"IF I DON'T LEARN TO GIVE NOW, WILL REGRET IT WHEN MY TIME COMES DEPART."

อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์

MATHEMATICAL FINANCIAL DERIVATIVES



วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

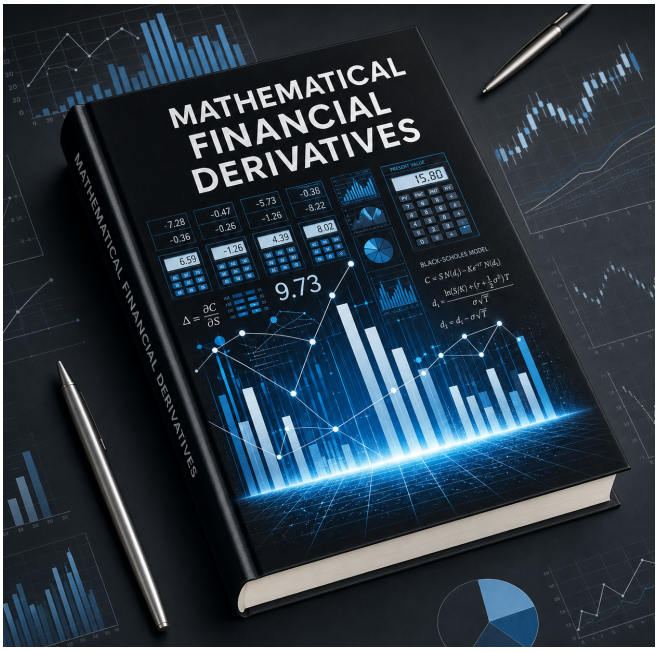
ได้รับทุนสนับสนุนการเขียนตำราจาก
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ประจำปี พ.ศ. 2567

"ถ้าฉันไม่รู้จักให้ในตอนนี้ ฉันจะเสียใจเมื่อฉันใกล้จากไป "

-วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ-

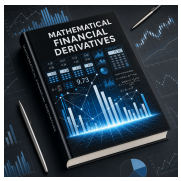
อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์

MATHEMATICAL FINANCIAL DERIVATIVES



วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

WICHAI WITAYAKIATTILERD



อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์

MATHEMATICAL FINANCIAL DERIVATIVES

ชื่อเรื่อง อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์

ผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

เผยแพร่ครั้งที่ 2 ปี 2569

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ISBN 978-616-637-402-5

ห้ามลอกเลียนเปลี่ยนแปลงหรือเผยแพร่ส่วนหนึ่งส่วนใด หรือทั้งหมดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตความยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรจากเจ้าของลิขสิทธิ์

จัดทำโดย รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

แผนภาพความเชื่อมโยงของเนื้อหา
อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์

โครงสร้างความรู้จากพื้นฐานสู่การประยุกต์ใช้

1) พื้นฐานการกำหนดราคา

- บทที่ 1 แบบจำลองราคาอย่างง่าย
- บทที่ 2 แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง
- บทที่ 3 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

2) การประเมินราคาออปชัน

- บทที่ 4 แบบจำลองราคายุโรเปียนออปชัน
- บทที่ 5 แบบจำลองราคาอเมริกันออปชัน

3) เครื่องมือเชิงคณิตศาสตร์ขั้นสูง

- บทที่ 6 แคลคูลัสสโตแคสติกและทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ

4) อัตราดอกเบี้ยและตราสารหนี้

- บทที่ 7 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น
- บทที่ 8 การกำหนดราคาและออปชันบนตราสารหนี้
- บทที่ 9 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

5) อนุพันธ์อัตราดอกเบี้ยและเงินตรา

- บทที่ 10 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ
- บทที่ 11 สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน

6) การประยุกต์ใช้เชิงระบบ

- บทที่ 12 การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

เส้นทางองค์ความรู้

พื้นฐานการกำหนดราคา → แบบจำลองออปชัน → คณิตศาสตร์สโตแคสติก → อัตราดอกเบี้ยและตราสารหนี้ → อนุพันธ์ชั้นสูง → การประยุกต์ใช้ในตลาดการเงิน

คำนำ

ตำราเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา "อนุพันธ์ทางการเงินเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Financial Derivatives)" สำหรับนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รวมถึงนักศึกษาสาขาอื่น ๆ ที่สนใจศึกษาด้านตราสารอนุพันธ์ในบริบทของธุรกิจและการเงิน เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยหลักการพื้นฐานของตราสารอนุพันธ์ ความรู้เกี่ยวกับแบบจำลองการกำหนดราคาและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการประยุกต์ใช้ในธุรกิจและการเงิน เช่น การจัดการความเสี่ยง การกำหนดราคาตราสารต่าง ๆ และการใช้โมเดลทางคณิตศาสตร์เพื่อวิเคราะห์การลงทุน

เนื้อหาในตำราเล่มนี้แบ่งออกเป็น 12 บท โดยเรียงลำดับจากแนวคิดพื้นฐานสู่การประยุกต์ใช้งานขั้นสูง เริ่มจาก

บทที่ 1 อธิบายแบบจำลองราคาอย่างง่าย ซึ่งครอบคลุมความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตราสารอนุพันธ์ สมมติฐานและสัญลักษณ์ในแบบจำลอง การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า ตลอดจนการประเมินมูลค่าออปชันและการจัดการความเสี่ยงด้วยออปชัน

บทที่ 2 นำเสนอแบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง โดยกล่าวถึงกลไกราคา การวัดผลตอบแทน ทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคและไตรภาค ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง สมบัติมาร์ทิงเกล และทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์

บทที่ 3 ต่อเนื่องด้วยแบบจำลองราคาในกรอบเวลาต่อเนื่อง โดยอธิบายแนวคิดของการเดินสุ่ม การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน และการประมาณอัตราดริฟท์กับค่าความผันผวนในบริบทของราคาสินทรัพย์

บทที่ 4 มุ่งเน้นไปที่การกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน โดยกล่าวถึงความเสมอภาคของราคาคอลและพุท เงื่อนไขขอบเขตราคา มูลค่าตามเวลา และสูตรการกำหนดราคาของแบล็ก–โชลส์

บทที่ 5 ขยายไปยังการวิเคราะห์อเมริกันออปชัน ทั้งด้านแนวคิดและวิธีการกำหนดราคา ซึ่งมีความซับซ้อนกว่ายูโรเปียนออปชันเนื่องจากสามารถใช้สิทธิได้ทุกช่วงเวลา

บทที่ 6 กล่าวถึงแคลคูลัสสโตแคสติก ทฤษฎีมาร์ทิงเกล การแยกส่วนประกอบตามดูบ-เมเยอร์ และทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ ซึ่งเป็นรากฐานของการสร้างแบบจำลองราคาตราสารในโลกที่มีความไม่แน่นอน

บทที่ 7 เจาะลึกแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น เช่น แบบจำลอง Vasicek, CIR, Ho-Lee และ Black-Derman-Toy ซึ่งใช้ในการวิเคราะห์พฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย

บทที่ 8 อธิบายการกำหนดราคาตราสารหนี้และออปชันบนตราสารหนี้ ทั้งในกรณีมีและไม่มีคูปอง โดยใช้แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่กล่าวในบทก่อนหน้า พร้อมตัวแบบโครงสร้างแบบตาข่าย

บทที่ 9 ครอบคลุมเนื้อหาเกี่ยวกับสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย โดยเริ่มจากพื้นฐานของอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ไปจนถึงฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย และการปรับความนูน

บทที่ 10 กล่าวถึงสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ ซึ่งรวมถึงความเข้าใจเรื่องการแข็งค่า-อ่อนค่าของเงินบาท ฟอร์เวิร์ดเงินตรา ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย และการประเมินมูลค่าของสัญญา

บทที่ 11 นำเสนอเครื่องมืออนุพันธ์ที่ซับซ้อนมากขึ้น ได้แก่ สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน โดยอธิบายผ่านกรอบทฤษฎีของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน และเมเชอร์ฟอร์เวิร์ด และในบทสุดท้าย คือ

บทที่ 12 ว่าด้วยการประยุกต์ใช้ตราสารอนุพันธ์เพื่อการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ อธิบายโครงสร้างเวลา ตัวชี้วัดสภาพคล่อง การวิเคราะห์ในภาวะวิกฤต และกรณีศึกษาจากตลาดการเงินไทย รวมถึงการประเมินมูลค่าตราสารหนี้ภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ย

ผู้เขียนได้ยกตัวอย่างและภาพประกอบอธิบายบทนิยามและทฤษฎีบทต่าง ๆ พร้อมด้วยบทพิสูจน์เพื่อความเข้าใจที่มากขึ้น อีกทั้งได้จัดทำแบบฝึกหัดเพื่อให้นักศึกษาได้ฝึกฝนและทบทวนเนื้อหา ทั้งนี้ผู้เขียนหวังว่าความรู้ในตำราเล่มนี้จะถูกนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์จริงในการทำงานทางด้านการเงิน เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษารายวิชาด้านอนุพันธ์ทางการเงินในระดับที่สูงขึ้น และสามารถนำไปใช้วิเคราะห์การลงทุนได้จริง

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณคณาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติเป็นอย่างสูงสำหรับคำแนะนำและข้อเสนอแนะที่ทำให้จัดทำตำราเล่มนี้ลุล่วงไปด้วยดี หากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้เขียนต้องขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย และยินดีรับฟังข้อเสนอแนะของทุกท่านเสมอ

วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	i
สารบัญ	iii
บทที่ 1 แบบจำลองราคาอย่างง่าย	1
1.1 ความรู้พื้นฐานตราสารอนุพันธ์	1
1.2 สมมติฐานและสัญลักษณ์ในแบบจำลอง	5
1.3 การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด	16
1.4 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศและอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า	22
1.5 การกำหนดราคาออปชัน	31
1.6 การจัดการความเสี่ยงด้วยออปชัน	46
บทสรุปท้ายบทที่ 1	56
เอกสารอ้างอิง	57
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	59
บทที่ 2 แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง	67
2.1 บทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง	68
2.2 กลไกราคา	71
2.3 การวัดผลตอบแทน	73
2.4 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค	79
2.5 ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง	84
2.6 สมบัติมาร์ทิงเกล	90
2.7 ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์	96
2.8 แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค	100
บทสรุปท้ายบทที่ 2	105
เอกสารอ้างอิง	106
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	108
บทที่ 3 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง	113

หน้า

3.1 อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน 114
3.2 การเดินสุ่ม 118
3.3 การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน 120
3.4 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง 123
3.5 การประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวน 128
บทสรุปท้ายบทที่ 3 130
เอกสารอ้างอิง 131
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 133
บทที่ 4 แบบจำลองราคายูโรเปียนออปชัน 137
4.1 ยูโรเปียนออปชัน 138
4.2 ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน 142
4.3 เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน 147
4.4 ราคาของออปชันตามตัวแปร 149
4.5 มูลค่าตามเวลาของออปชัน 152
4.6 การกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน 153
4.7 สูตรของแบล็ก-โชลส์ 169
บทสรุปท้ายบทที่ 4 177
เอกสารอ้างอิง 178
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4 179
บทที่ 5 แบบจำลองราคาอเมริกันออปชัน 185
5.1 อเมริกันออปชัน 186
5.2 การกำหนดราคาอเมริกันออปชัน 193
บทสรุปท้ายบทที่ 5 198
เอกสารอ้างอิง 199
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5 201
บทที่ 6 แคลคูลัสสโตแคสติกและทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ 207

หน้า

6.1 บทนิยามของแคลคูลัสสโตแคสติก 209
6.2 สมบัติของแคลคูลัสสโตแคสติก 214
6.3 สมบัติมาร์ทิงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ 217
6.4 ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ 226
บทสรุปท้ายบทที่ 6 234
เอกสารอ้างอิง 236
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6 237
บทที่ 7 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 239
7.1 ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย 242
7.2 แบบจำลองของ Vasicek และแบบจำลอง CIR 243
7.3 แบบจำลอง Ho-Lee 251
7.4 แบบจำลอง Black-Derman-Toy 262
บทสรุปท้ายบทที่ 7 268
เอกสารอ้างอิง 270
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7 271
บทที่ 8 การกำหนดราคาและออปชันบนตราสารหนี้ 277
8.1 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek 278
8.2 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง CIR 286
8.3 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย 289
8.4 แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย 295
8.5 การกำหนดราคาตราสารหนี้มีคูปอง 298
8.6 ออปชันบนตราสารหนี้ 303
บทสรุปท้ายบทที่ 8 315
เอกสารอ้างอิง 316
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8 317
บทที่ 9 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย 327

	หน้า
9.1 พื้นฐานอัตราดอกเบี้ยลอยตัว	328
9.2 ราคาฟอร์เวิร์ดของตราสารหนี้ไม่จ่ายคูปองและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย	332
9.3 สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xIBOR	334
9.4 สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย xIBOR	342
9.5 ค่าความผันผวนตามนัยและราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน	344
9.6 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย	349
บทสรุปท้ายบทที่ 9	364
เอกสารอ้างอิง	365
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	366
บทที่ 10 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ	377
10.1 การแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาท	380
10.2 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ	382
10.3 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ	384
10.4 ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ	389
10.5 ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย	399
10.6 การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ	405
บทสรุปท้ายบทที่ 10	417
เอกสารอ้างอิง	419
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 10	420
บทที่ 11 สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์และสวอปชัน	433
11.1 ทฤษฎีของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน	434
11.2 เมเซอร์ฟอร์เวิร์ด	444
11.3 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผัน	449
11.4 สัญญาแคปอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย	457
11.5 สัญญาสวอปชัน	482
	หน้า

บทสรุปท้ายบทที่ 11 488
เอกสารอ้างอิง 490
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 11 491
บทที่ 12 การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ 505
12.1 สภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้และความสำคัญเชิงระบบ 506
12.2 ตัวชี้วัดสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้: เชิงปริมาณและเชิงพฤติกรรม 508
12.3 การใช้อนุพันธ์เพื่อสะท้อนสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ 509
12.4 การวิเคราะห์โครงสร้างความผันแปรของผลตอบแทนในช่วงวิกฤต 512
12.5 การวิเคราะห์โครงสร้างอัตราผลตอบแทนด้วย Spot Rate และ Forward Rate 516
12.6 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย: พื้นฐานเชิงโครงสร้างของตราสารหนี้ 519
12.7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย 524
12.8 การจำลองพฤติกรรมอัตราดอกเบี้ยในแบบจำลอง Vasicek, CIR และ Hull-White 525
12.9 การกำหนดราคาตราสารหนี้ภายใต้โครงสร้างเวลาและอัตราดอกเบี้ย 528
12.10 การวิเคราะห์การเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน 529
12.11 กรณีศึกษาการเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดในตลาดการเงินไทย 532
บทสรุปท้ายบทที่ 12 550
เอกสารอ้างอิง 551
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12 553
บรรณานุกรม 567
ดัชนี 575
ประวัติผู้เขียน 587

บทที่ 1 แบบจำลองราคาอย่างง่าย

เนื้อหาประกอบด้วย

1.1 ความรู้พื้นฐานตราสารอนุพันธ์

1.2 สมมติฐานและสัญลักษณ์ในแบบจำลอง

1.3 การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด

1.4 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศและอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า

1.5 การกำหนดราคาออปชัน

1.6 การจัดการความเสี่ยงด้วยออปชัน

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึง **แบบจำลองราคาอย่างง่าย (simple market model)** หรือ **แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 ขั้น (one-step binomial model)** ซึ่งเป็นแบบจำลองพื้นฐานที่ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยแบบจำลองนี้พิจารณาจุดเวลาเพียงสองจุดเวลา คือ **จุดเวลาปัจจุบัน** ($t=0$) และ **จุดเวลาอนาคต** ($t=1$) ซึ่งราคาของสินทรัพย์สามารถเคลื่อนที่ไปยังสองค่าที่เป็นไปได้ตามอัตราส่วนที่กำหนดไว้ล่วงหน้า (Cox, Ross, & Rubinstein, ค.ศ.1979) แบบจำลองนี้ถือเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนา **แบบจำลองราคาทางการเงินที่ซับซ้อนขึ้น** เช่น **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n ขั้น (multi-step binomial model)** ซึ่งขยายแนวคิดจากแบบจำลองหนึ่งช่วงเวลาไปสู่แบบจำลองหลายช่วงเวลา ทำให้สามารถใช้แบบจำลองนี้กับตราสารอนุพันธ์ที่มีอายุหลายงวด เช่น ออปชันยุโรปและออปชันอเมริกัน (Hull, ค.ศ. 2022; Shreve, ค.ศ. 2004) นอกจากนี้ ยังสามารถพัฒนาเป็น **แบบจำลองต้นไม้ไตรภาค (trinomial model)** ซึ่งเพิ่มสถานะอีกหนึ่งสถานะของราคาเพื่อให้แบบจำลองมีความแม่นยำมากขึ้น และสามารถประมาณการพฤติกรรมของสินทรัพย์ที่มีความซับซ้อนสูงขึ้นได้ (Boyle, ค.ศ. 1986) แบบจำลองราคาอย่างง่ายยังเป็นพื้นฐานของ **แบบจำลองราคาในเวลาต่อเนื่อง (continuous-**

time pricing models) เช่น **แบบจำลอง Black-Scholes** (Black & Scholes, ค.ศ. 1973; Merton, ค.ศ. 1973) ซึ่งเป็นแบบจำลองสำคัญที่ใช้อธิบายราคาของออปชันและตราสารอนุพันธ์อื่น ๆ ในตลาดทุน แนวคิดจากแบบจำลองเหล่านี้ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาอนุพันธ์ทางการเงินที่หลากหลาย รวมถึงการประเมินความเสี่ยงและการบริหารพอร์ตการลงทุน

ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ จะอธิบายถึง **แนวคิดพื้นฐานในการจัดการความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน (portfolio risk management)** โดยอาศัยหลักการของ **การป้องกันความเสี่ยงด้วยกลยุทธ์ไร้อาร์บิทราจ (no-arbitrage hedging strategies)** และการสร้าง **พอร์ตการลงทุนที่มีความเสี่ยงเป็นศูนย์ (risk-neutral portfolio)** ซึ่งเป็นหลักการสำคัญที่ใช้ในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ในแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Ross, ค.ศ.1976; Rubinstein, ค.ศ.1976)

1.1 ความรู้พื้นฐานตราสารอนุพันธ์

ตราสารอนุพันธ์ เป็นสัญญาทางการเงินที่ผู้ซื้อและผู้ขายตกลงที่จะซื้อหรือขายสินค้า อ้างอิง (underlying assets) โดยข้อตกลงทำธุรกรรมดังกล่าวทำในปัจจุบันแต่ชำระราคาและส่งมอบสินค้าอ้างอิงตามเวลาที่กำหนดไว้ในอนาคต ข้อตกลงทำธุรกรรมที่ระบุในตราสารอนุพันธ์อาจอยู่ในรูปพันธะผูกพัน (obligation) ระหว่างคู่สัญญาทั้งฝ่ายซื้อและฝ่ายขาย หรืออาจเป็นข้อตกลงที่ให้สิทธิ (right) แก่คู่สัญญาในการซื้อหรือขายสินค้าอ้างอิงหรือตัวแปรอ้างอิง ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต โดยมีการระบุจำนวนหรือปริมาณและคุณภาพของสินค้าอ้างอิง ราคาซื้อขายและวิธีการส่งมอบสินค้าอ้างอิงไว้เป็นการล่วงหน้า สินค้าอ้างอิงที่ระบุในตราสารอนุพันธ์ อาจเป็น

- สินทรัพย์ทางการเงิน เช่น หุ้นสามัญ กลุ่มของหุ้น พันธบัตรรัฐบาล
- ตัวแปรอ้างอิง เช่น ดัชนีราคาหุ้น (SET, SET100 และ SET50) เป็นต้น
- สินค้าโภคภัณฑ์ เช่น สินค้าและผลิตภัณฑ์ทางการเกษตร น้ำมันดิบ สินแร่ เป็นต้น

1.1.1 ประเภทของตราสารอนุพันธ์ตามลักษณะพันธะผูกพันของสัญญา

ตราสารอนุพันธ์ตามลักษณะพันธะผูกพันของสัญญา จำแนกเป็น 3 ประเภท คือ สัญญาซื้อขายล่วงหน้า ออปชัน และสัญญาสวอป

1) สัญญาซื้อขายล่วงหน้า

เป็นสัญญาระหว่างคู่สัญญาสองฝ่ายที่ตกลงจะซื้อจะขายสินค้าอ้างอิงที่ระบุในสัญญา ในราคา ปริมาณ และเวลาส่งมอบที่ได้กำหนดในไว้สัญญา โดยทั้งผู้ที่จะซื้อและผู้ที่จะขาย มีภาระผูกพันต้องทำตามสัญญานั้น ๆ กล่าวคือ ฝ่ายผู้ขายจะต้องนำสินค้าอ้างอิงมาส่งมอบตามเวลาที่กำหนดไว้ในสัญญา และฝ่ายผู้ซื้อจะต้องชำระราคาตามกำหนด

ประเภทของสัญญาซื้อขายล่วงหน้ามีอยู่ 2 ประเภท คือ

1.1) สัญญาฟอร์เวิร์ด (forward contact) เป็นสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่คู่สัญญาตกลงซื้อขายกันเองในตลาดที่ไม่เป็นทางการ (over-the-counter market) โดยคู่สัญญาจะต้องปฏิบัติตามข้อผูกพันตามสัญญาฟอร์เวิร์ดโดยมีการส่งมอบตัวสินค้าอ้างอิงจริง (physical delivery)

ตัวอย่างของสัญญาฟอร์เวิร์ด ได้แก่ สัญญาฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย (forward rate agreement หรือ FRA) สัญญาฟอร์เวิร์ดยางพารา และ สัญญาฟอร์เวิร์ดดอกทิวลิป เป็นต้น

1.2) สัญญาฟิวเจอร์ส (future contact) เป็นสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่คู่สัญญาตกลงซื้อขายผ่านนายหน้าในตลาดที่จัดตั้งอย่างทางการ (organized exchange) โดยคู่สัญญาตามสัญญาฟิวเจอร์ส ส่วนใหญ่มิได้ต้องการส่งมอบหรือรับมอบตัวสินค้าอ้างอิงจริง ๆ เช่นเดียวกับสัญญาฟอร์เวิร์ด แต่คู่สัญญาเลือกที่จะล้างหรือปิดสถานะการเป็นคู่สัญญาได้ โดยการรับและจ่ายเงินสด (cash settlement)

ตัวอย่างของสัญญาฟิวเจอร์ส ได้แก่ สัญญาฟิวเจอร์สในดัชนีราคาหุ้น SET50 หรือ SET50 index futures ที่ซื้อขายในตลาดอนุพันธ์ TFEX และสัญญาซื้อขายสินค้าเกษตรล่วงหน้าในตลาดล่วงหน้า AFEX เป็นต้น

2) ออปชัน (option) หรือตราสารสิทธิ เป็นสัญญาซื้อขายล่วงหน้าที่ผู้ออกออปชันให้สิทธิ (right) แก่ผู้ซื้อออปชันที่จะซื้อหรือขายสินค้าอ้างอิงหรือตัวแปรอ้างอิง ในราคา ปริมาณ และเวลาตามที่กำหนดไว้ในสัญญา สิทธิในที่นี้ มิใช่พันธะ เนื่องจากออปชันมีลักษณะเป็นใบแสดงสิทธิ ดังนั้นผู้ซื้อออปชันจึงต้องจ่ายเงินเพื่อซื้อออปชัน เรียกว่า *ค่าพรีเมียม* (premium) เพื่อให้ได้มาซึ่ง สิทธิที่ระบุ

ในออปชัน หากผู้ถือออปชันใช้สิทธิ ผู้ออกหรือผู้ขายออปชันมีพันธะที่จะต้องขายหรือรับซื้อสินค้าอ้างอิงหรือตัวแปรอ้างอิงตามที่ระบุในสัญญา

ประเภทของออปชันแบ่งตามการให้สิทธิแบ่งได้ 2 ประเภท

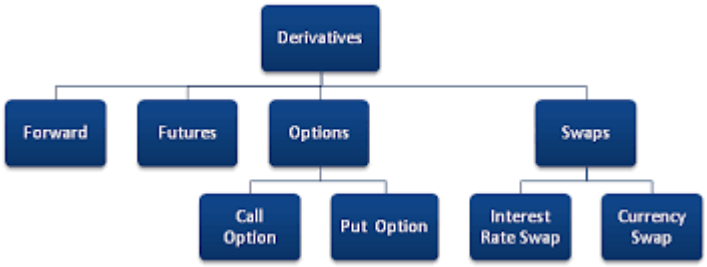
2.1) คอลออปชัน (call option) เป็นออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือออปชันในการซื้อสินค้าอ้างอิง

2.2) พุทออปชัน (put option) เป็นออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือออปชันในการขายสินค้าอ้างอิง

ตัวอย่างของออปชันที่มีการซื้อขายในศูนย์ซื้อขายอนุพันธ์ ได้แก่ คอลออปชันและพุทออปชันของ SET50 index

3) สัญญาสวอป (swap) เป็นสัญญาที่กำหนดให้คู่สัญญาแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดที่จะเกิดขึ้นในอนาคตระหว่างกันเพื่อให้เหมาะสมกับการดำเนินธุรกิจของแต่ละฝ่ายโดยคู่สัญญาจะต้องปฏิบัติตามพันธะผูกพันในการส่งมอบกระแสเงินสดระหว่างกันที่งวดที่กำหนดตลอดอายุสัญญา

ตัวอย่างของสัญญาสวอป ได้แก่ สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย เป็นต้น



รูปที่ 1.1 *ประเภทของตราสารอนุพันธ์*

1.1.2 ประโยชน์ของตราสารอนุพันธ์ และผู้ค้าในตลาดตราสารอนุพันธ์

วัตถุประสงค์หลักของการออกตราสารอนุพันธ์ คือเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการจัดการและบริหารความเสี่ยง ผลจากการซื้อขายตราสารอนุพันธ์ทำให้เกิดผลประโยชน์ด้านการเก็งกำไร นอกจากนี้ราคาที่เกิดจากการซื้อขายยังช่วยให้ผู้ลงทุนในสินค้าหลัก ค้นพบราคาที่แท้จริงของหลักทรัพย์หลักหรือสินค้าหลักได้เร็วขึ้นอีกด้วย

จากวัตถุประสงค์หลักและประโยชน์ของตราสารอนุพันธ์ จึงสามารถจำแนกผู้ค้าในตลาดตราสารอนุพันธ์ได้เป็น 3 ประเภท คือ นักบริหารความเสี่ยง (hedger) นักเก็งกำไร (speculator) และนักค้ากำไร (arbitrageur) โดยผู้ค้าแต่ละประเภทมีคำจำกัดความ ดังนี้

1) นักบริหารความเสี่ยง (hedger) คือ ผู้ค้าที่ต้องการกำหนดราคาซื้อหรือขายสินค้าอ้างอิงไว้ก่อนที่จะมีการซื้อหรือขายจริงสินค้าอ้างอิงนั้นจริง เพื่อเป็นการลดความเสี่ยงจากความผันผวนของราคาสินค้าอ้างอิง ทำให้ราคาสินค้าอ้างอิงมีความไม่แน่นอน เช่น ความไม่แน่นอนของราคาหุ้นและสินค้าต่าง ๆ อัตราดอกเบี้ย และอัตราแลกเปลี่ยน เป็นต้น

2) นักเก็งกำไร (speculator) คือ ผู้ค้าที่เข้ามาซื้อหรือขายตราสารอนุพันธ์ โดยต้องการทำกำไรจากความผันผวนของราคาตราสารอนุพันธ์หรือสินค้าอ้างอิงซึ่งทำให้เกิดส่วนต่างระหว่างราคาซื้อและราคาขาย นักเก็งกำไรที่เข้ามาไม่ได้มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้สิทธิในการซื้อหรือขายสินค้าอ้างอิง นักเก็งกำไรมีส่วนช่วยทำให้ตลาดอนุพันธ์มีสภาพคล่องเนื่องจากมีการซื้อขายหมุนเวียนเปลี่ยนมือกันอย่างต่อเนื่อง

3) นักค้ากำไร (arbitrager) คือ ผู้ค้าที่เข้ามาลงทุนในตลาดอนุพันธ์เพื่อแสวงหารายได้ จากความไม่สมดุลระหว่างระหว่างราคาสินค้าอ้างอิงในตลาด 2 ตลาดคือ ในตลาดปัจจุบันหรือราคาเงินสด กับราคาในตลาดอนุพันธ์ หากราคาทั้งสองเคลื่อนไหวไม่สมดุลกันก็จะสามารถทำการค้ากำไรได้โดยการซื้อสินค้าหรือตราสารในตลาดที่มีราคาต่ำพร้อมกับการขายตราสารหรือสินค้าในตลาดที่ราคาสูง ซึ่งเป็นการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage) ทั้งนี้ การค้ากำไรจะช่วยผลักดันให้ราคาของสินค้าหรือตราสารดังกล่าวมีการปรับราคาเข้าสู่จุดที่เหมาะสมได้เร็วขึ้น

1.2 สมมติฐานและสัญลักษณ์ในแบบจำลอง

แบบจำลองราคาอย่างง่าย เป็นแบบจำลองราคาแสดงการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ ในรูปต้นไม้ทวิภาค 1 ขั้น (ในที่นี้จะกำหนดให้หุ้นเป็นตัวแทนของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง) แบบจำลองราคาอย่างง่ายประกอบด้วย 2 จุดเวลา คือ จุดเวลาปัจจุบัน (เวลา=0) ซึ่งจะแทนด้วย $t=0$ และจุดเวลาอนาคต (เวลา= T) ซึ่งจะแทนด้วย $t=1$

กำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม เรียกฟังก์ชัน $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ว่า ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) และเรียก $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ว่าตัวแปรสุ่มคงที่ (Constant Random Variable) ถ้า $X(\omega)=c$ สำหรับทุก ๆ $\omega\in\Omega$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่

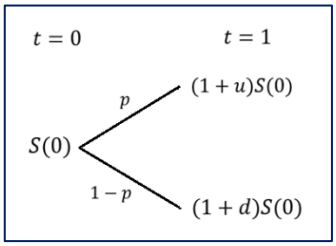
เพื่อความสะดวกจะเรียกตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นตัวแปรสุ่มคงที่ว่า *"ตัวแปรสุ่ม"* และหากเป็นตัวแปรสุ่มคงที่จะระบุโดยเฉพาะ

ต่อไปจะกำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้ สำหรับเวลา $t=0,1$ กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้นต่อหน่วย โดยที่ $S(0)$, $S(1)$ คือ ราคาปัจจุบันและราคาอนาคต ตามลำดับ $A(t)$ เป็นราคาตราสารหนี้ต่อหน่วยโดยที่ $A(0)$, $A(1)$ คือ ราคาปัจจุบันและราคาอนาคต ตามลำดับ กำหนดให้ $K(1)=\dfrac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}u\text{ ; ความน่าจะเป็น }p\\ d\text{ ; ความน่าจะเป็น }1-p\end{cases}$ เป็นอัตราผลตอบแทนของหุ้นต่อคาบซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นต่อคาบ โดยที่ $-1<d<u$ และ ความน่าจะเป็น $0<p<1$

กำหนดให้ $K_A=\dfrac{A(1)-A(0)}{A(0)}=r$ เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ต่อคาบซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาตราสารหนี้ต่อคาบ และ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่สมมูลกับ r นั่นคือ $1+r=e^{\delta}$ จากนิยามของ $K(1)$ จะได้ว่า

$$S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)\equiv S_u\text{ ; ความน่าจะเป็น }p\\ (1+d)S(0)\equiv S_d\text{ ; ความน่าจะเป็น }1-p\end{cases} \tag{1.1}$$

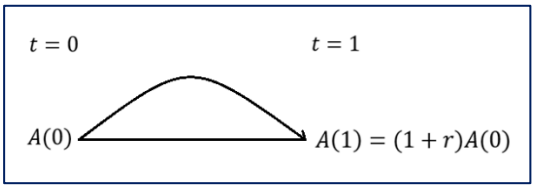
นั่นคือ $S(1)$ เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่แน่นอนตามความน่าจะเป็น p โดยที่การเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามารถแสดงได้ด้วยต้นไม้ ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 *ต้นไม้ราคาหุ้นที่เวลา* $t=0$ *และ* $t=1$

และ $$A(1) = (1+r)A(0) = e^{\delta} A(0) \qquad (1.2)$$

จะเห็นว่า $A(1)$ เป็นตัวแปรที่ทราบค่าแน่นอน (ตัวแปรสุ่มคงที่) โดยที่การเคลื่อนไหวของราคาตราสารหนี้สามารถแสดงได้ ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 *กระแสเงินสดของราคาตราสารหนี้ที่เวลา* $t=0$ *และ* $t=1$

หมายเหตุ 1) สำหรับในตำราเล่มนี้ เนื่องจากการพิมพ์สมการทางคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรม MathType ไม่รองรับภาษาไทย ดังนั้นในตำราเล่มนี้จะขออนุญาตใช้ข้อความ “probability” ในสมการแทนคำว่า “ด้วยความน่าจะเป็น”)

2) ในกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u ด้วยความน่าจะเป็น p จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\uparrow$ ในกรณีที่ราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา d ด้วยความน่าจะเป็น $1-p$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\downarrow$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้หุ้น A มีราคา $S(0)=28$ บาท จงหาราคา $S(1)$ เมื่อกำหนดให้ $K(1) =$

$$\begin{cases} 0.1; \text{ความน่าจะเป็น } 0.8 \\ -0.2; \text{ความน่าจะเป็น } 0.2 \end{cases}$$

วิธีทำ จากโจทย์ได้ $S(1) = \begin{cases} (1+0.1)28; \uparrow \\ (1-0.2)28; \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 30.8; \uparrow \\ 22.4; \downarrow \end{cases}$ □

บทนิยาม 1.2 *พอร์ตการลงทุน* (portfolio) หรือเรียกโดยย่อว่า *พอร์ต* คือ เวกเตอร์แสดงปริมาณสินทรัพย์แต่ละสินทรัพย์ของการลงทุนโดยจะเขียนแทนด้วย $Port$

สมมติให้ $Port = [x(t), y(t)] = [x, y]$ สำหรับเวลา $t = 0,1$ กำหนดให้

$V(t)$ แทน มูลค่าของพอร์ตการลงทุน ที่เวลา t

$x(t)$ แทนปริมาณหุ้น (หน่วย) ที่เวลา t

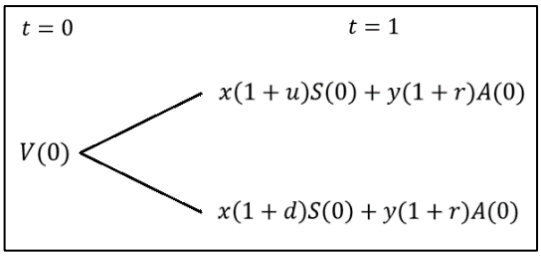
$y(t)$ แทนปริมาณตราสารหนี้ (หน่วย) ที่เวลา t

จะได้มูลค่าของพอร์ตการลงทุน คือ

$$V(t) = xS(t) + yA(t) \quad \text{สำหรับ} \quad t = 0,1 \tag{1.3}$$

นั่นคือ $V(0) = xS(0) + yA(0)$ และ $V(1) = xS(1) + yA(1) = \begin{cases} xS_u + yA(1) \; ; \uparrow \\ xS_d + yA(1) \; ; \downarrow \end{cases}$ (1.4)

เนื่องจาก $S(1)$ ดังนั้น $V(1)$ เป็นตัวแปรสุ่มด้วย โดยที่การเคลื่อนไหวของมูลค่าพอร์ตการลงทุนสามารถแสดงได้ด้วยต้นไม้ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 *ต้นไม้มูลค่าของพอร์ตการลงทุนที่เวลา* $t = 0$ *และ* $t = 1$

บทนิยาม 1.3 อัตราผลตอบแทน K_V ของพอร์ตการลงทุน $Port = [x, y]$ คือ อัตราส่วนของผลต่างของมูลค่าปัจจุบันกับมูลค่าอนาคตของพอร์ตการลงทุนต่อมูลค่าปัจจุบัน นั่นคือ

$$K_V = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} \tag{1.5}$$

จากบทนิยาม 1.3 และ สูตร (1.4) จะได้ว่า

$$K_V = \begin{cases} \dfrac{xuS(0) + yrA(0)}{xS(0) + yA(0)} \text{; ความน่าจะเป็น } p \\ \dfrac{xdS(0) + yrA(0)}{xS(0) + yA(0)} \text{; ความน่าจะเป็น } 1 - p \end{cases} \tag{1.6}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 ตราสารหนี้ฉบับหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 900 บาท และราคาในอีก 3 เดือนข้างหน้าเท่ากับ 1,000 บาท และหุ้นของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 30 บาทต่อหุ้น โดยที่ราคาในอีก 3 เดือนข้างหน้ามีโอกาสเท่ากับ 42 และ 27 บาทต่อหุ้น ด้วยความน่าจะเป็น 0.3 และ 0.7 ตามลำดับ ถ้านักลงทุนคนหนึ่งลงทุนซื้อทั้งตราสารหนี้และหุ้นของบริษัทนี้ ด้วยเงินลงทุน 100,000 บาท โดยแบ่งเงินซื้อตราสารหนี้และหุ้นอย่างละครึ่ง จงหามูลค่าอนาคตและอัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน

นี้ในอีก 3 เดือนข้างหน้า โดยสมมติว่าสามารถซื้อตราสารได้เป็นจำนวนจริงใด ๆ ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $A(0)=900$, $A(1)=1,000$, $S(0)=30$, $S(1)=\begin{cases}42\ ;\ p=0.3\\27\ ;\ 1-p=0.7\end{cases}$, $V(0)=100,000$ สมมติให้ x แทน ปริมาณหุ้น (หน่วย) และ y แทน ปริมาณตราสารหนี้ (หน่วย) จะได้ $x=50,000/30$ และ $y=50,000/900$ ดังนั้น มูลค่าของพอร์ตการลงทุนที่อนาคต

$$V(1)=xS(1)+yA(1)=\ (50,000/30)\left\{\begin{matrix}42\ ;\ \uparrow\\27\ ;\ \downarrow\end{matrix}\right.+(50,000/900)(1,000)=\begin{cases}125,555.56\ ;\ \uparrow\\100,555.56\ ;\ \downarrow\end{cases}$$

จากนิยามของอัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\frac{\left\{\begin{matrix}125,555.56\ ;\ \uparrow\\100,555.56\ ;\ \downarrow\end{matrix}\right.-100,000}{100,000}$$

นั่นคือ $K_V=\begin{cases}\dfrac{125,555.56-100,000}{100,000};\ \uparrow\\ \dfrac{100,555.56-100,000}{100,000};\ \downarrow\end{cases}=\begin{cases}0.2556\ ;\ \uparrow\\0.0056\ ;\ \downarrow\end{cases}$ □

ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงจากการลงทุนเป็นเครื่องมือที่ใช้วัดประสิทธิภาพของพอร์ตการลงทุนว่าให้ผลตอบแทนคาดหวังมากน้อยเพียงใดและมีความเสี่ยงมากน้อยเพียงใด ต่อไปจะนิยามค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงจากการลงทุนจากอัตราผลตอบแทน K_V ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 1.4 ค่าคาดหวัง (Expected Value) กำหนดให้ Ω เป็น ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) ซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม และให้ $X:\Omega\to\mathbb{R}$ เป็น ตัวแปรสุ่ม ที่กำหนดค่าจากผลลัพธ์แต่ละรายการ

ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนด้วย $E[X]$ หมายถึง “ค่าเฉลี่ย” ที่เราคาดว่าจะได้จากการสุ่มในระยะยาว และนิยามได้ดังนี้

กรณีตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)

$$E[X]=\sum_{x\in\mathcal{X}}x\cdot P(X=x) \tag{1.7}$$

โดยที่ $\mathcal{X}$ คือเซตของค่าที่ตัวแปรสุ่ม X สามารถรับได้ และ $P(X=x)$ คือความน่าจะเป็นที่ X มีค่าเท่ากับ x

กรณีตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx \tag{1.8}$$

โดยที่ $f_X(x)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function) ของตัวแปรสุ่ม X

บทนิยาม 1.5 ความแปรปรวน (variance) ของ X เขียนแทนด้วย $Var[X]$ นิยามโดย

$$Var[X]=E[X-E[X]]^2 \tag{1.9}$$

บทนิยาม 1.6 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ของ X เขียนแทนด้วย σ_X นิยามโดย

$$\sigma_X=\sqrt{Var[X]} \tag{1.10}$$

บทนิยาม 1.7 กำหนดให้ K_V เป็นอัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน นิยาม

1) ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนจากการลงทุน คือ $E[K_V]$

2) ความเสี่ยงจากการลงทุน คือ $\sigma_{K_V}=\sqrt{Var(K_V)}$

เมื่อ $E(X)$ และ $Var(X)$ เป็นค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1.8 กำหนดให้ $K(1)$ เป็นอัตราผลตอบแทนของหุ้น และ K_A เป็นอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ จะได้

1) $E[K(1)]=pu+(1-p)d$ และ $E[K_A]=r=e^{\delta}-1$

2) $\sigma_{K(1)}=\sqrt{(u-\mu)^2p+(d-\mu)^2(1-p)}$ เมื่อ $\mu=E(K(1))$ และ $\sigma_{K_A}=0$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจากนิยามของ $K(1)$ และ K_A □

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $A(0)=100$, $A(1)=110$, $S(0)=50$ และ $S(1)=\begin{cases}52 & ;\ p=0.8\\ 48 & ;\ 1-p=0.2\end{cases}$

จงคำนวณค่าของ $K(1), K_A, E[K(1)], E[K_A], \sigma_{K(1)}$ และ σ_{K_A}

วิธีทำ จากนิยาม $K(1)=\dfrac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}\dfrac{52-50}{50}=0.04 & ;\uparrow\\ \dfrac{48-50}{50}=-0.04 & ;\downarrow\end{cases}$

$$K_A=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{110-100}{100}=0.1=10\%$$

โดยนิยามค่าค่าหวัง จะได้

$E[K(1)]=0.8(0.04)+0.2(-0.04)=0.024$, $\quad E[K_A]=0.1$

$\sigma_{K(1)}=\sqrt{0.8(0.04-0.024)^2+0.2(-0.04-0.024)^2}=0.032$, $\quad \sigma_{K_A}=0$ □

ตัวอย่างที่ 1.4 จากตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ลงทุนซื้อหุ้น 20 หน่วย และตราสารหนี้ 10 หน่วย จงคำนวณค่า K_V, ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V]$ และความเสี่ยงจากการลงทุน σ_{K_V}

วิธีทำ จาก $V(t)=xS(t)+yA(t)$

จะได้ว่า $V(0)=20S(0)+10A(0)=20(50)+10(100)=2,000$

และ $V(1)=20S(1)+10A(1)=10(110)+20\left(\begin{cases}52 & ;\uparrow\\ 48 & ;\downarrow\end{cases}\right)=\begin{cases}1,040+1,100=2,140 & ;\uparrow\\ 960+1,100=2,060 & ;\downarrow\end{cases}$

จากนิยามของ

$$K_V=\frac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\begin{cases}\dfrac{2,140-2,000}{2,000}=0.07; & \uparrow\\ \dfrac{2,060-2,000}{2,000}=0.03; & \downarrow\end{cases}$$

ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V]=0.8(0.07)+0.2(0.03)=0.062$

ความเสี่ยงจากการลงทุน $\sigma_{K_V}=\sqrt{0.8(0.07-0.062)^2+0.2(0.03-0.062)^2}=0.016$ □

ตัวอย่างที่ 1.5 พิจารณาการลงทุนใน 3 โครงการดังนี้ โดยลงทุนในแต่ละโครงการด้วยเงินทุน 100,000 บาท เท่ากัน

<u>โครงการที่ 1</u> ลงทุนกับตราสารหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ยต่อคาบ เท่ากับ 10 % อย่างเดียว

<u>โครงการที่ 2</u> ลงทุนกับตราสารหุ้นที่มีอัตราผลตอบแทนต่อคาบ

$K(1)=\begin{cases}0.2; & p=0.7\\ -0.2; & 1-p=0.3\end{cases}$ อย่างเดียว

<u>โครงการที่ 3</u> แบ่งเงินทุน $50:50$ ลงทุนกับตราสารหนี้และหุ้นในโครงการที่ 1 และโครงการที่ 2

จงคำนวณค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงของแต่ละโครงการ

วิธีทำ โครงการที่ 1 เนื่องจากลงทุนกับตราสารหนี้ เพียงอย่างเดียว จะได้ $K_V = K_A = r = 0.1$

ดังนั้น ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V] = r = 0.1$ และ ความเสี่ยง $\sigma_{K_V} = \sigma_{K_A} = 0$

โครงการที่ 2 เนื่องจากลงทุนกับหุ้น เพียงอย่างเดียว จะได้ $K_V = K(1) = \begin{cases} 0.2 & ; \uparrow \\ -0.2 & ; \downarrow \end{cases}$

ดังนั้น ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V] = E[K(1)] = pu + (1-p)d$

$$= 0.7(0.2) + 0.3(-0.2) = 0.08$$

และ ความเสี่ยง $\sigma_{K_V} = \sigma_{K(1)} = \sqrt{(u-\mu)^2 p + (d-\mu)^2 (1-p)}$; เมื่อ $\mu = E(K_V)$

$$= \sqrt{(0.2-0.08)^2(0.7) + (-0.2-0.08)^2(0.3)} = 0.1833$$

โครงการที่ 3 ลงทุนในตราสารหนี้ 50,000 บาท ลงทุนในหุ้น 50,000 บาท

ให้ x แทนปริมาณหุ้น (หน่วย) และ y แทนปริมาณตราสารหนี้ (หน่วย)

จะได้ $x = \dfrac{50,000}{S(0)}$ และ $y = \dfrac{50,000}{A(0)}$ ทำให้ได้ $V(0) = 100,000$ และ

$$V(1) = xS(1) + yA(1) = \left(\frac{50,000}{S(0)}\right)\left\{\begin{matrix}(1+0.2)S(0) ; \uparrow \\ (1-0.2)S(0) ; \downarrow\end{matrix}\right\} + \left(\frac{50,000}{A(0)}\right)(1+0.1)A(0)$$

$$= \begin{cases} 50,000(1.2) + 50,000(1.1); \uparrow \\ 50,000(0.8) + 50,000(1.1); \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 115,000; \uparrow \\ 95,000 \ ; \downarrow \end{cases}$$

ผลที่ตามมา คือ $K_V = \dfrac{V(1) - V(0)}{V(0)} = \begin{cases} \dfrac{115,000 - 100,000}{100,000}; \uparrow \\ \dfrac{95,000 - 100,000}{100,000} \ ; \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 0.15 \ ; \uparrow \\ -0.05 \ ; \downarrow \end{cases}$

ดังนั้น ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V] = (0.7)(0.15) + (0.3)(-0.05) = 0.09$

และ ความเสี่ยง $\sigma_{K_V} = \sqrt{(0.15-0.09)^2(0.7) + (-0.05-0.09)^2(0.3)} = 0.0917$ □

จากตัวอย่างที่ 1.5 แสดงให้เห็นว่าการลงทุนในตราสารหนี้เป็นการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยงและค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนเท่ากับอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ การลงทุนในหุ้นเพียงอย่างเดียวมีโอกาสได้อัตราผลตอบแทนสูงถึง 20 % นั่นคือจากการลงทุนด้วยเงิน 100,000 บาท หากหุ้นขึ้นก็มีโอกาสได้รับเงินจากการลงทุนถึง 120,000 บาท ขณะที่โครงการที่ 1 จะได้รับ 110,000 บาท และโครงการที่ 3 จะได้รับ $50,000(1.1) + 50,000(1.2) = 115,000$ บาท เมื่อพิจารณาระดับความเสี่ยงจะเห็นว่าความเสี่ยงของโครงการที่ 2 สูงกว่าโครงการที่ 1 และ 3 การแบ่งเงิน

ลงทุนตามกลยุทธ์ในโครงการที่ 3 ช่วยลดความเสี่ยงได้และยังได้ผลตอบแทนสูงกว่า การลงทุนในตราสารหนี้เพียงอย่างเดียวอีกด้วย

สำหรับการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายเพื่อกำหนดราคาหรือประเมินราคาของตราสารอนุพันธ์ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไปนั้น ศึกษาภายใต้สมมติฐานที่กำหนดขึ้น ดังต่อไปนี้

สมมติฐาน 1.1(randomness) ราคาหุ้นในอนาคต $S(1)$ เป็นตัวแปรสุ่มและราคาตราสารหนี้ในอนาคต $A(1)$ ทราบค่าที่แน่นอน (ตัวแปรสุ่มคงที่)

สมมติฐาน 1.2 (positivity of prices) ราคา $A(t)$ และ $S(t)$ มีค่าเป็นบวกเสมอ สำหรับทุก ๆ $t = 0,1$

สมมติฐาน 1.3 (divisibility, liquidity and short selling) นักลงทุนสามารถถือครองจำนวนหุ้น x และ จำนวนตราสารหนี้ y โดยที่ x, y สามารถเป็นจำนวนจริงใด ๆ ได้ (divisibility)

หากจำนวนสินทรัพย์ มีเครื่องหมายเป็น
$(+)$ หมายถึง นักลงทุนเปิดสถานะซื้อ (long position) ซึ่งหมายถึงนักลงทุนซื้อ (buy) สินทรัพย์ก่อนที่เวลาปัจจุบัน หลังจากนั้นขาย (sell) ที่ราคาในอนาคต
$(-)$ หมายถึง นักลงทุนเปิดเปิดสถานะขาย (short position) ซึ่งหมายถึงนักลงทุนขายสินทรัพย์ก่อนที่เวลาปัจจุบัน หลังจากนั้นซื้อสินทรัพย์นั้นคืนที่ราคาในอนาคต

นักลงทุนสามารถสามารถซื้อ และขาย หุ้นและตราสารหนี้ที่ราคาตลาดได้ตามความต้องการไม่มีข้อจำกัดทางด้านปริมาณ (liquidity)
อนุญาตให้นักลงทุนสามารถยืมขายสินทรัพย์ได้ (short selling) เช่น นักลงทุนยืมหุ้นมาจำนวนหนึ่งแล้วขายหุ้นนั้นทันทีที่ราคาปัจจุบัน ($t = 0$) ในที่นี้ คือ $S(0)$ การทำเช่นนี้จะเรียกว่านักลงทุนเปิดสถานะขาย (short position) จะแทนปริมาณหุ้นในพอร์ตการลงทุนด้วยจำนวนที่เป็นลบ และหากต้องการจะปิดสถานะขาย ทำได้โดยซื้อหุ้นคืนตามจำนวนที่ยืมมาที่ราคาอนาคต $S(1)$ ในทำนองเดียวกัน สำหรับการยืมขายตราสารหนี้ทำได้โดยยืมตราสารหนี้และขายทันที่ราคาปัจจุบัน และซื้อตราสารหนี้คืนในอนาคตเท่ากับจำนวนที่ยืมมาที่ราคาในอนาคต เนื่องจากอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราผลตอบแทนของตราหนี้เป็นค่าที่ทราบแน่นอน ดังนั้นการยืมขายกับตราสารหนี้

จึงเปรียบเสมือนการยืมเงินที่ปัจจุบันและคืนในอนาคต และต้องคืนเงินต้นรวมดอกเบี้ยที่อัตราเท่ากับอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้นั้น

สมมติฐานที่ 1.4 (solvency) มูลค่าของพอร์ตการลงทุนจะต้องไม่เป็นลบ นั่นคือ $V(t) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ $t = 0,1$

สมมติฐานที่ 1.5 (no-arbitrage principle : NAP) สำหรับพอร์ตการลงทุน $port = [x, y]$ใด ๆ ถ้า $V(0) = 0$ แล้ว $V(1) = 0$

เรียก สมมติฐานที่ 1.5 ว่า *หลักการปราศจากการค้ากำไร* (no-arbitrage principle) ซึ่งหมายความว่า ไม่มีการลงทุนใดซึ่งที่ได้ผลตอบแทนโดยปราศจากการลงทุน นั่นคือจะไม่เกิดเหตุการณ์ที่นักลงทุนได้ผลกำไรโดยปราศจากการลงทุน

สมมติฐานที่ 1.6 (discrete unit prices) ราคาหุ้นในอนาคต $S(1)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนจำกัด

ในความเป็นจริงการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสำหรับการเสนอซื้อเสนอขายแต่ละครั้งต้องเป็นไปตามช่วงราคาที่กำหนดโดยขึ้นอยู่กับระดับราคาของแต่ละหุ้นและราคาหุ้นของแต่ละบริษัทจะถูกกำหนดราคาขอบเขตบน (ราคาเพดาน) และราคาขอบเขตล่าง (ราคาพื้น) นั่นคือราคาหุ้นในอนาคตสอดคล้องกับสมมติฐานที่ 1.6 นั่นเอง โดยระดับราคาของแต่ละหุ้นกำหนดดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 1.1 *ระดับราคาของหุ้นในตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทยข้อมูลจาก SETTRADE ปี พ.ศ. 2552*

ระดับราคา	ช่วงราคา
ต่ำกว่า 2 บาท	0.01 บาท
ตั้งแต่ 2 บาท แต่ต่ำกว่า 5 บาท	0.02 บาท
ตั้งแต่ 5 บาท แต่ต่ำกว่า 10 บาท	0.05 บาท
ตั้งแต่ 10 บาท แต่ต่ำกว่า 25 บาท	0.10 บาท
ตั้งแต่ 25 บาท แต่ต่ำกว่า 100 บาท	0.25 บาท
ตั้งแต่ 100 บาท แต่ต่ำกว่า 200 บาท	0.50 บาท
ตั้งแต่ 200 บาท แต่ต่ำกว่า 400 บาท	1.00 บาท
ตั้งแต่ 400 บาทขึ้นไป	2.00 บาท

จากตาราง 1.1 สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้น a ราคาอยู่ที่ 2.8 บาท และมีราคาพื้น 2 บาท และราคาเพดาน 3.6 บาท ดังนั้นราคาที่เป็นไปได้ในอนาคต คือ 2.00,2.02,...,2.82, 2.84, 2.86,... ,3.58, 3.60 ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจำกัด

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า $S(0)=A(0)$ แล้ว $d<r<u$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $S(0)=A(0)$

จะแสดงว่า $d<r<u$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $r\le d$ หรือ $r\ge u$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $r\le d$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมตราสารหนี้มาขาย 1 หน่วย ได้รับเงิน $A(0)$ บาท (เทียบได้กับการยืมเงิน $A(0)$)
2) ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท

ดังนั้น $V(0)=A(0)-S(0)=0$ $(\because S(0)=A(0))$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายหุ้น 1 หน่วย ได้รับเงิน $S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)\,;\uparrow\\(1+d)S(0);\downarrow\end{cases}$ บาท
2) ซื้อตราสารหนี้คืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $A(1)=(1+r)A(0)$ บาท

จะได้ $V(1)=S(1)-A(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)-(1+r)A(0)\,;\uparrow\\(1+d)S(0)-(1+r)A(0)\,;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}(u-r)S(0)\,;\uparrow\\(d-r)S(0)\,;\downarrow\end{cases}$

เพราะว่า $r\le d$ ดังนั้น $(d-r)S(0)\ge 0$ และ $(u-r)S(0)>0$

ส่งผลให้ $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร (NAP)

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $r\ge u$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย ได้รับเงิน $S(0)$ บาท
2) ซื้อตราสารหนี้ 1 หน่วย จ่ายเงิน $A(0)$ บาท

ดังนั้น $V(0)=A(0)-S(0)=0$ $(\because S(0)=A(0))$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายตราสารหนี้ 1 หน่วยได้รับเงิน $A(1)=(1+r)A(0)$ บาท
2) ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)\,;\uparrow\\(1+d)S(0);\downarrow\end{cases}$ บาท

จะได้ $V(1) = A(1) - S(1) = \begin{cases} (1+r)A(0) - (1+u)S(0); \uparrow \\ (1+r)A(0) - (1+d)S(0); \downarrow \end{cases} = \begin{cases} (r-u)S(0); \uparrow \\ (r-d)S(0); \downarrow \end{cases}$

เพราะว่า $r \geq u$ ดังนั้น $(r-u)S(0) \geq 0$ และ $(r-d)S(0) > 0$

ส่งผลให้ $V(1) > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้ง 2 กรณีจึงทำให้สรุปได้ว่า $d < r < u$ □

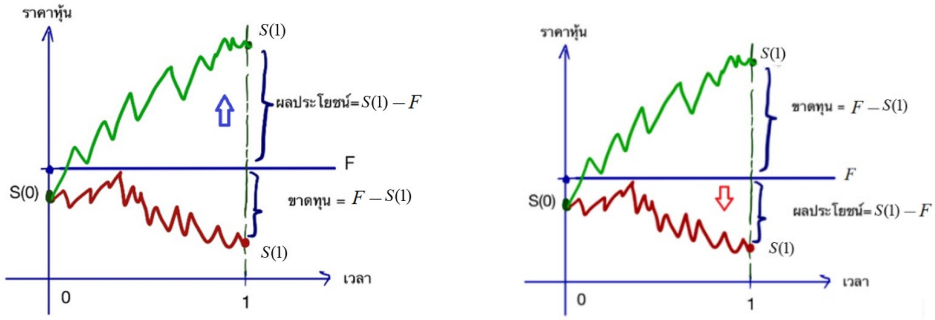
ความหมายของทฤษฎีบท 1.9 คือ ถ้าหากนักลงทุนลงทุนในตราสารหนี้และหุ้นด้วยจำนวนเงินที่เท่ากันแล้วอัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้จะต้องอยู่ระหว่างผลตอบแทนที่ต่ำที่สุดและสูงที่สุดของการลงทุนในหุ้นเท่านั้น มิฉะนั้นแล้วหากผลตอบแทนจากการลงทุนในตราสารหนี้ต่ำกว่าผลตอบแทนที่ต่ำที่สุดของหุ้นหรือสูงกว่าผลตอบแทนที่มากที่สุดของหุ้น จะก่อให้เกิดการทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยงคือเกิดการทำอาบิทราจ โดยหาก $r \leq d < u$ นั่นหมายถึงว่าผลตอบแทนของตราสารหนี้ต่ำกว่าผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้น นักลงทุนจะทำอาบิทราจโดยโยกเงินจากตราสารหนี้ (ยืมเงิน) และนำเงินไปลงทุนในหุ้น และหาก $d < u \leq r$ นั่นหมายถึงว่า ผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้นต่ำกว่าการลงทุนในตราสารหนี้ นักลงทุนจะทำอาบิทราจโดยโยกเงินจากหุ้น (ยืมหุ้นมาขาย) และนำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้ นอกจากนี้หากกำหนดให้ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่องที่สมนัยกับ r $(1+r = e^{\delta})$ นั่นคือ $\delta = \ln(1+r)$ จะได้ว่า $\ln(1+d) < \delta < \ln(1+u)$

1.3 การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด

สัญญาฟอร์เวิร์ดหรือสัญญาซื้อขายล่วงหน้า คือสัญญาที่แสดงข้อตกลงในการซื้อขายสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (สินทรัพย์อ้างอิง) ในอนาคต ตามเวลาส่งมอบ ที่ราคาตกลง (F) ที่ระบุไว้ในปัจจุบันซึ่งเรียกว่า ***ราคาฟอร์เวิร์ด*** (forward price) นักลงทุนที่ทำสัญญาเพื่อซื้อสินทรัพย์อ้างอิง (Long forward agreement) จะเรียกว่า ***เปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ด*** (long forward position) ส่วนนักลงทุนที่ทำสัญญาเพื่อขายสินทรัพย์อ้างอิง (Short forward agreement) จะเรียกว่า ***เปิดสถานะชอร์ตฟอร์เวิร์ด*** (short forward position) โดยจะไม่มีการจ่ายใด ๆ ในการทำสัญญาฟอร์เวิร์ด

กำหนดให้ $A(t)$ และ $S(t)$ เป็นราคาของตราสารหนี้และหุ้นที่เวลา $t=0,1$ ตามลำดับ สมมติว่านักลงทุนทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อซื้อหุ้น (เปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ด) ที่ราคาฟอร์เวิร์ด F โดยนักลงทุนจะได้ผลประโยชน์ (กำไร) หากราคาหุ้นที่อนาคตเคลื่อนที่สูงกว่า F และจะสูญเสียประโยชน์ (ขาดทุน) หากราคาหุ้นที่อนาคตเคลื่อนที่ต่ำกว่าราคา F หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง หากราคาหุ้นขึ้นสูงกว่า F นักลงทุนจะสามารถซื้อหุ้นได้ในราคาที่ถูกกว่า คือ ซื้อได้ที่ราคา F และถ้านักลงทุนขายหุ้นนั้นทันทีที่ราคาตลาด ก็จะได้กำไร $S(1)-F$ ในทางตรงกันข้ามหากราคาหุ้นเคลื่อนที่ลงต่ำกว่าราคา F นักลงทุนก็จะประสบกับการขาดทุนเนื่องจากต้องซื้อหุ้นที่ราคา F ซึ่งแพงกว่าราคาหุ้นที่ราคาตลาดในขณะนั้น และขาดทุนเป็นจำนวน $F-S(1)$

สำหรับในที่นี้จะเรียก $\text{POF} \equiv S(1)-F$ ว่า ***ผลประโยชน์*** ของฟอร์เวิร์ด (payoff of forward) โดยทั่วไปสำหรับการถือลองฟอร์เวิร์ด จะได้ผลประโยชน์เมื่อ $\text{POF}>0$ และจะเสียผลประโยชน์เมื่อ $\text{POF}<0$ และสำหรับการถือชอร์ตฟอร์เวิร์ด จะมีลักษณะตรงกันข้ามกับการถือลองฟอร์เวิร์ด กล่าวคือ ผู้ถือสัญญาจะได้ผลประโยชน์เมื่อราคาหุ้นในอนาคตเคลื่อนที่ลงต่ำกว่าราคา F เพราะว่าผู้ถือสามารถขายหุ้นได้ในราคาที่สูงกว่าราคาตลาดในขณะนั้น แต่ถ้าราคาหุ้นในอนาคตเคลื่อนที่ขึ้นสูงกว่าราคา F นั่นคือ การถือชอร์ตฟอร์เวิร์ด จะได้ผลประโยชน์เมื่อ $\text{POF}<0$ และจะเสียผลประโยชน์เมื่อ $\text{POF}>0$



(a) *สัญญาซื้อล่วงหน้า* (b) *สัญญาขายล่วงหน้า*

รูปที่ 1.5 *ผลประโยชน์ของสัญญาฟอร์เวิร์ด*

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ในพอร์ตการลงทุนจะมีแค่เพียงตราสารหุ้นกับตราสารหนี้เท่านั้น ในหัวข้อนี้จะเพิ่มสัญญาฟอร์เวิร์ดซึ่งเป็นตราสารอนุพันธ์ประเภทหนึ่งลงในพอร์ตด้วย โดยให้ z เป็นจำนวนสัญญาฟอร์เวิร์ด ดังนั้นมูลค่าของพอร์ต $V(t)$ สำหรับ $t=0,1$ จะเป็นดังนี้

ที่เวลา $t=0$ (วันทำสัญญา) เนื่องจากไม่มีค่าใช้จ่ายในการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดที่ปัจจุบัน ดังนั้น

$$V(0)=xS(0)+yA(0)+z\cdot 0 \tag{1.11}$$

และที่เวลา $t=1$ (วันส่งมอบ)

$$V(1)=xS(1)+yA(1)+z\big(S(1)-F\big) \tag{1.12}$$

ปัญหาที่น่าสนใจ คือ จะกำหนดราคาฟอร์เวิร์ดอย่างไรจึงจะไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร (no arbitrage) นั่นคือ จะกำหนดราคา F อย่างไรให้สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร (NAP) เพื่อความเข้าใจปัญหาดังกล่าวขอให้ศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.6 สมมติให้ $A(0)=100$, $A(1)=110$ และ $S(0)=40$ โดยไม่มีค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ในการส่งมอบสินค้า จงตรวจสอบว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการค้ากำไร ถ้าราคาฟอร์เวิร์ด ณ วันส่งมอบ ($t=1$) เท่ากับ 42 บาท พร้อมทั้งหาราคาฟอร์เวิร์ดที่ควรจะเป็นที่ไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร

วิธีทำ ทดลองจำลองพอร์ตการลงทุนโดยการยืมหุ้นมาขายโดยสมมติยืมหุ้นเริ่มต้น 0.1, 0.2, 0.3,... หน่วย และนำเงินทั้งหมดที่ได้จากการขายหุ้นไปลงทุนกับตราสารหนี้ ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 1.2 *การจำลองพอร์ตการลงทุนเพื่อหาการลงทุนที่ได้กำไรโดยปราศจากความเสี่ยง*

ยืมหุ้น x หุ้น	รับ $xS(0)$ บาท	ลงทุน $yA(0)$ บาท	$V(0)$	รับ $yA(1)$ บาท	จ่ายเงินซื้อหุ้นคืนที่ราคา F	$V(1)$
0.1	4	4	0	4.4	4.2	0.2
0.2	8	8	0	8.8	8.4	0.4
0.3	12	12	0	13.2	12.6	0.6
0.4	16	16	0	17.6	16.8	0.8
0.5	20	20	0	22	21	1
0.6	24	24	0	26.4	25.2	1.2
0.7	28	28	0	30.8	29.4	1.4
0.8	32	32	0	35.2	33.6	1.6
0.9	36	36	0	39.6	37.8	1.8
1	40	40	0	44	42	2

จากตารางตัวอย่างธุรกรรมที่ทำให้เกิดการค้ากำไร เมื่อ $F=42$ บาท เช่น

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน 40 บาท
2) ซื้อตราสารหนี้ 0.4 หน่วย จ่ายเงิน $0.4(100)=40$ บาท
3) เปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ด 1 สัญญา เพื่อซื้อหุ้น 1 หน่วย ที่ราคา F ณ วันส่งมอบ $t=1$ (ไม่มีค่าใช้จ่ายในการทำสัญญา)

$\therefore V(0)=$ รับ − จ่าย $=40-40=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายตราสารหนี้ 0.4 หน่วย รับเงิน $0.4(110)=44$ บาท (เทียบได้กับการยืมเงิน 44 บาท โดยมีการคิดดอกเบี้ย 10%)
2) ปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ด โดยซื้อหุ้น 1 หน่วย ที่ราคา $F=42$ จ่ายเงิน 42 บาท
3) คืนหุ้น 1 หน่วย

$\therefore V(1)=$ รับ − จ่าย $=44-42=2$

จะเห็นว่ายังมีเงินคงเหลือในพอร์ต เท่ากับ 44-42=2 บาท ซึ่งจะเป็นกำไรของผู้ค้ากำไร ถ้าพิจารณามูลค่าของพอร์ตที่เวลาต่าง ๆ จะได้ว่า $V(0)=0$ และ $V(1)=2$ นั่นคือการกำหนดราคา $F=42$ ไม่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรสำหรับกรณีนี้แสดงว่าราคาฟอร์เวิร์ดที่กำหนดต่ำเกินไป ดังนั้นราคาฟอร์เวิร์ดจะถูกปรับให้เพิ่มสูงขึ้น แต่หากปรับสูงขึ้นเกิน 44 บาท ก็จะเกิดการค้ากำไรอีกเช่นกัน □

ตัวอย่างที่ 1.7 สมมติให้ $A(0)=100$, $A(1)=110$ และ $S(0)=40$ โดยไม่มีค่าใช้จ่ายอื่น ๆ ในการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดและการส่งมอบสินค้า จงตรวจสอบว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการค้ากำไร ถ้ากำหนดราคาฟอร์เวิร์ด ณ วันส่งมอบ ($t=1$) เท่ากับ 45 บาท พร้อมทั้งหาราคาฟอร์เวิร์ดที่ควรจะเป็นที่ไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร

วิธีทำ จำลองพอร์ตการลงทุนได้ในทำนองเดียวกับตารางที่ 1.2 โดยการยืมตราสารหนี้มาขาย (เทียบเท่ากับการยืมเงิน) และนำเงินทั้งหมดที่ได้ไปซื้อหุ้น ตัวอย่างการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง อาจทำได้โดย

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมตราสารหนี้มาขาย 0.4 หน่วย รับเงิน 40 บาท (เทียบเท่ากับการยืมเงิน 40 บาท)
2) ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน 40 บาท

3) เปิดสถาะชอร์ตฟอร์เวิร์ด 1 สัญญาเพื่อขายหุ้น 1 หน่วยที่ราคา $F=45$ วันส่งมอบ $t=1$ (ไม่มีค่าใช้จ่ายในการทำสัญญา)

$\therefore\ V(0)=$ รับ − จ่าย $=40-40=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ปิดสถานะชอร์ตฟอร์เวิร์ด โดยขายหุ้น 1 หน่วย ที่ราคา $F=45$ รับเงิน 45 บาท
2) ซื้อและคืนตราสารหนี้ 0.4 หน่วย จ่าย 0.4(110)=44 บาท

$\therefore\ V(1)=$ รับ − จ่าย $=45-44=1$

จะเห็นว่าการทำธุรกรรมดังกล่าว จะได้กำไรแน่นอนเท่ากับ 45-44=1 บาท ถ้าพิจารณามูลค่าของพอร์ตที่เวลาต่าง ๆ จะได้ว่า $V(0)=0$ และ $V(1)=1$ นั่นคือการกำหนดราคา $F=45$ ไม่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรสำหรับกรณีนี้ราคาฟอร์เวิร์ดที่กำหนดสูงเกินไป ดังนั้นราคาฟอร์เวิร์ดจะถูกปรับให้ลดต่ำลง แต่หากถูกปรับต่ำเกิน 44 บาท ก็จะเกิดการค้ากำไรอีกเช่นเดิม นั่นแสดงว่า ราคาฟอร์เวิร์ดจะถูกปรับให้เข้าสู่ราคาที่สมดุล คือ 44 บาท หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ ราคาฟอร์เวิร์ด $F=44$ บาท จะเป็นราคาที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ซึ่งจะทำให้ไม่เกิดการค้ากำไร □

จากตัวอย่างที่ 1.6 และตัวอย่างที่ 1.7 ทำให้ทราบแนวทางในการกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด ในที่นี้ต้องการหาราคาฟอร์เวิร์ดภายใต้สมมติฐาน 1.1-1.6) โดยสมมติว่าในการส่งมอบสินค้า (หุ้น) ไม่มีค่าใช้จ่ายใด ๆ และหุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ถ้าเป็นสินค้าหรือสินทรัพย์อ้างอิงอื่น ๆ อาจจะมีค่าใช้จ่ายเกี่ยวข้องกับค่าขนส่ง ค่าจัดเก็บ อัตราแลกเปลี่ยนของกระแสเงินสด เป็นต้น ราคาฟอร์เวิร์ดจะช่วยยืนยันได้ว่า มูลค่าปัจจุบันของเงินที่ผู้ซื้อสินค้าอ้างอิงจ่ายนั้น ควรเท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของสินค้าอ้างอิงภายใต้อัตราดอกเบี้ยที่เกิดจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง ดังนั้นถ้ากำหนดให้ r เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ และ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องหรือกำลังดอกเบี้ยของดอกเบี้ย (force of interest) ของตราสารหนี้ที่สมมูลกับอัตราดอกเบี้ยทบต้น r จะได้ว่า $F(1+r)^{-1}=S(0)$ นั่นคือ

$$F=(1+r)S(0)=e^{\delta}S(0) \tag{1.13}$$

ทฤษฎีบท 1.10 กำหนดให้ F เป็นราคาของฟอร์เวิร์ด จะได้ว่า $F=(1+r)S(0)=e^{\delta}S(0)$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง สมมติว่า $F \neq (1+r)S(0)$

นั่นคือ $F < (1+r)S(0)$ หรือ $F > (1+r)S(0)$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $F < (1+r)S(0)$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน $S(0)$ บาท
2) นำเงินที่ได้ทั้งหมดไปลงทุนกับตราสารหนี้ จ่าย $S(0)$ บาท
3) เปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ด 1 สัญญาเพื่อซื้อหุ้น 1 หน่วยที่ราคา F ณ วันส่งมอบ $t=1$

$\therefore V(0) =$ รับ − จ่าย $= S(0) - S(0) = 0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายตราสารหนี้ทั้งหมด ได้รับเงิน $(1+r)S(0)$ บาท
2) ปิดสถานะลองฟอร์เวิร์ดโดยซื้อหุ้น 1 หน่วยซื้อหุ้นที่ราคา F จ่ายเงิน F บาท
3) คืนหุ้น 1 หน่วย

จะได้ $V(1) =$ รับ - จ่าย $= (1+r)S(0) - F > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $F > (1+r)S(0)$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมเงิน $S(0)$ บาท
2) ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
3) ทำชอร์ตฟอร์เวิร์ด 1 สัญญาเพื่อขายหุ้น 1 หน่วยที่ราคา F ณ วันส่งมอบ $t=1$

จะได้ $V(0) =$ รับ-จ่าย $= S(0) - S(0) = 0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ปิดสถานะชอร์ตฟอร์เวิร์ดโดยขายหุ้น 1 หน่วยที่ราคาฟอร์เวิร์ด F รับเงิน F บาท
2) คืนเงินที่ยืมมา จ่าย $(1+r)S(0)$ บาท

จะได้ $V(1) =$ รับ-จ่าย $= F - (1+r)S(0) > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้ง 2 กรณี จึงสรุปได้ว่า $F = (1+r)S(0)$ □

<u>หมายเหตุ</u> การยืมตราสารหนี้มาขาย เทียบเท่ากับ การยืมเงินที่คิดดอกเบี้ยเท่ากับดอกเบี้ยของตราสารหนี้ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องของตราสารหนี้ที่สมมูลกับ r

บทแทรก 1.11 กำหนดให้ F เป็นราคาของฟอร์เวิร์ดของหุ้นที่มีอายุสัญญา T และมีการจ่ายเงินปันผลที่เวลา t, $0<t\le T$ ด้วยเงินจำนวน div บาท จะได้ว่า

$$F=\left[S(0)-\text{div}_0\right]e^{\delta T}=\left[S(0)-\text{div}\cdot e^{-\delta t}\right]e^{\delta T}=S(0)e^{\delta T}-\text{div}\cdot e^{\delta(T-t)}$$
$$=(1+r)^T S(0)-(1+r)^{T-t}\,\text{div} \qquad (1.14)$$

เมื่อ $\text{div}_0=e^{-\delta t}\text{div}$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผลที่เวลา t ใด ๆ ด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div} จะได้

$$F=\left[S(0)-\text{div}_0\right]e^{\delta T}=\left[S(0)-S(0)(1-e^{-\delta_{div}t})\right]e^{\delta T}=S(0)e^{\delta T-\delta_{div}t} \qquad (1.15)$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับ ทฤษฎีบท 1.6 โดยพิจารณาราคาปัจจุบันของหุ้นเป็นราคาส่วนลด $S(0)-\text{div}_0$ โดยมีส่วนลดเป็น div_0 □

ตัวอย่างที่ 1.8 (การประยุกต์ใช้ราคาฟอร์เวิร์ดกรณีหุ้นมีการจ่ายปันผล) สมมติบริษัท A ต้องการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อซื้อหุ้นของบริษัท B จำนวน 1 หน่วย โดยจะรับมอบในอีก 6 เดือนข้างหน้า (0.5 ปี) ซึ่งหุ้นจะมีการจ่ายเงินปันผลจำนวน 3 บาท ณ เวลา 3 เดือนข้างหน้า (0.25 ปี) โดยมีข้อมูลที่กำหนด ดังนี้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)=120$ บาท, เงินปันผล $\text{div}=3$ บาท ที่เวลา $t=0.25$ ระยะเวลาของสัญญาฟอร์เวิร์ด $T=0.5$ ปี และ อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $\delta=5\%=0.05$ จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ด F

วิธีทำ จากสูตร $F=e^{\delta T}\left[S(0)-\text{div}\cdot e^{-\delta t}\right]$

จะได้ $F=e^{0.05\cdot 0.5}\left[120-3\cdot e^{-0.05\cdot 0.25}\right]=e^{0.025}\left[120-3\cdot e^{-0.0125}\right]\approx 120.12$ บาท

จะเห็นว่า บริษัท A สามารถใช้ฟอร์เวิร์ดล็อกราคาหุ้นไว้ที่120.12 บาท ซึ่งคำนึงถึงการจ่ายปันผลแล้ว โดยหากราคาหุ้นในอีก 6 เดือนข้างหน้าเกินกว่า 120.12 บาท บริษัท A จะได้ประโยชน์จากการทำฟอร์เวิร์ด ในกรณีนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ฟอร์เวิร์ดในการบริหารความเสี่ยงจากราคาหุ้นที่มีการจ่ายปันผลระหว่างทาง □

1.4 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ

สัญญาฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ หรือ สัญญาซื้อขายเงินตราต่างประเทศล่วงหน้า (forward agreement) เป็นสัญญาซื้อหรือขายเงินตราต่างประเทศในอนาคตด้วยอัตราแลกเปลี่ยนที่กำหนดไว้ล่วงหน้าตั้งแต่วันนี้ (lock rate) เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนที่มีความผัน

ผวน อัตราแลกเปลี่ยนที่กำหนดไว้ล่วงหน้าดังกล่าว เรียกว่าอัตราฟอร์เวิร์ด (forward rate) สามารถใช้สัญญาฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศเป็นเครื่องมือบริหารความเสี่ยงจากความผันของอัตราแลกเปลี่ยนได้เช่นเดียวกับการใช้ฟอร์เวิร์ดในการบริหารความเสี่ยงราคาหุ้น ซึ่งโดยปกติธนาคารแห่งประเทศไทยจะทำหน้าที่ควบคุมดูแลไม่ให้ค่าเงินแข็งค่าและอ่อนค่าเร็วเกินไปซึ่งอาจจะส่งผลกระทบโดยรวมต่อระบบเศรษฐกิจได้ และสำหรับธุรกิจและผู้ประกอบการการใช้สัญญาฟอร์เวิร์ดเป็นเครื่องมือบริหารความเสี่ยงจากการแข็งค่าและอ่อนค่าของค่าเงินบาทจะมีลักษณะคล้ายกับการทำประกันราคาอัตราแลกเปลี่ยน

1.4.1 การแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาท

หากกล่าวถึงการแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาทให้ถูกต้องนั้น จำเป็นต้องระบุว่าการแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาทนั้นเมื่อเทียบค่าของเงินบาทกับเงินสกุลใด เช่นการแข็งค่าขึ้นของเงินบาทเมื่อเทียบกับเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ เป็นต้น

1) เงินบาทแข็งค่าเมื่อเทียบกับเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ หมายถึง การใช้เงินบาทน้อยลงในการแลกเปลี่ยนเป็นเงินดอลลาร์ ตัวอย่างเช่น ปัจจุบันอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์เท่ากับ 32 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ อีก 3 เดือนข้างหน้าอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์มีแนวโน้มจะอยู่ที่ 28 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ ปรากฏการณ์ในลักษณะนี้เรียกว่า *“ค่าเงินบาทมีแนวโน้มแข็งค่าขึ้น”* เพื่อความเข้าใจง่ายอาจพิจารณาเงินบาทเป็นสินค้าที่มีราคาซื้อขายในเงินสกุลดอลลาร์ก็ได้ ดังนั้น อัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์เท่ากับ 32 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ จะมีความหมายเช่นเดียวกับ *“เงินบาทจำนวน 1 บาท มีราคา* $1/32 = 0.03125$ *ดอลลาร์”* และ อัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์เท่ากับ 28 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ จะมีความหมายเช่นเดียวกับ “เงินบาทจำนวน 1 บาท มีราคา $1/28 = 0.03571$ ดอลลาร์” ก็จะเห็นว่าการที่ค่าเงินบาทแข็งค่าขึ้น ก็จะมีความหมายเช่นเดียวกับเงินบาทมีราคาแพงขึ้นนั่นเอง



รูปที่ 1.6 *เงินบาทแข็งค่าขึ้นเมื่อเทียบกับเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ*



(a) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนบาท-ดอลลาร์ *(b) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนดอลลาร์-บาท*

รูปที่ 1.7 *อัตราแลกเปลี่ยนระหว่างบาทและดอลลาร์สหรัฐในช่วงที่เงินบาทแข็งค่าขึ้น*

จากกราฟในรูป 1.7 (a) จะเห็นว่ากราฟของอัตราแลกเปลี่ยน บาท-ดอลลาร์ (1 บาท เท่ากับ x ดอลล่าร์) ในช่วงที่เงินบาทมีการแข็งค่าขึ้น กราฟจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มขึ้น ส่วนกราฟในรูป 1.7 (b) กราฟของอัตราแลกเปลี่ยน ดอลลาร์-บาท (1 ดอลลาร์ เท่ากับ x บาท) กราฟจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มลง

การที่เงินบาทมีแนวโน้มแข็งค่าขึ้นเมื่อเทียบกับเงินสกุลสหรัฐก็จะมีทั้งผู้ที่ได้ประโยชน์และเสียประโยชน์

- *ผู้ที่ได้ประโยชน์* ได้แก่ ผู้นำเข้าสินค้า (ซื้อในสกุลดอลลาร์ขายเป็นสกุลบาท) ประชาชนซื้อสินค้าต่างประเทศได้ถูกลง ลูกหนี้ที่กู้เงินต่างประเทศ (รับรายได้เป็นเงินบาทจ่ายหนี้คืนเป็นดอลลาร์) ลูกจ้างที่ทำงานในไทยส่งเงินกลับไปยังต่างประเทศ (รับค่าจ้างเป็นเงินบาทส่งเงินกลับบ้านเกิดเป็นเงินดอลลาร์) และนักลงทุนต่างประเทศที่โยกเงินมาลงทุนในประเทศไทยและนำเงินออกไปเป็นเงินดอลลาร์ เป็นต้น

- *<u>ผู้ที่เสียประโยชน์</u>* ก็มีลักษณะตรงข้ามกัน คือ ผู้ที่ดำเนินกิจกรรมหรือธุรกิจโดยรับเงินเป็นสกุลดอลลาร์แต่ต้องแลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นเงินบาท เช่น ผู้ส่งออก ลูกจ้างที่ทำงานต่างประเทศและส่งเงินกลับประเทศไทย ผู้ประกอบการหรือลูกจ้างที่รับรายได้เป็นเงินในสกุลดอลลาร์และต้องแลกเปลี่ยนเป็นเงินบาท เป็นต้น

2) เงินบาทอ่อนค่าเมื่อเทียบกับเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ หมายถึง การใช้เงินบาทมากขึ้นในการแลกเปลี่ยนเป็นเงินดอลลาร์ ตัวอย่างเช่น ปัจจุบันอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์เท่ากับ 28 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ อีก 3 เดือนข้างหน้าอัตราแลกเปลี่ยนเงินบาทต่อเงินดอลลาร์มีแนวโน้มจะอยู่ที่ 32 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ ปรากฏการณ์ในลักษณะนี้เรียกว่า “ค่าเงินบาทมีแนวโน้มอ่อนค่าลง” อีกความหมายหนึ่งคือ เงินบาทมีราคาถูกลง (ราคาในสกุลดอลลาร์) นั่นคือ ในปัจจุบัน “1 บาท มีราคาเท่ากับ $1/28 = 0.03571$ ดอลลาร์” แต่อีก 3 เดือนข้างหน้า “1 บาท มีราคาเท่ากับ $1/32 = 0.03125$ ดอลลาร์” ก็จะเห็นว่าการที่ค่าเงินบาทอ่อนค่าลง ก็จะมีความหมายเช่นเดียวกับเงินบาทมีราคาถูกลงนั่นเอง



รูปที่ 1.8 *เงินบาทอ่อนค่าลงเมื่อเทียบกับเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ*



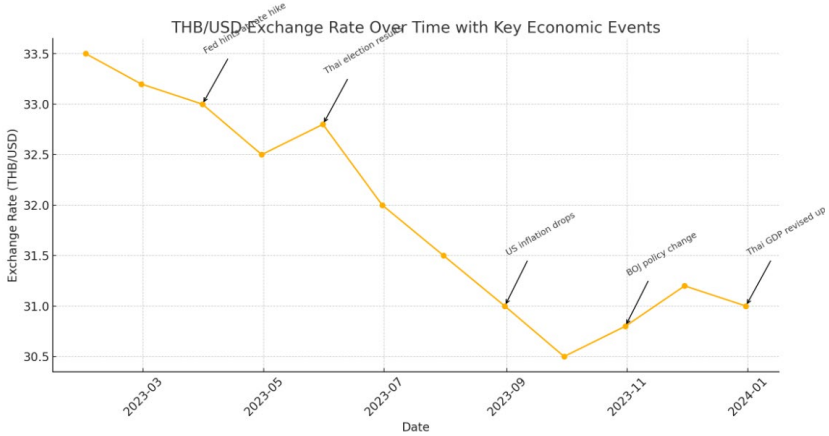
(a) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนบาท-ดอลลาร์ *(b) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนดอลลาร์-บาท*

รูปที่ 1.9 *อัตราแลกเปลี่ยนระหว่างบาทและดอลลาร์สหรัฐในช่วงที่เงินบาทอ่อนค่าลง*

จากกราฟในรูป 1.9 (a) จะเห็นว่ากราฟของอัตราแลกเปลี่ยน บาท-ดอลลาร์ (1 บาท เท่ากับ x ดอลลาร์) ในช่วงที่เงินบาทมีการอ่อนค่าลง กราฟจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มลง ส่วนกราฟในรูป 1.9 (b) กราฟของอัตราแลกเปลี่ยน ดอลลาร์-บาท (1 ดอลลาร์ เท่ากับ x บาท) กราฟจะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงแนวโน้มขึ้น

การที่เงินบาทมีแนวโน้มอ่อนค่าลงมีทั้งผู้ที่ได้ประโยชน์และเสียประโยชน์ (ตรงข้ามกับเงินบาทแข็งค่า)

- *ผู้ที่ได้ประโยชน์* คือ ผู้ที่ดำเนินกิจกรรมหรือธุรกิจโดยรับเงินเป็นสกุลดอลลาร์และแลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นเงินบาท เช่น ผู้ส่งออก (รับรายได้เป็นดอลลาร์แลกกลับเป็นเงินไทยได้มากขึ้น) ลูกจ้างที่ทำงานต่างประเทศและส่งเงินกลับประเทศไทย ผู้ประกอบการหรือลูกจ้างที่รับรายได้เป็นเงินในสกุลดอลลาร์และต้องแลกเปลี่ยนเป็นเงินบาท เป็นต้น
- *ผู้ที่เสียประโยชน์* ได้แก่ ผู้นำเข้าสินค้า (ซื้อในสกุลดอลลาร์ขายเป็นสกุลบาท ราคาในสกุลบาทแพงขึ้น) ประชาชนที่จำเป็นต้องซื้อสินค้าต่างประเทศ ลูกหนี้ที่กู้เงินต่างประเทศ (รับรายได้เป็นเงินบาทจ่ายหนี้คืนเป็นดอลลาร์ได้น้อยลง) ลูกจ้างที่ทำงานในไทยส่งเงินกลับไปยังต่างประเทศ (รับค่าจ้างเป็นเงินบาทส่งเงินกลับบ้านเกิดเป็นเงินดอลลาร์) และนักลงทุนต่างประเทศที่โยกเงินมาลงทุนในประเทศไทยและนำเงินออกไปเป็นเงินดอลลาร์ เป็นต้น



รูปที่ 1.10 *กราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD รายเดือน ตั้งแต่เดือนกุมภาพันธ์ ค.ศ.2023 ถึง เดือน มกราคม ค.ศ.2024*

กราฟด้านบนแสดงการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน THB/USD รายเดือน ซึ่งมีเหตุการณ์ทางเศรษฐกิจสำคัญที่อาจส่งผลต่อค่าเงินบาท เช่น

- Fed hints at rate hike (มี.ค. 2023): ทำให้ค่าเงินบาทเริ่มแข็งค่า
- Thai election results (พ.ค. 2023): ส่งผลให้เงินบาทผันผวน
- US inflation drops (ส.ค. 2023): ค่าเงินบาทแข็งค่าขึ้นต่อเนื่อง
- BOJ policy change (ต.ค. 2023): ทำให้เงินทุนเคลื่อนย้าย
- Thai GDP revised up (ธ.ค. 2023): สนับสนุนแนวโน้มแข็งค่าของเงินบาท

ตัวอย่างที่ 1.9 จงวิเคราะห์สถานการณ์ต่อไปนี้

กรณีที่ 1: เงินบาทแข็งค่า

สถานการณ์: สมมติบริษัท A ต้องนำเข้าสินค้าอิเล็กทรอนิกส์จากสหรัฐอเมริกา มูลค่า $100,000 โดยจะชำระเงินภายใน 3 เดือน

รายการ	ปัจจุบัน	อีก 3 เดือน
อัตราแลกเปลี่ยน (THB/USD)	32	28 (บาทแข็งค่า)

การคำนวณ

1) ต้นทุนปัจจุบัน (หากชำระทันที)

   = $100,000 × 32 = 3,200,000 บาท

2) ต้นทุนหลัง 3 เดือน (ถ้ารอจ่ายตอนแข็งค่า)

   = $100,000 × 28 = 2,800,000 บาท

3) ส่วนต่างที่ประหยัดได้จากการแข็งค่า

   = 3,200,000 − 2,800,000 = 400,000 บาท

บทวิเคราะห์เชิงประยุกต์: จะเห็นว่า บริษัท A ได้ประโยชน์จากการแข็งค่าของเงินบาทในการลดต้นทุนการนำเข้า ดังนั้น บริษัทอาจเลือกเลื่อนการชำระเงินหรือใช้สัญญา Forward เพื่อเก็งกำไรจากแนวโน้มอัตราแลกเปลี่ยน

กรณีที่ 2: เงินบาทอ่อนค่า

สถานการณ์: สมมติบริษัท B ส่งออกข้าวไปยังสหรัฐอเมริกา มูลค่า **$100,000** โดยจะได้รับเงินภายใน 3 เดือน

รายการ	ปัจจุบัน	อีก 3 เดือน
อัตราแลกเปลี่ยน (THB/USD)	28	32 (บาทอ่อนค่า)

การคำนวณ

1) รายได้ปัจจุบัน (หากรับเงินทันที)

   = $100,000 × 28 = 2,800,000 บาท

2) รายได้หลัง 3 เดือน (ถ้ารอรับตอนอ่อนค่า)

   = $100,000 × 32 = 3,200,000 บาท

3) ส่วนต่างรายได้ที่เพิ่มขึ้นจากการอ่อนค่า

   = 3,200,000 − 2,800,000 = 400,000 บาท

บทวิเคราะห์เชิงประยุกต์: บริษัท B ได้ประโยชน์จากเงินบาทอ่อนค่าด้วยการแปลงรายได้สกุลดอลลาร์เป็นเงินบาทได้มากขึ้น จึงอาจพิจารณาชะลอการแลกเปลี่ยนเงินหรือทำสัญญา Forward เพื่อป้องกันความเสี่ยง □

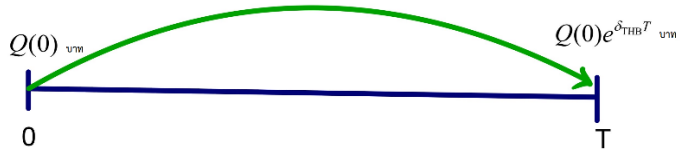
ตารางที่ 1.3: *สรุปผลกระทบของอัตราแลกเปลี่ยน*

กลุ่ม	ได้ประโยชน์เมื่อเงินบาท แข็งค่า	ได้ประโยชน์เมื่อเงินบาท อ่อนค่า
ผู้นำเข้า	✓ ลดต้นทุน	✗ ราคานำเข้าสูงขึ้น
ผู้ส่งออก	✗ ได้เงินบาทน้อยลง	✓ ได้เงินบาทมากขึ้น
ผู้กู้เงินสกุลต่างประเทศ	✓ ชำระดอกเบี้ยถูกลง	✗ ชำระหนี้แพงขึ้น
ลูกจ้างไทยส่งเงินไปต่างประเทศ	✓ ใช้เงินบาทน้อยลง	✗ ใช้เงินบาทมากขึ้น
ลูกจ้างต่างประเทศส่งเงินกลับไทย	✗ ได้เงินบาทน้อยลง	✓ ได้เงินบาทมากขึ้น

1.4.2 อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า

พิจารณาการลงทุนในตราต่างประเทศ 2 สกุลใด ๆ สมมติให้เป็นสกุลบาทไทย(THB) และเงินสกุลต่างประเทศ (FRX) กำหนดให้ δ_{THB} และ δ_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่ปราศจากความเสี่ยงของเงินสกุลบาทไทย (THB) และเงินสกุลต่างประเทศ (FRX) ตามลำดับ พิจารณากลยุทธ์การลงทุนต่อไปนี้ สำหรับเวลา $t = 0, T$ กำหนดอัตราแลกเปลี่ยนสกุลบาทไทยกับสกุลต่างประเทศ เป็น $Q(t)$ บาท ต่อ 1 FRX

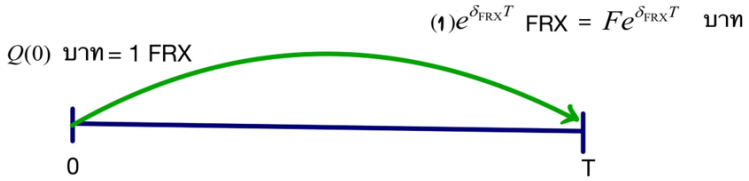
<u>กลยุทธ์ที่ 1</u> ลงทุน $Q(0)$ บาท กับโครงการลงทุนที่ได้รับอัตราดอกเบี้ย δ_{THB} เป็นเวลา T



รูปที่ 1.11 *กระแสเงินสดจากการลงทุนตามกลยุทธ์ที่ 1 (ลงทุนในสกุลเงินบาท)*

<u>กลยุทธ์ที่ 2</u> - ซื้อเงินตราต่างประเทศ 1 FRX ด้วยเงิน $Q(0)$ บาท และนำเงินในสกุลต่างประเทศไปลงทุนกับโครงการลงทุนที่ได้รับอัตราดอกเบี้ย δ_{FRX} เป็นเวลา T โดยทำสัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราแลกเปลี่ยนที่ราคาฟอร์เวิร์ด (อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า) F

- เปิดสถานะชอร์ตของสัญญาฟอร์เวิร์ดสำหรับแลกเปลี่ยนเงินสกุลต่างประเทศเป็นสกุลบาทไทย จำนวน $e^{\delta_{\text{FRX}}T}$ FRX โดยมีราคาฟอร์เวิร์ด F บาทต่อ 1 FRX และเวลาส่งมอบ T



รูปที่ 1.12 *กระแสเงินสดจากการลงทุนตามกลยุทธ์ที่ 2 (ลงทุนในสกุลเงินต่างประเทศ)*

จะเห็นว่า ที่เวลา T ในกลยุทธ์ที่ 1 จะได้รับเงินในสกุลบาทไทยจำนวน $Q(0)e^{\delta_{\text{THB}}T}$ บาท ส่วนในกลยุทธ์ที่ 2 เป็นการลงทุนในสกุลเงินต่างประเทศซึ่งจะได้รับเงินในสกุลต่างประเทศ จำนวน $e^{\delta_{\text{FRX}}T}$ FRX และทำสัญญาฟอร์เวอร์สเพื่อแลกเปลี่ยน (เปิดสถานะชอร์ต) มาเป็นเงินสกุลบาทไทยด้วยอัตราแลกเปลี่ยน F บาทต่อ 1 FRX ดังนั้นจะได้รับเงินในสกุลบาทไทย เท่ากับ $Fe^{\delta_{\text{FRX}}T}$ บาท

เนื่องจากทั้งสองกลยุทธ์ลงทุนด้วยเงินปัจจุบันเท่ากัน คือ $Q(0)$ บาท หากการลงทุนทั้งสองกลยุทธ์ปราศจากการค้ากำไร จะได้ว่ามูลค่าอนาคตของการลงทุนที่เวลา T จะต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$Q(0)e^{\delta_{\text{THB}}T} = Fe^{\delta_{\text{FRX}}T} \tag{1.16}$$

นั่นคือ ราคาฟอร์เวิร์ดหรืออัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า F บาทต่อ 1 FRX (แลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นสกุลบาทไทย)

$$F = Q(0)e^{(\delta_{\text{THB}}-\delta_{\text{FRX}})T} \tag{1.17}$$

ตัวอย่างที่ 1.10 ผู้ส่งออกข้าวไทยไปยังสหรัฐอเมริกาต้องการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์เป็นเงินสกุลไทยในอีก 6 เดือนข้างหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับเงินฝากในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลลาร์ เป็น 1.5 % และ 4.75% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลไทยและเงินสกุลดอลลาร์ ณ ปัจจุบันเท่ากับ 33 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ จงหาราคาฟอร์เวิร์ดหรืออัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าดังกล่าว

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นว่าผู้ส่งออกลงทุนซื้อข้าวเป็นเงินสกุลบาทไทยและรับเงินมาเป็นเงินสกุลดอลลาร์ ดังนั้นจึงต้องทำสัญญาฟอร์เวิร์ดแลกเปลี่ยนเงินดังกล่าวกับมาเป็นเงินไทยที่ราคาฟอร์เวิร์ด F บาทต่อ 1 ดอลลาร์ โดยสามารถคำนวณราคา F ได้จาก $F = Q(0)e^{(\delta_{\text{THB}}-\delta_{\text{US}})T}$ ในที่นี้ $Q(0) = 33$ (บาทต่อ 1 ดอลลาร์), $\delta_{\text{THB}} = 0.015$, $\delta_{\text{US}} = 0.0475$ และ $T = 6/12 = 0.5$ จะได้ $F = 33e^{(0.015-0.0475)(0.5)} = 32.4681$ บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ □

ตัวอย่างที่ 1.11 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 1.10 สมมติว่าสถาบันการเงินแห่งหนึ่งกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าเท่ากับ 34 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์สหรัฐ จงพิจารณาว่านักลงทุนสามารถทำอาบิทราจได้หรือไม่ อย่างไร โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลไทยและเงินสกุลดอลลาร์ ณ ปัจจุบันเท่ากับ 33 บาทต่อ 1 ดอลลาร์

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.10 ได้ว่าอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าที่สอดคล้องกับปราศจากการค้ากำไรเท่ากับ 32.4681 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ ดังนั้น อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าเท่ากับ 34 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์ ที่โจทย์กำหนดให้เป็นอัตราที่สูงเกินไป ถ้าเป็นเช่นนี้ผู้ที่เปิดสถานะลองของสัญญาอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าย่อมได้ผลประโยชน์ เนื่องจากสามารถแลกเปลี่ยนเงินดอลลาร์กลับมาเป็นเงินบาทได้มากกว่าเดิม โดยแนวทางหนึ่งนักลงทุนสามารถทำอาบิทราจได้ ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) กู้เงิน 33 บาท เพื่อแลกเปลี่ยนเป็นเงินดอลลาร์ 1 ดอลลาร์

2) นำเงินที่ 1 ดอลลาร์ ไปฝากในสกุลเงินดอลลาร์

3) ทำสัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราแลกเปลี่ยนที่อัตราล่วงหน้า $F=34$ บาท ต่อ 1 ดอลลาร์

$\therefore V(0)=33-33=0$

ที่เวลา $t=0.5$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ถอนเงินฝากในสกุลเงินดอลลาร์ ได้ $1\times e^{0.0475(0.5)}=1.0240$ ดอลลาร์

2) ใช้สิทธิแลกเงิน 1.0240 ดอลลาร์เป็นเงินบาทที่อัตราแลก $F=34$ บาทต่อ 1 ดอลลาร์ แลกเป็นเงินบาทได้ $1.0240\times 34=34.8172$ บาท

3) ชำระหนี้คืน $33\times e^{0.015(0.5)}=33.2484$ บาท

$\therefore V(0.5)=34.8172-33.2484=0.5687$ บาท

เงินจำนวน 0.5687 บาท เป็นกำไรที่ได้จากการทำอาบิทราจ □

1.5 การกำหนดราคาออปชัน

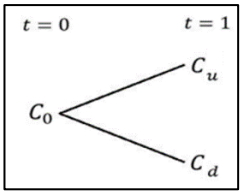
ออปชันหรือตราสารสิทธิ (option) คือ สัญญาที่ให้สิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงในอนาคต โดยผู้ถือสามารถใช้สิทธิซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงที่ราคาใช้สิทธิ (strike price: K) หรือไม่ใช้สิทธิตามสัญญาก็ได้ตามประเภทของสิทธิ ซึ่งได้แก่ คอลออปชันซึ่งให้สิทธิซื้อสินทรัพย์อ้างอิง และพุทออปชันซึ่งให้สิทธิขายสินทรัพย์อ้างอิง เนื่องจากออปชันเป็นตราสารที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือสัญญา ผู้ถือจะต้องจ่ายเงินเพื่อแลกกับสิทธิ ซึ่งเป็นต้นทุนในการทำสัญญาออปชัน เงินจ่ายนี้เรียกว่า ค่าพรีเมียม (premium) ซึ่งเป็นราคาของออปชันที่เวลา $t=0$ นั่นเอง

พิจารณาคอลออปชันที่ให้สิทธิซื้อหุ้นอ้างอิงที่ราคาใช้สิทธิ K จะได้ว่าที่เวลาใช้สิทธิ ($t=1$) ผู้ถือสัญญาจะได้ประโยชน์หากราคาหุ้นพุ่งขึ้นเหนือ K เพราะผู้ถือได้สิทธิซื้อหุ้นในราคาที่ต่ำกว่า โดยผู้ถือสามารถทำกำไรได้โดยใช้สิทธิซื้อหุ้นที่ราคา K และขายหุ้นออกที่ราคาตลอด ดังนั้นจะได้ผลประโยชน์ $S(1)-K$ แต่หากหุ้นลงต่ำกว่า K ผู้ถือจะเลือกไม่ใช้สิทธิเนื่องจากสามารถซื้อหุ้นในราคาตลาดได้ถูกกว่าในกรณีนี้ผลประโยชน์จะเป็นศูนย์ โดย ถ้าให้ $C(t)$ เป็นราคาของคอลออปชัน

$C(0)=C_0$ จะเป็นค่าพรีเมียม หรือ ราคาออปชันที่ $t=0$ ซึ่งค่าพรีเมียมจะเป็นต้นทุนในการลงทุนในคอลออปชัน และ

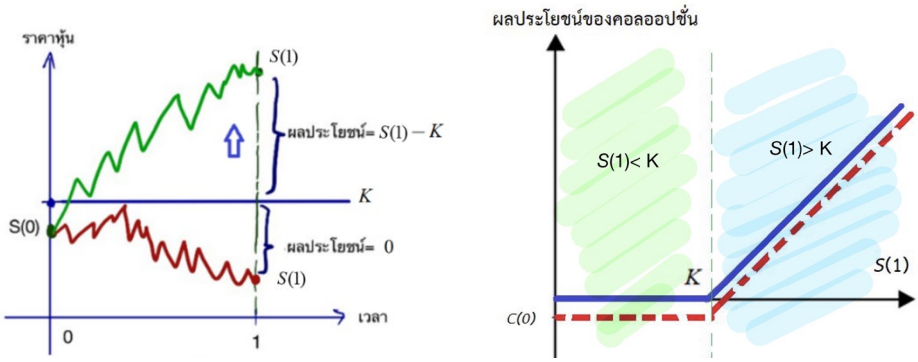
$$C(1)=[S(1)-K]^{+}=\max\{S(1)-K,0\} \quad =\begin{cases} C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}; & \uparrow \\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\}; & \downarrow \end{cases}$$

จะเป็นผลประโยชน์ของคอลออปชัน



รูปที่ 1.13 *ราคาคอลออปชันที่เวลา* $t=0$ *และ* $t=1$

สำหรับในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันซึ่งจะหมายถึงการกำหนดราคาออปชันที่เวลา $t=0$ หรือ ค่าพรีเมียม โดยใช้แบบจำลองราคาอย่างง่ายที่มีหุ้นเป็นสินทรัพย์อ้างอิง



(a) ผลประโยชน์ของคอลออปชันตามราคาหุ้นและตามเวลา (b) ผลประโยชน์ของคอลออปชันตามราคาหุ้น

รูปที่ 1.14 *ผลประโยชน์ของคอลออปชัน*

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120\ ; & \uparrow \\ 80\ ; & \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงพิจารณาว่าจะเกิดการค้ากำไรหรือไม่ หากกำหนดค่าพรีเมียม $C(0)=12$

วิธีทำ ขั้นตอนแรกคำนวณ $C(1)$ ได้ $C(1)=\begin{cases}20\ ; & \uparrow \\ 0\ ; & \downarrow\end{cases}$ คำนวณผลตอบแทนจากตราสารหนี้ ได้ $r=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{110-100}{100}=0.1$ สามารถทดลองสร้างพอร์ตการลงทุนและคำนวณค่ามูลค่าของพอร์ตการลงทุนได้ตามตารางที่ 1.4

ตารางที่ 1.4 *การสร้างพอร์ตการลงทุนที่สามารถทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้*

ยืมหุ้น x หุ้น	รับ $xS(0)$ บาท	(ซื้อ) จ่าย $C(0)$ บาท	ลงทุน $yA(0)$ บาท	$V(0)$	รับ $yA(1)$ บาท	รับ C_u บาท	รับ C_d บาท	จ่าย xS_u บาท	จ่าย xS_d บาท	V_u	V_d
0.1	10	12	-2	0	-2.2	20	0	12	8	5.8	-10.2
0.2	20	12	8	0	8.8	20	0	24	16	4.8	-7.2
0.3	30	12	18	0	19.8	20	0	36	24	3.8	-4.2
0.4	40	12	28	0	30.8	20	0	48	32	2.8	-1.2
0.5	50	12	38	0	41.8	20	0	60	40	1.8*	1.8*
0.6	60	12	48	0	52.8	20	0	72	48	0.8*	4.8*
0.7	70	12	58	0	63.8	20	0	84	56	-0.2	7.8
0.8	80	12	68	0	74.8	20	0	96	64	-1.2	10.8
0.9	90	12	78	0	85.8	20	0	108	72	-2.2	13.8
1	100	12	88	0	96.8	20	0	120	80	-3.2	16.8

**เกิดการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง*

ตัวอย่างการทำธุรกรรมตามพอร์ตการสีนำเงินซึ่งทำให้เกิดกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง เป็นดังนี้

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 0.5 หน่วย จ่ายเงิน 50 บาท
2) เปิดสถานะลองสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน 12 บาท เพื่อซื้อหุ้น 1 หุ้นที่ราคา 100 บาท
3) นำเงินที่เหลือ 50-12=38 ไปลงทุนในตราสารหนี้ จ่าย 38 บาท

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ต $V(0)=$ รับ-จ่าย = 50-12-38=0

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายตราสารหนี้ รับเงิน $38(1.1)=41.8$ บาท
2) ปิดสถานะของคอลออปชัน โดยถ้าหุ้นขึ้นซื้อหุ้นที่ราคาใช้สิทธิ 100 บาท ขายที่ราคาตลาด 120 บาท แต่ถ้าหุ้นลงไม่ต้องใช้สิทธิ ได้รับเงินผลประโยชน์ $C(1)=\begin{cases}20\ ; & \uparrow \\ 0\ ; & \downarrow\end{cases}$

3) ซื้อหุ้นคืน 0.5 หน่วย จ่ายเงิน $\begin{cases}60\ ;\uparrow\\ 40\ ;\downarrow\end{cases}$

ดังนั้น $V(1)= \ 41.804+\left(\begin{cases}20\ ;\uparrow\\ 0\ \ ;\downarrow\end{cases}\right)-\left(\begin{cases}60\ ;\uparrow\\ 40\ ;\downarrow\end{cases}\right)=1.804$ บาทซึ่งเป็นกำไรที่ได้รับแน่นอน

จากธุรกรรมจะเห็นว่า $V(0)=0$ แต่ $V(1)=1.804$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร □

จากตัวอย่างที่ 1.12 จะเห็นว่าการกำหนดค่าพรีเมียมนั้นต่ำเกินไปหากเป็นเช่นนี้แล้วจะมีนักลงทุนเข้ามาค้ากำไรกันมากขึ้นโดยดำเนินธุรกรรมเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1.12 มีผลทำให้ราคาพรีเมียมจะปรับตัวสูงขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120\ ;\uparrow\\ 80\ \ ;\downarrow\end{cases}$

กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงพิจารณาว่าจะเกิดการค้ากำไรหรือไม่ หากกำหนดค่าพรีเมียม $C(0)=15$

วิธีทำ จากโจทย์ ขั้นตอนแรกคำนวณ $C(1)$ ได้ $C(1)=\begin{cases}20\ ;\uparrow\\ 0\ \ ;\downarrow\end{cases}$

คำนวณผลตอบแทนจากตราสารหนี้ ได้ $r=\dfrac{110-100}{100}=0.1$

พิจารณาการทดลองพอร์ตการลงทุนและผลจากการสร้างพอร์ตตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1.5 *การสร้างพอร์ตการลงทุนที่สามารถทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้*

ซื้อหุ้น x หุ้น	ต้องใช้เงิน $xS(0)$ บาท	(ออก) รับ $C(0)$ บาท	ยืมเงิน** $yA(0)$ บาท	$V(0)$		รับ xS_u บาท	รับ xS_d บาท	จ่าย C_u บาท	จ่าย C_d บาท	คืนหนี้ $yA(1)$ บาท	V_u	V_d
0.1	10	15	-5	0		12	8	20	0	-5.5	-2.5	13.5
0.2	20	15	5	0		24	16	20	0	5.5	-1.5	10.5
0.3	30	15	15	0		36	24	20	0	16.5	-0.5	7.5
0.4	40	15	25	0		48	32	20	0	27.5	0.5	4.5*
0.5	50	15	35	0		60	40	20	0	38.5	1.5	1.5*
0.6	60	15	45	0		72	48	20	0	49.5	2.5	-1.5
0.7	70	15	55	0		84	56	20	0	60.5	3.5	-4.5
0.8	80	15	65	0		96	64	20	0	71.5	4.5	-7.5
0.9	90	15	75	0		108	72	20	0	82.5	5.5	-10.5
1	100	15	85	0		120	80	20	0	93.5	6.5	-13.5

**พอร์ตการลงทุนที่ทำให้เกิดกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง*

***การยืมเงินเทียบเท่ากับการยืมตราสารหนี้มาขาย*

จากตารางการจำลองพอร์ตการลงทุนสามารถทำธุรกรรมให้เกิดการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง ได้ดังนี้

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมเงิน 35 บาท
2) เปิดสถานะชอร์ตคอลออปชัน 1 สัญญาและขายสัญญา รับเงิน 15 บาท
   (สัญญาให้สิทธิซื้อหุ้น 1 หุ้น ที่ราคา 100 บาท)
3) ซื้อหุ้น 0.5 หน่วย จ่ายเงิน 50 บาท

ดังนั้น $V(0)=35+15-50=0$ บาท

(*เปิดสถานะชอร์ต เทียบเท่ากับ การออกคอลออปชันมาขาย)

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายหุ้น 0.5 หน่วย รับเงิน $\begin{cases}60\ ;\uparrow\\ 40\ ;\downarrow\end{cases}$
2) ปิดสถานะชอร์ตของคอลออปชัน ซึ่งหากหุ้นมีราคาขึ้นผู้ถือจะซื้อหุ้นที่ราคาใช้สิทธิ 100 บาท ขายที่ราคาตลาด 120 บาท แต่ถ้าหุ้นลงจะไม่ใช้ใช้สิทธิ ดังนั้น ผู้ออกจะต้องจ่าย ผลประโยชน์ $C(1)=\begin{cases}20\ ;\uparrow\\ 0\ \ ;\downarrow\end{cases}$
3) คืนเงินพร้อมดอกเบี้ย เท่ากับ $35(1.1)=38.5$ บาท

ดังนั้น $V(1)=\left(\begin{cases}60\ ;\uparrow\\ 40\ ;\downarrow\end{cases}\right)-\left(\begin{cases}20\ ;\uparrow\\ 0\ \ ;\downarrow\end{cases}\right)-38.5=1.5$ บาท

จากการทำธุรกรรมจะเห็นว่า $V(0)=0$ แต่ $V(1)=1.5$ ซึ่งเป็นการทำอาบิทราจ □

จากตัวอย่างที่ 1.13 จะเห็นว่าการกำหนดค่าพรีเมียมนั้นสูงเกินไปหากเป็นเช่นนี้แล้วจะมีนักลงทุนเข้ามาค้ากำไรกันมากขึ้นโดยดำเนินธุรกรรมเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 1.13 และมีผลทำให้ค่าพรีเมียมจะปรับตัวต่ำลง จากทั้งสองตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าหากการกำหนดค่าพรีเมียมยังทำให้เกิดการค้ากำไรจะทำให้มีนักลงทุนเข้ามาทำการค้ากำไร ซึ่งส่งผลให้ค่าพรีเมียมเคลื่อนที่เข้าสู่ราคาที่สมดุล (ค่าพรีเมียมที่ไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร) ดังนั้น จึงต้องกำหนดค่าพรีเมียม $C(0)$ ที่ไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร นั่นคือสอดคล้องกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร นั่นเอง โดยขั้นตอนในการคำนวณค่าพรีเมียม $C(0)$ สามารถทำได้ดังนี้

1.5.1 กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชัน

การกำหนดราคาคอลออปชันด้วยหลักการปราศจากการค้ากำไร เริ่มต้นด้วย พอร์ตการลงทุนที่ประกอบด้วยตราสารหุ้น x หน่วย ตราสารหนี้ y หน่วย และ คอลออปชันในสถานะชอร์ต 1 สัญญา โดยอาศัยหลักการปราศจากการค้ากำไร นั่นคือ ถ้า $V(0)=0$ แล้ว $V(1)=0$ จะสามารถหาพอร์ตการลงทุนดังกล่าวได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1) สมมติให้ $[x,y,-1]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)-C(0)=0 \tag{1.18}$$

โดยอาศัยหลักการปราศจากการค้ากำไร จะได้ว่า

$$V(1)=xS(1)+yA(1)-C(1)=0 \tag{1.19}$$

เมื่อ $C(1)=\begin{cases} C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}; & \uparrow \\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\}; & \downarrow \end{cases}$

จากสมการ (1.19) จะได้

$$x(1+u)S(0)+yA(1)=C_u \tag{1.20}$$

และ

$$x(1+d)S(0)+yA(1)=C_d \tag{1.21}$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (1.20) และ (1.21) เพื่อหาค่า x และ y จะได้

$$x=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)} \quad \text{และ} \quad y=\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)} \tag{1.22}$$

ขั้นตอนที่ 3) ค่าพรีเมียมหรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)$ สามารถคำนวณได้จากสมการ (1.22) ด้วยการแทนค่า x และ y ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2) ได้ผลลัพธ์ คือ

$$C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \tag{1.23}$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวเขียนเป็นทฤษฎีบทได้ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.12 ภายใต้สมมติฐาน 1.1) -1.6) จะได้ $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

โดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C(0) \neq \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

นั่นคือ $C(0) > \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

หรือ $C(0) < \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า $C(0) > \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ออกสัญญาคอลออปชันเพื่อขายสัญญา 1 สัญญาได้รับเงิน $C(0)$ บาท

2) ซื้อหุ้น $\frac{C_u - C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\frac{C_u - C_d}{u-d}$ บาท

3) ซื้อตราสารหนี้ $\frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ ตราสาร จ่ายเงิน $\frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท

ดังนั้น จะเหลือเงิน $C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} > 0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

4) นำเงินที่เหลือ $C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุน $V(0) = 0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายหุ้น $\frac{C_u - C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\begin{cases} (1+u)\left(\frac{C_u - C_d}{u-d}\right); \uparrow \\ (1+d)\left(\frac{C_u - C_d}{u-d}\right); \downarrow \end{cases}$

2) ขายตราสารหนี้ $\frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{u-d}$ บาท

3) ขายตราสารจากการลงทุนด้วยเงินต้น $C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท

จะได้เงินอีก $\left(C(0) - \frac{C_u - C_d}{u-d} - \frac{(1+u)C_d - (1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$ บาท

4) ผู้ถือคอลออปชันใช้สิทธิ ดังนั้นผู้ออก ต้องจ่ายเงินผลประโยชน์

$$C(1) = \begin{cases} C_u = \max\{(1+u)S(0) - K, 0\}; \uparrow \\ C_d = \max\{(1+d)S(0) - K, 0\}; \downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

จะได้เงินคงเหลือ $V(1)=\begin{cases}(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); & \uparrow \\ (1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); & \downarrow\end{cases}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$

$$+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)-\begin{cases}C_u; & \uparrow \\ C_d; & \downarrow\end{cases}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)>0$$

ทำให้สรุปได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า $C(0)<\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย $\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{C_u-C_d}{u-d}$ บาท

2) ยืมตราสารหนี้มาขาย $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ หน่วย ได้รับเงิน $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ บาท

3) ซื้อสัญญาคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C(0)$ บาท

ดังนั้นจะเหลือเงิน $\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)>0$ บาท (โดยสมมติฐาน)

4) นำเงินที่เหลือ $\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

ดังนั้นมูลค่าเงินของพอร์ตลงทุนที่เวลา $t=0$ คือ $V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายคอลออปชัน 1สัญญาได้รับเงิน $C(1)=\begin{cases}C_u=\max\{(1+u)S(0)-K,0\}; & \uparrow \\ C_d=\max\{(1+d)S(0)-K,0\}; & \downarrow\end{cases}$ บาท

2) ขายตราสารจากที่ลงทุน $\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)$ บาท

ได้รับเงิน $\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}-C(0)\right)(1+r)$ บาท

3) ซื้อหุ้นคืน $\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\begin{cases}(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); & \uparrow \\ (1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right); & \downarrow\end{cases}$ บาท

4) ซื้อตราสารหนี้คืน $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ หน่วย จ่ายเงิน $\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)}$ บาท

จะได้ $$V(1)=\begin{cases}C_u\,;\ \uparrow\\ C_d\,;\ \downarrow\end{cases}+\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)$$

$$-\begin{cases}(1+u)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right);\ \uparrow\\ (1+d)\left(\frac{C_u-C_d}{u-d}\right);\ \downarrow\end{cases}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{u-d}$$

$$=\left(C(0)-\frac{C_u-C_d}{u-d}-\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}\right)(1+r)\ >0$$

ทำให้ได้ว่า $V(1)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร

จากกรณี 1) และ กรณี 2) จึงทำให้สรุปได้ว่า $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$ □

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120\ ;\ \uparrow\\ 80\ \ ;\ \downarrow\end{cases}$

กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงคำนวณหาค่าพรีเมียม $C(0)$ ของคอลออปชัน

วิธีทำ วิธีที่1 ใช้กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชันจากที่โจทย์กำหนดให้คำนวณ $C(1)$ ได้

$$C(1)=\begin{cases}\max\{120-100,0\}\ ;\ \uparrow\\ \max\{80-100,0\}\ \ ;\ \downarrow\end{cases}=\begin{cases}20\ ;\ \uparrow\\ 0\ \ \ ;\ \downarrow\end{cases}$$

การกำหนดราคาคอลออปชัน สามารถทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1) กำหนดให้ $[x,y]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ไม่มีการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง ซึ่ง

$$V(0)=xS(0)+yA(0)=C(0)$$

จะได้ว่า $$V(1)=xS(1)+yA(1)=C(1)$$

ผลที่ตามมาคือ $$C(0)=100x+100y \qquad (1)$$

และ $$C(1)=\begin{cases}120x+110y\ \ ;\ \uparrow\\ 80x+110y\ \ \ ;\ \downarrow\end{cases}=\begin{cases}20\ ;\ \uparrow\\ 0\ \ \ ;\ \downarrow\end{cases}$$

นั่นคือ $$120x+110y=20 \qquad (2)$$

$$120x+110y=0 \qquad (3)$$

ขั้นตอนที่ 2) แก้ระบบสมการ (2) และ (3) เพื่อหาค่า x และ y จะได้ $x=\frac{1}{2}$ และ $y=\frac{-4}{11}$

ขั้นตอนที่ 3) นำค่า $x=\frac{1}{2}$ และ $y=\frac{-4}{11}$ไปแทนในสมการ (1)

จะได้ ค่าพรีเมียม หรือ ราคาของคอลออปชัน $C(0)=100\left(\frac{1}{2}\right)+100\left(\frac{-4}{11}\right)=13.6364$ บาท

วิธีที่ 2 ใช้สูตร (1.19) คือ $C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$

ในที่นี้ $r=\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{110-100}{100}=0.1 \Rightarrow 1+r=1.1$

$$K(1)=\frac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}\frac{120-100}{100};\uparrow\\ \frac{80-100}{100};\downarrow\end{cases}=\begin{cases}0.2;\uparrow\\ -0.2;\downarrow\end{cases}\Rightarrow u=0.2, d=-0.2$$

และ $C(1)=\begin{cases}20; \uparrow\\ 0 ; \downarrow\end{cases} \Rightarrow C_u=20, C_d=0$

โดยแทนค่าในสูตร (1.23) จะได้ $C(0)=\frac{20-0}{0.2-(-0.2)}+\frac{(1.2)(0)-(0.8)(20)}{(0.2+0.2)(1.1)}=13.6364$ บาท □

อยากให้ผู้อ่านย้อนกลับไปดูตัวอย่างที่ 1.12 และ 1.13 อีกครั้งในความเป็นจริง ในฐานะนักลงทุนไม่มีทางรู้ว่าราคาพรีเมียม $C(0)$ ของคอลออปชันที่ซื้อขายกันเป็นราคาที่สามารถทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (ทำอาบิทราจ) ได้หรือไม่ แต่สามารถประเมินราคา $C(0)$ ภายใต้ข้อมูลที่มีโดยใช้สูตร (1.23) ได้ และสามารถทำอาบิทราจโดยสร้างพอร์ตการลงทุนเริ่มต้นจากพอร์ตที่ประกอบด้วยหุ้นจำนวน $x=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}$ หน่วยและตราสารหนี้จำนวน $y=\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}$ หน่วย ตามสูตร (1.22) เพื่อความเข้าใจลองศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.15 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120; \uparrow\\ 80 ; \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงพิจารณาว่าจะเกิดการค้ากำไรหรือไม่ หากกำหนดค่าพรีเมียม $C(0)=15$ (*ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1.14)

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.14 คำนวณราคาพรีเมียม $C(0)=13.6364$ บาท

จะเห็นว่าการกำหนดค่าพรีเมียม $C(0)=15$ เป็นราคาที่สูงเกินไป ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อนักลงทุนที่ถือสถานะชอร์ตคอลออปชัน (สถานะเหมือนผู้ออกออปชันมาขาย) ซึ่งสามารถทำอาบิทราจได้ดังนี้

เริ่มต้นด้วยคำนวณ $x=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S(0)}=\frac{20-0}{(0.2+0.2)(100)}=0.5$ (ซื้อลงทุน) และ

$y=\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)A(0)}=\frac{1.2(0)-(0.8)(20)}{(0.2+0.2)(1.1)(100)}=-0.3636$ (ยืมขาย)

จากข้อมูล สามารถทำธุรกรรม ได้ดังนี้

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมขายตราสารหนี้ 0.3636 หน่วย รับเงิน $0.3636(100) \approx 36.36$ บาท

2) ออกคอลออปชัน 1 สัญญาและขายสัญญารับเงิน 15 บาท
(สัญญาให้สิทธิซื้อหุ้น 1 หุ้น ที่ราคา 100 บาท)

3) ซื้อหุ้น 0.5 หน่วย จ่ายเงิน 50 บาท

4) นำเงินที่เหลือ $36.36+15-50=1.36$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

$\therefore\ V(0)=36.36+15-50-1.36=0$

ที่เวลา $t=1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายหุ้น 0.5 หน่วย รับเงิน $0.5\begin{cases}120\ ;\uparrow\\80\ \ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}60\ ;\uparrow\\40\ ;\downarrow\end{cases}$

2) ปิดสถานะชอร์ตของคอลออปชันซึ่งหากหุ้นมีราคาขึ้นผู้ถือจะซื้อหุ้นที่ราคาใช้สิทธิ 100 บาท ขายที่ราคาตลาด 120 บาท แต่ถ้าหุ้นลงจะไม่ใช้ใช้สิทธิ
ดังนั้นผู้ออกจะต้องจ่าย ผลประโยชน์ $C(1)=\begin{cases}20\ ;\uparrow\\0\ \ ;\downarrow\end{cases}$

3) ขายตราสารหนี้จากเงินทุนที่เหลือ 1.36 บาท รับเงิน $1.36(1.1)=1.496$ บาท

4) ซื้อและคืนตราสารหนี้ 0.3636 หน่วย จ่ายงิน 40 บาท

ดังนั้น $V(1)=\left(\begin{cases}60\ ;\uparrow\\40\ ;\downarrow\end{cases}\right)-\left(\begin{cases}20\ ;\uparrow\\0\ \ ;\downarrow\end{cases}\right)+1.496-40=1.496$ บาทซึ่งเป็นกำไรที่จะได้รับแน่นอนจากการทำธุรกรรม □

บทแทรก 1.13 ถ้า ความน่าจะเป็น $p=\dfrac{r-d}{u-d}=\dfrac{e^{\delta}-d-1}{u-d}$ แล้ว

$$C(0)=\frac{pC_u+(1-p)C_d}{e^{\delta}} \tag{1.24}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1.12, $C(0)=\dfrac{C_u-C_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)e^{\delta}}$

$$=\frac{(C_u-C_d)e^{\delta}+C_d+uC_d-C_u-dC_u}{(u-d)e^{\delta}}$$

$$=\frac{\left(e^{\delta}-d-1\right)C_u+\left(-e^{\delta}+u+1\right)C_d}{(u-d)e^{\delta}}$$

$$=\frac{\left(e^{\delta}-d-1\right)C_u+\left(u-d-\left(e^{\delta}-d-1\right)\right)C_d}{(u-d)e^{\delta}}$$

$$= \frac{\left(e^{\delta} - d - 1\right)C_u}{(u-d)e^{\delta}} + \frac{\left(u - d - \left(e^{\delta} - d - 1\right)\right)C_d}{(u-d)e^{\delta}}$$

$$= \frac{pC_u + (1-p)C_d}{e^{\delta}}$$ □

ทฤษฎีบท 1.14 ถ้า ความน่าจะเป็น $p = \frac{r-d}{u-d} = \frac{e^{\delta} - d - 1}{u-d}$ แล้ว

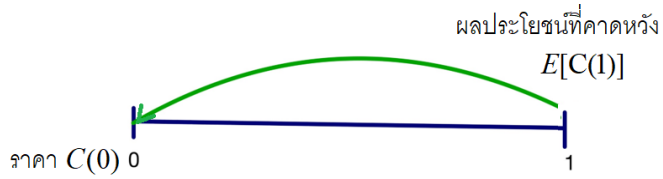
$$C(0) = e^{-\delta} E[\mathrm{C}(1)] = (1+r)^{-1} E[\mathrm{C}(1)] \qquad (1.25)$$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก บทแทรก 1.13 เพราะว่า

$$C(0) = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{e^{\delta}} = pe^{-\delta}C_u + (1-p)e^{-\delta}C_d$$

$$= E[e^{-\delta}\,\mathrm{C}(1)] = e^{-\delta}E[\mathrm{C}(1)]$$ □

ทฤษฎีบท 1.14 ทำให้ทราบว่าราคาของคอลออปชันหรือค่าพรีเมียม ก็คือ มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลออปชันนั่นเอง



รูปที่ 1.15 *ค่าพรีเมียมของคอลคือมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอล*

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดให้อัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้เท่ากับ 6 % ต่อช่วงเวลาและ $S(0) = 90$ บาท และ $S(1) = \begin{cases} 120; \uparrow \\ 95 \;; \downarrow \end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K = 92$ จงคำนวณราคาพรีเมียมของคอลออปชันโดยใช้สูตร (1.25)

วิธีทำ จากที่โจทย์กำหนดให้ $r = 0.06 \Rightarrow e^{\delta} = 1 + r = 1.06$ และ

$$K(1) = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)} = \begin{cases} \frac{120-90}{90} \\ \frac{95-90}{90} \end{cases} = \begin{cases} 0.3333\,; \uparrow \\ 0.0556\,; \downarrow \end{cases}$$

คำนวณ $C(1)$ และความน่าจะเป็น p ได้ดังนี้ $C(1) = \begin{cases} \max\{120-92, 0\} \;; \uparrow \\ \max\{95-92, 0\} \;; \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 28\,; \uparrow \\ 3 \;; \downarrow \end{cases}$

และ $p=\dfrac{r-d}{u-d}=\dfrac{0.06-0.0556}{0.3333-0.0556}=0.0158$, $1-p=1-0.0158=0.9842$

โดยแทนค่าดังกล่าวในสูตร (1.25) ได้

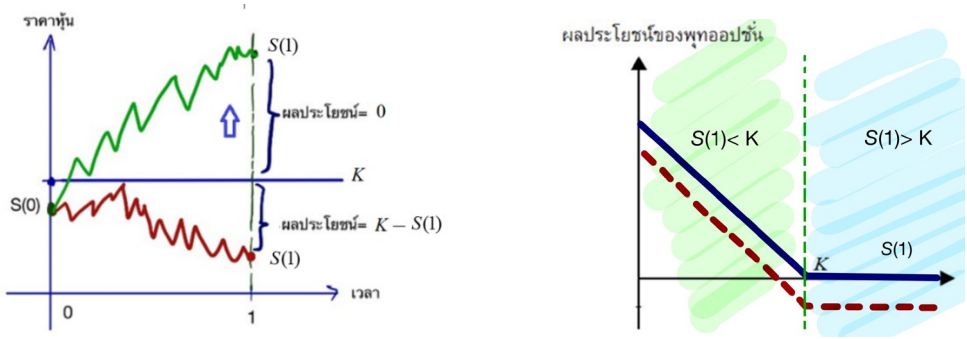
$C(0)=e^{-\delta}E[\mathrm{C}(1)]=1.06^{-1}\left[0.0158(28)+0.9842(3)\right]=3.2028$ บาท □

1.5.2 การกำหนดราคาพุทออปชัน

สำหรับกรณีของพุทออปชันซึ่งเป็นสัญญาที่ให้สิทธิขายหุ้นอ้างอิงที่ราคาใช้สิทธิ K ตามเวลาที่กำหนดในสัญญา ผู้ถือสัญญาจะได้ผลประโยชน์หากราคาหุ้นอ้างอิงมีราคาเคลื่อนที่ลงต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ K เพราะว่าผู้ถือสัญญาสามารถขายที่ราคา K ซึ่งสูงกว่าราคาตลาด โดยผู้ถือสามารถทำกำไรได้โดยซื้อหุ้นที่ราคาตลาด $S(1)$ และใช้สิทธิขายที่ราคา K ซึ่งจะทำให้ได้กำไร $K-S(1)$ ในทางตรงกันข้ามหากหุ้นมีราคาพุ่งขึ้นสูงกว่า K ผู้ถือจะไม่ใช้สิทธิขาย ดังนั้นถ้าให้ $P(t)$ เป็นราคาของพุทออปชัน $P(0)=P_0$ จะเป็นค่าพรีเมียม หรือ ราคาของพุทออปชันที่ $t=0$ และ

$$P(1)=\max\{K-S(1),0\}=\begin{cases}P_u=\max\{K-(1+u)S(0),0\}; & \uparrow\\ P_d=\max\{K-(1+d)S(0),0\}; & \downarrow\end{cases} \qquad (1.26)$$

จะเป็นผลประโยชน์ของพุทออปชัน



(a) ผลประโยชน์ของพุทตามราคาหุ้นและตามเวลา (b) ผลประโยชน์ของพุทตามราคาหุ้น

รูปที่ 1.16 *ผลประโยชน์ของพุทออปชัน*

การกำหนดราคาของพุทออปชัน หรือ ค่าพรีเมียมของพุทออปชันนั้น สามารถใช้ขั้นตอนเดียวกับการกำหนดราคาของคอลออปชัน โดยใช้หลักการปราศจากการค้ากำไร สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนตราสารหุ้นและตราสารหนี้ที่ทำให้พอร์ตซึ่งประกอบด้วยพุทออปชัน 1 สัญญา (เปิดสถานะชอร์ต)

สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร นั่นคือ สำหรับพอร์ต $[x,y,-1]$ ถ้า $V(0)=0$ แล้ว $V(1)=0$ ดังนั้น ถ้า $P(t)$ เป็นราคาของพุทออปชันที่เวลา $t=0,1$ จะได้

$$xS(0)+yA(0)=P(0) \tag{1.27}$$

และ $$xS(1)+yA(1)=P(1) \tag{1.28}$$

เมื่อ $P(1) = \begin{cases} P_u = \max\{K-(1+u)S(0),0\}; & \uparrow \\ P_d = \max\{K-(1+d)S(0),0\}; & \downarrow \end{cases}$

ผลที่ตามมาได้

$$x(1+u)S(0)+yA(1)=P_u \tag{1.29}$$

$$x(1+d)S(0)+yA(1)=P_d \tag{1.30}$$

โดยการแก้ระบบสมการ ได้

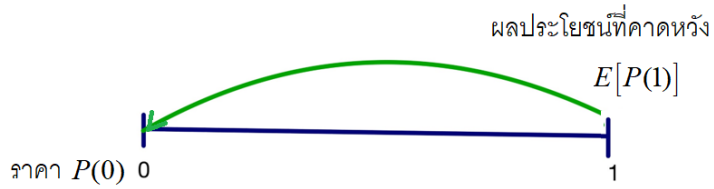
$$x=\frac{P_u-P_d}{(u-d)S(0)} \quad \text{และ} \quad y=\frac{(1+u)P_d-(1+d)P_u}{(u-d)(1+r)A(0)} \tag{1.31}$$

และแทนใน (1.27) ได้

$$P(0)=\frac{P_u-P_d}{u-d}+\frac{(1+u)P_d-(1+d)P_u}{(u-d)(1+r)} \tag{1.32}$$

และถ้าความน่าจะเป็น $p=\dfrac{r-d}{u-d}=\dfrac{e^{\delta}-d-1}{u-d}$ $(\because 1+r=e^{\delta})$ แล้วจะได้

$$P(0)=\frac{pP_u+(1-p)P_d}{e^{\delta}}=e^{-\delta}E[P(1)]=(1+r)^{-1}E[P(1)] \tag{1.33}$$



รูปที่ 1.17 *ค่าพรีเมียมของพุทออปชันคือมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของพุทออปชัน*

ตัวอย่างที่ 1.17 กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=110, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120 & ; \uparrow \\ 80 & ; \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงคำนวณค่าพรีเมียม $P(0)$

วิธีทำ ในที่นี้ $P(1) = \begin{cases} 0 & ; \uparrow \\ 20 & ; \downarrow \end{cases}$, $u = 0.2$, $d = -0.2$ และ $r = 0.1$

สามารถคำนวณค่าพรีเมียม $P(0)$ โดยใช้สูตร (1.26)

$$P(0) = \frac{P_u - P_d}{u - d} + \frac{(1+u)P_d - (1+d)P_u}{(u-d)(1+r)}$$

ได้ $P(0) = \frac{0-20}{0.2+0.2} + \frac{(1+0.2)(20)-(1-0.2)(0)}{(0.2+0.2)(1+0.1)} = 4.55$ บาท □

ตัวอย่างที่ 1.18 (ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1.17) กำหนดให้ $A(0) = 100, A(1) = 110, S(0) = 100$ บาท และ $S(1) = \begin{cases} 120 & ; \uparrow \\ 80 & ; \downarrow \end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K = 100$ จงพิจารณาว่าจะเกิดการค้ากำไรหรือไม่ หากกำหนดค่าพรีเมียม $P(0) = 3.5$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่1.17 $P(1) = \begin{cases} 0 & ; \uparrow \\ 20 & ; \downarrow \end{cases}$, $u = 0.2, d = -0.2$ และ $r = 0.1$ และราคาพรีเมียมตามทฤษฎีได้ $P(0) = 4.55$ บาท จะเห็นว่าการกำหนดค่าพรีเมียม $P(0) = 3.5$ ต่ำเกินไป จะเป็นประโยชน์ต่อนักลงทุนที่ถือสถานะลองพุทออปชัน (สถานะซื้อ) ซึ่งสามารถทำอาบิทราจ ได้ดังนี้

เริ่มต้นด้วยคำนวณ (ซื้อลงทุน) $x = \frac{P_u - P_d}{(u-d)S(0)} = \frac{0-20}{(0.4)(100)} = -0.5$ หน่วย และ

$y = \frac{(1+u)P_d - (1+d)P_u}{(u-d)(1+r)A(0)} = \frac{1.2(20)-(0.8)(0)}{(0.4)(1.1)(100)} = 0.5455$ หน่วย จากข้อมูลสามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ยืมเงินจำนวน $yA(0) = 0.5455(100) = 54.55$ บาท (เทียบเท่ากับการชอร์ตตราสารหนี้หรือยืมตราสารหนี้มาขาย)
2) เปิดสถานะลองพุทคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน 3.5 บาท
   (เพื่อรับสิทธิขายหุ้น 1 หุ้นที่ราคาใช้สิทธิ 100 บาท)
3) ซื้อหุ้น 0.5 หน่วย จ่ายเงิน 50 บาท
4) นำเงินที่เหลือ $54.55 - 3.5 - 50 = 1.05$ บาท ไปซื้อตราสารหนี้

$\therefore\ V(0) = 54.55 - 3.5 - 50 - 1.05 = 0$

ที่เวลา $t = 1$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

1) ขายหุ้น 0.5 หน่วย รับเงิน $0.5\begin{cases} 120 & ; \uparrow \\ 80 & ; \downarrow \end{cases} = \begin{cases} 60 & ; \uparrow \\ 40 & ; \downarrow \end{cases}$

2) ปิดสถานะลองของพุทออปชัน โดยรับผลประโยชน์ $P(1)=\begin{cases}0 & ;\uparrow\\ 20 & ;\downarrow\end{cases}$

3) ขายตราสารหนี้จากเงินทุนที่เหลือ 1.05 บาท รับเงิน $1.05(1.1)=1.155$ บาท

4) คืนเงิน $54.55(1.1)=60.005$ บาท

ดังนั้น $V(1)=\left(\begin{cases}60 & ;\uparrow\\ 40 & ;\downarrow\end{cases}\right)+\left(\begin{cases}0 & ;\uparrow\\ 20 & ;\downarrow\end{cases}\right)+1.155-60.005=1.15$ บาท

เป็นกำไรที่จะได้จากการทำอาบิทราจ □

1.6 การจัดการความเสี่ยงด้วยออปชัน

ในตลาดอนุพันธ์ประกอบด้วยนักลงทุนหลัก 3 ประเภท ได้แก่ 1) ผู้ค้ากำไร (arbitrager) 2) นักเก็งกำไร (speculator) และ 3) นักบริหารความเสี่ยง (hedger) โดยในส่วนของผู้ค้ากำไรนั้นจะมุ่งแสวงหาผลตอบแทนจากความไม่สมดุลของราคาสินทรัพย์ในตลาด ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 1.3 และ 1.4 สำหรับในหัวข้อนี้จะเน้นการบริหารความเสี่ยงโดยใช้ออปชันเป็นเครื่องมือสำคัญตามหลักการของการจัดการความเสี่ยง โดยจะเปรียบเทียบระดับความเสี่ยงที่ต้องเผชิญเมื่อเทียบกับค่าคาดหวังของผลตอบแทนของโครงการตั้งแต่ 2 โครงการขึ้นไป ด้วยการใช้สัมประสิทธิ์ความแปรผัน (coefficient of variation: CV) ซึ่งเป็นการวัดความผันผวนสัมพัทธ์ที่ช่วยให้สามารถเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลในแต่ละชุดได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยสูตรในการคำนวณค่า CV คือ

$$CV=\frac{\sigma_{K_V}}{|E[K_V]|}=\frac{\text{ความเสี่ยง}}{\text{ค่าคาดหวังของผลตอบแทน}}$$

ซึ่ง σ_{K_V} แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทน และ $E[K_V]$ คือค่าคาดหวังขอผลตอบแทน โดยการใช้ค่าสัมบูรณ์ของ $E[K_V]$ เพื่อให้ค่า CV มีค่าเป็นบวกเสมอ ทำให้สามารถใช้เปรียบเทียบระดับความเสี่ยงต่อผลตอบแทนได้อย่างชัดเจนและแม่นยำ เช่น หากโครงการ A มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนเท่ากับ 10% และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของผลตอบแทนเท่ากับ 5% จะได้ว่า $CV_A=\frac{5}{10}=0.5$ ขณะที่โครงการ B มีค่าคาดหวังของผลตอบแทนเท่ากับ 8% และมีความเสี่ยงเท่ากับ 8% เช่นกัน จะได้ว่า $CV_B=\frac{8}{8}=1.0$ ดังนั้น แม้โครงการ B จะให้ผลตอบแทนที่น่าสนใจ แต่

ในแง่ของความเสี่ยงสัมพัทธ์แล้ว โครงการ A มีความคุ้มค่ามากกว่าเพราะต้องเผชิญความเสี่ยงเพียง 0.5 หน่วยต่อผลตอบแทน 1 หน่วย ขณะที่โครงการ B ต้องเผชิญความเสี่ยง 1 หน่วยต่อผลตอบแทน 1 หน่วย

1.6.1 การใช้ออปชันเพิ่มความสามารถในการลงทุน

ในตลาดการเงิน ออปชัน (Option) ถือเป็นเครื่องมือทางการเงินที่ทรงพลังในการบริหารความเสี่ยง รวมถึงการเพิ่มโอกาสในการทำกำไรโดยใช้เงินลงทุนเริ่มต้นน้อยกว่าการลงทุนในสินทรัพย์อ้างอิงโดยตรง ด้วยลักษณะเฉพาะที่ให้นักลงทุนสามารถกำหนดสิทธิในการซื้อหรือขายสินทรัพย์ในอนาคตในราคาที่ตกลงไว้ล่วงหน้า ออปชันจึงเป็นทางเลือกที่น่าสนใจสำหรับทั้งนักลงทุนที่ต้องการป้องกันความเสี่ยง (hedging) และนักเก็งกำไร (speculation)

การวิเคราะห์การใช้ออปชันเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการลงทุนจะชี้ให้เห็นถึงข้อได้เปรียบในเชิงกลยุทธ์ โดยเฉพาะเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับการลงทุนในหุ้นโดยตรง ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำเสนอการคำนวณเชิงตัวเลขที่เปรียบเทียบผลตอบแทน ความเสี่ยง และสัมประสิทธิ์ความแปรผัน (coefficient of variation: CV) ระหว่าง 3 แนวทางการลงทุน ได้แก่

1) การลงทุนในหุ้นอย่างเดียว
2) การลงทุนในคอลออปชันอย่างเดียว
3) การลงทุนแบบผสมระหว่างหุ้นและคอลออปชันในสัดส่วนเท่า ๆ กัน

การเปรียบเทียบนี้จะช่วยให้นักลงทุนเห็นชัดถึงผลกระทบของการใช้เครื่องมืออนุพันธ์ต่อระดับผลตอบแทนและความเสี่ยง โดยเฉพาะในบริบทของนักลงทุนที่มีวัตถุประสงค์ในการเพิ่มผลตอบแทนสูงสุดภายใต้ข้อจำกัดของเงินลงทุนที่มีอยู่

ตัวอย่างที่ 1.19 สมมติว่าหุ้นของบริษัทหนึ่งมีราคา $S(0)=50$ และ $S(1)=\begin{cases}75\,; & p=0.8\\ 40\,; & 1-p=0.2\end{cases}$ และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ 4% ต่อคาบ และสมมติว่า นักลงทุนมีเงินลงทุน 100,000 บาท และ ราคาใช้สิทธิของคอลออปชัน 50 บาท พิจารณาการการลงทุนกรณีที่ 1) , 2) และ 3) ดังนี้

กรณีที่ 1) หากนักลงทุนในหุ้นอย่างเดียว

กรณีที่ 2) หากนักลงทุนในคอลออปชันอย่างเดียว

กรณีที่ 3) หากนักลงทุนในหุ้นและคอลออปชันอย่างละเท่า ๆ กัน

วิธีทำ จากข้อมูลจะได้ $K(1)=\dfrac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}0.5\,;\uparrow\\-0.2;\downarrow\end{cases}\Rightarrow\ u=0.5,\ d=-0.2,\ r=0.04$

คำนวณค่าอื่น ๆ ได้ ดังนี้ $C(1)=\max\{S(1)-K,0\}=\begin{cases}25\,;\uparrow\\0\ \ ;\downarrow\end{cases}$ และ ค่าพรีเมียมจากสูตร

$$C(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)}$$

ได้ $C(0)=\dfrac{25-0}{0.5+0.2}+\dfrac{(1+0.5)(0)-(1-0.2)(25)}{(0.5+0.2)(1+0.04)}\approx 8.2418$ บาท

พิจารณาการลงทุนต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1)</u> หากนักลงทุนในหุ้นอย่างเดียว

จะซื้อหุ้นที่เวลา $t=0$ ได้ทั้งหมด $\dfrac{100,000}{50}=2,000$ หน่วย และขายที่เวลา $t=1$ ได้รับเงิน

$$2,000\times S(1)=\begin{cases}150,000\,;\uparrow\\80,000\ \ ;\downarrow\end{cases}\ \text{ได้กำไร}\ \begin{cases}50,000\ \ ;\uparrow\\-20,000\ \ ;\downarrow\end{cases}$$

และ $K_V=\dfrac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\begin{cases}0.5\ \ ;\uparrow\\-0.2\ \ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}50\%\ \ ;\uparrow\\-20\%\ \ ;\downarrow\end{cases}$

เมื่อคำนวณค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน จะได้ $E[K_V]=0.8(0.5)+0.2(-0.2)=0.28=28\%$

และ ความเสี่ยง $\sigma_{K_V}=\sqrt{0.8(0.5-0.28)^2+0.2(-0.2-0.28)^2}=0.2912=29.12\ \%$

คำนวณสัมประสิทธิ์ความแปรผันหรือค่า CV (เพื่อเปรียบเทียบความเสี่ยงที่ต้องเผชิญเทียบกับค่าคาดหวังของผลตอบแทน) คำนวณจาก $CV=\dfrac{\sigma_{K_V}}{E[K_V]}=\dfrac{\text{ความเสี่ยง}}{\text{ค่าคาดหวังของผลตอบแทน}}$

ดังนั้น $CV=\dfrac{0.2912}{0.28}\approx\dfrac{1.04}{1}$ ซึ่งอาจตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 1.04%

<u>กรณีที่ 2)</u> หากนักลงทุนในคอลออปชันอย่างเดียว

นักลงทุนจะซื้อคอลออปชันที่เวลา $t=0$ ได้ทั้งหมด $\dfrac{100,000}{8.2418}\approx 12,133$ สัญญา และปิดสถานะลองของคอลออปชัน ที่เวลา $t=1$ ได้รับผลประโยชน์ $12,133\times C(1)=\begin{cases}303,325\,;\uparrow\\0\ \ ;\downarrow\end{cases}$

ได้กำไร $\begin{cases}203,325\ \ ;\uparrow\\-100,000\ \ ;\downarrow\end{cases}$ และ $K_V=\begin{cases}2.03325\ \ ;\uparrow\\-1\ \ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}203.325\%\ \ ;\uparrow\\-100\%\ \ ;\downarrow\end{cases}$

เมื่อคำนวณค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน จะได้

$$E[K_V] = 0.8(2.03325) + 0.2(-1) = 1.4266 = 142.66\%$$

และ ความเสี่ยง

$$\sigma_{K_V} = \sqrt{0.8(2.03325-1.4266)^2 + 0.2(-1-1.4266)^2} = 1.2133 = 121.33\ \%$$

ดังนั้น $CV = \frac{1.2133}{1.4266} \approx \frac{0.8505}{1}$ ซึ่งตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.8505%

<u>กรณีที่ 3)</u> หากนักลงทุนในหุ้นและคอลออปชันอย่างละเท่า ๆ กัน

ที่เวลา $t = 0$

- นำเงิน 50,000 บาท ไปซื้อหุ้นได้ $\frac{50,000}{50} = 1,000$ หน่วย
- นำเงิน 50,000 บาท ไปซื้อคอลออปชันได้ $\frac{50,000}{8.2418} \approx 6,067.67$ สัญญา

ที่เวลา $t = 1$

- ขายหุ้นได้รับเงิน $1,000 \times S(1) = \begin{cases} 75,000 & ;\uparrow \\ 40,000 & ;\downarrow \end{cases}$ บาท
- ปิดสถานะลองคอลออปชันรับผลประโยชน์

$$6,067.67 \times C(1) = 6,067.67 \times \begin{cases} 25 & ;\uparrow \\ 0 & ;\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 151,666.70 & ;\uparrow \\ 0 & ;\downarrow \end{cases} \text{ บาท}$$

ดังนั้นได้กำไร $\begin{cases} 75,000 & ;\uparrow \\ 40,000 & ;\downarrow \end{cases} + \begin{cases} 151,666.70 & ;\uparrow \\ 0 & ;\downarrow \end{cases} - 100,000 = \begin{cases} 126,666.70 & ;\uparrow \\ -60,000 & ;\downarrow \end{cases}$

และ $K_V = \begin{cases} 1.266667 & ;\uparrow \\ -0.6 & ;\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 126.6667\% & ;\uparrow \\ -60\% & ;\downarrow \end{cases}$

เมื่อคำนวณค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน จะได้

$$E[K_V] = 0.8(1.266667) + 0.2(-0.6) = 0.8933 = 89.33\%$$

และ ความเสี่ยง

$$\sigma_{K_V} = \sqrt{0.8(1.267-0.893)^2 + 0.2(-0.6-0.893)^2} = 0.7467 = 74.67\ \%$$

ดังนั้น $CV = \frac{0.7467}{0.8933} \approx \frac{0.8358}{1}$ ซึ่งอาจตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.8358% □

เมื่อเปรียบเทียบการลงทุนทั้ง 3 กรณี จะเห็นว่านักลงทุนประเภทนักเก็งกำไรย่อมชอบการลงทุนในกรณีที่ 2 และ 3 เนื่องจากมีโอกาสได้ผลตอบแทนที่สูงกว่าการลงทุนในกรณีที่ 1 แต่อย่างไรก็ตามก็

ต้องยอมรับความเสี่ยงที่สูงกว่าได้ ดังนั้นจะเห็นสมบัติที่สำคัญประการหนึ่งของออปชันคือสามารถเป็นเครื่องมือลงทุนแบบเก็งกำไรได้ซึ่งมีโอกาสได้ผลตอบแทนที่สูงกว่าการลงทุนกับสินค้าอ้างอิงนั้นโดยตรงแต่ก็จะมีความเสี่ยงสูงเพิ่มขึ้นเช่นกัน

1.6.2 การใช้ออปชันในการบริหารความเสี่ยง

ในสภาวะตลาดที่ราคาสินทรัพย์ผันผวนอย่างไม่แน่นอน นักลงทุนต้องเผชิญกับความเสี่ยงจากการรอคอยเพื่อเข้าซื้อสินทรัพย์ในอนาคต โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อมีความเชื่อว่าราคาจะปรับตัวขึ้นแต่ยังไม่สามารถลงทุนได้ในทันที หากราคาสูงขึ้นเกินกว่าที่คาด การเข้าซื้อในภายหลังอาจต้องใช้ต้นทุนที่สูงเกินไป ทำให้เสียโอกาสในการทำกำไร

เพื่อรับมือกับสถานการณ์เช่นนี้ ออปชันกลายเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์อย่างมากในการ**ป้องกันความเสี่ยงจากความไม่แน่นอนของราคา** โดยให้นักลงทุนมี "สิทธิ" แต่ไม่จำเป็นต้อง "ผูกพัน" ที่จะซื้อสินทรัพย์ในอนาคตในราคาที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ทำให้นักลงทุนสามารถล็อกต้นทุนการซื้อได้แม้ยังไม่มีเงินลงทุนเต็มจำนวนในปัจจุบัน

ตัวอย่างต่อไปนี้จะนำเสนอสถานการณ์ที่นักลงทุนมีเงินลงทุนอยู่จำนวนหนึ่ง แต่ต้องตัดสินใจระหว่างการรอซื้อหุ้นในอนาคตโดยไม่มีการป้องกันความเสี่ยง กับการใช้กลยุทธ์ที่ผสมผสานการลงทุนในตราสารหนี้ร่วมกับการซื้อออปชันเพื่อรักษาสิทธิในการซื้อหุ้นในราคาที่กำหนด

จากแนวคิดข้างต้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.20 (จากตัวอย่างที่ 1.19) สมมติว่าหุ้นของบริษัทหนึ่งมีราคา $S(0)=50$ และ $S(1)=\begin{cases}75; & p=0.8\\ 40; & 1-p=0.2\end{cases}$ และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ 4% ต่อคาบ และสมมติว่าปัจจุบันนักลงทุนมีเงินลงทุน 100,000 บาท และ ราคาใช้สิทธิของคอลออปชัน \$50\$ บาท พิจารณาการใช้ออปชันในการบริหารความเสี่ยง ดังนี้

กรณีที่ 1) นำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้และรอคอยเวลาซื้อหุ้นในอนาคต

กรณีที่ 2) นำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้ ในขณะเดียวกันก็ยืมเงินซื้อคอลออปชันที่ปัจจุบันและซื้อหุ้นในอนาคต (สมมติว่า นักลงทุนสามารถยืมเงินซื้อออปชันเพื่อใช้สิทธิซื้อหุ้นที่จำนวนต่าง ๆ ได้)

วิธีทำ กรณีที่ 1) นำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้และรอคอยเวลาซื้อหุ้นในอนาคต

ที่เวลา $t=0$

5) นำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้

ที่เวลา $t=1$

- รับเงินจากการลงทุนในตราสารหนี้ $100,000(1.04)=104,000$ บาท
- นำเงิน 104,000 บาท ไปซื้อหุ้นที่ราคา $S(1)=\begin{cases}75\ ; & p=0.8\\ 40\ ; & 1-p=0.2\end{cases}$

ดังนั้น นักลงทุนจะสามารถซื้อหุ้นได้ $N=\dfrac{104,000}{S(1)}=\begin{cases}\dfrac{104,000}{70}=1,387; & p=0.8\\ \dfrac{104,000}{40}=2,600\ ; & 1-p=0.2\end{cases}$ หุ้น

ค่าคาดหวังของจำนวนหุ้นที่ซื้อได้ $E[N]=1,387(0.8)+2,600(0.2)=1,629$ หุ้น

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_N=\sqrt{0.8(1,387-1,629)^2+0.2(2,600-1,629)^2}=485.20$ หุ้น

คำนวณค่า $CV=\dfrac{485.20}{1,629}\approx\dfrac{0.2978}{1}$ ซึ่งอาจตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการซื้อหุ้นเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.2978%

<u>กรณีที่ 2)</u> นำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้ ในขณะเดียวกันก็ยืมเงินซื้อออปชันที่ปัจจุบันและซื้อหุ้นในอนาคต (สมมติว่านักลงทุนสามารถยืมเงินซื้อออปชันเพื่อใช้สิทธิซื้อหุ้นที่จำนวนต่าง ๆ ได้)

คำนวณหาราคาหุ้นสุทธิหลังใช้สิทธิจากคอลออปชัน $\bar{S}(1)$

ที่เวลา $t=0$ (พิจารณา การใช้ออปชัน จากตัวอย่างที่ 1.16 $C(0)\approx 8.24$)

6) ยืมเงิน 8.24 บาท เพื่อซื้อคอลออปชัน 1 สัญญาที่ให้สิทธิซื้อหุ้นที่ราคา 50 บาท

ที่เวลา $t=1$

7) ปิดสถานะคอลออปชันรับผลประโยชน์ $C(1)=\begin{cases}25\ ; & \uparrow\\ 0\ ; & \downarrow\end{cases}$ บาท

8) คืนเงินที่กู้มาพร้อมดอกเบี้ย $8.24(1+0.04)=8.57$ บาท

$\therefore$ ผลประโยชน์คงเหลือ เท่ากับ $C(1)-8.57$

ดังนั้น ราคาหุ้นสุทธิหลังใช้สิทธิจากคอลออปชัน

$$\bar{S}(1) = S(1) - (C(1) - 8.57) = \begin{cases} 75;\uparrow \\ 40;\downarrow \end{cases} - \begin{cases} 25;\uparrow \\ 0\ ;\downarrow \end{cases} + 8.57 = \begin{cases} 58.57;\uparrow \\ 48.57;\downarrow \end{cases}$$ บาท

จากการนำเงินไป 100,000 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้ก่อนนักลงทุนจะมีเงิน 104,000 บาทเพื่อซื้อหุ้น ดังนั้นจะซื้อหุ้นได้ทั้งหมด $N = \dfrac{104,000}{\bar{S}(1)} = \begin{cases} \dfrac{104,000}{58.57};\uparrow \\ \dfrac{104,000}{48.57};\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 1,776\ ;\uparrow \\ 2,141\ ;\downarrow \end{cases}$ หน่วย

ค่าคาดหวังของจำนวนหุ้นที่ซื้อได้ $E[N] = 1,776(0.8) + 2,141(0.2) = 1,849$ หุ้น

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_N = \sqrt{0.8(1,776-1,849)^2 + 0.2(2,141-1,849)^2} = 146$ หุ้น

คำนวณค่า $CV = \dfrac{146}{1,849} \approx \dfrac{0.0791}{1}$ ซึ่งอาจตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการซื้อหุ้นเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.0791% □

เมื่อเปรียบเทียบการลงทุนทั้ง 2 กรณี จะเห็นว่าในกรณีที่ 1 นั้น ในกรณีที่หุ้นขึ้นนักลงทุนจะซื้อหุ้นได้แพงกว่าและได้จำนวนหุ้นน้อยกว่าในกรณีที่ 2 แต่ในกรณีที่หุ้นลงในกรณีที่ 2 จะซื้อหุ้นในราคาที่แพงกว่าและได้จำนวนหุ้นน้อยกว่าในกรณีที่ 1 ดังนั้นคอลออปชันก็จะช่วยให้ซื้อหุ้นได้ถูกลงในกรณีที่หุ้นขึ้นนั่นเอง กรณีนี้เป็นการใช้ออปชันในการจัดการความเสี่ยงนั่นเอง นอกจากนี้จากตัวอย่างจะเห็นว่าค่าคาดหวังของจำนวนหุ้นที่ซื้อได้ของกรณีที่ 2 สูงกว่ากรณีที่ 1) และความผันผวนของจำนวนที่หุ้นที่ซื้อได้ซึ่งวัดจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก็สูงกว่าในกรณีที่ 1 เช่นกัน

ในกรณีที่นักลงทุนคาดว่าราคาหุ้นจะลดลง การขายหุ้นล่วงหน้า (short selling) เป็นกลยุทธ์ที่สามารถสร้างผลตอบแทนได้ แต่ก็มีความเสี่ยงหากราคาหุ้นกลับปรับตัวสูงขึ้น การใช้พุทออปชันจึงช่วยป้องกันความเสี่ยงจากขาดทุนในสถานการณ์ดังกล่าว ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงบทบาทของพุทออปชันในการจำกัดความเสี่ยงจากการขายหุ้นที่ยืมมา

ตัวอย่างที่ 1.21 สมมติราคาปัจจุบันของหุ้นบริษัทแห่งหนึ่ง คือ $S(0) = 50$ ถ้า $S(1) = \begin{cases} 60; & p = 0.2 \\ 35; & 1-p = 0.8 \end{cases}$ และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ 4% ต่อคาบราคาใช้สิทธิของพุทออปชัน 55 บาท แล้วจงพิจารณาในแต่ละกรณีหากนักลงทุนลงทุนโดยยืมหุ้นมาขาย 100,000 หุ้น

กรณีที่ 1) ยืมหุ้นมาขาย และนำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้

กรณีที่ 2) ยืมหุ้นมาขาย และนำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้และซื้อพุทออปชัน

วิธีทำ กรณีที่ 1) ยืมหุ้นมาขาย และนำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้

ที่เวลา $t=0$, ทำธุรกรรม ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 100,000 หุ้น รับเงิน $100,000S(0)=100,000(50)=5,000,000$ บาท

2) นำเงินไปลงทุนตราสารหนี้ 5,000,000 บาท

$\therefore V(0)=0$

ที่เวลา $t=1$, ทำธุรกรรม ดังนี้

1) รับเงินจากการลงทุนในตราสารหนี้ $5,000,000(1.04)=5,200,000$ บาท

2) ซื้อหุ้นคืน 100,000 หุ้น จ่ายเงิน $100,000S(1)=100,000\begin{cases}60\ ;\uparrow\\35\ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}6,000,000\ ;\uparrow\\3,500,000\ ;\downarrow\end{cases}$

$$\therefore V(1)=5,200,000-\begin{cases}6,000,000\ ;\uparrow\\3,500,000\ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}-800,000\ ;\uparrow\\1,700,000\ ;\downarrow\end{cases}$$

คำนวณหาผลตอบแทน $R=V(1)-V(0)=\begin{cases}-800,000\ ;\uparrow\\1,700,000\ ;\downarrow\end{cases}$

ดังนั้น ค่าคาดหวังของผลตอบแทน $E[R]=-800,000(0.2)+1,700,000(0.8)=1,200,000$ บาท

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sigma_R=\sqrt{0.8(-800,000-1,200,000)^2+0.2(1,700,000-1,200,000)^2}=1,000,000$ หุ้น

คำนวณ $CV=\dfrac{1,000,000}{1,200,000}\approx\dfrac{0.8333}{1}$ ซึ่งตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.8333%

กรณีที่ 2) ยืมหุ้นมาขาย และนำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้และซื้อพุทออปชัน

จากโจทย์ กำหนด $r=0.04$, $K(1)=\dfrac{S(1)-S(0)}{S(0)}=\begin{cases}0.2\ ;\uparrow\\-0.3\ ;\downarrow\end{cases}$,

$$P(1)=\max\{K-S(1),0\}=\begin{cases}0\ ;\uparrow\\20\ ;\downarrow\end{cases},$$

คำนวณราคาพรีเมียมของพุทออปชัน $P(0)=\dfrac{P_u-P_d}{u-d}+\dfrac{(1+u)P_d-(1+d)P_u}{(u-d)(1+r)}$

$$= \frac{0-20}{0.2-(-0.3)} + \frac{(1.2)(20)-(0.7)(0)}{(0.5)(1.04)} \approx 6.15 \quad \text{บาท}$$

ที่เวลา $t=0$, ทำธุรกรรม ดังนี้

1) ยืมหุ้นมาขาย 100,000 หุ้น รับเงิน $100{,}000S(0) = 100{,}000(50) = 5{,}000{,}000$ บาท

2) นำเงิน 2,500,000 บาท ไปซื้อตราสารหนี้

3) นำเงิน 2,500,000 บาท ไปซื้อพุทออปชัน จะซื้อได้ $\frac{2{,}500{,}000}{6.15} \approx 406{,}504$ สัญญา

$\therefore V(0) = 0$

ที่เวลา $t=1$, ทำธุรกรรม ดังนี้

1) รับเงินจากการลงทุนในตราสารหนี้ $2{,}500{,}000(1.04) = 2{,}600{,}000$ บาท

2) ปิดสถานะพุทออปชัน โดยรับผลประโยชน์ $406{,}504P(1) = \begin{cases} 0 & ;\uparrow \\ 8{,}130{,}000 & ;\downarrow \end{cases}$ บาท

3) ซื้อหุ้นคืน 100,000 หุ้น จ่ายเงิน $100{,}000S(1) = 100{,}000\begin{cases} 60 & ;\uparrow \\ 35 & ;\downarrow \end{cases} = \begin{cases} 6{,}000{,}000 & ;\uparrow \\ 3{,}500{,}000 & ;\downarrow \end{cases}$

$$\therefore V(1) = 2{,}600{,}000 + \begin{cases} 0 & ;\uparrow \\ 8{,}130{,}080 & ;\downarrow \end{cases} - \begin{cases} 6{,}000{,}000 & ;\uparrow \\ 3{,}500{,}000 & ;\downarrow \end{cases} = \begin{cases} -3{,}400{,}000 & ;\uparrow \\ 7{,}230{,}080 & ;\downarrow \end{cases}$$

คำนวณหาผลตอบแทน $R = V(1) - V(0) = \begin{cases} -3{,}400{,}000 & ;\uparrow \\ 7{,}230{,}080 & ;\downarrow \end{cases}$

ดังนั้นค่าคาดหวังของผลตอบแทน

$E[R] = (-3{,}400{,}000)(0.2) + (7{,}230{,}080)(0.8) = 4{,}764{,}064$ บาท

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$\sigma_R = \sqrt{0.2(-3{,}400{,}000 - 4{,}764{,}064)^2 + 0.8(7{,}230{,}080 - 4{,}764{,}064)^2} \approx 4{,}265{,}604$ บาท

คำนวณค่า $CV = \frac{4{,}265{,}604}{4{,}764{,}064} \approx \frac{0.8954}{1}$ ซึ่งอาจตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.8954% □

ตัวอย่างที่ 1.22 (ข้อมูลจากตัวอย่างที่ 1.21) สมมติราคาปัจจุบันของหุ้นบริษัทแห่งหนึ่ง คือ $S(0) = 50$ ถ้า $S(1) = \begin{cases} 60 ; & p = 0.2 \\ 35 ; & 1-p = 0.8 \end{cases}$ และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ 4 % ต่อคาบ ราคาใช้

สิทธิของพุทออปชัน 55 บาท แล้วจงพิจารณาในแต่ละกรณีหากนักลงทุนต้องการขายหุ้นจำนวน 100,000 หุ้นที่อนาคต

กรณีที่ 1) รอคอยเวลาขายในอนาคต

กรณีที่ 2) นักลงทุนยืมเงินซื้อพุทออปชันที่ปัจจุบันและขายหุ้นในอนาคตที่ราคาใช้สิทธิ

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.21, ค่าพรีเมียม $P(0)=6.15$ บาท

พิจารณาการลงทุนต่อไปนี้

กรณีที่ 1) รอคอยเวลาขายในอนาคต

ที่เวลา $t=0$, มีหุ้น 100,000 หุ้น มูลค่า $100{,}000(50)=5{,}000{,}000$ บาท

$$\therefore V(0)=5{,}000{,}000$$

ที่เวลา $t=1$,

ขายหุ้น 100,000 หุ้นที่ราคา $S(1)=\begin{cases}60\ ;\uparrow\\35\ ;\downarrow\end{cases}$ รับเงิน $100{,}000\begin{cases}60\ ;\uparrow\\35\ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}6{,}000{,}000\ ;\uparrow\\3{,}500{,}000\ ;\downarrow\end{cases}$ บาท

$$\therefore V(1)=\begin{cases}6{,}000{,}000\ ;\uparrow\\3{,}500{,}000\ ;\downarrow\end{cases}$$

ดังนั้น อัตราผลตอบแทน $K_V=\dfrac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\begin{cases}\dfrac{1{,}000{,}000}{5{,}000{,}000}\ ;\uparrow\\-\dfrac{1{,}500{,}000}{5{,}000{,}000}\ ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}0.2\ ;\uparrow\\-0.3;\downarrow\end{cases}$

ค่าคาดหวังของผลตอบแทน $E[K_V]=0.2(0.2)+(-0.3)(0.8)=-0.20=-20\%$

ความเสี่ยง $\sigma_{K_V}=\sqrt{0.2(0.2+0.2)^2+0.8(-0.3+0.2)^2}=0.04=4\ \%$

คำนวณ $CV=\dfrac{0.04}{|-0.2|}\approx\dfrac{0.2}{1}$ ซึ่งตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 0.02%

<u>กรณีที่ 2)</u> นักลงทุนยืมเงินซื้อพุทออปชันที่ปัจจุบันและขายหุ้นในอนาคตที่ราคาใช้สิทธิ

(ใช้พุทออปชันในการบริหารความเสี่ยง)

ที่เวลา $t=0$

ยืมเงิน 6.15 บาทเพื่อซื้อพุทออปชัน 1 สัญญาที่ให้สิทธิขายหุ้นที่ราคา 55 บาท ในอนาคต

ที่เวลา $t=1$

1) ปิดสถานะพุทออปชันโดยรับผลประโยชน์ $P(1)=\begin{cases}0\ ;\uparrow\\20\ ;\downarrow\end{cases}$ บาท

2) คืนเงินที่กู้มาพร้อมดอกเบี้ย $6.15(1+0.04)=6.40$ บาท

ผลประโยชน์คงเหลือ เท่ากับ $P(1)-6.40$ บาท

ดังนั้น ราคาขายหุ้นสุทธิหลังใช้สิทธิ $\overline{S}(1)=S(1)+(P(1)-6.40)$

$$=\begin{cases}60 & ;\uparrow\\ 35 & ;\downarrow\end{cases}+\begin{cases}0 & ;\uparrow\\ 20 & ;\downarrow\end{cases}-6.40=\begin{cases}53.60 & ;\uparrow\\ 48.60 & ;\downarrow\end{cases}\text{ บาท}$$

ดังนั้น ขายหุ้น 100,000 หุ้น ได้เงินทั้งหมด $100{,}000\overline{S}(1)=\begin{cases}5{,}360{,}000 & ;\uparrow\\ 4{,}860{,}000 & ;\downarrow\end{cases}$ บาท

อัตราผลตอบแทน $K_V=\dfrac{V(1)-V(0)}{V(0)}=\begin{cases}\dfrac{360{,}000}{5{,}000{,}000} & ;\uparrow\\ -\dfrac{140{,}000}{5{,}000{,}000} & ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}0.072 & ;\uparrow\\ -0.028 & ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}7.2\ \% & ;\uparrow\\ -2.8\ \% & ;\downarrow\end{cases}$

ค่าคาดหวังของผลตอบแทน $E[K_V]=0.2(0.072)+(0.8)(-0.028)=-0.008=-0.8\ \%$

ความเสี่ยง $\sigma_{K_V}=\sqrt{0.2(0.072+0.008)^2+0.8(-0.028+0.008)^2}=0.4=40\ \%$

คำนวณ $CV=\dfrac{0.4}{|-0.008|}=\dfrac{50}{1}$ ซึ่งตีความได้ว่าหากนักลงทุนต้องการผลตอบแทนเพิ่มขึ้น 1% นักลงทุนจะต้องเผชิญความเสี่ยงเพิ่มขึ้น 50% □

เมื่อเปรียบเทียบการลงทุนทั้ง 2 กรณี จะเห็นว่า การซื้อออปชันช่วยลดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงราคา กล่าวคือในช่วงที่ราคาหุ้นตกลง นักทุนจะสามารถขายหุ้นในได้ในราคาที่สูงกว่าราคาตลาด จากตัวอย่างที่ 1.21-1.22 ทำให้สรุปได้ว่าในแง่ของการเป็นผู้ป้องกันความเสี่ยง หรือนักบริหารความเสี่ยงความเสี่ยง การซื้อออปชันเสมือนเป็นการทำประกันราคาของสินทรัพย์อ้างอิง โดยค่าพรีเมียมเปรียบเสมือน เบี้ยประกันและค่าธรรมเนียม ซึ่งถือเป็นต้นทุนที่ผู้ป้องกันความเสี่ยงยินดีจ่ายนั่นเอง

บทสรุปท้ายบทที่ 1

ในบทที่ 1 นี้ได้นำเสนอแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการจำลองราคาตลาดอย่างง่าย (simple market model) โดยเน้นการทำความเข้าใจพื้นฐานของตราสารอนุพันธ์ (derivatives) ซึ่งเป็นเครื่องมือทางการเงินที่มูลค่าขึ้นอยู่กับสินทรัพย์อ้างอิง เช่น หุ้น พันธบัตร และสินค้าโภคภัณฑ์ ตราสารเหล่านี้มีบทบาทสำคัญในการบริหารความเสี่ยงและการสร้างผลตอบแทนในตลาดการเงิน เนื้อหา

ในบทนี้ยังครอบคลุมถึงสมมติฐานและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในแบบจำลอง เช่น สมมติฐานเรื่องตลาดที่มีประสิทธิภาพและไม่มีโอกาสทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage-free) ซึ่งช่วยให้สามารถคำนวณราคาสินทรัพย์และวิเคราะห์ได้อย่างเป็นระบบ

การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด (forward price) ถูกอธิบายโดยการใช้ปัจจัยสำคัญ เช่น อัตราดอกเบี้ยและระยะเวลาที่เหลือจนถึงวันส่งมอบ ทำให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยเหล่านี้กับการตั้งราคาล่วงหน้า นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการกำหนดราคาออปชัน (option pricing) โดยใช้แบบจำลองหนึ่งขั้นเวลา (one-step binomial model) ซึ่งนำเสนอการคำนวณค่าคาดหวังของราคาสินทรัพย์ในอนาคตและการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นในการคำนวณ

หัวข้อสุดท้ายเน้นถึงการใช้ตราสารออปชันในการจัดการความเสี่ยง (hedging) โดยสามารถสร้างกลยุทธ์ที่ช่วยลดผลกระทบจากความผันผวนของราคาสินทรัพย์ได้ เนื้อหาที่กล่าวมานี้เป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาแบบจำลองที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นในบทถัดไป ซึ่งจะเพิ่มความลึกซึ้งในด้านการวิเคราะห์และการประยุกต์ใช้ในตลาดการเงินจริงอย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Boyle, P. P. (1986). Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal, 3*(1), 7–12.

[3] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229–263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[4] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.

