การคำนวณความร้อนจำเพาะของระบบซึ่งทราบการกระจาย
โดยวิธีฟลักทูเอชัน

ปริญญานิพนธ์

ของ

ไกรสร คำมา

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
15 พฤศจิกายน 2519

การคำนวณความร้อนจำเพาะของระบบกึ่งทราบการกระจาย
โดยวิธีฟลักทูเอชัน

บทคัดย่อ

ของ

ไกรสร กำมา

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
15 พฤศจิกายน 2519

การคำนวณความร้อนจำเพาะของระบบซึ่งทราบการกระจายโดยวิธีฟลักทูเอชัน

การศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ กับฟลักทูเอชันของพลังงานตามทฤษฎีกลศาสตร์ควันตัม และนำความสัมพันธ์นี้มาคำนวณหาความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ของระบบที่ทราบการกระจาย

ระบบที่ใช้ในการคำนวณมี 3 ระบบ คือ

1. ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน
2. ก๊าซอุดมคติแบบโบส
3. ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี

ผลการคำนวณปรากฏว่าความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันของพลังงาน คือ

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = C_v k T^2$$

เมื่อ $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$ = ฟลักทูเอชันของพลังงาน

k = ค่าคงที่ของโบลทซ์แมน

T = อุณหภูมิของระบบ

C_v = ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่

และความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่คำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน มีผลเท่ากับคำนวณโดยวิธีอื่น ๆ.

Calculation of the Specific Heats of Systems with Known Distributions by the Method of Fluctuation

Abstract

by

Krison Khumma

Presented in Partial Fulfilment of the Requirements

for the Master of Education Degree

at Srinakarinwirot University

November, 15, 1976

Calculation of the Specific Heats of Systems with Known Distributions by the Method of Fluctuation.

The purpose of the study is to find the relation between heat capacity at constant volume and quantum machanical fluctuation of energy and to calculate the heat capacities at constant volume of systems with known distributions using this relation.

Calculation is carried out for three systems.

1. Ideal Boltzmann gas
2. Ideal Bose gas
3. Ideal Fermi gas

The result of the calculation shows that

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = C_v K T^2$$

Where $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$ = energy fluctuation

k = Boltzmann constant

T = Temperature of the system

C_v = heat capacity at constant volume

It is found that the heat capacities at constant volume of the systems under consideration calculated by the method of fluctuation have the same expressions as calculated by other methods.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิตได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้.

ประธานกรรมการ

กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ และ
อาจารย์ ดร. ทรงศรี วิมลวณิชย์
ที่ได้กรุณาช่วยเหลือแนะนำและตรวจแก้ไขจนปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จมาได้.

ไกรสร คำมา

สารบาญ

บทที่ 1

บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับความร้อนจำเพาะของระบบทางฟิสิกส์ ทั้งที่เป็นของแข็ง ของเหลว และก๊าซ ได้กระทำกันอย่างแพร่หลายทั้งในด้านการทดลองและทฤษฎี การคำนวณความร้อนจำเพาะทางด้านทฤษฎีนั้น มีความสำคัญในด้านที่ทำให้เข้าใจถึงส่วนประกอบย่อย ๆ ของระบบใหญ่ กล่าวคือ ในการคำนวณความร้อนจำเพาะทางด้านทฤษฎีจำเป็นต้องสมมุติว่า ส่วนประกอบย่อยคืออะตอมหรือโมเลกุลของระบบใหญ่ ซึ่งอาจจะเป็นของแข็ง ของเหลว หรือก๊าซ มีธรรมชาติอย่างไร และเปลี่ยนแปลงอย่างไรเมื่อพลังงานความร้อนของระบบเปลี่ยนแปลง ถ้าผลการคำนวณได้รับการยืนยันจากการทดลอง หรือจากวิธีอื่น ก็ยอมลงความเห็นได้ว่า ข้อสมมุติเกี่ยวกับส่วนประกอบย่อยนั้นเป็นความจริง จึงทำให้เกิดความเข้าใจในธรรมชาติของส่วนประกอบย่อย ซึ่งไม่อาจศึกษา สังเกตโดยตรงได้

การคำนวณความร้อนจำเพาะด้านทฤษฎีของระบบทางฟิสิกส์มีหลายวิธีด้วยกัน ส่วนใหญ่อาศัยความรู้เกี่ยวกับพาร์ติชันฟังชัน (partition function) ของระบบนั้น สำหรับระบบที่มีแรงระหว่างอะตอม หรือโมเลกุล โดยทั่วไปมักจะไม่ทราบพาร์ติชันฟังชัน โดยละเอียดถูกต้อง จำเป็นต้องมีการประมาณ แต่ถ้าระบบที่พิจารณาเป็นระบบที่ไม่มีแรงระหว่างอะตอมหรือโมเลกุล ซึ่งเรียกว่าระบบอุดมคติ (ideal system) จะคำนวณพาร์ติชันฟังชันของระบบได้ถูกต้องแน่นอน และคำนวณความร้อนจำเพาะสืบต่อไปได้ การศึกษาระบบอุดมคติจึงเป็นแนวทางสำหรับนำไปศึกษาระบบจริงได้

เนื่องจากสมบัติของส่วนประกอบย่อยขึ้นอยู่กับ อิทธิพลภายนอกที่มากระทำต่อระบบ เช่น เมื่อให้งานต่อระบบ ส่วนประกอบย่อยจะเปลี่ยนอัตราการเคลื่อนที่และส่งผลออกมาในรูปการเปลี่ยนความดัน อุณหภูมิหรือปริมาตรของระบบ จึงลงความเห็นได้ว่าสมบัติของระบบจะมีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยของผลที่อิทธิพลภายนอกมากระทำกับส่วนประกอบย่อยของระบบ และจากความรู้ทางวิชาสถิติความน่าจะเป็นจากค่าเฉลี่ยมีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ย จึงสรุปได้ว่า

ความบ่ายเบนจากค่าเฉลี่ยของผลที่อิทธิพลภายนอกมากระทำต่อส่วนประกอบย่อย มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยของผลที่อิทธิพลภายนอกมากระทำต่อส่วนประกอบย่อย และจะมีความสัมพันธ์กับสมบัติของระบบด้วย จากความสัมพันธ์ที่กล่าวมานี้ เราจะศึกษาสมบัติบางประการของระบบจากความบ่ายเบนจากค่าเฉลี่ยของผลที่อิทธิพลภายนอกกระทำต่อส่วนประกอบย่อยได้

ทฤษฎีกลศาสตร์เดิม (Classical Statistical Mechanics) ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างความบ่ายเบนจากค่าพลังงานภายในเฉลี่ยกับความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ (Huang, 1963 : 159) คือ

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = kT^2C_v$$

เมื่อ $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$ = กำลังสองของความบ่ายเบนจากค่าพลังงานเฉลี่ย ซึ่งทางวิชาฟิสิกส์เรียกว่าฟลักทูเอชันของพลังงาน (fluctuation of energy)

k = ค่าคงที่ของโบลทซ์แมน (Boltzmann Constant)

T = อุณหภูมิของระบบ

C_v = ความร้อนจำเพาะ หรือความจุความร้อน เมื่อปริมาตรของระบบคงที่

จากที่ทราบวิธีคำนวณฟลักทูเอชันของพลังงานจากค่าพลังงานเฉลี่ยของระบบอุดมคติ (Reif, 1965 : 213) และทราบค่าพลังงานเฉลี่ยของก๊าซอุดมคติ (perfect gas) จึงสามารถคำนวณฟลักทูเอชันของพลังงานของก๊าซอุดมคติได้เท่ากับ $\frac{3}{2}Nk^2T^2$ เมื่อ N เป็นจำนวนอะตอมของระบบ ดังนั้นทฤษฎีกลศาสตร์สถิติชนิดเดิมจะสามารถคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่จากฟลักทูเอชันได้ และทฤษฎีกลศาสตร์สถิติควันตัม (Quantum Statistical Mechanics) ก็ควรคำนวณความร้อนจำเพาะของระบบกลศาสตร์ควันตัม (Quantum Mechanical Systems) จากฟลักทูเอชันได้เช่นกัน

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชัน ตามทฤษฎีกลศาสตร์ควันตัม ของพลังงานของระบบควันตัมอุดมคติ

2. เพื่อคำนวณหาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของระบบควันตัมอุดมคติที่ทราบสมการการกระจาย

ความสำคัญของการค้นคว้า

เพื่อแสดงว่าสำหรับระบบควันตัมอุดมคติ เราสามารถคำนวณหาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ได้จากฟลักทูเอชันของพลังงานของระบบเมื่อทราบสมการการกระจาย

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ศึกษาระบบที่ทราบการกระจายคือ*

   – ก๊าซอุดมคติแบบ โบส (Ideal Bose gas)
   – ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี (Ideal Fermi gas)
   – ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน (Ideal Boltzmann gas)

2. คำนวณเมื่อคิดว่าปริมาตรของระบบคงที่

คำจำกัดความศัพท์เฉพาะ

1 ระบบ (systems) หมายถึงกลุ่มอนุภาคที่อธิบายได้ด้วยทฤษฎีกลศาสตร์สถิติ (Statistical Mechanics)

2. ฟลักทูเอชัน (Fluctuation) หมายถึงความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยยกกำลังสอง เช่น ค่าฟลักทูเอชันของ $n = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ เมื่อ n เป็นปริมาณใด ๆ ที่ต้องการหาค่า และ $\langle\ \rangle$ เป็นเครื่องหมายแทนการเฉลี่ยปริมาณที่อยู่ภายใน.

