

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ได้รับการสอนโดย
การให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง

สารนิพนธ์
ของ
พนม จองเฉลิมชัย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
กันยายน 2553

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ได้รับการสอนโดย
การให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง

สารนิพนธ์
ของ
พนม จงเฉลิมชัย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
กันยายน 2553
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ได้รับการสอนโดย
การให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง

บทคัดย่อ
ของ
พนม จงเฉลิมชัย

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษา
กันยายน 2553

พนม จงเฉลิมชัย. (2553). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการ
แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง. สารนิพนธ์ กศ.ม.
(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์: รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์.

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังที่ได้รับการสอนโดยการ
ให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชา
คณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์
ร้อยละ 60

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียน
อัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน 30 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบ
กลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยมีห้องเป็นหน่วยการสุ่ม (Sampling Unit) โดยใช้แบบ
แผนการวิจัยแบบ One – Group Pretest – Posttest Design สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลคือ
t – test for Dependent Sample และ t – test one group

ผลการศึกษาพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าก่อนได้รับ
การสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าเกณฑ์
ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่า
เกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF MATHAYOMSUKSA 3 STUDENTS' ACADEMIC ACHIEVEMENT AND
MATHEMATICS PROBLEM SOLVING ABILITY ON TRIGONOMETRIC RATIOS BEING
TAUGHT THROUGH STUDENTS' PROBLEM POSING

AN ABSTRACT
BY
PANOM JONGCHALOEMCHAI

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Secondary Education
at Srinakharinwirot University
September 2010

Panom Jongchaloemchai. (2010). **A Study of Mathayomsuksa 3 Students' Academic Achievement and Mathematics Problem Solving Ability on Trigonometric Ratios being Taught Through Students' Problem Posing**. Master's Project, M.Ed. (Secondary Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University.
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Chaweewan Sawetamalya.

The purposes of this research were to compare Mathayomsuksa 3 students' academic mathematics achievement on trigonometric ratios before and after being taught through students' problem posing. Mathematics achievement and mathematics problem solving ability after being taught trigonometry through students' problem posing to the criterion of 60%

The subjects of this study were thirty Mathayomsuksa three students of Assumption College Thonburi School, Bangkae District, Bangkok, in second semester of 2009 academic year. The students were randomly selected by using Cluster Random Sampling. The One – Group Pretest – Posttest Design was employed. The t – test Dependent Sample and t – test one group were used for data analysis.

The results of this study revealed that :

1. The academic achievement of Mathayomsuksa three students after being taught through students' problem posing was higher than before the instruction at .01 level of significance.
2. The academic achievement of Mathayomsuksa three students after being taught through students' problem posing was higher than the criterion of 60% at .01 level of significance.
3. The Mathematics Problem Solving Ability of students after being taught through students' problem posing was higher than the criterion of 60% at .01 level of significance.

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร และคณะกรรมการสอบ
ได้พิจารณาสารนิพนธ์เรื่อง การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหา
คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ได้รับการสอนโดยการ
ให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของ พนม จงเฉลิมชัย ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วน
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

อาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์)

ประธานคณะกรรมการบริหารหลักสูตร

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

คณะกรรมการสอบ

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย ชูชาติ)

ประธาน

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมาลย์)

กรรมการสอบสารนิพนธ์

.....
(รองศาสตราจารย์ นิภา ศรีไพโรจน์)

กรรมการสอบสารนิพนธ์

อนุมัติให้รับสารนิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....
(รองศาสตราจารย์ ดร.องอาจ นัยพัฒน์)

คณบดีคณะศึกษาศาสตร์

วันที่ เดือน พ.ศ. 2553

ประกาศคุณูปการ

สารนิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาและให้คำปรึกษา คำแนะนำตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ อย่างดียิ่งจาก รศ.ดร.ฉวีวรรณ เศรษฐมัลย์ รศ.ดร.สมชาย ชูชาติ ผศ.ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล และ รศ.นิภา ศรีไพโรจน์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์จำเริญ เจียวหวาน อาจารย์วิไลวรรณ อำไพพัทธ์ และ อาจารย์รัชฎาณี ฐานา ที่กรุณาตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่อง และให้คำแนะนำในเรื่องแผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบประจำหน่วย และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ทำให้สารนิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการ และคณะครูอาจารย์โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรีทุกท่านที่สนับสนุนและเป็นกำลังใจให้เป็นอย่างดีตลอดมา และขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และ 4 โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี ปีการศึกษา 2552 ที่ให้ความร่วมมือในการทดลองและทดลองหาคุณภาพเครื่องมือ

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และทุกคนในครอบครัว ตลอดจนเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาการมัธยมศึกษา (การสอนคณิตศาสตร์) และเพื่อนๆ โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี ที่คอยให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจให้ตลอดมา ทำให้สารนิพนธ์ครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ท้ายสุดนี้ผู้ทำสารนิพนธ์ ขอโน้มรำลึกถึงพระคุณบิดา มารดา ที่วางรากฐานการศึกษาแก่ผู้ทำสารนิพนธ์ คุณค่าและประโยชน์ของสารนิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา ครูอาจารย์ทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนและประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้ทำสารนิพนธ์ด้วยดีเสมอมา

พนม จองเฉลิมชัย

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	3
ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า.....	4
ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า.....	4
ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	4
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	4
ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	4
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	4
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	5
กรอบแนวคิดในการศึกษาค้นคว้า.....	7
สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า.....	7
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการตั้งโจทย์ปัญหา(Problem posing).....	8
ความหมายของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์.....	8
ความสำคัญของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์.....	10
ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์.....	11
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์.....	13
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	14
ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	14
ประเภทปัญหาคณิตศาสตร์.....	16
องค์ประกอบที่ส่งเสริมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	18
กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	20
ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	24
แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	31
บทบาทของครูในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	35
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์.....	37

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
2 (ต่อ)	
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.....	42
ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.....	42
องค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	45
สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.....	47
การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	49
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.....	52
3 วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	55
กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง.....	55
ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	55
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	55
เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	55
ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	55
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	56
แบบแผนที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า.....	61
วิธีดำเนินการ.....	61
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	62
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	62
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	67
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล.....	67
การวิเคราะห์ข้อมูล.....	67
ผลการวิเคราะห์.....	68
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	71
ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า.....	71
สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า.....	71
วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า.....	71

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 (ต่อ)	
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า.....	73
อภิปรายผล.....	74
ข้อสังเกตในการศึกษาค้นคว้า.....	75
ข้อเสนอแนะ.....	76
 บรรณานุกรม.....	 78
 ภาคผนวก.....	 88
ภาคผนวก ก.....	89
ภาคผนวก ข.....	104
ภาคผนวก ค.....	111
ภาคผนวก ง.....	182
 ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์.....	 184

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แบบแผนการทดลอง One – Group Pretest – Posttest Design.....	61
2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ของนักเรียน ก่อนและหลังได้รับการสอนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหา ด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.....	68
3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียน ตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองเทียบกับเกณฑ์.....	69
4 ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอน โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองเทียบกับเกณฑ์.....	70
5 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ แบบเลือกตอบ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 ข้อ.....	90
6 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับ มัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient).....	91
7 ค่า p ค่า q และค่า pq ในการหาค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 ข้อ.....	94
8 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบวัดความสามารถใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัยเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 8 ข้อ.....	95
9 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถ ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient).....	96
10 ค่า s_i และค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient) ของแบบทดสอบ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3.....	103

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
11 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อน และหลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียน ตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	105
12 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียน ตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน).....	107
13 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียน ตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 56 คะแนน).....	109

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ.....	21

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

สังคมทุกวันนี้และในอนาคตเป็นสังคมฐานความรู้ที่การเรียนรู้ ความรู้ และนวัตกรรมเป็นปัจจัยสำคัญในการพัฒนา จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องส่งเสริมและสร้างสภาพการณ์เพื่อการเรียนรู้อย่างต่อเนื่อง เพื่อพัฒนาคุณภาพ ประสิทธิภาพและขีดความสามารถของคนส่วนใหญ่ในประเทศ (วันชัย วัฒนชัยวิทย์. 2548: 19) สิ่งที่สำคัญที่สุดของการพัฒนาประเทศ คือการพัฒนาคน คนที่มีคุณภาพจะช่วยนำประเทศชาติให้เจริญก้าวหน้ารู้เท่าทันการเปลี่ยนแปลงของสังคมโลก การศึกษามีบทบาทในการพัฒนาคุณภาพคน การพัฒนาให้คนมีคุณภาพต้องพัฒนาทั้งด้านสติปัญญา อารมณ์ และสังคม การพัฒนาสติปัญญาต้องให้รู้จักวิเคราะห์ให้เหตุผลเชิงวิทยาศาสตร์ รักการเรียนรู้ และสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ด้วยความตระหนักถึงความสำคัญในเรื่องนี้จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องเปิดโอกาสให้ทุกคนสามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และมีเหตุผล มีความคิดสร้างสรรค์ สามารถเรียนรู้ได้ตลอดชีวิต รู้เท่าทันโลกเพื่อพร้อมรับการเปลี่ยนแปลง สามารถสั่งสมทุนทางปัญญา เพื่อการพัฒนาตนเองและสังคม (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2545: 23)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังช่วยพัฒนาคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์มีความสมดุลทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ สามารถคิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2544: 2) สำหรับในสภาพการจัดการเรียนการสอนในปัจจุบันจะเห็นได้ว่า มีสภาพที่ไม่เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้กับนักเรียนเท่าใดนัก เนื่องจากปัจจัยหลากหลายประการทำให้นักเรียนไม่กล้าที่จะซักถาม หรือตอบคำถามที่ครูถาม เมื่อนักเรียนไม่เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนี้ก็ทำให้นักเรียนขาดความตั้งใจเรียนในเรื่องต่อไป ดังนั้นครูควรมีวิธีการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนทุกคนมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น และมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนมากยิ่งขึ้นเพื่อที่จะทำให้นักเรียนรู้สึกว่าเป็นส่วนหนึ่งของชั้นเรียน (พิมพ์พร อัมมทินพงศ์. 2550: 20) และจากสภาพการณ์ในปัจจุบันจะพบว่าสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นรอบตัวเรามีความเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและตลอดเวลา กระแสความเปลี่ยนแปลงทำให้เรารับรู้ข้อมูลข่าวสารมากเกินไป การพิจารณาวิเคราะห์ต่อสิ่งดังกล่าวเป็นเรื่องที่ถูกกลบเลือนไป สิ่งจำเป็นเร่งด่วนที่จะต้องปลูกฝังให้เกิดขึ้นกับเยาวชนคือการฝึกให้เด็กคิดเป็น รู้จักใช้วิจารณญาณในการตัดสินใจ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2545: คำชี้แจง) แต่จากการจัดการเรียนการสอนที่ผ่านมา พบว่า ครูส่วนใหญ่จะมุ่งสอนเฉพาะเนื้อหาในชั้นเรียนจนลืมนึกถึง

การพัฒนาในด้านต่างๆ เช่น บุคลิกภาพ ความรับผิดชอบ การทำงานเป็นหมู่คณะ ทั้งนี้อาจจะมีสาเหตุมาจากเป้าหมายการศึกษาที่มักกำหนดความสามารถที่ติดอยู่กับรายวิชา ไม่ครอบคลุมถึงการนำความรู้ไปใช้ จึงมุ่งสอนเนื้อหา จนทำให้ขาดการเชื่อมโยงและผสมผสานการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ และมักจะใช้วิธีการสอนแบบบรรยายเป็นส่วนใหญ่ ทำให้ผู้เรียนอาจจะไม่มีโอกาสได้ร่วมคิดร่วมทำร่วมกันแก้ปัญหาที่กำลังเรียนอยู่มากนัก และในการแก้ปัญหาที่ปฏิบัติอยู่เป็นเพียงการทำโจทย์แบบฝึกหัดซึ่งทำเป็นรายบุคคล ผู้เรียนมีโอกาสนับปฏิบัติกิจกรรมและฝึกการแก้ปัญหาอย่างมาก ผู้เรียนแทบจะไม่มีปฏิสัมพันธ์หรือสื่อสารกันในขณะที่การเรียนการสอนดำเนินการอยู่ ทำให้ขาดการพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพในสังคม (สมเดช บุญประจักษ์. 2540: 2; สายสมร สุขะจิระ. 2543: 1)

สำหรับความสามารถในการแก้ปัญหาเป็นสิ่งจำเป็นในการดำรงชีวิตของทุกคนทุกวัย และทุกสังคม นักการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการพัฒนาหลักสูตรมีความเห็นสอดคล้องกันว่าความสามารถในการแก้ปัญหาในการคิดแก้ปัญหาควรจะเป็นจุดมุ่งหมายที่สำคัญในหลักสูตร ดังที่ สาโรช บัวศรี (2518: 7 – 8) ได้กล่าวว่า “ความสามารถทางด้านการคิดแก้ปัญหาควรเป็นจุดหมายปลายทางที่สำคัญของการจัดการศึกษา” และจากสมาคมศึกษานิเทศก์คณิตศาสตร์ ในสหรัฐอเมริกา (The National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM]) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับนักเรียนที่จะเติบโตไปสู่สังคมชาวสวราว่า จะต้องเป็นผู้ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (NCSM. 1989: 471) ทั้งนี้เพราะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ และเป็นเครื่องประยุกต์ศักยภาพเหล่านั้นไปสู่สถานการณ์ใหม่ การแก้ปัญหาช่วยให้นักเรียนเรียนรู้ข้อเท็จจริง ทักษะ มโนคติและหลักการต่างๆ โดยการแสดงการประยุกต์ใช้ในคณิตศาสตร์และที่สัมพันธ์กับสาขาอื่นๆ และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถถ่ายทอดไปสู่การแก้ปัญหาอื่นๆ ได้ (Bell. 1978: 311) และจากผลการประเมินคุณภาพการศึกษาของสำนักทดสอบทางการศึกษาพบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นทำข้อสอบวัดคุณภาพการศึกษาระดับชาติ (NT) ในส่วนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (GAT) วิชาคณิตศาสตร์ในปี พ.ศ. 2545 ถึง พ.ศ. 2548 นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยร้อยละ 39.52, 34.99 34.65 และ 34.12 ตามลำดับ ซึ่งอยู่ในระดับต่ำกว่าร้อยละ 50 ต่อเนื่องกันมาหลายปี จะเห็นว่าการจัดการศึกษาในปัจจุบันได้ให้ความสำคัญในเรื่องการแก้ปัญหา วัตถุประสงค์ประการหนึ่งในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์คือ ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา ฝึกกระบวนการคิด ทำให้ผู้เรียนรู้จักการคิดวิเคราะห์หาเหตุผล การแก้ปัญหาควรจะเป็นจุดเน้นที่สำคัญในหลักสูตรคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายพื้นฐานในการสอนคณิตศาสตร์และเป็นอันหนึ่งอันเดียวกับการเรียนคณิตศาสตร์ (Kennedy; et al. 1994: 135) การแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญ สามารถใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้แนวคิดและทักษะต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ (NCTM. 2000: 182: citing Schroeder; & Lester. 1989. *New Directions for Elementary School Mathematics.*) นอกจากนี้ สมาคมครูคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา (NCTM) ได้กำหนดให้การแก้ปัญหาเป็น 1 ใน 5 มาตรฐานกระบวนการคณิตศาสตร์ ใน Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics ปี ค.ศ. 2000 (NCTM. 2000: 29) การ

แก้ปัญหาเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ (สมเดช บุญประจักษ์. 2540: 11; อ้างอิงจาก Lester. 1977: 12) และเป็นเป้าหมายสูงสุดของหลักสูตร การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และเป็นส่วนสำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ได้ให้ความสำคัญของการแก้ปัญหา โดยกำหนดให้การแก้ปัญหาเป็นทักษะที่สำคัญ และจำเป็นอันดับแรก ของทักษะ/กระบวนการคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพราะการแก้ปัญหามathematicsช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาศักยภาพในการวิเคราะห์ ช่วยกระตุ้นการเรียนรู้และการสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์แก่ผู้เรียน นอกจากนี้การแก้ปัญหายังช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ข้อเท็จจริง ทักษะ มโนคติ หลักการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ความสำเร็จในการแก้ปัญหาก็ก่อให้เกิดการพัฒนาคุณลักษณะที่ต้องการแก่ผู้เรียน เช่น ความใฝ่รู้ ความอยากรู้อยากเห็น

สำหรับการเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหของนักเรียนจำเป็นต้องอาศัยการตั้งปัญหาจากสถานการณ์ที่มีความเหมาะสม ซึ่งกิจกรรมการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการตั้งปัญหา โดยการพัฒนาความสามารถในการตั้งโจทย์ปัญหาได้รับการยอมรับโดยทั่วไปว่าเป็นเป้าหมายที่สำคัญอย่างหนึ่งของการสอนและการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหัวใจของการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งการตั้งโจทย์ปัญหาจะประกอบด้วยปัจจัยหลักที่มีส่วนส่งเสริมความสามารถของนักเรียนในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นอกจากนั้น จากมุมมองของด้านการสอน การตั้งโจทย์เป็นการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจ ทักษะ และทัศนคติ ของคนตั้งโจทย์ปัญหา นำมาใส่ในสถานการณ์ที่กำหนดและทำให้กลายเป็นเครื่องมือประเมินที่ทรงพลัง ไม่แปลกเลยที่รายงานต่าง ๆ ที่ตีพิมพ์โดยสมาคมนักคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) ในปี 1989, 2000 ได้เรียกร้องให้มีการให้ความสำคัญต่อการจัดกิจกรรมตั้งโจทย์ปัญหาเป็นอย่างมาก (Nicolaou; & Philipou. 2007: 50)

จากเหตุผลดังกล่าวมาข้างต้นทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะจัดสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เพื่อเป็นการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งในการจัดการเรียนการสอนดังกล่าว สามารถใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้เกิดประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60)
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60)

ความสำคัญของการศึกษาค้นคว้า

ผลการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ควบคู่ไปกับการพัฒนาการคิด พร้อมทั้งสามารถนำไปใช้เป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และในกระบวนการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ช่วยให้นักเรียนได้แสดงความรู้ ความสามารถ และความถนัดได้อย่างเต็มศักยภาพ ตามความสนใจของนักเรียน รวมทั้งเป็นแนวทางสำหรับครูคณิตศาสตร์และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องกับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ไปปรับปรุงและพัฒนาคุณภาพของการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น และเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาต่อไป

ขอบเขตของการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ทั้งหมด 8 ห้องเรียน จำนวน 362 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ซึ่งได้รับการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยมีห้องเป็นหน่วยการสุ่ม (Sampling Unit) ได้กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 30 คน ซึ่งแต่ละห้องเรียนได้จัดชั้นเรียนเป็นแบบคละความสามารถ

ตัวแปรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ การสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง
2. ตัวแปรตาม ได้แก่
 - 2.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
 - 2.2 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการทดลองเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ตามหลักสูตรของสถานศึกษาโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ดังสาระการเรียนรู้ต่อไปนี้

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (2 คาบ)
2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ (2 คาบ)
3. การนำไปใช้ (4 คาบ)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง (Problem Posing) หมายถึง กิจกรรมที่นักเรียนทำการสร้างโจทย์ปัญหาโดยการทำให้เกิดปัญหาใหม่ (Generation of New Problems) และการปรับเปลี่ยนปัญหาที่ให้มา (Re-formulation of Given Problems) โดยการสร้างปัญหาเป็นแง่มุมที่สำคัญของกิจกรรมการเรียนการสอนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นกิจกรรมการเรียนรู้แบบหนึ่ง โดยครูผู้สอนจะต้องนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ท้าทายความคิดผู้เรียน เพื่อผู้เรียนกระตุ้นหรือยั่วให้ผู้เรียนได้ใช้ศักยภาพของตนเองในการตั้งปัญหา และคิดหาหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหา รวมทั้งเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ปัญหาของผู้เรียนในชั้นเรียน ที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิด ฝึกทักษะการคิด ฝึกทักษะการแก้ปัญหาและช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

2. การสอนโดยให้นักเรียนตั้งปัญหาด้วยตนเอง หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยการที่ครูผู้สอนนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ท้าทายเกี่ยวกับโลกของความเป็นจริง เพื่อนำเสนอต่อผู้เรียน และกระตุ้นหรือยั่วให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของกอนซาเลส (Gonzales. 1998: 448 – 453) ซึ่งมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยการตั้งปัญหาแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. เริ่มต้น เป็นการกล่าวถึงความสำคัญและเป้าหมายที่จะเรียน และสอบถามผู้เรียนว่ามีความรู้ในเรื่องที่จะเรียนมาบ้างแล้วหรือไม่อย่างไร
2. นำเสนอปัญหาเกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน เป็นการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำเสนอปัญหา โดยปัญหาที่ครูนำเสนอควรเป็นปัญหาพื้นฐานของเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัยในปัญหา
3. มอบหมายงาน เป็นการมอบหมายงานจากปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้โนทัศน์ สรุปมโนทัศน์ และเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา
4. ค้นหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันค้นหาสถานการณ์ที่หลากหลายเกี่ยวกับหัวข้อเรื่อง
5. สร้างเป็นโจทย์ปัญหา เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตั้งปัญหาที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียน
6. เริ่มต้นใหม่ เป็นการฝึกฝนการตั้งปัญหาของนักเรียน โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมซ้ำจากสถานการณ์ใหม่ที่เพื่อนในกลุ่มอื่นๆ ได้นำเสนอ

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการหาคำตอบให้กับคำถามหรือสถานการณ์ต่างๆ ที่กำหนดขึ้น ได้อย่างเหมาะสม และถูกต้อง ซึ่งกระบวนการดังกล่าวได้มาจากการนำความรู้ ทักษะ และประสบการณ์มาเชื่อมโยงเข้าด้วยกัน โดยให้สอดคล้องกับปัญหาหรือสถานการณ์ใหม่ โดยกระบวนการต้องมีการดำเนินการอย่างเป็นลำดับขั้นตอน โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya. 1957: 16 – 17) ที่ประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 4 ขั้นตอน ได้แก่

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหา ที่ต้องอาศัยทักษะในการอ่านโจทย์ ทักษะการแปลความทางภาษาการหาแบบจำลอง

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ให้ผู้เรียนแสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหามากมาย ด้วยการทดลอง ด้วยการลองผิด - ลองถูก เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา และทำสุดเลือกยุทธวิธีที่จะนำมาแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณ ทักษะในการพิสูจน์หรือการอธิบายและการให้เหตุผล โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ตามแผน พร้อมลงรายละเอียด และลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถตอบคำถามได้

4. ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นตอนการตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้ โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุของคำตอบที่คาดเดา กับคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้ ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นอัตนัยจำนวน 4 ฉบับ ฉบับละ 2 ข้อ โดยทำการแบ่งประเภทปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

1. ปัญหาธรรมดา หมายถึงปัญหาที่ไม่มีความซับซ้อนมาก สามารถแก้ปัญหได้ด้วยวิธีการที่เป็นลำดับขั้นตอนที่ใช้อยู่เป็นประจำ มีความใกล้เคียงกับชีวิตประจำวันมาก โดยปัญหาประเภทนี้ส่วนใหญ่ใช้เป็นแบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะในชั้นเรียน

2. ปัญหาที่มีความซับซ้อน หมายถึง ปัญหาที่ต้องประมวลความรู้ความสามารถหลากหลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ระดับความสามารถทางด้านสติปัญญาในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นแบบปรนัย จำนวน 30 ข้อ ตามที่ วิลสัน (Wilson. 1971: 643 – 696) ซึ่งจำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่

1. การคิดคำนวณด้านความรู้ความจำ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำ เกี่ยวกับการคำนวณ แต่ซับซ้อนกว่า

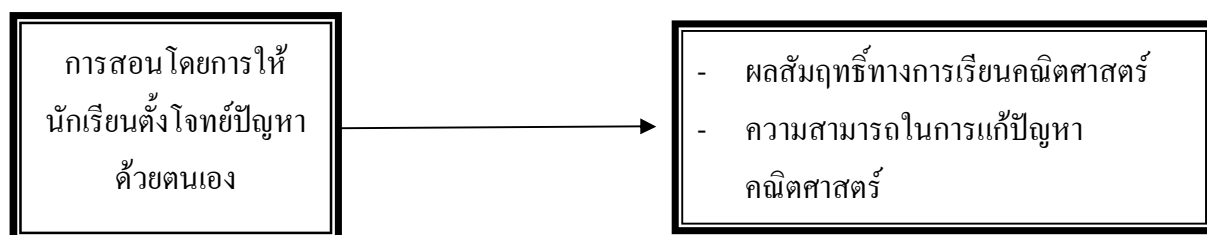
3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในกาตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ในระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนต้องเลือกกระบวนการแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาได้โดยไม่มียาก

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่โจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าว ต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง

5. เกณฑ์ หมายถึง ความต้องการขั้นต่ำสุดที่จะยอมรับว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในที่นี้ใช้เกณฑ์ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม กล่าวคือ ถ้านักเรียนได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. 2551: 25) ซึ่งมีดังต่อไปนี้

ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	80 – 100	อยู่ในระดับดีเยี่ยม
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	75 – 79	อยู่ในระดับดีมาก
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	70 – 74	อยู่ในระดับดี
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	65 – 69	อยู่ในระดับค่อนข้างดี
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	60 – 64	อยู่ในระดับน่าพอใจ
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	55 – 59	อยู่ในระดับพอใช้
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	50 – 54	อยู่ในระดับผ่านเกณฑ์ขั้นต่ำ
ได้ช่วงคะแนนร้อยละ	0 – 49	อยู่ในระดับต่ำกว่าเกณฑ์

กรอบแนวคิดในการศึกษาค้นคว้า



สมมติฐานในการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน
2. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60
3. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อดังนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการตั้งโจทย์ปัญหา (Problem posing)
 - 1.1 ความหมายของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 1.2 ความสำคัญของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 1.3 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.1 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.2 ประเภทปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.3 องค์ประกอบที่ส่งเสริมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.4 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.7 บทบาทของครูในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
 - 2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
 - 3.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
 - 3.2 องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 3.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
 - 3.4 การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 - 3.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการตั้งโจทย์ปัญหา (Problem posing)

1.1 ความหมายของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาได้แปลคำว่า Problem posing ไว้ด้วยกัน 2 แบบคือ การตั้งปัญหา หรือ การสร้างปัญหา ดังนั้นต่อไปนี้จะ

ดังเกอร์ (Dunker. 1945: 5) ได้ให้ความหมายว่า การจัดการเรียนรู้โดยการตั้งปัญหาเป็นกิจกรรมการเรียนรู้แบบหนึ่ง โดยครูผู้สอนจะนำเสนอปัญหาท้าทายความคิดผู้เรียน เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนได้คิดหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้นำเสนอปัญหาที่ตนเองตั้งขึ้นเสนอต่อชั้นเรียนให้ผู้เรียนคนอื่นๆ ให้ช่วยคิดหาวิธีแก้ปัญหานั้นที่นำเสนอตั้งกล่าวนั้นด้วย

มาโมนาและดาวส์ (Mamona; & Downs. 1993: 41 – 47) ได้ให้ความหมายว่า การจัดการเรียนรู้โดยการตั้งปัญหาเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างหนึ่งของกิจการการเรียนเพื่อแก้ปัญหา เป็นกระบวนการอย่างหนึ่งในการหาคำตอบหรือผลลัพธ์ของปัญหา โดยครูหรือนักเรียนเป็นผู้นำเสนอปัญหาเพื่อให้ผู้เรียนได้ร่วมกันคิดหาแนวทางหรือวิธีการแก้ปัญหานั้นๆ

ซิลเวอร์ (Silver. 1996: 66 – 85) ได้ให้ความหมายว่า การตั้งโจทย์ปัญหา หมายถึงการทำให้เกิดปัญหาใหม่ (Generation of New Problems) และการปรับเปลี่ยนปัญหาที่ให้มีมา (Re-formulation of Given Problems) ซึ่งเป็นวิธีการเรียนการสอนแบบหนึ่งที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน โดยครูสอนตั้งคำถามหรือกำหนดสถานการณ์ขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนช่วยกันแก้ปัญหาหรือสถานการณ์นั้นๆ การสร้างปัญหาเป็นแ่งมุมหนึ่งที่สำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์และเป็นการใช้ปัญหาในการสืบเสาะ ดังนั้นการสร้างปัญหาสามารถที่จะเกิดขึ้นทั้งก่อน ระหว่าง หรือหลังจากการแก้ปัญหา ซึ่งภายในกระบวนการแก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหามีส่วนร่วมในรูปแบบของการสร้างปัญหา โดยการทำให้เกิดปัญหาใหม่จากปัญหาที่มีให้มาด้วยวิธีการต่างๆ ที่จะสามารถทำให้นำไปสู่การหาคำตอบได้ การปรับเปลี่ยนปัญหาแสดงให้เห็นถึงประเภทของกระบวนการสร้างปัญหา เนื่องจากว่าผู้แก้ปัญหามีเปลี่ยนแปลงข้อความที่ให้มีมาของปัญหาไปเป็นรูปแบบใหม่ที่กลายเป็นจุดที่สนใจในการแก้ปัญหา

สโตยานอวา (Stoyanova. 2000: 33 – 37) ได้ให้ความหมายว่า การตั้งโจทย์ปัญหาเป็นกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาในห้องเรียนเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูเป็นผู้ตั้งปัญหาเพื่อให้นักเรียนร่วมกันคิดแก้ปัญหาดังกล่าวนั้น หรือให้ผู้เรียนเป็นผู้ตั้งปัญหาแล้วให้นักเรียนคนอื่นๆ ช่วยกันแก้ปัญหาก็ได้

นิโคลาส และ ฟิลลิปพู (Nicolaou; & Philipou. 2007: 50) ได้ให้ความหมายว่า การตั้งโจทย์ปัญหา หมายถึง การทำให้เกิดโจทย์ใหม่และคำถามต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่นเดียวกับการนำโจทย์มาเปลี่ยนรูปใหม่ภายใต้กระบวนการแก้โจทย์ตามที่กำหนดให้ เมื่อคนแก้โจทย์พูดใหม่หรือสร้างขึ้นใหม่จากโจทย์ที่กำหนดให้ในทางใดทางหนึ่งเพื่อให้ทางไปสู่คำตอบได้มากขึ้น

เคอร์วัลย์ ไวแสง (2549: 24) ได้ให้ความหมายว่า การสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง การที่นักเรียนตั้งปัญหาย่อยๆ จากสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่กำหนดให้หรือเห็นแ่งมุมต่างๆ ที่นำมาไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป ซึ่งเกิดจาก 2 แ่งมุม ได้แก่

1. การยอมรับ (Accepting) หมายถึงการที่นักเรียนนำสิ่งที่ตนเองได้เรียนรู้มาก่อนหรือแ่งมุมต่างๆ จากเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่กำหนดให้หรือแ่งมุมจากการที่ได้ปฏิสัมพันธ์กันในกลุ่มย่อยมาใช้ในการแก้ปัญหา

2. การท้าทาย (Challenging) หมายถึง การที่นักเรียนเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่กำหนดให้ หรือเปลี่ยนแปลงแ่งมุมที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาจากการที่ได้ปฏิสัมพันธ์กันในกลุ่มย่อย

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ความหมายของการตั้งโจทย์ปัญหา คือ การทำให้เกิดปัญหาใหม่ หรือการปรับเปลี่ยนจากโจทย์ปัญหาเดิม ซึ่งเป็นกิจกรรมการเรียนรู้แบบหนึ่ง โดยครูผู้สอนจะต้องนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ท้าทายความคิดผู้เรียน เพื่อผู้เรียนกระตุ้นหรือช่วยให้ผู้เรียนได้ใช้ศักยภาพของตนเองในการตั้งปัญหา และคิดหาหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหา นั้น รวมทั้งเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ปัญหาของผู้เรียนในชั้นเรียน ที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิด ผึกทักษะการคิด ผึกทักษะการแก้ปัญหาและช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

1.2 ความสำคัญของการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

บราวน์ และ วอลเทอร์ (Brown; & Walter. 1993: 23 - 24) ได้นำเสนอว่า เมื่อนำการตั้งปัญหา (Problem posing) เข้าไปเกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา จะเห็นได้ชัดเจนว่าการตั้งปัญหามีความจำเป็นเพื่อที่จะเริ่มต้นแก้ปัญหา นักเรียนสามารถตั้งปัญหาได้เมื่อให้อิสระในการทำ บางครั้งนักเรียนตั้งปัญหาอย่างง่าย ๆ หรือสร้างปัญหาที่ยาก ๆ บางครั้งสร้างปัญหนอกเหนือจากหัวข้อคณิตศาสตร์ที่เรียน

ซิลเวอร์ (Silver. 1996: 66 - 85) ได้นำเสนอเหตุผลที่น่าสนใจในการตั้งปัญหาว่ามีบทบาทที่สำคัญต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ

1. การตั้งปัญหาเป็นการหาความสัมพันธ์นำไปสู่ความคิดสร้างสรรค์และความสามารถที่เยี่ยมยอดทางคณิตศาสตร์
2. การตั้งปัญหาช่วยให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ดีขึ้น
3. การตั้งปัญหาทำให้ค้นพบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์
4. การตั้งปัญหาทำให้นักเรียนสนใจคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น
5. การตั้งปัญหาทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างอิสระ

อิงลิช (English. 1997: 172 – 179) ได้นำเสนอว่า นักเรียนมีแนวทางการแก้ปัญหาตามที่ได้เรียนมา และเขาต้องการเปลี่ยนความรับผิดชอบไปสู่นักเรียนและอนุญาตให้นักเรียนสร้างปัญหาด้วยตัวเองจนถึงให้นักเรียนพิจารณาเห็นว่าคัมคัมกับการที่จะทำต่อไปหรือไม่ การตั้งปัญหาสามารถกระตุ้นนักเรียนให้เกิดความอยากรู้อยากเห็นและทำให้เกิดความคิดที่หลากหลายและเกิดความคิดที่ยืดหยุ่น ส่งเสริมนักเรียนให้มีความรับผิดชอบเพิ่มมากขึ้นสำหรับการเรียนรู้ กระตุ้นเตือนให้ครูและนักเรียนรับทราบถึงความไม่เข้าใจที่อาจจะเกิดขึ้นซึ่งอาจขัดแย้งกับความคิดเดิมที่มีอยู่ ทำให้นักเรียนแก้ปัญหาได้มากขึ้น ในทำนองเดียวกันเป็นการสนับสนุนความคิดรวบยอดพื้นฐานของนักเรียนให้ดีขึ้นกว่าเดิม ช่วยเปลี่ยนมุมมองที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ให้หมดไป

นิโคลาส และ ฟิลลิปพู (Nicolau; & Philipou. 2007: 50) ได้นำเสนอว่า การพัฒนาความสามารถในการตั้งโจทย์ปัญหาได้รับการยอมรับโดยทั่วไปว่าเป็นเป้าหมายที่สำคัญอย่างหนึ่งของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นหัวใจของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ การศึกษาคณิตศาสตร์แบบปฏิรูป

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ความสำคัญของการตั้งปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่สามารถกระตุ้นให้ผู้เรียนมีความสนใจ เกิดความอยากรู้อยากเห็น ทำให้เกิดความคิดสร้างสรรค์ ช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์รวมทั้งสนับสนุนความคิดรวบยอดของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น

1.3 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

กอนซาเลส (Gonzales. 1998: 448 – 453) ได้อธิบายว่า ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การตั้งปัญหาแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. เริ่มต้น (Getting Started) ครูกล่าวถึงความสำคัญและเป้าหมายที่จะเรียน และสอบถามผู้เรียนว่าผู้เรียนมีความรู้ในเรื่องที่จะเรียนมาบ้างแล้วหรือไม่อย่างไร โดยให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนรู้และเข้าใจก่อนที่จะเริ่มเรียนเนื้อหาในชั่วโมง

2. นำเสนอปัญหาเกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน (Posing a Related Problem) ครูนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำเสนอปัญหาด้วย สำหรับปัญหาที่ครูนำเสนอสมควรเป็นปัญหาพื้นฐานของเรื่องที่จะเรียนให้กับนักเรียนก่อน พร้อมเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัยในปัญหา ซึ่งจุดประสงค์ของขั้นตอนการนำเสนอปัญหานี้ เพื่อต้องการให้ผู้เรียนได้ช่วยกันขยายความของปัญหา เปลี่ยนแปลงหรือแก้ไขปัญหาดังกล่าว ซึ่งจะได้ปัญหาที่สมบูรณ์และชัดเจนขึ้น

3. มอบหมายงาน (Generating a Task) ครูมอบหมายงานจากปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้โมโนทัศน์ สรุปโมโนทัศน์ และเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา โดยอาจแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มย่อย แล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่ม

4. ค้นหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ (Finding Mathematics Situations) นักเรียนในแต่ละกลุ่มช่วยกันคิดค้นหาสถานการณ์ที่หลากหลายเกี่ยวกับหัวข้อที่เรียน โดยร่วมกันอภิปรายและแสดงความคิดเห็นว่าสถานการณ์ที่เพื่อนนักเรียนนำเสนอเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับหัวข้อที่เรียนหรือไม่อย่างไร

5. สร้างเป็นโจทย์ปัญหา (Generating Problem) เป็นขั้นตอนที่สืบเนื่องจากขั้นตอนที่ 4 หลังจากที่นักเรียนได้ค้นหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายแล้ว ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตั้งปัญหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียน ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะได้ใช้ความสามารถของตนเองในการตั้งคำถามจากสถานการณ์ปัญหาที่นักเรียนได้คิดขึ้น โดยในแต่ละกลุ่มรวบรวมปัญหาที่สมาชิกในกลุ่มสร้างขึ้น แล้วพิจารณาว่าปัญหาใดเป็นปัญหาที่ดี ปัญหาใดมีข้อบกพร่องควรแก้ไข ปัญหาอย่างไรก่อนที่จะนำเสนอปัญหาดังกล่าว แล้วนำเสนอปัญหาดังกล่าวเพื่อให้เพื่อนช่วยกันอภิปราย นำเสนอความคิดเห็น เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว

6. เริ่มต้นใหม่ (A New Beginning) ให้นักเรียนฝึกฝนการตั้งปัญหา โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ส่งเสริมการตั้งปัญหา เช่น การตั้งโจทย์ปัญหาที่ได้จากสถานการณ์ใหม่ที่เพื่อนในกลุ่มอื่นได้นำเสนอ

สุริเยส สุขแสง (2548: 14) ได้อธิบายว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาเป็นการจัดกิจกรรมที่ครูผู้สอนมุ่งนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่ท้าทายที่ซับซ้อนที่เกี่ยวข้องกับโลกของความเป็นจริง เพื่อนำเสนอต่อผู้เรียน แล้วกระตุ้นหรือยั่วให้ผู้เรียนได้ใช้ศักยภาพของตนเองในการคิดหาหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้น รวมทั้งเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ปัญหาของผู้เรียนในชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ร่วมกันคิดหาหนทาง หรือวิธีการแก้ปัญหานั้นๆ เป็นยุทธวิธีการสอนรูปแบบหนึ่งที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิด ฝึกทักษะการคิด ฝึกทักษะการแก้ปัญหาและช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีตั้งปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยการที่ครูผู้สอนนำเสนอหรือสถานการณ์ปัญหาที่ท้าทายเกี่ยวกับโลกของความเป็นจริง เพื่อนำเสนอต่อผู้เรียน และกระตุ้นหรือยั่วให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ ซึ่งขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยการตั้งปัญหาแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. เริ่มต้น เป็นการกล่าวถึงความสำคัญและเป้าหมายที่จะเรียน และสอบถามผู้เรียนว่ามีความรู้ในเรื่องที่จะเรียนมาบ้างแล้วหรือไม่อย่างไร
2. นำเสนอปัญหาเกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน เป็นการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำเสนอปัญหา โดยปัญหาที่ครูนำเสนอควรเป็นปัญหาพื้นฐานของเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัยในปัญหา
3. มอบหมายงาน เป็นการมอบหมายงานจากปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้โมทัศน์ สรุปโมทัศน์ และเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา
4. ค้นหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันคิดหาสถานการณ์ที่หลากหลายที่เกี่ยวกับหัวข้อเรื่อง
5. สร้างเป็นโจทย์ปัญหา เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตั้งปัญหาที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียน
6. เริ่มต้นใหม่ เป็นการฝึกฝนการตั้งปัญหาของนักเรียน โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมซ้ำจากสถานการณ์ใหม่ที่เพื่อนในกลุ่มอื่นๆ ได้นำเสนอ

1.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

ซิลเวอร์ (Silver. 1996: 66 - 85) ได้ศึกษาโดยการสังเคราะห์วรรณกรรมต่างๆ เพื่อแสดงให้เห็นถึงความเชื่อมโยงระหว่างการสอนโดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาคณิตศาสตร์กับการเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหา ผลการศึกษาทำให้เชื่อว่า การสอนโดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาคณิตศาสตร์เป็นยุทธวิธีการสอนที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการพัฒนาความสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น

นิโคลา และ ฟิลลิปพู (Nicolaou; & Philipou. 2007: 48) ได้ศึกษาความเชื่อที่รู้สึกว่าการได้ด้วยตนเองในการตั้งโจทย์ปัญหา และความก้าวหน้าทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนเกรด 5 และ 6 จำนวน 176 คน และข้อมูลจากการสัมภาษณ์จากนักเรียน 6 คน ที่คัดเลือกบนหลักเกณฑ์จากการวิเคราะห์แบบกลุ่มตามลำดับ (hierarchical cluster analysis) ความสำเร็จที่รับรู้ได้ของนักเรียนในการสร้างโจทย์ปัญหา ได้รับการวิเคราะห์ว่าเป็นดัชนีสำคัญของความสามารถสำหรับแต่ละคน เช่นเดียวกับความก้าวหน้าโดยทั่วไปทางคณิตศาสตร์ มีการค้นพบสหสัมพันธ์ที่สำคัญระหว่างความสามารถในการตั้งโจทย์ปัญหาและความสามารถโดยทั่วไปทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสร้างโจทย์ได้หลากหลายรูปแบบและมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ขึ้นอยู่กับใบงานแบบที่เป็นกันเอง (informal tasks) มากกว่าใบงานแบบที่เป็นทางการ (formal tasks) มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญในเรื่องความสามารถในการตั้งโจทย์ระหว่างนักเรียนเกรด 5 กับเกรด 6 ผลการวิเคราะห์ให้การสนับสนุนงานวิจัยที่ว่าดัชนีความเชื่อในความสำเร็จของเนื้อหาที่เฉพาะเจาะจง มีความเกี่ยวพันในเรื่องเทคนิคที่ส่งเสริมความเชื่อในความสำเร็จและความสามารถในการตั้งโจทย์ปัญหาของนักเรียน

เลวี และ ไชรไก (Lavy; & Shriki. 2007: 129) ได้ศึกษา การสร้างปัญหาเป็นวิธีการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของครูฝึกสอน การศึกษาในปัจจุบันเรามีจุดประสงค์ที่จะสืบเสาะค้นหาการพัฒนาเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์และทักษะการตั้งปัญหาของครูฝึกสอน เป็นผลของการพัวพันของพวกเขาในกิจกรรมการตั้งปัญหา จากข้อมูลที่สำรวจผ่านฟอร์โฟลิโอและบันทึกหลังการสอนของครูฝึกสอน จากการวิเคราะห์ของข้อมูลแสดงให้เห็นถึงครูฝึกสอนมีการพัฒนาความสามารถ ในการทดสอบ คำนิยามและการให้เหตุผลของเป้าหมายคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเป้าหมายคณิตศาสตร์ และความมีเหตุผลของข้อพิสูจน์ อย่างไรก็ตามพวกเขามุ่งเน้นพื้นฐานการตั้งปัญหา ยังมีความกลัวถึงการขาดความสามารถในการพิสูจน์การค้นหาวกพวกเขา คำแนะนำนี้เน้นหนักถึงความสำคัญของการพิสูจน์ภายใต้เงื่อนไขรูปแบบเป็นสิ่งที่ขัดขวางการพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ

งานวิจัยในประเทศ

เครือวัลย์ ไฉแสง (2549: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาบทบาทของการสร้างปัญหาที่มีต่อกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 โรงเรียนมหาวิทยาลัยนุกูล จำนวน 9 คน โดยแบ่งนักเรียนเป้าหมายออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แต่ละ

กลุ่มแก้ปัญหาลายเปิดจำนวน 3 ปัญหา โดย “วิธีคิดแบบออกเสียงดัง” (Thinking Aloud Method) ในบริบทนอกชั้นเรียน โดยไม่มีการแทรกแซงจากผู้วิจัย จากการวิเคราะห์บทบาทของการสร้างปัญหา ที่มีต่อกระบวนการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์พบว่า การสร้างปัญหาส่วนใหญ่มีลักษณะเป็น “การยอมรับปัญหา” มากกว่าการ “การทำทลายปัญหา” นักเรียนส่วนใหญ่จะยอมรับเงื่อนไขของปัญหา ตีความหมายของคณิตศาสตร์ วิเคราะห์และสำรวจองค์ประกอบของปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหานักเรียนส่วนน้อยที่สร้างปัญหาในลักษณะ “การทำทลายปัญหา” โดยตั้งคำถามในลักษณะที่แตกต่างไปจากเดิม การตั้งคำถามในลักษณะนี้ก่อให้เกิดปัญหาใหม่ โดยมีการกำหนดองค์ประกอบและเงื่อนไขของปัญหาใหม่ ทำให้นักเรียนมีอิสระในการแก้ปัญหามีความคิดที่หลากหลายและยืดหยุ่น ซึ่งมีโอกาสที่นักเรียนจะคิดแก้ปัญหาย่างสร้างสรรค์

ศุภวรรณ โคตรท่าน (2551: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาวิเคราะห์การสร้างปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในสถานการณ์การแก้ปัญหาลายเปิด โดยอาศัยกระบวนการกลุ่มย่อย ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ในบริบทของชั้นเรียน โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ ที่เน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytic Description) กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โรงเรียนชุมชนบ้านชนบท อำเภอชนบท จังหวัดขอนแก่น ดำเนินการเก็บข้อมูลโดยใช้บริบทในชั้นเรียนคณิตศาสตร์มีครูผู้สอนเป็นผู้ดำเนินการในการจัดกิจกรรมแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้สถานการณ์ปัญหาลายเปิดพบว่า นักเรียนที่ได้รับความคาดหวังจากสมาชิกในกลุ่มเป็นผู้นำในการทำกิจกรรมเกิดการสร้างปัญหาที่เกิดจากการยอมรับในลักษณะที่เป็นการนำสิ่งที่ตนเองได้เรียนรู้มาก่อนและนำเสนอแนะต่าง ๆ จากเงื่อนไขของสถานการณ์ปลายเปิดที่กำหนดให้มาใช้ในการแก้ปัญหานักเรียนที่เป็นผู้ตามเกิดการสร้างปัญหาที่เกิดจากการยอมรับในลักษณะของการนำเสนอแนะต่าง ๆ จากเงื่อนไขของสถานการณ์ปัญหาลายเปิดที่กำหนดให้มาใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนทั้งหมดมีลักษณะชอบคิดชอบค้นหา ชอบความท้าทาย เกิดการสร้างปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นลักษณะของการเปลี่ยนแ่งมุมที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหามาจากการได้ปฏิสัมพันธ์กันในกลุ่มย่อย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการตั้งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า การจัดกิจกรรมที่ให้ผู้เรียนได้ตั้งโจทย์ปัญหา เป็นยุทธวิธีการสอนที่ช่วยพัฒนาความสามารถในการพัฒนาความสามารถแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น มีความคิดที่หลากหลายและยืดหยุ่น

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 52) ได้ให้ความหมายว่าการแก้ปัญหาคือ ชิ้นงานที่ทำโดยยังไม่รู้วิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบในทันที ในการหาคำตอบนักเรียนจะต้องใช้ประโยชน์จากความรู้ที่มีอยู่เหล่านั้นเพื่อนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหานักเรียนจะต้องฝึกฝนบ่อยๆ เพื่อที่พัฒนาและทำให้เกิดความรู้ใหม่ๆ การแก้ปัญหาคือไม่ได้มีเป้าหมายในการหาคำตอบเพียง

อย่างเดียว แต่ขึ้นอยู่กับวิธีการของการกระทำให้ได้มาของคำตอบ นักเรียนจะต้องหาโอกาส ผึกฝน อยู่เป็นประจำ รวมทั้งได้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นและให้มีการสะท้อนแนวคิดในการแก้ปัญหา นั้นออกมาด้วย ซึ่งได้กำหนดมาตรฐานของการแก้ปัญหาสำหรับนักเรียนอนุบาลถึงเกรด 12 ดังนี้

1. สร้างองค์ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์จากปัญหาต่างๆ
2. การแก้ปัญหาได้บังเกิดขึ้นในคณิตศาสตร์และในบริบทอื่นๆ
3. ประยุกต์และดัดแปลงยุทธวิธีอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา
4. ควบคุมและพิจารณาบนกระบวนการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

ดอสเซย์ และคนอื่นๆ (Dossey; et al. 2002: 72) ได้ให้ความหมายว่า การแก้ปัญหา คือ กระบวนการหาคำตอบให้คำถามหรือการจัดการกับสถานการณ์ต่างๆ ปัญหาที่ยากและน่าเบื่อ สำหรับคนหนึ่งอาจเป็นปัญหารธรรมดาๆ สำหรับอีกคนหนึ่ง กระบวนการแก้ปัญหาจึงต้องใช้การสร้าง องค์ความรู้ตามวิถีทางใหม่ๆ ที่แตกต่างจากเดิม ใช้หลักในการวางแผน หรือยุทธวิธีที่จะนำไปสู่ เป้าหมายที่ต้องการ และเป็นการได้มาซึ่งความรู้ใหม่จากสถานการณ์นั้นๆ กระบวนการนี้อาจยุ่งยาก ซักซ้อนขึ้นเมื่อมีการขยายไปสร้างการเชื่อมโยง ซึ่งนักเรียนจะได้ประสบการณ์จากกระบวนการนี้ และสามารถพัฒนายุทธวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2539: 122) ได้ให้ความหมายว่า การแก้ปัญหา คือ กระบวนการที่ต้อง อาศัยสติปัญญา ความรู้ ความเข้าใจ ความคิดแบบวิเคราะห์ ความพร้อมในการที่จะคิดแก้ปัญหาทำ ให้เกิดความรู้ใหม่ๆ ทั้งด้านเนื้อหาและวิธีการ เป็นทักษะที่สำคัญที่จะต้องปลูกฝังให้เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน โดยใช้ประสบการณ์เดิมทั้งทางตรงและทางอ้อม และการเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม มาใช้แก้ปัญหาสถานการณ์ต่างๆ เพื่อให้บรรลุตามจุดมุ่งหมายที่ต้องการ

สมวงษ์ แปลงประสพโชค และคณะ (2543: 5) ได้ให้ความหมายว่า ทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ เหตุผลหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์ก็เพื่อนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่พบ นักเรียนต้องสามารถประยุกต์รูปแบบการคิดอย่างสมเหตุสมผล เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้อง สามารถอธิบายข้อมูลและสรุปผลจากข้อมูลที่ปรากฏ ในชีวิตจริงนักเรียนต้องพบกับปัญหาหลากหลายรูปแบบ ปัญหาข้อความหรือปัญหาเรื่องราวเป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหา

สมเดช บุญประจักษ์ (2543: 1) ได้ให้ความหมายว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้แก้ปัญหาก็ต้องใช้ความรู้ ความคิดและ ประสบการณ์เดิมประมวลเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่กำหนดให้ในปัญหา

พงศธร มหาวิจิตร (2550: 18) ได้ให้ความหมายว่า ทักษะและกระบวนการด้านการแก้ปัญหามีถึง ความสามารถในการค้นหาคำตอบของปัญหาอย่างถูกต้อง เหมาะสม และรวดเร็ว โดยการใช้ความรู้ต่างๆ ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya. 1957: 16 – 17) ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา และขั้นตรวจสอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 7) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการหาคำตอบให้กับคำถามหรือสถานการณ์ต่างๆ ที่กำหนดขึ้น ได้อย่างเหมาะสม รวดเร็ว แลถูกต้อง ซึ่งกระบวนการดังกล่าวได้มาจากการนำความรู้ ทักษะ และประสบการณ์มาเชื่อมโยงเข้าด้วยกัน โดยให้สอดคล้องกับปัญหาหรือสถานการณ์ใหม่ โดยกระบวนการต้องมีการดำเนินการอย่างเป็นลำดับขั้นตอน

2.2 ประเภทปัญหาทางคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1985: 123 – 128) ได้ทำการแบ่งประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาให้ค้นหา (Problem to find) เป็นปัญหาเชิงทฤษฎี หรือในเชิงปฏิบัติก็ได้ เป็นปัญหาที่มีจุดประสงค์ให้ค้นหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวน เป็นปัญหาให้หาวิธีการ หรือหาเหตุผลก็ได้ โดยปัญหาให้ค้นหามีส่วนสำคัญแบ่งได้เป็น 3 ส่วนคือ

1.1 สิ่งที่ต้องการหา

1.2 สิ่งที่กำหนดให้

1.3 เงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับสิ่งที่กำหนดให้

สิ่งที่เป็เงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับสิ่งที่กำหนดให้ในบางปัญหา อาจไม่ได้ระบุอย่างชัดเจนในตัวปัญหา ผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ และประสบการณ์ของตนเองมากำหนดเงื่อนไขนี้

2. ปัญหาให้พิสูจน์ (Problem to prove) ปัญหาประเภทนี้ มีจุดประสงค์ให้แสดงการใช้เหตุผลว่า “ข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง” หรือ “ข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ” ปัญหาให้พิสูจน์ส่วนใหญ่จะอยู่ในรูป “ถ้า p แล้ว q ” โดยส่วนสำคัญของปัญหาให้พิสูจน์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วนคือ

2.1 สิ่งที่กำหนดให้ หรือ สมมติฐาน (p)

2.2 สิ่งที่ต้องพิสูจน์ หรือ ผลสรุป (q)

การแยกส่วนสำคัญของปัญหาให้พิสูจน์ ช่วยให้ปัญหามีความชัดเจนขึ้นสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาหรือการพิสูจน์ได้รวดเร็วขึ้น พร้อมทั้งแสดงการให้เหตุผลอาจจะเป็นจริงหรือเท็จ

บาร์ดูดี (Baroody. 1993: 11 – 36) ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. ปัญหาที่พบเห็นทั่วไป (Routine Problems) เป็นปัญหาที่พบเห็นคุ้นเคย ในวิธีการหรือในโครงสร้างของปัญหา อาจพบเห็นในตัวอย่าง เมื่อพบปัญหาจะทราบได้เกือบทันทีว่าจะแก้ปัญหาวัยวิธีการใด ข้อมูลที่ให้จะมีแต่เฉพาะที่จำเป็นและเพียงพอในการหาคำตอบ มุ่งเน้นการฝึกทักษะ ปัญหาประเภทนี้มักจะพบในหนังสือเรียนทั่วไป

2. ปัญหาที่ไม่เคยพบเห็น (Nonroutine Problems) เป็นปัญหาที่ต้องประมวลความรู้ความสามารถหลากหลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา เป็นปัญหาที่มีลักษณะสอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงของชีวิตมากกว่าประเภทแรก ข้อมูลที่ให้มามีทั้งจำเป็นและไม่จำเป็นหรือกำหนดให้ไม่เพียงพอ วิธีการหาคำตอบอาจมีได้หลายวิธี คำตอบอาจมีมากกว่า 1 คำตอบ

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2539: 126) ได้ทำการแบ่งประเภทของปัญหาได้ดังนี้

1. ปัญหาคณิตศาสตร์ พิจารณาจาก จุดประสงค์ แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

1.1 ปัญหาให้ค้น

1.2 ปัญหาให้พิสูจน์

ส่วนประกอบสำคัญของปัญหาให้ “ค้นหา” ประกอบด้วย

- สิ่งที่ต้องการหา
- สิ่งที่กำหนดให้
- เงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหา กับสิ่งที่กำหนดให้

ส่วนสำคัญของปัญหาให้ “พิสูจน์” อยู่ในรูป “ถ้า p แล้ว q” คือ

- สิ่งที่กำหนดให้ หรือ สมมติฐาน (p)
- สิ่งที่ต้องพิสูจน์ หรือ ผลสรุป (q)

2. ปัญหาคณิตศาสตร์ พิจารณาจาก ผู้แก้ปัญหา และ โครงสร้างของปัญหา แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

2.1 ปัญหาธรรมดา คือ ปัญหาที่คุ้นเคยหรือที่นำมาเป็นแบบฝึกหัด

2.2 ปัญหาที่ไม่เป็นธรรมดา คือ ปัญหาที่ซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามต้องใช้ความรู้ประสบการณ์ ตลอดจนความสามารถมาประมวลเข้าด้วยกันเพื่อให้ได้คำตอบ

วิชัย พาณิชย์สว (2546: 10 – 11) ได้ทำการแบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ ดังนี้

1. โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน (Standard Textbook Problems) เป็นโจทย์ปัญหาที่พบเห็นอยู่ทั่วไปในหนังสือเรียน ซึ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ลักษณะเด่นของโจทย์ประเภทนี้คือสามารถหาคำตอบด้วยวิธี และลำดับขั้นตอนที่ใช้อยู่เป็นประจำ โจทย์ปัญหาในชั้นเรียนเกือบทั้งหมดเป็นโจทย์ปัญหาย่อย (Routine Problems)

2. โจทย์ปัญหาที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา (Process Problems) เป็นโจทย์ปัญหาที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหา เป็นโจทย์ปัญหาที่ไม่จำเจ (Nonroutine Problems) ผู้เรียนไม่สามารถหาคำตอบได้โดยการแปลเรื่องราวของโจทย์เป็นประโยคสัญลักษณ์และคิดคำนวณหาคำตอบตามวิธีที่

ใช้อยู่เดิมๆ แต่ผู้เรียนจะต้องวางแผนคิดหาวิธี (Strategies) มาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ประเภทนี้อาจเกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ในชีวิตประจำวันของบุคคล หรือเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาวิชาอื่น และบางครั้งคำตอบของโจทย์ปัญหามักมีมากกว่า 1 คำตอบ

สนกดี ศรีสวัสดิ์ (2551: 47) ได้อธิบายว่าประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ คือ ปัญหาที่เราคุ้นเคยไม่ซับซ้อน อาจจะได้จากการนำมาทำเป็นแบบฝึกหัด ส่วนอีกปัญหาหนึ่งก็คือ ปัญหาที่เราไม่คุ้นเคยและค่อนข้างยุ่งยากซับซ้อน ซึ่งจะต้องนำความรู้ ประสบการณ์และหลักการต่างๆ มาใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหานั้นๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ประเภทปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ

1. ปัญหาธรรมดา หมายถึงปัญหาที่ไม่มีความซับซ้อนมาก สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่เป็นลำดับขั้นตอนที่ใช้อยู่เป็นประจำ มีความใกล้เคียงกับชีวิตประจำวันมาก โดยปัญหาประเภทนี้ส่วนใหญ่ใช้เป็นแบบฝึกหัดเพื่อฝึกทักษะในชั้นเรียน
2. ปัญหาที่มีความซับซ้อน หมายถึง ปัญหาที่ต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

2.3 องค์ประกอบที่ส่งเสริมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

บาร์ดูดี (Baroody. 1993: 2 – 10) ได้อธิบายถึงองค์ประกอบหลักของการแก้ปัญหา 3 ประการคือ

1. องค์ประกอบทางด้านความรู้ความคิด (Cognitive factor) ซึ่งประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับมโนคติ และยุทธวิธีในการแก้ปัญหา
2. องค์ประกอบทางด้านความรู้สึก (Affective factor) ซึ่งจะเป็นแรงขับเคลื่อนในการแก้ปัญหา และแรงขับนี้มาจากความสนใจ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความพยายามหรือความตั้งใจ และความเชื่อของนักเรียน
3. องค์ประกอบทางการสังเคราะห์ความคิด (Metacognitive factor) เป็นความสามารถในการสังเคราะห์ความคิดของตนเองในการแก้ปัญหา ซึ่งจะสามารถตอบตนเองได้ว่าทรัพยากรอะไรบ้างที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหา และจะติดตามและควบคุมทรัพยากรเหล่านั้นได้อย่างไร

ไฮเมอร์ และ ทูบลัด (Heimer; & Trueblood. 1997: 31 – 32) ได้อธิบายถึงองค์ประกอบที่สำคัญบางประการที่มีผลต่อความสามารถของนักเรียนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ ภาษาหรือถ้อยคำ สรุปได้ดังนี้

1. ความรู้สึกเกี่ยวกับศัพท์เทคนิค
2. ความสามารถในการคำนวณ
3. การรวบรวมข้อมูลความรู้รอบตัว
4. ความสามารถในการตระหนักถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มา
5. ความสามารถในการให้เหตุผลของความสมเหตุสมผลตามจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้

6. ความสามารถในการเลือกดำเนินการเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง
7. ความสามารถในการรองรับข้อมูลที่ขาดหายไป
8. ความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2539: 131) ได้อธิบายว่า องค์ประกอบในการแก้ปัญหา คือ

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ประกอบด้วยทักษะการอ่านและการฟัง ปัญหาที่ได้จากการอ่านและการฟัง ในรูปของข้อความที่เป็นตัวอักษร นักเรียนจะต้องอ่านและทำความเข้าใจโดยแยกประเด็นของปัญหาให้ออกว่า ปัญหาที่กำหนดอะไรให้บ้างและปัญหาต้องการให้หาอะไร มีข้อมูลใดบ้างที่จำเป็นและข้อมูลใดที่ไม่จำเป็นต่อการแก้ปัญหา

2. ทักษะในการแก้ปัญหา ทักษะจะเกิดขึ้นต้องฝึกฝนบ่อยๆ จนเกิดความชำนาญ เมื่อนักเรียนได้ฝึกแก้ปัญหาอยู่เสมอๆ ก็จะเห็นความเหมือนหรือความแตกต่างของปัญหาได้ง่ายขึ้น

3. ความสามารถในการคิดคำนวณและความสามารถในการให้เหตุผลเริ่มแรกด้วยการทำความเข้าใจปัญหา และวางแผนในการแก้ปัญหาแล้ว ขั้นตอนต่อไป คือ ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้

4. แรงขับ เนื่องจากปัญหาที่พบมักเป็นปัญหาที่แปลกใหม่ ซึ่งนักเรียนไม่คุ้นเคย และไม่สามารถหาวิธีการหาคำตอบได้ทันที

5. ความยืดหยุ่น ผู้แก้ปัญหาในขั้นนี้จะต้องมีความยืดหยุ่นในความคิดจะต้องไม่ยึดติดในรูปแบบที่ตนคุ้นเคย

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 31) ได้อธิบายว่า องค์ประกอบที่สำคัญที่ส่งผลต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา มีดังนี้

1. องค์ประกอบที่เกี่ยวกับตัวผู้แก้ปัญหา ซึ่งเกี่ยวกับ

1.1 ความรู้ความคิดและประสบการณ์

1.2 ระดับสติปัญญาและความสามารถ

1.3 การรับรู้และการสังเคราะห์ความคิด

1.4 ทักษะและความรู้พื้นฐานต่างๆ เช่น ทักษะการอ่าน การดำเนินการและทักษะทาง

คณิตศาสตร์

1.5 ความรู้สึก ความต้องการที่แก้ปัญหา ความเชื่อและเจตคติต่อการแก้ปัญหา

1.6 ความยืดหยุ่นและความมั่นใจในตนเองต่อความสามารถในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบเกี่ยวกับสภาพแวดล้อม ซึ่งเกี่ยวกับ

2.1 บรรยากาศที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา

2.2 วิธีการพัฒนาที่ส่งเสริมให้เกิดความสามารถในการแก้ปัญหา

2.3 มีเวลาพัฒนาอย่างเพียงพอและได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง

2.4 สถานการณ์ปัญหาที่นำมาเป็นสื่อในการพัฒนา เป็นปัญหาที่ดีที่ก่อให้เกิดการเรียนรู้

และพัฒนาทักษะต่างๆ เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ทำลายความสามารถและเหมาะสมกับวัย

พงศธร มหาวิจิตร (2550: 23) ได้อธิบายว่า องค์ประกอบที่สำคัญที่ส่งผลต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนแบ่งเป็น 2 ประการหลัก คือ ความสามารถของตัวนักเรียนเอง และจิตสภาพแวดล้อมในการเรียนรู้สำหรับนักเรียน

สนฤดี ศรีสวัสดิ์ (2551: 48) ได้อธิบายว่า องค์ประกอบที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มี 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบเกี่ยวกับผู้แก้ปัญหา ต้องมีทักษะการอ่าน การเขียน การคำนวณ การพิสูจน์ตลอดจนการมีเจตคติที่ดี ส่วนองค์ประกอบที่สองเป็นองค์ประกอบเกี่ยวกับสภาพแวดล้อมที่มีบรรยากาศที่ดี เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า องค์ประกอบที่ส่งเสริมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. องค์ประกอบทางด้านความรู้ความคิด ซึ่งประกอบด้วย
 - 1.1 ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ประกอบด้วยทักษะการอ่านและการฟังปัญหา
 - 1.2 ทักษะในการแก้ปัญหา ทักษะจะเกิดขึ้นต้องฝึกฝนบ่อยๆ จนเกิดความชำนาญ
 - 1.3 ความสามารถในการคิดคำนวณ และการเลือกดำเนินการเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่ถูกต้อง และเปลี่ยนปัญหาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์
 - 1.4 ความสามารถในการให้เหตุผลเริ่มแรกด้วยการทำความเข้าใจปัญหา และวางแผนในการแก้ปัญหา
 - 1.5 ความสามารถในการตระหนักถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มา
2. องค์ประกอบทางด้านสิ่งแวดล้อมและความรู้สึก ซึ่งประกอบด้วย
 - 2.1 ความพยายามหรือความตั้งใจ ซึ่งเป็นแรงขับให้นักเรียนแก้ปัญหาที่แปลกใหม่หรือไม่คุ้นเคยได้
 - 2.2 ความรู้สึกเกี่ยวกับศัพท์เทคนิค
 - 2.3 สถานการณ์ที่นำมาเป็นสื่อในการพัฒนา เป็นปัญหาที่ดีที่ก่อให้เกิดการเรียนรู้และพัฒนาทักษะต่างๆ
 - 2.4 การจัดสภาพแวดล้อมในการเรียนรู้สำหรับผู้เรียน ให้เหมาะสมและเอื้ออำนวยต่อการพัฒนาความรู้ความสามารถในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ
 - 2.5 มีเวลาในการพัฒนาตนเองของผู้เรียนอย่างเหมาะสมและเพียงพอ

2.4 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

โพลยา (Polya. 1957: 16 – 17) ได้อธิบายว่า กระบวนการแก้ปัญหาประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Problem) ขั้นตอนนี้เป็นขั้นเริ่มต้นของการแก้ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการค้นหา ในขั้นตอนนี้ นักเรียนต้องทำความเข้าใจปัญหาและระบุส่วนสำคัญของปัญหา ซึ่งได้แก่ ตัวไม่รู้ค่า

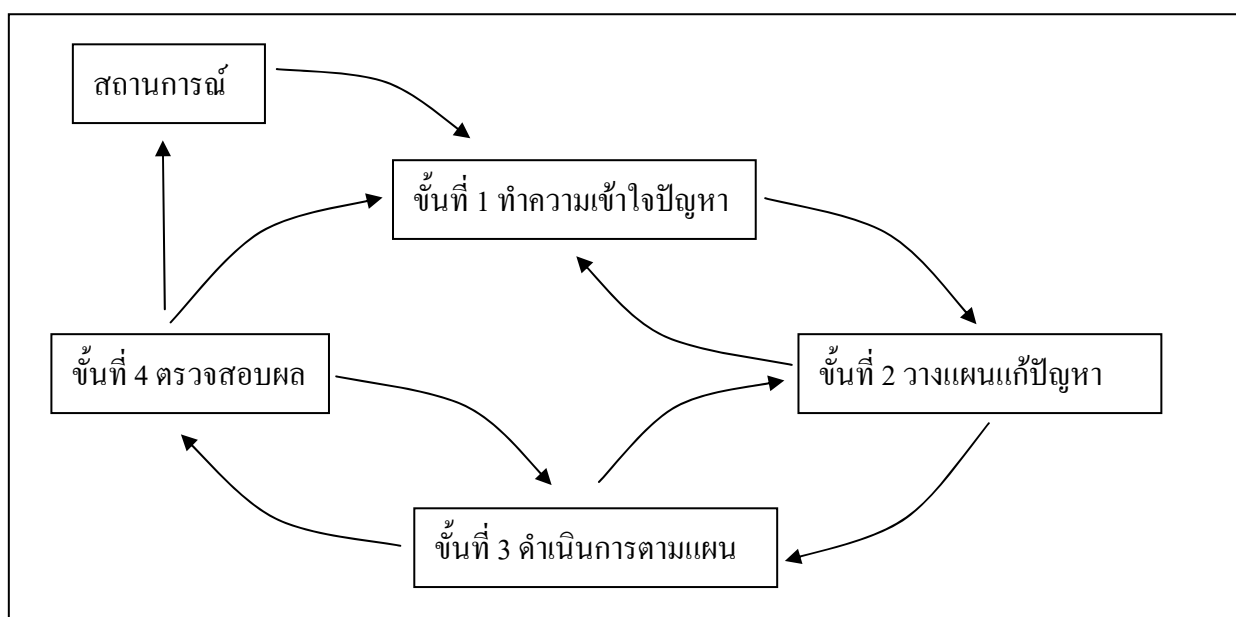
ข้อมูลและเงื่อนไข ในการทำความเข้าใจปัญหา นักเรียนอาจพิจารณาส่วนสำคัญของปัญหาอย่างถี่ถ้วน พิจารณาเข้าไปเข้ามา พิจารณาในหลากหลายมุมมอง หรืออาจใช้วิธีต่างๆ ช่วยในการทำความเข้าใจปัญหา เช่น การเขียนรูป การเขียนแผนภูมิ หรือการเขียนสาระของปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเองก็ได้

2. **ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (Devising a Plan)** ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนค้นหาความเชื่อมโยงหรือความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและตัวไม่รู้ค่า แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา และท้ายสุดเลือกยุทธวิธีที่จะนำมาใช้แก้ปัญหา

3. **ขั้นดำเนินการตามแผน (Carrying out the Plan)** ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ตามแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่างๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ ถ้าแผนหรือยุทธวิธีที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักเรียนต้องหาแผนหรือยุทธวิธีแก้ปัญหาใหม่อีกครั้ง การค้นหาแผนหรือยุทธวิธีแก้ปัญหาใหม่ ถือเป็นการพัฒนาผู้แก้ปัญหาที่ดีด้วยเช่นกัน

4. **ขั้นตรวจสอบผล (Looking Back)** ขั้นตอนนี้ต้องการให้นักเรียนมองย้อนกลับไปยังคำตอบที่ได้มา โดยเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบและยุทธวิธีแก้ปัญหาที่ใช้ แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบหรือมียุทธวิธีแก้ปัญหาอย่างอื่นอีกหรือไม่ สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบที่คาดเดา และคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้

วิลสัน, เฟร์นันเดซ และ ฮาดาเวย์ (Wilson; Fernandez; & Hadaway. 1993: 60 – 62) ได้อธิบายว่า กรอบแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาที่แสดงความเป็นพลวัต (Dynamic) มีลำดับไม่ตายตัว สามารถวนไปเวียนมาได้ ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของวิลสันและคณะ

เมื่อเผชิญสถานการณ์ที่เป็นปัญหา นักเรียนจะต้องเริ่มทำความเข้าใจกับปัญหาก่อน หลังจากนี้วางแผนแก้ปัญหา พร้อมทั้งกำหนดยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้น แล้วดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้จนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้ สุดท้ายพิจารณาความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ และยุทธวิธีที่ใช้แก้ปัญหา

สำหรับทิศทางของลูกศรนั้น เป็นการแสดงการพิจารณาเลือกหรือตัดสินใจที่จะเคลื่อนการกระทำจากขั้นตอนหนึ่งไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง หรือพิจารณาย้อนกลับไปขั้นตอนก่อนหน้าเมื่อมีปัญหาหรือข้อสงสัย เช่น เมื่อนักเรียนทำการแก้ปัญหาในขั้นที่ 1 คือทำความเข้าใจปัญหา และคิดว่ามีความเข้าใจปัญหาดีแล้ว ก็เคลื่อนการกระทำไปสู่วางแผนแก้ปัญหา หรือในขณะที่นักเรียนดำเนินการตามแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 3 แต่ไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ นักเรียนก็อาจย้อนกลับไปเริ่มวางแผนใหม่ในขั้นที่ 2 หรือทำความเข้าใจปัญหาใหม่ในขั้นที่ 1 ก็ได้

เนื่องจากกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะเป็นการดำเนินการที่เกิดขึ้นไปได้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้นนักเรียนจึงไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นใหม่ในขั้นทำความเข้าใจปัญหาเสมอไป เรียกกระบวนการแก้ปัญหตามแนวคิดของวิลสันและคณะว่าเป็น กระบวนการแก้ปัญหที่เป็นพลวัต

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2539: 129) ได้อธิบายว่า กระบวนการแก้ปัญหามีดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจ เป็นขั้นตอนในการหาแบบจำลอง การนิยามศัพท์ข้อมูลที่จำเป็นเข้ามาเกี่ยวข้องกับปัญหาเพื่อทำความเข้าใจในปัญหาว่าต้องการให้หาอะไร
2. ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา ขั้นนี้ต้องอาศัยขั้นตอนที่ 1 นำไปสู่การวางแผนแก้ปัญหาด้วยการทดลอง ด้วยการลองผิด – ลองถูก เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล หารูปแบบ
3. ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นนี้ต้องใช้เทคนิคที่เคยเรียนและทักษะที่มีอยู่มาแก้ปัญหตามแผน
4. ขั้นตรวจสอบ หรือ มองย้อนกลับ ขั้นนี้พิจารณาว่าปัญหาที่แก้เรียบร้อยแล้วหรือไม่ คำตอบที่ได้เป็นไปได้หรือไม่

กรมวิชาการ (2545: 195 – 196) ได้อธิบายว่า กระบวนการแก้ปัญหามี 4 ขั้นตอน มีดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา ต้องอาศัยทักษะที่สำคัญและจำเป็นอีกหลายประการ เช่น ทักษะในการอ่านโจทย์ปัญหา ทักษะการแปลความหมายทางภาษา ซึ่งผู้เรียนควรแยกแยะได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรให้ และโจทย์ต้องการให้หาอะไรหรือพิสูจน์ข้อความใด
2. วางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ต้องอาศัยทักษะในการนำความรู้หลักการหรือทฤษฎีที่เรียนรู้อยู่มาแล้ว ทักษะในการเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสม เช่น เลือกใช้การเขียนรูปหรือแผนภาพ ตาราง การสังเกตหารูปแบบหรือความสัมพันธ์ เป็นต้น ในบางปัญหาอาจใช้ทักษะในการประมาณค่า คาดการณ์ หรือคาดเดาคำตอบมาประกอบด้วย ผู้สอนจะต้องหาวิธีการฝึกวิเคราะห์แนวคิดในขั้นนี้ให้มาก

3. ดำเนินการแก้ปัญหา ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณหรือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ทักษะในการพิสูจน์หรือการอธิบายและแสดงเหตุผล

4. ตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ ต้องอาศัยทักษะการคำนวณ การประมาณคำตอบ การตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่สอดคล้องกับสถานการณ์หรือปัญหา

ทิศนา แคมมณี (2548: 124 – 125) ได้อธิบายว่า ขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. การสังเกต ให้นักเรียนได้ศึกษาข้อมูล รับรู้และทำความเข้าใจในปัญหาจนสามารถสรุป และตระหนักในปัญหานั้น

2. การวิเคราะห์ ให้ผู้เรียนได้อภิปราย หรือแสดงความคิดเห็น เพื่อแยกแยะประเด็นปัญหา สภาพ สาเหตุ และลำดับความสำคัญของปัญหา

3. สร้างทางเลือก ให้ผู้เรียนแสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหาย่างหลากหลาย ซึ่งอาจมีการทดลอง ค้นคว้า ตรวจสอบ เพื่อเป็นข้อมูลประกอบการทำกิจกรรมกลุ่มและควรมีการกำหนดหน้าที่ในการทำงานให้แก่ผู้เรียน

4. เก็บข้อมูลประเมินผลทางเลือก ผู้เรียนปฏิบัติตามแผนงานและบันทึกการปฏิบัติงานเพื่อรายงาน และตรวจสอบความถูกต้องของทางเลือก

5. สรุป ผู้เรียนสรุปความด้วยตนเอง ซึ่งอาจทำในรูปของรายงาน

ปกเกศ ชนะโยธา (2551: 57 – 58) ได้อธิบายว่า กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งได้ 4 ขั้นตอน มีดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา ต้องอาศัยทักษะที่สำคัญและจำเป็นอีกหลายประการ เช่น ทักษะในการอ่านโจทย์ปัญหา ทักษะในการแปลความหมายทางภาษา ซึ่งผู้เรียนควรแยกแยะได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรให้และโจทย์ต้องการให้อะไร หรือพิสูจน์ข้อความใด

2. ขั้นตอนวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ต้องอาศัยทักษะในการนำความรู้หลักการหรือทฤษฎีที่เรารู้มาแล้ว ทักษะในการเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสม เช่น เลือกใช้การเขียนรูปหรือแผนภาพ ตาราง การสังเกตหารูปแบบหรือความสัมพันธ์ เป็นต้น ในบางปัญหาอาจใช้ทักษะในการประมาณค่า คาดการณ์หรือคาดเดาคำตอบมาประกอบด้วย ผู้สอนจึงต้องหาวิธีฝึกวิเคราะห์แนวคิดในขั้นนี้ให้มาก

3. ขั้นตอนดำเนินการแก้ปัญหา ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณหรือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ทักษะในการพิสูจน์หรือการอธิบายและแสดงเหตุผล

4. ขั้นตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ ต้องอาศัยทักษะในการคำนวณ การประมาณคำตอบ การตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน (Number sense) หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (Spatial sense) ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่สอดคล้องกับสถานการณ์หรือปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีดังต่อไปนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Problem) หรือวิเคราะห์ปัญหา เป็นขั้นตอนเริ่มต้นของการแก้ปัญหา ที่ต้องอาศัยทักษะในการอ่านโจทย์ ทักษะการแปลความทางภาษา การหาแบบจำลอง เพื่อให้นักเรียนคิดเกี่ยวกับปัญหา และตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา
2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (Devising a Plan) เป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ให้ผู้เรียนแสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างหลากหลาย ด้วยการทดลอง ด้วยการลองผิด – ลองถูก เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา และท้ายสุดเลือกยุทธวิธีที่จะนำมาแก้ปัญหา
3. ขั้นดำเนินการตามแผน (Carrying out the Plan) เป็นขั้นตอนที่ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณ ทักษะในการพิสูจน์หรือการอธิบายและแสดงเหตุผล โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ตามแผน พร้อมลงรายละเอียด แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถตอบคำถามได้
4. ขั้นตรวจสอบหรือมองย้อนกลับ (Looking Back) เป็นขั้นตอนการตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้ โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) สำหรับนักเรียนที่คาดเดาคำตอบก่อนลงมือปฏิบัติ ก็สามารถเปรียบเทียบหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบที่คาดเดา กับคำตอบจริงในขั้นตอนนี้ได้

2.5 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

แฮทฟิลด์, เอ็ดเวิร์ดส์ และ บิทเทอร์ (Hatfield; Edwards; & Bitter. 1993: 55 – 60) ได้นำเสนอว่า กลวิธีการแก้ปัญหามี 11 วิธี ดังนี้

1. กลวิธีประมาณและตรวจสอบ (Estimation and Check) เป็นกลวิธีหนึ่งในการเสนอคำตอบที่ใกล้เคียงเพื่อตัดสินใจว่าแนวทางในการแก้ปัญหานั้นจะเป็นวิธีใด คำตอบที่สันนิษฐานไว้ต้องตรวจสอบให้สัมพันธ์กับการแก้ปัญหา การประมาณคำตอบสามารถทำได้เป็นประจำในชั้นเรียน
2. กลวิธีค้นหาแบบรูป (Looking for Patterns) ปัญหาบางปัญหามีวิธีแก้วิธีเดียว คือการหาแบบรูปที่ได้จากข้อมูลที่ให้มา
3. กลวิธีพิจารณาว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) ในบางครั้งข้อมูลที่ให้มานั้นไม่เพียงพอ คือบางส่วนหายไปจากโจทย์ปัญหา
4. กลวิธีวาดภาพ กราฟ และตาราง (Drawing Picture, Graph and Table) การวาดภาพ กราฟ และตารางช่วยให้นักเรียนมองเห็นภาพจากข้อมูลที่เป็นจำนวนได้ กราฟช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏโดยทันที
5. กลวิธีการตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออก (Elimination of Extraneous Data) โจทย์ปัญหาบางข้อให้ข้อมูลทั้งที่จำเป็นและไม่จำเป็นในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจะต้องตัดข้อมูลที่ไม่จำเป็นออก เพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคบลง แทนที่จะพยายามใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย
6. กลวิธีพัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formula and Writing Equation) การสร้างสูตรมีประโยชน์ต่อการนำเอาจำนวนมาใส่ในสูตรเพื่อคำนวณให้ได้คำตอบ

7. กลวิธีสร้างแบบจำลอง (Modeling) เป็นหนทางช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ที่จำเป็นในการแก้โจทย์ปัญหา ครูซึ่งมีความเข้าใจถึงโมเดลคอมพิวเตอร์สามารถใช้ในการสร้างแบบจำลองได้ดี

8. กลวิธีทำย้อนกลับ (Working Backwards) ในการพิสูจน์เรขาคณิตใช้กลวิธีเพื่อพิจารณาการเขียนการพิสูจน์

9. กลวิธีเขียนผังงานขั้นตอนการดำเนินงาน (Flowcharting) การเขียนผังงานช่วยให้เห็นกระบวนการของการแก้ปัญหา ซึ่งผังงานเป็นเค้าโครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอนที่ต้องดำเนินการตามเงื่อนไขต่างๆ ที่ต้องการก่อนจะไปถึงทางแก้ปัญหา

10. กลวิธีเทียบเคียงปัญหาอื่น (Acting Out the Problem) การมองปัญหาว่าเป็นสถานการณ์ที่เคยพบมาก่อน ทำให้เห็นขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้ง่ายขึ้น

11. กลวิธีทำให้เป็นปัญหาย่างง่าย (Simplifying the Problem) ในโจทย์ปัญหาบางข้อมีการคิดคำนวณที่ใช้ตัวเลขที่มีค่ามากๆ การนำจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าที่สามารถคำนวณได้รวดเร็วมาแทนที่จำนวนที่มีค่ามากๆ นั้นจะช่วยให้นักเรียนตรวจสอบอย่างมีเหตุผลได้ก่อนที่จะแก้โจทย์ที่กำหนดให้

เคนเนดี และคณะ (Kennedy; et al. 1994: 139 – 156) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา 10 กลวิธี ได้แก่

1. กลวิธีค้นหาแบบรูป (Look for Patterns) เป็นกลวิธีที่ใช้อย่างกว้างขวางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เด็กเล็กสามารถค้นหาและอธิบายแบบรูปของสิ่งต่างๆ ได้ เช่น แบบรูปของจำนวน ส่วนเด็กโตจะคิดพร้อมกับแบบรูปที่เป็นนามธรรม และใช้เหตุผลประกอบมากขึ้น

2. กลวิธีใช้แบบจำลอง (Use a Model) ใช้สำหรับแก้โจทย์ปัญหาที่ปกติและไม่ปกติ นักเรียนควรจะได้รับคำแนะนำให้ใช้วิธีนี้ อุปกรณ์ที่เหมือนจริงจะดีสำหรับเด็กเล็ก ในขณะที่ตัวอย่างด้านนามธรรมสามารถใช้ได้กับเด็กโตได้ดี การใช้แบบจำลองดีกว่าการวาดภาพสำหรับโจทย์ปัญหาบางปัญหาเนื่องจากผู้เรียนสามารถเคลื่อนย้ายได้

3. กลวิธีใช้ภาพหรือแผนภาพ (Use Drawing or Diagram) จะเป็นประโยชน์มากสำหรับเด็กเล็กโดยให้เด็กได้เรียนรู้จากภาพข้อมูลเกี่ยวกับปัญหาในขณะที่เขามีความพร้อม การนำเสนอรูปภาพและแผนภาพ มักจะใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่างๆ ของปัญหา ตลอดจนกระบวนการสำหรับแก้โจทย์ปัญหา

4. กลวิธีปฏิบัติเพื่อออกจากปัญหา (Act it Out) กลวิธีนี้มักถูกใช้แก้โจทย์ปัญหาโดยทันทีและไม่ค่อยประณีต กลวิธีนี้เหมาะสมอย่างยิ่งสำหรับเด็กบางคนที่มีความบกพร่องทางการเรียนและยังเป็นผลดีกับเด็กที่มีความพร้อมต่ำ

5. กลวิธีสร้างตารางและ/หรือกราฟ (Construct a Table and/or Graph) กลวิธีนี้ช่วยให้นักเรียนสามารถรวบรวมข้อมูลที่มีอยู่อย่างกระจัดกระจายมาเป็นรูปแบบที่มีความซับซ้อนน้อยลงสามารถใช้ประโยชน์ได้ดีกว่า

6. กลวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) กลวิธีนี้ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาได้ใช้เหตุผลในการตัดสินใจที่จะทำการเดา ไม่เดาโดยขาดการไตร่ตรองหรือเดาอย่างยุ่งเหยิง จนไม่สามารถยอมรับได้ เมื่อเดาครั้งแรกควรตรวจสอบปัญหาว่าถูกต้องหรือเป็นไปตามความจริงหรือไม่ ถ้ายังเป็นไปไม่ได้ต้องเดาซ้ำอีกจนกว่าจะได้คำตอบที่ใกล้เคียงที่สุด

7. กลวิธีชี้แจงรายการที่เป็นไปได้ทั้งหมด (Account for Possibilities) กลวิธีนี้เด็กมักจะใช้ก่อนที่จะทราบคำตอบเสมอ หรืออาจจะนำมาเขียนเป็นรายการหรือตาราง เพื่อให้ง่ายต่อการแก้โจทย์ปัญหามากขึ้น

8. กลวิธีทำปัญหาให้ง่ายขึ้นหรือแยกโจทย์ปัญหาเป็นส่วนๆ (Simplify or Break into Parts) ใช้กับโจทย์ปัญหาที่ยากหรือโจทย์ปัญหาที่มีตัวเลขหรือจำนวนที่มีความซับซ้อนมากๆ ทำให้โจทย์นั้นมีความซับซ้อนน้อยลง และดูง่ายขึ้น

9. กลวิธีทำย้อนกลับ (Work Backward) กลวิธีนี้มีความพิเศษที่สุดเพราะเป็นกลวิธีที่เหมาะสมมากสำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน จะช่วยให้เด็กได้พัฒนาทักษะความมีเหตุผลและเป็นสิ่งที่ท้าทายที่จะหาคำตอบของโจทย์ปัญหา

