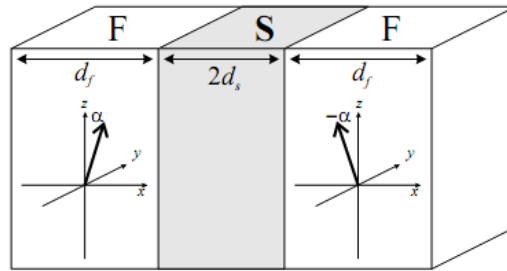
ที่มา: Fominov; Chtchelkatchev; & Golubov. (2002). *Nonmonotonic Critical Temperature in Superconductor Ferromagnet Bilayers*. p.5.



ภาพประกอบ 42 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน (T_c / T_{CS}) กับความหนาลดทอนของแผ่น F ($4d_F / \lambda_x$) เมื่อ λ_x คือระยะทางการเปลี่ยนแปลง ($\lambda_x = 2\pi\sqrt{D_F / E_{ex}}$) กราฟแสดง T_c ที่มีค่า γ_b ต่าง ๆ กัน และ พลังงานแลกเปลี่ยน $E_{ex} = 150K$

ที่มา: Fominov; Chtchelkatchev; & Golubov. (2002). *Nonmonotonic Critical Temperature in Superconductor Ferromagnet Bilayers*. p. 5.

(4) โฟมินอฟ, โกลูบอฟ และคูปริยานอฟ (Fominov; Golubov; & Kupriyanov. 2010: 1-5) ได้ศึกษาคุณสมบัติวิกฤต T_c ของแผ่นประกอบสามชั้น แบบ F/S/F เมื่อคู่คูเปอร์มีการจับคู่แบบสาม ซึ่งองค์ประกอบนี้ถูกสร้างขึ้นจากแมกนีไทเซชันที่ไม่อยู่ในแนวเดียวกันของแผ่น F และคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตโดยวิธีเชิงตัวเลข โดยใช้พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับแผ่นประกอบสาม โดยเน้นการหมุนของแมกนีไทเซชันเป็นมุมต่าง ๆ และคำนวณโดยตรงในขอบเขตที่จำกัดบางขอบเขต ดังนี้



ภาพประกอบ 43 แผ่นประกอบสาม FSF ศูนย์กลางของแผ่น S อยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$ สนามแลกเปลี่ยน $\vec{h}$ วางตัวในระนาบ y-z มีมุมระหว่างระนาบในแผ่น F ทั้งสองเท่ากับ 2α

ที่มา: Ya.V. Fominov; A.A. Golubov; & M.Yu. Kupriyanov. (2010). *Triplet Proximity Effect in FSF Trilayers*. p. 1.

เมื่อพิจารณาถึงขอบเขตสกรปรก เมื่อใกล้คุณสมบัติวิกฤต ทำสมการอุสาคเลให้เป็นเชิงเส้น ซึ่งประกอบ ด้วยฟังก์ชันกรีนแบบปกติ $\hat{F}$ เพียงอย่างเดียว

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 \hat{F}}{dx^2} - |\omega_n| \hat{F} + \Delta \hat{\sigma}_3 - \frac{i}{2} \text{sgn } \omega_n (\hat{F} \hat{H}^* + \hat{H} \hat{F}) = 0, \quad (2.52)$$

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} f_{\uparrow\downarrow} & f_{\uparrow\uparrow} \\ f_{\downarrow\downarrow} & f_{\downarrow\uparrow} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

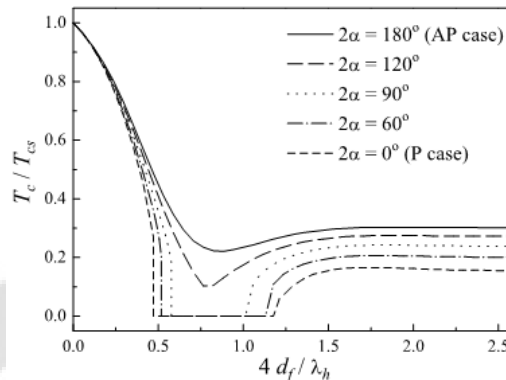
เมื่อ D คือค่าคงที่ของการแพร่ซึม $\omega_n = \pi T (2n + 1)$ คือความถี่ของมัดสุบาระ $\hat{\sigma}_3$ คือเมตริกซ์ที่สามของเพาลี $\hat{F}$ คือเมตริกซ์ในปริภูมิสปิน $f_{\uparrow\uparrow}$ และ $f_{\downarrow\downarrow}$ คือองค์ประกอบของตัวนำยวดยิ่งแบบคู่สาม ส่วน $f_{\uparrow\downarrow}$ เป็นองค์ประกอบแบบเดี่ยว

$$\hat{H} = h(\hat{\sigma}_2 \sin \alpha + \hat{\sigma}_3 \cos \alpha) \quad (2.54)$$

สนามแลกเปลี่ยน $\vec{h} = h(0, \sin \alpha, \cos \alpha)$ เมื่อ h คือพลังงานแลกเปลี่ยน และ α คือมุมระหว่างแมกนีไทเซชันในระนาบ คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตจากสมการ

$$\Delta \ln \frac{T_{cs}}{T} = \pi T \sum_{\omega_n} \left(\frac{\Delta}{|\omega_n|} - f_{\uparrow\downarrow} \right) \quad (2.55)$$

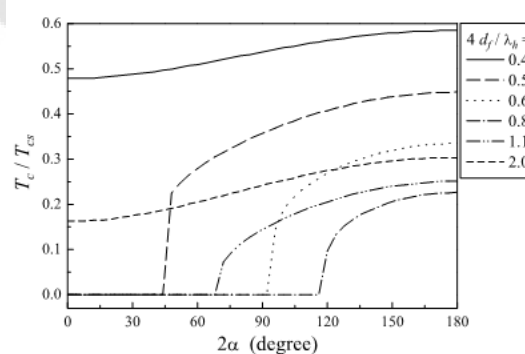
เมื่อ Δ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ และ T_{cs} คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งขนาดใหญ่ซึ่งผลการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงดังภาพประกอบ 44



ภาพประกอบ 44 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับความหนาของแผ่น F เมื่อถูกทำให้เป็นปกติกับความยาวคลื่นขององค์ประกอบซิงเกต $\lambda_h = 2\pi / k_h$

ที่มา: Ya.V. Fominov; A.A. Golubov; & M.Yu. Kupriyanov. (2010). *Triplet Proximity Effect in FSF Trilayers*. p. 3.

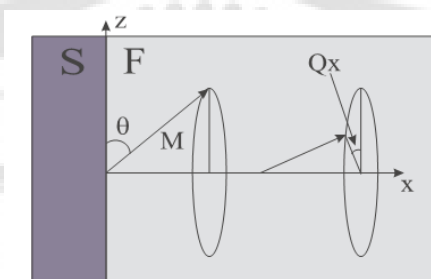
ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับมุมระหว่างระนาบทั้งสอง แสดงดังภาพประกอบ 45



ภาพประกอบ 45 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับมุมในระนาบ 2α

ที่มา: Ya.V. Fominov; A.A. Golubov; & M.Yu. Kupriyanov. (2010). *Triplet Proximity Effect in FSF Trilayers*. p. 4.

(5) วอลคอฟ, เอนิชเชนกะ และอีเฟตอฟ (Volkov; Anishchenka; & Efotov. 2006: 1 -15) ได้ศึกษาแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่ง-แม่เหล็กเฟอร์โร (ซึ่งในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร แมกนีไตเซชันมีการหมุนวน มีความเข้มของสนามแลกเปลี่ยนแบบเฉื่อยและแบบเข้มข้น จากการคำนวณทั้งสองกรณีพบว่า องค์ประกอบของตัวนำยวดยิ่งแบบคู่สามทะเลดลงสู่แผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรได้ระยะไกล และระยะนี้ยังขึ้นกับฟังก์ชันของมุม θ ในแม่เหล็กเฟอร์โร กล่าวคือ กรณีมุม θ มีค่าน้อย ๆ องค์ประกอบแบบคู่สามในแม่เหล็กเฟอร์โรลดลงแบบเอ็กโพเนนเชียลและสม่ำเสมอ แต่เมื่อมุม θ เพิ่มถึงค่าหนึ่ง การลดลงของคู่สามจะเพิ่มการกวัดแกว่งขึ้นมามากด้วยคาบการกวัดแกว่งขึ้นอยู่กับมุม θ และเมื่อความเข้มข้นของแม่เหล็กเฟอร์โรสูงขึ้น องค์ประกอบแบบคู่สามจะลดลงในระยะที่กำหนดโดยเวกเตอร์คลื่นของสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนหมุนวน ซึ่งสนามแลกเปลี่ยนหมุนวน แสดงดังภาพประกอบ 46



ภาพประกอบ 46 แผ่นประกบ S/F มีแมกนีไตเซชันในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรหมุนวนเป็นรูปกรวยในระนาบ (y,z)

ที่มา: Volkov; Anishchenka; & Efotov. (2006). *Odd Triplet Superconductivity in a Superconductor/Ferromagnet Structure with a Spiral Magnetic Structure*. p. 4.

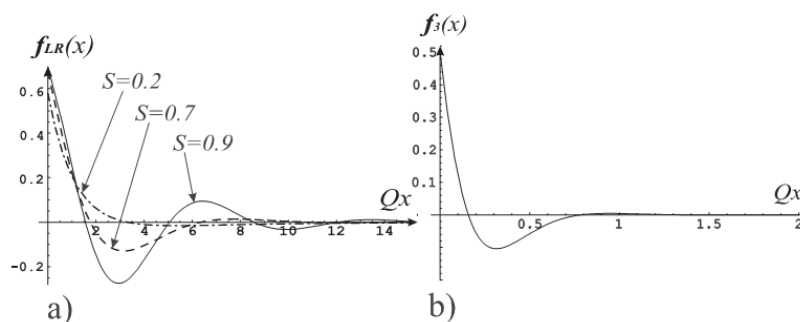
แมกนีไตเซชัน $\vec{M}$ ในแม่เหล็กเฟอร์โรหมุนวนในปริภูมิ เขียนเป็นสมการเวกเตอร์ ดังนี้

$$\vec{M} = M_0 \{ \sin \theta, \cos \theta \sin Qx, \cos \theta \cos Qx \} \quad (2.56)$$

สมการเชิงเส้นของอุสาคเดล เขียนในรูป

$$\partial^2 \tilde{f} / x^2 - 2k_\omega^2 \tilde{f} + ik_h^2 \operatorname{sgn} \omega \left\{ \cos \theta \left([\hat{\sigma}_3, \tilde{f}]_+ \cos \alpha(x) + \hat{\tau}_3 [\hat{\sigma}_2, \tilde{f}]_+ \sin \alpha(x) \right) + \sin \theta \hat{\tau}_3 [\hat{\sigma}_1, \tilde{f}] \right\} = 0 \quad (2.57)$$

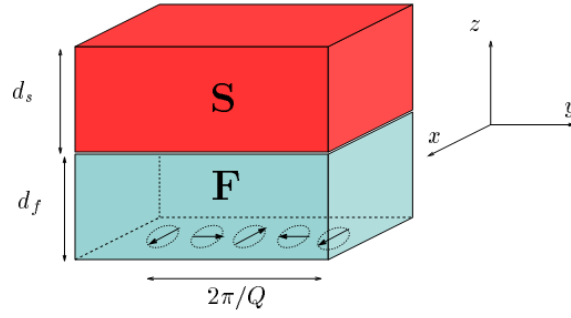
เมื่อ $\omega = \pi T(2n+1)$, $k_\omega^2 = |\omega|/D$, $k_h^2 = h/D$, วงเล็บ $[\hat{\sigma}_3, \tilde{f}]_+$ และ $[\hat{\sigma}_3, \tilde{f}]_-$ คือแอนไทคอมมิวเตเตอร์ และ คอมมิวเตเตอร์ ฟังก์ชันกรีนแบบปกติ $\tilde{f}$ เป็นเมตริกซ์แบบ 4×4 ในปริภูมิอนุภาค-โฮล และปริภูมิสปิน เมตริกซ์ของพาลี $\hat{c}_i$ และ $\hat{\sigma}_i$ กระทำในปริภูมิอนุภาค-โฮล และในปริภูมิสปิน ตามลำดับซึ่งผลการคำนวณ แสดงดังภาพประกอบ 47



ภาพประกอบ 47 (a) คำนวณจากส่วนจริงขององค์ประกอบแบบคู่สาม และ (b) องค์ประกอบแบบคู่เดียว โดยมีมุม $S = \sin \theta$ องค์ประกอบแบบคู่สามไม่ขึ้นกับมุม θ

ที่มา: Volkov; Anishchenka; & Efatov. (2006). *Odd Triplet Superconductivity in a Superconductor/Ferromagnet Structure with a Spiral Magnetic Structure*. p. 7.

(6) แซมเพลและเอสคริก (T. Champel; & M. Eschrig. 2005: 1-4) ได้ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตที่เกิดขึ้นในระบบของแผ่นประกบสองชั้นระหว่างตัวนำยิ่งยวดกับแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อแม่เหล็กเฟอร์โรมีโดเมนแม่เหล็กหลายชั้นและโมเมนต์แม่เหล็กมีการหมุนวน ขนาดของผนังโดเมนแม่เหล็กเท่ากับโดเมนแม่เหล็ก พบว่าอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบขึ้นอยู่กับความยาวรอบการหมุนของโมเมนต์แม่เหล็ก โครงสร้างของโดเมนแม่เหล็ก และมีการเกิดสภาพนำยิ่งยวดแบบย้อนกลับ รูปแบบการศึกษาแสดงดังภาพประกอบ 48



ภาพประกอบ 48 แสดงการหมุนของโมเมนต์แม่เหล็กในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร

ที่มา: T. Champel; & M. Eschrig. (2008). *Switching Superconductivity in S/F Bilayers by Multiple-Domain Structures*. p. 1.

ทฤษฎีที่ใช้คือสมการเชิงเส้นกรีนฟังก์ชันของอุสาคเด

$$D\nabla^2 f - i \operatorname{sgn}(\omega_n) \{ \bar{J}(R) \cdot \hat{\sigma} f + \bar{J}(R) \cdot \hat{\sigma}^* \} - 2|\omega_n| f + 2\pi\Delta = 0, \quad (2.58)$$

เมื่อ $\hat{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ เป็นเวกเตอร์เมตริกซ์ของเพาลี $D = D_{s,f}$ เป็นค่าคงที่ของการแพร่ซึมในแผ่น S และ F ตามลำดับ $\bar{J}$ เป็นสนามแลกเปลี่ยนในแผ่น F และ $\Delta = \Delta_s i \sigma_y$ เป็นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในปริภูมิสปิน ส่วน f เป็นฟังก์ชันกรีนแบบอปกติในซึ่งรวมส่วนของการจับคู่แบบเดี่ยวและแบบสามไว้ด้วยกันแสดงดังสมการ

$$f = f_s i \sigma_y + i(\bar{f}_t \cdot \hat{\sigma}) \sigma_y \quad (2.59)$$

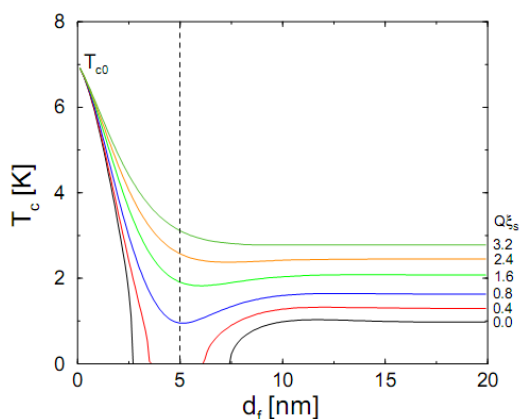
สมการ (1) แยกออกได้เป็น 2 สมการ รวมตัวแปรกัน คือ

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) f_s = -2\pi\Delta_s + 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \bar{J}(R) \cdot \bar{f}_t = 0 \quad (2.60)$$

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) \bar{f}_t = 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \bar{J}(R) f_s = 0 \quad (2.61)$$

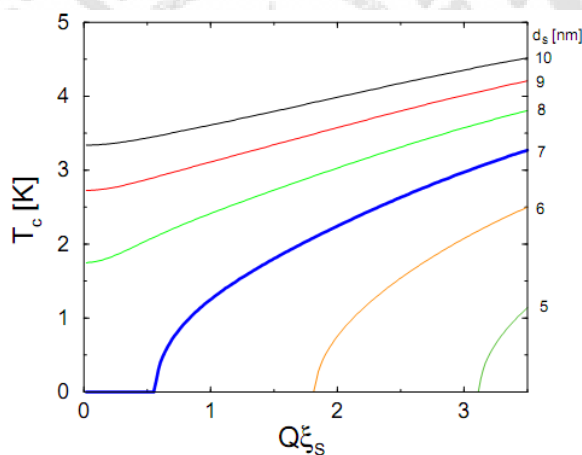
และคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต จากสมการ

$$\Delta_s \ln \frac{T_{c0}}{T} = 2\pi T \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\Delta_s}{\omega_n} - \frac{f_s(\omega_n)}{\pi} \right) \quad (2.62)$$



ภาพประกอบ 49 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับความหนาแน่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f โดยกำหนดให้ $d_s = 7$ nm และ $d_f \approx 5$ nm

ที่มา: T. Champel; & M. Eschrig. (2008). *Switching Superconductivity in S/F Bilayers by Multiple-Domain Structures*. p. 3.

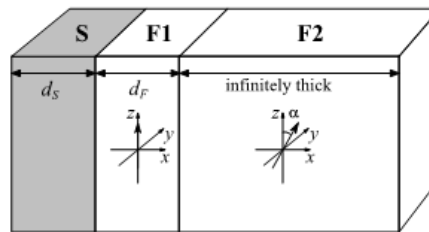


ภาพประกอบ 50 อุณหภูมิวิกฤต T_c กับ $Q\xi_s$ เมื่อความหนาแน่นของแม่เหล็กเฟอร์โรคงตัว ที่ $d_f = 5$ nm โดยกำหนดให้ $d_s = 7$ nm และ $d_f \approx 5$ nm

ที่มา: T. Champel; & M. Eschrig. (2008). *Switching Superconductivity in S/F Bilayers by Multiple-Domain Structures*. p. 4.

(7) โฟมินอฟ และคณะ (Fominov. et, at. 2010: 1-5) ศึกษาอุณหภูมิวิกฤต T_c ของแผ่นประกอบ 3 ชั้น แบบ SFF เมื่อ S เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคู่เดียว และ F เป็นโลหะแม่เหล็กเฟอร์โร พบว่าแมกนีไทเซชันที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันของแม่เหล็กเฟอร์โรจะก่อให้เกิดการจับคู่ของคูเปอร์แบบคู่สามที่มีระยะทะลวงไกลเกิดขึ้นในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร F_1 ขณะเดียวกันอุณหภูมิวิกฤตของระบบแผ่น

ประกอบจะกวัดแกว่งไม่สม่ำเสมอขึ้นกับมุม α ระหว่างแมกนีโตเซชันของแผ่นประกอบทั้งสอง ซึ่งแสดงดังภาพประกอบ 51



ภาพประกอบ 51 ระบบประกอบสามชั้น S/F₁/F₂ ที่รอยต่อระหว่าง S/F₁ มีพิกัดเป็น $x = 0$ สนามแลกเปลี่ยน h วางตัวในระนาบ (y, z) และ α เป็นมุมระหว่างสนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนในระนาบ

ที่มา: Ya.V. Fominov; et al. (2010). *Superconducting Triplet Spin Valve*. p. 2.

เมื่อใกล้อุณหภูมิวิกฤต สมการอูสาคเดลถูกทำให้เป็นเชิงเส้น มีเพียงฟังก์ชันกรีนแบบปกติ $\tilde{f}$

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 \tilde{f}}{dx^2} - |\omega_n| \tilde{f} - \frac{i}{2} \text{sgn } \omega_n \{ \hat{\tau}_0 (\bar{h} \hat{\sigma}), \tilde{f} \} + \Delta \hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_0 = 0, \quad (2.63)$$

เมื่อ $\tilde{f}$ เป็นเมตริกซ์ 4×4 $\hat{\tau}_i$ และ $\hat{\sigma}_i$ เป็นเมตริกซ์ของเพาลีในปริภูมิ Nambu-Gor'kov และสปิน ตามลำดับ D คือค่าคงที่ของการแพร่ซึม $\omega_n = \pi T (2n + 1)$ คือความถี่ของมัดซูบาระ และ n เป็นจำนวนเต็ม สนามแลกเปลี่ยนที่แผ่น F₁ วางตัวในแนวแกน z คือ $\bar{h} = (0, 0, h)$ ขณะที่สนามแลกเปลี่ยนที่แผ่นด้านนอกหรือ F₂ ในระนาบ yz คือ $\bar{h} = (0, h \sin \alpha, h \cos \alpha)$ มุม α มีค่าระหว่าง 0 ซึ่งเรียกว่า P-Phase ถึง π คือ AP-Phase ฟังก์ชันกรีนแบบปกติ กระจายในรูปแบบ

$$\tilde{f} = \hat{\tau}_1 (f_0 \hat{\sigma}_0 + f_3 \hat{\sigma}_3 + f_2 \hat{\sigma}_2) \quad (2.64)$$

ซึ่ง f_0 คือ การจับคู่แบบเดี่ยว f_3 เป็นการจับคู่แบบสามที่มีสปินชี้ในทางเดียวกับแกน z ส่วน f_2 เป็นการจับคู่แบบสามที่มีสปิน ± 1 หรือตั้งฉากกับแกน z

อุณหภูมิวิกฤตหาได้จากสมการ

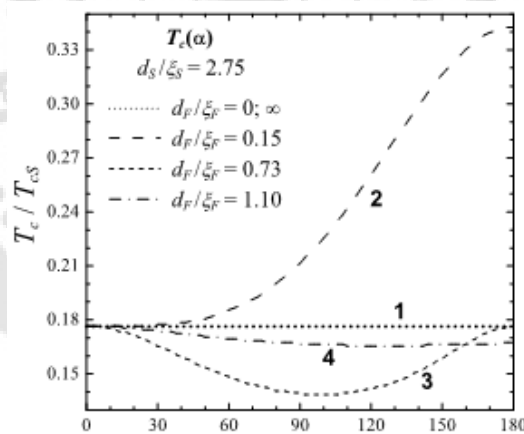
$$\Delta \ln \frac{T_{cs}}{T_c} = 2\pi T_c \sum_{\omega>0} \left(\frac{\Delta}{\omega_n} - f_0 \right) \quad (2.65)$$

$$\frac{D}{2} \frac{d^2 f_0}{dx^2} - \omega_n f_0 + \Delta = 0, \quad (2.66)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต ดังสมการ

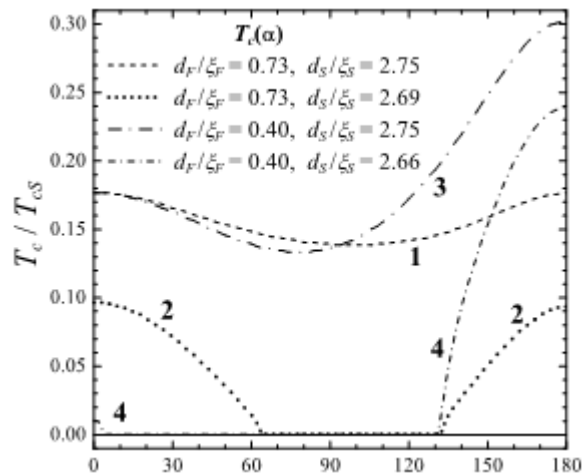
$$\frac{df_0}{dx} = 0 \Big|_{x=-d_s}, \quad -\xi \frac{df_0}{dx} = W f_0 \Big|_{x=0} \quad (2.67)$$

ซึ่งผลการคำนวณแสดงดังภาพประกอบ 52



ภาพประกอบ 52 อุณหภูมิวิกฤตลดทอนกับมุม α แปรผันตามความหนาของแผ่น F_1 ลดทอน

ที่มา: Ya.V. Fominov; et al. (2010). *Superconducting Triplet Spin Valve*. p. 4.



ภาพประกอบ 53 อุณหภูมิวิกฤตลดทอนกับมุม α แปรผันตามความหนาของแผ่น F_1 และแผ่น S ลดทอน

ที่มา: Ya.V. Fominov; et al. (2010). *Superconducting Triplet Spin Valve*. p. 4.