---

*กล่าวไว้ในภาคผนวก 1.

บทที่ 2

ทฤษฎี

2 ก. การคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างฟลักทูเอชันของพลังงานตามทฤษฎีกลศาสตร์ควันตัมกับความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่

จากทฤษฎีกลศาสตร์ควันตัมสามารถคำนวณค่าเฉลี่ยของปริมาณใด ๆ ได้ดังนี้ คือ

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \psi_{\alpha}^{*} A \psi_{\alpha} \qquad (2,1)$$

$$= \sum_{\alpha} w_{\alpha} \langle \alpha | A | \alpha \rangle \qquad \text{(Schiff, 1968 : 379)}$$

เมื่อ A = ปริมาณใด ๆ ของระบบที่ต้องการคำนวณค่าเฉลี่ย

$\langle - \rangle$ = เครื่องหมายแทนการเฉลี่ยปริมาณใด ๆ ที่อยู่ภายในเครื่องหมาย

w_{α} โอกาสที่จะพบระบบอยู่ในสถานะ α

ψ_{α} ฟังชันคลื่น (wave function) สำหรับสถานะ α

จากนิยามของแมทริกความหนาแน่น (Density Matrix)

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \psi_{\alpha} \psi_{\alpha}^{*} \qquad \text{(Kubo; 1971 : 110)}$$

$$= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle w_{\alpha} \langle \alpha | \qquad (2.2)$$

เมื่อ ρ = แมทริกความหนาแน่น

จากสมการที่ (2.1)

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | w_{\alpha} A | \alpha \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \alpha | \sum_{\alpha'} |\alpha'\rangle \langle \alpha' | w_{\alpha} A | \alpha \rangle$$

$$= \sum \langle \alpha | \sum_{\alpha'} | \alpha' \rangle w_{\alpha} \langle \alpha' | A | \alpha \rangle$$

แทนค่า ρ จากสมการที่ (2.2) และคิดว่า $\alpha = \alpha'$

$$\therefore \langle A \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \rho A | \alpha \rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\, \rho A$$

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\, A \rho \tag{2.3}$$

เมื่อ Tr = เทรซ (trace) หรือผลบวกในแนวทะแยงจากบนซ้ายมายังล่างขวา [diagonal] ของแมทริก (Matrix)

ค่าของแมทริกความหนาแน่นของระบบสำหรับการกระจายแบบคานอนิคอล (Canonical distribution)

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}$$ (Kubo, 1971 : 111)

เมื่อ $e = 2.71828$

$\beta = \frac{1}{kT}$

k = ค่าคงที่ของโบลทซ์แมน (Boltzmann Constant)

T = อุณหภูมิของระบบขณะนั้น

H = แฮมิลโทเนียนของระบบ

$\therefore$ ค่าอนุพันธ์ (derivative) ของ ρ เทียบเฉพาะ β คิดเมื่อปริมาตรของระบบคงที่มีค่าเป็น

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}} \right)$$

$$= \frac{-H e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}} + \frac{e^{-\beta H}\ TrHe^{-\beta H}}{\left[Tr\ e^{-\beta H}\right]^2}$$

$$= -H\left(\frac{e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}}\right) + \left(\frac{e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}}\right) \times TrH\left(\frac{e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}}\right)$$

แต่ $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -H\rho + \rho\, TrH\rho \qquad (2.4)$$

ทำให้สามารถเปลี่ยนค่า $TrH\rho$ ให้อยู่ในรูปค่าเฉลี่ยได้

$$\therefore \quad \frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -H\rho + \rho \langle H \rangle$$

คูณด้วย H

$$\frac{\partial [H\rho]}{\partial \beta} = -H^2\rho + H\rho \langle H \rangle$$

$$\therefore \quad Tr\frac{\partial [H\rho]}{\partial \beta} = Tr\left[-H^2\rho\right] + TrH\rho \langle H \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[TrH\rho\right] = -TrH^2\rho + \langle H \rangle\ TrH\rho$$

เปลี่ยนค่า $TrH\rho$ และ $TrH^2\rho$ ให้อยู่ในรูปค่าเฉลี่ย

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\langle H \rangle = -\langle H^2 \rangle + \langle H \rangle \langle H \rangle \qquad (2.5)$$

แต่ $\beta = \frac{1}{kT}$ จึงเปลี่ยนอนุพันธ์ให้เทียบกับ T แทน β ได้เป็น

$$-kT^2 \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T} = -\langle H^2 \rangle + \langle H \rangle^2$$

ค่า $\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T}$ เป็นค่าความร้อนจำเพาะ และในการคำนวณนี้คิดเมื่อปริมาตรคงที่

$$\therefore \quad -kT^2 C_v = -\langle H^2 \rangle + \langle H \rangle^2$$

เมื่อ C_v = ความร้อนจำเพาะขณะปริมาตรคงที่

ดังนั้นค่าควันตัมฟลักทูเอชั่นของพลังงานจะมีความสัมพันธ์กับความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ดังนี้ $\langle H \rangle^2 - \langle H^2 \rangle = kT^2 C_v$

2 ข. <u>แนวทางในการคำนวณ</u>

การคำนวณค่าพลังงานเฉลี่ยจากสมการการกระจาย จะได้รูปสมการใหม่ดังนี้

$$\langle H \rangle = \frac{\int_0^\infty f(\epsilon)\,\epsilon \; d^3p\,d^3q}{N}$$

และคำนวณค่าพลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ยจาก

$$\langle H^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty f(\epsilon)\,\epsilon^2 \; d^3p\,d^3q}{N}$$

เมื่อ $\langle H \rangle$ = ค่าเฉลี่ยของพลังงาน

$\langle H^2 \rangle$ = ค่าพลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ย

N = จำนวนอนุภาคทั้งหมดของระบบ

$f(\epsilon)$ = จำนวนอนุภาคของระบบที่ควรจะมีในชั้นพลังงาน ϵ

ϵ = ชั้นพลังงานใด ๆ ของระบบ

p = โมเมนตัมของระบบ

q = ระยะทางซึ่งแสดงตำแหน่งของอนุภาคภายในระบบ

เมื่อคำนวณค่าพลังงานเฉลี่ยและค่าพลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ย นำมาหาค่าฟลักทูเอชันของพลังงานได้ดังนี้

$$\text{ค่าฟลักทูเอชันของพลังงาน} = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$$

เมื่อได้ค่าฟลักทูเอชันของพลังงานแล้วนำมาคำนวณค่าความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่จากความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันของพลังงาน คือ

$$C_v = \frac{1}{kT^2} \left[\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right] \qquad (2.6)$$

<u>หมายเหตุ</u> ค่า H ที่กล่าวในบทที่ 2 เป็นค่าแฮมิลโทเนียน แต่ในการคำนวณต่อไปเป็นการคำนวณจากสมการการกระจายค่า H จะเป็นพลังงานภายในของระบบ.