10. กลวิธีเปลี่ยนแปลงจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change Your Point of View) กลวิธีนี้อาจเรียก “Breaking Out” เป็นกลวิธีที่ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาทำให้เป็นส่วนเล็กๆ เพื่อประโยชน์สำหรับคิดแก้โจทย์

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 25 – 79) ได้นำเสนอว่า กลวิธีในการแก้ปัญหามี 10 กลวิธี ได้แก่

1. กลวิธีการเดาและตรวจสอบ

กลวิธีนี้เป็นพื้นฐานที่เรานำมาใช้แก้ปัญหาย่อยเสมอ สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาก็ได้ ในกรณีที่มีการแก้ปัญหานั้นโดยตรงอาจยุ่งยาก ใช้เวลามากหรือผู้แก้ปัญหาลืมวิธีการไป การเดานั้นต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทาง เพื่อให้ได้สิ่งที่เดานั้นใกล้เคียงคำตอบที่ต้องการให้มากที่สุด การเดาครั้งหลังๆ ต้องอาศัยข้อมูลจากการเดาในครั้งต้นๆ

2. กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

กลวิธีเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ช่างให้มองเห็นปัญหาอย่างเป็นรูปธรรม ทำให้ผู้แก้ปัญหาเกิดความรู้สึกว่าได้สัมผัสกับตัวปัญหาอย่างแท้จริง ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาทำความเข้าใจกับปัญหาได้ง่ายขึ้น สามารถกำหนดแนวทาง วางแผนแก้ปัญหได้อย่างชัดเจน

3. กลวิธีสร้างตาราง

กลวิธีสร้างตารางในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีประเด็นที่ควรพิจารณา ดังนี้

- 3.1 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด
- 3.2 สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี
- 3.3 สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด (หรือมากกว่า)
- 3.4 สร้างตารางเพื่อค้นหาแบบรูปทั่วไปของความสัมพันธ์

4. กลวิธีใช้ตัวแปร ใช้สำหรับโจทย์ปัญหา

5. กลวิธีค้นหาแบบรูป

กลวิธีค้นหาแบบรูปเป็นกลวิธีที่สำคัญมากในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เหมาะที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแบบรูปของจำนวน ผู้แก้ปัญหจะต้องศึกษาข้อมูลที่มีอยู่วิเคราะห์ ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น แล้วคาดเดาคำตอบซึ่งอาจเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องก็ได้ จากปัญหาเดียวกันข้อมูลชุดเดียวกันผู้แก้ปัญหแต่ละคนอาจค้นพบคำตอบที่แตกต่างกันได้

6. กลวิธีแบ่งกรณี

โจทย์ปัญหาหลายปัญหาสามารถแก้ปัญหได้ง่ายขึ้น เมื่อแบ่งปัญหาเป็นกรณีมากกว่า 1 กรณี ซึ่งในแต่ละกรณีจะมีความชัดเจนมากขึ้นเมื่อแก้ปัญหของทุกกรณีคำตอบได้แล้ว พิจารณา คำตอบของทุกกรณีร่วมกัน จะได้ภาพรวมซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาเริ่มต้น

7. กลวิธีการให้เหตุผลทางตรง

กลวิธีการให้เหตุผลทางตรงนี้มีักพบอยู่ตลอดเวลาในการแก้ปัญหา โดยผู้แก้ปัญหามักใช้ร่วมกับกลวิธีอื่นๆ ข้อความที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทางตรงมักอยู่ในรูป “ถ้า...แล้ว” โดยที่ข้อความแรกเป็นเหตุข้อความหลังเป็นผล การให้เหตุผลทางตรงในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการให้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้ ประมวลเข้ากับความรู้และประสบการณ์ที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่แล้ว ให้เหตุผลนำไปสู่คำตอบของปัญหาที่ต้องการ ปัญหาที่ใช้กลวิธีนี้อาจไม่มีการคิดคำนวณเลย แต่เป็นการเน้นการให้เหตุผล

8. กลวิธีการให้เหตุผลทางอ้อม

โจทย์ปัญหาบางปัญหาไม่ถนัดที่จะแก้ปัญหโดยการให้เหตุผลทางตรง ในกรณีเช่นนี้การให้เหตุผลทางอ้อมนับว่าเป็นวิถีทางที่ดีที่สุดวิธีหนึ่งที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหา โจทย์ปัญหาที่ใช้การให้เหตุผลทางอ้อม มักเป็นปัญหาการให้พิสูจน์ สำหรับปัญหาให้ค้นหาจะใช้การให้เหตุผลโดยการพิสูจน์เพื่ออธิบายคำตอบของปัญหา

9. กลวิธีการทำย้อนกลับ

โจทย์ปัญหาทางปัญหาสามารถแก้ได้ง่ายกว่า ถ้าเริ่มต้นแก้ปัญหโดยการพิจารณาผลลัพธ์สุดท้ายแล้วกลับเข้ามาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน กลวิธีทำย้อนกลับใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่กำหนดให้

10. กลวิธีสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่

ปัญหาบางปัญหาถ้าแก้ปัญหานั้นเลยโดยตรงจะทำได้ยาก การสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ให้เกี่ยวข้องกับปัญหาเดิม แล้วศึกษาวิธีการแก้ปัญหาค้นหาใหม่ที่เกิดขึ้นนี้ เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้เกิดแนวคิดในการแก้ปัญหาเริ่มต้น ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่อาจสร้างให้ครอบคลุมปัญหาเดิมทั้งหมด หรือสร้างขึ้นใหม่เพียงบางส่วนของปัญหาเดิมก็ได้ สามารถแยกได้ 3 ลักษณะ คือ

10.1 กลวิธีตระหนักถึงปัญหาที่สัมพันธ์กัน

10.2 กลวิธีแก้ปัญหที่ง่ายกว่า

10.3 กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง

ฉวีวรรณ เศวตมัลย์ (2544: 30 - 38) ได้นำเสนอว่า ยุทธวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีดังนี้

1. กำหนดคุณลักษณะของปัญหา (Characterize the Problem) อะไรคือสิ่งที่กำหนด อะไรคือสิ่งที่ต้องการ อะไรขาดหายไป ท่านกำลังค้นหาอะไรอยู่ ข้อมูลที่จำเป็นกำหนดมาให้หรือไม่ จดดูตัวอย่างหลาย ๆ ข้อ มีกรณีพิเศษใดหรือไม่ที่กำหนดขอบข่ายของคำตอบที่เป็นไปได้ ท่านสามารถทำปัญหานั้นให้ง่ายลง โดยใช้ประโยชน์จากการสมมาตรหรือทำข้อความ “โดยไม่สูญเสียความเป็นกรณีทั่วไป” เพื่อย่อโจทย์ทั้งข้อให้เป็นกรณีเฉพาะได้หรือไม่

2. ท่านเคยเห็นปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ (Have you seen this before?) หรือท่านเคยเห็นปัญหานี้ในรูปแบบที่แตกต่างไปเพียงเล็กน้อยไหม ถ้าเคย ท่านสามารถถ่ายทอดไปสู่ปัญหานี้แล้วใช้วิธีการบางตอนที่เคยแก้ปัญหาเดิมมาใช้ได้หรือไม่ จงตั้งปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่มีตัวแปรน้อยกว่า แล้วแก้ดูโดย “การคล้าย” เงื่อนไขในข้อหนึ่ง หรือมากกว่านั้น ท่านสามารถเรียนรู้อะไรเกี่ยวกับปัญหาเดิมบ้างหรือไม่

3. การค้นหารูปแบบ (Look for a Pattern) โดยการพิจารณาลักษณะโดยภาพรวมของอนุกรม $1 + 2 + \dots + 100$ หนุ่มน้อย Frederick Gauss ก็สร้างรูปแบบนี้ได้ : $1 + 100 = 2 + 99 = \dots = 101$ ความเข้าใจยังรู้นี้ได้นำไปสู่การสังเกตทันทีว่า ตัวเลขอีก 50 คู่ เช่นนี้ก็สามารถสร้างขึ้นได้ โจทย์การหาผลบวกตั้งแต่ 1 ถึง 100 ก็กลายเป็นงานหาผลคูณอย่างง่าย , $50 \times 101 = 5,050$

4. การทำให้ง่ายลง (Simplification) บางครั้งความสัมพันธ์หรือรูปแบบง่าย ๆ อาจถูกจัดให้อยู่ในรูปแบบหรือนิพจน์ที่ “ยุ่งเหยิง” จงพยายามแทนค่ารูปที่ยุ่งเหยิงด้วยสัญลักษณ์ง่าย ๆ แล้วค้นหาความสัมพันธ์ที่อยู่เบื้องหลัง การจัดพจน์ในนิพจน์ที่ซับซ้อนเสียใหม่อาจจะนำไปสู่ผลสำเร็จที่ปลายทางเดียวกัน

5. การลดลง (Reduction) ปัญหาของท่านสามารถแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่จะแก้ไขได้ง่ายขึ้นหรือไม่

6. การทำย้อนกลับ (Work Backwards) เมื่อท่านพยายามจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ท่านทราบอยู่แล้วว่าเป็นจริง อาจจะง่ายขึ้นถ้าเริ่มต้นทำจากข้อสรุปขึ้นไปหาเหตุผล

7. การทำรายการ (Make a List) ถ้าท่านใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ มันอาจจะเป็นไปได้ที่จัดทำรายการทั้งหมดของผลลัพธ์ที่เป็นได้ทุกขั้นตอนของกระบวนการบางอย่าง ถ้าท่านสนใจในผลลัพธ์ใดโดยเฉพาะของกระบวนการนั้น มันก็ควรจะรวบรวมอยู่ในรายการทั้งหมดนั้น

8. สถานการณ์จำลอง (Simulation and Modeling) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาจสร้างได้โดยการเลียนแบบกระบวนการที่ซับซ้อนในคณิตศาสตร์ หรือในโลกแห่งความเป็นจริงนั้น ถ้าผลที่ได้รับโดยใช้สถานการณ์จำลองถูกต้องแม่นยำแล้ว สถานการณ์จำลองนั้นคือความสำเร็จ

9. ตรรกศาสตร์ทางการ (Formal Logic) อุปนัยทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีศักยภาพในคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่นเดียวกับเทคนิคที่เรียกว่า การพิสูจน์โดยอ้อม (Indirect Prove) ซึ่งเป็นที่รู้กันว่าเป็นการพิสูจน์แบบ Contrapositive ด้วย

10. คำตอบของท่านมีความหมายหรือไม่ ตรวจสอบคำตอบของท่านโดยใช้สามัญสำนึกและการให้เหตุผลแบบมีทางเลือก

11. ข้อสุดท้าย เมื่อใดก็ตามที่ท่านพยายามจะแก้ปัญหา จงค้นหาวิธีหลายๆ วิธีเพื่อเป็นตัวแทนลักษณะของปัญหา จงสร้างรูป และระบุชื่อประกอบ จัดทำรายการคุณลักษณะ เขียนรายการแสดงความสัมพันธ์ เป็นต้น ยิ่งท่านมีวิธีแทนปัญหาได้มากเท่าใด ก็ยิ่งมีแนวโน้มที่ท่านจะค้นพบความสัมพันธ์แบบแฝงอยู่ซึ่งจะเป็นกุญแจไขไปสู่คำตอบได้มากเท่านั้น

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 11 - 35) ได้นำเสนอว่า ในการแก้ปัญหาหนึ่งๆ นอกจากนักเรียนจะต้องมีความรู้พื้นฐานที่เพียงพอและเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาดีแล้ว การเลือกใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุด ก็เป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหา ถ้านักเรียนมีความคุ้นเคยกับยุทธวิธีแก้ปัญหาต่างๆ ที่เหมาะสมและหลากหลายแล้ว นักเรียนสามารถเลือกยุทธวิธีเหล่านั้นมาใช้ได้ทันที ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่เป็นเครื่องมือสำคัญและสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ดีที่พบบ่อยในคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. การค้นหาแบบรูป

การค้นหาแบบรูป เป็นการวิเคราะห์ปัญหาและค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีลักษณะเป็นระบบหรือเป็นแบบรูปในสถานการณ์ปัญหานั้นๆ แล้วเดาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้จะถูกยอมรับว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องเมื่อผ่านการตรวจสอบยืนยัน ยุทธวิธีนี้มักจะใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับเรื่องจำนวนและเรขาคณิต การฝึกฝนการค้นหาแบบรูปในเรื่องดังกล่าวเป็นประจำ จะช่วยนักเรียนในการพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวนและทักษะการสื่อสาร ซึ่งเป็นทักษะที่ช่วยให้นักเรียนสามารถประมาณและคาดเดาคะเนจำนวนที่พิจารณาโดยยังไม่ต้องคิดคำนวณก่อน ตลอดจนสามารถสะท้อนความรู้ความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิดของตนเองได้

2. การสร้างตาราง

การสร้างตาราง เป็นการจัดระบบข้อมูลใส่ในตาราง ตารางที่สร้างขึ้นจะช่วยในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ อันจะนำไปสู่การค้นพบแบบรูปหรือข้อชี้แนะอื่นๆ ตลอดจนช่วยให้ไม่หลงลืมหรือสับสนในกรณีใดกรณีหนึ่งเมื่อต้องแสดงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหา

3. การเขียนภาพหรือแผนภาพ

การเขียนภาพหรือแผนภาพ เป็นการอธิบายสถานการณ์และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ของปัญหาด้วยภาพหรือแผนภาพ ซึ่งการเขียนภาพหรือแผนภาพจะช่วยให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น และบางครั้งก็สามารถหาคำตอบของปัญหาได้โดยตรงจากภาพหรือแผนภาพนั้น

4. การแจกแจงที่เป็นไปได้ทั้งหมด

การแจกแจงที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการจัดระบบข้อมูล โดยแยกเป็นกรณีๆ ที่เกิดขึ้นทั้งหมด ในการแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด นักเรียนอาจจัดกรณีที่ไม่ใช่ออกก่อน แล้วค่อยค้นหาแบบรูปหรือแบบรูปของกรณีที่เหลืออยู่ ซึ่งถ้าไม่มีระบบในการแจกแจงกรณีที่เหมาะสม ยุทธวิธีนี้ก็จะไม่มีประสิทธิภาพ ยุทธวิธีนี้จะใช้ได้ดีถ้าปัญหานั้นมีจำนวนกรณีที่เป็นไปได้แน่นอน ซึ่งบางครั้งอาจใช้การค้นหาแบบรูปและการสร้างตารางมาช่วยในการแจกแจงกรณีด้วยก็ได้

5. การคาดเดาและตรวจสอบ

การคาดเดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่างๆ ที่ปัญหากำหนด ผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้องมาสร้างข้อความคาดการณ์ แล้วตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์นั้น ถ้าการคาดเดาไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องของการคาดเดาในครั้งแรกๆ เป็นกรอบในการคาดเดาคำตอบของปัญหาครั้งต่อไป นักเรียนควรคาดเดาอย่างมีเหตุผลและมีทิศทาง เพื่อให้สิ่งที่คาดเดานั้นเข้าใกล้คำตอบที่ต้องการมากที่สุด

6. การเขียนสมการ

การเขียนสมการ เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่กำหนดของปัญหาในรูปแบบของสมการ ซึ่งบางครั้งอาจเป็นสมการก็ได้ ในการแก้สมการนักเรียนต้องวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อหาว่า ข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดมามีอะไรบ้าง และสิ่งที่ต้องการหาคืออะไร หลังจากนั้นกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่ต้องการหาหรือแทนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลที่กำหนดมาให้แล้วเขียนสมการหรือสมการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเหล่านั้น ในการหาคำตอบของสมการ มักใช้สมบัติของการเท่ากันมาช่วยในการแก้สมการซึ่งได้แก่ สมบัติการสมมาตร สมบัติการถ่ายทอด สมบัติการบวก และสมบัติการคูณ และเมื่อใช้สมบัติของการเท่ากันมาช่วยแล้ว ต้องมีการตรวจสอบคำตอบของสมการตามเงื่อนไขของปัญหา ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหา ถือว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องของปัญหานี้ ยุทธวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางพีชคณิต

7. การคิดแบบย้อนกลับ

การคิดแบบย้อนกลับ เป็นการคิดวิเคราะห์ปัญหาที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยเริ่มจากข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนสุดท้าย แล้วคิดย้อนขึ้นตอนกลับมาสู่ข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนเริ่มต้น การคิดแบบย้อนกลับใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ

8. การเปลี่ยนมุมมอง

การเปลี่ยนมุมมอง เป็นการเปลี่ยนการคิดหรือมุมมองให้แตกต่างไปจากที่คุ้นเคย หรือที่ต้องทำตามขั้นตอนทีละขั้นเพื่อให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ยุทธวิธีนี้มักใช้ในกรณีที่แก้ปัญหาด้วยยุทธวิธีอื่นไม่ได้แล้ว สิ่งสำคัญของยุทธวิธีนี้ก็คือ การเปลี่ยนมุมมองที่แตกต่างไปจากเดิม

9. การแบ่งเป็นปัญหาย่อย

การแบ่งเป็นปัญหาย่อย เป็นการแบ่งปัญหาใหญ่หรือปัญหาที่มีความซับซ้อนหลายขั้นตอนออกเป็นปัญหาย่อยหรือเป็นส่วนๆ ซึ่งในการแบ่งเป็นปัญหาย่อยนั้นนักเรียนอาจลดจำนวนของข้อมูลลง หรือเปลี่ยนข้อมูลให้อยู่ในรูปที่คุ้นเคยและไม่ซับซ้อน หรือเปลี่ยนให้เป็นปัญหาที่คุ้นเคยหรือเคยแก้ปัญหามาก่อนหน้านี้

10. การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์

การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ เป็นการอธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริงโดยใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหา บางปัญหาเราใช้การให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ร่วมกับการคาดเดาและตรวจสอบ หรือการเขียนภาพและแผนภาพ จนทำให้

บางครั้งเราไม่สามารถแยกการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ออกจากยุทธวิธีอื่นได้อย่างเด่นชัด ยุทธวิธีนี้มักใช้บ่อยในปัญหาทางเรขาคณิตและพีชคณิต

11. การให้เหตุผลทางอ้อม

การให้เหตุผลทางอ้อม เป็นการแสดงหรืออธิบายข้อความหรือข้อมูลที่ปรากฏอยู่ในปัญหานั้นว่าเป็นจริง โดยการสมมติว่าข้อความที่ต้องการแสดงนั้นเป็นเท็จ แล้วหาข้อขัดแย้ง ยุทธวิธีนี้มักใช้กับการแก้ปัญหายากแก่การแก้ปัญหาย่อยโดยตรง และง่ายที่จะหาข้อขัดแย้งเมื่อกำหนดให้ข้อความที่แสดงเป็นเท็จ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. การเจาะและตรวจสอบ เป็นวิธีพื้นฐานที่เราใช้ในการแก้ปัญหาย่อยเสมอ โดยคำตอบที่สันนิษฐานไว้ต้องสัมพันธ์กับการแก้ปัญหาย่อย การประมาณคำตอบสามารถทำได้เป็นประจำในชั้นเรียน

2. การค้นหาแบบรูป เป็นการวิเคราะห์ปัญหาและค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีลักษณะเป็นระบบ

3. การเขียนสมการ ใช้ภาพหรือแผนภาพ กราฟ และตาราง เป็นการอธิบายสถานการณ์และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างๆ ของปัญหาในรูปแบบของสมการ ภาพ แผนภาพ กราฟ หรือตาราง จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นภาพจากข้อมูลที่เป็นจำนวน และความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้

4. วิธีการแบ่งกรณี หรือการแบ่งปัญหาย่อย เป็นการแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการจัดระบบข้อมูล โดยแยกเป็นกรณีที่เกิดขึ้นทั้งหมด พร้อมทั้งจัดกรณีที่ไม่เกี่ยวข้องออกก่อน หลังจากนั้นจึงค้นหาหรือแบบรูปของกรณีที่เหลืออยู่ หรือการแบ่งปัญหาใหญ่หรือปัญหาที่มีความซับซ้อนหลายขั้นตอนออกเป็นปัญหาย่อยๆ หรือเป็นส่วน ๆ ซึ่งจะช่วยลดจำนวนข้อมูลลง หรือเปลี่ยนข้อมูลให้อยู่รูปที่คุ้นเคยไม่ซับซ้อน

5. การคิดย้อนกลับ เป็นการคิดวิเคราะห์ปัญหาที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยการพิจารณาผลลัพธ์สุดท้ายแล้วกลับเข้ามาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหากับสิ่งที่กำหนดให้

6. สร้างปัญหาขึ้นมาใหม่หรือเทียบเคียงปัญหาอื่น เป็นการสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ให้เกี่ยวข้องกับปัญหาเดิม แล้วศึกษาวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น หรือ มองสถานการณ์หรือปัญหาที่เคยพบมาก่อนว่ามีลักษณะที่ตรงกับปัญหาที่กำหนดให้หรือไม่ จะทำให้เห็นถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหานั้นได้อีกทางหนึ่ง

2.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ชโรเดอร์ และ เลสเตอร์ (Schroeder; & Lester. 1989: 31 – 33) และบาร์ดูดี (Baroody. 1993: 2 – 31) ได้นำเสนอว่า การสอนการแก้ปัญหามี 3 ทาง ได้แก่

1. การสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหา (Teaching about problem solving) เป็นการสอนที่เน้นยุทธวิธีการแก้ปัญหาทั่วไป โดยปกติแล้วมักใช้รูปแบบการแก้ปัญหาของโพลยา ซึ่งมี 4 ขั้นตอน

2. การสอนการแก้ปัญหา (Teaching for problem solving) เป็นการสอนที่เน้นการประยุกต์ใช้ มักใช้ปัญหาในชีวิตจริงและสถานการณ์ที่กำหนด นักเรียนสามารถประยุกต์และฝึกใช้ มโนคติและทักษะที่เรียนรู้มาแล้ว เป็นการสอนเนื้อหาสาระหรือทักษะต่างๆ ก่อน แล้วจึงเสนอ ตัวอย่างปัญหา นักเรียนได้รับการฝึกขั้นตอนย่อยๆ ก่อนที่จะแก้ปัญหา แนวทางนี้ไม่ได้มุ่งเพียงการเรียนรู้ขั้นตอนที่หลากหลาย แต่ยังเรียนรู้การประยุกต์ใช้ความเข้าใจในบริบทที่หลากหลาย

3. การสอนโดยใช้การแก้ปัญหา (Teaching via problem solving) เป็นการสอนที่เน้นการประยุกต์ใช้เช่นกัน แนวทางนี้จะใช้ปัญหาเป็นสื่อในการเรียนรู้แนวคิดใหม่ เชื่อมโยงแนวคิด พัฒนาทักษะ และสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือใช้ปัญหาในการศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยการแสดงความสัมพันธ์ของเนื้อหากับโลกที่เป็นจริง (Real World) ใช้ปัญหาในการแนะนำและทำความเข้าใจเนื้อหา บางครั้งใช้ปัญหาในการกระตุ้นให้เกิดการอภิปรายการใช้ความรู้ในการแก้ปัญหา

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 1991: 57) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับสภาพแวดล้อมที่เอื้อให้เกิดการพัฒนาความสามารถของผู้เรียนไว้ดังนี้

1. เป็นบรรยากาศที่ยอมรับและเห็นคุณค่าของแนวคิด วิธีการคิด และความรู้สึกรักของนักเรียน
2. ให้อเวลาในการสำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์
3. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ทำงานทั้งส่วนบุคคลและร่วมมือกัน
4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ลองใช้ความสามารถในการกำหนดปัญหาและสร้างข้อคำถาม
5. ให้นักเรียนได้ให้เหตุผลและสนับสนุนแนวคิดด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 66 – 74) ได้นำเสนอว่า วิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยประยุกต์จากของโพลยา ดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา

1.1 การพัฒนาทักษะการอ่าน โดยการวิเคราะห์ความสำคัญ ความเข้าใจในปัญหา เป็นรายบุคคลหรือกลุ่ม อภิปรายความเป็นไปได้ของคำตอบ ความเพียงพอหรือความเกินพอของข้อมูลปัญหาที่ใช้เพิ่มเติมอาจไม่ใช่ปัญหาคณิตศาสตร์ก็ได้

1.2 การใช้กลวิธีเพื่อเพิ่มพูนความเข้าใจ

1.2.1 การเขียน แผนภาพ หรือแบบจำลอง ที่มีความเป็นรูปธรรม

1.2.2 ลดปริมาณที่กำหนดในปัญหาให้น้อยลง เน้นโครงสร้าง

1.2.3 การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา

1.2.4 การเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ให้เป็นเรื่องในชีวิตประจำวัน

1.3 การใช้ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตประจำวันมาให้ผู้เรียนฝึกทำความเข้าใจ โดยกำหนดข้อมูลเกินความจำเป็นหรือไม่เพียงพอ เพื่อให้ผู้เรียนฝึกการวิเคราะห์ข้อมูลจากสิ่งที่กำหนดให้ว่าข้อมูลใดที่ต้องนำมาใช้ในการคำนวณและมีข้อมูลเพียงพอที่จะใช้ในการคำนวณหรือไม่

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผน ถ้าโจทย์ปัญหามีความซับซ้อน ควรฝึกให้ผู้เรียนเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์และเขียนหรือพูดลำดับขั้นตอนการคิดอย่างคร่าวๆ ก่อนลงมือทำ เพราะขั้นตอนดังกล่าวเป็นเสมือนการวางแผนการในการแก้ปัญหา ถ้าผู้เรียนฝึกฝนสม่ำเสมอ ทำให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ดังนั้นการพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหาให้มีแนวทาง ดังนี้

2.1 ไม่บอกวิธีการแก้ปัญหาโดยตรง แต่กระตุ้นใช้คำถามนำแล้วให้นักเรียนหาคำตอบถ้ายังตอบไม่ได้ให้เปลี่ยนคำถามให้ง่ายลง คำตอบของผู้เรียนจะช่วยให้แผนการแก้ปัญหาชัดเจนขึ้น

2.2 ส่งเสริมให้ผู้เรียนคิดออกมาดังๆ สามารถบอกให้ผู้อื่นทราบว่าตนคิดอะไร ไม่ใช่คิดอยู่ในใจตนเองเงียบๆ การคิดออกมาดังๆ อาจอยู่ในรูปของการสนทนาหรือการเขียนลำดับขั้นตอนการคิดออกมาให้ผู้อื่นทราบ ทำให้เกิดการอภิปรายเพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 สร้างลักษณะนิสัยของผู้เรียนคิดวางแผนก่อนลงมือทำ ทำให้เห็นภาพรวมของปัญหา ประเมินความเป็นไปได้ก่อนลงมือแก้ปัญหา ป้องกันการผิดพลาดหรือแก้ไขข้อบกพร่องได้ทันที เน้นวิธีการแก้ปัญหาสำคัญกว่าคำตอบ

2.4 จัดปัญหาให้ผู้เรียนฝึกทักษะ ควรเป็นปัญหาที่ทำหายเหมาะสมกับความสามารถ ไม่ยากหรือง่ายเกินไป

2.5 ในการแก้ปัญหาแต่ละปัญหา ควรส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาให้มากกว่า 1 รูปแบบ เพื่อให้ผู้เรียนมีความยืดหยุ่นในการคิด

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน ในการดำเนินการตามแผน ผู้เรียนต้องตีความ ขยายความ นำแผนไปสู่การปฏิบัติอย่างละเอียดชัดเจนและประเมินความสามารถที่จะดำเนินการได้หรือไม่

4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ ขั้นตรวจสอบของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ครอบคลุมประเด็นสำคัญ 2 ประเด็น

4.1 การมองย้อนกลับไปที่ขั้นตอนการแก้ปัญหา ตั้งแต่ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผน และขั้นดำเนินการตามแผน โดยพิจารณาความถูกต้องของกระบวนการและผลลัพธ์ รวมทั้งการพิจารณาหายุทธวิธีอื่นในการแก้ปัญหา

4.2 การมองไปข้างหน้าเป็นการใช้ประโยชน์จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เพิ่งสิ้นสุดลงนั้น ทั้งในส่วนที่เป็นเนื้อหาและกระบวนการ โดยสร้างสรรค์ปัญหาที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันขึ้นมาใหม่

ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล (2539: 137 - 139) ได้นำเสนอแนวทางการนำเสนอวิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหของ โพลยา 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา นักเรียนควรได้รับการฝึกฝน

อ่านข้อความ → อ่านปัญหา → แล้วทำความเข้าใจ

โดยเริ่มจากการ...ตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ → ให้นักเรียนฝึกฝนทำความเข้าใจเอง แล้วใช้กลวิธีช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ เช่น การเขียนภาพ สร้างแบบจำลอง การปรับเปลี่ยนขนาดของปริมาณต่างๆ ของปัญหา

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ในการทำกิจกรรมต่างๆ ฝึกให้

นักเรียนคิดวางแผนก่อนลงมือทำเสมอ เช่น ในการทำแบบฝึกหัดควรฝึกให้นักเรียนเขียนแบบแผนการคิดอย่างคร่าวๆ ก่อนที่จะลงมือทำอย่างละเอียดชัดเจน โดยครูต้องไม่บอกวิธีการแก้ปัญหาแก่นักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนให้คิดด้วยตนเอง ส่งเสริมให้นักเรียนคิดออกมาดังๆ อาจจะอยู่ในรูปของการบอกหรือเขียนแบบแผนขั้นตอนการคิดออกมาให้ผู้อื่นทราบ นอกจากนี้แล้วควรนำปัญหาแปลกใหม่มาให้นักเรียนฝึกคิดอยู่เสมอ

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน การวางแผนเป็นการจัดลำดับ

หลักในการแก้ปัญหา เมื่อลงมือดำเนินการตามแผน นักเรียนต้องตีความ ขยายความ เพื่อนำไปสู่การปฏิบัติ นอกจากนี้แล้วควรฝึกให้นักเรียนฝึกการตรวจสอบความถูกต้อง เป็นไปตามแผนที่วางไว้หรือไม่ก่อนที่จะลงมือปฏิบัติ

4. สนับสนุนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้วิธีการหาคำตอบมากกว่า 1 วิธี

5. ให้นักเรียนฝึกสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปัญหาที่เรียน

วิชัย พาณิษฐ์สว (2546: 92) ได้นำเสนอว่า เราสามารถพัฒนาการรู้คิด (Metacognition) ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ โดยมีแนวปฏิบัติกว้างๆ ดังนี้

1. ส่งเสริมให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการรู้จักตนเอง รู้จักควบคุมความคิดและพฤติกรรมของตนในการทำกิจกรรมต่างๆ อย่างรอบคอบ มีสติ ในการสอนโจทย์ปัญหาครูให้นักเรียนมีกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 ให้นักเรียนคิดและพูดออกมาว่า รับรู้โจทย์ปัญหาแต่ละข้ออย่างไร มีคำถามอะไรที่จะถามตนเอง และจะวางแผนแก้โจทย์ปัญหานั้นอย่างไร

1.2 ให้นักเรียนประมาณคำตอบไว้ล่วงหน้า และชี้ให้เห็นว่าการประมาณคำตอบไว้ล่วงหน้ามีความสำคัญอย่างไร

1.3 ให้นักเรียนตรวจสอบความเป็นไปได้ของคำตอบทุกครั้ง ก่อนสรุปคำตอบ

2. ให้นักเรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นในกลุ่มเพื่อน เกี่ยวกับวิธีควบคุมและตรวจสอบตนเองในขณะที่ดำเนินการแก้ปัญหา รวมถึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ร่วมกลุ่มกันแก้โจทย์ปัญหาที่ยาก เมื่อโอกาสอำนวย

พนารัตน์ แซ่มชื่น (2548: 50) กล่าวว่า ในจัดการเรียนรู้นั้น ผู้สอนสามารถจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนเรียนรู้อย่างค่อยเป็นค่อยไป โดยกำหนดประเด็นคำถามให้คิด และหาคำตอบเป็นลำดับโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา จนผู้เรียนสามารถหาคำตอบได้ หลังจากนั้นในปัญหาต่อไป ผู้สอนค่อยลดประเด็นคำถามลงเมื่อเห็นว่าผู้เรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาเพียงพอแล้วก็ไม่จำเป็นต้องมีคำถาม

ชั้นนำ นอกจากนี้แล้วหากผู้เรียนเข้าใจกระบวนการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นแล้ว การพัฒนาให้มีทักษะนั้นผู้สอนควรเน้นฝึกการวิเคราะห์แนวคิดที่หลากหลาย ในชั้นวางแผนแก้ปัญหาให้มาก เพราะเป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญและถือว่ายากสำหรับผู้เรียน

พงศธร มหาจิตร (2550: 25 – 26) ได้นำเสนอว่า ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาทักษะ/กระบวนการด้านการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เริ่มแรกครูผู้สอนอาจสอนระเบียบวิธีการกว้าง ๆ หรือใช้คำถามนำและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะกระบวนการคิดอย่างหลากหลาย ในการวางแผนการแก้ปัญหา หลังจากนั้นครูผู้สอนอาจค่อย ๆ ลดประเด็นคำถามลงเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ความคิดมากขึ้น และเมื่อเห็นว่าผู้เรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาเพียงพอแล้วก็ไม่จำเป็นต้องใช้คำถามชี้นำอีก

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า แนวทางการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา แบ่งได้เป็น

1. การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา ได้แก่การพัฒนาทักษะการอ่านของผู้เรียน โดยการวิเคราะห์ความสำคัญ เพิ่มพูนความเข้าใจ โดยการเขียนแผนภาพ หรือแบบจำลอง ยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา และเปลี่ยนแปลงสถานการณ์ให้เป็นเรื่องในชีวิตจริง รวมถึงการใช้ปัญหาที่ใกล้เคียงชีวิตประจำวันมาให้ผู้เรียนฝึกทำความเข้าใจ โดยกำหนดข้อมูลเกินความจำเป็นหรือไม่เพียงพอ และปัญหาที่ท้าทายเหมาะสมกับความสามารถไม่ยากหรือง่ายเกินไป
2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา เป็นการจัดลำดับหลักในการแก้ปัญหา ทำให้เห็นภาพรวมของปัญหา ประเมินความเป็นไปได้ เมื่อลงมือดำเนินการตามแผน นักเรียนต้องให้หลักการวิเคราะห์เข้าร่วม โดยการฝึกให้นักเรียนได้เขียนแบบแผนการคิดอย่างคร่าว ๆ ก่อนลงมือทำอย่างละเอียดในแบบฝึกหัด โดยครูทำหน้าที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดด้วยตนเอง โดยใช้คำถามนำแล้วให้นักเรียนหาคำตอบ ถ้ายังไม่ได้ให้ครูเปลี่ยนคำถามให้ง่ายลง
3. การดำเนินการตามแผน เป็นการดำเนินการตามแผนงานที่กำหนดไว้ นำแผนไปสู่การปฏิบัติอย่างละเอียดชัดเจนและประเมินความสามารถ โดยครูทำหน้าที่กระตุ้นให้นักเรียนได้ลงมือกระทำร่วมกัน และดำเนินการไปตามแผนงานที่กำหนดไว้
4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ เป็นการมองย้อนกลับไปทบทวนขั้นตอนการแก้ปัญหา ตั้งแต่ขั้นตอนทำความเข้าใจปัญหา การวางแผน และดำเนินการตามแผน โดยพิจารณาความถูกต้องของกระบวนการ การคิดคำนวณ และความสมเหตุสมผลของคำตอบ

2.7 บทบาทของครูในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

บิทเตอร์, แฮทฟิลด์ และ เอ็ดเวิร์ดส์ (Bitter; Hatfield; & Edwards. 1998: 43 – 44) กล่าวว่า บทบาทของครูเพื่อช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน สรุปได้ดังนี้

1. ควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจ และไม่ยากหรือง่ายเกินไปมาสอนนักเรียน
2. ควรแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อย ๆ เพื่อให้ร่วมกันแก้ปัญหาเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักทำงานร่วมกัน

3. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่า โจทย์กำหนดข้อมูลอะไรมาให้ ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาและยังต้องให้ข้อมูลอื่นใดบ้างในการแก้ปัญหาข้อนั้นๆ

4. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่า ปัญหาถามอะไร ถ้าไม่สามารถบอกได้ให้อ่านปัญหานั้นใหม่ และถ้าจำเป็นจริงๆ ให้ครูอธิบายความหมายของคำที่ใช้ในปัญหาข้อนั้นให้นักเรียนทราบ

5. ควรให้ฝึกการแก้ปัญหาหลายๆ รูปแบบ เพื่อไม่ให้รู้สึกเบื่อหน่ายกับการแก้ปัญหาที่ซ้ำซาก ไม่ทำลายความสามารถ

6. ควรให้นักเรียนทำการแก้ปัญหาลittleๆ จนเคยชินว่าเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนการสอน

7. ควรส่งเสริมให้นักเรียนแก้ปัญหาหลายๆ ข้อ โดยวิธีการเดียวกัน เพื่อจะได้ฝึกทักษะและส่งเสริมให้ใช้การแก้ปัญหาหลายๆ วิธีในข้อเดียวกัน เพื่อให้เห็นว่ายังมีวิธีการอื่นๆ อีกที่จะใช้แก้ปัญหาในข้อนั้นได้

8. ควรให้เวลากับนักเรียนในการลงมือแก้ปัญหา อภิปรายผลการแก้ปัญหาและวิธีการดำเนินการแก้ปัญหา

9. ควรให้นักเรียนฝึกความคาดคะเนคำตอบและการทดสอบคำตอบที่ได้เพื่อประหยัดเวลาในการแก้ปัญหา

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 341) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นหัวใจสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาก็ประสบความสำเร็จจำเป็นต้องมีความรู้ในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ยุทธวิธีต่างๆ ในการแก้ปัญหา การกำกับตนเองอย่างมีประสิทธิภาพและการกำหนดประโยชน์ที่รับจากการสร้างและแก้ปัญหานั้นๆ การสอนการแก้ปัญหามีความจำเป็นเท่าๆ กับครูผู้สอน ดังนั้น ครูสามารถช่วยให้นักเรียนเกิดความรู้ และเจตคติที่ดีต่อการแก้ปัญหาภาระหน้าที่ที่สำคัญของครู ประกอบด้วย การวางแผนการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาที่สำคัญ โดยการสำรวจปัญหา ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาที่สำคัญ โดยการสำรวจปัญหา การศึกษาค้นคว้า และการปฏิบัติตามยุทธวิธีของตนเอง ครูต้องไม่ย่อท้อ ถึงแม้ว่าครูจะวางแผนการเรียนรู้ไว้เป็นอย่างดีแล้วแต่ไม่เป็นไปตามที่วางไว้ก็ตาม นักเรียนต้องการคำแนะนำในทุกครั้งที่เขาพยายามจะแก้ปัญหา นักเรียนต้องสังเกตในสิ่งที่เกิดขึ้นที่เป็นข้อคาดการณ์หรือการสำรวจ นักเรียนอาจสรุปคำแนะนำของใครก็ได้ที่มีเหตุผล บางครั้งอาจไม่ใช่ครูผู้สอนก็ได้ ครูต้องฝึกวิพากษ์วิจารณ์ในส่วนของ การตัดสินใจที่เป็นการตอบสนองต่อการปฏิบัติตาม และการทำความเข้าใจถึงความเป็นไปได้ทั้งในด้านการเรียนรู้และการส่งเสริมเจตคติเมื่อ นักเรียนแสดงแนวคิดใหม่ๆ แต่ครูต้องยอมรับว่าการตอบทั้งหมดไม่ได้นำไปสู่การอธิบายได้ และในบางครั้งครูไม่ควรยอมรับแนวคิดทุกแนวคิดของนักเรียน ครูควรสะท้อนความคิดของนักเรียน เพื่อเป็นการสร้างบรรยากาศโดยให้นักเรียนได้สะท้อนความคิดของตนเองในการทำงาน การสอนเป็นกิจกรรมของการแก้ปัญหาในตัวเอง ครูที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาก็ต้องมีความรู้และวิธีการแก้ปัญหาที่ดีมีประสิทธิภาพ

สิริพร ทิพย์คง (2536: 165 - 167) กล่าวว่า บทบาทหน้าที่ของครูในการส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ควรเลือกปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจและเป็นปัญหาที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านั้นมาใช้สอนนักเรียน
2. ควรทดสอบดูว่านักเรียนมีพื้นฐานความรู้เพียงพอหรือไม่ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้ ถ้ามีไม่เพียงพอ那就ต้องสอนเสริมหรือทบทวนในสิ่งที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว
3. ควรให้อิสระแก่นักเรียนในการใช้ความคิดแก้ปัญหา
4. ควรให้แบบฝึกหัดที่มีช้อยาก ปานกลางและง่ายเพื่อให้ นักเรียนทุกคนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา เป็นการเสริมสร้างกำลังใจให้กับทุกคน
5. ควรทำการทดสอบดูว่านักเรียนเข้าใจในปัญหาข้อนั้นๆ หรือไม่ โดยการถามว่า โจทย์ถามอะไรและโจทย์กำหนดอะไรมาให้
6. ควรฝึกให้นักเรียนรู้จักการหาคำตอบโดยการประมาณก่อนที่จะคิดคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง
7. ควรช่วยนักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของปัญหา โดยการแนะนำให้วาดภาพหรือเขียนแผนผังในกรณีที่ไม่สามารถคิดแก้ปัญหาได้
8. ควรช่วยนักเรียนในการคิดแก้ปัญหา เช่น ถามว่าเคยแก้ปัญหานี้หรือปัญหาที่มีลักษณะคล้ายข้อนี้มาก่อนหรือไม่ ลองแยกแยะปัญหานั้นๆ ออกเป็นปัญหาย่อยๆ
9. ควรให้นักเรียนคิดหาวิธีอื่นๆ เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหานั้นๆ รวมทั้งสนับสนุนให้ตอบวิธีการที่คิดและทำในการแก้ปัญหานั้นๆ ตลอดจนให้ทบทวนวิธีการคิดแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน
10. ควรให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหากลุ่มย่อยๆ หรือนำปัญหามาเองเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า บทบาทของครูในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา คือครูควรเลือกปัญหาในหลายๆ รูปแบบ ที่ไม่ยากเกินไปไม่ง่ายเกินไปเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน พร้อมทั้งทำการทดสอบความเข้าใจปัญหาข้อนั้นๆ ของนักเรียนว่ามีความเข้าใจหรือไม่ และช่วยเหลือนักเรียนโดยการซักถามและดึงความรู้เดิมที่มีอยู่มาใช้ในการแก้ปัญหา โดยใช้วิธีการอภิปราย แบ่งกลุ่ม เขียนภาพ เขียนแผนผัง พร้อมทั้งส่งเสริมให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาในหลากหลายวิธี พร้อมทั้งฝึกให้นักเรียนรู้จักการตั้งปัญหาย่อยๆ จากปัญหาที่กำหนดเพื่อเป็นการฝึกทักษะ

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

เบอร์กส์ (Burks. 1994: 4019A – 4020A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเขียนกิจกรรมการสอนของนักเรียนเกรด 8 โดยใช้กระบวนการในการปฏิบัติและใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา โดยให้ครู 5 คน ใช้นักเรียนซึ่งออกแบบกิจกรรมการสอนโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา โดยมีขั้นตอนดังนี้ การเข้า