(8) ธนะสิทธิ์ รัชตเรืองสิทธิ์ และ สุทัศน์ ยกส้าน (T. Rachataruangsit; & S. Yoksan. 2007: 156-166) ได้วิจัยเรื่องสภาพนำยวดยิ่งแบบทริปเลตในระบบแผ่นประกบตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร (Spin orbit scattering effect on long-range odd frequency triplet pairing in ferromagnet/superconductor bilayers) โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อ (1) หาอุณหภูมิวิกฤต T_c ของระบบแผ่นประกบสองชั้นตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร F/S โดยที่ โมเมนต์แม่เหล็กเฟอร์โรมีลักษณะแบบไม่เป็นเอกพันธ์และมีการกระเจิงเชิงสปินวงโคจร (spin-orbit scattering) รวมอยู่ด้วย (2) ศึกษาสถานะเฟสพาย (pi-phase) ของระบบประกบสามชั้น F/S/F ที่มีผลต่อ T_c โดยพิจารณาสถานะทริปเลต และ โมเมนต์แม่เหล็กเฟอร์โรเป็นแบบเอกพันธ์แต่ทิศการเรียงตัวสัมพันธ์กันระหว่างแผ่นแม่เหล็กสองแผ่น และ (3) ศึกษาสมการอุสเดิลแบบไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อคำนวณหาคุณสมบัติทางอุณหพลศาสตร์ความเป็นแม่เหล็กและการเปลี่ยนเฟสอันดับหนึ่ง โดยใช้สมการสเกลาร์ และสมการเวกเตอร์ของอุสเดิล ดังนี้

$$\left(|\omega| - \frac{1}{2}D(\vec{r})\nabla^2\right)F_s(\vec{r},\omega) + i\vec{l}(\vec{r}) \cdot \vec{F}_t(\vec{r},\omega) = \Delta(\vec{r}) \quad (2.68)$$

$$\left(|\omega| - \frac{1}{2}D(\vec{r})\nabla^2 + \frac{1}{\tau'}\right)\vec{F}_t(\vec{r},\omega) + i\vec{l}(\vec{r})F_s(\vec{r},\omega) = 0 \quad (2.69)$$

เมื่อ $F_s(\vec{r}, \omega)$ คือแอมพลิจูดสเกลาร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินขึ้นเชิงเกลต $\vec{F}_t(\vec{r}, \omega)$ คือแอมพลิจูดเวกเตอร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินทริปเลต $D(\vec{r})$ คือค่าคงตัวของการแพร่ซึม $\Delta(\vec{r})$ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของตัวนำยวดยิ่ง ω คือค่าคงตัวของมัดซูบาระ τ' คือเวลาการกระเจิงสปินเชิงวงโคจร และ $\vec{I}(\vec{r})$ คือสนามแลกเปลี่ยนแบบนัลด โดยโมเมนต์แม่เหล็กสามารถหมุนได้ในระนาบด้วยเลขคลื่น Q ดังสมการ

$$\vec{I}(y) = I_0(0, \sin Qy, \cos Qy) \quad (2.70)$$

ฟังก์ชันการจับคู่ ในแต่ละชั้นเชื่อมโยกันด้วยเงื่อนไขขอบที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร

$$\xi_s \nabla \hat{F}_s = \xi_f \gamma \nabla \hat{F}_f \quad (2.71)$$

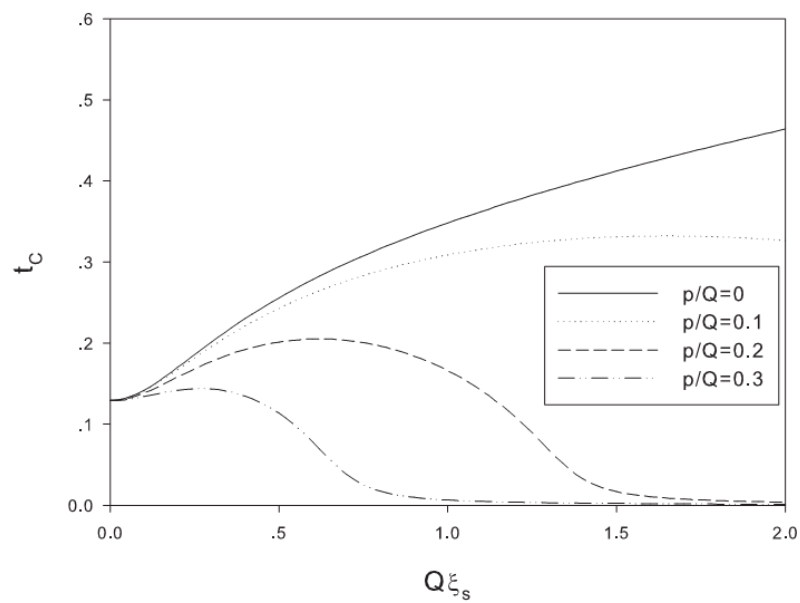
$$\hat{F}_s = \hat{F}_f - \xi_f \gamma_b \hat{n}_f \cdot \nabla \hat{F}_f \quad (2.72)$$

และที่ผิวนอก

$$\nabla \hat{F}_{s,f} = 0 \quad (2.73)$$

โดยตัวห้อย s, f บน $\hat{F}$ เป็นการอ้างอิงชั้นตัวนำยวดยิ่ง(แม่เหล็กเฟอร์โร) $\xi_{s,f} = \sqrt{D_{s,f} / 2\pi T_{c0}}$ คือระยะอาพันธ์ $\gamma = \frac{\rho_s \xi_s}{\rho_f \xi_f}$ และ γ_b คือสภาพต้านทานไม่เทียบคู่ระหว่างชั้นทั้งสองและความต้านทานขอบเขตซึ่งระบุลักษณะเฉพาะของการรบกวนและการกระโดดของคู่อิเล็กตรอนจากชั้นตัวนำยวดยิ่งไปสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรในทิศทางตั้งฉากกับผิวรอยต่อ $\hat{n}_f$ ตามลำดับ

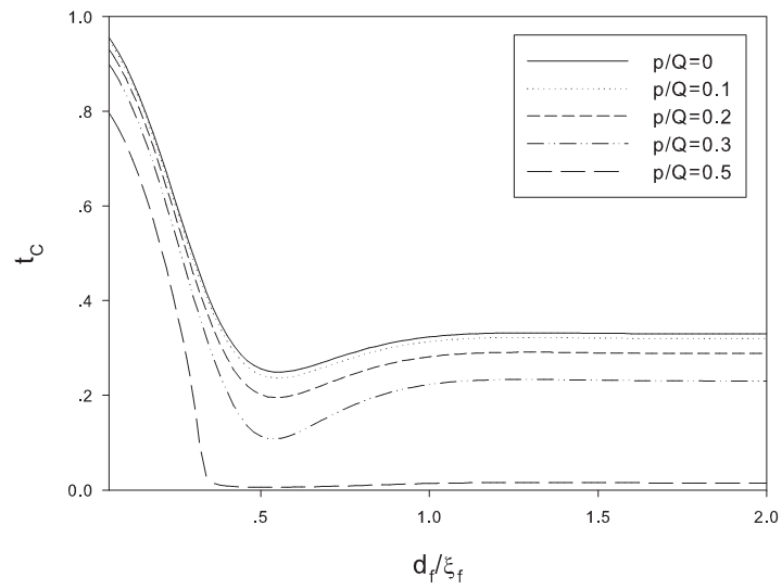
ซึ่งผลการวิจัย แสดงดังภาพประกอบต่อไปนี้



ภาพประกอบ 54 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t_c = \frac{T_c}{T_{c0}}$ เป็นฟังก์ชันของเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$ โดยแปรผัน

$$p/Q \text{ และกำหนดให้ } \frac{I}{\pi T_{c0}} = 10, \frac{d_s}{\xi_s} = 2, \frac{d_f}{\xi_f} = 0.5, \gamma = 0.2, \gamma_b = 0, \xi_s = \xi_f \text{ และ } \frac{1}{I\tau_{so}} = 0$$

ที่มา: T. Rachataruangsit; & S. Yoksan. (2007). *Spin Orbit Scattering Effect on Long-Range Odd Frequency Triplet Pairing in Ferromagnet/Superconductor Bilayers*. p. 163.

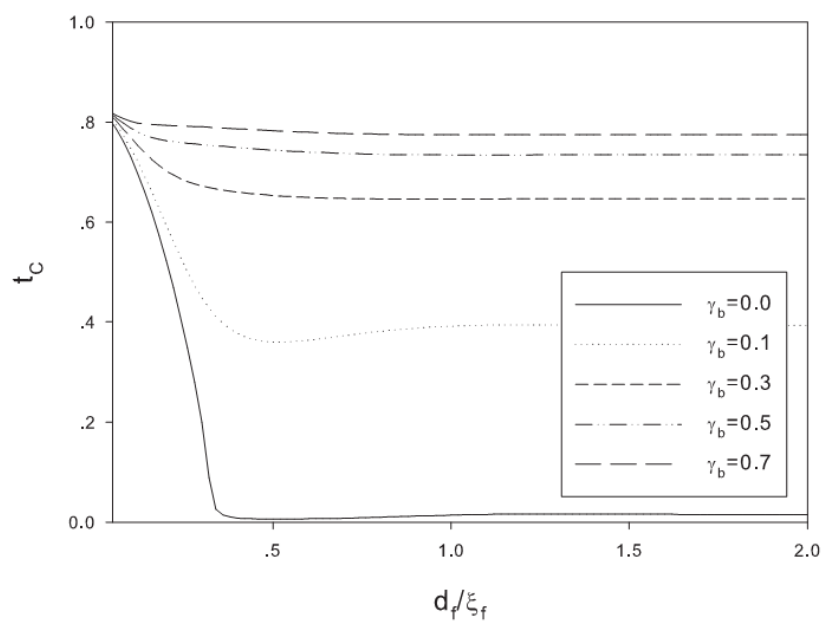


ภาพประกอบ 55 อุณหภูมิวิกฤตลดทอน $t_c = \frac{T_c}{T_{c0}}$ เป็นฟังก์ชันของความหนาของแม่เหล็กเฟอร์โร

d_f / ξ_f โดยแปรผัน p/Q และกำหนดให้ $\frac{I}{\pi T_{c0}} = 10, \frac{d_s}{\xi_s} = 2, \gamma = 0.2, \gamma_b = 0, \xi_s = \xi_f,$

$Q_s \xi_s = 0.5$ และ $\frac{1}{I \tau_{so}} = 0$

ที่มา: T. Rachataruangsit; & S. Yoksan. (2007). *Spin Orbit Scattering Effect on Long-Range Odd Frequency Triplet Pairing in Ferromagnet/Superconductor Bilayers*. p. 163.

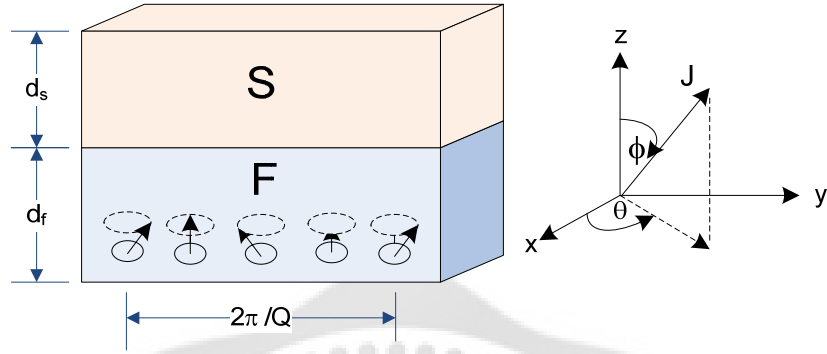


ภาพประกอบ 56 กราฟของเส้นโค้ง $t_c(d_f/\xi_f)$ โดยแปรผัน γ_b และให้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เช่นเดียวกับภาพประกอบ 55

ที่มา: T. Rachataruangsit; & S. Yoksan. (2007). *Spin Orbit Scattering Effect on Long-Range Odd Frequency Triplet Pairing in Ferromagnet/Superconductor Bilayers*. p. 164.

บทที่ 3

วิธีคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต



ภาพประกอบ 57 รูปแบบของแผ่นประกบคู่ตัวนำยิ่งยวด (S) กับแม่เหล็กเฟอร์โร (F)

3.1 แผ่นประกบสองชั้น (S/F) กับการหมุนของสนามแลกเปลี่ยน (S/F bilayer with a rotating exchange field)

สนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยน $\vec{J} \equiv \vec{J}(y, \phi)$ หมุนวนในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร ในระนาบสามมิติด้วยเวกเตอร์คลื่นซึ่งมีค่าคงตัว Q โดยคาบการหมุนมีมุมมองที่แตกต่างกันเทียบกับแกน y มีค่าเป็น $2\pi / Q$ เขียนในรูป

$$\vec{J}(y, \phi) = J (\sin \phi \cos Qy \hat{i} + \sin \phi \sin Qy \hat{j} + \cos \phi \hat{k})$$

โดยที่ $\theta = Qy$ ภายใต้รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างระบบ S / F ที่ซับซ้อน สมการขนส่งเชิงเส้น

ของอุสชาเดลสำหรับระบบที่มีการแพร่ซึมเมื่อใกล้อุณหภูมิวิกฤติของคู่แอมพลิจูด f_s และ $\bar{f}_t$ คือ

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) f_s = -2\pi\Delta_s + 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \vec{J} \cdot \bar{f}_t \quad (3.1)$$

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) \bar{f}_t = 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \vec{J} f_s \quad (3.2)$$

เมื่อ D เป็นค่าคงตัวของการแพร่ซึม ω_n เป็นความถี่ของมัดสุบาระ $\text{sgn}(\omega_n)$ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\omega_n > 0$ และมีค่าเป็น -1 เมื่อ $\omega_n < 0$, f_s เป็นแอมพลิจูดสเกลาร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินซิงเกิลต และ $\vec{f}_t = (f_{tx}, f_{ty}, f_{tz})$ เป็นแอมพลิจูดเวกเตอร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินทริปเลตตามลำดับ

จากสมการ (3.1) และ (3.2) เวกเตอร์คลื่นทริปเลตจะไม่ใช่ศูนย์ถ้ามีองค์ประกอบของคลื่นซิงเกิลตทะลุทะลวงลงสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โร นอกจากนี้เวกเตอร์คลื่นทริปเลตจะถูกโน้มน้าวให้มีการเรียงตัวอยู่ในทิศเดียว กับสนามแลกเปลี่ยน $\vec{J}$ ทำให้คลื่นทริปเลตที่มีทิศการฉายสปินบนแกนควอนไทเซชันมีความยาวเป็นศูนย์ ($s_z = 0$) เกิดความโดดเด่นขึ้น ดังนั้นองค์ประกอบของคลื่นซิงเกิลตและคลื่นทริปเลตที่มีการฉายสปินบนแกนควอนไทเซชันมีความยาวเป็นศูนย์นี้ จะมียู่ร่วมกันเสมอในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรไกล์ รอยต่อ S/F ลักษณะเช่นนี้ทำให้ฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนสามารถทะลุทะลวงเข้าสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรในระยะทางสั้นๆ ที่มีขนาดประมาณความยาวแลกเปลี่ยน (exchange length) $\xi_J = \sqrt{D_f / J}$

เวกเตอร์คลื่นทริปเลต $\vec{f}_t$ ที่ถูกโน้มน้าวขึ้นและไม่ได้เรียงตัวอยู่ในแนวเดียวกับ $\vec{J}$ ซึ่งก็คือคลื่นทริปเลตที่มีการฉายของสปินมีความยาวไม่เป็นศูนย์เทียบกับ $\vec{J}$ จะจับคู่สปินที่เหมือนกันโดยไม่จำกัดบริเวณด้วยอันตรกิริยาแม่เหล็กพารากับสนามแลกเปลี่ยน ทำให้สามารถทะลุทะลวงเข้าสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรได้ในพิสัยไกล โดยมีขนาดประมาณความยาวของการแพร่ซึม (diffusion length)

$\xi_f = \sqrt{D_f / 2\pi T_{c0}}$ เมื่อ T_{c0} คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งขนาดใหญ่

ให้แอมพลิจูดของฟังก์ชันคลื่นของคู่อิเล็กตรอนที่มีสปินแบบซิงเกิลตและสปินแบบทริปเลต เขียนในรูป

$$f = [f_s + (\vec{f}_t \cdot \vec{\sigma})] i\sigma_y$$

$$f = \begin{pmatrix} -f_{tx} + if_{ty} & f_s + f_{tz} \\ -f_s + f_{tz} & f_{tx} + if_{ty} \end{pmatrix}$$

ซึ่ง $\mp f_{tx} + if_{ty}$ สมนัยกับการฉายของสปิน ± 1 ซึ่งสามารถคำนวณหาได้เมื่อสนามแลกเปลี่ยนเป็นแบบไม่เอกพันธ์ ส่วน f_s และ f_{tz} เป็นแอมพลิจูดความน่าจะเป็นในการพบคู่อิเล็กตรอนบนแกนควอนไทเซชัน ที่มีโอกาสมากที่สุดเมื่อสนามแลกเปลี่ยนมีค่าคงที่

เราต้องการหาอุณหภูมิวิกฤต T_c ของระบบที่ขึ้นกับการหมุนของเวกเตอร์คลื่น Q โดยการแก้สมการเชิงเส้นของอุสเดล (3.1) และ (3.2) ดังนั้นจึงสร้างฟังก์ชันกรีนแบบอปกติให้สอดคล้องกับการหมุนแบบเป็นคาบตามแกน y

$$f_+ = (-f_{tx} + if_{ty})e^{iQy} \quad (3.3)$$

$$f_- = (f_{tx} + if_{ty})e^{-iQy} \quad (3.4)$$

ดังนั้น จากสมการ (3.1) เวกเตอร์ $\vec{J} \cdot \vec{f}_t$ สามารถเขียนได้ในรูปของ f_+ และ f_-

$$\vec{J} \cdot \vec{f}_t = J(\sin \phi \cos Qy, \sin \phi \sin Qy, \cos \phi) \cdot (f_{tx}, f_{ty}, f_{tz})$$

$$= \frac{J}{2} \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \}$$

เราพิจารณาสมการ (3.1) เมื่อความถี่ของมัตสึบาระมีค่ามากกว่าศูนย์ ($\omega_n > 0$) ซึ่งได้

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_s = -2\pi\Delta_s + iJ \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \} \quad (3.5)$$

และจากสมการ (3.2) เมื่อเขียนแยกองค์ประกอบ เราจะได้

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_{tx} = 2iJf_s \sin \phi \cos Qy \quad (3.6)$$

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_{ty} = 2iJf_s \sin \phi \sin Qy \quad (3.7)$$

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_{tz} = 2i \cos \phi Jf_s \quad (3.8)$$

แทนค่าองค์ประกอบตามสมการ (3.3) และ (3.4) ลงในสมการ (3.6) และ (3.7) และใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} \nabla^2 (f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}) = & \frac{1}{2} \{ -Q^2 f_- e^{iQy} + iQe^{iQy} \nabla f_- + e^{iQy} \nabla^2 f_- + iQe^{iQy} \nabla f_- + Q^2 f_+ e^{-iQy} + iQe^{-iQy} \nabla f_+ - e^{-iQy} \nabla^2 f_+ + iQe^{-iQy} \nabla f_+ \} \hat{i} \\ & - \frac{i}{2} \{ -Q^2 f_- e^{iQy} + iQe^{iQy} \nabla f_- + iQe^{iQy} \nabla f_- + e^{iQy} \nabla^2 f_- - Q^2 f_+ e^{-iQy} - iQe^{-iQy} \nabla f_+ - iQe^{-iQy} \nabla f_+ + e^{-iQy} \nabla^2 f_+ \} \hat{j} \\ & + \nabla^2 f_z \hat{k} \end{aligned}$$

สมการ (3.6) สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{D}{2} \left\{ -Q^2 f_- e^{iQy} + iQe^{iQy} \nabla f_- + e^{iQy} \nabla^2 f_- + iQe^{iQy} \nabla f_- + Q^2 f_+ e^{-iQy} + iQe^{-iQy} \nabla f_+ \right\} -$$

$$\frac{D}{2} \left\{ -e^{-iQy} \nabla^2 f_+ + iQe^{-iQy} \nabla f_+ \right\}$$

$$2\omega_n \frac{1}{2} (f_- e^{iQy} - f_+ e^{-iQy}) = 2iJf_s \sin \phi \left(\frac{e^{iQy} + e^{-iQy}}{2} \right)$$

แยกเทอมของ e^{iQy} และ e^{-iQy} เราได้

$$\frac{D}{2} \{ -Q^2 f_- + 2iQ \nabla f_- + \nabla^2 f_- \} - \omega_n f_- = iJf_s \sin \phi \quad (3.9)$$

$$\frac{D}{2} \{ Q^2 f_+ + 2iQ \nabla f_+ - \nabla^2 f_+ \} + \omega_n f_+ = iJf_s \sin \phi$$

(3.10)

ซึ่งเมื่อเขียนรวมสมการที่ (3.9) และ (3.10) ในรูป

$$\{ D \nabla^2 - DQ^2 \mp 2iQD \partial_y - 2\omega_n \} f_{\pm} = \mp 2iJf_s \sin \phi \quad (3.11)$$

พิจารณาองค์ประกอบตามแกน y สมการ (3.7)

$$D \left\{ -Q^2 f_- e^{iQy} + iQe^{iQy} \nabla f_- + iQe^{iQy} \nabla f_- + e^{iQy} \nabla^2 f_- - \right\} -$$

$$\left\{ Q^2 f_+ e^{-iQy} - iQe^{-iQy} \nabla f_+ - iQe^{-iQy} \nabla f_+ + e^{-iQy} \nabla^2 f_+ \right\} -$$

$$2\omega_n (f_- e^{iQy} + f_+ e^{-iQy}) = 2iJf_s \sin \phi (e^{iQy} - e^{-iQy})$$

แยกเทอมของ e^{iQy} และ e^{-iQy} เราได้

$$\{ D \nabla^2 - DQ^2 + 2iQD \nabla - 2\omega_n \} f_- = 2iJf_s \sin \phi \quad (3.12)$$

$$\{ D \nabla^2 - DQ^2 - 2iQD \nabla - 2\omega_n \} f_+ = -2iJf_s \sin \phi \quad (3.13)$$

ซึ่งเมื่อเขียนรวมสมการที่ (3.12) และ (3.13) ในรูป

$$\{DV^2 - DQ^2 \mp 2iQD\partial_y - 2\omega_n\} f_{\pm} = \mp 2iJf_s \sin \phi$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์ เช่นเดียวกับสมการ (3.11)

ต่อไปคือการแก้สมการ 3.5, 3.8 และ 3.11 เพื่อหา f_s , f_z และ $f_{\pm}$ ในตัวกลาง โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร

$$\xi_s \partial_z f_{sc} = \gamma \xi_f \partial_z f_F, \quad \gamma = \rho_s \xi_s / \rho_f \xi_f \quad (3.14)$$

เมื่อ ρ_s และ ρ_f คือสภาพความต้านทานที่ภาวะปกติของโลหะ S และ F ตามลำดับ

$$\xi_f \gamma_b \partial_z f_F = f_{sc} - f_F, \quad \gamma_b = R_b A / \rho_f \xi_f \quad (3.15)$$

เป็นเงื่อนไขขอบเขตความต่อเนื่องของกระแสที่รอยต่อของแผ่นประกบ เมื่อ γ และ γ_b คือสภาพต้านทานไม่เทียบคู่ระหว่างชั้นตัวนำทั้งสองและความต้านทานขอบเขตที่ระบุลักษณะเฉพาะของการร้าวและกระโดดของคู่อิเล็กตรอนจากชั้นตัวนำยวดยิ่งไปสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรในทิศตั้งฉากกับผิวรอยต่อ R_b เป็นความต้านทานที่รอยต่อ A เป็นพื้นที่ผิวรอยต่อ ส่วน $\xi_s = \sqrt{D_s / 2\pi T_{c0}}$ และ $\xi_f = \sqrt{D_f / 2\pi T_{c0}}$ คือ ความยาวอาพันธ์ในตัวนำยวดยิ่ง S และ F ตามลำดับ และที่ผิวนอกของ S และ F ($z = -d_f$ และ $z = d_s$) มีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\partial_z f = 0. \quad (3.16)$$

3.2 สมการคลื่นของคู่อิเล็กตรอนในแม่เหล็กเฟอร์โร (wave equation of electron pair in ferromagnet)

ในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร แอมพลิจูดของคลื่นซิงเกิลต และองค์ประกอบของคลื่นทริปเลต แสดงได้ดังนี้

คลื่นซิงเกิลต จากสมการ (3.5)

$$(D_f \nabla^2 - 2\omega_n) f_s = iJ \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \}$$

แทนค่า ω_n และหารตลอดด้วย D_f

$$\left(\nabla^2 - \frac{2\pi T}{D_f} (2n+1) \right) f_s = \frac{J}{D_f} i \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \}$$

สามารถเขียนใหม่เป็น

$$(\nabla^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_s = i \xi_J^{-2} \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \} \quad (3.17)$$

