

515.222
ก 222 ก
ร 3

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องสิทธิของฟังก์ชัน

ปริญญานิพนธ์

ของ

กาญจนา สุนธิโพธิ์

11 พ.ค. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษาหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2527

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

178741

การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

บทคัดย่อ

ของ

กาญจนา สุนธิโพธิ์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
กุมภาพันธ์ 2527

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์
กระบวนการคิด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

กลุ่มทดลองได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
วิทยาเขต พิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2
ปีการศึกษา 2526 จำนวน 22 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลอง โดยใช้แบบเรียนที่เน้น
การวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาสอน
14 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบสอบวัดผลสัมฤทธิ์
ทางการเรียน เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด
เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมีประสิทธิภาพโดยการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ .05

A STUDY OF EFFICIENCY OF A LESSON ON LIMITS OF FUNCTIONS
EMPHASIZING ANALYTICAL PROCESS OF THOUGHT

AN ABSTRACT

BY

KARNJANA SONTIPO

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University
February 1984

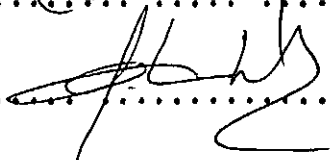
The purpose of this study was to study the efficiency of a lesson on Limits of Functions emphasizing analytical process of thought.

The subjects were 22 undergraduate students at Srinakharinwirot University, Pitsanuloke, registered for Math 411 Mathematical Analysis in the second semester of the academic year 1983. The researcher taught them by using lesson on Limits of Functions emphasizing analytical process of thought for 14 periods. Each period was 50 minutes. The achievement test on Limits of Functions was administered at the end of the experiment.

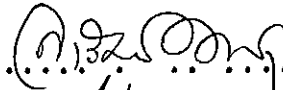
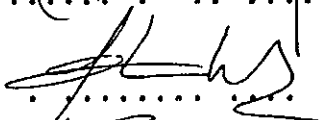
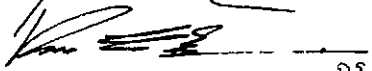
The result indicated that the lesson on Limits of Functions emphasizing analytical process of thought was efficient with the statistical hypothesis test at .05 level of significance.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตและคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปฏิญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของวารสารกิตติยาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยกรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา

.......... ประธาน
.......... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ

.......... ประธาน
.......... กรรมการ
.......... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือ และการแนะนำอย่างดียิ่งจาก
รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวัลย์ พลกล้า ประธานกรรมการที่ปรึกษา และผู้ช่วยศาสตราจารย์
สุเทพ ทองอยู่ กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์วิวรรณ วนิชวิชาติ ที่กรุณาให้ความร่วมมือในการ
ดำเนินการวิจัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์อรพินท์ เจียรพงษ์ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาทาง
ด้านสถิติที่ใช้ในการวิจัย

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่และพี่ ๆ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือสนับสนุน
และให้กำลังใจตลอดมา

กาญจนา สนิธิโพธิ์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	3
ขอบเขตของการวิจัย	4
สมมติฐานของการวิจัย	4
2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย	5
เอกสารเกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์	5
แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์	7
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของการวิเคราะห์และการแก้ปัญหา	10
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"	15
3 วิธีการในการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล	19
กลุ่มตัวอย่าง	19
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	19
การดำเนินการทดลอง	21
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	21
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	24
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	26
ความมุ่งหมายของการวิจัย	26

บทที่	หน้า
สมมติฐานของการวิจัย	26
กลุ่มตัวอย่าง	26
วิธีดำเนินการวิจัย	26
สรุปผลการวิจัย	27
อภิปรายผล	27
ข้อเสนอแนะ	29
บรรณานุกรม	31
ภาคผนวก	35

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 จำนวนนิสิตของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2	24
2 การคำนวณหาค่าตัวสถิติทดสอบ χ^2	25

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่สำคัญสาขาหนึ่งต่อการดำรงชีวิตของมนุษย์ มีประโยชน์ทั้งในด้านการศึกษาเพื่อประยุกต์ใช้ในวิถีชีวิตประจำวัน และเพื่อการศึกษาเนื้อหาอันบริสุทธิ์ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือที่จะปลูกฝังให้บุคคลรู้จักคิด มีความรอบคอบ มีระเบียบแบบแผน และรู้จักวิเคราะห์ปัญหาอย่างมีเหตุผล โครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้นเริ่มต้นจากธรรมชาติ มนุษย์พยายามหาเหตุผลเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ตามธรรมชาติโดยสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์อันประกอบด้วย คำนวณ นิยาม สัจพจน์หรือข้อตกลงเบื้องต้น และอาศัยการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลนำไปสู่การตั้งเป็นกฎหรือทฤษฎีแล้วนำกฎหรือทฤษฎีไปประยุกต์ใช้กับธรรมชาติต่อไป กฎหรือทฤษฎีเป็นสิ่งจำเป็นที่นักคณิตศาสตร์จะต้องสร้างขึ้น เพื่อความสะดวกและรวดเร็วในการแก้ปัญหาตลอดจนเป็นการสร้างสรรค์คณิตศาสตร์ให้ก้าวหน้ายิ่งขึ้น ดังนั้นจะเห็นว่าการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับกฎหรือทฤษฎีต่าง ๆ นั้นจะต้องอาศัยขั้นตอนการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลเป็นสำคัญ ด้วยเหตุนี้การสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันจึงมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้เห็นโครงสร้างของคณิตศาสตร์ รู้จักคิดตามด้วยเหตุผลตลอดจนมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างหัวข้อต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์

การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการพิสูจน์นั้นจะเริ่มสอนอย่างจริงจังในระดับมหาวิทยาลัย จากการสอบถามนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์พบว่า ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับปริญญาตรีนั้น สิ่งที่เป็นปัญหามากที่สุดเรื่องหนึ่งก็คือ การพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มขั้นตอนการพิสูจน์อย่างไร และไม่ทราบว่า จะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใดจึงจะบรรลุถึงสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นอกจากนี้การหาหรือแบบเรียนคณิตศาสตร์ส่วนมากประกอบด้วย เนื้อหาและวิธีการพิสูจน์ในรูปแบบ

ที่สำเร็จแล้วมากกว่ากระบวนการคิด คำরাห์หรือแบบเรียนในลักษณะนี้ไม่ส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ เพราะผู้เรียนไม่ทราบเหตุผลว่าทำไมต้องเริ่มการพิสูจน์แบบนั้น ทำไมต้องดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางนั้นและยังมีแนวทางการพิสูจน์แบบอื่นอีกหรือไม่ ผู้เรียนจะ ไม่ได้รับการฝึกให้คิดแก้ปัญหา ผู้เรียนเป็นเพียงผู้ติดตามเท่านั้น การเรียนเช่นนี้จะไม่เป็นการเร้าหรือสร้างความสนใจแก่ผู้เรียน ปัญหาการพิสูจน์เป็นปัญหาที่สำคัญต่อการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาเป็นอย่างยิ่ง เพราะการสอนให้ผู้เรียนมีความสามารถในการพิสูจน์หรือรู้จักคิดอย่างมีเหตุผลถือเป็นจุดมุ่งหมายที่สำคัญต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้สอนจะต้องแสวงหาวิธีสอนที่จะสามารถทำให้ผู้เรียนเข้าใจวิธีการพิสูจน์ และสามารถพิสูจน์ได้

การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเป็นวิธีที่จะทำให้ผู้เรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์ได้ดียิ่งขึ้น การวิเคราะห์เริ่มจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ผู้เรียนต้องพิจารณาว่ามีข้อมูลใดบ้างที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งอาจเป็นข้อมูลที่กำหนดไว้ในตัวปัญหาคือ สมมติฐานหรือความรูต่าง ๆ ที่ทราบมาก่อนแล้วพิจารณาจากสมมติฐานสามารถสรุปผลใดได้บ้าง พยายามรวบรวมผลที่ได้และหาเหตุผลที่ชัดเจนโยงจากสมมติฐานไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งสรุปเป็นขั้นตอนดังนี้

1. หาความเข้าใจปัญหา แยกข้อมูลที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. พิจารณาว่า มีข้อมูลใดบ้างที่สามารถสรุปสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
3. พิจารณาว่า จากข้อมูลที่กำหนดสามารถสรุปผลใดได้บ้าง
4. หาความสัมพันธ์ระหว่างผลที่ได้ในข้อ 3 และข้อมูลที่ได้ในข้อ 2
5. เลือกแนวทางการพิสูจน์ที่เหมาะสมที่สุด โดยยึดหลักว่าต้องเป็นวิธีที่

ง่าย สั้น ชัดเจน และรัดกุม

การสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเป็นการสอนที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้จักแสวงหาแนวทางในการพิสูจน์ และสามารถเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ การวิเคราะห์องค์ประกอบที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญของเรื่องจะทำให้เกิดกระบวนการคิดแต่ละ

ขั้นตอน ทำให้ผู้เรียนมองเห็นความสัมพันธ์ขององค์ประกอบพื้นฐานเหล่านั้น สามารถ
ลำดับความคิดรวบยอดทั้งหมดและสรุปเป็นแบบแผนการพิสูจน์ได้ นอกจากนี้การวิเคราะห์
ยังทำให้ผู้เรียนมีโมโนติเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่าอาจมีรูปแบบการพิสูจน์มากกว่าหนึ่งแบบก็ได้
และการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเป็นการสอนคณิตศาสตร์
แบบที่ทำให้ผู้เรียนเกิดศิลปะในการค้นพบ

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัย เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เป็น
เรื่องที่เริ่มเป็นนามธรรมและเริ่มมีการพิสูจน์ที่สลับซับซ้อนในแต่ละทฤษฎีบท ทฤษฎีบท
เกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัส และวิชาอื่น ๆ อีก
หลายสาขา ถ้าผู้เรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ เป็นอย่างดี
จะส่งผลให้ผู้เรียนสามารถเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาได้ เข้าใจดีขึ้น
ผู้วิจัยจึงมีความประสงค์จะสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เพื่อศึกษา
ประสิทธิภาพของแบบเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชันที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น กับนิสิตระดับปริญญาตรี
ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ลิมิตของ
ฟังก์ชัน
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง
ลิมิตของฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. เพื่อเสนอแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่อง ลิมิตของ
ฟังก์ชัน

2. เพื่อเป็นแนวทางในการผลิตการ ากนิตศาสตร์ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น .
3. เพื่อเสนอแนะแนวทางในการปรับปรุงการ เรียนการสอนนิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

การ วิจัยครั้งนี้ทาการ ทดลองกับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนกรินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ และ เนื้อหาที่ใช้ในการ ทดลองคือ เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ตามหลักสูตรคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ของมหาวิทยาลัยศรีนกรินทรวิโรฒ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526

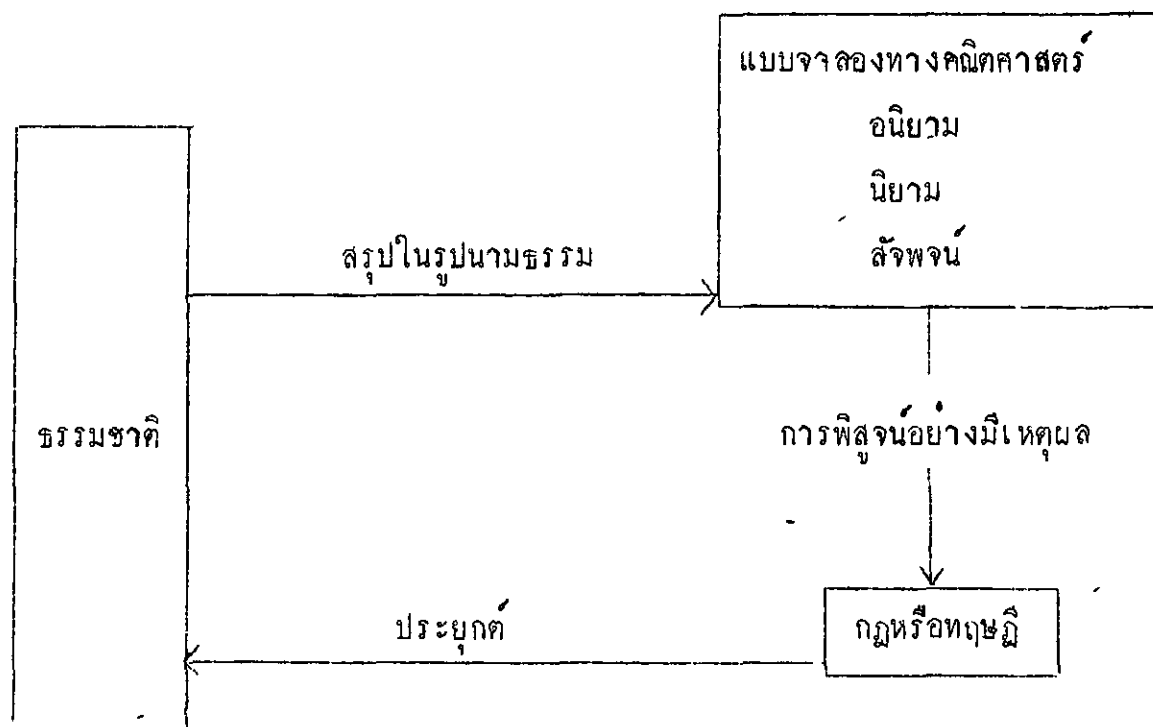
สมมติฐานการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพ

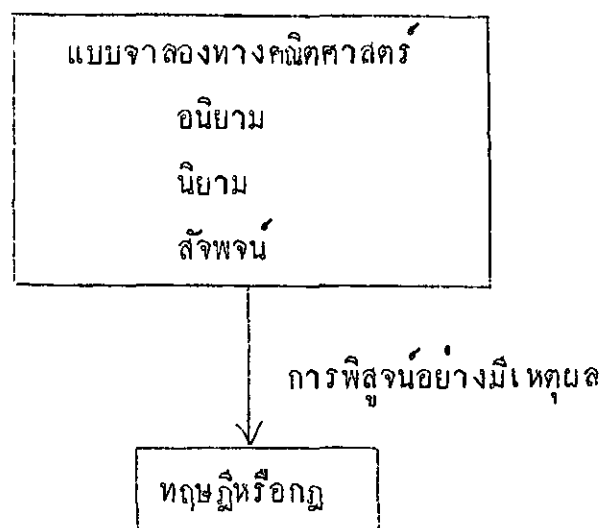
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

เอกสารเกี่ยวกับระบบคณิตศาสตร์

สุเทพ จันทรสัมศักดิ์ (สุเทพ จันทรสัมศักดิ์ 2521 : 151) กล่าวว่า โครงสร้างคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์นั้นเริ่มจากธรรมชาติ ศึกษาประสบการณ์ต่าง ๆ แล้วสรุป ในรูปนามธรรมเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย อxiom นิยาม และ สัจพจน์ จากนั้นใช้การพิสูจน์อย่างมีเหตุผลสรุปเป็นกฎหรือทฤษฎีแล้วนำไปประยุกต์ใช้ กับธรรมชาติ เมื่อเกิดปัญหาก็อาจเปลี่ยนแปลงแก้ไขกฎเกณฑ์บางอย่างเพื่อปรับปรุงให้ ถูกต้อง และนำไปใช้เป็นประโยชน์ได้ดียิ่งขึ้น



และเรียกโครงสร้างเฉพาะส่วนในแผนภาพข้างล่างนี้ว่าระบบคณิตศาสตร์



ภาพประกอบ 1 แสดงโครงสร้างของคณิตศาสตร์

แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

บุหงา วัณณะ (บุหงา วัณณะ 2515 : 2) กล่าวว่า คณิตศาสตร์แนวใหม่ เน้นความเข้าใจมากกว่าความจำ เน้นความสำคัญของหลักการทางคณิตศาสตร์และความคิดรวบยอดต่าง ๆ วิธีคิดตามลำดับเหตุผลตลอดจนความสัมพันธ์ระหว่างเรื่องต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ส่งเสริมให้ผู้เรียนคิดค้นคว้าหาหลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง

คณีย ยังคง (คณีย ยังคง 2521 : 2) กล่าวว่า การสอนคณิตศาสตร์ที่จะทำให้เกิดประโยชน์จะต้องสอนให้เป็นแบบต่อเนื่องและสัมพันธ์กัน ให้ผู้เรียนเกิดแนวความคิดซึ่งถือเป็นเรื่องจำเป็น อีกประการหนึ่งก็คือ การแสดงให้ผู้เรียนเห็นแนวทางในการพิสูจน์หลาย ๆ แนวทางจะเป็นการเร้า สร้างความสนใจและให้ประสบการณ์หลายด้านที่สำคัญก็คือ การที่ผู้เรียนรู้จักเลือกวิธีการพิสูจน์หรือวิธีการแก้ปัญหายุ่งยากที่สุดและเหมาะสมที่สุด ซึ่งมีข้อยืนยันว่าผู้เรียนจะเข้าใจสภาพของปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง

คินเซลลา (อ้างอิงมาจากทบวงมหาวิทยาลัย 2525 : 32) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการผลิตครูคณิตศาสตร์ ว่าควยการผลิตครูให้บรรลุคุณลักษณะของครูคณิตศาสตร์ที่ดี ซึ่งเกณฑ์ในการเป็นครูคณิตศาสตร์ที่ดีนั้น คือ

1. รอบรู้ในคุณลักษณะของครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา
2. เตรียมตัวในเนื้อหาคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง
3. มีประสบการณ์ในการเรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ โดยการเรียนด้วยตนเอง
4. มีประสบการณ์ในการสร้างงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหา
5. มีประสบการณ์ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และนำไปใช้แก้ปัญหาค้นคว้า
6. มีประสบการณ์ในการรวม และการย่อยส่วนต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ได้
7. มีประสบการณ์ในการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในสาขาที่เกี่ยวข้องได้

อาร์ สันหนวี (อาร์ สันหนวี 2519 : 13 - 14) กล่าวว่า การสอนของครูโดยทั่วไปจะให้สาระแก่ผู้เรียน 2 ประการ ประการแรกคือ ความรู้หรือเนื้อหาสาระที่เป็นข้อเท็จจริง ซึ่งถ้าผู้เรียนเรียนรู้แล้วแต่ไม่เข้าใจก็จะมีประโยชน์แต่

อย่างใด สาระอีกประการหนึ่งคือ ความคิดหรือขบวนการที่ช่วยให้นักเป็น แก๊ปัญหาเป็น เสาะแสวงหาความรู้เป็น และมีแรงจูงใจใ้รู้ตลอดเวลา นอกจากนี้ยังได้แสดงความคิดเห็นว่า การเรียนการสอนในระดับอุดมศึกษาแตกต่างจากระดับมัธยมศึกษา และประถมศึกษาอย่างมาก กล่าวคือ ในระดับอุดมศึกษาผู้เรียนจะต้องสามารถพัฒนาศักยภาพของตนให้สูงสุด และพร้อมกันนั้นก็ต้องพัฒนาบุคลิกภาพไปด้วย เพื่อให้เป็นคนที่มีคุณภาพ และสามารถใช้คุณสมบัตินี้ไปพัฒนาสังคมได้ ดังนั้น ผู้สอนในระดับนี้จึงต้องมุ่งให้สาระในประการหลังให้มากเป็นพิเศษ เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนรู้จักคิดและคิดเป็น นั่นคือ การใช้ความคิดโดยอาศัยข้อมูลและเหตุผลเป็นเครื่องมือ

รวมเฟลิน จันทรเรืองเพ็ญ (รวมเฟลิน จันทรเรืองเพ็ญ 2519 : 42 - 43) กล่าวไว้ว่า การสอนแบบอภิปรายเป็นการสอนที่สำคัญมาก เพราะทำให้ผู้เรียนรู้จักคิด และร่วมในการอภิปราย ซึ่งเป็นจุดมุ่งหมายอย่างหนึ่งของ การเรียนในมหาวิทยาลัย การสอนแบบอภิปรายเป็นการสอนซึ่งให้โอกาสแก่ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น และช่วยในการสร้างสัมพันธภาพระหว่างผู้สอนและผู้เรียนให้ดีขึ้น ประโยชน์ที่ผู้เรียนผู้สอนได้รับก็คือ

1. ทั้งผู้เรียนและผู้สอนมีสิทธิในการอภิปรายเท่ากัน
2. ผู้เรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็น ซึ่งสอดคล้องกับปรัชญาการศึกษาในมหาวิทยาลัยที่มุ่งให้ผู้เรียนรู้จักคิดวิเคราะห์ วิจัยและพิจารณาปัญหาด้วยความรอบคอบ มีเหตุผล
3. ผู้เรียนได้มีโอกาสเรียนรู้จากกันและกัน
4. ผู้สอนไม่ผูกขาดการสอนในฐานะผู้รู้แต่ผู้เดียว แต่มีบทบาทช่วยเหลือ อธิบาย แนะนำ
5. ผู้สอนมีโอกาสได้รับการสะท้อนกลับว่า การสอนของตนเองและการเรียนของนักศึกษาเป็นอย่างไร ทำให้เข้าใจปัญหาการเรียนของผู้เรียนได้ดีขึ้น
6. โอกาสเรียนรู้มีมากในกลุ่มย่อย
7. สร้างความใกล้ชิดระหว่างผู้เรียนและผู้สอน

กรุลิก (KruLIK. 1977 : 650) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นส่วนสำคัญ ส่วนหนึ่งของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูจะต้องสร้างสถานการณ์เพื่อให้ผู้เรียนได้เผชิญกับปัญหา เพื่อให้เขาได้ค้นหาและพินิจพิเคราะห์ให้ได้มาซึ่งคำตอบ บางครั้งอาจจะไม่ได้คำตอบตามที่เขาวางก็ได้ แต่นั่นไม่ใช่สิ่งสำคัญเท่ากับการที่ผู้เรียนได้ฝึกทักษะในวิธีการค้นหาหรือการพินิจพิเคราะห์ (อาจเป็นการพิสูจน์) หมายความว่า วิธีการค้นหาคำตอบของปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบในการแก้ปัญหา ดังนั้น การเรียนการสอนคณิตศาสตร์จึงควรหาวิธีการที่จะแก้ปัญหา และทำให้นักเรียนสามารถรู้จนถึงขั้นแก้ปัญหาได้

กิลก กิลกานนท์ (กิลก กิลกานนท์ 2525 : 65) กล่าวว่า จุดมุ่งหมายของการศึกษาในปัจจุบันคือ การสอนให้ผู้เรียนคิดเป็น หาเป็น และแก้ปัญหาเป็น ซึ่งผู้เรียนจะแก้ปัญหาเป็นได้นั้นต้องมีความสามารถคิดเป็นมาก่อน และการจะสอนให้ผู้เรียนคิดเป็นนั้นควรให้เขาได้มีโอกาสคิดวิเคราะห์ตามลำดับขั้นตอน ดังนี้

1. วิเคราะห์ว่าอะไรคือปัญหา ขั้นนี้ผู้เรียนจะต้องรวบรวมปัญหาและหาข้อมูลพร้อมสาเหตุของปัญหาจากการคิด การถาม การอ่าน หรือพิจารณาจากข้อเท็จจริงนั้น ๆ
2. กำหนดทางเลือก เมื่อหาสาเหตุของปัญหาได้แล้วผู้เรียนจะต้องหาทางเลือกที่จะแก้ปัญหานั้น โดยพิจารณาความเป็นไปได้และข้อจำกัดต่าง ๆ ทางเลือกที่จะแก้ปัญหานั้นไม่จำเป็นจะต้องมีทางเลือกเดียว อาจมีหลายทางเลือกก็ได้
3. เลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุด เป็นการพิจารณาเลือกทางเลือกที่จะแก้ปัญห โดยมิเกณฑ์ในการตัดสินใจที่สำคัญคือ ผลดี ผลเสีย ที่จะเกิดขึ้นจากทางเลือกนั้น
4. ตัดสินใจเพื่อพิจารณาเลือกอย่างรอบคอบในขั้นตอนที่ 3 แล้วจึงตัดสินใจเลือกทางเลือกที่คิดว่าดีที่สุด

ทรวงมหาวิทยาลัย (ทรวงมหาวิทยาลัย 2524 : 140) กล่าวว่า ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ทุกฉบับจะมีจุดประสงค์ข้อหนึ่งระบุว่า ให้นักเรียนมีความสามารถในการคิดแก้ปัญหา ครูคณิตศาสตร์ที่ตระหนักถึงภารกิจสำคัญนี้ต้องพยายามหาวิธีการเพื่อพัฒนาความสามารถในการคิดแก้ปัญหาของนักเรียน ปัญหาที่จะนำมาฝึกให้นักเรียนคิดนั้นอาจจะจัดแบ่งเป็นหลายประเภทดังต่อไปนี้

1. ปัญหาที่เป็นการค้นหาข้อความจริง หรือข้อสรุปใหม่ที่นักเรียนยังไม่เคยรู้มาก่อน
2. ปัญหาซึ่งมาจากการอภิปรายในชั้นเกี่ยวกับเนื้อหา
3. ปัญหาที่เกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ทฤษฎีบท หรือข้อสรุปที่มีผู้อื่นตั้งไว้
4. ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ มาใช้
5. ปัญหาที่ไม่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ แต่ต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"

ยุพิน พิพิธกุล (ยุพิน พิพิธกุล 2523 : 102 - 106) กล่าวว่า การวิเคราะห์ หมายถึง การแยกแยะปัญหาออกจากสิ่งที่ไม่รู้ไปสู่สิ่งที่รู้ หรือการแยกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รวมกัน ออกจากกัน ผู้ที่วิเคราะห์จะต้องพยายามคิดอยู่เสมอว่าต้องการค้นพบอะไร เป็นครั้งแรก และคิดต่อไปว่าจะอะไรที่จะค้นพบต่อไป การสอนแบบวิเคราะห์เป็นการสอนที่มีลักษณะ ดังนี้

1. เริ่มต้นจากสิ่งที่ไม่รู้ไปหาสิ่งที่รู้แล้ว
2. เริ่มต้นจากข้อสรุปไปหาสมมติฐาน
3. เป็นกระบวนการคิดอย่างสรวจ
4. เป็นการวิเคราะห์ข้อความในการแก้ปัญหา
5. เป็นการพัฒนาความคิดอย่างแท้จริง

บอร์น เอสตรานด์ และโดมินอสกี (Bourne Estrand and Dominoski. 1971 : 9) ให้ความเห็นว่า การแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสดงความรู้ ความคิด จากประสบการณ์ก่อน ๆ และส่วนประกอบของสถานการณ์ที่เป็นปัญหายุ่งในปัจจุบัน โดย นามาจัดเรียงลำดับใหม่เพื่อผลของความเข้าใจในความมุ่งหมายเฉพาะอย่าง

ซาลิวสกี (Zalewski. 1978 : 2804 -A) ได้ศึกษาองค์ประกอบในการ แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า สิ่งที่เป็นองค์ประกอบมีดังนี้

1. ความสามารถในการ เข้าใจสัญลักษณ์
2. ความสามารถในการ จัดกระทำ
3. ความสามารถในการ อ่านและตีความ
4. มโนคติทางคณิตศาสตร์
5. ทักษะในการคำนวณ

ทบทวนมหาวิทยาลัย (ทบทวนมหาวิทยาลัย 2524 : 147) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากประสบการณ์ในการแก้ปัญหา และการสอนนักเรียนแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. หาความเข้าใจกับปัญหา โดยพิจารณาแยกแยะระหว่างสิ่งที่กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์
2. จากที่กำหนดให้แปลงให้อยู่ในรูปที่ชัดเจน โดยใช้แผนภาพและรูปภาพประกอบ
3. จากแผนภาพที่สร้างขึ้นพิจารณาหาเงื่อนไขอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยอาศัยนิยามคุณสมบัติ ทฤษฎีต่าง ๆ ที่เคยเรียนรู้มาแล้ว
4. ในบรรดาสิ่งที่กำหนดให้กับเงื่อนไขที่ได้เพิ่มเติมมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร หรือมีเงื่อนไขอะไร เพิ่มเติมอีกหรือไม่
5. กิดหาวิธีแก้ปัญหา โดยพิจารณาถึงปัญหาที่คล้ายคลึงกันและทดลองเขียนแบบวิธีแก้ปัญหา หรืออาจวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์ต้องการพิจารณาคว่าต้องมีเงื่อนไขใดอีกจึงจะได้สิ่งที่ต้องการ และ เงื่อนไขนั้นจะหามาได้อย่างไร
6. เรียบเรียงลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา
7. ทดสอบคำตอบว่าสมเหตุสมผลหรือไม่
8. ถ้าการแก้ปัญหาลำบากหลายวิธี เลือกวิธีที่ง่ายและสั้นที่สุด และในการแก้ปัญหาบางอย่างรูปภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้ข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาเป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น ซึ่งทำให้สะดวกต่อการแก้ปัญหา

จอห์นสัน (อ้างอิงมาจากทบทวนมหาวิทยาลัย 2524 : 141) กล่าวว่าไว้ว่า การแก้ปัญหามักต้องใช้กระบวนการที่ซับซ้อน ต้องอาศัยความรู้พื้นฐาน ความถี่ความรอบคอบและทักษะ

ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาใน ๆ การที่นักเรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้นั้น นักเรียนควรได้รับการฝึกฝนได้มีความรู้พื้นฐานดังต่อไปนี้

1. มีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจ มีความถี่ถ้วนรอบคอบ และเนื้อหาเกี่ยวกับปัญหา
2. มีความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความ และการขยายความ
3. มีความสามารถในการแปลงข้อความให้เป็นสัญลักษณ์หรือแผนภาพ
4. มีความสามารถในการวิเคราะห์หาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่มีอยู่กับการพิจารณา
5. มีความสามารถในการวิเคราะห์ระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน การวิเคราะห์หาตัวแบบ และการหาข้อสรุป

โพลยา (Polya. 1977 : 5 - 36) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์อาจแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะ คือ ปัญหาให้ค้นหา และปัญหาให้พิสูจน์

ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาซึ่งให้ค้นหาสิ่งที่ต้องการ ส่วนที่สำคัญของปัญหาให้ค้นหาแบ่งได้เป็น 3 ส่วน คือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนด และเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนด

ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาซึ่งให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่า "ข้อความที่กำหนดเป็นจริง" หรือ "ข้อความที่กำหนดเป็นเท็จ" ส่วนสำคัญของปัญหาให้พิสูจน์แบ่งได้เป็น 2 ส่วน คือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

โพลยา ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยระบุว่า วิธีการแก้ปัญหาวทางคณิตศาสตร์ มีขั้นตอนดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา
2. วางแผนการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน
4. ตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา

1. ทำความเข้าใจปัญหา การทำความเข้าใจปัญหาในขั้นแรกต้องทำความเข้าใจกับคำ วลีหรือประโยคย่อย ๆ ในตัวปัญหา และจะถือว่ามีความเข้าใจปัญหาก็คือเมื่อ สามารถแยกแยะส่วนสำคัญของปัญหาแต่ละส่วน เช่น ปัญหาให้ค้นหาต้องสามารถระบุสิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดและเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับข้อมูลที่กำหนด

2. วางแผนการแก้ปัญห หลังจากทำความเข้าใจปัญหาจนสามารถแยกแยะส่วนสำคัญของปัญหาแล้วก็ถึงขั้นวางแผนการแก้ปัญห ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ยากที่สุดในการแก้ปัญหาคงฝึกฝนมาก ในขั้นนี้ต้องใช้ทั้ง ขบวนการที่เรียกว่า การสังเคราะห์และการวิเคราะห์ เราจะต้องพิจารณาว่า จากข้อมูลที่กำหนดหรือสมมติฐานจะนำไปสู่ผลใดได้บ้าง และมีข้อมูลใดบ้างที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการหาหรือผลสรุป ซึ่งอาจจะไม่ใช่ข้อมูลที่กำหนดในตัวปัญหา การพิจารณาดังกล่าวอาจใช้บทนิยาม คุณสมบัติ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาก่อนแล้ว รวมทั้งอาจพิจารณาปัญหาที่เคยแก้มาแล้ว ซึ่งมีความคล้ายกัน ถ้าเป็นปัญหาให้ค้นหาต้องพิจารณาเงื่อนไขให้ถี่ถ้วน

ในขั้นการวางแผนแก้ปัญหานี้ ผู้ที่จะแก้ปัญหาคงมีความรู้ที่จำเป็นในการแก้ปัญหาคงได้รับการฝึกสมองในการคิดและการให้เหตุผลมาอย่างดี ต้องมีความสนใจและความตั้งใจในการแก้ปัญห และส่วนประกอบอีกส่วนหนึ่งคือ "ความมีโชค" ในการแก้ปัญหบางครั้งแม้ว่าจะมีความรู้พื้นฐานดี ฝึกคิดและให้เหตุผลมาอย่างดี มีความสนใจและความตั้งใจในการที่จะแก้ปัญห แต่หากไม่มีโชคก็อาจจะประสบความลำบากในการแก้ปัญหหรืออาจไม่สามารถแก้ปัญห

3. คำแนะนำการตามแผน ในขั้นตอนนี้สิ่งที่เราต้องทำคือ เรียบเรียงและเติมรายละเอียดตามแผนที่วางไว้ให้สมบูรณ์ ชัดเจน พิจารณารายละเอียด ทดสอบความถูกต้องแต่ละขั้นไปตามลำดับ การใช้ภาษาที่ชัดเจน เข้าใจง่ายและสมเหตุสมผล เป็นสิ่งที่ช่วยให้เข้าใจวิธีการแก้ปัญหาลง่ายขึ้นทั้งสำหรับตนเองและผู้อื่น โดยปกติแล้วขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่จะแสดงให้เห็นวิธีการแก้ปัญห

4. ตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา การตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง เมื่อเราได้คิดและแสดงวิธีการแก้ปัญหาแต่ละขั้นโดยละเอียดแล้ว เราสามารถตรวจสอบขั้นตอนการที่สมบูรณ์ เพราะจะช่วยให้เราเข้าใจปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาโดยส่วนรวมทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญห่อื่น ๆ ขั้นตอนนี้จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ถ้ามีข้อบกพร่องตรงส่วนใดเราอาจพบและแก้ไขหรือแม้กระทั่งอาจเกิดความคิดที่จะคิดเปลี่ยนวิธีการแก้ปัญหาให้ง่าย สั้น และชัดเจนยิ่งขึ้น รวมทั้งอาจเกิดความคิดที่จะแก้ปัญหาเดิม ซึ่งคิดเปลี่ยนข้อมูลไปบ้าง อันอาจนำไปสู่การแก้ปัญหาใหม่

จรรยา ภูอุดม (จรรยา ภูอุดม 2524 : 20) ได้สรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ คือ

ขั้นที่ 1 เป็นขั้นตีความและทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งประกอบด้วยวิธีการแก้ปัญหาคงตัวอย่าง เช่น

1. การทำความเข้าใจความหมายของคำ และสัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา
2. การมองปัญหาในหลาย ๆ แง่มุม เพื่อหาความเป็นไปได้ของปัญหา
3. การวาดรูปประกอบปัญหาลงถ้าเป็นไปได้
4. การหาส่วนที่สำคัญของปัญหา เช่น สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่ให้มา และเงื่อนไขต่าง ๆ

5. การค้นหาความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ของปัญหา

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นการวางแผนในการแก้ปัญหา ซึ่งประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ ดังนี้

1. การทบทวนความรู้ที่มี ซึ่งจะต้องใช้ในการแก้ปัญหา
2. การคิดถึงวิธีการให้เหตุผลเพื่อจะสรุปสิ่งที่ต้องการ
3. การแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาว่าอะไร เป็นขั้นใหญ่ อะไรเป็นขั้นย่อย

จะต้องการอะไรก่อน อะไรหลัง

4. การพิจารณาปัญหาที่ใกล้เคียงกัน เพื่อจะดูว่ามีอะไรร่วมหรือคล้ายกันบ้าง จะได้แก้ปัญหาลักษณะที่คล้าย ๆ กัน