บทที่ 3

คำนวณ

3. ก. <u>การคำนวณความร้อนจำเพาะเนื่องปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน โดยวิธีฟลัคทูเอชัน</u>

พิจารณาสมการ

$$I = \int_0^\infty \epsilon^n e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \,.\, d^3p\, d^3q$$

ในการคำนวณครั้งนี้เป็นการคำนวณก๊าซอุดมคติ จึงไม่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับ q จึงคำนวณโดยเฉพาะได้

$$I = q^3 \int_0^\infty \epsilon^n e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p$$

$$= V \int_0^\infty \epsilon^n e^{-\beta(\epsilon\mu)} d^3p$$ เมื่อ V เป็นปริมาตร

เปลี่ยนจาก คาร์ทีเซียน โคออดิเนท (Cartesian Co-ordinates) เป็น สเฟียริกอล โคออดิเนท (Spherical Co-ordinates)

$$= 4\pi V \int_0^\infty \epsilon^n e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, p^2 dp$$

ในการคำนวณก๊าซอุดมคติถือว่าพลังงานภายในของก๊าซมีพลังงานจลน์เพียงอย่างเดียว ดังนั้น พลังงาน $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ หรือ $p = \sqrt{2m\epsilon}$ เมื่อ p เป็นโมเมนตัม m เป็นมวลของอนุภาคภายในระบบ เพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงเปลี่ยนตัวแปรโมเมนตัม p ให้อยู่–

ในรูปพลังงาน ϵ

$$I = \frac{4\pi V}{2}(2m)^{3/2}\int_0^{\alpha}\epsilon^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d\epsilon$$

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\, e^{\beta\mu}\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon}\,\epsilon^{n+\frac{1}{2}}\, d\epsilon$$

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\, e^{\beta\mu}\, \Gamma(n\tfrac{3}{2})\, \beta^{-(n\frac{3}{2})}$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\epsilon^{n} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p\, d^3q = 2\pi V(2m)^{3/2} e^{\beta\mu}\, \Gamma(n+\tfrac{3}{2})\, \beta^{-(n+\frac{3}{2})} \qquad (3.1)$$

เมื่อ $\Gamma(-)$ คือ แกมมาฟังชัน* (Gamma function)

สมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน คือ

$$n = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$$

$$\therefore N = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p\, d^3q$$

เมื่อ N เป็นจำนวนอนุภาคทั้งหมดของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน

$$N = \int_0^{\infty}\epsilon^{0} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p\, d^3q \qquad (3.2)$$

นำความรู้จากสมการ (3.1) มาใช้ในสมการ (3.2)

$$N = 2\pi V(2m)^{3/2} e^{\beta\mu}\, (\tfrac{3}{2})\, \beta^{-\frac{3}{2}} \qquad (3.3)$$

---

*กล่าวไว้ในภาคผนวก 2

จากแนวการคำนวณค่าพลังงานเฉลี่ย กับพลังงานยกกำลังสองแล้ว เฉลี่ยจากบทที่ 2 และจากสมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน คือ

$$\langle H \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \epsilon\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p\, d^3q \tag{3.4}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \epsilon^2\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\, d^3p\, d^3q \tag{3.5}$$

เมื่อ $\langle H \rangle$ = พลังงานเฉลี่ยของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน

$\langle H^2 \rangle$ = พลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ยของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน

นำความรู้จากสมการ (3.1) มาใช้ในสมการ (3.4) และสมการ (3.5)

$$\langle H \rangle = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{N}\, e^{\beta\mu}\, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \beta^{-5/2} \tag{3.6}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{N}\, e^{\beta\mu}\, \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \beta^{-7/2} \tag{3.7}$$

แทนค่า N จากสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.6) และสมการ (3.7)

$$\langle H \rangle = \frac{3}{2}\beta^{-1} \tag{3.8}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{15}{4}\beta^{-2} \tag{3.9}$$

จากบทที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันของพลังงาน คือสมการ (2.6)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 \right]$$

แทนค่า $\langle H \rangle$ และ $\langle H^2 \rangle$ จากสมการ (3.8) และ (3.9)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{15}{4}\beta^{-2} - \left(\frac{3}{2}\beta^{-1}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{kT^2} \times \frac{3}{2}\beta^{-2}$$

แต่ $\beta = \frac{1}{kT^2}$

$\therefore$ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน $= \frac{3}{2}k$ (3.10)

จะเห็นได้ว่าความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน จะเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ แสดงว่าความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่แบบโบลทซ์แมนจะมีค่า $\frac{3}{2}k$ ในทุก ๆ อุณหภูมิ

3. ข. <u>การคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส โดยวิธีฟลักทูเอชัน</u>

พิจารณาสมการ

$$I = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\, d^3p\, d^3q$$

คำนวณตัวแปร q ให้อยู่ในรูปปริมาตร V

$$I = V\int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\, d^3p$$

เปลี่ยนจากการ์ทีเซียนโคออดิเนท เป็นสเฟียริคอลโคออดิเนท

$$= 4\pi V\int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\, p^2 dp$$

เปลี่ยนตัวแปรโมเมนตัม p ให้อยู่ในรูปพลังงาน ϵ โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{หรือ} \qquad p = \sqrt{2m\epsilon}$$

$$= \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{n+\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\, d\epsilon$$

คูณด้วย $e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ ทั้งเศษและส่วน

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{n+\frac{1}{2}} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{-e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + 1}\, d\epsilon$$

ใช้ทฤษฎีไบโนเมียล* (Binomial theorem) กระจายเทอม $\dfrac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$

ให้อยู่ในรูปอนุกรม

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\int_0^\infty \epsilon^{n+\frac{1}{2}} e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + e^{-2\beta(\epsilon-\mu)} + \cdots\right)$$

---

*กล่าวไว้ในภาคผนวก 3.

$$I = 2\pi V(2m)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\epsilon^{n+\frac{1}{2}}\,\ell^{-l\beta(\epsilon-\mu)}\,d\epsilon$$

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\ell^{l\beta\mu}\int_{0}^{\infty}\epsilon^{n+\frac{1}{2}}\,\ell^{-l\beta(\epsilon-\mu)}\,d\epsilon$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก ϵ มาเป็น $l\beta\epsilon$ และให้ $l\beta\epsilon = x$

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ell^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}}\int_{0}^{\infty}x^{n+\frac{1}{2}}\,\ell^{x}\,dx$$

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ell^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}}\,\Gamma(n+\tfrac{3}{2})$$

$$\therefore \int_{0}^{\infty}\frac{\epsilon^{n}}{\ell^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\,d^3p\,d^3q = 2\pi V(2m)^{3/2}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\,\Gamma(n+\tfrac{3}{2})\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ell^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}} \qquad (3.11)$$

จาก สมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบส คือ $n = \dfrac{1}{\ell^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$

$$N = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\ell^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\,d^3p\,d^3q \qquad (3.12)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนอนุภาคทั้งหมดของก๊าซอุดมคติแบบโบส

นำความรู้จากสมการ (3.11) มาใช้ในสมการ (3.12)

$$N = 2\pi V(2m)^{3/2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\beta^{-3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}} \tag{3.13}$$

จากสมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบส และจากแนวทางการคำนวณหาค่าพลังงานเฉลี่ย $\langle H \rangle$ กับพลังงานจากกำลังสองแล้วเฉลี่ย $\langle H^2 \rangle$ ของบทที่ 2

$$\langle H \rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\infty}\frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\,d^3p\,d^3q \tag{3.14}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\infty}\frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\,d^3p\,d^3q \tag{3.15}$$

นำความรู้จากสมการ (3.11) มาคำนวณในสมการ (3.14) และสมการ (3.15)

$$\langle H \rangle = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{N}\,\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)\beta^{-5/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{5/2}} \tag{3.16}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{N}\,\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)\beta^{-7/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{7/2}} \tag{3.17}$$

แทนค่า N' จากสมการ (3.13) ลงในสมการ (3.16) และสมการ (3.17)

$$\langle H \rangle = \frac{3}{2}\,\frac{\beta^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{5/2}}}{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}}} \qquad (3.18)$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{15}{4}\,\frac{\beta^{-2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{7/2}}}{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}}} \qquad (3.19)$$

จากสมการ (2.6) บทที่ 2

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2\right]$$

แทนค่า $\langle H \rangle$ และ $\langle H^2 \rangle$ จากสมการ (3.18) และสมการ 3.19) ลงในสมการ (2.6)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{15}{4}\beta^{-2}\frac{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{7/2}}}{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}}} - \frac{9}{4}\beta^{-2}\left\{\frac{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{5/2}}}{\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{3/2}}}\right\}^2\right] \qquad (3.20)$$

3. ข.1 <u>พิจารณาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส เมื่ออุณหภูมิสูง คือ</u> $T \longrightarrow \infty$

จากสมการ (3.12)

$$N = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\, d^3p\, d^3q$$

$$N = 2\pi v(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\, d\epsilon \qquad (3.21)$$

N จากสมการ (3.21) เป็นจำนวนอนุภาคทั้งหมดของก๊าซอุดมคติแบบโบส ซึ่งจะมีค่าคงที่เสมอ

เมื่อ N คงที่ $T \longrightarrow \infty$

$$\therefore \quad \beta\mu \longrightarrow -\infty^{*} \qquad (3.22)$$

จากสมการ (3.20)

$$C_V = k\left[\frac{15\left(e^{\beta\mu}+\frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{7}{2}}}+\frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{7}{2}}}+\cdots\right)}{4\left(e^{\beta\mu}+\frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}}+\cdots\right)} - \frac{9\left(e^{\beta\mu}+\frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{5}{2}}}+\frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{5}{2}}}+\cdots\right)^2}{4\left(e^{\beta\mu}+\frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}}+\cdots\right)^2}\right]$$

