

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ปริญญานิพนธ์
ของ
ญาณิศา ธิกุลวงศ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2546
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

550.711

61-100

1

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทคัดย่อ

ของ

ญาณิศา ธิกุลวงษ์

1

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

เมษายน 2546

ญาณิศา ธิกุลวงษ์. (2546). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ธนุกฤติ, อาจารย์ ละเอียด ปรรณาคี.

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี โดยเรียนจากแบบเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัด สุพรรณบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 1 ห้องเรียน จำนวน 35 คน ผู้วิจัยสอนกลุ่มตัวอย่างโดยใช้ แบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหา ที่กำหนดแล้ว ทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ผู้ วิจัยสร้างขึ้นแล้วนำคะแนนสอบมาวิเคราะห์โดยใช้สถิติทดสอบ Z ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ผ่านเกณฑ์มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

ดังนั้นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

**A STUDY OF ACHIEVEMENT IN LEARNING RECURRENCE RELATION OF
MATHAYOM SUKSA VI STUDENTS**

**AN ABSTRACT
BY
YANISA THIKULWONG**

Presented in partial fulfillment of the requirements
For the Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
April 2003

Yanisa Thikulwong. (2003). *A Study of Achievement in Learning Recurrence Relation of Mathayom Suksa VI Students*. Master Thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok : Graduate School. Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Yongyuth Tanugrit , Mrs. Laied Prathandee.

Recently discrete mathematics has been widely accepted in high school curriculum, paving the way for mathematics educators to explore appropriate topics to be included for classroom instruction. Recurrence relation is one such topic worth studying. The purpose of this study was to design lessons and activities on recurrence relation suitable for twelfth graders and evaluate their achievement upon learning the lessons.

From extensive study and guidance from mathematics educators, the researcher came up with lessons and instructional activities amounting 15 periods of 50 minutes each. A group of thirty-five high schools students from a school in Suphanburi who acted as a sample for this study were taught by the researcher during the second semester of the 2002 academic year. Toward the end of the experiment, an achievement test on recurrence relation was administered and scores were collected for data analysis using the Z- test.

The results indicated that the students at the twelfth level were able to learn the concepts and applications of recurrence relation as designed. The statistical test was analyzed at the .01 level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ของ
นางสาวญานิตา ธิกุลวงษ์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาพร หะวานนท์)

วันที่ 25 เดือน เมษายน พ.ศ. 2546

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ยงยุทธ ฐานฤทธิ)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ละเอียด ประรณาคี)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชุตีวรรณ เพ็ญเพียร)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ เมตต์ แยมวงษ์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี เนื่องจากความช่วยเหลือ และให้คำที่ปรึกษาที่ดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ฐนุกฤติประธานกรรมการควบคุม และ อาจารย์ละเอียด บรรณานัติ กรรมการ ควบคุมโดยท่านได้กรุณาให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไข ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และ ขอกราบขอบพระคุณ เป็นอย่างสูง มา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ และ อาจารย์สมศรี เสี่ยงหลวง ที่ช่วยกรุณาเป็น ผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

ขอกราบขอบพระคุณ อ. เมตต์ แยมวงษ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชุติวรรณ เพ็ญเพียร ที่กรุณา ร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิด ในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย ส่งผลให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ดร. สุรพล วัฒนวิทย์กิจ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการเขียนบทคัดย่อภาษาอังกฤษของงานวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้อำนวยการโรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี หัวหน้าฝ่ายวิชาการ และคณะครูหมวดวิชาคณิตศาสตร์ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวก ในการทดลองใช้เครื่องมือ และเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ อย่างสุดซึ้งที่ให้กำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษา ของผู้วิจัยมาโดยตลอด

และสุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโท รุ่นปี พ.ศ. 2542 คณะครูโรงเรียนกาญจนาภิเษก วิทยาลัย สุพรรณบุรี ทุกคน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1 และ 6/2 รุ่นที่ 3 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษก วิทยาลัย สุพรรณบุรี ที่ให้ความอนุเคราะห์และให้กำลังใจเป็นอย่างดีเยี่ยมทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงลง ไปด้วยดี

ญาณิศา ธิกุลวงษ์

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ภูมิหลัง.....	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	6
	ความสำคัญของการวิจัย.....	6
	ขอบเขตของการวิจัย.....	6
	ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	6
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	7
	เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย.....	7
	ตัวแปรที่ศึกษา.....	7
	นิยามศัพท์เฉพาะ.....	7
	สมมติฐานของการวิจัย	8
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	9
	ประวัติความเป็นมาของความสัมพันธ์เวียนเกิด	9
	การศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา.....	9
	การศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย	11
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	14
	งานวิจัยภายในประเทศ	14
	งานวิจัยต่างประเทศ.....	15
3	วิธีดำเนินการวิจัย.....	17
	การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง	17
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	18
	วิธีดำเนินการวิจัย	21
	การวิเคราะห์ข้อมูล.....	21
	สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	21
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	22
	ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนในการทำ	
	แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	
	ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	22

สารบัญ(ต่อ)

บทที่		หน้า
4(ต่อ)		
	ตอนที่ 2 คำร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนน	
	ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด	
	ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม.....	23
	ตอนที่ 3 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์	
	ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	24
5	สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	25
	สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย	
	และการวิเคราะห์ข้อมูล	25
	สรุปผลการวิจัย.....	26
	อภิปรายผล	26
	ข้อสังเกตจากการวิจัย	27
	ข้อเสนอแนะ.....	27
	บรรณานุกรม	28
	ภาคผนวก	31
	ภาคผนวก ก การวิเคราะห์ข้อมูล	32
	ภาคผนวก ข แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	36
	ภาคผนวก ค แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด.....	44
	ภาคผนวก ง แผนการสอนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	71
	ภาคผนวก จ รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ.....	93
	ประวัติย่อผู้วิจัย.....	95

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนในการทำ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	22
2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนน ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	23
3 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์ ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	24
4 การหาค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	33
5 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนในการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด	34

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปัจจุบันนี้ความก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มีบทบาทสูงมากในการพัฒนาประเทศทั้งในภาคอุตสาหกรรม การเพิ่มผลผลิต การเกษตร การแพทย์ การสาธารณสุข การคมนาคมและการสื่อสาร รวมทั้งการป้องกันประเทศ ในช่วงของการพัฒนาย่อมมีการเปลี่ยนแปลงในทุก ๆ ด้านและมีการแข่งขันกันมากขึ้น ซึ่งสิ่งที่สำคัญคือการพัฒนาทางการศึกษา การศึกษาคือกระบวนการทางสังคม เพื่อสร้างบุคคลให้มีความรู้ความสามารถ ทักษะประสบการณ์ ทั้งยังเป็นกลไกทางสังคมที่จะปลูกฝังจริยธรรม คุณธรรม และวิถีชีวิตของบุคคลให้อยู่ในสังคมได้ ซึ่งสอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ซึ่งเป็นกฎหมายทางการศึกษาระดับแรกของประเทศไทยที่ได้ให้ความสำคัญในเรื่องนี้ ในการพัฒนาคนและคุณภาพของคนนั้นเป็นเป้าหมายของการจัดการศึกษา ถ้ามีการจัดระบบการศึกษาที่ดีก็จะเกิดกระบวนการทางความคิดสติปัญญาและพลังสร้างสรรค์ในรูปแบบต่าง ๆ

ยุพิน พิพิธกุล(2536 :1) กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สร้างสรรคจิตใจของมนุษย์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิด กระบวนการและเหตุผล คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระบบและเป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ต้องใช้วิชาคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น จะเห็นได้ว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญซึ่ง คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Carl Friedrich Gauss) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันได้กล่าวถึง ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ว่า คณิตศาสตร์เปรียบเสมือนราชินีของวิทยาศาสตร์ (Mathematics is the queen of the sciences)(Eves.1964 : 395) อีกทั้งคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ยอมรับโดยทั่วไปแล้วว่ามีความสำคัญอย่างยิ่ง ในการศึกษาวิชาการแขนงต่าง ๆ เป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี นอกจากนี้ยังเป็นวิชาที่สอนให้คนเรามีระเบียบวินัย มีเหตุผลใช้ความคิดอย่างมีระบบและเป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยทุกประเภท

การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นช่วงของการเรียนรู้ที่มีความสำคัญมากเพราะเป็นพื้นฐานการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(สสวท.) ได้จัดทำหลักสูตรกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 โดยจัดทำคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้ เพื่อพัฒนาผู้เรียนทุกคนให้มีคุณภาพตามมาตรฐานที่กำหนด เมื่อเรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว โดยมีสาระการเรียนรู้สำหรับผู้เรียน 6 สาระ การเรียนรู้คือ

สาระที่ 1 จำนวนและดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

ในการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีนั้น สสวท. ได้จัดแบ่งการศึกษาออกเป็น 4 ช่วงชั้น คือช่วงชั้นที่ 1 (ป.1-ป.3) ช่วงชั้นที่ 2(ป.4- ป.6) ช่วงชั้นที่ 3 (ม.1- ม.3) ช่วงชั้นที่ 4(ม.4- ม.6) ในแต่ละช่วงชั้นนั้นต้องมีสาระทั้ง 6 สาระที่กล่าวมาข้างต้น เป็นสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียน ถ้าผู้เรียนที่มีความสนใจหรือมีความสามารถสูงทางคณิตศาสตร์ สถานศึกษานั้นสามารถจัดเนื้อหาให้มากขึ้น เช่น ในช่วงชั้นที่ 4 เป็นช่วงที่เป็นพื้นฐานที่ผู้เรียนจะศึกษาต่อในด้านวิทยาศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา เนื้อหาที่จัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เพิ่มคือ ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น เรขาคณิตยุคลิด แคลคูลัสเบื้องต้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2544 : 153 -154)

การพัฒนาเนื้อหาและกระบวนการสอน เป็นการเพิ่มประสบการณ์ที่สมบูรณ์แบบให้แก่นักเรียน เพราะฉะนั้นนักเรียนจะมีความรู้ที่มากขึ้นและกว้างขวางขึ้น ซึ่งคาดว่าจะจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง สโตน(Stone) กล่าวถึงความจำเป็นในการที่จะต้องปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ว่ามีสาเหตุสำคัญอยู่ 2 ประการ คือ

1. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในปัจจุบันได้ขยายออกไปอย่างกว้างขวาง
2. ความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์ และศาสตร์สาขาอื่น ๆ จำเป็นต้องอาศัยความรู้

ทางคณิตศาสตร์มากกว่าแต่ก่อน (ซวลิต เอี่ยมเจริญ. 2519 : 2 ; อ้างอิงมาจาก Stone.n.d.)

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Council of Teacher of Mathematics) มีชื่อ ย่อว่า NCTM เป็นสมาคมที่มีบทบาทหน้าที่ในการจัดทำมาตรฐานของวิชาคณิตศาสตร์ขึ้นเพื่อให้การเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศสหรัฐอเมริกาอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานเดียวกันโดยได้จัดทำเอกสาร Principles and Standards for School Mathematics ปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543) เพื่อเป็นมาตรฐานหลักสูตรที่จะใช้ต่อไป มาตรฐานที่กล่าวมาข้างต้นนี้ ได้บรรจุเนื้อหาคณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete mathematics) ลงในระดับมัธยมศึกษาเกรด 9 – 12 แล้ว ซึ่งในเนื้อหาคณิตศาสตร์ดิสครีต ประกอบด้วยหัวข้อสำคัญ 3 หัวข้อดังนี้ คณิตศาสตร์เชิงการจัด(Combinatorics) วิธีทำซ้ำและการเวียนเกิด (Iteration and Recursion) และกราฟแบบ จุด-เส้น (Vertex-Edge Graphs) ทั้ง 3 หัวข้อดังกล่าวสามารถนำมาสอนนักเรียนได้ตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลจนถึงระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และเพิ่มเมตริกซ์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (Principles and Standards for School Mathematics. 2000 : 10 – 360) ดังนั้นจะเห็นได้ว่า เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตไม่จำกัดอยู่ที่ระดับชั้นใดระดับชั้นหนึ่ง แต่สามารถนำมาสอนได้ในทุกระดับชั้น และในระดับชั้นที่สูงขึ้นเนื้อหาจะมีความเข้มข้นขึ้นและเน้นทฤษฎีมากขึ้นเพื่อให้เหมาะสมกับวัย และระดับความรู้ของผู้เรียน

ในการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ดิสครีตมาสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายนั้น ดรัมมอนด์ (Drummond.1989 : 641-A) ได้ทำการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ดิสครีตประกอบด้วยเรื่อง เมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับและความน่าจะเป็น ทฤษฎีกราฟ กราฟต้นไม้ และการเวียนเกิด พร้อมทั้งศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา ผลการศึกษาปรากฏว่านักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้นอกจากนี้สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดความเหมาะสมของการใช้หลักสูตรคณิตศาสตร์ในปี ค.ศ. 1987 ในหัวข้อของคณิตศาสตร์ดิสครีตมีเนื้อหาประกอบด้วย เมตริกซ์ การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับ ความน่าจะเป็น กราฟและความสัมพันธ์เวียนเกิด และได้ศึกษากับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ผลปรากฏว่า นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้

คณิตศาสตร์ดิสครีตเป็นรากฐานเชิงทฤษฎี สำหรับเทคโนโลยีที่ก้าวหน้าในปัจจุบันซึ่งเกี่ยวข้องกับ computer hardware หรือ software สมัยใหม่ ระบบสื่อสาร การประมวลผล สัญญาณเชิงตัวเลข ทฤษฎีสารสนเทศ ระบบควบคุม การวิจัยการดำเนินการ เพราะฉะนั้นคณิตศาสตร์ดิสครีตจึงเป็นวิชาที่สำคัญควรเรียนรู้ (วนิดา เหมะกุล .2535 : 4)

จากมาตรฐานหลักสูตรในสาระที่ 4 ที่กล่าวมาข้างต้นนี้ เป็นการนำพีชคณิตลงสอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการเข้าใจและให้ความหมายของลำดับ มาตรฐานหลักสูตรนี้เป็นพื้นฐานในการที่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ต้องใช้ศึกษาต่อในระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งสอดคล้องกับการที่กรมวิชาการมีการปรับปรุงและการเปลี่ยนแปลงหลักสูตรนั้น ส่วนใหญ่จะเริ่มที่ระดับอุดมศึกษาก่อน โดยมีการเพิ่มรายวิชาใหม่ ๆ และเน้นทฤษฎีมากขึ้น ซึ่งในปัจจุบันผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษามีความพึงพอใจค่อนข้างมาก ในการจัดโครงสร้างของหลักสูตร เพื่อตอบสนองต่อการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา อีกทั้งหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาในปัจจุบัน มีแนวโน้มในการนำเนื้อหาในระดับอุดมศึกษามารรจลงในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา (กรมวิชาการ. 2539:122)

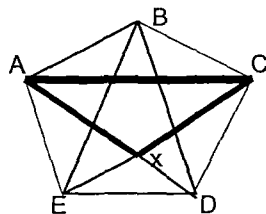
ในมาตรฐานของ NCTM จะเห็นได้ว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ดิสครีตแล้ว ผู้วิจัยมีความเห็นว่าคณิตศาสตร์ดิสครีตนั้นเป็นเนื้อหาใหม่ ซึ่งมีเนื้อหาที่น่าสนใจและมีความเหมาะสมกับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย จากการพิจารณาถึงรายละเอียดและความสำคัญของเนื้อหาในคณิตศาสตร์ดิสครีต ซึ่งประกอบด้วยกันหลายเรื่อง แต่ผู้วิจัยเห็นว่ามีความสำคัญ และเป็นประโยชน์สำหรับนักเรียนที่ศึกษาต่อในระดับมหาวิทยาลัย คือเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation)

ในการเรียนเรื่องที่เป็นเนื้อหาใหม่นั้น นักเรียนควรมีพื้นฐานที่จะเรียนเนื้อหานั้นได้เช่น เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด นักเรียนควรต้องมีพื้นฐานในเรื่องลำดับ (Sequence) มาก่อน เพราะในเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดใช้พื้นฐานเรื่องลำดับเป็นส่วนใหญ่

ความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นสิ่งที่ปรากฏในธรรมชาติที่มนุษย์สังเกตเห็น เช่น การเพิ่มจำนวนของสิ่งมีชีวิต การเพิ่มจำนวนใบของพืชใบเลี้ยงเดี่ยว การเรียงตัวของเมล็ดดอกทานตะวันหรือดอกเคซี ซึ่งมีการจัดเรียงเมล็ดมีลักษณะวนแบบก้นหอย นอกจากนี้มีปัญหาคือเป็นการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์คือ การเจริญเติบโตของประชากร กฎการเย็นตัวของนิวตัน ปัญหาทางกลศาสตร์ ปัญหาการตกของวัตถุ แรงเสียดทาน และความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีชื่อเสียงมานาน และเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลาย คือลำดับฟีโบนัชชี คือการเพิ่มจำนวนของประชากรของกระต่าย ที่ได้จากความคิดของ ฟีโบนัชชี (Fibonacci) หรือ เลโอนาร์โด ดิ ปิซา (Leonardo di Pisa) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี นอกจากการเพิ่มจำนวนของประชากรของกระต่ายที่เป็นลำดับฟีโบนัชชีแล้ว ยังมีสิ่งมีชีวิตอื่น ๆ ที่ปรากฏในธรรมชาติได้มากมาย และจัดเป็นลำดับฟีโบนัชชีเช่นเดียวกัน เช่น การเลี้ยวววดูเดนีย์ (Dudeney) ได้นำเสนอไว้ในหนังสือ 536 Puzzles and Curious Problems ซึ่งจัดพิมพ์โดยสำนักพิมพ์ Souvenir ในปี 1967 เป็นเรื่องเกี่ยวกับจำนวนววดูเดนีย์ที่เกิดขึ้นเป็นลำดับฟีโบนัชชี และปัญหาจอร์จิวิตของผึ้งซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งที่สมจริงและสอดคล้องกับธรรมชาติมากที่สุด

นอกจากลำดับฟีโบนัชชีเป็นลำดับที่มีชื่อเสียงและเป็นลำดับที่ถูกอ้างอิงมากที่สุดแล้ว ยังมีความสำคัญทางด้านศิลปะและสถาปัตยกรรม โดยคิดได้จากค่าของอัตราส่วนที่ได้มาจากลำดับฟีโบนัชชีสองตัวที่อยู่ติดกันและค่าที่ได้นั้นเป็นค่าคงที่คือ 1.61804 ค่าคงที่นี้มีชื่อเรียกว่าตัวเลขทองคำ (Golden Number) ในด้านสถาปัตยกรรม ถ้าสิ่งก่อสร้างใดที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีสัดส่วนแบบนี้เรียกว่า สี่เหลี่ยมทองคำ (Golden Rectangle) เช่น วิหารพาเทนอน กรุงเอเธนส์ ประเทศกรีก (วีระศักดิ์ อุดมโชค .2542 : 33-35)

ส่วนในด้านศิลปะ ค่าของอัตราส่วนที่ได้มาจากลำดับฟีโบนัชชีสองตัวที่อยู่ติดกันนั้น มีชื่อเรียกว่า อัตราส่วนทอง (golden ratio) ที่มีค่าเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือประมาณ 1.618 เป็นอัตราส่วนที่ปรากฏอยู่ในธรรมชาติมากมาย เช่น อัตราส่วนของความสูงของคนกับความสูงจากเท้าถึงสะดือคน, การวาดรูปดาวห้าแฉกที่สวยงาม จะต้องวาดบนรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าดังรูป 1.1 (สมชาย ประสิทธิ์จิตรตระกูล. 2544 :132)

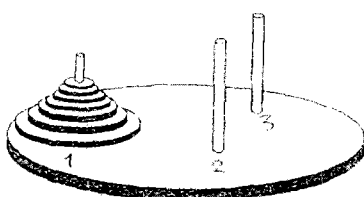


รูป 1.1

ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\frac{AC}{AX} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เป็นอัตราส่วนทอง (golden ratio)

ลำดับฟีโบนัชชีที่เกิดขึ้นนี้เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกิดมาจากธรรมชาติ และนำมาประยุกต์ใช้ใน ชีวิตประจำวัน ซึ่งมีประโยชน์มากดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น นอกจากลำดับฟีโบนัชชีที่เป็นรูปแบบหนึ่งของเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้แล้ว ความสัมพันธ์เวียนเกิดยังมีประโยชน์ในด้านการประมวลผลข้อมูลในคอมพิวเตอร์ที่สำคัญ ได้แก่ การเพิ่มตารางข้อมูล การสร้างความสัมพันธ์ให้แก่ข้อมูล และการเรียกข้อมูลกลับคืน วิธีการเข้ารหัสลับสำหรับตัวอักษรภาษาไทย (วรภรณ์ กาญจนทวี. 2541 : 4) การค้นหาข้อมูลของคอมพิวเตอร์เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอย่างหนึ่ง เช่น การค้นหาข้อมูลแบบทวิภาค (binary search) คือ การค้นหาข้อมูล โดยที่ข้อมูลนั้นเรียงลำดับมาแล้ว จะเริ่มจากข้อมูลตัวตรงกลางถ้าเป็นข้อมูลตัวที่ต้องการ ถือว่าสิ้นสุด แต่ถ้าไม่ใช่ตัวที่ต้องการ การค้นหาจะดำเนินต่อที่ครึ่งซ้าย ถ้าตัวที่ต้องการค้นหานั้นมีค่าน้อยกว่าตัวตรงกลางที่พิจารณา แต่ถ้าตัวที่ต้องการค้นหานั้นมีค่ามากกว่าตัวตรงกลาง การค้นหาจะดำเนินต่อที่ครึ่งขวา โดยเป็นการค้นหาแบบทวิภาคที่มีขนาดลดลงครึ่งหนึ่ง (สมชาย ประสิทธิ์จิตรตระกูล. 2544 :146) การค้นหาข้อมูลและการเรียงลำดับข้อมูลที่กล่าวมานี้ เป็นการใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งมีประโยชน์มากในด้านการค้นหาที่รวดเร็ว ตัวอย่างของความ สัมพันธ์เวียนเกิดที่มีชื่อเสียงมานาน และเป็นเกมทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักแพร่หลายคือ เกมหอคอยฮานอย (Tower of Hanoi)