5. การพิจารณาว่าข้อมูลที่ให้มานั้นเพียงพอหรือไม่

6. การเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสม

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นที่หาคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่สุดของปัญหา ประกอบด้วยส่วนย่อย ๆ

เช่น

1. การลงมือคิดคำนวณตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2

2. การคาดคะเนคำตอบที่ใกล้เคียง

3. การตรวจสอบความเข้าใจได้จากคำตอบ รวมถึงการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ

4. การตรวจสอบว่าคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ให้มาหรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบกระบวนการต่าง ๆ ในการหาคำตอบ

5. การปรับปรุงคำตอบให้เป็นคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ "การวิเคราะห์และการแก้ปัญหา"

จรรยา ญุฑุม (จรรยา ญุฑุม 2524 : 51) ได้ทำการวิจัยเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นรายวิชาระหว่างนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับต่ำ และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนชายกับนักเรียนหญิง ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 6 โรงเรียน ในกรุงเทพมหานคร จำนวน 425 คน เป็นนักเรียนชาย 235 คน และนักเรียนหญิง 190 คน แล้วทำการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 3 ฉบับ และคัลลอกคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่างจากโรงเรียน แล้วนำข้อมูลมาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับได้ต่ำ และเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายกับนักเรียนหญิง

ผลการวิจัยปรากฏว่า ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยทุกวิชา แต่เมื่อแยกเป็นรายวิชาบ้างวิชาที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไม่สัมพันธ์กันกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงกับได้ต่ำ มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 และพบว่า นักเรียนชายกับนักเรียนหญิงมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

เสนอ คุณประเสริฐ (เสนอ คุณประเสริฐ 2526 : 17) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ กลุ่มทดลอง ได้แก่ นิสิตปริญญาตรี ปีที่ 2 ที่เรียนรายวิชา คณิต 212 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ในภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2525 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 44 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลาสอน 10 คาบ ๆ ละ 50 นาที เมื่อสิ้นสุดการสอนแล้วทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลปรากฏว่า ไม่มีเหตุผลเพียงพอที่จะสรุปว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้มีประสิทธิภาพสูง โดยการทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

เมเยอร์ (Mayer. 1983 : 2584 -A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการสอนการแก้ปัญหามีขั้นตอน ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหและทัศนคติของนักศึกษาระดับวิทยาลัย ปีที่ 1 ซึ่งเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองได้รับการสอนแก้ปัญหเป็นรูปแบบซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ 1. ทหาความเข้าใจปัญหา 2. กำหนดทางเลือกที่จะแก้ปัญห 3. ดำเนินการแก้ปัญห 4. ตรวจสอบผลที่ได้ ส่วนกลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยวิธีปกติและไม่อ้างอิงถึงรูปแบบ

การแก้ปัญหาทั้ง 4 ชั้นนั้น ทั้ง 2 กลุ่มจะทำแบบฝึกหัด แบบสำรวจทัศนคติ และแบบทดสอบเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเหมือนกัน ผลปรากฏว่า

1. คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบของทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างไม่มีนัยสำคัญ

2. ทัศนคติของนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

นอกจากนี้ เมเยอร์ ยังพบว่า การสอนแก้ปัญหาแบบมีขั้นตอนทำให้ทัศนคติของนักศึกษาที่มีต่อการแก้ปัญหาใจหายดีขึ้น และมีนักศึกษาเป็นส่วนน้อยที่ใช้ขั้นตอนที่ 4 คือ ทรวสอบผลที่ได้ในการแก้ปัญหา

พุท (Putt. 1979 : 5382 - 5383 - A) ได้ศึกษาผลของการสอน 2 วิธีที่มีต่อพฤติกรรมแก้ปัญหาของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองครั้งนี้ คือนักเรียนระดับ 5 จำนวน 2 ห้องเรียน ผู้วิจัยสอนห้องที่ 1 โดยสอนตามรูปแบบซึ่งมีพื้นฐานมาจากขบวนการให้การเรียนรู้ของกาเบ้ และสอนแก้ปัญหาโดยใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหของโพลยา ซึ่งจะใช้วิธีสอนแบบอิวริสติกในการสอนนักเรียนกลุ่มนี้ ส่วนห้องที่ 2 สอนโดยการสร้างประสบการณ์แก่นักเรียนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาและไม่ใช้วิธีสอนแบบอิวริสติกในการสอนนักเรียนกลุ่มที่ 2 ส่วนกลุ่มควบคุมสอนโดยวิธีสอนแบบปกติ

ผลการทดลองปรากฏว่า มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญระหว่างวิธีสอน 2 วิธีกับวิธีสอนแบบปกติ และมีความแตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญเกี่ยวกับการแก้ปัญหของนักเรียนระหว่างกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่ม สิ่งที่พัฒนาขึ้นซึ่งเห็นได้ชัดในการแก้ปัญหของนักเรียนในกลุ่มทดลองก็คือ วิธีสอนวิธีแรกจะทำให้เห็นความแตกต่างในค่านัทัศนคติที่มีต่อการแก้ปัญหของนักเรียน คำถามซึ่งนักเรียนใช้ถามเพื่อที่จะทำให้เข้าใจปัญหา การใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาและการตั้งชื่อยุทธวิธีในการแก้ปัญหา ส่วนในค่านัทัศนคติที่มีต่อการแก้ปัญหของนักเรียนนั้น พบว่า มีความแตกต่างกันไม่มากนักระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม และมีความแตกต่างกันน้อยมากระหว่างนักเรียนในกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่ม จะเห็นได้ว่าวิธีสอนทั้ง 2 วิธีช่วยทำให้นักเรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการแก้ปัญห และได้ส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหามากยิ่งขึ้น

จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับวิธีสอน การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การแก้
 ปัญหา ตลอดจนงานวิจัยที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา ทำให้ผู้วิจัยเกิดแนวความคิดที่เป็นระบบขึ้น
 ซึ่งนำไปสู่กระบวนการสอนที่เรียกว่า การวิเคราะห์กระบวนการคิด โดยที่ผู้วิจัยมีความ
 เชื่อว่าจะเป็นกระบวนการสอนที่สามารถทำให้ผู้เรียนมีความเข้าใจในการพิสูจน์ และ
 สามารถดำเนินการพิสูจน์ได้ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงทำการวิจัยเพื่อหาประสิทธิภาพของ
 แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดขึ้น

วิธีดำเนินการวิจัยและการวิเคราะห์ข้อมูล

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่ นิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 จำนวน 22 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง เป็นแบบเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชันที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นตามเนื้อหาในหลักสูตรคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 โดยมีขั้นตอนดังนี้

1.1 พิจารณาขอบข่ายเนื้อหาของเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ที่สอนในมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

1.2 สอบถามอาจารย์ที่สอนวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ เพื่อพิจารณาเนื้อหา ความสำคัญของแต่ละหัวข้อและปัญหา

1.3 สร้างแบบเรียนโดยมีองค์ประกอบดังนี้

1.3.1 การวิเคราะห์กระบวนการคิดให้เห็นหลักการและโครงสร้างของการแก้ปัญหา

1.3.2 คำถามสอดแทรกในเนื้อหา เพื่อที่จะนำไปสู่ข้อสรุป ตลอดจนมโนคติที่สำคัญ

1.3.3 ตัวอย่าง ทั้งตัวอย่างที่เป็นจริงและตัวอย่างค่าน

1.3.4 แบบฝึกหัด

1.4 เมื่อสร้างแบบเรียนเสร็จแล้วนำไปปรึกษาอาจารย์ผู้สอน และกรรมการควบคุมปฏิญานิพนธ์เพื่อปรับปรุงแก้ไข

1.5 นำแบบเรียนที่แก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนิสิตระดับปริญญาตรี วิชาเอกคณิตศาสตร์ จำนวน 5 คน ที่ไม่ได้อยู่กลุ่มตัวอย่าง และไม่เคยเรียนคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์มาก่อนเพื่อปรับปรุงการใช้ภาษา ความเหมาะสมของเนื้อหาและระยะเวลาที่ใช้ในการเรียน

1.6 นำแบบเรียนที่ได้ทดลองใช้แล้วไปให้อาจารย์ผู้สอน และกรรมการควบคุมปฏิญานิพนธ์ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข แบบเรียนที่ได้จะเป็นแบบเรียนที่จะนำไปทดลองจริงกับกลุ่มทดลอง

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา โดยปรึกษากับอาจารย์ผู้สอนและกรรมการควบคุมปฏิญานิพนธ์ และทำการวิเคราะห์ข้อสอบตามขั้นตอนดังนี้

2.1 นำแบบทดสอบไปทดสอบกับนิสิตที่เรียนคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์มาแล้ว ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 24 คน เพื่อนำมาวิเคราะห์หาค่าอำนาจจำแนก ค่าความยากง่าย ค่าความเชื่อมั่น และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดของแบบทดสอบ

2.2 วิเคราะห์ข้อสอบโดยนำข้อมูลที่ได้จากการสอบในข้อ 2.1 มาวิเคราะห์ตามหลักการวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัยดังนี้

2.2.1 วิเคราะห์ข้อสอบเป็นรายข้อตามหลักการคัต 25%
กลุ่มสูง กลุ่มต่ำ เลือกข้อสอบ 7 ข้อ ที่มีความยากง่ายระหว่าง .20 - .80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป เป็นข้อสอบสำหรับการทดลองครั้งนี้

2.2.2 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์อัลฟา ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.67 และค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัดเท่ากับ 9.34

การดำเนินการทดลอง

1. ผู้วิจัยสอนแบบอภิปรายกับนิสิตกลุ่มทดลอง จำนวน 22 คน โดยสอนตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลาในการทดลอง 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526
2. เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว ทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น การให้คะแนนให้ตามลำดับขั้นตอนในการพิสูจน์ โดยผู้สอนกำหนดไว้ล่วงหน้า
3. นำคะแนนจากการทดสอบของกลุ่มทดลองมาวิเคราะห์ โดยใช้การทดสอบไค-สแควร์

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน
 - 1.1 คะแนนเฉลี่ยของคะแนน
 - 1.2 ค่าความแปรปรวนของคะแนน
2. หาค่าความยากง่ายของข้อสอบ คำนวณจากสูตร

$$\text{ค่าความยากง่าย} = \frac{S_H + S_L - (N_T)(X_{\min})}{(N_T)(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	S_H	แทน ผลรวมของความถี่สะสมของคะแนนกลุ่มสูง
	S_L	แทน ผลรวมของความถี่สะสมของคะแนนกลุ่มต่ำ
	$X_{\max}$	แทน คะแนนสูงสุดที่เป็นไปได้
	$X_{\min}$	แทน คะแนนต่ำสุดที่เป็นไปได้
	N_T	แทน จำนวนนักเรียนทั้งกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ
	N_H	แทน จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูง

3. หาค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ คำนวณจากสูตร

$$\text{ค่าอำนาจจำแนก} = \frac{S_H - S_L}{N_H(X_{\max} - X_{\min})}$$

4. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คำนวณจากสูตร

$$\alpha = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{\sum s_1^2}{s_t^2} \right)$$

เมื่อ α แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

s_1^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบแต่ละข้อ

s_t^2 แทน ความแปรปรวนของคะแนนทั้งฉบับ

n แทน จำนวนข้อของแบบทดสอบ

5. หาค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด คำนวณจากสูตร

$$\sigma_e = \sigma \sqrt{1 - r_{tt}}$$

เมื่อ σ แทน ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการวัด

σ_0 แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนการสอบ

r_{tt} แทน ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

6. ใช้ χ^2 ในการทดสอบสมมติฐาน คำนวณจากสูตร

$$\chi^2 = \frac{\sum (O - E)^2}{E}$$

เมื่อ χ^2 แทน ค่าไค-สแควร์

O แทน ค่าความถี่ที่ได้จากการสังเกต

E แทน ค่าความถี่ที่คาดหวังไว้

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนจากการทดสอบกลุ่มทดลอง 22 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน จำนวน 7 ข้อ และดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. นำคะแนนของกลุ่มทดลองมาแบ่งเป็น 2 กลุ่ม, นิสิตที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับ 50% จะอยู่กลุ่มที่ 1 นิสิตที่ทำแบบทดสอบได้คะแนนต่ำกว่า 50% จะอยู่ในกลุ่มที่ 2 ซึ่งปรากฏดังตาราง 1

ตาราง 1 จำนวนนิสิตของกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิต
กลุ่มที่ 1	17
กลุ่มที่ 2	5

2. ทดสอบประสิทธิภาพของแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ผลปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 2 การคำนวณหาค่าตัวสถิติทดสอบ χ^2

จำนวนนักเรียน	O	E	χ^2
กลุ่มที่ 1	17	11	6.545
กลุ่มที่ 2	5	11	

$$\chi^2_{(0.05 : 1)} = 3.841$$

จากตาราง 2 เพราะว่า $6.545 > 3.841$ แสดงว่า จำนวนนิสิต กลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05 และจากตาราง 2 จำนวนนิสิตในกลุ่มที่ 1 มากกว่าจำนวนนิสิตในกลุ่มที่ 2 ดังนั้นจากกลุ่มตัวอย่างนี้ สามารถกล่าวได้ว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

สมมติฐานการวิจัย

แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพ

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตพิษณุโลก ที่เรียนรายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2526 จำนวน 22 คน

วิธีการในการวิจัย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
 - 1.1 แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลองเป็นแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาในการสอน 14 คาบ คาบละ 50 นาที

1.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เป็นแบบอัตนัย จำนวน 7 ข้อ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ เท่ากับ 0.67

2. การดำเนินการทดลอง

2.1 ผู้วิจัยสอนกลุ่มทดลองโดยใช้แบบเรียนที่สร้างขึ้น ใช้เวลาในการสอน 14 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 เมื่อเสร็จสิ้นการสอนแล้ว ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ใช้เวลาในการทดสอบ 120 นาที

สรุปผลการวิจัย

จากการทดลองสามารถสรุปได้ว่า แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชันมีประสิทธิภาพ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

อภิปรายผล

จากการทดลองสอนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน โดยใช้แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นผลปรากฏว่า จำนวนนิสิตส่วนใหญ่ในกลุ่มทดลองได้คะแนนไม่ต่ำกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้คือ 50% ของคะแนนแบบทดสอบทั้งฉบับ จากการสังเกตของผู้วิจัย การที่นิสิตส่วนใหญ่ได้คะแนนเช่นนั้นอาจเนื่องมาจาก

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยแสดงลำดับขั้นตอนในการคิดทุกขั้นตอน ทำให้นิสิตเห็นแนวทางในการพิสูจน์ว่า จะเริ่มการพิสูจน์อย่างไร และจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด นิสิตสามารถหาแบบอย่างในการคิดไปใช้แก้ปัญหาอื่น ๆ ได้ ดังนั้น นิสิตจึงมีความกระตือรือร้นและสนใจในการเรียน เพราะมีความรู้ลึกว่าสามารถคิดและเขียนวิธีพิสูจน์ได้ด้วยตนเอง ถ้าฝึกฝนมากพอ

2. แบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้ในการสอนนั้น เป็นแบบเรียนซึ่งแสดงลำดับขั้นในการคิดเกี่ยวกับการพิสูจน์ไว้อย่างละเอียด ซึ่งผู้วิจัยได้แจกให้นิสิตอ่านล่วงหน้า นิสิตได้อ่านและทำความเข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาที่จะเรียนมาก่อนแล้วยังได้อภิปรายร่วมกับผู้สอนและนิสิตคนอื่น ๆ ในห้องเรียนอีกครั้งหนึ่ง จึงทำให้นิสิตมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนได้ดียิ่งขึ้น

3. นิสิตได้เรียนเรื่องสมิทของฟังก์ชันในรายวิชาคณิต 104 แคลคูลัสเบื้องต้น และคณิต 211 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 มาแล้ว แต่เป็นการเรียนที่ไม่เน้นการพิสูจน์นิสิตจึงมีโมเมติเกี่ยวกับเรื่องสมิทของฟังก์ชันมาก่อน ดังนั้นเมื่อมาเรียนเรื่องนี้อีกในคณิต 411 จึงทำให้นิสิตสามารถทำความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนได้ดียิ่งขึ้น

4. รายวิชาคณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์เป็นวิชาเลือก แสดงว่านิสิตที่เลือกเรียนวิชานี้มีความสนใจและชอบการพิสูจน์ จึงทำให้มีความตั้งใจเรียนดี

ในระหว่างทำการทดลองสอน ผู้วิจัยสังเกตพบว่า

1. ในระยะแรกนิสิตให้ความสนใจอ่านแบบเรียนเป็นอย่างดี แต่หลังจากคาบที่ 8 เป็นต้นไปมีนิสิตประมาณ 7 - 8 คน ไม่อ่านแบบเรียนมาก่อนจึงทำให้ไม่สามารถร่วมการอภิปรายกับนิสิตคนอื่น ๆ ได้

2. นิสิตส่วนมากไม่กล้าถามปัญหา ผู้วิจัยต้องพยายามสร้างความสนใจให้นิสิตถามปัญหา และในบางครั้งผู้วิจัยต้องเป็นผู้ตั้งปัญหามา

3. เมื่อผู้วิจัยหรือนิสิตในกลุ่มทดลองตั้งปัญหามา นิสิตส่วนมากมีความสนใจและพยายามคิดหาคำตอบแต่ไม่ค่อยตอบปัญหา ต้องให้ผู้วิจัยเป็นผู้ระบุว่าจะให้ใครตอบ

4. นิสิตประมาณครึ่งหนึ่งของกลุ่มทดลองหาแบบฝึกหัดส่งมาเสมอตามเวลาที่กำหนด

5. การอภิปรายแบบฝึกหัดที่ตรวจแล้ว เป็นกิจกรรมที่นิสิตส่วนมากสนใจและถามปัญหา

จากการสอบถามนิสิตในค่านักสนคคิของนิสิตที่มีต่อแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด ปรากฏว่านิสิต 74 % มีความเห็นว่าแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดดีกว่าแบบเรียนตามปกติ

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรจะมีการแสวงหาวิธีสอน ที่จะส่งเสริมให้นิสิตมีความสามารถหาแนวทางในการพิสูจน์ และสามารถหาการพิสูจน์ได้

1.2 ในค่านแบบเรียน ควรจะมีการสร้างแบบเรียนคณิตศาสตร์ในลักษณะที่ว่า การแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ นั้นจะมีแนวการคิดหรือคำถามมาเพื่อจะช่วยให้ นิสิตสามารถศึกษาจากแบบเรียน และทำความเข้าใจด้วยตนเองได้

1.3 ในค่านการสอนคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรหาวิธีสร้างแรงจูงใจเพื่อให้ผู้เรียนได้ศึกษาเนื้อหาที่จะเรียนมาล่วงหน้า เพื่อช่วยให้ผู้เรียนสามารถทำความเข้าใจและซักถามปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนในห้องเรียนได้ดียิ่งขึ้น

1.4 ผู้สอนคณิตศาสตร์ควรหาวิธีการฝึกให้ผู้เรียนมีความกล้าที่จะซักถาม และตอบปัญหา

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเรื่องนี้ซ้ำอีก โดยใช้กลุ่มตัวอย่างในการวิจัยให้มีขอบเขตกว้างขวางยิ่งขึ้น

2.2 ควรหาการวิจัยหาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดกับเนื้อหาอื่นของคณิตศาสตร์ เพื่อความเหมาะสมหรือไม่ เพียงใด

2.3 ควรหาการวิจัยว่า มีองค์ประกอบใดบ้างที่จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2.4 ควรหาการวิจัยว่า ถ้าให้นิสิตศึกษาแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดด้วยตนเองแล้วจะมี สัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นอย่างไร

2.5 ควรหาการวิจัยเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาระหว่างนิสิตซึ่งเรียนโดยวิธีสอนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด และวิธีสอนตามปกติในช่วงระยะเวลา 1 ปี

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- จรรยา ภูคุบ ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนตามการประเมินของครู ปรียุณานิพนธ์ ก.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2521, 67 หน้า อิศำเนา
- ชมเพลิน จันทรเรืองเพ็ญ "การลอนแบบต่าง ๆ ในระดับอุดมศึกษา" ครุศาสตร์ 1 : 41 - 43 พฤษภาคม - มิถุนายน 2519
- คณัย บังคอง การสร้างบทเรียนโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "แคลคูลัสเบื้องต้น" สำหรับระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ปรียุณานิพนธ์ ค.บ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2521, 67 หน้า อิศำเนา
- คิลก คิลกานนท์ "คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น" การวัดผลการศึกษา 1 : 63 - 66 พฤษภาคม - สิงหาคม 2525
- บุหงา วัชนะ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ ปรียุณานิพนธ์ ค.ม. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2515, 39 หน้า อิศำเนา
- มหาวิทยาลัย, ทบวง ชุดเสริมประสบการณ์สำหรับครูคณิตศาสตร์ 2524, 180 หน้า
- รายงานการวิจัยเพื่อจัดทำโครงการหลักสูตรปริญญาตรีผลิตครูคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา 2525, 212 หน้า
- ยุพิน พิพิธกุล การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523, 507 หน้า
- ศรีนครินทร์วิโรฒ, มหาวิทยาลัย รายงานสรุปการสัมมนาเพื่อพัฒนาการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทร์วิโรฒ ประสานมิตร 2519, 205 หน้า
- สุเทพ จันทรสมักก็ แคลคูลัส กรุงเทพมหานคร 2519, 171 หน้า
- คณิตศาสตร์เบื้องต้น ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทร์วิโรฒ บางเขน 2521, 158 หน้า

เสนอ คุณประเสริฐ การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิด

เรื่องฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ ปริณูพานิพนธ์ กศ.ม. มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประสานมิตร 2526, นับจำนวนหน้าไม่ได้ อักขำเนา

สมศักดิ์ สิบธุระเวชญ์ และโกวิทย์ ประวาลพฤษย์ การประเมินในชั้นเรียน

วัฒนาพานิช 2523, 280 หน้า

อรพินท์ เจียรพะพงษ์ วิธีทางสถิติ : การทดสอบสมมติฐาน ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 187 หน้า

Apostol, Tom M. Calculus. Volume I, New York, Blaisdell Publishing Company, 1965. 515 p.

Mathematical Analysis. Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1975. 492 p.

Bourne, Lyle E., Estrand, Bruce R. and Dominowski, Roger L. The Psychology of Thinking. New Jersey, Prentice - Hall, 1971, p. 9.

Eadell, Albert G. Calculus with Analytic Geometry. London D. Van Nostrand Company (Canada), Ltd., 1964. 679 p.

Goldberg, Richard R. Methods of Real Analysis. New Delhi, Oxford & IBH Publishing Co. 1978. 359 p.

Hirst, K.E. Calculus of One Variable. London, George Allen & Unwin Ltd., 1972. 85 p.

Krulik, Stephen. "Problem, Problem Solving and Strategy Games"; The Mathematics Teacher. 8 : 649 - 651, November, 1977.

Lang, Serge. A First Course in Calculus. Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1965. 260 p.

Leadership Project Committee. Textbook of Mathematical Analysis. New Delhi, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., 1980. 214 p.

Mayer, Lavern James. "Teaching Problem Solving in A College Level General Education Mathematics Class" Dissertation Abstracts International. February, 1983, p. 2584 - A.

Miller, Kenneth S. Advanced Real Calculus. New York, Harper & Brothers, 1957. 185 p.

- Narayan, Shanti. Elements of Real Analysis. New Delhi, S. Chand & Company Ltd., 1979. 178 p.
- Polya, George. How to Solve it. New Jersey, Princeton University Press, 1977, p. 5 - 36.
- Protler, M.H. and Morrey, C.B. A First Course in Real Analysis. New York, Springer - Verlay, 1977. 507 p.
- Putt, John Ian. "An Exploratory Investigation of Two Methods of Instruction in Mathematical Problem Solving at the Fifth Grade Level", Dissertation Abstracts International, March, 1979, p. 5382 - A.
- Rudin, Walter. Principle of Mathematical Analysis. Tokyo, McGraw-Hill Kegakusha Ltd., 1976. 342 p.
- Zalewski, Claire Jean. "An Investigation of Selected Factors Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem", Dissertation Abstracts International, July, 1978, p. 2804 - A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

โครงการสอน เรื่องลัทธิของฟังก์ชัน

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการ เรียนการสอน	หมายเหตุ
24 ต.ค. 26 2 คาบ	1. แนะนำวิธีการ เรียนด้วยแบบเรียนที่ เน้นการวิเคราะห์กระ- บวนการคิด 2. บทนา เรื่อง อสมการและค่าสมบูรณ์ 3. มโนภาพลิมิต บทนิยาม 1.1 ตัวอย่าง 1.1 แบบฝึกหัดที่ 2	1. ผู้สอนแนะนำวิธีการ เรียน ตรวจสอบสัญลักษณ์ต่างๆ ที่ใช้ในแบบ เรียน รวบรวมทั้งการทำแบบฝึกหัดและการ ทดสอบ 2. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 1-7 (บทนา) ให้นักศึกษาเองเพื่อทบทวน ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการ เรียน เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน 3. ผู้สอนแจกแบบเรียน หน้า 8- 15 เรื่องมโนภาพของลิมิตให้นักศึกษาอ่าน ในเวลา 30 นาที 4. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปราย สิ่งที่นิสิตสงสัยในเรื่องมโนภาพของ ลิมิต 5. ผู้สอนให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดที่ 2 จำนวน 4 ข้อ 6. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 16- 44 ให้นักศึกษาอ่านมาล่วงหน้าก่อนเรียน ครั้งต่อไป	1. เรื่องจุดลิมิต ของเซตเป็นเรื่องที่ยุ เรียนไม่ค่อยเข้าใจ ต้องอธิบายเพิ่มเติม 2. การทำแบบฝึก หัดนั้นผู้สอนจะให้นัก ศึกษาทำจากแบบเรียนที่แจก ให้เป็นการบ้าน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หมายเหตุ

25 ก.ค. 26 พฤษภาคม 1.1

1 คาบ บทนิยาม 1.2

ตัวอย่าง 1.2 - 1.8

แบบฝึกหัดที่ 3 - 6

1. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกัน

เกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.1 โดยผู้

สอนเป็นผู้นำการอภิปราย

2. ผู้สอนถามนิสิตด้วยคำถามชุดที่

1 โดยให้นิสิตใช้เวลาคิดประมาณ 5

นาที จึงทบทวนถาม

3. ผู้สอนชี้แจงข้อบกพร่องจากการ

ตอบคำถามของนิสิตและให้นิสิตอภิปราย

ข้อบกพร่องนั้น

4. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกัน

เกี่ยวกับการวางหมายของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 1$ และแนว

คิดในการพิสูจน์ โดยยกตัวอย่าง

1.2 - 1.8

5. ผู้สอนให้นิสิตหาแบบฝึกหัดที่ 3

ข้อ 1, 3, 4

แบบฝึกหัดที่ 4 ข้อ 1(1), 3(2)

แบบฝึกหัดที่ 5 ข้อ 1(3), 3

แบบฝึกหัดที่ 6 ข้อ 2, 3, 6, 8

6. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 45-

65 ให้นิสิตอ่านในการเรียนครั้งต่อไป

1. นิสิตยังไม่คุ้นกับ

วิธีการเรียนแบบศึกษา

ด้วยตนเอง โดยเฉพาะ

ต้องอ่านทวนอธิบายวิธีการ

พิสูจน์ในหัวข้อ ลำดับชั้น

การวิเคราะห์แนวการ

พิสูจน์ ผู้สอนต้องอธิบาย

ให้นิสิตเข้าใจว่า ถ้านิสิต

คุ้นเคยและเข้าใจวิธีการ

พิสูจน์แล้วก็ไม่จำเป็นต้อง

อ่านหัวข้อนี้ก็ได้

2. นิสิตไม่ค่อยเข้าใจ

วิธีการพิสูจน์เกี่ยวกับ

ฟังก์ชันไม่มีลิมิต จึงต้อง

ยกตัวอย่างเพิ่มขึ้นอีก 2

ตัวอย่าง คือ

ตัวอย่าง 1 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -2, & x \geq 1 \end{cases}$$

วงพิสูจน์ว่า f ไม่มี

ลิมิตที่ 1

หมายเหตุ

ตัวอย่าง 2 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า f ไม่มี
ลิมิตที่ 0

31 ค.ก. 26 2 คาย	1. การอภิปรายแบบฝึกหัดที่ได้ฝึกทำส่ง 2. ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา ทฤษฎีบท 2.1 ตัวอย่าง 2.1 - 2.3 แบบฝึกหัดที่ 7, 8 1. ผู้สอนแจกแบบฝึกหัดที่ตรวจแล้ว ส่งคืนนิสิตและชี้แจงข้อบกพร่องเกี่ยวกับการพิสูจน์ จากนั้นผู้สอนและนิสิตร่วมกัน อภิปรายแบบฝึกหัดข้อที่นิสิตสงสัย 2. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปราย เกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1 และสรุปหลักการพิจารณาว่า ฟังก์ชันมีลิมิตหรือไม่โดยไม่วิเคราะห์เรื่องลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา 3. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปราย ตัวอย่าง 2.1 - 2.3 โดยผู้สอนเป็นผู้ถามการอภิปราย 4. ผู้สอนให้วิเคราะห์แบบฝึกหัดที่ 7 ข้อ 1, 2 และ 4 แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 1, 4 5. ผู้สอนแจกแบบเรียน หน้า 66-82 และหน้า 102 - 107 ให้นิสิตอ่านในการเรียนครั้งต่อไป	1. ในการอภิปรายแบบฝึกหัดนิสิตให้ความสนใจมาก 2. ข้อบกพร่องจากการหาแบบฝึกหัดของนิสิต เช่น เลือก δ หรือ ε ในรูปที่มีตัวแปรปนอยู่ด้วย $\delta = \frac{1}{1+x}$ $\varepsilon = x + 1 - 1$
---------------------	--	---

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้	หมายเหตุ
10 พ.ย. 26 2 คาบ	ทฤษฎีบท 3.1 - 3.4 ทฤษฎีบท 3.8 แบบฝึกหัดที่ 9, 10	1. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับสิ่งที่นิสิตสงสัยในวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 - 3.5 และ 3.8 2. ผู้สอนถามนิสิตด้วยคำถามชุดที่ 3, 4, 5 และ 9 โดยให้นิสิตใช้เวลาคิดชุดละประมาณ 5 นาที จึงตอบคำถาม 3. ผู้สอนชี้แจงข้อบกพร่องจากการตอบคำถามของนิสิตและให้นิสิตอภิปรายข้อบกพร่องนั้น 4. ผู้สอนให้นิสิตพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4 เป็นแบบฝึกหัด 5. ผู้สอนให้นักนิสิตหาแบบฝึกหัดที่ 9 ข้อ 1, 2 แบบฝึกหัดที่ 10 ข้อ 2, 3, 4(2) แบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 1, 2 6. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 83-101 ให้นิสิตอ่านใบการเรียงครั้งต่อไป	1. สำหรับทฤษฎีบท 3.2 นิสิตอ่านวิธีการพิสูจน์แล้วยังไม่ค่อยเข้าใจ ข้อ 1 กรณี $k \neq 0$ ในระหว่างการอภิปรายผู้สอนต้องอธิบายเพิ่มเติม 2. เนื่องจากวิธีการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.8 มีแนวความคิดที่ค่อนข้างยาก โดยเฉพาะการพิจารณาเลือก ε ดังนั้นผู้สอนจึงต้องเป็นผู้นำการอภิปรายตลอดเวลาและอธิบายเพิ่มเติม
14 พ.ย. 26 1 คาบ	1. การอภิปรายแบบฝึกหัดที่ให้นิสิตหาส่ง 2. ทฤษฎีบท 3.5-3.7 ตัวอย่าง 3.1-3.2 แบบฝึกหัดที่ 11	1. ผู้สอนแจกแบบฝึกหัดที่ตรวจแล้วให้กลับนิสิต แล้วชี้แจงข้อบกพร่องเกี่ยวกับการพิสูจน์ จากนั้นผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปรายแบบฝึกหัดที่ให้นิสิตสงสัย 2. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.5, 3.6	1. ข้อบกพร่องของนิสิตในการทำแบบฝึกหัด เช่น นิสิตไม่สามารถนำทฤษฎีบท 3.8 มาใช้ในการแก้ปัญหาคือใช้ไม่ได้เท่าที่ควร

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียงการสอน	หมายเหตุ
	แบบฝึกหัดที่ 11	แนวข้ออย่าง 3.1, 3.2 3. ผู้สอน ถาบกิสิทักวักถามซุกที่ 6,7 และ 8 โภยให้นิสิทักไ้วเวจากิด ซุกละปร มาณ 5 นาที่ จึงทวบกถาม 4. ผู้สอนชี้แจงข้อบกพร่องจากการ ทอบกถามของนิสิทและให้นิสิตกรุป ทวบกรู้ที่ไค้จากทฤษฎีบทและตัวอย่าง 5. ผู้สอนให้นิสิตพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.7 เป็นแบบฝึกหัด 6. ผู้สอนให้นิสิตทวแบบฝึกหัดที่ 11 ข้อ 1, 3 7. ผู้สอนแวกแบบเรยนหน้า 108-125 ไ้วนิสิทอ่านไค้ในการเรยนครั้งต่อไค้	2. ตัวอย่าง 3.2 มีแนวการคิดในการพิสูจน์ ก่อนซ้างยาก นิสิตไม่ทอบก ซ้างไค้ ผู้สอนทอบกอธิบาย เฝ้มเฝ้ม และตัวอย่างนี้ เป็นตัวอย่างที่จะนำไค้ ไ้วในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ที่ถากัญ คือทฤษฎีบท 3.6 3. นิสิตส่วนใหญซ้างไค้ วัธีการพิสูจน์ทฤษฎีบท เกียวกับกิสิทคณลคณเป็น อย่างดี แต่มีข้อบกพร่อง ในการนำไค้ใช้ คือนิสิท ไค้ระวังว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ มีหรือไม
17 พ.ย. 26 2 คาบ	ทฤษฎีบท 3.9-3.13 ตัวอย่าง 3.2, 3.3 แบบฝึกหัดที่ 13-15	1. ผู้สอนและนิสิทอภิปรายร่วมกัน เกียวกัควัธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทและ ตัวอย่าง 2. ผู้สอน ถาบกิสิทักวักถามซุกที่ 10 โภยให้นิสิตไ้วเวจากิดประมาณ 5 นาที่	1. สาหรับทฤษฎีบท 3.9 มีวัธีการพิสูจน์ก่อน ซ้างยาก ผู้สอนทอบกอธิบาย เฝ้มเฝ้ม ให้นิสิตซ้างไค้ เพราะ เป็นทฤษฎีที่จำเป็น ทอบกนำไค้ใช้ในการพิสูจน์