---

* พิสูจน์ในภาคผนวก 6

$$C_v = k\left[\frac{15\left(1+\frac{e^{\beta\mu}}{2^{5/2}}+\frac{e^{2\beta\mu}}{3^{5/2}}+\cdots\right)}{4\left(1+\frac{e^{\beta\mu}}{2^{3/2}}+\frac{e^{2\beta\mu}}{3^{3/2}}+\cdots\right)} - \frac{9\left(1+\frac{e^{\beta\mu}}{2^{5/2}}+\frac{e^{2\beta\mu}}{3^{5/2}}+\cdots\right)^2}{4\left(1+\frac{e^{\beta\mu}}{2^{3/2}}+\frac{e^{2\beta\mu}}{3^{3/2}}+\cdots\right)^2}\right] \qquad (3.23)$$

จาก (3.22) $T \longrightarrow \infty \;,\; \beta\mu \longrightarrow -\infty$

เมื่ออุณหภูมิสูงแทน $\beta\mu$ ด้วย $-\infty$ ลงในสมการ (3.23)

$$C_v = k\left[\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\right]$$

$\therefore$ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบสที่อุณหภูมิสูงมีค่า

$$C_v = \frac{3}{2}k \qquad (3.24)$$

3. ข.2 พิจารณาความร้อนจำเพาะของก๊าซอุดมคติแบบโบสที่อุณหภูมิต่ำ

คือ $T \longrightarrow 0$

จากสมการ (3.21) คือ

$$N = 2\pi V(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\,d\epsilon$$

สมการ (3.21) จะมีความหมายเมื่อ $N \geq 0$ เพราะ $N =$ จำนวนอนุภาค

ถ้า $N \geq 0$ แสดงว่า $\beta(\epsilon-\mu) \geq 0$

แต่ $\beta\epsilon \geq 0 \quad \therefore \beta\mu \leq 0$

จากสมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบส

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$

เมื่อ $T \longrightarrow 0$, $\epsilon \longrightarrow 0$

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$$ เมื่อ N_0 = จำนวนอนุภาคเมื่อ $T \longrightarrow 0$

$$e^{\beta(\epsilon-\mu)} = \frac{N_0+1}{N_0}$$

$$\beta\mu = \ln \frac{N_0}{N_0+1}$$

ในการคำนวณจำนวนอนุภาคจะมีมากคือ $N_0 \longrightarrow \infty$ ดังนั้น $\ln \frac{N_0}{N_0+1} \approx 0$

$$\beta\mu \approx 0$$

เมื่อ $T \longrightarrow 0$, $\beta\mu \approx 0$ แต่ $\beta\mu \leq 0$ แสดงว่าเมื่อ $T \longrightarrow 0$ ค่า $\beta\mu \longrightarrow 0$ แต่ไม่มากกว่าศูนย์

จากสมก^^ (3.13) ถ้า $\beta\mu = 0$ (เมื่อ $T \longrightarrow 0$)

$$N = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} \Gamma(\tfrac{3}{2}) k^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} \zeta(\tfrac{3}{2}) \quad (3.25)$$

เมื่อ ζ ($-$) คือ รีแมน ซีตาฟังชัน* (Riemann Zeta function)

---

*กล่าวไว้ในภาคผนวก ?

จากสมการ (3.25) ถ้าอุณหภูมิ T ลดลงจะทำให้จำนวนอนุภาค N' ลดลงด้วย และจะไม่เป็นตามการกำหนดให้ N คงที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับจำนวนอนุภาค N ก่อน $\beta\mu = 0$ เพื่อให้เป็นไปตามการกำหนดให้ จำนวนอนุภาค N คงที่ จึงเลือกอุณหภูมิ T ที่ทำให้ N มีค่าเท่ากับจำนวนก่อนที่ $\beta\mu = 0$ ในกรณีที่ $\beta\mu = 0$ อุณหภูมิที่กล่าวถึง คืออุณหภูมิที่ทำให้ $\beta\mu$ เริ่มเป็น 0 กำหนดให้อุณหภูมิที่จุดนี้ $= T_0$ *

$$\therefore N = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) k^{\frac{3}{2}} T_0^{\frac{3}{2}} \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) \qquad (3.25)$$

แทนค่า $\beta\mu = 0$ ลงในสมการ (3.16) และสมการ (3.17)

$$\langle H \rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) k^{\frac{5}{2}} T^{\frac{5}{2}} \zeta\left(\tfrac{5}{2}\right) \qquad (3.26)$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) k^{\frac{5}{2}} T^{\frac{5}{2}} \zeta\left(\tfrac{7}{2}\right) \qquad (3.27)$$

แทนค่า N จากสมการ (3.25) ลงในสมการ (3.26) และสมการ (3.27)

$$\langle H \rangle = \frac{3k\,T^{\frac{5}{2}}\,\zeta\left(\tfrac{5}{2}\right)}{2\,T_0^{3/2}\,\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)} \qquad (3.28)$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{15k^2\,T^{\frac{7}{2}}\,\zeta\left(\tfrac{7}{2}\right)}{4\,T_0^{\frac{3}{2}}\,\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)} \qquad (3.29)$$

---

* ตำแหน่ง T_0 แสดงในกราฟในภาคผนวก 4

จากบทที่ 2 สมการที่ (2.6)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2\right]$$

แทนค่า $\langle H_o\rangle$ และ $\langle H^2\rangle$ จากสมการ (3.26) และสมการ (3.27) ลงในสมการ (2.6)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{15k^2T^{7/2}\,\zeta(\frac{7}{2})}{4T_o^{3/2}\,\zeta(\frac{3}{2})} - \frac{9}{4}\left\{\frac{kT^{5/2}\,\zeta(\frac{5}{2})}{T_o^{3/2}\,\zeta(\frac{3}{2})}\right\}^2\right]$$

$$= \frac{kT^{3/2}}{T_o^{3/2}}\left\{\frac{15}{4}\times 0.4313169 - (0.7706737)^2\frac{T^{3/2}}{T_o^{3/2}}\right\}$$

∴ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบสที่อุณหภูมิต่ำ โดยวิธีฟลักทูเอชัน

$$C_V = \frac{kT^{3/2}}{T_o^{3/2}}\left\{1.617 - 0.594\frac{T^{3/2}}{T_o^{3/2}}\right\} \qquad (3.30)$$

3. ค. <u>การคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มีโดยวิธีฟลักทูเอชัน</u>

พิจารณาสมการ

$$I = \int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}\, d^3p\, d^3q$$

คำนวณระยะทาง q ให้ออกมาในรูปปริมาตร V

$$I = V\int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d^3p\, d^3q$$

เปลี่ยนจากคาทีเซียน โคออดิเนท เป็น สเฟียริคอล โคออดิเนท

$$= 4\pi V \int_0^\infty \frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, p^2 dp$$

เปลี่ยนตัวแปรโมเมนตัม p ให้อยู่ในรูปพลัง ϵ โดยใช้ความสัมพันธ์ $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$

$$= 2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{n+\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d\epsilon\,.$$

$$= 2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}\, d\epsilon$$

ใช้ทฤษฎีไบโนเมียลกระจายเทอม $\frac{1}{1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}$ ให้อยู่ในเทอมอนุกรม

$$= 2\pi V (2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \epsilon^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \left(1 - e^{-\beta(\epsilon-\mu)} + e^{-2\beta(\epsilon-\mu)} - + - + \cdots\right) d\epsilon$$

$$I = 2\pi V(2m)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\int_0^{\infty}\epsilon^{n+\frac{1}{2}}e^{-l\beta(\epsilon-\mu)}\,d\epsilon$$

ให้ $u = l\beta\epsilon$ และเปลี่ยนตัวแปรจาก ϵ เป็น u

$$= 2\pi V(2m)^{3/2}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty}u^{n+\frac{1}{2}}e^{-u}\,du$$

$$= 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}}\Gamma(n+\tfrac{3}{2})$$

$$\therefore \int_0^{\infty}\frac{\epsilon^n}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\,d^3p\,d^3q = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\beta^{-(n+\frac{3}{2})}\Gamma(n+\tfrac{3}{2})\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{n+\frac{3}{2}}} \quad (3.31)$$

จากสมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ และแนวทางการคำนวณค่าพลังงานเฉลี่ยกับพลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ย จะสามารถคำนวณจำนวนอนุภาค N พลังงานเฉลี่ย $\langle H\rangle$ และพลังงานยกกำลังสองแล้วเฉลี่ย $\langle H^2\rangle$

$$N = \int_0^{\infty}\frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\,d^3p\,d^3q \quad (3.32)$$

$$\langle H\rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d^3p\, d^3q \tag{3.33}$$

$$\langle H^2\rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d^3p\, d^3q \tag{3.34}$$

