

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
ระดับประถมศึกษาตอนปลาย

ปริญาานิพนธ์
ของ
วิษณุ นภาพันธุ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขุฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา
กุมภาพันธ์ 2551

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
ระดับประถมศึกษาตอนปลาย

บทคัดย่อ
ของ
วิชญ์ นภาพันธุ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขุฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
กุมภาพันธ์ 2551

วิษณุ นภาพันธุ์. (2551). การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่, รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วงษ์ใหญ่, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์.

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนารอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยใช้วิธีวิทยาของการวิจัยเชิงคุณภาพในการรวบรวมและวิเคราะห์ข้อมูล กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจำนวน 66 คน ในจำนวนนี้คัดเลือกเป็นนักเรียนกลุ่มเป้าหมายจำนวน 19 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน และการสัมภาษณ์เพิ่มเติมกับนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย ผลการวิจัยพบว่า

ลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ *กลุ่ม 0* เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงประจักษ์ เช่น การนำจำนวนที่กำหนดให้ในโจทย์มาเป็นคำตอบ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ใด ๆ ในแบบรูปได้เลยแม้แต่พจน์ที่อยู่ถัดไปจากพจน์ที่กำหนดให้ *กลุ่ม 1* เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ *กลุ่ม 2* เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลเชิงอุปนัยเพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ และ *กลุ่ม 3* เป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแบบรูป ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 2 แต่มีข้อแตกต่างที่นักเรียนกลุ่มนี้สามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่ปรากฏในสูตรแทนพจน์ทั่วไปมีความหมายและที่มาอย่างไร ในขณะที่นักเรียนกลุ่ม 2 ไม่สามารถอธิบายได้

นักเรียนส่วนใหญ่ที่ศึกษา (ร้อยละ 53) เป็นนักเรียนกลุ่ม 1 ซึ่งสามารถหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปได้ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันคือมีนักเรียนจำนวนมากถึงร้อยละ 77.2 ที่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ ต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งมีนักเรียนที่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ถึงร้อยละ 36.4 นักเรียนจากโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบทมีลักษณะแตกต่างกันคือ ร้อยละ 94 ของนักเรียนในชนบทไม่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ ในขณะที่ร้อยละ 48.5 ของนักเรียนในเมืองสามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้

ลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่ม 0 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจคลาดเคลื่อนว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ ไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดที่กำหนดให้จะมีลักษณะอย่างไร กลุ่ม 1 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจคลาดเคลื่อนว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนได้ในกรณีที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีตัวเลขตัวเดียว กลุ่ม 2 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนโดยใช้วิธีการคิดคำนวณ กลุ่ม 3 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้โดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์

นักเรียนส่วนใหญ่ที่ศึกษา (ร้อยละ 56.1) เป็นนักเรียนกลุ่ม 2 ซึ่งมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันคือ มีนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ได้ถึงร้อยละ 22.7 และ 27.3 ตามลำดับ ต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งมีนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ได้เพียงร้อยละ 9.1 เท่านั้น นักเรียนจากโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนชนบทมีลักษณะแตกต่างกันคือ ร้อยละ 84.9 ของนักเรียนในเมืองมีความเข้าใจถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ในขณะที่ร้อยละ 33.4 ของนักเรียนชนบทมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน

นอกจากนี้ยังพบว่า นักเรียนทุกคนที่เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับจะไม่สามารถสร้างกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ และนักเรียนทุกคนที่สามารถสร้างกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้จะเป็นนักเรียนที่สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้ แต่ร้อยละ 64 ของนักเรียนที่สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้จะไม่สามารถสร้างกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้

A STUDY OF UPPER ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS'
ALGEBRAIC REASONING

AN ABSTRACT
BY
VISHNU NAPAPHUN

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Doctor of Education Degree in Mathematics Education
At Srinakharinwirot University
February 2008

Vishnu Napaphun. (2008). *A Study of Upper Elementary School Students' Algebraic Reasoning*. Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Dr. Piyavadee Wongyai, Assoc. Prof. Dr. Wichai Wongyai, Asst. Prof. Dr. Supotch Chaiyasang.

The purpose of this study was to develop the upper elementary school students' algebraic reasoning framework. Qualitative research methodology was employed in collecting and analyzing data. The sample were 66 upper elementary school students and 19 from these were selected as target students. The instruments of this study were a paper and pencil test and an interview with all target students. Results of this study indicated that :

Algebraic reasoning on patterns of the students could be categorized in to four groups. *Group 0* : Students in this group used intuitive reasoning to make a conclusion such as the use of a number in the question as the answer. They could not find any terms of a given pattern. *Group 1* : Students in this group could find the next term by using a recursive idea. Nevertheless, they could not find the greater or general term of a given pattern. *Group 2* : Students in this group could find the general relation between terms and position of a term in a giving pattern by using inductive reasoning. *Group 3* : students in this group could prove the general relation between terms and position of a term in a given pattern. They could interpret clearly about the meaning of the terms that they used.

Most of students in this study (53 percents) were in group 1. We also found that 77.2 percents of students in grade 4 and 5 could not find the general term of a given pattern while 36.4 percents of students in grade 6 could find the general term of a given pattern. Furthermore, we found that 94 percents of students in rural schools could not find the general term of a given pattern while 48.5 percents of students from urban schools could find.

Algebraic reasoning on open number sentences of the students could be categorized in four groups. *Group 0* : students in this group showed misconception about equal sign as the result of computation. They could not find a missing number of any open number sentences. *Group 1* : Students in this group also showed misconception about equal sign as the result of computation, but they could make the reasonable conclusion in the case that on right side of open number sentences

had only one number. *Group 2*: Students in this group had correct understanding about equal sign as the relational sign. They could find the missing number of any open number sentences by using computation. *Group 3*: Students in this group had correct understanding about equal sign as the relational sign and they could find the missing number of any open number sentences by using relational thinking.

Most of participants (56.1 percents) were in group 2. In addition, we found that 22.7 and 27.3 percents of students in grade 5 and 6 respectively used relational thinking which were different from that of the students in grade 4 which only 9.1 percents of them used relational thinking. Furthermore, we found that 84.9 percents of students from urban schools had correct understanding about equal sign while 33.4 percents of students from rural schools showed misconception.

Finally, we found that all students who showed misconception about equal sign could not find the general term of a given pattern and all students who could find the general term of the given pattern could find the missing number of a open number sentences. There were 64 percents of students who could find the missing number of open number sentences but they couldn't find the general term of a given pattern.

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน
ระดับประถมศึกษาตอนปลาย

ปริญาพนธ์
ของ
วิษณุ นภาพันธ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุขฎิบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
กุมภาพันธ์ 2551
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จสมบูรณ์ได้โดยความอนุเคราะห์จาก รองศาสตราจารย์ ดร.ปิยวดี วงษ์ใหญ่ ประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่ได้เสียสละเวลาในการให้คำปรึกษาแนะนำ ตลอดจนช่วยแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความเมตตากรุณาของท่านเป็นอย่างมาก ผู้วิจัยขอกราบขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิชัย วงษ์ใหญ่ ที่นอกจากจะคอยให้ความช่วยเหลือแนะนำในส่วนของงานวิจัยแล้ว ยังคอยช่วยกระตุ้นให้เกิดกำลังใจ คอยคุมจังหวะเวลา และคอยเปิดประเด็นให้เกิดแนวคิดอยู่เสมอๆ ขอกราบขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์ ที่คอยชี้แนะ ตั้งข้อสังเกต และเสนอมุมมองที่เป็นประโยชน์กับงานวิจัยนี้เป็นอย่างมาก ขอกราบขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศรษฐมณี และ รองศาสตราจารย์ ดร.สิริพร ทิพย์คง กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติมที่ได้ช่วยให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงงานวิจัยนี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบคุณคณะกรรมการสอบเค้าโครงปริญญานิพนธ์ทุกท่านที่ได้ช่วยให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ก่อนที่จะได้ลงมือเก็บรวบรวมข้อมูล ขอกราบขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เมธิ ลิ้มอักษร อาจารย์ ดร.เรวดี กระโหมวงศ์ และ อาจารย์ ดร.ณัชชา กมล ผู้เชี่ยวชาญที่ช่วยตรวจสอบเครื่องมือและให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมาก ขอขอบคุณอาจารย์ธีรภัรต์ พรหมณะ และอาจารย์เสาวรัตน์ รามแก้ว ที่ทบทวนข้อบกพร่องช่วยวิเคราะห์ข้อมูล ช่วยอ่านตรวจทานและแก้ไขต้นฉบับอยู่ครั้งแล้วครั้งเล่า ขอขอบคุณเพื่อน ๆ และน้อง ๆ นิสิตปริญญาเอกคณิตศาสตร์ศึกษา ทุกคนที่ช่วยให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในขั้นตอนของการประชุมกลุ่มย่อย

ขอขอบคุณคณะครู นักเรียน โรงเรียนวัดพระมหาธาตุ และโรงเรียนวัดสระใคร ที่คอยช่วยเหลือและให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีตลอดช่วงระยะเวลาที่ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูล ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.รุ่งฟ้า จันทร์จารุภรณ์ ที่คอยให้ความอนุเคราะห์เรื่องเอกสารเพื่อค้นคว้าข้อมูล ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโทคณิตศาสตร์ศึกษาที่คอยช่วยอำนวยความสะดวกในเรื่องที่พักขณะที่ผู้วิจัยต้องอยู่ต่างจังหวัด ขอขอบคุณน้องยุทธนา อาทิตย์ นัฏฐณิชา และทินวัตร ที่คอยเป็นกำลังใจ

และท้ายที่สุดผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อธรรมฤทธิ์ คุณแม่อารมย์ นภาพันท์ ตลอดจนครอบครัวทุกท่านที่ได้ให้การเลี้ยงดู สั่งสอน อบรม ทั้งด้านวิชาการและคุณธรรม จริยธรรมตั้งแต่เล็กจนโตมาจนถึงบัดนี้ ขอคุณแห่งความดีงามจงช่วยปกป้องคุ้มครองท่านทั้งหลาย ที่กล่าวถึง ณ ที่นี้ให้ประสบแต่ความสุขความเจริญยิ่ง ๆ ขึ้นไป

วิษณุ นภาพันท์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความสำคัญของปัญหา.....	1
คำถามการวิจัย.....	4
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย.....	5
ขอบเขตของการวิจัย.....	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	8
การให้เหตุผล.....	8
ความหมายของการให้เหตุผล.....	8
องค์ประกอบของการให้เหตุผล.....	10
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	22
ความหมายของพีชคณิต.....	22
แนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	24
การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และการให้เหตุผล เชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา.....	26
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	32
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษา.....	32
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป.....	38
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน.....	41
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	45
ระยะที่ 1 การสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้น.....	50
ระยะที่ 2 การปรับปรุงกรอบแนวคิด.....	65
ระยะที่ 3 การสำรวจลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับ ประถมศึกษาตอนปลาย.....	72
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	73
ตอนที่ 1 กรอบแนวคิดเบื้องต้นที่ได้จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่ เกี่ยวข้อง.....	73

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 (ต่อ)	
ตอนที่ 2 กรอบแนวคิดที่ได้จากการปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้น.....	76
นักเรียนกลุ่ม 0.....	85
นักเรียนกลุ่ม 1.....	86
นักเรียนกลุ่ม 2.....	88
นักเรียนกลุ่ม 3.....	90
ตอนที่ 3 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับ	
ประถมศึกษาตอนปลาย.....	92
การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย..	92
การเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษา	
ปีที่ 4 5 และ 6.....	99
การเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนโรงเรียนในเมือง	
และชนบท.....	104
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	109
สรุปและอภิปรายผล.....	110
ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้.....	117
ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยต่อไป.....	119
บรรณานุกรม.....	120
ภาคผนวก.....	128
ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ.....	129
ภาคผนวก ข การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป.....	131
แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป.....	132
นักเรียนกลุ่ม 0.....	133
นักเรียนกลุ่ม 1.....	142
นักเรียนกลุ่ม 2.....	157
นักเรียนกลุ่ม 3.....	175

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก ค การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่อง	
ประโยคเปิดของจำนวน.....	195
แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน.....	196
นักเรียนกลุ่ม 0.....	197
นักเรียนกลุ่ม 1.....	206
นักเรียนกลุ่ม 2.....	218
นักเรียนกลุ่ม 3.....	230
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	242

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล.....	6
2 การวิเคราะห์แนวคิดหลักที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการให้เหตุผล.....	9
3 กรอบแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลของคูเอลมาร์ช.....	12
4 ระดับการคิดของบลูม.....	13
5 กรอบแนวคิดของมาร์ซาโน.....	15
6 แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักการศึกษา.....	17
7 การเปรียบเทียบองค์ประกอบของการให้เหตุผล.....	19
8 ความหมายของแต่ละองค์ประกอบของการให้เหตุผล.....	22
9 การเปรียบเทียบองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์กับองค์ประกอบของ การให้เหตุผล.....	30
10 รูปแบบและระดับการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล.....	38
11 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียนและวิธีการคิดจากสมการที่กำหนดให้.....	43
12 วิธีการและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย.....	45
13 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในภาพรวม.....	52
14 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป.....	55
15 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวน.....	60
16 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล.....	65
17 จำนวนนักเรียนและห้องเรียนโรงเรียนในเมือง.....	66
18 จำนวนครูและบุคลากรโรงเรียนในเมือง.....	66
19 โครงสร้างหลักสูตรช่วงชั้นที่ 2 โรงเรียนในเมือง.....	67
20 จำนวนนักเรียนและห้องเรียนโรงเรียนชนบท.....	68
21 จำนวนครูและบุคลากรโรงเรียนชนบท.....	68
22 โครงสร้างหลักสูตรช่วงชั้นที่ 2 โรงเรียนชนบท.....	69
23 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ระดับประถมศึกษาตอนปลายในภาพรวม.....	77
24 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ระดับประถมศึกษาตอนปลายเรื่องแบบรูป.....	79
25 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ระดับประถมศึกษาตอนปลายเรื่องประโยคเปิดของจำนวน.....	82

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง	หน้า
26 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามกลุ่มในกรอบแนวคิด.....	93
27 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่อง แบบรูป (กลุ่ม) ระดับชั้น ผลการเรียนรู้ และโรงเรียน.....	94
28 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่อง ประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) ระดับชั้น ผลการเรียนรู้ และโรงเรียน.....	97
29 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และระดับชั้น.....	99
30 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) และระดับชั้น.....	101
31 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และโรงเรียน.....	104
32 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) และโรงเรียน.....	106

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ระดับของการให้เหตุผลตามแนวคิดของครูลิขิตและรุตนิด.....	11
2 องค์ประกอบของพีชคณิตตามแนวคิดของหลิว.....	24
3 ลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล.....	37
4 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย.....	49
5 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และระดับชั้น.....	99
6 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) และระดับชั้น.....	102
7 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และโรงเรียน.....	105
8 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผล เรื่องประโยคเปิด (กลุ่ม) และโรงเรียน.....	107

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญของปัญหา

พีชคณิตเป็นวิชาที่มีความสำคัญเปรียบเสมือนกระดูกสันหลังของวิชาคณิตศาสตร์ และได้รับการยอมรับว่าเป็นประตูลู่ความสำเร็จของการศึกษาคณิตศาสตร์ในทุกๆ สาขา (Cai. 2004: 1) ความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Algebraic Reasoning) ของผู้เรียนเป็นหัวใจของการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาขาต่างๆ วิชาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานที่ดีต่อการทำงานในหลายสาขาอาชีพ (Greenes; & Findell. 1999: 127) ในอดีตพีชคณิตเป็นวิชาที่ถูกสงวนไว้ให้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเท่านั้น เพราะมีความเชื่อกันว่าการศึกษาพีชคณิตได้นั้น ผู้เรียนจำเป็นต้องมีพื้นฐานทางเลขคณิตเป็นอย่างดี ส่งผลให้หลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาในอดีตมุ่งเน้นไปที่เลขคณิตเป็นส่วนใหญ่และไม่มีพีชคณิต นอกจากนี้การสอนพีชคณิตจากอดีตจนปัจจุบันเป็นการสอนที่มีลักษณะตัดตอนและแห้งแล้ง กล่าวคือ ผู้เรียนจะถูกสอนให้เรียนรู้เฉพาะวิธีการหรือขั้นตอนในการหาคำตอบ (Solution Method) ของแต่ละสถานการณ์ปัญหา โดยจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่อยู่เบื้องหลังรูปแบบการสอนเหล่านี้คือ ความเข้าใจว่าถ้าผู้เรียนมีความเชี่ยวชาญในการใช้ขั้นตอนวิธีเหล่านี้แล้วเขาจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ปัญหาอื่น ๆ ที่พบได้ (Chazan; & Yerushalmy. 2003: 123) ปัจจุบันแนวคิดดังกล่าวได้รับการพิสูจน์แล้วว่าอาจไม่ถูกต้องนักเพราะสภาพปัญหาในสถานการณ์จริงมีความสลับซับซ้อนกว่าปัญหาในห้องเรียนมาก ผู้เรียนส่วนใหญ่เมื่อเผชิญกับปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนจะไม่สามารถเลือกวิธีการในการแก้ปัญหาเองได้ หรือเลือกใช้วิธีการที่ไม่ถูกต้อง (Davis. 1984; Matz. 1982; Kuchemann. 1978) แสดงให้เห็นว่าการเรียนการสอนพีชคณิตจะต้องมีการกำหนดหลักสูตรการเรียนรู้ที่มีมากกว่าการเรียนรู้และการสอนวิธีการเดียว ๆ ในการแก้ปัญหาประเภทต่าง ๆ ที่มุ่งเน้นเฉพาะเนื้อหาสาระโดยละเลยการปลูกฝังทักษะการคิดและการให้เหตุผลให้แก่ผู้เรียน ซึ่งจะทำให้การคิดของผู้เรียนเป็นการคิดตามตำราหรือคิดไปตามขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียนมา เมื่อเรียนจบแล้วผู้เรียนจะขาดความสามารถในการนำความรู้ที่ได้รับมาไปใช้ในสถานการณ์จริงที่แตกต่างจากประสบการณ์ที่ได้รับจากโรงเรียนได้อย่างมีเหตุผลและเหมาะสม (Sternberg. 1984: 38-48)

แนวคิดในการจัดหลักสูตรการเรียนรู้สาระพีชคณิตเริ่มมีแนวโน้มที่จะเปลี่ยนแปลงไป หลังจากมีการตีพิมพ์หนังสือ Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989) The Math Connection: Using Mathematics as a Lever for Education Reform (1996) และ What Work Requires of Schools (1991) ซึ่งส่งผลให้บรรดานักวิจัยทางคณิตศาสตร์ศึกษา

นักพัฒนาหลักสูตร และผู้บริหารการศึกษาในระดับต่าง ๆ ต่างก็หันมาทบทวนแนวคิดเดิมว่า การศึกษาพีชคณิตนั้นไม่ควรจะจำกัดอยู่แค่ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเท่านั้นแต่ควรจัดให้พีชคณิตมีอยู่ในหลักสูตรของทุกๆ ระดับชั้น เพื่อที่จะสร้างประสบการณ์ทางพีชคณิตเบื้องต้นให้กับผู้เรียนระดับประถมศึกษาในการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับชั้นต่อไป (Greenes, & Findell. 1999; Carpenter, Franke, & Levi. 2005; Kaput. 1999; NCTM. 2000; Schifter. 1999) จนเกิดเป็นคำพูดที่ว่า “พีชคณิตสำหรับทุกคน (Algebra for Everyone)” แต่แม้ว่าบรรดาผู้เชี่ยวชาญและผลงานวิจัยหลายชิ้นจะยืนยันว่าพีชคณิตสามารถจัดให้อยู่ในหลักสูตรตั้งแต่ระดับอนุบาลถึงระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้ ในทางปฏิบัติกลับพบว่ามีปัญหาในการสอนเพราะผู้เรียนขาดประสบการณ์ในการเชื่อมโยงความรู้พื้นฐานทางเลขคณิตเพื่อใช้กับการเรียนรู้และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Greenes; & Findell. 1999: 127) ดังนั้นปัญหาที่สำคัญและท้าทายสำหรับนักวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาในปัจจุบันก็คือ หลักสูตรพีชคณิตที่เหมาะสมกับนักเรียนระดับประถมศึกษาควรมีลักษณะอย่างไร วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้พีชคณิตควรเน้นที่การให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาพีชคณิตที่เป็นทางการหรือควรตั้งเป้าหมายไว้แค่เพียงเพื่อเตรียมพื้นฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่ช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับมัธยม ในส่วนของเนื้อหาจำเป็นหรือไม่ว่าต้องเป็นเนื้อหาทางพีชคณิต หรือเป็นเนื้อหาอื่น (เช่น เลขคณิต) แต่สามารถสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่ความเข้าใจในเชิงพีชคณิตได้

การให้เหตุผลคือหัวใจของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Streen. 1999; Russell. 1999; NCTM. 1989; 2000) เป็นเครื่องมือในการเข้าใจสิ่งที่เป็นามธรรม เป็นสิ่งสำคัญพื้นฐานในการทำงานที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เป็นามธรรม วิชาคณิตศาสตร์อาศัยการให้เหตุผลอย่างเป็นระบบ ความมดงามของคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งเกิดจากการมีเหตุผลที่ดีเพื่อยืนยันสิ่งต่าง ๆ นักเรียนทุกคนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์จะต้องรับรู้ว่าการยืนยันเรื่องใดเรื่องหนึ่งต้องมีเหตุผลที่ถูกต้องเหมาะสมมารองรับเสมอ (The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. 2000: 56) การให้เหตุผลเป็นพื้นฐานของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เราไม่สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้โดยปราศจากการให้เหตุผล การแสดงเหตุผลที่ดีมีคุณค่ามากกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง (NCTM. 1989) มีงานวิจัยจำนวนมากยืนยันว่าการสอนให้นักเรียนเข้าใจหลักการอย่างมีเหตุผลเป็นสิ่งที่ดีกว่าการสอนให้จำ เพราะนักเรียนจะสามารถนำความรู้ไปปรับใช้กับสถานการณ์ใหม่ได้ สามารถจดจำได้ดีและยาวนานกว่า การเป็นผู้รู้จักคิดอย่างมีเหตุผลจะเป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้ตลอดชีวิต การเรียนคณิตศาสตร์ในลักษณะที่มีความเป็นเหตุเป็นผลจะส่งผลให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ และสามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ได้ด้วยตัวเอง (ปิยวดี วงษ์ใหญ่. 2548) ความสามารถในการให้เหตุผลช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาความสามารถให้นอกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริง กฎ หรือขั้นตอนวิธี การ

สอนที่เน้นการให้เหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์มีความหมายและสามารถนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิชาอื่น ๆ ได้อีกด้วย (Baroody. 1993: 2-59-2-60) นอกจากนี้การเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และการแก้ปัญหาในชีวิตจริงหรือการประกอบอาชีพจะไม่มีใครคอยบอกกว่าสิ่งใดถูกหรือผิด ผู้เรียนต้องพิจารณาและตัดสินใจด้วยตัวเองด้วยเหตุและผล ดังนั้นการพัฒนานักเรียนให้มีความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นองค์ประกอบที่สำคัญและจำเป็นในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ทุก ๆ สาขา รวมทั้งพืชคณิต (Lappan; & Schram. 1989: 18)

ในการปฏิรูปการศึกษา ส่วนประกอบหลักที่สำคัญ 3 ส่วนจำเป็นต้องมีการเปลี่ยนแปลง คือ หลักสูตร การสอน และการประเมินผล องค์ประกอบเหล่านี้มีความเกี่ยวโยงสัมพันธ์กัน การเปลี่ยนแปลงองค์ประกอบใดองค์ประกอบหนึ่งจะส่งผลให้องค์ประกอบอื่นเปลี่ยนแปลงตามให้เป็นไปอย่างสอดคล้องกัน (NCTM. 1989; 1991; 1995; 2000) การกำหนดมาตรฐานหลักสูตร รูปแบบวิธีการสอน และลักษณะการประเมินผล จึงเป็นเรื่องสำคัญที่ผู้มีส่วนเกี่ยวข้องในแต่ละองค์ประกอบต้องใช้ความระมัดระวังและพิถีพิถันในการพิจารณาอย่างรอบคอบ ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับผู้เรียนคือสิ่งสำคัญที่นักพัฒนาหลักสูตร ครูผู้สอน และผู้บริหารทางการศึกษา มีความต้องการมากที่สุดในการพัฒนาหลักสูตรและการสอนในทุก ๆ ระดับ (Taylor. 1949; Taba. 1962) ในส่วนของวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะสาระพืชคณิตหากเราสามารถพัฒนากรอบแนวคิดที่ช่วยในการทำความเข้าใจลักษณะการให้เหตุผลเชิงพืชคณิตของผู้เรียน จะมีส่วนช่วยให้สามารถนำไปใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการวางแผนหลักสูตรในส่วนของการกำหนดเป้าหมายหรือมาตรฐานการเรียนรู้ และการออกแบบตำราเรียน ได้อย่างเหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียนในแต่ละช่วงวัย (Cobb; et al. 1991: 3-29) นอกจากนี้การที่ครูผู้สอนเข้าใจถึงลักษณะและรูปแบบการให้เหตุผลของผู้เรียนในแต่ละระดับจะช่วยให้สามารถกำหนดวิธีการจัดการเรียนรู้และการประเมินผลที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนแต่ละคนพัฒนาการเรียนรู้ได้อย่างเต็มศักยภาพ (Jones. 1996: 314) ด้วยเหตุผลดังกล่าวบรรดานักวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านจึงได้พยายามที่จะสร้างและพัฒนากรอบแนวคิด เพื่อใช้ในการทำความเข้าใจ ลักษณะการคิดและการให้เหตุผลของผู้เรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในสาระต่าง ๆ เช่น สถิติ (Jones; et al. 2000: 269-307; Mooney. 2002: 23-63; Watson, Collis' Calling ham & Moritz. 1995) ความรู้สึกเชิงจำนวน (Jones; Thornton; & Putt. 1994: 117-143; Jones; et al. 1996: 310-336.) การบวกและการลบ (Carpenter; & Moser. 1984; 179-202) ความน่าจะเป็น (Jones; et al. 1997: 101-125; Tarr; & Jones. 1997: 39-59) แบบรูป (Orton; & Orton. 1999: 104-120; Pegg; & Redden. 1990: 386-391) เรขาคณิต (van Hiele. 1985: 243-252) พืชคณิต (Natcha. 2005) ซึ่งกรอบแนวคิดที่พัฒนาขึ้นจากงานวิจัยเหล่านี้หลายชิ้นได้มีการนำมาใช้ประโยชน์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของผู้เรียนอย่างกว้างขวางในเวลาต่อมา

งานวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนากรอบแนวคิดในการทำความเข้าใจลักษณะการคิดและการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแม้จะมีการศึกษากันอย่างกว้างขวางในวิชาคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ ดังที่นำเสนอมาแล้วข้างต้น แต่ในส่วนของสาระพีชคณิตยังมีผลงานวิจัยลักษณะนี้น้อยมาก โดยเฉพาะระดับประถมศึกษาในบริบทของประเทศไทยยังไม่พบข้อมูลงานวิจัยในลักษณะดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2 หรือระดับประถมศึกษาตอนปลาย ด้วยความคาดหวังว่าจะก่อให้เกิดประโยชน์กับวงการทางคณิตศาสตร์ศึกษาของประเทศไทยในอนาคตต่อไป

คำถามการวิจัย

1. ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถจำแนกออกได้เป็นกี่ลักษณะ แต่ละลักษณะมีรายละเอียดอย่างไร
2. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นอย่างไร
3. ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 มีความแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร
4. นักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายของโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบทมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อพัฒนากรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะต่าง ๆ ของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนประถมศึกษาตอนปลาย
2. เพื่อสำรวจความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย
3. เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6
4. เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท

ความสำคัญของงานวิจัย

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ในครั้งนี้ จะมีส่วนช่วยให้ครูผู้สอน นักพัฒนาหลักสูตร นักวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ผู้บริหาร การศึกษาในระดับต่าง ๆ และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษา ได้เข้าใจถึงลักษณะการให้เหตุผล เชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับนี้ เพื่อจะได้นำข้อมูลดังกล่าวไปใช้ในการพัฒนาการศึกษาของชาติ ได้ในประเด็นต่อไปนี้

1. เป็นข้อมูลเบื้องต้นประกอบการพิจารณากำหนดมาตรฐานหลักสูตรการศึกษาสาระพีชคณิต ของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย
2. เป็นข้อมูลเบื้องต้นสำหรับการออกแบบตำราเรียน ทั้งในส่วนของการเลือกเนื้อหา การเรียงลำดับเนื้อหา และการนำเข้าสู่เนื้อหา ให้สอดคล้องกับธรรมชาติของความสามารถในการเรียนรู้ พีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย
3. เป็นแนวทางสำหรับครูในการเลือกรูปแบบการสอนที่เหมาะสมในการส่งเสริมให้นักเรียน เรียนรู้พีชคณิตอย่างมีความหมาย สอดคล้องกับธรรมชาติของความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน และช่วยพัฒนาให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
4. เป็นกรอบในการประเมิน และการพัฒนาเครื่องมือวัดความสามารถด้านการให้เหตุผล เชิงพีชคณิตของนักเรียน
5. เป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน ในระดับหรือกลุ่มสาระอื่น ๆ ซึ่งจะนำไปสู่การได้กรอบแนวคิดที่สมบูรณ์ ที่สามารถนำไปใช้เป็นข้อมูล พื้นฐานที่เกิดจากบริบทของประเทศไทยในการพัฒนาหลักสูตรและการสอนวิชาคณิตศาสตร์

ขอบเขตของการวิจัย

นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ประกอบด้วยนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จำนวน 66 คน จาก 2 โรงเรียนในจังหวัดนครศรีธรรมราชที่มีสภาพแวดล้อมในการเรียนรู้ที่ แตกต่างกัน กล่าวคือเป็นโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท โรงเรียนละ 33 คน ระดับชั้นละ 11 คน ในแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดเกี่ยวกับบริบทของแต่ละโรงเรียนในบทที่ 3 หน้า 65-69) โดยในการ เลือกนักเรียนทั้งหมดได้คัดเลือกนักเรียนให้มีลักษณะที่คละความสามารถ กล่าวคือ มีทั้งนักเรียนที่มี ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำ ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน โดยพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ผ่านมา และจากการสอบถาม ความคิดเห็นของครูผู้สอน นักเรียนทั้ง 66 คน เป็นนักเรียนที่ให้ทำแบบทดสอบวัดความสามารถใน การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และในจำนวนนี้ได้คัดเลือกนักเรียนจำนวน 19 คน เพื่อเป็นนักเรียน กลุ่มเป้าหมาย

ตาราง 1 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

โรงเรียน/ชั้น	ป.4	ป.5	ป.6	รวม
โรงเรียนชนบท	11	11	11	33
โรงเรียนในเมือง	11	11	11	33
รวม	22	22	22	66

นักเรียนกลุ่มเป้าหมาย เป็นกลุ่มนักเรียนที่ใช้เพื่อศึกษาเจาะลึกลักษณะของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ประกอบด้วยนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จำนวน 19 คน ที่เลือกมาจากกลุ่มนักเรียนทั้งหมดที่ทำการทดสอบ ซึ่งเป็นนักเรียนที่ผู้วิจัยคาดว่าน่าจะให้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์เมื่อพิจารณาจากการเขียนตอบในแบบทดสอบ และต้องเป็นตัวแทนที่แสดงถึงลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่แตกต่างกันของนักเรียนทั้งหมดที่เก็บข้อมูลโดยการทดสอบ ทั้งนี้ได้พยายามเลือกนักเรียนให้กระจายอยู่ในทั้งสองโรงเรียนเพื่อทำการสัมภาษณ์เป็นรายกรณี รายละเอียดของจำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเป็นดังตารางต่อไปนี้

นิยามศัพท์เฉพาะ

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา หมายถึง การอธิบายหรือการแสดงหลักฐาน ในการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ และการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษาของนักเรียนเองหรือสัญลักษณ์ทางพีชคณิต โดยในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้สถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูป (Patterns) และประโยคเปิดของจำนวน (Open Number Sentences) ในการสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งในแต่ละเรื่องได้พิจารณาจาก 3 องค์ประกอบของการให้เหตุผล ได้แก่ การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับแบบรูป หมายถึง การให้เหตุผลที่เกิดขึ้นจากการเปิดโอกาสให้นักเรียนวิเคราะห์แบบรูป การสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับการขยายและหากรณีทั่วไปของแบบรูป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยข้อจำกัดของแบบรูปที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นแบบรูปที่มีกฎเกณฑ์ทั่วไปอยู่ในรูปเชิงเส้น ซึ่งมีผลต่างระหว่างพจน์เท่ากัน เช่น แบบรูปของจำนวนหน้าของ

กล่องลูกบาศก์ที่เกิดจากการวางกล่องลูกบาศก์ซ้อนกันทีละชั้นไปเรื่อย ๆ คือ 6, 10, 14, 18, 22, ... ซึ่ง มีกฎเกณฑ์ทั่วไปอยู่ในรูปเชิงเส้น 4 คูณ จำนวนกล่อง บวก 2

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน หมายถึง การให้เหตุผลของนักเรียนที่เกิดจาก การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดของจำนวน สร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด และประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้

การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา หมายถึง การค้นหาความจริงที่แฝงอยู่ในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งมี 3 ส่วนคือ การวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหา การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ และการวิเคราะห์หลักการหรือกฎเกณฑ์ที่องค์ประกอบเหล่านั้นอยู่อย่างเป็นระบบ

การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา หมายถึง ความสามารถในการระบุข้อสรุปโดยใช้วิธีการที่สมเหตุสมผล ความสามารถในการนำเสนอหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุป และความสามารถในการอธิบายว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป หมายถึง ความสามารถในการตัดสินใจว่าข้อสรุปที่ได้มีความเหมาะสมหรือไม่ โดยต้องมีเกณฑ์หรือมาตรฐานสำหรับยึดเป็นข้ออ้างอิงในการตัดสินใจหรือเป็นบรรทัดฐานสำหรับวินิจฉัยความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา หมายถึง คำอธิบายลักษณะของการให้เหตุผลที่นักเรียนแสดงออกมาเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ทางพีชคณิต จำแนกออกเป็นกลุ่มตามลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนแสดงออกมาจากการทำแบบทดสอบ และการสัมภาษณ์ ซึ่งในงานวิจัยนี้สถานการณ์ทางพีชคณิตเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องแบบรูป และประโยคเปิดของจำนวน โดยในกรอบแนวคิดได้แสดงถึงลักษณะการให้เหตุผลที่เกิดจาก การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ของนักเรียน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในประเด็นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การให้เหตุผล
 - 1.1 ความหมายการให้เหตุผล
 - 1.2 องค์ประกอบของการให้เหตุผล
2. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา
 - 2.1 ความหมายของพีชคณิต
 - 2.2 แนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา
 - 2.3 การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 3.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษา
 - 3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป
 - 3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

1. การให้เหตุผล (Reasoning)