เมื่อ $\Omega_n = (2n+1)T / T_{c0}$ และ $\xi_J = \sqrt{D_f / J}$

คลื่นทริปเลต จากสมการ (3.11)

$$\{ D \nabla^2 - D Q^2 \mp 2i Q D \partial_y - 2\omega_n \} f_{\pm} = \mp 2i J f_s \sin \phi$$

$$(\nabla^2 - Q^2 \mp 2i Q \partial_y - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_{\pm} = \mp 2i \xi_J^{-2} f_s \sin \phi \quad (3.18)$$

และ

$$(\nabla^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_{tz} = 2i \xi_J^{-2} \cos \phi f_s \quad (3.19)$$

จากสมบัติทางกายภาพของความเป็นคาบในแกน y ขององค์ประกอบของฟังก์ชันคลื่นตัวนำยวดยิ่ง f กระจายอนุกรมฟูเรียร์ และใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวหน้า ($z = -d_f$) ดังนั้นแอมพลิจูดของฟังก์ชันคลื่นเขียนในรูป

$$f_l(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_l^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \quad (3.20)$$

เมื่อ $l = s, \pm, tz$ เลขคลื่น p แสดงถึงการกล้ำ (modulation) ของแอมพลิจูดคู่อิเล็กทรอนิกส์ในทิศทางภายในระนาบของแผ่นประกบและมีส่วนร่วมโดยตรงกับสภาพนำเวดถึงแบบไม่เป็นเอกพันธ์ แทนสมการ (3.20) ลงในกลุ่มสมการ (3.17)-(3.19) ดังนี้ กล่าวคือ สำหรับสมการ (3.17) เพื่อเขียน f_s

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_s &= i \xi_J^{-2} \{ \sin \phi (f_- - f_+) + 2 \cos \phi f_{tz} \} \\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\nabla_y^2 + \nabla_z^2) f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} - \Omega_n \xi_f^{-2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \\ &= i \xi_J^{-2} \left\{ \sin \phi \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_-^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_+^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \right\} \\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \left(\cosh[k_{fp}(z + d_f)] (ipQ)^2 e^{ipQy} + k_{fp}^2 \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \right) \\ - \Omega_n \xi_f^{-2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \\ &= i \xi_J^{-2} \left\{ \left[\sin \phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_-^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_+^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \right\} \\ - (pQ)^2 f_s^{(p)} + k_{fp}^2 f_s^{(p)} - \Omega_n \xi_f^{-2} f_s^{(p)} - i \xi_J^{-2} \sin \phi f_-^{(p)} + i \xi_J^{-2} \sin \phi f_+^{(p)} - 2i \cos \phi \xi_J^{-2} f_{tz}^{(p)} &= 0 \\ \text{เมื่อ } pQ = Q_p \text{ และ } \tilde{k}_p^2 = k_{fp}^2 - \Omega_n \xi_f^{-2} \\ (\tilde{k}_p^2 - Q_p^2) f_s^{(p)} - i \xi_J^{-2} \sin \phi f_-^{(p)} + i \xi_J^{-2} \sin \phi f_+^{(p)} - 2i \cos \phi \xi_J^{-2} f_{tz}^{(p)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

สมการ (3.18) เพื่อเขียน f_-

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 - Q^2 \mp 2iQ\partial_y - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_{\pm} &= \mp 2i\xi_J^{-2} f_s \sin \phi \\
 (\nabla^2 + 2iQ\partial_y - Q^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_-^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} \\
 &= 2i\xi_J^{-2} \sin \phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} \\
 [-(pQ)^2 + k_{fp}^2 - 2pQ^2 - Q^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}] f_-^{(p)} &= 2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s^{(p)} \\
 [k_{fp}^2 - \Omega_n \xi_f^{-2} - (p+1)^2 Q^2] f_-^{(p)} - 2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s^{(p)} &= 0 \\
 (\tilde{k}_p^2 - Q_{p+1}^2) f_-^{(p)} - 2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s^{(p)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

สมการ (3.18) เพื่อเขียน f_+

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 - 2iQ\partial_y - Q^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_+ &= -2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s \\
 [-(pQ)^2 + k_{fp}^2 + 2pQ^2 - Q^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}] f_+ &= -2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s \\
 [k_{fp}^2 - \Omega_n \xi_f^{-2} - (p-1)^2 Q^2] f_+ &= -2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s \\
 (\tilde{k}_p^2 - Q_{p-1}^2) f_+^{(p)} + 2i\xi_J^{-2} \sin \phi f_s^{(p)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

และสมการ (3.19) เพื่อเขียน f_{tz}

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\nabla_y^2 + \nabla_z^2) f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} - \Omega_n \xi_f^{-2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} \\
 = 2i\phi \xi_J^{-2} \cos \phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left(f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] (ipQ)^2 e^{ipQy} + k_{fp}^2 f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} \right) \\ - \Omega_n \xi_f^{-2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{tz}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy} = 2i\phi \xi_J^{-2} \cos\phi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)} \cosh[k_{fp}(z+d_f)] e^{ipQy}$$

$$\left(-(pQ)^2 + k_{fp}^2 - \Omega_n \xi_f^{-2} \right) f_{tz}^{(p)} = 2i\phi \xi_J^{-2} \cos\phi f_s^{(p)}$$

$$(\tilde{k}_p^2 - Q_p^2) f_{tz}^{(p)} - 2i\phi \xi_J^{-2} \cos\phi f_s^{(p)} = 0 \quad (3.24)$$

เขียนสมการทั้งสี่ 3.21-3.24 ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 & -i\xi_J^{-2} \sin\phi & i\xi_J^{-2} \sin\phi & -2i \cos\phi \xi_J^{-2} \\ -2i\xi_J^{-2} \sin\phi & \tilde{k}_p^2 - Q_{p+1}^2 & 0 & 0 \\ 2i\xi_J^{-2} \sin\phi & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_{p-1}^2 & 0 \\ -2i \cos\phi \xi_J^{-2} & 0 & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_s^{(p)} \\ f_-^{(p)} \\ f_+^{(p)} \\ f_{tz}^{(p)} \end{pmatrix} = 0$$

หาค่าไอเกน $\tilde{k}_{fp}^2$ ได้จากเงื่อนไขของดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ 4x4 เท่ากับศูนย์ ($\text{Det}[M] = 0$)

$$\begin{vmatrix} \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 & -i\xi_J^{-2} \sin\phi & i\xi_J^{-2} \sin\phi & -2i \cos\phi \xi_J^{-2} \\ -2i\xi_J^{-2} \sin\phi & \tilde{k}_p^2 - Q_{p+1}^2 & 0 & 0 \\ 2i\xi_J^{-2} \sin\phi & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_{p-1}^2 & 0 \\ -2i \cos\phi \xi_J^{-2} & 0 & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 \end{vmatrix} = 0$$

ในกรณีนี้ที่ $p = 0$

$$\begin{vmatrix} \tilde{k}_p^2 & -i\xi_J^{-2} \sin\phi & i\xi_J^{-2} \sin\phi & -2i \cos\phi \xi_J^{-2} \\ -2i\xi_J^{-2} \sin\phi & \tilde{k}_p^2 - Q^2 & 0 & 0 \\ 2i\xi_J^{-2} \sin\phi & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q^2 & 0 \\ -2i \cos\phi \xi_J^{-2} & 0 & 0 & \tilde{k}_p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

ค่าไอเกนทั้งสี่หาได้จากสมการ

$$(\tilde{k}_p^2 - Q^2)(\tilde{k}_p^6 - Q^2 \tilde{k}_p^4 + 4\xi_J^{-4} \tilde{k}_p^2 - 4\cos^2 \phi Q^2 \xi_J^{-4}) = 0 \quad (3.26)$$

จะได้คำตอบแรกคือ

$$\tilde{k}_p^2 = \tilde{k}_{01}^2 = Q^2 = 3\eta \xi_J^{-2}$$

สำหรับสมการ $\tilde{k}_p^6 - Q^2 \tilde{k}_p^4 + 4\xi_J^{-4} \tilde{k}_p^2 - 4\cos^2 \phi Q^2 \xi_J^{-4} = 0$ มีคำตอบในรูปแบบ

$$\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2} (\eta + 2\alpha_+)$$

$$\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2} (\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-) \quad (3.27)$$

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2} (\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)$$

เมื่อ $\alpha_+ = \frac{(\chi_+ + \chi_-)}{2}; \quad \alpha_- = \frac{(\chi_+ - \chi_-)}{2}; \quad \chi_{\pm} = \sqrt[3]{B \pm \sqrt{B^2 + A^3}}$

$$A = \frac{4}{3} - \eta^2; \quad B = \eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi \quad \text{และ} \quad \eta = \frac{Q^2 \xi_J^2}{3}$$

รายละเอียดการคำนวณและการหาค่าฟังก์ชันไอเกน ดูได้จากภาคผนวก ก

จากสมการ (3.25) เมื่อแทนด้วยค่าไอเกนทั้ง 4 จะได้

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = f_{-(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} \\ \frac{-i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} \\ \frac{2i \cos \phi}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix} f_{s(2)} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_+ - \eta)}{i \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ \frac{2 \cot \phi (\alpha_+ - \eta)}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2i \sin \phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i \sin \phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i \cos \phi}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} f_{s(3)} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\cot \phi \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2i \sin \phi}{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i \sin \phi}{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i \cos \phi}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} f_{s(4)} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\cot \phi \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (3.17)-(3.19) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตภายนอก สามารถเขียนสมการ (3.20) ในรูป

$$f_l(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy} \quad (3.32)$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ $a_j^{(p)}$ ทั้ง 4 หาได้จากสมการเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อ S/F และ $f_{l,(j)}^{(p)}$ คือสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันไอเกน

3.3 สมการคลื่นของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำวดยิ่ง (wave equation of electron pair in superconductor)

องค์ประกอบคลื่นทริปเลต

ที่แผ่นตัวนำวดยิ่งไม่มีสนามแลกเปลี่ยน $\vec{J}$ ดังนั้นจึงไม่มีอันตรกิริยาร่วมกันระหว่างคลื่นซึ่งเกิดกับคลื่นทริปเลต สมการ (3.18) จึงอยู่ในรูป

$$(\nabla^2 - Q^2 \mp 2iQ\partial_y - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_{\pm} = 0$$

และสมการ (3.19) เขียนในรูป

$$(\nabla^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}) f_{\pm} = 0$$

ผลเฉลยของ $f_{\pm}$ และ $f_{\pm}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวหน้าของแผ่นประกอบ ($z = d_s$) และมีสมบัติความเป็นคาบในทิศแกน y อยู่ในรูป

$$f_{\pm, tz}(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_{\pm, tz}^{(p)} \cosh[k_p^{\pm, tz}(z - d_s)] e^{ipQy} \quad (3.33)$$

เมื่อ

$$k_p^{\pm} = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_{p \mp 1}^2}$$

และ

$$k_p^{tz} = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_p^2} \quad (3.34)$$

สัมประสิทธิ์ $f_{\pm}^{(p)}$ และ $f_{\pm}^{(p)}$ คำนวณหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อ S/F

องค์ประกอบคลื่นซิงเกิลต

ที่แผ่น S จากสมการ (3.5) เมื่อ $\bar{J} = 0$ สมการสำหรับคู่แอมพลิจูดของคลื่นซิงเกิลต f_s คือ

$$(D_s \nabla^2 - 2\omega_n) f_s = -2\pi \Delta_s \quad (3.35)$$

จากความสมมาตรแบบเป็นคาบเมื่อเทียบกับในแกน y คู่แอมพลิจูดของคลื่นซิงเกิลต f_s และพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ Δ_s สามารถกระจายในอนุกรมฟูรีเยร์ ดังนี้

$$f_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)}(z) e^{ipQy} \quad (3.36)$$

$$\Delta_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Delta_s^{(p)}(z) e^{ipQy} \quad (3.37)$$

แทนสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.35) จะได้แอมพลิจูดของคลื่นฟูรีเยร์ $f_s^{(p)}(z)$ ในรูปสมการอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\nabla_y^2 + \nabla_z^2) f_s^{(p)}(z) e^{ipQy} - \Omega_n \xi_s^{-2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)}(z) e^{ipQy} &= -\frac{2\pi}{D_s} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Delta_s^{(p)}(z) e^{ipQy} \\ (\partial^2 - Q_p^2 - \Omega_n \xi_s^{-2}) f_s^{(p)}(z) &= -\frac{2\pi}{D_s} \Delta_s^{(p)}(z) \end{aligned} \quad (3.38)$$

ในขณะที่พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ $\Delta_s^{(p)}(z)$ กำหนดโดยสมการ

$$\begin{aligned} \Delta_s \ln \frac{T_{c0}}{T_c} &= \pi T \sum_n \left(\frac{\Delta_s}{\omega_n} - \frac{f_s(\omega_n)}{\pi} \right) \\ \Delta_s^{(p)}(z) \ln \frac{T_{c0}}{T_c} &= 2\pi T \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\Delta_s^{(p)}(z)}{\omega_n} - \frac{f_s^{(p)}(z)}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

โดยทั่วไป สมการ(38)-(39) ไม่สามารถแก้ได้โดยตรง ที่จุดนี้ไม่มีการผสมผสานระหว่างองค์ประกอบของคลื่นฟูรีเยร์ที่แตกต่างกันทั้งในตัวนำยวดยิ่งและในแม่เหล็กเฟอร์โร ในตัวนำยวดยิ่งที่ใกล้อุณหภูมิวิกฤต ค่า p แต่ละค่าขององค์ประกอบฟูรีเยร์ที่ขึ้นกับแกน y จะได้สมการช่องว่าง (38) ที่แตกต่างกันและอุณหภูมิวิกฤต $T_c(p)$ ที่ได้ก็จะแตกต่างกัน

3.4 แอมพลิจูดของคู่คูเปอร์ (Pair amplitude)

ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ $a_j^{(p)}$ และ $f_{\pm}^{(p)}$ จากเงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อของแผ่นประกบ S/F

องค์ประกอบคลื่นซิงเกิลต

เรานิยาม $\delta_0^{(p)} = f_s^{(p)}(z=0)$ แทนสมการ (3.35) และ (3.31) ลงในเงื่อนไขขอบเขตสมการ (3.15)

$$\begin{aligned}
 f_s(y, 0) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)}(0) e^{ipQy} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \cosh(k_{fpj} d_f) e^{ipQy} \\
 &+ \xi_f \gamma_b k_{fpj} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \sinh(k_{fpj} d_f) e^{ipQy} \\
 f_s^{(p)}(0) &= \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \cosh(k_{fpj} d_f) + \xi_f \gamma_b k_{fpj} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \sinh(k_{fpj} d_f) \\
 &= \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \left(\cosh(k_{fpj} d_f) + \xi_f \gamma_b k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f) \right) \\
 f_s^{(p)}(0) &= \delta_0^{(p)} = \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} A_j^{(p)}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

โดยที่ $A_j^{(p)} = \cosh(k_{fpj} d_f) + \xi_f \gamma_b k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f)$ (3.41)

องค์ประกอบคลื่นทริปเลต

จากสมการ (3.36) และสมการ (3.33) ที่ $z=0$ คือค่าเดียวกัน ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 f_l(y, 0) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_l^{(p)} \cosh(k_{tp}^l d_s) e^{ipQy} = f_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)}(0) e^{ipQy} \\
 f_l^{(p)} \cosh(k_{tp}^l d_s) &= f_s^{(p)}(0) \\
 f_l^{(p)} \cosh(k_{tp}^l d_s) &= \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} A_j^{(p)}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

เมื่อ $l = \pm, tz$ เงื่อนไขขอบเขต สมการ (3.14) พิจารณาเฉพาะคลื่นทริปเลตเท่านั้น รวมกับสมการ (3.42) จะได้

$$-f_l^{(p)} \xi_s k_{tp}^l \sinh(k_{tp}^l d_s) = \gamma \xi_f k_{fpj} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \sinh(k_{fpj} d_f)$$

$$-\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} A_j^{(p)} \xi_s k_{tp}^l \frac{\sinh(k_{tp}^l d_s)}{\cosh(k_{tp}^l d_s)} = \gamma \xi_f k_{fpj} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \sinh(k_{fpj} d_f)$$

ย้ายข้างสมการ $\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} A_j^{(p)} \xi_s k_{tp}^l \tanh(k_{tp}^l d_s) + \gamma \xi_f k_{fpj} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \sinh(k_{fpj} d_f) = 0$

$$\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \left\{ A_j^{(p)} \xi_s k_{tp}^l \tanh(k_{tp}^l d_s) + \gamma \xi_f k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f) \right\} = 0$$

เขียนใหม่เป็น $\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \left\{ A_j^{(p)} + \frac{C_j^{(p)}}{\xi_s k_{tp}^l \tanh(k_{tp}^l d_s)} \right\} = 0$

เมื่อ $C_j^{(p)} = \gamma \xi_f k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f)$ (3.43)

หรือ $\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \left\{ A_j^{(p)} + C_j^{(p)} \left[\xi_s k_{tp}^l \tanh(k_{tp}^l d_s) \right]^{-1} \right\} = 0$

เขียนใหม่เป็น $\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j}^{(p)} \tilde{A}_{j,l}^{(p)} = 0$ (3.44)

เมื่อกำหนด $\tilde{A}_{j,l}^{(p)} = A_j^{(p)} + C_j^{(p)} \left[\xi_s k_{tp}^l \tanh(k_{tp}^l d_s) \right]^{-1}$ (3.45)

สมการ (3.40) สำหรับคลื่นเชิงเกลต และสมการ (3.44) สำหรับคลื่นทริปเลต จัดรูปไปสู่ระบบสมการเชิงเส้น

$$\delta_0^{(p)} = \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{s,p,j}^{(p)} A_j^{(p)} = a_1^{(p)} F_1 + a_2^{(p)} F_2 + a_3^{(p)} F_3 + a_4^{(p)} F_4$$

เมื่อ $F_j = f_{s,p,j} A_j^{(p)}$

$$\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{+,p,j}^{(p)} \tilde{A}_{j,+}^{(p)} = a_1^{(p)} h_{+,1} + a_2^{(p)} h_{+,2} + a_3^{(p)} h_{+,3} + a_4^{(p)} h_{+,4} = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{-,p,j}^{(p)} \tilde{A}_{j,-}^{(p)} = a_1^{(p)} h_{-,1} + a_2^{(p)} h_{-,2} + a_3^{(p)} h_{-,3} + a_4^{(p)} h_{-,4} = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{tz,p,j}^{(p)} \tilde{A}_{j,tz}^{(p)} = a_1^{(p)} h_{tz,1} + a_2^{(p)} h_{tz,2} + a_3^{(p)} h_{tz,3} + a_4^{(p)} h_{tz,4} = 0$$

และ $h_{l,j} = f_{l,p,j} \tilde{A}_{j,l}^{(p)}$

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ h_{+,1} & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{-,1} & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{tz,1} & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ a_3^{(p)} \\ a_4^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0^{(p)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s,p,1} A_1^{(p)} & f_{s,p,2} A_2^{(p)} & f_{s,p,3} A_3^{(p)} & f_{s,p,4} A_4^{(p)} \\ f_{+,p,1} \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & f_{+,p,2} \tilde{A}_{2,+}^{(p)} & f_{+,p,3} \tilde{A}_{3,+}^{(p)} & f_{+,p,4} \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ f_{-,p,1} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & f_{-,p,2} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & f_{-,p,3} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & f_{-,p,4} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ f_{tz,p,1} \tilde{A}_{1,tz}^{(p)} & f_{tz,p,2} \tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & f_{tz,p,3} \tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & f_{tz,p,4} \tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(p)} \\ a_2^{(p)} \\ a_3^{(p)} \\ a_4^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0^{(p)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

เราสามารถหา $a_j^{(p)}$ โดยใช้กฎของเครเมอร์

$$a_1^{(p)} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_0^{(p)} & F_2 & F_3 & F_4 \\ 0 & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ 0 & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ 0 & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ h_{+,1} & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{-,1} & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{tz,1} & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_0^{(p)} \begin{vmatrix} h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ h_{+,1} & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{-,1} & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{tz,1} & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{vmatrix}}$$

และเช่นเดียวกับสำหรับองค์ประกอบอื่นๆ ซึ่งสามารถเขียนลดรูปได้ดังสมการ

$$a_j^{(p)} = \delta_0^{(p)} \frac{N_j}{\bar{F} \cdot \bar{N}} \quad (3.46)$$

เมื่อ $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, $\bar{h}_l = (h_{l,1}, h_{l,2}, h_{l,3}, h_{l,4})$; $l = \pm, tz$, $\bar{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4)$

และ $N_i = \varepsilon_{ijkl} h_{+,j} h_{-,j} h_{tz,j}$

3.5 อุณหภูมิวิกฤตของสภานำยวดยิ่ง (Superconducting critical temperature : T_c)

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต สมการ (3.14) และ (3.15) พิจารณาแอมพลิจูดของคลื่นซึ่งเกลตดังแสดงในสมการ (3.45) เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ขององค์ประกอบของคลื่นซึ่งเกลต $f_s^{(p)}(z)$ และค่า $\delta_0^{(p)}$ ที่ผิวรอยต่อ ที่ตัวนำยวดยิ่ง S ดังนี้

$$f_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_s^{(p)}(z) e^{ipQy}$$

$$\partial_z f_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \partial_z f_s^{(p)}(z) e^{ipQy}$$

ที่แม่เหล็กเฟอร์ไรต์ F

$$f_l(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,p,j} \cosh[k_{fpj}(z + d_f)] e^{ipQy}, \quad l = s, \pm, tz$$

$$\partial_z f_s(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{s,p,j} k_{fpj} \sinh[k_{fpj} d_f] e^{ipQy}$$

ใช้สมการ 3.14
$$\xi_s \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \partial_z f_s^{(p)}(z) e^{ipQy} = \gamma \xi_f \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{s,p,j} k_{fpj} \sinh[k_{fpj} d_f] e^{ipQy}$$

$$\xi_s \partial_z f_s^{(p)}(z=0) = \gamma \xi_f \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{s,p,j} k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f)$$

$$\xi_s f_s^{(p)'}(z=0) = \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{s,p,j} C_j^{(p)}$$

เมื่อ $C_j^{(p)} = \gamma k_{fpj} \xi_f \sinh(k_{fpj} d_f)$

$$\xi_s f_s^{(p)'}(z=0) = \sum_{j=1}^4 \delta_0^{(p)} \frac{N_j}{\bar{F} \cdot \bar{N}} f_{s,p,j} C_j^{(p)} = \frac{\delta_0^{(p)}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} \sum_{j=1}^4 N_j f_{s,p,j} C_j^{(p)}$$

$$\xi_s f_s^{(p)'}(z=0) = \delta_0^{(p)} \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} = W_p \delta_0^{(p)} \quad (3.47)$$

สมการ (3.47) เป็นเงื่อนไขการหา $f_s^{(p)}$ โดยเทคนิคฟังก์ชันกรีนเมื่อให้ฟังก์ชันรอยต่อ $W_p = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}}$ บรรจุข้อมูลของสถานะซึ่งเกิดของแอมพลิจูดของคู่อิเล็กตรอนในชั้นแม่เหล็กและ $\bar{C} = C_j^{(p)} f_{s,p,j}$ พิจารณากรณีที่ $p=0$ ซึ่งเป็นกรณีที่สามารหาคำตอบเชิงวิเคราะห์โดยประมาณได้ ฟังก์ชันรอยต่อ W_0 หาได้จาก

$$W_0 = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} = \frac{C_1 N_1 + C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4}$$

เมื่อแทนค่าต่างๆ จากสมการ (3.46) จะได้

$$W_0 = \frac{2(\eta - \alpha_+) C_2^0 (-Z \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_3 + Y \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1) + (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) C_3^0 (-Z \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - X \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1) + (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) C_4^0 (-Y \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - X \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_3 \tilde{A}_1)}{-2(\alpha_+ - \eta) A_2^{(p)} (-Z \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_3 + Y \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1) + (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) A_3^{(p)} (-Z \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - X \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_4 \tilde{A}_1) + (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) A_4^{(p)} (-Y \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - X \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_3 \tilde{A}_1)} \quad (3.48)$$

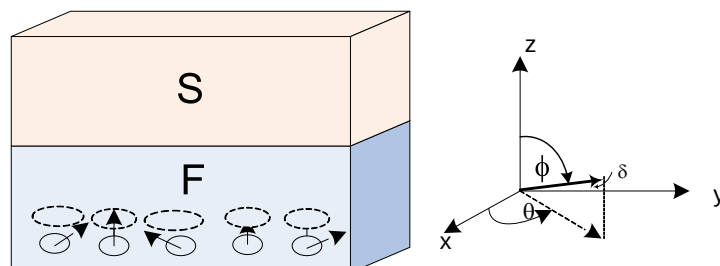
โดยที่

$$X = \frac{2(\alpha_+ - \eta) \cot \phi}{(\eta + 2\alpha_+)}, Y = \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \cot \phi}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)}, Z = \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \cot \phi}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \quad (3.49)$$