สู่ปัญหา (Enter) การวางแผน (Plan) การลงมือปฏิบัติ (Attack) และการตรวจสอบ (Preview) ซึ่งคล้ายกับการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่ใช้ คือ เลือกการหารูปแบบ การสร้างแผนภาพและแจกแจงรายการหรือการสร้างตาราง การคาดเดาและการตรวจคำตอบ การแบ่งปัญหาเป็นส่วนย่อยๆ แล้วแก้ส่วนที่ง่ายก่อน โดยแบ่งนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกได้รับการสอนการแก้ปัญหาโดยใช้กิจกรรมที่ออกแบบขึ้นมา สอนติดต่อกับเป็นเวลา 7 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 2 วัน และอีกกลุ่มหนึ่งได้รับการสอนแก้ปัญหาตามปกติ ผลจากการวิจัยพบว่านักเรียนและครูเห็นด้วยว่า กิจกรรมที่เขียนขึ้นเพื่อฝึกให้นักเรียนได้ดำเนินกระบวนการคิดและการใช้ยุทธวิธีช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา

กูยา (Gooya. 1994: 2865 – A) ได้ทำการวิจัยความเข้าใจในคณิตศาสตร์และความเชื่อในการเรียนคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา จากการสอนที่เน้นการสังเคราะห์ความคิด (Metacognition based teaching) และการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหากับนักศึกษาในระดับปริญญาตรีที่ไม่ใช่สายวิทยาศาสตร์ โดยจัดกิจกรรมในการเรียนเป็น 3 ลักษณะ คือ การเขียนสรุป การใช้กลุ่มย่อยและการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้น ซึ่งการเขียนสรุปเป็นช่องทางการสื่อสารระหว่างผู้เรียนกับผู้สอน การเรียนสรุปช่วยให้ผู้เรียนเกิดความชัดเจนในแนวคิดสำหรับกลุ่มย่อย นักเรียนได้เรียนรู้และติดตามการทำงานของกลุ่ม ได้อภิปรายปัญหากับคนอื่นๆ และทำงานร่วมกันทำให้เกิดการตัดสินใจที่เหมาะสม การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นทำให้นักเรียนได้พบจุดอ่อนและจุดเด่นของตนเอง การอภิปรายยังช่วยให้นักเรียนได้พิจารณาและตัดสินใจได้ดีขึ้น จากการศึกษาพบว่า การใช้สื่อเสริมและนวัตกรรมต่างๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจถึงความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่างไปจากเดิม ที่เข้าใจว่าเป็นการประยุกต์ใช้กฎ หรือสูตรต่างๆ มาเป็นกระบวนการทำความเข้าใจและสร้างความรู้ใหม่

เทย์เลอร์ (Taylor. 1994: 633) ได้ทำการวิจัยความเข้าใจในโมโนติและการใช้ยุทธวิธีการสังเคราะห์ความคิด (Metacognition strategies) ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้การเรียนรู้ที่เป็นการช่วยเหลือกันเชิงสังคม (Socially assisted learning) กับนักเรียนเกรด 4 จำนวน 36 คน โดยกิจกรรมของกลุ่มทดลองที่หนึ่งให้เรียนรู้ที่เป็นการช่วยเหลือกันเชิงสังคม กลุ่มทดลองที่สองให้เป็นการเรียนรู้แบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD กลุ่มที่สามเป็นกลุ่มควบคุมได้รับการสอนตามปกติ ในแต่ละกลุ่มย่อยของทั้งสามกลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนที่มีความสามารถละกันกลุ่มละ 4 คน ผลการทดลองพบว่า คะแนนจากการสอบของกลุ่มทดลองทั้ง 2 กลุ่มสูงกว่ากลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองที่หนึ่งได้คะแนนการสอบวัดการประยุกต์ใช้ความรู้และยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาสูงกว่ากลุ่มทดลองที่สอง นอกจากนี้ยังพบว่ากลุ่มที่เป็นการช่วยเหลือกันเชิงสังคมมีการวางแผนการแก้ปัญหา และแสดงการโต้คำตอบของปัญหาได้ชัดเจนกว่ากลุ่มที่ใช้การเรียนแบบร่วมมือที่ใช้เทคนิค STAD

เพอร์ไรน์ (Perrine. 2001: online) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลกระทบของการแก้ปัญหาพื้นฐานในการสอนคณิตศาสตร์ของการให้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วนของครู การพัฒนาการให้เหตุผลในเรื่องสัดส่วนมีความสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ ซึ่งครูผู้สอนต้องมีวิธีการสอนที่น่าสนใจเพื่อดึงดูดผู้เรียนทำให้เข้าใจในบทเรียนมากยิ่งขึ้น เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา ในการเรียน 1 ภาค จะต้องมีการเก็บคะแนน การเพิ่มขึ้นของคะแนนจะมีผลต่อการเรียนในปีต่อไป มีผู้เข้าร่วมในการเรียน

คณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 187 คน มีวิทยากรจำนวน 6 ท่าน หนึ่งในนั้นเป็นครูประจำชั้นซึ่งสามารถแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชั้นเรียนได้ ใน 187 คนนี้ เมื่อถึงภาคเรียนที่ 2 มีนักเรียน 108 คน ประสบปัญหาในการสอบปลายภาค และในต้นภาคเรียนที่ 3 ผลรวมแสดงออกมาให้เห็นว่าการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผลมีนัยสำคัญทางสถิติ การแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผลเป็นปัจจัยหลักในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ครูต้องมีวิธีการสอนที่แตกต่างไปจากการสอนแบบเดิมที่นักเรียนไม่เคยเรียนมาก่อน

ไมเคิลส์ (Michaels. 2002: online) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการแก้ปัญหา เพศ ความเชื่อมั่น และรูปแบบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 3 จำนวน 109 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมี 3 แบบด้วยกันคือ แบบวัดกระบวนการแก้ปัญหา แบบวัดความเชื่อมั่น และแบบวัดรูปแบบของการให้เหตุผล (พิจารณาจากความสามารถ ความพยายามและความช่วยเหลือจากผู้อื่น) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชายชอบแก้ปัญหาที่ซับซ้อนมากกว่านักเรียนหญิง นักเรียนหญิงมีรูปแบบของการให้เหตุผลที่นำไปสู่ความสำเร็จดีกว่านักเรียนชาย ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างเพศในด้านความเชื่อมั่นทางคณิตศาสตร์

วิลเลียม (William. 2003: 185 – 187) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาว่าสามารถช่วยเสริมการทำงานแก้ปัญหาได้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่กำลังเริ่มต้นเรียนพีชคณิตจำนวน 42 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 22 คน และกลุ่มควบคุม 20 คน กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้การเขียนตามขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยใช้การแก้ปัญหตามขั้นตอนแต่ไม่ต้องฝึกเขียน มีการทดลองทั้งก่อนเรียนและหลังเรียน ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองสามารถทำงานแก้ปัญหาได้ดีกว่ากลุ่มควบคุม และนักเรียนกลุ่มทดลองมีการเขียนตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา ได้เร็วกว่านักเรียนในกลุ่มควบคุม จากการสัมภาษณ์นักเรียนในกลุ่มทดลองพบว่า นักเรียนจำนวน 75% มีความพอใจกิจกรรมการเขียนและนักเรียนจำนวน 80% บอกว่ากิจกรรมการเขียนจะช่วยให้เขาเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีขึ้นได้

บัลลาร์ด (Ballard. 2007) ได้ทำการวิจัยผลสัมฤทธิ์ของการรวมระบบการเรียนรู้ (ILS; Integrated Learning System) เพื่อพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนประถมเกรด 3 ถึงเกรด 6 ที่มีความบกพร่องทางการเรียนรู้ โดยนำเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มาใช้ร่วมในการศึกษาโดยเปรียบเทียบกับเด็กที่เรียนจากโรงเรียนที่จัดพิเศษโดยเฉพาะ ผลปรากฏว่า ไม่พบข้อแตกต่างระหว่างเด็กทั้งสองกลุ่มในด้านพัฒนาการของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ และพบว่านักเรียนจำนวน 10 คน จาก 56 คน มีคะแนนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสัมพันธ์กับด้านทักษะทางคณิตศาสตร์ เพิ่มขึ้นอย่างโดดเด่นเมื่อเรียนโดยใช้เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์เข้ามามีส่วนร่วมในการเรียนรู้ร่วมกับการได้รับการแนะนำจากครู

งานวิจัยภายในประเทศ

ปฐมพร บุญลี (2545: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 40 คน และมีเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองประกอบด้วย แบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แผนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้แบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบทดสอบย่อย และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าก่อนได้รับการสอนโดยใช้ชุดแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นุชรี อ่อนละม้าย (2546: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางสมองด้านเหตุผล กับ การแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ และน้ำหนักของความสามารถทางสมองด้านเหตุผลแต่ละด้านที่ส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 359 คน และมีเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถด้านจำแนกประเภท แบบทดสอบวัดความสามารถด้านอุปมาและอุปไมย แบบทดสอบวัดความสามารถด้านอนุกรมมิตติ แบบวัดความสามารถด้านสรุปความ แบบทดสอบวัดความสามารถด้านวิเคราะห์ และแบบทดสอบโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์พหุคูณระหว่างความสามารถทางสมองด้านเหตุผลแต่ละด้านกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีค่าเท่ากับ 0.353 และสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ค่าน้ำหนักความสำคัญของความสามารถทางสมองด้านเหตุผลด้านจำแนกประเภท ความสามารถทางสมองด้านเหตุผล ด้านสรุปความส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีค่า 0.180 และ 0.294 ตามลำดับ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนความสัมพันธ์ทางสมองด้านอุปมาอุปไมย ความสามารถทางสมองด้านเหตุผลด้านอนุกรมมิตติ ความสามารถทางสมองด้านเหตุผลด้านวิเคราะห์ส่งผลต่อการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

พนารัตน์ แซ่มชื่น (2548: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาชุดกิจกรรมปฏิบัติการ เพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง แบบรูปและความสัมพันธ์ กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 45 คน ใช้เวลาในการทดลอง 8 คาบเรียน จำนวนชุดกิจกรรม 6 ชุดกิจกรรม คือ กิจกรรมจำนวนมหัศจรรย์ กิจกรรมสนุกกับภาพ กิจกรรมสามเหลี่ยมแสนกล กิจกรรมลูกบาศก์พาเพลิน กิจกรรมปัญหาชวนคิด และกิจกรรมมาออกแบบ ฟันสนามกันเถอะ ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการเพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 ที่กำหนดไว้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จินตนา วงสามารถ (2549: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาการสร้างกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมเพื่อใช้ในชั่วโมงชุมนุมคณิตศาสตร์และเพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 20 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ผลการศึกษาพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ที่ระดับ .01

มาเลียม พินิจรอบ (2549: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการกลุ่มที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหา เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ จำนวน 50 คน โดยใช้การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการกลุ่ม ผลการศึกษาพบว่า การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการกลุ่ม เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 หลังการสอนมีทักษะการแก้ปัญหาสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ปกเกศ ชนะโยธา (2551: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ที่สร้างขึ้นตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ วิชาคณิตศาสตร์ ที่ผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและด้านเทคโนโลยีการศึกษา ผลการศึกษาพบว่า มีคุณภาพอยู่ในระดับดีมาก และมีประสิทธิภาพ 87.42/86.78 เป็นไปตามเกณฑ์ 85/85 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ที่สร้างขึ้นตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์สูงกว่านักเรียนที่เรียนตามแผนการจัดการเรียนรู้ของครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ผลของทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (ทักษะการแก้ปัญหา) ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ที่สร้างขึ้นตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ สูงกว่านักเรียนที่เรียนตามแผนการจัดการเรียนรู้ของครู อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นักเรียนพอใจในการเรียนจากบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต ที่สร้างขึ้นตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ อยู่ในระดับมากที่สุด

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนเกิดความคิดวิเคราะห์ การสังเคราะห์ การวางแผนและปฏิบัติตามแผน สามารถตัดสินใจเลือกรูปแบบในการแก้ไขปัญหาได้ รวมทั้งมีการให้เหตุผลในการตัดสินใจ โดยครูเป็นผู้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ สถานการณ์ พร้อมทั้งกระตุ้นและสร้างความสนใจของผู้เรียน เพื่อช่วยพัฒนาให้ผู้เรียนได้พัฒนาตนเองอย่างเต็มศักยภาพในทุกมิติ ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน อันจะส่งผลให้การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพมากขึ้น

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

วิลสัน (Wilson. 1971: 643 – 696) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งได้จำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาออกเป็น 4 ระดับ คือ

1. การคิดคำนวณด้านความรู้ความจำ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำ แบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่ระลึกถึงข้อเท็จจริงต่าง ๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการสอนมาแล้วคำถามที่วัดความสามารถในระดับนี้เกี่ยวกับข้อเท็จจริงตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นเวลานานแล้ว

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มา ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยาก ในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำ เกี่ยวกับการคำนวณ แต่ซับซ้อนกว่า แบ่งเป็น 6 ขั้นตอนดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concepts) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคติเป็นนามธรรมที่ประมวลจากข้อเท็จจริงต่างๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจ ในการตีความหรือยกตัวอย่างของมโนคตินั้น โดยใช้ คำพูดของตนเอง หรือเลือกความหมายที่กำหนดให้ ซึ่งเขียนในรูปแบบใหม่ หรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นการวัดความจำ

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์ และการสรุป อ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles and Generalization) เป็นความสามารถในการเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ ไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญหา ถ้าคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎ ที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรก อาจเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้ เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับสมบัติของระบบจำนวน และโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนแปลงรูปแบบปัญหา จากแบบหนึ่งไปเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements From One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลงข้อความที่กำหนดให้ เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิมโดยไม่รวมถึงกระบวนการแก้ปัญหา (Algorithms) หลังจากแปลแล้วอาจกล่าวได้ว่าเป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่วๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้ อาจดัดแปลงจากข้อสองที่วัดความสามารถขั้นอื่นๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหาซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางด้านสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ในระหว่างเรียน หรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนต้องเลือกกระบวนการแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาได้โดยไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้น คือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกกระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้ อาจต้องใช้วิธีการคำนวณ และจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่กำลังประสบอยู่ หรือต้องการแยกโจทย์ปัญหาออกพิจารณาเป็นส่วนตัว มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบ ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือสิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาที่พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่โจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าว ต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องใช้สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งเป็น 5 ขั้นคือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Non Routine Problems) คำถามในขั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อน ไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่าง ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจ มโนคติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้แทนการแก้ปัญหา แทนการจำความสัมพันธ์ที่เคยพบมาแล้วมาใช้กับข้อมูลชุดใหม่เท่านั้น

4.3 ความสามารถในการพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยามทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วมาช่วยในการแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถในการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่ยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในการให้ให้นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์นั้นว่าถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดไปจากมโนคติ หลักการ กฎ นิยาม หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalization) นักเรียนต้องสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่องเดิม และต้องสมเหตุสมผลด้วย คือ การจะถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์หรืออาจถามให้นักเรียนสร้างกระบวนการคิดคำนวณใหม่พร้อมทั้งแสดงการใช้กระบวนการนั้น

สเปนซ์ (Spence. 1983: 9) ได้ให้ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า ความสำเร็จจากพฤติกรรมในการทำงาน ของบุคคล โดยพิจารณาจากหลักเกณฑ์ที่วางไว้ หรือจากความฉลาดของบุคคล

ฮูเซ็น และ โพสต์เลทไวท (Husen; & Postlethwaite. 1985: 35) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นคำที่มีความหมายกว้าง ซึ่งพอประมวลได้ว่าเป็นผลสะท้อนของความรู้ และการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในระหว่างทักษะ และความรู้กำลังพัฒนา

พนารัตน์ แซ่มชื่น (2548: 65) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถทางด้านสติปัญญาในการเรียนของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยอาจจะพิจารณาจากคะแนนสอบที่กำหนดให้ หรือ คะแนนที่ได้จากงานที่ครูมอบหมาย

เสาวภา อนุเพชร (2548: 35) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึงระดับความสามารถหรือระดับผลสัมฤทธิ์ของบุคคลหลังจากการเรียนรู้หรือการฝึกอบรม ซึ่งสามารถแบ่งเป็นความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการคิดวิเคราะห์ จัดได้ว่าเป็นเกณฑ์ที่จะนำมาใช้ประเมินประสิทธิภาพของการเรียนการสอนได้เป็นอย่างดี

อัมพร เจียรโนรส (2548: 38) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ระดับความสามารถหรือระดับผลสัมฤทธิ์ของบุคคล หลังจากการเรียนรู้หรือจากการฝึกอบรม

ปริญญา สองสีดา (2550: 29) ได้ให้ความหมายว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการคำนวณและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้าน ต่างๆ 4 ด้าน ได้แก่ ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ระดับความสามารถทางด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจำแนกพฤติกรรมที่พึงประสงค์ออกเป็น 4 ด้าน ได้แก่ ด้านความรู้ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์

3.2 องค์ประกอบที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เพรสคอตต์ (Prescott. 1961: 14 – 16) ได้นำเสนอว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ทั้งในห้องและนอกห้องเรียนมีดังนี้

1. องค์ประกอบทางด้านร่างกาย ได้แก่ อัตราการเจริญเติบโตของร่างกาย สุขภาพร่างกาย ข้อบกพร่องทางร่างกายและบุคลิกภาพ
2. องค์ประกอบทางความรัก ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่างบิดากับมารดา ความสัมพันธ์ระหว่างบิดามารดากับลูก ความสัมพันธ์ระหว่างลูกๆ ด้วยกัน และความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกทั้งหมดในครอบครัว
3. องค์ประกอบทางด้านวัฒนธรรมและสังคม ได้แก่ ขนบธรรมเนียมประเพณี ความเป็นอยู่ของครอบครัว สภาพแวดล้อมทางบ้าน การอบรมทางบ้านและฐานะทางบ้าน
4. องค์ประกอบทางความสัมพันธ์ในเพื่อนวัยเดียวกัน ได้แก่ ความสัมพันธ์ของนักเรียนกับเพื่อนวัยเดียวกันทั้งที่บ้านและที่โรงเรียน
5. องค์ประกอบทางการพัฒนาแห่งตน ได้แก่ สติปัญญา ความสนใจ เจตคติของนักเรียน
6. องค์ประกอบทางการปรับตัว ได้แก่ ปัญหาการปรับตัวการแสดงออกทางอารมณ์

แครร์รอล (Carroll. 1963: 723 – 733) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับอิทธิพลขององค์ประกอบต่างๆ ที่มีต่อระดับผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนโดยการนำเอาครู นักเรียน และหลักสูตรมาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญโดยเชื่อว่าเวลาคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่นักเรียนจะได้รับ

บลูม (Bloom. 1976 :167-176) ได้ทำการวิจัยและเสนอทฤษฎีเกี่ยวกับระบบการเรียนการสอนในโรงเรียน โดยองค์ประกอบหรือปัจจัยที่มีผลกระทบต่อระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 3 องค์ประกอบ

1. พฤติกรรมด้านความรู้ ความคิด (Cognitive Entry Behaviors) ซึ่งหมายถึงความสามารถทั้งหมดของผู้เรียน ซึ่งประกอบด้วยความถนัดและพื้นฐานความรู้เดิมของผู้เรียน

2. คุณลักษณะทางด้านจิตพิสัย (Affective Entry Behaviors) ซึ่งหมายถึงสภาพการณ์หรือแรงจูงใจที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ใหม่ ซึ่งได้แก่ ความสนใจและเจตคติที่มีต่อเนื้อหาวิชา โรงเรียนและระบบการเรียน ความคิดเห็นเกี่ยวกับตนเอง และลักษณะซึ่งเป็นคุณลักษณะต่างๆ ทางด้านจิตพิสัย ซึ่งบางอย่างอาจเปลี่ยนแปลงได้ บางอย่างยังคงอยู่

3. คุณภาพของการสอน (Quality of Instruction) ซึ่งได้แก่ การได้รับคำแนะนำ การมีส่วนร่วมในการเรียนการสอน การเสริมสร้างของครู การแก้ไขข้อผิดพลาด และรู้ผลว่าตนเองกระทำได้อย่างถูกต้องหรือไม่

อัญชนา โพธิพลกร (2545: 95) ได้นำเสนอว่า ปัจจัยและองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีองค์ประกอบหลายประการที่ทำให้เกิดผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คือ ด้านตัวนักเรียน เช่น สถิติปัญญา อารมณ์ ความสนใจ เจตคติต่อการเรียน ด้านตัวครู เช่น คุณภาพของครู การจัดระบบ การบริหารของผู้บริหาร ด้านสังคม เช่น สภาพเศรษฐกิจและสังคมของครอบครัวของนักเรียน เป็นต้น แต่ปัจจัยที่มีผลโดยตรงต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนก็คือ การสอนของครูนั่นเอง

เสาวภา อุนเพชร (2548: 36) ได้นำเสนอว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีองค์ประกอบหลายประการที่ทำให้เกิดผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยเฉพาะองค์ประกอบเกี่ยวข้องกับตัวนักเรียนคือ ความพร้อมทางด้านร่างกาย สถิติปัญญา อารมณ์ และสังคมของนักเรียน แต่สิ่งที่มีอิทธิพลและทำให้เกิดผลโดยตรงคือการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู

ธัญกร คำแวง (2552: 37) ได้นำเสนอว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการดังนี้

1. ความรู้พื้นฐานเดิม ในส่วนของข้อมูลส่วนตัว ความรู้เดิมของผู้เรียน เป็นสิ่งที่มีความสำคัญที่จะใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพตรงกับความต้องการความสามารถ ความสนใจของผู้เรียนและสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ในหลักสูตร

2. ครอบครัว โดยครอบครัวเป็นสถาบันที่มีอิทธิพลต่อพัฒนาการด้านต่างๆ ของมนุษย์ ไม่ว่าจะเป็นการถ่ายทอดความรู้ จริยธรรม ค่านิยม และประสบการณ์ต่างๆ การที่ผู้เรียนจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้นอยู่กับสภาพภายในครอบครัว ความรัก ความอบอุ่นที่พ่อแม่หรือผู้ปกครองมีต่อผู้เรียน สภาพแวดล้อมทางบ้านจึงมีบทบาทสำคัญต่อความพร้อมในการเรียน

3. แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์ โดยแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์เป็นองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ก่อให้เกิดการกระตุ้นพลังขับ หรือช่วยผลักดันให้ผู้เรียนเกิดความปรารถนาที่จะเรียนให้สำเร็จ โดยบุคคลที่มีแรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์สูงจะเป็นคนที่ทะเยอทะยานสูง มีความกระตือรือร้น และชอบทำงานที่มีลักษณะท้าทายความสามารถ

4. เจตคติต่อการเรียน โดยเจตคติเป็นการแสดงออกทางพฤติกรรมทางการเรียนของผู้เรียน ถ้าผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาที่เรียน ส่งผลให้ผู้เรียนมีความตั้งใจเรียน พยายามศึกษาหาความรู้ เอาใจใส่ต่อการเรียน และส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีองค์ประกอบด้วย

1. ด้านนักเรียน ได้แก่ ความรู้พื้นฐานเดิม เจตคติและความสนใจของผู้เรียน
2. ด้านครูผู้สอน ได้แก่ วิธีการสอนของครู การใช้สื่อการสอนของครู
3. ด้านสิ่งแวดล้อม ได้แก่ บรรยากาศภายในชั้นเรียนหรือโรงเรียน วัฒนธรรมและสภาพสังคมที่เกี่ยวข้องกับผู้เรียน

3.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

เรวัต และ คุปตะ (Rawat; & Gupta. 1970: 7 - 9) ได้นำเสนอว่า สาเหตุของการสอบตกและออกจากโรงเรียนของนักเรียนในระดับประถมศึกษา มาจากสาเหตุหลายประการ ได้แก่

1. นักเรียนขาดความรู้สึกร่วมในการมีส่วนร่วมกับการเรียน
2. ความไม่เหมาะสมของการจัดเวลาเรียน
3. ผู้ปกครองไม่เอาใจใส่ในการศึกษาของบุตร
4. นักเรียนมีสุขภาพไม่สมบูรณ์
5. ความยากจนของผู้ปกครอง
6. ประเพณีทางสังคม
7. โรงเรียนไม่มีการปรับปรุงที่ดี
8. การสอบตกซ้ำชั้นเพราะระบบการวัดผลไม่ดี
9. อายุน้อยหรือมากเกินไป

10. สาเหตุอื่นๆ เช่น การคมนาคมไม่สะดวก อพยพย้ายถิ่นที่อยู่ เป็นต้น

วัชร บวรณสิงห์ (2525: 435) ได้นำเสนอว่า สำหรับนักเรียนที่เรียนอ่อนวิชาคณิตศาสตร์ จะมีลักษณะดังนี้

1. ระดับสติปัญญา (I.Q) อยู่ระหว่าง 79 ถึง 90 และผลคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30
2. อัตราการเรียนรู้ทางวิชาคณิตศาสตร์จะต่ำกว่านักเรียนคนอื่นๆ
3. มีความสามารถทางการเรียนต่ำ

4. จำหลักเกณฑ์ หรือความคิดรวบยอดเบื้องต้นทางวิชาคณิตศาสตร์ที่เรียนไปแล้วไม่ได้
5. มีปัญหาในการใช้ถ้อยคำ
6. มีปัญหาในการหาความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ และการสรุปเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไป
7. มีพื้นความรู้ทางวิชาคณิตศาสตร์น้อยสังเกตจากการสอบตกทางวิชาคณิตศาสตร์บ่อยครั้ง
8. มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียน โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์
9. มีความกดดันและสับสนต่อความล้มเหลวทางด้านการเรียนของของตนเองและบางครั้งรู้สึกดูถูกตนเอง
10. ขาดความเชื่อมั่นในตนเอง
11. อาจมาจากสภาพครอบครัวที่มีสภาพแวดล้อมแตกต่างจากนักเรียนคนอื่นๆ ซึ่งมีผลทำให้ขาดประสบการณ์ที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการเรียน
12. ขาดทักษะในการฟัง และไม่มีความตั้งใจเรียน หรือมีความตั้งใจเรียนเพียงช่วงเวลาสั้น
13. มีข้อบกพร่องด้านสุขภาพ เช่น สายตาไม่ปกติ มีปัญหาทางด้านการฟังและข้อบกพร่องทางทักษะการใช้มือ
14. ไม่ประสบความสำเร็จในด้านการเรียนทุกๆ ไป
15. ขาดความสามารถในการแสดงออกทางการพูด ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้คำถามที่แสดงให้เห็นว่าตนเองยังไม่เข้าใจในการเรียนนั้นๆ
16. มีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำทั้งทางอารมณ์และสังคม

สมควร ปานโม (2545: 37) ได้นำเสนอว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และมีผลต่อการเรียนของนักเรียนนักศึกษา คือ การจัดการเรียนการสอน เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ สภาพแวดล้อมทางครอบครัวและวุฒิภาวะ จากสาเหตุดังกล่าวจึงต้อง เป็นหน้าที่ของครูที่จะต้อง จัดหาวิธีการที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดประสิทธิผลที่ดีที่สุด

อัญชนา โพธิ์พลากร (2545: 96) ได้นำเสนอว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และมีผลต่อการเรียนของนักเรียนก็คือการจัดการกิจกรรมการเรียนการสอนและการสร้าง เจตคติความรู้สึกร่วมต่อการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่างๆ ที่ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ซึ่งเป็นหน้าที่ของครูโดยตรงที่จะจัดหาวิธีการสอนและเทคนิคการสอนที่เหมาะสมนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน เพื่อให้เกิดประสิทธิผลที่ดียิ่งขึ้น

ยุทธกร ถามา (2546: 37) ได้นำเสนอว่า สาเหตุส่วนหนึ่งที่ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนคณิตศาสตร์ และส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนนั้น คือ การจัดการเรียนการสอนและการมีเจตคติที่ไม่ดีต่อการเรียนของผู้เรียนเอง ซึ่งเป็นหน้าที่ของผู้สอนโดยตรงที่จะจัดหาวิธีการที่เหมาะสมนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น

ธนกร ตุ่มบุญ (2548: 43) ได้นำเสนอว่า มีสาเหตุหลายอย่างที่ส่งผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน แต่ที่ทำให้เกิดผลโดยตรงนั้นก็คือ การสอนของครูนั่นเอง ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์คือ ความบกพร่องทางร่างกาย เช่น สายตาไม่ปกติ มีปัญหาด้านการฟัง มีความพิการแขน ความบกพร่องทางสติปัญญาและอารมณ์ เช่น ระดับสติปัญญา (I.Q.) อยู่ระหว่าง 75 – 90 (ระดับสติปัญญา 90 – 110 ถือว่ามีสติปัญญาปานกลาง) มีความสามารถในการอ่านต่ำ มีความสามารถในการหาความสัมพันธ์ต่ำ ขาดความเชื่อมั่นในความสามารถของตนเอง มีความกดดันและรู้สึกกังวลต่อความล้มเหลวทางการเรียนของตน มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียน และวิชาคณิตศาสตร์ จำหลักเกณฑ์และโมโนติเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ที่ผ่านมาแล้วไม่ได้ ความบกพร่องทางด้านประสบการณ์ เช่น ขาดทักษะในการฟังและไม่มีความตั้งใจในการเรียน สภาพครอบครัว ไม่ประสบผลสำเร็จในด้านการเรียนทั่วๆ ไป

3.4 การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2540: 147) ได้ให้ความหมายแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไว้ว่าเป็นแบบทดสอบที่วัดความรู้ที่นักเรียนที่ได้เรียนไปแล้วซึ่งมักจะเป็นข้อคำถามให้นักเรียนตอบกับให้นักเรียนปฏิบัติจริง ซึ่งแบ่งแบบทดสอบประเภทนี้เป็น 2 ชนิด คือ

1. แบบทดสอบของครู หมายถึง ชุดคำถามที่ครูเป็นผู้สร้างขึ้นเป็นคำถามที่เกี่ยวกับความรู้ที่นักเรียนรู้ในห้องเรียน ว่ามีความรู้มากแค่ไหน บกพร่องตรงไหนจะได้สอนซ่อมเสริม หรือวัดดูความพร้อมที่จะเรียนบทใหม่ ซึ่งอยู่กับความต้องการของครู

2. แบบทดสอบมาตรฐาน หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นจากผู้เชี่ยวชาญในแต่ละสาขา หรือจากครูที่สอนวิชานั้นแต่ผ่านการทดสอบหาคุณภาพหลายครั้ง จนกระทั่งมีคุณภาพดีพอจึงสร้างเกณฑ์ปกติในแบบทดสอบนั้น เพื่อใช้เป็นหลักและเปรียบเทียบผลเพื่อประเมินค่าของการเรียนการสอน แบบทดสอบมาตรฐานจะมีคู่มือประกอบการสอบและมีมาตรฐานในการแปลคะแนนด้วยทั้งแบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้น และแบบทดสอบมาตรฐาน มีวิธีการสร้างข้อคำถามเหมือนกัน เป็นคำถามที่วัดเนื้อหา และพฤติกรรมที่สอนไปแล้วซึ่งสามารถวัดได้และควรวัดให้ครอบคลุมพฤติกรรมต่างๆ ดังนี้

- 2.1 วัดด้านความจำ
- 2.2 วัดด้านความเข้าใจ
- 2.3 วัดด้านการนำไปใช้
- 2.4 วัดด้านการวิเคราะห์
- 2.5 วัดด้านการสังเคราะห์
- 2.6 วัดด้านการประเมินค่า

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 199) กล่าวว่า การวัดและการประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ควรจัดให้ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะ/กระบวนการ ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ และสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปีและมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในหลักสูตรสถานศึกษาควรมุ่งเน้นการวัดสมรรถภาพโดยรวมของผู้เรียนเป็นหลัก จุดประสงค์หลักของการวัดและประเมินผลไม่ใช่อยู่ที่การวัดผลเพื่อตัดสินผลการเรียนของผู้เรียนเพียงอย่างเดียว แต่เป็นการวัดและประเมินผลเพื่อนำผลการประเมินไปใช้ในการปรับปรุงการเรียนการสอน เพื่อช่วยพัฒนาให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและเต็มตามศักยภาพ

คุณภาพของผู้เรียนที่ต้องประเมิน

ในการวัดและประเมินผลของกลุ่มคณิตศาสตร์นั้น หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 กำหนดให้ทำการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ที่คาดหวังหลายปี มีตัวชี้วัดในการวัดและประเมินผล ที่ต้องนำมาพิจารณา ดังนี้

1. ด้านความรู้

ในการวัดและประเมินผลด้านความรู้ต้องสอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ 5 สาระ ดังนี้

- 1.1 จำนวนและการดำเนินการ
- 1.2 การวัด
- 1.3 เรขาคณิต
- 1.4 พีชคณิต
- 1.5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

2. ด้านทักษะ/กระบวนการ

ในการวัดและประเมินผลด้านทักษะ/กระบวนการ เป็นการวัดความสามารถของนักเรียน ครอบคลุมประเด็นที่ต้องประเมิน ดังนี้

- 2.1 การแก้ปัญหา
- 2.2 การให้เหตุผล
- 2.3 การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ
- 2.4 การเชื่อมโยง
- 2.5 ความคิดสร้างสรรค์

3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดและประเมินผลด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ครอบคลุมประเด็นที่ต้องประเมิน ดังนี้

- 3.1 ทำงานอย่างเป็นระบบ
- 3.2 มีระเบียบวินัย
- 3.3 มีความรอบคอบ
- 3.4 มีความรับผิดชอบ
- 3.5 มีวิจรรณญาณ

3.6 มีความเชื่อมั่นในตนเอง

3.7 ตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 158, 166 - 169) กล่าวว่า โดยทั่วไป ในทางการศึกษา การวัดผล หมายถึง การตรวจสอบหรือค้นหาสิ่งที่ต้องการตรวจสอบว่ามีปริมาณและคุณภาพมากน้อยเพียงใดและการประเมินผล หมายถึง การนำผลจากการวัดผลมาประมวลชี้ขาดในขั้นสรุปหรือขั้นของการตัดสินใจ ซึ่งการวัดผลถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผลในการประเมินผลเพื่อให้มีประสิทธิภาพและสอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ครูจะต้องบูรณาการการประเมินผลความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์และการประเมินผลทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ซึ่งก็คือการประเมินผลที่คำนึงถึงทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์นั่นเอง การประเมินผลที่คำนึงถึงทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์ควรยึดหลัก ดังนี้

1. การประเมินผลจะต้องมีข้อสอบที่มีลักษณะคำถามแบบเจาะลึกแนวคิด ยุทธวิธีและกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน

ในการประเมินผลที่คำนึงถึงทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ครูไม่ควรมุ่งเน้นการหาคำตอบเพียงอย่างเดียว แต่ควรรวมไปถึงการคิดวิเคราะห์ การเลือกใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน โดยการเลือกใช้ข้อสอบที่มีลักษณะคำถามแบบเจาะลึกแนวคิด ยุทธวิธีแก้ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน เช่น ลักษณะคำถามที่ถามว่า เพราะเหตุใดทำไม อย่างไร สัมพันธ์หรือเกี่ยวข้องกันอย่างไร หรือเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร เป็นต้น

2. การประเมินผลจะต้องใช้การสังเกตและการใช้คำถามควบคู่ไปกับกระบวนการเรียนการสอน

การสังเกตและการใช้คำถาม เป็นการประเมินที่กระทำขณะที่นักเรียนกำลังลงมือแก้ปัญหาหรืออภิปรายภายในกลุ่ม ข้อมูลที่ได้จะเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ ที่ไม่สามารถระบุเป็นคะแนนได้ ซึ่งได้แก่ พฤติกรรมการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอแนวคิดของนักเรียน ความเชื่อและเจตคติ ในการสังเกตครูจะต้องบันทึกสิ่งที่สังเกตไว้ เพราะการจำอย่างเดียวอาจทำให้หลงลืมได้ เนื่องจากครูมีเวลาจำกัดในการจดบันทึก ดังนั้นก่อนเข้าสู่บทเรียน ครูต้องเลือกประเด็นของสิ่งที่ต้องการประเมินและเตรียมเครื่องมือประเมินไว้ล่วงหน้า เช่น แบบตรวจสอบรายการ (checking list) และจดบันทึกสิ่งที่สังเกตโดยการทำเป็นเครื่องหมายไว้ และต้องบันทึกทันทีทันใดภายหลังการสังเกต

3. การประเมินผลจะต้องส่งเสริมให้นักเรียนเขียนบันทึกเพื่อสะท้อนกระบวนการคิดของตนเอง

การให้นักเรียนเขียนบันทึก เป็นอีกวิธีหนึ่งในการประเมินผลที่คำนึงถึงทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการให้นักเรียนได้อธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ หรือได้สะท้อนความรู้สึก ความคิดเห็น ความสนใจของนักเรียนที่มีต่อแนวคิดหรือการดำเนินกิจกรรมทางคณิตศาสตร์นั้น วิธีนี้จะมีคุณค่ามากน้อยขึ้นอยู่กับความซื่อตรงที่นักเรียนรายงานหรือบันทึกออกมาถึงความรู้สึก ความเชื่อ ความตั้งใจ และความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับกิจกรรมที่กำหนด ซึ่งนักเรียนจะต้องเขียนเล่าประสบการณ์ที่ได้จากการทำกิจกรรมภายหลังที่เสร็จจากการทำกิจกรรมนั้น

4. การประเมินผลจะต้องมีเกณฑ์การให้คะแนนที่เป็นระบบและชัดเจน

การประเมินผลที่มีเกณฑ์การให้คะแนนที่เป็นระบบและชัดเจน จะช่วยให้ครูสามารถพิจารณาและตัดสินได้ว่า นักเรียนของตนมีความรู้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ อยู่ในระดับใด เกณฑ์การให้คะแนนที่ยอมรับและนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน คือ การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric scoring) ซึ่งเป็นการให้คะแนนที่ประเมินผลจากผลงานที่นักเรียนทำหรือพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออก มีการกำหนดระดับคะแนนพร้อมบรรยายละเอียดของผลงานหรือพฤติกรรมของนักเรียนไว้อย่างชัดเจนและเป็นรูปธรรม

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ควรจัดให้ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะ/กระบวนการ ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยครูจะต้องบูรณาการการประเมินผลความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์และการประเมินผลทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันโดยครูควรยึดหลักที่ว่า การประเมินผลจะต้องมีข้อสอบที่มีลักษณะคำถามแบบเจาะลึกแนวคิด ยุทธวิธีและกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน การประเมินผลจะต้องใช้การสังเกตและการใช้คำถามควบคู่ไปกับกระบวนการเรียนการสอน รวมทั้งการประเมินผลจะต้องส่งเสริมให้นักเรียนเขียนอธิบายเพื่อสะท้อนกระบวนการคิดของตนเอง การประเมินผลจะต้องมีเกณฑ์การให้คะแนนที่เป็นระบบและชัดเจน

3.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

ริโอแดน และนอยซ์ (Riordan; & Noyce. 2001: 368 – A) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับผลกระทบของหลักสูตรมาตรฐานหลักวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียนเกรด 5 ถึง 8 ศึกษาโดยการเปรียบเทียบกับนักเรียนกลุ่ม 2 กลุ่ม โดยกลุ่มที่ 1 เรียนตามหลักสูตรเดิม ส่วนกลุ่มที่ 2 เรียนตามหลักสูตรมาตรฐาน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิม

ฟินน์ และคนอื่นๆ (Finn; et al. 2003: 74 – A) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมของครูกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้หลักสูตรมาตรฐานหลัก โดยทำการศึกษากับครู 20 คน และนักเรียน 1,466 คน จาก 26 โรงเรียน ผลการศึกษาพบว่า สิ่งที่สำคัญที่สุด คือ การเตรียมการสอนตามหลักสูตร รองลงมาคือ พฤติกรรมการสอนครู ซึ่งมีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน

รีย์ และคนอื่นๆ (Reys; et al. 2003: 74 – A) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับหลักสูตรมาตรฐานหลักสูตรเดิมวิชาคณิตศาสตร์ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นนักเรียนเกรด 8 โดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม 2 กลุ่ม กลุ่มแรกให้เรียนโดยใช้หลักสูตรมาตรฐานหลักอย่างน้อย 2 ปี และมีกลุ่มเรียนโดยใช้หลักสูตรเดิม ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรมาตรฐานหลักมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนตามหลักสูตรเดิมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ครัมพ์ (Crump. 2004: 3621) ได้ศึกษาปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหญิงเกรด 1 โรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น รัฐจอร์เจียได้เป็นลักษณะพิเศษที่ได้พัฒนาจากการนำร่อง โดยการสัมภาษณ์นักเรียนที่ประสบผลสำเร็จในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ศึกษาจากข้อมูลโรงเรียน ประวัตินักเรียน วารสารนักเรียนแลกเปลี่ยนและวารสารวิจัยของครู โดยผู้สัมภาษณ์ได้อัดเทป และถ่ายสำเนา แล้วแบ่งแยกประเภทเพื่อเปรียบเทียบการตอบของนักเรียนประเภทของผลการตอบของนักเรียน กำหนดเป็นลำดับขั้น ซึ่งผลการศึกษาพบว่า ปัจจัยที่มีผลรวมถึงทัศนคติต่อผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนหญิง คือ คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เหมาะสมกับผู้ชาย มีผลต่อความเป็นผู้ใหญ่ ความอิสระ ความกลุ่มใจทางคณิตศาสตร์ แรงจูงใจทางคณิตศาสตร์ ประโยชน์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งผลการวิจัยนี้จะเป็นแนวทางเพื่อกำจัดอุปสรรคที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในการสร้างหลักสูตรต่อไป

แอปโพลด์ (Appold. 2006: online) ได้ศึกษาสิ่งที่เป็นอิทธิพลและผลกระทบของครูด้านความเข้าใจในรูปแบบขบวนการสื่อสารต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน การศึกษาครั้งนี้ออกแบบเพื่อศึกษาความเข้าใจของครูต่อรูปแบบขบวนการสื่อสารที่มีผลกระทบต่อกำหนดสำคัญตามคะแนนที่เพิ่มขึ้นด้านวิชาการในระดับเกรด 3 , 4 และ 5 โดยใช้เครื่องมือในการวัดเป็นแบบการประเมิน NWEA (Northwest Evaluation Association's) ด้วยคอมพิวเตอร์ ปรับแบบการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ การอ่าน การใช้ภาษา ผลการศึกษาค้นคว้าสรุปได้ว่า 1.ความเข้าใจรูปแบบขบวนการสื่อสาร ไม่พอเพียงที่จะให้เกิดความน่าเชื่อถือ ดูจากความก้าวหน้าทางวิชาการของนักเรียน 2.ความสนใจของครูต่อรูปแบบการสื่อสาร อาจจะไม่ได้ใช้อย่างเต็มที่ หรือไม่สอดคล้องกัน 3.ยิ่งฝึกอบรมนานในรูปแบบขบวนการสื่อสารจะไม่เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการของนักเรียน ดังนั้นการสนับสนุน ทบทวน และการประเมินยังเป็นสิ่งที่จำเป็น

งานวิจัยในประเทศ

ดรุณี เตชะวงศ์ประเสริฐ (2549: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนรู้ เรื่อง ค่ากลางข้อมูล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนแบบบูรณาการสอดแทรก จำนวน 45 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60% และความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ 55% ที่ระดับ .01

ปริญญ์ สองสีดา (2550: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 35 คน ในการเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด การอ่าน การเขียน และโดยรวม ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบ 4 MAT สูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 ที่ระดับสำคัญ .01

พันทิพา ทับเที่ยง (2550: บทคัดย่อ) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม และความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนการสอนแบบร่วมมือแบบกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) กับการจัดการเรียนแบบร่วมมือแบบกลุ่มช่วยรายบุคคล (TAI) ของนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 72 คน แบ่งเป็นกลุ่มละ 36 คน ปีการศึกษา 2549 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดแบบกลุ่มผลสัมฤทธิ์ กับกลุ่มช่วยรายบุคคล มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม และความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของผู้เรียนขึ้นอยู่กับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งที่จะสร้างองค์ความรู้ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งคุณลักษณะอันพึงประสงค์ และรวมไปถึงเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ด้วย อีกทั้งยังต้องอาศัยความรู้พื้นฐานอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้สอนจะต้องพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อให้ผู้เรียนได้มีความเข้าใจในเนื้อหาและมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดีขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

1. กำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552 ทั้งหมด 8 ห้องเรียน จำนวน 362 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ซึ่งได้รับการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยมีห้องเป็นหน่วยการสุ่ม (Sampling Unit) ได้กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 30 คน ซึ่งแต่ละห้องเรียนได้จัดชั้นเรียนเป็นแบบความสามารถ

2. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรของสถานศึกษาโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งประกอบด้วย

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. การนำไปใช้

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ดำเนินการทดลองในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ใช้เวลาในการทดลอง 10 คาบเรียน (คาบเรียนละ 50 นาที) ดังนี้

1. ทดสอบก่อนเรียน	1 คาบเรียน
2. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้	8 คาบเรียน
3. ทดสอบหลังเรียน	1 คาบเรียน
รวม	10 คาบเรียน

4. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ประกอบด้วย

1. แผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้การตั้งโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. แบบทดสอบปรนัยจำนวน 30 ข้อ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3

3. แบบทดสอบอัตนัย โดยแบ่งออกเป็นแบบทดสอบย่อยทั้งสิ้น 4 ฉบับ สอบวัดทุก ๆ 2 คาบเรียน โดยในแต่ละฉบับมีจำนวน 2 ข้อ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ขั้นตอนในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1. ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) กรมวิชาการ และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร ช่วงชั้นที่ 3 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. วิเคราะห์สาระการเรียนรู้ มาตรฐานการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1 – 3) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ วิเคราะห์ความสอดคล้องระหว่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับกระบวนการเรียนการสอน

3. ดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีองค์ประกอบดังนี้

3.1 รหัสวิชา / กลุ่มสาระการเรียนรู้ / ช่วงชั้น / ระดับชั้น / ภาคเรียน / ปีการศึกษา / ชื่อหน่วยการเรียนรู้ / ชื่อเรื่อง / เวลาที่ใช้

3.2 ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง / จุดประสงค์การเรียนรู้

- ด้านความรู้
- ด้านทักษะ / กระบวนการ
- ด้านคุณลักษณะ

3.3 สาระการเรียนรู้

3.4 กิจกรรมการเรียนรู้

- เริ่มต้น เป็นการกล่าวถึงความสำคัญและเป้าหมายที่จะเรียน และสอบถามผู้เรียนว่ามีความรู้ในเรื่องที่จะเรียนมาบ้างแล้วหรือไม่อย่างไร
- นำเสนอปัญหาเกี่ยวกับเรื่องที่จะสอน เป็นการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ผู้เรียนนำเสนอปัญหา โดยปัญหาที่ครูนำเสนอควรเป็นปัญหาพื้นฐานของเรื่องที่จะเรียนพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถามข้อสงสัยในปัญหา
- มอบหมายงาน เป็นการมอบหมายงานจากปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อให้ นักเรียนเรียนรู้บทโนทัศน์ สรุปบทโนทัศน์ และเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา
- ค้นหาสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันค้นหาสถานการณ์ที่หลากหลายที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อเรื่อง
- สร้างเป็นโจทย์ปัญหา เป็นการให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตั้งปัญหาที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อที่เรียน
- เริ่มต้นใหม่ เป็นการฝึกฝนการตั้งปัญหาของนักเรียน โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมซ้ำจากสถานการณ์ใหม่ที่เพื่อนในกลุ่มอื่นๆ ได้นำเสนอ

3.5 สื่อการเรียนรู้ / แหล่งการเรียนรู้

3.6 การวัดผลประเมินผล

- วิธีการวัด
- เครื่องมือวัด
- เกณฑ์การประเมิน

3.7 การบันทึกผลหลังการสอน

4. นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างเสร็จเรียบร้อยแล้วเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์เพื่อปรับปรุงแก้ไข แล้วจึงนำเสนอผู้เชี่ยวชาญด้านการสอนคณิตศาสตร์ จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบเกี่ยวกับความเที่ยงตรงของเนื้อหา ความชัดเจนและความถูกต้องของผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับกิจกรรม สื่อและอุปกรณ์การเรียนรู้ และความสอดคล้องระหว่างผลการเรียนรู้ที่คาดหวังกับการวัดผลและประเมินผลเพื่อนำข้อเสนอแนะมาปรับปรุงแก้ไข

5. นำแผนการจัดการเรียนรู้โดยการให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ผ่านการปรับปรุงแก้ไขข้อเสนอแนะเรียบร้อยแล้วเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ตรวจสอบพิจารณาอีกครั้ง แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขให้เรียบร้อยแล้วนำไปใช้ในการศึกษาค้นคว้ากับกลุ่มตัวอย่าง

ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในวิชาเพิ่มเติม
2. ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. สร้างแบบทดสอบปรนัยจำนวน 60 ข้อ เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ตามจุดประสงค์ของกิจกรรม ให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ตามที่กำหนด
4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์เพื่อพิจารณาความเหมาะสมและชี้แนะข้อบกพร่องแล้วนำไปแก้ไขตามคำแนะนำในการการปรับปรุงแก้ไข
5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่แก้ไขตามคำชี้แนะของอาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์แล้วเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญซึ่งเป็นชุดเดียวกับที่ตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหาและความเหมาะสมของภาษาที่ใช้แล้วนำข้อเสนอนี้มาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญอีกครั้ง แล้วนำข้อเสนอนี้มาปรับปรุงแก้ไข
6. นำแบบทดสอบที่แก้ไขแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญการสอบคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพ ความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าข้อสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหาและจุดประสงค์ของกิจกรรมหรือไม่ โดยใช้เกณฑ์ดังนี้
 - คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 - คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 - คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
7. เลือกแบบทดสอบที่มีค่า IOC เท่ากับ 0.5 ขึ้นไป ในการวิเคราะห์ข้อมูลได้เลือกค่า IOC ระหว่าง 0.67 – 1 ได้จำนวน 59 ข้อ
8. นำแบบทดสอบที่คัดเลือกได้แล้วทั้งหมด ไปทดสอบใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 4 จำนวน 100 คน เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ
9. ตรวจให้คะแนนแบบทดสอบที่นักเรียนทำ โดยให้ 1 คะแนน สำหรับข้อที่ตอบถูก และให้ 0 คะแนน สำหรับข้อที่ตอบผิด หรือไม่ตอบ หรือตอบเกิน 1 คำตอบ
10. นำผลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อหาค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อ โดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เทห์ ฟาน โดยใช้โปรแกรม SIA (Simple Items Analysis) (พิชิต ฤทธิ์จัญญ. 2550: 45 – 46) หาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) คัดเลือกข้อที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ในการวิเคราะห์ข้อมูลได้เลือกค่าความยาก (p) ระหว่าง 0.24 – 0.78 และค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.21 – 0.92 โดยคัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ไว้จำนวน 30 ข้อ

11. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้ปรับปรุงแล้วและคัดเลือกแล้วจำนวน 30 ข้อ ไปหาค่าความเชื่อมั่น โดยนำไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มเดียวกับข้อ 8 จำนวน 100 คน แล้วนำมาวิเคราะห์หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR – 20 (Kuder Richhardson – 20) (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 197 - 198) จากการศึกษาครั้งนี้ ได้ค่าความเชื่อมั่น 0.78 แล้วนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

12. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการตามลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในวิชาเพิ่มเติม

2. ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

3. ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

4. สร้างแบบทดสอบอัตรานี้จำนวน 4 ฉบับ ฉบับละ 4 ข้อ วัดความสามารถในการแก้ปัญหา โดยฉบับที่ 1 วัด เรื่อง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ฉบับที่ 2 วัดเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ และฉบับที่ 3 – 4 วัดเรื่อง การนำไปใช้

5. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์เพื่อพิจารณาความเหมาะสมและชี้แนะข้อบกพร่องแล้วนำไปแก้ไขตามคำแนะนำในการปรับปรุงข้อคำถามให้มีความชัดเจนในสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบพร้อมทั้งให้มีข้อคำถามหลากหลาย และครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้

6. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่แก้ไขแล้วจากข้อ 5 ไปเสนอผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพ ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าข้อสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์ของกิจกรรมหรือไม่ โดยใช้เกณฑ์ดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของกิจกรรม

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์ของกิจกรรม

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์ของกิจกรรม

7. นำข้อเสนอแนะจากผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์จำนวน 3 ท่าน มาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์พิจารณาเพื่อแก้ไขอีกครั้ง

8. นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ผ่านการตรวจสอบจากอาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์แล้วมาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป ในการวิเคราะห์ข้อมูลได้เลือกค่า IOC เท่ากับ 1 ได้จำนวน 16 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่คัดเลือกได้แล้วทั้งหมด ไปทดสอบใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 4 จำนวน 50 คน เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบ

10. ข้อสอบอัตนัย ตรวจใช้คะแนนแบบทดสอบอัตนัยที่นักเรียนทำได้มีเกณฑ์ให้คะแนนโดยตรวจเป็นรายข้อ ดังนี้

เกณฑ์การให้คะแนน

เกณฑ์	คะแนน	ผลการทำข้อสอบที่ปรากฏให้เห็น
ทำความเข้าใจในปัญหา	2	แสดงวิธีการคิดชัดเจน ครบถ้วน
	1	แสดงวิธีการคิดไม่ชัดเจนหรือถูกต้องบางส่วน
	0	ไม่แสดงวิธีการการคิดหรือแสดงวิธีการคิดไม่ถูกต้อง
วางแผนการแก้ปัญหา	2	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาถูกต้องทั้งหมด
	1	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วน
	0	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง
ดำเนินการแก้ปัญหา	2	วิธีการแก้ปัญหาถูกต้องทั้งหมด
	1	วิธีการแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วน
	0	วิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง
ตรวจสอบคำตอบ	1	เมื่อตอบถูกต้อง
	0	เมื่อตอบผิดหรือไม่ตอบ

11. นำผลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อหาค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อ โดยใช้วิธีของวิทนี และซาเบอส์ (Whitney and Sabers) (ลัวัน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2539: 199 – 200) คัดเลือกข้อที่มีค่าความยากง่ายระหว่าง 0.20 – 0.80 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ในการวิเคราะห์ข้อมูลได้เลือกค่าความยาก (p) ระหว่าง 0.23 – 0.38 และค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.27 – 0.46 ขึ้นไป โดยคัดเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ไว้ฉบับละ 2 ข้อจำนวน 4 ฉบับ รวมทั้งสิ้นเป็นจำนวน 8 ข้อ

12. นำแบบทดสอบที่ได้ปรับปรุงแล้วคัดเลือก ไปหาค่าความเชื่อมั่น โดยนำไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 50 คน แล้วนำมาวิเคราะห์หาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha – Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach) (ลัวัน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 200) จากการศึกษาครั้งนี้ ได้ค่าความเชื่อมั่น 0.98 แล้วนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาสารนิพนธ์ก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

5. แบบแผนการวิจัยที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

การวิจัยในครั้งนี้เป็นการศึกษาค้นคว้าเชิงทดลอง เพื่อศึกษาผลของการสอนคณิตศาสตร์ โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยมีกลุ่มตัวอย่างกลุ่มเดียว แต่ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังจากทำกิจกรรมคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One – Group Pretest – Posttest Desing (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 249)

ตาราง 1 แบบแผนการทดลอง One – Group Pretest – Posttest Design

กลุ่ม	สอบก่อน	ทดลอง	สอบหลัง
E	T ₁	X	T ₂

เมื่อ	E	แทน	กลุ่มทดลอง
	X	แทน	การจัดกระทำ (Treatment)
	T ₁	แทน	การสอบก่อนการจัดกระทำ (Pretest)
	T ₂	แทน	การสอบหลังการจัดกระทำ (Posttest)

6. วิธีดำเนินการ

การดำเนินการทดลองใช้กิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยในช่วงเดือนเมษายน ปีพ.ศ. 2553 ตามขั้นตอนดังนี้

1. ชี้แจงให้นักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างในการดำเนินการวิจัยทราบถึงการจัดกิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เพื่อให้ทุกคนเข้าใจตรงกัน และปฏิบัติตามกิจกรรมได้ถูกต้อง

2. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบทดสอบปรนัยจำนวน 30 ข้อ ไปทำการทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มทดลอง โดยใช้เวลา 1 คาบเรียนแล้วบันทึกคะแนนที่ได้จากการทดลองครั้งนี้เป็นคะแนนทดสอบก่อนเรียน (Pretest)

3. ดำเนินการสอนโดยใช้กิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์กับกลุ่มทดลอง พร้อมทั้งนำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 4 ฉบับ ฉบับละ 2 ข้อ ไปทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มทดลองโดยใช้ช่วงท้ายคาบเรียนเวลา 15 นาที ในคาบเรียนที่ 2 , 4 , 6 และ 8 ของการเรียนการสอนตามลำดับ โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนเอง ใช้เวลาในการสอนจำนวน 8 คาบเรียน

4. ทำการทดสอบหลังดำเนินการทดลองใช้กิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยนำแบบทดสอบวัดวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นชุดเดียวกับแบบทดสอบก่อนเรียน โดยใช้เวลา 1 คาบแล้วบันทึกผลการทดสอบไว้เป็นคะแนนทดสอบหลังการเรียน (Posttest)

5. นำคะแนนที่ได้จากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ทดสอบหลังเรียนมาวิเคราะห์ด้วยวิธีการทางสถิติ โดยใช้วิธีการทางสถิติหาค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสถิติทดสอบสมมติฐาน

7. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน
2. หาค่าสถิติทดสอบสมมติฐาน เพื่อทดสอบสมมติฐานในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

8. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ใช้สถิติการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

8.1 สถิติพื้นฐาน

1. หาคะแนนเฉลี่ย (Mean) โดยคำนวณจากสูตร

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

เมื่อ	$\bar{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ย
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. หาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของแบบทดสอบ (Standard Deviation) โดยคำนวณจากสูตร (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 76 – 77)

$$S.D. = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

เมื่อ	S.D.	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
	X	แทน	คะแนนของนักเรียนแต่ละคน
	$\sum X$	แทน	ผลรวมของคะแนนทั้งหมด
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

8.2 สถิติที่ใช้ตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ

1. หาค่าความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบวัดทักษะการแก้ปัญหา โดยใช้ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ของกิจกรรม (บุญเชิด ภิญโญนนิตพงษ์. 2527: 89 – 91)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ	IOC	แทน	ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ของกิจกรรม
	$\sum R$	แทน	ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาทั้งหมด
	N	แทน	จำนวนผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชา

2. หาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาหาคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตรที่ วิตนีย์และซาเบอร์ส (Whitney and Sabers) (ล้วน สายยศ; อังคณา สายยศ. 2539: 199 – 200) ได้เสนอไว้ดังนี้

$$P_E = \frac{S_U + S_L - (2NX_{\min})}{2N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	P_E	แทน	ค่าความยากง่าย
	S_U	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
	$X_{\max}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

3. หาค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) เพื่อวิเคราะห์รายข้อ โดยใช้วิธีของวิทนีย์ และ ซาเบอร์ส (Whitney and Sabers) (ล้วน สายยศ; อังกฤษ สายยศ. 2539: 199 – 201)

$$D = \frac{S_U - S_L}{N(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ	D	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
	S_U	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง
	S_L	แทน	ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน
	$X_{\max}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้สูงสุด
	$X_{\min}$	แทน	คะแนนที่นักเรียนทำได้ต่ำสุด
	N	แทน	จำนวนผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่งหรือกลุ่มอ่อน

4. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (ล้วน สายยศ; และอังกฤษ สายยศ. 2538: 215 - 216)

$$\alpha = \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right]$$

เมื่อ	α	แทน	สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น
	N	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	S_i^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนเป็นรายข้อ
	S_t^2	แทน	ความแปรปรวนของคะแนนของแบบทดสอบ ทั้งฉบับ

5. หาค่าความยากและค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้เทคนิค 27% ของ จุง เทห์ ฟาน (ล้วน สายยศ; และอังกฤษ สายยศ. 2538: 217 - 219)

$$P = \frac{H + L}{N_1 + N_2}$$

$$r = \frac{H + L}{N_1}$$

เมื่อ	P	แทน	ค่าความยาก
	r	แทน	ค่าอำนาจจำแนก
	H	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูงที่ตอบถูก
	L	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มต่ำที่ตอบถูก
	N ₁	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูง
	N ₂	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มต่ำ

6. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยใช้สูตร KR – 20 ของคูเดอร์ริชาร์ดสัน (ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. 2538: 197 - 198)

$$r_n = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{s_t^2} \right]$$

เมื่อ	r _n	แทน	ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
	s _t ²	แทน	คะแนนความแปรปรวนของแบบทดสอบ
	n	แทน	จำนวนข้อของแบบทดสอบ
	p	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำข้อสอบนั้นถูกกับคนทั้งหมด
	q	แทน	สัดส่วนของผู้ที่ทำผิดในข้อหนึ่งๆ หรือเท่ากับ 1 - p

8.3 สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังจากปฏิบัติกิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองสูงกว่าก่อนสอน โดยใช้สถิติ t – test for Dependent Sample (ชูศรี วงศ์รัตนะ. 2550: 179)

$$t = \frac{\Sigma D}{\sqrt{\frac{N\Sigma D^2 - (\Sigma D)^2}{N-1}}} \quad ; df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าที่พิจารณาใน t – Distribution
	ΣD^2	แทน	ผลรวมของผลต่างของคะแนนแต่ละตัว ยกกำลังสอง
	$(\Sigma D)^2$	แทน	ผลรวมของผลต่างของคะแนนทั้งหมดกำลังสอง
	N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังได้ปฏิบัติกิจกรรมการสอนโดยการให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง คือได้คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไปโดยใช้สถิติ t – test one group (ชูศรี วงศ์รัตน์. 2550: 133)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad ; df = n - 1$$

เมื่อ	t	แทน	ค่าที่พิจารณาใน t – test one group
	$\bar{X}$	แทน	ค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบที่นักเรียนได้
	μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยเกณฑ์ที่ตั้งไว้ 60%
	s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบ
	n	แทน	จำนวนนักเรียนที่เข้าสอบ

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลการทดลอง และการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยใช้สัญลักษณ์ในการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

N	แทน	จำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่าง
$\bar{X}$	แทน	คะแนนเฉลี่ย
μ_0	แทน	ค่าเฉลี่ยมาตรฐานที่ใช้เป็นเกณฑ์ (ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม)
D	แทน	ความแตกต่างของคะแนนแต่ละคู่
$\sum D$	แทน	ผลรวมของ D ทั้งหมด
$\sum D^2$	แทน	ผลรวมของ D แต่ละตัวยกกำลังสอง
s	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน
t	แทน	ค่าที่ใช้ในการพิจารณา

การวิเคราะห์ข้อมูล

การนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล และการแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูลในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอตามลำดับดังนี้

1. ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ก่อนและหลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ หลังจากได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กับเกณฑ์ (60%)
3. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ หลังจากได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กับเกณฑ์ (60%)

ผลการวิเคราะห์

1. ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยนำคะแนนความแตกต่างรายคู่ระหว่างคะแนนก่อนและหลังการทดลองมาเปรียบเทียบโดยใช้ $t - test dependent$ ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการสอนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

	N	$\bar{X}$	S	$\sum D$	$\sum D^2$	t
Pretest	30	8.33	2.75	314	3,348	39.10**
Posttest	30	18.80	1.77			

$$t_{(.01, 29)} = 2.462$$

จากตาราง 2 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนสูงกว่าหลังเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นั่นคือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหด้วยตนเอง สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนการสอน

2. ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์โดยใช้วิธีการทางสถิติ $t - test one group$ ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองกับเกณฑ์

N	$\bar{X}$	S	μ_0	t
30	18.8	1.77	18	2.476**

$$t_{(.01, 29)} = 2.462$$

จากตาราง 3 พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นั่นคือ นักเรียนทำคะแนนเฉลี่ยได้ 18.8 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 62.67

3. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์โดยใช้วิธีการทางสถิติ $t - test one group$ ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองกับเกณฑ์

N	k	$\bar{X}$	S	μ_0	t
30	56	44.47	5.89	36.60	10.07 ^{**}

$$t_{(.01, 29)} = 2.462$$

จากตาราง 4 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นั่นคือ นักเรียนทำคะแนนเฉลี่ยได้ 44.47 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 79.41

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยมีความมุ่งหมายศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งสามารถสรุปผลการศึกษาดังนี้

ความมุ่งหมายของการศึกษาค้นคว้า

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง
2. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์ปัญหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60)
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง กับเกณฑ์ (ร้อยละ 60)

สมมติฐานของการศึกษาค้นคว้า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน
2. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60
3. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60

วิธีการดำเนินการศึกษาค้นคว้า

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552 ทั้งหมด 8 ห้องเรียน จำนวน 362 คน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียน อัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551 ซึ่งได้รับการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยมีห้องเป็นหน่วยการสุ่ม (Sampling Unit) ได้กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 30 คน ซึ่งแต่ละห้องเรียนได้จัดชั้นเรียนเป็นแบบคละความสามารถ

2. เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

เนื้อหาที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นเนื้อหาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ช่วงชั้นที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 หลักสูตรสถานศึกษาโรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค เขตพื้นที่การศึกษา 3 กรุงเทพมหานคร

3. ระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า

ระยะเวลาในการศึกษาค้นคว้า ดำเนินการศึกษาค้นคว้าในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ใช้เวลาในการทดลอง 10 คาบ ทำการสอนจริง 8 คาบ ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ก่อนเรียน 1 คาบ ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียน 1 คาบ

4. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า

4.1 แผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้การตั้งโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

4.2 แบบทดสอบปรนัยจำนวน 30 ข้อ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3

4.3 แบบทดสอบอัตนัย โดยแบ่งออกเป็นแบบทดสอบย่อยทั้งสิ้นจำนวน 4 ฉบับ สอบวัด ทุกๆ 2 คาบเรียน โดยในแต่ละฉบับมีจำนวน 2 ข้อ วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

5. วิธีการดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองตามขั้นตอน ดังนี้

5.1 ดำเนินการเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยสุ่มห้องเรียนที่มีการเรียนการสอนแบบคละความสามารถจากนักเรียนทั้งหมด 8 ห้องเรียน โดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) โดยมีห้องเป็นหน่วยการสุ่ม (Sampling Unit) จำนวน 1 ห้องเรียน จำนวนนักเรียน 30 คน

5.2 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปทำการทดสอบนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 30 คน ที่เป็นกลุ่มทดลอง โดยใช้เวลา 1 คาบเรียน แล้วบันทึกคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งนี้เป็นคะแนนสอบก่อนเรียน (Pretest)

5.3 ดำเนินการสอนโดยใช้การสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดไว้ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียน อัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค จังหวัดกรุงเทพมหานครฯ จำนวน 30 คน เป็นเวลา 8 คาบเรียน พร้อม ทั้งแบบทดสอบอัตนัย ซึ่งแบ่งออกเป็นแบบทดสอบย่อยทั้งสิ้น 4 ฉบับ ในแต่ละฉบับมีจำนวน 2 ข้อสอบ วัตถุประสงค์ 2 คาบเรียน วัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

5.4 เมื่อดำเนินการสอนโดยใช้การสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” แล้วทำการทดสอบกลุ่มทดลองอีกครั้งโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ฉบับเดิม ใช้เวลา 1 คาบเรียน แล้วบันทึกผล การทดลองไว้เป็นคะแนนทดสอบหลังเรียน (Posttest)

5.5 นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อตรวจสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

6.1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการให้ นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองโดยเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างคะแนนก่อนเรียนและหลัง เรียนของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ $t - test dependent$

6.2 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอนโดยการ ให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยใช้ $t - test one group$ ซึ่งต้องผ่านเกณฑ์คือได้คะแนน ร้อยละ 60 ขึ้นไป

6.3 ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังได้รับการสอน โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยใช้ $t - test one group$ ซึ่งต้องผ่านเกณฑ์คือได้ คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไป

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับ มัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่า ก่อนได้รับการจัดการเรียนการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับ มัธยมศึกษาปีที่ 3 ภายหลังที่ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่า เกณฑ์ (ร้อยละ 60) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

3. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่า เกณฑ์ (ร้อยละ 60) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผล

จากการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยการ ให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง นำมาอภิปรายผลได้ดังนี้

1. จากผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลัง ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าก่อนได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้จากผลการศึกษาดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจาก

1.1 การจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เป็นรูปการ เรียนรู้แบบกระบวนการกลุ่ม และแบบระดมสมอง นักเรียนในกลุ่มสามารถเรียนรู้ร่วมกัน ช่วยเหลือ ซึ่งกันและกัน มีโอกาสปรึกษาหารือกันระหว่างเรียน ทำให้บรรยากาศในการเรียนมีความเป็นกันเอง มีการนำเสนอความคิดเห็น มีการนำโจทย์มาเปลี่ยนรูปแบบใหม่ภายใต้กระบวนการแก้โจทย์ตามที่กำหนดให้ พร้อมตั้งข้อซักถามและอภิปรายซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ ศุภวรรณ โคตรท่าน (2551: บทคัดย่อ) แม้วาระยะแรกของการทดลอง นักเรียนต้องปรับตัวกับวิธีการเรียนแบบให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหา ด้วยตนเอง แต่เมื่อนักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาจากแบบทดสอบระหว่างเรียน ทำให้นักเรียน เข้าใจและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจากการเรียนการสอนทำให้นักเรียนมีความกระตือรือร้นต่อการเรียน มากขึ้น ครู นักเรียน และเพื่อนนักเรียนภายในชั้นเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน ซึ่งสอดคล้องกับ งานวิจัยของ นิโคลาว และ ฟิลลิปพู (Nicolaou; & Philipou. 2007: 50) ซึ่งความสำเร็จที่รับรู้ได้ของ นักเรียนในการสร้างโจทย์ปัญหา ได้รับการวิเคราะห์ว่าเป็นดัชนีสำคัญของความสามารถสำหรับแต่ละ คน เช่นเดียวกับความก้าวหน้าโดยทั่วไปทางคณิตศาสตร์

1.2 เมื่อนักเรียนได้ศึกษาจนจบหน่วยแล้ว จะมีการทำแบบทดสอบย่อยประจำหน่วย เพื่อตรวจสอบความเข้าใจนักเรียนเป็นรายบุคคล พร้อมทั้งให้คำชมเชยสำหรับนักเรียนที่ได้คะแนนสูง ให้กำลังใจและตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนไปค้นคว้าเพิ่มเติม พร้อมจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้ มีความรู้สึกเป็นกันเอง ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ นิโคลาว และ ฟิลลิปพู (Nicolaou; & Philipou. 2007: 50) ทำให้นักเรียนได้รับการพัฒนาอย่างเต็มศักยภาพ ซึ่งสามารถส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนสูงขึ้น

2. จากผลการวิจัย พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนภายหลัง ได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สูงกว่าเกณฑ์ (ร้อยละ60) อย่างมีนัยสำคัญ ทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้จากผลการศึกษาดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจาก

2.1 การสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เป็นการสอนที่ได้ศึกษา จากใบความรู้ ใบงาน และข้อคำถามจากเพื่อนนักเรียนด้วยกัน โดยกิจกรรมจะเรียงลำดับจากง่ายไป หายาก นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องในการทำกิจกรรมจากเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่ม และการนำเสนอ หน้าชั้นเรียน พร้อมทั้งใช้เทคนิคการตั้งปัญหาในห้องเรียนเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูเป็นผู้ ตั้งปัญหาเพื่อให้นักเรียนร่วมกันคิดแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ หรือให้ผู้เรียนเป็นผู้ตั้งปัญหาแล้วให้นักเรียน คนอื่นๆ ช่วยกันแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับงานของ สโตยานโนวา (Stoyanova. 2000: 33 – 37) ซึ่งเป็นสิ่งที่ช่วยให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีคะแนนมากกว่าร้อยละ 60

2.2 การจัดการเรียนการสอนนั้นมีการตรวจสอบความเข้าใจอย่างต่อเนื่องมีการวัดและประเมินผลควบคู่กันไป โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาและหาคำตอบเพื่อตรวจสอบและส่งเสริมความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา ส่งเสริมให้เกิดกระบวนการคิด มีการกระตุ้นด้วยคำพูดที่เน้นความคิด จะทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์ ระหว่างผู้เรียนด้วยกันและระหว่างผู้เรียนกับครู ผู้เรียนมีโอกาสแสดงความคิดเห็น ซึ่งสอดคล้องกับงานของ (สสวท. 2544: 12) อีกทั้งพยายามจัดบรรยากาศการเรียนการสอน ให้มีความรู้สึกเป็นกันเองไม่เครียด และกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็น ซึ่งเป็นสิ่งที่ช่วยให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีคะแนนมากกว่าร้อยละ 60

3. จากผลการวิจัย พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หลังได้รับการสอน โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง พบว่า สูงกว่าเกณฑ์ (ร้อยละ60) อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ทั้งนี้จากผลการศึกษาดังกล่าวอาจมีสาเหตุมาจาก

3.1 การสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง นั้นเน้นให้นักเรียนมีการเขียนแนวความคิดและวิธีการคำนวณตามขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งสามารถช่วยเสริมการทำงานแก้ปัญหาได้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ วิลเลียม (William. 2003: 185 – 187) พร้อมทั้งมีการตรวจสอบจากเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มด้วยกัน และจากการนำเสนอหน้าชั้นเรียน ซึ่งเป็นสิ่งที่ช่วยให้ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีคะแนนมากกว่าร้อยละ 60

3.2 นักเรียนได้มีการทำกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่มและได้มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ การที่นักเรียนได้มีโอกาสตั้งปัญหาด้วยตนเองและนำเสนอต่อเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มเพื่อนำเสนอกระบวนการแก้ปัญหา การเลือกใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพสูงสุด ซึ่งเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับงานของ (สสวท. 2550: 11 - 35) ทำให้นักเรียนมีความคิดที่หลากหลายในการแก้ปัญหา ซึ่งซึ่งเป็นสิ่งที่ช่วยให้ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้นมีคะแนนมากกว่าร้อยละ 60

ข้อสังเกตในการศึกษาค้นคว้า

จากการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ผู้วิจัยได้พบข้อสังเกตบางประการจากการศึกษาค้นคว้าในครั้งนี้ ซึ่งพอสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. การแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยนั้น ผู้วิจัยใช้หลักการจัดกลุ่ม ให้นักเรียนที่มีความสามารถคละกันกลุ่มละ 3 คน และทำการปรับเปลี่ยนกลุ่มในทุกคาบเรียนโดยห้ามให้นักเรียนอยู่ซ้ำกลุ่มเดิม พบว่าในการจับกลุ่มครั้งแรกนักเรียนจะจับกลุ่มกับเพื่อนที่มีความสนิทกันก่อนถึงแม้ว่าภายในกลุ่มจะคละความสามารถก็ตาม และมีการพูดคุยกันเองมากกว่าการนำเสนอความคิดกับใบความรู้และใบงานที่กำหนดให้ แต่เมื่อทำการเปลี่ยนกลุ่มในครั้งต่อไปนักเรียนก็จะเริ่มให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมกลุ่มดีขึ้น เพราะเนื่องจากสมาชิกภายในกลุ่มที่เป็นเพื่อนไม่ค่อยสนิทกัน ทำให้ทราบว่าการจัดสมาชิกภายในกลุ่มที่คละความสามารถไม่ควรให้มีสมาชิกที่สนิทกันอยู่ภายในกลุ่มเดียวกัน

2. ในการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ในช่วงแรกๆ นักเรียนไม่เข้าใจวิธีการปฏิบัติตนในระหว่างการเรียนการสอน และนักเรียนยังตั้งโจทย์ปัญหาโดยการคิดโจทย์ซ้ำกับตัวอย่างที่ให้โดยเพียงแค่เปลี่ยนตัวเลข แต่ขั้นตอนและกระบวนการทำเหมือนตัวอย่างที่กำหนดให้หรือเหมือนกับเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มของตนเอง แต่เมื่อผ่านไปได้ประมาณ 3 คาบเรียน นักเรียนเริ่มมีแนวคิดในการสร้างโจทย์เองแต่ยังคงมีนักเรียนบางส่วนที่ไม่สามารถสร้างโจทย์ปัญหาเองได้ ผู้วิจัยต้องให้ความสนใจและช่วยเหลือในการกระตุ้นความคิดในการสร้างโจทย์ปัญหาเพื่อให้นักเรียนเหล่านี้เกิดกำลังใจในการสร้างโจทย์ปัญหาในครั้งต่อไป

3. ในการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ในช่วงแรกๆ นักเรียนไม่การแสดงความคิดเห็นในโจทย์ปัญหาที่ให้กับเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่ม แต่เมื่อผ่านไปได้ประมาณ 3 คาบเรียนนักเรียนมีความกล้าในการแสดงความคิดเห็นพร้อมทั้งมีความกล้าในการนำเสนอหน้าชั้นเรียนเพิ่มมากขึ้น ซึ่งวัดโดยแบบสังเกตการณ์ร่วมกิจกรรม อีกทั้งผู้วิจัยได้กระตุ้นให้นักเรียนได้ออกมานำเสนอแนวคิดและโจทย์ปัญหาที่ตนเองได้ตั้งไว้หน้าชั้นเรียน โดยใช้การสุ่มเวียนครบทุกคน

4. เมื่อนักเรียนศึกษาเนื้อหาและปฏิบัติกิจกรรมแล้วในทุก 2 คาบเรียน นักเรียนจะทำแบบทดสอบย่อย ซึ่งนักเรียนสามารถตรวจคำตอบได้ทันทีเมื่อทำแบบทดสอบเสร็จ ทำให้ทราบผลทันที ซึ่งถือเป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับทำให้นักเรียนได้แก้ไขข้อบกพร่องทำให้เกิดกำลังใจและความเชื่อมั่น รวมทั้งมีแรงจูงใจในการศึกษาต่อไป สำหรับนักเรียนที่พบข้อบกพร่องเป็นจำนวนมากผู้วิจัยต้องให้กำลังใจและได้มีการอธิบายในส่วนที่นักเรียนยังไม่เข้าใจเพื่อให้นักเรียนสามารถศึกษาในเนื้อหาต่อไปได้อย่างมั่นใจ

5. นักเรียนส่วนใหญ่ชอบกิจกรรมการเรียนการสอนแบบนี้ เพราะทำงานร่วมกับเพื่อนได้มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน อีกทั้งยังได้มีการนำเสนอโจทย์ปัญหาของตนเองทำให้นักเรียนเกิดความภาคภูมิใจ และมีความมั่นใจมากขึ้นในการนำเสนอ โดยสังเกตจากนักเรียนคาบเรียนที่นักเรียนต้องนำโจทย์ปัญหาของตนเองไปให้เพื่อนในกลุ่มตนเองและกลุ่มอื่นทำ นักเรียนจะมีความสุขสนุกสนาน และมีความกล้าในการอธิบายแนวคิดจากโจทย์ที่ตนเองตั้งขึ้น

ข้อเสนอแนะ

จากผลการศึกษาครั้งนี้พบว่าในครั้งนี้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะซึ่งอาจจะเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และการศึกษาค้นคว้าครั้งต่อไป ดังนี้

1. ข้อเสนอแนะที่ได้จากการศึกษาค้นคว้า

1.1 การจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ควรต้องให้คำแนะนำและเอาใจใส่ต่อนักเรียนอย่างใกล้ชิดทุกขั้นตอนและทุกกลุ่มเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนทุกคนได้ร่วมกันนำเสนอแนวคิดเพื่อเป็นการแตกแนวคิดและหาข้อสรุป พร้อมทั้งให้การเสริมแรงเช่นการกล่าวชมเชยกับนักเรียนในกลุ่มที่ตั้งใจในการทำกิจกรรมและใช้คำถามนำแนวคิดสำหรับนักเรียนในกลุ่มที่ไม่สามารถแตกแนวคิดได้

1.2 เมื่อนักเรียนมีปัญหาในการทำกิจกรรม ครูควรพยายามใช้คำถามเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความคิดในการแก้ปัญหา มากกว่าการบอกความรู้กับนักเรียน และครูต้องคอยดูแลนักเรียนอย่างใกล้ชิด

1.3 ในการจัดกลุ่มของนักเรียน นอกจากคำนึงถึงความสามารถของแต่ละคนแล้ว ถ้าสามารถจัดให้ในแต่ละกลุ่มมีเพื่อนสนิทกันน้อยที่สุด จะทำให้การจัดการเรียนการสอนแบบนักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเองประสบความสำเร็จในการเรียนมากขึ้น

1.4 ครูผู้สอนต้องระลึกอยู่เสมอว่า การที่นักเรียนจะตั้งโจทย์ปัญหาและแก้ปัญหาได้นั้น นักเรียนจะต้องมีเวลาในการคิด ครูผู้สอนควรจัดเวลาให้เหมาะสมในเรื่องของการอภิปรายและตั้งโจทย์ปัญหาของนักเรียน

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าครั้งต่อไป

2.1 ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปรอื่น ๆ นอกเหนือจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ความคงทนในการเรียน ความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

2.2 ควรสร้างแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนให้เป็นแบบปรนัย และอัตนัยร่วมกัน เพื่อจะได้เป็นการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอีกครั้งหนึ่ง

2.3 ควรมีการศึกษาการจัดการเรียนการสอนโดยนักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง สำหรับนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และเนื้อหาในเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และระบบสมการต่อไป

2.4 ควรมีการศึกษาความคิดเห็นของนักเรียน หลังการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสมยิ่งขึ้นต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ. (2545). เอกสารประกอบหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 :
คู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์
องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).
- เครือวัลย์ ไวลแสง. (2549). บทบาทของการสร้างปัญหาที่มีต่อกระบวนการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ของนักเรียน. วิทยานิพนธ์ ศษ.ม. (ศึกษาศาสตร์). ขอนแก่น:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ถ่ายเอกสาร.
- จินตนา วงสามารถ. (2549). ผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้เกมที่มีต่อความสามารถ
ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. สารนิพนธ์ กศ.ม.
(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
ถ่ายเอกสาร.
- ฉวีวรรณ เสวตมัลย์. (2544). ศิลปะการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- ชัยรัตน์ สุลำนาจ. (2547). ผลของการจัดกิจกรรมโครงงานคณิตศาสตร์ ที่มีต่อทักษะ/
กระบวนการทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการทำโครงงานคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ชัยศักดิ์ ลีลาจรัสกุล. (2539). การจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ในโรงเรียน. กรุงเทพฯ: โรงเรียน
สาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน.
- ชูศรี วงศ์รัตน์. (2550). เทคนิคการใช้สถิติเพื่อการวิจัย. พิมพ์ครั้งที่ 10. กรุงเทพฯ:
ไทเนรมิตกิจ อินเตอร์ โปรเกรสซิฟ.
- ดรุณี เตชะวงศ์ประเสริฐ. (2549). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และ
ความคงทนในการเรียนรู้เรื่องค่ากลางของข้อมูล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ได้รับการสอนบูรณาการแบบสอดแทรก. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ทิศนา แคมมณี. (2548). รูปแบบการเรียนการสอน : ทางเลือกที่หลากหลาย. กรุงเทพฯ:
แอคทิฟ พรินท์.
- ธนากร ตุ่มบุญ. (2548). การสร้างชุดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องเส้นขนาน ที่เน้นทักษะ
การให้เหตุผล และการแก้ปัญหา สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์
กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
ถ่ายเอกสาร.

- ธัญกร คำแวง. (2552). องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาแคลคูลัส 1 ของนักศึกษาหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันอุดมศึกษาเอกชน ในเขต กรุงเทพมหานคร. รายงานการวิจัย. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีปทุม. สืบค้นเมื่อ 10 ธันวาคม 2552, จาก <http://dllibrary.spu.ac.th:8080/dspace/handle/123456789/1527>
- นุชรี อ่อนละม้าย. (2546). การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางสมองด้าน เหตุผลกับการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. (2527). การสอนแบบอิงเกณฑ์ : แนวคิดและวิธีการ. กรุงเทพฯ: ภาควิชาพื้นฐานของการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ปกเกศ ชนะโยธา. (2551). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และ ความพึงพอใจ ของนักเรียนช่วงชั้นที่ 2 โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียบน เครือข่ายอินเทอร์เน็ตที่สร้างขึ้นตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยีการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปฐมพร บุญลี. (2545). การสร้างแบบฝึกทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปริญญา สองสีดา. (2550). ผลการจัดการเรียนการสอนแบบ 4 MAT เรื่อง ทศนิยมและ เศษส่วน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. ปรินทิพนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537, พฤษภาคม – กรกฎาคม). การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์. ใน วารสารคณิตศาสตร์. 38(434 – 435): 62 – 64.
- ปรีชา เหล่าพินนา. (2544). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการ แก้โจทย์ปัญหาสมการกำลังสองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอน โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับการสอนตามคู่มือครู. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- พงศธร มหาวิจิตร. (2550). กิจกรรมเสริมสร้างทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้ จำนวนและการดำเนินการ เรขาคณิต และพีชคณิต สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พนารัตน์ แซ่มชื่น. (2548). ชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการ เพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องแบบรูปและความสัมพันธ์. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พันทิพา ทับเที่ยง. (2550). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม และความคงทนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการเรียนแบบร่วมมือแบบแบ่งกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) กับการจัดการเรียนแบบร่วมมือกลุ่มช่วยรายบุคคล (TAI). ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- พิชิต ฤทธิ์จัญญ. (2550). หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา. กรุงเทพฯ: แฮสส์ ออฟ เคอร์มิสท์.
- พิมพ์พร อัสมกนิพงศ์. (2550). การเรียนแบบร่วมมือ รูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. วารสารครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 35(4).
- มาเลียม พินิจรอบ. (2549). ผลการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการกลุ่มที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหา เรื่องอัตราส่วนและร้อยละ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร
- ยุทธกร ถามา. (2546). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ ความสนใจและความมีวินัยในตนเองทางการเรียนรู้ของนักเรียนช่วงชั้นที่ 2 ที่มีความสามารถทางการเรียนต่างกัน โดยใช้ชุดการเรียนด้วยตนเอง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องสมการและการแก้สมการ. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยีการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ล้วน สายยศ; และอังคณา สายยศ. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- (2539). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- (2540). สถิติวิทยาทางการวิจัย. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- วัชร บวรณสิงห์. (2525). การสอนคณิตศาสตร์ตามความแตกต่างระหว่างบุคคล เอกสารการสอนชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8-15. นนทบุรี: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

- วันชัย วัฒนชัยวิทย์. (2548). วัฏจักรของการศึกษาขั้นพื้นฐาน. กรุงเทพฯ: โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน.
- วิชัย พาณิชยสว. (2546). สอนอย่างไรให้เด็กเก่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- ศุภวรรณ โคตรท่าน. (2551). การสร้างปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิดโดยอาศัยกระบวนการกลุ่มย่อย. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา). ขอนแก่น: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.). (2546). การสอนคณิตศาสตร์ : ถึงเวลาที่จะเปลี่ยนแนวคิดเสียที. สืบค้นเมื่อ 10 ธันวาคม 2552, จาก <http://www.ipst.ac.th/article/math18.html>
- . (2550). ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ครูสภาลาดพร้าว.
- สนฤดี ศรีสวัสดิ์. (2551). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้หลักการเรียนรู้แบบไตรสิกขาเรื่อง การเสริมทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สมควร ปานโม. (2545). การสร้างชุดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหาเกี่ยวกับวิชาชีพเรื่อง “เซต” ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงปีที่ 1 (ปวส.1) ประเภทวิชาเกษตรกรรม. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร
- สมวงศ์ แปลงประสพโชค; และคณะ (2543). ค่ายคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ. วิทยานิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- . (2543). เอกสารประกอบการอบรมครู และเอกสารประกอบการเรียน เรื่อง การแก้ปัญหา. กรุงเทพฯ: สถาบันราชภัฏพระนคร.
- สาโรช บัวศรี. (2518). ปรัชญาการศึกษาในจุดยืนและทิศทางการศึกษาไทย. กรุงเทพฯ: ม.ป.พ.
- สายสมร สุขะจิระ. (2543). การพัฒนากิจกรรมชุมนุมคณิตศาสตร์เพื่อประกอบการสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สิริพร ทิพย์คง. (2536). “การแก้ปัญหา” เอกสารคำสอนวิชาทฤษฎีและวิธีการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

- สุนันท์ จิมวัย. (2543). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และ
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอบแบบ
ปฏิบัติการกับนักเรียนที่ได้รับการสอนตามคู่มือครูในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3.
ปริญญาณิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุริเยส สุขแสง. (2548). ผลของการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาที่มีต่อ
ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความคิดสร้างสรรค์ของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จังหวัดสุรินทร์. วิทยานิพนธ์ ค.ม. (หลักสูตร การสอน
และเทคโนโลยีการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
ถ่ายเอกสาร.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2545). พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ
พ.ศ. 2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545. กรุงเทพฯ: พรักหวานกราฟฟิค.
- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2551). เอกสารประกอบหลักสูตรแกนกลางการศึกษา
ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แนวปฏิบัติการวัดและประเมินผลการเรียนรู้.
กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ.
- เสาวภา อนุเพชร. (2548). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีผลการเรียนต่ำ เรื่องอัตราส่วนและร้อยละที่ได้รับการ
สอนเสริมด้วยชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์นันทนาการ. สารนิพนธ์ กศ.ม.
(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
ถ่ายเอกสาร.
- อัญชนา โพธิ์พลากร. (2545). การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะการแก้ปัญหา
ทางคณิตศาสตร์ด้วยการเรียนแบบร่วมมือ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปริญญาณิพนธ์
กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
ถ่ายเอกสาร.
- อัมพร เจียรโณรส. (2548). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยใช้
VTAPER Model ร่วมกับเทคนิคการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการ
เรียนและความสนใจ เรื่อง สถิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. สารนิพนธ์ กศ.ม.
(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
ถ่ายเอกสาร.
- Appold, Barbara E. (2006, June). A Case Study of the Impact of Teachers with Awareness
of the Process Communication Model on Student Achievement. **Available
Dissertation Abstract**. Retrieved August 12, 2006.from <http://vnweb.proquest.com>.