นำความรู้จากสมการ (3.31) มาคำนวณสมการ (3.32) สมการ (3.33) และสมการ (3.34)

$$N = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\beta^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}} \tag{3.35}$$

$$\langle H\rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\beta^{-\frac{5}{2}}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{5}{2}}} \tag{3.36}$$

$$\langle H^2\rangle = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{N}\beta^{-\frac{7}{2}}\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right)\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{7}{2}}} \tag{3.37}$$

แทนค่า N จากสมการ (3.35) ลงในสมการ (3.36) และสมการ (3.37)

$$\langle H \rangle = \frac{\frac{3}{2}\beta^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{5}{2}}}}{\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}} \tag{3.38}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{\frac{15}{4}\beta^{-2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{7}{2}}}}{\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}} \tag{3.39}$$

จากบทที่ 2 สมการ (2.6)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2\right]$$

แทนค่า $\langle H \rangle$ และ $\langle H^2 \rangle$ จากสมการ (3.38) และ (3.39)

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{15\beta^{-2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{7}{2}}}}{4\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}} - \left\{\frac{3\beta^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{5}{2}}}}{2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}}\right\}^2\right] \tag{3.40}$$

3. ค.1 พิจารณาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มีที่อุณหภูมิสูงคือ $T \longrightarrow \infty$

จากสมการ (3.32)

$$N = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d^3p\, d^3q$$

$$N = 2\pi y\,(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}\, d\epsilon \qquad (3.41)$$

จากสมการ (3.41) N เป็นจำนวนอนุภาคทั้งหมดของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี ซึ่งจะมีค่าคงที่ เมื่อ N คงที่ และ $T \longrightarrow \infty$

$$\therefore \quad \beta\mu \longrightarrow -\infty^{*}$$

จากสมการ (3.40) คือ

$$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\frac{15\beta^{-2}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{7}{2}}}}{4\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}} - \left\{\frac{3\beta^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{5}{2}}}}{2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}}\right\}^2\right]$$

แทนค่า β ด้วย $\frac{1}{kT}$

---

* พิสูจน์ในภาคผนวก 6

$$C_V = k\left[\frac{15\left(e^{\beta\mu} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{7}{2}}} + \frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{7}{2}}} - + \cdots\right)}{4\left(e^{\beta\mu} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}} - + \cdots\right)} - \left\{\frac{3\left(e^{\beta\mu} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{5}{2}}} - + \cdots\right)}{2\left(e^{\beta\mu} - \frac{e^{2\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{3\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}} - + \cdots\right)}\right\}^2\right]$$

$$= k\left[\frac{15\left(1 - \frac{e^{\beta\mu}}{2^{\frac{7}{2}}} + \frac{e^{2\beta\mu}}{3^{\frac{7}{2}}} - + \cdots\right)}{4\left(1 - \frac{e^{\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{2\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}} - + \cdots\right)} - \frac{9\left(1 - \frac{e^{\beta\mu}}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{e^{2\beta\mu}}{3^{\frac{5}{2}}} - + \cdots\right)^2}{4\left(1 - \frac{e^{\beta\mu}}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^{2\beta\mu}}{3^{\frac{3}{2}}} - + \cdots\right)^2}\right]$$

จากการพิจารณาสมการ (3.4) ทราบว่าเมื่อ $T \longrightarrow \infty$ ค่า $\beta\mu \longrightarrow -\infty$
เมื่อแทนค่า $\beta\mu$ ด้วย $-\infty$ จะทำให้อนุกรมมีค่า $= 1$
ดังนั้นเมื่อ $T \longrightarrow \infty$

$$C_V = k\left(\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\right)$$

$\therefore$ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มีที่อุณหภูมิสูงคำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน มีค่า

$$C_V = \frac{3}{2}k \qquad (3.42)$$

3. ค.2 <u>พิจารณาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มีที่อุณหภูมิต่ำมาก</u> จากสมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1}$$

เมื่อ $T = 0$ อนุภาคของระบบจะอยู่ในชั้นพลังงานต่ำ และจะมี $n = 1$ อนุภากเท่านั้น*
ดังนั้นจากสมการการกระจายเมื่อ $T = 0$

$$n = 1 \quad \text{เมื่อ } \epsilon < \mu$$

$$n = 0 \quad \text{เมื่อ } \epsilon > \mu \; ,$$

พิจารณาพลังงาน ϵ ทำให้จำนวนอนุภาคจาก 1 เปลี่ยนเป็น 0 และจาก 0 เปลี่ยนเป็น 1 ค่า n จะเป็น $\frac{1}{2}$ ที่จุดนั้นเพราะจำนวนอนุภาค n คิดมาจาก โอกาสที่อนุภาคควรจะอยู่ในชั้นพลังงานนั้น (probable distribution) ให้พลังงานที่ทำให้ $n = \frac{1}{2}$ เป็น ϵ_F ค่า ϵ_F นี้เรียกว่า พลังงานเฟอร์มี

$$\therefore \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1}$$

$$e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} + 1 = 2$$

$$e^{\beta(\epsilon_F - \mu)} = 1$$

$$\beta(\epsilon_F - \mu) = \ln 1$$

$$\epsilon_F - \mu = 0$$

$$\mu = \epsilon_F \qquad (3.43)$$

$$\therefore \text{ เมื่อ } \quad T \longrightarrow 0, \mu \rightarrow \epsilon_F \text{ และ } \beta\mu \longrightarrow \infty \qquad (3.44)$$

---

* ตามลักษณะของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี ถือว่าในแต่ละชั้นของพลังงานมีอนุภาคได้ไม่เกิน 1 อนุภาค.

จากสมการ (3.40)

$$C_v = k\left[\frac{15\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{7}{2}}}}{4\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}} - \left\{\frac{3\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{5}{2}}}}{2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{e^{l\beta\mu}}{l^{\frac{3}{2}}}}\right\}^2\right] \qquad (3.40)$$

ถ้า $T \longrightarrow 0, \beta\mu \longrightarrow \infty$ อนุกรมต่าง ๆ ในสมการ (3.40) ไม่สามารถคำนวณค่าจำกัดของอนุกรมได้

ดังนั้นความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ ที่อุณหภูมิต่ำมากจะคำนวณออกมาโดยตรงไม่ได้ จะต้องใช้การคำนวณโดยวิธีประมาณ และในการประมาณนี้ควรประมาณเพียงค่าเดียว จึงจะได้ค่าที่ใกล้เคียงความจริง

ในการคำนวณจึงคำนวณค่าพลังงานเฉลี่ย $\langle H\rangle$ แล้วนำมาหาค่าฟลักทูเอชัน จากความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานเฉลี่ยกับฟลักทูเอชัน จากสมการ (2.5) ของบทที่ 2 คือ

$$\frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\beta} = -\langle H^2\rangle + \langle H\rangle^2$$

พิจารณาสมการ

$$I = \int_0^{\infty} f(\epsilon)\,\frac{d\phi}{d\epsilon}\,d\epsilon$$

พาร์เชียล อินทีเกรชัน (partial integration)* 1 ครั้ง

$$= -\int_0^{\infty} \phi\epsilon\,\frac{df}{d\epsilon}\,d\epsilon$$

---

*กล่าวในภาคผนวก 3

กระจายเทอม $\phi(\in)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมโดยใช้การกระจายของเทเลอร์ *

$$I = -\int_0^\infty \left\{ \phi(\mu) + (\in-\mu)\phi'(\mu) + \frac{1}{2}(\in-\mu)^2\phi''(\mu) + \cdots \right\} \frac{df}{d\epsilon} d\epsilon$$

$f(\in)$ เป็นฟังชันการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มี คือ $f(\in) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}$

$$\therefore I = -\int_0^\infty \left\{ \phi(\mu) + (\epsilon-\mu)\phi'(\mu) + \frac{1}{2!}(\epsilon-\mu)^2\phi''(\mu) + \cdots \right\} \frac{(-\beta)\, d\epsilon}{\left\{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1\right\}\left\{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}+1\right\}}$$

เปลี่ยนตัวแปรจาก $\in$ เป็น $\beta(\epsilon-\mu)$ และให้ $\beta(\epsilon-\mu) = \eta$

$$I = \int_0^\infty \left\{ \phi(\mu) + \frac{\eta}{\beta}\phi'(\mu) + \frac{1}{2!} \times \frac{\eta^2}{\beta^2}\phi''(\mu) + \cdots \right\} \frac{\beta}{\left\{e^{\eta}+1\right\}\left\{e^{-\eta}+1\right\}} \times \frac{d\eta}{\beta}$$