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้	หมายเหตุ
		3. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปรายข้อบกพร่องต่าง ๆ จากคำตอบของนิสิต และสรุปความรู้ที่ได้ 4. ผู้สอนให้นิสิตหาแบบฝึกหัดที่ 13 ข้อ 1, 2 แบบฝึกหัดที่ 14 ข้อ 2, 3 แบบฝึกหัดที่ 15 ข้อ 2, 3 5. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 126-137 ให้นิสิตอ่านในการเรียนครั้งต่อไป	ทฤษฎีบท 3.10 2. นิสิตไม่ระวังเมื่อจะนำทฤษฎีบท 3.10 ไปใช้ นั่นคือไม่ตรวจสอบว่านิพจน์ของตัวหารเป็นศูนย์หรือไม่
21 พ.ย. 26 2 คาบ	ทฤษฎีบท 3.14, 3.15 ตัวอย่าง 3.4-3.6 แบบฝึกหัดที่ 16, 17	1. ผู้สอนและนิสิตอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทและตัวอย่าง 2. ผู้สอนถามนิสิตว่ามีความซุกที่ 11 โทบให้ นิสิตใช้เวลาคิดประมาณ 5 นาที แล้วจึงถามคำถาม จากนั้นอภิปรายคำตอบร่วมกัน 3. ผู้สอนให้ นิสิตหาแบบฝึกหัดแบบฝึกหัดที่ 16 ข้อ 3, 4, 5 (2, 3) แบบฝึกหัดที่ 17 ข้อ 2, 3 4. ผู้สอนแจกแบบเรียนหน้า 138-164 ให้นิสิตอ่านในการเรียนครั้งต่อไป	1. ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.14 กรณีที่ $a > 0$ มีแนวความคิดค่อนข้างยาก ผู้สอนต้องอธิบายเพิ่มเติม 2. หลังจากอภิปรายทฤษฎีบท 3.14 จบแล้ว ผู้สอนต้องชี้ให้นิสิตเห็นว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริงในกรณี $a \geq 0$ เท่านั้น 3. ในการอภิปรายทฤษฎีบท 3.15 นั้นผู้สอนต้องชี้ให้นิสิตเห็นว่าคุณสมบัติที่จำเป็นในการพิสูจน์

เรื่อง

กิจกรรมการเรียนการสอน

หมายเหตุ

ทฤษฎีบทนี้คือ

$$1) |\sin t_1 - \sin t_2| < |t_1 - t_2|$$

$$2) |\cos t_1 - \cos t_2| < |t_1 - t_2|$$

4. จากการตอบคำถาม
ขอให้นักศึกษาให้ทราบว่า นิสิต
ส่วนใหญ่สนใจสูตรทางตรีโกณ-
มิติ จึงต้องมีการทบทวน
สูตรทางตรีโกณมิติ

24 พ.ย. 26

1. การอภิปรายแบบ

1. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปราย

1. ข้อบกพร่องจาก

2 คาบ

ฝึกหัดที่ 1 นิสิตหาส่ง

ข้อบกพร่องของนิสิตจากแบบฝึกหัดที่

แบบฝึกหัดที่ตรวจแล้วเช่น

2. ทฤษฎีบท 3.16

ตรวจแล้วและสิ่งที่นิสิตสงสัยจาก

1.1 นิสิตไม่นาบทฤษฎี

3.20

แบบฝึกหัด

บท 3.5 มาใช้ในการแก้

ตัวอย่าง 3.7-3.9

2. ผู้สอนและ นิสิตร่วมกันอภิปราย

ปัญหา แต่จะใช้ทฤษฎีเก่าๆ

แบบฝึกหัดที่ 18-20

วิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.16-3.20

เป็นส่วนใหญ่

และตัวอย่าง 3.7-3.9

1.2 นิสิตเขียนสูตร

3. ผู้สอนถาสนนิสิตด้วยคำถาม

ผลบวกของ sine ผลบวก

รูปที่ 12 โภปให้นิสิตไม่เวลาดิค

ของ cosine นิสิตเป็นส่วน

ประมาณ 15 นาที แล้วจึงตอบคำถาม

ใหญ่

จากนั้น ผู้สอนชี้แจงข้อบกพร่องจากคา

1.3 นิสิตเขียนคุณสมบัติ

กาตอบนั้น

ถ้าสมมุติว่าไม่ถูกต้องคือเขียน

$$\text{ว่า } |a| + |b| = |a + b|$$

เวลา	เรื่อง	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	หมายเหตุ
		4. ผู้สอนให้นิสิตทบทวนแบบฝึกหัดคือ แบบฝึกหัดที่ 18 ข้อ 3, 4 แบบฝึกหัดที่ 19 ข้อ 2, 3 แบบฝึกหัดที่ 20 ข้อ 3, 5, 7	2. ผู้สอนทบทวนคุณสมบัติสมการ และค่าสัมบูรณ์ที่ว่า $ f(x) - 1 \leq f(x) - 1 $ ก่อนอภิปรายทฤษฎีบท 3.16 3. สำหรับทฤษฎีบท 3.17 นิสิตส่วนใหญ่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ได้ดี แต่นำไปใช้ไม่ค่อยได้ นั่นคือเวลาพบปัญหาแล้วมักนึกไม่ถึงว่าต้องใช้ทฤษฎีบทนี้ 4. ในการอภิปรายเกี่ยวกับวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.19 นั้น ผู้สอนต้องอธิบายเพิ่มเติม เนื่องจากวิธีการพิสูจน์ค่อนข้างยาก
28 พ.ย. 26 1 คาบ	1. การอภิปรายแบบฝึกหัดที่ให้นิสิตหาส่ง 2. ทบทวน	1. ผู้สอนชี้แจงข้อบกพร่องของนิสิตจากแบบฝึกหัดที่ตรวจแล้ว และสิ่งที่นิสิตสงสัย 2. ผู้สอนและนิสิตร่วมกันอภิปรายทฤษฎีบทต่างๆ ที่เรียนมาแล้วทั้งหมดในหัวข้อที่นิสิตสงสัย	

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบ

ข้อสอบวิชา คณิต 411 คณิตศาสตร์วิเคราะห์ (Mathematical Analysis)

เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน เวลา 2 ชั่วโมง ข้อละ 10 คะแนน

1. จงใช้บทนิยามพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3) = 5$

2. จงใช้บทนิยามพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3$

3. กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 1 + m$

4. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{3 - \sqrt{x}}$ พร้อมทั้งแสดงวิธีหา

5. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ พร้อมทั้งแสดงวิธีหา

6. กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ จงหาค่า (พร้อมทั้งแสดงวิธีหา)

ก. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (ถ้ามี)

ข. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (ถ้ามี)

ค. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (ถ้ามี)

7. กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x} + 1$ จงแสดงว่า f ไม่มีลิมิตที่ 0

ค่าความยากง่าย (P) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ

ข้อที่	P	r
1	.61	.75
2	.63	.42
3	.30	.60
4	.58	.50
5	.47	.43
6	.48	.57
7	.53	.72

ภาคผนวก ค

แบบเรียนสำหรับกลุ่มทดลอง

บทนำ

ก่อนที่จะศึกษา เรื่องลิมิตของฟังก์ชัน จำเป็นจะต้องทบทวนเกี่ยวกับ
เรื่องค่าสัมบูรณ์และอสมการ ซึ่งมีบทนิยาม ทฤษฎีบทที่จำเป็นต้องใช้เป็นพื้นฐานใน
การพิสูจน์เกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 0.1 สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ มีความหมายดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 0.1.1

- 1) $|5| = 5$
- 2) $|0| = 0$
- 3) $|-5| = -(-5) = 5$

ตัวอย่าง 0.1.1

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{เมื่อ } (x-2) \geq 0 \\ -(x-2) & \text{เมื่อ } (x-2) < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 0.2 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

$$|x| = |y| \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = y \quad \text{หรือ} \quad x = -y$$

ตัวอย่าง 0.2.1

- 1) $|x-2| = |3x|$ ก็ต่อเมื่อ $x-2 = 3x$ หรือ $x-2 = -3x$
- 2) $|y^2-1| = |4|$ ก็ต่อเมื่อ $y^2-1 = 4$ หรือ $y^2-1 = -4$

ทฤษฎีบท 0.3 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

$$1) |x| = |-x|$$

$$2) |x^2| = |x|^2 = x^2$$

$$3) x^2 = y^2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } |x| = |y|$$

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบท 0.3 ข้อ 3)

$$x^2 = y^2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } |x| = |y|$$

โดยทฤษฎีบท 0.2

$$|x| = |y| \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y \text{ หรือ } x = -y$$

$$\text{ดังนั้น } x^2 = y^2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y \text{ หรือ } x = -y$$

ตัวอย่าง 0.3.1

$$1) |(x+y)^2| = |x+y|^2 = (x+y)^2$$

$$2) |x-y| = |-(x-y)| = |y-x|$$

$$3) |3-y| = |-4| \text{ ก็ต่อเมื่อ } (3-y)^2 = (-4)^2$$

ทฤษฎีบท 0.4 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว จะได้

$$1) |xy| = |x| \cdot |y|$$

$$2) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ เมื่อ } y \neq 0$$

ตัวอย่าง 0.4.1

$$1) \quad |(x+2)(x-2)| = |x+2| \cdot |x-2|$$

$$2) \quad \frac{|x^2 - 9|}{|x + 3|} = \frac{|x^2 - 9|}{|x + 3|} \quad x \neq -3$$

$$3) \quad \frac{|x^2 - a^2|}{|x + a|} = \left| \frac{x^2 - a^2}{x + a} \right| = |x - a| \quad \text{เมื่อ } x \neq -a$$

บทนิยาม 0.5 สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

ตัวอย่าง 0.5.1

$$1) \quad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$$

$$2) \quad \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$$

ทฤษฎีบท 0.6 กำหนด x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$$1) \quad |x| < a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad -a < x < a$$

$$2) \quad |x| \leq a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad -a \leq x \leq a$$

$$3) \quad |x| > a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x > a \quad \text{หรือ} \quad x < -a$$

$$4) \quad |x| \geq a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x \geq a \quad \text{หรือ} \quad x \leq -a$$

ตัวอย่าง 0.6.1

- 1) $|x+y| \leq 3$ ก็ต่อเมื่อ $-3 \leq x+y \leq 3$
- 2) $|x-a| < \delta$ ก็ต่อเมื่อ $-\delta < x-a < \delta$
- 3) $|2y+5| > \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $2y+5 > \varepsilon$ หรือ $2y+5 < -\varepsilon$
- 4) $|x^2-1| \geq \varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $x^2-1 \geq \varepsilon$ หรือ $x^2-1 \leq -\varepsilon$

ทฤษฎีบท 0.7 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

$$x^2 < y^2 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad |x| < |y|$$

- ตัวอย่าง 0.7.1
- 1) $(x-2)^2 < (x+3)^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x-2| < |x+3|$
 - 2) $x^2 < (-3)^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| < |-3|$

ทฤษฎีบท 0.8 สำหรับจำนวนจริง c, x และ y ทุกตัว จะได้ว่า

- 1) $|x+y| \leq |x| + |y|$
- 2) $|x-y| \leq |x| + |y|$
- 3) $|x| - |y| \leq |x-y|$
- 4) $|y| - |x| \leq |x-y|$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x-y|$
- 6) $|x-y| \leq |x-c| + |c-y|$
- 7) $|x| - |y| \leq |x+y|$
- 8) $||x| - |y|| \leq |x+y|$

ตัวอย่าง 0.8.1 กำหนดให้ $|x| < \varepsilon_1$ และ $|y| < \varepsilon_2$ เมื่อ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จงแสดงว่า $|x+y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

วิธีทำ เนื่องจาก $|x| < \varepsilon_1$ และ $|y| < \varepsilon_2$

$$\text{ดังนั้น } |x| + |y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\text{แต่ } |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |x+y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

□

ตัวอย่าง 0.8.2 กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$1) \quad 0 < |x-2| < \delta \longrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

$$2) \quad 0 < |x+3| < \delta \longrightarrow \left| \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

วิธีทำ 1) ให้ $0 < |x-2| < \delta$ จะได้

$$0 < |x-2| < \delta \longrightarrow 5|x-2| < 5\delta$$

$$\longrightarrow |5x-10| < 5\delta$$

$$\text{นั่นคือ } \varepsilon = 5\delta \longrightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\text{ดังนั้น ให้ } \delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

□

2) ให้ $0 < |x+3| < \delta$ จะได้

$$0 < |x+3| < \delta \longrightarrow \frac{1}{2}|x+3| < \frac{1}{2}\delta$$

$$\longrightarrow \left| \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}\delta$$

$$\text{นั่นคือ } \varepsilon = \frac{1}{2}\delta \longrightarrow \delta = 2\varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น ให้ } \delta = 2\varepsilon$$

□

ตัวอย่าง 0.8.3 กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \varepsilon$

วิธีทำ เห็นชัดว่าให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้ว่า

$$|x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

□

ตัวอย่าง 0.8.4 กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|x-a| < \delta \rightarrow |k-k| < \varepsilon$$

วิธีทำ เนื่องจาก $|k-k| = 0$ และ $\varepsilon > 0$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะได้ว่า

$$|x-a| < \delta \rightarrow |k-k| < \varepsilon$$

□

ตัวอย่าง 0.8.5 กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|x-a| < \delta \rightarrow |(mx+c)-(ma+c)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ } m \neq 0$$

วิธีทำ

$$\text{เนื่องจาก } |(mx+c)-(ma+c)| < \varepsilon \iff |mx-ma| < \varepsilon$$

$$\iff |m| |x-a| < \varepsilon$$

$$\iff |x-a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

ดังนั้นให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ จะได้

$$|x-a| < \delta \rightarrow |(mx+c)-(ma+c)| < \varepsilon$$

□

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนด $|x^2 - 4| < 10, |x+2| > 5$

จงแสดงว่า $|x-2| < 2$

2. กำหนด $|x^2 + 2x + 1| < \varepsilon$ และ $|x-1| < |x+1|$ และ $|x+1|, |x-1| \neq 0$

จงแสดงว่า $|x-1||x+1| < \varepsilon$

3 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|3x+5| < \delta_1$ และ $|x-2| < \delta_2$ แล้ว

$$||3x+5| - |x-2|| < \delta_1 + \delta_2$$

4. กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหาค่าของ $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

1) $|x + \sqrt{3}| < \delta \rightarrow |kx - k\sqrt{3}| < \varepsilon$

2) $|x-a| < \delta \wedge |y-b| < \delta \rightarrow |(2x+3y)-(2a+3b)| < \varepsilon$

1. ลิมิตของฟังก์ชัน

มโนภาพของลิมิต

กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

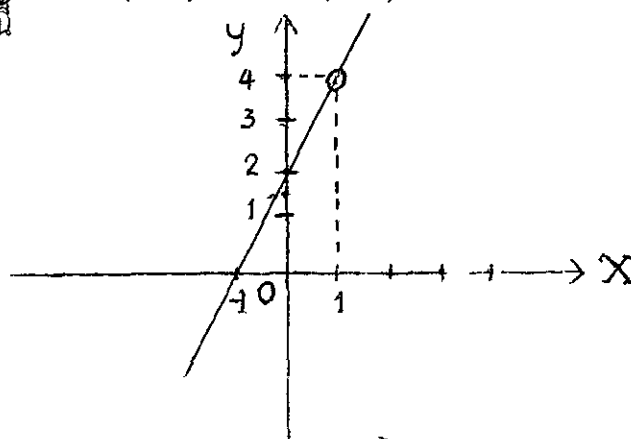
$$f(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x-1)}$$

จะได้ว่า $f(2) = 6$ แต่ $f(1)$ ไม่มีค่าหมาย เพราะว่า $1 \notin D_f$

แม้ว่า $f(1)$ จะไม่มีค่าหมาย แต่เราอาจกล่าวถึง $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ดังนี้

$$\text{พิจารณา } f(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x-1)} = \frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2(x+1) \text{ เมื่อ } x \neq 1$$

กราฟของ f เป็นดังนี้



จากกราฟของ f จะเห็นว่า ถ้า x เข้าใกล้ 1 แล้ว $f(x)$ เข้าใกล้ 4

เราไม่อาจกำหนดได้ว่า x เป็นเท่าไรจึงจะกล่าวได้ว่า x เข้าใกล้ 1 และ

$f(x)$ เป็นเท่าไร จึงจะกล่าวได้ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 4 เราจะพยายามให้ความหมาย

ที่ชัดเจนของข้อความ "ถ้า x เข้าใกล้ 1 แล้ว $f(x)$ เข้าใกล้ 4"

ลองให้ความหมายเกริ่น ๆ ดังนี้

"เราสามารถทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 เท่าไรก็ได้ตามความต้องการของเรา โดยกำหนดให้ x เข้าใกล้ 1 พอสมควร"

เพื่อให้ชัดเจน เราจะอาศัยคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ และอสมการมาอธิบายคำว่า "เข้าใกล้"

พิจารณาข้อความ " $f(x)$ เข้าใกล้ 4 เท่าไรก็ได้ตามความต้องการ" เขียนแทนด้วย " $|f(x)-4| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε " และข้อความ "โดยกำหนดให้ x เข้าใกล้ 1 พอสมควร" เขียนแทนด้วย "จะมีจำนวนจริงบวก δ ซึ่ง $|x-1| < \delta$ "

ดังนั้นจะให้ความหมายของข้อความ "ถ้า x เข้าใกล้ 1 แล้ว f เข้าใกล้ 4" เป็นดังนี้

"สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ซึ่ง ถ้า $|x-1| < \delta$ แล้ว $|f(x)-4| < \varepsilon$ "
แต่เราต้องการกล่าวถึง $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ดังนั้นเพื่อให้แน่ใจว่ามี x ใน D_f ซึ่งเข้าใกล้ 1 จำเป็นต้องกำหนดว่า $[(1-\delta, 1+\delta) - \{1\}] \cap D_f \neq \emptyset$ หรือกล่าวว่า 1 เป็นจุดลิมิตของ D_f และเราไม่สนใจว่า 1 จะอยู่ใน D_f หรือไม่ ดังนั้น เราจะเพิ่มข้อความดังต่อไปนี้ (ข้อความที่ขีดเส้นใต้)

"สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ซึ่งสำหรับทุก x ใน D_f ถ้า $0 < |x-1| < \delta$ แล้ว $|f(x)-4| < \varepsilon$ "
หมายเหตุ $(1-\delta, 1+\delta) = \{x / 1-\delta < x < 1+\delta\}$

จากที่กล่าวมาทั้งหมด เราสามารถนิยามข้อความ
 " f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ a " ได้ดังนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนด f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$

และ a เป็นจุดลิมิตของ D_f

f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ϵ จะมีจำนวนจริงบวก δ

ซึ่งสำหรับทุก ๆ x ใน D_f ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - 1| < \epsilon$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 1.1

1. ข้อความ " $0 < |x - a|$ " จะมีความหมายเหมือนกับ
 $x \neq a$ ดังนั้น a ไม่จำเป็นต้องอยู่ใน D_f

$$\begin{aligned} 2. |x - a| < \delta &\iff -\delta < x - a < \delta \\ &\iff a - \delta < x < a + \delta \\ &\iff x \in (a - \delta, a + \delta) \end{aligned}$$

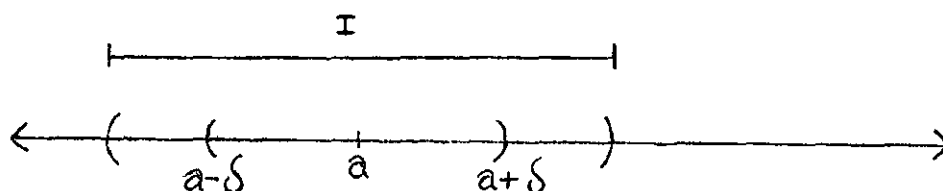
$$\begin{aligned} 3. |f(x) - 1| < \epsilon &\iff -\epsilon < f(x) - 1 < \epsilon \\ &\iff 1 - \epsilon < f(x) < 1 + \epsilon \\ &\iff f(x) \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \end{aligned}$$

4. ในบทนิยาม กำหนด a เป็นจุดลิมิตของ D_f มีเหตุผลดังต่อไปนี้
โดยนิยามของจุดลิมิตของเซตจะได้ว่า

" a เป็นจุดลิมิตของ D_f ก็ต่อเมื่อ $(I - \{a\}) \cap D_f \neq \emptyset$ สำหรับทุก ๆ ช่วงเปิด I ซึ่ง $a \in I$ " ดังนั้นถ้า a ไม่เป็นจุดลิมิตของ D_f จะได้ว่า

มีช่วงเปิด I ซึ่ง $a \in I$ และ $(I - \{a\}) \cap D_f = \emptyset$

เลือก $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ ดังรูป



เนื่องจาก $(I - \{a\}) \cap D_f = \emptyset$ ดังนั้น $[(a - \delta, a + \delta) - \{a\}] \cap D_f = \emptyset$
เพราะฉะนั้นไม่มี x ใน D_f ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

ดังนั้น ถ้า 1 เป็นจำนวนจริงใด ๆ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$
ซึ่งข้อความ $\forall x \in D_f [0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon]$ เป็นจริง

จึงสรุปได้ว่า f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ a เสมอ ไม่ว่า 1 จะเป็น
จำนวนจริงใด ๆ ซึ่งจะทำให้ทฤษฎีบทที่สำคัญ คือ ทฤษฎีบท 1.2 ซึ่งจะกล่าวต่อไป
เป็นเท็จ

ข้อตกลง

1. พึงตั้งขึ้นที่จะกล่าวถึงตั้งแต่บัดนี้เป็นต้นไป จะหมายถึง พงษ์ธันจาก
สับเซตของ R ไป R ยกเว้นระบุเป็นอย่างอื่น
2. ในการกล่าวถึงบทนิยาม 1.1 หรือการใช้บทนิยาม 1.1 อาจจะละ
คำว่า " a เป็นจุดลิมิตของ D_f " และคำว่า "สำหรับทุก ๆ x ใน D_f "
ไว้โดยขอให้เป็นที่เข้าใจตรงกันว่ามีข้อความทั้งสองนี้อยู่ด้วยเสมอ แม้จะไม่กำหนดไว้
3. จำนวนทั้งหลาย ที่ปรากฏในบทเรียนนี้ เช่น $a, 1, \varepsilon, \delta$ ฯลฯ
ถ้าไม่ได้ระบุว่าเป็นจำนวนประเภทใด ให้ถือว่าเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.1 กำหนด $f(x) = 3x$ จงแสดงว่า f เข้าใกล้ 6 เมื่อ x เข้าใกล้ 2

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ f เข้าใกล้ 6 เมื่อ x เข้าใกล้ 2

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม เขียน ขั้นที่ 1 ใหม่ได้ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |3x-6| < \epsilon$

ขั้นที่ 3 พิจารณา $|3x-6| < \epsilon \leftrightarrow 3|x-2| < \epsilon \leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3}$

ดังนั้นจากขั้นที่ 2 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3}$

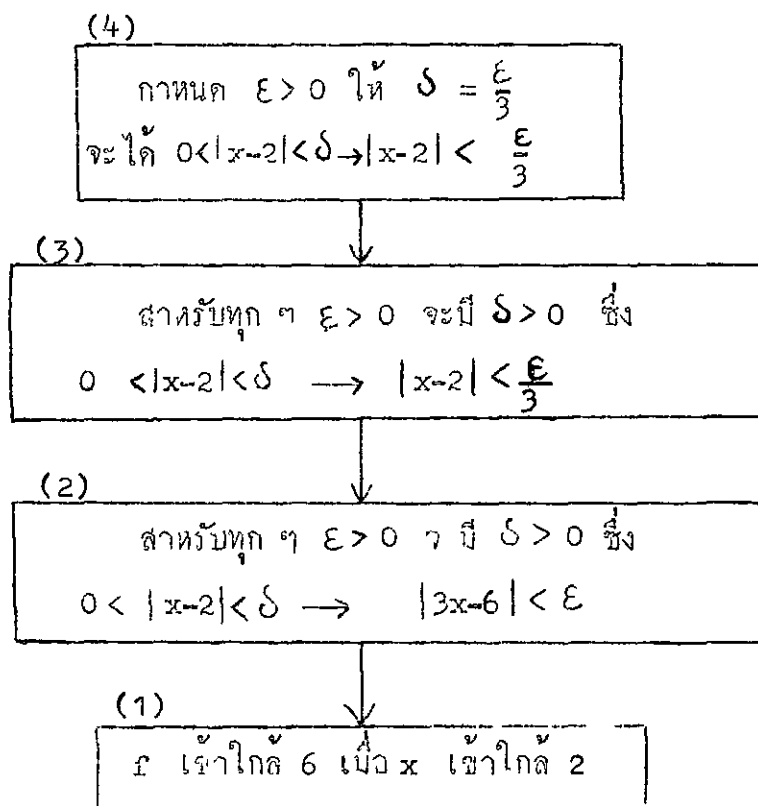
ขั้นที่ 4 ในการที่จะสรุปขั้นที่ 3 ได้ดังนี้

กำหนด $\epsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3}$

พิจารณา $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3}$ จะเห็นได้โดยง่ายว่า

ถ้าให้ $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ จะได้ว่า $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3}$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 0 < |x-2| < \delta &\rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{3} \\
 &\rightarrow 3|x-2| < \epsilon \\
 &\rightarrow |3x-6| < \epsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-2| < \delta \rightarrow |3x-6| < \epsilon$

โดยนิยาม 1.1 จะได้ว่า f เข้าใกล้ 6 เมื่อ x เข้าใกล้ 2



แบบฝึกหัดชุดที่ 2

- จงพิสูจน์ว่า f เข้าใกล้ 5 เมื่อ x เข้าใกล้ -3 โดยกำหนด $f(x) = x + 8$
- จงพิสูจน์ว่า f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 โดยกำหนด $f(x) = x - 1$
- กำหนด $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$
 ถ้า $|x - a| < \delta$ แล้ว $|x - a| < \underline{\hspace{2cm}}$ และ $|x - a| < \underline{\hspace{2cm}}$
- กำหนด l, m, δ_1, δ_2 และ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ f, g เป็นฟังก์ชัน
 และ $|x - a| < \delta_1 \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 $|x - a| < \delta_2 \longrightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$
 ค่าของ $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ และ $|g(x) - m| < \varepsilon$
 คือ $0 < \delta = \underline{\hspace{2cm}}$

ทฤษฎีบท 1.1 กำหนดฟังก์ชัน f

ถ้า f เข้าใกล้ l เมื่อ x เข้าใกล้ a และ f เข้าใกล้ m

เมื่อ x เข้าใกล้ a จะได้ว่า $l = m$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ

1.1 f เข้าใกล้ l เมื่อ x เข้าใกล้ a

1.2 f เข้าใกล้ m เมื่อ x เข้าใกล้ a

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $l = m$

ขั้นที่ 3 พิจารณาขั้นที่ 2 จากสิ่งที่เรียนมาแล้วมองไม่เห็นทางที่จะพิสูจน์แบบทางตรง จะใช้การพิสูจน์แบบทางอ้อม โดยสมมติให้ $l \neq m$ จากนั้นแสดงว่าการยอมรับสมมติฐานนั้นทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นที่สมมติว่า $l \neq m$ เป็นไปไม่ได้

ขั้นที่ 4 วิเคราะห์ว่าทำอย่างไรจึงจะหาข้อขัดแย้งได้ โดยกลับไปพิจารณาสิ่งกำหนดให้

4.1 (โดยบทนิยาม) เขียน 1.1 ใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

4.2 (โดยบทนิยาม) เขียน 1.2 ใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - m| < \epsilon$

ขั้นที่ 5 จาก 4.1 และ 4.2 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง l และ $-m$ จะเห็นว่า

ถ้าเลือก $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ จะได้ $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

และ $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x) - m| < \epsilon$

เพราะฉะนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ และ $|f(x) - m| < \epsilon$
 $\rightarrow |1 - f(x)| < \epsilon$ และ $|f(x) - m| < \epsilon$

ขั้นที่ 6 จากขั้น 5 พิจารณา $|1 - f(x)| < \varepsilon$ และ $|f(x) - m| < \varepsilon$ จะได้

$$|1 - f(x)| + |f(x) - m| < 2\varepsilon$$

แต่ $|(1 - f(x)) + (f(x) - m)| \leq |1 - f(x)| + |f(x) - m|$

ดังนั้น $|(1 - f(x)) + (f(x) - m)| < 2\varepsilon$

เพราะฉะนั้น จากขั้นที่ 5 และ 6 จะได้

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\longrightarrow |(1 - f(x)) + (f(x) - m)| < 2\varepsilon \\ &\longrightarrow |1 - m| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

ขั้นที่ 7 จากขั้น 6 หากความสัมพันธ์ระหว่าง $|1 - m| < 2\varepsilon$ และ $1 \neq m$

เนื่องจาก $1 \neq m$ จะได้ $|1 - m| > 0$

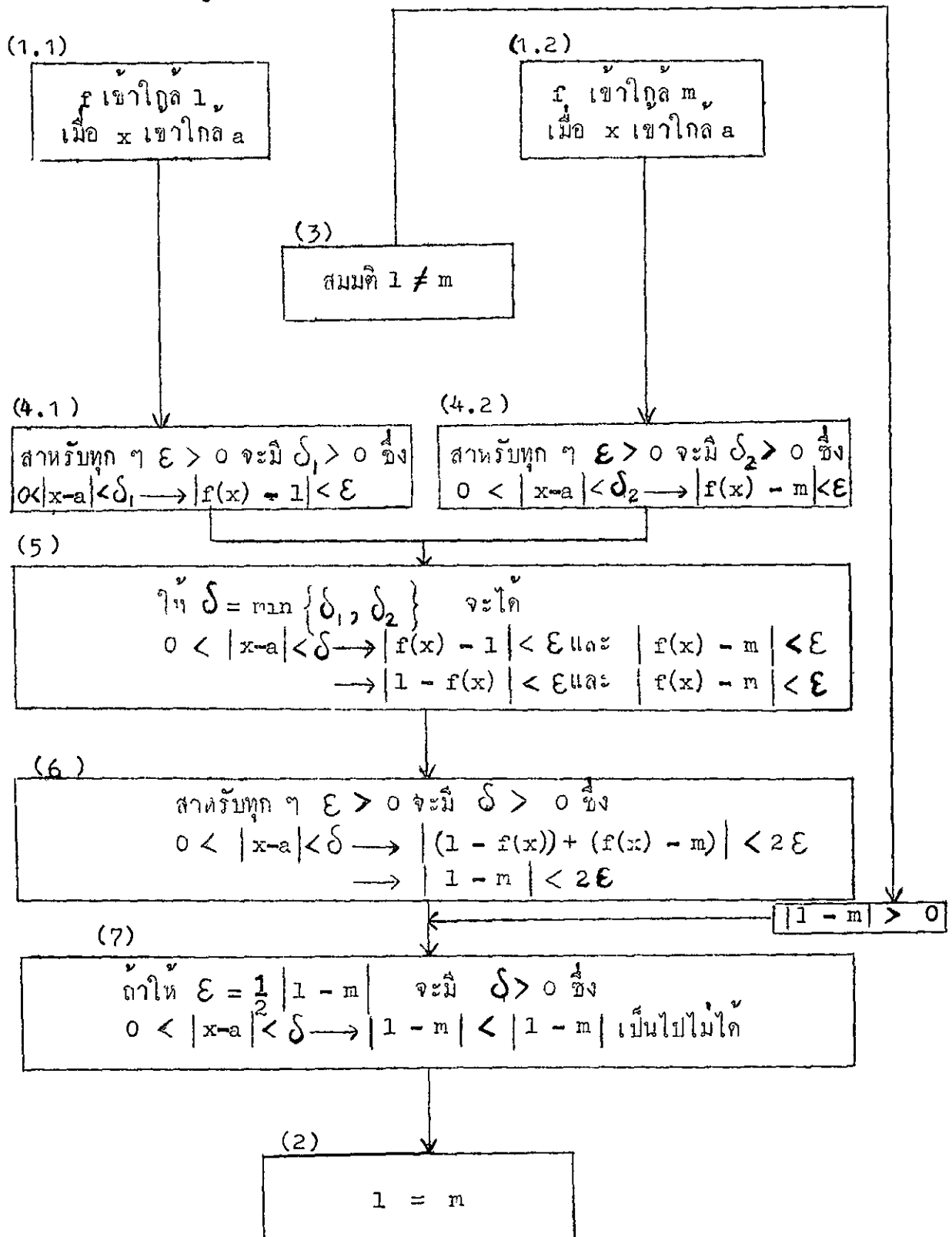
ดังนั้น ถ้าให้ $2\varepsilon = |1 - m|$ $\left[\varepsilon = \frac{1}{2} |1 - m| \right]$ จะได้

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |1 - m| < |1 - m|$
ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ $1 \neq m$ เป็นไปไม่ได้

สรุปว่า $1 = m$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

สมมติให้ $1 \neq m$

เนื่องจาก f เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ a จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

และ f เข้าใกล้ m เมื่อ x เข้าใกล้ a จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

ให้ $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{และ} \quad |f(x) - m| < \varepsilon \\ &\longrightarrow |1 - f(x)| < \varepsilon \quad \text{และ} \quad |f(x) - m| < \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\longrightarrow |1 - f(x)| + |f(x) - m| < 2\varepsilon \\ &\longrightarrow |(1 - f(x)) + (f(x) - m)| < 2\varepsilon \\ &\longrightarrow |1 - m| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

เนื่องจาก $1 \neq m$ จะได้ $|1 - m| > 0$ นั่นคือ $\frac{1}{2}|1 - m| > 0$

ดังนั้น ถ้าให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|1 - m|$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |1 - m| < |1 - m| \text{ ซึ่งเป็นไปได้}$$

นั่นคือ ที่สมมติว่า $1 \neq m$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $1 = m$



คำถามชุดที่ 1

- กำหนดจุด a และ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า x เข้าใกล้ a แล้ว f จะเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งเสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด
- ถ้าฟังก์ชัน f เข้าใกล้ค่าหนึ่งที่จุดๆหนึ่งแล้ว f จะเข้าใกล้ค่านั้นเพียงค่าเดียวที่จุดนั้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

แบบฝึกหัดที่ 2

- จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 2| < 1$ แล้ว $|x + 1| < 4$
- จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 3| < 5$ แล้ว $|x| < 8$
- จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 2| < 1$ แล้ว $|x^2 - 4| < 5$
- กำหนด $f(x) = 3x + 1$ จงแสดงว่า f เข้าใกล้ 7 เมื่อ x เข้าใกล้ 2
- กำหนด $g(x) = \frac{x+1}{2}$ จงแสดงว่า g เข้าใกล้ 1 เมื่อ x เข้าใกล้ 1

บทนิยาม 1.2

ถ้าฟังก์ชัน f เข้าใกล้ l เมื่อ x เข้าใกล้ a เรียบ 1 ว่า
ลิมิตของ f ที่ a

โดยทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า ลิมิตของ f ที่ a (ถ้ามี) จะเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว ดังนั้น เราสามารถใช้สัญลักษณ์แทนลิมิตของ f ที่ a

ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ แทนลิมิตของ f ที่ a

ข้อสังเกต

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
สำหรับทุก ๆ x ใน D_f ; $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 1$ ก็ต่อเมื่อมี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี x
บางตัวใน D_f โดยที่ $0 < |x-a| < \delta$ และ $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$

3. แนวการพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ โดยใช้นิยาม มีขั้นตอนดังนี้

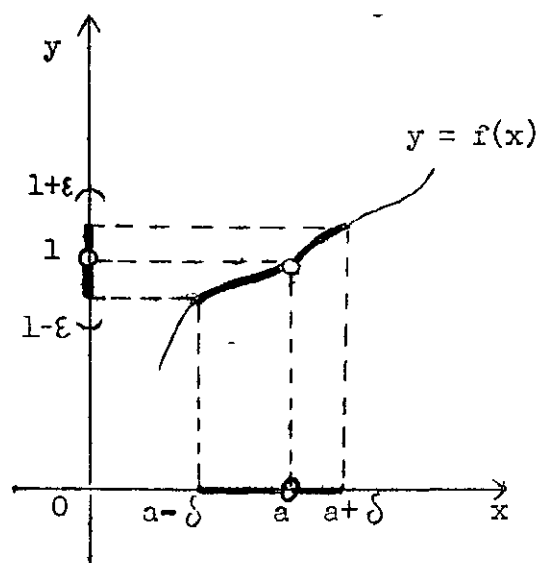
ขั้นที่ 1 กำหนด $\varepsilon > 0$

ขั้นที่ 2 เลือก $\delta > 0$

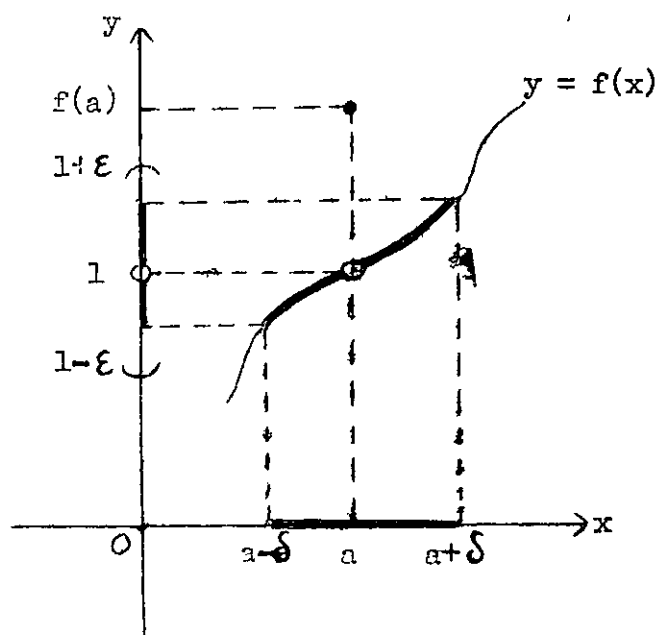
ขั้นที่ 3 แสดงว่า สำหรับ δ ที่เลือกมา จะได้ว่า