[5] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science, 4*(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

[6] Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory, 13*(3), 341–360. https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6

[7] Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *The Bell Journal of Economics, 7*(2), 407–425. https://doi.org/10.2307/3003264

[8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21621-2

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1) ตราสารหนี้ฉบับหนึ่งมีราคาซื้อตอนต้นปี 250 บาทต่อตราสาร อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี และหุ้น A มีราคาซื้อตอนต้นปี 47 บาท ตอนสิ้นปีคาดว่าหุ้น A จะมีราคา

$$S(1)=\begin{cases}54\,; & p=0.8\\ 45\,; & 1-p=0.2\end{cases}$$

จงคำนวณหา $K(1), K_A, E\left[K(1)\right] E\left[K_A\right], \sigma_{K(1)}$ และ σ_{K_A}

2) ตราสารหนี้ฉบับหนึ่งมีราคาซื้อตอนต้นปี 150 บาทต่อหน่วย อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี และหุ้น BBB มีราคาซื้อตอนต้นปี 160 บาท ตอนสิ้นปีคาดว่าหุ้น BBB จะมีราคา $S(1)=\begin{cases}180\,; & p=0.7\\ 120\,; & 1-p=0.3\end{cases}$ กำหนดให้ลงทุนซื้อหุ้น 20 หน่วย และตราสารหนี้ 10 หน่วย จงหา K_V, ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน $E[K_V]$ และ ความเสี่ยงของการลงทุน σ_{K_V}

3) กำหนดให้ราคาตราสารหนี้เป็นดังนี้ $A(0)=120$ บาท มีอัตราดอกเบี้ย 10% ต่องวด และ ราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งเป็นดังนี้ $S(0)=90$ และ $S(1)=\begin{cases}100\,; & \uparrow\\ 70\; ; & \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=95$ จงคำนวณหาค่าพรีเมียม $C(0)$ ของคอลออปชัน

4) กำหนดให้ราคาตราสารหนี้เป็นดังนี้ $A(0)=180$ บาท, $A(1)=200$ และ ราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งเป็นดังนี้ $S(0)=75$ และ $S(1)=\begin{cases}90 & ;\uparrow\\ 60 & ;\downarrow\end{cases}$ กำหนดให้ลงทุนซื้อหุ้น x หน่วย และตราสารหนี้ y หน่วย ถ้ามูลค่าของพอร์ตการลงทุนที่เวลา $t=1$ เป็น $V(1)=\begin{cases}1,740 & ;\uparrow\\ 1,560 & ;\downarrow\end{cases}$ จงหามูลค่าของพอร์ตการลงทุนที่เวลา $t=0$

5) กำหนดให้ราคาตราสารหนี้เป็นดังนี้ $A(0)=90$ บาท, $A(1)=100$ และ ราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งเป็นดังนี้ $S(0)=100$ และ $K(1)=\begin{cases}0.2 & ;\uparrow\\ -0.1 & ;\downarrow\end{cases}$ จงคำนวณหาค่าพรีเมียม $C(0)$ ของคอลออปชัน พร้อม

ทั้งแสดงด้วยว่า $C(0)$ ที่คำนวณสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร กำหนดราคาใช้สิทธิ์เท่ากับ 110 บาท

6) สำหรับแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคของราคาหุ้น S กำหนดให้ $u=0.1$, $d=-0.1$ และอัตราดอกเบี้ยต่อคาบของตราสารหนี้ A เท่ากับ 0.05 จงเขียนต้นไม้แสดงแบบจำลองราคาของคอลออปชัน 1 คาบเวลาซึ่งสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร เมื่อกำหนด $A(0)=100$, $S(0)=100$ และกำหนดราคาใช้สิทธิ์เท่ากับ 112 บาท

7) สมมติให้ราคาปัจจุบัน $A(0)$ ของตราสารหนี้ชนิดหนึ่ง เท่ากับ 200 บาท ต่อหนึ่งหน่วย โดยมีอัตราดอกเบี้ย 8 % ต่อปี และราคาปัจจุบัน $S(0)$ ของหุ้นชนิดหนึ่ง เท่ากับ 100 บาท จงคำนวณราคาคอลออปชัน $C(0)$ ต่อหนึ่งสัญญาของหุ้นชนิดนี้ โดยมีราคาใช้สิทธิ์ เท่ากับ 105 บาท ซึ่งจะไม่ทำให้เกิดการค้ากำไร คำนวณผลประโยชน์ ของคอลออปชัน $C(1)$ ด้วย พร้อมทั้งคำนวณอัตรากำไรจากออปชัน ถ้าราคาของหุ้นชนิดในอนาคต $S(1)=\begin{cases}140\ ; & p=0.4\\ 60\ ; & 1-p=0.6\end{cases}$

8) สมมติให้ราคาปัจจุบัน $A(0)$ ของตราสารหนี้ชนิดหนึ่ง เท่ากับ 100 บาท โดยมีอัตราดอกเบี้ย 10 % ต่อปี ราคาปัจจุบัน $S(0)$ ของหุ้นชนิดหนึ่ง เท่ากับ 80 บาท และ ราคาของหุ้นชนิดในอนาคต $S(1)=\begin{cases}110; & p=0.7\\ 50\ ; & 1-p=0.3\end{cases}$ จงพิจารณาว่าเพื่อเป็นการบริหารความเสี่ยงนักลงทุน ควรเลือกซื้อออปชันชนิดใด กำหนดราคาใช้สิทธิ์เท่ากับ 80 บาท พร้อมทั้งคำนวณ ค่าความเสี่ยงของการลงทุนดังกล่าว โดยสมมติว่านักลงทุนมีเงินลงทุน ณ ปัจจุบัน จำนวน 150,000 บาท โดยแบ่งเงิน ลงทุนเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กันลงทุนในหุ้น ออปชันและตราสารหนี้

9) สมมติให้ราคาของตราสารหนี้ฉบับหนึ่งตอนต้นปีเท่ากับ 1,000 บาท โดยมีอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปี และราคาหุ้นตอนต้นปีเท่ากับ 51 บาท จงอธิบายพร้อมแสดงเหตุผลให้เห็นชัดว่าสำหรับสัญญาฟอร์เวิร์ดจะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการค้ากำไร ถ้ากำหนดราคาที่วันส่งมอบ เท่ากับ 56 บาท (ส่งมอบสิ้นปี)

10) กำหนดให้ $A(0)=100, A(1)=108, S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}120 ; \uparrow \\ 90 \ ; \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=110$ จงอธิบายพร้อมแสดงเหตุผลให้เห็นชัดว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการทำกำไร โดยไม่มีความเสี่ยง ถ้ากำหนดราคาพรีเมียมของพุทออปชัน $P(0)=9.5$ บาท

11) กำหนดอัตราดอกเบี้ยของการลงทุนในตราสารหนี้และอัตราดอกเบี้ยสำหรับการกู้ยืมเท่ากับร้อยละ 12 ต่อปี $S(0)=100$ บาท และ $S(1)=\begin{cases}130 \ ; \uparrow \\ 105 \ ; \downarrow\end{cases}$ กำหนดราคาใช้สิทธิ $K=100$ จงอธิบายพร้อมแสดงเหตุผลให้เห็นชัดว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการทำกำไร โดยไม่มีความเสี่ยง ถ้ากำหนดราคาพรีเมียมของคอลออปชันเท่ากับ 8 บาท

12) สมมติให้ราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ชนิดหนึ่ง เท่ากับ 50 บาท และราคาตราสารหนี้อีก 3 เดือนข้างหน้าเท่ากับ 53 ถ้าราคาปัจจุบันของหุ้นของบริษัทหนึ่ง เท่ากับ 80 บาท และ และคาดการณ์ว่าอีก 3 เดือนข้างหน้าราคาของหุ้นตัวนี้จะเคลื่อนที่เป็น 90 บาท และ 60 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 30% และ 70% ตามลำดับ

12.1) จงใช้ค่าคาดหวังของราคาหุ้นในอนาคต $E[S(1)]$ ในการวิเคราะห์แนวโน้มของการเคลื่อนที่ของราคาหุ้น

12.2) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้นอ้างอิงที่สอดคล้องกับ no arbitrage principle

12.3) จากผลการวิเคราะห์แนวโน้มการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นในข้อ 1.1

12.3.1) ถ้านักลงทุนมีเงินอยู่ 1,000,000 บาทและต้องการซื้อหุ้นในอนาคต นักลงทุนจำเป็นต้องใช้เครื่องมือจำพวกสัญญาซื้อขายล่วงหน้าในการบริหารความเสี่ยงหรือไม่ ถ้าจำเป็นต้องใช้และต้องใช้สัญญาฟอร์เวิร์ดควรเปิดสถานะสัญญาฟอร์เวิร์ดประเภทใด (long forward หรือ short forward) เพราะอะไร

12.3.2) ถ้าปัจจุบันนักลงทุนมีหุ้นจำนวน 100,000 หุ้นและต้องการขายหุ้นในอนาคต นักลงทุนจำเป็นต้องใช้เครื่องมือจำพวกสัญญาซื้อขายล่วงหน้าในการบริหารความเสี่ยงหรือไม่ ถ้า

จำเป็นต้องใช้และต้องใช้สัญญาฟอร์เวิร์ดควรเปิดสถานะสัญญาฟอร์เวิร์ดประเภทใด (long forward หรือ short forward) เพราะอะไร

(แนะนำ ลองพิจารณาจากค่าคาดหวัง ความเสี่ยงและ ค่า cv)

13) กำหนดอัตราดอกเบี้ยของการลงทุนในตราสารหนี้และอัตราดอกเบี้ยสำหรับการกู้ยืมเท่ากับร้อยละ 5 ต่อปี ถ้าราคาปัจจุบันของหุ้นของบริษัทหนึ่ง เท่ากับ 50 บาท และคาดการณ์ว่าอีก 3 เดือนข้างหน้าราคาของหุ้นตัวนี้จะเคลื่อนที่เป็น 75 บาท และ 30 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 80 % และ 20% ตามลำดับ

13.1) จงใช้ค่าคาดหวังของราคาหุ้นในอนาคต $E[S(1)]$ ในการวิเคราะห์แนวโน้มของการเคลื่อนที่ของราคาหุ้น

13.2) จงคำนวณราคาพรีเมียมคอลออปชัน และราคาพรีเมียมของพุทออปชัน เมื่อกำหนดราคาใช้สิทธิของออปชัน $K = S(0)$

13.3) จากผลการวิเคราะห์แนวโน้มการเคลื่อนที่ของราคาหุ้นในข้อ 13.1

13.3.1) ถ้านักลงทุนมีเงินอยู่ 1,000,000 บาทและต้องการซื้อหุ้นในอนาคต นักลงทุนจำเป็นต้องใช้เครื่องมือจำพวกสัญญาซื้อขายล่วงหน้าในการบริหารความเสี่ยงหรือไม่ ถ้าจำเป็นต้องใช้และต้องใช้ออปชันควรเลือกเปิดสถานะสัญญาออปชันประเภทใด (คอลออปชัน หรือ พุทออปชัน) เพราะอะไร

13.3.2) ถ้าปัจจุบันนักลงทุนมีหุ้นจำนวน 100,000 หุ้นและต้องการขายหุ้นในอนาคต นักลงทุนจำเป็นต้องใช้เครื่องมือจำพวกสัญญาซื้อขายล่วงหน้าในการบริหารความเสี่ยงหรือไม่ ถ้าจำเป็นต้องใช้และต้องใช้ออปชันควรเลือกเปิดสถานะสัญญาออปชันประเภทใด (คอลออปชันหรือพุทออปชัน) เพราะอะไร (แนะนำ ลองพิจารณาจากค่าคาดหวัง ความเสี่ยงและ ค่า cv)

14) สมมติให้ราคาปัจจุบัน $A(0)$ ของตราสารหนี้ชนิดหนึ่ง เท่ากับ 100 บาท และราคาอนาคต $A(1) = 105$ บาท และราคาปัจจุบันของหุ้นบริษัทหนึ่ง $S(0) = 100$ บาท และราคาอนาคต

$$S(1) = \begin{cases} 130 \text{ ; ความน่าจะเป็น } & p \\ 70 \text{ ; ความน่าจะเป็น } & 1-p \end{cases}$$

14.1) จงหาความน่าจะเป็นความ p ซึ่งทำให้ $P(0) = (1+r)^{-1} E[P(1)]$

14.2) จงคำนวณราคาพรีเมียมของออปชันต่อหนึ่งสัญญาของหุ้นชนิดนี้ ถ้ากำหนดราคาใช้สิทธิเท่ากับ $S(0)$ บาท

14.3) จงอธิบายพร้อมแสดงเหตุผลให้เห็นชัดว่า จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเกิดการทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยง ถ้ากำหนดราคาพรีเมียมของออปชันเท่ากับ 10 บาท

15) (การเปรียบเทียบการลงทุนในหุ้นกับคอลออปชัน) นักลงทุนมีเงินทุน 120,000 บาท ต้องการลงทุนในหุ้นของบริษัทหนึ่งที่มีราคาปัจจุบัน 60 บาทต่อหุ้น โดยมีคอลออปชัน (European Call) ที่มีราคาใช้สิทธิ 65 บาท มีราคาพรีเมียม 4 บาทต่อสัญญา (1 สัญญา = 1 หุ้น) อัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง 3% ต่อคาบ (ไม่ต้องนำไปคำนวณ) สมมุติว่าราคาหุ้นในสิ้นงวดอาจเป็นไปได้ 3 ค่า คือ 55 บาท, 65 บาท, และ 75 บาท โดยมีความน่าจะเป็นเท่ากัน ตอบคำถามต่อไปนี้

15.1) คำนวณกำไร-ขาดทุนของนักลงทุนในกรณีที่

(1) ลงทุนในหุ้นอย่างเดียว

(2) ลงทุนในคอลออปชันอย่างเดียว

(3) ลงทุนในหุ้นและคอลออปชันอย่างละเท่ากัน

15.2) คำนวณอัตราผลตอบแทน ค่าคาดหวังของผลตอบแทน ความเสี่ยง และสัมประสิทธิ์ความแปรผัน (CV) สำหรับแต่ละกรณี

15.3) วิเคราะห์ว่ากลยุทธ์ใดเหมาะสมที่สุดสำหรับนักลงทุนเชิงเก็งกำไร และนักลงทุนที่เน้นลดความเสี่ยง

16) (การวางกลยุทธ์การลงทุนภายใต้เงื่อนไขตลาด) นักลงทุนพิจารณาลงทุนในหุ้นที่มีแนวโน้มจะปรับตัวขึ้น โดยมีคอลออปชันให้เลือกใช้งาน ดังนี้

- ราคาหุ้นปัจจุบัน = 80 บาท
- ราคาคอลออปชัน = 6 บาท (ราคาใช้สิทธิ 85 บาท)
- นักลงทุนมีเงินลงทุน 100,000 บาท

- ราคาหุ้น ณ วันครบกำหนดอาจเป็น 70, 85 หรือ 100 บาท โดยมีความน่าจะเป็น 0.2, 0.5 และ 0.3 ตามลำดับ

คำถาม

16.1) หากนักลงทุนเลือกลงทุนในคอลออปชันทั้งหมด คำนวณจำนวนสัญญาที่สามารถซื้อได้ และผลตอบแทนสุทธิที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละกรณี

16.2) คำนวณค่าคาดหวังของผลตอบแทน ความเสี่ยง และ CV

16.3) หากนักลงทุนแบ่งเงินครึ่งหนึ่งมาลงทุนในหุ้นและอีกครึ่งในออปชัน ผลลัพธ์จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

17) (การประเมินการใช้ฟอร์เวิร์ดและออปชันเพื่อป้องกันความเสี่ยง) บริษัทนำเข้าสินค้า A ซึ่งมีราคาขึ้นอยู่กับอัตราแลกเปลี่ยนดอลลาร์สหรัฐ ต้องจ่าย $50,000 ในอีก 3 เดือนข้างหน้า ขณะนี้มี 2 ทางเลือก

(ก) ทำสัญญา Forward โดยล็อกอัตราแลกเปลี่ยนไว้ที่ 35 บาท/ดอลลาร์

(ข) ซื้อ Call Option ที่ราคาใช้สิทธิ 35 บาท/ดอลลาร์ พรีเมียม 1 บาท/ดอลลาร์

สมมุติว่าอัตราแลกเปลี่ยนในอีก 3 เดือนอาจเป็น 33, 35, หรือ 38 บาท/ดอลลาร์ โดยมีความน่าจะเป็น 0.2, 0.5 และ 0.3 ตามลำดับ จงตอบคำถามต่อไปนี้

17.1) คำนวณจำนวนเงินที่บริษัทต้องจ่ายในแต่ละทางเลือก

17.2) คำนวณค่าคาดหวังของต้นทุนและความเสี่ยง

17.3) วิเคราะห์ว่าแนวทางใดเหมาะสมในกรณีที่บริษัทต้องการบริหารความเสี่ยงมากกว่าการเก็งกำไร

18) (การตัดสินใจลงทุนภายใต้ข้อจำกัดงบประมาณ) ผู้จัดการพอร์ตมีงบประมาณ 200,000 บาท ต้องเลือกลงทุนในหุ้นหรือคอลออปชันของบริษัท X

- ราคาหุ้น X = 100 บาท
- ราคาคอลออปชัน (Call, strike 105) = 6 บาท

- ในอีก 3 เดือนข้างหน้า หุ้นอาจมีราคา 95, 105, หรือ 120 บาท โดยมีโอกาส 0.2, 0.5 และ 0.3 ตามลำดับ

คำถาม

18.1) จัดพอร์ตแบบ: (1) หุ้นทั้งหมด, (2) ออปชันทั้งหมด, (3) แบ่งพอร์ตเท่า ๆ กัน

18.2) สำหรับแต่ละกลยุทธ์ ให้คำนวณผลตอบแทนในแต่ละสถานการณ์

18.3) เปรียบเทียบ CV และวิเคราะห์ความเหมาะสมของแต่ละกลยุทธ์สำหรับนักลงทุนที่รับความเสี่ยงได้ต่างกัน

19) (ผลกระทบของเงินบาทแข็งค่าต่อการนำเข้า) บริษัทนำเข้าสินค้าอิเล็กทรอนิกส์จากสหรัฐอเมริกาจำนวน $250,000 โดยจะชำระเงินในอีก 2 เดือนข้างหน้า

ข้อมูล

- อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบัน: 36 บาท/USD
- อัตราแลกเปลี่ยนที่คาดการณ์ใน 2 เดือนข้างหน้า: 33 บาท/USD (เงินบาทแข็งค่า)

คำถาม

19.1) คำนวณจำนวนเงินบาทที่บริษัทต้องจ่าย หากชำระเงิน

  - ตอนนี้ทันที
  - อีก 2 เดือนข้างหน้าเมื่อเงินบาทแข็งค่าขึ้นตามที่คาด

19.2) คำนวณส่วนต่างที่บริษัทประหยัดได้จากการแข็งค่าของเงินบาท

19.3) วิเคราะห์เชิงกลยุทธ์ว่า บริษัทควรใช้ Forward Contract เพื่อป้องกันความเสี่ยงหรือไม่ หากอัตราแลกเปลี่ยนจริงอาจไม่เป็นไปตามคาดการณ์

20) (ผลกระทบของเงินบาทอ่อนค่าต่อผู้ส่งออก) บริษัทผู้ส่งออกไทยจะได้รับเงิน $400,000 จากการขายสินค้าไปยังต่างประเทศในอีก 3 เดือนข้างหน้า

ข้อมูล

- อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบัน: 35 บาท/USD
- อัตราแลกเปลี่ยนที่คาดการณ์ใน 3 เดือนข้างหน้า: 38 บาท/USD (เงินบาทอ่อนค่า)

คำถาม

20.1) คำนวณรายได้เป็นเงินบาทที่บริษัทจะได้รับในกรณี:

- แลกเงินทันทีวันนี้
- แลกเงินในอีก 3 เดือนเมื่อเงินบาทอ่อนค่า

20.2) คำนวณผลต่างของรายได้ และแสดงให้เห็นว่าเงินบาทอ่อนค่าทำให้รายได้เพิ่มขึ้นเท่าใด

20.3) หากบริษัทกังวลว่าเงินบาทอาจกลับมาแข็งค่าที่ 34 บาท/USD แทนที่จะอ่อนค่า ควรใช้เครื่องมือใดในการป้องกันความเสี่ยง และมีต้นทุนอย่างไรเมื่อเปรียบเทียบกับการไม่ใช้เครื่องมือป้องกัน

บทที่ 2 แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง

เนื้อหาประกอบด้วย

2.1 บทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง

2.2 กลไกราคา

2.3 การวัดผลตอบแทน

2.4 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค

2.5 ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

2.6 สมบัติมาร์ทิงเกล

2.7 ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์

2.8 แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค

บทนำ

การเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ทางการเงิน เช่น หุ้น ตราสารหนี้ และสินค้าโภคภัณฑ์ มักมีลักษณะไม่แน่นอนและผันผวนตามปัจจัยภายนอกต่าง ๆ ซึ่งทำให้ไม่สามารถคาดการณ์ได้อย่างแม่นยำ (Hull, ค.ศ. 2017) เพื่อรับมือกับความไม่แน่นอนดังกล่าว นักวิจัยและนักลงทุนจึงพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการทำความเข้าใจพฤติกรรมของราคา และสนับสนุนการตัดสินใจลงทุนอย่างมีเหตุผล (Merton, ค.ศ.1973; Black & Scholes, ค.ศ.1973)

ในบทนี้มุ่งเน้นที่ **แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง** โดยเฉพาะแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model) ซึ่งเป็นแบบจำลองพื้นฐานที่ใช้อธิบายพฤติกรรมราคาของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยแสดงการเคลื่อนไหวของราคาภายใต้ความเป็นไปได้จำกัด เช่น ราคาอาจขึ้นหรือลงในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งสามารถใช้กำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และยังต่อยอดสู่แบบจำลองที่มีความซับซ้อนและแม่นยำมากขึ้น เช่น แบบจำลองต้นไม้ไตรภาค (Trinomial Tree Model) ที่พัฒนาโดย Boyle (ค.ศ.1986)

นอกจากนี้ เนื้อหาในบทนี้ยังครอบคลุมถึงแนวคิดสำคัญหลายประการที่มีบทบาทโดยตรงในการประยุกต์ใช้กับการลงทุนจริง ได้แก่

- **กลไกราคา** ที่เป็นพื้นฐานในการอธิบายแรงผลักดันของราคาสินทรัพย์
- **ผลตอบแทนและความเสี่ยง** ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของการลงทุน
- **แนวคิดเรื่องความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Measure)** ที่ช่วยให้สามารถกำหนดราคาสินทรัพย์ในลักษณะที่เป็นธรรม
- **สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property)** ที่สะท้อนตลาดที่มีประสิทธิภาพและใช้ในการพัฒนาแบบจำลองคาดการณ์
- **ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ (Fundamental Theorem of Asset Pricing)** ซึ่งเป็นรากฐานของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์โดยไม่เกิดโอกาสค้ากำไร (arbitrage)

เนื้อหาในบทนี้จึงไม่เพียงแต่ให้ความรู้เครื่องมือเชิงทฤษฎี แต่ยังชี้ให้เห็นถึงการนำแนวคิดเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในโลกการลงทุนจริง เช่น การสร้างกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยง การกำหนดราคาสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยงสูง และการออกแบบพอร์ตการลงทุนภายใต้ภาวะไม่แน่นอน ทั้งนี้เพื่อให้นักลงทุนสามารถตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพและรองรับความผันผวนของตลาดในระยะยาว

2.1 บทนิยามและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง

ก่อนที่จะเข้าสู่การสร้างแบบจำลองราคาสำหรับสินทรัพย์ทางการเงิน จำเป็นต้องมีความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับแนวคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะเรื่องของตัวแปรสุ่ม กลไกความน่าจะเป็น และโครงสร้างของปริภูมิความน่าจะเป็น เพื่อให้การวิเคราะห์แบบจำลองมีรากฐานที่มั่นคง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามสำคัญและทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นและตัวแปรสุ่ม โดยจะนำเสนอเฉพาะส่วนที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์แบบจำลองราคา โดยจะ ละการพิสูจน์เพื่อคงไว้ซึ่งความกระชับและเน้นความเข้าใจเชิงแนวคิด

บทนิยาม 2.1 (ปริภูมิความน่าจะเป็น: Probability Space) กำหนดให้ Ω เป็น ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) ซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม กำหนดให้ $\mathcal{F} = \{E \mid E \subseteq \Omega\}$ เป็นแฟมมิลีของเหตุการณ์ (events) โดยที่ $\mathcal{F}$ ต้องมีสมบัติดังต่อไปนี้

- (f-1) ถ้า $E \in \mathcal{F}$ แล้วส่วนเติมเต็ม $E^c \in \mathcal{F}$
- (f-2) ถ้า $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ใน $\mathcal{F}$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

กล่าวคือ $\mathcal{F}$ ปิดภายใต้การยูเนียนนับได้

จากนั้น กำหนดฟังก์ชัน $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ ซึ่งเรียกว่า *มาตรวัดความน่าจะเป็น* (probability measure) โดยกำหนดให้

$$P(E) = \int_E p(\omega) d\omega \quad \text{สำหรับทุก} \quad E \in \mathcal{F} \tag{2.1}$$

โดยที่ $p : \Omega \to [0,1]$ เป็น *ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น* (probability distribution function) และต้องมีเงื่อนไขว่า

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega = 1 \tag{2.2}$$

เราจึงเรียกอันดับสาม $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ว่า *ปริภูมิความน่าจะเป็น* (probability space) และเพื่อความสะดวก บางครั้งเขียนย่อเพียง Ω

หมายเหตุ: ในกรณีที่ p เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องจะใช้ผลรวมแทนการอินทิเกรต

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \tag{2.3}$$

และหากพิจารณากรณีที่ตัวแปรสุ่ม $X : \Omega \to \mathbb{R}$ มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_X(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริง จะสามารถนิยามความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E \subseteq \mathbb{R}$ ได้เป็น

$$P(X \in E) = \int_E f_X(x) dx \tag{2.4}$$

โดยมีเงื่อนไขว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของการอินทิเกรตบน Ω เมื่อผลลัพธ์ของการทดลองเป็นค่าจริง (real-valued outcomes)

บทนิยาม 2.2 (ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข) ให้ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดเหตุการณ์ B เขียนแทนด้วย $p(A|B)$ นิยามโดย

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \tag{2.5}$$

บทนิยาม 2.3 ให้ A และ B เป็น 2 เหตุการณ์ใด ๆ จะกล่าวว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกัน ก็ต่อเมื่อ

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \tag{2.6}$$

โดยสูตร (2.5) และ (2.6) จะได้ว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่อิสระกัน ก็ต่อเมื่อ

$$p(A|B) = p(A) \tag{2.7}$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$p(B|A) = p(B) \tag{2.8}$$

บทนิยาม 2.4 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะกล่าวว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ถ้า

$$p(X = x \wedge Y = y) = p(X = x) \cdot P(Y = y) \tag{2.9}$$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.5 (สมบัติเชิงเส้นของค่าคาดหวัง) ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] \tag{2.10}$$

บทนิยาม 2.6 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ A เป็นเหตุการณ์ ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย $E[X \mid A]$ นิยามโดย

$$E[X \mid A] = \int_{\Omega} \omega \cdot p(X = \omega \mid A) d\omega \tag{2.11}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่ต่อเนื่อง $E[X \mid A] = \sum_{\omega \in \Omega} \omega \cdot p(X = \omega \mid A)$

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม, A เป็นเหตุการณ์ และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$E[aX + bY \mid A] = aE[X \mid A] + bE[Y \mid A] \tag{2.12}$$

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ X และ A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $A_i \cap A_j = \phi$ ทุก ๆ $i \neq j$ จะได้ว่า

$$E[X] = \sum_i E[X \mid A_i] \cdot p(A_i) \tag{2.13}$$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] \tag{2.14}$$

ทฤษฎีบท 2.10 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้ว่า

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{2.15}$$

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม และ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X] \tag{2.16}$$

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งทุกคู่ใด ๆ อิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$Var[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] \tag{2.17}$$

2.2 กลไกราคา

กำหนดให้เวลา $t = n\tau$ มีหน่วยเป็นคาบหรืองวด (period) ซึ่งอาจจะเป็นวินาที นาที ชั่วโมง วัน สัปดาห์ เดือน ไตรมาส ครึ่งปี ปี เป็นต้น นั่นคือ $t = n\tau$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ และ τ เป็นขนาดของคาบเวลาที่กำหนด (fixed time step) ซึ่งจะเขียน $t = n$ แทน $t = n\tau$ ในหน่วยคาบขนาด τ กำหนดให้ $S(t)$ แทนราคาของหุ้นที่ราคาที่เวลา t ใด ๆ โดยที่ $S(0)$ เป็นราคาปัจจุบันของหุ้น ราคาปัจจุบันของหุ้นจะเป็นราคาที่นักลงทุนทุกคนทราบ ราคา $S(t)$ สำหรับ $t > 0$ จะเป็นราคาหุ้นใน

อนาคตซึ่งเป็นราคาที่ยังไม่ทราบ ในที่นี้กำหนดให้ $S(t)$ สำหรับ $t>0$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (random variable) บนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω

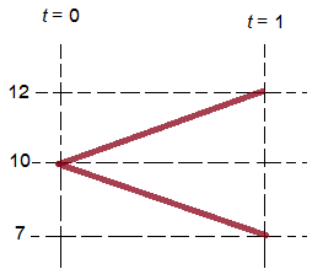
ต่อไปจะกำหนดให้ Ω เป็นปริภูมิความน่าจะเป็นเหตุการณ์ของการเคลื่อนไหวราคาที่เป็นไปได้ทั้งหมด (feasible price movement) ซึ่งจะเรียก แต่ละเหตุการณ์ของการเคลื่อนไหวราคา ว่า *สถานการณ์* หรือ *ซีนารีโอส์* (scenarios) และในที่นี้จะกำหนดให้ $S(t)$ เป็น *ตัวแปรเชิงสุ่มบวก* บนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω นั่นคือ $S(t):\Omega\to(0,\infty)$

กำหนดสัญลักษณ์ $S(t,\omega)$ แทนราคาหุ้นที่เวลา t เป็นไปตามสถานการณ์ $\omega\in\Omega$ โดยที่ราคาปัจจุบัน $S(0)$ สามารถพิจารณาเป็น ตัวแปรเชิงสุ่มคงที่ (constant random variable) ในขณะที่ ราคาในอนาคต $S(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มไม่คงที่ (non-constant random variable) นั่นคือ สำหรับแต่ละ $t>0$ จะมีอย่างน้อย 2 สถานการณ์ $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ ซึ่ง $S(t,\omega_1)\neq S(t,\omega_2)$

ตัวอย่างที่ 2.1 พิจารณาตลาดซึ่งมี 2 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น (boom) และ ตลาดขาลง (recession) แทนด้วย ω_1 และ ω_2 ตามลำดับ สมมติให้ราคาปัจจุบันของหุ้น เท่ากับ 10 บาทต่อหุ้น ซึ่งถ้าตลาดขาขึ้น ราคาอาจจะขึ้นเป็น 12 บาท และถ้าตลาดขาลงราคาอาจจะลงเป็น 7 บาท ดังนั้นในที่นี้ $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$ กำหนดให้ $t=1$ สามารถเขียนตารางราคาและสถานการณ์ได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	10	12
ω_2	10	7

และเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาได้เป็น

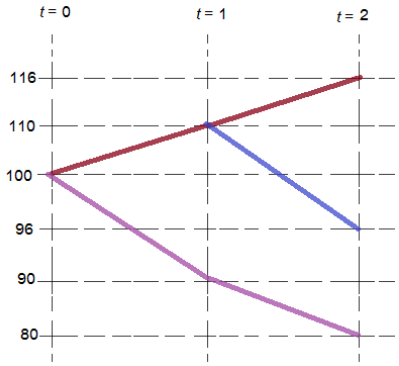


รูปที่ 2.1 *ต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาในตัวอย่างที่ 2.1* □

ตัวอย่างที่ 2.2 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	116
ω_2	100	90	80
ω_3	100	110	96

จากสถานการณ์ที่กำหนดให้เขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาได้ดังนี้



รูปที่ 2.2 *ต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาในตัวอย่างที่ 2.2* □

2.3 การวัดผลตอบแทน

ในการวิเคราะห์การลงทุนในหลักทรัพย์ ผลตอบแทน (Return) ถือเป็นตัวแปรสำคัญที่ใช้วัดความคุ้มค่าและประสิทธิภาพของการลงทุน โดยผลตอบแทนสามารถสะท้อนการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง รวมถึงรายได้อื่น ๆ เช่น เงินปันผล ในเบื้องต้น เพื่อให้ง่ายต่อการนิยามและวิเคราะห์ จะพิจารณากรณีที่หุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผล ซึ่งช่วยให้สามารถมุ่งเน้นไปที่ส่วนต่างของราคาหุ้นเป็นหลัก

หัวข้อนี้จะเริ่มต้นจากการนิยามอัตราผลตอบแทน (Rate of Return) และอธิบายความสัมพันธ์กับมูลค่าเงินสะสม พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างเพื่อให้เห็นถึงลักษณะของผลตอบแทนในสภาวะตลาดที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ ยังจะกล่าวถึงอัตราผลตอบแทนลอการิทึม (Logarithmic

Return) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในการวิเคราะห์ผลตอบแทนในกรอบของคณิตศาสตร์การเงิน เนื่องจากมีสมบัติการบวกที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในแบบจำลองต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้น

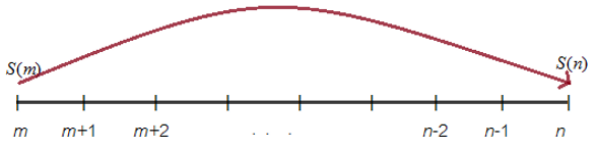
เนื้อหาในหัวข้อนี้จึงครอบคลุมทั้งแนวคิดพื้นฐาน สูตรคำนวณ ความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ และตัวอย่างประกอบที่ช่วยให้เข้าใจผลตอบแทนจากการลงทุนอย่างลึกซึ้งยิ่งขึ้น ทั้งในรูปแบบปกติและแบบลอการิทึม พร้อมการคำนวณค่าคาดหวังที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์ความเสี่ยงและผลตอบแทนในตลาดการเงินอย่างเป็นระบบ

บทนิยาม 2.13 กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาต่อหุ้นที่ราคา t *อัตราผลตอบแทน* (rate of return) บนช่วงเวลา $[m,n]$ (หน่วย เป็น คาบเวลา) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $K(m,n)$ ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่มนิยามโดย

$$K(m,n)=\frac{S(n)-S(m)}{S(m)} \tag{2.18}$$

จากรูป (2.18) สามารถเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n)=(1+K(m,n))S(m) \tag{2.19}$$



รูปที่ 2.3 *$S(n)$ เป็นมูลค่าสะสมของเงิน $S(m)$ ด้วยฟังก์ชันสะสม $1+K(m,n)$*

อัตราผลตอบแทนบน 1 ช่วงเวลา $[n-1,n]$ คือ $K(n-1,n)$ จะเขียนแทนด้วย $K(n)$

ดังนั้น
$$K(n)=\frac{S(n)-S(n-1)}{S(n-1)} \tag{2.20}$$

ซึ่งเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n)=(1+K(n))S(n-1) \tag{2.21}$$

หมายเหตุ หากนำเงินปันผลเข้ามาพิจารณาด้วย จะได้อัตราผลตอบแทนเป็น

$$K(n)=\frac{S(n)-S(n-1)+\mathrm{div}(n)}{S(n-1)} \tag{2.22}$$

เมื่อ $\mathrm{div}(n)$ เป็นเงินปันผลต่อหุ้นที่จ่ายในคาบที่ n

ตัวอย่างที่ 2.3 พิจารณาตลาดซึ่งมี 2 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น และ ตลาดขาลง แทนด้วย ω_1 และ ω_2 ตามลำดับ ในตัวอย่างที่ 2.1 สามารถเขียนตารางอัตราผลตอบแทน $K(1)$ ได้ดังนี้

สถานการณ์	$K(1)$
ω_1	0.2
ω_2	-0.3

□

ตัวอย่างที่ 2.4 สมมติตลาดแห่งหนึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.2 จะได้ว่า อัตราผลตอบแทนตามแต่ละสถานการณ์แสดงในตารางดังต่อไปนี้

สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$	$K(0,2)$	$K(0,1)+K(1,2)$
ω_1	0.1	0.0545	0.16	0.1545
ω_2	-0.1	-0.1111	-0.2	-0.2111
ω_3	0.1	-0.0127	-0.04	-0.0973

□

จากตัวอย่างที่ 2.4 จะเห็นว่า $K(0,1)+K(1,2)\neq K(0,2)$ ดังนั้น อัตราผลตอบแทน $K(m,n)$ ไม่มีสมบัติการบวก (non-additivity) อย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์ระหว่าง $K(m,n)$ กับ $K(n)$ ก็ยังเป็นสิ่งที่น่าสนใจ

ตัวอย่างที่ 2.5 สมมติตลาดแห่งหนึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.2 ถ้ากำหนดปันผล 1 บาทต่อหุ้น จะได้ว่า อัตราผลตอบแทนตามแต่ละสถานการณ์แสดงในตารางดังต่อไปนี้

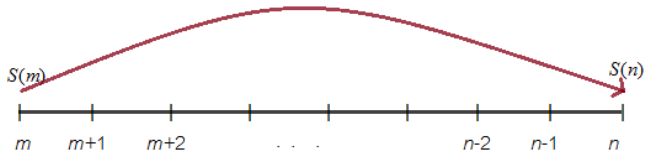
สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$	$K(0,2)$
ω_1	0.1100	0.0636	0.1800
ω_2	-0.0900	-0.1000	-0.1800
ω_3	0.1100	-0.0273	-0.0200

□

ทฤษฎีบท 2.14 ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทน $K(m,n)$ กับ $K(n)$ อยู่ในรูป

$$1+K(m,n)=[1+K(m+1)][1+K(m+2)]\ .\ .\ .\ [1+K(n)] \tag{2.23}$$

พิสูจน์ พิจารณาแผนภาพกระแสเงิน



จากแผนภาพจะเห็นว่า $S(n)$ เป็นเงินสะสมของการลงทุน ที่เวลา m ด้วยเงินลงทุน $S(m)$ ด้วยฟังก์ชันเงินสะสะสม $[1+K(m+1)][1+K(m+2)]\ .\ .\ .\ [1+K(n)]$ นั่นคือ

$$S(n)=[1+K(m+1)][1+K(m+2)]\ .\ .\ .\ [1+K(n)]\ S(m)$$

และจากบทนิยามของ $K(m,n)$ ตามสูตร (2.2),

$$S(n)=[1+K(m,n)]S(m)$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $1+K(m,n)=[1+K(m+1)][1+K(m+2)]\ .\ .\ .\ [1+K(n)]$ □

เนื่องจากอัตราผลตอบแทน $K(m,n)$ ไม่มี *สมบัติการบวก* ทำให้ยากต่อการนำไปใช้งาน จึงเป็นสาเหตุที่จำเป็นต้องนิยามของอัตราผลตอบแทนใหม่เพื่อให้มีสมบัติการบวก อัตราผลตอบแทนที่นิยามใหม่นี้เรียกว่า *อัตราผลตอบแทนลอการิทึม* หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งคือ *อัตราผลตอบแทนทบต้นต่อเนื่อง* โดยนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.15 กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาต่อหุ้นที่เวลา t *อัตราผลตอบแทนลอการิทึม* (logarithmic return) บนช่วงเวลา $[m,n]$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $k(m,n)$ ซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม นิยามโดย

$$k(m,n)=\ln S(n)-\ln S(m)=\ln\frac{S(n)}{S(m)} \tag{2.24}$$

เขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น

$$S(n)=e^{k(m,n)}S(m) \tag{2.25}$$

และอัตราผลตอบแทนลอการิทึมบน 1 ช่วงเวลา $[n-1,n]$ คือ $k(n-1,n)$ เขียนโดยย่อด้วย $k(n)$ ดังนั้น

$$k(n)=\ln S(n)-\ln S(n-1)=\ln\frac{S(n)}{S(n-1)} \tag{2.26}$$

หมายเหตุ 1) หากนำเงินปันผลเข้ามาพิจารณาด้วย จะได้อัตราผลตอบแทนลอการิทึมเป็น

$$k(n) = \ln \frac{S(n) + \mathrm{div}(n)}{S(n-1)} \tag{2.27}$$

เมื่อ $\mathrm{div}(n)$ เป็นเงินปันผลต่อหุ้นที่จ่ายในคาบที่ n

2) โดยการเปรียบเทียบจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราผลตอบแทนกับอัตราผลตอบแทนลอการิทึม จะได้

$$1 + K(m,n) = e^{k(m,n)} \tag{2.28}$$

ตัวอย่างที่ 2.6 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนในตารางได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	10	11	11.6	12
ω_2	10	9	8	7
ω_3	10	11	9.6	10

และตาราง อัตราผลตอบแทนลอการิทึมและสถานการณ์เป็นดังนี้

สถานการณ์	$k(1)$	$k(2)$	$k(3)$	$k(1)+k(2)+k(3)$	$k(0,3)$
ω_1	0.0953	0.0531	0.0339	0.1823	0.1823
ω_2	-0.1054	-0.1178	-0.1335	-0.3567	-0.3567
ω_3	0.0953	-0.1361	0.0408	0	0

□

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นได้ว่า $k(0,3) = k(1) + k(2) + k(3)$ ซึ่งเป็นผลที่ได้จากสมบัติการบวกที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.16 ถ้าไม่มีการจ่ายเงินปันผล แล้ว อัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(m,n)$ มีสมบัติการบวก นั่นคือ ถ้า $m \le q \le n$ แล้ว

$$k(m,q) + k(q,n) = k(m,n) \tag{2.29}$$

พิสูจน์ จากนิยามของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม จะได้

$$k(m,n)=\ln\frac{S(n)}{S(m)}=\ln\left(\frac{S(q)}{S(m)}\cdot\frac{S(n)}{S(q)}\right)=\ln\left(\frac{S(q)}{S(m)}\right)+\ln\left(\frac{S(n)}{S(q)}\right)=k(m,q)+k(q,n)$$ □

ทฤษฎีบท 2.17 ถ้าไม่มีการจ่ายเงินปันผลแล้ว

$$k(m,n)=k(m+1)+k(m+2)+\ldots+k(n) \tag{2.30}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงโดยใช้สมบัติการบวกตามทฤษฎีบท 2.16

□

บทนิยาม 2.18 กำหนดให้ $K(t)$ เป็นอัตราผลตอบแทนซึ่งเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ที่เวลา t และกำหนดให้ p เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น เรียก $E[K(t)]$ ว่า *อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง* (expected return) ที่เวลา t

ตัวอย่างที่ 2.7 พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ จากตัวอย่างที่ 2.4 โดยสมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ เป็น 0.5, 0.25 และ 0.25 ตามลำดับ จงคำนวณหา $E[K(t)]$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2.4 ได้ว่า

สถานการณ์	$K(1)$	$K(2)$
ω_1	0.1	0.0545
ω_2	-0.1	-0.1111
ω_3	0.1	-0.0127

ดังนั้น $E[K(1)]=\sum_{\omega}\omega p(\omega)=0.1(0.5)-0.1(0.25)+0.1(0.25)=0.05$

และ $E[K(2)]=0.0545(0.5)-0.1111(0.25)-0.0127(0.25)=-0.0037$ □

ทฤษฎีบท 2.19 ถ้า $K(m+1)$, $K(m+2)$, . . . , $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ แล้ว จะได้ว่า

$$1+E[K(m,n)]=\big(1+E[K(m+1)]\big)\big(1+E[K(m+2)]\big)\ .\ .\ .\big(1+E[K(n)]\big) \tag{2.31}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.14 ,

$$1+K(m,n)=\big(1+K(m+1)\big)\big(1+K(m+2)\big)\ .\ .\ .\ \big(1+K(n)\big)$$

โดยทฤษฎีบท 2.11 และ ทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า

$$1+E[K(m,n)]=E[1+K(m,n)]=E[(1+K(m+1))(1+K(m+2))\ .\ .\ .\ (1+K(n))]$$
$$=E[1+K(m+1)]E[1+K(m+2)]\ldots E[1+K(n)]$$
$$=\big(1+E[K(m+1)]\big)\big(1+E[K(m+2)]\big)\ldots\big(1+E[K(n)]\big)$$

ดังนั้น $1+E[K(m,n)]=\big(1+E[K(m+1)]\big)\big(1+E[K(m+2)]\big)\ .\ .\ .\big(1+E[K(n)]\big)$ □

ทฤษฎีบท 2.20 ถ้าหุ้นไม่มีการจ่ายเงินปันผลแล้ว

$$E[k(m,n)]=E[k(m+1)]+E[k(m+2)]+\ldots+E[k(n)] \tag{2.32}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงโดยใช้โดยทฤษฎีบท 2.11

□

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 2.19 จะเห็นว่าการคำนวณค่าคาดหวังอัตราผลตอบแทนลอการิทึม $E[k(m,n)]$ ไม่ต้องใช้สมบัติความเป็นอิสระของตัวแปรเชิงสุ่ม $k(m+1),k(m+2),\ \ldots,k(n)$ แตกต่างจาก ทฤษฎีบท 2.18 ซึ่งการคำนวณค่าคาดหวังอัตราผลตอบแทน $E[K(m,n)]$ จะต้องอาศัยความเป็นอิสระของตัวแปรเชิงสุ่ม $K(m+1),K(m+2),\ .\ .\ .,\ K(n)$

2.4 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค

แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Price Model) เป็นแบบจำลองพื้นฐานที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในการอธิบายพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ โดยเฉพาะราคาของหุ้นในตลาดการเงิน แบบจำลองนี้มีข้อดีคือ เข้าใจได้ง่าย มีโครงสร้างชัดเจน และสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ราคาของตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชัน ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคภายใต้สมมติฐานที่เหมาะสมบางประการ โดยเน้นการนำเสนอแนวคิดหลัก โครงสร้างของแบบจำลอง และการคำนวณราคาภายใต้กรอบของการเคลื่อนไหวราคาที่ไม่ต่อเนื่อง

เงื่อนไข bt-1 อัตราผลตอบแทนต่อคาบเวลา (one-step return) $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน นิยามโดย

$$K(n)=\begin{cases}u\ ;\ \text{probability}\ p\\ d\ ;\ \text{probability}\ 1-p\end{cases} \tag{2.33}$$

สำหรับแต่ละคาบเวลาที่ n เมื่อ $-1<d<u$ และ $0<p<1$

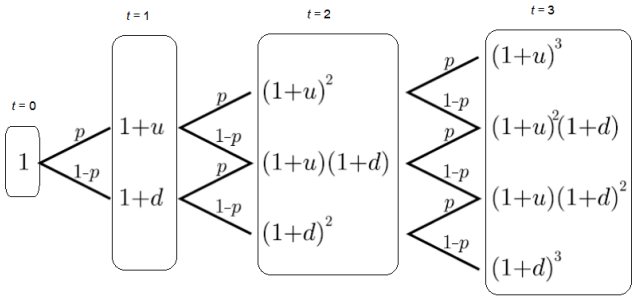
เงื่อนไข bt-2 อัตราผลตอบแทน r ต่อคาบ ของการลงทุนโดยปราศจากความเสี่ยง (risk-free investment) คงที่ทุกคาบเวลา และ

$$d<r<u$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่สมมูลกับ r แล้ว

$$\ln(1+d)<\delta<\ln(1+u)$$

เงื่อนไข bt-1 ทำให้ทราบว่าราคา $S(n)$ จะเคลื่อนไหวขึ้นหรือลงด้วยตัวประกอบ $1+u$ และ $1+d$ สำหรับแต่ละคาบเวลาที่ n ส่วนอสมการ $-1<d<u$ จะเป็นสิ่งยืนยันว่า $S(n)$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอเมื่อ $S(0)$ เป็นบวก ตัวอย่างแผนภาพต้นไม้ของตัวประกอบของ $S(n)$ สำหรับ $n=1,2,3$ แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.4 *ต้นไม้ของตัวประกอบของ* $S(n)$ *สำหรับ* $n=1,2,3$

จากแผนภาพต้นไม้สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม $S(1)$, $S(2)$ และ $S(3)$ จะได้ว่า

$$S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0);\ \text{probability}\ p\\ (1+d)S(0);\ \text{probability}\ 1-p\end{cases} \tag{2.34}$$

$$S(2)=\begin{cases}(1+u)^2 S(0) & ;\ \text{probability}\ p^2\\ (1+u)(1+d)S(0) & ;\ \text{probability}\ 2p(1-p)\\ (1+d)^2 S(0) & ;\ \text{probability}\ (1-p)^2\end{cases} \tag{2.35}$$

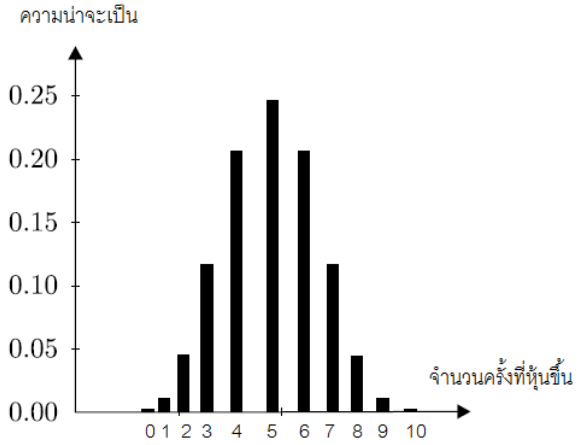
$$S(3)=\begin{cases}(1+u)^3 S(0) & ;\text{probability } p^3\\ (1+u)^2(1+d)S(0) & ;\text{probability } 3p^2(1-p)\\ (1+u)(1+d)^2 S(0) & ;\text{probability } 3p(1-p)^2\\ (1+d)^3 S(0) & ;\text{ probability } (1-p)^3\end{cases} \tag{2.36}$$

จากแนวคิดนี้ถ้ากำหนดให้ i สำหรับ $i=0,1,2,...,n$ เป็นจำนวนครั้งหรือจำนวนคาบเวลาที่ราคาหุ้นขึ้น โดยที่ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ p และ $n-i$ เป็นจำนวนครั้งที่ราคาหุ้นลง โดยที่ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ $1-p$ จะได้ว่า i เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม ดังนั้นความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้น i ครั้งจากทั้งหมด n ครั้ง เท่ากับ

$$\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \qquad \text{เมื่อ} \quad \binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{2.37}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาจำนวนครั้งที่ราคาหุ้นขึ้น i ครั้ง จากการพิจารณาการลงทุน $n=10$ คาบ โดยกำหนดความน่าเป็นที่หุ้นขึ้นในแต่ละครั้ง เท่ากับ 0.5 จะได้ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นจำนวน i ครั้ง สำหรับ $i=0,1,...,10$ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนครั้งที่หุ้นขึ้น i	ความน่าจะเป็น $p(i)$
0	0.0009765625
1	0.0097656250
2	0.0439453125
3	0.1171875000
4	0.2050781250
5	0.2460937500
6	0.2050781250
7	0.1171875000
8	0.0439453125
9	0.0097656250
10	0.0009765625



รูปที่ 2.5 *ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นจำนวน* i *ครั้ง* $i=0,1,...,10$

จาก (2.37) ทำให้ได้ ราคาหุ้น $S(n)$ ณ เวลา n เท่ากับ

$$S(n)=(1+u)^{i}(1+d)^{n-i}S(0) \tag{2.38}$$

ด้วยความน่าจะเป็น $\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$ สำหรับ $i=0,1,...,n$

ตัวอย่างที่ 2.8 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ d ที่ทำให้ $S(1)=\begin{cases}87 & ;\uparrow\\ 76 & ;\downarrow\end{cases}$ และ $S(2)=92 \;\; ;\uparrow\uparrow$

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้ $S(1)=\begin{cases}(1+u)S(0)\\(1+d)S(0)\end{cases}=\begin{cases}87\\76\end{cases}$

และ $S(2)=\begin{cases}(1+u)^{2}S(0)\\(1+u)(1+d)S(0)\\(1+d)^{2}S(0)\end{cases}=\begin{cases}92\\?\\?\end{cases}$

นั่นคือ

$$(1+u)S(0)=87 \tag{1}$$

$$(1+d)S(0)=76 \tag{2}$$

$$(1+u)^{2}S(0)=92 \tag{3}$$

$\frac{(3)}{(1)}$; $1+u=\frac{92}{87}\Rightarrow u\approx 0.0575$

$\frac{(2)}{(1)}$; $\frac{1+d}{1+u}=\frac{76}{87}\Rightarrow 1+d=\frac{76}{87}\left(\frac{92}{87}\right)\Rightarrow d\approx -0.0762$

ดังนั้น $u\approx 0.0575$ และ $d\approx -0.0762$ □

ตัวอย่างที่ 2.9 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ d ที่ทำให้ $S(2)=\begin{cases}121 & ;\uparrow\uparrow \\ 110 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 100 & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$ เมื่อกำหนดให้ $S(0)=100$

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(2)=\begin{cases}(1+u)^2 100 & ;\uparrow\uparrow \\ (1+u)(1+d)100 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2 100 & ;\downarrow\downarrow\end{cases} =\begin{cases}121 & ;\uparrow\uparrow \\ 110 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 100 & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

นั่นคือ

$$(1+u)^2 100=121 \qquad (1)$$

$$(1+u)(1+d)100=110 \qquad (2)$$

$$(1+d)^2 100=100 \qquad (3)$$

แก้สมการ (3) จะได้ $d=0$ ($\because d>-1$)

แก้สมการ (1) จะได้ $u=0.1$ ($\because u>d$)

ดังนั้น $u=0.1$ และ $d=0$ □

ตัวอย่างที่ 2.10 สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค โดยที่ $S(2)=\begin{cases}32 & ;\uparrow\uparrow \\ 28 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ x & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$ จงคำนวณค่าของ x และตรวจสอบว่าสามารถสร้างต้นไม้ทวิภาคของราคาได้สมบูรณ์หรือไม่ ถ้าสร้างได้ สร้างได้แบบเดียวหรือไม่

วิธีทำ จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(2)=\begin{cases}(1+u)^2 S(0) & ;\uparrow\uparrow \\ (1+u)(1+d)S(0) & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ (1+d)^2 S(0) & ;\downarrow\downarrow\end{cases} =\begin{cases}32 & ;\uparrow\uparrow \\ 28 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ x & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

นั่นคือ

$$(1+u)^2 S(0)=32 \qquad (1)$$

$$(1+u)(1+d)S(0)=28 \qquad (2)$$

$$(1+d)^2 S(0)=x \qquad (3)$$

$(1)\times(3)$; จะได้

$$\left[(1+u)(1+d)S(0)\right]^2=32x \qquad (4)$$

แทน (2) ใน (4) จะได้ $28^2=32x \Rightarrow x=\dfrac{28^2}{32}=24.50$

จากสมการ (1) และ (3) ได้ $u=-1\pm\sqrt{\dfrac{32}{S(0)}}$ และ $d=-1\pm\sqrt{\dfrac{24.50}{S(0)}}$ ตามลำดับ

$\because -1 < d < u$ จะได้ $d = -1 + \sqrt{\frac{24.50}{S(0)}}$ และ $u = -1 + \sqrt{\frac{32}{S(0)}}$

นั่นแสดงว่า เมื่อกำหนด $S(0) > 0$ จะสามารถสร้างต้นไม้ทวิภาคของราคาได้สมบูรณ์และสร้างได้แบบเดียว โดยที่

$$K(n) = \begin{cases} -1 + \sqrt{\frac{24.50}{S(0)}} & ;\text{probability } p \\ -1 + \sqrt{\frac{32}{S(0)}} & ;\text{probability } 1-p \end{cases}$$ □

เงื่อนไข bt-1 และ bt-2 ทำให้ได้ว่ากลไกราคาของหุ้นจะเคลื่อนไหวสัมพันธ์กับราคาของสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง และ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอของทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไปนี้

2.5 ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

คำว่า ***ความเสี่ยง*** ในที่นี้จะหมายถึงโอกาสที่การลงทุนนั้นได้ผลตอบแทนไม่ได้เป็นไปตามที่คาดหวังไว้หรือสูญเสียเงินต้นจากการลงทุน หรือเสี่ยงที่จะเสียโอกาสในการลงทุนกับโครงการลงทุนอื่นที่ได้ผลตอบแทนที่ดีกว่า เป็นต้น โดยในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้กล่าวถึงการใช้ส่วนเบี่ยงมาตรฐานเป็นดัชนีวัดความเสี่ยง ในหัวข้อนี้จะแบ่งพฤติกรรมของนักลงทุนที่มีต่อความเสี่ยงโดยใช้ค่าคาดหวังของผลตอบแทนเป็นเกณฑ์ในการแบ่ง

ตามพจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถานได้จำแนกพฤติกรรมของที่คนต่อความเสี่ยงได้เป็น 3 ประเภท คือ

1) การไม่ชอบความเสี่ยง หรือ การหลีกเลี่ยงความเสี่ยง (risk aversion) นักลงทุนที่อยู่ในกลุ่มไม่ชอบความเสี่ยงจะมองหาการลงทุนที่ต้องมั่นใจว่า อัตราผลตอบแทนคาดหวังของการลงทุนใด ๆ จะต้องมากกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาด

2) การชอบความเสี่ยงหรือการค้นหาความเสี่ยง (risk seeking) นักลงทุนที่อยู่ในกลุ่มชอบความเสี่ยงจะมองหาการลงทุนที่มีโอกาสทำกำไรได้สูงถึงแม้ว่าอัตราผลตอบแทนคาดหวังของการลงทุนใด ๆ จะต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดก็ตาม เช่น นักเสี่ยงโชคจากการซื้อลอตเตอรี่ นักเก็งกำไรในหุ้นที่มีความผันผวนของราคาสูง

3) การเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutral) ซึ่งเป็นประเภทของพฤติกรรมต่อความเสี่ยงที่ไม่ได้เป็นทั้งกลุ่มที่ไม่ชอบความเสี่ยงและกลุ่มที่ชอบความเสี่ยง

เมื่อพิจารณาถึงราคาของหุ้นในอนาคตซึ่งแน่นอนว่าเป็นสิ่งที่เราไม่มีทางรู้ได้ แต่เป็นไปได้ที่จะคาดเดาจากค่าคาดหวังของราคาจากแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค ดังนั้นแนวทางหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์ความเสี่ยงคือการเปรียบเทียบค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้นกับค่าคาดหวังของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งแนวคิดนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้อย่างมากในทฤษฎีของอนุพันธ์ทางการเงิน (เช่น ออปชัน ฟอร์เวิร์ด ฟิวเจอร์ส) ซึ่งปรากฏในหนังสือเกี่ยวกับการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ทั่วไปรวมถึงในตำราเล่มนี้ด้วย

พิจารณาค่าคาดหวังของราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับที่เวลา $t=1$ ก่อน จากแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จะได้

$$S(1)=\begin{cases} S(0)(1+u) & ;\text{probability } p \\ S(0)(1+d) & ;\text{probability } 1-p \end{cases}$$

ดังนั้น $E[S(1)]=pS(0)(1+u)+(1-p)S(0)(1+d)=S(0)(1+E[K(1)])$

เมื่อ $E[K(1)]=pu+(1-p)d$ โดยจะขยายแนวคิดนี้ไปยัง ค่าคาดหวังของราคา สำหรับที่เวลา $t=n$ จะได้ผลลัพธ์ ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.21 ภายใต้เงื่อนไข bt-1 จะได้ว่า ค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทน

$$E[K(n)]=pu+(1-p)d$$

สำหรับทุก ๆ $n=0,1,2,...$

พิสูจน์ จากเงื่อนไข bt-1 เราทราบว่า $K(n)=\begin{cases} u & ;\text{probability } p \\ d & ;\text{probability } 1-p \end{cases}$ สำหรับทุก ๆ $n=0,1,2,...$

โดยนิยามของค่าคาดหวัง จะได้ $E[K(n)]=pu+(1-p)d$ □

ทฤษฎีบท 2.22 ให้ $S(n)$ เป็นราคาหุ้นที่เวลา $t=n$ สำหรับ $n=0,1,2,...$ จะได้ว่า

$$E[S(n)]=S(0)(1+E[K(1)])^n \tag{2.39}$$

เมื่อ $E[K(1)]=pu+(1-p)d$

พิสูจน์ เพราะว่า $S(n)$ เป็นมูลค่าอนาคตที่ถูกสะสมจากเงินต้น $S(0)$ ด้วยตัวประกอบเงินสะสม $1+K(0,n)$

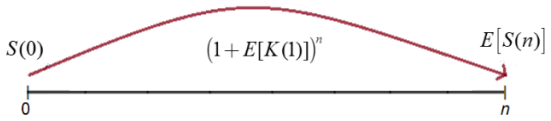
นั่นคือ $$S(n) = S(0)[1+K(0,n)]$$

ผลที่ตามมาคือ $$E[S(n)] = S(0)E[1+K(0,n)] = S(0)\big(1+E[K(0,n)]\big)$$

โดยทฤษฎีบท 2.18, $1+E(K(0,n)) = \big(1+E[K(1)]\big)\big(1+E[K(2)]\big)\ .\ .\ .\ \big(1+E[K(n)]\big)$

และจาก $E[K(n)] = E[K(1)]$ สำหรับทุก ๆ $n = 1,2,...$

จึงได้ว่า $$E[S(n)] = S(0)\big(1+E[K(1)]\big)^n$$ □



รูปที่ 2.6 *$E[S(n)]$ เป็นมูลค่าสะสมของเงิน $S(0)$ สะสมด้วยฟังก์ชันสะสม $(1+E[K(1)])^n$*

สำหรับการลงทุนกับสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงด้วยเงินต้น $S(0)$ เท่ากัน โดยมีอัตราดอกเบี้ยทบต้น r ต่อคาบซึ่งสมมูลกับอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ จะได้เงินสะสมจากการลงทุนเป็นระยะเวลา n คาบ เท่ากับ $S(0)(1+r)^n$ นั่นคือราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงที่เวลา $t=n$ เท่ากับ

$$S(0)(1+r)^n = S(0)e^{\delta n} \tag{2.40}$$

และค่าคาดหวังของราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยงนี้ จะเท่ากับ

$$E\big[S(0)(1+r)^n\big] = S(0)(1+r)^n \tag{2.41}$$

จาก (2.39) และ (2.41) ทำให้ได้ว่าถ้าต้องการเปรียบเทียบค่าคาดหวังของราคาหุ้นกับราคาสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (เช่น ตราสารหนี้) นั้น เพียงพอที่จะเปรียบเทียบเฉพาะระหว่างอัตราดอกเบี้ย r กับ $E[K(n)]$ และในที่นี้จะแบ่งประเภทนักลงทุนโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง r กับ $E[K(n)]$ ได้ดังนี้

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] > r$ ว่า *นักลงทุนประเภทไม่ชอบความเสี่ยง*

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] < r$ ว่า *นักลงทุนประเภทชอบความเสี่ยง*

เรียก นักลงทุนที่ชอบลงทุนในหุ้น เมื่อ $E[K(n)] = r$ ว่า *นักลงทุนประเภทเป็นกลางต่อความเสี่ยง*

สำหรับในทางคณิตศาสตร์การเงินจะศึกษาทฤษฎีต่าง ๆ ภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยงนั่นคือ หาความน่าจะเป็น p^* ซึ่งทำให้ $E^*[K(n)] = r$

โดยเรียก p^* ดังกล่าวว่า ***ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง*** (risk-neutral probability) และเรียก E^* ว่า ***การคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง*** (risk-neutral expectation)

โดยนิยามของค่าคาดหวังและ $K(n)$ จะได้

$$E^*[K(n)] = p^*u + (1-p^*)d = r \tag{2.42}$$

เมื่อแก้สมการเพื่อหา p^* จะได้

$$p^* = \frac{r-d}{u-d} = \frac{e^{\delta} - d - 1}{u-d} \tag{2.43}$$

หมายเหตุ ในที่นี้นักลงทุนจะต้องจำไว้เสมอว่าความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* คำนวณได้ในเชิงทฤษฎี ดังนั้นในทางปฏิบัติ p^* อาจจะเท่าหรือไม่เท่ากับความน่าจะเป็นที่แท้จริง p ก็ได้ สำหรับตลาดการลงทุนที่ $p^* = p$ จะเรียกว่า *ตลาดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง* (risk-neutral market) และถึงแม้ว่า p^* กับ p จะไม่มีความสัมพันธ์กันซึ่งหมายถึงถ้าเราทราบค่า p^* ก็ไม่สามารถใช้ p^* เพื่อคำนวณหา p แต่ p^* มีประโยชน์ในแง่ของการนำไปใช้ในการศึกษาเชิงทฤษฎี การนำไปใช้ประโยชน์ในเรื่องของการประเมินมูลค่าและการกำหนดราคาสินทรัพย์โดยเฉพาะอย่างยิ่งสินทรัพย์ที่เป็นตราสารอนุพันธ์ ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.11 กำหนดให้ $u = 0.2$ และ $r = 0.1$ จงหา p^* ในเทอมของ d

วิธีทำ เพราะว่า $p^* = \frac{r-d}{u-d}$ ดังนั้น $p^* = \frac{0.1-d}{0.2-d}$

□

ตัวอย่างที่ 2.12 จงแสดงว่า $d < r < u$ ก็ต่อเมื่อ $0 < p^* < 1$

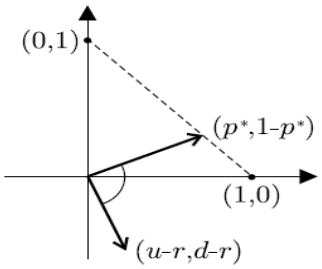
วิธีทำ เพราะว่า $0 < p^* = \frac{r-d}{u-d} < 1 \Leftrightarrow 0 < r-d < u-d \ (\because u-d > 0) \Leftrightarrow d < r < u$ □

ความหมายในเชิงเรขาคณิตของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* สามารถอธิบายได้ตามรูปที่ 2.5 คือ หากพิจารณา $(p^*,1-p^*)$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ $\mathbb{R}^2$ จะได้ว่าเวกเตอร์ $(p^*,1-p^*)$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(u-r,d-r)$ เนื่องจาก

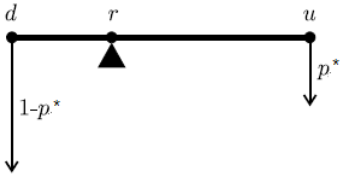
$$(p^*,1-p^*)\cdot(u-r,d-r) = p^*(u-r)+(1-p^*)(d-r)$$

$$= \underbrace{p^*u+(1-p^*)d}_{=r} - p^*r-(1-p^*)r \quad = r-r=0$$

นอกจากนี้ยังได้ว่า $(p^*,1-p^*)$ เป็นจุดบนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(0,1)$ และ จุด $(1,0)$ ดังรูป



รูปที่ 2.7 *ความหมายเชิงเรขาคณิตของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง* p^*



รูปที่ 2.8 *ความหมายเชิงเปรียบเทียบ* p^* *กับคานสมดุล*

หากพิจารณาอัตราดอกเบี้ย r ของการลงทุนที่ไม่มีความเสี่ยงเป็นจุดหมุนของคานจะได้ว่า p^* และ $1-p^*$ เปรียบเสมือนแรงที่มีทิศทางตรงข้ามกันมากระทำต่อปลายคานที่มีมวล u และ d ตามลำดับเพื่อให้คานอยู่ในสถานการณ์สมดุล

ตัวอย่างที่ 2.13 การประยุกต์ใช้ "ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง" ในเชิงการตัดสินใจลงทุนและวิเคราะห์กลยุทธ์ ในโลกจริง เช่น การจัดพอร์ตลงทุน มีดังนี้ ในการวิเคราะห์กลยุทธ์ลงทุนโดยเปรียบเทียบกับสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง สมมติผู้จัดการกองทุนรายหนึ่งมีตัวเลือกในการลงทุน

ระหว่าง

- หุ้น A ที่มีลักษณะไม่แน่นอน (ความเสี่ยงสูง)
- หรือเลือกลงทุนในพันธบัตรรัฐบาล (Risk-Free Asset) ที่ให้ผลตอบแทน $r = 3\%$ ต่อปี

จากการวิเคราะห์สถานการณ์เศรษฐกิจ ผู้จัดการกองทุนประเมินว่าในปีหน้าหุ้น A จะมีผลตอบแทนเป็นไปได้ 2 กรณี

สถานการณ์	ผลตอบแทนจากหุ้น A ($K(n)$)	ความน่าจะเป็นจริง (p)
ตลาดดี (Up)	+12%	60%
ตลาดแย่ (Down)	−4%	40%

การวิเคราะห์ด้วยแนวคิดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

1) คำนวณค่าคาดหวังจริงของหุ้น A

$$E[K(n)] = 0.6 \cdot 0.12 + 0.4 \cdot (-0.04) = 0.072 - 0.016 = 0.056 = 5.6\%$$

จากค่าคาดหวังนี้ ผู้จัดการกองทุนทราบว่า หุ้น A มีผลตอบแทนคาดหวังสูงกว่าสินทรัพย์ไร้ความเสี่ยง ($r = 3\%$)

2) ใช้แนวคิด "Risk Neutral Benchmarking" เพื่อตัดสินใจ

กำหนดให้ต้องการทราบว่า ในความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (คือ $E^*[K(n)] = r = 3\%$) นักลงทุนควรประเมินว่า หุ้นนี้มีความ “น่าสนใจ” หรือไม่ โดยดูว่าค่าคาดหวังจริงสูงกว่า benchmark หรือไม่

- ถ้า $E[K(n)] > E^*[K(n)] = r \longrightarrow$ นักลงทุนจะมีแรงจูงใจลงทุนในหุ้น
- ถ้า $E[K(n)] < r \longrightarrow$ นักลงทุนควรหลีกเลี่ยง (แม้บางสถานการณ์จะได้กำไรสูง)

ดังนั้น ข้อสรุปเชิงกลยุทธ์ คือ

- หุ้น A มีผลตอบแทนคาดหวังสูงกว่าอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ไม่มีความเสี่ยง (5.6% > 3%)
- แม้มีความเสี่ยง แต่ผู้จัดการกองทุนอาจเลือกลงทุนในหุ้น A ได้ หากเขา ไม่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (เช่น ชอบความเสี่ยง หรือมีการกระจายความเสี่ยงดี) □

จากตัวอย่างจะเห็นว่าแนวคิด "Risk Neutral Benchmarking" เพื่อตัดสินใจ มีประโยชน์ คือ

1) ช่วยประเมินว่าอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง "คุ้มค่า" กับความเสี่ยงหรือไม่
2) ใช้เป็นเกณฑ์เปรียบเทียบระหว่างสินทรัพย์เสี่ยงกับสินทรัพย์ปลอดภัย
3) ใช้จัดอันดับสินทรัพย์เพื่อตัดสินใจลงทุนตามพฤติกรรมของนักลงทุนแต่ละประเภท (risk-averse, risk-seeking, risk-neutral)

2.6 สมบัติมาร์ทิงเกล

แนวคิดของมาร์ทิงเกล (Martingale) มีจุดเริ่มต้นจากการศึกษาพฤติกรรมของเกมที่ยุติธรรม ซึ่งหมายถึงเกมที่ค่าคาดหวังของกำไรหรือขาดทุนในแต่ละครั้งมีค่าเป็นศูนย์ โดยที่ผลของการเดิมพันในอดีตไม่สามารถนำมาใช้ทำนายผลในอนาคตได้อย่างมีประสิทธิภาพ กล่าวคือ หากให้ X_i แทนมูลค่าของพอร์ตหรือเงินลงทุนหลังการเดิมพันครั้งที่ i และ $Z_1, Z_2, ..., Z_i$ แทนผลลัพธ์ก่อนหน้า สมบัติมาร์ทิงเกลจะกำหนดว่า

$$E[X_{i+1} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_i] = X_i$$

ซึ่งหมายความว่า ค่าคาดหวังของเงินลงทุนในรอบถัดไป เมื่อพิจารณาข้อมูลในอดีตทั้งหมด จะเท่ากับมูลค่าปัจจุบัน ซึ่งสะท้อนถึงแนวคิด "ตลาดที่มีประสิทธิภาพ" โดยข้อมูลในอดีตไม่สามารถใช้สร้างผลกำไรอย่างสม่ำเสมอในอนาคตได้

การนำแนวคิดมาร์ทิงเกลไปใช้ในโลกการลงทุน

ในเชิงการเงิน สมบัติมาร์ทิงเกลถูกนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองราคาสินทรัพย์ เช่น ในแบบจำลองราคาทางการเงินแบบไร้อาร์บิทราจ (No-Arbitrage Pricing Theory) ซึ่งถือเป็นแกนหลักของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ โดยเฉพาะในแบบจำลองเวลาต่อเนื่อง เช่น แบบจำลอง Black-Scholes และแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (binomial tree model)

ตัวอย่างการประยุกต์

- **การประเมินราคาหุ้น**: หากราคาหุ้น S_t ปรับตัวตามกระบวนการมาร์ทิงเกลภายใต้มาตรความเสี่ยงเป็นกลาง (risk-neutral measure) จะได้ว่า ราคาของสินทรัพย์ในอนาคตมีค่าคาดหวังเท่ากับราคาปัจจุบันที่ปรับด้วยอัตราคิดลด (discount factor)

- **การบริหารพอร์ต**: นักลงทุนสามารถใช้มาร์ทิงเกลเป็นเกณฑ์เพื่อตรวจสอบว่าพอร์ตของตนไม่มีแนวโน้มคาดหวังที่จะเพิ่มหรือลด ซึ่งสอดคล้องกับสถานะที่ถูกป้องกันความเสี่ยงอย่างเหมาะสม
- **การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์**: แบบจำลองราคาทั้งหลายที่อิงมาร์ทิงเกล เช่น การใช้ความน่าจะเป็นแบบเสมือน (equivalent martingale measure) ช่วยให้สามารถตีราคาสินทรัพย์ที่มีความไม่แน่นอนได้อย่างเป็นระบบและหลีกเลี่ยงโอกาสการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

แนวคิดมาร์ทิงเกลไม่เพียงแต่เป็นพื้นฐานสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็น แต่ยังมีบทบาทหลักในโลกการเงิน โดยเฉพาะในการสร้างแบบจำลองราคา การประเมินมูลค่า การบริหารพอร์ต และการออกแบบกลยุทธ์การลงทุนที่ตั้งอยู่บนสมมติฐานของตลาดที่มีประสิทธิภาพ การทำความเข้าใจสมบัตินี้จึงช่วยให้นักลงทุนและนักวิเคราะห์สามารถตีความพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในบริบทที่สอดคล้องกับหลักเศรษฐศาสตร์การเงินสมัยใหม่ได้อย่างลึกซึ้ง

บทนิยาม 2.23 ให้ $\{Z_i\}_{i=1}^n$ และ $\{X_i\}_{i=1}^n$ เป็นลำดับของตัวแปรเชิงสุ่มบนปริภูมิความน่าจะเป็น Ω จะเรียก $\{X_i\}_{i=1}^n$ ว่า *มาร์ทิงเกล* ที่เกี่ยวข้องกับ $\{Z_i\}_{i=1}^n$ ถ้า $E[X_{i+1} \mid Z_1 ... Z_i] = X_i$ และเรียกลำดับ $\{Y_{i+1} = X_{i+1} - X_i\}$ ว่า *ลำดับของผลต่างมาร์ทิงเกล* (martingale difference sequence) ซึ่ง $E[Y_{i+1} \mid Z_1 ... Z_i] = 0$

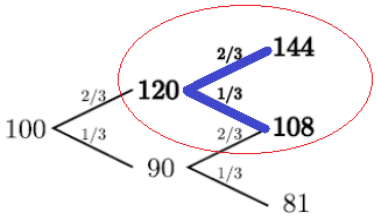
ต่อไปจะอธิบายมาร์ทิงเกลสำหรับราคาหุ้น $S(n)$ จากทฤษฎีบท 2.22 ถ้าให้ p^* เป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะได้ว่าค่าคาดหวังของราคา $S(n)$ เท่ากับมูลค่าสะสมของเงิน $S(0)$ บาทสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยง r เป็นเวลา n คาบ

นั่นคือ $$E^*[S(n)] = S(0)(1+r)^n = S(0)e^{\delta n} \tag{2.44}$$

โดยที่ $r = E^*[K(n)]$ และ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสมมูลกับ r

เพื่อให้สามารถเข้าใจแนวคิดของมาร์ทิงเกลได้ง่ายขึ้นขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.14 พิจารณาแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา เมื่อกำหนด $S(0)=100$ บาท, $u=0.2$, $d=-0.1$ และ $r=0.1$ โดยสูตร (2.43) คำนวณ $p^*=\frac{2}{3}$ ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จากข้อมูลที่กำหนดให้เขียนเป็นต้นไม้ทวิภาค ได้ดังแผนภาพ



เมื่อพิจารณาค่าของ $E^*[S(2)\,|\,S(1)]$ เมื่อกำหนด $S(1)=120$ หรือ $S(1)=90$ จากรูปที่ 2.9 และจากบทนิยามของค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข จะได้ $E^*[S(2)\,|\,S(1)]$ ดังนี้

ถ้า $S(1)=120$ จะได้ว่า

$$E^*[S(2)\,|\,S(1)=120]=\sum_{\omega}\omega p\big(S(2)=\omega\,|\,S(1)=120\big)=144\left(\frac{2}{3}\right)+108\left(\frac{1}{3}\right)=132=S(1)(1+r) \qquad (1)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $S(1)=90$ จะได้ว่า

$$E^*[S(2)\,|\,S(1)=90]=\sum_{\omega}\omega p\big(S(2)=\omega\,|\,S(1)=90\big)=108\left(\frac{2}{3}\right)+81\left(\frac{1}{3}\right)=99=S(1)(1+r) \qquad (2)$$

โดย (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$$E^*[S(2)\,|\,S(1)]=S(1)(1+r) \qquad (3)$$

เมื่อคูณ $(1+r)^{-2}$ ตลอด (3) จะได้

$$E^*[S(2)(1+r)^{-2}\,|\,S(1)]=S(1)(1+r)^{-1} \qquad (4)$$

นั่นคือ

$$E^*[\tilde{S}(2)\,|\,S(1)]=\tilde{S}(1) \qquad (5)$$

เมื่อ $\tilde{S}(n)=S(n)(1+r)^{-n}$

เรียกความสัมพันธ์ตามสมการ (5) ว่า สมบัติมาร์ทิงเกลของราคาหุ้น □

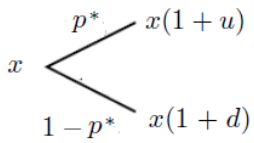
แนวคิดจากตัวอย่างข้างต้น ทำให้ทราบว่าเมื่อ คาบเวลาที่ 1 ได้ผ่านไปแล้ว และทราบราคาของหุ้นเท่ากับ $S(1)$ แล้ว ณ คาบเวลาที่ 2 ซึ่งเป็นเวลาในอนาคต (ราคาคาหุ้น $S(2)$ ยังไม่ทราบค่า) ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคาคาหุ้น $S(2)$ จะมีความสัมพันธ์อย่างไรกับราคาหุ้น $S(1)$ ภายใต้แบบจำลองราคาทวิภาค

แนวคิดดังกล่าวนำไปสู่ทฤษฎีบท 2.24 และสมบัติมาร์ทิงเกลของราคาหุ้น นั่นคือ สำหรับคาบเวลาที่ n ใด ๆ หากสมมติว่า คาบเวลาที่ n ได้ผ่านไปแล้ว และทราบราคาของหุ้น $S(n)$ เราต้องการทราบว่าค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคา $S(n+1)$ มีความสัมพันธ์อย่างไรกับราคาหุ้น $S(n)$

ทฤษฎีบท 2.24 กำหนดให้ $S(n)$ เป็นราคาหุ้น ซึ่งเป็นราคาที่ทราบ ที่เวลา $t=n$ ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของ $S(n+1)$ จะเท่ากับ

$$E^*[S(n+1)\,|\,S(n)] = S(n)(1+r) \tag{2.45}$$

พิสูจน์ สมมติให้ $S(n)=x$ เมื่อเวลาผ่านไป n คาบ



รูปที่ 2.9 *ต้นไม้ทวิภาคราคาหลังจากทราบราคาที่เวลา* n

จะได้

$$E^*[S(n+1)\,|\,S(n)=x] = p^*x(1+u)+(1-p^*)x(1+d) = x\left(1+\underbrace{p^*u+p^*(1+d)}_{r}\right) \tag{2.46}$$

เนื่องจาก $$E^*[K(1)] = p^*u+(1-p^*)d = r$$

ดังนั้น

$$E^*[S(n+1)\,|\,S(n)=x] = x(1+r) = S(n)(1+r)$$ □

ทฤษฎีบท 2.24 ทำให้ทราบว่าค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงของราคา $S(n+1)$ เมื่อเวลา n ได้ผ่านไปแล้ว (ทราบราคา $S(n)$ แล้ว) เท่ากับมูลค่าสะสมของราคา $S(n)$ ด้วยอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง r เป็นเวลา 1 คาบ

จากสมการ (2.45) ถ้าคูณด้วย $(1+r)^{-(n+1)}$ ทั้งสองข้าของสมการ จะได้

$$E^*[S(n+1)(1+r)^{-(n+1)}\,|\,S(n)] = S(n)(1+r)^{-n} \tag{2.47}$$

กำหนดให้ $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ จะได้

$$E^*[\tilde{S}(n+1)\,|\,S(n)] = \tilde{S}(n) \tag{2.48}$$

ในที่นี้เรียก $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ ว่า *ราคาหุ้นส่วนลด* (discounted stock prices)

บทแทรก 2.25 (สมบัติของมาร์ทิงเกล) กำหนดให้ $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ เป็นราคาหุ้นส่วนลด จะได้ว่า $E^*[\tilde{S}(n+1)\,|\,S(n)] = \tilde{S}(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 0,1,2,...$

จากบทแทรก 2.25 จะเห็นว่า ค่าคาดหวังของราคาหุ้นส่วนลดของคาบถัดไป (คาบเวลาที่ $n+1$) เมื่อทราบราคาในปัจจุบัน (คาบเวลาที่ n) จะเท่ากับราคาหุ้นส่วนลดในปัจจุบัน ซึ่งจะกล่าวว่า ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ *ก่อกำเนิดมาร์ทิงเกล* ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* และ กล่าวว่า p^* เป็น *ความน่าจะเป็นมาร์ทิงเกล*

ตัวอย่างที่ 2.15 กำหนดอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้เท่ากับ 0.2 ต่อปี จงหาค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2) = 110$ บาท

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.23, $E^*[S(n+1)\,|\,S(n)] = S(n)(1+r)$

จะได้ $$E^*[S(3)\,|\,S(2)] = S(2)(1+r) = 110(1+0.2) = 132$$

ดังนั้น ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2) = 110$ บาท เท่ากับ 132 บาท □

ตัวอย่างที่ 2.16 (การตรวจสอบสถานะพอร์ตด้วยสมบัติมาร์ทิงเกล) สมมตินักลงทุนถือหุ้น $S(0) = 100$ บาท โดยคาดว่าอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยราคาหุ้นเคลื่อนไหวตามตัวแบบต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลาและหากราคาหุ้นขึ้นจะขึ้นด้วยอัตรา $u = 0.2$ ต่อคาบและหากราคาหุ้นลงจะลงด้วยอัตรา $d = -0.1$ ต่อคาบ สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 4% ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน จงตรวจสอบสถานะพอร์ตด้วยสมบัติมาร์ทิงเกล

วิธีทำ 1) คำนวณความน่าจะเป็นแบบความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

ในที่นี้ $u = 0.2$, $d = -0.1$, $r = 0.04/4 = 0.01$

จะได้ $p^* = \dfrac{r-d}{u-d} = \dfrac{0.01-(-0.1)}{0.2-(-0.1)} = \dfrac{0.11}{0.3} \approx 0.3667$ และ $1-p^* \approx 0.6333$

2) ราคาหุ้นและราคาหุ้นส่วนลดในตัวแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา

จากข้อมูลราคาของหุ้นเคลื่อนไหวตามตัวแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา เป็นดังตารางต่อไปนี้

$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
t=0	t=1	t=2
100	120	144
	90	108
		81

ต่อไปจะคำนวณราคาหุ้นส่วนลดในตัวแบบต้นไม้ 2 คาบเวลา $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$

$\tilde{S}(0) = S(0)(1.01)^{-0} = S(0) = 100$, $\tilde{S}(1) = S(1)(1.01)^{-1}$ และ $\tilde{S}(2) = S(2)(1.01)^{-2}$

ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังตารางต่อไปนี้

$\tilde{S}(0)$	$\tilde{S}(1)$	$\tilde{S}(2)$
t=0	t=1	t=2
100	118.81	141.16
	89.11	105.87
		79.40

3) การตรวจสอบสมบัติมาร์ทิงเกล $E^*[\tilde{S}(n+1) \mid S(n)] = \tilde{S}(n)$

$$E^*[\tilde{S}(1) \mid S(0) = 100] = 0.3667(118.81) + 0.6333(89.11) = 100.00 = \tilde{S}(0)$$

$$E^*[\tilde{S}(2) \mid S(1) = 120] = 0.3667(141.16) + 0.6333(105.87) = 118.81 = \tilde{S}(1)$$

$$E^*[\tilde{S}(2) \mid S(1) = 90] = 0.3667(105.87) + 0.6333(79.40) = 89.11 = \tilde{S}(1)$$

จากผลการคำนวณจะเห็นว่า $E^*[\tilde{S}(n+1) \mid S(n)] = \tilde{S}(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2$

ดังนั้น ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ จึงมี สมบัติมาร์ทิงเกล ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (p^*) ซึ่งแปลความได้ว่า

1) พอร์ตการลงทุนที่อิงจากหุ้นนี้ ไม่ได้มีแนวโน้มว่าจะมีกำไรหรือขาดทุนโดยเฉลี่ยในอนาคต — กล่าวคือ ค่าคาดหวังของมูลค่าพอร์ตในอนาคตจะเท่ากับค่าปัจจุบัน
2) เราสามารถใช้ ราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n)$ เป็น เครื่องมือวิเคราะห์ ว่า พอร์ตของเรามีการป้องกันความเสี่ยงอย่างสมบูรณ์หรือไม่
    - ถ้า $\tilde{S}(n)$ เป็นมาร์ทิงเกล ⟶ พอร์ตมีสถานะป้องกันความเสี่ยงสมดุล
    - ถ้าไม่เป็น ⟶ อาจมีช่องว่างหรือความเสี่ยงที่ยังไม่ได้ถูกป้องกัน
3) สามารถใช้ สมบัติมาร์ทิงเกลของ $\tilde{S}(n)$ เป็น พื้นฐานในการสร้างกลยุทธ์ลงทุนแบบ Delta-

Neutral หรือ Portfolio Immunization

- เพราะกลยุทธ์เหล่านี้ต้องการให้พอร์ตไม่ตอบสนองเชิงกำไร/ขาดทุนต่อการเคลื่อนไหวของราคาในอนาคต
- การที่ราคาหุ้นส่วนลดมีสมบัติมาร์ทิงเกลช่วยยืนยันว่า พอร์ตจะไม่คาดหวังผลตอบแทนเกินกว่าความเป็นจริงในเชิงสถิติ □

หมายเหตุ: การลงทุนแบบ Delta-Neutral เป็นกลยุทธ์ที่ปรับพอร์ตให้ไม่ไวต่อการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ในระยะสั้น โดยกำหนดให้ค่า Δ ของพอร์ตโดยรวมเท่ากับศูนย์ โดยที่ค่า Δ ของพอร์ต คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าพอร์ตเมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิงเปลี่ยนไป 1 หน่วย กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ เมื่อ V คือมูลค่าพอร์ต และ S คือราคาสินทรัพย์อ้างอิง เช่น หุ้น หากพอร์ตมีค่า $\Delta = 0$ แสดงว่ามูลค่าพอร์ตไม่เปลี่ยนแปลงหากราคาหุ้นเปลี่ยนเพียงเล็กน้อย

2.7 ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์

ในการกำหนดราคาสินทรัพย์ทางการเงิน เช่น หุ้น ตราสารหนี้ หรือออปชัน หลักการสำคัญที่รับรองความสมเหตุสมผลของราคาคือ “**การไม่มีช่องทางในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง**” หรือที่เรียกว่า **หลักการปราศจากการค้ากำไร (no-arbitrage principle)**

ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ เป็นเสาหลักสำคัญของการเงินเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งระบุเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการกำหนดราคาสินทรัพย์อย่างเหมาะสมภายใต้แบบจำลองความน่าจะเป็น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ทฤษฎีบทนี้แสดงให้เห็นว่า **การไม่มีอาร์บิทราจมีความสมมูลกับการมีอยู่ของความน่าจะเป็นที่เรียกว่า “ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง” (risk-neutral probability)** ซึ่งสามารถนำมาใช้ประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ในแบบจำลองต่าง ๆ

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงแนวคิดนี้ผ่านกรอบของ **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค** ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นสำคัญในการพัฒนาสู่แบบจำลองที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น เช่น แบบจำลอง Black-Scholes ที่ใช้ในตลาด

การเงินจริง ทฤษฎีบทนี้ไม่เพียงแต่มีความสำคัญในเชิงทฤษฎีเท่านั้น แต่ยังมี **บทบาทในการพัฒนาเครื่องมือกำหนดราคาและบริหารความเสี่ยงในตลาดทุนทั่วโลก**

พิจารณาแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคที่มี $K(n)=\begin{cases}u\ ;\ \uparrow\\ d\ ;\ \downarrow\end{cases}$ และ r เป็นอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยง (ตราสารหนี้) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างหลักการปราศจากการค้ากำไร กับ d,u และ r ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.26 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคจะสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรก็ต่อเมื่อ $d<r<u$

พิสูจน์ เนื่องจากต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา ก่อกำเนิด ต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา ดังนั้นเพียงพอที่จะพิจารณาเพียงต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เท่านั้น

($\Rightarrow$) สมมติว่าแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร และสมมติโดยให้เกิดข้อขัดแย้งว่า $r\le d$ หรือ $r\ge u$

ถ้า $r\le d$ ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้ ยืมเงินจำนวน $S(0)$ บาท อัตราดอกเบี้ย r จากนั้นนำเงินที่ได้ ไปซื้อหุ้น 1 หุ้น ซึ่งจะทำให้ได้ $V(0)=0$ รอจนถึงเวลา $t=1$ ให้ทำธุรกรรมได้ดังนี้ ขายหุ้นที่มีอยู่ 1 หุ้น รับเงิน $S(1)$ บาทและคืนเงินที่ยืมมาเป็นเงิน $S(0)(1+r)$ บาท

ดังนั้นจะได้ $V(1)=S(1)-S(0)(1+r)=\begin{cases}(1+u)S(0)-S(0)(1+r)\ ;\uparrow\\ (1+d)S(0)-S(0)(1+r)\ ;\downarrow\end{cases}$

$$=S(0)\left(\begin{cases}u-r\ ;\uparrow\\ d-r\ ;\downarrow\end{cases}\right)>0\quad(\because\ r\le d<u\ \Rightarrow 0\le d-r<u-r\ )$$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

ถ้า $r\ge u$ ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้ ยืมหุ้น 1 หุ้นมาขาย รับเงิน $S(0)$ บาท นำเงินที่ได้ไปลงทุนในตราสารหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ย r ซึ่งจะทำให้ได้ $V(0)=0$ รอจนถึงเวลา $t=1$ ให้ทำธุรกรรมได้ดังนี้ ขายตราสารหนี้รับเงิน $S(0)(1+r)$ บาท ซื้อหุ้นคืน 1 หุ้นจ่ายเงิน $S(1)$ บาท

ดังนั้น $V(1)=S(0)(1+r)-S(1)=S(0)\left(\begin{cases}r-u\ ;\uparrow\\ r-d\ ;\downarrow\end{cases}\right)>0\ (\because\ d<u\le r\ \Rightarrow 0\le r-u<r-d\ )$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้งสองกรณีจึงทำให้สรุปได้ว่า $d < r < u$

($\Leftarrow$) สมมติว่า $d < r < u$ จะแสดงว่า แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ให้ $[x, y]$ เป็นพอร์ตการลงทุน ซึ่ง $V(0) = 0$ จะได้

$$xS(0) + yA(0) = 0 \tag{1}$$

จากสมการ (1) ทำให้ $[x, y] = [x, -\frac{S(0)}{A(0)}x]$ และเนื่องจาก $V(1) = xS(1) + yA(1)$ และ $V(1) \geq 0$ (เงื่อนไข solvency) ทำให้ได้

$$V(1) = \begin{cases} x(1+u)S(0) + \left(-\frac{S(0)}{A(0)}x\right)A(0)(1+r) & ; \uparrow \\ x(1+d)S(0) + \left(-\frac{S(0)}{A(0)}x\right)A(0)(1+r) & ; \downarrow \end{cases} = xS(0)\begin{cases} u-r & ; \uparrow \\ d-r & ; \downarrow \end{cases} \geq 0 \tag{2}$$

เนื่องจาก $d < r < u \Rightarrow d - r < 0 < u - r$ ส่งผลให้ $x = 0$ ดังนั้นได้ $V(1) = 0$

จึงสามารถสรุปได้ว่า แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร □

ทฤษฎีบท 2.27 แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคจะสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ก็ต่อเมื่อ มีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* ซึ่ง $0 < p^* < 1$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก ตัวอย่างที่ 2.12 และ ทฤษฎีบท 2.26 □

ทฤษฎีบท 2.28 (ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์)

หลักการปราศจากการค้ากำไร สมมูลกับ การมีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง P^* บนปริภูมิความน่าจะเป็นของสถานการณ์ Ω ซึ่ง $P^*(\omega) > 0$ สำหรับแต่ละสถานการณ์ $\omega \in \Omega$ และราคาหุ้นส่วนลด $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$E^*[\tilde{S}(n+1) \mid S(n)] = \tilde{S}(n)$$

สำหรับทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \ldots$

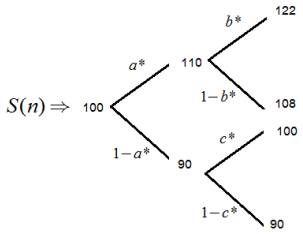
โดย บทแทรก 2.25 และทฤษฎีบท 2.28 ทำให้ได้ว่าทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์เป็นทฤษฎีที่แสดงความสมมูลระหว่างหลักการปราศจากการค้ากำไรกับสมบัติมาร์ทิงเกล นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2.17 กำหนดอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้เท่ากับ 8 % ต่อปี และสมมติว่า ราคาหุ้นมีการเคลื่อนไหวตามสถานการณ์ที่เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	122
ω_2	100	110	108
ω_3	100	90	100
ω_4	100	90	90

จงตรวจสอบว่าการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นตามสถานการณ์ดังกล่าวสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไรหรือไม่

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $r = 0.1$ และจากตารางแสดงการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นสามารถเขียนแทนด้วยแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้



เมื่อ a^*, b^* และ c^* เป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแต่ละขั้วกิ่งของต้นไม้ดังรูป จากแผนภาพคำนวณ a^*, b^* และ c^* ได้ดังนี้

$$a^* = \frac{0.08-(-10/100)}{10/100-(-10/100)} = 0.9, \quad b^* = \frac{0.08-(-2/110)}{(12/110)-(-2/110)} \approx 0.7714 \text{ และ}$$

$$c^* = \frac{0.08-0}{(10/90)-0} = 0.72$$

จะได้

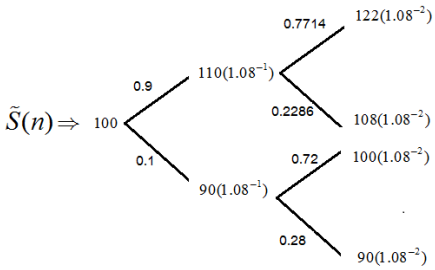
$$P^*(\omega_1) = (a^*)(b^*) = 0.9(0.7714) = 0.69426$$

$$P^*(\omega_2) = (a^*)(1-b^*) = 0.9(0.2286) = 0.20574$$

$$P^*(\omega_3) = (1-a^*)(c^*) = 0.1(0.72) = 0.072$$

$$P^*(\omega_4) = (1-a^*)(1-c^*) = 0.1(0.28) = 0.028$$

ดังนั้น มีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง P^* ซึ่ง $P^*(\omega) > 0$ สำหรับทุก ๆ $\omega \in \Omega$ ต่อไปคำนวณราคาหุ้นส่วนลดจาก $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$ สำหรับทุก ๆ $n = 0,1$ ซึ่งจะได้แผนภาพต้นไม้ของราคาส่วนลด $\tilde{S}(n)$ ดังนี้



จากแผนภาพคำนวณ $E^*[\tilde{S}(n+1)\,|\,S(n)]$ สำหรับทุก ๆ $n=0,1$ ได้ดังนี้

$$E^*[\tilde{S}(1)\,|\,S(0)=100]=0.9(110)(1.08^{-1})+0.1(90)(1.08^{-1})=100=\tilde{S}(0)$$

$$E^*[\tilde{S}(2)\,|\,S(1)=110]=0.7714(122)(1.08^{-2})+0.2286(108)(1.08^{-2})$$

$$=101.8515=108(1.08^{-1})=\tilde{S}(1)$$

$$E^*[\tilde{S}(2)\,|\,S(1)=90]=0.72(100)(1.08^{-2})+0.28(90)(1.08^{-2})$$

$$=83.33=90(1.08^{-1})=\tilde{S}(1)$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์ การเคลื่อนไหวของราคาหุ้นตามสถานการณ์ดังกล่าวสอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร □

2.8 แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค

แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค (Trinomial Tree Price Model) เป็นการขยายแนวคิดจากแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคของ Cox, Ross และ Rubinstein โดยเพิ่มจำนวนกิ่งในแต่ละช่วงเวลาจากเดิมที่ราคาสามารถ "เพิ่มขึ้น" หรือ "ลดลง" เท่านั้น ให้สามารถ "เพิ่มขึ้น" "ลดลง" หรือ "ทรงตัว" ได้ นั่นหมายความว่าการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ในแต่ละช่วงเวลาสามารถเกิดขึ้นได้ 3 ทางเลือก ทำให้แบบจำลองมีความยืดหยุ่นและสามารถสะท้อนพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในโลกจริงได้ดียิ่งขึ้น แบบจำลองนี้ได้รับความนิยมในวงการการเงิน โดยเฉพาะในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชัน ซึ่งมีลักษณะซับซ้อนหรือมีเงื่อนไขเฉพาะ เช่น ออปชันแบบอเมริกัน หรือออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้หลายช่วงเวลา การใช้แบบจำลองต้นไม้ไตรภาคช่วยให้การประมาณค่ามีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อเทียบกับแบบจำลองสองกิ่ง โดยเฉพาะเมื่อจำนวนช่วงเวลาในแบบจำลองมีจำกัด

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงโครงสร้างของแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค พร้อมทั้งเงื่อนไขที่ใช้ในการสร้างโมเดล ตลอดจนการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการนำไปใช้ในการกำหนดราคาสินทรัพย์ทางการเงิน

แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค เป็นแบบจำลองที่ขยายแนวความคิดของแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาคของ $K(n)$ จากต้นไม้ 2 กิ่ง ไปยังต้นไม้ 3 กิ่ง ดังนั้นการเคลื่อนไหวของราคาจะไม่ได้มีเฉพาะแค่ขึ้นกับลงเท่านั้น แต่จะมีการเคลื่อนไหวของราคาที่อยู่ระหว่าง 2 กิ่งนั้น คือมีการเคลื่อนไหวของราคาเป็นไปได้ 3 ทาง โดยแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค มีเงื่อนไขดังนี้

เงื่อนไข tt-1 กำหนดให้อัตราผลตอบแทนต่อคาบ $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่อิสระกัน นิยามในรูป

$$K(n)=\begin{cases} u & ;\text{probability } p \\ m & ;\text{probability } q \\ d & ;\text{probability } 1-p-q \end{cases} \tag{2.49}$$

เมื่อ $d<m<u$ และ $0<p,q,p+q<1$

เช่นเดียวกับในแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค u และ d แทนการเคลื่อนไหวของราคาขึ้นและลงตามลำดับ ในขณะที่ m แทนการเคลื่อนไหวของราคาที่อยู่ระหว่างราคาที่เคลื่อนไหวขึ้นและลง ถ้า $m=0$ จะเรียกว่า *ศูนย์กลางหลัก* (typical neutral)

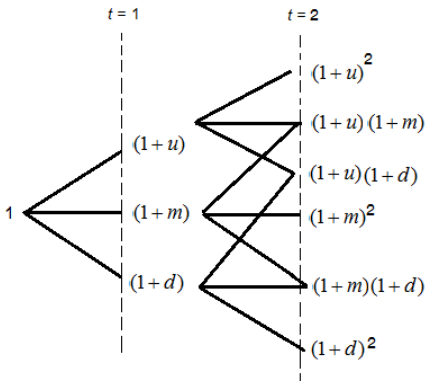
เงื่อนไข tt-2 กำหนดให้ r เป็นอัตราผลตอบแทนต่อคาบของสินทรัพย์ไม่มีความเสี่ยงซึ่งคงที่ทุกคาบเวลาและ $d<r<u$

เนื่องจาก $S(1)=(1+K(1))S(0)$ โดยเงื่อนไข tt-1 จะได้ $S(1)$ ดังนี้

$$S(1)=\begin{cases} S(0)(1+u) & ;\text{probability } p \\ S(0)(1+m) & ;\text{probability } q \\ S(0)(1+d) & ;\text{probability } 1-p-q \end{cases} \tag{2.50}$$

ตัวอย่างที่ 2.18 จงเขียนต้นไม้ไตรภาคสำหรับ $S(2)$ เมื่อสมมติว่าตลาดสอดคล้องตามเงื่อนไข tt-1 และ tt-2

วิธีทำ จากเงื่อนไข tt-1 เขียนแผนภาพต้นไม้ไตรภาคสำหรับตัวประกอบเงินสะสมได้ดังนี้



รูปที่ 2.10 *ต้นไม้ไตรภาคตัวประกอบเงินสะสมของราคาที่เวลา* $t=2$

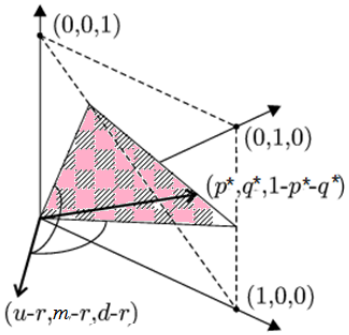
จากแผนภาพ ได้

$$S(2)=\begin{cases} S(0)(1+u)^2 & ;\text{probability } p^2 \\ S(0)(1+u)(1+m) & ;\text{probability } 2pq \\ S(0)(1+u)(1+d) & ;\text{probability } 2p(1-p-q) \\ S(0)(1+m)^2 & ;\text{probability } q^2 \\ S(0)(1+m)(1+d) & ;\text{probability } 2(1-p-q)q \\ S(0)(1+d)^2 & ;\text{probability } (1-p-q)^2 \end{cases}$$ □

จากเงื่อนไข สำหรับค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง $E^*[K(n)]=r$ จะได้ว่าความจะน่าเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* และ q^* สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

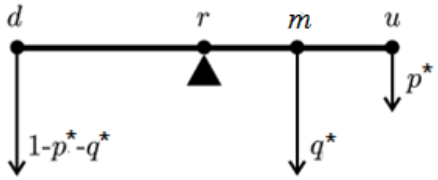
$$p^*(u-r)+q^*(m-r)+(1-p^*-q^*)(d-r)=0 \qquad (2.51)$$

เราสามารถพิจารณาสามสิ่งอันดับ $(p^*,q^*,1-p^*-q^*)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $(u-r,m-r,d-r)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของกำไร(ขาดทุน) ต่อหุ้นต่อคาบเวลา นั่นหมายความว่า $(p^*,q^*,1-p^*-q^*)$ เป็นจุดบนรอยตัดระหว่างระนาบ $\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\geq 0,\ a+b+c=1\}$ กับระนาบซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ของกำไร $(u-r,m-r,d-r)$ ตามรูป ดังนี้



รูปที่ 2.11 *เรขาคณิตของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง*

เงื่อนไข tt-2 ยืนยันได้ว่ารอยตัดระหว่างระนาบสามเหลี่ยมกับระนาบซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ของกำไร $(u-r, m-r, d-r)$ ไม่เป็นเซตว่าง เนื่องจากเวกเตอร์ $(u-r, m-r, d-r)$ ไม่ผ่านอัฏภาคที่เป็นบวก (positive octant) จะได้ว่ามีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงเป็นจำนวนอนันต์ค่าอยู่บนเส้นตรงซึ่งเป็นรอยตัดตามรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.12 *อธิบายความหมายของความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงเชิงกลศาสตร์*

นอกจากการพิจารณาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงในเชิงเรขาคณิตตามรูปที่ 2.10 แล้ว ยังสามารถพิจารณาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงในเชิงกลศาสตร์ บนคานสมดุลซึ่งมี r เป็นจุดหมุน โดยที่ q^* เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล m ซึ่งอยู่ระหว่างวัตถุปลายคานทั้งสองมวล d และ u และมีแรง $1-p^*-q^*$ และ p^* ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.12

ตัวอย่างที่ 2.19 กำหนดให้ $u=0.2$, $m=0$, $d=-0.1$ และ $r=0$ จงหาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ จากสมการ (2.51), $p^*(u-r)+q^*(m-r)+(1-p^*-q^*)(d-r)=0$

โดยการแทนค่า ได้ $p^*(0.2-0)+q^*(0-0)+(1-p^*-0)(-0.1-0)=0$

โดยการแก้สมการ ได้ $p^*=1/3$ และ $q^*=s$ สำหรับทุก ๆ $0<s<1$

เนื่องจาก $0 < p^* + q^*, q^* < 1$ ดังนั้น $0 < s < \frac{2}{3}$ ดังนั้นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $\left\{ (p^*, q^*) = \left(\frac{1}{3}, s \right) | s \in (0, 2/3) \right\}$

การวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์

ผลลัพธ์ข้างต้นแสดงให้เห็นว่า มีชุดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (p^*, q^*) เป็นจำนวนอนันต์ โดยมีลักษณะเป็นเส้นตรงบนระนาบ ซึ่งสามารถวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์ได้ดังนี้

- แบบจำลองมีความยืดหยุ่นสูงในการประมาณพฤติกรรมของตลาดจริง

ความน่าจะเป็น q^* สามารถปรับค่าได้ในช่วง $(0, \frac{2}{3})$ เพื่อให้สอดคล้องกับสถานการณ์ของสินทรัพย์ เช่น หากสินทรัพย์มีแนวโน้มทรงตัวบ่อยกว่าขึ้นหรือลง ผู้ใช้แบบจำลองสามารถเลือก q^* ที่สูงขึ้นเพื่อสะท้อนลักษณะนี้

- เป็นเครื่องมือสนับสนุนการตัดสินใจลงทุนแบบ hedging หรือ delta-neutral

ความยืดหยุ่นของ p^* และ q^* ช่วยให้นักวิเคราะห์สามารถกำหนด hedge ratio ได้อย่างเหมาะสมกับลักษณะของราคาสินทรัพย์ในตลาดจริง

- สนับสนุนแนวคิดว่า ตลาดไม่จำเป็นต้องมี risk-neutral probability เดียว

ในกรณีนี้มีชุดค่าความน่าจะเป็นที่ทำให้มาร์ทิงเกลเป็นจริงได้หลายค่า ซึ่งชี้ให้เห็นว่าการประเมินราคาตราสารอาจอยู่ในช่วง ไม่ใช่เพียงค่าเดียวแบบ deterministic

- ใช้วิเคราะห์ best-case / worst-case ของพอร์ตได้

การเลือก q^* ใกล้ 0 หรือ $2/3$ สามารถใช้เป็นกรณีศึกษาสำหรับวิเคราะห์ผลกระทบสูงสุดและต่ำสุดต่อพอร์ตในสถานการณ์ต่าง ๆ

ดังนั้น จะเห็นว่าชุดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$\left\{ (p^*, q^*) = \left(\frac{1}{3}, s \right) | s \in (0, 2/3) \right\}$$

แสดงให้เห็นถึงความยืดหยุ่นในการกำหนดความน่าจะเป็นภายใต้แบบจำลองต้นไม้ไตรภาค และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดกลยุทธ์ลงทุน การป้องกันความเสี่ยง และการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็นของราคาสินทรัพย์ในระยะสั้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ □

หมายเหตุ: การลงทุนแบบ Hedging หมายถึง การจัดพอร์ตหรือทำธุรกรรมเพื่อลดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ เช่น การซื้อออปชันหรือใช้ตราสารอนุพันธ์เพื่อชดเชยการเปลี่ยนแปลงราคาของสินทรัพย์หลัก

บทสรุปท้ายบทที่ 2

บทที่ 2 ได้อธิบายแบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการอธิบายพฤติกรรมราคาของสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริบทของตลาดทุนและตราสารอนุพันธ์ เนื้อหาในบทนี้ครอบคลุมตั้งแต่กลไกราคาและผลตอบแทน ไปจนถึงแบบจำลองโครงสร้างต้นไม้ การวัดความเสี่ยง และทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการกำหนดราคาสินทรัพย์

- **กลไกราคาและผลตอบแทน**: ราคาสินทรัพย์มีลักษณะไม่แน่นอนและเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรสุ่ม เช่น ข่าวเศรษฐกิจ หรือพฤติกรรมนักลงทุน ตัวอย่างเช่น เมื่อมีข่าวดีเกี่ยวกับการขยายสนามบินของ A ราคาหุ้นจะมีแนวโน้มปรับขึ้น และสามารถจำลองสถานการณ์นี้ด้วยแบบจำลองต้นไม้ เพื่อพิจารณาความน่าจะเป็นของผลตอบแทนที่เปลี่ยนไปตามสถานการณ์ต่าง ๆ
- **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาคและไตรภาค**: เป็นเครื่องมือสำคัญในการกำหนดราคาสินทรัพย์ โดยสามารถนำไปใช้ในการประเมินราคาคอลออปชัน เช่น ในกรณีศึกษาของหุ้น A นักวิเคราะห์สามารถใช้ **Binomial Tree Model** เพื่อประเมินมูลค่าคอลออปชันที่มีอายุ 3 เดือน ราคาหุ้นปัจจุบัน 70 บาท และราคาใช้สิทธิ 72 บาท เพื่อพิจารณาว่าจะลงทุนในออปชันหรือไม่ภายใต้สถานการณ์ราคาที่อาจ “ขึ้น” หรือ “ลง” ในแต่ละช่วงเวลา
- **ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง และ สมบัติมาร์ทิงเกล**: แนวคิดเหล่านี้ช่วยให้นักลงทุนสามารถใช้ "มาตรวัดราคายุติธรรม" โดยไม่ขึ้นกับทัศนคติส่วนตัว ตัวอย่างเช่น ในการลงทุนหุ้น B ที่มีความผันผวนต่ำ นักลงทุนอาจประเมินว่าราคาในอนาคตภายใต้ risk-neutral measure จะเท่ากับราคาปัจจุบันที่ถูกคิดลด ซึ่งช่วยให้สามารถวางกลยุทธ์การลงทุนแบบ hedge หรือปรับน้ำหนักพอร์ตตามมูลค่าที่แท้จริง

- **ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์**: เป็นกรอบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ตรวจสอบว่าแบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถใช้ได้จริงหรือไม่ โดยตรวจสอบว่าไม่มีโอกาสค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage) ตัวอย่างเช่น หากราคาคอลออปชันที่คำนวณได้จากแบบจำลอง Binomial Tree ไม่สอดคล้องกับราคาตลาด อาจเป็นสัญญาณว่ามีโอกาสทำกำไรหรือแบบจำลองยังไม่สมบูรณ์

การประยุกต์ใช้จริงในวงการการเงิน

- **ธนาคารเพื่อการลงทุน** ใช้แบบจำลองเหล่านี้เพื่อสร้างผลิตภัณฑ์อนุพันธ์ที่ซับซ้อน เช่น Barrier Options หรือ Asian Options
- **ผู้จัดการกองทุน** ใช้ Martingale property เพื่อตรวจสอบกลยุทธ์ Dynamic Hedging และทำให้แน่ใจว่าผลตอบแทนที่คาดหวังไม่เบี่ยงเบนจากสมมติฐานพื้นฐาน
- **นักลงทุนรายย่อย** สามารถใช้แบบจำลองต้นไม้ร่วมกับการวิเคราะห์ปัจจัยพื้นฐานและเทคนิค เช่น MACD หรือ RSI เพื่อประเมินโอกาสการซื้อขายในช่วงเวลาสั้น

แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่องจึงเป็นเครื่องมือที่มีความยืดหยุ่นและทรงพลัง ไม่เพียงแต่ในเชิงทฤษฎี แต่ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้จริงได้ในหลากหลายบริบท ทั้งในการวางแผนการลงทุน การกำหนดราคาสินทรัพย์ และการบริหารความเสี่ยง ทำให้ผู้เรียนมีพื้นฐานที่มั่นคงในการวิเคราะห์ตลาดและตัดสินใจลงทุนอย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229–263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[3] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen, 300*(1), 463–520. https://doi.org/10.1007/BF01450498

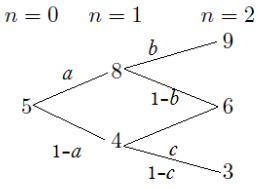
[4] Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory, 20*(3), 381–408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-3

[5] Hull, J. C. (2017). *Options, futures, and other derivatives* (9th ed.). Pearson.

[6] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science, 4*(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1) พิจารณาแบบจำลองราคาแบบเวลาไม่ต่อเนื่องของหุ้น S ที่ประกอบด้วย 2 คาบเวลา ดังแผนภาพ



และกำหนดให้ r เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อคาบของตราสารหนี้ A จงหา a, b และ c ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงในเทอมของ r พร้อมทั้งตรวจสอบว่าแบบจำลองราคาสอดคล้องกับทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์หรือไม่

2) พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
ω_1	100	120	120	125
ω_2	100	90	120	110
ω_3	100	90	110	120

2.1) จากสถานการณ์ที่กำหนดให้จงเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคา

2.2) จงคำนวณหา $K(n)$

2.3) จงคำนวณหา $k(n)$ เมื่อกำหนดจ่ายเงินปันผล 2 บาทต่อหุ้นต่อคาบ

2.4) สมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ ω_1, ω_2 และ ω_3 เป็น 0.5, 0.3 และ 0.2 ตามลำดับ จงหาค่าคาดหวังของ $K(1,3)$

3) สมมติว่าราคาหุ้น S เป็นไปตามแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค และ กำหนดให้

$$K(n)=\begin{cases}0.2 & ;\text{probability } p\\ 0.05 & ;\text{probability } 1-p\end{cases}$$

กำหนดให้ $S(0)=100$ ถ้าความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงเท่ากับ 0.6 จงหาค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของราคาหุ้น $S(3)$ เมื่อกำหนดราคาหุ้น $S(2)$ บาท

4) จากโจทย์ข้อ 3) จงหาราคาหุ้นส่วนลด (discounted stock prices) ของคาบเวลาที่ 3

5) พิจารณาตลาดซึ่งมี 3 สถานการณ์ คือ ตลาดขาขึ้น ตลาดขาลง และตลาดไม่มีทิศทาง แทนด้วย ω_1, ω_2 และ ω_3 ตามลำดับ โดยราคาและสถานการณ์สามารถเขียนตารางแสดงได้ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	110
ω_2	90	80	90
ω_3	90	110	99

จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ จงเขียนเป็นต้นไม้การเคลื่อนไหวของราคาดังกล่าว

6) จากข้อ 5) โดยสมมติว่าความน่าจะเป็นของการเกิดสถานการณ์ เป็น 0.5, 0.2 และ 0.3 ตามลำดับ จงคำนวณค่าของ $E[K(t)]$ และ $E[k(t)]$ ในกรณีต่อไปนี้

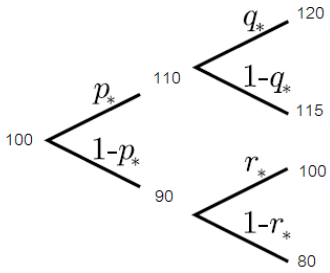
6.1) ไม่มีการจ่ายเงินปันผล

6.2) มีการจ่ายเงินปันผล 1.50 บาทต่อหุ้น

7) กำหนดให้ i เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ A ซึ่ง $100A(2)-A(0)=5,568$, $A(0)=50$ และสมมติว่าราคาของหุ้น S เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ คือ ω_1, ω_2, ω_3 และ ω_4 ดังนี้

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	110	120
ω_2	100	110	115
ω_3	100	90	100
ω_4	100	90	80

ให้ p^*, q^* และ r^* ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงในกิ่งราคาของแต่ละขั้วกิ่งดังรูป



จงแสดงว่าการกำหนดราคาของหุ้นสอดคล้องหลักการปราศจากการค้ากำไร หรือไม่

8) สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงคำนวณหา u และ d ที่ทำให้

$S(1)=\begin{cases}90 & ;\uparrow \\ 73 & ;\downarrow\end{cases}$ และ $S(2)=89 \quad ;\downarrow\downarrow$

9) สมมติให้ราคาหุ้น $S(t)$ เป็นไปตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค และ $K(n)=\begin{cases}u & ;\uparrow \\ d & ;\downarrow\end{cases}$ ซึ่งทำให้

$S(2)=\begin{cases}112 & ;\uparrow\uparrow \\ 104 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow \\ 96 & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$ ถ้า $S(0)=100$ แล้ว จงหา $S(3)$

10) สำหรับแบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค กำหนดให้ $u=0.12$, $m=0.05$, $d=0$ และ $r=0.1$ จงหาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

11) สมมติให้อัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 3.5 % ต่อปี และราคาปัจจุบันของหุ้นบริษัทหนึ่ง $S(0)=20$ บาท และอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้นแต่ละขั้วโหนดเท่ากับ

$K(n)=\begin{cases}0.08 & ;\uparrow \\ -0.02 & ;\downarrow\end{cases}$ สำหรับทุก ๆ $n=1,2,3,\ldots$ จงแสดงว่า สำหรับทุกๆ $n=0,1,2,3$ การเคลื่อนไหวของราคาหุ้น $S(n)$ *สอดคล้องกับสมบัติมาร์ทิงเกล*

12) กำหนดให้ A เป็นราคาของตราสารหนี้ ซึ่ง $A(0)=50$ บาท และอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นของตราสารหนี้ เท่ากับ 4% ต่อปี สมมติว่าราคาของหุ้น S เป็นไปได้ 4 สถานการณ์ คือ ω_1, ω_2, ω_3 และ ω_4 ดังนี้ สำหรับ $t=0,1,2$ (ปี)

สถานการณ์	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	120
ω_2	90	100	102
ω_3	90	80	100
ω_4	90	80	75

12.1) จงคำนวณหาความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง $P^*(\omega_k)$ สำหรับทุกๆ $k = 1,2,3,4$

12.2) จงวิเคราะห์แนวโน้มของราคาหุ้นจาก $E\left[S(2)\right]$

12.3) จากการวิเคราะห์แนวโน้มของราคาหุ้นในข้อ 12.2) หากนักลงทุนลงทุนในหุ้นควรเลือกเปิดสถานะชอร์ต หรือ สถานะลอง กำหนดให้วงเงินในการทำชอร์ตหรือลองเท่ากับ 100,000 บาท พร้อมทั้งหาค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนและความเสี่ยงจากการลงทุน (ของพอร์ตการลงทุน)

13) (การตรวจสอบสมบัติมาร์ทิงเกลของราคาหุ้น) ราคาหุ้นตัวหนึ่งมีมูลค่าเริ่มต้นที่ $S_0 = 100$ บาท โดยมีการเคลื่อนไหวตามแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบ ดังนี้ หากราคาหุ้นขึ้น จะเพิ่มขึ้น 20% ต่อคาบ หากราคาหุ้นลง จะลดลง 10% ต่อคาบ กำหนดอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง $r = 0.05$ ต่อคาบ

13.1) เขียนแผนภาพต้นไม้ของราคาหุ้น S_t สำหรับ $t = 0,1,2$

13.2) คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^*

13.3) เขียนแผนภาพต้นไม้ของราคาหุ้นส่วนลดและตรวจสอบว่าตรวจสอบสมบัติมาร์ทิงเกลของราคาหุ้นส่วนลด

14) (วิเคราะห์พอร์ต Delta-Neutral ด้วยการลงทุนสองสินทรัพย์) สมมุติว่าคุณลงทุนในหุ้นสองตัว คือ A และ B โดยข้อมูลมีดังนี้

- หุ้น A มีราคาปัจจุบัน $S_A = 100$ และค่า Delta ต่อการเปลี่ยนแปลง +1
- หุ้น B มีราคาปัจจุบัน $S_B = 200$ และ ค่า Delta ต่อการเปลี่ยนแปลง -0.5

14.1) ถ้าคุณต้องการสร้างพอร์ตที่มีค่า Delta รวมเป็นศูนย์ (Delta-Neutral) ควรลงทุนในหุ้น A และ B ในสัดส่วนเท่าใด

14.2) หากราคาหุ้น A เพิ่มขึ้น 10 บาท ค่าพอร์ตจะเปลี่ยนแปลงเท่าใด

14.3) วิเคราะห์ว่า Delta-Neutral มีประโยชน์เช่นไรในการบริหารความเสี่ยง

15) (ตรวจสอบการไม่เกิด Arbitrage ด้วยสมบัติมาร์ทิงเกล) พิจารณาราคาหุ้นที่เปลี่ยนแปลงได้ 4 สถานการณ์ใน 2 คาบแรก ดังนี้

สถานการณ์	S_0	S_1	S_2
1	100	110	122
2	100	110	108
3	100	90	100
4	100	90	90

15.1) สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยงคือ $r = 0.05$ ต่อคาบ จงตรวจสอบว่ามีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงที่ทำให้ราคาหุ้นส่วนลดมีสมบัติมาร์ทิงเกลหรือไม่

15.2) คำนวณ $\mathbb{E}[\tilde{S}_2 \mid S_1 = 110]$ และเปรียบเทียบกับ $\tilde{S}_1$ ว่าตรงตามสมบัติมาร์ทิงเกลหรือไม่

15.3) วิเคราะห์ผลลัพธ์ในแง่ของหลักการปราศจากการค้ากำไร

บทที่ 3 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

เนื้อหาประกอบด้วย

3.1 อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน

3.2 การเดินสุ่ม

3.3 การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน

3.4 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

3.5 การประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวน

บทนำ

ในบทก่อนหน้า เราได้ศึกษาแบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง เช่น แบบจำลองต้นไม้ทวิภาคและไตรภาค ซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์ในช่วงเวลาที่แยกเป็นช่วง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตาม ราคาสินทรัพย์ทางการเงินในโลกความเป็นจริง เช่น ราคาหุ้นหรือดัชนีตลาด มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามเวลา และตอบสนองต่อข้อมูลใหม่ได้แทบจะในทันที จึงจำเป็นต้องมีแบบจำลองที่สะท้อนพฤติกรรมดังกล่าวได้แม่นยำยิ่งขึ้น

บทที่ 3 นี้จึงมุ่งเน้นการศึกษา **แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time Price Models)** โดยเริ่มจากการทำความเข้าใจแนวคิดพื้นฐาน ได้แก่

- **อัตราดริฟท์** ซึ่งสะท้อนแนวโน้มเฉลี่ยของราคาสินทรัพย์ในระยะยาว
- **ค่าความผันผวน** ที่บ่งชี้ระดับความไม่แน่นอนของการเคลื่อนไหวของราคา
- **การเดินสุ่ม (Random Walk)** ซึ่งเป็นแนวคิดเบื้องต้นของการเคลื่อนไหวแบบไม่สามารถทำนายได้
- และ **การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน (Brownian Motion)** ซึ่งเป็นกระบวนการสุ่มต่อเนื่องที่เป็นรากฐานสำคัญของแบบจำลองในตลาดการเงิน

เมื่อเข้าใจองค์ประกอบพื้นฐานเหล่านี้แล้ว เราจะสามารถพัฒนาแบบจำลองราคาในรูปแบบต่อเนื่องที่สะท้อนพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ในเชิงเวลาได้อย่างสมจริงมากขึ้น เช่น การใช้ **Geometric Brownian Motion** ซึ่งเป็นแกนกลางของการจำลองราคาหุ้นในแบบจำลองต่าง ๆ ที่ใช้จริงในตลาดทุน

สุดท้าย บทนี้ยังกล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำคัญ ได้แก่ อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน จากข้อมูลในอดีต เพื่อให้สามารถนำแบบจำลองไปใช้งานจริงได้ในการวิเคราะห์และตัดสินใจลงทุน เช่น การคาดการณ์ความเสี่ยงของสินทรัพย์ หรือการกำหนดกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยงในพอร์ตการลงทุน

3.1 อัตราดริฟท์และค่าความผันผวน

แบบจำลองราคาในเชิงเวลาไม่ว่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องหรือแบบต่อเนื่อง ต่างก็ต้องอาศัยพารามิเตอร์หลัก 2 ประการในการอธิบายพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ นั่นคือ **อัตราดริฟท์ (Drift Rate)** และ **ค่าความผันผวน (Volatility)** ซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวกำหนดทิศทางและระดับความไม่แน่นอนของการเคลื่อนไหวของราคาในอนาคต

- อัตราดริฟท์ สะท้อนแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของราคาสินทรัพย์โดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหนึ่ง โดยสามารถมองได้ว่าเป็นอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของนักลงทุน หากไม่มีความผันผวนเข้ามาเกี่ยวข้อง
- ค่าความผันผวน บ่งชี้ถึงความไม่แน่นอนหรือความแปรปรวนของราคาสินทรัพย์ในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการประเมินความเสี่ยงของการลงทุน

ความเข้าใจในสองพารามิเตอร์นี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาแบบจำลองเชิงเวลา เช่น Geometric Brownian Motion ซึ่งถูกนำไปใช้ในหลากหลายบริบทของตลาดการเงิน เช่น การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ การประเมินความเสี่ยงของพอร์ต และการสร้างกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยง ดังนั้น การศึกษาอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนจึงเป็นจุดเริ่มต้นของการสร้างแบบจำลองราคาที่มีประสิทธิภาพและสามารถใช้งานได้จริงในโลกการลงทุน

พิจารณาช่วงเวลา $[0,1]$ แบ่งช่วงเวลาออกเป็น N ช่วงเท่า ๆ กันจะได้ความกว้างหรือขนาดคาบเวลา $\tau = \frac{1}{N}$ จากแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค สมมติให้ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวราคาขึ้นเท่ากับ p ดังนั้นความน่าจะเป็นการเคลื่อนไหวราคาลงเท่ากับ $1-p$ จะได้อัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(n)$ สำหรับทุก ๆ $n = 1,2,...,N$

$$k(n) = \ln(1+K(n)) = \begin{cases} \ln(1+u) & ;\text{probability } p \\ \ln(1+d) & ;\text{probability } 1-p \end{cases} \tag{3.1}$$

จากการแบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น N ช่องย่อยเท่า ๆ กัน ซึ่งจะทำให้เกิดจุดเวลา $t = 0,1,2,...,N$ (คาบ) โดยอัตราผลตอบแทนลอการิทึมทั้งหมดบนช่วง $[0,1]$ เท่ากับ $k(1)+k(2)+...+k(N)$ กำหนดสัญลักษณ์ให้ $\mu = E\left[k(0,N)\right]$ แทนค่าคาดหวัง และ $\sigma = \sqrt{Var\left(k(0,N)\right)}$ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม $k(1)+k(2)+...+k(N)$ โดยเรียก μ ว่า *อัตราดริฟท์* (drift rate) ซึ่งเป็นค่าคาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาของ $S(t)$ นั่นคือ μ เป็นค่าคาดหวังของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมนั่นเอง และเรียก σ ว่า *ค่าความผันผวน* (volatility) ซึ่งเป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาของ $S(t)$ เพราะว่า $K(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระและ $k(n) = \ln(1+K(n))$ สำหรับทุก ๆ n ดังนั้น $k(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ สำหรับทุก ๆ n จะได้ว่า

$$\mu = E[k(1)]+E[k(2)]+...+E[k(N)] = NE[k(n)] \tag{3.2}$$

และ $$\sigma^2 = Var[k(1)]+Var[k(2)]+...+Var[k(N)] = NVar[k(n)] \tag{3.3}$$

นั่นคือ สำหรับแต่ละ $n = 1,2,...,N$ จะได้ $E[k(n)] = \frac{\mu}{N} = \mu\tau$ และ $Var[k(n)] = \frac{\sigma^2}{N} = \sigma^2\tau$

เพราะว่า $$E[k(n)] = p\ln(1+u)+(1-p)\ln(1+d) = \mu\tau \tag{3.4}$$

และ $$Var[k(n)] = p\left(\ln(1+u)-E[k(n)]\right)^2+(1-p)\left(\ln(1+d)-E[k(n)]\right)^2$$

$$= p\left(\ln(1+u)-\mu\tau\right)^2+(1-p)\left(\ln(1+d)-\mu\tau\right)^2 = \sigma^2\tau \tag{3.5}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ (3.4) และ (3.5) ได้

$$\ln(1+u)=\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) \text{ และ } \ln(1+d)=\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right) \tag{3.6}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p=0.5$ (ความน่าจะเป็นที่หุ้นขึ้นและลงในแต่ละเวลาเท่ากัน) จะได้

$$\ln(1+u)=\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau} \text{ และ } \ln(1+d)=\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau} \tag{3.7}$$

จากการแก้ระบบสมการ (3.7) จะได้

$$\mu=\frac{1}{2\tau}\ln\big((1+u)(1+d)\big) \text{ และ } \sigma=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right) \tag{3.8}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหา $E[k(n)]$, $Var[k(n)]$, μ และ σ สำหรับทุก ๆ $n=1,2,...,12$ เมื่อกำหนด $u=0.02$, $d=-0.01$ และ $p=0.5$

วิธีทำ เพราะว่า $\tau=\frac{1}{12}=0.0833$, $E[k(n)]=0.5\big(\ln(1+u)+\ln(1+d)\big)$ และ

$$Var[k(n)]=0.5\big(\ln(1+u)-E[k(n)]\big)^2+0.5\big(\ln(1+d)-E[k(n)]\big)^2$$

ดังนั้น $E[k(n)]=0.5\big(\ln(1+0.02)+\ln(1-0.01)\big)\approx 0.0049$

$Var[k(n)]\approx 0.5\big(\ln(1+0.02)-0.0049\big)^2+0.5\big(\ln(1-0.01)-0.0049\big)^2\approx 0.00022280$

และ $\mu=\frac{1}{2\tau}\ln\big((1+u)(1+d)\big)=\frac{1}{2(0.0833)}\ln\big(1.02(0.99)\big)\approx 0.0585$

$$\sigma=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{1+u}{1+d}\right)=\frac{1}{2\sqrt{0.0833}}\ln\left(\frac{1.02}{0.99}\right)=0.0517$$ □

จากนิยามของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม

$$k(n)=\begin{cases}\ln(1+u)\ ;\text{probability } p\\ \ln(1+d)\ ;\text{probability } 1-p\end{cases}$$

จากสมการ (3.7) เราสามารถเขียน $k(n)$ ในเทอมของ μ และ σ ได้เป็น

$$k(n)=\begin{cases}\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)\ ;\text{probability } p\\ \mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)\ ;\text{probability } 1-p\end{cases}=\mu\tau+\sigma\lambda(n) \tag{3.9}$$

ดังนั้น

$$k(n)=\mu\tau+\sigma\lambda(n) \tag{3.10}$$

เมื่อ $\lambda(n)=\begin{cases}\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) & ;\text{probability } p\\ -\sqrt{\tau}\left(\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right) & ;\text{probability } 1-p\end{cases}$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม สำหรับทุก ๆ $n=1,2,...$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $p=0.5$ จะได้ $\lambda(n)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & ;\text{probability } p\\ -\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 1-p\end{cases}$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงเขียน $S(1)$ และ $S(2)$ ในเทอมของ $\mu,\sigma,\lambda(1)$ และ $\lambda(2)$ เมื่อกำหนดให้ $p=0.5$

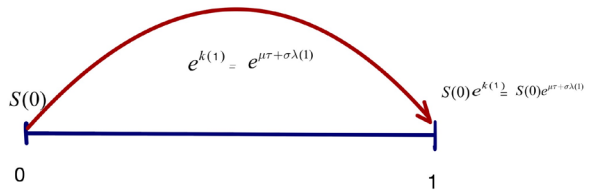
วิธีทำ เพราะว่า $k(n)=\begin{cases}\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\\ \mu\tau-\sigma\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\end{cases}=\mu\tau+\sigma\lambda(n)$ และ

$$1+K(n)=e^{k(n)}=\begin{cases}e^{\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}} & ;\text{probability } 0.5\\ e^{\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}} & ;\text{probability } 0.5\end{cases}$$

จากแผนภาพต้นไม้ทวิภาคได้

$$S(1)=\begin{cases}e^{\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau}}S(0) & ;\text{probability } p\\ e^{\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau}}S(0) & ;\text{probability } 1-p\end{cases}=S(0)e^{\mu\tau+\sigma\lambda(1)}$$

เมื่อ $\lambda(1)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\\ -\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\end{cases}$



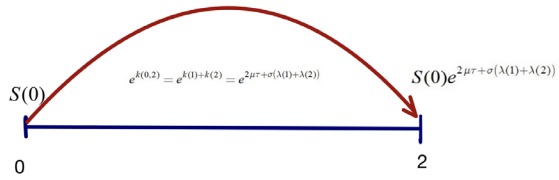
รูปที่ 3.13 $S(1)=S(0)e^{\mu\tau+\sigma\lambda(1)}$ *เป็นมูลค่าสะสมของ* $S(0)$ *ด้วยฟังก์ชันสะสม* $e^{k(1)}=e^{\mu\tau+\sigma\lambda(1)}$

และ
$$S(2)=\begin{cases}e^{2(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau})}S(0) & ;\text{probability } 0.25\\ e^{(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau})}e^{(\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau})}S(0)=e^{2\mu\tau}S(0) & ;\text{probability } 0.5\\ e^{2(\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau})}S(0) & ;\text{probability } 0.25\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{2(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau})}S(0) & ;\text{probability } 0.25\\ e^{(\mu\tau+\sigma\sqrt{\tau})}e^{(\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau})}S(0)=e^{2\mu\tau}S(0) & ;\text{probability } 0.5\\ e^{2(\mu\tau-\sigma\sqrt{\tau})}S(0) & ;\text{probability } 0.25\end{cases}$$

$$=S(0)e^{2\mu\tau+\sigma(\lambda(1)+\lambda(2))}$$

เมื่อ $\lambda(2)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\\ -\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\end{cases}$ และ $\lambda(1)+\lambda(2)=\begin{cases}2\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.25\\ 0 & ;\text{probability } 0.5\\ -2\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.25\end{cases}$



รูปที่ 3.14 $S(2)=S(0)e^{2\mu\tau+\sigma(\lambda(1)+\lambda(2))}$ *เป็นมูลค่าสะสมของ* $S(0)$ *ด้วยฟังก์ชันสะสม* $e^{k(1)+k(2)}=e^{2\mu\tau+\sigma(\lambda(1)+\lambda(2))}$ □

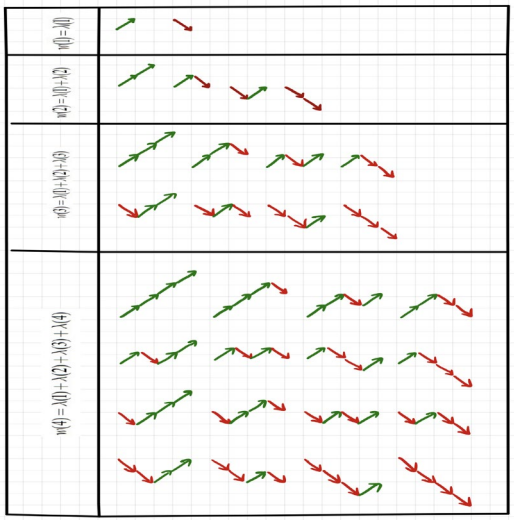
3.2 การเดินสุ่ม

กำหนดให้ $w(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มนิยาม โดย

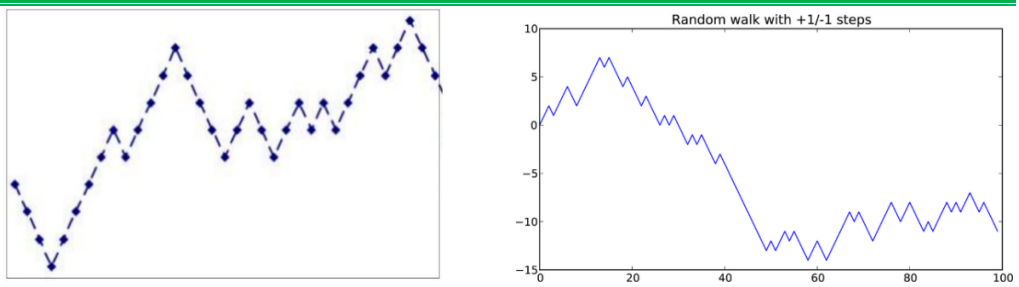
$$w(n)=\lambda(1)+\lambda(2)+\ldots+\lambda(n) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n=1,2,\ldots \tag{3.11}$$

และ $w(0)=0$ เราเรียก $w(n)$ ว่า *การเดินสุ่ม* (random walk) และเรียก $w(n)$ ว่า *การเดินสุ่มสมมาตร* (symmetric random walk) ถ้า $\lambda(n)=\begin{cases}\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\\ -\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5\end{cases}$

จะได้ว่า $$\lambda(n)=w(n)-w(n-1) \tag{3.12}$$



รูปที่ 3.1 *รูปแบบการเดินสุ่มสมมาตร* $w(n)$



รูปที่ 3.2 *การอธิบายเคลื่อนไหวของราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่ม*

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับเวลา $t=\tau n$, $n=1,2,...$ จะได้ว่า ราคาหุ้น $S(t)$ อยู่ในรูป

$$S(t)=S(0)e^{\mu t+\sigma w(t)} \tag{3.13}$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$S(t)=S(\tau n)=S(0)e^{k(0,\tau n)}=S(0)e^{k(1\tau)+k(2\tau)+...+k(n\tau)}=S(0)e^{\sum_{i=1}^{n}k(i\tau)} \tag{3.14}$$

จากสูตร (3.10), $k(i\tau)=\mu\tau+\sigma\lambda(i\tau)$, $i=1,2,...,n$ เมื่อแทนใน (3.14) จะได้

$$S(t)=S(0)e^{\sum_{i=1}^{n}(\mu\tau+\sigma\lambda(i\tau))}=S(0)e^{\mu\tau+\sigma\sum_{i=1}^{n}\lambda(i\tau)}=S(0)e^{\mu n\tau+\sigma\sum_{i=1}^{n}\lambda(i\tau)}=S(0)e^{\mu n\tau+\sigma w(n\tau)}=S(0)e^{\mu t+\sigma w(t)} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.3 (การจำลองราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่ม) กำหนดเงื่อนไขของการจำลอง ดังนี้ ราคาเริ่มต้นของหุ้น $S(0)=100$, อัตราดริฟท์ $\mu=0.02$, ความผันผวน $\sigma=0.1$ และความกว้างของช่วงเวลา $\tau=1$ จงจำลองราคาหุ้นด้วยการเดินสุ่มที่เวลา $t=3$

วิธีทำ จากสูตรการคำนวณราคาหุ้น $S(t)=S(0)\cdot e^{\mu t+\sigma w(t)}$ โดยที่

$w(t)=\lambda(1)+\lambda(2)+\lambda(3)$

กรณีตัวอย่าง: สุ่มได้ $\lambda(1)=+1,\lambda(2)=-1,\lambda(3)=+1$ จะได้ $w(3)=+1+(-1)+(+1)=1$

และ $\mu t+\sigma w(3)=0.02\cdot 3+0.1\cdot 1=0.06+0.1=0.16$

ดังนั้น $S(3)=100\cdot e^{0.16}\approx 100\cdot 1.1735=117.35$

สำหรับการสุ่ม $\lambda(n)$ กรณีอื่น ๆ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางเปรียบเทียบผลลัพธ์ของทุกกรณีของ $\lambda(n)$

ลำดับ	$\lambda(1),\ \lambda(2),\ \lambda(3)$	$w(3)$	$\mu t+\sigma w(3)$	$e^{\mu t+\sigma w(3)}$	$S(3)$
1	+1, +1, +1	3	0.06 + 0.3 = 0.36	1.4330	143.30
2	+1, +1, -1	1	0.16	1.1735	117.35
3	+1, -1, +1	1	0.16	1.1735	117.35
4	+1, -1, -1	-1	0.06 - 0.1 = -0.04	0.9608	96.08
5	-1, +1, +1	1	0.16	1.1735	117.35
6	-1, +1, -1	-1	-0.04	0.9608	96.08
7	-1, -1, +1	-1	-0.04	0.9608	96.08
8	-1, -1, -1	-3	0.06 - 0.3 = -0.24	0.7866	78.66

จะเห็นว่า ถึงแม้ว่า $\mu>0$ จะบ่งชี้แนวโน้มการเพิ่มขึ้นของราคา แต่เนื่องจาก $\lambda(n)$ เป็นการสุ่มแบบสมมาตร (symmetric random walk) ราคาหุ้นจึงสามารถผันผวนขึ้นหรือลงได้ในระยะสั้น $S(t)$ เป็นผลลัพธ์ที่สะท้อนถึงความไม่แน่นอนของตลาดการเงินในระยะสั้น □

3.3 การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน

นิยามตัวแปรเชิงสุ่ม $x(n)$ โดย

$$x(n)=\frac{k(n)-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\ \text{ สำหรับทุก ๆ }\ n=1,2,... \tag{3.15}$$

เนื่องจาก $k(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ ดังนั้น $x(n)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระด้วย

เพราะว่า $E[k(n)]=\mu\tau$ และ $Var[k(n)]=\sigma^2\tau$

ดังนั้น จะได้ $$E[x(n)]=\frac{E[k(n)]-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=0 \tag{3.16}$$

และ $$Var[x(n)]=Var[\frac{k(n)-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}]=\frac{1}{\sigma^2\tau}Var[k(n)]=1 \tag{3.17}$$

โดยทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ศูนย์กลาง (the central limit theorem) จะได้ว่า

$$\frac{x(1)+x(2)+...+x(n)}{\sqrt{n}}\to X \qquad \text{เมื่อ}\ \ n\to\infty \tag{3.18}$$

โดยที่ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน* ($X \sim \mathcal{N}(0,1)$)

เนื่องจาก $k(n) = \mu\tau + \sigma\lambda(n)$ ทำให้ได้

$$\lambda(n) = \frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma} = \sqrt{\tau}\frac{k(n) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \sqrt{\tau}x(n) \tag{3.19}$$

นิยามเวลาที่ไม่ต่อเนื่อง พิจารณาช่วงเวลา $[0,1]$ แบ่งช่วง $[0,1]$ เป็น N ช่วงเท่า ๆ กัน กำหนดให้ $\tau = \frac{1}{N}, \quad t_n = n\tau = \frac{n}{N} \in [0,1]$ จะได้ $\lambda(n) = \frac{x(n)}{\sqrt{N}}$ เนื่องจาก $w(n) = \lambda(1) + \lambda(2) + ... + \lambda(n)$ ดังนั้นได้

$$w(n) = \frac{x(1) + x(2) + ... + x(n)}{\sqrt{N}} \tag{3.20}$$

นั่นคือ สำหรับ $t_N = \tau n$, สำหรับทุก ๆ $n = 1,2,...,N$ (โดยที่ $\tau = \frac{1}{N}$) จะได้ว่า

$$w_N(t_N) := w(Nt_N) = \sqrt{t_N}\frac{x(1) + x(2) + ... + x(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}} = \sqrt{t_N}\frac{x(1) + x(2) + ... + x(n)}{\sqrt{n}} \tag{3.21}$$

เมื่อให้ $N \to \infty$ จะได้ $t_N = \frac{n}{N} \to t \in [0,1]$ ผลที่ตามมา คือ

$$w_N(t_N) \to \sqrt{t}X \equiv W(t) \tag{3.22}$$

เนื่องจาก $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ ดังนั้น $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$ สำหรับทุก ๆ $t > 0$ นั่นคือ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน t และเราเรียกค่าลิมิต $W(t)$ สำหรับทุก ๆ $t \geq 0$ นี้ว่า *การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน* (Brownian motion) หรือ *กระบวนการวีเนอร์* (Wiener process)

หมายเหตุ *ถ้า $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

บทนิยาม 3.32 เรียกเซตของตัวแปรเชิงสุ่ม $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ ว่า *การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน* ถ้าสำหรับทุก ๆ $t \geq 0$, $W(t)$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $W(0) = 0$
2) $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$ ($E[W(t)] = 0, Var[W(t)] = t$)

3) สำหรับทุก ๆ s,t,u ซึ่ง $0 \le s \le t \le u$ ส่วนเพิ่ม $W(t)-W(s)$ และ $W(u)-W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มอิสระ

4) สำหรับทุก ๆ s,t ซึ่ง $0 \le s \le t$ ส่วนเพิ่ม (increment) $W(t)-W(s) \sim \mathcal{N}(0,t-s)$

หมายเหตุ 1) ความแตกต่างระหว่าง $W(t)$ และ $w_N(t)$ คือ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มสำหรับทุก ๆ ตัวแปรเวลาต่อเนื่อง $t \ge 0$ แต่ $w_N(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม สำหรับทุก ๆ ตัวแปรเวลาไม่ต่อเนื่อง $t = n\tau$, $n = 1,2,...$ โดยที่ $\tau = \frac{1}{N}$

2) สมบัติข้อ (4) แสดงว่า $W(t)$ มีคุณสมบัติของส่วนเพิ่มนิ่ง (stationary increments) คือ ส่วนเพิ่ม $W(t)-W(s)$ มีการแจกแจงที่ขึ้นอยู่กับเพียงความยาวของช่วงเวลา $t-s$ โดยไม่ขึ้นกับตำแหน่งของเวลา s หรือ t

คุณสมบัตินี้มีความสำคัญอย่างยิ่ง เนื่องจาก

- ทำให้กระบวนการมีความสม่ำเสมอในเชิงเวลา (time-homogeneous) ซึ่งเป็นพื้นฐานในการสร้างแบบจำลองทางการเงินและฟิสิกส์
- เอื้อให้สามารถคำนวณค่าคาดหวัง ความแปรปรวน และฟังก์ชันความหนาแน่นได้อย่างเป็นระบบ
- ใช้ในการพิสูจน์และวิเคราะห์สมบัติของตัวแบบ เช่น สมการอิโต้และแบบจำลองแบล็กโชลส์
- หากขาดคุณสมบัตินี้ แบบจำลองจะไม่เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์โดยสมบูรณ์ และอาจต้องพิจารณากระบวนการอื่น เช่น Fractional Brownian motion ที่มีโครงสร้างความจำ (memory) และพฤติกรรมที่ซับซ้อนกว่า

ตัวอย่างที่ 3.4 (การจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่อง) กำหนดพารามิเตอร์อัตราดริฟท์ $\mu = 0.01$, ความผันผวน $\sigma = 0.2$, ความกว้างของคาบเวลา $\tau = 0.1$ และจำนวนขั้นการเดินสุ่ม $n = 100$ จงจำลองการเคลื่อนที่แบบบราวน์จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่อง

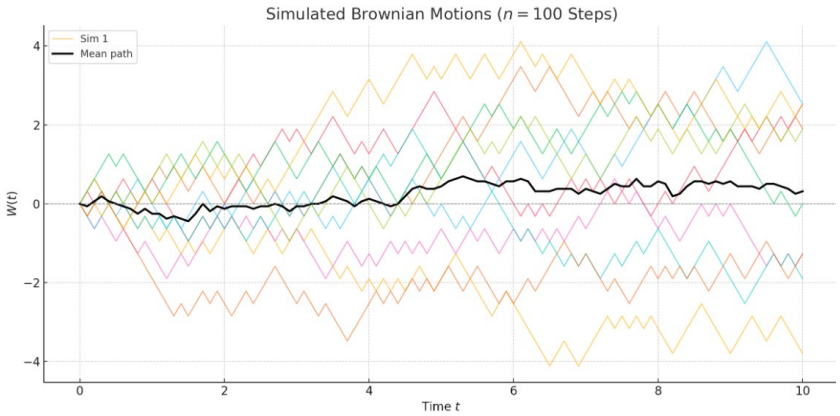
วิธีทำ จากนิยามกระบวนการสุ่ม กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแต่ละช่วงเป็น

$$k(n) = \mu\tau + \sigma\lambda(n) \text{ โดยที่ } \lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5 \\ -\sqrt{\tau} & ;\text{probability } 0.5 \end{cases}$$

จากนั้นหาผลรวมสะสมของ $k(n)$ ได้ $\sum_{i=1}^{n} k(i) \equiv K(t)$ โดยที่ $t = n\tau$ เพื่อแปลงเป็นกระบวนการแบบบราวน์ กำหนดให้

$$W(t) = \frac{K(t) - \mu t}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad W(t) \sim N(0,t)$$

ผลการจำลองเชิงตัวเลข จากการสุ่มค่า $\lambda(n)$ จำนวน 100 ค่า และคำนวณตามนิยามข้างต้น พบว่าได้กราฟของ $W(t)$ ดังภาพ



รูปที่ 3.3 *กราฟแสดงกระบวนการ $W(t)$ จากการจำลองแบบเดินสุ่ม*

กราฟด้านบนแสดงการจำลองกระบวนการบราวน์เนียน $W(t)$ จากการเดินสุ่มไม่ต่อเนื่องจำนวน $n = 100$ ขั้นเวลา (steps) โดย

- แต่ละเส้นแสดงผลของการสุ่ม $W(t)$ จำนวน 10 เส้นทาง

เส้นสีดำหนาเป็น ค่าเฉลี่ยของทุกเส้นทาง ณแต่ละช่วงเวลา t □

3.4 แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง

ต่อไปจะสร้างแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องโดยการพิจารณา $\tau = \frac{1}{N}$ เมื่อ $N \to \infty$ จะได้ว่าจุดเวลา $t = \tau n$ เมื่อ $n = 1,2,...$ เสมือนหนึ่งเป็นจุดเวลาที่ต่อเนื่องกัน สมมติให้ $w(n)$ เป็นการเดินสุ่มสมมาตร พิจารณา $S(t+\tau) - S(t)$ สำหรับ $t = \tau n$, $n = 1,2,...$ เมื่อ $\tau = \frac{1}{N}$ และ $N \to \infty$ ในที่นี้ประมาณ $S(t+\tau) - S(t)$ ในเทอมของ τ ซึ่งมีดีกรีไม่เกินดีกรี 1 จากทฤษฎีบท 3.31 จะได้ว่า

$$S(t+\tau) - S(t) = S(0)e^{\mu(t+\tau)+\sigma w(t+\tau)} - S(0)e^{\mu t+\sigma w(t)}$$

$$= S(0)e^{\mu t+\sigma w(t)}\left(e^{\mu\tau+\sigma w(t+\tau)-\sigma w(t)}-1\right) = S(t)\left(e^{\mu\tau+\sigma(w(t+\tau)-w(t))}-1\right) \quad (3.23)$$

โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด 0 ซึ่ง $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}$ ทำให้ได้

$$S(t+\tau)-S(t) \approx S(t)\left(1+\mu\tau+\sigma\left(w(t+\tau)-w(t)\right)+\frac{\left(\mu\tau+\sigma\left(w(t+\tau)-w(t)\right)\right)^2}{2}-1\right)$$

$$\approx S(t)\left(\mu\tau+\sigma\left(w(t+\tau)-w(t)\right)+\sigma\mu\tau\left(w(t+\tau)-w(t)\right)+\frac{\sigma^2\left(w(t+\tau)-w(t)\right)^2}{2}\right) \quad (3.24)$$

เพราะว่า $\left(w(t+\tau)-w(t)\right)^2 = \lambda^2(t+\tau)=\tau$ ดังนั้น

$$S(t+\tau)-S(t) \approx S(t)\left(\mu\tau+\sigma\left(w(t+\tau)-w(t)\right)+\sigma\mu\tau\left(w(t+\tau)-w(t)\right)+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right) \quad (3.25)$$

เพราะว่า $\sigma\mu\tau\left(w(t+\tau)-w(t)\right)=\sigma\mu\tau\lambda(t+\tau)$ ซึ่งเป็นนิพจน์ของ τ ดีกรีเกิน 1

ดังนั้น $$S(t+\tau)-S(t) \approx \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)\tau+\sigma\left(w(t+\tau)-w(t)\right)S(t) \quad (3.26)$$

เนื่องจาก $t=n\tau$ เมื่อ $\tau=\frac{1}{N}$ ดังนั้น ราคาและการเดินเชิงสุมเชิงสมมาตรที่เวลา t จึงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ N เพื่อให้สอดคล้องกันจะเขียนแทนราคาและการเดินเชิงสุ่มเชิงสมมาตรที่เวลา t สำหรับ $N=1,2,...$ ด้วย $S_N(t)$ และ $w_N(t)$ ตามลำดับ ดังนั้น สมการ (3.26) สามารถเขียนได้ในรูป

$$S_N(t+\frac{1}{N})-S_N(t) \approx \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)S_N(t)\frac{1}{N}+\sigma\left(w_N(t+\frac{1}{N})-w_N(t)\right)S_N(t) \quad (3.27)$$

ถ้ากำหนดให้ $N\to\infty$ จะได้ว่า $S_N(t)\to S(t)$ สำหรับบางตัวแปรเชิงสุ่ม $S(t)$

ดังนั้น จากสมการ (3.27) แบบจำลองราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับเวลาต่อเนื่องจึงอยู่ในรูป

$$dS(t) = \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)dt+\sigma S(t)dW(t) \quad (3.28)$$

หรืออีกรูปหนึ่งคือ $$\frac{dS(t)}{dt} = \left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)+\sigma S(t)\frac{dW(t)}{dt} \quad (3.29)$$

เมื่อ $dS(t)=S(t+dt)-S(t)$ และ $dW(t)=W(t+dt)-W(t)$ เป็นส่วนเพิ่มของตัวแปรเชิงสุ่ม $S(t)$ และ $W(t)$ เหนือช่วงเวลาเล็ก ๆ dt และในทำนองเดียวกัน จาก(3.29) สำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง $t=n\tau$ เมื่อ $\tau=\frac{1}{N}$ จะได้ว่า

$$S_N(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma w_N(t)} \tag{3.30}$$

และถ้าให้ $N \to \infty$ จะได้ว่า สำหรับเวลาต่อเนื่อง $t \geq 0$,

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)} \tag{3.31}$$

หากดำเนินการด้วยลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้าง จะได้

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \mu t + \sigma W(t) \tag{3.32}$$

เพราะว่า $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$ ดังนั้น $\ln S(t) \sim \mathcal{N}(\ln S(0) + \mu t, \sigma^2 t)$

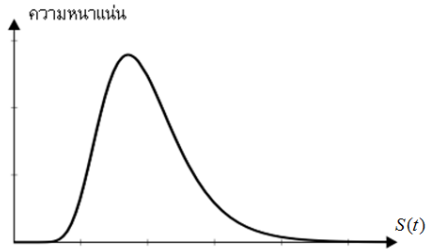
จาก (3.32) และเขียนในอีกรูปหนึ่งได้

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \mu t + \sigma W(t) \tag{3.33}$$

และได้ว่า

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\mu t, \sigma^2 t\right) \tag{3.34}$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า ***กระบวนการราคาแบบเวลาต่อเนื่อง*** (continuous-time price process) หรือ ***การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียนเชิงเรขาคณิต*** (Geometric Brownian Motion: GBM) ซึ่งแทนด้วย $S(t)$ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบ***ลอกนอร์มอล*** (lognormal distribution) กล่าวคือ ค่าของ $S(t)$ มีลักษณะเป็นเลขยกกำลังของค่าที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งหมายความว่า อัตราผลตอบแทนต่อเนื่องของราคาในรูป $\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution) นั่นคือ $\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim \mathcal{N}\left(\mu t, \sigma^2 t\right)$ ดังนั้น ราคาสินทรัพย์ $S(t)$ เองจึงมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล ซึ่งสามารถใช้ในการวิเคราะห์ความเสี่ยงของราคาในอนาคต และการประเมินความน่าจะเป็นของระดับราคาต่าง ๆ ตามฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังแสดงในรูปด้านล่าง



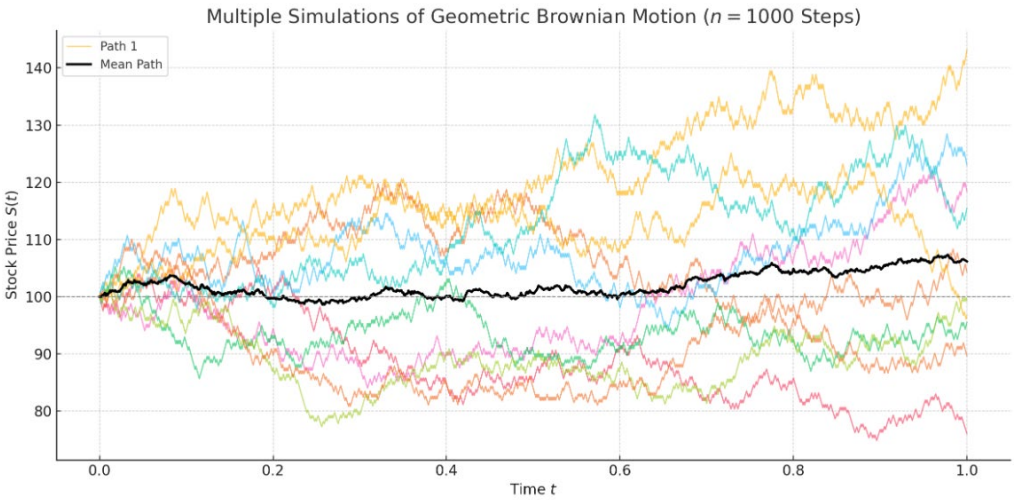
รูปที่ 3.4 *ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ* $S(t)$

ตัวอย่างที่ 3.5 (การจำลองราคาหุ้นด้วยกระบวนการเวลาเชิงต่อเนื่อง) สมมติว่า บริษัทวิจัยการเงินต้องการประเมินความเสี่ยงของราคาหุ้นบริษัท A ซึ่งมีแนวโน้มเติบโตเฉลี่ยปีละ 5% และมีความผันผวนของราคาอยู่ที่ 20% ต่อปี ผู้วิเคราะห์ต้องการศึกษาพฤติกรรมราคาหุ้นในช่วงเวลา 1 ปี โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถสะท้อนความไม่แน่นอนของตลาดได้ จงจำลองเส้นทางของราคาหุ้น $S(t)$ จากกระบวนการราคาแบบเวลาต่อเนื่อง จำนวน 10 เส้นทาง และวิเคราะห์แนวโน้มค่าเฉลี่ยของราคาในช่วงเวลา $t \in [0,1]$

วิธีทำ จากข้อมูล สมมติฐานของแบบจำลอง มีดังนี้ ราคาเริ่มต้นของหุ้น $S(0)=100$, อัตราดริฟท์ $\mu = 0.05$, ความผันผวนของราคา $\sigma = 0.2$, ช่วงเวลาจำลอง $T=1$ ปี และจำนวนขั้นเวลา $n=1000$ และ สูตรที่ใช้ในการจำลองการเปลี่ยนแปลงของราคาในแบบจำลอง GBM มีรูปแบบ

$$S(t) = S(0)\cdot \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์เนียน ซึ่งสร้างจากการสะสมค่าการเปลี่ยนแปลงสุ่ม ตัวอย่างผลลัพธ์จากการจำลองเป็น ดังกราฟ ต่อไปนี้



รูปที่ 3.6 *ผลการจำลองราคาหุ้น $S(t)$ จำนวน 10 เส้นทางจากแบบจำลอง GBM เส้นสีดำทึบคือเส้นค่าเฉลี่ยของแต่ละจุดเวลา*

จากกราฟสามารถวิเคราะห์ผลลัพธ์ ได้ดังนี้

1) แต่ละเส้นทางแสดงพฤติกรรมราคาหุ้นในสภาวะตลาดที่ต่างกัน

2) ค่าเฉลี่ยของเส้นทางราคาในแต่ละช่วงเวลาเข้าใกล้เส้นแนวโน้ม (เส้นสีดำ) ที่สะท้อนดริฟท์ $\mu = 0.05$

3) ความผันผวนของราคาสูงขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ซึ่งสะท้อนผ่านการแผ่กระจายของแต่ละเส้น โดยแบบจำลองนี้จะช่วยให้นักวิเคราะห์เข้าใจความเสี่ยงด้านราคาในอนาคต สามารถใช้ต่อยอดเพื่อคำนวณค่าความเสี่ยงทางการเงิน เช่นมูลค่าที่ความเสี่ยง (Value at Risk : VaR) และ เป็นพื้นฐานสำคัญของแบบจำลองแบล็กโชลส์ (Black–Scholes model) สำหรับการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัด ๆ ไป □

หมายเหตุ: ตัวอย่างโค้ดในการจำลองในตัวอย่าง

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Parameters
S0 = 100          # Initial stock price
mu = 0.05         # Drift
sigma = 0.2       # Volatility
T = 1             # Total time (in years)
n = 1000          # Number of steps
dt = T / n        # Time increment
t = np.linspace(0, T, n + 1)  # Time vector
# Number of simulated paths
num_paths = 10
S_paths = []
# Simulate paths
for _ in range(num_paths):
    W = np.cumsum(np.sqrt(dt) * np.random.choice([1, -1], size=n))  # Brownian path approximation
    W = np.insert(W, 0, 0)  # W(0) = 0
    S = S0 * np.exp((mu - 0.5 * sigma**2) * t + sigma * W)  # GBM formula
    S_paths.append(S)
S_paths = np.array(S_paths)
mean_S = np.mean(S_paths, axis=0)
# Plot
plt.figure(figsize=(12, 6))
for i in range(num_paths):
```

```
    plt.plot(t, S_paths[i], lw=1, alpha=0.6, label=f'Path {i+1}' if i == 0 else None)
plt.plot(t, mean_S, color='black', linewidth=2, label='Mean Path')
plt.axhline(S0, color='gray', linestyle='--', linewidth=0.8)
plt.xlabel('Time $t$')
plt.ylabel('Stock Price $S(t)$')
plt.title('Multiple Simulations of Geometric Brownian Motion ($n=1000$ Steps)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

3.5 การประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวน

จากแบบจำลองราคาหุ้น $S(t)$ สำหรับเวลาต่อเนื่อง

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{3.35}$$

จะเห็นว่าอัตราดริฟท์ μ และค่าความผันผวน σ เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญมากอย่างยิ่ง อีกทั้งสำหรับในแบบจำลองต้นไม้ ยังเป็นพารามิเตอร์ที่สามารถช่วยในการคำนวณอัตราผลตอบแทนลอการิทึม

$$k(n) = \begin{cases} \ln(1+u)\,; prob = 0.5 \\ \ln(1+d)\,; prob = 0.5 \end{cases}$$

และเราทราบว่า $E[k(n)] = \mu\tau$ และ $Var[k(n)] = \sigma^2\tau$

นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ $\tau = \frac{1}{N}$ จะได้ว่า

$$\mu = E[k(0,N)] = NE[k(n)] \text{ และ } \sigma^2 = Var(k(0,N) = NVar(k(n) \tag{3.36}$$

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการการประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนของ $S(t)$ โดยใช้ข้อมูลราคาในอดีต สมมติให้ $\{S(t_1), S(t_2), ..., S(t_N)\}$ เป็นราคาหุ้นในอดีต จากสมการ (3.36) จะเห็นว่าเราสามารถคำนวณ อัตราดิฟท์ μ และค่าความผันผวน σ จากอัตราผลตอบแทนลอการิทึม และ

เนื่องจาก $S(t)$ มีการแจกแจงแบบ *ลอกนอร์มอล* ดังนั้นจะให้ r_k เป็นอัตราผลตอบแทนลอการิทึม กำหนดโดย

$$r_k := \ln\left(\frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})}\right) = \ln S(t_k) - \ln S(t_{k-1}) \quad , \ k = 1,...,N \tag{3.38}$$

โดยความเป็นอิสระและกระจายเหมือนกัน (independent identically distributed: iid) ของตัวแปรเชิงสุ่ม r_k จะได้

$$E[r_k] = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(\triangle t) \qquad \text{และ} \qquad Var[r_k] = \sigma^2(\triangle t) \tag{3.39}$$

ดังนั้น $\sigma^2 = \frac{Var[r_k]}{\triangle t}$ และ $\mu = \frac{E[r_k]}{\triangle t} - \frac{\sigma^2}{2}$

โดยสำหรับค่าความแปรปรวนของตัวอย่างคำนวณได้จาก

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(r_k - \overline{r})^2 \tag{3.40}$$

ดังนั้นถ้า $Var(r_k) \approx s^2$ และ $E[r_k] \approx \overline{r}$ จะได้

$$\sigma \approx \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \equiv \hat{\sigma} \quad \text{และ} \quad \mu \approx \frac{\overline{r}}{\triangle t} - \frac{s^2}{2\triangle t} = \frac{1}{\triangle t}\left(\overline{r} - \frac{s^2}{2}\right) \equiv \hat{\mu} \tag{3.41}$$

ยิ่งไปกว่านั้น,

$$k(n) \approx \hat{\mu}\triangle t + \hat{\sigma}\lambda(n) = \left(\overline{r} - \frac{s^2}{2}\right) + s\delta(n) \tag{3.42}$$

เมื่อ $\delta(n) = \begin{cases} 1 \ ; prob = 0.5 \\ -1 \ ; prob = 0.5 \end{cases}$ และเนื่องจาก $K(n) = e^{k(n)} - 1 = e^{\left(\overline{r} - \frac{s^2}{2}\right) + s\delta(n)} - 1$

ผลที่ตามมาคือ

$$u = e^{\left(\overline{r} - \frac{s^2}{2}\right) + s} - 1 \quad \text{และ} \quad d = e^{\left(\overline{r} - \frac{s^2}{2}\right) - s} - 1 \tag{3.43}$$

ตัวอย่างที่ 3.6 สมมติว่าราคาปิดหุ้นตัวหนึ่ง ณ เริ่มวันเก็บข้อมูล ($t = 0$) เท่ากับ 90 บาท และราคาของหุ้นที่เวลาต่าง ๆ ในอดีตย้อนหลัง 10 วัน เป็นไปดังตารางต่อไปนี้ (ในที่นี้จำนวนจุดเวลา ใน 1 ปี กำหนดให้เท่า 250 วันทำการใน 1 ปี)

t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	90	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21

จงประมาณอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนของหุ้นตัวนี้ และหากต้องการจำลองราคาหุ้นด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค จงใช้อัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่ประมาณได้หา $k(n)$ และเมื่อสมมติว่าความน่าจะเป็นที่หุ้นจะเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา u และเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา d เท่ากัน

วิธีทำ โดยใช้สูตร (3.41), (3.43) สามารถคำนวณค่าต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรม excel ช่วยคำนวณได้ดังตาราง $r_k = \ln S(t_k) - \ln S(t_{k-1})$ และ $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(r_k - \bar{r})^2}$ (ใน excel ใช้คำสั่ง s=stdev.s() และ $\bar{r}$ =average())

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(t)$	90.00	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21
$\ln S(t)$	4.4998	4.5331	4.5330	4.5683	4.5758	4.5858	4.6087	4.6013	4.6500	4.6670	4.6748
r_k		0.0333	-0.0001	0.0353	0.0075	0.0099	0.0229	-0.0074	0.0487	0.0171	0.0078
s	0.017478										
$\bar{r}$	0.017498										

ในที่นี้ $\Delta t = \frac{1}{250}$ ดังนั้น ค่าความผันผวนโดยประมาณ $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{0.017478}{\sqrt{1/250}} = 0.27634468$

และอัตราดริฟท์โดยประมาณ $\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t}\left(\bar{r} - \frac{s^2}{2}\right) = \frac{1}{1/250}\left(0.017498 - \frac{0.017478^2}{2}\right) = 4.3363$

และ $k(n) \approx \left(\bar{r} - \frac{s^2}{2}\right) + s\delta(n) = \left(0.017498 - \frac{0.017478^2}{2}\right) + 0.017478\delta(n) = \begin{cases} 0.03482 & ; prob = 0.5 \\ -0.00013 & ; prob = 0.5 \end{cases}$

และ $K(n) = e^{k(n)} - 1 = \begin{cases} e^{0.03482} - 1 & ; prob = 0.5 \\ e^{-0.00013} - 1 & ; prob = 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0.03543 & ; prob = 0.5 \\ -0.00013 & ; prob = 0.5 \end{cases}$ □

บทสรุปท้ายบทที่ 3

บทที่ 3 ได้นำเสนอแนวคิดของแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของการวิเคราะห์ทางการเงินสมัยใหม่ โดยเริ่มจากการทำความเข้าใจอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนในฐานะพารามิเตอร์หลักที่กำหนดแนวโน้มและความไม่แน่นอนของราคาสินทรัพย์ จากนั้นจึงพัฒนา

แนวคิดผ่านกระบวนการเดินสุ่มและการเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน ไปสู่แบบจำลองที่สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของราคาในลักษณะต่อเนื่องได้อย่างสมจริงมากขึ้น

แบบจำลองเหล่านี้ เช่น Geometric Brownian Motion (GBM) ถูกนำไปใช้จริงอย่างแพร่หลายในวงการการเงิน เช่น

- การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์: แบบจำลอง GBM เป็นแกนกลางของสูตร Black-Scholes ซึ่งใช้ประเมินมูลค่าของออปชันในตลาด เช่น การกำหนดราคาคอลออปชันของหุ้น A ที่มีอายุ 30 วัน โดยใช้ค่าอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนจากข้อมูลย้อนหลัง 1 ปี
- การจัดการความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน: นักลงทุนสามารถใช้ค่าความผันผวนที่ได้จากแบบจำลองเพื่อคำนวณมูลค่าที่ความเสี่ยง (Value at Risk: VaR) และวางกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยง เช่น การซื้อพุตออปชันของหุ้น B เพื่อป้องกันความเสียหายจากการปรับตัวลงของราคา
- การคาดการณ์ช่วงราคาสินทรัพย์: ด้วยการใช้การแจกแจงแบบปกติร่วมกับพารามิเตอร์ของ GBM นักลงทุนสามารถประมาณช่วงราคาที่หุ้นน่าจะอยู่ในอีก 10 วันข้างหน้า เช่น มีโอกาส 95% ที่ราคาหุ้นจะอยู่ระหว่าง 68 ถึง 74 บาท

ดังนั้น ความเข้าใจในแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องไม่เพียงแต่เป็นเครื่องมือเชิงทฤษฎี แต่ยังเป็นสะพานเชื่อมสำคัญที่นำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ไปสู่การประยุกต์ใช้จริงในการกำหนดกลยุทธ์การลงทุน การประเมินมูลค่าทางการเงิน และการจัดการความเสี่ยงได้อย่างมีประสิทธิภาพในโลกแห่งความเป็นจริง

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Boyle, P. P. (1986). Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal, 3*(1), 7–12.

[3] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229–263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[4] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen, 300*(1), 463–520. https://doi.org/10.1007/BF01450498

[5] Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory, 20*(3), 381–408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-3

[6] Hull, J. C. (2017). *Options, futures, and other derivatives* (9th ed.). Pearson.