การสอนและการประเมินคุณลักษณะในการให้เหตุผลเป็นเรื่องที่ทำหยาความสามารถอย่างมาก ต่อครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ความท้าทายประการแรกคือ จะนิยามการให้เหตุผลที่ดีคืออะไรและมีองค์ประกอบอะไรบ้าง ประการที่สองคือจะแปลงมุมมองในข้อแรกไปสู่รูปแบบการพัฒนา และการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างไร การตอบคำถามเหล่านี้อาจทำได้โดยการสำรวจและสังเคราะห์จากผลงานของนักจิตวิทยา นักปรัชญา และนักการศึกษาหลายๆ ท่านที่ศึกษาเรื่องของการให้เหตุผลมาก่อนหน้านี้

1.1 ความหมายของการให้เหตุผล

การให้เหตุผล (Reasoning) หมายถึง การคิดอย่างมีเหตุผลและเป็นไปตามหลักตรรกศาสตร์ มีความหมายเดียวกับคำว่า การคิดเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Thinking) และการคิดเชิงนามธรรม (Abstract Thought) (The American Heritage Dictionary. 2006: Online)

การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการในการสร้างข้อสรุป ทุกสิ่งทุกอย่างที่เราทำและคิด จะเกี่ยวข้องกับการสร้างข้อสรุป กล่าวคือ เมื่อเราเรียนรู้ วิเคราะห์ ตัดสิน สรุปอ้างอิง ประเมิน ฯลฯ เราจะต้องมีการสร้างข้อสรุปจากข้อมูลและความเชื่อของเราเสมอ (Leighton. 2004: 11)

การให้เหตุผล หมายถึง การคิดประเภทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับภาษา ความตระหนักรู้ และหลักตรรกวิทยา ซึ่งมีแก่นมนุษย์เท่านั้นที่รู้ว่าจะบูรณาการสิ่งเหล่านี้เข้าด้วยกันได้อย่างไร (Wikipedia Encyclopedia. 2006: Online)

การให้เหตุผล หมายถึง กระบวนการคิดหรือการดำเนินการภายในจิตใจในการใช้ความรู้เพื่อทำความเข้าใจ หรือสร้างข้อสรุปจากหลักฐาน กระบวนการในการให้เหตุผลจะเป็นการใช้ความรู้ที่มีในการแก้ปัญหาและการตัดสินใจ หรือเกี่ยวข้องกับการคิดอย่างมีวิจารณญาณและเป็นกรณีทั่วไป (Kim. 2005: 59)

การให้เหตุผล คือ การที่ผู้เรียนสามารถระบุเหตุผล ตัดสินความน่าเชื่อถือของหลักฐาน ใช้ทักษะการคิดแบบอุปนัยและนิรนัย ตัดสินใจอย่างถูกต้อง (Quellmalz. 1987: 86-105)

จากความหมายของการให้เหตุผลที่นำเสนอมาจะเห็นว่ามีความสำคัญที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการให้เหตุผลอยู่หลายคำ ดังที่แสดงในตารางต่อไปนี้

ตาราง 2 การวิเคราะห์แนวคิดหลักที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการให้เหตุผล

แหล่งที่มา	แนวคิดหลัก
The American Heritage Dictionary	การคิดเชิงตรรกศาสตร์ การคิดเชิงนามธรรม
Leighton	กระบวนการในการสร้างข้อสรุปจากข้อมูล
Wikipedia Encyclopedia	การคิดประเภทหนึ่ง การตระหนักรู้ หลักตรรกวิทยา ภาษา
Kim	กระบวนการคิด การสร้างข้อสรุปจากหลักฐาน การดำเนินการภายในจิตใจ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การคิดในเชิงกรณีทั่วไป
Quellmalz	ความสามารถในการระบุเหตุผล ตัดสินความน่าเชื่อถือของ หลักฐาน การคิดแบบอุปนัยและนิรนัย

จากแนวคิดหลักในตารางจะเห็นว่า คำที่เกี่ยวข้องกับความหมายของการให้เหตุผลสามารถจำแนกได้เป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ การคิด ตรรกวิทยา และภาษา ซึ่งในมุมมองของผู้วิจัยเห็นว่าคำสำคัญ

เหล่านี้มีความเกี่ยวข้องกันอยู่ในหลายประเด็น ดังต่อไปนี้

การให้เหตุผลในความหมายที่เราคุ้นเคย คือ การอธิบายหรือการแสดงหลักฐานที่ทำให้เราเชื่อในสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นจริง แต่เหตุผลนั้นจะอยู่ในความคิด เวลาที่เราต้องการสื่อสารให้ผู้อื่นได้รับทราบถึงเหตุผลในความคิดของเรา ก็ต้องใช้ภาษาเป็นสื่อในการถ่ายทอดความคิดออกมา ส่วนตรรกวิทยาเป็นวิชาที่ว่าด้วยกฎเกณฑ์ในการให้เหตุผลที่แสดงออกมาในรูปของภาษา และการคิดเป็นกระบวนการทางจิตที่เกิดขึ้นโดยอาจจะมีเหตุผลหรือไม่มีเหตุผลเลยก็ได้ ไม่ใช่ว่าการคิดทั้งหมดจะต้องมีเหตุผล แต่การได้มาซึ่งเหตุผลทั้งหมดจะต้องอาศัยการคิด

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้จะนิยามการให้เหตุผลว่า คือ การอธิบายหรือการแสดงหลักฐานที่ทำให้เราเชื่อในสิ่งใดสิ่งหนึ่งว่าเป็นจริง ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษา

จากการกำหนดความหมายในลักษณะดังกล่าวทำให้เห็นชัดว่าการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของบุคคลนั้นจะต้องพิจารณาถึงองค์ประกอบของการคิดที่ทำให้ได้มาซึ่งเหตุผลนั้น ๆ และอย่างที่กล่าวมาแล้วว่าไม่ใช่การคิดทุกประเภทที่ต้องอาศัยเหตุผล เช่น การคิดระลึกถึงสิ่งใดสิ่งหนึ่งนั้นเราไม่จำเป็นต้องใช้เหตุผลเลย แต่เมื่อเราต้องวิเคราะห์ว่าแบบรูปจำนวน เช่น 2, 4, 6, 8, 10, ... แต่ละองค์ประกอบรวมกันอยู่ได้อย่างไร ทำไมเทอมที่ 5 ต้องมีค่าเป็น 10 และเมื่อเราต้องการจะสร้างข้อสรุปว่าเทอมต่อไปของแบบรูปนี้จะมีค่าเป็นเท่าไร หรือเมื่อเราได้ข้อสรุปแล้วต้องการที่จะประเมินว่าข้อสรุปที่ได้จะเหมาะสมหรือไม่ เราจำเป็นต้องอาศัยการให้เหตุผลทั้งสิ้น ดังนั้นในการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของบุคคลสิ่งแรกที่ต้องพิจารณา คือ การให้เหตุผลเกิดขึ้นจากการคิดประเภทใดบ้าง

1.2 องค์ประกอบของการให้เหตุผล

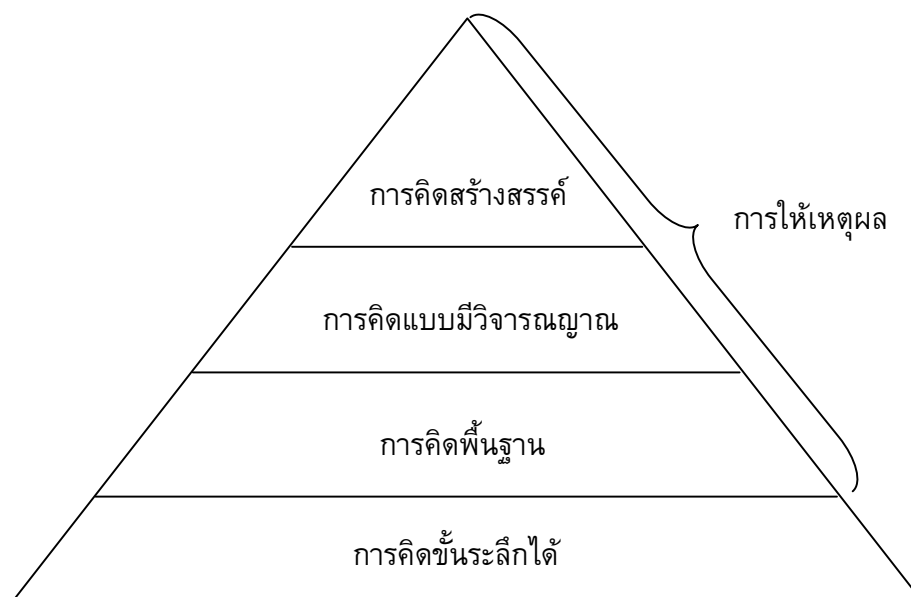
ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลจำเป็นจะต้องพิจารณาถึงองค์ประกอบของการคิดที่ทำให้ได้มาซึ่งเหตุผลนั้น ๆ ดังนั้นการนำเสนอในส่วนนี้จะมุ่งสังเคราะห์แนวคิดของนักการศึกษาว่าการคิดประเภทใดบ้างที่ถือเป็นองค์ประกอบของการให้เหตุผล

ครูลีคและรูดนิค (Krulik; & Rudnick. 1993; 1995) เสนอว่าการให้เหตุผลเป็นส่วนสำคัญของการคิดที่นอกเหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้ ซึ่งได้แก่

การคิดพื้นฐาน (Basic) ประกอบด้วยการเข้าใจความตลวยอดต่าง ๆ เช่น เข้าใจความหมายของการบวก ลบ คูณ และหาร เป็นต้น และสามารถจดจำบริบทที่สามารถนำความคิดรวบยอดไปใช้ได้

การคิดแบบมีวิจารณ์ญาณ (Critical) ประกอบด้วยการตรวจสอบ หาความสัมพันธ์ และประเมินลักษณะทั้งหมดของสถานการณ์หรือปัญหา การหาจุดสำคัญของส่วนต่าง ๆ ของสถานการณ์หรือปัญหา การรวบรวมและจัดระบบข้อมูล การวิเคราะห์และการหาความสมเหตุสมผลของข้อมูล การจดจำและเชื่อมโยงสถานการณ์ใหม่กับข้อมูลที่เคยเรียนรู้มาก่อนหน้า การพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผล การวิเคราะห์และนำกลับไปใช้กับสถานการณ์จริง

การคิดสร้างสรรค์ (Creative) ประกอบด้วยการสร้างผลผลิตที่ซับซ้อน การสังเคราะห์หรือสร้างแนวคิดใหม่ และการประยุกต์ใช้แนวคิดเดิม



ภาพประกอบ 1 ระดับของการให้เหตุผลตามแนวคิดของครูลิกและรูดนิค

ที่มา: Krulik, S.; Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights. p. 3

กูเอลมาร์ซ (Quellmalz, 1987) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการให้เหตุผล ที่เกิดจากการวิเคราะห์วรรณกรรมที่เกี่ยวข้องกับทักษะการให้เหตุผลจากมุมมองของนักจิตวิทยา นักปรัชญา และนักการศึกษา จนได้พบว่าทฤษฎีของนักปรัชญาได้นำเสนอความหมายของการให้เหตุผลและเกณฑ์ในการประเมินการให้เหตุผลเอาไว้ กล่าวคือ ในทางปรัชญามองว่าการให้เหตุผลคือ การที่ผู้เรียนสามารถระบุเหตุผล ตัดสินความน่าเชื่อถือของหลักฐาน ใช้ทักษะการคิดแบบอุปนัยและนิรนัย ตัดสินใจอย่างถูกต้อง ส่วนในทางจิตวิทยาพบว่าทฤษฎีของนักจิตวิทยาเกี่ยวกับทักษะการคิดระดับสูง (Higher Order Thinking Skills) ถูกพัฒนาขึ้นภายใต้แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลที่นำเสนอโดยนักปรัชญา นักจิตวิทยาให้นิยามของทักษะการคิดระดับสูงบนพื้นฐานของความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียนที่เน้นเรื่องของกระบวนการคิด ส่วนนักการศึกษาและนักพัฒนาหลักสูตรจะมีแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผล

ที่ยืนอยู่บนแนวคิดของนักปรัชญาและนักจิตวิทยา เช่น แนวคิดของบลูม เป็นต้น จากการสังเคราะห์แนวคิดของบุคคลใน 3 กลุ่มดังกล่าวทำให้คุณเอลมาร์ชพบว่าองค์ประกอบของทักษะการให้เหตุผลควรมีองค์ประกอบพื้นฐาน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3 กรอบแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลของคุณเอลมาร์ช

ชนิดของการให้เหตุผล (Kind of Reasoning)	ความหมาย (Meaning)	ตัวอย่างคำ (Trigger Words)	ตัวอย่างคำถาม (Sample Probe)
การวิเคราะห์ (Analysis)	ให้เหตุผลในเทอมของ แต่ละส่วนประกอบ	แบ่ง จัดประเภท จำแนก หาข้อแตกต่าง	องค์ประกอบย่อยแต่ละ ส่วนมีอะไรบ้าง และ แต่ละส่วนมี ความสัมพันธ์กับส่วน ทั้งหมดอย่างไร
การเปรียบเทียบ (Comparison)	ให้เหตุผลในลักษณะ ของความเหมือนและ ความแตกต่าง	เปรียบเทียบ หาข้อ แตกต่าง เชื่อมโยง	สิ่งเหล่านี้เหมือนหรือ แตกต่างกันอย่างไร
การสรุปอ้างอิง (Inference)	ให้เหตุผลแบบอุปนัย หรือนิรนัย	ทำนาย ตั้งสมมติฐาน อนุมาน อุปมาน	จากสิ่งที่กำหนด คุณ คิดว่าจะเกิดอะไรขึ้น ต่อไป
การประเมิน (Evaluation)	แสดงและชี้แจงความ คิดเห็นหรือมุมมอง	ประเมิน ตัดสิน	ในความเห็นของคุณ แนวคิดใดดีที่สุด เพราะเหตุใด

ที่มา Stiggins, Richard J. (1994). *Student-Centered Classroom Assessment*. p. 251

บลูม (Bloom; et al. 1956) ได้เสนอ Bloom's Taxonomy ซึ่งเชื่อว่าการคิดสามารถจำแนกได้เป็น 6 ระดับได้แก่ ขั้นรับรู้ (Knowledge) ขั้นอธิบาย (Comprehension) ขั้นประยุกต์ (Application) ขั้นวิเคราะห์ (Analysis) ขั้นสังเคราะห์ (Synthesis) ขั้นประเมิน (Evaluation) ตีพิมพ์ในหนังสือชื่อ The Taxonomy of Education Objectives, The Classification of Educational

Goals, Handbook I: Cognitive Domain. ซึ่งนับเป็นหนังสือที่มีอิทธิพลอย่างมากต่อการจัดการศึกษาในช่วงระยะเวลาที่ผ่านมามากกว่าครึ่งศตวรรษที่ผ่านมา แนวคิดที่บลูมนำเสนอถูกนำไปใช้เป็นมาตรฐานอ้างอิงในการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ การพัฒนาหลักสูตร และการจัดการเรียนรู้ของครู เป็นหนึ่งในแนวคิดที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางในฐานะของรูปแบบที่อธิบายถึงความสามารถในการคิดของนักเรียน รายละเอียดเกี่ยวกับระดับการคิดทั้ง 6 แบบ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4 ระดับการคิดของบลูม

ระดับ	นิยาม	ตัวอย่างคำบ่งชี้	ตัวอย่างคำถาม
การรับรู้ (Knowledge)	สามารถจำเอนม ข้อมูล กระบวนการ ความสัมพันธ์ และความคิดรวบยอดได้	นิยาม ระบุงู้อ ทำซ้ำ	จงระบุชื่อของตัวละครในหนังสือเรื่องนี้
การเข้าใจ (Comprehension)	เข้าใจความหมายของสิ่งที่เรียนรู้ สามารถอธิบายได้ โดยใช้ภาษาของตนเอง	อธิบาย แปลง ถอดความ แปลความ	อะไรคือความคิดหลัก (Main Idea) ของเรื่องนี้
การประยุกต์ใช้ (Application)	ใช้สิ่งที่มียู่เรียนรู้สิ่งใหม่ และนำไปใช้ได้กับสถานการณ์จริง	ปรับ สร้าง ตกแต่ง ผลิต	จงใช้ความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของเรื่องที่อ่าน เขียนเป็นเรื่องใหม่ตามความคิดของตัวเอง
การวิเคราะห์ (Analysis)	เข้าใจส่วนประกอบแต่ละส่วน สามารถแยกแต่ละส่วนออกจากกันได้อย่างมีเหตุผล และรู้ว่าส่วนประกอบทั้งหมดรวมกันอยู่ได้อย่างไร	แบ่ง แดก แยก จำแนก หาข้อแตกต่าง	จงแบ่งเรื่องนี้ออกเป็นตอน ๆ และอธิบายว่าแต่ละตอนสัมพันธ์กันอย่างไร
การสังเคราะห์ (Synthesis)	สามารถรวบรวมความรู้ แนวคิด ความเข้าใจเรื่องต่าง ๆ เป็นหนึ่งเดียว และสร้างเป็นความรู้ใหม่	รวม เชื่อมโยง ประกอบ สร้างใหม่	จากเรื่องราวเกี่ยวกับปลาฉลามทั้งสองเรื่องจะสามารถทำนายเกี่ยวกับจำนวนประชากรปลาฉลามในอนาคตได้อย่างไร

ตาราง 4 (ต่อ)

ระดับ	นิยาม	ตัวอย่าง คำบ่งชี้	ตัวอย่างคำถาม
การประเมิน (Evaluation)	สามารถตัดสินค่าของสิ่ง ต่าง ๆ โดยใช้เกณฑ์ที่ สมเหตุสมผล	ประเมิน ตัดสิน พิสูจน์	ในความเห็นของนักเรียนคิด ว่างานเขียนเรื่องนี้เป็นงาน เขียนที่ดีหรือไม่ เพราะเหตุใด

ที่มา Stiggins, Richard J. (1994). *Student-Centered Classroom Assessment*. p. 240

บลูมอธิบายว่า ขั้นรับรู้ (Knowledge) นักเรียนที่มีความสามารถในการคิดขั้นนี้จะทำได้แค่เพียงระลึกถึงสิ่งที่เหมือนกับที่เคยเรียนรู้มาก่อนได้ ขั้นเข้าใจ (Comprehension) ประกอบด้วยการเข้าใจ (Understanding) 3 แบบ ได้แก่ การแปล (Translation) หมายถึงสามารถแปลข้อมูลจากเรื่องหนึ่งไปสู่อีกเรื่องหนึ่งได้ การตีความ (Interpretation) หมายถึง การสรุปข้อมูล และการจัดลำดับใหม่ได้ การอธิบายอย่างละเอียด (Extrapolation) หมายถึง การขยายข้อมูลที่กำหนดให้ในการกำหนดความหมายโดยนัย ทำนายผล หรือคาดหมายถึงผลกระทบ ขั้นประยุกต์ใช้ (Application) เป็นการประยุกต์ใช้ความรู้ที่มีลักษณะนามธรรม เช่น กฎ วิธีการ หลักการ สูตร เทคนิค เป็นต้น กับสถานการณ์ที่เฉพาะเจาะจงที่พบใหม่ ขั้นวิเคราะห์ (Analysis) สามารถแบ่งได้เป็น 3 ระดับ ได้แก่ 1) ผู้เรียนสามารถแยกข้อมูลออกเป็นส่วนประกอบต่าง ๆ ได้ 2) ระบุความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละส่วนประกอบได้ 3) อธิบายได้ว่าแต่ละส่วนประกอบรวมกันเป็นหนึ่งเดียวอย่างไร ขั้นสังเคราะห์ (Synthesis) คือความสามารถในการนำข้อมูลจากแหล่งต่าง ๆ มาประกอบกันเพื่อสร้างเป็นโครงสร้างที่มีแบบรูปเป็นหนึ่งเดียว หรือนำความรู้จากส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดมาสร้างเป็นความรู้ใหม่ ขั้นประเมิน (Evaluation) เป็นขั้นที่ใช้กระบวนการคิดที่ซับซ้อนที่สุด เป็นขั้นที่ผู้เรียนสามารถตัดสินค่าของสิ่งต่าง ๆ เช่น แนวคิด วิธีการ ผลงาน ทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพโดยใช้เกณฑ์ที่ถูกต้องเหมาะสมและมีประสิทธิภาพซึ่งอาจเป็นได้ทั้งเกณฑ์ที่ผู้เรียนตั้งขึ้นเองหรือจากที่กำหนดให้ (Bloom; et al. 1987)

บลูมไม่ได้กล่าวถึงเรื่องของการให้เหตุผลโดยตรง แต่ระดับการคิดในระดับสูงที่บลูมนำเสนอ ได้แก่ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมิน ถือว่าเป็นองค์ประกอบของการให้เหตุผล (Kim. 2005; Stiggins. 1997)

มาร์ซาโน (Marzano. 1992) ได้เสนอมิติแห่งการเรียนรู้ (Marzano's Dimension of Learning) ที่อธิบายถึงมาตรฐานการเรียนรู้ (Standardized-Based Learning) ของนักเรียนที่ประกอบด้วย

2 ส่วน ได้แก่ มาตรฐานด้านเนื้อหา (Content Standards) และมาตรฐานด้านเครื่องมือในการเรียนรู้ตลอดชีวิต (Life-Long Learning Standards) มาตรฐานด้านเนื้อหาประกอบด้วยการรวบรวมความรู้ ซึ่งแบ่งเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ด้านเนื้อหาและด้านกระบวนการ ส่วนมาตรฐานด้านเครื่องมือในการเรียนรู้ตลอดชีวิตจะประกอบด้วยความคิดที่ซับซ้อน ได้แก่ การขยายและขัดเกลาความรู้ การใช้ความรู้อย่างมีความหมาย และการสร้างเป็นนิสัย โดยมาร์ซาโนมองว่าทักษะการให้เหตุผลประกอบด้วยความสามารถลักษณะต่าง ๆ มากมายที่อยู่ในส่วนของการขยายและขัดเกลาความรู้ และการใช้ความรู้อย่างมีความหมาย ดังรายละเอียดในตารางต่อไปนี้

ตาราง 5 กรอบแนวคิดของมาร์ซาโน

มาตรฐานการเรียนรู้ (Standardized-Based Learning)	กระบวนการคิด (Thinking Process)	ตัวอย่างคำถาม (Sample Question)
1. มาตรฐานด้านเนื้อหา 1) การรวบรวมความรู้ เนื้อหา 2) กระบวนการ	สร้างความหมาย สร้างความรู้ใหม่ สะสมความรู้ สร้างกระบวนการ ปรับเปลี่ยนกระบวนการ เป็นของตัวเอง เข้าถึงกระบวนการ	- สิ่งนี้เกี่ยวข้องกับบางสิ่งที่เรารู้แล้วอย่างไร - คุณมองเห็นประเด็นสำคัญที่ซ่อนอยู่ในโครงสร้างนี้หรือไม่ มันคืออะไร - คุณจะเชื่อมโยงความรู้ใหม่นี้กับความรู้เดิมที่มีอยู่อย่างไร - คุณสามารถอธิบายกระบวนการนี้ตามที่คุณเข้าใจได้หรือไม่ - คุณสามารถปรับเปลี่ยนกระบวนการนี้ให้ตรงตามที่ต้องการและตรงตามความคิดของคุณได้อย่างไร - คุณจะสามารถประยุกต์ใช้กระบวนการดังกล่าวกับปัญหานี้ได้หรือไม่
2. มาตรฐานด้านเครื่องมือในการเรียนรู้ตลอดชีวิต 1) การขยายและขัดเกลาความรู้		

ตาราง 5 (ต่อ)

มาตรฐานการเรียนรู้ (Standardized-Based Learning)	กระบวนการคิด (Thinking Process)	ตัวอย่างคำถาม (Sample Question)
เปรียบเทียบ	เปรียบเทียบความเหมือน และความแตกต่าง	-สิ่งเหล่านี้เหมือนหรือแตกต่างกัน อย่างไร
จำแนก	รวมสิ่งต่าง ๆ เป็น หมวดหมู่	-คุณจะทำสิ่งนี้อยู่ในกลุ่มไหน แต่ละ กลุ่มมีนิยามว่าอย่างไร
อุปนัย	สร้างหลักการจากหลักฐาน	-บนพื้นฐานของข้อมูลเหล่านี้คุณจะ สรุปว่าอย่างไร
นิรนัย	ประยุกต์ใช้หลักการเพื่อ สร้างข้อสรุป	-บนพื้นฐานของหลักการนี้จะเกิดอะไร ขึ้นต่อไป
วิเคราะห์ข้อผิดพลาด สร้างข้อสันนิษฐาน สร้างสิ่งที่เป็นนามธรรม วิเคราะห์มุมมอง	วิจารณ์ความคิดของตนเอง การยืนยันข้อสรุป เชื่อมโยงประเด็นสำคัญ ๆ เชื่อมโยงมุมมองส่วนตัวกับ ประเด็นปัญหา	-การให้เหตุผลนี้มีข้อผิดพลาดอะไรบ้าง -มีหลักฐานใดจะยืนยันข้ออ้างนี้บ้าง -ข้อมูลนี้มีแบบรูปพื้นฐานเป็นอย่างไร -อะไรคือเหตุผลที่อยู่เบื้องหลังมุมมอง ของคุณ
2) การใช้ความรู้อย่างมี ความหมาย		
ตัดสินใจ	ใช้เกณฑ์เพื่อเลือกทางเลือก	-การกระทำช่วงไหนที่ดีที่สุด เหตุการณ์นี้ ทำไม
สืบสวน	รวบรวมข้อมูล	-ข้อมูลอะไรที่คุณต้องการในการ แก้ปัญหา
ทดลอง	ค้นหาคำอธิบาย	-คุณสามารถอธิบายได้หรือไม่ว่าทำไม คำตอบนี้จึงดีที่สุด
แก้ปัญหา	เอาชนะอุปสรรค	-คุณเห็นแนวทางรอบ ๆ อุปสรรคนี้ หรือไม่ และสามารถแก้ปัญหาได้ หรือไม่
สร้างสรรค์	หาทางเลือกที่ดีกว่า	-จะปรับปรุงคำตอบนี้ให้ดีขึ้นได้อย่างไร

ตาราง 5 (ต่อ)

มาตรฐานการเรียนรู้ (Standardized-Based Learning)	กระบวนการคิด (Thinking Process)	ตัวอย่างคำถาม (Sample Question)
3) การสร้างเป็นนิสัย การกำหนดความคิดของตนเอง การคิดวิเคราะห์ การคิดสร้างสรรค์	เข้าใจความคิดของตนเอง รวบรวมข้อสนับสนุนและ ยืนยันอย่างชัดเจน มุ่งหาแนวทางใหม่	-คุณสามารถอธิบายได้หรือไม่ว่า แก้ปัญหานี้ได้อย่างไร -คุณจะสนับสนุนจุดนี้อย่างไร -คุณสามารถระบุคำตอบที่แตกต่างกัน ได้มากน้อยใด

ที่มา: Stiggins, Richard J. (1994). *Student-Centered Classroom Assessment*. p. 244

แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลของบลูม คูเอลมาร์ช และมาร์ซาโน เป็นแนวคิดที่ได้รับการยอมรับอย่างมากในการนำไปวิเคราะห์และประเมินความสามารถในการให้เหตุผลของผู้เรียน ซึ่งเมื่อพิจารณาโดยละเอียดแล้วจะพบว่าแนวคิดทั้งสามมีลักษณะใกล้เคียงกัน ดังที่ คิม (Kim, 2005) ได้นำเสนอการเปรียบเทียบกรอบแนวคิดของการให้เหตุผลทั้ง 3 แบบ ซึ่งมีรายละเอียดดังตาราง 6

ตาราง 6 แนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักการศึกษา

ชื่อแนวคิด	นิยามของการให้ เหตุผล	องค์ประกอบสำคัญ
กรอบแนวคิด ของบลูม	ทักษะการคิดระดับสูง	การวิเคราะห์: ข้อแตกต่างและความสอดคล้อง การสังเคราะห์: รวบรวมข้อมูล การประเมิน: ความสมเหตุสมผล ความเพียงพอ และ ความเหมาะสมของหลักฐาน การตัดสินคุณภาพหรือ คุณค่าของบางสิ่ง

ตาราง 6 (ต่อ)

ชื่อแนวคิด	นิยามของการให้เหตุผล	องค์ประกอบสำคัญ
กรอบแนวคิด ของคุณ เอลมาร์ช	ทักษะการคิดระดับสูง	การวิเคราะห์: ระบุงค์ประกอบ การเปรียบเทียบ: ความเหมือน ความแตกต่าง ความสัมพันธ์ การสรุปอ้างอิง: การคิดแบบอุปนัย และนิรนัย การประเมิน: การตัดสินใจ
มิติแห่งการ เรียนรู้ของ มาร์ชาโน	การคิดที่ซับซ้อน	การขยาย/ขัดเกลาคำรู้: การเปรียบเทียบ การ จำแนก การคิดแบบอุปนัย นิรนัย การวิเคราะห์ ข้อผิดพลาด การสร้างเหตุผลสนับสนุน การวิเคราะห์มุมมอง การใช้ความรู้อย่างมีความหมาย: การตัดสินใจ การแก้ปัญหา การทดสอบข้อเท็จจริง การสร้างสรรค์

ที่มา: Kim, Mi Sun (2005). *Alignment of Classroom History Assessment: Assessing Historical Knowledge and a Reasoning Skills*. p. 76

จากตารางข้างต้น คิม (Kim. 2005) วิเคราะห์ว่าการให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ของบลูม เหมือนกับ การวิเคราะห์และการเปรียบเทียบของคุณเอลมาร์ช และเหมือนกับ การเปรียบเทียบ การจำแนก การวิเคราะห์ข้อผิดพลาด และการวิเคราะห์มุมมอง ของมาร์ชาโน การสังเคราะห์ ของบลูม เหมือนกับ การสรุปอ้างอิง ของคุณเอลมาร์ช และเหมือนกับ การอุปนัยและนิรนัย ของมาร์ชาโน การประเมิน ของบลูม เหมือนกับ การประเมิน ของคุณเอลมาร์ช และมีความหมายเดียวกันกับ การใช้ความรู้อย่างมีความหมาย ของมาร์ชาโน

สติกกินส์ (Stiggins. 1997: 260-262) เสนอว่าทักษะการให้เหตุผลควรประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) การให้เหตุผลแบบประเมิน (Evaluative Reasoning) การให้เหตุผลแบบสังเคราะห์ (Synthesizing Reasoning) การให้เหตุผลแบบจำแนก (Classifying Reasoning) และการให้เหตุผลแบบสรุปอ้างอิง (Inferential Reasoning) โดยเขาอธิบายว่าการให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ เป็น

การให้เหตุผลโดยพิจารณาผ่านส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้น ๆ และให้เหตุผลว่าส่วนประกอบย่อยเหล่านั้นรวมกันอย่างไร การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ เป็นการให้เหตุผลที่มุ่งพิจารณาว่าสิ่งต่าง ๆ มีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร การให้เหตุผลแบบประเมิน เราจะใช้การให้เหตุผลแบบประเมินเมื่อต้องการที่จะตัดสินค่าหรือพิจารณาว่าสิ่งใดมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสม โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการพิจารณา การให้เหตุผลแบบสังเคราะห์ เป็นการให้เหตุผลที่ใช้วิธีการรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ มาหลอมรวมกันเพื่อสร้างเป็นข้อสรุป การให้เหตุผลแบบจำแนก เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ในกรณีที่ต้องการแยกประเภทของสิ่งต่าง ๆ ว่าสิ่งใดควรจะถูกจัดอยู่ในกลุ่มไหน เพราะเหตุใด การให้เหตุผลแบบสรุปอ้างอิง เป็นการให้เหตุผลที่ประกอบด้วย 2 ลักษณะ ได้แก่ การให้เหตุผลที่ใช้การรวบรวมข้อมูลหรือหลักฐานจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณี เพื่อสรุปเป็นหลักการหรือกฎทั่วไป และการให้เหตุผลที่ใช้การอ้างอิงกฎหรือหลักการทั่วไปที่มีอยู่แล้วเพื่อช่วยในการหาคำตอบของปัญหาในกรณีเฉพาะ

สติกกินส์ได้ให้มุมมองเพิ่มเติมว่ารูปแบบของการให้เหตุผลแต่ละแบบมีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน เช่น การสังเคราะห์ต้องอาศัยการอ้างอิงแบบอุปนัย เพราะการที่จะสังเคราะห์ได้ต้องมองเห็นถึงองค์ประกอบร่วมของส่วนต่าง ๆ การเปรียบเทียบบางสิ่งที่ซับซ้อนต้องอาศัยการวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบอ้างอิงต้องอาศัยการเปรียบเทียบ การจำแนกประกอบด้วยการเปรียบเทียบและการสรุปอ้างอิง การอ้างอิงแบบอุปนัยต้องอาศัยการเปรียบเทียบเพื่อหาจุดร่วมของสิ่งทั้งหมด การประเมินต้องอาศัยการวิเคราะห์และการเปรียบเทียบ เป็นต้น

กล่าวโดยสรุปจะเห็นว่าแนวคิดเกี่ยวกับองค์ประกอบของการให้เหตุผลที่นำเสนอมาทั้งหมดส่วนใหญ่มุ่งจัดหมวดหมู่ จะมีความคล้ายคลึงกัน ซึ่งสามารถแสดงการเปรียบเทียบให้เห็นได้ ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 7 การเปรียบเทียบองค์ประกอบของการให้เหตุผล

ชื่อนักการศึกษา	องค์ประกอบของการให้เหตุผล		
	การวิเคราะห์	การสรุปอ้างอิง	การประเมิน
บลูม	การวิเคราะห์	การสังเคราะห์	การประเมิน
คูเอลมาร์ช	การวิเคราะห์ การเปรียบเทียบ	การสรุปอ้างอิง	การประเมิน
มาซาร์โน	การเปรียบเทียบ การจำแนก	การอุปนัย การนิรนัย การสร้างข้อสนับสนุน	การใช้ความรู้อย่างมีความหมาย การวิเคราะห์

ตาราง 7 (ต่อ)

ชื่อนักการศึกษา	องค์ประกอบของการให้เหตุผล		
	การวิเคราะห์	การสรุปอ้างอิง	การประเมิน
		การสร้างสิ่งที่เป็นนามธรรม	ข้อผิดพลาด การวิเคราะห์มุมมอง
สติภิกษุ	การวิเคราะห์ การเปรียบเทียบ การจำแนก	การสังเคราะห์ การสรุปอ้างอิง	การประเมิน
ครูฝึกและรูดนิก	การตรวจสอบหาความสัมพันธ์ การประเมินลักษณะทั้งหมดของสถานการณ์ปัญหา การหาจุดสำคัญของส่วนต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหา การวิเคราะห์และการหาความสัมพันธ์ของข้อมูล	การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผล การรวบรวมและจัดระบบข้อมูล	การพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ

จากตารางจะเห็นว่านักการศึกษาส่วนใหญ่มองว่าการให้เหตุผลประกอบไปด้วยทักษะการคิดระดับสูง ได้แก่ การวิเคราะห์ การสรุปอ้างอิง และการประเมิน ส่วนการคิดในระดับต้น ๆ เช่น การระลึกได้ ไม่ถือว่าเป็นองค์ประกอบของการให้เหตุผล ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้การพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนจะพิจารณาใน 3 องค์ประกอบ ได้แก่ การให้เหตุผลที่เกิดจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุปจากสถานการณ์ปัญหา การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยกำหนดนิยามของแต่ละองค์ประกอบดังต่อไปนี้

การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ในความหมายของบลูม หมายถึง การเข้าใจในส่วนประกอบแต่ละส่วน สามารถแยกแต่ละส่วนออกจากกันได้อย่างมีเหตุผล และรู้ว่าส่วนประกอบทั้งหมดรวมกันอย่างไร ในความหมายของคูเอลมาร์ช หมายถึง ความสามารถในการแยกองค์ประกอบย่อยแต่ละส่วน

ว่ามีอะไรบ้าง และอธิบายได้ว่าแต่ละส่วนมีความสัมพันธ์กับส่วนทั้งหมดอย่างไร ส่วนในความหมายของสติกีนส์ หมายถึง การให้เหตุผลโดยพิจารณาผ่านส่วนย่อยซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้น ๆ และให้เหตุผลได้ว่าส่วนประกอบย่อยเหล่านั้นรวมกันอยู่ได้อย่างไร สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ได้กำหนดนิยามของการวิเคราะห์ว่า คือ การค้นหาความจริงที่แฝงอยู่ในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งมี 3 ส่วนคือ 1) การวิเคราะห์องค์ประกอบ 2) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ และ 3) การวิเคราะห์หลักการหรือกฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบเหล่านั้นอยู่อย่างเป็นระบบ

การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา คูเอลมาร์ชกล่าวถึง การสรุปอ้างอิงว่าหมายถึงความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย จากสิ่งที่กำหนดว่าจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป ส่วนสติกีนส์กล่าวถึงการสรุปอ้างอิงว่า หมายถึง การให้เหตุผลที่ใช้การรวบรวมข้อมูลหรือหลักฐานจากกรณีเฉพาะหลาย ๆ กรณีเพื่อสรุปเป็นหลักการหรือกฎทั่วไป และการให้เหตุผลที่ใช้การอ้างอิงกฎหรือหลักการทั่วไปที่มีอยู่แล้วเพื่อช่วยในการหาคำตอบของปัญหาในกรณีเฉพาะ และกล่าวถึงการสังเคราะห์ว่า เป็นการให้เหตุผลที่ใช้วิธีการรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ มาหลอมรวมกันเพื่อสร้างเป็นข้อสรุป ในส่วนของบลูม กล่าวถึงการสังเคราะห์ว่าหมายถึง ความสามารถในการรวบรวมความรู้ แนวคิด ความเข้าใจเรื่องต่าง ๆ เป็นหนึ่งเดียวแล้วสร้างเป็นความรู้ใหม่ จากความหมายทั้งหมดจะเห็นว่าจะมีความเกี่ยวเนื่องกันอยู่ระหว่างการสร้างข้อสรุปอ้างอิงของคูเอลมาร์ชและสติกีนส์กับการสังเคราะห์ของบลูมและสติกีนส์ สำหรับการวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดนิยามของการสร้างข้อสรุปจากสถานการณ์ปัญหาว่า ประกอบด้วยความสามารถดังต่อไปนี้ 1) ความสามารถในการระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล 2) ความสามารถในการนำเสนอหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุป และ 3) ความสามารถในการอธิบายได้ว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป บลูมกล่าวถึงการประเมินว่า หมายถึงความสามารถในการตัดสินค่าของสิ่งต่าง ๆ เช่น แนวคิด วิธีการ คำตอบ โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผล ส่วนคูเอลมาร์ชกล่าวถึงการประเมินว่า หมายถึง การแสดงและชี้แจงความเห็นหรือมุมมอง ซึ่งในการประเมินค่าของสิ่งต่าง ๆ ต้องมีการสร้างเกณฑ์ในการประเมิน และสติกีนส์กล่าวว่าเราจะให้การให้เหตุผลแบบประเมินก็ต่อเมื่อต้องการที่จะตัดสินหรือพิจารณาว่าสิ่งใดมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสม โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการพิจารณา สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ให้ความหมายของการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปว่า คือ ความสามารถในการตัดสินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยต้องมีเกณฑ์หรือมาตรฐานสำหรับยึดเป็นข้ออ้างอิงในการตัดสินหรือเป็นบรรทัดฐานสำหรับวินิจฉัยความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

ตาราง 8 ความหมายของแต่ละองค์ประกอบของการให้เหตุผล

องค์ประกอบของการให้เหตุผล	นิยาม
การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา	เป็นการค้นหาความจริงที่แฝงอยู่ในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งมี 3 ส่วนคือ 1) การวิเคราะห์องค์ประกอบ 2) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ และ 3) การวิเคราะห์หลักการหรือกฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบเหล่านั้นอยู่อย่างเป็นระบบ
การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา	ประกอบด้วยความสามารถดังต่อไปนี้ 1) ความสามารถในการระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล 2) ความสามารถในการนำเสนอหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุป และ 3) ความสามารถในการอธิบายว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร
การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป	ความสามารถในการตัดสินใจว่าข้อสรุปที่ได้มีความเหมาะสมหรือไม่ โดยต้องมีเกณฑ์หรือมาตรฐานสำหรับยึดเป็นข้ออ้างอิงในการตัดสินใจหรือเป็นบรรทัดฐานสำหรับวินิจฉัยความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

2. การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

2.1 ความหมายของพีชคณิต

เมื่อกล่าวถึงพีชคณิตคนส่วนใหญ่จะเข้าใจว่าเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้สมการที่ซับซ้อนหรือการดำเนินการเกี่ยวกับนิพจน์ และจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องของตัวแปร ซึ่งส่วนดังกล่าวเป็นเพียงส่วนปลายของพีชคณิตที่ต้องผ่านขั้นตอนอื่นมาก่อนไม่ใช่ทั้งหมด (NCTM. 2000: 37) พีชคณิตจึงไม่ใช่เป็นเพียงวิชาที่ว่าด้วยศาสตร์แห่งการแก้สมการและการดำเนินการเกี่ยวกับตัวแปรเพียงส่วนเดียว ยูซิสกินส์ (Usiskin. 1999: 5) ศาสตราจารย์ทางด้านการศึกษามหาวิทยาลัยชิคาโก สหรัฐอเมริกา เคยเป็นหนึ่งในคณะผู้บริหารของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) เป็นผู้ที่สนใจและมี

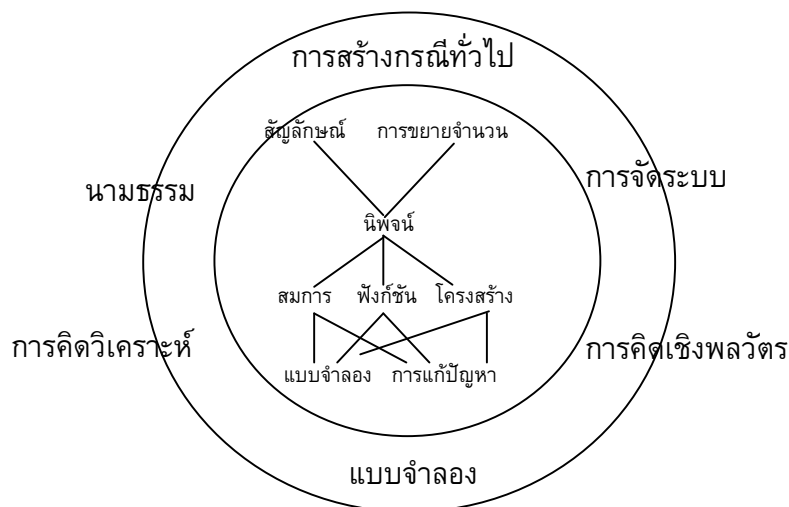
ผลงานวิจัยที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางเกี่ยวกับสาขาพีชคณิตกล่าวว่า “ไม่ใช่เรื่องง่ายที่จะให้นิยามของพีชคณิต” แต่อย่างไรก็ตามนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายคนก็ยังพยายามที่จะให้คำจำกัดความของพีชคณิตตามมุมมองของตนและขอบเขตที่ตนเองสนใจศึกษา

คริสทีนัสและเฟย์ (Chirstmas; & Fey. 1999: 5-13) ให้มุมมองว่าพีชคณิตควรประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนของเนื้อหา ได้แก่ เรื่องตัวแปร ฟังก์ชัน กราฟ สมการและอสมการ และส่วนของสมบัติ ได้แก่ สมบัติของจำนวนจริงและสับเซตของจำนวนจริง ทั้งสองส่วนนี้ประกอบกันจะเกิดเป็นระบบสัญลักษณ์ที่สามารถนำไปใช้อธิบายและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ได้

กรีนสและฟินเดลล์ (Greenes & Findell. 1999: 127) มีมุมมองว่าแนวคิดหลักทางพีชคณิตควรประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การนำเสนอ สมการ ตัวแปร ฟังก์ชัน และสัดส่วน นอกจากนี้มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านที่พยายามให้ความหมายของพีชคณิตในลักษณะของภาษา (Usiskin. 1999; Kriegler. 2003) โดยมีมุมมองว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ เป็นภาษาแทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต และเป็นภาษาที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร กรณีทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์ เป็นต้น

เฮอเบิร์ตและบราวน์ (Herbert; & Brown. 1997) มองพีชคณิตในแง่ของการใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดเดา หรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

หลิว (Lew. 2004: 88-95) มีทัศนะว่าพีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับนิพจน์ สัญลักษณ์ และการขยายจำนวนที่นอกเหนือไปจากจำนวนนับ เพื่อหาคำตอบของสมการ เพื่อวิเคราะห์ความสัมพันธ์ และเพื่อกำหนดโครงสร้างของระบบการนำเสนอซึ่งประกอบด้วยนิพจน์และความสัมพันธ์ แต่อย่างไรก็ตามการแก้สมการ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ และการกำหนดโครงสร้างดังกล่าวไม่ใช่เป้าหมายของพีชคณิต แต่เป็นเพียงเครื่องมือในการจำลองปรากฏการณ์หรือสถานการณ์ในโลกแห่งความเป็นจริงเพื่อการอธิบายและแก้ปัญหาของแต่ละบริบท ยิ่งไปกว่านั้นพีชคณิตไม่ใช่เป็นเพียงเซตของความรู้และเทคนิควิธีเท่านั้น แต่ยังรวมถึงวิธีการคิด (A way of thinking) อีกด้วย ความสำเร็จในการเรียนรู้พีชคณิตขึ้นอยู่กับความสามารถในการคิด 6 ชนิด ได้แก่ การคิดหากรณีทั่วไป การคิดเชิงนามธรรม การคิดวิเคราะห์ การคิดสร้างสรรค์ การคิดหาแบบจำลอง และการจัดระบบ ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 องค์ประกอบของพีชคณิตตามแนวคิดของหลิว

ที่มา: Lew, H. C. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*. p. 5.

จากทัศนะของนักคณิตศาสตร์ศึกษาเกี่ยวกับขอบเขตความหมายของวิชาพีชคณิตที่นำเสนอมาทั้งหมดข้างต้นจะพบว่า สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ ประการแรก มองว่าพีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่เป็นนามธรรมหรือกรณีทั่วไปของเลขคณิต เช่น เรื่องสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริง ประการที่สอง มองว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับเรื่องตัวแปร นิพจน์ และโครงสร้างของการใช้สัญลักษณ์ ประการที่สาม มองว่าพีชคณิตคือวิชาที่ว่าด้วยเรื่องฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการค้นหาแบบรูปของสิ่งต่าง ๆ การนำเสนอความคิดในรูปของสมการ ตาราง และกราฟ และการแก้สมการเพื่อหาคำอธิบายของสถานการณ์ เป็นต้น

2.2 แนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา

จากความหมายของพีชคณิตที่นำเสนอมาข้างต้นจะเห็นว่าในด้านเนื้อหาแน่นอนว่าจะฟังดูไม่สมเหตุสมผลมากนักที่จะจัดหลักสูตรพีชคณิตให้กับนักเรียนในระดับประถมศึกษา เช่น เราคงจะไม่คาดหวังสูงถึงขนาดที่จะให้นักเรียนในระดับประถมศึกษาสามารถแก้ระบบสมการทางพีชคณิตหรือแสดงการพิสูจน์อย่างเป็นทางการได้ เป็นต้น ประเด็นที่น่าสนใจก็คือพีชคณิตในระดับประถมศึกษาควรจะต้องให้ความหมาย หรือมุ่งเน้นไปที่ส่วนใด ต่อไปนี้คือแนวคิดใหม่ในวงการคณิตศาสตร์ศึกษาที่เริ่มมองว่า

การจัดหลักสูตรการเรียนรู้พีชคณิตควรเริ่มตั้งแต่ระดับต้น ๆ ไม่ใช่จัดให้มีอยู่เฉพาะในระดับมัธยมเท่านั้น

แยคเกิล (Yackel. 1997: 276-280) เห็นว่ามีความเป็นไปได้ที่จะให้นักเรียนระดับประถมศึกษาเรียนรู้พีชคณิตในลักษณะของเรื่องแบบจำลอง (Modeling) การหาแบบรูป (Pattern Finding) และการศึกษาโครงสร้าง (The Study of Structure) ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับเรื่องเหล่านี้จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สร้างการให้เหตุผลที่แสดงถึงพื้นฐานของวิธีการคิดที่แตกต่างกัน ดังนั้นจุดเน้นของการจัดการเรียนรู้ในระดับประถมศึกษาจึงไม่ใช่อยู่ที่กิจกรรมที่มีลักษณะเป็นพีชคณิตแต่ต้องเน้นที่การคิดและการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งมุมมองดังกล่าวจะมีประโยชน์มากเพราะจะช่วยจัดปัญหาที่จะจำกัดความหมายว่าอะไรคือเนื้อหาของพีชคณิตที่จะนำมาจัดการเรียนรู้สำหรับนักเรียนในระดับประถมศึกษา ซึ่งประเด็นสำคัญอยู่ที่ธรรมชาติของการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนนั่นเอง

แคทคาร์ทและคนอื่น (Cathcart; et al. 2003: 380) ให้มุมมองว่าการเรียนรู้พีชคณิตแต่ละเรื่องจะเป็นไปได้ง่ายขึ้นถ้านักเรียนได้ผ่านการเรียนรู้เรื่องที่เป็นพื้นฐานมาก่อน นอกจากนี้ยังได้เสนอแนะว่าหลักสูตรในระดับประถมศึกษาควรมีลักษณะที่เป็นรูปธรรมเพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นนามธรรมในระดับที่สูงขึ้น แบตติสตาและบราวน์ (Battista & Brown. 1998) อธิบายว่า เพื่อให้ นักเรียนสามารถใช้พีชคณิตได้อย่างมีความหมายต้องเริ่มต้นจากการสอนให้เข้าใจความหมายไม่ใช่มุ่งไปที่การใช้สัญลักษณ์ ในระดับประถมศึกษาต้องเปิดโอกาสให้เด็กคิดและแสดงความคิดเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนและสมบัติของจำนวน จนกว่านักเรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้อย่างเป็นธรรมชาติ สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: Online) ระบุในลักษณะเดียวกันว่าพีชคณิตในระดับประถมศึกษาไม่ควรเน้นเนื้อหาที่ยากเกินไปแต่ควรเน้นไปที่การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจ สนทนาเกี่ยวกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่จะส่งผลให้นักเรียนรู้จักให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งบริบทเหล่านี้จะมีความสำคัญต่อการทำความเข้าใจเนื้อหาทางพีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย ยกตัวอย่างเช่น จากการที่นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของ 18×14 โดยคำนวณจากการหาผลบวกของ 18×10 และ 18×4 ในระดับประถมศึกษา จะสามารถช่วยให้นักเรียนเข้าใจสมบัติการแจกแจงของการคูณเหนือการบวกที่เป็นการเข้าใจเชิงพีชคณิต (Algebraic Understanding) ประสบการณ์เกี่ยวกับแบบรูปจะเป็นพื้นฐานให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเรื่องฟังก์ชัน ประสบการณ์เกี่ยวกับจำนวนและสมบัติของจำนวนจะเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจเรื่องตัวแปรและนิพจน์ทางพีชคณิต เป็นต้น (NCTM. 2000: 37) เช่นเดียวกับผลการศึกษาของ NCISLA (National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. 2005: Online) ที่ได้ข้อสรุปว่าพีชคณิตในระดับประถมศึกษาควรตั้งเป้าหมายเพื่อจะทำให้ผู้เรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งจะเป็นปัจจัยพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในอนาคต

จากที่นำเสนอมาจะเห็นว่า วัตถุประสงค์ที่ให้นักเรียนประถมศึกษาเรียนพีชคณิตไม่ได้อยู่ที่ความต้องการให้นักเรียนเรียนรู้แนวคิดพีชคณิตที่เป็นทางการ แต่อยู่ที่ความต้องการเตรียมพื้นฐานไว้ในเบื้องต้นเพื่อที่นักเรียนจะได้เรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในระดับมัธยมเท่านั้น เนื้อหาอาจจะไม่ใช่พีชคณิตโดยตรงแต่สามารถสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่ความเข้าใจหรือการให้เหตุผลในเชิงพีชคณิตได้ สำหรับการวิจัยในครั้งนี้จะให้ความสนใจกับเรื่องแบบรูปและเรื่องประโยคเปิดของจำนวนเป็นสำคัญ เพราะเนื้อหาดังกล่าวสามารถจัดการเรียนรู้ที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดพื้นฐานที่ดีในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตและการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้นได้ เพราะเมื่อนักเรียนเผชิญกับแบบรูปที่ตนสนใจเขาจะเกิดการสังเกต ตั้งข้อคาดเดา หาความสัมพันธ์ สร้างกรณีทั่วไป และสร้างรูปแบบการนำเสนอ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และตัวแปรเป็นต้น นอกจากนี้ยังมีผลงานวิจัยหลายชิ้นยืนยันว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาส่วนใหญมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ทำให้เกิดอุปสรรคต่อการเปลี่ยนผ่านและถ่ายโยงความเข้าใจจากแนวคิดทางเลขคณิตไปสู่แนวคิดทางพีชคณิต เช่น การแก้สมการ เป็นต้น และการส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักมองความสัมพันธ์ของตัวเลขในประโยคเปิดของจำนวนในลักษณะของภาพรวมทั้งประโยคยังช่วยให้นักเรียนสามารถขยายความเข้าใจไปถึงเรื่องของสมบัติในกรณีทั่วไปของจำนวนและการดำเนินการได้อีกด้วย ซึ่งการเรียนรู้พีชคณิตจำเป็นจะต้องอาศัยสมบัติของจำนวนและการดำเนินการเป็นพื้นฐาน

2.3 การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

โอแดฟเฟอร์และธอร์นควิสต์ (O' Daffer; & Thornquist. 1993: 43) กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์คือ ส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย การสร้างกรณีทั่วไป และการสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์เรื่องต่าง ๆ

สมาคมนานาชาติเพื่อการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการศึกษา (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]. 2003: 32) ได้กำหนดนิยามของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยความสามารถในการคิดอย่างเป็นระบบและมีเหตุผล เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่ผู้เรียนไม่เคยเผชิญมาก่อน (Non-routine Problem) ซึ่งอาจเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือปัญหาในชีวิตประจำวันที่ผู้เรียนต้องแปลงความรู้และทักษะที่มีอยู่เพื่อใช้กับสถานการณ์ใหม่ โดยได้นำเสนอกรอบแนวคิดในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การสร้างสมมุติฐาน/ข้อคาดเดา/การทำนาย (Hypothesize/Conjecture/Predict) คือ ความสามารถในการตั้งข้อคาดเดาที่เหมาะสมจากการที่ได้สำรวจแบบรูป อภิปรายแนวคิด สร้าง

แบบจำลอง หรือทดสอบเซตของข้อมูล เป็นต้น

2. การวิเคราะห์ (Analyze) คือ ความสามารถในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหรือสิ่งต่าง ๆ ในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

3. การประเมิน (Evaluate) คือ ความสามารถในการวิจารณ์และประเมินแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ข้อคิดเห็น วิธีการแก้ปัญหา และการพิสูจน์ เป็นต้น

4. การสร้างกรณีทั่วไป (Generalize) คือ ความสามารถในการขยายผลของความคิดทางคณิตศาสตร์ และผลการแก้ปัญหาเดิมไปสู่การได้ผลลัพธ์ใหม่ที่มีความเป็นกรณีทั่วไปและใช้ได้กว้างขวางขึ้น เช่น กำหนดแบบรูป 1, 4, 7, 10, ... แล้วให้หาความสัมพันธ์ระหว่างเทอมที่อยู่ติดกัน แล้วนำผลที่ได้ไปช่วยในการคำนวณหาเทอมที่อยู่หลัง 61 เป็นต้น

5. การเชื่อมโยง (Connect) คือ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้เดิมที่มีอยู่กับความรู้นใหม่ เชื่อมโยงระหว่างความคิดทางคณิตศาสตร์แต่ละเรื่อง เชื่อมโยงความรู้และรูปแบบการนำเสนอในลักษณะต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น กำหนดรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็น 3 4 และ 5 เซนติเมตร แล้วให้หาว่ารูปสามเหลี่ยมดังกล่าวมีพื้นที่เป็นเท่าใด ซึ่งนักเรียนต้องเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเข้ามาช่วยในการหาพื้นที่ เป็นต้น

6. การสังเคราะห์ (Synthesize/Integrate) คือ ความสามารถในการรวมกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างผลสรุป และรวบรวมผลสรุปต่าง ๆ เพื่อสร้างผลสรุปใหม่ เช่น การใช้ข้อมูลจากการวิเคราะห์ตารางเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหา หรือ การอาศัยข้อมูลที่เหมือนกันของกราฟสองกราฟเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา เป็นต้น

7. การแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย (Solve Non-routine Problems) คือ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หรือปัญหาในสถานการณ์จริงที่นักเรียนไม่เคยเผชิญมาก่อน และความสามารถในการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์ในบริบทที่แตกต่างจากที่เคยใช้ (Unfamiliar Context) เช่น ถ้าเขียนแทนตัวเลข 11 ด้วย $\Delta\Delta\phi$ เขียนแทน 42 ด้วย $ww\phi\phi$ และเขียนแทน 26 ด้วย $w\Delta\phi$ แล้วจะเขียนแทน 37 ได้อย่างไร

8. การพิสูจน์ (Justify/Prove) คือ ความสามารถในการใช้สมบัติทางคณิตศาสตร์ยืนยันว่าประโยคใดเป็นจริงหรือเท็จภายใต้ข้อมูลที่กำหนดให้ เช่น จงแสดงว่าผลบวกของจำนวนคู่สองจำนวนได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่เสมอ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000) ได้กำหนดมาตรฐานในส่วนของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ว่า ในการจัดการศึกษาตั้งแต่ระดับก่อนอนุบาลถึงมัธยมศึกษาตอนปลายต้องเน้นการพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถ ดังต่อไปนี้

1. เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลว่าเป็นลักษณะพื้นฐานของวิชาคณิตศาสตร์ กล่าวคือในการจัดการเรียนรู้ต้องมุ่งให้นักเรียนมีความเข้าใจว่าการยืนยันเรื่องใด ๆ ต้องมีเหตุผลที่เหมาะสม

มารองรับเสมอ ประโยค (Statement) จำเป็นต้องมีหลักฐานมาสนับสนุนว่าเป็นจริง หรือมีตัวอย่างมาค้ำยันว่าเป็นเท็จ การเสนอความคิดได้ออกมานักเรียนต้องสามารถตอบได้ว่า ทำไมถึงคิดอย่างนั้น ทำไมถึงคิดว่าเป็นสิ่งที่ถูกต้อง

2. สร้างและตรวจสอบข้อาคตเตทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ นักเรียนจะต้องเรียนรู้การสร้างพัฒนา ค้นหา และตรวจสอบข้อาคตเตตั้งแต่ระดับประถมศึกษา เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการค้นพบ และข้อาคตเตก็คือเส้นทางไปสู่การค้นพบ นอกจากนี้นักเรียนต้องถูกฝึกให้คุ้นเคยกับคำถามที่เกี่ยวกับการค้นหาแบบรูป ว่าแบบรูปนี้มีลักษณะอย่างไร เทอมต่อไปคืออะไร แบบรูปนี้เป็นจริงตลอดหรือเป็นบางครั้ง

3. พัฒนาและประเมินการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ต้องให้นักเรียนเรียนรู้การให้เหตุผลเพื่อยืนยันหรือปฏิเสธข้อาคตเตที่มีความเป็นกรณีทั่วไปได้ เช่น เด็กในระดับประถมศึกษาตอนต้นต้องสามารถยืนยันความจริงในกรณีทั่วไปโดยใช้ความรู้จากกรณีเฉพาะได้จากการที่นักเรียนสามารถแสดงได้ว่า 9 เป็นจำนวนคี่โดยการจับคู่ที่ละสองแล้วเหลือเศษหนึ่งทำให้เขาสามารถให้เหตุผลได้ว่าจำนวนคี่ทุกจำนวนเมื่อจับคู่ที่ละสองแล้วต้องเหลือเศษหนึ่งเสมอ เด็กในระดับประถมศึกษาตอนปลายต้องสามารถสร้างการให้เหตุผลของสถานการณ์ปัญหาโดยอาศัยความรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ใช้ความรู้ที่ว่ารูปสองรูปที่เท่ากันทุกประการต้องมีพื้นที่เท่ากัน มาให้เหตุผลว่ารูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากันเพราะทั้งคู่มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมรูปเดียวกัน เป็นต้น นอกจากนี้ยังต้องส่งเสริมให้เด็กได้เรียนรู้การตรวจสอบข้อบกพร่องของการให้เหตุผล ซึ่งอาจทำได้โดยการให้เด็กอภิปรายร่วมกับเพื่อนร่วมชั้นเพื่อเปรียบเทียบความคิดของตนเองกับความคิดของคนอื่น ๆ ส่งผลให้เขาได้ปรับปรุงให้เหตุผลของตนมีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น ชั้นเรียนที่มีการกระตุ้นให้นักเรียนนำเสนอความคิดของตนเองและรับฟังข้อเสนอแนะจากคนอื่น เป็นชั้นเรียนที่เต็มไปด้วยบรรยากาศที่เหมาะสมสำหรับการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์อย่างยิ่ง ลักษณะการนำเสนอเหตุผลของเด็กเล็กจะอธิบายโดยใช้ภาษาของตนเอง หรืออาจใช้อุปกรณ์ แต่สำหรับเด็กโตเขาสามารถที่จะนำเสนอการให้เหตุผลโดยใช้รูปแบบการเขียนที่สามารถยอมรับได้โดยผู้เชี่ยวชาญ แต่สิ่งสำคัญก็คือครูต้องตระหนักว่ารูปแบบการเขียนพิสูจน์มีความสำคัญน้อยกว่าการคิดและการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องและชัดเจน

4. เลือกและใช้วิธีการและรูปแบบต่าง ๆ ของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ กล่าวคือ นักเรียนจะต้องได้รับการฝึกให้รู้ว่าจะใช้ความรู้และข้อมูลที่มีอยู่สร้างการให้เหตุผลที่ชัดเจนได้อย่างไร ต้องเรียนรู้เกี่ยวกับมาตรฐานในการให้เหตุผล และประเภทของการให้เหตุผลแบบต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นแบบลองผิดลองถูก การพิสูจน์แบบหาข้อขัดแย้ง แบบอุปนัย และแบบนิรนัย เป็นต้นว่าจะเลือกใช้รูปแบบใดของการพิสูจน์ที่เหมาะสมกับแต่ละกรณี

เบกก์ (Begg. 1994) เสนอว่าความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ ควรประกอบด้วย ความสามารถด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้

1. การจำแนกและการอธิบาย ประกอบด้วย การจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ การอธิบายถึงสิ่งต่าง ๆ อย่างชัดเจน
2. การให้เหตุผล ประกอบด้วย การสร้างข้อสรุปที่มีเหตุผล ใช้แบบจำลอง ข้อมูล สมบัติและความสัมพันธ์ เพื่อสร้างเป็นเหตุผล การพิสูจน์คำตอบและกระบวนการ การใช้แบบรูปและความสัมพันธ์เพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ การให้เหตุผลโดยใช้กราฟและการนำเสนอด้วยกราฟ ติดตามการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ ตัดสินความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล สร้างการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลแบบง่าย ๆ เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย เข้าใจและประยุกต์ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย การยกตัวอย่างค้าน และการยอมรับว่าการให้เหตุผลคือส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์
3. การสรุปอ้างอิง ประกอบด้วย การสร้างและประเมินข้อคาดเดาทางคณิตศาสตร์ การสร้างกรณีทั่วไป การตัดสินใจที่เหมาะสมและเชื่อถือได้
4. การพิสูจน์ ประกอบด้วย การยอมรับธรรมชาติของระบบสัจพจน์ในทางคณิตศาสตร์ การสร้างการพิสูจน์ ทั้งการพิสูจน์ทางอ้อม และการพิสูจน์โดยวิธีอุปนัย

บาร์ดี้ (Baroody. 1993) มีความเห็นว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ประเภทคือ การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ (Intuitive Reasoning) การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Inductive Reasoning) และการให้เหตุผลแบบอุปนัย (Deductive Reasoning) แต่อย่างไรก็ตาม บาร์ดี้แนะนำว่าในการจัดหลักสูตรเพื่อเน้นการพัฒนาให้ผู้เรียนมีทักษะในการให้เหตุผลนั้นควรเน้นในเรื่องของการแยกและจำแนกประเภทของสิ่งต่าง ๆ การสำรวจแบบรูปซึ่งส่งเสริมความสามารถในการวิเคราะห์ และการประเมินการให้เหตุผล ข้อคาดเดา และข้อสรุปว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่ เพิ่มเติมเข้ามามีอีกส่วนหนึ่ง

กล่าวโดยสรุปจะเห็นว่าแนวคิดเกี่ยวกับการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลโดยทั่วไปจะมีความใกล้เคียงกัน กล่าวคือ การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์สามารถพิจารณาได้ว่าเป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผล เพราะองค์ประกอบต่าง ๆ ของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ส่วน ตามองค์ประกอบของการให้เหตุผล ดังรายละเอียดในตารางต่อไปนี้

ตาราง 9 การเปรียบเทียบองค์ประกอบของให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์กับองค์ประกอบของการให้เหตุผล

ชื่อนักการศึกษา หรือองค์กร	องค์ประกอบของการให้เหตุผล		
	การวิเคราะห์	การสรุปอ้างอิง	การประเมิน
TIMSS	-การวิเคราะห์	-การสร้างข้อคาดการณ์ -การสร้างกรณีทั่วไป -การเชื่อมโยง -การสังเคราะห์ -การแก้ปัญหา -การพิสูจน์	-การประเมิน
NCTM		-การสร้างข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ -การพัฒนาการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ -การใช้การให้เหตุผลและการพิสูจน์รูปแบบต่าง ๆ	-การตรวจสอบข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ -การประเมินการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
Begg	-การจำแนกและการอธิบาย -การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา	-การสร้างข้อสรุปที่มีเหตุผล -การสร้างการให้เหตุผล -การใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย นิรนัย -การสร้างข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ -การสร้างกรณีทั่วไป -การสร้างการพิสูจน์	-การพิสูจน์คำตอบและกระบวนการ -การตัดสินความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล -การประเมินข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์
Baroody	-ความสามารถในการวิเคราะห์	-การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ -การให้เหตุผลแบบนิรนัย -การให้เหตุผลแบบอุปนัย	-ความสามารถในการประเมินการให้เหตุผล ข้อคาดการณ์ และข้อสรุป

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต

แบคเกิล (Yackel. 1997: 276-280) กล่าวถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตว่า เป็นการให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากการให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical Reasoning) หรือการให้เหตุผลที่เป็นเพียงการยกตัวอย่างในกรณีเฉพาะ แต่เป็นการให้เหตุผลที่มีความเป็นกรณีทั่วไป (General Reasoning) เกี่ยวกับความสัมพันธ์และวิธีการใช้สัญลักษณ์ในการนำเสนอความคิด

ทำนองเดียวกันกับคาร์เพนเตอร์และเลวี (Carpenter; & Levi. 2000: 1-18) ที่มองว่าการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการคิดในเชิงของความสัมพันธ์ (Relational Thinking) และการคิดในเชิงนามธรรม (Abstract Thought) ซึ่งแสดงออกมาในรูปของภาษาของนักเรียนเองหรือการใช้สัญลักษณ์ในการอธิบายความสัมพันธ์และความเป็นกรณีทั่วไป

ศูนย์คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (Nation Center for Mathematics and Science. 2005: Online) กล่าวถึงการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตว่ามีหลายรูปแบบ เช่น จากการหาผลบวกของ $5+7=12$, $3+7=10$, $1+11=12$ เป็นต้น แล้วสามารถตั้งข้อคาดการณ์ที่เป็นกรณีทั่วไปได้ว่า ผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวนจะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่ หรือจะกล่าวว่่านักเรียนมีการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเมื่อสามารถใช้เครื่องหมายเท่ากับในความหมายของเครื่องหมายที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณแทนที่จะมองแค่ว่าเป็นเครื่องหมายที่แทนการคำนวณ เป็นต้น

จากที่นำเสนอมาทั้งหมด ถ้าพิจารณาจากความหมายของการให้เหตุผล การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต และแนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา จะพบว่า การให้เหตุผลเกิดจากการคิด ประกอบด้วย การวิเคราะห์ การสรุปอ้างอิง และการประเมิน การพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลอาจพิจารณาจากองค์ประกอบทั้งสามส่วนนี้ สำหรับการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์เป็นการผนวกความหมายของการให้เหตุผลเข้ากับเนื้อหา คณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ เช่น การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต การให้เหตุผลเชิงเรขาคณิต หรือการให้เหตุผลเชิงสถิติ เป็นต้น การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเป็นส่วนหนึ่งของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ และจะมีขอบข่ายที่ขึ้นอยู่กับแนวคิดในการจัดการเรียนรู้ในแต่ละระดับนั้นๆ ดังนั้นการกำหนดความหมายของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษานั้นจึงเป็นการกำหนดโดยการผนวกความหมายของการให้เหตุผล และแนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษาเข้าด้วยกัน ซึ่งดังที่นำเสนอมาแล้วว่าในระดับประถมศึกษาจะไม่ได้เน้นการนำเสนอเนื้อหาพีชคณิตที่เป็นทางการ แต่เน้นที่การเตรียมพื้นฐานที่ดีในการเรียนรู้พีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น เน้นที่ส่งเสริมการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต การส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักมองปัญหาทางเลขคณิตในเชิงของความสัมพันธ์ และในเชิงกรณีทั่วไป รวมถึงการนำเสนอความคิดออกมาในรูปของภาษาหรือสัญลักษณ์

ดังนั้นการวิจัยในครั้งนี้จะนิยามการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาว่า คือการอธิบายหรือการแสดงหลักฐาน ในการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์

และการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ที่สร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษาของนักเรียนเองหรือสัญลักษณ์ทางพีชคณิต ประกอบด้วยการให้เหตุผลที่เกิดจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป โดยในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้สถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน ในการสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน

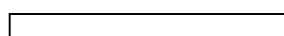
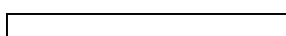
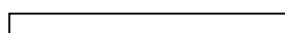
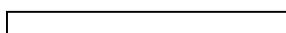
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนในระดับประถมศึกษา

เพียเจต์ (Piaget; et al. 1958) ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับขั้นของพัฒนาการทางสติปัญญา (Theory of Intellectual Development) ที่เกิดจากการสังเกตพฤติกรรมของเด็กในช่วงวัยต่าง ๆ โดยใช้วิธีการที่เรียกว่าวิธีทางคลินิก (Clinic Method) ซึ่งประกอบด้วยการใช้การสัมภาษณ์และการสังเกตที่มีโครงสร้าง จากการศึกษาได้ผลสรุปว่า คนปกติจะมีรูปแบบของความคิดอยู่ในสี่ขั้น ขึ้นอยู่กับความเจริญงอกงามของความสามารถในการคิดทางตรรกศาสตร์เป็นสำคัญ ได้แก่ ขั้นใช้ประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensory-Motor) ขั้นก่อนปฏิบัติการคิด (Pre-Operational) ขั้นคิดเป็นรูปธรรม (Concrete Operational) ขั้นคิดเป็นแบบแผน (Formal Operational) โดยในแต่ละขั้นนั้นแม้ว่า เพียเจต์ได้ระบุช่วงอายุไว้ว่าขั้นใดจะปรากฏในช่วงอายุใด แต่อย่างไรก็ตามพบว่ามีความแตกต่างระหว่างแต่ละบุคคลในการพัฒนาเข้าสู่ขั้นเหล่านั้นซึ่งอาจไม่ตรงกับช่วงอายุที่ระบุไว้

ขั้นใช้ประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว อายุ 0-2 ปี ลักษณะเด่นของเด็กในช่วงนี้คือการให้เหตุผลโดยยึดตนเองเป็นศูนย์กลาง เด็กจะรับประสบการณ์ต่าง ๆ เข้ามาด้วยการเห็นและการสัมผัสจับต้อง เริ่มมีการลองผิดลองถูกและพัฒนาการให้เหตุผลอย่างง่าย ๆ เช่น ถ้าสิ่งใดไม่อยู่ในสายตา ก็หมายถึงสิ่งนั้นไม่มีอยู่

ขั้นก่อนปฏิบัติการคิด อายุ 2-7 ปี ความคิดความเข้าใจของเด็กวัยนี้ขึ้นอยู่กับความรู้เป็นส่วนใหญ่ ไม่สามารถใช้การให้เหตุผลในการตัดสินใจต่าง ๆ ได้ เช่น เมื่อกำหนดแท่งไม้ที่มีลักษณะการวางแตกต่างกันดังรูป แล้วถามว่าแท่งไม้นี้ยาวเท่ากันหรือไม่ เด็กจะตอบว่าแบบแรกยาวเท่ากัน แต่แบบที่สองยาวไม่เท่ากัน แสดงให้เห็นว่าเด็กยังไม่มีความเข้าใจและยังไม่รู้จักคิดโดยใช้เหตุผล ความคิดจะขึ้นอยู่กับสิ่งที่รับรู้หรือสิ่งที่เห็นด้วยตา



ในขั้นนี้เด็กสามารถคิดถึงการกระทำอย่างหนึ่งโดยไม่ต้องลงมือกระทำจริง การให้เหตุผลจะไม่มองในรูปทั่ว ๆ ไป มองไม่เห็นความสัมพันธ์ของส่วนย่อยกับส่วนทั้งหมด เด็กจะสนใจสมบัติใดสมบัติหนึ่งแล้วเหมาเอาว่าสมบัตินั้นเป็นของสิ่งทั้งหมด ดังนั้นเด็กวัยนี้จะใช้การสรุปผลแบบทรานสดักชัน (Transduction) คือการสรุปจากกรณีเฉพาะหนึ่งไปยังกรณีเฉพาะอีกอย่างหนึ่ง (From Particular to Particular) ซึ่งเป็นลักษณะการสรุปที่มาก่อนวิธีอนุมานและอุปมาน และเป็นการสรุปที่ไม่ตระหนักถึงรูปแบบหรือหลักเกณฑ์ที่เป็นแบบแผนมากนัก จะยอมรับการให้เหตุผลที่ได้จากตัวอย่างหรือประสบการณ์เพียงบางส่วน หรือเป็นการให้เหตุผลโดยการเชื่อมโยงเหตุผลเฉพาะอย่างของเหตุการณ์หนึ่งไปสัมพันธ์กับเหตุผลเฉพาะอย่างของอีกเหตุการณ์หนึ่งซึ่งบางครั้งอาจทำให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้องทั้ง ๆ ที่แท้จริงแล้วเหตุการณ์ทั้งสองนั้นอาจไม่มีความสัมพันธ์กันเลย นอกจากนี้เด็กวัยนี้สามารถใช้การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ (Intuition reasoning) ซึ่งเป็นการให้เหตุผลที่เป็นการบอกเล่าโดยไม่พยายามหาความจริงหรือให้เหตุผลที่ถูกต้องสนับสนุน เป็นการให้เหตุผลที่ไม่ใช้กฎของการสรุปที่ถูกต้องซึ่งมีผลทำให้ได้ข้อสรุปที่อาจไม่ถูกต้องหรือไม่สมเหตุผล เช่น ถ้ามี $A \rightarrow B$ เด็กจะยอมรับ $B \rightarrow A$ ได้ เพราะเขาคิดว่ามันเหมือนกัน เด็กวัยนี้จะขาดความคิดเรื่องของการแยกประเภท เขาจะไม่ทำการเปรียบเทียบหรือมองหาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของที่เห็น เขาจึงมีความโน้มเอียงที่จะเชื่อตามสิ่งที่ตามองเห็นมากกว่าที่จะคิดถึงสิ่งที่เห็น

ขั้นคิดเป็นรูปธรรม อายุ 7-11 ปี ความคิดของเด็กวัยนี้จะจำกัดวงอยู่แค่สิ่งที่เขาสามารถมองเห็นเป็นรูปธรรมเท่านั้น การคิดหาเหตุผลในเรื่องต่าง ๆ ไม่ขึ้นอยู่กับความรู้เพียงอย่างเดียว เมื่อเผชิญปัญหาเด็กจะคิดแก้ปัญหาหลาย ๆ ทาง ก่อนที่จะตอบคำถาม การตอบจะมีการอธิบายเหตุผลประกอบ เด็กจะใช้หลักตรรกศาสตร์มากกว่าการรับรู้ สามารถแยกประเภทของสิ่งของได้ เด็กจะตระหนักว่าสิ่งของที่รวมกันอยู่ในกลุ่มหนึ่ง ๆ ต้องมีสมบัติบางอย่างร่วมกัน ซึ่งถือเป็นพื้นฐานของความคิดทางสถิติปัญญาที่ประกอบด้วยความสามารถในการรวมกลุ่มทางการรับรู้ (สามารถรวมกลุ่มของวัตถุโดยใช้สมบัติเดียว ๆ เท่านั้น) ความสามารถในการรวมกลุ่มทางสมอง (ตระหนักว่าอาจจะรวมวัตถุเป็นกลุ่มโดยใช้สมบัติที่มีร่วมกันเป็นเกณฑ์) ความสามารถในการจำแนกประเภทเชิงพหุคูณ (มีความตระหนักว่าสามารถจำแนกประเภทของวัตถุได้มากกว่าหนึ่งหนทาง) ความสามารถในการรวมสมาชิกทั้งหมดเข้าเป็นคลาส (ตระหนักว่าคลาสของวัตถุประกอบด้วยสับคลาส เช่น ถ้ามีกระดาษจำนวนหนึ่งที่ตัดเป็นรูปต่าง ๆ และประกอบด้วยกระดาษสีขาวและสีแดง เมื่อถามเด็กว่า มีจำนวนกระดาษสีแดงมากกว่า หรือมีจำนวนกระดาษมากกว่า เด็กอายุ 5-6 ปีส่วนมากจะสับสนและจะตอบว่า มีกระดาษสีแดงมากกว่า ที่เป็นเช่นนี้เพราะเด็กไม่มีความคิดของการรวมสมาชิกเข้าเป็นคลาสหรือพัฒนาการของเขาไม่ได้อยู่ในขั้นคิดเป็นรูปธรรม ส่วนเด็กที่อยู่ในช่วงปลายของวัยนี้จะสามารถตอบคำถามได้ถูกว่ามีจำนวนกระดาษมากกว่าจำนวนกระดาษสีแดง เพราะเด็กตระหนักว่ากระดาษสีแดงเป็นสมาชิกของคลาสของกระดาษทั้งหมด) การให้เหตุผลส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กับสิ่งที่เห็นเป็นรูปธรรม เกี่ยวกับประพจน์นั้นยัง

ไม่สามารถให้เหตุผลได้ วิเคราะห์ สังเคราะห์ได้ เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อยและส่วนทั้งหมด เด็กวัยนี้มีพัฒนาการอยู่ในขั้นที่สามารถใช้สมองคิดอย่างมีเหตุผล รู้จักแก้ปัญหาเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรมได้ รู้จักเปรียบเทียบความคิดในการแก้ปัญหาของตนเองและผู้อื่น และปรับปรุงแก้ไขของตนเองในส่วนที่คิดว่าไม่ถูกต้อง

ขั้นคิดเป็นแบบแผนหรือการคิดเป็นนามธรรม อายุ 11-15 ปี เด็กวัยนี้มีพัฒนาการทางด้านความรู้ความเข้าใจถึงระดับสูงสุดและไม่จำเป็นที่คนทุกคนจะบรรลุถึงขั้นนี้ได้ จุดเด่นของเด็กวัยนี้คือ สามารถที่จะคิดอย่างมีเหตุผลกับปัญหาทุกชนิด สามารถแก้ปัญหาอย่างมีระบบระเบียบ สามารถคิดหาเหตุผลนอกเหนือจากข้อมูลที่มีอยู่ เข้าใจถึงสิ่งที่เป็นามธรรมได้ เข้าใจเรื่องข้อตกลงเบื้องต้นอันเป็นข้อความที่ถูกกำหนดว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องมีหลักฐานยืนยันทำให้เด็กมีความสามารถในการคิดถึงสิ่งที่เป็นอุดมคติ เด็กจะมีแบบแผนของการให้เหตุผลที่เป็นระบบและเกี่ยวข้องกับกระบวนการที่ซับซ้อน เมื่อเผชิญกับสิ่งใด ๆ เขาต้องพยายามตรวจสอบให้แน่ใจไม่ไช่ยอมรับอย่างง่าย ๆ ตามที่ได้มีการรับรู้เหมือนกับเด็กในขั้นก่อนหน้านี้ เด็กในขั้นนี้มักจะคิดอะไรในรูปแบบของพีชคณิตโดยการกำหนดสัญลักษณ์แทนความคิดหรือปริมาณที่เกี่ยวข้อง มีการกำหนดสมมุติฐานช่วยในการหาคำตอบ สามารถใช้การให้เหตุผลที่เป็นนามธรรมตามหลักตรรกศาสตร์ที่มีแบบแผน สามารถใช้การให้เหตุผลแบบสมมุติฐาน-อนุมาน (Hypothetico Deductive) คือเมื่อเผชิญปัญหาเด็กจะตั้งสมมุติฐานขึ้นและหาข้อสรุปจากสมมุติฐานที่กำหนดไว้ สามารถใช้การให้เหตุผลแบบซิลโลจิสติก (เช่น คนทุกคนมี 2 ขา แดงเป็นคน ดังนั้นแดงมีสองขา) สามารถประเมินความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของตนเองหรือตรวจสอบความสมเหตุสมผลของสมมุติฐานได้ สามารถคิดในลักษณะของประพจน์ เช่น การให้เหตุผลในรูปแบบประโยค ถ้า...แล้ว สามารถคาดคะเนผลลัพธ์ที่ควรจะเป็น เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างส่วนรวมกับส่วนย่อยได้ดี สามารถใช้การคิดแบบสะท้อน (สามารถแก้ปัญหา เช่น ก ขาวกว่า ข และ ข ขาวกว่า ค ถามว่าใครดำที่สุด) สามารถคิดคำนวณหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับสัดส่วนและอัตราส่วนได้ สามารถจัดระบบของการรวมกลุ่มอย่างมีลำดับขั้น (เช่น การจัดระบบหนังสือในห้องสมุด) และสามารถสร้างแนวความคิดของตนเองได้

จากแนวคิดของเพียเจต์จะเห็นว่า นักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายเป็นช่วงวัยที่เริ่มมีการเปลี่ยนแปลงจากวัยที่เชื่อ หรือตัดสินใจต่าง ๆ ตามการรับรู้และไม่รู้จักหรือเข้าใจเรื่องของการให้เหตุผล เข้าสู่วัยที่เริ่มใช้การให้เหตุผลในการเปรียบเทียบ จำแนก สรุป หรือประเมินค่า สิ่งต่าง ๆ ที่ไม่ขึ้นอยู่กับการรับรู้เพียงอย่างเดียว เมื่อเผชิญปัญหาเด็กจะคิดแก้ปัญหาหลาย ๆ ทาง ก่อนที่จะตอบคำถาม การตอบจะมีการอธิบายเหตุผลประกอบ ใช้หลักตรรกศาสตร์มากกว่าการรับรู้ เด็กวัยนี้มีพัฒนาการอยู่ในขั้นที่สามารถใช้สมองคิดอย่างมีเหตุผล รู้จักแก้ปัญหาเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรมได้ แต่การให้เหตุผลส่วนใหญ่ขึ้นอยู่กัสิ่งที่เป็นามธรรม เกี่ยวกับประพจน์หรือสิ่งที่เป็นามธรรมนั้นยังไม่สามารถให้เหตุผลได้ ซึ่งแตกต่างจากช่วงวัยที่สูงกว่านี้ที่สามารถใช้การให้เหตุผลในลักษณะที่เป็น

นามธรรมได้ สามารถคิดในรูปของประพจน์และระบบสัจพจน์ได้ ดังนั้นการศึกษาเกี่ยวกับลักษณะในการให้เหตุผลเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนในช่วงวัยนี้จึงเป็นเรื่องที่ควรให้ความสนใจอย่างยิ่ง

บิกส์และคอลลิส (Biggs & Collis. 1982) ได้นำเสนอกรอบแนวคิดในการจำแนกระดับและประเมินคุณภาพในการเรียนรู้ที่ช่วยในการวิเคราะห์และจำแนกความแตกต่างของระดับความเข้าใจในเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนรู้ โดยพิจารณาจากโครงสร้างของผลการเรียนรู้ที่นักเรียนตอบสนองออกมาต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดในแต่ละสาขาวิชา รูปแบบนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อของโซโลเทคโซโนมี (SOLO Taxonomy) หรือแบบจำลองโซโล (SOLO model) ซึ่งนับเป็นกรอบแนวคิดที่ได้รับการยอมรับและนำไปอ้างอิงกันอย่างกว้างขวางในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจำแนกระดับและประเมินความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สาขาต่าง ๆ และวิชาอื่น ๆ (Reading. 2005: Online; Natcha. 2005.) ของนักเรียนในระดับต่าง ๆ โครงสร้างของกรอบแนวคิดของบิกส์และคอลลิสประกอบด้วยรูปแบบการตอบสนอง (Modes) และระดับของการตอบสนองในแต่ละรูปแบบ (Levels within each modes) สำหรับรูปแบบของการตอบสนองประกอบด้วย 5 รูปแบบที่คล้ายคลึงกับขั้นของพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Stages of Intellectual Development) ที่มีลักษณะการพัฒนาค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงจากการคิดหรือการให้เหตุผลที่อาศัยสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่การคิดหรือการให้เหตุผลที่มีลักษณะที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเรื่อย ๆ ได้แก่

1. ขั้นประสาทสัมผัส (Sensorimotor) เป็นช่วงระยะแรกเกิด พัฒนาการด้านการเรียนรู้จะเกิดจากการได้สัมผัสทางอวัยวะรับรู้สัมผัสทั้งหลาย เด็กวัยนี้จะสามารถตอบสนองได้เฉพาะกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมมาก ๆ เท่านั้น
2. ขั้นคิดเป็นภาพ (Iconic) ช่วงอายุประมาณ 2 ปี เป็นช่วงวัยที่สามารถเรียนรู้ผ่านรูปภาพหรือจินตนาการภายใน สามารถแสดงความคิดหรือจินตนาการภายในออกมาได้โดยการวาดภาพ
3. ขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic) ช่วงอายุประมาณ 6 ปี เป็นช่วงวัยที่มีกระบวนการเรียนรู้ที่สามารถแปลงสิ่งต่าง ๆ ในโลกแห่งความเป็นจริงให้เป็นระบบของสัญลักษณ์โดยใช้ภาษาของตนเองและนำสัญลักษณ์นั้นไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับโลกแห่งความเป็นจริง
4. ขั้นคิดเป็นแบบแผน (Formal) ช่วงอายุประมาณ 15-16 ปี เป็นช่วงวัยที่มีการพัฒนาความเข้าใจในลักษณะที่เป็นนามธรรมมาก ๆ สามารถสร้างสมมุติฐานเพื่อกำหนดทางเลือกในการแก้ปัญหา
5. ขั้นคิดเหนือแบบแผน (Postformal) ช่วงอายุประมาณ 22 ปี เป็นช่วงวัยที่สามารถพัฒนาหรือสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ ได้ด้วยตัวเอง

บิกส์และคอลลิสอธิบายว่านักเรียนที่ตอบสนองออกมาในรูปแบบของรูปธรรม-สัญลักษณ์ (หรือรูปแบบอื่น ๆ) ในบริบทของวิชาหนึ่งไม่จำเป็นจะต้องตอบสนองออกมาในรูปแบบเดียวกันกับ

บริบทของวิชาอื่น ๆ และนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาส่วนใหญ่จะมีการตอบสนองออกมาในรูปแบบรูปธรรม-สัญลักษณ์ นอกจากนี้นักเรียนในช่วงวัยเดียวกันบางคนอาจมีรูปแบบการตอบสนองแบบการคิดด้วยภาพ หรืออาจมีบางคนที่สามารถตอบสนองในรูปแบบที่เป็นแบบแผน (Biggs; & Collis. 1991: 57-76)

ในแต่ละรูปแบบการตอบสนองที่กล่าวมาแล้วข้างต้นสามารถจำแนกออกเป็นระดับต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

ระดับ 1 ก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural) เป็นระดับที่นักเรียนมีความเข้าใจต่ำกว่ารูปแบบความเข้าใจในช่วงวัยของตนเอง การตอบสนองของนักเรียนจะมีลักษณะสับสน เข้าใจผิด ใช้ลักษณะหรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้มาให้เกิดผล ไม่สามารถแก้ปัญหาที่เหมาะสมกับช่วงวัยของตนได้ ตัวอย่างการตอบสนองของผู้เรียนในระดับนี้ เช่น ฉันไม่เข้าใจคำถาม ไม่รู้ ทำไม่ถูก เป็นต้น

ระดับ 2 มองโครงสร้างเดียว (Unistructural) เป็นระดับที่นักเรียนมีความเข้าใจในประเด็นปัญหา แต่ใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นเพียงลักษณะเดียวในการหาข้อสรุป ทำให้อาจได้ข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลหรือไม่ถูกต้อง

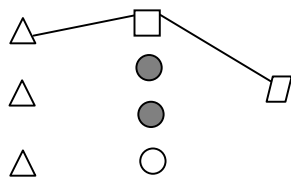
ระดับ 3 มองหลายโครงสร้าง (Multistructural) เป็นระดับที่นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นในการแก้ปัญหาตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป แต่ยังไม่สามารถสังเคราะห์หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์แต่ละลักษณะเข้าด้วยกันเพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาได้ แม้ว่าบางครั้งอาจทำได้คำตอบที่ถูกต้องก็ตาม

ระดับ 4 มองเชื่อมโยง (Relational) เป็นระดับที่นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นทั้งหมดมาใช้แก้ปัญหา และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดได้อย่างสมเหตุสมผล และสอดคล้องกันทั้งหมดจนทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล

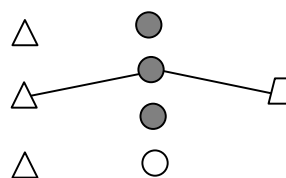
ระดับ 5 ขยายความคิด (Extended abstract) เป็นระดับที่นักเรียนสามารถใช้การให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถสร้างองค์ความรู้หรือสมมุติฐานใหม่จากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์

จากลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในแต่ละระดับข้างต้นถ้ากำหนดให้ $\triangle$ แทนข้อมูลที่กำหนดให้ $\square$ แทนการอ้างสิ่งไม่เหมาะสมหรือการใช้ข้อมูลที่ไม่ถูกต้อง $\bullet$ แทนข้อมูลที่เกี่ยวข้องที่กำหนดให้ $\circ$ แทนข้อมูลที่เกี่ยวข้องและสมมุติฐานที่สร้างขึ้นเองซึ่งไม่ได้กำหนดให้ และ $\square$ แทนการตอบสนอง จะสามารถใช้แผนภาพในการอธิบายรูปแบบหรือลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในแต่ละระดับเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้

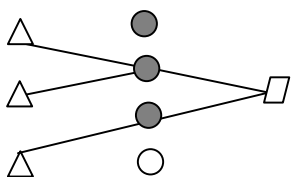
ระดับ 1 ก่อนมองโครงสร้าง



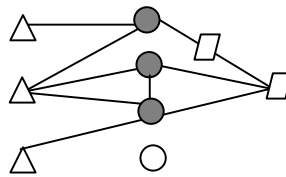
ระดับ 2 มองโครงสร้างเดียว



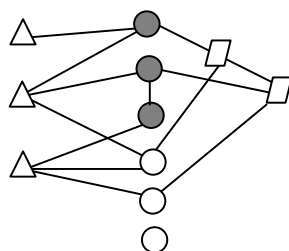
ระดับ 3 มองหลายโครงสร้าง



ระดับ 4 มองเชื่อมโยง



ระดับ 5 ขยายความคิด



ภาพประกอบ 3 ลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล

ที่มา: Helen Chick. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal*. p. 7.

นอกจากนี้บีกส์และคอลลิส (Biggs; & Collis. 1991: 65) ยังได้อธิบายเพิ่มเติมว่าเมื่อต้องการจำแนกลักษณะการตอบสนองที่แสดงถึงระดับความเข้าใจของนักเรียนนั้นก่อนอื่นจะต้องเจาะจงลงไปว่านักเรียนที่จะทำการวิเคราะห์มีลักษณะธรรมชาติอยู่ในรูปแบบ (Modes) ใด จากนั้นจึงค่อยทำการวิเคราะห์ว่านักเรียนมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในระดับ (Levels) ใด ซึ่งโดยปกติแล้วจะพบว่า สามระดับตรงกลางคือ ระดับมองโครงสร้างเดียว ระดับมองหลายโครงสร้าง และระดับมองเชื่อมโยง จะตกอยู่ในรูปแบบดังกล่าว ส่วนระดับก่อนมองโครงสร้างจะตกอยู่ในรูปแบบที่อยู่ก่อนหน้า และระดับขยายความคิดจะตกอยู่ในรูปแบบที่สูงขึ้นไป ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังตาราง 10

ตาราง 10 รูปแบบและระดับของการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล

รูปแบบ (Modes)	ระดับ (Levels)
รูปแบบที่สูงขึ้น (Next)	5 ขยายความคิด (Extended abstract)
รูปแบบเป้าหมาย (Target)	4 มองเชื่อมโยง (Relational)
	3 มองหลายโครงสร้าง (Multistructural)
	2 มองโครงสร้างเดียว (Unistructural)
รูปแบบที่ต่ำลง (Previous)	1 ก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural)

ที่มา: John B. Biggs; & Kevin F. Collis. (1991). Multimodal learning and intelligent behavior. *Reconceptualization and Measurement Intelligence*. p. 65.

3.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป

ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปเป็นองค์ประกอบสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการ เพราะเมื่อนักเรียนเผชิญกับแบบรูปที่ตนสนใจเขาจะต้องเกิดการสังเกต ตั้งข้อคาดการณ์ ทดสอบ อธิบาย หากรณีทั่วไป และนำเสนอ นอกจากนี้การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจและอภิปรายเกี่ยวกับแบบรูป โดยเฉพาะการหากรณีทั่วไปของแบบรูปจะเป็นการขยายความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรของผู้เรียนที่นอกเหนือไปจากการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าเท่านั้น (Lubinski & Ottot. 1999: 99; Ferrini-Mundy; Lappan; & Phillips. 1997: 228) ดังนั้นจึงมีนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายคน ที่ให้ความสนใจศึกษารูปแบบการให้เหตุผลที่แสดงถึงความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนเมื่อกำหนดให้หากรณีทั่วไปของแบบรูป เพื่อจะได้นำข้อมูลที่ได้ไปใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการจัดการเรียนรู้สำหรับนักเรียนในระดับประถมศึกษา

เพกก์และเรดเดน (Pegg; & Redden. 1990: 112) ได้จำแนกรูปแบบการให้เหตุผลของนักเรียนจำนวน 700 คน ที่มีอายุอยู่ระหว่าง 11-13 ปี จากความพยายามในการสร้างกฎทางพีชคณิตในการหาความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของพื้นสระว่ายน้ำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และจำนวนแผ่นกระเบื้องที่ใช้ในการปูพื้นสระว่ายน้ำ จากการทดลองพบว่าการให้เหตุผลของนักเรียนสามารถจำแนกได้เป็น 5 รูปแบบ ได้แก่ กลุ่มที่ 1 นักเรียนจะใช้วิธีการวาดรูปหรือการนับหรือทั้งสองวิธี ช่วยในการหาคำตอบ กลุ่มที่ 2 นักเรียนจะเปลี่ยนจากการใช้วิธีการนับมาเป็นการใช้ตารางเพื่อช่วยหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องและความยาวด้านของพื้นสระน้ำ แต่ยังไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ในลักษณะของกรณีทั่วไปได้ กลุ่มที่ 3 สามารถหาความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปได้ แต่เป็นในลักษณะของการหาเทอมถัดไป

จากเทอมที่ก่อนหน้านี้ เช่น $T_2 = T_1 + 4$ เมื่อ T แทนจำนวนแผ่นกระเบื้อง กลุ่มที่ 4 ใช้วิธีการในลักษณะเดียวกันกับกลุ่มที่ 3 แต่แทนที่จะสนใจที่จำนวนแผ่นกระเบื้องกลับสนใจไปที่ความยาวด้านของพื้นสระน้ำ และใช้การวาดภาพและการนับน้อยกว่ากลุ่มที่ 3 และกลุ่มที่ 5 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของพื้นสระน้ำและจำนวนของแผ่นกระเบื้อง และสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ออกมาในรูปของนิพจน์ทางพีชคณิตได้อย่างถูกต้อง เช่น $T = 4L + 4$ เป็นต้น ออร์ตันและออร์ตัน (Orton; & Orton. 1999: 104-120) ศึกษาความสามารถในการหากรณีทั่วไปของแบบรูปของจำนวน โดยใช้แบบทดสอบแบบเขียนตอบกับนักเรียนเกรด 6-8 จำนวน 1,040 คน และในจำนวนนี้เลือก 30 คน มาสัมภาษณ์เกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนเขียนตอบในขั้นแรก ผลการศึกษาพบว่า ประมาณครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งหมดสามารถหาพจน์ถัดไปของแต่ละแบบรูปได้ และมีนักเรียนจำนวนมากเมื่อถูกกำหนดให้หาพจน์ที่ 20 หรือพจน์ที่ 100 จะมีข้อผิดพลาดในเรื่องของการคำนวณ มีนักเรียนส่วนน้อยเท่านั้นที่สามารถหาพจน์ที่ n ได้ นอกจากนี้ผู้วิจัยได้พยายามจำแนกลักษณะการตอบสนองของนักเรียนออกเป็น 5 ระดับ นักเรียนในระดับ 0 นักเรียนไม่มีการตอบสนองใด ๆ ระดับ 1 นักเรียนสามารถสังเกตพบสมบัติบางอย่างของแบบรูป ระดับ 2 นักเรียนสังเกตพบสมบัติของแบบรูปแต่ไม่สามารถใช้สมบัตินั้นในการหาพจน์ต่อไปของแบบรูปได้ ระดับ 3 นักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปได้โดยใช้การพิจารณาจากผลต่างระหว่างพจน์ และระดับ 4 นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ของแบบรูปในรูปของสูตรทางพีชคณิตแม้ว่าจะไม่สามารถแสดงออกมาได้อย่างเป็นทางการ ตัวอย่างเช่น ในการสำรวจแบบรูป 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... นักเรียนในระดับ 1 สังเกตพบว่าแบบรูปมีลักษณะสลับกันระหว่างจำนวนคู่และจำนวนคี่ และพจน์ที่เป็นจำนวนคู่ เช่น 4 16 และ 36 เป็นจำนวนที่อยู่ในสูตรคูณแม่ 4 ระดับ 2 นักเรียนสังเกตพบว่าแบบรูปมีลักษณะสลับกันระหว่างจำนวนคู่และจำนวนคี่ และผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นจำนวนคี่ นักเรียนในระดับ 3 สามารถหาพจน์ถัดไปได้โดยใช้วิธีการบวกพจน์ก่อนหน้านี้ด้วย 3, 5, 7, 9, 11, ... ตามลำดับ และนักเรียนในระดับ 4 ใช้วิธีการหาพจน์ต่าง ๆ โดยการคูณพจน์นั้นด้วยตัวมันเอง กล่าวคือนักเรียนจะมองว่าแบบรูปนี้คือแบบรูปเดียวกันกับแบบรูป $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots$

แซค (Zack. 1995: 106-113) ศึกษาลักษณะการให้เหตุผลในการแก้ปัญหาแบบรูปที่นักเรียนไม่เคยเผชิญมาก่อนเกี่ยวกับการหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนด้านกับจำนวนเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ ของนักเรียนเกรด 5 จำนวน 25 คน โดยการกำหนดให้นักเรียนหาจำนวนเส้นทแยงมุมของรูป 10, 25, 52 และ n เหลี่ยมปกติ ผลการวิจัยพบว่าลักษณะการให้เหตุผลในการแก้ปัญหาของนักเรียนสามารถจำแนกได้เป็น 4 กลุ่ม ดังต่อไปนี้ กลุ่มที่ 1 (เป็นกลุ่มของนักเรียนส่วนใหญ่) ใช้วิธีการวาดรูปแล้วนับจำนวนของเส้นทแยงมุม กลุ่มที่ 2 ใช้วิธีการวาดรูปเส้นทแยงมุมเพียงบางส่วนแล้วสังเกตแบบรูปของจำนวนเส้นทแยงมุมภายในแต่ละรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ เช่นในกรณี

ของรูป 10 เหลี่ยม นักเรียนในกลุ่มนี้จะหาจำนวนเส้นทแยงมุมได้ 35 เส้น โดยการพิจารณาจากผลรวมของลำดับจำกัด 7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 0 ของจำนวนเส้นทแยงมุมของรูป 10 เหลี่ยม ที่พิจารณาจากแต่ละจุดยอด กลุ่มที่ 3 จะใช้วิธีการพิจารณาแบบรูปของจำนวนเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยมปกติโดยการพิจารณาจากผลต่างระหว่างพจน์ กล่าวคือพิจารณาจากลำดับ 0, 2, 5, 9, 14, ... และกลุ่มที่ 4 หาจำนวนของเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยมปกติใด ๆ โดยการหาสูตรทางพีชคณิตในกรณีทั่วไปที่เกิดจากการนำจำนวนเส้นทแยงมุมที่พุ่งออกจากแต่ละจุดยอดคูณด้วยจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมแล้วหารด้วยสอง ซึ่งเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนด้านและจำนวนเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยม

บิชอป (Bishop. 2000: 107-126) ทำการศึกษานักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 จำนวน 23 คน โดยการสัมภาษณ์กลวิธีในการแก้ปัญหาแบบรูปเรขาคณิต โดยการกำหนดให้หาจำนวนด้านรอบนอกของรูปเรขาคณิตจากแบบรูปที่กำหนดไว้ในลักษณะตัวอย่างดังรูป



ซึ่งผลจากการศึกษาพบว่ากลวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหาสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 ลักษณะได้แก่ 1) การใช้รูปหรือวัตถุและการนับช่วยในการคิด (Concrete modeling and counting) นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถจำลองแบบรูปหรือสามารถหาเทอมต่อไปของแบบรูปได้ แต่ยังไม่เข้าใจความสัมพันธ์ในแบบรูป ยังมีความสับสนในเรื่องของการใช้สัญลักษณ์ สามารถใช้ได้เพียงการแทนค่าแบบง่าย ๆ เท่านั้น 2) การใช้ความรู้เรื่องสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องช่วยในการคิด (Inappropriate use of proportion) นักเรียนในกลุ่มนี้จะรับรู้ว่ามีความสัมพันธ์บางอย่างระหว่างจำนวนเส้นรอบรูปหรือพื้นที่กับตำแหน่งของมัน แต่ไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ ทำได้เพียงแสดงออกมาในรูปของสัดส่วนง่าย ๆ เท่านั้น 3) ใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Focus on recursive relationships) นักเรียนในกลุ่มนี้จะมุ่งความสนใจไปที่ความสัมพันธ์ระหว่างรูปที่ต่อเนื่องกันโดยลำดับในแบบรูป โดยจะใช้วิธีการนับเพิ่มไปเรื่อย ๆ และ 4) ใช้การวิเคราะห์หาฟังก์ชันที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเส้นรอบรูปและจำนวนของรูปเรขาคณิต (Analysis of functional relationship)

ณัชชา กมล (2005) ได้พัฒนากรอบแนวคิดในการจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งในส่วนของความคิดเชิงพีชคณิตที่เกี่ยวข้องกับแบบรูปนั้น ได้ยึดรูปแบบการวิเคราะห์ลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแนวคิดของบิกส์และคอลลิส (Biggs; & Collis. 1982) ผลการศึกษาพบว่าความคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูปสามารถจำแนกได้เป็น 4 ระดับ ได้แก่ ระดับ 1 นักเรียนไม่เข้าใจหรือเข้าใจสับสนเกี่ยวกับแบบรูปที่กำหนดให้เดาคำตอบหรือตอบแบบไม่ตรงประเด็น หรือใช้ข้อมูลเพียงประเด็นเดียวในแบบรูปเพื่อหาค่าของแต่ละเทอมในแบบรูป ระดับ 2 นักเรียนสามารถหาค่าของพจน์ถัดไปจากแบบรูปที่กำหนดให้ได้แต่ไม่สามารถหาค่าของเทอมที่อยู่ไกล ๆ ได้ พยายามที่จะหากรณีทั่วไปของแบบรูปจากข้อมูลที่กำหนดให้

ในแบบรูปเพียงประเด็นเดียวซึ่งทำให้ผลที่ได้ไม่ถูกต้อง ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์หาค่าของพจน์ถัดไปจากพจน์ที่อยู่ก่อนหน้าโดยใช้การวาดรูปหรือการนับ ระดับ 3 นักเรียนเข้าใจเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่กำหนดให้และใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกลๆ ได้ด้วยวิธีการที่เป็นระบบ แต่ไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ ระดับ 4 นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์และสามารถอธิบายออกมาในรูปของคำพูดได้ สร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปในรูปของสูตรทางพีชคณิตได้

