

ผลของไฮบริไดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียบกับอุณหภูมิวิกฤติ
และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2556

ผลของไฮบริไดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียบกับอุณหภูมิวิกฤติ
และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2556

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ผลของไฮบริไดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียบกับอุณหภูมิวิกฤติ
และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2556

ไทยปัญญา จันปุม. (2556). ผลของไฮบริไดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียมต่อคุณสมบัติ และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ปริญญานิพนธ์ ปร.ด. (ฟิสิกส์).

กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :

รศ. ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรวิทย์, ดร.อภาพงส์ ชั่งจันทร์.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลของไฮบริไดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียม ต่อ คุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ และสัมประสิทธิ์ไอโซโทป โดยใช้แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน คุณสมบัติลดลงเมื่อสัมประสิทธิ์ของไฮบริไดเซชันเพิ่มขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ของไฮบริไดเซชันที่สูงขึ้นจะทำให้ค่าของ อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติมีค่าต่ำลง และค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่า สูงขึ้น เมื่อพิจารณาผลของช่องว่างพลังงานเทียมพบว่า คุณสมบัติลดลงเมื่อช่องว่างพลังงานเทียม เพิ่มขึ้น อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติเท่ากับศูนย์ ที่บางช่วงของพลังงาน เดอบาย เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของไฮบริไดเซชันมีค่าสูง สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีทั้งค่ามาก คำน้อยกว่าและ เป็นลบ ขึ้นกับพลังงานเดอบายและสัมประสิทธิ์ของไฮบริไดเซชัน

THE EFFECT OF HYBRIDIZATION AND PSEUDOGAP ON THE CRITICAL TEMPERATURE
AND THE ISOTOPE EFFECT COEFFICIENT OF HIGH- T_c
SUPERCONDUCTORS

AN ABSTRACT
BY
THAIPANYA CHANPOOM



Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Doctor of Philosophy in Physics
at Srinakharinwirot University
May 2013

Thaipanya Chanpoom. (2013). *The effect of hybridization and pseudogap on the critical temperature and the isotope effect coefficient of high- T_c superconductors.*

Doctor of Philosophy. Thesis, Ph.D. (physics). Bangkok : Graduate School,
Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Dr. Pongkaew
Udomsamuthirun, Dr. Arpaong Changjan.

The purpose of this research is to study the effect of hybridization and pseudogap on the critical temperature, zero-temperature order parameter, gap-to- T_c ratio, and the isotope effect coefficient by using two-band superconductor model. The critical temperature decreases as the hybridization coefficient increases. The high value of hybridization coefficient, low value of gap-to- T_c ratio, and high value of the isotope effect coefficient are found. In case of pseudogap, the critical temperature decreases as the pseudogap increases. The value of gap-to- T_c ratio disappears at some range of Debye energy with high value of hybridization coefficient. The high, low and negative value of the isotope effect coefficient depend on the Debye energy and hybridization coefficient.

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

ผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียบกับอุณหภูมิวิกฤติ
และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

ของ

นายไทยปัญญา จันปุม

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่.....เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2556

อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ที่ปรึกษาหลัก ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริบุญ) (อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แหมมณี)

.....ที่ปรึกษาร่วม กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อภาพงส์ ชั่งจันทร์) (รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริบุญ)

.....กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อภาพงส์ ชั่งจันทร์)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรศักดิ์ เชื้องกา)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงเป็นอย่างดีได้นั้น อาศัยความช่วยเหลือและอุปการะจากท่าน รศ. ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรศิริคุณ ที่ให้ทั้งคำปรึกษาและแนะนำตลอดระยะเวลาการทำวิจัย รวมทั้งท่าน อ. ดร.อาภาพงศ์ ชั่งจันทร์ ที่ให้คำปรึกษาและคำแนะนำในการแก้ไขปัญหาและข้อบกพร่องต่างๆ ผู้วิจัย มีความซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณท่านดร.สุพิชฌ โชมมณี และท่านผศ. ดร.สุรศักดิ์ เชียงกา ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ให้คำปรึกษาและประสิทธิ์ประสาทวิชาตลอดระยะเวลาของการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณ คุณปิยะมาศ ไชยนอกและคุณฐิติพงศ์ เครือหงส์ ที่ช่วยให้คำแนะนำในงานวิจัยตลอดจนกำลังใจที่มอบให้

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา ครอบครัวของผู้วิจัยที่เป็นกำลังใจให้มาโดยตลอด

ไทยปัญญา จันปุม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	8
ความสำคัญของการวิจัย.....	8
ขอบเขตของการวิจัย.....	8
นิยามศัพท์เฉพาะ	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
ทฤษฎีบีซีเอส.....	10
ปรากฏการณ์ไอโซโทป.....	17
ช่องว่างพลังงานเทียมในตัวนำยวดยิ่ง.....	24
ตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน.....	29
ผลของสถานะ CDW และ SDW ต่อสภาพนำยวดยิ่ง.....	33
ผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยวดยิ่ง.....	38
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	41
ศึกษาผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยวดยิ่ง.....	41
อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	44
ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	46
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ จากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	48
สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	48
อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	50
ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	53
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ จากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	55

สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
3 (ต่อ)		
	สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	56
	ศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียบกับสภาพนำวดยิ่ง	58
	อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	59
	ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	61
	อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ	
	จากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	62
	สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	63
	อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	65
	ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	69
	อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ	
	จากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	72
	สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	72
4 ผลการวิจัย.....		76
	ผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำวดยิ่ง.....	76
	อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	76
	อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ	
	จากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	78
	สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	79
	อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	80
	อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติ	
	จากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	81
	สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$	82

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 (ต่อ)	
ผลของช่องว่างพลังงานเทียบกับสภาพนำเวดจ์	83
คุณสมบัติวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	83
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่อคุณสมบัติ	
จากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	84
สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	85
คุณสมบัติวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	86
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่อคุณสมบัติ	
จากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	87
สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$	88
5 สรุป อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ.....	89
สรุปและอภิปรายผลจากผลของไฮบริดเซชัน.....	89
คุณสมบัติวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชัน	89
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่อคุณสมบัติจากผลของไฮบริดเซชัน .	90
สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชัน.....	91
สรุปและอภิปรายผลจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม.....	92
คุณสมบัติวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม.....	92
อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่อคุณสมบัติจากผลของช่องว่าง	
พลังงานเทียม.....	93
สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม.....	94
ข้อเสนอแนะ	95
บรรณานุกรม.....	96
ประวัติย่อผู้วิจัย	100

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด.....	5
2 แสดงค่าช่องว่างพลังงานและช่องว่างพลังงานเทียมสำหรับ $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$	24



บัญชีภาพประกอบ

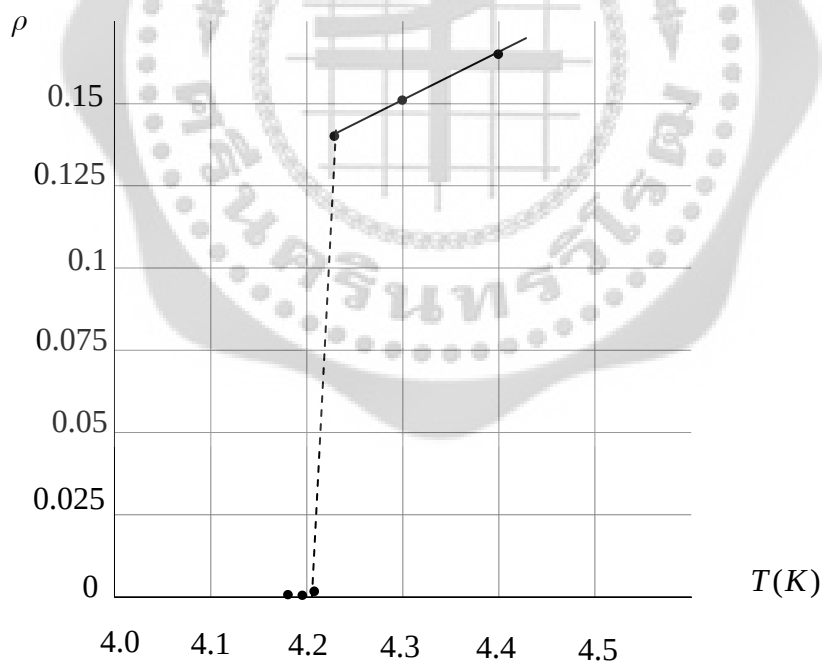
ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท.....	1
2 แสดงการเกิดปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์ในตัวนำยวดยิ่ง.....	2
3 แสดงการทะลุผ่านของอิเล็กตรอนผ่านแผ่นประกบ SIN.....	4
4 แสดงโครงสร้างของ MgB_2	6
5 แสดงโครงสร้างของ $YBaCuO$	7
6 แสดงแผนภาพฟายน์แมนของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน.....	10
7 แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของ $YBaCuO$, $LaSrCuO$ และ $Bi2212$	18
8 แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์.....	20
9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤติ.....	32
10 แสดงช่องว่างพลังงานทั้งสามสถานะในรูป z, z_1, z_2 กับอุณหภูมิ.....	37
11 แสดงกราฟระหว่างช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิที่ $v = 0.001, 0.002$ และ 0.003 สำหรับ $d = -0.99, u = 0.99$ และ $g_1 = 0.184292$	40
12 แสดงกราฟระหว่างช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิที่ $d = -0.99, -0.99001$ และ -0.99002 สำหรับ $v = 0.001, u = 0.99, g_1 = -0.184292$	40
13 กราฟแสดง T_c กับ γ_0 กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	77
14 กราฟแสดง R กับ ω_D / T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	78
15 กราฟแสดง α กับ ω_D / T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	79
16 กราฟแสดง T_c กับ γ_0 กรณี $E_k \simeq 0$	80
17 กราฟแสดง R กับ ω_D / T_c กรณี $E_k \simeq 0$	81
18 กราฟแสดง α กับ ω_D / T_c กรณี $E_k \simeq 0$	82
19 กราฟแสดง T_c กับ Δ_0 กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	83
20 กราฟแสดง $R/2$ กับ ω_D / T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	84
21 กราฟแสดง α และ ω_D / T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$	85
22 กราฟแสดง T_c และ Δ_0 กรณี $E_k \simeq 0$	86
23 กราฟแสดง $R/2$ กับ ω_D / T_c กรณี $E_k \simeq 0$	87
24 กราฟแสดง α กับ ω_D / T_c กรณี $E_k \simeq 0$	88

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

สภาพนำยวดยิ่งค้นพบครั้งแรกในปี ค.ศ. 1911 โดยคาร์เมอริงห์ ออนเนส (Ketterson; & Song. 1999: 1; citing Onnes. 1911: 1206-1226) เมื่อมีการลดอุณหภูมิของปรอทลงจนต่ำกว่า 4.2K พบว่าสภาพต้านทานไฟฟ้ากระแสตรงของปรอทลดลงทันทีที่ทันใดจนเป็นศูนย์ แสดงถึงภาพประกอบ 1 กล่าวได้ว่าปรอทมีสภาพนำไฟฟ้าแบบยวดยิ่ง (Superconductivity) อุณหภูมิที่ปรอทเปลี่ยนจากสภาพนำไฟฟ้าแบบปกติเป็นสภาพนำไฟฟ้าแบบยวดยิ่งเรียกว่าอุณหภูมิวิกฤติ ในปีต่อมา ออนเนสพบว่าถ้าให้สนามแม่เหล็กจากภายนอกสูงจนถึงค่าหนึ่งปรอทจะมีสมบัติกลับสู่สภาพการนำไฟฟ้าแบบปกติ ในปี ค.ศ. 1913 พบว่าตะกั่วก็สามารถแสดงสภาพนำยวดยิ่งเมื่อลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่า 7.2K และในปี ค.ศ. 1930 โลหะไนโอเบียมแสดงสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิ 9.2K ซึ่งเป็นอุณหภูมิวิกฤติสูงสุดที่ค้นพบในขณะนั้น

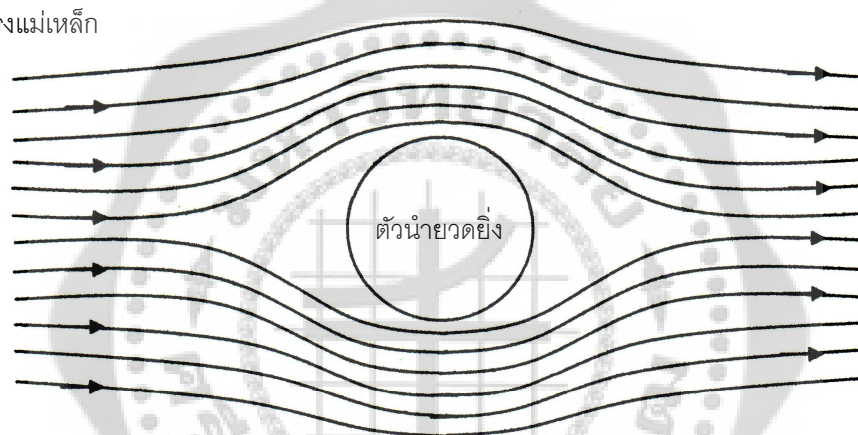


ภาพประกอบ 1 แสดงสภาพต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท

ที่มา: Charles; Horacio; & Richard.(1995). Superconductivity.p.33.

ในปี ค.ศ. 1933 มีการค้นพบสมบัติการเป็นสารไดอะแมกเนติกอย่างสมบูรณ์ในตัวนำยวดยิ่ง โดยไมส์เนอร์และออกเซนเฟลด์ (Schrieffer. 1964: 4; citing Meissner; & Ochsenfeld. 1933: 787) คือเมื่อตัวนำยวดยิ่งรูปทรงกลมมีการลดอุณหภูมิให้ต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติภายใต้สนามแม่เหล็กค่าหนึ่ง วัตถุดังกล่าวจะผลักสนามแม่เหล็กออกจากตัวมัน เรียกว่าปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ ดังภาพประกอบ 2 ในปี ค.ศ. 1934 กอร์เตอร์และคาซิมีร์ (Gorter; & Casimir. 1934: 306) เสนอว่าตัวนำยวดยิ่งประกอบด้วยอิเล็กตรอนปกติและอิเล็กตรอนนำยวดยิ่ง ซึ่งสภาพนำยวดยิ่งอิเล็กตรอนนำยวดยิ่งจะเป็นตัวแสดงสภาพนำยวดยิ่ง เรียกชื่อเสนอนี้ว่าแบบจำลองของไหลสองชนิด แบบจำลองนี้สามารถอธิบายสมบัติทางความร้อนและทางเสียงของตัวนำยวดยิ่งได้ดี

เส้นแรงแม่เหล็ก



ภาพประกอบ 2 แสดงการเกิดปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ในตัวนำยวดยิ่ง

ที่มา: Charles; Haracio; & Richard.(1995). Superconductivity.p.40.

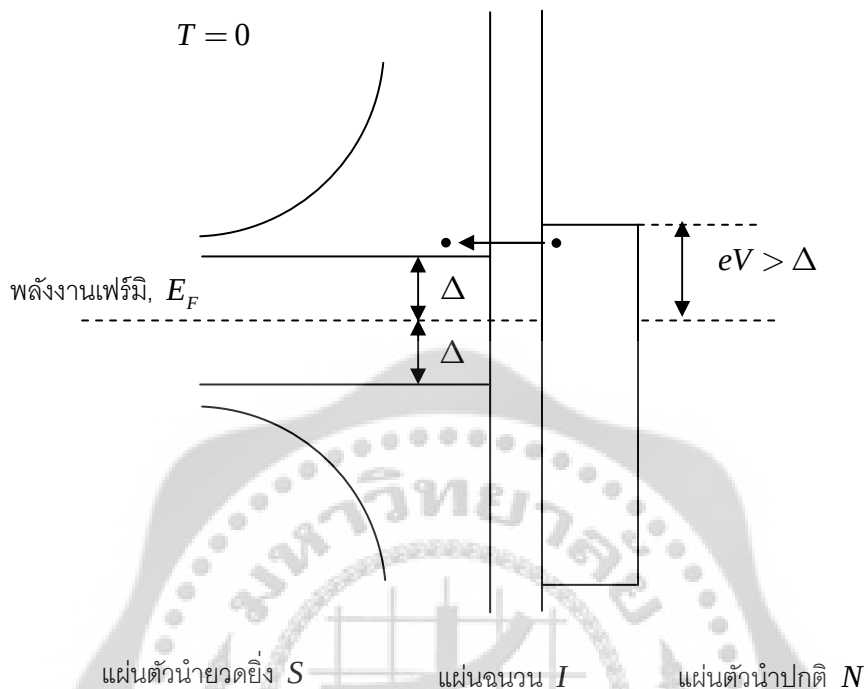
ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์อธิบายด้วยแนวคิดของสองพี่น้องตระกูลลอนดอน ในปี ค.ศ.1935 (Schrieffer. 1964: 10; citing F.London; & H.London. 1935: 341) โดยใช้แบบจำลองของไหลสองชนิดเป็นแนวคิดพื้นฐาน ทำให้ได้สมการที่แสดงสนามแม่เหล็กที่ทะลุเข้าไปในสารตัวนำยวดยิ่ง สมการของลอนดอนทั้งสองสมการนอกจากจะอธิบายปรากฏการณ์ไมส์เนอร์แล้ว ยังแสดงความยาวที่เป็นลักษณะเฉพาะอย่างหนึ่งของสภาพนำยวดยิ่งคือความลึกทะลุทะลวงของลอนดอน ในปี ค.ศ. 1937 ค้นพบวอร์ติซ (Vortices) ในตัวนำยวดยิ่ง ซึ่งเป็นพฤติกรรมที่ผิดปกติภายในตัวนำยวดยิ่งเมื่อมีการให้สนามแม่เหล็กจากภายนอก การค้นพบวอร์ติซทำให้เกิดสถานะผสม (Mixed state) ภายในตัวนำยวดยิ่ง ในปี ค.ศ. 1950 ฟร็อห์ลิช (Mourachkine. 2004: 4; citing Frohlich. 1950: 845) เสนอว่าการสั่น

ของโครงสร้างมีบทบาทสำคัญต่อการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง และทำนายว่าอุณหภูมิวิกฤติน่าจะแปรผกผันกับมวลของอะตอมตัวนำยวดยิ่ง เรียกว่าปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope effect) ซึ่งปรากฏการณ์นี้มีผลการทดลองของแมกซ์เวลล์และเรย์โนลด์ส์ (Schrieffer. 1964: 3; citing Maxwell. 1950: 477; & Reynolds. 1950: 487) ยืนยันว่าเป็นจริงในปีเดียวกัน โดยศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปของปรอทกับอุณหภูมิวิกฤติ ปรากฏการณ์ไอโซโทปเป็นการยืนยันว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนเป็นกลไกที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง

ในปี ค.ศ.1950 กิ้นซ์เบิร์กและแลนดาว (Ginzberg; & Landau. 1950: 1064) เสนอทฤษฎีเพื่ออธิบายสภาพนำยวดยิ่ง เป็นทฤษฎีที่ใช้แนวคิดเกี่ยวกับการเปลี่ยนเฟสอันดับสองเป็นพื้นฐาน ทฤษฎีของกิ้นซ์เบิร์กและแลนดาวสามารถอธิบายสภาพนำยวดยิ่งเมื่ออยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กที่มีค่าสูง และสามารถอธิบายความลึกทะลุทะลวงของลอนดอน และความยาวอาพันธ์ (Coherence length) ซึ่งเป็นความยาวที่ปรากฏเมื่อเกิดสภาพนำยวดยิ่ง ในปี ค.ศ. 1956 คูเปอร์ (Cooper. 1956: 1189) กล่าวว่าอิเล็กตรอนสามารถจับกันเป็นคู่ได้เนื่องจากอันตรกิริยาอย่างอ่อนระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน เรียกคู่ของอิเล็กตรอนนี้ว่าคู่อุปเปอร์ ในปี ค.ศ. 1957 มีทฤษฎีแบบจุลภาคชนิดแรกที่สามารถอธิบายกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งคือทฤษฎีบีซีเอส เสนอโดยบาร์ดีน คูเปอร์และชรีฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1957: 1175) แนวคิดของทฤษฎีนี้คืออันตรกิริยาอย่างอ่อนระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนนำไปสู่ศักย์ชนิดดึงดูดระหว่างสองอิเล็กตรอน เกิดเป็นคู่อุปเปอร์และส่งผลให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง ผลสรุปของทฤษฎีบีซีเอสทำให้ได้ค่าช่องว่างพลังงานระหว่างสถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่ง ซึ่งทฤษฎีบีซีเอสนี้สามารถปรับให้สอดคล้องกับทฤษฎีของลอนดอนและทฤษฎีของกิ้นซ์เบิร์กและแลนดาวได้

จากการศึกษาพบว่าที่ศูนย์เคลวินจะปรากฏช่องว่างพลังงาน $\Delta(0)$ ของคู่อุปเปอร์ในบริเวณใกล้ๆ ระดับพลังงานเฟอร์มิ E_F ดังภาพประกอบ 3 ซึ่งคู่อุปเปอร์มีพลังงานต่ำกว่าช่องว่างพลังงาน ในการที่จะให้เกิดกระแสยวดยิ่งขึ้นจำเป็นต้องให้พลังงานแก่คู่อุปเปอร์จำนวน $2\Delta(0)$ เพื่อที่จะกระโดดขึ้นไปอยู่ในระดับพลังงานที่เหนือช่องว่างพลังงาน หลักฐานที่ยืนยันการปรากฏช่องว่างพลังงานในสภาพนำยวดยิ่งมีหลายการทดลอง เช่นการทดลองการทะลุผ่านที่แสดงการไหลของกระแสไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำสองแผ่น คือแผ่นตัวนำปกติแทนด้วย N และแผ่นตัวนำยวดยิ่งแทนด้วย S ที่มีฉนวนบางแทนด้วย I กันระหว่างตัวนำทั้งสอง เรียกว่าแผ่นประกบ SIN พบว่าการที่จะมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านรอยต่อได้นั้นจำเป็นต้องให้พลังงานในรูปของความต่างศักย์ไฟฟ้าอย่างน้อยเท่ากับ $\Delta(0)/e$ ดังภาพประกอบ 3 แสดงว่าในสถานะนำยวดยิ่งจะเกิดช่องว่างพลังงานเท่ากับ $2\Delta(0)$ ในแต่ละคู่อุปเปอร์ การที่คู่อุปเปอร์จะกระโดดขึ้นไปในแถบการนำได้นั้นต้องให้พลังงานเป็นจำนวนอย่างน้อย $2\Delta(0)$ ต่อหนึ่งคู่ ช่องว่างพลังงานดังกล่าวพบว่าแปรค่าตามอุณหภูมิ ที่อุณหภูมิมากกว่าอุณหภูมิวิกฤติช่องว่าง

พลังงานจะหายไป แต่ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงยังปรากฏช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤติ



ภาพประกอบ 3 แสดงการทะลุผ่านของอิเล็กตรอนผ่านแผ่นประกบ SIN

ที่มา: Mourachkine.(2004).Room-Temperature Superconductivity.p.38.

นอกจากปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์แล้ว ยังมีอีกปรากฏการณ์ที่น่าสนใจสำหรับสภาพนำยวดยิ่ง คือปรากฏการณ์ไอโซป ซึ่งปรากฏการณ์นี้แสดงถึงอุณหภูมิวิกฤติแปรค่าตามมวลของอะตอมที่ต่างกัน ของธาตุชนิดเดียวกัน ปรากฏการณ์ไอโซปแสดงดังสมการ

$$T_c \propto M^{-\alpha}$$

$$T_c M^\alpha = \text{const}$$

เมื่อ T_c คืออุณหภูมิวิกฤติ M คือมวลของอะตอม และ α คือสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (Isotope effect coefficient) ตามทฤษฎีบีซีเอสค่า α มีค่าประมาณ 0.5 จากการศึกษาพบว่าสัมประสิทธิ์

ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งหลายชนิดมีความแตกต่างกัน ตารางที่ 1 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

ตาราง 1 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

ธาตุ	สัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α)
<i>Hg</i>	0.5 ± 0.03
<i>Tl</i>	0.5 ± 0.1
<i>Mo</i>	0.33 ± 0.05
<i>Os</i>	0.21 ± 0.05
<i>Ru</i>	0
<i>U</i>	-2.0

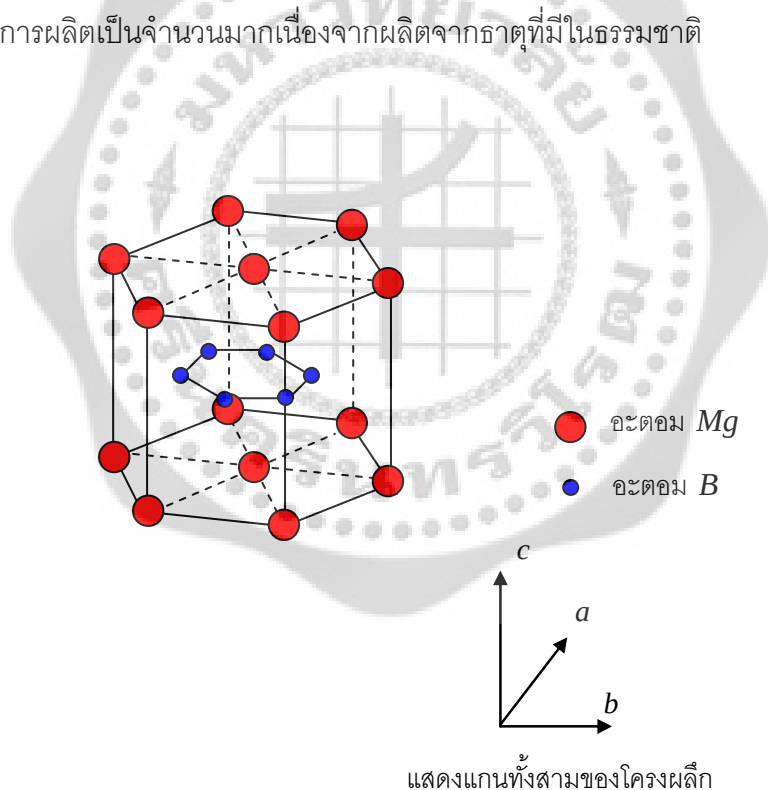
ที่มา: Bill; Kresin; & Wolf.(1998).The Isotope Effect in Superconductors.p.4.

เนื่องจากความถี่ในการสั่นของโครงผลึกแปรค่าตาม M แสดงว่าอุณหภูมิวิกฤติแปรค่าตามการสั่นของโครงผลึก และการเกิดคู่คูเปอร์มีความเกี่ยวข้องกับโฟนอน ดังตารางที่ 1 พบว่าตัวนำยวดยิ่งมี α ที่ต่างกัน บางชนิดจะไม่มีปรากฏการณ์ไอโซโทปเช่นธาตุ *Ru* หรือ α เป็นลบเช่น *U*

ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงค้นพบครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ.1986 โดยเบदनอร์ซและมุลเลอร์ (Bednorz; & Muller. 1986: 189) ในสารประกอบ $La - Ba - Cu - O$ ซึ่งเป็นเซรามิกซ์ มีอุณหภูมิวิกฤติประมาณ 30K ต่อมาในปี ค.ศ. 1987 วูและซุ่นค้นพบตัวนำยวดยิ่งในสารประกอบประเภท $Y - Ba - Cu - O$ มีอุณหภูมิวิกฤติ 93K และในปี ค.ศ. 1988 พบตัวนำยวดยิ่งประเภทสารประกอบที่มี *Bi* และ *Tl* เป็นองค์ประกอบหลักมีอุณหภูมิวิกฤติ 110K และ 125K ตามลำดับ และในปี ค.ศ. 1993 พบว่าสารประกอบที่มีปรอทเป็นองค์ประกอบหลักเกิดสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิ 135K ซึ่งเป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤติสูงสุดในขณะนั้น ตัวนำยวดยิ่งเหล่านี้เรียกว่าสารประเภทคิวเพรตซึ่งเป็นสารประกอบที่มีทองแดงและออกซิเจนเป็นองค์ประกอบ โดยปกติสารประเภทนี้จะเป็นตัวนำที่ไม่ดี นักวิทยาศาสตร์มีความเห็นว่าการกลไกสำหรับสภาพนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงนี้น่าจะมาจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอน ทฤษฎีบีซีเอสไม่สามารถทำนายลักษณะบางอย่างสำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงได้ เช่นปรากฏการณ์ไอโซโทป แอนเดอร์สัน (Anderson.

1987: 1196) เป็นคนแรกที่เสนอว่า อันตรกิริยาที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงไม่ใช่อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอน

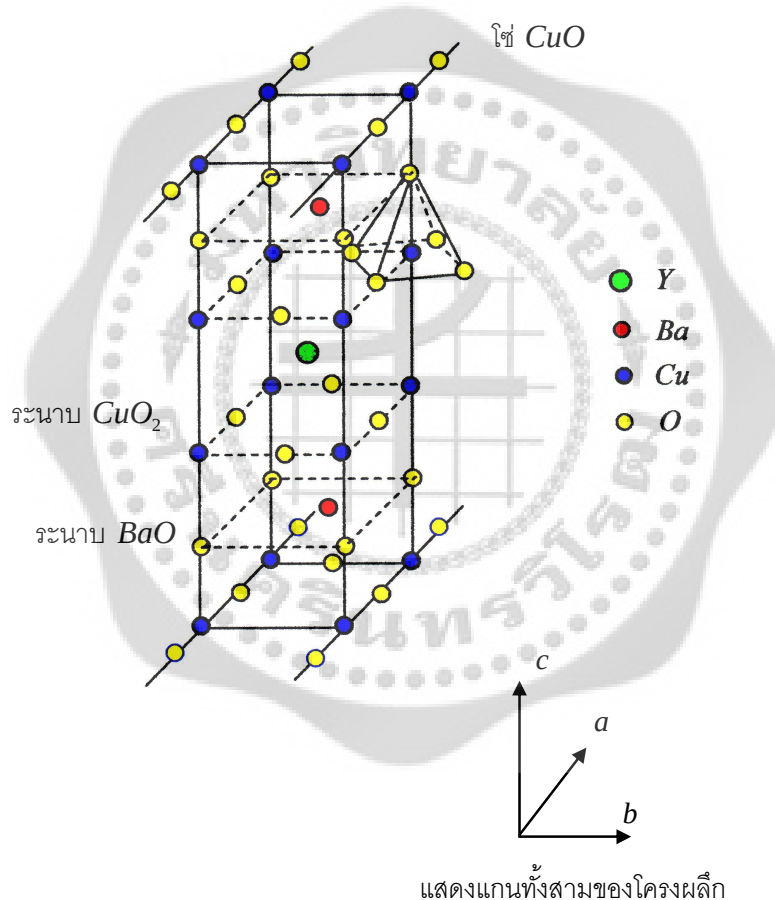
เนื่องจากตัวนำยวดยิ่งมีหลายประเภทไม่ว่าจะเป็นธาตุหรือสารประกอบ ในที่นี้จะกล่าวถึงบางประเภทเท่านั้นคือ แมกเนเซียมไดโบไรด์และตัวนำยวดยิ่งประเภท $YBaCuO$ แมกเนเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ค้นพบในปี ค.ศ. 2001 เกิดสภาพนำยวดยิ่งที่ $T_c = 39K$ ดังภาพประกอบ 4 พบว่าโครงสร้างของ MgB_2 ไม่ซับซ้อนประกอบด้วยชั้นของโบรอนและแมกเนเซียมสลับกันไปตามแกน c แต่ละชั้นของโบรอนมีโครงสร้างของโครงผลึกเหมือนกราฟไฟต์ อะตอมของแมกเนเซียมมีการจัดวางระหว่างชั้นของโบรอนในศูนย์กลางของเฮกซะโกนอล สมบัติทางฟิสิกส์ของ MgB_2 มีความแตกต่างจากสารชนิดอื่นคือความหนาแน่นสถานะมีค่าน้อย สภาพนำไฟฟ้าแบบยวดยิ่งของ MgB_2 ปรากฏในชั้นของโบรอน อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งในสารชนิดนี้ สัมประสิทธิ์ไอโซโทป $\alpha \approx 0.3$ แมกเนเซียมไดโบไรด์มีการนำไปใช้ประโยชน์เป็นจำนวนมาก เพราะมีอุณหภูมิวิกฤตสูงและมีการผลิตเป็นจำนวนมากเนื่องจากผลิตจากธาตุที่มีในธรรมชาติ



ภาพประกอบ 4 แสดงโครงสร้างของ MgB_2

ที่มา: Buzea; & Yamashita.(2001).Review of Superconducting Properties of MgB_2 .p.2.

สารประเภท $YBaCuO$ เป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดแรกที่มีอุณหภูมิวิกฤติสูงกว่า $77K$ และมีโครงสร้างเป็นแบบ 123 หน่วยเซลล์แบบออร์โธโรมบิก เช่น $YBa_2Cu_3O_7$ เป็นตัวนำยวดยิ่งที่มีโครงสร้างแสดงดังภาพประกอบ 5 ค่าคงตัวของโครงผลึกคือ $a, b \approx 4 \text{ \AA}$ และ $c \approx 12 \text{ \AA}$ สองระนาบของ CuO_2 ถูกแบ่งแยกโดยอะตอมของ Y ชุดของระนาบ $CuO_2 - Y - CuO_2$ ถูกประกบด้วยระนาบของ BaO และโซ่ของ CuO พบว่าอะตอม Ba มีวาเลนซ์เป็น +2 ระยะห่างระหว่างโซ่ของ CuO มีค่าประมาณ $1.9 \text{ \AA}$ แต่ละไอออนในระนาบ CuO_2 ถูกล้อมรอบด้วยปิรามิดของออกซิเจนจำนวนห้าอะตอม $YBa_2Cu_3O_7$ จะแสดงโซ่ของ CuO แบบหนึ่งมิติวางในแนวแกน c ดังภาพที่ 5



ภาพประกอบ 5 แสดงโครงสร้างของ $YBa_2Cu_3O_7$

ที่มา: Mourachkine.(2004).Room-Temperature Superconductivity.p.99.

ความมุ่งหมายของการวิจัย

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้กำหนดความมุ่งหมายในการวิจัย 5 ข้อดังนี้

1. เพื่อกำหนดหาสมการอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน จากการพิจารณาผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียม
2. เพื่อกำหนดหาสมการช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินของตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน จากการพิจารณาผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียม
3. เพื่อกำหนดหาอัตราส่วนระหว่างช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินและอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน จากการพิจารณาผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียม
4. เพื่อกำหนดหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน จากการพิจารณาผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียม
5. เปรียบเทียบผลการคำนวณกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

ความสำคัญของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้เพื่อศึกษาสมการที่แสดงอุณหภูมิวิกฤติ ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินกับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป จากแบบจำลองตัวนำวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน ตามแนวทฤษฎีบีซีเอสที่นำผลของการไฮบริดเซชันระหว่างแถบพลังงานทั้งสองมาพิจารณา รวมทั้งมีการพิจารณาผลของช่องว่างพลังงานเทียม ทั้งนี้เพื่อเป็นการหาข้อมูลที่สามารถนำไปอธิบายกลไกการเกิดสภาพนำวดยิ่ง

ขอบเขตของการวิจัย

สำหรับขอบเขตของการวิจัยระบุไว้ 4 ข้อดังนี้

1. ในการศึกษาทฤษฎีพิจารณากรณีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว
2. การวิเคราะห์ข้อมูลถือว่าอันตรกิริยาที่เกิดขึ้นในคูคูเปอร์เป็นการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส
3. แถบพลังงานทั้งสองแถบมาจากการพิจารณาตัวนำวดยิ่งชนิดคลื่นเอส
4. ผลที่ได้จากการศึกษานำไปเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง เพื่อหาความสอดคล้องกับสมบัติของตัวนำวดยิ่งบางประเภท

นิยามศัพท์เฉพาะ

ในการวิจัยได้กำหนดความหมายของคำบางคำดังนี้

1. ไฮบริไดเซชันหมายถึงผลจากการที่ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานสองแถบมีการซ้อนทับกันบางส่วน
2. ช่องว่างพลังงานเทียมหมายถึง ช่องว่างพลังงานที่เกิดขึ้นที่อุณหภูมิสูงและต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ



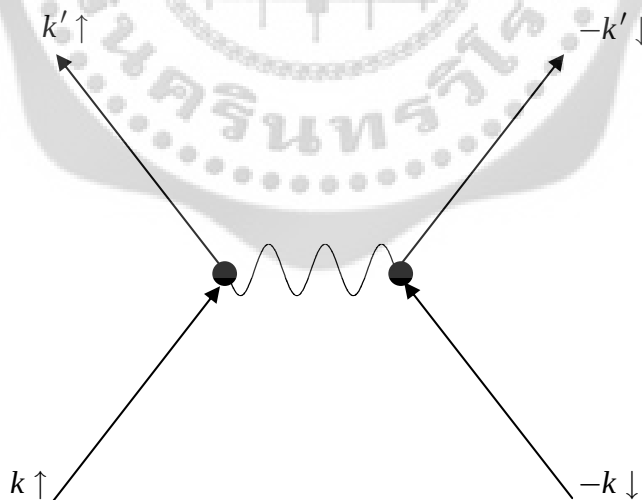
บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค้นคว้าแนวคิด หลักการและทฤษฎี ตลอดจนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องหลายประเด็น เพื่อเป็นแนวทางประกอบการวิจัย รายละเอียดมีดังนี้

2.1 ทฤษฎีบีซีเอส

จากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในสารหลายชนิด ทำให้มีผู้เสนอแนวคิดหรือทฤษฎีที่อธิบายกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง นับตั้งแต่สองพี่น้องตระกูลลอนดอน กิ้นซ์เบิร์กและแลนดาว ซึ่งเป็นทฤษฎีแบบมหภาคที่อธิบายกลไกดังกล่าว ทฤษฎีแบบจุลภาคที่อธิบายกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งและปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกี่ยวกับสภาพนำยวดยิ่งได้ดีที่สุดคือทฤษฎีบีซีเอส ที่เสนอโดยบาร์ดีน คูเปอร์ และชีฟเฟอร์ ทฤษฎีนี้เป็นการพัฒนาแนวคิดของคูเปอร์ที่กล่าวว่าอิเล็กตรอนสองตัวสามารถจับคู่กันได้โดยมีอนุภาคโฟนอนเป็นสื่อกลาง การจับคู่กันจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อขนาดของแรงดึงดูด มากกว่าขนาดของแรงผลักทางคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนสองตัว รายละเอียดของทฤษฎีบีซีเอสเริ่มจากแผนภาพฟายน์แมนดังภาพประกอบ 6 ซึ่งแสดงอันตรกิริยาการเกิดคู่อิเล็กตรอน



ภาพประกอบ 6 แสดงแผนภาพฟายน์แมนของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน

ที่มา: Buckel.(1991).Superconductivity Fundamentals and Application.p.35.

ฮามิลโทเนียนสำหรับทฤษฎีบีซีเอสคือ (Ketterson; & Song. 1999: 201)

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} H_0 + \sum_{kk'} V_{kk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \quad (2.1)$$

โดยพจน์แรกทางขวามือแสดงพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเทียบกับพลังงานเฟอร์มิส่วนพจน์ที่สองทางขวามือแสดงพลังงานจากอันตรกิริยาแบบดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนที่อยู่บริเวณผิวเฟอร์มิ และ $V_{kk'}$ คือ สัมประสิทธิ์ของอันตรกิริยาแบบดึงดูดของอิเล็กตรอน กำหนดช่องว่างพลังงาน Δ ดังนี้

$$\Delta = \sum_k V \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle$$

ดังนั้นสมการ (2.1) เขียนเป็น

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_k \Delta (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + h.c.) \quad (2.2)$$

โดย $h.c.$ คือสังยุคเฮอร์มิเทียน (hermitian conjugate) จากฟังก์ชันกรีน

$$G(k, \omega_n) = \langle -T_\tau \Psi_k(\tau) \Psi_k^+(0) \rangle = \left\langle -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow}^+ & C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \\ C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2.3)$$

โดย $\Psi_k^+ = (C_{k\uparrow}^+ \ C_{-k\downarrow}^+)$ และ $\Psi_k = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$ ส่วน T_τ เป็นตัวดำเนินการอันดับของเวลา ซึ่ง $\tau = it$ จากสมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบิร์ก

$$i \frac{d}{dt} C_{k\uparrow} = [C_{k\uparrow}, H]$$

จะได้ฟังก์ชันกรีนสำหรับตัวนำยิ่งยวดคือ

$$G(k, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta \tau_1} \quad (2.4)$$

โดยเพาลีเมทริกซ์ $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ และ

$$\omega_n = \pi T(2n+1)$$

โดย ω_n คือความถี่ของมัทซุบารา เมื่อ T คืออุณหภูมิ และ n เป็นจำนวนเต็ม สมการ (2.4) เขียนใหม่ในรูป

$$G(k, \omega_n) = -\frac{(i\omega_n + \varepsilon_k \tau_3 - \Delta \tau_1)}{\omega_n^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta^2}$$

จากนิยามช่องว่างพลังงาน

$$\Delta = \sum_k V \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle = \sum_k V G^{21}(k, \omega_n)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta &= 2T \sum_{k=0}^{\infty} \sum_n V \left(\frac{\Delta}{\omega_n^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta^2} \right) \\ &= 2N(0)TV \int_0^{\omega_D} \Delta \sum_n \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta^2} \right) d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.5)$$

เนื่องจาก

$$\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E_k^2} = \sum_n \frac{T}{2E_k} \left(\frac{1}{i\omega_n + E_k} - \frac{1}{i\omega_n - E_k} \right) \quad (2.6)$$

โดย

$$E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}$$

จากความสัมพันธ์ (Schrieffer.1964:197)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(i\omega_n) = -\frac{\beta}{2\pi i} \int_c \frac{F(\omega)}{e^{\beta\omega} + 1} d\omega$$

ในกรณีนี้จะได้ว่า

$$T \sum_n f(i\omega_n) = - \oint \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) f(z)$$

โดย $n_F(z) = \frac{1}{e^{z/T} + 1}$ สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออน ดังนั้น

$$\begin{aligned} T \sum_n \frac{1}{i\omega_n + E_k} &= - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{e^{z/T} + 1} \cdot \frac{1}{z + E_k} dz \\ &= \frac{1}{e^{-E_k/T} + 1} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\begin{aligned} T \sum_n \frac{1}{i\omega_n - E_k} &= - \frac{1}{e^{E_k/T} + 1} \\ \text{แทนค่า } T \sum_n \frac{1}{i\omega_n + E_k} \text{ และ } T \sum_n \frac{1}{i\omega_n - E_k} \text{ ลงในสมการ (2.6)} \\ \sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E_k^2} &= \frac{1}{e^{-E_k/T} + 1} \end{aligned}$$

และแทนค่า $\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E_k^2}$ ลงในสมการ (2.5)

$$\begin{aligned} \Delta &= \lambda \int_0^{\omega_D} \Delta \left[\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}} \right] d\varepsilon_k \\ \frac{1}{\lambda} &= \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}} d\varepsilon_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

โดย $\lambda = N(0)V$ ถ้าพิจารณาที่อุณหภูมิ $T = 0K$ ช่องว่างพลังงานแทนด้วย $\Delta(0)$ สมการ (2.7) เขียน

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta(0)^2}}{0}\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta(0)^2}} d\varepsilon_k \\ &= \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh \infty}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta(0)^2}} d\varepsilon_k \\ &= \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta(0)^2}} d\varepsilon_k \\ \frac{1}{\lambda} &= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\omega_D \gg \Delta(0)$ ประมาณได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &\simeq \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) \\ \frac{2\omega_D}{\Delta(0)} &\simeq e^{1/\lambda} \\ \Delta(0) &\simeq 2\omega_D e^{-1/\lambda}\end{aligned}\tag{2.8}$$

ถ้าพิจารณาที่ $T = T_c$ ซึ่ง $\Delta(T_c) = 0$ สมการ (2.7) เขียนเป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k$$

เนื่องจาก $\omega_D \gg T_c$ ประมาณได้ว่า

$$\frac{1}{\lambda} \simeq \ln\left(\frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c}\right)$$

เมื่อ $\gamma = 1.78$ ซึ่งจะได้สมการที่แสดงอุณหภูมิวิกฤตคือ

$$T_c \simeq 1.14 \omega_D e^{-1/\lambda} \quad (2.9)$$

และจะได้

$$\frac{2\Delta(0)}{T_c} \simeq 3.52 \quad (2.10)$$

ซึ่งมีค่าคงตัวไม่ขึ้นกับชนิดของตัวนำวดยิ่ง ถ้าพิจารณาที่ $T \ll T_c$ และ $T \neq 0$ ในกรณีนี้ประมาณได้

ว่า $\Delta(T) \simeq \Delta(0) + \Delta_1(T)$ โดย $\Delta_1(T)$ น้อยกว่า $\Delta(0)$ ดังนั้นพจน์ $\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)$

ประมาณดังนี้

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right) &\simeq \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(0)}}{2T}\right) \\ &\simeq 1 - 2e^{-\left\{\frac{\Delta(0)}{T} + \frac{\varepsilon_k^2}{2T\Delta(0)}\right\}} \end{aligned}$$

นำค่าที่ได้แทนในสมการ (2.7) และพิจารณากรณี $\omega_D \rightarrow \infty$ จะได้สมการช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิใดๆ คือ

$$\Delta(T) = \Delta(0) - e^{-\Delta(0)/T} \sqrt{2\pi T \Delta(0)} \quad (2.11)$$

กรณีพิจารณาบริเวณ $T \rightarrow T_c$ แต่ $T \neq T_c$ ช่องว่างพลังงานแทนด้วย $\Delta(T)$ มีค่าน้อยมาก ในกรณีนี้สมการ (2.7) คือ

$$\frac{1}{\lambda} = 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2} d\varepsilon_k$$

กระจายพจน์ $\frac{1}{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2}$ ในรูปของ $\Delta(T)$ ดังนี้

$$\frac{1}{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T) + \omega_n^2} \cong \frac{1}{\varepsilon_k^2 + \omega_n^2} - \frac{\Delta^2(T)}{(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\lambda} = 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\varepsilon_k^2 + \omega_n^2} d\varepsilon_k - 4T \sum_{n=0}^{\omega_D/2\pi T} \int_0^{\omega_D} \frac{1}{(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^2} d\varepsilon_k \quad (2.12)$$

เนื่องจาก $\omega_D \rightarrow \infty$ พจน์แรกทางขวามือสมการ (2.12) ประมาณเท่ากับ $\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right)$ ส่วน

พจน์ที่สองทางขวามือประมาณค่าเท่ากับ $\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2}$ ดังนั้นสมการ (2.12) มีค่า

$$\ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_c}\right) = \ln\left(\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}\right) - \frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2}$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = -\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2}$$

เมื่อ $\zeta(3)$ คือโรเมนนิซีต้าฟังก์ชัน กรณี $T \rightarrow T_c$

$$\ln\left(\frac{T}{T_c}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)\right) \cong \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$\frac{T - T_c}{T} = -\frac{7}{8}\zeta(3)\frac{\Delta^2(T)}{\pi^2 T^2}$$

$$\Delta^2(T) = \pi^2 T^2 \frac{8}{7\zeta(3)} \left(\frac{T_c - T}{T}\right)$$

$$\Delta(T) = \pi \{T_c(T_c - T)\}^{1/2} \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}$$

เนื่องจาก $\zeta(3) = 1.20206$ ดังนั้น

$$\Delta(T) = 3.06\sqrt{T_c(T_c - T)}$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิเข้าใกล้ T_c

2.2 ปฏิกิริยาการไอโซโทป

ปฏิกิริยาการไอโซโทปเป็นปฏิกิริยาการที่อุณหภูมิวิกฤติแปรผกผันกับมวลอะตอมของตัวนำยวดยิ่ง ดังสมการ

$$T_c \propto \frac{1}{M^\alpha} \quad (2.13)$$

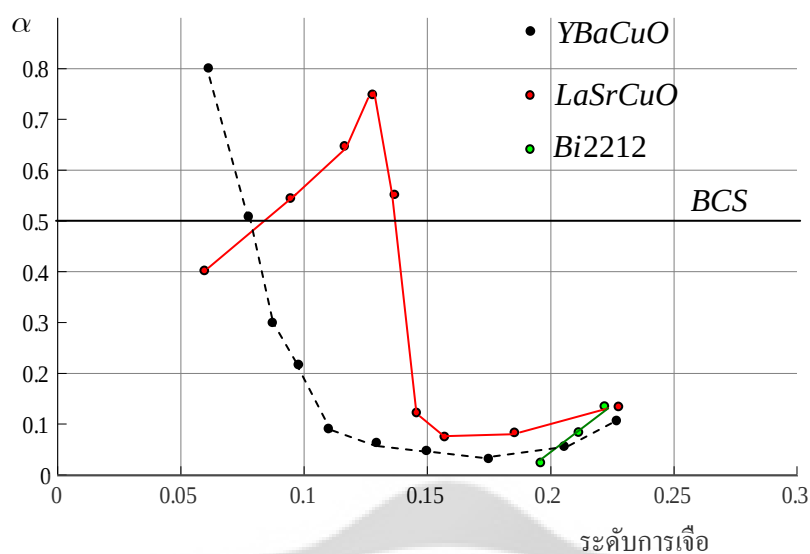
โดย M คือมวลอะตอม T_c คืออุณหภูมิวิกฤติ และ α คือสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ดังสมการ 2.13 แสดงว่าอุณหภูมิวิกฤติจะมีค่ามากถ้ามวลอะตอมมีค่าน้อยปฏิกิริยาการนี้แสดงให้เห็นว่าการสั่นของโครงผลึกมีบทบาทต่อสภาพนำยวดยิ่ง สัมประสิทธิ์ไอโซโทปหาจาก (Schrieffer.1964: 193)

$$\alpha = -\frac{\partial \ln \Delta_0}{\partial \ln M}$$

หรือ (Burns.1992:135)

$$\alpha = -\frac{d \ln T_c}{d \ln M}$$

กรณีพบว่า $\alpha = 0.5 \pm 0.03$ แต่ทฤษฎีบีซีเอส $\alpha = 0.5$ ในกรณีตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงประเภทคิวเพรต สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าแตกต่างจากที่ทำนายจากทฤษฎีบีซีเอส โดยแปรค่าตามระดับการเจือ กล่าวคือที่ระดับการเจือที่ต่างกันจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปต่างกัน ภาพประกอบ 7 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของออกซิเจนที่ระดับการเจือหลายค่า สำหรับตัวนำยวดยิ่ง $YBaCuO$, $LaSrCuO$ และ $Bi2212$



ภาพประกอบ 7 แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของ $YBaCuO$, $LaSrCuO$ และ $Bi2212$

ที่มา: Mourachkine.(2002).Room-Temperature Superconductivity.p.56.