[7] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science, 4*(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

[8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer. https://doi.org/10.1007/b97490

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1) สมมติว่าราคาหุ้น S เป็นไปตามแบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค และ $S(0)=100$ โดยที่ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวราคาขึ้นเท่ากับการเคลื่อนไหวราคาลง และกำหนดให้แบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น 100 ช่องเท่า ๆ กัน ด้วยขนาดคาบเวลา τ และกำหนดให้

$$E[k(1)]+E[k(2)]+...+E[k(100)]=0.5$$

และ $$Var[k(1)]+Var[k(2)]+...+Var[k(100)]=0.01$$

จงคำนวณหาราคาหุ้น $S(2)$

2) จากแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง กำหนดให้ $E[k(n)]=0.0049$ และ $Var[k(n)]=0.0002$ สำหรับทุก ๆ $n=1,2,...,12$ จงคำนวณหา $K(n)$

3) จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปีและอัตราดริฟท์ μ พร้อมทั้งคำนวณอัตราผลตอบแทน $k(n)$ และ $K(n)$ ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 22 วันทำการ ดังนี้

วันที่	ราคา	วันที่	ราคา
0	50	11	51.08
1	50.00	12	51.84
2	50.00	13	50.88
3	50.41	14	50.88
4	51.10	15	50.58
5	51.01	16	49.75
6	50.89	17	48.90
7	51.08	18	48.67
8	51.08	19	48.31
9	51.08	20	47.51
10	51.08	21	47.51

4) กำหนดให้ $u=0.015$, $d=-0.01$, $p=0.5$, และแบ่งช่วงเวลา $[0,1]$ ออกเป็น 20 ช่องย่อย

4.1) จงคำนวณค่า μ, σ, $\mathbb{E}[k(n)]$, $\mathrm{Var}[k(n)]$ สำหรับ $n=20$

4.2) จงเขียน $S(1)$ และ $S(2)$ ในรูปของ μ, σ, และ $\lambda(1),\lambda(2)$

5) จงพิสูจน์ว่า $k(n)=\mu\tau n+\sigma\lambda(n)\tau$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ $\lambda(n)$

6) สมมติว่าอัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นมีการแจกแจงเป็นอิสระและเหมือนกัน (iid) จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} x(i) \xrightarrow{d} X \sim N(0,1)$ เมื่อ $n\to\infty$

7) จงแสดงว่า หากราคาหุ้น $S(t)$ เปลี่ยนแปลงตามสมการ $dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$ แล้ว $\ln S(t) \sim \mathcal{N}(\ln S(0)+\mu t,\sigma^2 t)$

8) ให้เลือกหุ้นที่สนใจ นำเข้าข้อมูลราคาหุ้นที่สนใจย้อนหลัง 11 วันจาก Yahoo Finance หรือเว็บไซต์อื่น แล้วใช้ Excel คำนวณค่าต่อไปนี้

8.1) อัตราผลตอบแทนลอการิทึม r_k

8.2) ค่าประมาณ μ และ σ

8.3) คำนวณค่า u และ d

9) ให้เลือกหุ้นที่สนใจ นำเข้าข้อมูลราคาหุ้นรายวันย้อนหลัง 252 วัน และดำเนินการวิเคราะห์ เช่น คำนวณ μ, σ รายปี อธิบายขั้นตอนการคำนวณโดยละเอียด

10) นักวิเคราะห์ต้องการใช้แบบจำลอง Brownian motion ทำนายความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นจะเกิน 10% จากราคาปัจจุบันในอีก 1 เดือน หาก $\mu=0.1$, $\sigma=0.2$ ต่อปี จงหาความน่าจะเป็นดังกล่าว

11) สมมติว่าหุ้นบริษัท A มีราคาปัจจุบัน 50 บาท อนาคต 6 เดือน ราคาจะอยู่ในช่วง 48–55 บาท ด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด หาก $\mu=0.08$, $\sigma=0.25$

12. บริษัทประกันแห่งหนึ่งกำลังพัฒนากรมธรรม์ประเภท "ประกันความเสี่ยงการลงทุนในหุ้น" โดยให้ความคุ้มครองในกรณีที่ราคาหุ้นของบริษัท A ลดลงต่ำกว่าระดับที่กำหนดภายในระยะเวลา 1 ปีข้างหน้า เพื่อกำหนดเบี้ยประกันที่เหมาะสม บริษัทประกันต้องการประมาณความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นจะลดลงต่ำกว่า 90 บาทในอีก 1 ปีข้างหน้า โดยใช้แบบจำลองการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล (log-normal distribution) ของราคาหุ้นที่เปลี่ยนแปลงตามแบบจำลองเวลา (Geometric Brownian Motion) โดย กำหนดให้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)=100$, อัตราดริฟท์รายปี $\mu=0.08$ ค่าความผันผวนรายปี $\sigma=0.25$ สำหรับระยะเวลา t = 1 ปี จงตอบคำถามต่อไปนี้

12.1) คำนวณความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น $S(1)$ จะน้อยกว่า 90 บาทในอีก 1 ปีข้างหน้า

12.2) หากบริษัทต้องการคุ้มครองความเสี่ยงนี้ด้วยอัตราการเรียกเก็บเบี้ยประกันเท่ากับมูลค่าคาดหวังของความเสียหาย (Expected Loss) ให้คำนวณเบี้ยประกันที่ควรเรียกเก็บ

12.3) อธิบายข้อสมมติของแบบจำลอง และความเหมาะสมในการนำไปใช้ในบริบทของการประกันราคา

(แนะนำ: ใช้สมการลอกนอร์มอล $\ln S(t) \sim \mathcal{N}\left(\ln S(0)+\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ คำนวณ $\mathbb{P}(S(1)<90)$ โดยเปลี่ยนไปใช้ standard normal และคำนวณมูลค่าคาดหวังของส่วนต่างระหว่างราคาที่คุ้มครองกับราคาจริง หากราคาจริงต่ำกว่าระดับนั้น

13) แบบจำลอง Brownian motion แบบต่อเนื่อง (เช่น Geometric Brownian Motion) ถือว่าราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องและไม่มีการกระโดดของราคาในช่วงเวลาใด ๆ สมมติว่าคุณกำลังวิเคราะห์ราคาหุ้นของบริษัท B และพบว่า

- ราคาหุ้นกระโดดขึ้นทันที 5% ภายในไม่กี่วินาทีหลังจากการประกาศข่าวเชิงบวกอย่างมีนัยสำคัญ (เช่น การควบรวมกิจการ หรือผลประกอบการดีกว่าคาดมาก)
- เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นซ้ำได้ในลักษณะ "ก้าวกระโดด" แบบไม่ต่อเนื่องหลายครั้งในช่วงสั้น ๆ

จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1) คุณยังสามารถใช้แบบจำลอง Brownian motion ได้หรือไม่ในกรณีนี้ เพราะเหตุใด

13.2) อธิบายข้อจำกัดของ Geometric Brownian Motion ในการอธิบายพฤติกรรมราคาที่มีการกระโดด

13.3) เสนอแบบจำลองทางเลือกที่สามารถนำมาใช้ได้ในสถานการณ์นี้ พร้อมอธิบายสมการหรือแนวคิดโดยสังเขป (เช่น Merton Jump-Diffusion Model หรือ Poisson Jump Process)

13.4) ยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่อาจเกิดการ “jump” ของราคาหุ้น และอธิบายว่าเหตุใดแบบจำลองที่มีส่วน jump จึงเหมาะสมกว่าแบบจำลองต่อเนื่อง

14) สมมติว่าราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงตามแบบจำลอง Geometric Brownian Motion (GBM) ซึ่งมีสมการ $S(t) = S(0) \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$ โดยที่ $S(t)$ แทน ราคาหุ้น ณ เวลา t, $S(0) = 100$ แทนราคาปัจจุบัน กำหนดให้ $\mu = 0.12$ แทน อัตราผลตอบแทนคาดหวังต่อปี $\sigma = 0.3$ แทนความผันผวนของราคาหุ้นต่อปี, $W(t)$ เป็นกระบวนการ Wiener หรือ Brownian motion มาตรฐาน สำหรับ $t \in [0,1]$ ซึ่งคือช่วงเวลาจำลองเป็น 1 ปี (เช่น 252 วันทำการ)

14.1) จงเขียนโปรแกรมภาษา Python หรือ ใช้ Microsoft Excel / Google Sheets เพื่อ

- สร้างชุดข้อมูลการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นจำนวน 252 จุด (วันทำการใน 1 ปี)
- สุ่มค่าจากกระบวนการ Wiener, $W(t)$ หรือจำลองจากผลรวมของ Normal distribution
- วาดกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาหุ้นในช่วงเวลา $t \in [0,1]$

14.2) ทดลองจำลองอย่างน้อย 3 ครั้ง และสังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงของเส้นกราฟแตกต่างกันอย่างไรบ้าง

14.3) วิเคราะห์ความหมายของพารามิเตอร์ μ และ σ และอธิบายว่าหากเปลี่ยนค่าเหล่านี้แล้วจะส่งผลต่อกราฟอย่างไร

บทที่ 4 แบบจำลองราคายูโรเปียนออปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

4.1 ยูโรเปียนออปชัน

4.2 ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน

4.3 เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน

4.4 ราคาของออปชันตามตัวแปร

4.5 มูลค่าตามเวลาของออปชัน

4.6 การกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน

4.7 สูตรของแบล็ก-โชลส์

บทนำ

การบริหารความเสี่ยงทางการเงินและการออกแบบผลิตภัณฑ์การลงทุนในยุคปัจจุบันจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถจำลองพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์และตราสารอนุพันธ์ได้อย่างแม่นยำ หนึ่งในเครื่องมือพื้นฐานที่มีบทบาทสำคัญในตลาดการเงินคือ **ตราสารออปชัน (Option)** ซึ่งให้สิทธิแก่ผู้ถือในการซื้อหรือขายสินทรัพย์อ้างอิงภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

ในบทนี้ เราจะศึกษาออปชันประเภทหนึ่งที่เรียกว่า **ยูโรเปียนออปชัน (European Option)** ซึ่งเป็นสัญญาที่สามารถใช้สิทธิได้เพียง “ณ วันครบกำหนดอายุของสัญญา (Expiry Date)” เท่านั้น แตกต่างจากอเมริกันออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้ตลอดช่วงอายุของสัญญาซึ่งจะกล่าวถึงในบทถัดไป การกำหนดราคาของยูโรเปียนออปชันจึงสามารถวิเคราะห์ได้อย่างเป็นระบบโดยใช้แบบจำลองเชิงเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง แกนหลักของบทนี้คือการใช้ **แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model)** โดยเริ่มจากกรณีง่ายในหนึ่งคาบเวลา และขยายไปสู่หลายคาบเวลา ซึ่งนำไปสู่ **สูตรของคอกซ์–รอสส์–โรบินสไตน์ (Cox-Ross-Rubinstein: CRR Model)** ที่ใช้จำลอง

เส้นทางราคาสินทรัพย์อย่างเป็นระบบภายใต้สมมติฐานของการไม่สามารถทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition)

เนื้อหาครอบคลุมหัวข้อสำคัญ ได้แก่ ความหมายและคุณสมบัติของยูโรเปียนคอลและพุทออปชัน ความสัมพันธ์ระหว่างราคาคอลและพุท (Put-Call Parity) ขอบเขตราคาออปชันที่เหมาะสมตามทฤษฎี (Option Bounds) ผลของตัวแปรต่าง ๆ เช่น ราคาใช้สิทธิ เวลา และความผันผวนที่มีต่อราคาของออปชัน การวิเคราะห์มูลค่าตามเวลา (Time Value) การคำนวณราคายูโรเปียนออปชันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา โดยที่จุดเด่นของบทนี้คือการสรุปสู่แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องโดยใช้ **สูตรของแบล็ก-โชลส์ (Black-Scholes Formula)** ซึ่งเป็นรากฐานสำคัญของการกำหนดราคายูโรเปียนออปชันในสภาวะตลาดที่ไม่มีโอกาสทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition) และมีคุณสมบัติตลาดที่สมบูรณ์ สูตรนี้ได้รับการยอมรับในระดับสากลและเป็นเครื่องมือสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ในตลาดจริง

การเข้าใจแบบจำลองเหล่านี้ช่วยให้ผู้อ่านสามารถออกแบบผลิตภัณฑ์การเงิน เช่น สัญญาอนุพันธ์ที่มีโครงสร้างซับซ้อน และวางกลยุทธ์การลงทุนหรือการป้องกันความเสี่ยงที่ตอบสนองต่อความไม่แน่นอนของตลาดได้อย่างมีประสิทธิภาพ

4.1 ยูโรเปียนออปชัน

การกำหนดราคาออปชันโดยใช้แบบจำลองราคาตลาดอย่างง่าย หรือแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบ ในที่นี้ที่เวลา $t=1$ ในแบบจำลองจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบ จะหมายถึงเวลา ณ เวลาครบกำหนด T นั่นเอง ดังนั้น ผลประโยชน์ของยูโรเปียนคอลออปชันจึงสามารถเขียนได้ในรูป

$$\max\{S(T)-K,0\}=\begin{cases}S(T)-K & ;\ S(T)>K\\ 0 & ;\ S(T)\le K\end{cases} \tag{4.1}$$

เพื่อความสะดวกจะแทน $\max\{S(T)-K,0\}$ ด้วย $[S(T)-K]^+$ เมื่อ $[x]^+=\begin{cases}x & ;\ x>0\\ 0 & ;\ x\le 0\end{cases}$ (เรียกว่า *ฟังก์ชันส่วนบวก*)

เนื่องจากผลประโยชน์มีค่าไม่เป็นลบ ดังนั้น ค่าพรีเมียมจึงมีค่ามากกว่าศูนย์และถูกจ่ายเพื่อซื้อออปชันหรือซื้อสิทธิในการซื้อหรือการขายสินค้าอ้างอิง หากไม่มีการจ่ายพรีเมียมเพื่อซื้อออปชัน

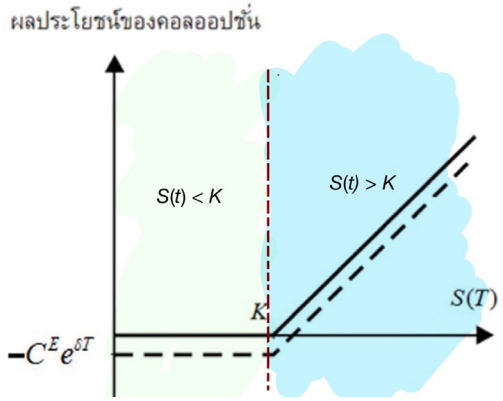
จะเกิดการค้ากำไร (arbitrage) โดยนักลงทุนสามารถทำกำไรได้โดยถือสัญญาออปชันและใช้สิทธิเมื่อผลประโยชน์มีค่าเป็นบวก ซึ่งหากเกิดเหตุการณ์เช่นนี้แล้วจะขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ในที่นี้ค่าพรีเมียมจะเป็นราคาตลาดของออปชัน เพื่อความสะดวกต่อไปจะแทน ค่าพรีเมียมของยูโรเปียนคอลออปชันด้วย C^E โดยที่ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่สมมูลกับอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อคาบ r นั่นคือ $e^{\delta} = 1+r$

สำหรับผู้ซื้อคอลออปชัน (buyer) สมมติว่านักลงทุนยืมเงินจำนวน C^E บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ เพื่อซื้อคอลออปชันจำนวน 1 สัญญา ดังนั้นที่เวลา T นักลงทุนจะได้ กำไรจากการซื้อคอลออปชัน คำนวณได้จาก

$$\textit{กำไรของผู้ซื้อคอลออปชัน = ผลประโยชน์ที่รับ - หนี้ชำระคืน} = [S(T)-K]^{+} - C^E e^{\delta T} \qquad (4.2)$$

และในทางตรงกันข้ามสำหรับผู้ออกคอลออปชัน (writer) จะได้รับเงินจำนวน C^E บาทจากการขายคอลออปชันจำนวน 1 สัญญาและสมมติว่านำเงินที่ได้ไปลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ ดังนั้น กำไรจากการขายคอลออปชันที่ผู้ออกจะได้รับ คำนวณได้จาก

$$\textit{กำไรของผู้ขายคอลออปชัน =เงินสะสมที่ได้รับ - ผลประโยชน์จ่าย} = C^E e^{\delta T} - [S(T)-K]^{+} \qquad (4.3)$$



รูปที่ 4.1 *ผลประโยชน์ (เส้นทึบ) และ กำไร (เส้นประ) ของคอลออปชัน*

ในทำนองเดียวกันสำหรับพุทออปชัน จะแทนค่าพรีเมียมของยูโรเปียนพุทออปชันด้วย P^E โดยผลประโยชน์ของยูโรเปียนพุทออปชัน คือ

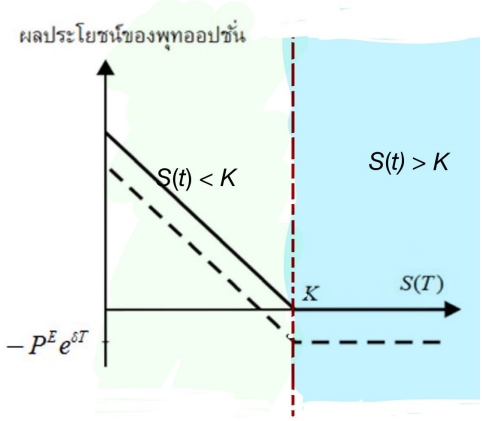
$$[K - S(T)]^+ \tag{4.3}$$

สำหรับผู้ซื้อพุทออปชัน สมมติว่า นักลงทุนยืมเงินจำนวน P^E บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ เพื่อซื้อพุทออปชันจำนวน 1 สัญญา ดังนั้นที่เวลา T นักลงทุนจะได้ กำไรจากการซื้อพุทออปชัน เท่ากับ

$$[K - S(T)]^+ - P^E e^{\delta T} \tag{4.5}$$

และกำไรจากการขายพุทออปชันที่ผู้ออกจะได้รับ เท่ากับ

$$P^E e^{\delta T} - [K - S(T)]^+ \tag{4.6}$$



รูปที่ 4.2 *ผลประโยชน์ (เส้นทึบ) และ กำไร (เส้นประ) ของพุทออปชัน*

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดราคาใช้สิทธิของพุทออปชัน 45 บาท และอายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าผู้ถือได้กำไร 3.75 บาทหลังจากใช้สิทธิ และราคาซื้อออปชัน 5.625 บาท จงหาราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิ กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6 % ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $P^E = 5.625$, $K = 45$, $T = \frac{3}{12}$, $\delta = 0.06$ และ กำไร 3.75 โจทย์ต้องการทราบ $S(3/12)$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อพุทออปชัน เท่ากับ

$$[K - S(T)]^+ - P^E e^{\delta T} = [45 - S(3/12)]^+ - 5.625e^{0.06(3/12)} = 3.75$$

$$[45 - S(3/12)]^+ = 5.625e^{0.06(3/12)} + 3.75$$

$$45 - S(3/12) = 9.46$$

$$S(3/12) = 35.54$$

ราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิ เท่ากับ 35.54 บาท □

ตัวอย่างที่ 4.2 สมมติว่าคอลออปชันของหุ้นอ้างอิง a อายุของสัญญา 2 เดือน มีราคาใช้สิทธิ 110 บาท ณ วันครบกำหนด ถ้าคอลออปชันมีราคาซื้อ ณ วันที่ 30 กันยายน พ.ศ. 2557 เท่ากับ 9.75 บาท และ ราคาหุ้นอ้างอิง ณ วันเดียวกันเท่ากับ 120 บาท จงหาคำนวณว่าราคาหุ้นอ้างอิงควรขึ้นเป็นอย่างน้อยเท่าไรจึงจะไม่ทำให้นักลงทุนขาดทุนจากการซื้อคอลออปชัน ณ วันที่ครบกำหนด สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 5 % ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $C^E = 9.75$, $K = 110$, $T = \frac{2}{12}$, $\delta = 0.05$ และ กำไร ≥ 0 (ไม่ขาดทุน) โจทย์ต้องการทราบ $S(2/12)$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อคอลออปชัน เท่ากับ

$$[S(T)-K]^+ - C^E e^{\delta T} = [S(2/12)-110]^+ - 9.75e^{0.05(2/12)} \geq 0$$

$$[S(2/12)-110]^+ \geq 9.75e^{0.05(2/12)}$$

$$S(2/12)-110 \geq 9.83$$

$$S(2/12) \geq 119.83$$

ราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิควรขึ้นเป็นอย่างน้อย 119.83 บาท □

ตัวอย่างที่ 4.3 สมมติคอลออปชันของหุ้นอ้างอิงหนึ่งมีอายุครบกำหนด 6 เดือน ราคาใช้สิทธิ 40 บาท ณ วันครบกำหนด และคอลออปชันมีราคาซื้อ 4 บาท ถ้าราคาหุ้น ณ วันครบกำหนดสามารถเป็น 38 บาท, 42 บาท หรือ 47 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 1/3 เท่ากัน จงหาค่าคาดหวังของกำไร(ขาดทุน) ของผู้ถือสัญญา กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7% ต่อปี

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $C^E = 4$, $K = 40$, $T = \frac{6}{12}$, $\delta = 0.07$,

$S(6/12) = \begin{cases} 47 \text{ ; probability } 1/3 \\ 42 \text{ ; probability } 1/3 \\ 38 \text{ ; probability } 1/3 \end{cases}$ โจทย์ต้องการทราบค่าคาดหวังของกำไร จะแทนด้วย

$E[\text{Profit}]$ เนื่องจากนักลงทุนจะได้กำไรจากการซื้อคอลออปชัน เท่ากับ $[S(T)-K]^+ - C^E e^{\delta T}$,

$$[S(T)-K]^+ = \begin{bmatrix} \begin{cases} 47-40 \\ 42-40 \\ 37-40 \end{cases}^+ \end{bmatrix} = \begin{cases} 7 \text{ ; probability } 1/3 \\ 2 \text{ ; probability } 1/3 \\ 0 \text{ ; probability } 1/3 \end{cases}$$

และ $C^E e^{\delta T} = 4e^{0.07(6/12)} = 4.14$

จะได้ $\text{Profit} = [S(T)-K]^{+} - C^{E}e^{\delta T} = \begin{cases} 7-4.14 \\ 2-4.14 \\ 0-4.14 \end{cases} = \begin{cases} 2.86 \quad ; \text{probability } 1/3 \\ -2.14 \; ; \text{probability } 1/3 \\ -4.14 \; ; \text{probability } 1/3 \end{cases}$

ดังนั้น $E[\text{Profit}] = (1/3)(2.86) + (1/3)(-2.14) + (1/3)(-4.14) = -1.14$ บาท □

4.2 ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน

ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน (put-call parity) เป็นสมบัติหนึ่งที่สำคัญแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคาคอลออปชันและพุทออปชัน

สมมติให้ คอลออปชันและพุทออปชัน มีเวลาครบกำหนด T และราคาใช้สิทธิ K เช่นเดียวกัน พิจารณาพอร์ตการลงทุน 2 พอร์ตการลงทุน ดังนี้

<u>พอร์ตการลงทุนที่ 1</u> ประกอบด้วย คอลออปชัน 1 สัญญา และ ตราสารหนี้มูลค่า $Ke^{-\delta T}$ บาท

ที่ เวลา $t=0$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $C^{E} + Ke^{-\delta T}$

ที่ เวลา $t=T$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $[S(T)-K]^{+} + K = \max\{S(T), K\}$

<u>พอร์ตการลงทุนที่ 2</u> ประกอบด้วย พุทออปชัน 1 สัญญา และ หุ้น 1 หน่วย ราคา $S(0)$

ที่ เวลา $t=0$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $P^{E} + S(0)$

ที่ เวลา $t=T$; พอร์ตมีมูลค่า เท่ากับ $[K-S(T)]^{+} + S(T) = \max\{S(T), K\}$

เนื่องจากมูลค่าอนาคต(ที่ เวลา $t=T$) ของการลงทุนทั้ง 2 พอร์ตเท่ากัน ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของพอร์ตทั้ง 2 ย่อมเท่ากัน นั่นคือ

$$C^{E} + Ke^{-\delta T} = P^{E} + S(0) \tag{4.7}$$

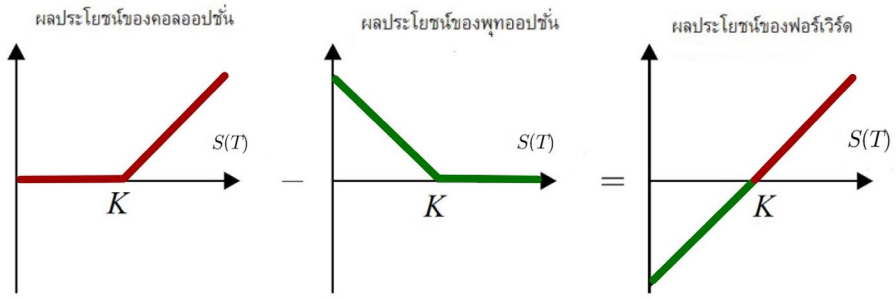
เรียกความสัมพันธ์ (4.7) ว่า *ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน*

จากสมการ (4.7) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$C^{E} - P^{E} = S(0) - Ke^{-\delta T} \tag{4.8}$$

ซึ่งสามารถให้ความหมายได้ว่า ผลต่างระหว่างราคาคอลออปชันกับพุทออปชัน จะต้องเท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของผลต่างราคาหุ้นและราคาใช้สิทธิ จะเห็นว่าการซื้อคอลออปชันพร้อมกับการออกพุทออป

ชันเพื่อขายจะเทียบเท่ากับการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดที่มีระยะเวลาใช้สิทธิ T และราคาฟอร์เวิร์ด K ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังรูป



รูปที่ 4.3 *ความสัมพันธ์ระหว่างคอลออปชัน พุทออปชัน และฟอร์เวิร์ด*

ยิ่งไปกว่านั้นจากสมการ (4.8) จะเห็นว่า ถ้าราคาใช้สิทธิ $K = S(0)e^{\delta T}$ แล้วจะได้ว่าราคาคอลออปชันกับราคาพุทออปชันจะเท่ากัน นั่นคือ $C^E = P^E$

ทฤษฎีบท 4.1 (ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน) สำหรับหุ้นซึ่งไม่มีการจ่ายปันผล จะได้ว่า $C^E - P^E = S(0) - Ke^{-\delta T}$

พิสูจน์ จะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งโดยสมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E - P^E > S(0) - Ke^{-\delta T}$ หรือ $C^E - P^E < S(0) - Ke^{-\delta T}$

<u>กรณีที่ 1</u> $C^E - P^E > S(0) - Ke^{-\delta T}$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ออกตราสารคอลออปชันและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน C^E บาท
- ซื้อพุทออปชัน 1 ตราสาร จ่ายเงิน P^E บาท
- ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
- นำเงินที่เหลือจำนวน $C^E - P^E - S(0)$ บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้ ที่อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ โดยถ้า $C^E - P^E - S(0) > 0$ หมายถึงลงทุนซื้อและถ้า $C^E - P^E - S(0) < 0$ หมายถึงยืมขาย

ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0) = 0$

ที่เวลา $t=T$

- ขายหุ้น 1 หน่วย รับเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพุทออปชัน รับเงิน $[K-S(T)]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้ (คืนเงิน) จากเงินลงทุน $C^E-P^E-S(0)$ บาทรับเงิน (จ่ายเงิน) จำนวน $\left(C^E-P^E-S(0)\right)e^{\delta T}$ บาท
- ปิดสถานะของคอลออปชัน จ่ายเงิน $[S(T)-K]^+$ บาท

และเนื่องจาก $[K-S(T)]^+-[S(T)-K]^+=K-S(T)$

ดังนั้น จะได้ $V(T)=S(T)+[K-S(T)]^+ +\left(C^E-P^E-S(0)\right)e^{\delta T}-[S(T)-K]^+$

$$=K+\left(C^E-P^E-S(0)\right)e^{\delta T}$$

โดยสมมติฐาน $C^E-P^E-S(0)+Ke^{-\delta T}>0 \Rightarrow \left(C^E-P^E-S(0)\right)e^{\delta T}+K>0$

ดังนั้น $V(T)>0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

<u>กรณีที่ 2</u> $C^E-P^E<S(0)-Ke^{-\delta T}$ สามารถทำธุรกรรมได้ดังนี้

ที่เวลา $t=0$

- ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน $S(0)$ บาท
- ออกตราสารพุทออปชันและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน P^E บาท
- ซื้อคอลออปชัน 1 ตราสาร จ่ายเงิน C^E บาท
- นำเงินที่เหลือจำนวน $S(0)+P^E-C^E$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0)=0$

ที่ เวลา $t=T$

- ปิดสถานะของคอลออปชัน 1 ตราสาร รับเงิน $[S(T)-K]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้จากเงินลงทุน $S(0)+P^E-C^E$ บาท รับเงิน $\left(S(0)+P^E-C^E\right)e^{\delta T}$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพุทออปชัน จ่ายเงิน $[K-S(T)]^+$ บาท

จะได้ $V(T)=[S(T)-K]^+ +\left(S(0)+P^E-C^E\right)e^{\delta T}-S(T)-[K-S(T)]^+$

$=\left(S(0)+P^E-C^E\right)e^{\delta T}-K \quad (\because [S(T)-K]^+ -[K-S(T)]^+ = S(T)-K)$

โดยสมมติฐาน $S(0)+P^E-C^E-Ke^{-\delta T}>0 \Rightarrow \left(S(0)+P^E-C^E\right)e^{\delta T}-K>0$

ดังนั้น $V(T)>0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จากทั้ง 2 กรณี จึงสรุปได้ว่า $C^E-P^E=S(0)-Ke^{-\delta T}$ □

ตัวอย่างที่ 4.4 สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 30.20 บาทต่อหุ้น และสมมติว่าราคาของยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นอ้างอิงนี้ มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท ซึ่งจะใช้สิทธิได้ในอีก 3 เดือนข้างหน้า โดยที่ราคาซื้อขายของคอลออปชันนี้เท่ากับ 5.66 บาท จงหาราคาซื้อขายของพุทออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ และเวลาใช้สิทธิเท่ากับคอลออปชันฉบับนี้ เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 6.5% ต่อปี คิดทบต้นต่อเนื่อง

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $C^E=5.66$, $K=30$, $T=\frac{3}{12}$, $\delta=0.065$, $S(0)=30.20$

โจทย์ต้องการทราบราคาของพุทออปชัน P^E

โดยใช้ทฤษฎีความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน ได้ว่า $C^E-P^E=S(0)-Ke^{-\delta T}$

นั่นคือ $P^E=C^E-S(0)+Ke^{-\delta T}=5.66-30.20+30e^{-0.065(3/12)}=4.98$ บาท □

ตัวอย่างที่ 4.5 สมมติว่ายูโรเปียนคอลออปชัน และพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ 230 บาท ระยะเวลาใช้สิทธิ 6 เดือน โดยที่คอลออปชันและพุทออปชันมีราคาซื้อขายที่ 50.90 บาท และ 77.80 บาท ตามลำดับ ถ้าปัจจุบันหุ้นอ้างอิงราคา 205 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7% ต่อปี จงหาแนวทางการลงทุนที่ทำให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $C^E=50.90$, $P^E=77.80$, $K=230$, $T=\frac{6}{12}$, $\delta=0.07$, $S(0)=205$ จะเห็นว่า $C^E-P^E \neq S(0)-Ke^{-\delta T}$ เพราะว่า $C^E-P^E=50.90-77.80=-26.9$ และ

$$S(0)-Ke^{-\delta T}=205-230e^{-0.07(6/12)}=-17.09$$

ดังนั้นการกำหนดราคา C^E และ P^E ไม่สอดคล้องกับความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน ซึ่งจะทำให้นักลงทุนสามารถค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้ โดยแนวทางการลงทุนดังกล่าวอาจทำได้ ดังนี้

ที่เวลา $t=0$

- ยืมหุ้นมาขาย 1 หน่วย รับเงิน 205 บาท
- ออกตราสารพุทออปชันและขาย 1 ตราสาร ได้รับเงิน 77.80 บาท
- ซื้อคอลออปชัน 1 ตราสาร จ่ายเงิน 50.90 บาท
- นำเงินที่เหลือ 231.90 บาท ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง 7%

ดังนั้น มูลค่าของพอร์ต $V(0)=0$

ที่ เวลา $t=6/12$

- ปิดสถานะของคอลออปชัน 1 ตราสาร รับเงิน $[S(T)-230]^+$ บาท
- ขายตราสารหนี้จากเงินลงทุน 231.90 บาท ได้รับเงิน $231.90e^{0.07(6/12)}=240.16$ บาท
- ซื้อหุ้นคืน 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(T)$ บาท
- ปิดสถานะของพุทออปชัน จ่ายเงิน $[230-S(T)]^+$ บาท

จะได้ $V(6/12)=[S(T)-230]^+ +240.16-S(T)-[230-S(T)]^+$

$=240.16-230=10.16$

นั่นคือ หากนักลงทุนลงทุนตามแนวทางนี้จะได้กำไร 3.16 บาทแน่นอนซึ่งเป็นกำไรจากการค้ากำไร □

สำหรับออปชันของหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลที่มีมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผล เท่ากับ div_0 จะเทียบได้กับการหุ้นที่มีราคาปัจจุบัน $S(0)-\text{div}_0$ (ราคาส่วนลด) และถ้ามีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div}

จะได้ $$\text{div}_0=(1-e^{-\delta_{\text{div}}T})S(0)$$

ดังนั้น $$S(0)-\text{div}_0=S(0)-(1-e^{-\delta_{\text{div}}T})S(0)=e^{-\delta_{\text{div}}T}S(0)$$

เมื่อแทน $S(0)$ ด้วย $S(0)-\text{div}_0$ และ $e^{-\delta_{\text{div}}T}S(0)$ ลงในสมการ (4.8) จะได้ ความสัมพันธ์ของราคาออปชันดังบทแทรก 4.2 และ บทแทรก 4.3 ตามลำดับ

บทแทรก 4.2 สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า

$$C^E-P^E=S(0)-\text{div}_0-Ke^{-\delta T} \tag{4.9}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0)-\text{div}_0$ □

บทแทรก 4.3 สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div} จะได้ว่า

$$C^E - P^E = S(0)e^{-\delta_{\text{div}}T} - Ke^{-\delta T} \tag{4.10}$$

พิสูจน์ ได้โดยตรงจาก บทแทรก 4.2 โดยการแทนค่า $\text{div}_0 = (1-e^{-\delta_{\text{div}}T})S(0)$ □

ตัวอย่างที่ 4.6 ผู้นำเข้ารถยนต์ยี่ห้อหนึ่งจากญี่ปุ่นต้องการทำสัญญาออปชัน เพื่อซื้อเงินสกุลเยนในอีก 6 เดือนข้างหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยและสกุลเยนเป็น 3.5 % และ 2.5% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลเยนเป็นเงินสกุลบาทไทย ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 2.93 เยนต่อบาท จงหาราคาใช้สิทธิของยูโรเปียนคอลและยูโรเปียนพุทออปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E$

วิธีทำ ในที่นี้จะพิจารณา อัตราดอกเบี้ยสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยเป็นอัตราผลตอบแทนจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง $\delta = 0.035$ และอัตราดอกเบี้ยสำหรับการลงทุนในเงินสกุลเยนจะถูกพิจารณาเป็นอัตราปันผล $\delta_{\text{div}} = 0.025$ กำหนดให้ $S(t)$ เป็นราคาเงินเยนในสกุลบาท จากโจทย์ จะได้ $T = \frac{6}{12}$, $S(0) = 1/2.93 = 0.3412969283$ โจทย์ต้องการหาราคาใช้สิทธิ (K)ของยูโรเปียนคอลและยูโรเปียนพุทออปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E$ จากบทแทรก 4.3 จะได้ $C^E - P^E = (0.3412969283)e^{-0.025(6/12)} - Ke^{-0.035(6/12)}$

นั่นคือ $K = (0.3412969283)e^{(0.035-0.025)(6/12)} = 0.3430076863$ □

4.3 เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน

ขอบเขตราคาของออปชัน จะช่วยให้ผู้กำหนดราคาออปชัน สามารถกำหนดราคาออปชันให้เข้าสู่ราคาออปชันที่สอดคล้องกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น เพราะหากการกำหนดราคาไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตราคาก็ส่งผลให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง เงื่อนไขขอบเขตราคาของออปชัน เป็นไปตามอสมการในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.4 สำหรับหุ้นที่ไม่มีการจ่ายปันผล จะได้ว่า ราคาของออปชัน C^E และ P^E จะสอดคล้องตามอสมการต่อไปนี้

$$\left[S(0) - Ke^{-\delta T}\right]^+ \le C^E < S(0) \tag{4.11}$$

และ

$$\left[Ke^{-\delta T} - S(0)\right]^+ \le P^E < Ke^{-\delta T} \tag{4.12}$$

พิสูจน์ จะแสดงเฉพาะอสมการ (4.11) เท่านั้น ที่เหลือจะขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน โดยจะแสดงว่า 1) $C^E < S(0)$ และ 2) $C^E \geq \left[S(0) - Ke^{-\delta T}\right]^+$

1) สมมติโดยเพื่อให้เกิดข้อแย้งว่า $C^E \geq S(0)$ สามารถทำธุรกรรม ได้ดังนี้

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลออปชัน เพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^E บาท
- ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^E - S(0)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ขายหุ้น 1 หน่วย รับเงิน $S(T)$ บาท
- รับเงิน $\left(C^E - S(0)\right)e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้
- ปิดสถานะของคอลออปชัน จ่ายเงิน $[S(T) - K]^+$ บาท

จะได้ $V(T) = S(T) + \left(C^E - S(0)\right)e^{\delta T} - [S(T) - K]^+$

$$= \min\{S(T), K\} + \left(C^E - S(0)\right)e^{\delta T} > 0$$

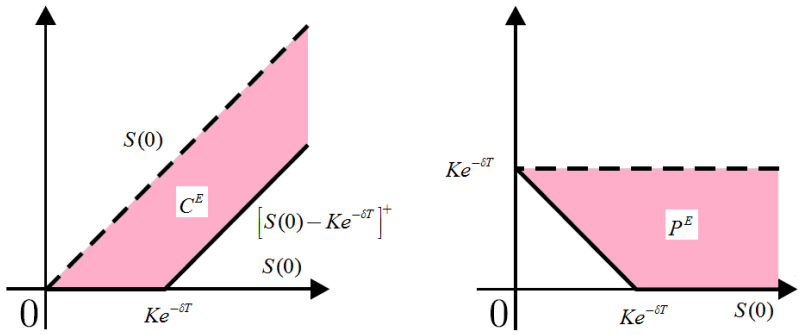
ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E < S(0)$

2) เพราะว่า $C^E, P^E \geq 0$ และจากสมการความเสมอภาคของราคาออปชัน

$$C^E = S(0) - Ke^{-\delta T} + P^E \geq S(0) - Ke^{-\delta T}$$

นั่นคือ $C^E \geq \max\left\{0, S(0) - Ke^{-\delta T}\right\} = \left[S(0) - Ke^{-\delta T}\right]^+$

จาก 1) และ 2) จึงสรุปได้ว่า $\left[S(0) - Ke^{-\delta T}\right]^+ \leq C^E < S(0)$ □



รูปที่ 4.4 *ขอบเขตของราคาคอลออปชันและพุทออปชัน*

บทแทรก 4.5 สำหรับหุ้นที่มีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า ราคาของออปชัน C^E และ P^E จะสอดคล้องตามอสมการต่อไปนี้

$$\left[S(0)-\text{div}_0-Ke^{-\delta T}\right]^+ \le C^E < S(0)-\text{div}_0 \tag{4.13}$$

และ

$$\left[Ke^{-\delta T}-S(0)+\text{div}_0\right]^+ \le P^E < Ke^{-\delta T} \tag{4.14}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.4 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0)-\text{div}_0$ □

4.4 ราคาของออปชันตามตัวแปร

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงราคาของออปชันเมื่อพิจารณาตัวแปรใดตัวหนึ่งต่อไปนี้ ได้แก่ จำนวนหน่วยของหุ้นที่ออปชันให้สิทธิซื้อ(ขาย) และ ราคาใช้สิทธิ K มีการเปลี่ยนแปลงโดยตัวแปรที่เหลือจะถูกกำหนดให้คงที่ ภายใต้ระยะเวลาครบกำหนด T เช่นเดียวกัน การทราบถึงลักษณะของการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว จะทำให้สามารถกำหนดราคาออปชันที่ลู่เข้าสู่ราคาที่สมดุลซึ่งเป็นราคาที่ไม่ทำให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยงได้รวดเร็วขึ้น

ทฤษฎีบท 4.6 (ราคาใช้สิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^E(K)$ และ $P^E(K)$ เป็นราคาของคอลออปชันและพุทออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรราคาใช้สิทธิ K ถ้า K_1 และ K_2 เป็นราคาใช้สิทธิของออปชันที่เวลา T ซึ่ง $K_1 < K_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^E(K_1) > C^E(K_2) \tag{4.15}$$

และ

$$P^E(K_1) < P^E(K_2) \tag{4.16}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ (4.15) เท่านั้นที่เหลือขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

กำหนดให้ $K_1 < K_2$ สมมติว่าในทางตรงกันข้ามว่า $C^E(K_1) \le C^E(K_2)$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลออปชันที่มี ราคาใช้สิทธิ K_2 ขาย 1 สัญญา รับเงิน $C^E(K_2)$ บาท
- ซื้อคอลออปชันที่มี ราคาใช้สิทธิ K_1 จำนวน 1 สัญญา จ่ายเงิน $C^E(K_1)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^E(K_2) - C^E(K_1)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะของคอลออปชันราคาใช้สิทธิ K_1 รับเงิน $[S(T) - K_1]^+$ บาท
- ปิดสถานะของคอลออปชันราคาใช้สิทธิ K_2 จ่ายเงิน $[S(T) - K_1]^+$ บาท
- รับเงิน $\left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

จะได้

$$\begin{aligned} V(T) &= [S(T) - K_1]^+ - [S(T) - K_2]^+ + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T} \\ &> (S(T) - K_1) - (S(T) - K_2) + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T} \\ &= (K_2 - K_1) + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T} > 0 \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E(K_1) > C^E(K_2)$ □

ทฤษฎีบท 4.6 ทำให้ทราบว่าถ้ากำหนดราคาใช้สิทธิสูงขึ้น ราคาของคอลออปชันหรือค่าพรีเมียมจะถูกลง แต่ตรงกันข้ามกับพุทออปชันซึ่งที่ราคาใช้สิทธิสูงขึ้นค่าพรีเมียมจะแพงขึ้น

สมมติให้ ออปชัน 1 สัญญาให้สิทธิซื้อ(ขาย)หุ้นได้จำนวน x หน่วยที่ราคา $S(0)$ โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับหุ้น x หน่วยเท่ากับ K บาท ต่อไปจะพิจารณาค่าพรีเมียมของออปชันเมื่อจำนวนหุ้น x ที่ออปชันให้สิทธิมีการเปลี่ยนแปลง

ทฤษฎีบท 4.7 (จำนวนหุ้นในสิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^E(x)$ และ $P^E(x)$ เป็นราคาของคอลออปชันและพุทออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรจำนวนหน่วยที่ตราสารให้สิทธิซื้อ (ขาย) x หน่วย โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับจำนวนหน่วยดังกล่าวเท่ากับ K ที่เวลาใช้สิทธิ T ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนหุ้นที่ออปชันให้สิทธิซื้อ (ขาย) ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^E(x_1) < C^E(x_2) \tag{4.17}$$

และ $$P^E(x_1) > P^E(x_2) \tag{4.18}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ (4.17) เท่านั้นที่เหลือขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน

กำหนดให้ $x_1 < x_2$ สมมติว่าในทางตรงกันข้ามว่า $C^E(x_1) \geq C^E(x_2)$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกคอลออปชันที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_1 หน่วย ขายสัญญา รับเงิน $C^E(x_1)$ บาท
- ซื้อคอลออปชันที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_2 หน่วย จ่ายเงิน $C^E(x_2)$ บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^E(x_1) - C^E(x_2)$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะคอลออปชันที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_2 หน่วย รับเงิน $[x_2 S(T) - K]^+$ บาท
- ปิดสถานะคอลออปชันที่ให้สิทธิซื้อหุ้นจำนวน x_1 หน่วย จ่ายเงิน $[x_1 S(T) - K]^+$ บาท
- รับเงิน $\left(C^E(x_1) - C^E(x_2)\right)e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

จะได้ $V(T) = [x_2 S(T) - K]^+ - [x_1 S(T) - K]^+ + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T}$

$$> (x_2 S(T) - K) - (x_1 S(T) - K) + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T}$$

$$= (x_2 - x_1)S(T) + \left(C^E(K_2) - C^E(K_1)\right)e^{\delta T} > 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น $C^E(x_1) < C^E(x_2)$ □

ทฤษฎีบท 4.7 ทำให้ทราบว่า ถ้าจำนวนหน่วยหุ้นที่ออปชันให้สิทธิซื้อ (ขาย) เพิ่มมากขึ้น ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลออปชันจะแพงขึ้น แต่ตรงกันข้ามกับพุทออปชันซึ่งค่าพรีเมียมจะถูกลง

4.5 มูลค่าตามเวลาของออปชัน

ภาวะเงิน (moneyness) เป็นตำแหน่งความสัมพันธ์ของราคาปัจจุบันหรือราคาอนาคตของสินค้าอ้างอิงในที่นี้คือ หุ้น เทียบกับราคาใช้สิทธิของออปชัน ซึ่งประกอบด้วย 3 ภาวะคือ ภาวะกำไรแฝง (in the money : itm) ภาวะขาดทุนแฝง (out of the money : otm) และภาวะคุ้มทุนแฝง (at the money: atm) ทำให้สามารถบ่งบอกได้ว่าออปชัน ณ ขณะเวลานั้นๆ อยู่ในภาวะเงินใดเพื่อใช้ตัดสินใจในการลงทุนของนักลงทุน

บทนิยาม 4.8 (ภาวะเงิน) กำหนดให้ $0 < t \leq T$ เป็นเวลา สำหรับออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ K จะกล่าวว่า

คอลออปชัน ที่เวลา t อยู่ในภาวะ		และพุทออปชัน ที่เวลา t อยู่ในภาวะ	
- *กำไรแฝง*	ถ้า $S(t) > K$	- *กำไรแฝง*	ถ้า $S(t) < K$
- *ขาดทุนแฝง*	ถ้า $S(t) < K$	- *ขาดทุนแฝง*	ถ้า $S(t) > K$
- *คุ้มทุนแฝง*	ถ้า $S(t) = K$	- *คุ้มทุนแฝง*	ถ้า $S(t) = K$

จากบทนิยาม 4.8 ที่เวลา t ใด ๆ คอลออปชันจะอยู่ในภาวะกำไรแฝง ถ้าราคาหุ้นสูงกว่าราคาใช้สิทธิ คอลออปชันจะอยู่ในภาวะขาดทุนแฝง ถ้าราคาหุ้นต่ำกว่าราคาใช้สิทธิ และคอลออปชันจะอยู่ภาวะคุ้มทุนถ้าราคาใช้สิทธิเท่ากับราคาใช้สิทธิ ส่วนพุทออปชันจะเงื่อนไขที่ทำให้เกิดภาวะเงินที่สวนทางกับภาวะเงินของคอลออปชันตามนิยาม

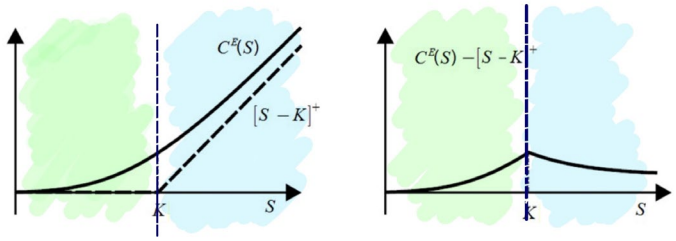
บทนิยาม 4.9 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออปชัน เรียก $[S(t)-K]^+$ ที่เวลา $t \leq T$ ใดๆ ว่า*มูลค่าแฝง* (intrinsic value) ของคอลออปชันและเรียก$[K-S(t)]^+$ ว่า*มูลค่าแฝง*ของพุทออปชัน

จากบทนิยาม 4.9 จะเห็นว่า มูลค่าแฝงของออปชันเป็นบวกเมื่อออปชันจะอยู่ในภาวะกำไรแฝงและมูลค่าแฝงเท่ากับศูนย์เมื่อออปชันจะอยู่ในภาวะขาดทุนแฝงหรือคุ้มทุนแฝง

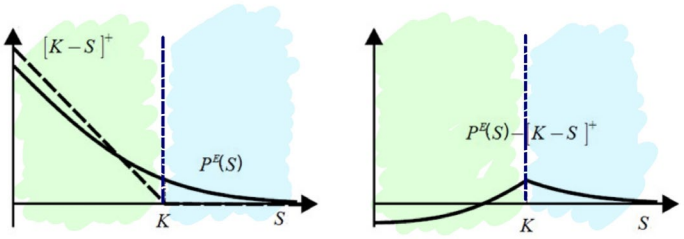
บทนิยาม 4.10 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออปชัน *มูลค่าตามเวลา* (the time value) ของออปชันคือผลต่างของราคาออปชันกับมูลค่าแฝงของออปชัน นั่นคือ

- มูลค่าตามเวลาสำหรับคอลออปชัน เท่ากับ $C^E(t)-[S(t)-K]^+$
- มูลค่าตามเวลาสำหรับพุทออปชัน เท่ากับ $P^E(t)-[K-S(t)]^+$

มูลค่าตามเวลาของออปชันจะบ่งบอกถึงกำไร และ ขาดทุนที่เวลาต่างๆจากการลงทุนในออปชัน



รูปที่ 4.5 *มูลค่าตามเวลาของคอลออปชัน รูปขวามือเปรียบเทียบราคาของคอลคอปชั่นกับมูลค่าแฝง*



รูปที่ 4.6 *มูลค่าตามเวลาของพุทออปชัน รูปขวามือเปรียบเทียบราคาของพุทคอปชั่นกับมูลค่าแฝง*

4.6 การกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน

ทฤษฎีบท 4.11 กำหนดให้ T เป็นระยะเวลาครบกำหนด และสมมติว่ามีพอร์ตการลงทุน $[x(t),y(t)]$ สำหรับ $0\le t\le T$ ที่ซึ่ง $V(T)=D(T)$ จะได้ว่าราคาออปชัน $D(0)=V(0)$

พิสูจน์ สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $D(0)\neq V(0)$

ถ้า $D(0)>V(0)$

ที่เวลา $t=0$ ทำธุรกรรมโดย

- ออกและขายออปชัน 1 สัญญา รับเงิน $D(0)$ บาท

- ถือสถานะลองของสินทรัพย์ $[x, y]$ จ่ายเงิน $V(0)$ บาท

- นำเงินที่เหลือ $D(0)-V(0)>0$ บาทไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V_{New}(0)=0$

ที่เวลา $t=T$ ทำธุรกรรมโดย

- ปิดสถานะลองของสินทรัพย์ $[x, y]$ รับเงิน $V(T)$ บาท

- ปิดสถานะออปชันจ่ายผลประโยชน์ $D(T)$ บาท

- รับเงิน $(D(0)-V(0))e^{\delta T}$ จากการลงทุนในตราสารหนี้

จะได้ $V_{New}(T)=V(T)-D(T)+(D(0)-V(0))e^{\delta T}=(D(0)-V(0))e^{\delta T}>0$

ถ้า $D(0)<V(0)$ สามารถทำธุรกรรมได้ในทำนองเดียวกันโดยถือสถานะตรงข้าม

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ $V_{New}(T)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

จึงสรุปได้ว่า $D(0)=V(0)$ □

4.6.1 แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค

ให้ T เป็นระยะเวลาครบกำหนดของออปชัน กำหนดให้ $S(t)$ แทนราคาหุ้น(หุ้นอ้างอิง)ที่เวลา $t=1,2,...$ โดยที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลง $K(n)=\begin{cases}u\ ;\uparrow\\ d\ ;\downarrow\end{cases}$, $n=1,2,...$ และ r เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นของการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยง(ตราสารหนี้) และกำหนดให้ $f(S)$ เป็นผลประโยชน์ของออปชัน นั่นคือ $f(S)=[S-K]^+$ สำหรับคอลออปชัน และ $f(S)=[K-S]^+$ สำหรับพุทออปชัน และ กำหนดให้ $D(T)=f(S(T))$ โดยที่ $D(0)$ ราคาของออปชัน

<u>แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา</u>

พิจารณาจำลองต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา สมมติว่ามีพอร์ตการลงทุน $[x(t), y(t)]$ สำหรับ $t=0,1$ ที่ซึ่ง $V(1)=D(1)$ ดังนั้นจะได้ $x(1)S(1)+y(1)A(1)=f(S(1))$ นั่นคือ

$$x(1)(1+u)S(0)+y(1)(1+r)A(0)=f(S_u) \qquad (1)$$

และ

$$x(1)(1+d)S(0)+y(1)(1+r)A(0)=f(S_d) \qquad (2)$$

โดยการแก้ระบบสมการ (1) และ (2) จะได้

$$x(1)=\frac{f(S_u)-f(S_d)}{(u-d)S(0)} \quad \text{และ} \quad y(1)=\frac{(1+u)f(S_d)-(1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)}$$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้

$$[x(t),y(t)]=\left[\frac{f(S_u)-f(S_d)}{(u-d)S(0)},\frac{(1+u)f(S_d)-(1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)}\right] \text{ สำหรับทุกๆ } t=0,1$$

จะได้ว่า $[x(t),y(t)]$ เป็นพอร์ตการลงทุนที่ทำให้ $V(1)=D(1)$

โดยทฤษฎีบท 4.11 ได้ว่า $D(0)=V(0)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}D(0)&=x(0)S(0)+y(0)A(0)\\&=\left(\frac{f(S_u)-f(S_d)}{(u-d)S(0)}\right)S(0)+\left(\frac{(1+u)f(S_d)-(1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)A(0)}\right)A(0)\\&=\frac{f(S_u)-f(S_d)}{(u-d)}+\frac{(1+u)f(S_d)-(1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)}\end{aligned} \tag{4.19}$$

จะเห็นว่าราคาออปชัน $D(0)$ นั้นไม่ขึ้นกับราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ แต่ยังขึ้นอยู่กับราคาปัจจุบันของหุ้นหรือราคาสินค้าอ้างอิง ($\because$ $S_u=(1+u)S(0)$ และ $S_d=(1+d)S(0)$) ดังนั้นสามารถเขียน $D(0)$ ตามสูตร (4.19) ในรูป

$$D(0)=xS(0)+y \tag{4.20}$$

เมื่อ $[x,y]=\left[\frac{f(S_u)-f(S_d)}{(u-d)S(0)},\frac{(1+u)f(S_d)-(1+d)f(S_u)}{(u-d)(1+r)}\right]$ ซึ่งเรียก พอร์ตการลงทุน $[x,y]$ นี้ว่า *พอร์ตการลงทุนการจำลอง* (replicating portfolio) สำหรับการกำหนดราคาออปชัน โดยที่สามารถพิจารณา y เป็นจำนวนตราสารหนี้ที่มีราคาปัจจุบันเท่ากับ 1 บาท ต่อหน่วย ซึ่งเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของตราสารหนี้ที่ราคาปัจจุบันใดๆ นั่นเอง

กำหนดให้ $$C(1)=\begin{cases}C_u=[S_u-K]^+ \text{ ; probabity } p\\ C_d=[S_d-K]^+ \text{ ; probabity } 1-p\end{cases}$$

และ $$P(1)=\begin{cases}P_u=[K-S_u]^+ \text{ ; probabity } p\\ P_d=[K-S_d]^+ \text{ ; probabity } 1-p\end{cases}$$

ดังนั้น จาก (4.19) จะได้ราคาออปชัน ดังนี้

ราคาคอลออปชัน $$C^E(0)=\frac{C_u-C_d}{u-d}+\frac{(1+u)C_d-(1+d)C_u}{(u-d)(1+r)} \tag{4.21}$$

และ ราคาพุทออปชัน $$P^E(0)=\frac{P_u-P_d}{u-d}+\frac{(1+u)P_d-(1+d)P_u}{(u-d)(1+r)} \quad (4.22)$$

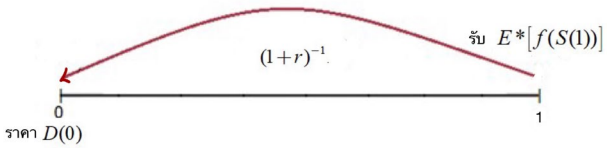
โดยทฤษฎีบท 2.14 ถ้า $p*$ เป็นความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง นั่นคือ $p^*=\frac{r-d}{u-d}$

จะได้ ราคาคอลออปชัน $$C^E(0)=(1+r)^{-1}E^*[C(1)] \quad (4.23)$$

และ ราคาพุทออปชัน $$P^E(0)=(1+r)^{-1}E^*[P(1)] \quad (4.24)$$

เมื่อ $E*$ เป็นค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง นั่นคือ

$$D(0)=\frac{1}{1+r}\left(p^*f(S_u)+(1-p^*)f(S_d)\right)=(1+r)^{-1}E^*[f(S(1))] \quad (4.25)$$



รูปที่ 4.7 *ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์*

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนดให้ $r=0.015$, $S(0)=K=1$ บาท จงคำนวณหาราคา $C^E(0)$ ของคอลออปชัน โดยใช้แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เมื่อกำหนดให้ $u=0.04$ และ $d=-0.06$

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^*=\frac{0+0.06}{0.02+0.06}=0.75$

และ $S(1)=\begin{cases}1+0.04;\text{ probabity }0.75\\1-0.06;\text{ probabity }0.25\end{cases}=\begin{cases}1.04;\text{ probabity }0.75\\0.94;\text{ probabity }0.25\end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์ของคอลออปชัน คือ

$$f(S(1))=[S(1)-K]^+=[S(1)-1]^+=\begin{cases}0.04;\text{ probabity }0.75\\0\quad\ ;\text{ probabity }0.25\end{cases}$$

โดยสูตร (4.24) จะได้

$$C^E(0)=(1+r)^{-1}E^*[f(S(1))]=(1+0.015)^{-1}\left(0.04(0.75)+0(0.25)\right)=0.02955665$$ □

ตัวอย่างที่ 4.8 สมมติให้ $S(0)=K=100$ บาท, $u=0.1$, $d=0.01$ และ $r=0.06$ โดยทุกครั้งที่มีการขายหุ้นจะต้องจ่ายค่านายหน้าซื้อขาย (commission) 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรที่ผู้ซื้อคอลออปชันได้รับ

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^*=\dfrac{0.06-0.01}{0.1-0.01}=0.5556$

และ $S(1)=\begin{cases}100(1+0.1) & ;\text{probabity } 0.5556\\ 100(1+0.01); & \text{probabity } 0.4444\end{cases}=\begin{cases}110 & ;\text{probabity } 0.5556\\ 101 & ;\text{probabity } 0.4444\end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์ของคอลออปชัน คือ

$$f(S(1))=[S(1)-K]^+=[S(1)-100]^+=\begin{cases}10 & ;\text{probabity } 0.5556\\ 1 & ;\text{probabity } 0.4444\end{cases}$$

โดยสูตร (4.25) จะได้

$$C^E(0)=(1+r)^{-1}E^*[f(S(1))]=(1+0.06)^{-1}(10(0.5556)+1(0.4444))=5.6608$$

เนื่องจากการขายหุ้นมีค่านายหน้าซื้อขายเกิดขึ้น ดังนั้นกำไรที่ผู้ซื้อคอลออปชันได้รับ เท่ากับ

$$\begin{aligned}[S(1)-K]^+-C^E(1+r)-\text{commission}&=[S(1)-100]^+-5.6608(1+0.06)-0.02S(1)\\ &=\begin{cases}10 & ;\uparrow\\ 1 & ;\downarrow\end{cases}-5.6608(1.06)-0.02\begin{cases}110 & ;\uparrow\\ 101 & ;\downarrow\end{cases}\\ &=\begin{cases}1.7996 & ;\uparrow\\ -7.0204 & ;\downarrow\end{cases}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 4.9 กำหนดให้ $S(0)=100$, $K=95$, $u=0.1$ และ $d=-0.1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 8% จงคำนวณหามูลค่าของพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลออปชันและพุทออปชัน พร้อมทั้งคำนวณหาราคาของคอลและพุทออปชัน

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ $S(1)=\begin{cases}100(1+0.1) & ;\uparrow\\ 100(1-0.1) & ;\downarrow\end{cases}=\begin{cases}110 & ;\uparrow\\ 90 & ;\downarrow\end{cases}$

และผลประโยชน์สำหรับคอลออปชัน $f(S)=[S-95]^+=\begin{cases}15 & ;\uparrow\\ 0 & ;\downarrow\end{cases}$

คำนวณหาพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลออปชันตามสูตร (4.24) ได้

$$[x,y]=\left[\frac{15-0}{(0.1+0.1)100},\frac{(1+0.1)0-(1-0.1)15}{(0.1+0.1)(1+0.08)}\right]=[0.75,-62.50]$$

โดยสูตร (4.23) จะได้

$$C^E(0)=xS(0)+y=0.75(100)-62.50=12.50 \quad \text{บาท}$$

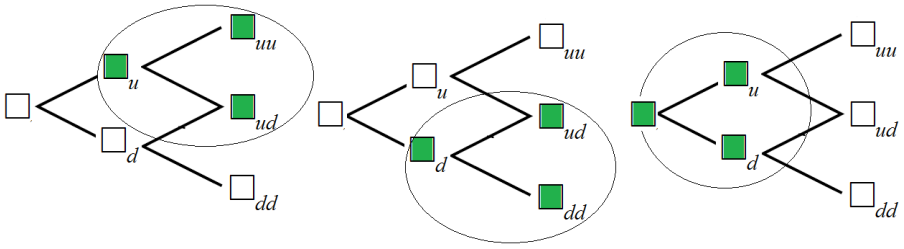
ต่อไปคำนวณหาพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับพุทออปชัน เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพุทออปชัน $f(S)=[95-S]^+=\begin{cases}0 & ;\uparrow\\ 5 & ;\downarrow\end{cases}$ ดังนั้น พอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับพุทออปชัน คือ

$$[x,y]=\left[\frac{0-5}{(0.1+0.1)100},\frac{(1+0.1)5-(1-0.1)0}{(0.1+0.1)(1+0.08)}\right]=[-0.25,\ 25.4630]$$

ซึ่งทำให้ได้ $P^E(0)=xS(0)+y=-0.25(100)+25.4630=0.4630$ บาท □

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2- คาบเวลา

ต่อไปจะกำหนดราคาตราสารออปชันโดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา (2-step model) พิจารณาแผนภาพต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ต่อไปนี้



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 4.7 *ต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา*

จากต้นไม้ตามรูปที่ 4.7 จะได้ว่า $S(1)$ มีค่าที่เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

$$S_u=(1+u)S(0)\quad \text{และ}\quad S_d=(1+d)S(0)$$

และราคา $S(2)$ มีค่าที่เป็นไปได้ 3 ค่า คือ

$$S_{uu}=(1+u)^2S(0),\quad S_{ud}=(1+u)(1+d)S(0)\quad \text{และ}\quad S_{dd}=(1+d)^2S(0)$$

สามารถหาราคาออปชันแต่ละขั้วในแต่ละต้นไม้ย่อยโดยประยุกต์ใช้ต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา และทฤษฎีบท 4.11 ดังนี้ เนื่องจากผลประโยชน์ $D(2)=f(S(2))$ จากรูปที่ 4.7(ก) และ 4.7(ข) และ สูตร (4.24) จะได้ ราคาออปชัน $D(1)$ เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

$$D_u(1)=\frac{1}{1+r}\left(p^*f(S_{uu})+(1-p^*)f(S_{ud})\right),\ D_d(1)=\frac{1}{1+r}\left(p^*f(S_{ud})+(1-p^*)f(S_{dd})\right)$$

โดยใช้การทำซ้ำ (replication procedure) จากรูป 4.7 (ค) จะได้ ราคาออปชัน $D(0)$ คือ

$$D(0)=(1+r)^{-1}E^*[fS(1))]=(1+r)^{-1}E^*[D(1)]$$

$$= (1+r)^{-1}\left[p^* D_u(1) + (1-p^*)D_d(1)\right]$$

$$= (1+r)^{-2}\left[p^*\left(p^* f(S_{uu}) + (1-p^*)f(S_{ud})\right) + (1-p^*)\left(p^* f(S_{ud}) + (1-p^*)f(S_{dd})\right)\right]$$

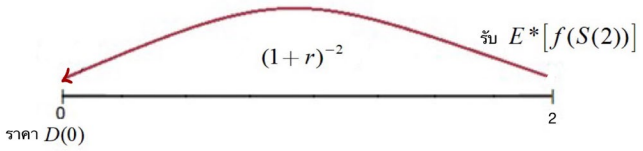
$$= (1+r)^{-2}\left[(p^*)^2 f(S_{uu}) + 2p^*(1-p^*)f(S_{ud}) + (1-p^*)^2 f(S_{dd})\right]$$

$$= (1+r)^{-2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}(p^*)^k (1-p^*)^{2-k} f\left(S(0)(1+u)^k (1+d)^{2-k}\right)$$

$$= (1+r)^{-2} E^*\left[f(S(2))\right]$$

นั่นคือ

$$D(0) = (1+r)^{-2} E^*\left[f(S(2))\right] \tag{4.26}$$



รูปที่ 4.8 *ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์*

ตัวอย่างที่ 4.10 สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 100 บาทโดยมีอัตราเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้น $K(n) = \begin{cases} 0.2 & ;\uparrow \\ -0.1 & ;\downarrow \end{cases}, n = 1,2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.12 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของคอลและพุทออปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 105 บาท และเวลาใช้สิทธิเดือนที่ 6

วิธีทำ จากโจทย์ $u = 0.2$, $d = -0.1$ และ $r = 0.12/4 = 0.03$ ต่องวด (3 เดือน) คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^* = \dfrac{0.03+0.1}{0.2+0.1} = 0.4333$

จากสูตร (9.35), $S(2) = \begin{cases} (1+u)^2 S(0) & ;\text{probability } p^2 \\ (1+u)(1+d)S(0) & ;\text{probability } 2p(1-p) \\ (1+d)^2 S(0) & ;\text{probability } (1-p)^2 \end{cases}$

จะได้ $S(2) = \begin{cases} 144 & ;\text{probbability } 0.18774889 \\ 108 & ;\text{probbability } 0.49110222 \\ 81 & ;\text{probbability } 0.32114889 \end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์สำหรับคอลออปชันได้

$$f(S(2)) = [S(2)-105]^+ = \begin{cases} 39 & ;\text{probbability } 0.18774889 \\ 3 & ;\text{probbability } 0.49110222 \\ 0 & ;\text{probbability } 0.32114889 \end{cases}$$

คำนวณราคาคอลออปชันตามสูตร (4.26) ได้

$$C^E(0) = (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))]$$

$$= (1.03^{-2})\big(39(0.18774889) + 3(0.49110222) + 0(0.32114889)\big) = 8.2906 \text{ บาท}$$

สำหรับการคำนวณราคาพุทออปชันสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพุทออปชัน

$$f(S(2)) = [105 - S(2)]^+ = \begin{cases} 0 & ; \text{probbability } 0.18774889 \\ 0 & ; \text{probbability } 0.49110222 \\ 24 & ; \text{probbability } 0.32114889 \end{cases}$$

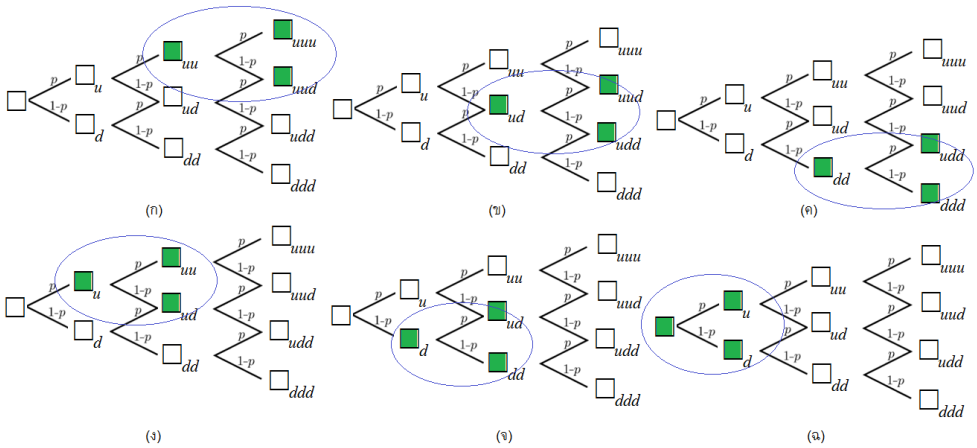
ดังนั้น ราคาคอลออปชันตามสูตร (4.26) คือ

$$P^E(0) = (1+r)^{-2} E^*[f(S(2))]$$

$$= (1.03^{-2})\big(0(0.18774889) + 0(0.49110222) + 24(0.32114889)\big) = 7.2651 \text{ บาท} \quad \square$$

<u>แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา</u>

ต่อไปจะกำหนดราคาตราสารออปชันโดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา (3-step model) โดยการพิจารณาต้นไม้ และ การทำซ้ำ ดังรูป ต่อไปนี้



รูปที่ 4.9 *ต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา*

จากบทที่ 2 เราทราบว่าราคา $S(3)$ เป็นไปได้ 4 ค่า ดังนี้

$$S(3) = \begin{cases} S_{uuu} = (1+u)^3 S(0) & ; \text{probability } p^3 \\ S_{uud} = (1+u)^2 (1+d) S(0) & ; \text{probability } 3p^2(1-p) \\ S_{udd} = (1+u)(1+d)^2 S(0) & ; \text{probability } 3p(1-p)^2 \\ S_{udd} = (1+d)^3 S(0) & ; \text{ probability } (1-p)^3 \end{cases}$$

จะได้ $D(3)$ เป็นไปได้ 4 ค่า คือ

$$D(3)=f(S(3))=\begin{cases}D_{uuu}=f(S_{uuu})\text{ ; probability }(p^*)^3\\ D_{uud}=f(S_{uud})\text{ ; probability }3(p^*)^2(1-p^*)\\ D_{udd}=f(S_{udd})\text{ ; probability }3p^*(1-p^*)^2\\ D_{ddd}=f(S_{ddd})\text{ ; probability }(1-p^*)^3\end{cases}$$

ค่า $D(2)$ เป็นไปได้ 3 ค่า คือ

$$D(2)=\begin{cases}D_{uu}=(1+r)^{-1}\left(p^*D_{uuu}+(1-p^*)D_{uud}\right)\text{ ; probability }(p^*)^2\\ D_{ud}=(1+r)^{-1}\left(p^*D_{uud}+(1-p^*)D_{udd}\right)\text{ ; probability }2p^*(1-p^*)\\ D_{dd}=(1+r)^{-1}\left(p^*D_{udd}+(1-p^*)D_{ddd}\right)\text{ ; probability }(1-p^*)^2\end{cases}$$

ค่า $D(1)$ เป็นไปได้ 2 ค่า คือ

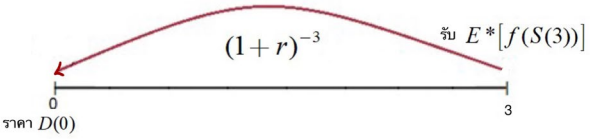
$$D(1)=\begin{cases}D_{u}=(1+r)^{-1}\left(p^*D_{uu}+(1-p^*)D_{ud}\right)\text{ ; probability }p^*\\ D_{d}=(1+r)^{-1}\left(p^*D_{ud}+(1-p^*)D_{dd}\right)\text{ ; probability }1-p^*\end{cases}$$

จะได้ ราคาออปชัน $D(0)$ คือ

$$\begin{aligned}D(0)&=(1+r)^{-1}\left(p^*D_u+(1-p^*)D_d\right)\\&=(1+r)^{-2}\left(p^*\left(p^*D_{uu}+(1-p^*)D_{ud}\right)+(1-p^*)\left(p^*D_{ud}+(1-p^*)D_{dd}\right)\right)\\&=(1+r)^{-2}\left((p^*)^2D_{uu}+2p^*(1-p^*)D_{ud}+(1-p^*)^2D_{dd}\right)\\&=(1+r)^{-3}\left((p^*)^2\left(p^*D_{uuu}+(1-p^*)D_{uud}\right)+2p^*(1-p^*)\left(p^*D_{uud}+(1-p^*)D_{udd}\right)\right.\\&\quad\left.+(1-p^*)^2\left(p^*D_{udd}+(1-p^*)D_{ddd}\right)\right)\\&=(1+r)^{-3}\left((p^*)^3D_{uuu}+3(p^*)^2(1-p^*)D_{uud}+3p^*(1-p^*)^2D_{udd}+(1-p^*)^3D_{ddd}\right)\\&=(1+r)^{-3}\left((p^*)^3f(S_{uuu})+3(p^*)^2(1-p^*)f(S_{uud})+3p^*(1-p^*)^2f(S_{udd})+(1-p^*)^3f(S_{ddd})\right)\\&=(1+r)^{-3}\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{3-k}f\left(S(0)(1+u)^k(1+d)^{3-k}\right)\right)\\&=(1+r)^{-3}E^*[f(S(3))]\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$D(0)=(1+r)^{-3}E^*[f(S(3))] \tag{4.27}$$



รูปที่ 4.11 *ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์*

ตัวอย่างที่ 4.11 กำหนดให้ $S(0)=K=100$ บาท, $u=0.2$, $d=-0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลอง 3-คาบเวลาเพื่อคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 9

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้แบบจำลอง 3 คาบเวลา จากโจทย์จะได้ว่า 1 คาบเวลา (งวด) = 3 เดือน และโจทย์กำหนดให้ $u=0.2$, $d=-0.1$ และ $r=0.08/4=0.02$ ต่อคาบ (3 เดือน)

สามารถคำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้ $p^*=\dfrac{0.02+0.1}{0.2+0.1}=0.4$

จากสูตร (2.36), $S(3)=\begin{cases}(1+u)^3 S(0) & ;\text{probability } p^3\\ (1+u)^2(1+d)S(0) & ;\text{probability } 3p^2(1-p)\\ (1+u)(1+d)^2 S(0) & ;\text{probability } 3p(1-p)^2\\ (1+d)^3 S(0) & ;\text{ probability } (1-p)^3\end{cases}$

จะได้ $S(3)=\begin{cases}172.80 & ;\text{probability } 0.064\\ 129.60 & ;\text{probability } 0.288\\ 97.2 & ;\text{probability } 0.432\\ 72.9 & ;\text{probability } 0.216\end{cases}$

ต่อไปคำนวณผลประโยชน์สำหรับคอลออปชันได้

$$f(S(3))=[S(3)-100]^+=\begin{cases}72.80 & ;\text{probability } 0.064\\ 29.60 & ;\text{probability } 0.288\\ 0 & ;\text{probability } 0.432\\ 0 & ;\text{probability } 0.216\end{cases}$$

คำนวณราคาคอลออปชันตามสูตร (4.27) ได้

$$C^E(0)=(1+r)^{-3}E^*[f(S(3))]$$
$$=\left(1.02^{-3}\right)\left(72.80(0.064)+29.60(0.288)+0(0.432)+0(0.216)\right)=12.4236 \text{ บาท}$$

สำหรับการคำนวณราคาพุทออปชันสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

เนื่องจากผลประโยชน์สำหรับพุทออปชัน

$$f(S(3))=[100-S(3)]^+=\begin{cases}0 & ;\text{probability } 0.064\\ 0 & ;\text{probability } 0.288\\ 2.8 & ;\text{probability } 0.432\\ 27.1 & ;\text{probability } 0.216\end{cases}$$

ดังนั้น ราคาคอลออปชันตามสูตร (4.27) คือ

$$P^E(0)=(1+r)^{-3}E^*[f(S(3))]$$
$$=\left(1.02^{-3}\right)\left(0(0.064)+0(0.288)+2.8(0.432)+27.1(0.216)\right)=6.6558 \text{ บาท}$$ □

แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา

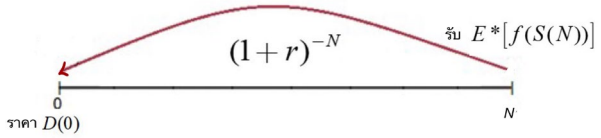
จากแบบรูปที่ได้จากแบบจำลอง 1 คาบเวลา, 2 คาบเวลา และ 3 คาบเวลา สามารถสรุปสูตรของราคาออปชันด้วยแบบจำลอง N คาบเวลา ได้ดังนี้

$$D(0) = (1+r)^{-N}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k} f\left(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k}\right)\right)$$
$$= (1+r)^{-N} E^*[f(S(N))] \qquad (4.28)$$

ทฤษฎีบท 4.12 สำหรับแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ซึ่งมีผลประโยชน์ $f(S(N))$ จะได้ว่าภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ราคาออปชัน $D(0)$ อยู่ในรูป

$$D(0) = (1+r)^{-N} E^*[f(S(N))] \qquad (4.29)$$

พิสูจน์ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน □



รูปที่ 4.12 *ราคาของออปชัน $D(0)$ เท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์*

จากสูตร (4.26) สามารถกล่าวได้ว่า ราคาของออปชันจะเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ที่จะได้รับเมื่อมีการปิดสถานะของสัญญาที่เวลาใช้สิทธิ ดังนั้นหากหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล เพื่อไม่ให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยงซึ่งเกิดจากเงินปันผลที่ได้รับ ราคาของออปชัน $D(0)$ จะต้องคำนวณจากราคาหุ้นที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว นั่นคือถ้าสมมติว่ามีการจ่ายเงินปันผลครั้งเดียวที่คาบเวลาที่ N จำนวน div_N ราคาของออปชัน $D(0)$ จะเท่ากับค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ที่คำนวณจากราคาที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว นั่นคือ

$$D(0) = (1+r)^{-N} E^*[f(S(N) - \mathrm{div}_N)] \qquad (4.30)$$

ตัวอย่างที่ 4.12 กำหนดให้ $S(0)=K=100$ บาท, $u=0.3$, $d=-0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.04 ต่อครึ่งปี จงใช้แบบจำลอง 50 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 6

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้แบบจำลอง 50 คาบเวลา จากโจทย์จะได้ว่า 1 คาบเวลา (งวด)= 6/50 เดือน และ โจทย์กำหนดให้ $u=0.3$, $d=-0.1$ และ $r=(1+0.04)^{1/50}-1=0.00078472$ ต่องวด สามารถคำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

$$p^*=\frac{0.00078472+0.1}{0.3+0.1}=0.2519618$$

จากสูตร (4.28), $C^E(0)=(1+r)^{-N}\left(\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}f\left(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k}\right)\right)$

จะได้ $C^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)\right)$

เมื่อ $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)=\left[100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-100\right]^+=100\left[(0.9)^{50}\left(\frac{1.3}{0.9}\right)^k-1\right]^+$

เนื่องจาก $(0.9)^{50}\left(\frac{1.3}{0.9}\right)^k-1>0$ สำหรับทุกๆ $k\geq 15$

ทำให้ได้ว่า $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)=100\left((0.9)^{50}\left(\frac{1.3}{0.9}\right)^k-1\right)$ สำหรับทุกๆ $k\geq 15$

ดังนั้น $C^E(0)$

$$=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=15}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}100\left((0.9)^{50}\left(\frac{1.3}{0.9}\right)^k-1\right)\right)$$

$$=45.6197$$

สำหรับพุทออปชัน โดยใช้สูตร (4.28) ได้

$$P^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)\right)$$

เมื่อ $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)=\left[100-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right]^+=100\left[1-(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right]^+$

เนื่องจาก $1-(0.9)^{50}\left(\frac{1.3}{0.9}\right)^k>0$ สำหรับทุกๆ $k\leq 14$

ดังนั้น $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)=100\left(1-(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)$ สำหรับทุกๆ $k\leq 14$ และทำให้ได้

$$P^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{14}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}100\left(1-(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)\right)$$

$$=41.7735$$

อีกวิธีหนึ่ง เราสามารถใช้สมบัติความเสมอภาคระหว่างคอลและพุทออปชันในการคำนวณราคาของ

พุทออปชันได้ $$C^E(0)-P^E(0)=S(0)-Ke^{-\delta T}$$

จะได้ $P^E(0)=C^E(0)-S(0)+Ke^{-\delta T}=45.6197-100+100(1.00078472^{-50})=41.7735$

ตารางที่ 4.1 ตารางอย่างย่อการใช้ excel ช่วยคำนวณค่า C^E และ P^E กรณีหุ้นไม่มีการจ่ายปันผล

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
k	p^k	(1-p)^(50-k)	S(k)=S(0)*(1+u)^k*(1+d)^(50-k)	f(S(k))=max{S(k)-K,0}	50Ck	c1*c2*c4*c5
0	1.000000000	0.000000497	0.515378	0.000000	1.00	0.000000
1	0.251961800	0.000000664	0.744434	0.000000	50.00	0.000000
2	0.063484749	0.000000888	1.075294	0.000000	1225.00	0.000000
3	0.015995732	0.000001187	1.553202	0.000000	19600.00	0.000000
11	0.000000260	0.000012107	29.433014	0.000000	37353738800.00	0.000000
12	0.000000065	0.000016185	42.514354	0.000000	121399651100.00	0.000000
13	0.000000016	0.000021636	61.409623	0.000000	354860518600.00	0.000000
14	0.000000004	0.000028924	88.702788	0.000000	937845656300.00	0.000000
15	0.000000001	0.000038666	128.126250	28.126250	2250829575120.00	2.563346
16	0.000000000	0.000051690	185.071250	85.071250	4923689695575.00	5.712644
17	0.000000000	0.000069101	267.325139	167.325139	9847379391150.00	7.569312
18	0.000000000	0.000092376	386.136311	286.136311	18053528883775.00	7.993198
19	0.000000000	0.000123492	557.752450	457.752450	30405943383200.00	7.254134
46	0.000000000	0.313108679	11438372.717923	11438272.717923	230300.00	0.000000
47	0.000000000	0.418573114	16522093.925889	16521993.925889	19600.00	0.000000
48	0.000000000	0.559561149	23865246.781840	23865146.781840	1225.00	0.000000
49	0.000000000	0.748038200	34472023.129324	34471923.129324	50.00	0.000000
50	0.000000000	1.000000000	49792922.297913	49792822.297913	1.00	0.000000
					sum=	47.444453
					C(0)	45.619671
					P(0)=C(0)-S(0)+K(1+r)^(-t	41.7735264

□

หมายเหตุ ตัวเลขที่ได้จากการคำนวณในตำราเล่มนี้ส่วนใหญ่แล้วเป็นค่าโดยประมาณ แต่เพื่อความสะดวกบางครั้งจะยังคงใช้เครื่องหมาย $=$ แทนเครื่องหมาย $\approx$

ตัวอย่างที่ 4.13 จากตัวอย่างที่ 4.12 จงคำนวณราคาของคอลและพุทออปชันโดยสมมติว่าหุ้นมีการจ่ายปันผล 1 ครั้งที่ปลายเดือนที่ 6 จำนวน 3 บาท

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4.12 จะได้

$$C^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)\right)$$

เมื่อ $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)=\left[100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3-100\right]^+=\left[100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-103\right]^+$

เนื่องจาก $100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-103>0$ สำหรับทุกๆ $k\geq 15$

ทำให้ได้ว่า $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)=100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-103$ สำหรับทุกๆ $k\geq 15$

ดังนั้น $C^E(0)$

$$=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=15}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-103\right)\right)$$

$$=44.8625$$

สำหรับพุทออปชัน จะได้

$$P^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{50}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)\right)$$

เมื่อ $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)=\left[100-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}+3\right]^+=\left[103-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right]^+$

เนื่องจาก $103-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}>0$ สำหรับทุกๆ $k\leq 14$

ดังนั้น $f\left(100(1.3)^k(0.9)^{50-k}-3\right)=103-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}$ สำหรับทุกๆ $k\leq 14$ และทำให้ได้

$$P^E(0)=(1.00078472)^{-50}\left(\sum_{k=0}^{14}\binom{50}{k}(0.2519618)^k(1-0.2519618)^{50-k}\left(103-100(1.3)^k(0.9)^{50-k}\right)\right)$$

$$=43.9010$$

อีกวิธีหนึ่ง เราสามารถใช้สมบัติความเสมอภาคระหว่างคอลและพุทออปชันในกรณีที่มีการจ่ายปันผลในการคำนวณราคาของพุทออปชันได้ $C^E-P^E=S(0)-\text{div}_0-Ke^{-\delta T}$

จะได้ $P^E(0)=C^E(0)-S(0)+\text{div}_0+Ke^{-\delta T}$

$$=44.8625-100+3(1.00078472^{-50})+100(1.00078472^{-50})=43.9010$$

ตารางที่ 4.2 ตารางอย่างย่อการใช้ excel คำนวณค่า C^E และ P^E กรณีหุ้นมีการจ่ายปันผล

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
k	p^k	(1-p)^(50-k)	S(k)=S(0)*(1+u)^k*(1+d)^(50-k)	S(k)-div	f(S(k)-div)=max{S(k)-div-K,0}	50Ck	c1*c2*c5*c6
0	1.0000000000000	0.00000050	0.515378	-2.485	0.000	1.00	0.000000
1	0.2519618000000	0.00000066	0.744434	-2.256	0.000	50.00	0.000000
2	0.0634847486592	0.00000089	1.075294	-1.925	0.000	1225.00	0.000000
3	0.0159957315447	0.00000119	1.553202	-1.447	0.000	19600.00	0.000000
11	0.0000002598255	0.00001211	29.433014	26.433	0.000	37353738800.00	0.000000
12	0.0000000654661	0.00001618	42.514354	39.514	0.000	121399651100.00	0.000000
13	0.0000000164950	0.00002164	61.409623	58.410	0.000	354860518600.00	0.000000
14	0.0000000041561	0.00002892	88.702788	85.703	0.000	937845656300.00	0.000000
15	0.0000000010472	0.00003867	128.126250	125.126	25.126	2250829575120.00	2.289934
16	0.0000000002638	0.00005169	185.071250	182.071	82.071	4923689695575.00	5.511190
17	0.0000000000665	0.00006910	267.325139	264.325	164.325	9847379391150.00	7.433601
44	0.0000000000000	0.17520345	5482296.983147	5482293.983	5482193.983	15890700.00	0.000000
45	0.0000000000000	0.23421725	7918873.420101	7918870.420	7918770.420	2118760.00	0.000000
46	0.0000000000000	0.31310868	11438372.717923	11438369.718	11438269.718	230300.00	0.000000
47	0.0000000000000	0.41857311	16522093.925889	16522090.926	16521990.926	19600.00	0.000000
48	0.0000000000000	0.55956115	23865246.781840	23865243.782	23865143.782	1225.00	0.000000
49	0.0000000000000	0.74803820	34472023.129324	34472020.129	34471920.129	50.00	0.000000
50	0.0000000000000	1.00000000	49792922.297913	49792919.298	49792819.298	1.00	0.000000
						sum=	46.657043
						C(0)	44.862546
						P(0)=C(0)-S(0)+div0+K(1+r)^(-N)	43.9010173

□

4.6.2 สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์

สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์ (cox-ross-rubinstien formula) จะพิจารณาแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N- คาบเวลา สำหรับในกรณีที่ K เป็นราคาใช้สิทธิซึ่ง ผลประโยชน์ $f(x)=0$ สำหรับทุกๆ $x \le K$ ดังนั้น จะมี m ที่น้อยที่สุด ซึ่ง

$$S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k} > K \text{ สำหรับทุกๆ } k=m,m+1,...,N \tag{4.31}$$

จากสูตร (4.28) จะลดรูปได้เป็น

$$C^E=(1+r)^{-N}\left(\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}\left(S(0)(1+u)^k(1+d)^{N-k}-K\right)\right) \tag{4.32}$$

จากสมการ (4.30) สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$C^E=a_N S(0)+b_N K \tag{4.33}$$

เมื่อ $a_N=(1+r)^{-N}\left(\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}(1+u)^k(1+d)^{N-k}\right)$

และ $b_N=-(1+r)^{-N}\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k}$

เราสามารถจัดรูป a_N ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$a_N=\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}\left(p^*\left(\frac{1+u}{1+r}\right)\right)^k\left((1-p^*)\left(\frac{1+d}{1+r}\right)\right)^{N-k} \tag{4.34}$$

จะสังเกต ได้ว่า $p^*\left(\frac{1+u}{1+r}\right)+(1-p^*)\left(\frac{1+d}{1+r}\right)=1$ เพื่อความสะดวกให้ $q=p^*\left(\frac{1+u}{1+r}\right)$

จะได้ $$a_N=\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}q^k(1-q)^{N-k} \tag{4.35}$$

นิยาม $\varphi(m,N,x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{N}{k}x^k(1-x)^{N-k}$ สำหรับทุก ๆ $0<x<1$

สังเกตได้ว่า $\varphi(N,N,x)=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k(1-x)^{N-k}=1$

ดังนั้นสามารถเขียน a_N และ b_N ในรูปของ φ ได้เป็น

$$a_N=1-\varphi(m-1,N,q) \quad \text{และ} \quad b_N=-(1+r)^{-N}\left(1-\varphi(m-1,N,p^*)\right) \tag{4.36}$$

นั่นคือ $$C^E=\left(1-\varphi(m-1,N,q)\right)S(0)-(1+r)^{-N}\left(1-\varphi(m-1,N,p^*)\right)K \tag{4.37}$$

และพิจารณาในทำนองเดียวกัน จะได้

$$P^E=-\varphi(m-1,N,q)S(0)+(1+r)^{-N}\varphi(m-1,N,p^*)K \tag{4.38}$$

ตัวอย่างที่ 4.14 จากตัวอย่างที่ 4.12 จงใช้สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์สำหรับแบบจำลอง 50 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 6

วิธีทำ คำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

$$p^* = \frac{0.00078472 + 0.1}{0.3 + 0.1} = 0.2519618$$

และคำนวณ $q = p^*\left(\frac{1+u}{1+r}\right) = 0.2519618\left(\frac{1+0.3}{1+0.00078472}\right) = 0.32729351$

เนื่องจาก $100(1.3)^k(0.9)^{50-k} > 100$ สำหรับทุกๆ $k \geq 15$

โดยสูตร (4.37) จะได้

$$C^E(0) = (1-\varphi(14,50,0.32729351))100 - \left(1.00078472^{-50}\right)(1-\varphi(14,50,0.2519618))100$$

เมื่อ $\varphi(14,50,0.32729351) = \sum_{k=0}^{14}\binom{50}{k}0.32729351^k(1-0.32729351)^{50-k} = 0.29142835$

และ $\varphi(14,50,0.2519618) = \sum_{k=0}^{14}\binom{50}{k}0.2519618^k(1-0.2519618)^{50-k} = 0.73753011$

ดังนั้น $C^E(0) = (1-0.29142835)100 - \left(1.00078472^{-50}\right)(1-0.73753011)100 = 45.6197$

ต่อไปคำนวณราคาพุทออปชันโดยใช้สูตร (4.38) ได้

$$P^E(0) = -\varphi(14,50,0.32729351)100 + \left(1.00078472^{-50}\right)\varphi(14,50,0.2519618)100$$

$$= (-0.29142835)100 + \left(1.00078472^{-50}\right)(0.73753011)100 = 41.7735$$

ตารางที่ 4.3 ตารางอย่างย่อการใช้ excel คำนวณค่า C^E และ P^E กรณีหุ้นไม่มีการจ่ายปันผล

k	C(50,k)	q^k*(1-q)^(50-k)	C(N,k)q^k*(1-q)^(N-k)	p*^k*(1-p*)^(50-k)	C(N,k)p*^k*(1-p*)^(N-k)	
0	1	0.0000000025	0.0000000025	0.0000004968	0.0000004968	
1	50	0.0000000012	0.0000000599	0.0000001673	0.0000083670	
2	1225	0.0000000006	0.0000007139	0.0000000564	0.0000690473	
3	19600	0.0000000003	0.0000055574	0.0000000190	0.0003721154	
4	230300	0.0000000001	0.0000317704	0.0000000064	0.0014727413	
5	2118760	0.0000000001	0.0001422072	0.0000000022	0.0045637855	
6	15890700	0.0000000000	0.0005189131	0.0000000007	0.0115291532	
7	99884400	0.0000000000	0.0015869420	0.0000000002	0.0244097297	
8	536878650	0.0000000000	0.0041500305	0.0000000001	0.0441928861	
9	2505433700	0.0000000000	0.0094225800	0.0000000000	0.0694656449	
10	10272278170	0.0000000000	0.0187960010	0.0000000000	0.0959322994	
11	37353738800	0.0000000000	0.0332540491	0.0000000000	0.1175014122	
12	121399651100	0.0000000000	0.0525823103	0.0000000000	0.1286285497	
13	354860518600	0.0000000000	0.0747810702	0.0000000000	0.1266451443	
14	937845656300	0.0000000000	0.0961561649	0.0000000000	0.1127387350	
		$\varphi(m-1,N,q)$	0.291428372	$\varphi(m-1,N,p^*)$	0.737530108	
		a_N	0.708571628	b_N	-0.252374921	
		C(0)	45.61967063			
		P(0)	41.77352637			

□

4.7 สูตรของแบล็ก-โชลส์

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองราคาของแบล็ก-โชลส์คิดค้นโดย ฟิชเชอร์ แบล็ก (Fisher Black), มายรอน โชลส์ (Myron Scholes) และ โรเบิร์ต ซี เมอร์ทัน (Robert C. Merton) ซึ่ง 2 ใน 3 ในนี้คือ มายรอน โชลส์ และ โรเบิร์ต ซี เมอร์ทัน ได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเศรษฐศาสตร์ ในปี ค.ศ.1970 และเป็นที่น่าเสียดายที่ ฟิชเชอร์ แบล็ก ได้เสียชีวิตลงเสียก่อนจึงไม่ได้รับรางวัล แบบจำลองแบล็ก-โชลส์มีบทบาทค่อนข้างมากในการกำหนดราคาซื้อขายออปชันในปัจจุบัน ถึงแม้ว่าแต่ละสมการในแบบจำลองจะต้องใช้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากและมีความซับซ้อนอย่างมาก แต่เนื่องด้วยในปัจจุบันความเจริญทางด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ก็เจริญรุดหน้าไปอย่างมากเช่นกัน เราจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์มาใช้แก้ปัญหาและคำนวณราคาออปชันด้วยแบบจำลองที่ยุ่งยากนี้ได้อย่างง่ายดาย ไม่ว่าจะใช้โปรแกรม excel หรือ โปรแกรมสำเร็จรูปอื่นที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อให้สามารถใช้งานทางด้านการเงินได้โดยเฉพาะ เป็นต้น

การกำหนดสัญลักษณ์ต่างๆที่จะใช้ต่อไปนี้ยังคงใช้เหมือนที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ อ้างถึงแบบจำลองราคาเชิงเวลาต่อเนื่องที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 จะได้ราคาของหุ้นกำหนดโดย

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t)} \tag{4.39}$$

เมื่อ $W(t)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มของการเคลื่อนที่แบบบาวน์เนียน และ $S(t)$ มีการแจกแจกแบบลอกนอร์มอล

พิจารณายูโรเปียนออปชันที่มีระยะเวลาครบกำหนด T และผลประโยชน์ $f(S(T))$ เราสามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกับแบบจำลองราคาแบบไม่ต่อเนื่อง คือ ราคาออปชันที่เวลา $t = 0$ คือค่าคาดหวังของผลประโยชน์ $f(S(T))$ ที่ถูกคิดลดด้วยฟังก์ชันคิดลดจากอัตราผลตอบแทนทบต้นต่อเนื่อง δ ของตราสารหนี้ที่สมมูลกับอัตราผลตอบแทนต่องวด r นั่นคือ $e^{-\delta T} = (1+r)^{-T}$ ดังนั้น จะได้

$$D(0) = e^{-\delta T} E^*[f(S(T))] \tag{4.40}$$

ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^*

ต่อไปจะพิจารณา $E\left[e^{-\delta t}S(t)\right]$ ซึ่งเป็นค่าคาดหวังของราคา $S(t)$ ที่ถูกคิดลดด้วย $e^{-\delta t}$ หรือมูลค่าปัจจุบันของราคา $S(t)$ เนื่องจาก $W(t)\sim N(0,t)$ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่น คือ $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ภายใต้ความน่าจะเป็น p ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E\left[e^{-\delta t}S(t)\right] &= E\left[S(0)e^{-\delta t}e^{\mu t+\sigma W(t)}\right] = S(0)E\left[e^{-\delta t+\mu t+\sigma W(t)}\right] \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t+\mu t+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-x^2}{2t}}dx \\
&= S(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\left(-\delta+\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}dx \\
&= S(0)e^{\left(-\delta+\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}dx \\
&= S(0)e^{\left(-\delta+\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = S(0)e^{\left(-\delta+\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

จาก (4.41) จะเห็นว่าค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบัน $S(t)$ ไม่ควรขึ้นกับเวลา t นั่นคือ อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ จะต้องเท่ากับ $\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$ ซึ่งจะทำให้ $E\left[e^{-\delta t}S(t)\right]=S(0)$ ดังนั้นเงื่อนไข $\delta=\mu+\frac{1}{2}\sigma^2$ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นที่ทำให้มีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* ซึ่ง

$$E^*\left[e^{-\delta t}S(t)\right]=S(0) \tag{4.42}$$

การแสดงว่ามีความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง p^* มีความยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งในที่นี้จะไม่กล่าวถึงบทพิสูจน์

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้น ซึ่งเป็นราคาที่จะทราบ ที่เวลา $t=s$ ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยงแบบมีเงื่อนไขของ $S(t)$ จะเท่ากับ

$$E^*[S(t)e^{-\delta t}\mid S(s)]=S(s)e^{-\delta s} \tag{4.43}$$

บทแทรก 4.22 (สมบัติของมาร์ทิงเกล) กำหนดให้ $\tilde{S}(s)=S(s)e^{-\delta s}$ เป็นราคาหุ้นส่วนลด ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะได้ว่า

$$E^*[\tilde{S}(t)\mid S(s)]=\tilde{S}(s)\quad \text{สำหรับทุกๆ } t\geq s\geq 0 \tag{4.44}$$

พิจารณายูโรเปียนคอลออปชัน จากสมการ (4.44) จะได้

$$C^E(0) = e^{-\delta T} E^*\left[[S(T)-K]^+\right] = E^*\left[\left[S(T)e^{-\delta T} - Ke^{-\delta T}\right]^+\right]$$

$$= E^*\left[\left[S(0)e^{-\delta T+\mu T+\sigma W(T)} - Ke^{-\delta T}\right]^+\right]$$

$$= E^*\left[\left[S(0)e^{-(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)T+\mu T+\sigma W(T)} - Ke^{-\delta T}\right]^+\right]$$

$$= E^*\left[\left[S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W(T)} - Ke^{-\delta T}\right]^+\right]$$

$$= \int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty}\left(S(0)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma x} - Ke^{-\delta T}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx$$

$$= S(0)\int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx - Ke^{-\delta T}\int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2T}}dx$$

$$= S(0)\int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{\left(x^2-2T\sigma x+\sigma^2T^2\right)}{2T}}dx - Ke^{-\delta T}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$= S(0)\int_{-d_2\sqrt{T}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(x-\sigma T)^2}{2T}}dx - Ke^{-\delta T}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

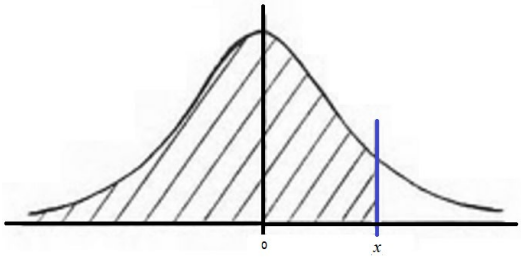
$$= S(0)\int_{-d_1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy - Ke^{-\delta T}\int_{-d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

นั่นคือ
$$C^E(0) = S(0)N(d_1) - Ke^{-\delta T}N(d_2) \tag{4.45}$$

เมื่อ $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S(0)}{K} + (\delta + 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S(0)}{K} + (\delta - 0.5\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$

และ
$$N(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_{-x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{4.46}$$

จะเห็นว่า $N(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าสะสมของการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน $N(0,1)$ นั่นคือ $N(x) = P(z \le x) = P(z \ge -x)$ ดังนั้นสามารถคำนวณค่า $N(x)$ ได้จากตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจงแจงแบบปกติซึ่งปรากฏอยู่ในภาคผนวก หรือเพื่อความสะดวกอาจจะใช้คำสั่งฟังก์ชัน normsdist(z) ในโปรแกรม excel ก็ได้



รูปที่ 4.13 *ฟังก์ชันค่าสะสมของการกระจายความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน* $N(x) = P(z \le x)$

โดยอาศัยแนวความคิดจากสมการ (4.59) และ (4.60) จะได้ราคายูโรเปียนคอลออปชัน และยูโรเปียนพุทออปชัน ที่เวลา $t \le T$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.14 (สูตรของแบล็ก-โชลส์) สำหรับยูโรเปียนออปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T จะได้ว่า ราคาของออปชันที่เวลา $t \le T$ ใดๆ เป็นไปดังนี้

$$C^E(t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-\delta(T-t)}N(d_2) \tag{4.47}$$

และ
$$P^E(t) = Ke^{-\delta(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1) \tag{4.48}$$

เมื่อ $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S(0)}{K} + (\delta + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S(0)}{K} + (\delta - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

และ $N(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ (4.49)

ในสูตร (4.49) จะเห็นว่ามีพารามิเตอร์ตัวหนึ่งที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการกำหนดหรือประเมินราคาออปชันด้วยสูตรของแบล็ก-โชลส์ นั่นคือ พารามิเตอร์ σ ซึ่งเรียกว่า ค่าความผันผวน (volatility) ของราคาหุ้น $S(t)$ เนื่องจาก $\ln\dfrac{S(t)}{S(0)} \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ ถ้าแทน $t = 1$ จะได้ $\ln\dfrac{S(1)}{S(0)} \sim N(\mu, \sigma^2)$ นั่นคือ ค่าความผันผวน σ ก็คือส่วนเบี่ยงเบนของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมต่อคาบเวลานั่นเอง เนื่องจาก $S(t)$ เป็นราคาหุ้นในอนาคต ดังนั้นจึงไม่สามารถคำนวณค่าความผันผวน σ ได้โดยตรง ในทางปฏิบัตินิยมใช้ ส่วนเบี่ยงเบนของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมต่อคาบเวลาซึ่งคำนวณจากข้อมูลราคาในอดีตมาแทนค่าความผันผวน σ ในเชิงทฤษฎี เนื่องจากเราทราบว่า σ^2

$= NVar[k(n)]$ ในที่นี้จะประมาณ $Var[k(n)]$ ด้วย ความแปรปรวน $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ จากกลุ่มตัวอย่างของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม X ของหุ้นอ้างอิง

นั่นคือ $$\sigma^2 \approx s^2 N = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right) N \qquad (4.50)$$

เมื่อ n เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

S_i เป็นราคาหุ้นในที่เวลาที่ i ($i = 0,1,2,...,n$)

$x_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$ อัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นอ้างอิง ($i = 1,2,...,n$)

$\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมของหุ้นอ้างอิง

N เป็นจำนวนจุดเวลาที่แบ่งใน 1 คาบเวลา (ในที่นี้จำนวนจุดเวลา ใน 1 ปีกำหนดให้เท่า 250 วันทำการใน 1 ปี)

ตัวอย่างที่ 4.15 จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปี ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 42 วันทำการ ดังนี้

วันที่	S_i	$x_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
0	100.00	-	-	-
1	100.00	0	0.0002451	0.00000006
2	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
3	99.00	0	0.0002451	0.00000006
4	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
5	101.00	0.009950331	0.0101955	0.00010395
6	100.00	-0.00995033	-0.0097052	0.00009419
7	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
8	99.00	0	0.0002451	0.00000006
9	98.00	-0.01015237	-0.0099072	0.00009815

10	97.00	-0.0102565	-0.0100114	0.00010023
11	98.00	0.0102565	0.0105016	0.00011028
12	98.00	0	0.0002451	0.00000006
13	97.00	-0.0102565	-0.0100114	0.00010023
14	96.00	-0.01036279	-0.0101177	0.00010237
15	96.00	0	0.0002451	0.00000006
16	95.00	-0.0104713	-0.0102262	0.00010457
17	95.00	0	0.0002451	0.00000006
18	96.00	0.0104713	0.0107164	0.00011484
19	97.00	0.010362787	0.0106079	0.00011253
20	97.00	0	0.0002451	0.00000006
21	97.00	0	0.0002451	0.00000006
22	98.00	0.0102565	0.0105016	0.00011028
23	98.00	0	0.0002451	0.00000006
24	99.00	0.010152371	0.0103975	0.00010811
25	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
26	100.00	0	0.0002451	0.00000006
27	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
28	99.00	0	0.0002451	0.00000006
29	99.00	0	0.0002451	0.00000006
30	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
31	100.00	0	0.0002451	0.00000006
32	101.00	0.009950331	0.0101955	0.00010395
33	100.00	-0.00995033	-0.0097052	0.00009419
34	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
35	99.00	0	0.0002451	0.00000006
36	99.00	0	0.0002451	0.00000006

37	100.00	0.010050336	0.0102955	0.00010600
38	99.00	-0.01005034	-0.0098052	0.00009614
39	99.00	0	0.0002451	0.00000006
40	99.00	0	0.0002451	0.00000006
41	99.00	0	0.0002451	0.00000006
		$\bar{x} = -0.00024513$		$s^2 = 0.00005909$

จากตาราง $\sigma^2 \approx s^2 N = 0.00005909(250) = 0.01477282$ ดังนั้นจะได้ค่าความผันผวนของราคาหุ้น $\sigma \approx 0.1215435 = 12.15435\%$ ต่อปี □

ตัวอย่างที่ 4.16 กำหนดยูโรเปียนพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.2 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu = 0.2$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 12.15 % ต่อปี จงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $P^E(t)$ สำหรับ $t \in [0, 0.5]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่องเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
S_i	90	93.05	93.04	96.38	97.11	98.08	100.35	99.61	104.58	106.38	107.21

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $S(0) = 90$, $K = 100$, $T = 6/12 = 0.5$, $\delta = 0.2$ และ $\sigma^2 = 0.1215^2 = 0.01476225$ จากสูตรของแบล็ก-โชลส์ (4.64) และ (4.65) จะได้

$$d_1 = \frac{\ln\frac{90}{100} + (0.2 + 0.5(0.01476225))(0.5 - t)}{0.1215\sqrt{0.5 - t}} = \frac{-0.0137 - 1.7068t}{\sqrt{0.5 - t}}$$

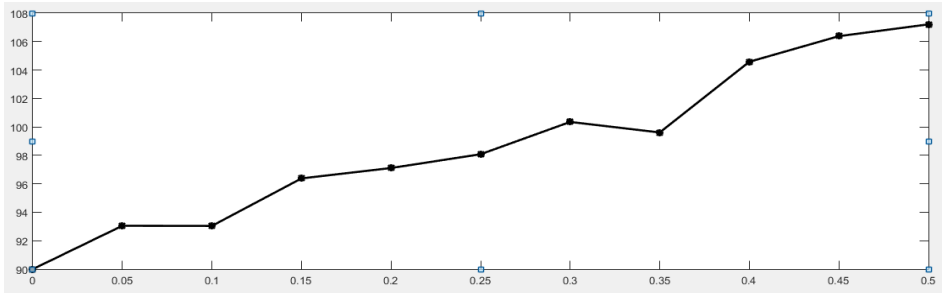
และ $$d_2 = \frac{\ln\frac{90}{100} + (0.2 - 0.5(0.01476225))(0.5 - t)}{0.1215\sqrt{0.5 - t}} = \frac{-0.0745 - 1.5853t}{\sqrt{0.5 - t}}$$

และ $$P^E(t) = 100e^{-0.2(0.5-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$

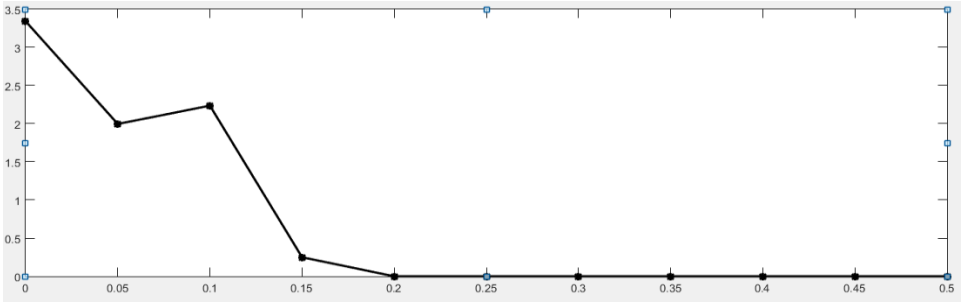
เมื่อ $N(x) = P(z \le x)$ เราจะเขียนกราฟของ $P^E(t)$ โดยการแบ่งช่วงเวลา $[0, 0.5]$ ออกเป็น 10 ช่องย่อยๆ จะได้ความกว้างของแต่ละช่องย่อยเท่ากับ $\frac{0.5 - 0}{10} = 0.05$ โดยมีจุดเวลาเป็น t_i, $d_1(t_i)$, $d_2(t_i)$ $N(-d_1(t_i))$, $N(-d_2(t_i))$ และ $P^E(t_i)$ แสดงในตารางต่อไปนี้

t_i	$S(t_i)$	$d_1(t_i)$	$d_2(t_i)$	$N(-d_1)$	$N(-d_2)$	$P^E(t_i)$
0	90	-0.0194	-0.1054	0.5077289	0.54195449	3.342468
0.05	93.05	-0.1476	-0.2292	0.5586866	0.590650775	1.996808
0.1	93.04	-0.2915	-0.3685	0.6146771	0.643732176	2.236551
0.15	96.38	-0.4559	-0.5279	0.6757727	0.701206915	0.249714
0.2	97.11	-0.6482	-0.7149	0.7415877	0.762660714	0
0.25	98.08	-0.8808	-0.9417	0.810787	0.826814069	0
0.3	100.35	-1.1756	-1.2300	0.8801207	0.890658681	0
0.35	99.61	-1.5778	-1.6250	0.9426944	0.947917402	0
0.4	104.58	-2.2023	-2.2409	0.986177	0.987482207	0
0.45	106.38	-3.4961	-3.5235	0.999764	0.99978708	0
0.5	107.21	$-\infty$	$-\infty$	1	1	0

หมายเหตุ ค่าที่คำนวณได้จากสูตรของแบล็ก-โชลส์ได้ค่าน้อยกว่า 0 แต่เงื่อนไขขอบเขตของราคาตามทฤษฎีบท 4.17 จึงได้ว่าราคาของ $P^E(t_i)=0$ เมื่อ $t_i \geq 0.2$



กราฟราคาของหุ้นที่ เวลา t ใดๆ



กราฟราคาของ $P^E(t)$ ที่เวลา t ใดๆ □

บทสรุปท้ายบทที่ 4

บทที่ 4 นี้ได้กล่าวถึงกระบวนการกำหนดราคาของยูโรเปียนออปชัน โดยอิงหลักการสำคัญของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่คือ **หลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle)** และ **การประเมินค่าตามความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation)** ซึ่งวางอยู่บนพื้นฐานของ **สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property)** ที่ระบุว่ามูลค่าที่คาดหวังของราคาทรัพย์สินที่ปรับด้วยส่วนลดดอกเบี้ย จะต้องเท่ากับราคาปัจจุบันภายใต้โลกความเสี่ยงเป็นกลาง

เนื้อหาในบทนี้มุ่งเน้นการใช้แบบจำลอง **ต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree Model)** และสูตรของ **คอกซ์–รอสส์–โรบินสไตน์ (Cox-Ross-Rubinstein: CRR Model)** สำหรับการคำนวณราคายูโรเปียนออปชันในเชิงตัวเลข โดยอาศัยเทคนิคการคำนวณย้อนกลับ (Backward Induction) เพื่อวิเคราะห์ความคุ้มค่าของออปชันในแต่ละจุดเวลา และประเมินกระแสเงินสดที่คาดหวังภายใต้สถานการณ์ความไม่แน่นอนของตลาด

สิ่งที่สำคัญคือ บทนี้ไม่เพียงเป็นการวางรากฐานทฤษฎีของการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์เท่านั้น แต่ยังเปิดโอกาสให้เห็นการประยุกต์ใช้งานจริงในโลกการลงทุน เช่น

- **นักลงทุนสถาบัน** ใช้แบบจำลองเหล่านี้ในการประเมินมูลค่าออปชันที่ซื้อขายในตลาด เช่น คอลออปชันของหุ้น ซึ่งจะช่วยตัดสินใจได้ว่าราคาตลาดปัจจุบันสูงหรือต่ำกว่ามูลค่าทางทฤษฎี
- **ผู้จัดการกองทุน** ใช้เพื่อสร้างกลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยง เช่น การใช้พุทออปชันในการประกันพอร์ตจากความเสี่ยงขาลงของตลาดหุ้น
- **นักออกแบบผลิตภัณฑ์การเงิน (financial engineers)** ใช้แบบจำลอง CRR เป็นฐานในการสร้างตราสารอนุพันธ์ซับซ้อน เช่น Barrier options หรือ structured notes

แนวคิดที่เรียนรู้ในบทนี้จึงเป็นทั้งเครื่องมือทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ ที่สามารถใช้วิเคราะห์ความผันผวนของราคา ประเมินทางเลือกการลงทุน และจัดการความเสี่ยงในพอร์ตการลงทุนอย่างมีประสิทธิภาพ

นอกจากนี้ยังได้ขยายการวิเคราะห์ไปสู่การใช้ **สูตรของแบล็ก–โชลส์ (Black-Scholes Formula)** ซึ่งเป็นแบบจำลองในเวลาต่อเนื่องที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในตลาดทุน โดยเฉพาะในการกำหนดราคายูโรเปียนคอลและพุทออปชันที่ไม่มีเงินปันผล สูตรนี้อาศัยสมมติฐานเกี่ยวกับพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ที่เคลื่อนไหวตามการแจกแจงแบบล็อกนอร์มัล (lognormal distribution) และเป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาเครื่องมืออนุพันธ์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นในทางปฏิบัติ

โดยสรุป บทที่ 4 ได้ให้ความเข้าใจอย่างเป็นระบบเกี่ยวกับกลไกของยูโรเปียนออปชัน การประเมินราคาอย่างมีเหตุผล และการนำแนวคิดเหล่านี้ไปใช้จริงในตลาดทุน ซึ่งล้วนเป็นทักษะที่จำเป็นต่อทั้งนักวิเคราะห์ นักลงทุน และผู้พัฒนาผลิตภัณฑ์ทางการเงินในยุคที่ความผันผวนและความซับซ้อนของตลาดเพิ่มสูงขึ้นอย่างต่อเนื่อง

เอกสารอ้างอิง

[1] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). *Option pricing: A simplified approach.* Journal of Financial Economics, 7(3), 229–263.

[2] Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.

[3] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2015). *Derivatives: Principles and Practice* (2nd ed.). McGraw-Hill.

[4] Haug, E. G. (2007). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas* (2nd ed.). McGraw-Hill.

[5] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* Oxford University Press.

[6] Baxter, M., & Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing.* Cambridge University Press.

[7] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

[8] Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1) กำหนดราคาใช้สิทธิของยูโรเปียนคอลออปชัน 145 บาท และอายุของสัญญา 6 เดือน สมมติว่าผู้ถือได้กำไร 13 บาทหลังจากใช้สิทธิ และราคาซื้อออปชัน 15.50 บาท จงหาราคาของหุ้นอ้างอิง ณ วันใช้สิทธิ กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี

2) สมมติว่าพุทออปชันของหุ้นอ้างอิง a อายุของสัญญา 3 เดือน มีราคาใช้สิทธิ 110 บาท ณ วันครบกำหนด ถ้าพุทออปชันมีราคาซื้อ ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2557 เท่ากับ 12.50 บาท และ ราคาหุ้นอ้างอิง ณ วันเดียวกันเท่ากับ 110 บาท จงหาราคาหุ้นอ้างอิงควรเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะทำให้นักลงทุนไม่ขาดทุนจากการซื้อคอลออปชัน ณ วันที่ครบกำหนด สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.5 % ต่อปี

3) สมมติพุทออปชันของหุ้นอ้างอิงหนึ่งมีอายุครบกำหนด 3 เดือน ราคาใช้สิทธิ 80 บาท ณ วันครบกำหนด และคอลออปชันมีราคาซื้อ 10.25 บาท ถ้าราคาหุ้น ณ วันครบกำหนด สามารถเป็น 92 บาท, 80 บาท หรือ 75 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 1/3 เท่ากัน จงหาค่าคาดหวังของกำไร(ขาดทุน)ของผู้ถือสัญญา กำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปี

4) สมมติให้หุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 130 บาทต่อหุ้น และสมมติว่าราคาของยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นอ้างอิงนี้ มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท ซึ่งจะใช้สิทธิได้ในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยที่ราคาซื้อขายของคอลออปชันนี้เท่ากับ 25.50 บาท จงหาราคาซื้อขายของพุทออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ และเวลาใช้สิทธิเท่ากับคอลออปชันฉบับนี้ เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8.5 % ต่อปี คิดทบต้นทุกครึ่งปี

5) ผู้ส่งออกเสื้อผ้ายี่ห้อหนึ่งไปยังประเทศสหรัฐอเมริกาต้องการทำสัญญาออปชัน เพื่อขายเงินสกุลดอลล่าร์ ในอีก 6 เดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลล่าร์เป็น 2.5 % และ 3.5% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลล่าร์เป็นเงิน

สกุลบาทไทย ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 33.25 ต่อดอลล่าร์ จงหาราคาใช้สิทธิของยูโรเปียนคอลและยูโรเปียนพุทออปชันซึ่งทำให้ $C^E = P^E + 1$

6) สมมติว่ายูโรเปียนคอลออปชัน และพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ 120 บาท ระยะเวลาใช้สิทธิ 9 เดือน โดยที่มีคอลและพุทออปชันมีราคาซื้อขายที่ 15.20 บาท และ 17.80 บาท ตามลำดับ ถ้าราคาปัจจุบันหุ้นอ้างอิงราคา 105 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.7% ต่อปี จงหาแนวทางการลงทุนที่ทำให้เกิดการค้ากำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

7) กำหนดให้ $r = 0.05$, $S(0) = K = 100$ บาท จงคำนวณหาราคา $P^E(0)$ ของคอลออปชัน โดยใช้แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา เมื่อกำหนดให้ $u = 0.10$ และ $d = -0.05$

8) สำหรับยูโรเปียนออปชัน สมมติให้ $S(0) = 100, K = 110$ บาท, $u = 0.2$, $d = -0.1$ และ $r = 0.05$ โดยทุกครั้งที่มีการขายหุ้นจะต้องจ่ายค่านายหน้าซื้อขาย(commission) 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรที่ผู้ซื้อพุทออปชันได้รับ

9) สำหรับยูโรเปียนออปชัน กำหนดให้ $S(0) = K = 1$, $u = 0.15$ และ $d = -0.1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 7.5 % จงคำนวณหามูลค่าของพอร์ตการลงทุนการจำลองสำหรับคอลออปชันและพุทออปชัน พร้อมทั้งคำนวณหาราคาของคอลและพุท ออปชันด้วย

10) สำหรับยูโรเปียนออปชัน สมมติว่าหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบัน 100 บาทโดยมีอัตราเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้น $k(n) = \begin{cases} 0.1823 & ;\uparrow \\ -0.1054 & ;\downarrow \end{cases}$, $n = 1,2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.6 ต่อปีทบต้นทุกเดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของคอลและพุทออปชันซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 110 บาท และเวลาใช้สิทธิเดือนที่ 3

11) สำหรับยูโรเปียนออปชัน กำหนดให้ $S(0)=K=100$ บาท, $u=0.2, d=-0.1$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงใช้แบบจำลอง 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้สิทธิได้เมื่อสิ้นเดือนที่ 9

12) สำหรับยูโรเปียนออปชัน กำหนดให้ $S(0)=100, K=90$ บาท, $u=0.2, d=-0.2$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้เท่ากับ 0.08 ต่อปีทบต้นทุกครึ่งปี สัญญามีอายุ 6 เดือน

12.1) จงใช้แบบจำลอง 20 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน

12.2) จงใช้สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์สำหรับแบบจำลอง 20 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน

12.2) สมมติว่าหุ้นมีการจ่ายปันผล 1 ครั้งที่ปลายเดือนที่ 6 จำนวน 5.5 บาทจงคำนวณราคาของคอลและพุทออปชัน

13) สำหรับยูโรเปียนออปชัน กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วย โดยที่ยูโรเปียนออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
110	19.50	4.25
120	13.75	7.50
130	8.25	11.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

14) กำหนดยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน ($t=3$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา $k(n)=\begin{cases}0.0953 & ;\uparrow\\ -0.1054 & ;\downarrow\end{cases}$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ 0.20 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน

14.1) จงคำนวณราคาของคอลออปชัน

14.2) จงคำนวณราคาของยูโรเปียนคอลออปชัน ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 4.5 บาทที่เวลา $t=3$

15) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลยูโรเปียนออปชันและคอลยูโรเปียนออปชันของหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 100 บาทและมีอายุ 6 เดือนโดยสมมติว่า $S(0)=48$ บาท $u=0.15, d=-0.20$ และอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี

16) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคายูโรเปียนคอลออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ 20 บาท และมีอายุ 3 เดือน กำหนดให้ $u=0.15$ $d=-0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 12% ต่อปีทบต้นทุกเดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 18 บาท โดยหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 1 ครั้ง 0.50 บาท ต่อหุ้น ณ ปลายเดือนที่ 3

17) กำหนดยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท อายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 32 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.3 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu=0.15$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 20.35% ต่อปี จงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $C^E(t)$ สำหรับ $t\in[0,0.25]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่องเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
S_i	32	32.20	31.34	30.41	29.10	31.01	31.89	32.08	33.08	34.08	33.58

18) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคายูโรเปียนคอลออปชันกับราคาอเมริกันคอลออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และมีอายุ 6 เดือน โดยกำหนด $u=0.2$ $d=0$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 100 บาท

19) จงประมาณค่าความผันผวน σ ต่อปี ของราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจากข้อมูลราคาปิดของหุ้นย้อนหลัง 22 วันทำการ ดังนี้

วันที่	ราคา	วันที่	ราคา
0	50	11	51.08
1	50.00	12	51.84
2	50.00	13	50.88
3	50.41	14	50.88
4	51.10	15	50.58
5	51.01	16	49.75
6	50.89	17	48.90
7	51.08	18	48.67
8	51.08	19	48.31
9	51.08	20	47.51
10	51.08	21	47.51

19) (ประเมินราคาคอลออปชันและการป้องกันความเสี่ยง) ให้เลือกหุ้นที่ตนเองสนใจ 1 บริษัทที่จดทะเบียนในตลาดหลักทรัพย์ (เช่น หุ้นใน SET100 หรือหุ้นที่มีสภาพคล่องสูง) แล้วดึงข้อมูลราคาหุ้นย้อนหลัง 252 วันทำการ (ประมาณ 1 ปี) จากแหล่งข้อมูล เช่น https://www.settrade.com หรือ https://finance.yahoo.com

19.1) คำนวณผลตอบแทนลอการิทึมรายวันของราคาหุ้น

19.2) คำนวณอัตราดริฟท์ (drift) รายปี

19.3) คำนวณค่าความผันผวน (volatility) รายปี

19.4) สมมุติสถานการณ์: คุณต้องการซื้อคอลออปชันแบบยูโรเปียนของหุ้นนี้ โดยมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)$ = ราคาปิดล่าสุด, ราคาใช้สิทธิ $K = S(0)\times 1.05$, ระยะเวลา $T = \frac{60}{365}$, อัตราดอกเบี้ยปราศจากความเสี่ยง $r = 0.03$ จงประเมินราคาคอลออปชันโดยใช้สูตร Black-Scholes

19.5) วิเคราะห์ว่าการซื้อคอลออปชันนี้เหมาะสมต่อการป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตหรือไม่

20) (ประเมินราคาพุทออปชันและการป้องกันความเสี่ยง) เลือกหุ้นที่สนใจ แล้วดำเนินการดังต่อไปนี้ ดึงข้อมูลราคาหุ้นย้อนหลัง 1 ปี

คำนวณผลตอบแทนรายวัน

20.1) คำนวณผลตอบแทนลอการิทึมรายวันของราคาหุ้น

20.2) คำนวณอัตราดริฟท์รายปี

20.3) คำนวณค่าความผันผวนรายปี

20.4) สมมุติว่าคุณต้องการซื้อพุทออปชันแบบยูโรเปียนเพื่อป้องกันความเสี่ยง โดยมีกำหนดพารามิเตอร์ในการประเมินราคาดังต่อไปนี้ ราคาหุ้นปัจจุบัน $S(0)$ = ราคาปิดล่าสุด, ราคาใช้สิทธิ $K = S(0) \times 0.95$, ระยะเวลา $T = \frac{90}{365}$, อัตราดอกเบี้ย $r = 0.025$ จงประเมินราคาราคาพุทออปชันโดยใช้สูตร Black-Scholes

20.5) วิเคราะห์ว่าการซื้อพุทออปชันนี้เหมาะสมต่อการป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตหรือไม่

บทที่ 5 แบบจำลองราคาอเมริกันออปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

5.1 อเมริกันออปชัน

5.2 การกำหนดราคาอเมริกันออปชัน

บทนำ

ในบทที่ 4 ได้มีการกล่าวถึงการกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน โดยใช้แนวคิดพื้นฐานจากทฤษฎี No-Arbitrage และ Risk-Neutral Valuation ผ่านแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค ซึ่งถือเป็นพื้นฐานสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ (Hull, ค.ศ. 2022; Shreve, ค.ศ. 2004) อย่างไรก็ตาม ในโลกของการเงินจริง ตราสารออปชันจำนวนมากไม่ได้ถูกจำกัดให้ใช้สิทธิได้เฉพาะในวันครบกำหนด แต่กลับเปิดโอกาสให้ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้ “เมื่อใดก็ได้” ตลอดอายุของสัญญา ตราสารดังกล่าวเรียกว่า **อเมริกันออปชัน (American Option)**

อเมริกันออปชันจึงมีลักษณะสำคัญที่แตกต่างจากยูโรเปียนออปชันตรงที่ความยืดหยุ่นในการใช้สิทธิ ส่งผลให้การกำหนดราคาของอเมริกันออปชันมีความซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากต้องพิจารณาความคุ้มค่าระหว่างการใช้สิทธิทันที กับการถือครองต่อไปเพื่อใช้สิทธิในอนาคต การวิเคราะห์ดังกล่าวต้องอาศัยเทคนิค **Backward Induction** บนโครงสร้างของแบบจำลองต้นไม้ (binomial tree model) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Cox, Ross, และ Rubinstein (ค.ศ.1979) เพื่อวิเคราะห์ทางเลือกที่ดีที่สุด ณ ทุกจุดเวลา

บทนี้จะเริ่มต้นด้วยการนิยามและอธิบายคุณสมบัติพื้นฐานของอเมริกันออปชัน ทั้งในมุมของผู้ซื้อและผู้ออกออปชัน พร้อมทั้งอภิปรายความสัมพันธ์เชิงทฤษฎีระหว่างราคาของคอลออปชันและพุทออปชัน รวมถึงการวิเคราะห์ผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้นในแต่ละกรณี การพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ เช่น ขอบเขตราคา ความเสมอภาคเชิงประมาณ และความสัมพันธ์กับยูโรเปียนออปชัน จะถูกนำเสนอในรูปของทฤษฎีบทและอสมการ เพื่อแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างที่อยู่เบื้องหลังราคาตราสารประเภทนี้

ในหัวข้อถัดไป จะกล่าวถึงกระบวนการกำหนดราคาของอเมริกันออปชันผ่านแบบจำลองต้นไม้ทวิภาคแบบหลายคาบเวลา โดยเน้นการคำนวณย้อนหลังจากวันครบกำหนดสัญญา โดยในแต่ละจุดเวลาจะต้องเปรียบเทียบระหว่างมูลค่าการใช้สิทธิทันที กับมูลค่าที่เกิดจากการถือครองออปชันต่อไป ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่ที่มีรากฐานอยู่บน Martingale Property และการประเมินค่าแบบ Risk-Neutral

นอกจากนี้ ยังมีการประยุกต์ใช้แนวคิดดังกล่าวในการวิเคราะห์กรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล โดยต้องปรับราคาหุ้นให้อยู่ในรูปของราคาหลังหักปันผล (ex-dividend price) ก่อนนำไปใช้ในการคำนวณราคาทางทฤษฎีของออปชัน และบทเรียนนี้ยังได้ยกตัวอย่างกรณีศึกษาเชิงปริมาณ เช่น การวิเคราะห์มูลค่าแฝงและมูลค่าตามเวลา ตลอดจนการประเมินราคาโดยใช้ Excel หรือแบบจำลองเชิงคำนวณที่เหมาะสมกับบริบททางปฏิบัติ

ดังนั้น บทที่ 5 นี้จึงเป็นการขยายองค์ความรู้จากบทก่อนหน้า โดยเจาะลึกถึงอเมริกันออปชันซึ่งมีลักษณะใช้งานได้จริงในตลาดการเงินหลากหลายแห่ง ทั้งในตลาดหุ้น ตลาดสินค้าโภคภัณฑ์ และตลาดอนุพันธ์ โดยใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่เข้มข้นเพื่อให้สามารถวิเคราะห์และตัดสินใจได้อย่างแม่นยำ พร้อมรองรับการบริหารความเสี่ยงอย่างมีประสิทธิภาพ

5.1 อเมริกันออปชัน

อเมริกันออปชัน (American Option) คือ ตราสารอนุพันธ์ประเภทออปชันที่ให้ “สิทธิ” แก่ผู้ถือในการซื้อ (Call) หรือขาย (Put) สินทรัพย์อ้างอิง ณ ราคาที่กำหนดไว้ในสัญญา (strike price) **ได้ทุกช่วงเวลา** ตั้งแต่วันที่เริ่มต้นจนถึงวันครบกำหนดของสัญญา ซึ่งแตกต่างจากยูโรเปียนออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้เพียงในวันครบกำหนดเท่านั้น

ในเชิงทฤษฎี ความยืดหยุ่นนี้ทำให้อเมริกันออปชันมีมูลค่าสูงกว่ายูโรเปียนออปชันภายใต้เงื่อนไขเดียวกันเสมอ หรืออย่างน้อยต้องไม่ต่ำกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของพุทออปชันหรือหุ้นที่มีการจ่ายเงินปันผล ความสามารถในการใช้สิทธิก่อนกำหนดเป็นปัจจัยที่ส่งผลต่อกลยุทธ์การลงทุนและการบริหารพอร์ตอย่างมีนัยสำคัญ (Hull, ค.ศ. 2022)

การกำหนดราคาของอเมริกันออปชันจึงต้องพิจารณาทางเลือกของผู้ถือในการ “ใช้สิทธิทันที” กับ “ถือครองสิทธิต่อไป” ซึ่งนำไปสู่การใช้กระบวนการย้อนกลับ (backward induction) บนโครงสร้างของแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (binomial tree model) เพื่อคำนวณมูลค่าในแต่ละจุดเวลา โดยพิจารณาว่าค่าของออปชันในช่วงก่อนถึงวันครบกำหนด ควรเป็นค่ามากที่สุดระหว่าง

- มูลค่าจากการใช้สิทธิทันที (intrinsic value)
- มูลค่าจากการถือครองสิทธิต่อไป (continuation value)

แนวคิดนี้เชื่อมโยงโดยตรงกับหลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle) และการประเมินค่าแบบเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของสมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property) และเป็นแกนกลางของทฤษฎีการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง

- สมบัติเชิงทฤษฎีของราคาคอลและพุทอเมริกันออปชัน
- อสมการที่แสดงขอบเขตของราคาที่เหมาะสมภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ
- ความสัมพันธ์เชิงเปรียบเทียบระหว่างราคาของอเมริกันออปชันกับยูโรเปียนออปชัน
- บทพิสูจน์ที่สนับสนุนข้อสรุปทางคณิตศาสตร์
- กรณีศึกษาที่ใช้วิเคราะห์มูลค่าของสิทธิในบริบทที่มีหรือไม่มีการจ่ายเงินปันผล

ในทางปฏิบัติ อเมริกันออปชันถูกใช้อย่างแพร่หลายในตลาดที่ให้การซื้อขายแบบต่อเนื่อง เช่น ตลาดหุ้นสหรัฐฯ ซึ่งลักษณะของออปชันที่สามารถใช้สิทธิได้ล่วงหน้า เปิดโอกาสให้นักลงทุนปรับกลยุทธ์ได้อย่างยืดหยุ่นตามสภาพตลาด เช่น การใช้สิทธิก่อนวันประกาศจ่ายเงินปันผล หรือการบริหารความเสี่ยงในสถานการณ์ที่ราคาสินทรัพย์อ้างอิงผันผวนมาก

ในที่นี้ กำหนดสัญลักษณ์ให้ C^A และ P^A แทนราคาหรือค่าพรีเมียมของคอลอเมริกันออปชันและพุทอเมริกันออปชัน ตามลำดับ ส่วนสัญลักษณ์อื่นๆ ยังคงเหมือนในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มายกเว้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

ทฤษฎีบท 5.1 (ความเสมอภาคเชิงประมาณระหว่างพุทและคอล) ราคาของคอลอเมริกันออปชันและพุทอเมริกันออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกันมีความสัมพันธ์ ดังอสมการต่อไปนี้

$$S(0)-K \le C^A - P^A \le S(0)-Ke^{-\delta T} \tag{5.1}$$

พิสูจน์ จะแสดงว่า ข้อ1) $C^A - P^A \le S(0)-Ke^{-\delta T}$ และ ข้อ 2) $C^A - P^A \ge S(0)-K$

ข้อ1) สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^A - P^A > S(0)-Ke^{-\delta T}$

ที่เวลา $t=0$ สามารถทำธุรกรรม ได้ดังนี้

- ออกคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^A บาท
- ยืมเงิน $Ke^{-\delta T}$ บาท
- ซื้อพุทออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน P^A บาท
- ซื้อหุ้น 1 หน่วย จ่ายเงิน $S(0)$ บาท
- นำเงินที่เหลือจำนวน $C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0) > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้ที่ให้อัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0)=0$

สำหรับการถือสัญญาพุทอเมริกันออปชัน ผู้ถือสามารถเลือกใช้สิทธิ ที่บางเวลา $t_1 \le T$ ที่ทำให้ผลผลประโยชน์เป็นบวก โดยจะได้รับผลประโยชน์เท่ากับ $K-S(t_1)$ บาท แต่หากไม่มีเวลาใช้สิทธิที่ทำให้ผลประโยชน์เป็นบวก ผู้ถือจะใช้สิทธิที่เวลา T โดยจะได้รับผลประโยชน์เท่ากับ 0 บาท

สำหรับการถือสัญญาคอลอเมริกันออปชัน ผู้ถือสามารถเลือกใช้สิทธิ ที่บางเวลา $t_2 \le T$ ที่ทำให้ผล ผลประโยชน์เป็นบวก โดยผู้ออกจะต้องจ่ายผลประโยชน์เท่ากับ $S(t_2)-K$ บาท แต่หากไม่มีเวลาใช้สิทธิที่ทำให้ผลประโยชน์เป็นบวก ผู้ถือจะใช้สิทธิที่เวลา T โดยผู้ออกจะจ่ายผลประโยชน์เท่ากับ 0 บาท ขายหุ้น 1 หน่วย เวลา t_2 รับเงิน $S(t_2)$ บาท แต่หากไม่มีเวลาดังกล่าวขายที่ เวลา T รับเงิน $S(T)$ บาท

ที่เวลา T รับเงิน $\left(C^A + Ke^{-\delta T} - P^A - S(0)\right)e^{\delta T}$ บาท จากการลงทุนในตราสารหนี้ เราพิจารณาค่าของ $V(T)$ ตามกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าไม่มี t_2 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T)=\left(C^A+Ke^{-\delta T}-P^A-S(0)\right)e^{\delta T}+\left(S(t_2)\ \text{or}\ S(T)\right)+\left(K-S(t_1)\ \text{or}\ 0\right)>0$$

กรณีที่ 2 ถ้าไม่มี t_1 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T)=\left(C^A+Ke^{-\delta T}-P^A-S(0)\right)e^{\delta T}+\left(S(T)\ \text{or}\ S(t_2)\right)-\left(S(t_2)-K\ \text{or}\ 0\right)>0$$

กรณีที่ 3 ถ้ามีทั้ง t_1 และ t_2 ที่มีสมบัติดังกล่าว จะได้

$$V(T)=\left(C^A+Ke^{-\delta T}-P^A-S(0)\right)e^{\delta T}+S(t_2)+\left(K-S(t_1)\right)-\left(S(t_2)-K\right)>0$$

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า $V(T)>0$ ซึ่งขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร

จึงได้สรุปว่า $C^A-P^A\le S(0)-Ke^{-\delta T}$

ข้อ 2) พิสูจน์ได้ทำนองเดียวกันซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน □

บทแทรก 5.2 สำหรับหุ้นที่มีการจ่ายปันผลมีมูลค่าปัจจุบันเป็น div_0 จะได้ว่า ราคาของออปชัน C^A และ P^A จะสอดคล้องตามอสมการ

$$S(0)-\text{div}_0-K\le C^A-P^A\le S(0)-Ke^{-\delta T} \tag{5.2}$$

และยิ่งไปกว่านั้น สำหรับหุ้นซึ่งมีการจ่ายปันผลด้วยอัตราทบต้นต่อเนื่อง δ_{div} จะได้ว่า

$$S(0)e^{-\delta_{\text{div}}T}-K\le C^A-P^A\le S(0)-Ke^{-\delta T} \tag{5.3}$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 5.13 โดยการพิจารณา $S(0)$ เป็น $S(0)-\text{div}_0$ □

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนดให้อเมริกันออปชันและยูโรเปียนออปชันเป็นตราสารภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน (สินค้าอ้างอิง S ราคาใช้สิทธิ K และระยะเวลาครบกำหนด T) จะได้ว่า

$$C^E\le C^A \ \text{และ}\ P^E\le P^A \tag{5.4}$$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะ $C^E\le C^A$ สำหรับการแสดงว่า $P^E\le P^A$ ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E>C^A$

ที่เวลา $t=0$

- ออกยูโรเปียนคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^E บาท
- ซื้ออเมริกันคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน C^A บาท

- นำเงินที่เหลือ $C^E - C^A > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับอเมริกันคอลออปชัน 1 สัญญา นักลงทุนสามารถปิดสถานะได้เมื่อมี $t_1 \le T$ ที่ทำให้ $S(t_1) > K$ จะได้ผลประโยชน์ เท่ากับ $S(t_1) - K$ บาท หากไม่มี t_1 ดังกล่าว ปิดสถานะที่ $t = T$ ได้ผลประโยชน์ 0 บาท

ที่เวลา $t = T$

- รับเงิน $[S(t_1) - K]^+$ บาท จากการปิดสถานะอเมริกันคอลออปชัน
- รับเงิน $\left(C^E - C^A\right)e^{\delta T}$ บาทจากการลงทุนในตราสารหนี้
- ปิดสถานะยูโรเปียนคอลออปชัน จ่ายผลประโยชน์ $[S(T) - K]^+$ บาท

จะได้ $V(T) = [S(t_1) - K]^+ + \left(C^E - C^A\right)e^{\delta T} + [S(T) - K]^+ > 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับ หลักการปราศจากการค้ากำไร ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $C^E \le C^A$ □

ทฤษฎีบท 5.3 ราคาของอเมริกันคอลออปชันและยูโรเปียนคอลออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกัน จะเท่ากันเมื่อเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน

พิสูจน์ สมมติว่าเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน จากทฤษฎีบท 5.15 เราได้ว่า $C^E \le C^A$ เหลือเพียงแต่แสดงว่า $C^E \ge C^A$ สมมติในทางตรงกันข้ามว่า $C^E < C^A$

ที่เวลา $t = 0$

- ออกสัญญาอเมริกันคอลออปชันเพื่อขาย 1 สัญญา รับเงิน C^A บาท
- ซื้อยูโรเปียนคอลออปชัน 1 สัญญา จ่ายเงิน C^E บาท
- นำเงินที่เหลือ $C^A - C^E > 0$ ไปลงทุนในตราสารหนี้อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

จะได้ $V(0) = 0$

เนื่องจากเวลาใช้สิทธิกับเวลาครบกำหนดเป็นเวลาเดียวกัน ผู้ถืออเมริกันคอลออปชันจะใช้สิทธิที่เวลา $t = T$

ที่เวลา $t = T$

- ปิดสถานะยูโรเปียนคอลออปชัน รับผลประโยชน์ $[S(T) - K]^+$ บาท

- รับเงิน $\left(C^A - C^E\right)e^{\delta T}$ บาทจากการลงทุนในตราสารหนี้

- ปิดสถานะอเมริกันคอลออปชัน จ่ายผลประโยชน์ $[S(T)-K]^+$ บาท

จะได้ $V(T)=\left(C^A - C^E\right)e^{\delta T} > 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $C^A \le C^E$ □

ทฤษฎีบท 5.4 (ขอบเขตราคา) ราคาของอเมริกันคอลออปชันและอเมริกันพุทคอลออปชันของหุ้นอ้างอิง S ไม่มีการจ่ายปันผล มีราคาใช้สิทธิ K และเวลาครบกำหนด T เหมือนกัน สอดคล้องดังอสมการต่อไปนี้

$$\left[S(0)-Ke^{-\delta T}\right]^+ \le C^A < S(0) \tag{5.5}$$

และ $$\left[e^{-\delta T}K - S(0)\right]^+ \le P^A < K \tag{5.6}$$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า หุ้นมีการจ่ายปันผล จะได้ว่า

$$\max\left\{0, S(0)-K,\ S(0)-\mathrm{div}_0 - Ke^{-\delta T}\right\} \le C^A < S(0) \tag{5.7}$$

และ $$\max\left\{0, -S(0)+K,\ -S(0)+\mathrm{div}_0 + Ke^{-\delta T}\right\} \le P^A < K \tag{5.8}$$

ทฤษฎีบท 5.5 (ราคาใช้สิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^A(K)$ และ เป็นราคาของอเมริกันคอลออปชันและอเมริกันพุทออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรราคาใช้สิทธิ K ถ้า K_1 และ K_2 เป็นราคาใช้สิทธิของออปชันที่เวลา T ที่ซึ่ง $K_1 < K_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^A(K_1) > C^A(K_2) \tag{5.9}$$

และ $$P^A(K_1) < P^A(K_2) \tag{5.10}$$

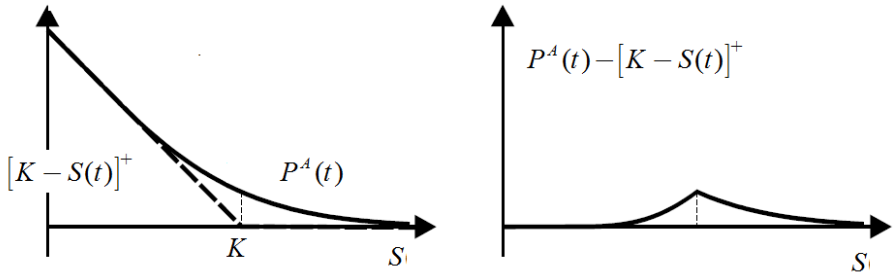
ทฤษฎีบท 5.6 (จำนวนหุ้นในสิทธิแปรเปลี่ยน) กำหนดให้ $C^A(x)$ และ $P^A(x)$ เป็นราคาของอเมริกันคอลออปชันและอเมริกันพุทออปชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรจำนวนหน่วยที่ตราสารให้สิทธิซื้อ (ขาย) x หน่วย โดยมีราคาใช้สิทธิสำหรับจำนวนหน่วยดังกล่าวเท่ากับ K เวลาใช้สิทธิ T ถ้า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนหุ้นที่ออปชันให้สิทธิซื้อ (ขาย) ที่ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว จะได้ว่า

$$C^A(x_1) < C^A(x_2) \tag{5.11}$$

และ $$P^A(x_1) > P^A(x_2) \tag{5.12}$$

บทนิยาม 5.7 กำหนดให้ K เป็นราคาใช้สิทธิของออปชัน *มูลค่าตามเวลา* (the time value) ของอเมริกันออปชัน นิยาม ดังนี้

- มูลค่าตามเวลาสำหรับคอลออปชัน เท่ากับ $C^A(t)-[S(t)-K]^+$
- มูลค่าตามเวลาสำหรับพุทออปชัน เท่ากับ $P^A(t)-[K-S(t)]^+$



รูปที่ 5.8 *มูลค่าตามเวลาของอเมริกันพุทออปชันรูปขวามือเปรียบเทียบราคาของพุทคอปชั่นกับมูลค่าแฝง*

ตัวอย่างที่ 5.1 กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วยโดยที่อเมริกันออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
115	18.50	3.25
125	12.75	6.50
135	7.25	10.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

วิธีทำ จากนิยามของมูลค่าแฝงของออปชัน คือ

$[S(t)-K]^+$ สำหรับคอลออปชัน และ $[K-S(t)]^+$ สำหรับพุทออปชัน

และ มูลค่าตามเวลาของออปชันตามบทนิยาม 5.20 คือ

$C^A(t)-[S(t)-K]^+$ สำหรับคอลออปชัน และ $P^A(t)-[K-S(t)]^+$ สำหรับพุทออปชัน

โดยค่าต่างๆที่คำนวณได้ แสดงในตารางต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)		มูลค่าแฝง		มูลค่าตามเวลา	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน	คอลออปชัน	พุทออปชัน	คอลออปชัน	พุทออปชัน
115	18.50	3.25	10.50	0	8	3.25
125	12.75	6.50	0.50	0	12.25	6.50
135	7.25	10.25	0	9.5	7.25	0.75

□

5.2 การกำหนดราคาอเมริกันออปชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาอเมริกันออปชันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค N-คาบเวลา โดยนิยามของอเมริกันออปชัน เราทราบว่านักลงทุนสามารถใช้สิทธิได้ทุกๆ จุดเวลา n ซึ่ง $0 \le n \le N$ โดยมีผลประโยชน์ $f(S(n))$ ในที่นี้จะแทนราคาอเมริกันออปชันที่เวลา n ด้วยสัญลักษณ์ $D^A(n)$

พิจารณาแบบจำลอง 2 คาบเวลา จะได้ว่านักลงทุนสามารถเลือกใช้สิทธิเพื่อให้เกิดผลประโยชน์ได้ 2 จุดเวลา คือ ที่เวลา $t=1$ โดยมีผลประโยชน์ $f(S(1))$ และเวลาครบกำหนด ($t=2$) โดยมูลค่าของออปชัน ณ เวลาครบกำหนด คือ $D^A(2)=f(S(2))$

เมื่อ $$S(2)=\begin{cases}(1+u)^2 S(0) & ;\text{ probability } p^2\\ (1+u)(1+d)S(0); & \text{probability } 2p(1-p)\\ (1+d)^2 S(0) & ;\text{ probability } (1-p)^2\end{cases}$$

ที่เวลา $t=1$ ผู้ถือออปชันสามารถเลือกใช้สิทธิได้ทันทีซึ่งจะได้รับผลประโยชน์ $f(S(1))$ บาท หรือรอจนกว่าจะถึงเวลา $t=2$ ซึ่งจะได้รับผลประโยชน์ $f(S(2))$ เนื่องจากหากผู้ถือออปชันรอจนถึงเวลา $t=2$ แล้วราคาอเมริกันออปชันที่เวลา $t=1$ จะมีค่าเท่ากับ ราคาของยูโรเปียนออปชัน ซึ่งราคาออปชันที่เวลา $t=1$ คือ

$$(1+r)^{-1}E^*\left[f(S(2))\right]=(1+r)^{-1}\left[p^* f\left((1+u)S(1)\right)+(1-p^*)f\left((1+d)S(1)\right)\right] \quad (5.13)$$

ดังนั้น ทำให้ได้ว่าราคาของอเมริกันออปชันที่ $t=1$ จะต้องเท่ากับค่าสูงสุดระหว่าง ราคาใช้สิทธิทันที กับราคาจากการรอให้ถึงเวลา $t=2$ นั่นคือ

$$D^A(1)=\max\left\{f(S(1)),\,(1+r)^{-1}E^*\left[f(S(2))\right]\right\}=f_1(S(1)) \tag{5.14}$$

เมื่อ $f_1(x)=\max\left\{f(x),\,(1+r)^{-1}\left[p^*f\left((1+u)x\right)+(1-p^*)f\left((1+d)x\right)\right]\right\}$

พิจารณาในทำนองเดียวกัน จะได้ ว่าราคาของอเมริกันออปชันที่ $t=0$ จะต้องเท่ากับค่าสูงสุดระหว่าง ราคาใช้สิทธิทันที กับราคาจากการรอให้ถึงเวลา $t=1$ นั่นคือ

$$D^A(0)=\max\left\{f(S(0)),(1+r)^{-1}\left[p^*f_1\left((1+u)S(0)\right)+(1-p^*)f_1\left((1+d)S(0)\right)\right]\right\} \tag{5.15}$$

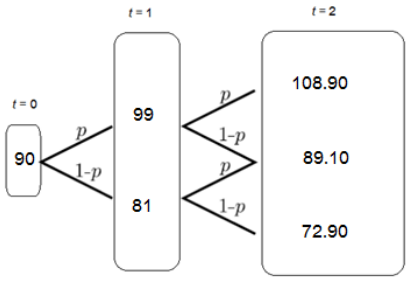
สำหรับการกำหนดราคาอเมริกันออปชันด้วยแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค n คาบเวลา สามารถทำได้ในลักษณะเดียวกันโดยการพิจารณาเวลาไปข้างหลังซึ่งจะได้ลำดับของ $D^N(n)$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
D^A(N)&=f(S(N))\\
D^A(N-1)&=\max\left\{f(S(N-1)),(1+r)^{-1}\left[p^*f\left((1+u)S(N-1)\right)+(1-p^*)f\left((1+d)S(N-1)\right)\right]\right\}\\
&\equiv f_{N-1}(S(N-1))\\
D^A(N-2)&=\max\left\{f(S(N-2)),(1+r)^{-1}\left[p^*f_{N-1}\left((1+u)S(N-2)\right)+(1-p^*)f_{N-1}\left((1+d)S(N-2)\right)\right]\right\}\\
&\equiv f_{N-2}(S(N-2))\\
&\vdots\\
D^A(1)&=\max\left\{f(S(1)),(1+r)^{-1}\left[p^*f_2\left((1+u)S(1)\right)+(1-p^*)f_2\left((1+d)S(1)\right)\right]\right\}\\
&\equiv f_1(S(1))\\
D^A(0)&=\max\left\{f(S(0)),(1+r)^{-1}\left[p^*f_1\left((1+u)S(0)\right)+(1-p^*)f_1\left((1+d)S(0)\right)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

ตัวอย่างที่ 5.2 กำหนดอเมริกันพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน ($t=2$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา $K(n)=\begin{cases}0.1\ ;\uparrow\\-0.1\ ;\downarrow\end{cases}$ และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้เท่ากับ 0.20 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน

จงคำนวณราคาของพุทออปชัน $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหา $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ซึ่งต้นไม้แสดงราคาหุ้นอ้างอิง $S(t), t = 0,1,2$ เป็นดังนี้



ในที่นี้ $r = 0.20/4 = 0.05$ ต่อคาบเวลา และคำนวณความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง $p^* = \dfrac{0.05+0.1}{0.1+0.1} = 0.75$ เราจะคำนวณ $P^A(0)$

จาก (5.54) โดยการสร้างลำดับราคาของพุทออปชัน ดังนี้

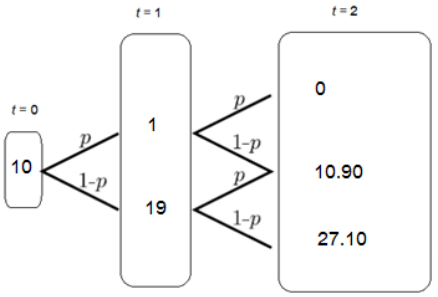
$$P^A(2) = [100 - S(2)]^+$$

$$P^A(1) = \max\left\{[100-S(1)]^+, (1+r)^{-1}\left[p^*[100-(1+u)S(1)]^+ + (1-p^*)[100-(1+d)S(1)]^+\right]\right\}$$

$$\equiv f_1(S(1))$$

$$P^A(0) = \max\left\{f(S(0)), (1+r)^{-1}\left[p^* f_1\left((1+u)S(0)\right) + (1-p^*) f_1\left((1+d)S(0)\right)\right]\right\}$$

ต่อไปคำนวณค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้ คำนวณมูลค่าแฝง $[100-S(t)]^+, \ t = 0,1,2$ ซึ่งแสดงได้ด้วยต้นไม้ดังนี้



ต่อไปคำนวณ

$$(1.05^{-1})\left(0.75[100-1.1S(1)]^+ + 0.25[100-0.9S(1)]^+\right)$$

$$= (1.05^{-1})\left(0.75\left[100-\begin{Bmatrix}108.9\\89.1\end{Bmatrix}^+ + 0.25\left[100-\begin{Bmatrix}89.1\\72.9\end{Bmatrix}^+\right.\right.$$

$$= (1.05^{-1})\left(0.75\begin{Bmatrix}0\\10.9\end{Bmatrix} + 0.25\begin{Bmatrix}10.9\\27.1\end{Bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix}2.5952\\14.2381\end{Bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดให้

$$f_1(x) = \max\left\{[100-x]^+, (1.05^{-1})\left[0.75[100-1.1x]^+ + 0.25[100-0.9x]^+\right]\right\}$$

จะได้ $$f_1(S(1)) = \max\left\{[100-S(1)]^+, (1.05^{-1})\left[0.75[100-1.1S(1)]^+ + 0.25[100-0.9S(1)]^+\right]\right\}$$

$$= \max\left\{\begin{Bmatrix}1\\19\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}2.5952\\14.2381\end{Bmatrix}\right\} = \begin{Bmatrix}2.5952\\19\end{Bmatrix},$$

ดังนั้น จะได้ลำดับของราคาพุทออปชันได้ดังนี้

$$P^A(2) = [100-S(2)]^+ = \begin{cases}0 & ;\uparrow\uparrow\\ 10.9 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow\\ 27.1 & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$P^A(1) = f_1(S(1)) = \begin{Bmatrix}2.5952\\19\end{Bmatrix}$$

$$P^A(0) = \max\left\{10,\ (1.05)^{-1}\left(0.75(2.5952)+0.25(19)\right)\right\} = \max\{10,\ 6.3775\} = 10$$

นั่นคือ ราคาของพุทออปชัน $P^A(0) = 10$ บาท

ตารางแสดงการคำนวณค่าพรีเมียมของพุทออปชัน (หุ้นไม่มีการจ่ายปันผล) โดยใช้โปรแกรม excel

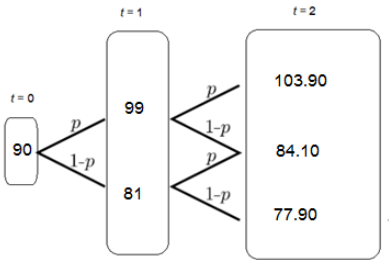
			p*	0.75				
			1-p*	0.25				
			S(0)	S(1)	S(2)			
			90	99	108.9			
				81	89.1			
					72.9			
			[K-S(0)]+	[K-S(1)]+	[K-S(2)]+			
			10.00	1.00	0.00			
				19.00	10.90			
					27.10			
			P(2)	P(1)	P(0)			
			0.0000	2.5952	10.0000			
			10.9000	19.0000				
			27.1000					
P(2)=	[K-S(2)]+							
P(1)=	max{[K-S(1)]+,(1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(1))+(1-p*)(K-0.9S(1)))}							
P(0)=	max{[K-S(0)]+,(1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(0))+(1-p*)(K-0.9S(0)))}							

□

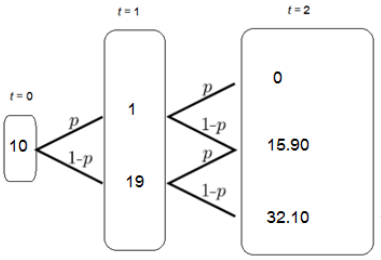
สำหรับในกรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผลราคาที่นำมาคำนวณผลประโยชน์จะต้องเป็นราคาที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว (ex-dividend stock price) ซึ่งการคำนวณราคาของอเมริกันออปชันสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.3 จากตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณราคาของอเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$ ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 5 บาทที่เวลา $t=2$

วิธีทำ จากโจทย์ต้องการหา $P^A(0)$ โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา โดยต้นไม้ราคาหุ้นอ้างอิงที่หักออกด้วยเงินปันผลเป็นดังนี้



เราสามารถคำนวณราคา $P^A(0)$ ได้เช่นเดียวกับกรณีที่หุ้นอ้างอิงไม่มีการจ่ายเงินปันผล โดยเริ่มจากคำนวณมูลค่าแฝงของพุทออปชัน ได้ดังนี้



ต่อไปคำนวณ

$$(1.05^{-1})\left(0.75[100-1.1S(1)]^{+}+0.25[100-0.9S(1)]^{+}\right)$$

$$=(1.05^{-1})\left(0.75\begin{Bmatrix}0\\15.90\end{Bmatrix}+0.25\begin{Bmatrix}15.90\\32.10\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}(1.05^{-1})(0.75(0)+0.25(15.90))\\(1.05^{-1})(0.75(15.90)+0.25(32.10))\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3.7857\\19\end{Bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกกำหนดให้

$$f_1(x)=\max\left\{[100-x]^{+},(1.05^{-1})\left[0.75[100-1.1x]^{+}+0.25[100-0.9x]^{+}\right]\right\}$$

จะได้ $f_1(S(1))=\max\left\{[100-S(1)]^{+},(1.05^{-1})\left[0.75[100-1.1S(1)]^{+}+0.25[100-0.9S(1)]^{+}\right]\right\}$

$$=\max\left\{\begin{Bmatrix}1\\19\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}3.7857\\19\end{Bmatrix}\right\}=\begin{Bmatrix}3.7857\\19\end{Bmatrix},$$

ดังนั้นจากลำดับของราคาพุทออปชันได้ดังนี้

$$P^A(2)=\left[100-S(2)\right]^+=\begin{cases}0 & ;\uparrow\uparrow\\ 15.9 & ;\uparrow\downarrow \text{ or } \downarrow\uparrow\\ 32.1 & ;\downarrow\downarrow\end{cases}$$

$$P^A(1)=f_1(S(1))=\begin{cases}3.7857\\ 19\end{cases}$$

$$P^A(0)=\max\left\{10,\ (1.05)^{-1}\left(0.75(3.7857)+0.25(19)\right)\right\}=\max\left\{10,\ 7.2279\right\}=10$$

นั่นคือ ราคาของพุทออปชัน $P^A(0)=10$ บาท

ตารางการคำนวณค่าพรีเมียมของพุทออปชัน (หุ้นมีการจ่ายปันผล) โดยใช้โปรแกรม excel

		p*	0.75			
		1-p*	0.25			
		S(0)	S(1)	S(2)-div		
		90	99	103.9		
			81	84.1		
				67.9		
		[K-S(0)]+	[K-S(1)]+	[K-S(2)]+		
		10.00	1.00	0.00		
			19.00	15.90		
				32.10		
		P(2)	P(1)	P(0)		
		0.0000	3.7857	10.0000		
		15.9000	19.0000			
		32.1000				
P(2)=	[K-(S(2)-div)]+					
P(1)=	max{[K-S(1)]+,(1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(1))+(1-p*)(K-0.9S(1)))}					
P(0)=	max{[K-S(0)]+,(1+r)^(-1)(p*(K-1.1S(0))+(1-p*)(K-0.9S(0)))}					

□

บทสรุปท้ายบทที่ 5

บทที่ 5 ได้กล่าวถึงการกำหนดราคา *อเมริกันออปชัน* ซึ่งเป็นตราสารอนุพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษคือ ผู้ถือสามารถใช้สิทธิได้ ทุกช่วงเวลา จนถึงวันครบกำหนดของสัญญา โดยอิงอยู่บนหลักการสำคัญของทฤษฎีการเงินสมัยใหม่ คือ หลักการปราศจากการค้ากำไร (No-Arbitrage Principle) และการประเมินค่าตามความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Valuation) ซึ่งมีรากฐานทางคณิตศาสตร์จาก สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property)

ความยืดหยุ่นของอเมริกันออปชันทำให้มีมูลค่าที่ซับซ้อนกว่า ยูโรเปียนออปชัน ซึ่งใช้สิทธิได้เฉพาะวันหมดอายุ การกำหนดราคาจึงไม่สามารถใช้สูตรปิด (closed-form solution) อย่างในกรณีของแบบจำลองแบล็กโชลส์ได้โดยตรง แต่ต้องอาศัย แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค (Binomial Tree

Model) หรือแบบจำลองเชิงเวลาอื่น ๆ เช่น Trinomial Tree หรือ Finite Difference Method ที่สามารถคำนวณแบบ ย้อนกลับ (backward induction) เพื่อเปรียบเทียบ “มูลค่าการใช้สิทธิทันที” กับ “มูลค่าการถือสิทธิต่อไป” ณ ทุกจุดเวลา

ในการใช้งานจริง แบบจำลองเหล่านี้มีบทบาทสำคัญในตลาดการเงินที่มีการซื้อขายอเมริกันออปชันอย่างกว้างขวาง เช่น ตลาดหุ้นสหรัฐอเมริกา (CBOE: Chicago Board Options Exchange) และตลาดตราสารอนุพันธ์ของ NYSE และ NASDAQ ซึ่งนักลงทุนสามารถใช้สิทธิคอลออปชันก่อนการจ่ายเงินปันผล หรือใช้พุทออปชันเพื่อบริหารความเสี่ยงในช่วงที่คาดว่าราคาหุ้นจะลดลง นอกจากนี้ นักลงทุนสถาบันยังใช้อเมริกันออปชันเป็นเครื่องมือในการสร้างกลยุทธ์การลงทุนเชิงป้องกันความเสี่ยง (hedging strategy) และเพิ่มความยืดหยุ่นในการบริหารพอร์ต

บทนี้ยังแสดงให้เห็นถึง อสมการสำคัญและทฤษฎีบท ที่ระบุขอบเขตราคา (bounds) ความสัมพันธ์กับยูโรเปียนออปชัน และผลกระทบของเงินปันผลต่อมูลค่าออปชัน ซึ่งล้วนมีความสำคัญทั้งในเชิงทฤษฎีและการตัดสินใจเชิงกลยุทธ์

โดยสรุป บทที่ 5 ไม่เพียงเสนอกรอบแนวคิดและเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์มูลค่าของอเมริกันออปชันอย่างเป็นระบบ แต่ยังชี้ให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้ที่ชัดเจนในตลาดการเงินจริง ซึ่งสามารถช่วยให้นักลงทุน นักวิเคราะห์ และผู้จัดการกองทุนสามารถ กำหนดกลยุทธ์การลงทุนที่เหมาะสม ประเมินความคุ้มค่าของออปชัน และบริหารความเสี่ยงได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

[1] Broadie, M., & Detemple, J. (1996). American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *Review of Financial Studies, 9*(4), 1211–1250. https://doi.org/10.1093/rfs/9.4.1211

[2] Bjork, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd ed.). Oxford University Press.

[3] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229–263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[4] Geske, R., & Johnson, H. E. (1984). The American put option valued analytically. *Journal of Finance, 39*(5), 1511–1524. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1984.tb04910.x

[5] Haug, E. G. (2007). *The complete guide to option pricing formulas* (2nd ed.). McGraw-Hill.

[6] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.

[7] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21621-2

[8] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*. Cambridge University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1) กำหนดให้ผู้ลงทุนซื้ออเมริกันคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ (strike price) เท่ากับ 145 บาท และมีอายุของสัญญา 6 เดือน โดยราคาซื้อออปชันเท่ากับ 15.50 บาท หากผู้ลงทุนใช้สิทธิซื้อหุ้นในบางช่วงเวลาก่อนครบกำหนดและได้รับกำไร 13 บาทจากการใช้สิทธิ จงคำนวณราคาหุ้นอ้างอิงในขณะที่ใช้สิทธิ และพิจารณาว่าการใช้สิทธิก่อนครบกำหนดให้ผลตอบแทนสูงกว่าการถือจนครบสัญญาหรือไม่ เมื่อกำหนดให้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 7% ต่อปี

2) นักลงทุนซื้ออเมริกันพุทออปชันของหุ้นบริษัท A โดยมีอายุสัญญา 3 เดือน ราคาใช้สิทธิ 110 บาท ราคาซื้อออปชัน ณ วันที่ 31 ตุลาคม พ.ศ. 2557 เท่ากับ 12.50 บาท และราคาหุ้นอ้างอิงในวันเดียวกันเท่ากับ 110 บาท จงวิเคราะห์ว่าราคาหุ้นควรลดลงมากน้อยเพียงใดภายในระยะเวลา 3 เดือน เพื่อให้นักลงทุนสามารถใช้สิทธิได้ทันทีที่ราคาหุ้นลดลงและไม่ขาดทุนจากการลงทุนในออปชัน โดยใช้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่อง 6.5% ต่อปี

3) กำหนดให้นักลงทุนซื้ออเมริกันพุทออปชันของหุ้นอ้างอิงบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิเท่ากับ 80 บาท และราคาซื้อออปชันเท่ากับ 10.25 บาท โดยอายุของสัญญาคือ 3 เดือน สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงในวันครบกำหนดอาจเป็นไปได้ 3 ค่า ได้แก่ 92, 80 หรือ 75 บาท โดยมีความน่าจะเป็นเท่ากัน 1/3 จงคำนวณค่าคาดหวังของกำไร (หรือขาดทุน) จากการถืออเมริกันพุทออปชันฉบับนี้ และพิจารณาว่าในกรณีใดควรใช้สิทธิก่อนครบสัญญา เมื่อใช้อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8% ต่อปี

4) กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่งมีราคาปัจจุบันเท่ากับ 130 บาทต่อหุ้น นักลงทุนกำลังพิจารณาซื้ออเมริกันคอลออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ (strike price) 120 บาท และมีอายุสัญญา 6 เดือน โดยมีราคาซื้อขายของคอลออปชันนี้เท่ากับ 25.50 บาท จงวิเคราะห์ว่าอเมริกันพุทออปชันที่มีราคาใช้สิทธิและอายุเท่ากันควรมีราคาประมาณเท่าใด เพื่อให้ไม่เกิดโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง

(arbitrage opportunity) และอธิบายว่าการเปิดโอกาสให้ใช้สิทธิได้ทุกเวลาก่อนครบกำหนดนั้นมีผลต่อราคาพุทออปชันอย่างไร เมื่ออัตราดอกเบี้ยเงินกู้คิดทบต้นทุกครึ่งปีที่อัตรา 8.5% ต่อปี

5) ผู้ส่งออกเสื้อผ้ายี่ห้อหนึ่งในประเทศไทยต้องการทำอเมริกันพุทออปชันกับสถาบันการเงิน เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนของเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยอัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบันอยู่ที่ 33.25 บาทต่อดอลลาร์ สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับการลงทุนในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลลาร์อยู่ที่ 2.5% และ 3.5% ต่อปีตามลำดับ จงหาราคาใช้สิทธิของอเมริกันพุทออปชัน และอเมริกันคอลออปชันที่ทำให้ราคาของคอลออปชันมากกว่าพุทออปชันหนึ่งบาท ณ เวลาปัจจุบัน และอภิปรายว่าการใช้สิทธิได้ก่อนครบกำหนดจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ส่งออกในสถานการณ์ใดบ้าง

6) นักลงทุนสังเกตเห็นว่าอเมริกันคอลออปชันและอเมริกันพุทออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และอายุสัญญา 9 เดือน กำลังซื้อขายอยู่ในตลาดที่ราคา 15.20 บาท และ 17.80 บาท ตามลำดับ ในขณะที่ราคาปัจจุบันของหุ้นคือ 105 บาท และอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ทบต้นต่อเนื่องคือ 6.7% ต่อปี จงวิเคราะห์ว่ามีโอกาสในการทำกำไรแบบปราศจากความเสี่ยงหรือไม่ หากมี ควรวางกลยุทธ์การลงทุนอย่างไรโดยคำนึงถึงความยืดหยุ่นของการใช้สิทธิในอเมริกันออปชัน และประเมินผลตอบแทนที่อาจเกิดขึ้น

7) กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงเริ่มต้น $S(0)=100$ บาท ซึ่งเท่ากับราคาใช้สิทธิ $K=100$ บาท อัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ $r=0.05$ ต่อปี และใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 4 คาบเวลา โดยกำหนดให้เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น $u=0.10$ และลดลง $d=-0.05$ จงคำนวณหาราคาของ อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$ ที่สามารถใช้สิทธิได้ทันทีหรือเมื่อครบกำหนด โดยพิจารณาว่าการใช้สิทธิทันทีให้ผลประโยชน์มากกว่าหรือไม่

8) สำหรับอเมริกันพุทออปชัน กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงปัจจุบัน $S(0)=100$ บาท ราคาใช้สิทธิ $K=110$ บาท อัตราการขึ้นของราคาหุ้น $u=0.2$ และอัตราการลดลง $d=-0.1$ โดยมีอัตรา

ดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง $r = 0.05$ และสมมติว่าการขายหุ้นในแต่ละครั้งต้องเสียค่านายหน้า 0.25% ของมูลค่าหุ้นที่ขาย จงคำนวณกำไรของผู้ถือ อเมริกันพุทออปชัน และวิเคราะห์ว่าควรใช้สิทธิทันทีหรอรอให้ครบกำหนด โดยเปรียบเทียบผลตอบแทนสุทธิหลังหักค่านายหน้า

9) สำหรับอเมริกันออปชัน กำหนดให้ราคาหุ้นอ้างอิงปัจจุบันและราคาใช้สิทธิเท่ากัน คือ $S(0) = K = 1$ บาท โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา และอัตราการขึ้นของราคาหุ้น $u = 0.15$ และอัตราการลดลง $d = -0.10$ อัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ 7.5% ต่อปี จงคำนวณมูลค่าของพอร์ตจำลองสำหรับอเมริกันคอลออปชันและอเมริกันพุทออปชัน และพิจารณาว่ามีจุดใดที่ควรใช้สิทธิก่อนครบกำหนด เพื่อให้ได้ผลประโยชน์สูงสุด

10) สมมติว่าอเมริกันออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่งมีราคาใช้สิทธิ $K = 110$ บาท โดยราคาหุ้นอ้างอิงในปัจจุบันคือ 100 บาท และมีการอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาต่อคาบเวลา $k(n)$, $n = 1, 2$ ตามค่าโดยที่ $k(n) = 0.1823$ เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น, $k(n) = -0.1054$ เมื่อราคาหุ้นลดลง และกำหนดอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่องคือ $r = 0.6$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุกเดือน จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา คำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

และพิจารณาว่าผู้ถือตราสารควรใช้สิทธิ ณ จุดเวลาใดเพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงสุด

11) สำหรับอเมริกันออปชันของหุ้นอ้างอิงที่มีราคาในปัจจุบันเท่ากับ $S(0) = 100$ บาท และราคาใช้สิทธิ $K = 100$ บาท โดยใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา กำหนดให้เมื่อราคาหุ้นเพิ่มขึ้น $u = 0.2$ และลดลง $d = -0.1$ อัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้ที่ปราศจากความเสี่ยงเท่ากับ $r = 0.08$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน จงคำนวณราคาของอเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$ และอเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$ และพิจารณาว่าการใช้สิทธิก่อนครบกำหนดในคาบเวลาใดจะให้ผลตอบแทนมากที่สุด

12) สมมติว่าอเมริกันออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ $K = 90$ บาท ราคาหุ้นอ้างอิงในปัจจุบัน $S(0) = 100$ บาท โดยราคาหุ้นเปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงตามอัตรา $u = 0.2, \quad d = -0.2$ อัตราผลตอบแทนจากตราสารหนี้ปลอดความเสี่ยงเท่ากับ $r = 0.08$ ต่อปี โดยคิดทบต้นทุกครึ่งปี และอายุของสัญญาคือ 6 เดือน

12.1) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 20 คาบเวลา (binomial tree) คำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

โดยใช้วิธี Backward Induction และพิจารณาการใช้สิทธิได้ทุกคาบเวลา

12.2) จงใช้สูตรของ Cox-Ross-Rubinstein (CRR model) สำหรับแบบจำลอง 20 คาบเวลา เพื่อคำนวณราคาอเมริกันคอลออปชันและพุทออปชัน โดยใช้พารามิเตอร์เดียวกับข้อ 12.1 และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับข้อ 12.1

12.3) กรณีที่หุ้นอ้างอิงมีการจ่ายปันผล 1 ครั้ง ที่ปลายเดือนที่ 6 (ช่วงเวลาหมดอายุของออปชัน) เป็นจำนวน 5.5 บาท จงคำนวณราคาของ

- อเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$
- อเมริกันพุทออปชัน $P^A(0)$

โดยปรับราคาใช้ในต้นไม้ (stock price tree) เป็นราคาหลังหักปันผล (ex-dividend price) และวิเคราะห์ผลของเงินปันผลต่อการตัดสินใจใช้สิทธิในแต่ละจุดเวลา

13) สำหรับอเมริกันออปชัน กำหนดให้หุ้นของบริษัทหนึ่ง มีราคาปัจจุบัน 125.50 บาทต่อหน่วยโดยที่อเมริกันออปชันของหุ้นดังกล่าวที่ราคาใช้สิทธิต่างๆมีราคาดังตาราง ต่อไปนี้

ราคาใช้สิทธิ(บาท)	ราคาออปชัน(บาท)	
	คอลออปชัน	พุทออปชัน
110	19.50	4.25
120	13.75	7.50
130	8.25	11.25

จงคำนวณมูลค่าแฝง และมูลค่าตามเวลา

14) กำหนดอเมริกันคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 100 บาท อายุของสัญญา 6 เดือน ($t=3$) สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 90 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา $k(n)=\begin{cases} 0.0953 & ;\uparrow \\ -0.1054 & ;\downarrow \end{cases}$ และอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ 0.20 ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน

14.1) จงคำนวณราคาของคอลออปชัน $C^A(0)$

14.2) จงคำนวณราคาของอเมริกันคอลออปชัน $C^A(0)$ ถ้าสมมติว่าหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 4.5 บาทที่เวลา $t=3$

15) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลาคำนวณราคาของคอลยูโรเปียนออปชันและคอลอเมริกันออปชันของหุ้นอ้างอิงของบริษัทหนึ่งซึ่งมีราคาใช้สิทธิ 100 บาทและมีอายุ 6 เดือนโดยสมมติว่า $S(0)=48$ บาท $u=0.15$, $d=-0.20$ และอัตราดอกเบี้ยจากการลงทุนในสินทรัพย์ที่ปราศจากความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง 7 % ต่อปี

16) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคายูโรเปียนคอลออปชันกับราคาอเมริกันคอลออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 20 บาท และมีอายุ 3 เดือน กำหนดให้ $u=0.15$ $d=-0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 12% ต่อปีทบต้นทุกเดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 18 บาท โดยหุ้นอ้างอิงมีการจ่ายเงินปันผล 1 ครั้ง 0.50 บาท ต่อหุ้น ณ ปลายเดือนที่ 3

17) กำหนดยูโรเปียนคอลออปชันของหุ้นบริษัทหนึ่ง มีราคาใช้สิทธิ 30 บาท อายุของสัญญา 3 เดือน สมมติว่าราคาปัจจุบันของหุ้นอ้างอิงเท่ากับ 32 บาท และอัตราผลตอบแทนของการลงทุนในตราสารหนี้ 0.3 ต่อปีทบต้นต่อเนื่องและอัตราผลตอบแทนลอการิทึมคาดหวัง $\mu=0.15$ สมมติว่าราคาหุ้นอ้างอิงมีค่าความผันผวน 20.35 % ต่อปี จงใช้สูตรของแบล็ก-โชลส์คำนวณหา $C^E(t)$ สำหรับ $t\in[0,0.25]$ เมื่อแบ่งช่วงเวลาออกเป็น 10 ช่องเท่าๆกัน โดยสมมติว่าราคาของหุ้นอ้างอิงที่เวลาต่างๆจากการจำลองได้ผลลัพธ์ดังนี้

t_i	0	0.025	0.050	0.075	0.100	0.125	0.150	0.175	0.200	0.225	0.250
S_i	32	32.20	31.34	30.41	29.10	31.01	31.89	32.08	33.08	34.08	33.58

18) จงใช้แบบจำลองต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา คำนวณและเปรียบเทียบราคายูโรเปียนคอลออปชัน กับราคาอเมริกันคอลออปชัน ที่มีราคาใช้สิทธิ 120 บาท และมีอายุ 6 เดือน โดยกำหนด $u = 0.2$ $d = -0.1$ อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 8 % ต่อปีทบต้นทุก 3 เดือน และ ราคาปัจจุบันเท่ากับ 100 บาท

บทที่ 6 แคลคูลัสสโตแคสติกและทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ

เนื้อหาประกอบด้วย

6.1 บทนิยามของแคลคูลัสสโตแคสติก

6.2 สมบัติของแคลคูลัสสโตแคสติก

6.3 สมบัติมาร์ทิงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์

6.4 ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ

บทนำ

ในระบบการเงินสมัยใหม่ที่เผชิญกับความผันผวนและความไม่แน่นอนในระดับสูง การประเมินมูลค่าทรัพย์สินทางการเงินและการวิเคราะห์ความเสี่ยงจำเป็นต้องใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สามารถรองรับพฤติกรรมแบบสุ่มต่อเนื่องได้อย่างมีประสิทธิภาพ แนวคิดแคลคูลัสดั้งเดิมซึ่งตั้งอยู่บนสมมติฐานของการเปลี่ยนแปลงที่ราบเรียบและสามารถหาอนุพันธ์ได้ในความหมายคลาสสิก ไม่เพียงพอในการวิเคราะห์การเคลื่อนไหวของราคาทรัพย์สินที่มีลักษณะ “ไม่สามารถพยากรณ์ได้อย่างสมบูรณ์” ซึ่งเป็นธรรมชาติของข้อมูลทางการเงินในโลกแห่งความเป็นจริง

แคลคูลัสสโตแคสติก (Stochastic Calculus) จึงได้รับการพัฒนาขึ้นมาเพื่อรองรับการวิเคราะห์กระบวนการสุ่ม โดยเฉพาะในกรณีของการเคลื่อนไหวแบบบราวเนียน (Brownian Motion) ซึ่งพบได้บ่อยในการจำลองราคาหลักทรัพย์ อัตราดอกเบี้ย และดัชนีทางเศรษฐกิจ แนวคิดหลักในแคลคูลัสสโตแคสติก คือ บทตั้งของอิโต้ (Ito’s Lemma) ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการหาผลต่างของฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับกระบวนการสุ่มแบบต่อเนื่อง และเป็นรากฐานของการพัฒนาแบบจำลองเชิงสโตแคสติก เช่น แบบจำลอง Black-Scholes (Black & Scholes, ค.ศ.1973; Merton, ค.ศ. 1973) และแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย Vasicek และ CIR (Vasicek, ค.ศ. 1977; Cox, Ingersoll & Ross, ค.ศ.1985)

นอกจากบทตั้งของอิโต้แล้ว บทนี้ยังนำเสนอ สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property) และ การจำแนกส่วนประกอบดูบ–เมเยอร์ (Doob–Meyer Decomposition) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็นที่สนับสนุนการวิเคราะห์พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มในบริบทของการเงิน โดยเฉพาะในการกำหนดราคาสินทรัพย์ในโลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral World) การวิเคราะห์ดังกล่าวช่วยให้สามารถแยกพฤติกรรมของราคาทรัพย์สินออกเป็นองค์ประกอบที่สามารถพยากรณ์ได้ (Bounded Variation Component) และองค์ประกอบที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้ (Martingale Component) ซึ่งมีบทบาทสำคัญต่อการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนไหวของราคาทรัพย์สินที่สอดคล้องกับข้อมูลในเชิงสถิติ (Shreve, ค.ศ. 2004)

อีกหนึ่งองค์ประกอบสำคัญที่กล่าวถึงในบทนี้ คือ ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ (Girsanov's Theorem) ซึ่งเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่อนุญาตให้เปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น (Change Of Measure) จากโลกแห่งความเสี่ยง (Real-World Measure) ไปสู่โลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (Risk-Neutral Measure) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์อย่างมีประสิทธิภาพในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ใช้จริง (Bjork, ค.ศ. 2009)

การประยุกต์ใช้แคลคูลัสสโตแคสติกปรากฏให้เห็นในหลายสาขา ไม่เพียงแต่ในด้านการเงินการธนาคารเท่านั้น แต่ยังครอบคลุมถึงการประกันภัย การวิเคราะห์ระบบควบคุมแบบสุ่ม และวิศวกรรมการเงินที่ต้องการจำลองพฤติกรรมของราคาสินทรัพย์ที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงตามเวลาอย่างไม่แน่นอน ตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์มูลค่าที่ความเสี่ยง (Value-At-Risk: VaR) การออกแบบอนุพันธ์ที่มีโครงสร้างซับซ้อน และการประเมินความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุน

กล่าวโดยสรุป บทที่ 6 มีวัตถุประสงค์เพื่อวางรากฐานทางทฤษฎีของแคลคูลัสสโตแคสติก พร้อมนำเสนอเครื่องมือสำคัญ เช่น บทตั้งของอิโต้ สมบัติมาร์ทิงเกล ทฤษฎีบทการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น และการจำแนกส่วนประกอบของกระบวนการสุ่ม ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่ความเข้าใจและความสามารถในการประยุกต์ใช้ในงานด้านการกำหนดราคาทางการเงินและการจัดการความเสี่ยงในบริบทที่มีความไม่แน่นอนอย่างแท้จริง

6.1 บทนิยามของแคลคูลัสสโตแคสติก

แคลคูลัสสโตแคสติก (stochastic calculus) เป็นหนึ่งในเครื่องมือหลักในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการพยากรณ์และจำลองความเสี่ยงทางการเงิน ในบริบทที่กระบวนการสุ่มแตกต่างจากการเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์ในเวลาที่ต่อเนื่อง ซึ่งมีลักษณะพิเศษที่แตกต่างจากการวิเคราะห์ที่มีอยู่ ส่วนหนึ่งเนื่องจากความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนของความแปรผันในกระบวนการสุ่ม และผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงเพียงครู่ขณะหรือการเปลี่ยนแปลงในระยะสั้นๆที่สะสมขึ้นเป็นผลที่มีนัยสำคัญในระยะยาว ซึ่งสามารถวัดได้โดยใช้เครื่องมือจากแคลคูลัสสโตแคสติก เช่น บทตั้งของอิโต้ (Ito's lemma) ทฤษฎีบทของกีร์ซานอฟ (Girsanov's theorem) และทฤษฎีการแทนของมาร์ทิงเกล (Martingale representation theorem) เป็นต้น

แนวคิดของแคลคูลัสสโตแคสติก หรือ แคลคูลัสอิโต้ (stochastic calculus or Ito 's calculus) มีแนวคิดที่คล้ายคลึงกับแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์และเชิงปริพันธ์ปกติ ในแคลคูลัสปกตินั้นสมมติว่า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค ณ เวลา t และอัตราการเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เวลา t ซึ่ง

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t, F(t)) \tag{6.1}$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น $$dF(t) = f(t, F(t))dt \tag{6.2}$$

ยิ่งไปกว่านั้น หากอินทิเกรตสมการ (6.2) ตั้งแต่ 0 ถึง t จะได้

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(s, F(s))ds \tag{6.3}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับแนวคิดของแคลคูลัสสโตแคสติกอาจเริ่มจากแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่องที่อธิบายการเคลื่อนที่ของราคาหุ้น $S(t)$ ซึ่งได้กล่าวถึงในบทที่ 2 คือ

$$\frac{dS(t)}{dt} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t) + \sigma S(t)\frac{dW(t)}{dt} \tag{6.4}$$

หรือเขียนอีกรูปหนึ่งได้เป็น $$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{6.5}$$

เมื่อ $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์ พิจารณาพจน์ของ $\frac{dW(t)}{dt}$ เราทราบว่า

$$dW = \lim_{N\to\infty}\left(w_N(t+\Delta t)-w_N(t)\right) = W(t+dt)-W(t) \tag{6.6}$$

เป็นส่วนเพิ่ม (increment) ของตัวแปรเชิงสุ่ม $W(t)$ ด้วยลักษณะการเป็นการเดินสุ่มของ $w_N(t)$ ทำให้ได้ว่า $\frac{dW(t)}{dt}$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุก ๆ $t \geq 0$

เพื่อความสะดวกให้ $W_t = W(t)$ สมมติให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ ถ้า $\frac{dW(t)}{dt}$ หาอนุพันธ์ได้โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{df}{dt} = f'(W_t)\cdot\frac{dW_t}{dt}$$

นั่นคือ

$$df = f'(W_t)dW_t \tag{6.7}$$

แต่ในความจริง $\frac{dW(t)}{dt}$ ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นการที่พยายามจะอธิบายสมบัติตามสมการ (6.7) ด้วยแนวคิดของอนุพันธ์ปกติจึงดูไม่สมเหตุสมผลอย่างยิ่ง อย่างไรก็ตามหากพิจารณาการกระจายเทย์เลอร์ของ f จะได้ว่า

$$f(x+\triangle x)-f(x) = (\triangle x)f'(x)+\frac{(\triangle x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(\triangle x)^3}{3!}f'''(x)+\cdots \tag{6.8}$$

ดังนั้น สำหรับ $x = W_t$ และส่วนเพิ่ม $W(t+\Delta t)-W(t) \equiv \Delta W_t$ จะได้ว่า

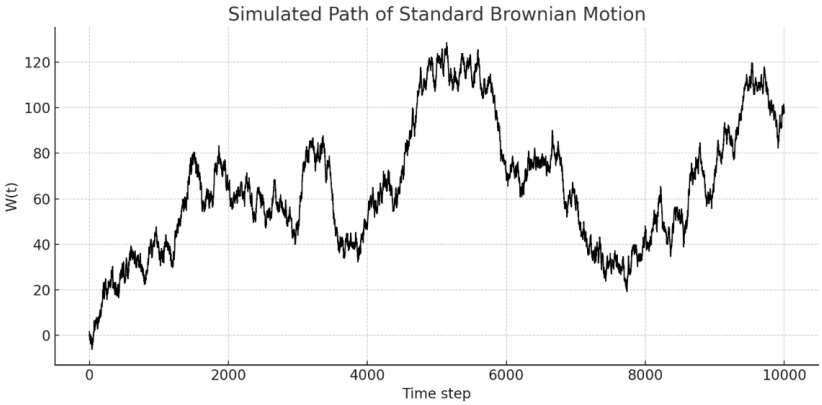
$$\triangle f = (\Delta W_t)f'(W_t)+\frac{(\Delta W_t)^2}{2!}f''(W_t)+\frac{(\Delta W_t)^3}{3!}f'''(W_t)+\cdots \tag{6.9}$$

และเนื่องจาก $(\Delta W_t)^2 = \triangle t$ และทำให้ได้

$$\Delta f = (\Delta W_t)f'(W_t)+\frac{(\Delta t)}{2!}f''(W_t)+o((\Delta t)) \tag{6.10}$$

เมื่อ $o((\Delta t))$ เป็นความคลาดเคลื่อนในเทอมของ $\triangle t$ ที่มีกำลังที่สูงกว่ากำลัง 1 ดังนั้นเมื่อ $\triangle t \to 0$ จะได้ว่า

$$df = f'(W_t)dW_t+\frac{1}{2}f''(W_t)dt \tag{6.11}$$



รูปที่ 6.1 *กราฟตัวแปรสุ่มบราวน์* $W(t)$

สมการ (6.12) เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “บทตั้งของอิโต้ (Ito’s lemma)” ซึ่งเป็นสมการหลักในแคลคูลัสสโตแคสติกหรือ แคลคูลัสอิโต้ (Ito’s calculus) สำหรับโดยทั่วไป ถ้ากำหนดให้ $f(t,x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ (smooth function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ (infinitely diffirentiable function) สำหรับในแคลคูลัสปกติ เราได้ว่า

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx \tag{6.12}$$

แต่ในแคลคูลัสอิโต้ เราได้ว่า $df(t,W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dW_t)^2$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dW_t \quad (\because (dW_t)^2 = dt) \tag{6.13}$$

ทฤษฎีบทที่ 6.1 (Ito’s lemma) กำหนดให้ $f(t,x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ และกำหนดให้ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มซึ่ง $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ สำหรับกระบวนการสุ่มบราวน์ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ โดยที่ μ_t และ σ_t เป็นอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่เวลา $t \geq 0$ จะได้ว่า

$$df(t,X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t \tag{6.14}$$

พิสูจน์ โดยใช้สมการ (6.13) และ $(\triangle B_t)^2 = \triangle t$ จะได้

$$\Delta f(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta X_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta X_t)^2 + \cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(\triangle t) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mu_t(\Delta t) + \sigma_t(\Delta B_t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu_t(\Delta t) + \sigma_t(\Delta B_t)\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta B_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu_t^2 (dt)^2 + 2\mu_t\sigma_t(\Delta t)(\Delta B_t) + \sigma_t^2 (\Delta B_t)^2\right) + \cdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(\triangle t) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mu_t \Delta t + \sigma_t \Delta B_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu_t^2 (\triangle t)^2 + 2\mu_t\sigma_t(\triangle t)(\triangle B_t) + \sigma_t^2 (\triangle t)\right) + \cdots$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\triangle B_t) + o(\Delta t)$$

เมื่อ $o((\Delta t))$ เป็นความคลาดเคลื่อนในเทอมของ $\triangle t$ ที่มีกำลังที่สูงกว่ากำลัง 1

ดังนั้นเมื่อ $\triangle t \to 0$ จะได้ว่า

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \qquad \square$$

บทตั้งของอิโต้ถือเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์การเงินสามารถหาผลต่างเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันที่เป็นกระบวนการสโตแคสติก ช่วยให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่ากระบวนการสโตแคสติกหนึ่ง ๆ จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร นอกจากนี้บทตั้งของอิโต้ยังถูกนำไปใช้ในการสร้างและแก้สมการความแปรปรวนสำหรับตราสารการเงินที่สำคัญ ได้แก่ การแสดงว่าราคาตราสารทางการเงินเป็นกระบวนการสโตแคสติก และใช้ทฤษฎีบทนี้เพื่อหาสมการของการเปลี่ยนแปลงของราคา

บทนิยามที่ 6.2 กำหนดให้ $f(t,x)$ และ $g(t,x)$ เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรที่มีความเรียบ และกำหนดให้ $F(t,x)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่ง $dF = f(t,B_t)dt + g(t,B_t)dB_t$ จะเรียก $F(t,x)$ ว่า “ปริพันธ์สโคแคสติก” และเขียนแทนด้วย $F(t,B_t) = \int_0^t f(s,B_s)ds + \int_0^t g(s,B_s)dB_s$

ตัวอย่างที่ 6.1 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x) = x$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

เนื่องจาก $df(t,B_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}dB_t$ จะได้

$$df(t,B_t)=(0+0)\,dt+(1)\,dB_t=dB_t$$

เนื่องจาก $B_0=0$ ทำให้ได้ $\int_0^t dB_s=\int_0^t df(s,B_s)=[B_s]_0^t=B_t-B_0=B_t$ □

ตัวอย่างที่ 6.2 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t B_s dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x)=\frac{1}{2}x^2$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=1$

เนื่องจาก $df(t,B_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}dB_t$

จะได้ $df(t,B_t)=\left(0+\frac{1}{2}\right)dt+B_t dB_t=\frac{1}{2}dt+B_t dB_t$

$$\int_0^t df(s,B_s)=\int_0^t \frac{1}{2}ds+\int_0^t B_s dB_s$$

$$\left[\frac{1}{2}(B_s)^2\right]_0^t=\left[\frac{s}{2}\right]_0^t+\int_0^t B_s dB_s$$

$$\frac{1}{2}(B_t)^2-\frac{1}{2}(B_0)^2=\frac{t}{2}+\int_0^t B_s dB_s$$

เนื่องจาก $B_0=0$ ดังนั้น $\int_0^t B_s dB_s=\frac{1}{2}(B_t)^2-\frac{t}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 6.3 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int_0^t \mu ds+\int_0^t \sigma dB_s$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x)=\mu t+\sigma x$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t}=\mu$, $\frac{\partial f}{\partial x}=\sigma$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$

เนื่องจาก $df(t,B_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}dB_t$ จะได้

$$df(t,B_t)=(\mu+0)\,dt+\sigma dB_t=\mu dt+\sigma dB_t$$

เนื่องจาก $B_0=0$ ทำให้ได้

$$\int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s = \int_0^t df(s,B_s) = \left[f(s,B_s) \right]_0^t = \left[\mu s + \sigma B_s \right]_0^t = \mu t + \sigma B_t \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 6.4 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ

$$\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s$$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x) = e^{\mu t + \sigma x}$ จะได้ $\frac{\partial f}{\partial t} = \mu e^{\mu t + \sigma x}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \sigma e^{\mu t + \sigma x}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma x}$

เนื่องจาก $df(t,B_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$

จะได้ $df(t,B_t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu t + \sigma B_t} dt + \sigma e^{\mu t + \sigma B_t} dB_t$

$$\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s = \left[e^{\mu s + \sigma B_s} \right]_0^t = e^{\mu t + \sigma B_t} - e^{\sigma B_0}$$

เนื่องจาก $B_0 = 0$ จะได้ $\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s = e^{\mu t + \sigma B_t} - 1$ $\square$

6.2 สมบัติของแคลคูลัสสโตแคสติก

ในหัวข้อนี้ กล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของการวิเคราะห์และคำนวณในระบบที่มีความไม่แน่นอน โดยเฉพาะการจัดการกับสมการที่มีพจน์สุ่มเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งต่างจากแคลคูลัสทั่วไป การดำเนินการเชิงอนุพันธ์และอินทิกรัลในที่นี้ต้องอิงกับกฎเฉพาะ เช่น กฎของอิโต้ เพื่อรองรับพฤติกรรมของกระบวนการบราวน์และตัวแปรสุ่มอื่น ๆ ในตัวแบบทางคณิตศาสตร์และการเงิน

ทฤษฎีบทที่ 6.3 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และกำหนดให้ $g(t)$ เป็นฟังก์ชันไม่เชิงสุ่ม สมมติให้ $\{I_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มซึ่ง $dI_t = g(t)dB_t$ นั่นคือ $I_t = \int_0^t g(s)dB_s$ โดยที่ $I(0) = 0$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $t \geq 0$, ตัวแปรสุ่ม I_t มีการแจกแจงแบบปกติ (normal distribution)

บทนิยามที่ 6.4 กำหนดให้ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่ม จะเรียกกระบวนการสุ่ม $\{A_t\}_{t\geq 0}$ ว่า "กระบวนการสุ่มปรับตัวตาม (adapted process)" เทียบกับตัวแปรสุ่ม X_t เมื่อ A_t ตัวแปรสุ่มที่ขึ้นกับเพียง X_s สำหรับทุก ๆ $s \leq t$ เท่านั้น

กำหนดให้ $\{X_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่ม ตัวอย่างกระบวนการสุ่มปรับตัวตาม เช่น

1) $A_t = X_t$

2) $A_t = \min\{X_t, c\}$ สำหรับบางค่าคงที่ c

3) $A_t = \max_{0\leq t\leq T}\{X_t\}$

4) ถ้า τ เป็นเวลาการหยุด (stopping time) แล้ว $A_t = X_\tau$ กระบวนการสุ่มปรับตัวตาม

กระบวนการสุ่มปรับตัวตามนั้นใช้ในการอธิบายกระบวนการสุ่มที่ทุกตัวอย่างของการสังเกตในขั้นเวลา t สามารถคำนวณได้จากข้อมูลที่รู้มาก่อนหน้านี้ หรือที่เวลา t นั่นเอง กระบวนการปรับตัวตามมีความสำคัญในทฤษฎีความน่าจะเป็นและมีการนำไปใช้ในหลายสาขา รวมถึงทฤษฎีควบคุม ทฤษฎีความน่าจะเป็น และคณิตศาสตร์การเงิน สำหรับในคณิตศาสตร์การเงิน กระบวนการปรับตัวตามองค์ประกอบที่สำคัญในตัวแบบต่างๆ เช่น การกำหนดราคาหุ้น (model of a stock price) ซึ่งระบุว่าราคาของหุ้นเป็นฟังก์ชันของข้อมูลที่มีในการกรอง (filter) นั่นคือ ราคาหุ้นไม่สามารถข้ามข้อมูลที่มีอยู่ในการกรอง สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale)เป็นตัวอย่างของกระบวนการปรับตัวตามในการสังเกตและการพยากรณ์ที่ไม่แน่นอน ในทฤษฎีการหยุดที่เลือกได้ (optional stopping theorem : ost) ซึ่งเป็นทฤษฎีทางความน่าจะเป็นที่ใช้ในการวิเคราะห์ Martingales และขั้นตอนสุ่มที่สามารถหยุดได้ ทฤษฎีนี้ได้รับการสร้างขึ้นเพื่อตอบคำถามว่า "ในกรณีที่มีการสุ่มการหยุด (random stopping time) ของการดำเนินการค่าคาดหมายที่ได้จากการหยุดนี้คืออะไร" ซึ่งมีความสำคัญเฉพาะเมื่อเราพิจารณามาร์ทิงเกลที่เราสามารถหยุดการดำเนินการได้ตามความต้องการ ทฤษฎีนี้มีผลในการวิเคราะห์ประสิทธิภาพของสถานการณ์ที่สามารถสุ่มการหยุดได้ เช่น การเล่นพนัน คณิตศาสตร์การเงิน เป็นต้น ซึ่งมีประโยชน์ในการให้ความเข้าใจและพยากรณ์พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มต่าง ๆ

ทฤษฎีบทที่ 6.5 (Ito 's isometry) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และกำหนดให้ $\{A_t\}_{t\geq 0}$ กระบวนการสุ่มปรับตัวตามเทียบกับ B_t จะได้ว่า

$$E\left[\left(\int_0^t A_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (A_s)^2\, ds\right] \tag{6.15}$$

Ito's isometry มีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์การกระจายตัวของกระบวนการทางการเงินที่สะท้อนถึงการเปลี่ยนแปลงของราคาหลักทรัพย์ตามเวลา ซึ่งมักจะเป็นกระบวนการสุ่มที่คล้ายกับการเคลื่อนไหวของการเคลื่อนที่บราวน์ Ito's isometry ใช้ในการจำแนกฟังก์ชันของกระบวนการอิโต้ การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ และช่วยในการคำนวณความแปรปรวน (variance) ของกระบวนการอิโต้โดยจำแนกส่วนเป็นส่วนประกอบที่เป็นมาร์ทิงเกลและส่วนประกอบของการแปรผันจำกัด (bounded variation)

ตัวอย่างที่ 6.5 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E\left[\left(\int_0^t dB_s\right)^2\right]$

วิธีทำ <u>วิธีที่1)</u> วิธีโดยตรง จากตัวอย่างที่ 6.1 และ $E\left[(B_t)^2\right] = t$ เราได้ว่า

$$\int_0^t dB_s = B_t \Rightarrow \left(\int_0^t dB_s\right)^2 = (B_t)^2 \Rightarrow E\left[\left(\int_0^t dB_s\right)^2\right] = E\left[(B_t)^2\right] = t$$

<u>วิธีที่2)</u> วิธีใช้ Ito isometry เนื่องจาก $A_t = 1$ เป็นตัวแปรสุ่มปรับตัวตาม

ดังนั้น $E\left[\left(\int_0^t 1 dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (1)^2\, ds\right] = E\left[[s]_0^t\right] = E[t] = t$ □

ตัวอย่างที่ 6.6 กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E\left[\int_0^t (B_s)^2\, ds\right]$

วิธีทำ เนื่องจาก $A_t = B_s$ ตัวแปรสุ่มปรับตัวตาม โดย Ito isometry

$$E\left[\int_0^t (B_s)^2\, ds\right] = E\left[\left(\int_0^t (B_s) dB_s\right)^2\right]$$

และจากตัวอย่างที่ 6.2

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t)^2 - \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2 = \frac{1}{4}(B_t)^4 - \frac{1}{4}(B_t)^2 t + \frac{t^2}{4}$$

เนื่องจาก $E\left[(B_t)^2\right] = t$ ดังนั้น

$$E\left[\left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\frac{1}{4}(B_t)^4 - \frac{1}{2}(B_t)^2 t + \frac{t^2}{4}\right] = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4} = 0$$

ผลที่ตามมา คือ $E\left[\int_0^t (B_s)^2 ds\right] = 0$ □

6.3 สมบัติมาร์ทิงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์

ในหัวข้อนี้กล่าวถึงสมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale property) เป็นสมบัติทางสถิติที่บ่งบอกถึงความคาดหวังของตัวแปรสุ่มในอนาคตที่จะมีค่าเท่ากับค่าปัจจุบันของตัวแปรสุ่มนั้น โดยไม่สนใจค่าที่เกิดขึ้นในอดีต สมบัตินี้เป็นส่วนสำคัญในการคำนวณความน่าจะเป็นและการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์ ถัดไปจะกล่าวถึงการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ (Doob-Meyer decomposition) ซึ่งเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้กับสมบัติของฟังก์ชันมาร์ทิงเกลการจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์เป็นวิธีการจำแนกส่วนประกอบของมาร์ทิงเกลออกเป็นส่วนของ "การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ได้" (predictable change) และ "การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ไม่ได้" (unpredictable change) โดยที่การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ไม่ได้นี้มีคุณสมบัติมาร์ทิงเกล ตามทฤษฎีดูบ-เมเยอร์ ฟังก์ชันมาร์ทิงเกลสามารถแยกส่วนประกอบออกเป็น "พจน์ดริฟท์" (drift term) และ “พจน์รบกวน” (noise term) หรือบางทีเรียกว่า “พจน์การกระโดด” (jump term) โดยที่พจน์ดริฟท์คือส่วนหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามแนวโน้มหลักที่สามารถพยากรณ์ได้ เช่น การเติบโตเฉลี่ยของราคาสินทรัพย์เมื่อไม่มีปัจจัยสุ่มเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งสามารถคำนวณได้จากข้อมูลในอดีต ในขณะที่พจน์รบกวน คือส่วนหนึ่งของสมการที่เกิดจากความแปรปรวนแบบสุ่ม มักเกี่ยวข้องกับกระบวนการบราวน์ ใช้แทนความไม่แน่นอนหรือปัจจัยที่ไม่สามารถพยากรณ์ล่วงหน้าได้ในระบบ

การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการวิเคราะห์การเคลื่อนไหวของตัวแปรสุ่มที่มีสมบัติมาร์ทิงเกล พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูป

$$dX_t = \sigma_t dZ_t + \mu_t dt \tag{6.16}$$

โดยที่ μ_t และ σ_t เป็นอัตราดริฟท์และค่าความผันผวนที่เวลา $t \geq 0$

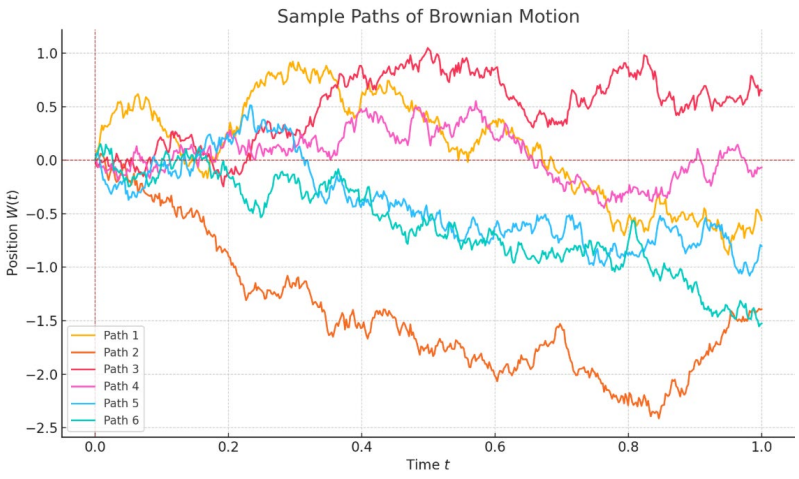
สมการ (6.16) สามารถเขียนในรูปปริพันธ์ที่สมนัยกัน คือ

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dZ_s + \int_0^t \mu_s ds \equiv X_0 + M_t + B_t \tag{6.17}$$

โดยที่ $M_t = \int_0^t \sigma_s dZ_s$ และ $B_t = \int_0^t \mu_s ds$ เป็นส่วนประกอบการจำแนกของ X_t ซึ่งเป็นที่รู้จักโดยทั่วไปในชื่อ “การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์” ในที่นี้ต้องการวิเคราะห์แต่ละส่วนประกอบของ X_t โดยจะแสดงว่า M_t มีสมบัติมาร์ทิงเกล นั่นคือ จะต้องแสดงว่า

$$E_t[M_T] = M_t \text{ สำหรับทุกๆ } T > t \tag{6.18}$$

เมื่อ E_t แทนตัวดำเนินการค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนดข้อมูลในอดีตจนถึงเวลา t



รูปที่ 6.2 *กราฟกระบวนการสุ่มบราวน์* X_t

กราฟด้านบนคือกราฟตัวอย่างของกระบวนการสุ่มบราวน์จำนวน 6 เส้นทาง ที่แสดงการเคลื่อนที่แบบสุ่มเมื่อเวลา t เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง 1 โดยแต่ละเส้นทางเริ่มต้นที่ตำแหน่ง 0 และกระจายตัวแบบสุ่มตามการแจกแจงปกติ

หมายเหตุ ตัวอย่างโค้ดในภาษาไพธอน สำหรับการวาดกราฟกระบวนการสุ่มบราวน์

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# ตั้งค่าเริ่มต้น
np.random.seed(0)  # สำหรับผลลัพธ์ที่สามารถทำซ้ำได้
T = 1.0             # เวลารวม
N = 500             # จำนวนขั้นเวลา
dt = T / N          # ขนาดช่วงเวลา
t = np.linspace(0, T, N)
# จำนวนเส้นทางสุ่ม
M = 6
# สร้างเส้นทางของกระบวนการบราวน์
W = np.zeros((M, N))
for i in range(M):
    W[i, 1:] = np.cumsum(np.sqrt(dt) * np.random.randn(N - 1))
# วาดกราฟ
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(M):
    plt.plot(t, W[i], label=f'Path {i+1}')
plt.title('Sample Paths of Brownian Motion')
plt.xlabel('Time $t$')
plt.ylabel('Position $W(t)$')
plt.grid(True)
plt.axhline(0, color='brown', linestyle='--', linewidth=0.7)
plt.axvline(0, color='brown', linestyle='--', linewidth=0.7)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

โดยสมบัติมาร์ทิงเกลสามารถแสดงให้เห็นได้จากการพิจารณา M_T ในรูป

$$M_T = M_t + \int_t^T \sigma_s dZ_s \quad \text{และ} \quad E_t\left[\int_t^T \sigma_s dZ_s\right] = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $E_t[M_T] = M_t$ สำหรับทุกๆ $T > t$

นอกจากนี้สำหรับ $t > s$ เนื่องจากความเป็นอิสระของ dZ_s ยังได้อีกว่า

$$E_t[\sigma_s dZ_s] = E_t\left[E_s[\sigma_s dZ_s]\right] = E_t\left[E_s[\sigma_s]E_s[dZ_s]\right] = 0 \tag{6.19}$$

ยิ่งไปกว่านั้น

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|\Delta M_j\right|^2 = \int_0^t \sigma_s^2 ds \tag{6.20}$$

ส่วนประกอบ M_t นี้เรียกว่า “ส่วนประกอบมาร์ทิงเกล (Martingale component)” ของกระบวนการอิโต้ X_t สำหรับส่วนประกอบ $B_t = \int_0^t \mu_s ds$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|\Delta B_j\right|^2 = 0 \text{ (vanishing quadratic variation)}$$

และ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left|\Delta B_j\right| = \int_0^t |\mu_s| ds \tag{6.21}$$

เมื่อ $\int_0^t |\mu_s| ds$ มีค่า ส่วนประกอบ B_t นี้เรียกว่า “ส่วนประกอบของการแปรผันจำกัด (bounded variation component)” ของกระบวนการอิโต้ X_t ซึ่งเป็นส่วนที่บ่งบอกว่า X_t มีการเปลี่ยนแปลงของค่าที่อยู่ภายในขอบ เขตที่กำหนดหรือไม่เกินค่าที่กำหนดไว้ โดยเป็นส่วนของกระบวนสุ่มที่สามารถพยากรณ์หรือพยากรณ์ได้จากข้อมูลที่มีอยู่แล้ว

ทฤษฎีบท 6.6 (มาร์ทิงเกลในรูปชี้กำลัง) กำหนดให้ μ_t และ σ_t เป็นฟังก์ชันอัตราดริฟท์และฟังก์ชันค่าความผันผวน ที่สอดคล้องกับกระบวนการเคลื่อนที่บราวน์ Z_t จะได้ว่ากระบวนการสโตแคสติก S_t สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dS_t = S_t\left(\sigma_t dZ_t + \mu_t dt\right) \tag{6.22}$$

ก็ต่อเมื่อ $$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_s dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_0^t \mu_s ds} \equiv S_0 A_t M_t \qquad (6.23)$$

เมื่อ $A_t = e^{\int_0^t \mu_s ds}$ และ $M_t = e^{\int_0^t \sigma_s dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}$

บทนิยามที่ 6.7 (เงื่อนไขของโนวิคอฟ : Novikov's Condition) กำหนดให้ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์มาตรฐาน (Standard Brownian Motion) บนช่วงเวลา $[0,T]$ และให้ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีการปรับตัวได้ (adapted process) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดค่าบน $[0,T]$ ถ้า

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s)ds\right)\right] < \infty,$$

เรากล่าวว่า $\theta(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของโนวิคอฟ (Novikov's condition)

ในกรณีที่เงื่อนไขข้างต้นเป็นจริง จะได้ว่า กระบวนการต่อไปนี้

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds\right)$$

เป็นมาร์ทิงเกลที่ไม่ลบ (non-negative martingale) บนช่วง $[0,T]$

ตัวอย่างที่ 6.7 (การวิเคราะห์สมบัติมาร์ทิงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ–เมเยอร์)

พิจารณากระบวนการสโตแคสติก $X(t)$ ที่นิยามโดยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก ดังนี้

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์มาตรฐาน จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) (สมบัติมาร์ทิงเกล) แสดงว่า $M(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma W(t)\right)$

เป็นกระบวนการมาร์ทิงเกลภายใต้ฟิลเตรชันของ $W(t)$

2) (การจำแนกส่วนประกอบดูบ–เมเยอร์) พิจารณากระบวนการ $X(t)$ ดังกล่าว

2.1) เขียน $X(t)$ ในรูปการแยกองค์ประกอบระหว่าง bounded variation component และ martingale component

2.2) อธิบายว่าพจน์ใดเป็นส่วนที่สามารถพยากรณ์ได้ และพจน์ใดเป็นส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้

3) การจำลองและประยุกต์ใช้งานจริง

3.1) แสดงกราฟของแต่ละเส้นทางจากการจำลองเส้นทางของกระบวนการ $X(t)$ จำนวน 6 เส้นทาง ตั้งแต่ $t=0$ ถึง $t=1$ โดย $\mu=0.05$, $\sigma=0.2$, $X(0)=1$

3.2) แสดงการเปรียบเทียบระหว่างพจน์ drift และพจน์ martingale จากผลการจำลอง

3.3) วิเคราะห์ว่าเหตุใดการแยกองค์ประกอบของกระบวนการแบบดูบ–เมเยอร์จึงมีความสำคัญในการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์

วิธีทำ การวิเคราะห์สมบัติมาร์ทิงเกลและการจำแนกส่วนประกอบดูบ--เมเยอร์

กำหนดให้ $dX(t)=\mu X(t)dt+\sigma X(t)dW(t)$ โดยที่ $W(t)$ คือกระบวนการบราวน์มาตรฐาน

ข้อที่ 1) แสดงว่า $M(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t-\sigma W(t)\right)$ เป็นมาร์ทิงเกล

พิจารณาฟังก์ชันชี้กำลังของการเคลื่อนที่บราวน์ $M(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t-\sigma W(t)\right)$

จะตรวจสอบว่า $M(t)$ เป็นมาร์ทิงเกล โดยใช้เงื่อนไขของโนวิคอฟ หาก

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\theta^2(s)ds\right)\right]<\infty,$$

แล้วฟังก์ชัน $Z(t)=\exp\left(-\int_0^t\theta(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(s)ds\right)$ จะเป็นมาร์ทิงเกล

ในกรณีนี้ $\theta(t)=\sigma$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^2 ds\right)\right]=\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2T\right)<\infty$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุก $\sigma\in\mathbb{R}$ และ $T<\infty$ ดังนั้น $M(t)$ เป็นมาร์ทิงเกล

ข้อที่ 2) การจำแนกส่วนประกอบดูบ--เมเยอร์ของ $X(t)$

เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก $dX(t)=\mu X(t)dt+\sigma X(t)dW(t)$

นำมาเขียนในรูปปริพันธ์

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\mu X(s)ds+\int_0^t\sigma X(s)dW(s)$$

แยกเป็น 2 ส่วน

ส่วนที่1) $\int_0^t\mu X(s)ds$ ซึ่งเป็นส่วนของการแปรผันจำกัดและเป็นส่วนที่สามารถพยากรณ์ได้จากข้อมูลในอดีต