ตัวอย่าง เกมหอคอยฮานอย คือการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้วงกลมที่มีรูตรงกลางมีรัศมีต่าง ๆ กัน n แผ่น วางซ้อนกันอยู่โดยแผ่นที่เล็กกว่าซ้อนบนแผ่นที่ใหญ่กว่าบนเสาหนึ่งใน 3 เสา ดังรูป 1.2 ไปไว้อีกหลัก หนึ่ง ที่ละแผ่น ในขณะที่ย้ายให้ใช้เสาหนึ่งเป็นที่พักแผ่นไม้วงกลมได้ ในแต่ละขั้นตอนการย้าย แผ่นไม้วงกลมที่ใหญ่กว่าจะซ้อนบนแผ่นไม้วงกลมที่เล็กกว่าไม่ได้ คำถามคือจะต้องทำการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้ n แผ่นจากเสาหนึ่ง ไปอีกเสาหนึ่งอย่างน้อยที่สุดกี่ครั้ง



รูป 1.2

ถ้ากำหนดให้เสาทั้งสามคือ 1, 2 และ 3 มีแผ่นไม้วงกลม 3 แผ่น จะมีจำนวนครั้งในการย้ายดังนี้

ครั้งที่ 1 ย้ายแผ่นที่ 1 (แผ่นเล็กสุดที่อยู่บน) ไปไว้เสาที่ 3

ครั้งที่ 2 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปไว้เสาที่ 2

ครั้งที่ 3 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 2

ครั้งที่ 4 ย้ายแผ่นที่ 3 ไปไว้ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 5 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปไว้ในเสาที่ 1

ครั้งที่ 6 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปวางบนแผ่นที่ 3 ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 7 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 3

จำนวนครั้งน้อยที่สุดในการย้าย 3 แผ่น คือ 7 ครั้ง จากเสาที่ 1 ไปเสาที่ 3

ถ้าย้ายแผ่นไม้ 4 แผ่นจะได้ 3 แผ่นแรกมีจำนวนครั้ง 7 ครั้งเพราะฉะนั้น ครั้งที่ 8 คือการย้ายแผ่นที่ 4 ไปไว้ในเสาที่ว่างอีกเสาหนึ่ง และอีก 7 ครั้ง สำหรับย้ายแผ่นไม้ที่ 3 ไปวางบนแผ่นที่ 4 ดังนั้นจำนวนครั้งทีน้อยที่สุดในการย้าย 4 แผ่นคือ 15 ครั้งจะได้จำนวนครั้ง (ดังตาราง)

จำนวนแผ่นไม้วงกลม	จำนวนครั้งทีน้อยสุดในการย้าย (a_n)
1	1
2	3
3	7
4	15

จากตัวอย่าง เราสามารถหาจำนวนครั้งได้โดยการทดลองปฏิบัติ แต่ถ้าในกรณีที่จำนวนแผ่นไม้วงกลมเพิ่มมากขึ้น ถึง n แผ่น เราจะมีวิธีในการหาจำนวนครั้งได้จากการสร้างตัวแบบ (model) โดยพิจารณาในกรณีทั่วไปและสร้างรูปแบบที่แน่นอน โดยการสร้างความสัมพันธ์อย่างหนึ่ง ซึ่งเราเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

วิธีทำ การเคลื่อนย้ายแผ่นไม้วงกลม 1 แผ่น จำนวนครั้งในการย้ายทีน้อยที่สุด (a_1)

คือ 1 ครั้ง $a_1 = 1$ ถ้ามีแผ่นไม้วงกลม n แผ่น ให้พิจารณาย้ายแผ่นไม้วงกลม $n-1$ แผ่นจากเสาที่ 1 ไปยัง เสาที่ 2 ก่อน จำนวนครั้งในการย้ายคือ (a_{n-1}) แล้วจึงย้ายแผ่นไม้วงกลมที่อยู่ล่างสุดจากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 3 แล้วขั้นตอนสุดท้ายคือย้ายแผ่นไม้วงกลม $n-1$ แผ่น จากเสาที่ 2 ไปยังเสาที่ 3 จำนวนครั้งในการย้ายคือ (a_{n-1}) เราสามารถสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

เมื่อความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เราสามารถหาคำตอบได้เมื่อมีจำนวนแผ่นไม้วงกลมมากขึ้นจนถึง n แผ่น ความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหา โดยการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการสร้างตัวแบบเวียนเกิด (recurrence model) พร้อมทั้งนำเสนอวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นรูปแบบปิดซึ่งวิธีการหาคำตอบจะนำไปไว้ในแบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

จากประโยชน์และความสำคัญของเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่าควรนำเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดลงสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งจะสอดคล้องกับหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่กำลังปรับปรุงเปลี่ยนแปลงใหม่ ที่กำหนดให้สถานศึกษากำหนดสาระการเรียนรู้ของเนื้อหาเองตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่หลักสูตรกำหนดให้ จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะสร้างแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ขึ้นและนำแบบเรียนดังกล่าวไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งผลที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้ อาจนำไปใช้เป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและอาจเป็นทางเลือกหนึ่งที่สถานศึกษาที่จะนำแบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ไปใช้สอนในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้
เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามแบบเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบถึงความเป็นไปได้ในการนำเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดมาสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. ได้แบบเรียนในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
3. ผลการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทาง ในการพัฒนาและปรับปรุงหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) 1 ห้องเรียน 35 คนจากนักเรียนทั้งหมด 4 ห้องเรียนจำนวน 149 คน ซึ่งการจัดห้องเรียนเป็นแบบคละกันโดยใช้คะแนนสะสม ของนักเรียนเป็นเกณฑ์ มีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

ระยะเวลาที่ใช้

ในการทดลองครั้งนี้ใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 50 นาที และใช้เวลาทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 1 ชั่วโมง 30 นาที โดยทดลองสอนในภาคเรียนที่ 2 ของปีการศึกษา 2545 สัปดาห์ละ 2 คาบ ในชั่วโมงกิจกรรมและชั่วโมงอิสระ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ประกอบด้วย 4 หน่วยการเรียนรู้ ได้แก่

1. ทบทวนลำดับ (2 คาบ)
2. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (4 คาบ)
3. การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (7 คาบ)
 - 3.1 ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์
 - 3.3 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์
4. การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด (2 คาบ)

แผนการสอน ประกอบด้วย

1. สารการเรียนรู้
2. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
3. เนื้อหา
4. กิจกรรมการเรียนการสอน
5. สื่อการเรียนการสอน
6. การวัดและการประเมินผล
7. กิจกรรมเสนอแนะ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระคือ แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวแปรตามคือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด หมายถึง แบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาดังหัวข้อต่อไปนี้

- 1.1 ทบทวนลำดับ (2 คาบ)
- 1.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิด (4 คาบ)
- 1.3 การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (7 คาบ)
 - 1.3.1 ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 1.3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์
 - 1.3.3 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์
- 1.4 การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด (2 คาบ)

2. แผนการสอน หมายถึง แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยใช้สื่ออุปกรณ์การสอนและการวัดผลตามเนื้อหาสาระและจุดประสงค์ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมที่กำหนด

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หมายถึง นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด หมายถึง ความสามารถในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งวัดจากคะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยจะทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง หลังจากการเรียนรู้การสอนสิ้นสุดลงแล้ว

5. นักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์ หมายถึงนักเรียนที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (กระทรวงศึกษาธิการ.2534:28)

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนรู้เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดมากกว่า ร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

ประวัติความเป็นมาของความสัมพันธ์เวียนเกิด

การศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา

และหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยภายในประเทศ

งานวิจัยต่างประเทศ

ประวัติความเป็นมาของความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในปลายศตวรรษที่ 12 นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีมีชื่อว่าเลโอนาร์โด ดิ ปิซา (Leonardo di Pisa) เกิดประมาณปี ค.ศ. 1170 ที่เมืองนิซา ประเทศอิตาลี เขาเดินทางตามบิดาไปทำการค้าที่แอฟริกา และได้เข้ารับการศึกษาที่ทางตอนเหนือของแอฟริกา มีความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์และได้เขียนหนังสือเล่มหนึ่ง ซึ่งมีชื่อเสียงมากคือ Liber abaci เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้เกี่ยวกับเลขคณิต และพีชคณิตเบื้องต้นโดยได้รวบรวมปัญหามากมายเกี่ยวกับลำดับ ฟิโบนัชชีได้ตั้งปัญหาเกี่ยวกับอัตราการเจริญเติบโตของประชากรกระต่ายซึ่งเป็นลำดับ หลังจากนั้น 600 ปี มีนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ ลูคัส (Edouard Lucas) ได้เป็นผู้ตั้งชื่อลำดับนี้ว่า ลำดับฟิโบนัชชี นอกจากอัตราการเจริญเติบโตของประชากรกระต่ายที่เป็นลำดับฟิโบนัชชี ในธรรมชาติแล้ว เราสามารถสังเกตเห็นถึงความเปลี่ยนแปลงของสรรพสิ่งต่าง ๆ ได้หลายอย่างเช่น การเจริญเติบโตของประชากร การเรียงเมล็ดของดอกทานตะวันเป็นลักษณะวนแบบก้นหอย และยังเป็นคนนำระบบเลขฐานสิบเข้ามาใช้ในยุโรป (วีระศักดิ์ อุดมโชค.2542 : 29 -31)

การศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้จัดทำ และพิมพ์เผยแพร่เอกสารมาตรฐานหลักสูตรและการวัดผล ที่ชื่อว่า The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics ในปี ค.ศ. 1989 (พ.ศ. 2532) โดยมีเหตุผล 3 ประการกล่าวคือ

1. เพื่อเป็นการประกันคุณภาพของการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Ensure Quality)
2. เพื่อกำหนดเป้าหมายของการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Indicate Goals)
3. เพื่อส่งเสริมโอกาสในการศึกษาคณิตศาสตร์ (To Promote Chance)

ในปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543) สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกาได้จัดพิมพ์เอกสาร Principles and Standards for School Mathematics โดยได้กำหนดหลักการ (Principles) และมาตรฐาน (Standards) เพื่อให้ครูได้ใช้เป็นแนวทางในการจัดโปรแกรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ดังนี้

หลักการ (Principles) มีทั้งหมด 6 หลักการ ได้แก่

1. การเสมอภาค (The Equity)
2. หลักสูตร (The Curriculum)
3. การสอน (The Teaching)
4. การเรียนรู้ของนักเรียน (The Learning)
5. การประเมินผล (The Assessment)
6. เทคโนโลยี (The Technology)

มาตรฐาน (Standards) เนื้อหาและกระบวนการทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนมีทั้งหมด 10 มาตรฐาน แบ่งเป็นมาตรฐานเนื้อหา 5 มาตรฐานและมาตรฐานกระบวนการ 5 มาตรฐาน ดังนี้

มาตรฐานเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Content Standards)

1. เนื้อหาเกี่ยวกับจำนวนและดำเนินการ (Number and Operation)
2. เนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิต (Algebra)
3. เนื้อหาเกี่ยวกับเรขาคณิต (Geometry)
4. เนื้อหาเกี่ยวกับการวัด (Measurement)
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data Analysis and Probability)

มาตรฐานกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Process Standards)

1. การแก้ปัญหา (Problem Solving)
2. การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof)
3. การเชื่อมโยง (Connections)
4. การสื่อสาร (Communications)
5. การแสดง/การนำเสนอ (Representations)

จากเอกสาร Principles and Standards for School Mathematics พบว่าในมาตรฐานเนื้อหาคณิตศาสตร์ ที่กำหนดให้เป็นแนวทางในการเรียนการสอนคือ เนื้อหาคณิตศาสตร์ดิสครีตซึ่งมีดังนี้ (Dossey, 1987)

บทที่ 1 : ความรู้เบื้องต้นของปัญหาเชิงการนับ

บทที่ 2 : เซต ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

บทที่ 3 : ทฤษฎีกราฟ

บทที่ 4 : ทรี (Tree)

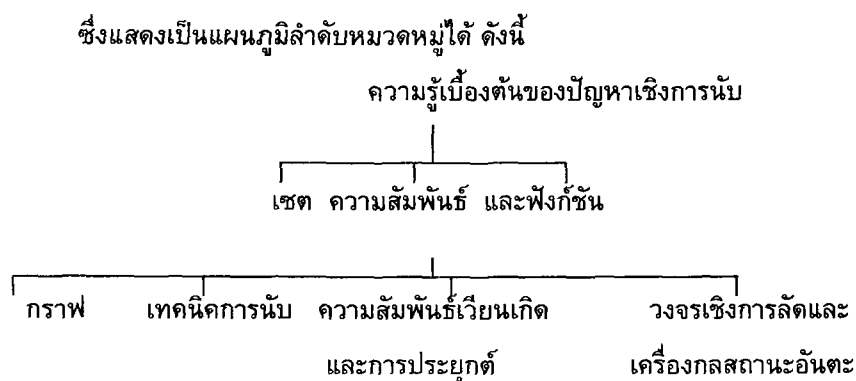
บทที่ 5 : การจับคู่ (Matching)

บทที่ 6 : ข่ายงาน (Network Flows)

บทที่ 7 : เทคนิคการนับ (Counting Techniques)

บทที่ 8 : ความสัมพันธ์เวียนเกิดและการประยุกต์ (Recurrence Relation and its Applications)

บทที่ 9 : วงจรเชิงการจัด และเครื่องกลสถานะอันตะ (Combinatorial Circuits and Finite State Machines)



การศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย

จากการปฏิรูปการศึกษาของสหรัฐอเมริกา ที่สืบเนื่องจากผลการรายงานของคณะกรรมการแห่งชาติ ว่าด้วยความเป็นเลิศทางการศึกษา (National Commission on Excellence in Education) ในปี ค.ศ. 1989 เป็นจุดเริ่มต้นของการให้ความสำคัญเรื่องมาตรฐานการศึกษา โดยพิจารณาว่านักเรียนควรรู้เรื่องอะไร และควรมีความสามารถอะไร ในการเรียนวิชาหลักต่าง ๆ 11 สาขา ได้แก่ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ การอ่าน การเขียน ประวัติศาสตร์ ภูมิศาสตร์ หน้าที่พลเมือง พลศึกษา ศิลปะดนตรีและภาษาต่างประเทศ และในที่สุดประเทศสหรัฐอเมริกา ก็ได้ประกาศเป้าหมายการศึกษาชาติ ในปี ค.ศ. 2000 หรือที่เรียกว่า Goal 2000 บางครั้งใช้คำว่า Standard โดยมีการขยายผลงานจนเกิดเป็นมาตรฐานการศึกษาระดับชาติในเวลาต่อมา

การปฏิรูปการศึกษาดังกล่าว มีผลทำให้รัฐและองค์กร สมาคมวิชาชีพต่าง ๆ ทั้งภาครัฐและเอกชน ได้พัฒนาความเป็นมาตรฐานในวิชาชีพของตนเอง โดยมีการพัฒนาหลักสูตรรวมไปถึงการเรียนการสอน การประเมินผล รวมทั้งการพัฒนาการฝึกหัดครู ให้เป็นทิศทางเดียวกันกับมาตรฐานที่วางไว้ ความเคลื่อนไหวเหล่านี้ทำให้ประเทศต่าง ๆ อาทิ เช่น แคนาดา ออสเตรเลีย นิวซีแลนด์ อังกฤษ จีน ญี่ปุ่น สิงคโปร์ รวมทั้งประเทศไทยได้นำเอาแนวคิดดังกล่าวไปจัดการศึกษาที่เรียกว่า การศึกษาตามมาตรฐาน

การศึกษาตามมาตรฐาน (Standard – Based Education – SBE) คือ การพัฒนาด้านศึกษาให้เป็นมาตรฐาน ซึ่งในขณะนั้นประเทศไทยโดยกรมวิชาการ ได้ดำเนินการจัดการศึกษาตามมาตรฐาน มาตั้งแต่ พ.ศ. 2537 และได้ดำเนินการจัดทำหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน เพื่อให้สนองนโยบายและการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานที่ระบุไว้ในแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 8 แผนพัฒนาการศึกษาแห่งชาติ ฉบับที่ 8 รัฐธรรมนูญแห่งราชอาณาจักรไทย พ.ศ. 2540 และพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ ที่มุ่งพัฒนาการศึกษาและขยายโอกาสทางการศึกษาให้ได้ทั่วถึงทุกกลุ่มคน โดยให้การศึกษาเป็นกระบวนการพัฒนาคน ให้มีความสามารถเต็มตามศักยภาพ มีการพัฒนากระบวนการเรียนรู้ มุ่งกระจายอำนาจจากส่วนกลางสู่ชุมชน ท้องถิ่น โดยให้ท้องถิ่นชุมชนเข้ามามีส่วนร่วมในการจัดการศึกษา ร่วมคิดร่วมทำและพัฒนาหลักสูตร การจัดการเรียนการสอน ให้มีมาตรฐานการศึกษาแห่งชาติ มีระบบการประเมินผล และประกันคุณภาพทางการศึกษา

(กรมวิชาการ . 2541)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย

หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่ใช้อยู่ในปัจจุบันเป็นหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายพุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533) โดยกำหนดจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนมีคุณลักษณะดังนี้ (กระทรวงศึกษาธิการ . 2534 : 129)

1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจในหลักการและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ สามารถคิดอย่างมีเหตุผล และใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างเป็นระเบียบชัดเจนและรัดกุม
2. เพื่อให้มีทักษะในการคิดคำนวณและนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหา
3. เพื่อให้ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
4. เพื่อให้เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ หรือในการเรียนคณิตศาสตร์ชั้น

สูงปัจจุบัน สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำหลักสูตรกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์

ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 ซึ่งได้จัดทำคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่เป็นเป้าหมายในการพัฒนาการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานของผู้เรียนให้มีคุณภาพตามมาตรฐานที่กำหนด มาตรฐานการเรียนรู้ที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน (สสวท. 2544 : 6-7)

สาระที่ 1 : จำนวนและดำเนินการ

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆและสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4 เข้าใจในระบบจำนวนและสามารถนำเสนอสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

สาระที่ 2 : การวัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3 แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ(spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่างๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

สาระที่ 5 : การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 5.1 เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้

มาตรฐาน ค 5.2 ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็น ในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 : ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

คู่มือที่จัดทำขึ้นนี้ได้จัดทำรายละเอียดของมาตรฐานและสาระการเรียนรู้เป็นช่วงชั้น สำหรับระดับมัธยมศึกษาชั้นได้แบ่งช่วงชั้นดังนี้ คือ ช่วงชั้น ที่ 3 (ม.1 – ม.3) และช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) โดยต้องการให้คุณภาพของผู้เรียนเมื่อจบช่วงชั้นที่ 4 แล้วผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับระบบจำนวนจริงและสามารถนำเสนอสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ได้

2. นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้คาดคะเนระยะทาง ความสูง และแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

3. มีความเข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้

4. มีความคิดรวบยอดในเรื่องเซตและการดำเนินการของเซต สามารถบอกได้ว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้แผนภาพแทนเซต มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันสามารถใช้ความสัมพันธ์และฟังก์ชันแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้

5. สามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ เข้าใจความหมายของผลบวกของ n พจน์ แรกของอนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิตและหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตรและนำไปใช้ได้

6. สามารถสำรวจรวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล และนำผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลไปช่วยในการตัดสินใจบางอย่างได้

7. นำความรู้เรื่องความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ไปใช้ได้

8. มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลาย และใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม สามารถให้เหตุผลสื่อสารสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และนำเสนอ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยง คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

จากหลักสูตรของกระทรวงศึกษาธิการนั้น จะเห็นว่าจุดประสงค์นั้นต้องการให้นักเรียนมีความรู้และความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับชีวิตประจำวันได้ ส่วนในการจัดหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สสวท. ได้จัดทำคู่มือการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการศึกษาคณิตศาสตร์ให้มีคุณภาพตามมาตรฐานที่กำหนด จะเห็นว่าสอดคล้องกับมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของ NCTM ซึ่งมี 10 มาตรฐานคือมาตรฐานเนื้อหาและมาตรฐานกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะมาตรฐานเนื้อหาซึ่งส่วนใหญ่แล้วของต่างประเทศกับของประเทศไทยจะเรียนเหมือนกันแต่ก็มีบางเนื้อหาคือคณิตศาสตร์ดิสครีตที่นักเรียนเรียนนั้นเป็นเนื้อหาของระดับชั้นมหาวิทยาลัย แต่ได้นำมาสอนในระดับเกรด 9 – 12 ซึ่งเทียบเท่ากับระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของไทยและในเนื้อหาคณิตศาสตร์ดิสครีตมีเนื้อหาย่อยที่ ดอสซี่ (Dossey, 1987) กำหนดไว้ซึ่งมีเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดและการประยุกต์ (Recurrence Relation and its Application) ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศไทยนั้นในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นั้นได้เรียนเรื่อง ลำดับ (Sequence) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับที่จะเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดได้

ผู้วิจัยมีความเห็นว่า เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีอยู่ใน NCTM นั้นเป็นเนื้อหาที่น่าสนใจและมีความเหมาะสม ที่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายของประเทศไทย ซึ่งอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดได้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยภายในประเทศ

ดี บางกระ (2538 :19 –20) ได้ทำการศึกษาความสามารถของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด ซึ่งอยู่ในคณิตศาสตร์ดิสครีตกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกรุงเทพคริสเตียนวิทยาลัย เขตบางรัก กรุงเทพมหานคร จำนวน 40 คน ผลการศึกษาค้นคว้า ปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ การเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียน ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ธานินทร์ สิทธิวัชรธรรม (2542 : 26-27) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนมัธยมสาธิตสถาบันราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพมหานคร ฯ จำนวน 45 คน ผลการศึกษาค้นคว้า ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

ยุพร ริมชลการ (2542 : 88-93) ได้ทำการศึกษาการพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตซึ่งแบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 หน่วยการเรียนรู้ เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นหน่วยการเรียนรู้หนึ่งหน่วยในหลักสูตรพีชคณิต สำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ในกรุงเทพมหานคร และปริมณฑล ที่สอบผ่านเกณฑ์คัดเลือก 17 คน ผลการศึกษาค้นคว้าปรากฏว่า เนื้อหาหลักสูตรเข้มข้นกว่าปกติเน้นการแก้ปัญหา โดยใช้ความคิดสร้างสรรค์ ซึ่งเป็นไปตามกระบวนการพัฒนาหลักสูตร นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความรอบรู้มีความสามารถ ในเนื้อหาพีชคณิต อยู่ในระดับที่ยอมรับได้เมื่อเทียบกับจุดตัด (วิธีของแองกอฟ)

งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำเอาคณิตศาสตร์ในระดับสูงมาสอนในระดับต่ำกว่า เพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนของนักเรียนในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยได้ศึกษาและค้นคว้าได้มีดังนี้

ดรัมมอนด์ (Drummond.1989 : 641-A) ได้ทำการพัฒนาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีต ประกอบด้วยเรื่อง เมตริกซ์ ตรรกศาสตร์ เซต การนับและความน่าจะเป็น ทฤษฎีกราฟ กราฟต้นไม้ (Tree) และการเวียนเกิด (Recursion) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเน้นการนำไปใช้แก้ปัญหา ผลการศึกษาปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ดิสครีตได้

ไวนิ่ง (Vining .1989 : 380 – A อ้างมาจาก ดี บางกระ.2538 : 11) ได้ทำการศึกษาหัวข้อเรื่องและแนวความคิดของคณิตศาสตร์ดิสครีตในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา ซึ่งกำหนดโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา NCTM ไวนิ่งได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ที่สอนคณิตศาสตร์ดิสครีตในหัวข้อที่สัมพันธ์กับคณิตศาสตร์ดิสครีตในหลักสูตรของชั้นมัธยมศึกษา ปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นพ้องต้องกันว่า คณิตศาสตร์ดิสครีตที่มีในระดับสูง ซึ่งแยกมาสอนในระดับมัธยมศึกษา มีความเหมาะสม แสดงว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ดิสครีต มีความเป็นไปได้ที่จะนำมาใช้สอนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายได้

โรเบิร์ต (Robert) และ เอ็ดเวิร์ด(Edward.1989: 157-158) ได้วิจัยและศึกษาเรื่องการแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิดเช่น ปัญหาหอคอยฮานอย ปัญหาประยุกต์ทางฟิสิกส์ คือกฎการเย็นตัวของนิวตันโดยการใชรูปแบบจำลอง(Models) และการใช้ตาราง(spreadsheet) สำหรับนักเรียนในระดับอุดมศึกษา ผลปรากฏว่าวิธีการดังกล่าวสามารถช่วยแก้ปัญหาได้

แกทเธอลีน คราเมอร์ (Cramer. 2001: 317-318) ได้ศึกษาความสามารถของนักเรียน ในเกรดระดับกลาง (Middle grade) คือ เกรด 5 – 8 ในการแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิดโดยใช้ การวาดภาพ เพื่อหาแนวทางรูปแบบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยได้ทำการศึกษาปัญหาอยู่ 3 เรื่องคือ

1. ปัญหาฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function Problem)
2. ปัญหาฟังก์ชันควอดราติก (Quadratic Function Problem)
3. ปัญหาฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Function Problem)

ผลจากการศึกษาปรากฏว่า นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ยากและซับซ้อนได้ โดยใช้การวาดภาพ

อีริค (Eric. 1990 : 362-367) ได้ทำการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) ในเกรด 7 – 12 ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนเกรด 7 –12 มีความสามารถเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้บรรจุอยู่ในหลักสูตร ของ NCTM นอกจากนี้ยังมีความคิดเห็นว่าการเริ่มสอนให้นักเรียนได้เรียนคณิตศาสตร์ดิสครีต โดยที่ครูผู้สอนต้องมีส่วนช่วยในการจัดการเรียนการสอนและเห็นความสำคัญของคณิตศาสตร์ดิสครีตด้วย

จากการวิจัยดังกล่าวข้างต้น จะเห็นได้ว่า ในประเทศไทยและต่างประเทศมีการตื่นตัวในการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์โดยการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ใหม่และสามารถนำมาพัฒนา เป็นบทเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาได้ สอดคล้องกับคำกล่าวของ บรูเนอร์ (Bruner.1966 : 30) ที่ว่า ครูผู้สอนสามารถสอนวิชาใด ๆ ให้นักเรียนระดับใดก็ได้ แต่ทั้งนี้ต้องปรับปรุงเนื้อหา และวิธีการสอนให้เหมาะสมกับสติปัญญาของนักเรียนก่อน งานวิจัยดังกล่าวนับได้ว่า เป็นงานวิจัยที่มีประโยชน์ ต่อการพัฒนาและการดำเนินการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศไทย เพื่อให้สอดคล้องกับโลกในยุคโลกาภิวัตน์ ที่เป็นยุคสมัยของเทคโนโลยีที่ก้าวหน้า เพราะงานวิจัยจะทำให้ทราบถึงผลสัมฤทธิ์หรือความสามารถทางการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในเนื้อหาต่าง ๆ ของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งจะเป็นสิ่งที่จะช่วยในการประกอบการตัดสินใจ ก่อนที่จะทำการพัฒนาและ ปรับปรุงเปลี่ยนแปลงหลักสูตรคณิตศาสตร์ต่อไป จากความสำคัญดังกล่าวจึงทำให้ ผู้วิจัยสนใจในการนำเนื้อหาเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งเป็นเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา มาทดลองสอนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อสร้างแบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดและศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ว่ามีความสามารถที่จะเรียนเนื้อหาดังกล่าวได้หรือไม่

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยผู้วิจัยดำเนินการตามลำดับขั้นตอนการวิจัยดังต่อไปนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. วิธีดำเนินการวิจัย
4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี ปีการศึกษา 2545 โดยการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คนจากทั้งหมด 4 ห้องเรียน จำนวน 149 คน ซึ่งทางโรงเรียนจัดห้องเรียนเป็นแบบความสามารถในการเรียน มีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนระดับ เก่ง ปานกลาง และอ่อนอยู่ในห้องเดียวกัน

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

1. แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด
2. แผนการสอน สำหรับใช้ประกอบการสอน
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

การสร้างแบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดมีขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยจากหนังสือและวารสารต่อไปนี้

- 1.1 ภัทรา เตชาภิวาทย์. *คณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics)*. กรุงเทพฯ ฯ : 2537
- 1.2 วนิตา เหมะกุล. *คณิตศาสตร์ดิสครีต(Discrete Mathematics)*. กรุงเทพฯ ฯ : สิงหาคม 2530.
- 1.3 วีระศักดิ์ อุคมโชค. *คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ในชีวิตประจำวัน*. กรุงเทพฯ ฯ : 2542
- 1.4 สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล. *ภินทคณิตศาสตร์ (Discrete Mathematics)*. บ. ด้านสุทธาการพิมพ์จำกัด. พิมพ์ครั้งที่ 1 (ม.ย.2544)
- 1.5 Bernard Kolman ,Robert C. *Bosby. Discrete Mathematical Structure for Computer Science* . Prentice – Hall,Inc , Englewood Cliffs, New Jersey 07365 . 1987,464 p
- 1.6 Eric W.Hart .*Teaching Discrete Mathematics in Grades7-12* . no. 5,(1990) :362 – 367 .
- 1.7 James L. HEIN . *Discrete Mathematics*. Boston : Johes and Bartlett , 1996, 696 p
- 1.8 Joe I. Mott . *Discrete Mathematic for Computer Science & Mathematicans*. Englewood Cliffs , N. J. : Reston 1986,751 p
- 1.9 *Mathematics in School* . 1999 Vol . 28 No. 5 . November.
- 1.10 *Mathmatics Teaching in the Middle School* . Vol 6. No. 5 January 2001.
- 1.11 National Council of Teachers of Mathematics . *Principles and Standards for School Mathematics* : 2000 : 10 – 360
- 1.12 Ralph P Grimaldi , *Discrete and Combinatorics Mathematics An Applied Introductions* . Addison Wesley Polslighing Company 1961.
- 1.13 Richard Johnsonbaugh . *Discrete Mathematics*. Upper Saddle River. N.J. Prentice Hall . 1997, 701 p
- 1.14 Susannna S. Epp. *Discrete Mathematics with Applications* . D. e Paul University . 1995, 801 p

2. กำหนดเนื้อหาสาระสำคัญและจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหา 4 หน่วยการเรียนรู้ ใช้เวลา ในการสอนทั้งหมด 15 คาบ คาบละ 50 นาทีได้แก่

1. ทบทวนลำดับ (2 คาบ)
2. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (4 คาบ)
3. การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (7 คาบ)
 - 3.1 ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์
 - 3.3 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์
4. การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด (2 คาบ)

กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยมุ่งให้นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
2. สร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
3. หาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
4. หาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบต่าง ๆ ได้
5. นำความรู้เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

3. การสร้างแบบเรียนและแผนการสอนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

3.1 ผู้วิจัยสร้างแบบเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดซึ่งในแบบเรียน ประกอบด้วยจุดประสงค์เนื้อหา แบบฝึกหัด และมีรายละเอียดของเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้ดังนี้

- | | |
|---|-----------|
| 3.1.1 ทบทวนลำดับ | (2 คาบ) |
| 3.1.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิด | (4 คาบ) |
| 3.1.3 การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด | (7 คาบ) |
| <ul style="list-style-type: none"> - ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด - ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ - ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ | |
| 3.1.4 การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด | (2 คาบ) |

ผู้วิจัยสร้างแผนการสอน ประกอบด้วย

1. สารการเรียนรู้
2. จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
3. เนื้อหา
4. กิจกรรมการเรียนการสอน
5. สื่อการเรียนการสอน
6. การวัดและการประเมินผล
7. กิจกรรมเสนอแนะ

3.2 นำแบบเรียนและแผนการสอน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิการสอนคณิตศาสตร์ 2 ท่านคือ ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และครูผู้สอนในระดับมหาวิทยาลัยเพื่อตรวจแก้ไข ปรับปรุง และชี้แนะข้อบกพร่อง

3.3 นำแบบเรียนและแผนการสอนที่ได้แก้ไขและปรับปรุงแล้ว ไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งไม่ใช่เรียนในกลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน ซึ่งนักเรียนทั้ง 30 คนนี้เป็นอาสาสมัครโดยใช้เวลาสอน 15 คาบ คาบละ 50 นาที ระหว่างการทดลองสอนผู้วิจัยสังเกต บันทึกข้อบกพร่อง ในด้านความเหมาะสมของเนื้อหา ความยากง่ายของภาษา และเวลาที่ใช้ในการสอนของแบบเรียนและแผนการสอน แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข จากนั้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจแก้ไขอีกครั้ง ก่อนนำไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย

4 ตัวเลือก ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากหนังสือ เทคนิคการเขียนข้อสอบ ของชวาล แพรัตกุล (2520 : 1 – 40) และเทคนิคการวัดผลการเรียนรู้ ของล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2543 : 196 – 198)
2. วิเคราะห์เนื้อหาที่ใช้ในการทดลอง เพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดมีขั้นตอนดังนี้
 - 2.1 วิเคราะห์เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 2.2 วิเคราะห์สาระสำคัญเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 2.3 วิเคราะห์จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
 - 2.4 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมตามที่กำหนด
3. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท และผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน เพื่อตรวจสอบคุณภาพความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าข้อสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมโดยใช้เกณฑ์พิจารณาดังนี้
 - คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
 - คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
 - คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม
4. นำแบบทดสอบที่ได้รับการตรวจสอบจากคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทจำนวน 50 ข้อไปทดลองใช้กับนักเรียน ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มที่ทดลองสอนที่ผ่านการเรียนการสอนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดมาแล้วจำนวน 30 คนใช้เวลาทดสอบ 2 ชั่วโมง
5. วิเคราะห์แบบทดสอบโดยการหาค่าความยากง่าย (p) และ อำนาจจำแนก (r)
6. คัดเลือกแบบทดสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และค่าอำนาจจำแนก ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป จำนวน 40 ข้อ
7. หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR-20 ของ คูเดอร์-ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.812

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยนำแบบเรียนที่สร้างขึ้น ไปทดลองสอนกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลาสอนในช่วงคาบอิสระ และชั่วโมงกิจกรรม โดยทำการสอนสอนสัปดาห์ละ 2 คาบ คาบละ 50 นาที รวม 15 คาบ โดยผู้วิจัยเป็นผู้สอนเอง
2. ภายหลังจากการสอนครบ 15 คาบแล้ว ทำการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นแบบทดสอบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที
3. ตรวจสอบให้คะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน ส่วนข้อที่ตอบผิด หรือไม่ตอบ หรือตอบมากกว่า 1 คำตอบให้ 0 คะแนน
4. นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์หาค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากรโดยใช้ค่าสถิติ Z (Z – Test for Population Proportion)

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่า ร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับสัดส่วนของประชากรโดยใช้ค่าสถิติ Z (Z – Test for Population Proportion)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. สถิติ ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก(r) ของแบบทดสอบ และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคำนวณจากสูตร KR –20
3. สถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z (Z - Test for Population Proportion)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ตอนที่ 3 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่ผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นข้อสอบแบบปรนัยจำนวน 40 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับ ดังนี้

ตอนที่ 1 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยง เบนมาตรฐาน (s)
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษา ปีที่ 6	35	40	28.714	71.785	4.12

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 28.714 คิดเป็นร้อยละ 71.785 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.12

ตอนที่ 2 : ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6	35	35	100

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ทุกคนได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

ตอนที่ 3 : ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง
ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง
ความสัมพันธ์เวียนเกิด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนจากแบบ ทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ตั้งแต่ ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	สถิติทดสอบ Z
นักเรียนชั้น มัธยมศึกษา ปีที่ 6	35	35	5.88 **

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียน
เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล
ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 6 ตามแบบเรียนและแผนการสอนที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด
มากกว่าร้อยละ 50 ขึ้นไปของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนกาญจนาภิเษก
วิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน 35 คน
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้สอน 15 คาบ
2. แผนการสอนสำหรับใช้ประกอบการสอนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด
3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 35 คน โดยใช้แบบ
เรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาในการทดสอบ 15 คาบ คาบละ 50 นาที
2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนการสอนครบ 15 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบ
ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก
จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียน
กลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น หลังจากทดลองแล้วผู้วิจัยได้นำข้อมูลมา
วิเคราะห์ ผลตามลำดับ ดังนี้

1. คำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
2. คำนวณหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ที่ได้คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
3. ผลการทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนความสัมพันธ์เวียนเกิด

สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ปรากฏผลดังนี้

1. คะแนนในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนเป็น 28.714 คิดเป็นร้อยละ 71.785 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.12
2. จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทุกคน ได้คะแนนมากกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนเต็ม
3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียน เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดตามแบบเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

อภิปรายผล

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดจากแบบเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก
 - 1.1 ผู้วิจัยเรียบเรียงเนื้อหาค่อนข้างเป็นรูปธรรมที่เข้าใจง่าย มีการยกตัวอย่างหลายตัวอย่างประกอบอย่างชัดเจน โดยเริ่มจากเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานอย่างง่าย ปานกลาง และยาก ตามลำดับ
 - 1.2 นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจ และสนใจเรียนดีมาก ซึ่งจะเห็นได้จากการซักถามในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นเนื้อหาใหม่ที่มีลักษณะรูปแบบคล้ายกับที่นักเรียนเคยเรียนผ่านมามาก เช่น ในการหารากของสมการกำลังสอง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ เป็นต้น
 - 1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้สอนเนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยเริ่มจากโจทย์ปัญหาที่ใช้อุปกรณ์ เป็นสื่อให้นักเรียนได้เข้าใจมากขึ้น และนักเรียนส่วนใหญ่มีความสนใจที่จะทดลอง เช่น เกมหอคอยฮานอย ใบบาง แบบฝึกหัดเพิ่มเติม เป็นต้น นอกจากนี้ เมื่อเรียนไม่เข้าใจในตอนใด ผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้ซักถามได้เต็มที่ทั้งภายในห้องเรียนและนอกห้องเรียน
2. ค่าเฉลี่ยของคะแนน ในการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะนักเรียนยังไม่คุ้นเคยกับเนื้อหาในเรื่องการประยุกต์นำไปใช้ซึ่งเป็นเนื้อหาที่นักเรียนต้องมีความรู้เรื่องคอมพิวเตอร์ วิทยาศาสตร์ มาบ้างถึงจะนำไปแก้ปัญหาโจทย์ประยุกต์ได้

ข้อสังเกตจากการวิจัย

จากการทดลองสอนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้แบบเรียนที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้น ได้พบข้อสังเกตบางประการซึ่งพอสรุปได้ดังนี้

1. การใช้สื่อการสอนในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นสิ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาของแบบเรียนง่ายขึ้น เช่น เกมหอคอยฮานอย การใช้ซอลส์คิวาตรูป การใช้การวาดรูปบนกระดาษ เป็นต้น นอกจากนี้ครูผู้สอนอาจจะสร้างสื่อการสอนที่มีความเหมาะสมกับเนื้อหาที่สอนเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจและเห็นภาพพจน์ในสิ่งที่เรียน
2. การให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอน โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นและแสดงความสามารถจะเป็นสิ่งที่ช่วยสร้างบรรยากาศที่ดีในการเรียนการสอน
3. การตรวจแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอของครูจะทำให้ทราบถึงข้อบกพร่องต่าง ๆ ของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งทำให้ครูสามารถแก้ไขข้อบกพร่องของนักเรียนแต่ละคนได้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 จากผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในกลุ่มตัวอย่างส่วนใหญ่มีความสามารถในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ ดังนั้น ผลการวิจัยนี้เป็นแนวทาง ให้สถานศึกษาหรือผู้ที่เกี่ยวข้อง ได้จัดทำสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งตรงกับนักเรียนในเกรด 9 - 12 สอดคล้องกับ NCTM

1.2 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ควรจัดกิจกรรมให้สอดคล้องกับเนื้อหาที่สอนให้มากที่สุด ผู้สอนควรมีบทบาทเป็นเพียงผู้แนะนำ และสนับสนุนให้ผู้เรียนบรรลุจุดมุ่งหมายได้อย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุด

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการศึกษาค้นคว้าต่อไป

2.1 ควรทำการวิจัยเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยขยายเนื้อหาเพิ่มขึ้น เพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถเรียนได้หรือไม่ โดยพิจารณาความเหมาะสมของเนื้อหาที่จัดให้นักเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

2.2 ควรทำการวิจัยที่ศึกษาว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายชั้นใด มีความเหมาะสมต่อการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา . 2534.
- กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 015 . กรุงเทพฯ ฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา . 2535.
- กรมการศึกษานอกโรงเรียน. กองพัฒนาการศึกษานอกโรงเรียน. ทัศนศึกษานันทนาการทางการศึกษาสำหรับศตวรรษที่ 21.
- กรมวิชาการ. การศึกษาการใช้หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ ฯ : 2539
- คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย, สมาคม. คณิตศาสตร์พาเพลิน 72 เรื่อง. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ ฯ : พัทธการพิมพ์, 2524.
- ชลิต เอี่ยมเจริญ. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตโปรเจกทีฟของบทเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ ฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร, 2519 . อัดสำเนา.
- ชวาล แพรัตกุล. เทคนิคการเขียนข้อสอบ. กรุงเทพฯ ฯ : 2520
- ดี บางกระ. การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์) . กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ , 2542 . อัดสำเนา.
- ธานินทร์ ลิขิตวิจิตรธรรม. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์) . กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ , 2542 . อัดสำเนา.
- นิตติยา ปภาพจน์. การพัฒนาหลักสูตรทฤษฎีจำนวนเสริมสำหรับเด็กที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น . ปรินญาณินพนธ์. กศ.ด (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ , 2540. อัดสำเนา.
- บัณฑิตศึกษา, วารสาร . ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์. ปีที่ 3 ฉบับที่ 3 กันยายน 2542 .
- ภัทรา เตชาภิวาทย์. คณิตศาสตร์เต็มหน่วย (Discrete Mathematics). กรุงเทพฯ ฯ : 2537.
- ยุพร ริมชลการ. การศึกษาการพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. ปรินญาณินพนธ์. กศ.ด(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, 2542. อัดสำเนา.
- ล้วน สายยศและอังคณา สายยศ. เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพฯ ฯ พิมพ์ครั้งที่ 2 : ชมรมเด็ก , 2543 . 360 หน้า.
- วนิดา เหมะกุล. คณิตศาสตร์ดิสครีต (Discrete Mathematics). กรุงเทพฯ ฯ : ซีเอ็ดยูเคชั่น, สิงหาคม 2530.
- วราภรณ์ กาญจนทวี. วิธีการเข้ารหัสลับตัวอักษรภาษาไทย. ปรินญาณินพนธ์. กศ.ม(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ ฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2541. อัดสำเนา.

วีระศักดิ์ อุดมโชค. คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ในชีวิตประจำวัน. กรุงเทพฯ ฯ : 2542

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี,สถาบัน. สารการเรียนรู้. กรุงเทพฯ ฯ : 2545.