รายละเอียดการคำนวณ ดูได้จากภาคผนวก ข

3.6 การหาค่าฟังก์ชันรอยต่อ W_0 กรณีมุม ϕ มีค่ามาก ๆ

3.6.1 กรณีมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$



ภาพประกอบ 58 แผ่นประกอบคู่ตัวนำวูดยี่ง (S) กับแม่เหล็กเฟอร์ไร (F) เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$

กรณีที่มุม ϕ มีค่ามาก คือเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม δ ที่วัดจากระนาบ x-y มีค่าน้อยๆ หรือเข้าใกล้ศูนย์ ฟังก์ชันรอยต่อ W_0 ประกอบด้วยพารามิเตอร์ $\alpha_{\pm}(\eta, \phi)$ ซึ่งต้องทำการหาค่าโดยการพิทกราฟ (ดูได้จากภาคผนวก ค) คือ

$$\alpha_{+}(\eta, \delta) = -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2$$

$$\alpha_{-}(\eta, \delta) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6} \right) \delta^2$$

เราจะได้ค่า W_0 ดังนี้

$$W_0 = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} = \frac{C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4}$$

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{i\eta_0 C_2^0 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- C_3^0 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\}}{i\eta_0 A_2 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- A_3 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\}} \\
& + 2\eta_+ C_4^0 \left(\tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right) \\
& + 2\eta_+ A_4 \left(\tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.6.2 กรณีมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$

จากสมการ (3.50) เมื่อมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม $\delta = 0$ สมการ (3.50) จะถูกลดรูปลง

เป็น

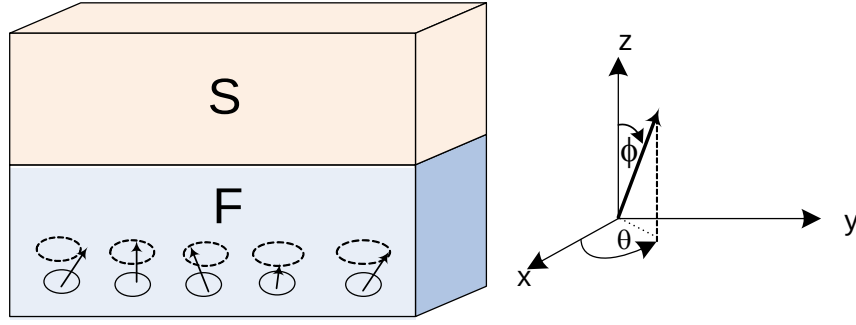
$$W_0 = \frac{\eta_- C_3^0 \tilde{A}_4 + \eta_+ C_4^0 \tilde{A}_3}{\eta_- A_3 \tilde{A}_4 + \eta_+ A_4 \tilde{A}_3} \tag{3.51}$$

(รายละเอียดการคำนวณแสดงในภาคผนวก ค)

สมการนี้จะนำไปแทนค่าในสมการ (3.47) เพื่อทำการคำนวณโดยเทคนิคฟังก์ชันกรีน

3.7 การหาค่าฟังก์ชันรอยต่อ W_0 กรณีมุม ϕ มีค่าน้อยๆ

3.7.1 กรณีมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์



ภาพประกอบ 59 แผ่นประกบคู่ตัวนำยาวดิ่ง (S) กับแม่เหล็กเฟอร์โร (F) เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

พิจารณาฟังก์ชัน $\alpha_{\pm}$ จากการประมาณโดยวิธีพิตกราฟ จะได้

$$\alpha_+(\eta, \phi) = \eta - (0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2) = \eta - \Sigma_1 \quad (3.52)$$

$$\alpha_-(\eta, \phi) = \sqrt{\frac{4}{3}} - (1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2) = \sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2 \quad (3.53)$$

เมื่อให้ $\Sigma_1 = 0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2$, $\Sigma_2 = 1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2$

$$W_0 = \frac{\vec{C} \cdot \vec{N}}{\vec{F} \cdot \vec{N}} = \frac{C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4}$$

แทนค่า

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{2\Sigma C_2^0 \left(\frac{(3\eta + 2i + \Sigma_-)}{-2i - \Sigma_-} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} - \frac{(3\eta - 2i + \Sigma_+)}{(2i - \Sigma_+)} \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_3 \right)}{2\Sigma A_2 \left(\frac{(3\eta + 2i + \Sigma_-)}{-2i - \Sigma_-} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} - \frac{(3\eta - 2i + \Sigma_+)}{(2i - \Sigma_+)} \tilde{A}_{4,tz} \tilde{A}_3 \right)} \\ & + (3\eta + 2i + \Sigma_-) C_3^0 \left(\frac{(3\eta - 2i + \Sigma_+)}{(2i - \Sigma_+)} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} + \frac{2\Sigma}{3\eta + 2\Sigma} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} \right) \\ & + (3\eta - 2i + \Sigma_+) C_4^0 \left(\frac{(3\eta + 2i + \Sigma_-)}{-2i - \Sigma_-} \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_2 + \frac{2\Sigma}{3\eta + 2\Sigma} \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_3 \right) \\ & + (3\eta + 2i + \Sigma_-) A_3 \left(\frac{(3\eta - 2i + \Sigma_+)}{(2i - \Sigma_+)} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} + \frac{2\Sigma}{3\eta + 2\Sigma} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} \right) \\ & + (3\eta - 2i + \Sigma_+) A_4 \left(\frac{(3\eta + 2i + \Sigma_-)}{-2i - \Sigma_-} \tilde{A}_{3,tz} \tilde{A}_2 + \frac{2\Sigma}{3\eta + 2\Sigma} \tilde{A}_{2,tz} \tilde{A}_3 \right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

เมื่อกำหนด $\Sigma_{\pm} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) \pm \frac{i}{2}\Sigma_1$

สมการนี้จะถูกนำไปแทนค่าในสมการ (3.47) เพื่อการคำนวณโดยเทคนิคฟังก์ชันกรีน

3.7.2 กรณีมุม ϕ มีค่าเท่ากับศูนย์

พิจารณาการลดรูป เมื่อ $\phi = 0$

$$\Sigma = (1.3\eta - 1.17\eta^2) \frac{\phi^2}{2} = 0, \quad \Sigma_- = (1 - i\sqrt{3})(1.3\eta - 1.17\eta^2) \frac{\phi^2}{2} = 0$$

$$\Sigma_+ = (1 + i\sqrt{3})(1.3\eta - 1.17\eta^2) \frac{\phi^2}{2} = 0$$

สมการ (3.54) ถูกลดรูปลงเป็น

$$W_0 = \frac{\tilde{A}_{4,tz} C_3^0 - \tilde{A}_{3,tz} C_4^0}{\tilde{A}_{4,tz} A_3 - \tilde{A}_{3,tz} A_4} \quad (3.55)$$

สมการนี้จะถูกนำไปแทนค่าในสมการ (3.47) เพื่อการคำนวณโดยเทคนิคฟังก์ชันกรีน

บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการวิจัยเพื่อหาคุณสมบัติวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ซึ่งประกอบด้วยแผ่นตัวนำวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อสนามแลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ โดยใช้ทฤษฎีสภาพนำวดยิ่งแบบกึ่งคลาสสิกภายใต้ขอบเขตของการแพร่ซึม กำหนด สนามแลกเปลี่ยนอยู่ในรูป

$$\bar{J}(y, \phi) = J \left(\sin \phi \cos Qy \hat{i} + \sin \phi \sin Qy \hat{j} + \cos \phi \hat{k} \right)$$

เมื่อ $\bar{J}$ เป็นสนามแลกเปลี่ยน หมุนด้วยมุม ϕ ซึ่งมีค่าคงตัวเทียบกับแกน z และมุม $\theta = Qy$ ในระนาบ xy , Q เป็นเวกเตอร์คลื่น ฟังก์ชันกรีนแบบอปกติ เขียนในรูป

$$f = (f_s + \bar{f}_t \cdot \bar{\sigma}) i \sigma_y$$

เมื่อ $\bar{\sigma}$ เป็นเมตริกซ์เวกเตอร์ของเพาลี, $\bar{f}_t = (f_{tx}, f_{ty}, f_{tz})$ เป็นแอมพลิจูดเวกเตอร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินทริปเลต และ f_s เป็นแอมพลิจูดสเกลาร์ของคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินซิงเกิลต สมการขนส่งเชิงเส้นของอุสเซลสำหรับระบบที่มีการแพร่ซึมเมื่อใกล้คุณสมบัติของคู่อิเล็กตรอน f_s และ $\bar{f}_t$ คือ

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) f_s = -2\pi\Delta_s + 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \bar{J} \cdot \bar{f}_t \quad (4.1)$$

$$(D\nabla^2 - 2|\omega_n|) \bar{f}_t = 2i \operatorname{sgn}(\omega_n) \bar{J} f_s \quad (4.2)$$

เมื่อ D เป็นค่าคงตัวของการแพร่ซึม ω_n เป็นความถี่ของมัดสุบาระ $\operatorname{sgn}(\omega_n)$ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\omega_n > 0$ และมีค่าเป็น -1 เมื่อ $\omega_n < 0$ ส่วน Δ_s เป็นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่จะปรากฏอยู่ในแผ่น S ซึ่งคล่องจองกับแอมพลิจูดสเกลาร์ f_s กับสมการ $\Delta_s \ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \pi T \sum_n \left(\frac{\Delta_s}{\omega_n} - \frac{f_s(\omega_n)}{\pi} \right)$ โดย T_{c0} คืออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นตัวนำวดยิ่งขนาดใหญ่

ในการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นของอุสเซล (4.1) และ (4.2) จึงสร้างฟังก์ชันกรีนแบบอปกติให้สอดคล้องกับการหมุนแบบเป็นคาบตามแกน y คือ $f_+ = (-f_{tx} + if_{ty}) e^{iQy}$ และ $f_- = (f_{tx} + if_{ty}) e^{-iQy}$ ดังนั้น สมการเชิงเส้นของอุสเซลจึงอยู่ในรูป

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_s = -2\pi\Delta_s + iJ [\sin\phi (f_- - f_+) + 2\cos\phi f_{tz}] \quad (4.3)$$

$$(D\nabla^2 - DQ^2 \mp 2iQD\partial_y - 2\omega_n) f_{\pm} = \mp 2iJf_s \sin\phi \quad (4.4)$$

$$(D\nabla^2 - 2\omega_n) f_{tz} = 2i\cos\phi Jf_s \quad (4.5)$$

และใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวรอยต่อระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่งและแม่เหล็กเฟอร์โร

$$\xi_s \partial_z f_{sc} = \gamma \xi_f \partial_z f_F$$

$$\xi_f \gamma_b \partial_z f_F = f_{sc} - f_F$$

และที่ผิวนอกของ S และ F ($z = -d_f$ และ $z = d_s$) ใช้เงื่อนไขขอบเขต

$$\partial_z f = 0.$$

เมื่อ γ และ γ_b คือสภาพต้านทานไม่เทียบคู่ระหว่างชั้นตัวนำทั้งสองและความต้านทานขอบเขตที่ระบุลักษณะเฉพาะของการร้าวและกระโดดของคู่อิเล็กตรอนจากชั้นตัวนำยวดยิ่งไปสู่ชั้นแม่เหล็กเฟอร์โรในทิศตั้งฉากกับผิวรอยต่อ R_b เป็นความต้านทานที่รอยต่อ A เป็นพื้นที่ผิวรอยต่อ ส่วน $\xi_s = \sqrt{D_s / 2\pi T_{c0}}$ และ $\xi_f = \sqrt{D_f / 2\pi T_{c0}}$ คือ ความยาวอาพันธ์ในตัวนำยวดยิ่ง S และ F ตามลำดับ

ในแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร แอมพลิจูดของคลื่นซิงเกิลต f_s และคลื่นทริปเลต $f_{\pm, tz}$ กระจายอนุกรมฟูเรียร์ และใช้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวนอก ($z = -d_f$) ดังนั้นแอมพลิจูดของฟังก์ชันคลื่นเขียนในรูป

$$f_l(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f_l^{(p)} \cosh[k_{fp}(z + d_f)] e^{ipQy}$$

เมื่อ $l = s, \pm, tz$ ดังนั้น สมการ (4.3)-(4.5) เขียนในรูปเมตริกซ์ เป็น

$$\begin{pmatrix} \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 & -i\xi_J^{-2} \sin\phi & i\xi_J^{-2} \sin\phi & -2i\cos\phi \xi_J^{-2} \\ -2i\xi_J^{-2} \sin\phi & \tilde{k}_p^2 - Q_{p+1}^2 & 0 & 0 \\ 2i\xi_J^{-2} \sin\phi & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_{p-1}^2 & 0 \\ -2i\cos\phi \xi_J^{-2} & 0 & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_s^{(p)} \\ f_-^{(p)} \\ f_+^{(p)} \\ f_{tz}^{(p)} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

เมื่อ $\xi_J = \sqrt{D_f / J}$, $\Omega_n = (2n+1)T / T_{c0}$, $pQ = Q_p$ และ $\tilde{k}_p^2 = k_{fp}^2 - \Omega_n \xi_f^{-2}$
 ในกรณีที่ $p = 0$ ค่าไอเกนทั้งสี่หาได้จากสมการ

$$(\tilde{k}_p^2 - Q^2)(\tilde{k}_p^6 - Q^2 \tilde{k}_p^4 + 4\xi_J^{-4} \tilde{k}_p^2 - 4\cos^2 \phi Q^2 \xi_J^{-4}) = 0 \quad (4.7)$$

จะได้คำตอบ คือ $\tilde{k}_p^2 = \tilde{k}_{01}^2 = Q^2 = 3\eta \xi_J^{-2}$, $\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2}(\eta + 2\alpha_+)$, $\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2}(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)$ และ

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2}(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-) \text{ เมื่อ } \alpha_+ = \frac{(\chi_+ + \chi_-)}{2}; \quad \alpha_- = \frac{(\chi_+ - \chi_-)}{2}; \quad \chi_{\pm} = \sqrt[3]{B \pm \sqrt{B^2 + A^3}}$$

โดย $A = \frac{4}{3} - \eta^2$; $B = \eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi$ และ $\eta = \frac{Q^2 \xi_J^2}{3}$ แทนค่าไอเกนทั้งสี่ลงในสมการ

(4.6) จะได้ไอเกนเวกเตอร์ดังสมการ

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_+ - \eta)}{i \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ \frac{2 \cot \phi (\alpha_+ - \eta)}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\cot \phi \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\cot \phi \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

จากสมการ (4.8) เขียนสมการในรูปทั่วไป เป็น

$$f_l(y, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^4 a_j^{(p)} f_{l,(j)}^{(p)} \cosh[k_{fpj}(z + d_f)] e^{ipQy}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ $a_j^{(p)}$ ทั้ง 4 หาได้จากสมการเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อ S/F และ $f_{l,(j)}^{(p)}$ คือสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันไอเกน

ไอเกนเวกเตอร์ทั้ง 4 จากสมการ (4.8) อยู่ในรูปที่ยุ่งยาก จึงทำสมการให้ง่ายขึ้นโดยการประมาณในกรณีที่มีมุม δ มีค่าน้อย ๆ โดยมีมุม $\delta = \frac{\pi}{2} - \phi$ เป็นมุมเงยวัดจากระนาบ xy และกรณีมุม ϕ มีค่าน้อย ๆ โดยมีมุม ϕ วัดจากแกน z

เมื่อมุม δ มีค่าน้อย ๆ จึงใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ในรูป

$$\alpha(\eta, \delta) \approx \alpha(\eta, 0) + \delta \alpha'(\eta, \delta)|_{\delta=0} + \frac{\delta^2}{2} \alpha''(\eta, \delta)|_{\delta=0} \text{ และสามารถประมาณค่า } \alpha_+ \text{ และ } \alpha_- \text{ โดย}$$

$$\text{วิธีพิตกราฟในช่วง } 0 < \eta < 0.1 \text{ ทำให้ได้ } \alpha_+(\eta, \delta) = -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right) \delta^2 \text{ และ}$$

$$\alpha_-(\eta, \delta) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6}\right) \delta^2 \text{ จากนั้น แทนลงในสมการ (4.8) ได้ไอเกนเวกเตอร์ เป็น}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s,1} \\ f_{-,1} \\ f_{+,1} \\ f_{tz,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{s,2} \\ f_{-,2} \\ f_{+,2} \\ f_{tz,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ 2i\eta_0 / (-3\eta + \eta_0) \\ -2i\eta_0 / (-3\eta + \eta_0) \\ 2i\delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_- \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta \end{pmatrix} \text{ และ } \begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+ \\ 1 \\ -1 \\ \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\text{เมื่อ } \eta_0 = \left(\frac{3\eta}{4} - \eta^2\right) \delta^2, \eta_{\pm} = \left\{ \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12}\right) \delta^2 \right\} \pm \left\{ \frac{3i\eta}{4} - \frac{i}{2} \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right) \delta^2 \right\}$$

ฟังก์ชันรอยต่อ W_p บรรจุข้อมูลของสถานะซึ่งเกิดตของแอมพลิจูดของคู่อิเล็กตรอนในชั้นแม่เหล็กพิจารณากรณี $p = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่สามารหาคำตอบเชิงวิเคราะห์โดยประมาณได้ ฟังก์ชันรอยต่อ W_0 หาได้จาก

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{i\eta_0 C_2^0 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- C_3^0 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\}}{i\eta_0 A_2 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- A_3 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\}} \\
& + 2\eta_+ C_4^0 \left(\tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right) \\
& + 2\eta_+ A_4 \left(\tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

เมื่อ $\tilde{A}_{j,l} = A_j + C_j \left(\xi_s k_p^l \tanh(k_p^l d_s) \right)^{-1}$, $A_j = \cosh(k_{fpj} d_f) + \xi_f \gamma_b k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f)$
 $C_j = \gamma \xi_f k_{fpj} \sinh(k_{fpj} d_f)$ และ $k_p^\pm = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_{p+1}^2}$, $k_p^{tz} = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_p^2}$

และเมื่อ $\delta = 0$, α_+ และ α_- จะลดรูปเป็น $\alpha_+(\eta, \delta) = -\frac{\eta}{2}$,
 $\alpha_-(\eta, \delta) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2}$, $\eta_\pm = \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2 \pm \frac{3i\eta}{4}}$ ทำให้ได้

$$W_0 = \frac{\eta_- C_3^0 \tilde{A}_4 + \eta_+ C_4^0 \tilde{A}_3}{\eta_- A_3 \tilde{A}_4 + \eta_+ A_4 \tilde{A}_3} \tag{4.11}$$

เมื่อมุม ϕ มีค่าน้อย ๆ กระจายอนุกรมเทเลอร์ และพล็อตกราฟ ในช่วง $0 < \eta < 0.1$ เพื่อ

ประมาณค่า α_+ และ α_- ซึ่งได้ $\alpha_+(\eta, \phi) = \eta - \Sigma_1$ และ $\alpha_-(\eta, \phi) = \sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2$ โดยที่

$$\Sigma_1 = 0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2, \Sigma_2 = 1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2 \text{ และ } \Sigma_\pm = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2 \pm \frac{i}{2}\Sigma_1$$

จากนั้นแทน α_+ และ α_- ลงในสมการ (4.8) ได้ไอเกนเวกเตอร์ เป็น

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Sigma_1 \\ i\phi \\ -i\phi \\ -2i\Sigma_1 / (3\eta - 2\Sigma_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\Sigma_+ + 3\eta \\ -2i\phi \\ 2i\phi \\ (2i\Sigma_+ + 3\eta) / -\Sigma_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\Sigma_- + 3\eta \\ -2i\phi \\ 2i\phi \\ (-2i\Sigma_- + 3\eta) / \Sigma_- \end{pmatrix}$$

ฟังก์ชันร่อยต่อ W_0 หาได้จาก

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{2\Sigma_1 C_2^0 \left\{ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + (2i\Sigma_+ + 3\eta) C_3^0 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\} - (-2i\Sigma_- + 3\eta) C_4^0 \left\{ \frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right\}}{2\Sigma_1 A_2 \left\{ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + (2i\Sigma_+ + 3\eta) A_3 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\} - (-2i\Sigma_- + 3\eta) A_4 \left\{ \frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right\}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

และเมื่อ $\phi = 0$, $\Sigma = \Sigma_- = \Sigma_+ = 0$ ทำให้ได้

$$W_0 = \frac{\tilde{A}_{4,tz} C_3^0 - \tilde{A}_{3,tz} C_4^0}{\tilde{A}_{4,tz} A_3 - \tilde{A}_{3,tz} A_4} \quad (4.13)$$

ในตัวยาวดยิ่ง สมการแอมพลิจูดของคลื่นซิงเกิลต คือ

$$(D_s \nabla^2 - 2\omega_n) f_s = -2\pi \Delta_s \quad (4.14)$$

การหาผลเฉลยของสมการ (4.14) ต้องคลึงจองกับสมการ

$$\Delta_s \ln \frac{T_{c0}}{T_c} = \pi T \sum_n \left(\frac{\Delta_s}{\omega_n} - \frac{f_s(\omega_n)}{\pi} \right) \quad (4.15)$$

จากนั้นใช้เทคนิคกรีนฟังก์ชัน ซึ่งผลลัพธ์สามารถเขียนคู่แอมพลิจูดคลื่นซึ่งเกิดต ดังนี้

$$f_s(z) = \pi \int_0^{d_s} G(y, z) \Delta(y) dy \quad (4.16)$$

และกรีนฟังก์ชัน G คือ

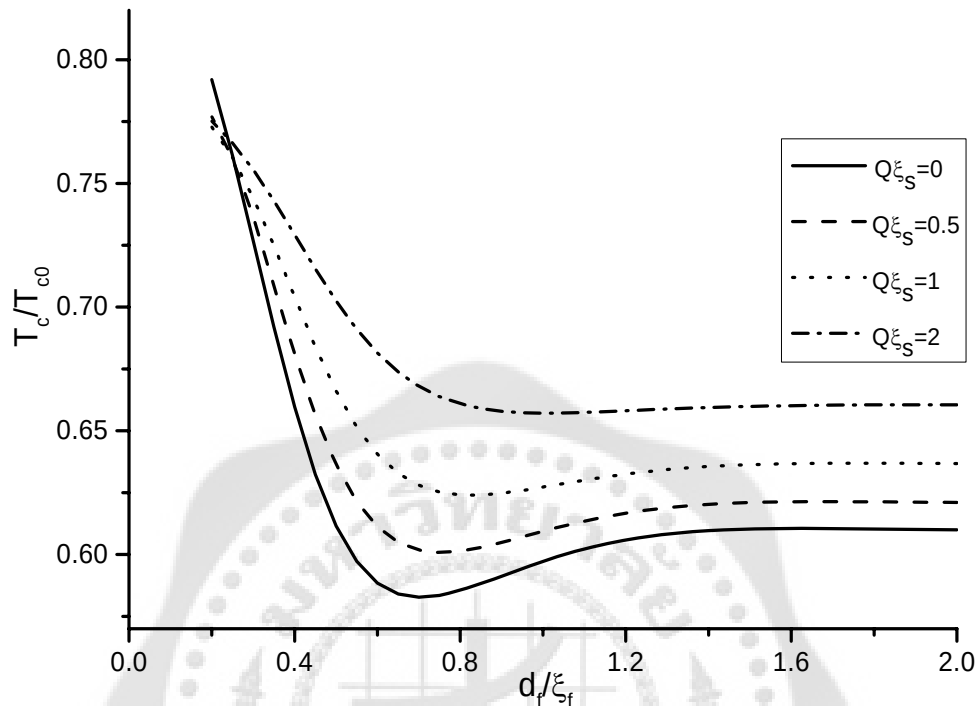
$$G(z, y) = \frac{(k_s \xi_s^2 T_{c0})^{-1}}{\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s}} \times \begin{cases} v_1(z) v_2(y), & z \leq y \\ v_2(z) v_1(y), & y \leq z \end{cases} \quad (4.17)$$

เมื่อ $v_1(z) = \cosh(k_s z) + \frac{W_p}{k_s \xi_s} \sinh(k_s z)$, $v_2(z) = \cosh(k_s (z - d_s))$ และ $k_s = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_p^2}$

สมการ (4.15)-(4.17) และ W_0 ใช้หาอุณหภูมิวิกฤตในแต่ละกรณี ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งผลการคำนวณพบว่ากรณีมุม δ มีค่าน้อย ๆ จะแสดงปรากฏการณ์พรีออสซิเลชัน ส่วนกรณีมุม ϕ มีค่าน้อย ๆ ในการคำนวณไม่เกิดปรากฏการณ์พรีออสซิเลชัน ดังนั้น การคำนวณเชิงตัวเลขจะแสดงผลเฉพาะกรณีที่มุม δ มีค่าน้อย ๆ เท่านั้น