ส่วนที่2) $\int_0^t \sigma X(s)dW(s)$ ซึ่งเป็นส่วนของมาร์ทิงเกลและเป็นส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้

ดังนั้น การจำแนกส่วนประกอบดูบ--เมเยอร์ของ $X(t)$ คือ

$$X(t) = \underbrace{X(0) + \int_0^t \mu X(s)ds}_{\text{bounded variation}} + \underbrace{\int_0^t \sigma X(s)dW(s)}_{\text{martingale}}$$

ข้อที่ **3)** การจำลองและการประยุกต์

พิจารณาการประมาณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีออยเลอร์–มารุยามะ (Euler--Maruyama scheme)

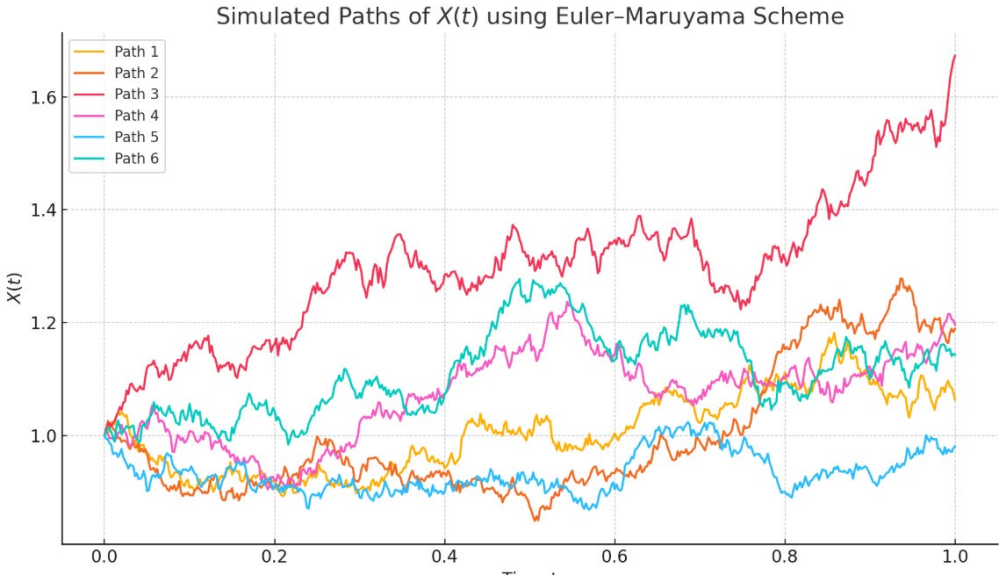
$$X_{i+1} = X_i + \mu X_i \Delta t + \sigma X_i \Delta W_i$$

โดยที่ $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ ค่าเริ่มต้น $X_0 = 1$

ในที่นี้เราจะจำลอง 6 เส้นทางของ $X(t)$ และสามารถแยกค่าของแต่ละช่วงเวลาออกเป็น 2 ส่วน

พจน์ดริฟท์: $\mu X_i \Delta t$ (พยากรณ์ได้)

พจน์รบกวน: $\sigma X_i \Delta W_i$ (ไม่สามารถพยากรณ์ได้ ได้จากการสุ่ม)



กราฟด้านบนแสดงการจำลอง 6 เส้นทางของกระบวนการ $X(t)$ โดยใช้วิธีออยเลอร์–มารุยามะ

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = 1$$

- แต่ละเส้นเริ่มต้นจากค่าเดียวกันที่ $X(0) = 1$
- ค่ากลางของเส้นทางมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามพจน์ดริฟท์ ($\mu = 0.05$)

- ความกระจายของแต่ละเส้นเกิดจากพจน์รบกวน ($\sigma = 0.2$) ที่สะท้อนความไม่แน่นอนจากการเคลื่อนที่แบบบราวน์

จากกราฟของการจำลองสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกทำให้เราเห็นลักษณะสำคัญ 2 ประการคือ

1) แนวโน้มเฉลี่ยของเส้นทางจะสูงขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งเกิดจาก พจน์ดริฟท์ที่เป็นส่วนของสมการที่กำหนดทิศทางการเปลี่ยนแปลงแบบคงที่ เช่น ถ้าพจน์ดริฟท์เป็นบวก เส้นทางส่วนใหญ่จะไต่ขึ้น
2) เส้นทางแต่ละเส้นจะกระจายออกจากกัน แม้จะเริ่มต้นจากจุดเดียวกัน เพราะมีผลของพจน์รบกวนจากกระบวนการบราวน์ ซึ่งเป็นส่วนสุ่ม ทำให้แต่ละเส้นมีการสั่นหรือเคลื่อนไหวไม่เหมือนกัน □

หมายเหตุ วิธีออยเลอร์–มารุยามะ (Euler–Maruyama scheme) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการประมาณคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (SDEs) โดยขยายมาจากวิธีออยเลอร์ (Euler's method) ที่ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ธรรมดา (ODEs)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกในรูปทั่วไป

$$dX(t) = a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dW(t)$$

โดยที่ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์มาตรฐาน

วิธีออยเลอร์–มารุยามะ จะประมาณค่าของ $X(t)$ บนกริดเวลา $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ที่ $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ โดยใช้สูตร

$$X_{i+1} = X_i + a(X_i,t_i)\Delta t + b(X_i,t_i)\Delta W_i$$

เมื่อ $\Delta W_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$

ตัวอย่างโค้ดไพธอนสำหรับวิธีออยเลอร์–มารุยามะ

```
\begin{verbatim}
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# พารามิเตอร์
mu = 0.05
sigma = 0.2
```

```
T = 1.0
N = 500
dt = T / N
t = np.linspace(0, T, N+1)
# สร้างเส้นทางของ W(t)
np.random.seed(0)
dW = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), N)
W = np.concatenate(([0], np.cumsum(dW)))
# เริ่มต้นค่า X
X = np.zeros(N+1)
X[0] = 1.0  # ค่าเริ่มต้น
# Euler–Maruyama
for i in range(N):
    X[i+1] = X[i] + mu * X[i] * dt + sigma * X[i] * dW[i]
# แสดงผล
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t, X, label='Euler–Maruyama Approximation')
plt.title('Sample Path of SDE using Euler–Maruyama')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('X(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
\end{verbatim}
\end{remark}
```

การประยุกต์: การแยกส่วนของดูบ–เมเยอร์

การแยกสมการออกเป็น พจน์ดริฟท์ และ พจน์รบกวน ตามแนวคิดของการจำแนกส่วนประกอบดูบ–เมเยอร์ มีประโยชน์สำคัญใน 2 ด้าน ดังนี้

1) **การกำหนดราคาสินค้าอนุพันธ์:** ในการตั้งราคาสินค้าอนุพันธ์ เช่น ออปชันหรือฟิวเจอร์ส เราสามารถใช้พจน์ดริฟท์ ซึ่งเป็นส่วนที่พยากรณ์ได้ของสมการ เพื่อประมาณ “ค่าคาดหมาย” ของราคาในอนาคต ขณะเดียวกัน พจน์รบกวน ซึ่งเกิดจากความไม่แน่นอนหรือความผันผวนในตลาด จะสะท้อน “ความเสี่ยง” ที่ไม่สามารถควบคุมได้ การแยกทั้งสองพจน์นี้ทำให้การกำหนดราคามีความแม่นยำและมีเหตุผลทางคณิตศาสตร์มากขึ้น
2) **การบริหารความเสี่ยง:** พจน์ดริฟท์แทนความเสี่ยงที่สามารถพยากรณ์และวางแผนรับมือได้ เช่น ทิศทางของแนวโน้มราคาหรืออัตราดอกเบี้ย ส่วนพจน์รบกวนแทนความเสี่ยงที่เกิดจากเหตุการณ์สุ่ม เช่น ความผันผวนของตลาดที่ไม่สามารถควบคุมได้โดยตรง การแยกสองพจน์นี้ช่วยให้นักลงทุนสามารถออกแบบกลยุทธ์ในการป้องกันความเสี่ยง (hedging) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมุ่งจัดการกับพจน์ดริฟท์ และยอมรับความไม่แน่นอนจากพจน์รบกวน

สรุปคือ การแยกสมการออกเป็นพจน์ดริฟท์และพจน์รบกวน ช่วยให้เราวิเคราะห์ เข้าใจ และใช้ประโยชน์จากตัวแบบทางการเงินได้อย่างมีประสิทธิภาพทั้งในด้านการตั้งราคาและการบริหารความเสี่ยง

6.4 ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ

ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ (Girsanov theorem) เป็นหลักการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการปรับเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็น (change of measure) ในกระบวนการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่งเป็นกระบวนการสโตแคสติกที่สำคัญในการพยากรณ์การเคลื่อนไหวของราคาหลักทรัพย์หรือการพยากรณ์ราคาของตราสารอนุพันธ์การเงิน ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟช่วยให้เราสามารถเปลี่ยนตัววัดความน่าจะเป็นในโลกที่มีความเสี่ยงเป็นตัววัดความน่าจะเป็นในโลกที่ไม่มีความเสี่ยงหรือตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) และทำให้เราสามารถคำนวณค่า

คาดหวัง (expected value) ในโลกที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งนั่นก็คือราคาที่เราควรจะกำหนดในการซื้อขายตราสารอนุพันธ์การเงิน เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ จะขออธิบายพอสังเขปที่เกี่ยวข้องกับคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่จะปรากฏในทฤษฎีกีร์ซานอฟ แต่จะไม่ลงรายละเอียดมากจนเกินไปจนทำให้ผู้อ่านรู้สึกอึดอัดและภาระให้ คำศัพท์เหล่านั้น ได้แก่ พีชคณิตซิกมา ตัวกรองหรือฟิลเตอร์ (filter) เป็นต้น

พีชคณิตซิกมา (sigma-algebra: σ-algebra) หรือ สนามซิกมา (sigma-field) เป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในคณิตวิเคราะห์และทฤษฎีความน่าจะเป็น มีบทนิยามทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ กำหนดให้ X เป็นเซตและ 2^X เป็นเซตกำลัง (power set) ของเซต X

บทนิยาม 6.8 กำหนดให้ $\Sigma \subseteq 2^X$ จะกล่าวว่า Σ เป็นพีชคณิตซิกมาบน X ก็ต่อเมื่อ Σ มีสมบัติต่อไปนี้

1) $\phi \in \Sigma$

2) ถ้า $E \in \Sigma$ แล้ว $E^c \in \Sigma$ และ

3) ถ้า $E_1, E_2, E_3, \ldots \in \Sigma$ แล้ว $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n \in \Sigma$

การวัดความน่าจะเป็น (probability measure) คือฟังก์ชันที่ใช้วัดการกระจายตัวของความน่าจะเป็นการวัดความน่าจะเป็นมีสมบัติตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.9 ถ้า Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง (sample space) และ $\mathcal{F}$ เป็นพีชคณิตซิกมาบน Ω การวัดความน่าจะเป็น P บน $(\Omega, \mathcal{F})$ คือ ฟังก์ชัน $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) $P(\Omega) = 1$: ตัววัดความน่าจะเป็นของเซตของทุกโอกาสที่เป็นไปได้เท่ากับ 1

2) $P(\phi) = 0$: ตัววัดความน่าจะเป็นของเซตว่างเท่ากับศูนย์

3) Σ – additivity: ถ้า A_n เป็นลำดับของเซตที่ไม่ร่วมกัน ($A_n \cap A_m = \phi$ สำหรับทุกๆ $n \neq m$)

แล้ว $P(\underset{n}{\cup} A_n) = \sum_n P(A_n)$

การวัดความน่าจะเป็นใช้ในการระบุถึงความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ใดๆ ขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในกรณีของการเกมลูกเต๋าที่เป็นธรรม การวัดความน่าจะเป็นที่จะได้หน้าลูกเต๋าที่เป็นเลข 6 คือ 1/6 โดยที่ทุกหน้ามีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากันทั้งหมด เป็นต้น

บทนิยาม 6.10 ตัวกรองหรือฟิลเตอร์ (filtration) $\{\mathcal{F}_t\}$ คือ ลำดับของพีชคณิตซิกมาที่เรียงตามลำดับที่กำหนดโดยระยะเวลา โดยสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1) $\mathcal{F}_s$ เป็นสับเซตของ $\mathcal{F}_t$ สำหรับทุก ๆ $0 \le s \le t$ (สมบัติของการเพิ่มขึ้น)

2) $\mathcal{F}_t$ เป็น พีชคณิตซิกมา สำหรับทุก ๆ t (สมบัติการวัด)

3) สำหรับทุก $s < t$ ถ้า $A \in \mathcal{F}_s$ แล้ว $A \in \mathcal{F}_t$ (สมบัติที่สอดคล้องกับการเลื่อนเวลาที่แน่นอน)

การใช้ฟิลเตอร์ในการเคลื่อนไหวแบบบราวน์หรือกระบวนการสโตแคสติกที่เกี่ยวข้องกับเวลาช่วยให้สามารถแสดงถึงปริมาณข้อมูลที่มีในแต่ละจุดเวลาที่ใช้เพื่อพยากรณ์การเคลื่อนไหวในอนาคต

บทนิยาม 6.11 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (moment generating function - mgf) ของ X (ถ้ามี) คือฟังก์ชัน $M_X(t)$ ที่ถูกกำหนดในรูป

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{6.24}$$

เมื่อ E ตัวดำเนินการค่าคาดหวัง

ฟังก์ชันสร้างโมเมนต์ เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งช่วยในการคำนวณโมเมนต์ (moments) หรือค่าคาดหวังของกำลังของตัวแปรสุ่ม คือ ถ้า $M_X(t)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X แล้ว ค่าคาดหวังของ X^n สำหรับ n ใด ๆ จะเท่ากับอนุพันธ์อันดับที่ n ของ $M_X(t)$ ที่ $t = 0$

ทฤษฎีบท 6.12 (ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ) สมมติว่า P เป็นตัววัดความน่าจะเป็นในปริภูมิของวิถีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ W_t สมมุติว่า $\mu(\omega,t)$ เป็นกระบวนการปรับตัวตาม

$$M_t(\mu) = \exp\left(\int_0^t \mu(\omega,s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\mu(\omega,s)\right)^2 ds\right) \text{ สำหรับ } t \le T \text{ และ } E^P\left[M_T(\mu)\right] = 1 \quad (6.24)$$

มีสมบัติมาร์ทิงเกลแล้วจะได้ว่าจะมีตัววัดความน่าจะเป็น Q บนปริภูมิของวิถีการเคลื่อนที่แบบบราวน์ W_t ที่ซึ่ง

1) ตัววัดความน่าจะเป็น Q สมมูลกับ ตัววัดความน่าจะเป็น P

นั่นคือ $Q(A)=0 \Leftrightarrow P(A)=0$

2) $\frac{dQ}{dP}=\exp\left(-\int_0^T \mu(\omega,t)dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\mu(\omega,t)\right)^2dt\right)$

3) $\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \mu(\omega,s)ds$ สำหรับ $t\le T$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์บนปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ ที่มีฟิลเตอร์ $\{\mathcal{F}_t\}$

พิสูจน์ นิยามตัววัดความน่าจะเป็น Q โดย

$$E^Q[A]=E^P[1_A M_T] \tag{6.25}$$

โดยที่ $M_t(\mu)=\exp\left(\int_0^t \mu(\omega,s)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\left(\mu(\omega,s)\right)^2ds\right)$ จะได้ว่า

$$E^Q\left[\exp\left(\int_0^T f(s)dX_s\right)\right]=E^Q\left[\exp\left(\int_0^T f(s)dW_s+\int_0^T \mu(\omega,s)ds\right)\right]$$

$$=E^P\left[\exp\left(\int_0^T\left(f(s)-\mu(\omega,s)\right)dW_s+\int_0^T f(s)\mu(\omega,s)ds-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\mu(\omega,s)\right)^2ds\right)\right]$$

$$=E^P\left[\exp\left(\int_0^T\left(f(s)-\mu(\omega,s)\right)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)-\mu(\omega,s)\right)^2ds+\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)\right)^2ds\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)\right)^2ds\right)E^P\left[\exp\left(\int_0^T\left(f(s)-\mu(\omega,s)\right)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)-\mu(\omega,s)\right)^2ds\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)\right)^2ds\right)E^P\left[M_T(f-\mu)\right]=\frac{1}{2}\int_0^T\left(f(s)\right)^2ds$$

และยิ่งไปกว่านั้นได้ว่า $E^Q\left[\exp\left(i\lambda\left(X_t-X_s\right)\right)\right]=\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right)$ ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของการเคลื่อนที่บราวน์ ดังนั้น $\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \mu(\omega,s)ds$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ □

การนำทฤษฎีบทกีร์ซานอฟไปใช้งาน

ในการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นเพื่อการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ ในการวิเคราะห์ราคาของสินทรัพย์ในตลาดการเงิน เรามักใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ โดยเฉพาะกระบวนการสุ่มแบบบราวน์เชิงเรขาคณิต เช่น

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$$

โดยที่ μ คืออัตราผลตอบแทนเฉลี่ยของสินทรัพย์ในโลกความเป็นจริงภายใต้มาตรวัดความน่าจะเป็น $\mathbb{P}$, σ คือค่าความผันผวน และ $W^{\mathbb{P}}(t)$ คือกระบวนการบราวน์ในโลกจริง

แม้สมการนี้จะสะท้อนพฤติกรรมของราคาหุ้นในตลาดจริง แต่เมื่อต้องการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ เช่น ออปชัน เราไม่สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{P}$ ได้โดยตรง เนื่องจากค่าคาดหวังนั้นรวมความเสี่ยงของนักลงทุนเข้าไปแล้ว ซึ่งอาจไม่เหมาะสมกับการคำนวณราคาที่ยุติธรรม

เพื่อแก้ปัญหานี้ เราใช้จึงทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ (Girsanov's Theorem) ซึ่งช่วยให้สามารถเปลี่ยนมุมมองความน่าจะเป็นจากโลกจริง $\mathbb{P}$ ไปสู่โลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral world) หรือมาตรวัด $\mathbb{Q}$ ซึ่งเหมาะสมต่อการประเมินมูลค่าทางคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ ระบุว่าหากนิยามกระบวนการใหม่

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + \theta(t)dt$$

และนิยามฟังก์ชัน Radon–Nikodym derivative ซึ่งทำให้ $\mathbb{Q}$ สมมูลกับ $\mathbb{P}$ แล้ว $W^{\mathbb{Q}}(t)$ จะเป็นกระบวนการบราวน์ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$

ตัวอย่างประกอบ เช่น สมมติว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาหุ้น A ตามกลไกตลาดเป็นดังสมการ

$$dS(t) = 0.08S(t)dt + 0.2S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$$

โดย $\mu = 0.08$, $\sigma = 0.2$, และใช้อัตราคิดลด $\delta = 0.05$

เมื่อเราคำนวณค่าพารามิเตอร์ $\theta = \dfrac{\mu - \delta}{\sigma} = \dfrac{0.08 - 0.05}{0.2} = 0.15$

จากนั้นเปลี่ยนกระบวนการบราวน์

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + 0.15dt$$

ทำให้สมการภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ กลายเป็น

$$dS(t) = \delta S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

ซึ่งเป็นตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของราคาหุ้น A ตามกลไกภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยงหรือภายใต้โลกที่ไม่มีความเสี่ยง นั่นเอง

ดังนั้น จะเห็นว่าทฤษฎีบทกีร์ซานอฟช่วยให้เราสามารถเปลี่ยนมุมมองของความน่าจะเป็นจากโลกจริงไปสู่โลกที่ไม่มีความเสี่ยง ทำให้สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ ในการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เช่นในการประเมินราคาของยูโรเปียนคอลออปชัน ซึ่งสามารถประเมินราคาได้โดยใช้สูตร

$$C = e^{-\delta T}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max(S(T)-K,0)\right]$$

ตัวอย่างที่ 6.8 (การประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ภายใต้การเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นด้วยทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ) สมมติบริษัทหลักทรัพย์แห่งหนึ่งกำลังพิจารณาออกตราสารอนุพันธ์ประเภทคอลออปชันแบบยุโรป สำหรับลูกค้าระดับสถาบัน โดยอิงกับราคาของสินทรัพย์อ้างอิงประเภทหนึ่งซึ่งมีพฤติกรรมการเคลื่อนไหวตามกระบวนการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเรขา ซึ่งเป็นที่ยอมรับในตลาดการเงินว่าเหมาะสมสำหรับการจำลองราคาหุ้นในระยะสั้น

สมมติราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ ถูกกำหนดให้เป็นไปตามสมการ

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t), \quad S(0) = 100$$

โดยมีพารามิเตอร์ที่ใช้ในการประเมินดังนี้

- $\mu = 0.08$ (อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังในโลกจริง)
- $\sigma = 0.2$ (ค่าความผันผวนของสินทรัพย์)
- $\delta = 0.05$ (อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงคิดทบต้นต่อเนื่อง)
- $K = 105$ (ราคาการใช้สิทธิ)
- $T = 1$ ปี (ระยะเวลาคงเหลือจนถึงวันหมดอายุ)

จงตอบคำถาม ต่อไปนี้

1) (การเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น) เพื่อใช้หลักการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ภายใต้แนวคิดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral valuation) บริษัทต้องเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็นจากโลกจริง $\mathbb{P}$ ไปเป็นมาตรวัดความน่าจะเป็นภายใต้โลกที่ไม่มีความเสี่ยง $\mathbb{Q}$ (มาตรวัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) จงระบุสมการที่ใช้ในการแปลงมาตรวัด และอธิบายแนวคิดพื้นฐานของการเปลี่ยนพจน์ดริฟท์โดยใช้พารามิเตอร์ θ

2) (การคำนวณค่าพารามิเตอร์ θ) จงคำนวณค่า $\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma}$ โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดในโจทย์ พร้อมอธิบายความหมายของค่า θ ในเชิงการเงิน และผลกระทบต่อการจำลองกระบวนการภายใต้มาตรวัดใหม่

3) (แบบจำลองราคาสินทรัพย์ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$) จงเขียนสมการของราคาสินทรัพย์ $S(t)$ ที่อยู่ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ และอธิบายว่าพจน์ดริฟท์มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อเทียบกับมาตรวัด $\mathbb{P}$

4) (การจำลองมอนติคาร์โล: Monte Carlo Simulation) สมมุติว่าบริษัทสามารถจำลองเส้นทางราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ ได้จำนวน 10,000 เส้นทาง ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ อธิบายขั้นตอนหลักของการจำลองเส้นทางดังกล่าว และการใช้ผลลัพธ์เพื่อวิเคราะห์ค่าคาดหวังของผลตอบแทนจากออปชัน

5) (สูตรการประเมินมูลค่าคอลออปชันและหลักการคิดลด) จงเขียนสูตรที่ใช้สำหรับการประมาณราคาของออปชันดังกล่าว และ อธิบายหลักการของการคิดลดค่าคาดหวังกลับมาเป็นมูลค่าปัจจุบัน โดยใช้สูตร

$$C = e^{-\delta T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max(S(T)-K,0)\right]$$

วิธีทำ ข้อ 1) ในโลกจริงกระบวนการราคาของสินทรัพย์ $S(t)$ มีพจน์ดริฟท์เป็น μ และแสดงด้วยสมการ $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)$

เพื่อเปลี่ยนไปสู่มาตรวัดที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง $\mathbb{Q}$ เราใช้ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟโดยนิยามกระบวนการใหม่ $W^{\mathbb{Q}}(t)$ ดังนี้

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{P}}(t) + \theta dt$$

โดย $\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma}$ เป็นค่าที่ปรับพจน์ดริฟท์เพื่อให้ $W^{\mathbb{Q}}(t)$ กลายเป็นกระบวนการบราวน์ภายใต้มาตรวัดใหม่ $\mathbb{Q}$ ซึ่งทำให้สามารถใช้ค่าคาดหวังภายใต้ $\mathbb{Q}$ เพื่อประเมินราคาตราสารอนุพันธ์ได้อย่างเป็นกลางต่อความเสี่ยง

ข้อ 2) จากข้อมูลโจทย์ $\mu = 0.08,\ \delta = 0.05,\ \sigma = 0.2$ ดังนั้น

$$\theta = \frac{\mu - \delta}{\sigma} = \frac{0.08 - 0.05}{0.2} = 0.15$$

ความหมายของ θ เป็นอัตราส่วนของผลตอบแทนส่วนเกินเมื่อเทียบกับความเสี่ยงของสินทรัพย์ สื่อถึง "ราคาของความเสี่ยง" (market price of risk) และใช้ในการแปลงกระบวนการแบบสุ่มจากโลกจริงไปยังโลกที่ไม่มีความเสี่ยงหรือโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง

ข้อ 3) เมื่อเปลี่ยนมาตรวัดจาก $\mathbb{P}$ ไปยัง $\mathbb{Q}$ โดยใช้ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ พจน์ดริฟท์จะเปลี่ยนจาก μ เป็น δ ส่งผลให้สมการกลายเป็น

$$dS(t) = \delta S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

ดังนั้น พจน์ดริฟท์ภายใต้ $\mathbb{Q}$ จะแสดงถึงอัตราผลตอบแทนที่ไม่มีความเสี่ยง ซึ่งช่วยให้เราสามารถใช้มาตรวัดนี้สำหรับการประเมินราคาที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงได้

ข้อ 4) การจำลองมอนติคาร์โล มีขั้นตอนในการจำลอง ดังต่อไปนี้

- แบ่งช่วงเวลาระหว่าง 0 ถึง T ออกเป็น N ขั้น และตั้งค่าเริ่มต้น $S(0) = 100$
- สุ่มค่าจากการแจกแจงปกติ $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ แล้วคำนวณ $\Delta W_i = \sqrt{\Delta t} Z_i$
- ใช้สมการจำลองด้วยวิธีออยเลอร์–มารุยามะ

$$S_{i+1} = S_i + \delta S_i \Delta t + \sigma S_i \Delta W_i$$

- ทำซ้ำกระบวนการนี้ 10,000 เส้นทาง เพื่อได้ $S^{(j)}(T)$ แต่ละเส้น

จากนั้นนำค่าที่ได้มาใช้คำนวณค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลออปชัน (payoff of call option) ในข้อถัดไป

ข้อ 5) สูตรการประเมินมูลค่า Call Option ตามหลักการคิดลด

ราคาของคอลออปชันสามารถประเมินได้ด้วยสูตร

$$C = e^{-\delta T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max(S(T) - K, 0)\right]$$

โดยที่ δ คืออัตราคิดลด และ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ คือค่าคาดหวังภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$ ซึ่งหมายถึงการคำนวณจากโลกที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง การคูณด้วย $e^{-\delta T}$ คือการนำมูลค่าในอนาคตกลับมาเป็นราคาปัจจุบัน โดยผลลัพธ์จากการจำลอง Monte Carlo จำนวน 10,000 เส้นทางโดยใช้โปรแกรมภาษาไพธอนมีดังนี้

- ค่าเฉลี่ยของ $S(T)$ ประมาณ 105.10

- ราคาของคอลออปชัน ประมาณ 8.02 □

หมายเหตุ: ตัวอย่างโค้ดไพธอนในการจำลองและการคำนวณตามตัวอย่างที่ 6.8

```
import numpy as np
# Parameters
S0 = 100          # Initial asset price
delta = 0.05      # Risk-free rate or discount rate
sigma = 0.2       # Volatility
T = 1.0           # Time horizon
K = 105           # Strike price
n_paths = 10000   # Number of Monte Carlo simulations
# Simulate S(T) under Q measure
np.random.seed(42)
Z = np.random.randn(n_paths)
ST = S0 * np.exp((delta - 0.5 * sigma**2) * T + sigma * np.sqrt(T) * Z)
# Compute average S(T)
average_ST = np.mean(ST)
# Compute price of European call option
payoffs = np.maximum(ST - K, 0)
call_price = np.exp(-delta * T) * np.mean(payoffs)
average_ST, call_price
```

บทสรุปท้ายบทที่ 6

บทที่ 6 ได้นำเสนอองค์ความรู้พื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัสสโตแคสติก ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักในการวิเคราะห์กระบวนการสุ่มที่มีการเปลี่ยนแปลงต่อเนื่องในเวลา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในบริบทของแบบจำลองทางการเงินที่มีลักษณะสุ่มและไม่สามารถพยากรณ์ได้อย่างแน่นอน บทนี้เริ่มต้นด้วยบทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของแคลคูลัสสโตแคสติก ซึ่งครอบคลุมแนวคิดของการอินทิเกรตเชิงสโตแคสติก การวิเคราะห์พฤติกรรมของกระบวนการบราวน์ และการประยุกต์ใช้ **บทตั้งของอิโต้ (Ito's Lemma)** ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลของกระบวนการสุ่ม

เนื้อหาในส่วนของ **สมบัติมาร์ทิงเกล (Martingale Property)** และ **การจำแนกส่วนประกอบดูบ–เมเยอร์ (Doob–Meyer Decomposition)** ได้แสดงให้เห็นถึงการวิเคราะห์พฤติกรรมของกระบวนการสุ่มในเชิงโครงสร้าง โดยการแยกกระบวนการออกเป็นส่วนที่สามารถพยากรณ์ได้ (bounded variation component) และส่วนที่ไม่สามารถพยากรณ์ได้ (martingale component) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการประเมินค่าคาดหมายของราคาทรัพย์สินทางการเงินภายใต้กรอบการประเมินแบบไม่มีโอกาสทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (no-arbitrage condition)

หัวข้อ **ทฤษฎีบทกีร์ซานอฟ (Girsanov's Theorem)** ซึ่งเป็นส่วนสำคัญในท้ายบท ได้แสดงให้เห็นถึงกลไกการแปลงมาตรวัดความน่าจะเป็นจากโลกแห่งความเสี่ยง (real-world measure) ไปสู่โลกแห่งความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) ซึ่งเป็นแนวคิดพื้นฐานในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ การเปลี่ยนมาตรวัดนี้มีความสำคัญต่อการหาค่าคาดหมายภายใต้สมมุติฐานความเป็นกลางต่อความเสี่ยง เพื่อใช้เป็นมูลค่ายุติธรรมของเครื่องมือทางการเงินที่มีลักษณะไม่แน่นอน

บทนี้ยังได้นำเสนอแนวคิดของกระบวนการสุ่มปรับตัวตาม (adapted process), กระบวนการมาร์ทิงเกลในรูปชี้กำลัง (exponential martingale) ฟังก์ชันสร้างโมเมนต์ (moment generating function) และโครงสร้างทางทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เช่น พีชคณิตซิกมา (sigma-algebra) และฟิลเตอร์ (filtration) เพื่อวางพื้นฐานทางทฤษฎีสำหรับการวิเคราะห์ที่มีความแม่นยำในระดับสูง และเพื่อสร้างกรอบการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับแนวคิดของ stochastic differential equations ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายในวงการการเงิน

โดยสรุป บทที่ 6 ได้นำเสนอเนื้อหาที่ครอบคลุมทั้งในเชิงทฤษฎีและการประยุกต์ ใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาวิชาในระดับที่สูงขึ้น อาทิ แบบจำลอง Black-Scholes, แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย Vasicek และ CIR ตลอดจนการประยุกต์ใช้ในด้านการประเมินมูลค่าตราสารอนุพันธ์ การคำนวณ Value at Risk (VaR) และการบริหารความเสี่ยงเชิงปริมาณ ซึ่งล้วนเป็นเครื่องมือที่มีความสำคัญในโลกการเงินร่วมสมัย

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. Https://Doi.Org/10.1086/260062

[2] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science, 4*(1), 141–183. Https://Doi.Org/10.2307/3003143

[3] Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics, 5*(2), 177–188. Https://Doi.Org/10.1016/0304-405x(77)90016-2

[4] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica, 53*(2), 385–407. Https://Doi.Org/10.2307/1911242

[5] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-Time Models*. Springer. Https://Doi.Org/10.1007/978-0-387-40101-4

[6] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd Ed.). Oxford University Press.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

1) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และสำหรับทุก ๆ ฟังก์ค่าจริง f บน $\mathbb{R}^+$ นิยาม $G_f(t)=\int_0^t f(s)dB_s$ จงแสดงว่า

1.1) $E\left[G_f(t)\right]=0$

1.2) $Cov\left(G_f(t),G_s(t)\right)=\int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$

2) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $\int \sigma e^{\sigma B_s}dB_s+\int \frac{\sigma^2}{2}e^{\sigma B_s}ds$ (แนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x)=e^{\sigma x}$)

3) กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก (sde) $dX_t=A_tX_tdB_t,\ X_0=x_0$ จงแสดงว่า $X_t=x_0\exp\left(\int_0^t A_sdB_s-\frac{1}{2}\int_0^t A_s^2ds\right)$ (แนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t,x)=x_0e^x$)

4) ใช้ สูตรของอิโต้ (Ito's formula) หาสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกของ $f(t,B_t)$ เมื่อ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ และ

4.1) $f(t,x)=\sin x$

4.2) $f(t,x)=e^{-t}\left(x/t\right)^2$

5) กำหนดให้ $\{B_t\}_{t\geq 0}$ เป็นกระบวนการสุ่มบราวน์ จงหาค่าของ $E[X_t]$ และ $Var[X_t]$ เมื่อ X_t เท่ากับค่าต่อไปนี้

5.1) $\int_0^t \sigma dB_s$

5.2) $\int_0^t B_s dB_s$

5.3) $\int_0^t \mu ds+\int_0^t \sigma dB_s$

5.4) $\int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) e^{\mu s + \sigma B_s} ds + \int_0^t \sigma e^{\mu s + \sigma B_s} dB_s$

6) กำหนดให้ $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ เป็นกระบวนการอิโต้ โดยที่ $W(t)$ เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์ จงหาค่า $dY(t)$ เมื่อ $Y(t) = \ln(X(t))$ โดยใช้ Ito's Lemma

7)ให้ $f(t, X(t)) = e^{X(t)}$ และ $X(t) = W(t)^2$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา df และเปรียบเทียบผลที่ได้กับแคลคูลัสปกติ พร้อมอธิบายผลต่างในเชิงคณิตศาสตร์

8) สมมุติให้ $S(t)$ เป็นราคาหุ้นที่เป็นไปตามสมการ $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา $d\ln S(t)$ และอธิบายความหมายทางการเงินของผลลัพธ์

9) จงพิสูจน์ว่า หาก $\phi(t)$ เป็นฟังก์ชันไม่สุ่ม และ $W(t)$ เป็นกระบวนการบราวน์ แล้ว

$$\int_0^T \phi(t)dW(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T \phi(t)^2 dt\right)$$

10) ให้ $X(t) = \int_0^t \sin(s)dW(s)$ จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $X(t)$ โดยใช้ Ito Isometry

11) ให้ $f(t, W(t)) = W(t)^3$ จงใช้ Ito's Lemma เพื่อหา df และวิเคราะห์ว่า $\mathbb{E}[W(t)^3]$ ขึ้นกับ t หรือไม่

12) จงแสดงว่า $M(t) = W(t)^2 - t$ เป็นมาร์ทิงเกล โดยพิสูจน์จากนิยามมาร์ทิงเกล

13) กำหนดให้ $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$ จงจำแนก $X(t)^2$ ให้อยู่ในรูปส่วนประกอบมาร์ทิงเกลและส่วนประกอบการแปรผันจำกัดตามแนวคิด Doob–Meyer Decomposition

14) ให้ $X(t) = \exp\left(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$ จงแสดงว่า $X(t)$ เป็นมาร์ทิงเกล และอธิบายความเชื่อมโยงกับการประเมินราคาตราสารอนุพันธ์

15) พิจารณากระบวนการ $dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$ จงเปลี่ยนมาตรวัดจาก $\mathbb{P}$ เป็น $\mathbb{Q}$ โดยใช้ Girsanov's Theorem และเขียนรูปสมการ $dX(t)$ ภายใต้มาตรวัด $\mathbb{Q}$

16) จงอธิบายและแสดงให้เห็นว่า Girsanov's Theorem ช่วยให้สามารถประเมินราคาคอลออปชันยุโรปได้ภายใต้ risk-neutral measure โดยใช้ตัวแบบ Black-Scholes

17) กำหนดให้ $Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2 ds\right)$ โดยที่ $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันกำหนด จงวิเคราะห์ว่า $Z(t)$ เป็นมาร์ทิงเกลหรือไม่ และอธิบายบทบาทของ $Z(t)$ ในการเปลี่ยนมาตรวัดความน่าจะเป็น

บทที่ 7 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

เนื้อหาประกอบด้วย

7.1 ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย

7.2 แบบจำลองของ Vasicek และแบบจำลอง CIR

7.3 แบบจำลอง Ho-Lee

7.4 แบบจำลอง Black-Derman-Toy

บทนำ

ในระบบการเงินที่มีพลวัตสูง อัตราดอกเบี้ยถือเป็นตัวแปรทางเศรษฐกิจที่มีผลกระทบโดยตรงต่อการประเมินมูลค่าตราสารหนี้ การกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ และการบริหารความเสี่ยงทางการเงินในระดับสถาบันและระบบเศรษฐกิจ การสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยจึงเป็นภารกิจหลักในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะแบบจำลองที่สามารถจับการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในลักษณะต่อเนื่องของเวลา ซึ่งมีความผันผวนและไม่แน่นอนสูง ในบริบทนี้ การใช้ แคลคูลัสสโตแคสติก (Stochastic Calculus) แทนแคลคูลัสของจำนวนจริงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง เนื่องจากแบบจำลองที่มีตัวแปรสุ่มเชิงเวลา (เช่น Brownian Motion) จำเป็นต้องใช้เครื่องมือคณิตศาสตร์ที่สามารถจัดการกับการเปลี่ยนแปลงที่ไม่สามารถคาดการณ์ล่วงหน้าได้ ซึ่งเครื่องมือเหล่านี้ได้รับการพัฒนาและวางรากฐานโดย Itô (ค.ศ.1951) และต่อมาถูกประยุกต์ใช้ในงานด้านการเงินอย่างเป็นระบบในงานของ Black & Scholes (ค.ศ. 1973), Merton (ค.ศ. 1973) และต่อเนื่องสู่การสร้างแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่ซับซ้อนมากขึ้น (Shreve, ค.ศ. 2004; Björk, ค.ศ. 2009)

บทนี้เริ่มต้นด้วยการพิจารณา ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย อาทิ ความสามารถในการอธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยแบบปัจจุบัน (Term Structure) ความไม่เป็น

ลบของอัตราดอกเบี้ย และความสามารถในการกำหนดราคาพันธบัตรในลักษณะของมาร์ทิงเกล ภายใต้มาตรการ Risk-Neutral (Brigo & Mercurio, ค.ศ. 2006)

ต่อจากนั้น ผู้อ่านจะได้ศึกษาแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่ได้รับความนิยมและถูกนำไปใช้ในทางปฏิบัติ ดังนี้

- แบบจำลอง Vasicek (ค.ศ. 1977): เป็นแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยแรกที่มีโครงสร้าง Mean-Reverting โดยอิงการเคลื่อนไหวสุ่มแบบบราวเนียน มีความสะดวกในการวิเคราะห์เชิงปิด แม้จะมีข้อจำกัดด้านความเป็นลบของอัตราดอกเบี้ย
- แบบจำลอง Cir (Cox-Ingersoll-Ross, ค.ศ.1985): พัฒนาเพื่อแก้ปัญหาอัตราดอกเบี้ยติดลบ โดยใช้เทอมสแควร์รูทในพจน์ความผันผวน ซึ่งสอดคล้องกับพฤติกรรมของตลาดจริงมากยิ่งขึ้น และสามารถเชื่อมโยงกับโครงสร้างอัตราผลตอบแทนได้ดี
- แบบจำลอง Ho-Lee (ค.ศ.1986): เป็นแบบจำลอง Non-Stationary ที่สามารถกำหนดให้สอดคล้องกับโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยเริ่มต้นได้แบบ Explicit ซึ่งมีความยืดหยุ่นในการใช้งานจริง
- แบบจำลอง Black-Derman-Toy (ค.ศ.1990): พัฒนาต่อจาก Ho-Lee โดยเพิ่มความสามารถในการสร้างความผันผวนที่เปลี่ยนแปลงตามอัตราดอกเบี้ยเองได้ (State-Dependent Volatility)

แบบจำลองเหล่านี้นอกจากจะเป็นรากฐานในการวิเคราะห์ทางทฤษฎีแล้ว ยังสามารถนำไปใช้จริงในกระบวนการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ เช่น Bond Options, Swaptions, และ Callable Bonds ตลอดจนการประเมินความเสี่ยงในพอร์ตสินทรัพย์ที่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย เช่น การวัด Duration, Convexity และ Value-At-Risk (Hull, ค.ศ. 2018)

ในทางทฤษฎี แบบจำลองเหล่านี้ยังเป็นรากฐานของการพัฒนาโมเดลที่ซับซ้อนขึ้น เช่น แบบจำลอง Heath–Jarrow–Morton (Hjm) และแบบจำลองตลาดที่ขับเคลื่อนด้วยกระบวนการ Lévy หรือกระบวนการ Jump-Diffusion ที่ใช้ในการประเมินราคาภายใต้ตลาดที่ไม่สมบูรณ์หรือมีการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้าง

กล่าวโดยสรุป บทที่ 7 มีเป้าหมายเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจในกลไกการสร้างแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นอย่างเป็นระบบ ครอบคลุมทั้งด้านแนวคิด ทฤษฎี และการประยุกต์ใช้จริง โดยเฉพาะในด้านการเงินเชิงปริมาณและการบริหารความเสี่ยงที่ต้องการความแม่นยำเชิงคณิตศาสตร์ระดับสูง

แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยมีบทบาทสำคัญมากในการกำหนดราคาตราสารอนุพันธ์ โดยเฉพาะอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ย (interest-rate-contingent claims) เช่น cap ของอัตราดอกเบี้ย สวอป (swaps) ออปชันบนตราสารหนี้ และ ตราสารหนี้หนุนด้วยสินเชื่อที่อยู่อาศัย เป็นต้น แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีชื่อเสียง เช่น แบบจำลองของ Vasicek ในปี ค.ศ.1977 แบบจำลองของ Dothan ในปี ค.ศ.1978 แบบจำลองของ Richard ในปี ค.ศ.1979 แบบจำลองของ Brennan-Schwartz ในปี ค.ศ.1979 แบบจำลองของ Langetieg ในปี ค.ศ.1980 แบบจำลองของ Courtadon ในปี ค.ศ.1982 แบบจำลองของ Cox–Ingersoll-Ross ในปี ค.ศ.1985 แบบจำลองดังกล่าวมีจุดด้อยและจุดเด่นแตกต่างกันไป ต่อมาแบบจำลองต่าง ๆ ได้รับการพัฒนาและปรับปรุงอย่างต่อเนื่อง เช่น ในปี ค.ศ.1986 Ho-Lee ได้นำเสนอและแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยสามารถกำหนดให้สอดคล้องกับโครงสร้างเริ่มต้นตามที่ระบุได้อย่างไร ในเวลาต่อมา ในปี ค.ศ. 1987 Health-Jarrow-Morton ได้นำเสนอรูปแบบทั่วไปของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยเพื่ออธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยและโครงสร้างความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไปเชิงทฤษฎี

ในบทนี้กล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบต่าง ๆ เช่น แบบจำลองของ Vasicek แบบจำลองของ Cox–Ingersoll-Ross: CIR (ค.ศ.1985) ซึ่งแบบจำลองดังกล่าวจะอธิบายโครงสร้างปัจจุบันของอัตราดอกเบี้ยและโครงสร้างของความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าได้เป็นอย่างดี แบบจำลองดังกล่าวสามารถระบุความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยทันที (ความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนทันที) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (ความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า) ซึ่งสามารถนำไปการประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาออปชันและออปชันของตราสารหนี้แบบยุโรป (European bond options) อีกด้วย

7.1 ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ยเป็นตัวแปรที่สำคัญในการวิเคราะห์และการกำหนดราคาตราสารหนี้และตราสารอนุพันธ์ แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยสามารถใช้ในการอธิบายพฤติกรรมโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาของตราสารหนี้และอนุพันธ์ของตราสารหนี้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพและเหมาะสม ภายใต้สมมติฐานว่าระดับอัตราดอกเบี้ย $r_t = r(t)$ ณ เวลา t มีการเคลื่อนที่ในลักษณะสุ่ม ราคาตราสารหนี้และราคาอนุพันธ์ที่ถูกกำหนดโดยระดับอัตราดอกเบี้ย r_t ก็จะมีลักษณะการคลื่อนที่ในลักษณะสุ่มเช่นเดียวกัน ดังนั้นพฤติกรรมการเคลื่อนที่ในลักษณะสุ่มของอัตราดอกเบี้ยระสั้น r_t จึงเป็นดัชนีชี้วัดค่าของเหตุการณ์ในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ ($\triangle t$) ระหว่างเวลา t ถึง $t+\Delta t$ ได้เป็นอย่างดี อัตราผลตอบแทนที่ปราศจากความเสี่ยงที่นักลงทุนจะได้รับสำหรับการลงทุนในช่วงเวลาตั้งแต่เวลาที่ t จนถึงเวลาที่ $t+\Delta t$ เท่ากับร้อยละ $r(t)\Delta t$

ลักษณะอันพึงประสงค์ของกระบวนการจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเพื่ออธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยจึงเป็นสิ่งที่สำคัญ โดยลักษณะอันพึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ มีอยู่ 3 ประการ ดังนี้

ประการที่ 1) อัตราดอกเบี้ยที่เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากแบบจำลองควรมีค่าเป็นบวกเท่านั้น เพราะหากแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมีโอกาสให้ผลลัพธ์เป็นอัตราดอกเบี้ยที่เป็นลบได้ จะหมายความว่าทางเลือกในการลงทุนนั้นไม่ใช่ทางเลือกในการลงทุนที่ดี ซึ่งถึงการลงทุนในโครงนั้นขาดทุน ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีโอกาสให้ผลลัพธ์อัตราดอกเบี้ยที่เป็นลบได้เป็นแบบที่ไม่ดี ไม่สมเหตุสมผล

ประการที่ 2) อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ที่ได้จากแบบจำลองควรจะมีพฤติกรรมรูปถดถอยอัตโนมัติ (autoregressive) ซึ่งหมายถึง การที่สมารถใช้ค่าอัตราดอกเบี้ยของในตัวแบบในการพยากรณ์อัตราดอกเบี้ยเทอมต่อไปนั่นเอง ค่าของอัตราดอกเบี้ย r_t ที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาจะถูกดึงกลับเข้าสู่ค่าอัตราดอกเบี้ยเฉลี่ยระยะยาว และจะไม่ลู่ออก นั่นคือ อัตราดอกเบี้ยจะไม่สามารถเคลื่อนออกนอกเส้นทางสู่ค่าที่เป็นบวกอนันต์ ($+\infty$) หรือลบอนันต์ ($-\infty$) ได้ ($\lim_{t\to\infty} r_t \neq \pm\infty$) ซึ่ง

ถ้าหากแบบจำลองไม่มีคุณสมบัติการดึงอัตราดอกเบี้ยกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาวแล้ว ค่าอัตราดอกเบี้ยที่ได้อาจจะไม่สมเหตุสมผล กล่าวคือ ค่าอัตราดอกเบี้ยจากแบบจำลองอาจจะอยู่ที่อัตรามากเกินไปไม่สอดคล้องกับความเป็นจริงและทำให้แบบจำลองขาดประสิทธิภาพในการนำไปใช้งานจริง

ประการที่ 3) แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยควรมีสูตรรูปปิด (closed form formula) เพื่อให้สะดวกสำหรับการนำไปใช้งาน รวมทั้งสูตรรูปปิดในการคำนวณราคาของตราสารหนี้และราคาของอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องเพื่อความสะดวกของผู้ใช้งาน ซึ่งสูตรรูปปิดสำหรับใช้ในการคำนวณราคาดังกล่าวควรอยู่ในรูปแบบที่เรียบง่าย ตรงไปตรงมา สะดวกและง่ายต่อการนำไปใช้งาน แบบจำลองที่ให้สูตรในการคำนวณราคาที่ซับซ้อนเกินไปทำให้การใช้งานยุ่งยากและเสียเวลาในการคำนวณซึ่งอาจไม่เหมาะสมกับการนำมาใช้งานจริง

นอกจากลักษณะอันพึงประสงค์ทั้ง 3 ประการข้างต้นแล้ว ยังมีลักษณะอันพึงประสงค์อื่น ๆ อีกที่ควรนำมาพิจารณาในการเลือกแบบจำลองเพื่อนำไปใช้งานจริง เช่น แบบจำลองควรมีความยืดหยุ่นเพียงพอและสามารถปรับใช้กับเครื่องมือทางการเงิน อื่น ๆ อาทิ อนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น หรือผลิตภัณฑ์ทางการเงินใหม่ ๆ แบบจำลองพึงจะมีค่าผลลัพธ์ที่มีลักษณะพลวัต (dynamic) และสมเหตุสมผล เช่น แบบจำลองพึงให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสิ่งที่ผู้ใช้งานสามารถสังเกตเห็นได้ทั้งจากปัจจุบันและอดีต โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยที่ได้จากแบบจำลองควรสามารถอธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยในตลาดได้เป็นอย่างดีหรืออย่างน้อยควรต้องให้ค่าโดยประมาณที่ดีได้ในระดับที่ผู้ปฏิบัติยอมรับได้ มีความความเชื่อถือในการนำแบบจำลองนั้นไปใช้งานจริง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ที่เป็นที่รู้จักและนิยมใช้กันทั่วไป เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานพอสังเขป แบบจำลองดังกล่าว ได้แก่ แบบจำลองของ Vasicek แบบจำลอง CIR แบบจำลอง Ho-Lee และแบบจำลอง Black-Derman-Toy

7.2 แบบจำลองของ Vasicek และแบบจำลอง CIR

แบบจำลอง Vasicek และ แบบจำลอง CIR เป็นแบบจำลองตัวแปรหนึ่งสถานะที่อธิบายโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r ที่มีกระบวนการค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean-reverting process) ซึ่งเป็นกระบวนการที่อธิบายว่าเมื่ออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r เปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นสูงกว่าปกติ จะถูก

ดึงกลับไปสู่ระดับค่าเฉลี่ยระยะยาว เมื่ออัตราระยะสั้น r เปลี่ยนแปลงลดต่ำลงกว่าปกติก็จะมีการเลื่อนขึ้นไปสู่ระดับเฉลี่ยระยะยาวเช่นกัน โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r สามารถอธิบายได้ดังสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกได้ดังสมการต่อไปนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^{\beta} dW_t \tag{7.1}$$

โดยที่ a , b , σ เป็นค่าคงที่บวก, β เป็นค่าคงที่ที่ไม่เป็นลบ, b เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะยาว และ a เป็นค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean reversion) ซึ่งทำหน้าที่ปรับการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย r ระยะสั้นให้มีแนวโน้มลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ยระยะยาวโดยมีความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2 r^{2\beta}$

เมื่อ σ คือ ความผันผวน (volatility) หรือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)

β คือ ค่าความยืดหยุ่นที่ใช้วิเคราะห์รูปแบบของแบบจำลอง Vasicek และแบบจำลอง CIR

dt คือ ขนาดการเปลี่ยนแปลงของช่วงเวลา

dW_t เป็นตัวแปรเชิงสุ่มบราวน์โดยที่ $dz \sim N(0, dt)$

สมการ (7.1) ในรูปการณ์ประมาณค่าสามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta r = a(b - r_i)\Delta t + \sigma r_i^{\beta} \Delta W_t$$

เมื่อ $\Delta r = r_{i+1} - r_i$ นั่นคือสามารถพิจารณาว่า $a(b - r_i)\Delta t$ เป็นค่าประมาณของ Δr เทอมของ $\sigma r^{\beta} \Delta W_t$ ถูกพิจารณาเป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณซึ่งมีการแจกแจงปกติซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ $\sigma^2 r^{2\beta} \Delta t$ ในที่นี้จะพิจารณาค่าพารามิเตอร์ β เป็นสองกรณีดังนี้ $\beta = 0$ และ $\beta = 0.5$

7.2.1 แบบจำลอง Vasicek

แบบจำลอง Vasicek คือแบบจำลอง (7.1) ในกรณีที่ $\beta = 0$ ซึ่งได้รับการนำมาพิจารณาเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1977 โดยแบบจำลอง Vasicek อยู่ในรูป

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{7.2}$$

สำหรับแบบจำลอง Vasicek จะได้ $r_t \sim N\left(e^{-at} r_0 + b\left(1 - e^{-at}\right), \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right)$ ซึ่งทำค่าอัตราดอกเบี้ย r ตามทฤษฎีสามารถมีค่าเป็นศูนย์และเป็นลบได้ หากเราพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาของหุ้นหรืออัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของหุ้นก็สามารถประยุกต์ใช้แบบจำลองเพื่ออธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราการเปลี่ยนแปลงของราคาหรือผลตอบแทนของหุ้นดังกล่าวได้

ตัวอย่างที่ 7.1 สมมติหุ้น aaa มีอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังเป็นดังตาราง ในที่นี้เราพิจารณาอัตราการการเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จะเห็นว่าค่าอัตราดอกเบี้ยในที่นี้สามารถมีค่าเป็นศูนย์และเป็นลบได้เนื่องจากเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลง การสร้างแบบจำลอง Vasicek กรณีที่ $\beta = 0$ ตามสมการ (7.20), $dr = a(b-r)dt + \sigma dW_t$

วิธีทำ เริ่มต้นโดยกำหนดให้ $\Delta t = 1$และพิจารณาว่า $a(b-r_i)$ เป็นค่าประมาณของ $\triangle r$ และเทอมของ $\sigma\triangle z$ เป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณซึ่งมีการแจกแจงปกติซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 จากข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงราคาย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น (โดยสุ่ม) $a = a_0, b = b_0, \sigma = \sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $a = b = \sigma = 0.02$)

ขั้นที่ 2) สร้างคอลัมน์ $dr \approx \Delta r = r_{t+1} - r_t$, $a(b-r_t)$, $x \equiv a(r_t - b) - dr$,

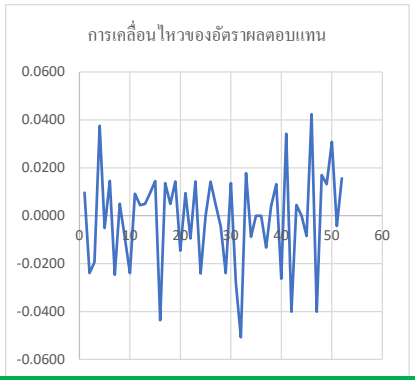
$pdf \equiv \text{NORMDIST}(x,0,\sigma_0,\text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.1

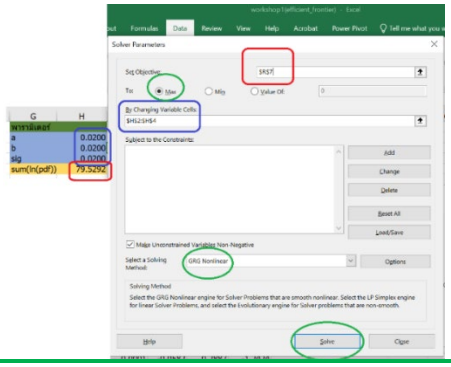
ขั้นที่ 3) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, σ โดย excel solver ในโปรแกรม excel แก้ปัญหาค่าสูงสุด โดย $sum(\ln(pdf))$

เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ a, b, σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้ว ผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ a, b และ σ ของแบบจำลอง Vasicek ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa ซึ่งอยู่ในรูป

$$dr = 1.3894(0.0000 - r)dt + 0.0190dW_t$$

ตารางที่ 7.1 *(สมมติ)อัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้น aaa*





	พารามิเตอร์					
	a	1.3894				
	b	0.0000				
	sig	0.0190				
	sum(ln(pdf))	129.8854				

วันเดือนปี	r	dr	a(b-r)	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
Jan 04, 2022	0.0096					
Jan 05, 2022	-0.0239	-0.0335	-0.0133	-0.0202	11.9538	2.4810
Jan 06, 2022	-0.0194	0.0045	0.0332	-0.0287	6.6855	1.8999
Jan 07, 2022	0.0375	0.0569	0.0270	0.0299	6.0421	1.7988
Jan 10, 2022	-0.0051	-0.0426	-0.0521	0.0095	18.5622	2.9211
Jan 11, 2022	0.0146	0.0197	0.0071	0.0126	16.8666	2.8253
Jan 12, 2022	-0.0246	-0.0392	-0.0203	-0.0189	12.7925	2.5489
Jan 13, 2022	0.0050	0.0296	0.0342	-0.0046	20.4421	3.0176
Jan 14, 2022	-0.0095	-0.0145	-0.0069	-0.0076	19.4409	2.9674
Jan 17, 2022	-0.0239	-0.0144	0.0132	-0.0276	7.2914	1.9867
Jan 18, 2022	0.0092	0.0331	0.0332	-0.0001	21.0471	3.0468
Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	-0.0128	0.0080	19.2613	2.9581
Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	-0.0061	0.0066	19.8045	2.9859
Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	-0.0068	0.0113	17.6162	2.8688
Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	-0.0131	0.0182	13.3005	2.5878
Jan 25, 2022	-0.0436	-0.0581	-0.0201	-0.0380	2.8350	1.0420
Jan 26, 2022	0.0136	0.0572	0.0606	-0.0034	20.7160	3.0309
Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	-0.0189	0.0102	18.2125	2.9021
Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	-0.0068	0.0162	14.6023	2.6812
Feb 01, 2022	-0.0146	-0.0289	-0.0199	-0.0090	18.7886	2.9332
Feb 02, 2022	0.0094	0.0240	0.0203	0.0037	20.6470	3.0276
Feb 03, 2022	-0.0095	-0.0189	-0.0131	-0.0058	20.0718	2.9993
Feb 04, 2022	0.0143	0.0238	0.0132	0.0106	18.0001	2.8904
Feb 07, 2022	-0.0241	-0.0384	-0.0199	-0.0185	13.0505	2.5688
Feb 08, 2022	0.0000	0.0241	0.0335	-0.0094	18.6197	2.9242
Feb 09, 2022	0.0142	0.0142	0.0000	0.0142	15.8974	2.7662
Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	-0.0197	0.0100	18.2980	2.9068
Feb 11, 2022	-0.0045	-0.0090	-0.0063	-0.0027	20.8274	3.0363
Feb 14, 2022	-0.0239	-0.0194	0.0063	-0.0257	8.4232	2.1310
Feb 15, 2022	0.0136	0.0375	0.0332	0.0043	20.5142	3.0211
Feb 17, 2022	-0.0281	-0.0417	-0.0189	-0.0228	10.2066	2.3230
Feb 18, 2022	-0.0507	-0.0226	0.0390	-0.0616	0.1063	-2.2413
Feb 21, 2022	0.0178	0.0685	0.0704	-0.0019	20.9372	3.0415
Feb 22, 2022	-0.0088	-0.0266	-0.0247	-0.0019	20.9453	3.0419
Feb 23, 2022	0.0000	0.0088	0.0122	-0.0034	20.7063	3.0304
Feb 24, 2022	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	21.0474	3.0468
Feb 25, 2022	-0.0133	-0.0133	0.0000	-0.0133	16.4545	2.8006
Feb 28, 2022	0.0041	0.0174	0.0185	-0.0011	21.0133	3.0452
Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	-0.0057	0.0148	15.5193	2.7421
Mar 01, 2022	-0.0263	-0.0395	-0.0183	-0.0212	11.2869	2.4236
Mar 02, 2022	0.0342	0.0605	0.0365	0.0240	9.4676	2.2479
Mar 03, 2022	-0.0401	-0.0743	-0.0475	-0.0268	7.7560	2.0485
Mar 04, 2022	0.0045	0.0446	0.0557	-0.0111	17.7230	2.8749
Mar 07, 2022	0.0000	-0.0045	-0.0063	0.0018	20.9576	3.0425
Mar 08, 2022	-0.0085	-0.0085	0.0000	-0.0085	19.0340	2.9462
Mar 09, 2022	0.0424	0.0509	0.0118	0.0391	2.5098	0.9202
Mar 10, 2022	-0.0401	-0.0825	-0.0589	-0.0236	9.7017	2.2723
Mar 11, 2022	0.0170	0.0571	0.0557	0.0014	20.9912	3.0441
Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	-0.0236	0.0198	12.1837	2.5001
Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	-0.0183	0.0360	3.4526	1.2391
Mar 16, 2022	-0.0043	-0.0352	-0.0429	0.0077	19.3671	2.9636
Mar 17, 2022	0.0156	0.0199	0.0060	0.0139	16.0690	2.7769

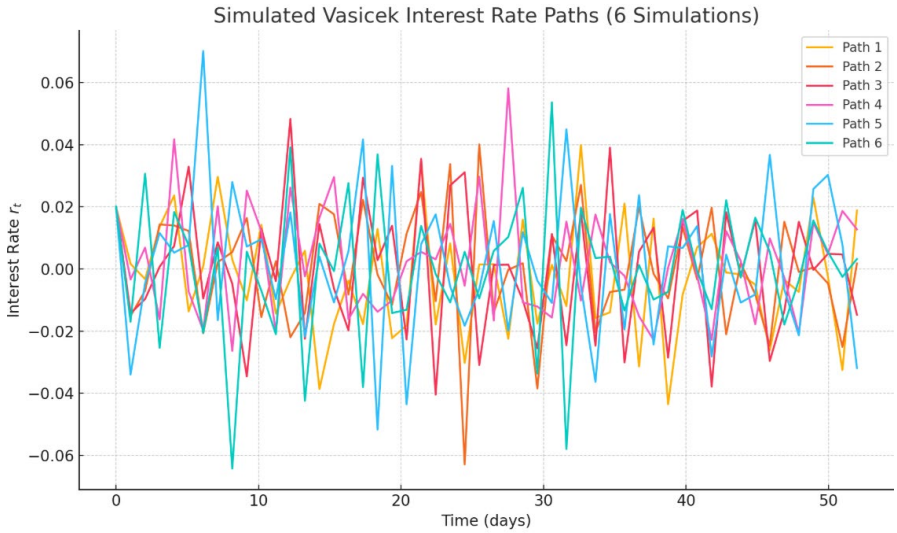
ขั้นที่ 4) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยภายใต้แบบจำลอง Vasicek เพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง

4.1) กำหนดพารามิเตอร์: a ความเร็วในการคืนกลับสู่ค่าเฉลี่ย b ค่าเฉลี่ยระยะยาว σ ค่าความผันผวน r_0 อัตราดอกเบี้ยเริ่มต้น T เวลาจำลองทั้งหมด (วัน) Δt ขนาดช่วงเวลา N จำนวนเส้นทางที่ต้องการจำลอง

4.2) เตรียมอาร์เรย์เก็บค่าการจำลอง: สร้างเมทริกซ์ขนาด $N \times \text{steps}$ เพื่อเก็บค่าของ r_t สำหรับทุกเส้นทางและทุกช่วงเวลา

4.3) วนลูปจำลองแต่ละเส้นทางโดยใช้สูตรของ Vasicek

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_t \text{ โดย } Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$



รูปที่ 7.1 *การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Vasicek*

จากกราฟแสดงการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ยภายใต้แบบจำลอง Vasicek เป็นระยะเวลา 52 วัน โดยแต่ละเส้นทางแสดงความเป็นไปได้ของอัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลมาจากความแปรปรวนที่ถูกควบคุมโดยพารามิเตอร์ σ เส้นแต่ละสีแทนเส้นทางจำลองของ r_t โดย มีลักษณะ mean-reverting คือมีแนวโน้มกลับเข้าใกล้ค่าศูนย์ตามพารามิเตอร์ $b = 0$ □