สมชาย ประสิทธิ์จูตระกูล. *คณิตศาสตร์ (Discrete Mathematics)*. บ.ด้านสุขภาพการพิมพ์จำกัด. พิมพ์ครั้งที่ 1 (ม.ย.2544).

Bernard Kolman ,Robert C. Bosby. *Discrete Mathematical Structure for Computer Science* . Prentice – Hall, Inc , Englewood Cliffs, New Jersey 07365 . 1987 ,464 p.

Bruner , Jerome Seymour. *The Process of Education* . Cambridge : Harvard University Press. 1996 .

Dosssey , John A . *Discrete mathematics* . Scott, Foresman and Company . 1987.

Drummond, Pamela Johnson. “ *The Design , Implementation and Evaluation of a Course in Discrete Mathematics for High School Students,*” Dissertation Abstracts 50(3) : 641 – A . 1989.

Eric W.Hart. *Teaching Discrete Mathematics in Grade 7-12*. Mathematics Teacher 83, no. 5 (1990) : 362-367.

James L. HEIN . *Discrete Mathematics*. Boston : Johes and Bartlett , 1996, 696 p.

Joe I. Mott . *Discrete Mathematic for Computer Science & Mathematicans*. Englewood Cliffs , N. J. : Reston 1986,751 p.

Kathleen Cramer. *Mathmatics Teaching in the Middle School* . Vol 6. No. 5 January. 2001.

Mathematics in school 1999 Vol . 28 No. 5 . November.

National Council of Teachers of Mathematics . *Principles and Standards for School Mathematics*. 2000 : 10 – 360.

Ralph P Grimaldi . *Discrete and Combinatorics Mathematics An Applied Introductions* .Addision Wesley Polslighing Company 1961.

Richard Johnsonbaugh . *Discrete Mathematics*. Upper Saddle River. N.J. Prentice Hall . 1997, 701 p.

Robert H.Cornell and Edward Siegfried. *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12 1991 Year Book*. United States of America. 1991, 246 p.

Susannna S. Epp. *Discrete Mathematics with Applications* . D. e Paul University , 1995, 801 p.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 4 การหาค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง
ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ข้อที่	ค่า p	ค่า r	ข้อที่	P	r
1	0.8	0.2	21	0.74	0.3
2	0.77	0.3	22	0.74	0.2
3	0.77	0.2	23	0.74	0.4
4	0.69	0.4	24	0.71	0.2
5	0.8	0.2	25	0.74	0.3
6	0.77	0.6	26	0.71	0.3
7	0.8	0.2	27	0.8	0.2
8	0.66	0.5	28	0.8	0.3
9	0.8	0.5	29	0.71	0.3
10	0.74	0.2	30	0.71	0.2
11	0.8	0.4	31	0.69	0.2
12	0.77	0.2	32	0.57	0.3
13	0.69	0.5	33	0.66	0.2
14	0.71	0.2	34	0.54	0.2
15	0.8	0.2	35	0.57	0.2
16	0.8	0.2	36	0.6	0.3
17	0.8	0.4	37	0.54	0.3
18	0.8	0.2	38	0.51	0.4
19	0.77	0.5	39	0.49	0.2
20	0.74	0.4	40	0.66	0.3

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR - 20)

$$r_{tt} = \frac{N}{(N-1)} \left[1 - \frac{\sum pq}{s^2} \right]$$

$$= \frac{40}{39} \left[1 - \frac{7.86}{37.82} \right]$$

$$= 0.812$$

ตาราง 5 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนในการทำแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

X	f	f.x	X ²	f.x ²
38	1	38	1444	1444
36	1	36	1296	1296
35	1	35	1225	1225
34	2	68	1156	2312
33	2	66	1083	2166
32	1	32	1024	1024
31	3	93	961	2883
30	5	150	900	4500
29	1	29	841	841
28	5	140	784	3920
27	3	81	729	2187
26	1	26	676	676
25	3	75	625	1875
24	1	24	576	576
23	3	69	529	1587
22	1	22	484	484
21	1	21	441	441
ผลรวม	$\Sigma f = 35$	$\Sigma f.x = 1005$		$\Sigma f.x^2 = 29437$

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \\
 &= \frac{1005}{35} \\
 &= 28.71 \\
 s &= \sqrt{\frac{n\Sigma fx^2 - (\Sigma f(x))^2}{n(n-1)}} \\
 &= \sqrt{\frac{35(29437) - (1005)^2}{35(34)}} \\
 &= 4.12
 \end{aligned}$$

การทดสอบนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่สอบผ่านเกณฑ์ในการเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดโดยใช้สถิติทดสอบ Z

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.50$

$H_1 : p > 0.50$

$$\text{สถิติที่ทดสอบ } Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทนสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ซึ่ง $\hat{P} = \frac{35}{35} = 1$

$$P_0 = 0.5$$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \\ &= \frac{1 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{35}}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } Z = \frac{0.5}{0.085}$$

$$Z = 5.88$$

$$\text{แต่ } Z_{0.01} = 2.33$$

$$\text{เพราะว่า } 5.88 > 2.33$$

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนฉบับนี้ เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ
2. ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง 30 นาที
3. เลือกคำตอบที่ถูกต้อง เพียงคำตอบเดียว เมื่อนักเรียนเลือกได้คำตอบแล้ว ให้ระบายในวงกลม ดังตัวอย่าง

ข้อ 1. ก. ข. ค ง.

☒ ☐ ☐ ☐

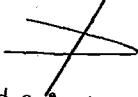
ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบจาก ก. เปลี่ยนเป็น ค. ให้การเครื่องหมาย X ทับคำตอบเดิมเสียก่อนแล้วจึงตอบ ตัวเลือกใหม่ ดังนี้

ข้อ 1. ก. ข. ค. ง.

☒ ☐ ☒ ☐

4. แบบทดสอบชุดนี้วัดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมดังนี้
 - จุดประสงค์ที่ 1. นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ (ข้อ 1 -10)
 - จุดประสงค์ที่ 2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดใด เป็นเชิงเส้น เป็นแบบเอกพันธ์ หรือไม่แบบเอกพันธ์ (ข้อ 11 -14)
 - จุดประสงค์ที่ 3. นักเรียนสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์ได้ (ข้อ15 -31)
 - จุดประสงค์ที่ 4. นักเรียนสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธ์ได้ (ข้อ 32-36)
 - จุดประสงค์ที่ 5. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้ (ข้อ 37 - 40)

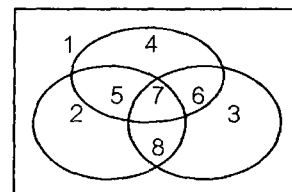
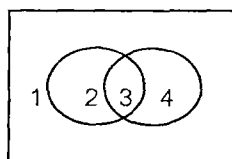
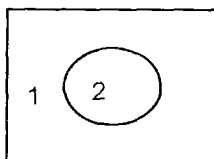
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

กำหนดให้ มีเชือกลักษณะดังรูป  ถ้าตัดเส้นเชือกโดยการตัดจะต้องไม่ทับรอย
ตัดเดิม ในการตัดแต่ละครั้งจะได้ 2 เส้น ที่เกิดใหม่ (ใช้ตอบคำถามข้อ 1 - 2)

ครั้งที่	0	1	2	3	4	5
จำนวนเชือก	1	3	5	7	...	...

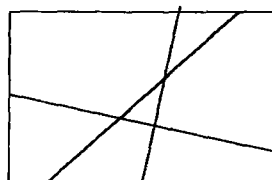
- การตัด n ครั้ง จะได้จำนวนเส้นเชือกเท่ากับข้อใด
 - $2n$
 - 2^n
 - $2n + 1$
 - n^2
- ถ้าต้องการได้จำนวนเชือก n เส้น โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ จะมีจำนวนครั้งที่ตัดเท่าใด
 - $\frac{n+2}{2}$
 - $\frac{n-1}{2}$
 - $\frac{n-2}{2}$
 - $\frac{2n+2}{2}$

กำหนดให้ จำนวนบริเวณที่เกิดจากการวาดวงกลม n รูป ในระนาบซึ่งต่างตัดกันที่จุด 2 จุดที่
แตกต่างกัน จะเกิดบริเวณย่อย ๆ ดังรูป (ใช้ตอบคำถามข้อ 3 - 4)



- เมื่อให้ $a_1 = 2$ บริเวณ ถ้าวาดวงกลม 7 รูป จะมีกี่บริเวณ
 - 22 บริเวณ
 - 32 บริเวณ
 - 44 บริเวณ
 - 48 บริเวณ
- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนวงกลมกับบริเวณที่เกิดจากการวาดวงกลมเมื่อ $a_1 = 2$
และ $n > 1$
 - $a_n = a_{n-1} + n^2$
 - $a_n = a_{n-1} + 3n$
 - $a_n = a_{n-1} + 2n$
 - $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$

กำหนดให้ ลากเส้นตรง 3 เส้น บนกระดาษแผ่นหนึ่งให้เส้นตรงทุกเส้นตัดกัน และกัน โดยที่ต้อง
ไม่มีเส้นตรงมากกว่าสองเส้นตัดกัน ณ จุดเดียวกัน (ดังรูป ใช้ตอบคำถามข้อ 5 - 6)



แนวคิด

เส้นตรง 1 เส้นแบ่งกระดาษออกเป็น 2 บริเวณ

เส้นตรง 2 เส้นแบ่งกระดาษออกเป็น 4 บริเวณ

เส้นตรง 3 เส้นแบ่งกระดาษออกเป็น 7 บริเวณ

5. ถ้าให้ เส้นตรง 7 เส้น ตัดกันจะแบ่งกระดาษออกเป็นกี่บริเวณ

ก. 25 บริเวณ ข. 27 บริเวณ

ค. 29 บริเวณ ง. 30 บริเวณ

6. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของปัญหานี้

ก. $a_n = a_{n-1} + 2n$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $n > 0$ ข. $a_n = a_{n-1} + n$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $n > 0$ ค. $a_n = a_{n-1} + n^2$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $n > 0$ ง. $a_n = 2a_{n-1} + n$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $n > 0$

7. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับจำนวน วิธีในการพกเงิน n บาทโดยมีชนิดของเหรียญคือ เหรียญบาท , เหรียญ 5 บาทและเหรียญ 10 บาท เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 9, n \geq 10$

ก. $a_n = a_{n-5} + a_{n-10}$ ข. $a_n = a_{n-10} + a_{n-15}$ ค. $a_n = a_{n-1} + a_{n-5} + a_{n-10}$ ง. $a_n = a_{n-5} + a_{n-10} + a_{n-15}$

8. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีการปูกระเบื้องขนาด 1×2 บนพื้นขนาด $2 \times n$ (วางแนวตั้งหรือแนวนอนก็ได้) เมื่อ $a_0 = a_1 = 1, n > 1$

ก. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ ข. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ค. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ง. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

9. กบตัวหนึ่งกระโดด 1 ครั้ง สามารถขึ้นบันไดได้ 1, 2 หรือ 3 ขั้น จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีที่กบตัวนี้จะขึ้นบันไดความสูง n ขั้น และใช้ความสัมพันธ์นี้หาจำนวนวิธี ในการขึ้นบันไดความสูง 6 ขั้น เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $n \geq 3$

ก. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, 24$ วิธีข. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, 12$ วิธีค. $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 3, 13$ วิธีง. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, 9$ วิธี

10. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิด ในการหาจำนวนวิธีในการจอดรถ ที่สวนสาธารณะแห่งหนึ่ง ซึ่งมีช่องจอดรถ n ช่อง โดยรถแต่ละรุ่นใช้จำนวนช่องไม่เท่ากัน ดังนี้ รถยนต์ 4 ล้อ ซึ่งมี 4 รุ่นแต่ละรุ่นใช้ช่องจอด 1 ช่อง รถบรรทุก 6 ล้อ ซึ่งมี 3 รุ่นแต่ละรุ่นใช้ช่องจอด 2 ช่อง รถบรรทุก 10 ล้อ มี 2 รุ่นแต่ละรุ่นใช้พื้นที่จอด 4 ช่อง

ก. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4a_{n-3}$ เมื่อ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, n \geq 3$ ข. $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}$ เมื่อ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, n \geq 3$ ค. $a_n = 4a_{n-1} + 2a_{n-3} + a_{n-4}$ เมื่อ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, n \geq 4$ ง. $a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2} + 2a_{n-4}$ เมื่อ $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, n \geq 4$

11. ความสัมพันธ์เวียนเกิดในข้อใดเป็นแบบเชิงเส้น

ก. $n = a_n - 3(a_{n-1})^2 + 2a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$

ข. $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 1$

ค. $a_n - 3(a_{n-1}) + 2a_{n-3} = n^2 + 1$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 3$

ง. $a_n = n + (a_{n-1})^2$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

12. ข้อใดเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

ก. $a_n = -3n \cdot 3a_{n-1}$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

ข. $a_n = 3a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$

ค. $a_n = 2a_{n-1}$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

ง. $a_n = n + (a_{n-1})^2$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

13. ข้อใด ไม่ใช่ ความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์

ก. $a_n = r a_{n-1}$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1, r \in \mathbb{R}$

ข. $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 1$

ค. $a_n = 5a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$

ง. $a_n - (n-1)a_{n-1} - (n-1)a_{n-2} = 0$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$

14. ข้อใดเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2

ก. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 4a_{n-3}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, n \geq 3$

ข. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$

ค. $a_n = 2a_{n-1} + 3$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

ง. $a_n = n + (a_{n-1})^2$ เมื่อ $a_0 = 1, n \geq 1$

15. กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = a_{n-1} + n$ จงหา a_5 เมื่อ $a_1 = 1$

ก. 10

ข. 15

ค. 20

ง. 25

16. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_n = 2S_{n-1}$ เมื่อ $S_0 = 1$

ก. $a_n = 2^n, n \geq 1$

ข. $a_n = 2n + 1, n \geq 1$

ค. $a_n = 2^{n-1}, n \geq 1$

ง. $a_n = 2n^2, n \geq 1$

17. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 3$ เมื่อ $a_1 = 2$

ก. $a_n = 2 + (n-1)$

ข. $a_n = 3 + 2(n-1)$

ค. $a_n = 2 + 3(n-1)$

ง. $a_n = 3n - 1 + 2n$

18. จงหาคำตอบของเกมหอคอยฮานอย $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เมื่อ $a_1 = 1$

ก. $a_n = 2n - 1, n \geq 0$

ข. $a_n = 2^n - 1, n \geq 0$

ค. $a_n = 2n^2 - 1, n \geq 0$

ง. $a_n = 2^n, n \geq 0$

19. จงหาคำตอบทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ เมื่อเงื่อนไข เริ่มต้นคือ

$$a_0 = 7, a_1 = 16, n \geq 0$$

ก. $a_n = 5(2)^n + 2(3)^n$

ข. $a_n = 2(3)^n + 2(3)^n$

ค. $a_n = 2(2)^n + 3(3)^n$

ง. $a_n = 3^n(2)^n + 6^n$

20. ความสัมพันธ์เวียนเกิด จากข้อ 17 นำมาเขียนเป็นชุดของลำดับ คือ

$$1, 4, 14, 46, 146, \dots \text{พจน์ถัดไปคือ}$$

ก. 544 ข. 454

ค. 445 ง. 554

21. จากลำดับฟีโบนัชชี เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด แบบเชิงเส้น เป็นเอกพันธ์อันดับ ดีกรี 2

คือ $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$, $n > 1$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $F_0 = 0, F_1 = 1$ จงหาคำตอบของ ลำดับฟีโบนัชชี

ก. $F_n = \frac{1}{5} \frac{(1+5)^{n+1}}{2} - \frac{1}{5} \frac{(1-5)^{n+1}}{2}$

ข. $F_n = \frac{5}{5} \frac{(1+5)^{n+1}}{2} - \frac{5}{5} \frac{(1+5)^{n+1}}{2}$

ค. $F_n = \frac{1}{5} \frac{(1+5)^n}{2} - \frac{1}{5} \frac{(1-5)^n}{2}$

ง. $F_n = \frac{5(1+5)^n}{2} - \frac{5(1-5)^n}{2}$

22. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$ เมื่อ $a_0 = 2, a_1 = 7$

ก. $a_n = 3^n + 4^n$ ข. $a_n = 3^n + 4^{n-1}$

ค. $a_n = 3^{n-1} + 4^{n-1}$ ง. $a_n = 3n + 4^{n-1}$

23. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = na_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 1$

ก. $a_n = 2n$ ข. $a_n = na_{n-1}$

ค. $a_n = n!$ ง. $a_n = n^2$

24. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$ เมื่อ $a_0 = a_1 = 2$

ก. $a_n = 2(n)$ ข. $a_n = 2(1)^n$

ค. $a_n = 2(n)^2$ ง. $a_n = 2(n-1)^2$

25. จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, n > 1$ เมื่อ $a_0 = a_1 = 1$

ก. $a_n = \frac{2(4)^n}{5} + \frac{(-1)^n}{5}$

ข. $a_n = \frac{2^n}{5} - \frac{(-1)^n}{5}$

ค. $a_n = \frac{2(4)^n}{5} + \frac{3(-1)^n}{5}$

ง. $a_n = \frac{3(4)^n}{5} + \frac{(-1)^n}{5}$

26. จงหาคำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 5$, $a_2 = 3$

ก. $a_n = \frac{17(1)^n}{3} + \frac{3(2)^n}{3}$

ข. $a_n = \frac{17(1)^n}{3} + \frac{2(2)^n}{3}$

จ. $a_n = \frac{11(1)^n}{3} + \frac{2(3)^n}{3}$

ง. $a_n = \frac{11(1)^n}{3} + \frac{3(2)^n}{3}$

27. จงหาคำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ เมื่อ $n > 2$, $a_0 = a_1 = 1$

ก. $a_n = \frac{1}{2}(2^n + (-1)^n)$

ข. $a_n = \frac{1}{2}(2^n + (-3)^n)$

ค. $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$

ง. $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-2)^n)$

28. คำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิด คือ $a_n = 2^n$ จงหา a_{10} เมื่อ $n \geq 0$, $a_0 = 1$

ก. 1,056

ข. 1,250

ค. 1,024

ง. 1,120

29. จงหาคำตอบของ $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ สำหรับ $n \geq 3$ เมื่อ $a_0 = 0$, $a_1 = 6$, $a_2 = 24$

ก. $a_n = 2n^2$

ข. $a_n = 3n^{2n-1}$

ค. $a_n = 3n(2)^n$

ง. $a_n = 2a_{n-1}$

30. จงหาคำตอบของ $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ สำหรับ $n > 1$ เมื่อ $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

ก. $a_n = 2n - 1$

ข. $a_n = 2^n + 1$

ค. $a_n = n(2)^{n-1}$

ง. $a_n = n(2)^n$

31. จงหาคำตอบของ $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ เมื่อ $a_1 = 2$, $a_2 = 6$

ก. $a_n = 2^n - 1$

ข. $a_n = 5^{n-1}$

ค. $a_n = 2n(n)^2$

ง. $a_n = 5n^2 - n$

32. จงหาคำตอบทั่วไปของ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$ สำหรับ $n \geq 2$

ก. $a_n = A_1(2)^n + A_2 + n(2)^{n+1}$

ข. $a_n = A_1(2)^n + A_2(2)^{n+1} + n$

ค. $a_n = A_1(2)^n + A_2(2)^{n+1} + 2n^{n+1}$

ง. $a_n = A_1(2)^{n-1} + A_2(2)^n + n$

33. จงหาคำตอบของ $a_n = 2a_{n-1} - 6$ สำหรับ $n \geq 1$, $a_0 = 8$

ก. $a_n = 2n^{n+1} - 6$

ข. $a_n = 2a^{n-1}$

ค. $a_n = 6 + 2^{n+1}$

ง. $a_n = 2n + n^{-1}$

34. จงหาคำตอบของ $a_n - 2a_{n-1} = 4 \cdot 2^n$ สำหรับ $n > 0, a_0 = 4$

ก. $a_n = 4n^2 + 2n$ ข. $a_n = (4n + 4^n) \cdot 2n$

ค. $a_n = (n+1) + 4^n$ ง. $a_n = 2n^2 + 4n$

35. จงหาคำตอบของ $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$, $n \geq 1, a_0 = 2$

ก. $a_n = \frac{5}{4}(7^{n+1}) - \frac{3^{n+3}}{4}$

ข. $a_n = \frac{5}{4}(7^{n+2}) - \frac{3^{n+2}}{4}$

ค. $a_n = \frac{5}{4}(7^n) - \frac{3^n}{4}$

ง. $a_n = \frac{5}{4}(7n^2) - \frac{3^n}{4}$

36. จงหาคำตอบของ $a_n - 3a_{n-1} = 5(3)^n$, $n \geq 1, a_0 = 2$

ก. $a_n = (2 + 5n)^2$ ข. $a_n = (2 + 5n) \cdot 2^n$

ค. $a_n = (2 + 5n) 3^n$ ง. $a_n = (2 + 5n)^2 + n$

37. ให้ $n \geq 1$ และ S เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีสมาชิก 2^n ตัว จงหาจำนวนครั้งในการเปรียบเทียบสมาชิกใน S เพื่อหาค่าสูงสุด และต่ำสุดของสมาชิกใน S

ก. $a_n = \frac{(3)2^n}{4} - 2$ ข. $a_n = \frac{(3)2^n}{2} - 2$

ค. $a_n = \frac{(3)2^n}{5} - 2$ ง. $a_n = \frac{(3)2^n}{5} - 3$

38. เด็กคนหนึ่งก้าวขึ้นบันได ซึ่งมี n ขั้น โดยก้าวทีละขั้น หรือก้าวทีละ 2 ขั้น จงหาคำตอบของจำนวนวิธีที่เด็กคนนี้จะก้าวขึ้นบันได เมื่อมีบันได 10 ขั้น