จากผลงานวิจัยที่น่าเสนอมาจะเห็นว่าลักษณะการให้เหตุผลที่แสดงถึงความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนจะมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไปแม้ว่าจะอยู่ในช่วงวัยเดียวกันก็ตาม ซึ่งจากงานวิจัยที่น่าเสนอมาจะเห็นได้ว่าสามารถจำแนกออกเป็น 4 ลักษณะหลัก ๆ ได้แก่ กลุ่มที่ใช้การให้เหตุผลเชิงประจักษ์ในการสร้างข้อสรุปซึ่งจะให้ความสนใจกับสมบัติที่ไม่ใช่ประเด็นสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้อง กลุ่มที่สามารถวิเคราะห์หาสมบัติที่ตรงประเด็นได้บางประเด็นทำให้สามารถใช้การสร้างแบบจำลองเพื่อหาเทอมถัดไปได้ กลุ่มที่วิเคราะห์สมบัติสำคัญได้ครบถ้วนทั้งหมดแต่ยังคงมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว คือความสัมพันธ์ระหว่างค่าของเทอมที่ต่อเนื่องกันแล้วใช้วิธีการของความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในการสร้างข้อสรุป และกลุ่มที่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของเทอมและค่าของเทอมของแบบรูปในลักษณะของฟังก์ชันได้ ประเด็นที่ผู้วิจัยให้ความสนใจในการวิจัยครั้งนี้คือ การสำรวจว่าลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนไทยในระดับประถมศึกษาตอนปลายว่ามีลักษณะ และแต่ละลักษณะมีรายละเอียดอย่างไร โดยในการวิจัยครั้งนี้จะมุ่งศึกษาลักษณะการให้เหตุผลที่เกิดขึ้นเมื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนวิเคราะห์แบบรูป การสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับการขยายและหากรณีทั่วไปของแบบรูป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้

3.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

ความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับและโครงสร้างของประโยคเปิดของจำนวนที่ถูกต้องนับเป็นปัจจัยพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนรู้พีชคณิต (Falkner; Levi; & Carpenter. 1999) อย่างไรก็ตามแม้ว่าทั้งครูและนักเรียนจะต้องใช้เครื่องหมายเท่ากับบ่อยครั้งมากในชั้นเรียน แต่ผลการวิจัยกลับพบว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาส่วนใหญ่มักมีความเข้าใจที่ผิดพลาดเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และหลักของการสมมูลกันของสมการ (Kieran. 1981, Matz. 1982, Carpenter; & Levi. 2000, Baroody; & Ginsburg. 1983) ส่งผลถึงความสามารถของผู้เรียนในการหาคำตอบของสมการ และการดำเนินการเกี่ยวกับสมการในระดับที่สูงขึ้น ดังนั้นการสำรวจลักษณะการให้เหตุผลที่แสดงถึงความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับและโครงสร้างของประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนนั้นจึงเป็นประเด็นที่น่าสนใจและมีประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้พีชคณิตอย่างมาก

นักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่าน (Kieran. 1981, Matz. 1982, Falkner; Levi; & Carpenter. 1999, Carpenter & Levi. 2000, Jones; & Pratt. 2006) ค้นพบว่าความเข้าใจของนักเรียนระดับ

ประถมศึกษาเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับสามารถจำแนกได้เป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ นักเรียนกลุ่มที่เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือเครื่องหมายที่แทนการคำนวณคำตอบของการดำเนินการเกี่ยวกับจำนวน โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะเข้าใจว่าหลังเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบที่ได้จากการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับเท่านั้น ซึ่งเป็นความเข้าใจที่มีความคลาดเคลื่อนและเป็นอุปสรรคอย่างมากต่อนักเรียนในการหาคำตอบของสมการ และการเปลี่ยนผ่านความเข้าใจจากแนวคิดทางเลขคณิตไปสู่แนวคิดทางพีชคณิต ในขณะที่นักเรียนอีกกลุ่มหนึ่ง เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ระหว่าง 2 นิพจน์ซึ่งมีค่าเท่ากัน ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ถูกต้องและมีความสำคัญต่อนักเรียนอย่างมากด้วยเหตุผล 2 ประการคือ ประการแรกเป็นความเข้าใจที่จำเป็นต้องใช้ในการให้เหตุผลกับสมการในลักษณะ $7 + 8 = 7 + 7 + 1$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่มีความสำคัญและเป็นประโยชน์อย่างมากในทางเลขคณิตเพราะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์ที่ยากขึ้น เช่น $45 - 18 = 45 - 20 + 2$ เป็นต้น ตัวอย่างดังกล่าวแสดงให้เห็นถึงการที่นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจทางเลขคณิตควบคู่ไปกับการเรียนรู้แนวคิดทางพีชคณิต (Falkner; Levi; & Carpenter. 1999: Online) ประการที่สอง การไม่เข้าใจความหมายในลักษณะดังกล่าวจะเป็นอุปสรรคกับนักเรียนอย่างมากในการเปลี่ยนผ่านและถ่ายโยงแนวคิดจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต (Kieran. 1981, Matz. 1982) เช่น เมื่อนักเรียนพบสมการ $4x + 27 = 87$ การแก้สมการลักษณะดังกล่าวจะเริ่มต้นด้วยการลบออกทั้งสองข้างของสมการด้วย 27 คำถามที่ตามมาก็คือเพราะเหตุผลใดจึงทำได้ การที่นักเรียนเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของความสัมพันธ์ระหว่าง 2 นิพจน์ จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นว่าการดำเนินการดังกล่าวมีเหตุผลเพราะทำให้ทั้งสองข้างของสมการยังคงเท่ากันอยู่ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจะเห็นว่านักเรียนจำเป็นต้องมีความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือความสัมพันธ์ไม่ใช่สัญลักษณ์แทนการคำนวณคำตอบเพียงอย่างเดียว

เพื่อที่จะประเมินความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ คาร์เพนเตอร์และเลวี (Carpenter & Levi. 2000) ได้ทดลองกำหนดให้นักเรียนระดับประถมศึกษาพิจารณาประโยคเปิดของจำนวนง่าย ๆ เช่น $8 + 4 = \square + 5$ ซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับผลงานวิจัยที่ทำมาก่อนหน้า (Kieran. 1981; Saenz-Ludlow & Walgamuth. 1998) กล่าวคือนักเรียนส่วนใหญ่จะเติมตัวเลข 12 หรือ 17 ลงในช่องว่างแทนที่จะเติมตัวเลข 7 ซึ่งผู้วิจัยวิเคราะห์ว่าการที่นักเรียนตอบสนองออกมาในลักษณะดังกล่าวเป็นเพราะนักเรียนมีความเข้าใจว่าจำนวนที่อยู่หลังเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบที่ได้จากการคำนวณ หรือในที่นี้ก็คือผลบวกของจำนวนที่อยู่ก่อนหน้าเครื่องหมายเท่ากับ

นอกจากนี้ กอนซาเลซ แอมบรอส และมาร์ทีเนส (Gonzalez, Ambrose, & Martinez. 2004) ได้วิเคราะห์ความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียนเกรด 3 เกรด 5 และเกรด 6 โดยใช้ประโยคเปิดของจำนวน เช่น $14 + \square = 13 + 4$ และ $\square = 25 - 12$ พบว่ากลุ่มของนักเรียนเกรด 3 มีการตอบสนองที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับการสร้างของประโยค โดยนักเรียนส่วนใหญ่จะพิจารณาเครื่องหมาย

เท่ากับในแง่ของการคำนวณโดยไม่ได้นึกถึงความหมายในแง่ของความสัมพันธ์เลย ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากการที่นักเรียนไม่สามารถหาคำตอบของประโยคในลักษณะ เช่น $12 + 7 = 7 + \square$ ได้เลย ส่วนนักเรียนเกรด 5 และเกรด 6 สามารถตอบคำถามได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ และใช้เครื่องหมายเท่ากับในลักษณะของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ แต่มักจะตอบผิดในกรณีที่ประโยคที่เป็นประโยคที่เป็นการลบ

เบอร์และคนอื่น ๆ (Behr; et al. 1980) ให้คำอธิบายว่านักเรียนระดับประถมศึกษาจะใช้เครื่องหมายเท่ากับในความหมายของสัญลักษณ์แทนการคำนวณมากกว่าในความหมายของสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ ทั้งนี้เหตุผลเนื่องจากการรับรู้ที่เกิดจากการนำเสนอของครูในชั้นเรียนประการหนึ่ง และอีกประการหนึ่งคือจากการนำเสนอของหนังสือเรียนที่มักจะสื่อความหมายของเครื่องหมายเท่ากับไปในแง่ของสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งสอดคล้องกับงานของ แมคเนล (McNeil. 2004) ที่ได้ศึกษาพบว่าความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิตเป็นอุปสรรคกับความสามารถในการแก้สมการของนักเรียนในระดับประถมศึกษา โดยนักเรียนที่ถูกสอนด้วยบทเรียนที่มีบริบทเกี่ยวกับการคำนวณในลักษณะ $15 + 13 = 28$ จะเกิดความสับสนเมื่อต้องหาคำตอบของประโยคเปิดประเภท $5 + 4 + 7 = 5 + \square$ โดยนักเรียนบางคนจะเลือกใช้วิธีการนำเอาตัวเลขทั้งหมดในสมการมาบวกกันเต็มลงในช่องว่าง ในขณะที่บางคนใช้วิธีการเปลี่ยนประโยคเปิดข้างต้นเป็น $5 + 4 + 7 + 5 = \square$ เป็นต้น ตัวอย่างลักษณะคำตอบของนักเรียนที่แมคเนลทำการทดลองเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 11 ตัวอย่างคำตอบของนักเรียนและวิธีการคิดจากสมการที่กำหนดให้

$5 + 4 + 7 = 5 + \square$	
คำตอบ	วิธีการ/เหตุผล
11	สองข้างของประโยคเปิดต้องมีค่าเท่ากัน (ถูกต้อง)
21	นำจำนวนทั้งหมดมาบวกกัน (แปลงโจทย์)
16	หลังเครื่องหมายเท่ากับคือผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกจำนวนที่อยู่หน้าเครื่องหมาย
4	ใช้แบบรูป

ที่มา: McNeil, M. Nicole. (2004). *Don't teach me 2+2 equals 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning.* (Online).

แมคเนลวิเคราะห์ว่าพฤติกรรมลักษณะเช่นนี้เป็นไปตามทฤษฎีที่ว่า การเรียนรู้เรื่องที่ตามมาทีหลังจะขึ้นอยู่กับการเรียนรู้เรื่องที่เรียนก่อนหน้าซึ่งมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกัน กล่าวคือเมื่อเราเรียนรู้

สิ่งหนึ่งมาเป็นเวลานานแล้วเปลี่ยนไปเรียนรู้อีกสิ่งหนึ่งที่สัมพันธ์กันกับสิ่งที่เรียนรู้มาก่อนจะมีอิทธิพลอย่างมากต่อการเรียนรู้อีกสิ่งหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่นเราจะสามารถเรียนรู้ภาษาที่สองได้ดีกว่าถ้าเราไม่เคยเรียนรู้ภาษาประจำชาติมาก่อนเลย วิชาคณิตศาสตร์เป็นสาขาหนึ่งที่มีธรรมชาติการจัดการเรียนรู้ที่กำหนดให้นักเรียนเรียนรู้หัวข้อเรื่องหนึ่งแล้วทิ้งไว้เป็นเวลานานก่อนที่จะไปเรียนรู้เรื่องใหม่ที่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันมาก โดยเฉพาะที่เห็นได้ชัดคือหลักสูตรส่วนใหญ่จะจัดให้นักเรียนเรียนเกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิตเป็นเวลาหลายปีตั้งแต่อนุบาลจนถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ก่อนที่จะเริ่มให้เรียนพีชคณิตและเริ่มแนะนำเรื่องสมการและหลักของความสมนัยกันของสมการอย่างเป็นทางการ ดังนั้นจึงเกิดปัญหาขึ้นอย่างมากกับนักเรียนในการเรียนรู้เรื่องสมการ

สลิแมนและคนอื่น ๆ (Schliemann; et al. 1998) ได้ศึกษาการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสมการของนักเรียนเกรด 3 โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะศึกษาความเข้าใจของนักเรียนใน 2 ประการ คือ ประการแรกเพื่อศึกษาความเข้าใจของนักเรียนว่าถ้าบวกหรือลบสมการของจำนวนทั้งสองข้างด้วยจำนวนใดจำนวนหนึ่งแล้วผลยังคงเท่ากันหรือไม่ และถ้าบวกหรือลบสมการของจำนวนทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่แตกต่างกันผลยังคงเท่ากันหรือไม่ ประการที่สองถ้านักเรียนเผชิญกับสมการ 2 แบบคือสมการในลักษณะ $8 + x = 3x$ และสมการในลักษณะ $7 + y = 2 + y + x$ (สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัว และต้องหาคำตอบโดยการตัดตัวไม่ทราบค่าตัวหนึ่งออกไป) ซึ่งกำหนดให้ในรูปของโจทย์ปัญหา แล้วนักเรียนจะดำเนินการอย่างไร นักเรียนจะเลือกใช้สัญลักษณ์แบบไหนในการนำเสนอ ความช่วยเหลือแบบไหนที่นักเรียนต้องการ และถ้านักเรียนสามารถนำเสนอสมการได้เขาจะดำเนินการอย่างไรในการหาคำตอบ ซึ่งผลการวิจัยส่วนหนึ่งพบว่านักเรียนเกรด 3 สามารถเข้าใจหลักการสำคัญพื้นฐานหลักการหนึ่งของพีชคณิตได้ กล่าวคือ การบวกหรือลบสองข้างของสมการด้วยจำนวนที่เท่ากันผลยังคงเท่ากัน และการบวกหรือการลบทั้งสองข้างของสมการด้วยจำนวนที่มีค่าต่างกันจะทำให้สมการใหม่ไม่สมมูลกับสมการเดิม

จากที่นำเสนอมาข้างต้นจะพบว่าการเปิดโอกาสให้นักเรียนพิจารณาประโยคเปิดของจำนวนจะช่วยให้สามารถรับรู้ถึงความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับของนักเรียน ซึ่งมีทั้งความเข้าใจในลักษณะของเครื่องหมายที่ใช้แทนการคำนวณคำตอบซึ่งจะเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้พีชคณิตในอนาคต และความเข้าใจในลักษณะของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ปริมาณที่มีค่าเท่ากันซึ่งเป็นความเข้าใจที่จะเป็นพื้นฐานที่ดีทั้งต่อการเรียนรู้เลขคณิตและพีชคณิต สำหรับประเด็นที่ผู้วิจัยสนใจศึกษาในการวิจัยครั้งนี้คือ การสำรวจลักษณะการให้เหตุผลที่แสดงถึงความเข้าใจของนักเรียนไทยในระดับประถมศึกษาตอนปลายเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับว่ามีลักษณะอย่างไร สอดคล้องหรือแตกต่างกันกับผลงานวิจัยที่ศึกษากับนักเรียนต่างชาติที่ทามาก่อนหน้าหรือไม่อย่างไร โดยจะพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนที่เกิดจากการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ประโยคเปิดของจำนวน สร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยค และประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 การสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระยะที่ 2 การเก็บรวบรวมข้อมูลจากนักเรียนกลุ่มเป้าหมายเพื่อนำมาปรับปรุงกรอบแนวคิดในระยะที่ 1 และระยะที่ 3 การใช้กรอบแนวคิดที่ปรับปรุงแล้วจำแนกลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เพื่อใช้พิจารณาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ศึกษา เปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 และเพื่อเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท รายละเอียดของแต่ละระยะเป็นไปตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ตาราง 12 วิธีการและขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

วัตถุประสงค์	กิจกรรม	ระยะเวลาดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
1. เพื่อพัฒนากรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย 1.1 การสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นจากการสังเคราะห์	1.1.1 สังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในด้าน	ระยะที่ 1 มีนาคม 2548 – พฤศจิกายน 2549	กรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจากการ

ตาราง 12 (ต่อ)

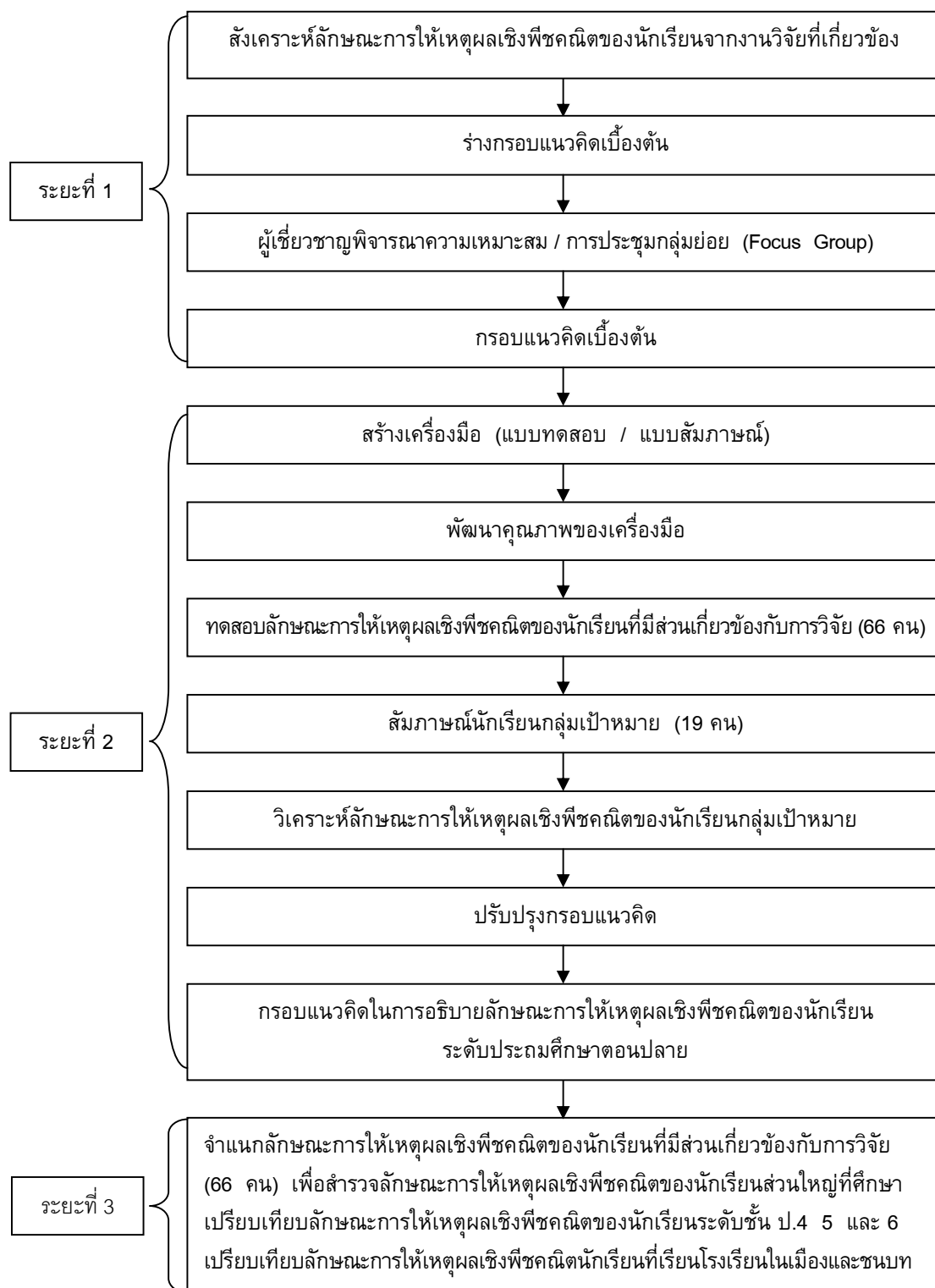
วัตถุประสงค์	กิจกรรม	ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	- ความหมายและองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตระดับประถมศึกษา - ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา 1.1.2 สร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยในข้อ 1.1.1 1.1.3 ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสมของกรอบแนวคิดเบื้องต้น ประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) และปรับปรุงตามข้อเสนอแนะ		สังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ
1.2 การปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้นโดยอาศัยการเก็บข้อมูลจากนักเรียนโดยตรง	1.2.1 กำหนดสนามและกลุ่มเป้าหมาย - เลือกสนาม 2 โรงเรียน (ในเมืองและชนบท) - เลือกนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เพื่อทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต จำนวน 66 คน - เลือกนักเรียนกลุ่มเป้าหมายเพื่อสัมภาษณ์ จำนวน 19 คน จากนักเรียน 66 คน โดยพิจารณาจากผลการทำแบบทดสอบ 1.2.2 สร้างเครื่องมือวัดลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต - แบบทดสอบ แบบสัมภาษณ์ แบบบันทึกการสัมภาษณ์	ระยะที่ 2 ธันวาคม 2549 - กันยายน 2550	กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ที่ปรับปรุงจากกรอบแนวคิดเบื้องต้น จากผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้

ตาราง 12 (ต่อ)

วัตถุประสงค์	กิจกรรม	ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
	1.2.3 พัฒนาเครื่องมือวัดลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต - ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบให้คำแนะนำ - ผู้วิจัยปรับปรุงตามข้อเสนอแนะ - ทดลองใช้เครื่องมือและปรับปรุง 1.2.4 เก็บรวบรวมข้อมูล - ทดสอบนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย (66 คน) - สัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มเป้าหมาย (19 คน) 1.2.5 วิเคราะห์ข้อมูล (จากนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย 19 คน) - ผู้วิเคราะห์ 3 คน วิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน 1.2.6 นำข้อมูลที่ได้ไปปรับปรุงกรอบแนวคิด		เหตุผลที่นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยแสดงออกมาจากการทำแบบทดสอบและนักเรียนกลุ่มเป้าหมายแสดงออกมาจากการการสัมภาษณ์
2. เพื่อสำรวจความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย	2.1 จำแนกนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวน 66 คนที่ทำแบบทดสอบ เป็นกลุ่ม ๆ ตามลักษณะการให้เหตุผลตามกรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่พัฒนาขึ้น 2.2 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย	ระยะที่ 3 กันยายน 2550	ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

ตาราง 12 (ต่อ)

วัตถุประสงค์	กิจกรรม	ระยะเวลา ดำเนินการ	ผลที่ได้รับ
3. เพื่อเปรียบเทียบ ลักษณะการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้น ประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6	3.1 นำผลในข้อ 2.1 มาจำแนกตาม ระดับชั้นเพื่อพิจารณาลักษณะการให้ เหตุผลเชิงพีชคณิตนักเรียนเป็นรายชั้น คือ ป. 4 5 และ 6 แล้วเปรียบเทียบ ข้อแตกต่าง	ระยะที่ 3 กันยายน 2550	ข้อแตกต่างกัน ระหว่าง ลักษณะการให้ เหตุผลเชิง พีชคณิตของ นักเรียนชั้น ป.4 5 และ 6
4. เพื่อเปรียบเทียบ ลักษณะการให้เหตุผล ของนักเรียนระดับ ประถมศึกษาตอน ปลายที่มี สภาพแวดล้อมในการ เรียนรู้ที่แตกต่างกัน	4.1 นำผลในข้อ 2.1 มาจำแนกเป็น โรงเรียนเพื่อพิจารณาลักษณะการให้ เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียน โรงเรียนในเมือง และโรงเรียนในชนบท แล้วเปรียบเทียบข้อแตกต่าง	ระยะที่ 3 กันยายน 2550	ข้อแตกต่างกัน ระหว่าง ลักษณะการให้ เหตุผลเชิง พีชคณิตของ นักเรียนที่เรียน โรงเรียนใน เมืองและ โรงเรียนใน ชนบท



ภาพประกอบ 4 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

ระยะที่ 1 การสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้น ประกอบด้วยกิจกรรมต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การสังเคราะห์ความหมาย และองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาความหมายและองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลเชิงพีชคณิต รวมถึงความหมายของพีชคณิต และแนวคิดในการจัดการเรียนรู้พีชคณิตในระดับประถมศึกษา ซึ่งผลจากการศึกษาได้นำมาสังเคราะห์เป็นความหมาย และองค์ประกอบของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ ดังต่อไปนี้

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษา หมายถึง การอธิบายหรือการแสดงหลักฐาน ในการหาข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ และการสร้างความเป็นกรณีทั่วไป ซึ่งสร้างขึ้นจากการคิดที่อาศัยหลักตรรกวิทยาแล้วถ่ายทอดออกมาในรูปของภาษาของนักเรียนเองหรือสัญลักษณ์ทางพีชคณิต ประกอบด้วย การให้เหตุผลที่เกิดจากการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป โดยในการวิจัยครั้งนี้เลือกใช้สถานการณ์เกี่ยวกับแบบรูป (Patterns) และประโยคเปิดของจำนวน (Open Number Sentences) ในการสร้างกิจกรรมที่นำไปสู่การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน

การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา หมายถึง การค้นหาความจริงที่แฝงอยู่ในสถานการณ์ปัญหา ประกอบด้วย การวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหา การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบ และการวิเคราะห์หลักการหรือกฎเกณฑ์ที่องค์ประกอบเหล่านั้นอยู่อย่างเป็นระบบ

การสร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหา หมายถึง ความสามารถในการระบุข้อสรุปโดยใช้วิธีการที่สมเหตุสมผล ความสามารถในการนำเสนอหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุป และความสามารถในการอธิบายว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป หมายถึง ความสามารถในการตัดสินใจว่าข้อสรุปที่ได้มีความเหมาะสมหรือไม่ โดยต้องมีเกณฑ์หรือมาตรฐานสำหรับยึดเป็นข้ออ้างอิงในการตัดสินใจหรือเป็นบรรทัดฐานสำหรับวินิจฉัยความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับแบบรูป หมายถึง การให้เหตุผลที่เกิดขึ้นจากการเปิดโอกาสให้นักเรียนวิเคราะห์แบบรูป การสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับการขยายและหากรณีทั่วไปของแบบรูป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยข้อจำกัดของแบบรูปที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้คือ เป็นแบบรูปที่มีกฎเกณฑ์ทั่วไปอยู่ในรูปเชิงเส้น

การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน หมายถึง การให้เหตุผลของนักเรียนที่เกิดจากการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดของจำนวน สร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด และประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้

2. การสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต
 ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ในขั้นตอนนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผล และการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ที่มีการศึกษามาก่อนหน้า ได้แก่ ทฤษฎีเกี่ยวกับพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ รูปแบบการประเมินคุณภาพในการเรียนรู้ของบีกและคอลลิส งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปของเพกซ์และเรตเดน ออร์ทันและออร์ทัน แซค บิชอป และณัชชา กมล งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของ ไคเออแรน มาทซ์ซ ฟาล์คเนอ เลวี คาร์เพนเตอร์ กอนซาเลซ แอมบรอส และมาร์ทีเนส เบร์และคนอื่นๆ แมคเมล สลิแมนและคนอื่นๆ นำมาสังเคราะห์เป็นกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ตามองค์ประกอบที่กำหนดไว้ในข้อ 1

หลังจากนั้นได้ส่งให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบความเหมาะสมอีกครั้ง โดยในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำกรอบแนวคิดเบื้องต้นที่สังเคราะห์ขึ้น ส่งให้ผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษาจำนวน 3 ท่าน ซึ่งเป็นผู้ที่เคยทำงานวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาลักษณะการคิดและการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน และผู้ที่มีประสบการณ์สูงในการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ ให้ช่วยตรวจสอบความเหมาะสม จากนั้นได้จัดการประชุมกลุ่มย่อย (Focus Group) โดยการนำกรอบแนวคิดที่ได้มาร่วมพิจารณาถึงถึงความเหมาะสมของกรอบแนวคิด โดยผู้ร่วมพิจารณาประกอบด้วย คณะกรรมการที่ปรึกษาปริญญาโท จำนวน 3 ท่าน นิติระดับปริญญาเอกสาขาคณิตศาสตร์ศึกษา จำนวน 8 ท่าน ผู้ช่วยวิจัยซึ่งเป็นครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา จำนวน 2 ท่าน และผู้วิจัย รวมทั้งหมด 14 ท่าน โดยก่อนวันประชุมผู้วิจัยส่งเอกสารที่เกี่ยวข้องให้ผู้ร่วมประชุมทุกท่านพิจารณาล่วงหน้าประมาณ 2 สัปดาห์ จากนั้นเปิดโอกาสให้ผู้ร่วมประชุมเสนอแนะความคิดเห็นและแลกเปลี่ยนมุมมองกันจนกว่าจะได้ข้อสรุปซึ่งที่ประชุมมีความเห็นร่วมกัน ก่อนที่ผู้วิจัยจะได้นำข้อเสนอนี้ที่ได้จากการเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญ และการประชุมกลุ่มย่อย มาปรับปรุงแก้ไขกรอบแนวคิดที่ได้จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น จนได้เป็นกรอบแนวคิดเบื้องต้น ดังตารางที่ 13 14 และ 15

ตาราง 13 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในภาพรวม

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา (A01) ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหาได้เลย หรือสามารถวิเคราะห์ออกมาได้ในบางลักษณะที่ไม่ใช่ลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้ (A02) อธิบายความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหาอย่างสับสน ไม่สมเหตุสมผล (A03) ไม่สามารถวิเคราะห์หลักเกณฑ์ที่ทำให้แต่ละองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้	(A11) สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้เพียงบางประเด็นไม่ครบถ้วนทั้งหมด (A12) สามารถอธิบายได้ว่าลักษณะหรือองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ได้อย่างสมเหตุสมผลในบางประเด็น แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด (A13) ไม่สามารถวิเคราะห์หลักเกณฑ์ที่ทำให้แต่ละองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้	(A21) สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ครบถ้วนทั้งหมด (A22) สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่า ลักษณะหรือองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร (A23) สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ใด แต่นักเรียนกลุ่มนี้ยังอาศัยเหตุผลที่ยึดติดอยู่กับการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว กล่าวคือ อาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด	(A31) สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ครบถ้วนทั้งหมด (A32) สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไร (A33) สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ใด แต่นักเรียนกลุ่มนี้เริ่มอาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ในหลายมิติ กล่าวคือ อาศัยเหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาใน

ตาราง 13 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การสร้างข้อสรุป (I01) ไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้หรือระบุข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการที่ไม่มีแบบแผน เช่น ใช้วิธีการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ ซึ่งเป็นการบอกเล่าโดยไม่มีหลักฐานสนับสนุน หรือเป็นการสร้างข้อสรุปโดยอ้างสมบัติจากกรณีเฉพาะเดียวไปใช้กับกรณีเฉพาะอื่น ๆ หรือเดาคำตอบ (I02) การนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปจะมีลักษณะสับสน คลุมเครือ ไม่ชัดเจน หยิบยกเอาประเด็นหรือข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้มาใช้ในการให้เหตุผล (I03) อธิบายอย่างสับสนว่าหลักฐานที่ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร	การสร้างข้อสรุป (I11) ระบุข้อสรุปโดยการพิจารณาจากหลักฐานบางส่วน โดยใช้วิธีการแบบกึ่งตรรกศาสตร์ กล่าวคือ ในการสร้างข้อสรุปจะมีการให้เหตุผลประกอบ แต่อาจเป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องจากหลักฐานบางส่วน ซึ่งไม่เพียงพอในการอธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป (I12) การนำเสนอหลักฐานหรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปมีความสมเหตุสมผลในบางส่วนแต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด (I13) อธิบายได้ว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปอย่างไรได้ในบางประเด็น แต่ไม่ชัดเจน	การสร้างข้อสรุป (I21) สามารถระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน (I22) มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล (I23) สามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร	ภาพรวมทั้งหมด ไม่ใช่พิจารณาเป็นส่วน ๆ การสร้างข้อสรุป (I31) สามารถระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน (I32) มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล (I33) สามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร

ตาราง 13 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E01) ไม่สามารถประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปได้	การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E11) ประเมินหรือแสดงการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุผลหรือไม่น่าเชื่อถือ	แต่การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้ยังอาศัยเหตุผลที่ยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E21) สามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้ โดยมีการสร้างเกณฑ์ในการประเมินที่ตรงประเด็นอย่างครบถ้วน และสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล แต่เกณฑ์ที่สร้างขึ้นยังคงเกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด	แต่การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้อาศัยเหตุผลที่มีลักษณะเป็นอิสระจากการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ แต่จะเกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E31) สามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้ โดยมีการสร้างเกณฑ์ในการประเมินที่ตรงประเด็นอย่างครบถ้วน และสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล และเกณฑ์ที่สร้างขึ้นจะเกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด

ตาราง 14 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์แบบรูป (A01) นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใด ๆ ในแบบรูปได้เลย หรือสามารถวิเคราะห์ออกมาได้บางลักษณะ แต่ไม่ใช่ลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้ (A02) อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละพจน์ในแบบรูปอย่างสับสน ไม่สมเหตุสมผล (A03) ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ที่ทำให้พจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปอยู่อย่างเป็นระบบได้ หรือวิเคราะห์ออกมาโดยใช้เหตุผลที่ไม่ถูกต้อง ไม่ตรงประเด็น และไม่สมเหตุสมผล	การวิเคราะห์แบบรูป (A11) นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบของแบบรูปที่เป็นลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การได้ข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้เพียงบางประเด็น ไม่ครบถ้วนทั้งหมด (A12) สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผลในบางประเด็น แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด (A13) ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ที่ทำให้พจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปอยู่อย่างเป็นระบบได้	การวิเคราะห์แบบรูป (A21) นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบของแบบรูปที่เป็นลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การได้ข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้ครบถ้วนทั้งหมด (A22) สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผลและครบถ้วนทุกประเด็น (A23) สามารถให้เหตุผลได้ว่าพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปรวมกันอยู่ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ในเชิงของค่าของพจน์ที่ต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ (พิจารณาเห็นความสัมพันธ์จากค่าของพจน์อย่างเดียว) ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว แต่นักเรียนกลุ่มนี้ยังไม่สามารถวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์นั้นได้	การวิเคราะห์แบบรูป (A31) นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบของแบบรูปที่เป็นลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การได้ข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้ครบถ้วนทั้งหมด (A32) สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผลและครบถ้วนทุกประเด็น (A33) สามารถให้เหตุผลได้ว่าพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปรวมกันอยู่ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์นั้น ๆ ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในสองมิติ

ตาราง 14 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การสร้างข้อสรุป (I01) ไม่สามารถระบุข้อสรุปได้หรือระบุข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง โดยใช้วิธีการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ กล่าวคือ เป็นการให้เหตุผลที่ใช้การบอกเล่าโดยไม่มี การยกหลักฐานมาสนับสนุน หรือในการสร้างข้อสรุปจะให้ความสนใจกับสมบัติใดสมบัติหนึ่งแล้วเหมารวมว่าเป็นสมบัติทั้งหมดของแบบรูป หรือใช้วิธีการให้เหตุผลแบบทรานดัชัน คือ การพิจารณาสมบัติระหว่างพจน์คู่หนึ่งไปใช้กับพจน์อีกคู่หนึ่ง	การสร้างข้อสรุป (I11) ระบุข้อสรุปได้ถูกต้องในกรณีของการหาพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้ โดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีการพิจารณาถึงสมบัติร่วมระหว่างพจน์บางพจน์ในแบบรูปที่กำหนดให้ ทำให้สามารถใช้การสร้างแบบจำลองของแบบรูปเพื่อหาพจน์ต่อไปได้บางพจน์โดยใช้วัตถุ การวาดรูป และการนับช่วยในการให้เหตุผลเพื่ออธิบายคำตอบที่ได้ แต่ด้วยข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวทำให้ไม่สามารถใช้ในการหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ ได้ และไม่สามารถแสดงหรืออธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปออกมาในลักษณะของกรณีทั่วไปได้	การสร้างข้อสรุป (I21) สามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของส่วนย่อยกับส่วนทั้งหมด (ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์เฉพาะและพจน์ทั่วไป) ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ แต่เป็นไปในลักษณะของการหาพจน์ถัดไปจากพจน์ที่อยู่ก่อนหน้าโดยใช้หลักการของความสัมพันธ์แบบเวียนเกิด (Recurrent Relation) ซึ่งสนใจที่ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่ต่อเนื่องกันโดยลำดับ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้และพจน์ไกล ๆ ได้ และให้เหตุผลโดยการอ้างอิงจากสูตรในกรณีทั่วไป (ในรูปความสัมพันธ์แบบเวียนเกิด) แล้วนับเพิ่มไปเรื่อย ๆ ทั้งการนับแบบเป็นระบบและแบบที่ไม่เป็นระบบ ใช้การคิดในเชิงของความสัมพันธ์	การสร้างข้อสรุป (I31) สามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติของส่วนย่อยกับส่วนทั้งหมด (ความสัมพันธ์ระหว่างพจน์เฉพาะและพจน์ทั่วไป) ทำให้สามารถหาความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ โดยสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ของแบบรูปในลักษณะของฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรต้นและตัวแปรตาม หรือสามารถใช้การวิเคราะห์หาฟังก์ชันที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของแบบรูปได้ แม้ว่า จะไม่สามารถแสดงออกมาได้อย่างเป็นทางการ เช่นแสดงออกมาในรูปของคำพูด เป็นต้น ใช้การคิดในเชิงของความสัมพันธ์ และเป็นความสัมพันธ์ใน 2 มิติ กล่าวคือ การให้เหตุผลสนับสนุน

ตาราง 14 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
(I02) การแสดงหลักฐานหรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้จะมีลักษณะสับสน คลุมเครือ ไม่ชัดเจน หยิบยกเอาประเด็นหรือข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับแบบรูปที่กำหนดมาใช้ในการสนับสนุนข้อสรุป (I03) พฤติกรรมที่นักเรียนในกลุ่มนี้แสดงออกมา เช่น ไม่สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ไม่มีการตอบสนองใด ๆ หรือตอบแต่เพียงว่าไม่รู้ ไม่เข้าใจคำถาม ทำให้ไม่ถูกเป็นต้น เดาคำตอบ ตอบไม่ตรงประเด็น ตอบแบบทวนคำถาม หรือยกเอาพจน์ที่กำหนดให้มาเป็นคำตอบโดยไม่สามารถอธิบาย เหตุผลได้	(I12) การแสดงหลักฐานหรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้ จะมีความชัดเจนและสมเหตุสมผลในบางประเด็น แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด (I13) ลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้แสดงออกมา เช่น จากแบบรูปที่เกิดจากการวางลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนจะสามารถตอบได้ว่าถ้าวางลูกบาศก์ซ้อนกัน 6 ลูก จะมีจำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 26 หน้า โดยอธิบายเหตุผลว่าจากการพิจารณาพจน์ก่อน ๆ ของแบบรูปพบว่าหน้าที่ซ้อนกันจะไม่ถูกนับ และถ้าวาดรูปลูกบาศก์ซ้อนกัน 6 ลูก แล้วนับจำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยไม่นับหน้าที่ซ้อนกันจะนับได้ 26 หน้า และเมื่อถูกกำหนด	(Relational Thinking) แต่เป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียว คือ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ในแบบรูป (I22) มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล (I23) ลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้แสดงออกมา เช่น จากแบบรูปที่เกิดจากการวางลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนจะสามารถตอบได้ว่าถ้าวางลูกบาศก์ซ้อนกัน 6 ลูก จะมีจำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 26 หน้า โดยอธิบายเหตุผลว่าจากการพิจารณาพจน์ก่อน ๆ ของแบบรูป พบว่าผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าเป็น 4 (การคิดไม่ยึดติดอยู่กับรูป) และเนื่องจากพจน์ที่ 5 มีค่าเป็น 22 ดังนั้นพจน์ที่ 6 ต้องมีค่าเป็น $22+4$	ข้อสรุปจะอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างโดเมนและเรนจ์ (ตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์) ในแบบรูป (I32) มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล (I33) ลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้แสดงออกมา เช่น จากแบบรูปของรูปที่เกิดจากการวางลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนจะสามารถตอบได้ว่าถ้าวางลูกบาศก์ซ้อนกัน 6 ลูก จะมีจำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 26 หน้า โดยอธิบายเหตุผลว่าจากการพิจารณาพจน์ก่อน ๆ ของแบบรูปพบว่ามีความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนลูกบาศก์และจำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส กล่าวคือ $(4 \times$

ตาราง 14 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
	ให้หาพจน์ที่ 30 นักเรียนจะไม่สามารถหาได้	= 26 และเมื่อถูกกำหนดให้หาพจน์ที่ 30 นักเรียนจะอธิบายเหตุผลว่าพจน์ที่ 30 = พจน์ที่ 29 + 4 แล้วใช้วิธีการในลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิดหาค่าพจน์ที่ 30 นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้บางคนยังสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวออกมาในรูปของพจน์ที่ $n = \text{พจน์ที่ } n-1 + 4$ จากการที่ได้สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต้น ๆ ได้อีกด้วย	จำนวนลูกบาศก์) + 2 = จำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังนั้นถ้าลูกบาศก์วางซ้อนกัน 6 ลูก จำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = $(4 \times 6) + 2 = 26$ หน้า นอกจากนี้นักเรียนกลุ่มนี้ยังสามารถใช้สูตรดังกล่าวหาพจน์ต่าง ๆ ได้อย่างสมบูรณ์ และนักเรียนบางคนในกลุ่มนี้สามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งพจน์และค่าของพจน์ของแบบรูปในรูปของนิพจน์ทางพีชคณิตได้
การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E01) ไม่สามารถประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปได้ เช่น เมื่อถูกถามว่ารู้ได้อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้ถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้ส่วนใหญ่จะไม่แน่ใจ รวมถึงไม่รู้ว่าจะประเมินข้อสรุปของตนได้อย่างไร	การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E11) ประเมินหรือแสดงการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การวาดรูปขึ้นใหม่แล้วนับซ้ำอีกครั้งเพื่อยืนยันว่าคำตอบที่ได้นั้นเหมือนเดิม และเป็นคำตอบที่ถูกต้องแน่นอน	การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E21) สามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผล แต่เกณฑ์ที่สร้างขึ้นยังคงยึดติดอยู่กับการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว คือมองที่ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ เช่น	การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป (E31) สามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผล โดยเกณฑ์ที่สร้างขึ้นจะเกิดจากการมองความสัมพันธ์ในสองมิติ คือมองที่ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของ

ตาราง 14 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
		เมื่อถูกตั้งคำถามว่าจะยืนยันได้อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้นั้นถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้จะแสดงผลโดยการตรวจสอบความสัมพันธ์ พจน์ที่ n = พจน์ที่ $n-1 + 4$ กับพจน์ต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในแบบรูป แล้วยืนยันว่าเมื่อความสัมพันธ์นี้เป็นจริงกับทุกพจน์ที่กำหนดให้ ดังนั้นจะสามารถใช้ได้กับพจน์ต่อ ๆ ไปด้วย	พจน์และค่าของพจน์ เช่น เมื่อถูกตั้งคำถามว่าจะยืนยันได้อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้นั้นถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้จะแสดงผลโดยการตรวจสอบความสัมพันธ์ $(4 \times \text{จำนวนลูกบาศก์}) + 2 = \text{จำนวนหน้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส}$ กับพจน์ต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ในแบบรูป แล้วยืนยันว่าเมื่อความสัมพันธ์นี้เป็นจริงกับทุกพจน์ที่กำหนดให้ ดังนั้นจะสามารถใช้ได้กับพจน์ต่อ ๆ ไปด้วย

ตาราง 15 ผลการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์ประโยคเปิด (A01) นักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญของประโยคเปิดของจำนวน ที่จะนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย หรือสามารถวิเคราะห์ออกมาได้บางลักษณะแต่ไม่ใช่ลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องได้ (A02) อธิบายความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนอย่างสับสน ไม่สมเหตุสมผล (A03) ไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้ว่า องค์ประกอบต่าง ๆ ของประโยคเปิดที่กำหนดให้อยู่ได้โดยเงื่อนไขใด หรืออธิบายเหตุผลอย่างสับสน ไม่ตรงประเด็น และไม่สมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $5 + 4 + 7 = 5 + \square$ นักเรียนจะวิเคราะห์ว่าทั้งสองข้างมีเลข 5 เหมือนกัน ซึ่งเป็นการมองที่แบบรูปของตัวเลขโดยไม่สนใจเครื่องหมายเท่ากับ และการสมมูลกันของนิพจน์ที่	การวิเคราะห์ประโยคเปิด (A11) นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญในประโยคเปิดของจำนวนที่จะนำไปสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องได้บางลักษณะ (A12) อธิบายความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนได้ถูกต้อง สมเหตุสมผลในบางประเด็น (A13) สามารถอธิบายได้ว่า องค์ประกอบต่าง ๆ ของประโยคเปิดที่กำหนดให้อยู่ได้กฎเกณฑ์ที่เกิดจากการพิจารณาที่ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของสัญลักษณ์ ที่แทนการคำนวณ กล่าวคือ มองว่าหลังเครื่องหมายเท่ากับจะต้องเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ข้างหน้า เช่น จากประโยค $5 + 4 + 7 = 5 + \square$ นักเรียนจะ	การวิเคราะห์ประโยคเปิด (A21) นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบและความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนได้ครบถ้วนทุกประเด็น (A22) อธิบายความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนได้ถูกต้อง สมเหตุสมผล ครบถ้วนทุกประเด็น (A23) สามารถอธิบายได้ว่า องค์ประกอบต่าง ๆ ในประโยคเปิดที่กำหนดให้อยู่ได้กฎเกณฑ์ที่เกิดจากการพิจารณาที่ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของสัญลักษณ์ ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันของนิพจน์ทั้งสองข้าง แต่ลักษณะการมองประโยคของนักเรียนในกลุ่มนี้ยังเป็นลักษณะที่แยกพิจารณาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งประโยค เช่น จาก	การวิเคราะห์ประโยคเปิด (A31) นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบและความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนได้ครบถ้วนทุกประเด็น (A32) อธิบายความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนได้ถูกต้อง สมเหตุสมผล ครบถ้วนทุกประเด็น (A33) สามารถอธิบายได้ว่า องค์ประกอบต่าง ๆ ในประโยคเปิดที่กำหนดให้อยู่ได้กฎเกณฑ์ที่เกิดจากการพิจารณาที่ความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของสัญลักษณ์ ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันของนิพจน์ทั้งสองข้าง เช่นกัน นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนทางด้านซ้ายมือและ

ตาราง 15 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
อยู่ทั้งสองข้างของประโยค	อธิบายว่า มีจำนวนที่บวกกันอยู่ด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ และ หลังเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นผลลัพธ์จากการบวกจำนวนเหล่านั้น	ประโยค $63 + 29 = \square + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่ามีจำนวนที่บวกกันอยู่สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งผลบวกของทั้งสองข้างต้องมีค่าเท่ากัน	ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับด้วย ซึ่งจะเป็นการมองประโยคทั้งประโยคในภาพรวมทั้งหมดไม่ใช่การแยกพิจารณาเป็นส่วน ๆ เช่น จากประโยค $63 + 29 = \square + 30$ นักเรียนจะวิเคราะห์ว่ามีจำนวนที่บวกกันอยู่สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งผลบวกของทั้งสองข้างต้องมีค่าเท่ากัน และมองเห็นว่า 29 มีค่าน้อยกว่า 30 อยู่ 1 และ 63 ต้องมีความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกันกับ $\square$
การสร้างข้อสรุป (I01) ไม่มีการระบุข้อสรุป หรือระบุข้อสรุปที่ไม่ถูกต้องโดยใช้วิธีการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ ในการสร้างข้อสรุป กล่าวคือ เป็นการให้เหตุผลที่ใช้การบอกเล่าโดยไม่มีการหาหลักฐานมาสนับสนุน	การสร้างข้อสรุป (I11) ระบุข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง โดยในการสร้างข้อสรุปจะมีการให้เหตุผลประกอบ แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้จากหลักฐานบางส่วน ซึ่งไม่เพียงพอที่จะใช้อธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป	การสร้างข้อสรุป (I21) ระบุข้อสรุปที่ถูกต้อง โดยการอ้างถึงหลักในกรณีทั่วไปว่าเครื่องหมายเท่ากับใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้าง แล้วใช้หลักการดังกล่าวเพื่อหาข้อสรุปของสถานการณ์ที่กำหนดให้	การสร้างข้อสรุป (I31) ระบุข้อสรุปที่ถูกต้องจากหลักฐานทั้งหมด โดยใช้วิธีการอ้างถึงหลักในกรณีทั่วไปว่าเครื่องหมายเท่ากับใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้าง

ตาราง 15 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
(I02) การแสดงหลักฐานหรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้จะมีลักษณะคลุมเครือ สับสน ไม่ชัดเจน ไม่ถูกต้อง เป็นการให้เหตุผลโดยไม่สนใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับเลย แต่จะสร้างข้อสรุปโดยอาศัยเหตุผลในเชิงของแบบรูป (I03) พฤติกรรมที่แสดงออกมา เช่น จากประโยค $5 + 4 + 7 = 5 + \square$	(I12) การนำเสนอหลักฐานหรือให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปมีความถูกต้องบางส่วน แต่ไม่เพียงพอในการอธิบายข้อสรุป โดยมีการอ้างถึงความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ และหลังเครื่องหมายเท่ากับคือผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับ (I13) พฤติกรรมที่แสดงออกมาของนักเรียนในกลุ่มนี้ เช่น จากประโยค	แต่จะใช้วิธีการคิดคำนวณ (Computational Thinking) ผลลัพธ์แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับก่อนนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับว่าเท่ากันหรือไม่ (Equivalence of Results) ซึ่งเป็นการใช้เหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาประโยคที่กำหนดให้เป็นส่วน ๆ (I22) การนำเสนอหลักฐานหรือให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปมีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอและสมเหตุสมผล (I23) พฤติกรรมที่แสดงออกมาของนักเรียนในกลุ่มนี้ เช่น จากประโยค	แล้วใช้หลักการดังกล่าวเพื่อหาข้อสรุปของสถานการณ์ที่กำหนดให้ แต่ที่แตกต่างไปจากนักเรียนในกลุ่มที่ 3 คือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้การคิดหาข้อสรุปโดยมองที่ความสัมพันธ์ ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค (Relational Thinking) เป็นสำคัญ ซึ่งเป็นการใช้เหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาประโยคในภาพรวมทั้งประโยค (I32) การแสดงหลักฐานหรือให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปมีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอและสมเหตุสมผล (I33) พฤติกรรมที่แสดงออกมาของนักเรียนในกลุ่มนี้ เช่น จาก

ตาราง 15 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
นักเรียนจะเติม เลข 4, 7 หรือ 11 ลงในช่องว่าง โดยนักเรียนที่ตอบ 4 และ 7 จะให้เหตุผลว่าเพราะเป็น จำนวนที่หายไปจากทางซ้ายมือของ เครื่องหมายเท่ากับ และตอบ 11 เกิด จากการนำ 4 มาบวกกับ 7 เป็นต้น หรือไม่มีการตอบสนองใด ๆ หรือตอบ แต่เพียงว่าไม่รู้ ไม่เข้าใจคำถาม ทำให้ ไม่ถูก หรือเดาคำตอบแล้วให้เหตุผลไม่ได้ เป็นต้น การประเมินความน่าเชื่อถือของ ข้อสรุป (E01) ไม่สามารถประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุปได้ เช่น เมื่อถูก ถามว่ารู้ได้อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้ ถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้ส่วนใหญ่จะ ไม่แน่ใจ รวมถึงไม่รู้ว่าจะประเมิน ข้อสรุปของตนได้อย่างไร	$5 + 4 + 7 = 5 + \square$ นักเรียนจะเติม ตัวเลข 16 ลงในช่องว่าง โดยให้ เหตุผลว่าคำตอบที่ได้มาจากการนำ จำนวนที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับมา บวกกัน แต่เมื่อถูกถามถึงเลข 5 นักเรียนจะไม่สามารถให้คำอธิบายได้ หรือนักเรียนบางคนจะเติมตัวเลข 21 โดยให้เหตุผลว่าเกิดจากการนำจำนวน ทั้งหมดมาบวกกัน เป็นต้น การประเมินความน่าเชื่อถือของ ข้อสรุป (E11) ประเมินหรือแสดงการ ตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุป โดยใช้เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การตรวจสอบผลบวกให้แน่ใจอีกครั้ง เพื่อยืนยันว่าคำตอบที่ได้นั้นเป็น คำตอบที่ถูกต้องแน่นอน	$63 + 29 = \square + 30$ นักเรียนกลุ่มนี้ จะอ้างเหตุผลว่าเนื่องจากสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้นจำนวนในช่องว่างต้องเป็นจำนวน ที่บวกกับ 30 แล้วมีค่าเป็น 92 นั่น คือเลข 62 (ใช้วิธีการคำนวณโดยตรง) การประเมินความน่าเชื่อถือของ ข้อสรุป (E21) สามารถประเมินหรือแสดงการ ตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยใช้เกณฑ์หรือ วิธีการที่สมเหตุสมผล แต่เกณฑ์ที่สร้าง ขึ้นยังคงอาศัยเหตุผลในแง่ของความ สมมูลกันของผลลัพธ์ (Equivalence of Results) ซึ่งเกิดจากการพิจารณา ประโยคเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวม ทั้งหมด เช่น จากประโยค $63 + 29 = \square + 30$ เมื่อถูกถามว่ารู้	ประโยค $63 + 29 = \square + 30$ นักเรียนกลุ่มนี้จะอ้างเหตุผลว่า เนื่องจากสองข้างของเครื่องหมาย เท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน และเมื่อ พิจารณาที่ 29 ถ้าเพิ่มค่าขึ้น 1 จะได้ 30 เท่ากับทางขวา ดังนั้น $\square$ ต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 จึงจะ ทำให้สองข้างของสมการมีค่า เท่ากัน ทำให้ได้คำตอบเป็น 62 (ใช้การคิดในเชิงความสัมพันธ์) การประเมินความน่าเชื่อถือของ ข้อสรุป (E31) สามารถประเมินหรือแสดง การตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยใช้ เกณฑ์หรือวิธีการที่สมเหตุสมผล โดยเกณฑ์ที่สร้างขึ้นจะอาศัย เหตุผลในแง่ของความสัมพันธ์ ระหว่างจำนวนทั้งหมดในประโยค ซึ่งเกิดจากการพิจารณาประโยคทั้ง ประโยคในภาพรวมทั้งหมด เช่น จากประโยค $63 + 29 = \square + 30$

ตาราง 15 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
		ได้อย่างไรว่า 62 เป็นคำตอบที่ถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้จะอธิบายว่า ถ้าเป็น ตัวเลขอื่นที่ไม่ใช่ 62 เมื่อแทนที่ □ แล้วจะทำให้ทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับมีผลบวกไม่เท่ากัน	เมื่อถูกถามว่ารู้ได้อย่างไรว่า 62 เป็นคำตอบที่ถูกต้อง นักเรียนใน กลุ่มนี้จะอธิบายว่า ถ้าเป็นตัวเลข อื่นที่ไม่ใช่ 62 แล้ว □ จะมีค่า ลดลงจาก 63 ไม่เท่ากับ 1 ซึ่งไม่ สอดคล้องกับความสัมพันธ์ของ 29 และ 30

ระยะที่ 2 การปรับปรุงกรอบแนวคิด ประกอบด้วยกิจกรรมต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การกำหนดสนามและกลุ่มเป้าหมาย

นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ประกอบด้วยนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จำนวน 66 คน จาก 2 โรงเรียนในจังหวัดนครราชสีมาที่มีสภาพแวดล้อมในการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน กล่าวคือเป็นโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท โรงเรียนละ 33 คน ระดับชั้นละ 11 คน ในแต่ละโรงเรียน โดยในการเลือกนักเรียนทั้งหมดได้คัดเลือกนักเรียนแบบเจาะจงให้มีลักษณะที่คละความสามารถ กล่าวคือ มีทั้งนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำ ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน โดยพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ผ่านมา และจากการสอบถามความคิดเห็นของครูผู้สอน ให้นักเรียนทั้ง 66 คนทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต รายละเอียดของจำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 16 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

โรงเรียน/ชั้น	ป.4	ป.5	ป.6	รวม
โรงเรียนชนบท	11	11	11	33
โรงเรียนในเมือง	11	11	11	33
รวม	22	22	22	66

นักเรียนกลุ่มเป้าหมาย เป็นกลุ่มนักเรียนที่ใช้เพื่อศึกษาเจาะลึกลักษณะของการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ประกอบด้วยนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จำนวน 19 คน ที่เลือกมาจากกลุ่มนักเรียนทั้งหมดที่ทำการทดสอบ เป็นนักเรียนที่ให้ข้อมูลที่เป็นประโยชน์เมื่อพิจารณาจากการเขียนตอบในแบบทดสอบ และเป็นตัวแทนที่ดีที่สามารถแสดงถึงลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่แตกต่างกันของนักเรียนทั้งหมดที่เก็บข้อมูลโดยการทดสอบ เพื่อทำการสัมภาษณ์เจาะลึกเป็นรายกรณี

ลักษณะบริบทของโรงเรียนและกลุ่มนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย

โรงเรียนในเมือง ตั้งอยู่ในเขตเทศบาลนครนครราชสีมา ถนนราชดำเนิน ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา เปิดทำการสอนเป็นครั้งแรกเมื่อวันที่ 6 พฤศจิกายน 2464 มี

ฐานะเป็นโรงเรียนประจำอำเภอแห่งแรก มีการโอนสังกัดไปมาระหว่างหน่วยงานต่าง ๆ หลายครั้ง ได้แก่ เทศบาล กรมสามัญศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ และสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ตามลำดับ เป็นโรงเรียนทดลองทางวิชาการ โรงเรียนนำร่องโครงการตามนโยบาย และโรงเรียนเครือข่ายการใช้หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานของกระทรวงศึกษาธิการ ปัจจุบันเปิดสอนตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 รวมทั้งสิ้น 51 ห้องเรียน นักเรียน 2,442 คน ครู 106 คน (รวมผู้บริหาร) จำนวนนักเรียนเฉลี่ยต่อห้อง 48 คน อัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครูเท่ากับ 24 : 1 จำนวนชั่วโมงสอนเฉลี่ย 17 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

ตาราง 17 จำนวนนักเรียนและห้องเรียนโรงเรียนในเมือง

ชั้น	จำนวนนักเรียน			จำนวน ห้องเรียน
	เพศชาย	เพศหญิง	รวม	
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4	209	186	395	8
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	191	207	398	8
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	191	199	390	8
รวม	591	592	1,183	24

ตาราง 18 จำนวนครูและบุคลากรโรงเรียนในเมือง

ประเภท บุคลากร	จำนวน			ระดับการศึกษา				อายุเฉลี่ย (ปี)	ประสบการณ์ เฉลี่ย (ปี)
	ชาย	หญิง	รวม	ต่ำกว่า ป.ตรี	ป. ตรี	ป. โท	ป. เอก		
ผู้บริหาร	3	2	5	-	1	3	1	50	20
ครูประจำการ	20	81	101	2	91	8	-	47	24
นักการ	3	-	3	2	1	-	-	42	15

สภาพชุมชนรอบโรงเรียนมีลักษณะเป็นชุมชนเมือง ส่วนใหญ่นับถือศาสนาพุทธ อาชีพส่วนใหญ่รับราชการ รองลงมาคือประกอบธุรกิจ รายได้เฉลี่ยต่อครอบครัว 100,000-150,000 บาท / ปี แหล่งเรียนรู้ในชุมชนที่สำคัญ ได้แก่ หอสมุดแห่งชาตินครศรีธรรมราช หอสมุดประชาชนนครศรีธรรมราช หอสมุดพลเอกเปรม ติณสูลานนท์ วัดพระมหาธาตุวรมหาวิหาร ศูนย์วิทยาศาสตร์นครศรีธรรมราช

โรงเรียนจัดการเรียนการสอนตามหลักสูตรสถานศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ในช่วงชั้นที่ 2 (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6) มีจำนวนชั่วโมงที่จัดให้นักเรียนเรียนทั้งปี เท่ากับ 1,000 ชั่วโมง จุดเน้นของการจัดการเรียนรู้ในช่วงชั้นนี้คือ ภาษาไทย คณิตศาสตร์ และภาษาอังกฤษ ตามลำดับ รายละเอียดโครงสร้างหลักสูตรเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 19 โครงสร้างหลักสูตรช่วงชั้นที่ 2 โรงเรียนในเมือง

ชั้น	เวลาเรียน (ชั่วโมง / ต่อปี)									รวม
	ไทย	คณิต	วิทย์	สังคม	สุขศึกษา	ศิลปะ	การงาน	ภาษาต่างประเทศ	พัฒนาผู้เรียน	
ป.4	240	200	80	80	80	80	80	80	80	1000
ป.5	200	160	80	80	80	80	80	160	80	1000
ป.6	200	160	80	80	80	80	80	160	80	1000
รวม	640	520	240	240	240	240	240	400	240	3000

โรงเรียนชนบท ตั้งอยู่ที่ตำบลเขียร์เขา อำเภอเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดนครศรีธรรมราช เปิดสอนตั้งแต่ระดับอนุบาลถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 รวมทั้งสิ้น 15 ห้องเรียน นักเรียน 401 คน ครู 21 คน จำนวนนักเรียนเฉลี่ยต่อห้อง 21 คน อัตราส่วนจำนวนนักเรียนต่อครูเท่ากับ 20 : 1 จำนวนชั่วโมงสอนเฉลี่ย 18 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

ตาราง 20 จำนวนนักเรียนและห้องเรียนโรงเรียนชนบท

ชั้น	จำนวนนักเรียน			จำนวน ห้องเรียน
	เพศชาย	เพศหญิง	รวม	
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4	30	26	56	2
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5	29	26	55	2
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6	22	33	55	2
รวม	81	85	166	6

ตาราง 21 จำนวนครูและบุคลากรโรงเรียนชนบท

ประเภท บุคลากร	จำนวน			ระดับการศึกษา				อายุเฉลี่ย (ปี)	ประสบการณ์ เฉลี่ย (ปี)
	ชาย	หญิง	รวม	ต่ำกว่า ป.ตรี	ป. ตรี	ป. โท	ป. เอก		
ผู้บริหาร	1	-	1	-	1	-	-	57	7
ครูประจำการ	3	17	20	-	20	-	-	48	25
นักการ	1	-	1	1	-	-	-	36	2

สภาพชุมชนรอบโรงเรียนมีลักษณะเป็นชุมชนในชนบท ส่วนใหญ่นับถือศาสนาพุทธ อาชีพส่วนใหญ่รับจ้าง รองลงมาคือทำนา ทำสวน และค้าขาย ตามลำดับ รายได้เฉลี่ยต่อครอบครัว 15,000 บาท / ปี ไม่มีแหล่งเรียนรู้ในชุมชนที่สำคัญมีเพียงวัดสระไครซึ่งอยู่ติดกับโรงเรียน

โรงเรียนจัดการเรียนการสอนตามหลักสูตรสถานศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ในช่วงชั้นที่ 2 (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6) มีจำนวนชั่วโมงที่จัดให้นักเรียนเรียนทั้งปี เท่ากับ 1,000 ชั่วโมง จุดเน้นของการจัดการเรียนรู้ในช่วงชั้นนี้คือ ภาษาไทยและคณิตศาสตร์ รองลงมาคือ วิทยาศาสตร์ ภาษาต่างประเทศ และกิจกรรมพัฒนาผู้เรียน รายละเอียดโครงสร้างหลักสูตรเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 22 โครงสร้างหลักสูตรช่วงชั้นที่ 2 โรงเรียนชนบท

ชั้น	เวลาเรียน (ชั่วโมง / ต่อปี)									รวม
	ไทย	คณิต	วิทย์	สังคม	สุขศึกษา	ศิลปะ	การทำงาน	ภาษาต่างประเทศ	พัฒนาผู้เรียน	
ป.4	200	200	120	80	40	40	80	120	120	1000
ป.5	200	200	120	80	40	40	80	120	120	1000
ป.6	200	200	120	80	40	40	80	120	120	1000
รวม	600	600	360	240	120	120	240	360	360	3000

2. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต แบบสัมภาษณ์ (ไม่เป็นทางการ) และแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ โดยใช้กรอบแนวคิดเบื้องต้นที่สังเคราะห์ขึ้นในระยะที่ 1 เป็นแนวทางในการสร้าง

2.1 แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต เป็นแบบทดสอบที่มีลักษณะข้อคำถามเป็นแบบปลายเปิด ให้นักเรียนแสดงวิธีคิดและให้เหตุผลประกอบ มีเนื้อหาแยกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นเรื่องแบบรูป จำนวน 3 ข้อ โดยลักษณะของแบบทดสอบได้กำหนดแบบรูปมาให้แล้วกำหนดให้นักเรียน หาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูป พร้อมทั้งแสดงเหตุผลโดยละเอียด และส่วนที่ 2 เรื่องประโยคเปิดของจำนวน จำนวน 3 ข้อ ลักษณะของคำถามได้กำหนดประโยคเปิดของจำนวนมาให้แล้วกำหนดให้นักเรียนเติมจำนวนที่คิดว่าถูกต้องลงในช่องว่าง พร้อมทั้งแสดงเหตุผลโดยละเอียด

หลังจากสร้างเสร็จ ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบดังกล่าวให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีประสบการณ์ในการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาตรวจสอบความเหมาะสม แล้วนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ระดับชั้นละ 1 คน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และระดับความยากง่ายของแต่ละปัญหา และเพื่อศึกษาแนวทางหรือรูปแบบในการตอบปัญหาของนักเรียน จากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงแบบทดสอบ ก่อนจะนำไปทดลองใช้กับนักเรียนอีกจำนวน 30 คน ที่ไม่ซ้ำกันกับนักเรียน 3 คนแรก และเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ระดับชั้นละ 10 คน แต่ละชั้นเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 3 คน ปานกลาง 5 คน และต่ำ 2 คน เพื่อหาข้อบกพร่องและปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งจนได้แบบทดสอบฉบับสมบูรณ์ที่พร้อมจะนำไปใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

2.2 แบบสัมภาษณ์ ในแบบสัมภาษณ์ประกอบด้วยแนวคำถามลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ *คำถามหลัก (Main Questions)* ซึ่งเป็นคำถามที่จัดลำดับไว้พอเป็นแนวทางที่จะนำไปสู่จุดมุ่งหมายของการวิจัย และเป็นคำถามที่ใช้เปิดประเด็น เช่น นักเรียนได้ข้อสรุปนี้มาอย่างไร สามารถอธิบายเหตุผลได้หรือไม่ ทำไมนักเรียนถึงคิดว่าเป็นอย่างนี้ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการตรวจสอบข้อสรุปนี้ได้หรือไม่ *คำถามเพื่อขอรายละเอียดและความชัดเจน (Probes)* ใช้ถามหลังจากที่ผู้ให้สัมภาษณ์ตอบคำถามหลักแล้ว แต่คำตอบยังไม่ชัดเจนพอ หรืออาจมีประเด็นใหม่ที่นำร่องติดตาม หรือใช้แสดงให้เห็นว่าสิ่งที่เขาพูดกำลังได้รับความสนใจ เช่น นักเรียนช่วยอธิบายให้ละเอียดอีกครั้งได้ไหม หมายความว่าเหตุผลบางอย่างใช่ไหม บอกได้ไหมว่าเหตุผลนั้นคืออะไร *คำถามเพื่อตามประเด็น (Follow-up Questions)* เป็นคำถามที่มุ่งจะเพิ่มมิติทั้งทางกว้างและทางลึกของเรื่องที่ศึกษาให้มากขึ้น โดยเลือกเอาเรื่องใหม่ที่เพิ่งพบในขณะสัมภาษณ์ (ซึ่งอาจจะไม่อยู่ในความคิดของผู้วิจัยมาก่อน) ขึ้นมาเป็นประเด็นในการถามต่อ เพื่อจะได้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยให้ลึกลงไป และเป็นคำถามที่ผู้สัมภาษณ์คิดขึ้นในขณะที่กำลังสัมภาษณ์อยู่ โดยแนวคำถามทั้งสามประเภทมีลักษณะยืดหยุ่นไปตามสถานการณ์ ไม่ตายตัว และในขณะที่ยังสัมภาษณ์ผู้วิจัยมีการบันทึกประเด็นสำคัญต่าง ๆ ไว้ในแบบบันทึกของผู้วิจัย

2.3 แบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ เป็นแบบบันทึกที่ผู้สัมภาษณ์ใช้บันทึกประเด็นสำคัญต่าง ๆ ที่สังเกตพบในขณะทำการสัมภาษณ์ เช่น ลักษณะการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ลักษณะการสร้างข้อสรุป และลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป รวมถึงการสรุปความเห็นเบื้องต้นว่านักเรียนที่กำลังถูกสัมภาษณ์น่าจะมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจัดอยู่ในกลุ่มใดของกรอบแนวคิดเบื้องต้น เพื่อจะได้นำประเด็นต่าง ๆ เหล่านี้ไปใช้ประกอบการตัดสินใจในขั้นของการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

3.1 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลไปทดสอบกับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลายที่เลือกไว้ จำนวน 66 คน จากนั้นผู้วิจัยนำแบบทดสอบมาตรวจเพื่อพิจารณาว่านักเรียนแต่ละคนมีลักษณะการให้เหตุผลอย่างไร แล้วจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามลักษณะของการให้เหตุผลที่นักเรียนเขียนแสดงในแบบทดสอบ (เนื่องจากแบบทดสอบเรื่องแบบรูปและเรื่องประโยคเปิดมีเรื่องละ 3 ข้อ ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนในแต่ละข้ออาจไม่คงเส้นคงวา ผู้วิจัยจึงพิจารณาจากภาพรวมส่วนใหญ่เพื่อจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม) พร้อมทั้งบันทึกส่วนที่ผู้วิจัยไม่มั่นใจ ไม่เข้าใจชัดเจน หรือไม่สามาถวิเคราะห์หาเหตุผลจากคำตอบของนักเรียนได้เพื่อนำไปเป็นประเด็นในการสัมภาษณ์ต่อไป

3.2 เลือกนักเรียนจำนวน 19 คน จากนักเรียนทั้งหมดที่ทำการทดสอบ โดยเลือกนักเรียนที่ผู้วิจัยวิเคราะห์จากการเขียนตอบของนักเรียนแล้วเห็นว่ามีความสามารถในการให้เหตุผลที่แตกต่างกัน

อย่างชัดเจน และคาดว่าจะเป็นตัวแทนที่ดีของนักเรียนของแต่ละกลุ่มที่จำแนกไว้ในข้อ 3.1 มาทำการสัมภาษณ์เพื่อหาข้อมูลเชิงเจาะลึก