ดังภาพประกอบ 7 สำหรับ $YBaCuO$ ที่ระดับการเจือประมาณ 0.16 ให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ต่ำสุด ระดับการเจือที่ต่ำมากสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่ามากกว่า 0.5 ในกรณีของ $LaSrCuO$ พบว่าเมื่อแทน O^{16} ด้วย O^{18} ที่ระดับการเจือที่น้อยกว่า 0.15 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าอยู่ระหว่าง 0.4 ถึง 0.78 แต่เมื่อระดับการเจือมากกว่า 0.15 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าประมาณ 0.10

จากความผิดปกติของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ส่งผลให้มีการศึกษาปัจจัยที่มีผลต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทป เริ่มจากการศึกษาของของครอฟฟอร์ดและคณะ (Crawford; & et al.1990: 282) ซึ่งศึกษาจากกรณีความหนาแน่นสถานะแบบแบนโฮป รายละเอียดมีดังนี้

จากความหนาแน่นสถานะแบบแบนโฮป

$$N(\varepsilon) = N(0) \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_F} \right|$$

แทนค่าดังกล่าวลงในสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{\varepsilon_F - \omega_D}^{\varepsilon_F + \omega_D} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_F} \right| \tanh \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{2T_c} \right) \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_F} d\varepsilon$$

กำหนด $x = \varepsilon - \varepsilon_F$ ดังนั้น

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{x} \right| \tanh \left(\frac{x}{2T_c} \right) \frac{1}{x} dx$$

เขียนเป็น

$$\frac{2}{N(0)V} = 2 \int_0^{2T_c} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{x} \right| \tanh \left(\frac{x}{2T_c} \right) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{2T_c}^{\omega_D} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{x} \right| \tanh \left(\frac{x}{2T_c} \right) \frac{1}{x} dx$$

จากการประมาณที่ว่า $\tanh x = x$ ถ้า $x < 1$ และ $\tanh x = 1$ ถ้า $x > 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{2}{N(0)V} &= 2 \int_0^{2T_c} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{x} \right| \left(\frac{x}{2T_c} \right) \frac{1}{x} dx + 2 \int_{2T_c}^{\omega_D} \ln \left| \frac{\varepsilon_F}{x} \right| \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln \left(\frac{\varepsilon_F}{2T_c} \right) \right]^2 - \ln^2 \left(\frac{\varepsilon_F}{\omega_D} \right) + 1 \end{aligned}$$

อุณหภูมิวิกฤตคือ

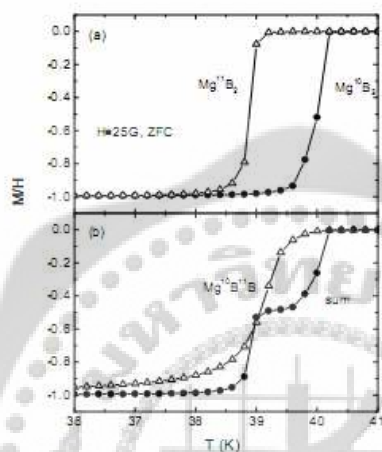
$$T_c = 1.36 \varepsilon_F \exp \left\{ - \left[\frac{2}{N(0)V} + \ln \left(\frac{\varepsilon_F}{\omega_D} \right) - 1 \right]^{1/2} \right\}$$

จาก $\alpha = - \frac{d \ln T_c}{d \ln M}$ จะได้ว่า

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{T_F}{T_{co}} \right) + \frac{\delta^2}{2T_{co}^2} \right] \bigg/ \left[\ln \left(\frac{1.36T_F}{T_{co}} \right) - \frac{\delta^2}{8T_{co}^2} \right]$$

โดย δ คือตัวแปรที่แสดงค่าที่เลื่อนไปของระดับเฟอร์มิ T_F คืออุณหภูมิที่ระดับเฟอร์มิ T_{co} คืออุณหภูมิขีดจำกัดของโฟนอน และ T_c คืออุณหภูมิวิกฤต

บุคโคและฮิงค์ (Bud'ko; & Hink.2001: 1887-1880) ศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ซึ่งให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของโบรอนประมาณ 0.3 และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมประมาณ 0.02 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปทั้งหมดประมาณ 0.3 ดังภาพประกอบ 8 ผลสรุปนี้แสดงว่าตัวนำยวดยิ่งดังกล่าว อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนเป็นกลไกสำคัญของการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง



ภาพประกอบ 8 แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์

ที่มา: Buzea; & Yamashita.(2001).p.129.

ยกसान (Yoksan.1991: 236-286) ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง โดยใช้แบบจำลองความหนาแน่นสถานะแบบแวนไฮป ในการคำนวณได้สมมติความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิในรูปของลอการิทึม พบว่าเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลง รายละเอียดมีดังนี้

แบบจำลองสถานะที่ใช้ในการศึกษาคือ

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 t} K \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{4t} \right)^2 \right] & , |\varepsilon| < 4t \\ 0 & , |\varepsilon| > 4t \end{cases}$$

เมื่อ t คือพลังงานจำกัดของ V_2 และ K คือค่าอินทิกรัลเชิงวงรีลำดับที่หนึ่ง กำหนดให้ศักย์ของการเกิดสภาพนำยวดยิ่งคือ

$$V_{kk'} = \begin{cases} -V_1 - V_2 & , 0 < \varepsilon < \omega_D \\ -V_2 & , \omega_D < \varepsilon < 4t \end{cases}$$

เมื่อ V_1 คือศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน V_2 คือศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาที่ไม่ใช่อิเล็กตรอนกับโฟนอน ε คือพลังงานของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ และ ω_D เป็นความถี่ตัดออฟของเดอบาย

กำหนดช่องว่างพลังงาน

$$\Delta(K, T) = \begin{cases} \Delta_0(T)\Delta_1 & , \varepsilon < \omega_D \\ \Delta_0(T)\Delta_2 & , \varepsilon > \omega_D \end{cases}$$

โดย Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าคงตัวที่ไม่แปรค่าตามอุณหภูมิ แทนค่า $V_{kk'}$ จะได้สมการช่องว่างพลังงานดังนี้

$$\Delta(K) = \frac{1}{2} \sum_q \frac{V(k-q)\Delta(q)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(q)}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(q)}}{2kT}\right)$$

เขียนเป็น

$$\begin{aligned} \Delta_1[1 - (V_1 + V_2)\sum_1(T)] &= \Delta_2 V_2 \sum_2(T) \\ \Delta_1 V_2 \sum_1(T) &= \Delta_2[1 - V_2 \sum_2(T)] \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sum_1(T) &= \int_0^{\omega_D} \frac{N(\varepsilon)d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 \Delta_1^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 \Delta_1^2}}{2T}\right) \\ \sum_2(T) &= \int_{\omega_D}^{4t} \frac{N(\varepsilon)d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 \Delta_2^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2 \Delta_2^2}}{2T}\right) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$1 + \lambda F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + \sigma F\left(\frac{4t}{2T_c}\right) + \lambda \sigma F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) \times \left[F\left(\frac{4t}{2T_c}\right) - F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\right] = 0$$

เมื่อ

$$\lambda = \frac{V_1}{2\pi^2 t}$$

$$\sigma = \frac{V_2}{2\pi^2 t}$$

$$F\left(\frac{Y}{2T_c}\right) = \int_0^{Y/16t} \frac{\ln x dx}{x} \tanh\left(\frac{8tx}{T_c}\right)$$

อุณหภูมิวิกฤตคือ

$$T_c = 1.134\omega_D \exp\left\{\frac{\left[\left(\frac{1}{\lambda + \sigma^*}\right) - 0.6646\right]}{\ln\left(\frac{\omega_D}{16t}\right)}\right\}$$

เมื่อ

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - \frac{\sigma}{2} \ln\left(\frac{4t}{\omega_D}\right) \ln\left(\frac{64}{\omega_D}\right)}$$

และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าดังนี้

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \lambda \ln\left(\frac{0.6646\omega_D}{16t}\right) + \ln\left(\frac{\omega_D}{16t}\right) \ln\left(\frac{T_c}{1.13\omega_D}\right) \right]^2 - \ln\left(\frac{T_c/1.13\omega_D}{\ln(\omega_D/16t)}\right) \right\}$$

สัมประสิทธิ์ไอโซโทปโดยวิธีแม่นยำตรงคือ

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \frac{H(\omega_D/2T_c)}{\ln(\omega_D/16t) \tanh(\omega_D/2T_c)} \right] \left[1 - \frac{[1 + \lambda F(\omega_D/2T_c)]}{\lambda F(\omega_D/2T_c)[2 + \lambda F(\omega_D/2T_c)]} \right] \right. \\ \left. \times \frac{\ln(1/4) \tanh(4t/2T_c) - H(4t/2T_c)}{\ln(\omega_D/16t) \tanh(\omega_D/2T_c) - H(\omega_D/2T_c)} \right\}^{-1}$$

เมื่อ

$$H\left(\frac{y}{2T_c}\right) = \int_0^{y/16t} \tanh\left(\frac{8tx}{T_c}\right) \frac{dx}{x}$$

เซาราบห์และรอย (Sourabh; & Roy.1995: 265-371) ศึกษาการเลื่อนของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเนื่องจากการเจือในตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง โดยใช้ความหนาแน่นสถานะแบบแวนไฮปในสองมิติคือ

$$N(\varepsilon) = N_0 \ln \left| \frac{E_F - \delta}{\varepsilon - (E_F - \delta)} \right|$$

เมื่อ δ เป็นตัวแปรที่แสดงค่าเลื่อนในระดับเฟอร์มิ อุณหภูมิวิกฤติหาได้จากสมการ

$$1 + (\lambda + \sigma) G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c) - \sigma G^\delta\left(\theta_F^c, \theta_D^c, \frac{E_c}{2k_B T_c}\right) + \lambda \sigma G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c) G^\delta\left(\theta_F^c, \theta_D^c, \frac{E_c}{2k_B T_c}\right) = 0$$

เขียน G^δ ดังนี้

$$G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c) = \int_{-\theta_D^c}^{\theta_D^c} \frac{\tanh \xi}{\xi} \ln \left| \frac{\theta_F^c - \theta_\delta^c}{\xi + \theta_\delta^c} \right| d\xi$$

และ

$$G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c, \frac{E_c}{2k_B T_c}) = \frac{1}{2} \left(\int_{-E_c/2k_B T_c}^{\theta_D^c} \frac{\tanh \xi}{\xi} \ln \left| \frac{\theta_F^c - \theta_\delta^c}{\xi + \theta_\delta^c} \right| d\xi + \int_{-\theta_D^c}^{\theta_D^c} \frac{\tanh \xi}{\xi} \ln \left| \frac{\theta_F^c - \theta_\delta^c}{\xi + \theta_\delta^c} \right| d\xi + \int_{\theta_D^c}^{E_c/2k_B T_c} \frac{\tanh \xi}{\xi} \ln \left| \frac{\theta_F^c - \theta_\delta^c}{\xi + \theta_\delta^c} \right| d\xi \right)$$

กำหนด $\theta_\delta^c = \frac{T_\delta}{2T_c}$ เมื่อ T_δ เป็นอุณหภูมิที่สอดคล้องกับพลังงานที่เปลี่ยนแปลงตาม δ จากการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าดังนี้

$$\alpha = \frac{1}{2} \tanh(\theta_D^c) \left(\ln \left| \frac{T_F - T_\delta}{T_D + T_\delta} \right| + \ln \left| \frac{T_F - T_\delta}{-T_D + T_\delta} \right| \right) \\ \times \frac{1 - [1 - \lambda G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c)]^2}{F_\eta^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c) + F^\delta \left(\theta_F^c, \theta_D^c, \frac{E_c}{2k_B T_c} \right) [1 - \lambda G^\delta(\theta_F^c, \theta_D^c)]^2}$$

2.3 ช่องว่างพลังงานเทียมในตัวนำยวดยิ่ง

จากการทดลองวัดช่องว่างพลังงานในตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิต่างๆ ทั้งในสถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่ง ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่ามีช่องว่างพลังงานในสถานะปกติของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ซึ่งมีรูปแบบใกล้เคียงกับช่องว่างพลังงานจริงเรียกว่าช่องว่างพลังงานเทียม และเป็นสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ช่องว่างพลังงานเทียมของตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดีสามารถปรากฏที่อุณหภูมิ T^* ซึ่งต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤติ แสดงว่าช่องว่างพลังงานเทียมสามารถปรากฏที่สถานะนำยวดยิ่งด้วย นอกจากนี้ยังพบว่าช่องว่างพลังงานเทียมยังแปรค่าตามระดับการเจือดังข้อมูลที่แสดงดังตารางที่ 2

ตาราง 2 แสดงค่าช่องว่างพลังงานและช่องว่างพลังงานเทียมสำหรับ $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$

อุณหภูมิวิกฤติ (K)	ช่องว่างพลังงานที่ $T = 0K$ (meV)	ช่องว่างพลังงานเทียมที่ T_c (meV)
70	457.9	869.5
79	457.9	753.6
85	446.3	463.7
77	260.8	173.9

ที่มา: Suzuki & Watanabe.(2000).

ซึ่งอุณหภูมิวิกฤติสูงคือระดับการเจือต่ำและอุณหภูมิวิกฤติต่ำคือระดับการเจือสูง

ในการนำช่องว่างพลังงานเทียมมาพิจารณาเพื่อศึกษากลไกการเกิดสภาพนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำนั้น ช่องว่างพลังงานสามารถเขียนในรูป (Udomsamuthirun.2001: 316)

$$\Delta^2(T) = \Delta'(K) + E_g^2$$

โดย $\Delta'(K)$ เป็นช่องว่างพลังงานในสถานะนำยวดยิ่ง E_g เป็นช่องว่างพลังงานเทียมในสถานะปกติ ที่ $T = T_c$ จะได้ว่า

$$\Delta(T_c) = E_g$$

นำสมการช่องว่างพลังงานไปแทนค่าในสมการช่องว่างพลังงานของบีซีเอส

$$\Delta'(K) = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + E_g^2}}{2T_c} \right)}{2\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + E_g^2}} \Delta'(K)$$

เมื่อ ε_k คือพลังงานของอิเล็กตรอน และ $V_{kk'}$ คือศักย์ของการเกิดคู่อิเล็กตรอน กำหนดให้ศักย์สำหรับคูคูเปอร์ประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนที่เกิดจากโฟนอนแทนด้วย $V_p(k, k')$ และส่วนที่ไม่ได้เกิดจากโฟนอนแทนด้วย $V_e(k, k')$ ดังสมการ

$$V(k, k') = V_p(k, k') + V_e(k, k')$$

อาจเขียนในรูป

$$V_{p,e}(k, k') = V_{po, eo} \psi_n(k) \psi_n(k')$$

สำหรับกรณี $\varepsilon_n, \varepsilon'_n \leq \omega_{p,e}$ โดย ω_p และ ω_e คือพลังงานคutoffของโฟนอนและไม่ใช่โฟนอน ซึ่ง

$$V_{p,e}(k, k') = 0$$

ในกรณีอื่นๆ และกำหนด

$$\psi_n(k) = 1$$

สำหรับตัวนำเวดจ์คลื่นเอส

$$\psi_n(k) = \cos 2\theta_k$$

สำหรับตัวนำเวดจ์คลื่นดี โดย

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{k_y}{f_x} \right)$$

คือมุมในปริภูมิโมเมนตัมในระนาบ ab เพื่อให้สอดคล้องกับศักย์การเกิดคู่ กำหนดให้ช่องว่างพลังงาน และช่องว่างพลังงานเทียมแสดงในรูปต่อไปนี้

$$\Delta_{p,e}(k) = \Delta_{eo} \psi_n(k)$$

สำหรับกรณี $\varepsilon_k \leq \omega_{p,e}$ ซึ่ง

$$\Delta_{p,e}(k) = 0$$

สำหรับกรณีอื่นๆ และกำหนด

$$E_g(k) = E_{go}$$

สำหรับตัวนำเวดจ์คลื่นเอส และ

$$E_g(k) = E_{go} \cos 2\theta_k$$

สำหรับตัวนำเวดจ์คลื่นดี เมื่อ E_{go} เป็นค่าคงตัว

จากสมการ

$$\Delta(k) = \Delta_p(k) + \Delta_e(k)$$

เขียนในรูปเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} \Delta_{eo} \\ \Delta_{po} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{eo}L(\omega_{eT_c}) & V_{eo}L(\omega_{eT_c}) \\ V_{po}L(\omega_{pT_c}) & V_{po}L(\omega_{pT_c}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{eo} \\ \Delta_{po} \end{pmatrix}$$

เมื่อ

$$L(\omega, T_c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \psi_n^2(\theta) \int_0^\omega d\varepsilon \frac{N(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_y^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_y^2}}{2T_c}\right)$$

คำตอบแทนด้วย $\lambda(\omega_e, \omega_p, T_c)$ คือ

$$\lambda(\omega_e, \omega_p, T_c) = \frac{V_{eo}L_e + V_{po}L_p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(V_{eo}L_e - V_{po}L_p)^2 + 4V_{eo}V_{po}L_e^2}$$

เมื่อ $L_e = L(\omega_e, T_c)$ และ $L_p = L(\omega_p, T_c)$ คุณสมบัติวิฤติหาได้จากเงื่อนไข

$$\lambda(\omega_e, \omega_p, T_c) = 1$$

สัมประสิทธิ์ไอโซโทปหาจาก

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d \ln T_c}{d \ln \omega_p}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\alpha = \frac{-\frac{1}{2} \frac{\omega_p}{T_c} \frac{\partial L_p}{\partial \omega_p}}{\frac{\partial L_p}{\partial T_c} + \frac{V_{eo}}{V_{po}} \left(\frac{1 - V_{po}L_p + 2V_{po}L_e}{1 - V_{eo}L_e} \right) \frac{\partial L_e}{\partial T_c}}$$

ผลสรุปนี้เป็นไปตามกรณี $N(\varepsilon) = N_0$

สัมประสิทธิ์ไอโซโทปกรณีคลื่นเอส เมื่อพิจารณาช่องว่างพลังงานเทียมคือ

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega_p}{\sqrt{\omega_p^2 + E_{go}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\omega_p^2 + E_{go}^2}}{2T_c}\right)}{\left[f_s(\omega_p) + \frac{V_{eo}}{V_{po}} \left(\frac{1 - V_{po}L_p + 2V_{po}L_e}{1 - V_{eo}L_e}\right) f_d(\omega_e)\right]}$$

โดย
$$f_s(\omega) = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + E_{go}^2}}{\omega} \tanh\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + E_{go}^2}}{2T_c}\right) - \frac{E_{go}}{\omega} \tanh\left(\frac{E_{go}}{2T_c}\right)$$

และ $\omega = 2\pi T_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$

สัมประสิทธิ์ไอโซโทปกรณีคลื่นดี เมื่อพิจารณาช่องว่างพลังงานเทียมคือ

$$\alpha_d = \frac{\omega_p \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\omega_p^2 + a^2}{\omega_p^2 + E_{go}^2 + a^2}} - 1 \right)}{\left[f_d(\omega_p) + \frac{V_{eo}}{V_{po}} \left(\frac{1 - V_{po}L_p + 2V_{po}L_e}{1 - V_{eo}L_e} \right) f_d(\omega_e) \right]}$$

เมื่อ
$$f_d(\omega) = \frac{L(\omega, T_c) E_{go}^2}{N_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a^2}{\sqrt{E_{go}^2 + a^2}} \left\{ \frac{E(\beta, q) - F(\beta, q)}{\sqrt{(E_{go}^2 + a^2)(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + E_{go}^2 + a^2)}} - \frac{\omega E_{go}^2}{\sqrt{(E_{go}^2 + a^2)(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + E_{go}^2 + a^2)}} \right\}$$

และ
$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{2nT_c \left(n + \frac{1}{2}\right)} \right)$$

$$q = \frac{E_{go}}{\sqrt{E_{go}^2 + a^2}}$$

$F(\beta, q)$ และ $E(\beta, q)$ คืออิลลิปติกอินทิกรัลชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองตามลำดับ

2.4 ตัวนำเวดยี่งชนิดสองแถบพลังงาน

ทฤษฎีบีซีเอสซึ่งใช้อธิบายสมบัติของตัวนำเวดยี่งนั้น พลังงานของคูคูเปอร์มาจากการพิจารณาแถบพลังงานเดี่ยว และอันตรกิริยาของคูคูเปอร์คืออันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอน ผลสรุปที่ได้กล่าวว่าอุณหภูมิวิกฤติแปรค่าตามความถี่ของเดอบาย ω_D เนื่องจากทฤษฎีบีซีเอสสามารถอธิบายหลายปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับสภาพนำเวดยี่งได้เป็นอย่างดี แต่มีข้อจำกัดคืออธิบายได้เฉพาะตัวนำเวดยี่งอุณหภูมิต่ำเท่านั้น ยังมีหลายปรากฏการณ์สำหรับตัวนำเวดยี่งอุณหภูมิสูงที่ทฤษฎีดังกล่าวยังอธิบายไม่ได้ เช่นค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่มีค่าน้อยมากและบางครั้งมีค่าเป็นลบ ซึ่งปรากฏการณ์ไอโซโทปเป็นข้อมูลที่สามารถเข้าใจกลไกการเกิดสภาพนำเวดยี่งได้ ดังนั้นจึงมีผู้พยายามพัฒนาแนวคิดของทฤษฎีบีซีเอสเพื่อนำไปสู่แนวคิดใหม่ สำหรับอธิบายสมบัติต่างๆ ของสภาพนำเวดยี่งอุณหภูมิสูง รายละเอียดมีดังนี้