ก. $A_n = A \frac{(1+\sqrt{5})^{n-1}}{2} + B \frac{(1-\sqrt{5})^{n-1}}{2}$

ข. $A_n = A \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2} + B \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2}$

ค. $A_n = A \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2} + B \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2}$

ง. $A_n = A \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2} + B \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2}$

39. จงหาคำตอบของ $a_{n-2} = 4a_{n-1} - 4a_n$ สำหรับ $n \geq 1$ เมื่อ $a_0 = 1$

ก. $a_n = 2n$ ข. $a_n = n^2 + 1 + 2n$

ค. $a_n = 2^n + n(2)^n$ ง. $a_n = n^2 + 2n$

40. ชายคนหนึ่งฝากเงิน 1000 บาทแบบฝากประจำ ได้ดอกเบี้ย 8 % ต่อปี (ดอกเบี้ยทบต้น

ปีละ 1 ครั้ง) ให้ A_n = แทนจำนวนเงินเมื่อฝากครบ n ปี จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง A_n กับ A_{n-1}

ก. $A_n = A_n + 1.08$ ข. $A_n = A_n (1.08) + A_{n-1}$

ค. $A_n = (0.08)A_{n-1}$ ง. $A_n = (1.08) A_{n-1}$

ภาคผนวก ค
แบบเรียนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

แบบเรียนเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด (15 คาบ)

หัวข้อดังนี้

1. ทบทวนลำดับ (2 คาบ)
2. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (4 คาบ)
3. การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (7 คาบ)
 - 3.1 ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด
 - 3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์
 - 3.3 ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์
4. การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนเกิด (2 คาบ)

จุดประสงค์การเรียนรู้

มุ่งให้ผู้เรียนมีความสามารถ

1. บอกนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
2. สร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
3. หาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
4. หาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบต่าง ๆ ได้
5. นำความรู้เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาได้

1. ทบทวนลำดับ

ลำดับ (Sequence)

พิจารณาความสัมพันธ์จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1 นำเงินไปฝากออมสิน โดยฝากเดือนแรก 50 บาท เดือนถัดไปเพิ่มเดือนละ 50 บาท ทุกเดือนเป็นเวลา 1 ปี เขียนตารางแสดงจำนวนเงินที่ฝากในแต่ละเดือน ได้ดังนี้

เดือนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
จำนวนเงิน	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600

จากตารางจะเห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาที่ฝากเงินกับจำนวนเงินที่ฝาก ในแต่ละเดือนเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{50, 100, 150, \dots, 600\}$

บทนิยาม ลำดับคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกหรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกเรียกว่าลำดับจำกัด (finite sequence)

ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเรียกว่า ลำดับอนันต์ (infinite sequence)

ตัวอย่างที่ 1.2 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นลำดับหรือไม่ ถ้าฟังก์ชันนั้นเป็นลำดับ จงบอกว่าเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์

$$f_1 = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$f_2 = \{(1,ก), (2,ข), (2,ค)\}$$

$$f_3 = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,5)\}$$

$$f_4 = \{(1,2), (2,4), (3,8), (4,16), \dots\}$$

$$f_5 = \{(\text{แดง}, \text{ดำ}), (\text{ดำ}, \text{ขาว}), (\text{ขาว}, \text{เขียว}), (\text{ดำ}, \text{ส้ม})\}$$

$$f_6 = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3), (-4,4), (-5,5), \dots\}$$

จากตัวอย่างที่กำหนดให้ ฟังก์ชันที่เป็นลำดับคือ

$$f_1 = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$$

$$f_3 = \{(2,1), (4,3), (6,5), (8,5)\}$$

$$f_4 = \{(1,2), (2,4), (3,8), (4,16), \dots\}$$

$$f_6 = \{(-1,1), (-2,2), (-3,3), (-4,4), (-5,5), \dots\}$$

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกและเป็นลำดับได้แก่

f_1 เป็นลำดับจำกัด

f_3 เป็นลำดับจำกัด

f_4 เป็นลำดับอนันต์

f_6 เป็นลำดับอนันต์

สัญลักษณ์ของลำดับ

ให้ $a = \{ (1, a(1)), (2, a(2)), (3, a(3)), \dots \}$ ต่อไปจะเขียน

$a(1) = a_1$ และเรียกว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

$a(2) = a_2$ และเรียกว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

:

$a(n) = a_n$ ว่าพจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป (general term) ของลำดับและใช้ $\{a_n\}$ แทน

ลำดับที่มีพจน์ทั่วไปเป็น a_n ในกรณีที่กำหนดลำดับทั่วไป ถ้าไม่ได้รับสมาชิกในโดเมนให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.3

จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

1. $\{a_n\} = \{n\}$
2. $\{a_n\} = \{3n\}$
3. $\{a_n\} = \frac{1}{2^n - 1}, n = 1, 2, 3, \dots, 20$
4. $\{a_n\} = \{2n + 1\}$
5. $\{a_n\} = 4n + 3$
6. $\{a_n\} = n^2 - n$

วิธีทำ

1. $\{a_n\} = \{n\}$ เมื่อให้ $n = 1, 2, 3, 4, 5$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 1, 2, 3, 4, 5
2. $\{a_n\} = \{3n\}$ เมื่อให้ $n = 1, 2, 3, 4, 5$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 3, 6, 9, 12, 15
3. $\{a_n\} = \frac{1}{2^n - 1}, n = 1, 2, 3, \dots, 20$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{31}$
4. $\{a_n\} = \{2n + 1\}$ เมื่อให้ $n = 1, 2, 3, 4, 5$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 3, 5, 7, 9, 11
5. $\{a_n\} = 4n + 3$ เมื่อให้ $n = 1, 2, 3, 4, 5$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 7, 11, 15, 19, 23
6. $\{a_n\} = n^2 - n$ เมื่อให้ $n = 1, 2, 3, 4, 5$
จะได้ 5 พจน์แรกของลำดับคือ 0, 2, 6, 12, 20

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

บทนิยาม ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตเมื่อ $a_{n+1} - a_n = d$ (ค่าคงที่) และเรียก d ว่า ผลต่างร่วม (common difference)

จากบทนิยามของลำดับเลขคณิต ถ้าให้ d เป็นผลต่างร่วม จะได้ $d = a_{n+1} - a_n$ หรือ $a_{n+1} = a_n + d$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วมแล้ว จะเขียนพจน์อื่น ๆ ของลำดับเลขคณิตในรูปของ a_1 และ d ได้ดังนี้

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ a_1 และผลต่างร่วมคือ d พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้คือ

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิต 7, 11, 15, ...

วิธีทำ $a_1 = 7$ และ $d = 11 - 7 = 4$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{10} = a_1 + (10-1)d$$

$$= 7 + 9(4)$$

$$= 43$$

ดังนั้น พจน์ที่ 10 คือ 43

ตัวอย่างที่ 1.5 จงเขียน 3 พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต -1, 6, 13, ...

วิธีทำ $d = 6 - (-1) = 7$

$$a_4 = a_3 + d = 13 + 7$$

$$a_5 = a_4 + d = 20 + 7$$

$$a_6 = a_5 + d = 27 + 7$$

ดังนั้น 3 พจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้คือ 20, 27, 34

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงที่ ค่าคงที่นี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (common ratio)

จากบทนิยามของลำดับเรขาคณิต ถ้าให้ r เป็นอัตราส่วนร่วม จะได้ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

หรือ $a_{n+1} = a_n r$ เมื่อ $n \in I^+$ ถ้ากำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วน จะเขียนพจน์อื่น ๆ ของลำดับเรขาคณิต ในรูปของ a_1 และ r ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตคือ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วน รวม พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาพจน์ที่ 5 ของลำดับเรขาคณิต $6, 2, 2/3, \dots$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \text{ และ } r = 1/3 \\ \text{จาก } a_n &= a_1 r^{n-1} \\ \text{จะได้ } a_5 &= a_1 r^{5-1} \\ &= 6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &= \frac{6}{81} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

ดังนั้นพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้คือ $\frac{2}{27}$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงเขียน 4 พจน์แรก ของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{3}{4}$ และ $r = 4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4} \\ a_2 &= a_1 r = \frac{3}{4} \times 4 = 3 \\ a_3 &= a_2 r = 3 \times 4 = 12 \\ a_4 &= a_3 r = 12 \times 4 = 48 \end{aligned}$$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับนี้คือ $\frac{3}{4}, 3, 12, 48$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่างสองจำนวนที่กำหนดให้เพื่อทำให้จำนวนทั้งสามอยู่ในลำดับเรขาคณิต 5 และ 20

วิธีทำ

ให้ a เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20

ได้ $5, a, 20$

$$r = \frac{a}{5}$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{5} = \frac{20}{a}$$

$$\text{ได้ } a^2 = 100$$

$$a = 10$$

จำนวนนั้นคือ 10 จะได้สามพจน์ที่เรียงกันคือ 5, 10, 20

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงหา พจน์ที่ 8 และ พจน์ที่ 20 ของลำดับต่อไปนี้

1.1 $-2, 4, 10, \dots$

1.2 $4, 9, 14, \dots$

1.3 $21, 18, 15, \dots$

1.4 $5p, p, -3p, \dots$

1.5 $x, x+2, x+4, \dots$

2. จงหา 4 พจน์ถัดไปของลำดับต่อไปนี้

2.1 $-3, -6, -12, \dots$

2.2 $10, -5, 5/2, \dots$

2.3 $1/4, 5/4, 25/4, \dots$

2.4 $ab^3, a^2b^2, a^3b, \dots$

2.5 $1, 3, 9, 27, \dots$

3. จงหา 3 พจน์แรกของลำดับทั่วไปต่อไปนี้

3.1 $a_n = 4n + 3$

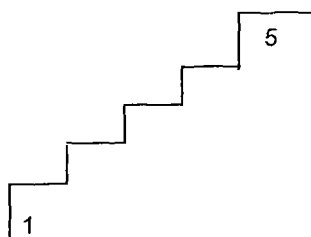
3.2 $a_n = n^2 - n$

3.3 $a_n = (-1)^{n+1} (3^{2n+1})$

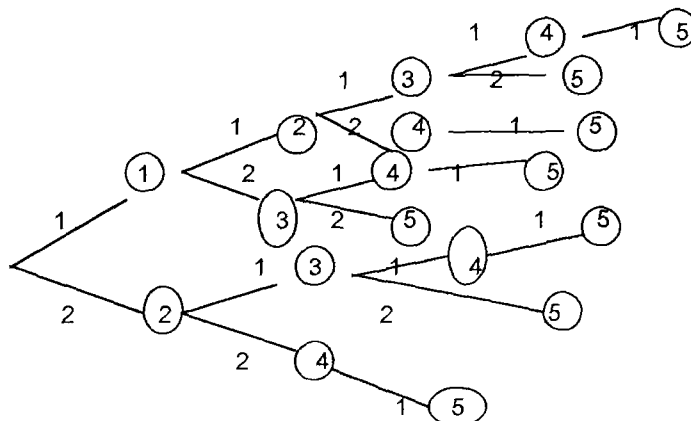
2. ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation)

พิจารณา จำนวนวิธีการขึ้นบันไดต่อไปนี้

ถ้ามีบันไดอยู่ 5 ขั้น และเด็กคนหนึ่งขึ้นบันได 5 ขั้นนี้ โดยวิธีขึ้นคือ ก้าวขึ้น 1 ขั้น หรือ ก้าวขึ้น 2 ขั้นก็ได้ เด็กคนนี้จะมียุทธวิธีขึ้นบันได 5 ขั้นนี้กี่วิธี



เราอาจจะหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 5 ขั้นนี้ได้หลายแบบ แบบหนึ่งคือ การทำแผนภูมิต้นไม้ ดังนี้



จะเห็นว่า ถ้าจำนวนชั้นบันไดมีจำนวนชั้นมาก ๆ การทำแผนภูมิต้นไม้เพื่อนับจำนวน จะยุ่งยาก และเสียเวลามาก ถ้าเราพิจารณาว่าการขึ้นบันได แบบนี้ เป็นลำดับคือ ให้

a_n คือจำนวนวิธีขึ้นบันไดที่มี n ชั้น

a_1 คือจำนวนวิธีขึ้นบันไดที่มีบันได 1 ชั้น คือ 1 วิธี

a_2 คือจำนวนวิธีขึ้นบันไดที่มีบันได 2 ชั้น คือ 2 วิธี

ตัวอย่างที่ 2.1 จากโจทย์ปัญหาข้างต้นนี้

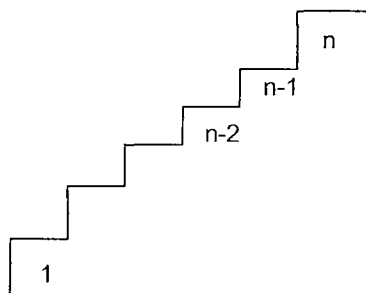
(1) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 3 ชั้น (a_3)

(2) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 4 ชั้น (a_4)

(3) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 5 ชั้น (a_5)

(4) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 6 ชั้น (a_6)

(5) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได n ชั้น (a_n)



วิธีทำ

.....

.....

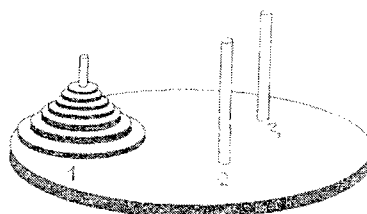
.....

.....

ตัวอย่างที่ 2.2

เกมหอคอยฮานอย มีประวัติที่มาคือนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Edouard Lucas เป็นผู้ประดิษฐ์คิดค้น เป็นเกมที่สามารถแสดงความหมายของการพิสูจน์แบบอุปนัยได้อย่างชัดเจน เล่ากันว่า ในโบสถ์แห่งหนึ่งในเมือง Benras มีเสาส 3 เสา ทำด้วยเพชรดอกแฉกอยู่กับแผ่นทองเหลืองเมื่อพระเจ้าสร้างโลก พระองค์ได้ประทานแผ่นทองคำกลมขนาดลดหลั่นเป็นจำนวน 64 แผ่น และได้สวมเข้ากับเสาส เสาหนึ่งเรียงลำดับขนาดใหญ่อยู่นล่างแผ่นเล็กอยู่บน พระผู้เฝ้าโบสถ์จะต้อง ทำงานตลอดวันตลอดคืนเพื่อย้ายแผ่นทองคำกลมทั้ง 64 แผ่นนี้ไปไว้อีกหลักหนึ่ง ตามเงื่อนไขเช่นเดียวกับเกมหอคอยฮานอยเมื่อไรก็ตามที่แผ่นทองคำนี้ถูกย้ายสำเร็จโลกก็จะถึงกาลอวสาน

การเคลื่อนย้ายแผ่นไม้วงกลมที่มีรัศมีต่าง ๆ กัน n แผ่นที่มีรูเจาะตรงกลาง โดยแผ่นที่เล็กกว่าซ้อนอยู่บนแผ่นที่ใหญ่กว่าบนหลักหนึ่งใน 3 เสา ไปไว้อีกหลักหนึ่งที่ละแผ่น ในขณะที่ย้ายให้ใช้หลักหนึ่งเป็นที่พักแผ่นวงกลมได้ ในแต่ละขั้นตอนการย้ายแผ่นวงกลมที่ใหญ่กว่าจะซ้อนบนแผ่นวงกลมที่เล็กกว่าไม่ได้



วิธีเล่น ถ้ากำหนดให้มีแผ่นไม้ 3 แผ่นจะทำให้จำนวนครั้งในการย้ายน้อยที่สุดทำได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 ย้ายแผ่นที่ 1 (แผ่นเล็กสุดที่อยู่บน)ไปไว้เสาที่ 3

ครั้งที่ 2 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปไว้เสาที่ 2

ครั้งที่ 3 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 2

ครั้งที่ 4 ย้ายแผ่นที่ 3 ไปไว้ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 5 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปไว้ในเสาที่ 1

ครั้งที่ 6 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปวางบนแผ่นที่ 3 ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 7 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 3

จำนวนครั้งน้อยที่สุดในการย้าย 3 แผ่น คือ 7 ครั้ง จากเสาที่ 1 ไปเสาที่ 3 ในการย้ายแผ่น

ไม้วงกลม 3 แผ่นจะมีจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย (ดังตาราง)

ถ้ากำหนดให้มีแผ่นไม้วงกลม n แผ่น จะมีจำนวนวิธีในการย้ายเท่าใด

จำนวนแผ่นไม้ของหอคอย	จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้าย (a_n)
1	1
2	3
3	7

วิธีทำ

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

.....

ตัวอย่างที่ 2.3 ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci Sequence)

ในปลายศตวรรษที่ 12 มีนักวิทยาศาสตร์ท่านหนึ่งซึ่งถือว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถคือ Leonado Fibonacci หรือ Leonardo of Pisa เป็นชาวอิตาลีเขียนได้เขียนหนังสือเล่มหนึ่ง ซึ่งมีชื่อเสียงมากคือ Liber abaci (ค.ศ. 1202) เนื้อหาในเล่มนี้เกี่ยวกับเลขคณิตและพีชคณิตเบื้องต้น และได้รวบรวมปัญหามากมายเกี่ยวกับลำดับ เมื่อฟีโบนัชชีตั้งคำถามว่า “หลังจาก 1 ปี จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่ ถ้าในเดือนที่หนึ่งมีจำนวนกระต่ายเพียงคู่เดียวเป็นกระต่ายเพศผู้และเพศเมีย และแต่ละคู่จะให้กำเนิดกระต่ายคู่ใหม่ได้นั้น(ซึ่งต่างเพศกัน) ต้องใช้ระยะเวลา 2 ซึ่งจะถึงเวลาที่มันจะให้กำเนิด กระต่ายคู่ใหม่ต่อไป สมมติว่าไม่มีการตายเกิดขึ้น “

แนวคิด เพื่อสะดวกแก่การนับจะแทนกระต่ายคู่แรกและลูกของมันด้วย $\pi_1, \pi_2, \dots$ ลูกของกระต่ายคู่ที่ $i, i > 2$ แทนด้วย $\pi_{i-1}, \pi_{i-2}, \pi_{i-3}, \dots$ ให้ X_n คือจำนวนกระต่ายปลายเดือนที่ $n, n > 0$

ปลายเดือนที่ 0 (แรกเกิด) π_1 $X_0 = 1$

ปลายเดือนที่ 1 π_1 $X_1 = 1$

ปลายเดือนที่ 2 π_1, π_2 $X_2 = 2$

ปลายเดือนที่ 3 π_1, π_3, π_2 $X_3 = 3$

ปลายเดือนที่ 4 $\pi_1, \pi_4, \pi_3, \pi_2, \pi_{21}$ $X_4 = 5$

ปลายเดือนที่ 5 $\pi_1, \pi_5, \pi_4, \pi_3, \pi_{31}, \pi_2, \pi_{22}, \pi_{21}$ $X_5 = 8$

สร้างตารางแสดงจำนวนคู่ของกระต่ายในระยะเวลา 5 เดือนได้ดังนี้

เดือน	0	1	2	3	4	5	..				12
จำนวนคู่	1	1	2	3	5	8	..				..

จากตารางข้างต้นนี้ ถ้าในระยะเวลา 8 เดือน จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่

ตอบ.....

1. ถ้าในระยะเวลาผ่านไป 1 ปี จะมีจำนวนกระต่ายทั้งหมดเท่าไร

ตอบ.....

2. ในระยะเวลา n เดือน จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่

ตอบ.....