แต่ $T \longrightarrow 0$ ทำให้ $-\beta\mu \longrightarrow -\infty$

$$I = \int_{-\infty}^\infty \left\{ \phi(\mu) + \frac{\eta}{\beta}\phi'(\mu) + \frac{\eta^2}{2!\beta^2}\phi''(\mu) + \cdots \right\} \frac{e^{-\eta}}{(e^{\eta}+1)^2} d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\phi(\mu) e^{-\eta}}{(e^{\eta}+1)^2} d\eta + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\beta^n n!} \int_{-\infty}^\infty \eta^n \phi(\mu) \frac{e^{-\eta}}{(e^{\eta}+1)^2} d\eta$$

---

* กล่าวในภาคผนวก 3

$$I = \phi(\mu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(\mu)}{\beta^{n}n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{n}e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx$$

$\because$ เทอม $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx = 1$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{n}e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx = 0$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนคี่

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{n}e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty}\frac{x^{n}e^{-x}}{(e^{x}+1)^2}\,dx$ ถ้า n เป็นเลขจำนวนคู่

$$= 2n!\left(1-\frac{2}{2^{n}}\right)\zeta(n)^{*}$$

$$\therefore\ I = \phi(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(\beta)^{-2}\phi''(\mu) + \frac{7\pi^4}{360}(\beta)^{-4}\phi''''(\mu) + \cdots$$

ให้ $\phi'(\mu) = g(\mu)$

---

* กล่าวถึงในภาคผนวก 5

$$\therefore \int_0^\infty g(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon = \int_0^\mu g(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2} g'(\mu) + \frac{7}{360}\pi^4 g'''(\mu) + \cdots \qquad (3.45)$$

สมการ (3.45) จะเป็นการคำนวณได้โดยประมาณสำหรับก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ คิดที่อุณหภูมิต่ำมาก

พลังงานเฉลี่ยของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ คือ

$$\langle H \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon)\, d^3p\, d^3q$$

$$= \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\int_0^\infty \epsilon^{3/2} f(\epsilon)\, d\epsilon \qquad (3.46)$$

นำความรู้จากสมการ (3.45) มาใช้

$$\langle H \rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\left[\frac{2}{5}\mu^{\frac{5}{2}} + \frac{\pi^2 \mu^{\frac{1}{2}}}{4\beta^2} + \cdots \right] \qquad (3.47)$$

จำนวนอนุภาค N ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ เมื่ออุณหภูมิต่ำมาก คือ

$$N = \int_0^\infty f(\epsilon)\, d^3p\, d^3q$$

$$\cong 2\pi V(2m)^{3/2}\int_0^\infty \epsilon^{\frac{1}{2}} f(\epsilon)\, d\epsilon$$

$$= 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{12\mu^{\frac{1}{2}}\beta^2} + \cdots \right] \qquad (3.48)$$

จำนวนอนุภาค N ของก๊าซอุณคติแบบเฟอร์มี เมื่ออุณหภูมิเป็นศูนย์

$$N = \int_{0}^{\epsilon_F} f(\epsilon)\, d^3p\, d^3q$$

ที่ $T = 0$ $f(\epsilon) = 1$

$$\therefore N = 2\pi V(2m)^{3/2} \int_{0}^{\epsilon_F} \epsilon^{\frac{1}{2}}\, d\epsilon$$

$$= 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} \epsilon_F^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \qquad (3.49)$$

จำนวนอนุภาค N จากสมการ (3.48) และสมการ (3.49) เป็นสมการเดียวกัน

$$\therefore \epsilon_F^{\frac{3}{2}} = \mu^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{8\beta^2 \mu^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.50)$$

จากสมการ (3.50) จะคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างศักดาเคมี μ กับพลังงานเฟอร์มี ϵ_F ของก๊าซอุณคติแบบเฟอร์มี โดยประมาณได้ดังนี้ คือ

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12\beta^2 \epsilon_F^2} + \cdots \right] \qquad (3.51)$$

$$\therefore \mu^{\frac{5}{2}} = \epsilon_F^{\frac{5}{2}} \left[1 - \frac{5}{24} \left(\frac{\pi}{\beta \epsilon_F} \right)^2 + \cdots \right] \qquad (3.52)$$

และ $$\mu^{\frac{1}{2}} = \epsilon_F^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{24}\left\{\frac{\pi}{\beta\epsilon}\right\}^2 + \cdots \right] \qquad (3.53)$$

แทนค่า $\mu^{\frac{5}{2}}$ และ $\mu^{\frac{3}{2}}$ จากสมการ (3.52) และ (3.53) ลงในสมการที่ (3.47) และตัดเทอมที่มีกำลัง β น้อยกว่า (− 2) ทิ้ง .

$$\therefore \langle H\rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{N}\left[\frac{2\epsilon_F^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{\pi^2\epsilon_F^{\frac{1}{2}}}{12\beta^2} + \frac{\pi^2\epsilon_F^{\frac{1}{2}}}{4\beta^2} \right] \qquad (3.54)$$

จากสมการ (3.54)

$$\langle H\rangle = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon_F^{\frac{5}{2}}}{N}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\beta\epsilon_F}\right)^2 \right] \qquad (3.55)$$

$$\therefore \frac{\partial\langle H\rangle}{\partial\beta} = \frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{5}{2}}}{N}\left[\frac{1}{6}\frac{\pi^2(-2)}{\epsilon_F^2\beta^3} \right]$$

$$= -\frac{2\pi^3 V(2m)^{\frac{3}{2}}\epsilon_F^{\frac{1}{2}}}{3\beta^3 N}$$

แทนค่า N จากสมการ (3.49)

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\frac{\pi^2}{2\beta^3 \epsilon_F}$$

จากบทที่ 2 สมการที่ (2.5) $\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \beta} = -\langle H^2 \rangle + \langle H \rangle^2$

$$\therefore \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{\pi^2}{2\beta^3 \epsilon_F}$$

แทนค่า β ด้วย $\frac{1}{kT}$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = \frac{\pi^2 k^3 T^3}{2 \epsilon_F}$$

จากบทที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักทูเอชั่นของพลังงานกับความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่

เป็น $$C_V = \frac{1}{kT^2}\left[\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right]$$

$\therefore$ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ เมื่ออุณหภูมิต่ำมาเป็น

$$C_V = \frac{\pi^2 k^3 T^3}{2kT^2} = \frac{\pi^2 k^2 T}{2 \epsilon_F} \qquad (3.56)$$

บทที่ 4

วิเคราะห์ผลการคำนวณ

4. ก. พิจารณาเมื่ออุณหภูมิสูง

จากสมการการกระจายของ

ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน $n = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$ (4.1)

ก๊าซอุดมคติแบบโบส $n = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}$ (4.2)

ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ $n = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$ (4.3)

พิจารณาเมื่ออุณหภูมิสูงมากจะทำให้เทอม $e^{\beta(\epsilon-\mu)}$ มีค่ามาก 1 ที่นำไปบวกหรือลบจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ $e^{\beta(\epsilon-\mu)}$ จึงตัดทิ้งได้

ทำให้สมการที่ (4.2 และ (4.3) เปลี่ยนเป็น

$$n = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$$

เท่ากับ สมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน ความร้อนจำเพาะ ที่ปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส และก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ เมื่ออุณหภูมิสูงมากจะมีค่าเท่ากับความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน

ในการคำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน จะได้ค่าความร้อนจำเพาะของก๊าซอุดมคติแบบโบส ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ เมื่ออุณหภูมิสูงมากเท่ากับ ความร้อนจำเพาะของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน [จากสมการ (3.10), (3.24) และสมการ (3.42)] คือ $C_V = \frac{3}{2}k$

การคำนวณด้วยวิธีฟลักทูเอชัน เป็นการคำนวณความร้อนจำเพาะเพียงส่วนประกอบย่อยเดียว ถ้าระบบรวมมี N ส่วนประกอบย่อย

∴ ความร้อนจำเพาะของระบบ $= \frac{3}{2} k N$ ซึ่งเท่ากับผลการคำนวณโดยวิธีอื่น ๆ (Mayer and Mayer, 1940 : 441)

4. ข. พิจารณาเมื่ออุณหภูมิต่ำ

4. ข.1 ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ คือ $C_V = \frac{3}{2} N k$ เสมอ และการคำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชันมีค่า $C_V = \frac{3}{2} N k$ เช่นเดียวกับวิธีอื่น ๆ

4. ข.2 ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส เมื่ออุณหภูมิต่ำ จากการคำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน มีค่า [จากสมการ (3.30)]

$$C_V = \frac{k T^{3/2}}{T_0^{3/2}} \left[1.617 - 0.594 \frac{T^{3/2}}{T_0^{3/2}} \right]$$

$$= \left[\frac{1.617\, k}{T_0^{3/2}} \right] T^{3/2} - \left[\frac{0.594\, k}{T_0^{3}} \right] T^{3}$$