โอโกเย (Okoye, 1998: 53) ใช้แบบจำลองตัวนำเวดยี่งชนิดสองแถบพลังงานคำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำเวดยี่งอุณหภูมิสูง แบบจำลองนี้พลังงานของคูคูเปอร์มาจากสองแถบพลังงาน รวมกับพลังงานที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานทั้งสอง พลังงานศักย์เกิดจากสองส่วนคือมาจากอิเล็กตรอนและโฟนอน และมาจากสาเหตุอื่นที่ไม่ใช่อิเล็กตรอนและโฟนอน ซึ่งผลจากการศึกษาสามารถอธิบายสัมประสิทธิ์ไอโซโทปตัวนำเวดยี่งที่มีออกซิเจนเป็นองค์ประกอบได้ดี แบบจำลองของโอโกเยเริ่มจากฮามิลโทเนียนคือ

$$H = H_d + H_p + H_{int}$$

เมื่อ H_d และ H_p คือฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานชั้น d และ p ตามลำดับ ส่วน H_{int} คือฮามิลโทเนียนระหว่างแถบพลังงานชั้น d และ p โดย

$$\begin{aligned} H_d &= \sum_{ks} \varepsilon_{ds} d_{ks}^+ d_{ks} - \sum_{kk'} V_{dkk'} d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow} \\ H_p &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_{ps} p_{ks}^+ p_{ks} - \sum_{kk'} V_{pkk'} p_{k\uparrow}^+ p_{-k\downarrow}^+ p_{-k'\downarrow} p_{k'\uparrow} \\ H_{int} &= - \sum_{kk'} V_{dpkk'} (d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ p_{-k'\downarrow} p_{k'\uparrow} + p_{k\uparrow}^+ p_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow}) \end{aligned}$$

เมื่อ ε_{ds} และ ε_{ps} คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานชั้น d และ p เทียบกับพลังงานแฟร์มิตามลำดับ s แทนสปินขึ้น ($\uparrow$) และสปินลง ($\downarrow$) ส่วน k เป็นเลขคลื่นของบล็อก $V_{dkk'}, V_{pkk'}$ คือ

ค่าที่แสดงอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนในแถบพลังงาน d และ p ตามลำดับ $V_{dpkk'}$ คืออันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนระหว่างแถบพลังงาน d และ p

จากการแปลงแบบโบโกลิบอฟ-วาเลตินปริมาณ $p_{k\uparrow}$ และ $d_{k\downarrow}$ คือ

$$\begin{aligned} p_{k\uparrow} &= \cos^{1/2} \theta_1 e_{k\uparrow} + \sin^{1/2} \theta_1 e_{-k\downarrow}^+ \\ d_{k\uparrow} &= \cos^{1/2} \theta_2 g_{k\uparrow} + \sin^{1/2} \theta_2 g_{-k\downarrow}^+ \end{aligned}$$

ในกรณี $p_{-k\downarrow}^+$ และ $d_{-k\downarrow}^+$ ให้ค่าในทำนองเดียวกัน ซึ่งจากข้อมูลทั้งหมดจะได้สมการที่แสดงช่องว่างพลังงานดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta_{pk} &= -\sum_{k'} V_{pkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk}^2}} (1 - 2f(\varepsilon_{pk'})) \\ &\quad - \sum_{k'} V_{dpkk'} \frac{\Delta_{dk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk}^2}} (1 - 2f(\varepsilon_{dk'})) \\ \Delta_{dk} &= -\sum_{k'} V_{dkk'} \frac{\Delta_{dk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk}^2}} (1 - 2f(\varepsilon_{dk'})) \\ &\quad - \sum_{k'} V_{dpkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk}^2}} (1 - 2f(\varepsilon_{pk'})) \end{aligned}$$

เมื่อ Δ_{pk}, Δ_{dk} คือช่องว่างพลังงานสำหรับแถบพลังงาน p และ d ตามลำดับ $f(\varepsilon_{pk}), f(\varepsilon_{dk})$ คือฟังก์ชันการแจกแจงของเฟอร์มิ-ดิแรค

เนื่องจากอันตรกิริยาประกอบด้วยศักย์สองส่วนคือ ส่วนที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนแทนด้วย V_{pk} และส่วนที่ไม่ใช่อิเล็กตรอนกับโฟนอนแทนด้วย U_c แสดงดังนี้

$$V_{ikk'} = -V_{ph}^d - U_{ic}$$

สำหรับ $0 < |\omega| < \omega_D$

$$V_{ikk'} = -U_{ic}$$

สำหรับ $\omega_D < |\omega| < \omega_c$ เมื่อ $i = p, d$ และ ω_D และ ω_c เป็นความถี่สูงสุดของเดอบายและความถี่สูงสุดของศักย์ดึงดูดในอันตรกิริยาที่ไม่ขึ้นกับโฟนอนตามลำดับ แทนค่า $V_{ikk'}$ ลงในสมการที่แสดงช่องว่างพลังงานได้ผลคือ

$$\begin{aligned}\Delta_{pk}(\varepsilon_p) &= -N_p(0) \int [-V_{ph}^p(\varepsilon_{pk} - \varepsilon'_{pk}) - U_{cp}] \frac{\Delta_{pk}(\varepsilon'_{pk})(1 - 2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pk}} d\varepsilon'_{pk} \\ &\quad - N_p(0) \int [-V_{ph}^p(\varepsilon_{pk} - \varepsilon'_{pk}) - U_{cp}] \frac{\Delta_{dk}(\varepsilon'_{dk})(1 - 2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}} d\varepsilon'_{dk} \\ \Delta_{dk}(\varepsilon_d) &= -N_d(0) \int [-V_{ph}^d(\varepsilon_{dk} - \varepsilon'_{dk}) - U_{cd}] \frac{\Delta_{dk}(\varepsilon'_{dk})(1 - 2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}} d\varepsilon'_{dk} \\ &\quad - N_p(0) \int [-V_{ph}^{pd}(\varepsilon_{pk} - \varepsilon'_{pk}) - U_{cdp}] \frac{\Delta_{pk}(\varepsilon'_{pk})(1 - 2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pdk}} d\varepsilon'_{pdk}\end{aligned}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 F & -1 & -\lambda_{12} & 0 \\ -U_1 F & 1 - U_1 G & -\mu_{12} F & -\mu G \\ -\lambda_{21} F & 0 & 1 - \lambda_2 F & -1 \\ -\mu_{12} F & -\mu_{12} G & -\mu_2 F & 1 - \mu_2 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{po} \\ \Delta_{p\alpha} \\ \Delta_{do} \\ \Delta_{d\alpha} \end{pmatrix} = 0$$

เมื่อ $F = \ln\left(\frac{1.14\omega_D}{T_c}\right)$ และ $G = \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right)$
กำหนดให้

$$\Delta_0(1 - (\lambda + \lambda_{12})F) - \Delta_\alpha = 0$$

$$\Delta_\alpha(1 - (\mu + \mu_{12})G) - (\mu + \mu_{12})\Delta_0 F = 0$$

ดังนั้นสมการเมทริกซ์สามารถลดรูปเป็น

$$\begin{pmatrix} 1 - (\lambda + \lambda_{12})F & -1 \\ -(\mu + \mu_{12})F & 1 - (\mu + \mu_{12})G \end{pmatrix} = 0$$

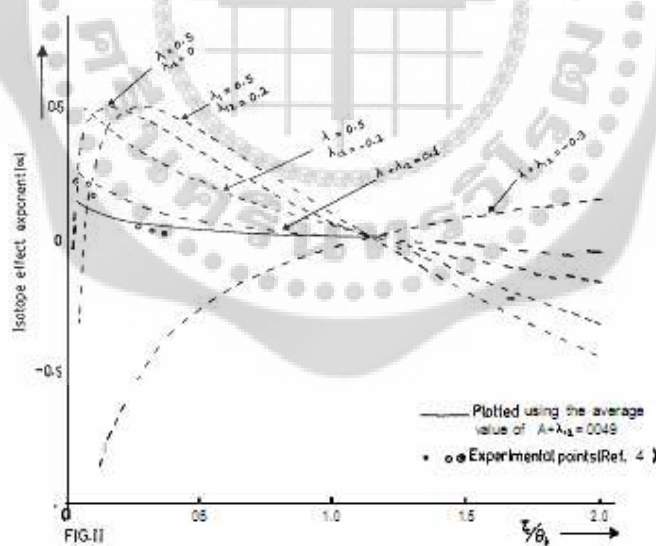
ซึ่งจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตคือ

$$T_c = 1.14\omega_D e^{-\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_{12}+\mu^*}\right)}$$

โดย $\mu^* = \frac{\mu + \mu_{12}}{1 - (\mu + \mu_{12})G}$ และสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 + (\lambda + \lambda_{12}) \ln \left[\frac{T_c}{1.14\omega_D} \right] \right]^2 \right\}$$

สามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้จากฟังก์ชันของ μ^* / λ ที่เกี่ยวข้องกับความแรงของอันตรกิริยาคูลอมบ์ μ^* การเปรียบเทียบอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานของอิเล็กตรอนกับโฟนอน ดังภาพประกอบ 9 ซึ่งพบว่าพารามิเตอร์ λ_{12} ได้ค่าบวกหรือลบโดยจะมีค่าลดลงตามอัตราส่วนของพารามิเตอร์ยังผล การลดลงจะเร็วขึ้นเมื่ออันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนเป็นแบบดึงดูด



ภาพประกอบ 9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต

ที่มา: Okoye.(1998).Chinese Journal of Physics.p.53.

2.5 ผลของสถานะ CDW และ SDW ต่อสภาพนำยวดยิ่ง

การศึกษากลไกเกี่ยวกับการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง สามารถพิจารณาในหลายรูปแบบ นักวิจัยบางกลุ่มได้ศึกษาผลของสถานะคลื่นความหนาแน่นประจุ (Charge-Density Wave, CDW) และสถานะคลื่นความหนาแน่นสปิน (Spin-Density Wave, SDW) ที่มีต่อสภาพนำยวดยิ่ง เช่นอิชิมุระและคณะ (Ichimura, Fujita; & Nakoa.1990: 6387-6393) ได้ศึกษาผลของสถานะ *CDW* ต่อสภาพนำยวดยิ่ง โดยศึกษาแผนภาพเฟสของสถานะ *CDW* และอุณหภูมิวิกฤตที่เกิดขึ้นจากผลของสถานะ *CDW* ซึ่งเริ่มจากฮามิลโทเนียนรวมคือ

$$H = H_0 + H_{CDW} + H_{BCS}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{k\sigma} (\varepsilon_k - \mu) C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} \\ &= \sum_k [(\varepsilon_k - \mu) C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + (\varepsilon_{-k} - \mu) C_{-k\uparrow}^+ C_{-k\uparrow} + (\varepsilon_{k+Q} - \mu) C_{k+Q,\uparrow}^+ C_{k+Q,\uparrow} \\ &\quad + (\varepsilon_{-k-Q} - \mu) C_{-k-Q,\downarrow}^+ C_{-k-Q,\downarrow}] \\ H_{CDW} &= -W \sum_{k\sigma} C_{k+Q,\sigma}^+ C_{k\sigma} \\ &= -W \sum_k [C_{k+Q,\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k-Q,\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} + C_{k\uparrow}^+ C_{k+Q,\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ C_{-k-Q,\downarrow}] \\ H_{BCS} &= -\Delta \sum_k [C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + h.c.] \\ &= -\Delta \sum_k [C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{k+Q,\uparrow}^+ C_{-k-Q,\downarrow}^+ + C_{-k-Q,\downarrow}^+ C_{k+Q,\uparrow}] \end{aligned}$$

จากฟังก์ชันกรีน

$$G_{kk'}(\tau) = -\langle T_\tau [\psi_k(\tau) \psi_{k'}^+(0)] \rangle$$

$$\text{โดย } \psi_{k'}^+(\tau) = (C_{k\uparrow}^+ \quad C_{-k\downarrow}^+ \quad C_{k+Q,\uparrow}^+ \quad C_{-k-Q,\downarrow}^+) \text{ และ } \psi_k(\tau) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^+ \\ C_{k+Q,\uparrow} \\ C_{-k-Q,\downarrow}^+ \end{pmatrix}$$

กำหนด

$$\varepsilon_k - \mu = \gamma_k + \delta_k - \mu$$

ซึ่ง

$$\gamma_k = -t_0 (\cos k_x + \cos k_y)$$

$$\delta_k = -t_1 \cos k_x \cos k_y$$

ในกรณีพิจารณาสองมิติจะได้ฟังก์ชันกรีนดังนี้

$$G(\omega_n, k) = \frac{1}{i\omega_n - \gamma_k \rho_3 \sigma_3 - (\delta_k - \mu) \rho_0 \sigma_3 + \Delta \rho_0 \sigma_1 + W \rho_1 \sigma_3}$$

จาก

$$W = u \sum_{k\sigma} \langle C_{k+Q,\sigma}^+ C_{k\sigma} \rangle$$

เขียนเป็น

$$W = uT \sum_k [G_{31} - G_{42} + G_{13} - G_{24}]$$

แทนค่า $G_{31}, G_{42}, G_{13}, G_{24}$ และพิจารณาที่อุณหภูมิวิกฤติจะได้ว่า

$$\frac{1}{u} = \sum_{k\sigma} \frac{f(E_k^-) - f(E_k^+)}{(\gamma_k^2 + W^2)^{1/2}}$$

ซึ่ง

$$E_k^+ = \delta_k - \mu + (\gamma_k^2 + W^2)^{1/2}$$

$$E_k^- = \delta_k - \mu - (\gamma_k^2 + W^2)^{1/2}$$

จาก

$$\Delta = g \sum_k \langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle$$

เมื่อพิจารณาเวกเตอร์จากความไม่สมมาตรของโครงผลึก Q

$$\Delta = g \sum_k \frac{1}{2} [\langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle + \langle C_{k+Q,\uparrow}^+ C_{-k-Q,\downarrow}^+ \rangle] = \frac{gT}{2} \sum_k [G_{21} + G_{43}]$$

แทนค่า G_{21}, G_{43} และพิจารณาที่อุณหภูมิวิกฤติจะได้ว่า

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{1}{E_k^+} \tanh\left(\frac{E_k^+}{2T_c}\right) + \frac{1}{E_k^-} \tanh\left(\frac{E_k^-}{2T_c}\right) \right]$$

แสดงว่าอุณหภูมิวิกฤติ T_c แปรค่าตาม W ซึ่งคือค่าออร์เดอร์พารามิเตอร์สำหรับสถานะ CDW

แพนดาและเราท์ (Panda & Rout.2009:702-706) ศึกษาการเกิดสถานะนำยวดยิ่งจากผลของสถานะ CDW และสถานะ SDW ที่อุณหภูมิต่างๆ สำหรับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงประเภทคิวเพรตที่ระดับการเจือต่ำ ซึ่งฮามิลโทเนียนคือ

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \Delta_c \sum_{k\sigma} C_{k\sigma}^+ C_{k+Q,\sigma} + \Delta_s \sum_{k\sigma} \sigma C_{k\sigma}^+ C_{k+Q,\sigma} + \Delta \sum_k (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow})$$

เมื่อพจน์แรกแสดงฮามิลโทเนียนจากการกระโดดของอิเล็กตรอนทองแดงจากอะตอมหนึ่งไปยังอะตอมข้างเคียง ส่วนพจน์ที่สองและสามแสดงฮามิลโทเนียนของสถานะ CDW และ SDW ตามลำดับ พจน์ที่สี่แสดงฮามิลโทเนียนของสถานะนำยวดยิ่ง ช่องว่างพลังงานของสถานะนำยวดยิ่ง สถานะ CDW และสถานะ SDW คือ

$$\begin{aligned} \Delta &= -V_0 \sum_k \langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow} \rangle \\ \Delta_c &= -V_1 \sum_{k\sigma} \langle C_{k\sigma}^+ C_{k+Q,\sigma} \rangle \\ \Delta_s &= -V_2 \sum_{k\sigma} \sigma \langle C_{k\sigma}^+ C_{k+Q,\sigma} \rangle \end{aligned}$$

โดย V_0, V_1, V_2 แสดงความแรงของอันตรกิริยา Q คือเลขคลื่นที่เกิดจากสถานะ CDW และสถานะ SDW

ในการคำนวณใช้ฟังก์ชันกรีนของอิเล็กตรอนตามเทคนิคของซูบาเรฟ ฟังก์ชันกรีนกำหนดโดย

$$\begin{aligned} A_1(k, \omega) &= \langle \langle C_{k\uparrow}; C_{k\uparrow}^+ \rangle \rangle \omega \\ A_2(k, \omega) &= \langle \langle C_{-k\downarrow}^+; C_{k\uparrow}^+ \rangle \rangle \omega \\ A_3(k, \omega) &= \langle \langle C_{k+Q,\uparrow}; C_{k\uparrow}^+ \rangle \rangle \omega \\ A_4(k, \omega) &= \langle \langle C_{-(k+Q),\uparrow}^+; C_{k\uparrow}^+ \rangle \rangle \omega \end{aligned}$$

ซึ่งหาได้จาก

$$\begin{aligned}
 A_1(k, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(\omega + \varepsilon_k)(\omega^2 - \varepsilon_{2k}^2)}{|D(\omega)|} \right] \\
 A_2(k, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\Delta(\omega^2 - \varepsilon_{2k}^2 - 2\Delta_s(\Delta_c - \Delta_s))}{|D(\omega)|} \right] \\
 A_3(k, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(\Delta_c + \Delta_s)(\omega^2 - \varepsilon_{2k}^2) + 2\Delta^2 \Delta_s}{|D(\omega)|} \right] \\
 A_4(k, \omega) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\omega + \varepsilon_k)\Delta_c \Delta_s}{|D(\omega)|} \right]
 \end{aligned}$$

จากผลการคำนวณได้ช่องว่างพลังงานในสถานะนำยวดยิ่งดังนี้

$$\Delta = -g \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (F_1 + F_2) d\varepsilon_k$$

เมื่อ $g = N(0)V_0$ และ

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\omega_{1k}^2 - \varepsilon_{2k}^2 - 2\Delta_s(\Delta_c - \Delta_s)}{\omega_{1k}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{1k}\right) \\
 F_2 &= \frac{\omega_{2k}^2 - \varepsilon_{1k}^2 - 2\Delta_s(\Delta_c - \Delta_s)}{\omega_{2k}} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{2k}\right)
 \end{aligned}$$

ช่องว่างพลังงานในสถานะ CDW คือ

$$\Delta_c = -g_1 \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (F_3 - F_4) d\varepsilon_k$$

เมื่อ $g_1 = N(0)V_1$ และ

$$F_3 = \frac{\Delta_c(2\omega_{1k}^2 - e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + \Delta_s(e_{1k}^2 - e_{2k}^2)}{2\omega_{1k}(\omega_{1k}^2 - \omega_{2k}^2)} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{1k}\right)$$

$$F_4 = \frac{\Delta_c(2\omega_{2k}^2 - e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + \Delta_s(e_{1k}^2 - e_{2k}^2)}{2\omega_{1k}(\omega_{1k}^2 - \omega_{2k}^2)} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{2k}\right)$$

และช่องว่างพลังงานในสถานะ SDW คือ

$$\Delta_s = -g_2 \int_{-\omega_c}^{\omega_c} (F_5 - F_6) d\varepsilon_k$$

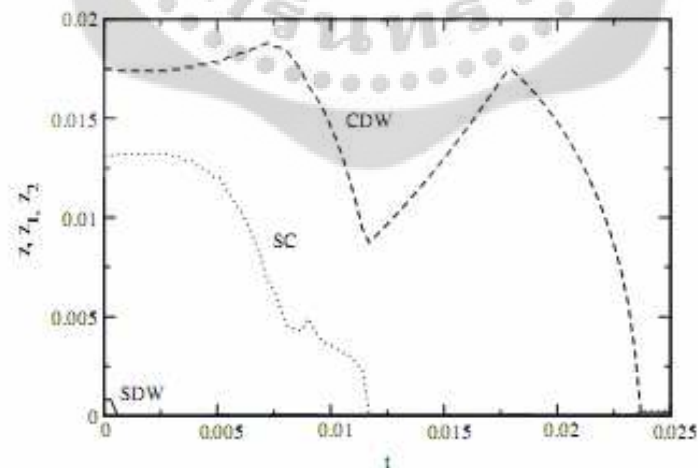
เมื่อ $g_2 = N(0)V_2$ และ

$$F_5 = \frac{\Delta_s(2\omega_{1k}^2 - e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + \Delta_c(e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + 4\Delta^2\Delta_s^2}{2\omega_{1k}(\omega_{1k}^2 - \omega_{2k}^2)} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{1k}\right)$$

$$F_6 = \frac{\Delta_s(2\omega_{2k}^2 - e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + \Delta_c(e_{1k}^2 - e_{2k}^2) + 4\Delta^2\Delta_s^2}{2\omega_{1k}(\omega_{1k}^2 - \omega_{2k}^2)} \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega_{2k}\right)$$

ถ้ากำหนด $z = \frac{\Delta}{2t_0}$, $z_1 = \frac{\Delta_c}{2t_0}$, $z_2 = \frac{\Delta_s}{2t_0}$ กราฟระหว่างช่องว่างพลังงานทั้งสามกรณีกับอุณหภูมิเมื่อ

พิจารณา $g = 0.4512$, $g_1 = 0.0941$, $g_2 = 0.1095$ แสดงดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงช่องว่างพลังงานทั้งสามสถานะในรูป z, z_1, z_2 กับอุณหภูมิ

ที่มา: Panda & Rout.(2009).Physica C.p.702-706.

ดังภาพประกอบ 10 แสดงว่าช่องว่างพลังงานทั้งสามชนิดแปรค่าตามอุณหภูมิ ช่องว่างพลังงานสถานะ SDW จะปรากฏที่อุณหภูมิต่ำมาก ช่วงอุณหภูมิสูงสุดที่ช่องว่างพลังงานสถานะนำยวดยิ่งและสถานะ CDW เกิดขึ้นพร้อมกันคือที่ $t \simeq 0.0116$ ช่องว่างพลังงานสถานะ CDW จะปรากฏจนถึงอุณหภูมิ $t = 0.023$ ถ้าพิจารณาเฉพาะสถานะ CDW พบว่าช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิ $t = 0.018$ จะมีค่าสูงสุดหลังจากนั้นช่องว่างพลังงานจะลดลงตามค่าอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น ซึ่งข้อมูลนี้สอดคล้องกับผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่งประเภท $Bi2212$ ดังที่อิิกิโนและคณะได้ทำการศึกษาไว้

2.6 ผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยวดยิ่ง

เราท์และดาส (Rout & Das.2000:17-26) ได้ศึกษาผลของไฮบริดเซชันระหว่างแถบพลังงานสองแถบ ต่อสภาพนำยวดยิ่งสำหรับตัวนำยวดยิ่งประเภทเฟอร์มิออนหนัก โดยศึกษาการแปรค่าตามอุณหภูมิของช่องว่างพลังงานตามค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน ซึ่งพิจารณาพลังงานของอิเล็กตรอนจากแถบการนำและจากแถบวงโคจรที่ f ฮามิลโทเนียนคือ

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{k\sigma} E_0 f_{k\sigma}^+ f_{k\sigma} + \gamma_0 \sum_{k\sigma} (f_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} + c_{k\sigma}^+ f_{k\sigma})$$

พจน์ที่หนึ่งแสดงฮามิลโทเนียนจากแถบการนำ โดย ε_k คือพลังงานจลน์ของแถบการนำ พจน์ที่สองแสดงฮามิลโทเนียนจากแถบวงโคจรที่ f โดย E_0 คือพลังงานรวมของแถบวงโคจรที่ f และพจน์ที่สามแสดงฮามิลโทเนียนจากไฮบริดเซชันระหว่างแถบการนำและแถบวงโคจรที่ f โดย γ_0 คือสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน ช่องว่างพลังงานหาจากฟังก์ชันกรีนซึ่งมีค่าดังนี้

$$\Delta = g_1 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\Delta}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} [F_1(k, T) - F_2(k, T)] d\varepsilon_k$$

เมื่อ

$$F_1(k, T) = \frac{(\omega_1^2 - E_0^2)}{\omega_1} \tanh\left(\frac{1}{2} \beta \omega_1\right)$$

$$F_2(k, T) = \frac{(\omega_2^2 - E_0^2)}{\omega_2} \tanh\left(\frac{1}{2} \beta \omega_2\right)$$

และ $g_1 = N(0)V_0$ เพื่อความสะดวกต่อการพิจารณากำหนด

$$z = \frac{\Delta(T)}{\omega_D}, \tilde{E}_k = \sqrt{x^2 + z^2}, d_1 = \frac{E_0}{\omega_D}$$

$$g_1 = N(0)V_0, d = \frac{\varepsilon_f}{\omega_D}, x = \frac{\varepsilon_k}{\omega_D}$$

$$u = \frac{U}{\omega_D}, \tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_D}, \tilde{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega_D}$$

$$v = \frac{\gamma_0}{\omega_D}, t = \frac{k_B T}{\omega_D}$$

จะได้สมการช่องว่างพลังงานคือ

$$z = g_1 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{z}{2(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)} [F_1(k, T) - F_2(k, T)] dx$$

โดย

$$F_1(k, T) = \frac{(\tilde{\omega}_1^2 - d_1^2)}{\tilde{\omega}_1} \tanh\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{2t}\right)$$

$$F_2(k, T) = \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - d_1^2)}{\tilde{\omega}_2} \tanh\left(\frac{\tilde{\omega}_2}{2t}\right)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \pm \left[\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4t_1}}{2} \right]^{1/2}$$

$$\tilde{\omega}_2 = \pm \left[\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4t}}{2} \right]^{1/2}$$

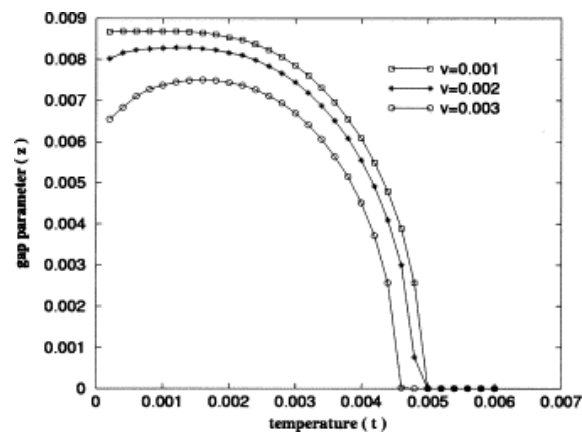
$$s_1 = d_1^2 + \tilde{E}_k^2 + 2v^2$$

$$t_1 = \tilde{E}_k^2 d_1^2 - 2x d_1 v^2 + v^4$$

$$d_1 = d + u$$

$$\tilde{E}_k^2 = (x^2 + z^2)$$

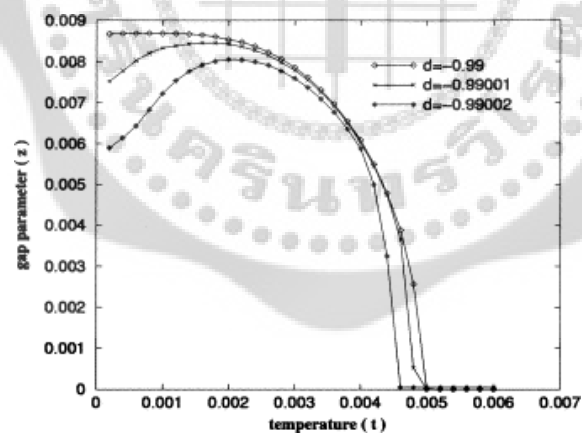
กราฟระหว่างช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิที่ $v = 0.001, 0.002, 0.003$ แสดงดังภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงกราฟระหว่างช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิที่ $v = 0.001, 0.002$ และ 0.003 สำหรับ $d = -0.99, u = 0.99$ และ $g_1 = 0.184292$

ที่มา: Rout & Das.(2000).Physica C.p.23.