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

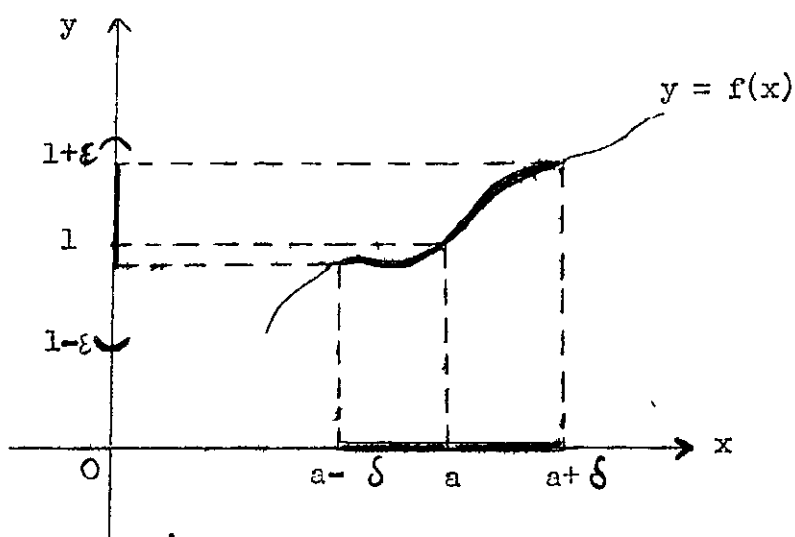
ความยากในการพิสูจน์อยู่ที่การเลือก δ กล่าวคือ จะเลือก δ เท่ากับ
เท่าไร จึงจะทำให้ข้อความในขั้นที่ 3 เป็นจริง



กรณีที่ 1 $a \in D_f$



กรณีที่ 2 $a \in D_f$ และ $|f(a) - 1| > \epsilon$



กรณีที่ 3 $a \in D_f$ และ $|f(a) - 1| < \epsilon$

ภาพประกอบ แสดงสมบัติของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนด $g(x) = x$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -3$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม เขียนขั้นที่ 1 ใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \epsilon$

ขั้นที่ 3 การที่จะสรุปขั้นที่ 2 ได้นั้น

กำหนด $\epsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \epsilon$
เห็นได้ชัดว่า ถ้าให้ $\delta = \epsilon$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(3)

กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \epsilon$ จะได้
 $0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \epsilon$

(2)

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \epsilon$

(1)

$\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$

พิสูจน์

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้

$$0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \varepsilon$

โดยบทนิยาม จะได้ $\lim_{x \rightarrow -3} x = -3$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -3$$



ตัวอย่าง 1.3 กำหนด $f(x) = c$ โดยที่ $c \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = c$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow 1} c = c$

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม เขียนขั้นที่ 1 ใหม่ได้ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |c - c| < \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 เนื่องจาก $|c - c| = 0$ ดังนั้น เขียนขั้นที่ 2 ใหม่ได้เป็นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 การที่จะสรุปขั้นที่ 3 ได้นั้น

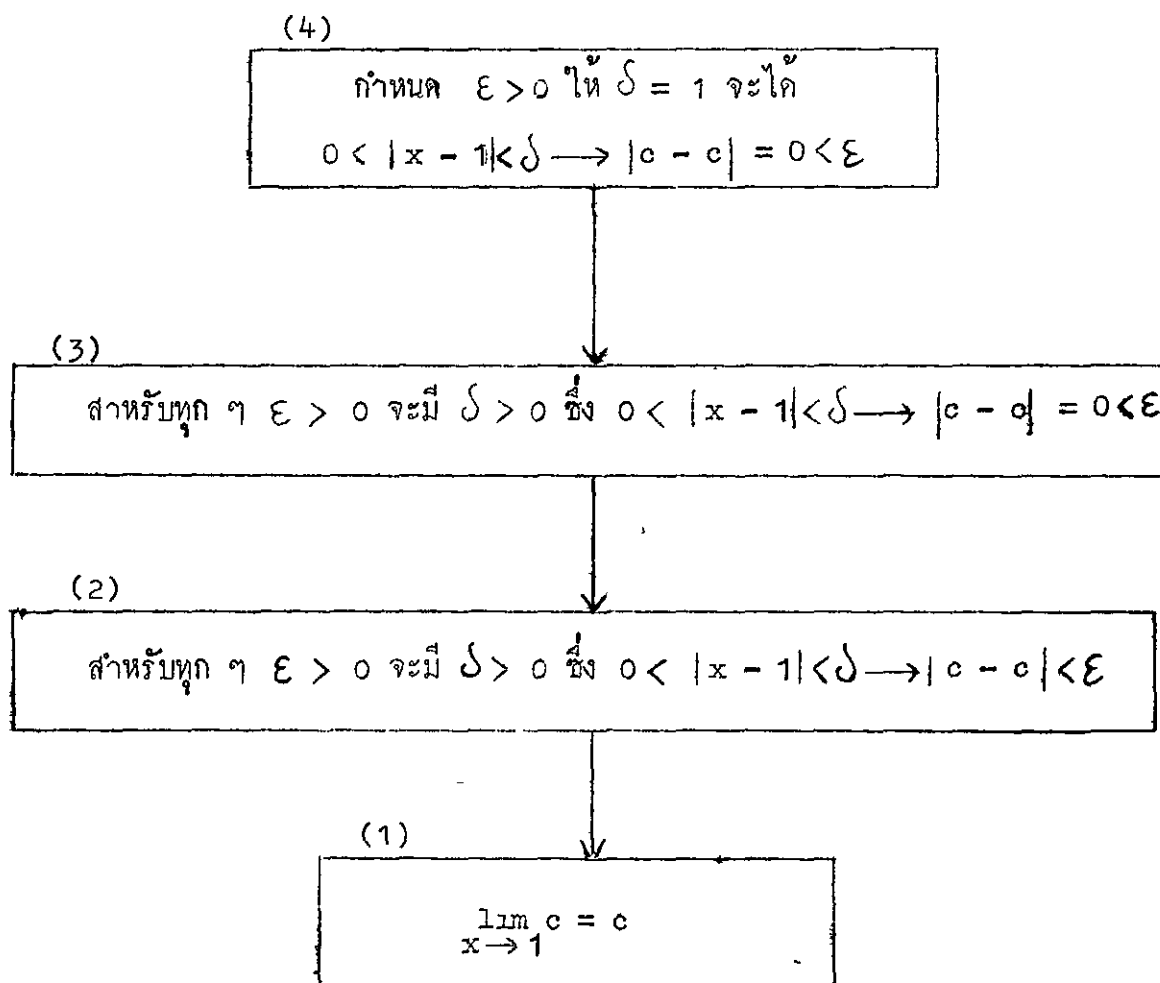
กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow 0 < \varepsilon$

แต่ $0 < \varepsilon$ เป็นจริงเสมอ

ดังนั้น ให้ δ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จะได้ $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow 0 < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น ให้ $\delta = 1$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = 1$ จะได้ว่า
 $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon$
 ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |c - c| = 0 < \varepsilon$
 โดยบทนิยาม จะได้ $\lim_{x \rightarrow 1} c = c$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = c$



แบบฝึกหัดที่ 4

1. กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$1) \quad 0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |c - c| < \varepsilon$$

$$2) \quad 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |c - c| < \varepsilon$$

$$3) \quad 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |c - c| < \varepsilon$$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c; c \in \mathbb{R}$

3. กำหนด $\varepsilon > 0$ จงหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$1) \quad 0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |x + 2| < \varepsilon$$

$$2) \quad 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |3x - 6| < \varepsilon$$

$$3) \quad 0 < |x + 3| < \delta \rightarrow |x + 3| < \varepsilon$$

$$4) \quad 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |x - a| < \varepsilon$$

4. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ เมื่อ $g(x) = x$

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 2| < \delta$ แล้ว $|x + 2| < 4 + \delta$

ตัวอย่าง 1.4 จงพิสูจน์ $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยาม เขียนขั้นที่ 1 ใหม่ ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |(3x - 7) - 2| < \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 พิจารณา $|(3x - 7) - 2| < \varepsilon$ จะได้

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 2| < \varepsilon &\leftrightarrow |3x - 9| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow 3|x - 3| < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น เขียนขั้นที่ 2 ใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$

ขั้นที่ 4 พิจารณาว่า การจะสรุปขั้นที่ 3 นั้นต้องทำอะไร นั่นคือ กำหนด $\varepsilon > 0$

จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$

เห็นได้โดยง่ายว่า ถ้าให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(4)

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ จะได้
 $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$

(3)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$

(2)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 3| < \delta \rightarrow |(3x - 7) - 2| < \varepsilon$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ จะได้

$$\begin{aligned} 0 < |x - 3| < \delta &\longrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\longrightarrow 3|x - 3| < \varepsilon \\ &\longrightarrow |3x - 9| < \varepsilon \\ &\longrightarrow |(3x - 7) - 2| < \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - 3| < \delta \longrightarrow |(3x - 7) - 2| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7) = 2$

□

ตัวอย่าง 1.5 กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยามเขียนขั้นที่ 1 ใหม่ได้เป็น

$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x - 1| < \delta \longrightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 พิจารณา

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} - 2 \right| < \varepsilon \\ &\iff |(x + 1) - 2| < \varepsilon && \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ &\iff |x - 1| < \varepsilon && \text{เมื่อ } x \neq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น เขียนขั้นที่ 2 ใหม่ได้ดังนี้

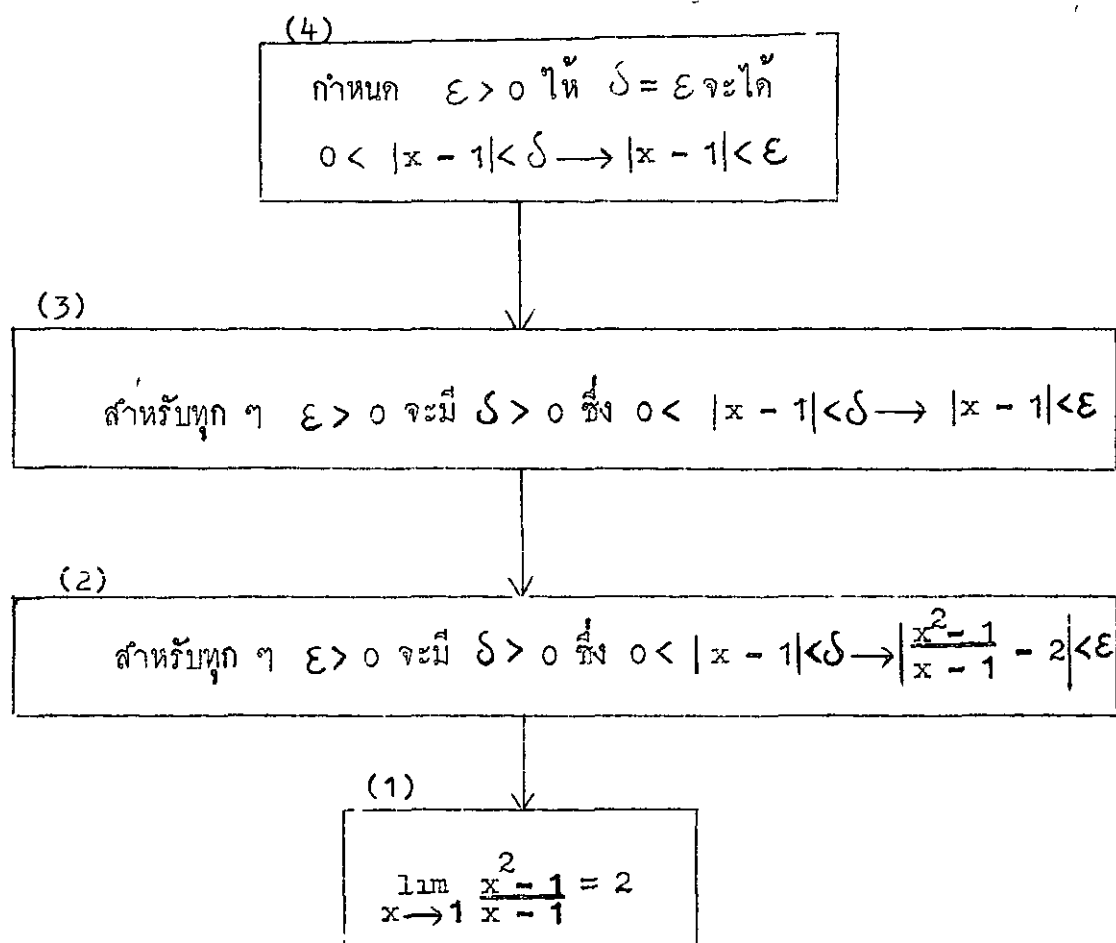
$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x - 1| < \delta \longrightarrow |x - 1| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 พิจารณาว่าการระบุขั้นที่ 3 ได้นั้น ต้องทำอย่างไร

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |x - 1| < \varepsilon$

เห็นได้ชัดว่า ถ้าให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้

$$0 < |x - 1| < \delta \rightarrow |x - 1| < \varepsilon$$

$$\rightarrow |(x + 1) - 2| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta \rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

□

ตัวอย่าง 1.6 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 โดยทฤษฎีบทเขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |(x^2 - 3) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

$$\rightarrow |(x - 2)(x + 2)| < \varepsilon$$

$$\rightarrow |x - 2| |x + 2| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 เราสามารถที่จะสรุปขั้นที่ 3 ได้ ก็คือเมื่อ

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |x - 2| |x + 2| < \varepsilon$

นั่นคือ เราจะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |x - 2| < A$ และ $|x + 2| < B$ โดยที่ $A \cdot B = \varepsilon$

4.1 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|x - 2| < \delta$ และ $|x + 2| < B$

$$\text{ถ้า } |x - 2| < \delta \rightarrow -\delta < x - 2 < \delta$$

$$\rightarrow 2 - \delta < x < 2 + \delta$$

$$\rightarrow 4 - \delta < x + 2 < 4 + \delta$$

$$\begin{aligned} \text{ถ้าให้ } \delta = 1 \text{ จะได้ } |x - 2| < 1 &\longrightarrow 3 < x + 2 < 5 \\ &\longrightarrow |x + 2| < 5 \end{aligned}$$

$$* \text{และถ้าให้ } \delta \leq 1 \text{ จะได้ว่า } |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < 1 \longrightarrow |x + 2| < 5$$

4.2 จาก 4.1 เราทราบว่า ถ้า $\delta \leq 1$ จะได้

$$|x - 2| < \delta \longrightarrow |x + 2| < 5 \quad (B = 5)$$

แต่เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < A \text{ และ } A \cdot B = \varepsilon$$

นั่นคือ ต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad [\because B = 5 \text{ และ } A \cdot B = \varepsilon]$$

$$\text{ถ้าให้ } \delta = \frac{\varepsilon}{5} \text{ จะได้ } |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\text{และถ้าให้ } \delta \leq \frac{\varepsilon}{5} \text{ จะได้ } |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง 4.1 และ 4.2 จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \delta \leq 1 \text{ จะได้ } 0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x + 2| < 5$$

$$\text{ถ้า } \delta \leq \frac{\varepsilon}{5} \text{ จะได้ } 0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

ดังนั้น ให้ $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$ จะได้ว่า

$$0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x + 2| < 5 \text{ และ } 0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

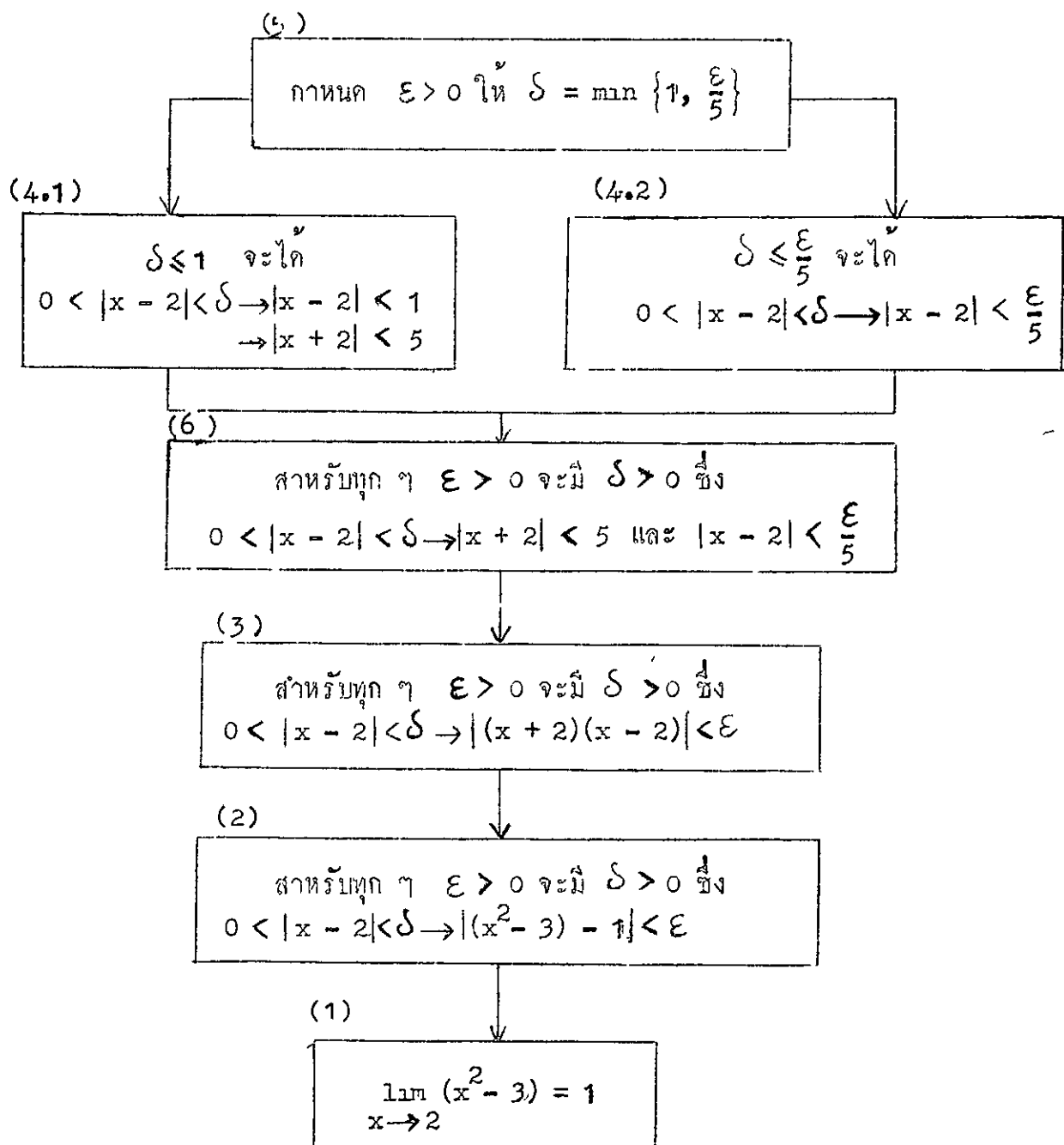
ขั้นที่ 6 จากขั้น 5 เราสามารถสรุปได้ว่า

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x + 2| < 5 \text{ และ } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ โดยที่ } 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 3 ได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$ จะได้
 $\delta \leq 1$ และ $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$

เนื่องจาก $\delta \leq 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta &\longrightarrow |x - 2| < 1 \\ &\longrightarrow -1 < x - 2 < 1 \\ &\longrightarrow 1 < x < 3 \\ &\longrightarrow 3 < x + 2 < 5 \\ &\longrightarrow |x + 2| < 5 \quad \text{————— (1)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$ จะได้ว่า

$$0 < |x - 2| < \delta \longrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{————— (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta &\longrightarrow |x + 2| < 5 \text{ และ } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \\ &\longrightarrow |x + 2| |x - 2| < \varepsilon \\ &\longrightarrow |(x + 2)(x - 2)| < \varepsilon \\ &\longrightarrow |(x^2 - 3) - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$



ตัวอย่าง 1.7 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 5} 2x \neq 6$

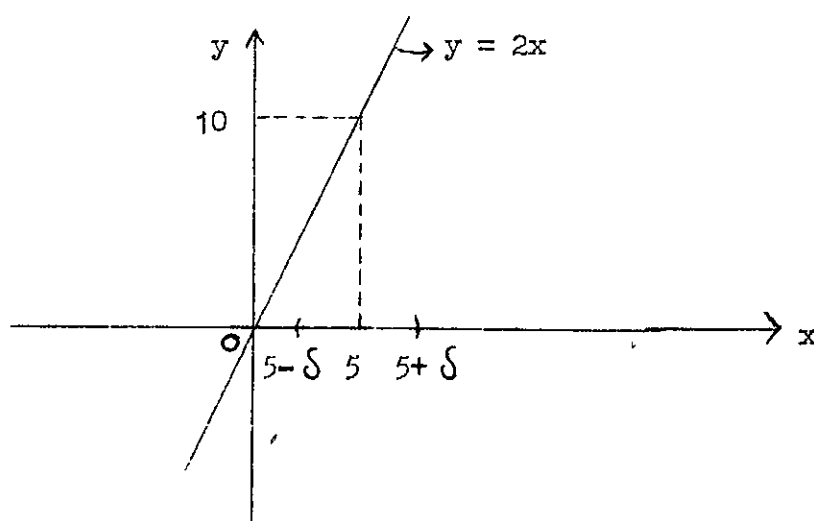
ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow 5} 2x \neq 6$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 โดยข้อสังเกตหลังบทนิยาม 1.2 การพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 5} 2x \neq 6$

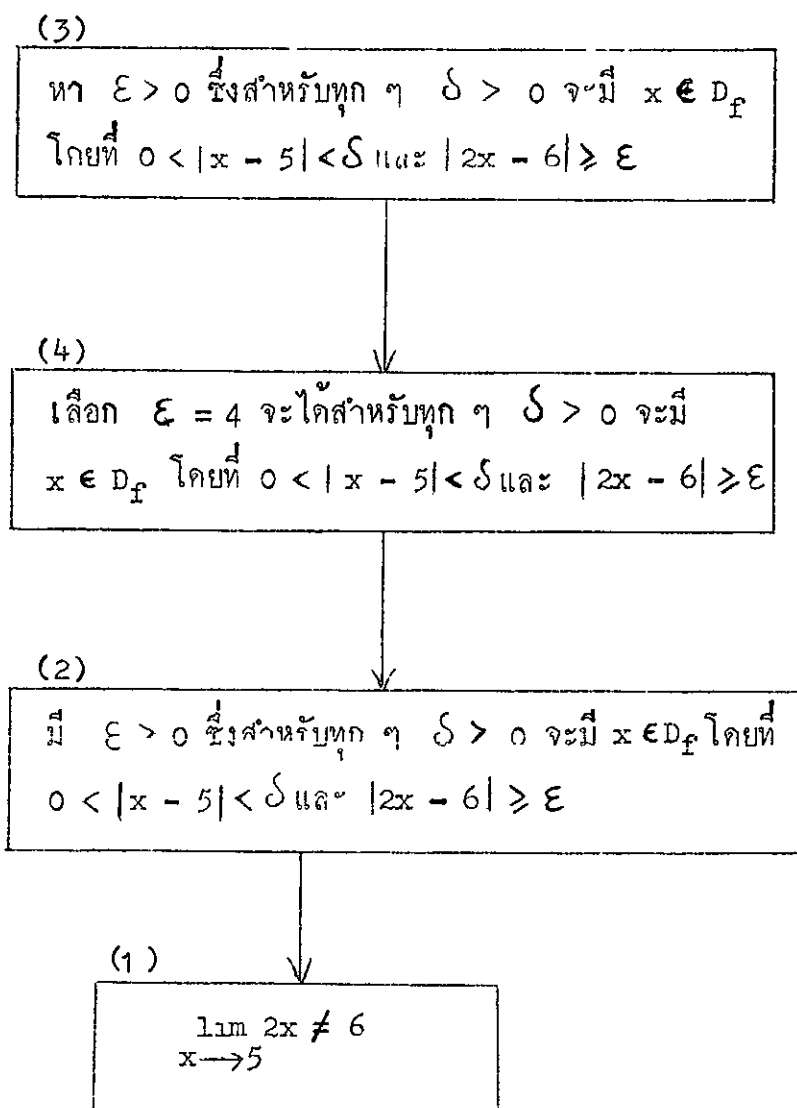
จะต้องแสดงว่า มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ โดยที่ $0 < |x - 5| < \delta$ และ $|2x - 6| \geq \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 พิจารณาว่า จะแสดงว่า มี ε ดังกล่าวได้อย่างไร โดยพิจารณาจากกราฟของ $f(x) = 2x$



ขั้นที่ 4 จากกราฟ จะเห็นว่า สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ ซึ่ง $5 < x < 5 + \delta$ และถ้า $5 < x < 5 + \delta$ แล้ว $2x > 10$
 ดังนั้น มี $x \in D_f$ ซึ่ง $0 < |x - 5| < \delta$ และ $|2x - 6| > |10 - 6| = 4$
 เพราะฉะนั้น เลือก $\varepsilon = 4$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ โดยที่ $0 < |x - 5| < \delta$ และ $|2x - 6| \geq \varepsilon$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

ให้ $\varepsilon = 4$

เนื่องจากสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ ซึ่ง $5 < x < 5 + \delta$

พิจารณา $5 < x < 5 + \delta \rightarrow 0 < x - 5 < \delta$

$\rightarrow 0 < |x - 5| < \delta$

$$\begin{aligned}
 \text{และ } x > 5 &\longrightarrow 2x > 10 \\
 &\longrightarrow 2x - 6 > 4 \\
 &\longrightarrow |2x - 6| > 4 \\
 &\longrightarrow |2x - 6| > \varepsilon \\
 &\longrightarrow |2x - 6| \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ โดยที่
 $0 < |x - 5| < \delta$ และ $|2x - 6| \geq \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 5} 2x \neq 6$



คำถามชุดที่ 2 จากตัวอย่าง 1.7

มี $\varepsilon > 0$ ตัวอื่นอีกหรือไม่ที่ทำให้ $\lim_{x \rightarrow 5} 2x \neq 6$

แบบฝึกหัดที่ 5

1. กำหนด $f(x) = 2x$

1) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 16$

2) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

3) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$

2. กำหนด $f(x) = x + 1$ จงหา $\varepsilon > 0$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$
 มี $x \in (a - \delta, a + \delta)$ ซึ่ง $0 < |x - 2| < \delta$ และ $|(x + 1) - 4| \geq \varepsilon$

3. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq 4$ เมื่อ $f(x) = 2x$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$

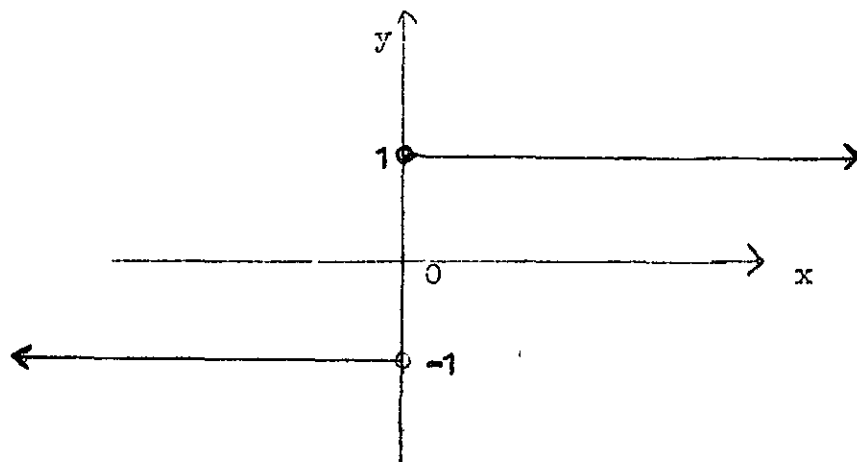
จงพิสูจน์ว่า ไม่มีจำนวนจริง L ใด ๆ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ ไม่มีจำนวนจริง L ใด ๆ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

ขั้นที่ 2 โดยข้อตั้งเกณฑ์ฉบับนิยาม 1.2 การจะสรุปขั้นที่ 1 ได้ จะต้องแสดงว่ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ โดยที่ $0 < |x| < \delta$ และ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 พิจารณาว่า จะแสดงว่ามี ε ดังกล่าวได้อย่างไร โดยพิจารณาจากกราฟของ $f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$



เนื่องจาก $f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น $|f(x) - L| = \begin{cases} |1 - L|; & x > 0 \\ |-1 - L|; & x < 0 \end{cases}$

$$|f(x) - 1| = \begin{cases} |1 - 1| & ; x > 0 \\ |1 + 1| & ; x < 0 \end{cases} \quad *$$

ขั้นที่ 4 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 2 และ 3

เนื่องจากเราต้องการ $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$

ดังนั้น ถ้าให้ $\varepsilon = |1 - 1|$ (หรือ $\varepsilon = |1 + 1|$)

โดย * จะได้ว่า มี $x \in D_f$ ซึ่ง $|f(x) - 1| = \varepsilon$

แต่มีปัญหว่า $|1 - 1|$ หรือ $|1 + 1|$ อาจจะเท่ากับ 0 และเราต้องการ $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น เราจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

4.1 ถ้า $|1 - 1| \neq 0$ จะได้ $|1 - 1| > 0$

ดังนั้น เลือก $\varepsilon = |1 - 1|$ จะได้ $|f(x) - 1| = \varepsilon$

4.2 ถ้า $|1 - 1| = 0$ จะได้ $1 = 1$

ดังนั้น ถ้า $x < 0$ จาก * จะได้ $|f(x) - 1| = |1 + 1|$

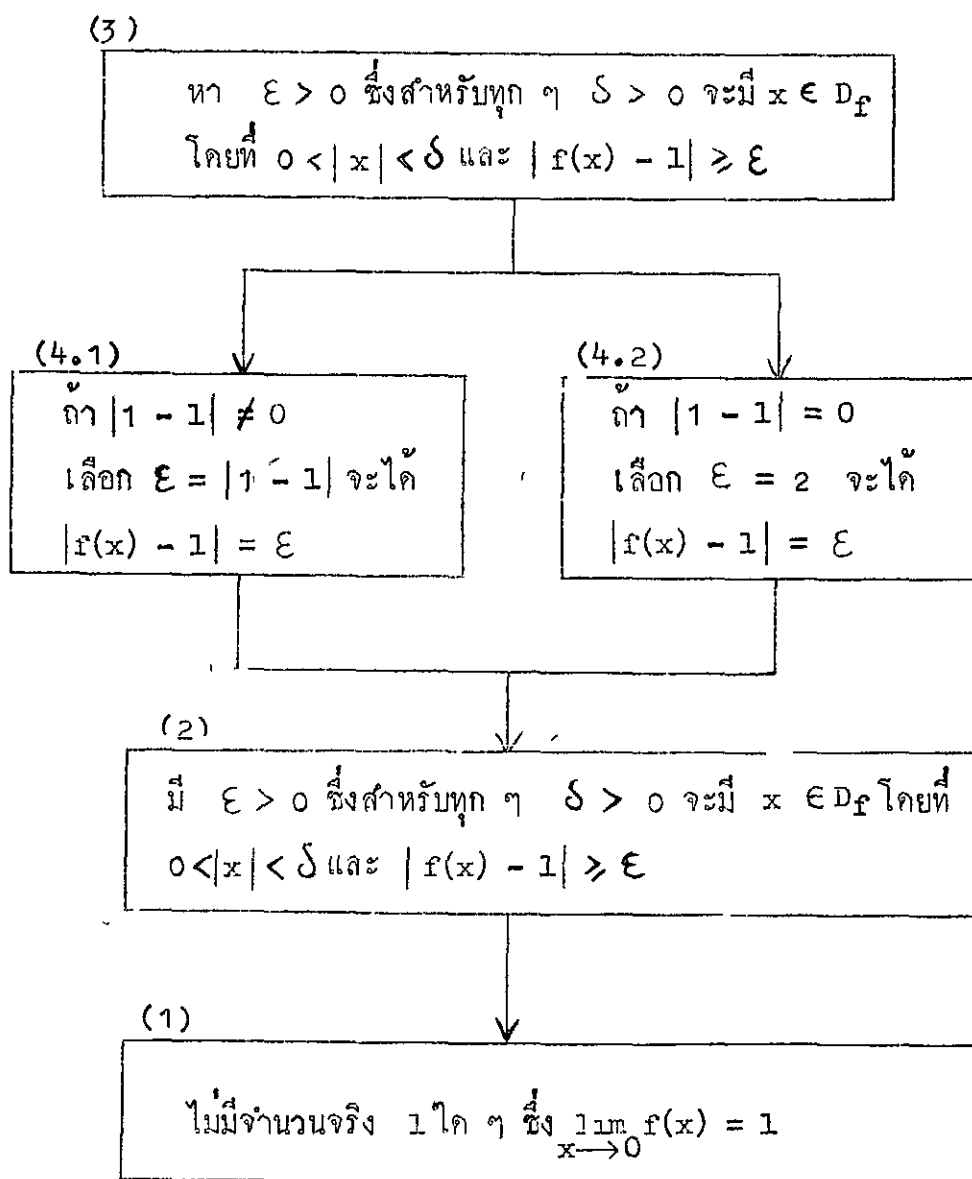
แต่ $1 = 1$ จะได้ $|f(x) - 1| = |1 + 1| = 2$

ดังนั้น เลือก $\varepsilon = 2$ จะได้ $|f(x) - 1| = \varepsilon$

จาก 4.1 และ 4.2 จะได้ว่า มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$

จะมี $x \in D_f$ โดยที่ $0 < |x| < \delta$ และ $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า $|1 - 1| \neq 0$ จะได้ว่า $|1 - 1| > 0$

ให้ $\varepsilon = |1 - 1|$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ ซึ่ง $x > 0$ และ $|x| < \delta$ โดยที่

$$x > 0 \longrightarrow f(x) = 1$$

$$\longrightarrow |f(x) - 1| = |1 - 1|$$

$$\longrightarrow |f(x) - 1| = \varepsilon$$

กรณีที่ 2 ถ้า $|1 - 1| = 0$

ให้ $\varepsilon = 2$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ ซึ่ง $x < 0$ และ $|x| < \delta$ โดยที่

$$x < 0 \longrightarrow f(x) = -1$$

$$\longrightarrow |f(x) - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

$$\longrightarrow |f(x) - 1| = \varepsilon$$

จากทั้ง 2 กรณีสรุปว่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1; \forall 1 \in \mathbb{R}$

□

หมายเหตุ ในกรณีที่ไม่มีจำนวนจริง l ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ จะกล่าวว่า f ไม่มีลิมิตที่ a หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ไม่มี