3.3 ระหว่างการสัมภาษณ์ผู้วิจัยพยายามค้นหาคำตอบที่สงสัยใคร่รู้ พยายามถามเจาะลึก ชокแซกเข้าไปในแง่มุมต่าง ๆ ที่กำลังค้นหา และพยายามใส่ใจในปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้วิจัยกับผู้ให้สัมภาษณ์ พร้อมทั้งสังเกตพฤติกรรมที่เกิดขึ้นระหว่างการสัมภาษณ์เพื่อคอยกำหนดทิศทางของการสนทนาให้ดำเนินไปในทิศทางที่ผู้วิจัยตั้งเป้าหมายไว้ และในระหว่างการสัมภาษณ์ผู้วิจัยได้บันทึกข้อมูลทั้งหมดที่ได้จากการสัมภาษณ์ไว้ในแบบบันทึก เทปบันทึกเสียง และกล้องวิดีโอ เพื่อทำการวิเคราะห์ต่อไป

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

ในขั้นนี้ผู้วิจัยได้นำผลการทดสอบ และผลจากการถอดเทปบทสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายทั้ง 19 คน มาทำการวิเคราะห์ โดยใช้ผู้วิเคราะห์ 3 คน คือผู้วิจัย ครูผู้สอน คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาจำนวน 2 คน ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนจะแยกกันวิเคราะห์โดยใช้กรอบแนวคิดเบื้องต้นที่พัฒนาขึ้นจากระยะที่ 1 ช่วยในการจำแนกลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย หลังจากผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนจำแนกลักษณะรูปแบบการให้เหตุผลของนักเรียนแต่ละคนเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยได้นำผลที่ได้มาหาความเชื่อมั่นระหว่างผู้วิเคราะห์แต่ละคน โดยใช้สูตรการหาค่าความเชื่อมั่นของ ไมล์สและฮูเบอร์แมน (Miles and Huberman. 1994: 64) และโบยาทซิส (Boyatzis. 1998: 154) ตามสูตรต่อไปนี้

$$r = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

เมื่อ r คือค่าความเชื่อมั่น n_1 คือจำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นเหมือนกัน n_2 คือจำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความคิดเห็นแตกต่างกัน โดยโบยาทซิส (Boyatzis. 1998: 156) เสนอว่าระดับความเชื่อมั่นที่สามารถยอมรับได้ต้องเป็น 70% ขึ้นไป สำหรับการวิจัยในครั้งนี้พบว่ามีความเชื่อมั่น 90%

สำหรับในกรณีที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความคิดเห็นไม่ตรงกัน จะใช้การอภิปรายแสดงเหตุผล การวิเคราะห์ของแต่ละคน โดยดูเทปวิดีโอบันทึกการสัมภาษณ์ประกอบแล้วร่วมกันลงข้อสรุป ทั้งนี้ อาจมีการเปลี่ยนแปลงได้ถ้าเห็นด้วยกับเหตุผลที่ผู้วิเคราะห์คนอื่นนำเสนอ ในขณะที่ผู้วิจัยได้บันทึกผลที่เกิดจากการวิเคราะห์ร่วมกันไว้ เพื่อนำไปประกอบการตัดสินใจในขั้นของการปรับปรุงกรอบแนวคิดต่อไป

5. การปรับปรุงกรอบแนวคิด

ในการปรับปรุงแนวคิดเบื้องต้น ผู้วิจัยใช้วิธีการรวมกลุ่มนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลแบบเดียวกันเข้าไว้ด้วยกัน แล้วสังเคราะห์รายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะและรูปแบบการให้เหตุผลแต่ละกลุ่มออกมา จากนั้นนำไปเปรียบเทียบกับลักษณะการให้เหตุผลที่อยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้น แล้วดำเนินการดังนี้

- ลักษณะการให้เหตุผลใดที่เหมือนกันก็ยังคงคำอธิบายลักษณะของการให้เหตุผลเดิมในกรอบแนวคิดเบื้องต้นเอาไว้
 - ลักษณะการให้เหตุผลใดที่นักเรียนตอบสนองออกมาแล้วไม่ตรงกับลักษณะการให้เหตุผลที่เคยกำหนดไว้ในกรอบแนวคิดเบื้องต้น ก็ปรับเอาลักษณะดังกล่าวออกจากกรอบแนวคิดเบื้องต้นแล้วนำเอาลักษณะที่พบจากการตอบสนองของนักเรียนเข้าไปแทนที่ และ
 - กรณีที่พบลักษณะการตอบสนองจากผู้เรียนที่ไม่ได้เคยกำหนดไว้ก่อนในกรอบแนวคิดเบื้องต้น ก็จะผนวกลักษณะดังกล่าวเพิ่มเข้าไปในกรอบแนวคิด
- จากนั้นจึงปรับปรุงภาษาที่ใช้ในกรอบแนวคิดให้มีความชัดเจน และง่ายต่อการทำความเข้าใจหรือการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ระยะที่ 3 การสำรวจลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับ

ประถมศึกษาตอนปลาย ประกอบด้วยกิจกรรมต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. นำแบบทดสอบที่นักเรียนทั้ง 66 คน ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเคยทำไว้ในระยะที่ 2 มาวิเคราะห์อีกครั้ง เพื่อจำแนกว่านักเรียนแต่ละคนมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจัดอยู่ในกลุ่มใดของกรอบแนวคิดที่ปรับปรุงแล้ว
2. สรุปรายงานนักเรียนส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลอยู่ในกลุ่มใดของกรอบแนวคิด พร้อมทั้งสรุปรายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ที่ทำการศึกษา
3. พิจารณาเปรียบเทียบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มใดของกรอบแนวคิด จากนั้นทำการเปรียบเทียบข้อแตกต่างระหว่างลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนทั้งสามระดับ
4. พิจารณาเปรียบเทียบว่านักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบทส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มใดของกรอบแนวคิด จากนั้นทำการเปรียบเทียบข้อแตกต่างระหว่างลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนทั้งสองโรงเรียน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การนำเสนอผลการศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งเป็น 3 ตอน ตอนที่ 1 แสดงกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ตอนที่ 2 แสดงกรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ปรับปรุงจากกรอบแนวคิดเบื้องต้นจากผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยแสดงออกมาจากการทำแบบทดสอบและนักเรียนกลุ่มเป้าหมายแสดงออกมาจากการสัมภาษณ์ ตอนที่ 3 แสดงผลการสำรวจลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ผลการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนชั้นประถมศึกษาชั้นปีที่ 4, 5 และ 6 และผลการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท

ตอนที่ 1 กรอบแนวคิดเบื้องต้นที่ได้จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษา พบว่าลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่ม (ดูรายละเอียดตาราง 13, 14 และ 15 หน้า 52 – 64 ในบทที่ 3) ซึ่งนักเรียนในแต่ละกลุ่มมีลักษณะการให้เหตุผลโดยสรุปดังต่อไปนี้

ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 0 นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหาได้เลย หรือวิเคราะห์ออกมาได้ในบางลักษณะซึ่งไม่ใช่ลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้ จึงทำให้ไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้ หรือระบุข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการที่ไม่มีแบบแผนหรือใช้เพียงเหตุผลเชิงประจักษ์ การนำเสนอหลักฐานและการอธิบายสนับสนุนข้อสรุปมีลักษณะคลุมเครือ ไม่ชัดเจน และไม่สามารถประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปได้ เมื่อเรียนในกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป จะไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ และไม่สามารถวิเคราะห์หากกฎเกณฑ์ของแบบรูปได้ ทำให้ไม่สามารถระบุข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ หรือระบุข้อสรุปที่ไม่ถูกต้องโดยใช้วิธีการเชิงประจักษ์ เช่น การหยิบยกเอาค่าของพจน์ที่กำหนดให้มาเป็นคำตอบโดยไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้ หรืออธิบายอย่างสับสน และไม่รู้ว่าประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของ

ตนได้อย่างไร เมื่อนักเรียนกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนต่าง ๆ ในประโยคเปิดอยู่รวมกันได้โดยเงื่อนไขใด ทำให้ไม่สามารถระบุจำนวนที่ต้องเติมลงในช่องว่างได้ หรือระบุข้อสรุปโดยใช้วิธีการเชิงประจักษ์ เช่นการนำตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในประโยคมาเติมในช่องว่าง โดยไม่สามารถอธิบายเหตุผลได้ หรืออธิบายอย่างสับสน และไม่สมเหตุสมผล

ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 1 นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่นำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาได้เพียงบางประเด็น สามารถอธิบายได้ว่าองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้สมเหตุสมผลในบางประเด็น แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด โดยจะไม่สามารถอธิบายได้ว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยเหตุผลหรือกฎเกณฑ์ใด ส่งผลให้นักเรียนกลุ่มนี้สร้างข้อสรุปของสถานการณ์ปัญหาโดยการพิจารณาจากหลักฐานบางส่วน ซึ่งไม่เพียงพอในการอธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป และนักเรียนในกลุ่มนี้ประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผล เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์เรื่อง**แบบรูป** จะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ของแบบรูปได้ในบางประเด็น แต่ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ของแบบรูปได้ ทำให้นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องได้ในกรณีของการหาค่าของพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้ โดยใช้การพิจารณาสมบัติร่วมระหว่างพจน์บางพจน์ ทำให้สามารถสร้างแบบจำลองโดยใช้การวาดรูป และการนับช่วยในการให้เหตุผลเพื่ออธิบายคำตอบที่ได้ แต่ด้วยข้อจำกัดของวิธีการดังกล่าวทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปออกมาได้ เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์เรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน** จะวิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์แทนการคำนวณ หลังเครื่องหมายเท่ากับจะต้องเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับ ส่งผลให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องลงในช่องว่างได้ในกรณีที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีตัวเลขตัวเดียว และจะใช้เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผลในการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป เช่น การคำนวณซ้ำให้แน่ใจอีกครั้งเพื่อยืนยันว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้อง

ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 2 นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่นำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาได้ครบถ้วนทั้งหมด สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหามีความสัมพันธ์กันอย่างไร รวมทั้งสามารถวิเคราะห์ได้ว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ใด แต่ยังคงอาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว หรือมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด ส่งผลให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล

และสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร นักเรียนกลุ่มนี้สามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยการสร้างเกณฑ์ในการประเมินที่ตรงประเด็นครบถ้วน และสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล แต่เกณฑ์ที่สร้างขึ้นยังคงยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด เมื่อนักเรียนกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องแบบรูป จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปรวมกันอยู่ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ในเชิงของค่าของพจน์ที่ต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว และไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องและสมเหตุสมผลในกรณีของการหาพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้ พจน์ที่อยู่ไกล ๆ รวมทั้งสามารถหากฎเกณฑ์ทั่วไปของแบบรูปได้ แต่เป็นความสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปของความสัมพันธ์แบบเวียนเกิด ซึ่งต้องอาศัยพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป เมื่อนักเรียนกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน** จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้าง ดังนั้นจำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่างต้องเป็นจำนวนที่ทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองประโยคแยกเป็นส่วน ๆ คือส่วนทางซ้าย และส่วนทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ไม่มองความสัมพันธ์ในภาพรวมทั้งหมด ส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคได้ แต่จะใช้วิธีการคิดคำนวณผลลัพธ์แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่

ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 3 นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่นำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาได้ครบถ้วน สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหามีความสัมพันธ์กันอย่างไร และสามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้ โดยอาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ในหลายมิติ เกิดจากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาในภาพรวม ไม่แยกเป็นส่วน ๆ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล มีการนำเสนอหลักฐานและอธิบายสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล รวมทั้งสามารถประเมินหรือแสดงการตรวจสอบข้อสรุปที่ได้โดยมีการสร้างเกณฑ์ในการประเมินที่สมเหตุสมผลและเป็นเกณฑ์ที่เกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด เมื่อนักเรียนกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องแบบรูป จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปรวมกันอยู่ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์นั้น ๆ ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในสองมิติ ส่งผลให้นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้โดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยในการสร้างสูตรแทนความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแบบรูป เมื่อนักเรียนกลุ่มนี้เผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน**

จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนต่าง ๆ ในประโยคเปิดรวมกันอยู่ได้ด้วยกฎเกณฑ์ที่เกิดจากการพิจารณาความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้าง นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้ยังมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนทางด้านซ้ายมือและด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งเป็นการมองประโยคทั้งประโยคในภาพรวมไม่แยกเป็นส่วน ๆ เหมือนกับนักเรียนกลุ่ม 2 ส่งผลให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถระบุข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้ถูกต้อง โดยใช้วิธีการคิดในเชิงความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค ไม่ได้ใช้การคำนวณผลลัพธ์แต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

ตอนที่ 2 กรอบแนวคิดที่ได้จากการปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้น

การปรับปรุงกรอบแนวคิดเป็นการนำผลจากการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายจำนวน 19 คน ที่ตอบสนองออกมาจากการทำแบบทดสอบและจากการสัมภาษณ์ มาเปรียบเทียบกับกรอบแนวคิดเบื้องต้นเดิมที่ได้จากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในระยะที่ 1 ซึ่งได้ผลเป็นดังตาราง 23, 24 และ 25 โดยตัวอักษรที่ขีดเส้นใต้ หมายถึง ลักษณะการให้เหตุผลที่ได้จากการตอบสนองของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายและสอดคล้องกับลักษณะที่อยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้น แต่มีการปรับให้กระชับ และชัดเจนขึ้น ส่วนตัวอักษรที่ระบายแถบทึบ หมายถึงลักษณะที่พบจากการตอบสนองของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายแต่ไม่มีอยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้น

ตาราง 23 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายในภาพรวม

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา (A01) <u>ไม่สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหาได้เลย หรือสามารถวิเคราะห์ออกมาได้ในบางลักษณะที่ไม่ใช่ลักษณะสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลได้</u> (A02) <u>อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ในสถานการณ์ปัญหาอย่างสับสน ไม่สมเหตุสมผล</u> (A03) <u>ไม่สามารถวิเคราะห์กฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปที่ทำให้แต่ละองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้</u>	(A11) <u>สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้บางประเด็น แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด</u> (A12) <u>สามารถอธิบายได้ว่าองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผลในบางประเด็น</u> (A13) <u>ไม่สามารถวิเคราะห์กฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปที่ทำให้แต่ละองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้</u>	(A21) <u>สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ครบถ้วนทั้งหมด</u> (A22) <u>สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผล ครบถ้วนทุกประเด็น</u> (A23) <u>สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยกฎเกณฑ์ใด แต่ยังไม่ยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด</u>	(A31) <u>สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ครบถ้วนทั้งหมด</u> (A32) <u>สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละองค์ประกอบที่วิเคราะห์ได้มีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้อย่างสมเหตุสมผล ครบถ้วนทุกประเด็น</u> (A33) <u>สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ในหลายมิติ หรืออาศัยเหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด</u>

ตาราง 23 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การสร้างข้อสรุป I01 <u>ไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้หรือ</u> <u>ระบุข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล โดยใช้</u> <u>วิธีการให้เหตุผลแบบเชิงประจักษ์ เช่น</u> <u>การนำสิ่งที่ใจหยั่งกำหนดให้มาเป็น</u> <u>ข้อสรุป หรือสร้างข้อสรุปโดยการเดา</u> I02 <u>การนำเสนอหลักฐานสนับสนุน</u> <u>ข้อสรุปจะมีลักษณะสับสน คลุมเครือ</u> <u>ไม่ชัดเจน หยิบยกเอาประเด็นหรือ</u> <u>ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่</u> <u>กำหนดให้มาใช้ในการให้เหตุผล</u> I03 <u>อธิบายอย่างสับสนว่าหลักฐานที่</u> <u>ยกมาสามารถสนับสนุนข้อสรุปได้</u> <u>อย่างไร</u> การประเมินข้อสรุป E01 <u>ไม่มีการประเมินความน่าเชื่อถือ</u> <u>ของข้อสรุปที่ได้ หรือประเมินโดยใช้</u> <u>เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผล</u>	การสร้างข้อสรุป I11 <u>ระบุข้อสรุปโดยการพิจารณาจาก</u> <u>หลักฐานบางส่วน มีการให้เหตุผล</u> <u>ประกอบ แต่อาจเป็นเหตุผลที่ไม่</u> <u>ถูกต้องโดยอ้างอิงจากหลักฐานเพียง</u> <u>บางส่วน ซึ่งไม่เพียงพอในการอธิบาย</u> <u>ความสมเหตุสมผลของข้อสรุป</u> I12 <u>การนำเสนอหลักฐานสนับสนุน</u> <u>ข้อสรุปมีความสมเหตุสมผลใน</u> <u>บางส่วน แต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด</u> I13 <u>อธิบายได้ว่าหลักฐานที่ยกมาใช้</u> <u>สนับสนุนข้อสรุปอย่างไรได้ในบางประเด็น</u> <u>แต่ไม่ชัดเจน</u> การประเมินข้อสรุป E11 <u>ไม่มีการประเมินความน่าเชื่อถือ</u> <u>ของข้อสรุปที่ได้ หรือประเมินโดยใช้</u> <u>เกณฑ์ที่ไม่สมเหตุสมผล</u>	การสร้างข้อสรุป I21 <u>ระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล โดย</u> <u>ใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน</u> <u>แต่การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้</u> <u>ยังอาศัยเหตุผลที่ยึดติดอยู่กับการมอง</u> <u>สถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มอง</u> <u>ในภาพรวมทั้งหมด</u> I22 <u>การนำเสนอหลักฐานสนับสนุน</u> <u>ข้อสรุปมีความ สมเหตุสมผล</u> <u>ครบถ้วน ชัดเจน และเพียงพอ</u> I23 <u>อธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐาน</u> <u>ที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้</u> <u>อย่างไร</u> การประเมินข้อสรุป E21 <u>สามารถแสดงการประเมินความ</u> <u>น่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่</u> <u>สมเหตุสมผลได้</u>	การสร้างข้อสรุป I31 <u>ระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผล โดย</u> <u>ใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน</u> <u>โดยการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม</u> <u>นี้อาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมอง</u> <u>สถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด</u> I32 <u>การนำเสนอหลักฐานสนับสนุน</u> <u>ข้อสรุปมีความ สมเหตุสมผล</u> <u>ครบถ้วน ชัดเจน และเพียงพอ</u> I33 <u>อธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐาน</u> <u>ที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้</u> <u>อย่างไร</u> การประเมินข้อสรุป E31 <u>สามารถแสดงการประเมินความ</u> <u>น่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่</u> <u>สมเหตุสมผลได้</u>

ตาราง 24 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเรื่องแบบรูป

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์แบบรูป A01 ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใดๆของแบบรูปที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย A02 ไม่สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร หรือไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป A03 ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ของแบบรูปได้ กล่าวคือไม่เข้าใจว่าในขณะที่ตำแหน่งของพจน์เพิ่มขึ้นจะส่งผลต่อค่าของพจน์นั้นอย่างไร หรือไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น	การวิเคราะห์แบบรูป A11 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวออกมาได้ A12 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้ A13 มองความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปเป็นสูตรแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์	การวิเคราะห์แบบรูป A21 สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร A22 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์ A23 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้โดยใช้การอุปนัย กล่าวคือ พยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าของทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้ แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นต้องเป็นจริงกับทุก ๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าจำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร	การวิเคราะห์แบบรูป A31 สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร A32 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์ A33 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ โดยสามารถพิสูจน์ขึ้นจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล ไม่ใช้การได้มาโดยวิธีการอุปนัย โดยนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าจำนวนที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร

ตาราง 24 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การสร้างข้อสรุป I01 ไม่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ I02 เหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกิดจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง หรืออ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป I03 ลักษณะการอธิบายเหตุผลจะใช้วิธีเชิงประจักษ์ คือการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น ใช้การนำตัวเลขในโจทย์มาเป็นข้อสรุป การเลือกใช้ข้อมูลจากพจน์ใดพจน์หนึ่งของแบบรูปมาประกอบการสร้างข้อสรุปซึ่งไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุสมผล	การสร้างข้อสรุป I11 สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ I12 เหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะใช้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์ คือต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป I13 ลักษณะการอธิบายเหตุผลมีคุณสมบัติสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ใกล้เคียง ๆ กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะ “ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 2 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 3 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ a ดังนั้นผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันจะมีผลต่างเท่ากับ a เสมอ”	การสร้างข้อสรุป I21 สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ I22 เหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลัก กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปมาจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้เป็นจริง แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นนั้นต้องเป็นจริงกับทุก ๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าจำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร แล้วใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ	การสร้างข้อสรุป I31 สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ I32 เหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไป โดยการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล โดยนักเรียนจะสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าจำนวนที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร แล้วใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ

ตาราง 24 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
แต่ลักษณะการอ้างเหตุผลไม่มี ความสมเหตุสมผลในส่วนของการ หาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผล เกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องใน ลักษณะ เช่น พจน์ที่ 10 มีค่า เป็น a ดังนั้นพจน์ที่ 100 ต้องมี ค่าเป็น $3a + 3a + 3a + a$ หรือ $10a$ การประเมินข้อสรุป E01 เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่ มีการประเมินข้อสรุปของตน E02 เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมิน คำตอบของตน นักเรียนกลุ่มนี้ จะไม่ว่าจะประเมินคำตอบของ ตนอย่างไร หรือจะใช้เกณฑ์ใน การประเมินที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิม เพื่อให้แน่ใจอีกครั้ง	แต่ลักษณะการอ้างเหตุผลไม่มี ความสมเหตุสมผลในส่วนของการ หาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผล เกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องใน ลักษณะ เช่น พจน์ที่ 10 มีค่า เป็น a ดังนั้นพจน์ที่ 100 ต้องมี ค่าเป็น $3a + 3a + 3a + a$ หรือ $10a$ การประเมินข้อสรุป E11 เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่ มีการประเมินข้อสรุปของตน E12 เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมิน คำตอบของตน นักเรียนกลุ่มนี้จะ ไม่ว่าจะประเมินคำตอบของตน อย่างไร หรือจะใช้เกณฑ์ในการ ประเมินที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิมเพื่อให้แน่ใจ อีกครั้ง	I23 สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ใน รูปของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ได้ และสามารถ อธิบายเกี่ยวกับสูตรที่เป็นตัวแปรที่ใช้ได้อย่าง สมบูรณ์ การประเมินข้อสรุป E21 เมื่อได้ข้อสรุปแล้วจะมีการตรวจสอบหรือ ประเมินความน่าเชื่อถือของวิธีการคิดและ ข้อสรุปอีกครั้งหนึ่ง E22 ใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการประเมิน ความน่าเชื่อถือของข้อสรุป เช่น จะใช้วิธีการ เปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน คือวิธีที่ทำ ให้ได้ข้อสรุปมาคือการแทนค่าในสูตรทั่วไปที่ สร้างขึ้น กับวิธีที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ ตนใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น การวาดรูป ตามข้อกำหนดในแบบรูป หรือการบวกเพิ่ม เป็นต้นว่าจะทำให้ได้ข้อสรุปเหมือนกันหรือไม่	I33 สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไป ให้อยู่ในรูปของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ ได้ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับตัวแปร ที่ใช้ได้อย่างสมบูรณ์ การประเมินข้อสรุป E31 ไม่มีร่องรอยหรือหลักฐานแสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุป มาแล้วจะมีการตรวจสอบความ น่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน E32 เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินข้อสรุป ของตน นักเรียนสามารถใช้เกณฑ์ที่ สมเหตุสมผลในการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป เช่น ใช้วิธีการ เปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 2

ตาราง 25 กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
การวิเคราะห์ประโยคเปิด A01 วิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ A02 อธิบายความสัมพันธ์ในประโยคเปิดอย่างสับสน ไม่สมเหตุสมผล มองประโยคเปิดที่กำหนดในรูป โจทย์ = ____ หรือต้องแปลงประโยคให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวเสมอ A03 ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน A04 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด	การวิเคราะห์ประโยคเปิด A11 วิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ A12 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ = คำตอบ โดยไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ (ถ้ามี) A13 ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน A14 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด	การวิเคราะห์ประโยคเปิด A21 วิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือ และนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ A22 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป ผลลัพธ์ทางซ้าย = ผลลัพธ์ทางขวา A23 สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน A24 มองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด	การวิเคราะห์ประโยคเปิด A31 วิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือและนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ A32 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป นิพจน์ทางซ้าย = นิพจน์ทางขวา A33 สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน A34 มองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

ตาราง 25 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
ลักษณะการสร้างข้อสรุป I01 ไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร I02 สร้างข้อสรุปโดยการพยายามแปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป โจทย์ = ____ แล้วคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เติมลงในช่องว่างโดยไม่สนใจว่าช่องว่างจะอยู่ในตำแหน่งใด แต่ต้องนำจำนวนในประโยคมาดำเนินการกันให้หมดทุกตัวซึ่งไม่สมเหตุสมผล I03 ลักษณะการอ้างเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะที่ไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = __ + 30$ บางครั้งนักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจาก $63 + 29 + 30 = 121$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 121 หรือบางครั้งก็อธิบายว่า	ลักษณะการสร้างข้อสรุป I11 สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ในกรณีที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีตัวเลขตัวเดียว แต่ในกรณีที่ประโยคเปิดมีตัวเลขอยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมากกว่าหนึ่งจำนวนจะไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ I12 เหตุผลที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปคือการนำกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกลับกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้อธิบาย หรือให้ความสนใจกับจำนวนอื่นที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ (ถ้ามี) I13 ลักษณะการอ้างเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปมีรูปแบบ มีความคงเส้นคงวา แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้มาจากการมองประโยคเปิดของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูปของ โจทย์ = คำตอบ เช่น จากประโยค $63 + 29 = __ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจาก $63 + 29 = 92$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 92	ลักษณะการสร้างข้อสรุป I21 สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร I22 สร้างข้อสรุปโดยใช้เหตุผลในเชิงการคำนวณ กล่าวคือคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ I23 ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = __ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจากจำนวนที่เติมในช่องว่างต้องทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน	ลักษณะการสร้างข้อสรุป I31 สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร I32 สร้างข้อสรุปโดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค I33 ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = __ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจากจำนวนที่เติมใน

ตาราง 25 (ต่อ)

กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3
เนื่องจาก $63 + 29 - 30 = 62$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 62 การประเมินข้อสรุป E01 เมื่อได้ข้อสรุปแล้วจะไม่มี <u>การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป</u> E02 เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะใช้เกณฑ์ในการประเมินที่ไม่สมเหตุผล เช่น ใช้วิธีการคำนวณซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณในครั้งแรกไม่ผิดพลาด	การประเมินข้อสรุป E11 เมื่อหาข้อสรุปได้แล้วจะไม่มี <u>การตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุป</u> E12 เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะใช้เกณฑ์ในการประเมินที่ไม่สมเหตุผล เช่น ใช้วิธีการคำนวณซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณในครั้งแรกไม่ผิดพลาด	และทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ มีค่าเป็น 92 และทางขวามือมีอยู่ 30 ดังนั้น ต้องเติม 62 (ซึ่งได้จาก $63 + 29 - 30 = 62$) ลงในช่องว่าง การประเมินข้อสรุป E21 เมื่อได้ข้อสรุปแล้วมักจะไม่นึกใจในข้อสรุปที่ได้ นั่นทันที แต่จะมีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนเองอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้ นั้นมีความถูกต้องหรือไม่ E22 ใช้เกณฑ์ที่สมเหตุผลในการประเมินข้อสรุป คือจะใช้วิธีการคำนวณผลลัพธ์ทางซ้ายและผลลัพธ์ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อนำมาเปรียบเทียบกันว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่	ช่องว่างต้องทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน และ 29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1 ดังนั้น จำนวนที่เติมในช่องว่างต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 ซึ่งก็คือ 62 การประเมินข้อสรุป E31 เมื่อได้ข้อสรุปแล้วมักจะไม่นึกใจในข้อสรุปที่ได้ นั่นทันที แต่จะมีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนเองอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้ นั้นมีความถูกต้องหรือไม่ E32 ใช้เกณฑ์ที่สมเหตุผลในการประเมินข้อสรุป คือจะใช้วิธีการคำนวณผลลัพธ์ทางซ้ายและผลลัพธ์ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อนำมาเปรียบเทียบกันว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่

จากกรอบแนวคิดที่ปรับปรุงแล้วข้างต้นสามารถกล่าวถึงลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนในแต่ละกลุ่ม ตั้งแต่กลุ่ม 0 ถึงกลุ่ม 3 จำแนกตามองค์ประกอบของการให้เหตุผล ซึ่งได้แก่ การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา การสร้างข้อสรุป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป ได้ดังต่อไปนี้

นักเรียนกลุ่ม 0

ลักษณะการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหาที่นำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหาได้ รวมถึงไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้ เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปและไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ของแบบรูปได้ กล่าวคือไม่เข้าใจว่าในขณะที่ตำแหน่งของพจน์เพิ่มขึ้นจะส่งผลต่อค่าของพจน์นั้นอย่างไร เช่น เมื่อกำหนดให้นักเรียนวาดรูปของพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวาดออกมาได้ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 133-137) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนกลุ่มนี้จะวิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ โดยมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป *โจทย์ เท่ากับ* ____ และต้องแปลงประโยคให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวเสมอ โดยไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคได้ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน เช่น ประโยคเปิด $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ นักเรียนกลุ่มนี้มองเป็น $5 + 4 + 7 + 5 = \underline{\hspace{1cm}}$ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 197-200)

ลักษณะการสร้างข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สามารถสร้างข้อสรุปได้ หรือระบุข้อสรุปโดยใช้วิธีการที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น ใช้วิธีการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ คือการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาเป็นข้อสรุป ซึ่งไม่ถูกต้องและไม่สมเหตุสมผล การนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปมีลักษณะสับสน คลุมเครือ และไม่คงเส้นคงวา หยิบยกเอาประเด็นหรือข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องมาใช้ในการให้เหตุผล และอธิบายอย่างสับสนว่าหลักฐานที่ยกมาจะสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป นักเรียนจะไม่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกิดจากการเดาหรือใช้การอ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป ลักษณะการอ้างเหตุผลเป็นการใช้วิธีเชิงประจักษ์ คือการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น ใช้การนำตัวเลขในโจทย์มาเป็นข้อสรุป การเลือกใช้ข้อมูลจากพจน์ใดพจน์หนึ่งมาประกอบการ

สร้างข้อสรุปซึ่งไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุสมผล (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 137-141) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนจะไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดที่กำหนดให้จะมีลักษณะอย่างไร วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด คือการพยายามแปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป *โจทย์ เท่ากับ* ____ แล้วคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจว่าช่องว่างจะอยู่ในตำแหน่งใด แต่ต้องนำจำนวนในประโยคมาดำเนินการกันให้หมดทุกตัว การอ้างเหตุผลหรือการแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้มีลักษณะที่ไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = ___ + 30$ บางครั้งนักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจาก $63 + 29 + 30 = 121$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 121 หรือบางครั้งก็อธิบายว่า เนื่องจาก $63 + 29 - 30 = 62$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 62 (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 201-204)

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่มีการประเมินข้อสรุปของตน แต่เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะไม่รู้ว่าจะประเมินคำตอบของตนอย่างไร หรือจะใช้เกณฑ์ในการประเมินที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิมซึ่งเป็นวิธีที่ทำผิดในครั้งแรก (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 141 และในภาคผนวก ค หน้า 204-205)

นักเรียนกลุ่ม 1

ลักษณะการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบสำคัญของสถานการณ์ปัญหาที่นำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลออกมาได้บางลักษณะไม่ครบถ้วนทั้งหมดสามารถอธิบายได้ว่าองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหามีความสัมพันธ์กันอย่างไรได้ในบางประเด็น แต่ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ที่ทำให้องค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้อย่างเป็นระบบ เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**แบบรูป** นักเรียนจะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปออกมาได้ กล่าวคือนักเรียนจะมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในรูปของสูตรแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด *ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์* แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้ เช่นในแบบรูปข้อ 2 นักเรียนจะอธิบายว่า *ลดสายการปูกระเบื้องรูปแรก สีดำ 1 แผ่น สีขาว 8 รูปที่ 2 สีดำ 2 สีขาว 10 รูปที่ 3 สีดำ 3 สีขาว 12 กระเบื้องสีขาวจะเพิ่มทีละ 2* (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 143-145) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนจะวิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมาย

เท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ กล่าวคือจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ เท่ากับ คำตอบ โดยไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบหรือทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ (ถ้ามี) ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน รวมทั้งไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ เช่น ในประโยค $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ นักเรียนกลุ่มนี้จะมองเป็น $5 + 4 + 7 = \underline{\hspace{1cm}}$ โดยไม่สนใจตัวเลข 5 ที่ทางขวามือ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 207-211)

ลักษณะการสร้างข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้จะระบุข้อสรุปที่เกิดจากการพิจารณาจากหลักฐานเพียงบางส่วน ในการสร้างข้อสรุปจะมีการให้เหตุผลประกอบ แต่อาจเป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องจากหลักฐานบางส่วน ซึ่งไม่เพียงพอในการอธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป การนำเสนอหลักฐานหรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปมีความสมเหตุสมผลในบางส่วนแต่ไม่ครบถ้วนทั้งหมด อธิบายได้ว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปอย่างไรได้ในบางประเด็นแต่ไม่ชัดเจน เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป นักเรียนจะสามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะใช้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในรูป ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์ คือต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผลในส่วนของ การหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ใกล้ ๆ กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะ ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 2 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 3 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ a ดังนั้นผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันจะมีผลต่างเท่ากับ a เสมอ แต่ลักษณะการอ้างเหตุผลไม่มีความสมเหตุสมผลในส่วนของ การหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องในลักษณะ พจน์ที่ 10 มีค่าเป็น a ดังนั้นพจน์ที่ 100 ต้องมีค่าเป็น $3a + 3a + 3a + a$ หรือ $10a$ เช่น แบบรูปในข้อ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการวางกล่องลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนจะตอบได้ว่าพจน์ที่ 6 ซึ่งเป็นพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้มีค่าเป็น 26 เพราะพื้นที่เพิ่มขึ้นทีละ 4 แต่เมื่อถูกกำหนดให้หาค่าของพจน์ที่ 100 นักเรียนกลุ่มนี้จะอธิบายว่าเพราะกล่อง 30 ใบ มีพื้นที่ 122 ดังนั้นกล่อง 100 ใบ มีพื้นที่ $122 + 122 + 122 + 42 = 408$ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 145-155) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ **ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนจะสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ในกรณีที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีตัวเลขตัวเดียว แต่ในกรณีที่ประโยคเปิดมีตัวเลขอยู่ทางขวามือของเครื่องหมายมากกว่าหนึ่งจำนวนจะไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ โดยการนำกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกลับกันแล้วนำผลลัพธ์

ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้พิจารณาหรือให้ความสนใจกับจำนวนอื่นที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ การอ้างเหตุผลหรือการอธิบายสนับสนุนข้อสรุปมีความคงเส้นคงวา แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้มาจากการมองประโยคเปิดของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูปของ โจทย์ เท่ากับ คำตอบ หลักฐานหรือเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้นำเสนอเพื่อสนับสนุนข้อสรุปจะเป็นการอ้างถึงความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของเครื่องหมายที่แทนการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น จากประโยค $63 + 29 = _ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจาก $63 + 29 = 92$ ดังนั้นจำนวนที่ต้องเติมในช่องว่างคือ 92 (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 211-215)