- Ballard, Katherine D. (2007, December). The Effects of Integrated Systems on Mathematics Skill Development for Children with Performance Deficits in Mathematics Achievement. **Dissertation Abstracts Internationnal**. 68(6): Retrieved February 15, 2008, from <http://proquest.umi.com/pqdweb?did=1372007641&sid=9&Fmt=2&clientId=61839&RQT=309&VName=PQD>
- Baroody, Arthur J. (1993). **Problem Solving , Reasoning and Communication K – 8 : Helping Children Think Mathematically**. New York: Macmillan.
- Bell, Frederick H. (1978). **Teaching and Learning mathematics (In Secondary School)**. 2nd ed. Wm.C. Brown.
- Bitter, Gary G, Hatfield, Mary M.; & Edwards, Nancy T. (1998). **Mathematics Method for Elementary and Middle Schools**. A Comprehensive Approach. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
- Bloom, Benjamin S. (1976). **Human Characteristics and School Learning**. New York: McGraw-Hill.
- Brown, S.I.; & Walter, M.I. (1993). **Problem Posing : Reflections and Application**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Burks, Linda Carol. (1994, May). The Use of Writing as a Mean of Teacher Eighth Grade Student to Use Executive Processes and Heuristic Strategies to Solve Mathematics Problem. **Dissertation Abstracts International**. 54(11).
- Carroll, John B. (1963, May). A Model of School Learning. **Teachers College Record**. 64(2): 723 – 733.
- Crump, Patricia Sheral. (2004, April). What Influences Students' Mathematics Achievement? The Stories of Six High-achieving Middle School Females. Retrieved July 6, 2004, from Available: <http://wwwlib.umi.com>.
- Dossey, John A.; others. (2002). **Mathematics Method and Modeling of Today 's Mathematics Classroom : A Contemporary Approach to Teaching Grades 7 – 12**. Pacific Grove , CA: Brooks/Cole.
- Duncker, K. (1945). **On Problem solving**. Psychological Monographs.
- English, L.D. (1997). Promoting a Problem Posing Classroom. **Teaching Children Mathematics**. n.p.
- Finn, Kelly F.; et al. (2003, June) Assertiveness Level of Occupational Therapists. **Dissertation Abstracts International**. 58(2): 809.

- Gonzales, A. (1998). A Blueprint for Problem Posing. **School Science and Mathematics**. 98(8).
- Gooya, Zahra. (1994, February). Influences of Metacognition Based Teaching via Problem Solving on Students' Beliefs about Mathematics and Mathematical Problem Solving. **Dissertation Abstracts International**. 54(8): 2865 – A.
- Hatfield, Mary M. ; Edwards , Noney T.; & Bitter , Gary G. (1993). **Mathematics Method of the Elementary and Middle Schools**. Boston: Allyn and Bacon.
- Heimer, R.T.; & Trueblood , C.R. (1997). **Strategies for Teaching Children's Mathematics**. New York: Addison Wesley Publishing Company.
- Husen, Toster; & Postlethwaite, T. Neville. (1985). **The International Encyclopedia of Educational**. Vol.I London: Pergamon Press Ltd.
- Kennedy, L.M.; et al. (1994). **Guiding Children's Learning of Mathematics**. 7th ed. Belmont California: Wadsworth.
- Lavy; & Shriki. (2007). **Problem Posing as a Means for Developing Mathematical Knowledge of Prospective Teachers**. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). **Processing of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Vol. 3 Seoul, Korea : International Group for the Psychology of Mathematics Education
- Lewis, T., Petrina, S.; & Hill, A.M. (1998). **Problem Posing – Adding a Creative Increment to Technological Problem Solving**. Retrieved October 30, 224, from <http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/V36n1/lewis.html>.
- Mamona, J.; & Downs, J. (1993). **On Analyzing Problem Posing**. **International Group of the Psychology in Mathematics Education** : Tsukuba.
- Michaels, Rosemarie. (2002). The Relationships Among Problem Solving Performance, Gender, Confidence, and Attributional Style in Third – Grade Mathematics. **Dissertation Abstracts International**. 63 – 03A.
- National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM). (1989). Essential Mathematics for the Twenty-first Century. **Mathematics Teacher**. 82(6).
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). Evaluation of Teaching : Standard 4 – Mathematical Concepts , Procedures , and Connections. **Principles and Standards for School Mathematics**. Retrieved May 25, 2005, from <http://standards.nctm.org/document/chapter6/conn>.
- (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, Va : NCTM.

- Nicolaou, Aristoklis A.; & Philipou, George N. (2007). Efficacy Beliefs, Problem Posing, and Mathematics Achievement. **Focus on Learning Problems in Mathematics. Fall Edition.** 29(4): Nicosia
- Perrine, Vicki. (2001). Effect of a Problem-Solving-based Mathematical Course on the Proportional Reasoning of Preservice Teachers. **Dissertation Abstracts International.** Retrieved April 10, 2004, from Available:<http://www.lib.uni.com/dissertations/fullcit/3006601>.
- Polya, George. (1957). **How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method (Penguin Science).** New York: Doubleday and Company Garden City.
- . (1985). **How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method.** 2nd ed . New York: Doubleday and Company Garden City.
- Prescott, Daniel A. (1961). Report of Conference on Child Study. in **Educational Bulletin,** Bangkok : Faculty of Education. Chulalongkorn University.
- Rawat, D.S.; & Gupta , S.L. (1970). **Education Wastage at the Primary Level. A Handbook For Teacher.** New Delhi: S.K.Kitchula at Nalanda Press.
- Riordan, Jurie E.; & Noyce , Pendred E. (2001, July). The Impacts of Standards – Based Mathematics Curricula on Student Achievement in Massachusetts. **Journal for Research in Mathematics Education.** 32(4): 368 – A.
- Reys, Robert; et al. (2003). Assessing the Impact of Standards – Based Middle Grades Mathematics Curriculum Materials on Student Achievement. **Journal for Research in Mathematics Education.** 34(1): 74 - A
- Schroeder, Thomas L.; & Lester, Frank K. (1989). **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. New Directions for Elementary School Mathematics. 1989 Yearbook.** Edited by Paul R. Trafton. Reston Virginia : The National Council of Teachers of Mathematics.
- Silver, Edward A. (1996). **On mathematical problem posing.** In I. Hirabayashi, N. Nohada, K. Shigematsu, & F.L. Lin (Eds.). **Processing of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.** Tsukuba, Japan: International Group for the Psychology of Mathematics Education
- Spence, Jonet T. (1983). **Achievement and Achievement Motives.** United States of America: W.H. Freeman and Company.
- Stoyanova, E. (2000). Empowering Students' Problem Solving via Problem Posing : the Art of Framing 'Good' Questions. **The Australian Mathematics Teacher.** 56(1).

- Taylor, Jill. (1994, August). Socially Assisted Learning and Mathematical Problem Solving (Vygotskian). **Dissertation Abstracts International**. 55(2): 633 – B.
- William, Kenneth M. (2003, March). Writing about the Problem – Solving Process to Improve Problem – Solving Performance. **Mathematics Teacher**. 96(3).
- Wilson, James W. (1971). Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics. in **Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning**. Edited by Benjamin S. Bloom, U.S.A. : Mcgraw – Hill.
- Wilson, J.W.; Fernandez, M.L.; & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem Solving. in **Research Ideas for the Classroom : High school Mathematics**. New York: Macmillan Publish Company.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

1. ตารางค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบเลือกตอบ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4
2. ตารางค่า x และค่า x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient)
3. ตารางค่า p ค่า q และค่า pq ในการหาค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แบบเลือกตอบ
4. ตารางค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (D) ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4
5. ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient)
6. ค่า s_i และค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (∞ - Coefficient) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4

ตาราง 5 ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (D) จำนวน 30 ข้อของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบเลือกตอบ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 100 คน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (D)	ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (D)
1	0.36	0.29	16	0.48	0.38
2	0.34	0.42	17	0.29	0.50
3	0.78	0.54	18	0.26	0.42
4	0.71	0.42	19	0.29	0.33
5	0.71	0.54	20	0.28	0.21
6	0.59	0.92	21	0.34	0.75
7	0.62	0.71	22	0.24	0.38
8	0.52	0.88	23	0.26	0.29
9	0.26	0.50	24	0.45	0.54
10	0.31	0.50	25	0.47	0.21
11	0.42	0.75	26	0.52	0.58
12	0.36	0.38	27	0.45	0.63
13	0.31	0.63	28	0.27	0.38
14	0.34	0.71	29	0.40	0.42
15	0.33	0.29	30	0.44	0.50

ตาราง 6 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ใช้ในการหาค่า
ความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2	นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2
1	12	144	26	9	81
2	21	441	27	21	441
3	20	400	28	26	676
4	25	625	29	26	676
5	19	361	30	18	324
6	22	484	31	19	361
7	14	196	32	24	576
8	23	529	33	24	576
9	24	576	34	24	576
10	22	484	35	22	484
11	21	441	36	23	529
12	24	576	37	24	576
13	24	576	38	24	576
14	23	529	39	25	625
15	25	625	40	24	576
16	23	529	41	24	576
17	24	576	42	22	484
18	10	100	43	9	81
19	8	64	44	20	400
20	22	484	45	9	81
21	12	144	46	22	484
22	24	576	47	25	625
23	24	476	48	24	576
24	25	625	49	26	676
25	26	676	50	24	576

ตาราง 6 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2	นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2
51	24	576	76	18	324
52	14	196	77	11	121
53	13	169	78	12	144
54	14	196	79	8	64
55	16	265	80	14	196
56	10	100	81	17	289
57	15	225	82	18	324
58	21	441	83	13	169
59	16	256	84	12	144
60	26	676	85	18	324
61	18	324	86	15	225
62	18	324	87	16	256
63	11	121	88	19	361
64	23	529	89	14	196
65	21	441	90	17	289
66	7	49	91	12	144
67	8	64	92	14	196
68	6	36	93	9	81
69	15	225	94	12	144
70	12	144	95	10	100
71	13	169	96	10	100
72	11	121	97	17	289
73	13	169	98	7	49
74	7	49	99	6	36
75	19	361	100	23	529
รวม				1,768	34,860

ค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แบบอัตนัย
เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้ในการหาความเชื่อมั่น

$$\begin{aligned}
 S_t^2 &= \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{(100)(34,860) - (1,768)^2}{100(100-1)} \\
 &= \frac{3,486,000 - 3,125,824}{9,900} \\
 &= 36.38
 \end{aligned}$$

ตาราง 7 ค่า p ค่า q และค่า pq ในการหาค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ จำนวน 30 ข้อ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 100 คน ที่ไม่ใช่สมาชิกกลุ่มเดียวกับตารางที่ 5

ข้อที่	p	q	pq	ข้อที่	p	q	pq
1	0.91	0.09	0.08	16	0.69	0.31	0.21
2	0.13	0.87	0.11	17	0.53	0.47	0.25
3	0.94	0.06	0.06	18	0.71	0.29	0.21
4	0.90	0.10	0.09	19	0.67	0.33	0.22
5	0.85	0.15	0.13	20	0.68	0.32	0.22
6	0.29	0.71	0.21	21	0.09	0.81	0.08
7	0.90	0.10	0.09	22	0.54	0.46	0.25
8	0.77	0.23	0.18	23	0.67	0.33	0.22
9	0.60	0.40	0.24	24	0.59	0.41	0.24
10	0.61	0.39	0.24	25	0.60	0.40	0.24
11	0.71	0.29	0.21	26	0.22	0.78	0.17
12	0.66	0.34	0.22	27	0.52	0.48	0.25
13	0.58	0.42	0.24	28	0.22	0.78	0.17
14	0.70	0.30	0.21	29	0.20	0.80	0.16
15	0.86	0.14	0.12	30	0.52	0.48	0.25

ค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned}
 r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right] \\
 r_{tt} &= \frac{30}{30-1} \left[1 - \frac{5.57}{36.38} \right] \\
 r_{tt} &= (1.03) \times (1 - 0.15) \\
 r_{tt} &= 1.03 \times 0.85 \\
 r_{tt} &= 0.88
 \end{aligned}$$

ตาราง 8 หาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (D) จำนวน 8 ข้อของแบบวัดความสามารถ
ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัยเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 50 คน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (D)
1	0.38	0.40
2	0.37	0.41
3	0.36	0.27
4	0.33	0.28
5	0.32	0.34
6	0.33	0.28
7	0.35	0.29
8	0.23	0.46

ตาราง 9 ค่า x และ x^2 ในการหาค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการ
แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3
ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 1 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 2 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 3 (X)	x^2
1	4	16	4	16	0	0
2	4	16	4	16	2	4
3	4	16	4	16	2	4
4	4	16	4	16	2	4
5	4	16	4	16	2	4
6	4	16	4	16	2	4
7	4	16	4	16	2	4
8	4	16	4	16	3	9
9	4	16	4	16	3	9
10	4	16	4	16	3	9
11	4	16	4	16	3	9
12	4	16	5	25	3	9
13	4	16	5	25	3	9
14	4	16	5	25	3	9
15	4	16	5	25	4	16
16	4	16	5	25	4	16
17	4	25	5	25	4	16
18	4	25	5	25	4	16
19	4	25	5	25	4	16
20	4	25	5	25	4	16
21	4	25	5	25	4	16
22	6	36	5	25	4	16
23	6	36	5	25	4	16
24	6	36	5	25	4	16
25	6	36	5	25	7	49

ตาราง 9 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 1 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 2 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 3 (X)	x^2
26	6	36	7	49	7	49
27	6	36	7	49	7	49
28	7	49	7	49	7	49
29	7	49	7	49	7	49
30	7	49	7	49	7	49
31	7	49	7	49	7	49
32	7	49	7	49	7	49
33	7	49	7	49	7	49
34	7	49	7	49	7	49
35	7	49	7	49	7	49
36	7	49	7	49	7	49
37	7	49	7	49	7	49
38	7	49	7	49	7	49
39	7	49	7	49	7	49
40	7	49	7	49	7	49
41	7	49	7	49	7	49
42	7	49	7	49	7	49
43	7	49	7	49	7	49
44	7	49	7	49	7	49
45	7	49	7	49	7	49
46	7	49	7	49	7	49
47	7	49	7	49	7	49
48	7	49	7	49	7	49
49	7	49	7	49	7	49
50	7	49	7	49	7	49
	286	1,724	289	1,751	255	1,521
	$S_1^2 = 1.80$		$S_1^2 = 1.64$		$S_1^2 = 4.49$	

ตาราง 9 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 4 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 5 (X)	x^2	คะแนนข้อที่ 6 (X)	x^2
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	2	4	0	0	0	0
5	2	4	0	0	0	0
6	2	4	1	1	0	0
7	2	4	1	1	1	1
8	2	4	1	1	1	1
9	2	4	1	1	1	1
10	2	4	1	1	2	4
11	2	4	1	1	3	9
12	2	4	1	1	3	9
13	2	4	1	1	3	9
14	3	9	2	4	3	9
15	3	9	2	4	3	9
16	4	16	2	4	5	25
17	4	16	2	4	5	25
18	4	16	2	4	5	25
19	4	16	2	4	5	25
20	4	16	5	25	4	16
21	4	16	5	25	4	16
22	4	16	5	25	4	16
23	4	16	5	25	4	16
24	4	16	5	25	4	16
25	4	16	6	36	6	36

ตาราง 9 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 4(X)	x^2	คะแนนข้อที่ 5(X)	x^2	คะแนนข้อที่ 6(X)	x^2
26	4	16	6	36	6	36
27	4	16	6	36	6	36
28	4	16	6	36	6	36
29	7	49	6	36	6	36
30	7	49	7	49	6	36
31	7	49	7	49	6	36
32	7	49	7	49	6	36
33	7	49	7	49	6	36
34	7	49	7	49	6	36
35	7	49	7	49	6	36
36	7	49	7	49	7	49
37	7	49	7	49	7	49
38	7	49	7	49	7	49
39	7	49	7	49	7	49
40	7	49	7	49	7	49
41	7	49	7	49	7	49
42	7	49	7	49	7	49
43	7	49	7	49	7	49
44	7	49	7	49	7	49
45	7	49	7	49	7	49
46	7	49	7	49	7	49
47	7	49	7	49	7	49
48	7	49	7	49	7	49
49	7	49	7	49	7	49
50	7	49	7	49	7	49
	234	1,346	222	1,366	231	1,363
	$S_4^2 = 5.11$		$S_5^2 = 7.78$		$S_6^2 = 4.49$	

ตาราง 9 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 7(X)	x^2	คะแนนข้อที่ 8 (X)	x^2	คะแนนรวม(x_t)	x_t^2
1	0	0	0	0	8	64
2	0	0	0	0	11	121
3	0	0	0	0	11	121
4	1	1	1	1	14	196
5	1	1	1	1	14	196
6	1	1	1	1	15	225
7	1	1	2	4	17	289
8	1	1	2	4	18	324
9	2	4	3	9	20	400
10	2	4	3	9	21	441
11	2	4	3	9	22	484
12	2	4	3	9	23	529
13	2	4	3	9	23	529
14	2	4	3	9	25	625
15	2	4	3	9	26	676
16	2	4	3	9	29	841
17	2	4	3	9	30	900
18	6	36	4	16	35	1,225
19	6	36	4	16	35	1,225
20	6	36	4	16	37	1,369
21	6	36	4	16	37	1,369
22	6	36	4	16	38	1,444
23	6	36	4	16	38	1,444
24	6	36	4	16	38	1,444
25	6	36	4	16	44	1,936

ตาราง 9 (ต่อ)

นักเรียนคนที่	คะแนนข้อที่ 7(X)	x^2	คะแนนข้อที่ 8 (X)	x^2	คะแนนรวม(x_t)	x_t^2
26	6	36	5	25	47	2,209
27	6	36	5	25	47	2,209
28	6	36	5	25	48	2,304
29	7	49	5	25	52	2,704
30	7	49	6	36	54	2,916
31	7	49	6	36	54	2,916
32	7	49	6	36	54	2,916
33	7	49	6	36	54	2,916
34	7	49	6	36	54	2,916
35	7	49	6	36	54	2,916
36	7	49	6	36	55	3,025
37	7	49	7	49	56	3,136
38	7	49	7	49	56	3,136
39	7	49	7	49	56	3,136
40	7	49	7	49	56	3,136
41	7	49	7	49	56	3,136
42	7	49	7	49	56	3,136
43	7	49	7	49	56	3,136
44	7	49	7	49	56	3,136
45	7	49	7	49	56	3,136
46	7	49	7	49	56	3,136
47	7	49	7	49	56	3,136
48	7	49	7	49	56	3,136
49	7	49	7	49	56	3,136
50	7	49	7	49	56	3,136
	243	1,515	226	1,258	1,986	92,268
	$S_7^2 = 6.81$		$S_8^2 = 4.48$		$S_t^2 = 38.52$	

ค่าความแปรปรวนของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบ
อัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่น

$$\begin{aligned}
 S_t^2 &= \frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)} \\
 &= \frac{(50)(92,268) - (1,986)^2}{50(50-1)} \\
 &= \frac{4,613,400 - 3,944,196}{2,450} \\
 &= 273.14
 \end{aligned}$$

ตาราง 10 ค่า s_i และค่า s_i^2 ในการหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient) ของแบบทดสอบ
วัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3

ข้อที่	ค่า s_i	ค่า s_i^2
1	1.34	1.80
2	1.28	1.64
3	2.12	4.49
4	2.62	5.11
5	2.79	7.78
6	2.46	6.05
7	2.61	6.81
8	2.20	4.48
รวม		38.52

การคำนวณหาค่าความเชื่อมั่น (α - Coefficient)

$$\alpha = \frac{N}{N-1} \left[1 - \frac{\sum S_i^2}{S_t^2} \right]$$

$$\alpha = \frac{8}{8-1} \left[1 - \frac{38.52}{273.14} \right]$$

$$\alpha = \frac{8}{7} (1 - 0.14)$$

$$\alpha = \frac{8}{7} (0.86)$$

$$\alpha = 0.98$$

ภาคผนวก ข

1. ตารางคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. ตารางคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของกลุ่มทดลอง
3. ตารางคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง ของกลุ่มทดลอง

ตาราง 11 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อน และหลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง
จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน	D	D ²	คนที่	คะแนน ก่อนเรียน	คะแนน หลังเรียน	D	D ²
1	8	19	11	121	16	7	18	11	121
2	8	18	10	100	17	12	20	8	64
3	10	21	11	121	18	9	19	10	100
4	4	16	12	144	19	8	19	11	121
5	10	20	10	100	20	7	16	9	81
6	12	21	9	81	21	7	18	11	121
7	17	23	6	36	22	7	18	11	121
8	15	23	8	64	23	7	19	12	144
9	9	19	10	100	24	8	19	11	121
10	5	15	10	100	25	5	17	12	144
11	8	17	9	81	26	7	18	11	121
12	6	18	12	144	27	8	19	11	121
13	6	19	13	169	28	9	19	10	100
14	8	19	11	121	29	7	18	11	121
15	8	20	12	144	30	8	19	11	121
					รวม	250	564	314	3,348

การวิเคราะห์ข้อมูลวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
ก่อนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง สถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานข้อ 1 คือ t – test Dependent

$$t = \frac{\sum D}{\sqrt{\frac{N \sum D^2 - (\sum D)^2}{N - 1}}}$$

$$t = \frac{314}{\sqrt{\frac{(30 \times 3,348) - (314)^2}{30 - 1}}}$$

$$t = \frac{314}{\sqrt{\frac{100,440 - 98,569}{29}}}$$

$$t = \frac{314}{\sqrt{\frac{1,871}{29}}}$$

$$t = \frac{314}{\sqrt{64.52}}$$

$$t = \frac{314}{8.03}$$

$$t = 39.10$$

(เปิดตาราง จะได้ ค่าวิกฤตของ t จากการแจกแจงแบบ t ที่ระดับ .01 เมื่อ df = 30 – 1 = 29 จาก
การเทียบจะได้ค่า t = 2.462)

ตาราง 12 คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง
จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)

นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2	นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2
1	19	361	16	18	324
2	18	324	17	20	400
3	21	441	18	19	361
4	16	256	19	19	361
5	20	400	20	16	256
6	21	441	21	18	324
7	23	529	22	18	324
8	23	529	23	19	361
9	19	361	24	19	361
10	15	225	25	17	289
11	17	289	26	18	324
12	18	324	27	19	361
13	19	361	28	19	361
14	19	361	29	18	324
15	20	400	30	19	361
			รวม	564	10,694

คะแนนเฉลี่ยผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเรื่อง
อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการ
ให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x}{N} \\ \bar{x} &= \frac{564}{30} \\ \bar{x} &= 18.80 \\ S &= \sqrt{\frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}}\end{aligned}$$

$$S = \sqrt{\frac{30(10,694) - (564)^2}{30(30 - 1)}}$$

$$S = \sqrt{\frac{320,820 - 318,096}{870}}$$

$$S = \sqrt{\frac{2724}{870}}$$

$$S = \sqrt{3.13}$$

$$S = 1.77$$

การวิเคราะห์ข้อมูลคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองสูงกว่าเกณฑ์ สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานข้อ 2 คือ t – test one group

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, \text{ df} = n - 1$$

$$t = \frac{18.80 - 18}{\frac{1.77}{\sqrt{30}}}, \text{ df} = 29$$

$$t = \frac{0.80}{0.32}$$

$$t = 2.5^{**}$$

ตาราง 13 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ
 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการสอนโดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหา
 ด้วยตนเอง จำนวน 30 คน (คะแนนเต็ม 56 คะแนน)

นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2	นักเรียนคนที่	คะแนน (X)	x^2
1	43	1,849	16	43	1,849
2	43	1,849	17	45	2,025
3	32	1,024	18	47	2,209
4	45	2,025	19	49	2,401
5	49	2,401	20	47	2,209
6	47	2,209	21	49	2,401
7	45	2,025	22	34	1,156
8	54	2,916	23	39	1,521
9	34	1,156	24	32	1,024
10	50	2,500	25	44	1,963
11	55	3,025	26	45	2,025
12	43	1,849	27	49	2,401
13	43	1,849	28	47	2,209
14	38	1,444	29	49	2,401
15	50	2,500	30	43	1,849
			รวม	1,333	60,237

คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเรื่อง
 อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังได้รับการจัดการเรียนการสอนโดยการ
 ให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x}{N} \\ \bar{x} &= \frac{1,333}{30} \\ \bar{x} &= 44.47 \\ S &= \sqrt{\frac{N\sum x^2 - (\sum x)^2}{N(N-1)}} \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{\frac{30(60,237) - (1,333)^2}{30(30 - 1)}}$$

$$S = \sqrt{\frac{1,807,110 - 1,776,889}{870}}$$

$$S = \sqrt{\frac{30221}{870}}$$

$$S = \sqrt{34.74}$$

$$S = 5.89$$

คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองสูงกว่าเกณฑ์ สถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานข้อ 2 คือ t – test one group

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}, df = n - 1$$

$$t = \frac{44.47 - 33.60}{\frac{5.89}{\sqrt{30}}}, df = 29$$

$$t = \frac{10.87}{1.07}$$

$$t = 10.16^{**}$$

ภาคผนวก ค

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3
3. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์โดยการให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาด้วยตนเอง เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 3



โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี

แบบทดสอบก่อนเรียน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

วิชาคณิตศาสตร์ 9 (ค33101)

คะแนนเต็ม 30 คะแนน

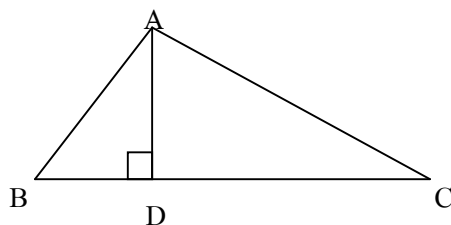
คำชี้แจง ข้อสอบมีทั้งหมด 1 ตอน จำนวน 8 หน้า

ตอนที่ 1 ปรนัย จำนวน 30 ข้อ 30 คะแนน ทำในกระดาษคำตอบ

สำหรับข้อที่ติดค่ารากให้แทนต่อไปนี้ $\sqrt{2} = 1.414$ และ $\sqrt{3} = 1.732$

คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

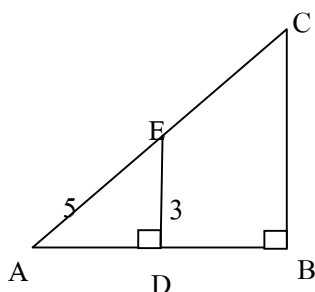
- จากรูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เท่ากับ 18 ตารางหน่วย $AB = 5$ หน่วย $BC = 12$ หน่วย ดังนั้นค่าของ $\tan B$ มีค่าตรงกับข้อใด



- ก. $\frac{1}{4}$
ข. $\frac{5}{12}$

- ค. $\frac{3}{4}$
ง. $\frac{4}{5}$

- จากรูป ถ้า $AB = 2DB$ แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใด



- ก. $\frac{3}{5}$
ข. $\frac{7}{10}$

- ค. $\frac{4}{5}$
ง. $\frac{9}{10}$

- กำหนดให้ $\tan A = \frac{4}{3}$ แล้ว $\sin A$ มีค่าตรงกับข้อใด

- ก. $\frac{3}{5}$
ข. $\frac{4}{5}$

- ค. $\frac{5}{3}$
ง. $\frac{5}{4}$

4. กำหนดให้ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้ว $\tan A$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 2

ค. $\sqrt{2}$

ข. 1

ง. 0

5. ถ้า $\tan A = \frac{x}{y}$ แล้ว $\cos A$ จะมีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ค. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ข. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

ง. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

6. ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีค่า $\sin A = \frac{12}{13}$ และด้านตรงข้ามมุม A ยาว 6 หน่วย รูปสามเหลี่ยมนี้จะมีพื้นที่เท่ากับกี่ตารางหน่วย

ก. 15

ค. 25

ข. 20

ง. 30

7. $\sin^2 A \cos^2 A \tan^2 A \operatorname{cosec}^2 A \sec^2 A \cot^2 A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. -1

ค. 1

ข. 0

ง. 2

8. ถ้า $\sec A = \frac{5}{3}$ แล้ว $\frac{\cot^2 A - \tan^2 A}{\cot^2 A + \tan^2 A}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{15}{37}$

ค. $-\frac{175}{337}$

ข. $-\frac{125}{317}$

ง. $-\frac{225}{407}$

9. $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ + \tan 30^\circ$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$

ค. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ข. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$

ง. $\frac{3+5\sqrt{3}}{6}$

10. $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 30^\circ \cot^2 60^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{11}{12}$

ค. $2\frac{11}{12}$

ข. $1\frac{11}{12}$

ง. $3\frac{11}{12}$

11. $3\cot^2 60^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 30^\circ - \frac{1}{2}\sec^2 45^\circ - \frac{1}{3}\cos^2 30^\circ$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{12}$

ค. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{10}$

ง. $\frac{1}{2}$

12. $4\cot^2 45^\circ + 2\cot^3 60^\circ$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $4 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

ข. $4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ค. $4 + \frac{\sqrt{3}}{9}$

ง. $4 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$

13. $\frac{1}{3}\sin^2 30^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 30^\circ \cot^2 60^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 45^\circ \tan^2 60^\circ$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $1\frac{1}{4}$

ข. $1\frac{3}{4}$

ค. $2\frac{1}{4}$

ง. $2\frac{3}{4}$

14. ถ้า $3x^2 \tan^2 45^\circ - 6x + 4\cos^2 30^\circ = 0$ แล้ว x มีค่าตรงกับข้อใด

ก. -2

ข. -1

ค. 1

ง. 2

15. ถ้า $2 \sin 2A = \tan 60^\circ$ แล้ว A มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0°

ข. 30°

ค. 45°

ง. 60°

16. กำหนด $0^\circ < x \leq 90^\circ$ ถ้า $\frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

ก. 0°

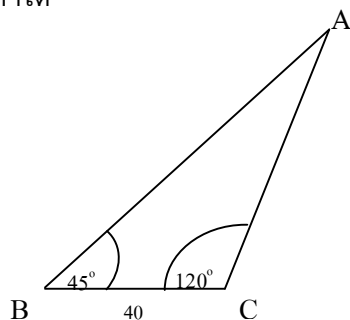
ข. 30°

แล้วมุม A จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

ค. 45°

ง. 60°

17. จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\angle ABC = 45^\circ$ และ $\angle BCA = 120^\circ$ ถ้า $BC = 40$ หน่วย AB ยาวเท่าใด



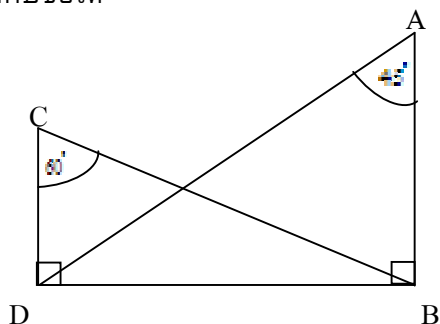
ก. 69.28 หน่วย

ข. 77.26 หน่วย

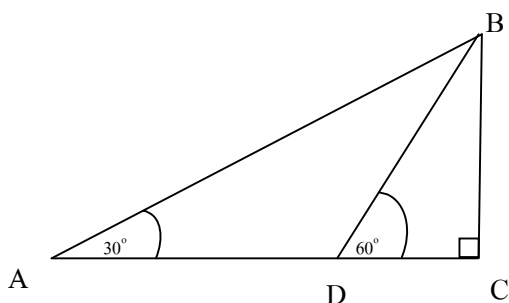
ค. 133.82 หน่วย

ง. 189.28 หน่วย

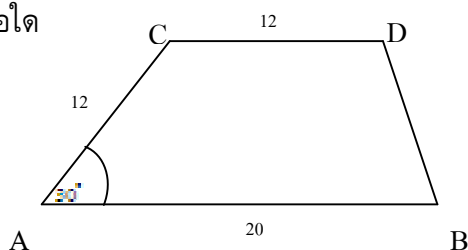
18. จากรูป มี $\angle C = 60^\circ$ และ $\angle DAB = 45^\circ$ ถ้า BD ยาว 30 หน่วย อยากทราบว่า $AB - CD$ มีค่าเท่ากับข้อใด



- ก. 2.68 หน่วย
ข. 10.00 หน่วย
ค. 12.68 หน่วย
ง. 15.86 หน่วย
19. จากรูป กำหนด $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$ ถ้า $AB = 200$ หน่วย แล้ว CD ยาวเท่าใด



- ก. 173.20 หน่วย
ข. 100.00 หน่วย
ค. 70.70 หน่วย
ง. 57.73 หน่วย
20. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มี AB ขนานกับ CD พื้นที่ของรูป ABCD มีขนาดเท่ากับข้อใด



- ก. 32 ตารางหน่วย
ข. 64 ตารางหน่วย
ค. 96 ตารางหน่วย
ง. 128 ตารางหน่วย
21. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาริมทะเลซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 1,000 เมตร มองเห็นเรือลำหนึ่งเป็นมุมก้ม 30° ชายผู้นี้ห่างจากเรือเป็นระยะทางประมาณเท่าใด
- ก. 577.37 เมตร
ข. 1,154.73 เมตร
ค. 1,732.00 เมตร
ง. 2,000.00 เมตร

29. เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 100 ฟุต ชายคนหนึ่งยืนอยู่ ณ จุดหนึ่ง ระหว่างเสาไฟฟ้าสองต้นนั้นบนแนวเส้นตรงที่ลากผ่านโคนเสา สังเกตดูยอดเสาเป็นมุมเงย 30° และ 60° ตามลำดับ เสาไฟฟ้ามีความสูงประมาณเท่าใด

ก. 25.00 ฟุต

ค. 43.30 ฟุต

ข. 35.35 ฟุต

ง. 53.75 ฟุต

30. ปิติยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง มองเห็นเรือเล็ก 2 ลำ จอดอยู่ในทะเลแนวเดียวกัน เป็นมุม 30° และ 60° ตามลำดับ และเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกัน 200 หลา เรือลำที่อยู่ใกล้หน้าผามากที่สุด ห่างจากหน้าผาเป็นระยะทางเท่าใด

ก. 80 หลา

ค. 120 หลา

ข. 100 หลา

ง. 140 หลา

โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี

คณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 33101)

ปีการศึกษา 2552

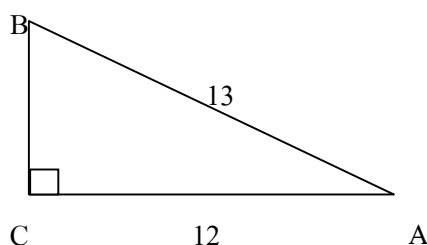
แบบทดสอบเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ (ฉบับที่ 1)

เวลา 15 นาที

ชื่อ ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จากรูป จงหาค่าของ $\frac{\sin A - \cos B}{\tan A}$



2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{8}{15}$
 จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} A - \cos A$

โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี

คณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 33101)

ปีการศึกษา 2552

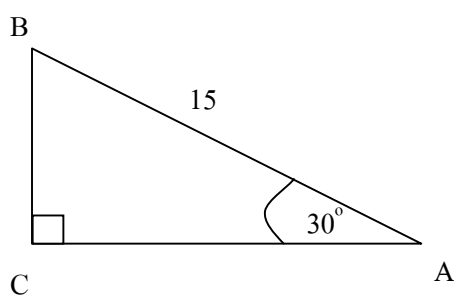
แบบทดสอบเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ (ฉบับที่ 2)

เวลา 15 นาที

ชื่อ ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จากรูป จงหาค่าของ $AC - BC$



2. จงหาค่า x จากสมการ $x \cos^2 45^\circ = \frac{\sin^2 45^\circ \tan 45^\circ}{\tan^2 30^\circ \cos 60^\circ}$

โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี

คณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 33101)

ปีการศึกษา 2552

แบบทดสอบเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ (ฉบับที่ 3)

เวลา 15 นาที

ชื่อ ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำสั่ง จงวาดภาพจากโจทย์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. สมบัติยืนบนพื้นราบห่างจากตึกหลังหนึ่ง มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 60° เมื่อเขาเดินห่างจากตึกออกไปอีก 50 เมตร จากจุดที่เขายืนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับตึก เขาเห็นยอดตึกที่ตำแหน่งเดิมเป็นมุมเงย 30°
2. มีหมุดตัวหนึ่งถูกปักอยู่บนพื้นดินระหว่างเสาเตี้ยทั้งสองหลัง นำลวดผูกระหว่างหมุดและยอดเสาเตี้ยทั้งสองทำมุมเงย 30° และ 60° จากระดับพื้นดิน ณ จุดที่ตอกหมุดตามลำดับ โดยเสาเตี้ยทั้งสองมีความสูงเท่ากัน และอยู่ห่างกัน 10 เมตร

โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี

คณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 33101)

ปีการศึกษา 2552

แบบทดสอบเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ (ฉบับที่ 4)

เวลา 15 นาที

ชื่อ ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งมองไปยังทะเลเห็นเรือสองลำลอยอยู่ในระนาบเดียวกัน โดยทำมุมกับ 30° และ 60° ตามลำดับ โดยที่เรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 10 เมตร จงหาว่าหน้าผามีความสูงเท่าใด
2. ชายสองคนยืนอยู่คนละฝั่งในระนาบเดียวกันกับเสาไฟฟ้าต้นหนึ่ง โดยชายทั้งสองมองไปยังยอดเสาไฟฟ้าทำมุมเงย 30° และ 60° ตามลำดับ ถ้าชายที่ยืนมองเสาไฟฟ้าทำมุมเงย 30° อยู่ห่างจากเสาไฟฟ้า 15 เมตร อยากทราบว่าชายอีกคนจะยืนห่างจากเสาไฟฟ้าเป็นระยะทางเท่าใด



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เวลา 2 คาบ

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3

รหัสวิชา ค 33201

1.สาระสำคัญ

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านสองด้านและมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. ผลการเรียนรู้

วิเคราะห์และเขียนความสัมพันธ์อัตราส่วนตรีโกณมิติ และนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติคำนวณหาความยาวของด้านที่กำหนดได้ โดยใช้ทักษะกระบวนการคณิตศาสตร์ได้แก่ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

3.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

3.1.1 หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

3.1.2 นำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้แก้ปัญหาต่างๆ ได้

3.2 ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนสามารถ

3.2.1 แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2.2 ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้

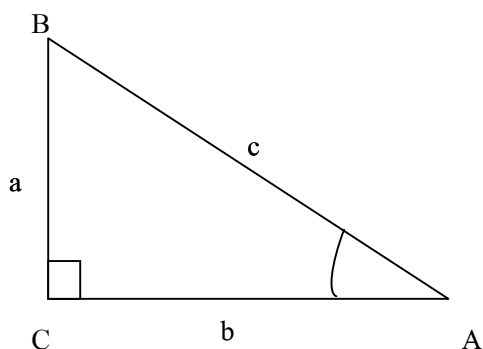
3.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

3.3.1 ใฝ่เรียนรู้

3.3.2 มุ่งมั่นในการทำงาน

4. สารการเรียนรู้

4.1 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูป



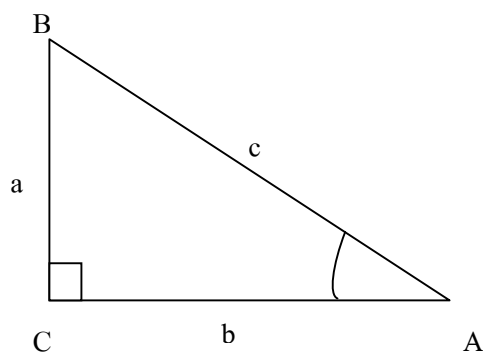
เมื่อพิจารณามุม A

เรียกด้าน BC ว่า ด้านตรงข้ามมุม A

เรียกด้าน AC ว่า ด้านประชิดมุม A

และ เรียกด้าน AB ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

4.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ



$\sin A$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{a}{c}$
$\cos A$	=	$\frac{\text{ด้านประชิดมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{b}{c}$
$\tan A$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านประชิดมุม } A}$	=	$\frac{a}{b}$
$\operatorname{cosec} A$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}$	=	$\frac{c}{a}$
$\sec A$	=	$\frac{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ด้านประชิดมุม } A}$	=	$\frac{c}{b}$
$\cot A$	=	$\frac{\text{ด้านประชิดมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}$	=	$\frac{b}{a}$

5. กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นนำ

1. ครูชี้แจงถึงกิจกรรมการเรียนรู้แบบนักเรียนตั้งปัญหาด้วยตนเอง (Problem Posing) โดยอธิบายแบ่งเป็นหัวข้อต่างๆ ดังนี้

1.1 รูปแบบของการทำกิจกรรม เป็นการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้มีการทำการสร้างโจทย์ปัญหาโดยการทำให้เกิดปัญหาใหม่ และการปรับเปลี่ยนปัญหาที่ให้มีมา เพื่อให้นักเรียนเรียนรู้บทสนทนา สรุปบทสนทนา และเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหา

1.2 บทบาทผู้เรียน ผู้เรียนจะต้องมีความกระตือรือร้นในการแสวงหาความรู้ ให้ความร่วมมือกับกิจกรรมการเรียนการสอน มีความรับผิดชอบ มีวินัย และมีความมุ่งมั่นในการทำงาน และสามารถตั้งปัญหา และคิดหาหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหานั้น รวมถึงนำเสนอสถานการณ์ปัญหาของผู้เรียนในกลุ่ม และชั้นเรียน