กราฟระหว่างช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิที่ $d = -0.99, -0.99001, -0.99002$ แสดงดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แสดงกราฟระหว่างช่องว่างพลังงานและอุณหภูมิที่ $d = -0.99, -0.99001$ และ -0.99002 สำหรับ $v = 0.001, u = 0.99, g_1 = -0.184292$

ที่มา: Rout & Das.(2000).Physica C.p.24.

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยในครั้งนี้ได้นำแบบจำลองสภาพนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน มาประยุกต์สำหรับศึกษากลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง โดยมีจุดประสงค์ในการศึกษาสองส่วนคือ ส่วนแรกศึกษาผลของไฮบริดเซชันต่ออุณหภูมิวิกฤติ ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน กับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ส่วนที่สองศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียมต่ออุณหภูมิวิกฤติ ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน กับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป รายละเอียดมีดังนี้

3.1 ศึกษาผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยวดยิ่ง

ในการพิจารณาผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยวดยิ่ง แถบพลังงานสองแถบที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งคือแถบการนำและแถบอื่นๆ ที่ไม่ใช่แถบการนำ คู่คูเปอร์เกิดขึ้นที่แถบพลังงานทั้งสอง ฮามิลโทเนียนของแถบการนำและแถบอื่นๆ ที่ไม่ใช่แถบการนำแทนด้วย H_1 และ H_2 ตามลำดับ นอกจากนี้ยังได้พิจารณาอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนจากแถบพลังงานทั้งสอง หรือไฮบริดเซชันระหว่างแถบพลังงานทั้งสอง โดยฮามิลโทเนียนแทนด้วย H_{12} กำหนดฮามิลโทเนียนรวมคือ

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \quad (3.1)$$

เมื่อ H_1 คือฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานแถบที่หนึ่ง H_2 คือฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานแถบที่สองและ H_{12} คือฮามิลโทเนียนจากไฮบริดเซชันระหว่างแถบพลังงานทั้งสองโดย

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \Delta \sum_k (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) \\ H_2 &= \sum_{k\sigma} E_k f_{k\sigma}^+ f_{k\sigma} - \Delta \sum_k (f_{k\uparrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ + f_{-k\downarrow} f_{k\uparrow}) \\ H_{12} &= \gamma_0 \sum_{k\sigma} (f_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + C_{k\sigma}^+ f_{k\sigma}) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

จากสมการ (3.2) สามารถเขียนสมการ (3.1) ดังนี้

$$\begin{aligned}
H = & \sum_k \varepsilon_k (C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k\uparrow}^+ C_{-k\uparrow}) + \sum_k E_k (f_{k\uparrow}^+ f_{k\uparrow} + f_{-k\uparrow}^+ f_{-k\uparrow}) \\
& - \Delta \sum_k (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} + f_{k\uparrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ + f_{-k\downarrow} f_{k\uparrow}) \\
& + \gamma_0 \sum_k (f_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + f_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} + C_{k\uparrow}^+ f_{k\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ f_{-k\downarrow})
\end{aligned} \quad (3.3)$$

ปริมาณ ε_k และ E_k แสดงพลังงานของแถบพลังงานที่ 1 และ 2 ตามลำดับ Δ คือช่องว่างพลังงานซึ่งเกิดจากการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นคู่อุปเปอร์ γ_0 คือสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันระหว่างแถบพลังงานทั้งสอง และ $C_{k\sigma}^+$ ($C_{k\sigma}$), $f_{k\sigma}^+$ ($f_{k\sigma}$) คือตัวดำเนินการสร้าง(ทำลาย) สำหรับแถบพลังงานที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ช่องว่างพลังงานหาจากฟังก์ชันกรีน ซึ่งฟังก์ชันกรีนที่อุณหภูมิใดๆ $G(k, \tau)$ กำหนดดังนี้

$$G(k, \tau) = -\langle T_\tau \psi_k(\tau) \psi_k^*(0) \rangle \quad (3.4)$$

โดย $\psi_k^*(\tau) = (C_{k\uparrow}^+ \quad C_{-k\downarrow}^+ \quad f_{k\uparrow}^+ \quad f_{-k\downarrow}^+)$ และ $\psi_k(\tau) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C_{-k\downarrow}^+ \\ f_{k\uparrow} \\ f_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix}$ เมื่อ T_τ คือตัวดำเนินการอันดับ

เวลา $\tau = it$ แทนค่า $\psi_k(\tau)$ และ $\psi_k^*(0)$ ลงในสมการ (3.4) ได้

$$G_{kk'}(\tau) = -\left\langle T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ & C_{k\uparrow} C_{-k\downarrow}^+ & C_{k\uparrow} f_{k\uparrow}^+ & C_{k\uparrow} f_{-k\downarrow}^+ \\ C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ & C_{-k\downarrow}^+ f_{k\uparrow}^+ & C_{-k\downarrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \\ f_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ & f_{k\uparrow} C_{-k\downarrow}^+ & f_{k\uparrow} f_{k\uparrow}^+ & f_{k\uparrow} f_{-k\downarrow}^+ \\ f_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ & f_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ & f_{-k\downarrow}^+ f_{k\uparrow}^+ & f_{-k\downarrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \end{pmatrix} \right\rangle$$

สามารถเขียนในรูป

$$G_{kk'}(\tau) = -\begin{pmatrix} \langle -T_\tau C_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{k\uparrow} C_{-k\downarrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{k\uparrow} f_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{k\uparrow} f_{-k\downarrow}^+ \rangle \\ \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ f_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau C_{-k\downarrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \rangle \\ \langle -T_\tau f_{k\uparrow} C_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{k\uparrow} C_{-k\downarrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{k\uparrow} f_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{k\uparrow} f_{-k\downarrow}^+ \rangle \\ \langle -T_\tau f_{-k\downarrow}^+ C_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{-k\downarrow}^+ f_{k\uparrow}^+ \rangle & \langle -T_\tau f_{-k\downarrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \rangle \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

แทนด้วย

$$G_{kk'}(\tau) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

ช่องว่างพลังงาน Δ กำหนดดังนี้

$$\Delta = \frac{V}{2} \sum_k (\langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle + \langle f_{k\uparrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \rangle)$$

เขียนเป็น

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{V}{2} \sum_k (-\langle T_\tau C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle - \langle T_\tau f_{k\uparrow}^+ f_{-k\downarrow}^+ \rangle) \\ &= \frac{V}{2} \sum_k (\langle T_\tau C_{-k\uparrow}^+ C_{k\downarrow}^+ \rangle + \langle T_\tau f_{-k\uparrow}^+ f_{k\downarrow}^+ \rangle) \\ \Delta &= \frac{VT}{2} \sum_k (\langle C_{-k\uparrow}^+ C_{k\downarrow}^+ \rangle + \langle f_{-k\uparrow}^+ f_{k\downarrow}^+ \rangle) \end{aligned} \quad (3.7)$$

เปรียบเทียบกับสมการ (3.7) กับสมการ (3.5) และ (3.6) จะได้ว่า

$$\Delta = \frac{VT}{2} \sum_k (G_{21} + G_{43}) \quad (3.8)$$

จากการคำนวณได้ผลคือ

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{VT}{2} \sum_k \left(\frac{A^2 \Delta}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} - \frac{2ab\Delta}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^2 \Delta}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} + \frac{2ab\Delta}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} \right) \\ 1 &= VT \sum_k \left(\frac{A^2}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

เนื่องจาก $A^2 = \omega_n^2 + b^2 + a^2 + \Delta^2 + \gamma_0^2$ เมื่อ $a = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2}$ และ $b = \frac{\varepsilon_k - E_k}{2}$ ดังนั้น

$$1 = VT \sum_k \left(\frac{\omega_n^2 + b^2 + a^2 + \Delta^2 + \gamma_0^2}{A^4 - (2ab)^2 - (2a\gamma_0)^2} \right) \quad (3.10)$$

เมื่อแทนค่า A ลงในสมการ (3.10)

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + E_-^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + E_-^2}} + \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + E_+^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + E_+^2}} \right] \quad (3.11)$$

โดย
$$E_+ = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2} \quad (3.12)$$

$$E_- = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2} \quad (3.13)$$

ซึ่ง E_+, E_- คือค่าพลังงานสูงสุดและต่ำสุด เนื่องจากพลังงานประกอบด้วยพลังงานจากแถบการนำ ε_k พลังงานจากแถบอื่นที่ไม่ใช่แถบการนำ E_k และพลังงานจากไฮบริดเซชัน γ_0 โดยพลังงาน ε_k และ E_k อาจเป็นไปได้หลายกรณี ซึ่งในการคำนวณแบ่งเป็นสองกรณีคือ กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ และกรณี $E_k \simeq 0$

กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

รายละเอียดในการคำนวณแบ่งเป็น 4 กรณีคือ

3.1.1 อุณหภูมิวิกฤตจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

ในกรณีนี้พลังงานดังสมการ (3.12) และ (3.13) คือ

$$E_+ = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2} = \varepsilon_k + \gamma_0$$

$$E_- = \frac{\varepsilon_k + E_k}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k - E_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2} = \varepsilon_k - \gamma_0$$

แทนค่า E_-, E_+ ลงในสมการ (3.11)

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} + \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} \right\} \quad (3.14)$$

ถ้าพิจารณาที่ $T = T_c$ ช่องว่างพลังงาน $\Delta = 0$ ดังนั้นสมการ (3.14) คือ

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} \right\}$$

เปลี่ยน $\sum_k$ เป็น $N(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D}$ เมื่อ $N(0)$ แทนความหนาแน่นสถานะ และกำหนด $\lambda = N(0)V$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.15)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.15) โดยกำหนดให้ $x = \varepsilon_k - \gamma_0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k &= \int_{-\omega_D - \gamma_0}^{\omega_D - \gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{x}{2T_c}\right)}{x} dx \\ &= \ln \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right)^2 (\omega_D^2 - \gamma_0^2) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

เมื่อ $\gamma = 1.78$ ในทำนองเดียวกันพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.15) เมื่อกำหนดให้ $x = \varepsilon_k + \gamma_0$ คือ

$$\begin{aligned}
\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k &= \int_{-\omega_D + \gamma_0}^{\omega_D + \gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{x}{2T_c}\right)}{x} dx \\
&= \ln \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right)^2 (\omega_D^2 - \gamma_0^2) \right\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

แทนสมการ (3.16) และ (3.17) ลงในสมการ (3.15)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left[\ln \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right)^2 (\omega_D^2 - \gamma_0^2) \right\} + \ln \left\{ \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right)^2 (\omega_D^2 - \gamma_0^2) \right\} \right]$$

จัดรูปจะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \ln \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} \right) \tag{3.18}$$

จากสมการ (3.18) หาอุณหภูมิวิกฤตดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{2\gamma}{\pi T_c} \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} &= e^{1/\lambda} \\
T_c &= 1.13 \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} e^{-1/\lambda}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.1.2 ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

จากสมการ (3.14)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} + \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} \right]$$

เนื่องจากพิจารณาที่ $T = 0K$ แทน Δ ด้วย $\Delta(0)$ เปลี่ยน $\sum_k$ เป็น $N(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D}$ แทน

$\lambda = N(0)V$ และจาก $\tanh \infty = 1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.20)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.20) กำหนด $x = \varepsilon_k - \gamma_0$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k &= \int_{-\omega_D - \gamma_0}^{\omega_D - \gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\Delta(0)} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.20) กำหนด $x = \varepsilon_k + \gamma_0$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \int_0^{\omega_D + \gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\Delta(0)} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

แทนสมการ (3.21) และ (3.22) ลงในสมการ (3.20) และพิจารณากรณี $\omega_D \gg \Delta(0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \ln \left(\frac{2}{\Delta(0)} \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} \right) \\ \frac{2}{\Delta(0)} \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} &= e^{1/\lambda} \\ \Delta(0) &= 2 \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} e^{-1/\lambda} \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.1.3 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

จาก $T_c = 1.13\sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2}e^{-1/\lambda}$

และ

$$\Delta(0) = 2\sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2}e^{-1/\lambda}$$

จะได้ว่า

$$R \equiv \frac{2\Delta(0)}{T_c} = \frac{4\sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2}e^{-1/\lambda}}{1.13\sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2}e^{-1/\lambda}}$$

$$R = 3.53 \quad (3.24)$$

3.1.4 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

ในการหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเริ่มจากสมการ (3.15) คือ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D

$$\frac{d}{d\omega_D} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\}$$

$$0 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.25)$$

กำหนด $x = \frac{\varepsilon_k - \gamma_0}{2T_c}$ ดังนั้นพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.25) คือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k &= \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} \\ &\quad - \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.25) กำหนด $x = \frac{\varepsilon_k + \gamma_0}{2T_c}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega_D} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k &= \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} \\ &\quad - \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

แทนค่าสมการ (3.26) และ (3.27) ลงในสมการ (3.25)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} - \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} - \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{T_c} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = \frac{T_c \left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} \right]}{\left\{ \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) \right\}} \quad (3.28)$$

จากสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{T_c} \frac{dT_c}{d\omega_D}$$

แทนค่า $\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D}$ จากสมการ (3.28) ได้

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \frac{\left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} \right]}{\left\{ \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) \right\}} \quad (3.29)$$

กรณี $E_k \simeq 0$

รายละเอียดในการคำนวณแบ่งเป็น 4 กรณีคือ

3.1.5 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

เนื่องจากการพิจารณาพลังงานจากแถบการนำและพลังงานจากแถบอื่นที่ไม่ใช่แถบการนำ ถ้าพลังงานของอิเล็กตรอนจากแถบอื่นที่ไม่ใช่แถบการนำ มีค่าต่ำกว่าพลังงานจากแถบการนำมาก ๆ จึงประมาณได้ว่า $E_k \simeq 0$ ในกรณีนี้พลังงานดังสมการ (3.12) และ (3.13) มีค่าดังนี้

จาก
$$E_+ = \frac{\varepsilon_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2}$$

กรณี $\varepsilon_k < \gamma_0$ ค่า $E_+ = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ และกรณี $\varepsilon_k > \gamma_0$ ค่า $E_+ = \varepsilon_k$

และจาก
$$E_- = \frac{\varepsilon_k}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_k}{2}\right)^2 + \gamma_0^2}$$

กรณี $\varepsilon_k < \gamma_0$ ค่า $E_- = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ และกรณี $\varepsilon_k > \gamma_0$ ค่า $E_- = 0$

จากสมการ (3.15) เขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k \right\}$$

กระจายดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k \right. \\ & \left. + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

อาจเขียนเป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k \right. \\ & \left. + 2 \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k - 2 \int_0^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.31) เนื่องจากบริเวณนี้ $E_- = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \lim_{E_- \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = \frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{2\gamma_0}{2T_c} \quad (3.32)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.31) เนื่องจากบริเวณนี้ $E_- = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ จะได้ว่า

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0} d\varepsilon_k$$

กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ ดังนั้น

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = 2 \int_{-2\gamma_0}^0 \frac{\tanh\left(\frac{x}{2T_c}\right)}{x} dx = 2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} \quad (3.33)$$

พิจารณาพจน์ที่สามทางขวามือสมการ (3.31) เนื่องจากบริเวณนี้ $E_- = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \lim_{E_- \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k = \frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{2\gamma_0}{2T_c} \quad (3.34)$$

พิจารณาพจน์ที่สี่ทางขวามือสมการ (3.31)

$$2 \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k = 2 \ln \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} \quad (3.35)$$

พิจารณาพจน์ที่ห้าทางขวามือสมการ (3.31)

$$-2 \int_0^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k = -2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} \quad (3.36)$$

พิจารณาพจน์ที่หกทางขวามือสมการ (3.31) กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ จะได้

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k = 2 \int_0^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{x}{2T_c}\right)}{x} dx = 2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} \quad (3.37)$$

แทนค่าสมการ (3.32)-(3.37) ลงในสมการ (3.31)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{2\gamma_0}{2T_c} + 2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} + \frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{2\gamma_0}{2T_c} + 2 \ln \frac{2\gamma\omega_D}{\pi T_c} - 2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} + 2 \ln \frac{2\gamma(2\gamma_0)}{\pi T_c} \right\}$$

ผลลัพธ์คือ

$$\frac{1}{\lambda} = \ln \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right) \left(\sqrt{2\gamma_0\omega_D} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) \quad (3.38)$$

จากสมการ (3.38) หาอุณหภูมิวิกฤตดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) &= \ln \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right) \left(\sqrt{2\gamma_0\omega_D} \right) \\ \left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right) \left(\sqrt{2\gamma_0\omega_D} \right) &= e^{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\gamma = 1.78$ ดังนั้น

$$T_c = 1.13 \sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right)} \quad (3.39)$$

3.1.6 ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

จากสมการ (3.20)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

กระจาย

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k \right. \\ & \left. + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.40) \end{aligned}$$

แทนค่า E_-, E_+ สมการ (3.40) มีค่าดังนี้

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k \right. \\ \left. + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.41)$$

พิจารณาพจน์ที่หนึ่งของสมการ (3.41)

$$\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon_k = \frac{1}{\Delta(0)} (\omega_D - 2\gamma_0) \quad (3.42)$$

พิจารณาพจน์ที่สองของสมการ (3.41) กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ ดังนั้น

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k = 2 \int_{-2\gamma_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\ = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) \quad (3.43)$$

พิจารณาพจน์ที่สามของสมการ (3.41)

$$\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon_k = \frac{1}{\Delta(0)} (\omega_D - 2\gamma_0) \quad (3.44)$$

พิจารณาพจน์ที่สี่ของสมการ (3.41) กำหนดให้ $x = \varepsilon_k$ ดังนั้น

$$\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\ = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) \quad (3.45)$$

พิจารณาพจน์ที่ห้าของสมการ (3.41) กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \int_0^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\
&= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

พิจารณาพจน์ที่หกของสมการ (3.41) กำหนดให้ $x = \varepsilon_k$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_k^2}} d\varepsilon_k &= \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + x^2}} dx \\
&= \left(\sinh^{-1} \left(\frac{x}{\Delta(0)} \right) \right)_{2\gamma_0}^{\omega_D} \\
\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\Delta(0)^2 + E_k^2}} d\varepsilon_k &= \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

แทนค่าสมการ (3.42)-(3.47) ลงในสมการ (3.41)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\Delta(0)} (\omega_D - 2\gamma_0) + 2 \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) + \frac{1}{\Delta(0)} (\omega_D - 2\gamma_0) + \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) + 2 \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\Delta(0)} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\Delta(0)} (\omega_D - 2\gamma_0) + 2 \ln \left(\frac{2\sqrt{2\gamma_0\omega_D}}{\Delta(0)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. \ln \left(\frac{2\sqrt{2\gamma_0\omega_D}}{\Delta(0)} \right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{(\omega_D - 2\gamma_0)}{\Delta(0)} \right. \\
&\quad \left. \Delta(0) = 2\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{(\omega_D - 2\gamma_0)}{\Delta(0)}} \right.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

3.1.7 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

$$\text{จาก} \quad T_c = 1.13 \sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right)}$$

$$\text{และ} \quad \Delta(0) = 2\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{(\omega_D - 2\gamma_0)}{\Delta(0)}}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 R &\equiv \frac{2\Delta(0)}{T_c} = \frac{4\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{(\omega_D - 2\gamma_0)}{\Delta(0)}}}{1.13\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right)}} \\
 &= 3.53 e^{\left(\frac{\omega_D - 2\gamma_0}{T_c} \right) \left(\frac{T_c}{2\Delta(0)} - \frac{1}{4} \right)} \\
 R &= 3.53 e^{\left(\frac{\omega_D - 2\gamma_0}{T_c} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4} \right)} \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

3.1.8 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

ในการหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเริ่มจากสมการ (3.15) ซึ่งเขียนในรูป

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k \right\}$$

กระจายดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_-}{2T_c}\right)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{E_+}{2T_c}\right)}{E_+} d\varepsilon_k \right\}
 \end{aligned}$$

แทนค่า E_- และ E_+ จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{\lambda} &= 2 \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0} d\varepsilon_k + 2 \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0} d\varepsilon_k
 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega_D} \frac{4}{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \omega_D} 2 \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega_D} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\varepsilon_k - \gamma_0}{2} \right)}{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0} d\varepsilon_k \\ &+ \frac{\partial}{\partial \omega_D} 2 \int_{\frac{\omega_D}{2\gamma_0}}^{\frac{\omega_D}{2\gamma_0}} \frac{\tanh \left(\frac{\varepsilon_k}{2T_c} \right)}{\varepsilon_k} d\varepsilon_k + \frac{\partial}{\partial \omega_D} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\varepsilon_k + \gamma_0}{2} \right)}{\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0} d\varepsilon_k \end{aligned}$$

ผลลัพธ์คือ

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = \frac{T_c \left(1 + \frac{2T_c}{\omega_D} \tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) \right)}{\left\{ (\omega_D - 2\gamma_0) + 2T_c \left(\tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\gamma_0}{T_c} \right) \right) \right\}} \quad (3.56)$$

จากสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{T_c} \frac{dT_c}{d\omega_D}$$

แทนค่า $\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D}$ จากสมการ (3.56)

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\omega_D} \tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) \right)}{\left\{ \omega_D - 2\gamma_0 + 2T_c \left(\tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\gamma_0}{T_c} \right) \right) \right\}} \right] \quad (3.57)$$

3.2 ศึกษาผลของช่องว่างพลังงานเทียบกับสภาพนำยวดยิ่ง

ในกรณีนี้ช่องว่างพลังงานรวม Δ กรณีพิจารณาช่องว่างพลังงานเทียบกับสมการเขียนในรูป (Udomsamuthirun.2001:316)

$$\Delta^2 = \Delta(T)^2 + \Delta_0^2 \quad (3.58)$$

เมื่อ Δ แทนช่องว่างพลังงานรวมที่อุณหภูมิใดๆ $\Delta(T)$ แทนช่องว่างพลังงานสถานะนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิใดๆ และ Δ_0 แทนช่องว่างพลังงานเทียบกับ สมการ (3.11)