สรุป 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

1. ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ a เท่ากับ l เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \exists \forall x \in D_f [0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l \iff \exists \varepsilon > 0 \exists \forall \delta > 0; \exists x \in D_f [0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon]$

3. ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ a (ถ้ามี) จะเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = m \longrightarrow l = m$$

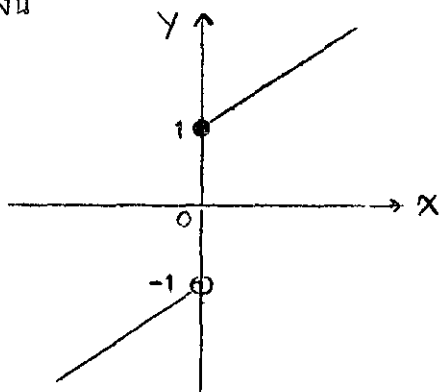
แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนด $f(x) = 7x$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -21$
2. กำหนด $g(x) = 5x - 10$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$
3. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)} = 4$
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 2| < 1$ แล้ว $|x^2 - 4| < 5$
5. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$
6. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5) = 4$
7. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x - 3| < 1$ แล้ว $|x^2 + 3x + 9| < 37$
(ใช้ $|a + b| \leq |a| + |b|$)
9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1; & x < 0 \end{cases}$
จงพิสูจน์ว่า f ไม่มีลิมิตที่ 0
10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$
จงพิสูจน์ว่า
 - 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1; a < 0$
 - 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1; a > 0$
 - 3) f ไม่มีลิมิตที่ 0

2. ลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

พิจารณา $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \geq 0 \\ x-1 & , x < 0 \end{cases}$

กราฟของ f เป็นดังนี้



จากแบบฝึกหัดที่ 1 ข้อ 15 จะได้ว่า f ไม่มีลิมิตที่ 0

ถ้าพิจารณากราฟของ f จะเห็นว่า

- 1) ถ้า x เข้าใกล้ 0 โดยที่ $x > 0$ จะได้ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ 1
- 2) ถ้า x เข้าใกล้ 0 โดยที่ $x < 0$ จะได้ว่า $f(x)$ เข้าใกล้ -1

$$\begin{aligned} \text{ลองพิจารณา } |x-a| < \delta &\iff -\delta < x-a < \delta \\ &\iff a-\delta < x < a+\delta \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 < |x-a| < \delta \iff a-\delta < x < a \quad \text{และ} \quad a < x < a+\delta$$

เราอาจพิจารณาเงื่อนไขที่ว่า

$$a-\delta < x < a \implies |f(x)-1| < \epsilon$$

และ

$$a < x < a+\delta \implies |f(x)-1| < \epsilon$$

ซึ่งนำไปสู่สมบัติของลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย
และลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา

บทนิยาม 2.1 กำหนด f เป็นฟังก์ชัน ให้ $l \in \mathbb{R}$ และ a เป็นจุดลิมิตของ D_f

1) l เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $a - \delta < x < a$ แล้ว $|f(x) - l| < \varepsilon$

2) l เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว $|f(x) - l| < \varepsilon$

ทวนองเกี่ยวกับทฤษฎีบท 1.1 สามารถพิสูจน์ได้ว่า ลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย (ทางขวา) จะเป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว (ถ้ามี) ดังนั้นอาจใช้สัญลักษณ์ซึ่งตกลงได้ดังต่อไปนี้

1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ แทน l เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา

2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ แทน l เป็นลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

จาก 1) เรียก l ว่า ลิมิตทางขวาของ f ที่ a

จาก 2) เรียก l ว่า ลิมิตทางซ้ายของ f ที่ a

ตัวอย่าง 2.1 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \geq 0 \\ x-1 & , x < 0 \end{cases}$

จงพิสูจน์ว่า 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$

ขั้นที่ 2 โดยบทนิยามเขียนขั้นที่ 1 ให้ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < 0 + \delta \rightarrow |(x+1)-1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 เขียนให้อยู่ในรูปที่ง่าย

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 การที่จะสรุปขั้นที่ 3 นั้น จะต้องแสดงว่า กำหนด $\varepsilon > 0$

จะต้องการ $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon$

จะเห็นว่า ถ้าให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(4)

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \varepsilon$
จะได้ $0 < x < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon$

(3)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon$

(2)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < 0 + \delta \rightarrow |(x+1)-1| < \varepsilon$

(1)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$

พิสูจน์ 1) กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้

$$0 < x < \delta \rightarrow 0 < x < \varepsilon$$

$$\rightarrow |x| < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon$

$$\rightarrow |(x+1)-1| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

□

2) ให้หาเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

จงพิสูจน์ว่า 1) $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -6$

2) $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = -6$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 โดยบทนิยามสามารถเขียนใหม่ได้คือ

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$-3 < x < -3 + \delta \rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6) \right| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 พยายามเปลี่ยนรูป $-3 < x < -3 + \delta$ และ
 $\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6) \right| < \epsilon$ เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง δ และ ϵ

$$\text{เนื่องจาก } -3 < x < -3 + \delta \iff 0 < x + 3 < \delta$$

$$\text{และ } \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6) \right| < \epsilon \iff \left| \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} + 6 \right| < \epsilon$$

$$\iff |(x-3) + 6| < \epsilon$$

$$\iff |x+3| < \epsilon$$

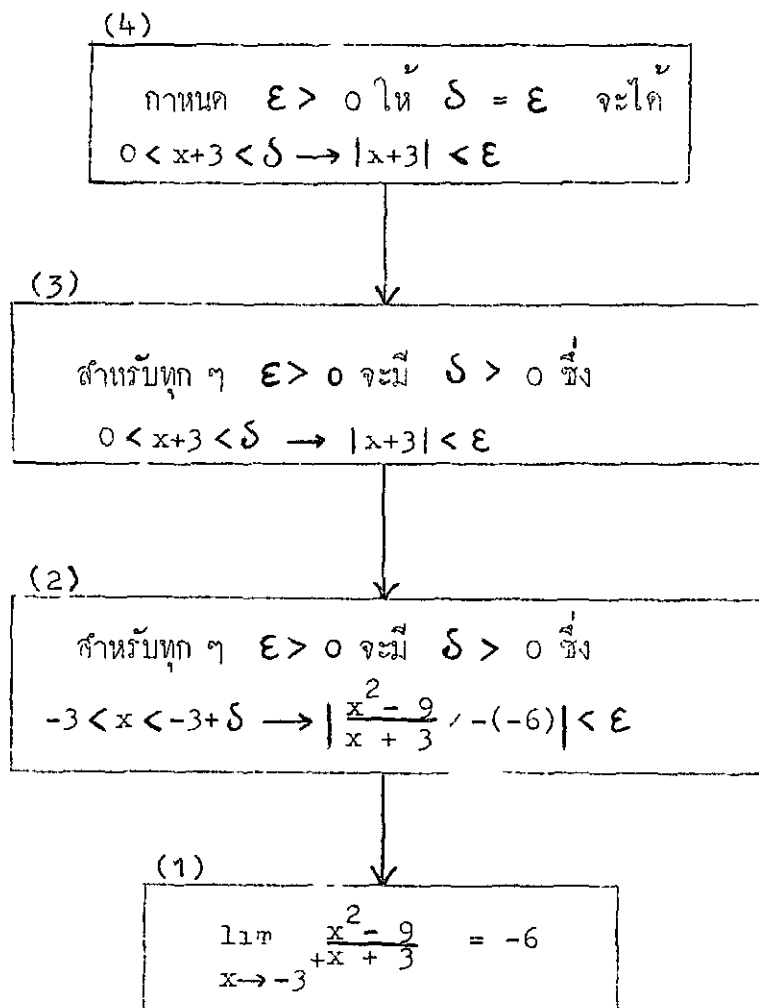
ดังนั้นจากขั้นที่ 2 เขียนให้ได้อีกเป็น

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < x+3 < \delta \implies |x+3| < \epsilon$

ขั้นที่ 4 เพื่อที่จะสรุปขั้นที่ 3 กำหนด $\epsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < x+3 < \delta \implies |x+3| < \epsilon$

เห็นได้ชัดว่า ถ้าให้ $\delta = \epsilon$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)



พิสูจน์ 1)

กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \epsilon$ จะได้
 $0 < x+3 < \delta \rightarrow |x+3| < \epsilon$
 ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < x+3 < \delta \rightarrow |x+3| < \epsilon$

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$-3 < x < -3 + \delta \longrightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} - (-6) \right| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$ หรือ $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -6$ □

2) ทำเป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดที่ 7

1. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \geq 1 \\ x-1 & , x < 1 \end{cases}$

1) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

2) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

2. กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ จงพิสูจน์ว่า

1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

3 จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$

ทฤษฎีบท 2.1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

การพิสูจน์รูปแบบนี้ โดยทั่วไปแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 ตอนคือ

ตอน 1 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

ตอน 2 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ จะต้องพิสูจน์ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

1) กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

ขั้นที่ 3 พยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับสิ่งที่เรารู้มาแล้ว และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เพื่อสรุปขั้นที่ 1

พิจารณาขั้นที่ 1 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ เขียนใหม่ได้เป็น

3.1 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

3.2 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

ขั้นที่ 4 จาก 3.1 และ 3.2 โดบทยานิยามสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

4.1 สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

4.2 สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ว่าทำอย่างไรจึงจะสรุปขั้นที่ 4 ได้ โดยกลับไปพิจารณาสิ่งกำหนดให้

คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ โดบทยานิยาม จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$

จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$

ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 5 พยายามเปลี่ยนรูปเพื่อให้สัมพันธ์กับขั้นที่ 4

พิจารณา $0 < |x - a| < \delta \leftrightarrow a - \delta < x < a$ และ $a < x < a + \delta$

ดังนั้นจากขั้นที่ 5 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta < x < a \quad \text{และ} \quad a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

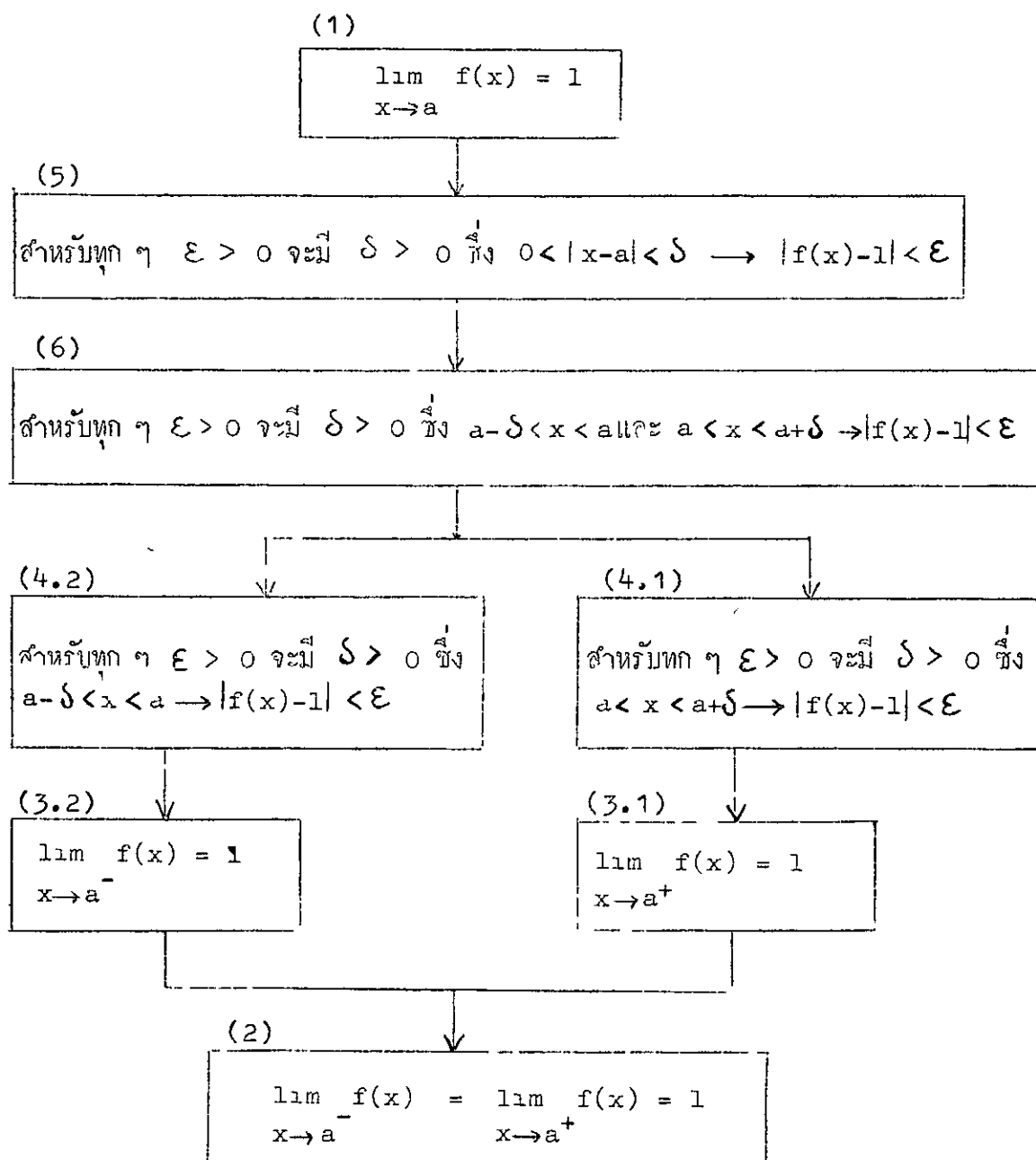
และสามารถใช้สรุปขั้นที่ 4 ได้ตามต้องการ

นั่นคือ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

$$\text{และ} \quad a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)



พิสูจน์ 1)

กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

เนื่องจาก $0 < |x-a| < \delta \iff a-\delta < x < a$ และ $a < x < a+\delta$
จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a-\delta < x < a \quad \text{และ} \quad a < x < a+\delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

$$\text{ซึ่งทำให้ได้} \quad a-\delta < x < a \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon \quad \text{————— (1)}$$

$$\text{และ} \quad a < x < a+\delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon \quad \text{————— (2)}$$

จาก (1) จะได้ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$

จาก (2) จะได้ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$



2) กำหนด $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 1 โดยบทนิยาม จะได้

3.1 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$a < x < a+\delta_1 \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

3.2 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta_2 < x < a \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 2 โดยบทนิยามเขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ว่าตัวอย่างใดจึงจะสรุปขั้นที่ 4 ได้

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 3 และ 4 พยายามเปลี่ยนรูปให้เกี่ยวข้องกัน
เนื่องจาก

$$0 < |x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a \text{ และ } a < x < a + \delta$$

ดังนั้นจากขั้นที่ 4 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta < x < a \text{ และ } a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 6 พิจารณา 3.1 และ 3.2 จาก $a < x < a + \delta_1$ และ $a - \delta_2 < x < a$

ทำให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ว่า

$$6.1 \quad \delta \leq \delta_1 \rightarrow a + \delta \leq a + \delta_1$$

$$6.2 \quad \delta \leq \delta_2 \rightarrow a - \delta_2 \leq a - \delta$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 3 โดย 6.1 และ 6.2 เมื่อ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้

$$7.1 \quad a < x < a + \delta \rightarrow a < x < a + \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

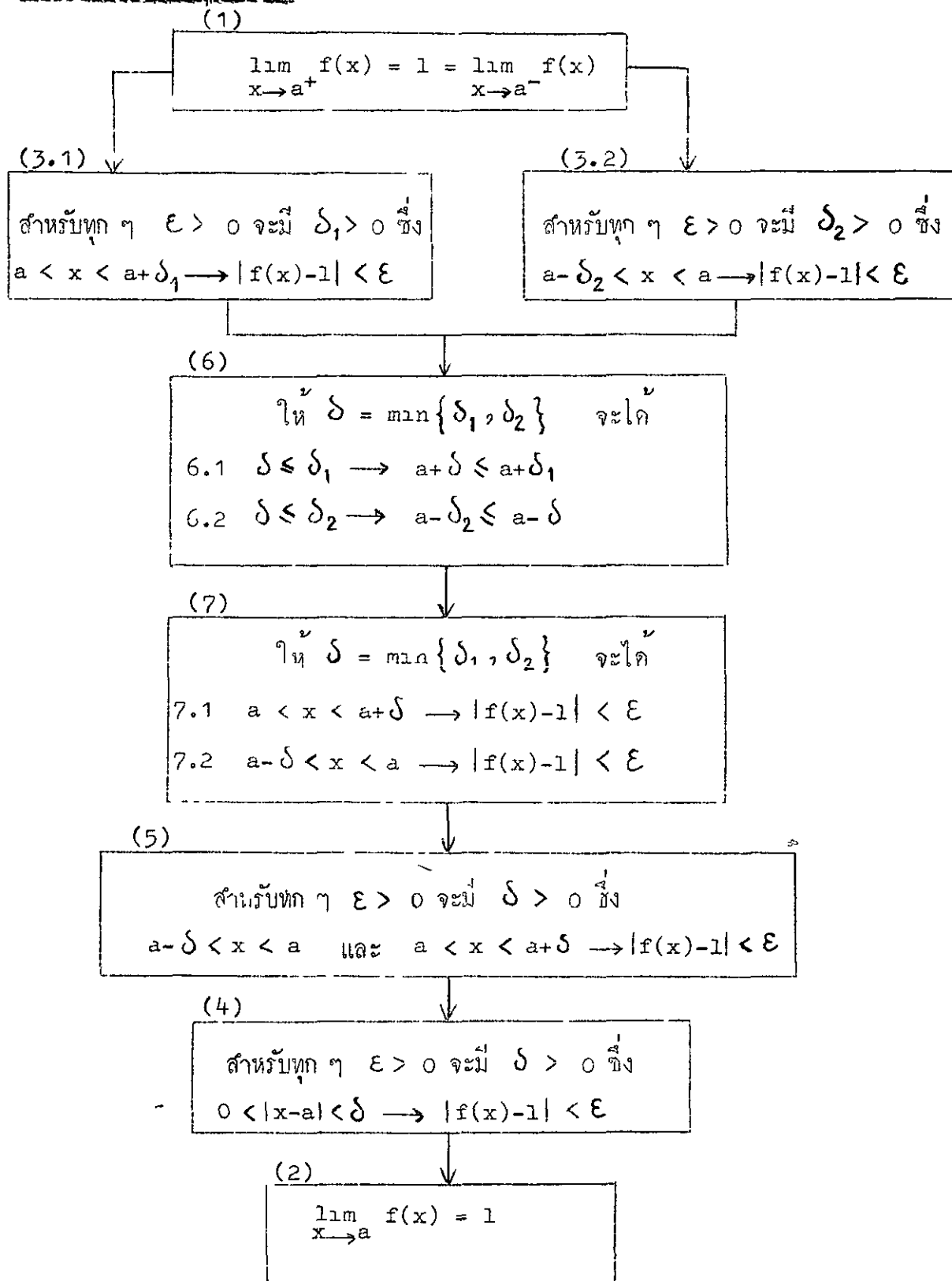
$$7.2 \quad a - \delta < x < a \rightarrow a - \delta_2 < x < a \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

จาก 7.1 และ 7.2 ทำให้สรุปได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta < x < a \text{ และ } a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ดังนั้นสรุปขั้นที่ 5 ได้ตามต้องการ เราจะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)



พิสูจน์ 2) กำหนด $\varepsilon > 0$

จาก $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$ ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$a < x < a + \delta_1 \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{————— (1)}$$

และจาก $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$ ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$a - \delta_2 < x < a \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \quad \text{————— (2)}$$

$$\text{ให้ } \delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \delta \leq \delta_1 \longrightarrow a + \delta \leq a + \delta_1$$

$$\text{และ } \delta \leq \delta_2 \longrightarrow a - \delta_2 \leq a - \delta$$

$$\text{พิจารณา } a < x < a + \delta \longrightarrow a < x < a + \delta_1 \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{และ } a - \delta < x < a \longrightarrow a - \delta_2 < x < a \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น } a - \delta < x < a \quad \text{และ} \quad a < x < a + \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{แต่ } 0 < |x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a \quad \text{และ} \quad a < x < a + \delta$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$



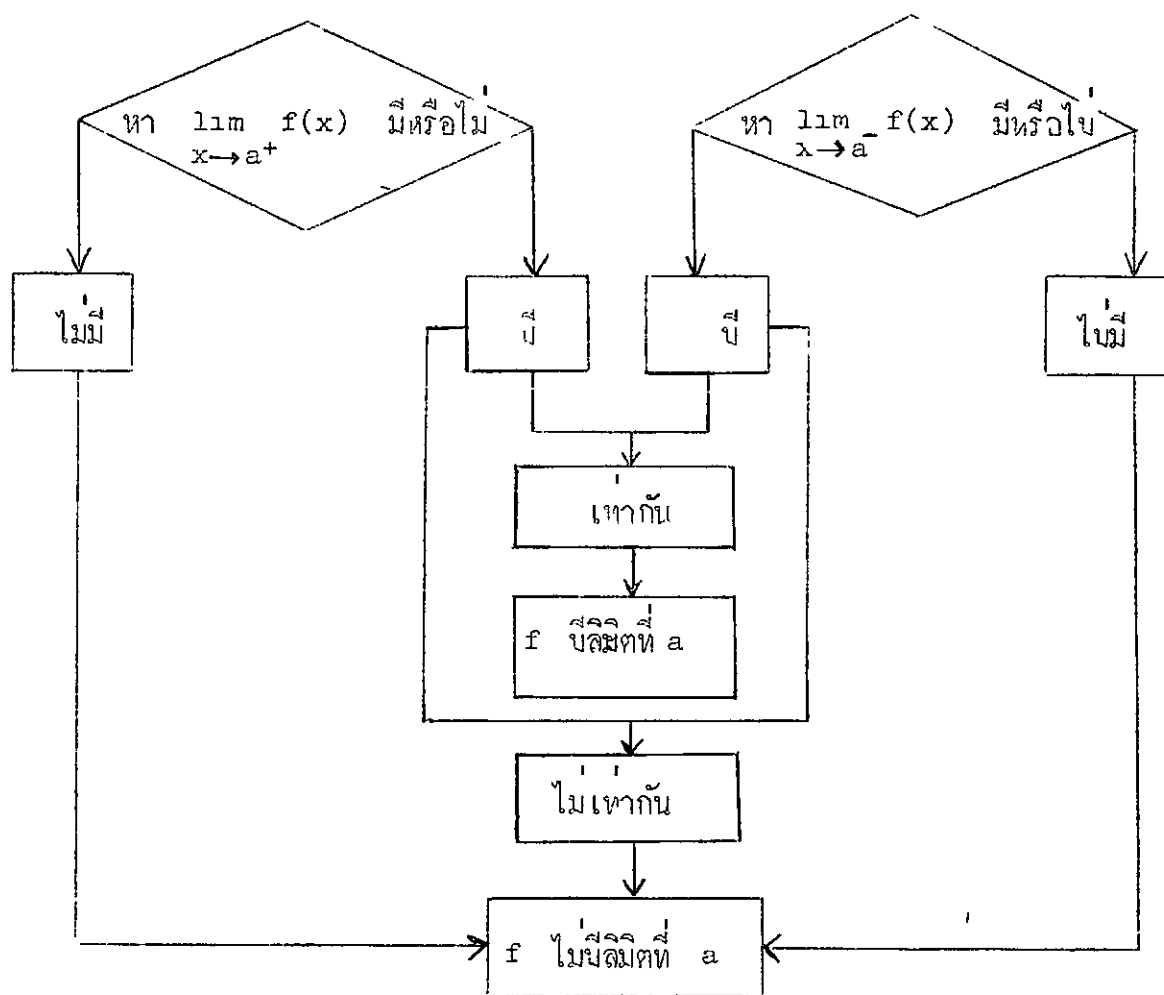
หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ไม่มีค่าใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ไม่มี

2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ไม่มี

3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ มี และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ มี แต่ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

การวิเคราะห์ว่าฟังก์ชันมีลิมิตหรือไม่



วิเคราะห์

ตัวอย่าง 2.3

กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ จงแสดงว่า f ไม่มีลิมิตที่ 0

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์หาแนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ f ไม่มีลิมิตที่ 0

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 โทกหมายเหตุเชิงทฤษฎีบท 2.1 จะได้ว่ามีกรณีเป็นไปได้ 3 กรณีที่จะสรุปขั้นที่ 1 คือ

2.1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ไม่เป็น

2.2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ไม่เป็น

2.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

ขั้นที่ 3 พิจารณาว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ไม่เป็น

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้ว่า

3.1 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

3.2 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

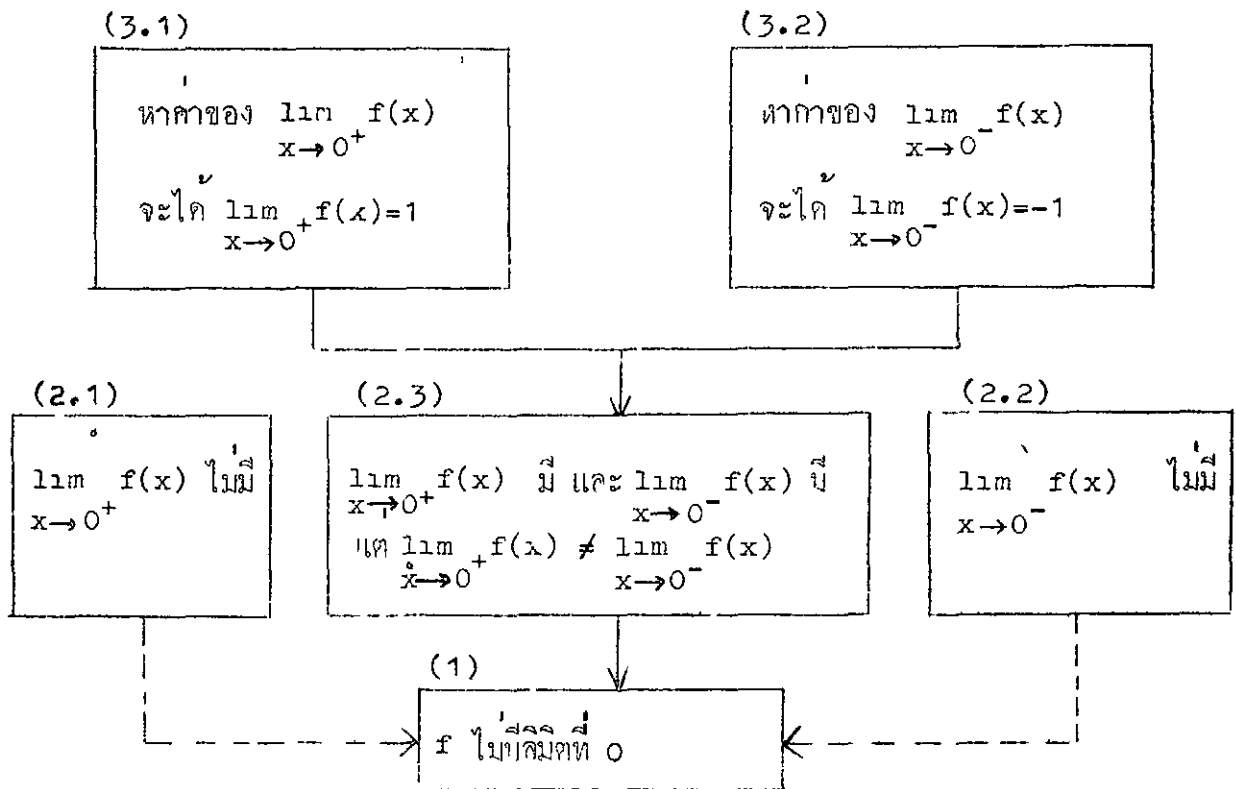
ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 1 ได้ตามต้องการ

(2.1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+}$$

พิสูจน์

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ เนื่องจาก $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$

จากตัวอย่าง 2.1 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

เพราะฉะนั้น f ไม่ลิมิตที่ 0



สรุป 2 วิธีทางซ้ายและวิธีทางขวา

1. วิธีทางซ้าย

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1 \iff \forall \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$\forall x \in D_f \left[a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon \right]$$

2. วิธีทางขวา

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1 \iff \forall \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$\forall x \in D_f \left[a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon \right]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

4. ถ้าข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อต่อไปนี้ไม่เป็นจริง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ไม่มี

1) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ไม่มี

2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ไม่มี

3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ มี และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ มี แต่ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

แบบฝึกหัดที่ 8

1. จงพิสูจน์

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$2. \text{ กำหนด } f(x) = \begin{cases} -2x+3 & , x \leq 1 \\ 3x-5 & , x > 1 \end{cases}$$

$$\text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$3. \text{ กำหนด } f(x) = \begin{cases} -2 & , x < 1 \\ -1 & , x = 1 \\ -3 & , x > 1 \end{cases}$$

$$\text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$4. \text{ กำหนด } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 3 \\ 10-x & , x \geq 3 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f มีลิมิตที่ 3 หรือไม่

$$5. \text{ กำหนด } f(x) = |x| + x$$

$$\text{จงหา } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

3. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

การพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ โดยใช้นิยามบางครั้งเป็นเรื่องยุ่งยากและซับซ้อน

ในตอนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่จะช่วยในการพิสูจน์และการหาลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนด $f(x) = c$, $g(x) = x$ และ $a, c \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad \left[\text{อาจเขียน } \lim_{x \rightarrow a} c = c \right]$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \quad \left[\text{อาจเขียน } \lim_{x \rightarrow a} x = a \right]$$

1) กำหนด $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

ขั้นที่ 2 พิจารณามีข้อมูลใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 1 แบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

2.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$

$$\text{ซึ่ง } 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |c - c| < \varepsilon$$

2.2 (โดยทฤษฎีบท) $\lim_{x \rightarrow a^+} c = \lim_{x \rightarrow a^-} c = c$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 เขียน 2.2 ใหม่โดยใช้นิยามได้เป็น

3.1 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $a < x < a + \delta_1 \rightarrow |c - c| < \varepsilon$

3.2 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $a - \delta_2 < x < a \rightarrow |c - c| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 พิจารณา 2.1 และขั้นที่ 3 จะเห็นว่าคล้ายกัน แต่ 2.1 มีเพียงตอบเดียว ดังนั้น
ควรเลือกพิจารณา 2.1

จาก 2.1 เขียนให้อยู่ในรูปง่าย นั่นคือ

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 3 กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

เห็นชัดว่า สำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้นเลือก $\delta = 1$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

(5)

$$\begin{aligned} &\text{กำหนด } \varepsilon > 0 \text{ ให้ } \delta = 1 \text{ จะได้} \\ &0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon \end{aligned}$$

(4)

$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

(3)

$$\begin{aligned} &3.1 \text{ สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง} \\ &\quad a < x < a + \delta_1 \rightarrow |c-c| < \varepsilon \\ &3.2 \text{ สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_2 > 0 \text{ ซึ่ง} \\ &\quad a - \delta_2 < x < a \rightarrow |c-c| < \varepsilon \end{aligned}$$

(2.1)

$$\begin{aligned} &\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง} \\ &0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| < \varepsilon \end{aligned}$$

(2.2)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} c = \lim_{x \rightarrow a^-} c = c$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

พิสูจน์ 1)

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = 1$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |c-c| = 0 < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} c = c$



2) กำหนด $g(x) = x$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ขั้นที่ 2 มีบทนิยามหรือทฤษฎีบทใดบางที่จะสรุปขั้นที่ 1

2.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

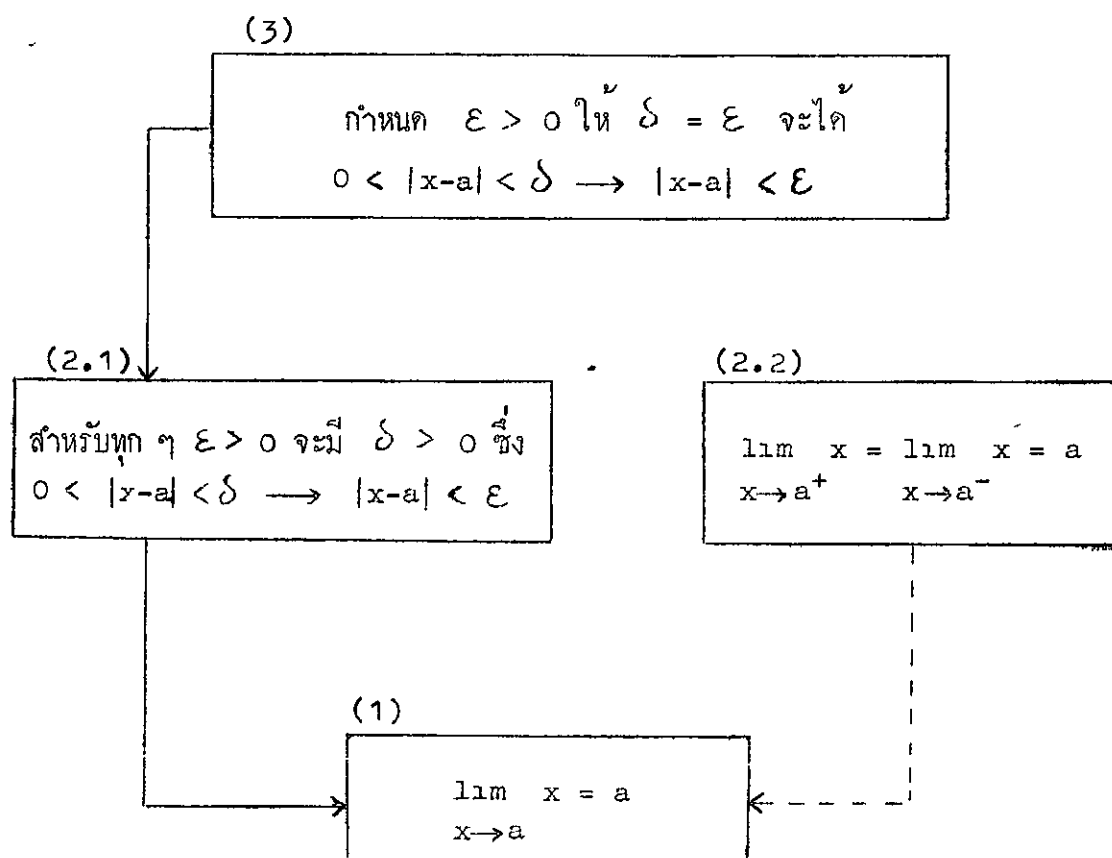
2.2 (โดยทฤษฎีบท) $\lim_{x \rightarrow a^+} x = \lim_{x \rightarrow a^-} x = a$

ขั้นที่ 3 พิจารณา 2.2 จะเห็นว่าถ้าจะสรุปขั้นที่ 1 โดยใช้ 2.2 นั้นจะใช้เวลามากกว่า 2.1 เพราะต้องจับนิยามตามของเดียวกับ 2.1 แต่ต้องใช้ถึง 2 ครั้ง ดังนั้นควรเลือกพิจารณา 2.1

จาก 2.1 ทายอย่างไรจึงจะสรุป 2.1 ได้ นั่นคือ

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |x-a| < \varepsilon$
 เห็นชัดว่า ถ้าให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)



พิสูจน์ 2) กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ $\delta = \varepsilon$ จะได้ว่า

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} x = a$



แบบฝึกหัดที่ 9

1. กำหนด $f(x) = 2$ จงหา

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

2. กำหนด $f(x) = x$ จงหาคำของ

1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$

คำถามชุดที่ 3

1. จากแบบฝึกหัดข้อ 1 นิสิตจะได้แนวคิดเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันคงที่ ที่จุดต่าง ๆ อย่างไร
2. จากแบบฝึกหัดข้อ 2 นิสิตจะได้แนวคิดเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันเอกลักษณ์ ที่จุดต่าง ๆ อย่างไร