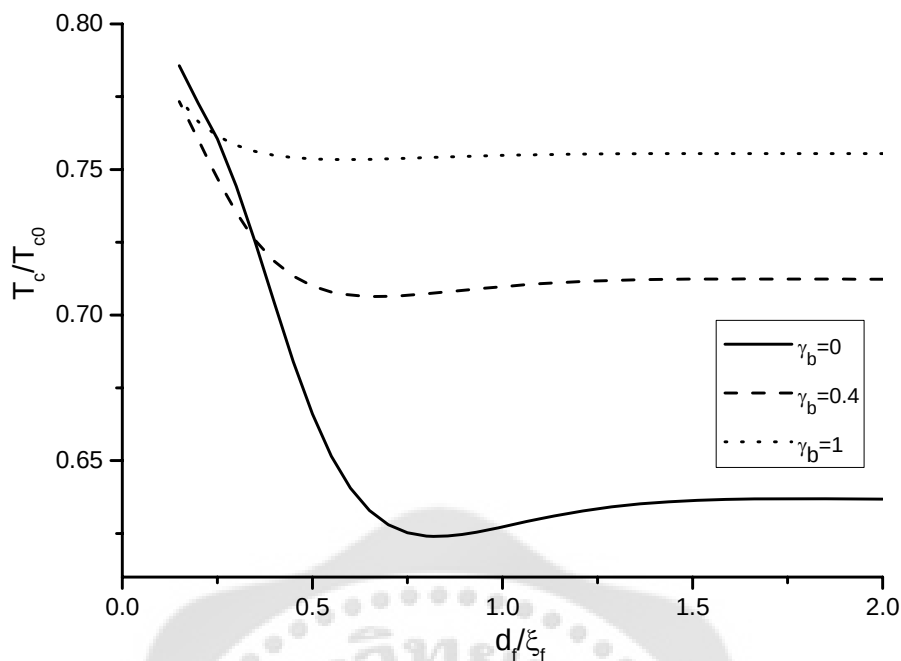
อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร ขึ้นกับพารามิเตอร์ที่สำคัญหลายตัว เช่น สนามแลกเปลี่ยนของแม่เหล็กเฟอร์โร (J) ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร (d_f) ความหนาของแผ่นตัวนำวดยิ่ง (d_s) ค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกบ (γ_b) ความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีออสซิเลชันระหว่างแผ่นตัวนำวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร (γ) เป็นต้น ผลจากสมการที่ใช้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ตัวนำวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ต่าง ๆ มีค่าดังนี้ $T_{c0} = 7 \text{ K}$, $J = 20 T_{c0}$, $\xi_s = \xi_f$, $d_s = 2\xi_s$, $\gamma = 0.15$, $\gamma_b = 0$ และมุม $\delta = 0.1746 \text{ rad}$ จากที่แสดงในภาพประกอบ 60 ที่ให้เห็นการลดลงแบบไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤตที่เป็นฟังก์ชันของความหนาแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$ มีค่าต่างกัน ลักษณะที่เด่นที่เห็นในภาพคือการลดลงอย่างไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤต ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ d_f / ξ_f แปรผันกับเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$ เมื่อกำหนดให้ผิวรอยต่อของแผ่นประกบมีความโปร่งใส (transparent) อย่างสมบูรณ์ ($\gamma_b = 0$) เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$ มีค่าเท่ากับ 0 อุณหภูมิวิกฤตลดลงต่ำสุด 0.582694 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f / ξ_f ประมาณ 0.7 และจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าคงตัวประมาณ 0.61 ที่ความหนาประมาณ 1.45 เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_s$ มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 1 อุณหภูมิวิกฤตลดลงต่ำสุดที่ 0.600832 และ 0.624077 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f / ξ_f

ประมาณ 0.75 และ 0.85 ตามลำดับ แต่กรณี $Q\xi_s$ เท่ากับ 2 อุณหภูมิวิกฤตที่ลดลงมาถึง 0.657111 ที่ความหนา 1.00 และเข้าสู่ค่าคงตัว



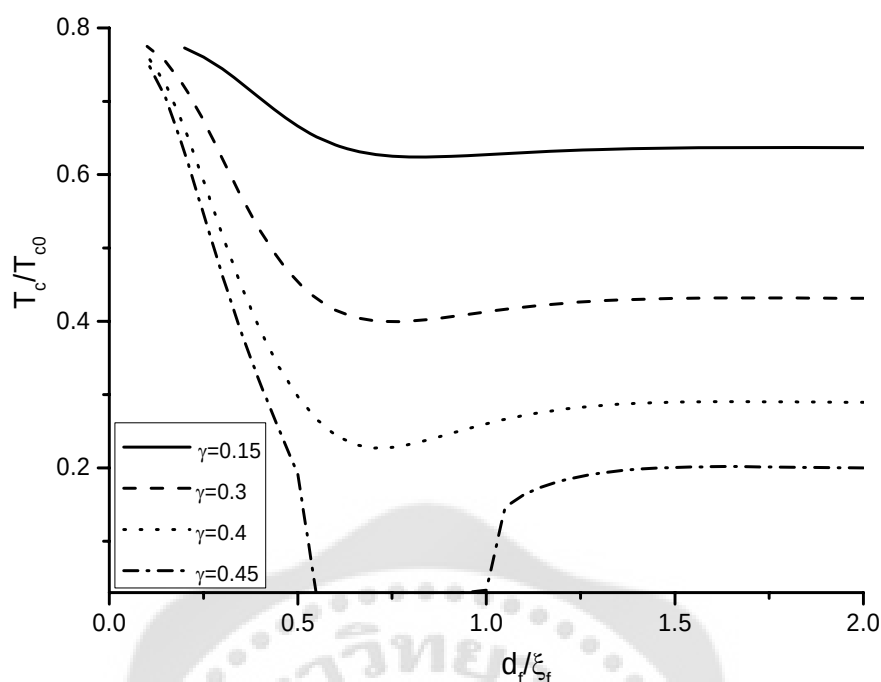
ภาพประกอบ 60 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อเลขคลื่นไร้หน่วยมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$

สำหรับค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกอบมีค่าต่างกัน ค่าพารามิเตอร์วัสดุในไดอะแกรมอื่นๆ มีค่าคงตัว ดังนี้ $T_{c0} = 7\text{ K}$, $J = 20\text{ }T_{c0}$, $\xi_s = \xi_f$, $d_s = 2\xi_s$, $\gamma = 0.15$, $Q\xi_s = 1$ และมุม $\delta = 0.1746\text{ rad}$ แสดงในภาพประกอบ 61 เมื่อ γ_b มีค่าเท่ากับศูนย์ อุณหภูมิวิกฤตได้ลดลงอย่างรวดเร็ว และมีค่าต่ำสุด 0.624077 ที่ความหนาเลดทอนมีค่าประมาณ 0.85 จากนั้นอุณหภูมิจะค่อยเพิ่มขึ้นจนถึงค่าคงตัวที่ 0.636 ที่ความหนาประมาณ 1.65 และเมื่อ γ_b มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 0.4 และ 1.0 อุณหภูมิวิกฤตที่ลดต่ำลงจะมีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน โดยมีค่าประมาณ 0.706401 และ 0.753428 ที่ความหนา 0.65 และ 0.60 ตามลำดับ และเข้าสู่ค่าคงตัว



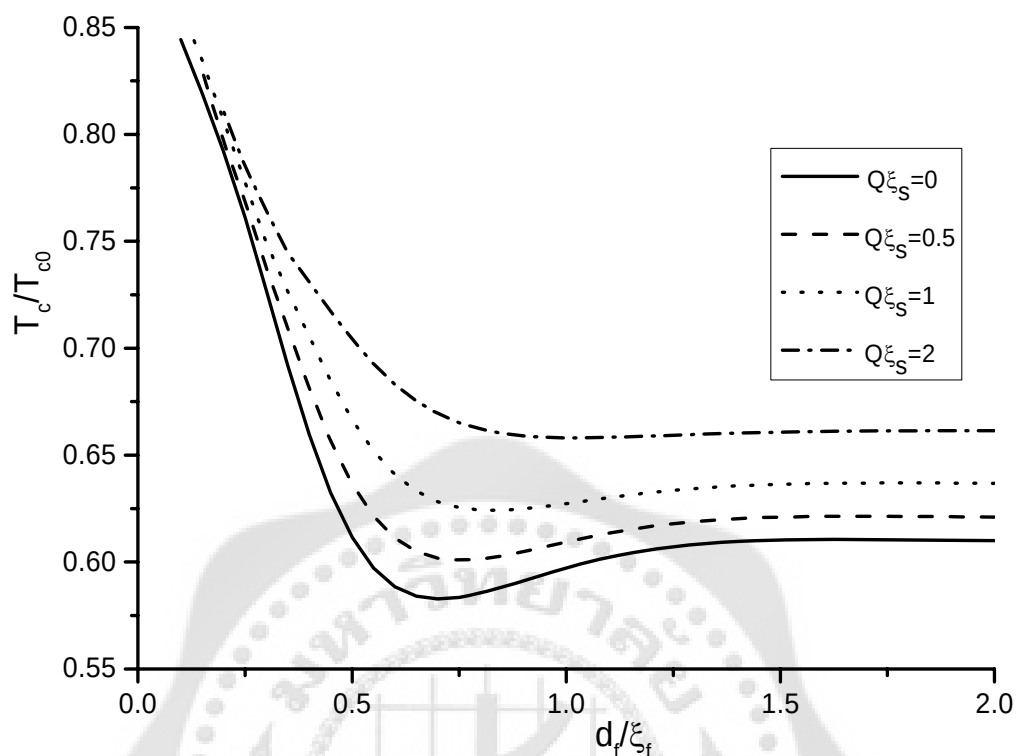
ภาพประกอบ 61 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อความโปร่งใสที่รอยต่อมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$

สำหรับค่าความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร มีค่าต่างกัน ค่าพารามิเตอร์วัสดุในไดอะแกรมอื่นๆ มีค่าคงตัว ดังนี้ $T_{c0} = 7 \text{ K}$, $J = 20 T_{c0}$, $\xi_s = \xi_f$, $d_s = 2\xi_s$, $\gamma_b = 0$, $Q\xi_s = 1$ และมุม $\delta = 0.1746 \text{ rad}$ จากภาพประกอบ 62 เมื่อ γ มีค่าเท่ากับ 0.15 อุณหภูมิวิกฤตลดลงตามความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร และเข้าสู่ค่าคงตัวค่อนข้างสูง โดยมีค่าต่ำสุด 0.624077 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กมีค่าประมาณ 0.85 และเมื่อค่าความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร มีค่าสูงขึ้น คือ 0.3, 0.40 และ 0.45 อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงอย่างรวดเร็ว และมีค่าต่ำสุดประมาณ 0.399302 และ 0.227078 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรประมาณ 0.75 และ 0.70 สำหรับค่า γ เป็น 0.30 และ 0.40 ตามลำดับ ส่วนกรณี γ เท่ากับ 0.45 อุณหภูมิวิกฤตได้ลดลงอย่างรวดเร็ว และสิ้นสุดสภาพตัวนำยวดยิ่งที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กประมาณ 0.55 และกลับมาเป็นตัวนำยวดยิ่งอีกครั้งที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กมีค่า 1.0 ก่อนที่อุณหภูมิวิกฤต จะเข้าสู่ค่าคงตัวประมาณ 0.200



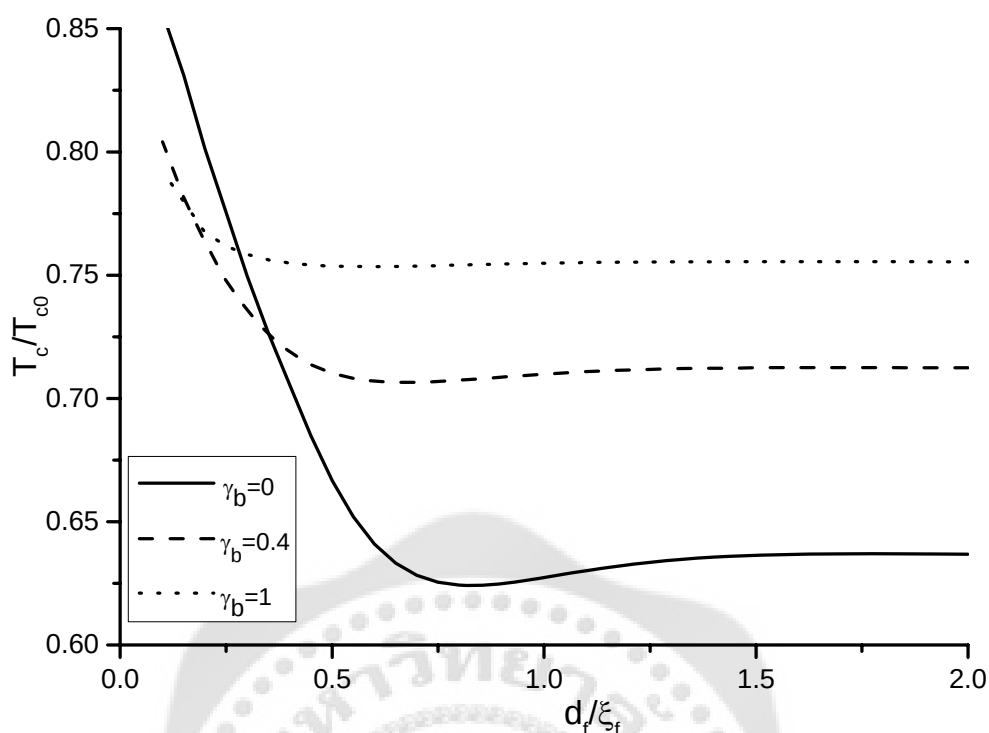
ภาพประกอบ 62 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอซิมีตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$

ภาพประกอบ 63 สำหรับการลดรูป เมื่อมุม δ มีค่าเท่ากับศูนย์ ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ มีค่าเช่นเดียวกับที่แสดงในภาพประกอบ 60 กรณีเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_f$ มีค่าต่างกัน ซึ่งให้เห็นการลดลงแบบไม่สม่ำเสมอของอุณหภูมิวิกฤตที่เป็นฟังก์ชันของความหนาแม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_f$ มีค่าต่างกัน ลักษณะที่เด่นที่เห็นในภาพคือความไม่เป็นเชิงเดียวของอุณหภูมิวิกฤตซึ่งเป็นฟังก์ชันของ d_f / ξ_f แปรผันกับเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_f$ เมื่อกำหนดให้ผิวรอยต่อของแผ่นประกบมีความโปร่งใส (transparent) อย่างสมบูรณ์ อุณหภูมิวิกฤตลดลงต่ำสุด 0.582694 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f / ξ_f ประมาณ 0.7 และจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าคงตัวประมาณ 0.610 ที่ความหนาประมาณ 1.5 เมื่อเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_f$ มีค่าเท่ากับ 0.5 และ 1 อุณหภูมิวิกฤตลดลงต่ำสุด 0.600851, 0.624201 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร d_f / ξ_f ประมาณ 0.75 และ 0.85 และจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าคงตัว ตามลำดับ แต่กรณี $Q\xi_f$ เท่ากับ 2 อุณหภูมิวิกฤตที่ลดลงมาต่ำสุด 0.658121 และเข้าสู่ค่าคงตัว



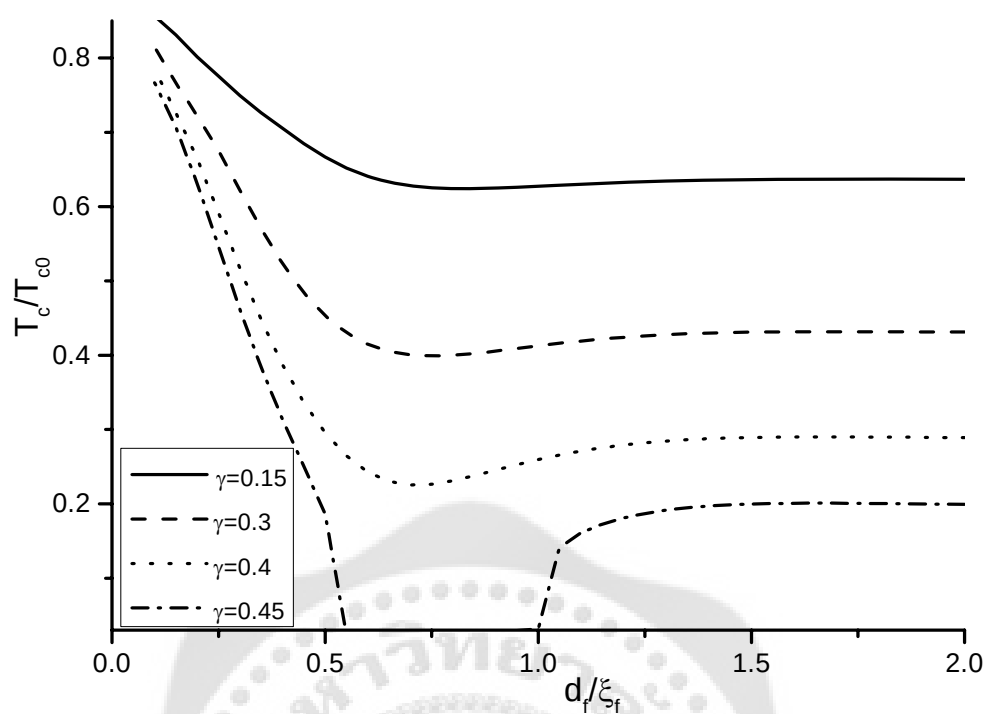
ภาพประกอบ 63 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อเลขคลื่นไร้หน่วยมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$

ภาพประกอบ 64 การลดรูปเมื่อมุม δ มีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกบมีค่าต่างกัน ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ เหมือนกับที่แสดงในภาพประกอบ 61 เมื่อ γ_b มีค่าเท่ากับศูนย์ อุณหภูมิวิกฤตได้ลดลงอย่างรวดเร็ว และมีค่าต่ำสุด 0.624201 ที่ความหนาเลดทอนมีค่าประมาณ 0.85 จากนั้นอุณหภูมิจะค่อยเพิ่มขึ้นจนถึงค่าคงที่ที่ 0.636 ที่ความหนาประมาณ 1.65 และเมื่อ γ_b มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 0.4 และ 1.0 อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูงขึ้นอย่างชัดเจน โดยมีค่าต่ำสุด 0.706551 และ 0.753475 ที่ความหนา 0.65 และ 0.60 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 64 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกอบ γ_b มีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$

และภาพประกอบ 65 เมื่อลดรูปมุม δ มีค่าเท่ากับศูนย์ ความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าต่างกัน ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เหมือนกับที่แสดงในภาพประกอบ 62 เมื่อ γ มีค่าเท่ากับ 0.15 อุณหภูมิวิกฤตลดลงตามความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร และเข้าสู่ค่าคงตัวค่อนข้างสูง โดยมีค่าต่ำสุด 0.624201 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กมีค่าประมาณ 0.85 และเมื่อค่าความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอักษิมิตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง / แม่เหล็กเฟอร์โร มีค่าสูงขึ้น คือ 0.3, 0.40 และ 0.45 อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงอย่างรวดเร็ว และมีค่าต่ำสุดประมาณ 0.399002 และ 0.225372 ที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรประมาณ 0.75 และ 0.70 สำหรับค่า γ เป็น 0.30 และ 0.40 ตามลำดับ ส่วนกรณี γ เท่ากับ 0.45 อุณหภูมิวิกฤตได้ลดลงอย่างรวดเร็ว และสิ้นสุดภาพตัวนำยวดยิ่งที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กประมาณ 0.55 และกลับมาเป็นตัวนำยวดยิ่งอีกครั้งที่ความหนาของแผ่นแม่เหล็กมีค่า 1.05 ก่อนที่อุณหภูมิวิกฤตจะเข้าสู่ค่าคงตัวประมาณ 0.200



ภาพประกอบ 65 อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีออกซิมีตีระหว่างแผ่นตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าต่างกัน และมุม ϕ มีค่า เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ตัวนำวดยิ่ง(S)กับแม่เหล็กเฟอร์โร (F) ภายใต้สนามแม่เหล็กแลกเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ โดยหุมนวนบนระนาบ xy ด้วยมุม $\theta = Qy$ พร้อมกับทำมุม δ น้อยๆ กับระนาบและทำมุม ϕ น้อยๆ กับแกน z ใช้ทฤษฎีสภาพนำวดยิ่งแบบกึ่งคลาสสิก ภายใต้ขอบเขตการแพร่ซึม โดยอาศัยสมการขนส่งเชิงเส้นของอุสเดลคำนวณแบบแม่นยำตรง ผลการคำนวณ ได้สมการเพื่อใช้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ โดยพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องดังที่ปรากฏในบทที่ 3 บทที่ 4 และภาคผนวก ซึ่งสมการเหล่านั้นได้แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{c0}) กับพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น ความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โร (d_f / ξ_f) ความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกบ (γ_b) ความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอิกซิมิตรีระหว่างแผ่นตัวนำวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร (γ) มุมที่สนามแลกเปลี่ยนกระทำต่อระนาบ(δ) โดยนำเสนอในรูปแบบของกราฟความสัมพันธ์ ดังแสดงในบทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัย สรุปเป็นข้อย่อ ๆ ดังนี้

1. อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเมื่อมุม ϕ มีค่า เข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม δ มีค่าน้อย ๆ

1.1 อิทธิพลของเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi_f$ ที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ดังแสดงในภาพประกอบ 60 พบว่าเมื่อ $Q\xi_f$ มีค่าน้อย จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดมีค่าน้อยลงและเมื่อความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรเพิ่มขึ้น อุณหภูมิวิกฤตกลับเพิ่มสูงขึ้นจนเข้าสู่ค่าอุณหภูมิวิกฤตคงตัวที่ความหนาค่าหนึ่งของแม่เหล็กเฟอร์โร แต่เมื่อ $Q\xi_f$ มีค่าสูงขึ้น อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดจะมีค่าสูงขึ้นด้วยและเข้าสู่ค่าคงตัวที่สูงกว่าและความหนาของแม่เหล็กเฟอร์โรน้อยกว่ากรณีแรก

1.2 อิทธิพลของค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกบที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ดังแสดงในภาพประกอบ 61 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดของแผ่นประกบคู่ขึ้นกับ γ_b กล่าวคือเมื่อ γ_b มีค่าน้อย อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดของแผ่นประกบคู่จะมีค่าน้อยด้วยเมื่อเพิ่มค่า γ_b อุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงขึ้นและเข้าสู่ค่าคงตัวที่ความหนาน้อยๆ ของแม่เหล็กเฟอร์โร

1.3 อิทธิพลของพารามิเตอร์ที่แสดงความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอ็อกซิมีตีที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ดังแสดงในภาพประกอบ 62 พบว่าค่า γ น้อย อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูง และจะลดลงเมื่อ γ มีค่ามาก แสดงดังภาพ เมื่อ γ มีค่าเป็น 0.45 แผ่นประกบจะสิ้นสภาพความนำยวดยิ่งลงอย่างรวดเร็วเมื่อแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีความหนาลดลงเป็น 0.55 และกลับมาเป็นสภาพนำยวดยิ่งอีกครั้งที่ความหนา 1.0

2. อุณหภูมิวิกฤตกับความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ เมื่อมุม δ มีค่าเท่ากับศูนย์

2.1 อิทธิพลของเลขคลื่นไร้หน่วย $Q\xi$ ที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ดังแสดงในภาพประกอบ 63 พบว่าเมื่อ $Q\xi$ มีค่าน้อย จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดมีค่าน้อยลงและเมื่อความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์เพิ่มขึ้น อุณหภูมิวิกฤตกลับเพิ่มสูงขึ้นจนเข้าสู่ค่าอุณหภูมิวิกฤตคงตัวที่ความหนา ค่าหนึ่งของแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ แต่เมื่อ $Q\xi$ มีค่าสูงขึ้น อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดจะมีค่าสูงขึ้นด้วย และเข้าสู่ค่าคงตัวที่สูงกว่าและความหนาของแม่เหล็กเฟอร์ไรต์น้อยกว่ากรณีแรก

2.2 อิทธิพลของค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกบที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ดังแสดงในภาพประกอบ 64 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดของแผ่นประกบคู่ขึ้นกับ γ_b กล่าวคือ เมื่อ γ_b มีค่าน้อย อุณหภูมิวิกฤตต่ำสุดของแผ่นประกบคู่จะมีค่าน้อยด้วย เมื่อเพิ่มค่า γ_b อุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงขึ้นและเข้าสู่ค่าคงตัวที่ความหนาน้อยๆ ของแม่เหล็กเฟอร์ไรต์