T_0* เป็นค่าคงที่ ที่เป็นตัวแปร คือ T เมื่ออุณหภูมิ T น้อยมาก T^3 จะน้อยกว่า $T^{\frac{3}{2}}$ มาก จึงตัดเทอมที่มี T^3 ทิ้ง $\therefore C_V \approx 1.617 \frac{k T^{3/2}}{T_0^{3/2}}$

∴ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส ซึ่งมี N ส่วนประกอบย่อย คำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน ขณะอุณหภูมิต่ำ

$$C_V = 1.617 N k \left[\frac{T}{T_0} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.5)$$

---

*แสดงตำแหน่ง T_0 ไว้ในภาคผนวก 4

ความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบโบส คำนวณจากพลังงานภายในของระบบ (Fetter and Walecka, 1971 : 42) มีค่า

$$C_V = 1.925\, N k \left[\frac{T}{T_0}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{4.6}$$

สมการ (4.5) และสมการ (4.6) คือว่ามีค่าความร้อนจำเพาะเท่ากัน เพราะคำนวณโดยประมาณ และ $C_V \propto T^{3/2}$ เหมือนกันทั้งวิธีฟลักทูเอชันและจากพลังงานภายในระบบ ซึ่งเมื่อนำมาเขียนกราฟจะได้โครงร่างที่เหมือนกัน แสดงว่า เมื่ออุณหภูมิต่ำ การคำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชันสำหรับก๊าซอุดมคติแบบโบส จะได้ผลเหมือนกับวิธีอื่น ๆ ,

4. ข.3 ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ คิดที่อุณหภูมิต่ำมาก คำนวณโดยวิธีฟลักทูเอชัน จากสมการ(3.56) ถ้ามี N ส่วนประกอบย่อย

$$C_V = N \times \frac{\pi^2 k^2 T}{2\epsilon_F}$$

$$= \frac{N k^2 \pi^2 T}{2\epsilon_F} \tag{4.7}$$

ความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิที่อุณหภูมิต่ำ คิดจากเอนโทรปี (entropy) ของระบบ (Fetter and Walecka, 1971 : 48)

$$C_V = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\epsilon_F} \tag{4.8}$$

จากสมการ (4.7) และ (4.8) เท่ากัน แสดงว่าสำหรับอุณหภูมิต่ำ สามารถคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่โดยวิธีฟลักทูเอชันได้เช่นเดียวกับวิธีอื่น ๆ

จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่โดยวิธีฟลักทูเอชันและวิธีอื่นเท่ากัน จึงสรุปได้ว่าการคำนวณความร้อนจำเพาะโดยวิธีฟลักทูเอชันสามารถคำนวณได้จริง.

บทที่ 5

บทย่อและสรุป

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีความมุ่งหมายดังนี้

1. เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันตามทฤษฎีกลศาสตร์ควันตัม (Quantum Mechanical Fluctuation) ของพลังงาน

2. เพื่อคำนวณหาความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของระบบควันตัมอุดมคติ (Ideal Quantum Mechanical System) ที่ทราบสมการการกระจาย

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

1. ศึกษาระบบที่ทราบการกระจาย คือ
   - ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน
   - ก๊าซอุดมคติแบบโบส
   - ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ
2. คำนวณเมื่อคิดว่าปริมาตรคงที่

สรุปผลที่ได้จากการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่กับควันตัมเมคานิคอลฟลักทูเอชันของพลังงาน มีความสัมพันธ์เหมือนความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะ เมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันของพลังงาน ซึ่งคำนวณโดยใช้ทฤษฎีกลศาสตร์สถิติแบบเดิม

2. สามารถคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่กับฟลักทูเอชันของพลังงาน

3. ผลการคำนวณความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ของระบบที่ทราบการกระจายโดยวิธีฟลักทูเอชันมีค่าเท่ากับการคำนวณโดยวิธีอื่น ๆ.

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Arfken, George, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York, 1968, 704 pp.

Fetter, Alexander L. and Walecka, John Dirk Quantum Theory of Many Particle Systems, McGraw-Hill Book, Company, New York, 1971, 601 pp.

Huang, Kerson, Statistical Mechanics, John Wiley & Sons, Inc New York, 1963, 470 pp.

Kubo, Ryogo, Statistical Mechanics, North-Holland Publishing Company-Amsterdam, Londom, 1971, 425 pp.

Mayer, Joseph Edward and Mayer, Maria Goeppert, Statistical Mechamics, John Wiley & Sons, Inc, London 1940, 495 pp.

Reif, F., Fundamentals of Statical and thermal Physics, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965, 651 pp.

Rossi, Hugo, Advanced Calculus, W.A. Benjamin, Inc. New York, 1970, 732 pp.

Schiff, Leonard I., Quantum Mechanics, McGraw-Hill Kogakusha, LTD Tokyo, 1968 ; 544 pp.

ภาคผนวก

ภาคผนวก 1

1 ลักษณะก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน ก๊าซอุดมคติแบบโบส และก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ

ระบบอุดมคติ เป็นระบบที่ถือว่าอนุภาคของระบบมีพลังงานเนื่องจากการเคลื่อนที่ของระบบเท่านั้น โดยไม่คิดถึงพลังงานจากแหล่งอื่น ๆ เช่น ประจุไฟฟ้า แรงโน้มถ่วง โดยถือว่าเมื่ออนุภาคแต่ละอนุภาคอยู่ไกลกันมาก จนทำให้พลังงานจากแหล่งอื่น ๆ ภายในระบบไม่มีผลต่ออนุภาค

ดังนั้นพลังงานของระบบอุดมคติ $\epsilon = \frac{P^2}{2m}$

เมื่อ ϵ = พลังงานของอนุภาคของระบบ

P = โมเมนตัม

m = มวลของอนุภาค

1.1 ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน คือระบบอุดมคติที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีลักษณะขนาดและพลังงานเท่ากันทุกอนุภาค

1.2 ก๊าซอุดมคติแบบโบส คือระบบอุดมคติที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีลักษณะและขนาดเท่ากัน แต่พลังงานอาจไม่เท่ากันโดยถือว่าพลังงานของอนุภาคมีเป็นชั้น ๆ ของพลังงาน แต่ไม่จำกัดจำนวนอนุภาคในชั้นพลังงาน

1.3 ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ คือระบบอุดมคติที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีขนาดและลักษณะเหมือนกัน แต่มีพลังงานไม่เท่ากันเลย หรือกล่าวว่าในแต่ละชั้นพลังงานจะมีอนุภาคได้ไม่เกิน 1 ตัว

จากที่กล่าวมาแสดงว่าก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน จะเป็นก๊าซชนิดเดียวกันกับก๊าซอุดมคติของกลศาสตร์สถิติเดิมนั่นเอง ดังนั้น สมบัติของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน จะเหมือนกับสมบัติของก๊าซอุดมคติของกลศาสตร์สถิติเดิม

สมการการกระจายของก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน คือ

$$n = e^{-\beta(\epsilon - \mu)}$$

ของก๊าซอุดมคติแบบโบส

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$$

ของก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

เมื่อ n = จำนวนอนุภาคที่ควรจะมีในชั้นพลังงาน

ϵ = ชั้นพลังงานต่าง ๆ ของระบบ

e = 2.71828

$\beta = \frac{1}{kT}$

T = อุณหภูมิขณะนั้น

k = 1.38054×10^{-16} เออร์ก / องศาเคลวิน

ภาคผนวก 2

2.1 แกมมาฟังชั่น (Gamma function) $\Gamma(-)$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^{z}$$

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ถ้านิยามแกมม่าฟังชันในรูปอินทิเกรตจะเป็น

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad \text{เมื่อ } z > 0$$

2.2 รีแมน ซีตาฟังชัน (Riemann Zeta function) คือ $\zeta(-)$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{เมื่อ } s > 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

ภาคผนวก 3

3.1 ทฤษฎีไบโนเมียล (Binomial theorem) เป็นทฤษฎีที่ใช้กระจายเทอมยกกำลังให้เป็นรูปอนุกรม โดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการ

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots R_n$$

ในการคำนวณครั้งนี้ ดัดแปลงทฤษฎีไบโนเมียลเป็น

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots (-x)^{n-1} +$$

และ

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

3.2 การกระจายแบบเทเลอร์ (Taylor's Expansion) เป็นการกระจายฟังชันโดยอาศัยทฤษฎีคณิตศาสตร์ชั้นสูง (Calculus) คือ