หมายเหตุ โค้ด Python สำหรับจำลอง 6 เส้นทาง ตามตัวอย่างที่ 7.7

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# === Parameters ===
a = 1.3894       # mean reversion speed
b = 0.0000       # long-term mean
sigma = 0.0190   # volatility
r0 = 0.02        # initial rate
T = 52           # total time (days)
dt = 1           # time step
n_steps = int(T / dt)
n_paths = 6      # number of paths to simulate
# === Time grid and result matrix ===
time = np.linspace(0, T, n_steps)
rates = np.zeros((n_paths, n_steps))
rates[:, 0] = r0  # set initial value for all paths
# === Simulate each path ===
np.random.seed(42)
for i in range(n_paths):
    for t in range(1, n_steps):
        Z = np.random.randn()
        dr = a * (b - rates[i, t-1]) * dt + sigma * np.sqrt(dt) * Z
        rates[i, t] = rates[i, t-1] + dr
# === Plot results ===
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(n_paths):
    plt.plot(time, rates[i], label=f'Path {i+1}')
plt.title("Multiple Simulations of Vasicek Interest Rate Process")
plt.xlabel("Time (days)")
plt.ylabel("Interest Rate $r_t$")
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.legend()
plt.show()
```

อย่างไรก็ตาม ในการนำแบบจำลอง Vasicek ตามรูปสมการ (7.2) ในการอธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยและอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ซึ่งค่าของอัตราดอกเบี้ยมีค่าเป็นบวกเสมอ พบว่ามีค่าสูงความผันผวน ในปี ค.ศ. 1985 จอห์นซีค็อกซ์ , โจนาธานอีอินเจอร์โซลล์ และสตีเฟนเอรอสส์ (John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll and Stephen A. Ross) ได้ปรับปรุงสมการของแบบจำลอง Vasicek ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นเพื่อแก้จุดด้อยที่เกิดขึ้นซึ่งทำให้ดอกเบี้ยระยะสั้นมีค่าติดลบ ซึ่งเรียกชื่อว่า แบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross หรือแบบจำลอง CIR ดังสมการที่ (7.3)

7.2.2 แบบจำลอง CIR

แบบจำลอง CIR คือแบบจำลอง (7.1) ในกรณีที่ $\beta = 0.5$ เป็นแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นเพื่อลดความผันผวนที่สูงจากแบบจำลอง Vasicek โดยแบบจำลอง CIR อธิบายในรูปสมการดังนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t \tag{7.3}$$

โดยที่ $2ab > \sigma^2$ ซึ่งจะทำให้อัตราดอกเบี้ย r_t มีค่าเป็นบวกเสมอ สำหรับแบบจำลองนี้

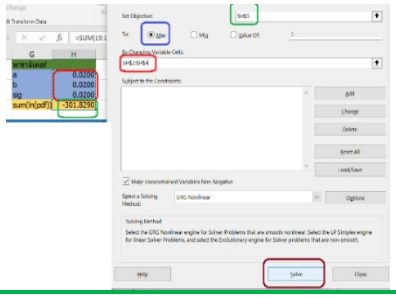
ตัวอย่างที่ 7.2 สมมติอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของหุ้นกู้ aaa เป็นไปตามตารางที่ 7.2 สามารถสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0.5$ ตามสมการ (7.1), $dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$

วิธีทำ จากข้อมูลอัตราอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น(โดยสุ่ม) $a = a_0, b = b_0, \sigma = \sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $a = b = \sigma = 0.02$)

ตารางที่ 7.2 *(สมมติ) อัตราการดอกเบี้ยรายวัน ย้อนหลัง 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นกู้ aaa*





	พารามิเตอร์					
	a	0.6572				
	b	0.0166				
	sig	0.1003				
	sum(ln(pdf))	157.0656				
วันเดือนปี	r	dr	a(b-r)	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
Jan 04, 2022	0.0096					
Jan 05, 2022	0.0239	0.0143	0.0046	0.0097	24.9473	3.2168
Jan 06, 2022	0.0194	-0.0045	-0.0048	0.0003	25.7333	3.2478
Jan 07, 2022	0.0375	0.0181	-0.0018	0.0199	10.3089	2.3330
Jan 10, 2022	0.0051	-0.0324	-0.0137	-0.0187	12.9440	2.5606
Jan 11, 2022	0.0146	0.0095	0.0076	0.0019	53.7087	3.9836
Jan 12, 2022	0.0246	0.0100	0.0013	0.0087	25.4698	3.2375
Jan 13, 2022	0.0050	-0.0196	-0.0053	-0.0143	16.7356	2.8175
Jan 14, 2022	0.0095	0.0045	0.0076	-0.0031	51.0601	3.9330
Jan 17, 2022	0.0239	0.0144	0.0047	0.0097	24.8631	3.2134
Jan 18, 2022	0.0092	-0.0147	-0.0048	-0.0099	20.9856	3.0438
Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	0.0049	-0.0097	25.0346	3.2203
Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	0.0080	-0.0075	31.6536	3.4549
Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	0.0077	-0.0032	51.2598	3.9369
Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	0.0047	0.0004	41.0111	3.7138
Jan 25, 2022	0.0436	0.0291	0.0014	0.0277	2.3688	0.8624
Jan 26, 2022	0.0136	-0.0300	-0.0177	-0.0123	16.0549	2.7760
Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	0.0020	-0.0107	22.4936	3.1132
Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	0.0077	0.0017	55.1829	4.0107
Feb 01, 2022	0.0146	0.0003	0.0015	-0.0012	33.1041	3.4997
Feb 02, 2022	0.0094	-0.0052	0.0013	-0.0065	28.4954	3.3497
Feb 03, 2022	0.0095	0.0001	0.0047	-0.0046	36.6325	3.6009
Feb 04, 2022	0.0143	0.0048	0.0047	0.0001	40.8199	3.7092
Feb 07, 2022	0.0241	0.0098	0.0015	0.0083	26.2044	3.2659
Feb 08, 2022	0.0040	-0.0201	-0.0049	-0.0152	15.9379	2.7687
Feb 09, 2022	0.0142	0.0102	0.0083	0.0019	60.1027	4.0961
Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	0.0016	-0.0113	21.3848	3.0627
Feb 11, 2022	0.0045	0.0000	0.0080	-0.0080	29.4750	3.3835
Feb 14, 2022	0.0239	0.0194	0.0080	0.0114	13.9412	2.6348
Feb 15, 2022	0.0136	-0.0103	-0.0048	-0.0055	24.1655	3.1849
Feb 17, 2022	0.0281	0.0145	0.0020	0.0125	19.2206	2.9560
Feb 18, 2022	0.0507	0.0226	-0.0076	0.0302	4.7459	1.5573
Feb 21, 2022	0.0178	-0.0329	-0.0224	-0.0105	15.8630	2.7640
Feb 22, 2022	0.0088	-0.0090	-0.0008	-0.0082	24.7005	3.2068
Feb 23, 2022	0.0050	-0.0038	0.0051	-0.0089	27.0312	3.2970
Feb 24, 2022	0.0034	-0.0016	0.0076	-0.0092	24.1314	3.1835
Feb 25, 2022	0.0133	0.0099	0.0087	0.0012	66.7626	4.2011
Feb 28, 2022	0.0041	-0.0092	0.0022	-0.0114	21.2746	3.0575
Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	0.0082	0.0009	61.5566	4.1200
Mar 01, 2022	0.0263	0.0131	0.0022	0.0109	22.1998	3.1001
Mar 02, 2022	0.0342	0.0079	-0.0064	0.0143	16.6901	2.8148
Mar 03, 2022	0.0401	0.0059	-0.0116	0.0175	13.8065	2.6251
Mar 04, 2022	0.0045	-0.0356	-0.0154	-0.0202	12.0044	2.4853
Mar 07, 2022	0.0032	-0.0013	0.0080	-0.0093	23.0180	3.1363
Mar 08, 2022	0.0085	0.0053	0.0088	-0.0035	58.0895	4.0620
Mar 09, 2022	0.0424	0.0339	0.0053	0.0286	0.3631	-1.0131
Mar 10, 2022	0.0401	-0.0023	-0.0170	0.0147	15.0201	2.7094
Mar 11, 2022	0.0170	-0.0231	-0.0154	-0.0077	18.4766	2.9165
Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	-0.0003	-0.0035	29.4196	3.3817
Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	0.0022	0.0155	14.0657	2.6437
Mar 16, 2022	0.0043	-0.0266	-0.0094	-0.0172	14.0574	2.6431
Mar 17, 2022	0.0156	0.0113	0.0081	0.0032	53.8438	3.9861

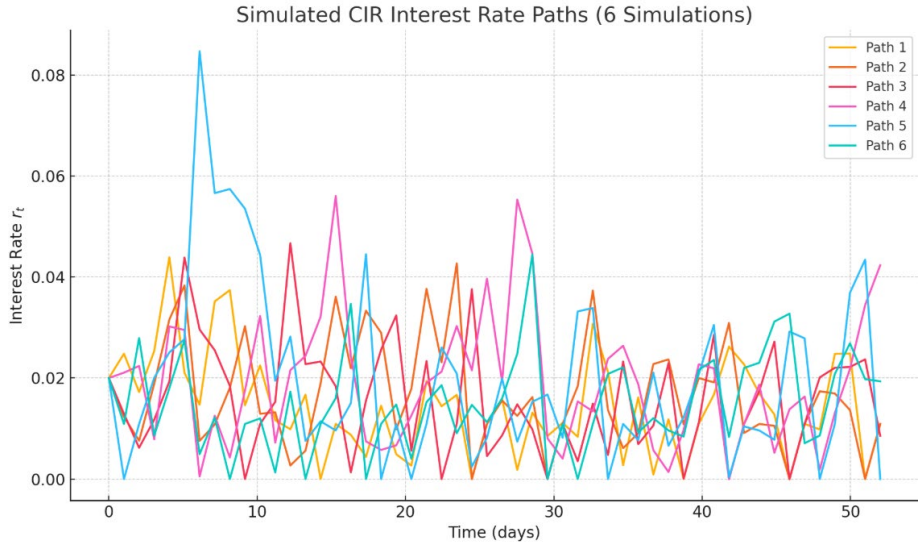
ขั้นที่ 2) สร้างคอลัมน์ $dr \approx \Delta r = r_{t+1} - r_t$, $a(b-r_t)$, $x \equiv a(r_t - b) - dr$,

$pdf \equiv \text{NORMDIST}(x,0,\sigma_0\sqrt{r_t},\text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.2

ขั้นที่ 3) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, σ โดยใช้ excel solver คำนวณปัญหาค่าสูงสุด โดย $sum(\ln(pdf))$ เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ a, b, σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้วผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ a, b และ σ ที่ได้จากข้อมูล ดังนั้นแบบจำลอง Vasicek ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa คือ

$$dr_t = 0.6572(0.0166 - r_t)dt + 0.1003\sqrt{r_t}\,dW_t$$

ขั้นที่ 4) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยเพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง



รูปที่ 7.2 *การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Vasicek*

กราฟนี้แสดงผลการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ย ตามแบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross (CIR) ตามพารามิเตอร์ ความเร็วในการคืนกลับสู่ค่าเฉลี่ย $a = 0.6572$, $b = 0.0166$ ค่าเฉลี่ยระยะยาว, ค่าความผันผวน $\sigma = 0.1003$ และค่าเริ่มต้นของอัตราดอกเบี้ย $r_0 = 0.02$ จากกราฟการจำลองจะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ยจะไม่เป็นลบ (เพราะใช้ $\sqrt{r_t}$ ในเทอมของการสุ่ม) โดยแต่ละเส้นทางเส้นทางจะมีความผันผวนขึ้นกับค่าของ r_t ในแต่ละช่วงเวลา □

7.3 แบบจำลอง Ho-Lee

จากสมการ (7.1) เนื่องจากในการคาดการณ์ตลาดที่เกี่ยวกับอัตราดอกเบี้ยในอนาคตมีความเกี่ยวข้องกับเวลา จึงได้มีการเพิ่มพารามิเตอร์ $\theta(t)$ ซึ่งถูกกำหนดบนตัวแปรที่มีแนวโน้มวกกลับมายังอัตราดอกเบี้ยระยะยาว b และพิจารณาพารามิเตอร์ a และ σ ขึ้นอยู่กับเวลา t ด้วย ดังนั้นสมการ (7.1) จึงมีความทั่วไปมากขึ้น ซึ่งอธิบายได้สมการต่อไปนี้

$$dr_t = \left[\theta(t) + a(t)(b - r_t)\right]dt + \sigma(t) r_t^{\beta} dW_t \tag{7.4}$$

จากสมการที่ (7.4) กรณีที่ $a(t) \neq 0$ จะได้ว่า

$$dr_t = a(t)\left[\theta(t)/a(t) + b - r_t\right]dt + \sigma(t) r_t^{\beta} dW_t$$

7.3.1 แบบจำลอง Ho-Lee

แบบจำลอง Ho-Lee คือแบบจำลองตามสมการ (7.4) ในกรณี $\beta=0$, $a(t)=0$ โดยการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r อธิบายได้ด้วยสมการสโตแคสติก ดังนี้

$$dr_t=\theta(t)dt+\sigma(t)dW_t \tag{7.5}$$

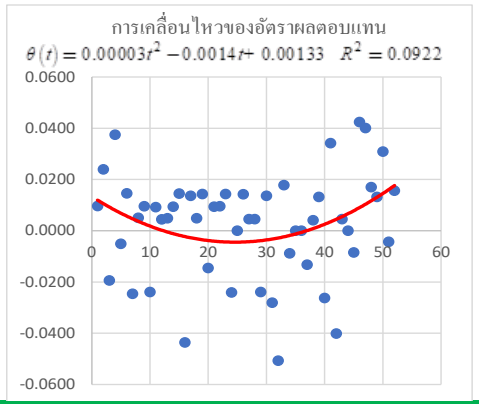
จากสมการ (7.5) ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชัน $\theta(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถเลือกให้เหมาะสมซึ่งทำให้ตัวแปรเชิงสุ่ม r มีค่าความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 อย่างไรก็ตามแบบจำลองนี้มีข้อด้อย คือ ไม่สามารถปรับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r ให้เข้าสู่อัตราดอกเบี้ยระยะยาวได้

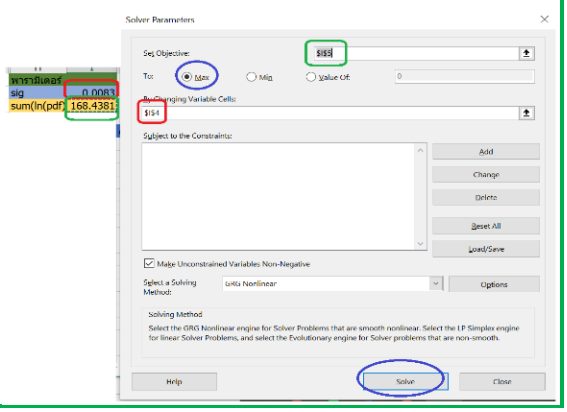
ตัวอย่างที่ 7.3 สมมติอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของหุ้นกู้ aaa เป็นไปตามตารางที่ 7.2 สามารถสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta=0$, $a(t)=0$ และ $\sigma(t)=\sigma$ ตามสมการ (7.5), $dr_t=\theta(t)dt+\sigma dW_t$ จากข้อมูลอัตราอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง ได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น (โดยสุ่ม) $\sigma=\sigma_0$ (ในตัวอย่างนี้กำหนด $\sigma=0.02$)

ขั้นที่ 2) กำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$ ในที่นี้ใช้คำสั่งการหา format trendline ใน excel โดยจากการพิจารณาลักษณะแนวโน้มของข้อมูลเลือก format trendline โดยเลือกเส้นแนวโน้มจากค่า R^2 (r-square) ที่มีค่าสูงสุด โดยในที่นี้เลือกเป็น เส้นแนวโน้มพหุนามกำลัง 2 ในรูป $\theta(t)=0.00003t^2-0.0014t+0.00133$ สำหรับ $t=(0,51]$ (วัน) ซึ่งมี $R^2=0.0922$ จะเห็นว่าค่า R^2 ค่อนข้างต่ำ อย่างไรก็ตามก็สูงกว่าเส้นแนวโน้มเส้นตรง และ logarithmic ในที่นี้เพียงยกตัวอย่างเป็นแนวทาง ผู้อ่านสามารถใช้แนวทางอื่นในการกำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$

ตารางที่ 7.3 (สมมติ) อัตราการดอกเบี้ยรายวัน ย้อนหลัง 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นกู้ aaa





		พารามิเตอร์					
		sig	0.0325				
		sum(ln(pdf))	102.4571				
วันที่ t	วันเดือนปี	r	dr	$\theta(t)$	dr-a(b-r)	pdf	ln(pdf)
0	Jan 04, 2022	0.0096					
1	Jan 05, 2022	0.0239	0.0143	0.0119	0.0024	12.2594	2.5063
2	Jan 06, 2022	-0.0194	-0.0433	0.0106	-0.0539	3.0922	1.1289
3	Jan 07, 2022	0.0375	0.0569	0.0094	0.0475	4.2064	1.4366
4	Jan 10, 2022	-0.0051	-0.0426	0.0082	-0.0508	3.6144	1.2849
5	Jan 11, 2022	0.0146	0.0197	0.0071	0.0127	11.3930	2.4330
6	Jan 12, 2022	-0.0246	-0.0392	0.0060	-0.0452	4.6647	1.5400
7	Jan 13, 2022	0.0050	0.0296	0.0050	0.0246	9.2165	2.2210
8	Jan 14, 2022	0.0095	0.0045	0.0040	0.0005	12.2908	2.5089
9	Jan 17, 2022	-0.0239	-0.0334	0.0031	-0.0365	6.5242	1.8755
10	Jan 18, 2022	0.0092	0.0331	0.0023	0.0308	7.8354	2.0587
11	Jan 19, 2022	0.0044	-0.0048	0.0015	-0.0063	12.0606	2.4899
12	Jan 20, 2022	0.0049	0.0005	0.0008	-0.0003	12.2916	2.5089
13	Jan 21, 2022	0.0094	0.0045	0.0002	0.0043	12.1833	2.5001
14	Jan 24, 2022	0.0145	0.0051	-0.0004	0.0055	12.1157	2.4945
15	Jan 25, 2022	-0.0436	-0.0581	-0.0010	-0.0572	2.6080	0.9586
16	Jan 26, 2022	0.0136	0.0572	-0.0014	0.0586	2.4056	0.8778
17	Jan 27, 2022	0.0049	-0.0087	-0.0018	-0.0069	12.0198	2.4866
18	Jan 28, 2022	0.0143	0.0094	-0.0022	0.0116	11.5341	2.4453
19	Feb 01, 2022	-0.0146	-0.0289	-0.0025	-0.0264	8.8231	2.1774
20	Feb 02, 2022	0.0094	0.0240	-0.0027	0.0267	8.7632	2.1706
21	Feb 03, 2022	0.0095	0.0001	-0.0029	0.0030	12.2408	2.5048
22	Feb 04, 2022	0.0143	0.0048	-0.0030	0.0078	11.9440	2.4802
23	Feb 07, 2022	-0.0241	-0.0384	-0.0030	-0.0354	6.7877	1.9151
24	Feb 08, 2022	0.0000	0.0241	-0.0030	0.0271	8.6697	2.1598
25	Feb 09, 2022	0.0142	0.0142	-0.0029	0.0172	10.6904	2.3693
26	Feb 10, 2022	0.0045	-0.0097	-0.0028	-0.0069	12.0191	2.4865
27	Feb 11, 2022	0.0045	0.0000	-0.0026	0.0026	12.2519	2.5057
28	Feb 14, 2022	-0.0239	-0.0284	-0.0024	-0.0260	8.9136	2.1876
29	Feb 15, 2022	0.0136	0.0375	-0.0021	0.0396	5.8457	1.7657
30	Feb 17, 2022	-0.0281	-0.0417	-0.0017	-0.0400	5.7515	1.7495
31	Feb 18, 2022	-0.0507	-0.0226	-0.0013	-0.0213	9.9046	2.2930
32	Feb 21, 2022	0.0178	0.0685	-0.0008	0.0693	1.2594	0.2306
33	Feb 22, 2022	-0.0088	-0.0266	-0.0002	-0.0264	8.8364	2.1789
34	Feb 23, 2022	0.0000	0.0088	0.0004	0.0084	11.8854	2.4753
35	Feb 24, 2022	0.0000	0.0000	0.0011	-0.0011	12.2857	2.5084
36	Feb 25, 2022	-0.0133	-0.0133	0.0018	-0.0151	11.0344	2.4010
37	Feb 28, 2022	0.0041	0.0174	0.0026	0.0148	11.0736	2.4046
38	Jan 31, 2022	0.0132	0.0091	0.0034	0.0057	12.1054	2.4936
39	Mar 01, 2022	-0.0263	-0.0395	0.0043	-0.0438	4.9385	1.5971
40	Mar 02, 2022	0.0342	0.0605	0.0053	0.0552	2.8938	1.0626
41	Mar 03, 2022	-0.0401	-0.0743	0.0063	-0.0806	0.5615	-0.5771
42	Mar 04, 2022	0.0045	0.0446	0.0074	0.0372	6.3775	1.8528
43	Mar 07, 2022	0.0000	-0.0045	0.0086	-0.0131	11.3348	2.4279
44	Mar 08, 2022	-0.0085	-0.0085	0.0098	-0.0183	10.4892	2.3503
45	Mar 09, 2022	0.0424	0.0509	0.0111	0.0399	5.7843	1.7551
46	Mar 10, 2022	0.0401	-0.0023	0.0124	-0.0147	11.0969	2.4067
47	Mar 11, 2022	0.0170	-0.0231	0.0138	-0.0369	6.4474	1.8637
48	Mar 14, 2022	0.0132	-0.0038	0.0152	-0.0190	10.3526	2.3372
49	Mar 15, 2022	0.0309	0.0177	0.0167	0.0010	12.2867	2.5085
50	Mar 16, 2022	-0.0043	-0.0352	0.0183	-0.0535	3.1591	1.1503
51	Mar 17, 2022	0.0156	0.0199	0.0199	0.0000	12.2922	2.5090

□

ขั้นที่ 3) สร้างคอลัมน์ $dr = \Delta r = r_{t+1} - r_t$, $\theta(t)$,

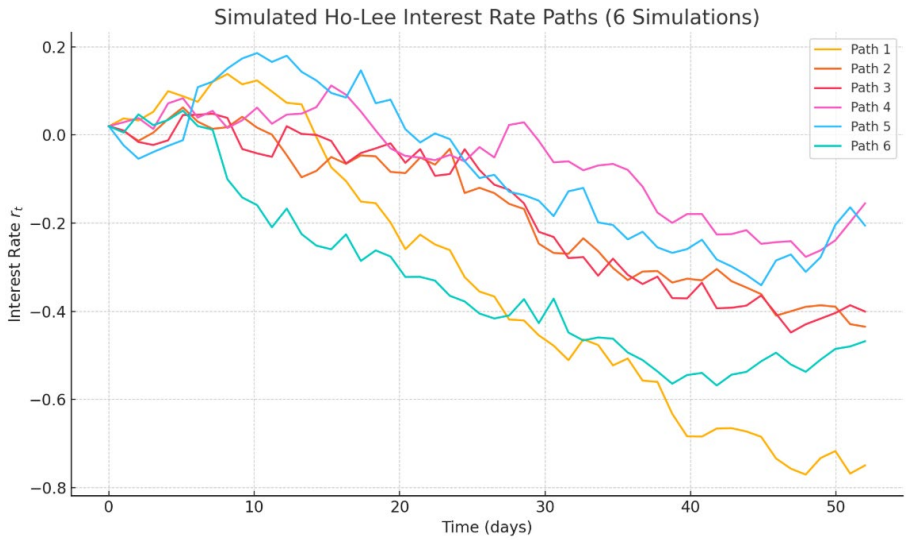
$x \equiv dr - \theta(t)$, $pdf \equiv \text{NORMDIST}(x,0,\sigma_0,\text{FALSE})$ (ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อน) และ $\ln(pdf)$ ดังตารางที่ 7.3

ขั้นที่ 4) ใช้วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด (maximum likelihood estimation:mle) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ โดยใช้ excel solver คำนวณปัญหาค่าสูงสุด โดย $sum(\ln(pdf))$ เป็นเซลล์ของค่าจุดประสงค์ σ เป็นตัวแปรตัดสินใจ เมื่อทำการแก้ปัญหาดังกล่าวแล้วผลลัพธ์ที่ได้ คือ ค่าของพารามิเตอร์ σ ที่ได้จากข้อมูล ดังนั้น แบบจำลอง Ho-Lee ที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงราคาหุ้น aaa คือ

$$dr_t = (0.00003t^2 - 0.0014t + 0.00133)dt + 0.0325dW_t \quad \text{สำหรับ } t = (0,51] \text{ (วัน)}$$

ในตัวอย่างนี้แสดงการหาแบบจำลอง Ho-Lee โดยประยุกต์ใช้ format trendline ในโปรแกรม excel ในการกำหนดฟังก์ชัน $\theta(t)$ จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยในอดีต

ขั้นที่ 5) จำลองหลายเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยเพื่อสร้างภาพรวมของพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย r_t ภายใต้ความไม่แน่นอนและวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลลัพธ์ในแต่ละเส้นทาง



รูปที่ 7.3 *การจำลองหลายเส้นทางของแบบจำลอง Ho-Lee*

กราฟนี้แสดงผลการจำลอง 6 เส้นทางของอัตราดอกเบี้ยรายวัน ตามแบบจำลอง Ho-Lee ในช่วงเวลา 52 วัน โดยใช้พารามิเตอร์และฟังก์ชัน $\theta(t)$ จากตัวอย่างที่ 7.9

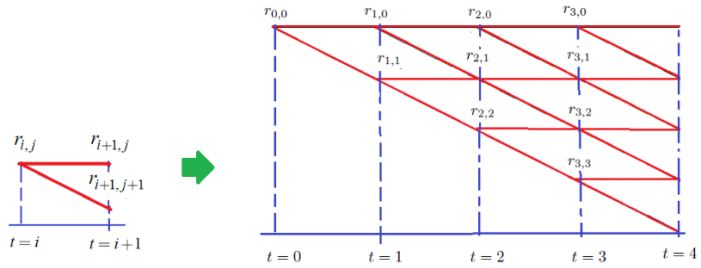
$$\theta(t) = 0.00003t^2 - 0.0014t + 0.00133\,,\ \sigma = 0.0325\,,\ r_0 = 0.02$$

โดยจากกราฟการจำลองของตัวแบบ Ho-Lee จะเห็นว่า ไม่จำกัดค่า r_t ให้อยู่เหนือศูนย์ คือ r_t สามารถติดลบได้ การเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยสะท้อนแนวโน้มของตลาดผ่านฟังก์ชัน $\theta(t)$ แบบกำลังสองที่ได้จากข้อมูลจริง ซึ่งเหมาะกับการใช้งานในตลาดที่ต้องการ “ความยืดหยุ่นในการกำหนดแนวโน้ม” □

7.3.2 แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค (binomial-lattice models) ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นซึ่งสามารถพิจารณาเป็นการประมาณค่าของแบบจำลองเวลาต่อเนื่องของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (continuous-time one factor short-rate model) โดยแบบจำลองโครงร่างต้นไม้ทวิภาคโดยทั่วไปนิยมใช้ในกำหนดราคาอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ยซึ่งมีการซื้อขายในตลาดการเงิน

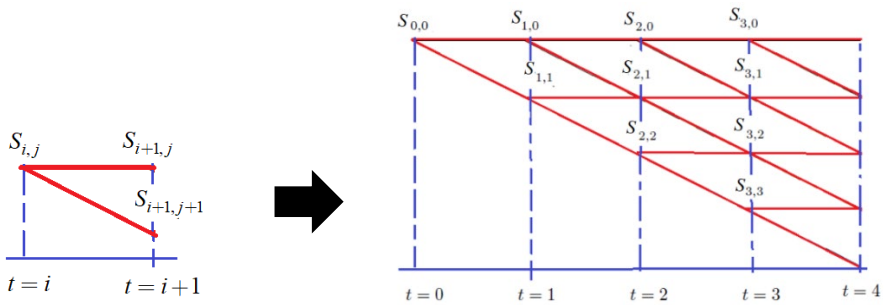
กำหนดให้ $N(i,j)$ แทนโหนดระบุเวลาที่ $t=i$ สภาวะที่ j, $r_{i,j}$ แทนอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t=i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i,i+1]$



รูปที่ 7.4 *โครงร่างตาข่ายของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น*

โดยการประยุกต์ใช้มาร์ทิงเกลสำหรับการกำหนดราคาสินทรัพย์ ให้ $S_{i,j}$ แทนราคาของสินทรัพย์ที่เวลา $t=i$ สภาวะที่ j

$$S_{i,j}=(1+r_{i,j})^{-1}\left(pS_{i+1,j+1}+(1-p)S_{i+1,j}\right) \tag{7.6}$$



รูปที่ 7.5 *โครงร่างตาข่ายของราคาสินทรัพย์*

แบบจำลอง Ho-Lee เวลาต่อเนื่อง : $dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t$

แบบจำลอง Ho-Lee เวลาไม่ต่อเนื่อง : $\Delta r = \theta(t)\Delta t + \varepsilon\left(0, \sigma^2(t)\Delta t\right)$

ให้ $r_{i,j}$ แทนอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t = i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i, i+1]$ นิยาม $R_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดย

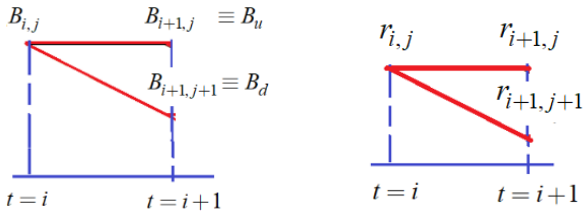
$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases}, \ (\because \Delta t = 1) \qquad (7.7)$$

เป็นการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยจากโหนด (i, j) ตามรูปที่ 7.3

จากสมการ (7.7) จะได้ว่า

$$\theta_i = \frac{r_{i+1,j} + r_{i+1,j+1} - 2r_{i,j}}{2} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = \frac{r_{i+1,j} - r_{i+1,j+1}}{2}$$

กำหนดให้ $B_{i,j}$ เป็นราคาตราสารหนี้ที่เวลาที่ i ($t = i$) สภาวะที่ j โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับ C บาท ที่เวลาที่ N ($t = N$) สำหรับทุก ๆ สภาวะ j , $j = 0, 1, ..., N$ ในโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลาของตราสารหนี้



รูปที่ 7.6 *โครงร่างตาข่ายแสดงการเคลื่อนไหวของราคาตราสารหนี้และอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น*

กำหนดให้ y_k (ต่อปี) เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-counpon bond) อายุไถ่ถอน (year to maturity) ที่ปี k , $k = 1, ..., N$ และกำหนดให้ B_0^k เป็นราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง มีราคาไถ่ถอนเท่ากับ 1 บาทที่อายุไถ่ถอน (year to maturity) k โดยใช้สมการมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดสามารถคำนวณอัตราดอกเบี้ย y_k ได้ดังนี้

$$B_0^k = \frac{C}{(1+y_k)^k} \ \Rightarrow \ y_k = \sqrt[k]{\frac{C}{B_0^k}} - 1 \ , \ k = 1, ..., N$$

สมมุติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาของตราสารหนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้น $p = 0.5$ สามารถเขียนโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค ได้ดังนี้

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 1 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ

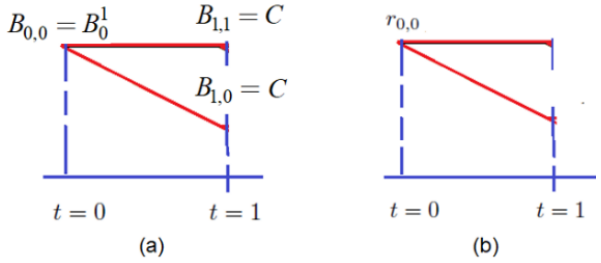
$$B_{0,0} = B_0^1 = C(1+y_1)^{-1},\ B_{1,0} = B_{1,1} = C$$

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) แก้สมการ จากขั้นที่ 2) เพื่อหา $r_{0,0}$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0} = y_1$ ในโครงร่างตาข่าย 0 คาบเวลา



รูปที่ 7.7 *(a) โครงร่างตาข่ายราคา 1 คาบเวลา (b) โครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 0 คาบเวลา*

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ

$$B_{0,0} = B_0^2 = C(1+y_2)^{-2}\ ,\quad B_{2,0} = B_{2,1} = B_{2,2} = C$$

กำหนด $r_{0,0} = y_1$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 0 คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 2 คาบเวลา

$$B_{1,0} = 0.5(1+r_{1,0})^{-1}(B_{2,0} + B_{2,1})$$

$$B_{1,1} = 0.5(1+r_{1,1})^{-1}(B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

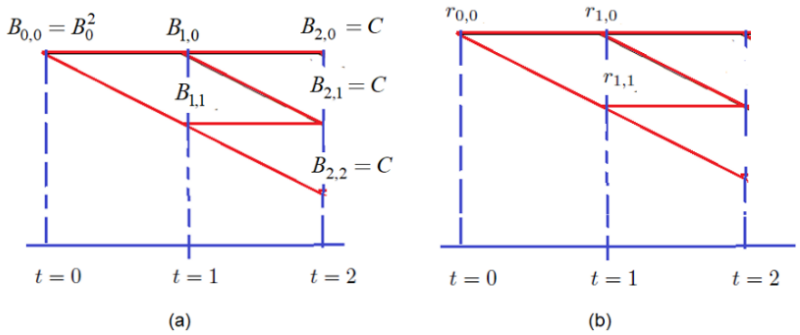
$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i \equiv r_u & ;prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i \equiv r_d & ;prob = 0.5 \end{cases}$$

จะได้ $r_{1,0} = r_{0,0} + \theta_0 + \sigma_0$ และ $r_{1,1} = r_{0,0} + \theta_0 - \sigma_0$

จะเห็นว่าค่าของ $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ σ_0 และ θ_0 เท่านั้น ดังนั้นหากเราทราบค่า σ_0 และ θ_0 ก็จะทำให้เราทราบค่าของ $r_{1,0}$, $r_{1,1}$

ขั้นที่ 4) แก้ระบบสมการตามขั้นที่ 1) ,2) และ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_0 และ ค่า θ_0 แทนค่ากลับในสมการ ขั้นที่ 3)

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ ในโครงร่างตาข่าย 1 คาบเวลา



รูปที่ 7.8 *(a) โครงร่างตาข่ายราคา 2 คาบเวลา (b) โครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 1 คาบเวลา*

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ

$$B_{0,0} = B_0^3 = C(1+y_3)^{-3} \quad , \quad B_{3,0} = B_{3,1} = B_{3,2} = B_{3,3} = C \, ,$$

กำหนด $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 1 คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

$$B_{2,0} = 0.5(1+r_{2,0})^{-1}(B_{3,0} + B_{3,1})$$

$$B_{2,1} = 0.5(1+r_{2,1})^{-1}(B_{3,1} + B_{3,2})$$

$$B_{2,2} = 0.5(1+r_{2,2})^{-1}(B_{3,2} + B_{3,3})$$

$$B_{1,0} = 0.5(1+r_{1,0})^{-1}(B_{2,0} + B_{2,1})$$

$$B_{1,1} = 0.5(1+r_{1,1})^{-1}(B_{2,1} + B_{2,2})$$

$$B_{0,0} = 0.5(1+r_{0,0})^{-1}(B_{1,0} + B_{1,1})$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

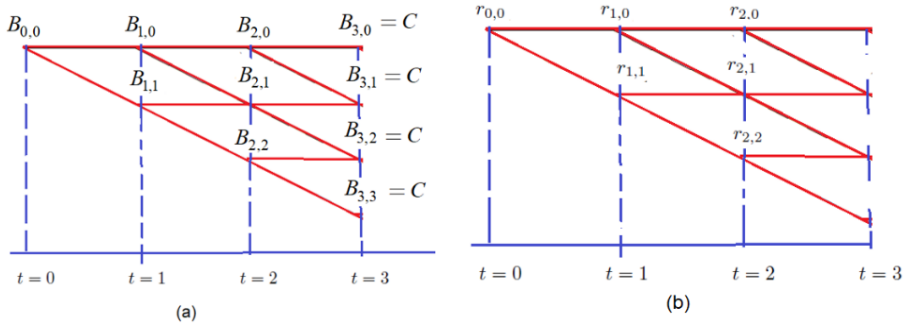
$$r_{2,0} = r_{1,0} + \theta_1 + \sigma_1$$

$$r_{2,1} = r_{1,0} + \theta_1 - \sigma_1 \quad \text{หรือ} \quad r_{2,1} = r_{1,1} + \theta_1 + \sigma_1$$

$$r_{2,2} = r_{1,1} + \theta_1 - \sigma_1$$

ขั้นที่ 4) แก้ระบบสมการตามขั้นที่ 1) ,2) และ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_1 และ ค่า θ_1 แทนค่ากลับในสมการ ขั้นที่ 3)

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{0,0}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$,$r_{2,0}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$ ในโครงร่างตาข่าย 2 คาบเวลา



รูปที่ 7.9 *(a) โครงร่างตาข่ายราคา 3 คาบเวลา (b) โครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 2 คาบเวลา*

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ

$$B_{0,0} = B_0^N = C\left(1 + y_N\right)^{-N} \quad , \quad B_{N,j} = C, \; j = 0,1,...,N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5\left(1 + r_{i,j}\right)^{-1}\left(B_{N,0} + B_{N,1}\right)$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

$$r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i$$

$$r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i$$

ขั้นที่ 4) แก้สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหา เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j=0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j=0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนดอายุไถ่ถอน ละอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

อายุไถ่ถอน k	ราคาไถ่ถอ C	อัตราดอกเบี้ย y_k	ราคาปัจจุบัน B_0^k
1	1000	0.0900	917.40
2	1000	0.0950	834.00
3	1000	0.1000	751.30
4	1000	0.1050	670.70
5	1000	0.1100	593.50

วิธีทำ จากราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง $B_0^k=\dfrac{C}{(1+y_k)^k}$

จะได้ $B_0^1=\dfrac{1000}{(1+0.0900)^1}=917.40$, $B_0^2=\dfrac{1000}{(1+0.0950)^2}=834.00$,

$B_0^3=\dfrac{1000}{(1+0.1000)^3}=751.30$,

$B_0^4=\dfrac{1000}{(1+0.1050)^4}=670.70$ และ $B_0^5=\dfrac{1000}{(1+0.1100)^4}=593.50$ ผลลัพธ์ใส่ไว้ในคอลัมน์สุดท้ายของตารางด้านบน ต่อไปเป็นการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ สำหรับแต่ละ $N=1,...,5$

$$B_{0,0}=B_0^N=1{,}000(1+y_N)^{-N}\ ,\quad B_{N,j}=1000,\ j=0,1,...,N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i,j=0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สำหรับแต่ละ $N=1,...,5$ สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j}=0.5\left(1+r_{i,j}\right)^{-1}\left(B_{N,0}+B_{N,1}\right)$$

ตารางที่ 7.4 *ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง*

B(0,j)	B(1,j)
917.40	1000
	1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)
834.00	734.02	1000
	1084.17	1000
		1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)
751.30	608.71	777.31	1000
	1029.18	881.26	1000
		1017.31	1000
			1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)
670.70	498.31	594.66	720.77	1000
	963.86	763.12	809.28	1000
		1014.95	922.59	1000
			1072.78	1000
				1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	B(5,j)
593.50	402.74	447.73	510.10	669.83	1000
	891.14	649.62	641.91	745.62	1000
		994.30	832.38	840.74	1000
			1122.39	963.70	1000
				1128.78	1000
					1000

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Ho-Lee

$$r_{i+1,j} = r_{i,j} + \theta_i + \sigma_i$$

$$r_{i+1,j+1} = r_{i,j} + \theta_i - \sigma_i$$

ขั้นที่ 4) แก้สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j=0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j=0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา ในที่นี้แก้ระบบสมการโดยใช้ excel solver ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตารางที่ 7.4 และตารางที่ 7.5

ตารางที่ 7.5 *(ด้านซ้ายมือ) ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (ด้านขวามือ) แสดงการสร้างสมการตามขั้นที่2) และขั้นที่ 3) และผลจากการใช้ excel solver ในการแก้ระบบสมการ*

r(0,j)								
0.0900	r(0,0)							
						zeta0	0.052331	
r(0,j)	r(1,j)					sig0	0.22	0.22
0.0900	0.3624	r(1,0)				eq	0.00	
	-0.0776	r(1,1)						
						zeta1	0.136494	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)				sig1	0.08	0.075876
0.0900	0.3624	0.2865	r(2,0)			sig1	0.08	0.075876
	-0.0776	0.1347	r(2,1)			eq	0.00	
		-0.0170	r(2,2)					
						zeta2	0.025045	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)			sig2	0.08	0.075876
0.0900	0.3624	0.2865	0.3874	r(3,0)		sig2	0.08	0.075876
	-0.0776	0.1347	0.2357	r(3,1)		sig2	0.08	0.075876
		-0.0170	0.0839	r(3,2)		eq	0.00	
			-0.0678	r(3,3)				
						zeta3	0.029638	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)	r(4,j)		sig3	0.08	0.075876
0.0900	0.3624	0.2865	0.3874	0.4929	r(4,0)	sig3	0.08	0.075876
	-0.0776	0.1347	0.2357	0.3412	r(4,1)	sig3	0.08	0.075876
		-0.0170	0.0839	0.1894	r(4,2)	sig3	0.08	0.075876
			-0.0678	0.0377	r(4,3)	eq	0.00	
				-0.1141	r(4,4)			

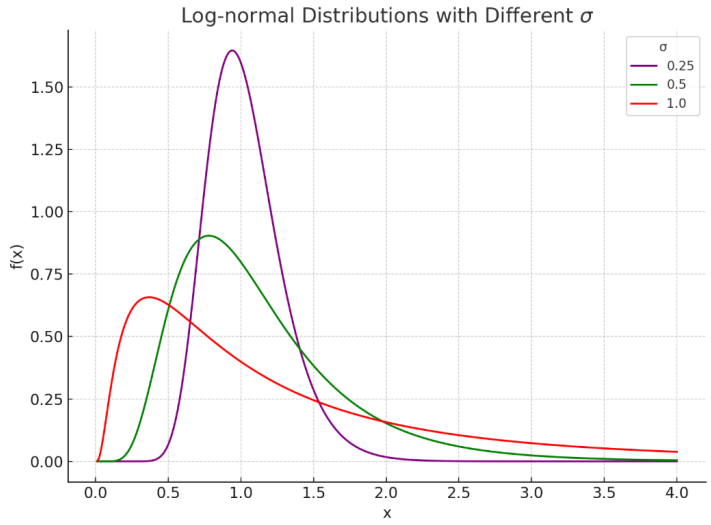
7.4 แบบจำลอง Black-Derman-Toy

แบบจำลอง Black-Derman-Toy หรือ แบบจำลอง BDT เป็นแบบจำลองที่อธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยโดยพิจารณาภายใต้สมมติฐานว่าตัวแปรเชิงสุ่ม r มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล (log-normal distribution) โครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยตามตัวแบบ BDT สามารถอธิบายได้ด้วยสมการดังนี้

$$d(\ln r)=\left[\theta(t)+\left(\sigma'(t)/\sigma(t)\right)\ln r\right]dt+\sigma(t)\,dW_t \tag{7.8}$$

มีลักษณะการพิจารณาคล้ายสมการที่ (7.5) โดยพิจารณาตัวแปรเชิงสุ่ม $\ln r$ เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติ และกำหนดให้ค่าเฉลี่ยวกกลับ (mean reversion) เท่ากับ $-\sigma'(t)/\sigma(t)$ เนื่องจาก

$a(t)$ และ $\sigma(t)$ จะมีค่ามากกว่า 0 จะได้ว่า $\sigma'(t)<0$ ซึ่งหมายถึง ความแปรผันของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเมื่อเวลาผ่านไปจะมีค่าความผันผวนลดลง



รูปที่ 7.10 *ตัวแปรเชิงสุ่ม r เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบล็อกนอร์มอล*

แบบจำลอง Black-Derman-Toy (BDT) เป็นหนึ่งในแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่มีชื่อเสียงและได้รับความนิยมอย่างมากในทฤษฎีโครงสร้างของอัตราผลตอบแทน (fixed income interest theory) โดยประยุกต์ใช้กับแบบจำลองต้นไม้ทวิภาคที่แต่ละโหนดมีการเปลี่ยนแปลงเท่ากันซึ่งทำให้ง่ายและมีความยืดหยุ่นในการใช้งาน โดยยังให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำ โดยค่าความผันผวนของแบบจำลอง BDT จะขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้นและไม่เกี่ยวกับมูลค่าของอัตราดอกเบี้ย

แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง BDT

จากแบบจำลอง BDT $d(\ln r)=\left[\theta(t)+\left(\sigma'(t)/\sigma(t)\right)\ln r\right]dt+\sigma(t)dW_t$

เพื่อความสะดวกให้ $z=\ln r$ จะได้

แบบจำลอง BDT เวลาต่อเนื่อง : $dz=\left[\theta(t)+\left(\sigma'(t)/\sigma(t)\right)z\right]dt+\sigma(t)dW_t$

แบบจำลอง BDT เวลาไม่ต่อเนื่อง : $\Delta z=\left[\theta(t)+\frac{\sigma'(t)}{\sigma}z\right]\Delta t+\varepsilon\left(0,\sigma^2(t)\Delta t\right)$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในกรณีที่ค่าความผันผวน $\sigma(t)=\sigma$ คงที่ ($\sigma'(t)=0$) จะได้

แบบจำลอง BDT เวลาต่อเนื่อง : $dz = [\theta(t) + z]dt + \sigma\, dW_t$

แบบจำลอง BDT เวลาไม่ต่อเนื่อง : $\triangle z = \theta(t) z \triangle t + \varepsilon\left(0, \sigma^2 \triangle t\right)$

ให้ $z_{i,j} = \ln r_{i,j}$ แทนลอการิทึมของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t = i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i, i+1]$ นิยาม $Z_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดย

$$Z_{i,j} = \begin{cases} z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \dfrac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] + \sigma_i \equiv z_u & ; prob = 0.5 \\ z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \dfrac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] - \sigma_i \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases}, \ (\because \triangle t = 1) \qquad (7.9)$$

และ $R_{i,j} = e^{Z_{i,j}} = \begin{cases} r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}} \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j}} \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases}$ เป็นการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยจากโหนด (i, j) ตามรูปที่ 7.4 จากสมการ (7.10) จะได้ว่า

$$\theta_i = \frac{z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1} - 2z_{i,j}}{2} - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = \frac{z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}}{2}$$

นั่นคือ $$\theta_i = 0.5\left[\ln\left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i,j}}\right) + \ln\left(\frac{r_{i+1,j+1}}{r_{i,j}}\right)\right] - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \ln r_{i,j} \quad \text{และ} \quad \sigma_i = 0.5 \ln\left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}}\right)$$

พิจาณาตัวแปรเชิงสุ่ม Y นิยามโดย

$$K_Y(n) = \begin{cases} y_u & ; prob = 0.5 \\ y_d & ; prob = 0.5 \end{cases}$$

เมื่อ $0 < y_d < y_u$ จะได้ว่า $E[\ln K_Y] = 0.5(\ln y_d + \ln y_u) = 0.5 \ln(y_d y_u)$ และ

$$\beta_n^2 = Var(\ln K_Y) = 0.5(\ln y_d - 0.5 \ln y_d y_u)^2 + 0.5(\ln y_u - 0.5 \ln y_d y_u)^2$$

$$= 0.5^3\left[(2 \ln y_d - \ln y_d y_u)^2 + (2 \ln y_u - \ln y_d y_u)^2\right] = \left[0.5 \ln\left(\frac{y_u}{y_d}\right)\right]^2 \qquad (7.10)$$

นั่นคือ ค่าความผันผวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $\beta_n = 0.5 \ln\left(\frac{y_u}{y_d}\right)$ ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $R_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มนิยามโดย

$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} \equiv r_u & ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} \equiv r_d & ; prob = 0.5 \end{cases} \qquad (7.11)$$

และให้ σ_i เป็นค่าความผันผวนของตัวแปรเชิงสุ่ม $\ln R_{i,j}$ จะได้ว่า

$$E[\ln R_{i,j}] = 0.5(\ln r_{i+1,j} + \ln r_{i+1,j+1}) = 0.5 \ln(r_d r_u) \qquad (7.12)$$

และ $$\sigma_i = \sqrt{Var\left(\ln R_{i,j}\right)} = 0.5\ln\left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}}\right) = 0.5\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) \quad (7.13)$$

จะเห็นว่า σ_i ในสมการ (7.8) และ สมการ (7.13) มีค่าเท่ากัน

สมมุติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาของตราสารหนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้น $p = 0.5$ และกำหนดให้ y_k (ต่อปี) เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-counpon bond) อายุไถ่ถอน (year to maturity) ที่ปี k , $k = 1,...,N$ สามารถเขียนโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง BDT ได้เช่นเดียวกับแบบจำลอง Ho-Lee โดยมีความแตกต่างกันในขั้นที่ 3 ดังนี้

โครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา ของอัตราดอกเบี้ย $r_{i,j}$ ราคาตราสารหนี้ $B_{i,j}$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ

$$B_{0,0} = B_0^N = C\left(1+y_N\right)^{-N} \ , \ B_{N,j} = C, \ j = 0,1,...,N \quad (7.14)$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5\left(1+r_{i,j}\right)^{-1}\left(B_{N,0}+B_{N,1}\right) \quad r_{i,j} = e^{z_{i,j}} \quad (7.15)$$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ BDT

$$z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] + \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}}$$

$$z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] - \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j}}$$

หรือ $\theta_i = 0.5\left[\ln\left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i,j}}\right) + \ln\left(\frac{r_{i+1,j+1}}{r_{i,j}}\right)\right] - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i}\ln r_{i,j}$ และ $\sigma_i = 0.5\ln\left(\frac{r_{i+1,j}}{r_{i+1,j+1}}\right)$

ขั้นที่ 4) แก้สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i, j = 0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ตัวอย่างที่ 7.5 กำหนดอายุไถ่ถอน และราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1และ 2 ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค

อายุไถ่ถอน k	ราคาปัจจุบัน B_0^k	ราคาไถ่ถอน C	อัตราดอกเบี้ย y_k
1	917.40	1000	0.0900
2	834.00	1000	0.0950
3	751.30	1000	0.1000
4	670.70	1000	0.1050
5	593.50	1000	0.1100

วิธีทำ จาก (7.8) ได้ $y_1 = \frac{1000}{917.40} - 1 = 0.0900$, $y_2 = \sqrt{\frac{1000}{834.00}} - 1 = 0.0950$

$$y_3 = \sqrt[3]{\frac{1000}{751.30}} - 1 = 0.1000,\ y_4 = \sqrt[4]{\frac{1000}{670.70}} - 1 = 0.1050$$

$$y_5 = \sqrt[5]{\frac{1000}{593.50}} - 1 = 0.1100$$

อัตราดอกเบี้ย $y_k, k = 1,...,5$ ที่คำนวณแสดงในคอลัมน์สุดท้ายในตารางด้านบน

ต่อไปเป็นการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N = 1,2,3,4,5$ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ สำหรับแต่ละ $N = 1,...,5$

$$B_{0,0} = B_0^N = 1{,}000(1+y_N)^{-N},\quad B_{N,j} = 1000,\ j = 0,1,...,N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สำหรับแต่ละ $N = 1,...,5$ สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา $B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1}(B_{N,0} + B_{N,1})$

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ BDT

$$z_{i+1,j} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] + \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j} = e^{z_{i+1,j}}$$

$$z_{i+1,j+1} = z_{i,j} + \left[\theta_i + \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{\sigma_i} z_{i,j}\right] - \sigma_i \quad \Rightarrow \quad r_{i+1,j+1} = e^{z_{i+1,j}}$$

ขั้นที่ 4) แก้สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2} และ ค่า θ_{N-2} แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i, j = 0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา ในที่นี้แก้ระบบสมการโดยใช้ excel solver ซึ่งผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตารางที่ 7.6 และตารางที่ 7.7

ตารางที่ 7.6 *ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N = 1,2,3,4,5$ ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง*

B(0,j)	B(1,j)
917.40	1000
	1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)
834.00	862.41	1000
	955.78	1000
		1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)
751.30	730.77	772.76	1000
	907.12	921.97	1000
		976.22	1000
			1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)
670.70	609.73	577.89	636.71	1000
	852.44	836.14	858.94	1000
		947.64	954.87	1000
			986.58	1000
				1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	B(5,j)
593.50	512.28	446.99	435.51	587.33	1000
	781.60	741.02	721.37	780.67	1000
		894.50	886.12	899.00	1000
			946.47	957.01	1000
				961.68	1000
					1000

ตารางที่ 7.7 *(ด้านซ้ายมือ) ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (ด้านขวามือ) แสดงการสร้างสมการตามขั้นที่2) และขั้นที่ 3) และผล จากการใช้ excel solver ในการแก้ระบบสมการ*

r(0,j)									
0.0900	r(0,0)								
							sig-1	0.186481	
							zeta0	1.635329	
r(0,j)	r(1,j)						sig0	0.62	0.618905
0.0900	0.1595	r(1,0)					eq	0.00	
	0.0463	r(1,1)							
							sig0	0.62	
							zeta1	0	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)					sig1	0.62	0.622716
0.0900	0.1595	0.2941	r(2,0)				sig1	0.62	0.622693
	0.0463	0.0846	r(2,1)				eq	0.00	
		0.0244	r(2,2)						
							sig1	0.62	
							zeta2	0.040093	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)				sig2	0.62	0.62271
0.0900	0.1595	0.2941	0.5706	r(3,0)			sig2	0.62	0.622687
	0.0463	0.0846	0.1642	r(3,1)			sig2	0.62	0.62271
		0.0244	0.0473	r(3,2)			eq	0.00	
			0.0136	r(3,3)					
							sig2	0.08	
							zeta3	0	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)	r(4,j)			sig3	0.06	0.458302
0.0900	0.1595	0.2941	0.5706	0.7026	r(4,0)		sig3	0.06	0.458284
	0.0463	0.0846	0.1642	0.2810	r(4,1)		sig3	0.06	0.458302
		0.0244	0.0473	0.1124	r(4,2)		sig3	0.06	0.060028
			0.0136	0.0449	r(4,3)		eq	0.00	
				0.0398	r(4,4)				

□

บทสรุปท้ายบทที่ 7

ในโลกการเงินสมัยใหม่ การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยมีผลกระทบโดยตรงต่อการกำหนดราคาสินทรัพย์ การบริหารพอร์ตการลงทุน และการควบคุมความเสี่ยงเชิงระบบและเชิงกลยุทธ์ การทำความเข้าใจแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจึงเป็นเครื่องมือสำคัญในคณิตศาสตร์การเงิน โดยเฉพาะเมื่อใช้วิเคราะห์การเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยที่มีลักษณะสุ่มและไม่เป็นเชิงเส้น ในบทนี้ได้อธิบายแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นซึ่งครอบคลุมทั้งแบบจำลองแบบดั้งเดิม เช่น แบบจำลอง Vasicek (ค.ศ.1977), CIR (ค.ศ.1985) ตลอดจนแบบจำลองที่พัฒนาต่อมา เช่น Ho-Lee (ค.ศ.1986) และ Black-Derman-Toy (ค.ศ.1990) ซึ่งมีความยืดหยุ่นและสามารถสะท้อนความผัน

ผวนของตลาดได้อย่างแม่นยำ แบบจำลองเหล่านี้สามารถอธิบายโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ย ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย และความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) และอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จุดเด่นและข้อจำกัดของแต่ละแบบจำลองได้รับการวิเคราะห์เปรียบเทียบเพื่อใช้เลือกให้เหมาะสมกับบริบทของการใช้งาน

ในเชิงการประยุกต์ใช้งานจริง แบบจำลองเหล่านี้มีบทบาทสำคัญ เช่น

- การกำหนดราคา **ตราสารหนี้ที่มีสิทธิไถ่ถอนล่วงหน้า (callable bonds)** ด้วยแบบจำลอง BDT หรือ Ho-Lee เพื่อสะท้อนโครงสร้างอัตราผลตอบแทน
- การประเมินมูลค่า **ออปชันบนพันธบัตร (bond options)** และ **สวอปชัน (swaptions)** ด้วยแบบจำลอง CIR ที่สามารถควบคุมความเป็นบวกของอัตราดอกเบี้ย
- การวัดความเสี่ยงของพอร์ตผ่าน **Duration**, **Convexity**, และ **Value-at-Risk (VaR)** ภายใต้แบบจำลองที่อิงอัตราดอกเบี้ยแบบสุ่ม

ตัวอย่างเชิงปฏิบัติ เช่น ธนาคารพาณิชย์ที่มีพอร์ตสินเชื่อแบบอัตราลอยตัวสามารถใช้แบบจำลอง CIR เพื่อประเมินผลกระทบจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยต่อรายได้จากดอกเบี้ยสุทธิ (Net Interest Margin) ได้อย่างแม่นยำและตอบโจทย์การกำกับดูแลความเสี่ยงตามแนวทาง Basel III

นอกจากนี้ แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นยังเป็นรากฐานของแบบจำลองขั้นสูง เช่น แบบจำลอง Heath–Jarrow–Morton (HJM) ที่สามารถวิเคราะห์โครงสร้างความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยได้อย่างลึกซึ้ง รวมถึงโมเดลที่ใช้กระบวนการ Jump-Diffusion และ Lévy ซึ่งถูกพัฒนาเพื่อรองรับตลาดที่ไม่สมบูรณ์และไม่เป็นเชิงเส้น เช่น ตลาดที่มี default risk หรือการซื้อขายที่มีข้อจำกัด กล่าวโดยสรุป บทที่ 7 ได้ถ่ายทอดแนวคิด ทฤษฎี และการประยุกต์ใช้แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นอย่างเป็นระบบ ทั้งในมิติของการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและการนำไปใช้งานจริงในตลาดตราสารหนี้และอนุพันธ์ ตอบโจทย์ความซับซ้อนของตลาดการเงินยุคใหม่ และสร้างพื้นฐานที่แข็งแกร่งสำหรับการพัฒนาเครื่องมือทางการเงินที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

[1] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time* (3rd ed.). Oxford University Press.

[2] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[3] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.

[4] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407. https://doi.org/10.2307/1911242

[5] Ho, T. S., & Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011–1029.

[6] Hull, J. C. (2018). *Options, futures, and other derivatives* (10th ed.). Pearson.

[7] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

[8] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-40101-4

[9] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1) นำเข้าข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นที่จดทะเบียนในบริษัทหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย พิจารณาอัตราการการเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จงสร้างแบบจำลอง Vasicek กรณีที่ $\beta = 0$ ตามสมการ $dr = a(b-r)dt + \sigma dW_t$ จากอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นดังกล่าว

2) นำเข้าข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นที่จดทะเบียนในบริษัทหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย พิจารณาอัตราการการเปลี่ยนแปลงราคาเป็นอัตราดอกเบี้ย จงสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0.5$ ตามสมการ $dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t$ จากอัตราการเปลี่ยนแปลงราคา(r) 52 วัน ย้อนหลังของหุ้นดังกล่าว

3) กำหนดอายุไถ่ถอน และอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ตามตาราง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Ho-Lee

อายุไถ่ถอน k	ราคาไถ่ถอ C	อัตราดอกเบี้ย y_k
1	1000	0.0500
2	1000	0.0450
3	1000	0.0420
4	1000	0.0470
5	1000	0.0380
6	1000	0.0400
7	1000	0.0032

4) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2$ (ปี)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007512$ (ต่อวัน), $b = 0.00006675$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000449$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน โดยสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006003

91.25	0.00005468
182.5	0.00006749
273.75	0.00006770
365	0.00006562
456.25	0.00005232
547.5	0.00006423
638.75	0.00006277
730	0.00006109

5) สมมติตราสารหนี้อายุ 5 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 20 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a=0.00006212$ (ต่อวัน), ,$\phi=5.24922x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma=0.00000519$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r=0.0035234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

6) นำเข้าข้อมูลอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของพันธบัตรรัฐบาล จงสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta=0$, $a(t)=0$ และ $\sigma(t)=\sigma$ ตามสมการ $dr_t=\theta(t)dt+\sigma dW_t$ จากข้อมูลอัตราอัตราดอกเบี้ยย้อนหลังของของพันธบัตรดังกล่าว

7) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 5.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi=0.00006402$ (ต่อวัน) ,$\phi=8.42524\times10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma=0.00000422$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r=0.0038234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

8) กำหนดอายุไถ่ถอน และราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1และ 2 ตามตาราง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยายและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค กำหนด

$b=0.0019999862$

อายุไถ่ถอน k	ราคาปัจจุบัน B_0^k	ราคาไถ่ถอน C
1	900.20	1000
2	844.00	1000
3	761.20	1000
4	680.70	1000
5	623.50	1000
6	560.23	1000
7	521.20	1000

9) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) จงหาราคาตราสารหนี้มีคูปองโดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00005012$ (ต่อวัน) ,$\phi = 8.26543\times10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000612$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0035032\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

10) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ กำหนดราคาใช้สิทธิเท่ากับ 9800 บาท ของออปชันที่ปลายปีที่ 2 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005812$ (ต่อวัน), $b = 0.00006212$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000438$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006883
182.5	0.00005671
365	0.00005430
547.5	0.00006805
730	0.00005976
912.5	0.00005992
1095	0.00006465
1277.5	0.00006436
1460	0.00006577

10.1) จงคำนวณพุทออปชันบนตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek

10.2) จงใช้สมการความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน ในการคำนวณค่าของคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองดังกล่าว

11) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 6 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005712$ (ต่อวัน), ,$\phi = 8.42934x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000395$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0042334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน) จงคำนวณราคาพรีเมียมของคอลออปชันบนตราสารหนี้ที่มีคูปอง ที่มีเวลาใช้สิทธิตามสัญญาที่ปลายปีที่ 1 (นับจากวันออกตราสาร) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย $r^* = r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนจากการถือครองตราสารหนี้จนครบกำหนดไถ่ถอน

12) สมมติตราสารหนี้อายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.20 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 8 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007112$ (ต่อวัน), ,$\phi = 8.26641x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000512$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0039314\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

13) อธิบายเหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และเศรษฐศาสตร์ที่ว่า ทำไมแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจึงควรให้ผลลัพธ์ที่เป็นค่าบวกเสมอ พร้อมยกตัวอย่างแบบจำลองที่ไม่ตอบโจทย์ข้อนี้ เช่น Vasicek Model ที่สามารถให้ $r(t) < 0$

14) เปรียบเทียบสมรรถนะของแบบจำลองที่ให้ค่าอัตราดอกเบี้ยติดลบ กับแบบจำลองที่กำหนดอัตราดอกเบี้ยให้เป็นค่าบวกเท่านั้น โดยใช้อัตราดอกเบี้ยจำลองแบบ Monte Carlo เพื่อเปรียบเทียบผลกระทบต่อการกำหนดราคาตราสารหนี้

15) กำหนดพารามิเตอร์ของแบบจำลอง Vasicek $a = 0.1, \quad b = 0.05, \quad \sigma = 0.02, \quad r(0) = 0.03$

จงคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีอายุ 1 ปี และ 2 ปี ตามแบบจำลอง Vasicek

16) ใช้ข้อมูลอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง 60 วันของพันธบัตรรัฐบาล (รายวัน) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง CIR โดยใช้วิธี Maximum Likelihood Estimation (MLE) และอธิบายผลที่ได้ในเชิงเศรษฐศาสตร์

17) สมมุติว่าราคา Zero-Coupon Bond ในแต่ละช่วงอายุตามตารางด้านล่าง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในแต่ละช่วงเวลาตามแบบจำลอง Ho-Lee แบบตาข่ายต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา

18) อธิบายข้อดีและข้อจำกัดของแบบจำลอง Ho-Lee ในบริบทของการจัดทำ Yield Curve ให้สอดคล้องกับข้อมูลตลาด และเปรียบเทียบกับแบบจำลอง CIR

19) สมมุติว่าราคา Zero-Coupon Bond ในแต่ละช่วงอายุตามตารางด้านล่าง จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในแต่ละโหนดของแบบจำลอง BDT สำหรับ 3 คาบเวลา

20) อธิบายผลของการเปลี่ยนแปลงค่าความผันผวน $\sigma(t)$ ที่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไปตามแบบจำลอง BDT ต่อราคาของ Callable Bond

21) (การจำลองอัตราผลตอบแทนด้วยแบบจำลอง Vasicek จากข้อมูลราคาหุ้นจริง) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาปิดรายวันของหุ้น AOT จากเว็บไซต์ Yahoo Finance ย้อนหลัง 60 วัน แล้ว

21.1) คำนวณอัตราผลตอบแทนรายวัน r_t โดยใช้สูตร $r_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ จากนั้นประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, และ σ ของแบบจำลอง Vasicek ด้วยวิธี Maximum Likelihood Estimation (MLE) โดยใช้แบบจำลอง

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

21.2) ทำการจำลองอัตราผลตอบแทน 10,000 เส้นทางในช่วงเวลา 30 วันข้างหน้า แล้วเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเส้นทางจำลองกับข้อมูลจริง

22) (การจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง CIR จากข้อมูลพันธบัตรรัฐบาลไทย) ดาวน์โหลดข้อมูลอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรรัฐบาลไทยอายุ 1 ปี จากธนาคารแห่งประเทศไทยหรือ SETSMART ในช่วง 3 เดือนล่าสุด

22.1) แปลงข้อมูลเป็นอัตราผลตอบแทนรายวัน และประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, และ σ ของแบบจำลอง CIR โดยใช้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

22.2) จำลองเส้นทางอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลา 60 วันข้างหน้าอย่างน้อย 10 เส้นทาง และวิเคราะห์ลักษณะ mean-reverting และการไม่เป็นค่าลบของแบบจำลอง

23) (การประเมินแบบจำลอง Ho-Lee ด้วยข้อมูลราคาทองคำจริง) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาทองคำ (Gold Spot USD) จากเว็บไซต์ Investing.com ย้อนหลัง 90 วัน

23.1) คำนวณอัตราผลตอบแทนรายวัน r_t จากข้อมูลดังกล่าว ใช้แบบจำลอง Ho-Lee

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

โดยประมาณค่า $\theta(t)$ ด้วยพหุนามดีกรีสองผ่าน Excel หรือ Python แล้วจำลองเส้นทางราคาทองคำ 30 วัน จำนวน 5 เส้นทาง วิเคราะห์ความเหมาะสมของแบบจำลอง Ho-Lee ต่อพฤติกรรมราคาทองคำ

24) (การเปรียบเทียบแบบจำลอง BDT กับเหรียญดิจิทัล Bitcoin) ดาวน์โหลดข้อมูลราคาของ Bitcoin (BTC-USD) จาก Yahoo Finance ย้อนหลัง 60 วัน

24.1) คำนวณ log-return รายวัน ใช้แบบจำลอง Black-Derman-Toy (BDT)

$$dr_t = \theta(t)dt + \sigma(t)r_t\,dW_t$$

โดยประมาณฟังก์ชัน $\theta(t)$ และ $\sigma(t)$ ด้วยเทคนิค regression หรือ trendline ผ่าน Excel จากข้อมูล log-return ที่ได้ จากนั้นจำลองเส้นทางราคาในอนาคตอย่างน้อย 5 เส้นทาง และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับแบบจำลอง Ho-Lee และ Vasicek เพื่อประเมินความเหมาะสมของแต่ละแบบจำลองต่อข้อมูลเหรียญดิจิทัล

บทที่ 8 การกำหนดราคาและออปชันบนตราสารหนี้

เนื้อหาประกอบด้วย

8.1 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek

8.2 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง CIR

8.3 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย

8.4 แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย

8.5 การกำหนดราคาตราสารหนี้มีคูปอง

8.6 ออปชันบนตราสารหนี้

บทนำ

ในตลาดการเงินสมัยใหม่ การกำหนดราคาตราสารหนี้และตราสารอนุพันธ์ที่อ้างอิงอัตราดอกเบี้ยนับเป็นหัวใจสำคัญของการบริหารความเสี่ยง การจัดพอร์ตลงทุน และการประเมินมูลค่าสินทรัพย์ทางการเงิน บทที่ 8 นี้นำเสนอกรอบแนวคิดและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการกำหนดราคาตราสารหนี้ทั้งที่ไม่มีคูปองและมีคูปอง ตลอดจนการกำหนดราคาออปชันที่มีตราสารหนี้เป็นสินทรัพย์อ้างอิง

การศึกษานี้เริ่มต้นด้วยการวิเคราะห์แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นคลาสสิก ได้แก่ แบบจำลอง Vasicek (ค.ศ.1977) และแบบจำลองของ Cox-Ingersoll-Ross หรือ CIR (ค.ศ.1985) ซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในเชิงสุ่ม และยังสามารถใช้เป็นฐานในการคำนวณราคาของตราสารหนี้แบบไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) ในรูปแบบของสูตรรูปปิด (closed-form solution)

นอกจากนี้ยังได้ขยายการวิเคราะห์ไปสู่แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย (Extended Vasicek model) ซึ่งช่วยให้สามารถปรับค่าพารามิเตอร์ให้เปลี่ยนแปลงได้ตามเวลา เพิ่มความยืดหยุ่นในการสะท้อนลักษณะของตลาดการเงินจริงมากยิ่งขึ้น รวมถึงการนำไปสร้างโครงร่างตาข่ายแบบต้นไม้ทวิภาค (binomial tree) สำหรับการประเมินราคาตราสารหนี้ในกรณีไม่ต่อเนื่อง

การกำหนดราคาตราสารหนี้ที่มีคูปอง (coupon-bearing bonds) ได้รับการวิเคราะห์ผ่านการพิจารณาเป็นกระแสเงินสดของตราสารหนี้ไม่มีคูปองหลายฉบับ โดยสามารถนำสูตรการคิดลดของตราสารหนี้ไม่มีคูปองมาใช้เพื่อประเมินมูลค่าปัจจุบันของตราสารหนี้แบบมีคูปองได้อย่างเป็นระบบ

ในส่วนท้ายของบท ได้กล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันแบบยุโรปบนตราสารหนี้ ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย เช่น Vasicek ในการประเมินมูลค่าของออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง โดยอิงจากผลงานของ Jamshidian (ค.ศ.1989) ที่ได้พัฒนาวิธีการในการประเมินมูลค่าคอลออปชันและพุทออปชันบนพันธบัตร ภายใต้เงื่อนไขที่ราคาของออปชันสามารถถอดแยกเป็นผลรวมของออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองแต่ละตัว นอกจากนี้ยังได้แสดงสมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอลออปชัน (put-call parity) สำหรับตราสารหนี้ ซึ่งเป็นหลักการสำคัญในการวิเคราะห์ราคาที่สอดคล้องกันภายใต้เงื่อนไขของการไม่มีการค้ากำไร (no-arbitrage)

ความรู้ที่นำเสนอในบทนี้ไม่เพียงแต่เป็นประโยชน์ในเชิงทฤษฎีเท่านั้น แต่ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้จริงในการประเมินราคาสินทรัพย์ การกำหนดกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยง และการบริหารพอร์ตการลงทุนในตลาดการเงินที่มีความผันผวนสูง อ้างอิงจากงานศึกษาของ Vasicek (1977ค.ศ.), Cox et al. (ค.ศ.1985), และ Jamshidian (ค.ศ.1989) เป็นต้น ซึ่งเป็นรากฐานของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยในระดับสากล

8.1 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek

พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-coupon bond or discount bond) ซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ F (par value or face value) กำหนดให้ $P(r,t,T)$ เป็นราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ที่เวลา t ใด ๆ ซึ่งมีจ่ายเงิน (ไถ่ถอน) เท่ากับ 1 บาท ณ เวลา T (เวลาไถ่ถอน) และ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

สมมติว่าให้ $\{r_t\}$ เป็นกระบวนการสุ่มบาวน์เนียนภายใต้ปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega,\mathcal{F},P)$ โดยที่แฟมมิลี่ $\{\mathcal{F}_t\}$ เป็นเซตของข้อมูลทั้งหมดของตัวเชิงสุ่ม r_t ที่ขึ้นกับเวลา s ทุกๆ $s\le t$ (เรียกว่า

การกรองมาตรฐาน : standard filtration) และ P ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย r_t ของ Vasicek ในรูป

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{8.1}$$

เมื่อ a, b และ σ เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบท 8.1 กำหนดให้ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่สอดคล้องกับแบบจำลอง Vasicek ตามสมการ (8.1) จะได้ว่า $\mu_t \equiv E[r_t] = e^{-at}\left(r_0 + b\left(e^{at} - 1\right)\right)$ และ $\sigma_t \equiv Var[r_t] = \sigma^2\left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a}\right)$

พิสูจน์ พิจารณาสมการ (8.1) ในรูปสมการเชิงปริพันธ์

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \sigma\int_0^t dW_s \tag{8.2}$$

ใส่ตัวดำเนินการคาดหวังทั้งสองข้างของสมการ ได้

$$E[r_t] = r_0 + \int_0^t a\left(b - E[r_s]\right)ds + \sigma E\left[\int_0^t dW_s\right]$$

เนื่องจาก $E\left[\int_0^t dW_s\right] = 0$ ทำให้ได้ $\mu_t = r_0 + \int_0^t a\left(b - \mu_s\right)ds$

ใส่ตัวดำเนินการอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ ได้

$$\frac{d\mu_t}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t a\left(b - \mu_s\right)ds\right) = a\left(b - \mu_t\right) \tag{8.3}$$

จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d\mu_t}{dt} = a\left(b - \mu_t\right)$ จะได้ $E[r_t] = \mu_t = e^{-at}\left(r_0 + b\left(e^{at} - 1\right)\right)$

พิจารณาสมการสโตแคสติก (8.2) อีกครั้ง โดยบทตั้งของอิโต้ ได้ว่า

$$r_t = e^{-at}\left[r_0 + \int_0^t abe^{as}ds + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s\right] = e^{-at}\left(r_0 + b\left(e^{at} - 1\right)\right) + \sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s \tag{8.4}$$

เนื่องจาก $\mu_t = E[r_t] = e^{-at}\left(r_0 + b\left(e^{at} - 1\right)\right)$

ดังนั้น ได้ $r_t = \mu_t + \sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s \Rightarrow (r_t - \mu_t)^2 = \left(\sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s\right)^2$

ผลที่ตามมา คือ $$\sigma_t^2 \equiv Var[r_t] = E\left[(r_t-\mu_t)^2\right] = E\left(\sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s\right)^2 \qquad (8.5)$$

โดย Ito's isometry ได้

$$\sigma_t^2 = E\left(\sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s\right)^2 = \sigma^2e^{-2at}E\left(\int_0^t e^{as}dW_s\right)^2 = \sigma^2e^{-2at}E\left(\int_0^t e^{2as}ds\right) = \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right) \qquad \square$$

ผลที่ได้จากทฤษฎีบท 8.1 ทำให้เราได้ว่า $r_t \sim N\left(\mu_t,\sigma_t^2\right)$ เมื่อ $\mu_t = e^{-at}\left(r_0+b\left(e^{at}-1\right)\right)$ และ $\sigma_t^2 = \sigma^2\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)$

ทฤษฎีบท 8.2 กำหนดให้ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่สอดคล้องกับแบบจำลอง Vasicek ตามสมการ (8.1) และ $\begin{cases} dX_t = -aX_t + \sigma dW_t \\ X(0) = r_0 - b \end{cases}$ สมการสโตแคสติกที่สอดคล้องกับสมการ (8.1) จะได้

1) $X_t = r_t - b$ เป็นผลเฉลยของสโตแคสติก $\begin{cases} dX_t = -aX_t + \sigma dW_t \\ X(0) = r_0 - b \end{cases}$

2) $E[X(u)] = e^{-au}(r_0-b)$

3) $E\left[\int_0^t X(u)\,du\right] = \frac{(r_0-b)}{a}\left(1-e^{-at}\right)$

4) $Cov[X(u),X(t)] = \frac{\sigma^2}{2a}e^{-a(u+t)}\left(e^{2au}-1\right)$ สำหรับทุกๆ $u \le t$

5) $Var[X(u)] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2au}\right)$

6) $Var\left[\int_0^t X(s)ds\right] = \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(2at-3+4e^{-at}-e^{-2at}\right)$

7) $E\left[\int_0^t r_s ds\right] = \frac{(r_0-b)}{a}\left(1-e^{-a)}\right)+bt$

8) $Var\left[\int_0^t r_s ds\right] = \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(2at-3+4e^{-at}-e^{-2at}\right)$

พิสูจน์ 1) ตรวจสอบโดยตรงจะเห็นว่า $X_t = r_t - b$ เป็นผลเฉลยของสโตแคสติก

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t + \sigma dW_t \\ X_0 = r_0 - b \end{cases}$$

2) โดยใช้บทตั้งของอิโต้ ได้ $X(u) = e^{-au}\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{as} dW_s\right)$

เนื่องจาก $X_u = r_u - b$ เป็นการแจกแจงแบบปกติ

ดังนั้น $\int_0^t X(u)\,du$ เป็นการแจกแจงแบบปกติด้วย และ

$$E[X(u)] = E\left[e^{-au}\left(X(0) + \int_0^u \sigma e^{as} dW_s\right)\right] = e^{-au}X(0) = e^{-au}(r_0 - b) \tag{8.6}$$

3) ผลที่ตามมา (8.6) คือ

$$E\left[\int_0^t X(u)\,du\right] = \frac{X(0)}{a}\left(1 - e^{-at}\right) = \frac{X(0)}{a}\left(1 - e^{-at}\right) = \frac{(r_0 - b)}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

4) ในทำนองเดียวกันได้ การใช้ Ito 's isometry สำหรับทุกๆ $u \le t$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Cov[X(u), X(t)] &= \sigma^2 e^{-a(u+t)} E\left[\int_0^u e^{as} dW_s \cdot \int_0^t e^{as} dW_s\right] \\ &= \sigma^2 e^{-a(u+t)} \int_0^u e^{2as} ds = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(u+t)}\left(e^{2au} - 1\right) \end{aligned} \tag{8.7}$$

5) ผลที่ตามมา (8.7) คือ

$$Var[X(u)] = Cov[X(u), X(u)] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2au}\right)$$

6) เนื่องจาก $Var\left[\int_0^t X(s)ds\right] = Cov\left[\int_0^t X(s)ds, \int_0^t X(s)ds\right] = E\left[\left(\int_0^t X(s)ds - E\left[\int_0^t X(s)ds\right]\right)^2\right]$

$$\begin{aligned} &= E\left[\left(\int_0^t X(s) - E[X(s)]ds\right)\left(\int_0^t X(u) - E[X(u)]du\right)\right] \\ &= E\left[\int_0^t \int_0^t \big(X(s) - E[X(s)]\big)\big(X(u) - E[X(u)]\big)duds\right] \\ &= \int_0^t \int_0^t E\left[\big(X(s) - E[X(s)]\big)\big(X(u) - E[X(u)]\big)\right]duds \\ &= \int_0^t \int_0^t Cov\big(X(u), X(s)\big)duds = \int_0^t \int_0^t \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(u+t)}\left(e^{2au} - 1\right)duds \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(2at - 3 + 4e^{-at} - e^{-2at}\right)$$

7) เนื่องจาก $r_s = X_s + b$ จะได้

$$E\left[\int_0^t r_s ds\right] = E\left[\int_0^t X_s ds\right] + bt = \frac{(r_0 - b)}{a}\left(1 - e^{-a)}\right) + bt$$

8) เนื่องจาก $r_s = X_s + b$ จะได้

$$Var\left[\int_0^t r_s ds\right] = Var\left[\int_0^t X_s ds\right] = \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(2at - 3 + 4e^{-at} - e^{-2at}\right) \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 8.1 (การประเมินเสถียรภาพของอัตราดอกเบี้ยด้วยแบบจำลอง Vasicek) สมมติว่าธนาคารกลางของประเทศหนึ่งกำลังวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบการเงิน เพื่อประเมินความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยนโยบาย ซึ่งเป็นต้นทุนหลักของธนาคารพาณิชย์ในการกู้ยืมเงินระยะสั้นในตลาดระหว่างธนาคาร เพื่อวิเคราะห์แนวโน้มดังกล่าว นักวิเคราะห์ทางการเงินใช้แบบจำลอง Vasicek ซึ่งสามารถอธิบายพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยที่มีลักษณะ mean-reverting ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยกำหนดเงื่อนไขของแบบจำลอง Vasicek ดังนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

และกำหนดพารามิเตอร์ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยเริ่มต้น $r_0 = 0.03$, ค่าเฉลี่ยระยะยาว $b = 0.05$, ความเร็วในการปรับเข้าสู่ค่าเฉลี่ย $a = 0.5$, ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.02$ และพิจารณาในช่วงเวลา $T = 2$ ปี

1) จงคำนวณความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ยนโยบายเฉลี่ยในช่วงเวลา [0, 2]

2) วิเคราะห์เชิงเศรษฐศาสตร์ว่าความแปรปรวนดังกล่าวมีนัยสำคัญต่อความเสี่ยงทางการเงินของธนาคารพาณิชย์อย่างไร

วิธีทำ ข้อ 1) คำนวณความแปรปรวนของ $\int_0^2 r(s)ds$

จากทฤษฎี 8.2 (สูตรที่ 6), $\text{Var}\left[\int_0^t r(s)ds\right] = \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(2at - 3 + 4e^{-at} - e^{-2at}\right)$

โดยการแทนค่า จะได้

$$\text{Var}\left[\int_0^2 r(s)ds\right] = \frac{0.02^2}{2(0.5^3)}\left(2(0.5)(2) - 3 + 4e^{-0.5(2)} - e^{-2(0.5)(2)}\right) = 0.000538$$

ข้อ 2) วิเคราะห์ผลลัพธ์ทางเศรษฐศาสตร์: เนื่องจากความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ยเฉลี่ยในช่วงเวลา [0,2] คือ 0.000538 ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คือ $\sqrt{0.000538} \approx 0.0232$ หรือ 2.32% ค่าความแปรปรวนนี้สะท้อนถึงระดับความไม่แน่นอนของอัตราดอกเบี้ยในช่วง 2 ปีข้างหน้า ซึ่งมีผลโดยตรงต่อต้นทุนการเงินของธนาคารพาณิชย์ที่อาจผันผวนสูงขึ้น ส่งผลต่อความสามารถในการปล่อยสินเชื่อและการลงทุนของภาคเอกชน ความมั่นคงของตลาดการเงิน โดยเฉพาะตลาดพันธบัตรและเส้นผลตอบแทนพันธบัตร (yield curve)

ข้อเสนอเชิงนโยบาย ได้แก่

1) ธนาคารกลางควรใช้การส่งสัญญาณล่วงหน้าเกี่ยวกับนโยบายการเงิน (forward guidance) เพื่อสร้างความมั่นใจให้ตลาด

2) ธนาคารพาณิชย์ควรใช้เครื่องมือตราสารอนุพันธ์อัตราดอกเบี้ย (interest rate derivatives) เช่น สวอปอัตราดอกเบี้ย (interest rate swap) เพื่อลดความเสี่ยงด้านต้นทุน

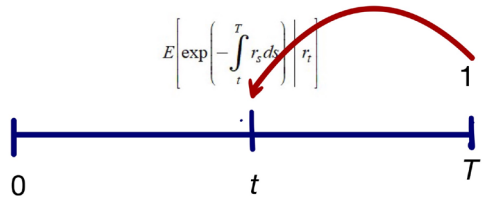
จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่าเราสามารถใช้แบบจำลอง Vasicek ช่วยให้สามารถประเมินความเสี่ยงจากความไม่แน่นอนของอัตราดอกเบี้ยได้อย่างเป็นระบบ และสามารถสนับสนุนการวางแผนนโยบายการเงินหรือกลยุทธ์บริหารความเสี่ยงในระดับสถาบันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

□

ต่อไปจะแสดงการหาสูตรรูปปิด (closed-form formula) ของการกำหนดราคาตราสารหนี้ด้วยแบบจำลอง Vasicek พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับ 1 บาท ที่เวลาไถ่ถอน T สมมติให้ $P(r_t,t,T)$ เป็นราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลา t ใด ๆ จะได้ว่า ราคาตราสารหนี้จะเท่ากับค่าคาดหวังของมูลค่าที่เวลา t ของเงิน 1 บาทที่จะได้รับที่เวลา T เมื่อเราทราบอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t โดยมีประกอบส่วนลดคือ $E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$

นั่นคือ

$$P(r_t,t,T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\middle| r_t\right]$$



รูปที่ 8.1 *ราคาตราสารหนี้เท่ากับค่าคาดหวังของมูลค่าที่เวลา t ของเงิน 1 บาทที่จะได้รับที่เวลา T*

ทฤษฎีบท 8.3 ภายใต้แบบจำลอง Vasicek ตามสมการ (8.1) จะได้ว่า ราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

$$P(r_t,t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r_t}$$

เมื่อ $B(t,T)=\dfrac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ และ $A(t,T)=\exp\left[\left(b-\dfrac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left[B(t,T)-(T-t)\right]-\dfrac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a}\right]$

พิสูจน์ โดยใช้ทฤษฎีบท 8.2 ได้

$$P(r_t,t,T)=E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\middle| r_t\right]=E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s(r_t)ds\right)\right]$$

$$=\exp\left(E\left(-\int_t^T r_s(r_t)ds\right)+\frac{1}{2}Var\left(-\int_t^T r_s(r_t)ds\right)\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{r_t-b}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)-b(T-t)+\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(2a(T-t)-3+4e^{-a(T-t)}-e^{-2a(T-t)}\right)\right)$$

$$=\exp\left(-\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)r_t+b\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}-(T-t)\right)-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}-(T-t)+\frac{1-2e^{-a(T-t)}+e^{-2a(T-t)}}{2a}\right)\right)$$

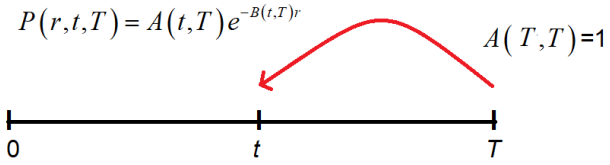
เพื่อความสะดวกให้ $B\equiv B(t,T)=\dfrac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$

$$P(r_t,t,T)=\exp\left(-Br_t+b\left(B-(T-t)\right)-\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(B-(T-t)+\frac{a^2B^2}{2a}\right)\right)$$

$$=\left[\exp\left(\left(b-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(B-(T-t)\right)-\frac{\sigma^2B^2}{4a}\right)\right]\left[\exp\left(-Br_t\right)\right]=A(t,T)e^{-B(t,T)r_t}$$

เมื่อ $B\equiv B(t,T)=\dfrac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ และ $A(t,T)=\exp\left(\left(b-\dfrac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(B-(T-t)\right)-\dfrac{\sigma^2B^2}{4a}\right)$ □

จากทฤษฎีบท 8.3 จะได้ว่า $B(T,T)=0$ และ $A(T,T)=1$ และราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลา t ใด ๆ $P(r,t,T)$ เป็นราคาที่ถูกคิดลดของตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาไถ่ถอน 1 บาทที่เวลา T



รูปที่ 8.2 *ราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองราคาที่ถูกคิดลดของตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาไถ่ถอน 1 บาท ที่เวลา T*

ตัวอย่างที่ 8.2 สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t=0,\ 0.5,1,1.5,2$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a=0.00006912$ (ต่อวัน), $b=0.00007202$ (ต่อวัน), $\sigma=0.00000409$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (0.5 ปี เท่ากับ 182.5 วัน) โดยสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้ $r_0=0.0045334\%$, $r_{185.5}=0.0045004\%$ $r_{365}=0.0044002\%$, $r_{547.5}=0.0042004\%$, $r_{730}=0.0039124\%$ (ต่อวัน)

วิธีทำ จากสูตรคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลา t ใด ๆ ภายใต้แบบจำลองของ Vasicek

$$P(r_t,t,730)=A(t,730)e^{-B(t,730)r_t}$$

เมื่อ $B\equiv B(t,730)=\dfrac{1-e^{-a(730-t)}}{a}$ และ $A(t,T)=\exp\left(\left(b-\dfrac{\sigma^2}{2a^2}\right)(B-(T-t))-\dfrac{\sigma^2B^2}{4a}\right)$

จะแสดงค่าการคำนวณของ $P(r_0,0,730), P(r_{185.5},185.5,730), P(r_{365},365,730), P(r_{547.5},365,730)$ และ $P(r_{730},730,730)$ แสดงในตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8.1 *การคำนวณราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek*

อายุ (t)	ค่าของ			$P(r_t,t,730)$	ราคาตราสารหนี้ที่เวลา t
	r_t	$A(r_t,t,T)$	$B(r_t,t,T)$		
0	0.000045334	0.9997	711.8889	0.96799085	9679.9085
185.5	0.000045004	0.9997	534.3810	0.97595338	9759.5338
365	0.000044002	0.9998	360.4342	0.98407259	9840.7259
547.5	0.000042004	0.9999	181.3538	0.99234609	9923.4609
730	0.000039124	1.0000	0.0000	1	10,000

□

ในการใช้งานแบบจำลองผู้ใช้พึงระวังเรื่องการกำหนดหน่วยเวลาให้สอดคล้องกันระหว่างช่วงเวลา dt หรือ Δt และขนาดของอัตราร้อยละของอัตราดอกเบี้ยต่อช่วงเวลา dt หรือ Δt กล่าวคือ หากอัตราดอกเบี้ยที่ใช้ในการคำนวณเป็นรายวัน ค่าพารามิเตอร์อื่น เช่น a, b และ σ ย่อมต้องเป็นค่าพารามิเตอร์ของการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยเป็นรายวันด้วย โดยที่ค่า dt, t และ T จะมีหน่วยเป็นวันด้วย

8.2 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง CIR

สมมติว่าให้ $\{r_t\}$ เป็นกระบวนการสุ่มบาวน์เนียนภายใต้ปริภูมิความน่าจะเป็น $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ โดยที่แฟมมิลี่ $\{\mathcal{F}_t\}$ เป็นเซตของข้อมูลทั้งหมดของตัวเชิงสุ่ม r_t ที่ขึ้นกับเวลา s ทุกๆ $s \le t$ (เรียกว่าการกรองมาตรฐาน: standard filtration) และ P ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย CIR ในรูป

$$dr_t = \left[\theta(t) + a(t)(b - r_t)\right]dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}\,dW_t \tag{8.8}$$

เมื่อ $a(t), b(t)$ และ σ เป็นฟังก์ชันค่าจริง โดยที่ $2ab > \sigma^2$ และสมมติว่าราคาตลาดของความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย (market price of interest-rate risk) คือ $\lambda(t)\sqrt{r}$ สำหรับบางฟังก์ชัน $\lambda(t)$ ที่นิยามบนช่วงเวลามีขอบเขต $(0, \tau)$ ใดๆ

กำหนดให้ $f(r,t) \equiv P(r_t, t, T)$ เป็นราคาของตราสารหนี้ที่ถูกคิดลดด้วยอัตราดอกเบี้ย r_t ที่ได้จากแบบจำลอง CIR และมีราคาไถ่ถอนที่เวลา T เท่ากับ 1 บาท สมมติว่า $f(r,t) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$ จะได้ว่า $f(r,t)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (pde)

$$f_t + \left[\phi(t) - a(t)r\right]f_r + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f_{rr} - rf = 0 \tag{8.9}$$

โดยที่ $$\phi(t) = a(t)b + \theta(t)$$

และ $$\psi(t) = a(t) + \lambda(t)\sigma(t)$$

เมื่อ $A(t,T)$ และ $B(t,T)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ

$$A_t - \phi(t)AB = 0 \tag{8.10}$$

และ $$B_t - \psi(t)B - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 B^2 + 1 = 0 \qquad (8.11)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบ คือ $$A(T,T) = 1, \quad B(T,T) = 0 \qquad (8.12)$$

ทฤษฎีบท 8.4 กำหนดให้ $\psi(t) = \psi$, $\phi(t) = \phi$ และ $\sigma(t) = \sigma$ เป็นค่าคงที่ ถ้า $A(t,T)$ และ $B(t,T)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ (8.10)-(8.12) จะได้ว่า

1) $B(t,T) = \dfrac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}$

และ 2) $A(t,T) = \left[\dfrac{2\gamma e^{(\gamma+\psi)(T-t)/2}}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}\right]^{2\phi/\sigma^2}$ โดยที่ $\gamma = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$

พิสูจน์ สมมติว่า $\psi(t) = \psi$, $\phi(t) = \phi$ และ $\sigma(t) = \sigma$ เป็นค่าคงที่ พิจารณาสมการ (8.10), (8.11) ภายใต้เงื่อนไขขอบ คือ $A(T,T) = 1$, $B(T,T) = 0$ จากสมการ (8.28), $B_t - \psi B - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 + 1 = 0$ เพื่อความสะดวกจะใช้โปรแกรม mathemaca ช่วยในการคำนวณได้

$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma} \text{ เมื่อ } \gamma = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$$

ต่อไปพิจารณาสมการเชิงเส้น ,

$$A_t - \phi AB = 0$$

คูณตัวประกอบร่วมการอินทิเกรต $I(t) = e^{\int_t^T \phi B(s,T)\partial s} = e^{\phi\int_t^T B(s,T)\partial s}$ จะได้

$$\partial\left(A(s,T)I(s)\right) = 0\,\partial s$$

อินทิเกรตตั้งแต่ t ถึง T ได้ $$\int_t^T \partial\left(A(s,T)I(s)\right) = \int_t^T 0\,\partial s$$

จะได้ $$A(t,T) = \left(I(t)\right)^{-1} A(T,T)$$

แทนเงื่อนไขขอบเขต $A(T,T) = 1$ และ $B(t,T) = \dfrac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}$

เพื่อความสะดวกจะใช้โปรแกรม mathemaca ช่วยในการคำนวณได้

$$A(t,T) = \left(I(t)\right)^{-1} = e^{-\phi\int_t^T B(s,T)\partial s} = \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+\psi)(T-t)/2}}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}\right]^{2\phi/\sigma^2} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 8.3 สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ (ปี)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลอง CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง CIR, $\phi = 0.00006912$ (ต่อวัน), $\psi = 0.00007202$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (0.5 ปี เท่ากับ 182.5 วัน) โดยสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง CIR เป็นดังนี้ $r_0 = 0.0045334\%$, $r_{182.5} = 0.0045004\%$ $r_{365} = 0.0044002\%$, $r_{547.5} = 0.0042004\%$, $r_{730} = 0.0039124\%$ (ต่อวัน)

วิธีทำ จากสูตรคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลา t ใด ๆ ภายใต้แบบจำลองของ CIR

$$P(r_t, t, 730) = A(t, 730)e^{-B(t,730)r_t}$$

โดยที่ $B(t,730) = \dfrac{2\left(e^{\gamma(730-t)} - 1\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(730-t)} - 1\right) + 2\gamma}$ และ $A(t,730) = \left[\dfrac{2\gamma e^{(\gamma+\psi)(730-t)/2}}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(730-t)} - 1\right) + 2\gamma}\right]^{2\phi/\sigma^2}$

เมื่อ $\gamma = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$ ในที่นี้ $\phi = 0.00006912$ (ต่อวัน), $\psi = 0.25$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และ $\gamma = \sqrt{0.25^2 + 2\left(0.00000409^2\right)} = 0.250000000067$ จะแสดงการคำนวณของ $P(r_0, 0, 730)$, $P(r_{182.5}, 182.5, 730)$, $P(r_{365}, 365, 730)$, $P(r_{547.5}, 365, 730)$ และ $P(r_{730}, 730, 730)$ แสดงในตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8.2 *การคำนวณราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง CIR*

อายุ (t)	ค่าของ			$P(r_t, t, 730)$	ราคาตราสารหนี้ที่เวลา t
	r_t	$A(r_t, t, T)$	$B(r_t, t, T)$		
0	0.000045334	0.818137780	4.000000	0.817989436	8179.89
182.5	0.000045004	0.861192356	4.000000	0.861037342	8610.37
365	0.000044002	0.905009987	4.000000	0.904850712	9048.51
547.5	0.000042004	0.951846316	4.000000	0.951686404	9516.86
730	0.000039124	1	0.000000	1.000000000	10000

□

8.3 การกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย

สำหรับการกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย (extended Vasicek model) ในรูป

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)]dt + \sigma(t)dW_t \tag{8.13}$$

สมมติว่าราคาตลาดของความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย (market price of interest-rate risk) คือ $\lambda(t)\sqrt{r}$ สำหรับบางฟังก์ชัน $\lambda(t)$ ที่นิยามบนช่วงเวลามีขอบเขต $(0,\tau)$ ใดๆ และ กำหนดให้ $f(r,t) \equiv P(r_t,t,T)$ เป็นราคาของตราสารหนี้ที่ถูกคิดลดด้วยอัตราดอกเบี้ย r_t ที่ได้จากแบบจำลอง CIR และมีราคาไถ่ถอนที่เวลา T เท่ากับ 1 บาท พิจารณา f ในรูป

$$f = A(t,T)e^{-B(t,T)r_t} \tag{8.14}$$

จะได้ว่า f สอดคล้องกับสมการ

$$f_t + [\phi(t) - a(t)r]f_r + \frac{1}{2}\sigma^2(t)f_{rr} - rf = 0 \tag{8.15}$$

โดยที่ $$\phi(t) = a(t)b + \theta(t) - \lambda(t)\sigma(t) \tag{8.16}$$

ฟังก์ชัน $A(t,T)$ และ $B(t,T)$ สอดคล้องกับสมการ

$$A_t - \phi(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2(t)AB^2 = 0 \tag{8.17}$$

และ $$B_t - a(t)B + 1 = 0 \tag{8.18}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ คือ $A(0,T) = B(0,T) = A(T,T) = 1$ และ $B(T,T) = 0$ (8.19)

ทฤษฎีบท 8.5 ภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย ตามสมการ (8.13) กำหนดให้ $a(t)$, $\phi(t)$ และ $\sigma(t)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ สมมติ $A(t,\tau)$ และ $B(t,\tau)$ สำหรับทุก ๆ $t \le \tau \le T$ สอดคล้องตามสมการ (8.17) - (8.19) จะได้

1) $B(t,\tau) = \dfrac{1 - B(0,t)}{B'(0,t)}$

และ 2) $A(t,\tau) = \left(\dfrac{A(0,\tau)}{A(0,t)}\right)\exp\left[-\dfrac{B(t,\tau)A'(0,t)}{A(0,t)} - \dfrac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\dfrac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds\right]$

พิสูจน์ พิจารณาจากสมการเชิงเส้น

$$B_t - a(t)B + 1 = 0 \tag{8.20}$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร τ ได้

$$B_{t\tau} - a(t)B_\tau = 0 \tag{8.21}$$

คูณตลอดสมการ (8.20) ด้วย B_τ และคูณตลอดสมการ (8.21) ด้วย B

จะได้สมการต่อไปนี้ ตามลำดับ

$$B_t B_\tau - a(t)BB_\tau + B_\tau = 0 \tag{8.22}$$

$$BB_{tT} - a(t)BB_T = 0 \tag{8.23}$$

(8.22) – (8.23) จะได้ว่า $$B_t B_\tau - BB_{t\tau} + B_\tau = 0 \tag{8.24}$$

สมมติว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (8.24) อยู่ในรูป

$$B = B(t,\tau) = \eta(t)\big(B(0,\tau) - B(0,t)\big) \tag{8.25}$$

โดยที่ $\eta(t) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร t

จากสมการ (8.25) จะได้

$$B_\tau = \eta(t)B'(0,\tau)$$

$$B_t = \eta'(t)B(0,\tau) - \eta(t)B'(0,t) - \eta(t)B(0,t)$$

$$B_{t\tau} = \eta'(t)B'(0,\tau)$$

$$B_t B_\tau = \eta(t)\eta'(t)B(0,\tau)B'(0,\tau) - \eta(t)^2 B'(0,t)B'(0,\tau) - \eta(t)\eta'(t)B(0,t)B'(0,\tau)$$

$$BB_{t\tau} = \eta(t)\eta'(t)B(0,\tau)B'(0,\tau) - \eta(t)\eta'(t)B(0,t)B'(0,\tau)$$

แทนค่า $B_t B_\tau,\ BB_{t\tau}, B_\tau$ ลงในสมการ (8.24) ได้

$$B_t B_\tau - BB_{t\tau} + B_\tau$$

$$= \big(\eta(t)B'(0,\tau)\big)\big(\eta'(t)B(0,\tau) - \eta(t)B'(0,t) - \eta'(t)B(0,t) - \eta'(t)B(0,\tau) + \eta'(t)B(0,t) + 1\big)$$

$$= \eta(t)B'(0,T)\big(-\eta(t)B'(0,t) + 1\big) = 0$$

จะได้ $$B'(0,\tau) = 0 \text{ หรือ } -\eta(t)B'(0,t) + 1 = 0$$

ในกรณีที่ $B'(0,\tau) = 0 \Rightarrow B(0,\tau) = c$ (ค่าคงที่) สำหรับทุกๆ $\tau \leq T$

จากโดยเงื่อนไขขอบ $B(0,T)=1$ จะได้ $B(0,\tau)=1$ สำหรับทุกๆ $\tau \le T$ ซึ่งส่งผลให้ $B(t,\tau)=\eta(t)\big(B(0,\tau)-B(0,t)\big)=0$ ซึ่งเป็นผลเฉลยชัดแจ้ง (trivail solution) เราสนใจหาผลเฉลยที่ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้ง (non-trivail solution) ดังนั้นสมมติว่า $B'(0,\tau)\neq 0$ สำหรับทุก ๆ $\tau < T$ จะได้ $-\eta(t)B'(0,t)+1=0$

โดยการแก้สมการได้ $$\eta(t)=\frac{1}{B'(0,t)} \tag{8.26}$$

แทนสมการ (8.26) ลงในสมการ (8.25) จะได้ว่า

$$B(t,\tau)=\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}$$

ผลที่ตามมาคือ $B(t,T)=\lim_{\tau\to T^-}\dfrac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}=\dfrac{B(0,T)-B(0,t)}{B'(0,t)}$ □

ทฤษฎีบท 8.6 ภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย ตามสมการ (8.13) กำหนดให้ $\phi(t)$ และ $\sigma(t)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $B(t,\tau)=\dfrac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}$ สำหรับทุกๆ $t\le\tau\le T$ ซึ่ง $B(0,T)=1$ และ $B(T,T)=0$ ถ้า $a(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ (8.18) แล้วจะได้ว่า $a(t)=-\dfrac{B''(0,t)}{B'(0,t)}$

พิสูจน์ จากสมการ $$B_t-a(t)B+1=0$$

โดยการจัดรูป จะได้ $$a(t)=\frac{B_t+1}{B}$$

และจาก $$B(t,\tau)=\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}$$

หาอนุพันธ์ย่อยเทียบ t จะได้ว่า

$$B_t(t,\tau)=\frac{-\big(B'(0,t)\big)^2-\big(B(0,\tau)-B(0,t)\big)B''(0,t)}{\big(B'(0,t)\big)^2}=-1-B(t,\tau)\frac{B''(0,t)}{B'(0,t)}$$

ดังนั้น $a(t)=\dfrac{B_t+1}{B}=\dfrac{1}{B}\left(-1-B\dfrac{B''(0,t)}{B'(0,t)}+1\right)=-\dfrac{B''(0,t)}{B'(0,t)}$ □

ทฤษฎีบท 8.7 ภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย ตามสมการ (8.13) กำหนดให้ $\sigma(t)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ $A(t,\tau)=\left(\frac{A(0,\tau)}{A(0,t)}\right)\exp\left[-\frac{B(t,\tau)A'(0,t)}{A(0,t)}-\frac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds\right]$, $B(t,\tau)=\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}$ สำหรับทุกๆ $t\le\tau\le T$ และ $a(t)=-\frac{B''(0,t)}{B'(0,t)}$ สมมติว่า $\phi(t)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ (8.16) และ (8.17) จะได้ว่า

$$\phi(t)=-a(t)\widehat{A}'(0,t)-\widehat{A}''(0,t)+\left(B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds \tag{8.27}$$

โดยที่ $\hat{A}(t,\tau)=\ln A(t,\tau)$

พิสูจน์ จากสมการ $A_t-\phi(t)AB+\frac{1}{2}\sigma(t)^2AB^2=0$

โดยการจัดรูป จะได้ $$\phi(t)=\frac{A_t}{AB}+\frac{1}{2}\sigma^2B \tag{8.28}$$

กำหนดให้ $\widehat{A}(t,\tau)=\ln A(t,\tau)$ จะได้ว่า $\widehat{A_t}=\frac{A_t}{A}$

จาก $A(t,\tau)=\left(\frac{A(0,\tau)}{A(0,t)}\right)\exp\left[-\frac{B(t,\tau)A'(0,t)}{A(0,t)}-\frac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds\right]$ จะได้

$$\hat{A}(t,\tau)=\hat{A}(0,\tau)-\hat{A}(0,t)-B(t,\tau)\hat{A}'(0,t)-\frac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds$$

และ $$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{A}(t,\tau)=-\widehat{A'}(0,t)-B(t,\tau)\widehat{A''}(0,t)-\widehat{A'}(0,t)B_t(t,\tau)-\frac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\left(\frac{\sigma(t)}{B'(0,t)}\right)^2$$

$$-B(t,\tau)B'(0,t)\left(B(t,\tau)B''(0,t)+B'(0,t)B_t(t,\tau)\right)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds$$

ดังนั้น $$\frac{\widehat{A_t}}{B}=-\frac{\widehat{A'}(0,t)}{B}-\widehat{A''}(0,t)-\frac{\widehat{A'}(0,t)B_t}{B}-\frac{1}{2}B\sigma^2$$

$$-\left(B'(0,t)BB''(0,t)+\left(B'(0,t)\right)^2B_t\right)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2 ds$$

โดยการแทนค่า $\frac{\widehat{A_t}}{B}$ และ $B''(0,t)=-a(t)B'(0,t)$ และ

$$B(t,\tau)=\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}\Rightarrow B(0,\tau)-B(0,t)=B(t,\tau)B'(0,t)\Rightarrow\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B(t,\tau)B'(0,t)}=1$$

และ $B_t(t,\tau)=\left[\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}\right]_t=\frac{-\left(B'(0,t)\right)^2-\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)B''(0,t)}{\left(B'(0,t)\right)^2}$

$$=-1-\frac{\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)B''(0,t)}{\left(B'(0,t)\right)^2}=-1+\frac{\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)}{B'(0,t)}$$

จาก (8.27) ได้ $\phi(t)=\frac{\hat{A}_t}{B}+\frac{1}{2}\sigma^2 B$

$$=-\frac{\widehat{A'}(0,t)}{B}-\widehat{A''}(0,t)-\frac{\widehat{A'}(0,t)B_t}{B}-\left(B'(0,t)BB''(0,t)+\left(B'(0,t)\right)^2B_t\right)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$=-\frac{\widehat{A'}(0,t)}{B}-\widehat{A''}(0,t)-\frac{\widehat{A'}(0,t)}{B}\left(-1+\frac{\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)}{B'(0,t)}\right)$$

$$-B'(0,t)BB''(0,t)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds-\left(B'(0,t)\right)^2B_t\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$=-\widehat{A''}(0,t)-\frac{\widehat{A'}(0,t)\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)}{BB'(0,t)}$$

$$+B'(0,t)\left(\frac{B(0,\tau)-B(0,t)}{B'(0,t)}\right)a(t)B'(0,t)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$-\left(B'(0,t)\right)^2\left(-1+\frac{\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)}{B'(0,t)}\right)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$=-\widehat{A''}(0,t)-\widehat{A'}(0,t)a(t)+\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)B'(0,t)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$+\left(B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds-\left(B(0,\tau)-B(0,t)\right)a(t)B'(0,t)\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds$$

$$=-\widehat{A'}(0,t)a(t)-\widehat{A''}(0,t)+\left(B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 8.8 กำหนดให้ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย จะได้ว่า

$$P(r_t,t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r_t}$$

เมื่อ $B(t,\tau)=\frac{1-B(0,t)}{B'(0,t)}$

และ $A(t,\tau)=\left(\frac{A(0,\tau)}{A(0,t)}\right)\exp\left[-\frac{B(t,\tau)A'(0,t)}{A(0,t)}-\frac{1}{2}\left(B(t,\tau)B'(0,t)\right)^2\int_0^t\left(\frac{\sigma(s)}{B'(0,s)}\right)^2ds\right]$

ตัวอย่างที่ 8.4 (การกำหนดราคาพันธบัตรไม่มีคูปองภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย) สมมติว่าบริษัทจัดการกองทุนแห่งหนึ่งกำลังประเมินมูลค่าที่แท้จริงของพันธบัตรรัฐบาลอายุ 10 ปี ซึ่งไม่มีการจ่ายคูปอง โดยพิจารณาความเสี่ยงด้านอัตราดอกเบี้ยที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ที่มีพฤติกรรมตามตัวแบบ Vasicek ที่ถูกขยาย โดยกำหนดเงื่อนไขของแบบจำลอง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยเริ่มต้น $r_0 = 0.035$ และพิจารณาระยะเวลา $T = 10$ และกำหนดค่าของพารามิเตอร์ของแบบจำลอง ดังนี้ $a = 0.3$, $b = 0.05$, $\sigma(t) = 0.015e^{-0.1t}$ ให้ใช้สูตรการกำหนดราคาพันธบัตร เป็น $P(r_t, t, T) = A(t,T) \cdot e^{-B(t,T)r_t}$ โดยที่ $A(t,T)$ และ $B(t,T)$ กำหนดตามทฤษฎีบท 8.8

1) จงคำนวณราคาพันธบัตรไม่มีคูปอง $P(r_0, 0, 10)$

2) วิเคราะห์ว่าหาก $\sigma(t)$ มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ราคาพันธบัตรจะมีแนวโน้มอย่างไร พร้อมเหตุผล

วิธีทำ ข้อ 1) จากสูตร $B(0,T) = \dfrac{1-e^{-aT}}{a} = \dfrac{1-e^{-3}}{0.3} \approx \dfrac{0.9502}{0.3} \approx 3.1673$

เพื่อความง่ายและสะดวกในการวิเคราะห์จะใช้สูตรย่อของ $A(0,T)$ สำหรับกรณี σ คงที่ โดยการประมาณ $\sigma(t) = 0.015e^{-0.1t}$ ด้วย 0.015 ดังนั้นได้

$$A(0,T) = \exp\left[\left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(B(0,T) - T) - \frac{\sigma^2}{4a}B(0,T)^2\right]$$

คำนวณแต่ละส่วน

$$\sigma = 0.015 \Rightarrow \sigma^2 = 0.000225, \qquad \frac{\sigma^2}{2a^2} = \frac{0.000225}{2 \cdot 0.09} = 0.00125,$$

$$b - \frac{\sigma^2}{2a^2} = 0.05 - 0.00125 = 0.04875, \quad B(0,T) - T = 3.1673 - 10 = -6.8327$$

$$\frac{\sigma^2}{4a}B(0,T)^2 = \frac{0.000225}{1.2} \cdot (3.1673)^2 \approx 0.00188$$

$$A(0,T) = \exp\left[0.04875 \cdot (-6.8327) - 0.00188\right] \approx \exp(-0.3353) \approx 0.7152$$

คำนวณราคาพันธบัตรได้ เป็น

$$P(r_0, 0, 10) = 0.7152 \cdot e^{-3.1673 \cdot 0.035} = 0.7152 \cdot e^{-0.1109} \approx 0.7152 \cdot 0.8951 = 0.6398$$

ข้อ 2) วิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวน ($\sigma(t)$)

หาก $\sigma(t)$ มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น จะสังเกตเห็นว่า พจน์ $A(t,T)$ จะลดลง เพราะมีส่วนลดจาก $\frac{\sigma^2}{4a}B^2$ และส่วนของพจน์ $e^{-B(t,T)r_t}$ ไม่เปลี่ยนหาก r_t คงที่ นั่นคือ ความผันผวนที่เพิ่มขึ้นทำให้ราคาพันธบัตรลดลง เพราะนักลงทุนต้องการผลตอบแทนที่ชดเชยความไม่แน่นอนของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต เมื่อความเสี่ยงจากดอกเบี้ยเพิ่ม ราคาพันธบัตรจะลดลง

□

8.4 แบบจำลองโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง *Vasicek ที่ถูกขยาย*

เนื่องจาก แบบจำลอง *Vasicek ที่ถูกขยาย* เวลาต่อเนื่อง อยู่ในรูป

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b-r)]dt + \sigma(t)dW_t$$

แบบจำลอง *Vasicek ที่ถูกขยาย* เวลาไม่ต่อเนื่อง อยู่ในรูป

$$\triangle r = [\theta(t) + a(t)(b-r)]\triangle t + \varepsilon\left(0, \sigma^2(t)\triangle t\right)$$

ให้ $r_{i,j}$ แทนอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่กำหนดขึ้นที่เวลา $t=i$ สภาวะที่ j สำหรับช่วงเวลา $[i,i+1]$ นิยาม $R_{i,j}$ ตัวแปรเชิงสุ่มโดย

$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} &= [\theta_i + a_i(b-r_{i,j})] + \sigma_i \equiv r_u \quad ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} &= [\theta_i + a_i(b-r_{i,j})] - \sigma_i \equiv r_d \quad ; prob = 0.5 \end{cases}, \ (\because \triangle t = 1) \qquad (8.29)$$

เป็นการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยจากโหนด (i,j) ตามรูปที่ 8.3

จากสมการ (8.29) จะได้ว่า

$$\theta_i = \frac{r_{i+1,j} + r_{i+1,j+1}}{2} - a_i(b - r_{i,j}) \quad \text{และ} \quad \sigma_i = \frac{r_{i+1,j} - r_{i+1,j+1}}{2}$$

สมมุติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาของตราสารหนี้จะเปลี่ยนแปลงขึ้น $p = 0.5$ และกำหนดให้ y_k (ต่อปี) เป็นอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-counpon bond) อายุไถ่ถอน (year to maturity) ที่ปี k , $k = 1,...,N$ สามารถเขียนโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคตามแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย ได้เช่นเดียวกับแบบจำลอง ho lee โดยมีความแตกต่างกันในขั้นที่ 3 คือ สร้างสมการจากตัวแบบ Vasicek ที่ถูกขยาย

$$R_{i,j} = \begin{cases} r_{i+1,j} &= [\theta_i + a_i(b-r_{i,j})] + \sigma_i \equiv r_u \quad ; prob = 0.5 \\ r_{i+1,j+1} &= [\theta_i + a_i(b-r_{i,j})] - \sigma_i \equiv r_d \quad ; prob = 0.5 \end{cases}$$

หรือ $\theta_i = \frac{r_{i+1,j} + r_{i+1,j+1}}{2} - a_i(b - r_{i,j})$ และ $\sigma_i = \frac{r_{i+1,j} - r_{i+1,j+1}}{2}$

และแก้สมการเพื่อหาค่าความผันผวน σ_{N-2}, θ_{N-2}, a_{N-2}, b แทนค่ากลับ เพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j = 0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i, j = 0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ตัวอย่างที่ 8.5 กำหนดอายุไถ่ถอนและราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1และ 2 ตามตาราง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยายและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค กำหนด $b = 0.0019999862$

อายุไถ่ถอน k	ราคาไถ่ถอน C	อัตราดอกเบี้ย y_k	ราคาปัจจุบัน B_0^k
1	1000	0.0900	917.40
2	1000	0.0950	834.00
3	1000	0.1000	751.30
4	1000	0.1050	670.70
5	1000	0.1100	593.50

วิธีทำ กำหนดอัตราดอกเบี้ย y_k, $k = 1,...,5$ มาให้และคำนวณราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ ในคอลัมน์สุดท้ายในตารางด้านบนด้วยสูตร

ต่อไปเป็นการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N = 1,2,3,4,5$

ตามขั้นตอนต่อไปนี้ $B_0^k = 1,000(1+y_k)^{-k}$, $k = 1,...,5$

ขั้นที่ 1) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนขอบ สำหรับแต่ละ $N = 1,...,5$

$$B_{0,0} = B_0^N = 1,000(1+y_N)^{-N}, \quad B_{N,j} = 1000, \; j = 0,1,...,N$$

กำหนด $r_{i,j}$, $i, j = 0,1,...,N-2$ จากโครงร่างตาข่ายอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $N-2$ คาบเวลา

ขั้นที่ 2) สำหรับแต่ละ $N = 1,...,5$ สร้างสมการจากโครงร่างตาข่ายราคาต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา

$$B_{i,j} = 0.5(1+r_{i,j})^{-1}(B_{N,0} + B_{N,1})$$

ตารางที่ 8.3 *ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง*

B(0,j)	B(1,j)
917.40	1000
	1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)
834.00	909.09	1000
	909.10	1000
		1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)
751.30	818.94	900.84	1000
	818.95	900.84	1000
		900.84	1000
			1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)
670.70	731.08	804.20	892.72	1000
	731.09	804.20	892.72	1000
		804.20	892.72	1000
			892.72	1000
				1000

B(0,j)	B(1,j)	B(2,j)	B(3,j)	B(4,j)	B(5,j)
593.50	646.95	711.68	790.02	884.80	1000
	646.93	711.61	790.02	885.11	1000
		711.61	789.88	884.80	1000
			790.02	884.80	1000
				885.11	1000
					1000

ขั้นที่ 3) สร้างสมการจากตัวแบบ Vasicek ที่ถูกขยาย

$$R_{i,j}=\begin{cases} r_{i+1,j} &= \left[\theta_i + a_i(b-r_{i,j})\right]+\sigma_i \equiv r_u \quad ; prob=0.5 \\ r_{i+1,j+1} &= \left[\theta_i + a_i(b-r_{i,j})\right]-\sigma_i \equiv r_d \quad ; prob=0.5 \end{cases}$$

หรือ $\theta_i = \dfrac{r_{i+1,j}+r_{i+1,j+1}}{2} - a_i(b-r_{i,j})$ และ $\sigma_i = \dfrac{r_{i+1,j}-r_{i+1,j+1}}{2}$

ขั้นที่ 4) แก้สมการ จากขั้นที่ 1), ขั้นที่ 2) และ ขั้นที่ 3) เพื่อหาค่าของ a_{N-1},θ_{N-1} แทนค่ากลับเพื่อหา $r_{N-1,j}$, $j=0,1,...,N-1$

ผลลัพธ์ คืออัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_{i,j}$; $i,j=0,1,...,N-1$ ในโครงร่างตาข่าย $N-1$ คาบเวลา

ในที่นี้แก้ระบบสมการโดยใช้ excel solver ผลลัพธ์ทั้งหมดแสดงในตารางที่8.10 และตารางที่ 8.11

ตารางที่ 8.4 *(ด้านซ้ายมือ) ผลลัพธ์โครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค N คาบเวลา, $N=1,2,3,4,5$ ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (ด้านขวามือ) แสดงการสร้างสมการตามขั้นที่2) และขั้นที่ 3) และผลจากการใช้ excel solver ในการแก้ระบบสมการ*

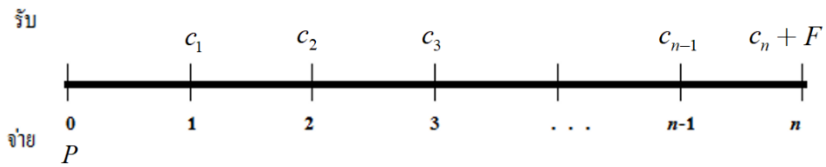
r(0,j)									
0.090037061260	r(0,0)					a	0.0020007718	
						b	0.0019999862	
						zeta0	0.1001761338	
r(0,j)	r(1,j)					sig0	0.0000063870	0.0000
0.090037061260	0.100006378679	r(1,0)				eq	0.0000063427	
	0.099993604664	r(1,1)						
						a	0.0001000000	
						b	0.0019999862	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)				zeta1	0.1100856769	
0.090037061260	0.100006378679	0.110075875660	r(2,0)			sig1	-0.0000000006	0.0000
	0.099993604664	0.110075876938	r(2,1)			sig1	-0.0000000006	0.0000
		0.110075878215	r(2,2)			eq	-0.0000000006	
						a	0.0000002324	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)			b	0.0019999862	
0.090037061260	0.100006378679	0.110075875660	0.120172961807	r(3,0)		zeta2	0.1201729787	
	0.099993604664	0.110075876938	0.120172945453	r(3,1)		sig2	0.0000000082	0.0000
		0.110075878215	0.120172961807	r(3,2)		sig2	0.0000000082	0.0000
			0.120172945453	r(3,3)		sig2	0.0000000082	0.0000
						eq	0.0000000000	
r(0,j)	r(1,j)	r(2,j)	r(3,j)	r(4,j)		a	0.4551333090	
0.090037061260	0.100006378679	0.110075875660	0.120172961807	0.130200849186	r(4,0)	b	0.0019999862	
	0.099993604664	0.110075876938	0.120172945453	0.129800849474	r(4,1)	zeta3	0.1837853067	
		0.110075878215	0.120172961807	0.130200849186	r(4,2)	sig3	0.0001999999	0.0002
			0.120172945453	0.130200856629	r(4,3)	sig3	0.0001999999	-0.0002
				0.129800856918	r(4,4)	sig3	0.0001999999	0.0000
						sig3	0.0001999999	0.0002
						eq	0.0000000391	

□

8.5 การกำหนดราคาตราสารหนี้มีคูปอง

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ได้กล่าวถึงสูตรรูปปิด (closed form) ในการกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาตราสารหนี้มีคูปองซึ่งมีการจ่ายคูปองเป็นงวด ๆ โดยประยุกต์ใช้สูตรรูปปิดในการกำหนดราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง โดยมีแนวทางดังนี้

พิจารณาตราสารหนี้ตราสารอายุ n งวดซึ่งมีมีราคาที่ตราไว้ F ราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ และการจ่ายคูปอง c_k ปลายงวดที่ k, $k=1,2,...,n$ ซึ่งเขียนแผนภาพกระแสเงินสดได้ ดังนี้



รูปที่ 8.3 *กระแสเงินสดของตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปอง*

โดยการประยุกต์ใช้การกำหนดราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองจะพิจารณาตราสารหนี้มีคูปองอายุ n งวด ประกอบขึ้นด้วยตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน n ฉบับ โดยแต่ละฉบับมีราคาไถ่ถอนเป็น $c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n + F$ ที่มีอายุไถ่ถอนปลายงวดที่ $1, 2, 3, ..., n$ ตามลำดับ กำหนดให้ $\tilde{c}_k = c_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$ และ $\tilde{c}_n = c_n + F$ สำหรับตราสารหนี้ฉบับที่ k , $k = 1, 2, ..., n$ จะได้ ราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองฉบับที่ k , $P_k(t) = \tilde{c}_k P(r_k, t, k)$, $t \le k$

จะได้ ราคาของตราสารหนี้มีคูปอง เท่ากับ ผลรวมของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

$$P(t) = \sum_{k=t+1}^{n} P_k(t) = \sum_{k=t+1}^{n} \tilde{c}_k P(r_k, t, k)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง, $P = P(0) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k P(r_k, 0, k)$

เมื่อ $P(r_k, t, k) = A(t,k) e^{-B(t,k) r_k}$ โดยที่

1) ภายใต้แบบจำลองของ Vasicek

ฟังก์ชัน $B(t,T) = \dfrac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$ และ $A(t,T) = \exp\left[\dfrac{\left(B(t,T) - T + t\right)\left(a\phi - \sigma^2/2\right)}{a^2} - \dfrac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a} \right]$

2) ภายใต้แบบจำลอง CIR

ฟังก์ชัน $B(t,T) = \dfrac{2\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right)}{(\gamma + \psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}$ และ $A(t,T) = \left[\dfrac{2\gamma e^{(\gamma+\psi)(T-t)/2}}{(\gamma + \psi)\left(e^{\gamma(T-t)} - 1\right) + 2\gamma} \right]^{2\phi/\sigma^2}$

เมื่อ กำหนดให้ a , ϕ , σ , ψ เป็นค่าคงที่ และ $\gamma = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$

เพื่อความเข้าใจ ขอให้ศึกษาการคำนวณราคาตราสารหนี้มีคูปองดังจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8.6 สมมติตราสารหนี้อายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 4 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00006912$ (ต่อวัน), ,$\phi = 9.46944x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน)

วิธีทำ ในที่นี้จะพิจารณาตราสารหนี้อายุ 2 ปี ซึ่งจ่ายคูปองจำนวน 4 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน เทียบเคียงกับตราสารหนี้ชุดที่ประกอบด้วยตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน 4 ฉบับที่มีอายุคงเหลือเท่ากับ 1 งวด (ครึ่งปี), 2 งวด (หนึ่งปี), 3 งวด (หนึ่งปีครึ่ง) และ 4 งวด (สองปี) ตามลำดับ โดยตราสารหนี้ชุดดังกล่าวมีราคาไถ่ถอนเท่ากับ 20 บาท, 20 บาท, 20 บาท และ 1020 บาท ตามลำดับ

ดังนั้น ราคาตราสารหนี้มีคูปอง = ผลรวมของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน 4 ฉบับ

เนื่องจาก $P = P(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k P(r_k, 0, k) + FP(r_n, 0, n)$ เมื่อ $P(r_k, t, k) = A(t,k)e^{-B(t,k)r_k}$

โดยที่ภายใต้แบบจำลองของ Vasicek จะได้ว่า

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \quad \text{และ} \quad A(t,T) = \exp\left[\frac{\left(B(t,T)-T+t\right)\left(a\phi-\sigma^2/2\right)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right]$$

ต่อไปจะแสดงการคำนวณค่า $P(r_k, 0, k)$, $k = 1,2,3,4$ สำหรับตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุคงเหลือ 1 งวด = 6 เดือน = 182.5 วัน (0.5 ปี) , 2 งวด = 365 วัน (1 ปี), 3 งวด=547.5 วัน (1.5 ปี) , 4 งวด = 730 วัน (2 ปี)

ดังนั้น ราคาตราสารหนี้มีคูปอง เท่ากับ

$$P = 20P(r,0,182.5) + 20P(r,0,365) + 20P(r,0,547.5) + 1020P(r,0,730)$$

เนื่องจาก $B(t,T) = \left(1-e^{-a(T-t)}\right)/a = \dfrac{1-e^{-0.00006912(T-t)}}{0.00006912}$

ได้ว่า $B(0,182.5) = \left(1-e^{-0.00006912(182.5-0)}\right)/0.00006912 = 181.3538$

และ $A(0,182.5) = \exp\left[\dfrac{(181.3538-182.5+0)\left((0.00006912)\left(9.46944\times10^{-8}\right)-(0.00000409)^2/2\right)}{(0.00006912)^2}\right.$

$$\left. - \frac{(0.00000409)^2 (181.3538)^2}{4(0.00006912)}\right]$$

$$= e^{-0.0016} = 0.9984$$

เพื่อความสะดวกให้ $P(0,k) = \tilde{c}_k P(r,0,l_k)$

จะได้ว่า $P(0,182.5) = 20(0.9984)e^{-181.3538\times0.000045334} = 19.8045$

การคำนวณ $P(0,365), P(0,547.5)$ และ $P(0,730)$ ทำได้ในทำนองเดียวกันซึ่งค่าที่ได้แสดงในตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8.5 *การคำนวณราคาของตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek*

อายุ (t)	ค่าของ		กระแสเงินสด	มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด
	$A(0,T)$	$B(0,T)$		
0.5 ปี	0.9984	181.3538	20	19.8045
1.0 ปี	0.9939	360.4342	20	19.5556
1.5 ปี	0.9865	537.2699	20	19.2554
2.0 ปี	0.9765	711.8889	1020	964.3856
รวม				1023.0011

ดังนั้น ราคาตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek เท่ากับ 1023.0011 บาท □

ตัวอย่างที่ 8.7 สมมติตราสารหนี้อายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 4 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t=0$) จงหาราคาตราสารหนี้มีคูปองโดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00006912$ (ต่อวัน) ,$\phi = 9.46944\times10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน)

วิธีทำ ในที่นี้จะพิจารณาตราสารหนี้อายุ 2 ปี ซึ่งจ่ายคูปองจำนวน 4 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน เทียบเคียงกับตราสารหนี้ชุดที่ประกอบด้วยตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน 4 ฉบับที่มีอายุคงเหลือ1 งวด = 6 เดือน = 182.5 วัน (0.5 ปี) , 2 งวด = 365 วัน (1 ปี), 3 งวด=547.5 วัน (1.5 ปี) , 4 งวด = 730 วัน (2 ปี)

เนื่องจาก $P = P(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k P(r_k,0,k) + FP(r_n,0,n)$

เมื่อ $P(r_k,t,k) = A(t,k)e^{-B(t,k)r_k}$ โดยที่ภายใต้แบบจำลอง CIR จะได้ว่า

$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$

และ $A(t,T) = \left[\frac{2\gamma\left(e^{(\gamma+\psi)(T-t)/2}\right)}{(\gamma+\psi)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]^{2\phi/\sigma^2}$ โดยที่ $\gamma = \sqrt{\psi^2+2\sigma^2}$

ดังนั้น ราคาตราสารหนี้มีคูปอง เท่ากับ

$$P = 20P(r,0,182.5) + 20P(r,0,365) + 20P(r,0,547.5) + 1020P(r,0,730)$$

ต่อไปจะแสดงการคำนวณค่า $P(r_k,0,k)$, $k = 1,2,3,4$

เนื่องจาก $\gamma = \sqrt{0.00006912^2 + 2\left(0.00000409^2\right)} = 0.00006936$, และ

$$B(t,T) = \frac{2\left(e^{0.00006936(T-t)} - 1\right)}{(0.00006936 + 0.00006912)\left(e^{0.00006936(T-t)} - 1\right) + 2(0.00006936)}$$

และ $$A(t,T) = \left[\frac{2(0.00006936)\left(e^{(0.00013848)(T-t)/2}\right)}{(0.00013848)\left(e^{0.00006936(T-t)} - 1\right) + 2(0.00006936)}\right]^{\frac{2(9.46944\times10^{-8})}{0.00000409^2}}$$

ได้ว่า $$B(0,182.5) = \frac{2\left(e^{0.00006936(182.5)} - 1\right)}{(0.00013848)\left(e^{0.00006936(182.5)} - 1\right) + 2(0.00006936)} = 181.3537$$

และ

$$A(0,182.5) = \left[\frac{2(0.00006936)\left(e^{(0.00013848)(182.5)/2}\right)}{(0.00013848)\left(e^{0.00006936(182.5)} - 1\right) + 2(0.00006936)}\right]^{\frac{2(9.46944\times10^{-8})}{0.00000409^2}}$$

$$= 0.99844$$

จะได้ว่า $P(0,182.5) = 20(0.99844)e^{-181.3537\times0.000045334} = 19.8053$

การคำนวณ $P(0,365), P(0,547.5)$ และ $P(0,730)$ ทำได้ในทำนองเดียวกันซึ่งค่าที่ได้แสดงในตารางได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8.6 *การคำนวณราคาของตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลองของ CIR*

อายุ (t)	ค่าของ		กระแสเงินสด	มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสด
	$A(0,T)$	$B(0,T)$		
0.5 ปี	0.9998	181.3537	20	19.8362
1.0 ปี	0.9938	360.4341	20	19.6759
1.5 ปี	0.9862	537.2694	20	19.5188
2.0 ปี	0.9757	711.8878	1020	987.6073
รวม				1046.6382

ดังนั้น ราคาตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลองของ CIR เท่ากับ 1046.6382 บาท □

8.6 ออปชันบนตราสารหนี้

ออปชันเป็นตราสารสิทธิอนุพันธ์ที่ให้สิทธิซื้อหรือสิทธิขายแก่ผู้ถือตราสาร นับได้ว่าเป็นเครื่องมือทางการเงินที่สำคัญและเป็นที่นิยมประเภทหนึ่งของนักลงทุนไม่ว่าจะถือตราสารเพื่อการเก็งกำไร (speculating) การค้ากำไร (arbitraging) หรือการป้องกันความเสี่ยง (hedging) โดยในบทก่อนหน้านี้ (บทที่ 1 และบทที่ 4) เราได้กล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันบนพื้นฐานแบบจำลองต้นไม้ทวิภาค และแบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง และได้กล่าวถึงสูตรรูปปิด (closed form) ซึ่งได้แก่ สูตรของคอกซ์-โรสส์-โรบินสไตน์ และสูตรของแบล็ก-โชลส์ เป็นต้น ซึ่งเป็นลักษณะที่พึงประสงค์อีกข้อหนึ่งของแบบจำลอง คือ การให้สูตรสำเร็จสำหรับการกำหนดราคาอนุพันธ์ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันแบบยุโรปซึ่งมีตราสารหนี้เป็นสินทรัพย์อ้างอิง โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek โดยสูตรการคำนวณมีรูปแบบที่ไม่ซับซ้อนมากนักจึงทำให้สะดวกและเหมาะสำหรับการนำไปใช้ในการกำหนดและวิเคราะห์ราคาออปชันและนี่เป็นเหตุผลหนึ่งทำให้แบบจำลองของ Vasicek เป็นที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์ออปชันทั้งทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ

8.6.1 ออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

จากผลการวิจัยของ jamshidian ในปี ค.ศ.1989 กล่าวถึงการประยุกต์ใช้แบบจำลอง Vasicek ในการกำหนดราคาของออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (zero-coupon bond)

กำหนดให้ $P(r,t,T)$ เป็นราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งจ่ายคืนเงินต้นเท่ากับ 1 บาท (ราคาไถ่ถอน) ที่เวลา T (เวลาไถ่ถอน) กำหนดให้ $\alpha_1(t)$ และ $\alpha_2(t)$ คือค่าความผันผวน ณ เวลา t ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 2 ฉบับ ที่ครบกำหนดไถ่ถอน ณ เวลา T_1 และ T_2 โดยที่ $T_1 \le T_2$ ตามลำดับ ค่าความผันผวน $\alpha_1(t)$ และ $\alpha_2(t)$ ณ เวลา t ของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 2 ฉบับ สามารถกำหนดได้โดย

$$\alpha_1(t) = \sigma(t)B(t,T_1), \quad \alpha_2(t) = \sigma(t)B(t,T_2)$$

กำหนดให้ $\rho(\tau)$ เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สันระหว่างราคาตราสารหนี้ทั้งสอง ณ เวลา τ ค่าความแปรปรวนของราคา P เขียนแทนด้วย σ_P^2 นิยามโดย

$$\sigma_P^2 = \int_t^T \left[\alpha_1(\tau)^2 - 2\rho(\tau)\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau) + \alpha_2(\tau)^2\right] d\tau$$

ถ้ากำหนดให้ $\sigma(t) = \sigma$ คงที่ จะได้

$$\alpha_1(t) = \sigma B(t,T_1), \quad \alpha_2(t) = \sigma B(t,T_2)$$

เมื่อแทน $\alpha_1(t) = \sigma B(t,T_1), \quad \alpha_2(t) = \sigma B(t,T_2)$ โดยที่ $B(t,T_1) = \frac{1-e^{-a(T_1-t)}}{a}$ และ

$B(\tau,T_2) = \frac{1-e^{-a(T_2-\tau)}}{a}$ ที่ได้จากแบบจำลองของ Vasicek ในกรณีที่ พารามิเตอร์ a,σ คงที่ และ สมมติว่า $\rho(t) = 1$ นั่นคือ ราคาตราสารหนี้ทั้งสองเคลื่อนไหวไปในทางทิศเดียวกัน จะได้

$$\sigma_P^2 = \sigma^2 \int_t^{T_2} \left[B(\tau,T_2) - B(\tau,T_1)\right]^2 d\tau$$

เนื่องจาก $B(t,T) = \frac{B(0,T) - B(0,t)}{\partial B(0,t)/\partial t}$ จะได้

$$\sigma_P^2 = \sigma^2 \int_t^{T_2} \left[\frac{B(0,T_2) - B(0,\tau)}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau} - \frac{B(0,T_1) - B(0,\tau)}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau}\right]^2 d\tau$$

$$= \sigma^2 \int_t^{T_2} \left[\frac{B(0,T_2) - B(0,T_1)}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau}\right]^2 d\tau$$

$$= \sigma^2 \left[B(0,T_2) - B(0,T_1)\right]^2 \int_t^{T_2} \left[\frac{1}{\partial B(0,\tau)/\partial \tau}\right]^2 d\tau$$

จากแบบจำลองของ Vasicek สำหรับกรณีที่ พารามิเตอร์ a,σ คงที่ $B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ และ

$B(0,t) = \frac{1-e^{-at}}{a}$ จะได้ $\partial B(0,t)/\partial t = e^{-at}$ และ

$$B(0,T_2) - B(0,T_1) = \frac{1-e^{-aT_2}}{a} - \frac{1-e^{-aT_1}}{a} = \frac{e^{-aT_1} - e^{-aT_2}}{a}$$

จะได้ $\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{a^2}\left(e^{-aT_1} - e^{-aT_2}\right)^2 \int_t^{T_2} e^{2a\tau} d\tau = \frac{\sigma^2}{a^2}\left(e^{-aT_1} - e^{-aT_2}\right)^2 \left[\frac{e^{2a\tau}}{2a}\right]_t^{T_2}$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(e^{-aT_1} - e^{-aT_2}\right)^2 \left(e^{2aT_2} - e^{2at}\right) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(T_2-t)}\right)\left(\frac{e^{-a(T_1-T_2)} - 1}{a}\right)^2$$

กำหนดให้ $v^2(t,T_2) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(T_2-t)}\right)$ จะได้

$$\sigma_P^2 = v^2(t,T_2)\left(\frac{e^{a(T_2-T_1)}-1}{a}\right)^2 \;\Rightarrow\; \sigma_P = v(t,T_2)\left(\frac{e^{a(T_2-T_1)}-1}{a}\right)$$

ทฤษฎีบท 8.9 กำหนดให้ $P(r,t,T_1)$ และ $P(r,t,T_2)$ เป็นราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาที่ตราไว้ เท่ากับ 1 บาทและเวลาไถ่ถอน T_1 และ T_2 ตามลำดับ โดยที่ $T_1 \le T_2$ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ σ_P ราคา $P(r,t,T_2)$ ที่เวลา t คำนวณได้ดังนี้

$$\sigma_P = v(t,T_2)\left(\frac{e^{a(T_2-T_1)}-1}{a}\right) \tag{8.30}$$

เมื่อ $v^2(t,T_2) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2a(T_2-t)}\right)$

พิจารณาออปชันแบบยุโรปบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (European option on a discount bond) ซึ่งมีราคาที่ตราไว้ F และเวลาไถ่ถอน T_c คอลออปชันมีราคาใช้สิทธิ X ที่เวลาใช้สิทธิ T (exercise date) จะได้ว่าราคาคอลออปชัน (C^E) และพุทออปชัน (P^E) แบบยุโรปบนตราสารหนี้ที่ ณ เวลา t ใด ๆ โดยที่ $t \le T \le T_c$ เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.10 ราคาออปชันแบบยุโรปบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ที่มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ F คำนวณได้ดังสูตรต่อไปนี้

$$C^E(t) = FP(r,t,T_c)N(z) - XP(r,t,T)N\left(z-\sigma_p\right) \tag{8.31}$$

$$P^E(t) = XP(r,t,T)N\left(-z+\sigma_p\right) - FP(r,t,T_c)N(-z) \tag{8.32}$$

โดยที่ $z = \frac{1}{\sigma_P}\ln\frac{FP(r,t,T_c)}{XP(r,t,T)} + \frac{\sigma_P}{2}$

$$\sigma_P = v(t,T_c)\left(\frac{e^{a(T_c-T)}-1}{a}\right) \text{ เมื่อ } v^2(t,T_c) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2a(T_c-t)}\right) \tag{8.33}$$

และ $N(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติ

ตัวอย่างที่ 8.8 สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณคอลออปชันบนตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.5, 1$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดราคาใช้สิทธิเท่ากับ 9500 บาท ที่ปลายปีที่ 1 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00006912$ (ต่อวัน), $b = 0.00007202$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (0.5 ปี เท่ากับ 182.5 วัน) สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

t	r_t
0	0.000045334
182.5	0.000041205
365	0.000045334
547.5	0.000045334
730	0.000045334

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ $F = 10,000$, $X = 9,500$, $T = 365$ (1 ปี), $T_c = 730$ (2 ปี) $a = 0.00006912$ และ $\sigma = 0.00000409$ จากสูตร(8.32) และ (8.33) จะได้

$$v^2(t,730) = \frac{0.00000409^2}{2(0.00006912)}\left(1 - e^{-2(0.00006912)(730-t)}\right) = 0.000000121\left(1 - e^{-2(0.00006912)(730-t)}\right)$$

และ $$\sigma_P = v(t,730)\left\{\frac{e^{0.00006912(730-365)} - 1}{0.00006912}\right\} = (369.6432214)v(t,730)$$

และ $$C^E(t) = FP(r,t,T_c)N(z) - XP(r,t,T)N(z - \sigma_p)$$

เมื่อ $N(x) = P(Z \le x)$ ราคาของพุท $P^E(t)$ $t = 0, 0.5, 1$ (ปี) แสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 8.7 *การคำนวณราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek*

t	r	B(t,730)	A(t,730)	P(t,730)	F*P(r,t,730)	B(t,182.5)	A(t,182.5)	P(t,182.5)
0	0.000045334	711.8888673	0.999740161	0.967990851	9679.908515	180.3665184	1.001614397	0.99345785
182.5	0.000040334	537.2698768	0.999708068	0.978277196	9782.771962	180.3665501	0.737311978	0.73196756
365	0.000042834	360.434221	0.99980423	0.984486957	9844.869574	180.3664551	0.542752852	0.53857579
547.5	0.000039004	181.3537608	0.999934237	0.992886137	9928.861372			
730	0.000041205	0	1	1	10000			

t	X1*P(t,182.5)	v^2(t,730)	sigP	z	N(z)	N(z-sigP)	C(t)
0	9195.913089	0.0000000116	0.060137827	0.882997883	0.81138129	0.79470621	546.0474
182.5	9293.633364	0.0000000088	0.052405544	1.004978877	0.84254649	0.82959685	532.4712
365	9352.626095	0.0000000060	0.043056824	1.212821434	0.88740095	0.87895215	515.8358

□

8.6.2 ความเสมอภาคระหว่างราคาพุทและคอล

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคาพุทและคอลออปชันแบบยุโรปที่เรียกว่าสมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล (European put-call parity)

สมมติให้คอลออปชันและพุทออปชันมีเวลาครบกำหนดหรือเวลาใช้ T ออปชันมีราคาใช้สิทธิเท่ากันที่ X บาทและกำหนดตราสารหนี้ถึงไม่มีคูปอง เป็นสินทรัพย์อ้างอิงที่อายุมีกำหนดไถ่ถอนคืนที่เวลา T_c โดยที่ $T_c > T$ ที่มีราคาที่ตราไว้ F และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้

กำหนดให้ $FP(r,t,T_c)$ เป็นราคาตลาด ณ เวลา t ใด ๆ ของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาที่ตราไว้ เท่ากับ F บาทและเวลาไถ่ถอน T_c กำหนดให้ $C^E(t)$ และ $P^E(t)$ เป็นราคา ณ เวลา t ใด ๆ ของคอลออปชันและพุทออปชัน ตามลำดับ พิจารณากระแสเงินที่จะเกิดขึ้นในอนาคต ณ เวลาที่ T_c ของพอร์ตการลงทุน 2 พอร์ต คือ a และ b ที่มีโครงสร้าง ที่เวลา t ดังต่อไปนี้

1) พอร์ตการลงทุน a ประกอบด้วยสถานะซื้อคอลออปชันจำนวน 1 หน่วย และสถานะซื้อตราสารหนี้ที่ครบกำหนดไถ่ถอนคืน ณ เวลา T จำนวนเงิน $XP(r,t,T)$ บาท

ดังนั้น เงินลงทุนที่เวลา t ของพอร์ตการลงทุน a เท่ากับ $C^E(t)+XP(r,t,T)$ บาท

2) พอร์ตการลงทุน b ประกอบด้วยสถานะซื้อในพุทออปชันจำนวน 1 หน่วย ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ X บาท และสถานะซื้อตราสารหนี้ที่หมดอายุ ณ เวลา T_c ซึ่งราคาของตราสารหนี้ ณ เวลา t เท่ากับ $FP(r,t,T_c)$

ดังนั้น เงินลงทุนที่เวลา t ของพอร์ตการลงทุน b เท่ากับ $P^E(t)+FP(r,t,T_c)$ บาท

ต่อไปพิจารณามูลค่าของพอร์ตการลงทุน a และ b ที่เวลา $t=T$

<u>สำหรับพอร์ตการลงทุน a</u> ประกอบด้วยตราสารหนี้ที่มีราคาเท่ากับ $FP(r,T,T_c)$ บาท ทำให้ผลประโยชน์ของคอลออปชันเท่ากับ $\max\{FP(r,T,T_c)-X,0\}$ บาท และตราสารหนี้มีมูลค่า เท่ากับ $XP(r,T,T)=X$ บาท ดังนั้นผลประโยชน์ทั้งหมดของพอร์การลงทุน a เท่ากับ

$$\max\{FP(r,T,T_c)-X,0\}+X=\max\{FP(r,T,T_c),X\} \tag{8.34}$$

สำหรับพอร์ตการลงทุน b ประกอบด้วยพุทออปชันซึ่งมีผลประโยชน์เท่ากับ $\max\{X - FP(r,T,T_c),0\}$ และตราสารหนี้ซึ่งมีมูลค่าเท่ากับ $FP(r,T,T_c)$ บาท ดังนั้นผลประโยชน์ทั้งหมดของพอร์การลงทุน a เท่ากับ

$$\max\{X - FP(r,T,T_c),0\} + FP(r,T,T_c) = \max\{FP(r,T,T_c), X\} \tag{8.35}$$

จากสมการ (8.34) และ (8.35) จะเห็นว่า ณ เวลา T มูลค่าของพอร์ตการลงทุน a และ b มีค่าเท่ากันภายใต้สภาวการณ์ใด ๆ และเนื่องจากพอร์ตการลงทุน a และ b เป็นประกอบด้วยสินทรัพย์ที่เทียบเคียงกันได้ในทางการเงิน (equivalent assets) โดยหลักการปราศจากการค้ากำไร จึงทำให้มูลค่าของพอร์ตการลงทุน a และ b จะต้องเท่ากันในทุก ๆ จุดของเวลา t, $t < T < T_c$

นั่นคือ $$C^E(t) + XP(r,t,T) = P^E(t) + FP(r,t,T_c) \tag{8.36}$$

เราเรียกสมการ (8.36) ว่า *"ความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล (put-call parity)"*

ทฤษฎีบท 8.11 (ความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล:put-call parity) กำหนดให้ $FP(r,t,T_c)$ สำหรับตราสารหนี้ไม่มีคูปอง มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ F บาทแลมราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ คอลออปชันและพุทออปชันมีเวลาครบกำหนด $T < T_c$ และราคาใช้สิทธิเท่ากับ X บาท จะได้ว่า

$$C^E(t) + XP(r,t,T) = P^E(t) + FP(r,t,T_c)$$

ตัวอย่างที่ 8.9 จากตัวอย่างที่ 8.8 จงคำนวณพุทออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลา $t = 0, 0.5, 1$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้สมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล

วิธีทำ จากราคาของคอลในตารางที่ 8.14 และสมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล

$$C^E(t) + XP(r,t,T) = P^E(t) + FP(r,t,T_c)$$

ตารางที่ 8.8 *แสดงราคาของพุทออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek*

t	*C(t)*	*P(t)*
0	546.0474	62.0520
182.5	532.4712	43.3326
365	515.8358	23.5924

□

8.6.3 ออปชันบนตราสารหนี้มีคูปอง

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ เราได้กล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันแบบยุโรปซึ่งอ้างอิงกับตราสารหนี้ไม่มีคูปอง นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงสมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล (put-call parity) ตามทฤษฎีบท 8.11 ต่อมาเนื่องจากในตลาดตราสารหนี้ ตราสารหนี้ที่เป็นหุ้นกู้ซึ่งออกโดยภาคเอกชนออกซื้อขายจำนวนมากซึ่งส่วนใหญ่เป็นซื้อตราสารหนี้มีคูปอง ดังนั้นการศึกษาการกำหนดราคาตราสารหนี้มีคูปองจึงเป็นหัวข้อที่น่าสนใจและจำเป็น

ในปี ค.ศ. 1989 Jamshidian ได้เสนอวิธีการกำหนดราคาออปชันของตราสารหนี้ซึ่งมีการจ่ายคูปองเป็นงวดโดยประยุกต์ใช้สูตรการกำหนดราคาออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง โดยมีหลักการดังต่อไปนี้

พิจารณาคอลออปชันแบบยุโรปที่มีตราสารหนี้มีคูปองเป็นสินทรัพย์อ้างอิง กำหนดราคาใช้สิทธิ X บาทและครบกำหนดไถ่ถอน ของสัญญา ณ เวลา T สมมติตราสารหนี้อ้างอิงมีการจ่ายคูปอง c_i บาท ณ เวลา $T_i > T$, $(1 \le i \le n)$ กำหนดตราสารหนี้ฉบับนี้มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ F บาท และราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ โดยจะการประยุกต์ใช้การกำหนดราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองโดยพิจารณาตราสารหนี้มีคูปองอายุ n งวด ประกอบขึ้นด้วยตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน n ฉบับ โดยแต่ละฉบับมีราคาไถ่ถอนเป็น $c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n + F$ ที่มีอายุไถ่ถอนปลายงวดที่ $T_1, T_2, ..., T_n$ ตามลำดับ กำหนดให้ $\tilde{c}_i = c_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$ และ $\tilde{c}_n = c_n + F$ และ X_i เป็นราคาใช้สิทธิของคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่ราคาไถ่ถอน $\tilde{c}_i$ ที่เวลา T_i และสมมติว่า $r_i = r$, $i = 1, 2, ..., n$ จะได้ราคาของตราสารหนี้มีคูปอง ที่เวลา $t \le T_i$, $i = 1, 2, ..., n$ เท่ากับ

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, t, T_i)$$

สมมติว่า r^* เป็นอัตราดอกเบี้ยซึ่งผลตอบแทนจากการถือครองตราสารหนี้จนครบกำหนดไถ่ถอนเท่ากับผลตอบแทนจากการใช้สิทธิจากคอลออปชัน

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P\left(r^*, T, T_i\right) = X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

เมื่อ $X_i = \tilde{c}_i P\left(r^*, T, T_i\right)$ โดยผู้ถือครองคอลออปชันจะใช้สิทธิตามสัญญาคอลออปชันเมื่ออัตราดอกเบี้ยตลาดที่เวลา t, $r(t) < r^*$ และผลประโยชน์ของคอลออปชันบนตราสารหนี้มีคูปองที่มีเวลาครบกำหนด $T \le T_i$ เท่ากับ

$$\max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - X\right\} \tag{8.37}$$

สมการ (8.37) จะแสดงให้เห็นว่า ผลประโยชน์จากการที่ กระแสเงินที่เกิดขึ้นจากการตัดสินใจของผู้ถือคอลออปชันที่จะใช้สิทธิซื้อตราสารหนี้อ้างอิงที่ราคาใช้สิทธิ จะได้รับเงินผลประโยชน์ เท่ากับ $\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - X$ บาท เท่ากับราคาตลาดของตราสารหนี้หักราคาใช้สิทธิ แต่หากเลือกไม่ใช้สิทธิเงินผลประโยชน์จะเท่ากับศูนย์ จากสมการ (8.37) จะได้

$$\begin{aligned}
\max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - X\right\} &= \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r^*, T, T_i)\right\} \\
&= \max\left\{0, \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \max\left\{0, \tilde{c}_i P(r, T, T_i) - X_i\right\}
\end{aligned} \tag{8.38}$$

สมการ (8.38) ผลประโยชน์ของคอลออปชันบนตราสารหนี้มีคูปอง เท่ากับผลรวมของผลประโยชน์ของคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่ประกอบกันเป็นตราสารหนี้มีคูปอง

จากทฤษฎีบท 8.10 ราคาออปชันแบบยุโรปบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ที่มีราคาไถ่ถอน $\tilde{c}_i$ ที่เวลา T_i และราคาใช้สิทธิ X_i ที่เวลาใช้สิทธิ $T \le T_i$, $i = 1, 2, ..., n$ คำนวณได้ดังนี้

$$C_i^E(t) = \tilde{c}_i P(r, t, T_i) N(z_i) - X_i P(r, t, T) N\left(z_i - \sigma_{P_i}\right) \tag{8.39}$$

โดยที่ $z_i = \dfrac{1}{\sigma_{P_i}} \ln \dfrac{\tilde{c}_i P(r, t, T_i)}{X_i P(r, t, T)} + \dfrac{\sigma_{P_i}}{2}$

$$\sigma_{P_i} = v(t, T_i)\left(\frac{e^{a(T_i - T)} - 1}{a}\right) \text{ เมื่อ } v^2(t, T_i) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(T_i - t)}\right) \tag{8.40}$$

และ $N(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติ

ดังนั้น ราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้มีคูปอง เท่ากับ ผลรวมราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งประกอบกันเป็นตราสารหนี้มีคูปอง นั่นคือ

$$C^E(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i^E(t)$$

ทฤษฎีบท 8.12 ราคาออปชันแบบยุโรปบนตราสารหนี้มีคูปองราคาใช้สิทธิ X_i ที่เวลาใช้สิทธิ $T \le T_i$, $i = 1,2,...,n$ เท่ากับ ผลรวมราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งประกอบกันเป็นตราสารหนี้มีคูปอง

นั่นคือ $$C^E(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i^E(t) \text{ และ } P^E(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i^E(t)$$

เมื่อ $C_i^E(t) = \tilde{c}_i P(r,t,T_i) N(z_i) - X_i P(r,t,T) N\left(z_i - \sigma_{P_i}\right)$ และ

$$P_i^E(t) = X_i P(r,t,T) N\left(-z_i + \sigma_{P_i}\right) - \tilde{c}_i P(r,t,T_i) N(-z_i)$$

โดยที่ $$b_i = \frac{1}{\sigma_{P_i}} \ln \frac{\tilde{c}_i P(r,t,T_i)}{X_i P(r,t,T)} + \frac{\sigma_{P_i}}{2}$$

$$\sigma_{P_i} = v(t,T_i)\left(\frac{e^{-a(T-T_i)} - 1}{a}\right) \text{ เมื่อ } v^2(t,T_i) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(T_i - t)}\right)$$

และ $N(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงแบบปกติ

ตัวอย่างที่ 8.10 สมมติตราสารหนี้อายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 4 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00006912$ (ต่อวัน), ,$\phi = 9.46944x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000409$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน) จงคำนวณราคาพรีเมียมของคอลและพุทออปชันบนตราสารหนี้ที่มีคูปอง ที่มีเวลาใช้สิทธิตามสัญญา

ที่ปลายเดือนที่ 3 (นับจากวันออกตราสาร) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย $r^* = r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนจากการถือครองตราสารหนี้จนครบกำหนดไถ่ถอน และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง Vasicek ที่เวลาต่าง ๆ เป็นไปตามตาราง

t	r_t
0	0.000045334
45.625	0.000040334
91.25	0.000042834
136.875	0.000039004
182.5	0.000041205
365	0.000045334
547.5	0.000045334
730	0.000045334

วิธีทำ ข้อมูลจากโจทย์ที่กำหนดให้ได้ว่าในการกำหนดราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ที่มีคูปองจะเท่ากับผลรวมราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองจำนวน 4 ฉบับซึ่งประกอบกันเป็นตราสารหนี้มีคูปองนั้น ซึ่งในที่นี้เงินคูปองแต่ละงวดจะถูกพิจารณาเป็นเงินไถ่ถอนของตราสารหนี้ไม่มีคูปองดังนี้ $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = \tilde{c}_3 = \frac{0.04(1000)}{2} = 20$ และ $\tilde{c}_4 = 20 + 1000 = 1020$ โดยผู้ถือครองคอลออปชันจะใช้สิทธิตามสัญญาคอลออปชัน $X_i = \tilde{c}_i P\left(r^*, T, T_i\right)$ เมื่ออัตราดอกเบี้ยตลาดที่เวลา t, $r(t) < r^*$ จากโจทย์ $T = \frac{365}{4} = 91.25$ วัน (0.25 ปี), $T_1 = 182.5$ วัน (0.5 ปี), $T_2 = 365$ วัน (1 ปี), $T_3 = 547.5$ วัน (1.5 ปี), $T_4 = 730$ วัน (2 ปี), $a = 0.00006912$ และ $\sigma = 0.00000409$ จะคำนวณ $C_i^E(t), i = 1,...,4$ โดยใช้สูตร(8.39) และ (8.40) ในที่นี้จะแสดงค่าที่คำนวณได้ในตารางข้างล่างนี้ เริ่มจากคำนวณ

$$X_1 = \tilde{c}_1 P\left(r^*, T, T_1\right) = 20P(0.0045334\%, 91.25, 182.5)$$

$$X_2 = \tilde{c}_2 P\left(r^*, T, T_2\right) = 20P(0.0045334\%, 91.25, 365)$$

$$X_3 = \tilde{c}_3 P\left(r^*, T, T_3\right) = 20P(0.0045334\%, 91.25, 547.5)$$

$$X_4 = \tilde{c}_4 P\left(r^*, T, T_4\right) = 1020P(0.0045334\%, 91.25, 730)$$

เมื่อ $P\left(r^*,T,T_k\right),k=1,2,3,4$ คำนวณได้จากแบบจำลอง Vasicek, $P(r_t,t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r_t}$

เมื่อ $B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$ และ $A(t,T)=\exp\left[\left(b-\frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left[B(t,T)-(T-t)\right]-\frac{\sigma^2B^2(t,T)}{4a}\right]$

ค่า $X_k,k=1,...,4$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

T	T_k	$\tilde{c}_k$	r^*	$B(T,T_k)$	$A(T,T_k)$	$P(r^*,T,T_k)$	X_k
91.25	182.5	20	0.000045334	90.9628	1.0000	0.9959	19.9173
91.25	365	20	0.000045334	271.1764	0.9999	0.9877	19.7531
91.25	547.5	20	0.000045334	449.1309	0.9997	0.9796	19.5919
91.25	730	1020	0.000045334	624.8547	0.9997	0.9718	991.2165

โดยการแทนค่าจะได้

$$v^2(t,T_1)=\frac{0.00000409^2}{2(0.00006912)}\left(1-e^{-2(0.00006912)(182.5-t)}\right)=0.000000121\left(1-e^{-2(0.00006912)(182.5-t)}\right)$$

$$\sigma_{P_1}=v(t,T_1)\left(\frac{e^{0.00006912(182.5-91.25)}-1}{0.00006912}\right)=(91.53837195)v(t,182.5)$$

$$b_1=\frac{1}{\sigma_{P_1}}\ln\frac{\tilde{c}_1P(r,t,T_1)}{P(r,t,T)X_1}+\frac{\sigma_{P_1}}{2}$$

$$C_1^E(t)=\tilde{c}_1P(r,t,T_1)N(z_1)-X_1P(r,t,T_1)N\left(z_1-\sigma_{P_1}\right)$$

เมื่อ $N(x)=P(Z\le x)$ ราคาของคอล $C_i^E(t)$ และราคาของพุทออปชัน P_t^E,

$t=0,30.42,\ 60.83,\ 91.25$ วัน แสดงในตารางต่อไปนี้ โดยราคาราคาของพุทออปชัน P_t^E นั้นจะใช้สมการความเสมอภาคของพุทและคอลช่วยในการคำนวณ

$$C^E(t)+XP(r,t,T)=P^E(t)+FP(r,t,T_c)$$

ตารางที่ 8.9 *แสดงการคำนวณราคาของพุทออปชันบนตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลองของ Vasicek*

$C_1^E(t)$ และ $P_1^E(t)$

t	r	$B(t,182.5)$	$A(t,182.5)$	$P(t,182.5)$	$F1*P(r,t,182.5)$	$B(t,91.25)$	$A(t,91.25)$	$P(t,91.25)$
0	0.000045334	181.3537608	0.999934237	0.991746988	19.83493977	89.96915641	1.001661747	0.997584628
45.625	0.000040334	136.2295636	0.999960615	0.994481216	19.88962432	89.96913019	0.927809461	0.924448713
91.25	0.000042834	90.96283805	0.999981427	0.996092778	19.92185556	89.96910951	0.859402278	0.856096741
136.875	0.000039004	45.55313407	0.999995088	0.99821992	19.9643984			
182.5	0.000041205	0	1	1	20			

t	$X1*P(t,91.25$	$v^2(t,182.5)$	$sigP$	z	$N(z)$	$N(z-sigP)$	$C1(t)$	$P1(t)$
0	19.75294778	0.0000000030	0.005026023	0.826679965	0.79579076	0.79436306	0.0934497457	0.011457758
45.625	19.80740628	0.0000000023	0.004359507	0.952351886	0.82954072	0.82843333	0.0901377559	0.007919718
91.25	19.83950429	0.0000000015	0.003565125	1.163672318	0.87772158	0.87699742	0.0866486055	0.004297331

$C_2^E(t)$ และ $P_2^E(t)$

t	r	B(t,365)	A(t,365)	P(t,365)	F1*P(r,t,365)	B(t,91.25)	A(t,91.25)	P(t,91.25)
0	0.000045334	360.434221	0.99980423	0.98360025	19.672005	89.96928561	1.001661529	0.997584404
45.625	0.000040334	315.8756633	0.999837326	0.987179673	19.74359347	89.96925272	0.927809269	0.924448517
91.25	0.000042834	271.176364	0.999871045	0.988324167	19.76648333	89.96921921	0.859402118	0.856096578
136.875	0.000039004	226.3358785	0.999903862	0.991115555	19.8223111			
182.5	0.000041205	181.3537608	0.999934237	0.992489896	19.84979792			
365	0.000045334	0	1	1	20			

t	X2*P(t,91.25)	v^2(t,365)	sigP	z	N(z)	N(z-sigP)	C2(t)	P2(t)
0	19.42914167	0.0000000060	0.021324742	0.593200345	0.72347646	0.71629687	0.3151990936	0.072335764
45.625	19.49984634	0.0000000052	0.019978699	0.631775175	0.73623310	0.72966379	0.3075552870	0.063808152
91.25	19.52245361	0.0000000045	0.018525671	0.679817357	0.75168994	0.74578736	0.2986675030	0.054637778

$C_3^E(t)$ และ $P_3^E(t)$

t	r	B(t,547.5)	A(t,365)	P(t,365)	F1*P(r,t,365)	B(t,91.25)	A(t,91.25)	P(t,91.25)
0	0.000045334	537.2698768	0.999708068	0.975652729	19.51305457	89.96938117	1.001661367	0.997584239
45.625	0.000040334	493.2698683	0.999723711	0.980030217	19.60060435	89.96936562	0.927809092	0.924448337
91.25	0.000042834	449.1308824	0.999745933	0.980696573	19.61393145	89.96934354	0.859401938	0.856096396
136.875	0.000039004	404.8524801	0.999773267	0.984109975	19.6821995			
182.5	0.000041205	360.434221	0.99980423	0.985065166	19.70130332			
365	0.000045334	181.3537608	0.999934237	0.991746988	19.83493977			
547.5	0.000045334	0	1					

t	X3*P(t,91.25)	v^2(t,547.5)	sigP	z	N(z)	N(z-sigP)	C3(t)	P3(t)
0	19.11491095	0.0000000088	0.043532988	0.49531539	0.68981125	0.67428713	0.5713861191	0.173242493
45.625	19.20067436	0.0000000081	0.04174464	0.514708143	0.69662151	0.68188039	0.5616392315	0.161709243
91.25	19.21372954	0.0000000074	0.039864068	0.537064371	0.70438842	0.69047610	0.5492053138	0.149003400

$C_4^E(t)$ และ $P_4^E(t)$

t	r	B(t,730)	A(t,730)	P(t,730)	F1*P(r,t,730)	B(t,91.25)	A(t,91.25)	P(t,91.25)
0	0.000045334	711.8888673	0.999740161	0.967990851	987.3506685	89.96934928	1.001661421	0.997584296
45.625	0.000040334	668.4404065	0.999715085	0.973121989	992.5844284	89.9693742	0.927809078	0.924448323
91.25	0.000042834	624.8547104	0.999702322	0.973300166	992.7661693	89.96938688	0.859401875	0.85609633
136.875	0.000039004	581.1313454	0.999700459	0.977295679	996.8415924			
182.5	0.000041205	537.2698768	0.999708068	0.977819507	997.3758969			
365	0.000045334	360.434221	0.99980423	0.98360025	1003.272255			
547.5	0.000045334	181.3537608	0.999934237	0.991746988	1011.581928			
730	0.000045334	0	1	1	1020			

t	X4*P(t,91.25)	v^2(t,730)	sigP	z	N(z)	N(z-sigP)	C4(t)	P4(t)
0	959.4885459	0.0000000116	0.070383923	0.441888331	0.67071499	0.64486906	43.48641614	15.624293
45.625	964.5746139	0.0000000109	0.068254729	0.453510553	0.67490943	0.64997606	42.95418413	14.944369
91.25	964.7512263	0.0000000102	0.066042802	0.466450705	0.67955354	0.65557195	42.17392190	14.158978

t	$C^E(t)$	$P^E(t)$
0	44.46645110	15.88132956
45.625	43.91351640	15.17780679
91.25	43.10844332	14.36691739

□

บทสรุปท้ายบทที่ 8

บทที่ 8 ได้สรุปความรู้สำคัญเกี่ยวกับการกำหนดราคาตราสารหนี้และออปชันบนตราสารหนี้ โดยอิงจากแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยในลักษณะต่าง ๆ ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญในการวิเคราะห์และบริหารความเสี่ยงด้านอัตราดอกเบี้ยในตลาดการเงิน แนวคิดหลักในบทนี้ครอบคลุมการใช้แบบจำลอง Vasicek (1977), CIR (1985), และ Vasicek ที่ถูกขยาย เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณราคาของตราสารหนี้ทั้งแบบไม่มีคูปองและแบบมีคูปอง โดยอาศัยโครงสร้างของสมการเชิงอนุพันธ์สุ่ม (stochastic differential equations) และการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัสสโตแคสติก

จุดเด่นของแบบจำลองที่ศึกษาในบทนี้ คือความสามารถในการอธิบายพลวัตของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและการหาค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดในอนาคตของตราสารหนี้ ผ่านสูตรรูปปิดที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในสถานการณ์จริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อจำเป็นต้องประเมินมูลค่าของตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองอย่างสม่ำเสมอ หรือตราสารอนุพันธ์ที่อ้างอิงตราสารหนี้เป็นสินทรัพย์ต้นทาง

ในส่วนของออปชันบนตราสารหนี้ บทนี้ได้นำเสนอแนวทางของ Jamshidian (1989) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าราคาของออปชันบนตราสารหนี้มีคูปองสามารถประเมินได้ผ่านการแยกเป็นออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองแต่ละงวด พร้อมกับการใช้สูตร put-call parity ในการตรวจสอบความสอดคล้องของราคาภายใต้เงื่อนไขปราศจากการค้ากำไร

โดยสรุป บทนี้ไม่เพียงให้ภาพรวมเชิงทฤษฎีของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยและการกำหนดราคาออปชันเท่านั้น แต่ยังแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้งานจริงในการกำหนดราคาและการบริหารความเสี่ยงของสินทรัพย์ในตลาดตราสารหนี้และตลาดอนุพันธ์ได้อย่างเป็นระบบและแม่นยำ ซึ่งเป็นองค์ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อผู้ที่ทำงานด้านการเงิน การลงทุน และการบริหารความเสี่ยงในโลกการเงินยุคใหม่

เอกสารอ้างอิง

[1] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica, 53*(2), 385–407. https://doi.org/10.2307/1911242

[3] Duffie, D. (2001). *Dynamic asset pricing theory* (3rd ed.). Princeton University Press.

[4] Jamshidian, F. (1989). An exact bond option formula. *Journal of Finance, 44*(1), 205–209. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1989.tb02412.x

[5] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer.

[6] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics, 5*(2), 177–188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

[7] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.

[8] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2$ (ปี)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007512$ (ต่อวัน), $b = 0.00006675$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000449$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน โดยสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006003
91.25	0.00005468
182.5	0.00006749
273.75	0.00006770
365	0.00006562
456.25	0.00005232
547.5	0.00006423
638.75	0.00006277
730	0.00006109

2) สมมติตราสารหนี้อายุ 5 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 20 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00006212$ (ต่อวัน), ,$\phi = 5.24922x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000519$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0035234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

3) นำเข้าข้อมูลอัตราดอกเบี้ย (รายวัน) ของพันธบัตรรัฐบาล จงสร้างแบบจำลอง CIR กรณีที่ $\beta = 0$, $a(t) = 0$ และ $\sigma(t) = \sigma$ ตามสมการ $dr_t = \theta(t)dt + \sigma dW_t$ จากข้อมูลอัตราอัตราดอกเบี้ยย้อนหลังของของพันธบัตรดังกล่าว

4) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 5.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้

ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00006402$ (ต่อวัน) ,$\phi = 8.42524 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000422$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0038234\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

5) กำหนดอายุไถ่ถอน และราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ไม่มีคูปองซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ 1000 บาท ในคอลัมน์ที่ 1และ 2 ตามตาราง จงจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยายและราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค กำหนด $b = 0.0019999862$

อายุไถ่ถอน k	ราคาปัจจุบัน B_0^k	ราคาไถ่ถอน C
1	900.20	1000
2	844.00	1000
3	761.20	1000
4	680.70	1000
5	623.50	1000
6	560.23	1000
7	521.20	1000

6) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 12 งวด จ่ายทุก ๆ 3 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$) จงหาราคาตราสารหนี้มีคูปองโดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ CIR เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ CIR, $\psi = 0.00005012$ (ต่อวัน) ,$\phi = 8.26543 \times 10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000612$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0035032\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

7) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 10,000 บาท มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ กำหนดราคาใช้สิทธิเท่ากับ 9800 บาท ของออปชันที่ปลายปีที่ 2 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005812$ (ต่อวัน), $b = 0.00006212$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000438$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองของ Vasicek เป็นดังนี้

อายุไถ่ถอน t (วัน)	อัตราดอกเบี้ย r_t (ต่อวัน)
0	0.00006883
182.5	0.00005671
365	0.00005430
547.5	0.00006805
730	0.00005976
912.5	0.00005992
1095	0.00006465
1277.5	0.00006436
1460	0.00006577

8.1) จงคำนวณพุทออปชันบนตราสารหนี้ที่เวลา $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ (ปี) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek

8.2) จงใช้สมการความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน ในการคำนวณค่าของคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองดังกล่าว

9) สมมติตราสารหนี้อายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 6.00 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 6 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00005712$ (ต่อวัน), ,$\phi = 8.42934x10^{-8}$ (ต่อวัน), $\sigma = 0.00000395$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0042334\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน (1 งวด เท่ากับ 182.5 วัน) จงคำนวณราคาพรีเมียมของคอลออปชันบนตราสารหนี้ที่มีคูปอง ที่มีเวลาใช้สิทธิตามสัญญาที่ปลายปีที่ 1 (นับจากวันออกตราสาร) โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ย $r^* = r = 0.0045334\%$ (ต่อวัน) ซึ่งเป็นอัตราผลตอบแทนจากการถือครองตราสารหนี้จนครบกำหนดไถ่ถอน

10) สมมติตราสารหนี้อายุ 4 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และกำหนดจ่ายคูปอง ร้อยละ 4.20 ต่อปี จ่ายคูปองจำนวน 8 งวด จ่ายทุก ๆ 6 เดือน โดยมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่เวลาเริ่มต้น ($t = 0$)โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Vasicek เมื่อกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Vasicek, $a = 0.00007112$ (ต่อวัน), ,$\phi = 8.26641x10^{-8}$

(ต่อวัน), $\sigma = 0.00000512$ (ต่อวัน) และอัตราดอกเบี้ย ณ ปัจจุบัน $r = 0.0039314\%$ (ต่อวัน) และกำหนดให้ 1 ปี เท่ากับ 365 วัน

11) (วิเคราะห์อิทธิพลของพารามิเตอร์แบบจำลอง Vasicek ต่อราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง) พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง (Zero-Coupon Bond) ที่มีราคาไถ่ถอน (Face Value) เท่ากับ 1,000 บาท ณ เวลา $T = 2$ ปี อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t เป็นไปตามแบบจำลอง Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

โดยที่ $a = 0.15$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.01$ และ $r_0 = 0.04$

11.1) จงคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง $P(0,T)$ ณ เวลาเริ่มต้นโดยใช้สูตรของแบบจำลอง Vasicek

$$P(0,T) = A(0,T) \cdot e^{-B(0,T)r_0}$$

$$B(0,T) = \frac{1 - e^{-aT}}{a}, \quad A(0,T) = \exp\left\{ \left(B(0,T) - T \right) \left(\frac{a^2 b - \sigma^2 / 2}{a^2} \right) - \frac{\sigma^2 B(0,T)^2}{4a} \right\}$$

11.2) วิเคราะห์ว่า หากค่าพารามิเตอร์ σ เพิ่มขึ้นเป็น 0.02 ขณะที่พารามิเตอร์อื่นคงเดิม จะส่งผลต่อราคาของตราสารหนี้อย่างไร พร้อมแสดงเหตุผล

12) (การประเมินราคาตราสารหนี้สำหรับการวางแผนลงทุนในตลาดตราสารหนี้) ผู้ลงทุนต้องการประเมินราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ซึ่งจะครบกำหนดไถ่ถอนในอีก 3 ปีข้างหน้า และมีราคาไถ่ถอน 10,000 บาท สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพลวัตตามแบบจำลอง Vasicek

$dr_t = 0.12(0.06 - r_t)dt + 0.015dW_t$ โดย $r_0 = 0.05$

12.1) จงคำนวณราคาของตราสารหนี้ดังกล่าวในวันนี้โดยใช้สูตรแบบจำลอง Vasicek

12.2) หากอัตราดอกเบี้ยปัจจุบัน r_0 เพิ่มขึ้นเป็น 0.07 โดยพารามิเตอร์อื่นคงเดิม จงคำนวณราคาใหม่ของตราสารหนี้ และวิเคราะห์ว่าความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยมีผลต่อมูลค่าของตราสารหนี้อย่างไร

13) (การคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองด้วยแบบจำลอง CIR) พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีมูลค่าไถ่ถอนเท่ากับ 1,000 บาท ที่เวลา $T=2$ ปี อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพลวัตตามแบบจำลอง CIR ดังนี้

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

กำหนดให้ $a=0.2$, $b=0.06$, $\sigma=0.04$, และ $r_0=0.05$

13.1) จงคำนวณราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง $P(0,T)$ ณ เวลา $t=0$ โดยใช้สูตรรูปปิดของแบบจำลอง CIR

$$P(0,T) = A(0,T)\cdot e^{-B(0,T)r_0}$$

$$B(0,T) = \frac{2(e^{\gamma T}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma}, \quad A(0,T) = \left(\frac{2\gamma e^{(\gamma+a)T/2}}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2+2\sigma^2}$$

13.2) วิเคราะห์ว่าหาก σ เพิ่มขึ้นจาก 0.04 เป็น 0.06 โดยพารามิเตอร์อื่นคงที่ จะส่งผลต่อราคาตราสารหนี้อย่างไร และเพราะเหตุใด

14) (การวิเคราะห์เชิงกลยุทธ์สำหรับนักลงทุนสถาบัน) สมมติว่าสถาบันการเงินแห่งหนึ่งกำลังพิจารณาซื้อพันธบัตรรัฐบาลแบบไม่มีคูปอง อายุ 3 ปี มูลค่าไถ่ถอน 10,000 บาท โดยใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นที่มีการเปลี่ยนแปลงตามแบบจำลอง CIR

$$dr_t = 0.25(0.05-r_t)dt + 0.03\sqrt{r_t}\,dW_t$$ เมื่อกำหนดให้ $r_0=0.045$

14.1) จงคำนวณราคาของตราสารหนี้ ณ เวลา $t=0$

14.2) หากสถาบันการเงินคาดว่าแนวโน้มดอกเบี้ยระยะสั้นจะปรับตัวสูงขึ้นในอีก 3 เดือนข้างหน้า ควรซื้อพันธบัตรในเวลานี้หรือรอไปก่อน วิเคราะห์เชิงกลยุทธ์โดยพิจารณาผลกระทบต่อราคา และพิจารณาความเสี่ยงด้านอัตราดอกเบี้ย

15) (การคำนวณราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย) พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาไถ่ถอน (face value) เท่ากับ 1,000 บาท และจะครบกำหนดในอีก $T = 3$ ปี อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ มีพฤติกรรมตามแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย ดังนี้

$$dr(t) = a(t)[b(t) - r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$$

โดยที่ $a(t) = 0.1 + 0.02t, \quad b(t) = 0.05 + 0.01t, \quad \sigma(t) = 0.01 + 0.005t$ และกำหนดให้ $r(0) = 0.04$

15.1) สมมุติให้ใช้ค่าเฉลี่ยของพารามิเตอร์ $a(t), b(t), \sigma(t)$ ตลอดช่วง $[0, T]$ แทนค่าคงที่เพื่อคำนวณราคาโดยใช้สูตรของ Vasicek แบบเดิม แล้วจงคำนวณราคาของตราสารหนี้ $P(0,T)$ ณ เวลา $t = 0$

15.2) วิเคราะห์ความเหมาะสมของการประมาณค่าเฉลี่ยพารามิเตอร์แทนการใช้ฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และอธิบายสถานการณ์ที่ควรเลือกใช้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยายแทนแบบจำลอง Vasicek ดั้งเดิม

16) (การวิเคราะห์ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย) นักวิเคราะห์ตลาดตราสารหนี้ต้องการประเมินราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่ครบกำหนดในอีก $T = 2$ ปี โดยอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ เคลื่อนไหวตามแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย

$$dr(t) = a(t)[b(t) - r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

โดย $a(t) = 0.15, \quad b(t) = 0.06 + 0.01t, \quad \sigma = 0.02, \quad r(0) = 0.045$

16.1) สมมติให้ $b(t)$ คงที่เป็นค่าเฉลี่ยบนช่วง $[0,T]$ แล้วจงคำนวณราคาตราสารหนี้ $P(0,T)$ ด้วยสูตรของ Vasicek แบบเดิม

16.2) หากคาดว่าในอนาคต $b(t)$ จะเพิ่มขึ้นเร็วกว่าที่คาด (เช่น จาก $0.01t$ เป็น $0.02t$) จงวิเคราะห์ผลกระทบต่อราคาตราสารหนี้ และอธิบายแนวทางในการปรับกลยุทธ์ลงทุนของผู้ถือครองพันธบัตรในสภาวะดังกล่าว

17) (การสร้างโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคจากข้อมูลตลาดตราสารหนี้) ตารางต่อไปนี้แสดงข้อมูลราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุไถ่ถอน 1 ถึง 5 ปี ซึ่งมีราคาไถ่ถอนเท่ากับ 1,000 บาท ณ วันปัจจุบัน

อายุไถ่ถอน (ปี)	ราคาปัจจุบัน (บาท)
1	950
2	895
3	840
4	785
5	730

17.1) จงสร้างโครงร่างตาข่ายต้นไม้ทวิภาคสำหรับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในช่วงเวลา 5 ปี โดยใช้โครงสร้างของแบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย และสมมุติให้ $\Delta t = 1$ ปี

17.2) ใช้โครงสร้างต้นไม้ที่ได้เพื่อประมาณราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่ครบกำหนดในปีที่ 3 และแสดงขั้นตอนการคำนวณอย่างชัดเจน

18) (การวิเคราะห์ความไวของราคาในโครงร่างต้นไม้แบบ Vasicek ที่ถูกขยาย) สมมุติว่ามีตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่ครบกำหนดในอีก 3 ปีข้างหน้า และมีราคาไถ่ถอน 1,000 บาท ราคาปัจจุบันของตราสารหนี้คือ 880 บาท สมมุติให้ใช้โครงร่างต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา ภายใต้แบบจำลอง Vasicek ที่ถูกขยาย $$dr_t = a(t)(b(t) - r_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

โดยให้พารามิเตอร์มีค่าเฉลี่ยดังนี้ $a(t) = 0.12, \quad b(t) = 0.05 + 0.01t, \quad \sigma(t) = 0.015$

18.1) จงสร้างโครงร่างต้นไม้ทวิภาค 3 คาบเวลา สำหรับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น และคำนวณราคาตราสารหนี้ ณ เวลาต่าง ๆ ในโครงสร้างต้นไม้

18.2) จงวิเคราะห์ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงในค่า $b(t)$ จาก $0.05 + 0.01t$ เป็น $0.06 + 0.015t$ ที่มีต่อราคาตราสารหนี้ และอธิบายเชิงกลยุทธ์สำหรับนักลงทุน

19) (การประเมินราคาตราสารหนี้มีคูปองด้วยแบบจำลอง Vasicek) สมมุติตราสารหนี้มีอายุ 3 ปี มีราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท จ่ายคูปองร้อยละ 5.00 ต่อปี โดยจ่ายคูปองทุก 6 เดือนเป็นจำนวน 6 งวด อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพฤติกรรมตามแบบจำลอง Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

โดย $a = 0.1$, $b = 0.06$, $\sigma = 0.015$ และ $r_0 = 0.045$

19.1) จงคำนวณราคาตราสารหนี้มีคูปอง ณ เวลา $t = 0$ โดยใช้สูตรรูปปิดของแบบจำลอง Vasicek สำหรับราคาของตราสารหนี้ไม่มีคูปองในแต่ละงวดที่จ่ายคูปอง

19.2) วิเคราะห์ว่าหากอัตราดอกเบี้ยปัจจุบัน r_0 เพิ่มขึ้นเป็น 0.055 จะส่งผลต่อราคาของตราสารหนี้มีคูปองอย่างไร พร้อมอธิบายเชิงการบริหารความเสี่ยงของนักลงทุน

20) (การใช้แบบจำลอง CIR เพื่อประเมินราคาตราสารหนี้ที่มีคูปองแบบจ่ายรายไตรมาส) สมมุติตราสารหนี้มีอายุ 2 ปี มีราคาที่ตราไว้ 10,000 บาท จ่ายคูปองร้อยละ 4.00 ต่อปี โดยจ่ายคูปองทุก 3 เดือนเป็นจำนวน 8 งวด อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพลวัตตามแบบจำลอง CIR

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

โดย $a = 0.25$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.02$, และ $r_0 = 0.045$

20.1) คำนวณราคาตราสารหนี้มีคูปอง ณ เวลา $t = 0$ โดยพิจารณาเป็นผลรวมของราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 8 ฉบับที่ครบกำหนดในแต่ละงวด

20.2) หากสภาวะตลาดแสดงสัญญาณว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตมีแนวโน้มผันผวนสูงขึ้น นักวิเคราะห์ควรประเมินกลยุทธ์ลงทุนอย่างไรในตราสารหนี้ประเภทนี้ พร้อมทั้งอธิบายแนวทางบริหารความเสี่ยงที่เหมาะสม

21) (การกำหนดราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองโดยใช้แบบจำลอง Vasicek) สมมุติตราสารหนี้ไม่มีคูปองมีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท จะครบกำหนดในอีก $T = 2$ ปี คอลออปชันแบบยุโรปให้สิทธิในการซื้อพันธบัตรนี้ในอีก 1 ปีข้างหน้าที่ราคาใช้สิทธิ 950 บาท
อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพลวัตตามแบบจำลอง Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

โดย $a = 0.15$, $b = 0.06$, $\sigma = 0.02$, และ $r_0 = 0.05$

21.1) ใช้สูตรของ Jamshidian (1989) เพื่อคำนวณราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้นี้ ณ เวลา $t = 0$

21.2) วิเคราะห์ว่าหากอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_0 ลดลงเหลือ 0.03 จะส่งผลต่อราคาของคอลออปชันอย่างไร พร้อมอธิบายแนวทางการป้องกันความเสี่ยง (hedging) สำหรับผู้ขายออปชัน

22) (การประยุกต์ใช้สมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอลออปชันบนตราสารหนี้) พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาไถ่ถอน 1,000 บาท จะครบกำหนดในอีก 2 ปี ปัจจุบันราคาตราสารหนี้นี้เท่ากับ 920 บาท มีคอลออปชันและพุทออปชันแบบยุโรป ซึ่งสามารถใช้สิทธิในอีก 1 ปีข้างหน้าด้วยราคาใช้สิทธิ 950 บาท

22.1) สมมุติว่าราคาคอลออปชันในตลาดเท่ากับ 48 บาท จงใช้สมการความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล (put-call parity) เพื่อคำนวณราคาพุทออปชัน

22.2) หากราคาพุทออปชันในตลาดเท่ากับ 60 บาท แสดงว่าเกิดความไม่สอดคล้องกับสมการความเสมอภาค จงเสนอแผนการทำกำไรจากอาร์บิทราจ (arbitrage strategy) และอธิบายกลไกการดำเนินกลยุทธ์นั้น

23) (การบริหารความเสี่ยงของพอร์ตพันธบัตร) ผู้จัดการกองทุนต้องการประเมินความเสี่ยงของพอร์ตพันธบัตรรัฐบาลที่ถืออยู่ โดยสนใจวิเคราะห์ความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ย ระหว่างเวลา 0 ถึง 1 ปี เพื่อใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในการวิเคราะห์ความเสี่ยงของราคา (เช่น Duration และ Convexity) สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในระบบเศรษฐกิจเป็นไปตามแบบจำลอง Vasicek โดยมีพารามิเตอร์ดังนี้ $r_0 = 0.03, \quad b = 0.05, \quad a = 0.5, \quad \sigma = 0.02$

23.1) คำนวณ $\mathbb{E}[r_t]$ และ $\mathrm{Var}[r_t]$ เมื่อ $t = 1$

23.2) คำนวณ $\mathbb{E}\left[\int_0^1 r_s\, ds\right]$ และ $\mathrm{Var}\left[\int_0^1 r_s\, ds\right]$

23.3) วิเคราะห์ผลลัพธ์ในเชิงเศรษฐศาสตร์การเงิน ว่าความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ยมีผลต่อความเสี่ยงของพอร์ตพันธบัตรในช่วงเวลา 1 ปี อย่างไร

24) (การกำหนดราคาสัญญาออปชันพันธบัตร) สมมติบริษัทหลักทรัพย์แห่งหนึ่งต้องการประเมินราคาของพันธบัตรรัฐบาลอายุ 10 ปี โดยใช้แนวทางแบบ No-arbitrage ซึ่งอาศัยแบบจำลองพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในอนาคต และสมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t มีพฤติกรรมเป็นไปตาม Vasicek Model โดยที่ $r_0 = 0.03, \quad b = 0.05, \quad a = 0.5, \quad \sigma = 0.02$

24.1) คำนวณค่าคาดหวังของอัตราดอกเบี้ยในปีที่ 5

24.2) คำนวณ $\mathrm{Var}\left[\int_0^5 r_s\, ds\right]$

24.3) วิเคราะห์ว่าค่าความแปรปรวนดังกล่าวมีผลต่อความน่าจะเป็นที่ราคาพันธบัตรจะต่ำกว่ามูลค่าที่ตราไว้ในระยะเวลา 5 ปี อย่างไร

บทที่ 9 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

เนื้อหาประกอบด้วย

9.1 พื้นฐานอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

9.2 ราคาฟอร์เวิร์ดของตราสารหนี้ไม่จ่ายคูปองและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย

9.3 สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xIBOR

9.4 สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย xIBOR

9.5 ค่าความผันผวนตามนัยและราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน

9.6 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

บทนำ

สัญญาสวอป หรือ สัญญาแลกเปลี่ยน (swap contact) เป็นสัญญาในการแลกเปลี่ยนสินทรัพย์หรือตัวแปรทางการเงินที่จะเกิดขึ้นในอนาคตระหว่างคู่สัญญาซึ่งเป็นสินทรัพย์หรือตัวแปรทางการเงิน เช่น เงินตราต่างประเทศหรืออัตราดอกเบี้ย เครดิต หลักทรัพย์ เป็นต้น สัญญาสวอป ถือเป็นเครื่องมือในการบริหารความเสี่ยง ผู้บริหารความเสี่ยงควรให้ความสำคัญอย่างยิ่ง สวอปถูกนำมาใช้ในการบริหารความเสี่ยงในด้านต่าง ๆ ที่จะเกิดในอนาคต เช่นความผันผวนจากอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราระหว่างประเทศ ความผันผวนจากอัตราดอกเบี้ย หรือความผันผวนของกระแสเงินสดเกิดขึ้นในอนาคต ความผันผวนเหล่านี้ อาจมีผลจากความผันผวนทางเศรษฐกิจของประเทศนั้น ๆ หรือของประเทศคู่ค้า หรือ ของประเทศที่ใช้เป็นประเทศอ้างอิงเงินตรา ตลอดจนความผันผวนของภาวะเศรษฐกิจโลก สัญญาสวอปที่เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย ได้แก่ สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย (interest rate swap) สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ (currency swap) สัญญาสวอปของการผิดนัดชำระหนี้ของบริษัท (credit default swap) สัญญาสวอปหลักทรัพย์ (equity swap)

ในบทนี้จะกล่าวถึงสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย ซึ่งเป็นสัญญาทางการเงินประเภทหนึ่งที่คู่สัญญาตกลงที่จะแลกเปลี่ยนภาระการชำระดอกเบี้ยให้แก่กันและกันภายในระยะเวลาที่กำหนดไว้

เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย โดยจำนวนเงินค่าดอกเบี้ยที่ต้องชำระขึ้นอยู่กับจำนวนเงินต้นอ้างอิงตามที่ระบุไว้ในสัญญา การแลกเปลี่ยนเป็นส่วนที่เกี่ยวกับภาระดอกเบี้ยเท่านั้น ไม่มีการแลกเปลี่ยนเงินต้นกัน คู่สัญญาซึ่งเข้าทำสัญญาแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยไม่จำต้องมีการทำสัญญาเงินกู้ระหว่างกัน แต่เมื่อเข้าทำสัญญาแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยแล้ว (interest rate swap) คู่สัญญาทั้งสองฝ่ายมีภาระผูกพันที่จะต้องชำระเงินภายใต้ระยะเวลาและเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในสัญญาแลกเปลี่ยน เงินผลต่างที่เกิดจากการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย

หมายเหตุ จำนวนเงินต้นอ้างอิง หมายถึง เงินต้นซึ่งมิใช่จำนวนเงินที่แลกเปลี่ยนกันจริงเมื่อเริ่มทำสัญญาแลกเปลี่ยน เพียงแต่ใช้อ้างอิงเพื่อคำนวณหาจำนวนเงินจากอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัว และสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย ที่จะกล่าวถึงในบทนี้เป็นสัญญาสวอปที่มีรูปแบบไม่ซับซ้อนซึ่งเรียกว่า “plain vanilla swap”

9.1 พื้นฐานอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานอัตราดอกเบี้ยลอยตัว อัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่นิยมใช้อ้างอิงกัน โดยเริ่มต้นจากการแนะนำความรู้เรื่องของวิธีการนับจำนวนวันลงทุน

9.1.1 วิธีการนับจำนวนวัน

การนับจำนวนวันลงทุนหรืออายุของสัญญา สำหรับหน่วยเวลาเป็นปี สามารถคำนวณได้จาก

$$t = \frac{\text{จำนวนวันที่ลงทุน}}{\text{จำนวนวันต่อปี}} \tag{9.1}$$

โดยวิธีการนับจำนวนวัน สามารถทำได้หลายวิธี คือ

1) การนับจำนวนวันแท้จริง (นับวันแน่นอน)

วิธีนี้ จำนวนวันลงทุน นับเป็นจำนวนวันแน่นอนจากวันเริ่มต้นถึงวันสุดท้าย และกำหนดจำนวนวันต่อปีจะเท่ากับ 365 วัน หรือ 366 วัน

2) การนับจำนวนวันสามัญ(นับวันโดยประมาณ)

วิธีนี้กำหนดว่าแต่ละเดือนมี 30 วัน ดังนั้นจำนวนวันต่อปี เท่ากับ 360 วัน และจำนวนวันลงทุนเขียนเป็นสูตรคำนวณได้ดังนี้

$$360(Y_T - Y_0) + 30(M_T - M_0) + (D_T - D_0) \tag{9.2}$$

โดยที่ D_0 , M_0 และ Y_0 แทน วัน เดือน และ ปี ของวันเริ่มต้นลงทุน และ D_T , M_T และ Y_T แทน วัน เดือน และ ปี ของวันสุดท้ายของการลงทุน

หมายเหตุ สำหรับวันที่ 28 กุมภาพันธ์ (ปีที่มี 365 วัน) , 29 กุมภาพันธ์ (ปีที่มี 366 วัน) และวันที่ 31 ของเดือนที่ลงท้ายด้วยคม เมื่อแทนในสูตร (9.2) ให้แทน ด้วยวันที่ 30 ส่วนวันอื่นแทนตามปกติ

3) การนับวันด้วยวิธี กฎของธนาคาร (banker's rule)

วิธีนี้กำหนดวันต่อปี เท่ากับ 360 วัน แต่นับจำนวนวันลงทุนเป็นจำนวนวันแน่นอน ดังนั้นเมื่อเปรียบเทียบวิธีการนับจำนวนวันระหว่างในการคำนวณดอกเบี้ยโดยวิธีนับวันแน่นอน และกฎของธนาคาร นักลงทุนหรือผู้ฝากเงินย่อมพอใจกฎของธนาคารมากกว่าเพราะว่ากฎของธนาคารให้ดอกเบี้ยมากกว่า

ตัวอย่างที่ 9.1 จงนับวันลงทุนของโครงการลงทุนหนึ่งซึ่งเริ่มลงทุนวันที่ 12 กุมภาพันธ์ 2563 และวันสิ้นสุดโครงการวันที่ 23 สิงหาคม 2566 โดย

1) นับจำนวนวันแท้จริง และ เวลาลงทุนในหน่วยปี

2) นับจำนวนวันสามัญ

วิธีทำ 1) นับจำนวนวันแท้จริง

จำนวนวันทั้งหมด = (366-11-31)+365+365+(365-8-30-31-30-31)=1,289 วัน

สมมติ 1 ปี =365 วัน ดังนั้นเวลาลงทุนในหน่วยปี เท่ากับ $\frac{1,289}{365} = 3.5315$ ปี

2) นับจำนวนวันสามัญ

จาก จำนวนวันลงทุน $= 360(Y_T - Y_0) + 30(M_T - M_0) + (D_T - D_0)$

จะได้ จำนวนวันลงทุน $= 360(2566 - 2563) + 30(8 - 2) + (23 - 12) = 1,271$ วัน

1 ปี =360 วัน ดังนั้นเวลาลงทุนในหน่วยปี เท่ากับ $\frac{1,271}{360} = 3.5306$ ปี □

9.1.2 อัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR

อัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่นิยมใช้ในการทำธุรกรรมมีหลายอัตราอ้างอิง เช่น LIBOR (London Interbank Offered Rate), EURIBOR (European Banking Federation), CIBOR (Nasdaq OMX), BIBOR (Bangkok Interbank Offered Rate) และ THOR (Thai Overnight Repurchase Rate) เป็นต้น ซึ่งอัตราดอกเบี้ยแต่ละชนิดก็มีวิธีการคำนวณที่แตกต่างกัน เพื่อความสะดวกในตำรานี้หากไม่ระบุว่าเป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัวชนิดใด จะระบุเป็นอัตราดอกเบี้ย xIBOR กำหนดให้อัตราดอกเบี้ย xIBOR จ่ายทันที ณ เวลา t (spot xIBOR rate) ระยะเวลา τ (หน่วย ปี) จ่ายระหว่างเวลา t ถึง $t+\tau$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $L_t(t,t+\tau)$ โดย $L_t(t,t+\tau)=\delta_t$ เมื่อ δ_t คิดทบต้นต่อเนื่องสำหรับช่วงเวลา t ถึง $t+\tau$ และสำหรับเวลาในอนาคต $T>t$ เราได้ว่า $L_T(T,T+\tau)$ เป็นตัวแปรสุ่ม (random variable) ดังนั้นหากที่เวลา t เรากู้ยืมเงินจำนวน N บาท ที่เวลา $t+\tau$ เราจะต้องจ่ายเงินคืนทั้งหมด $N(1+\tau L_t(t,t+\tau))$ บาท จะเห็นว่าการคิดดอกเบี้ยในลักษณะนี้เป็นการคิดดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

หมายเหตุ 1) อัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่นิยมใช้อ้างอิงกันมากที่สุด คือ อัตราดอกเบี้ย LIBOR (London Interbank Offered Rate) สำหรับประเทศไทยตั้งแต่ปี พ.ศ.2564 ธนาคารกลางแห่งประเทศไทยได้ประกาศยกเลิกการใช้อัตราดอกเบี้ย LIBOR เป็นอัตราดอกเบี้ยอ้างอิง โดยให้ใช้อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง THOR หรืออัตราดอกเบี้ยอ้างอิงธุรกรรมซื้อข้ามคืน (Thai Overnight Repurchase Rate: THOR) ซึ่งคำนวณจากธุรกรรมซื้อพันธบัตรภาคเอกชนระยะข้ามคืนระหว่างคู่ค้าที่เป็นธนาคาร เพื่อเป็นการส่งเสริมและผลักดันให้เกิดการใช้อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง THOR ในตำราเล่มนี้จะใช้อัตราดอกเบี้ย THOR เป็นอัตราดอกเบี้ยอ้างอิง โดยอัตราดอกเบี้ย THOR เพียงในนามต่อปีคิดทบต้นทุก m เดือน จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m-THOR

2) อัตราดอกเบี้ย THOR + spread คือ อัตราดอกเบี้ย THOR ที่บวกด้วยส่วนต่างอัตราดอกเบี้ยที่เรียกว่าอัตรา spread (%) โดยที่ส่วนต่างอัตราดอกเบี้ยจะเป็นอัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารหรือผู้ให้กู้บวกเพิ่มเติมเข้าไปกับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเพื่อเป็นส่วนชดเชยความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ยของแต่ละธนาคารจะขึ้นอยู่กับกลไกตลาดเงินและการแข่งขัน

ระหว่างธนาคาร โดยมักอ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ยนโยบายของภาครัฐ และมีส่วนต่างแตกต่างกันไปเพื่อผลประโยชน์สูงสุดของธนาคาร

3) อัตราดอกเบี้ยในตลาดการเงินไทยนั้นมีทั้งอัตราดอกเบี้ยเงินฝากประเภทต่างๆ และอัตราดอกเบี้ย เงินกู้อีกหลายประเภท ซึ่งสามารถจำแนกตามระยะเวลาของการฝากหรือการกู้เช่น อัตราดอกเบี้ยเงินฝากประเภท1 เดือน, 3 เดือน หรือ 2 ปี เป็นต้น สำหรับอัตราดอกเบี้ย ที่เราคุ้นเคยได้แก่ อัตราดอกเบี้ย MLR, MOR และ MRR นอกจากนี้ยังมีอัตราดอกเบี้ยการกู้ยืมเงินกันระหว่างสถาบันการเงิน เช่น อัตราดอกเบี้ย REPO, BIBOR หรือ อัตราดอกเบี้ย THBFIX ซึ่ง จะมีระยะเวลาสั้นสุดตั้งแต่อัตราดอกเบี้ยข้ามคืน (หรือ overnight rate) อัตรา 1 วัน, 7 วัน,14 วัน, 1 เดือน ไปจนถึง 1 ปี

ตาราง 9.2 *อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง m-THOR (หน่วย : ร้อยละต่อปี)*

	THOR	1 Month	3 Months	6 Months
14 กค. 2564	0.49410	0.49258	0.49290	0.49321
13 กค. 2564	0.49401	0.49269	0.49288	0.49321
12 กค. 2564	0.49463	0.49262	0.49285	0.49321
09 กค. 2564	0.49275	0.49257	0.49290	0.49325
08 กค. 2564	0.49243	0.49262	0.49291	0.49325
07 กค. 2564	0.49289	0.49261	0.49292	0.49325

ที่มา: ข้อมูลวันที่ 14 กรกฎาคม พ.ศ.2564 สมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย (THAIBMA)

ตาราง 9.3 *อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง THOR average (หน่วย : ร้อยละต่อปี)*

ระยะ	จำนวนวัน	อัตราดอกเบี้ย THOR Average
1 เดือน	30 วัน	0.49286
3 เดือน	90 วัน	0.49297
6 เดือน	181 วัน	0.49328

ที่มา: ข้อมูลวันที่ 12 พฤษภาคม พ.ศ.2564 สมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย (THAIBMA)

9.2 ราคาฟอร์เวิร์ดของตราสารหนี้ไม่จ่ายคูปองและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด

สำหรับ $T_1 \le T_2$ พิจารณาสัญญาฟอร์เวิร์ด หรือ สัญญาล่วงหน้า (forward contact) อายุ T_1 ปีบนตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุ ไถ่ถอน T_2 ปี (T_2-zero coupon bond: T_2-zcb) กำหนดให้ $Z(t,T_2)$ เป็นราคาที่เวลา t ของตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุไถ่ถอน 1 บาทที่เวลา T_2 และ δ_2 เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีคิดทบต้นต่อเนื่องของ T_2-zcb สำหรับ $0 \le t \le T_2$ จะได้

$$Z(t,T_2) = e^{-\delta_2(T_2-t)} \tag{9.3}$$

กำหนดให้ $P(t,T_2)$ เป็นราคาตราสารหนี้ที่เวลา t ที่มีราคาไถ่ถอน X ซึ่งเท่ากับราคาที่ตราไว้ (T_2-zcb-X) จะได้

$$P(t,T_2) = XZ(t,T_2) \tag{9.4}$$

กำหนดให้ $F(t,T_1,T_2)$ เป็นราคาฟอร์เวิร์ด (forward price) บนตราสารหนี้ดังกล่าว ตกลงกันที่เวลา t ที่จะซื้อ T_2-zcb ที่เวลา T_1 พิจารณาพอร์ตการลงทุน a และ b ที่เวลา t ดังนี้

พอร์ต a	ประกอบด้วย T_2-zcb
พอร์ต b	ประกอบด้วยสัญญาล่วงหน้าอายุ T_1 บน T_2-zcb ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ์ (delivery price) K ที่เวลา T_1

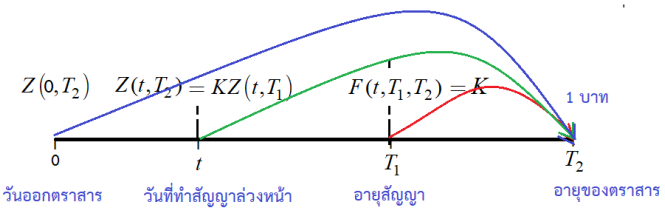
เนื่องจากมูลค่าไถ่ถอนที่เวลา T_2 ของทั้งพอร์ต a และ พอร์ต b เท่ากันคือ 1 บาทโดยหลักการปราศจากการค้ากำไร (no arbitrage principal: NAP) จะได้ว่า มูลค่าปัจจุบันที่เวลา t ของทั้ง 2 พอร์ตต้องเท่ากัน คือ

$$Z(t,T_2) = KZ(t,T_1) \tag{9.5}$$

เนื่องจากราคาล่วงหน้าบนตราสารหนี้ $F(t,T_1,T_2)$ คือราคาใช้สิทธิ์ K ดังนั้น

$$F(t,T_1,T_2) = K = \frac{Z(t,T_2)}{Z(t,T_1)} = \frac{e^{-\delta_2(T_2-t)}}{e^{-\delta_1(T_1-t)}} = e^{-(\delta_2(T_2-t)-\delta_1(T_1-t))} \tag{9.6}$$

เมื่อ δ_1 เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีคิดทบต้นต่อเนื่องของ T_2-zcb สำหรับ $0 \le t \le T_1$ และราคาล่วงหน้าบนตราสารหนี้ T_2-zcb-X เท่ากับ $XF(t,T_1,T_2)$



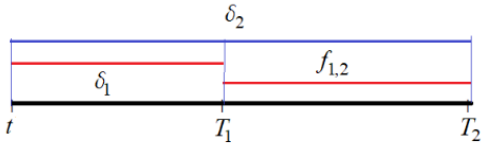
รูปที่ 9.1 *ราคาตราสารหนี้ T_2-zcb ณ วันออกสัญญา $t=0$ และราคาที่เวลา t ใด ๆ ตามลำดับ*

กำหนดให้ $f_{1,2}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีคิดทบต้นต่อเนื่องซึ่ง $F(t,T_1,T_2)=e^{-f_{1,2}(T_2-T_1)}$ จากสมการ (9.6) ได้ว่า

$$F(t,T_1,T_2)=e^{-f_{1,2}(T_2-T_1)}=e^{-(\delta_2(T_2-t)-\delta_1(T_1-t))}$$

โดยการแก้สมการสำหรับ $f_{1,2}$, ได้ $f_{1,2}(t)=\dfrac{\delta_2(T_2-t)-\delta_1(T_1-t)}{T_2-T_1}$

เรียก $f_{1,2}(t)$ ว่า “อัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด หรือ อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward interest rate)” สำหรับช่วงเวลา T_1 ถึง T_2 ทำสัญญา ณ เวลา t



รูปที่ 9.2 *อัตราดอกเบี้ยของ zcb และ อัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด* $f_{1,2}$

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $T_1=T$ และ $T_2=T+\tau$ และแทน $f_{1,2}(t)$ ด้วย $f_{T,T+\tau}(t)$ จะได้

$$f_{T,T+\tau}=\frac{\delta_2(T+\tau-t)-\delta_1(T-t)}{\tau} \qquad (9.7)$$

ตัวอย่างที่ 9.2 ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 12 เดือน (12m-zcb) มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 5% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ สมมติอัตราดอกเบี้ยของตั๋วเงินคลังบนช่วง [0,9/12] เท่ากับอัตราดอกเบี้ยบนช่วง [0,1]

1) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของสัญญาฟอร์เวิร์ดบน 12m-zcb ณ ปลายเดือนที่ 3 และเวลาใช้สิทธิปลายเดือนที่ 9

2) จงหาอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด สำหรับช่วงเดือนที่ 9 ถึง เดือนที่ 12

วิธีทำ 1) จากโจทย์ให้ $T_1 = 9/12$, $T_2 = 12/12 = 1$ และ $t = 3/12$ จากส่วนลด 5% ราคาของ 12m-zcb ณ เท่ากับ $0.95(1,000) = 950$ บาท ให้ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่องของ 12m-zcb บนช่วง [0,1] ปี จะได้

$$P(0,T_2) = 950 = 1,000Z(0,T_2) = 1,000e^{-\delta * 1} \Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{1000}{950}\right) = 0.051293$$

เป็นอัตราดอกเบี้ยของตั๋วเงินคลังบนช่วง [0,9/12] เท่ากับอัตราดอกเบี้ยบนช่วง [0,1] ดังนั้น ราคาฟอร์เวิร์ดของสัญญาฟอร์เวิร์ดดังกล่าว เท่ากับ

$$1,000F(t,T_1,T_2) = 1,000\left(\frac{Z(3/12,1)}{Z(3/12,9/12)}\right) = 1,000e^{-0.051293(1-9/12)}$$

$$= 1,000(0.987259) = 987.259$$

2) ให้ $f_{1,2}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด จะได้

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{987.259}{1,000} = 0.987259 = e^{-f_{1,2}(1-9/12)} \Rightarrow f_{1,2} = -\frac{12\ln 0.987259}{3} = 0.05129145$$

□

9.3 สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xIBOR

สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย หรือ สัญญาอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate agreements: FRAs) เป็นสัญญาฟอร์เวิร์ดหรือสัญญาล่วงหน้า (forward contract) ที่อ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ย ส่วนใหญ่จะซื้อขายในตลาดระหว่างสถาบันการเงินและธนาคารอื่น ๆ (interbank) โดยคู่สัญญาที่ทำสัญญา FRA นั้น ตกลงกันจะชำระส่วนต่างที่อาจจะเกิดขึ้นจากการที่ดอกเบี้ยในอนาคตมีการปรับตัวเพิ่มขึ้นหรือลดลงจากอัตราดอกเบี้ยที่กำหนดไว้ในสัญญา โดยถ้าอัตราดอกเบี้ยที่ใช้อ้างอิง xIBOR สูงขึ้นเกินกว่าอัตราที่ตกลงกันไว้ (อัตราใช้สิทธิ K :strike rate or FRA rate) ณ วันใช้สิทธิ ผู้ขาย FRA จะต้องจ่ายภาระดอกเบี้ยส่วนที่เกินนี้ให้กับผู้ซื้อ FRA แต่ในทางกลับกันถ้าอัตราดอกเบี้ยลดลงกว่าอัตราดอกเบี้ยที่ตกลงกันไว้ตอนแรก ผู้ซื้อจะต้องจ่ายภาระดอกเบี้ยส่วนต่างนี้ให้กับผู้ขาย FRA อัตราดอกเบี้ยอ้างอิงที่นิยมที่สุดสำหรับใช้กับ FRA ก็คือ อัตราดอกเบี้ย LIBOR

ประเภท 3 เดือน สำหรับสัญญาฟอร์เวิร์ดที่ตกลงทำสัญญาที่เวลา $t \le T$ โดยมีเงินต้นอ้างอิง N (notional principle) และ $L_T(T,T+\tau)$ เป็นอัตราดอกเบี้ย xIBOR จ่ายทันที ณ เวลา T จ่ายระหว่างเวลา T ถึง $T+\tau$ เพื่อความเข้าใจที่มากขึ้นขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9.3 บริษัท a กู้เงิน 10 ล้านบาท กับธนาคารแห่งหนึ่งโดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR+1% ต่อปีโดยมีกำหนดจ่ายดอกเบี้ยทุกปี (ทุก 12 เดือน) ต่อมาบริษัท a ประเมินจากสภาพเศรษฐกิจที่ผ่านมา อัตราดอกเบี้ย THOR มีแนวโน้มปรับตัวสูงขึ้นไปอยู่ที่ 9 % ต่อปี เพื่อเป็นการป้องกันความเสี่ยงดังกล่าว บริษัท a จึงตัดสินใจทำสัญญา FRA กับธนาคาร b และสามารถกำหนดอัตราดอกเบี้ยในสัญญาได้เท่ากับ 8 % ต่อปี ที่เงินต้น 10 ล้านบาท กำหนดให้บริษัท a มีสถานะเป็นผู้ซื้อ FRA และธนาคาร b เป็นผู้ขาย FRA โดยมีการชำระส่วนต่างของดอกเบี้ยทุก ๆปี จงพิจารณาว่าสัญญาดังกล่าวจะช่วยป้องกันความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยหรือไม่ อย่างไร ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

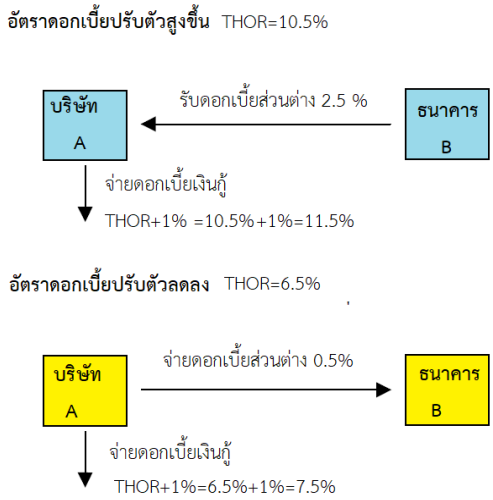
1) อัตราดอกเบี้ย THOR ปรับตัวขึ้นสูงขึ้นไปอยู่ที่ 10.5 % ต่อปี ในอีก 12 เดือนข้างหน้า

2) อัตราดอกเบี้ย THOR ปรับตัวลดลงเหลือ 6.5 % ต่อปี ในอีก 12 เดือนข้างหน้า

วิธีทำ 1) ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ย THOR มีการปรับตัวขึ้นสูงขึ้นไปอยู่ที่ 10.5 % ต่อปีในอีก 12 เดือนข้างหน้า บริษัท a จะภาระในการจ่ายอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ เท่ากับ 10.5 %+1%=11.5% ต่อปี ซึ่งสูงกว่าอัตราดอกเบี้ยประมาณการที่เท่ากับ 9% ต่อปี อย่างไรก็ตามบริษัท a ได้ทำสัญญาไว้กับธนาคาร b ที่อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี ในกรณีนี้บริษัท a จะได้รับอัตราดอกเบี้ยส่วนต่างเท่ากับ 10.5%-8%=2.5% ต่อปี นั่นคือ บริษัท aได้รับดอกเบี้ยจาก ธนาคาร b เท่ากับ $2.5\% \times 10,000,000 = 250,000$ บาท

2) ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ย THOR ปรับตัวลดลงเหลือ 6.5 % ต่อปีต่อปีในอีก 12 เดือนข้างหน้า บริษัท a จะภาระในการจ่ายอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ เท่ากับ 6.5 %+1%=7.5% ต่อปี ซึ่งต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยประมาณการที่เท่ากับ 9% ต่อปี อย่างไรก็ตามบริษัท a ได้ทำสัญญาไว้กับธนาคาร b ที่อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี ในกรณีนี้บริษัท a ต้องชำระอัตราดอกเบี้ยส่วนต่างเท่ากับ

8%-7.5%=0.5% ต่อปี ให้กับธนาคาร b นั่นคือ บริษัท a จ่ายเงินดอกเบี้ยให้กับธนาคาร b เท่ากับ $0.5\% \times 10,000,000 = 50,000$ บาท



รูปที่ 9.3 *สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยระหว่างบริษัท a (ผู้ซื้อ FRA) และ ธนาคาร b (ผู้ขาย FRA)*

จากแผนภาพจะเห็นว่าบริษัท a สามารถปรับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR+1% ต่อปี มาเป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่ 8% ต่อปีได้ เพื่อเป็นการป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในตลาด ซึ่งจะเห็นว่าหากบริษัท a คาดการณ์ถูกต้องว่าอัตราดอกเบี้ยตลาดจะปรับตัวสูงขึ้นจริงเป็น 10.5 % บริษัท a จะประหยัดเงินเพื่อจ่ายเป็นค่าดอกเบี้ยได้มากถึง 250,000 บาท แต่อย่างไรก็ตามหากบริษัท a คาดการณ์เหตุการณ์ผิดอัตราดอกเบี้ยตลาดปรับตัวลดลงเป็น 6.5% บริษัท a ก็จะต้องจ่ายเงินเพิ่มเป็นค่าดอกเบี้ย 50,000 บาท □

จากตัวอย่างจะเห็นว่าสัญญา FRA ประกอบด้วย ผู้ซื้อ FRA ซึ่งจะเป็นฝั่งที่ถือดอกเบี้ยลอยตัวอยู่และมีความประสงค์จะซื้ออัตราดอกเบี้ยคงที่ K กับผู้ขาย FRA ซึ่งจะเป็นฝั่งที่จะขายอัตราดอกเบี้ยคงที่ K โดยผลประโยชน์ของทั้ง 2 ฝ่ายจะขึ้นอยู่กับระดับการเปลี่ยนของอัตราดอกเบี้ยจ่ายทันที $L_T(T, T+\tau)$ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

<u>สำหรับผู้ซื้อ FRA</u>

จ่าย (pay) τNK ที่เวลา $T+\tau$

รับ (receive) $\tau NL_T(T,T+\tau)$ ที่เวลา $T+\tau$

ดังนั้น ผลประโยชน์ (payoff) สำหรับผู้ซื้อ FRA ที่เวลา $T+\tau$ เท่ากับ $\tau N\left(L_T(T,T+\tau)-K\right)$

นั่นคือ ผลประโยชน์ สำหรับผู้ซื้อ FRA ที่เวลา T ซึ่งจะแทนด้วย , Pof_T^{buyer}

$$Pof_T^{buyer}=\frac{\tau N\left(L_T(T,T+\tau)-K\right)}{1+\tau L_T(T,T+\tau)} \tag{9.8}$$

จากสมการประโยชน์สำหรับผู้ซื้อ FRA จะเห็นว่า ณ วันใช้สิทธิ หากอัตราดอกเบี้ย $L_T(T,T+\tau)$ สูงขึ้นเกินกว่า อัตราใช้สิทธิ K ผู้ซื้อ FRA จะได้รับเงินสดคำนวณจากดอกเบี้ยส่วนที่เกินจากผู้ขาย FRA แต่ในทางตรงกันข้ามหากอัตราดอกเบี้ย $L_T(T,T+\tau)$ ลดลงกว่าอัตราใช้สิทธิ K ผู้ซื้อจะต้องจ่ายเงินสดคำนวณจากดอกเบี้ยส่วนต่างนี้ให้กับผู้ขาย FRA

<u>สำหรับผู้ขาย FRA</u>

รับ τNK ที่เวลา $T+\tau$

จ่าย $\tau NL_T(T,T+\tau)$ ที่เวลา $T+\tau$

ดังนั้น ผลประโยชน์ สำหรับผู้ขาย FRA ที่เวลา $T+\tau$ เท่ากับ $\tau N\left(K-L_T(T,T+\tau)\right)$

นั่นคือ ผลประโยชน์ สำหรับผู้ขาย <u>FRA</u> ที่เวลา T ซึ่งจะแทนด้วย , Pof_T^{seller}

$$Pof_T^{seller}=\frac{\tau N\left(K-L_T(T,T+\tau)\right)}{1+\tau L_T(T,T+\tau)} \tag{9.9}$$

จากสมการผลประโยชน์สำหรับผู้ขาย FRA จะเห็นว่า ณ วันใช้สิทธิ หากอัตราดอกเบี้ย $L_T(T,T+\tau)$ สูงขึ้นเกินกว่า อัตราใช้สิทธิ K ผู้ขาย FRA จะได้จ่ายเงินสดคำนวณจากดอกเบี้ยส่วนที่เกินให้กับผู้ซื้อ FRA แต่ในทางตรงกันข้ามหากอัตราดอกเบี้ย $L_T(T,T+\tau)$ ลดลงกว่าอัตราใช้สิทธิ K ผู้ขายจะได้รับเงินสดคำนวณจากดอกเบี้ยส่วนต่างนี้ให้กับผู้ซื้อ FRA

จากธุรกรรมของคู่สัญญาของ FRA จะเห็นว่าเป็นธุรกรรมระหว่างอัตราดอกเบี้ย 2 ฝั่ง คือ ฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed leg) และ ฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating leg) ถ้าพิจารณามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดในแต่ละฝั่ง จะได้ว่า มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เวลา t ของฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed leg) แทนด้วยสัญลักษณ์ $PV_{fixed}^{FRA}(t)$,

$$PV_{fixed}^{FRA}(t) = Z(t,T)\cdot\frac{\tau KN}{1+\tau K} = e^{-\delta(T-t)}\cdot\frac{\tau KN}{1+\tau K} \tag{9.10}$$

ในทำนองเดียวกัน มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เวลา t ของฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating leg) แทนด้วยสัญลักษณ์ $PV_{floating}^{FRA}(t)$,

$$PV_{floating}^{FRA}(t) = Z(t,T)\cdot\frac{\tau(L+s)N}{1+\tau L} = e^{-\delta(T-t)}\cdot\frac{\tau(L+s)N}{1+\tau L} \tag{9.11}$$

เมื่อ s เป็นอัตรา spread (%), N แทนเงินต้นอ้างอิง (notional principle) และ $L = L_T(T,T+\tau)$ อัตราดอกเบี้ย xIBOR จ่ายทันที (อัตราดอกเบี้ยตลาด) สำหรับช่วงเวลา T ถึง $T+\tau$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า δ เป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปีคิดทบต้นต่อเนื่องของ T -zcb สำหรับ $0 \le t \le T$

$$PV_{fixed}^{FRA}(t) = e^{-\delta(T-t)}\cdot\frac{\tau KN}{1+\tau K} \text{ และ } PV_{floating}^{FRA}(t) = e^{-\delta(T-t)}\cdot\frac{\tau(L+s)N}{1+\tau L} \tag{9.12}$$

สำหรับการซื้อขาย FRA กำหนดอัตราใช้สิทธิ (อัตราดอกเบี้ยคงที่) $K = F^{FRA}(t,T,T+\tau)$ เมื่อ $F^{FRA}(t,T,T+\tau)$ เป็นอัตราที่ทำให้ PV_t^{FRA} (หรือ npv) เท่ากับ 0 กำหนดให้ $F^{FRA}(t,T,T+\tau)$ แทนอัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟอร์เวิร์ด (fixed rate) ที่เวลา t สำหรับช่วงเวลา T ถึง $T+\tau$ ซึ่งเป็นค่าของอัตราใช้สิทธิ์ K ซึ่งสัญญา FRA มีมูลค่าเป็นศูนย์ที่เวลา $t \le T$

ทฤษฎีบท 9.1 สำหรับทุก ๆ เวลา $t \le T$ อัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟอร์เวิร์ด

$$F^{FRA}(t,T,T+\tau) = \frac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)} \tag{9.13}$$

เมื่อ $Z(t,T)$ เป็นราคาที่เวลา t ของตราสารหนี้ไม่มีคูปองอายุไถ่ถอน 1 บาทที่เวลา T

พิสูจน์ พิจารณาพอร์ตการลงทุนที่ประกอบด้วย T -zcb ในสถานะลอง (long position) ซึ่งมีราคาไถ่ถอน 1 บาท ที่เวลา T และ $(T+\tau)$- zcb ในสถานะชอร์ต(short position) ซึ่งมีมูลค่าชำระคืน $1+\tau K$ บาทที่เวลา $T+\tau$

ที่เวลา $T+\tau$ มูลค่าของพอร์ตเท่ากับ

$$\big(1+\tau L_T(T,T+\tau)\big)-(1+\tau K) = \tau\big(L_T(T,T+\tau)-K\big) \tag{9.14}$$

ซึ่งเป็นผลประโยชน์ของ FRA ดังนั้นมูลค่าของ FRA ที่เวลา t จะแทนด้วย $V_K(t,T)$,

$$V_K(t,T) = Z(t,T)-(1+\tau K)Z(t,T+\tau) \tag{9.15}$$

เนื่องจาก $Z_t(T,T+\tau)$ เป็นอัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟอร์เวิร์ดที่เวลา t สำหรับช่วงเวลา T ถึง $T+\tau$ ซึ่งเป็นค่าของอัตราใช้สิทธิ์ K ซึ่งสัญญา FRA มีมูลค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น $Z(t,T)-(1+\tau K)Z(t,T+\tau)=0$

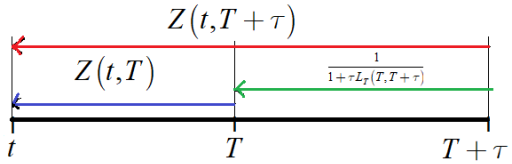
นั่นคือ $F^{FRA}(t,T,T+\tau)=K=\dfrac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)}$ □

จาก (9.11) โดยการแทน $t=T$ และ $Z(T,T)=1$ จะได้

$$F^{FRA}(T,T,T+\tau)=\frac{1-Z(T,T+\tau)}{\tau Z(T,T+\tau)}=L_T(T,T+\tau) \tag{9.16}$$

นั่นคือ

$$Z(T,T+\tau)=\frac{1}{1+\tau L_T(T,T+\tau)} \tag{9.17}$$



รูปที่ 9.4 *ตัวประกอบส่วนลดในเทอมของ zcb และ อัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟอร์เวิร์ด*

หมายเหตุ ความแตกต่างระหว่าง $L_t(t,t+\tau)$ และ $F^{FRA}(t,T,T+\tau)$ คือ $L_t(t,t+\tau)$ เป็นอัตราดอกเบี้ย xIBOR จ่ายทันที ณ เวลา t จ่ายระหว่างเวลา t ถึง $t+\tau$ แต่ $F^{FRA}(t,T,T+\tau)$ อัตราดอกเบี้ย xIBOR ฟอร์เวิร์ด ณ เวลาทำสัญญา t สำหรับช่วงเวลา T ถึง $T+\tau$

ตัวอย่างที่ 9.4 ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 6 เดือน มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 5% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้

1) จงคำนวณราคาตั๋วเงินคลังที่เวลา $t=3$ เดือน เมื่ออัตราดอกเบี้ยจ่ายทันที xIBOR จ่ายทันที ณ เวลาปลายเดือนที่ 3 ($t=3/12$ นับจากวันออกตราสาร) เท่ากับ 1.5 % ต่อปี (อัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว)

2) จากข้อ 1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวฟอร์เวิร์ดที่ทำสัญญาทันทีเดือนที่ 3 สำหรับการกู้ยืมในช่วงเวลาระหว่างเดือนที่ 4 ถึงเดือนที่ 6

วิธีทำ 1) ในที่นี้โจทย์กำหนดอัตราดอกเบี้ย

$$L_{3/12}(3/12, 3/12+3/12) = L_{0.25}(0.25, 0.5) = 0.015$$

จะได้ $Z(0.25,0.5) = \left(1+\tau L_t(t,t+\tau)\right)^{-1} = \left(1+0.25L_{0.25}(0.25,0.5)\right)^{-1}$

$$= \left(1+0.25(0.015)\right)^{-1} = 0.9962640$$

ดังนั้นราคาตั๋วเงินคลังที่เวลา $t=3$ เดือน เท่ากับ

$$1{,}000Z(0.25,0.5) = 1{,}000(0.9962640) = 996.2640$$

2) หาอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวฟอร์เวิร์ดที่ทำสัญญาเดือนที่ 3 สำหรับการกู้ยืมในช่วงเวลาระหว่างเดือนที่ 4 ถึงเดือนที่ 6 ซึ่งคือ

$$F^{FRA}(3/12, 4/12, 4/12+2/12) = F^{FRA}(0.25, 0.3333, 0.5)$$

สมมติให้ δ เป็นอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่องสำหรับช่วงปลายเดือนที่ 3 ถึงปลายเดือนที่ 6

เนื่องจาก $Z(0.25,0.5) = e^{-\delta(0.5-0.25)} = 0.9962640 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.014971985$

ดังนั้น $Z(0.25,0.3333) = e^{-(0.014971985)(0.3333-0.25)} = 0.998754$

เนื่องจาก $F^{FRA}(t,T,T+\tau) = \dfrac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)}$

ดังนั้น $F^{FRA}(0.25,0.3333,0.5) = \dfrac{Z(0.25,0.3333)-Z(0.25,0.5)}{(0.1667)Z(0.25,0.5)}$

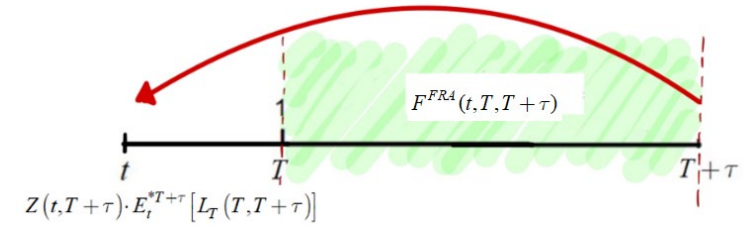
$$= \frac{0.998754-0.9962640}{0.1667(0.9962640)} = 0.014991$$ □

กำหนดให้ $L_T(T,T+\tau)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว xIBOR จ่ายทันที (spot xIBOR rate) ระหว่างเวลา T ถึง $T+\tau$ ซึ่ง $L_T(T,T+\tau)$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม จะได้ว่า

$$E_t^{*T+\tau}\left[L_T(T,T+\tau)\right] = F^{FRA}(t,T,T+\tau) = \frac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)} \tag{9.18}$$

เมื่อ $E_t^{*T+\tau}[X_T]$ แทนค่าคาดหวังแปรผันตามเวลา t ของตัวแปรเชิงสุ่ม X_T ภายใต้การปราศจากการค้ากำไร ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของ $E_t^{*T+\tau}\left[L_T(T,T+\tau)\right]$ ที่เวลาทำสัญญา t เท่ากับ

$$Z(t,T+\tau)\cdot E_t^{*T+\tau}\left[L_T(T,T+\tau)\right] = Z(t,T+\tau)\cdot F^{FRA}(t,T,T+\tau) \tag{9.19}$$



รูปที่ 9.5 *มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายด้วยอัตรา xIBOR ที่เวลา* t

มูลค่าปัจจุบันของอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว xIBOR จ่ายทันที $L_T(T,T+\tau)$ ณ *เวลา* t ประมาณด้วย

$$Z(t,T+\tau)\cdot E_t^{*T+\tau}\left[L_T(T,T+\tau)\right] = Z(t,T+\tau)\cdot F^{FRA}(t,T,T+\tau)$$

$$= Z(t,T+\tau)\left(\frac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)}\right)$$

$$= \frac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau} \qquad (9.20)$$

ตัวอย่างที่ 9.5 ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 6 เดือน มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 5% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายด้วยอัตราดอกเบี้ย xIBOR $L_T(T,T+\tau)$ ที่ปลายเดือนที่ 5 โดยที่ xIBOR เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะเวลา 3 เดือน

วิธีทำ จากโจทย์ $\tau = \frac{3}{12} = 0.25$ ปี, $T = \frac{6}{12} = 0.5$ ปี) เนื่องจาก ราคาซื้อของตั๋วเงินคลังเท่ากับ $(1-0.05)(1,000) = 995$ บาท และ

มูลค่าปัจจุบันของราคาซื้อ = มูลค่าปัจจุบันของราคาไถ่ถอน

$$995 = 1,000P(0,0.5) = 1,000e^{-\delta(0.5)}$$

จะได้ $e^{-\delta} = 0.995^2 = 0.990025$

ค่าปัจจุบันของการจ่ายด้วยอัตรา xIBOR ที่ปลายเดือนที่ 5 $= e^{-\delta(T+\tau-t)}\left(\frac{e^{\delta\tau}-1}{\tau}\right)$

$$= 0.990025^{(0.5+0.25-5/12)}\left(\frac{0.990025^{-0.25}-1}{0.25}\right)$$

$$= 0.01000417 = 1.000417\ \%\quad \text{ต่อปี} \qquad \square$$

9.4 สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย xIBOR

หัวข้อ 9.4 จะกล่าวถึงสัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย xIBOR ซึ่งเป็นเครื่องมือทางการเงินที่ช่วยให้นักลงทุนสามารถป้องกันความเสี่ยงหรือเก็งกำไรจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในตลาด โดยจะมีการวิเคราะห์โครงสร้างและการใช้งานของสัญญาฟิวเจอร์สนี้ในเชิงลึก

9.4.1 สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย

สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย (bond futures or interest rate futures: IRF) คือ สัญญาล่วงหน้าระหว่างผู้ซื้อกับผู้ขายในการซื้อขายหรือแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดซึ่งอ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและระยะยาว โดยกำหนดราคาและขนาดของสัญญาไว้ตั้งแต่วันนี้ และสัญญากันว่าจะทำการส่งมอบกระแสเงินสดอ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ยกันในอนาคต ในตลาดที่จัดตั้งขึ้นอย่างเป็นทางการ ซึ่งในที่นี้ คือ ตลาดอนุพันธ์ โดยกำหนดให้ใช้วิธีการชำระราคากันเป็นเงินสดเท่านั้นโดยคำนวณจากส่วนต่างของราคาตลาด ณ วันที่ส่งมอบกับราคาที่ตกลงกันไว้ตั้งแต่แรก อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง xIBOR สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่ซื้อขายในตลาดซื้อขายแลกเปลี่ยนชิคาโก้ (Chicago Mercantile Exchange: CME) และ ตลาดแลกเปลี่ยนออปชันและฟิวเจอร์สระหว่างประเทศลอนดอน (London International Financial Futures And Options Exchange: LIFFE) ได้แก่ ฟิวเจอร์สยูโรดอลลาร์ (Eurodollar: ED) และ ฟิวเจอร์สยูไรบอร์ (EURIBOR: ER) ตามลำดับ ตัวอย่างสัญญาฟิวเจอร์อัตราดอกเบี้ยในประเทศไทย เช่น สัญญาฟิวเจอร์สที่อ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเช่น อ้างอิงกับ 6 เดือน THBFIX และ 3 เดือน-BIBOR สัญญาฟิวเจอร์สที่อ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ยระยะยาวเช่น อ้างอิงกับพันธบัตรรัฐบาลที่กำหนดมาตรฐานไว้ให้มีอายุ 5 ปีและจ่ายคูปองที่ 5% เป็นต้น โดยประโยชน์ของสัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย ได้แก่

1) ใช้ในการเก็งกำไรจากแนวโน้มของอัตราดอกเบี้ยได้ และ

2) ใช้ในการบริหารความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุนได้ เป็นต้น

9.4.2 ฟิวเจอร์สตลาดเงิน (money market future)

บทบาทที่สำคัญประการหนึ่งของอัตราดอกเบี้ย xIBOR คือใช้ในการสร้างเครื่องมือทางการเงินที่เรียกว่า ฟิวเจอร์สตลาดเงิน (money market future) สัญญาซื้อขายแลกเปลี่ยนที่สำคัญได้แก่ Eurodollar (ED) และ EURIBOR (ER) ซึ่งซื้อขายในตลาดอนุพันธ์ Chicago Mercantile Exchange (CME) และตลาดซื้อขายล่วงหน้า London International Financial Futures And Options Exchange (LIFFE) ตามลำดับ

การซื้อขายสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินอัตราดอกเบี้ยจะมีลักษณะคล้ายกับการซื้อขาย FRA พิจารณาฟิวเจอร์สตลาดเงินบนอัตราดอกเบี้ย xIBOR ที่ชำระราคาและส่งมอบเวลา T (settlement date) และเวลาครบกำหนด $T+\tau$ (maturity date) ราคาของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินที่เวลา t (อัตราคงที่) สำหรับช่วงเวลา T ถึง $T+\tau$ แทนด้วย $p^{FUT}(t,T,\tau)$ (ต่อหน่วยเงินต้นอ้างอิง โดยทั่วไปมักจะกำหนดเงินต้นอ้างอิง เท่ากับ 1,000,000 USD (EUR, THB หรือ YJP))
กำหนดโดย

$$p^{FUT}(t,T,\tau)=100\big(1-L_T(T,T+\tau)\big) \tag{9.21}$$

และผลประโยชน์ (payoff) ของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินที่เวลา $T+\tau$,
ผลประโยชน์ของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินที่เวลา $T+\tau = \tau p^{FUT}(t,T,\tau)=100\tau\big(1-L_T(T,T+\tau)\big)$
เมื่อ $L_T(T,T+\tau)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว xIBOR จ่ายทันที (spot xIBOR rate) ระหว่างเวลา T ถึง $T+\tau$ และนิยาม*อัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สตามนัย (corresponding future implied rate)* จากราคาของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงิน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $F^{FUT}(t,T,T+\tau)$ โดย

$$F^{FUT}(t,T,T+\tau)=1-0.01p^{FUT}(t,T,\tau) \tag{9.22}$$

หมายเหตุ โดยปกติการซื้อขายฟิวเจอร์สในตลาดอนุพันธ์จะมีการคำนวณมูลค่าทรัพย์สินสุทธิโดยให้สะท้อนราคาตลาดที่เป็นธรรมที่เรียกว่า mark-to-market ซึ่งเป็นวิธีการประเมินมูลค่าทรัพย์สินที่กองทุนถืออยู่ไม่ว่าจะเป็น หุ้น หุ้นกู้ พันธบัตร อนุพันธ์ ฯลฯ ให้เป็นมูลค่าตามตลาดหรือราคาตลาด

ปัจจุบัน หรือราคาล่าสุด ที่เกิดการซื้อขายจริงๆในวันนั้นๆ หรือวันก่อนก่อนหน้า (หากวันนั้นไม่มีการซื้อขาย) การ mark-to-market เพื่อคำนวณกำไรขาดทุน แบ่งได้ 2 ประเภท

1) daily mark-to-market เป็นการประเมินมูลค่ากำไรขาดทุนจากการมีสถานะคงค้างในสัญญาฟิวเจอร์ส โดยจะทำทุกสิ้นวัน

2) real time mark-to-market เป็นการประเมินมูลค่ากำไรขาดทุนจากการมีสถานะคงค้างในสัญญาฟิวเจอร์ส โดยจะทำในระหว่างวัน โดยการ mark to market ซึ่งเป็นการประกาศราคาเพื่อคำนวณกำไรขาดทุน ณ สิ้นวัน (settlement price)

ตัวอย่างที่ 9.6 สมมติอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR จ่ายทันที (spot LIBOR rate) ระหว่างเดือนที่ 6 ถึง เดือนที่ 9 เท่ากับ 1.25% ต่อปี จงหาราคาของฟิวเจอร์สตลาดเงินและอัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สตามนัยบนอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR และ สำหรับช่วงเวลาเดือนที่ 6 ถึง เดือนที่ 9 (สัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินบนอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR เรียกว่า Eurodollar futures)

วิธีทำ ในที่นี้ $T=\frac{6}{12}=0.5$, $\tau=\frac{3}{12}=0.25$, $T+\tau=\frac{9}{12}=0.75$ (เดือนที่ 9)

ราคาของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงิน $p^{FUT}(t,T,\tau)$

$=100\left(1-L_{0.5}\left(0.5,0.75\right)\right)=100\left(1-0.0125\right)=98.75$

และ อัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สตามนัย $F^{FUT}(t,T,T+\tau)=1-0.01\left(98.75\right)=0.0125=1.25\%$

□

9.5 ค่าความผันผวนตามนัยและราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน

หัวข้อ 9.5 จะกล่าวถึงค่าความผันผวนตามนัยและราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน ซึ่งเป็นการประเมินและวิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยที่มีการเปลี่ยนแปลงในตลาดการเงิน โดยมีการใช้เทคนิคการปรับแต่งความนูนเพื่อเพิ่มความแม่นยำในการคาดการณ์

9.5.1 ค่าความผันผวนตามนัย

จากสมการของแบล็กโชลส์ราคาคอลออปชันที่เวลา t บน $T-$zcb อยู่ในรูป

$$C_K(t,T) = S_t\varphi(d_1) - KZ(t,T)\varphi(d_2) \tag{9.23}$$

โดยที่ $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_t}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ และ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, φ ฟังก์ชันการแจกแจงปกติสะสม, S_t เป็นราคาของ $T-$zcb ที่เวลา t, K เป็นราคาใช้สิทธิ, r เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องต่อปี และ $T-t$ เป็นอายุคงเหลือของตราสารหนี้ (หน่วยปี) ซึ่งคือ ระยะเวลาที่เหลืออยู่จนถึงวันครบกำหนดไถ่ถอนของตราสารหนี้มักมีหน่วยเป็นจำนวนปี ($\dfrac{T-t}{365}$ เมื่อ กำหนดให้ 1ปี มี 365 วัน), σ เป็นความผันผวน โดยเรียกค่าความผันผวนนี้ว่า *ค่าความผันผวนตามนัย* (implied volatility) โดยการแทน $S_t = F(t,T)Z(t,T)$ เมื่อ $F(t,T)$ เป็นราคาฟิวเจอร์ส (future price) ในสมการ (9.23) จะได้

$$C_K(t,T) = Z(t,T)\left(F(t,T)\varphi(d_1) - K\varphi(d_2)\right) \tag{9.24}$$

โดยที่ $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{F(t,T)}{K}\right) + \left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ และ $d_2 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{F(t,T)}{K}\right) - \left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

พิจารณาค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง (at-the-money) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\sigma_{ATM} = \sigma_{ATM}(t,T)$ นั่นคือ พิจาณาในกรณีที่ $K = F(t,T)$ (ราคาฟิวเจอร์ส=ราคาใช้สิทธิ) จาก (9.24) ได้

$$\begin{aligned} C(t,T) &= Z(t,T)F(t,T)\left(\varphi\left(\frac{\sigma_{ATM}\sqrt{T-t}}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{\sigma_{ATM}\sqrt{T-t}}{2}\right)\right) \\ &= Z(t,T)F(t,T)\left(2\varphi\left(\frac{\sigma_{ATM}\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1\right) \end{aligned} \tag{9.25}$$

โดยแทน $Z(t,T) = e^{-r(T-t)}$ และแก้สมการ (9.25) เพื่อหาค่า σ_{ATM} ได้

$$\sigma_{ATM}(t,T) = \frac{2}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\frac{C(t,T)e^{r(T-t)} + F(t,T)}{2F(t,T)}\right) \tag{9.24}$$

เมื่อ $\phi = \varphi^{-1}$ ในปี ค.ศ. 1988 Curtis และ Carriker ได้เสนอการประมาณค่าความผันผวนตามนัยด้วยค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง (at-the-money) $\sigma_{ATM}(t,T)$

นั่นคือ ค่าความผันผวนตามนัย $\sigma = \sigma(t,T)$ ประมาณได้ด้วย

$$\sigma \approx \frac{2}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\frac{C(t,T)e^{r(T-t)} + F(t,T)}{2F(t,T)}\right) \tag{9.25}$$

ต่อมาในปี ค.ศ.1996 Corrado และ Miller ได้ทำการปรับปรุงสูตรการประมาณค่าความผันผวนตามนัยในรูปสมการกำลังสอง (quadratic formula) ของสภาวการณ์ที่ใกล้สภาวะคุ้มทุนแฝง (near-the-money) โดย

$$\sigma(t,T) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T-t}(S_t + X_t)}\left(C - Y + \sqrt{(C-Y)^2 - \frac{4Y^2}{\pi}}\right) \tag{9.26}$$

เมื่อ $Y = \frac{S_t - X_t}{2}$, $X_t = Ke^{-r(T-t)}$ และ $S_t = F(t,T)e^{-r(T-t)}$ นอกจากนี้ยังสามารถประมาณ σ^2 ด้วยความแปรปรวน $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$ จากกลุ่มตัวอย่างของอัตราผลตอบแทนลอการิทึม X ของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3

นั่นคือ $$\sigma^2 \approx s^2 N = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)}{n-1} \tag{9.27}$$

เมื่อ n เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง, S_i เป็นราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่เวลาที่ i ($i = 0,1,2,...,n$), $x_i = \ln\frac{S_i}{S_{i-1}}$ อัตราผลตอบแทนลอการิทึมของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง ($i = 1,2,...,n$), $\overline{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมของตราสารหนี้ไม่มีคูปอง และ N เป็นจำนวนจุดเวลาที่แบ่งใน 1 คาบเวลา (ในที่นี้จำนวนจุดเวลา ใน 1 ปีกำหนดให้เท่า 250 วันทำการใน 1 ปี)

ตัวอย่างที่ 9.7 สมมติว่าราคาปัจจุบันของ $6M - \text{zcb}$ ฉบับหนึ่งเท่ากับ 975 บาทและปัจจุบันราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 6.5 บาท โดยมีราคาใช้สิทธิ 983 บาท โดยมีไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และอายุคงเหลือของตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 90

วัน กำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 3.5% ต่อปี จงประมาณค่าความผันผวนตามนัย σ ด้วย

1) ค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง $\sigma_{ATM}(t,T)$ 2) สูตรในรูปสมการกำลังสองของ Corrado

วิธีทำ ในที่นี้โจทย์กำหนดให้ $T-t=\frac{90}{365}=0.2466$ ปี , $r=0.035$, $C(t,T)=6.5$,

$F(t,T)=S_t e^{r(T-t)}=975e^{0.035(0.2466)}=983.4508$ บาท

1) ประมาณค่าความผันผวนตามนัยด้วยค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง $\sigma_{ATM}(t,T)$

จาก $\sigma_{ATM}(t,T)=\frac{2}{\sqrt{T-t}}\phi\left(\frac{C(t,T)e^{r(T-t)}+F(t,T)}{2F(t,T)}\right)$ โดยที่ $S_t=F(t,T)e^{-r(T-t)}$ และ $\phi=\varphi^{-1}$, φ ฟังก์ชันการแจกแจงปกติสะสม จะได้

$$\sigma\approx\frac{2}{\sqrt{0.2466}}\phi\left(\frac{6.5e^{0.035(0.2466)}+983.4508}{2(983.4508)}\right)=0.033653=3.3653\%$$

(ใช้ ฟังก์ชัน norm.s.inv () ใน excel ช่วยคำนวณค่า)

2) ประมาณค่าความผันผวนตามนัยด้วยสูตรในรูปสมการกำลังสองของ Corrado

$$\sigma\approx\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T-t}\,(S_t+X_t)}\left(C-Y+\sqrt{(C-Y)^2-\frac{4Y^2}{\pi}}\right)$$

เมื่อ $Y=\frac{S_t-X_t}{2}$, $X_t=Ke^{-r(T-t)}$ และ $S_t=F(t,T)e^{-r(T-t)}$

โดยการแทนค่าได้ $S_t=975$, $X_t=983e^{-0.035(0.2466)}=974.5531$, $S_t+X_t=1949.5531$,

$Y=\frac{S_t-X_t}{2}=\frac{975-974.5531}{2}=0.2235$, $C-Y=6.5-0.2235=6.2765$,

$\frac{4Y^2}{\pi}=\frac{4(0.2235^2)}{\pi}=0.063579$ ได้

$$\sigma\approx\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{0.2466}\,(1949.5531)}\left(6.2765+\sqrt{(6.2765)^2-0.063579}\right)=0.03249=3.249\%$$ □

9.5.2 ราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน

เมื่ออัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สหรืออัตราดอกเบี้ยตามนัย $F^{FUT}(t,T,T+\tau)$ ปรับตัวเพิ่มขึ้นสูงกว่าอัตราคุ้มทุน (break-even rate) เมื่อเทียบกับอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด FRA จะก่อให้เกิดสถาการณ์ที่ทำเกิดพฤติกรรมทางการเงินที่ทำให้เกิดการตัดสินใจอย่างไม่สมเหตุสมผล เรียกว่า *พฤติกรรมความเอนเอียงทางการเงิน (financial bias)* นั่นคือ พฤติกรรมความเอนเอียงทางการเงินจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$F^{FRA}(t,T,T+\tau) < F^{FUT}(t,T,T+\tau) \tag{9.23}$$

เพื่อเป็นการกำจัดความลำเอียงที่เกิดขึ้นจะต้องทำการปรับแต่งหรือปรับลดอัตราดอกเบี้ยตามนัย $F^{FUT}(t,T,T+\tau)$ ด้วยผลต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยตามนัยกับอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด

$$F^{FUT}(t,T,T+\tau) - F^{FRA}(t,T,T+\tau) \tag{9.28}$$

ซึ่งเรียกว่า *การปรับแต่งความนูน (adjustment convexity)* ในทางปฏิบัติอาจจะประมาณค่าปรับแต่งความนูนอย่างง่าย (simple adjustment convexity) ด้วย $\frac{1}{2}\sigma^2 T(T+\tau)$ นั่นคือ

$$\text{ค่าปรับแต่งความนูน} = F^{FUT}(t,T,T+\tau) - F^{FRA}(t,T,T+\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 T(T+\tau) \tag{9.29}$$

เมื่อ σ เป็นค่าความผันผวนตามนัยต่อปี (per-annum implied volatility) ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นสามารถประมาณ $\sigma^2 \approx s^2 N = \dfrac{N\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)}{n-1}$ เมื่อ $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ เป็นค่าความแปรปรวนของอัตราผลตอบแทนลอการิทึมจากกลุ่มตัวอย่าง X ของตราสารหนี้ไม่มีคูปองดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้

ดังนั้น $$F^{FUT}(t,T,T+\tau) = F^{FRA}(t,T,T+\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 T(T+\tau) \tag{9.30}$$

ตัวอย่างที่ 9.8 สมมติว่าราคาปัจจุบันของ $6M-$zcb ฉบับหนึ่งเท่ากับ 975 บาทและปัจจุบันราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 6.5 บาท โดยมีราคาใช้สิทธิ 983 บาท โดยมีไถ่

ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และอายุคงเหลือของตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 90 วัน กำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 3.5% ต่อปี

จงหา 1) จงประมาณค่าปรับแต่งความนูน โดยใช้ค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง

2) อัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์ส $F^{FUT}(t,T,T+\tau)$ เมื่อ $\tau = \frac{30}{365} = 0.0822$

วิธีทำ 1) จากข้อ 9.7) $\sigma_{ATM} = 0.033653$ ได้

ค่าปรับแต่งความนูน $= \frac{1}{2}\sigma^2 T(T+\tau) \approx \frac{1}{2}(0.033653^2)\left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{6}{12}+\frac{30}{365}\right) = 0.0001648$

2) อัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์ส $F^{FUT}(t,T,T+\tau) = F^{FRA}(t,T,T+\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 T(T+\tau)$

เนื่องจาก $F^{FRA}(t,T,T+\tau) = \frac{Z(t,T)-Z(t,T+\tau)}{\tau Z(t,T+\tau)} = \frac{e^{-r(T-t)}-e^{-r(T-t+\tau)}}{\tau e^{-r(T-t+\tau)}}$

$$= \frac{e^{-0.035(90/365)}-e^{-0.035(90/365+30/365)}}{(30/365)e^{-0.35(90/365+30/365)}} = 0.035050391$$

ดังนั้น $F^{FUT}(t,T,T+\tau) = 0.035050391 + 0.0001648 = 0.0352152$ □

9.6 สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

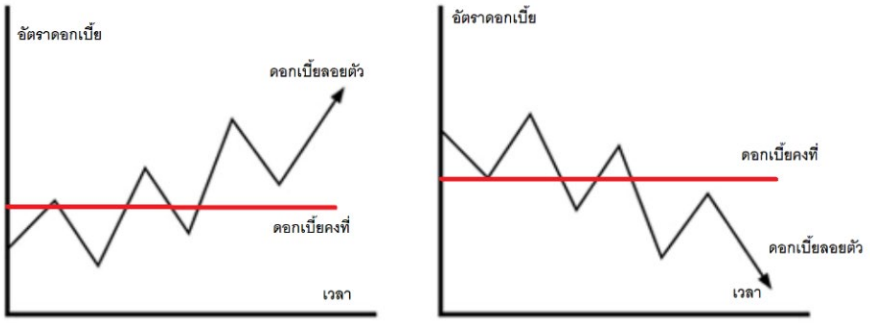
สวอปอัตราดอกเบี้ย (interest rate swap) เป็นสัญญาสวอปที่มีการซื้อขายมากที่สุดในโลกเป็นการแลกเปลี่ยนการจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed rate) และลอยตัว (variable rate or floating rate) ระหว่างคู่สัญญา โดยจะเรียกผู้จ่ายดอกเบี้ยคงที่ว่า “ผู้ซื้อสัญญาสวอป” และ เรียกผู้จ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัวว่า “ผู้ขายสัญญาสวอป” คู่สัญญาจะทำการเจรจาต่อรอง (otc) กันเพื่อแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดจากการคิดด้วยอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัวภายใต้ข้อตกลงที่กำหนดร่วมกัน โดยอาจจะมีตัวกลาง (financial intermediary :fi) หรือไม่มีตัวกลางก็ได้ การมีตัวกลางจะช่วยอำนวยความสะดวกในการทำสัญญาให้กับคู่สัญญา ทำให้เกิดสภาพคล่องการแลกเปลี่ยนและช่วยรับความเสี่ยงจากการบิดพลิ้วและการไม่ปฏิบัติตามสัญญาของคู่สัญญา แต่ก็จะทำให้คู่สัญญาทั้งสองฝ่ายมีต้นทุนทางการเงินที่สูงขึ้น

9.6.1 ประโยชน์ของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

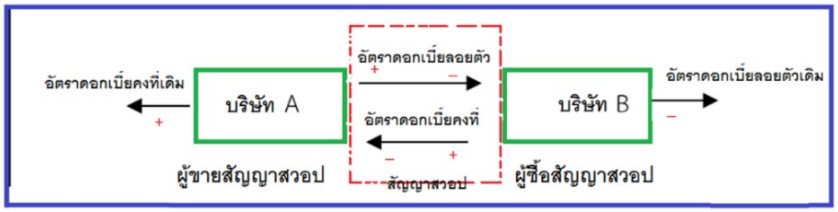
เราสามารถใช้สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยในการป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยและลดต้นทุนทางการเงิน โดยพิจารณาจากแนวโน้มอัตราดอกเบี้ย กล่าวคือ หากอัตราดอกเบี้ยเป็นแนวโน้มคงที่หรือลดลง อาจพิจารณาชำระอัตราดอกเบี้ยลอยตัว เพื่อสามารถลดภาระดอกเบี้ย แต่หากอัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนเป็นขาขึ้น อาจพิจารณาชำระอัตราดอกเบี้ยคงที่ เพื่อการบริหารต้นทุนทางการเงิน การได้เปรียบเสียเปรียบของคู่สัญญาเมื่ออัตราดอกเบี้ยมีการเปลี่ยนแปลงแสดงได้ในตารางที่ 9.4 และแสดงการเคลื่อนไหวดังรูปที่ 9.5

ตารางที่ 9.4 *การได้เปรียบเสียเปรียบของคู่สัญญาเมื่ออัตราดอกเบี้ยมีการเปลี่ยนแปลง*

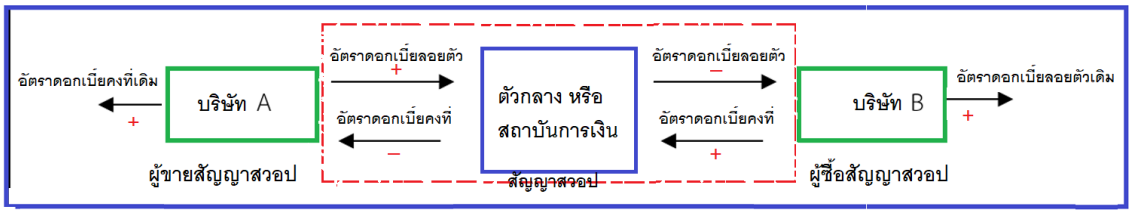
คู่สัญญา	การเปลี่ยนแปลงของระดับอัตราดอกเบี้ยตลาด	
	ลดลง	เพิ่มขึ้น
ผู้จ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่	ขาดทุน	กำไร
ผู้จ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว	กำไร	ขาดทุน



รูปที่ 9.6 *เปรียบเทียบการได้เปรียบเสียเปรียบระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจากการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย*



(a) กรณีไม่มีตัวกลาง



(b) กรณีมีตัวกลาง

รูปที่ 9.7 *อัตราดอกเบี้ยที่เกิดตามสัญญาสวอป กำหนดเครื่องหมาย + แทนอัตราดอกเบี้ยจ่ายเครื่องหมาย -แทนอัตราดอกเบี้ยรับ และหัวลูกศรแสดงทิศเข้าและออกของกระแสเงินสด*

สมมติจากรูปที่ 9.7 (a) สัญญาสวอประหว่างบริษัท a และบริษัท b เริ่มต้นด้วย

1) ระบุความต้องการของแต่ละบริษัท

บริษัท a : ต้องการได้รับอัตราดอกเบี้ยคงที่

บริษัท b : ต้องการได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

2) กำหนดเงินต้นที่ใช้ในการคำนวณกระแสเงินสดที่เกิดขึ้นในอนาคตตามต้องการซึ่งเรียกว่า “เงินต้นอ้างอิง หรือ เงินต้นสัญกรณ์ (notation principal)” โดยจำนวนเงินต้นอ้างอิง หมายถึง เงินต้นซึ่งมิใช่จำนวนเงินที่แลกเปลี่ยนกันจริงเมื่อเริ่มทำสัญญาสวอป เพียงแต่ใช้อ้างอิงเพื่อคำนวณหาจำนวนเงินในกระแสเงินสดจากอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัว เท่านั้น

3) ข้อตกลงการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยระหว่างกัน

- บริษัท a ตกลงจะจ่ายกระแสเงินสดจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัวกับบริษัท b เพื่อแลกกับการได้รับกระแสเงินสดจากอัตราดอกเบี้ยคงที่

- บริษัท b ตกลงจะจ่ายกระแสเงินสดจากอัตราดอกเบี้ยคงที่กับบริษัท a เพื่อแลกกับการได้รับกระแสเงินสดจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

4) การชำระส่วนต่างกระแสเงินสดระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่ซึ่งกำหนดไว้ในสัญญากับอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัวที่เกิด ณ ต้นงวดคูณด้วยจำนวนเงินต้นอ้างอิงที่กำหนดในสัญญา และจ่ายกระแสเงินสดตามระยะเวลาที่ระบุไว้ในสัญญา เช่น สัญญาสวอปที่มีอายุ 3 ปี และมีการชำระราคาทุก 6 เดือน หมายความว่า ผู้ซื้อสัญญาตกลงจะชำระส่วนต่างของกระแสเงินสดระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัว ทุกๆ สิ้นเดือนที่ 6 โดยอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ณ ปลายงวดที่ i ซึ่งจะถูกกำหนดให้เท่ากับอัตราดอกเบี้ยปลายงวดที่ $i-1$

หมายเหตุ การทำสัญญาสวอปโดยมีตัวกลางทางการเงิน จะมีการกำหนดผลประโยชน์ให้กับตัวกลางในหน่วยของ “จุดพื้นฐาน” หรือ “basis points” เขียนย่อเป็น bps หรือ “bips”ซึ่งเป็นหน่วยวัดทั่วไปสำหรับอัตราดอกเบี้ยและเปอร์เซ็นต์ทางการเงินอื่น ๆ โดย 1 bps เท่ากับ 0. 01% = 0.0001 และใช้เพื่อแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงเปอร์เซ็นต์ในตราสารทางการเงิน เช่น กำหนดผลประโยชน์ให้กับตัวกลาง 3 bps จะเท่ากับกับหนดผลประโยชน์ให้ 0. 03% หรือ อัตรา 0.0003 เป็นต้น

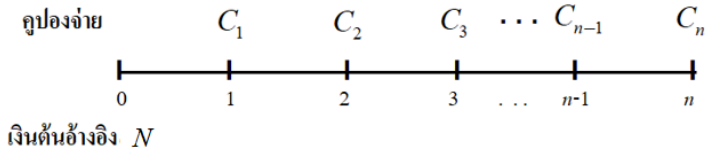
.6.2 การคำนวณผลของอัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป

การคำนวณผลของอัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอปของแต่ละบริษัททำได้โดยอัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอปของแต่ละบริษัท เท่ากับ ผลรวมของอัตราดอกเบี้ยรับและดอกเบี้ยจ่ายของแต่ละบริษัทนั้น ซึ่งสามารถเขียนสรุปได้ดัง ตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 9.5 *อัตราดอกเบี้ยจากการใช้สัญญาสวอป*

รายการ	บริษัท a	บริษัท b
อัตราดอกเบี้ยตามภาระหนี้สินที่ต้องจ่าย	a %	xIBOR + b %
อัตราดอกเบี้ยจ่ายตามสวอป	xIBOR + x %	c %
อัตราดอกเบี้ยรับตามสวอป	$-c$ %	- (xIBOR + x %)
อัตราดอกเบี้ยสุทธิ (รับ)	xIBOR + ($x-c$)%	- (xIBOR + ($x-c$)%)
อัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป	xIBOR + ($a+x-c$)%	($b+c-x$) %

พิจารณากระแสเงินสดในฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR ที่มีเงินต้นอ้างอิง N และจ่ายกระแสเงินสด $C_i, i=1,2,...,n$ ปลายงวด ตามอัตราดอกเบี้ยตลาด xIBOR ณ ต้นงวด ($L_0, L_1, L_2, ..., L_{n-1}$) นั่นคือ $C_i = L_{i-1}N$, $i=1,2,...,n$ กระแสเงินสดจ่าย $C_i, i=1,2,...,n$ แสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 9.8 *กระแสเงินสดที่คำนวณด้วยอัตราดอกเบี้ยลอยตัว* xIBOR

ตัวอย่างที่ 9.9 (การใช้สัญญาสวอปเพื่อแปลงอัตราดอกเบี้ยจากหนี้สิน) สมมติว่าบริษัท a และบริษัท b มีภาระหนี้สินที่ต้องชำระเจ้าหนี้ของตน โดยที่บริษัท a มีภาระที่จะต้องชำระหนี้ที่ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ย 5 % ต่อปี ส่วนบริษัท b มีภาระการชำระหนี้ที่ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +2 % ต่อปีต่อมาทั้งสองบริษัทต้องการแปลงการจ่ายหนี้สินของตนเอง โดยบริษัท a ต้องการแปลงหนี้สินเป็นจากการคิดดอกเบี้ยคงที่เป็นแบบลอยตัว ในขณะที่บริษัท b ต้องการแปลงหนี้สินเป็นแบบคงที่ ทั้งสองบริษัทตกลงทำสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยอายุ 1 ปี เพื่อแลกเปลี่ยนกระแสเงินสด ตามข้อตกลง ดังนี้

ข้อตกลงตามสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยอายุ 1 ปี

1) บริษัท a ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +1.5% ต่อปี ให้กับบริษัท b เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.5 % ต่อปี

2) บริษัท b ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.5 % ต่อปี เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +1.5% ต่อปี

3) กำหนดเงินต้นอ้างอิง เท่ากัน คือ 100,000,000 บาท และกำหนดการจ่ายแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดทุก ๆ 3 เดือน จ่ายปลายงวดจ่ายงวดแรกวันที่ 1/8/63

จากข้อมูลความต้องการของบริษัท a และ b และข้อตกลงสามารถแสดงดังตารางต่อไป

ตารางที่ 9.6 *อัตราดอกเบี้ยจากการใช้สัญญาสวอปในตัวอย่างที่ 9.9*

รายการ	บริษัท a	บริษัท b
อัตราดอกเบี้ยตามภาระหนี้สินที่ต้องจ่าย	5 %	THOR +2%
อัตราดอกเบี้ยจ่ายตามสวอป	THOR +1.5%	5.5 %
อัตราดอกเบี้ยรับตามสวอป	-5.5 %	- (THOR + 1.5%)
อัตราดอกเบี้ยสุทธิ (รับ)	THOR - 4%	- (THOR - 4%)
อัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป	THOR + 1%	6 %

และกระแสเงินสดของบริษัท a เป็นไปตามตารางที่ 9.7

ตารางที่ 9.7 *อัตราดอกเบี้ย 3m-THOR (สมมติขึ้นเพื่อใช้ในการคำนวณอ้างอิงอัตราดอกเบี้ย 3m-THOR ตั้งแต่ เดือน 17 เมษายน พ.ศ. 2563 – 12 พฤษภาคม พ.ศ. 2564) และตัวอย่างการคำนวณกระแสเงินสดของบริษัท a (plain vanilla swap)*

			ดอกเบี้ยคำนวณจากเงินต้นอ้างอิง 1,000,000 บาท			
วันที่	THOR (% ต่อปี)	THOR+1.5 % (% ต่อปี)	จ่ายตามสวอป (THOR+1.5%) /4 ต่องวด	รับตามสวอป 1.375% (5.5 %/4) ต่องวด	ตามภาระหนี้ 1.25 % (5%/4) ต่องวด	หลังใช้สัญญาสวอป (THOR+1%)/ 4 ต่องวด
1/5/63	0.93844	2.43844	-	-	-	-
1/8/63	0.58732	2.08732	609,610.00	1,375,000.00	1,250,000.00	484,610.00
1/11/63	0.49190	1.99190	521,830.00	1,375,000.00	1,250,000.00	396,830.00
1/2/64	0.49239	1.99239	497,975.00	1,375,000.00	1,250,000.00	372,975.00
1/5/64	0.49286	1.99286	498,097.50	1,375,000.00	1,250,000.00	373,097.50

*เพื่อความสะดวกเขียน THOR แทน 3m-THOR

9.6.3 ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบจากสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย

เครดิตทางการเงิน คือ ความน่าเชื่อถือทางการเงินที่ส่งผลดีในด้านการขอกู้สินเชื่อต่างๆ หรือการทำธุรกิจ ตลอดจนธุรกรรมทางการเงินทั่วไป หากผู้กู้มีเครดิตที่ดี ธนาคารหรือสถาบันการเงินต่างๆ ก็จะจะพิจารณาว่าผู้กู้ยืมมีความน่าเชื่อถือ มีความเสี่ยงน้อยหรือไม่มีความเสี่ยงในการผิดนัดชำระหนี้ ทำให้การขอสินเชื่อ หรือบริการต่างๆ ทางการเงินจากสถาบันทางการเงินนั้นง่ายกว่าผู้กู้ที่มีเครดิตในระดับที่ต่ำกว่าหรือมีประวัติทางการเงินไม่ดีนัก ดังนั้นเครดิตเป็นสิ่งที่มีความสำคัญมากสำหรับการกู้ยืม ระดับอัตราดอกเบี้ยเงินกู้จึงมักถูกกำหนดตามระดับเครดิต กล่าวคือผู้กู้ที่มีเครดิตดีมักจะได้รับอัตราดอกเบี้ยในระดับที่ต่ำกว่าผู้กู้ที่มีเครดิตต่ำกว่า อย่างไรก็ตามในบางครั้งหากเปรียบเทียบระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัวระหว่างผู้กู้ 2 ฝ่ายใดๆ การกำหนดอัตราดอกเบี้ยซึ่งถูกใช้เป็นราคาของเงินกู้ตามเครดิตของผู้กู้นั้น ๆ อาจเป็นระดับอัตราดอกเบี้ยที่ไม่สมดุลกันก็ได้ ความไม่สมดุลของอัตราดอกเบี้ยตามระดับเครดิตดังกล่าวก่อให้เกิดความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ (comparative advantage argument) ของดอกเบี้ยของทั้ง 2 ฝ่ายได้ ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบจากสัญญาสวอป สามารถอธิบายได้ดังนี้

สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยสามารถใช้ได้เมื่อคู่สัญญามีข้อได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมในตลาดอัตราดอกเบี้ยคงที่ ในขณะที่อีกฝ่ายมีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมในตลาดอัตราดอกเบี้ยลอยตัว คู่สัญญาจะได้ประโยชน์ร่วมกันคือการทำให้ต้นทุนการกู้ยืมของทั้ง 2 ฝ่ายลดต่ำลง ผลประโยชน์สุทธิ (net gain) ที่เกิดขึ้นจากความสมดุลของอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่และดอกเบี้ยลอยตัว โดยที่

$$\text{ผลประโยชน์สุทธิที่เกิดขึ้นกับทั้ง 2 ฝ่าย} = |a-b| \tag{9.31}$$

เมื่อ a เป็นส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยคงที่ และ b เป็นส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

เราสามารถทำความเข้าใจเกี่ยวกับความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบของอัตราดอกเบี้ยได้โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 9.10 (ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบของอัตราดอกเบี้ย) สมมติว่า ณ ปัจจุบัน บริษัท a และบริษัท b สามารถกู้เงินโดยมีอัตราดอกเบี้ยกู้ยืม ตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 9.8 *อัตราดอกเบี้ย (สมมติ) ที่บริษัท a และบริษัท b ได้รับจากการกู้ยืม*

รายการอัตราเบี้ยเงินกู้	บริษัท a	บริษัท b	ส่วนต่างอัตราดอกเบี้ย
อัตราดอกเบี้ยคงที่	6.9 %	6.5 %	0.4
อัตราดอกเบี้ยลอยตัว	THOR + 2 %	THOR + 1.2 %	0.8

จากตารางที่ 9.8 คำนวณส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยแต่ละประเภทของแต่ละบริษัท พบว่า

ส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยคงที่ของทั้ง 2 บริษัท = rate (a) – rate (b)=6.9 % - 6.5 % = 0.4 %

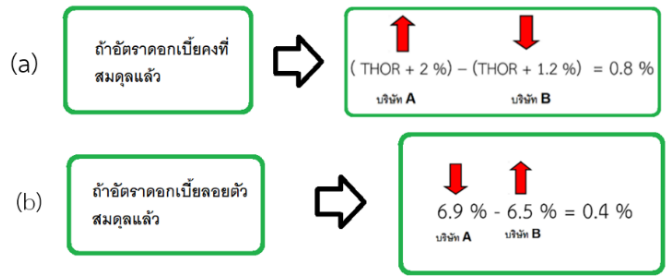
ส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยลอยตัวของทั้ง 2 บริษัท = rate (a) – rate (b)

= (THOR+2 %) – (THOR + 1.2 %) = 0.8 %

จะเห็นว่าส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยของอัตราดอกเบี้ยทั้ง 2 ประเภทของ 2 บริษัทนั้นไม่เท่ากัน เหตุการณ์ในลักษณะเช่นนี้อาจกล่าวได้ว่าการกำหนดราคาหรืออัตราดอกเบี้ยระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่กับดอกเบี้ยของทั้ง 2 บริษัทเกิดความไม่สมดุลกันตามระดับคะแนนเครดิตที่แตกต่างกันส่งผลให้เกิดความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบของดอกเบี้ยแต่ละประเภท ซึ่งสามารถพิจารณาได้ดังนี้

หากพิจารณาว่าการกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ของทั้ง 2 บริษัทอยู่ในระดับที่สมดุล คือ ระดับอัตราดอกเบี้ยสอดคล้องกับระดับคะแนนเครดิตของทั้ง 2 ฝ่ายแล้ว นั่นแสดงว่า อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท a สูงเกินไป หรือ อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท b ต่ำเกินไป ถ้าเป็นเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท b ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบมากกว่า อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท a ดังนั้น บริษัท b สามารถกู้ยืมอัตราดอกเบี้ยลอยตัวได้ต่ำกว่าโดยเปรียบเทียบ

ในทางกลับกันหากพิจารณาว่า การกำหนดอัตราดอกเบี้ยลอยตัวของทั้ง 2 บริษัทอยู่ในระดับที่สมเหตุสมผล คือ ระดับอัตราดอกเบี้ยสอดคล้องกับระดับคะแนนเครดิตของทั้ง 2 ฝ่ายแล้ว นั่นแสดงว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท b สูงเกินไป หรือ อัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท a ต่ำเกินไป ถ้าเป็นเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า อัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท a ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบมากกว่า อัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท b ดังนั้น บริษัท b สามารถกู้ยืมอัตราดอกเบี้ยคงที่ได้ต่ำกว่าโดยเปรียบเทียบ



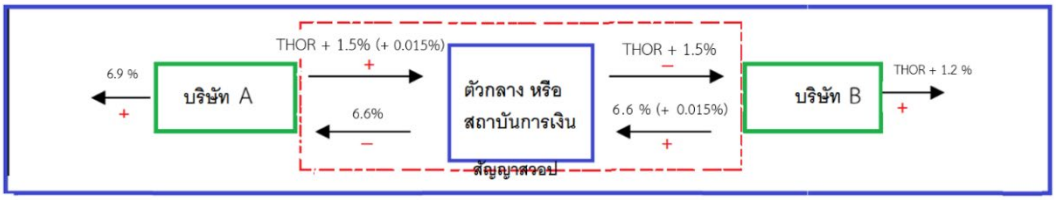
รูปที่ 9.9 *(a) ในกรณีที่สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่ของทั้ง 2 ฝ่ายสมดุล อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท b ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบกว่า อัตราดอกเบี้ยลอยตัวของบริษัท a (b) ในกรณีที่สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยลอยตัวของทั้ง 2 ฝ่ายสมดุล อัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท a ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบกว่า อัตราดอกเบี้ยคงที่ของบริษัท b*

สมมติว่าบริษัท a มีภาระหนี้ที่ต้องชำระจากการกู้เงินด้วยอัตราดอกเบี้ยคงที่ แต่ต้องการจะเปลี่ยนเป็นอัตราเบี้ยแบบลอยตัว ในขณะที่บริษัท b มีภาระหนี้ที่ต้องชำระจากการกู้ยืมเงินด้วยอัตราดอกเบี้ยลอยตัวแต่ต้องการจะเปลี่ยนเป็นอัตราเบี้ยแบบคงที่ ทั้งสองบริษัทจึงตกลงกันทำสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยโดยมีตัวกลางทางการเงิน และตัวกลางกำหนดค่าธรรมเนียม 3 bsp=0.03% โดยเรียกเก็บจากทั้งสองฝ่าย ฝ่ายละ 1.5 bps=0.015% โดยสัญญาสวอปมีข้อตกลงดังนี้

1. บริษัท a ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเท่ากับ THOR + 1.5% (+ ค่าธรรมเนียม 0.015%) โดยแลกเปลี่ยนกับการรับอัตราดอกเบี้ยคงที่เท่ากับ 6.6%

2. บริษัท b ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 6.6% (+ ค่าธรรมเนียม 0.015%) โดยแลกเปลี่ยนกับการรับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเท่ากับ THOR + 1.5%

กระแสเงินของธุรกรรมทั้งหมดสามารถแสดงได้ตามแผนภาพในรูปที่ 9.10



รูปที่ 9.10 *อัตราดอกเบี้ยที่เกิดจากการทำสัญญาสวอป*

จากแผนภาพสามารถสรุปผลลัพธ์ของการทำธุรกรรมได้ดัง ตารางที่ 9.9

ตารางที่ 9.9 *ผลสรุปการทำธุรกรรมจากการใช้ข้อได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ*

รายการ	บริษัท a	บริษัท b
อัตราดอกเบี้ยตามภาระหนี้สินที่ต้องจ่าย	6.9 %	THOR +1.2 %
อัตราดอกเบี้ยจ่ายตามสวอป	THOR +1.515%	6.615%
อัตราดอกเบี้ยรับตามสวอป	-6.6%	- (THOR + 1.5%)
อัตราดอกเบี้ยสุทธิ (รับ)	THOR – 5.185%	- (THOR – 5.115%)
อัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป	THOR + 1.815%	6.315%
อัตราดอกเบี้ยเดิม	THOR +2%	6.5%
อัตราดอกเบี้ยที่ลดลง (ประหยัดขึ้น)	0.185%	0.185%

จากตารางที่ 9.9 จะเห็นได้ว่า การใช้สัญญาสวอปทำให้ทั้ง 2 ฝ่ายได้กู้ยืมเงินตามประเภทอัตราดอกเบี้ยที่ต้องการด้วยต้นทุนการกู้ยืมโดยรวมที่ลดลง ถึงแม้ว่าทั้งสองฝ่ายจะต้องจ่ายค่าธรรมเนียมในการทำธุรกรรมให้ตัวกลาง ฝ่ายละ 1.5 bps ก็ตาม โดยที่

บริษัท a มีอัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป THOR + 1.815% ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยเดิม THOR +2% ซึ่งมีอัตราดอกเบี้ยที่ลดลง (ประหยัดขึ้น) 0.185% และ

บริษัท b มีอัตราดอกเบี้ยหลังใช้สัญญาสวอป 6.315% ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยเดิม 6.5% ซึ่งมีอัตราดอกเบี้ยที่ลดลง (ประหยัดขึ้น) 0.185% □

9.6.4 มูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ย

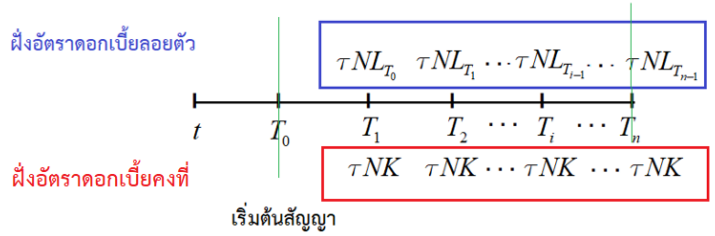
สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยเป็นสัญญาแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดที่ตกลงกันไว้ตามระยะเวลาที่ระบุไว้ $T_i, i=1,...,n$, โดย T_0 และ T_n เป็นจุดเวลาเริ่มต้นและจุดเวลาสิ้นสุดของสัญญา ตามลำดับ กระแสเงินสดเหล่านี้คำนวณจากเงินต้นอ้างอิง N โดยปกติแล้วความถี่ในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดของฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating leg) และฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed leg) K ไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน แต่สำหรับสัญญาสวอปแบบวะนิลลา (vanilla) หรือ สวอปมาตรฐาน (standard swap) จะกำหนดความถี่ในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดของทั้งสองฝั่งเหมือนกัน กำหนดให้ $T_{i+1}=T_i+\tau_i$ สำหรับบางค่าคงที่ $\tau_i, i=0,1,...,n-1$ ในทางปฏิบัติระยะเวลา $\tau_i, i=0,1,...,n-1$ อาจแตกต่างกันเล็กน้อย (เช่นระยะเวลา 91/365 และ 92/365 ซึ่งทั้งสองค่ามีค่าประมาณ 0.25) ดังนั้นเพื่อความสะดวกในที่นี้จะกำหนดให้ $\tau_i=\tau, i=0,1,...,n-1$ กำหนดให้ $L_{T_i}=L_{T_i}(T_{i-1},T_i)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR สำหรับช่วงเวลา T_{i-1} ถึง T_i และ K เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่ สำหรับช่วงเวลา T_0 ถึง T_n การแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดของทั้งสองฝั่งดังนี้ และแสดงได้ดังแผนภาพในรูปที่

<u>ฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่</u>

จ่าย	τNK	ที่เวลา $T_i,\ i=1,...,n$
รับ	$\tau NL_{T_{i-1}}(T_{i-1},T_i)$	ที่เวลา $T_i\ \ i=1,...,n$

<u>ฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว</u>

รับ	τNK	ที่เวลา $T_i,\ i=1,...,n$
จ่าย	$\tau NL_{T_{i-1}}(T_{i-1},T_i)$	ที่เวลา $T_i\ \ i=1,...,n$



***รูปที่ 9.11** การแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดของทั้งสองฝั่งในสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย*

9.6.4.1 มูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ย (swap value)

จากการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดของทั้งสองฝั่งในสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย ตามแผนภาพในรูป 9.11 มูลค่าของสวอปในฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่คือมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ จะมูลค่าปัจจุบันดังกล่าวด้วยแทนด้วยสัญลักษณ์ $V_K^{fixed}(t)$,

$$V_K^{fixed}(t)=\sum_{i=1}^{n}\tau NKZ(t,T_i)=NK\tau P_t(T_0,T_n) \tag{9.32}$$

เมื่อ $P_t(T_0,T_n)=\sum_{i=1}^{n}Z(t,T_i)$ ส่วนมูลค่าของสวอปในฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวคือมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจะมูลค่าปัจจุบันดังกล่าวด้วยแทนด้วยสัญลักษณ์ $V_K^{floating}(t)$,

$$V_K^{floating}(t)=\sum_{i=1}^{n}\tau NL_{T_{i-1}}Z(t,T_i)=N\sum_{i=1}^{n}\left[Z(t,T_{i-1})-Z(t,T_i)\right]=N\left[Z(t,T_0)-Z(t,T_n)\right] \tag{9.33}$$

จะเห็นว่าปัจจุบันของกระแสเงินสดจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว $V_K^{floating}(t)$ เป็นผลต่างของราคาของ T_0-zcb-N และ T_n-zcb-N ที่เวลา t

บทนิยาม 9.2 กำหนดให้ $L_{T_i}=L_{T_i}(T_{i-1},T_i)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR สำหรับช่วงเวลา T_{i-1} ถึง T_i และ K เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่ สำหรับช่วงเวลา T_0 ถึง T_n มูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ย (swap value) $V_K^{SW}(t)$ สำหรับ $t\le T_0$ นิยามโดย

$$V_K^{SW}(t)=V_K^{floating}(t)-V_K^{fixed}(t) \tag{9.34}$$

บทนิยาม 9.3 กำหนดให้ $L_{T_i}=L_{T_i}(T_{i-1},T_i)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR สำหรับช่วงเวลา T_{i-1} ถึง T_i และ $p_t(T_0,T_n)=\sum_{i=1}^{n}Z(t,T_i)$ อัตราดอกเบี้ยสวอปล่วงหน้า (forward swap rate) $y_t[T_0,T_n]$ สำหรับ $t\le T_0$

$$y_t[T_0,T_n]=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau L_{T_{i-1}}Z(t,T_i)}{\sum_{i=1}^{n}\tau Z(t,T_i)}=\frac{Z(t,T_0)-Z(t,T_n)}{\tau P_t(T_0,T_n)} \tag{9.35}$$

โดยบทนิยาม 9.1 และบทนิยาม 9.3 ,

$$V_K^{SW}(t) = V_K^{floating}(t) - V_K^{fixed}(t) = N\left[Z(t,T_0) - Z(t,T_n)\right] - NK\tau p_t(T_0,T_n)$$
$$= \left(\left[\frac{Z(t,T_0) - Z(t,T_n)}{\tau p_t(T_0,T_n)}\right] - K\right) N\tau p_t(T_0,T_n) = \left(y_t[T_0,T_n] - K\right) N\tau p_t(T_0,T_n)$$

นั่นคือ

$$V_K^{SW}(t) = \left(y_t[T_0,T_n] - K\right) N\tau p_t(T_0,T_n) \tag{9.36}$$

ตัวอย่างที่ 9.11 สมมติว่าบริษัท a และบริษัท b มีภาระหนี้สินที่ต้องชำระเจ้าหนี้ของตน โดยที่บริษัท a มีภาระที่จะต้องชำระหนี้ที่ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ย 4 % ต่อปี ส่วนบริษัท b มีภาระการชำระหนี้ที่ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +2 % ต่อปีต่อมาทั้งสองบริษัทต้องการแปลงการจ่ายหนี้สินของตนเอง โดยบริษัท a ต้องการแปลงหนี้สินเป็นจากการคิดดอกเบี้ยคงที่เป็นแบบลอยตัว ในขณะที่บริษัท b ต้องการแปลงหนี้สินเป็นแบบคงที่ ทั้งสองบริษัทตกลงทำสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยอายุ 1 ปี เพื่อแลกเปลี่ยนกระแสเงินสด ตามข้อตกลง ดังนี้

ข้อตกลงตามสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยอายุ 1 ปี

1) บริษัท a ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +2% ต่อปี ให้กับบริษัท b เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยคงที่ 4 % ต่อปี

2) บริษัท b ต้องจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 4% ต่อปี เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +2% ต่อปี

3) กำหนดเงินต้นอ้างอิง เท่ากัน คือ 100,000,000 บาท และกำหนดการจ่ายแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดทุก ๆ 3 เดือน จ่ายปลายงวดจ่ายงวดแรกวันที่ 1/8/63 โดยอัตราดอกเบี้ย THOR (%ต่อปี) ที่เวลาต่าง ๆ เป็นไป ตามตารางต่อไปนี้

วันที่	THOR (% ต่อปี)
1/5/63	2.93844
1/8/63	2.58732
1/11/63	2.49190
1/2/64	2.49239
1/5/64	2.49286

ก) จงเขียนตารางแสดงกระแสเงินสดของบริษัท a และบริษัท b

ข) จงหามูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ย

เมื่อกำหนดอัตราดอกเบี้ยคิดลดเท่ากับ 4.2% ต่อปีคิดทบต้นทุก 3 เดือน

วิธีทำ กระแสเงินสดของบริษัท a เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

จากที่โจทย์กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยต่อ 3 เดือน= $\frac{i^{(4)}}{4}=\frac{0.042}{4}=0.0105$

ดังนั้นตัวประกอบส่วนลด $v=\left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^{-1}=1.0105^{-1}=0.989609104$

และจากโจทย์คำนวณกระแสเงินสดจากการคิดอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR +2% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยคงที่ 4 % ต่อปี เมื่อกำหนดเงินต้นอ้างอิง เท่ากัน คือ 100,000,000 บาท ดังตารางด้านล่างในคอลัมน์ที่ 4 และ 5 ตามลำดับ และมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดของฝั่งดอกเบี้ยลอยตัวและฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ แสดงในคอลัมน์ 6 และ 7 ตามลำดับ

$$V_K^{floating}=1,234,610.00v+1,146,830.00v^2+1,122,975.00v^3+1,123,097.50v^4$$
$$=4,510,373.36$$
$$V_K^{fixed}=1,000,000v+1,000,000v^2+1,000,000v^3+1,000,000v^4$$
$$=3,897,165.15$$

มูลค่าของสวอป $V_K^{SW}=V_K^{floating}-V_K^{fixed}=4,510,373.36-3,897,165.15$

$$=613,208.21$$

วันที่	THOR (% ต่อปี)	THOR+2% (% ต่อปี)	กระแสเงินสดฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (THOR+2%)/4 ต่องวด	กระแสเงินสดฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ 1% (4%/4) ต่องวด	มูลค่าปัจจุบันฝั่งดอกเบี้ยลอยตัว	มูลค่าปัจจุบันฝั่งดอกเบี้ยคงที่
1/5/63	2.93844	4.93844	-	-		
1/8/63	2.58732	4.58732	1,234,610.00	1,000,000.00	1,221,781.30	989,609.10
1/11/63	2.49190	4.49190	1,146,830.00	1,000,000.00	1,123,120.64	979,326.18
1/2/64	2.49239	4.49239	1,122,975.00	1,000,000.00	1,088,331.34	969,150.10
1/5/64	2.49286	4.49286	1,123,097.50	1,000,000.00	1,077,140.09	959,079.77
				ผลรวม	4,510,373.36	3,897,165.15
				มูลค่าของสวอป	613,208.21	

9.6.4.2 ความสัมพันธ์ของมูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ยกับราคาตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปอง

ให้ N เป็นเงินต้นอ้างอิง สำหรับตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองคงที่ (fixed rate bond) อายุ $n\tau$ ปี ($0<\tau\leq 1$) โดยมีราคาที่ตราไว้ N บาท อัตราคูปอง K ต่อปี จ่ายทุก ๆ τ ปี จ่ายคูปองทั้งหมด n ครั้ง จ่ายครั้งละ $c\tau N$ บาท สมมติราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ ราคาตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองคงที่ $B_K^{fixed}(t)$,

$$B_K^{fixed}(t)=K\tau NP_t(T_0,T_n)+NZ_t(t,T_n) \tag{9.37}$$

และสำหรับตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองลอยตัว (floating rate bond) อายุ $n\tau$ ปี ($0<\tau\leq 1$) โดยมีราคาที่ตราไว้ N บาท อัตราคูปองเท่ากับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว xIBOR $L_{T_{i-1}}=L_{T_{i-1}}[T_{i-1},T_i]$ ต่อปี จ่ายทุก ๆ τ ปี จ่ายคูปองทั้งหมด n ครั้ง จ่ายครั้งที่ i เท่ากับ $L_{T_{i-1}}\tau N$ บาท สมมติราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ ราคาตราสารหนี้ที่มีการจ่ายคูปองลอยตัว $B^{floating}(t)$,

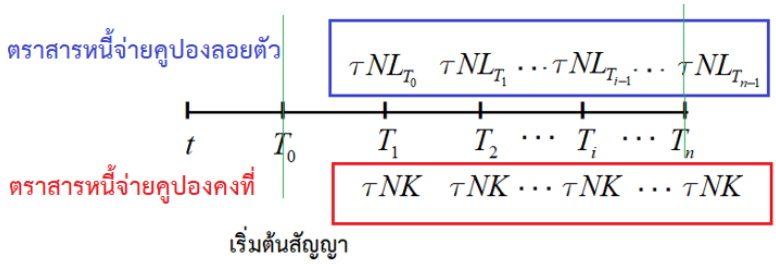
$$B^{floating}(t)=\sum_{i=1}^{n}\tau NL_{T_{i-1}}Z(t,T_i)=N\left[Z(t,T_0)-Z(t,T_n)\right]+NZ(t,T_n) \tag{9.38}$$

พิจารณาผลต่างของราคาตราสารหนี้จ่ายคูปองลอยตัวกับราคาตราสารหนี้จ่ายคูปองคงที่

$$\begin{aligned}B^{floating}(t)-B_K^{fixed}(t)&=\left(N\left[Z(t,T_0)-Z(t,T_n)\right]+NZ(t,T_n)\right)-\left(K\tau NP_t(T_0,T_n)+NZ(t,T_n)\right)\\&=N\left[Z(t,T_0)-Z(t,T_n)\right]-K\tau NP_t(T_0,T_n)\\&=V_K^{floating}(t)-V_K^{fixed}(t)=V_K^{SW}(t)\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$V_K^{SW}(t)=B^{floating}(t)-B_K^{fixed}(t) \tag{9.39}$$



รูปที่ 9.12 *เปรียบเทียบกระแสเงินสดระหว่างตราสารหนี้จ่ายคูปองลอยตัวกับตราสารหนี้จ่ายคูปองคงที่*

บทสรุปท้ายบทที่ 9

ในบทที่ 9 นี้ได้กล่าวถึง **สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย** (Interest Rate Swap) ซึ่งเป็นข้อตกลงระหว่างคู่สัญญาในการแลกเปลี่ยนภาระดอกเบี้ย โดยใช้อัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่คำนวณจากจำนวนเงินต้นอ้างอิง แม้จะไม่มีการแลกเปลี่ยนเงินต้นจริง สัญญานี้ถือเป็นเครื่องมือสำคัญในการบริหารความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต และมีการใช้งานอย่างแพร่หลายในตลาดการเงิน

ใน **พื้นฐานอัตราดอกเบี้ยลอยตัว** ได้อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยที่สัมพันธ์กับปัจจัยทางเศรษฐกิจ เช่น อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น และใช้เป็นพื้นฐานในการคำนวณฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย **ราคาฟอร์เวิร์ดของตราสารหนี้ไม่จ่ายคูปองและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย** อธิบายการกำหนดราคาของตราสารในอนาคตโดยใช้อัตราผลตอบแทนที่สัมพันธ์กับระยะเวลาของตราสารหนี้ **สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ยและฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xIBOR** กล่าวถึงการคำนวณราคาสำหรับอัตราดอกเบี้ยในอนาคต โดยใช้ตัวแปรอ้างอิง เช่น LIBOR หรือ SOFR ซึ่งมีความสำคัญในการกำหนดเงื่อนไขสัญญาสวอป ขณะที่ **สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย xIBOR** ช่วยเสริมการบริหารความเสี่ยงและการเก็งกำไรในตลาดอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ย

ในหัวข้อ **ค่าความผันผวนตามนัย** ได้อธิบายการใช้ค่าความผันผวนโดยนัย (implied volatility) ในการกำหนดราคาสัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย โดยรวมถึงการปรับแต่งความโค้ง (convexity adjustment) เพื่อให้ราคาสะท้อนโครงสร้างตลาดอย่างถูกต้อง

หัวข้อสุดท้ายกล่าวเกี่ยวกับ **สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย** เจาะลึกถึง **plain vanilla swap** ซึ่งเป็นรูปแบบสวอปพื้นฐานที่ไม่ซับซ้อน โดยอาศัยกระแสเงินสดของอัตราดอกเบี้ยคงที่และลอยตัวที่แตกต่างกัน คู่สัญญาจะปฏิบัติตามเงื่อนไขในสัญญาเพื่อป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในตลาดจริง

โดยสรุป บทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีสำคัญ เช่น การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ดและฟิวเจอร์ส การประเมินค่าความผันผวน และการใช้อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง เพื่อแสดงให้เห็นถึงบทบาทของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยในฐานะเครื่องมือทางการเงินที่มีประสิทธิภาพในตลาดที่มีความซับซ้อนและเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

เอกสารอ้างอิง

[1] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.

[2] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2016). *Derivatives: Principles and practice* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.

[3] Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *An introduction to derivatives and risk management* (10th ed.). Cengage Learning.

[4] Neftci, S. N. (2000). *An introduction to the mathematics of financial derivatives* (2nd ed.). Academic Press.

[5] Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed income securities: Tools for today's markets* (3rd ed.). Wiley.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

1) จงนับวันลงทุนของโครงการลงทุนหนึ่งซึ่งเริ่มลงทุนวันที่ 8 มีนาคม 2560 และวันสิ้นสุดโครงการวันที่ 31 สิงหาคม 2565 โดย

1.1) นับจำนวนวันแท้จริง และ เวลาลงทุนในหน่วยปี

1.2) นับจำนวนวันสามัญ

2) ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 24 เดือน (12m-zcb) มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 4.5% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ สมมติอัตราดอกเบี้ยของตั๋วเงินคลังบนช่วง [0,15/12] เท่ากับอัตราดอกเบี้ยบนช่วง [0,2]

2.1) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของสัญญาฟอร์เวิร์ดบน 24m-zcb ณ ปลายเดือนที่ 6 และเวลาใช้สิทธิปลายเดือนที่ 12

2.2) จงหาอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด สำหรับช่วงเดือนที่ 12 ถึง เดือนที่ 15

3) บริษัท a กู้เงิน 20 ล้านบาท กับธนาคารแห่งหนึ่งโดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR+2% ต่อปีโดยมีกำหนดจ่ายดอกเบี้ยทุกปี (ทุก 12 เดือน) ต่อมาบริษัท a ประเมินจากสภาพเศรษฐกิจที่ผ่านมา อัตราดอกเบี้ย THOR มีแนวโน้มปรับตัวสูงขึ้นไปอยู่ที่ 10 % ต่อปี เพื่อเป็นการป้องกันความเสี่ยงดังกล่าว บริษัท a จึงตัดสินใจทำสัญญา FRA กับธนาคาร b และสามารถกำหนดอัตราดอกเบี้ยในสัญญาได้เท่ากับ 8.5 % ต่อปี ที่เงินต้น 20 ล้านบาท กำหนดให้บริษัท a มีสถานะเป็นผู้ซื้อ FRA และธนาคาร b เป็นผู้ขาย FRA โดยมีการชำระส่วนต่างของดอกเบี้ยทุก ๆปี จงพิจารณาว่าสัญญาดังกล่าวจะช่วยป้องกันความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยหรือไม่อย่างไร ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

3.1) อัตราดอกเบี้ย THOR ปรับตัวขึ้นสูงขึ้นไปอยู่ที่ 11 % ต่อปี ในอีก 12 เดือนข้างหน้า

3.2) อัตราดอกเบี้ย THOR ปรับตัวลดลงเหลือ 7 % ต่อปี ในอีก 12 เดือนข้างหน้า

4) ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 9 เดือน มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 7% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้

4.1) จงคำนวณราคาตั๋วเงินคลังที่เวลา เดือน เมื่ออัตราดอกเบี้ยจ่ายทันที xIBOR จ่ายทันที ณ เวลาปลายเดือนที่ 6 (นับจากวันออกตราสาร) เท่ากับ 2.5 % ต่อปี (อัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว)

4.2) จากข้อ 4.1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวฟอร์เวิร์ดที่ทำสัญญาทันทีเดือนที่ 6 สำหรับการกู้ยืมในช่วงเวลาระหว่างเดือนที่ 6 ถึงเดือนที่ 9

5) ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปองฉบับหนึ่งอายุ 12 เดือน มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท ซื้อขายในราคาส่วนลด 6% ต่อปี และมีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายด้วยอัตรา xIBOR, $L_T(T,T+\tau)$ ที่ปลายเดือนที่ 6 โดยที่ xIBOR เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะเวลา 6 เดือน

6) สมมติอัตราผลตอบแทนของ 1y-zcb และ 2y-zcb เท่ากับ 1.5% และ 3% ตามลำดับ

6.1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวฟอร์เวิร์ดที่ทำสัญญาทันทีเดือนที่ 12 สำหรับการกู้ยืมในช่วงเวลาระหว่างเดือนที่ 12 ถึงเดือนที่ 24 (หา $f_{1,1+1}(1)$)

6.2) ถ้าอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยวฟอร์เวิร์ดที่ทำสัญญาทันทีเดือนที่ 24 สำหรับการกู้ยืมในช่วงเวลาระหว่างเดือนที่ 24 ถึงเดือนที่ 36 เท่ากับ 3.5% (กำหนด $f_{2,2+1}(2)=3.5\%$) จงหาอัตราผลตอบแทนของ 3y-zcb

7) สมมติอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR จ่ายทันที (spot LIBOR rate) ระหว่างเดือนที่ 9 ถึง เดือนที่ 12 เท่ากับ 2.25% ต่อปี จงหาราคาของฟิวเจอร์สตลาดเงินและอัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สตามนัยบนอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR และ สำหรับช่วงเวลาเดือนที่ 9 ถึง เดือนที่ 12 (สัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินบนอัตราดอกเบี้ย 3m-LIBOR เรียกว่า Eurodollar futures)

8) สมมติว่าราคาปัจจุบันของ $3M-$zcb ฉบับหนึ่งเท่ากับ 970 บาทและปัจจุบันราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 7.5 บาท โดยมีราคาใช้สิทธิ 978 บาท โดยมีไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และอายุคงเหลือของตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 60 วัน กำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 2.5% ต่อปี จงประมาณค่าความผันผวนตามนัย σ ด้วย

8.1) ค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง $\sigma_{ATM}(t,T)$

8.2) สูตรในรูปสมการกำลังสองของ Corrodo

9) สมมติว่าราคาปัจจุบันของ $6M-$zcb ฉบับหนึ่งเท่ากับ 965 บาทและปัจจุบันราคาคอลออปชันบนตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 8.5 บาท โดยมีราคาใช้สิทธิ 989 บาท โดยมีไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท และอายุคงเหลือของตราสารหนี้ฉบับนี้เท่ากับ 120 วัน กำหนดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องเท่ากับ 4.5% ต่อปี

จงหา 9.1) จงประมาณค่าปรับแต่งความนูน โดยใช้ค่าความผันผวนที่สภาวะคุ้มทุนแฝง

9.2) อัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์ส $F^{FUT}(t,T,T+\tau)$ เมื่อ $\tau = \frac{60}{365}$

10) สมมติว่าบริษัท A และบริษัท B มีภาระหนี้สินที่ต้องชำระแก่เจ้าหนี้ของตน ดังนี้

- บริษัท A มีภาระชำระหนี้โดยจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.4% ต่อปี
- บริษัท B มีภาระชำระหนี้โดยจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR + 1.5% ต่อปี

ต่อมาทั้งสองบริษัทต้องการ แปลงประเภทของภาระดอกเบี้ย ที่ต้องจ่าย

- บริษัท A ต้องการเปลี่ยนจากการจ่ายดอกเบี้ยคงที่เป็น อัตราดอกเบี้ยลอยตัว
- บริษัท B ต้องการเปลี่ยนจากการจ่ายดอกเบี้ยลอยตัวเป็น อัตราดอกเบี้ยคงที่

ทั้งสองฝ่ายจึงตกลงทำ สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยอายุ 1 ปี โดยมีข้อตกลงดังนี้

1) บริษัท A ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR + 1.6% ต่อปี ให้กับบริษัท B เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.6% ต่อปี
2) บริษัท B ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.6% ต่อปี ให้กับบริษัท A เพื่อแลกกับการได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR + 1.6% ต่อปี
3) กำหนด เงินต้นอ้างอิง (notional principal) เท่ากับ 100,000,000 บาท
4) มีการจ่ายและรับดอกเบี้ย ทุก 3 เดือน (quarterly) โดย จ่ายปลายงวด
5) งวดแรกจ่ายวันที่ 1 กรกฎาคม 2567

โดยอัตราดอกเบี้ย THOR (% ต่อปี) ที่เวลาต่าง ๆ เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

วันที่	THOR (% ต่อปี)
1/4/67	1.93844
1/7/67	1.58732
1/10/67	1.49190
1/1/68	1.49239
1/4/68	1.49286

กำหนดใช้ อัตราดอกเบี้ยคิดลด 4.2% ต่อปี (คิดทบต้นทุก 3 เดือน) สำหรับการคำนวณมูลค่าปัจจุบัน จงตอบคำถามต่อไปนี้ (อธิบายอย่างละเอียด)

10.1) จงคำนวณกระแสเงินสด ของบริษัท A ในแต่ละงวดจากการจ่ายดอกเบี้ยลอยตัว (THOR + 1.6%) และรับดอกเบี้ยคงที่ 5.6% ต่อปี โดยคำนวณตามเงินต้นอ้างอิง 100 ล้านบาท

10.2) จงหามูลค่าปัจจุบัน (Present Value) ของกระแสเงินสดแต่ละงวด โดยใช้อัตราคิดลด 4.2% ต่อปี (ทบต้นทุก 3 เดือน) และหาผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวและฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่

10.3) จงคำนวณมูลค่าของสวอปอัตราดอกเบี้ย (Swap Value) ณ วันเริ่มต้นสัญญา

10.4) วิเคราะห์ว่า บริษัท A ได้รับหรือสูญเสียจากการทำสัญญาสวอปครั้งนี้เท่าใด

11) สมมติว่า ณ ปัจจุบัน บริษัท a และบริษัท b สามารถกู้เงินโดยมีอัตราดอกเบี้ยกู้ยืม ตามตารางต่อไปนี้

รายการอัตราเบี้ยเงินกู้	บริษัท a	บริษัท b
อัตราดอกเบี้ยคงที่	7.2 %	6 %
อัตราดอกเบี้ยลอยตัว	LIBOR + 1.8%	LIBOR +1 %

จงตอบคำถามต่อไปนี้ (อธิบายอย่างละเอียด)

11.1) อัตราดอกเบี้ยคงที่และอัตราดอกเบี้ยลอยตัวของทั้ง 2 บริษัทอยู่ในสภาวะสมดุลหรือไม่เพราะเหตุใด

11.2) โดยใช้หลักการของ*ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ* บริษัทใดได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในอัตราดอกเบี้ยคงที่ และบริษัทใดได้เชิงเปรียบเทียบในอัตราดอกเบี้ยลอยตัว

11.3) สมมติว่าในปัจจุบัน บริษัท a กู้ยืมเงินด้วยอัตราดอกเบี้ยลอยตัว และบริษัท b กู้ยืมเงินด้วยอัตราดอกเบี้ยคงที่และหากบริษัท a ต้องการเปลี่ยนจากการกู้ยืมเงินด้วยอัตราดอกเบี้ยลอยตัวไปเป็นอัตราดอกเบี้ยแบบคงที่ ในขณะที่บริษัท b ต้องการเปลี่ยนจากการกู้ยืมเงินด้วยอัตราดอกเบี้ยคงที่ไปเป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัว โดยทำสัญญาสวอปเพื่อทำให้ทั้ง 2 บริษัทได้รับอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำลง โดยสัญญาสวอปมีข้อตกลง ดังนี้

1) บริษัท a ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ เท่ากับ [6 % + ค่าธรรมเนียมของธนาคาร 0.015%] โดยแลกเปลี่ยนกับการรับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเท่ากับ LIBOR +0.8%

2) บริษัท b ตกลงจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว [LIBOR +0.8%+ ค่าธรรมเนียมของธนาคาร 0.015%] โดยแลกเปลี่ยนกับการรับอัตราดอกเบี้ยคงที่เท่ากับ 6 %

คำถาม 11.3.1) จงเขียนแผนภาพแสดงการไหลของกระแสเงินของธุรกรรมทั้งหมด

11.3.2) จงคำนวณอัตราอัตราดอกเบี้ยที่เป็นผลหลังจากใช้สัญญาสวอปของทั้ง 2 บริษัท และทั้ง 2 บริษัท ได้รับอัตราดอกเบี้ยถูกลงเท่าไร

12) สมมติว่า อัตราสวอปฟอร์เวิร์ดสำหรับ 1 ปี (2y-forward swap rate) ณ ปัจจุบัน เท่ากับ 1.47% ($y_0[0,1]=1.5\%$) และ อัตราสวอปสำหรับ 2 ปี (2y-swap rate) และอัตราสวอปสำหรับ 3 ปี (3y-swap rate) เท่ากับ 2.1% และ 2.4% ตามลำดับ ตกลงแลกเปลี่ยนกระแสเงินทุก ๆ สิ้นเดือน ใช้ข้อมูลดังกล่าวตอบปัญหาต่อไปนี้

12.1) จงคำนวณหา $Z(0,1)$, $Z(0,2)$ และ $Z(0,3)$ และ $P_0(0,3)$

12.2) จงคำนวณหาราคาตราสารหนี้มีคูปองที่จ่ายคูปองคงที่ อายุ 3 ปี ราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท อัตราคูปอง 4% ต่อปี มีราคาไถ่ถอนเท่ากับราคาที่ตราไว้ โดยใช้ผลลัพธ์จาก 12.1) ในการคำนวณ

13) ตราสารหนี้มีคูปองจ่ายคูปองคงที่ฉบับหนึ่ง มีราคาที่ตราไว้ 1,000 บาท อัตราคูปอง 10% ต่อปี จ่ายคูปองทุก 3 เดือน จงตอบคำถามต่อไปนี้

13.1) จงคำนวณราคา $B_{10\%}^{fixed}(0)$

13.2) สมมติว่า y เป็นอัตราดอกเบี้ยซึ่ง

$$B_{10\%}^{fixed}(0)=c\sum_{k=1}^{n}v^k+1{,}000v^n$$

เมื่อ $v=(1+y)^{-1}$, n เป็นจำนวนงวดของการจ่ายคูปอง และ c ป็นคูปองจ่ายต่องวด จงหาอัตราผลตอบแทนภายใน (internal rate of return : irr) ต่อปี เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ย y

14) บริษัท ABC ลงทุนในตั๋วเงินคลังชนิดหนึ่งที่มีอัตราดอกเบี้ยระบุไว้เท่ากับร้อยละ 3.6% ต่อปี โดยกำหนดระยะเวลาลงทุนตั้งแต่วันที่ 15 มกราคม 2563 ถึงวันที่ 18 มิถุนายน 2564 โดยมีจำนวนเงินลงทุนทั้งสิ้น 5,000,000 บาท และเป็นการลงทุนประเภทอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

14.1) จงคำนวณจำนวนวันลงทุนและเวลาลงทุนในหน่วยปีโดยใช้วิธี

(ก) การนับจำนวนวันแท้จริง (Actual/Actual)

(ข) การนับจำนวนวันสามัญ (30/360)

(ค) การนับวันด้วยกฎของธนาคาร (Actual/360)

14.2) จงคำนวณดอกเบี้ยที่บริษัทได้รับตามแต่ละวิธีการนับวัน และเปรียบเทียบว่าแบบใดให้ผลตอบแทนมากที่สุด

15) นักวิเคราะห์การเงินของบริษัท DEF ต้องคำนวณต้นทุนการกู้เงินจำนวน 20,000,000 บาท โดยเริ่มกู้ในวันที่ 31 มีนาคม 2565 และครบกำหนดชำระคืนวันที่ 30 กันยายน 2565 โดยคิดอัตราดอกเบี้ยอยู่ที่ 6.0% ต่อปี และเป็นการคิดดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว

15.1) จงคำนวณจำนวนวันลงทุนในแต่ละวิธี

(ก) วิธีนับจำนวนวันแท้จริง (Actual/Actual)

(ข) วิธีนับวันสามัญ (30/360)

(ค) กฎของธนาคาร (Actual/360)

15.2) จงคำนวณดอกเบี้ยที่บริษัทต้องชำระโดยใช้แต่ละวิธี และวิเคราะห์ว่าในสถานการณ์นี้วิธีการใดช่วยลดต้นทุนดอกเบี้ยได้มากที่สุด

16) (การคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดและอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดจาก Zero-Coupon Bonds) ตั๋วเงินคลังไม่มีคูปอง (zero-coupon bond: ZCB) ฉบับหนึ่งมีราคาที่ตราไว้ (face value) เท่ากับ 1,000 บาท โดยมีราคา ณ วันออกฉบับหนึ่ง (0-year) เท่ากับ $P(0,1)=950$ บาท และอีกฉบับหนึ่งมีราคา ณ วันเดียวกันแต่มีอายุ 1.5 ปี เท่ากับ $P(0,1.5)=910$ บาท

16.1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่อง (continuously compounded interest rate) สำหรับช่วงเวลา [0,1] และ [0,1.5]

16.2) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ด ของ ZCB ที่มีอายุ 0.5 ปี (จาก $t=1$ ถึง $t=1.5$) ณ เวลาปัจจุบัน

16.3) จงหาอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด แบบคิดทบต้นต่อเนื่องในช่วง [1,1.5]

17) (การประยุกต์ราคาฟอร์เวิร์ดในการตัดสินใจลงทุน) สมมติว่านักลงทุนรายหนึ่งต้องการซื้อพันธบัตรรัฐบาลไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) ที่จะไถ่ถอนในอีก 1 ปีข้างหน้า (ครบกำหนดในวันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2568) โดยพันธบัตรนี้มีมูลค่าที่ตราไว้เท่ากับ 1,000 บาท ปัจจุบัน (วันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2566) พันธบัตรนี้ซื้อขายในราคา 925 บาท และมีอีกฉบับหนึ่งที่ครบกำหนดในอีก 2 ปี (31 ธันวาคม พ.ศ. 2569) ซื้อขายในราคา 850 บาท

17.1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยคิดทบต้นต่อเนื่อง r_1 และ r_2 สำหรับพันธบัตรอายุ 1 ปี และ 2 ปี ตามลำดับ

17.2) หากนักลงทุนต้องการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อซื้อพันธบัตรที่มีอายุเหลือ 1 ปี ณ วันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2567 (forward contract อายุ 1 ปี เพื่อซื้อ ZCB อายุ 1 ปี ณ สิ้นปีหน้า) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ด ของพันธบัตรดังกล่าว

17.3) จงอธิบายว่าหากในวันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2567 ราคาตลาดของพันธบัตรดังกล่าวแตกต่างจากราคาฟอร์เวิร์ด จะเกิดโอกาสการทำกำไรไร้ความเสี่ยง (arbitrage) หรือไม่ อย่างไร

18) (การประเมินผลตอบแทนจากสัญญา FRA เพื่อบริหารความเสี่ยงอัตราดอกเบี้ย)
บริษัท A กู้ยืมเงินจำนวน 15 ล้านบาทจากธนาคารแห่งหนึ่ง โดยธนาคารเรียกเก็บอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัวเท่ากับ THOR + 1.2% ต่อปี โดยมีการชำระดอกเบี้ยทุกปี (12 เดือน) บริษัท A คาดการณ์ว่าในอีก 1 ปีข้างหน้าอัตราดอกเบี้ย THOR จะเพิ่มสูงขึ้น และจึงต้องการป้องกันความเสี่ยงจากการปรับตัวของอัตราดอกเบี้ยนี้
บริษัท A จึงทำสัญญา Forward Rate Agreement (FRA) กับธนาคาร B โดยมีรายละเอียดดังนี้

- บริษัท A มีสถานะเป็นผู้ซื้อ FRA และธนาคาร B เป็นผู้ขาย FRA
- กำหนดอัตราดอกเบี้ยในสัญญา FRA (FRA rate) เท่ากับ 8% ต่อปี
- เงินต้นอ้างอิง 15,000,000 บาท

คำถาม

18.1) หากอัตราดอกเบี้ย THOR ณ เวลาชำระจริงเพิ่มขึ้นเป็น 9.5% ต่อปี บริษัท A ได้รับหรือจ่ายเงินส่วนต่างจากสัญญา FRA เท่าไร

18.2) หากอัตราดอกเบี้ย THOR ลดลงเหลือ 6.5\% ต่อปี บริษัท A ได้รับหรือจ่ายเงินส่วนต่างเท่าไร

18.3) จงวิเคราะห์ว่าการทำ FRA ครั้งนี้ช่วยลดความเสี่ยงทางการเงินของบริษัท A ได้อย่างไร

19 (การวิเคราะห์มูลค่าและทิศทางผลตอบแทนของ FRA เมื่ออัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลง) พิจารณานักลงทุนรายหนึ่งทำสัญญา FRA โดยมีรายละเอียดดังนี้

- สถานะของนักลงทุน: ผู้ขาย FRA
- อัตราดอกเบี้ยตาม FRA: 4.2% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง: 3-month THOR
- เงินต้นอ้างอิง: 25,000,000 บาท
- ระยะเวลาสัญญา: 3 เดือน เริ่มใช้สิทธิ ณ วันที่ 1 กันยายน พ.ศ. 2567

19.1) หาก ณ วันที่ 1 กันยายน พ.ศ. 2567 อัตราดอกเบี้ย 3-month THOR อยู่ที่ 5.0% ต่อปี จงคำนวณผลตอบแทน (payoff) ที่นักลงทุนต้องจ่ายให้กับผู้ซื้อ FRA

19.2) หากอัตราดอกเบี้ย 3-month THOR อยู่ที่ 3.0% ต่อปี จงคำนวณผลตอบแทนที่นักลงทุนจะได้รับ

19.3) จงอธิบายลักษณะความเสี่ยงของการถือครองสถานะผู้ขาย FRA และกลยุทธ์ป้องกันความเสี่ยงที่เหมาะสม

20) (การคำนวณราคาของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินและอัตราดอกเบี้ยตามนัย) นักลงทุนรายหนึ่งต้องการใช้สัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงินเพื่อเก็งกำไรจากการคาดการณ์ว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเพิ่มขึ้น โดยพิจารณาสัญญาฟิวเจอร์สอ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ย 3-month LIBOR ซึ่งจะครบกำหนดในอีก 3 เดือนข้างหน้า

ข้อมูล ณ ปัจจุบัน:

- อัตราดอกเบี้ย LIBOR จ่ายทันทีสำหรับช่วงเดือนที่ 3 ถึงเดือนที่ 6 เท่ากับ 2.25% ต่อปี
- สัญญาฟิวเจอร์สมีเงินต้นอ้างอิง (notional principal) เท่ากับ 1,000,000 ดอลลาร์สหรัฐ

20.1) จงคำนวณราคาของสัญญาฟิวเจอร์สตลาดเงิน ณ เวลาปัจจุบัน

20.2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยฟิวเจอร์สตามนัย (implied futures rate)

20.3) อธิบายว่าผลกำไรหรือขาดทุนจะเกิดขึ้นอย่างไร หากในวันครบกำหนดอัตราดอกเบี้ย LIBOR อยู่ที่ 2.75% ต่อปี

21) (การใช้ฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยเพื่อป้องกันความเสี่ยงของพอร์ตลงทุน) บริษัทการเงินแห่งหนึ่งมีพอร์ตการลงทุนพันธบัตรระยะยาว และกังวลว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเพิ่มสูงขึ้น ซึ่งจะทำให้มูลค่าพอร์ตลดลง บริษัทจึงต้องการป้องกันความเสี่ยงโดยใช้สัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย

ข้อมูลเบื้องต้น:

- มูลค่าพอร์ตการลงทุนพันธบัตร = 50,000,000 บาท
- สัญญาฟิวเจอร์สอ้างอิงกับอัตราดอกเบี้ย 6-month BIBOR มีขนาดสัญญาเท่ากับ 1,000,000 บาท
- อัตราดอกเบี้ยปัจจุบัน = 1.80% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยคาดการณ์ในอีก 6 เดือน = 2.30% ต่อปี

21.1) จงคำนวณจำนวนสัญญาฟิวเจอร์สที่บริษัทควรใช้เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย

21.2) จงคำนวณผลตอบแทนโดยประมาณจากสถานะในฟิวเจอร์สเมื่ออัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 2.30% ณ วันครบกำหนด

21.3) วิเคราะห์ข้อดีและข้อจำกัดของการใช้สัญญาฟิวเจอร์สในการบริหารความเสี่ยงในกรณีนี้

22) (การปรับค่าความนูนในราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ย) นักวิเคราะห์การเงินพิจารณาการลงทุนในสัญญาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงแบบลอยตัว (เช่น 3-month LIBOR) โดยใช้แบบจำลองการก่อเกิดอัตราดอกเบี้ยสุ่มตามกระบวนการ Brownian motion ที่มีความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.012$ ต่อปี

- ราคาฟิวเจอร์สดั้งเดิม (ไม่ปรับความนูน) = 96.50
- เวลาคงเหลือจนถึงวันครบกำหนดของฟิวเจอร์ส = 0.75 ปี

22.1) จงคำนวณปรับค่าความนูน (Convexity Adjustment) โดยใช้สูตรที่เกี่ยวข้องกับความผันผวน σ และเวลา T

22.2) จงหาราคาฟิวเจอร์สที่ปรับความนูนแล้ว (Convexity-Adjusted Futures Price)

22.3) อธิบายความสำคัญของการปรับความนูนในเชิงกลยุทธ์สำหรับนักเก็งกำไรและผู้บริหารพอร์ต

หมายเหตุ: สูตรปรับค่าความนูนโดยประมาณมีรูปแบบดังนี้

$$\text{Convexity Adjustment} \approx \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot T$$

เมื่อ σ คือความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย และ T คือระยะเวลาคงเหลือจนถึงวันครบกำหนด (หน่วยเป็นปี)

23) (การวิเคราะห์ผลกระทบของค่าความผันผวนและความนูนต่อราคาฟิวเจอร์ส) นักลงทุนรายหนึ่งสังเกตว่าราคาฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีอายุคงเหลือ 1 ปี มีการเคลื่อนไหวไม่สอดคล้องกับการคาดการณ์อัตราดอกเบี้ยในตลาดล่วงหน้า โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดที่คาดการณ์ล่วงหน้า = 3.25%
- ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย (annualized volatility) = 1.8% ต่อปี
- ราคาฟิวเจอร์สที่สังเกตได้ในตลาด = 96.60

23.1) จงคำนวณราคาฟิวเจอร์สที่ควรเป็น หากนำค่าความนูนมาปรับด้วย โดยใช้สูตรปรับความนูนภายใต้สมมติฐานแบบ Gaussian interest rate model

23.2) เปรียบเทียบราคาที่ได้จากการคำนวณกับราคาที่สังเกตในตลาด และวิเคราะห์ว่าเกิดสถานการณ์ overpricing หรือ underpricing หรือไม่

23.3) หากนักลงทุนเชื่อว่าตลาดไม่ได้สะท้อนความเสี่ยงตามความนูนอย่างเหมาะสม ควรใช้กลยุทธ์ใดในการทำกำไรจากสถานการณ์นี้

หมายเหตุ: สูตรการปรับความนูนที่ใช้โดยทั่วไป คือ

$$\text{Convexity Adjustment} \approx \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot T$$

ซึ่งเป็นการประมาณค่าที่มาจากแบบจำลองความเสี่ยงของอัตราดอกเบี้ยแบบ Gaussian หรือ Heath-Jarrow-Morton framework

24) (การใช้สัญญาสวอปเพื่อจัดการโครงสร้างหนี้) บริษัท A มีภาระดอกเบี้ยจากการกู้เงินที่อัตราดอกเบี้ยลอยตัวเท่ากับ THOR + 1.2% ต่อปี โดยมีเงินต้น 100,000,000 บาท และต้องการเปลี่ยนเป็นภาระดอกเบี้ยคงที่เพื่อควบคุมต้นทุนทางการเงินในช่วง 1 ปีข้างหน้า บริษัทจึงทำสัญญาสวอปกับธนาคาร B โดยมีรายละเอียดดังนี้

- บริษัท A จ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่ 3.5\% ต่อปี และรับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว THOR + 1.2\% จากธนาคาร B
- กำหนดจ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน โดยใช้เงินต้นอ้างอิง 100,000,000 บาท
- อัตรา THOR ในช่วงเวลาต่าง ๆ มีดังนี้:
  - วันที่เริ่มต้นสัญญา: 1.90% ต่อปี
  - ครบ 6 เดือน: 2.50% ต่อปี
  - ครบ 12 เดือน: 2.80% ต่อปี

24.1) คำนวณกระแสเงินสดสุทธิ (Net Cash Flow) ของบริษัท A ในแต่ละรอบการจ่ายดอกเบี้ย

24.2) หากอัตราคิดลดสำหรับหามูลค่าปัจจุบันเท่ากับ 3.0% ต่อปี จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดจากสัญญาสวอปทั้งหมด

24.3) วิเคราะห์ว่าบริษัท A ได้ประโยชน์จากการทำสวอปครั้งนี้หรือไม่

25) (การประเมินผลกำไรจากสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยสองทาง) บริษัท X และบริษัท Y มีลักษณะของแหล่งเงินทุนต่างกัน โดยบริษัท X สามารถกู้เงินที่อัตราดอกเบี้ยคงที่ 5.5% ต่อปี และอัตราลอยตัว THOR + 1.0% ส่วนบริษัท Y สามารถกู้เงินที่อัตราคงที่ 6.3% ต่อปี และอัตราลอยตัว THOR + 1.4%

ทั้งสองบริษัทต้องการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย โดย

- บริษัท X ต้องการเปลี่ยนจากคงที่ไปลอยตัว
- บริษัท Y ต้องการเปลี่ยนจากลอยตัวไปคงที่

ทั้งสองบริษัทตกลงทำสัญญาสวอป โดยมีรายละเอียด

- บริษัท X จ่าย THOR + 1.2% และรับคงที่ 5.8%
- บริษัท Y จ่ายคงที่ 5.8% และรับ THOR + 1.2%
- เงินต้นอ้างอิง: 50,000,000 บาท จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน
- THOR ในช่วง 6 เดือนแรก = 2.2% และ 6 เดือนถัดไป = 2.6%

25.1) คำนวณผลกำไรหรือขาดทุนสุทธิของทั้งบริษัท X และ Y ในแต่ละรอบดอกเบี้ยจากสัญญาสวอป

25.2) วิเคราะห์ว่าบริษัทใดได้ประโยชน์จากการทำสวอป และเพราะเหตุใด

25.3) หากต้องการให้ทั้งสองฝ่ายได้ประโยชน์เท่าเทียมกัน ควรปรับอัตราคงที่หรืออัตราลอยตัวอย่างไร

บทที่ 10 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

เนื้อหาประกอบด้วย

10.1 การแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาท

10.2 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ

10.3 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

10.4 ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ

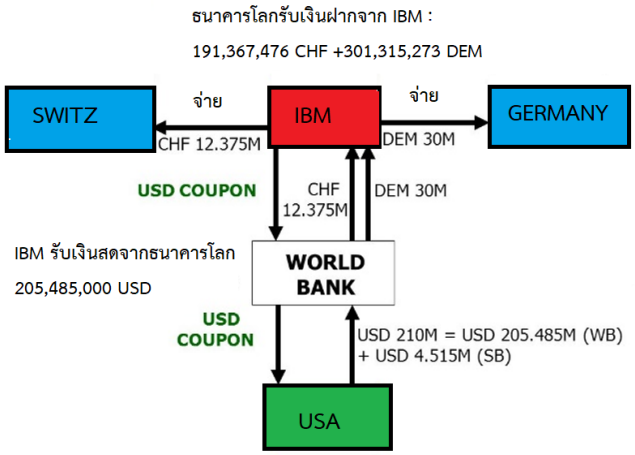
10.5 ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย

10.6 การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

บทนำ

สัญญาสวอป (swap contracts) คือ สัญญาที่มีการตกลงแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างคู่สัญญา เกิดขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ.1981 เป็นการทำสัญญาตกลงแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างบริษัท IBM และธนาคารโลก (world bank) ซึ่งเรียกการทำสัญญาตามข้อตกลงนี้ว่า "สัญญาสวอป หรือ สัญญาแลกเปลี่ยน" การทำสัญญาสวอปครั้งนี้เกิดขึ้นเนื่องจากความจำเป็นของธนาคารโลกที่ต้องการหาแหล่งเงินกู้ที่มีต้นทุนต่ำเพื่อจะปล่อยกู้ให้กับประเทศกำลังพัฒนา ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยในสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ ณ ขณะนั้นค่อนข้างสูงโดยอัตราดอกเบี้ยในสกุลเงินดอลาร์สูงถึง 17% ต่อปี ในทางกลับกัน อัตราดอกเบี้ยในสกุลเงินมาร์คเยอรมัน (เยอรมันตะวันตก) และสกุลเงินฟรังก์สวิส (สวิตเซอร์แลนด์) มีอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำกว่า คือ 12% และ 8% ตามลำดับ ทำให้ทั้งสองประเทศกลายเป็นแหล่งเงินทุนสำคัญของธนาคารโลก ณ ขณะนั้น แต่ทั้งสองประเทศนี้มีการกำหนดเพดานในการกู้ยืมเงินให้กับธนาคารโลกส่งผลให้ธนาคารโลกไม่สามารถกู้ยืมเงินได้มากเท่าตามที่ต้องการ ในขณะเดียวกัน บริษัท IBM เองก็มีหนี้สินที่จะต้องชำระในสกุลเงินมาร์คเยอรมันและฟรังก์สวิสจำนวนมาก และต้องการที่จะเปลี่ยนหนี้สินนี้เป็นหนี้สินในสกุลเงินดอลลาร์ เมื่อความต้องการของทั้งสองฝ่ายมาพบกัน ทั้งสองฝ่ายจึงตกลงทำสัญญา

สวอประหว่างกันกำหนดข้อตกลงในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างกันและกัน โดยสัญญานี้ระบุว่า IBM จะจ่ายกระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ให้กับธนาคารโลก ในขณะที่ธนาคารโลกจะจ่ายกระแสเงินในสกุลมาร์คเยอรมันและฟรังก์สวิสให้กับ IBM สรุปคือ IBM แลกเปลี่ยนหนี้สินที่มีในสกุลเงินดอลลาร์กับธนาคารโลก ในขณะที่ธนาคารโลกแลกเปลี่ยนหนี้ที่มีในสกุลเงินมาร์คเยอรมันและฟรังก์สวิสกับ IBM โดยสัญญาสวอปดังกล่าวระหว่างบริษัท IBMและธนาคารโลกเป็นไปตามรูปที่ 10.1



รูปที่ 10.1 *สัญญาสวอปที่ตกลงจะแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดซึ่งกันและกันระหว่างบริษัท IBM และธนาคารโลก*

รูปที่ 10.1 แสดงการแลกเปลี่ยนทางการเงินระหว่างธนาคารโลกและหน่วยงานต่าง ๆ ได้แก่ IBM สวิตเซอร์แลนด์ (Switz) เยอรมนี (Germany) และสหรัฐอเมริกา (USA) โดยมีรายละเอียดดังนี้

- IBM รับเงินจากธนาคารโลกเป็นจำนวน 191,367,476 ฟรังก์สวิส (CHF) และ 301,315,273 มาร์คเยอรมัน (DEM)
- สวิตเซอร์แลนด์จ่าย 12.375 ล้าน CHF ให้กับ IBM
- เยอรมนีจ่าย 30 ล้าน DEM ให้กับ IBM
- ธนาคารโลกจ่าย USD coupon ให้กับสวิตเซอร์แลนด์และเยอรมนี
- IBM รับเงินจากธนาคารโลกเป็นจำนวน 205,485,000 ดอลลาร์สหรัฐ (USD)
- สหรัฐอเมริกาจ่าย USD 210 ล้าน ซึ่งแบ่งเป็น USD 205.485 ล้าน (ให้ธนาคารโลก) และ USD 4.515 ล้าน (ให้ธนาคารสวิส)

ในที่นี้จะเห็นว่าธนาคารโลกทำหน้าที่เป็นตัวกลางในการจัดการแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศระหว่างสวิตเซอร์แลนด์ เยอรมนี และสหรัฐอเมริกา โดยมี IBM เป็นผู้รับผลประโยชน์ในการแลกเปลี่ยนเงินตรานี้ โดยตั้งแต่การทำสัญญาสวอปครั้งแรกที่เกิดขึ้นระหว่าง IBM และธนาคารโลก การทำสัญญาสวอปก็ได้รับการยอมรับและเป็นที่นิยมอย่างมากและเริ่มเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่ใช้ในการจัดการกับความเสี่ยงที่จะเกิดขึ้นในอนาคต โดยเฉพาะอย่างยิ่งความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงกระแสเงินสด สัญญาสวอปส่วนใหญ่จะจัดทำขึ้นในตลาดแบบ OTC (over-the-counter) ซึ่งเป็นการติดต่อและต่อรองระหว่างฝ่ายเจรจาโดยตรง ภายใต้สภาพแวดล้อมที่อาจจะมีหรือไม่มีตัวกลางในการค้าสัญญาทางการเงิน การชำระเงินจากสัญญาสวอปมักจะเป็นตามระยะเวลาและข้อตกลงที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ทำให้สามารถพิจารณาสัญญาสวอปเป็นเสมือนการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดหลายสัญญาเข้าด้วยกัน

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ (currency swap) เป็นประเภทหนึ่งของสัญญาสวอปที่ใช้เป็นเครื่องมือทางการเงินในการป้องกันและบริหารจัดการความเสี่ยง โดยในสัญญานี้ ทั้งสองฝ่ายจะตกลงในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดซึ่งอาจอยู่ในรูปของดอกเบี้ยและเงินต้นจากสกุลเงินหนึ่งเป็นอีกสกุลเงินหนึ่งในอนาคต เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินต่างประเทศเป็นความเสี่ยงที่ไม่สามารถทราบได้ล่วงหน้า ทำให้เกิดความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนสกุลเงินต่างประเทศ จึงมีความจำเป็นต้องมีการจัดการความเสี่ยงอย่างเหมาะสม ตัวอย่างเช่น บริษัท a ได้รับรายได้จากการขายสินค้าในรูปแบบของเงินบาท แต่มีภาระหนี้ที่ต้องชำระเงินต้นและดอกเบี้ยในรูปแบบของดอลลาร์สหรัฐฯ ดังนั้น บริษัท a ต้องนำเงินบาทไปแลกเปลี่ยนเป็นดอลลาร์สหรัฐฯ ความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างเงินบาทและดอลลาร์สหรัฐฯ จึงมีผลกระทบต่อบริษัท a โดยตรง ทางเลือกในการจัดการความเสี่ยงที่เกิดขึ้นนี้มีหลายวิธี เช่น การทำสัญญาฟอร์เวิร์ด สัญญาฟิวเจอร์ส สัญญาออปชัน และสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

อย่างไรก็ตาม การจัดการความเสี่ยงที่เกิดขึ้นด้วยวิธีดังกล่าวจำเป็นต้องเข้าใจปรากฏการณ์ทางการเงินเกี่ยวกับเงินตราต่างประเทศ เช่น การแข็งค่าหรือการอ่อนค่าของสกุลเงินเมื่อเทียบกับ

สกุลเงินอื่น ๆ โดยเฉพาะเมื่อเทียบกับสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐฯ ซึ่งมีผลกระทบต่อกิจกรรมทางธุรกิจและการเคลื่อนย้ายกระแสเงินสดเข้าออกระหว่างประเทศ

10.1 การแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาท

ในหัวข้อที่ 1.4.1 เราได้กล่าวถึงการแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาทแล้ว ในหัวข้อนี้จะทบทวนความสำคัญของการใช้เครื่องมือทางการเงิน เช่น สัญญาซื้อขายอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าและสวอปอัตราแลกเปลี่ยนในการจัดการความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยน โดยต้องระบุการแข็งค่าและการอ่อนค่าเมื่อเทียบกับสกุลเงินใด เช่น ดอลลาร์สหรัฐ

1) เงินบาทแข็งค่าเมื่อเทียบกับดอลลาร์สหรัฐ หมายถึง การใช้เงินบาทน้อยลงในการแลกเปลี่ยนเป็นดอลลาร์ ตัวอย่างเช่น อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบันอยู่ที่ 32 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ และอีก 3 เดือนข้างหน้าอัตราแลกเปลี่ยนมีแนวโน้มจะอยู่ที่ 28 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าค่าเงินบาทแข็งค่าขึ้น เพื่อความเข้าใจง่าย เราอาจพิจารณาเงินบาทเป็นสินค้าที่มีราคาซื้อขายในดอลลาร์ ดังนั้นอัตราแลกเปลี่ยน 32 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ หมายถึง "1 บาท มีราคา 0.03125 ดอลลาร์" และอัตราแลกเปลี่ยน 28 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ หมายถึง "1 บาท มีราคา 0.03571 ดอลลาร์" การที่ค่าเงินบาทแข็งค่าขึ้นหมายความว่าเงินบาทมีราคาแพงขึ้น

2) เงินบาทอ่อนค่าเมื่อเทียบกับดอลลาร์สหรัฐ หมายถึง การใช้เงินบาทมากขึ้นในการแลกเปลี่ยนเป็นดอลลาร์ ตัวอย่างเช่น อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบันอยู่ที่ 28 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ และอีก 3 เดือนข้างหน้าอัตราแลกเปลี่ยนมีแนวโน้มจะอยู่ที่ 32 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่าค่าเงินบาทอ่อนค่าลง อีกความหมายหนึ่งคือ เงินบาทมีราคาถูกลง ในปัจจุบัน "1 บาท มีราคา 0.03571 ดอลลาร์" และอีก 3 เดือนข้างหน้า "1 บาท มีราคา 0.03125 ดอลลาร์" การที่ค่าเงินบาทอ่อนค่าลงหมายความว่าเงินบาทมีราคาถูกลง



(a) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนบาท-ดอลลาร์ *(b) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนดอลลาร์-บาท*

รูปที่ 10.2 *การเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างบาทและดอลลาร์สหรัฐในช่วงที่เงินบาทแข็งค่าขึ้น*

จากกราฟในรูป 10.2 (a) จะเห็นว่ากราฟอัตราแลกเปลี่ยน บาท-ดอลลาร์ (1 บาท เท่ากับ [จำนวน] ดอลลาร์) ในช่วงที่เงินบาทแข็งค่าขึ้น กราฟจะแสดงแนวโน้มขึ้น ส่วนกราฟในรูป 10.2 (b) ซึ่งเป็นกราฟอัตราแลกเปลี่ยน ดอลลาร์-บาท (1 ดอลลาร์ เท่ากับ [จำนวน] บาท) จะแสดงแนวโน้มลง



(a) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนบาท-ดอลลาร์ *(b) กราฟอัตราแลกเปลี่ยนดอลลาร์-บาท*

รูปที่ 10.3 *การเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างบาทและดอลลาร์สหรัฐในช่วงที่เงินบาทอ่อนค่าลง*

จากกราฟในรูป 10.3 (a) จะเห็นว่ากราฟอัตราแลกเปลี่ยน บาท-ดอลลาร์ (1 บาท เท่ากับ [จำนวน] ดอลลาร์) ในช่วงที่เงินบาทอ่อนค่าลง กราฟจะแสดงแนวโน้มลง ส่วนกราฟในรูป 10.3 (b) ซึ่งเป็นกราฟอัตราแลกเปลี่ยน ดอลลาร์-บาท (1 ดอลลาร์ เท่ากับ [จำนวน] บาท) จะแสดงแนวโน้มขึ้น

10.2 ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ

ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศหรือที่เรียกว่า สัญญาซื้อขายเงินตราต่างประเทศล่วงหน้า (forward contract) เป็นสัญญาที่ทำขึ้นระหว่างสองฝ่ายเพื่อซื้อหรือขายสกุลเงินที่ระบุไว้ในสัญญาซื้อขาย ณ วันเวลาที่ระบุไว้ในอนาคต โดยที่สามารถตกลงเพื่อกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า (lock-in rate) ทั้งนี้เพื่อรับประกันว่าจะไม่ได้รับผลกระทบจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนในอนาคต อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าที่ทั้งสองฝ่ายตกลงกันนี้ เรียกว่า อัตราฟอร์เวิร์ด (forward rate) หรือ อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า

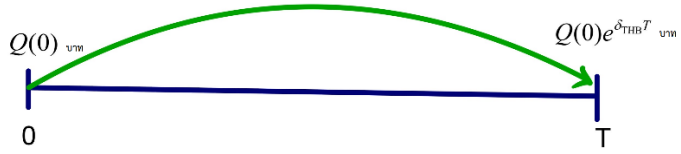
ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศเป็นเครื่องมือการบริหารจัดการความเสี่ยงทางการเงินที่สามารถใช้ในการปกป้องความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน ในลักษณะเดียวกับการใช้ฟอร์เวิร์ดในการปกป้องความเสี่ยงจากความผันผวนเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้น

ในบริบทของประเทศไทย ธนาคารแห่งประเทศไทย (bank of thailand) ทำหน้าที่ควบคุมดูแลอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราเพื่อไม่ให้เงินบาทแข็งค่าหรืออ่อนค่าอย่างรวดเร็ว ซึ่งอาจส่งผลกระทบต่อเศรษฐกิจของประเทศ ทั้งนี้ภาคธุรกิจและผู้ประกอบการสามารถใช้ฟอร์เวิร์ดเป็นเครื่องมือในการบริหารจัดการความเสี่ยงที่เกิดจากการแข็งค่าหรืออ่อนค่าของเงินบาทได้ การใช้ฟอร์เวิร์ดดังกล่าวมีลักษณะคล้ายกับการทำประกันราคาอัตราแลกเปลี่ยน เพื่อป้องกันความเสี่ยงที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต

พิจารณาการลงทุนในตราต่างประเทศ 2 สกุลใด ๆ สมมติให้เป็นสกุลบาทไทย(THB) และเงินสกุลต่างประเทศ (FRX) ให้ δ_{THB} และ δ_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องที่ปราศจากความเสี่ยงของเงินสกุลบาทไทย(THB) และเงินสกุลต่างประเทศ (FRX) ตามลำดับ พิจารณากลยุทธ์การ

ลงทุนต่อไปนี้ สำหรับเวลา $t = 0, T$ กำหนดอัตราแลกเปลี่ยนสกุลต่างประเทศกับสกุลบาทไทย เป็น $Q(t)$ บาท ต่อ 1 FRX

<u>กลยุทธ์ที่ 1</u> ลงทุน $Q(0)$ บาท กับโครงการลงทุนที่ได้รับอัตราดอกเบี้ย δ_{THB} เป็นเวลา T



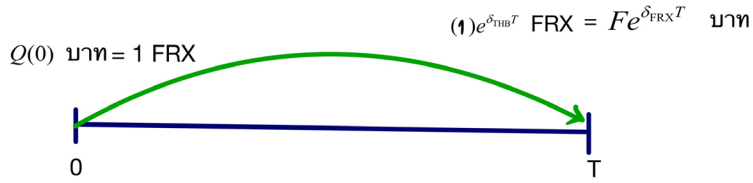
รูปที่ 10.4 *กระแสเงินสดจากการลงทุนตามกลยุทธ์ที่ 1 (ลงทุนในประเทศ)*

<u>กลยุทธ์ที่ 2</u> - ซื้อเงินตราต่างประเทศ 1 FRX ด้วยเงิน $Q(0)$ บาท และนำเงินในสกุลต่างประเทศไปลงทุนกับโครงการลงทุนที่ได้รับอัตราดอกเบี้ย δ_{FRX} เป็นเวลา T

- เปิดสถานะชอร์ตของสัญญาฟอร์เวิร์ดสำหรับแลกเปลี่ยนเงินสกุลต่างประเทศเป็นสกุลบาทไทย จำนวน $e^{\delta_{\text{FRX}}T}$ FRX โดยมีราคาฟอร์เวิร์ด F บาทต่อ 1 FRX และเวลาส่งมอบ T

<u>กลยุทธ์ที่ 2</u> - ซื้อเงินตราต่างประเทศ 1 FRX ด้วยเงิน $Q(0)$ บาท และนำเงินในสกุลต่างประเทศไปลงทุนกับโครงการลงทุนที่ได้รับอัตราดอกเบี้ย δ_{FRX} เป็นเวลา T

- เปิดสถานะชอร์ตของสัญญาฟอร์เวิร์ดสำหรับแลกเปลี่ยนเงินสกุลต่างประเทศเป็นสกุลบาทไทย จำนวน $e^{\delta_{\text{FRX}}T}$ FRX โดยมีราคาฟอร์เวิร์ด F บาทต่อ 1 FRX และเวลาส่งมอบ T



รูปที่ 10.5 *กระแสเงินสดจากการลงทุนตามกลยุทธ์ที่ 2 (ลงทุนในประเทศ)*

จะเห็นว่า ที่เวลา T ในกลยุทธ์ที่ 1 จะได้รับเงินในสกุลบาทไทยจำนวน $Q(0)e^{\delta_{\text{THB}}T}$ บาท ส่วนในกลยุทธ์ที่ 2 เป็นการลงทุนในสกุลเงินต่างประเทศซึ่งจะได้รับเงินในสกุลต่างประเทศ จำนวน $e^{\delta_{\text{FRX}}T}$

FRX และทำสัญญาฟอร์เวอร์สเพื่อแลกเปลี่ยน(เปิดสถานะชอร์ต)มาเป็นเงินสกุลบาทไทยด้วยอัตราแลกเปลี่ยน F บาทต่อ 1 FRX ดังนั้นจะได้รับเงินในสกุลบาทไทย เท่ากับ $Fe^{\delta_{\text{FRX}}T}$ บาท

เนื่องจากทั้งสองกลยุทธ์ลงทุนด้วยเงินปัจจุบันเท่ากัน คือ $Q(0)$ บาท หากการลงทุนทั้งสองกุลยุทธ์ปราศจากการค้ากำไร ดังนั้นมูลค่าอนาคตของการลงทุนที่เวลา T ควรจะต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$Q(0)e^{\delta_{\text{THB}}T} = Fe^{\delta_{\text{FRX}}T} \tag{10.1}$$

นั่นคือ ราคาฟอร์เวิร์ด F บาทต่อ 1 FRX (แลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นสกุลบาทไทย)

$$F = Q(0)e^{(\delta_{\text{THB}}-\delta_{\text{FRX}})T} \tag{10.2}$$

ตัวอย่างที่ 10.1 บริษัทผู้ผลิตไวน์ในฝรั่งเศสต้องการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อแลกเปลี่ยนเงินสกุลยูโรเป็นเงินสกุลดอลลาร์ในอีก 9 เดือนข้างหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับเงินฝากในเงินสกุลยูโรและดอลลาร์ เป็น 1.5% และ 2.0% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนยูโรและดอลลาร์ ณ ปัจจุบันเท่ากับ 1.10 ดอลลาร์ต่อ 1 ยูโร จงหาราคาฟอร์เวิร์ดดังกล่าว

วิธีทำ จากโจทย์จะเห็นว่าบริษัทผู้ผลิตไวน์ลงทุนซื้อวัตถุดิบเป็นเงินสกุลยูโรและรับเงินมาเป็นเงินสกุลดอลลาร์ ดังนั้นจึงต้องทำสัญญาฟอร์เวิร์ดแลกเปลี่ยนเงินดังกล่าวกับมาเป็นยูโรที่ราคาฟอร์เวิร์ด F ดอลลาร์ต่อ 1 ยูโร โดยสามารถคำนวณราคา F ได้จาก $F = Q(0)e^{(\delta_{\text{EUR}}-\delta_{\text{USD}})T}$

ในที่นี้ $Q(0) = 1.10$ (ดอลลาร์ต่อ 1 ยูโร), $\delta_{\text{EUR}} = 0.015$, $\delta_{\text{USD}} = 0.020$ และ

$T = 9/12 = 0.75$ จะได้ $F = 1.10e^{(0.015-0.020)0.75} \approx 1.096$

ดังนั้น ราคาฟอร์เวิร์ดดังกล่าวคือประมาณ 1.096 ดอลลาร์ต่อ 1 ยูโร □

10.3 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ (cross currency swap: CCY-swap) คือสัญญาทางการเงินที่ทำขึ้นระหว่างสองฝ่ายเพื่อแลกเปลี่ยนภาระการจ่ายเงินในสกุลเงินต่างๆ ภายในระยะเวลาที่กำหนด วัตถุประสงค์หลักคือการป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยน ตัวอย่างเช่น ฝ่ายหนึ่งที่เป็นคู่สัญญาจะจ่ายเงินในสกุลเงินบาทและรับเงินในสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ ขณะที่อีกฝ่ายหนึ่งที่เป็นคู่สัญญาจะรับเงินสกุลบาท และจ่ายเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐ ในวันและเวลาที่

ระบุไว้ในสัญญา ทั้งสองฝ่ายอาจแลกเปลี่ยนเงินสดทันทีในมูลค่าเท่ากัน โดยคำนวณจากอัตราแลกเปลี่ยนในวันที่ทำสัญญา

การแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดที่เกิดขึ้นอาจมีลักษณะดังนี้

1) แลกเปลี่ยนเฉพาะอัตราดอกเบี้ย เช่น แลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยลอยตัวสกุลเงินดอลลาร์กับอัตราดอกเบี้ยคงที่สกุลเงินยูโร

2) แลกเปลี่ยนเฉพาะเงินต้น ซึ่งคือการแลกเปลี่ยนเงินต้นในระยะเวลาที่ระบุไว้ในอนาคต สัญญาแลกเปลี่ยนในลักษณะดังกล่าวมีลักษณะคล้ายกับฟอร์เวิร์ดของอัตราแลกเปลี่ยน

3) แลกเปลี่ยนทั้งเงินต้นและดอกเบี้ยซึ่งคือการแลกเปลี่ยนเงินต้นและอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในระยะเวลาที่ระบุไว้ในอนาคต

อย่างไรก็ตาม การเรียกชื่อสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศขึ้นอยู่กับระยะเวลาที่ระบุไว้ในสัญญา สัญญาสวอปที่มีระยะเวลาไม่เกิน 3 เดือน โดยทั่วไปเรียกว่า สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยน (foreign currency swap: FX-swap) ในขณะที่สัญญาสวอปที่มีระยะเวลามากกว่า 3 เดือน เรียกว่า สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ (cross currency swap: CCY-swap)

10.2.1 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยน (FX-swap)

สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยน (FX-swap) เป็นสัญญาทางการเงินที่มีวัตถุประสงค์ในการแลกเปลี่ยนสกุลเงินและกำหนดคืนสกุลเงินเหล่านั้นในวันที่ระบุไว้ในอนาคต ตามอัตราแลกเปลี่ยนที่ได้ตกลงกันล่วงหน้า ณ วันออกสัญญา นั่นคือ มีการแลกเปลี่ยนสกุลเงินสองครั้ง ครั้งแรกที่เวลาปัจจุบัน (spot rate) และครั้งที่สองในวันที่กำหนดในอนาคต (forward rate) การทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนจะมีประโยชน์ในหลายสถานการณ์ เช่น บริษัทที่มีรายได้หรือค่าใช้จ่ายในสกุลเงินต่างประเทศสามารถใช้สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเพื่อลดความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยน โดยทั่วไประยะเวลาของสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยน (FX-swap) จะไม่เกิน 3 เดือน หากมากกว่านั้น มักจะเรียกว่า cross currency swap

สวอปอัตราแลกเปลี่ยน หรือ FX-swap เป็นสัญญาแลกเปลี่ยนระยะสั้นอายุไม่เกิน 3 เดือน เป็นสัญญาซึ่งคู่สัญญาจะทำการแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิง (notional principal, N) ต่างสกุลเงินกันของคู่สัญญา ณ วันออกสัญญา (issue date) ที่อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot exchange rate, S_0) และที่เวลาครบกำหนดสัญญา คู่สัญญาจะแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิงกลับด้วยอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า (forward exchange rate, f_0)

พิจารณาการลงทุนในตราต่างประเทศ 2 สกุลใด ๆ เพื่อความเข้าใจง่าย สมมติให้เป็นสกุลบาทไทย(THB) แทนเงินสกลุลภายในประเทศ และเงินสกุลต่างประเทศ (FRX) กำหนดอัตราแลกเปลี่ยนสกุลต่างประเทศกับสกุลบาทไทย เป็น S_0 บาท ต่อ 1 FRX และ N_{THB} เป็นจำนวนเงินต้นอ้างอิงในเงินสกุลบาท ซึ่งมีค่าเท่ากับเงินจำนวนต้นอ้างอิง N_{FRX} ในเงินสกุล FRX นั่นคือ

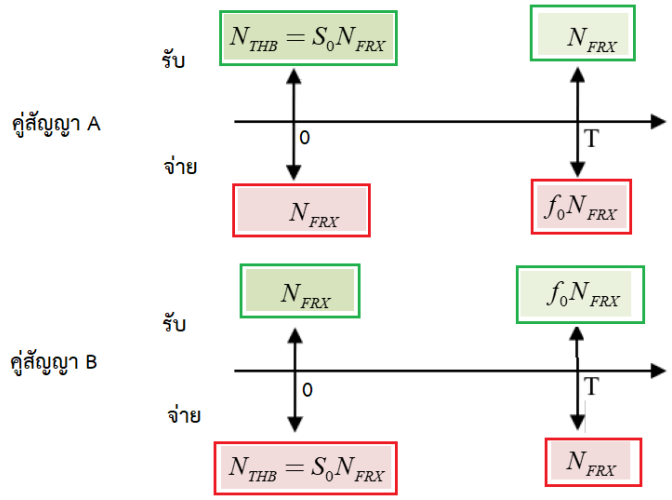
$$S_0 = \frac{N_{THB}}{N_{FRX}} \quad \Rightarrow \quad N_{THB} = S_0 N_{FRX} \tag{10.3}$$

และจากสมการ (10.2) ถ้า r_{THB} และ r_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงที่สมนัยกับอัตราดอกเบียทบต้นต่อเนื่องที่ปราศจากความเสี่ยง δ_{THB} และ δ_{FRX} ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า

$$f_0 = S_0 e^{(\delta_{\text{THB}} - \delta_{FRX})T} = S_0 \left(\frac{1 + r_{THB}}{1 + r_{FRX}} \right)^T \tag{10.4}$$

โดย ที่เวลาปัจุบัน $t = 0$ (ณ วันออกสัญญา) คู่สัญญา a จะทำการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดโดยจ่ายเงิน N_{FRX} FRX และรับเงินจำนวน $S_0 N_{FRX}$ บาท จากคู่สัญญา b

ที่เวลา $t = T$ (ณ วันครบกำหนดสัญญา) คู่สัญญา a จะทำการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดโดยรับเงินจำนวน N_{FRX} FRX บาทและจ่ายเงิน $f_0 N_{FRX}$ บาท แก่คู่สัญญา b ซึ่งธุรกรรมดังกล่าวแสดงตามแผนภาพในรูปที่ 10.6



รูปที่ 10.6 *การแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างคู่สัญญา a และคู่สัญญา b ของสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยน*

จากรูปที่ 10.6 สามารถสร้างตารางการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างคู่สัญญา a และคู่สัญญา b ได้ ดังนี้

ตารางที่ 10.1 *กระแสเงินสดรับจ่ายของสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนของคู่สัญญา a และ b*

	$t=0$		$t=T$	
	รับ	จ่าย	รับ	จ่าย
คู่สัญญา a	$N_{THB} = S_0 N_{FRX}$	N_{FRX}	N_{FRX}	$f_0 N_{FRX}$
คู่สัญญา b	N_{FRX}	$N_{THB} = S_0 N_{FRX}$	$f_0 N_{FRX}$	N_{FRX}

โดยทั่วไปเพื่อเป็นการป้องกันความผันผวนจากอัตราแลกเปลี่ยนที่จะเกิดขึ้นจริงในอนาคต ในทางปฏิบัติจึงนิยมบวกส่วนต่างอัตราดอกเบี้ย (spread rate) α ในฝั่ง FRX ด้วย ดังนั้นอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าจึงถูกปรับแต่งเป็น

$$f_0^{\alpha} = S_0 \left(\frac{1 + r_{THB}}{1 + r_{FRX} + \alpha} \right)^T \tag{10.5}$$

ตัวอย่างที่ 10.2 สมมติว่าในวันที่ 1 มกราคม ค.ศ.2020 นายเอมีเงินในบัญชีเงินตราต่างประเทศ (foreign currency deposit: FCD) จำนวน 1 ล้าน ดอลลาร์สหรัฐ โดยในอีก 2 เดือนข้างหน้าจะต้องโอนเงินจำนวนนี้ให้แก่คู่ค้าในต่างประเทศ แต่ในปัจจุบันลูกค้ามีความต้องการนำสภาพคล่องจากบัญชี FCD มาใช้ แต่ในขณะเดียวกันก็กังวลเรื่องความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน ดังนั้นนายเอจึงใช้ FX-swap เป็นเครื่องมือในการบริหารกระแสเงินสดและบริหารความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน โดยในวันที่ 1 มกราคม นายเอติดต่อขอทำ FX swap อายุ 2 เดือน (spot / 2 month FX swap) กับธนาคาร ด้วยเงินต้นอ้างอิง $N_{US} = 1,000,000$ ดอลลาร์สหรัฐ สมมติอัตราแลกเปลี่ยน ณ วันที่ 1 มกราคม คือ 1 ดอลลาร์สหรัฐ เท่ากับ 35.69 บาท ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปีสำหรับเงินฝากในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดาลลาร์ เป็น 2.5 % และ 3.5% ตามลำดับ จงสร้างตารางกระแสเงินสดสำหรับการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดจากสัญญาสวอปดังกล่าวระหว่างนายเอ กับ ธนาคาร

วิธีทำ จากข้อมูลคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าได้

$$f_0 = S_0\left(\frac{1+r_{THB}}{1+r_{FRX}}\right)^T = 35.69\left(\frac{1.025}{1.035}\right)^{2/12} = 35.6323 \text{ บาท ต่อ 1 ดอลลาร์}$$

ตารางที่ 10.2 *กระแสเงินสดของสัญญาสวอปของคู่สัญญา a*

วันที่	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
1-ม.ค.-20	+35.5900	-1
1-มี.ค.-20	-35.6323	+1

ตารางที่ 10.3 *กระแสเงินสดของสัญญาสวอปของคู่สัญญาธนาคาร*

วันที่	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
1-ม.ค.-20	-35.5900	+1
1-มี.ค.-20	+35.6323	-1

ตารางที่ 10.4 *กระแสเงินสดรวมของคู่สัญญา a และ ธนาคาร*

	1-ม.ค.-20 ($t=0$)		1-มี.ค.-20 ($t=T$)	
	รับ	จ่าย	รับ	จ่าย
คู่สัญญา a	1,000,000(35.69) =35,690,000฿	1,000,000$	1,000,000$	35.6323(1,000,000) =35,632,300฿
ธนาคาร	1,000,000$	1,000,000(35.69) =35,690,000฿	35.6323(1,000,000) =35,632,300฿	1,000,000$

จากตาราง จะเห็นว่านายเอมีเงินสำหรับเสริมสภาพคล่องจากบัญชี FCD มาใช้ 35,690,000 บาท และได้ผลประโยชน์จากการทำการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดจากการทำสัญญาสวอปเท่ากับ 35,690,000-35,632,300=57,700 บาท □

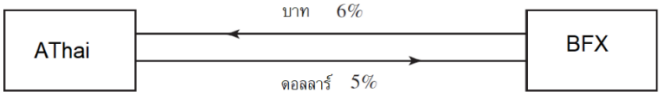
10.2.2 สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ หรือ cross currency swap เป็นสัญญาการแลกเปลี่ยนเงินต้นและการชำระดอกเบี้ยระหว่างสกุลเงินสองสกุลระหว่างคู่สัญญา ซึ่งตกลงทำสัญญาในปัจจุบัน ภายในสัญญาจะระบุอายุของสัญญา และข้อตกลงที่คู่สัญญาทั้งสองฝ่ายจะชำระดอกเบี้ยแก่กันในช่วงเวลาที่กำหนด (เช่น ทุกๆ 6 เดือน หรือทุกๆ 1 ปี) การชำระดอกเบี้ยนี้มักจะเป็นที่คงที่แต่ก็สามารถเป็นที่แปรผันได้ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับข้อตกลงที่ระบุไว้ในสัญญา เราสามารถพิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ เป็นการประกอบกันของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย (interest rate swap) 2 สัญญาของสกุลเงินที่แตกต่างกันของคู่สัญญารวมกับสัญญาการแลกเปลี่ยนเงินต้น ณ วันสิ้นสุดสัญญา สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศมักจะใช้ในการจัดการความเสี่ยงทางด้านค่าเงินและดอกเบี้ย หรือเพื่อสร้างเสถียรภาพในการถือครองเงินตราในสกุลเงินต่าง ๆ ที่มีความประสิทธิภาพ เช่น ธุรกิจที่มีความเสี่ยงจากการเปลี่ยนค่าเงินอาจจะใช้สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ เพื่อลดความเสี่ยงที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนไหวของอัตราแลกเปลี่ยนได้ ในที่นี้สามารถพิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศที่มีอายุมากกว่า 3 เดือน และมีการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดมากกว่า 1 ครั้ง ตามที่ระบุในสัญญาได้ เพื่อความเข้าใจที่มากขึ้นขอให้ผู้อ่านศึกษาสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศในแต่ละกรณีจากตัวอย่าง

10.2.2.1 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่

สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่ (fixed-for-fixed currency swap) เป็นสัญญาที่สองฝ่ายตกลงที่จะแลกเปลี่ยนเงินทุน หรือเงินต้น (principal) และการชำระดอกเบี้ยอัตราคงที่ในแต่ละสกุลเงินที่ระบุในสัญญา ในสัญญาสวอปทั่วไปทั้งสองฝ่ายจะแลกเปลี่ยนเงินทุนในตอนเริ่มต้นและสิ้นสุดของสัญญา และจะชำระดอกเบี้ยให้กับกันและกันตามระยะเวลาที่กำหนด สัญญาสวอปอัตราคงที่แลกอัตราคงที่นั้นเป็นวิธีที่บริษัทสามารถจัดการกับความเสี่ยงด้านค่าเงินตราต่างประเทศและความเสี่ยงด้านดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นในอนาคตได้

ตัวอย่างที่ 10.3 พิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี ระหว่างบริษัท AThai และบริษัท BFX ซึ่งเริ่มต้นในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2020 สมมุติว่า AThai จ่ายดอกเบี้ยคงที่ 5% ด้วยสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) และรับดอกเบี้ยคงที่ 6% ด้วยสกุลเงินบาท (THB) จาก BFX กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี และกำหนดเงินต้นในสกุลบาทและสกุลดอลลาร์เป็น 32 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ ตามลำดับ



รูปที่ 10.7 *สัญญาสวอป fixed-for-fixed currency swap ระหว่าง AThai กับ BFX*

การเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 10.5 *กระแสเงินสดของสัญญา AThai (สีเขียว) และ BFX (สีฟ้า) เครื่องหมาย รับ(+) จ่าย (-)*

วันที่	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดสกุลดอลลาร์ (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
1 ก.พ. 20	-32	+1	+32	-1
1 ก.พ. 21	+1.6	-0.05	-1.6	+0.05
1 ก.พ. 22	+1.6	-0.05	-1.6	+0.05
1 ก.พ. 23	+1.6	-0.05	-1.6	+0.05
1 ก.พ. 24	+1.6	-0.05	-1.6	+0.05
1 ก.พ. 25	+33.6	-1.05	-33.6	+1.05

ในสัญญานี้บริษัท AThai จ่ายเงิน 32 ล้านบาทเพื่อแลกรับเงิน 1 ล้านดอลลาร์ในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2020 หลังจากนั้นในแต่ละปีถัดมา AThai จะรับดอกเบี้ย 6% (ของสกุลบาท) จาก BFX ซึ่งเท่ากับ $6\% \times 32 = 1.6$ ล้านบาทและจะจ่ายดอกเบี้ย 5% (ของสกุลดอลลาร์) ให้ BFX ซึ่งเท่ากับ $5\% \times 1 = 0.05$ ล้านดอลลาร์ เรื่อยๆ ไปจนถึงงวดสุดท้าย และในงวดสุดท้าย คือ วันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2025 AThai จะรับเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ $6\% \times 32 + 32 = 33.6$ ล้านบาทและจะชำระเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ $5\% \times 1 + 1 = 1.05$ ล้านดอลลาร์ จะเห็นว่าการทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศนี้ช่วยให้ AThai สามารถจัดการความเสี่ยงด้านอัตราแลกเปลี่ยนและดอกเบี้ยในการดำเนินธุรกิจที่มีความเกี่ยวข้องกับสกุลเงินดอลลาร์ได้

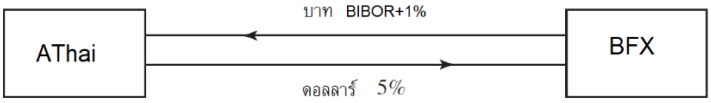
□

10.2.2.2 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว

สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว (fixed-for-floating currency swap) เป็นสัญญาที่คู่สัญญาฝ่ายหนึ่งสัญญาจะชำระดอกเบี้ยที่คำนวณจากเงินต้นอ้างอิงและอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed)ในเงินสกุลหนึ่ง ในขณะที่คู่สัญญาอีกฝ่ายหนึ่งจะชำระดอกเบี้ยที่คำนวณจากเงินต้นอ้างอิงและอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating) ในเงินอีกสกุลหนึ่ง ตัวอย่างเช่น บริษัท a ตั้งอยู่ที่สหรัฐฯ และได้กู้เงินในอัตราดอกเบี้ยคงที่ในสหรัฐฯ ในขณะที่บริษัท b ที่ตั้งอยู่ในประเทศไทยกู้เงินในอัตราดอกเบี้ยลอยตัวซึ่งเปลี่ยนแปลงตามตลาด (floating rate) ในประเทศไทย บริษัท a และ b สามารถตกลงทำสัญญาสวอปเพื่อแลกเปลี่ยนการชำระดอกเบี้ยตามที่กำหนดไว้ ในสัญญาสวอปนี้ บริษัท a จะชำระดอกเบี้ยในอัตราคงที่และรับดอกเบี้ยในอัตราที่เปลี่ยนแปลงตามตลาดจากบริษัท b ส่วนบริษัท b จะชำระดอกเบี้ยในอัตราที่เปลี่ยนแปลงตามตลาดและรับดอกเบี้ยในอัตราคงที่จากบริษัท a สัญญาสวอปอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัวเป็นวิธีที่บริษัทสามารถจัดการกับความเสี่ยงด้านค่าเงินตราต่างประเทศและความเสี่ยงด้านดอกเบี้ยได้

ตัวอย่างที่ 10.4 พิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี ระหว่างบริษัท AThai และบริษัท BFX ซึ่งเริ่มต้นในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2020 สมมุติว่า AThai จ่ายดอกเบี้ยคงที่ 5% ด้วยสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) และรับดอกเบี้ยลอยตัวในอัตรา BIBOR+1% ในสกุลเงินบาท

จาก BFX กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี สมมติว่า BIBOR ในแต่ละปีคือ 3%, 4.5%, 2.5%, 5%, และ 3.5% ตามลำดับ และกำหนดเงินต้นในสกุลบาทและสกุลดอลลาร์เป็น 34 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ ตามลำดับ



รูปที่ 10.8 *สัญญาสวอป fixed-for-floating currency swap ระหว่าง AThai กับ BFX*

การเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 10.6 *กระแสเงินสดของสัญญา AThai (สีเขียว) และ BFX (สีฟ้า)เครื่องหมายรับ(+) จ่าย (-)*

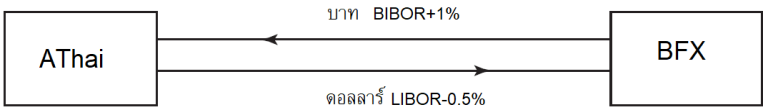
วันที่	BIBOR+1%	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
1 ก.พ. 20	-	-34	+1	+34	-1
1 ก.พ. 21	4%	+1.02	-0.05	-1.02	0.05
1 ก.พ. 22	5.50%	+1.53	-0.05	-1.53	0.05
1 ก.พ. 23	3.50%	+1.02	-0.05	-1.02	0.05
1 ก.พ. 24	6%	+2.04	-0.05	-2.04	0.05
1 ก.พ. 25	4.50%	+1.53+34=+35.53	-1.05	-1.53-34=-35.53	0.05+1=1.05

ในสัญญานี้บริษัท AThai จ่ายเงิน 34 ล้านบาทเพื่อแลกรับเงิน 1 ล้านดอลลาร์ในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2020 หลังจากนั้นในแต่ละปีถัดมา AThai จะรับดอกเบี้ยลอยตัว BIBOR+1% (ของสกุลบาท) จาก BFX ซึ่งเท่ากับ (BIBOR+1%)×34 ล้านบาทและจะจ่ายดอกเบี้ย 5% (ของสกุลดอลลาร์) ให้ BFX ซึ่งเท่ากับ $5\% \times 1 = 0.05$ ล้านดอลลาร์ เรื่อยๆ ไปจนถึงงวดสุดท้าย และในงวดสุดท้าย คือ วันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2025 AThai จะรับเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ (BIBOR+1%)×34 +34 = 35.53 ล้านบาทและจะชำระเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ $5\% \times 1 + 1 = 1.05$ ล้านดอลลาร์ จะเห็นว่าการทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศนี้ช่วยให้ AThai สามารถจัดการความเสี่ยงด้านอัตราแลกเปลี่ยนและดอกเบี้ยในการดำเนินธุรกิจที่มีความเกี่ยวข้องกับสกุลเงินดอลลาร์ได้ □

10.2.2.3 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราลอยตัวแลกอัตราลอยตัว

สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราลอยตัวแลกอัตราลอยตัว (floating-for-floating currency swap) เป็นสัญญาที่ทั้งสองฝ่ายจะเป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัวเพื่อชำระให้แก่ฝ่ายตรงข้าม โดยอัตราดอกเบี้ยลอยตัวนั้นมักจะถูกเชื่อมโยงกับตัวชี้วัดทางเศรษฐกิจ หรือดัชนีอัตราดอกเบี้ยที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย อาทิ เช่น LIBOR หรือ EURIBOR ตัวอย่างเช่น บริษัท a มีสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยลอยตัวกับบริษัท b ที่เกี่ยวข้องกับเงินสกุลดอลลาร์และสกุลบาท โดยทั้งสองฝ่ายตกลงว่า บริษัท a จะชำระดอกเบี้ยให้บริษัท b ตามอัตราดอกเบี้ยลอยตัว LIBOR + 2% ของในสกุลดอลลาร์ ในขณะที่บริษัท b จะชำระดอกเบี้ยให้บริษัท a ตามอัตราดอกเบี้ยลอยตัว BIBOR + 2% ของในสกุลบาท ลักษณะสำคัญของสัญญาสวอปชนิดนี้คือ คือ การคำนวณดอกเบี้ยตามดอกเบี้ยลอยตัว ทำให้เกิดความเสี่ยงด้านอัตราดอกเบี้ยที่สูงขึ้น แต่สามารถช่วยให้มีความสามารถในการแข่งขันได้ดีขึ้นและความยืดหยุ่นในการจัดการความเสี่ยงทางด้านการเงิน

ตัวอย่างที่ 10.5 พิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี ระหว่างบริษัท AThai และบริษัท BFX ซึ่งเริ่มต้นในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2020 สมมุติว่า AThai จ่ายดอกเบี้ยลอยตัว LIBOR-0.5% ในสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) และรับดอกเบี้ยลอยตัวในอัตรา BIBOR+1% ในสกุลเงินบาท จาก BFX กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี สมมติว่า BIBOR ในแต่ละปีคือ 3%, 4.5%, 2.5%, 5%, และ 3.5% ตามลำดับ และ LIBOR ในแต่ละปีคือ 3.5%, 5.5%, 4.5%, 3.5%, และ 4.5% และกำหนดเงินต้นในสกุลบาทและสกุลดอลลาร์เป็น 34 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ ตามลำดับ



รูปที่ 10.9 *สัญญาสวอป floating -for-floating currency swap ระหว่าง AThai กับ BFX*

การเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่10.7 *กระแสเงินสดของสัญญา AThai (สีเขียว)และ BFX (สีฟ้า) เครื่องหมาย รับ(+) จ่าย (-)*

วันที่	BIBOR+1%	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)	LIBOR-0.5%	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
1 ก.พ. 20	-	-34	+1	-	+34	-1
1 ก.พ. 21	4%	+1.02	-0.03	3%	-1.02	0.03
1 ก.พ. 22	5.50%	+1.53	-0.05	5%	-1.53	0.05
1 ก.พ. 23	3.50%	+1.02	-0.04	4%	-1.02	0.04
1 ก.พ. 24	6%	+2.04	-0.03	3%	-2.04	0.03
1 ก.พ. 25	4.50%	+1.53+34=+35.53	-1.04	4%	-1.53-34=-35.53	0.04+1=1.04

ในสัญญานี้บริษัท AThai จ่ายเงิน 34 ล้านบาทเพื่อแลกรับเงิน 1 ล้านดอลลาร์ในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2020 หลังจากนั้นในแต่ละปีถัดมา AThai จะรับดอกเบี้ยลอยตัว BIBOR+1% (ของสกุลบาท) จาก BFX ซึ่งเท่ากับ (BIBOR+1%)×34 ล้านบาทและจะจ่ายดอกเบี้ย LIBOR-0.5% (ของสกุลดอลลาร์) ให้ BFX ซึ่งเท่ากับ (LIBOR-0.5%)×1 = 0.05 ล้านดอลลาร์ เรื่อยๆ ไปจนถึงงวดสุดท้าย และในงวดสุดท้าย คือ วันที่ 1 กุมภาพันธ์ 2025 AThai จะรับเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ (BIBOR+1%)×34 +34 = 35.53 ล้านบาทและจะชำระเงินต้นและดอกเบี้ยงวดสุดท้ายที่เท่ากับ (LIBOR-0.5%)×1+1 = 1.04 ล้านดอลลาร์ จะเห็นว่าการทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศนี้ช่วยให้ AThai สามารถจัดการความเสี่ยงด้านอัตราแลกเปลี่ยนและดอกเบี้ยในการดำเนินธุรกิจที่มีความเกี่ยวข้องกับสกุลเงินดอลลาร์ได้ □

10.4 ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ

การเข้าใจปรากฏการณ์ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบจะช่วยให้เราเข้าใจถึงประโยชน์ของสัญญาสวอปได้มากขึ้น ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ (comparative advantage) ในที่นี้หมายถึงสถานการณ์ที่บริษัท a และ b สามารถขอกู้ยืมเงินในสกุลเงินที่แตกต่างกันด้วยอัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกัน ยกตัวอย่างเช่น บริษัท a อาจขอกู้ยืมเงินในสกุลดอลลาร์ (USD) ด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำกว่าสกุลบาท (THB) ในขณะที่บริษัท b อาจขอกู้ยืมเงินในสกุลบาทด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำกว่าสกุลดอลลาร์ ในสถานการณ์นี้ บริษัท a และ b สามารถทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศระหว่างกัน

ได้ ด้วยการที่ a จะขอกู้ยืมเงินในสกุลดอลลาร์ และแลกเปลี่ยนเป็นบาท (THB) ให้กับ b และ b จะขอกู้ยืมเงินในสกุลบาท และแลกเปลี่ยนเป็นดอลลาร์ ให้กับ a และเมื่อเวลาครบกำหนดการจ่ายคืนเงินกู้ ทั้งสองบริษัทจะแลกเปลี่ยนสกุลเงินกลับไปดังเดิม ผลสุดท้ายคือทั้งสองบริษัทจะได้ขอกู้ยืมเงินในสกุลเงินที่ต้องการ และด้วยอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำกว่าหากแต่ละบริษัทไปขอกู้ยืมเองโดยตรง การทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ ทำให้ทั้งสองบริษัทสามารถขอกู้ยืมจากตลาดที่มีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในด้านอัตราดอกเบี้ย และเมื่อมีการแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศกันแต่ละฝ่ายจะได้รับประโยชน์จากการแลกเปลี่ยนที่ดีขึ้น การกระทำนี้จะช่วยให้ทั้งสองบริษัทสามารถลดความเสี่ยงและค่าใช้จ่ายในการกู้ยืมเงินได้

หากเปรียบเทียบระหว่างอัตราดอกเบี้ยในสกุลเงินภายในประเทศและอัตราดอกเบี้ยในสกลุลเงินต่างประเทศระหว่างผู้กู้ 2 ฝ่ายใดๆ การกำหนดอัตราดอกเบี้ยซึ่งถูกใช้เป็นราคาของเงินกู้ตามเครดิตของผู้กู้นั้น ๆ อาจเป็นระดับอัตราดอกเบี้ยที่ไม่สมดุลกันก็ได้ ความไม่สมดุลของอัตราดอกเบี้ยตามระดับเครดิตดังกล่าวก่อให้เกิดความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ (comparative advantage argument) ของดอกเบี้ยของทั้ง 2 ฝ่ายได้ ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบจากสัญญาสวอป สามารถอธิบายได้ดังนี้

พิจารณาเช่นเดียวกับสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยสามารถใช้ได้เมื่อคู่สัญญามีข้อได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมในตลาดภายในประเทศ ในขณะที่อีกฝ่ายมีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมในตลาดต่างประเทศ คู่สัญญาจะได้ประโยชน์ร่วมกันคือการทำให้ต้นทุนการกู้ยืมของทั้ง 2 ฝ่ายลดต่ำลง ผลประโยชน์สุทธิ (net gain) ที่เกิดขึ้นจากความสมดุลของอัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นระหว่างอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศและดอกเบี้ยในต่างประเทศ โดยที่

$$\textit{ผลประโยชน์สุทธิที่เกิดขึ้นกับทั้ง 2 ฝ่าย} = |a-b| \tag{10.6}$$

เมื่อ a เป็นส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ และ b เป็นส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยในต่างประเทศ

ตัวอย่างที่ 10.6 สมมติว่าอัตราการกู้ยืมเงินในสกุลเงินดอลลาร์และบาทของบริษัท a และ b คือ การกู้ยืมอัตราสกุลเงินบาท 7.00% และ 9.00% ตามลำดับ และอัตราการกู้ยืมสกุลเงินดอลลาร์ คือ 5.00% และ 5.60% ตามลำดับ สมมติว่า บริษัท a มีภาระหนี้ที่ต้องชำระในสกุลเงินบาท ที่อัตราดอกเบี้ย 7% ต่อปี ในขณะที่บริษัท b มีภาระหนี้ที่ต้องชำระในสกุลดอลลาร์ที่อัตราดอกเบี้ย 5.60% ต่อปี ทั้งสองบริษัทต้องการใช้สัญญาสวอปอัตราเงินตราต่างประเทศอายุสัญญา 5 ปี เพื่อทำให้ทั้ง 2 บริษัทมีต้นทุนในการกู้ยืมที่ต่ำลง กำหนดเงินต้นอ้างอิงที่จะแลกเปลี่ยนตามสัญญาสวอปเท่ากับ 30 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ ที่อัตราแลกเปลี่ยปัจจุบัน 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์

จากข้อมูลดังกล่าวเมื่อวิเคราะห์ความได้เปรียบเชิงการเปรียบเทียบของอัตราดอกเบี้ยระหว่างบริษัท a และ ระหว่างบริษัท b ซึ่งแสดงการเปรียบเทียบได้ดัง ตารางที่ 10.8

ตารางที่ 10.8 *การได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบของบริษัท a และบริษัท b* สีเขียวแสดงดอกเบี้ยที่ได้เปรียบเชิงการเปรียบเทียบ

ชื่อบริษัท	บริษัท a	บริษัท b	ส่วนต่างอัตราดอกเบี้ย
อัตราดอกเบี้ย (สกุลบาท)	7.00%	9.00%	2%
อัตราดอกเบี้ย (สกุลดอลลาร์)	5.00%	5.60%	0.6%

จากตารางที่ 10.8 คำนวณส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยแต่ละประเภทของแต่ละบริษัท พบว่า ส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยในสกุลบาทของทั้ง 2 บริษัท เท่ากับ

$$\text{rate (b)- rate (a)} = 9\ \% - 7\ \% = 2\ \%$$

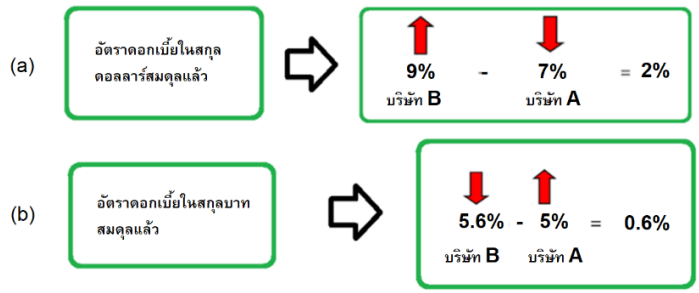
ส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของทั้ง 2 บริษัท เท่ากับ

$$\text{rate (b)- rate (a)} = 5.60\% - 5.00\% = 0.6\ \%$$

จะเห็นว่าส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยของอัตราดอกเบี้ยทั้ง 2 สกุลเงินของ 2 บริษัทนั้นไม่เท่ากัน เหตุการณ์ในลักษณะเช่นนี้อาจกล่าวได้ว่าการกำหนดราคาหรืออัตราดอกเบี้ยระหว่างอัตราดอกเบี้ยคงที่กับดอกเบี้ยของทั้ง 2 บริษัทเกิดความไม่สมดุลกันตามระดับคะแนนเครดิตที่แตกต่างกันส่งผลให้เกิดความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบของดอกเบี้ยแต่ละประเภท ซึ่งสามารถพิจารณาได้ดังนี้

หากพิจารณาว่าการกำหนดอัตราดอกเบี้ยในสกุลบาทของทั้ง 2 บริษัทอยู่ในระดับที่สมดุล คือ ระดับอัตราดอกเบี้ยสอดคล้องกับระดับคะแนนเครดิตของทั้ง 2 ฝ่ายแล้ว นั่นแสดงว่าอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท a สูงเกินไป หรือ อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของ

บริษัท b ต่ำเกินไป ถ้าเป็นเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท b ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบมากกว่า อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท a ดังนั้น บริษัท b สามารถกู้ยืมอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ได้ต่ำกว่าโดยเปรียบเทียบ



รูปที่ 10.10 *(a) ในกรณีที่สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยสกุลดอลลาร์ของทั้ง 2 ฝ่ายสมดุล อัตราดอกเบี้ยสกุลบาทของบริษัท a ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบกว่าอัตราดอกเบี้ยสกุลบาทของบริษัท b*

(b) ในกรณีที่สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยสกุลบาทของทั้ง 2 ฝ่ายสมดุล อัตราดอกเบี้ยในดอลลาร์ของบริษัท b ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบกว่าอัตราดอกเบี้ยดอลลาร์ของบริษัท a

ในทางกลับกันหากพิจารณาว่า การกำหนดอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของทั้ง 2 บริษัทอยู่ในระดับที่สมเหตุสมผล คือ ระดับอัตราดอกเบี้ยสอดคล้องกับระดับคะแนนเครดิตของทั้ง 2 ฝ่ายแล้ว นั่นแสดงว่าอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท b สูงเกินไป หรือ อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท a ต่ำเกินไป ถ้าเป็นเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท a ได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบมากกว่า อัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ของบริษัท b ดังนั้น บริษัท b สามารถกู้ยืมอัตราดอกเบี้ยในสกุลดอลลาร์ได้ต่ำกว่าโดยเปรียบเทียบ

จากการวิเคราะห์ความได้เปรียบของอัตราดอกเบี้ย พบว่า บริษัท a มีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมเงินสกุลเงินบาท ส่วนบริษัท b จะมีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมเงินสกุลเงินดอลลาร์ โดยสมมติว่าทั้ง 2 บริษัทตกลงทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศอายุสัญญา 5 ปี โดยมีธนาคารเป็นตัวกลางทางการเงิน โดยธนาคารเรียกเก็บค่าบริการฝั่งสกุลเงินบาท 0.6% ต่อปีและฝั่งสกุลเงินบาท 0.4% ต่อปี และทั้ง 2 บริษัทปฏิบัติตามข้อตกลง ดังนี้

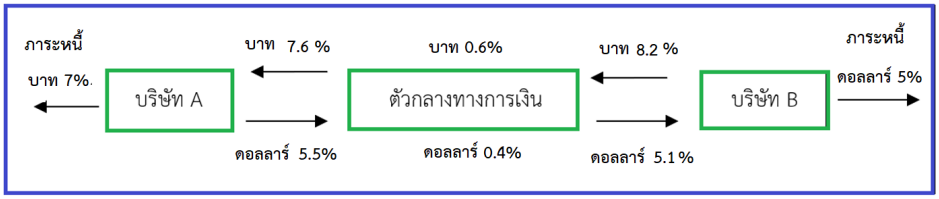
1) กำหนดเงินต้นอ้างอิงสกุลบาท เท่ากับ 30 ล้านบาท และ เงินต้นอ้างอิงสกุลดอลลาร์ 1,000,000 บาท (อ้างอิงจากอัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบันอยู่ที่ 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์) โดยสมมติว่ามีการแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิง ณ วันทำสัญญางวดที่ 0 และวันสิ้นสุดสัญญางวดที่ 5

2) เพื่อให้ตรงกับสกุลเงินที่ทั้ง 2 บริษัทต้องการ ทั้งสองบริษัทตกลงจ่ายดอกเบี้ยเพื่อแลกรับดอกตามสกุลเงินที่ต้องการ ดังนี้

2.1) บริษัท a จ่ายดอกเบี้ย 5.5%ต่อปีในสกุลดอลลาร์กับธนาคาร เพื่อแลกรับดอกเบี้ย 7.6% ต่อปีในสกุลบาท ทุกสิ้นปี จำนวน 5 งวด

2.2) บริษัท b จ่ายดอกเบี้ย 8.2% ต่อปีในสกุลบาท กับธนาคาร เพื่อแลกกับการได้รับเงินดอลลาร์ 5.6% ต่อปีในสกุลบาท ทุกสิ้นปี จำนวน 5 งวด

การแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยตามสัญญาสวอปสามารถแสดงได้ดัง รูปที่ 10.11



รูปที่ 10.11 *อัตราดอกเบี้ยและสกุลเงินที่เกิดตามสัญญาสวอปของอัตราแลกเปลี่ยน*

จากรูปที่ 10.11 ทั้งบริษัท a และ b สามารถสร้างตารางของกระแสเงินสดที่เกิดขึ้น ดังนี้

ตารางที่ 10.6 *กระแสเงินสดของสัญญาสวอป a (สีเขียว)และ b (สีฟ้า) เครื่องหมาย รับ(+) จ่าย (-)*

งวดที่	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดสกุลดอลลาร์ (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลบาท (ล้าน)	กระแสเงินสดในสกุลดอลลาร์ (ล้าน)
0	-30	+1	+30	-1
1	+2.28	-0.055	-2.46	+0.056
2	+2.28	-0.055	-2.46	+0.056
3	+2.28	-0.055	-2.46	+0.056
4	+2.28	-0.055	-2.46	+0.056
5	+32.28	-1.055	-32.46	+1.056

จากที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบจากสัญญาสวอปสามารถใช้ในการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยหรืออัตราแลกเปลี่ยนเงินตราแต่ละสกุลได้ โดยทำให้ต้นทุนเงินทุนของการกู้ยืมแต่ละฝ่ายลดลง □

10.5 ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย

ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย (interest rate parity) หมายถึง ภาวะที่ส่งผลให้ไม่สามารถทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยงจากการแลกเปลี่ยนสกุลเงินในสองประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยต่างกันได้ เป็นสถานการณ์ของความสมดุลภายในตลาดเงิน ที่ไม่มีความแตกต่างระหว่างอัตราดอกเบี้ยของเงินฝากในสองประเทศ ในความเป็นจริงความสมดุลนี้อาจไม่เกิดขึ้นอยู่ตลอดเวลา จึงเปิดโอกาสให้นักลงทุนสามารถทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยง ด้วยการใช้ผลประโยชน์จากอัตราดอกเบี้ยและการป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน สำหรับความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยจะเกิดขึ้นได้เมื่อ 2 เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง 1) ความเคลื่อนไหวได้ของเงินทุน และ 2) ความสามารถในการแทนที่สินทรัพย์ของประเทศต่างๆ นักลงทุนจึงไม่สามารถทำกำไรจากการกู้ยืมเงินในประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยต่ำ แล้วนำไปแลกเป็นสกุลเงินต่างประเทศและลงทุนในประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยสูงขึ้นได้

ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยมี 2 รูปแบบหลัก ได้แก่

1) ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ไม่ได้ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน (uncovered interest rate parity) และ

2) ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน (covered interest rate parity)

ความเสมอภาคในรูปแบบแรกยังคงต้องเผชิญต่อความเสี่ยงจากความผันผวนจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน ในขณะที่รูปแบบที่สองจะมีการใช้สัญญาล่วงหน้าเพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน ทั้งสองรูปแบบของความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยนี้แสดงถึงความสัมพันธ์ที่กับการคาดการณ์อัตราแลกเปลี่ยนในอนาคตรวมถึงอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าและอัตราแลกเปลี่ยนทันทีในอนาคต

10.5.1 ทฤษฎีความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน

ทฤษฎีความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน (covered interest rate parity theory : CIRPT) เป็นทฤษฎีที่ระบุถึงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราดอกเบี้ยของสองประเทศ อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot exchange rate) และอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า (forward exchange rate) ตามทฤษฎีระบุว่า จะไม่มีโอกาสในการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage) โดยการกู้ยืมเงินในประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยต่ำและลงทุนในประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยสูง โดยที่จะใช้สัญญาแลกเปลี่ยนล่วงหน้าเพื่อป้องกันความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน โดยสมมุติฐานของความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนระบุว่า ความสัมพันธ์ที่สมดุลระหว่างอัตราดอกเบี้ยในสองประเทศ อัตราแลกเปลี่ยนทันทีและอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าซึ่งได้รับส่งผลกระทบจากความเคลื่อนไหวของเงินทุนและความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยน ถ้ามีความไม่สมดุลจากความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน นักลงทุนจะสามารถใช้ประโยชน์จากโอกาสทางการเงินในทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (arbitrage opportunity) ได้ ด้วยการกู้ยืมเงินที่อัตราดอกเบี้ยต่ำแล้วแลกเปลี่ยนเป็นสกุลเงินของประเทศที่มีอัตราดอกเบี้ยสูงและลงทุนในเงินสกุลนั้นพร้อมกับทำสัญญาแลกเปลี่ยนล่วงหน้าเพื่อใช้ในการแลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นสกุลเงินเริ่มต้นในอนาคต แต่อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงแล้วการเกิดความไม่สมดุลจากความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยที่ป้องกันความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนบางครั้ง อาจเกิดจากอัตราภาษี ค่าธรรมเนียม การควบคุมการเคลื่อนไหวของเงินทุนหรือ ความไม่เข้ากันของการรับรู้ความเสี่ยง (risk perception disparity) ซึ่งเป็นสภาพที่ผู้มีส่วนร่วมในตลาดหรือผู้ลงทุนมีความเข้าใจและมองเห็นความเสี่ยงทางการเงินในมุมมองที่ต่างกัน การรับรู้ความเสี่ยงในแบบนี้สามารถมีผลต่อการตัดสินใจทางการเงินของผู้ลงทุนซึ่งสามารถส่งผลกระทบต่อราคาของสินทรัพย์และความเสถียรภาพของตลาดทั้งหมดได้

10.5.2 การทำอาร์บิทราจดอกเบี้ยที่มีการป้องกันความเสี่ยง

การทำอาร์บิทราจดอกเบี้ยที่มีการป้องกันความเสี่ยง หรือ covered interest arbitrage เป็นกลยุทธ์การลงทุนที่ใช้สัญญาซื้อขายล่วงหน้าอัตราแลกเปลี่ยน (forward contract) เพื่อป้องกันความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยน (exchange rate risk) และได้กำไรจากส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยระหว่างสกุลเงินสองสกุล สามารถทำอาร์บิทราจดอกเบี้ยที่มีการป้องกันความเสี่ยง ได้ตามขั้นตอน ต่อไปนี้

1) ลงทุนเงินในสกุลเงินที่มีอัตราดอกเบี้ยต่ำ

2) แลกเปลี่ยนเงินที่ลงทุนเป็นสกุลเงินที่มีอัตราดอกเบี้ยสูง

3) ลงทุนในสกุลเงินที่มีอัตราดอกเบี้ยสูง

4) ทำสัญญาซื้อขายล่วงหน้าสำหรับการแลกเปลี่ยนเงินกลับเป็นสกุลเงินเริ่มต้นในอนาคต

ผู้ลงทุนจะได้กำไรจากส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยระหว่างสกุลเงินสองสกุล และยังสามารถป้องกันความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนได้ด้วยการใช้สัญญาซื้อขายล่วงหน้า

สมมุติว่าไม่มีข้อจำกัดต่อการเคลื่อนย้ายเงินทุนระหว่างประเทศ กล่าววคือนักลงทุนสามารถรเคลื่อนย้ายเงินทุนได้อย่างอิสระอย่างสมบูรณ์ กำหนดสัญลักษณ์ที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้ กำหนดให้

i_{THB} แทนอัตราดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยงภายในประเทศสำหรับ T วัน (อัตราดอกเบี้ยทบต้น)

i_{FRX} แทน อัตราดอกเบี้ยที่ไม่มีความเสี่ยงต่างประเทศสำหรับ T วัน (อัตราดอกเบี้ยทบต้น)

S_t แทน อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) ณ เวลา t (ในรูปแบบของเงินตราภายในประเทศต่อหน่วยเงินตราต่างประเทศ อัตราแลกเปลี่ยน S_t THB : 1 FRX)

$F(t,T)$ แทน อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า (forward rate) สำหรับการส่งมอบในวันที่ T ณ เวลา t

พิจารณากลยุทธ์การลงทุนดังต่อไปนี้

ที่เวลา $t=0$ ทำธุรกรรมดังนี้

1) กู้ยืมเงินสกุลต่างประเทศ 1 FRX จากธนาคารต่างประเทศเป็นเวลา T วัน

2) แลกเปลี่ยนสกุลเงินต่างประเทศเป็นสกุลเงินภายในประเทศ (THB) รับเงิน S_0 THB

3) นำเงิน S_0 THB ไปลงทุนภายในประเทศที่ให้ผลตอบแทน i_{THB} ต่อปี

4) ทำสัญญาแลกเปลี่ยนล่วงหน้า (forward contract) เป็นเวลา T วันเพื่อซื้อสกุลเงินต่างประเทศ (ขายสกุลเงินภายในประเทศ) ในอัตราแลกเปลี่ยนที่กำหนดไว้ล่วงหน้า $F(0,T) \equiv F_0$ ที่เวลา $t = T$ ทำธุรกรรมดังนี้

1) รับเงินฝาก $S_0\left(1+i_{THB}\right)^{\frac{T}{360}}$ THB

2) ใช้สัญญาแลกเปลี่ยนล่วงหน้าซื้อสกุลเงินต่างประเทศที่อัตรา F_0 THB: 1 FRX

จะซื้อได้ $\frac{S_0}{F_0}\left(1+i_{THB}\right)^{\frac{T}{360}}$ FRX

3) คืนหนี้ในสกุลเงินต่างประเทศกับดอกเบี้ยรวมเป็นเงินจำนวน $1\times\left(1+i_{FRX}\right)^{\frac{T}{360}}$ FRX

ดังนั้นจะเหลือเงินในสกุลต่างประเทศ $\frac{S_0}{F_0}\left(1+i_{THB}\right)^{\frac{T}{360}}-\left(1+i_{FRX}\right)^{\frac{T}{360}} \equiv V_T$ FRX

หาก $V_T > 0$ แสดงว่าการลงทุนภายในประเทศได้เปรียบกว่าการลงทุนในต่างประเทศ ซึ่งหมายถึงสามารถทำอาบิทราจด้วยการกู้เงินจากต่างประเทศมาลงทุนภายในประเทศ

หาก $V_T < 0$ แสดงว่าการลงทุนภายในต่างประเทศได้เปรียบกว่าการลงทุนภายในประเทศ ซึ่งหมายถึงสามารถทำอาบิทราจด้วยการกู้เงินภายในประเทศแล้วนำเงินไปลงทุนในต่างประเทศ

แต่หาก $V_T = 0$ จะหมายถึงตลาดอยู่ในภาวะสมดุลคืออัตราดอกเบี้ยภายในประเทศและต่างประเทศสมดุลกัน จะไม่สามารถทำอาบิทราจได้ นั่นคือ

$$\frac{S_0}{F_0}\left(1+i_{THB}\right)^{\frac{T}{360}}-\left(1+i_{FRX}\right)^{\frac{T}{360}}=0 \tag{10.6}$$

ซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า F_0 ที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร (no arbitrage principle) ได้ นั่นคือ

$$F_0 = S_0\left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}}\right)^{\frac{T}{360}} \tag{10.7}$$

ตัวอย่างที่ 10.7 บริษัทญี่ปุ่นต้องการคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าระยะเวลาครึ่งปีของ JPY/USD โดยอัตราแลกเปลี่ยน JPY/USD อยู่ที่ 150 JPY/USD และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงในสกุลเยนเท่ากับ 4% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงของ USD เท่ากับ 5% จงหาอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าระยะเวลาหนึ่งปีที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

วิธีทำ จากสูตร $F_0 = S_0\left(\frac{1+i_{JPY}}{1+i_{USD}}\right)^{\frac{T}{360}}$ ในที่นี้ $S_0 = 150$, $i_{JPY} = 0.04$, $i_{USD} = 0.05$, $T = 180$

โดยการแทนค่าได้ $F_0 = 150\left(\frac{1.04}{1.05}\right)^{\frac{180}{360}} = 149.2840$ JPY/USD □

พิจารณาสมการ (10.7) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{F_0 - S_0}{S_0} = \frac{F_0}{S_0} - 1 = \left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}}\right)^{\frac{T}{360}} - 1 \tag{10.8}$$

โดยการใช้การประมาณเชิงเส้นของ $e^x \approx 1+x$ และ $\ln x \approx x-1$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}}\right)^{\frac{T}{360}} = e^{\frac{T}{360}\ln\left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}}\right)} \approx 1 + \frac{T}{360}\ln\left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}}\right) \approx 1 + \frac{T}{360}\left(\frac{1+i_{THB}}{1+i_{FRX}} - 1\right) = 1 + \frac{T}{360}\left(\frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1+i_{FRX}}\right)$$

จะได้ว่า $$\frac{F_0 - S_0}{S_0} \approx \frac{T}{360}\left(\frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1+i_{FRX}}\right) = \frac{T}{360}\left(\frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1+i_{FRX}}\right) \tag{10.9}$$

นิยามส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ด หรือ ค่าพรีเมียมฟอร์เวิร์ด (forward premium)

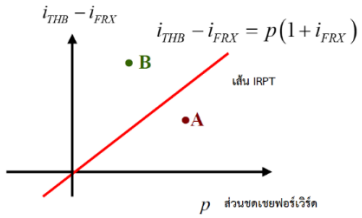
$$p \equiv \left(\frac{F_0 - S_0}{S_0}\right)\left(\frac{360}{T}\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$p = \left(\frac{F_0 - S_0}{S_0}\right)\frac{360}{T} \approx \left(\frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1+i_{FRX}}\right) \quad \text{(ต่อปี)} \tag{10.10}$$

หรือ $$\frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1+i_{FRX}} \approx p = \left(\frac{F_0 - S_0}{S_0}\right)\frac{360}{T} \tag{10.11}$$

จากสมการ (10.10) จะเป็นว่าส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ดแปรผันตามส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยภายในและต่างประเทศหากส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยเพิ่มสูงขึ้นส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ดก็จะเพิ่มสูงขึ้น ในทางตรงกันข้ามหากส่วนต่างอัตราดอกเบี้ยลดต่ำลงส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ดก็ลดต่ำลง ส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ด

จะเป็นส่วนชดเชยส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยที่เพิ่มสูงขึ้นซึ่งจะเร่งให้เกิดการทำกลยุทธ์การทำธุรกรรมขายล่วงหน้าที่มีการป้องกันความเสี่ยง เมื่อเกิดธุรกรรมเหล่านี้มากขึ้นส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ยทั้งสองจะค่อยๆ ลดลงจนเข้าสู่สภาวะสมดุล ภายใต้เงื่อนสภาวะสมดุลนี้ จะไม่มีโอกาสทำการซื้อขายล่วงหน้าและไม่มีการย้ายเงินทุนจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่งเนื่องจากกลยุทธ์การทำธุรกรรมขายล่วงหน้าที่มีการป้องกันความเสี่ยง



รูปที่ 10.11 *ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ดกับส่วนต่างอัตราดอกเบี้ยภายในและต่างประเทศ*

จากกราฟในรูปที่ 10.11 หาก $p>\frac{i_{THB}-i_{FRX}}{1+i_{FRX}}$ เงินทุนภายในประเทศ (domestic) จะถูกเคลื่อนย้ายไปลงทุนในต่างประเทศ (foreign) นั่นคือ สิ่งที่นักลงทุนขาดทุนจากอัตราดอกเบี้ยที่ต่ำกว่าจากการลงทุนต่างประเทศจะได้รับการชดเชยโดยมากกว่าจากส่วนเพิ่มหรือส่วนชดเชยในการซื้อขายล่วงหน้าที่สูง ดังนั้น จุด A ในกราฟข้างต้นจะแทนสถานการณ์ที่มีการถอนเงินทุนหรือเคลื่อนย้ายเงินทุนออกจากในประเทศ กลยุทธ์ขายล่วงหน้าที่มีการป้องกันความเสี่ยงภายในประเทศจะมีผลต่ออัตราดอกเบี้ยและอัตราแลกเปลี่ยน i_{THB}, i_{FRX} S_0 และ F_0 ส่วนต่าง $i_{THB}-i_{FRX}$ จะเพิ่มขึ้นอย่างชัดเจน อัตราดอกเบี้ยภายในประเทศจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (ความต้องการกู้ยืมภายในประเทศสูงขึ้น) ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยต่างประเทศจะมีแนวโน้มลดลง (เงินฝากในธนาคารต่างประเทศสูงขึ้น) อีกด้านหนึ่ง ส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ดของการซื้อขายล่วงหน้าจะลดลงอย่างชัดเจน อัตราแลกเปลี่ยนจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น (ความต้องการสกุลเงินต่างประเทศสูงขึ้น) ในขณะที่อัตราซื้อขายล่วงหน้าจะลดลง (การขายล่วงหน้าสกุลเงินต่างประเทศสูงขึ้น) ดังนั้นการเข้าทำการซื้อขายล่วงหน้าจะบังคับให้สภาวะสมดุลกลับไปที่เส้น IRPT อีกครั้ง

อย่างไรก็ตาม หาก $p < \frac{i_{THB} - i_{FRX}}{1 + i_{FRX}}$ เงินทุนต่างประเทศจะไหลเข้ามาลงทุนภายในประเทศ เนื่องจากการได้รับผลตอบแทนจากอัตราดอกเบี้ยที่สูงจากการลงทุนภายในประเทศมากกว่าการได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนในต่างประเทศที่มีการป้องกัน นั่นคือ จุด B ในกราฟข้างต้นแทนสถานการณ์เศรษฐกิจที่มีการไหลเข้าของเงินทุนเข้ามาภายในประเทศ กลยุทธ์การป้องกันความเสี่ยงทางดอกเบี้ยจะมีผลทำให้สถานการณ์เศรษฐกิจเคลื่อนที่จากจุด B ไปยังเส้น IRPT เข้าสู่สมดุลอีกครั้ง

ตัวอย่างที่ 10.8 สมมติว่าอัตราแลกเปลี่ยนทันที USD/GBP เท่ากับ 1.6200 USD ต่อ 1 GBP และอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า 180 วันของ USD/GBP เท่ากับ 1.6167 USD ต่อ 1 GBP จงประมาณผลต่างอัตราดอกเบี้ย และอัตราดอกเบี้ยในสกุล USD มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงอย่างไร

วิธีทำ จากอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ USD เทียบกับต้นทุนต่างประเทศ GBP เท่ากับ

$$\frac{i_{USD} - i_{GBP}}{1 + i_{GBP}} \approx \left(\frac{F_0 - S_0}{S_0} \right) \frac{360}{T}$$

และจากข้อมูล $S_0 = 1.6200$, $F_0 = 1.6167$, $T = 180$ ดังนั้น

$$\frac{i_{USD} - i_{GBP}}{1 + i_{GBP}} \approx \left(\frac{1.6167 - 1.6200}{1.6200} \right) \frac{360}{180} = -0.0066 = -0.66\%$$

นั่นแสดงว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ USD เทียบกับต้นทุนต่างประเทศ GBP มีแนวโน้มลดลงด้วยอัตรา 0.66% ถ้าอัตราชดเชยฟอร์เวิร์ดต่ำกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยนี้ เงินทุนต่างประเทศ GBP จะไหลเข้ามาลงทุนภายในประเทศ USD เนื่องจากการได้รับผลตอบแทนจากอัตราดอกเบี้ยที่สูงจากการลงทุนภายในประเทศมากกว่าการได้รับผลตอบแทนจากการลงทุนในต่างประเทศที่มีการป้องกัน □

10.6 การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศเป็นหนึ่งในเครื่องมือที่ใช้จัดการความเสี่ยงทางการเงินที่เป็นที่นิยม ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อป้องกันความเสี่ยงด้านอัตราแลกเปลี่ยนและอัตราดอกเบี้ย ในสัญญาสวอปคู่สัญญาทั้งสองฝ่ายจะทำการแลกเปลี่ยนกระแสเงินระหว่างกัน โดยอาจจะจ่ายดอกเบี้ย

ในสกุลเงินหนึ่งแล้วรับดอกเบี้ยในอีกสกุลเงินหนึ่ง ทั้งอัตราดอกเบี้ยและปริมาณเงินที่ทำการแลกเปลี่ยนนั้นจะถูกกำหนดตั้งแต่เริ่มต้นสัญญา

การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศจึงเป็นกระบวนการที่จำเป็นต้องใช้เทคนิคทางการเงินที่เหมาะสมและต้องพิจารณาถึงปัจจัยที่มีผลต่อการประเมินมูลค่ารวมถึงอัตราดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายและที่จะได้รับตลอดระยะเวลาของสัญญาสวอป อัตราแลกเปลี่ยนที่กำหนดไว้ระยะเวลาที่เหลือจนถึงสิ้นสุดสัญญา และความเสี่ยงด้านเครดิตของคู่สัญญารวมทั้งของตัวกลางทางการเงินด้วย

กระบวนการประเมินมูลค่านั้นประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้

1) การกำหนดกระแสเงินสุทธิในอนาคต

ในขั้นตอนนี้จะทำโดยการคำนวณจำนวนเงินในกระแสเงินสดทั้งฝั่งภายในประเทศ จำนวนเงินในกระแสเงินสดทั้งฝั่งต่างประเทศสำหรับแต่ละช่วงเวลา โดยที่อัตราดอกเบี้ยในแต่ละฝั่งอาจจะเป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่กับคงที่ อัตราดอกเบี้ยคงที่กับลอยตัว หรือ อัตราดอกเบี้ยลอยกับลอยตัวขึ้นอยู่กับอัตราดอกเบี้ยที่ระบุไว้ในสัญญาโดยที่กระแสเงินสุทธิสำหรับแต่ละช่วงเวลาจะเป็นค่าของความแตกต่างระหว่างกระแสเงินของฝั่งภายในประเทศและของฝั่งต่างประเทศ

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสุทธิในอนาคต

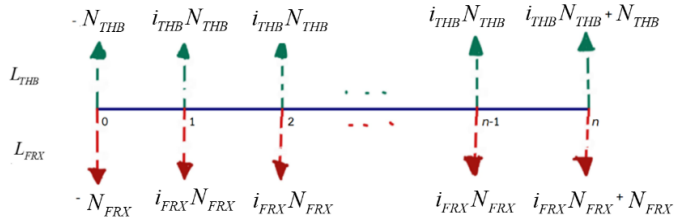
ในการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสุทธิในอนาคต จะกำหนดตัวประกอบส่วนลดจากอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงที่ไม่มีความเสี่ยง โดยที่ดอกเบี้ยอ้างอิงที่ไม่มีความเสี่ยงฝั่งภายในประเทศจะแทนด้วย r_{THB} และดอกเบี้ยอ้างอิงที่ไม่มีความเสี่ยงฝั่งต่างประเทศจะแทนด้วย r_{FRX} ตัวประกอบส่วนลดในแต่ละช่วงเวลาของแต่ละฝั่ง $\left(1+r_{THB}\right)^{-1}$ และ $\left(1+r_{FRX}\right)^{-1}$ ตามลำดับ

3) มูลค่าปัจจุบันของสวอป เท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสุทธิในอนาคตระหว่างฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ

ในคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสุทธิในอนาคต สามารถทำแยกสำหรับแต่ละขาของสวอป (ฝั่งขาอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศและฝั่งขาอัตราดอกเบี้ยต่างประเทศ) โดยค่ามูลค่าปัจจุบันสุทธิของสวอป คือ ผลต่างต่างระหว่างมูลค่าปัจจุบันของฝั่งขาอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศและฝั่งขาอัตราดอกเบี้ยต่างประเทศ

10.6.1 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่

สมมติว่าในสัญญาสวอปมีการแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิง 2 จุดเวลาคือ ณ วันทำสัญญาและวันสิ้นสุดสัญญา และในแต่ละปลายงวดแลกเปลี่ยนเฉพาะดอกเบี้ยที่คำนวณจากเงินต้นอ้างอิงในแต่ละขา, i_{THB} และ i_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยแลกเปลี่ยนฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศตามลำดับ, r_{THB} และ r_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศตามลำดับ, N_{THB} และ N_{FRX} เป็นเงินต้นอ้างอิง โดยที่อัตราแลกเปลี่ยน THB/FRX เท่ากับ S_0 THB ต่อ 1 FRX (ในทางปฏิบัติกระแสเงินสดในการแลกเปลี่ยนจะขึ้นอยู่กับข้อตกลงที่ระบุไว้ในสัญญา) กระแสเงินสดที่แลกเปลี่ยนกันฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ สามารถเขียนแสดงด้วยแผนภาพ ดังนี้



รูปที่ 10.12 *แผนภาพกระแสเงินสดสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่*

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งภายในประเทศ (สกุล THB) $PV\left(L_{THB}\right)$ คือ

$$PV\left(L_{THB}\right)=-N_{THB}+N_{THB}i_{THB}\left(v_{THB}+\left(v_{THB}\right)^2+\ldots+\left(v_{THB}\right)^n\right)+N_{THB}\left(v_{THB}\right)^n$$

$$=\left(\left(v_{THB}\right)^n+i_{THB}a_{\overline{n}|r_{THB}}-1\right)N_{THB} \quad \text{(บาท)} \qquad (10.12)$$

โดยที่ $v_{THB}=\left(1+r_{THB}\right)^{-1}$, $a_{\overline{n}|r_{THB}}=\dfrac{1-\left(v_{THB}\right)^n}{r_{THB}}$

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งต่างประเทศ (สกุล FRX) $PV\left(L_{FRX}\right)$ คือ

$$PV\left(L_{FRX}\right)=-N_{FRX}+N_{FRX}i_{FRX}\left(v_{FRX}+\left(v_{FRX}\right)^2+\ldots+\left(v_{FRX}\right)^n\right)+N_{FRX}\left(v_{FRX}\right)^n$$

$$=\left(\left(v_{FRX}\right)^n+i_{FRX}a_{\overline{n}|r_{FRX}}-1\right)N_{FRX} \quad \text{(ดอลลาร์)} \qquad (10.13)$$

โดยที่ $v_{FRX}=\left(1+r_{FRX}\right)^{-1}$, $a_{\overline{n}|r_{FRX}}=\dfrac{1-\left(v_{FRX}\right)^n}{r_{FRX}}$

เนื่องจากอัตราแลกเปลี่ยน THB/FRX เท่ากับ S_0 THB ต่อ 1 FRX

ดังนั้นจะได้ $PV\left(L_{FRX}\right)$ ในหน่วยบาท เป็น

$$PV\left(L_{FRX}\right)=\left(\left(v_{FRX}\right)^n+C_{FRX}a_{\overline{n}|r_{FRX}}-1\right)N_{FRX}S_0 \quad \text{(บาท)} \tag{10.14}$$

ดังนั้นมูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ แทนด้วย V_{swap} ในหน่วยบาท จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} V_{swap} &= PV(L_{THB})-PV(L_{FRX}) \\ &=\left(\left(v_{THB}\right)^n+i_{THB}a_{\overline{n}|r_{THB}}-1\right)N_{THB}-\left(\left(v_{FRX}\right)^n+i_{FRX}a_{\overline{n}|r_{FRX}}-1\right)N_{FRX}S_0 \text{ (บาท)} \end{aligned} \tag{10.15}$$

หมายเหตุ มูลค่าของสวอป V_{swap} นั้นขึ้นอยู่กับกระแสเงินสดที่แลกเปลี่ยนกันตามที่ระบุไว้ในสัญญา ดังนั้นสูตรในการคำนวณ V_{swap} นั้นย่อมแตกต่างกันไปตามกระแสเงินสดที่แลกเปลี่ยนกัน

เพื่อความเข้าใจขอให้ศึกษาตัวอย่างการคำนวณสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10.9 สมมติว่าในวันที่ 1 มกราคม ค.ศ. 2024 บริษัท a ในประเทศไทยได้ทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่กับบริษัท b ในประเทศสหรัฐอเมริกา โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) THB/USD = 30 THB ต่อ 1 USD
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งไทย (N_{THB}) = 60,000,000 บาท
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งต่างประเทศ (N_{FRX}) = 2,000,000 ดอลลาร์สหรัฐ
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งไทย (i_{THB}) = 3% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งต่างประเทศ (i_{FRX}) = 2% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งไทย (r_{THB}) = 2.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งต่างประเทศ (r_{FRX}) = 1.5% ต่อปี
- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 3 ปี

ต้องการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

วิธีทำ เราจะคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB})

$$PV(L_{THB}) = \left((v_{THB})^n + i_{THB} a_{\overline{n}|r_{THB}} - 1\right) N_{THB}$$

โดยที่ $v_{THB} = (1+r_{THB})^{-1}$ และ $a_{\overline{n}|r_{THB}} = \dfrac{1-(v_{THB})^n}{r_{THB}}$

เนื่องจาก $v_{THB} = (1+0.025)^{-1} = 0.9756$ และ $a_{\overline{n}|r_{THB}} = \dfrac{1-(0.9756)^3}{0.025} = 2.8717$

ดังนั้น $PV(L_{THB}) = \left((0.9756)^3 + 0.03 \times 2.8717 - 1\right) \times 60,000,000 = 816,000$ บาท

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX})

$$PV(L_{FRX}) = \left((v_{FRX})^n + i_{FRX} a_{\overline{n}|r_{FRX}} - 1\right) N_{FRX}$$

โดยที่ $v_{FRX} = (1+r_{FRX})^{-1}$ และ $a_{\overline{n}|r_{FRX}} = \dfrac{1-(v_{FRX})^n}{r_{FRX}}$

เนื่องจาก $v_{FRX} = (1+0.015)^{-1} = 0.9852$ และ $a_{\overline{n}|r_{FRX}} = \dfrac{1-(0.9852)^3}{0.015} = 2.9552$

ดังนั้น $PV(L_{FRX}) = \left((0.9852)^3 + 0.02 \times 2.9552 - 1\right) \times 2,000,000 = 29,800$ ดอลลาร์สหรัฐ

โดยการแปลงเป็นหน่วยบาท จะได้ $PV(L_{FRX}) = 29,800 \times 30 = 894,000$ บาท

3) คำนวณมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap})

$$V_{swap} = PV(L_{THB}) - PV(L_{FRX})$$

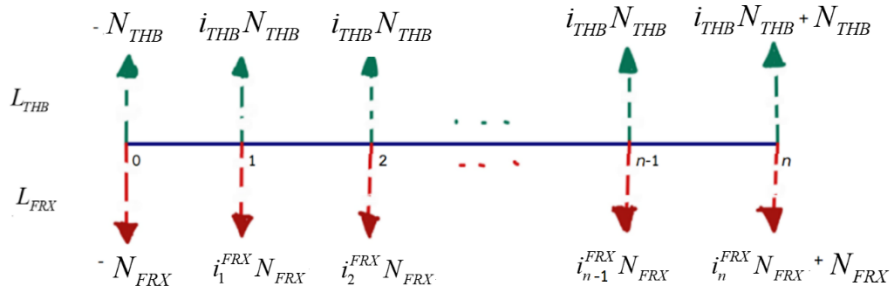
$$V_{swap} = 816,000 - 894,000 = -78,000 \quad \text{บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) เท่ากับ -78,000 บาท □

10.6.2 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว

สมมติว่าในสัญญาสวอปมีการแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิง 2 จุดเวลาคือ ณ วันทำสัญญาและวันสิ้นสุดสัญญา และในแต่ละปลายงวดแลกเปลี่ยนเฉพาะดอกเบี้ยที่คำนวณจากเงินต้นอ้างอิงในแต่ละขา, i_{THB} เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่แลกเปลี่ยนฝั่งภายในประเทศ และ $i_1^{FRX}, i_2^{FRX}, ..., i_n^{FRX}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัวแลกเปลี่ยนฝั่งต่างประเทศ ตามลำดับ, r_{THB} และ r_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยไม่มีความ

เสี่ยงฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ ตามลำดับ กระแสเงินสดที่แลกเปลี่ยนกันฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ สามารถเขียนแสดงด้วยแผนภาพ ดังนี้



รูปที่ 10.13 *แผนภาพกระแสเงินสดสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว*

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งภายในประเทศ (สกุล THB) $PV\left(L_{THB}\right)$, คือ

$$PV\left(L_{THB}\right)=\left(\left(v_{THB}\right)^n+i_{THB}a_{\overline{n}|r_{THB}}-1\right)N_{THB} \quad \text{(บาท)} \qquad (10.16)$$

โดยที่ $v_{THB}=\left(1+r_{THB}\right)^{-1}$, $a_{\overline{n}|r_{THB}}=\dfrac{1-\left(v_{THB}\right)^n}{r_{THB}}$

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งต่างประเทศ (สกุล FRX) $PV\left(L_{FRX}\right)$, คือ

$$PV\left(L_{FRX}\right)=-N_{FRX}+N_{FRX}\left(i_1^{FRX}v_{FRX}+i_2^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^2+\ldots+i_n^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^n\right)+N_{FRX}\left(v_{FRX}\right)^n$$

$$=\left(\left(v_{FRX}\right)^n+\sum_{k=1}^{n}i_k^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^k-1\right)N_{FRX} \quad \text{(ดอลลาร์)} \qquad (10.17)$$

โดยที่ $v_{FRX}=\left(1+r_{FRX}\right)^{-1}$

เนื่องจากอัตราแลกเปลี่ยน THB/FRX เท่ากับ S_0 THB ต่อ 1 FRX

ดังนั้นจะได้ $PV\left(L_{FRX}\right)$ ในหน่วยบาท คือ

$$PV\left(L_{FRX}\right)=\left(\left(v_{FRX}\right)^n+\sum_{k=1}^{n}i_k^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^k-1\right)N_{FRX}S_0 \quad \text{(บาท)} \qquad (10.18)$$

ดังนั้นมูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ แทนด้วย V_{swap} ในหน่วยบาท จะเท่ากับ

$$V_{swap}=PV(L_{THB})-PV(L_{FRX})$$

$$=\left(\left(v_{THB}\right)^n+i_{THB}a_{\overline{n}|r_{THB}}-1\right)N_{THB}-\left(\left(v_{FRX}\right)^n+\sum_{k=1}^{n}i_k^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^k-1\right)N_{FRX}S_0 \quad \text{(บาท)} \qquad (10.19)$$

เพื่อความเข้าใจขอให้ศึกษาตัวอย่างการคำนวณสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10.10 สมมติว่าในวันที่ 1 มกราคม ค.ศ. 2024 บริษัท a ในประเทศไทยได้ทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัวกับบริษัท b ในประเทศสหรัฐอเมริกา โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate, S_0) THB/USD = 30 THB ต่อ 1 USD
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งไทย (N_{THB}) = 60,000,000 บาท
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งต่างประเทศ (N_{FRX}) = 2,000,000 ดอลลาร์สหรัฐ
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งไทย (i_{THB}) = 3% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งต่างประเทศในแต่ละปี (i_k^{FRX}) = 2%, 2.5%, และ 3% ตามลำดับ
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งไทย (r_{THB}) = 2.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งต่างประเทศ (r_{FRX}) = 1.5% ต่อปี
- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 3 ปี

ต้องการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

วิธีทำ เราจะคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB})

$$PV(L_{THB}) = \left((v_{THB})^n + i_{THB} a_{\overline{n}|r_{THB}} - 1\right) N_{THB}$$

โดยที่ $v_{THB} = (1+r_{THB})^{-1}$ และ $a_{\overline{n}|r_{THB}} = \dfrac{1-(v_{THB})^n}{r_{THB}}$

เนื่องจาก $v_{THB} = (1+0.025)^{-1} = 0.9756$ และ $a_{\overline{n}|r_{THB}} = \dfrac{1-(0.9756)^3}{0.025} = 2.8534$

จะได้ $PV(L_{THB}) = \left((0.9756)^3 + 0.03(2.8534) - 1\right)(60,000,000) = 804,000$ บาท

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX})

$$PV(L_{FRX}) = \left((v_{FRX})^n + \sum_{k=1}^{n} i_k^{FRX} (v_{FRX})^k - 1 \right) N_{FRX} S_0 \quad \text{(บาท)}$$

โดยที่ $v_{FRX} = (1+r_{FRX})^{-1}$ เนื่องจาก $v_{FRX} = (1+0.015)^{-1} = 0.9852$ จะได้

$$PV(L_{FRX}) = \left((0.9852)^3 + \sum_{k=1}^{3} i_{FRX}^k (v_{FRX})^k - 1 \right) (2,000,000)(30)$$

$$= \left(0.9550 + (0.02)0.9852 + (0.025)0.9705 + (0.03)0.9560 - 1\right)(60,000,000)$$

$$= 1,662,000 \quad \text{บาท}$$

4) คำนวณมูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

$$V_{swap} = PV(L_{THB}) - PV(L_{FRX})$$

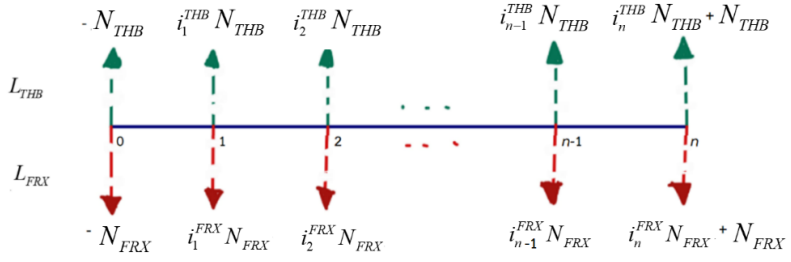
$$V_{swap} = 804,000 - 1,662,000$$

$$= -858,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาทเท่ากับ -858,000 บาท □

10.6.3 สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราลอยตัวแลกอัตราลอยตัว

สมมติว่าในสัญญาสวอปมีการแลกเปลี่ยนเงินต้นอ้างอิง 2 จุดเวลาคือ ณ วันทำสัญญาและวันสิ้นสุดสัญญา และในแต่ละปลายงวดแลกเปลี่ยนเฉพาะดอกเบี้ยที่คำนวณจากเงินต้นอ้างอิงในแต่ละขา, $i_1^{THB}, i_2^{THB}, ..., i_n^{THB}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัวแลกเปลี่ยนฝั่งภายในประเทศ และ $i_1^{FRX}, i_2^{FRX}, ..., i_n^{FRX}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยลอยตัวแลกเปลี่ยนฝั่งต่างประเทศ ตามลำดับ, r_{THB} และ r_{FRX} เป็นอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ ตามลำดับ กระแสเงินสดที่แลกเปลี่ยนกันฝั่งภายในประเทศและฝั่งต่างประเทศ สามารถเขียนแสดงด้วยแผนภาพ ดังนี้



รูปที่ 10.14 *แผนภาพกระแสเงินสดสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราลอยตัวแลกอัตราลอยตัว*

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งภายในประเทศ (สกุล THB) $PV\left(L_{THB}\right)$,

คือ $$PV\left(L_{THB}\right)=\left(\left(v_{THB}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{k}^{THB}\left(v_{THB}\right)^{k}-1\right)N_{THB} \quad \text{(บาท)} \qquad (10.20)$$

โดยที่ $v_{THB}=\left(1+r_{THB}\right)^{-1}$

จากแผนภาพกระแสเงินสด มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินฝั่งต่างประเทศ (สกุล FRX) $PV\left(L_{FRX}\right)$,

คือ $$PV\left(L_{FRX}\right)=\left(\left(v_{FRX}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{k}^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^{k}-1\right)N_{FRX} \quad \text{(FRX)} \qquad (10.21)$$

โดยที่ $v_{FRX}=\left(1+r_{FRX}\right)^{-1}$

เนื่องจากอัตราแลกเปลี่ยน THB/FRX เท่ากับ S_0 THB ต่อ 1 FRX ดังนั้นจะได้ $PV\left(L_{FRX}\right)$ในหน่วยบาท คือ $$PV\left(L_{FRX}\right)=\left(\left(v_{FRX}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{k}^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^{k}-1\right)N_{FRX}S_0 \quad \text{(บาท)} \qquad (10.22)$$

ดังนั้นมูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ แทนด้วย V_{swap} ในหน่วยบาท จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} V_{swap} &= PV(L_{THB})-PV(L_{FRX}) \\ &=\left(\left(v_{THB}\right)^{n}+i_{THB}a_{\overline{n}|r_{THB}}-1\right)N_{THB}-\left(\left(v_{FRX}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{k}^{FRX}\left(v_{FRX}\right)^{k}-1\right)N_{FRX}S_0 \end{aligned} \qquad (10.23)$$

เพื่อความเข้าใจขอให้ศึกษาตัวอย่างการคำนวณของสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัว ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10.11 สมมติว่าในวันที่ 1 มกราคม ค.ศ. 2024 บริษัท a ในประเทศไทยได้ทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัวกับบริษัท b ในประเทศสหรัฐอเมริกา โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) THB/USD = 32 THB ต่อ 1 USD
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งไทย (N_{THB}) = 64,000,000 บาท
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งต่างประเทศ (N_{FRX}) = 2,000,000 ดอลลาร์สหรัฐ
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งไทยในแต่ละปี (i_{THB}^{k}) = 4.0%, 3.5%, และ 3.0% ตามลำดับ
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งต่างประเทศในแต่ละปี (i_{FRX}^{k}) = 3.0%, 2.5% และ 2.0% ตามลำดับ
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งไทย (r_{THB}) = 3% ต่อปี

- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งต่างประเทศ (r_{FRX}) = 2% ต่อปี

- ระยะเวลาสัญญาเท่ากับ 3 ปี

ต้องการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

วิธีทำ เราจะคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB})

$$PV\left(L_{THB}\right)=\left(\left(v_{THB}\right)^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{k}^{THB}\left(v_{THB}\right)^{k}-1\right)N_{THB} \quad \text{(บาท)}$$

โดยที่ $v_{THB}=\left(1+r_{THB}\right)^{-1}$ เนื่องจาก $v_{THB}=\left(1+0.03\right)^{-1}=0.9709$ จะได้

$$PV(L_{THB})=\left((0.9709)^{3}+\sum_{k=1}^{3} i_{THB}^{k}(0.9709)^{k}-1\right)64,000,000$$

$$=\left(0.9137+(0.04)(0.9709)+(0.035)(0.9426)+(0.03)(0.9147)-1\right)(64,000,000)$$

$$=825,600 \quad \text{บาท}$$

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งต่างประเทศ (PV_{FRX})

$$PV(L_{FRX})=\left((v_{FRX})^{n}+\sum_{k=1}^{n} i_{FRX}^{k}(v_{FRX})^{k}-1\right)N_{FRX}$$

โดยที่ $v_{FRX}=(1+r_{FRX})^{-1}$ เนื่องจาก $v_{FRX}=\left(1+0.02\right)^{-1}=0.9804$ จะได้

$$PV(L_{FRX})=\left((0.9804)^{3}+\sum_{k=1}^{3} i_{FRX}^{k}(0.9804)^{k}-1\right)(2,000,000)(32)$$

$$=\left(0.9416+(0.03)(0.9804)+(0.025)(0.9612)+(0.02)(0.9422)-1\right)(2,000,000)(32)$$

$$=883,200$$

4) คำนวณมูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

$$V_{swap}=PV(L_{THB})-PV(L_{FRX})$$

$$V_{swap}=825,600-883,200$$

$$=-57,600 \quad \text{บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าของสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาทเท่ากับ -57,600 บาท □

หมายเหตุ การประเมินมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) เป็นการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ทั้งสองฝ่ายจะแลกเปลี่ยนกันในอนาคต ค่า V_{swap} สามารถเป็นบวกหรือลบได้ ขึ้นอยู่กับมูลค่าของกระแสเงินสดที่ได้รับและจ่าย ดังนี้

- V_{swap} เป็นบวก หมายความว่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่บริษัทได้รับมีค่ามากกว่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ต้องจ่าย ซึ่งบริษัทจะได้ประโยชน์จากสัญญาสวอปนี้

- V_{swap} เป็นลบ หมายความว่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่บริษัทได้รับมีค่าน้อยกว่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ต้องจ่าย ซึ่งบริษัทจะเสียประโยชน์จากสัญญาสวอปนี้

- V_{swap} เท่ากับศูนย์ หมายความว่ามูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ได้รับเท่ากับมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่ต้องจ่าย ซึ่งแสดงว่าสัญญาสวอปนี้ไม่มีผลกระทบทางการเงินต่อบริษัททั้งสองฝ่าย

การประเมินค่าสวอปมักจะเริ่มต้นด้วยค่า V_{swap} เท่ากับศูนย์ที่จุดเริ่มต้นของสัญญา ซึ่งหมายความว่ามูลค่าของกระแสเงินสดที่ทั้งสองฝ่ายจะแลกเปลี่ยนกันนั้นเท่ากัน อย่างไรก็ตาม ในช่วงเวลาของสัญญา ค่า V_{swap} สามารถเปลี่ยนแปลงได้ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยและอัตราแลกเปลี่ยน ตัวอย่างเช่น ในการสวอปอัตราดอกเบี้ยดอกเบี้ย ค่า V_{swap} สามารถคำนวณได้จากความแตกต่างระหว่างมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่และดอกเบี้ยอัตราลอยตัว หากกระแสเงินสดที่ได้รับจากอัตราดอกเบี้ยคงที่มีค่ามากกว่ากระแสเงินสดที่จ่ายตามอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ค่า V_{swap} จะเป็นบวก และในทางกลับกัน หากกระแสเงินสดที่ได้รับจากดอกเบี้ยลอยตัวมีค่ามากกว่า ค่า V_{swap} จะเป็นลบ

ในกรณีของสวอปเงินตราต่างประเทศ การเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนและอัตราดอกเบี้ยในแต่ละประเทศมีผลโดยตรงต่อค่า V_{swap} หากอัตราแลกเปลี่ยนและอัตราดอกเบี้ยในประเทศหนึ่งเปลี่ยนแปลงในทางที่เอื้อต่อการเพิ่มมูลค่าของกระแสเงินสดที่ได้รับ ค่า V_{swap} จะเป็นบวก และในทางกลับกัน หากการเปลี่ยนแปลงนั้นทำให้มูลค่าของกระแสเงินสดที่จ่ายเพิ่มขึ้น ค่า V_{swap} จะเป็นลบ การทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของค่า V_{swap} และผลกระทบที่ตามมาจึงเป็นสิ่งสำคัญสำหรับการบริหารจัดการความเสี่ยงและการตัดสินใจทางการเงินที่ดี

10.7 การป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของค่าเงินบาทโดยสัญญาสวอป

การป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของค่าเงินบาทโดยสัญญาสวอป เป็นการใช้เครื่องมือทางการเงินเพื่อลดความเสี่ยงทางอัตราแลกเปลี่ยนที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต สัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเป็นสัญญาที่สองฝ่ายตกลงที่จะแลกเปลี่ยนเงินต้นและดอกเบี้ยในสกุลเงินนั้นๆ ในวันที่ระบุล่วงหน้า และจะคืนเงินต้นในวันที่สิ้นสุดสัญญา

อีกทั้งแลกเปลี่ยนดอกเบี้ยจากสกุลเงินหนึ่งไปสู่อีกสกุลเงินหนึ่ง ซึ่งอาจจะเป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่กับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating) หรืออาจจะเป็นอัตราดอกเบี้ยแบบเดียวกันก็ได้ แต่ต่างสกุลเงินกัน

ตัวอย่างธุรกิจที่มีโอกาสเผชิญความผันผวนจากอัตราแลกเปลี่ยนหรือการเปลี่ยนแปลงค่าเงิน เช่น ถ้าธุรกิจที่มีกิจกรรมในประเทศที่ใช้สกุลเงินบาทไทยแต่ทำธุรกิจหรือค้าขายสินค้าในตลาดที่ใช้สกุลเงินดอลลาร์ ธุรกิจเหล่านี้อาจจะใช้สัญญาสวอปเพื่อป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนได้

ขั้นตอนการป้องกันค่าเงินบาทโดยใช้สัญญาสวอป

1) วิเคราะห์ความเสี่ยง

ให้ทางธุรกิจทำการวิเคราะห์ความเสี่ยงที่เกี่ยวกับความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนและประเมินว่าต้องการที่จะป้องกันความเสี่ยงดังกล่าวหรือไม่

2) ติดต่อธนาคารหรือผู้ให้บริการสวอป

หากต้องการที่จะทำการป้องกันความเสี่ยง สามารถติดต่อกับธนาคารหรือผู้ให้บริการสวอปเพื่อทำการสร้างสัญญาสวอป

3) กำหนดรายละเอียดสัญญา

ภายในสัญญาสวอปจะต้องระบุรายละเอียดต่างๆ รวมถึงอัตราแลกเปลี่ยนเริ่มต้น วันที่เริ่มสัญญา วันที่สิ้นสุดสัญญา ระยะเวลาของการจ่ายดอกเบี้ย และอัตราดอกเบี้ยที่จะถูกแลกเปลี่ยน

4) การจ่ายเงินตามสัญญา

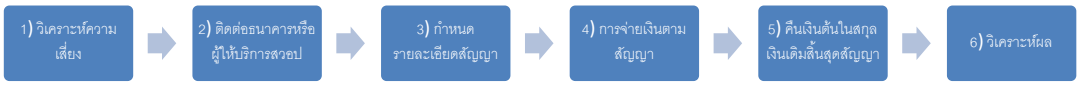
ตามระยะเวลาที่ได้กำหนดไว้ในสัญญา คู่สัญญาจะต้องแลกเปลี่ยนดอกเบี้ยตามที่ตกลงกันไว้

5) คืนเงินต้นในสกุลเงินเดิมสิ้นสุดสัญญา

ในวันสิ้นสุดสัญญาคู่สัญญาจะต้องคืนเงินต้นในสกุลเงินเดิมที่ได้จากการแลกเปลี่ยนเมื่อวันเริ่มสัญญา

6) วิเคราะห์ผล

หลังจากสิ้นสุดสัญญา ทางธุรกิจควรทำการวิเคราะห์ผลที่ได้จากการใช้สัญญาสวอปนี้เพื่อปรับปรุงแผนการจัดการความเสี่ยงในอนาคต



รูปที่ 10.15 *กระบวนการขั้นตอนการป้องกันค่าเงินบาทโดยใช้สัญญาสวอป*

บทสรุปท้ายบทที่ 10

บทที่ 10 ได้กล่าวถึง **สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ (Currency Swap)** ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญในการบริหารความเสี่ยงทางการเงินที่เกิดจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยน สัญญาดังกล่าวกำหนดให้คู่สัญญาตกลงล่วงหน้าในการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสด เช่น ดอกเบี้ยและเงินต้น ระหว่างสองสกุลเงินในช่วงเวลาที่กำหนดในอนาคต โดยเครื่องมือนี้มีบทบาทอย่างมากในยุคที่โลกการเงินมีความเชื่อมโยงระหว่างประเทศอย่างลึกซึ้ง

การแข็งค่าและการอ่อนค่าของเงินบาท เป็นประเด็นแรกที่กล่าวถึง โดยแสดงให้เห็นถึงผลกระทบของความผันผวนของค่าเงินต่อธุรกรรมระหว่างประเทศ ทั้งในมุมของผู้นำเข้าและผู้ส่งออก รวมถึงนักลงทุนต่างชาติและผู้ถือครองสินทรัพย์ในประเทศ สาระนี้เชื่อมโยงกับหัวข้อถัดไปคือ **ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ** ซึ่งเสนอแนวทางการป้องกันความเสี่ยงผ่านการล็อกอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า ช่วยลดความไม่แน่นอนของต้นทุนและรายได้ในอนาคต

ในส่วนของ **สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ** ได้อธิบายรายละเอียดการกำหนดเงื่อนไขการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดระหว่างสกุลเงิน โดยคำนึงถึงอัตราดอกเบี้ยของแต่ละประเทศ การใช้

เครื่องมือนี้ช่วยให้บริษัทสามารถเปลี่ยนสกุลเงินของหนี้หรือสินทรัพย์ เพื่อให้เหมาะสมกับรายรับหรือรายจ่ายที่แท้จริง

ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ แสดงให้เห็นถึงกลยุทธ์ที่บริษัทสามารถเข้าถึงต้นทุนทางการเงินที่ต่ำกว่าในตลาดต่างประเทศได้ ผ่านการใช้สวอปในลักษณะที่ทั้งสองฝ่ายต่างได้รับประโยชน์จากข้อได้เปรียบของตนเอง เช่น บริษัท A ในไทยมีเครดิตดีในตลาดเงินบาท แต่ต้องการเงินดอลลาร์ ขณะที่บริษัท B ในสหรัฐฯ มีข้อได้เปรียบตรงกันข้าม ทั้งสองจึงแลกเปลี่ยนต้นทุนทางการเงินผ่านสวอป

หัวข้อ **ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Parity)** อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างอัตราดอกเบี้ยของแต่ละประเทศกับอัตราแลกเปลี่ยน ซึ่งเป็นหลักการพื้นฐานในการกำหนดราคาสัญญาสวอป และในหัวข้อ **การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ** ได้เสนอวิธีคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่เกิดจากสัญญา โดยพิจารณาทั้งอัตราดอกเบี้ยและอัตราแลกเปลี่ยนในตลาดการเงิน

นอกจากนี้ ยังมีการยกตัวอย่างที่สำคัญคือ **กรณีการทำสัญญาสวอประหว่างบริษัท IBM กับธนาคารโลกในปี 1981** ซึ่งถือเป็นจุดเริ่มต้นของการใช้เครื่องมือนี้ในตลาดการเงินโลก และกลายเป็นแบบจำลองให้กับธุรกิจนานาชาติที่ต้องบริหารความเสี่ยงในระดับองค์กรข้ามชาติ

สำหรับการประยุกต์ใช้งานเชิงปฏิบัติในโลกการเงิน สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศถูกนำไปใช้ในหลายบริบท เช่น

- **บริษัทข้ามชาติ** ใช้เพื่อจับคู่อัตราดอกเบี้ยหรือค่าเงินของแหล่งเงินทุนกับกระแสรายได้ที่แท้จริง เช่น บริษัทญี่ปุ่นที่มีรายได้เป็นดอลลาร์อาจใช้ swap เพื่อบริหารความเสี่ยงค่าเงิน
- **สถาบันการเงิน** ใช้ swap เพื่อบริหารพอร์ตสินทรัพย์-หนี้สินให้สอดคล้องกับความต้องการสภาพคล่องในสกุลเงินต่าง ๆ
- **นักลงทุนสถาบัน** ใช้เพื่อปรับโครงสร้างหนี้หรือเพิ่มผลตอบแทนโดยอิงจากส่วนต่างของอัตราดอกเบี้ย (interest rate differential)

- **รัฐบาลหรือองค์กรรัฐวิสาหกิจ** ใช้ swap เพื่อระดมทุนในตลาดเงินต่างประเทศในขณะที่ควบคุมความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน เช่น การออกพันธบัตรสกุลเงินต่างประเทศแล้วแปลงความเสี่ยงผ่าน swap

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศเป็นเครื่องมือทางการเงินที่มีความสำคัญในยุคโลกาภิวัตน์ โดยช่วยให้บริษัทและนักลงทุนสามารถจัดการความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนได้อย่างมีประสิทธิภาพ บทนี้ไม่เพียงเสนอทฤษฎีพื้นฐาน เช่น ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย และการประเมินมูลค่า แต่ยังเน้นความเข้าใจเชิงกลยุทธ์ในการเลือกใช้สวอปให้สอดคล้องกับสถานการณ์จริงในตลาดการเงินที่มีความซับซ้อนและเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

เอกสารอ้างอิง

[1] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson.

[2] Kolb, R. W., & Overdahl, J. A. (2010). *Financial derivatives: Pricing and risk management*. Wiley.

[3] Fabozzi, F. J., Mann, S. V., & Choudhry, M. (2003). *The global money markets*. Wiley.

[4] Dodd, R. (2003). *Consequences of liberalizing derivatives markets*. Financial Policy Forum Derivatives Study Center.

[5] Bank for International Settlements. (2022). *OTC derivatives statistics at end-December 2022*. https://www.bis.org/statistics

[6] Culp, C. L. (2006). *Structured finance and insurance: The art of managing capital and risk*. Wiley.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 10

1) ผู้ส่งออกข้าวไทยไปยังสหรัฐอเมริกาต้องการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเพื่อแลกเปลี่ยนเงินสกุลดอลลาร์เป็นเงินสกุลไทยในอีก 8 เดือนข้างหน้า ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่องสำหรับเงินฝากในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลลาร์ เป็น 4.0% และ 3.0% ตามลำดับ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลไทยและเงินสกุลดอลลาร์ ณ ปัจจุบันเท่ากับ 33 บาทต่อ 1 ดอลลาร์ จงหาราคาฟอร์เวิร์ดดังกล่าว

2) สมมติว่าในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2022 นายบีมีเงินในบัญชีเงินตราต่างประเทศ (foreign currency deposit: FCD) จำนวน 500,000 ดอลลาร์สหรัฐ โดยในอีก 3 เดือนข้างหน้า จะต้องโอนเงินจำนวนนี้ให้แก่คู่ค้าในต่างประเทศ แต่ในปัจจุบันนายบีมีความต้องการนำสภาพคล่องจากบัญชี FCD มาใช้ แต่ในขณะเดียวกันก็กังวลเรื่องความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน ดังนั้นนายบีจึงใช้ FX swap เป็นเครื่องมือในการบริหารกระแสเงินสดและบริหารความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน โดยในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ นายบีติดต่อขอทำ FX swap อายุ 3 เดือน (spot / 3 month FX swap) กับธนาคาร ด้วยเงินต้นอ้างอิง $N_{US} = 500,000$ ดอลลาร์สหรัฐ สมมติอัตราแลกเปลี่ยน ณ วันที่ 1 กุมภาพันธ์ คือ 1 ดอลลาร์สหรัฐ เท่ากับ 34.50 บาท ถ้าอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปีสำหรับเงินฝากในเงินสกุลบาทไทยและสกุลดอลลาร์สหรัฐ เป็น 2.0% และ 3.0% ตามลำดับ จงสร้างตารางกระแสเงินสดสำหรับการแลกเปลี่ยนกระแสเงินสดจากสัญญาสวอปดังกล่าวระหว่างนายบี กับธนาคาร

3) พิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี ระหว่างบริษัท AThai และบริษัท BFX ซึ่งเริ่มต้นในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2023 สมมุติว่า AThai จ่ายดอกเบี้ยคงที่ 5% ด้วยสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) และรับดอกเบี้ยคงที่ 6% ด้วยสกุลเงินบาท (THB) จาก BFX กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี และกำหนดเงินต้นในสกุลบาทและสกุลดอลลาร์เป็น 32 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ การเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว เป็นไปตามตารางต่อไปนี้

ตารางกระแสเงินสดสำหรับสัญญาสวอป

วันที่	เงินต้น (USD)	ดอกเบี้ยจ่าย (USD)	เงินต้น (THB)	ดอกเบี้ยรับ (THB)
1-ก.พ.-23	1,000,000	-	32,000,000	-
31-ม.ค.-24	-	50,000	-	1,920,000
31-ม.ค.-25	-	50,000	-	1,920,000
31-ม.ค.-26	-	50,000	-	1,920,000

31-ม.ค.-27	-	50,000	-	1,920,000
31-ม.ค.-28	1,000,000	50,000	32,000,000	1,920,000

จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1) บริษัท AThai ต้องจ่ายดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

3.2) บริษัท AThai จะได้รับดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลบาทในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

3.3) กระแสเงินสดที่บริษัท AThai ต้องจ่ายและได้รับในแต่ละปีเป็นอย่างไรบ้าง?

3.4) ในวันที่ 31 มกราคม 2028 บริษัท AThai และ BFX จะต้องแลกเปลี่ยนเงินต้นกันเท่าใด?

3.5) สัญญาสวอปนี้มีประโยชน์อย่างไรในการบริหารความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน?

4) จงสร้างตารางกระแสเงินสดสำหรับการเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว โดยมีข้อมูลสัญญาดังนี้

เริ่มต้นสัญญา: 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2023

อายุสัญญา: 5 ปี

เงินต้น: 1 ล้านดอลลาร์สหรัฐ และ 34 ล้านบาท

ดอกเบี้ยจ่าย: LIBOR - 0.5% (USD)

ดอกเบี้ยรับ: BIBOR + 1% (THB)

BIBOR ต่อปี: 3%, 4.5%, 2.5%, 5%, 3.5%

LIBOR ต่อปี: 3.5%, 5.5%, 4.5%, 3.5%, 4.5%

และตอบคำถามต่อไปนี้

4.1) บริษัท AThai ต้องจ่ายดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

4.2) บริษัท AThai จะได้รับดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลบาทในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

4.3) กระแสเงินสดที่บริษัท AThai ต้องจ่ายและได้รับในแต่ละปีเป็นอย่างไรบ้าง?

4.4) ในวันที่ 31 มกราคม 2028 บริษัท AThai และ BFX จะต้องแลกเปลี่ยนเงินต้นกันเท่าใด?

5) พิจารณาสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี ระหว่างบริษัท AThai และบริษัท BFX ซึ่งเริ่มต้นในวันที่ 1 กุมภาพันธ์ ค.ศ.2023 สมมุติว่า AThai จ่ายดอกเบี้ยคงที่ 5% ด้วยสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) และรับดอกเบี้ยลอยตัวในอัตรา BIBOR+1% ในสกุลเงินบาท จาก BFX กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี สมมติว่า BIBOR ในแต่ละปีคือ 3%, 4.5%, 2.5%, 5%, และ 3.5% ตามลำดับ และกำหนดเงินต้นในสกุลบาทและสกุลดอลลาร์เป็น 34 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์

ตามลำดับ จงสร้างตารางแสดงการเคลื่อนไหวของเงินสดที่ AThai ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงิน (บาทและดอลลาร์) ระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศดังกล่าว

ตารางกระแสเงินสดสำหรับสัญญาสวอป

วันที่	เงินต้น (USD)	ดอกเบี้ยจ่าย (USD)	เงินต้น (THB)	BIBOR (%)	ดอกเบี้ยรับ (THB)
1-ก.พ.-23	1,000,000	-	34,000,000	-	-
31-ม.ค.-24	-	50,000	-	3	1,360,000
31-ม.ค.-25	-	50,000	-	5	1,725,000
31-ม.ค.-26	-	50,000	-	3	1,190,000
31-ม.ค.-27	-	50,000	-	5	2,040,000
31-ม.ค.-28	1,000,000	50,000	34,000,000	4	1,530,000

จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1) บริษัท AThai ต้องจ่ายดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลดอลลาร์สหรัฐในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

5.2) บริษัท AThai จะได้รับดอกเบี้ยเป็นเงินสกุลบาทในแต่ละปีเป็นจำนวนเท่าใด?

5.3) กระแสเงินสดที่บริษัท AThai ต้องจ่ายและได้รับในแต่ละปีเป็นอย่างไรบ้าง?

5.4) ในวันที่ 31 มกราคม 2028 บริษัท AThai และ BFX จะต้องแลกเปลี่ยนเงินต้นกันเท่าใด?

5.5) สัญญาสวอปนี้มีประโยชน์อย่างไรในการบริหารความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน?

6) สมมติว่าอัตราการกู้ยืมเงินในสกุลเงินดอลลาร์และบาทของบริษัท a และ b คือ การกู้ยืมอัตราสกุลเงินบาท 7.00% และ 9.00% ตามลำดับ และอัตราการกู้ยืมสกุลเงินดอลลาร์ คือ 5.00% และ 5.60% ตามลำดับ สมมติว่า บริษัท a มีภาระหนี้ที่ต้องชำระในสกุลเงินบาทที่อัตราดอกเบี้ย 7% ต่อปี ในขณะที่บริษัท b มีภาระหนี้ที่ต้องชำระในสกุลดอลลาร์ที่อัตราดอกเบี้ย 5.60% ต่อปี ทั้งสองบริษัทต้องการใช้สัญญาสวอปอัตราเงินตราต่างประเทศอายุสัญญา 5 ปี เพื่อทำให้ทั้ง 2 บริษัทมีต้นทุนในการกู้ยืมที่ต่ำลง กำหนดเงินต้นอ้างอิงที่จะแลกเปลี่ยนตามสัญญาสวอปเท่ากับ 30 ล้านบาท และ 1 ล้านดอลลาร์ ที่อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบัน 30 บาท ต่อ 1 ดอลลาร์

6.1) จงวิเคราะห์ความได้เปรียบเชิงการเปรียบเทียบของอัตราดอกเบี้ยระหว่างบริษัท a และระหว่างบริษัท b ในการกู้ยืมเงินสกุลต่างๆ

6.2) จงสร้างตารางแสดงการเปรียบเทียบอัตราดอกเบี้ยและต้นทุนการกู้ยืมหลังสวอประหว่างบริษัท a และ b

7) บริษัทญี่ปุ่นต้องการคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าระยะเวลาหนึ่งปีของ JPY/USD โดยอัตราแลกเปลี่ยน JPY/USD ปัจจุบันอยู่ที่ 145 JPY/USD และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงในสกุลเยนเท่ากับ 3.5% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงของ USD เท่ากับ 4.5% จงหาอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าระยะเวลาหนึ่งปีที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

8) สมมติว่าอัตราแลกเปลี่ยนทันที aud/nzd เท่ากับ 1.0700 aud ต่อ 1 nzd และอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า 180 วันของ aud/nzd เท่ากับ 1.0655 aud ต่อ 1 nzd จงประมาณผลต่างอัตราดอกเบี้ยและอัตราดอกเบี้ยในสกุล aud มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงอย่างไร

หมายเหตุ - aud (australian dollar): สกุลเงินของประเทศออสเตรเลีย
- nzd (new zealand dollar): สกุลเงินของประเทศนิวซีแลนด์

9) สมมติว่าอัตราแลกเปลี่ยนทันที eur/GBP เท่ากับ 0.8500 eur ต่อ 1 GBP และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงในสกุลยูโรเท่ากับ 1.2% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงของ GBP เท่ากับ 1.8% จงหาอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้าระยะเวลาหนึ่งปีของ eur/GBP ที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

10) บริษัทในประเทศแคนาดามีภาระหนี้ที่ต้องชำระในสกุลเงินดอลลาร์สหรัฐ (USD) โดยอัตราดอกเบี้ยของ cad เท่ากับ 2.5% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยของ USD เท่ากับ 3.0% ต่อปี อัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบัน cad/USD เท่ากับ 1.25 cad ต่อ 1 USD บริษัทต้องการใช้สัญญาสวอปอัตราเงินตราต่างประเทศอายุ 3 ปี เพื่อทำให้บริษัทมีต้นทุนในการกู้ยืมที่ต่ำลง กำหนดเงินต้นอ้างอิงที่จะแลกเปลี่ยนตามสัญญาสวอปเท่ากับ 2 ล้าน cad และ 1.6 ล้าน USD จงวิเคราะห์ความได้เปรียบเชิงการเปรียบเทียบของอัตราดอกเบี้ยระหว่างบริษัทและธนาคาร และจงสร้างตารางแสดงการเปรียบเทียบได้ดังกล่าว

11) บริษัทในประเทศอินเดียต้องการคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า inr/JPY ระยะเวลา 6 เดือน อัตราแลกเปลี่ยนทันทีอยู่ที่ 1.50 inr/JPY และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงของสกุลเงินรูปีอินเดียเท่ากับ 4.5% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงของเยนญี่ปุ่นเท่ากับ 0.1% ต่อปี จงหาอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า 6 เดือนของ inr/JPY ที่สอดคล้องกับหลักการปราศจากการค้ากำไร

12) สมมติว่าอัตราแลกเปลี่ยนทันที CHF/eur เท่ากับ 1.10 CHF ต่อ 1 eur และอัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า 90 วันของ CHF/eur เท่ากับ 1.0950 CHF ต่อ 1 eur จงประมาณผลต่างอัตราดอกเบี้ยและอัตราดอกเบี้ยในสกุล CHF มีแนวโน้มเปลี่ยนแปลงอย่างไร

13) บริษัทในประเทศเกาหลีใต้และบริษัทในประเทศสิงคโปร์ต้องการทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศอายุ 5 ปี บริษัทในเกาหลีใต้จะจ่ายดอกเบี้ยคงที่ 3.0% ในสกุล krw และรับดอกเบี้ยคงที่ 2.0% ในสกุล sgd จากบริษัทในสิงคโปร์ กำหนดการชำระดอกเบี้ยทุก ๆ สิ้นปี และกำหนดเงินต้นในสกุล krw และ sgd เป็น 3 พันล้านวอน และ 3 ล้านดอลลาร์สิงคโปร์ตามลำดับ จงสร้างตารางแสดงการเคลื่อนไหวของเงินสดที่บริษัทในเกาหลีใต้ได้รับและจ่ายในสกุลเงินทั้งสองสกุลเงินระหว่างระยะเวลาของสัญญาสวอปดังกล่าว

14) บริษัท a ในประเทศไทยได้ทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่กับบริษัท b ในประเทศญี่ปุ่น โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) THB/JPY = 0.30 THB ต่อ 1 JPY
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งไทย (N_{THB}) = 30,000,000 บาท
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งต่างประเทศ (N_{JPY}) = 100,000,000 เยน
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งไทย (i_{THB}) = 4% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งต่างประเทศ (i_{JPY}) = 2% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งไทย (r_{THB}) = 3% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งต่างประเทศ (r_{JPY}) = 1% ต่อปี
- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 5 ปี

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งไทย (PV_{THB}) และฝั่งต่างประเทศ (PV_{JPY}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยบาท

15) บริษัท c ในประเทศเยอรมนีทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราคงที่กับบริษัท d ในประเทศสหรัฐอเมริกา โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) eur/USD = 1.10 USD ต่อ 1 eur
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งยุโรป (N_{EUR}) = 10,000,000 ยูโร
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งสหรัฐ (N_{USD}) = 11,000,000 ดอลลาร์สหรัฐ

- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งยุโรป (i_{EUR}) = 2.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งสหรัฐ (i_{USD}) = 3.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งยุโรป (r_{EUR}) = 1.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งสหรัฐ (r_{USD}) = 2.0% ต่อปี
- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 4 ปี

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งยุโรป (PV_{EUR}) และฝั่งสหรัฐ (PV_{USD}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยยูโร

16) บริษัท e ในประเทศอังกฤษทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัวกับบริษัท f ในประเทศแคนาดา โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) GBP/cad = 1.70 cad ต่อ 1 GBP
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งอังกฤษ (N_{GBP}) = 5,000,000 ปอนด์
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งแคนาดา (N_{CAD}) = 8,500,000 ดอลลาร์แคนาดา
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งอังกฤษ (i_{GBP}) = 3.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งแคนาดาในแต่ละปี (i^k_{CAD}) = 3%, 2.5%, 2%, และ 1.5% ตามลำดับ
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งอังกฤษ (r_{GBP}) = 2.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งแคนาดา (r_{CAD}) = 2% ต่อปี
- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 4 ปี

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งอังกฤษ (PV_{GBP}) และฝั่งแคนาดา (PV_{CAD}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยปอนด์

17) บริษัท g ในประเทศออสเตรเลียทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราคงที่แลกอัตราลอยตัวกับบริษัท h ในประเทศนิวซีแลนด์ โดยมีรายละเอียดดังนี้:

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) aud/nzd = 1.08 nzd ต่อ 1 aud
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งออสเตรเลีย (N_{AUD}) = 4,000,000 ดอลลาร์ออสเตรเลีย
- เงินต้นอ้างอิงฝั่งนิวซีแลนด์ (N_{NZD}) = 4,320,000 ดอลลาร์นิวซีแลนด์
- อัตราดอกเบี้ยคงที่ฝั่งออสเตรเลีย (i_{AUD}) = 4% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งนิวซีแลนด์ในแต่ละปี (i^k_{NZD}) = 3.5%, 3%, 2.5%, และ 2% ตามลำดับ
- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งออสเตรเลีย (r_{AUD}) = 3.5% ต่อปี

- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งนิวซีแลนด์ (r_{NZD}) = 3% ต่อปี

- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 4 ปี

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งออสเตรเลีย (PV_{AUD}) และฝั่งนิวซีแลนด์ (PV_{NZD}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยดอลลาร์ออสเตรเลีย

18) บริษัท i ในประเทศสิงคโปร์ทำสัญญาสวอปอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราต่างประเทศแบบอัตราลอยตัวแลกอัตราลอยตัวกับบริษัท j ในประเทศมาเลเซีย โดยมีรายละเอียดดังนี้

- อัตราแลกเปลี่ยนทันที (spot rate) sgd/myr = 3.00 myr ต่อ 1 sgd

- เงินต้นอ้างอิงฝั่งสิงคโปร์ (N_{SGD}) = 2,000,000 ดอลลาร์สิงคโปร์

- เงินต้นอ้างอิงฝั่งมาเลเซีย (N_{MYR}) = 6,000,000 ริงกิตมาเลเซีย

- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งสิงคโปร์ในแต่ละปี (i_{SGD}^{k}) = 2.5%, 2%, 1.5%, และ 1% ตามลำดับ

- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวฝั่งมาเลเซียในแต่ละปี (i_{MYR}^{k}) = 3%, 2.5%, 2%, และ 1.5% ตามลำดับ

- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งสิงคโปร์ (r_{SGD}) = 2% ต่อปี

- อัตราดอกเบี้ยไม่มีความเสี่ยงฝั่งมาเลเซีย (r_{MYR}) = 2.5% ต่อปี

- ระยะเวลาสัญญา เท่ากับ 4 ปี

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดฝั่งสิงคโปร์ (PV_{SGD}) และฝั่งมาเลเซีย (PV_{MYR}) รวมถึงมูลค่าสวอปเงินตราต่างประเทศ (V_{swap}) ในหน่วยดอลลาร์สิงคโปร์

19) บริษัทนำเข้าสินค้ารายหนึ่งในประเทศไทยมีภาระต้องชำระค่าสินค้าเป็นเงินดอลลาร์สหรัฐจำนวน $250,000 ภายในอีก 3 เดือนข้างหน้า ขณะนี้อัตราแลกเปลี่ยนอยู่ที่ 35.00 บาทต่อดอลลาร์ และนักวิเคราะห์คาดว่าเงินบาทอาจแข็งค่าขึ้นหรืออ่อนค่าลงได้ 5% จากอัตราแลกเปลี่ยนปัจจุบัน

19.1) คำนวณจำนวนเงินบาทที่บริษัทต้องชำระในกรณีที่เงินบาทแข็งค่า 5\%

19.2) คำนวณจำนวนเงินบาทที่บริษัทต้องชำระในกรณีที่เงินบาทอ่อนค่า 5\%

19.3) วิเคราะห์ความเสี่ยงของบริษัทจากความผันผวนของอัตราแลกเปลี่ยนและเสนอแนวทางการบริหารความเสี่ยง

20) นักลงทุนไทยกำลังพิจารณาลงทุนในพันธบัตรรัฐบาลสหรัฐอายุ 1 ปี ซึ่งให้ผลตอบแทน 3% ต่อปี ขณะที่พันธบัตรรัฐบาลไทยให้ผลตอบแทน 1.5% ต่อปี ปัจจุบันอัตราแลกเปลี่ยนอยู่ที่ 36.00 บาทต่อดอลลาร์สหรัฐ โดยคาดว่าในอีก 1 ปีข้างหน้าเงินบาทจะแข็งค่ามาอยู่ที่ 34.00 บาทต่อดอลลาร์

20.1) คำนวณผลตอบแทนที่แท้จริงของนักลงทุนไทยเมื่อพิจารณาค่าเงินบาทแข็งค่า

20.2) วิเคราะห์ว่าการแข็งค่าของเงินบาทส่งผลอย่างไรต่อการตัดสินใจลงทุนในต่างประเทศ และควรตัดสินใจลงทุนหรือไม่

21) บริษัทส่งออกของไทยจะได้รับเงินจากลูกค้าในต่างประเทศเป็นจำนวนเงิน $500,000 ภายใน 6 เดือนข้างหน้า ปัจจุบันอัตราแลกเปลี่ยนสปอต (Spot rate) อยู่ที่ 35.50 บาทต่อดอลลาร์ และอัตราดอกเบี้ยเงินฝาก 6 เดือนในไทยเท่ากับ 1.8% ต่อปี ขณะที่อัตราดอกเบี้ยเงินฝาก 6 เดือนในสหรัฐฯ เท่ากับ 3.0% ต่อปี

21.1) คำนวณอัตราแลกเปลี่ยนฟอร์เวิร์ด 6 เดือนโดยใช้สมการความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Parity)

21.2) หากบริษัทต้องการล็อกอัตราแลกเปลี่ยนโดยทำสัญญาฟอร์เวิร์ด คำนวณจำนวนเงินบาทที่จะได้รับจากการทำสัญญาดังกล่าว

21.3) วิเคราะห์ข้อดีข้อเสียของการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดเทียบกับการรอแลกเปลี่ยนตามอัตราในวันรับชำระเงิน

22) บริษัทนำเข้าสินค้าอิเล็กทรอนิกส์จากญี่ปุ่น โดยต้องชำระเงินจำนวน 50 ล้านเยนในอีก 90 วันข้างหน้า ขณะนี้อัตราแลกเปลี่ยนสปอตคือ 0.26 บาทต่อเยน และอัตราฟอร์เวิร์ด 90 วันคือ 0.27 บาทต่อเยน

22.1) คำนวณจำนวนเงินบาทที่บริษัทต้องจ่ายหากทำสัญญาฟอร์เวิร์ดไว้ล่วงหน้า

22.2) หากบริษัทไม่ทำสัญญาฟอร์เวิร์ด และอัตราแลกเปลี่ยนในอีก 90 วันกลายเป็น 0.29 บาทต่อเยน บริษัทจะเสียหรือได้ประโยชน์เป็นจำนวนเงินเท่าใด

22.3) วิเคราะห์สถานการณ์และเสนอแนะกลยุทธ์การจัดการความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน

23) บริษัท A ในประเทศไทยต้องการกู้เงินจำนวน $5 ล้านดอลลาร์สหรัฐ เป็นเวลา 3 ปี เพื่อใช้ในธุรกิจนำเข้าสินค้า โดยสามารถกู้จากธนาคารต่างประเทศที่อัตราดอกเบี้ยคงที่ 4% ต่อปี หรือเลือกกู้จากธนาคารไทยเป็นเงินบาทที่อัตราดอกเบี้ยคงที่ 6.5% ต่อปี ในขณะเดียวกัน บริษัท B ในสหรัฐอเมริกาต้องการกู้เงินบาทจำนวนเทียบเท่ากับ 175 ล้านบาท โดยมีเงื่อนไขดอกเบี้ยเหมือนกัน

23.1) อธิบายว่าบริษัททั้งสองสามารถทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศเพื่อให้ได้ต้นทุนที่ต่ำกว่าการกู้โดยตรงได้อย่างไร

23.2) แสดงกระแสเงินสดในแต่ละปีของทั้งสองบริษัทภายใต้สัญญาสวอป

23.3) วิเคราะห์ผลประโยชน์ร่วมที่บริษัท A และ B ได้รับจากการทำสวอปครั้งนี้

24) บริษัท C ในยุโรปทำธุรกิจส่งออกเครื่องจักรไปยังประเทศไทย โดยได้รับค่าสินค้าเป็นเงินบาทปีละ 80 ล้านบาท เป็นเวลา 5 ปี บริษัทต้องการเปลี่ยนกระแสเงินสดนี้เป็นยูโรเพื่อหลีกเลี่ยงความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน ขณะเดียวกัน บริษัท D ในประเทศไทยกู้เงินจากยุโรปเป็นจำนวน 2 ล้านยูโร และต้องการเปลี่ยนภาระดอกเบี้ยและเงินต้นให้เป็นเงินบาท

24.1) อธิบายกลไกการทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศระหว่างบริษัท C และ D

24.2) หากอัตราดอกเบี้ยยูโรอยู่ที่ 2% ต่อปี และอัตราดอกเบี้ยบาทอยู่ที่ 4.5% ต่อปี คำนวณต้นทุนที่บริษัท D ต้องชำระในรูปเงินบาทภายใต้สัญญาสวอป

24.3) เสนอข้อดีและข้อควรระวังของการใช้สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศในการจัดการกระแสเงินสดข้ามสกุลเงิน

25) บริษัท E ในประเทศญี่ปุ่นสามารถกู้ยืมเงินในประเทศของตนที่อัตราดอกเบี้ย 1.5% ต่อปี และกู้เงินเป็นดอลลาร์สหรัฐที่อัตราดอกเบี้ย 4.5% ต่อปี ขณะที่บริษัท F ในสหรัฐอเมริกาสามารถกู้ยืมเงินในประเทศของตนที่อัตราดอกเบี้ย 3.5% ต่อปี และกู้เงินเป็นเงินเยนที่อัตราดอกเบี้ย 2.5% ต่อปี

25.1) วิเคราะห์ว่าบริษัทใดมีความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบในการกู้ยืมเงินในแต่ละสกุลเงิน

25.2) หากทั้งสองบริษัทต้องการเงินทุนในสกุลเงินของอีกฝ่าย จงออกแบบข้อตกลงการทำสัญญาสวอปที่ทั้งสองฝ่ายจะได้ประโยชน์

25.3) คำนวณผลประโยชน์ที่แต่ละบริษัทได้รับจากการทำสัญญาสวอปเปรียบเทียบกับการกู้เงินโดยตรง

26) บริษัท G ในประเทศอังกฤษต้องการเงินทุนเป็นดอลลาร์สหรัฐเพื่อลงทุนในโครงการใหม่ ขณะที่บริษัท H ในสหรัฐอเมริกาต้องการเงินทุนเป็นปอนด์สเตอร์ลิงเพื่อใช้ในการขยายธุรกิจในยุโรป อัตราดอกเบี้ยที่บริษัท G ได้รับในประเทศของตนคือ 2.8% และในสหรัฐคือ 5.2% ส่วนบริษัท H สามารถกู้ในประเทศตนที่อัตรา 4.5% และในอังกฤษที่อัตรา 3.4%

26.1) จงระบุว่าบริษัทใดมีความได้เปรียบสัมพัทธ์ในการกู้ยืมในแต่ละสกุลเงิน และจะใช้ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบนี้ในการทำสัญญาสวอปอย่างไร

26.2) เสนอข้อตกลงเบื้องต้นของสัญญาสวอประหว่างบริษัททั้งสอง

26.3) วิเคราะห์ผลประโยชน์ทางการเงินของแต่ละฝ่าย พร้อมอธิบายข้อจำกัดที่อาจเกิดขึ้นจากการแลกเปลี่ยนดังกล่าว

27) อัตราดอกเบี้ยเงินฝาก 1 ปีในประเทศไทยอยู่ที่ 1.8% ต่อปี ขณะที่อัตราดอกเบี้ยเงินฝาก 1 ปีในสหรัฐอเมริกาอยู่ที่ 4.0% ต่อปี อัตราแลกเปลี่ยนสปอต (Spot rate) ปัจจุบันอยู่ที่ 36.00 บาทต่อดอลลาร์ และอัตราแลกเปลี่ยนฟอร์เวิร์ด 1 ปีอยู่ที่ 37.20 บาทต่อดอลลาร์

27.1) ตรวจสอบว่ามีความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย (Covered Interest Rate Parity) หรือไม่

27.2) หากไม่เสมอภาค นักลงทุนสามารถทำกำไรจากการทำ Arbitrage ได้อย่างไร พร้อมคำนวณผลกำไรจากการทำ Arbitrage ด้วยเงินลงทุนเริ่มต้น $100,000

27.3) วิเคราะห์ผลกระทบที่อาจเกิดขึ้นต่ออัตราแลกเปลี่ยนจากกิจกรรม Arbitrage ดังกล่าวในเชิงกลไกตลาด

28) นักลงทุนชาวไทยต้องการลงทุนในสินทรัพย์ของญี่ปุ่น โดยปัจจุบันอัตราดอกเบี้ยระยะเวลา 180 วันในประเทศไทยอยู่ที่ 2.2% ต่อปี และในญี่ปุ่นอยู่ที่ 0.6% ต่อปี อัตราแลกเปลี่ยนสปอตระหว่างบาทต่อเยนคือ 0.2600 และอัตราแลกเปลี่ยนฟอร์เวิร์ด 180 วันอยู่ที่ 0.2550 บาทต่อเยน

28.1) คำนวณอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดโดยนัย (Implied Forward Rate) ของญี่ปุ่นจากข้อมูลที่ให้ และเปรียบเทียบกับอัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง

28.2) วิเคราะห์ว่าความไม่เสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยเปิดโอกาสให้เกิด Arbitrage ได้หรือไม่ และจะจัดการอย่างไร

28.3) เสนอแนะแนวทางที่ธนาคารพาณิชย์ควรดำเนินการเพื่อบริหารความเสี่ยงจากการเบี่ยงเบนของ Interest Rate Parity

29) บริษัทไทยแห่งหนึ่งทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศกับบริษัทในสหรัฐอเมริกา โดยตกลงแลกเปลี่ยนดอกเบี้ยปีละครั้งเป็นเวลา 3 ปี บริษัทไทยจะจ่ายดอกเบี้ยคงที่ 4% ต่อปีจากเงินต้น 180 ล้านบาท ขณะที่บริษัทสหรัฐจะจ่ายดอกเบี้ยลอยตัวเทียบกับอัตรา LIBOR + 1.5% จากเงินต้น $5 ล้านดอลลาร์ โดยอัตราแลกเปลี่ยนเริ่มต้นอยู่ที่ 36.00 บาทต่อดอลลาร์

29.1) หากอัตรา LIBOR ในปีที่ 1 เท่ากับ 2.5%, ในปีที่ 2 เท่ากับ 3.0% และในปีที่ 3 เท่ากับ 3.5% ให้คำนวณกระแสเงินสดที่แต่ละฝ่ายต้องจ่ายในแต่ละปี (ในสกุลเงินของตน)

29.2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของสัญญาสวอปฝั่งบริษัทไทย ณ สิ้นปีที่ 1 หากอัตราแลกเปลี่ยนในขณะนั้นอยู่ที่ 35.00 บาทต่อดอลลาร์ และอัตราดอกเบี้ยตลาดของไทยอยู่ที่ 3.5%

29.3) วิเคราะห์ว่าอัตราแลกเปลี่ยนมีผลต่อความได้เปรียบหรือเสียเปรียบของบริษัทไทยอย่างไร

30) บริษัท A ในยุโรปทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศกับบริษัท B ในไทย โดยบริษัท A จ่ายดอกเบี้ยลอยตัวอิง EURIBOR จากเงินต้น 2 ล้านยูโร ขณะที่บริษัท B จ่ายดอกเบี้ยคงที่ 5% ต่อปีจากเงินต้น 80 ล้านบาท ระยะเวลา 4 ปี โดยจ่ายดอกเบี้ยทุกปี ณ สิ้นปี อัตราแลกเปลี่ยนเริ่มต้นคือ 40 บาทต่อยูโร

30.1) หาก EURIBOR เท่ากับ 1.2%, 1.4%, 1.6% และ 1.8% ตามลำดับในแต่ละปี จงคำนวณกระแสเงินสดที่ทั้งสองฝ่ายต้องจ่าย

30.2) ณ สิ้นปีที่ 2 หากอัตราแลกเปลี่ยนเปลี่ยนเป็น 38 บาทต่อยูโร และอัตราดอกเบี้ยในตลาดไทยอยู่ที่ 4% ให้ประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปในฝั่งบริษัท B

30.3) วิเคราะห์ความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนและเสนอวิธีลดความเสี่ยงจากการถือสัญญานี้

31) บริษัท X ในประเทศไทยต้องการนำเข้าเครื่องจักรจากประเทศญี่ปุ่นในอีก 6 เดือนข้างหน้า มูลค่า 100 ล้านเยน ปัจจุบันอัตราแลกเปลี่ยนอยู่ที่ 0.2650 บาทต่อเยน และบริษัทกังวลเกี่ยวกับการแข็งค่าของเยน บริษัทพิจารณาทั้งการทำสัญญาฟอร์เวิร์ดและการทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศเพื่อป้องกันความเสี่ยง

31.1) คำนวณจำนวนเงินบาทที่ต้องจ่ายหากทำสัญญาฟอร์เวิร์ดที่อัตรา 0.2750 บาทต่อเยน

31.2) หากบริษัทเลือกทำสวอปกับบริษัทญี่ปุ่นโดยจ่ายดอกเบี้ยคงที่ 3% บาทต่อปีจากเงินต้น 26.5 ล้านบาท แลกกับการรับจ่ายเยนที่อัตราคงที่ 0.8% ต่อปีจากเงินต้น 100 ล้านเยน เป็นเวลา 1 ปี จงคำนวณกระแสเงินสดในแต่ละฝั่ง

31.3) วิเคราะห์ความเหมาะสมของการเลือกใช้ฟอร์เวิร์ดเทียบกับสวอปในสถานการณ์นี้

32) บริษัท A ในสหรัฐอเมริกามีต้นทุนกู้ยืมในสกุลเงิน USD อยู่ที่ 4% ต่อปี และต้องการลงทุนในประเทศไทย ขณะที่บริษัท B ในไทยสามารถกู้เงินบาทที่อัตรา 5.5% แต่ต้องการลงทุนในโครงการที่ต้องใช้ USD ทั้งสองบริษัทมีแผนใช้สัญญาสวอปและพิจารณาความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ยในการกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนฟอร์เวิร์ด

32.1) หากอัตราดอกเบี้ยในสหรัฐฯ อยู่ที่ 4% และในไทยอยู่ที่ 5.5% อัตราแลกเปลี่ยนสปอตคือ 36.00 บาทต่อดอลลาร์ ให้คำนวณอัตราแลกเปลี่ยนฟอร์เวิร์ด 1 ปี โดยใช้สูตร Interest Rate Parity

32.2) อธิบายว่าทั้งสองบริษัทจะสามารถสร้างความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบได้อย่างไรในการกู้ยืมและทำสวอป

32.3) เสนอรูปแบบของสัญญาสวอปและแสดงผลประโยชน์ของแต่ละฝ่ายจากการทำสัญญา

33) บริษัท C ในยุโรปได้ทำสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศกับบริษัท D ในไทย โดยตกลงแลกเปลี่ยนดอกเบี้ยลอยตัว (EURIBOR + 1%) กับดอกเบี้ยคงที่ฝั่งไทยที่ 5% จากเงินต้น 2 ล้านยูโรกับ 80 ล้านบาท เป็นเวลา 3 ปี ณ สิ้นปีที่ 2 อัตราแลกเปลี่ยนเปลี่ยนจาก 40 บาทต่อยูโรเป็น 38 บาทต่อยูโร และอัตราดอกเบี้ยตลาดในไทยลดลงเหลือ 3.5%

33.1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของสัญญาสวอปฝั่งบริษัท D ณ สิ้นปีที่ 2

33.2) วิเคราะห์ความเสี่ยงที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงอัตราแลกเปลี่ยนและอัตราดอกเบี้ย พร้อมเสนอแนวทางการป้องกันความเสี่ยง

33.3) สรุปบทเรียนสำคัญในการบริหารความเสี่ยงทางการเงินด้วยเครื่องมืออนุพันธ์จากกรณีศึกษานี้

บทที่ 11 สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์และสวอปชัน

เนื้อหาประกอบด้วย

11.1 ทฤษฎีของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน

11.2 เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด

11.3 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผัน

11.4 สัญญาแคปอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

11.5 สัญญาสวอปชัน

บทนำ

สัญญาแคป (cap) สัญญาฟลอร์ (floor) สัญญาคอลลาร์ (collar) และสัญญาสวอปชัน (swaption) เป็นเครื่องมือหนึ่งในจัดการความเสี่ยงทางการเงินซึ่งมีความซับซ้อนและผันผวนมากในตลาดทุนโลก การมีความรู้ความเข้าใจที่ถ่องแท้ในสัญญาเหล่านี้ย่อมมีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน ไม่ว่าจะเป็นความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย อัตราแลกเปลี่ยน หรือความเสี่ยงอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องก็ตาม

สัญญาแคป (cap agreement) และ สัญญาฟลอร์ (floor agreement) คือสัญญาทางการเงินที่ช่วยให้ผู้ถือสัญญาสามารถจัดการการความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยคือจำกัดการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของอัตราดอกเบี้ยที่ไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในอนาคต ช่วยลดความผันผวนและจำกัดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

สัญญาคอลลาร์ (collar agreement) เป็นสัญญาที่เกิดจากการรวมกันของสัญญาแคปและสัญญาฟลอร์ ทำให้ผู้ทำสัญญาสามารถกำหนดช่วงของอัตราดอกเบี้ยที่ต้องการจำกัด มีอัตราดอกเบี้ยสูงสุด (cap rate) และอัตราดอกเบี้ยต่ำสุด (floor rate) ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า

ส่วนสัญญาสวอปชัน (swaption) หรือออปชันสวอป (swap option) เป็นสัญญาที่ผสมผสานระหว่างสวอปอัตราดอกเบี้ยและออปชัน สวอปชันเป็นเครื่องมือหนึ่งในการรับประกัน

ระดับดอกเบี้ยที่แน่นอนสำหรับการกู้ยืมระยะยาวในอนาคตหรือการฝากเงินระยะยาว ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะยาวที่เกิดขึ้นในอนาคต โดยสัญญาสวอปชันให้สิทธิแก่ผู้ถือเข้าทำสัญญา swap แบบจ่ายคงที่-รับลอยตัว (payer swaption) หรือ ให้สิทธิแก่ผู้ถือเข้าทำสัญญา swap แบบรับคงที่-จ่ายลอยตัว (receiver swaption) สวอปชันให้ผู้ถือสัญญามีความยืดหยุ่นในการตัดสินใจว่าจะใช้สิทธิตามสัญญาสวอปหรือลบล้างสัญญาสวอป นับว่าเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางการเงินและการวางแผนการเงินระยะยาว

ในบทที่ 11 นี้ จะอธิบายความหมายและการทำงานของสัญญาแคป สัญญาฟลอร์ สัญญาคอลลาร์และสัญญาสวอปชัน รวมถึงการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาดังกล่าว นอกจากนี้ ยังเปรียบเทียบความแตกต่างของสัญญาเหล่านี้และความเหมาะสมของแต่ละสัญญาในสถานการณ์ที่แตกต่างกัน

11.1 กรอบโครงสร้างของตัวแบบ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน

ตัวแบบของ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน หรือตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton : HJM) คือตัวแบบทางการเงินที่ใช้ในการวิเคราะห์อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าหรืออัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด (forward rate) ตัวแบบ HJM พยากรณ์การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดโดยตรง ซึ่งต่างจากตัวแบบการเงินอื่น ๆ ที่พยายามจะพยากรณ์หรือจำลองอัตราดอกเบี้ยทันที (spot rate) ตัวแบบนี้ได้รับการคิดขึ้นโดยเดวิด ฮีธ (David Heath) โรเบิร์ต จาร์โรว์ (Robert Jarrow) และ แอนดรูว์ มอร์ตัน (Andrew Morton) ในปี ค.ศ.1992

กรอบโครงสร้างของตัวแบบ ฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน มีหลักการภายใต้เงื่อนไข 3 ประการ คือ

1) อัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดไม่เป็นการเคลื่อนที่สุ่ม

การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ดต้องสอดคล้องกับการเคลื่อนไหวทางการเงินทั่วไป ซึ่งมักจะถูกแทนที่ด้วยอัตราดอกเบี้ยสั้น

2) ไม่มีการขาดทุนจากการคาดการณ์

ตัวแบบ HJM จะต้องสามารถป้องกันการขาดทุนจากการคาดการณ์ที่ผิดพลาด หากคาดการณ์อัตราดอกเบี้ยที่จะเกิดขึ้นในอนาคตและใช้ข้อมูลนั้นในการทำรายการทางการเงินจะสามารถทำกำไรได้โดยไม่มีความเสี่ยง

3) ความสามารถในการพยากรณ์ราคา

ตัวแบบ HJM ต้องสามารถใช้ในการพยากรณ์ราคาของตราสารทางการเงินที่เกี่ยวข้องกับอัตราดอกเบี้ย ราคาของสินค้าทั้งหมดที่มีความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยจะต้องสอดคล้องกับหลักการปราศจากการทำกำไรโดยไม่มีความเสี่ยง (no-arbitrage principle)

ตัวแบบ HJM ใช้สมการสัมพันธ์กับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย (volatility structure) ซึ่งใช้ความผันผวนในอดีตเพื่อพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยฟอร์เวิร์ด โดยตัวแบบ HJM สามารถทำงานกับอัตราดอกเบี้ยที่มีโครงสร้างที่ซับซ้อน ในทางปฏิบัติการหาผลเฉลยรูปปิดของสมการของตัวแบบ HJM นั้นทำได้ยาก จำเป็นต้องใช้เทคนิคการทำความเข้าใจที่ซับซ้อน อย่างไรก็ตาม ตัวแบบนี้เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการทำความเข้าใจและวิเคราะห์อัตราดอกเบี้ยที่มีโครงสร้างที่ซับซ้อน

กำหนดอายุครบกำหนด $T \geq 0$ สำหรับเวลา t ใดๆ ตัวประกอบส่วนลด (discount factor), P_t^T ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q กำหนดโดย นิยามอยู่ในรูป

$$P_t^T = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right] \tag{11.1}$$

ในที่นี้อาจพิจารณา P_t^T เป็นราคาปัจจุบันของพันธบัตรที่นักลงทุนยินดีจ่ายในปัจจุบัน (t) เพื่อแลกกับเงิน 1 หน่วยที่จะได้รับในอนาคต ณ เวลา T โดยคำนึงถึงอัตราดอกเบี้ยที่ปราศจากความเสี่ยงและการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยนั้นตลอดช่วงเวลา t ถึง T

11.1.1 อัตราฟอร์เวิร์ดทันที (instantaneous forward rate)

อัตราฟอร์เวิร์ดทันที เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ใช้สำหรับสัญญาซื้อขายตราสารหนี้ระหว่างสองเวลา ซึ่งอัตรานี้ถูกกำหนดจากราคาตลาดของตราสารหนี้ในปัจจุบัน โดยอัตราฟอร์เวิร์ดทันทีแสดงถึง

อัตราดอกเบี้ยที่คาดว่าจะได้รับในช่วงเวลาเล็ก ๆ ในอนาคตที่กำหนดจากเวลาปัจจุบัน ในที่นี้จะเขียนแทนอัตราฟอร์เวิร์ดทันที ด้วยสัญลักษณ์ $f(t,T)$ กำหนดโดย

$$f(t,T)=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{1}{\Delta T}\left(\frac{E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]}{E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^{T+\Delta T} r_s ds\right)\right]}-1\right)=-\frac{\partial \ln\left(P_t^T\right)}{\partial T} \tag{11.2}$$

สมมติว่ามีความเสี่ยงจำนวน N ปัจจัยซึ่งแต่ละปัจจัยนั้นเกิดจากการเคลื่อนที่บราวน์ที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน, $W_t^k, t>0, k=1,2,...,N$ สมมติว่าภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง, P_t^T สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T}=\mu\left(t,T\right)dt+\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)dW_t^k \tag{11.3}$$

เมื่อ $\mu\left(t,T\right),\sigma_k\left(t,T\right)$ เป็นอัตราดริฟท์ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (instantaneous mean) และค่าความผันผวน ตามลำดับ สมมติว่าภายใต้ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$\mu\left(t,T\right)=r_t \tag{11.4}$$

เมื่อ $r_t\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{1}{P_t^{t+\Delta t}}-1\right)=\left[-\frac{\partial \ln\left(P_t^T\right)}{\partial T}\right]_{T=t}$ เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (short-term rate)

ดังนั้นจากสมการ (11.4) จะได้ว่า

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T}=r_t dt+\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)dW_t^k \tag{11.5}$$

โดยการประยุกต์บทตั้งของอิโต้ ได้ว่า

$$d\ln P_t^T=r_t dt+\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)dW_t^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)\sigma_k\left(t,T\right)dt \tag{11.6}$$

จากสมการ (11.6) หาอนุพันธ์ย่อยเทียบตัวแปร T ได้

$$\frac{\partial \ln P_t^T}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial T}\left(r_t dt\right)+\frac{\partial}{\partial T}\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)dW_t^k\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T}\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\left(t,T\right)\sigma_k\left(t,T\right)dt\right)$$

$$-df(t,T)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k\left(t,T\right)}{\partial T}\right)dW_t^k-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k\left(t,T\right)}{\partial T}\right)\sigma_k\left(t,T\right)dt$$

$$df(t,T)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right)d\left(-W_t^k\right)+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right)\left(\int_t^T\frac{\partial\sigma_k(t,s)}{\partial s}ds\right)dt \tag{11.7}$$

เนื่องจาก $-W_t^k$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์เช่นเดียวกับ W_t^k เพื่อความสะดวกเขียน $-W_t^k$ แทนด้วย W_t^k เช่นเดิม ดังนั้นจะได้ว่า

$$df(t,T)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right)\left(\int_t^T\frac{\partial\sigma_k(t,s)}{\partial s}ds\right)dt+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right)dW_t^k \tag{11.8}$$

สมการ (11.8) เป็นที่รู้จักกันในชื่อ “สมการฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน (Heath-Jarrow-Morton equation: HJM) สัมประสิทธิ์ $\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}$ แทนสัดส่วนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราฟอร์เวิร์ด $f(t,T)$ จากปัจจัยที่ k ข้อสังเกตคือ สัมประสิทธิ์ $\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}$ ค่าความผันผวนของอัตราฟอร์เวิร์ด

เนื่องจาก

$$\operatorname{cov}\left(df(t,T_1),df(t,T_2)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right|_{T=T_1}\right)\left(\left.\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right|_{T=T_2}\right)dt\equiv\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_k'(t,T_1)\right)\left(\sigma_k'(t,T_2)\right)dt \tag{11.9}$$

รูปสมการเชิงอนุพันธ์ (11.8) สามารถเขียนในรูปสมการเชิงปริพันธ์ได้ในรูป

$$f(t,T)=f(0,T)+\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(s,T)}{\partial T}\right)\left(\int_s^T\frac{\partial\sigma_k(s,u)}{\partial u}du\right)\right)ds+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(\frac{\partial\sigma_k(s,T)}{\partial T}\right)dW_s^k \tag{11.10}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $T=t$ เนื่องจาก $f(t,t)=r_t$ จะได้ว่า

$$r_t=f(0,t)+\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(s,t)}{\partial t}\right)\left(\int_s^t\frac{\partial\sigma_k(s,u)}{\partial u}du\right)\right)ds+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(\frac{\partial\sigma_k(s,t)}{\partial t}\right)dW_s^k \tag{11.11}$$

กำหนดให้ Z_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่ง $dZ_t=\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_k'(t,t)\right)^2\right)^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k'(t,t)dW_t^k\right)$

และเพื่อความสะดวกในที่นี้ให้ $\left.\frac{\partial\sigma_k(s,T)}{\partial T}\right|_{T=t}\equiv\sigma_k'(s,t)$ และ $\left.\frac{\partial^2\sigma_k(s,T)}{\partial T^2}\right|_{T=t}\equiv\sigma_k''(s,t)$ จะได้ว่า

$$dr_t=\mu_r(t)dt+\sigma_r(t)dZ_t \tag{11.12}$$

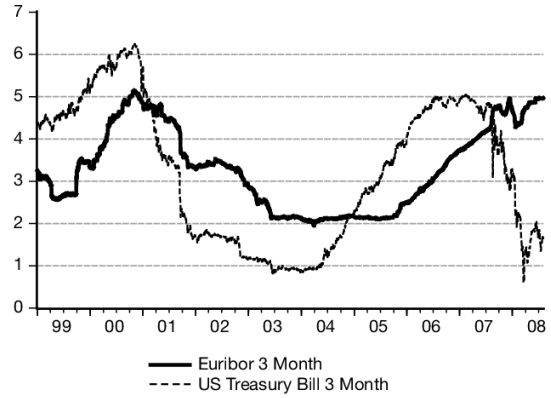
เมื่อ

$$\mu_r(t) = f'(0,t) + \sum_{k=1}^{N}\int_0^t \left(\left(\sigma_k'(s,t)\right)^2 + \left(\sigma_k''(s,t)\right)\left(\int_s^t \sigma_k'(s,u)du \right) \right) ds + \sum_{k=1}^{N}\int_0^t \sigma_k''(s,t)\, dW_s^k \quad (11.13)$$

และ

$$\sigma_r(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}\left(\sigma_k'(t,t)\right)^2} \quad (11.14)$$

จากสมการ (11.13) จะเห็นว่า ในกรณีที่ ค่าความผันผวนเท่ากับศูนย์ $\mu_r(t) = r_t' = f'(0,t)$ นั่นคือ อัตราดริฟท์ของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเท่ากับความชันของเส้นโค้งของอัตราฟอร์เวิร์ดซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในอดีต



รูปที่ 11.1 *อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น euribor ระยะ 3 เดือน เปรียบเทียบกับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นอัตราผลตอบแทนตั๋วเงินคลังสหรัฐอายุ 3 เดือน (อัตราดอกเบี้ยจริง)*

เพื่อความเข้าใจพิจารณาตัวอย่างการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาอัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$ และตัวประกอบส่วนลด $P(t,T)$ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 11.1 กำหนดข้อมูลดังต่อไปนี้ สมมติให้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 3\%$ จำนวนปัจจัย $N = 1$ จงใช้คำนวณหาตัวประกอบส่วนลด P_t^T และ อัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$

วิธีทำ 1) การคำนวณตัวประกอบส่วนลด P_t^T

จากนิยามของ P_t^T ตามสมการที่ (11.1) และ จากข้อมูลที่กำหนดให้ $r_s = 0.03$

จะได้ $P_t^T = \mathbb{E}^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right] = e^{-0.03(T-t)}$

2) การคำนวณอัตราฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$ โดยใช้สมการ (11.2)

จะได้ $f(t,T) = -\dfrac{\partial \ln\left(P_t^T\right)}{\partial T} = -\dfrac{\partial \ln\left(e^{-0.03(T-t)}\right)}{\partial T} = -\dfrac{\partial(-0.03(T-t))}{\partial T} = 0.03$ □

11.1.2 ตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T)=\sigma=$ ค่าคงที่

สำหรับตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T)=\sigma=$ ค่าคงที่ นั่นคือ

$\sigma(t,T)=\int_t^T \sigma ds=(T-t)\sigma$ จากสมการ (11.8) จะได้ว่า

$$df(t,T)=\sigma\left(\int_t^T \sigma ds\right)dt+\sigma dW_t=\sigma^2(T-t)dt+\sigma dW_t \tag{11.15}$$

โดยการอินทิเกรตเทียบ t จะได้

$$f(t,T)=f(0,T)+\sigma^2\left(Tt-\frac{t^2}{2}\right)+\sigma W_t \tag{11.16}$$

เรียกตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย ในกรณีที่ $\sigma'(t,T)=\sigma=$ ค่าคงที่ ว่า “ตัวแบบโฮ-ลี (ho-lee model)”

จากสมการ (11.16) แทน $T=t$ จะได้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

$$r_t=f(t,t)=f(0,t)+\frac{\sigma^2t^2}{2}+\sigma W_t \tag{11.17}$$

นั่นคือ $\sigma W_t=r_t-f(0,t)-\frac{\sigma^2t^2}{2}$ เมื่อแทนในสมการ (11.16) จะได้ว่าสามารถเขียนอัตราฟอร์เวิร์ด $f(t,T)$ ในรูปอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t โดย

$$f(t,T)=f(0,T)-f(0,t)+r_t+\sigma^2t(T-t) \tag{11.18}$$

เนื่องจาก $f(t,T)=-\frac{\partial\ln\left(P_t^T\right)}{\partial T}$ และจากสมการ (11.16) ได้ว่า

$$\begin{aligned}P_t^T&=\exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)=\exp\left(-\int_t^T\left(f(0,s)+\sigma^2\left(st-\frac{t^2}{2}\right)+\sigma W_s\right)ds\right)\\&=\left(\exp\left(-\int_t^T f(0,s)ds\right)\right)\left(\exp\left(-\int_t^T\sigma^2\left(st-\frac{t^2}{2}\right)ds\right)\right)\left(\exp\left(-\int_t^T\sigma W_s ds\right)\right)\\&=P_0^T\left(e^{-\frac{\sigma^2Tt(T-t)}{2}}\right)\left(e^{-\int_t^T\sigma W_s ds}\right)\end{aligned} \tag{11.19}$$

นั่นคือ

$$P_t^T=P_0^T\left(e^{-\frac{\sigma^2Tt(T-t)}{2}}\right)\left(e^{-\int_t^T\sigma W_s ds}\right) \tag{11.20}$$

สูตรของตัวประกอบส่วนลด P_t^T ตามสมการ (11.20) สามารถใช้ในการหาสูตรรูปปิดสำหรับการกำหนดราคาอนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ยเช่น สัญญาแคป สัญญาฟลอร์ เป็นต้น ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมของตัวแบบโฮ-ลีในบทที่ 7

ตัวอย่างที่ 11.2 พิจารณาพันธบัตรที่มีอายุ 2 ปี เราต้องการจำลองราคาพันธบัตรในช่วงเวลาต่างๆ โดยใช้ตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton) โดยสมมติว่า อัตราผลตอบแทนล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0,T)=5\%$, ค่าความผันผวน $\sigma=2\%$, วันครบกำหนด $T=2$ ปี จงคำนวณหา

1) อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t,T)$ ที่เวลา $t=0.5$

2) ราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t=0.5$

วิธีทำ 1) คำนวณอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t,T)$

จากสมการตัวแบบ HJM (11.16), $f(t,T)=f(0,T)+\sigma^2\left(Tt-\frac{t^2}{2}\right)+\sigma W_t$ และข้อมูลที่กำหนดให้

$$f(t,2)=0.05+(0.02)^2\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)+0.02W_t$$

ดังนั้น อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t,T)$ ที่เวลา $t=0.5$,

$$f(0.5,2)=0.05+(0.02)^2\left(2(0.5)-\frac{(0.5)^2}{2}\right)+0.02W_t$$

$$=0.05035+0.02W_t$$

เนื่องจาก W_t เป็นกระบวนการการเคลื่อนที่บราวน์ โดยทั่วไปแล้ว W_t แสดงถึงความผันผวนทางสุ่มในตลาดการเงินและเป็นฟังก์ชันของเวลา t และ $W_t\sim N(0,t)$ สำหรับในตัวอย่างนี้ เราสามารถใช้ค่าเฉลี่ยของ W_t ที่เท่ากับ 0 เพื่อความง่ายในการคำนวณจะกำหนด $W_t=0$

ดังนั้น $f(0.5,2)=0.05035+0.02\times 0=0.05035$

2) คำนวณราคาพันธบัตร P_t^T

จากสมการ (11.20), $P_t^T=P_0^T\left(e^{-\frac{\sigma^2Tt(T-t)}{2}}\right)\left(e^{-\int_t^T\sigma W_s ds}\right)$

$$P_t^T=P_0^T\exp\left(-\frac{\sigma^2T(T-t)}{2}\right)\exp\left(-\int_t^T\sigma W_s\,ds\right)$$

สมมติว่า $P_0^T=1$ (ราคาพันธบัตรที่ $t=0$) และ $W_s=0$

$$P_{0.5}^T=\exp\left(-\frac{(0.02)^2\cdot 2\cdot(2-0.5)}{2}\right)\approx 0.9994$$ □

11.1.3 ตัวแบบ HJM- 1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$

ตัวแบบ HJM- 1 ปัจจัย และ $\sigma'(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$ ในกรณีนี้ค่าความผันผวนของอัตราฟอร์เวิร์ดมีการเปลี่ยนแปลงลดลงเมื่ออายุครบกำหนดของสัญญา T มีค่าเพิ่มขึ้น โดยที่เงื่อนไข $\sigma'(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$ เป็นการกำหนดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในตัวแบบ HJM-1 ปัจจัยเดียว มีความหมายดังนี้

1) σ เป็นค่าคงที่ที่แสดงถึงความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลา t

2) $e^{-\kappa(T-t)}$ เป็นตัวประกอบที่ลดทอนค่าความผันผวนตามเวลาที่ผ่านไป โดยมี κ เป็นค่าเฉลี่ยการวกกลับ (mean reversion rate)

โดยเงื่อนไขในข้อ 2) นี้ หมายความว่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยจะลดลงตามเวลาที่ใกล้วันครบกำหนด T และความผันผวนนี้จะถูกควบคุมโดยค่า κ หาก κ มีค่าสูง การวกกลับสู่ค่าเฉลี่ยจะเร็วขึ้นทำให้ความผันผวนลดลงอย่างรวดเร็ว

ตัวแบบ HJM -1ปัจจัย กรณี $\sigma'(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$ สำหรับอัตราฟอร์เวิร์ดจะอยู่ในรูป

$$df(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}\left(\int_t^T \sigma e^{-\kappa(s-t)}ds\right)dt+\sigma e^{-\kappa(T-t)}dW_t$$

$$=\frac{\sigma^2}{\kappa}\left(e^{-\kappa(T-t)}-e^{-2\kappa(T-t)}\right)+\sigma e^{-\kappa(T-t)}dW_t \qquad (11.21)$$

อินทิเกรตเทียบ t ของทั้ง 2 ข้างของสมการ จะได้

$$f(t,T)=f(0,T)+\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa T}\right)^2-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)^2+\sigma\int_0^t e^{-\kappa(T-s)}dW_s \qquad (11.22)$$

กำหนดตัวแปรสถานะ $X_t=\sigma\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s$ ซึ่งได้ว่า

$$e^{-\kappa(T-t)}X_t=\sigma e^{-\kappa(T-t)}\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s=\sigma\int_0^t e^{-\kappa(T-s)}dW_s \qquad (11.23)$$

เมื่อแทนใน (11.22) ทำให้ได้

$$f(t,T)=f(0,T)+\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa T}\right)^2-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa(T-t)}\right)^2+e^{-\kappa(T-t)}X_t \qquad (11.24)$$

และ

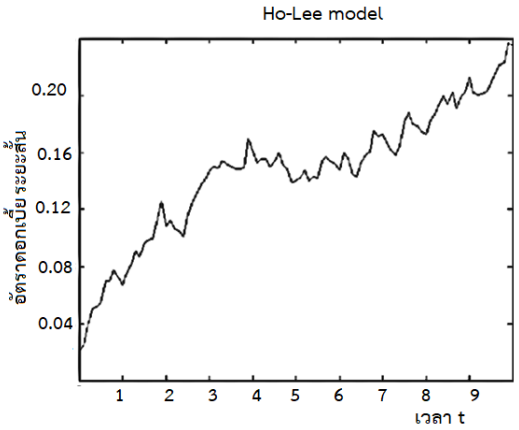
$$f(t,t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa t}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa(t-t)}\right)^2 + e^{-\kappa(t-t)}X_t$$

$$= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa t}\right)^2 + X_t \qquad (11.25)$$

นั่นคือ

$$r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1-e^{-\kappa t}\right)^2 + X_t \qquad (11.26)$$

ตัวแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามสมการ (11.26) เป็นที่รู้จักกันดีในชื่อ “ตัวแบบวาสิเซคดัดแปลงหรือตัวแบบฮัลล์-ไวท์ (modified vasicek model or hull-white model)” ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างตัวแบบโฮ-ลี และ ตัวแบบวาสิเซคดัดแปลง คือ หากพิจารณาอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในลักษณะระยะยาว ($t \to \infty$) จากสมการ (11.17) จะเห็นว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบโฮ-ลี นั้นลู่ออก เนื่องจากพจน์ทางขวาประกอบด้วยพจน์ $\frac{\sigma^2 t^2}{2}$ ของสมการ (11.17) นั้นลู่ออก



รูปที่ 11.2 *อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น* r_t *ตามตัวแบบโฮ-ลี นั้นลู่ออก เมื่อ* $t \to \infty$

ในขณะที่ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัลล์-ไวท์ นั้นลู่เข้าเมื่อ $t \to \infty$ นั่นคือเมื่อ $t >> 1$

$$r_t \approx f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + X_t \equiv r_t^{\infty} \qquad (11.27)$$

ซึ่งพจน์ทางขวาของ (11.27) เป็นตัวแปรสุ่ม r_t^{∞} มีการแจงแจงปกติ ซึ่งค่าเฉลี่ยของ r_t^{∞} เท่ากับ

$$\mu_t^{\infty} = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa} \qquad (11.28)$$

และความแปรปรวนของ r_t^{∞} เท่ากับ

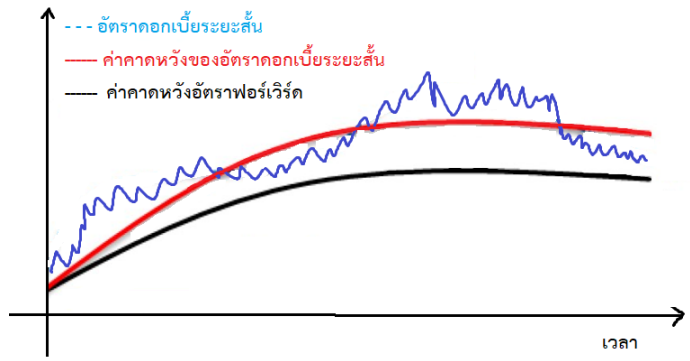
$$\left(\sigma_t^{\infty}\right)^2 = E\left[\left(r_t^{\infty}-\mu_t^{\infty}\right)^2\right] = E\left[\left(X_t\right)^2\right] = E\left[\left(\sigma\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s\right)^2\right] = \sigma^2 E\left[\left(\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s\right)^2\right]$$

$$= \sigma^2\int_0^t e^{-2\kappa(t-s)}ds = \sigma^2\left[\frac{e^{-2\kappa(t-s)}}{2\kappa}\right]_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2\kappa}\left(1-e^{-2\kappa t}\right) \approx \frac{\sigma^2}{2\kappa} \quad (\text{เมื่อ } t>>1) \qquad (11.29)$$

จะเห็นว่าเมื่อ $t>>1$ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัลล์-ไวท์จะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นเชิงกำกับ (asymptotic probability distribution) ในที่นี้คือ $r_{t>>1}^{\infty} \sim N\left(f(0,t)+\frac{\sigma^2}{2\kappa},\frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$ ซึ่งกล่าวได้ว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t เคลื่อนที่วกกลับสู่ค่าเฉลี่ยของ r_t เอง โดยจะเรียกพารามิเตอร์ κ ว่า “อัตราการวกกลับของค่าเฉลี่ย (rate of mean reverion)”

ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับในกรณีที่ $T>>1$ จากสมการ (11.24) ได้ว่าอัตราฟอร์เวิร์ด

$$f(t,T) \approx f(0,T) + e^{-\kappa(T-t)}X_t \qquad (11.30)$$



รูปที่ 11.3 *เปรียบเทียบอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ตามตัวแบบฮัล-ไวท์ ค่าคาดหวังอัตราฟอร์เวิร์ด และค่าคาดหวังอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น เมื่อ $T>>1$*

ตัวอย่างที่ 11.3 พิจารณาตัวแบบ HJM-1 ปัจจัยเดียว ในกรณีที่ $\sigma'(t,T)=\sigma e^{-\kappa(T-t)}$ โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0,t)=5\%$, ความผันผวน $\sigma=1\%$, อัตราการกลับสู่ค่าเฉลี่ย $\kappa=0.1$, ระยะเวลา $T=10$ ปี

1) จงคำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t,T)$ ณ เวลา $t=5$ ปี

2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t=5$ ปี โดยสมมติว่า $X_t \approx 0.002$

วิธีทำ 1) คำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t,T)$ ณ เวลา $t=5$ ปี

$$\sigma'(5,10) = 0.01e^{-0.1(10-5)} = 0.006065$$

ดังนั้น ความผันผวน ณ เวลา $t = 5$ ปี จะเท่ากับ 0.006065 หรือประมาณ 0.61%

2) คำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t = 5$ ปี

จากสมการ (11.26), $r_t = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)^2 + X_t$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด

จะได้ $r_5 \approx 0.05 + \frac{0.01^2}{2(0.1^2)}\left(1 - e^{-0.1(5)}\right)^2 + 0.002 = 0.052775 = 5.2775\%$ □

11.2 เมเซอร์ฟอร์เวิร์ด

เมเซอร์ฟอร์เวิร์ด หรือตัววัดฟอร์เวิร์ด (forward measure) คือการวัดความน่าจะเป็นที่ใช้ในการคำนวณความเสี่ยงในการเงินซึ่งเป็นการเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็นจากการวัดด้วยเมเซอร์ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral measure) มาใช้ตัววัดเมเซอร์ฟอร์เวิร์ดในการวัดค่าคาดหวัง ในการตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดการดอกเบี้ยเงินกู้ ปกติเราจะต้องคำนวณค่าคาดหวังของผลตอบแทนที่ได้จากการวัดที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง แต่เมื่อเปลี่ยนไปใช้ตัววัดเมเซอร์ฟอร์เวิร์ดจะทำให้การวัดค่าคาดหวังทำได้ง่ายขึ้น โดยเฉพาะกับสัญญาที่ขึ้นอยู่กับมูลค่าของตราสารหนี้หรืออัตราดอกเบี้ยในวันสิ้นสุดของสัญญา อย่างไรก็ตามการใช้เมเซอร์ฟอร์เวิร์ดในการวัดค่าคาดหวังนั้นจำเป็นต้องมีความรู้ทางด้านทฤษฎีการวัดความน่าจะเป็น วิธีคำนวณความไม่แน่นอน และหลักการของกระบวนการสโตแคสติก จึงจะสามารถทำให้ผู้อ่านมีความรู้ความเข้าใจมากขึ้น โดยผู้อ่านสามารถศึกษาความรู้พื้นฐานเหล่านี้ได้ในบทที่ 6

พิจารณาหลักทรัพย์ซึ่งมีการจ่ายปันผล $D_k, k = 1,2,...,N$ ที่เวลา $T_k < T,\ k = 1,2,...,N$ และ S_D เป็นมูลค่าปัจจุบันจากการคิดลดกระแสเงินสดการจ่ายปันผลด้วยอัตราดอกเบี้ย r_t ซึ่งเป็นกระบวนการสโตแคสติก กำหนดให้ Q เป็นเมเซอร์ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง และ $P_t^{T_k} = E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}]$ เป็นฟังก์ชันส่วนลด นั่นคือ

$$S_D = \sum_{k=1}^{N} P_t^{T_k} D_k = \sum_{k=1}^{N} E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}]D_k = \sum_{k=1}^{N} E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds} D_k] \qquad (11.31)$$

กำหนดให้กระบวนการสโตแคสติก $S_t,\ t<T$ เป็นมูลค่าปัจจุบันหรือราคาที่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผลของหลักทรัพย์ และกำหนดให้ $\tilde{S}_t$ เป็นราคาที่ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล ดังนั้น

$$S_t = \tilde{S}_t + S_D = \tilde{S}_t + \sum_{k=1}^{N} P_t^{T_k} D_k \tag{11.32}$$

กำหนดให้ $\left(f_T S\right)_t$ แทนราคาฟอร์เวิร์ดหรือราคาล่วงหน้าของหลักทรัพย์ (ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล) ซึ่งพิจารณาเป็นมูลค่าสะสมของ $\tilde{S}_t$ ด้วยฟังก์ชันสะสม $\frac{1}{P_t^T}$ นั่นคือ

$$\left(f_T S\right)_t = \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T} \tag{11.33}$$

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงราคาที่ไม่รวมมูลค่าจากการจ่ายปันผล $d\tilde{S}_t$ ภายใต้ตัวแบบที่ประกอบด้วยความเสี่ยง N ปัจจัย ($N-$factors model) ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก ดังนี้

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\left(\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt\right) \tag{11.34}$$

เมื่อ r_t เป็นอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (short-term interest rate), $\sigma_{\tilde{S}} = \left\langle \sigma_{\tilde{S}_1}, \sigma_{\tilde{S}_2}, ..., \sigma_{\tilde{S}_N} \right\rangle$ เวกเตอร์ความเสี่ยงหรือความผันผวนของราคาหลักทรัพย์ และ $Z_t = \left\langle Z_t^1, Z_t^2, ..., Z_t^N \right\rangle$ เป็นเวกเตอร์การเคลื่อนที่สุ่มบราวน์เนียนใน ν มิติ ในทำนองเดียวกันถ้าพิจารณา P_t^T เป็นราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง อายุของสัญญา T ปี และมีราคาไถ่ถอน 1 บาท จะได้ว่า

$$dP_t^T = P_t^T\left(\sigma\left(t;T\right) \cdot dZ_t + r_t dt\right) \tag{11.35}$$

ต่อไปพิจาณาอนุพันธ์อิโต้ (ito differential) ของราคาฟอร์เวิร์ดของหลักทรัพย์ $\left(f_T S\right)_t = \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}$, โดยบทแทรกของอิโต้ จะได้ว่า

$$d\left(f_T S\right)_t = d\left(\frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\right) = \frac{d\tilde{S}_t}{P_t^T} - \frac{\tilde{S}_t}{\left(P_t^T\right)^2} dP_t^T - \frac{1}{\left(P_t^T\right)^2} d\tilde{S}_t dP_t^T + \frac{\tilde{S}_t}{\left(P_t^T\right)^3} dP_t^T dP_t^T$$

$$= \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\left(\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt\right) - \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\left(\sigma\left(t;T\right) \cdot dZ_t + r_t dt\right) - \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\left(\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt\right)\left(\sigma\left(t;T\right) \cdot dZ_t + r_t dt\right)$$

$$+ \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\left(\sigma\left(t;T\right) \cdot dZ_t + r_t dt\right)^2$$

$$= \frac{\tilde{S}_t}{P_t^T}\left[\left(\sigma_{\tilde{S}} \cdot dZ_t + r_t dt\right) - \left(\sigma(t;T) \cdot dZ_t + r_t dt\right) - \sigma_{\tilde{S}} \cdot \sigma(t;T)dt + \left\|\sigma(t;T)\right\|^2 dt\right]$$

$$= (f_T S)_t \left[\left(\sigma_{\tilde{S}} - \sigma(t;T)\right) \cdot dZ_t - \left(\sigma_{\tilde{S}} \cdot \sigma(t;T) - \left\|\sigma(t;T)\right\|^2\right)dt\right]$$

$$= (f_T S)_t \left(\sigma_{\tilde{S}} - \sigma(t;T)\right) \cdot \left(dZ_t - \sigma(t;T)dt\right) \tag{11.36}$$

โดยที่ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$ และ $x \cdot y = \sum_{k=1}^{N}(x_k y_k)$ นั่นคือ

$$d(f_T S)_t = (f_T S)_t \left(\sigma_{\tilde{S}} - \sigma(t;T)\right) \cdot \left(dZ_t - \sigma(t;T)dt\right) \tag{11.37}$$

กำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ของกระบวนการสุ่มสโตแคสติก $dW_t \equiv dZ_t - \sigma(t;T)dt$ ดังนั้นได้ว่า

$$\frac{d(f_T S)_t}{(f_T S)_t} = \left(\sigma_{\tilde{S}} - \sigma(t;T)\right) \cdot dW_t \tag{11.38}$$

โดยทฤษฎีบทของกีร์ซานอฟ (Girsanov 's theorem) จะได้ว่า กระบวนสุ่มสโตแคสติก W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์เนียนภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ที่สมนัยกับ ตัววัดความน่าจะเป็น Q ดังนั้นราคาฟอร์เวิร์ดสอดคล้องกับสมบัติมาร์ทิงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} โดยที่ Q^{*T} เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่นิยามขึ้นอยู่กับเวลา T ซึ่งอธิบายด้วยอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ (Radon-Nikodym derivative) ในรูป

$$\frac{dQ^{*T}}{dQ} = \exp\left(\int_0^T \sigma(t;T) \cdot dZ_t - \frac{1}{2}\int_0^T \left\|\sigma(t;T)\right\|^2 dt\right) \tag{11.39}$$

หมายเหตุ ค่าอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการแปลงค่าระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นที่แตกต่างกันซึ่งจะช่วยให้สามารถเปลี่ยนจากการวัดความน่าจะเป็นที่หนึ่งไปยังอีกการวัดความน่าจะเป็นหนึ่ง ในสาขาทางการเงิน มักใช้ค่านี้เมื่อเราต้องการเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็นที่มีความเสี่ยง (risk probability measure) ไปสู่การวัดความน่าจะเป็นที่เป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk-neutral probability measure) การคำนวณอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ นั้นขึ้นอยู่กับการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต้องการที่จะแปลงค่าการวัดความน่าจะเป็น โดยอนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์เป็นอัตราส่วนของความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density functions) ทั้งสอง

การแจกแจงความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น ถ้า P และ Q เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น f และ g ตามลำดับ แล้ว อนุพันธ์เรดอน-นิโคไดม์ของ Q เทียบกับ P สามารถเขียนได้เป็น $dQ/dP = g/f$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 11.4 บริษัท abc มีหุ้นที่จ่ายปันผล D_k สำหรับ $k=1,2,3$ ที่เวลาต่าง ๆ T_k โดยมีอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t คงที่เท่ากับ 0.05 (5%) และจ่ายปันผลตามตารางด้านล่าง

เวลา T_k (ปี)	ปันผล D_k (บาท)
1	100
2	120
3	150

จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

วิธีทำ ในการคำนวณนี้ จะใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ดในการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลในอนาคตโดยใช้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ที่เป็นค่าคงที่ ซึ่งช่วยให้สามารถคำนวณมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดที่คาดว่าจะได้รับจากการลงทุนในหุ้นได้ โดยมีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล P_t^T

จาก $P_t^T = E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}]$ และเนื่องจาก r_s เป็นค่าคงที่เท่ากับ 0.05 ดังนั้น $P_t^{T_k} = e^{-0.05(T_k - t)}$ จะได้มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลแต่ละช่วงเวลา ดังนี้

สำหรับ $T_1 = 1$ ปี $\quad P_0^T = e^{-0.05(1-0)} = e^{-0.05} \approx 0.9512$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_1 ที่ T_1 คือ $P_0^T D_1 = 0.9512 \times 100 = 95.12$ บาท

สำหรับ $T_2 = 2$ ปี $\quad P_0^T = e^{-0.05(2-0)} = e^{-0.1} \approx 0.9048$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_2 ที่ T_2 คือ $P_0^T D_2 = 0.9048 \times 120 = 108.58$ บาท

สำหรับ $T_3 = 3$ ปี $\quad P_0^T = e^{-0.05(3-0)} = e^{-0.15} \approx 0.8607$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผล D_3 ที่ T_3 คือ $P_0^T D_3 = 0.8607 \times 150 = 129.11$ บาท

ดังนั้น รวมมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด

$$S_D = 95.12 + 108.58 + 129.11 = 332.81 \text{ บาท}$$ □

การคำนวณในตัวอย่างที่ 11.4 แสดงให้เห็นว่าเมเซอร์ฟอร์เวิร์ดสามารถใช้ในการประเมินมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลในอนาคตได้ ทำให้ผู้ลงทุนสามารถตัดสินใจเกี่ยวกับการลงทุนในหุ้นได้ดีขึ้น โดยพิจารณาจากมูลค่าที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต

ทฤษฎีบท 11.1 ให้ T เป็นจุดเวลาที่กำหนดและสมมติให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง จะมีตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ที่สมนัยกับ ตัววัดความน่าจะเป็น Q ที่ซึ่งราคาฟอร์เวิร์ดสำหรับส่งมอบวันที่ T ของหลักทรัพย์ใด ๆ สอดคล้องกับสมบัติมาร์ทิงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} โดยเรียกตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} นี้ว่า "*เมเซอร์ฟอร์เวิร์ดสำหรับวันส่งมอบที่ T*" ที่สมนัยกับตัววัดความน่าจะเป็น Q

เราทราบว่าภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง Q ราคาของยูโรเปียนคอลออปชัน C_0 ที่มีราคาใช้สิทธิ K วันส่งมอบวันที่ T โดยตัวแบบคิดลดกระแสเงินสดคำนวนได้จาก

$$C_t = P_t^T E^Q\left[C(T)\right] = E^Q\left[P_t^T C(T)\right] = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} \max\{S_T - K, 0\}] \tag{11.40}$$

โดยที่ $C(T) = \left[S_T - K\right]^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ เป็นผลประโยชน์ของคอลออปชันที่เวลา T จากทฤษฎีบท 11.1 ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลออปชัน $\left(f_T C\right)_t$ มีสมบัติมาร์ทิงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง Q^{*T} นั่นคือ

$$C_t = P_t^T E^Q\left[C(T)\right] = E^{Q^{*T}}\left[P_t^T \left(f_T C\right)_t\right] = E^{Q^{*T}}[e^{-\int_t^T r_s ds} \max\{S_T - K, 0\}] \tag{11.41}$$

จากสมการ (11.41) จะเห็นว่าการใช้ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลออปชัน $\left(f_T C\right)_t$ มีข้อดีกว่าการใช้ราคาทันที (spot prices)คือสามารถแยกผลกระทบที่เกิดจากความผันผวนจากการคิดลดกระแสเงินสดได้

ตัวอย่างที่ 11.5 พิจารณาคอลออปชันสำหรับหุ้นของบริษัทหนึ่งที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 50$ บาท อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 0.05$ (5%) ราคาการใช้สิทธิ (strike price) $K = 45$ บาท และเวลาครบกำหนด $T = 1$ ปี จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันนี้ โดยใช้เมเซอร์ฟอร์เวิร์ด (forward measure) และราคาฟอร์เวิร์ดของคอลออปชัน $f_T C$ ในการประเมินมูลค่าของคอลออปชัน (call option) สำหรับหุ้นดังกล่าว

วิธีทำ ขั้นตอนการคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชัน เป็นดังนี้

1) คำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้น f_T

เนื่องจาก $f_T = S_0 e^{rT} = 50e^{0.05\times 1} \approx 52.565$ บาท

2) คำนวณมูลค่าของคอลออปชันโดยใช้ราคาฟอร์เวิร์ด

คำนวณโดยใช้ราคาฟอร์เวิร์ด $C(T) = \max\{S_T - K, 0\} = \max\{f_T - K, 0\}$

$= \max\{52.565 - 45, 0\} = \max\{7.565, 0\} = 7.565$

และเนื่องจาก $P_t^T = E_t^Q[e^{-\int_t^{T_k} r_s ds}] = e^{-0.05(T-t)}$ ดังนั้น $P_0^1 = e^{-0.05\times(1-0)} = e^{-0.05} \approx 0.9512$

คำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันโดยใช้สมการ (11.40), $C_t = P_t^T E^Q\left[C(T)\right]$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันคือ $C_t = 0.9512 \times 7.565 \approx 7.20$ บาท

มูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันนี้ ณ เวลา $t = 0$ คือ 7.20 บาท เนื่องจากราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้นมากกว่าราคาการใช้สิทธิ K ทำให้มีมูลค่าในการใช้สิทธิในอนาคต □

11.3 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกำหนดราคาออปชันที่มีสินค้าอ้างอิงเป็นสินค้าโภคภัณฑ์ (commodity option) ภายใต้อัตราดอกเบี้ยแปรผันหรืออัตราดอกสุ่ม (stochastic interest rate) สินค้าโภคภัณฑ์เหล่านี้ ได้แก่ ทองคำ น้ำมันดิบ ข้าว กาแฟ ฯลฯ ในที่นี้จะหมายรวมถึงสินทรัพย์ทางการเงินด้วย เช่น หุ้น เป็นต้น โดยในที่นี้ใช้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยโฮ-ลีปัจจัยเดียว (1-factor ho-lee interest rate) ในการอธิบายการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ย

11.3.1 ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์

พิจารณาสัญญาออปชันที่มีสินค้าอ้างอิงเป็นสินค้าโภคภันฑ์ชนิดหนึ่งภายใต้อัตราดอกสุ่มตามตัวแบบอัตราดอกเบี้ยโฮ-ลีปัจจัยเดียว ส่งมอบ ณ วันที่ T กำหนดให้ S_t แทนราคาสินค้าโภคภันฑ์นั้น กำหนดให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นของการเคลื่อนไหวร่วมกันของราคาสินค้าโภคภัณฑ์และราคาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่อายุ T ซึ่งการเคลื่อนไหวของราคาอธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_S dZ_t + (r_t - d_t)dt \tag{11.42}$$

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \sigma_r (T-t)dX_t + r_t dt \tag{11.43}$$

เมื่อ d_t เป็นกระบวนการสโตแคสติกการจ่ายปันผล, σ_S และ σ_r เป็นค่าคงที่ และ Z_t และ X_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่ง $E^Q[Z_t X_t] = \rho dt$ ดังนั้นจะมีการเคลื่อนที่บราวน์ Y_t ที่เป็นอิสระกับ Z_t และ X_t สามารถเขียนได้ในรูป

$$X_t = \rho Z_t + \sqrt{(1-\rho^2)}Y_t \tag{11.44}$$

จาก (11.44) สามารถเขียน (11.43) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{dP_t^T}{P_t^T} = \sigma_r (T-t)\rho dZ_t + \sigma_r (T-t)\sqrt{(1-\rho^2)}dY_t + r_t dt \tag{11.45}$$

จากสมการ (11.38) ค่าความผันผวนของราคาฟอร์เวิร์ดของสินค้าโภคภัณฑ์ $(f_T S)_t$ เท่ากับผลต่างระหว่างความผันผวนสำหรับ $\frac{dS_t}{S_t}$ และ $\frac{dP_t^T}{P_t^T}$ ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติกของราคาฟอร์เวิร์ดสำหรับสินค้าโภคภัณฑ์ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$\frac{d(f_T S)_t}{(f_T S)_t} = (\sigma_{\tilde{S}} - \rho\sigma_r (T-t))dW_t^1 - \sqrt{1-\rho^2}\sigma_r (T-t)dW_t^2 \tag{11.46}$$

เมื่อ W_t^1 และ W_t^2 เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ที่เป็นอิสระกัน

จากสมการ (11.46) ทำให้ได้ว่าค่าความผันผวนของราคาฟอร์เวิร์ด $(f_T S)_t$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\sigma_f(t)$ คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned}(\sigma_f(t))^2 &= (\sigma_{\tilde{S}} - \rho\sigma_r (T-t))^2 + (1-\rho^2)(\sigma_r)^2 (T-t)^2 \\ &= (\sigma_{\tilde{S}})^2 - 2\sigma_{\tilde{S}}\rho\sigma_r (T-t) + (\sigma_r)^2 (T-t)^2 \end{aligned} \tag{11.47}$$

เทอมค่าความผันผวน $(f_T S)_T$ (จาก 0 ถึง T) เขียนแทนด้วย $\bar{\sigma}_T$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของค่าความผันผวน $(f_T S)_t$ คำนวนได้จาก

$$\bar{\sigma}_T = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (\sigma_f(t))^2 dt}$$

$$= \sqrt{\left(\sigma_{\tilde{S}}\right)^2 - \sigma_{\tilde{S}}\rho\sigma_r T + \frac{\left(\sigma_r\right)^2 T^2}{3}} \tag{11.48}$$

โดยใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด จะได้ว่าราคาคอลลออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ อยู่ในรูป

$$C_0 = P_0^T E^{Q^*T}\left[C(T)\right] = P_0^T E^{Q^*T}\left[\max\left\{\left(f_T S\right)_T - K, 0\right\}\right] \tag{11.49}$$

จาก (11.45), $\left(f_T S\right)_t$ มีการแจกแจงแบบล็อก-นอร์มอลและสมบัติมาร์ทิงเกลที่มีความผันผวน $\bar{\sigma}_T$ โดยประยุกต์ใช้สูตรแบล็กโชลส์

$$C_0 = P_0^T\left(\left(f_T S\right)_0 N\left(d_1\right) - KN\left(d_2\right)\right) \tag{11.50}$$

โดยที่ $d_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_T\sqrt{T}}\ln\left(\frac{\left(f_T\right)_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_T\sqrt{T}$, $d_2 = d_1 - \bar{\sigma}_T\sqrt{T}$

จะเห็นว่าการคำนวณค่าความผันผวน $\bar{\sigma}_T$ ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยของค่าความผันผวน $\left(f_T S\right)_t$ ง่ายและสะดวกต่อการใช้ในการคำนวณราคาคอลลออปชันตามสูตรของแบล็กโชลส์

ตัวอย่างที่ 11.6 สำหรับการคำนวณราคาของคอลลออปชันของกาแฟเกรด a ณ เวลา $t = 0$ พิจารณาคอลลออปชันสำหรับกาแฟเกรด a ที่มีราคาปัจจุบัน $S_0 = 200$ บาท/กก. อัตราดอกเบี้ย $r_t = 0.05$ (5%) ราคาการใช้สิทธิ $K = 220$ บาท/กก. เวลาครบกำหนด $T = 1$ ปี ความผันผวน $\sigma_s = 0.2$, $\sigma_r = 0.15$ และความสัมพันธ์ $\rho = 0.3$ จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลลออปชัน

วิธีทำ 1) คำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของกาแฟเกรด a f_T

เนื่องจาก $f_T = S_0 e^{rT}$

โดยการแทนค่าได้ $f_T = 200e^{0.05\times 1} = 200e^{0.05} \approx 200\times 1.0513 = 210.26$

2) คำนวณค่า σ_T

เนื่องจาก $\sigma_T = \sqrt{\sigma_s^2 - \sigma_s\rho\sigma_r T + \frac{\sigma_r^2 T^2}{3}}$

โดยการแทนค่าได้ $\sigma_T = \sqrt{(0.2)^2 - 2\times 0.2\times 0.3\times 0.15 + \frac{(0.15)^2\times 1^2}{3}} \approx 0.1718$

3) คำนวณค่า d_1 และ d_2

เนื่องจาก $d_1 = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{f_T}{K}\right) + \frac{\sigma_T^2 T}{2}\right)$ และ $d_2 = d_1 - \sigma_T\sqrt{T}$

โดยการแทนค่าได้

$$d_1 = \frac{1}{0.1718\sqrt{1}}\left(\ln\left(\frac{210.26}{220}\right)+\frac{(0.1718)^2}{2}\right) \approx -0.1736$$

และ $d_2 = -0.1736 - 0.1718 \approx -0.3454$

4) คำนวณ $N(d_1)$ และ $N(d_2)$

โดยการเปิดตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ ได้

$$N(d_1) \approx 0.4310, \quad N(d_2) \approx 0.3646$$

5) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชัน

เนื่องจาก $C_0 = P_0^T\left(f_T N(d_1) - KN(d_2)\right)$

และ $P_0^T = e^{-rT} = e^{-0.05\times 1} \approx 0.9512$

โดยการแทนค่าได้ $C_0 = 0.9512\left(210.26\times 0.4310 - 220\times 0.3646\right)$

$$= 0.9512\times 9.818 \approx 9.34 \text{ บาท}$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันสำหรับกาแฟเกรด a ณ เวลา $t=0$ คือ 9.34 บาท

□

ทฤษฎีบท 11.2 กำหนดให้ Q เป็นตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นเมเซอร์ฟอร์เวิร์ด Q^{*T} จะได้ว่าอัตราฟอร์เวิร์ด $f(t,T)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$df(t,T) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial\sigma_k(t,T)}{\partial T}\right)dW_t^k = \dot{\sigma}(t,T)\cdot dW_t \tag{11.51}$$

เมื่อ $\dot{\sigma}(t,T) = \left\langle \frac{\partial\sigma_1(t,T)}{\partial T},...,\frac{\partial\sigma_N(t,T)}{\partial T}\right\rangle$ เป็นอนุพันธ์ของค่าความผันผวนของ $f(t,T)$ เมื่อ $W_t = \left\langle W_t^1,...,W_t^N\right\rangle$ เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ ยิ่งไปกว่านั้น $f(t,T)$ มีสมบัติมาร์ทิงเกลภายใต้ Q^{*T}

พิสูจน์ เนื่องจาก $f(t,T) = -\frac{\partial\ln\left(P_t^T\right)}{\partial T}$ โดยสมการ (11.5) จะได้ว่า $\dot{\sigma}(t,T) = -\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $df(t,T)$ นั่นคือ $\sigma(t,T) = -\int_t^T \dot{\sigma}(t,s)ds$ พิจารณาตัวแบบ HJM ภายใต้ตัวความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง

$$df(t,T) = \sigma'(t,T)\cdot dZ_t + \left(\sigma'(t,T)\cdot\int_t^T\sigma'(t,s)ds\right)dt$$

$$= \sigma'(t,T)\cdot dZ_t - \sigma'(t,T)\cdot\sigma(t,s)dt \tag{11.52}$$

โดยการแทน $dZ_t = dW_t + \sigma(t;T)dt$ ในสมการ (11.52) จะได้

$$df(t,T) = \sigma'(t,T)\cdot\left(dW_t + \sigma(t;T)dt\right) - \sigma'(t,T)\cdot\sigma(t,s)dt = \sigma'(t,T)\cdot dW_t \tag{11.53}$$

เมื่อ W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ซึ่งเป็นสิ่งที่ต้องการ □

ตัวอย่างที่ 11.7 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent โดยใช้นิพจน์ HJM (heath-jarrow-morton) ที่มีการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ด $f(t,T)$ สำหรับสินค้าโภคภัณฑ์โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma(t,T)$ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยกำหนดให้ความผันผวน $\sigma(t,T)$ ของน้ำมันดิบ brent มีค่าเท่ากับ $0.03\times e^{-0.2(T-t)}$ และเวลา $T=1$ ปี จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent โดยใช้สมการ HJM ดังนี้

$$df(t,T) = \sigma'(t,T)\cdot dZ_t + \left(\sigma'(t,T)\cdot\int_t^T \sigma'(s,T)ds\right)dt$$

วิธีทำ เราสามารถคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent ได้ตามขั้นตอน ดังนี้

1) คำนวณ $\sigma(t,T)$ และหาอนุพันธ์ $\sigma'(t,T)$

เนื่องจาก $\sigma(t,T)$ ของน้ำมันดิบ brent มีค่าเท่ากับ $0.03\times e^{-0.2(T-t)}$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\sigma(t,T)$ เทียบกับตัวแปร T

$$\sigma'(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}(0.03\times e^{-0.2(T-t)}) = -0.2\times 0.03\times e^{-0.2(T-t)} = -0.006\times e^{-0.2(T-t)}$$

เมื่อแทนค่า $t=0$ และ $T=1$ จะได้

$$\sigma'(0,1) = -0.006\times e^{-0.2(1-0)} = -0.006\times e^{-0.2} \approx -0.006\times 0.8187 \approx -0.004912$$

2) คำนวณ $\int_t^T \sigma(s,T)ds$

จากที่กำหนดให้ $\int_t^T \sigma(s,T)ds = \int_0^1 0.03\times e^{-0.2(1-s)}ds$

$$= 0.03\times\int_0^1 e^{-0.2+0.2s}ds = 0.03\times e^{-0.2}\int_0^1 e^{0.2s}ds$$

$$= 0.03\times 0.8187\left[\frac{e^{0.2s}}{0.2}\right]_0^1 = 0.03\times 0.8187\left[\frac{e^{0.2}-1}{0.2}\right]$$

$$= 0.02717397$$

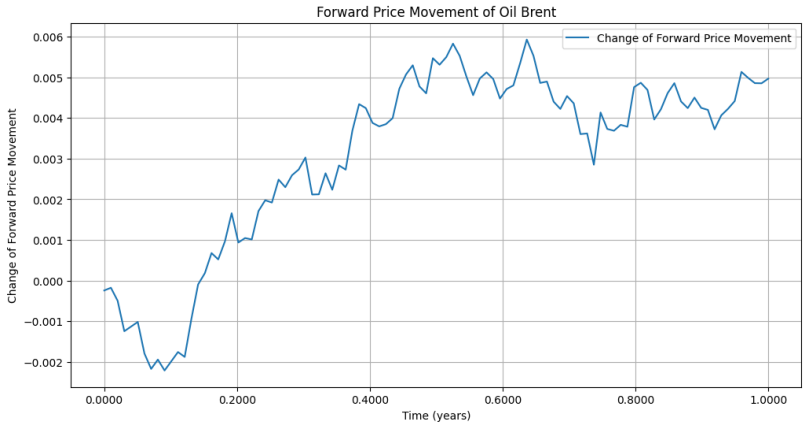
3) คำนวณ $df(t,T)$

จากสมการ $df(t,T) = \sigma'(t,T)\cdot dZ_t + \left(\sigma'(t,T)\cdot\int_t^T \sigma'(s,T)ds\right)dt$

ดังนั้น $df(t,T) = -0.004912 \cdot dZ_t + (-0.004912)(0.02717397)dt$

$$df(t,T) = -0.004912 \cdot dZ_t + (-0.00013342) \cdot dt$$

โดยกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอร์เวิร์ดน้ำมันดิบ brent เป็นดังนี้



รูปที่ 11.4 แสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent

กราฟข้างต้นแสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ brent ตามผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณตามทฤษฎี HJM โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma'(t,T)$ และการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน dZ_t □

11.3.2 ออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง

พิจารณาตราสารหนี้ไม่มีคูปองที่มีราคาที่ตราไว้ 1 บาท อายุครบไถ่ถอนที่ $T+\Delta T$ เมื่อ $\Delta T > 0$ จะได้ว่าราคาของตราสารหนี้ดังกล่าวที่เวลา t เท่ากับ $P_t^{T+\Delta T}$ ในที่นี้ต้องการคำนวนราคาของคอลออปชันที่อายุ T และราคาใช้สิทธิ K จากสมการ (11.38) จะได้

$$\frac{d\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_t}{\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_t} = \left(\sigma(t,T+\Delta T) - \sigma(t,T)\right) \cdot dW_t \qquad (11.54)$$

เมื่อ W_t เป็นการเคลื่อนที่บราวน์ภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็น Q^{*T} ผลเฉลยของสมการ (11.54) อยู่ในรูป

$$\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_t = \left(\frac{P_0^{T+\Delta T}}{P_0^T}\right) M_t \qquad (11.55)$$

เมื่อ $M_t = \exp\left(\int_0^t \left(\sigma(s,T+\Delta T) - \sigma(s,T)\right) \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\sigma(s,T+\Delta T) - \sigma(s,T)\right\|^2 ds\right)$ ซึ่งมีสมบัติมาร์ทิงเกลในรูปชี้กำลัง (exponential martingale) จากทฤษฎีบท 11.1 ราคาฟอร์เวิร์ดของคอ

ลออปชัน $\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_t$ มีสมบัติมาร์ทิงเกลภายใต้ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง Q^{*T} นั่นคือ

$$C_0 = E^{Q^{*T}}\left[P_0^T\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_T\right] = E^{Q^{*T}}[e^{-\int_0^T r_s ds}\max\left\{\left(f_T P^{T+\Delta T}\right)_T - K, 0\right\}] \quad (11.56)$$

โดยประยุกต์ใช้สูตรแบล็กโชลส์

$$C_0 = P_0^{T+\Delta T}N(d_1) - P_0^T KN(d_2) \quad (11.57)$$

โดยที่

$$d_1 = \frac{1}{s(T,T+\Delta T)\sqrt{T}}\ln\left(\frac{P_0^{T+\Delta T}}{KP_0^T}\right) + \frac{1}{2}s(T,T+\Delta T)\sqrt{T}\ ,\ d_2 = d_1 - s(T,T+\Delta T)\sqrt{T} \quad (11.58)$$

และ

$$s(T,T+\Delta T) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left\|\sigma(s,T+\Delta T) - \sigma(s,T)\right\|^2 ds} \quad (11.59)$$

ซึ่งเป็นค่าความผันผวนของ M_t เรียกว่า “ค่าความผันผวนแฝง (implied volatility)”ของออปชัน ยกตัวอย่างเช่น สำหรับตัวแบบปัจจัยเดียว-วาซิเซค (1-factor vasicek model)

$$\sigma(t,T) = \frac{\sigma\left(1-e^{\kappa(T-t)}\right)}{\kappa} \quad (11.60)$$

เมื่อ σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นและ κ เป็นอัตราของค่าเฉลี่ยวกกลับ จะได้

$$s(T,T+\Delta T) = \sigma\left(\frac{1-e^{-\kappa\Delta T}}{\kappa}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa T}} \quad (11.62)$$

ตัวอย่างที่ 11.8 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปองที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000 บาท ที่จะครบกำหนดในเวลา 1 ปีนับจากปัจจุบัน โดยใช้ตัวแบบ 1-factor Vasicek model โดยพิจารณาข้อมูลดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $\sigma = 0.01$, ค่า κ ที่ใช้ในการคำนวณมีค่า 5 ค่า ได้แก่ 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1 และ เวลา $T = 1$ ปี จงคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T,T+\Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ และแสดงกราฟเปรียบเทียบ

วิธีทำ 1) คำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T,T+\Delta T)$

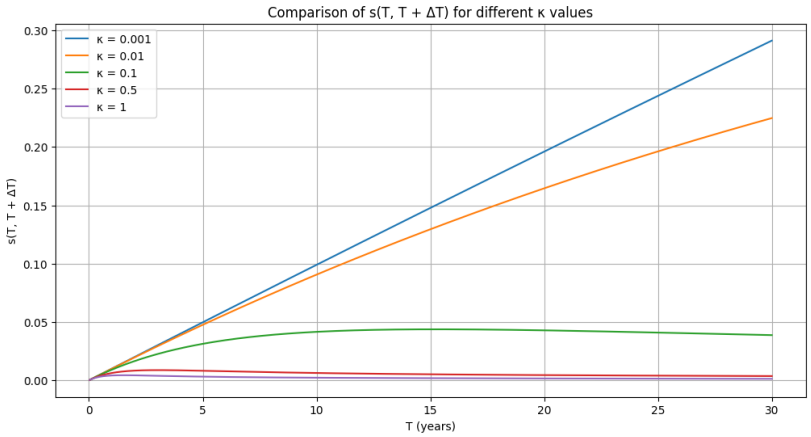
$$s(T,T+\Delta T) = \sigma\left(\frac{1-e^{-\kappa T}}{\kappa}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa T}}$$

สำหรับค่า κ แต่ละค่า κ = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1

2) สร้างกราฟเปรียบเทียบ $s(T,T+\Delta T)$ สำหรับค่า κ ต่าง ๆ

โค้ด python สำหรับการคำนวณและสร้างกราฟ

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
# define parameters
sigma = 0.01
kappa_values = [0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1]
t = np.linspace(0, 30, 1000)
# define function for s(t, t + δt)
def s(t, kappa):
    return sigma * (1-np.exp(-kappa * t)) / kappa * np.sqrt((1-np.exp(-2 * kappa * t))/(2 * kappa * t))
# plotting the graphs
plt.figure(figsize=(12, 6))
for kappa in kappa_values:
    s_values = s(t, kappa)
    plt.plot(t, s_values, label=f'κ = {kappa}')
plt.xlabel('t (years)')
plt.ylabel('s(t, t + δt)')
plt.title('comparison of s(t, t + δt) for different κ values')
plt.legend()
plt.grid(true)
plt.show()
```