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + E_-^2}}{2T} \right)}{\sqrt{\Delta^2 + E_-^2}} + \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + E_+^2}}{2T} \right)}{\sqrt{\Delta^2 + E_+^2}} \right]$$

แทน Δ^2 จากสมการ (3.58) จะได้ว่า

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{(\Delta(T)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}}{2T} \right)}{\sqrt{(\Delta(T)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} + \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{(\Delta(T)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}}{2T} \right)}{\sqrt{(\Delta(T)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} \right] \quad (3.59)$$

ถ้าพิจารณาที่อุณหภูมิวิกฤติ $\Delta(T_c) = 0$ สมการ (3.58) คือ

$$\Delta^2 = 0^2 + \Delta_0^2 = \Delta_0^2 \quad (3.60)$$

แทนค่าสมการ (3.60) ลงในสมการ (3.59)

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{4} \sum_k \left[\frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} + \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} \right]$$

เปลี่ยน $\sum_k$ เป็น $N(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D}$ และกำหนด $\lambda = N(0)V$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.61)$$

การคำนวณแบ่งเป็นสองกรณีคือกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ และกรณี $E_k \simeq 0$

กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

3.2.1 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

ในกรณีนี้พลังงานดังสมการ (3.12) และ (3.13) คือ $E_- = \varepsilon_k - \gamma_0$ และ $E_+ = \varepsilon_k + \gamma_0$ แทนค่า E_-, E_+ ลงในสมการ (3.61)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.62)$$

สำหรับพจน์ที่หนึ่งทางขวามือสมการ (3.62) กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T_c}$ และสำหรับ

พจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.62) กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T_c}$ สมการ (3.62) เขียน

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{2T_c x} \cdot \frac{2T_c \sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{\varepsilon_k - \gamma_0} dx \right.$$

$$+ \left. \int_{-\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}}^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{2T_c x} \cdot \frac{2T_c \sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{\varepsilon_k + \gamma_0} dx \right\} \quad (3.63)$$

เนื่องจาก $(\varepsilon_k \pm \gamma_0) \gg \Delta_0$ ดังนั้น $\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k \pm \gamma_0)^2} \simeq (\varepsilon_k \pm \gamma_0)$ สมการ (3.63) คือ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{x} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{x} dx \right]$$

อินทิเกรตแบบแยกส่วน

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = & \frac{1}{2} \left\{ (\ln x)(\tanh x) \right\}_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}} (\ln x)(\operatorname{sech}^2 x) dx \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (\ln x)(\tanh x) \right\}_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} (\ln x)(\operatorname{sech}^2 x) dx \end{aligned}$$

เนื่องจากประมาณ $\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D \pm \gamma_0)^2}}{2T_c} \rightarrow \infty$ และ $\tanh \infty = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = & \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4e^\gamma} \right) + \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4e^\gamma} \right) \\ = & \ln \left[\frac{1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)} \right)^{1/2}}{T_c} \right] \end{aligned}$$

เมื่อ $\gamma \simeq 0.577$ และ $e^\gamma \simeq 1.78$ โดย γ คือค่าคงตัวของออยเลอร์ คุณสมบัติแสดงดังนี้

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (3.64)$$

3.2.2 ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี

$$\varepsilon_k \simeq E_K$$

จากสมการ (3.58) ช่องว่างพลังงานรวมที่ศูนย์เคลวินคือ

$$\Delta^2 = \Delta(0)^2 + \Delta_0^2 \quad (3.65)$$

เมื่อ $\Delta(0)$ คือช่องว่างพลังงานที่สถานะนำยวดยิ่งที่ศูนย์เคลวิน สมการ (3.59) เมื่อแทนสมการ (3.65)

เปลี่ยน $\sum_k$ เป็น $N(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D}$ และกำหนด $\lambda = N(0)V$ จาก $\tanh \infty = 1$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} dE_- + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} dE_+ \right\}$$

แทนค่า E_-, E_+

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k \right\} \quad (3.66)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.66) กำหนด $x = \varepsilon_k - \gamma_0$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k &= \int_{-\omega_D - \gamma_0}^{\omega_D - \gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + x^2}} dx \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.66) กำหนด $x = \varepsilon_k + \gamma_0$ จะได้

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \int_0^{\omega_D + \gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + x^2}} dx \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.68)$$

แทนสมการ (3.67) และ (3.68) ลงในสมการ (3.66)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) + 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.69)$$

จากความสัมพันธ์ $\sinh^{-1} x \simeq \ln 2x$ ถ้า $x \rightarrow \infty$ ซึ่งในกรณีนี้ $\omega_D \gg \sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}$ ทำให้ $2(\omega_D - \gamma_0)/\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2} \rightarrow \infty$ ดังนั้นสมการ (3.69) ประมาณดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{2(\omega_D - \gamma_0)}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) + \ln \left(\frac{2(\omega_D + \gamma_0)}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} \\ &= \ln \left(2 \sqrt{\frac{\omega_D^2 - \gamma_0^2}{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right)\end{aligned}$$

ได้

$$\Delta(0) = \sqrt{4(\omega_D^2 - \gamma_0^2)e^{-\frac{2}{\lambda}} - \Delta_0^2} \quad (3.70)$$

3.2.3 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_K$

จากสมการ (3.64)

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

และสมการ (3.70)

$$\Delta(0) = \sqrt{4(\omega_D^2 - \gamma_0^2)e^{-\frac{2}{\lambda}} - \Delta_0^2}$$

สามารถหา $2\Delta(0)/T_c$ ดังนี้

$$R \equiv \frac{2\Delta(0)}{T_c} = \frac{2\sqrt{4(\omega_D^2 - \gamma_0^2)e^{-\frac{2}{\lambda}} - \Delta_0^2}}{1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}}} \quad (3.71)$$

3.2.4 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

จากสมการ (3.62)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{2T_c}$ สำหรับพจน์ที่หนึ่งทางขวามือ

และกำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{2T_c}$ สำหรับพจน์ที่สองทางขวามือ สมการ (3.62) เขียน

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{2T_c x} \cdot \frac{2T_c \sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k - \gamma_0)^2}}{\varepsilon_k - \gamma_0} dx + \int_{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}}^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{2T_c x} \cdot \frac{2T_c \sqrt{\Delta_0^2 + (\varepsilon_k + \gamma_0)^2}}{\varepsilon_k + \gamma_0} dx \right\}$$

อาจเขียนเป็น

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{x} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \frac{\tanh x}{x} dx \right\} \quad (3.72)$$

สมการ (3.72) หาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D

$$0 = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} \left(\frac{1}{T_c} \right) \frac{dT_c}{d\omega_D} \right] + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} \left(\frac{(\omega_D - \gamma_0)}{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2} \right) \right. \\ \left. + \left[-\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \left(\frac{1}{T_c} \right) \frac{dT_c}{d\omega_D} \right] + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \left(\frac{(\omega_D + \gamma_0)}{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2} \right) \right\}$$

$$\frac{dT_c}{d\omega_D} = T_c \left\{ \frac{\left(\frac{(\omega_D - \gamma_0)}{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2} \right) \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{(\omega_D + \gamma_0)}{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2} \right) \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}} \right\} / \\ \left\{ \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right\}$$

จากสมประสิทธิ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{T_c} \frac{dT_c}{d\omega_D}$$

แทนค่า $\frac{dT_c}{d\omega_D}$

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \left\{ \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}{(\omega_D - \gamma_0)} \right)} + \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}{(\omega_D + \gamma_0)} \right)} \right\} / \\ \left\{ \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right\} \quad (3.76)$$

กรณี $E_k \simeq 0$

3.2.5 อุณหภูมิจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

สำหรับกรณีนี้พลังงานดังสมการ (3.12) และ (3.13) ในกรณีที่ $\varepsilon_k < \gamma_0$ จะได้ $E_+ = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ และ $E_- = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ และกรณีที่ $\varepsilon_k > \gamma_0$ จะได้ $E_+ = \varepsilon_k$ และ $E_- = 0$ จากสมการ (3.61)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

กระจาย

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k \right. \\ & \left. + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือสมการ (3.77) เนื่องจาก $E_- = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k &= \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \lim_{E_- \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k \\ &= \frac{\text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) \end{aligned} \quad (3.78)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.77) เมื่อ $E_- = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ จะได้ว่า

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k = \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k$$

กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}}{2T_c}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k &= \int_{\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}/2T_c}^{\Delta_0/2T_c} \frac{\tanh x}{2T_c x} \frac{4T_c \sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}}{\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0} dx \\ &= 2 \left\{ \frac{\Delta_0}{2T_c} - \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} \right\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

พิจารณาพจน์ที่สามทางขวามือสมการ (3.77) เนื่องจาก $E_- = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k &= \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \lim_{E_- \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k \\ &= \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) \end{aligned} \quad (3.80)$$

พิจารณาพจน์ที่สี่ทางขวามือสมการ (3.77) เนื่องจาก $E_+ = \varepsilon_k$ จะได้ว่า

$$\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k$$

กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c}$ ดังนั้น

$$\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = 2 \ln \frac{2\gamma\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} \quad (3.81)$$

พิจารณาพจน์ที่ห้าทางขวามือสมการ 3.77 เนื่องจาก $E_+ = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ จะได้ว่า

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k$$

กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}}{2T_c}$ จะได้ว่า

$$\int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = 2 \left\{ \ln \frac{2\gamma\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} \right\} \quad (3.82)$$

พิจารณาพจน์ที่หกทางขวามือสมการ 3.77 เนื่องจาก $E_+ = \varepsilon_k$ จะได้ว่า

$$\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k$$

กำหนด $x = \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c}$ จะได้

$$\int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k = 2 \ln \frac{2e^\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} \quad (3.83)$$

แทนสมการ (3.78)-(3.83) ลงในสมการ (3.77)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) + 2 \left\{ \frac{\Delta_0}{2T_c} - \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} \right\} + \frac{\text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) \right. \\ &\quad \left. + 2 \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} + 2 \left\{ \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} \right\} + 2 \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \frac{\text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) + 2 \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} + 2 \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{\pi T_c} - \frac{\Delta_0}{T_c} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}{2T_c} (\omega_D - 2\gamma_0) + \frac{1}{2} \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{\pi T_c} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\gamma \sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{\pi T_c} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_0}{T_c} \\ &\quad \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) + \frac{\Delta_0}{2T_c} = \ln \left(\left(\frac{2\gamma}{\pi T_c} \right) \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

ในที่สุดจะได้

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \text{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) - \frac{\Delta_0}{2T_c}} \quad (3.84)$$

3.2.6 ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี

$$E_k \simeq 0$$

จากสมการ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

กระจาย

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} d\varepsilon_k \right. \\ & + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} d\varepsilon_k \\ & \left. + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

แทนค่า E_-, E_+ สมการ (3.85) เขียน

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} & \left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k \right. \\ & + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k \\ & \left. + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

พิจารณาพจน์ที่หนึ่งทางขวามือสมการ (3.86)

$$\int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} d\varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0) \quad (3.87)$$

พิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือสมการ (3.86) กำหนด $x = \frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \int_{-2\gamma_0}^0 \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + x^2}} dx \\ \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

พิจารณาพจน์ที่สามทางขวามือสมการ (3.86)

$$\int_{-2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} d\varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0) \quad (3.89)$$

พิจารณาพจน์ที่สี่ทางขวามือสมการ (3.86)

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k &= \left\{ \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right\}_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \\ &= \left\{ \sinh^{-1} \frac{-2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} - \sinh^{-1} \frac{-\omega_D}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right\} \\ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k &= \sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} - \sinh^{-1} \frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \end{aligned} \quad (3.90)$$

พิจารณาพจน์ที่ห้าทางขวามือสมการ (3.86) กำหนด $x = \frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k &= 2 \int_0^{2\gamma_0} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + x^2}} dx \\ &= 2 \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

พิจารณาพจน์ที่หกทางขวามือสมการ (3.86)

$$\begin{aligned} \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2) + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k &= \left\{ \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right\}_{2\gamma_0}^{\omega_D} \\ &= \sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} - \sinh^{-1} \frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

แทนค่าสมการ (3.87)-(3.92) ลงในสมการ (3.86)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0) + 2 \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0) + \sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} - \sinh^{-1} \frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \\ &\quad \left. + 2 \left\{ \sinh^{-1} \left(\frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right) \right\} + \sinh^{-1} \frac{\omega_D}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} - \sinh^{-1} \frac{2\gamma_0}{\sqrt{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2}} \right\} \\ \text{ได้} \quad \ln \left(\frac{8\gamma_0\omega_D}{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2} \right) &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0) \\ \frac{8\gamma_0\omega_D}{\Delta(0)^2 + \Delta_0^2} &= e^{\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0)} \\ \Delta(0) &= \left\{ 8\gamma_0\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0)}} - \Delta_0^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

จาก $(x+y)^n \simeq x^n + nx^{n-1}y$ เมื่อ $x \gg y$ ดังนั้น

$$\Delta(0) \simeq \left\{ 8\gamma_0\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0)}} \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left\{ 8\gamma_0\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}} (\omega_D - 2\gamma_0)}} \right\}^{1/2}} \Delta_0^2$$

$$\Delta(0) \simeq 2\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}}(\omega_D - 2\gamma_0)} \quad (3.93)$$

3.2.7 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินกับอุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

จาก $T_c = 1.13 \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\Delta_0}{2T_c} \right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) - \frac{\Delta_0}{2T_c}}$

และ $\Delta(0) \simeq 2\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}}(\omega_D - 2\gamma_0)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} R \equiv \frac{2\Delta_0}{T_c} &= \frac{4\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}}(\omega_D - 2\gamma_0)}}{1.13 \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\Delta_0}{2T_c} \right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) - \frac{\Delta_0}{2T_c}}} \\ \frac{2\Delta_0}{T_c} &= 3.53 \frac{\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}}(\omega_D - 2\gamma_0)}}{\left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\Delta_0}{2T_c} \right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) - \frac{\Delta_0}{2T_c}}} \end{aligned} \quad (3.94)$$

3.2.8 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

กระจายสมการ (3.61) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} &\left\{ \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k \right. \\ &\left. + \int_{-\omega_D}^{-2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k + \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\} \end{aligned}$$

แทนค่า E_-, E_+ จะได้

$$\frac{4}{\lambda} = \left[\frac{2}{2T_c}(\omega_D - 2\gamma_0) + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k \right. \\ \left. + 2 \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k + \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k \right]$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ ω_D ทั้งสองข้าง

$$\frac{\partial}{\partial \omega_D} \frac{4}{\lambda} = \left[\frac{2}{2T_c} \frac{\partial}{\partial \omega_D} (\omega_D - 2\gamma_0) + \frac{\partial}{\partial \omega_D} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}}{2T_c} \right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} - \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k \right.$$

$$+2 \frac{\partial}{\partial \omega_D} \int_{2\gamma_0}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \varepsilon_k^2}} d\varepsilon_k + \frac{\partial}{\partial \omega_D} \int_{-2\gamma_0}^{2\gamma_0} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}}{2T_c}\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{2} + \gamma_0\right)^2}} d\varepsilon_k \Bigg\} \quad (3.95)$$

$$0 = \frac{1}{T_c} - \left(\frac{\omega_D - 2\gamma_0}{T_c^2} \right) \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} + 2 \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c}\right)}{T_c} \cdot \frac{dT_c}{d\omega_D} \right\}$$

$$+ 2 \frac{\tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c}}{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}} - 2 \frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \left\{ \frac{\tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c}}{T_c} - \frac{\tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c}}{T_c} \right\}$$

$$- 2 \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c}\right)}{T_c} \cdot \frac{dT_c}{d\omega_D} \right\}$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = \frac{T_c \left(1 + \frac{2T_c}{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}} \tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} \right)}{\left\{ (\omega_D - 2\gamma_0) + 2T_c \left(\tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} + \tanh\frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c} \right) \right\}} \quad (3.96)$$

จาก $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{T_c} \frac{dT_c}{d\omega_D}$ แทนค่า $\frac{dT_c}{d\omega_D}$ จากสมการ (3.96)

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}} \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} \right)}{\left\{ (\omega_D - 2\gamma_0) + 2T_c \left(\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c} \right) \right\}} \right] \quad (3.97)$$



บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผลที่ได้จากการคำนวณดังบทที่ 3 ทุกกรณีสามารถนำมาเขียนกราฟสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลในขั้นตอนต่อไป ซึ่งจะแยกพิจารณาเป็นสองกรณีคือ ส่วนแรกเป็นกราฟซึ่งเกิดจากผลของไฮบริดเซชันต่ออุณหภูมิวิกฤติ อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินกับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ส่วนที่สองเป็นกราฟซึ่งเกิดจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมต่ออุณหภูมิวิกฤติ อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินกับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ในแต่ละส่วนแยกพิจารณากรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ และ $E_k = 0$ รายละเอียดมีดังนี้

4.1 ผลของไฮบริดเซชันต่อสภาพนำยิ่งยวด

4.1.1 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

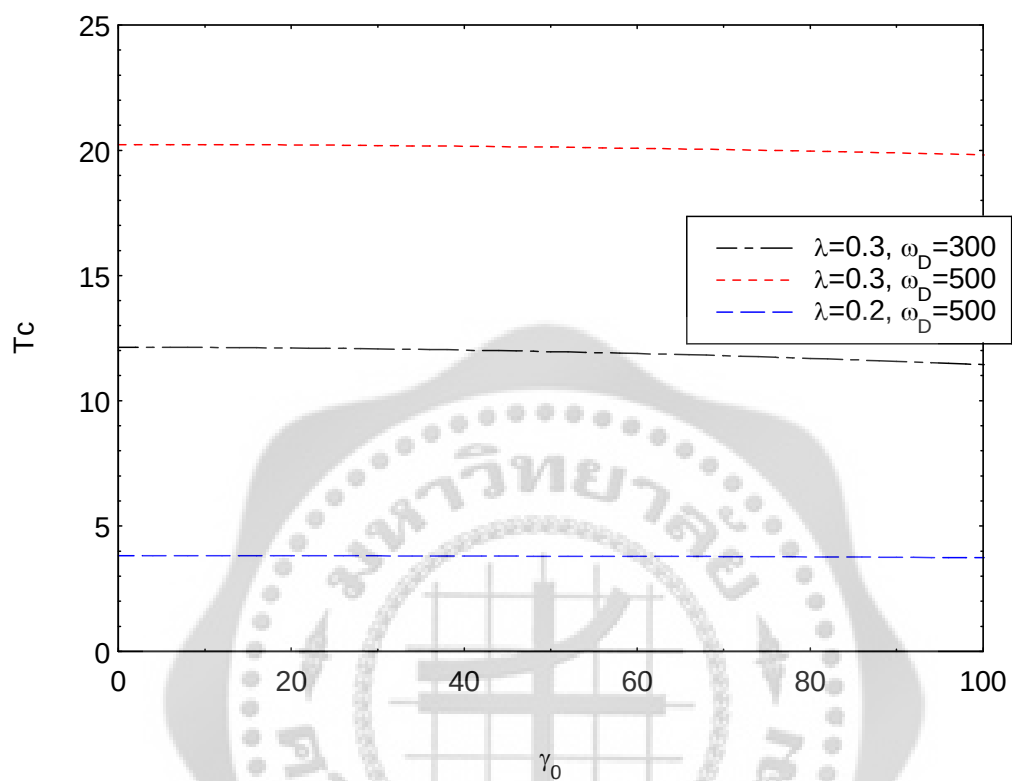
จากสมการ (3.15)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\}$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤติกับสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันดังภาพประกอบที่ 13 และจากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.19) คือ

$$T_c = 1.13 \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} e^{-1/\lambda}$$

กราฟระหว่าง T_c กับ γ_0 ที่แปรค่าตาม ω_D และ λ แสดงดังภาพประกอบที่ 13



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดง T_c กับ γ_0 กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.1.2 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

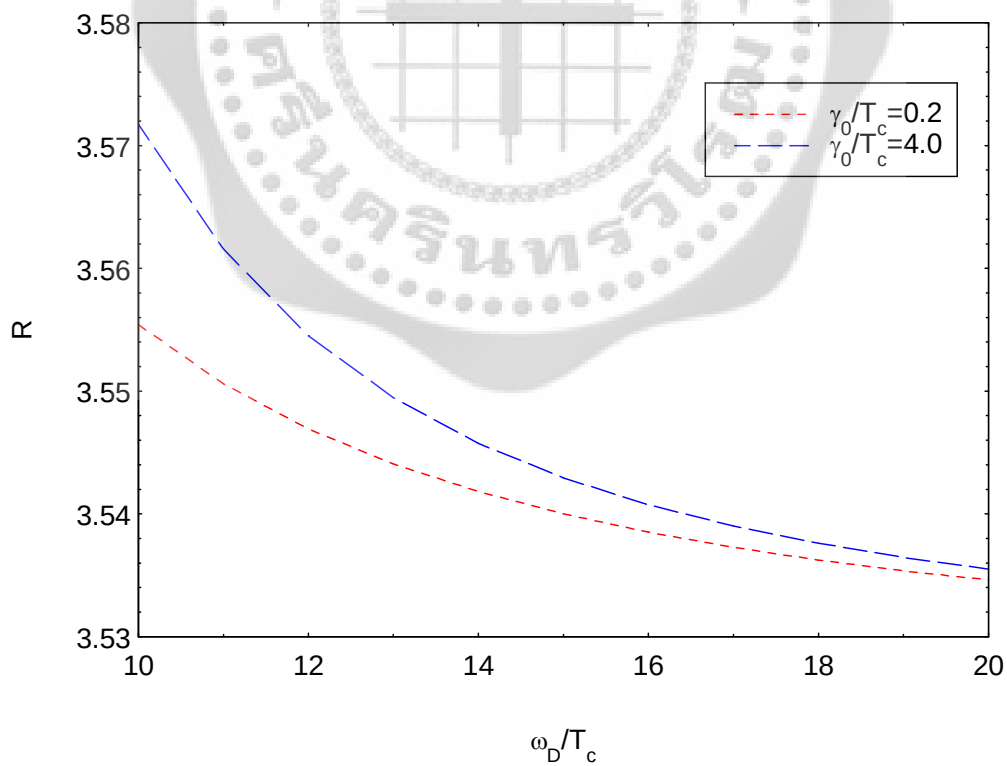
จากสมการ

$$\int_{(-\omega_D+\gamma_0)/2T_c}^{(\omega_D+\gamma_0)/2T_c} \frac{\tanh x}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของไฮบริดเซชันและอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติได้ภาพประกอบที่ 14 จากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.24) คือ

$$R = 3.53$$

กราฟระหว่าง R กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม γ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 14



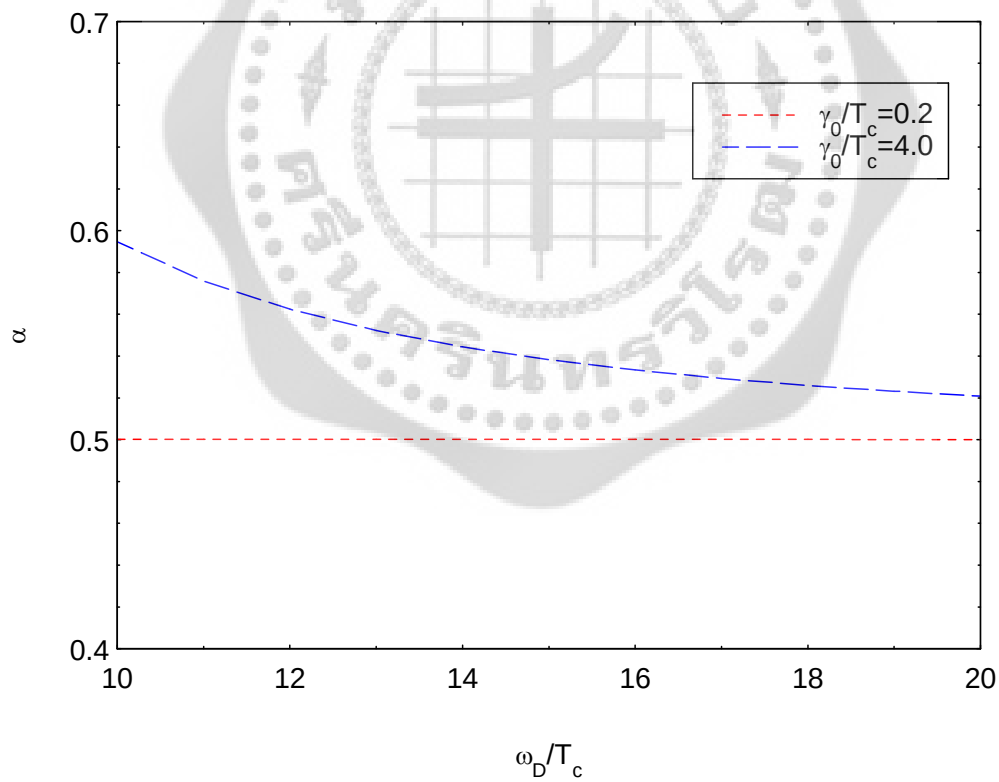
ภาพประกอบ 14 กราฟแสดง R กับ ω_D/T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.1.3 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