2.3 อิทธิพลของพารามิเตอร์ที่แสดงความรุนแรงของปรากฏการณ์พรีอ็อกซิมีตี ที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่ ดังแสดงในภาพประกอบ 65 พบว่าค่า γ น้อย อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูง และจะลดลงเมื่อ γ มีค่ามาก แสดงดังภาพ เมื่อ γ มีค่าเป็น 0.45 แผ่นประกบจะสิ้นสภาพความนำยวดยิ่งลงอย่างรวดเร็วเมื่อแผ่นแม่เหล็กเฟอร์ไรต์มีความหนาลดลงเป็น 0.55 และกลับมาเป็นสภาพนำยวดยิ่งอีกครั้งที่ความหนา 1.05

เมื่อเปรียบเทียบผลการวิจัยทั้งสองกรณี พบว่าอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากกรณีมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม δ ที่กระทำกับระนาบการหมุนวนของสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยๆ จะได้อุณหภูมิวิกฤตต่ำกว่ากรณีที่มุม ϕ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม δ มีค่าเท่ากับศูนย์ และเมื่อเปรียบเทียบกับผลการวิจัยของแชมเพลและเอสคริก (Champel; & Eschrig) (2005,): p.1-4) และ แชมเพลและเอสคริก (Champel; & Eschrig) (2005,): p.1-12) พบว่า งานวิจัยที่ได้สอดคล้องกัน และงานวิจัยที่ได้ชี้ชัดให้เห็นว่าถ้ามุมยกจากระนาบ δ มีค่าเพิ่มขึ้น จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกบคู่มีค่าลดลง

อภิปรายผลการวิจัย

ในการคำนวณเชิงตัวเลข พารามิเตอร์ต่างๆ ได้มาทั้งจากการทดลองและจากทฤษฎี (Champel, T.; & Eschrig, M. 2005.), (S.Kashiwaya. et. al. 1999.) ซึ่งพารามิเตอร์ต่างๆ เหล่านั้น สอดคล้องกับการทดลองของแผ่นประกอบตัวนำยวดยิ่งไนโอเบียม(Nb)ประกอบกับแม่เหล็กเฟอร์โรแบบอ่อน $\text{Cu}_{0.43}\text{Ni}_{0.57}$ มีความหนา 11 nm และมีอุณหภูมิวิกฤต 7 K (V.V Ryazanov. et. al. 2003: 39) จากการคำนวณเชิงตัวเลข อุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกอบคู่ที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร เมื่อสนามแล็กเปลี่ยนมีค่าไม่สม่ำเสมอ โดยสนามแม่เหล็กหมุนวนในระนาบและทำมุมน้อยๆ และทำมุมเท่ากับศูนย์กับระนาบ พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงแบบไม่สม่ำเสมอเมื่อความหนาของแผ่นแม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าเพิ่มขึ้นและเมื่อนำพารามิเตอร์ต่างๆ มาพิจารณาร่วม พบว่าอุณหภูมิวิกฤตของแผ่นประกอบคู่มีค่าสูงขึ้นตามเลขคลื่นไร้หน่วย ซึ่งหมายถึงการหมุนวนของสนามแล็กเปลี่ยนด้วยคาบเวลาที่สั้นหรือสนามแล็กเปลี่ยนมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเป็นผลให้เกิดการเหนี่ยวนำและเกิดการจับคู่ของคลื่นสถานะสปินทริปเลตได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของเคมเพลและเอสคริก(Champel; & Eschrig. 2005 : p.1-4), (Champel; & Eschrig. 2005: p.1-12) และสอดคล้องกับงานวิจัยของ ธนะสิทธิ์ รัชตะระเรื่องสิทธิ์ และสุทัศน์ ยกส้าน (T.Rachataruangsit; & Yoksan. 2007: p. 1-12) ที่กล่าวถึงการกระเจิงของการจับคู่อิเล็กตรอนแบบทริปเลตในแผ่นประกอบตัวนำยวดยิ่ง/แม่เหล็กเฟอร์โร

สำหรับค่าความโปร่งใสที่รอยต่อของแผ่นประกอบ เมื่อมีค่าน้อย ๆ อุณหภูมิวิกฤตจะลดต่ำลงอย่างรวดเร็ว แต่เมื่อ γ_b มีค่ามาก อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูงขึ้นตามลำดับ ซึ่งหมายถึงคู่อิเล็กตรอนในสถานะสปินทริปเลตแสดงพฤติกรรมกระโดดที่ผิวรอยต่อของแผ่นประกอบ ผลลัพธ์ทำให้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงขึ้น และให้ผลเช่นเดียวกับการนิสนามแล็กเปลี่ยนมีค่าสม่ำเสมอ สอดคล้องกับงานวิจัยของ เคมเพลและเอสคริก (Champel; & Eschrig. 2005 : p.1-4) และ เคมเพลและเอสคริก (Champel; & Eschrig. 2005 : p.1-12) และความรุนแรงของปรากฏการณ์การพรีออกซิมีตีมีค่ามากเป็นอีกสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ลายคู่อิเล็กตรอนให้แยกออกจากกัน อุณหภูมิวิกฤตลดต่ำอย่างรวดเร็วและสิ้นสภาพตัวนำยวดยิ่งหรือมีปรากฏการณ์การนำยวดยิ่งย้อนกลับ (reentrance) เกิดขึ้น เหมือนกับหลายๆ พารามิเตอร์ที่ทำให้เกิดกระบวนการย้อนกลับนี้ ดังเช่นความหนาน้อยๆ ของแผ่นตัวนำยวดยิ่ง S (V.I. Zdravkov.et. al. 2006:1-34) พารามิเตอร์บอกค่าความโปร่งใสที่ผิวรอยต่อของแผ่นประกอบ γ_b (Champel; & Eschrig. 2005 : p.1-4) ความยาวอาพันธ์ของคู่อิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่งมีค่ามากกว่าความหนาของแผ่นตัวนำยวดยิ่งมากๆ (A. S. Sidorenko; et al. 2009) เป็นต้น

อนึ่ง เมื่อมุมเงยจากระนาบ θ มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงทุกกรณีที่เราพิจารณาชี้ให้เห็นว่าสนามแล็กเปลี่ยนต้องอยู่ในระนาบเดียวกับการเรียงตัวของสปินของคู่อิเล็กตรอน การจับคู่อิเล็กตรอนจึงจะปรากฏเด่นชัดที่สุด



บรรณานุกรม

- Alexandra Anishchanka. (2008). *Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Structures*. Ph.D. Thesis. University of Bochum. Germany.
- Bennesman; & Ketterson. (2003). *The Physics of Superconductor*. 1st. New York: Springer.
- Champel, T.; & Eschrig, M. (2005). *Switching Superconductivity in S/F Bilayers by Multiple-Domain Structures*. Physical Review B 71 (22), 220506.
- Champel, T.; & Eschrig, M. (2005). *Effect of an Inhomogeneous Exchange Field on the Proximity Effect in Disordered Superconductor-Ferromagnet Hybrid Structures*. Physical Review B 72 (5). 054523.
- Charles Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons. New York.
- Cirillo C.; et al. (2005). *Superconducting Proximity Effect and Interface Transparency in Nb/PdNi Bilayers*. Physical Review B 72 : 1-7.
- David A. Cardwell; & David S. Ginley. (2003). *Handbook of Superconducting Material V.1*. Institute of Physics. London. Institute of Physics Publishing.
- Deaver ; & Fairbanks. (1961). *Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders*. Phys. Rev. Lett. 7.
- Department of physics, university of oslo. (2013). *Basic Properties of Superconductors: Meissner effect*. Retrieved April 12, 2013, from <http://www.mn.uio.no/fysikk/english/research/groups/amks/superconductivity/mo/>
- Eilenberger G. (1967). *Physical Review*, 153:584.
- Eilenberger G. (1968). *Z.Phys.*,214,195.
- Erkki Thuneberg. (2005). *Superconductivity*, 763645S. Department of Physical Sciences University of Oulu.
- Eschrig, M.; & Lofwander, T. (2008). *Triplet Supercurrents in Clean and Disordered Half-Metallic Ferromagnets*. Nature Physics 4.

- Florida university, Magnet lab. (2013). *Superconductivity: Current in a Cable and Thermal Tights*. Retrieved April 26, 2013, from <http://www.magnet.fsu.edu/education/tutorials/magnetacademy/superconductivity101/fullarticle.html>
- Fominov; et al. (2010). *Superconducting Triplet Spin Valve*. *Phys. Rev. B* 81, 214435.
- Fominov Ya. V.; Chitchev N.M.; & Golubov A.A. (2002) *Nonmonotonic Critical Temperature in Superconductor Ferromagnet Bilayers*. *Physical Review B: Condensed matter and materials physics*, 66 (1). 014507. ISSN 1098-0121.
- Fominov Ya. V.; Golubov A. A.; & Kupriyanov M. Yu. (2003). *Pis'ma v ZhETF* 77, 609.
- Fominov Ya.V.; & Golubov A.A.; & Kupriyanov M.Yu. (2010). *Triplet Proximity Effect in FSF Trilayers*. *Pis'ma v ZhETF*. 77 (9), 609-614.
- Hernando D.H. (2002). *Coherent Transport in Superconducting and Ferromagnetic Hybrid Systems*. Delft University Press.
- Josephson B.D. (1962). *Possible New Effects in Superconductive Tunneling*. *Phys. Rev. Lett* 1, 251.
- Josephson B.D. (1962). *Coupled Superconductors*. *Phys. Rev. Lett.* 1. p. 251.
- Ketterson; & Song. (1999). *Superconductivity*. Cambridge: University Press.
- Khusainov; & Proshin. (1997). *Possibility of Periodically Reentrance Superconductivity in Ferromagnet /Superconductors Layer Structure*. *Physical Review B*. 56. : 14283-14286.
- Maxwell. (1950). *Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury*. *Phys. Rev.* 78 (4): 477.
- Michigan State University. (1999). *Type 1 Superconductors And a Periodic Chart Comparison*. Retrieved October 12, 1999, from <http://superconductors.org/Type1.htm>.
- P. G. de Gennes. (1964). *Rev. Mod. Phys.* 36, 225.

- Radovic, Zoran.; et al. (1991). *Transition Temperature of Superconductor-Ferromagnet Superlattices*. *Physical Review B* 44 : 759-764.
- Ramesh Gupta. (2003). *Superconductivity : Lecture II*. US Particle Accelerator School University of California. Santa Barbara.
- Reynolds; et al. (1950). *Superconductivity of Isotopes of Mercury*. *Phys. Rev.* 78 (4): 487.
- Sidorenko. A. S. et al. (2009). *Pis'ma ZhETP*, 90, 149.
- S. Kashiwaya. et. al. (1999). *Physical Review B*. 60. 3572.
- T. Rachataruangsit; & S. Yoksan. (2007). *Spin Orbit Scattering Effect on Long-Range Odd Frequency Triplet Pairing in Ferromagnet/Superconductor Bilayers*. *Physica C* 467(2007). 156–166.
- Usadel Klaus D. (1970). *Generalize Diffusion Equation for Superconducting Alloys*. *Physical Review Letters*. 25 : 507-509.
- Volkov; Anishchenka; & Efatov. (2006). *Odd Triplet Superconductivity in a Superconductor/Ferromagnet Structure with a Spiral Magnetic Structure*. *Phys. Rev. B* 73.104412.
- Volkov; Fominov; & Efetov. (2005). *Long-Range Odd Triplet Superconductivity in SF Structures With Neel Walls*. *Phys. Rev. B* 72, 184504.
- V.V Ryazanov. et. al. (2003). *Proximity Effect and Spontaneous Vortex Phase in Planar SF Structures*. *JETP Letters* 77. 39.
- Werthamer, N.R. (1963). *Theory of The Superconducting Transition Temperature and Energy gap Function of Superposed Metal Films*. *Physical Review*. 132 : 2440-2445.
- Zdravkov V.I. et. al. (2006). *Reentrant Superconductivity in Nb/Cu_{1-x}Ni_x bilayers*. *Phys. Rev. Lett.* 97(5):057004.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล. (2556). *ตัวนำยิ่งยวดยิ่ง โสมเพจ : คุณสมบัติของสาร*.

สืบค้นเมื่อ 13 ตุลาคม 2556 จาก <http://www.rmutphysics.com/charud/specialnews/6/superconductor/propertie.html>

พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ. (2553). *ทฤษฎีตัวนำยิ่งยวด*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.



ภาคผนวก



ภาคผนวก ก



วิธีคำนวณหาค่าไอเจน และเวกเตอร์ไอเจน

จากสมการ (3.25)

$$\begin{vmatrix} \tilde{k}_p^2 & -i\xi_J^{-2} \sin \phi & i\xi_J^{-2} \sin \phi & -2i \cos \phi \xi_J^{-2} \\ -2i\xi_J^{-2} \sin \phi & \tilde{k}_p^2 - Q^2 & 0 & 0 \\ 2i\xi_J^{-2} \sin \phi & 0 & \tilde{k}_p^2 - Q^2 & 0 \\ -2i \cos \phi \xi_J^{-2} & 0 & 0 & \tilde{k}_p^2 \end{vmatrix} = 0$$

ค่าไอเจนทั้งสี่หาได้จากสมการ (3.26)

$$(\tilde{k}_p^2 - Q^2)(\tilde{k}_p^6 - Q^2 \tilde{k}_p^4 + 4\xi_J^{-4} \tilde{k}_p^2 - 4 \cos^2 \phi Q^2 \xi_J^{-4}) = 0$$

จะได้คำตอบแรกคือ

$$\tilde{k}_p^2 = Q^2 \quad (ก1)$$

สำหรับสมการกำลังสามอยู่ในรูป $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ โดยให้ $x = \tilde{k}_p^2$ มีคำตอบทั้งสาม คือ

$$x_1 = -\frac{b}{3} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d + \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]} \\ + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d - \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d + \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]} \\ - \frac{(1-i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d - \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d + \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]} \\ - \frac{(1+i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[-2b^3 + 9cb - 27d - \sqrt{(2b^3 - 9cb + 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3} \right]}$$

กำหนดให้ $b = -Q^2, c = 4\xi_J^{-4}, d = -4\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi$ จะได้

$$x_1 = \frac{Q^2}{3} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]} \\ + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]}$$

$$x_2 = \frac{Q^2}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]} \\ - \frac{(1-i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]}$$

$$x_3 = \frac{Q^2}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]} \\ - \frac{(1+i\sqrt{3})}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left[2Q^6 - 36\xi_J^{-4}Q^2 + 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(-2Q^6 + 36\xi_J^{-4}Q^2 - 108\xi_J^{-4}Q^2 \cos^2 \phi)^2 + 4(12\xi_J^{-4} - Q^4)^3} \right]}$$

จัดรูปใหม่เป็น

$$x_1 = \frac{Q^2 \xi_J^{-2} \xi_J^2}{3} + \frac{\xi_J^{-2}}{3} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}} \\ + \frac{\xi_J^{-2}}{3} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}}$$

$$x_2 = \frac{Q^2 \xi_J^{-2} \xi_J^2}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})\xi_J^{-2}}{6} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}} \\ - \frac{(1-i\sqrt{3})\xi_J^{-2}}{6} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}}$$

$$x_3 = \frac{Q^2 \xi_J^{-2} \xi_J^2}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})\xi_J^{-2}}{6} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi + \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}} \\ - \frac{(1+i\sqrt{3})\xi_J^{-2}}{6} \sqrt[3]{Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi - \sqrt{(Q^6 \xi_J^6 - 18\xi_J^2 Q^2 + 54\xi_J^2 Q^2 \cos^2 \phi)^2 + (12 - \xi_J^4 Q^4)^3}}$$

กำหนดให้ $\eta = \frac{Q^2 \xi_J^2}{3}$, $B = \eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi$ และ $A = \frac{4}{3} - \eta^2$ จะได้

$$x_1 = \xi_J^{-2} \left[\eta + \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + A^3}} + \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 + A^3}} \right] \\ x_2 = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + A^3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 + A^3}} \right] \\ x_3 = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + A^3}} - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 + A^3}} \right]$$

กำหนดให้

$$\chi_{\pm} = \sqrt[3]{B \pm \sqrt{B^2 + A^3}}$$

จะได้ค่าไอเกนทั้ง 4

$$\tilde{k}_{01}^2 = 3\eta \xi_J^{-2}$$

$$\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2} [\eta + \chi_+ + \chi_-]$$

$$\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \chi_+ - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \chi_- \right] = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(\chi_+ + \chi_-)}{2} - i\sqrt{3} \frac{(\chi_+ - \chi_-)}{2} \right]$$

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \chi_+ - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \chi_- \right] = \xi_J^{-2} \left[\eta - \frac{(\chi_+ + \chi_-)}{2} + i\sqrt{3} \frac{(\chi_+ - \chi_-)}{2} \right]$$

และกำหนดพารามิเตอร์ใหม่ โดยให้

$$\frac{(\chi_+ + \chi_-)}{2} = \alpha_+; \quad \frac{(\chi_+ - \chi_-)}{2} = \alpha_-$$

สุดท้าย จะได้ค่าไอเกนทั้งสี่ ดังนี้

$$\tilde{k}_{01}^2 = 3\eta\xi_J^{-2}$$

$$\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2}(\eta + 2\alpha_+) \quad (ก2)$$

$$\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2}(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-) \quad (ก3)$$

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2}(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-) \quad (ก4)$$

จากนั้นทำการหาค่าฟังก์ชันไอเกน จากสมการ (3.25)

$$1. \text{ แทนค่า } \tilde{k}_p^2 = Q^2 = 3\eta\xi_J^{-2}$$

$$\begin{bmatrix} 3\eta & -i\sin\phi & i\sin\phi & -2i\cos\phi \\ -2i\sin\phi & 0 & 0 & 0 \\ 2i\sin\phi & 0 & 0 & 0 \\ -2i\cos\phi & 0 & 0 & 3\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3\eta f_{s1} - i\sin\phi(f_{-1} - f_{+1}) - 2i\cos\phi f_{tz1} \\ -2i\sin\phi f_{s1} \\ 2i\sin\phi f_{s1} \\ -2i\cos\phi f_{s1} + 3\eta f_{tz1} \end{pmatrix} = 0$$

จากความสัมพันธ์ที่ 2 , 3 และ 4 จะได้ $f_{s1} = 0$ และ $f_{tz1} = 0$ และจากความสัมพันธ์ 1 จะได้ $f_{-1} = f_{+1}$ จะได้ฟังก์ชันไอเกนคือ

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = f_{-(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n5)$$

2. แทนค่า $\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2} (\eta + 2\alpha_+)$

$$\begin{bmatrix} \eta + 2\alpha_+ & -i \sin \phi & i \sin \phi & -2i \cos \phi \\ -2i \sin \phi & \eta + 2\alpha_+ - 3\eta & 0 & 0 \\ 2i \sin \phi & 0 & \eta + 2\alpha_+ - 3\eta & 0 \\ -2i \cos \phi & 0 & 0 & \eta + 2\alpha_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} (\eta + 2\alpha_+) f_{s(2)} - i \sin \phi (f_{-(2)} - f_{+(2)}) - 2i \cos \phi f_{tz(2)} \\ -2i \sin \phi f_{s(2)} + (2\alpha_+ - 2\eta) f_{-(2)} \\ 2i \sin \phi f_{s(2)} + (2\alpha_+ - 2\eta) f_{+(2)} \\ -2i \cos \phi f_{s(2)} + (\eta + 2\alpha_+) f_{tz(2)} \end{pmatrix} = 0$$

จากความสัมพันธ์ 2 จะได้ $f_{-(2)} = \frac{i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} f_{s(2)}$ จากความสัมพันธ์ 3 จะได้ $f_{+(2)} = -\frac{i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} f_{s(2)}$

และจากความสัมพันธ์ 4 จะได้ $f_{tz(2)} = \frac{2i \cos \phi}{(\eta + 2\alpha_+)} f_{s(2)}$ จะได้ฟังก์ชันไอเกน

$$\begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} \\ -\frac{i \sin \phi}{(\alpha_+ - \eta)} \\ \frac{2i \cos \phi}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix} f_{s(2)} = \begin{pmatrix} (\eta + 2\alpha_+) \\ \frac{i \sin \phi (\eta + 2\alpha_+)}{(\alpha_+ - \eta)} \\ -\frac{i \sin \phi (\eta + 2\alpha_+)}{(\alpha_+ - \eta)} \\ 2i \cos \phi \end{pmatrix} \quad (n6)$$

3. แทนค่า $\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2} (\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)$

$$\begin{bmatrix} \eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- & -i\sin\phi & i\sin\phi & -2i\cos\phi \\ -2i\sin\phi & \eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- - 3\eta & 0 & 0 \\ 2i\sin\phi & 0 & \eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- - 3\eta & 0 \\ -2i\cos\phi & 0 & 0 & \eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} (\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-) f_{s(3)} - i\sin\phi (f_{-(3)} - f_{+(3)}) - 2i\cos\phi f_{tz(3)} \\ -2i\sin\phi f_{s(3)} - (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) f_{-(3)} \\ 2i\sin\phi f_{s(3)} - (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) f_{+(3)} \\ -2i\cos\phi f_{s(3)} + (\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-) f_{tz(3)} \end{pmatrix} = 0$$

จะได้

$$f_{-(3)} = \frac{-2i\sin\phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} f_{s(3)}$$

$$f_{+(3)} = \frac{2i\sin\phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} f_{s(3)}$$

$$f_{tz(3)} = \frac{2i\cos\phi}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} f_{s(3)}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2i\sin\phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i\sin\phi}{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i\cos\phi}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} f_{s(3)} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{-2i\sin\phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{\cot\phi(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} \quad (n7)$$

4. แทนค่า $\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2} (\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)$

$$\begin{bmatrix} \eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- & -i\sin\phi & i\sin\phi & -2i\cos\phi \\ -2i\sin\phi & \eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- - 3\eta & 0 & 0 \\ 2i\sin\phi & 0 & \eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- - 3\eta & 0 \\ -2i\cos\phi & 0 & 0 & \eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} (\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-) f_{s(4)} - i\sin\phi (f_{-(4)} - f_{+(4)}) - 2i\cos\phi f_{tz(4)} \\ -2i\sin\phi f_{s(4)} - (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) f_{-(4)} \\ 2i\sin\phi f_{s(4)} - (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) f_{+(4)} \\ -2i\cos\phi f_{s(4)} + (\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-) f_{tz(4)} \end{pmatrix} = 0$$

จะได้

$$f_{-(4)} = \frac{2i\sin\phi}{-(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} f_{s(4)}$$

$$f_{+(4)} = \frac{2i\sin\phi}{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} f_{s(4)}$$

$$f_{tz(4)} = \frac{2i\cos\phi}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} f_{s(4)}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2i\sin\phi}{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i\sin\phi}{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)} \\ \frac{2i\cos\phi}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} f_{s(4)} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{-2i\sin\phi} \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{\cot\phi(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} \quad (n8)$$

ภาคผนวก ข



การหาค่า W_p

จาก $W_p = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}}$ พิจารณากรณีที่ $p=0$ ซึ่งเป็นกรณีที่สามารหาคำตอบเชิงวิเคราะห์

โดยประมาณได้ พังก์ชัน W_0 หาได้จาก

$$W_0 = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} = \frac{C_1 N_1 + C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4} \quad (11)$$

โดยที่

$$\bar{F} \cdot \bar{N} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ h_{-,1} & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{+,1} & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{tz,1} & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{s,p,1} A_1^{(p)} & f_{s,p,2} A_2^{(p)} & f_{s,p,3} A_3^{(p)} & f_{s,p,4} A_4^{(p)} \\ f_{-,p,1} \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & f_{-,p,2} \tilde{A}_{2,+}^{(p)} & f_{-,p,3} \tilde{A}_{3,+}^{(p)} & f_{-,p,4} \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ f_{+,p,1} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & f_{+,p,2} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & f_{+,p,3} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & f_{+,p,4} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ f_{tz,p,1} \tilde{A}_{1,tz}^{(p)} & f_{tz,p,2} \tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & f_{tz,p,3} \tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & f_{tz,p,4} \tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\alpha_+ - \eta)}{i \sin \phi} A_2^{(p)} & \frac{i(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} A_3^{(p)} & \frac{i(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2 \sin \phi} A_4^{(p)} \\ \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{2,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{3,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ 0 & X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & -Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & -Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } X = \frac{2 \cot \phi (\alpha_+ - \eta)}{(\eta + 2\alpha_+)}, Y = \frac{\cot \phi (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)}, Z = \frac{\cot \phi (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)}$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ -\tilde{A}_{2,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{3,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & -Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & -Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{vmatrix}$$

$$= X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} \{ -\tilde{A}_{3,+}^{(p)} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} + \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} \} + Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} \{ -\tilde{A}_{4,+}^{(p)} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} + \tilde{A}_{2,+}^{(p)} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \} - Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \{ -\tilde{A}_{2,+}^{(p)} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} + \tilde{A}_{3,+}^{(p)} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} \}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{3,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ 0 & -Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & -Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{vmatrix}$$

$$= -Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \right\} + Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{3,+}^{(p)} \right\}$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{2,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ 0 & X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & -Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{vmatrix}$$

$$= X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \right\} + Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{2,+}^{(p)} \right\}$$

$$N_4 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & \tilde{A}_{3,-}^{(p)} \\ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{2,+}^{(p)} & -\tilde{A}_{3,+}^{(p)} \\ 0 & X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & -Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} \end{vmatrix}$$

$$= X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{3,+}^{(p)} \right\} + Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_{1,+}^{(p)} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} + \tilde{A}_{1,-}^{(p)} \tilde{A}_{2,+}^{(p)} \right\}$$