รูปที่ 11.5 *เปรียบเทียบค่าความผันผวนแฝง* $s(T,T+\Delta T)$ *ของออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง*

กรณี $\kappa = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1$

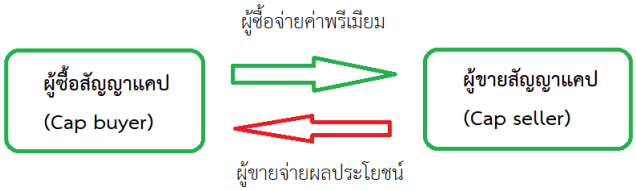
การคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T,T+\Delta T)$ สำหรับค่า κ ต่าง ๆ จะช่วยให้ผู้จัดการพอร์ตการลงทุนสามารถวิเคราะห์และเปรียบเทียบความเสี่ยงในการลงทุนในพันธบัตรที่ไม่มีคูปอง และสามารถเลือกกลยุทธ์การลงทุนที่เหมาะสมตามระดับความเสี่ยงที่ยอมรับได้ □

11.4 สัญญาแคปของอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

ในหัวข้อนี้แนะนำโครงสร้างและเครื่องมือที่ใช้ในการบริหารจัดการความเสี่ยงในกลุ่มอนุพันธ์ของดอกเบี้ยซึ่งได้แก่สัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย และแนวทางที่เป็นที่นิยมในการกำหนดราคาของสัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย ซึ่งได้แก่ การกำหนดราคาโดยการประยุกต์ใช้แบบจำลองของแบล็กโชลส์ (black-scholes model) และนอกจากนี้ จะกล่าวถึงรูปแทนความเป็นกลางต่อความเสี่ยง (risk neutral representation) ของแบบจำลองของแบล็กโชลส์ เพื่อที่จะนำไปสู่รูปปิดของผลเฉลยแบบทางคณิตศาสตร์ (closed form solution) ของแบบจำลองแบล็กโชลส์ เพื่อนำไปใช้ในการสร้างสูตรรูปปิดของการกำหนดราคาสัญญาแคป สัญญาฟลอร์และสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ยให้ง่ายและสะดวกต่อการนำไปใช้งาน

11.4.1 สัญญาแคปของอัตราดอกเบี้ย

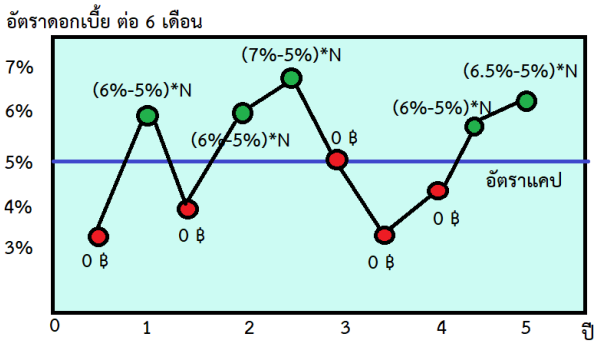
สัญญาแคป (cap agreement) หรือ interest rate cap เป็นสัญญาทางการเงินระหว่างสองฝ่ายที่ให้สิทธิแก่ผู้ซื้อสัญญาในการจำกัดความเสี่ยงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating rate) โดยกำหนดขีดจำกัดสูงสุดของระดับอัตราดอกเบี้ย (อัตราแคป: cap rate) ในสัญญา โดยผู้ซื้อแคปได้รับประโยชน์เมื่ออัตราดอกเบี้ยในตลาดสูงขึ้นเหนืออัตราที่กำหนดไว้ (อัตราแคป) โดยผู้ขายจะต้องชดใช้ส่วนต่างให้กับผู้ซื้อโดยความถี่ในการจ่ายอาจเป็นรายเดือน รายไตรมาส หรือรายครึ่งปี ในทางกลับกันผู้ซื้อจะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับผู้ขายเป็นการแลกเปลี่ยนสำหรับความคุ้มครองที่ได้รับจากสัญญาแคป



รูปที่ 11.6 *การซื้อขายสัญญาแคปอัตราดอกเบี้ย*

เราอาจพิจารณาสัญญาแคปว่าเป็นสัญญาซึ่งประกอบขึ้นด้วยชุดของคอลออปชันแบบยุโรป หรือ “แคปเล็ต” (call European options or caplets) บนอัตราดอกเบี้ยที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคปเดียวกัน แต่วันครบกำหนดแตกต่างกัน ถึงแม้ว่าสัญญาแคปจะเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากสำหรับผู้กู้ที่ต้องการควบคุมและจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย อย่างไรก็ตามสัญญาแคปมีข้อจำกัดอยู่ในบางประการ เช่น สัญญาแคปเป็นเครื่องมือที่ต้องซื้อจากตลาดทุนซึ่งอาจมีการเรียกเก็บค่าธรรมเนียม และส่วนใหญ่จะต้องมีการประเมินความเสี่ยงทางเครดิตของผู้ขายสัญญาเพื่อประเมินความน่าเชื่อถือและความสามารถในการจ่ายค่าชดเชยให้กับผู้ซื้อ

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้: สมมุติว่า บริษัท a ได้ทำสัญญากู้ยืมเงินจำนวนมากที่มีอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัว การที่อัตราดอกเบี้ยสามารถเพิ่มขึ้นได้จะส่งผลกระทบต่อความสามารถในการจ่ายชำระคืนเงินของบริษัท ด้วยเหตุนี้ บริษัท a ต้องการที่จะจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย ทางเลือกหนึ่งที่เป็นไปได้ของบริษัท a คือ ซื้อสัญญาแคปจากธนาคาร b ด้วยอัตราแคปที่ 5% ต่อ 6 เดือน ระยะเวลา 5 ปี ทั้งนี้ บริษัท a จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้ธนาคาร b ในแต่ละปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นมาอยู่ที่ 7% ต่อ 6 เดือน ธนาคาร b ต้องจ่ายค่าชดเชย (7% - 5% = 2%)*n ให้กับบริษัท a เมื่อ n เป็นเงินต้นอ้างอิงที่กำหนดไว้ในสัญญา นั่นคือ บริษัท a จะได้รับความคุ้มครองจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย ทำให้บริษัทสามารถควบคุมค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับดอกเบี้ยในระยะเวลาที่กำหนดไว้ได้



รูปที่ 11.7 *การจำกัดความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ยด้วยสัญญาแคป*

11.4.1.1 การกำหนดราคาสัญญาแคปตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด

การกำหนดราคาสัญญาแคปจะถูกต้องขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่

1) อัตราดอกเบี้ยในอนาคต ถ้ามีความคาดหวังว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตจะสูง ราคาของสัญญาแคปจะสูงด้วย เนื่องจากผู้ถือสัญญาแคปจะได้รับมูลค่าคุ้มครองหรือผลประโยชน์สูงเมื่ออัตราดอกเบี้ยเพิ่มสูงกว่าอัตราแคป

2) ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย อัตราดอกเบี้ยที่ผันผวนมากจะทำให้สัญญาแคปมีราคาสูง เนื่องจากมันเพิ่มโอกาสที่สัญญาแคปจะกำหนดให้ดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาด

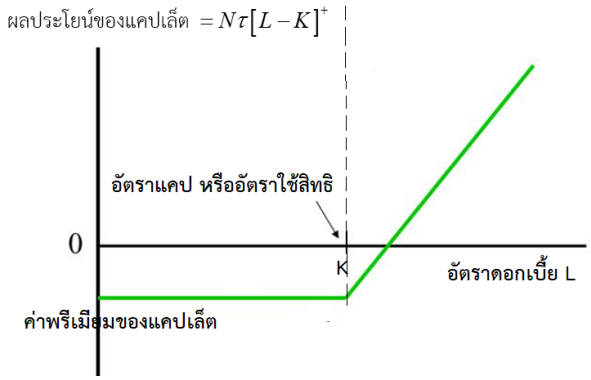
3) ระยะเวลาของสัญญา สัญญาแคปที่มีระยะเวลานานมากขึ้นจะมีราคาสูง ทั้งนี้เนื่องจากระยะเวลาที่นานมากขึ้นจะเพิ่มโอกาสที่อัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเพิ่มขึ้นเหนืออัตราที่กำหนดไว้ในสัญญาแคป

4) อัตราแคป (cap rate) สัญญาแคปที่มีอัตราแคปสูงกว่าจะมีราคาถูกกว่าสัญญาแคปที่มีอัตราแคป ต่ำกว่าเนื่องจากสัญญาแคปที่มีอัตราแคปสูงกว่าเพิ่มโอกาสที่อัตราดอกเบี้ยในตลาดจะสูงกว่าอัตราแคปลดลง

กำหนดให้ $T_0 = 0, T_1, T_2, ..., T_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = T_1, T_2, ...T_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k T = T_k - T_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L\left(T_{k-1}, T_k\right)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในช่วง $[T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ k, $k = 1, 2, ..., n$ สามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$\text{ผลประโยน์ของแคปเล็ตที่ } k = N\tau_k \left[L_k - K\right]^+ = N\tau_k \max\left\{L_k - K, 0\right\} \tag{11.63}$$

โดยที่ N เป็นเงินต้นอ้างอิง (principle notation) และ K แทนอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคป



รูปที่ 11.8 *ผลประโยชน์ของคอลออปชันแบบยุโรปหรือแคปเล็ต*

กำหนดให้ $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดในช่วง $[t,T]$ และ

$$F_t^{T+\Delta T} = F(t;T,T+\Delta T) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P_t^T}{P_t^{T+\Delta T}} - 1\right) \tag{11.64}$$

เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าสำหรับ $[T,T+\Delta T]$ ณ วันที่ $t \le T$, ผลประโยน์ของแคปเล็ต c_k ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ คำนวณได้ ดังนี้

$$\text{ผลประโยน์ของแคปเล็ต } c_k = N\tau_k\left[F_k - K\right]^+ = N\tau_k \max\left\{F_k - K, 0\right\} \tag{11.65}$$

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยน์ของแคปเล็ต c_k คำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} P_0^{T_k} E\left[c_k\right] &= P_0^{T_k} E\left[N\tau_k\left[F_k - K\right]^+\right] \\ &= N\tau_k P_0^{T_k} E\left[\left[F_k - K\right]^+\right] = N\tau_k E\left[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}\left[F_k - K\right]^+\right] \end{aligned} \tag{11.66}$$

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยน์ของแคปเล็ต c_k ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง แทนด้วย $Caplet_k = P_0^{T_k} E^*\left[c_k\right]$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคปคือเงินที่ผู้ซื้อยินยอมจ่ายเพื่อแลกกับผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต ดังนั้นราคาของแคปจึงควรเท่ากับผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ของแต่

ละแคปเล็ตในสัญญาแคป นั่นคือ ภายใต้ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง E^* ค่าพรีเมียม (ราคาของแคปที่เวลา $t=0$) คำนวณได้จาก

$$Cap=\sum_{k=1}^{n}Caplet_k=\sum_{k=1}^{n}P_0^{T_k}E^*\left[c_k\right]=N\sum_{k=1}^{n}\tau_k E^*\left[e^{-\int_0^{T_k}r_s ds}\left[F_k-K\right]^+\right] \tag{11.67}$$

ตัวอย่างที่ 11.9 สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคป (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิง L_k , อัตราแคป K ที่ 5%

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

1) $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

2) อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k=F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right)=\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}}-1\right)$ สำหรับแต่ละงวด

3) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

4) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด c_k ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

$$F_k=F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right)=\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}}-1\right)$$

5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

วิธีทำ 1) คำนวณ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

จากสูตร $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ จะได้ $P_{t_{k-1}}^{t_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_s ds}] = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_k ds} = e^{-r_k(t_k - t_{k-1})} = e^{-r_k \tau_k}$

และ $P_0^{t_k} = P_0^{t_{k-1}} P_{t_{k-1}}^{t_k}$

$P_0^{t_1} = e^{-0.05(0.25)} = 0.9876$	$P_0^{t_1} = e^{-0.05(0.25)} = 0.9876$
$P_{t_1}^{t_2} = e^{-0.051(0.25)} = 0.9873$	$P_0^{t_2} = P_0^{t_1} P_{t_1}^{t_2} = (0.9876)(0.9873) = 0.9751$
$P_{t_2}^{t_3} = e^{-0.055(0.25)} = 0.9863$	$P_0^{t_3} = P_0^{t_2} P_{t_2}^{t_3} = (0.9751)(0.9863) = 0.9617$
$P_{t_3}^{t_4} = e^{-0.045(0.25)} = 0.9888$	$P_0^{t_4} = P_0^{t_3} P_{t_3}^{t_4} = (0.9617)(0.9888) = 0.9509$

2) คำนวณ F_k สำหรับแต่ละงวด จากสูตร $F_k = F(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ จะได้

$$F_1 = \frac{1}{0.25}\left(\frac{1}{0.9876} - 1\right) = 0.0505$$

$$F_2 = \frac{1}{0.25}\left(\frac{1}{0.9873} - 1\right) = 0.0515$$

$$F_3 = \frac{1}{0.25}\left(\frac{1}{0.9863} - 1\right) = 0.0556$$

$$F_4 = \frac{1}{0.25}\left(\frac{1}{0.9888} - 1\right) = 0.0453$$

3) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

จากสูตร ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ $k = N\tau_k [L_k - K]^+ = N\tau_k \max\{L_k - K, 0\}$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 1 $= N\tau_1 \max(F_1 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.061 - 0.05, 0) = 2750$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 2 $= N\tau_2 \max(F_2 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.055 - 0.05, 0) = 1250$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 3 $= N\tau_3 \max(F_3 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.049 - 0.05, 0) = 0$$

ผลประโยชน์ของแคปเล็ตที่ 4 $= N\tau_4 \max(F_4 - K, 0)$

$$= 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.057 - 0.05, 0) = 1750$$

4) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต c_k สำหรับแต่ละงวด

จากสูตร $c_k = N\tau_k \left[F_k - K\right]^+ = N\tau_k \max\left\{F_k - K, 0\right\}$

$$c_1 = N\tau_1 \max(F_1 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0505 - 0.05, 0) = 125$$

$$c_2 = N\tau_2 \max(F_2 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0515 - 0.05, 0) = 375$$

$$c_3 = N\tau_3 \max(F_3 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0556 - 0.05, 0) = 1400$$

$$c_4 = N\tau_4 \max(F_4 - K, 0) = 1,000,000 \times 0.25 \times \max(0.0453 - 0.05, 0) = 0$$

5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

จากสูตร $Caplet_k = P_0^{T_k} E^* \left[c_k\right] = P_0^{T_k} c_k$

$$Caplet_1 = P_0^{t_1} \times c_1 = 0.9876 \times 125 = 123.45$$

$$Caplet_2 = P_0^{t_2} \times c_2 = 0.9751 \times 375 = 365.65$$

$$Caplet_3 = P_0^{t_3} \times c_3 = 0.9617 \times 1400 = 1346.38$$

$$Caplet_4 = P_0^{t_4} \times c_4 = 0.9505 \times 0 = 0$$

6) คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

จากสูตร $Cap = \sum_{k=1}^{n} Caplet_k$

จะได้ $Cap = \sum_{k=1}^{4} Caplet_k = 123.45 + 365.65 + 1346.38 + 0 = 1,835.48$ บาท

ดังนั้น ราคาของสัญญาแคปที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท และมีอัตราแคปที่ 5% โดยคำนวณจากผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวดและมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต จะมีค่าเท่ากับ 1,835.48 บาท □

11.4.1.2 การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ (black-scholes model)

การกำหนดราคาของสัญญาแคปดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ เป็นการใช้ทฤษฎีการกำหนดราคาออปชันแบบยุโรปด้วยตัวแบบแบล็กโชลส์ในการกำหนดราคาสัญญาแคปดอกเบี้ย ซึ่ง

สัญญาแคปดอกเบี้ยนี้จะมีลักษณะเหมือนกับยูโรเปียนคอลออปชัน (European call option) โดยพิจารณาอัตราดอกเบี้ยแทนราคาหุ้นหรือราคาสินทรัพย์ โดยราคาของสัญญาแคปดอกเบี้ยจะเท่ากับผลรวมของราคาแคปเล็ตที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากันแต่อายุของสัญญาต่างกัน โดยราคาของแคปเล็ตตามตัวแบบแบล็กโชลส์ คำนวณได้ตามสูตร ดังนี้

$$Caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[F_k N(d_1^k) - KN\left(d_2^k\right)\right] \tag{11.68}$$

โดยที่ $Caplet_k$ เป็นราคาแคปเล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k, $P_t^{T_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t,T_k]$, $F_k = F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) หรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่แคปเล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k, N เป็นเงินต้นอ้างอิง, K เป็นอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราแคป, $N(x)$ เป็นความน่าจะเป็นสะสมของการแจงแจงแบบปกติ, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_1^k และ d_2^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_1^k = \frac{\left[\ln\left(F_k / K\right) + 0.5\sigma^2 T_k\right]}{\sigma\sqrt{T_k}} \text{ และ } d_2^k = d_1^k - \sigma\sqrt{T_k} \tag{11.69}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $$Cap = \sum_{k=1}^{n} Caplet_k = \sum_{k=1}^{n} N\tau_k P_0^{T_k}\left[F_k N(d_1^k) - KN\left(d_2^k\right)\right] \tag{11.70}$$

หมายเหตุ การคำนวณค่าความน่าจะเป็นสะสมของการแจงแจงแบบปกติ $N(x)$ สามารถคำนวณค่า ได้จากตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจงแจงแบบปกติซึ่งปรากฏอยู่ในภาคผนวก หรือเพื่อความสะดวกอาจจะใช้คำสั่งฟังก์ชัน normsdist(z) ในโปรแกรม excel ก็ได้

ตัวอย่างที่ 11.10 การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ (black-scholes model)สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และ กำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยใช้

อ้างอิง L_k, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 5%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma=0.02$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

1) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด $Caplet_k$

2) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 คำนวณ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวด

จากสูตร $P_{t_{k-1}}^{t_k}=e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_k ds}$, $P_0^{t_k}=P_0^{t_{k-1}}P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $F_k=\frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}}-1\right)$ แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.9888	0.9509	0.0453

1) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$

จากสูตร $$Caplet_k=N\tau_k P_0^{T_k}\left[F_k N(d_1^k)-KN\left(d_2^k\right)\right]$$

โดยที่ F_k เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $d_1^k=\frac{\left[\ln\left(F_k/K\right)+0.5\sigma^2 T_k\right]}{\sigma\sqrt{T_k}}$ และ $d_2^k=d_1^k-\sigma\sqrt{T_k}$

คำนวณ $d_1^1=\frac{\left[\ln\left(F_1/K\right)+0.5\sigma^2 t_1\right]}{\sigma\sqrt{t_1}}=\frac{\left[\ln\left(0.0505/0.05\right)+0.5(0.02^2)(0.25)\right]}{0.02\sqrt{0.25}}=1.00003$

$$d_2^1=d_1^1-\sigma\sqrt{t_1}=1.00003-0.02\sqrt{0.25}=0.99003$$

$$N(d_1^1)=N(1.00003)=0.84135$$

$$N(d_2^1)=N(0.99003)=0.83892$$

$$Caplet_1 = N\tau_1 P_0^{t_1}\left[F_1 N(d_1^1) - KN\left(d_2^1\right)\right]$$

$$= 1,000,000(0.25)(0.9876)[0.0505(0.84135) - 0.05(0.83892)] = 133.88$$

สำหรับ $Caplet_k, k = 2,3,4$ คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	t_k	τ_k	$P_0^{t_k}$	F_k	d_1^k	d_2^k	$N(d_1^k)$	$N(d_2^k)$	$Caplet_k$
1	0.25	0.25	0.9876	0.0505	1.00003	0.99003	0.84135	0.83892	133.88
2	0.50	0.25	0.9751	0.0515	2.09719	2.08305	0.98201	0.98138	366.83
3	0.75	0.25	0.9617	0.0556	6.13782	6.12050	1.00000	1.00000	1346.38
4	1.00	0.25	0.9509	0.0453	-4.92580	-4.94580	0.00000	0.00000	0.00

2) คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

จากสูตร $Cap = \sum_{k=1}^{n} Caplet_k$

จะได้ $Cap = \sum_{k=1}^{4} Caplet_k = 133.88 + 366.83 + 1346.38 + 0 = 1,847.09$

ดังนั้น ราคาของสัญญาแคปที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท และมีอัตราแคปที่ 5% โดยคำนวณจากผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวดและมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต จะมีค่าเท่ากับ 1,857.09 บาท □

11.4.1.3 การกำหนดราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์

โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (Gaussian term-structure model: GTSM) คือตัวแบบที่ใช้ในการระบุโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยในอนาคตโดยสมมุติให้ระดับอัตราดอกเบี้ยปัจจุบันและความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย (volatility) มีการแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian distribution) ในตัวแบบจำลองที่ผ่านมาเช่น ตัวแบบฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน (HJM) อัตราดอกเบี้ยดอกเบี้ยตามระยะเวลาที่แตกต่างต่างกันอาจมีความผันผวนที่ไม่แน่นอน แต่ในตัวแบบโครงสร้างของเกาส์จะสมมติให้ความผันผวนนั้นคงที่

ตัวแบบโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์มีหลายรูปแบบแต่ละรูปแบบมีความซับซ้อนแตกต่างกันขึ้นอยู่กับสมมติฐานและตัวแบบอัตราดอกเบี้ยที่เลือกใช้ โดยตัวแบบอัตราดอกเบี้ยที่เป็นที่นิยมได้แก่ ตัวแบบวาซิเซค และ ตัวแบบฮัลล์-ไวท์ ซึ่งเป็นตัวแบบในกรอบโครงสร้างของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตันที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวห้อก่อนหน้านี้

ในหัวข้อนี้นำเสนอสูตรรูปปิดของการกำหนดราคาสัญญาแคปในรูปสูตรของแบล็กโชลส์ภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ กำหนดให้ $BSP(S,K,T,\sigma)$ แทนสูตรของแบล็กโชลส์ของพุทออปชันบนสินค้าอ้างอิงที่มีราคาปัจจุบัน S , ราคาใช้สิทธิ K , อายุครบกำหนด T , และค่าความผันผวน σ (คงที่) จะได้ว่าราคาของสัญญาแคปที่มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ อายุครบกำหนด T_n สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$Cap = \sum_{k=1}^{n} caplet_k \tag{11.71}$$

เมื่อ $caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k} BSP\left(x_k,1,T_k,s_k\right)$, N เป็นเงินต้นอ้างอิง

และ $x_k = \dfrac{1+\tau_k \cdot \bar{R}}{1+\tau_k \cdot F_k}$ และ $s_k = \sqrt{\dfrac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \left\|\sigma(t,T_k)-\sigma(t,T_{k-1})\right\|^2 dt}$, $k=1,2,...,n$ (11.72)

โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของตัวแบบเกาส์ 1 ปัจจัย จะได้ $s_k = \sigma\left(\dfrac{1-e^{-\kappa\Delta T_k}}{\kappa}\right)\sqrt{\dfrac{1-e^{-2\kappa T_k}}{2\kappa T_k}}$

และ $$BSP(S,K,T,\sigma) = KP_0^T N\left(-d_2\right) - SN\left(-d_1\right) \tag{11.73}$$

โดยที่ $$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S}{KP_0^T}\right)+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\ , \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{11.74}$$

นั่นคือ $$BSP\left(x_k,1,T_k,s_k\right) = P_0^{T_k} N\left(-d_2^k\right) - x_k N\left(-d_1^k\right)$$

โดยที่ $$d_1^k = \frac{1}{s_k\sqrt{T_k}}\ln\left(\frac{x_k}{P_0^T}\right)+\frac{1}{2}s_k\sqrt{T_k}\ , \ d_2^k = d_1^k - s_k\sqrt{T_k}$$

หมายเหตุ ในบริบทของการกำหนดราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์สำหรับสินทรัพย์สำหรับการใช้งานจริงมีสองค่าที่สำคัญ ได้แก่ อัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ และ ราคาใช้สิทธิ K ซึ่งทั้งสองค่านี้มีความแตกต่างกันดังนี้

1) อัตราใช้สิทธิ (R): อัตราใช้สิทธิ R หมายถึงอัตราดอกเบี้ยที่ใช้สำหรับการปรับราคาของสินค้าที่มีการใช้สิทธิ เช่น การคำนวณผลตอบแทนจากการลงทุน หรือการปรับอัตราดอกเบี้ยในสัญญาต่าง ๆ ในสมการ (11.71) R ถูกใช้ในการคำนวณค่า Cap เพื่อปรับราคาของพุทออปชันให้มีความเป็นปัจจุบัน โดยอัตราใช้สิทธิ R จะถูกนำไปคำนวณร่วมกับค่า ΔT_k ซึ่งเป็นระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อให้ได้ผลตอบแทนจากการลงทุนที่ถูกต้อง

2) ราคาใช้สิทธิ (K): ราคาใช้สิทธิ K หมายถึงราคาที่ผู้ถือออปชันสามารถซื้อหรือขายสินทรัพย์พื้นฐานได้เมื่อถึงวันครบกำหนดของออปชัน ในสมการ $BSP(S,K,T,\sigma)$ ตามสมการ (11.73) จะใช้ราคาใช้สิทธิ K เพื่อคำนวณมูลค่าของออปชัน (ทั้งพุทและคอลออปชัน) โดยที่ K จะเป็นตัวกำหนดว่าผู้ถือออปชันจะเลือกใช้สิทธิเมื่อราคาสินทรัพย์อ้างอิงถึงราคาใช้สิทธิหรือไม่

ตัวอย่างของอัตราใช้สิทธิ R

สมมติว่ามีอัตราใช้สิทธิ R = 5% ต่อปี ใช้ในการปรับราคาของพุทออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ K = 100 บาท ระยะเวลาครบกำหนด 1 ปี และมีค่า ΔT_k = 0.25 ปี ในกรณีนี้อัตราใช้สิทธิ R จะถูกใช้ในการคำนวณผลตอบแทนจากการลงทุนและปรับราคาออปชันให้สอดคล้องกับระยะเวลาที่เหลืออยู่ของสัญญา

ตัวอย่างที่ 11.11 จงคำนวณราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm) โดยสมมติว่าพิจารณาสัญญาแคปสำหรับหุ้นอ้างอิงตามข้อมูลต่อไปนี้

- มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท
- มีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5%
- ระยะเวลาถึงวันครบกำหนด (time to maturity, T) 1 ปี
- ค่าความผันผวน (volatility, σ) 0.25
- จำนวนงวด (number of periods, n) 4 งวด
- อัตราดอกเบี้ยในตลาด (risk-free interest rate, r) 5%
- ค่า κ (mean reversion rate): 0.03
- ระยะเวลาระหว่างงวด (time interval, τ_k) 0.25 ปี
- มีอัตราใช้สิทธิ $\overline{R}$ = 5% ต่อปี

วิธีทำ คำนวณราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm) ตามขั้นตอน ดังนี้

1) คำนวณ s_k สำหรับแต่ละงวด k

จากสูตร $$s_k = \sigma\left(\frac{1-e^{-\kappa\tau_k}}{\kappa}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2\kappa T_k}}{2\kappa T_k}}$$ ในที่นี้ $\tau_k = 0.25$ และ $\kappa = 0.03$

ดังนั้น $s_1 = 0.25\left(\frac{1-e^{-0.03(0.25)}}{0.03}\right)\sqrt{\frac{1-e^{-2(0.03)(0.25)}}{2(0.03)(0.25)}} = 0.062033$

สำหรับผลการคำนวณ $s_k, k = 2,3,4$ แสดงในตารางถัดจากนี้

จากสูตร $P_t^T = e^{-\int_t^T r_s ds}$ และ $F_k = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ แสดงในตารางต่อไปนี้

จะได้ $P_{t_{k-1}}^{t_k} = e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_k ds} = e^{-0.05(t_k - t_{k-1})} = e^{-0.05\tau_k}$ และ $P_0^{t_k} = e^{-0.05t_k}$

และ $F_k = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{e^{-0.05\tau_k}} - 1\right) = \frac{e^{0.05\tau_k} - 1}{\tau_k} = \frac{e^{0.05(0.25)} - 1}{0.25} = 0.05031$, $k = 1,2,3,4$

จากสูตร $caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k} BSP\left(x_k, 1, T_k, s_k\right)$

เมื่อ $x_k = \frac{1 + \tau_k \cdot \overline{R}}{1 + \tau_k \cdot F_k}$ และ $BSP\left(x_k, 1, T_k, s_k\right) = P_0^{T_k} N\left(-d_2^k\right) - x_k N\left(-d_1^k\right)$

โดยที่ $d_1^k = \frac{1}{s_k\sqrt{T_k}}\ln\left(\frac{x_k}{P_0^T}\right) + \frac{1}{2}s_k\sqrt{T_k}$, $d_2^k = d_1^k - s_k\sqrt{T_k}$

ผลลัพธ์ที่คำนวณได้แสดงในตารางด้านล่าง

k	t_k	τ_k	s_k	$P_0^{t_k}$	F_k	x_k
1	0.25	0.25	0.062033	0.9876	0.05031	0.999923
2	0.50	0.25	0.061802	0.9751	0.05031	0.999923
3	0.75	0.25	0.061572	0.9617	0.05031	0.999923
4	1.00	0.25	0.061344	0.9509	0.05031	0.999923

d_1^k	d_2^k	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$	$BSP\left(x_k, 1, T_k, s_k\right)$	$caplet_k$
0.900513	0.775513	0.183923582	0.219018	0.032388	7,996.47
1.070301	0.893525	0.142241837	0.185788	0.03897	9,502.00
1.201809	0.985303	0.114718705	0.162238	0.041557	10,006.76
1.313813	1.063813	0.094454639	0.143707	0.042251	10,047.56

ดังนั้น ราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์

$Cap = \sum_{k=1}^{n} caplet_k = 7,996.47 + 9,502.00 + 10,006.76 + 10,047.56 = 37,552.79$ บาท □

11.4.1.3 ค่าความผันผวนแฝงของสัญญาแคป

กำหนดให้ Cap แทนราคาของสัญญาแคปที่มีอัตราใช้สิทธิ $\bar{R}$ อายุครบกำหนด T_n และ $\tau_k = \Delta T_k$, $k = 1,2,...,n$ ค่าความผันผวนแฝง (implied volality) ของสัญญาแคปเขียนแทนด้วย $\bar{\sigma}_n$ คือค่าความผันผวนที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$Cap = \sum_{k=1}^{n} NP_0^{T_k} \Delta T_k BSC\left(F_k, S_n, T_k, \bar{\sigma}_n\right) \tag{11.75}$$

เมื่อ $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \tau_k P_0^{T_k} F_k}{\sum_{k=1}^{n} \tau_k F_k}$ และ $BSC(S,K,T,\sigma) = SN\left(d_1\right) - KP_0^T N\left(d_2\right)$ (11.76)

โดยที่ $d_1 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\dfrac{S}{KP_0^T}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

ค่าความผันผวนแฝงของสัญญาแคปเป็นมาตรวัดความเสี่ยงหรือความไม่แน่นอนในการเคลื่อนไหวของราคาแคปซึ่งเป็นความแปรปรวนของราคาแคปในตลาดซึ่งวัดจากการเคลื่อนไหวของราคาในอดีต

สำหรับแต่แคปเล็ตอายุ T_k, $k = 1,2,...,n$ ลำดับของค่าความผันผวนแฝงของแคปเล็ต σ_k นิยามจากค่าความผันผวนซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$Cap(k) = \sum_{j=1}^{k} NP_0^{T_j} \tau_j BSC\left(F_j, S_k, T_j, \sigma_k\right) \tag{11.77}$$

ในโครงสร้างตัวแบบของเกาส์ลำดับของค่าความผันผวนแฝงของแคปเล็ต σ_k จากสมการ (11.77) และ ค่าความผันผวน $s_k = \sqrt{\dfrac{1}{T_k}\int_0^{T_k} \left\|\sigma(t,T_k) - \sigma(t,T_{k-1})\right\|^2 dt}$ จากสมการ (11.68) มีความสัมพันธ์กัน คือ

$$P_0^{T_k} BSP\left(\frac{1+\tau_k \cdot S_n}{1+\tau_k \cdot F_k}, 1, T_k, s_k\right) = P_0^{T_k} \tau_k BSC\left(F_k, S_n, T_k, \sigma_k\right) \tag{11.78}$$

โดยการค่าประมาณ

$$BSC\left(S,S,T,\sigma\right) = BSP\left(S,S,T,\sigma\right) \approx \frac{S\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \text{ และ } S_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} \tau_k P_0^{T_k} F_k}{\sum_{k=1}^{n} \tau_k F_k} \approx F_k \tag{11.79}$$

จากสมการ (11.79) จะได้ว่า ค่าโดยประมาณของค่าความผันผวนแฝง s_k ของแคปเล็ตจากตัวแบบเกาส์ คือ

$$s_k \approx \sigma_k \left(\frac{\tau_k F_k}{1+\tau_k F_k} \right) \sqrt{1+\frac{\tau_k}{T_k}} \qquad (11.80)$$

ตัวอย่างที่ 11.12 จงคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 ในการกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และกำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยใช้อ้างอิง L_k , จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 5%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.02$

วิธีทำ จากผลลัพธ์ในตัวอย่างที่ 11.10 ค่าของ $P_0^{t_k}$ และ F_k

งวดที่ k	t_k	$r(t)=r_k$	τ_k	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.25	0.050	0.25	0.9876	0.0505
2	0.50	0.051	0.25	0.9751	0.0515
3	0.75	0.055	0.25	0.9617	0.0556
4	1.00	0.049	0.25	0.9509	0.0453

ขั้นตอนการคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) ทำได้ดังนี้

1) คำนวณค่า S_n จากสูตร $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \tau_k P_0^{T_k} F_k}{\sum_{k=1}^{n} \tau_k F_k}$

$$S_n = \frac{0.25(0.9878)(0.0505)+0.25(0.9751)(0.05)+0.25(0.963)(0.0505)+0.25(0.95)(0.054)}{0.25(0.0505)+0.25(0.0500)+0.25(0.0505)+0.25(0.0540)}$$

$$\approx 0.9686$$

2) คำนวณค่า s_k สำหรับ caplet ที่ 1 ($k=1,2,3,4$)

จากสูตร $s_k \approx \sigma_k \left(\dfrac{\tau_k F_k}{1+\dfrac{\tau_k S_n}{F_k}} \right)$

สำหรับ $k=1$

$$s_1 \approx 0.02\left(\frac{0.25(0.0505)}{1+0.25\left(\frac{0.9686}{0.0505}\right)}\right) \approx 0.00004357$$

$$s_2 = 0.02\left(\frac{0.25(0.0515)}{1+0.25\left(\frac{0.9686}{0.0515}\right)}\right) \approx 0.002258$$

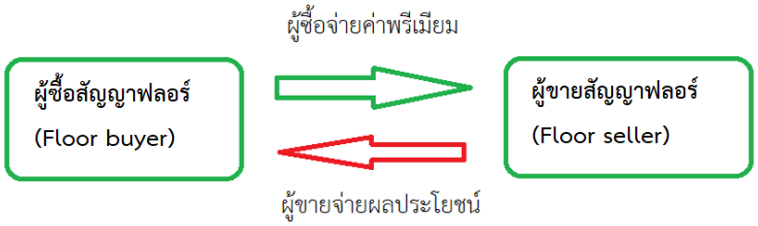
$$s_3 = 0.02\left(\frac{0.25(0.0556)}{1+0.25\left(\frac{0.9686}{0.0556}\right)}\right) \approx 0.002596$$

$$s_4 = 0.02\left(\frac{0.25(0.0453)}{1+0.25\left(\frac{0.9686}{0.0453}\right)}\right) \approx 0.00003569$$ □

11.4.2 สัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย

สัญญาฟลอร์ (floor agreement) เป็นสัญญาทางการเงินที่ถูกออกแบบมาเพื่อให้ความคุ้มครองต่อการลดลงของอัตราดอกเบี้ย สัญญาฟลอร์จะกำหนดระดับขั้นต่ำที่อัตราดอกเบี้ยจะลดลง นั่นหมายความว่า ถ้าอัตราดอกเบี้ยลดลงต่ำกว่าจุดที่กำหนด (อัตราดอกเบี้ยฟลอร์) ผู้ขายฟลอร์จะต้องชดใช้ส่วนต่างให้กับผู้ซื้อ ในทางกลับกันผู้ซื้อฟลอร์จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับผู้ขายเป็นการแลกเปลี่ยนสำหรับความคุ้มครองที่ได้รับจากสัญญาฟลอร์ เพื่อความเข้าใจพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ สมมติว่ากองทุนหนึ่งมีพอร์ตการลงทุนที่ประกอบด้วยหน่วยลงทุนเงินตราที่ผลตอบแทนขึ้นอยู่กับอัตราดอกเบี้ยในตลาดและกองทุนนี้ต้องการที่ป้องกันความเสี่ยงจากสภาวะที่อัตราดอกเบี้ยจะลดลงอย่างมากซึ่งจะทำให้ผลตอบแทนของกองทุนลดลงอย่างมีนัยสำคัญ ในกรณีนี้กองทุนสามารถซื้อสัญญาฟลอร์จากธนาคาร โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยฟลอร์ที่ 2% และระยะเวลา 5 ปี กองทุนนี้

จะต้องชำระค่าพรีเมียมให้กับธนาคารในแต่ละปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลงมาอยู่ที่ 1% ธนาคารจะต้องจ่ายค่าชดเชย (2% - 1% = 1%) ให้กับกองทุนนี้ ซึ่งจะทำให้กองทุน ได้รับความคุ้มครองจากการลดลงของอัตราดอกเบี้ย ทำให้กองทุนสามารถควบคุมค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับดอกเบี้ยในระยะเวลาที่กำหนดไว้ได้



รูปที่ 11.9 *การซื้อขายสัญญาฟลอร์อัตราดอกเบี้ย*

11.4.2.1 การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์ตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด

การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์นั้นทำได้ในลักษณะเดียวกับสัญญาแคป โดยราคาของสัญญาฟลอร์ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย ได้แก่

1) อัตราดอกเบี้ยในอนาคต: ถ้ามีความคาดหวังว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตจะลดต่ำลงมาก ราคาของสัญญาฟลอร์จะสูงด้วย

2) ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย: อัตราดอกเบี้ยที่ผันผวนมากจะทำให้สัญญาฟลอร์มีราคาสูง

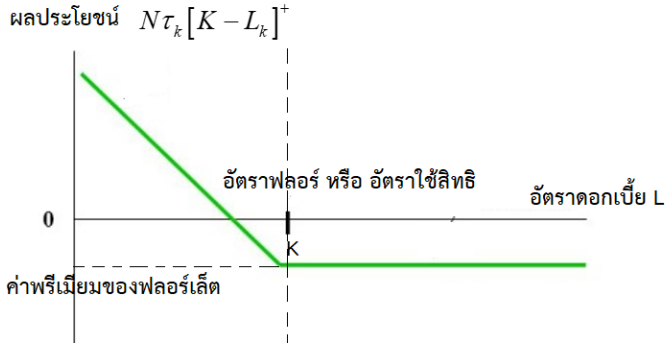
3) ระยะเวลาของสัญญา: สัญญาฟลอร์ที่มีระยะเวลานานมากขึ้นจะมีราคาสูง

4) อัตราฟลอร์ (floor rate): สัญญาฟลอร์ที่มีอัตราฟลอร์สูงกว่าจะมีราคาแพงกว่าสัญญาฟลอร์ที่มีอัตราฟลอร์ต่ำกว่า

กำหนดให้ $T_0 = 0, T_1, T_2, ..., T_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = T_1, T_2, ...T_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k T = T_k - T_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L(T_{k-1}, T_k)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในช่วง $[T_{k-1}, T_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, ผลประโยชน์ของฟลอร์เล็ตที่ k, $k = 1, 2, ..., n$ สามารถคำนวณ ได้ดังนี้

$$\text{ผลประโยน์ของฟลอร์เล็ตที่ } k = N\tau_k \left[K - L_k\right]^+ = N\tau_k \max\left\{K - L_k, 0\right\} \qquad (11.81)$$

โดยที่ N เป็นเงินต้นอ้างอิง (principle notation) และ K แทนอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราฟลอร์



รูปที่ 11.10 *ผลประโยชน์ของพุทออปชันแบบยุโรปหรือฟลอร์เล็ต*

กำหนดให้ $P_t^T = E^{Q^*}[e^{-\int_t^T r_s ds}]$ และ $F_t^{T+\Delta T} = F(t;T,T+\Delta T) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P_t^T}{P_t^{T+\Delta T}} - 1\right)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าสำหรับ $[T,T+\Delta T]$ ณ วันที่ $t \le T$, ผลประโยน์ของฟลอร์เล็ต fl_k ที่ภายใต้อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ คำนวณได้ ดังนี้

ผลประโยน์ของฟลอร์เล็ต $fl_k = N\tau_k\left[K-F_k\right]^+ = N\tau_k \max\left\{K-F_k,0\right\}$ (11.82)

และมูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยน์ของฟลอร์เล็ต fl_k คำนวณได้จาก

$$Floorlet_k = P_0^{T_k} E\left[fl_k\right] = P_0^{T_k} E\left[N\tau_k\left[K-F_k\right]^+\right] = N\tau_k P_0^{T_k} E\left[\left[K-F_k\right]^+\right] \quad (11.83)$$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์คือเงินที่ผู้ซื้อยินยอมจ่ายเพื่อแลกกับผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในอนาคต ดังนั้น ภายใต้ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง E^* ค่าพรีเมียม (ราคาของฟลอร์ที่เวลา $t=0$) คำนวณได้จาก

$$Floor = \sum_{k=1}^{n} floorlet_k^* = \sum_{k=1}^{n} P_0^{T_k} E^*\left[fl_k\right] = N\sum_{k=1}^{n} \tau_k E^*\left[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}\left[K-F_k\right]^+\right] \quad (11.84)$$

ตัวอย่างที่ 11.13 จากข้อมูลตัวอย่างที่ 11.9 จงคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย สมมติว่าต้องการคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ (floor) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิเป็น LIBOR โดยสัญญามีอายุประมาณ 1 ปีและมีอัตราฟลอร์ (floor rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของฟลอร์ (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และมีข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิอ้างอิง L_k , อัตราฟลอร์ K ที่ 5%, ความผันผวน σ = 0.02

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 เราได้คำนวณค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวดแล้วซึ่งเป็น

ตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.9888	0.9509	0.0453

ต่อไปจะคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์แต่ละงวด f_k จากสูตร $f_k = N\tau_k \max(K-F_k,0)$

ดังนั้น สำหรับแต่ละงวดจะได้

$$f_1 = 1,000,000\times 0.25\times \max(0.05-0.0505,0)=0$$

$$f_2 = 1,000,000\times 0.25\times \max(0.05-0.0515,0)=0$$

$$f_3 = 1,000,000\times 0.25\times \max(0.05-0.0556,0)=0$$

$$f_4 = 1,000,000\times 0.25\times \max(0.05-0.0453,0)=1,175$$

ต่อไปคำนวณมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ของฟลอร์แต่ละงวด $Floorlet_k$

จากสูตร $Floorlet_k = P_0^{t_k} f_k$ จะได้

$Floorlet_1 = P_0^{t_1} \times f_1 = 0.9876 \times 0 = 0$

$Floorlet_2 = P_0^{t_2} \times f_2 = 0.9751 \times 0 = 0$

$Floorlet_3 = P_0^{t_3} \times f_3 = 0.9617 \times 0 = 0$

$Floorlet_4 = P_0^{t_4} \times f_4 = 0.9509 \times 1{,}175 = 1{,}116.81$

ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์ $Floor$ สามารถคำนวณได้ จาก $Floor = \sum_{k=1}^{n} Floorlet_k$

ดังนั้น จะได้ $Floor = 0 + 0 + 0 + 1{,}116.81 = 1{,}116.81$ บาท

ดังนั้น ราคาของสัญญาฟลอร์ที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท และมีอัตราฟลอร์ที่ 5% คือ 1,116.81 บาท □

11.4.2.2 การกำหนดราคาสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์

การกำหนดราคาของสัญญาฟลอร์ดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ เป็นการใช้ทฤษฎีการกำหนดราคาออปชันแบบยุโรปด้วยตัวแบบแบล็กโชลส์ในการกำหนดราคาสัญญาฟลอร์ดอกเบี้ยซึ่งสัญญาฟลอร์ดอกเบี้ยนี้จะมีลักษณะเหมือนกับยูโรเปียนพุทออปชัน (European put option) โดยพิจารณาอัตราดอกเบี้ยแทนราคาหุ้นหรือราคาสินทรัพย์ โดยราคาของสัญญาฟลอร์ดอกเบี้ยจะเท่ากับผลรวมของราคาฟลอร์เล็ตที่มีราคาใช้สิทธิเท่ากันแต่อายุของสัญญาต่างกัน โดยราคาของฟลอร์เล็ตตามตัวแบบแบล็กโชลส์ คำนวณได้ตามสูตร ดังนี้

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[KN(-d_2^k) - F_k N\left(-d_1^k\right)\right] \tag{11.84}$$

โดยที่ $Floorlet_k$ เป็นราคาฟลอร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k, $P_t^{T_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t,T_k]$, $F_k = F\left(T_{k-1};T_{k-1},T_k\right) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ เป็น อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) หรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่ฟลอร์เล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k, K เป็นอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิหรืออัตราฟลอร์, N เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_1^k และ d_2^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_1^k = \frac{\left[\ln\left(F_k / K\right) + 0.5\sigma^2 T_k\right]}{\sigma\sqrt{T_k}} \text{ และ } d_2^k = d_1^k - \sigma\sqrt{T_k} \qquad (11.85)$$

ดังนั้น ราคาฟลอร์สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$Floor = \sum_{k=1}^{n} Floorlet_k = \sum_{k=1}^{n} N\tau_k P_0^{T_k}\left[KN(-d_2) - F_k N\left(-d_1\right)\right] \qquad (11.86)$$

ตัวอย่างที่ 11.14 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 จงคำนวณราคาของสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ มีดังนี้ จำนวน n = 4, เงินต้นอ้างอิงของ floor (N) = 1,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$), ราคาใช้สิทธิ (K) = 0.05 (5%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.02 (2%)

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 11.9 เราได้คำนวณค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k สำหรับแต่ละงวดแล้วซึ่งเป็นดังตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	$r(t) = r_k$	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.050	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.051	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.055	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.049	0.9888	0.9509	0.0453

1) คำนวณผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Floorlet_k$

จากสูตร $$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[KN(-d_2^k) - F_k N\left(-d_1^k\right)\right]$$

โดยที่ F_k เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $d_1^k = \frac{\left[\ln\left(F_k / K\right) + 0.5\sigma^2 T_k\right]}{\sigma\sqrt{T_k}}$ และ $d_2^k = d_1^k - \sigma\sqrt{T_k}$

คำนวณ $d_1^1 = \frac{\left[\ln\left(F_1 / K\right) + 0.5\sigma^2 t_1\right]}{\sigma\sqrt{t_1}} = \frac{\left[\ln\left(0.0505 / 0.05\right) + 0.5(0.02^2)(0.25)\right]}{0.02\sqrt{0.25}} = 1.00003$

$$d_2^1 = d_1^1 - \sigma\sqrt{t_1} = 1.00003 - 0.02\sqrt{0.25} = 0.99003$$

$$N(-d_1^1) = N(-1.00003) = 0.15865$$

$$N(-d_2^1) = N(-0.99003) = 0.16108$$

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[KN(-d_2^k) - F_k N\left(-d_1^k\right)\right]$$

$$= 1,000,000(0.25)(0.9876)[0.05(0.16108) - 0.0505(0.15865)] = 10.41$$

สำหรับ $Floorlet_k, k = 2,3,4$ คำนวณได้ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

งวดที่ k	t_k	τ_k	$P_0^{t_k}$	F_k	d_1^k	d_2^k	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$	$Floorlet_k$
1	0.25	0.25	0.9876	0.0505	1.00003	0.99003	0.15865	0.16108	10.43
2	0.50	0.25	0.9751	0.0515	2.09719	2.08305	0.01799	0.01862	1.16
3	0.75	0.25	0.9617	0.0556	6.13782	6.12050	0.00000	0.00000	0.00
4	1.00	0.25	0.9509	0.0453	-4.92580	-4.94580	1.00000	1.00000	1117.31

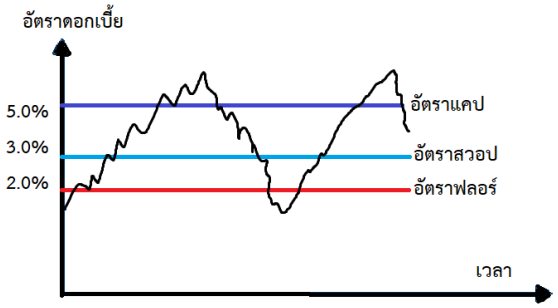
คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์ $Floor$ จากสูตร $Floor = \sum_{k=1}^{n} Floorlet_k$

ดังนั้นจะได้ $Floor = 10.43 + 1.16 + 0 + 1117.31 = 1,128.90$

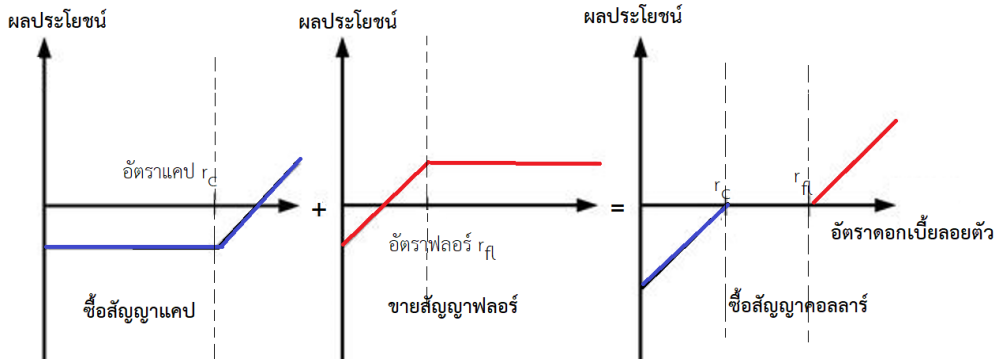
ดังนั้นราคาของสัญญาฟลอร์ที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท และมีอัตราฟลอร์ที่ 5% คือ 1,128.90 บาท □

11.4.4 สัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย

สัญญาคอลลาร์ (collar agreement) เป็นสัญญาทางการเงินที่รวมการซื้อสัญญาแคปและการขายสัญญาฟลอร์พร้อมกัน โดยการขายฟลอร์และการซื้อแคปจะสามารถสร้างคอลลาร์ที่จำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยหรือราคาให้อยู่ในช่วงที่เราต้องการ เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น พิจารณาสมมติว่าบริษัท a มีหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ยแบบลอยตัว บริษัท a ต้องการจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ระหว่าง 2% ถึง 5% ในช่วง 5 ปีข้างหน้า ในกรณีนี้ บริษัท a สามารถสร้างคอลลาร์อัตราดอกเบี้ยโดยการซื้อสัญญาแคปที่ 5% และขายสัญญาฟลอร์ที่ 2% ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นมาอยู่ที่ 7% ผู้ขายของสัญญาแคปจะจ่ายค่าชดเชยแก่บริษัท a ส่วนต่างระหว่าง 7% และ 5% เท่ากับ 2% อย่างไรก็ตาม ถ้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลงมาอยู่ที่ 1% บริษัท a จะต้องชำระค่าชดเชยให้แก่ผู้ซื้อสัญญาฟลอร์ซึ่งส่วนต่างระหว่าง 1% และ 2% เท่ากับ 1% เป็นต้น จะเห็นว่าสัญญาคอลลาร์ช่วยให้บริษัท a สามารถจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ในช่วงที่ต้องการ คือช่วงระหว่าง 2% และ 5% ไม่ว่าอัตราดอกเบี้ยในตลาดจะเปลี่ยนแปลงผันผวนมากเท่าใดก็ตาม



รูปที่ 11.12 *การจำกัดการแกว่งตัวของอัตราดอกเบี้ยให้อยู่ช่วงที่ต้องการโดยใช้สัญญาคอลลาร์*



รูปที่ 11.11 *สัญญาคอลลาร์เป็นสัญญาที่รวมการซื้อสัญญาแคปและการขายสัญญาฟลอร์พร้อมกัน*

11.4.5 การกำหนดราคาของสัญญาคอลลาร์

จากนิยามของสัญญาคคอลลาร์จะพิจารณาคอลลาร์ประกอบด้วยสัญญาคอลลาร์เล็ต (collarlet) หลาย ๆ คอลลาร์เล็ต กำหนดให้ $Collarlet_k$ เป็นราคาคอลลาร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k โดยที่

ราคาคอลลาร์เล็ต ($Collarlet_k$) = ราคาแคปเล็ต ($Caplet_k$) – ราคาฟลอร์เล็ต ($Floorlet_k$) (11.87)

และ ราคาคอลลาร์ ($Collar$) = $\sum_{k=1}^{n} Collarlet_k$ (11.88)

โดยที่สามารถกำหนดราคาของคอลลาร์เล็ต ได้ดังนี้

-การกำหนดราคาสัญญาคอลลาร์เล็ตด้วยตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด

$$Collarlet_k = P_0^{T_k}\left(E\left[N\tau_k\left[F_k - K_{cap}\right]^+\right] - E\left[N\tau_k\left[K_{floor} - F_k\right]^+\right]\right) \quad (11.89)$$

-การกำหนดราคาสัญญาคอลลาร์เล็ตโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์

$$Collarlet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left(\left[F_k N(d_{1K_{cap}}^k) - K_{cap}N\left(d_{2K_{cap}}^c\right)\right] - \left[K_{floor}N(-d_{2K_{floor}}^k) - F_k N\left(-d_{1K_{floor}}^k\right)\right]\right) \quad (11.90)$$

โดยที่ $Floorlet_k$ เป็นราคาฟลอร์เล็ตซึ่งมีอายุครบกำหนดที่ T_k, $P_t^{T_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_0^{T_k} r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลดสำหรับช่วง $[t,T_k]$, $F_k = F(T_{k-1};T_{k-1},T_k) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ เป็นอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าหรืออัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ในอนาคตที่จะเกิดขึ้นในวันที่ฟลอร์เล็ตที่ k อายุครบกำหนดวันที่ T_k, K_{cap} และ K_{floor} เป็นอัตราใช้สิทธิของแคปและฟลอร์ ตามลำดับ, N เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน, σ เป็นค่าความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย, d_{1x}^k และ d_{2x}^k เป็นค่าพารามิเตอร์ที่คำนวณจากสูตรดังนี้

$$d_{1x}^k = \frac{\left[\ln(F_k / x) + 0.5\sigma^2 T_k\right]}{\sigma\sqrt{T_k}} \text{ และ } d_{2x}^k = d_{1x}^k - \sigma\sqrt{T_k} \quad (11.91)$$

ตัวอย่างที่ 11.15 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 11.10 จงคำนวณราคาของสัญญาคอลลาร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย มีดังนี้ จำนวน n = 4, เงินต้นอ้างอิงของคอลลาร์ (N) = 1,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t) = r_k$), ราคาใช้สิทธิ ($K = K_{cap} = K_{floor}$) = 0.05 (5%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.02 (2%)

วิธีทำ เนื่องจาก ราคาคอลลาร์เล็ต ($Collarlet_k$) = $Caplet_k$ - $Floorlet_k$

และ ราคาคอลลาร์ ($Collar$) = $\sum_{k=1}^{n} Collarlet_k$

และจากโจทย์กำหนด ราคาใช้สิทธิ ($K = K_{cap} = K_{floor}$) = 0.05 โดยการใช้ผลลัพธ์จากตัวอย่างที่ 11.9 ตัวอย่างที่ 11.10 และตัวอย่างที่ 11.14 ค่าของ $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k, $Floorlet_k$ และ $Caplet_k$ สำหรับแต่ละงวด แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงค่า $P_{t_{k-1}}^{t_k}$, $P_0^{t_k}$ และ F_k,

งวดที่ k	$r(t)=r_k$	$P_{t_{k-1}}^{t_k}$	$P_0^{t_k}$	F_k
1	0.050	0.9876	0.9876	0.0505
2	0.051	0.9873	0.9751	0.0515
3	0.055	0.9863	0.9617	0.0556
4	0.049	0.9888	0.9509	0.0453

ตารางแสดงค่า $d_1^k, d_2^k, N(d_1^k), N(d_2^k), N(-d_1^k), N(-d_2^k)$ สำหรับกรณีที่ราคาใช้สิทธิของ ($K=K_{cap}=K_{floor}$) = 0.05

งวดที่ k	d_1^k	d_2^k	$N(d_1^k)$	$N(d_2^k)$	$N(-d_1^k)$	$N(-d_2^k)$
1	1.00003	0.99003	0.841352	0.838920	0.158648	0.161080
2	2.09719	2.08305	0.982012	0.981377	0.017988	0.018623
3	6.13782	6.12050	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000
4	-4.92580	-4.94580	0.000000	0.000000	1.000000	1.000000

คำนวณค่า $Caplet_k$, $Floorlet_k$ และ $Collarlet_k$ ทีมีราคาใช้สิทธิของ ($K=K_{cap}=K_{floor}$) = 0.05 ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$$Caplet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[F_k N(d_{1K_{cap}}^k) - K_{cap}N\left(d_{2K_{cap}}^c\right)\right],$$

$$Floorlet_k = N\tau_k P_0^{T_k}\left[K_{floor}N(-d_{2K_{floor}}^k) - F_k N\left(-d_{1K_{floor}}^k\right)\right],$$

และ $Collarlet_k = Caplet_k - Floorlet_k$ ค่าที่ได้แสดงในตารางต่อไปนี้

$Caplet_k$	$Floorlet_k$	$Collarlet_k$
133.88	10.43	123.45
366.83	1.16	365.67
1346.38	0.00	1346.38
0.00	1117.31	-1117.31

คำนวณค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ $Collar$ จากสูตร $Collar=\sum_{k=1}^{n} Collaret_k$

ดังนั้นจะได้ $Collar = 123.45+365.67+1346.38-1117.31 = 718.19$ บาท

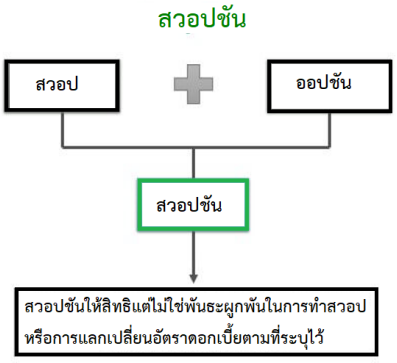
ดังนั้นราคาของสัญญาคอลลาร์ที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท โดยมีค่าใช้สิทธิของ cap ที่ 5% และ floor ที่ 5% คือ 718.19 บาท □

11.5 สัญญาสวอปชันของอัตราดอกเบี้ย

สวอปชัน (swaption) หรือ สวอปออบชัน (swap option) เป็นสัญญาที่ให้สิทธิที่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสวอปชันในการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ยหรือสินทรัพย์อื่นที่เกี่ยวข้องในอนาคตตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ล่วงหน้า นั่นหมายความว่าผู้ถือสวอปชันสามารถตัดสินใจว่าจะทำรายการสวอปหรือไม่ตามความพอใจของตนเอง สวอปชันสามารถใช้เพื่อจัดการความเสี่ยงทางดอกเบี้ยหรือความเสี่ยงในตลาดสินทรัพย์อื่น ๆ แต่สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงสัญญาสวอปชันของอัตราดอกเบี้ยเท่านั้น

เพื่อให้เข้าใจได้ชัดเจนขึ้น พิจาณากรณีต่อไปนี้ สมมติว่าบริษัทแห่งหนึ่งต้องการกู้เงินเพื่อขยายธุรกิจใน 3 ปีข้างหน้า แต่บริษัทกังวลว่าอัตราดอกเบี้ยอาจเพิ่มขึ้นในระยะเวลานั้นเพื่อจัดการกับความเสี่ยงนี้ บริษัทสามารถซื้อสวอปชันจากธนาคารหรือสถาบันการเงินที่ขายสวอปชัน สวอปชันนี้จะให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันต่อบริษัทนี้ที่จะสวอปอัตราดอกเบี้ยที่คงที่กำหนดไว้ล่วงหน้ากับอัตราดอกเบี้ยลอยตัวในอนาคต หากใน 3 ปีข้างหน้าอัตราดอกเบี้ยในตลาดเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ บริษัทนี้สามารถใช้สิทธิในสวอปชันเพื่อทำการสวอปอัตราดอกเบี้ยคงที่ที่กำหนดไว้ล่วงหน้ากับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ในทางตรงกันข้าม หากอัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลง บริษัทสามารถเลือกที่จะไม่ใช้สิทธิตามที่ระบุไว้ในสัญญาสวอปชันและกู้เงินด้วยอัตราดอกเบี้ยในตลาด

จะเห็นว่า สวอปชันเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการจัดการความเสี่ยงทางดอกเบี้ยหรือความเสี่ยงในตลาดสินทรัพย์ แต่อย่างไรก็ตามการใช้สวอปชันมากไปเช่นเดียวกับเครื่องมือการจัดการความเสี่ยงอื่น ๆ อาจทำให้เกิดความเสี่ยงที่ไม่คาดคิดได้



รูปที่ 11.12 *สวอปชันเป็นสัญญาที่ให้สิทธิที่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาในการแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย*

11.5.1 ประเภทของสวอปชัน

สวอปชันแบ่งประเภทตามการให้สิทธิเป็น 2 ประเภท ได้แก่ สวอปชันผู้จ่าย (payer swaption) และ สวอปชันผู้รับ (receiver swaption)

1) สวอปชันผู้จ่าย เป็นสัญญาสวอปชันที่ให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สถานะของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่และได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าในอนาคตอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจะสูงกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่หรือไม่ ดังนั้น สวอปชันผู้จ่ายเป็นเครื่องมือในการประกันความเสี่ยงจากการเพิ่มขึ้นของอัตราดอกเบี้ย

2) สวอปชันผู้รับเป็นสัญญาประเภทที่ให้สิทธิแต่ไม่ใช่พันธะผูกพันแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะรับอัตราดอกเบี้ยคงที่และจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าในอนาคตอัตราดอกเบี้ยลอยตัวจะต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยคงที่หรือไม่ ดังนั้น สวอปชันผู้รับเป็นเครื่องมือในการประกันความเสี่ยงจากการลดลงของอัตราดอกเบี้ย

11.5.2 การกำหนดราคาของสัญญาสวอปชัน

พิจารณาสัญญาสวอป กำหนดให้ $t_0, t_1, t_2, ..., t_n = T$ แทนจุดกำหนดช่วงเวลา (งวด) กระแสเงินสดจะเกิดขึ้นที่ปลายงวด $t = t_1, t_2, ..., t_n$, $\tau_k \equiv \Delta_k t = t_k - t_{k-1}$ และกำหนดให้ $L_k = L(t_{k-1}, t_k)$ แทนอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (floating rate) ในช่วง $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ และให้ F แทนอัตราดอกเบี้ยคงที่ (fixed rate) โดยที่ N แทนเงินต้นอ้างอิง (principle notation) ของสัญญาสวอป และ $P_t^{t_k} = E^{Q^*}[e^{-\int_0^{t_k} r_s ds}]$ เป็นตัวประกอบส่วนลด ซึ่ง $L_k = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{t_{k-1}}^{t_k}} - 1\right)$ จะได้ว่า

การจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ที่เวลา t_k จะเท่ากับ

$$(\Delta_k T) FN = \tau_k FN, \ k = 1, 2, ..., n \tag{11.92}$$

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ $t = t_0$ เท่ากับ

$$PV^{fixed} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k P_{t_0}^{t_k} FN = \sum_{k=1}^{n} \tau_k E^{Q^*}[e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} FN] \tag{11.93}$$

การจ่ายของฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัวที่เวลา t_k จะเท่ากับ

$$\left(\Delta_k T\right) L_k N = \tau_k L_k N, \ k = 1,2,...,n \tag{11.94}$$

มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t = t_0$ เท่ากับ

$$PV^{float} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k P_{t_0}^{t_k} L_k N = \sum_{k=1}^{n} \left(\tau_k E^{Q^*}[e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} L_k N] \right) \tag{11.95}$$

ดังนั้น ราคาของสวอปที่เวลา $t = t_0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่) เท่ากับ

$$swap = PV^{fixed} - PV^{float} = N\sum_{k=1}^{n} \tau_k P_{t_0}^{t_k} \left(L_k - F\right) = N\sum_{k=1}^{n} \left(\tau_k E^{Q^*} \left[\left(L_k - F\right) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right) \tag{11.96}$$

ยิ่งไปกว่านั้นหากนิยามอัตราสวอป (swap rate) เป็นอัตราดอกเบี้ยคงที่ F^{swap} ที่เวลา $t = 0$ ซึ่งทำให้ $swap = \sum_{k=1}^{n} \tau_k P_0^{t_k} \left(L_k - F^{swap}\right) = 0$ โดยใช้ $L_k = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{t_{k-1}}^{t_k}} - 1\right)$ และแก้สมการจะได้ อัตราสวอป เท่ากับ

$$F^{swap} = \frac{1 - P_0^{t_n}}{\sum_{k=1}^{n} \tau_k P_0^{t_k}} \tag{11.97}$$

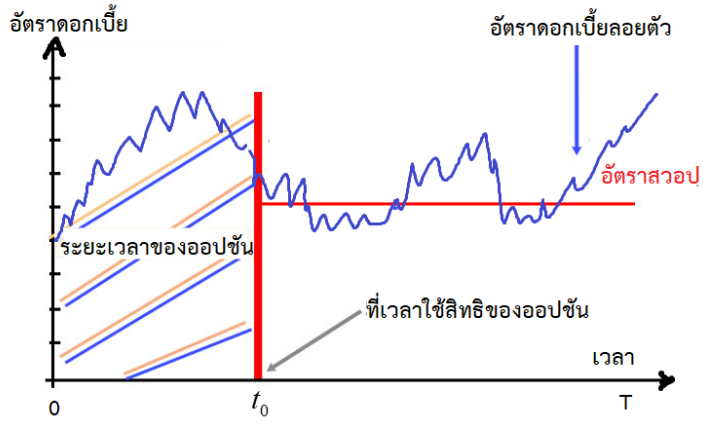
สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย (payer swaption) ให้สิทธิแก่ผู้ถือสัญญาสามารถเข้าสู่สถานะของสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยที่ผู้ถือจะจ่ายอัตราดอกเบี้ยคงที่และได้รับอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ดังนั้นมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = t_0$ เท่ากับ

$$Pof^{payer\ swaption} = \max\{swap, 0\} = N \max\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\tau_k E^{Q^*} \left[\left(L_k - F\right) e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds} \right] \right), 0 \right\} \tag{11.98}$$

ดังนั้น ราคาของสวอปชันผู้จ่ายซึ่งเป็นมูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่ายที่เวลา $t = 0$ คำนวณได้จาก

$$payer\ swaption = NP_0^{t_0} \max\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_k E^{Q^*}\left[\left(L_k - F\right)e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds}\right]\right),0\right\}$$

$$= NE^{Q^*}\left[e^{-\int_{0}^{t_0} r_s ds} \max\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\tau_k E^{Q^*}\left[\left(L_k - F\right)e^{-\int_{t_0}^{t_k} r_s ds}\right]\right),0\right\}\right] \qquad (11.99)$$



รูปที่ 11.13 *ทำสัญญาสวอปชันที่เวลาปัจจุบัน ($t=0$) ระยะเวลาใช้สิทธิในลักษณะออปชันของสัญญาสวอปชันที่เวลา $t=t_0$*

ตัวอย่างที่ 11.16 สำหรับการคำนวณราคาสวอปชันผู้จ่ายซึ่งสัญญาระบุข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ เงินต้นอ้างอิง (n) = 1,000,000 บาท, จำนวนงวดการจ่ายดอกเบี้ย $n=4$, ระยะเวลางวด $\tau_k = 0.25$, อัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k และ อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F = 5\%$ และ

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.055	0.051
3	0.75	0.25	0.049	0.055
4	1.00	0.25	0.057	0.049

จงคำนวณ

1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ ที่เวลา $t=0$

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t=0$

3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t=0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย

6) คำนวณราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t=0$

วิธีทำ 1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่

จากสูตร $PV^{\text{fixed}}=\sum_{k=1}^{n}\tau_k P_0^{t_k} FN$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด จะได้

$$PV^{\text{fixed}} = \sum_{k=1}^{4}\tau_k P_0^{t_k} FN = FN\sum_{k=1}^{4}\tau_k P_0^{t_k}$$

$$= (0.05)(1,000,000)(0.25\times 0.9876+0.25\times 0.9751+0.25\times 0.9617+0.25\times 0.9505)$$

$$= 48,436.25$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่เท่ากับ 48,436.25 บาท

2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยเบี้ยลอยตัว

จากสูตร $PV^{\text{float}}=\sum_{k=1}^{n}\tau_k P_0^{t_k} L_k N = N\sum_{k=1}^{n}\tau_k P_0^{t_k} L_k$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนด จะได้

$$PV^{\text{float}} = N\sum_{k=1}^{4}\tau_k P_0^{t_k} L_k$$

$$= 1,000,000[(0.25)(0.9876)(0.061)+(0.25)(0.9751)(0.055)$$

$$+(0.25)(0.9617)(0.049)+(0.25)(0.9505)(0.057)]$$

$$= 53,790.39$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยเบี้ยลอยตัวเท่ากับ 53,790.39 บาท

3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t=0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

จากสูตร $\text{swap}=PV^{\text{fixed}}-PV^{\text{float}}$

จาก 2) และ 3) จะได้ $\text{swap} = 48,436.25-53,790.39$

$$= -5,354.14$$

ดังนั้น ราคาสวอปที่เวลา $t=0$ เท่ากับ -5,354.14 บาท

4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

จากสูตร $F^{\text{swap}}=\dfrac{1-P_0^{t_n}}{\sum_{k=1}^{n}\tau_k P_0^{t_k}}$ โดยการแทนค่า $\tau_k, P_0^{t_k}$ จะได้

$$F^{swap} = \frac{1 - 0.9505}{0.25\times0.9876 + 0.25\times0.9751 + 0.25\times0.9617 + 0.25\times0.9505} = 0.0511$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate) เท่ากับประมาณ 0.0511 หรือ 5.11%

5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย

จากสูตร $\text{Pof payer swaption} = N\max\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k P_0^{t_k}(L_k - F), 0\right)$ โดยการแทนค่าข้อมูลที่กำหนดให้ จะได้

$$\sum_{k=1}^{4}\tau_k P_0^{t_k}(L_k - F) = 0.25\times0.9876\times(0.061-0.051) + 0.25\times0.9751\times(0.055-0.051)$$
$$+0.25\times0.9617\times(0.049-0.051) + 0.25\times0.9505\times(0.057-0.051)$$
$$= 0.004390125$$

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

$\text{Pof payer swaption} = 1,000,000\times\max(0.004390125, 0) = 4,390.13$ บาท

6) คำนวณราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

เนื่องจาก ราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$ เท่ากับ มูลค่าปัจจุบันของผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

ดังนั้น ราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$ เท่ากับ 4,390.13 บาท □

บทสรุปท้ายบทที่ 11

ในบทที่ 11 นี้อธิบายถึงเครื่องมือทางการเงินที่สำคัญสำหรับการจัดการความเสี่ยงทางการเงิน ได้แก่ สัญญาแคป (Cap) สัญญาฟลอร์ (Floor) สัญญาคอลลาร์ (Collar) และสัญญาสวอปชัน (Swaption) โดยเนื้อหาในบทนี้ครอบคลุมตั้งแต่ทฤษฎีพื้นฐาน ไปจนถึงการประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง เนื้อหาสำคัญประกอบด้วย

1) ทฤษฎีพื้นฐานและกรอบแนวคิด

โดยเริ่มต้นด้วยการนำเสนอ **ทฤษฎีของฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน (Heath-Jarrow-Morton Theory)** และ **เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด (Forward Measure)** ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการทำความเข้าใจการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาอนุพันธ์ โดยทั้งสองทฤษฎีนี้ช่วยอธิบายการ

สร้างแบบจำลองทางการเงินในตลาดทุนที่มีความซับซ้อนและความผันผวนสูง เช่น ตลาดอัตราดอกเบี้ย

2) ลักษณะและการทำงานของสัญญาแต่ละประเภท

- **สัญญาแคป (Cap Agreement)**

  เป็นสัญญาทางการเงินที่ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยที่เพิ่มสูงขึ้นในอนาคต โดยกำหนดเพดานอัตราดอกเบี้ย (Cap Rate) ที่ไม่สามารถเกินขอบเขตที่กำหนดไว้ ทำให้ผู้ถือสัญญาสามารถควบคุมต้นทุนการเงินในช่วงที่อัตราดอกเบี้ยมีความผันผวน

- **สัญญาฟลอร์ (Floor Agreement)**

  เป็นสัญญาที่ช่วยป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยที่ลดต่ำลงเกินระดับที่กำหนดไว้ ทำให้ผู้ถือสัญญามั่นใจได้ว่าจะได้รับผลตอบแทนขั้นต่ำ (Floor Rate) ในช่วงที่อัตราดอกเบี้ยลดลง

- **สัญญาคอลลาร์ (Collar Agreement)**

  เป็นการรวมคุณสมบัติของสัญญาแคปและฟลอร์ ทำให้สามารถกำหนดขอบเขตของอัตราดอกเบี้ยสูงสุดและต่ำสุดในอนาคต โดยผู้ถือสัญญาจะได้รับประโยชน์จากการลดความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงที่กำหนด

- **สัญญาสวอปชัน (Swaption)**

  เป็นสัญญาออปชันที่ให้สิทธิแก่ผู้ถือในการเข้าทำสัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ยในอนาคต โดยแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่

  - **Payer Swaption:** ให้สิทธิเข้าทำสัญญาสวอปแบบจ่ายคงที่-รับลอยตัว
  - **Receiver Swaption:** ให้สิทธิเข้าทำสัญญาสวอปแบบรับคงที่-จ่ายลอยตัว

  สวอปชันช่วยให้ผู้ถือสามารถล็อกอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า และมีความยืดหยุ่นในการตัดสินใจว่าจะใช้สิทธิหรือไม่ ทั้งนี้เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

3) การกำหนดราคาและการประเมินมูลค่า

ในบทนี้ยังกล่าวถึงวิธีการกำหนดราคาและการประเมินมูลค่าของสัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน โดยใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์และสถิติ เช่น การประเมินราคาด้วย Black-Scholes Model และ Monte Carlo Simulation พร้อมทั้งอธิบายปัจจัยที่มีผลต่อมูลค่าของสัญญา เช่น ระยะเวลาสัญญา อัตราดอกเบี้ยในตลาด และความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

4) การประยุกต์ใช้ในสถานการณ์จริง

สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการบริหารความเสี่ยงทางการเงินในตลาดทุนโลก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสถานการณ์ที่อัตราดอกเบี้ยมีความผันผวนสูง เช่น การควบคุมต้นทุนการกู้ยืมระยะยาว การวางแผนการเงินเพื่อรับประกันผลตอบแทนขั้นต่ำและการลดความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต

โดยสรุปบทที่ 11 ได้ให้ภาพรวมเกี่ยวกับความหมาย การทำงาน และการประยุกต์ใช้สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์ และสวอปชัน พร้อมทั้งเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียของแต่ละประเภทเพื่อช่วยให้ผู้อ่านสามารถเลือกใช้เครื่องมือที่เหมาะสมในการจัดการความเสี่ยงทางการเงินและการวางแผนการเงินระยะยาวได้อย่างมีประสิทธิภาพ

เอกสารอ้างอิง

[1] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson Education.

[2] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2016). *Derivatives: Principles and practice* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.

[3] Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *An introduction to derivatives and risk management* (10th ed.). Cengage Learning.

[4] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.

[5] Jamshidian, F. (1997). LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics, 1*(4), 293–330. https://doi.org/10.1007/s007800050022

[6] Rebonato, R. (2002). *Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond*. Princeton University Press.

[7] Piterbarg, V., & Andersen, L. B. G. (2010). *Interest rate modeling* (Vol. I-III). Atlantic Financial Press.

[8] Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed income securities: Tools for today's markets* (3rd ed.). Wiley.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 11

1) กำหนดข้อมูลดังต่อไปนี้ สมมติให้อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t = 4\%$ จำนวนปัจจัย $N = 1$ และสมมติว่าอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k มีค่าเท่ากับ 5%, 4%, 3.5%, และ 4.5% สำหรับงวดที่ 1 ถึง 4 ตามลำดับ จงคำนวณ

1.1) ตัวประกอบส่วนลด P_t^T

1.2) อัตราอาร์ฟอร์เวิร์ดทันที $f(t,T)$

1.3) คำนวณราคาสวอปชันผู้จ่าย (payer swaption) ที่เวลา $t = 0$ โดยใช้อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F = 6\%$ และระยะเวลางวด $\tau_k = 0.25$

1.4) จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว (pv of floating rate payments)

1.5) จงคำนวณราคาสวอปที่เวลา $t = 0$

2) พิจารณาพันธบัตรที่มีอายุ 3 ปี เราต้องการจำลองราคาพันธบัตรในช่วงเวลาต่างๆ โดยใช้ตัวแบบ HJM (heath-jarrow-morton) โดยสมมติว่าอัตราผลตอบแทนล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0,T) = 4\%$, ค่าความผันผวน $\sigma = 1.5\%$, วันครบกำหนด $T = 3$ ปี จงคำนวณหา

2.1) อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t,T)$ ที่เวลา $t = 1$

2.2) ราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t = 1$

3) พิจารณาตัวแบบ HJM-1 ปัจจัยเดียว ในกรณีที่ $\sigma'(t,T) = \sigma e^{-\kappa(T-t)}$ โดยมีค่าพารามิเตอร์ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าเริ่มต้น $f(0,t) = 4\%$, ความผันผวน $\sigma = 1.2\%$, อัตราการกลับสู่ค่าเฉลี่ย $\kappa = 0.15$, ระยะเวลา $T = 8$ ปี

3.1) จงคำนวณค่าความผันผวน $\sigma'(t,T)$ ณ เวลา $t = 4$ ปี

3.2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t ณ เวลา $t = 4$ ปี โดยสมมติว่า $X_t \approx 0.003$

3.3) จงคำนวณอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า $f(t,T)$ ที่เวลา $t = 4$

3.4) จงคำนวณราคาพันธบัตร P_t^T ที่เวลา $t = 4$

4) บริษัท abc มีหุ้นที่จ่ายปันผล D_k สำหรับ $k=1,2,3,4$ ที่เวลาต่าง ๆ T_k โดยมีอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น r_t คงที่เท่ากับ 0.05 (5%) และจ่ายปันผลตามตารางด้านล่าง

เวลา T_k (ปี)	ปันผล D_k (บาท)
1	200
2	150
3	170
4	180

จงคำนวณ

4.1) มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลแต่ละงวด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

4.2) มูลค่าปัจจุบันของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$

4.3) มูลค่าปัจจุบัน ของการจ่ายปันผลทั้งหมด ณ เวลาปัจจุบัน $t=0$ หากคาดว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจะเพิ่มขึ้นเป็น 0.06 (6%) ในปีที่ 3 และ 4

5) พิจารณาคอลออปชันสำหรับหุ้นของบริษัทหนึ่งที่มีราคาปัจจุบัน $S_0=55$ บาท อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r_t=0.04$ (4%) ราคาการใช้สิทธิ (strike price) $K=50$ บาท และเวลาครบกำหนด $T=2$ ปี สำหรับหุ้นดังกล่าว จงคำนวณ

5.1) มูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันนี้โดยใช้เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด

5.2) ราคาฟอร์เวิร์ดของคอลออปชัน f_T^C ในการประเมินมูลค่าของคอลออปชัน

5.3) สมมติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นเพิ่มขึ้นเป็น 0.05 (5%) หลังจากปีที่ 1 จงคำนวณมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันใหม่

5.4) เปรียบเทียบมูลค่าปัจจุบันของคอลออปชันในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยคงที่ 0.04 (4%) ตลอดเวลาและในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.05 (5%) หลังจากปีที่ 1

6) สำหรับการคำนวณราคาของคอลออปชันของหุ้นบริษัท x ณ เวลา $t=0$ พิจารณาคอลออปชันสำหรับหุ้นบริษัท x ที่มีราคาปัจจุบัน $S_0=150$ บาท อัตราดอกเบี้ย $r_t=0.03$ (3%) ราคาการใช้

สิทธิ $K=160$ บาท และเวลาครบกำหนด $T=2$ ปี ความผันผวน $\sigma_s=0.25$ และความสัมพันธ์ $\rho=0.4$ จงคำนวณ

6.1) ราคาฟอร์เวิร์ดของหุ้นบริษัท x, f_T

6.2) ค่าของ σ_T

6.3) ราคาคอลออปชันที่เวลา $t=0$

6.4) สมมติอัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.04 (4%) หลังจากปีที่ 1 จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดใหม่ของหุ้นบริษัท x f_T

6.5) เปรียบเทียบค่า σ_T ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยคงที่และในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้น

6.6) คำนวณราคาคอลออปชันใหม่ในกรณีที่อัตราดอกเบี้ยเพิ่มขึ้นเป็น 0.04 (4%) หลังจากปีที่ 1

7) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ wti โดยใช้พจน HJM (heath-jarrow-morton) ที่มีการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ด $f(t,T)$ สำหรับสินค้าโภคภัณฑ์โดยพิจารณาความผันผวนของราคาสินค้าโภคภัณฑ์ $\sigma(t,T)$ ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา โดยกำหนดให้ ความผันผวน $\sigma(t,T)$ ของน้ำมันดิบ wti มีค่าเท่ากับ $0.04\times e^{-0.3(T-t)}$ และเวลา $T=2$ ปี

7.1) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของน้ำมันดิบ wti โดยใช้สมการ HJM ดังนี้

$$df(t,T)=\sigma(t,T)\cdot dZ_t+\left(\sigma'(t,T)\cdot\int_t^T\sigma'(s,T)ds\right)dt$$

7.2) เขียนกราฟแสดงการเคลื่อนไหวของราคาฟอร์เวิร์ดน้ำมันดิบ wti

7.3) สมมติให้ $f(0,T)=65$ usd ต่อบาร์เรล คำนวณราคาฟอร์เวิร์ดที่เวลา $t=1$ ปี

7.4) วิเคราะห์ความเสี่ยงของการลงทุนในฟิวเจอร์สของน้ำมันดิบ wti โดยใช้ผลจากการคำนวณในข้อ 7.1)

8) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปองที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000 บาท ที่จะครบกำหนดในเวลา 1 ปีนับจากปัจจุบัน โดยใช้ตัวแบบ 1-factor vasicek model โดยพิจารณา

ข้อมูลดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $\sigma = 0.01$, ค่า κ ที่ใช้ในการคำนวณมีค่า 5 ค่า ได้แก่ 0.001, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5 และเวลา $T = 1$ ปี

8.1) จงคำนวณค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ

8.2) เขียนกราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าความผันผวนแฝง $s(T, T + \Delta T)$ สำหรับค่าต่าง ๆ ของ κ

8.3) จงคำนวณราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปองสำหรับแต่ละค่า κ

8.4) วิเคราะห์ผลกระทบของค่าความผันผวนแฝงต่อราคาฟอร์เวิร์ดของพันธบัตรที่ไม่มีคูปอง

9) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 5% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคป (n) เท่ากับ 1,000,000 บาท และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น ($r(t)$), จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง l_k, อัตราแคป k ที่ 5%

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.072	0.049
2	0.50	0.25	0.060	0.050
3	0.75	0.25	0.050	0.052
4	1.00	0.25	0.045	0.055

จงคำนวณ

9.1) $P_{t_{k-1}}^{t_k}$ และ $P_0^{t_k}$ สำหรับแต่ละงวด

9.2) อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $F_k = F\left(T_{k-1}; T_{k-1}, T_k\right) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{1}{P_{T_{k-1}}^{T_k}} - 1\right)$ สำหรับแต่ละงวด

9.3) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k

9.4) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด c_k ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

9.5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเล็ต $Caplet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง) ที่คำนวณจากอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า

9.6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

10) การกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็ค-โชลส์ (Black-Scholes model) สมมติว่าต้องการคำนวณราคาของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 1,000,000 บาท และ กำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง L_k, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 6%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma=0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.045
2	0.50	0.25	0.055	0.050
3	0.75	0.25	0.045	0.055
4	1.00	0.25	0.056	0.060

จงคำนวณ

10.1) ผลประโยชน์ของแคปเล็ตในแต่ละงวด $Caplet_k$

10.2) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป Cap

11) สำหรับการคำนวณราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (GTSM) โดยสมมติว่าพิจารณาสัญญาแคปสำหรับหุ้นอ้างอิงตามข้อมูลต่อไปนี้

- มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 2,000,000 บาท
- มีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6%
- ระยะเวลาถึงวันครบกำหนด (time to maturity, T) 1 ปี
- ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (volatility, σ) 0.2
- จำนวนงวด (number of periods, n) 4 งวด
- อัตราดอกเบี้ยในตลาด (risk-free interest rate, r) 4%
- ค่า κ (mean reversion rate) 0.02

- ระยะเวลาระหว่างงวด (time interval, τ_k) 0.25 ปี

- มีอัตราใช้สิทธิ $\overline{R} = 6\%$ ต่อปี

จงคำนวณ

11.1) ราคาฟอร์เวิร์ดของอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงในแต่ละงวด $f(t_k, T)$

11.2) ค่า d_1 และ d_2 สำหรับแต่ละงวด

11.3) คำนวณราคาสัญญาแคปภายใต้โครงสร้างอัตราดอกเบี้ยของเกาส์ (gtsm)

12) จงคำนวณค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) ในการกำหนดราคาสัญญาแคปโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ของสัญญาแคป (cap) ที่มีอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงเป็น LIBOR โดยสัญญาแคปนี้มีระยะเวลา 1 ปีและมีอัตราแคป (cap rate) ที่ 6% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของแคปเท่ากับ 2,000,000 บาท และกำหนดข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง L_k, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n = 4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยปลอดความเสี่ยง r_k ในแต่ละงวด, อัตราแคป K ที่ 6%, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ย $\sigma = 0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.061	0.050
2	0.50	0.25	0.058	0.052
3	0.75	0.25	0.050	0.058
4	1.00	0.25	0.059	0.060

จงคำนวณ

12.1) ค่าประมาณความผันผวนแฝง (s_k) สำหรับแต่ละงวด

12.2) ราคาฟอร์เวิร์ดของอัตราดอกเบี้ยอ้างอิงในแต่ละงวด ($f(t_k, T)$)

12.3) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของแคปเลต ($Caplet_k$) (ภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง)

12.4) ค่าพรีเมียมหรือราคาของแคป

13) จงคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ย สมมติว่าต้องการคำนวณราคาสัญญาฟลอร์ (floor) ที่มีอัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิเป็น LIBOR โดยสัญญามีอายุประมาณ 1 ปีและมีอัตราฟลอร์ (floor rate) ที่ 4% กำหนดให้มูลค่าหน้าตั๋วของฟลอร์ (N) เท่ากับ 1,000,000 บาท และมีข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)=r_k$, จำนวนงวดที่มีการคำนวณดอกเบี้ย $n=4$ งวด (ชำระดอกเบี้ยทุก 3 เดือน), อัตราดอกเบี้ยใช้สิทธิอ้างอิง L_k , อัตราฟลอร์ K ที่ 4%, ความผันผวน $\sigma=0.03$

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.050
2	0.50	0.25	0.050	0.052
3	0.75	0.25	0.040	0.056
4	1.00	0.25	0.052	0.058

จงคำนวณ

13.1) ผลประโยชน์ของฟลอร์เลตในแต่ละงวด $Floorlet_k$

13.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของฟลอร์เลต $Floorlet_k$ (ภายใต้ความน่าจะเป็นกลางต่อความเสี่ยง)

13.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์

13.4) สมมติว่าความผันผวนเปลี่ยนเป็น 0.02 จงคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์เลตใหม่ในแต่ละงวด $Floorlet_k$

13.5) วิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวนต่อราคาฟลอร์

14) จงคำนวณราคาของสัญญาฟลอร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาฟลอร์ของอัตราดอกเบี้ยโดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ มีดังนี้ จำนวนงวด $n=4$, เงินต้นอ้างอิงของ floor (N) = 2,000,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t)=r_k$), ราคาใช้สิทธิ (K) = 0.04 (4%) และค่าความผันผวน (σ) = 0.03 (3%)

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.058	0.049
2	0.50	0.25	0.055	0.054
3	0.75	0.25	0.048	0.056
4	1.00	0.25	0.054	0.055

จงคำนวณ

14.1) ผลประโยชน์ของฟลอร์เลตในแต่ละงวด $Floorlet_k$

14.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของฟลอร์เลต $Floorlet_k$

14.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของฟลอร์

14.4) สมมติว่าความผันผวนเปลี่ยนเป็น 0.02 จงคำนวณผลประโยชน์ของฟลอร์เลตใหม่ในแต่ละงวด $Floorlet_k$

14.5) วิเคราะห์ผลกระทบของความผันผวนต่อราคาฟลอร์

15) สำหรับการคำนวณราคาของสัญญาคอลลาร์โดยใช้ตัวแบบแบล็กโชลส์ โดยข้อมูลสำหรับสัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย มีดังนี้ จำนวนงวด $n=4$, เงินต้นอ้างอิงของคอลลาร์ (N) = 2,500,000 บาท อัตราดอกเบี้ยตลาด (L_k) และอัตราดอกเบี้ยแบบผันผวน ($r(t)=r_k$) และ ค่าความผันผวน (σ) = 0.03 (3%)

งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t)=r_k$
1	0.25	0.25	0.062	0.051
2	0.50	0.25	0.054	0.053
3	0.75	0.25	0.048	0.055
4	1.00	0.25	0.058	0.057

จงคำนวณ

15.1) ผลประโยชน์ของคอลลาร์ในแต่ละงวด $Collar_k$ ในกรณีที่

$K_{cap}=K_{floor}=0.05(5\%)$

15.2) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลลาร์ $Collar_k$ ในกรณีที่ $K_{cap} = K_{floor} = 0.05(5\%)$

15.3) ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ ในกรณีที่ $K_{cap} = K_{floor} = 0.05(5\%)$

15.4) ผลประโยชน์ของคอลลาร์ในแต่ละงวด $Collar_k$ ในกรณีที่ $K_{cap} = 0.06(6\%)$ และ $K_{floor} = 0.04(4\%)$

15.5) มูลค่าปัจจุบันของค่าคาดหวังของผลประโยชน์ของคอลลาร์ $Collar_k$ ในกรณีที่ $K_{cap} = 0.06(6\%)$ และ $K_{floor} = 0.04(4\%)$

15.6) ค่าพรีเมียมหรือราคาของคอลลาร์ในกรณีที่ $K_{cap} = 0.06(6\%)$ และ $K_{floor} = 0.04(4\%)$

16) สำหรับการคำนวณราคาสวอปชันซึ่งสัญญาระบุข้อมูลที่เกี่ยวข้อง ดังนี้ เงินต้นอ้างอิง (N) = 1,000,000 บาท, จำนวนงวดการจ่ายดอกเบี้ย $n = 4$, ระยะเวลางวด $\tau_k = 0.25$ ปี, อัตราดอกเบี้ยลอยตัว L_k และ อัตราดอกเบี้ยคงที่ $F = 5\%$

.งวดที่ k	t_k	τ_k	L_k	$r(t) = r_k$
1	0.25	0.25	0.060	0.049
2	0.50	0.25	0.052	0.051
3	0.75	0.25	0.046	0.053
4	1.00	0.25	0.056	0.055

จงคำนวณ

16.1) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยคงที่ ที่เวลา $t = 0$

16.2) คำนวณมูลค่าปัจจุบันของการจ่ายฝั่งอัตราดอกเบี้ยลอยตัว ที่เวลา $t = 0$

16.3) คำนวณราคาสวอปที่เวลา $t = 0$ (ในมุมมองฝั่งจ่ายดอกเบี้ยคงที่)

16.4) คำนวณอัตราดอกเบี้ยสวอป (swap rate)

16.5) ผลประโยชน์สำหรับสัญญาสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

16.6) คำนวณราคาของสวอปชันผู้จ่าย ที่เวลา $t = 0$

17) พิจารณาโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า $f(t,T)$ ภายใต้กรอบทฤษฎี HJM ซึ่งให้นิยามว่า

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t$$

โดย W_t เป็นมาตรฐานบราวเนียน และฟังก์ชัน $\sigma(t,T) = 0.01e^{-0.05(T-t)}$ ให้คำนวณพารามิเตอร์ $\alpha(t,T)$ ตามสมการ HJM, $\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)ds$ ที่เวลา $t = 0$ และ $T = 2$ ปี

18) สมมุติให้อัตราดอกเบี้ยล่วงหน้าภายใต้ HJM มีฟังก์ชัน $\sigma(t,T) = a(T-t)$ และ $a = 0.02$ โดยกำหนด $t = 1$ และ $T = 3$ ปี จง

18.1) คำนวณ $\alpha(t,T)$ จากสมการ HJM

18.2) อธิบายผลกระทบของรูปแบบ $\sigma(t,T)$ ดังกล่าวต่อความผันผวนของอัตราดอกเบี้ยในช่วงเวลาต่าง ๆ และผลต่อการกำหนดราคาตราสารหนี้แบบ zero-coupon

19) สมมติให้ $P(t,T)$ คือราคาของพันธบัตรไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) ที่เวลา t และครบกำหนดที่เวลา T โดยกำหนด $P(0,1) = 0.95$, $P(0,2) = 0.89$ และอัตราดอกเบี้ยต่อเนื่องในตลาดเป็นแบบ deterministic จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (forward rate) $f(0,1,2)$ ที่เวลา 0 สำหรับช่วง [1,2] และอธิบายว่าอัตรานี้ใช้ประโยชน์อย่างไรในบริบทของการวัดความเสี่ยงภายใต้ forward measure

20) ให้นิยามฟังก์ชันราคาพันธบัตรแบบไม่มีคูปองเป็น $P(t,T) = e^{-r(T-t)}$ โดย $r = 5\%$ ต่อปีแบบทบต่อเนื่อง และกำหนดสัญญาออปชันพันธบัตรซึ่งมี payoff ณ เวลาครบกำหนด $T = 2$ เป็น

$$\max(P(T,T^*) - K, 0)$$

โดย $T^* = 3$ และ $K = 0.9$ จงหามูลค่าปัจจุบันของออปชันดังกล่าวโดยใช้แนวคิดของ forward measure ที่อิงกับพันธบัตร $P(t,T^*)$ เป็น numéraire

หมายเหตุ: numéraire คือสินทรัพย์ที่ใช้เป็น "หน่วยวัดมูลค่า" เมื่อเปลี่ยน measure เพื่อทำให้ราคาของสินทรัพย์อื่นเป็น martingale ซึ่งช่วยให้การกำหนดราคาทางคณิตศาสตร์มีความเป็นระบบและง่ายขึ้น

21) พิจารณาสัญญาคอลออปชันสำหรับสินค้าโภคภัณฑ์ชนิดหนึ่ง (เช่น ทองคำ) ซึ่งราคาสปอตของสินค้าในปัจจุบันคือ $S(0)=1000$ บาทต่อหน่วย และราคาฟอร์เวิร์ด $F(0,T)=1040$ สำหรับ $T=1$ ปี ในขณะที่อัตราดอกเบี้ย $r(t)$ มีลักษณะเป็นอัตราผันแปรตามเวลา โดยเฉลี่ยอยู่ที่ 4% ต่อปีแบบทบต้นต่อเนื่อง และค่าความผันผวนของราคาสินค้าเท่ากับ $\sigma=20\%$ ต่อปี

21.1) จงใช้สูตรของ Black (Black '76) คำนวณมูลค่าคอลออปชันที่มีราคาใช้สิทธิ $K=1020$ และมีอายุ 1 ปี

21.2) อธิบายผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย $r(t)$ ต่อราคาของออปชัน

22) บริษัทหนึ่งต้องการทำประกันความเสี่ยงราคาน้ำมันล่วงหน้าโดยใช้พุทออปชัน ซึ่งมีราคาใช้สิทธิ $K=75$ ดอลลาร์/บาร์เรล และราคาฟอร์เวิร์ดน้ำมันในอีก 6 เดือนข้างหน้าเท่ากับ $F(0,0.5)=72$ ดอลลาร์/บาร์เรล โดยให้อัตราดอกเบี้ยต่อเนื่องแปรผันตามเวลาเฉลี่ย $r=3\%$ ต่อปี และค่าความผันผวน $\sigma=25\%$ ต่อปี

22.1) จงคำนวณมูลค่าพุทออปชันโดยใช้ตัวแบบของ Black (Black '76) สำหรับออปชันบนฟิวเจอร์ส

22.2) วิเคราะห์ว่าหากอัตราดอกเบี้ยพุ่งขึ้นไปที่ 5% ต่อปี จะทำให้บริษัทควรซื้อหรือขายออปชันเพิ่มขึ้นหรือไม่

23) บริษัทแห่งหนึ่งทำสัญญา Interest Rate Cap เพื่อป้องกันความเสี่ยงจากการกู้ยืมในอัตราดอกเบี้ยลอยตัว โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- Notional principal: 100 ล้านบาท
- Cap rate: 5%
- ระยะเวลา: 3 ปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- สมมติให้อัตราดอกเบี้ยคาดการณ์ในแต่ละงวดเป็น 5.5%, 4.8%, 6.2%, 5.1%, 5.6%, 4.9%

23.1) จงคำนวณกระแสเงินสดที่ได้รับจากสัญญา Cap ในแต่ละงวด

23.2) วิเคราะห์ผลประโยชน์ของการใช้ Cap สำหรับบริษัทนี้ภายใต้สถานการณ์ดังกล่าว

24) นักลงทุนรายหนึ่งซื้อ Interest Rate Collar โดยมีรายละเอียด

- Notional: 50 ล้านบาท
- Cap rate: 6%, Floor rate: 4%
- ระยะเวลา: 2 ปี ชำระทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- สมมติให้อัตราดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจริงเป็น 3.5%, 4.2%, 5.8%, 6.5%

24.1) คำนวณกระแสเงินสดที่ได้รับหรือจ่ายจากสัญญา Collar ในแต่ละงวด

24.2) อธิบายว่า Collar ช่วยลดต้นทุนหรือจำกัดความเสี่ยงในมุมของนักลงทุนอย่างไร

25) พิจารณาบริษัทแห่งหนึ่งได้รับสิทธิในการทำ payer swaption ซึ่งอนุญาตให้บริษัทเข้าสู่สัญญาแลกเปลี่ยนอัตราดอกเบี้ย โดยจ่ายดอกเบี้ยคงที่และรับดอกเบี้ยลอยตัวในอีก 1 ปีข้างหน้า (swap เริ่มต้นใน 1 ปี) รายละเอียดของ swaption ดังนี้

- Notional amount: 200 ล้านบาท
- Fixed rate (strike rate): 3.5% ต่อปี
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวอ้างอิง: 6M-THBFIX
- ระยะเวลา swap หลังจากใช้สิทธิ: 2 ปี ชำระดอกเบี้ยทุก 6 เดือน
- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวคาดการณ์ในช่วง swap: 4.2%, 3.8%, 4.5%, 4.0%

25.1) บริษัทควรใช้สิทธิ swaption หรือไม่? เพราะเหตุใด

25.2) หากใช้สิทธิ จงคำนวณกระแสเงินสดสุทธิตลอดอายุ swap

26) นักลงทุนรายหนึ่งถือ receiver swaption ซึ่งให้สิทธิรับอัตราคงที่ 5% และจ่ายอัตราดอกเบี้ยลอยตัว โดย swap มีระยะเวลา 3 ปี เริ่มต้นในอีก 6 เดือนข้างหน้า โดยมีข้อมูลเพิ่มเติม

- Notional: 100 ล้านบาท

- อัตราดอกเบี้ยลอยตัวคาดการณ์: 4.3%, 5.2%, 5.6%, 5.1%, 5.4%, 5.0%

- อัตราดอกเบี้ยปัจจุบัน: 4.5% (ต่อเนื่อง)

26.1) ประเมินว่า swaption นี้มีมูลค่าในเชิงเศรษฐศาสตร์หรือไม่

26.2) วิเคราะห์ประโยชน์ของการถือ receiver swaption ในบริบทของการบริหารพอร์ตลงทุน

บทที่ 12 การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

เนื้อหาประกอบด้วย

12.1 สภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้และความสำคัญเชิงระบบ

12.2 ตัวชี้วัดสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้: เชิงปริมาณและเชิงพฤติกรรม

12.3 การใช้อนุพันธ์เพื่อสะท้อนสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

12.4 การวิเคราะห์โครงสร้างความผันแปรของผลตอบแทนในช่วงวิกฤต

12.5 การวิเคราะห์โครงสร้างอัตราผลตอบแทนด้วย Spot Rate และ Forward Rate

12.6 แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย: พื้นฐานเชิงโครงสร้างของตราสารหนี้

12.7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย

12.8 การจำลองพฤติกรรมอัตราดอกเบี้ยในแบบจำลอง Vasicek, CIR และ Hull-White

12.9 การกำหนดราคาตราสารหนี้ภายใต้โครงสร้างเวลาและอัตราดอกเบี้ย

12.10 การวิเคราะห์การเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน

12.11 กรณีศึกษาการเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดในตลาดการเงินไทย

บทนำ

ตลาดตราสารหนี้ของประเทศไทยมีการเติบโตอย่างต่อเนื่องในช่วง 25 ปีที่ผ่านมา โดยเริ่มจากธุรกรรมการซื้อขายวันแรกมูลค่าเพียง 1 ล้านบาท จนถึงมูลค่าการซื้อขายเฉลี่ยต่อวันที่สูงถึง 80,000 ล้านบาทในปัจจุบัน (สมาคมตลาดตราสารหนี้ไทย, พ.ศ. 2562) สัดส่วนมูลค่าคงค้างของตลาดตราสารหนี้ไทยเมื่อเปรียบเทียบกับผลิตภัณฑ์มวลรวมในประเทศ (GDP) เพิ่มขึ้นจากไม่เกิน 10% เป็น 83% ในปี 2562 และมูลค่าการออกหุ้นกู้เพิ่มขึ้นจากหลักหมื่นล้านบาทต่อปี สู่ระดับ 1 ล้านล้านบาทต่อปี ทำให้ตลาดตราสารหนี้เป็นกลไกสำคัญในการสนับสนุนระบบเศรษฐกิจและการลงทุนของประเทศไทย

ในปัจจุบัน การซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองส่วนใหญ่ดำเนินการในรูปแบบการซื้อขายกันเอง (Over the Counter: OTC) ซึ่งจำกัดเฉพาะผู้ค้าและนักลงทุนสถาบันเท่านั้น วิธีการดังกล่าวมีข้อจำกัดที่สำคัญ เช่น การขาดความโปร่งใสด้านราคาและปริมาณการซื้อขาย รวมถึงการใช้เวลาชำระราคาและส่งมอบระหว่าง 1-3 วัน ซึ่งไม่ตอบโจทย์ความต้องการของนักลงทุนรายย่อยที่อาจต้องการแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดอย่างเร่งด่วน

เพื่อแก้ไขปัญหานี้ งานวิจัยโดย **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024)** ได้นำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ช่วยกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ ภายใต้ชื่อ "Instant

Exchange Analytics: A Compelling Mathematical Model for Real-Time Debt Instrument and Cash Conversion Rates" โดยตัวแบบดังกล่าวใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน เช่น การจำลองอัตราดอกเบี้ยและการวิเคราะห์แบบ Stochastic Process เพื่อพัฒนาตัวแบบที่สามารถกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนได้อย่างแม่นยำและตอบสนองความต้องการในตลาดตราสารหนี้ได้ตลอดเวลา ซึ่งทำให้ตลาดตราสารหนี้มีสภาพคล่องสูง

ในบทนี้ได้นำแนวคิดจากงานวิจัยดังกล่าวมาเป็นพื้นฐานสำหรับการสร้างตัวแบบการเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดในตลาดการเงินโดยได้ประยุกต์ใช้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยที่ได้รับการยอมรับในระดับสากล เช่น Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross (CIR) และ Hull-White เพื่อพัฒนาตัวแบบที่ช่วยกำหนดอัตราแลกเปลี่ยนราคาตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ ตลอดเวลา และทันที โดยมุ่งเน้นให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดทั้งในด้านการบริหารสภาพคล่อง การลดความเสี่ยง และการส่งเสริมความโปร่งใสในตลาดตราสารหนี้

โดยบทที่ 12 ของตำราเล่มนี้จึงมุ่งเน้นไปที่การนำเสนอความสำคัญของการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง กระบวนการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และการประยุกต์ใช้งานจริง โดยมีเป้าหมายเพื่อส่งเสริมให้ตลาดตราสารหนี้ไทยสามารถรองรับการลงทุนของนักลงทุนทุกระดับอย่างมีประสิทธิภาพและยั่งยืน

12.1 ความสำคัญของการบริหารสภาพคล่องและการเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสด

การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้มีบทบาทสำคัญต่อการเสถียรภาพของระบบการเงินและเศรษฐกิจโดยรวม สภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้หมายถึงความสามารถของนักลงทุนในการซื้อขายตราสารหนี้ได้อย่างรวดเร็วในราคาที่เหมาะสม โดยไม่ส่งผลกระทบต่อระดับราคาของตลาดอย่างมีนัยสำคัญ

12.1.1 การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

ตลาดตราสารหนี้ที่มีสภาพคล่องสูงช่วยให้ผู้ลงทุนสามารถแปลงสินทรัพย์เป็นเงินสดได้อย่างสะดวก เพิ่มโอกาสในการจัดการพอร์ตการลงทุน และลดต้นทุนการทำธุรกรรม การมีสภาพคล่องในตลาดที่เพียงพอยังช่วยสนับสนุนการระดมทุนผ่านตราสารหนี้ของภาครัฐและเอกชน ซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญต่อการพัฒนาเศรษฐกิจ อย่างไรก็ตาม การซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองของประเทศไทยยังเผชิญข้อจำกัด เช่น การซื้อขายแบบ Over the Counter (OTC) ที่ขาดความโปร่งใสและการชำระราคาใช้เวลาหลายวัน ทำให้เกิดความล่าช้าในการเปลี่ยนสินทรัพย์เป็นเงินสด โดยเฉพาะสำหรับนักลงทุนรายย่อยที่อาจต้องการเงินสดเพื่อใช้ในทันที

12.1.2 ความเชื่อมโยงระหว่างสภาพคล่องของตราสารหนี้และความผันผวนของตลาด

สภาพคล่องของตราสารหนี้และความผันผวนของตลาดมีความสัมพันธ์เชิงลึกต่อกัน สภาวะตลาดที่มีความผันผวนสูงมักส่งผลให้สภาพคล่องลดลง เนื่องจากผู้ค้าในตลาดมีความระมัดระวังมากขึ้น ทำให้ราคาซื้อขายแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ การขาดสภาพคล่องอาจส่งผลต่อความสามารถในการซื้อขายตราสารหนี้ใน

ราคาที่สะท้อนความเป็นธรรมในตลาด ในทางกลับกัน ตลาดที่มีสภาพคล่องสูงสามารถช่วยลดความผันผวนของตลาดได้ เนื่องจากมีจำนวนผู้ซื้อและผู้ขายที่เพียงพอ ซึ่งทำให้ราคามีเสถียรภาพและสะท้อนปัจจัยพื้นฐานของตราสารหนี้ได้อย่างเหมาะสม สภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ยังมีผลกระทบต่อการกำหนดอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้ในอนาคต การที่ตลาดขาดสภาพคล่องอาจนำไปสู่ความเบี่ยงเบนของอัตราผลตอบแทนจากความเป็นจริง ซึ่งอาจสร้างปัญหาให้กับนักลงทุนในการประเมินมูลค่าตราสารหนี้

การบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้และการเชื่อมโยงกับความผันผวนของตลาดเป็นปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อประสิทธิภาพของตลาดตราสารหนี้ การพัฒนากลไกและเครื่องมือที่ช่วยให้สามารถเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์จะช่วยลดข้อจำกัดในปัจจุบัน เพิ่มความสะดวกให้กับนักลงทุนรายย่อย และเสริมสร้างความมั่นคงของตลาดตราสารหนี้โดยรวม

12.1.3 แนวคิดที่เกี่ยวข้องของการพัฒนาตัวแบบ

การพัฒนาตัวแบบเพื่อกำหนดราคาตราสารหนี้และเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบฉับพลันตลอดเวลา ในงานวิจัยของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024)** มีพื้นฐานจากแนวคิดทางทฤษฎีและการวิจัยเกี่ยวกับอัตราดอกเบี้ย ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการกำหนดราคาและวิเคราะห์ความเสี่ยงของตราสารหนี้ในตลาดทุน แนวคิดเหล่านี้ครอบคลุม ทฤษฎีอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Theories) การวิเคราะห์ Forward Rate และ Spot Rate และ ทฤษฎีการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน โดยแต่ละทฤษฎีมีความสำคัญในการสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับพฤติกรรมของตลาดตราสารหนี้และช่วยสนับสนุนการพัฒนาตัวแบบที่ตอบสนองต่อความผันผวนของตลาดได้อย่างเหมาะสม

ในบทที่ 7 เราได้กล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยซึ่งประกอบด้วยทฤษฎีอัตราดอกเบี้ยต่างๆ ซึ่งเป็นแกนหลักในการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับตลาดตราสารหนี้ ได้แก่ ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยเชิงปัจจัยเดียว (Single-Factor Interest Rate Models) เช่น Vasicek (ค.ศ.1977) Cox-Ingersoll-Ross (CIR) และ Hull-White ซึ่งได้รับความนิยมเนื่องจากสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยในสภาวะตลาดที่สมดุล (Equilibrium) และตลาดที่เป็นกลางต่อความเสี่ยงหรือตลาดที่ปลอดจากการทำกำไรโดยปราศจากความเสี่ยง (Arbitrage-Free Markets)

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวแบบเหล่านี้นิยมใช้วิธีการคำนวณ Root Mean Square Error (RMSE) เพื่อระบุความเหมาะสมของตัวแบบในการกำหนดราคาตราสารหนี้ Mongkolkiatchai (ค.ศ. 2006) พบว่าตัวแบบ CIR มีความสัมพันธ์กับอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในประเทศไทยมากกว่าตัวแบบ Vasicek ในขณะที่งานศึกษาของ Kaewcharoenkij และ Panpocha (ค.ศ. 2018) รายงานว่าตัวแบบ Hull-White สามารถ

สะท้อนแนวโน้มของเส้นอัตราผลตอบแทน (Yield Curve) ได้ดีกว่า CIR สำหรับการกำหนดราคาหุ้นกู้ที่มีสิทธิไถ่ถอนก่อนกำหนด

สำหรับการวิเคราะห์ Forward Rate และ Spot Rate เป็นที่ทราบว่า Forward Rate และ Spot Rate เป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์อัตราดอกเบี้ย โดย Spot Rate หมายถึงอัตราดอกเบี้ยที่กำหนดในปัจจุบันสำหรับการลงทุนในระยะเวลาหนึ่ง ในขณะที่ Forward Rate แสดงถึงอัตราดอกเบี้ยที่คาดการณ์ไว้ในอนาคต การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง Spot Rate และ Forward Rate ช่วยให้สามารถสร้างแบบจำลองที่มีความแม่นยำในการพยากรณ์อัตราดอกเบี้ยและกำหนดราคาตราสารหนี้ได้

การศึกษาของ Dagistan (ค.ศ. 2010) ซึ่งใช้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยแบบสโตแคสติกในการประเมิน Value at Risk (VaR) ของพันธบัตรรัฐบาลในตลาดประเทศต่าง ๆ และพบว่าตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับการวัดความเสี่ยงขึ้นอยู่กับบริบทของแต่ละประเทศ

สำหรับการศึกษาการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน (Instantaneous Cash Conversion) มีความสำคัญในบริบทของการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ ตัวแบบที่พัฒนาขึ้นในงานวิจัย เช่น "Instant Exchange Analytics" ของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ได้นำเสนอแนวทางใหม่ในการคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนตราสารหนี้ให้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์หรือแบบฉับพลัน โดยใช้ตัวแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่สามารถตอบสนองต่อความผันผวนในตลาดการเงิน

นอกจากนี้ในงานวิจัยของ Orlando et al. (ค.ศ. 2020) ยังได้แนะนำวิธีการพยากรณ์อัตราดอกเบี้ยในตัวแบบ Vasicek และ CIR โดยอาศัยการวิเคราะห์การแจกแจงความน่าจะเป็นผ่านแนวทาง Copula-Based Approach เพื่อให้ได้พารามิเตอร์ที่แม่นยำมากขึ้น

สำหรับเนื้อหาบทนี้มุ่งเน้นการเชื่อมโยงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อสร้างความเข้าใจในแนวทางการพัฒนาตัวแบบอัตราดอกเบี้ยและการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ โดยเน้นการประยุกต์ใช้ตัวแบบที่เหมาะสมเพื่อสนับสนุนการตัดสินใจของนักลงทุน และเพิ่มประสิทธิภาพการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

12.2 มาตรวัดสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

การประเมินสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้เป็นกระบวนการสำคัญในการวิเคราะห์ความสามารถในการซื้อขายตราสารโดยไม่ส่งผลกระทบต่อราคาในตลาดอย่างมีนัยสำคัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในตลาดที่มีผู้ซื้อขายน้อยหรือมีความถี่ในการซื้อขายต่ำ ซึ่งสภาพคล่องอาจเป็นข้อจำกัดต่อการดำเนินกลยุทธ์การลงทุนของผู้จัดการพอร์ต ผู้กำหนดนโยบาย และผู้ดูแลสภาพคล่องในระบบการเงิน

มาตรวัดสภาพคล่องที่นิยมใช้ในตลาดตราสารหนี้สามารถจำแนกออกได้เป็น 2 กลุ่มหลัก ได้แก่

1) มาตรวัดเชิงปริมาณ (Quantitative Measures)

- Bid-Ask Spread: เป็นส่วนต่างระหว่างราคาที่ผู้ซื้ออินดีจ่าย (Bid) กับราคาที่ผู้ขายต้องการขาย (Ask) โดยส่วนต่างที่น้อยแสดงถึงตลาดที่มีสภาพคล่องสูง เพราะสามารถซื้อขายได้ในราคาที่ใกล้เคียงกัน

- Amihud Illiquidity Ratio: เป็นอัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงราคาสัมพัทธ์ต่อหน่วยมูลค่าการซื้อขาย ใช้เพื่อสะท้อนผลกระทบของปริมาณการซื้อขายที่มีต่อราคาตราสาร โดยคำนวณจากสูตร

$$\text{Amihud Ratio} = \frac{|\text{Return}_t|}{\text{Volume}_t} \tag{12.1}$$

ค่า Ratio ที่สูงแสดงถึงตลาดที่มีสภาพคล่องต่ำ เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงราคามากเกิดจากมูลค่าซื้อขายเพียงเล็กน้อย

-Turnover Ratio: สัดส่วนของมูลค่าการซื้อขายเทียบกับมูลค่าคงค้างของตราสาร ชี้ให้เห็นว่าตราสารนั้นมีการหมุนเวียนสูงเพียงใดในตลาดรอง

- Zero Trading Days: จำนวนวันที่ไม่มีการซื้อขาย ซึ่งสะท้อนถึงตราสารที่อาจไม่มีความน่าสนใจหรือไม่มีผู้ซื้อในช่วงเวลานั้น

2) มาตรวัดเชิงพฤติกรรม (Behavioral/Survey-Based Measures)

- Liquidity Perception Survey: การสอบถามนักลงทุนหรือผู้เล่นหลักในตลาดเกี่ยวกับระดับสภาพคล่องในตราสารแต่ละประเภท

- Market Depth: การประเมินความสามารถของตลาดในการรองรับคำสั่งซื้อขายขนาดใหญ่โดยไม่ส่งผลต่อราคามากเกินไป

- Price Impact: การวัดผลกระทบของคำสั่งซื้อขายขนาดใหญ่ที่มีต่อราคาตราสาร

การประยุกต์ใช้มาตรวัดในเชิงปฏิบัติ

1) ผู้จัดการพอร์ตสามารถใช้ Bid-Ask Spread และ Turnover Ratio เพื่อจัดลำดับตราสารหนี้ที่มีสภาพคล่องสูงเพื่อประกอบการจัดพอร์ตลงทุน

2) ธนาคารกลางสามารถใช้ Amihud Illiquidity Ratio เป็นเครื่องมือเสริมในการประเมินความเปราะบางของตลาดตราสารหนี้ในภาวะวิกฤติ

3) นักลงทุนรายย่อยควรใช้ข้อมูล Zero Trading Days เป็นสัญญาณเตือนก่อนการลงทุนในตราสารหนี้ที่ไม่มีการซื้อขายต่อเนื่อง เพราะอาจส่งผลต่อการขายคืนในภายหลัง

12.3 การใช้อนุพันธ์บนตราสารหนี้เพื่อประเมินสภาพคล่องในตลาด

ในการประเมินสภาพคล่องของตลาดตราสารหนี้แบบองค์รวม แนวทางเชิงดั้งเดิม เช่น Bid-Ask Spread หรือ Turnover Ratio อาจไม่สามารถสะท้อนความซับซ้อนของสภาพคล่องในภาวะตลาดที่เปลี่ยนแปลงรวดเร็วได้อย่างแม่นยำ ดังนั้น อนุพันธ์ทางการเงินที่อ้างอิงตราสารหนี้ เช่น สัญญาซื้อขายล่วงหน้า (futures) ออปชัน (options) สวอปชัน (swaptions) และสัญญาแลกเปลี่ยนความเสี่ยงจากเครดิต

(credit default swaps: CDS) จึงกลายเป็นเครื่องมือสำคัญในการวิเคราะห์เชิงลึกเกี่ยวกับสภาพคล่องและความเสี่ยงด้านสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

1) ดัชนี CDS-Bond Basis

ค่าความแตกต่างระหว่างอัตรา CDS กับ Z-spread ของพันธบัตรที่มีความเสี่ยงเครดิตเดียวกันใช้เป็นตัวแทนของ relative liquidity ระหว่างตลาด CDS และตลาดพันธบัตร

$$\text{CDS-Bond Basis} = \text{CDS Spread} - \text{Z-Spread} \tag{12.2}$$

ค่าที่เบี่ยงเบนจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญมักสะท้อนความไม่สมดุลของสภาพคล่องระหว่างสองตลาด โดยเฉพาะในช่วงเวลาวิกฤตที่นักลงทุนแสวงหาสภาพคล่องจากตลาด CDS มากกว่าพันธบัตรจริง

2) ความลาดเอียงของ Implied Volatility จากออปชันบนพันธบัตร

Implied Volatility Skew ที่เพิ่มขึ้นในฝั่ง Put หรือ Call ของออปชันบนพันธบัตร บ่งชี้ถึงความกลัวต่อสภาพคล่องที่หายไปในภาวะตลาดผันผวน ผู้วิจัยสามารถใช้แนวทางนี้ในการประมาณ Liquidity Risk Premium จากโครงสร้างราคาของออปชัน

3) การวิเคราะห์ Basis ระหว่าง Futures และพันธบัตรอ้างอิง

ความเบี่ยงเบนระหว่างราคาของพันธบัตรรัฐบาลกับ Futures ที่อ้างอิงตราสารเดียวกัน สามารถใช้เป็นดัชนี Early Warning สำหรับการตึงตัวของสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ โดยเฉพาะเมื่อ Roll Cost สูงผิดปกติในช่วงใกล้ครบอายุสัญญา

4) Swaption Volatility Term Structure

ความผันผวนโดยนัย (implied volatility) ของ Swaptions ซึ่งเป็นออปชันบนอัตราดอกเบี้ย swap สามารถใช้สะท้อนสภาพคล่องของตลาดอัตราดอกเบี้ยได้ โดยหากมีความผันผวนสูงในช่วงอายุสั้น แสดงถึงความตึงตัวของสภาพคล่องระยะสั้นในตลาดการเงิน

5) แบบจำลองราคาที่ปรับด้วยต้นทุนสภาพคล่อง

แบบจำลองที่ปรับปรุงจาก Black-Scholes หรือ Hull-White โดยเพิ่มองค์ประกอบของต้นทุนสภาพคล่อง เช่น Bid-Ask Spread หรือ Order Execution Cost เข้าไปในสมการ เพื่อสะท้อนราคาที่แท้จริงในตลาดที่มีความไม่สมบูรณ์

การประยุกต์ใช้งานจริง

นักลงทุนสถาบันสามารถใช้ตัวแบบเหล่านี้ เพื่อ

1) ประเมินระดับสภาพคล่องของตราสารหนี้ในช่วงเวลาวิกฤต

2) ตัดสินใจเกี่ยวกับการถือครองพันธบัตรเทียบกับอนุพันธ์เพื่อบริหารความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง

3) พัฒนาแบบจำลองเพื่อกำหนดราคาพันธบัตรอย่างเป็นธรรมในภาวะที่ตลาดไม่มีการซื้อขายที่โปร่งใส

ตัวอย่างที่ 12.1 (การคำนวณเพื่อประเมินสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ ด้วยดัชนี CDS-Bond Basis) สมมุติว่าพันธบัตรรัฐบาลไทยอายุ 5 ปี มี Z-spread เท่ากับ 120 bps ในขณะที่ CDS 5 ปี ของรัฐบาลไทยมีราคาเท่ากับ 160 bps จงคำนวณ CDS-Bond Basis และอธิบายผลลัพธ์

วิธีทำ

$$\text{CDS-Bond Basis} = \text{CDS Spread} - \text{Z-spread}$$

$$= 160\text{bps} - 120\text{bps}$$

$$= 40\text{bps}$$

จากผลลัพธ์ CDS-Bond Basis ที่เป็นบวก (+40 bps) สะท้อนว่าตลาด CDS มีความต้องการสภาพคล่องมากกว่าตลาดพันธบัตรจริง โดยเฉพาะในภาวะที่นักลงทุนมองว่าการขายพันธบัตรในตลาดรองอาจทำได้ยากหรือราคาต่ำกว่ามูลค่า □

ตัวอย่างที่ 12.2 (การวิเคราะห์ Basis ระหว่าง Futures และพันธบัตรอ้างอิง) ราคาตลาดของพันธบัตรรัฐบาลอายุ 10 ปี = 101.25 บาท ราคาซื้อขายของ Futures ที่อ้างอิงพันธบัตรเดียวกัน = 102.00 บาท ต้นทุน Roll-over ที่เหมาะสมตามทฤษฎี = 0.40 บาท จงคำนวณ Basis และเปรียบเทียบกับ Roll Cost เพื่อประเมิน Early Warning ของสภาพคล่อง

วิธีทำ Basis ที่แท้จริง $= \text{Futures Price} - \text{Bond Price}$

$$= 102.00 - 101.25 = 0.75 \text{ บาท}$$

ผลต่างจาก Roll Cost $= 0.75 - 0.40 = 0.35$ บาท

จากผลลัพธ์จะเห็นว่า Basis ที่สูงกว่าปกติ 0.35 บาท บ่งชี้ถึงความตึงตัวของสภาพคล่องในตลาด Futures โดยเฉพาะใกล้วันครบอายุสัญญา ซึ่งอาจเป็นสัญญาณเตือนล่วงหน้าว่าตลาดพันธบัตรกำลังขาดความสมดุลในด้านอุปสงค์และอุปทาน □

ตัวอย่างที่12.3 (วิเคราะห์ความลาดเอียงของ Implied Volatility Skew จากออปชันบนพันธบัตร) ออปชันบนพันธบัตรรัฐบาลอายุ 5 ปี มีค่า Implied Volatility ดังนี้

- Call Option: 12%
- Put Option: 18%

จงคำนวณ Implied Volatility Skew และตีความความหมาย

วิธีทำ

$$\text{Skew} = \text{Put IV} - \text{Call IV}$$

$$= 18\% - 12\% = 6\%$$

จากผลการวิเคราะห์ Skew ที่เป็นบวก 6% แสดงว่าตลาดมีความต้องการซื้อ Put Option มากขึ้น ซึ่งสะท้อนความกังวลของนักลงทุนต่อการลดลงของราคาพันธบัตรในภาวะตลาดผันผวน เป็นสัญญาณถึงความเสี่ยงด้านสภาพคล่องที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต □

12.4 การตรวจจับจุดเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนเพื่อประเมินสภาพคล่องตราสารหนี้

การตรวจจับโครงสร้างที่เปลี่ยนไปในความแปรปรวนของข้อมูลตราสารหนี้เพื่อประเมินสภาพคล่องในตลาด การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน (variance shifts) หรือค่าเฉลี่ย (mean shifts) ในชุดข้อมูลอนุกรมเวลา เช่น bid-ask spread, CDS spread หรือราคาพันธบัตร สามารถสะท้อนภาวะเปลี่ยนผ่านของสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้อย่างมีนัยสำคัญ ในภาวะปกติ ความแปรปรวนของตัวชี้วัดเหล่านี้มีแนวโน้มเสถียร แต่เมื่อเกิดวิกฤตการณ์ทางการเงินหรือการตึงตัวของตลาด ความแปรปรวนมักเพิ่มสูงขึ้นอย่างฉับพลัน

ในงานวิจัยของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ชี้ให้เห็นว่าการตรวจสอบจุดเปลี่ยนของความแปรปรวนด้วยแบบจำลองอนุกรมเวลาและอัลกอริธึม changepoint detection เช่น PELT และ Binary Segmentation มีศักยภาพในการใช้เป็น early-warning indicators สำหรับสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ โดยเฉพาะในช่วงที่ตลาดมีการเคลื่อนไหวอย่างรวดเร็ว

1) การทดสอบด้วยอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Test)

ฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็น (Likelihood function) กำหนดโดย

$$L(\theta;x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \tag{12.3}$$

โดยที่ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือข้อมูลสังเกต

θ คือพารามิเตอร์ของแบบจำลอง

$f(\cdot)$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (PDF)

สมมุติฐานทดสอบคือ $H_0 : \theta = \theta_0$ และ $H_1 : \theta = \theta_1$

พิจารณาอัตราส่วนของฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$LRT = \frac{L(\mathbf{x};\hat{\theta}_0)}{L(\mathbf{x};\hat{\theta}_1)} \tag{12.4}$$

โดยที่ $\hat{\theta}_0$ และ $\hat{\theta}_1$ เป็นค่าประมาณภายใต้ H_0 และ H_1 ตามลำดับ

2) การตรวจสอบจุดเปลี่ยนค่าเฉลี่ยของข้อมูล (Single Changepoint)

กำหนดให้ $Y_t \sim N(\theta, \sigma^2)$ โดยที่ θ_t ค่ากลางที่เกิดจุดเปลี่ยน

ฟังก์ชัน log-likelihood เป็น

$$LR = \max_t \left\{ l(x_{1:t}) + l(x_{t+1:n}) - l(x_{1:n}) \right\} \tag{12.5}$$

โดยที่ $l(x_{a:b})$ คือ log-likelihood ของข้อมูลช่วง x_a ถึง x_b

t คือตำแหน่งที่อาจเป็นจุดเปลี่ยน

เมื่อ $LR > \lambda$ แสดงว่ามีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้น

และสามารถหาตำแหน่งจุดเปลี่ยนที่เหมาะสม ได้จาก

$$t^* = \arg\max_t \left\{ l(x_{1:t}) + l(x_{t+1:n}) - l(x_{1:n}) \right\} \tag{12.6}$$

3) การตรวจจับหลายจุดเปลี่ยนในค่าเฉลี่ยหรือความแปรปรวน (Multiple Changepoint)

กำหนดให้ $\{t_k\}_{k=1}^{K}$ เป็นชุดของตำแหน่งที่เกิดจุดเปลี่ยน

หาค่าที่เหมาะสมโดยการลดฟังก์ชัน penalized likelihood

$$\min_{\{t_k\}} \left[\sum_{k=1}^{K+1} \left\{ -L(x_{t_{k-1}+1:t_k}) \right\} + \lambda f(K) \right] \tag{12.7}$$

โดยที่ $L(x_{a:b})$ เป็น Likelihood ของข้อมูลช่วง x_a ถึง x_b

λ เป็นพารามิเตอร์ควบคุม penalty

$f(K)$ ฟังก์ชัน penalty เช่น $f(K) = K$ หรือ $f(K) = \log(K)$ เพื่อป้องกัน overfitting

4) การประยุกต์ใช้กับข้อมูลสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

ในการศึกษาของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ได้มีการประยุกต์อัลกอริธึม PELT และ Binary Segmentation กับข้อมูล bid-ask spread และ CDS spread ของพันธบัตรรัฐบาลไทยระหว่างปี 2019–2023 โดยพบว่าจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญในความแปรปรวนของ spread มักสอดคล้องกับเหตุการณ์สำคัญ เช่น การระบาดของ COVID-19 การเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย หรือการ downgrade credit rating

การตรวจพบ changepoints ดังกล่าว จึงสามารถใช้เป็นสัญญาณเตือนล่วงหน้า (early-warning signal) สำหรับนักลงทุนสถาบันและผู้กำหนดนโยบายในการประเมินสถานการณ์สภาพคล่องเชิงปริมาณ

5) เครื่องมือและอัลกอริธึมที่ใช้

ใช้แพ็คเกจ changepoint ใน R โดยเฉพาะคำสั่ง cpt.var() สำหรับตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน มีอัลกอริธึมให้เลือกดังนี้

- AMOC (At Most One Change): เหมาะสำหรับกรณีมีจุดเปลี่ยนเพียงจุดเดียว
- BinSeg (Binary Segmentation): ประมวลผลเร็วแต่เป็นค่าประมาณ
- SegNeigh (Segment Neighbourhood): แม่นยำแต่ใช้เวลาคำนวณนาน
- PELT (Pruned Exact Linear Time): เร็วและแม่นยำ เหมาะกับชุดข้อมูลขนาดใหญ่

การวิเคราะห์จุดเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นแนวทางเชิงปริมาณที่สำคัญในการประเมินสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ โดยเฉพาะในช่วงที่เกิดความผันผวนหรือการ

เปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างของตลาด การประยุกต์ใช้เทคนิค changepoint detection สามารถช่วยให้นักวิเคราะห์เข้าใจความไม่เสถียรของสภาพคล่องได้อย่างแม่นยำและทันต่อสถานการณ์

ตัวอย่างที่ 12.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนใน Bid-Ask Spread ของพันธบัตรรัฐบาลไทย โดยใช้ข้อมูลจาก ThaiBMA และเทคนิคการตรวจจับจุดเปลี่ยนแปลง (Changepoint Detection) ด้วยอัลกอริธึม PELT ในภาษา R

ขั้นตอนการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนใน Bid-Ask Spread สามารถทำได้ดังนี้

1) ข้อมูลที่ใช้ในการวิเคราะห์

ข้อมูล Bid-Ask Spread ของพันธบัตรรัฐบาลไทยอายุ 5 ปี ระหว่างปี 2019–2023 ได้รับจากเว็บไซต์ ThaiBMA ซึ่งสามารถเข้าถึงได้ผ่านลิงก์ต่อไปนี้

- ThaiBMA Bond Quotation(The Thai Bond Market Association)
- ThaiBMA Daily Market Summary(The Thai Bond Market Association)

ข้อมูลดังกล่าวประกอบด้วยราคาเสนอซื้อ (Bid) และราคาเสนอขาย (Ask) ของพันธบัตร ซึ่งสามารถใช้คำนวณ Bid-Ask Spread ได้โดยการหาผลต่างระหว่างราคาเสนอขายและราคาเสนอซื้อ

$$\text{Bid-Ask Spread} = \text{Ask Price} - \text{Bid Price}$$

2) การเตรียมข้อมูลในภาษา R

หลังจากดาวน์โหลดและจัดเตรียมข้อมูลในรูปแบบ CSV แล้ว สามารถนำเข้าข้อมูลและคำนวณ Bid-Ask Spread ได้ดังนี้

```
# นำเข้าข้อมูล
data <- read.csv("bid_ask_data.csv")
# คำนวณ Bid-Ask Spread
data$Spread <- data$Ask - data$Bid
```

3) การตรวจจับจุดเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนด้วย PELT

ใช้แพ็คเกจ changepoint ใน R เพื่อวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน

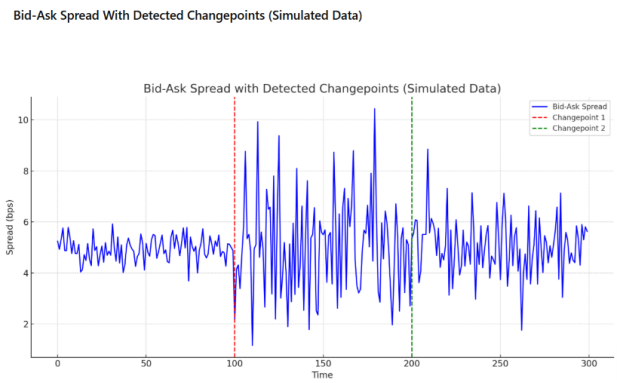
```
# ติดตั้งและโหลดแพ็คเกจ
install.packages("changepoint")
library(changepoint)
# วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน
```

```
result <- cpt.var(data$Spread, method = "PELT", penalty = "SIC")
# แสดงตำแหน่งของจุดเปลี่ยนแปลง
cpts(result)
```

4) การแสดงผลลัพธ์

แสดงกราฟของ Bid-Ask Spread พร้อมกับจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน:

```
# สร้างกราฟ
plot(data$Spread, type = "l", main = "Bid-Ask Spread with Changepoints", xlab = "Time", ylab = "Spread")
abline(v = cpts(result), col = "red", lty = 2)
```



รูปที่ 12.1 *จุดที่ความแปรปรวนของ Bid-Ask Spread เปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ*

จากกราฟ จะเห็นว่ามีจุดที่ความแปรปรวนของ Bid-Ask Spread เปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งอาจสอดคล้องกับเหตุการณ์ทางเศรษฐกิจหรือการเปลี่ยนแปลงในตลาดตราสารหนี้ เช่น ช่วงการระบาดของ COVID-19 หรือการปรับอัตราดอกเบี้ยนโยบายของธนาคารแห่งประเทศไทย

การวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์การเงิน

ช่วงเวลา	ค่า SD โดยประมาณ	ความหมายทางสภาพคล่อง
$t = 1$ ถึง 100	$\sigma \approx 1$	ตลาดมีสภาพคล่องดี ปกติ
$t = 101$ ถึง 200	$\sigma \approx 3$	สภาพคล่องตึงตัว สเปรดกว้างผิดปกติ
$t = 201$ ถึง 300	$\sigma \approx 1.5$	ตลาดเริ่มฟื้นตัว สเปรดแคบลงแต่ยังไม่ปกติ

การตีความผลลัพธ์

- ช่วงที่ 1: ก่อนจุดเปลี่ยนแปลงแรก ความแปรปรวนของ Bid-Ask Spread อยู่ในระดับต่ำ แสดงถึงสภาพคล่องที่ดีในตลาดตราสารหนี้

- ช่วงที่ 2: ระหว่างจุดเปลี่ยนแปลงแรกและจุดเปลี่ยนแปลงที่สอง ความแปรปรวนเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ สะท้อนถึงความไม่แน่นอนและสภาพคล่องที่ลดลง ซึ่งอาจเกิดจากเหตุการณ์เชิงลบในตลาด
- ช่วงที่ 3: หลังจุดเปลี่ยนแปลงที่สอง ความแปรปรวนลดลง แต่ยังคงสูงกว่าช่วงแรก แสดงถึงการฟื้นตัวของสภาพคล่องในตลาด

การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนใน Bid-Ask Spread สามารถใช้เป็นเครื่องมือในการประเมินสภาพคล่องของตลาดตราสารหนี้ และช่วยให้นักลงทุนและผู้กำหนดนโยบายสามารถตัดสินใจได้อย่างมีข้อมูลรองรับ โดยเฉพาะในช่วงเวลาที่ตลาดมีความผันผวนสูง □

12.5 การวิเคราะห์ Forward Rate และ Spot Rate เพื่อประเมินสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

ในการวิเคราะห์ตลาดตราสารหนี้ นอกจากการศึกษาความแปรปรวนของตัวชี้วัดด้านสภาพคล่อง เช่น Bid-Ask Spread หรือ CDS Spread แล้ว การทำความเข้าใจโครงสร้างของอัตราผลตอบแทนในอนาคตผ่าน Forward Rate และ Spot Rate ก็มีบทบาทสำคัญในการตีความสภาพคล่องเชิงโครงสร้างและการเคลื่อนไหวของตลาดในระยะยาว

12.5.1 ความหมายและบทบาทของ Forward Rate

Forward Rate หรืออัตราผลตอบแทนล่วงหน้า หมายถึงอัตราผลตอบแทนที่ตลาดคาดว่าจะได้รับจากการลงทุนในช่วงเวลาอนาคตช่วงหนึ่ง ซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปแบบของฟังก์ชันต่อเนื่องของเวลา และมีความสัมพันธ์โดยตรงกับราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีคูปอง (Zero-Coupon Bond) ตามสมการ

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right), \quad t < T \tag{12.8}$$

โดยที่ $P(t,T)$ แทน ราคาของพันธบัตรไร้คูปอง ณ เวลา t ที่ครบกำหนดในเวลา T

$f(t,s)$ แทน อัตราผลตอบแทนล่วงหน้า (Forward Rate) ระหว่าง t ถึง s



รูปที่ 12.2 *เส้นอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า*

สมการนี้แสดงให้เห็นว่า Forward Rate ทำหน้าที่เป็นตัวกลางในการประเมินมูลค่าของตราสารหนี้ โดยเฉพาะในกรณีที่ตลาดไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยในระหว่างงวด

12.5.2 ความเชื่อมโยงกับสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

จากหัวข้อ 12.4 ที่กล่าวถึง การตรวจจับจุดเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในข้อมูล เช่น Bid-Ask Spread ซึ่งบ่งชี้ถึงความตึงตัวของสภาพคล่องในระยะสั้น บทนี้ขยายความวิเคราะห์ไปยังโครงสร้างของอัตราผลตอบแทนล่วงหน้า (Forward Rate Structure) ซึ่งใช้เพื่อวิเคราะห์

1) แนวโน้มของอัตราดอกเบี้ยในระยะกลางถึงยาว

2) ความชันของ Yield Curve ซึ่งสัมพันธ์กับอุปสงค์/อุปทานของตราสารหนี้ในช่วงเวลาต่างกัน

3) ความไม่สมมาตร (asymmetry) ของโครงสร้างผลตอบแทน ซึ่งอาจชี้ถึงความเสี่ยงด้านสภาพคล่องในอนาคต

12.5.3 การประยุกต์ Forward Rate ในการวิเคราะห์ตลาด

1) การกำหนดราคาตราสารหนี้: Forward Rate ถูกใช้ในการคำนวณราคาตราสารหนี้ โดยเฉพาะพันธบัตรแบบ Zero-Coupon และตราสารอนุพันธ์ที่อ้างอิงอัตราดอกเบี้ย

2) การสร้าง Yield Curve และ Spot Rate Curve: Yield Curve ที่สร้างจาก Spot Rate และ Forward Rate มีบทบาทสำคัญในการอธิบายโครงสร้างผลตอบแทนของพันธบัตรที่มีอายุแตกต่างกัน

3) การประเมินสภาพคล่องผ่านการเปลี่ยนแปลงของ Forward Curve: หากเกิดความชันสูงหรือความผันผวนรุนแรงใน Forward Rate Curve ในช่วงใดช่วงหนึ่ง อาจแสดงถึง

- ความไม่แน่นอนของอัตราดอกเบี้ยในอนาคต
- ความตึงตัวของอุปสงค์/อุปทานในช่วงเวลานั้น
- การปรับตัวของตลาดต่อภาวะสภาพคล่องที่เปลี่ยนไป

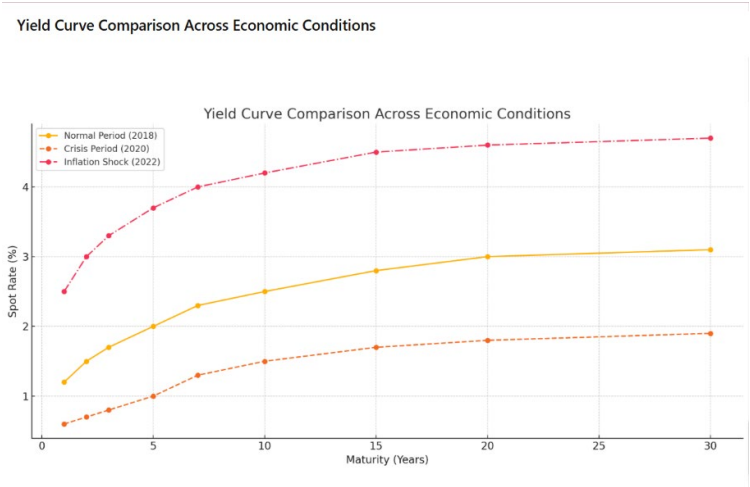
12.5.4 ตัวอย่างการตีความ Forward Rate

1) หาก $f(t,s)$ สูงมากในช่วงเวลาสั้น ๆ ข้างหน้า $\Rightarrow$ ตลาดคาดว่าอัตราดอกเบี้ยจะเพิ่มขึ้น $\Rightarrow$ สะท้อนภาวะที่ตลาดอาจขาดแคลนสภาพคล่องชั่วคราว

2) หาก $f(t,s)$ มีลักษณะกลับหัว (inverted curve) $\Rightarrow$ อาจสะท้อนความกลัวภาวะถดถอย $\Rightarrow$ นักลงทุนหลีกเลี่ยงตราสารหนี้ระยะยาว $\Rightarrow$ สภาพคล่องในปลาย curve ตึงตัว

Forward Rate และ Spot Rate ไม่เพียงเป็นเครื่องมือในการกำหนดมูลค่าตราสารหนี้เท่านั้น แต่ยังเป็นดัชนีสำคัญที่ช่วย เชื่อมโยงการวิเคราะห์ความเสี่ยงด้านสภาพคล่องระยะสั้น (จากหัวข้อ 12.4) เข้ากับโครงสร้างความคาดหวังด้านอัตราดอกเบี้ยและสภาพคล่องในอนาคตได้อย่างมีระบบ แนวทางนี้สอดคล้องกับงานของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ที่เสนอให้ผนวกการตรวจจับความแปรปรวนร่วมกับโครงสร้าง Forward Rate เพื่อประเมินสถานะตลาดอย่างแม่นยำและรอบด้าน

เพื่อความเข้าใจเชิงประจักษ์ ขอให้พิจารณากราฟ Yield Curve หรือ Forward Rate Curve ในช่วงวิกฤต เช่น ปี 2020 และปี 2022 เพื่อเปรียบเทียบกับช่วงปกติ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงลักษณะของโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยที่สะท้อนภาวะสภาพคล่องและความไม่แน่นอนในตลาดได้อย่างชัดเจน



รูปที่ 12.3 *Yield Curve ในช่วงวิกฤต เช่น ปี 2020 และปี 2022 เพื่อเปรียบเทียบกับช่วงปกติ*

กราฟด้านบนแสดง Yield Curve เปรียบเทียบในช่วงเศรษฐกิจต่าง ๆ ได้แก่

- ปี 2018 (ช่วงปกติ): Yield Curve มีความชันปานกลาง สะท้อนภาวะเศรษฐกิจที่มั่นคง
- ปี 2020 (ช่วงวิกฤต COVID-19): Yield Curve แบนราบและอยู่ในระดับต่ำ สะท้อนภาวะสภาพคล่องสูงจากการอัดฉีดเงินและอัตราดอกเบี้ยต่ำมาก
- ปี 2022 (เงินเฟ้อสูง): Yield Curve มีความชันสูงผิดปกติ โดยเฉพาะในช่วงอายุสั้น สะท้อนการขึ้นดอกเบี้ยอย่างรวดเร็วของธนาคารกลาง และความคาดหวังว่าอัตราดอกเบี้ยจะลดลงในอนาคต

ความเปลี่ยนแปลงของ Yield Curve เหล่านี้สามารถนำมาใช้ในการประเมินโครงสร้างของ Forward Rate และ การคาดการณ์ความตึงตัวของสภาพคล่องในอนาคต ได้อย่างมีนัยสำคัญ ทั้งยังสนับสนุนการวิเคราะห์ร่วมกับการตรวจจับจุดเปลี่ยนในความแปรปรวน (จากหัวข้อ 12.4) เพื่อให้เข้าใจพลวัตของตลาดตราสารหนี้ในแต่ละช่วงเวลาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 12.5 (การคำนวณ Forward Rate และการตีความโครงสร้างผลตอบแทน) พิจารณาอัตรา Spot Rate ของพันธบัตรรัฐบาล ณ เวลา $t = 0$ ดังนี้

อายุพันธบัตร (ปี)	Spot Rate $S(0,T)$ (%)
1	1.00
2	1.60
3	2.10

1) จงคำนวณ 1-year forward rate ระหว่างปีที่ 1 และปีที่ 2 (คือ $f(1,2)$)

2) วิเคราะห์ว่าอัตราผลตอบแทนล่วงหน้าในช่วงปีที่ 1–2 สะท้อนสภาพคล่องในตลาดอย่างไร แนวทางและวิธีคำนวณ

วิธีทำ สูตรการคำนวณ Forward Rate จาก Spot Rate

$$f(t_1,t_2)=\frac{S(0,t_2)\cdot t_2-S(0,t_1)\cdot t_1}{t_2-t_1}$$

ข้อ 1: คำนวณ $f(1,2)$ ได้ $f(1,2)=\frac{1.60\cdot 2-1.00\cdot 1}{2-1}=\frac{3.20-1.00}{1}=2.20\%$

ดังนั้น $f(1,2)=2.20\%$

การตีความเชิงสภาพคล่อง

1) อัตรา Forward ระหว่างปีที่ 1 และ 2 สูงกว่า Spot Rate ปีแรก (จาก 1.00% $\rightarrow$ 2.20%)

2) สะท้อนว่า ตลาดคาดว่าอัตราดอกเบี้ยจะเพิ่มขึ้นในอนาคต

3)เป็นสัญญาณถึงความไม่แน่นอนทางเศรษฐกิจและความตึงตัวของสภาพคล่องในระยะสั้นถึงกลาง