จากสมการ (3.29)

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \frac{\left[\frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} \right]}{\left[\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right) \right]}$$

สามารถเขียนกราฟระหว่าง α กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม γ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 15



ภาพประกอบ 15 กราฟแสดง α กับ ω_D/T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.1.4 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

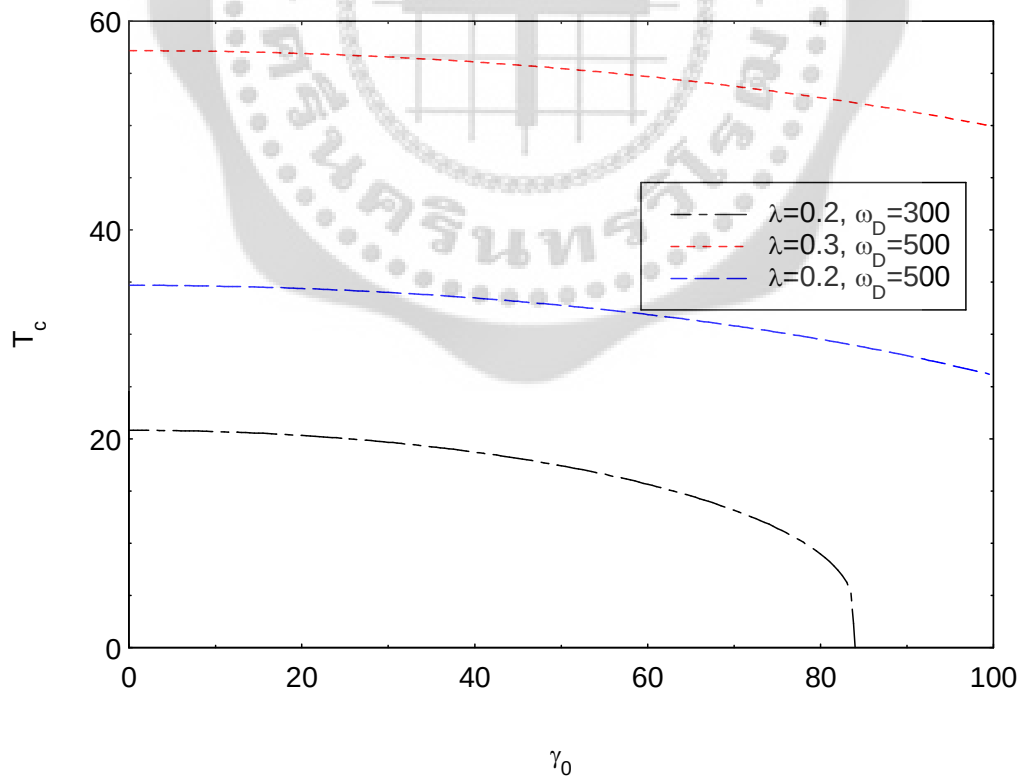
จากสมการ (3.15)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k - \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k - \gamma_0} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{(\varepsilon_k + \gamma_0)}{2T_c}\right)}{\varepsilon_k + \gamma_0} d\varepsilon_k \right\}$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันและอุณหภูมิวิกฤติดังภาพประกอบที่ 16 จากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.39) คือ

$$T_c = 1.13 \sqrt{2\gamma_0 \omega_D} e^{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \frac{\gamma_0}{T_c} \right)}$$

กราฟระหว่าง T_c กับ γ_0 ที่แปรค่าตาม ω_D, λ แสดงดังภาพประกอบที่ 16



ภาพประกอบ 16 กราฟแสดง T_c กับ γ_0 กรณี $E_k \simeq 0$

4.1.5 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

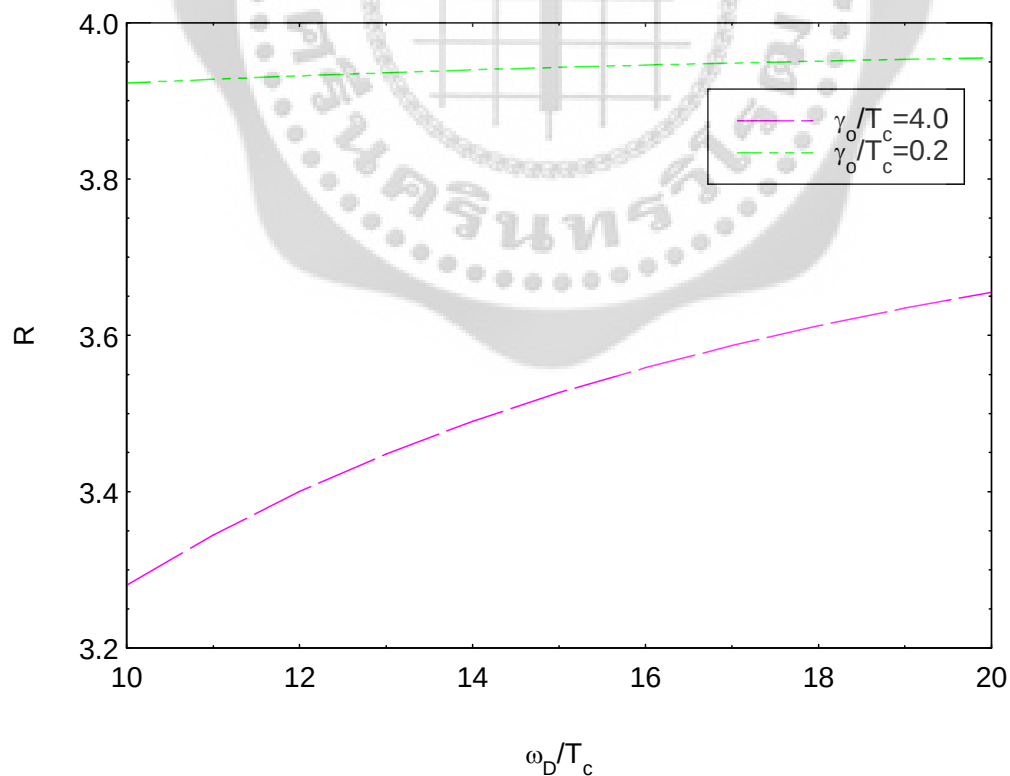
จากสมการ

$$\int_{-\omega_D/T_c}^{\omega_D/T_c} \frac{\tanh(y/4 - \sqrt{y/4})}{x} dx = \int_{-2(\omega_D - \gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D + \gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} dx$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันและอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติดังภาพที่ 17 จากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.49) คือ

$$R = 3.53e^{\left(\frac{\omega_D - 2\gamma_0}{T_c}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4}\right)}$$

กราฟระหว่าง R กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม γ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 17



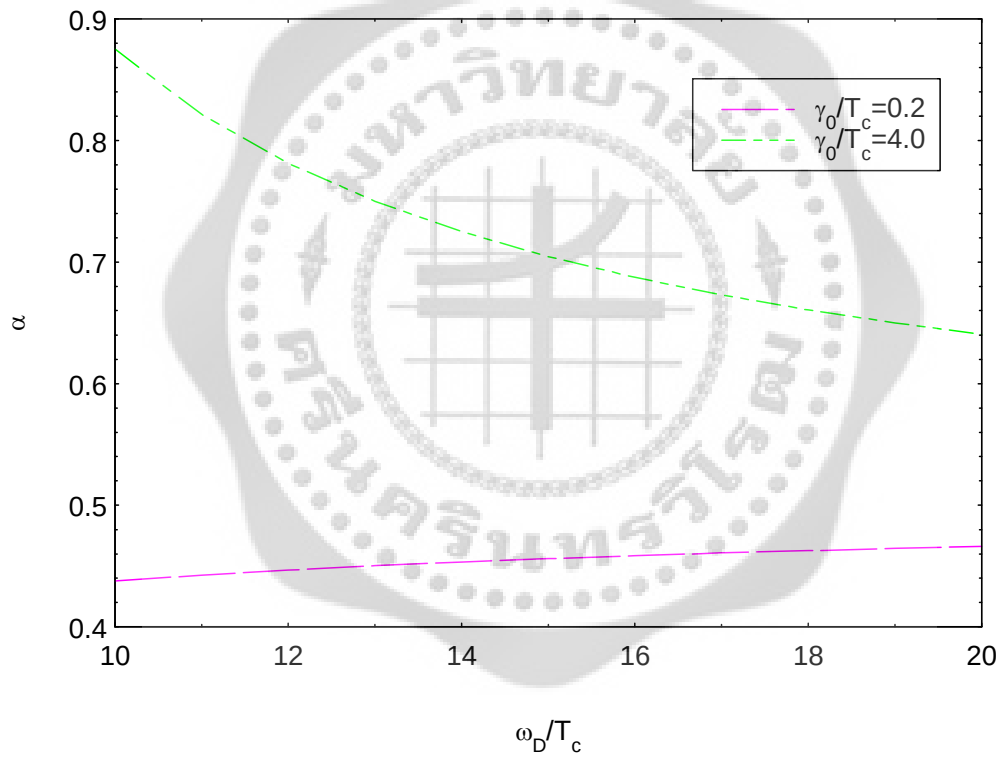
ภาพประกอบ 17 กราฟแสดง R กับ ω_D/T_c กรณี $E_k \simeq 0$

4.1.6 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชันกรณี $E_k \simeq 0$

จากสมการ (3.57)

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\omega_D} \tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) \right)}{\left\{ \omega_D - 2\gamma_0 + 2T_c \left(\tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_c} \right) + \tanh \left(\frac{\gamma_0}{T_c} \right) \right) \right\}} \right]$$

สามารถเขียนกราฟระหว่าง α กับ ω_D / T_c ที่แปรค่าตาม γ_0 / T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 18



ภาพประกอบ 18 กราฟแสดง α กับ ω_D / T_c กรณี $E_k \simeq 0$

4.2 ผลของช่องว่างพลังงานเทียบกับสภาพนำยวดยิ่ง

4.2.1 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

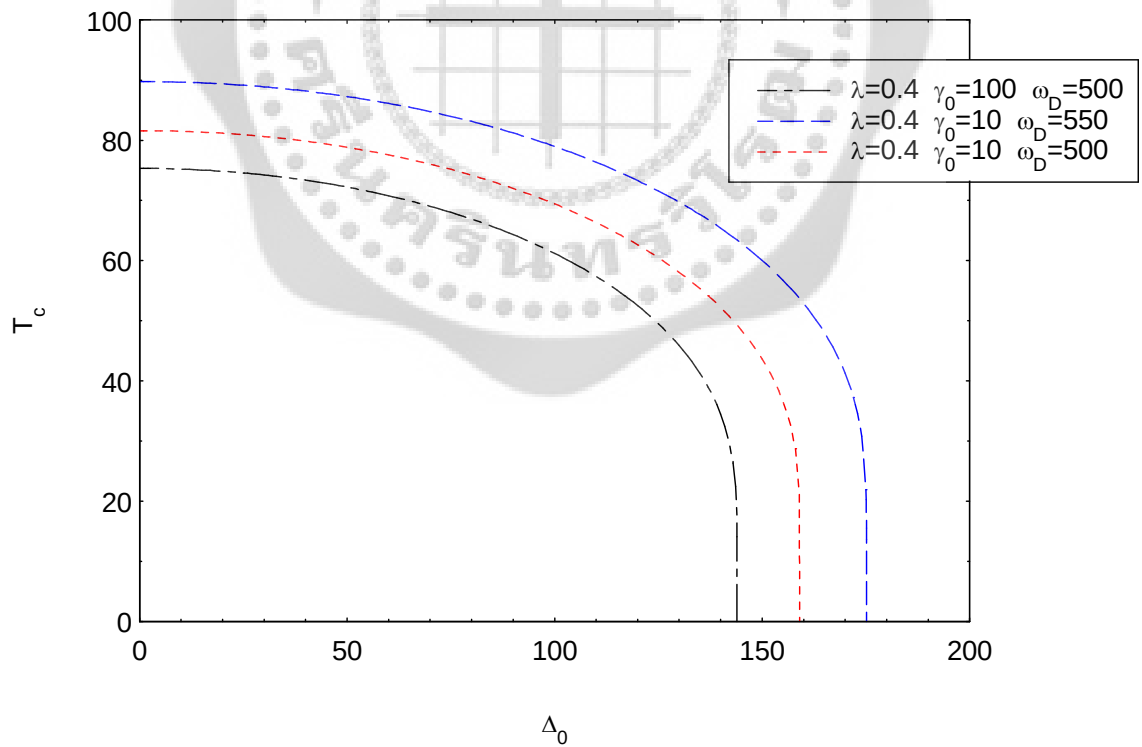
จากสมการ (3.61)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2} / 2T_c)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2} / 2T_c)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤติกับสมบัติของไฮบริดเซชันดังภาพประกอบที่ 19 และจากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.64) คือ

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)} (\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2) \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

กราฟระหว่าง T_c กับ Δ_0 ที่แปรค่าตาม λ, γ_0 และ ω_D แสดงดังภาพประกอบที่ 19



ภาพประกอบ 19 กราฟแสดง T_c กับ Δ_0 กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.2.2 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

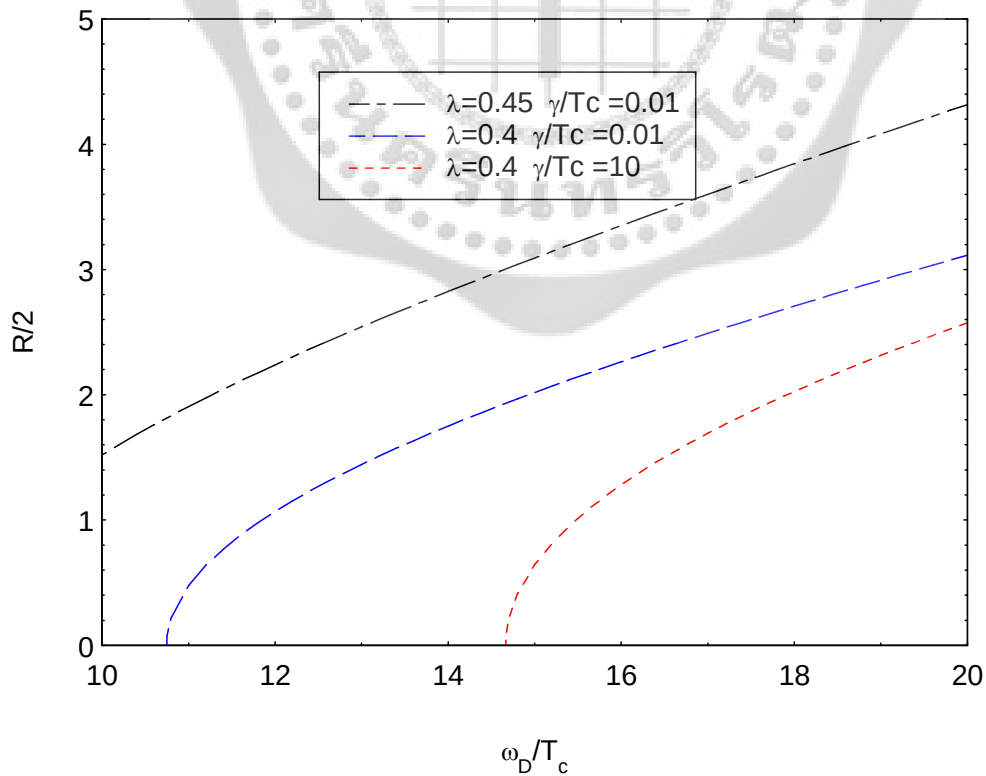
จากสมการ

$$\int_{(-\omega_D+\gamma_0)/2T_c}^{(\omega_D+\gamma_0)/2T_c} \frac{\tanh x}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันและอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติดังภาพที่ 20 จากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.71) คือ

$$R = \frac{2\sqrt{4(\omega_D^2 - \gamma_0^2)e^{-\frac{2}{\lambda}} - \Delta_0^2}}{1.13\left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

กราฟระหว่าง $R/2$ กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม $\lambda, \gamma_0/T_c$ แสดงดังภาพประกอบที่ 20

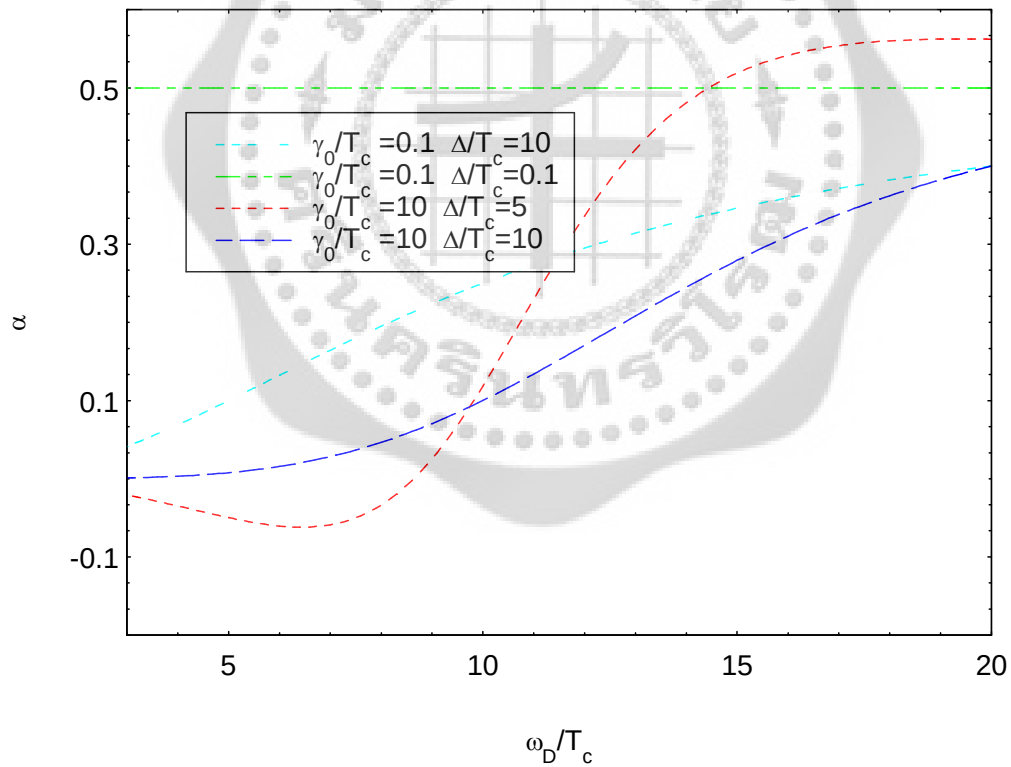


ภาพประกอบ 20 กราฟแสดง $R/2$ กับ ω_D/T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.2.3 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$
จากสมการ (3.76)

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \left\{ \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}{(\omega_D - \gamma_0)} \right)} + \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}{(\omega_D + \gamma_0)} \right)} \right\} / \left\{ \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right\}$$

สามารถเขียนกราฟระหว่าง α กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม γ_0/T_c และ Δ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 21



ภาพประกอบ 21 กราฟแสดง α และ ω_D/T_c กรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

4.2.4 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

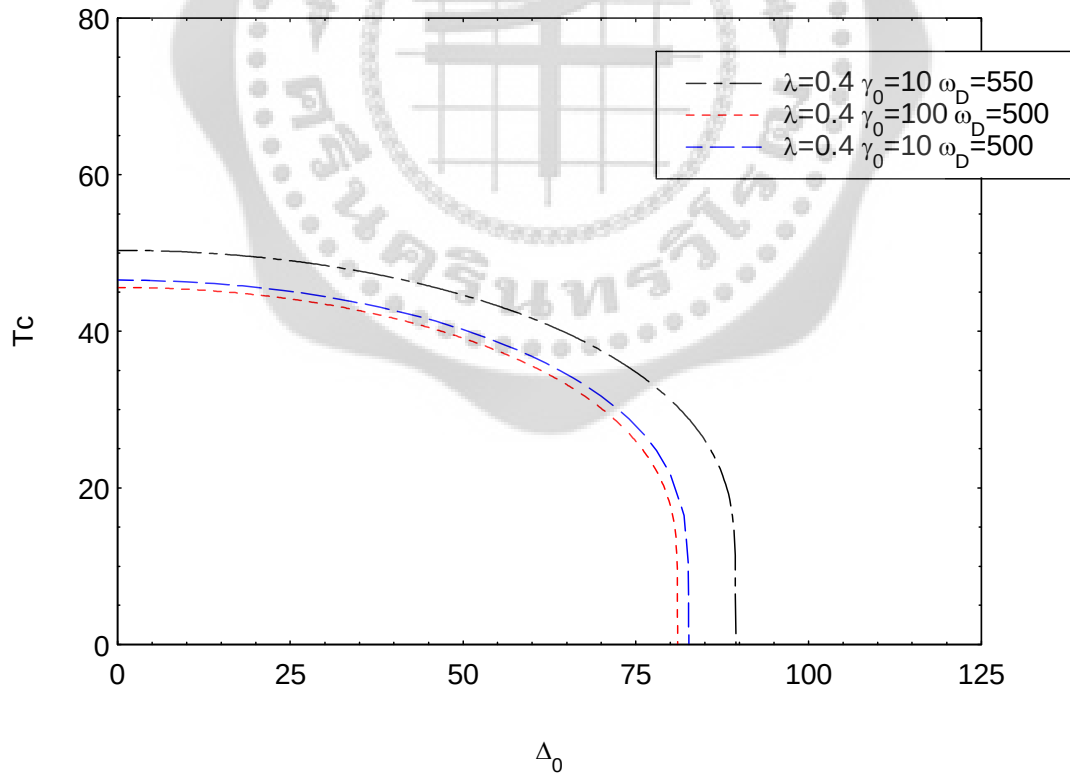
จากสมการ (3.61)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2} / 2T_c)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2} / 2T_c)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right\}$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤติกับสมบัติของไฮบริดเซชันดังภาพประกอบที่ 22 และจากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.84) คือ

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\Delta_0}{2T_c} \right) \left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c} \right) - \frac{\Delta_0}{2T_c}}$$

กราฟระหว่าง T_c และ Δ_0 ที่แปรค่าตาม λ, γ_0 และ ω_D แสดงดังภาพประกอบที่ 22



ภาพประกอบ 22 กราฟแสดง T_c และ Δ_0 กรณี $E_k \simeq 0$

4.2.5 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

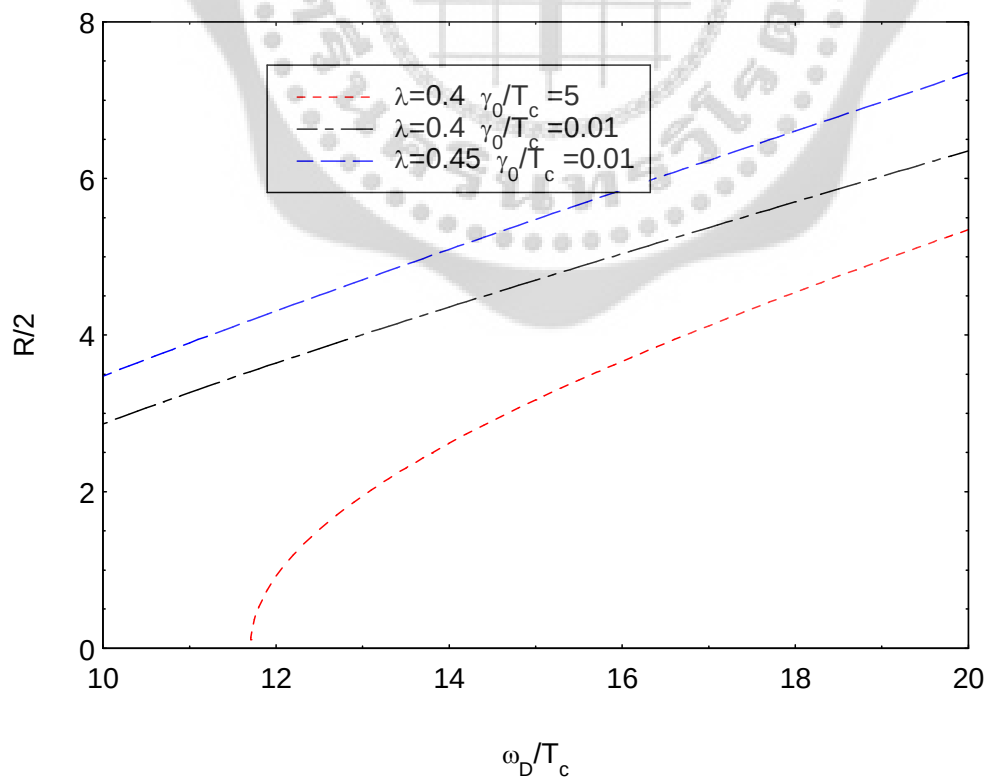
จากสมการ

$$\int_{-\omega_D/T_c}^{\omega_D/T_c} \frac{\tanh(y/4 - \sqrt{y/4})}{x} dx = \int_{-2(\omega_D - \gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D + \gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} dx$$

สามารถนำมาหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชันและอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติดังภาพที่ 23 จากสมการข้างต้นเมื่อนำมาประมาณภายใต้เงื่อนไข $\omega_D > T_c$ จะได้ตามสมการ (3.94) คือ

$$R = 3.53 \frac{\sqrt{2\gamma_0\omega_D} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta(0)^2 + \Delta_0^2)}}(\omega_D - 2\gamma_0)}}{\left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c} - \frac{\Delta_0}{2T_c}\right)}}$$

กราฟระหว่าง $R/2$ กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม λ และ γ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 23



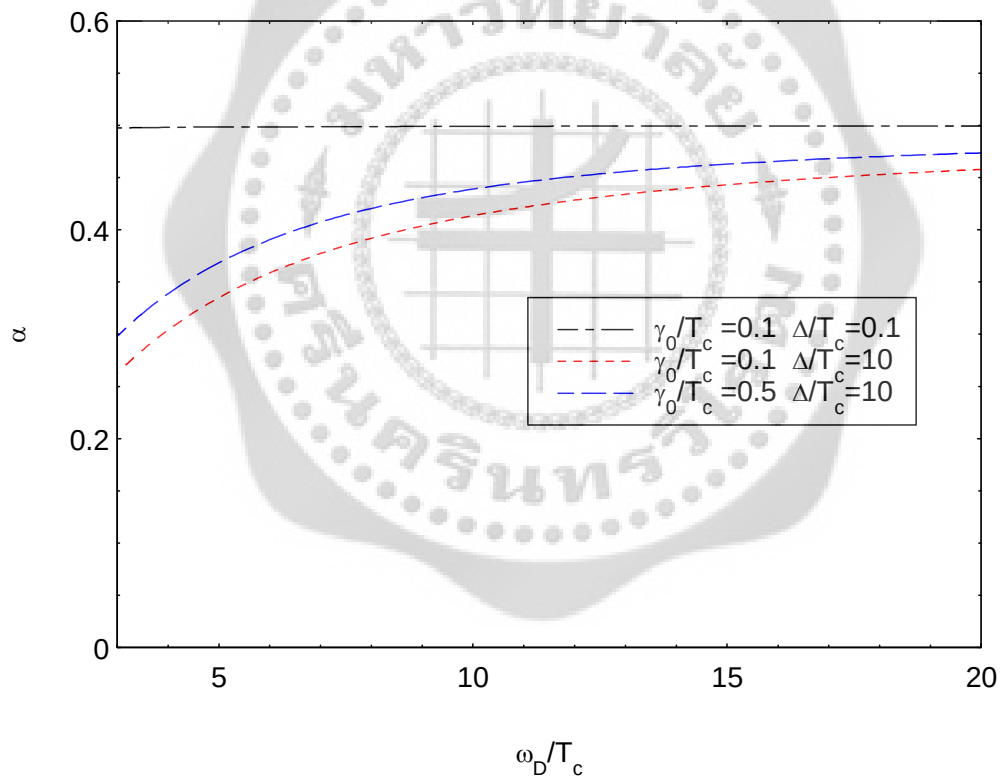
ภาพประกอบ 23 กราฟแสดง $R/2$ กับ ω_D/T_c กรณี $E_k \simeq 0$

4.2.6 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมกรณี $E_k \simeq 0$

จากสมการ (3.97)

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}} \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} \right)}{\left\{ (\omega_D - 2\gamma_0) + 2T_c \left(\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c} \right) \right\}} \right]$$

สามารถเขียนกราฟระหว่าง α กับ ω_D/T_c ที่แปรค่าตาม γ_0/T_c และ Δ_0/T_c แสดงดังภาพประกอบที่ 24



ภาพประกอบ 24 กราฟแสดง α กับ ω_D/T_c กรณี $E_k \simeq 0$

บทที่ 5

สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายคือ ศึกษาผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานที่เยื่อมต่อสมบัติของสภานำวดยิ่งในหลายกรณีเช่น อุณหภูมิวิกฤติ ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวิน อัตราส่วนระหว่างช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ในการสรุปและอภิปรายผลจึงแบ่งเป็นสองส่วนคือ ส่วนแรกกล่าวถึงผลของไฮบริดเซชันและส่วนที่สองกล่าวถึงผลของช่องว่างพลังงานที่เยื่อมต่อสมบัติของสภานำวดยิ่ง

สรุปและอภิปรายผล

5.1 สรุปและอภิปรายผลจากผลของไฮบริดเซชัน

5.1.1 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชัน

จากสมการ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(E_- / 2T_c)}{E_-} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh(E_+ / 2T)}{E_+} d\varepsilon_k \right\}$$

และ

$$T_c = 1.13 \sqrt{\omega_D^2 - \gamma_0^2} e^{-1/\lambda}$$

และจากภาพประกอบที่ 13 พบว่าเส้นกราฟขนานกับแกนนอน แสดงว่าอุณหภูมิวิกฤติไม่แปรค่าตามสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 แต่อุณหภูมิวิกฤติจะแปรผันกับความถี่คัตออฟของเดอบาย ω_D และค่าคงตัวของการคู่ควบ λ นั่นคืออุณหภูมิวิกฤติจะเพิ่มตามค่า ω_D และ λ ที่เพิ่มขึ้นสำหรับกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ เมื่อพิจารณาในกรณี $E_k = 0$ จากภาพประกอบที่ 16 พบว่าอุณหภูมิวิกฤติยังคงขึ้นตามการเพิ่มของความถี่คัตออฟของเดอบาย ω_D และค่าคงตัวของการคู่ควบ λ เช่นกัน แต่เมื่อพิจารณาผลของไฮบริดเซชันพบว่าอุณหภูมิวิกฤติแปรผกผันกับ γ_0 คืออุณหภูมิวิกฤติลดลงเมื่อค่า γ_0 เพิ่มขึ้น แสดงว่าผลของไฮบริดเซชันจะมีผลต่ออุณหภูมิวิกฤติชัดเจน เมื่อพลังงานของแถบการนำสูงกว่าพลังงานของแถบอื่นที่ไม่ใช่แถบการนำมากๆ เท่านั้น

5.1.2 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของไฮบริดเซชัน

จากสมการ

$$\int_{(-\omega_D+\gamma_0)/2T_c}^{(\omega_D+\gamma_0)/2T_c} \frac{\tanh x}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

และ

$$R = 3.53$$

และจากภาพประกอบ 14 พบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤติ R เพิ่มขึ้นตามสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 ที่เพิ่มขึ้น และมีค่าเข้าสู่ 3.53 เมื่อ ω_D/T_c เข้าใกล้อนันต์ตามทฤษฎีบีซีเอสในกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ ส่วนกรณี $E_k = 0$ พิจารณาจากสมการ

$$\int_{-\omega_D/T_c}^{\omega_D/T_c} \frac{\tanh(y/4 - \sqrt{y/4})}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

และ

$$R = 3.53e^{\left(\frac{\omega_D-2\gamma_0}{T_c}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{4}\right)}$$

และจากภาพประกอบที่ 17 พบว่าสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 มีผลต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤติ R เช่นกัน คือสามารถพบค่า $R \approx 3.3$ ที่ $\gamma_0/T_c = 4.0$ และ $R \approx 3.9$ ที่ $\gamma_0/T_c = 0.2$ ซึ่งการพบค่า R ที่ต่ำเมื่อ γ_0/T_c มีค่าสูงนี้สอดคล้องกับตัวนำยิ่งยวดประเภทประเภทเฟร์มิออนหนักดังที่เรทท์และคณะได้ศึกษาไว้ (Rout; and et all. 2008: 711-730)

5.1.3 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของไฮบริดเซชัน

จากสมการสัมประสิทธิ์ปรากฏการณ์ไอโซโทปกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \left[\frac{\left\{ \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D - \gamma_0} + \frac{\tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right)}{\omega_D + \gamma_0} \right\}}{\left\{ \tanh\left(\frac{\omega_D - \gamma_0}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\omega_D + \gamma_0}{2T_c}\right) \right\}} \right]$$

และจากภาพประกอบที่ 15 พบว่าค่าที่เพิ่มขึ้นของ γ_0 / T_c ทำให้สัมประสิทธิ์ปรากฏการณ์ไอโซโทป α เพิ่มขึ้น และสูงกว่าที่ทำนายไว้ในทฤษฎีบีซีเอส และเข้าสู่ 0.5 เมื่อ ω_D / T_c เข้าใกล้อนันต์ตามทฤษฎีบีซีเอส ส่วนในกรณี $E_k \simeq 0$ พิจารณาจากสมการ

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\omega_D} \tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) \right)}{\left\{ \omega_D - 2\gamma_0 + 2T_c \left(\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right) + \tanh\left(\frac{\gamma_0}{T_c}\right) \right) \right\}} \right]$$

และจากภาพประกอบที่ 18 พบว่าสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 มีผลต่อสัมประสิทธิ์ไอโซโทป α เช่นกัน แต่พบทั้งค่า α ที่ต่ำกว่าและสูงกว่า 0.5 แต่ทั้งสองกรณีให้ผลตรงกันคือมีค่าเข้าสู่ 0.5 เมื่อ ω_D / T_c เข้าใกล้อนันต์ตามทฤษฎีบีซีเอส

จากการศึกษาตัวนำยวดยิ่งที่มีเหล็กเป็นองค์ประกอบหลัก และพิจารณาจากแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งหลายแถบพลังงาน พบว่ามีค่า $R = 3.68$ (Oh; & et al. 2011: 65-84) และค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่พบในช่วง $\alpha \approx 0.35 - 0.4$ (Klasanov; & et al. 2010) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $\alpha_{Fe} = 0.81$ (Klasanov; & et al. 2010) แสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและโฟนอนยังคงมีบทบาทต่อกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง

5.2 สรุปและอภิปรายผลจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม

5.2.1 อุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม

จากสมการ

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \left[\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2} / 2T_c\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_-^2}} d\varepsilon_k + \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2} / 2T_c\right)}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_+^2}} d\varepsilon_k \right]$$

และ

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{(\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2)(\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2)} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}}$$

และจากภาพประกอบที่ 19 พบว่าอุณหภูมิวิกฤติตามสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 ที่ลดลง แต่อุณหภูมิวิกฤติจะเพิ่มขึ้นตามความถี่คัตออฟของเดอบาย ω_D ที่เพิ่มขึ้น เมื่อพิจารณาที่ค่าคงตัวของการคัลบลิ้ง $\lambda = 0.4$ แต่เมื่อพิจารณาอุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงานเทียมพบว่าอุณหภูมิวิกฤติจะลดลงเมื่อช่องว่างพลังงานเทียมเพิ่มขึ้น พิจารณาในกรณี $E_k = 0$ สมการอุณหภูมิวิกฤติคือ

$$T_c = 1.13 \left(\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2} \sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right) \left(\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{\gamma_0}{T_c} \right) \frac{\Delta_0}{2T_c}}$$

และจากภาพประกอบที่ 22 พบว่าอุณหภูมิวิกฤติตามสัมประสิทธิ์ของไฮบริดเซชัน γ_0 ที่ลดลง แต่อุณหภูมิวิกฤติจะเพิ่มขึ้นตามความถี่คัตออฟของเดอบาย ω_D ที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน แต่ที่ค่า Δ_0 ค่าหนึ่งพบว่าอุณหภูมิวิกฤติกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$ จะมีค่าสูงกว่ากรณี $E_k = 0$

5.2.2 อัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤติจากผลของช่องว่างพลังงาน

เทียม

จากสมการ

$$\int_{(-\omega_D+\gamma_0)/2T_c}^{(\omega_D+\gamma_0)/2T_c} \frac{\tanh x}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

และ

$$R = \frac{2\sqrt{4(\omega_D^2-\gamma_0^2)e^{\frac{2}{\lambda}}-\Delta_0^2}}{1.13\left(\sqrt{(\Delta_0^2+(\omega_D-\gamma_0)^2)(\Delta_0^2+(\omega_D+\gamma_0)^2)}\right)^{1/2}e^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

และจากภาพประกอบ 20 พบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤติ R เป็นไปได้หลายค่าทั้งมากกว่าและน้อยกว่า 3.53 คือจะเพิ่มขึ้นตามค่า λ ที่เพิ่มขึ้น แต่จะเพิ่มขึ้นตามค่า γ_0/T_c ที่ลดลง นอกจากนี้ถ้าพิจารณาตามค่า ω_D/T_c พบว่าจะไม่ปรากฏค่า R ที่ค่า $\omega_D/T_c < 11$ ในกรณี $\gamma_0/T_c = 0.01$ และไม่ปรากฏค่า R ที่ค่า $\omega_D/T_c < 15$ ในกรณี $\gamma_0/T_c = 10$ แสดงให้เห็นว่าช่องว่างพลังงานเทียมจะไม่มีผลต่อ R ในกรณี γ_0 ที่ค่อนข้างมาก ส่วนสมการอัตราส่วนช่องว่างพลังงานที่ศูนย์เคลวินต่ออุณหภูมิวิกฤติกรณี $E_k = 0$ พิจารณาจากสมการ

$$\int_{-\omega_D/T_c}^{\omega_D/T_c} \frac{\tanh(y/4 - \sqrt{y/4})}{x} dx = \int_{-2(\omega_D-\gamma_0)/T_c}^{2(\omega_D+\gamma_0)/T_c} \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} dx$$

และ

$$R = 3.53 \frac{\sqrt{2\gamma_0\omega_D}e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{(\Delta_0(0)^2+\Delta_0^2)}}(\omega_D-2\gamma_0)}}{\left(\sqrt{\Delta_0^2+\omega_D^2}\sqrt{\Delta_0^2+4\gamma_0^2}\right)^{1/2}e^{-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\Delta_0}{2T_c}\right)\left(\frac{\omega_D-\gamma_0}{T_c}\right)-\frac{\Delta_0}{2T_c}}}$$

และจากภาพประกอบที่ 23 พบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤติ R เป็นไปได้หลายค่า ทั้งมากกว่าและน้อยกว่า 3.53 คือจะเพิ่มขึ้นตามค่า λ ที่เพิ่มขึ้น แต่จะเพิ่มขึ้นตามค่า γ_0/T_c ที่ลดลง นอกจากนี้ถ้าพิจารณาตามค่า ω_D/T_c พบว่าจะไม่ปรากฏค่า R ที่ค่า $\omega_D/T_c < 12$ ในกรณี $\gamma_0/T_c = 5$ แสดงให้เห็นว่าช่องว่างพลังงานเทียมจะไม่มีผลต่อ R ในกรณี γ_0 เช่นกัน แต่ที่ค่า ω_D/T_c พบว่าค่า R กรณี $E_k = 0$ จะสูงกว่ากรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

5.2.3 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากผลของช่องว่างพลังงานเทียม

จากสมการสัมประสิทธิ์ปรากฏการณ์ไอโซโทปกรณี $\varepsilon_k \simeq E_k$

$$\alpha = \frac{\omega_D}{2} \left\{ \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}{(\omega_D - \gamma_0)} \right)} + \frac{\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c}}{\left(\frac{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}{(\omega_D + \gamma_0)} \right)} \right\} / \left\{ \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D - \gamma_0)^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + (\omega_D + \gamma_0)^2}}{2T_c} \right\}$$

และจากภาพประกอบที่ 21 พบว่าสัมประสิทธิ์ปรากฏการณ์ไอโซโทป α มีทั้งค่าที่ต่ำกว่าและสูงกว่า 0.5 โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ $\Delta_0/T_c = 5$ พบว่า α เป็นลบในบางช่วงของ ω_D/T_c ในกรณี $E_k \simeq 0$ ซึ่งค่าที่เป็นลบของ α นี้สอดคล้องกับผลการศึกษาของชีเรจและคณะ (Shirage; & et al.2009) ที่มีการศึกษาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของ $Ba_{1-x}K_xFe_2As_2$ พบว่า $\alpha_{Fe} = -0.18 \pm 0.03$ ส่วนในกรณี $E_k \simeq 0$ สัมประสิทธิ์ไอโซโทปคือ

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_D \left[\frac{\left(1 + \frac{2T_c}{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}} \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} \right)}{\left\{ (\omega_D - 2\gamma_0) + 2T_c \left(\tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + \omega_D^2}}{2T_c} + \tanh \frac{\sqrt{\Delta_0^2 + 4\gamma_0^2}}{2T_c} \right) \right\}} \right]$$

และจากภาพประกอบที่ 24 พบว่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทป α เพิ่มขึ้นตามค่า Δ_0/T_c ที่ลดลง ซึ่งมีค่าต่ำกว่า 0.5 แต่มีค่าเข้าสู่ 0.5 เมื่อ ω_D/T_c เข้าใกล้อนันต์ตามทฤษฎีบีซีเอส

ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากงานวิจัยนี้ศึกษาจากแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน โดยนำผลของไฮบริดเซชันและช่องว่างพลังงานเทียมมาอธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งคือ อุณหภูมิวิกฤติ อัตราส่วนระหว่างช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติและสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ซึ่งพิจารณากรณีการกลับปลิงอย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส และความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบคงตัว เนื่องจากปัญหาเหล่านี้สามารถพิจารณาเพิ่มเติมในกรณีอื่นๆ ได้อีก ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาจากแบบจำลองตัวนำยวดยิ่งชนิดสามแถบพลังงานหรือมากกว่า ตลอดจนการพิจารณากรณีความหนาแน่นของสถานะพลังงานแบบแวนไฮป นอกจากนี้ยังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเป็นลบในบางกรณีเมื่อพิจารณาผลของช่องว่างพลังงานเทียม ซึ่งน่าจะเป็นอีกกรณีหนึ่งที่ควรจะมีการพิจารณาเพิ่มเติมในรายละเอียดสำหรับงานวิจัยครั้งต่อไป





บรรณานุกรม

- Anderson, Ph. W. (1987). *Science*. 235.1196.
- Bardeen, J; Cooper,N; & Shrieffer, J.R. (1957). Theory of Superconductivity. *Physical Review*. 108(5):1175-1204.
- Kresin, B.A.; & Wolf, S.A. (1998). The Isotope Effect in Superconductors. *arXiv:cond-mat/9801222v1[cond-mat.supr-con]* 21 Jan 1998.
- Bednorz, J.G; & Muller, K.A. (1986). Possible High- T_c Superconductivity in the Be-La-Cu-O System. *Zertachrift or Physik B*. (64):189-196.
- Buckel, W.(1991). *Superconductivity Fundamentals and Applications*. Academic press.New York.
- Bud'ko; & et al.(2001). Boron Isotope Effect in Superconducting MgB_2 . *Physical Review Letters*.86(9):1887-1880.
- Burns, G. (1992). *High-Temperature Superconductivity:Introduction*. Academic press.New York.
- Buzea,C; & Yamashita,T. (2001). Review of the Superconducting Properties of MgB_2 Superconductors. *Science & Technology*. 14.. 115-146.
- Charles P. Poole, Jr; Horacio A, F; & Richard J, C.(1995). *Superconductivity*. Academic Press. Inc.California.
- Cooper, L.N.(1956). Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas.*Physical Review*.104:1189.
- Crawford, M.K; & et al. (1990). Oxygen Isotope Effect and Structural Phase Transitions in La_2CuO_4 -Based Superconductors. *Science*. 250:1390.
- Cyrot, M; & Pavuna, D.(1992). *Introduction to Superconductivity and High- T_c Materials*.World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd. Singapore.
- Fetter, A.L; & Walecka, J.D. (1995). *Quantum Theory of Many –Particle System*. McGraw-Hill.Singapore.

- Frohlich, H.(1950). Theory of the Superconductivity.I.The Ground State at the Absolute Zero of Temperature. *Physical Review*.79:845.
- Ginzburg, V.L; & Landau, L.D. (1950). On the Theory of Superconductors *J.Exptl. Theoret. Phys. (USSR)*.20:1064.
- Gorter, C.J; & Casimir, H.G.B. (1934). *Physica*. 1:306.
- Oh, H, Moon, J, Shin, D, Moon, C, & Joon Choi, H. (2011). Brief Review on Iron-Based Superconductors: are there Clues for Unconventional Superconductivity?.*Progress in Superconductivity*.13. 65-84.
- Ichimura, M; Fujita, M; & nakao, K. (1990). Charg-density Wave with Imperfect Nesting and Superconductivity. *Physical Review B*.41:6387-6393.
- Ketterson, J.B; & Song, S.N. (1999). *Superconductivity*. Cambridge:Cambridge university press.
- Khasanov, R, Bendele, M, Bussmann-Holder, A, & Keller, H. (2010). Intrinsic and Structural Isotope Effects in Iron-Based Superconductors. *Physical Review B*.82. Article ID 212505.
- Khasanov, R, Bendele, M, Conder, K, Keller, H, Pomjakushina, E, & Pomjakushina,V. (2010). Iron Isotope Effect on the Superconducting Transition Temperature and the Crystal Structure of FeSe_{1-x} . *New Journal of Physics*.12. Article ID 073024.
- London, F; & London, H. (1935). Supraleitung und Diamagnetismus. *Physica*.2:341.
- Maxwell, E.(1950). Isotop Effect in the Superconductivity of Mercury. *Physical Review*.78:477.
- Mourachkine, A.(2002). *Room-temperature Superconductivity*. Cambridge International Science Publishing.England.
- Mourachkine, A.(2004). *Room-temperature Superconductivity*. Cambridge International Science Publishing.England.
- Okoye, C.M.I.(1998). A Two Band Model of the Isotope Effect of the High- T_c Superconductors. *Chinese Journal of Physics*. 36(1):53-64.
- Panda, S.K; & Rout, G.C. (2009). Interplay of CDW, SDW and Superconductivity in High- T_c Cuprates. *Physica C*.469:702-706.

- Reynolds, B.(1950). Superconductivity of Isotopes of Mercury. *Physical Review*.78:487.
- Rout, G.C; & Das, S. (2000). Temperature Dependence of Superconducting Gap of Heavy Fermion System. *Physica C*.339:17-26.
- Schrieffer, J.R. (1964). *Theory of Superconductivity*. W.A. Benjamin,inc.New York.
- Shirage. P.M; Kihou, K; Miyazawa, K; Lee, C.H; Kito, H; Eisaki, H; Tanaka, Y; & Iyo, A. arXiv:0903.3515 (2009)
- Suzuki, M; & Watanabe, T. (2000). Discriminating the Superconducting Gap from the Pseudogap in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ by Interlayer Tunneling spectroscopy. *Physical Review Letters*.85:4787.
- Udomsamuthirun, P. (2001). Effect of Pseudogap in High- T_c Superconductor. *Physica Status Solidi(b)*.226:315-321.
- Yoksan,S.(1991). Isotope Effect in High- T_c Superconductors. *Solid State Communication*.78:236-286.



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายไทยปัญญา จันปุ่ม
วันเดือนปีเกิด	31 สิงหาคม 2507
สถานที่เกิด	อ.หนองสูง จ. มุกดาหาร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	310 หมู่ 14 หมู่บ้านธัญญธานี ต. จอหอ อ.เมือง จ.นครราชสีมา
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	รองศาสตราจารย์
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2526	มัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนบางกะปิ
พ.ศ. 2530	กศ.บ. (ฟิสิกส์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตมหาสารคาม
พ.ศ. 2535	ค.ม. (ฟิสิกส์) จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
พ.ศ. 2556	ปร.ด. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