สำหรับ $p=0$ จะได้ว่า $\tilde{A}_{j,\pm}$ ไม่ขึ้นกับ l คือ $\tilde{A}_{j,+} = \tilde{A}_{j,-}$ (เพราะ $k_{t0}^+ = k_{t0}^-$) เราจะละเครื่องหมายบวกและลบนี้ จะได้

$$N_1 = X\tilde{A}_{2,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_3 \tilde{A}_4 - \tilde{A}_4 \tilde{A}_3 \right\} + Y\tilde{A}_{3,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_2 \tilde{A}_4 - \tilde{A}_4 \tilde{A}_2 \right\} - Z\tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \left\{ \tilde{A}_3 \tilde{A}_2 - \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \right\} = 0$$

$$N_2 = 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} Z - 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} Y$$

$$N_3 = 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} Z + 2\tilde{A}_4 \tilde{A}_1 \tilde{A}_{2,tz} X$$

$$N_4 = 2\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} Y + 2\tilde{A}_3 \tilde{A}_1 \tilde{A}_{2,tz} X$$

และจาก

$$\bar{C} = f_{s,p,j} C_j^{(p)} \quad \text{โดยที่} \quad C_j^{(p)} = \gamma k_{fpj} \xi_f \sinh(k_{fpj} d_f)$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{i(\eta - \alpha_+)}{\sin \phi} \gamma k_{f02} \xi_f \sinh(k_{f02} d_f) = \frac{i(\eta - \alpha_+)}{\sin \phi} C_2^0$$

$$C_3 = \frac{i(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2\sin \phi} \gamma k_{f03} \xi_f \sinh(k_{f03} d_f) = \frac{i(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2\sin \phi} C_3^0$$

$$C_4 = \frac{i(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2\sin \phi} \gamma k_{f04} \xi_f \sinh(k_{f04} d_f) = \frac{i(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{2\sin \phi} C_4^0$$

ดังนั้น

$$W_0 = \frac{C_1 N_1 + C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4}$$

$$W_0 = \frac{2(\eta - \alpha_+) C_2^0 [\tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} Z - \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} Y] + (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) C_3^0 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} Z + \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} X] + (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) C_4^0 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} Y + \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} X]}{2(\eta - \alpha_+) A_2 [\tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} Z - \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} Y] + (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) A_3 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} Z + \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} X] + (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) A_4 [\tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} Y + \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} X]}$$

(๗2)

ภาคผนวก ค



การประมาณค่า $\alpha_{\pm}(\eta, \delta)$ เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ หรือมุม δ เข้าใกล้ศูนย์ จากสมการ

$$\alpha_{\pm}(\eta, \phi) = \frac{(\chi_{+} \pm \chi_{-})}{2} = \frac{\sqrt[3]{B + \sqrt{B^2 + A^3}} \pm \sqrt[3]{B - \sqrt{B^2 + A^3}}}{2}$$

$$\alpha_{\pm}(\eta, \phi) = \frac{\sqrt[3]{\eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi + \sqrt{(\eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi)^2 + \left(\frac{4}{3} - \eta^2\right)^3}} \pm \sqrt[3]{\eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi - \sqrt{(\eta^3 - 2\eta + 6\eta \cos^2 \phi)^2 + \left(\frac{4}{3} - \eta^2\right)^3}}}{2}$$

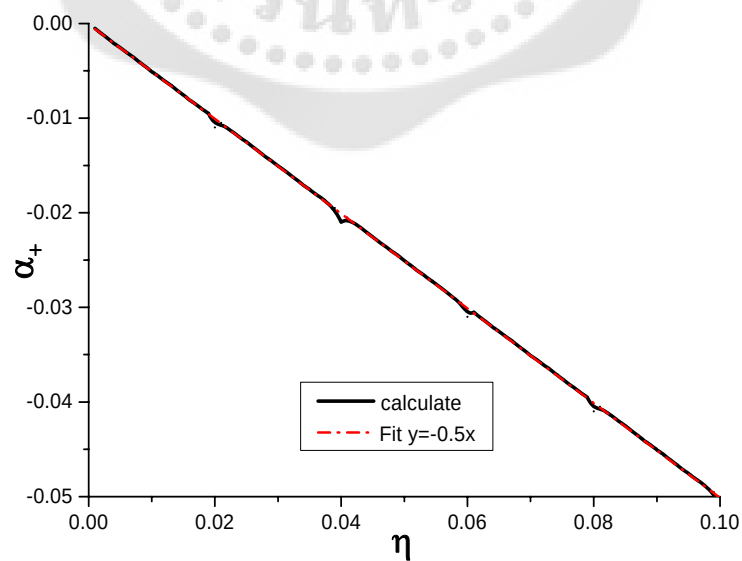
หรือโดยมุม δ ที่วัดจากระนาบ x-y ค่า $\alpha_{\pm}(\eta, \delta)$ เขียนในรูป

$$\alpha_{\pm}(\eta, \delta) = \frac{\sqrt[3]{\eta^3 - 2\eta + 6\eta \sin^2 \delta + \sqrt{(\eta^3 - 2\eta + 6\eta \sin^2 \delta)^2 + \left(\frac{4}{3} - \eta^2\right)^3}} \pm \sqrt[3]{\eta^3 - 2\eta + 6\eta \sin^2 \delta - \sqrt{(\eta^3 - 2\eta + 6\eta \sin^2 \delta)^2 + \left(\frac{4}{3} - \eta^2\right)^3}}}{2}$$

ซึ่งอยู่ในรูปที่ซับซ้อน เราจะทำการกระจายเทเลอร์ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น และใช้วิธีฟิตกราฟ คือ

$$\alpha_{\pm}(\eta, \delta) \approx \alpha_{\pm}(\eta, 0) + \delta \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \alpha_{\pm}(\eta, \delta) \right|_{\delta=0} + \frac{1}{2} \delta^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_{\pm}(\eta, \delta) \right|_{\delta=0} \quad (\text{ค1})$$

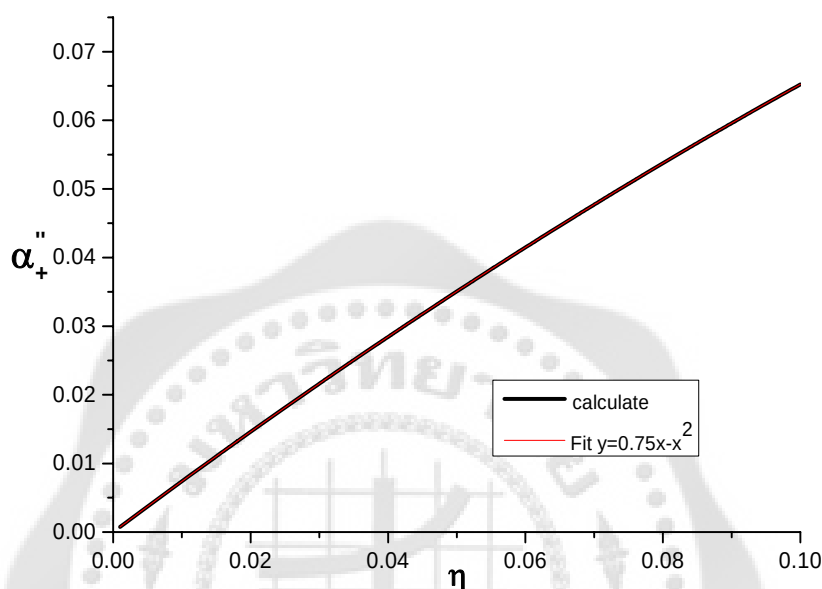
$$\alpha_{+}(\eta, \delta = 0) = -\frac{\eta}{2} \quad \text{แสดงดังภาพประกอบ 67}$$



ภาพประกอบ 66 $\alpha_{+}(\eta, \delta = 0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

อนุพันธ์อันดับ 1 $\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \alpha_+(\eta, \delta) \right|_{\delta=0}$ มีค่าเป็นศูนย์

อนุพันธ์อันดับ 2 $\left. \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_+(\eta, \delta) \right|_{\delta=0} \approx -\eta^2 + 0.75\eta$ แสดงดังภาพประกอบ 68



ภาพประกอบ 67 $\alpha_+''(\eta, \delta=0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2} \delta^2 \left. \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_+(\eta, \delta) \right|_{\delta=0} = \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2$$

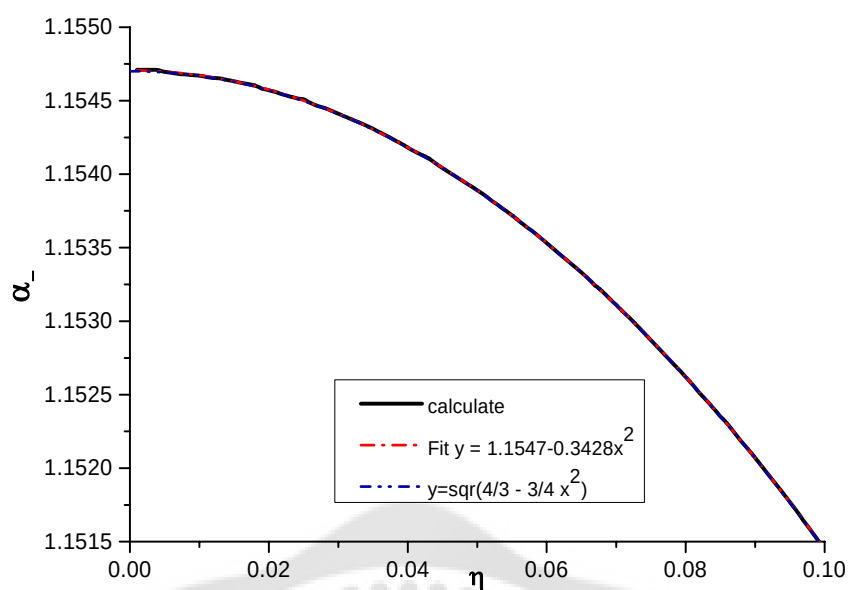
สำหรับอนุพันธ์ของ $\alpha_+(\eta, 0)$ อันดับสูงขึ้นไปจะมีความยุ่งยากและซับซ้อน จึงใช้ผลการประมาณเพียงอนุพันธ์ 2 อันดับแรก เป็นพหุนามง่ายๆ แทน ผลการประมาณดังนี้

$$\alpha_+(\eta, \delta) = -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \quad (\text{ค2})$$

เมื่อลดรูป $\delta=0$ จะได้

$$\alpha_+(\eta, \delta) = -\frac{\eta}{2}$$

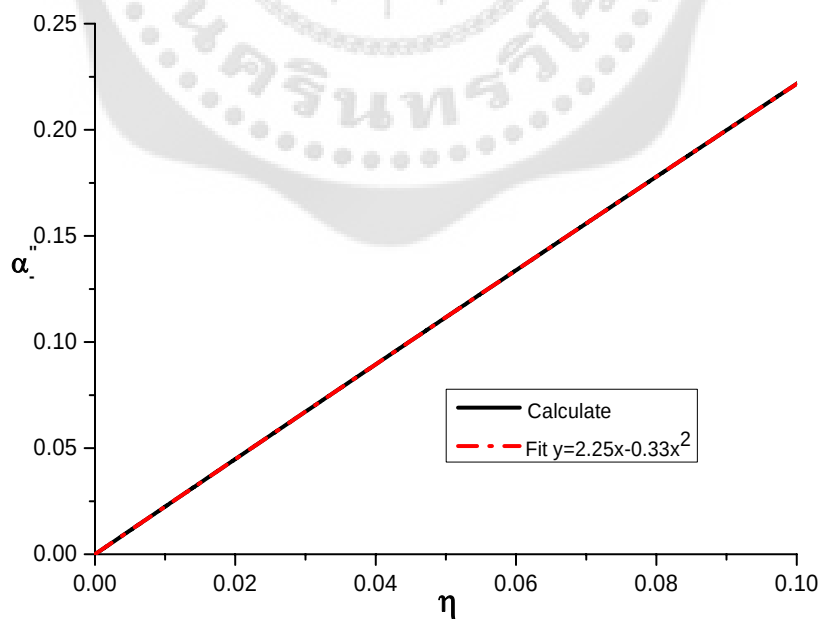
สำหรับค่า $\alpha_-(\eta, 0)|_{\delta=0} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2}$ แสดงดังภาพประกอบ 69



ภาพประกอบ 68 $\alpha_-(\eta, \delta=0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

สำหรับอนุพันธ์อันดับ 1 $\left. \frac{\partial}{\partial \delta} \alpha_-(\eta, \delta) \right|_{\delta=0}$ มีค่าเป็นศูนย์

ส่วนอนุพันธ์อันดับ 2 $\left. \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_-(\eta, 0) \right|_{\delta=0} = 2.25\eta - \frac{1}{3}\eta^2$ แสดงดังภาพประกอบ 70



ภาพประกอบ 69 $\alpha''_-(\eta, \delta=0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

ซึ่งได้ผลการประมาณ ดังนี้

$$\alpha_-(\eta, \delta) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6}\right)\delta^2 \quad (ค3)$$

เมื่อลดรูป $\delta = 0$ ดังนั้น

$$\alpha_-(\eta, \delta) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2}$$

เมื่อทำการประมาณ กรณีมุม δ น้อยๆ ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไอเกนตามสมการ (3.48),

(3.49) เขียนได้ดังนี้

$$\eta + 2\alpha_+ = \eta + 2\left(-\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right)\delta^2\right) = \left(\frac{3\eta}{4} - \eta^2\right)\delta^2 = \eta_0$$

เมื่อลดรูป จะได้ $\eta + 2\alpha_+ = 0$

$$\alpha_+ - \eta = -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right)\delta^2 - \eta = -\frac{3\eta}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3\eta}{4} - \eta^2\right)\delta^2 = -\frac{3\eta}{2} + \frac{\eta_0}{2}$$

เมื่อลดรูป จะได้ $\alpha_+ - \eta = -\frac{3\eta}{2}$

$$\begin{aligned} \eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- &= \eta - \left\{-\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right)\delta^2\right\} - i\sqrt{3}\left\{\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6}\right)\delta^2\right\} \\ &= \left\{\frac{3\eta}{2} - \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right)\delta^2\right\} - 2i\left\{\sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12}\right)\delta^2\right\} \\ &= -2i\left[\left\{\sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12}\right)\delta^2\right\} + \left\{\frac{3i\eta}{4} - \frac{i}{2}\left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2}\right)\delta^2\right\}\right] \\ &= -2i\eta_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- &= \eta - \left\{ -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} + i\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6} \right) \delta^2 \right\} \\
&= 2i \left[\left\{ \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12} \right) \delta^2 \right\} - \left\{ \frac{3i\eta}{4} - \frac{i}{2} \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} \right] \\
&= 2i\eta_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\eta + \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- &= 2\eta + \left\{ -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} + i\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6} \right) \delta^2 \right\} \\
&= 2i \left[\left\{ \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12} \right) \delta^2 \right\} - \left\{ \frac{3i\eta}{4} + \frac{i}{2} \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} \right] \\
&= 2i\eta_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\eta + \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- &= 2\eta + \left\{ -\frac{\eta}{2} + \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} - i\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\eta^2} + \left(\frac{9\eta}{8} - \frac{\eta^2}{6} \right) \delta^2 \right\} \\
&= -2i \left[\left\{ \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12} \right) \delta^2 \right\} + \left\{ \frac{3i\eta}{4} + \frac{i}{2} \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\} \right] \\
&= -2i\eta_+
\end{aligned}$$

$$\eta_{\pm} = \left\{ \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} + \left(\frac{9\sqrt{3}\eta}{16} - \frac{\sqrt{3}\eta^2}{12} \right) \delta^2 \right\} \pm \left\{ \frac{3i\eta}{4} - \frac{i}{2} \left(\frac{3\eta}{8} - \frac{\eta^2}{2} \right) \delta^2 \right\}, \quad \eta_0 = \left(\frac{3\eta}{4} - \eta^2 \right) \delta^2$$

เมื่อลดรูป จะได้ $\eta_{\pm} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}\eta^2} \pm \frac{3i\eta}{4}$

ซึ่งค่าไอเกนจากสมการ (3.27) เขียนใหม่ เป็น

$$\tilde{k}_{01}^2 = 3\eta\xi_J^{-2} = Q^2$$

$$\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2} [\eta + 2\alpha_+] = \xi_J^{-2} \left(\frac{3\eta}{4} - \eta^2 \right) \delta^2$$

$$\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2} [\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-] = -2i\eta_+ \xi_J^{-2}$$

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2} [\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-] = 2i\eta_- \xi_J^{-2}$$

ฟังก์ชันไอเกนทั้ง 4 ตามสมการ (3.28), (3.29), (3.30) และ (3.31) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\eta + 2\alpha_+) \\ \frac{i \cos \delta (\eta + 2\alpha_+)}{(\alpha_+ - \eta)} \\ \frac{-i \cos \delta (\eta + 2\alpha_+)}{(\alpha_+ - \eta)} \\ 2i \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \\ \frac{-2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \\ 2i\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ + 2\eta + i\sqrt{3}\alpha_-)}{2 \cos \delta} \\ 1 \\ -1 \\ \frac{-\tan \delta (2\eta + \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_- \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i(\alpha_+ + 2\eta - i\sqrt{3}\alpha_-)}{2\cos\delta} \\ 1 \\ -1 \\ \frac{-\tan\delta(\alpha_+ + 2\eta - i\sqrt{3}\alpha_-)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_+ \\ 1 \\ -1 \\ \frac{\eta_+}{\eta_-}\delta \end{pmatrix}$$

เราจะได้เมตริกซ์ $\vec{F} \cdot \vec{N}$ ใหม่ คือ

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_0 A_2 & \eta_- A_3 & \eta_+ A_4 \\ \tilde{A}_1 & \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & \frac{-2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_4 \\ 0 & 2i\delta \tilde{A}_{2,tz} & -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta \tilde{A}_{3,tz} & \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta \tilde{A}_{4,tz} \end{pmatrix}$$

และ

$$N_1 = \begin{vmatrix} \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \\ \frac{-2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_4 \\ 2i\delta \tilde{A}_{2,tz} & -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta \tilde{A}_{3,tz} & \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta \tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2i\delta \tilde{A}_{2,tz} \left\{ -\tilde{A}_3 \tilde{A}_4 + \tilde{A}_3 \tilde{A}_4 \right\} - \delta \frac{(2i\eta_- - \Delta_-)}{(2i\eta_+ - \Delta_-)} \tilde{A}_{3,tz} \left\{ -\frac{4i\Delta}{3\eta + 2\Delta} \tilde{A}_2 \tilde{A}_4 + \frac{4i\Delta}{3\eta + 2\Delta} \tilde{A}_2 \tilde{A}_4 \right\} \\ &+ \delta \frac{(2i\eta_+ + \Delta_+)}{(2i\eta_- + \Delta_+)} \tilde{A}_{4,tz} \left\{ -\frac{4i\Delta}{3\eta + 2\Delta} \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 + \frac{4i\Delta}{3\eta + 2\Delta} \tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$= 2i\delta\tilde{A}_{2,tz} \left\{ -\tilde{A}_3\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3\tilde{A}_4 \right\} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \delta\tilde{A}_{3,tz} \left\{ -\frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2\tilde{A}_4 + \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2\tilde{A}_4\tilde{A} \right\}$$

$$\frac{\eta_+}{\eta_-} \delta\tilde{A}_{4,tz} \left\{ -\frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2\tilde{A}_3 + \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2\tilde{A}_3 \right\} = 0$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_4 \\ 0 & -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta\tilde{A}_{3,tz} & \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta\tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\eta_-}{\eta_+} \delta\tilde{A}_{3,tz} \left\{ -2\tilde{A}_1\tilde{A}_4 \right\} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta\tilde{A}_{4,tz} \left\{ -2\tilde{A}_1\tilde{A}_3 \right\}$$

$$= -2\delta\tilde{A}_1 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4\tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3\tilde{A}_{4,tz} \right\}$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & \frac{-2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & -\tilde{A}_4 \\ 0 & 2i\delta\tilde{A}_{2,tz} & \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta\tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix}$$

$$= -2i\delta\tilde{A}_{2,tz} \left\{ -2\tilde{A}_1\tilde{A}_4 \right\} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \delta\tilde{A}_{4,tz} \left\{ \frac{4i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2\tilde{A}_1 \right\}$$

$$= 4i\delta\tilde{A}_1 \left\{ \tilde{A}_4\tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2\tilde{A}_{4,tz} \right\}$$

$$N_4 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & \frac{2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & \tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_1 & \frac{-2i\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \tilde{A}_2 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & 2i\delta\tilde{A}_{2,tz} & -\frac{\eta_-}{\eta_+} \delta\tilde{A}_{3,tz} \end{vmatrix}$$

$$= 4i\delta\tilde{A}_1\left(\tilde{A}_3\tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+}\left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0}\right)\tilde{A}_2\tilde{A}_{3,tz}\right)$$

และ

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \eta_0 C_2^0$$

$$C_3 = \eta_- C_3^0$$

$$C_4 = \eta_+ C_4^0$$

ดังนั้น แทนค่า W_0 จะได้

$$W_0 = \frac{\bar{C} \cdot \bar{N}}{\bar{F} \cdot \bar{N}} = \frac{C_2 N_2 + C_3 N_3 + C_4 N_4}{F_2 N_2 + F_3 N_3 + F_4 N_4}$$

$$W_0 = \frac{i\eta_0 C_2^0 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- C_3^0 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_+ C_4^0 \left\{ \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right\}}{i\eta_0 A_2 \left\{ \frac{\eta_-}{\eta_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_- A_3 \left\{ \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_+}{\eta_-} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\} + 2\eta_+ A_4 \left\{ \tilde{A}_3 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{\eta_-}{\eta_+} \left(\frac{\eta_0}{-3\eta + \eta_0} \right) \tilde{A}_2 \tilde{A}_{3,tz} \right\}}$$

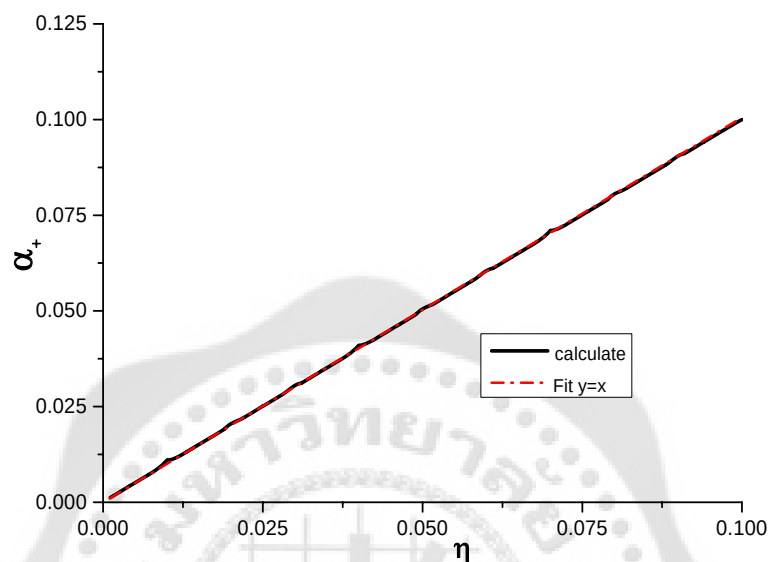
เมื่อลดรูป $\delta = 0$ จะได้

$$W_0 = \frac{\eta_- C_3^0 \tilde{A}_4 + \eta_+ C_4^0 \tilde{A}_3}{\eta_- A_3 \tilde{A}_4 + \eta_+ A_4 \tilde{A}_3} \quad (ค4)$$