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้เป็นความสัมพันธ์กันระหว่างพจน์ที่ n กับพจน์ที่เกิดก่อนหน้าพจน์ที่ n ความสัมพันธ์นี้จะเกิดเวียนซ้ำเป็นรูปแบบที่แน่นอน เราเรียกว่าเป็นการเวียนเกิด สามารถสร้างเป็นรูปแบบทั่วไปเรียกว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation)

บทนิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_{n+r} = F(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r-1}, n)$
เมื่อ F เป็นฟังก์ชันของ $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r-1}$ และ n

จากตัวอย่างที่ 2.1 – 2.3 เราสามารถหาความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.1

วิธีทำ การหาจำนวนวิธีที่เด็กคนนี้จะขึ้นบันไดขั้นที่ n เขาจะต้องอยู่ที่บันไดขั้นที่ $n-1$ หรือ ขั้นที่ $n-2$ ก่อนจึงจะขึ้นมาที่บันไดขั้นที่ n ได้ ดังนั้น จำนวนวิธีจะขึ้นมาถึงบันไดขั้นที่ n คือ ผลบวกของจำนวนวิธีที่เขาจะขึ้นมาที่บันไดขั้นที่ $n-1$ กับ $n-2$

นั่นคือ

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

กล่าวคือ a_1, a_2 , ทำให้เกิด a_3

กล่าวคือ a_2, a_3 , ทำให้เกิด a_4

กล่าวคือ a_3, a_4 , ทำให้เกิด a_5

จากโจทย์ข้างต้นจะได้คำตอบคือ

$$a_3 = a_2 + a_1$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3$$

$$a_4 = a_3 + a_2$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

$$a_5 = a_4 + a_3$$

$$= 5 + 3$$

$$= 8$$

ดังนั้นพจน์ที่ทำให้เกิด a_n คือ $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ ลำดับที่มีความสัมพันธ์เช่นนี้เราเรียกความสัมพันธ์เวียนเกิดและเขียนนิยามในกรณีทั่วไปดังนี้ ถ้ากำหนดให้มีบันได n ขั้น รูปแบบทั่วไปคือ

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{เมื่อ } n \geq 0 \text{ และ } a_0 = a_1 = 1$$

ตัวอย่างที่ 2.2

วิธีทำ การเคลื่อนย้ายแผ่นวงกลม 1 แผ่น จำนวนครั้งในการย้ายที่น้อยที่สุด คือ 1 ครั้ง $a_1 = 1$ ถ้ามีแผ่นไม้ n แผ่นให้พิจารณาย้ายแผ่นไม้ $n-1$ แผ่นจากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 2 ก่อน จำนวนครั้งในการย้ายคือ (a_{n-1}) ครั้ง แล้วจึงย้ายแผ่นไม้ที่อยู่ล่างสุดจากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 3 ท้ายที่สุดให้ย้ายแผ่นไม้ $n-1$ แผ่น จากเสาที่ 2 ไปยังเสาที่ 3 จำนวนครั้งในการย้ายคือ (a_{n-1}) ครั้ง ดังนั้นเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 0, a_0 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2.3

วิธีทำ เมื่อให้ x_n แทนจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อเวลาผ่านไป n เดือน จะได้ว่า X_n จะมีค่าเท่ากับจำนวนคู่ของกระต่าย เดือนที่แล้ว บวกกับคู่ของกระต่ายที่เพิ่งเกิดจากคู่ของกระต่าย ที่มีอายุเกิน 2 เดือนซึ่งเท่ากับ จำนวนคู่ของกระต่ายที่มีเมื่อ 2 เดือนที่แล้ว นับเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปจะเขียนลำดับของ X_n , $n > 0$ ได้ดังนี้ $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ เรียกว่าลำดับฟีโบนัคชี และพจน์ต่าง ๆ ในลำดับเรียกว่าจำนวนฟีโบนัคชี (Fibonacci number) ซึ่งจะเห็นว่าพจน์ที่ n , $n > 2$ ได้จากผลบวกของ 2 พจน์ที่นำหน้า จึงสามารถสร้างตัวแบบของปัญหานี้ได้ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้คือ

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = X_1 + X_0$$

$$= 1 + 1$$

$$X_3 = X_2 + X_1$$

$$= 2 + 1$$

:

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$$

$$\text{โดยที่ } n \geq 0, X_0 = X_1 = 1$$

สรุปการสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิด ได้เป็น 2 วิธีคือ

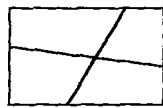
1. วิธีแบ่งเป็นกรณีย่อย โดยพิจารณาทางเลือกต่าง ๆ แล้วใช้หลักแห่งการบวกหรือการคูณ
2. วิธีพิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากกรณี $n-1$ ไปยัง n แล้วสร้างให้เป็นรูปแบบ (model)

ตัวอย่างที่ 2.4

ในการลากเส้นตรง n เส้น บนกระดาษแผ่นหนึ่ง ให้เส้นตรงทุกเส้นตัดซึ่งกันและกัน โดยที่ไม่มีเส้นตรงมากกว่าสองเส้นตัดกัน ณ จุดเดียวกัน ถามว่าเส้นตรง n เส้นนี้จะแบ่งกระดาษออกเป็นส่วนย่อยได้จำนวนเท่าไร



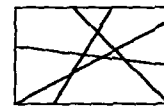
1 เส้น



2 เส้น



3 เส้น



4 เส้น

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 2.5 ชายคนหนึ่งฝากเงิน 1000 บาท แบบประจำได้ดอกเบี้ย 12% (ดอกเบี้ย

ทบต้น) ถ้า A_n แทนจำนวนเงินเมื่อฝากครบ n ปี จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง A_n กับ A_{n-1}

วิธีทำ เมื่อฝากครบ $n-1$ ปี จะได้เงินจำนวน A_{n-1} หลังจากนั้นอีก 1 ปี
จะได้เงินจำนวน A_{n-1} บวกดอกเบี้ย ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + (1.12) A_{n-1} \\ &= (1.12) A_{n-1} \end{aligned} \quad \text{เมื่อ } n \geq 1$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$A_n = (1.12) A_{n-1}$$

เมื่อ $n \geq 1$

ตัวอย่างความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. $a_n = 3a_{n-1}$, $n \geq 0$
2. $a_n - 1.5a_{n-1} = 0$, $n \geq 0$
3. $a_n - a_{n-1} = 3n^2$, $n \geq 0$
4. $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$, $n \geq 1$
5. $a_n + na_{n-1} = n!$, $n \geq 1$
6. $a_n - 7a_{n-1} + a_{n-2} = 0$, $n \geq 0$
7. $X_n = 5X_{n-1} - 6X_{n-2}$, $n \geq 0$
8. $a_n = a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$
9. $S_n = 2S_{n-1}$, $n \geq 0$
10. $C_n = 2C_n + 1$, $n > 1$

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับเลข 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , ...
2. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับเลข 3 , 6 , 9 , 15, 24 ,39, ...
3. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับเลข 5, 15, 45, 135,...
4. กบตัวหนึ่งกระโดด 1 ครั้ง สามารถขึ้นบันไดได้ 1 , 2 หรือ 3 ขั้น ให้หาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธี ซึ่งกบตัวนี้จะขึ้นบันไดความสูง n ขั้นและใช้ความสัมพันธ์นี้คำนวณจำนวนวิธีการขึ้นบันไดความสูง 6 ขั้น
5. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับจำนวนวิธีการจอดรถในแถวที่จอดรถขนาด n ช่องโดยที่รถบรรทุก และรถกระบะต้องใช้ที่จอดรถคันละ 2 ช่อง ส่วนรถเก๋งใช้ที่จอดรถคันละ 1ช่อง
6. ชายคนหนึ่งฝากเงิน 2,000 บาทแบบประจำได้ดอกเบี้ย 14% (ดอกเบี้ยทบต้น) ให้ A_n แทนจำนวนเงินเมื่อฝากครบ n ปี
 - 6.1 จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ $A_0, A_1, \dots$
 - 6.2 จงหาเงื่อนไขเริ่มต้น สำหรับลำดับ $A_0, A_1, \dots$
 - 6.3 จงหา A_1, A_2 และ A_3
 - 6.4 จงหาสูตรสำหรับ A_n
7. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนวิธีการหยอดเหรียญเป็นจำนวนมูลค่า n บาทเข้าตู้บริจาค ถ้ามีเหรียญอยู่ 3 ชนิดคือ 1 บาท 5 บาท และ 10 บาท

3. การหาคำตอบความสัมพันธ์เวียนเกิด (Solving recurrence relation)

หลังจากที่เราสามารถสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดของปัญหาได้แล้ว ต้องหาผลเฉลยของคำตอบในลักษณะรูปแบบปิดของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือการหาสูตรสำหรับพจน์ทั่วไปของ a_n มีวิธีการหาคำตอบดังนี้

วิธีที่ 1 การเดาวิธีนี้ประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอนคือ เริ่มด้วยการลองคำนวณค่าของจำนวนสักสามสี่ตัวจากความสัมพันธ์เวียนเกิด สังเกตรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของจำนวนเหล่านี้ เดารูปแบบปิดของจำนวนนี้ และพิสูจน์รูปแบบปิดที่เดาไว้ด้วยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่าถูกต้องหรือไม่

วิธีที่ 2 การทำซ้ำ (iteration) หรือวิธีการคลี่ เป็นการหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกี่ยวข้องกับลำดับ $a_0, a_1, \dots$ โดยการทำซ้ำนั้นเราเขียนพจน์ที่ n ใด ๆ a_n ในรูปของตัวที่มาก่อนหน้า $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ แล้วใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดแทนแต่ละพจน์ a_{n-1}, a_{n-2}, a_0 ด้วยพจน์ที่มาก่อนหน้านั้น ทำซ้ำ ๆ กันจนกระทั่งได้รูปแบบที่เด่นชัดออกมา

จากตัวอย่างที่ 2.2 เกมหอคอยฮานอย

ความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad n \geq 0, a_0 = 0$$

วิธีการหาคำตอบ

วิธีทำ **วิธีที่ 1** $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15$

ลำดับคือ 1, 3, 7, 15

สูตรในการคาดเดา $a_n = 2^n - 1$ สำหรับ $n \geq 0$

$$a_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 = 2^5 - 1$$

$$a_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 = 2^6 - 1$$

เมื่อได้ผลเฉลยที่ถูกต้องและตรงกัน ขั้นตอนสุดท้ายที่ต้องพิสูจน์ว่าถูกต้องจริง

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2^{n-1} - 1) + 1 \\ &= 2^n - 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

วิธีที่ 2

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \text{ สำหรับ } n > 0, a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2a_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2(2(2a_{n-3} + 1) + 1) + 1 \\ &\vdots \\ &= 2(2(2 \dots 2a_0 + 1) \dots) + 1 + 1 + 1 \\ &= 2^n a_0 + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

นิยาม การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือฟังก์ชันของ n ในรูป $\phi(n)$ โดยที่ $a_n = \phi(n)$

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 0$ $a_1 = 5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} \\ a_1 &= 5 \\ a_2 &= \dots \\ a_3 &= \dots \\ a_4 &= \dots \\ &\vdots \\ a_n &= \dots \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = \dots}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาคำตอบความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_n = 2S_{n-1}$ โดยที่ $S_0 = 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_{n-1} \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &\vdots \\ &= \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \dots}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาคำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ โดยที่ $a_1 = 1$

วิธีทำ $a_n = a_{n-1} + n$

$$a_5 =$$

$$=$$

$$\vdots$$

$$a_n =$$

ตัวอย่างที่ 3.4 ชายคนหนึ่งฝากเงิน 100 บาท แบบประจำได้ดอกเบี้ย 8% (ดอกเบี้ยทบต้น) ถ้า A_n แทนจำนวนเงินเมื่อฝากครบ n ปี จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง A_n กับ A_{n-1}

วิธีทำ เมื่อฝากครบ $n-1$ ปี จะได้เงินจำนวน A_{n-1} หลังจากนั้นอีก 1 ปี

เราจะได้เงินจำนวน A_{n-1} บวกดอกเบี้ย ดังนั้น

$$A_n = A_{n-1} + (0.08) A_{n-1}$$

$$= (1.08) A_{n-1}$$

ชายคนนี้ เริ่มฝากเงิน $A_0 = 1000$

เมื่อรวมกับ (1) จะทำให้เราสามารถคำนวณค่าของ A_n สำหรับ n ใด ๆ เช่น

$$A_3 = (1.08) A_2$$

$$= (1.08)(1.08) A_1$$

$$= (1.08) (1.08)(1.08) A_0$$

$$= (1.08)^3 \times 1000$$

$$= 1259.71$$

ซึ่งหมายถึง เมื่อฝากครบ 3 ปี จะได้เงิน 1259.71 บาท

สำหรับค่า n ใด ๆ เราได้ $A_n = (1.08) A_{n-1}$

$$\vdots$$

$$A_n = (1.08)^n A_0$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหา a_{12} เมื่อ $a_n^2 = 5a_{n-1}^2$, $a_n > 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 4$

วิธีทำ ให้ $b_n = a_n^2$ ดังนั้น

$$b_n = 5b_{n-1} \quad n \geq 0, b_0 = 4$$

$$b_1 = 5b_0$$

$$= 5(4)$$

$$b_2 = 5b_1$$

$$= 5(5)(4)$$

$$= 5^2 (4)$$

$$\vdots$$

$$b_n = 4(5)^n$$

$$a_n^2 = 4(5)^n$$

$$a_n = 2(\sqrt{5})^n$$

$$n \geq 0$$

$$a_{12} = 31250$$

3.1 ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิด

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราจะจำแนกประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ได้ตามคุณสมบัติการของความสัมพันธ์ดังนี้

1. อันดับ (order) ความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ เป็นแบบอันดับที่ k เมื่อพจน์เกิดก่อนหน้า n คือ $n-k$ a_n ที่ a_n คือ a_{n-k}

ตัวอย่าง $a_n = 3a_{n-1}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ 1

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ 2

$a_n = 3a_{n-1} + n^2 a_{n-3}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ 3

2. ความเป็นเชิงเส้น (linear / non – linear) ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ จะเป็นแบบเชิงเส้น (linear recurrence) ก็เมื่อฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวก่อนหน้าในลำดับ

ตัวอย่าง $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 5$ เป็นเชิงเส้น

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} + n^2$ เป็นเชิงเส้น

$a_n = 2a_{n-1} / a_{n-2} + 5$ ไม่เป็นเชิงเส้น

$a_n = 2a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ ไม่เป็นเชิงเส้น

$a_n = 3a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ ไม่เป็นเชิงเส้น

3. ความเป็นเอกพันธ์ (homogenous / non – homogenous) ความ

สัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธ์ก็เมื่อ $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ หรือกล่าวได้ว่าทุก ๆ พจน์ของความสัมพันธ์ต้องมี a_i ทั้งหมดอยู่

ตัวอย่าง $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}$ เป็นแบบเอกพันธ์

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ เป็นแบบเอกพันธ์

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} + 1$ ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

$a_n = 2a_{n-1} + 3$ ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

$2n = a_n a_{n-1}$ ไม่เป็นแบบเอกพันธ์

4. ค่าสัมประสิทธิ์ ในที่นี้สนใจว่าสัมประสิทธิ์ที่คูณกับพจน์ a_i ทั้งหมดใน

ความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นเป็นค่าคงตัวหรือไม่

ตัวอย่าง $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}$ มีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$a_n = na_{n-1} + a_{n-3}$ มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าไม่คงตัว

$a_n = 3na_{n-1}$ มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าไม่คงตัว

บทนิยาม

เมื่อ $c_i, i=1,2,\dots,k$ เป็นค่าคงที่ และ $Q(n)$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนเต็ม $n \geq 0$ เราเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + Q(n)$ ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ถ้า $Q(n) = 0$

เราจะเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ ว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้น อันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 3.6

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2

$$a_n = 3a_{n-1}^2 + a_{n-2}$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะกำลังของ a_{n-1} ไม่เท่ากับ 1

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ไม่เป็นเอกพันธ์เพราะ $Q(n)$ ไม่เท่ากับ 0

การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(Solution of linear recurrence relation of order k with constant coefficients)

สำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิดบางประเภท มีวิธีเฉพาะสำหรับหาคำตอบที่มีลักษณะเฉพาะนั้น ๆ จะกล่าวถึงการหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นที่อันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

3.2 การหาคำตอบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Solution of linear homogeneous recurrence relation of order k with constant coefficients)

$$\text{รูปแบบทั่วไป } a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} \dots\dots\dots(1)$$

วิธีทำ ให้ $a_n = cr^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เมื่อแทน a_n ด้วย cr^n , $c \neq 0$

และ $r \neq 0$ จะได้ว่า

$$cr^n = c_1 cr^{n-1} + c_2 cr^{n-2} + \dots + c_k cr^{n-k}$$

เมื่อหารด้วย cr^{n-k} ทั้งสองข้างจะได้

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k r^0 \dots\dots\dots(2)$$

แสดงว่า ถ้า r เป็นรากของสมการแล้ว (2) แล้ว cr^n เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด(1) เราจะเรียกสมการที่ (2) ว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) และเรียกรากของสมการนี้ว่า รากลักษณะเฉพาะ (characteristic root) $f(r) = 0$ เป็นโพลิโนเมียล ที่ r ดีกรี เท่ากับ อันดับของความสัมพันธ์เวียนเกิด ถ้า $f(r) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงแตกต่างกันทั้งหมด $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

คำตอบทั่วไปอยู่ในรูป $a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_j r_j^n$ โดยที่ A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, j$)

3.2.1 การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (The first order linear homogeneous recurrence relation with constant coefficients)

รูปแบบคือ $a_n = c_1 a_{n-1} + Q(n)$, เมื่อ $Q(n) = 0$

$$a_n = c_1 a_{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 3.7 ประชากรกระต่ายในป่าแห่งหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่าของทุกปี โดยที่ไม่มี การตายเลย ให้หาจำนวนกระต่ายเมื่อเวลาผ่านไป n ปี โดยที่ในปีแรกมีกระต่ายอยู่ 5 ตัว

วิธีทำ ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับปัญหาประชากรกระต่ายนี้คือ

$$a_n = 3 a_{n-1} , \quad a_0 = 5$$

เมื่อแทน $a_n = r^n$ เราได้สมการลักษณะเฉพาะ

$$r^n = 3 r^{n-1} \text{ นำ } r^{n-1} \text{ หารตลอดจะได้}$$

$$r = 3$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปอยู่ในรูป

$$a_n = A_1 3^n$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น

$$a_0 = 5 \text{ ได้เป็น}$$

$$5 = A_1 3^0$$

$$A_1 = 5$$

ดังนั้น จำนวนกระต่ายหลังปีที่ n มีค่า

$$a_n = 5 \cdot 3^n$$

ตัวอย่างที่ 3.8 มีชุดของลำดับ 3, 6, 12, 24, 48,... และสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ คือ $a_n = 2a_{n-1}$ จงหาคำตอบของสมการ

วิธีทำ **วิธีที่ 1** ถ้าเราใช้วิธีการคลี่ก็สามารถหาคำตอบได้

$$a_n = 2a_{n-1}$$

.....

.....

.....

วิธีที่ 2 ใช้การแก้สมการ เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 3$

.....

.....

.....

คำตอบทั่วไป $a_n = \dots\dots\dots$

3.2.2 การหาคำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (The second order linear homogeneous recurrence relation with constant coefficients)

รูปแบบคือ $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + Q(n)$, เมื่อ $Q(n)=0$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

ถ้า r คือ รากที่เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แล้ว $a_n = r^n$ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพัทธ์เวียนเกิด ก็ต่อเมื่อ r เป็นรากลักษณะเฉพาะ ของความสัมพัทธ์เวียนเกิด เราทราบว่า อาจมีรากได้ถึง k ราก ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องแตกต่างกันทั้งหมด อาจจะมีบางตัวซ้ำกัน นอกจากนี้ อาจจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ และรากแต่ละรากจะไม่เท่ากับ 0 เนื่องจาก $c_k \neq 0$ ดังนั้นจึงพิจารณาได้เป็น 2 กรณี ต่อไปนี้คือกรณีที่ 1 เมื่อรากลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_k r_k^n \text{ เมื่อ } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงหาคำตอบของความสัมพัทธ์เวียนเกิด $a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$ เมื่อ

$$a_0 = 2, a_1 = 7$$

วิธีทำ

$$a_n - 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 0$$

$$\text{ให้ } a_n = r^n$$

$$r^n - 7r^{n-1} + 12r^{n-2} = 0$$

$$\text{หารด้วย } r^{n-2}$$

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

$$(r - 4)(r - 3) = 0$$

$$r = 3, 4$$

$$a_n = A_1 3^n + A_2 4^n$$

$$\text{เมื่อ } a_0 = 2$$

$$2 = A_1 3^0 + A_2 4^0$$

$$2 = A_1 + A_2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{เมื่อ } a_1 = 7$$

$$7 = A_1 3^1 + A_2 4^1$$

$$7 = 3A_1 + 4A_2 \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{จาก (1), (2) แก้มการได้ } A_1 = A_2 = 1$$

$$\text{จาก } a_n = A_1 3^n + A_2 4^n \text{ แทน } A_1 = A_2 = 1$$

$$\text{จะได้ } a_n = 3^n + 4^n$$

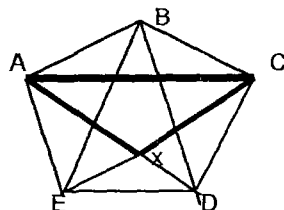
ตัวอย่างที่ 3.10 จงแก้สมการความสัมพัทธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนัชชี $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$\text{เมื่อ } a_0 = 1, a_1 = 1$$

วิธีทำ

.....

จากผลเฉลยของลำดับฟีโบนัชชีที่ได้นี้มีประโยชน์มากในด้านสถาปัตยกรรม ลำดับฟีโบนัชชีสองตัวที่อยู่ติดกันนั้น มีชื่อเรียกว่า อัตราส่วนทอง (golden ratio) มีค่าเท่ากับ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ หรือประมาณ 1.618 เป็นอัตราส่วนที่ปรากฏอยู่ในธรรมชาติมากมาย เช่น อัตราส่วนของความสูงคนกับความสูงจากเท้าถึงสะดือคน, การวาดรูปดาวห้าแฉกที่สวยงามจะต้องมีอัตราส่วนดังรูป



จากรูป 1.1 จงพิสูจน์ว่า ด้าน $\frac{AC}{AX} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

พิสูจน์ $\frac{AC}{AX} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ เมื่อให้ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

มุมที่จุดยอดของรูปห้าเหลี่ยมแต่ละมุมจะมีขนาด $= \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$

$\triangle ACX$, มุม C = มุม A = $108^\circ / 3 = 36^\circ$

มุม X = $180^\circ - 2(36^\circ)$

= 108°

กฎของ sin

$\frac{AC}{\sin X} = \frac{AX}{\sin C}$

$\frac{AC}{AX} = \frac{\sin X}{\sin C}$

= $\frac{\sin 2C}{\sin C}$

= $\frac{2 \sin C \cos C}{\sin C}$

= $2 \cos C$

= $2 \cos 36^\circ$

= $2 \cos 2(18^\circ)$

= $2 [1 - 2 \sin^2 18^\circ]$

= $\frac{2[1 - 2(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2]}{4} = \frac{2[1+\sqrt{5}]}{4}$

= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

กรณีที่ 2 เมื่อรากลักษณะเฉพาะซ้ำกัน

กล่าวเฉพาะความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n = A_1 r^n + A_2 n r^n$$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

$$\text{เมื่อ } a_0 = 1, a_1 = 2$$

วิธีทำ ให้ $a_n = r^n$ เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

แทน a_n ด้วย x^n

$$r^n = 4r^{n-1} - 4r^{n-2}$$

หารด้วย r^{n-2}

$$\text{สมการลักษณะเฉพาะคือ } r^2 - 4r + 4 = 0 = (r-2)^2$$

รากลักษณะเฉพาะคือ 2 ซึ่งมีรากซ้ำเท่ากับ 2

$$a_n = A_1 (2)^n + A_2 n (2)^n$$

$$\text{เมื่อ } a_0 = 1$$

$$1 = A_1 (2)^0$$

$$A_1 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$2 = 2A_1 + 2A_2$$

$$A_2 = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ $a_n = 2^n$

ตัวอย่างที่ 3.12 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$,

$$\text{เมื่อ } a_0 = 1, a_1 = 6$$

วิธีทำ

.....