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดฟังก์ชัน f และ g และ $k \in \mathbb{R}$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ จะได้ว่า

$$1) \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kl = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = l + m = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1: สิ่งที่กำหนดให้คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ขั้นที่ 2: สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kl$$

ขั้นที่ 3: พิจารณาขั้นที่ 2 เขียนกรณีเป็นไปได้อาจสรุปขั้นที่ 2 คือ

$$3.1 \text{ สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - kl| < \epsilon$$

$$3.2 \lim_{x \rightarrow a^+} kf(x) = kl = \lim_{x \rightarrow a^-} kf(x)$$

ขั้นที่ 4: พิจารณา 3.1 การที่จะสรุปขั้นที่ 2 โดยใช้ 3.1 ทำได้โดยกำหนด $\epsilon > 0$

$$\text{จะต้องหา } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - kl| < \epsilon$$

ขั้นที่ 5: พิจารณา $|kf(x) - kl| < \epsilon$ แยกได้เป็น 2 กรณีคือ

$$5.1 \text{ ถ้า } k = 0 \text{ จะได้ } |kf(x) - kl| = 0 < \epsilon$$

ดังนั้นกรณี สำหรับทุก $\delta > 0$ จะได้ว่า

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - kl| = 0 < \epsilon$$

เพราะฉะนั้นเลือก $\delta = 1$ จะได้ตามต้องการ

5.2 ถ้า $k \neq 0$ จะได้ $|k| > 0$ และ

$$|kf(x) - k| < \varepsilon \iff |k| |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\iff |f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

ขั้นที่ 6 วิเคราะห์ว่าหาอย่างไรจึงจะหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$

โดยย้อนกลับไปพิจารณาสัญคาหนดให้ ซึ่งมีความสัมพันธ์กัน

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

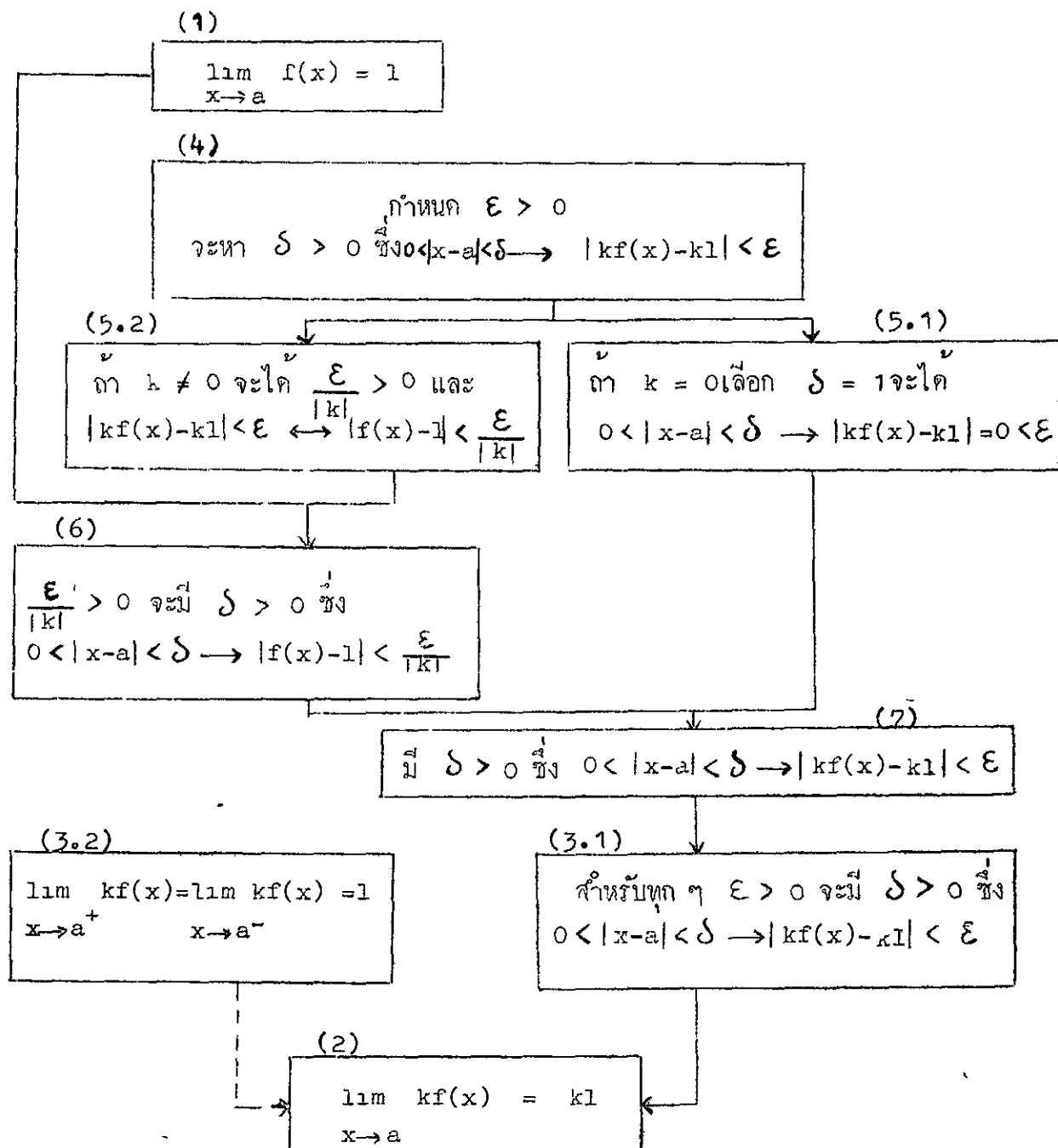
เนื่องจาก $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$ โดยบทนิยามจะได้ว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

ขั้นที่ 7 จาก 5.1 และขั้นที่ 6 สรุปขั้นที่ 4 ได้ว่า

$$\text{มี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \implies |kf(x) - k| < \varepsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)



พิสูจน์ 1) กำหนด $\varepsilon > 0$

จะหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - k1| < \varepsilon$

กรณี 1 ถ้า $k = 0$ ให้ $\delta = 1$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - k1| = 0 < \varepsilon$$

กรณี 2 ถ้า $k \neq 0$ จะได้ $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$

และจากสิ่งกำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$

$$\rightarrow |k| |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\rightarrow |kf(x) - k1| < \varepsilon$$

จากกรณี 1 และ 2 สรุปได้ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - k1| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |kf(x) - k1| < \varepsilon$$

ซึ่งทำให้ได้ $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k1$



ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 1$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 1+m$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 มีบทนิยามหรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 2

3.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |[f(x) + g(x)] - [1+m]| < \varepsilon$$

$$3.2 \quad (\text{โดยทฤษฎีบท}) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)] = 1+m = \lim_{x \rightarrow a^-} [f(x) + g(x)]$$

ขั้นที่ 4 พิจารณา 3.1 การที่จะสรุป 3.1 ทำได้โดย

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |[f(x) + g(x)] - [1+m]| < \varepsilon$$

$$\text{พิจารณา } |[f(x) + g(x)] - [1+m]| = |[f(x)-1] + [g(x)-m]|$$

$$\text{และ } |[f(x)-1] + [g(x)-m]| \leq |f(x)-1| + |g(x)-m|$$

ดังนั้นเราสามารถที่จะสรุป 3.1 ได้ ถ้าข้อความ

* " สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-1| + |g(x)-m| < \varepsilon "$$

เป็นจริง

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ว่าทฤษฎีบทใดจึงจะสามารถสรุปได้ว่าข้อความ * เป็นจริง

พิจารณาข้อความ * สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ และ $A > 0, B > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-1| < A \quad \text{และ} \quad |g(x)-m| < B$$

โดยที่ $A+B = \varepsilon$

ขั้นที่ 6 วิเคราะห์ว่าทำอย่างไรจึงจะสรุปขั้นที่ 5 โดยย้อนกลับไปพิจารณาสิ่งกำหนดให้
ในขั้นที่ 2 พยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 5 กับ 1.1 และ 1.2

6.1 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|f(x)-1| < A$ และ 1.1

จาก 1.1 โดยบทนิยามจะได้ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ดังนั้นถ้าให้ $0 < A < \varepsilon$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |f(x) - 1| < A$$

6.2 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|g(x)-m| < B$ และ 1.2

จาก 1.2 โดยบทนิยามจะได้ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$$

แต่เราต้องการ $|g(x)-m| < B$ โดยที่ $A+B = \varepsilon$

ดังนั้นให้ $B = \varepsilon - A$ จะได้ว่ามี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |g(x) - m| < (\varepsilon - A)$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 พิจารณา 6.1 และ 6.2 เนื่องจากเราต้องการ δ เพียงตัวเดียว

ทำให้ $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-1| < A$ และ $|g(x) - m| < B$

ดังนั้นให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)

(1.1)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(1.2)

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$$

(6.1)

กำหนด $A > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)-l| < A$

(6.2)

$B = \varepsilon - A > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |g(x)-m| < B$

(7)

ให้ $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < A$ และ $|g(x) - m| < B$

(5)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ และ $A, B > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-l| < A$ และ $|g(x)-m| < B, A+B = \varepsilon$

(4)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-l| + |g(x)-m| < \varepsilon$

(3.2)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)+g(x)] = \lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)+g(x)] = l+m$$

(3.1)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |[f(x)+g(x)] - [l+m]| < \varepsilon$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)+g(x)] = l+m$$

พิสูจน์ 2)

กำหนด $\varepsilon > 0$.

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $0 < A < \varepsilon$ จะได้ว่ามี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |f(x) - 1| < A$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $B > 0$ โดย $A+B = \varepsilon$

จะได้ว่ามี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |g(x) - m| < B$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$

$$\text{ดังนั้น } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |f(x)-1| < A$$

$$\text{และ } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |g(x)-m| < B$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-1| < A \text{ และ } |g(x)-m| < B$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-1| < A \text{ และ } |g(x)-m| < B$$

$$\longrightarrow |f(x)-1| + |g(x)-m| < A+B$$

$$\longrightarrow |[f(x)-1] + [g(x)-m]| < A+B$$

$$\longrightarrow |[f(x)+g(x)] - [1+m]| < A+B = \varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 1+m$$



คำถามข้อที่ 4 กำหนดฟังก์ชัน f และ g

1. ถ้า $f+g$ มีลิมิตที่ a แล้ว จะได้ว่า f และ g มีลิมิตที่ a เสมอ
ใช่หรือไม่
2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ แล้ว
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 1-m$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด

แบบฝึกหัดที่ 10

1. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} (2x) = 6$
2. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} (ax + b^2) = a^2 + b^2$
3. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5) = 1$
4. จงหาค่าของ
 - 4.1 $\lim_{x \rightarrow -1} (4x)$
 - 4.2 $\lim_{y \rightarrow 6} (1 - 2y)$
 - 4.3 $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2y)$

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

ถ้า $k, c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x) + cg(x)] = kl + cm$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [kf(x) + cg(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} kf(x) + \lim_{x \rightarrow a} cg(x) \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.2}] \\ &= k \lim_{x \rightarrow a} f(x) + c \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.2}] \\ &= kl + cm \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$

ถ้า $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n$$

พิสูจน์ (ทำเป็นแบบฝึกหัด) โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

คำถามข้อที่ 5 ถ้า f และ g ไม่มีลิมิตแล้วเราจะสรุปได้หรือไม่ว่า $kf + cg$ ไม่มีลิมิต จงได้เหตุผล

ทฤษฎีบท 3.5

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

การพิสูจน์รูปแบบนี้ โดยทั่วไปแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 ตอน คือ

ตอน 1 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะการพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

ตอน 2 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

1) กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

นำขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

3.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$$

3.2 (โดยทฤษฎีบท 3.2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 0$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 เขียนใหม่ได้ดังนี้

4.1 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

4.2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - 1 = 0$ [โดยทฤษฎีบท 3.1]

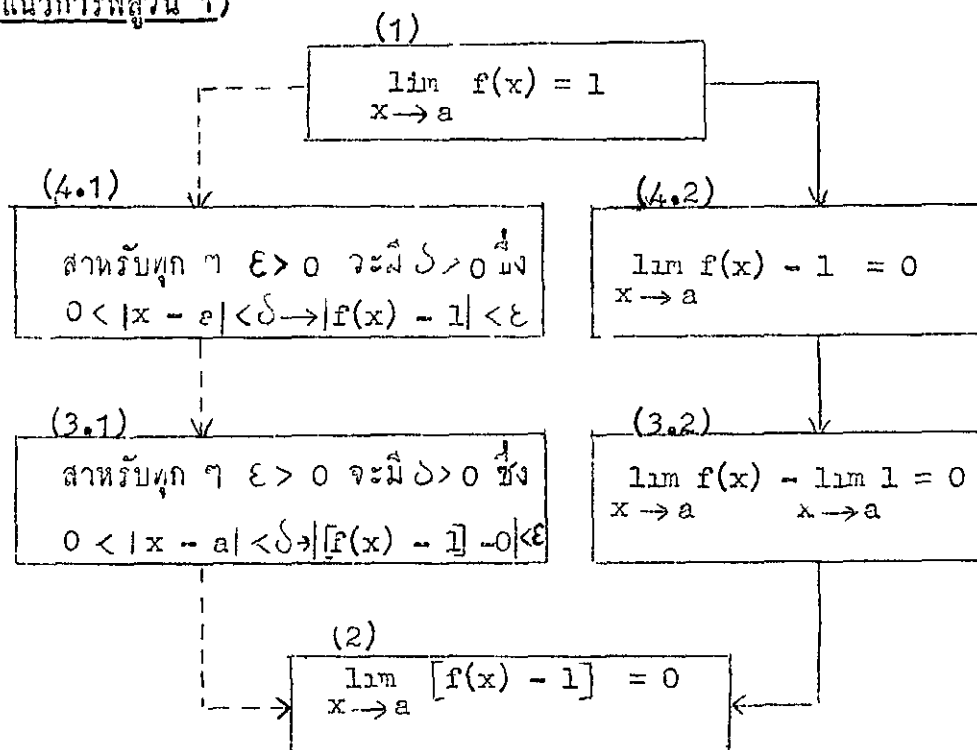
ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ว่าข้อมูลที่ใดที่จะสรุป 4.1 หรือ 4.2 ได้โดยย้อนกลับไปที่พิจารณา

ขั้นที่ 1 จะได้ว่าสามารถใช้ขั้นที่ 1 สรุป 4.1 และ 4.2 ได้

5.1 สรุป 4.1 โดยใช้บทนิยาม

5.2 สรุป 4.2 จาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - 1 = 0$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)



พิสูจน์ 1)

กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 1 = 0 \quad [\text{โดยทฤษฎีบท 3.2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0 \quad [\text{โดยทฤษฎีบท 3.1}]$$



ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์ 2)

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 พิจารณาขั้นที่ 2 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

(โดยบทนิยาม) สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 วิเคราะห์ว่าหาอย่างไรจึงจะสรุปขั้นที่ 2 ได้ โดยย้อนกลับไปที่พิจารณา
สิ่งกำหนดให้ในขั้นที่ 1 จะได้ว่า

4.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\rightarrow |[f(x) - 1] - 0| < \varepsilon \\ &\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 3 ได้ตามต้องการ

ถ้าจะลองพิจารณา 4.2 ก็จะสามารถสรุปขั้นที่ 2 ได้เหมือนกัน

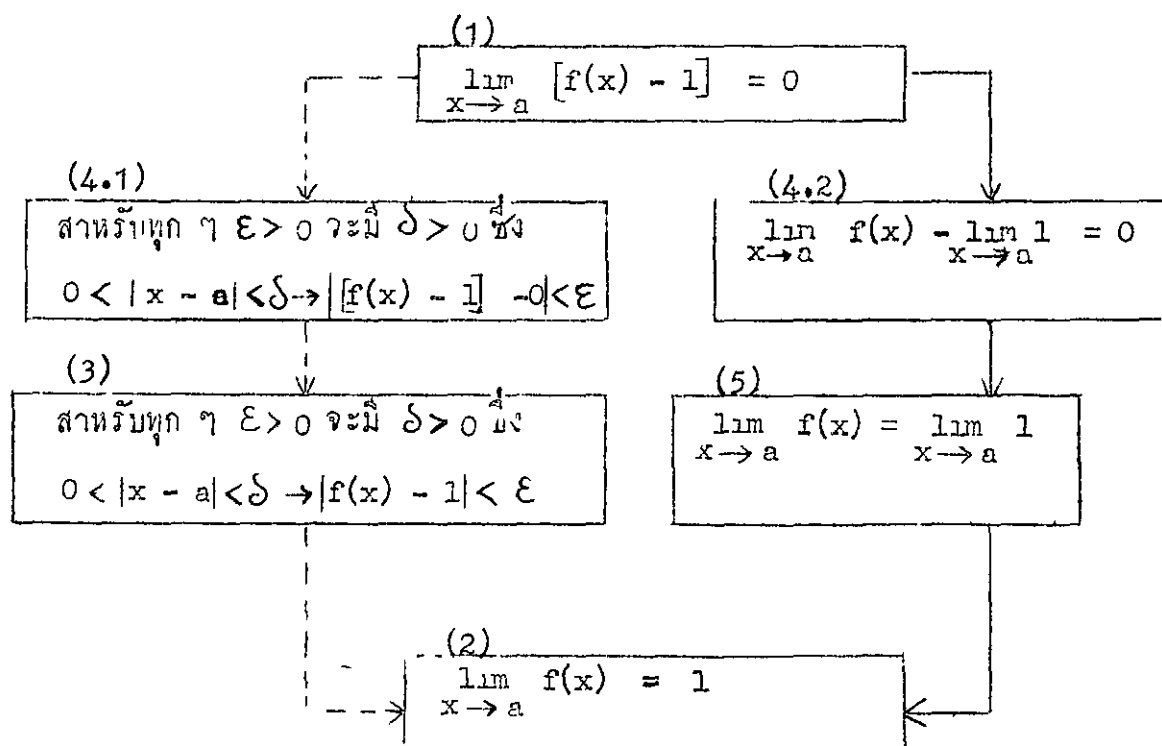
4.2 (โดยทฤษฎีบท) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 1 = 0$

ขั้นที่ 5 จาก 4.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} 1 \\ &= 1 \quad [\text{โดยทฤษฎีบท 3.1}] \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 2 ได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 2)



พิสูจน์ 2)

กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 1 = 0$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$



แบบฝึกหัดที่ 11

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x) - g(x)] = 0$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{k}$; $k \neq 0$

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - 10] = 0$

3. กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} [-f(x) + 1] = 0$ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จงพิสูจน์ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดได้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 1 โดยบทนิยามเขียนใหม่ได้ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$

ขั้นที่ 4 หาคความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 2 และ 3

เนื่องจาก $|f(x)| - |1| \leq |f(x) - 1|$

ดังนั้น $|f(x) - 1| < \epsilon \rightarrow |f(x)| - |1| < \epsilon$

เพราะฉะนั้นจากขั้นที่ 3 จะได้

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| - |1| < \epsilon$$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 เขียนใหม่ได้เป็น

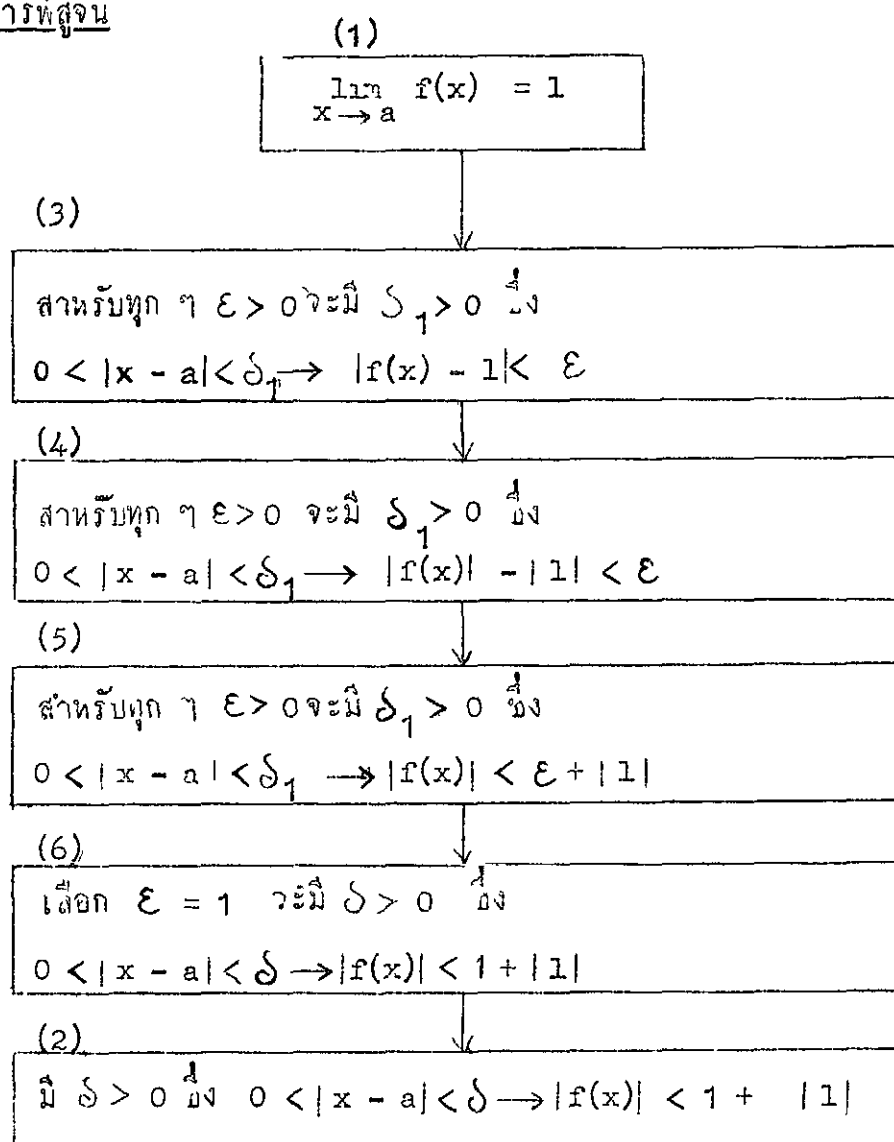
สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| < \epsilon + |1|$$

ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 5 เลือก $\epsilon = 1$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ หมายความว่า $\forall \varepsilon > 0$

ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < 1$$

$$\rightarrow |f(x)| - |1| < 1 \quad [|a| - |b| \leq |a - b|]$$

$$\rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$$

เพราะฉะนั้น มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$

คำถามชุดที่ 6 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

1. อยากทราบว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)| < 3 + |m|$
หรือไม่ จงให้เหตุผล
2. อยากทราบว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)| < 5 + |m|$
หรือไม่ จงให้เหตุผล
3. อยากทราบว่า มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)| < -|m| + |m|$
หรือไม่ จงให้เหตุผล

ตัวอย่าง 3.2 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ 1.1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 มีบทนิยามหรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 1
(โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 กำหนด $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$$

$$\rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon$$

นั่นคือ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| < A \quad \text{และ} \quad |g(x)| < B \quad \text{โดยที่ } A \cdot B = \varepsilon$$

พิจารณาว่าหาอย่างไร จึงจะหา δ ดังกล่าว โดยย้อนกลับไปที่พิจารณาจาก
สิ่งกำหนดให้

4.1 พิจารณา 1.1 ว่าทว่าอย่างไร จึงจะได้ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| < A$

โดยตัวอย่าง 3.1 จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$$

4.2 พิจารณา 1.2 ว่าทว่าอย่างไร จึงจะได้ว่า

มี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)| < B$

โดยที่ $(1 + |1|) \cdot B = \varepsilon$ $[A = 1 + |1|]$

จาก 1.2 โดยบทนิยาม จะได้

สำหรับทุก ๆ $B > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)| < B$$

เนื่องจาก B เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ก็ได้ ดังนั้น

เราเลือก $B = \frac{\varepsilon}{1+|1|}$ [เพื่อให้ได้ได้ว่า $A \cdot B = \varepsilon$]

จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_2$ ซึ่ง $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{1+|1|}$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 หากความสัมพันธ์ระหว่าง 4.1 และ 4.2 เพื่อจะสรุปขั้นที่ 3

ให้ $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ [เนื่องจากเราต้องการ δ เพียงตัวเดียว]

จะได้ $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$

เพราะฉะนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| < 1 + |1|$,

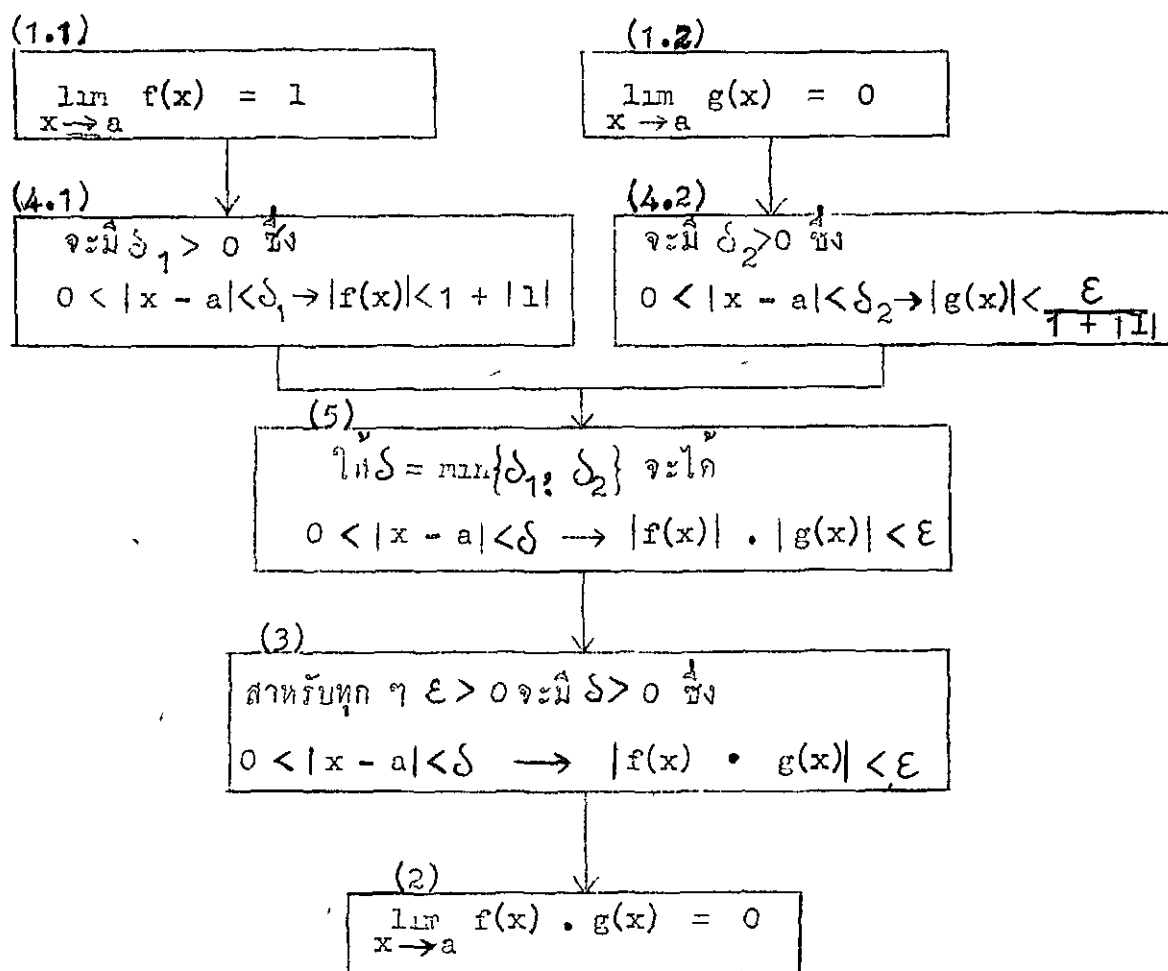
$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{1+|1|}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } 0 < |x-a| < \delta &\rightarrow |f(x)| < 1 + |1| \text{ และ } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{1+|1|} \\ &\rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < (1 + |1|) \cdot \frac{\varepsilon}{1+|1|} \end{aligned}$$

ดังนั้นสรุปขั้นที่ 3 ได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า

กำหนด $\epsilon > 0$ โดยตัวอย่าง 3.1 จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| < 1 + |1| \quad (1)$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ และ $\frac{\epsilon}{1 + |1|} > 0$

ดังนั้น จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |1|} \quad (2)$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ว่า $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$

ดังนั้น $0 < |x - a| < \delta \rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)| < 1 + 1$ [จาก (1)]

$0 < |x - a| < \delta \rightarrow 0 < |x - a| < \delta_2 \rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{1+1}$ [จาก (2)]

เพราะฉะนั้น $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < (1+1) \left(\frac{\varepsilon}{1+1} \right)$

$$\rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

□

คำถามชุดที่ 7

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) [f(x) - 1] = 0$

ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$

เท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ ซึ่ง $1, m \neq 0$

สรุปว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) \neq 0$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด

ทฤษฎีบท 3.6 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ

$$1.1 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$1.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$

ขั้นที่ 3 พิจารณา 1.2 โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} [g(x) - m] = 0$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 และ 1.1 โดยตัวอย่าง 3.2 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) [g(x) - m] = 0$$

ขั้นที่ 5 พิจารณาขั้นที่ 4 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) [g(x) - m] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot m]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot m$$

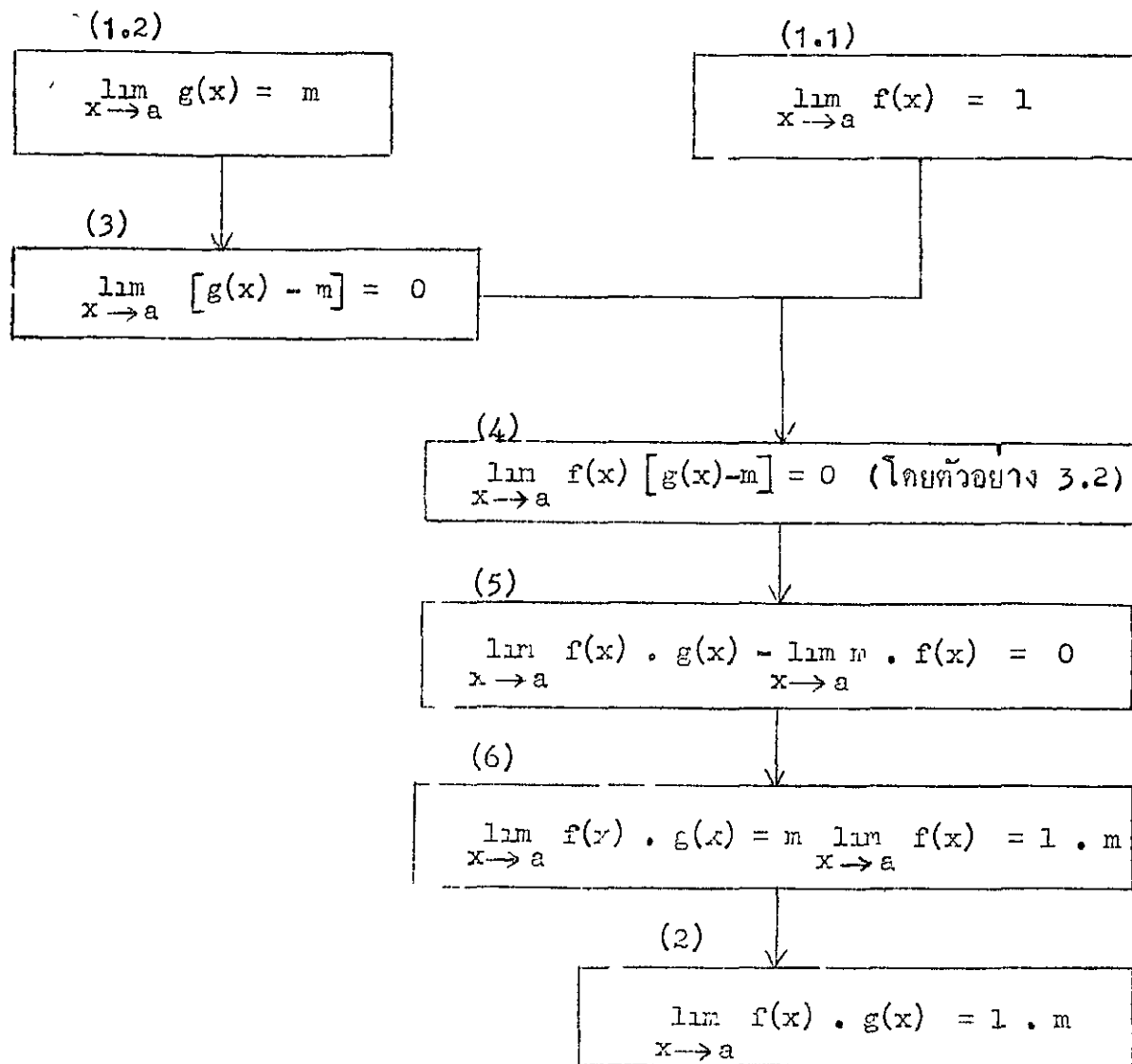
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) - \lim_{x \rightarrow a} m \cdot f(x) = 0$

ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 4 และ 5 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) - \lim_{x \rightarrow a} m \cdot f(x) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} m \cdot f(x)$

$$= m \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} [g(x) - m] = 0$$

และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ โดยตัวอย่าง 3.2 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) [g(x) - m] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) - m \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = m \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \cdot m$

คำถามชุดที่ 8

1. กำหนด $f(x) = x^5 + 3x$ และ $g(x) = 5$
จะได้ว่า $f \cdot g$ มีลิมิตที่ ∞ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด
2. กำหนด $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \text{ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด}$$

3. กำหนด $f \cdot g$ มีลิมิตที่ a จะสรุปว่า f และ g มีลิมิตที่ a ใช่หรือไม่

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)] = l_1 l_2 \dots l_n$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด) ใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $l \neq 0$ จะได้ว่า

$$\text{มี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > \frac{|l|}{2}$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $l \neq 0$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ก็คือ $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > \frac{|l|}{2}$

ขั้นที่ 3 พิจารณา ขั้นที่ 1 สามารถแยกได้เป็น 2 กรณี คือ

$$3.1 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{และ} \quad l > 0$$

$$3.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{และ} \quad l < 0$$

ขั้นที่ 4 โดยบทนิยาม เขียน 3.1 และ 3.2 ใหม่ได้เป็น

4.1 สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \quad \text{และ} \quad l > 0$$

4.2 สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x)-l| < \epsilon \quad \text{และ} \quad l < 0$$

ขั้นที่ 5 พยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 4 กับขั้นที่ 2

จากขั้นที่ 4 เขียน 4.1 และ 4.2 ใหม่ได้ดังนี้

5.1 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow -\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon \\ \longrightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \quad \text{และ} \quad 1 > 0$$

5.2 สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow -\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon \\ \longrightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \quad \text{และ} \quad 1 < 0$$

ขั้นที่ 6 วิเคราะห์ ว่าทำอย่างไรจึงจะสรุปขั้นที่ 1 ได้ โดยพิจารณา

$$|f(x)| > \frac{|1|}{2} \iff \left[f(x) < -\frac{|1|}{2} \right] \vee \left[f(x) > \frac{|1|}{2} \right]$$

6.1 ถ้า $1 > 0$

$$\text{ต้องการ} \quad \left[f(x) < -\frac{1}{2} \right] \vee \left[f(x) > \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{จาก} \quad 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$$

$$\text{ควรเลือก} \quad 1 - \varepsilon = \frac{1}{2} \vee 1 + \varepsilon = -\frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \vee \varepsilon = -\frac{3}{2}$$