1.3 บทบาทผู้สอน ครูผู้สอนมีบทบาทในการนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ท้าทายความคิดผู้เรียน เพื่อผู้เรียนกระตุ้นหรือช่วยให้ผู้เรียนได้ใช้ศักยภาพของตนเองในการตั้งปัญหา และคิดหาหนทางหรือวิธีการแก้ปัญหานั้น รวมทั้งเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตั้งปัญหาหรือนำเสนอสถานการณ์ปัญหาของผู้เรียนในชั้นเรียน ที่ช่วยส่งเสริมกระบวนการคิด ฝึกทักษะการคิด ฝึกทักษะการแก้ปัญหา และช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหของผู้เรียน

1.4 ระยะเวลาในการทำกิจกรรม จำนวน 8 คาบเรียน โดยแบ่งออกเป็น

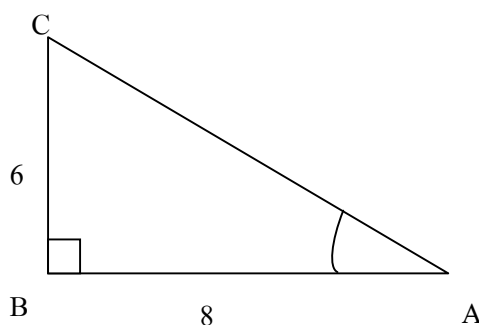
1.4.1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (2 คาบ)

1.4.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ (2 คาบ)

1.4.3 การนำไปใช้ (4 คาบ)

2. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนการสอน โดยสนทนาในหัวข้อของลักษณะของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากว่ามีลักษณะอย่างไรและมีวิธีการคำนวณหาความยาวด้านอย่างไร และการหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนักเรียนสามารถใช้วิธีการใดได้บ้าง พร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนแสดงวิธีการคำนวณดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความยาวของด้าน AC จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้



วิธีทำ จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = (8)^2 + (6)^2$$

$$(AC)^2 = 64 + 36$$

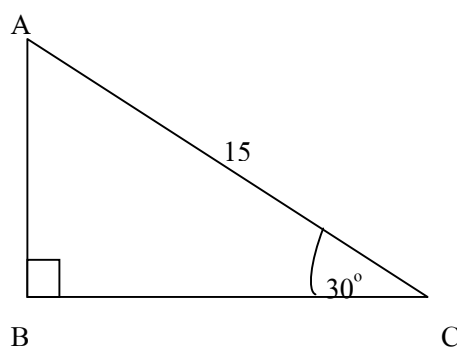
$$(AC)^2 = 100$$

$$\therefore AC = 10 \quad (\text{ความยาวด้านมีค่าเป็นบวกเสมอ})$$

บวกเสมอ)

นักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการหาความยาว AC อีกครั้งหนึ่ง หลังจากนั้นครูยกตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันนำเสนอวิธีการหาความยาวด้าน AB จากรูป

ตัวอย่างที่ 2



นักเรียนนำเสนอแนวคิดและปัญหาที่พบในการคำนวณหาความยาวของด้าน AB ที่กำหนดให้ว่าจะต้องทราบอะไรบ้าง และมีแนวคิดในการคำนวณอย่างไร และมีปัญหาอะไรที่ทำให้ไม่สามารถคำนวณหาความยาวของด้าน AB ได้โดยครูเป็นผู้รวบรวมแนวคิดและปัญหาของนักเรียน

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนแต่ละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จัดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน

2. ครูแจกใบงานให้นักเรียนในแต่ละกลุ่ม โดยใบงานประกอบด้วย

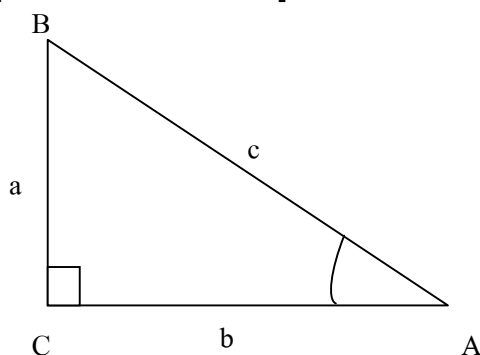
2.1 ใบความรู้ที่สมาชิกภายในกลุ่มได้ร่วมกันศึกษา ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งประกอบไปด้วยภาพและความสัมพันธ์ระหว่างด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในอัตราส่วนตรีโกณมิติต่างๆ

2.2 ใบงาน ซึ่งสมาชิกภายในกลุ่มจะต้องทำร่วมกันและนำเสนอปัญหาที่พบในระหว่างการทำ พร้อมทั้งวิธีการแก้ปัญหา

เมื่อนักเรียนได้รับใบความรู้และใบงานแล้ว ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มได้ทำการศึกษาพร้อมทั้งจัดทำใบงาน และเลือกตัวแทนกลุ่มเพื่อนำเสนอแนวคิดต่อนักเรียนกลุ่มอื่นๆ โดยให้เวลาในการทำกิจกรรมทั้งสิ้น 15 นาที

3. ครูสุ่มกลุ่มของนักเรียนออกมาสรุปแนวคิดของกลุ่มในใบความรู้ที่กำหนดให้ โดยจะต้องมีเนื้อหาที่สรุปได้ดังนี้

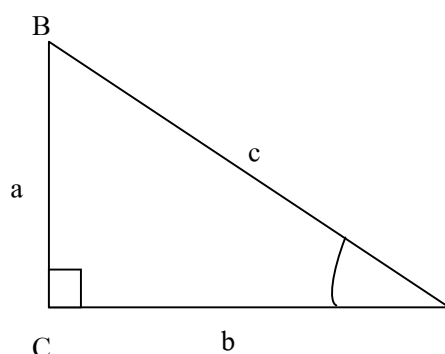
3.1 จากรูป เรียกด้านทั้งสามของรูปเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



เมื่อพิจารณามุม A

เรียกด้าน BC ว่า	ด้านตรงข้ามมุม A	เขียนแทนด้วย a
เรียกด้าน AC ว่า	ด้านประชิดมุม A	เขียนแทนด้วย b
และเรียกด้าน AB ว่า	ด้านตรงข้ามมุมฉาก	เขียนแทนด้วย c

3.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติ



บทนิยาม

$\sin A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{a}{c}$
$\cos A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{b}{c}$
$\tan A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}}$	=	$\frac{a}{b}$
$\operatorname{cosec} A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}}$	=	$\frac{c}{a}$
$\sec A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}}$	=	$\frac{c}{b}$
$\cot A$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}}$	=	$\frac{b}{a}$
$\sin B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{b}{c}$
$\cos B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$	=	$\frac{a}{c}$
$\tan B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}}$	=	$\frac{b}{a}$
$\operatorname{cosec} B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}}$	=	$\frac{c}{b}$
$\sec B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}}$	=	$\frac{c}{a}$
$\cot B$	=	$\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}}$	=	$\frac{a}{b}$

ครูเน้นให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของมุมและอัตราส่วนตรีโกณมิติที่มีค่าเท่ากัน โดยให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ 2 ประเภทได้ ดังนี้

ประเภทที่ 1

1. $\sin A = \cos B$
2. $\cos A = \sin B$
3. $\tan A = \cot B$
4. $\operatorname{cosec} A = \sec B$
5. $\sec A = \operatorname{cosec} B$
6. $\cot A = \tan B$

ประเภทที่ 2

1. $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$
2. $\cos A = \frac{1}{\sec A}$
3. $\tan A = \frac{1}{\cot A}$
4. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$
5. $\sec A = \frac{1}{\cos A}$
6. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

4. ครูสุ่มกลุ่มนักเรียนออกมาเขียนความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปที่กำหนดให้ ในใบงาน พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้เพื่อนนักเรียนในกลุ่มต่างๆ ชักถามข้อสงสัย

5. ครูให้นักเรียนทำการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมทั้งกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจำนวน 2 ด้าน พร้อมทั้งให้นักเรียนเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติตามที่กำหนดขึ้นเองคนละ 2 ข้อ และให้สลับกันภายในกลุ่มตรวจสอบความถูกต้องพร้อมทั้งเลือกตัวอย่างข้อที่ถูกต้องที่สุดและน่าสนใจจำนวน 2 ข้อมานำเสนอให้เพื่อนนักเรียนกลุ่มอื่นๆ ซึ่งมีครูเป็นผู้สุ่มให้แต่ละกลุ่มโดยการแจกโจทย์ที่นักเรียนได้สร้างขึ้นให้กับกลุ่มต่างๆ

6. ครูสุ่มกลุ่มนักเรียนออกมาแนะนำตัวอย่างโจทย์ที่นักเรียนได้รับ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้เพื่อนนักเรียนได้มีการซักถามในข้อสงสัย โดยให้นักเรียนที่ออกมานำเสนอเป็นผู้อธิบาย ซึ่งครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปอัตราส่วนตรีโกณมิติของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ และให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมทั้งกำหนดความยาวด้านของด้านประกอบมุมฉาก 2 ด้านที่ไม่ซ้ำกับใบงานและข้อที่สมาชิกภายในกลุ่มสร้างขึ้น และโจทย์ที่ได้รับจากสมาชิกกลุ่มอื่น พร้อมทั้งเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 เป็นการบ้านจำนวน 3 ข้อ

2. วัดและประเมินผลโดยสังเกตพฤติกรรมจากการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คาบที่ 2

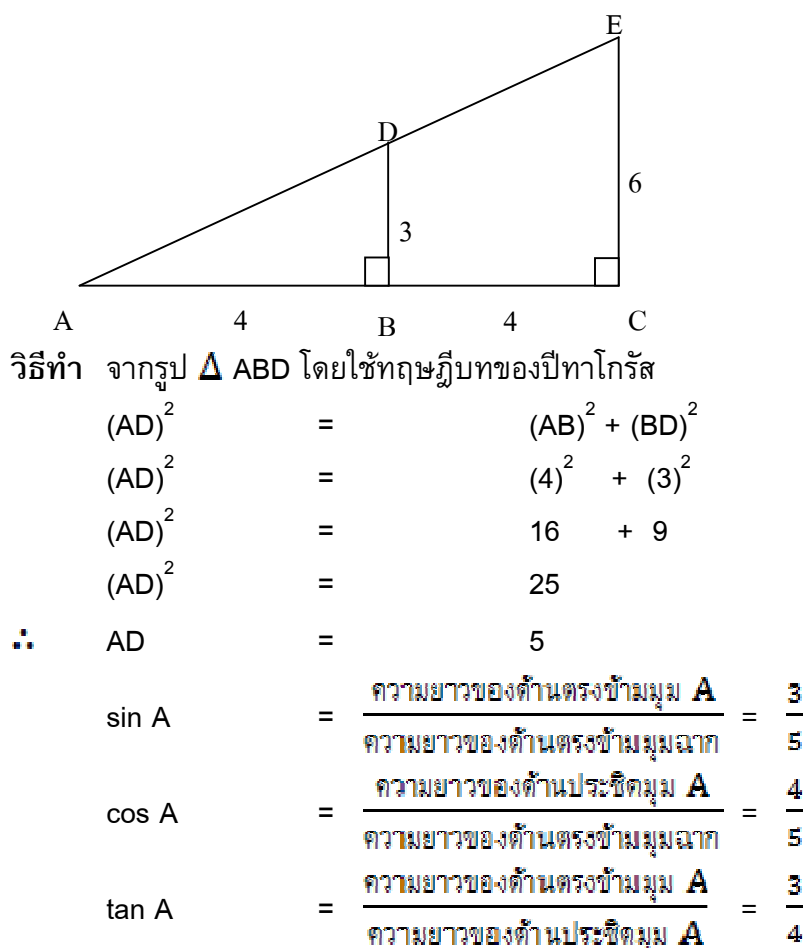
ขั้นนำ

1. ครูทบทวนเนื้อหาในคาบเรียนที่ผ่านมาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยสุ่มนักเรียนจำนวน 3 คน ออกมานำเสนอรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เป็นการบ้านที่นักเรียนสร้างขึ้น 1 ข้อ ทีละคน พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่น ๆ ได้ซักถามข้อสงสัย โดยให้นักเรียนที่สุ่มออกมานำเสนอเป็นผู้ตอบคำถาม โดยครูเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนภายในห้องตั้งคำถามในวิธีการคำนวณที่แตกต่างออกไป

2. ครูอธิบายจุดประสงค์การเรียนรู้ดังนี้ นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ คำนวณหาความยาวของด้านที่กำหนดได้

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมโดยการนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนได้หาค่า $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ตัวอย่าง กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม B และ มุม C เป็นมุมฉาก จงหาค่า $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ จากจากรูปสามเหลี่ยม ABD และรูปสามเหลี่ยม ACE



จากรูป $\triangle ACE$ โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$(AE)^2 = (AC)^2 + (CE)^2$$

$$(AE)^2 = (8)^2 + (6)^2$$

$$(AE)^2 = 64 + 36$$

$$(AE)^2 = 100$$

$$\therefore AE = 10$$

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

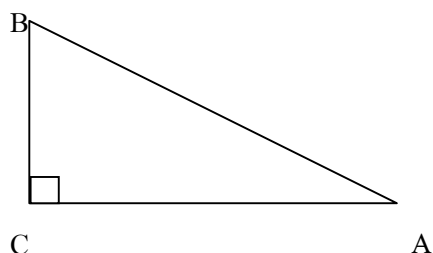
$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

ครูให้นักเรียนสังเกตอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตัวอย่างที่กำหนดให้ว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ และให้นักเรียนช่วยกันสรุปว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านสองด้านและมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ

2. ครูยกตัวอย่างค่า $\sin A = \frac{5}{13}$ แล้วให้นักเรียนหาค่า $\cos A$ และ $\tan A$ โดยครูให้นักเรียนได้ร่วมกันนำเสนอแนวคิดในการคำนวณ และลงมือคำนวณโดยครูกระตุ้นให้นักเรียนได้ช่วยกันคิดและเสนอแนะในเรื่องการนำความรู้เรื่องอัตราส่วนมาช่วยในการคำนวณ ให้ได้ดังนี้
ตัวอย่าง กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\sin A = \frac{5}{13}$
จงหาค่า $\cos A$ และ $\tan A$

เฉลย



$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AB}$$

กำหนดให้ $AB = x$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$BC = \frac{5}{13}AB$$

$$BC = \frac{5}{13}x$$

จากรูป $\triangle ABC$ จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาความยาว AC ได้ดังนี้

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(x)^2 = (AC)^2 + \left(\frac{5}{13}x\right)^2$$

$$x^2 = (AC)^2 + \frac{25}{169}x^2$$

$$(AC)^2 = \frac{144}{169}x^2$$

$$AC = \frac{12}{13}x$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$= \frac{AC}{AB}$$

$$= \frac{\frac{12}{13}x}{x}$$

$$= \frac{12}{13}$$

$$= \frac{x}{\frac{13}{12}}$$

$$= \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$= \frac{\frac{5}{13}x}{\frac{12}{13}x}$$

$$= \frac{\frac{5}{13}x}{\frac{12}{13}x}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

3. ให้นักเรียนออกมานำเสนอวิธีการคำนวณจากตัวอย่างที่กำหนดให้ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่นๆ ที่มีปัญหาสงสัยได้ซักถามและนำเสนอวิธีการคำนวณที่แตกต่าง พร้อมทั้งนักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้อีกครั้ง

4. ครูให้นักเรียนจับกลุ่มๆ ละ 3 คนโดยจะต้องไม่เป็นกลุ่มเดียวกับในครั้งที่ แล้วโดยนักเรียนต้องเลือกสมาชิกที่คละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จัดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน พร้อมทั้งแจกใบงานที่ 2 โดยให้นักเรียนภายในกลุ่มช่วยกันนำเสนอวิธีการคำนวณหาค่าต่างๆ ตามใบงานที่กำหนด พร้อมสรุปแนวคิดจากใบงานที่กำหนดให้ โดยให้เวลาทำใบงาน 10 นาที

5. ครูสุ่มกลุ่มนักเรียนมานำเสนอวิธีการคำนวณและสรุปแนวคิดในการคำนวณหาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้จากใบงาน และเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ไม่เข้าใจได้ทำการซักถาม ซึ่งนักเรียนที่ออกมาแสดงแนวคิดในการคำนวณเป็นคนอธิบาย โดยครูเป็นผู้กระตุ้นให้นักเรียนภายในห้องได้ร่วมกันอธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์และนำเสนอวิธีการคำนวณที่หลากหลาย

6. ครูให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มตั้งโจทย์ปัญหาโดยที่กำหนดค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติมาให้ 1 ค่า และให้ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติด้านอื่น คนละ 2 ข้อ พร้อมทั้งแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียด หลังจากนั้นนำเสนอโจทย์ที่สร้างขึ้นต่อเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มได้ช่วยกันตรวจสอบแนวคิดในการคำนวณ โดยครูเดินดูและให้คำปรึกษากับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเรื่องการคำนวณ โดยให้เวลานักเรียนในการทำประมาณ 15 นาที ตั้งแต่ให้เริ่มตั้งโจทย์ปัญหา พร้อมทั้งให้นักเรียนภายในกลุ่มเลือกโจทย์ที่กลุ่มคิดว่าน่าสนใจมากที่สุดมาจำนวน 1 ข้อ เพื่อเตรียมนำเสนอหน้าชั้นเรียน

7. ครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอโจทย์ปัญหาของกลุ่มและวิธีการคำนวณหาอัตราส่วนตรีโกณมิติจากโจทย์ปัญหาที่นำเสนอ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้เพื่อนนักเรียนได้มีการซักถามในข้อสงสัย และให้นักเรียนในกลุ่มอื่นๆ นำเสนอแนวคิดที่แตกต่าง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติพร้อมทั้งวิธีการคำนวณหาค่าจากสิ่งที่โจทย์กำหนดเมื่อกำหนดอัตราส่วนตรีโกณมิติมา 1 ค่า อีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ หลังจากนั้นให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาและแสดงวิธีการคำนวณหาอัตราส่วนตรีโกณมิติค่าอื่นเป็นการบ้านจำนวน 2 ข้อ โดยนักเรียนออกโจทย์และสลับกับเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มให้เป็นผู้ทำ

2. ทำการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนจำนวน 2 ข้อ จากแบบทดสอบที่สร้างขึ้น โดยใช้เวลา 15 นาที

6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

6.1 Power point

6.2 ใบความรู้

6.3 ใบงานที่ 1 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

6.4 ใบงานที่ 2 เรื่องการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ

7. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

7.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา

7.2 แบบสังเกตพฤติกรรม

7.3 แบบประเมินใบงาน

7.4 แบบทดสอบ

8. การออกแบบวิธีการและเครื่องมือประเมินผล

ตัวชี้วัดจาก จุดประสงค์การ เรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือวัด	แหล่งข้อมูล	เกณฑ์
1. นักเรียนสามารถ หาอัตราส่วน ตรีโกณมิติของมุม ตามเงื่อนไขที่ กำหนดให้ได้	- ทำแบบทดสอบ ย่อย 1	- แบบทดสอบ ย่อยที่ 1	- นักเรียน	- นักเรียน สามารถทำ คะแนนได้ตาม เกณฑ์ที่กำหนด ในแบบทดสอบ ร้อยละ 60 ขึ้นไป
	- ทำใบงาน	- แบบประเมินผล จากใบงาน	- นักเรียน	- นักเรียนทำ ใบงาน ได้ถูกต้อง และเรียบร้อย
2. นักเรียนใช้ กระบวนการ แก้ปัญหาและให้ เหตุผลทาง คณิตศาสตร์ได้	- สังเกต พฤติกรรม	- แบบสังเกต พฤติกรรม	- นักเรียน	- นักเรียนได้ ร่วมกิจกรรมและ ผ่านเกณฑ์อย่าง น้อย 60 %
3. นักเรียนมี คุณลักษณะ ใฝ่ เรียนรู้ มุ่งมั่นในการ ทำงาน	- สังเกตพฤติกรรม	- แบบสังเกต พฤติกรรม	- นักเรียน	- นักเรียนได้ ร่วมกิจกรรมและ ผ่านเกณฑ์อย่าง น้อย 60 %

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

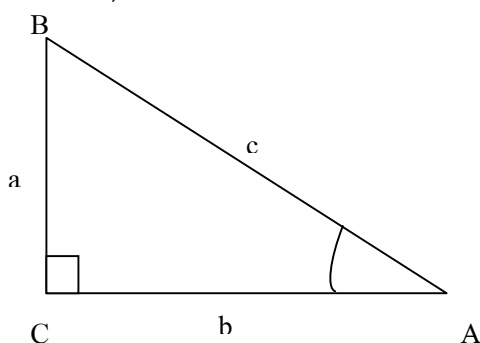
This image shows a full page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



ใบความรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ ความสัมพันธ์ระหว่างด้านสองด้านและมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุม A , B และ C มีความยาว a , b และ c หน่วยตามลำดับ



เมื่อพิจารณามุม A

เรียกด้าน BC ว่า ด้านตรงข้ามมุม A

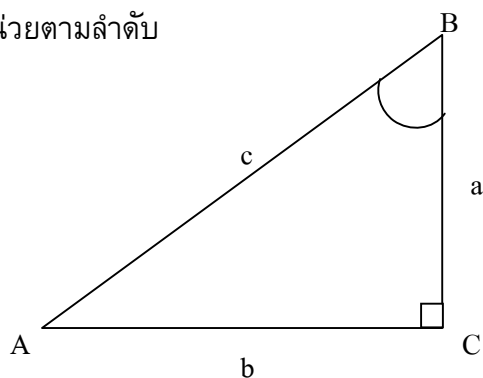
เรียกด้าน AC ว่า ด้านประชิดมุม A

และเรียกด้าน AB ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

อัตราส่วนของความยาวของด้านต่างๆ มีดังนี้

$\frac{a}{c}$	เรียกว่าไซน์ A (sine A)	นิยมเขียน $\sin A$
$\frac{b}{c}$	เรียกว่าโคไซน์ A (cosine A)	นิยมเขียน $\cos A$
$\frac{a}{b}$	เรียกว่าแทนเจนต์ A (tangent A)	นิยมเขียน $\tan A$
$\frac{c}{a}$	เรียกว่าโคเซแคนต์ A (cosecant A)	นิยมเขียน $\operatorname{cosec} A$ หรือ $\operatorname{csc} A$
$\frac{c}{b}$	เรียกว่าเซแคนต์ A (secant A)	นิยมเขียน $\sec A$
$\frac{b}{a}$	เรียกว่าโคแทนเจนต์ A (cotangent A)	นิยมเขียน $\cot A$

กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี C เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วยตามลำดับ



เมื่อพิจารณามุม B

เรียกด้าน AC ว่า ด้านตรงข้ามมุม B

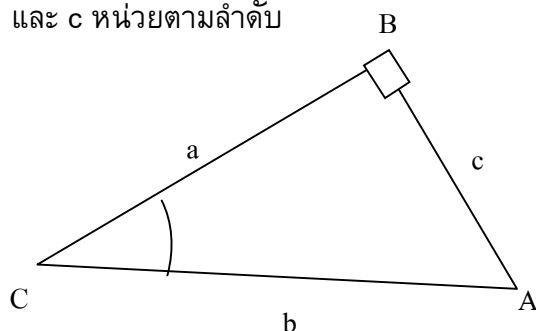
เรียกด้าน BC ว่า ด้านประชิดมุม B

และเรียกด้าน AB ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

อัตราส่วนของความยาวของด้านต่างๆ มีดังนี้

$\frac{b}{c}$	เรียกว่าไซน์ B (sine B)	นิยมเขียน $\sin B$
$\frac{a}{c}$	เรียกว่าโคไซน์ B (cosine B)	นิยมเขียน $\cos B$
$\frac{a}{b}$	เรียกว่าแทนเจนต์ B (tangent B)	นิยมเขียน $\tan B$
$\frac{c}{a}$	เรียกว่าโคเซแคนต์ B (cosecant B)	นิยมเขียน $\operatorname{cosec} B$ หรือ $\operatorname{csc} B$
$\frac{c}{b}$	เรียกว่าเซแคนต์ B (secant B)	นิยมเขียน $\sec B$
$\frac{b}{a}$	เรียกว่าโคแทนเจนต์ B (cotangent B)	นิยมเขียน $\cot B$

กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วยตามลำดับ



เมื่อพิจารณามุม C

เรียกด้าน AB ว่า ด้านตรงข้ามมุม C

เรียกด้าน BC ว่า ด้านตรงชิดมุม C

และเรียกด้าน AC ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

อัตราส่วนของความยาวของด้านต่างๆ มีดังนี้

$\frac{a}{c}$	เรียกว่าไซน์ C (sine C)	นิยมเขียน $\sin C$
$\frac{b}{c}$	เรียกว่าโคไซน์ C (cosine C)	นิยมเขียน $\cos C$
$\frac{a}{b}$	เรียกว่าแทนเจนต์ C (tangent C)	นิยมเขียน $\tan C$
$\frac{c}{a}$	เรียกว่าโคเซแคนต์ C (cosecant C)	นิยมเขียน $\operatorname{cosec} C$ หรือ $\operatorname{csc} C$
$\frac{c}{b}$	เรียกว่าเซแคนต์ C (secant C)	นิยมเขียน $\sec C$
$\frac{b}{a}$	เรียกว่าโคแทนเจนต์ C (cotangent C)	นิยมเขียน $\cot C$



ใบงานที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อกลุ่ม

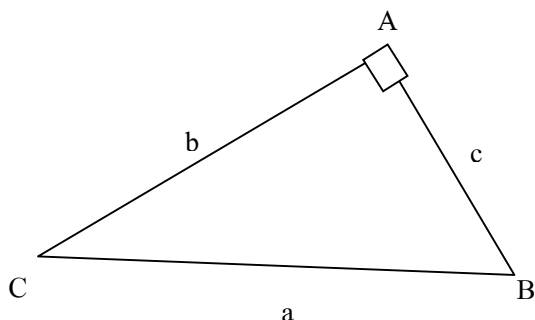
ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันทำใบงานนี้ เพื่อหาข้อสรุป อัตราส่วนตรีโกณมิติ แล้วนำเสนอข้อสรุปที่ได้กับสมาชิกภายในชั้นเรียน

- กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุม A , B และ C ยาว a , b และ c หน่วยตามลำดับ



- ด้านตรงข้ามมุม B มีความยาว หน่วย
- ด้านประชิดมุม B มีความยาว หน่วย
- ด้านตรงข้ามมุม C มีความยาว หน่วย
- ด้านประชิดมุม C มีความยาว หน่วย
- ด้านตรงข้ามมุมฉาก มีความยาว หน่วย

- จากอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้จงเขียนอัตราส่วนของความยาวด้านให้ถูกต้อง

$$\sin B = \quad \sin C =$$

$$\cos B = \quad \cos C =$$

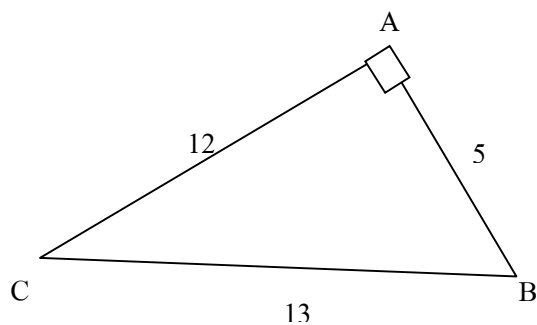
$$\tan B = \quad \tan C =$$

$$\operatorname{cosec} B = \quad \operatorname{cosec} C =$$

$$\sec B = \quad \sec C =$$

$$\cot B = \quad \cot C =$$

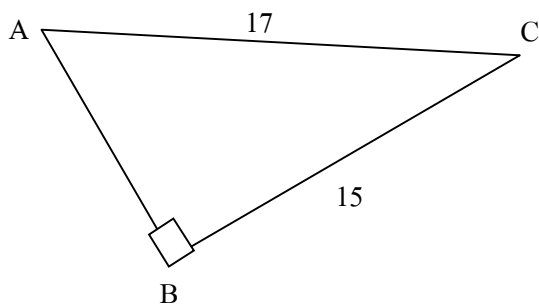
2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AB, AC และ BC เป็น 5, 12 และ 13 หน่วยตามลำดับ



1. ด้านตรงข้ามมุม B มีความยาว หน่วย
2. ด้านประชิดมุม B มีความยาว หน่วย
3. ด้านตรงข้ามมุม C มีความยาว หน่วย
4. ด้านประชิดมุม C มีความยาว หน่วย
5. ด้านตรงข้ามมุมฉาก มีความยาว หน่วย
6. จงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\sin B$	=	$\sin C$	=
$\cos B$	=	$\cos C$	=
$\tan B$	=	$\tan C$	=
$\operatorname{cosec} B$	=	$\operatorname{cosec} C$	=
$\sec B$	=	$\sec C$	=
$\cot B$	=	$\cot C$	=

3. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AC และ BC เป็น 17 และ 15 หน่วยตามลำดับ

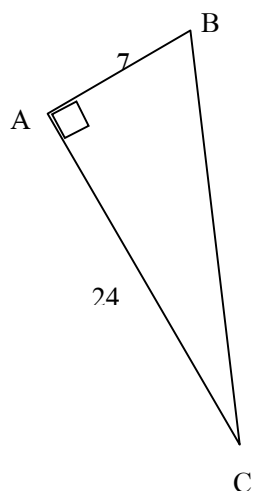


จงหาความยาวด้าน AB

จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\sin A$	=	$\sin C$	=
$\cos A$	=	$\cos C$	=
$\tan A$	=	$\tan C$	=
$\operatorname{cosec} A$	=	$\operatorname{cosec} C$	=
$\sec A$	=	$\sec C$	=
$\cot A$	=	$\cot C$	=

4. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AC และ AB เป็น 24 และ 7 หน่วยตามลำดับ

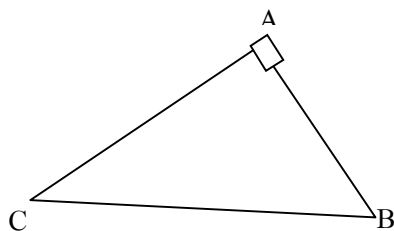


จงหาความยาวด้าน BC

จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\sin B$	=	$\sin C$	=
$\cos B$	=	$\cos C$	=
$\tan B$	=	$\tan C$	=
$\operatorname{cosec} B$	=	$\operatorname{cosec} C$	=
$\sec B$	=	$\sec C$	=
$\cot B$	=	$\cot C$	=

5. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก



จากรูปที่กำหนดให้จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\sin B = \qquad \qquad \qquad \operatorname{cosec} B =$$

$$\cos B = \qquad \qquad \qquad \sec B =$$

$$\tan B = \qquad \qquad \qquad \cot B =$$

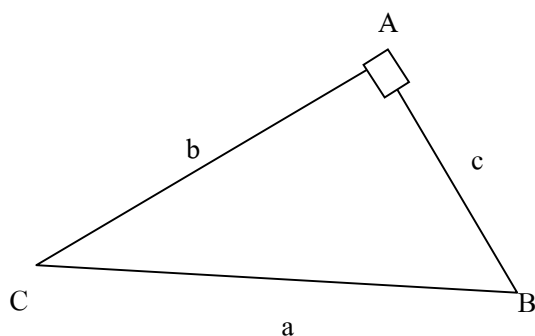


เฉลย

ใบงานที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันทำใบงานนี้ เพื่อหาข้อสรุป อัตราส่วนตรีโกณมิติ แล้วนำเสนอข้อสรุปที่ได้กับสมาชิกภายในชั้นเรียน

1. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วยตามลำดับ



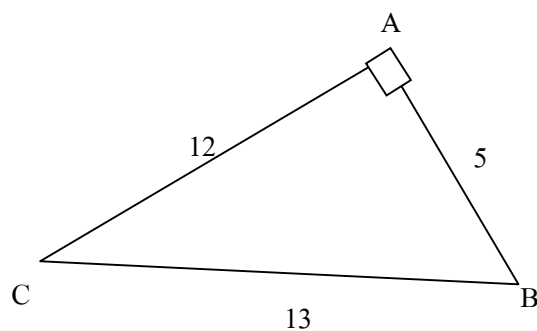
- | | | | | |
|----------------------|---|-----------|---|-------|
| 1. ด้านตรงข้ามมุม | B | มีความยาว | b | หน่วย |
| 2. ด้านประชิดมุม | B | มีความยาว | c | หน่วย |
| 3. ด้านตรงข้ามมุม | C | มีความยาว | b | หน่วย |
| 4. ด้านประชิดมุม | C | มีความยาว | c | หน่วย |
| 5. ด้านตรงข้ามมุมฉาก | | มีความยาว | a | หน่วย |

6. จากอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้จงเขียนอัตราส่วนของความยาวด้านให้ถูกต้อง

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{b}{a} \\ \cos B &= \frac{c}{a} \\ \tan B &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{cosec} B &= \frac{a}{b} \\ \sec B &= \frac{a}{c} \\ \cot B &= \frac{c}{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{c}{a} \\ \cos C &= \frac{b}{a} \\ \tan C &= \frac{c}{b} \\ \operatorname{cosec} C &= \frac{a}{c} \\ \sec C &= \frac{a}{b} \\ \cot C &= \frac{b}{c}\end{aligned}$$

2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AB, AC และ BC เป็น 5, 12 และ 13 หน่วยตามลำดับ



1. ด้านตรงข้ามมุม B มีความยาว 12 หน่วย
2. ด้านประชิดมุม B มีความยาว 5 หน่วย
3. ด้านตรงข้ามมุม C มีความยาว 5 หน่วย
4. ด้านประชิดมุม C มีความยาว 12 หน่วย
5. ด้านตรงข้ามมุมฉาก มีความยาว 13 หน่วย
6. จงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\sin B = \frac{12}{13}$$

$$\cos B = \frac{5}{13}$$

$$\tan B = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

$$\sec B = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$\cot B = \frac{5}{12}$$

$$\sin C = \frac{5}{13}$$

$$\cos C = \frac{12}{13}$$

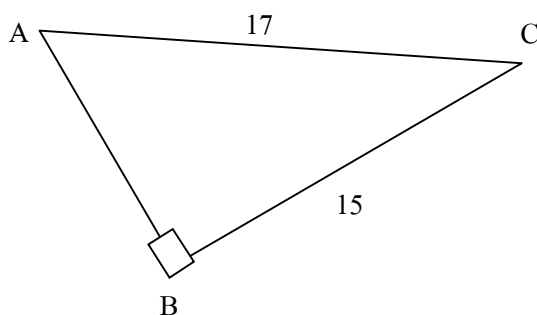
$$\tan C = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec} C = \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$\sec C = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

$$\cot C = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

3. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AC และ BC เป็น 17 และ 15 หน่วยตามลำดับ



จงหาความยาวด้าน AB

จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาความยาวของ AB ได้ดังนี้

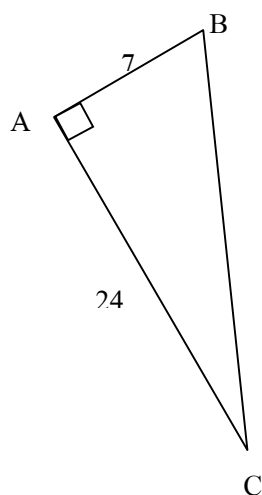
$$\begin{aligned}
 (AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 \\
 (17)^2 &= (AB)^2 + (15)^2 \\
 289 &= (AB)^2 + 225 \\
 (AB)^2 &= 289 - 225 \\
 (AB)^2 &= 64 \\
 \therefore AB &= 8
 \end{aligned}$$

จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \sin A &= \frac{15}{17} \\
 \cos A &= \frac{8}{17} \\
 \tan A &= \frac{15}{8} \\
 \operatorname{cosec} A &= \frac{17}{15} \\
 \sec A &= \frac{17}{8} \\
 \cot A &= \frac{8}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin C &= \frac{8}{17} \\
 \cos C &= \frac{15}{17} \\
 \tan C &= \frac{8}{15} \\
 \operatorname{cosec} C &= \frac{17}{8} \\
 \sec C &= \frac{17}{15} \\
 \cot C &= \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

4. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีความยาวด้าน AC และ AB เป็น 24 และ 7 หน่วยตามลำดับ



จงหาความยาวด้าน BC

จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาความยาวของ BC ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(BC)^2 &= (AB)^2 + (AC)^2 \\(BC)^2 &= (7)^2 + (24)^2 \\(BC)^2 &= 49 + 476 \\(BC)^2 &= 625\end{aligned}$$

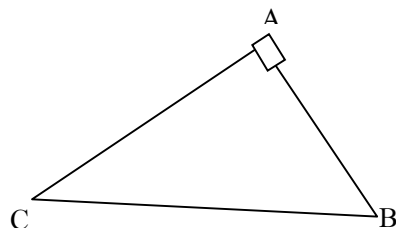
$$\therefore BC = 25$$

จงหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{24}{25} \\ \cos B &= \frac{7}{25} \\ \tan B &= \frac{24}{7} \\ \operatorname{cosec} B &= \frac{25}{24} \\ \sec B &= \frac{25}{7} \\ \cot B &= \frac{7}{24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{7}{25} \\ \cos C &= \frac{24}{25} \\ \tan C &= \frac{7}{24} \\ \operatorname{cosec} C &= \frac{25}{7} \\ \sec C &= \frac{25}{24} \\ \cot C &= \frac{24}{7}\end{aligned}$$

5. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A เป็นมุมฉาก



จากรูปที่กำหนดให้จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้

$\sin B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{BC}$	$\operatorname{cosec} B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B} = \frac{BC}{AC}$
$\cos B = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AB}{BC}$	$\sec B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} = \frac{BC}{AB}$
$\tan B = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} = \frac{AC}{AB}$	$\cot B = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B} = \frac{AB}{AC}$



ใบงานที่ 2 เรื่อง การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการแก้ปัญหาด่าง ๆ

ชื่อกลุ่ม

ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

ชื่อสมาชิก ชั้น ม.3/..... เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันทำใบงานนี้ เพื่อศึกษาแนวทางในการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการแก้ปัญหาด่าง ๆ แล้วนำเสนอแนวคิดที่ได้กับสมาชิกภายในชั้นเรียน

1. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\sin A = \frac{15}{17}$ จงวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมทั้งหาค่าของ $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$ และ $\sec C$

2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก และ $3 \tan B = 4$ จงหาค่าของ $2\cot B - 5\cos B + \sin B$

3. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $5\operatorname{cosec} B = 13$ จงหาค่าของ $\frac{\sec B - \tan B}{\cos B - \sin B}$

4. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก และ $5\cos B = 4$ จงหาค่าของ $\frac{5 \sin B - \tan B}{1 + \sec B}$



เฉลย

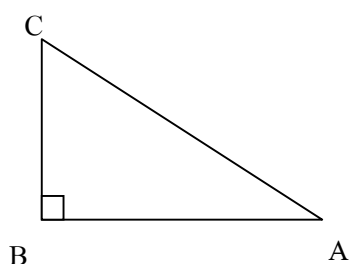
ใบงานที่ 2 เรื่อง การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันทำใบงานนี้ เพื่อศึกษาแนวทางในการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติใช้ในการแก้ปัญหา แล้วนำเสนอแนวคิดที่ได้กับสมาชิกภายในชั้นเรียน

1. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\sin A = \frac{15}{17}$

จงวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมทั้งหาค่าของ $\cos A$, $\tan A$, $\sin C$ และ $\sec C$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AC} \\ \frac{15}{17} &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AC} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $AC = x$

$$\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{15}{17} \\ BC &= \frac{15}{17}AC \\ BC &= \frac{15}{17}x \end{aligned}$$

จากรูป $\triangle ABC$ จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาคความยาว AB ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 \\ (x)^2 &= (AB)^2 + \left(\frac{15}{17}x\right)^2 \\ x^2 &= (AB)^2 + \frac{225}{289}x^2 \\ (AB)^2 &= \frac{64}{289}x^2 \\ AB &= \frac{8}{17}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos A &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AB}{AC} \\
 &= \frac{\frac{8}{17}x}{\frac{17}{17}x} \\
 &= \frac{x}{8} \\
 &= \frac{8}{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan A &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A} \\
 &= \frac{BC}{AB} \\
 &= \frac{\frac{15}{17}x}{\frac{8}{17}x} \\
 &= \frac{\frac{17}{17}x}{\frac{15}{17}x} \\
 &= \frac{17}{15}
 \end{aligned}$$

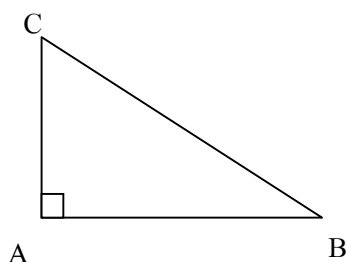
$$\begin{aligned}
 \sin C &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } C}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AB}{AC} \\
 &= \frac{\frac{8}{17}x}{\frac{17}{17}x} \\
 &= \frac{x}{8} \\
 &= \frac{8}{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sec C &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A} \\
 &= \frac{AC}{AB} \\
 &= \frac{\frac{17}{17}x}{\frac{8}{17}x} \\
 &= \frac{17}{8}
 \end{aligned}$$

ตอบ

2. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก และ $3 \tan B = 4$ จงหาค่าของ $2\cot B - 5\cos B + \sin B$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A} = \frac{AC}{AB} \\ \frac{4}{3} &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AC}{AB}\end{aligned}$$

กำหนดให้ $AB = x$

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{4}{3} \\ AC &= \frac{4}{3}AB \\ AC &= \frac{4}{3}x\end{aligned}$$

จากรูป $\triangle ABC$ จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาคความยาว BC ได้ดังนี้

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

$$(BC)^2 = (x)^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2$$

$$(BC)^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2$$

$$(BC)^2 = \frac{25}{9}x^2$$

$$BC = \frac{5}{3}x$$

$$\begin{aligned}\cot B &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B} \\ &= \frac{AB}{AC} \\ &= \frac{x}{\frac{4}{3}x} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AB}{BC} \\
 &= \frac{x}{\frac{5}{3}x} \\
 &= \frac{3}{5} \\
 \sin B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AC}{BC} \\
 &= \frac{\frac{4}{3}x}{\frac{5}{3}x} \\
 &= \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

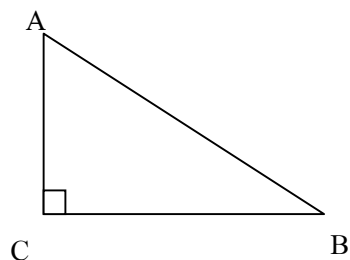
$$\begin{aligned}
 \therefore 2\cot B - 5\cos B + \sin B &= 2\left(\frac{3}{4}\right) - 5\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \\
 &= \frac{3}{2} - 3 + \frac{4}{5} \\
 &= \frac{15-30+8}{10} \\
 &= -\frac{7}{10}
 \end{aligned}$$

ตอบ

3. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $5\operatorname{cosec} B = 13$

จงหาค่าของ $\frac{\sec B - \tan B}{\cos B - \sin B}$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B} = \frac{AB}{AC} \\ \frac{13}{5} &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B} = \frac{AB}{AC}\end{aligned}$$

กำหนดให้ $AC = x$

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{13}{5} \\ AB &= \frac{13}{5}AC \\ AB &= \frac{13}{5}x\end{aligned}$$

จากรูป $\triangle ABC$ จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาความยาว BC ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AC)^2 + (BC)^2 \\ \left(\frac{13}{5}x\right)^2 &= (x)^2 + (BC)^2 \\ \frac{169}{25}x^2 &= x^2 + (BC)^2 \\ (BC)^2 &= \frac{144}{25}x^2 \\ BC &= \frac{12}{5}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sec B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} \\ &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{\frac{13}{5}x}{\frac{12}{5}x} \\ &= \frac{13}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} \\
 &= \frac{BC}{AB} \\
 &= \frac{X}{\frac{12}{5}X} \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos B &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AB}{AC} \\
 &= \frac{\frac{12}{5}X}{\frac{13}{5}X} \\
 &= \frac{12}{13}
 \end{aligned}$$