กรณีที่ 3 รากลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีของ Demoivre เกี่ยวกับการคูณและยกกำลังของจำนวนเชิงซ้อน

$$\text{ให้ } Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ตัวอย่างที่ 3.13

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } a_n = Cr^n, r \neq 0$$

จะได้สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

จากลักษณะเฉพาะคือ $1 \pm i$

คำตอบทั่วไปคือ $a_n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n$ C_1, C_2 เป็นค่าคงที่

$$\text{โดยที่ } 1+i = \sqrt{2} [\cos \pi/4 + i \sin \pi/4]$$

$$1-i = \sqrt{2} [\cos \pi/4 - i \sin \pi/4]$$

$$a_n = C_1 (\sqrt{2})^n [\cos n\pi/4 + i \sin n\pi/4] + C_2 (\sqrt{2})^n [\cos n\pi/4 - i \sin n\pi/4]$$

$$= (\sqrt{2})^n [k_1 \cos n\pi/4 + k_2 \sin n\pi/4]$$

$$k_1 = C_1 + C_2, k_2 = (C_1 - C_2)i$$

$$a_0 = k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = k_1 = 1$$

$$a_1 = \sqrt{2} [k_1 \cos \pi/4 + k_2 \sin \pi/4]$$

$$= 2$$

$$k_1 = 1$$

ดังนั้นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่สอดคล้องกับ $a_0 = 1, a_1 = 2$ คือ

$$a_n = (\sqrt{2})^n [\cos n\pi/4 + i \sin n\pi/4]$$

แบบฝึกหัดที่ 3.1

- $a_n = -3n a_{n-1}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์หรือไม่
- $a_n = 3a_{n-1} a_{n-2}$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์หรือไม่
- $a_n - a_{n-1} = 2n$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์หรือไม่
- จงหาคำตอบสำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้
 - $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}; a_0 = a_1 = 2$
 - $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}; a_0 = a_1 = 1$
 - $a_n = a_{n-2}; a_0 = a_1 = 0$
 - $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}; a_0 = 0, a_1 = 1$
 - $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}; a_0 = 2, a_1 = 4$
 - $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}; a_0 = a_1 = 4, a_2 = 2$
 - $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} + a_{n-3}, a_0 = 3, a_1 = 4, a_2 = 7$
- ถ้าความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$ มีคำตอบทั่วไปคือ $a_n = A_1 3^n + A_2 6^n$ ให้หาค่า C_1 และ C_2
- จงหาคำตอบสำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = a_1 = 1$
จากคำตอบพื้นฐาน $a_n = x^n$
- จงหาคำตอบสำหรับความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-4}$ โดยที่ $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

3.3 การหาคำตอบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Solution of linear non- homogeneous recurrence relation of order k with constant coefficients)

$$\text{รูปแบบทั่วไป } a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} + Q(n) \text{ เมื่อ } Q(n) \neq 0 \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } a_n &= a_{n-1} + n \\ a_n + 3a_{n-1} &= 4n^2 - 2n \\ a_n - a_{n-1} &= 3n^2 \end{aligned}$$

ผลคำตอบประกอบด้วยผลเฉลย 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 ผลเฉลยเอกพันธ์ (homogeneous solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เป็นเอกพันธ์นั้นคือผลเฉลยของ $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k}$ ซึ่งจะแทนด้วย $a_n^{(h)}$

ส่วนที่ 2 ผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) ซึ่งได้แก่ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} + Q(n)$ ซึ่งจะแทนด้วย $a_n^{(p)}$

$$\text{นั่นคือ } a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \text{ จะเป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด} \dots (1)$$

สรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด(1) ได้เป็น 4 ขั้นตอน

1. หาผลเฉลยเอกพันธ์ $a_n^{(h)}$
2. หาผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$
3. หาผลรวม $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของ... (1)
4. ใช้เงื่อนไขที่กำหนดให้ หาค่าคงตัวที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ใน $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

ตัวอย่างที่ 3.14 จงหาคำตอบของสมการเวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 1$; $a_1 = 1$

วิธีทำ

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$\text{คำตอบทั่วไป } a_n = A 2^n$$

$$\text{ให้คำตอบเฉพาะคือ } a_n^* = B_0$$

แทนค่าคำตอบเฉพาะนี้ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ จะได้

$$B_0 = 2B_0 + 1$$

$$B_0 = -1$$

คำตอบทั่วไปจึงมีค่า

$$a_n = A 2^n - 1$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $a_1 = 1$

$$1 = A \cdot 2^1 - 1$$

$$A = 1$$

$$a_n = 2^n - 1$$

ตัวอย่างที่ 3.15 จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} + 5(7)^n$

เมื่อ $n \geq 1$, $a_0 = 2$

วิธีทำ

.....

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$

วิธีทำ

เมื่อ $a_1 = -4$

$$a_n + 3a_{n-1} = 0$$

เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ 1

คำตอบทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์คือ $a_n = A(-3)^n$

ผลเฉลยเอกพันธ์คือ $a_n^{(h)} = A(-3)^n$

$f(n) = 4n^2 - 2n$ เป็นพหุนามดีกรี 2 ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะจะต้องเป็นพหุนามดีกรี 2

สมมติให้ $Bn^2 + Cn + D$ เป็นผลเฉลยเฉพาะเมื่อ B, C และ D เป็นค่าคงตัวที่

$$\text{แทน } a_n = Bn^2 + Cn + D$$

$$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n$$

$$[Bn^2 + Cn + D] + 3[B(n-1)^2 + C(n-1) + D] = 4n^2 - 2n$$

$$\text{หรือ } 4Bn^2 + (4C-6B)n + (3B-3C+4D) = 4n^2 - 2n$$

พหุนามทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อสัมประสิทธิ์ของพจน์เหมือนกันเท่ากัน นั่นคือ

$$4B = 4$$

$$4C - 6B = -2$$

$$3B - 3C + 4D = 0$$

แก้สมการหาค่า B, C และ D จะได้ $B = 1, C = 1$ และ $D = 0$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะคือ $a_n^{(p)} = n^2 + n$

รวมผลเฉลยเอกพันธ์และผลเฉลยเฉพาะ ได้ $a_n = A(-3)^n + n^2 + n$

หาค่า A โดยใช้เงื่อนไข $a_1 = -4$ จะได้

$$-4 = A(-3)^1 + 1^2 + 1$$

$$= -3A + 2$$

$$A = 2$$

$$a_n = 2(-3)^n + n^2 + n$$

จากตัวอย่างได้เห็นวิธีหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบไม่เอกพันธ์ ซึ่งหัวใจสำคัญ ของการหาผลเฉลย คือการหาผลเฉลยเฉพาะในขั้นตอนที่ 2 ดังได้กล่าวแล้วในตอนต้นว่าเราไม่มีวิธีทั่วไป สำหรับหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดทุกปัญหา แต่มีเทคนิคบางอย่างที่ใช้ได้กับกลุ่มปัญหา ที่มีลักษณะเฉพาะรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$ จะแตกต่างกันตามลักษณะของ $f(n)$ และรากลักษณะเฉพาะ ซึ่งพอจะสรุปได้ดังตาราง

$Q(n)$	$A_n^{(p)}$
1. $A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + \dots + A_1 n + A_0$ (1.1) 1 ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ (1.2) 1 เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ m	$(B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \dots + B_1 n + B_0) n^m$ $(B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \dots + B_1 n + B_0)$
2. $A r^n$ (2.1) r ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ (2.2) r เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ m	$B r^n$ $B n^m r^n$
3. $A n^k r^n$ (3.1) r ไม่เป็นรากลักษณะเฉพาะ (3.2) r เป็นรากลักษณะเฉพาะซึ่งมีภาวะรากซ้ำเท่ากับ m	$(B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \dots + B_1 n + B_0) r^n$ $n^m (B_k n^k + B_{k-1} n^{k-1} + \dots + B_1 n + B_0) r^n$

แบบฝึกหัดที่ 3.2

- จงหาคำตอบเฉพาะของ $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3n^2 - 2n + 1$
- จงหาคำตอบเฉพาะสำหรับ
 - $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 42 \cdot 4^n$
 - $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 7$
 - $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n$
- หาคำตอบของ
 - $a_n = a_{n-1} + 3(n-1); a_0 = 1$
 - $a_n = a_{n-1} + n(n+1); a_0 = 3$
 - $a_n = a_{n-1} + 3n^2; a_0 = 10$
 - $a_n = 3a_{n-1} - 2; a_0 = 0$
 - $a_n = 2a_{n-1} + n; a_0 = 1$
 - $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n; a_0 = 2$
 - $a_n = 2a_{n-1} + \frac{1}{2} n^2; a_0 = 3$
 - $a_n = 3a_{n-1} + n^2 - 3; a_0 = 1$
- ผลผลิตเฉลี่ยของปีที่ n และปีก่อนหน้านี้นี้มีค่า $2n + 5$ ถ้าเริ่มต้นมีผลผลิตอยู่ 3 ($a_0 = 3$) ให้หาผลผลิตปีที่ n
- หาคำตอบสำหรับ $2a_{n-1}^2 + 1; a_0 = 1$ (ข้อเสนอนี้ให้ $b_n = a_n^2$)

4. โจทย์ประยุกต์ (Application Recurrence Relation)

ตัวอย่างที่ 4.1 ถ้าให้ a_n เป็นจำนวนแบคทีเรียในวันที่ n เราพบว่าจากการทดลอง อัตราการเติบโตของจำนวนแบคทีเรียในวันที่ n เท่ากับ $a_n - 2a_{n-1} - 1$ และอัตราการเติบโตเป็น 2 เท่าทุกวัน ให้หาค่าของ a_n โดยกำหนดว่า $a_0 = 1$

วิธีทำ อัตราการเติบโตของจำนวนแบคทีเรียในวันที่ $n - 1$ เท่ากับ $a_{n-1} - 2a_{n-2}$
 อัตราการเติบโตของจำนวนแบคทีเรียในวันที่ n เท่ากับ $a_n - 2a_{n-1}$
 ดังนั้น จากเงื่อนไขที่กำหนดมาเราได้ว่า

$$\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} &= 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) \\ &= 2a_{n-1} - 4a_{n-2} \\ a_n &= 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาตัวแบบเวียนเกิดสำหรับการนับจำนวนสับเซตของเซตที่มีสมาชิก n ตัว ให้ $S' = \{a_1, a_2, a_n\}$ สับเซตของ S แบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่มี a_n เป็นสมาชิกกับกลุ่มที่ไม่มี a_n เป็นสมาชิก

วิธีทำ ให้ X_{n-1} คือจำนวนสับเซตทั้งหมดที่ไม่มี a_n เป็นสมาชิก หรือสับเซตทั้งหมดของ $S' = \{a_1, a_2, a_n\}$ นั่นเอง

สับเซตของ S ที่มี a_n เป็นสมาชิกได้จากการเพิ่ม a_n ในแต่ละสับเซตของ S' ดังนั้น ถ้า X_n คือ จำนวนสมาชิกทั้งหมดของ S จะได้ตัวแบบเวียนเกิดเป็น

$$\begin{aligned} X_n &= 2X_{n-1}, \quad n \geq 1 \\ X_0 &= 1 \text{ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 บ่อแห่งหนึ่งเลี้ยงหอยชนิดหนึ่งไว้ 3000 ตัว เมื่อสิ้นสัปดาห์แรกหอยในบ่อนี้มี 3500 ตัว ถ้าจำนวนหอยที่เพิ่มขึ้นในแต่ละสัปดาห์เป็น 3 เท่าของจำนวนหอยที่เพิ่มในสัปดาห์ที่ผ่านมา และทุกสิ้นสัปดาห์ต้องจับหอยออกจากบ่อเลี้ยงนี้ 200 ตัว จงหาว่าเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ n จะมีหอยกี่ตัว

วิธีทำ ให้ a_n เป็นจำนวนหอยเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ n $n \geq 0$

$$a_0 = 3000$$

$$a_1 = 3500 - 200 = 3300$$

.....

ตัวอย่างที่ 4.4 จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนสตริงเลขฐานสองขนาด n บิตที่ไม่มีเลข 00 ปรากฏอยู่ กำหนดให้ a_n คือจำนวนสตริงเลขฐานสองขนาด n บิตที่ไม่มีเลข 00 อยู่ซึ่งแยกได้ 2 กรณีคือวิธีทำ

1. กรณีที่สตริงเลขฐานสองขนาด n บิตเริ่มด้วยเลข 1 ซึ่งลดขนาดของปัญหาลงหนึ่งบิต เป็นการนับจำนวนสตริงที่ตามหลัง $n-1$ บิตที่ไม่มีเลข 00 ทั้งนี้เพราะบิตแรกที่เป็น 1 นั้นมีแต่ทำให้สตริงยาวขึ้น แต่ไม่มีผลต่อการเพิ่มจำนวนสตริงที่ต้องการ ดังนั้นในกรณีนี้ $a_0 = a_{n-1}$

2. กรณีที่สตริงเลขฐานสองขนาด n บิตเริ่มด้วยเลข 01 ซึ่งลดขนาดของปัญหาลงสองบิต เป็นการนับจำนวนสตริงที่ตามหลัง $n-2$ บิตที่ไม่มีเลข 00 ด้วยเหตุผลทำนองเดียวกันกับกรณีแรกสองบิตแรกที่เป็นเลข 01 นั้นมีแต่ทำให้สตริงยาวขึ้น แต่ไม่มีผลต่อการเพิ่มจำนวนสตริงที่ต้องการ ดังนั้นในกรณีนี้ $a_n = a_{n-2}$ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_0 = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ สำหรับ } n > 1 \text{ โดยที่ } a_0 = 1 \text{ และ } a_1 = 2$$

เพราะว่าสตริงความยาวศูนย์มีแบบเดียว (null string) และสตริงความยาวหนึ่งมีสองแบบคือ 0 กับ 1 (ทั้งความยาวศูนย์และหนึ่งนี้ไม่มีเลข 00 ตามที่ต้องการ)

ตัวอย่างที่ 4.5 ในการบริจาคเงิน 1 บาท หรือ 10 บาท หรือ 20 บาท อย่างใดอย่างหนึ่งในแต่ละวันจนกระทั่งได้ บริจาคเงินรวมกันทั้งสิ้น n บาท จงหาวิธีในการบริจาค

วิธีทำ วันแรกได้บริจาค 1 บาท ก็จะมีวิธีบริจาคทั้งหมด a_{n-1} สำหรับอีก $n-1$ บาท

“.....”10บาท “.....” a_{n-10} สำหรับเงินที่เหลือ

“.....”20บาท “.....” a_{n-20} สำหรับเงินที่เหลือ

จากหลักแห่งการบวกและทั้ง 3 กรณีไม่มีวิธีซ้ำกันเลย

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-10} + a_{n-20}$$

แบบฝึกหัดที่ 4

1. ดำยืมเงิน S บาท จากธนาคารตกลงว่าจะจ่ายเงิน T งวด ธนาคารคิดดอกเบี้ยในอัตรา i ต่องวด จงหาว่า จะต้องจ่ายเงินงวด P (คงที่) เท่าไร เมื่อสิ้นงวดแต่ละงวด
2. เด็กคนหนึ่งก้าวขึ้นบันไดซึ่งมี n ขั้น โดยก้าวทีละขั้น หรือก้าวทีละ 2 ขั้น จงหาจำนวนวิธีที่เด็กคนนี้จะก้าวขึ้นบันได จำนวน 10 ขั้น
3. ในเครื่องปฏิกรณ์ปรมาณู ซึ่งมีเฉพาะนิวเคลียสจำนวนมาก ณ เวลา 0 เรา ได้ปล่อยอนุภาคพลังสูงเข้าไป 1 อนุภาค ทุก ๆ 1 ไมโครวินาที มีเหตุการณ์เกิดขึ้น 2 เหตุการณ์แรก คืออนุภาคพลังงานสูงแต่ละอนุภาคชน และเข้ารวมกับนิวเคลียสแล้วปล่อยอนุภาคพลังงานสูงออกมา 3 อนุภาค และอนุภาคพลังงานต่ำออกมา 1 อนุภาค เหตุการณ์ที่สอง คืออนุภาคพลังงานต่ำแต่ละอนุภาคชน และเข้ารวมกับนิวเคลียสแล้วปล่อยอนุภาคพลังงานสูงออกมา 2 อนุภาค และอนุภาคพลังงานต่ำออกมา 1 อนุภาค ให้หาความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนอนุภาคพลังงานต่ำ และพลังงานสูงเมื่อเวลาผ่านไป n ไมโครวินาที
4. การเรียงลำดับข้อมูลแบบผสาน (Merge sort) อาศัยการแบ่งข้อมูลออกเป็นสองชุดย่อยขนาดเท่าๆ กัน นำข้อมูลทั้งสองชุดย่อยนี้ไปเรียงลำดับด้วยการเรียงลำดับแบบผสาน เมื่อได้ข้อมูลที่เรียงแล้วจึงนำมาสาน (Merge) ข้อมูลกันได้ข้อมูลที่เรียงลำดับทั้งหมด จงเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนการเปรียบเทียบข้อมูล

ภาคผนวก ง
แผนการสอนเรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

แผนการสอนเรื่องที่ 1

เรื่อง ทบทวนลำดับ

จำนวน 2 คาบ

สาระสำคัญ

การจัดการเรียนการสอนที่จะให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ และพัฒนาความรู้ความสามารถตามศักยภาพแต่ละบุคคลได้นั้น ผู้สอนจำเป็นต้องทราบพื้นฐานความรู้ของผู้เรียนในเรื่องที่จะเรียน เพื่อจะได้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับความรู้พื้นฐานของผู้เรียน ดังนั้นจึงมีการทบทวนพื้นฐานเรื่องลำดับ

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนเข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนเข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตได้

เนื้อหา

เรื่องลำดับเป็นพื้นฐานที่สำคัญของเรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทนิยาม ลำดับคือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกหรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกเรียกว่าลำดับจำกัด (finite sequence) ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเรียกว่าลำดับอนันต์ (infinite sequence)

บทนิยาม ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตเมื่อ $a_{n+1} - a_n = d$ (ค่าคงที่) และเรียก d ว่า ผลต่างร่วม (common difference)

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงที่ค่าคงที่นี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (common ratio)

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องลำดับของนักเรียน
2. ทบทวนการหาค่าพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิต, เรขาคณิต

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต (ในแบบเรียนตัวอย่างที่ 1.4) เมื่อกำหนดลำดับพจน์ที่ 1, 2, 3 มาให้ แล้วใช้การบรรยายและถาม-ตอบ เพื่อให้ผู้เรียนหาค่าพจน์ที่อยู่ถัดไป
2. ครูยกตัวอย่างซึ่งกำหนดพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต (ในแบบเรียนตัวอย่าง ที่ 1.6 และ 1.7) เมื่อกำหนดลำดับพจน์ที่ 1, 2, 3 มาให้ แล้วใช้การบรรยายและถาม-ตอบ เพื่อให้ผู้เรียนหาค่าพจน์ที่อยู่ถัดไป
3. ครูอธิบายให้นักเรียนเห็นว่าลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิตมีความเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของลำดับ นิยามของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

สื่อการเรียนการสอน

แบบเรียน แบบฝึกหัด ใบงานที่ 1 -2

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจ
2. สังเกตการตอบคำถาม
3. ทำแบบฝึกหัดที่ 1 ได้ถูกต้อง 50% ขึ้นไป
4. ทำใบงานได้ถูกต้อง 50 % ขึ้นไป

กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

ใบงานที่ 1

1. จงหาพจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 8 ของลำดับต่อไปนี้

1.1 3, 6, 12, ...

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

1.2 64, -32, 16, ...

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

2. ถ้าพจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิต คือ 32 และพจน์ที่ 18 คือ 48 จงหาพจน์ที่ 15

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

3. จงพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

3.1 -2, 4, 10, ...

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

3.2 20, 27, 34, ...