แต่ $1 > 0$ และ ε ต้องมากกว่า 0

$$\text{ดังนั้นเลือก} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$$

6.2 ถ้า $1 < 0$

$$\text{ต้องการ} \quad \left[f(x) > -\frac{1}{2} \right] \vee \left[f(x) < \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{จาก} \quad 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$$

$$\text{ควรเลือก} \quad 1 - \varepsilon = -\frac{1}{2} \vee 1 + \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \varepsilon = \frac{31}{2} \quad \vee \quad \varepsilon = -\frac{1}{2}$$

แต่ $1 < 0$ และ ε ต้องมากกว่า 0

$$\text{ดังนั้นเลือก } \varepsilon = -\frac{1}{2}$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6

$$7.1 \text{ ถ้า } 1 > 0 \text{ เลือก } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า

$$\text{มี } \delta_3 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_3 \rightarrow |f(x)-1| < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{2} < f(x) < 1 + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < \frac{31}{2}$$

$$\rightarrow f(x) > \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$$

$$7.2 \text{ ถ้า } 1 < 0 \text{ เลือก } \varepsilon = -\frac{1}{2}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า

$$\text{มี } \delta_4 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_4 \rightarrow |f(x)-1| < -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{2} < f(x) < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{31}{2} < f(x) < \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow f(x) < \frac{1}{2}$$

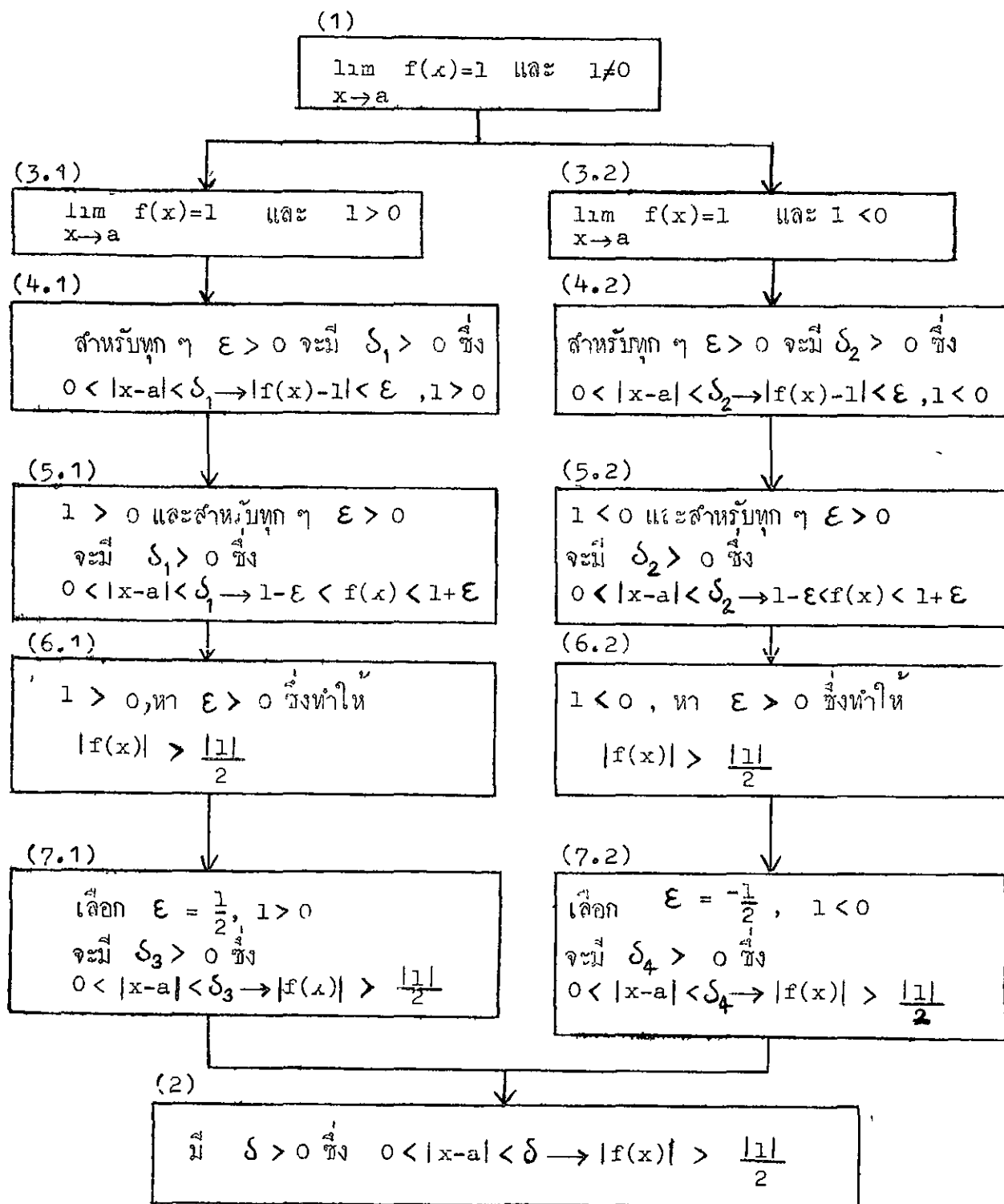
$$\rightarrow -f(x) > -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow |-f(x)| > \frac{|-1|}{2} \quad \left[-\frac{1}{2} > 0\right]$$

$$\rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$$

ดังนั้นจาก 7.1 และ 7.2 สรุปได้ว่า $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $1 \neq 0$

กรณี 1 ถ้า $1 > 0$ จะได้ $\frac{1}{2} > 0$

จาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{มี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta &\rightarrow |f(x)-1| < \frac{1}{2} \\ &\rightarrow 1-\frac{1}{2} < f(x) < 1+\frac{1}{2} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2} \\ &\rightarrow f(x) > \frac{1}{2} \\ &\rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2} \quad [\because 1 > 0] \end{aligned}$$

กรณี 2 ถ้า $1 < 0$ จะได้ $-\frac{1}{2} > 0$

จาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{มี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta &\rightarrow |f(x)-1| < -\frac{1}{2} \\ &\rightarrow 1+\frac{1}{2} < f(x) < 1-\frac{1}{2} \\ &\rightarrow \frac{3}{2} < f(x) < \frac{1}{2} \\ &\rightarrow f(x) < \frac{1}{2} \\ &\rightarrow -f(x) > -\frac{1}{2} \\ &\rightarrow |-f(x)| > \frac{|-1|}{2} \quad [\because -\frac{1}{2} > 0] \\ &\rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2} \end{aligned}$$

จากกรณี 1 และ 2 สรุปว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$

□

คำถามชุดที่ 9 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $l \neq 0$

ทฤษฎีบทยังคงเป็นจริงหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ 12

1. กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $l, m \neq 0$

จงพิสูจน์ว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| + |g(x)| > \frac{|l+m|}{2}$

2. กำหนด $f(x) = 3x-1$

จงพิสูจน์ว่ามี δ ซึ่งทำให้ $0 < |x| < \delta \rightarrow |3x-1| > \frac{1}{2}$

ทฤษฎีบท 3.9 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $l \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ และ $l \neq 0$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

ขั้นที่ 3 โดยบทนิยาม เขียนขั้นที่ 2 ใหม่

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 1 โดยบทนิยาม จะได้

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

ขั้นที่ 5 พยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 3 และ 4 เพื่อจะสรุปขั้นที่ 3

ดังนั้นจากขั้นที่ 3 พิจารณา $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon$

เนื่องจาก $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l-f(x)}{l \cdot f(x)} \right| = \frac{|f(x)-l|}{|l| |f(x)|}$

ดังนั้น $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon \iff \frac{|f(x)-l|}{|l| |f(x)|} < \varepsilon$

$\iff |f(x)-l| \cdot \frac{1}{|l| |f(x)|} < \varepsilon$

เพราะฉะนั้นจากขั้นที่ 3 เขียนใหม่

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| \cdot \frac{1}{|1||f(x)|} < \varepsilon$$

ขั้นที่ 6 วิเคราะห์ทำอย่างไรจึงจะสรุปขั้นที่ 5 ได้ โดยย้อนไปพิจารณาขั้นที่ 1 และโดย

ทฤษฎีบท 3.8 จะได้ มี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 พยายามเปลี่ยนรูปให้สัมพันธ์กับขั้นที่ 5

$$\text{มี } \delta_2 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_2 \longrightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|1|}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{|1||f(x)|} < \frac{2}{|1|^2}$$

ขั้นที่ 8 จากขั้นที่ 4 และ 7 เราต้องการ $|f(x)-1| \cdot \frac{1}{|1||f(x)|} < \varepsilon$

$$\text{แต่ } \frac{1}{|1||f(x)|} < \frac{2}{|1|^2}$$

$$\text{ดังนั้นจะต้องหา } A \text{ ซึ่ง } |f(x)-1| < A \quad \text{และ} \quad A \cdot \frac{2}{|1|^2} = \varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ ให้ } A = \frac{\varepsilon |1|^2}{2}$$

จากขั้นที่ 4 และ $A = \frac{\varepsilon |1|^2}{2} > 0$ จะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_3 \longrightarrow |f(x)-1| < \frac{\varepsilon |1|^2}{2}$$

ขั้นที่ 9 จากขั้นที่ 7 และ 8 จะได้ว่า

$$\text{ถ้าให้ } \delta = \min\{\delta_2, \delta_3\} \quad \text{จะได้ } \delta \leq \delta_2 \quad \text{และ } \delta \leq \delta_3$$

$$\text{และ } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow \frac{1}{|1| |f(x)|} < \frac{2}{|1|^2}$$

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_3 \rightarrow |f(x)-1| < \frac{\varepsilon |1|^2}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow \frac{1}{|1| |f(x)|} < \frac{2}{|1|^2} \quad \text{และ } |f(x)-1| < \frac{\varepsilon |1|^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{|f(x)-1|}{|1| |f(x)|} < \varepsilon$$

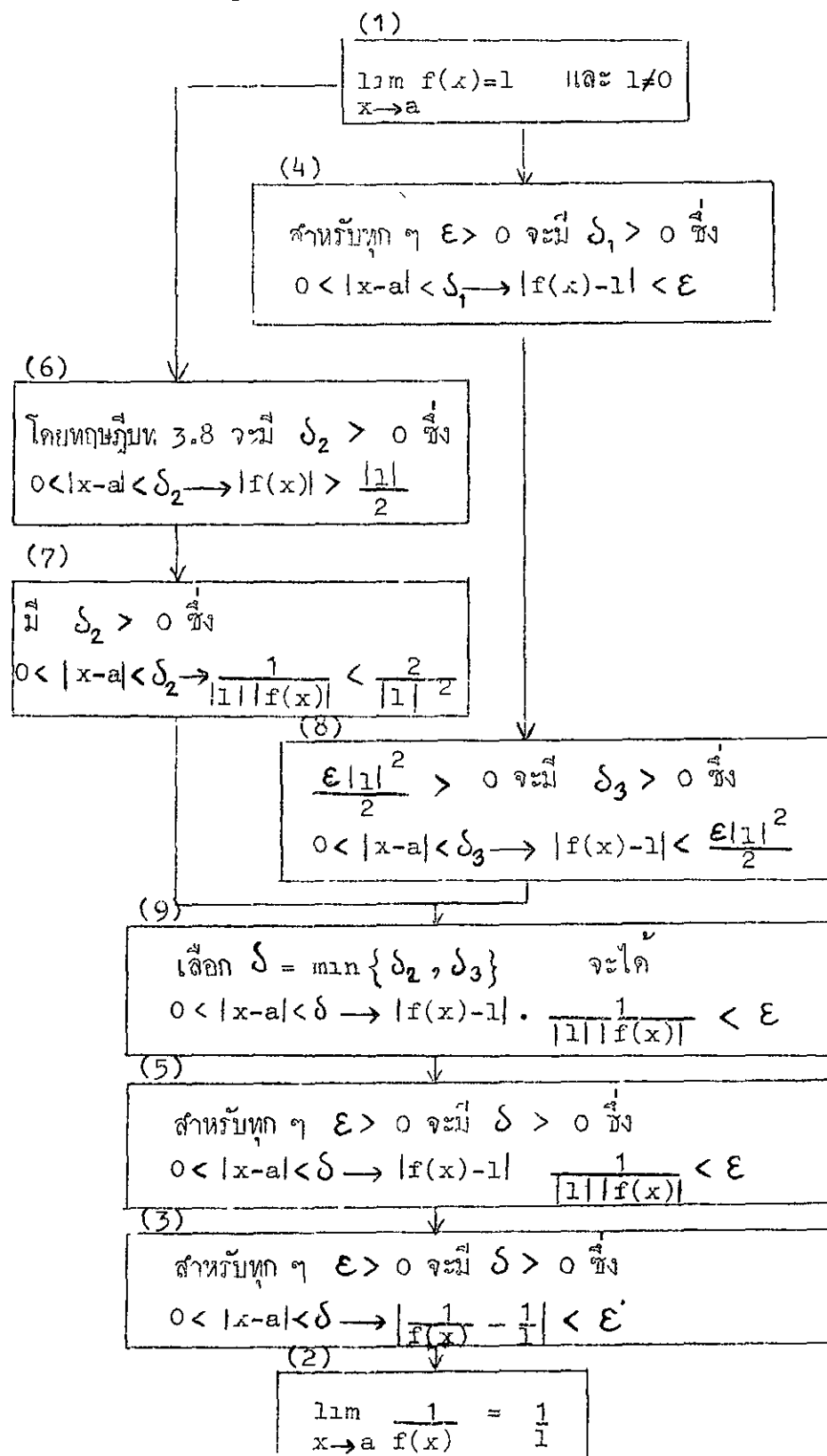
เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow \frac{|f(x)-1|}{|1| |f(x)|} < \varepsilon$$

$$\rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{1} \right| < \varepsilon$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1}$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์



พิสูจน์

กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $1 \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 3.8 จะได้ว่า มี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |f(x)| > \frac{|1|}{2} \quad \text{--- } |1|$$

$$\rightarrow \frac{1}{|1||f(x)|} < \frac{1}{|1|^2}$$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\frac{\epsilon|1|^2}{2} > 0$ จะได้ว่ามี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_3 \rightarrow |f(x)-1| < \frac{\epsilon|1|^2}{2}$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ จะได้ $\delta \leq \delta_2$ และ $\delta \leq \delta_3$

และ $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2$

$$\rightarrow \frac{1}{|1||f(x)|} < \frac{2}{|1|^2}$$

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_3 \rightarrow |f(x)-1| < \frac{\epsilon|1|^2}{2}$$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow \frac{1}{|1||f(x)|} < \frac{2}{|1|^2}$ และ $|f(x)-1| < \frac{\epsilon|1|^2}{2}$

$$\rightarrow \frac{|f(x)-1|}{|1||f(x)|} < \frac{2}{|1|^2} \cdot \frac{\epsilon|1|^2}{2} = \epsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1}$



ทฤษฎีบท 3.10 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $m \neq 0$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ 1.1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

1.2 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $m \neq 0$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

ขั้นที่ 3 มีบทนิยามหรือทฤษฎีบทใดบางที่จะสรุปขั้นที่ 2

3.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m} \right| < \varepsilon$$

3.2 (โดยทฤษฎีบท) เป็นการเพียงพอที่จะสรุปขั้นที่ 2 โดยใช้ทฤษฎีบท 3.6

และทฤษฎีบท 3.9

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 1 จะเห็นว่าเป็นการง่ายที่จะสรุปขั้นที่ 2 โดยใช้ 3.2

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $m \neq 0$

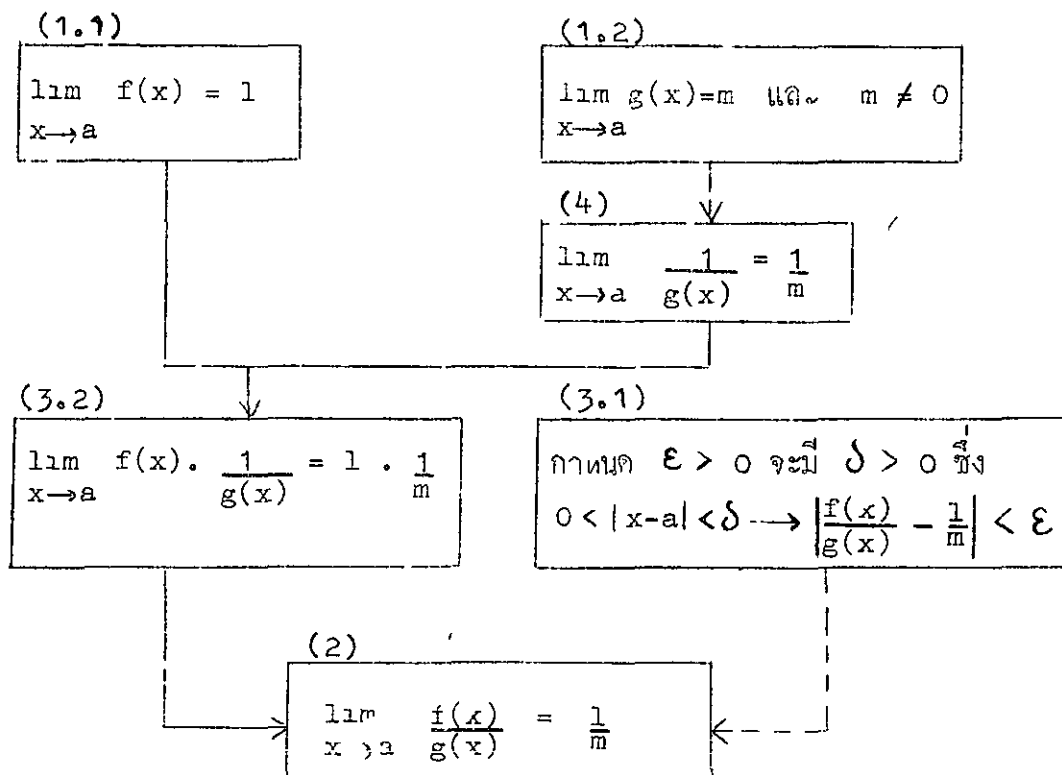
โดยทฤษฎีบท 3.9 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$

จากขั้นที่ 1 เราทราบว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.6 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = l \cdot \frac{1}{m}$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ และ $m \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 3.9 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$

และโดยทฤษฎีบท 3.6 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 1 \cdot \frac{1}{m}$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{m}$



แบบฝึกหัดที่ 13

1. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x+3} = -1$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = 2$

3. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 2x^2}{1 - x} = \frac{2}{3}$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x}{3x + 1}$

x สำหรับทุก $n = 1, 2, \dots, n$

ใหม่คือ

$f_2(x) = a^n$

ทฤษฎีบท 3.11 สำหรับทุกๆจำนวนเต็มบวก n

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

ขั้นที่ 2 เนื่องจาก $x^n = x \cdot x \cdots x$ (n จำนวน)

ให้ $f_1(x) = x$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \dots, n$

ขั้นที่ 3 เขียนขั้นที่ 1 ใหม่คือ

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)] = a^n$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 โดยทฤษฎีบท 3.7 เขียนใหม่ได้เป็น

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdots \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = a^n$$

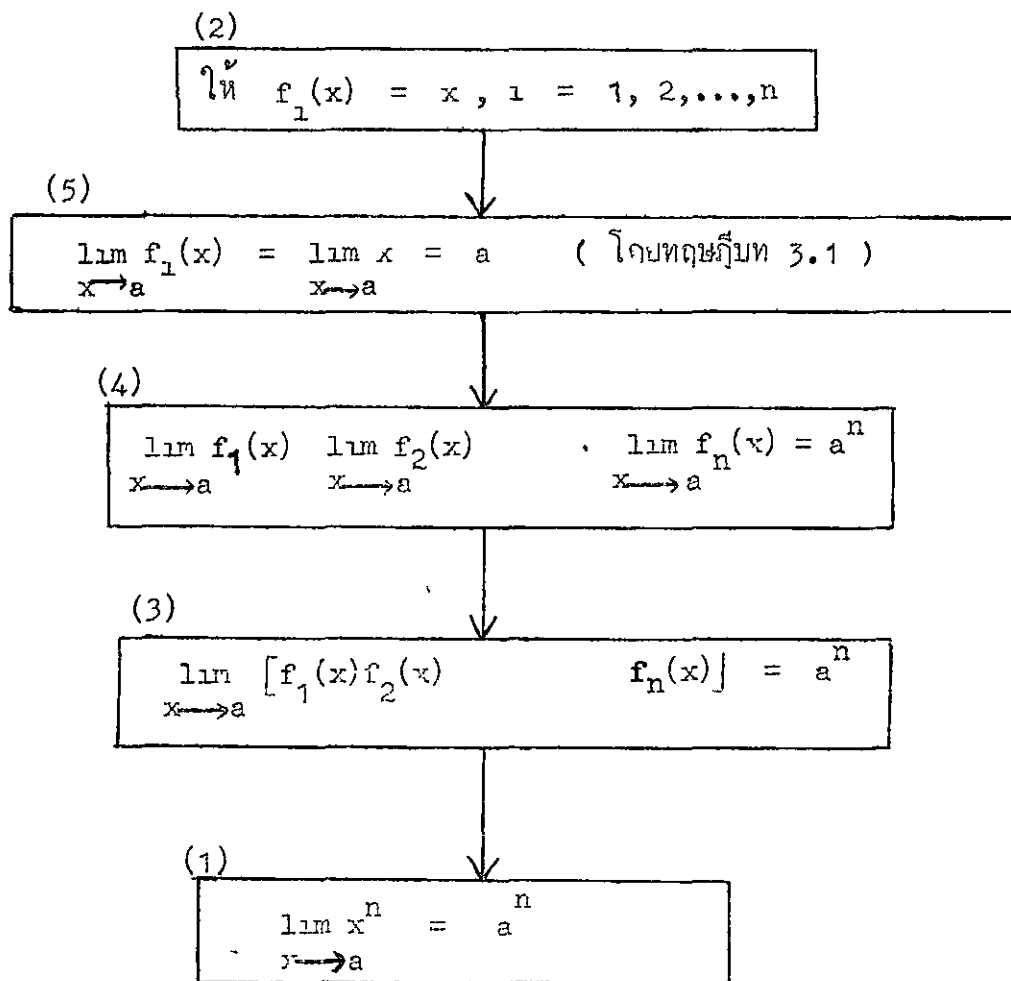
ขั้นที่ 5 จากขั้น 2 โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

จากขั้นที่ 5 สรุปขั้นที่ 4 ได้ตามต้องการ

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ ให้ $f_i(x) = x$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.1}]$

พิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)]$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

[ทฤษฎีบท 3.7]

$$= a \cdot a \cdot \dots \cdot a (n \text{ จำนวน})$$

$$= a^n$$



คำถามชุดที่ 10

1. ถ้า $n = -2$

จะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

— จริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

2. ถ้า $n = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = ?$

และจำเป็นต้องมีเงื่อนไขใดเพิ่มเติม

แบบฝึกหัดที่ 14

จงหาค่าของ

1. $\lim_{x \rightarrow 2} x^5$

2. $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x^3)$

4. $\lim_{y \rightarrow a} xy^2$

ทฤษฎีบท 3.12 สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์หาค่าลิมิต

ขั้นที่ 1 เขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 เห็นได้ชัดว่าเป็นการง่ายที่จะใช้ ทฤษฎีบท 3.1,

3.4 และ 3.11 ในการสรุปขั้นที่ 1

2.1 โดยทฤษฎีบท 3.11 จะได้

$$\text{สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก } n, \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

2.2 โดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} c_0 = c_0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.4 จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

(2.1)

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

(โดยทฤษฎีบท 3.11)

(2.2)

$$\lim_{x \rightarrow a} c_0 = c_0$$

(โดยทฤษฎีบท 3.1)

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

พิสูจน์ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

(โดยทฤษฎีบท 3.11)

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow a} c_0 = c_0$$

(โดยทฤษฎีบท 3.1)

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

□

ข้อสังเกต 1. ถ้า $P(x)$ เป็นโพลิโนเมียลฟังก์ชัน โดยทฤษฎีบท 3.12

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

2. ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นโพลิโนเมียลฟังก์ชัน ซึ่ง $Q(a) \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 3.10 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

ตัวอย่าง 3.2 จงพิสูจน์ว่า

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x - 18) = -8$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2 - 2x + 5}{3x^2 - 6x - 7} = \frac{-25}{7}$$

พิสูจน์ 1 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} x} ; a \neq 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.10}]$

$$= \frac{1}{a} ; a \neq 0 \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.1}]$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x - 18) = (5^2) - 3(5) - 18 \quad [\text{ทฤษฎีบท 3.12}]$$

$$= 25 - 15 - 18 = -8$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^2 - 2x + 5}{3x^2 - 6x - 7} = \frac{6(2)^2 - 2(2) + 5}{3(2)^2 - 6(2) - 7} \quad \left[\begin{array}{l} \text{ข้อสังเกตข้อ 2} \\ \text{หลังทฤษฎีบท 3.12} \end{array} \right]$$

$$= \frac{24 - 4 + 5}{12 - 12 - 7} = \frac{-25}{7}$$



ตัวอย่าง 3.3 จงหาคำของ

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$$

วิธีทำ 1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9)$$

$$= (3)^2 + 3(3) + 9 = 27$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 2)}{(x - 1)}$$

$$= \frac{-1 - 2}{-1 - 1} = \frac{3}{2}$$



แบบฝึกหัดที่ 15

จงพิสูจน์ว่า

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} = -4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + a^2}{x} = 2a ; a \neq 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + 2x + 1)(3x + 2) = -28$$

ทฤษฎีบท 3.13 กำหนดฟังก์ชัน f และ g ถ้ามี $\delta' > 0$ โดยที่ $g(x) = f(x)$

สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta'$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้คือ

1.1 f และ g เป็นฟังก์ชัน

1.2 มี $\delta' > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) = f(x)$

1.3 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2

โดยบทนิยามเช่นขั้นที่ 2 ใหม่ดังนี้

สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

ย้อนกลับไปพิจารณาขั้นที่ 1

4.1 จาก 1.3 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$

จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$

4.2 จาก 1.2 จะได้ มี $\delta' > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) = f(x)$$

ขั้นที่ 5 เปรียบเทียบหาความสัมพันธ์ระหว่าง 4.1 และ 4.2 เพื่อจะสรุป

ขั้นที่ 2 กังน้นจากขั้นที่ 4 พิจารณา 4.1 และ 4.2

ถ้าให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta'\}$ จะได้ $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta'$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) = f(x)$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$ และ $g(x) = f(x)$

$\rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์

(1)

1.1 f และ g เป็นฟังก์ชัน1.2 มี $\delta' > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) = f(x)$ 1.3 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$

(4.1)

จาก 1.3 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$

จะได้ว่า

สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x) - 1| < \varepsilon$

(4.2)

มี $\delta' > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) = f(x)$

(5)

เลือก $\delta = \min \{ \delta_1, \delta' \}$ จะได้สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$; $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |g(x) - 1| < \varepsilon$ และ $g(x) = f(x)$

(3)

สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

(2)

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ ดังนั้น มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$$

และจากกำหนดให้ มี $\delta' > 0$ สำหรับทุกๆ x ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta' \longrightarrow g(x) = f(x)$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta'\}$ จะได้ว่า $\delta \leq \delta'$ และ $\delta \leq \delta_1$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \longrightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$

และ $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow 0 < |x-a| < \delta' \longrightarrow g(x) = f(x)$

เพราะฉะนั้น

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |g(x)-1| < \varepsilon \quad \text{และ} \quad g(x) = f(x)$$

$$\longrightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

□

ขั้นที่ 6 พิจารณา ถ้า $a > 0$ พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \text{ และ } |x-a|$$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } |\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}| |\sqrt{x} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \\ &= \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a > 0 &\longrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} \\ &\longrightarrow |\sqrt{x} + \sqrt{a}| \geq |\sqrt{a}| \\ &\longrightarrow \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{a}|} \\ &\longrightarrow \frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|x-a|}{|\sqrt{a}|} \\ &\longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 พิจารณา $\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$ จะได้ว่า

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

$$\text{แต่ } \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \iff |x-a| < \sqrt{a} \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $\delta = \sqrt{a} \varepsilon$ จะได้

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\longrightarrow |x-a| < \sqrt{a} \varepsilon \\ &\longrightarrow \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon \\ &\longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 3.14 สำหรับทุก ๆ $a \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 มีบทนิยามหรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 1

2.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$$

2.2 (โดยทฤษฎีบท) $\lim_{x \rightarrow a} [\sqrt{x} - \sqrt{a}] = 0$

ขั้นที่ 3 พิจารณา 2.1 กำหนด $\epsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 เนื่องจาก $a \geq 0$ ต้องแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณี คือ $a = 0$

หรือ $a > 0$

ถ้า $a = 0$ สามารถเขียนขั้นที่ 3 ใหม่ คือ

กำหนด $\epsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x| < \delta \rightarrow |\sqrt{x}| < \epsilon$$

$$\rightarrow |x| < \epsilon^2$$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 เห็นได้โดยง่ายว่า ถ้าให้ $\delta = \epsilon^2$

$$\text{จะได้ } 0 < |x| < \delta \rightarrow |x| < \epsilon^2$$

$$\text{ดังนั้น สำหรับทุก ๆ } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x| < \delta \rightarrow |x| < \epsilon^2 \\ \rightarrow |\sqrt{x}| < \epsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์

(3)

กำหนด $\varepsilon > 0$
 หา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

(4)

ถ้า $a = 0$
 หา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x| < \delta \rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon$
 $\rightarrow |x| < \varepsilon^2$

(6)

ถ้า $a > 0$ จะได้
 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$

(5)

เลือก $\delta = \varepsilon^2$ จะได้
 $0 < |x| < \delta \rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon$

(7)

เลือก $\delta = \sqrt{a} \varepsilon$ จะได้
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \sqrt{a} \varepsilon$
 $\rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

(2.2)

$\lim_{x \rightarrow a} [\sqrt{x} - \sqrt{a}] = 0$

(2.1)

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

(1)

$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ ให้ $\delta = \varepsilon^2$ จะได้

$$\begin{aligned} 0 < |x| < \delta &\longrightarrow |x| < \varepsilon^2 \\ &\longrightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $a > 0$ ให้ $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ จะได้ $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |x-a| < \sqrt{a}\varepsilon$
 $\longrightarrow \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$

$$\text{แต่ } \sqrt{x} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$$

$$|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \geq \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{|x-a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$



แบบฝึกหัดที่ 16 จงพิสูจน์ว่า

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2x} = \sqrt{2a} ; a \geq 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} (3\sqrt{x} + 2x^3 + 4) = 3\sqrt{a} + 2a^3 + 4 ; a \geq 0$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x^5} = a^2\sqrt{a} ; a \geq 0$$

5. กำหนด $a \geq 0$ จงหาค่าของ

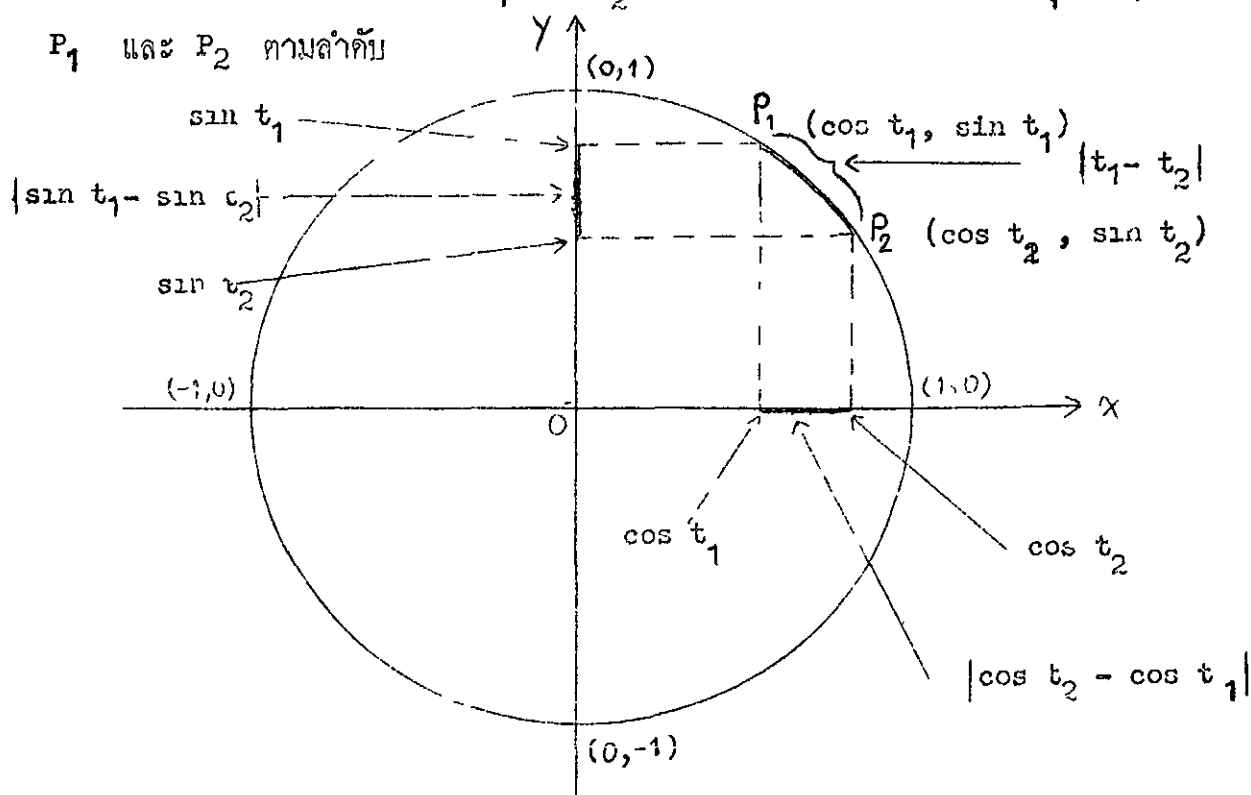
$$1) \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x})^2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x})^3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} [3\sqrt{x} + 2\sqrt{9x}]$$

ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย ให้ t_1 และ t_2 เป็นความยาวของส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ถึง P_1 และ P_2 ตามลำดับ



- จากรูปจะเห็นว่า
1. $|P_1A| < |P_1P_2|$
 2. $|AP_2| < |P_1P_2|$
 3. $|P_1P_2| < \widehat{P_1P_2}$

เมื่อ $\widehat{P_1P_2}$ หมายถึง ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมจาก P_1 ถึง P_2

ดังนั้น $|P_1A| < \widehat{P_1P_2}$ และ $|AP_2| < \widehat{P_1P_2}$

แต่ $|P_1A| = |\sin t_1 - \sin t_2|$

$|AP_2| = |\cos t_1 - \cos t_2|$

$\widehat{P_1P_2} = |t_1 - t_2|$

เพราะฉะนั้น

$$|\sin t_1 - \sin t_2| < |t_1 - t_2|$$

$$|\cos t_1 - \cos t_2| < |t_1 - t_2|$$

ทฤษฎีบท 3.15 สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

ขั้นที่ 2 มีนิยามหรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 1

2.1 (นิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

2.2 (ทฤษฎีบท) $\lim_{x \rightarrow a} [\sin x - \sin a] = 0$

ขั้นที่ 3 พิจารณา 2.1 กำหนด $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

$$\text{เนื่องจาก } |\sin x - \sin a| < |x-a|$$

$$\text{ดังนั้น ถ้าให้ } \delta = \varepsilon \text{ จะได้ } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \varepsilon \\ \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ 1)

(3)

กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \epsilon$ จะได้
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \epsilon$

คุณสมบัติทางตรีโกณมิติ

$$|\sin x - \sin a| < |x-a|$$

(4)

กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \epsilon$ จะได้
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$

(2.2)

$$\lim_{x \rightarrow a} [\sin x - \sin a] = 0$$

(2.1)

สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง
 $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

พิสูจน์ 1) กำหนด $\epsilon > 0$ ให้ $\delta = \epsilon$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x-a| < \epsilon$$

แต่ $|\sin x - \sin a| < |x-a|$

ดังนั้น

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \epsilon$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