สมการนี้จะนำไปแทนค่าในสมการ (3.47) เพื่อทำการคำนวณโดยเทคนิคฟังก์ชันกรีน

การประมาณค่า $\alpha_{\pm}(\eta, \delta)$ เมื่อมุม ϕ มีค่าเข้าใกล้ 0

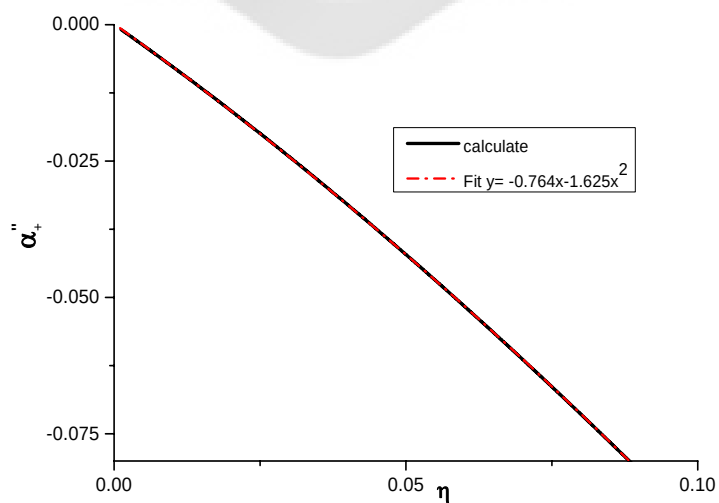
จากการพล็อตกราฟ $\alpha_{\pm}(\eta, \phi = 0)$ พบว่า $\alpha_{+}(\eta, \phi = 0) = \eta$ แสดงดังภาพประกอบ 71



ภาพประกอบ 70 $\alpha_{+}(\eta, \phi = 0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

สำหรับอนุพันธ์อันดับ 1 $\frac{\partial}{\partial \delta} \alpha_{+}(\eta, \phi = 0)$ มีค่าเป็นศูนย์

ส่วนอนุพันธ์อันดับ 2 $\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_{+}(\eta, \phi = 0) = -0.764\eta - 1.625\eta^2$ แสดงดังภาพประกอบ 72



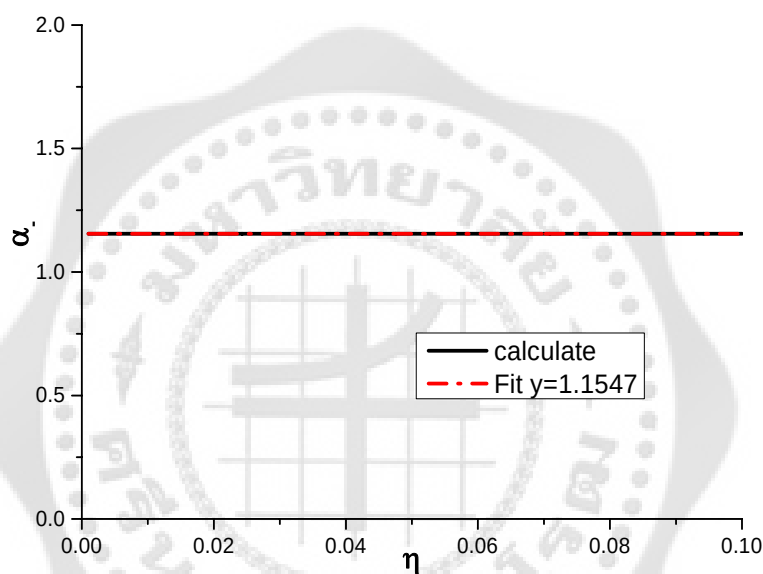
ภาพประกอบ 71 $\alpha_{+}''(\eta, \phi = 0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

ซึ่งได้ผลการประมาณ ดังนี้

$$\alpha_+(\eta, \phi) = \eta - (0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2) = \eta - \Sigma_1 \quad (\text{ค5})$$

เมื่อให้ $\Sigma_1 = 0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2$

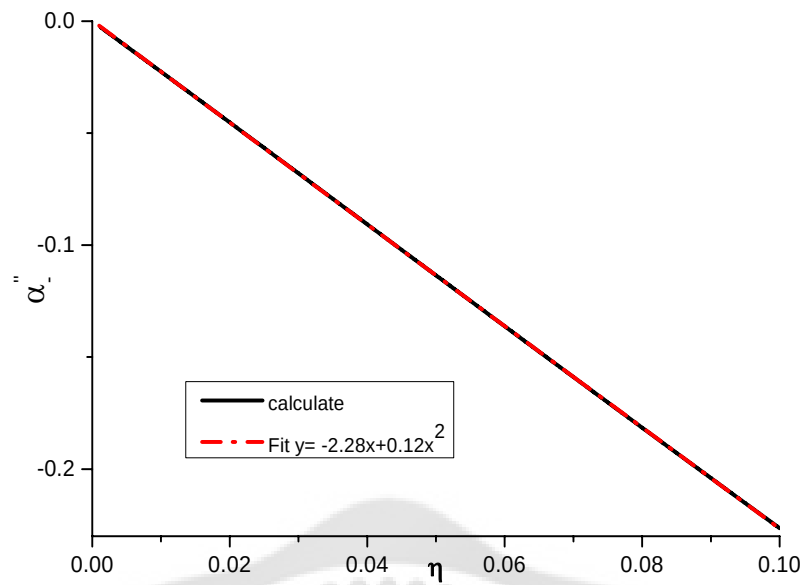
สำหรับค่า $\alpha_-(\eta, 0) = 1.1547 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ แสดงดังภาพประกอบ 73



ภาพประกอบ 72 $\alpha_-(\eta, \phi=0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

สำหรับอนุพันธ์อันดับ 1 $\frac{\partial}{\partial \delta} \alpha_-(\eta, \phi=0)$ มีค่าเป็นศูนย์

ส่วนอนุพันธ์อันดับ 2 $\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \alpha_-(\eta, \phi=0) = -2.28\eta + 0.122\eta^2$ แสดงดังภาพประกอบ 74



ภาพประกอบ 73 $\alpha_+''(\eta, \phi=0)$ กับ η โดยวิธีฟิตกราฟกับผลการคำนวณ

ซึ่งได้ผลการประมาณ ดังนี้

$$\alpha_-(\eta, \phi) = \sqrt{\frac{4}{3}} - (1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2) = 1.1547 - \Sigma_2 \quad (\text{ค6})$$

เมื่อให้ $\Sigma_2 = 1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2$

ทำการประมาณเพื่อการลดรูปกรณี มุมน้อยๆ ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไอเกน เขียนได้ดังนี้

$$\alpha_+(\eta, \phi) = \eta - (0.382\eta\phi^2 + 0.813\eta^2\phi^2) = \eta - \Sigma_1$$

$$\alpha_-(\eta, \phi) = \sqrt{\frac{4}{3}} - (1.14\eta\phi^2 - 0.061\eta^2\phi^2) = \sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2$$

ฟังก์ชันไอเกน

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

เขียน f_2 , f_3 และ f_4 จากสมการ (3.28) – (3.31) ต่างจากเดิม เพื่อหลีกเลี่ยงไม่ให้เป็นอนันต์ เมื่อ $\phi \rightarrow 0$

$$\begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \sin \phi / (\alpha_+ - \eta) \\ -i \sin \phi / (\alpha_+ - \eta) \\ 2i \cos \phi / (\eta + 2\alpha_+) \end{pmatrix} f_{s(2)} = \begin{pmatrix} (\alpha_+ - \eta) \\ i \sin \phi \\ -i \sin \phi \\ \frac{2i \cos \phi (\alpha_+ - \eta)}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \sin \phi / (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ 2i \sin \phi / (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ 2i \cos \phi / (\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-) \end{pmatrix} f_{s(3)} = \begin{pmatrix} (\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ -2i \sin \phi \\ 2i \sin \phi \\ 2i \cos \phi \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \sin \phi / (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ 2i \sin \phi / (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ 2i \cos \phi / (\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-) \end{pmatrix} f_{s(4)} = \begin{pmatrix} (\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta) \\ -2i \sin \phi \\ 2i \sin \phi \\ 2i \cos \phi \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix}$$

ปริมาณต่างๆที่เกี่ยวข้อง คือ

$$\eta + 2\alpha_+ = \eta + 2(\eta - \Sigma_1) = 3\eta - 2\Sigma_1$$

$$\alpha_+ - \eta = \eta - \Sigma_1 - \eta = -\Sigma_1$$

$$\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- = \eta - (\eta - \Sigma_1) - i\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2\right) = \Sigma_1 - 2i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right)$$

$$= -2i\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) + \frac{i}{2}\Sigma_1\right\} = -2i\Sigma_+$$

$$\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- = \eta - (\eta - \Sigma_1) + i\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2\right) = 2i\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) - \frac{i}{2}\Sigma_1\right\} = 2i\Sigma_-$$

$$\begin{aligned} 2\eta + \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- &= 2\eta + (\eta - \Sigma_1) + i\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2\right) = 2i\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) + \frac{i}{2}\Sigma_1\right\} + 3\eta \\ &= 2i\Sigma_+ + 3\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\eta + \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- &= 2\eta + (\eta - \Sigma_1) - i\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \Sigma_2\right) = -2i\left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) - \frac{i}{2}\Sigma_1\right\} + 3\eta \\ &= -2i\Sigma_- + 3\eta \end{aligned}$$

เมื่อกำหนด

$$\Sigma_{\pm} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma_2\right) \pm \frac{i}{2}\Sigma_1$$

แทนค่าเหล่านี้แล้วจะได้ค่าไอเกน

$$\tilde{k}_{01}^2 = 3\eta\xi_J^{-2} = Q^2$$

$$\tilde{k}_{02}^2 = \xi_J^{-2}[\eta + 2\alpha_+] = \xi_J^{-2}(3\eta - 2\Sigma_1)$$

$$\tilde{k}_{03}^2 = \xi_J^{-2}[\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-] = \xi_J^{-2}(-2i\Sigma_+)$$

$$\tilde{k}_{04}^2 = \xi_J^{-2}[\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-] = \xi_J^{-2}(2i\Sigma_-)$$

ฟังก์ชันไอเกน

$$\begin{pmatrix} f_{s(1)} \\ f_{-(1)} \\ f_{+(1)} \\ f_{tz(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(2)} \\ f_{-(2)} \\ f_{+(2)} \\ f_{tz(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ - \eta \\ i \sin \phi \\ -i \sin \phi \\ \frac{2i \cos \phi (\alpha_+ - \eta)}{(\eta + 2\alpha_+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Sigma_1 \\ i\phi \\ -i\phi \\ \frac{-2i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(3)} \\ f_{-(3)} \\ f_{+(3)} \\ f_{tz(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta \\ -2i \sin \phi \\ 2i \sin \phi \\ 2i \cos \phi \frac{(\alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\Sigma_+ + 3\eta \\ -2i\phi \\ 2i\phi \\ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{s(4)} \\ f_{-(4)} \\ f_{+(4)} \\ f_{tz(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta \\ -2i \sin \phi \\ 2i \sin \phi \\ 2i \cos \phi \frac{(\alpha_+ - i\sqrt{3}\alpha_- + 2\eta)}{(\eta - \alpha_+ + i\sqrt{3}\alpha_-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\Sigma_- + 3\eta \\ -2i\phi \\ 2i\phi \\ \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \end{pmatrix}$$

จะได้เมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} f_{s,p,1} A_1^{(p)} & f_{s,p,2} A_2^{(p)} & f_{s,p,3} A_3^{(p)} & f_{s,p,4} A_4^{(p)} \\ f_{-,p,1} \tilde{A}_{1,-}^{(p)} & f_{-,p,2} \tilde{A}_{2,-}^{(p)} & f_{-,p,3} \tilde{A}_{3,-}^{(p)} & f_{-,p,4} \tilde{A}_{4,-}^{(p)} \\ f_{+,p,1} \tilde{A}_{1,+}^{(p)} & f_{+,p,2} \tilde{A}_{2,+}^{(p)} & f_{+,p,3} \tilde{A}_{3,+}^{(p)} & f_{+,p,4} \tilde{A}_{4,+}^{(p)} \\ f_{tz,p,1} \tilde{A}_{1,tz}^{(p)} & f_{tz,p,2} \tilde{A}_{2,tz}^{(p)} & f_{tz,p,3} \tilde{A}_{3,tz}^{(p)} & f_{tz,p,4} \tilde{A}_{4,tz}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ h_{-,1} & h_{-,2} & h_{-,3} & h_{-,4} \\ h_{+,1} & h_{+,2} & h_{+,3} & h_{+,4} \\ h_{tz,1} & h_{tz,2} & h_{tz,3} & h_{tz,4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\Sigma_1 A_2 & (2i\Sigma_+ + 3\eta) A_3 & (-2i\Sigma_- + 3\eta) A_4 \\ \tilde{A}_1 & -i\phi \tilde{A}_2 & 2i\phi \tilde{A}_3 & 2i\phi \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & i\phi \tilde{A}_2 & -2i\phi \tilde{A}_3 & -2i\phi \tilde{A}_4 \\ 0 & \frac{-2i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_{2,tz} & \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+} \tilde{A}_{3,tz} & \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_{4,tz} \end{pmatrix}$$

$\frac{\tilde{A}_1}{\Sigma_1}$

$$F_1 = 0, F_2 = -\Sigma_1 A_2, F_3 = (2i\Sigma_+ + 3\eta) A_3, F_4 = (-2i\Sigma_- + 3\eta) A_4$$

$$C_1 = 0, C_2 = -\Sigma_1 C_2^0, C_3 = (2i\Sigma_+ + 3\eta) C_3^0, C_4 = (-2i\Sigma_- + 3\eta) C_4^0$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} -i\phi \tilde{A}_2 & 2i\phi \tilde{A}_3 & 2i\phi \tilde{A}_4 \\ i\phi \tilde{A}_2 & -2i\phi \tilde{A}_3 & -2i\phi \tilde{A}_4 \\ \frac{-2i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_{2,tz} & \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+} \tilde{A}_{3,tz} & \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix} = 0$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & 2i\phi \tilde{A}_3 & 2i\phi \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & -2i\phi \tilde{A}_3 & -2i\phi \tilde{A}_4 \\ 0 & \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+} \tilde{A}_{3,tz} & \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix}$$

$$= -4i\phi \tilde{A}_1 \left\{ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{3,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_3 \tilde{A}_{4,tz} \right\}$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & -i\phi \tilde{A}_2 & 2i\phi \tilde{A}_4 \\ \tilde{A}_1 & i\phi \tilde{A}_2 & -2i\phi \tilde{A}_4 \\ 0 & \frac{-2i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_{2,tz} & \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_{4,tz} \end{vmatrix}$$

$$= 2i\phi \tilde{A}_1 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1} \tilde{A}_4 \tilde{A}_{2,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-} \tilde{A}_2 \tilde{A}_{4,tz} \right\}$$

$$N_4 = \begin{vmatrix} \tilde{A}_1 & -i\phi\tilde{A}_2 & 2i\phi\tilde{A}_3 \\ \tilde{A}_1 & i\phi\tilde{A}_2 & -2i\phi\tilde{A}_3 \\ 0 & \frac{-2i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_{2,tz} & \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+}\tilde{A}_{3,tz} \end{vmatrix}$$

$$= 2i\phi\tilde{A}_1 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_3\tilde{A}_{2,tz} + \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{-\Sigma_+}\tilde{A}_2\tilde{A}_{3,tz} \right\}$$

$$W_0 = \frac{\vec{C} \cdot \vec{N}}{\vec{F} \cdot \vec{N}} = \frac{C_2N_2 + C_3N_3 + C_4N_4}{F_2N_2 + F_3N_3 + F_4N_4}$$

แทนค่า

$$W_0 = \frac{2\Sigma_1 C_2^0 \left\{ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+}\tilde{A}_4\tilde{A}_{3,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-}\tilde{A}_3\tilde{A}_{4,tz} \right\} + (2i\Sigma_+ + 3\eta)C_3^0 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_4\tilde{A}_{2,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-}\tilde{A}_2\tilde{A}_{4,tz} \right\} - (-2i\Sigma_- + 3\eta)C_4^0 \left\{ \frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_3\tilde{A}_{2,tz} + \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+}\tilde{A}_2\tilde{A}_{3,tz} \right\}}{2\Sigma_1 A_2 \left\{ \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+}\tilde{A}_4\tilde{A}_{3,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-}\tilde{A}_3\tilde{A}_{4,tz} \right\} + (2i\Sigma_+ + 3\eta)A_3 \left\{ -\frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_4\tilde{A}_{2,tz} + \frac{-2i\Sigma_- + 3\eta}{\Sigma_-}\tilde{A}_2\tilde{A}_{4,tz} \right\} - (-2i\Sigma_- + 3\eta)A_4 \left\{ \frac{4i\Sigma_1}{3\eta - 2\Sigma_1}\tilde{A}_3\tilde{A}_{2,tz} + \frac{2i\Sigma_+ + 3\eta}{\Sigma_+}\tilde{A}_2\tilde{A}_{3,tz} \right\}}$$
(7)

สมการนี้จะถูกนำไปแทนค่าในสมการ (3.47) เพื่อการคำนวณโดยเทคนิคฟังก์ชันกรีน

ภาคผนวก ง



เทคนิคกรีนฟังก์ชัน

ผลเฉลยของสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ผิววนอกตามสมการ (3.16) ที่ $z = d_s$ และที่รอยต่อ S/F ตามสมการ (3.15) แสดงโดยใช้สมการกรีนฟังก์ชัน ซึ่งผลลัพธ์สามารถเขียนคู่แอมพลิจูดคลื่นซินเกรท ดังนี้

$$f_s^{(p)}(z) = \pi \int_0^{d_s} G(y, z) \Delta^{(p)}(y) dy \quad (ง1)$$

$$(\partial^2 - Q_p^2 - \Omega_n \xi_s^{-2}) f_s^{(p)}(z) = -\frac{2\pi}{D_s} \Delta_s^{(p)}(z)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} f_s^{(p)}(z) - Q_p^2 f_s^{(p)}(z) - \Omega_n \xi_s^{-2} f_s^{(p)}(z) = -\frac{2\pi}{D_s} \Delta_s^{(p)}(z)$$

$$\frac{d}{dz} f_s^{(p)}(z = d_s) = 0$$

$$\xi_s \frac{d}{dz} f_s^{(p)}(z = 0) = W_p \delta_0^{(p)}$$

ฟังก์ชันกรีน

$$\frac{d^2}{dz^2} G(y, z) - Q_p^2 G(y, z) - \Omega_n \xi_s^{-2} G(y, z) = -\delta(y - z)$$

กับเงื่อนไขขอบเขต

$$\frac{d}{dz} f_s^{(p)}(z = d_s) = 0 ,$$

$$\xi_s \frac{d}{dz} f_s^{(p)}(z = 0) - W_p \delta_0^{(p)} = 0$$

คำนวณหา $G(x, y)$ โดยเขียน

$$G(z, y) = \begin{cases} G^<(z, y) & , 0 \leq z < y \\ G^>(z, y) & , y < z \leq d_s \end{cases}$$

เมื่อ $y \neq z$ สมการ () เขียนเป็น

$$\frac{d^2}{dz^2} G(z, y) - Q_p^2 G(z, y) - \Omega_n \xi_s^{-2} G(z, y) = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} G(z, y) - [Q_p^2 + \Omega_n \xi_s^{-2}] G(z, y) = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} G(z, y) - k_s^2 G(z, y) = 0$$

เมื่อ

$$k_s = \sqrt{Q_p^2 + \Omega_n \xi_s^{-2}}$$

ที่ $z < y$

$$G^<(z, y) = C_1 \cosh(k_s z) + C_2 \sinh(k_s z)$$

ดังนั้น

$$\xi_s \frac{d}{dz} G^<(0, y) - W_p G^<(0, y) = 0$$

และ

$$\xi_s \frac{dG^<}{dx}(0, y) = W_p G^<(0, y)$$

$$\xi_s k_s C_2 = W_p C_1$$

$$C_2 = \frac{W_p C_1}{k_s \xi_s}$$

$$\therefore G^<(z, y) = C_1 \left[\cosh(k_s z) + \frac{W_p \sinh(k_s z)}{k_s \xi_s} \right]$$

และที่ $z > y$

$$G^>(z, y) = C_3 \cosh(k_s z) + C_4 \sinh(k_s z)$$

$$\frac{dG^>}{dx}(d_s, y) = C_3 k_s \sinh(k_s d_s) + C_4 k_s \cosh(k_s d_s) = 0$$

$$C_4 = -\frac{C_3 \sinh(k_s d_s)}{\cosh(k_s d_s)}$$

$$G^>(z, y) = C_3 \cosh(k_s z) - \frac{C_3 \sinh(k_s d_s)}{\cosh(k_s d_s)} \sinh(k_s z)$$

$$G^>(z, y) = \frac{C_3}{\cosh(k_s d_s)} [\cosh(k_s z) \cosh(k_s d_s) - \sinh(k_s z) \sinh(k_s d_s)]$$

$$\therefore G^>(z, y) = A_1 \cosh[k_s(z - d_s)]$$

สมการความต่อเนื่อง

$$G^>(z, y)|_{z \rightarrow y^+} = G^<(z, y)|_{z \rightarrow y^-}$$

$$A_1 \cosh[k_s(y - d_s)] = C_1 \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right]$$

$$A_1 = \frac{C_1}{\cosh[k_s(y - d_s)]} \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right]$$

และจาก

$$\frac{dG^>}{dx}(z, y)|_{z \rightarrow y^+} - \frac{dG^<}{dx}(z, y)|_{z \rightarrow y^-} = -\frac{2\pi}{D_s}$$

$$k_s A_1 \sinh[k_s(y - d_s)] - k_s C_1 \left[\sinh(k_s y) + \frac{W_p \cosh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right] = -\frac{2\pi}{D_s}$$

$$k_s \frac{C_1}{\cosh[k_s(y - d_s)]} \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right] \sinh[k_s(y - d_s)]$$

$$-k_s C_1 \left[\sinh(k_s y) + \frac{W_p \cosh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right] = -\frac{2\pi}{D_s}$$

$$k_s C_1 \left\{ \frac{\sinh[k_s(y-d_s) - k_s y] - \frac{W_p \cosh[k_s(y-d_s) - k_s y]}{k_s \xi_s}}{\cosh[k_s(y-d_s)]} \right\} = -\frac{2\pi}{D_s}$$

$$k_s C_1 \left\{ \frac{\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s}}{\cosh[k_s(y-d_s)]} \right\} = \frac{2\pi}{D_s}$$

$$C_1 = \frac{2\pi \cosh[k_s(y-d_s)]}{k_s D_s \left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]}$$

และ

$$A_1 = \frac{1}{\cosh[k_s(y-d_s)]} \frac{2\pi \cosh[k_s(y-d_s)]}{k_s D_s \left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]} \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right]$$

$$\therefore G^<(z, y) = \frac{2\pi}{k_s D_s \left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]} \left[\cosh(k_s z) + \frac{W_p \sinh(k_s z)}{k_s \xi_s} \right] \cosh[k_s(y-d_s)]$$

และ

$$\therefore G^>(z, y) = \frac{2\pi}{k_s D_s \left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]} \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right] \cosh[k_s(z-d_s)]$$

จาก $D_s = \xi_s^2 2\pi T_{c0}$

$$\therefore G^<(z, y) = \frac{(k_s \xi_s^2 T_{c0})^{-1}}{\left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]} \left[\cosh(k_s z) + \frac{W_p \sinh(k_s z)}{k_s \xi_s} \right] \cosh[k_s(y-d_s)]$$

$$\therefore G^>(z, y) = \frac{(k_s \xi_s^2 T_{c0})^{-1}}{\left[\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s} \right]} \left[\cosh(k_s y) + \frac{W_p \sinh(k_s y)}{k_s \xi_s} \right] \cosh[k_s(z-d_s)]$$

$$\therefore G(z, y) = \frac{(k_s \xi_s^2 T_{c0})^{-1}}{\sinh(k_s d_s) + \frac{W_p \cosh(k_s d_s)}{k_s \xi_s}} \times \begin{cases} v_1(z) v_2(y), & z \leq y \\ v_2(z) v_1(y), & y \leq z \end{cases} \quad (ง2)$$

สมการนี้จะเรียกค่า W_0

$$\text{เมื่อ} \quad v_1(z) = \cosh(k_s z) + \frac{W_p}{k_s \xi_s} \sinh(k_s z) \quad (ง3)$$

$$v_2(z) = \cosh[k_s(z - d_s)] \quad (ง4)$$

$$\text{และ} \quad k_s = \sqrt{\Omega_n \xi_s^{-2} + Q_p^2} \quad (ง5)$$

รวมกับสมการ (3.39) และ (ง1)-(ง5) เพื่อใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขต่อไป



ประวัติย่อผู้วิจัย



ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายวัชรินทร์ บุญเอียด
วัน เดือน ปีเกิด	23 มกราคม 2507
สถานที่เกิด	ต.ปากน้ำ อ.เมือง จ.ระนอง
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	75 ม.2 ต.ปากท้อ อ.ปากท้อ จ.ราชบุรี 70140
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2526	มัธยมศึกษาตอนปลาย จาก โรงเรียนนราธิวาส
พ.ศ.2530	วท.บ. (ศึกษาศาสตร์) จาก มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
พ.ศ.2549	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