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

4. จงหา 4 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

$$4.1 \quad a_n = n(n-1)$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

$$4.2 \quad a_n = 4n - 2$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

5. จงหา 4 พจน์แรกของลำดับจากฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\{(x,y) / y = 3^x - 1, x \in \mathbb{I}^+ \text{ และ } x < 25\}$$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

โชคดี นะจ๊ะ



ใบงานที่ 2

1. จงหาจำนวนวิธีที่จะใช้เงิน n บาทเพื่อซื้อของสามชนิด ชนิดที่ 1 ราคาชิ้นละ 1 บาท ชนิดที่ 2 ราคาชิ้นละ 10 บาท ชนิดที่ 3 ราคาชิ้นละ 20 บาท จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิด
วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
2. ในการลากเส้นตรง n เส้นบนกระดาษแผ่นหนึ่ง ให้เส้นตรงทุกเส้นตัดซึ่งกันและกัน โดยที่ไม่มีเส้นตรงมากกว่า สองเส้นตัดกัน ณ จุดเดียวกัน ถามว่า เส้นตรง n เส้นจะแบ่งกระดาษออกเป็นพื้นที่จำนวนเท่าไร
วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
3. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนเงินในบัญชีธนาคารหลังจาก n ปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยเป็น 7 เปอร์เซ็นต์ต่อปี และมีการฝากเงินจำนวน 500 บาท ทุก ๆ ต้นปี
วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

แผนการสอนเรื่องที่ 2

เรื่อง ความสัมพันธ์เวียนเกิด

จำนวน 4 คาบ

สาระสำคัญ

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ยากและซับซ้อนมีวิธีการหาคำตอบได้หลากหลายวิธี เน้นให้ผู้เรียนได้พัฒนาความคิดโดยการแก้ปัญหาตามหลักทฤษฎีของโพลยา (Polya) ซึ่งวิธีการหนึ่งคือ การแก้ปัญหาโดยใช้การสร้างรูปแบบ (Model) ต้องการให้ผู้เรียนได้ปฏิบัติกับรูปแบบจำลองจากของจริง เพื่อให้ผู้เรียนมีความคิดที่สร้างสรรค์

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถบอกนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดได้
2. นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้

เนื้อหา

นิยามความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นเนื้อหาใหม่ โดยที่นิยามคือ

บทนิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_{n+r} = F(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r-1}, n)$
เมื่อ F เป็นฟังก์ชันของ $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+r-1}$ และ n

วิธีหาความสัมพันธ์เวียนเกิดได้มีวิธีดังนี้

1. วิธีแบ่งเป็นกรณีย่อย โดยพิจารณาทางเลือกต่าง ๆ แล้วใช้หลักแห่งการบวกหรือการคูณ
2. วิธีพิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากกรณี $n-1$ ไปยัง n

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนเรื่องลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต

ขั้นสอน

1. ครูนำเสนอปัญหาที่ 2.1 - 2.3
2. ครูอธิบายพร้อมทั้งแนะนำวิธีการหาความสัมพันธ์เวียนเกิด ในตัวอย่างที่ 2.2 โดยมี

อุปกรณ์คือเกมหอคอยฮานอย

3. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 – 3

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด
2. ครูสรุปการสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิด
3. เพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น ครูนำเสนอตัวอย่างที่ 2.4 พร้อมแจกใบกิจกรรมที่ 4

สื่อการเรียนการสอน

แบบเรียน แบบฝึกหัด ใบกิจกรรมที่ 1 – 4

การวัดผล และประเมินผล

1. สังเกตความสนใจ
2. สังเกตการตอบคำถาม
3. ทำแบบฝึกหัดที่ 2 ได้ถูกต้อง 50% ขึ้นไป
4. ทำใบกิจกรรมได้ถูกต้อง 50 % ขึ้นไป

กิจกรรมเสนอแนะ.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 1

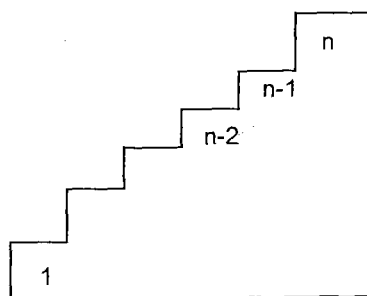
ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

จากตัวอย่างที่ 2.1 ถ้ามีบันไดอยู่ 5 ขั้น และเด็กคนหนึ่งขึ้นบันได 5 ขั้นนี้ โดยวิธีขึ้นคือ ก้าวขึ้น 1 ขั้น หรือก้าวขึ้น 2 ขั้นก็ได้ เด็กคนนี้จะวิธีขึ้นบันได 5 ขั้นนี้กี่วิธี

จากโจทย์ปัญหาข้างต้นนี้ถ้าเราเพิ่มขั้นบันไดเป็น 6 ขั้นจงตอบคำถามต่อไปนี้

- (1) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 3 ขั้น (a_3)
- (2) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 4 ขั้น (a_4)
- (3) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 5 ขั้น (a_5)
- (4) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 6 ขั้น (a_6)



วิธีทำ (1) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 3 ขั้น (a_3)

.....

(2) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 4 ขั้น (a_4)

.....

(3) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 5 ขั้น (a_5)

.....

(4) จงหาจำนวนวิธีขึ้นบันได 6 ขั้น (a_6)

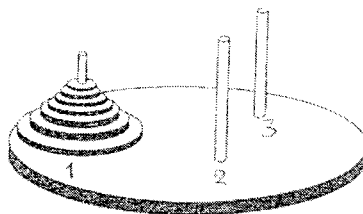
.....

ใบกิจกรรมที่ 2

ชื่อ.....
ชั้น.....เลขที่.....

จากตัวอย่างที่ 2.2

เกมหอคอยฮานอย



การเคลื่อนย้ายแผ่นไม้วงกลมที่มีรัศมีต่างๆ กัน n แผ่นที่มีรูเจาะตรงกลาง โดยแผ่นที่เล็กกว่าซ้อนอยู่บนแผ่นที่ใหญ่กว่าบนหลักหนึ่งใน 3 หลัก ไปไว้อีกหลักหนึ่งที่ละแผ่น ในขณะที่ย้ายให้ใช้หลักหนึ่งเป็นที่พักแผ่นวงกลมได้ ในแต่ละขั้นตอนการย้ายแผ่นวงกลมที่ใหญ่กว่าจะซ้อนบนแผ่นวงกลมที่เล็กกว่าไม่ได้

วิธีเล่น ถ้ากำหนดให้มีแผ่นไม้ 3 แผ่นจะทำให้จำนวนครั้งในการย้ายน้อยที่สุดทำได้ดังนี้

ครั้งที่ 1 ย้ายแผ่นที่ 1 (แผ่นเล็กสุดที่อยู่บน) ไปไว้เสาที่ 3

ครั้งที่ 2 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปไว้เสาที่ 2

ครั้งที่ 3 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 2

ครั้งที่ 4 ย้ายแผ่นที่ 3 ไปไว้ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 5 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปไว้ในเสาที่ 1

ครั้งที่ 6 ย้ายแผ่นที่ 2 ไปวางบนแผ่นที่ 3 ในเสาที่ 3

ครั้งที่ 7 ย้ายแผ่นที่ 1 ไปวางบนแผ่นที่ 2 ในเสาที่ 3

จำนวนครั้งน้อยที่สุดในการย้าย 3 แผ่น คือ 7 ครั้ง จากเสาที่ 1 ไปเสาที่ 3 ในการย้ายแผ่นไม้วงกลม 3 แผ่นจะมีจำนวนครั้งที่ย้าย (ดังตาราง)

จำนวนแผ่นไม้ของหอคอย	จำนวนครั้งที่ย้าย (a _n)
1	1
2	3
3	7

ถ้าต้องการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้วงกลมจำนวน 5 แผ่น จะมีจำนวนครั้งในการเคลื่อนย้ายเท่าใด

ตอบ.....
.....
.....
.....

ใบกิจกรรมที่ 3

ชื่อ.....
ชั้น.....เลขที่.....

จากตัวอย่างที่ 2.3

ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci Sequence)

ในปลายศตวรรษที่ 12 มีนักวิทยาศาสตร์ท่านหนึ่งซึ่งถือว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีความสามารถคือ Leonardo Fibonacci หรือ Leonardo of Pisa เป็นชาวอิตาลีได้เขียนหนังสือเล่มหนึ่ง ซึ่งมีชื่อเสียงมากคือ Liber abaci (ค.ศ. 1202) เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้เกี่ยวกับเลขคณิตและพีชคณิตเบื้องต้น และได้รวบรวมปัญหามากมายเกี่ยวกับลำดับ เมื่อฟีโบนัชชีตั้งคำถามว่า “หลังจาก 1 ปี จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่ ถ้าในเดือนที่หนึ่งมีจำนวนกระต่ายเพียงคู่เดียวเป็นกระต่ายเพศผู้และเพศเมีย และแต่ละคู่จะ ให้กำเนิด กระต่ายคู่ ใหม่ได้ นั้น (ซึ่งต่างเพศกัน) ต้องใช้ระยะเวลา 2 เดือนซึ่งจะถึงเวลาที่มัน จะให้ กำเนิดกระต่ายคู่ใหม่ต่อไปได้ สมมติว่า ไม่มีการตายเกิดขึ้น “

แนวคิด เพื่อสะดวกแก่การนับจะแทนกระต่ายคู่แรกและลูกของมันด้วย $\pi_1, \pi_2, \dots$ ลูกของกระต่ายคู่ที่ $i, i > 2$ แทนด้วย $\pi_{i-1}, \pi_{i-2}, \pi_{i-3}, \dots$ ให้ X_n คือจำนวนกระต่ายปลายเดือนที่ $n, n > 0$

ปลายเดือนที่ 0 (แรกเกิด)	π_1	$X_0 = 1$
ปลายเดือนที่ 1	π_1	$X_1 = 1$
ปลายเดือนที่ 2	π_1, π_2	$X_2 = 2$
ปลายเดือนที่ 3	π_1, π_3, π_2	$X_3 = 3$
ปลายเดือนที่ 4	$\pi_1, \pi_4, \pi_3, \pi_2, \pi_{21}$	$X_4 = 5$
ปลายเดือนที่ 5	$\pi_1, \pi_5, \pi_4, \pi_3, \pi_{31}, \pi_2, \pi_{22}, \pi_{21}$	$X_5 = 8$

สร้างตารางแสดงจำนวนคู่ของกระต่ายในระยะเวลา 5 เดือนได้ดังนี้

เดือน	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
จำนวนคู่	1	1	2	3	5	8	13	..	..	..	89	..	..

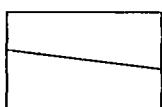
- จากตารางข้างต้นนี้ ถ้าในระยะเวลา 8 เดือน จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่
ตอบ.....
- ถ้าในระยะเวลาผ่านไป 1 ปี จะมีจำนวนกระต่ายทั้งหมดเท่าไร
ตอบ.....
- ในระยะเวลา n เดือน จะมีจำนวนกระต่ายกี่คู่
ตอบ

ใบกิจกรรมที่ 4

ชื่อ.....
 ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 2.4

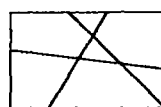
ในการลากเส้นตรง n เส้น บนกระดาษแผ่นหนึ่ง ให้เส้นตรงทุกเส้นตัดซึ่งกันและกัน โดยที่ไม่มีเส้นตรงมากกว่าสองเส้นตัดกัน ณ จุดเดียวกัน ถามว่าเส้นตรง n เส้นนี้จะแบ่งกระดาษออกเป็นส่วนย่อยได้จำนวนเท่าไร



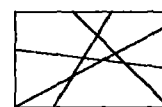
1 เส้น



2 เส้น



3 เส้น



4 เส้น

กำหนดให้ a_n คือจำนวนบริเวณมากที่สุดที่เกิดจากการลากเส้นตรง n เส้นบนกระดาษแผ่นหนึ่ง เริ่มจากการแบ่งบริเวณออกเป็น 2 ส่วน โดยใช้เส้นตรง หนึ่งเส้น จากนั้นก็ลากอีกเส้นตัดเส้นแรก จะได้บริเวณ $2+2 = 4$ ส่วน ถ้าเราลากเส้นตรงเส้นที่ 3 จะได้บริเวณทั้งหมด $4+3 = 7$ ส่วน ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากเส้นที่ 4 จะได้บริเวณทั้งหมด $7 + 4 = 11$ ส่วน จากรูป จะสังเกตได้ว่าบริเวณที่แบ่งเมื่อมี n เส้นจะเท่ากับบริเวณที่มีอยู่ก่อน ซึ่งได้จากการแบ่งโดยใช้เส้นตรง $n-1$ เส้นบวกกับเส้นตรงที่ n เมื่อให้ a_n เป็นบริเวณที่ได้จากการแบ่งโดยใช้เส้นตรง n เส้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนเรื่องที่ 3

เรื่อง การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

จำนวน 7 คาบ

สาระสำคัญ

การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดนั้น อาศัยความรู้เดิมของผู้เรียนในการแก้สมการ โดยที่ต้องจัดการเรียนการสอนนั้นให้สอดคล้องกับมาตรฐานนั้นคือเน้นให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นหลากหลายและมีการคิดเชื่อมโยงกับความรู้เดิมได้

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดได้
2. นักเรียนสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบเอกพันธ์ได้
3. นักเรียนสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบไม่เอกพันธ์ได้

เนื้อหา

เรื่องความสัมพันธ์เวียนบังเกิด เป็นเนื้อหาใหม่ โดยมีส่วนเชื่อมโยงกับเรื่องของลำดับก่อนหน้านั้นมีส่วนสำคัญในวงการคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มากมาย เมื่อสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิดได้แล้วสามารถหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดได้โดยวิธีดังนี้

1. การเดาและการพิสูจน์
2. การทำซ้ำหรือการคลี่

นิยาม การหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือฟังก์ชันของ n ในรูป $\phi(n)$ โดยที่ $a_n = \phi(n)$

1. ประเภทของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดมี 4 ประเภทได้ดังนี้

- 1.1 อันดับ
- 1.2 ความเป็นเชิงเส้น
- 1.3 ความเป็นเอกพันธ์
- 1.4 ค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

บทนิยาม

เมื่อ $c_i, i=1,2,\dots,k$ เป็นค่าคงที่ และ $Q(n)$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนเต็ม $n \geq 0$ เราเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + Q(n)$ ว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ถ้า $Q(n) = 0$

เราจะเรียกความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูป $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ ว่าความสัมพันธ์เวียนบังเกิดแบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

2. การหาคำตอบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิด แบบเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Solution of linear homogeneous recurrence relation of order k with constant coefficients)

$$\text{รูปแบบทั่วไป } a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$\text{คำตอบทั่วไปอยู่ในรูป } a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_j r_j^n \quad \text{โดยที่ } A_i \ (i = 1, 2, 3, \dots, j)$$

กรณีที่ 1 เมื่อรากลักษณะเฉพาะแตกต่างกัน

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_k r_k^n \quad \text{เมื่อ } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

กรณีที่ 2 เมื่อรากลักษณะเฉพาะซ้ำกัน

$$a_n = A_1 r^n + A_2 n r^n$$

กรณีที่ 3 รากลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนเชิงซ้อน

3. การหาคำตอบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับที่ k ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (Solution of linear non-homogeneous recurrence relation of order k with constant coefficients)

$$\text{รูปแบบทั่วไป } a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k} + Q(n) \quad \text{เมื่อ } Q(n) \neq 0$$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนถึงความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบต่าง ๆ ที่เรียนผ่านมาแล้วและให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างเพื่อที่จะแนวทางที่จะหาสูตรที่ชัดเจนของปัญหาแต่ละปัญหาอีกครั้ง

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์เวียนเกิดบางปัญหา มาแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์เวียนเกิดจะประกอบด้วยอะไรบ้างและถามตอบกับนักเรียนในการหาคำตอบที่เป็นรูปแบบปิดยกตัวอย่างง่าย ๆ เช่น จงหาคำตอบความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เป็นรูปแบบปิด $S_n = 2S_{n-1}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = 1$

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_{n-1} \\ &= 2(2S_{n-2}) \\ &= 2(2(2S_{n-3})) \\ &= \dots \\ &= 2^n S_0 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

2. ครูอธิบายบนกระดานดำถึงการจำแนก ประเภทของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบต่าง ๆ พร้อมยกตัวอย่างและการหาคำตอบ ของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์และแบบไม่เอกพันธ์
ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปถึงนิยามและทฤษฎีของความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบเอกพันธ์และแบบไม่เอกพันธ์ ถ้านักเรียนสรุปไม่ได้ ครูช่วยกันสรุปกับนักเรียนอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

แบบเรียน แบบฝึกหัด ใบกิจกรรมที่ 5 - 9

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจ
2. สังเกตการตอบคำถาม
3. ทำแบบฝึกหัดที่ 3.1 และแบบฝึกหัดที่ 3.2 ได้ถูกต้อง 50 % ขึ้นไป
4. ทำใบกิจกรรม ได้ถูกต้อง 50 % ขึ้นไป

กิจกรรมเสนอแนะ.....

.....

.....

ใบกิจกรรมที่ 5

ชื่อ.....
ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 0$ $a_1 = 5$

วิธีทำ

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = \dots$$

$$a_3 = \dots$$

$$a_4 = \dots$$

$$\vdots$$

$$a_n = \dots$$

$a_n = \dots$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาคำตอบความสัมพันธ์เวียนเกิด $S_n = 2S_{n-1}$ โดยที่ $S_0 = 1$

วิธีทำ

$$S_n = 2S_{n-1}$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$\vdots$$

$$=$$

$S_n = \dots$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + n$ โดยที่ $a_1 = 1$

วิธีทำ

$$a_n = a_{n-1} + n$$

$$a_5 = \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$a_n =$

ใบกิจกรรมที่ 6

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 3.8 มีชุดของลำดับ 3, 6, 12, 24, 48,... และสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ คือ $a_n = 2a_{n-1}$ จงหาคำตอบของสมการ

วิธีทำ วิธีที่ 1 ถ้าเราใช้วิธีการคลี่ก็สามารถหาคำตอบได้

$$a_n = \dots\dots\dots$$

$$a_2 = \dots\dots\dots$$

$$a_3 = \dots\dots\dots$$

$$a_4 = \dots\dots\dots$$

คำตอบทั่วไป $a_n = \dots\dots\dots$

คำตอบเฉพาะ $a_n = \dots\dots\dots$

วิธีที่ 2 ใช้การแก้สมการ เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

คำตอบทั่วไปคือ

ใบกิจกรรมที่ 7

ชื่อ.....
ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 3.10 จงแก้สมการความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับฟีโบนัชชี

วิธีทำ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 1$
กำหนดให้

.....
.....
.....

สมการลักษณะเฉพาะคือ

ซึ่งมีรากลักษณะเฉพาะ

ผลเฉลยทั่วไปของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$a_n =$

ค่าคงตัว A_1 และ A_2 สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขเบื้องต้น $a_0 = 1$

และ $a_1 = 1$ โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$a_0 = 1$

.....

$a_1 = 1$

.....

รากทั้งสองของระบบสมการข้างบนนี้คือ

$A_1 =$ และ $A_2 =$

ดังนั้นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$a_n =$

แผนการสอนเรื่องที่ 4

เรื่อง การประยุกต์ของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

จำนวน 2 คาบ

สาระสำคัญ

เมื่อเรียนคณิตศาสตร์ไปแล้ว สิ่งให้เห็นผลเด่นชัดว่าจะมีประโยชน์หรือไม่คือการนำเอาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน หรือการนำคณิตศาสตร์ที่เรียนมาเชื่อมโยงกับความรู้ใหม่ เป็นการประยุกต์ของคณิตศาสตร์เกิดกับด้านอื่น ๆ ไม่ว่าจะเป็นด้านคอมพิวเตอร์ หรือเทคโนโลยี เพราะฉะนั้นจะเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญของทุกสาขาวิชา

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้
2. นักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้แก้ปัญหาโจทย์ประยุกต์ได้

เนื้อหา

ความสัมพันธ์เวียนเกิด เป็นเนื้อหาใหม่ โดยมีส่วนเชื่อมโยงกับเรื่องของลำดับก่อนหน้านั้นมีส่วนสำคัญในวงการคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มากมาย ปัญหาที่น่าเสนอเป็นปัญหาที่มีประโยชน์ในด้านวิทยาศาสตร์ด้านคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยี

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนนิยามและทฤษฎี ของความสัมพันธ์เวียนเกิดอีกครั้ง โดยครูให้คำแนะนำ

ขั้นสอน

ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์เวียนเกิด เช่น ในการบริจาดเงิน 1 บาท หรือ 10 บาท หรือ 20 บาท อย่างใดอย่างหนึ่ง ในแต่ละวันจนกระทั่งได้ บริจาดเงินรวมกันทั้งสิ้น n บาท จงหาวิธีในการบริจาด

แนวคิด วันแรกได้บริจาด 1 บาท ก็จะมีวิธีบริจาดทั้งหมด a_{n-1} สำหรับอีก $n-1$ บาท

“.....”10 บาท “.....” a_{n-10} สำหรับเงินที่เหลือ

“.....”20 บาท “.....” a_{n-20} สำหรับเงินที่เหลือ

จากหลักแห่งการบวกและทั้ง 3 กรณีไม่มีวิธีซ้ำกันเลย

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-10} + a_{n-20}$$

ขั้นสรุป

ครูช่วยกันกับนักเรียนสรุปนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด และอธิบายร่วมกันถึงการนำความสัมพันธ์เวียนเกิดไปใช้ในด้านต่าง ๆ

สื่อการเรียนรู้การสอน

แบบเรียน แบบฝึกหัด ใบกิจกรรมที่ 10

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจ
2. สังเกตการตอบคำถาม
3. ทำแบบฝึกหัดที่ 4 ได้ถูกต้อง 50 %ขึ้นไป
4. ทำใบกิจกรรมได้ถูกต้อง 50 % ขึ้นไป

กิจกรรมเสนอแนะ.....

ใบกิจกรรมที่ 10

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่างที่ 4.3 บ่อแห่งหนึ่งเลี้ยงหอยชนิดหนึ่งไว้ 3000 ตัว เมื่อสิ้นสัปดาห์แรกหอยในบ่อนี้มี 3500 ตัว ถ้าจำนวนหอยที่เพิ่มขึ้นในแต่ละสัปดาห์เป็น 3 เท่าของจำนวนหอยที่เพิ่มในสัปดาห์ที่ผ่านมา และทุกสิ้นสัปดาห์ต้องจับหอยออกจากบ่อเลี้ยงนี้ 200 ตัว จงหาว่าเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ n จะมีหอยกี่ตัว

วิธีทำ ให้ a_n เป็นจำนวนหอยเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ n $n \geq 0$

$$a_0 = 3000$$

$$a_1 = 3500 - 200 = 3300$$

.....

ภาคผนวก จ
รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ

1. อ. เมตต์ แย้มวงษ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อ. สมศรี เล็งหลวง
หมวดคณิตศาสตร์ โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี จังหวัด
สุพรรณบุรี

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ	นางสาวณัฏฐา ธิกุลวงษ์
วันเดือนปี	14 กรกฎาคม 2510
สถานที่เกิด	76/2 หมู่ 3 ตำบลไผ่ขวาง อำเภอเมืองสุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี 72000
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	76/2 หมู่ 3 ตำบลไผ่ขวาง อำเภอเมืองสุพรรณบุรี จังหวัดสุพรรณบุรี 72000. โทร 0-3552-5646
สถานที่ทำงาน	โรงเรียนกาญจนาภิเษกวิทยาลัย สุพรรณบุรี
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2523	ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนด่านช้าง สุพรรณบุรี
พ.ศ. 2526	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสงวนหญิง สุพรรณบุรี
พ.ศ. 2529	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนกรรณสูตศึกษาลัย สุพรรณบุรี
พ.ศ. 2535	วท.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยรามคำแหง
พ.ศ. 2546	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