□

พิสูจน์ 2) (ทำเป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.4 จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad \text{เมื่อ} \quad \cos a \neq 0$$

พิสูจน์

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos a} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos a \neq 0$$

$$= \tan a$$

□

ตัวอย่าง 3.5 จงพิสูจน์ว่า

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \sin 2x = \sin 2a$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \sin(x + y) = \sin(a + y)$$

พิสูจน์ 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin 2x &= \lim_{x \rightarrow a} 2 \sin x \cos x \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow a} \sin x \cdot \cos x \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow a} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow a} \cos x \\ &= 2 \sin a \cdot \cos a \\ &= \sin 2a \end{aligned}$$

□

พิสูจน์ 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin(x + y) &= \lim_{x \rightarrow a} [\sin x \cos y + \cos x \sin y] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \sin x \cos y + \lim_{x \rightarrow a} \cos x \sin y \\ &= \cos y \lim_{x \rightarrow a} \sin x + \sin y \lim_{x \rightarrow a} \cos x \\ &= \cos y \sin a + \sin y \cos a \\ &= \sin a \cos y + \cos a \sin y \\ &= \sin(a + y) \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.6 จงหาค่าของ $\lim_{t \rightarrow \pi} (t \sin t + \cos t)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \lim_{t \rightarrow \pi} (t \sin t + \cos t) &= \left[\lim_{t \rightarrow \pi} t \right] \left[\lim_{t \rightarrow \pi} \sin t \right] + \left[\lim_{t \rightarrow \pi} \cos t \right] \\
 &= \pi \cdot \sin \pi + \cos \pi \\
 &= \pi \cdot (0) + (-1) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

คำถามชุดที่ 11 กำหนด $\cos a, \cos 2a, \sin a \neq 0$ จงหา □

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sec x$

2. $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cosec} x$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \cos 2x$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \tan 2x$

แบบฝึกหัดที่ 17 จงพิสูจน์ว่า

1. $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x + 2) = \sin(a + 2)$

2. $\lim_{y \rightarrow a} \cos(y + a) = \cos(2a)$

3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \sin(2x) \cos x = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow b} [\sin^2 x + \cos^2 x] = 1$

ทฤษฎีบทที่ 3.16 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |1|$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |1|$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 มีบทนิยาม หรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 2

3.1 (โดยบทนิยาม) สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow ||f(x)| - |1|| < \varepsilon$$

$$3.2 \text{ (โดยทฤษฎีบท)} \lim_{x \rightarrow a} [|f(x)| - |1|] = 0$$

ขั้นที่ 4 พิจารณา 2.1

กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow ||f(x)| - |1|| < \varepsilon$

วิเคราะห์หว่าหา $\delta > 0$ ดังกล่าวได้อย่างไร โดยกลับไปพิจารณาขั้นที่ 1 ใหม่

โดยบทนิยามเขียนขั้นที่ 1 ใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 5 หาความสัมพันธ์ระหว่าง $||f(x)| - |1||$ และ $|f(x) - 1|$

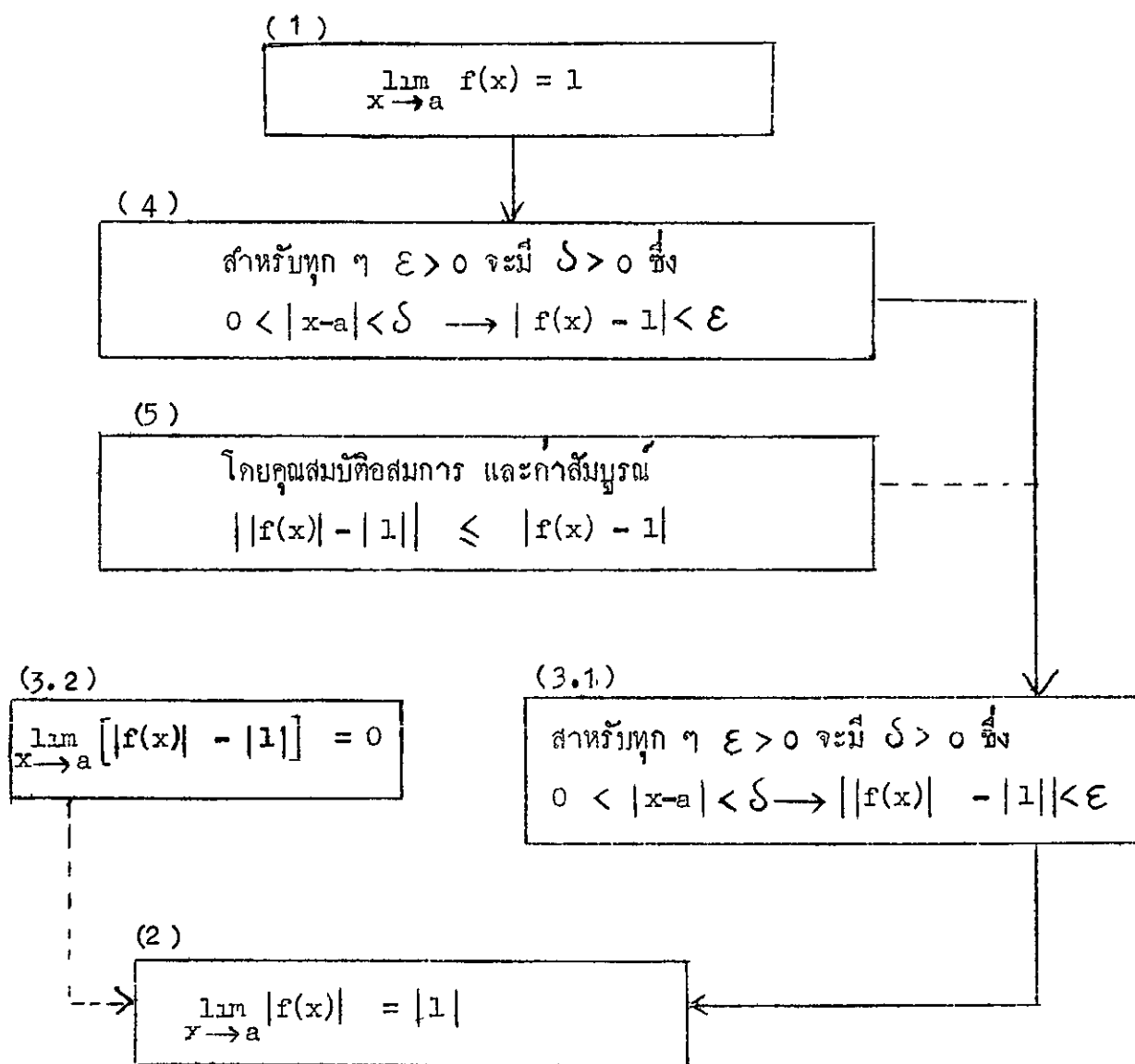
$$\text{จะได้ } ||f(x)| - |1|| \leq |f(x) - 1|$$

ดังนั้น จากขั้นที่ 4 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow ||f(x)| - |1|| < \varepsilon$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |1|$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

แต่ $||f(x) - |1|| \leq |f(x) - 1|$ [คุณสมบัติอสมการ, ค่าสัมบูรณ์]

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow ||f(x)| - |1|| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |1|$



แบบฝึกหัดที่ 18 จงพิสูจน์ว่า

$$1. \lim_{x \rightarrow -4} |x| = 4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} |x + 2| = 7$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} |(x - 2)^5| = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} (2|x| + |2x^2 + 1|) = 2a + 2a^2 + 1; a \geq 0$$

ทฤษฎีบท 3.17 กำหนด f, g และ h เป็นฟังก์ชัน ถ้ามี $\delta > 0$ โดยที่

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \text{ และ}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1 \text{ แล้วจะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งกำหนดให้ คือ

1.1 สำหรับทุก ๆ x จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$1.2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 มีทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 2

$$3.1 \text{ สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$$

$$3.2 \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1] = 0$$

ขั้นที่ 4 วิเคราะห์ว่าทำอะไรจึงจะสรุป 3.1 ได้

พิจารณา 1.2 โดยบทนิยามเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$4.1 \text{ สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x) - 1| < \epsilon$$

$$4.2 \text{ สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_2 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |h(x) - 1| < \epsilon$$

ขั้นที่ 5 หากความสัมพันธ์ระหว่าง 1.1, 4.1 และ 4.2 จะได้ว่า

กำหนด $\epsilon > 0$

$$5.1 \text{ มี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$5.2 \text{ มี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow |g(x) - 1| < \epsilon$$

$$\rightarrow 1 - \epsilon < g(x) < 1 + \epsilon$$

$$\rightarrow 1 - \epsilon < g(x)$$

$$5.3 \text{ มี } \delta_2 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow |h(x) - 1| < \epsilon$$

$$\rightarrow 1 - \epsilon < h(x) < 1 + \epsilon$$

$$\rightarrow h(x) < 1 + \epsilon$$

ขั้นที่ 6 พิจารณา 5.1, 5.2 และ 5.3 ถ้าให้ $\delta = \min \{ \delta', \delta_1, \delta_2 \}$ จะได้

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow 1 - \varepsilon < g(x)$$

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow h(x) < 1 + \varepsilon$$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 1 - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < 1 + \varepsilon$

ขั้นที่ 7 จากขั้นที่ 6 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$$

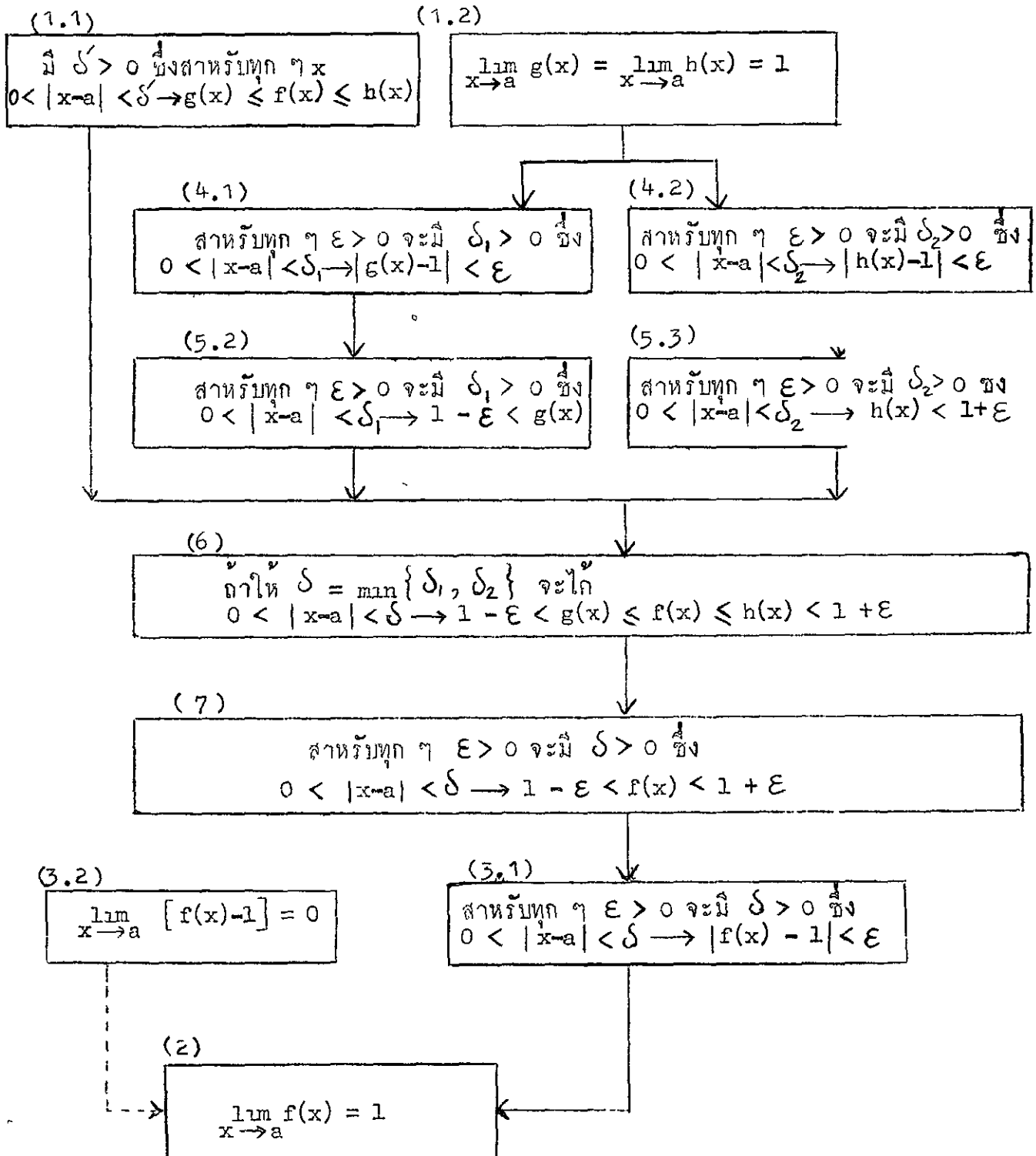
$$\rightarrow -\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon$$

$$\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$

และมี $\delta' > 0$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

กำหนด $\varepsilon > 0$

จาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ จะได้ว่า มี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_1 &\rightarrow |g(x) - 1| < \varepsilon \\ &\rightarrow 1 - \varepsilon < g(x) < 1 + \varepsilon \\ &\rightarrow 1 - \varepsilon < g(x) \quad \text{————— (1)} \end{aligned}$$

จาก $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$ จะได้ว่า มี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta_2 &\rightarrow |h(x) - 1| < \varepsilon \\ &\rightarrow 1 - \varepsilon < h(x) < 1 + \varepsilon \\ &\rightarrow h(x) < 1 + \varepsilon \quad \text{————— (2)} \end{aligned}$$

ให้ $\delta = \min \{ \delta', \delta_1, \delta_2 \}$ จะได้ $\delta \leq \delta'$, $\delta \leq \delta_1$ และ $\delta \leq \delta_2$

ดังนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow 1 - \varepsilon < g(x)$ [จาก (1)]

$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow h(x) < 1 + \varepsilon$ [จาก (2)]

$0 < |x-a| < \delta \rightarrow 0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

เพราะฉะนั้น $0 < |x-a| < \delta \rightarrow 1 - \varepsilon < g(x), g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

และ $h(x) < 1 + \varepsilon$

$\rightarrow 1 - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < 1 + \varepsilon$

$\rightarrow 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$

$\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$



ตัวอย่าง 3.7 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ขั้นที่ 2 จากขั้นที่ 1 มีบทนิยาม หรือทฤษฎีบทใดบ้างที่จะสรุปขั้นที่ 1

2.1 สำหรับทุก ๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - 0| < \epsilon$

2.2 โดยทฤษฎีบท 3.17

ถ้ามี $\delta' > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta' \rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ขั้นที่ 3 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างขั้นที่ 1 กับ 2.2 โดยพิจารณา $x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$

เนื่องจาก $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ เมื่อ $x \neq 0$

ดังนั้น $0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

นั่นคือ $0 \leq x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

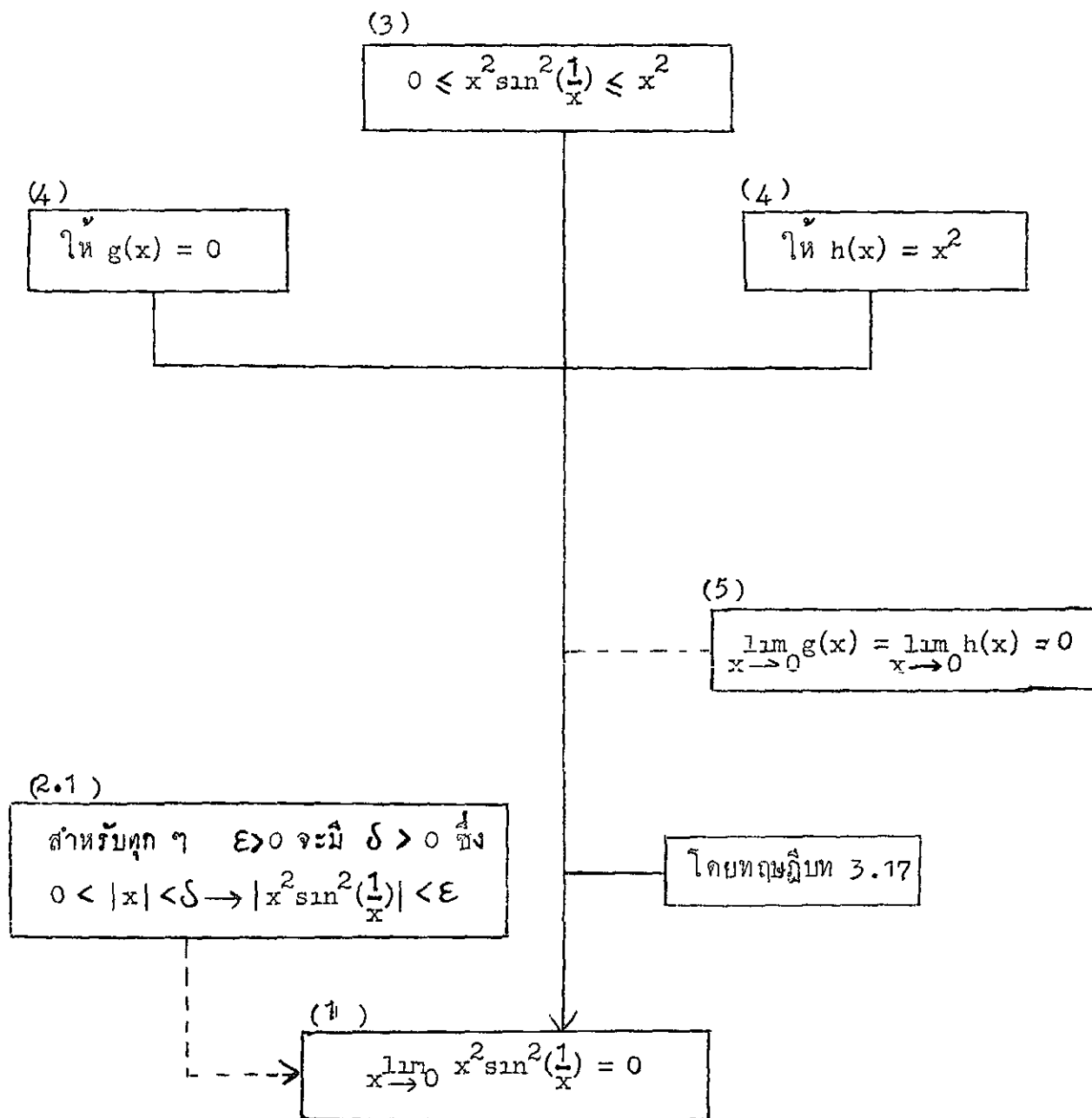
ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 ถ้าให้ $g(x) = 0$, $f(x) = x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ และ $h(x) = x^2$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

จากขั้นที่ 3 และ 5 โดยทฤษฎีบท 3.17 จะได้

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์



พิสูจน์ เนื่องจาก $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

ดังนั้น $0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

เพราะฉะนั้น $0 \leq x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

ให้ $g(x) = 0$ และ $h(x) = x^2$

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

โดยทฤษฎีบท 3.17 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

□

แบบฝึกหัดที่ 19

- ถ้ามี $\delta_1 > 0$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x-a| < \delta_1 \rightarrow f(x) \leq g(x)$
และมี $\delta_2 > 0$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x-a| < \delta_2 \rightarrow g(x) < m$
จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\delta > 0$ สำหรับทุก ๆ x ที่ $0 < |x-a| < \delta \rightarrow f(x) < m$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)| = 0$

<u>ทฤษฎีบท 3.18</u> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

ขั้นที่ 2 ใช้นิยามเขียน $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ เป็นดังนี้

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \iff \text{สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x-a| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon$$

ขั้นที่ 3 ใช้บทนิยามเขียน $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \text{สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon$$

ขั้นที่ 4 พิจารณาขั้นที่ 2 และ 3 ถ้าเราสามารถสรุปข้อความ

$$\text{"สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon \text{"}$$

สมมูลกับข้อความ

$$\text{"สำหรับทุก } \epsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - 0| < \epsilon \text{"}$$

เราจะสามารถสรุปขั้นที่ 1 ได้

$$\text{พิจารณา } ||f(x)| - 0| = ||f(x)|| = |f(x)|$$

ดังนั้นข้อความ "สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \implies ||f(x)| - 0| < \epsilon \text{"}$$

สมมูลกับข้อความ "สำหรับทุก $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)| < \epsilon \text{"}$$

ขั้นที่ 5 เนื่องจาก $|f(x)| = |f(x) - 0|$

ดังนั้น ข้อความ "สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ "
 สมมูลกับข้อความ "สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-0| < \varepsilon$ "

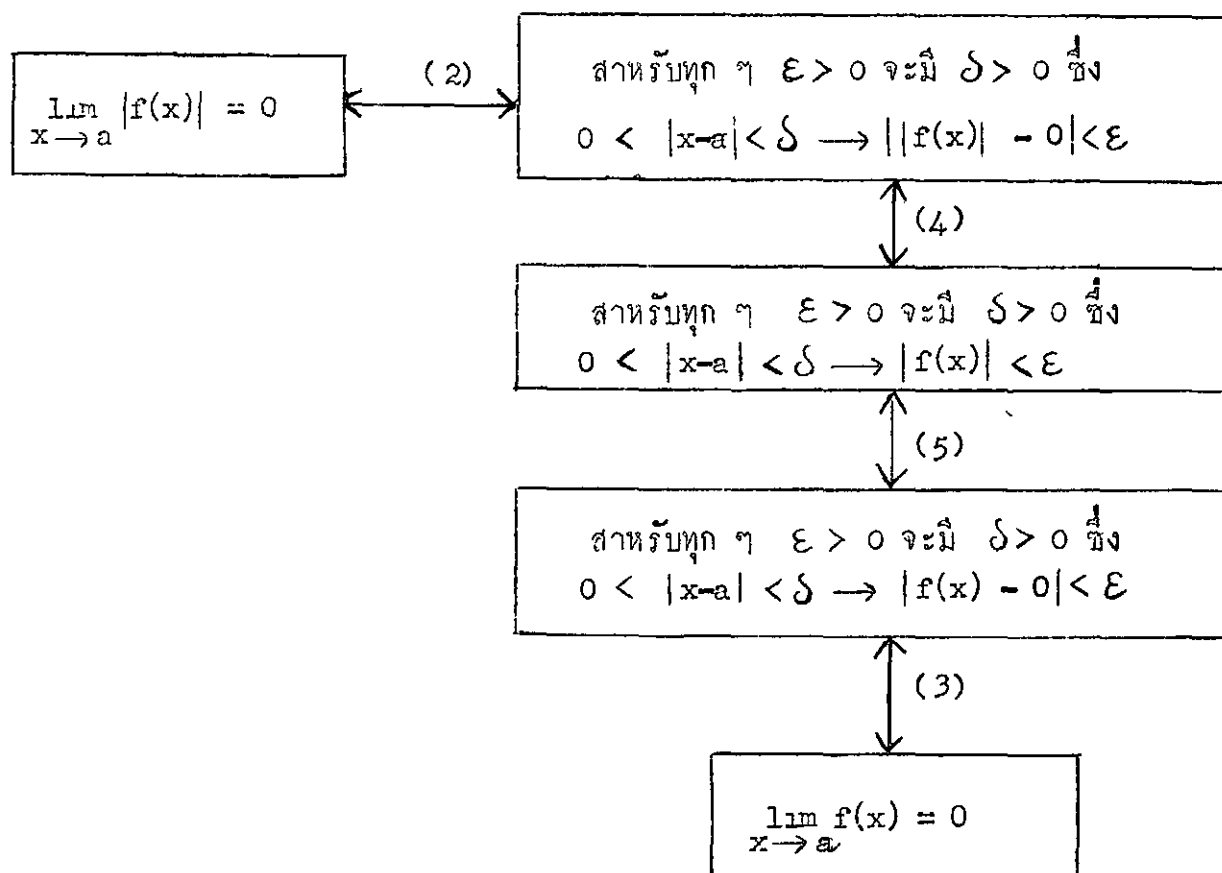
จากขั้นที่ 4 และ 5 จะได้

ข้อความ "สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow ||f(x)| - 0| < \varepsilon$ "

สมมูลกับ "สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$ "

ดังนั้นสรุปขั้นที่ 1 ได้ความต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์



พิสูจน์

พิจารณา $||f(x)| - 0| = ||f(x)|| = |f(x)| = |f(x) - 0|$

ดังนั้น $||f(x)| - 0| < \varepsilon \iff |f(x) - 0| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \iff \text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow ||f(x)| - 0| < \varepsilon$$

$$\iff \text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x-a| < \delta \longrightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

□

ตัวอย่าง 3.8 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

พิสูจน์

พิจารณา

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$$

$$\longrightarrow 0 \leq |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

$$\longrightarrow 0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$$

ให้ $g(x) = 0$, $h(x) = |x|$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \quad \left[\because \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \right]$$

$$\text{และ} \quad g(x) \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq h(x)$$

โดยทฤษฎีบท 3.17 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin(\frac{1}{x})| = 0$

และโดยทฤษฎีบท 3.18 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

□

คำถามชุดที่ 12 จงหาค่า

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(\frac{1}{x})$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos(\frac{2}{x})$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 1 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ขั้นที่ 2 พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

ทฤษฎีบทที่น่าสนใจซึ่งจะสรุปขั้นที่ 1 ได้คือ ทฤษฎีบท 3.10

ลิมิตของผลหาร เท่ากับ ผลหารของลิมิต (ตัวหารไม่เป็น 0)

แต่ $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ดังนั้นใช้ทฤษฎีบท 3.10 ไม่ได้

ขั้นที่ 3 เราจะใช้ทฤษฎีบท 3.17 เพื่อสรุปขั้นที่ 1

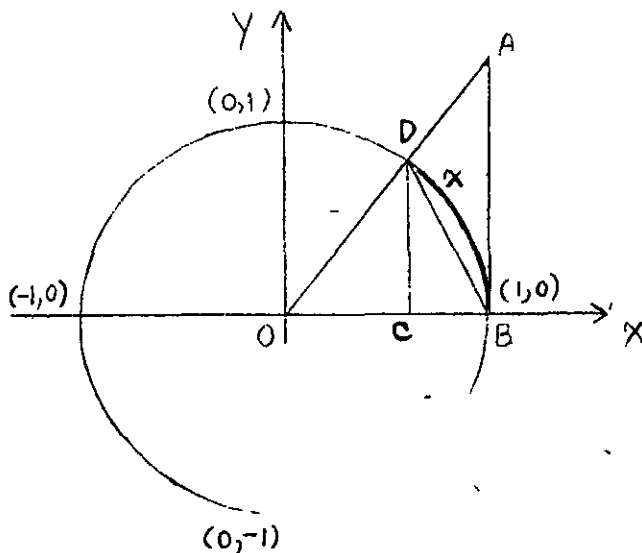
นั่นคือ จะต้องหาฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ โดยที่

$$g(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq h(x)$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$$

ถ้าเป็นไปตามนี้ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ตามต้องการ

ขั้นที่ 4 หาฟังก์ชันดังกล่าวในขั้นที่ 3 โดยพิจารณาจากวงกลมหนึ่งหน่วย



$$\widehat{BD} = x$$

$$\text{จะได้ } |OC| = \cos x \quad \left[\because \cos x = \frac{|OC|}{|OL|} \text{ และ } |OL| = 1 \right]$$

$$|DC| = \sin x$$

จาก $\triangle OAB$ คล้ายกับ $\triangle ODC$ จะได้

$$\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|DC|}{|OC|} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\text{นั่นคือ } |AB| = \tan x$$

พื้นที่ของเซกเตอร์ OBD คือส่วนที่แรเงา

ขั้นที่ 5 จากขั้น 4 พิจารณา

$$\text{พื้นที่ของ } \triangle OCD < \text{พื้นที่ของเซกเตอร์ } OBD < \text{พื้นที่ของ } \triangle OBA$$

$$\text{แต่พื้นที่ของ } \triangle OCD = \frac{1}{2} |OC| |DC| = \frac{1}{2} \sin x \cos x$$

$$\text{พื้นที่ของ } \triangle OBA = \frac{1}{2} |OB| |AB| = \frac{1}{2} \tan x$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

$$\sin x \cos x < x < \tan x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

ขั้นที่ 6 จากขั้นที่ 5 เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

$$\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.17 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

พิสูจน์

$$\text{เนื่องจาก} \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

โดยทฤษฎีบท 3.17 จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



ทฤษฎีบท 3.20 ถ้า $k \neq 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$; $k \neq 0$

แบ่งการพิสูจน์เป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ถ้าตนก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

ตอนที่ 2 ถ้าตนก $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ตอน 1 กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ (1)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 โดยบทนิยามเขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |kx - ka| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 จากขั้นที่ 3 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |k||x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |k||x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

พิจารณาสัญลักษณ์ให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ โดยบทนิยามจะได้

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 6 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|k||x - a| < \delta$ และ $|x - a| < \delta_1$ ในขั้นที่ 4 และ 5

จะได้ $|k||x - a| < \delta \iff |x - a| < \frac{\delta}{|k|}$

ดังนั้น ถ้าให้ $\delta = \delta_1 |k|$ จะได้

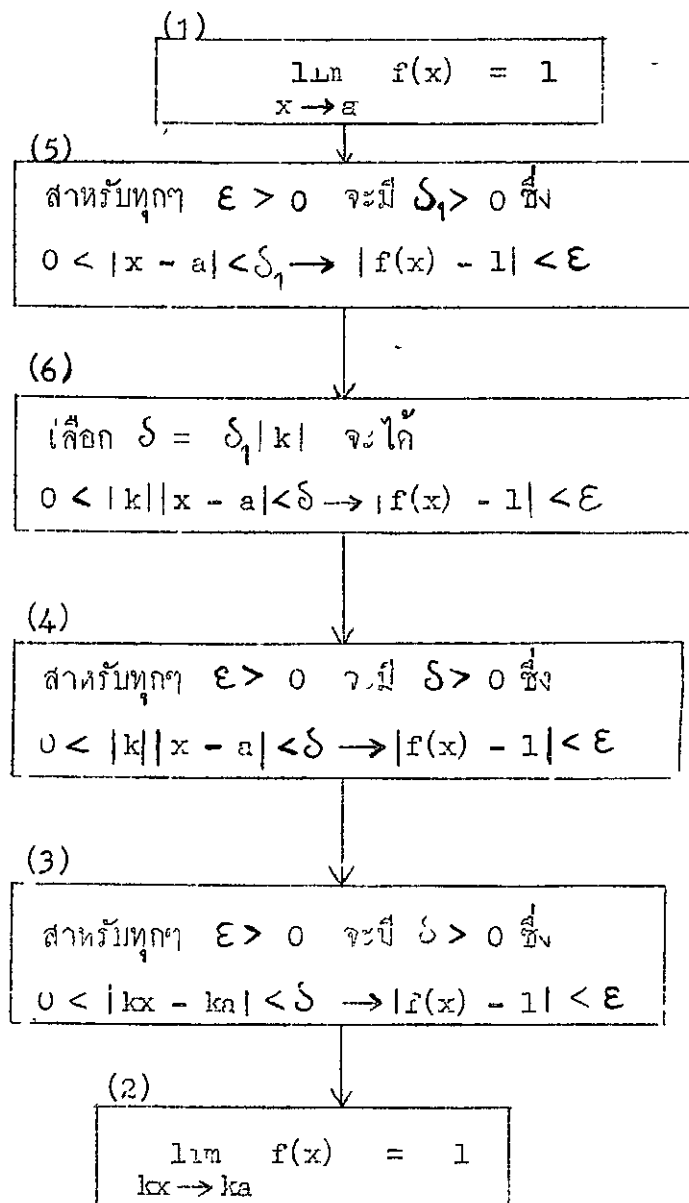
$$0 < |k||x - a| < \delta \rightarrow |k||x - a| < \delta_1 |k|$$

$$\rightarrow |x - a| < \delta_1$$

$$\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |kx - ka| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 2 ได้ตามต้องการ



พิสูจน์ (1) กำหนด $\epsilon > 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ดังนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$

เลือก $\delta = \delta_1 / |k|$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 < |kx - ka| < \delta &\rightarrow 0 < |kx - ka| < \delta_1 |k| \\ &\rightarrow 0 < |k| \cdot |x - a| < \delta_1 |k| \\ &\rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \\ &\rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

ตอน 2 กำหนด $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ลำดับขั้นการวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ (2)

ขั้นที่ 1 สิ่งที่กำหนดให้คือ $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

ขั้นที่ 2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 โดยบทนิยามเขียนใหม่ได้ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 4 กำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

พิจารณาสิ่งที่กำหนดให้ $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$ โดยบทนิยามจะได้

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |kx - ka| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 5 จากขั้นที่ 4 เขียนใหม่ได้เป็น

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |k||x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ขั้นที่ 6 พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $|k||x - a|$ และ $|x - a|$ ในขั้นที่ 3 และ 5 จะได้

$$|x - a| < \delta \iff |k||x - a| < |k|\delta$$

ดังนั้น ถ้าให้ $\delta = \frac{\delta_1}{|k|}$ จะได้

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |x - a| < \frac{\delta_1}{|k|}$$

$$\rightarrow |k||x - a| < \delta_1$$

$$\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

ซึ่งทำให้สรุปขั้นที่ 2 ได้ตามต้องการ

วิเคราะห์แนวการพิสูจน์ (2)

(1)

$$\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$$

(4)

$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |kx - ka| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

(5)

$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |k||x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

(6)

$$\text{เลือก } \delta = \frac{\delta_1}{|k|} \text{ จะได้}$$

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

(3)

$$\text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

พิสูจน์ (2) กำหนด $\varepsilon > 0$ และ $\lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$

$$\text{ดังนั้น มี } \delta_1 > 0 \text{ ซึ่ง } 0 < |kx - ka| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 < |k||x - a| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$0 < |x - a| < \frac{\delta_1}{|k|} \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

เลือก $\delta = \frac{\delta_1}{|k|}$ จะได้

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow 0 < |x - a| < \frac{\delta_1}{|k|}$$

$$\rightarrow 0 < |k| |x - a| < \delta_1$$

$$\rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$



ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$$

$$= 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$$

[โดยทฤษฎีบท 3.20]

$$= 2(1) = 2$$

[โดยทฤษฎีบท 3.19]



สรุป 3 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

$$1. \lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$4. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

และ $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] = k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_n l_n$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$7. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ จะได้ว่า}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)] = l_1 l_2 \dots l_n$$

$$8. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ และ } l \neq 0 \text{ จะมี } \delta > 0 \text{ ซึ่ง}$$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > \frac{|l|}{2}$$

$$9. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ และ } l \neq 0 \text{ จะได้ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

$$10. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \text{ และ } m \neq 0 \text{ จะได้ว่า}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

11. สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n , $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

12. ถ้ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $g(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$ และ

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1 \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

13. สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

$$\lim_{x \rightarrow a} [c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0] = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0$$

14. ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามมีดีกรีจำกัดจะได้ $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

15. ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามมีดีกรีจำกัด ซึ่ง $Q(a) \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

16. สำหรับทุก ๆ $a \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

17. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

18. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$

19. ถ้า $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน D_f และ

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$$

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$22. \quad \forall k \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow a} kx = ka$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \iff \lim_{kx \rightarrow ka} f(x) = 1$$

แบบฝึกหัดที่ 20

1. กำหนด $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ จงพิสูจน์ว่า ถ้ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) = g(x)$

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

3. จงหาค่าของ

1) $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1 - y^2}{y - 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x| + 7}{|x + 2| + 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x^2 + x - 6}$

4. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1|$

5. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 1 + m$ โดยกำหนดให้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \text{และ} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$$

6. จงพิสูจน์ว่า 1.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

7. จงหาค่าของ

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x}$