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

3.3 พาร์เชียล อินทีเกรชัน (partial integration)

$$\int_a^b v\,du = vu\Big|_a^b - \int_a^b u\,dv$$

ภาคผนวก 4

จากสมการการกระจายของ

ก๊าซอุดมคติแบบโบลทซ์แมน $n = e^{-\beta(\epsilon - \mu_K)}$

ก๊าซอุดมคติแบบโบส $n = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu_B)} - 1}$

ก๊าซอุดมคติแบบเฟอร์มิ $n = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu_F)} + 1}$

จากสมการการกระจายทั้ง 3 สมการ ถ้าก๊าซทั้ง 3 ชนิดมีจำนวนอนุภาคเท่ากัน อุณหภูมิเดียวกัน แสดงว่า $\mu_F > \mu_K > \mu_B$

เมื่อ μ_F = ศักดาเคมี ของก๊าซอุดมคติแบบ เฟอร์มิ

μ_K = ศักดาเคมี ของก๊าซอุดมคติแบบ โบลทซ์แมน

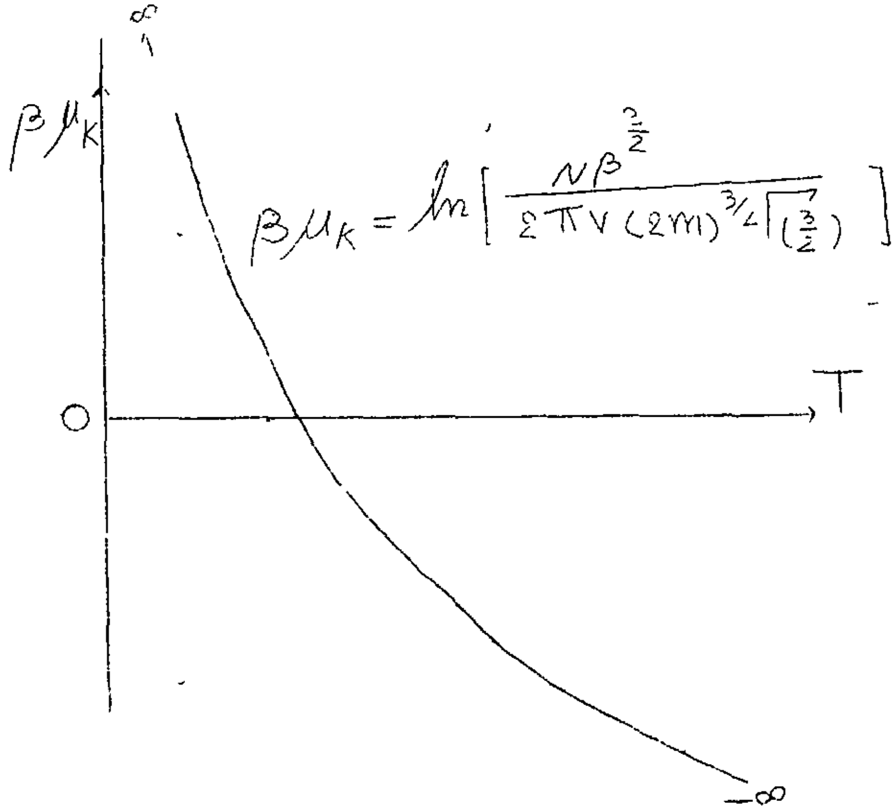
μ_B = ศักดาเคมี ของก๊าซอุดมคติแบบ โบส

จากสมการ (3.3) คือ

$$N = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} e^{\beta\mu_K}\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)\beta^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \beta\mu_K = \ln\left[\frac{N\beta^{\frac{3}{2}}}{2\pi V(2m)^{3/2}\,\Gamma\!\left(\frac{3}{2}\right)}\right]$$

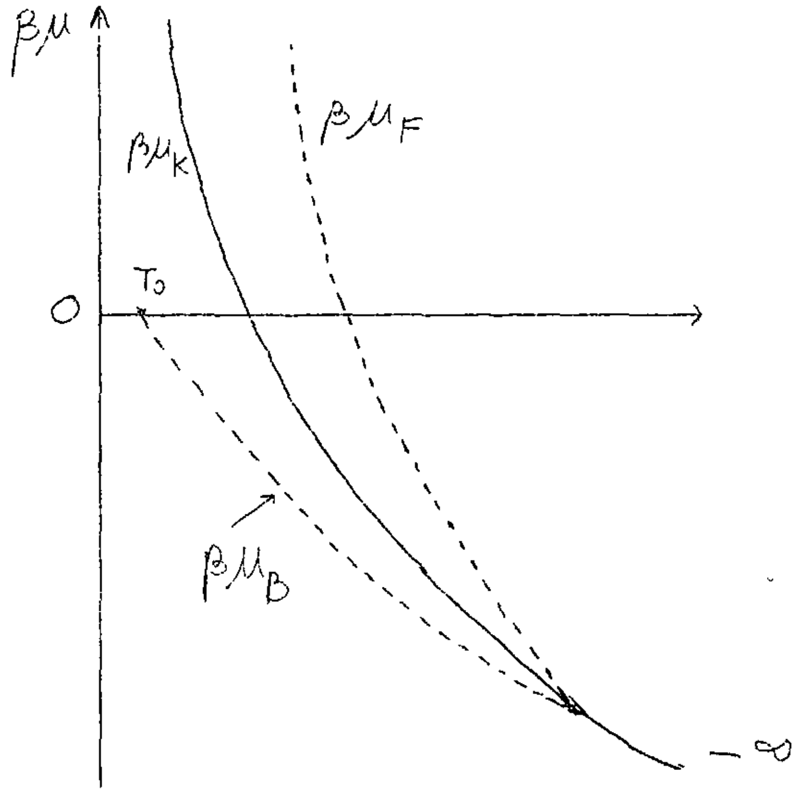
เมื่อนำมาเขียนกราฟระหว่าง $\beta\mu_K$ กับอุณหภูมิ T จะเป็น



จากพิจารณาเมื่อ $T \longrightarrow 0$ ของก๊าซอุณหภูมิแบบโบส คือ $\mu_K \leqslant 0$ (รูป 2ก)

และ $\mu_F > \mu_K > \mu_B$

ดังนั้นจะเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T กับ $\beta\mu$ จึงเป็น



<u>จากกราฟแสดงว่า</u>

ตำแหน่ง μ_B เริ่ม $= 0$ ที่อุณหภูมิ T_0

เมื่อ $T \longrightarrow \infty$

ค่า $\beta\mu_F, \beta\mu_K, \beta\mu_B \longrightarrow -\infty$

เมื่อ $T \longrightarrow 0$ ค่า $\beta\mu_F, \beta\mu_K \longrightarrow \infty$

$$\beta\mu_B \longrightarrow 0$$

ภาคผนวก 5

$$-\int_0^\infty (\epsilon-\mu)^n \frac{df}{d\epsilon}\, d\epsilon = +\beta^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n e^x}{(e^x+1)^2}\, dx$$

$$= +2\beta^{-n}\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x+1)^2}\, dx$$

เมื่อ n เป็นเลขจำนวนคู่

$$= -2\beta^{-n}\int_0^\infty x^n \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{e^x+1}\right\} dx$$

$$= 2\beta^{-n}\, n\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x+1}\, dx$$

$$= 2n\beta^{-n}\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(l+1)x}\, dx$$

$$= 2n!\,\beta^{-n}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)^n}$$

$$= 2n!\left\{\sum_{l=\text{เลขจำนวนคี่}}^{\infty} l^{-n} - \sum_{l=\text{เลขจำนวนคู่}}^{\infty} l^{-n}\right\}\beta^{-n}$$

$$= 2n!\,\beta^{-n}\left(1-\frac{2}{2^n}\right)\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n}$$

$$= 2n!\,\beta^{-n}\left(1-2^{1-n}\right)\zeta(n)$$

$$\zeta(n) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-n}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

ภาคผนวก 6

$$N = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1} d\epsilon$$

ถ้า N คงที่ และ $T \longrightarrow \infty$

diff w.r.t ϵ

$$0 = 2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} \pm 1}$$

$$0 = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$$

$$\therefore \beta(\epsilon-\mu) = \infty$$

$$\beta\epsilon - \beta\mu = \infty \qquad (ก)$$

พิจารณา $\beta\epsilon$ $\because$ $\beta = \frac{1}{kT}$

$$\therefore \beta\epsilon = \frac{\epsilon}{kT}$$

เมื่อ $T \longrightarrow 0$ และค่า ϵ เป็นค่าคงที่ใด ๆ $\therefore$

$$\therefore \beta\epsilon = \frac{\epsilon}{\infty} = 0$$

จากสมการ (ก)

$$\therefore -\beta\mu \longrightarrow \infty$$

หรือ $\beta\mu \longrightarrow -\infty$