4) นักลงทุนต้องการผลตอบแทนชดเชยความเสี่ยงที่เพิ่มขึ้นในอนาคต ซึ่งอาจเกิดจาก

- การคาดการณ์ว่าธนาคารกลางจะขึ้นอัตราดอกเบี้ย
- ความต้องการถือครองเงินสดของนักลงทุนเพิ่มขึ้น
- การลดความมั่นใจในเสถียรภาพของตลาดตราสารหนี้

ค่าของ Forward Rate ที่เพิ่มสูงขึ้นสามารถใช้เป็นตัวบ่งชี้ล่วงหน้าของความตึงตัวของสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ได้ ซึ่งสนับสนุนแนวคิดจากหัวข้อ 12.5 และสอดคล้องกับการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในหัวข้อ 12.4 ที่เน้นการตรวจจับความเสี่ยงด้านสภาพคล่องในระยะสั้น

□

12.6 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของตราสารหนี้

ในการวิเคราะห์สภาพคล่องของตลาดตราสารหนี้อย่างลึกซึ้ง หัวข้อก่อนหน้านี้ (12.5) ได้กล่าวถึงการใช้โครงสร้างของอัตราผลตอบแทน เช่น Spot Rate และ Forward Rate เพื่อสะท้อนความคาดหวังของตลาดที่มีต่อทิศทางอัตราดอกเบี้ยในอนาคต รวมถึงภาวะสภาพคล่องที่เปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงเวลา เพื่อให้สามารถสร้างโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบพลวัต (dynamic interest rate structures) และนำไปประยุกต์ใช้ในการกำหนดราคาตราสารหนี้และตราสารอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องได้อย่างแม่นยำ หัวข้อนี้จึงจะนำเสนอ แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย (Interest Rate Models) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในด้านต่าง ๆ ได้แก่

- การจำลองพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยในระยะสั้น ($r(t)$) ภายใต้ภาวะตลาดที่เปลี่ยนแปลง
- การกำหนดราคาพันธบัตรแบบ Zero-Coupon และตราสารอนุพันธ์อิงอัตราดอกเบี้ย
- การประเมินความเสี่ยงของพอร์ตโฟลิโอที่ประกอบด้วยตราสารหนี้หลายประเภท

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลาย 3 แบบ ได้แก่

1) Vasicek Model – ตัวแบบพื้นฐานที่อัตราดอกเบี้ยเปลี่ยนแปลงแบบ Mean Reverting โดยมีการแจกแจงแบบปกติ
2) Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Model – ตัวแบบที่ปรับปรุงจาก Vasicek เพื่อให้ $r(t) \geq 0$ ตลอดเวลา และมีการแจกแจงแบบไม่เป็นศูนย์กลาง (non-central chi-square)
3) Hull-White Model – การขยาย Vasicek โดยมี drift ที่ขึ้นกับเวลา ทำให้สามารถปรับให้ตรงกับโครงสร้าง Spot Rate หรือ Forward Rate จริงได้ดี

การทำความเข้าใจตัวแบบเหล่านี้ไม่เพียงแต่ช่วยในการประเมินมูลค่าตราสารหนี้และอนุพันธ์เท่านั้น แต่ยังเป็นพื้นฐานสำคัญของการวิเคราะห์เชิงพลวัตและการวางกลยุทธ์บริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้อีกด้วย

12.6.1 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek

Vasicek (ค.ศ.1977) ได้เสนอตัวแบบอัตราดอกเบี้ยโดยให้ข้อสมมติว่าการเปลี่ยนแปลงโดยพลันของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น (Short Rate) จะเป็นไปตามกระบวนการแบบ Ornstein-Uhlenbeck ด้วยสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ภายใต้ความเสี่ยงที่เป็นกลาง (Risk Neutral) ซึ่งมีนิยามดังนี้ (Brigo & Mercurio, ค.ศ. 2006)

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma_r dW(t) \tag{12.9}$$

เมื่อ $r(t)$ แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

α แทน พารามิเตอร์ของอัตราเร็วในการกลับสู่ค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ย

β แทน พารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ยในระยะยาว

σ_r แทน พารามิเตอร์ของความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

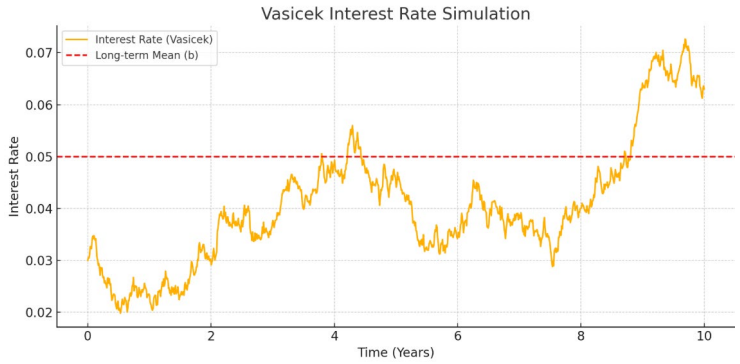
$W(t)$ แทน กระบวนการแบบวีเนอร์ (Wiener Process)

โดยที่ α, β และ $\sigma_r > 0$ และสามารถประมาณค่าของอัตราดอกเบี้ยได้จากปฏิยานุพันธ์ของสมการที่ (12.9) จากเวลาเท่ากับศูนย์ ถึง t ใด ๆ ได้ ดังนี้

$$r(t) = r(0)e^{-\alpha t} + \beta\left(1 - e^{-\alpha t}\right) + \sigma_r \int_0^t e^{-\alpha t} dW(t) \tag{12.10}$$

โดยที่ $r(t)$ มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ดังนี้

$$E\left[r(t)\right] = r(0)e^{-\alpha t} + \beta\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \text{ และ } Var\left(r(t)\right) = \frac{\sigma_r^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) \tag{12.11}$$



รูปที่ 12.4 *การจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง Vasicek*

กราฟด้านบนแสดงการจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง Vasicek โดยเห็นได้ว่าอัตราดอกเบี้ยจะมีพฤติกรรมผันผวนแต่มีแนวโน้มกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาวที่ $b = 0.05$ ตามหลักการ Mean Reversion ซึ่งเป็นลักษณะเด่นของ Vasicek Model

สำหรับการกำหนดราคาตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายคูปองที่เวลา t ใดๆ ภายใต้วันครบกำหนดไถ่ถอน T ตามตัวแบบของ Vasicek คือ

$$P(r,t,T) = A(t,T)\exp\left[-rB(t,T)\right] \tag{12.12}$$

เมื่อกำหนดให้

$$B(t,T) = \left(\frac{1}{a}\right)\left(1-e^{-a(T-t)}\right) \text{ และ } A(t,T) = \exp\left\{\overline{r}\left(B(t,T)-(T-t)\right) - \frac{\left(B(t,T)\right)^2\hat{\sigma}_r^2}{4a}\right\}$$

โดยที่ $\overline{r} = b - \dfrac{\hat{\sigma}_r^2}{2a^2}$

12.6.2 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Cox-Ingersoll-Ross (ค.ศ.1975) ได้เสนอตัวแบบของการเคลื่อนไหวของ อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบฉับพลัน โดยกระบวนการสโตแคสติกที่พจน์ของ drift เหมือนกับตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek แต่ในส่วนของพจน์ที่เป็น diffusion มีการปรับปรุงเพิ่มเติม ซึ่งมี นิยาม ดังนี้

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma_r\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{12.13}$$

โดยที่สมการที่ (12.13) ดังกล่าว มีลักษณะคล้ายกับตัวแบบของ Vasicek แต่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม สำหรับค่าพารามิเตอร์ α, β และ σ_r ว่า $2\alpha\beta > \sigma^2$ (มงคลเกียรติชัย, พ.ศ.2549)

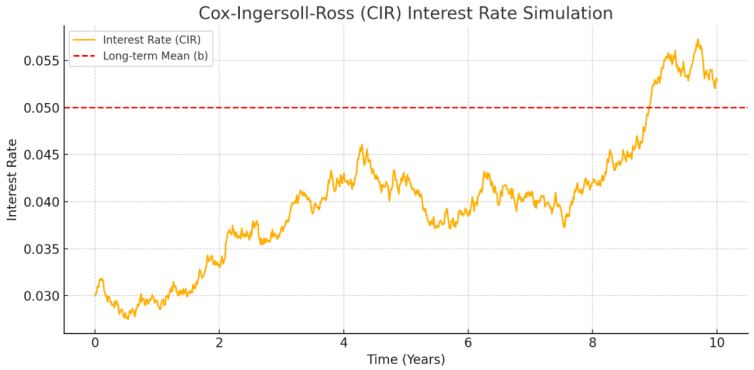
เมื่อพิจารณาในสมการที่ (12.13) จะสังเกตได้ว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจะมีค่าเป็นบวกเสมอ เนื่องจากเมื่อ $r(t) \to 0$ แล้ว $\alpha\left(\beta - r(t)\right)$ จะเป็นบวกและ $\sigma_r\sqrt{r(t)}$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เช่นกัน ทำให้ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Cox-Ingersoll-Ross มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ซึ่งไม่ได้อยู่ที่ศูนย์กลาง (Non-Central Chi-Square distribution) ซึ่งจะแตกต่างไปจากตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek ที่อัตรา

ดอกเบี้ยระยะสั้นแบบฉับพลันมีการแจกแจงปกติ (Normal distribution) การแจกแจงอัตราดอกเบี้ยในตัวแบบ Cox-Ingersoll-Ross เป็นดังนี้

$$r(t)=\frac{\sigma_r^2\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right)}{4\alpha}\chi_d^2\left(\frac{4\alpha e^{-\alpha(t-s)}}{\sigma_r^2\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right)}r(s)\right),t>s \tag{12.14}$$

เมื่อ $d=\frac{4\alpha\beta}{\sigma_r^2}$ แทน องศาเสรี (Degree of Freedom) และ λ แทน พารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบไคสแควร์ ซึ่งไม่ได้อยู่ที่ศูนย์กลาง (Non-Central Chi-Square Distribution)

$$\lambda=\frac{4\alpha e^{-\alpha(t-s)}}{\sigma_r^2\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right)}r(s) \tag{12.15}$$



รูปที่ 12.5 *การจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR)*

กราฟนี้แสดงการจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง **Cox-Ingersoll-Ross (CIR)** ซึ่งมีลักษณะเด่นคือ

- **อัตราดอกเบี้ยไม่เป็นลบ** (non-negative)
- **พฤติกรรม Mean Reverting** คล้าย Vasicek
- ความผันผวนมีขนาดแปรผันตามระดับของอัตราดอกเบี้ย (volatility proportional to $\sqrt{r_t}$)

เหมาะสำหรับการจำลองอัตราดอกเบี้ยในโลกความจริง เช่น พันธบัตรรัฐบาล

สำหรับการกำหนดราคาตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยที่เวลา t ใดๆ ภายใต้วันครบกำหนดไถ่ถอน T ตามตัวแบบของ Cox-Ingersoll-Ross คือ

$$P(r,t,T)=A(t,T)\exp\left[-rB(t,T)\right] \tag{12.16}$$

เมื่อกำหนดให้

$$B(t,T)=\frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(a+\gamma)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma} \quad \text{และ} \quad A(t,T)=\left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(a+\gamma)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]$$

โดยที่ $\gamma=\sqrt{(a)^2+2\hat{\sigma}_r^2}$

12.6.3 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Hull-White

Hull-White (ค.ศ.1990) ได้เสนอตัวแบบของการเคลื่อนไหวของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นแบบฉับพลัน โดยมีการขยายผลมาจากตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek ในส่วนของพจน์ที่เป็น drift ซึ่งมีนิยาม ดังนี้ (Hull, ค.ศ.2015)

$$dr(t) = \left[\theta(t) - \beta(t)r\right]dt + \sigma_r dW(t) \tag{12.17}$$

เมื่อปรับตัวแบบอัตราดอกเบี้ยข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek จะได้ตัวแบบในลักษณะ ดังนี้

$$r(t) = \beta\left[\frac{\theta(t)}{\beta} - r\right] + \sigma_r dW(t) \tag{12.18}$$

เมื่อ $r(t)$ แทน อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น

β แทน พารามิเตอร์ของอัตราเร็วในการกลับสู่ค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ย

$\frac{\theta(t)}{\beta}$ แทน time-dependent function reversion level

σ_r แทน พารามิเตอร์ของระดับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

$W(t)$ แทน กระบวนการแบบวีเนอร์ (Wiener Process)

และ $\theta(t)$ สามารถหาได้จาก

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial T} + \beta f(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right) \tag{12.19}$$

โดยที่ β และ σ_r เป็นค่าคงที่และสามารถประมาณค่าของอัตราดอกเบี้ยจากปฏิยานุพันธ์สมการที่ (12.17) จากเวลาเท่าศูนย์ ถึง t ใด ๆ ได้ ดังนี้

$$r(t) = e^{-\beta(t-s)}r(s) + \int_s^t \theta(u)e^{-\beta(t-u)}du + \sigma_r\int_s^t e^{-\beta(t-u)}dW(u)$$

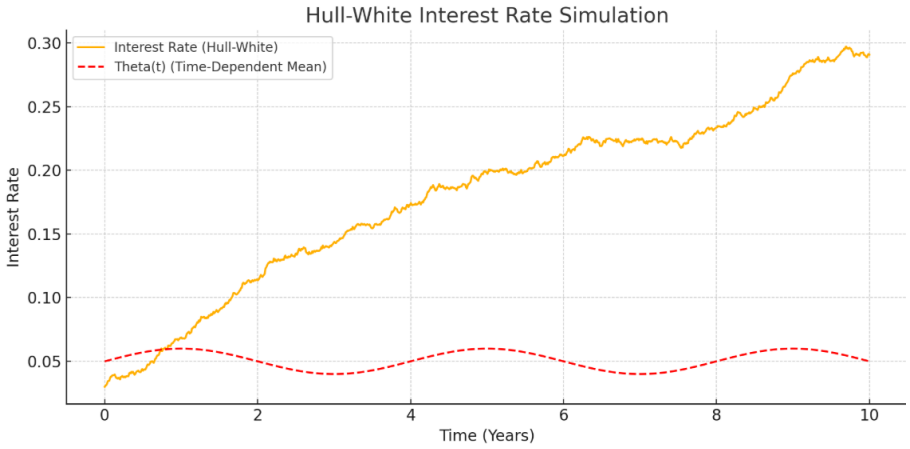
$$r(t) = e^{-\beta(t-s)}r(s) + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\beta(t-s)} + \sigma_r\int_s^t e^{-\beta(t-u)}dW(u)$$

โดยที่

$$\alpha(t) = f(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2 \tag{12.20}$$

โดยที่ $r(t)$ มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน ดังนี้

$$r(t) \sim N\left(e^{-\beta(t-s)}r(s) + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-\beta(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right) \tag{12.21}$$



รูปที่ 12.6 *การจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง Hull-White Model*

กราฟนี้แสดงการจำลองอัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลอง **Hull-White Model** ซึ่งเป็นการขยายจาก Vasicek โดยให้ **ค่าคาดหมายระยะยาวเป็นฟังก์ชันของเวลา** $\theta(t)$ แทนค่าคงที่ เช่นในตัวอย่างนี้ใช้ฟังก์ชันไซน์เพื่อแสดงแนวคิดการปรับตามฤดูกาลหรือวัฏจักรเศรษฐกิจ

จุดเด่นของ Hull-White Model

- **ความยืดหยุ่นสูงกว่า Vasicek และ CIR**
- ใช้งานได้ดีกับการกำหนดราคาตราสารหนี้ที่มีอัตราดอกเบี้ยไม่คงที่
- รองรับการปรับค่าให้สอดคล้องกับ yield curve ในตลาดปัจจุบัน

สำหรับการกำหนดราคาตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยที่เวลา t ใด ๆ ภายใต้วันครบกำหนดไถ่ถอน T ตามตัวแบบของ Hull-White คือ

$$P(r,t,T) = A(t,T)\exp\left(-B(t,T)\right)r(t) \tag{12.22}$$

เมื่อ $B(t,T) = \frac{1}{b}\left(1-e^{b(T-t)}\right)$ และ

$$A(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{B(t,T)f(0,t) - \frac{\hat{\sigma}_r^2}{4b}\left(1-e^{-2bt}\right)B(t,T)^2\right\} \tag{12.23}$$

โดยที่ $P(0,T)$ คือ ราคาของตราสารหนี้ที่ไม่จ่ายคูปองที่เวลาวันครบอายุ T และ

$P(0,T) = \exp\left(-f(0,t)\right)$

12.7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

การวิเคราะห์พฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยในตลาดตราสารหนี้ตามหัวข้อก่อนหน้า โดยเฉพาะในหัวข้อ 12.6 ซึ่งได้นำเสนอรูปแบบของกระบวนการสุ่มต่าง ๆ ได้แก่ Vasicek, CIR และ Hull-White จำเป็นต้องใช้

พารามิเตอร์เฉพาะของแต่ละแบบจำลองเพื่อจำลองพฤติกรรมของ $r(t)$ ได้อย่างสมจริง ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเทคนิคการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองเหล่านั้น โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation: MLE) ซึ่งเป็นเครื่องมือทางสถิติสำคัญที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย

12.7.1 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek และ Hull-White

ค่าประมาณแบบจุดของพารามิเตอร์ α, β และ σ_r ในตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Vasicek (สามารถประยุกต์กับ Hull-White ได้เมื่อมีการปรับ Drift ให้ขึ้นกับเวลา) ตามวิธี MLE (Gerebrink et al., ค.ศ. 2019) มีดังนี้

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{dt}\log\left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} r_{t_i} r_{t_{i-1}} - \sum_{i=1}^{n} r_{t_i}\sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}}}{n\sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}}\right)^2}\right),\ \hat{\beta} = \frac{1}{n(1-e^{-\hat{\alpha}dt})}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{t_i} - e^{-\hat{\alpha}dt}\sum_{i=1}^{n} r_{t_{i-1}}\right) \tag{12.24}$$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{2\hat{\alpha}}{n(1-e^{-2\hat{\alpha}dt})}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{t_i} - r_{t_{i-1}}e^{-\hat{\alpha}dt} - \hat{\beta}(1-e^{-\hat{\alpha}dt})\right)^2 \tag{12.25}$$

12.7.2 ตัวแบบอัตราดอกเบี้ยของ Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

ในกรณีของตัวแบบ CIR ซึ่งมีการแจกแจงของ $r(t)$ ตามการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่ไม่ได้อยู่ที่ศูนย์กลาง (Non-central Chi-Square Distribution) เราสามารถเขียนฟังก์ชันการแจกแจงสะสมได้ดังนี้

$$P[r(t) \le x \mid r(s)] = F_{\chi^2(d,\lambda)}\left(\frac{4\alpha x}{\hat{\sigma}_r^2(1-e^{-\alpha(t-s)})}\right) \tag{12.26}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงมีรูปแบบ

$$P[x \mid r(s)] = c \cdot p_{\chi^2(d,\lambda)}(cx) \tag{12.27}$$

โดยที่ค่าคงที่ c คือ $c = \frac{4\alpha}{\hat{\sigma}_r^2(1-e^{-\alpha(t-s)})}$

ดังนั้นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของชุดข้อมูล $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ คือ

$$L(\alpha,\beta,\sigma;x) = \prod_{i=2}^{n} c\, p_{\chi^2(d,\lambda)}(cx_i \mid x_{i-1}) \tag{12.28}$$

หรือในรูปของลอการิทึมของฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$\log L(\alpha,\beta,\sigma;x) = \sum_{i=2}^{n}\log c + \sum_{i=2}^{n}\log p_{\chi^2(d,\lambda)}(cx_i \mid x_{i-1}) \tag{12.29}$$

โดยค่าที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ α, β, σ_r จะเป็นค่าที่ทำให้ $\log L$ มีค่ามากที่สุด

12.8 การจำลองอัตราดอกเบี้ย

จากหัวข้อก่อนหน้า (12.7) ที่กล่าวถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย ไม่ว่าจะเป็นแบบจำลอง Vasicek, Hull-White หรือ CIR โดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum

Likelihood Estimation: MLE) เมื่อได้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมแล้ว ขั้นตอนต่อไปที่สำคัญคือ การจำลองพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น เพื่อใช้ในการประเมินราคาตราสารหนี้ การบริหารความเสี่ยง และการทดสอบสมมุติฐานในเชิงปริมาณ

โดยทั่วไป การจำลองค่าของกระบวนการอัตราดอกเบี้ยที่อยู่ภายใต้สมการเชิงอนุพันธ์สุ่ม (Stochastic Differential Equation: SDE) สามารถทำได้ 2 วิธีหลัก ได้แก่

1) การจำลองแบบแม่นยำ (Exact Simulation Method)

2) การจำลองแบบประมาณค่าด้วยออยเลอร์ (Euler Approximation)

ในหัวข้อนี้จะเน้นเฉพาะการจำลองแบบแม่นยำ ซึ่งมีประโยชน์ในการหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดเชิงตัวเลขสะสม และสามารถใช้กับแบบจำลองที่มีการแจกแจงเชิงปิด (Closed-form Distribution)

12.8.1 การจำลองอัตราดอกเบี้ยแบบ Vasicek

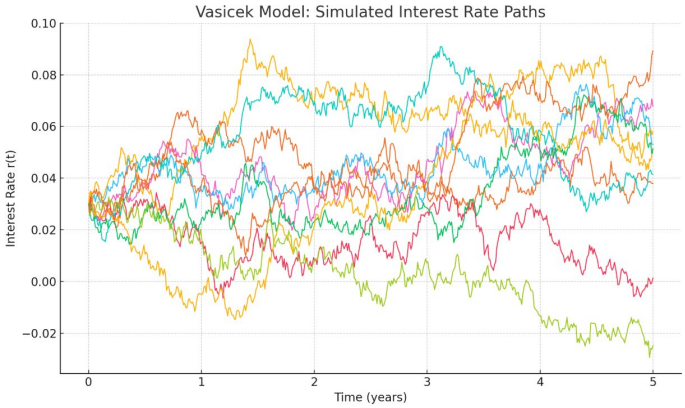
กำหนดให้ $r(s)$ คืออัตราดอกเบี้ย ณ เวลา s โดยที่การแจกแจงของ $r(t)$ ณ เวลา $t > s$ อยู่ในรูปแบบการแจกแจงปกติ สามารถเขียนได้ว่า

$$r(t) \sim \mathcal{N}\left(r(s)e^{-a(t-s)} + b\left(1-e^{-a(t-s)}\right), \frac{\hat{\sigma}_r^2}{2a}\left(1-e^{-2a(t-s)}\right)\right) \tag{12.30}$$

ดังนั้นกระบวนการสุ่มของ $r(t)$ ที่เวลา t_{i+1} จากค่า $r(t_i)$ สามารถเขียนเป็นสมการ

$$r_{t_{i+1}} = e^{-a(t_{i+1}-t_i)}r_{t_i} + b(1-e^{-a(t_{i+1}-t_i)}) + \hat{\sigma}_r\sqrt{\frac{1-e^{-2a(t_{i+1}-t_i)}}{2a}}Z_{i+1} \tag{12.31}$$

เมื่อ $Z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$



รูปที่ 12.7 *การจำลองเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยตามตัวแบบ Vasicek*

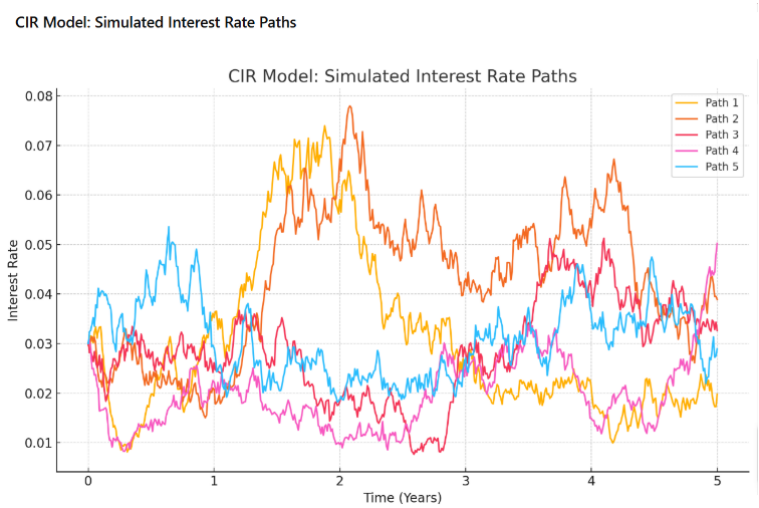
กราฟแสดงการจำลองเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยตามตัวแบบ Vasicek โดยใช้พารามิเตอร์ที่กำหนดไว้ อัตราดอกเบี้ยเริ่มต้นที่ 3% และแสดงให้เห็นการเคลื่อนไหวแบบสุ่มที่โน้มกลับสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาวที่ 5% อย่างค่อยเป็นค่อยไปภายใต้ความผันผวน

12.8.2 การจำลองอัตราดอกเบี้ยแบบ CIR

แบบจำลอง CIR มีการแจกแจงแบบไม่สมมาตรและเป็นไปตามไคสแควร์แบบไม่อยู่ที่ศูนย์กลาง โดยเขียนได้ว่า

$$r_{t_{i+1}} = \frac{\hat{\sigma}_r^2(1-e^{-a(t-s)})}{4a} \cdot \chi_d^2\left(\frac{4ae^{-a(t-s)}}{\hat{\sigma}_r^2(1-e^{-a(t-s)})} r_{t_i}\right) \tag{12.32}$$

โดย $\chi_d^2(\lambda)$ คือการแจกแจงไคสแควร์แบบไม่อยู่ที่ศูนย์กลาง



รูปที่ 12.8 *การจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นตามแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR)*

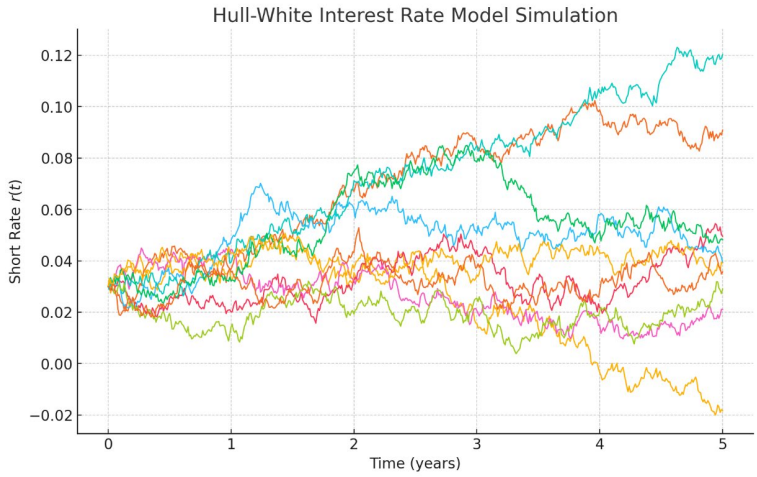
กราฟจำลองอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นตามแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR) แสดงให้เห็นพฤติกรรมการเดินแบบสุ่มที่ไม่สามารถมีค่าเป็นลบ (non-negative) และโน้มเข้าสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาว b=0.04 ตามสมมติฐานของแบบจำลอง โดยแต่ละเส้นแทนเส้นทางจำลองที่แตกต่างกันของ $r(t)$ ในช่วงเวลา 5 ปี

12.8.3 การจำลองอัตราดอกเบี้ยแบบ Hull-White

สำหรับแบบจำลอง Hull-White ซึ่งพัฒนาต่อจาก Vasicek โดยอนุญาตให้ค่าเฉลี่ยระยะยาวเปลี่ยนตามเวลา สามารถเขียนสมการการจำลองแบบแม่นยำได้เป็น

$$r_{t_{i+1}} = e^{-a(t_{i+1}-t_i)} r_{t_i} + \hat{\alpha}_{t_{i+1}} - \hat{\alpha}_{t_i} e^{-a(t_{i+1}-t_i)} + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_r^2}{2a}(1-e^{-2a(t_{i+1}-t_i)})} Z_{i+1} \tag{12.33}$$

โดย $Z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0,1)$ และ $\hat{\alpha}_t$ เป็นค่าฟังก์ชันค่าเฉลี่ยระยะยาวที่อาจถูกประมาณจากโครงสร้างของ Yield Curve



รูปที่ 12.9 *การจำลองเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น* $r(t)$ *ตาม ตัวแบบ Hull-White*

กราฟด้านบนแสดงการจำลองเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ ตาม ตัวแบบ Hull-White โดยใช้สมการจำลองที่แม่นยำ (Exact Simulation) โดยสมมติให้ $\alpha(t) = b(1 - e^{-at})$ เพื่อแสดงผลกระทบของ mean reversion และโครงสร้างเวลาในอัตราดอกเบี้ยตามทฤษฎี

การจำลองอัตราดอกเบี้ยในแต่ละแบบจำลองข้างต้น เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการประเมินความเสี่ยง การบริหารพอร์ตการลงทุน และการทดสอบแบบจำลองทางการเงินที่ใช้อัตราดอกเบี้ยเป็นองค์ประกอบพื้นฐาน โดยเฉพาะในช่วงที่ตลาดเกิดความผันผวน

12.9 การกำหนดราคาตราสารหนี้

จากหัวข้อก่อนหน้า ซึ่งได้กล่าวถึงแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย (เช่น Vasicek, CIR และ Hull-White) รวมถึงเทคนิคการประมาณค่าพารามิเตอร์ และการจำลองการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น $r(t)$ แล้วนั้น ขั้นตอนต่อมาที่มีความสำคัญต่อการประยุกต์ใช้ในโลกการเงิน คือ \textbf{การกำหนดราคาตราสารหนี้} ภายใต้สภาวะของโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

การกำหนดราคาตราสารหนี้ (Bond Valuation)จำเป็นต้องใช้อัตราผลตอบแทนในการคิดลดกระแสเงินสดที่จะได้รับในอนาคต ซึ่งโดยทั่วไปมีอยู่ 3 รูปแบบ คือ อัตราผลตอบแทนอย่างง่าย (simple yield) อัตราผลตอบแทนทบต้น (discrete compounding yield) และอัตราผลตอบแทนทบต้นแบบต่อเนื่อง (continuously compounded yield) อย่างไรก็ตาม เพื่อให้สอดคล้องกับการวิเคราะห์เชิงแบบจำลองที่ใช้การแจกแจงแบบต่อเนื่องของ $r(t)$ ในบทนี้จะพิจารณาเฉพาะกรณีของอัตราผลตอบแทนทบต้นแบบต่อเนื่องเท่านั้น

12.9.1 การกำหนดราคาตราสารหนี้กรณีที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ย (Zero-Coupon Bond)

ราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยสามารถคำนวณได้จากสมการพื้นฐานของการคิดลดกระแสเงินสดด้วยอัตราผลตอบแทนทบต้นแบบต่อเนื่อง ดังนี้

$$P_{ZCB}(t,T) = \frac{1}{e^{R(t,T)(T-t)}} \tag{12.34}$$

เมื่อ $P_{ZCB}(t,T)$ คือราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ย ณ เวลา t ที่ครบกำหนดไถ่ถอนในเวลา T

$R(t,T)$ คืออัตราผลตอบแทนทบต้นแบบต่อเนื่องที่ใช้ระหว่างช่วง $[t,T]$

อัตรา $R(t,T)$ นี้สามารถได้มาจากโครงสร้างของ Spot Rate หรืออัตราดอกเบี้ยตามแบบจำลองที่กล่าวไว้ในหัวข้อก่อนหน้า เช่น การจำลอง Forward Rate หรือการใช้ฟังก์ชันค่าเฉลี่ยของ Hull-White model ในการหาค่า $R(t,T)$

12.9.2 การกำหนดราคาตราสารหนี้กรณีที่มีการจ่ายดอกเบี้ย (Coupon Bond)

กรณีที่ตราสารหนี้มีการจ่ายดอกเบี้ยเป็นงวด ๆ ราคาของตราสารหนี้สามารถคำนวณได้จากการรวมค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดทั้งหมด (ทั้งดอกเบี้ยและเงินต้น) โดยใช้อัตราผลตอบแทนที่สอดคล้องกันในแต่ละช่วงเวลา

$$\text{Price} = \sum_{t=1}^{T} C_t \cdot P_{ZCB}(0,t) + P_{ZCB}(0,T) \cdot (F + C_T) \tag{12.35}$$

เมื่อ C_t คือดอกเบี้ยที่จ่ายในงวดที่ t

F คือมูลค่าที่ตราไว้ (Face Value) ของตราสารหนี้

$P_{ZCB}(0,t)$ คือราคาของตราสารหนี้แบบไม่มีดอกเบี้ยที่ครบกำหนดในงวด t

การประเมิน $P_{ZCB}(0,t)$ สามารถได้จากผลลัพธ์ของแบบจำลองที่นำเสนอในหัวข้อ 12.6 และ 12.8 ซึ่งให้ข้อมูลโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้น และสามารถนำมาใช้เพื่อสร้าง Zero-Coupon Yield Curve ได้อย่างแม่นยำ

ดังนั้น การกำหนดราคาตราสารหนี้ในบริบทของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยและการจำลองอัตราดอกเบี้ยไม่เพียงแต่ช่วยในการวิเคราะห์ความเหมาะสมของราคาในตลาดเท่านั้น แต่ยังมีบทบาทสำคัญในการบริหารความเสี่ยง พอร์ตการลงทุน และกลยุทธ์การปรับโครงสร้างหนี้อีกด้วย

12.10 หลักการการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน

ในการศึกษาความสามารถในการแปลงสินทรัพย์เป็นเงินสดในตลาดตราสารหนี้ ความเร็วในการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสด (Asset-to-Cash Conversion Speed) ถือเป็นตัวแปรสำคัญที่สะท้อนถึงระดับของสภาพคล่อง และ เสถียรภาพทางการเงินของตลาดในช่วงเวลาหนึ่ง

โดยอ้างอิงจากงานวิจัยของ **Witayakiattilerd และคณะ (2024)** ได้มีการนำเสนอแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ที่สามารถประเมินอัตราการแลกเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดในแบบเรียลไทม์ โดยใช้แนวคิด Instant Exchange Analytics ซึ่งประกอบด้วยสมการการเปลี่ยนกลับที่สามารถตอบสนองต่อพฤติกรรมของตลาดได้ทันที โดยไม่จำเป็นต้องรอการปิดตลาดหรือการสรุปธุรกรรม

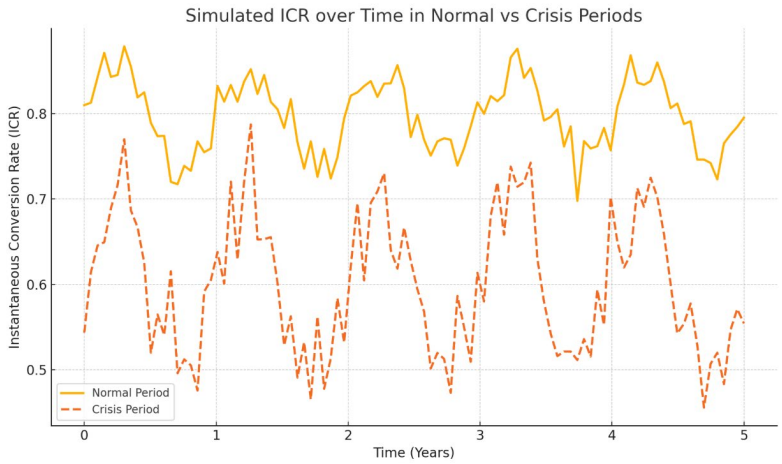
เพื่อประเมินประสิทธิภาพของการแปลงสินทรัพย์เป็นเงินสดในตลาดตราสารหนี้ งานวิจัยได้เสนอเมตริกใหม่ที่เรียกว่า

$$\mathrm{ICR}(t) = \frac{\Delta \mathrm{Cash}(t)}{\Delta \mathrm{Asset}(t)}\Big|_{\Delta t \to 0} \tag{12.36}$$

ซึ่ง Instantaneous Conversion Ratio (ICR) วัดการเปลี่ยนแปลงของสถานะเงินสดต่อหน่วยของการเปลี่ยนแปลงมูลค่าตราสารหนี้ที่ถูกขายหรือแปลงในช่วงเวลาสั้นที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ โดยใช้ข้อมูลจากตลาดจริง เช่น อัตราดอกเบี้ยระยะสั้นจำลองจากตัวแบบ Vasicek หรือ CIR (ดูหัวข้อ 12.6–12.8) ประกอบกับ Spot/Forward Yield Curve (จากหัวข้อ 12.5) สามารถวิเคราะห์ได้ว่า

- ในช่วงที่ Forward Curve แบนราบหรือลาดลง (inversion)} ค่า $\mathrm{ICR}(t)$ จะต่ำลงอย่างมีนัยยะ เนื่องจากราคาตราสารหนี้ลดลงจากความคาดหวังดอกเบี้ยขาขึ้น ทำให้ขายตราสารหนี้ได้ในราคาต่ำกว่า face value

- ในช่วง Liquidity Shock เช่น วิกฤต COVID-19 (2020) หรือการขึ้นดอกเบี้ยอย่างรวดเร็ว (2022) พบว่า $\mathrm{ICR}(t)$ มีความผันผวนสูงและลดลงต่ำกว่า 1.0 อย่างต่อเนื่อง สะท้อนถึงการสูญเสียมูลค่าขณะขายสินทรัพย์



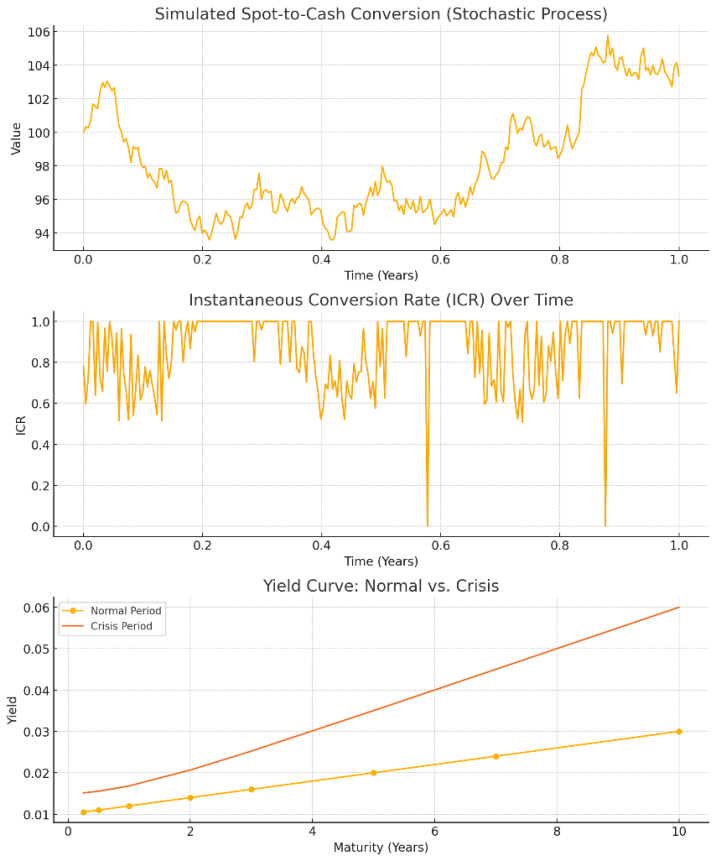
รูปที่ 12.10 *การเปรียบเทียบค่าของอัตราการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลันระหว่างช่วงเวลาปกติและช่วงวิกฤตทางการเงิน*

กราฟด้านบนแสดงการเปรียบเทียบค่าของอัตราการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน (Instantaneous Conversion Rate: ICR) ระหว่างช่วงเวลาปกติและช่วงวิกฤตทางการเงิน

- ช่วงปกติ: ค่า ICR มีความผันผวนต่ำกว่า และคงอยู่ในระดับสูง (~0.8)
- ช่วงวิกฤต: ค่า ICR ลดลง (~0.6) และมีความผันผวนสูงขึ้น สะท้อนถึง **สภาพคล่องที่ลดลง**

การแปลงสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลันนี้ มีความสัมพันธ์เชิงกลไกกับ

- โครงสร้างผลตอบแทน (Term Structure) ที่กำหนดราคาปัจจุบันของตราสารหนี้ผ่าน Spot Rate และ Forward Rate (หัวข้อ 12.5)



รูปที่ 12.11 *การเปรียบเทียบค่าของอัตราการเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลันระหว่างช่วงเวลาปกติและช่วงวิกฤตทางการเงิน*

ภาพกราฟข้างต้นประกอบด้วย

1) **กราฟ Spot-to-Cash Conversion**: แสดงการจำลองมูลค่าการเปลี่ยนจากสินทรัพย์เป็นเงินสดโดยใช้กระบวนการแบบสุ่ม (Stochastic Process) ซึ่งแสดงความผันผวนในช่วงเวลาต่าง ๆ ตามการเคลื่อนไหวของตลาด

2) **กราฟ ICR (Instantaneous Conversion Rate)**: แสดงพฤติกรรมของอัตราการเปลี่ยนกลับเป็นเงินสดในช่วงเวลาปกติและช่วงวิกฤต โดยมีความผันผวนสูงขึ้นเมื่อเข้าสู่ช่วงความไม่แน่นอน

3) **Yield Curve Comparison**: เปรียบเทียบระหว่างโครงสร้างอัตราผลตอบแทนในช่วงภาวะปกติและช่วงวิกฤต โดยพบว่าในช่วงวิกฤตอัตราผลตอบแทนระยะสั้นปรับสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ

- ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย ที่สามารถจำลองผ่านแบบจำลอง Vasicek, CIR และ Hull-White เพื่อวิเคราะห์ช่วงเวลาที่ตลาดมีความตึงตัว (หัวข้อ 12.6–12.8)

-การกำหนดราคาตราสารหนี้ (หัวข้อ 12.9) ที่อาศัยการประมาณค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดภายใต้การเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย

ข้อเสนอเชิงนโยบาย

การใช้แนวคิด ICR และแบบจำลองของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** จึงสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการ

- เตือนภัยล่วงหน้าเมื่อสภาพคล่องในตลาดลดลงอย่างรวดเร็ว

- ประเมินผลกระทบของการใช้มาตรการทางการเงิน เช่น QE หรือ QT ต่อการแลกเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสด

- เสนอเกณฑ์สำหรับกำหนดระดับ buffer liquidity ที่เหมาะสมในกองทุนตราสารหนี้

การวิเคราะห์เชิงลึกนี้แสดงให้เห็นว่า “สภาพคล่อง” ไม่ใช่เพียงค่าทางสถิติอย่าง bid-ask spread เท่านั้น แต่รวมถึงกลไกการเปลี่ยนสถานะของสินทรัพย์ได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของการคงไว้ซึ่งเสถียรภาพในตลาดการเงิน

12.11 กรณีศึกษาการเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดในตลาดการเงินไทย

การเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดอย่างมีประสิทธิภาพเป็นปัจจัยสำคัญที่สะท้อนระดับสภาพคล่องของตลาดทุน งานวิจัยของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ได้นำเสนอแนวทางการวิเคราะห์อัตราแลกเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ โดยใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ผสานพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ย อัตราผลตอบแทน และความผันผวนในตลาด เพื่อให้สามารถประเมินราคาตราสารหนี้ได้อย่างเหมาะสมตามสภาพตลาดในแต่ละช่วงเวลา

12.11.1 การเลือกแบบจำลองที่ใช้ในการประเมินราคา

การประเมินประสิทธิภาพของแบบจำลองอิงจาก Root Mean Square Error (RMSE) ซึ่งวัดจากการพยากรณ์ราคาตราสารหนี้บนข้อมูลที่ไม่เคยใช้ในการฝึกแบบจำลองมาก่อน (Unseen Data) จำนวน 68 แบบจำลอง วิธีนี้สะท้อนถึงความสามารถของแบบจำลองในการประเมินราคาที่แม่นยำในภาวะตลาดจริง

ต่างจากงานของวิจัยของ Orlando (ค.ศ.2020) ที่เน้นวัด RMSE จากการเปรียบเทียบ Instantaneous rate กับ spot rate บนข้อมูลเดิม งานศึกษานี้ประเมินโดยตรงที่ระดับราคาตราสารหนี้ ซึ่งเหมาะสมต่อการวิเคราะห์สภาพคล่องเชิงปฏิบัติในตลาดการเงินไทย

12.11.2 กระบวนการประเมินและวิเคราะห์แบบจำลอง

1) การรวบรวมและเตรียมข้อมูล

- ใช้ข้อมูลราคาตราสารหนี้รายวัน (ไม่เกิน 10 ปี) จำนวน 4,105 รายการ

- วิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนด้วย cpt.var และเลือก Penalty ที่เหมาะสม

2) การฝึกและประเมินแบบจำลอง

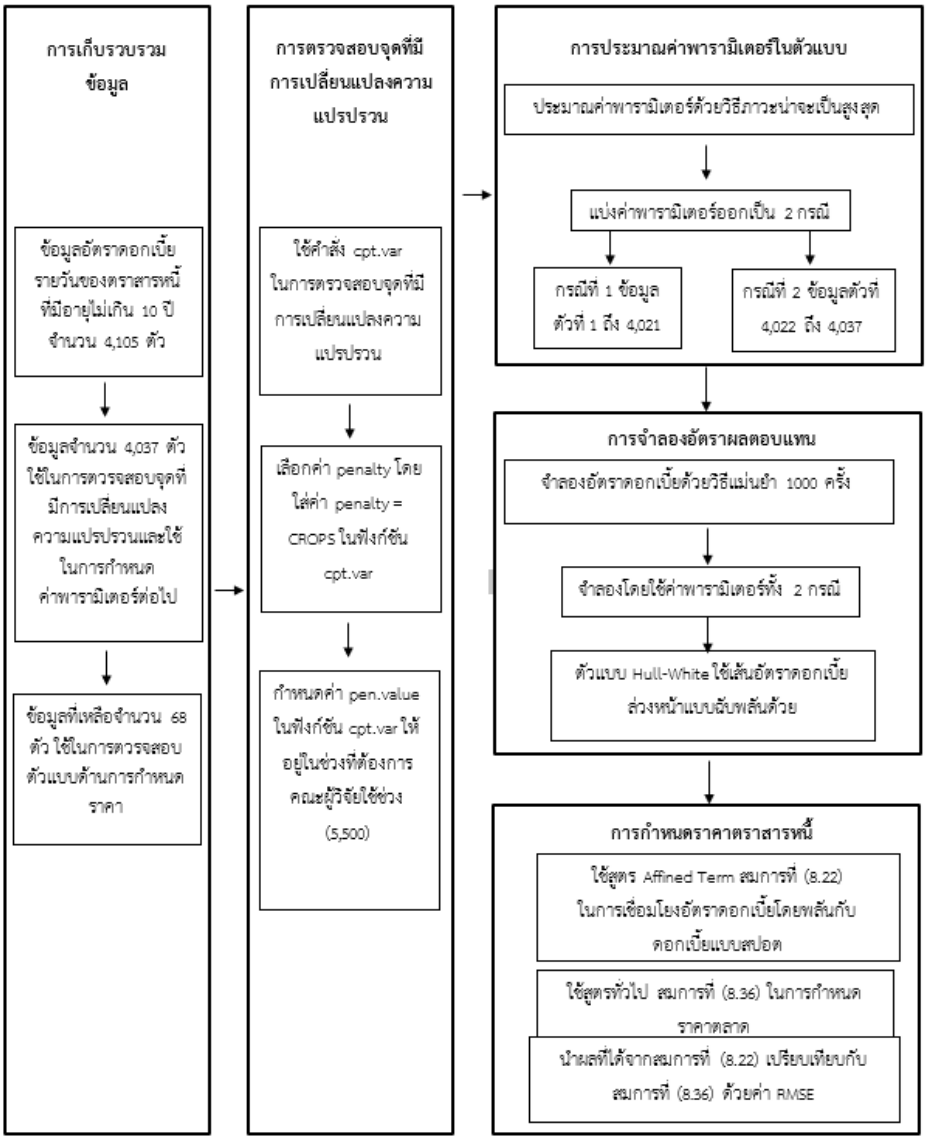
- แบ่งข้อมูลสำหรับฝึกและทดสอบ

- ใช้แบบจำลอง Hull-White และ CIR ในการวิเคราะห์เนื่องจากตัวแบบเหล่านี้สามารถจำลองโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยและราคาตราสารหนี้ได้อย่างยืดหยุ่น

3) การเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

- วัด RMSE บน Unseen Data เพื่อจัดอันดับแบบจำลองที่มีความแม่นยำสูงสุด

แนวทางนี้สามารถนำไปใช้ประเมินสภาพคล่องตลาดรอง รวมถึงสนับสนุนระบบการกำหนดราคาที่ทันสถานการณ์และเหมาะสมต่อการเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบฉับพลัน โดยขั้นตอนการการดำเนินการสามารถสรุปดังแผนภาพ ดังนี้



รูปที่ 12.12 *แผนภาพสรุปแนวคิดในขั้นตอนการดำเนินงาน*

12.11.3 ผลการดำเนินการในแต่ละขั้นตอนของกรณีศึกษา

จากแนวคิด “การเปลี่ยนกลับสินทรัพย์เป็นเงินสดแบบฉับพลัน” ตามกรอบของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** งานวิจัยนี้มีเป้าหมายเพื่อสร้างตัวแบบคณิตศาสตร์ที่สามารถใช้กำหนดอัตราแลกเปลี่ยนของตราสารหนี้ให้แปลงเป็นเงินสดได้อย่างมีประสิทธิภาพและทันต่อสภาวะตลาดจริง (real-time bond-to-cash conversion) โดยใช้ข้อมูลผลตอบแทนรายวันของตราสารหนี้ภาครัฐแบบไม่จ่ายคูปอง (Zero-Coupon Bond) อายุ 1 เดือนถึง 10 ปี รวม 4,105 รายการ ครอบคลุมช่วงปี พ.ศ. 2547 – 2563 โดยมีรายละเอียดกระบวนการและผลการดำเนินงานดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: ผลการตรวจสอบจุดที่เปลี่ยนค่าความแปรปรวน

1.1) การกำหนดค่า Penalty เพื่อค้นหาจุดเปลี่ยนแปลงความแปรปรวน

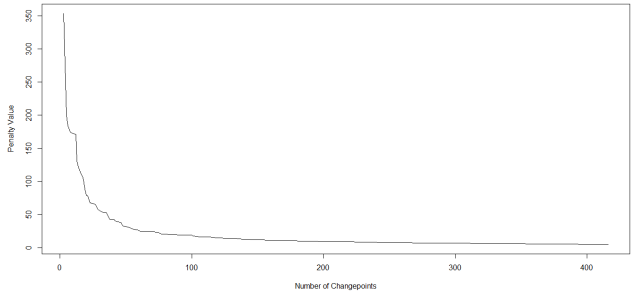
- ใช้คำสั่ง pen.value.full() ในซอฟต์แวร์วิเคราะห์ข้อมูล เพื่อประเมินค่า Penalty ที่เหมาะสมในการค้นหาจุดเปลี่ยนแปลง
- ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่า ค่า Penalty ที่ตำแหน่ง 238 และ 239 แสดงความแตกต่างของความแปรปรวนอย่างมีนัยสำคัญ (รูปที่ 12.3)

```
  [1]   5.000000   5.024446   5.064259   5.080639   5.139735   5.144217   5.184113   5.223307   5.253170   5.272673
 [11]   5.289940   5.294247   5.314790   5.334898   5.417536   5.454724   5.461267   5.472587   5.496023   5.507363
 [21]   5.542615   5.558972   5.585501   5.609403   5.610490   5.677053   5.679646   5.725983   5.873282   5.874163
 [31]   5.876700   5.892188   5.915709   5.944090   6.075919   6.163473   6.228336   6.248174   6.252951   6.255329
 [41]   6.279804   6.317013   6.321068   6.335345   6.336895   6.361586   6.389109   6.406338   6.453424   6.460895
 [51]   6.472579   6.483018   6.530014   6.530746   6.611425   6.625576   6.636985   6.676542   6.687520   6.730904
 [61]   6.736785   6.753086   6.784655   6.798884   6.888332   6.890794   6.913748   6.923323   6.928709   6.977241
 [71]   7.010377   7.015745   7.018443   7.021259   7.033732   7.056849   7.077457   7.205606   7.250468   7.317726
 [81]   7.341794   7.362258   7.387747   7.483237   7.493376   7.495399   7.536865   7.576532   7.882935   7.951179
 [91]   7.964774   7.966620   7.975752   7.981770   8.131007   8.140605   8.210832   8.258492   8.267634   8.328277
[101]   8.362430   8.381228   8.490679   8.589566   8.602772   8.670094   8.677692   8.688097   8.718847   8.894013
[111]   8.978919   8.997039   9.018221   9.095214   9.105223   9.113893   9.202880   9.203601   9.271565   9.289187
[121]   9.291982   9.336085   9.429698   9.434492   9.475213   9.494351   9.569036   9.595653   9.643210   9.654852
[131]   9.687359   9.751551   9.895454  10.372889  10.373849  10.428029  10.470617  10.597850  10.599956  10.657177
[141]  10.668317  10.833070  10.872205  11.234193  11.549767  11.638725  12.114715  12.193036  12.341323  12.395189
[151]  12.462117  12.474763  12.620975  12.927494  12.942428  13.574895  13.961631  14.004696  14.156268  14.248468
[161]  14.489133  14.502517  14.623793  14.645551  14.957261  15.048660  15.207538  15.391019  15.473202  16.063520
[171]  16.205002  16.357355  16.562045  16.618745  16.868672  17.652134  17.795206  18.932037  18.953151  19.109581
[181]  19.165299  19.372541  19.382030  19.384661  19.422195  19.891444  19.920493  19.999129  20.213197  20.582485
[191]  20.687735  20.829046  21.565227  22.485083  23.091679  23.849483  24.087156  24.601383  24.947806  24.974334
[201]  25.003478  25.155338  25.521268  27.214456  28.016897  28.621755  29.078946  30.419330  31.708618  31.777709
[211]  32.464939  38.496867  39.067966  40.964880  42.559699  42.690184  43.115471  50.047927  53.149819  53.462787
[221]  54.756305  57.946098  65.760224  66.093463  67.412382  78.428832  79.159469  88.752832 102.395358 107.660663
[231] 111.496613 122.891199 131.216239 170.847473 172.597610 174.316945 183.608223 199.253089 353.684967
```

รูปที่ 12.13 *ผลลัพธ์ของการใช้คำสั่ง pen.value.full()*

1.2) การวิเคราะห์กราฟความชันเพื่อยืนยันค่า Penalty

- ใช้คำสั่ง plot(detect.var, diagnostic=TRUE) เพื่อแสดงกราฟความชันในการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวน
- พบว่าช่วงที่ค่าความชันลดลงและแนวโน้มกราฟเริ่มแบนราบอยู่ที่ค่า Penalty มากกว่า 200 จุดขึ้นไป ซึ่งถือเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (รูปที่ 12.14)



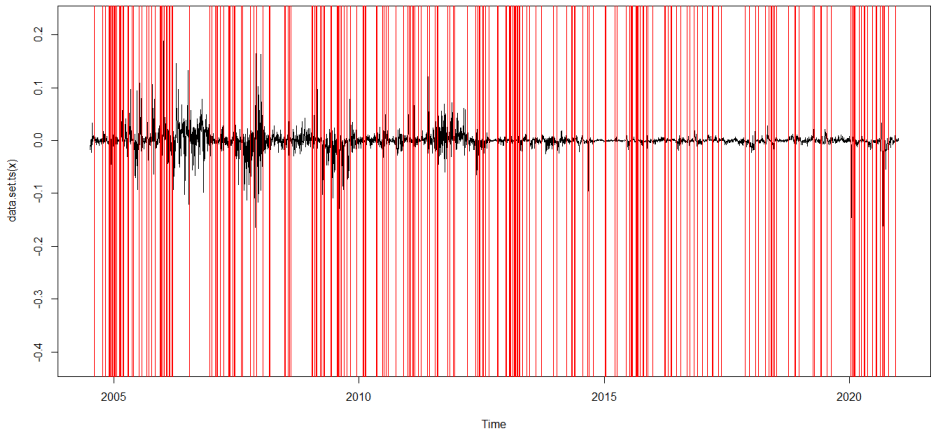
รูปที่ 12.14 *ผลลัพธ์ของการใช้ คำสั่ง plot(detect.var, diagnostic=TRUE)*

1.3) การเลือกค่า Penalty ที่เหมาะสม

- จากการวิเคราะห์ข้างต้น จึงเลือกค่า Penalty ในช่วงที่กราฟเริ่มเส้นตรงและความชันลดลงต่อเนื่อง เพื่อใช้ในการตรวจสอบความแปรปรวน

1.4) ผลการกำหนดจุดเปลี่ยนแปลงความแปรปรวน

- พบว่าจุดเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของตราสารหนี้แต่ละช่วงอายุต่างกันไปตามคุณลักษณะของข้อมูล (รูปที่ 12.15)



รูปที่ 12.15 *ผลลัพธ์จากการกำหนดจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนให้กับข้อมูล*

- สรุปผลการตรวจสอบได้ในตารางที่ 12.1 แสดงค่า Penalty และตำแหน่งที่เกิดการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของแต่ละช่วงอายุของตราสารหนี้

ตารางที่ 12.1 *ค่า penalty สำหรับจุดที่มีการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนของตราสารหนี้ที่มีอายุกำหนดไถ่ถอนแตกต่างกัน*

อายุกำหนดไถ่ถอนของตราสารหนี้	ค่า penalty	จุดที่มีการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวน
1 เดือน	8.30	239
3 เดือน	8.58	235
6 เดือน	7.90	274
1 ปี	7.61	297
2 ปี	12.5	239
3 ปี	10.00	254
4 ปี	9.90	228
5 ปี	8.79	227
6 ปี	8.70	227
7 ปี	8.00	215
8 ปี	7.50	249
9 ปี	8.16	202
10 ปี	7.52	229

ขั้นตอนที่ 2: การวิเคราะห์จุดเปลี่ยนแปลงและผลกระทบต่อการกำหนดตัวแบบ

ในการกำหนดตัวแบบเพื่อประเมินราคาตราสารหนี้อย่างแม่นยำ จำเป็นต้องวิเคราะห์จุดที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในข้อมูลอย่างรอบคอบ เนื่องจากจุดเปลี่ยนแปลงเหล่านี้สามารถส่งผลโดยตรงต่อโครงสร้างของแบบจำลองและความสามารถในการทำนายผลลัพธ์ในอนาคตได้อย่างถูกต้อง

1) ผลกระทบของความแปรปรวนต่อการกำหนดตัวแบบ

- การเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในชุดข้อมูลส่งผลโดยตรงต่อประสิทธิภาพของแบบจำลองที่ใช้สำหรับพยากรณ์อัตราผลตอบแทนและราคาตราสารหนี้
- หากไม่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงนี้ ตัวแบบอาจประเมินค่าผิดพลาดในช่วงเวลาที่ตลาดมีความไม่แน่นอนสูง
- ในกรณีศึกษานี้ การเลือกค่าที่เหมาะสมจากช่วงกราฟที่มีการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนอย่างมีนัยสำคัญ ช่วยลดความคลาดเคลื่อนในการวิเคราะห์และส่งเสริมให้ได้ตัวแบบที่มีความแม่นยำสูงขึ้น

2) การใช้พารามิเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ในบริบทปัจจุบัน

- จุดที่เลือกใช้ในกรณีศึกษานี้เป็นช่วงเวลาที่ข้อมูลมีความสอดคล้องกับสภาพตลาดในปัจจุบันมากที่สุด เพื่อสะท้อนความเป็นจริงในการกำหนดราคาตราสารหนี้
- การเลือกช่วงข้อมูลดังกล่าวสอดคล้องกับแนวทางจากงานวิจัยของ Cagatay Dagistan ที่เน้นการใช้จุดเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนในการปรับแบบจำลองเชิงเวลาให้ตอบสนองต่อความเปลี่ยนแปลงของตลาด
- แนวคิดดังกล่าวยังได้รับการสนับสนุนจากตำราโดย อัญญา ขันธวิทย์ (พ.ศ. 2554) ที่เสนอการพิจารณาความเสถียรของพารามิเตอร์เป็นหลักในการสร้างแบบจำลองเชิงปริมาณ

ขั้นตอนที่ 3: สรุปผลการตรวจสอบความแปรปรวน

การวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลอัตราดอกเบี้ยรายวันมีความสำคัญต่อการกำหนดตัวแบบที่สามารถตอบสนองต่อความผันผวนในตลาดตราสารหนี้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมีประเด็นสำคัญดังนี้

- การเลือกค่า Penalty ที่เหมาะสมช่วยเพิ่มความแม่นยำในการตรวจจับจุดเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนในข้อมูล

- การวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาตัวแบบกำหนดราคาตราสารหนี้ที่ตอบสนองต่อภาวะตลาดจริง

- การประยุกต์ใช้ผลการวิเคราะห์นี้ช่วยให้สามารถแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดได้อย่างฉับพลันในภาวะตลาดที่มีความไม่แน่นอน

ขั้นตอนที่ 4: การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ

1) ตัวแบบ Vasicek

กรณีที่ 1 (ใช้ชุดข้อมูล $r_1, r_2, \ldots, r_{4037}$)

$$a = 0.01310077, \quad b = -0.006323367, \quad \hat{\sigma}_r = 0.00362324$$

กรณีที่ 2 (ใช้ชุดข้อมูล $r_{4022}, r_{4023}, \ldots, r_{4037}$)

$$a = -0.08744766, \quad b = -0.002443262, \quad \hat{\sigma}_r = 0.0004306986$$

2) ตัวแบบ Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

กรณีที่ 1 (ใช้ชุดข้อมูล $r_1, r_2, \ldots, r_{4037}$):

$$a = 0.04052855, \quad b = 0.01615882, \quad \hat{\sigma}_r = 0.02410338$$

กรณีที่ 2 (ใช้ชุดข้อมูล $r_{4022}, r_{4023}, \ldots, r_{4037}$)

$$a = 0.029320551, \quad b = 0.025916455, \quad \hat{\sigma}_r = 0.006897393$$

3) ตัวแบบ Hull-White

กรณีที่ 1 (ใช้ชุดข้อมูล $r_1, r_2, \ldots, r_{4037}$)

$$a = 0.01310077, \quad b = -0.006323367, \quad \hat{\sigma}_r = 0.00362324$$

กรณีที่ 2 (ใช้ชุดข้อมูล $r_{4022}, r_{4023}, \ldots, r_{4037}$)

$$a = -0.08744766, \quad b = -0.002443262, \quad \hat{\sigma}_r = 0.0004306986$$

ตัวอย่างผลลัพธ์จากตัวแบบของ Vasicek

ตารางที่ 12.2 *ค่าประมาณพารามิเตอร์ในแต่ละช่วงข้อมูลของตัวแบบ Vasicek*

ลำดับ	ชุดข้อมูล	ค่าประมาณพารามิเตอร์		
		a	b	$\hat{\sigma}_r$
1	$r_1, r_2, \ldots, r_{251}$	-1.21156400	0.0057410360	0.003968953
2	$r_{252}, r_{253}, \ldots, r_{357}$	1.63491500	0.0264998300	0.003984489
3	$r_{358}, r_{359}, \ldots, r_{365}$	-0.57123210	-0.0001585364	0.001169712
4	$r_{366}, r_{367}, \ldots, r_{432}$	3.06685000	0.0331796200	0.007750271
5	$r_{433}, r_{434}, \ldots, r_{536}$	1.96578400	0.0493568000	0.005595790
6	$r_{537}, r_{538}, \ldots, r_{801}$	-0.90032250	0.0502641700	0.004555057
7	$r_{802}, r_{803}, \ldots, r_{1211}$	1.80301700	0.0278482200	0.006653617
8	$r_{1212}, r_{1213}, \ldots, r_{1243}$	4.02468300	0.0091469320	0.004081163
9	$r_{1244}, r_{1245}, \ldots, r_{1594}$	7.31591800	0.0110072500	0.002779649
10	$r_{1595}, r_{1596}, \ldots, r_{1688}$	0.08372066	0.1203674000	0.001849960
11	$r_{1689}, r_{1690}, \ldots, r_{1723}$	-0.16496350	-0.0516864200	0.0033460620
12	$r_{1724}, r_{1725}, \ldots, r_{1766}$	-0.60516350	-0.0004783836	0.0033027430
13	$r_{1767}, r_{1768}, \ldots, r_{1807}$	-0.41109580	-0.0207185000	0.0038409780

14	$r_{1808}, r_{1809}, \ldots, r_{2145}$	1.34434000	0.0326874600	0.0020578370
15	$r_{2146}, r_{2147}, \ldots, r_{2288}$	0.11603780	-0.0026689510	0.0010977530
16	$r_{2289}, r_{2290}, \ldots, r_{2419}$	0.24479750	0.0198620100	0.0009424067
17	$r_{2420}, r_{2421}, \ldots, r_{2731}$	0.98076300	0.0178690400	0.0010638460
18	$r_{2732}, r_{2733}, \ldots, r_{3294}$	3.26523400	0.0136832000	0.0012440770
19	$r_{3295}, r_{3296}, \ldots, r_{3650}$	0.04645312	0.0215567400	0.0013077360
20	$r_{3651}, r_{3652}, \ldots, r_{3882}$	-0.41589090	0.0196356100	0.0020693570
21	$r_{3883}, r_{3884}, \ldots, r_{4037}$	1.35716600	-0.0021984930	0.0025559100

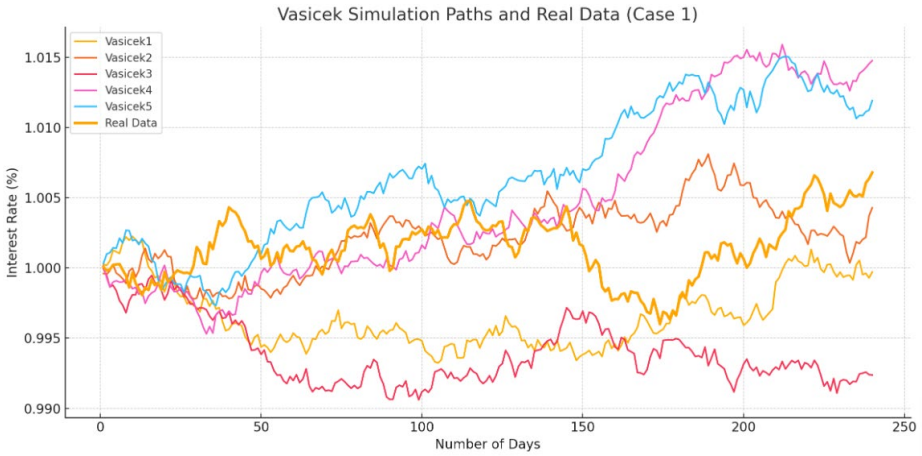
การประมาณค่าพารามิเตอร์ในขั้นตอนนี้ถือเป็นรากฐานสำหรับการจำลองเส้นอัตราดอกเบี้ยและประเมินมูลค่าตราสารหนี้อย่างแม่นยำในสภาวะตลาดที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

ตัวอย่างผลการเปรียบเทียบอัตราผลตอบแทนที่ได้จากการจำลองในตัวแบบ Vasicek

เพื่อประเมินความแม่นยำของตัวแบบ Vasicek ในการจำลองอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ การวิเคราะห์นี้แบ่งเป็นสองกรณี โดยพิจารณาข้อมูลในช่วงเวลาต่างกัน และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับข้อมูลจริงในตลาด

กรณีที่ 1 คือการจำลองอัตราผลตอบแทนด้วยแบบจำลอง Vasicek โดยใช้ข้อมูลอัตราผลตอบแทนรายวันจากวันแรก (r_1) ถึงวันที่ 4037 (r_{4037}) ซึ่งครอบคลุมระยะเวลาทั้งหมดของชุดข้อมูลที่มีอยู่ (พ.ศ. 2547–2563) เพื่อศึกษาความแม่นยำของแบบจำลองในการอธิบายโครงสร้างอัตราผลตอบแทนแบบเต็มระยะเวลา

จุดเด่นของกรณีนี้คือการเน้นความสามารถของแบบจำลองในการครอบคลุมแนวโน้มและความผันผวนของอัตราผลตอบแทนในระยะยาว แต่ผลลัพธ์แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองเริ่มมีความคลาดเคลื่อนจากข้อมูลจริงมากขึ้นเมื่อระยะเวลายาวขึ้น โดยเฉพาะในช่วงท้ายของการจำลองที่ค่าที่ได้ต่ำกว่าความเป็นจริงอย่างต่อเนื่อง



รูปที่ 12.16 *ผลลัพธ์การจำลองอัตราผลตอบแทนในตัวแบบ Vasicek เปรียบเทียบกับข้อมูลอัตราผลตอบแทนจริงในกรณีที่ 1*

จากรูปที่ 12.16 พบว่าในช่วงแรกๆ หรือจำนวนวันน้อย ๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการจำลองมีความใกล้เคียงกับอัตราผลตอบแทนในตลาดแต่เมื่อระยะเวลาเพิ่มขึ้นผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะยิ่งออกห่างจากข้อมูลจริงมากยิ่งขึ้นและเป็นการออกห่างในลักษณะที่มีแนวโน้มต่ำกว่าข้อมูลจริง

กรณีที่ 2 คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ Vasicek โดยใช้ชุดข้อมูลช่วงปลายของข้อมูลทั้งหมด คือ $\{r_{4022}, r_{4023}, \ldots, r_{4037}\}$ ซึ่งเป็นข้อมูลอัตราผลตอบแทนรายวันของตั๋วเงินคลังอายุ 1 เดือน จำนวน 16 ตัวสุดท้าย จากข้อมูลทั้งหมด 4,037 ตัว ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณ ได้แก่

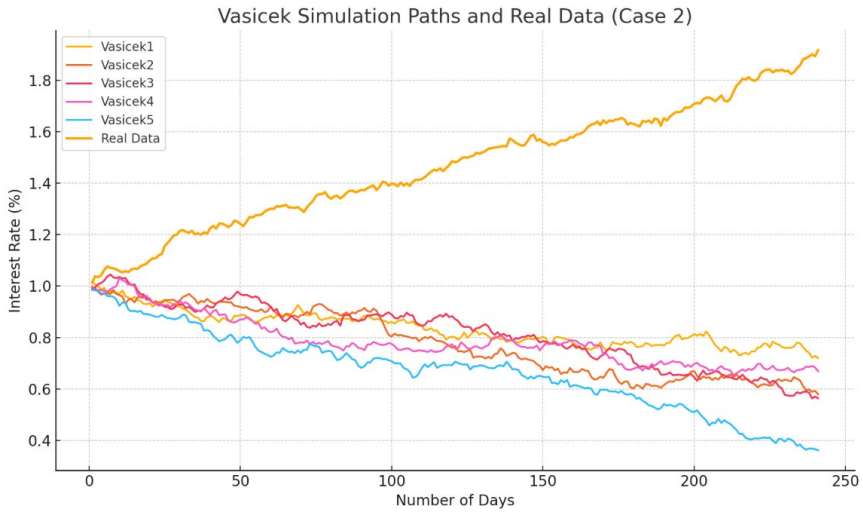
$$a = -0.08744766, \quad b = -0.002443262, \quad \hat{\sigma}_r = 0.0004306986$$

โดยที่ a แทน อัตราการกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยของอัตราดอกเบี้ย

b แทน ค่าเฉลี่ยระยะยาวของอัตราดอกเบี้ย

$\hat{\sigma}_r$ แทน ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

การใช้พารามิเตอร์จากข้อมูลช่วงปลายเช่นนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อสะท้อนสภาพตลาดในปัจจุบันและเพิ่มความแม่นยำในการจำลองภายใต้บริบทของสภาวะเศรษฐกิจที่อาจมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว



รูปที่ 12.17 *ผลลัพธ์การจำลองอัตราผลตอบแทนในตัวแบบ Vasicek เปรียบเทียบกับข้อมูลอัตราผลตอบแทนจริงในกรณีที่ 2*

จากรูปที่ 12.17 พบว่าในช่วงแรกๆ หรือจำนวนวันน้อย ๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการจำลองมีความใกล้เคียงกับอัตราผลตอบแทนในตลาดแต่เมื่อระยะเวลาเพิ่มขึ้นผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะยิ่งออกห่างจากข้อมูลจริงมากยิ่งขึ้นและเป็นการออกห่างในลักษณะที่มีแนวโน้มต่ำกว่าข้อมูลจริงและเกิดการติดลบของอัตราผลตอบแทน ซึ่งในความเป็นจริงอัตราผลตอบแทนไม่มีทางติดลบ และจากข้อมูลที่ในกรณีศึกษานี้ได้รวบรวมมาก็ไม่พบอัตราผลตอบแทนที่ติดลบ

ขั้นตอนที่ 5: การกำหนดราคาตราสารหนี้

ขั้นตอนในการกำหนดราคาตราสารหนี้ตามแต่ละตัวแบบจำลองเป็นขั้นตอนที่ทำขึ้นเพื่อนำราคาที่ได้ไปหาเส้นอัตราผลตอบแทนของตราสารหนี้ตามแต่ละอายุไถ่ถอน โดยราคาตราสารหนี้ทั้งหมดถูกคิด ณ วันที่ 17 กรกฎาคม พ.ศ. 2563 และการพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่ในกรณีศึกษานี้ยอมรับคือ ทศนิยมตำแหน่งที่ 4 ในที่นี้จะแสดงผลลัพธ์การกำหนดราคาตราสารหนี้ในตัวแบบ Vasicek ในกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เท่านั้น สำหรับตัวแบบอื่นสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันจะขอละไว้ให้เป็นแบบฝึกปฏิบัติสำหรับผู้สนใจ

การกำหนดราคาตราสารหนี้ในตัวแบบ Vasicek

ตารางที่ 12.3 *ผลลัพธ์การกำหนดราคาโดยใช้ข้อมูลจริงและการกำหนดราคาโดยการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำโดยใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากขั้นตอน 4 ในกรณีที่ 1*

วันครบกำหนดไถ่ถอน	การกำหนดราคาโดยใช้สูตรทั่วไป	การกำหนดราคาโดยการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำ	ค่าสัมบูรณ์ผลต่าง	ช่วงความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์
1 เดือน	0.9996324	0.9996365	4.1E-06	(0.9996336, 0.9996395)
3 เดือน	0.9988543	0.9989207	6.64E-05	(0.9989049, 0.9989365)
6 เดือน	0.9975546	0.9978415	0.0002869	(0.9977960, 0.9978870)
1 ปี	0.9950493	0.9957094	0.0006601	(0.9955832, 0.9958357)
2 ปี	0.9904664	0.9916591	0.0011927	(0.9913191, 0.9919991)
3 ปี	0.9826690	0.9877995	0.0051305	(0.9871568, 0.9884422)
4 ปี	0.9715949	0.9835962	0.0120013	(0.9826152, 0.9845773)
5 ปี	0.9586743	0.9805387	0.0218644	(0.9791144, 0.9819631)
6 ปี	0.9447097	0.9771332	0.0324235	(0.9753301, 0.9789362)
7 ปี	0.9287378	0.9741766	0.0454388	(0.9718957, 0.9764574)
8 ปี	0.9106572	0.9716526	0.0609954	(0.9688536, 0.9744517)
9 ปี	0.8951920	0.9666444	0.0714524	(0.9631650, 0.9701237)
10 ปี	0.8769335	0.967524	0.0905905	(0.9638076, 0.9712404)

จากตารางที่ 12.3 พบว่าราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยที่ได้จากการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำจำนวน 1000 ครั้ง ของตราสารหนี้อายุ 1 เดือน 3 เดือน มีค่าไม่ได้แตกต่างจากราคาจริงที่คิดจากราคาตลาดมากนัก แต่ในช่วงอายุ 6 เดือน ไปจนถึง 10 ปี ราคาเริ่มมีความแตกต่างมากขึ้นเรื่อย ๆ โดยเฉพาะยิ่งอายุตราสารหนี้ที่มากขึ้นราคาก็ยิ่งแตกต่างจากความเป็นจริงมากขึ้น

ตารางที่ 12.4 *ผลลัพธ์การกำหนดราคาโดยใช้ข้อมูลจริงและการกำหนดราคาโดยการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำโดยใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ในกรณีที่ 2*

วันครบกำหนดไถ่ถอน	การกำหนดราคาโดยใช้สูตรทั่วไป	การกำหนดราคาโดยการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำ	ค่าสัมบูรณ์ผลต่าง	ช่วงความเชื่อมั่น 95 เปอร์เซ็นต์
1 เดือน	0.9996324	0.9996330	6E-07	(0.9996327, 0.9996334)
3 เดือน	0.9988543	0.9988883	3.4E-05	(0.9988865, 0.9988901)
6 เดือน	0.9975546	0.9977386	0.0001840	(0.9977331, 0.9977441)
1 ปี	0.9950493	0.9953245	0.0002752	(0.9953085, 0.9953404)
2 ปี	0.9904664	0.9900365	0.0004299	(0.9899889, 0.9900840)
3 ปี	0.9826690	0.9839483	0.0012793	(0.9838649, 0.9840317)
4 ปี	0.9715949	0.9773882	0.0057933	(0.9772465, 0.9775298)
5 ปี	0.9586743	0.9699493	0.0112750	(0.9697499, 0.9701487)
6 ปี	0.9447097	0.9616447	0.0169350	(0.9613817, 0.9619076)
7 ปี	0.9287378	0.9525582	0.0238204	(0.9522041, 0.9529123)
8 ปี	0.9106572	0.9418658	0.0312086	(0.9414161, 0.9423155)
9 ปี	0.8951920	0.9310846	0.0358926	(0.9305576, 0.9316117)
10 ปี	0.8769335	0.9191722	0.0422387	(0.9185607, 0.9197836)

จากตารางที่ 12.4 พบว่าราคาของตราสารหนี้ที่ไม่มีการจ่ายดอกเบี้ยที่ได้จากการจำลองอัตราดอกเบี้ยด้วยวิธีที่แม่นยำจำนวน 1000 ครั้ง ของตราสารหนี้อายุ 1 เดือน 3 เดือน มีค่าไม่ได้แตกต่างจากราคาจริงที่คิดจากราคาตลาดมากนักแต่ในช่วงอายุ 6 เดือน ไปจนถึง 10 ปี ราคาเริ่มมีความแตกต่างมากขึ้นเรื่อย ๆ โดยเฉพาะยิ่งอายุตราสารหนี้ที่มากขึ้นราคาก็ยิ่งแตกต่างจากความเป็นจริงมากขึ้น แต่เมื่อพิจารณาตัวเลขแล้วจะพบว่าราคาของตราสารหนี้ที่ได้จากวิธีที่ 2 โดยส่วนใหญ่มีค่าใกล้กับราคาพันธบัตรในตลาดมากกว่า

ขั้นตอนที่ 6: ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ

ในการประเมินความแม่นยำของตัวแบบกำหนดราคาตราสารหนี้ งานวิจัยนี้ใช้ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Root Mean Square Error: RMSE) เป็นเกณฑ์หลักในการวัดประสิทธิภาพ โดยเปรียบเทียบระหว่างค่าราคาจริงของตราสารหนี้กับราคาที่ได้จากการจำลองของแต่ละตัวแบบภายใต้ข้อมูลทดสอบ (Unseen Data) ซึ่งมีผลลัพธ์ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 12.5 *ค่า RMSE ในแต่ละตัวแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย*

ประเภทของตราสารหนี้	ประเภทของตัวแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย	ค่า RMSE	
		กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
TB1M	Vasicek	2.30941E-06	2.01528E-06
	CIR	1.61051E-06	1.9859E-06
	Hull-White	1.60505E-06	1.40222E-06
TB3M	Vasicek	4.30466E-05	1.94453E-05
	CIR	2.34443E-05	1.92756E-05
	Hull-White	9.04233E-06	5.1125E-06
TB6M	Vasicek	0.000195267	0.000102849
	CIR	0.000122633	0.000104352
	Hull-White	2.32788E-05	9.70133E-06
TB1Y	Vasicek	0.000512660	0.000131733
	CIR	0.000213441	0.000138929
	Hull-White	5.32175E-05	1.61886E-05
ZCB2Y	Vasicek	0.001836975	0.000783460
	CIR	0.000923507	0.000817519
	Hull-White	0.000236396	0.000140217
ZCB3Y	Vasicek	0.005434602	0.001949944
	CIR	0.002940100	0.002256900
	Hull-White	0.000474132	0.000312154
ZCB4Y	Vasicek	0.012191304	0.005493881
	CIR	0.007529609	0.006295104
	Hull-White	0.000551634	0.000480179
ZCB5Y	Vasicek	0.020995814	0.010320526
	CIR	0.013797453	0.011869457
	Hull-White	0.001045534	0.000743168
ZCB6Y	Vasicek	0.032043987	0.016013214
	CIR	0.021534694	0.018741798
	Hull-White	0.001260885	0.000962595
ZCB7Y	Vasicek	0.044685087	0.022839046
	CIR	0.030960477	0.027233846
	Hull-White	0.001536147	0.001224416
ZCB8Y	Vasicek	0.060824978	0.031016332
	CIR	0.042626969	0.037639392
	Hull-White	0.003299271	0.002680550
ZCB9Y	Vasicek	0.075999663	0.037676502
	CIR	0.053257557	0.047036301
	Hull-White	0.002688173	0.001879333
ZCB10Y	Vasicek	0.092017012	0.044133732
	CIR	0.007673414	0.057202510
	Hull-White	0.002732361	0.002241598

ผลการเปรียบเทียบชี้ให้เห็นว่า

- ตัวแบบ **Hull-White** มีค่า RMSE ต่ำสุดในหลายช่วงอายุของตราสารหนี้ สะท้อนถึงความสามารถในการปรับตัวต่อการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างอัตราดอกเบี้ยได้ดี
- ตัวแบบ **CIR** เหมาะสมกับช่วงอัตราดอกเบี้ยที่ไม่เป็นลบและตอบสนองต่อระดับความผันผวนในตลาด
- ตัวแบบ **Vasicek** มีข้อดีในด้านโครงสร้างโมเดลที่ง่ายต่อการคำนวณ แต่ความแม่นยำโดยรวมต่ำกว่าตัวแบบอื่น

โดยสรุป ตัวแบบ Hull-White แสดงประสิทธิภาพสูงสุดในการประมาณราคาตราสารหนี้ในตลาดรองของไทย และเหมาะสมสำหรับใช้เป็นเครื่องมือในกระบวนการแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบฉับพลันในสถานการณ์ตลาดที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว

12.11.4 ผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้ในการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

ผลการวิเคราะห์จากกรณีศึกษา "การเปลี่ยนกลับตราสารหนี้เป็นเงินสดในตลาดการเงินไทย" โดย **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการบริหารสภาพคล่องของตลาดตราสารหนี้ได้อย่างเป็นรูปธรรม โดยมีข้อเสนอแนวทางการประยุกต์ใช้งานดังนี้

1) การพัฒนาดัชนีวัดสภาพคล่องตลาดรองแบบเรียลไทม์

ผลการคำนวณราคาตราสารหนี้จากแบบจำลอง Hull-White ซึ่งแสดงค่า RMSE ต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับราคาจริง ชี้ให้เห็นว่าข้อมูลจากแบบจำลองสามารถใช้เป็นฐานในการประเมินระดับความเบี่ยงเบนของราคาตราสารหนี้จากราคาตลาดได้แบบทันสถานการณ์ ดัชนีดังกล่าวจะช่วยให้นักลงทุน ผู้จัดการพอร์ต และผู้กำกับดูแล สามารถประเมินระดับสภาพคล่องในแต่ละช่วงเวลาได้แม่นยำยิ่งขึ้น

2) การใช้เป็นเครื่องมือประกอบการประเมินความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง

แบบจำลองที่สามารถจับพฤติกรรมอัตราดอกเบี้ยและราคาตราสารหนี้ได้อย่างแม่นยำ เช่น Hull-White และ CIR สามารถนำไปใช้ในการคาดการณ์การเคลื่อนไหวของราคาตราสารหนี้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ทั้งในภาวะปกติและภาวะวิกฤต ซึ่งจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการบริหารความเสี่ยงด้านสภาพคล่องของสถาบันการเงินและนักลงทุนสถาบันได้ดีขึ้น

3) การกำหนดราคาย้อนกลับเพื่อการซื้อขายอย่างเป็นธรรม (Fair Value Pricing)

ข้อมูลจากแบบจำลองที่ผ่านการเทียบเคียงกับราคาตลาดจริงอย่างเป็นระบบ ทำให้สามารถใช้กำหนดราคาย้อนกลับ (Reverse Pricing) เพื่อประเมินมูลค่าที่เหมาะสมของตราสารหนี้ในกรณีที่ตลาดขาดสภาพคล่องหรือมีการเบี่ยงเบนราคาชั่วคราว ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อบริษัทจัดการกองทุนและนักลงทุนที่ต้องทำ NAV รายวัน

4) การวางแผนนโยบายกำกับดูแลและพัฒนาตลาดทุน

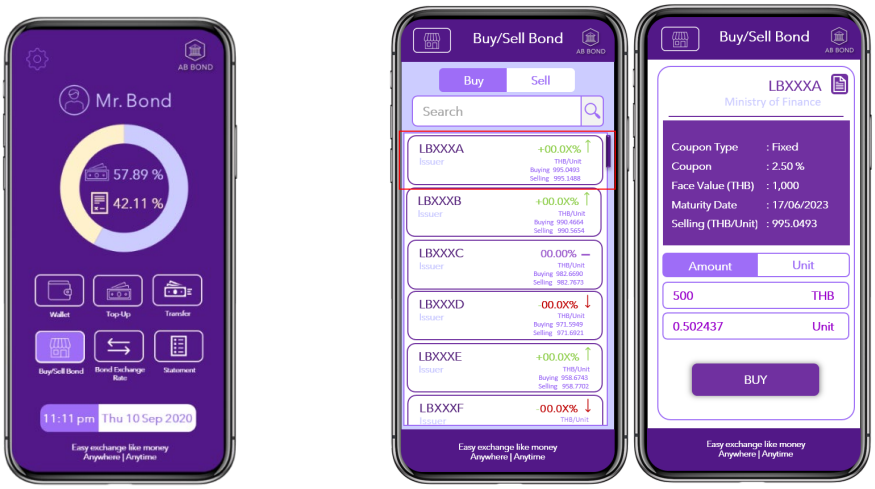
ข้อมูลจากงานวิจัยสามารถนำไปใช้เป็นฐานในการวางนโยบายกำกับดูแล เช่น การกำหนดเกณฑ์การรายงานราคาตลาดรอง หรือการจัดประเภทตราสารหนี้ตามระดับสภาพคล่อง พร้อมทั้งใช้พัฒนาโครงสร้างพื้นฐานตลาดรอง เช่น ระบบจัดการสภาพคล่องกลาง (Liquidity Pool) หรือระบบซื้อขายอัตโนมัติ

สรุปภาพรวม

แบบจำลอง Hull-White แสดงศักยภาพในการเป็นเครื่องมือหลักสำหรับการจำลองราคาตราสารหนี้ในตลาดรองของไทย ซึ่งสามารถนำไปต่อยอดในการพัฒนาระบบประเมินสภาพคล่องและบริหารความเสี่ยงได้ทั้งในระดับกลยุทธ์และระดับปฏิบัติการ สอดคล้องกับเป้าหมายของการส่งเสริมเสถียรภาพและประสิทธิภาพของตลาดทุนในภาพรวม

12.11.5 การประยุกต์ผลลัพธ์กรณีศึกษาสร้างแอพพลิเคชันต้นแบบซื้อขายแบบอัตโนมัติตลอดเวลา

หัวข้อนี้นำเสนอเพื่อต่อยอดจากผลการวิเคราะห์ในกรณีศึกษาในสร้างแอพพลิเคชันต้นแบบโดยใช้ผลลัพธ์จากแบบจำลอง Hull-White ซึ่งมีความแม่นยำสูงในการประมาณราคาตราสารหนี้ มาใช้ในการกำหนดราคาซื้อขายแบบอัตโนมัติ ช่วยให้สามารถแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดได้แบบทันที แม้นอกเวลาทำการของตลาด



รูปที่ 12.18 *หน้าธุรกรรมทั้งหมดของแอพพลิเคชั่นและฟังก์ชัน Buy/Sell Bond ของแอพพลิเคชั่น*

ตัวอย่างแอพพลิเคชันนี้ถูกออกแบบมาเพื่อให้ผู้ใช้งานสามารถ เปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดได้ตลอดเวลา แม้ในช่วงที่ตลาดซื้อขายตราสารหนี้ปิดทำการ โดยการทำงานของแพลตฟอร์มเปรียบเสมือนระบบแลกเปลี่ยนเงินตรา แต่ในกรณีนี้คือ แพลตฟอร์มแลกเปลี่ยนเงินสดกับตราสารหนี้

1) หน้าธุรกรรมทั้งหมด

รวมฟังก์ชันสำคัญ เช่น การซื้อขายตราสารหนี้ (Buy/Sell Bond), การจัดการเงินสดและพอร์ตการ

ลงทุน (Wallet), และ การตรวจสอบธุรกรรม (Statement) ช่วยให้ผู้ใช้งานเข้าถึงทุกฟังก์ชันได้สะดวกในที่เดียว

2) ฟังก์ชัน Buy/Sell Bond
   - แสดงรายการตราสารหนี้ที่พร้อมแลกเปลี่ยน พร้อมข้อมูลราคาล่าสุดและการเปลี่ยนแปลงราคา
   - ผู้ใช้งานสามารถกำหนดจำนวนซื้อหรือขายได้โดยไม่มีขั้นต่ำ พร้อมแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดทันที

3) จุดเด่นของแพลตฟอร์ม
   - ความต่อเนื่องของธุรกรรม: รองรับการแลกเปลี่ยนได้ตลอดเวลา แม้ตลาดจะปิดทำการ
   - ความโปร่งใสและเรียลไทม์: แสดงข้อมูลราคาซื้อขายแบบอัปเดต พร้อมรายละเอียดตราสารหนี้ครบถ้วน
   - ใช้งานง่าย: ฟังก์ชันต่าง ๆ ออกแบบให้เหมาะสำหรับนักลงทุนทุกระดับ โดยเน้นความสะดวกและรวดเร็ว

12.11.6 ตัวอย่างการคำนวณกำไร (ขาดทุน) ของตัวแบบเชิงธุรกิจ

ตัวแบบเชิงธุรกิจที่นำตัวแบบการกำหนดราคาตราสารหนี้ในกรณีศึกษานี้มาใช้ ในกรณีศึกษานี้จะขอยกตัวอย่างการคำนวณกำไร (ขาดทุน) ที่ได้จากการซื้อขายตราสารหนี้ผ่านแอพพลิเคชั่นนี้

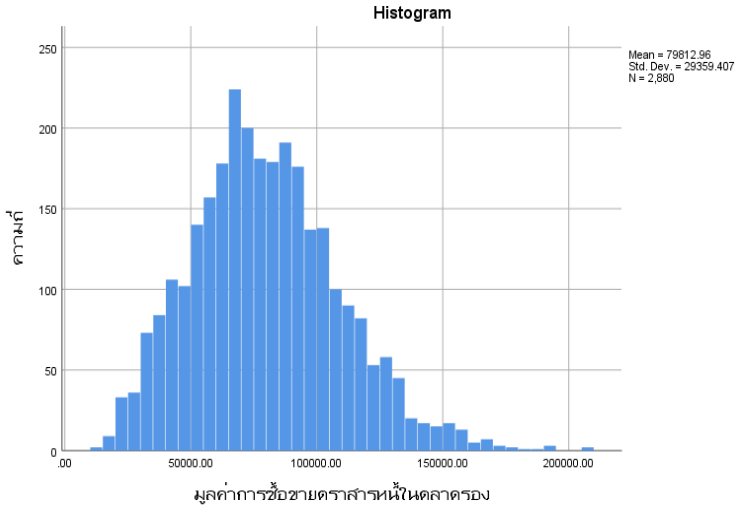
1) ตัวอย่างการคำนวณรายได้ในส่วนของค่าธรรมเนียมการซื้อขาย

ข้อมูลมูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองในวันที่เปิดทำการ ในกรณีศึกษานี้ได้นำข้อมูลมาจากเว็บไซต์ของตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย เพื่อนำมาหาค่ากลางของข้อมูลแล้วนำมาใช้คำนวณรายได้ในส่วนของค่าธรรมเนียมการซื้อขายต่อไป

ตารางที่ 12.6 *ค่ามัธยฐาน ค่าความเบ้ และค่าความโด่งของข้อมูลมูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรอง ตั้งแต่วันที่ 5 มกราคม พ.ศ.2552 – 21 ตุลาคม พ.ศ.2563*

สถิติเชิงพรรณนา	ค่าสถิติ (Statistic)	ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error)
ค่ามัธยฐาน (Median)	77,761.0302	-
ค่าความเบ้ (Skewness)	0.4643	0.0456
ค่าความโด่ง (Kurtosis)	0.3131	0.0912

จากตารางที่ 12.6 พบว่ามูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรอง ตั้งแต่วันที่ 5 มกราคม พ.ศ.2552 ถึง 21 ตุลาคม พ.ศ. 2563 มีค่ามัธยฐาน (Median) เท่ากับ 77,761.0302 ล้านบาท ข้อมูลมีความเบ้ขวาเนื่องจากมีค่าความเบ้มากกว่า 0 และข้อมูลไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติ เนื่องจากค่าความโด่งไม่เท่ากับ 3



รูปที่ 12.19 *กราฟความสัมพันธ์ระหว่างมูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองกับความถี่ ตั้งแต่วันที่ 5 มกราคม พ.ศ.2552 – 21 ตุลาคม พ.ศ. 2563*

จากรูปที่ 12.19 พบว่ากราฟไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติ แต่มีลักษณะเบ้ขวา จึงไม่สามารถหาค่ากลางของข้อมูลโดยวิธีการหาค่าเฉลี่ย (Mean) ได้เนื่องจากพบข้อมูลที่ค่าแตกต่างไปจากปกติ (Outlier) หลายค่าเกิดขึ้นในช่วงที่สภาวะตลาดไม่ปกติ เช่น วิกฤตทางการเมืองปี พ.ศ.2553, วิกฤตน้ำท่วมปี พ.ศ.2554, วิกฤตการระบาดของเชื้อไวรัสโคโรนาสายพันธุ์ใหม่ 2019 ปี พ.ศ. 2563 เป็นต้น

ตารางที่ 12.7 *ค่าสถิติทดสอบ คอลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov) และสถิติทดสอบ ชาพิโร-วิลก์ (Shapiro-Wilk) ของข้อมูลมูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรอง ตั้งแต่วันที่ 5 มกราคม พ.ศ.2552 – 21 ตุลาคม พ.ศ. 2563*

สถิติทดสอบ	ค่าสถิติ	ค่าองศาอิสระ	ค่าระดับนัยสำคัญทางสถิติ
คอลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov)	0.0333	2880	0.0000
ชาพิโร-วิลก์ (Shapiro-Wilk)	0.9867	2880	0.0000

จากตารางที่ 12.7 พบว่าสถิติทดสอบ คอลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov) มีค่าเท่ากับ 0.0333 และมีค่าระดับนัยสำคัญทางสถิติ เท่ากับ 0.0000 และสถิติทดสอบ ชาพิโร-วิลก์ (Shapiro-Wilk) มีค่าเท่ากับ 0.9867 และมีค่าระดับนัยสำคัญทางสถิติ เท่ากับ 0.0000 จึงสรุปได้ว่าข้อมูลมูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรอง ตั้งแต่วันที่ 5 มกราคม พ.ศ.2552 – 21 ตุลาคม พ.ศ. 2563 ไม่มีการแจกแจงแบบปกติ คณะในกรณีศึกษานี้จึงเลือกใช้วิธีหาค่ามัธยฐาน (Median) แทนวิธีการหาค่าเฉลี่ย (Mean)

ในสภาวะตลาดปกติ มูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดอยู่ที่ 77,761.0302 ล้านบาท ต่อวัน โดยทางในกรณีศึกษานี้ได้กำหนดอัตราค่าธรรมเนียมการซื้อขายตราสารหนี้ เท่ากับ 0.01% ซึ่งที่ค่าธรรมเนียมมีอัตราที่ต่ำกว่าอัตราค่าธรรมเนียมในตลาด เนื่องมาจากต้นทุนที่ถูกลงและจำนวนธุรกรรมที่ทำได้บ่อยครั้งขึ้น

และ หากลองคิดรายได้ค่าธรรมเนียมจากมูลค่าการซื้อขายในรูปแบบเดิมที่มีอยู่ตอนนี้ แต่ใช้อัตราค่าธรรมเนียม 0.01% จะคิดเป็นรายได้ได้เท่ากับ 7,776,103.02 บาท ต่อวัน

ตารางที่ 12.8 *มูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองของปี พ.ศ. 2553 ถึง พ.ศ. 2563*

ปี พ.ศ.	ต่ำสุด (min)	มัธยฐาน (med)	สูงสุด (max)
2552	19,052.70	57,042.00	129,654.09
2553	11,272.46	67,229.47	145,181.02
2554	14,251.22	71,827.82	157,951.35
2555	28,074.76	74,985.38	165,087.07
2556	30,475.30	79,879.66	208,722.59
2557	31,851.70	74,252.32	130,563.56
2558	42,350.79	76,183.66	159,736.12
2559	39,359.53	88,695.74	165,715.55
2560	34,766.19	87,498.23	174,393.81
2561	24,725.31	77,078.10	190,431.01
2562	26,614.46	85,404.94	206,348.00
2563	23,243.91	86,631.31	192,327.81

จากตารางที่ 12.8 พบว่ามูลค่าการซื้อขายตราสารหนี้ในตลาดรองต่ำสุด (min) อยู่ในปี พ.ศ. 2553 มีมูลค่า 11,272.46 ล้านบาท และมีค่าสูงสุด (max) ในปี พ.ศ. 2556 มีมูลค่า 208,722.59 ล้านบาท สำหรับค่ามัธยฐาน (Median) มีมูลค่าต่ำสุดอยู่ในปี พ.ศ. 2552 มีมูลค่า 57,042.00 ล้านบาท และสูงสุดในปี พ.ศ. 2559 มีมูลค่า 88,695.74 ล้านบาท ซึ่งมูลค่าการซื้อขายของตราสารหนี้ขึ้นอยู่กับสภาวะเศรษฐกิจ เนื่องด้วยสภาวะเศรษฐกิจมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ย และมูลค่าตราสารหนี้จะเคลื่อนไหวในทิศทางตรงกันข้ามกับอัตราดอกเบี้ย เมื่ออัตราดอกเบี้ยในตลาดลดลงต่ำกว่าอัตราดอกเบี้ยหน้าตั๋ว นักลงทุนส่วนใหญ่จึงขายตราสารหนี้ที่ถืออยู่ในมือเพื่อทำกำไร

2) การคำนวณกำไร (ขาดทุน) ที่ได้จากการซื้อขายตราสารหนี้ผ่านแอพพลิเคชั่น

2.1) รายการรายได้และค่าใช้จ่ายต่าง ๆ ที่นำมาใช้คำนวณกำไร (ขาดทุน)

2.1.1) ต้นทุนแรกเริ่ม (จ่ายครั้งเดียว) เช่น ค่าจัดทำโมบายแอพพลิเคชั่น (Mobile Application) ค่าสร้างเว็บไซต์ให้รองรับทุกอุปกรณ์ (Responsive Design) ที่สามารถซื้อขายสินค้าออนไลน์ได้ (e-Commerce) ค่าสร้าง Enterprise Java Application สำหรับการใช้งานในองค์กร เป็นต้น

2.1.2) ค่าใช้จ่าย

- ต้นทุนคงที่ เช่น ค่าเช่าสำนักงาน ค่าเงินเดือนพนักงาน ค่าบริการอินเทอร์เน็ต เป็นต้น

- ต้นทุนผันแปร เช่น มูลค่าการซื้อตราสารหนี้ในตลาดแรก/ตลาดรอง เพื่อนำมาขายในระบบ มูลค่าการซื้อตราสารหนี้ในระบบ ค่าน้ำและค่าไฟฟ้า ค่าอุปกรณ์สำนักงาน เป็นต้น

2.1.3) รายได้

- มูลค่าการขายตราสารหนี้ในระบบ
- มูลค่าขายตราสารหนี้จากในระบบกลับเข้าไปในตลาดรอง
- ค่าธรรมเนียมการซื้อขายตราสารหนี้ในระบบ

2.2) ตัวแบบการคิดกำไรขาดทุน

$$P/L = \left(A + F + SSM\right) - \left(FC + VC + PM + SM + B\right) \tag{12.37}$$

โดยที่ P/L แทน กำไรขาดทุนจากการซื้อขายตราสารหนี้ในระบบ ณ เดือนๆหนึ่ง

A แทน รายได้จากการขายตราสารหนี้ในระบบ

F แทน ค่าธรรมเนียมการซื้อขาย

SSM แทน มูลค่าตราสารหนี้ที่ขายกลับไปในตลาดรอง

FC แทน ต้นทุนคงที่ เช่น ค่าเช่าสำนักงาน ค่าเงินเดือนพนักงาน ค่าบริการอินเทอร์เน็ต เป็นต้น

VC แทน ต้นทุนผันแปร เช่น ค่าน้ำและค่าไฟฟ้า ค่าอุปกรณ์สำนักงาน เป็นต้น

PM แทน มูลค่าตราสารหนี้ในตลาดแรกที่ที่ซื้อเพื่อนำมาขายในระบบ

SM แทน มูลค่าตราสารหนี้ในตลาดรองที่ซื้อเพื่อนำมาขายในระบบ

B แทน ค่าตราสารหนี้ที่ซื้อในระบบ

2.3) รายได้จากการขายตราสารหนี้ในระบบหาได้จาก

$$A_i = \sum_{m=1}^{n} a_m u_m \tag{12.38}$$

และ

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \tag{12.39}$$

โดยที่ A_i แทน รายได้จากการขายตราสารหนี้ในระบบ ณ วันที่ i

a_m แทน ราคาเสนอขายตราสารหนี้ชนิดที่ m ในระบบ ณ วันที่ i

u_m แทน จำนวนหน่วยการขายตราสารหนี้ชนิดที่ m ในระบบ ณ วันที่ i

n แทน จำนวนชนิดของตราสารหนี้ทั้งหมดที่มีการขาย ณ วันที่ i

k แทน จำนวนวันทั้งหมด

2.4) ค่าใช้จ่ายจากการซื้อคืนตราสารหนี้ที่ซื้อในระบบหาได้จาก

$$B_i = \sum_{m=1}^{n} b_m v_m \tag{12.40}$$

และ $$B = \sum_{i=1}^{k} B_i \quad (12.41)$$

โดยที่ B_i ค่าใช้จ่ายจากการขายตราสารหนี้ในระบบ ณ วันที่ i

b_m แทน ราคารับซื้อคืนตราสารหนี้ชนิดที่ m ในระบบ ณ วันที่ i

v_m แทน จำนวนหน่วยการซื้อคืนตราสารหนี้ชนิดที่ m ในระบบ ณ วันที่ i

n แทน จำนวนชนิดของตราสารหนี้ทั้งหมดที่มีการซื้อคืน ณ วันที่ i

k แทน จำนวนวันทั้งหมด

2.5) ค่าธรรมเนียมการซื้อขายตราสารหนี้ในระบบ ซึ่งคิดค่าธรรมเนียมเท่ากับ 0.01% ต่อหนึ่งธุรกรรมการซื้อขาย จะหาได้จาก

$$F = 0.0001\sum_{i=1}^{k}\left(A_i + B_i\right) \quad (12.42)$$

โดยที่ F แทน ค่าธรรมเนียมการซื้อขายตราสารหนี้ในระบบต่อเดือน

A_i แทน รายได้จากการขายตราสารหนี้ในระบบ ณ วันที่ i

B_i แทน ค่าใช้จ่ายจากการขายตราสารหนี้ในระบบ ณ วันที่ i

แอพพลิเคชันนี้สะท้อนการประยุกต์ใช้งานวิจัยของ **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024)** ซึ่งใช้แบบจำลอง Hull-White ในการประเมินมูลค่าย้อนกลับ (Reverse Pricing) ของตราสารหนี้ แม้ในช่วงที่ตลาดไม่มีการซื้อขาย เช่น ช่วงกลางคืนหรือวันหยุดราชการ การพัฒนาแอพพลิเคชันนี้จึงถือเป็นการบูรณาการองค์ความรู้ด้านคณิตศาสตร์การเงินกับเทคโนโลยีสารสนเทศ เพื่อเสริมสร้างสภาพคล่อง เพิ่มการเข้าถึง และยกระดับประสิทธิภาพตลาดตราสารหนี้ไทยในระยะยาว

บทสรุปท้ายบทที่ 12

ในบทที่ 12 กล่าวเน้นเรื่องการบริหารสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้ ได้สรุปองค์ความรู้สำคัญเกี่ยวกับโครงสร้าง ตลาด และกลไกที่เกี่ยวข้องกับการบริหารสภาพคล่องของตราสารหนี้ในประเทศไทย โดยครอบคลุมตั้งแต่แนวคิดเบื้องต้น มาตรวัดสภาพคล่อง เทคนิคการวิเคราะห์เชิงปริมาณ ไปจนถึงการประยุกต์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาเครื่องมือบริหารสภาพคล่องอย่างมีประสิทธิภาพ

ตลาดตราสารหนี้ไทยมีบทบาทสำคัญในการระดมทุนและรักษาเสถียรภาพของระบบเศรษฐกิจ การเติบโตของมูลค่าตลาดสะท้อนถึงความต้องการของภาคเอกชนและภาครัฐในการใช้ตราสารหนี้เป็นช่องทางในการจัดสรรเงินทุน อย่างไรก็ตาม ตลาดยังเผชิญข้อจำกัดด้านสภาพคล่อง โดยเฉพาะการซื้อขายในตลาดรองที่ยังขาดความโปร่งใสและความรวดเร็วในการเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสด

ในบทนี้ ได้นำเสนอเครื่องมือในการประเมินสภาพคล่องอย่างเป็นระบบ เช่น Bid-Ask Spread, Amihud Ratio, CDS-Bond Basis รวมถึงการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ทางการเงินเพื่อสะท้อนความผันผวนของสภาพคล่องอย่างแม่นยำ พร้อมกันนี้ยังได้อธิบายทฤษฎีและแบบจำลองอัตราดอกเบี้ยที่สำคัญ ได้แก่ Vasicek,

CIR และ Hull-White ซึ่งสามารถใช้ในการกำหนดราคา และจำลองพฤติกรรมของตราสารหนี้ในสภาวะต่าง ๆ ได้อย่างยืดหยุ่นและสอดคล้องกับโครงสร้างของอัตราผลตอบแทน (Yield Curve)

กรณีศึกษาที่นำเสนอในบทนี้ เป็นส่วนหนึ่งของงานวิจัยซึ่งศึกษาโดย **Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ.2024)** ได้ใช้ข้อมูลตลาดตราสารหนี้จริงของประเทศไทย เพื่อประเมินประสิทธิภาพของแบบจำลองการกำหนดราคาตราสารหนี้ โดยเฉพาะในช่วงที่มีความผันผวนสูง ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่า แบบจำลอง Hull-White มีความแม่นยำสูงสุด (RMSE ต่ำ) และสามารถนำไปใช้ในการบริหารสภาพคล่อง การกำหนดราคาย้อนกลับ (Fair Value) และการเตือนภัยล่วงหน้าในช่วงวิกฤตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

สรุปได้ว่า การนำเสนอในบทนี้ไม่ได้เพียงให้ความรู้เชิงทฤษฎี แต่ยังเชื่อมโยงสู่การปฏิบัติจริง ผ่านแนวทางการพัฒนาระบบแลกเปลี่ยนแบบเรียลไทม์ การวิเคราะห์จุดเปลี่ยนแปลงของสภาพคล่อง และการสร้างดัชนีวัดสภาพคล่องที่สะท้อนสถานการณ์ตลาดอย่างทันเวลา ซึ่งมีจะมีประโยชน์อย่างยิ่งต่อการเสริมสร้างความยั่งยืนของตลาดตราสารหนี้ไทยในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

[1] Acharya, V. V., & Pedersen, L. H. (2005). Asset pricing with liquidity risk. *Journal of Financial Economics*, 77(2), 375–410. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2004.06.007

[2] Amihud, Y., & Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*, 17(2), 223–249. https://doi.org/10.1016/0304-405X(86)90065-6

[3] Andersen, T. G., Benzoni, L., & Lund, J. (2004). Stochastic volatility, mean drift, and bond pricing. *Review of Economic Dynamics*, 7(1), 61–93.

[4] Bangia, A., Diebold, F. X., Kronimus, A., Schagen, C., & Schuermann, T. (1999). Modeling liquidity risk, with implications for traditional market risk measurement and management. *Working Paper*, Wharton Financial Institutions Center.

[5] Brunnermeier, M. K., & Pedersen, L. H. (2009). Market liquidity and funding liquidity. *Review of Financial Studies*, 22(6), 2201–2238. https://doi.org/10.1093/rfs/hhn098

[6] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.

[7] Duffie, D., & Singleton, K. J. (2003). *Credit risk: Pricing, measurement, and management*. Princeton University Press.

[8] Fabozzi, F. J. (Ed.). (2021). *Bond markets, analysis and strategies* (10th ed.). Pearson Education.

[9] Filipović, D. (2009). *Term-structure models: A graduate course*. Springer.

[10] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson Education.

[11] Khanthavit, A. (2015). The components of bid-ask spread in Thailand's government bond market. *Chulalongkorn Business Review*, 37(4), 58–75.

[12] Longstaff, F. A., Mithal, S., & Neis, E. (2005). Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? New evidence from the credit default swap market. *The Journal of Finance*, 60(5), 2213–2253.

[13] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.

[14] Witayakiattilerd, W., Phothong, K., Sudtinont, K., & Bundasak, P. (2024). Instant exchange analytics: A compelling mathematical model for real-time debt instrument and cash conversion rates. *Thailand Statistician*, *22*(2), 390–406.

[15] อัญญา ขันธวิทย์. (2006). *การทดสอบทางสถิติของตัวแบบจำลองเพื่อพรรณนาโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยในตลาดตราสารหนี้ไทย: รายงานวิจัย* (No. 273014). มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12

1) บริษัท A มีตราสารหนี้ที่ออกและซื้อขายในตลาดรอง โดยมีข้อมูลการซื้อขายในช่วง 5 วันทำการล่าสุดดังนี้

วัน	ปริมาณการซื้อขาย (ล้านบาท)	ราคาเสนอซื้อ (Bid)	ราคาเสนอขาย (Ask)
1	120	98.25	99.00
2	90	98.10	98.95
3	140	98.30	98.90
4	110	98.50	99.10
5	130	98.40	99.05

คำถาม

1.1) จงคำนวณ Bid-Ask Spread เฉลี่ย ทั้งในรูปมูลค่าคงที่ (บาท) และเป็นเปอร์เซ็นต์ของราคากลาง (Mid Price)

1.2) จงคำนวณ Turnover Ratio โดยใช้มูลค่ารวมของตราสารหนี้ที่ออกไว้ทั้งสิ้น 2,000 ล้านบาท

1.3) วิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้ว่าตลาดของตราสารหนี้ดังกล่าวมีความสภาพคล่องสูงหรือต่ำ พร้อมให้เหตุผล

2) ในช่วงวิกฤตการเงิน ตลาดตราสารหนี้แห่งหนึ่งมีค่า Bid-Ask Spread เฉลี่ยเพิ่มจาก 0.30% เป็น 1.20% ในระยะเวลา 1 เดือน และมูลค่าการซื้อขายรายวันลดลงจาก 500 ล้านบาทเหลือเพียง 200 ล้านบาท

คำถาม

2.1) จงวิเคราะห์ผลกระทบต่อสภาพคล่องในตลาดโดยอิงจากตัวชี้วัดข้างต้น

2.2) หากตลาดมีตราสารหนี้ทั้งหมด 50 รายการ และมีเพียง 10 รายการที่มีการซื้อขายต่อเนื่องในช่วงดังกล่าว ให้คำนวณ Market Breadth Ratio

2.3) จากสถานการณ์ข้างต้น จงอธิบายว่าทำไมสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้จึงอาจมีความสำคัญในเชิงระบบ (systemic importance) ต่อเสถียรภาพของระบบการเงินโดยรวม

3) ในช่วงเวลา 10 วันทำการ มีข้อมูลเกี่ยวกับราคาเสนอซื้อและราคาเสนอขายของพันธบัตรรัฐบาลชุดหนึ่งดังนี้

วัน	Bid Price (บาท)	Ask Price (บาท)
1	101.20	101.50
2	101.10	101.45
3	101.25	101.60
4	101.30	101.55
5	101.15	101.40
6	101.05	101.35
7	101.00	101.30
8	100.95	101.25
9	100.85	101.15
10	100.90	101.20

คำถาม

3.1) จงคำนวณ Bid-Ask Spread เฉลี่ย ในรูปเปอร์เซ็นต์ของราคากลาง (Mid Price)

3.2) จากค่าเฉลี่ยของ Bid-Ask Spread ที่ได้ ให้ตีความว่าสะท้อนถึงระดับสภาพคล่องอย่างไร

3.3) หากในช่วงเดียวกันนี้พบว่าปริมาณการซื้อขายลดลงอย่างต่อเนื่อง จงอธิบายความเชื่อมโยงเชิงพฤติกรรมที่อาจเกิดขึ้นในมุมมองของนักลงทุน

4) ตลาดตราสารหนี้แห่งหนึ่งมีการประเมิน Liquidity Cost Score (LCS) ของตราสารหนี้รายตัว โดยใช้สูตร

$$\text{LCS} = (\text{Ask Price} - \text{Bid Price}) \div \text{Average Trading Volume}$$

กำหนดให้มีข้อมูลของตราสารหนี้ 3 รายการดังนี้

ตราสารหนี้	Bid Price	Ask Price	Average Trading Volume (ล้านบาท)
A	99.10	99.60	100
B	98.80	99.40	50
C	100.20	100.80	200

คำถาม

4.1) จงคำนวณค่า LCS ของแต่ละตราสารหนี้

4.2) วิเคราะห์เปรียบเทียบความสภาพคล่องของตราสารทั้งสามรายการ

4.3) เสนอแนวทางการใช้ค่า LCS ร่วมกับข้อมูลพฤติกรรมตลาด เช่น ปริมาณคำสั่งซื้อค้าง (order depth) เพื่อประเมินสภาพคล่องอย่างรอบด้าน

5) สมมุติว่าค่า CDS Spread ของพันธบัตรรัฐบาลไทยอายุ 5 ปี เท่ากับ 90 bps (basis points) และ Z-Spread ที่คำนวณจากราคาตลาดของพันธบัตรดังกล่าวเท่ากับ 65 bps

คำถาม

5.1) จงคำนวณค่า CDS-Bond Basis

5.2) อธิบายความหมายของค่า CDS-Bond Basis ที่ได้ว่าบ่งชี้ถึงสถานการณ์ด้านสภาพคล่องอย่างไร

5.3) หากพบว่า CDS-Bond Basis ขยายตัวขึ้นต่อเนื่องในช่วงวิกฤตเศรษฐกิจ มีนัยสำคัญเชิงพฤติกรรมต่อตลาดตราสารหนี้หรือไม่ จงอภิปราย

6) พิจารณาตลาดออปชันพันธบัตรที่มีข้อมูลการซื้อขายของ Bond Futures และ Bond Option ดังนี้

สินทรัพย์อ้างอิง ราคาฟิวเจอร์ส	Premium ของ Call Option (at-the-money)	อัตราผลตอบแทนพันธบัตร (Yield)
พันธบัตร 10 ปี 103.00	2.80	2.50%

คำถาม

6.1) จงวิเคราะห์ว่า Call Option ข้างต้นมีราคาสูงหรือต่ำเกินไปเมื่อเทียบกับราคาฟิวเจอร์ส และสะท้อนอะไรเกี่ยวกับความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง

6.2) หากราคาของ Call Option เพิ่มขึ้นเป็น 3.50 ภายในระยะเวลา 3 วัน โดยที่ราคาฟิวเจอร์สเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย จงวิเคราะห์สัญญาณที่อาจสะท้อนจากความเคลื่อนไหวดังกล่าว

6.3) อธิบายว่า “ออปชันบนพันธบัตร” สามารถใช้เป็นตัวชี้วัดเสริมในการประเมินสภาพคล่องของตลาดได้อย่างไร โดยยกตัวอย่างเพิ่มเติม

7) ในช่วงวิกฤตเศรษฐกิจปีหนึ่ง พบว่าผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลไทย 3 รุ่น มีค่าผันผวนรายวัน (volatility) เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ โดยมีข้อมูลดังนี้

รุ่นพันธบัตร	ผลตอบแทนเฉลี่ย (ต่อปี)	ความเบี่ยงเบนมาตรฐานรายวัน (bps)
2 ปี	1.25%	18
5 ปี	1.60%	25
10 ปี	2.10%	35

คำถาม

7.1) จงคำนวณค่าความผันแปรของผลตอบแทน (Variance) รายวันของพันธบัตรแต่ละรุ่น
7.2) จากผลลัพธ์ที่ได้ วิเคราะห์โครงสร้างของความผันแปรของผลตอบแทน (Term Structure of Volatility)
7.3) อธิบายว่าโครงสร้างดังกล่าวสะท้อนพฤติกรรมตลาดในช่วงวิกฤตได้อย่างไร และมีนัยต่อผู้ลงทุนหรือผู้กำหนดนโยบายการเงินอย่างไร

8) ในช่วงวิกฤตการณ์โควิด-19 ปี 2020 พบว่าโครงสร้างอัตราผลตอบแทน (yield curve) เปลี่ยนรูปร่างจาก normal ไปเป็น inverted ภายในระยะเวลา 3 เดือน โดยผลตอบแทนพันธบัตรมีข้อมูลดังนี้

ระยะเวลา	อัตราผลตอบแทน ณ ม.ค. 2020	อัตราผลตอบแทน ณ มี.ค. 2020
1 ปี	1.50%	1.80%
5 ปี	1.75%	1.40%
10 ปี	2.00%	1.30%

คำถาม
8.1) วาดกราฟโครงสร้างอัตราผลตอบแทนก่อนและระหว่างวิกฤต พร้อมวิเคราะห์ลักษณะการเปลี่ยนแปลง
8.2) อธิบายว่า Inverted Yield Curve ที่เกิดขึ้นนี้อาจบ่งชี้ถึงภาวะเศรษฐกิจอย่างไร โดยอ้างอิงทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์การเงิน
8.3) จงอภิปรายผลกระทบของความเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างผลตอบแทนต่อการประเมินความเสี่ยงด้านสภาพคล่องในตลาดตราสารหนี้

9) จากแนวความคิดของงานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024) ซึ่งเสนอการพัฒนาแอปพลิเคชันต้นแบบสำหรับการเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ โดยอิงจากแบบจำลอง Hull-White เพื่อประเมินราคาพันธบัตรในช่วงเวลาที่ตลาดไม่เปิดทำการ
คำถาม
9.1) วิเคราะห์เหตุผลเชิงโครงสร้างทางเศรษฐศาสตร์และการเงินว่าทำไมระบบแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์จึงมีความสำคัญต่อสภาพคล่องโดยรวมของตลาดตราสารหนี้
9.2) ให้นักศึกษายกตัวอย่างสถานการณ์ของนักลงทุนรายย่อยที่อาจได้รับประโยชน์จากการมีระบบนี้ พร้อมคำนวณว่าหากนักลงทุนถือพันธบัตรไม่มีคูปองมูลค่า 500,000 บาท ที่มีอัตราผลตอบแทน 3% และเหลืออายุ 1.5 ปี จะได้รับเงินสดจำนวนเท่าใด ณ เวลาที่ทำรายการผ่านแอป โดยใช้แบบจำลองราคาพันธบัตร

$$P(t,T) = A(t,T)\cdot \exp(-B(t,T)\cdot r_t)$$

โดยให้ $A(t,T) = 0.975$, $B(t,T) = 1.4$, และ $r_t = 2.8\%$

9.3) วิเคราะห์ข้อจำกัดทางเทคโนโลยีและกฎระเบียบที่อาจเกิดขึ้นในการพัฒนาแอปพลิเคชันประเภทนี้ให้ใช้งานได้จริงในตลาดตราสารหนี้ของประเทศไทย

10) จงวิเคราะห์และเปรียบเทียบความแตกต่างของตัวแบบ Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross (CIR) และ Hull-White ในบริบทของการจำลองอัตราดอกเบี้ยเพื่อกำหนดราคาตราสารหนี้ พร้อมอภิปรายว่าทำไม Hull-White จึงเป็นตัวแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับกรณีศึกษา

11) สมมติว่าตั๋วเงินคลังอายุ 1 ปี มีมูลค่าที่ตราไว้ 1,000 บาท และอัตราดอกเบี้ยลดลงจาก 3% เป็น 2.5% หลังเหตุการณ์เศรษฐกิจ จงคำนวณราคาตราสารหนี้ที่อัปเดตโดยใช้ตัวแบบ Hull-White และเปรียบเทียบกับตัวแบบ Vasicek

12) จงวิเคราะห์และอธิบายความเชื่อมโยงระหว่างสภาพคล่องและความผันผวนของตลาดในบริบทของการจัดการพอร์ตพันธบัตรและการออกแบบตลาดรอง โดยพิจารณาผลกระทบของความผันผวนในตลาดที่มีต่อสภาพคล่องของตราสารหนี้ และอธิบายว่าการมีแพลตฟอร์มที่สามารถเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสดได้แบบเรียลไทม์ตามงานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024) สามารถลดผลกระทบนี้ได้อย่างไร
คำถาม
12.1) อธิบายเชิงทฤษฎีถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับความผันผวนของตลาดกับ bid-ask spread และ turnover ratio ของพันธบัตรในตลาดรอง
12.2) หากในช่วงที่ความผันผวนของตลาดเพิ่มขึ้นจาก 1% เป็น 2.5% นำไปสู่การขยาย bid-ask spread ของพันธบัตรจาก 0.15% เป็น 0.45% จงวิเคราะห์ผลกระทบที่เกิดขึ้นกับนักลงทุนที่ต้องการขายพันธบัตรมูลค่า 10 ล้านบาทในช่วงเวลาดังกล่าว
12.3) ให้นักศึกษาประเมินว่าแพลตฟอร์มแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ตามงานวิจัยของ Witayakiattilerd สามารถลดต้นทุนทางสภาพคล่องได้มากน้อยเพียงใด โดยเปรียบเทียบกับการขายพันธบัตรในตลาดรองที่มี bid-ask spread กว้างขึ้นในช่วงวิกฤต

13) จากแนวคิดจากงานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024) สมมติว่าแอพพลิเคชันทำธุรกรรมตราสารหนี้ได้รวม 150,000 ล้านบาทในหนึ่งวัน โดยคิดค่าธรรมเนียม 0.01% ต่อธุรกรรม จงคำนวณรายได้จากค่าธรรมเนียม และวิเคราะห์ผลกระทบหากค่าธรรมเนียมถูกปรับเพิ่มเป็น 0.02%

14) ในกรณีศึกษาที่ใช้ตัวแบบ Hull-White พบว่าการแบ่งค่าพารามิเตอร์ออกเป็นช่วง ๆ ให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าการใช้ค่าพารามิเตอร์เดียวตลอดช่วงข้อมูล จงวิเคราะห์และอธิบายว่าทำไมการแบ่งค่าพารามิเตอร์จึงช่วยเพิ่มความแม่นยำของตัวแบบ

15) สมมติว่าใช้ตัวแบบ Hull-White จำลองอัตราดอกเบี้ยของพันธบัตรรัฐบาลอายุ 3 ปี 100 ชุดข้อมูลในระยะเวลา 6 เดือนข้างหน้า จงคำนวณและวิเคราะห์แนวโน้มราคาตราสารหนี้ พร้อมอภิปรายผลกระทบต่อการตัดสินใจลงทุน

16) จากแนวคิดการพัฒนาแอปพลิเคชันสำหรับแปลงตราสารหนี้เป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ตามงานวิจัยของ Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024) ให้นักศึกษาเสนอฟังก์ชันเสริมที่สามารถนำมาใช้เพิ่มประสิทธิภาพของระบบเพื่อสนับสนุนการตัดสินใจด้านการลงทุน

คำถาม

16.1) เสนออย่างน้อย 2 ฟังก์ชันที่ควรเพิ่มเติมในแอปพลิเคชัน เช่น การคำนวณมูลค่าปัจจุบัน (Present Value), การวิเคราะห์ความเสี่ยง (Portfolio VaR), หรือการเปรียบเทียบราคาตราสารกับราคาตลาด

16.2) อธิบายการทำงานของฟังก์ชันหนึ่งที่เลือก พร้อมยกตัวอย่างการคำนวณ เช่น การคำนวณมูลค่าปัจจุบันของพันธบัตรไม่มีคูปอง (Zero-Coupon Bond) ที่มีมูลค่าหน้าตั๋ว \$1,000,000\$ บาท เหลือเวลา $t = 2$ ปี อัตราดอกเบี้ย $r = 3.5\%$ โดยใช้สูตร

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$

16.3) วิเคราะห์ประโยชน์ของฟังก์ชันดังกล่าวต่อผู้ใช้งาน เช่น นักลงทุนรายย่อยที่ต้องการตัดสินใจขายพันธบัตรหรือประเมินความเสี่ยงของพอร์ตในสภาวะตลาดผันผวน

17) ในการศึกษาประสิทธิภาพของแบบจำลองกำหนดราคาตราสารหนี้ นักวิเคราะห์ได้นำข้อมูลราคาตลาดของพันธบัตรไม่มีคูปองจำนวน 10 ฉบับมาเปรียบเทียบกับราคาที่ประเมินโดยใช้แบบจำลอง Vasicek และ Hull-White ตามลำดับ โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root Mean Squared Error: RMSE) เป็นเกณฑ์การประเมินผลลัพธ์

ฉบับที่	ราคาตลาด (P_{market})	ราคาจาก Vasicek	ราคาจาก Hull-White
1	96.52	95.87	96.41
2	97.80	97.03	97.76
3	95.00	94.15	94.92
4	98.20	97.52	98.17
5	96.75	95.90	96.65

คำถาม

17.1) ให้คำนวณค่า RMSE ของทั้งสองแบบจำลอง โดยใช้สูตร

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i^{\text{model}} - P_i^{\text{market}})^2}$$

โดยกำหนดให้มีข้อมูลราคาตลาด (P_i^{market}) และราคาที่คำนวณได้จากแบบจำลอง (P_i^{model}) ดังตารางต่อไปนี้

17.2) วิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จาก RMSE ของทั้งสองแบบจำลอง พร้อมสรุปว่าแบบจำลองใดมีประสิทธิภาพดีกว่าในการประมาณราคาตราสารหนี้จากข้อมูลชุดนี้

17.3) เสนอแนวทางปรับปรุงแบบจำลองเพื่อเพิ่มความแม่นยำ เช่น การใช้ volatility term structure หรือการ calibrate พารามิเตอร์ด้วยวิธี optimization

18) (การวิเคราะห์ผลกระทบของการขาดสภาพคล่อง) ในตลาดตราสารหนี้แห่งหนึ่ง มีมูลค่าการซื้อขายเฉลี่ยต่อวันอยู่ที่ 50,000 ล้านบาท โดยมีอัตราการชำระราคาสำเร็จภายใน 1 วันเท่ากับร้อยละ 90 หากเกิดวิกฤตสภาพคล่องซึ่งทำให้มีเพียงร้อยละ 60 ของธุรกรรมที่สามารถชำระราคาได้ภายใน 1 วัน จงคำนวณปริมาณธุรกรรมที่อาจต้องรอการชำระราคานานขึ้น และอธิบายผลกระทบต่อความเชื่อมั่นของนักลงทุนรายย่อย รวมถึงต้นทุนแฝงที่อาจเกิดขึ้นจากการขาดสภาพคล่องในตลาดนี้

19) (การเปรียบเทียบต้นทุนระหว่างตลาด OTC และตลาดที่มีระบบแลกเปลี่ยนอัตโนมัติ) สมมติว่าในตลาดรองตราสารหนี้มีการซื้อขายแบบ OTC ซึ่งมีค่าธรรมเนียมและต้นทุนเวลาในการส่งมอบเฉลี่ยเท่ากับร้อยละ 0.20 ต่อธุรกรรม ขณะที่ระบบใหม่ที่เสนอโดย Witayakiattilerd และคณะ (ค.ศ. 2024) มีต้นทุนรวม (ค่าธรรมเนียม + เวลา) เฉลี่ยเพียงร้อยละ 0.05 ต่อธุรกรรม สมมติว่าในหนึ่งวันมีปริมาณการซื้อขายตราสารหนี้ 70,000 ล้านบาท

19.1) จงคำนวณต้นทุนรวมในแต่ละระบบ และหาค่าความประหยัดที่ระบบใหม่สามารถมอบให้ได้

19.2) จงวิเคราะห์ผลของความประหยัดนี้ต่อการตัดสินใจของนักลงทุนรายย่อยและการพัฒนาตลาดตราสารหนี้ในระยะยาว

20) (การคำนวณ Bid-Ask Spread เพื่อประเมินสภาพคล่อง) พิจารณาตราสารหนี้รัฐบาลไทยฉบับหนึ่งที่มีราคาซื้อ (Bid price) เท่ากับ 98.25 บาท และราคาขาย (Ask price) เท่ากับ 98.75 บาท โดยมีปริมาณการซื้อขายในวันนั้นอยู่ที่ 800 ล้านบาท

20.1) จงคำนวณ Bid-Ask Spread ทั้งในรูปมูลค่า (บาท) และร้อยละของราคาเฉลี่ย

20.2) อธิบายว่า Bid-Ask Spread ที่ได้บ่งชี้ถึงระดับสภาพคล่องของตราสารนี้อย่างไร และนักลงทุนควรพิจารณาส่วนต่างนี้ประกอบการตัดสินใจลงทุนอย่างไร

21) (การใช้ Amihud Illiquidity Ratio ในการเปรียบเทียบตราสารหนี้) นักวิเคราะห์กำลังเปรียบเทียบสภาพคล่องของตราสารหนี้ 2 ฉบับ โดยมีข้อมูลดังนี้

- ตราสาร A: มูลค่าการซื้อขายเฉลี่ยต่อวัน 400 ล้านบาท, การเปลี่ยนแปลงราคาสัมพัทธ์เฉลี่ย 0.10%
- ตราสาร B: มูลค่าการซื้อขายเฉลี่ยต่อวัน 150 ล้านบาท, การเปลี่ยนแปลงราคาสัมพัทธ์เฉลี่ย 0.05%

21.1) จงคำนวณค่า Amihud Illiquidity Ratio ของตราสาร A และ B

21.2) จากค่าที่ได้ จงวิเคราะห์ว่าตราสารใดมีสภาพคล่องดีกว่า และผลของสภาพคล่องนี้มีผลต่อการตัดสินใจของผู้จัดการพอร์ตอย่างไร

22) สมมุติว่าตลาดตราสารหนี้มีข้อมูลอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาลไทยแบบไม่มีคูปอง (zero-coupon bonds) ณ ปัจจุบัน ดังนี้

อายุคงเหลือของพันธบัตร (ปี)	ราคา (ต่อ 100 บาทมูลค่าที่ตราไว้)
1	96.15
2	91.50
3	86.40

คำถาม

22.1) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยจุด (Spot Rate) สำหรับปีที่ 1, 2 และ 3

22.2) จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยล่วงหน้า (1-year Forward Rate) สำหรับช่วงระหว่างปี 1 ถึง 2 และระหว่างปี 2 ถึง 3

22.3) วิเคราะห์แนวโน้มของโครงสร้างอัตราผลตอบแทนที่ได้ ว่าตลาดคาดการณ์แนวโน้มอัตราดอกเบี้ยอย่างไร

23) นักวิเคราะห์ต้องการใช้ข้อมูล Spot Rate และ Forward Rate ในการประเมินความคุ้มค่าของการลงทุนในพันธบัตรมีคูปอง โดยมีข้อมูลดังนี้

- พันธบัตรมีอายุ 3 ปี คูปอง 5% จ่ายปีละครั้ง ราคาปัจจุบัน = 101.50 บาท
- Spot Rate
    - ปีที่ 1 = 3.80%

- ปีที่ 2 = 4.20%
- ปีที่ 3 = 4.80%

คำถาม

23.1) จงคำนวณมูลค่าที่เหมาะสม (Theoretical Price) ของพันธบัตรโดยใช้อัตราดอกเบี้ยจุด (Spot Rate)

23.2) เปรียบเทียบราคาตลาดกับมูลค่าที่เหมาะสม แล้ววิเคราะห์ว่าพันธบัตรนี้มีราคาถูกหรือแพง

23.3) หากมีการคาดการณ์ว่าอัตราดอกเบี้ยในอนาคตจะลดลงมาก จงอธิบายว่าจะมีผลต่อ Forward Rate และราคาตลาดของพันธบัตรนี้อย่างไร

24) กำหนดให้พฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในตลาดการเงินสามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง Vasicek ดังนี้

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

โดยที่ $a = 0.3$, $b = 4\%$ (อัตราดอกเบี้ยระยะยาว), $\sigma = 1.2\%$, $r_0 = 3\%$ พิจารณาช่วงเวลา $t = 1$ ปี

คำถาม

24.1) จงคำนวณค่าคาดหวัง (Expected Value) และความแปรปรวน (Variance) ของอัตราดอกเบี้ย ณ เวลา $t = 1$ ปี

24.2) วิเคราะห์ความหมายเชิงพฤติกรรมของพารามิเตอร์ a , b , และ σ ในบริบทของนโยบายการเงิน

24.3) หากค่า a เพิ่มขึ้นจาก 0.3 เป็น 1.0 จงอธิบายผลกระทบที่มีต่อความผันผวนและเสถียรภาพของอัตราดอกเบี้ยตามโมเดล

25) สมมุติว่าอัตราดอกเบี้ยระยะสั้นในระบบเศรษฐกิจหนึ่งถูกกำหนดโดยแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

โดยที่ $a = 0.5$, $b = 5\%$, $\sigma = 0.8\%$, $r_0 = 4\%$ พิจารณาเวลาผ่านไป 1 ปี

คำถาม

25.1)]จงอธิบายว่าทำไม CIR Model จึงเหมาะสมกว่าสำหรับการจำลองอัตราดอกเบี้ยในภาวะที่ใกล้ศูนย์หรือมีความเสี่ยงที่อัตราดอกเบี้ยจะติดลบ

25.2) หากอัตราดอกเบี้ยในระบบลดลงเหลือ 0.25% ณ ปัจจุบัน จงอภิปรายว่าความผันผวนตามโมเดล CIR จะเปลี่ยนไปอย่างไร

25.3) สมมุติให้นักลงทุนต้องการสร้างแบบจำลองสำหรับตราสารหนี้ระยะยาวในภาวะดอกเบี้ยต่ำ ควรเลือกใช้ Vasicek หรือ CIR เพราะเหตุใด

26) นักวิเคราะห์การเงินกำลังประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง **Vasicek** จากข้อมูลอัตราดอกเบี้ยรายเดือนย้อนหลัง 12 เดือน (ต่อปี) ดังนี้

เดือน	อัตราดอกเบี้ย (ต่อปี)
1	1.90%
2	1.95%
3	2.00%
4	1.98%
5	2.05%
6	2.08%
7	2.15%
8	2.20%
9	2.18%
10	2.25%
11	2.30%
12	2.35%

คำถาม

26.1) ใช้วิธีการประมาณแบบ OLS (Ordinary Least Squares) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, และ σ ของแบบจำลอง Vasicek ที่มีรูปสมการ

$$r_{t+1} = r_t + a(b - r_t) + \varepsilon_t$$

26.2) วิเคราะห์ความหมายเชิงพฤติกรรมของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ในบริบทของเสถียรภาพอัตราดอกเบี้ย

26.3) หากพบว่า a มีค่าสูงมาก (เช่น $a > 1.5$) ให้ตีความนัยของการ mean-reverting อย่างรวดเร็วในตลาด

27) นักวิเคราะห์ต้องการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง **Cox-Ingersoll-Ross (CIR)** โดยใช้ข้อมูลจำลองอัตราดอกเบี้ยต่อปีในช่วง 10 ปีที่ผ่านมาดังนี้

ปี	อัตราดอกเบี้ยเฉลี่ย (%)
1	3.20
2	3.00
3	2.80
4	2.70
5	2.90
6	3.10
7	3.40
8	3.70
9	3.90
10	4.10

คำถาม

27.1) อธิบายขั้นตอนการประมาณพารามิเตอร์ a, b, และ σ ใน CIR โดยใช้วิธี Generalized Method of Moments (GMM)

27.2) ให้นักศึกษาเขียนสูตร GMM โดยระบุ moment conditions อย่างน้อย 2 เงื่อนไข

27.3) วิเคราะห์ว่าในกรณีที่ค่า σ ที่ได้สูงมาก อาจสะท้อนถึงสถานการณ์ตลาดการเงินเช่นไร และส่งผลต่อราคาพันธบัตรระยะยาวอย่างไร

28) ให้นักศึกษาทำการจำลองอัตราดอกเบี้ยรายไตรมาสเป็นเวลา 2 ปี ด้วยแบบจำลอง Vasicek ซึ่งมีสมการ

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

โดยมีพารามิเตอร์ดังนี้ $r_0 = 2.50\%, a = 0.6$, $b = 3.0\%$, $\sigma = 0.8\%$ สมมุติให้ $dt = 0.25$ (รายไตรมาส) ใช้การสุ่มค่าจาก $\mathcal{N}(0,1)$ สำหรับ $dW_t = \sqrt{dt} \cdot Z_t$

คำถาม

28.1) เขียนโปรแกรมจำลอง (เช่น ด้วย Python หรือ Excel) เพื่อสร้างเส้นทางจำลองของอัตราดอกเบี้ย

28.2) แสดงกราฟพฤติกรรมของอัตราดอกเบี้ยในแต่ละไตรมาส

28.3) วิเคราะห์ความหมายของผลลัพธ์ว่าอัตราดอกเบี้ยมีแนวโน้มกลับเข้าสู่ค่าเฉลี่ยหรือไม่ และใช้เวลาโดยประมาณเท่าไร

29) พิจารณาแบบจำลอง Cox-Ingersoll-Ross (CIR) ที่มีสมการ

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

โดยมีพารามิเตอร์ดังนี้ $r_0 = 1.00\%$, $a = 1.0$, $b = 2.0\%$, $\sigma = 0.4$, $dt = 0.25$ (รายไตรมาส), จำลองทั้งหมด 16 ขั้นเวลา (4 ปี) ใช้การสุ่มค่าจาก $\mathcal{N}(0,1)$

คำถาม

29.1) จำลองเส้นทางของอัตราดอกเบี้ยจากโมเดล CIR จำนวน 3 เส้นทาง และแสดงเป็นกราฟ

29.2) เปรียบเทียบเสถียรภาพของผลลัพธ์จาก CIR กับ Vasicek และอธิบายความแตกต่างเชิงโครงสร้างที่สำคัญ

29.3) จงอภิปรายว่าโมเดล CIR เหมาะกับการวิเคราะห์ตราสารหนี้ในสภาวะใด โดยยกตัวอย่างประกอบ

30) สมมุติว่าในช่วงเวลาวิกฤตเศรษฐกิจ นักลงทุนใช้แบบจำลอง Monte Carlo Simulation เพื่อวิเคราะห์ความเสี่ยงด้านสภาพคล่องของพอร์ตพันธบัตร โดยแต่ละเส้นทางการจำลองกำหนดอัตราดอกเบี้ยในลักษณะสุ่มจากการแจกแจงแบบโลจิสติก (logistic distribution) โดยพิจารณาช่วงเวลา 1 ปี จำนวน 1,000 เส้นทาง

คำถาม

30.1) อธิบายขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง Monte Carlo เพื่อจำลองพฤติกรรมราคาพันธบัตรในสภาวะความไม่แน่นอนของสภาพคล่อง

30.2) ให้นักศึกษาทำการคำนวณมูลค่าพอร์ตพันธบัตร ณ สิ้นปี โดยกำหนดให้พอร์ตมีพันธบัตรไม่มีคูปอง (zero-coupon bond) อายุ 1 ปี มูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท และอัตราผลตอบแทนสุ่มจาก logistic $(\mu = 3\%, s = 1\%)$

30.3) วิเคราะห์ว่าระดับความแปรปรวนของผลตอบแทนที่ได้ส่งผลต่อความเสี่ยงด้านสภาพคล่องอย่างไร

31) ธนาคารพาณิชย์แห่งหนึ่งต้องการวัดความเสี่ยงด้านสภาพคล่องจากการไถ่ถอนตราสารหนี้ก่อนครบกำหนดในตลาดรอง โดยใช้แบบจำลอง Agent-Based Simulation โดยจำลองพฤติกรรมของผู้ลงทุนรายย่อยที่มีความน่าจะเป็นในการขายตราสารก่อนครบกำหนดขึ้นอยู่กับความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย

คำถาม

31.1) ให้นักศึกษาสร้างโครงสร้างแบบจำลองจำลองเชิงพฤติกรรม (agent-based model) ที่สะท้อนการตัดสินใจของนักลงทุนในการขายพันธบัตร

31.2) หากมีนักลงทุน 1,000 ราย และแต่ละรายมีโอกาสขายพันธบัตร $p_i = 0.05 + 0.3 \cdot \text{Volatility}_t$ โดย Volatility_t เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราดอกเบี้ยย้อนหลัง 30 วัน ให้นักศึกษาคำนวณจำนวนผู้ขายโดยประมาณภายใต้ $\text{Volatility}_t = 1.5\%$

31.3) วิเคราะห์ผลกระทบเชิงระบบ (systemic impact) หากนักลงทุนจำนวนมากขายตราสารหนี้พร้อมกัน

32) กองทุนรวมตราสารหนี้แห่งหนึ่งมีพอร์ตพันธบัตรที่ประกอบด้วยพันธบัตรรัฐบาลอายุ 3 ปี และพันธบัตรรัฐวิสาหกิจอายุ 5 ปี รวมมูลค่าทั้งสิ้น 100 ล้านบาท โดยมีสัดส่วนพันธบัตรรัฐบาล 60% และพันธบัตรรัฐวิสาหกิจ 40% ณ ปัจจุบัน อัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลอยู่ที่ 2.5% ต่อปี ส่วนพันธบัตรรัฐวิสาหกิจอยู่ที่ 3.2% ต่อปี

คำถาม

32.1) คำนวณอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก (weighted average yield) ของพอร์ต

32.2) หากกองทุนต้องการลด duration ของพอร์ตลงจาก 4 ปี เหลือ 2 ปี โดยไม่เปลี่ยนมูลค่ารวม ควรปรับสัดส่วนของพันธบัตรทั้งสองประเภทอย่างไร (สมมุติว่า duration ของพันธบัตรรัฐบาล = 2 ปี และพันธบัตรรัฐวิสาหกิจ = 6 ปี)

32.3) วิเคราะห์ผลกระทบต่อสภาพคล่องของกองทุนหากพอร์ตมี duration สูงเกินไปในช่วงที่ตลาดมีความผันผวน

33) เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของตลาดรอง พันธบัตรแห่งหนึ่งกำลังพัฒนาแพลตฟอร์มอิเล็กทรอนิกส์ (electronic bond trading platform) ที่เปิดให้ผู้ถือพันธบัตรสามารถเสนอขายหรือขอซื้อแบบ real-time โดยระบบจะใช้แบบจำลอง Machine Learning เพื่อจับคู่อัตโนมัติและประเมินระดับสภาพคล่องจากข้อมูลในอดีต

คำถาม

33.1) ให้นักศึกษาระบุฟีเจอร์ (features) ที่สำคัญของแบบจำลอง Machine Learning ที่สามารถใช้ประเมินระดับสภาพคล่องของตราสารหนี้ในตลาดรอง เช่น ปริมาณการซื้อขาย, bid-ask spread, ความถี่การเปลี่ยนมือ

33.2) สมมุติว่าแบบจำลองประเมินระดับสภาพคล่องไว้ที่ $L = 0.62$ บนสเกล $[0, 1]$ และระบบต้องการ threshold ที่ $L > 0.7$ เพื่อยอมให้ตราสารเข้าสู่ระบบซื้อขายอัตโนมัติ ให้วิเคราะห์ว่าสภาพคล่องระดับนี้เพียงพอหรือไม่ และควรมีมาตรการเสริมใดเพื่อเพิ่มสภาพคล่อง

33.3) วิเคราะห์บทบาทของตลาดรองอิเล็กทรอนิกส์ต่อการลดความเสี่ยงระบบในช่วงที่ตลาดผันผวนรุนแรง

34) บริษัทฟินเทคแห่งหนึ่งพัฒนาแอปพลิเคชันสำหรับการแปลงพันธบัตรเป็นเงินสดแบบเรียลไทม์ โดยใช้แบบจำลองราคาจาก Hull-White Model ซึ่งสามารถให้ราคาประเมินพันธบัตรได้แม้ในเวลาที่ตลาดปิดทำการ โดยแอปจะใช้สูตรราคาของพันธบัตรไม่มีคูปอง (Zero-Coupon Bond) ดังนี้

$$P(t,T) = A(t,T) \cdot \exp(-B(t,T) \cdot r_t)$$

โดยที่ $A(t,T)$ และ $B(t,T)$ คำนวณจากพารามิเตอร์ของ Hull-White Model

r_t คืออัตราดอกเบี้ยทันที ณ เวลาปัจจุบัน

คำถาม

34.1) หากกำหนด $r_t = 2.2\%$, $A(t,T) = 0.98$, และ $B(t,T) = 1.95$ จงคำนวณราคาพันธบัตร $P(t,T)$

34.2) วิเคราะห์ข้อดีของการใช้ Hull-White Model เพื่อการประเมินราคาพันธบัตรในระบบอัตโนมัติเปรียบเทียบกับวิธีการใช้ spot rate แบบตายตัว

34.3) อภิปรายว่าการมีแอปแปลงพันธบัตรเป็นเงินสดแบบเรียลไทม์จะช่วยเพิ่มสภาพคล่องในตลาดอย่างไร โดยเฉพาะในช่วงนอกเวลาทำการของตลาด

35) ตลาดหลักทรัพย์แห่งหนึ่งกำลังวางระบบ smart contract สำหรับการซื้อขายพันธบัตรแบบ peer-to-peer โดยใช้บล็อกเชน (Blockchain) เพื่อให้กระบวนการโอนกรรมสิทธิ์และชำระเงินเกิดขึ้นแบบ real-time ทั้งนี้ ระบบจะต้องสามารถคำนวณดอกเบี้ยค้างรับ (accrued interest) ได้อย่างแม่นยำในทุกช่วงเวลา

คำถาม

35.1) สมมุติว่าพันธบัตรจ่ายดอกเบี้ยปีละ 1 ครั้งที่อัตรา 4% ต่อปี และมีการซื้อขายกันในวันที่ผ่านไปแล้ว 150 วันนับจากวันจ่ายดอกเบี้ยครั้งล่าสุด จงคำนวณดอกเบี้ยค้างรับจากมูลค่าหน้าตั๋ว 1,000,000 บาท

35.2) อธิบายโครงสร้างของ smart contract ที่รองรับการชำระราคาพร้อมดอกเบี้ยค้างรับแบบอัตโนมัติ

35.3) วิเคราะห์ผลกระทบของการใช้บล็อกเชนต่อความโปร่งใสและประสิทธิภาพของตลาดรองตราสารหนี้

บรรณานุกรม

[1] Acharya, V. V., & Pedersen, L. H. (2005). Asset pricing with liquidity risk. *Journal of Financial Economics*, 77(2), 375–410. https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2004.06.007

[2] Amihud, Y., & Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*, 17(2), 223–249. https://doi.org/10.1016/0304-405X(86)90065-6

[3] Andersen, T. G., Benzoni, L., & Lund, J. (2004). Stochastic volatility, mean drift, and bond pricing. *Review of Economic Dynamics*, 7(1), 61–93.

[4] Avellaneda, M., & Laurence, P. (2000). *Quantitative modeling of derivative securities*. Chapman & Hall/CRC.

[5] Bangia, A., Diebold, F. X., Kronimus, A., Schagen, C., & Schuermann, T. (1999). Modeling liquidity risk, with implications for traditional market risk measurement and management. *Working Paper*, Wharton Financial Institutions Center.

[6] Bank for International Settlements. (2022). *OTC derivatives statistics at end-December 2022*. https://www.bis.org/statistics

[7] Baxter, M., & Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing.* Cambridge University Press.

[8] Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.

[9] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81*(3), 637–654. https://doi.org/10.1086/260062

[10] Blyth, S. (2013). *An introduction to quantitative finance*. Oxford University Press.

[11] Boyle, P. P. (1986). Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal, 3*(1), 7–12.

[12] Brigo, D., & Mercurio, F. (2006). *Interest rate models: Theory and practice* (2nd ed.). Springer.

[13] Broadie, M., & Detemple, J. (1996). American option valuation: New bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *Review of Financial Studies, 9*(4), 1211–1250. https://doi.org/10.1093/rfs/9.4.1211

[14] Brualdi, R. A. (2018). *Introductory combinatorics*. Pearson.

[15] Brunnermeier, M. K., & Pedersen, L. H. (2009). Market liquidity and funding liquidity. Review of Financial Studies, 22(6), 2201–2238. https://doi.org/10.1093/rfs/hhn098

[16] Cassola, N., & Morana, C. (2008). Modelling short-term interest rate spreads in the euro money market.

[17] Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *An introduction to derivatives and risk management* (10th ed.). Cengage Learning.

[18] Chance, D. M., & Brooks, R. (2015). *An introduction to derivatives and risk management* (10th ed.). Cengage Learning.

[19] Chen, C., & Koh, K. (2012). *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific.

[20] Copeland, T. E. (2005). *Exchange rates and international finance* (4th ed.). Prentice Hall.

[21] Cox, J. C., Ingersoll, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica, 53*(2), 385–407. https://doi.org/10.2307/1911242

[22] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics, 7*(3), 229–263. https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1

[23] Culp, C. L. (2006). *Structured finance and insurance: The art of managing capital and risk*. Wiley.

[24] Dagistan, C. (2008). *Quantify the Interest Rate Risk of Bonds by Simulation*. Istanbul: Istanbul Technical University.

[25] Das, S. R. (n.d.). Quantitative methods for finance. http://algo.scu.edu/~sanjivdas/q115/Q115.pdf.

[26] Delbaen, F., & Schachermayer, W. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Mathematische Annalen, 300(1), 463–520. https://doi.org/10.1007/BF01450498

[27] Dodd, R. (2003). *Consequences of liberalizing derivatives markets*. Financial Policy Forum Derivatives Study Center.

[28] Duffie, D. (2001). *Dynamic asset pricing theory* (3rd ed.). Princeton University Press.

[29] Duffie, D., & Singleton, K. J. (2003). *Credit risk: Pricing, measurement, and management*. Princeton University Press.

[30] Fabozzi, F. J. (Ed.). (2021). *Bond markets, analysis and strategies* (10th ed.). Pearson Education.

[31] Fabozzi, F. J., & Mann, S. V. (2011). *The handbook of fixed income securities* (8th ed.). McGraw-Hill Education.

[32] Fabozzi, F. J., Mann, S. V., & Choudhry, M. (2003). *The global money markets*. Wiley.

[33] Filipović, D. (2009). *Term-structure models: A graduate course*. Springer.

[34] Geske, R., & Johnson, H. E. (1984). The American put option valued analytically. *Journal of Finance, 39*(5), 1511–1524. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1984.tb04910.x

[35] Grimaldi, R. P. (1994). *Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction*. Addison-Wesley.

[36] Gupta, V. K., Panwar, Y. K., & Sikhwal, O. (2012). Generalized Fibonacci sequences. *Theoretical Mathematics & Applications, 2*(2).

[37] Hardle, W., Kleinow, T., & Stahl, G. (2002). *Applied quantitative finance*. Springer-Verlag.

[38] Harrison, J. M., & Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory, 20(3), 381–408. https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90043-3

[39] Haug, E. G. (2007). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas* (2nd ed.). McGraw-Hill.

[40] Ho, T. S., & Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011–1029.

[41] Hull, J. C. (2011). *Fundamentals of futures and options markets*. Pearson Education Indochina Ltd.

[42] Hull, J. C. (2017). *Options, futures, and other derivatives* (9th ed.). Pearson.

[43] Hull, J. C. (2018). *Options, futures, and other derivatives* (10th ed.). Pearson.

[44] Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Pearson Education.

[45] Jamshidian, F. (1989). An exact bond option formula. *Journal of Finance, 44*(1), 205–209. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1989.tb02412.x

[46] Jamshidian, F. (1997). LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics, 1*(4), 293–330. https://doi.org/10.1007/s007800050022

[47] Jarrow, R., & Turnbull, S. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *Journal of Finance, 50*(1), 53–85.

[48] Jensen, B. A. (2005). Binomial models for the term structure of interest.

[49] John Wiley & Sons. (2015). *Wiley study guide for 2015 Level II CFA: Volume I ethics & quantitative methods*. Author.

[50] Khanthavit, A. (2015). The components of bid-ask spread in Thailand's government bond market. *Chulalongkorn Business Review*, 37(4), 58–75.

[51] Klose, C., & Yuan, L. C. (2003). Implementation of the Black, Derman, and Toy model. Seminar Financial Engineering, University of Vienna.

[52] Kolb, R. W., & Overdahl, J. A. (2010). *Financial derivatives: Pricing and risk management*. Wiley.

[53] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas with applications*. A Wiley-Interscience Publication.

[54] Krzy**Ż**anowski, G., & Sosa, A. (2020). Performance analysis of Zero Black-Derman-Toy interest rate model in catastrophic events: COVID-19 case study. *arXiv preprint* arXiv:2007.00705.

[55] Lawson, B. I. (2015). An exposition and calibration of the Ho-Lee model of interest rates.

[56] Li, M., & Mercurio, F. (2013). Closed-form approximation of timer option prices under general stochastic volatility models. Available at SSRN 2243629.

[57] Longstaff, F. A., & Schwartz, E. S. (1992). Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *Journal of Finance, 47*(4), 1259–1282.

[58] Longstaff, F. A., Mithal, S., & Neis, E. (2005). Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? New evidence from the credit default swap market. *The Journal of Finance*, 60(5), 2213–2253.

[59] Lu, X. (2014). An extension of the Hull White model for interest rate modeling. Rochester Institute of Technology.

[60] Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science.* Oxford University Press.

[61] Madura, J. (2014). *International financial management* (12th ed.). Cengage Learning.

[62] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science, 4*(1), 141–183. https://doi.org/10.2307/3003143

[63] Neftci, S. N. (2000). *An introduction to the mathematics of financial derivatives* (2nd ed.). Academic Press.

[64] Obstfeld, M., Cho, D., & Mason, A. (2012). *Global economic crisis impacts, transmission and recovery*. Edward Elgar.

[65] Pilbeam, K. (2013). *Finance & financial markets* (3rd ed.). Palgrave Macmillan.

[66] Piterbarg, V., & Andersen, L. B. G. (2010). *Interest rate modeling* (Vol. I-III). Atlantic Financial Press.

[67] Rebonato, R. (2002). *Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond*. Princeton University Press.

[68] Reinert, K. A., & RajanJohn, R. S. (2009). *The Princeton encyclopedia of the world economy (Volume I)*. Princeton University.

[69] Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory, 13*(3), 341–360. https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6

[70] Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *The Bell Journal of Economics, 7*(2), 407–425. https://doi.org/10.2307/3003264

[71] Shiller, R. J., & McCulloch, J. H. (1990). The term structure of interest rates. *Handbook of monetary economics, 1*, 627–722.

[72] Shreve, S. (2005). *Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model*. Springer Science & Business Media.

[73] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Springer.

[74] Society of Actuaries. (1995). *Generating stochastic interest rate scenarios*. *Record of the Society of Actuaries*, 1133–1154. Boston: Society of Actuaries.

[75] Society of Actuaries. (2015). *Real world interest rate models and current practices*. *The Modeling Platform*, 4–10.

[76] Sundaram, R. K., & Das, S. R. (2016). *Derivatives: Principles and practice* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.

[77] Tuckman, B., & Serrat, A. (2011). *Fixed income securities: Tools for today's markets* (3rd ed.). Wiley.

[78] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 5(2), 177–188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

[79] Weishaus, A. (2012). *Study manual for Exam MFE/Exam 3F Financial Economics*. Greenland: Actuarial Study Materials (A.S.M.).

[80] Wijdeven, S. (2015). *Simulating and modelling interest rates based on existing models*.

[81] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

[82] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*. Cambridge University Press.

[83] Witayakiattilerd, W., Phothong, K., Sudtinont, K., & Bundasak, P. (2024). Instant exchange analytics: A compelling mathematical model for real-time debt instrument and cash conversion rates. *Thailand Statistician*, 22(2), 390–406.

[84] มานพ วราภักดิ์. (2549). *ทฤษฎีดอกเบี้ย (THEORY OF INTEREST)*. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[85] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2559). *การวิเคราะห์การเงินเชิงปริมาณ*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ปลาทอง.

[86] วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ. (2561). *คณิตศาสตร์การเงินและการประยุกต์*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ปลาทอง.

[87] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2548). *ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับตลาดการเงินและการลงทุนในหลักทรัพย์สำหรับผู้ขายหลักทรัพย์ (Single License)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.

[88] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2551). *ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตราสารอนุพันธ์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.

[89] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2552). *CISA ระดับ 1 การวิเคราะห์เชิงปริมาณ กลุ่มวิชาเครื่องมือเพื่อการวิเคราะห์การลงทุน* (พิมพ์ครั้งที่ 3). ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.

[90] สถาบันพัฒนาความรู้ตลาดทุน ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2556). *การวิเคราะห์ตราสารอนุพันธ์ (DR2)*. ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.

[91] อัญญา ขันธวิทย์. (2006). *การทดสอบทางสถิติของตัวแบบจำลองเพื่อพรรณนาโครงสร้างของอัตราดอกเบี้ยในตลาดตราสารหนี้ไทย: รายงานวิจัย* (No. 273014). มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์, คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี.

[92] อัญญา ขันธวิทย์. (2553). *วิศวกรรมการเงินในตลาดการเงินไทย*. พระนคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.

[93] อาณัติ ลีมัคเดช. (2556). *หลักการลงทุนและการป้องกันความเสี่ยงด้วยตราสารอนุพันธ์ทางการเงิน* (พิมพ์ครั้งที่ 2). ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย.

ดัชนี

A.		ความเสี่ยงจากการลงทุน	9, 10, 59, 106
Additivity	64, 180	คอลออปชัน	3, 29-50, 55-58, 110-155, 161-165, 206, 232-239, 247, 266, 268, 270, 287, 288, 356, 357, 359, 360, 363, 366, 368, 372, 376, 399, 400,
American option	109	ค่าความผันผวน	99-102, 107, 156-159, 164, 171, 177, 178, 196-199, 201-204, 222, 230, 249, 266-270, 288, 344-346, 348-349, 352, 358, 359, 361-365, 372, 375, 377-379, 385, 386, 389, 398, 401, 404, 405
Arbitrageur	4	ค่าความผันผวนตามนัย	249, 266, 267, 268, 269, 270, 288
B.		ค่าคาดหวังของอัตรา ผลตอบแทนจากการลงทุน	9, 76
Banker's rule	251	ค่าคาดหวังความเป็นกลางต่อความเสี่ยง	82, 83, 89, 104, 128, 154, 369, 383
Binomial tree prices model)	70	ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข	68, 81, 177
Binomial-lattice models	193	ค่าเฉลี่ยวกกลับ	184, 200, 364
Bounded variation	175, 178	คาบเวลาที่กำหนด	60
Brownian motion	97	ค่าพรีเมียม	3, 29, 30, 32-34, 37-43, 45, 52, 54, 55, 110, 111, 122, 123, 141, 150, 152, 318, 366, 367, 369, 370, 371, 373, 374, 381, 383, 385, 387, 391, 402-406
Buyer	110, 259,	ค่าพรีเมียมของยูโรเปียนพุทออปชัน	111
C.		ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราผลตอบแทน	99
Call option	3, 357, 372	แคปของอัตราดอกเบี้ย	167, 365, 366
Cap agreement	341, 366	แคปเล็ต	368-374, 379, 386, 389, 401, 402,
Cap rate	341, 366, 369,	แคลคูลัสสโตแคสติก	167-170, 174

373, 377, 380, 401-403

Caplets 366

Cash settlement 3

Change of measure 179

Coefficient of variation 45

Comparative advantage 277, 309

Continuous-time price process 99

Covered interest arbitrage 315

Covered interest rate parity theory 314

Credit default swap 249

Currency swap 249, 293, 298, 299, 303-305, 307, 308

CV 45-54, 57, 58

Delivery price 254

D.

Discounted stock prices 83, 104

แคลคูลัสอิโต้ 168, 170

250, 256, 260, 265, 273-276, 280, 282-284, 288, 300, 302, 305, 310, 312, 321, 323, 324, 326-328, 333, 336-340, 367, 368, 372, 375, 383, 386, 389, 393, 395, 404-406

เงินต้นอ้างอิง

เงินสกุลต่างประเทศ 26, 296, 297, 300, 316

จำนวนหุ้นในสิทธิแปรเปลี่ยน 123, 145

ซีนารีโอส์ 61

เซตของผลลัพธ์ 60

ด.

ดัชนีราคาหุ้น 2, 3

ต.

ต้นไม้ทวิภาค 1, 5, 56, 59-60, 70, 73-76, 81, 82, 84, 85, 88, 91, 93, 101, 104, 105, 109, 110, 126, 128, 130-132, 135, 139, 147-149, 151, 162, 164, 165, 193-206, 221-224, 230, 244, 246,

ตราสารสิทธิ 3, 29, 230

ตราสารหนี้ 5-21, 30-46, 48-52, 55-58, 78, 83, 84, 86, 103, 105, 106, 114-136, 142-148, 153, 159, 162-164, 167, 168, 182, 183, 187, 194-199, 203-216, 222-249, 253-255, 266-270, 284-290, 343, 352, 353, 358, 363, 365,

ตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 194, 198, 199, 203, 205, 207, 210-213, 215, 216, 222, 223, 225-228, 230, 232-239, 244-247, 254, 260, 268, 270, 358, 363, 365

ตราสารอนุพันธ์ 2, 4, 5, 12, 17, 76, 79, 167, 179,

			182,
Divisibility	12	ตลาดความเป็นกลางต่อความเสี่ยง	79
Drift rate	99	ตลาดที่ไม่เป็นทางการ	2
Drift term	177	ตัวกรอง	179, 180
E.		ตัวแบบ HJM-1 ปัจจัย	347, 349, 352, 398
Equity swap	249	ตัวแบบคิดลดกระแสเงินสด	367, 382, 389, 356,
Equivalent assets	235	ตัวประกอบเงินสะสม	77, 88, 89
European bond options	168	ตัวแปรเชิงสุ่ม	6, 7, 9, 12, 13, 59, 60-72, 80, 88, 91, 93, 94, 96, 97, 99, 101, 153, 169, 184, 194, 200-202, 262
European option	109, 232, 366	ตัวแปรเชิงสุ่มคงที่	6, 12, 61
Excel solver	186, 191, 199, 200, 205, 206, 224	ตัวแปรเชิงสุ่มไม่คงที่	61
Ex-dividend stock price	151	ตัวแปรอ้างอิง	2, 3
Exercise price	109	ตัววัดความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง	179, 207, 213, 356, 360, 363
Exercise time	109	**ท.**	
Expected return	69	ทฤษฎีการแทนของมาร์ทิงเกล	168
Expiry time	109	ทฤษฎีโครงสร้างของอัตราผลตอบแทน	201
F.		ทฤษฎีบทของกีร์ซานอฟ	168, 354
Feasible price movement	61	ทฤษฎีบทหลักมูลการกำหนดราคาสินทรัพย์	59, 84, 85, 86, 87, 103
Fisher Black	152	ทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ศูนย์กลาง	96
Fixed income interest theory	201	**น.**	
Fixed time step	60	นักเก็งกำไร	4, 5, 44, 47, 76
Floor rate	341	นักค้ากำไร	4, 5
Format trendline	190, 192	นักบริหารความเสี่ยง	4, 44, 54
Forward contact	2, 254	นักลงทุนประเภทชอบความเสี่ยง	78

Forward measure 352, 357

Forward price 16, 254

Forward rate agreement 2, 256

FRA 2, 256-265, 269, 270, 286

Future Contact 3

G.

Girsanov theorem 179

H.

Heath-Jarrow-Morton 342, 345, 348, 361, 398, 400

Heath-Jarrow-Morton Equation 345

Hedger 4, 44

HJM 342, 343, 345, 347, 348, 349, 352, 361, 362, 375, 398, 400

I.

Increment 97, 169

Instantaneous forward rate 343

Interest rate cap 366

Interest rate swap 250, 270, 294, 303

Interest-rate-contingent claims 167

Ito 's calculus 168

Ito 's isometry 175, 209

J.

นักลงทุนประเภทเป็นกลางต่อความเสี่ยง 78

นักลงทุนประเภทไม่ชอบความเสี่ยง 78

นับจำนวนวันแท้จริง 250, 251, 286

นับจำนวนวันสามัญ 250, 251, 286

บ.

บทตั้งของอิโต้ 168, 170, 171, 208, 209, 344

แบบจำลอง BDT 200, 201, 203,

แบบจำลอง CIR 168, 184, 188, 190, 206, 213, 214, 215, 216, 226, 228, 244, 245

แบบจำลอง Cox–Ingersoll–Ross 188

แบบจำลอง Ho และ Lee 167, 184, 190, 192, 203

แบบจำลองของ Brennan และ Schwartz 167

แบบจำลองของ Cox – Ingersoll- Ross 167

แบบจำลองของ Dothan 167

แบบจำลองของ Langetieg 167

แบบจำลองของ Vasicek 167, 168, 184, 212, 213, 225, 226, 227, 230, 231, 233, 235, 238, 239, 241, 245, 247, 248

แบบจำลองโครงสร้างตาข่ายต้นไม้ทวิภาค 193

แบบจำลองราคาต้นไม้ไตรภาค 59, 60, 88, 105

แบบจำลองราคาต้นไม้ทวิภาค 1 ขั้น 1

แบบจำลองราคาเวลาต่อเนื่อง 1, 59, 60, 91, 98, 106, 169, 230

แบบจำลองราคาอย่างง่าย 1, 5, 30

แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย 167, 168, 182-184, 201, 206, 207,

			213, 230, 350
Jump term	177	**ป.**	
Liquidity	12	ปริภูมิความน่าจะเป็น	60, 61, 67, 80, 85, 181, 207, 213
L.		ปริภูมิตัวอย่าง	60, 180
Lognormal distribution	99	เปิดสถานะขาย	12, 13
Long position	12, 260	เปิดสถานะซื้อ	12
M.		**ผ.**	
Martingale	80, 168, 174, 175, 176, 178	ผลประโยชน์ของคอลออปชัน	29, 30, 40, 56, 128, 129, 234, 237, 356, 368,
Martingale component	178	ผลประโยชน์ของยูโรเปียนพุทออปชัน	111
Martingale Difference Sequence	80	ผ่านอัฏภาคที่เป็นบวก	90
Martingale Representation Theorem	168	ผู้ขายคอลออปชัน	111
Maximum Likelihood Estimation	186, 188, 191	ผู้ซื้อคอลออปชัน	110, 129,
Mean-Reverting Process	184	ผู้ออกคอลออปชัน	110
Models of the short rate	184	**พ.**	
Moment Generating Function	180	พจน์การกระโดด	177
Myron Scholes	152	พจน์ดริฟท์	177
N.		พอร์ตการลงทุน	1, 7-9, 13, 17-19, 30, 32-34, 37, 38, 55, 85, 106, 114, 125-127, 129, 130, 162, 234, 235, 254, 260, 264, 365, 381,
NAP	13, 254	พันธบัตรรัฐบาล	2, 245, 264
No-arbitrage principle	13, 57, 84, 317, 343,	พันธะผูกพัน	2, 4, 391, 392
Non-additivity	64	พีชคณิตซิกมา	179, 180
Non-constant random variable	61	พุทออปชัน	3, 29, 41-44, 50-56, 58, 111-152, 155, 159, 161-163, 206, 232, 234-235, 239-241, 247, 375, 376, 383, 385,

O.

Obligation 2

One-step binomial model 1

Option 3, 29, 109, 168, 232, 264, 341, 357, 366, 372, 385, 391

Outcomes 60

Over-the-counter market 2

P.

Physical delivery 2

Plain vanilla swap 250, 276

Portfolio 7, 127

Positive octant 90

Positivity of prices 12

Premium 3, 29, 318

Principle notation 368, 383, 393

Probability measure 60

Probability distribution function 60

Put option 3, 385

Put-call parity 114, 234-236

R.

Random walk 95

Randomness 12

ฟ.

ฟอร์เวิร์ด 1, 2, 3, 16-28, 56, 57, 76, 114, 115, 249, 254-256, 258, 260-262, 269, 286, 287, 290, 291, 293, 296-299, 318-320, 333, 341-343, 345-347, 349, 351-364, 398-403

ฟอร์เวิร์ดของตราสารหนี้ไม่จ่ายคูปอง 249, 254

ฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ 1, 2, 22, 26, 291, 296

ฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย xibor 249, 256

ฟังก์ชัน normsdist(z) 155, 373

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ 180, 181

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น 60

ฟิชเชอร์ แบล็ก 152

ฟิลเตอร์ 179-181

ม.

มาตรวัดความน่าจะเป็น 60

มายรอน โชลส์ 152

มูลค่าแฝงของพุทออปชัน 124, 151

มูลค่าแฝงของออปชัน 124, 125, 146

มูลค่าอนาคต 8, 27, 77, 114, 298

เมเชอร์ฟอร์เวิร์ด 352, 355-357, 359, 360, 399,

ย.

ยูโรเปียนออปชัน 109, 110, 125, 141, 143, 147, 153, 156, 162-164

ร.

ราคาของคอลออปชัน 29, 34, 38, 40, 42, 56, 121-123, 134, 136, 140, 163, 359, 363, 400,

Right	2, 3	ราคาของพุทออปชัน	41, 42, 115, 117, 128, 132, 135, 137, 138, 140, 149, 150, 152, 235, 240, 241, 376
Risk aversion	76	ราคาของฟิวเจอร์สอัตราดอกเบี้ยที่มีการปรับแต่งความนูน	249, 266, 269
Risk neutral	76	ราคาของยูโรเปียนออปชัน	147
Risk seeking	76	ราคาของออปชันตามตัวแปร	121
Risk neutral market	79	ราคาใช้สิทธิ	29-33, 37,39, 41-45, 48, 50, 52-58, 109, 112-125, 131, 139, 142-148, 159-165, 232-238, 247, 254, 266-270, 287, 288, 356, 363, 372, 375, 376, 385, 386-389, 404
Risk-neutral probability	78, 79, 355	ราคาใช้สิทธิแปรเปลี่ยน	121, 145
Robert C. Merton	152	ราคาที่หักออกด้วยเงินปันผลแล้ว	136, 151
S.		ราคาฟอร์เวิร์ด	1, 16, 17-21, 26, 27, 57, 114, 249, 254-256, 286, 297, 298, 333, 353, 354, 356-359, 361-364, 399-403
Sample space	60, 180	ราคาหุ้นส่วนลด	83
Scenarios	61	โรเบิร์ต ซี เมอร์ทัน	152
Short position	12, 13, 260	**ล.**	
Short selling	12, 13	ลักษณะที่พึงประสงค์ของแบบจำลองอัตราดอกเบี้ย	182
Sigma-algebra	179	ลำดับของผลต่างมาร์ทิงเกล	80
Simple market model	1	**ว.**	
Solvency	13, 85	วิธีการนับจำนวนวัน	250, 251
Speculator	4, 5, 44	วิธีการประมาณค่าด้วยความเป็นไปได้สูงสุด	188, 191
Spot exchange rate	300, 314	วิธีการปรับเปลี่ยนการวัดความน่าจะเป็น	179
Spot rate	168, 299, 316, 323, 326, 328, 338-340, 342	**ศ.**	

Standard filtration 207, 213
Stochastic calculus 168
Strike price 29, 109, 357, 399
Swap contact 3, 167, 249, 250, 270, 276, 280-282, 290-293, 298-308, 322-342, 391-406
Symmetric random walk 95
The central limit theorem 96
Typical neutral 88

U.

Uncovered interest rate parity 314
Underlying assets 1
Unpredictable change 176

V.

Variance 68, 175
Volatility 99, 156, 184, 266, 270, 343, 363, 375, 377, 402
Volatility structure 343

W.

Wiener process 97
Writer 110

ก.

ศูนย์กลางหลัก 88

ส.

สมการสโตแคสติก 190, 208
สมการฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน 345
สมบัติการบวก 64-67
สมบัติของแคลคูลัสสโตแคสติก 174
สมบัติเชิงเส้นของค่าคาดหวัง 68
สมบัติมาร์ทิงเกล 59, 80, 82, 86, 106, 154, 167, 174, 176-178, 181, 354, 356, 359, 361, 363
สมบัติมาร์ทิงเกล 59, 80, 81, 82, 83, 86, 106, 154, 167, 168, 174, 175, 176, 177, 178, 181, 193, 354, 356, 359, 361, 363
สมบัติมาร์ทิงเกลของราคาหุ้น 82
ส่วนชดเชยฟอร์เวิร์ด 318, 319,
ส่วนประกอบของการแปรผันจำกัด 175, 178
ส่วนประกอบมาร์ทิงเกล 178
ส่วนเพิ่ม 97, 99, 169, 170
สัญญาคอลลาร์ 341, 365, 387-391, 405-406
สัญญาคอลลาร์ของอัตราดอกเบี้ย 365, 387, 389, 405,
สัญญาแคป 341, 342, 348, 365, 366-369, 372, 373, 375-380, 382, 387, 388, 401-403
สัญญาแคปของอัตราดอกเบี้ย 365, 366
สัญญาซื้อขายล่วงหน้า 2, 3, 16, 57, 58, 315, 316

กฎของธนาคาร 251

กรอบโครงสร้างของตัวแบบฮีธ-จาร์โรว์-มอร์ตัน 342

กระบวนการกำหนดราคาคอลออปชัน 34, 37

กระบวนการราคาแบบเวลาต่อเนื่อง 99

กระบวนการวีเนอร์ 97

กระบวนการสุ่มปรับตัวตาม 174, 175

กลไกราคา 59, 60, 70, 75

ก่อกำเนิดมาร์ทิงเกล 83

การกรองมาตรฐาน 174, 207, 213

การกำหนดราคาตราสารหนี้ 167, 182, 206, 207, 210, 213, 216, 225, 236

การกำหนดราคาพุทออปชัน 41

การกำหนดราคาฟอร์เวิร์ด 1, 16, 20

การกำหนดราคายูโรเปียนออปชัน 109, 125

การกำหนดราคาอเมริกันออปชัน 147, 148

การกำหนดราคาออปชัน 1, 29, 30, 109, 110, 127, 168, 230, 236, 357, 372, 385

การเคลื่อนที่แบบบราวน์ 96, 97, 169, 181

สัญญาฟลอร์ 341, 342, 348, 365, 381, 382, 384-388, 404

สัญญาฟอร์เวิร์ดเงินตราต่างประเทศ 2

สัญญาฟอร์เวิร์ดอัตราดอกเบี้ย 2, 249, 256, 258

สัญญาฟิวเจอร์ส 3, 249, 263, 264-266, 287, 293

สัญญาแลกเปลี่ยน 3, 249, 250, 280, 291, 299, 300, 314, 315, 316

สัญญาแลกเปลี่ยนกระแสเงินสด 3, 280

สัญญาสวอป 2-4, 249, 250, 270, 271-282, 288-293, 295, 298, 299, 301-313, 320, 321, 323-342, 345, 392-394,

สัญญาสวอปของการผิดนัดชำระหนี้ของบริษัท 249

สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ 4, 249, 291, 293, 298, 299, 303-309, 320, 333-335

สัญญาสวอปชัน 341, 342, 391-397, 406

สัญญาสวอปหลักทรัพย์ 249

สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย 4, 249, 250, 270, 271, 275-277, 280-282, 288, 303, 307, 310, 392, 394,

สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย 4, 249, 250, 270, 271, 275, 276, 277, 280, 281, 282, 288, 289, 303, 307, 310, 392, 394

สัมประสิทธิ์ความแปรผัน 45

สินค้าโภคภัณฑ์ 2, 59, 341, 357-359, 361-362, 400

สินค้าอ้างอิง 1-5, 20, 47, 48, 110, 124, 127, 143, 357, 358, 375

การเคลื่อนที่แบบบราวน์เนียน 96, 97
การเคลื่อนไหวของราคาสินทรัพย์ 1, 5, 59
การเคลื่อนไหวราคาที่เป็นไปได้ทั้งหมด 61
การจัดการความเสี่ยงด้วยออปชัน 1, 44, 45
การจำแนกส่วนประกอบดูบ-เมเยอร์ 176, 177
การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน 96
การแจกแจงแบบลอกนอร์มอล 99, 100
การชอบความเสี่ยง 76
การใชอ้ อปชันเพิ่มความสามารถในการลงทุน 45
การใช้ออปชันในการบริหารความเสี่ยง 48
การเดินสุ่ม 94, 95, 98, 169
การเดินสุ่มสมมาตร 95
การทำอาร์บิทราจดอกเบี้ยที่มีการป้องกันความเสี่ยง 315
การประมาณอัตราดริฟท์ 100
การประเมินมูลค่าของสัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ 291, 320,
การป้องกันค่าเงินบาท 331, 332
การเป็นกลางต่อความเสี่ยง 76
สินทรัพย์ทางการเงิน 2
สินทรัพย์ที่เทียบเคียงกันได้ในทางการเงิน 235
สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง 1, 5, 16, 59
สูตรของแบล็ก-โชลส์ 109, 152, 156, 159, 160, 164, 230

ห.

หลักการปราศจากการค้ากำไร 13, 15, 17, 19-21, 31, 34, 36, 37, 42, 55, 56, 84-87, 109, 110, 116, 117, 119-126, 143-145, 235, 254, 317, 336, 337
เหตุการณ์ที่อิสระกัน 67

อ.

อนุพันธ์ของอัตราดอกเบี้ย 167, 193, 348
อเมริกันคอลออปชัน 144, 145, 163, 164, 165,
อเมริกันพุทออปชัน 145, 146, 148, 151,
อเมริกันออปชัน 109, 141, 142, 143, 146, 147, 148, 151, 163, 164
ออปชัน 1-3, 29-31, 33-58, 76, 109-159, 161-168, 206, 230, 232-241, 247, 264, 266, 268, 270, 287, 288, 293, 341, 356-360, 363, 365-366, 368, 372, 375, 376, 383, 385, 394, 399, 400
ออปชันของตราสารหนี้แบบยุโรป 168
ออปชันของสินค้าโภคภัณฑ์ 341, 357-359
ออปชันบนตราสารหนี้ 167, 230, 233, 235-239, 241, 247, 268, 270, 287, 288, 363, 365
ออปชันบนตราสารหนี้ไม่มีคูปอง 230, 238, 247, 248

การเปลี่ยนแปลงที่พยากรณ์ไม่ได้ 176
การรับและจ่ายเงินสด 3
การหลีกเลี่ยงความเสี่ยง 76
กำไรจากการขายพุทออปชัน 111

ข.

ข้อตกลงที่ให้สิทธิ 2
ขอบเขตราคา 119, 145
ความได้เปรียบเชิงเปรียบเทียบ 276-278, 289, 291, 309-313,
ความน่าจะเป็นความเป็นกลางต่อความเสี่ยง 78, 79, 81, 83-87, 90, 91, 103-106, 128-131, 134-136, 140, 149, 153, 154, 179, 207, 213, 344, 356, 360, 361, 363, 369, 370, 371, 402
ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข 67
ความน่าจะเป็นมาร์ทิงเกล 83
ความเป็นกลางต่อความเสี่ยง 59, 75, 78-91, 103-106, 128-131, 134-136, 140, 149, 153, 154, 179, 207, 213, 344, 352, 353, 356, 360, 361, 363, 365, 369-371, 383, 402
อัตราแคป 366-369, 372, 373, 375, 377, 380, 401-403
อัตราดริฟท์ 99-102, 107, 171, 177-178, 344, 346
อัตราดอกเบี้ย BIBOR 252, 253, 264, 306-308, 334-335,
อัตราดอกเบี้ย MLR 253
อัตราดอกเบี้ย MOR 253
อัตราดอกเบี้ย MRR 253
อัตราดอกเบี้ย Repo 253
อัตราดอกเบี้ยต่ำสุด 341
อัตราดอกเบี้ยทันที 168, 342
อัตราดอกเบี้ยระยะสั้น 167, 182-184, 190, 193-201, 202-211, 221-224, 244, 246, 264, 270, 344, 346, 347, 350-356, 364, 369, 384, 398, 399, 401, 404
อัตราดอกเบี้ยลอยตัว 249-250, 252, 257-259, 271-290, 299, 305, 307, 324, 326-328, 330-331, 339-340, 366, 368, 370, 371, 382, 391-395, 398, 401, 406
อัตราดอกเบี้ยสูงสุด 341

ความแปรปรวน 9, 68, 97, 101, 156, 171, 175, 184, 185, 190, 231, 268, 270, 351, 379
ความผันผวนของค่าเงินบาท 331,
ความผันผวนของอัตราดอกเบี้ย 167, 168, 250, 252, 258, 266, 271, 341, 342, 343, 346, 349, 364, 367, 372, 375, 382, 385, 389
ความเสมอภาคของอัตราดอกเบี้ย 291, 313-315
ความเสมอภาคระหว่างคอลออปชันและพุทออปชัน 114, 115, 117, 247,
ความเสมอภาคระหว่างพุทและคอล 114, 234-236
อัตราดอกเบี้ยอ้างอิง THOR 252, 253
อัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุน 8, 9
อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง 69, 185
อัตราฟอร์เวิร์ดทันที 343, 346,
อัตราแลกเปลี่ยนล่วงหน้า 1, 26-28, 168, 294, 296, 300-302, 314, 316, 317, 319, 336, 337
อาบิทราจ 15, 16, 28, 38, 39, 43, 317



ประวัติพอสังเขปของผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ

ตำแหน่งปัจจุบัน

- รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
- รองผู้อำนวยการสำนักงานศูนย์เทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ตั้งแต่เดือนตุลาคม 2562 ถึงปัจจุบัน

ประวัติการศึกษา

- ปริญญาตรี: B.Sc. (Mathematics) จากมหาวิทยาลัยศิลปากร (2000-2003)
- ปริญญาโท: M.Sc. (Mathematics) จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (2004-2007)
- ปริญญาเอก: Ph.D. (Mathematics) จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (2008-2011)

ผลงานวิจัยที่สำคัญ

[1] N.Limjanon and W.Witayakiattilerd. (2022).Time Strategy for Setting Direct and Wholesale Prices with Intermediaries in Dual-channel Supply Chain of Seasonal Agricultural Products. DOI:10.13140/RG.2.2.24195.84003

[2] Bunparsert, Prachya & Sampaokit, Pipat & Witayakiattilerd, Wichai. (2022). MACD Indicator with the Modified Signal Line and Trading Weight Inference in Fuzzy Environment. doi10.13140/RG.2.2.28387.48169.

[3] Witayakiattilerd, Wichai. "Fuzzy quantitative analysis method for stock selection into portfolio." *Chiang Mai J Sci* 46.4 (2019): 799-811.

[4] Wichai Witayakiattilerd, "PID Controller Singularly Perturbing Impulsive Differential Equations and Optimal Control Problem," *Advances in Mathematical Physics*, vol. 2017, Article ID 1938513, 11 pages, 2017. doi:10.1155/2017/1938513

[5] S. Yodmun and W. Witayakiattilerd, *Stock Selection into Portfolio by Fuzzy Quantitative Analysis and Fuzzy Multi-Criteria Decision Making*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Operations Research, Vol. 2016, Article ID 9530425, 14 pages, doi.org/10.1155/2016/9530425

TEXTBOOK

[1] W.Witayakiatilerd, *Financial Mathematics and Applications*, Platong Copy Print, Bangkok, Thailand, 238 pages (2020)

[2] W.Witayakiatilerd, Quantitative Analysis in Finance, Platong Copy Print, Bangkok, Thailand, 406 pages (2015)

[3] W.Witayakiatilerd, Calculus I , Platong Copy Print, Bangkok, Thailand, 406 pages (2013)

[4] W.Witayakiatilerd, Mathematics for Daily Life , Platong Copy Print, Bangkok, Thailand, 154 pages (2013)

ความเชี่ยวชาญและความสนใจทางวิชาการ

คณิตศาสตร์ประยุกต์ คณิตศาสตร์การเงิน การวิเคราะห์เชิงปริมาณในด้านการเงิน ทฤษฎีการตัดสินใจ

การติดต่อ

ที่อยู่: 99 หมู่ 18 ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120 ประเทศไทย โทรศัพท์: (02) 564-4440 – 59 ต่อ 2101 – 3 กด 119/3 อีเมล: wichai@mathstat.sci.tu.ac.th

เนื้อหาประกอบด้วย

- แบบจำลองราคาอย่างง่าย
- แบบจำลองราคาไม่ต่อเนื่อง
- แบบจำลองราคาตราสารออปชัน
- แบบจำลองอัตราดอกเบี้ย
- สัญญาสวอปอัตราดอกเบี้ย
- สัญญาสวอปเงินตราต่างประเทศ
- สัญญาแคป ฟลอร์ คอลลาร์และสวอปชัน
- การประยุกต์อนุพันธ์ทางการเงินสำหรับการบริหารสภาพคล่องและการเปลี่ยนตราสารหนี้เป็นเงินสด



แบบจำลองแบล็ก-โชลส์-เมอร์ตัน (The Black Scholes Merton Model) ซึ่งเป็นหนึ่งในแนวคิดที่สำคัญที่สุดในทฤษฎีการเงินสมัยใหม่ ถูกพัฒนาโดยฟิชเชอร์ แบล็ก (Fischer Black), โรเบิร์ต เมอร์ตัน (Robert Merton) และไมรอน โชลส์ (Myron Scholes) ในปี 1973 เพื่อคำนวณมูลค่าของสัญญาออปชัน แบบจำลองนี้มีพื้นฐานอยู่บนสมมติฐานบางประการที่ช่วยในการหา สูตรแบล็ก-โชลส์ (Black-Scholes formula) ซึ่งใช้คำนวณเบี้ยประกันที่จ่ายสำหรับออปชัน