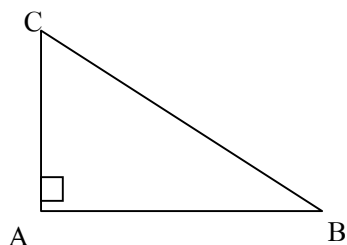
$$\begin{aligned}
 \sin B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\
 &= \frac{AC}{AB} \\
 &= \frac{X}{\frac{12}{5}X} \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\sec B - \tan B}{\cos B - \sin B} &= \frac{\frac{13}{12} - \frac{5}{12}}{\frac{12}{13} - \frac{5}{13}} \\
 &= \frac{\frac{8}{12}}{\frac{7}{13}} \\
 &= \frac{8}{12} \times \frac{13}{7} \\
 &= \frac{26}{21} = 1 \frac{5}{21}
 \end{aligned}$$

ตอบ

4. กำหนด $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี A เป็นมุมฉาก และ $5\cos B = 4$ จงหาค่าของ $\frac{5 \sin B - \tan B}{1 + \sec B}$

วิธีทำ



$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AB}{BC} \\ \frac{4}{5} &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AB}{BC} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $BC = x$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{4}{5} \\ AB &= \frac{4}{5} BC \\ AB &= \frac{4}{5} x \end{aligned}$$

จากรูป $\triangle ABC$ จากทฤษฎีพีทาโกรัส หาคความยาว AC ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (BC)^2 &= (AC)^2 + (AB)^2 \\ (x)^2 &= (AC)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2 \\ x^2 &= (AC)^2 + \frac{16}{25}x^2 \\ (AC)^2 &= \frac{9}{25}x^2 \\ AC &= \frac{3}{5}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\ &= \frac{AC}{BC} \\ &= \frac{\frac{3}{5}x}{x} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tan B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } B}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} \\
 &= \frac{AC}{AB} \\
 &= \frac{\frac{3}{5}x}{\frac{4}{5}x} \\
 &= \frac{3}{4} \\
 \sec B &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } B} \\
 &= \frac{BC}{AB} \\
 &= \frac{x}{\frac{4}{5}x} \\
 &= \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{5 \sin B - \tan B}{1 + \sec B} &= \frac{5\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{4}} \\
 &= \frac{3 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{4}} \\
 &= \frac{\frac{12-3}{4}}{\frac{4+5}{4}} \\
 &= \frac{9}{9} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ตอบ



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° เวลา 2 คาบ

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 รหัสวิชา ค 33201

1.สาระสำคัญ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

อัตราส่วน ตรีโกณมิติ \ มุม	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. ผลการเรียนรู้

วิเคราะห์และเขียนค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° และนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ใช้แก้ปัญหาได้ โดยใช้ทักษะกระบวนการคณิตศาสตร์ได้แก่ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

3.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

3.1.1 นำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติมุม 30° , 45° และ 60° ใช้แก้ปัญหาได้

3.2 ด้านทักษะ นักเรียนมีสามารถ

3.2.1 แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2.2 ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้

3.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

3.3.1 ใฝ่เรียนรู้

3.3.2 มุ่งมั่นในการทำงาน

4. ตารางการเรียนรู้

4.1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

มุม อัตราส่วน ตรีโกณมิติ	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

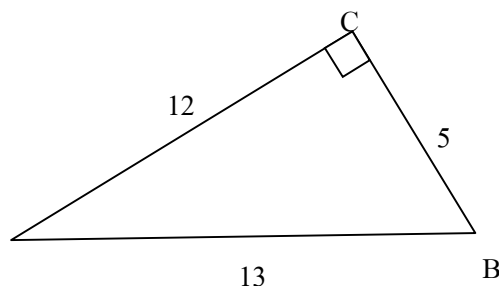
4.2 การแก้ปัญหาโดยใช้ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

5. กิจกรรมการเรียนรู้

คาบที่ 1

ขั้นนำ

1. ครูบอกถึงจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูป



ให้นักเรียนหาค่าต่างๆ ดังนี้ $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\tan A$, $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$, $\operatorname{cosec} B$, $\sec B$ และ $\cot B$ ตามลำดับ

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนแต่ละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน

2. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้การสอน โดยให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมอีกมุมหนึ่งขนาด 53° ที่มีความยาวของด้านขนาดใดก็ได้พร้อมหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ $\sin 53^\circ$, $\cos 53^\circ$ และ $\tan 53^\circ$ หลังจากนั้นให้นักเรียนนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้มาหาความสัมพันธ์กันของแต่ละรูป พร้อมทั้งให้นักเรียนสรุปความคิดในเรื่องค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่เท่ากันย่อมมีค่าคงที่ ไม่ว่าด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะยาวเท่าใดก็ตาม

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง โดยกำหนดให้ความยาวแต่ละด้านมีความยาวด้านละ 8 เซนติเมตร ให้ชื่อว่ารูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีมุม A เป็นมุมยอดและ BC เป็นฐาน หลังจากนั้นให้นักเรียนลากเส้นตรงจากจุดยอด A ให้ตั้งฉากกับฐาน BC ที่จุด D

4. ให้นักเรียนภายในกลุ่มวิเคราะห์รูปสามเหลี่ยม ABD เพื่อหาขนาดของมุมและความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABD ให้ได้ว่า รูปสามเหลี่ยมใดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีมุมเท่ากับ 60° และส่วนของเส้นตรง AD จะเป็นเส้นมัธยฐานทำที่แบ่งครึ่งมุมยอด ที่มีขนาดมุมเท่ากับ 30° และหาความยาวของด้าน AD พร้อมทั้งให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$ และ $\tan 60^\circ$ ตามลำดับ พร้อมเขียนความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60° ออกมาในรูปของตาราง

5. ให้นักเรียนแต่ละคนสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC โดยกำหนดให้มุมที่ฐานมีขนาดมุมเท่ากับมุมละ 45° และให้กำหนดความยาวของด้านประกอบมุมยอดเอง หลังจากนั้นให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของ $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ และ $\tan 45^\circ$ พร้อมเขียนความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ออกมาในรูปของตารางอีกครั้งหนึ่ง

6. ครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอตารางแสดงความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° อีกครั้งหนึ่ง โดยครูเน้นให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของมุมและอัตราส่วนตรีโกณมิติที่มีค่าเท่ากัน จากที่นักเรียนสรุปซึ่งนักเรียนควรสรุปความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

1. $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$
2. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$
3. $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$
4. $\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ$
5. $\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ$
6. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$
7. $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ$
8. $\operatorname{cosec} 45^\circ = \sec 45^\circ$

โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

2. วัดและประเมินผลโดยสังเกตพฤติกรรมจากการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คาบที่ 2

ขั้นนำ

1. ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° อีกครั้งหนึ่ง

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน

2. ครุณาเข้าสู่กิจกรรมการเรียนการสอน โดยนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนแสดงวิธีการคำนวณดังนี้
ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ $3 \sin 30^\circ + 5 \cos 60^\circ - 3 \tan 45^\circ$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 3 \sin 30^\circ + 5 \cos 60^\circ - 3 \tan 45^\circ &= 3 \left(\frac{1}{2} \right) + 5 \left(\frac{1}{2} \right) - 3(1) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} - 3 \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore 3 \sin 30^\circ + 5 \cos 60^\circ - 3 \tan 45^\circ = 1 \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $5 \tan^2 60^\circ \times \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 5 \tan^2 60^\circ \times \operatorname{cosec}^2 30^\circ &= 5(\sqrt{3})^2 \times (2)^2 \\ &= 5(3)(4) \\ &= 60 \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \tan^2 60^\circ \times \operatorname{cosec}^2 30^\circ = 60 \quad \text{ตอบ}$$

โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ไม่เข้าใจได้ทำการซักถาม ซึ่งนักเรียนที่ออกมาแสดงวิธีการคำนวณเป็นคนอธิบาย โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนในกลุ่มตั้งโจทย์พร้อมทั้งเฉลยวิธีการคำนวณอย่างละเอียด โดยใช้เวลา 10 นาที หลังจากนั้นจึงให้นำปัญหาที่ตนเองคิดแลกเปลี่ยนกับเพื่อนภายในกลุ่มทำพร้อมทั้งแลกเปลี่ยนแนวคิดในวิธีการคำนวณ โดยครูเดินดูและให้คำปรึกษากับนักเรียนที่ยังไม่สามารถทำได้ โดยให้เวลานักเรียนในการทำประมาณ 15 นาที พร้อมทั้งให้นักเรียนในกลุ่มเลือกโจทย์ที่กลุ่มคิดว่าน่าสนใจมากที่สุดมาจำนวน 1 ข้อ เพื่อเตรียมนำเสนอหน้าชั้นเรียน

4. ครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอโจทย์ปัญหาของกลุ่มและวิธีการคำนวณหาความยาวด้านจากโจทย์ปัญหาที่นำเสนอ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้เพื่อนนักเรียนได้มีการซักถามในข้อสงสัย และให้นักเรียนในกลุ่มอื่นๆ นำเสนอโจทย์ปัญหาที่แตกต่างจากกลุ่มอื่น และให้นักเรียนที่เป็นเจ้าของโจทย์ออกมาเป็นผู้อธิบาย โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติมุม 30° , 45° และ 60° ใช้แก้ปัญหาอีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ พร้อมทั้งให้นักเรียนตั้งปัญหาและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดเป็นการบ้านจำนวน 3 ข้อ โดยนักเรียนสร้างโจทย์พร้อมเฉลยและสลับกับเพื่อนสมาชิกภายในกลุ่มให้เป็นผู้ทำ

2. ทำการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียนจำนวน 2 ข้อ จากแบบทดสอบที่สร้างขึ้น โดยใช้เวลา 15 นาที

6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

6.1 Power point

6.2 เว็บไซต์ www.kanid.com

7. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

5.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา

5.2 แบบสังเกตพฤติกรรม

5.3 แบบทดสอบ

8. การออกแบบวิธีการและเครื่องมือประเมินผล

ตัวชี้วัดจาก จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือวัด	แหล่งข้อมูล	เกณฑ์
1. นักเรียนสามารถเขียนค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ได้โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ เพื่อให้ นักเรียน ใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน	- การถาม-ตอบ - สังเกตพฤติกรรม	- ข้อคำถาม - แบบสังเกตพฤติกรรม	- นักเรียน - นักเรียน	- นักเรียน ทำแบบฝึกทักษะจากเอกสารประกอบการเรียน ได้ถูกต้องและเรียบร้อย
2. นักเรียนสามารถนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติมุม 30° , 45° และ 60° ใช้แก้ปัญหาได้ โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ เพื่อให้ นักเรียน ใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน	- การถาม-ตอบ - สังเกตพฤติกรรม - ทดสอบจากแบบทดสอบ	- ข้อคำถาม - แบบสังเกตพฤติกรรม - เกณฑ์การประเมินแบบทดสอบ	- นักเรียน - นักเรียน - นักเรียน	- นักเรียน ทำแบบฝึกทักษะจากเอกสารประกอบการเรียน ได้ถูกต้องและเรียบร้อย - นักเรียน สามารถทำคะแนนได้ตามเกณฑ์ที่กำหนด ในแบบทดสอบ ร้อยละ 60 ขึ้นไปผ่านเกณฑ์

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ เวลา 4 คาบ

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 รหัสวิชา ค 33201

1.สาระสำคัญ

มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation) คือมุมที่ยกสูงขึ้นโดยวัดมุมจากระดับสายตา และมุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression) คือมุมที่ก้มลงโดยวัดมุมจากระดับสายตา ซึ่งระดับสายตานั้นจะต้องเป็นระดับที่ขนานกับพื้นระนาบ

2. ผลการเรียนรู้

แก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ได้ โดยใช้ทักษะกระบวนการคณิตศาสตร์ได้แก่ การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้นักเรียนใฝ่เรียนรู้ และมุ่งมั่นในการทำงาน

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

3.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

3.1.1 นำอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° แก้โจทย์ปัญหาได้

3.2 ด้านทักษะ นักเรียนมีสามารถ

3.2.1 แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2.2 ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้

3.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

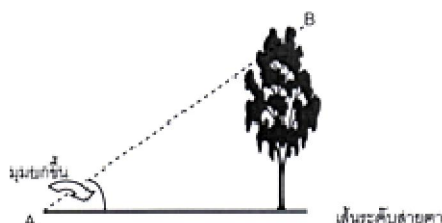
3.3.1 ใฝ่เรียนรู้

3.3.2 มุ่งมั่นในการทำงาน

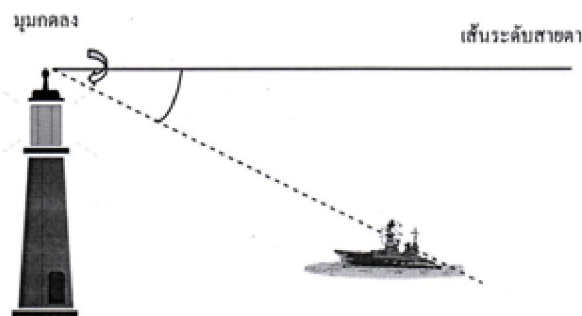
4. สาระการเรียนรู้

4.1 การนำไปใช้ในการวัดระยะทางและความสูง วิชาตรีโกณมิติจะใช้ประโยชน์อย่างมาก เพราะไม่จำเป็นต้องทำการวัดจริง เพียงแต่ทราบมุมที่เกี่ยวข้องเราก็สามารถหาระยะทางและความสูงของสิ่งต่างๆ ได้ เช่น ภูเขา อาคาร เสาธง เป็นต้น เพียงแต่เราขีดเส้นระดับสายตา (horizontal line) จะได้มุมสำคัญสองชนิด คือ มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation) และมุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression)

1. มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation) คือมุมที่ยกสูงขึ้นโดยวัดมุมจากระดับสายตา



2. มุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression) คือมุมที่ก้มลงโดยวัดมุมจากระดับสายตา



5. กิจกรรมการเรียนรู้

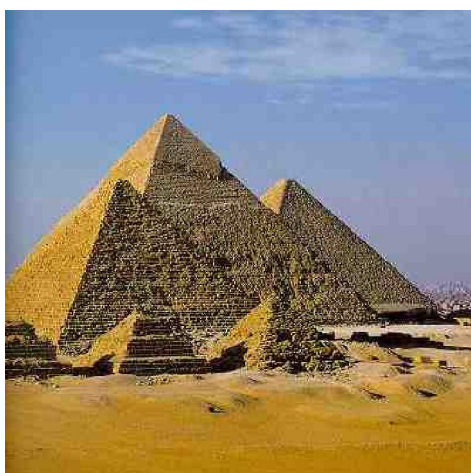
คาบที่ 1

ขั้นนำ

1. ครูบอกถึงจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้ในเรื่องการนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ 30° , 45° และ 60° ใช้แก้ปัญหาโดยการสุ่มนักเรียน ออกมานำเสนอปัญหาที่สร้างขึ้นพร้อมทั้งแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียด และเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่นๆ ได้สอบถามในข้อสงสัยหรือแสดงวิธีการคำนวณที่แตกต่างไปจากเดิม

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนแต่ละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน
2. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนการสอน โดยยกตัวอย่างภาพ



และให้นักเรียนลองช่วยกันเสนอแนวและวิธีการในการหาความสูงของพีระมิดว่าสามารถทำได้ด้วยวิธีการใด โดยวิธีการสื่อนักเรียนให้เป็นผู้นำเสนอแนวคิด และวิธีการคำนวณ

3. ครุณาเสนอตัวอย่างให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มวาดรูปจากโจทย์ที่กำหนดให้และนำเสนอกับสมาชิกภายในกลุ่มเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนข้อคิดเห็น พร้อมทั้งสรุปรูปที่คิดว่าถูกต้องและวิธีการวาดรูปเพื่อนำเสนอให้กับสมาชิกกลุ่มอื่นๆ ภายในชั้นเรียนดังนี้

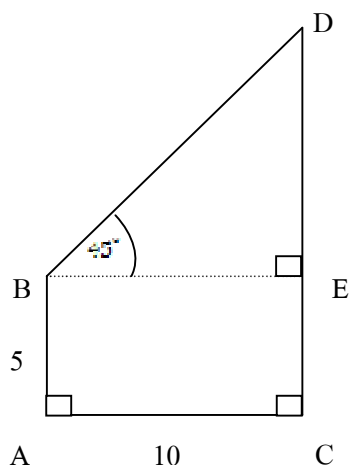
ตัวอย่าง 1 เด็กชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต ยืนห่างจากเสาธงเป็นระยะทาง 10 ฟุต เขารับหน้าที่เชิญธงชาติโดยให้เชือกทำมุม 45° จงวาดรูปจากโจทย์ที่กำหนด

รูปภาพ กำหนดให้

AB เป็นความสูงของเด็ก

CD เป็นความสูงของเสาธง

BE เป็นแนวระดับสายตา



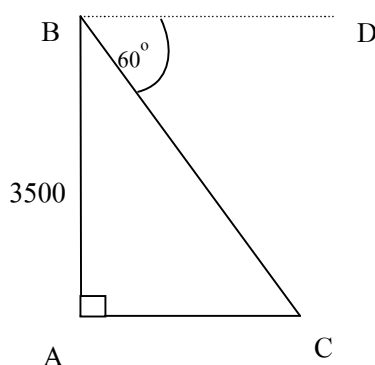
ตัวอย่าง 2 เครื่องบินลำหนึ่งบินสูงจากพื้นดิน 3500 เมตร มองเห็นสัญลักษณ์จุดแรกในการลงจอดบนลานจอดเครื่องบินเป็นมุมก้ม 60° โดยไม่คำนึงถึงความหนาของเครื่องบิน จงวาดรูปจากโจทย์ที่กำหนด

รูปภาพ กำหนดให้

AB เป็นความสูงหน้าผา

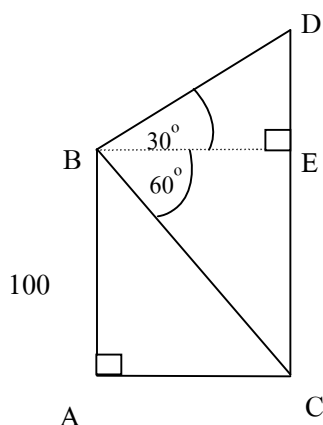
C เป็นจุดที่มองเห็นสัญลักษณ์จุดแรกในการลงจอด

BD เป็นแนวระดับสายตา



ตัวอย่าง 3 ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนยอดตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 100 เมตร ชายคนนั้นมองไปยังฐานตึกที่อยู่ฝั่งตรงข้ามเป็นมุมก้ม 60° แต่เมื่อมองไปยังยอดตึกหลังเดิมเป็นมุมเงย 30° โดยไม่คำนึงถึงความสูงของชายคนนั้น จงวาดรูปจากโจทย์ที่กำหนด

รูปภาพ กำหนดให้ AB เป็นความสูงของตึกที่ยืนอยู่
 CD เป็นความสูงของตึกที่อยู่ตรงข้าม
 BE เป็นแนวระดับสายตา



4. ครูให้นักเรียนสรุปการวาดรูปจากที่โจทย์กำหนดให้ โดยเน้นให้นักเรียนยึดเส้นระดับสายตา (horizontal line) จะได้มุมสำคัญสองชนิด คือ มุมยกขึ้นหรือมุมเงย (Angle of Elevation) คือมุมที่ยกสูงขึ้นโดยวัดมุมจากระดับสายตา และมุมกดลงหรือมุมก้ม (Angle of Depression) คือมุมที่ก้มลงโดยวัดมุมจากระดับสายตา ซึ่งระดับสายตานี้จะต้องเป็นระดับที่ขนานกับพื้นระนาบ

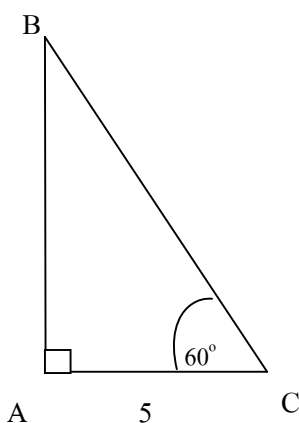
5. ครูนำเข้าสู่การแก้โจทย์ปัญหา โดยนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มวาดภาพจากโจทย์ที่กำหนดให้พร้อมทั้งคำนวณหาค่าตามที่โจทย์กำหนด ดังนี้

ตัวอย่าง นักเรียนคนหนึ่งได้รับมอบหมายให้นำเชือกไปผูกเพื่อใช้ในการเชิญธงชาติ โดยผู้ที่เชิญธงจะต้องยืนห่างจากเสาธง 5 ฟุต และต้องการให้แนวของเส้นเชือกทำมุมกับแนวพื้นระนาบเป็นมุม 60° อยากทราบว่านักเรียนผู้นั้นจะต้องเตรียมเชือกยาวอย่างน้อยที่สุดกี่ฟุตเพื่อที่จะใช้ในการเชิญธงชาติโดยไม่คำนึงถึงความสูงของนักเรียนคนนั้น

วิธีทำ กำหนดให้ AB เป็นความสูงของเสาธง

C เป็นจุดที่ชายคนนั้นยืนอยู่

AC เป็นแนวระดับสายตา



หา BC

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{AC}{BC} \\ \frac{1}{2} &= \frac{5}{BC} \\ BC &= 10 \end{aligned}$$

∴ นักเรียนจะต้องใช้เชือกยาวอย่างน้อยที่สุด 20 ฟุต ตอบ

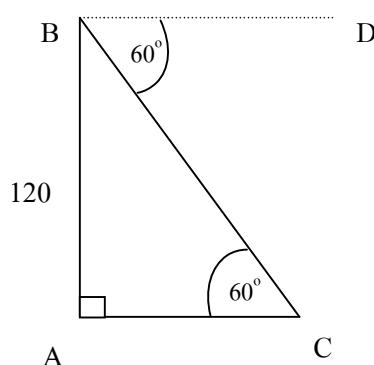
หมายเหตุ เน้นให้นักเรียนคำนึงถึงหลักความเป็นจริงที่การเชิญธงชาติต้องใช้เชือกไปและกลับ จึงได้คำตอบที่ต้องเพิ่มเป็น 2 เท่า

ตัวอย่าง 2 ช่างภาพคนหนึ่งยืนอยู่บนตึกซึ่งสูง 120 ฟุต ต้องการถ่ายภาพกลุ่มผู้ชุมนุมที่อยู่บนถนน เขาต้องปรับกล้องถ่ายภาพเป็นมุมก้ม 60° จงหาว่ากลุ่มผู้ชุมนุมนั้นอยู่ห่างจากตึกที่เขายืนอยู่เป็นระยะทางเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ AB เป็นความสูงของตึก

C เป็นจุดที่รถยนต์จอดอยู่บนถนน

BD เป็นแนวระดับสายตา



เนื่องจาก $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ จะได้ $\angle DBC = \angle BCA = 60^\circ$

หา AC

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ} \\ \sqrt{3} &= \frac{AB}{AC} \\ \sqrt{3} &= \frac{120}{AC} \\ AC &= \frac{120}{\sqrt{3}} \\ AC &= \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ AC &= \frac{120\sqrt{3}}{3} \\ AC &= 40\sqrt{3} \\ AC &\approx 69.28 \end{aligned}$$

❖ รถยนต์อยู่ห่างจากตึกที่เขายืนอยู่เป็นระยะทางประมาณ 69.28 ฟุต

ตอบ

พร้อมทั้งให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มนำเสนอรูปและวิธีการคำนวณกับสมาชิกภายในกลุ่ม เพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนข้อคิดเห็นและตรวจสอบความถูกต้องเพื่อนำเสนอให้กับสมาชิกกลุ่มอื่นๆ ภายในชั้นเรียนโดยเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ไม่เข้าใจได้ทำการซักถาม ซึ่งนักเรียนที่ออกมาแสดงวิธีการคำนวณเป็นคนอธิบาย โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

6. ครูให้นักเรียนภายในกลุ่มร่วมกันอภิปรายในข้อคำถามต่อไปนี้

6.1 เมื่อนักเรียนอ่านปัญหาเสร็จแล้ว นักเรียนคิดจะเริ่มต้นอย่างไร

6.2 นักเรียนเลือกวิธีการแก้ปัญหาละเลยหรือไม่ ใช้วิธีใด ผลเป็นอย่างไร และวิธีนั้นสามารถใช้แก้ปัญหาละเลยหรือไม่

6.3 นักเรียนหาคำตอบของปัญหาได้หรือไม่ และมีการตรวจสอบคำตอบหรือไม่ ลองใช้วิธีการอื่นๆบ้างหรือไม่

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการวาดรูป และแก้โจทย์ปัญหาอีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์ พร้อมทั้งวาดรูปประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ โดยนักเรียนดำเนินสลับโจทย์ปัญหากันภายในกลุ่มเพื่อให้สมาชิกได้ช่วยกันคำนวณหาคำตอบและเป็นการแตกแนวความคิดในการคำนวณ โดยให้เป็นการบ้าน

2. วัดและประเมินผลโดยสังเกตพฤติกรรมจากการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คาบที่ 2

ขั้นนำ

1. ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอโจทย์ปัญหาที่เป็นการบ้านที่นักเรียนสร้างขึ้น 1 ข้อ โดยวาดรูปและแสดงวิธีการคำนวณ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่นๆได้ซักถามข้อสงสัย โดยให้นักเรียนที่เป็นผู้ตั้งโจทย์เป็นผู้อธิบาย ซึ่งครูเป็นผู้อธิบายในส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนลดความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน

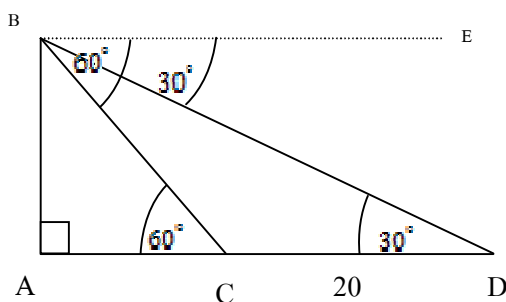
2. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนการสอน โดยนำเสนอตัวอย่างให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มวาดรูปจากโจทย์ที่กำหนดให้ พร้อมทั้งคำนวณหาค่าตามที่โจทย์กำหนด ดังนี้

ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนตึกหลังหนึ่ง มองลงมาเห็นรถยนต์สองคันจอดอยู่บนถนนเส้นเดียวกันเป็นมุมก้ม 60° และ 30° ตามลำดับ ถ้าวัดทั้งสองคันอยู่ห่างกัน 200 เมตร อยากทราบว่าตึกหลังนี้มี ความสูงกี่เมตร ถ้าไม่คิดความสูงของชายคนนั้น

วิธีทำ กำหนดให้ AB เป็นความสูงของตึก

C และ D เป็นจุดที่รถยนต์จอดอยู่บนถนน

BE เป็นแนวระดับสายตา



จากรูป $\triangle ABC$

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{AB}{AC} \\ \sqrt{3} &= \frac{AB}{AC} \\ \sqrt{3} AC &= AB \quad \dots\dots(1) \end{aligned}$$

จากรูป $\triangle ABD$

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{AB}{AD} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{AB}{AD} \\ \frac{AD}{\sqrt{3}} &= AB \quad \dots\dots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) โดยสมบัติการถ่ายทอดจะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{3} AC &= \frac{AD}{\sqrt{3}} \\ 3AC &= AD \\ 3AC &= AC + 200 \\ 2AC &= 200 \\ AC &= 100 \end{aligned}$$

แทน $AC = 100$ ใน (1)

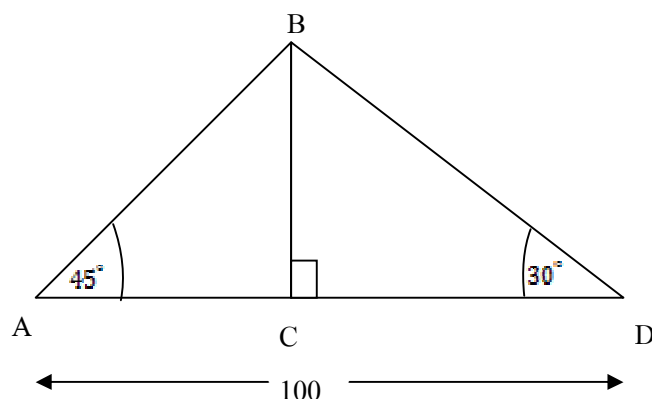
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3} (100) \\ AB &\approx 173.2 \end{aligned}$$

$\therefore$ ตึกหลังนี้สูงประมาณ 173.2 เมตร

ตอบ

ตัวอย่าง ชายสองคนยืนอยู่ด้านตรงข้ามกันของเจดีย์องค์หนึ่ง โดยที่ชายทั้งสองคนและเจดีย์ตั้งอยู่ในแนวระดับเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งยืนห่างกัน 100 เมตร ชายทั้งสองต่างมองไปยังยอดเจดีย์ทำมุมเงย 45° และ 30° ตามลำดับ อยากทราบว่าเจดีย์องค์นั้นมีความสูงเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้ BC เป็นความสูงของเจดีย์
A และ D เป็นจุดที่ชายทั้งสองยืนอยู่
AD เป็นแนวระดับสายตา



จากรูป $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}\tan 45^\circ &= \frac{BC}{AC} \\ 1 &= \frac{BC}{AC} \\ AC &= BC \quad \text{.....(1)}\end{aligned}$$

จากรูป $\triangle BCD$

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{BC}{CD} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{BC}{CD} \\ \frac{CD}{\sqrt{3}} &= BC \quad \text{.....(2)}\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) โดยสมมติการถ่ายทอดจะได้

$$\begin{aligned}AC &= \frac{CD}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}AC &= CD\end{aligned}$$

จาก $CD + AC = 100$

$$\sqrt{3}AC + AC = 100$$

$$(\sqrt{3} + 1) AC = 100$$

$$AC = \frac{100}{\sqrt{3} + 1}$$

$$AC = \frac{100}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$AC = \frac{100\sqrt{3} - 100}{2}$$

$$AC \approx 36.6$$

แทน AC ด้วย 36.6 ใน (1)

$$BC \approx 36.6$$

∴ เจดีย์องค์นี้มีความสูงประมาณ 36.6 เมตร **ตอบ**

นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มนำเสนอรูปและวิธีการคำนวณให้กับสมาชิกภายในกลุ่มโดยเป็นการแลกเปลี่ยนข้อคิดเห็นของสมาชิกภายในกลุ่มและตรวจสอบความถูกต้องในการคำนวณ

3. นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์โดยจะต้องสร้างโจทย์ปัญหาที่มีการมองวัตถุอย่างน้อย 2 ชิ้น พร้อมทั้งวาดรูปประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ โดยดำเนินการสลับโจทย์ปัญหากันภายในกลุ่มเพื่อคำนวณหาคำตอบและเป็นการแตกแนวความคิดในการคำนวณ โดยครูเดินดูและให้คำปรึกษาสำหรับนักเรียนในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจ

4. ครูให้นักเรียนภายในกลุ่มร่วมกันอภิปรายในข้อคำถามต่อไปนี้

4.1 นักเรียนมีวิธีการตั้งปัญหาอย่างไร และนักเรียนพยายามแก้ปัญหาคำที่ต้วควบคู่ไปด้วยกันหรือไม่ อย่างไร

4.2 เมื่อทำการแก้ปัญหาคำที่ต้วขึ้นไม่ได้ นักเรียนทำอย่างไร มีการปรับปัญหาอีกหรือไม่ อย่างไร

4.3 นักเรียนตรวจสอบคำตอบหรือไม่ ลองใช้วิธีอื่นบ้างหรือไม่ และแน่ใจหรือไม่ว่าคำตอบที่หาได้ถูกต้อง

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการวาดรูป และแก้โจทย์ปัญหาอีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ พร้อมทั้งให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์ปัญหาที่มีการมองวัตถุอย่างน้อย 2 ชิ้น พร้อมทั้งวาดรูปประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ เป็นการบ้าน

2. ทำการทดสอบความสามารถในการเขียนภาพจากโจทย์ที่กำหนดจำนวน 2 ข้อ จากแบบทดสอบ โดยใช้เวลา 15 นาที

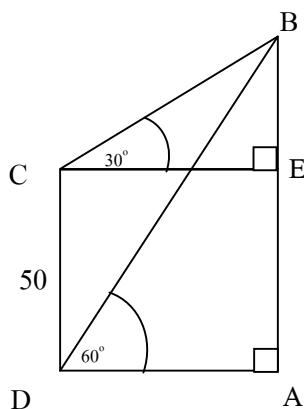
คาบที่ 3

ขั้นนำ

1. ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการสุ่มนักเรียน 3 คนออกมานำเสนอโจทย์ปัญหาที่เป็นการบ้านที่นักเรียนสร้างขึ้น 1 ข้อ และวาดรูปและแสดงวิธีการคำนวณ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่นๆ ได้ซักถามข้อสงสัย โดยให้นักเรียนที่เป็นผู้ตั้งโจทย์เป็นผู้อธิบาย ซึ่งครูเป็นผู้อธิบายในส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน
2. ครูนำเข้าสู่กิจกรรมการเรียนรู้การสอน นำเสนอรูปดังนี้



และให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มสร้างโจทย์ปัญหาจากรูปที่กำหนดให้ คนละ 2 โจทย์ปัญหา พร้อมทั้งนำเสนอโจทย์ที่สร้างขึ้นให้กับสมาชิกภายในกลุ่มเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและแลกเปลี่ยนความคิดในการสร้างโจทย์ ปัญหา

3. นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์โดยจะต้องสามารถสร้างรูปที่มีรูปสามเหลี่ยมสองรูป พร้อมทั้งวาดภาพประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ โดยนำเสนอโจทย์ปัญหาภายในกลุ่มเพื่อคำนวณหาคำตอบเพื่อตรวจสอบคำตอบและเสนอแนะวิธีการแบบอื่น ๆ ในการคำนวณ โดยครูเดินดูและให้คำปรึกษาสำหรับนักเรียนในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจ หลังจากนั้นให้นักเรียนเลือกโจทย์ปัญหาที่ดีที่สุดจำนวน 1 ข้อ โดยวาดรูปประกอบอย่างสวยงามและแสดงวิธีการคำนวณ

ขั้นสรุป

1. นักเรียนช่วยกันสรุปวิธีการวาดรูป และแก้โจทย์ปัญหาอีกครั้งหนึ่ง โดยครูเป็นผู้อธิบายเพิ่มเติมในบางส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์ โดยให้นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์โดยจะต้องสามารถสร้างภาพที่มีรูปสามเหลี่ยมสองรูป พร้อมทั้งวาดภาพประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ เป็นการบ้าน
2. วัดและประเมินผลโดยสังเกตพฤติกรรมจากการมีส่วนร่วมในกิจกรรม

คาบที่ 4

ขั้นนำ

1. ทบทวนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการสุ่มนักเรียน 3 คนออกมาเสนอโจทย์ปัญหาที่เป็นการบ้านที่นักเรียนสร้างขึ้น 1 ข้อ โดยวาดรูปและแสดงวิธีการคำนวณ พร้อมทั้งเปิดโอกาสให้นักเรียนคนอื่นๆ ได้ซักถามข้อสงสัย โดยให้นักเรียนที่เป็นผู้ตั้งโจทย์เป็นผู้อธิบาย ซึ่งครูเป็นผู้อธิบายในส่วนที่ยังไม่สมบูรณ์

การดำเนินการทำกิจกรรม

1. ครูดำเนินการแบ่งนักเรียนในชั้นเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน โดยนักเรียนคละความสามารถกัน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มเลือกผู้นำกลุ่ม กลุ่มละ 1 คน และเลขานุการผู้จดบันทึกข้อมูลของกลุ่ม 1 คน

2. ครูชี้แจงขั้นตอนในการทำกิจกรรม ดังนี้

1. นักเรียนแต่ละคนภายในกลุ่มทำการสร้างโจทย์โดยจะต้องสามารถสร้างภาพที่มีรูปสามเหลี่ยมสองรูป พร้อมทั้งวาดรูปประกอบและแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดคนละ 2 ข้อ โดยนำเสนอโจทย์ปัญหากันภายในกลุ่มเพื่อคำนวณหาคำตอบเพื่อเป็นการแตกแนวความคิดในการคำนวณพร้อมตั้งเกณฑ์การให้คะแนนในแต่ละข้อ โดยให้เวลาประมาณ 15 นาทีในการทำกิจกรรมขั้นตอนนี้

2. ให้นักเรียนภายในกลุ่มเลือกโจทย์ที่คิดว่าดีที่สุดจำนวน 3 ข้อ เพื่อนำมาสร้างข้อสอบ โดยให้นักเรียนเขียนโจทย์ไว้ด้านหนึ่งของกระดาษที่จัดเตรียมให้ พร้อมทั้งแสดงวิธีการคำนวณอย่างละเอียดในอีกด้านหนึ่งของกระดาษ

3. ให้นักเรียนแต่ละคนนำข้อสอบที่สร้างขึ้นภายในกลุ่มคนละ 1 ข้อ ไปจับคู่กับนักเรียนกลุ่มอื่นเพื่อดำเนินการแลกเปลี่ยนข้อสอบกันทำ จำนวน 2 กลุ่มโดยการจับคู่แต่ละครั้งให้เวลา 5 นาที โดยนักเรียนแต่ละคู่เป็นผู้ตรวจพร้อมทั้งให้คะแนน ซึ่งในแต่ละข้อคิดข้อละ 2 คะแนน โดยเมื่อเสร็จกิจกรรมให้นักเรียนแต่ละคนส่งคะแนนที่ได้ให้กับหัวหน้ากลุ่มเพื่อรวบรวมเป็นคะแนนของกลุ่มต่อไป ซึ่งครูจะเป็นผู้ให้สัญญาณเริ่มต้นและสัญญาณหมดเวลาในการทำกิจกรรม

3. นักเรียนดำเนินกิจกรรมตามขั้นตอนที่กำหนดให้ โดยครูเป็นผู้สังเกตการดำเนินกิจกรรมของนักเรียนและให้คำปรึกษาสำหรับนักเรียนในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจ พร้อมทั้งตรวจทานความถูกต้อง พร้อมทั้งเป็นผู้ควบคุมเวลาในการดำเนินกิจกรรมแต่ละขั้นตอน

ขั้นสรุป

1. ครูสุ่มตัวแทนนักเรียนในแต่ละกลุ่มให้ออกมาแสดงความคิดเห็นถึงการคำนวณของเพื่อนสมาชิกภายในห้องว่ามีความถูกต้องและมีข้อผิดพลาดในการคำนวณในขั้นตอนใด เพื่อเป็นการสรุป

2. ทำการทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียนจำนวน 2 ข้อ จากแบบทดสอบที่สร้างขึ้น โดยให้เวลา 15 นาที

6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

6.1 Power point

6.2 เว็บไซต์ www.kanid.com

7. การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

7.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา

7.2 แบบสังเกตพฤติกรรม

7.3 แบบทดสอบ

8. การออกแบบวิธีการและเครื่องมือประเมินผล

ตัวชี้วัดจาก จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการวัด	เครื่องมือวัด	แหล่งข้อมูล	เกณฑ์
1. นักเรียนสามารถ นำอัตราส่วน ตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° แก้ โจทย์ปัญหาได้ โดย ใช้กระบวนการ แก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ และมี ความคิดริเริ่ม สร้างสรรค์ เพื่อให้ นักเรียน ใฝ่เรียนรู้ มุ่งมั่นในการทำงาน	- การถาม-ตอบ - สังเกตพฤติกรรม - ทดสอบจาก แบบทดสอบ	- ข้อคำถาม - แบบสังเกต พฤติกรรม - เกณฑ์การ ประเมิน แบบทดสอบ	- นักเรียน - นักเรียน - นักเรียน	- นักเรียน ทำ แบบฝึกทักษะจาก เอกสาร ประกอบการเรียน ได้ถูกต้องและ เรียบร้อย - นักเรียน สามารถทำ คะแนนได้ตาม เกณฑ์ที่กำหนด ในแบบทดสอบ ร้อยละ 60 ขึ้นไป ผ่านเกณฑ์

9. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

[illegible]

แบบสังเกตพฤติกรรมทางการเรียนการสอน

เลขที่	ชื่อ-สกุลของ ผู้รับการประเมิน	ทำงานอย่าง เป็นระบบ	ความ รอบคอบ	ความ ตั้งใจ เรียน	ความ รับผิดชอบ	การให้ความ ร่วมมือ	รวม
		4	4	4	4	4	20
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

เกณฑ์การให้คะแนน

พฤติกรรมที่ปฏิบัติเป็นประจำ	ให้	4	คะแนน
พฤติกรรมที่ปฏิบัติบ่อยครั้ง	ให้	3	คะแนน
พฤติกรรมที่ปฏิบัติบางครั้ง	ให้	2	คะแนน
พฤติกรรมที่ปฏิบัติน้อยครั้ง	ให้	1	คะแนน

เกณฑ์การตัดสินคุณภาพ

ช่วงคะแนน	ระดับคุณภาพ
18 – 20	ดีมาก
13 – 17	ดี
8 – 12	ปานกลาง
5 – 7	ปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา

เลขที่	ชื่อ-สกุลของ ผู้รับการประเมิน	ทำความเข้าใจใน ปัญหา	วางแผนการ แก้ปัญหา	ดำเนินการ การแก้ปัญหา	ตรวจสอบ คำตอบ	รวม
		2	2	2	1	7
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

เกณฑ์	คะแนน	ผลการทำข้อสอบที่ปรากฏให้เห็น
ทำความเข้าใจในปัญหา	2	แสดงวิธีการคิดชัดเจน ครบถ้วน
	1	แสดงวิธีการคิดไม่ชัดเจนหรือถูกต้องบางส่วน
	0	ไม่แสดงวิธีการการคิดหรือแสดงวิธีการคิดไม่ถูกต้อง
วางแผนการแก้ปัญหา	2	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาถูกต้องทั้งหมด
	1	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วน
	0	แสดงความสัมพันธ์การแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง
ดำเนินการแก้ปัญหา	2	วิธีการแก้ปัญหาถูกต้องทั้งหมด
	1	วิธีการแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วน
	0	วิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง
ตรวจสอบคำตอบ	1	เมื่อตอบถูกต้อง
	0	เมื่อตอบผิดหรือไม่ตอบ

ภาคผนวก ง

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือ

1. อาจารย์จำเริญ เจียวหวาน
ครูเชี่ยวชาญ โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์(องค์การมหาชน) อำเภอพุทธมณฑล จังหวัดนครปฐม
2. อาจารย์วิไลวรรณ อำไพพัทธ์
อดีตอาจารย์ 3 ระดับ 8 โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา เขตปทุมวัน
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 1
3. อาจารย์รัชสิณี ฐานา
ครูชำนาญการ โรงเรียนเตรียมอุดมม่น้อมเกล้า เขตสะพานสูง
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานครเขต 2

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ประวัติย่อผู้ทำสารนิพนธ์

ชื่อ ชื่อสกุล	นายพนม จองเฉลิมชัย
วันเดือนปีเกิด	26 มกราคม 2517
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดฉะเชิงเทรา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	9 ซอยเพชรเกษม 76 แขวงบางไผ่ เขตบางแค กรุงเทพมหานคร 10160
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	ผู้ช่วยหัวหน้าฝ่ายวิชาการ
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนอัสสัมชัญธนบุรี เขตบางแค กรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2535	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จากศูนย์การศึกษานอกโรงเรียน กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2539	ปริญญาตรี จากสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2553	ปริญญาโท กศ.ม. (สาขาวิชาการมัธยมศึกษา การสอนคณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