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่มี การประเมินข้อสรุปของตน และเมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตนนักเรียนจะไม่รู้ว่าประเมิน คำตอบของตนอย่างไร หรือจะใช้เกณฑ์ในการประเมินที่ไม่สมเหตุผล ผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิม เพื่อให้แน่ใจอีกครั้ง เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 0 (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 155 และในภาคผนวก ค หน้า 215-217)

นักเรียนกลุ่ม 2

ลักษณะการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือ องค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุผลของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างครบถ้วน สมบูรณ์ สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุผลว่า ลักษณะหรือองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ ปัญหามีความสัมพันธ์กันอย่างไร สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ใด แต่กฎเกณฑ์ที่นักเรียนกลุ่มนี้วิเคราะห์ออกมา ได้ยังคงอาศัยเหตุผลที่ยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป นักเรียนจะสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูป ได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร สามารถ วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์ รวมทั้งสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์ และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ โดยใช้การอุปนัยในการสร้างความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นวิธีการที่เริ่ม จากพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ ที่ทำให้ค่าของทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้มันเป็นจริง แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นนั้นต้องเป็นจริงกับ ทุก ๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าตัวเลขที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร เช่น แบบรูปในข้อ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการวางกล่องลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนกลุ่มนี้จะ สามารถวิเคราะห์ได้ว่า พื้นที่กล่อง เท่ากับ จำนวนกล่อง คูณ 4 บวก 2 แต่จะไม่สามารถอธิบาย

ได้ว่าตัวเลข 4 และ 2 มีที่มาและความหมายอย่างไรเพราะได้มาจากการสุม (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 157-166) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนกลุ่มนี้จะวิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้านซ้ายและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป *ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา* สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ คือส่วนทางซ้ายและส่วนทางขวาทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่นจากประโยค $63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$ นักเรียนกลุ่มนี้จะมองว่าจำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่างต้องทำให้ประโยคอยู่ในรูป $92 = 92$ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 219-223)

ลักษณะการสร้างข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถระบุข้อสรุปที่ถูกต้องสมเหตุสมผล โดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน สามารถนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างชัดเจน เพียงพอและสมเหตุสมผล และสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร แต่เหตุผลที่ยกมาสนับสนุนข้อสรุปจะเป็นเหตุผลที่ยังยึดติดอยู่กับการมองสถานการณ์ปัญหาเป็นส่วน ๆ ไม่มองในภาพรวมทั้งหมด เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**แบบรูป** นักเรียนจะสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ แต่วิธีการในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลักโดยไม่ได้สนใจความหมายหรือที่มาของตัวเลขในสูตรแต่อย่างใด กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปมาจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้นั้นเป็นจริง แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นนั้นต้องเป็นจริงกับทุก ๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าตัวเลขที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร แล้วใช้สูตรทั่วไปที่สร้างขึ้นไปหาค่าของพจน์ต่างๆ ในกรณีเฉพาะ เช่น แบบรูปในข้อ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการวางกล่องลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนกลุ่มนี้จะอธิบายว่า *กล่อง 1 ใบ มีพื้นที่ 6 เกิดจาก 1 คูณ 4 แล้วบวก 2* *กล่อง 2 ใบ มีพื้นที่ 10 เกิดจาก 2 คูณ 4 บวก 2* *กล่อง 3 ใบ มีพื้นที่ 14 เกิดจาก 3 คูณ 4 บวก 2* ดังนั้นถ้ากล่อง 100 ใบ จะมีพื้นที่ $100 \times 4 + 2 = 402$ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 166-171) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนจะสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร แต่จะสร้างข้อสรุปโดยใช้วิธีการคิดคำนวณ (Computational Thinking) ผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมาย

เท่ากับ แล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งเป็นวิธีการที่เกิดจากการมองประโยคแยกเป็นส่วน ๆ ไม่มองความสัมพันธ์ในภาพรวมทั้งประโยค ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = ___ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจากจำนวนที่เติมในช่องว่างต้องทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน และทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น 92 และทางขวามือมีอยู่ 30 ดังนั้นต้องเติม 62 ซึ่งได้มาจากการเอา 63 บวกกับ 29 แล้วลบด้วย 30 ได้เป็น 62 ลงในช่องว่าง (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 223-226)

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปแล้วมักจะไม่นึกถึงใจในข้อสรุปที่ได้ นั่นทันที แต่จะมีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้นั้นมีความถูกต้องหรือไม่ โดยในการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปจะใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการประเมินข้อสรุป เช่น ใช้การเปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน คือเปรียบเทียบข้อสรุปที่ได้จากวิธีที่ทำให้ได้ข้อสรุปมา กับวิธีที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ตนใช้ในการสร้างข้อสรุปว่าจะทำให้ได้ข้อสรุปเหมือนกันหรือไม่ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 172-174 และในภาคผนวก ค หน้า 226-228)

นักเรียนกลุ่ม 3

ลักษณะการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบสำคัญที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ปัญหาได้อย่างครบถ้วนสมบูรณ์ สามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหามีความสัมพันธ์กันอย่างไร และสามารถอธิบายได้อย่างสมเหตุสมผลว่าลักษณะหรือองค์ประกอบของสถานการณ์ปัญหารวมกันอยู่ได้โดยอาศัยกฎเกณฑ์ใด โดยนักเรียนในกลุ่มนี้จะอาศัยเหตุผลที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ในหลายมิติ หรืออาศัยเหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด ไม่แยกเป็นส่วน ๆ เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแบบรูป นักเรียนจะสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์ สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้มาจะไม่ใช้การได้มาโดยวิธีการอุปนัย แต่เป็นความสัมพันธ์ที่ได้มาจากการพิสูจน์ขึ้นจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้อย่างมีความหมายและสมเหตุสมผล โดยนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร เช่น แบบรูปในข้อ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการวางกล่องลูกบาศก์ซ้อนกัน นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าพื้นที่

ของกล่องจะได้จากการนับด้านข้างของกล่องแต่ละใบ 4 ด้าน และนับเพิ่มอีก 2 ด้าน จากด้านบนของกล่องใบบนสุดและด้านล่างของกล่องใบล่างสุด ดังนั้นพื้นที่ของกล่องจะมีค่าเท่ากับการเอาจำนวนกล่องคูณด้วย 4 เพราะแต่ละกล่องถูกนับด้านข้าง 4 ด้าน แล้วบวกด้วย 2 คือด้านบนสุดและด้านล่างสุดของกล่องที่วางซ้อนกัน (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 176-186) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของจำนวน** นักเรียนจะวิเคราะห์ว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือและนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยนักเรียนจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปนิพจน์ทางซ้าย เท่ากับ นิพจน์ทางขวา สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค เช่น ประโยคเปิด $63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$ นักเรียนในกลุ่มนี้จะวิเคราะห์ได้ว่า 29 มีความสัมพันธ์กับ 30 คือมีค่าน้อยกว่า 30 อยู่ 1 ดังนั้นถ้าต้องการให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างจะต้องมีความสัมพันธ์กับ 63 ในลักษณะเดียวกัน คือจะต้องมีค่าน้อยกว่า 63 อยู่ 1 เช่นกัน (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 231-234)

ลักษณะการสร้างข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถระบุข้อสรุปที่สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการให้เหตุผลที่มีระบบแบบแผน การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้เกิดจากการมองสถานการณ์ปัญหาในภาพรวมทั้งหมด มีการนำเสนอหลักฐานสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล สามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าหลักฐานที่ยกมาใช้สนับสนุนข้อสรุปได้อย่างไร เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**แบบรูป** นักเรียนจะสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ วิธีการในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไปที่เกิดจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง แล้วใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับค่าของพจน์ต่าง ๆ กล่าวคือจากสูตรทั่วไปที่พิสูจน์ขึ้นให้เห็นจริงแล้วอ้างอิงสูตรดังกล่าวไปหาค่าของพจน์ต่างๆ ในกรณีเฉพาะ สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับตัวแปรที่ใช้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ เช่น แบบรูปในข้อ 3 ซึ่งเป็นแบบรูปที่เกิดจากการร้อยลูกปัดเป็นลวดลาย นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไประหว่างจำนวนลูกปัดสีขาวและสีดำได้ว่าอยู่ในรูปของ $\text{จำนวนลูกปัดสีขาว} = (\text{จำนวนลูกปัดสีดำ} \times 3) + 1$ และยังสามารถเขียนสูตรดังกล่าวในรูปของสัญลักษณ์หรือตัวแปรได้ เช่นแสดงออกมาในรูป $\bullet \times 3 + 1 = \bigcirc$ (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 186-192) เมื่อเผชิญกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับ**ประโยคเปิดของ**

จำนวน นักเรียนจะสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร โดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค ลักษณะการอ้างเหตุผลจะมีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล เช่น จากประโยค $63 + 29 = __ + 30$ นักเรียนจะอธิบายว่าเนื่องจากจำนวนที่เติมในช่องว่างต้องทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน และ 29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1 ดังนั้น จำนวนที่เติมในช่องว่างต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 ซึ่งก็คือ 62 (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ค หน้า 234-238)

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป นักเรียนกลุ่มนี้สามารถประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปโดยใช้เกณฑ์ที่สมเหตุสมผลในการประเมินข้อสรุป เช่น ใช้การเปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน คือเปรียบเทียบข้อสรุปที่ได้จากวิธีที่ทำให้ได้ข้อสรุปมา กับวิธีที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ตนใช้ในการสร้างข้อสรุปว่าจะทำให้ได้ข้อสรุปเหมือนกันหรือไม่ เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 2 (ดูตัวอย่างการแสดงออกของนักเรียนในภาคผนวก ข หน้า 192-193 และในภาคผนวก ค หน้า 238-240)

ตอนที่ 3 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

การนำเสนอผลการวิจัยในส่วนนี้ จะเป็นการนำเสนอข้อมูลที่ได้จากนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 66 คน จาก 2 โรงเรียน ๆ ละ 33 คน ประกอบด้วยนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ระดับชั้นละ 11 คน จากแต่ละโรงเรียน ซึ่งผู้วิจัยเก็บข้อมูลจากผลการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป และเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนเหล่านี้

3.1 การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

จากผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้งหมด 66 คน พบว่าสามารถจำแนกออกเป็นกลุ่มตามกรอบแนวคิดได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 26 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามกลุ่มในรอบแนวคิด

แบบรูป ประโยคเปิด	กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
กลุ่ม 0	3	0	0	0	3
กลุ่ม 1	4	9	0	0	13
กลุ่ม 2	5	20	5	7	37
กลุ่ม 3	1	6	1	5	13
รวม	13	35	6	12	66

จากตารางจะเห็นว่า นักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ใน กลุ่ม 0 หรือ กลุ่ม 1 ของเรื่องประโยคเปิดทั้งหมดจะเป็นนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ใน กลุ่ม 0 หรือ กลุ่ม 1 ของเรื่องแบบรูปด้วยเช่นกัน กล่าวคือเรื่องประโยคเปิดมีนักเรียนกลุ่ม 0 จำนวน 3 คน และ 3 คน ดังกล่าวก็เป็นนักเรียนกลุ่ม 0 ของเรื่องแบบรูปด้วยเช่นกัน นอกจากนี้นักเรียนกลุ่ม 1 จำนวน 13 คน ของเรื่องประโยคเปิด ก็จัดเป็นนักเรียนที่อยู่ในกลุ่ม 0 และ 1 ของเรื่องแบบรูป อย่างไรก็ตามเมื่อเราพิจารณาจากนักเรียนกลุ่มสูง (กลุ่ม 2 กลุ่ม 3) ของเรื่องแบบรูป จะเห็นว่านักเรียนจำนวน 18 คน ที่เป็นนักเรียนกลุ่มสูงของเรื่องแบบรูป ในจำนวนนี้ทุกคนก็จะเป็นนักเรียนกลุ่มสูงของเรื่องประโยคเปิดของจำนวนด้วยเช่นกัน นอกจากนี้จากตาราง 26 จะเห็นว่านักเรียนกลุ่มต่ำของเรื่องแบบรูปมีจำนวนมากถึง 48 คน ในขณะที่นักเรียนกลุ่มต่ำของเรื่องประโยคเปิดมีจำนวนเพียง 16 คน เท่านั้น จากข้อมูลดังกล่าวทำให้สามารถสร้างข้อสรุปได้ 4 ประการ ดังต่อไปนี้

1. ถ้านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มต่ำของเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) จะเป็นนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มต่ำ (กลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) ของเรื่องแบบรูปด้วยเช่นกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ นักเรียนที่มีความเข้าใจผิดว่าเครื่องหมายเท่ากับคือ แทนการคำนวณ มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ เท่ากับ คำตอบ และมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด จะเป็นนักเรียนที่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้
2. ถ้านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องแบบรูป (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) แล้วจะเป็นนักเรียนกลุ่มสูง (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) ของเรื่องประโยคเปิดของจำนวนด้วยเช่นกัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ นักเรียนที่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปทั่วไปขึ้นมา จากวิธีการอุปนัย หรือวิธีการการพิสูจน์จากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ จะเป็นนักเรียนที่มอง

เครื่องหมายเท่ากับในลักษณะของสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้อย่างสมบูรณ์

3. ถ้านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) แล้วจะไม่สามารถสรุปได้ว่านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องแบบรูป ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่าในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยค นักเรียนสามารถใช้วิธีการอื่นในการสร้างข้อสรุป เช่น การใช้การคิดคำนวณ นอกเหนือจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค

4. ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเรื่องแบบรูปจะมีปัญหามากกว่าเรื่องประโยคเปิด (นักเรียนกลุ่มต่ำของเรื่องแบบรูปมีมากกว่านักเรียนกลุ่มต่ำของเรื่องประโยคเปิด)

แบบรูป

ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามระดับชั้น ระดับผลการเรียน และโรงเรียน มีรายละเอียดเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 27 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม) ระดับชั้น ผลการเรียน และโรงเรียน

ชั้น	ป.4						ป.5						ป.6						รวม	ร้อยละ
โรงเรียน	ชนบท			ในเมือง			ชนบท			ในเมือง			ชนบท			ในเมือง				
ผลการเรียน	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด		
กลุ่ม 0	0	2	3	0	0	0	0	1	3	0	0	1	0	1	2	0	0	0	13	19.7
กลุ่ม 1	3	3	0	0	3	3	1	4	0	1	4	2	3	4	1	0	0	3	35	53.0
กลุ่ม 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2	2	0	6	9.1
กลุ่ม 3	0	0	0	3	2	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3	0	12	18.2
รวม	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	66	100

ส หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนดี ก หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนระดับปานกลาง
ด หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนระดับต่ำ

จากตาราง 27 แสดงให้เห็นว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 คิดเป็นร้อยละ 53 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด รองลงมาคือนักเรียนกลุ่ม 0 และนักเรียนกลุ่ม 3 ที่มีจำนวนใกล้เคียงกันคือ คิดเป็นร้อยละ 19.7 และ 18.2 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ตามลำดับ และนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ที่มีจำนวนน้อยที่สุดคือนักเรียนกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 9.1 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ ส่วนใหญ่จะสามารถหาค่าของพจน์ถัดไป และค่าของพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปเชิงเส้นที่กำหนดให้ได้ โดยวิธีการที่นำมาใช้ในการสร้างข้อสรุปจะได้มาจากการที่นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถที่จะวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่อยู่ติดกันได้ว่าอยู่ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์ แต่นักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ จะไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และสูตรของพจน์ทั่วไปที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปเชิงเส้นได้ ทั้งนี้เนื่องจากนักเรียนส่วนใหญ่จะไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ โดยนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีทั้งนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบทในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน

นอกจากนี้จากข้อมูลในตาราง 27 แสดงให้เห็นว่ามีนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเพียงร้อยละ 27.3 เท่านั้นที่สามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ โดยวิธีการที่นักเรียนใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ทั่วไปสามารถจำแนกออกได้เป็น 2 แบบ คือ การสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาจากวิธีการอุปนัย คิดเป็นร้อยละ 9.1 และการสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาจากวิธีการพิสูจน์จากเงื่อนไขของแบบรูป คิดเป็นร้อยละ 18.2 ทั้งนี้เพราะนักเรียนทั้งสองกลุ่มสามารถที่จะวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ประเด็นที่น่าสนใจจากข้อมูลในตาราง 27 คือ นักเรียนกลุ่ม 3 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาจากวิธีการพิสูจน์เงื่อนไขของแบบรูป มีทั้งนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกันมาก และมาจากทั้งสองโรงเรียนที่มีผลการเรียนปานกลางถึงเรียนดี แต่ในส่วนของนักเรียนกลุ่ม 2 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถการสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาจากวิธีการอุปนัยทุกคนจะเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนปานกลางถึงดีซึ่งมาจากโรงเรียนในเมือง และเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6

นอกจากนี้จากข้อมูลในตาราง 27 จะพบว่านักเรียนจำนวนไม่น้อย คือคิดเป็นร้อยละ 19.7 ที่ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใด ๆ ของแบบรูปเชิงเส้นได้เลย ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่พจน์ที่อยู่ติดกันได้ รวมถึงไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง

ตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ทำให้ไม่สามารถแม้แต่จะหาพจน์ถัดไปจากแบบรูปเชิงเส้นที่กำหนดให้ได้ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับต่ำถึงปานกลาง ที่มาจากโรงเรียนในชนบทและเรียนอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน มีนักเรียนที่มาจากโรงเรียนในเมืองเพียงคนเดียวที่มีลักษณะการให้เหตุจัดอยู่ในกลุ่มนี้และเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอ่อน

กล่าวโดยสรุปจากข้อมูลในตาราง 27 จะพบว่านักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนส่วนใหญ่ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย มีลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 โดยมีจำนวนมากกว่าครึ่งของนักเรียนทั้งหมด คิดร้อยละ 53 ของนักเรียนทั้งหมด ประกอบไปด้วยนักเรียนทุกระดับชั้น ทุกระดับผลการเรียน และจากทั้ง 2 โรงเรียน
2. นักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 0 มีจำนวนมากเป็นอันดับ 2 คิดเป็นร้อยละ 19.7 ของนักเรียนทั้งหมด ส่วนใหญ่เป็นนักเรียนจะเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับต่ำถึงปานกลางที่มาจากโรงเรียนในชนบทและเรียนอยู่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน
3. นักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 3 มีจำนวนมากเป็นอันดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 18.2 ของนักเรียนทั้งหมด มีทั้งนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน แต่ส่วนใหญ่เป็นนักเรียนที่มีผลการปานกลางถึงเรียนดีที่มาจากโรงเรียนในเมือง
4. นักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 2 มีจำนวนน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 9.1 ของนักเรียนทั้งหมด เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 จากเรียนในเมืองที่มีผลการเรียนระดับปานกลางถึงดีเท่านั้น

ประโยคเปิดของจำนวน

ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามระดับชั้น ระดับผลการเรียน และโรงเรียน มีรายละเอียดเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 28 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) ระดับชั้น ผลการเรียน และโรงเรียน

ชั้น	ป.4						ป.5						ป.6						รวม	ร้อยละ
โรงเรียน	ชนบท			ในเมือง			ชนบท			ในเมือง			ชนบท			ในเมือง				
ผลการเรียน	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด	ส	ก	ด		
กลุ่ม 0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3	4.5
กลุ่ม 1	0	2	1	0	0	1	0	3	1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	13	19.7
กลุ่ม 2	3	2	1	2	5	2	2	2	2	1	3	1	0	5	0	2	4	0	37	56.1
กลุ่ม 3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	2	2	0	3	0	0	1	1	1	13	19.7
รวม	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	3	5	3	66	100

ส หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนดี ก หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนระดับปานกลาง
ด หมายถึง นักเรียนที่มีผลการเรียนระดับต่ำ

ข้อมูลจากตาราง 28 แสดงให้เห็นว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คือคิดเป็นร้อยละ 56.1 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด รองลงมาเป็นนักเรียนกลุ่ม 1 และนักเรียนกลุ่ม 3 ที่มีจำนวนนักเรียนเท่ากัน คือคิดเป็นร้อยละ 19.7 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และกลุ่มที่มีจำนวนน้อยที่สุดคือนักเรียนกลุ่ม 0 ที่มีเพียงร้อยละ 4.5 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

จากข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ ส่วนใหญ่มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับว่าคือสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ แต่นักเรียนส่วนใหญ่จะมองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ ในลักษณะ ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา ไม่มองประโยคเป็น

องค์รวม ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ การสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคของนักเรียนส่วนใหญ่จึงอาศัยการคิดคำนวณ (Computational Thinking) เป็นหลัก

นอกจากนี้จากข้อมูลในตาราง 28 ยังแสดงให้เห็นว่ามีนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนมาก หรือประมาณร้อยละ 25 คือนักเรียนในกลุ่ม 0 และกลุ่ม 1 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่มีความเข้าใจไม่ถูกต้องเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ โดยนักเรียนเหล่านี้จะเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือเครื่องหมายแทนการคำนวณ (Computational Sign) และมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปแบบโจทย์ เท่ากับ คำตอบ (จำนวนหนึ่งเดียว)

สำหรับนักเรียนในกลุ่ม 3 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่มองประโยคเปิดในลักษณะองค์รวมทั้งประโยค จนเกิดเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค ประกอบกับความเข้าใจที่ถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่สองข้างเครื่องหมายเท่ากับ ทำให้สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคได้อย่างง่ายดายโดยใช้การคิดเชิงความสัมพันธ์ (Relational Thinking) มีจำนวน 13 คน หรือคิดเป็นร้อยละ 19.7 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เท่ากับจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 1

ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งที่ได้จากข้อมูลในตาราง 28 คือนักเรียนที่อยู่ในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 ส่วนใหญ่จะเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนปานกลางถึงดี ส่วนนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนต่ำจะเป็นนักเรียนกลุ่ม 0 และ กลุ่ม 1 ประเด็นที่น่าสนใจคือนักเรียนที่มีผลการเรียนดี จะมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ทั้งในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน

3.2 การเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระหว่างนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6

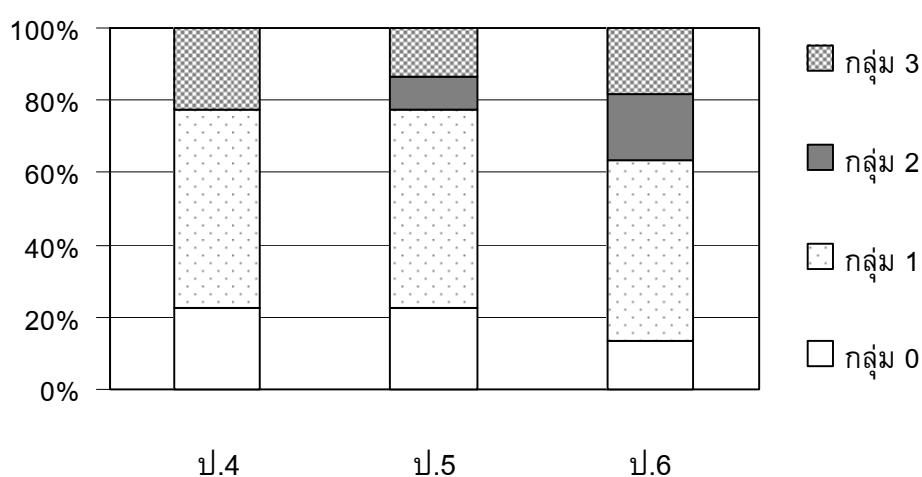
เมื่อพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามระดับชั้น ข้อมูลจะเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 29 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และระดับชั้น

กลุ่ม ชั้น	กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
ป.4	5 (22.7/7.6)	12 (54.5/18.2)	0 (0.0/0.0)	5 (22.7/7.6)	22
ป.5	5 (22.7/7.6)	12 (54.5/18.2)	2 (9.1/3.0)	3 (13.6/4.5)	22
ป.6	3 (13.6/4.5)	11 (50.0/16.7)	4 (18.2/6.1)	4 (18.2/6.1)	22

(a/b) หมายถึง (ร้อยละของระดับชั้น / ร้อยละของนักเรียนทั้งหมด)

แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามระดับชั้น
และลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม)



ภาพประกอบ 5 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และระดับชั้น

จากตาราง 29 จะพบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำนวนทั้งหมด 22 คน ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 คิดเป็นร้อยละ 54.5 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ทั้งหมดที่ศึกษา ส่วนที่เหลืออีกร้อยละ 45.5 จะมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 0 และกลุ่ม 3 ซึ่งมีจำนวนนักเรียนเท่ากันคือร้อยละ 22.7 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ทั้งหมดที่ศึกษา และพบว่าไม่มีนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 คนใดเลยที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 2

เช่นเดียวกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 22 คน ซึ่งส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 คิดเป็นร้อยละ 54.5 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา อันดับรองลงมาคือนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 0 คิดเป็นร้อยละ 22.7 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา อันดับสามคือนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 3 คิดเป็นร้อยละ 13.6 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา และที่น้อยที่สุดคือนักเรียนกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 9.1 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา

ส่วนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 22 คน ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 1 คิดเป็นร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมดที่ศึกษา เช่นเดียวกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ที่แตกต่างกันคือนักเรียนในระดับชั้นนี้มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 2 และ 3 ในสัดส่วนที่มากคือคิดเป็นร้อยละ 36.4 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมดที่ศึกษา และมีจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 0 จำนวนน้อยที่สุดเพียงร้อยละ 13.6 ของจำนวนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมดที่ศึกษา

เมื่อพิจารณาจากการนำเสนอข้อมูลในตาราง 29 ในรูปของแผนภูมิแท่ง จะเห็นได้ชัดเจนว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มีจำนวนนักเรียนที่จำแนกออกมาในแต่ละกลุ่มเท่ากัน กล่าวคือนักเรียนกลุ่ม 0 มีจำนวนเท่ากัน นักเรียนในกลุ่ม 1 มีจำนวนเท่ากัน และถ้ามองว่านักเรียนในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 คือกลุ่มของนักเรียนที่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ ก็จะทำให้เห็นว่านักเรียนที่อยู่กลุ่ม 2 หรือกลุ่ม 3 ของทั้งสองระดับชั้นก็มีจำนวนเท่ากันอีกเช่นกัน ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งที่เกิดจากการเปรียบเทียบนักเรียนใน 2 ระดับชั้นนี้คือสัดส่วนของนักเรียนกลุ่ม 1 มีจำนวนประมาณครึ่งหนึ่งของนักเรียนกลุ่มอื่นทั้งหมด

แต่เมื่อพิจารณาจากแผนภูมิแท่งในส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จะพบว่าจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 มีจำนวนมากกว่าใกล้เคียงกับนักเรียนในกลุ่ม 1 ส่วนนักเรียนในกลุ่ม 0 มีจำนวนน้อยมากเมื่อเทียบกับนักเรียนในกลุ่ม 2 รวมกับนักเรียนกลุ่ม 3 ซึ่งแตกต่างจากนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5

ดังนั้นบนพื้นฐานของข้อมูลดังกล่าวมาข้างต้นทำให้สามารถสร้างข้อสังเกตเกี่ยวกับการพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องแบบรูป โดยการเปรียบเทียบระหว่างนักเรียนแต่ละระดับชั้นในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ได้ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ทั้งสามระดับชั้น มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันคือ นักเรียนส่วนใหญ่ของทุกระดับชั้นประมาณร้อยละ 50 มีลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1

2. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย มีจำนวนนักเรียนในแต่ละกลุ่มใกล้เคียงกันมากเมื่อเปรียบเทียบกลุ่มต่อกัน

3. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีลักษณะที่แตกต่างออกไปจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 กล่าวคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จะมีสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 ในปริมาณที่มากกว่า และมีสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 0 ในปริมาณที่น้อยมาก แต่ก็น่าสังเกตว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่อยู่กลุ่ม 3 มีจำนวนมากกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในขณะที่นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 กลุ่ม 0 และ กลุ่ม 1 รวมกันมีจำนวนน้อยกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5

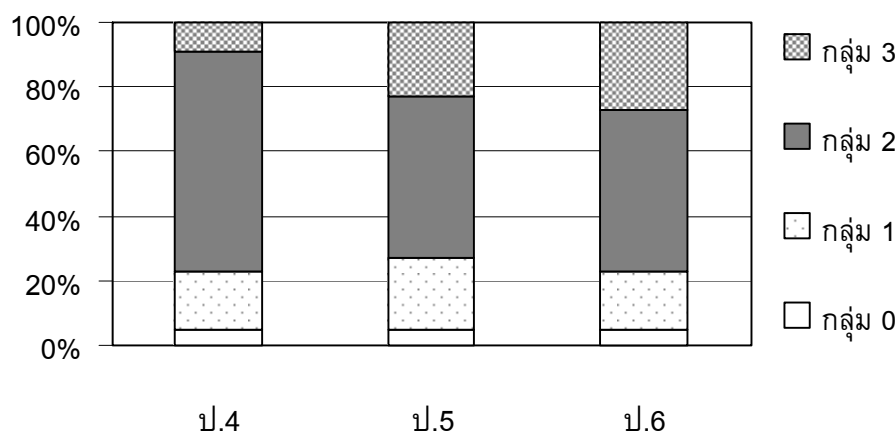
ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน**ของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามระดับชั้น มีรายละเอียดเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 30 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน** (กลุ่ม) และระดับชั้น

กลุ่ม ชั้น	กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
ป.4	1 (4.5/1.5)	4 (18.2/6.1)	15 (68.2/22.7)	2 (9.1/3.0)	22
ป.5	1 (4.5/1.5)	5 (22.7/7.6)	11 (50.0/16.7)	5 (22.7/7.6)	22
ป.6	1 (4.5/1.5)	4 (18.2/6.1)	11 (50.0/16.7)	6 (27.3/6.9)	22

(a/b) หมายถึง (ร้อยละของระดับชั้น / ร้อยละของนักเรียนทั้งหมด)

แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามระดับชั้น
และลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิด (กลุ่ม)



ภาพประกอบ 6 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิด
ของจำนวน (กลุ่ม) และระดับชั้น

จากตาราง 30 จะพบว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 68.2 ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ทั้งหมดที่ศึกษา ส่วนนักเรียนกลุ่มอื่นจะมีจำนวนใกล้เคียงกันและมีสัดส่วนที่น้อยมากเมื่อเทียบกับนักเรียนในกลุ่ม 2 ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยส่วนใหญ่มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถหาจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณที่เกิดจากการมองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วนในรูปของความสัมพันธ์ ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา และจะไม่สนใจความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

เช่นเดียวกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่ส่วนใหญ่ก็มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 50.0 ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา แต่นักเรียนในระดับชั้นนี้จะมีจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 1 และกลุ่ม 3 ในสัดส่วนที่มากขึ้นเมื่อเทียบกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 คือทั้งสองกลุ่มมีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 22.7 ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมดที่ศึกษา ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยส่วนใหญ่มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ

และสามารถหาจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณที่เกิดจากการมองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วน ในรูปของความสัมพันธ์ ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา และจะไม่สนใจความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

ทำนองเดียวกันกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่ส่วนใหญ่ก็มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 50.0 ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมดที่ศึกษา ที่แตกต่างไปจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 แต่เหมือนกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 คือจำนวนของนักเรียนในกลุ่ม 3 ที่มีจำนวนมากขึ้นคิดเป็นร้อยละ 27.3 ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมดที่ศึกษา ส่วนนักเรียนในกลุ่ม 1 มีจำนวนใกล้เคียงกันกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยส่วนใหญ่มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถหาจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณที่เกิดจากการมองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วน ในรูปของความสัมพันธ์ ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา และจะไม่สนใจความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาข้อมูลดังกล่าวในรูปของแผนภูมิแท่ง จะเห็นว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 แตกต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 กล่าวคือนักเรียนในระดับชั้นนี้มีจำนวนนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยคในสัดส่วนที่น้อยมากเมื่อเทียบกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แต่ถ้าใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับเป็นเกณฑ์ในการพิจารณาจะเห็นว่า จำนวนนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ (นักเรียนกลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกันทั้งสามระดับ

ดังนั้นบนพื้นฐานของข้อมูลดังกล่าวมาข้างต้นทำให้สามารถสร้างข้อสังเกตที่เกิดจากการพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดโดยการเปรียบเทียบระหว่างนักเรียนแต่ละระดับชั้นในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ได้ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย ทั้งสามระดับชั้น มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันคือ นักเรียนส่วนใหญ่ของทุกระดับชั้น มีลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดจัดอยู่ในกลุ่ม 2
2. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยมีความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดใกล้เคียงกันมาก โดยมีจำนวนนักเรียนในแต่ละกลุ่มใกล้เคียงกันเมื่อเทียบกับกลุ่มต่อกลุ่ม

3. นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 มีจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 3 ในปริมาณที่น้อยกว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แต่มีจำนวนนักเรียนกลุ่ม 2 มากกว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6

จากที่นำเสนอมาทั้งหมดในหัวข้อการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระหว่างนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 สามารถตั้งข้อสังเกตในภาพรวมได้ว่า ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสามระดับชั้นจะใกล้เคียงกัน กล่าวคือ เรื่องแบบรูปนักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสามระดับชั้นมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 1 ส่วนเรื่องประโยคเปิดนักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสามระดับชั้นมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 2 นอกจากนี้ในเรื่องแบบรูปนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ลักษณะการให้เหตุผลที่ใกล้เคียงกัน แต่แตกต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ส่วนเรื่องประโยคเปิดนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ลักษณะการให้เหตุผลที่ใกล้เคียงกัน แต่แตกต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ดังรายละเอียดที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

3.3 การเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท

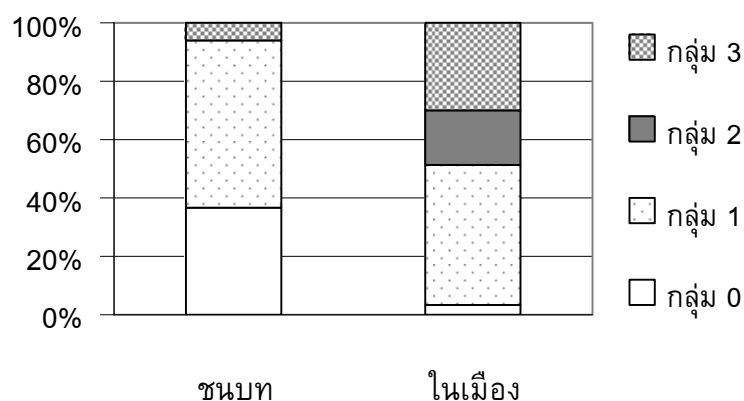
ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามโรงเรียน มีรายละเอียดเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 31 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และโรงเรียน

กลุ่ม โรงเรียน	กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
ชนบท	12 (36.4/18.2)	19 (57.6/28.8)	0 (0.0/0.0)	2 (6.1/3.0)	33
ในเมือง	1 (3.0/1.5)	16 (48.5/24.2)	6 (18.2/9.1)	10 (30.3/15.2)	33

(a/b) หมายถึง (ร้อยละของระดับชั้น / ร้อยละของนักเรียนทั้งหมด)

แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตาม
ลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป (กลุ่ม) และโรงเรียน



ภาพประกอบ 7 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป
(กลุ่ม) และโรงเรียน

จากตาราง 31 จะพบว่านักเรียนโรงเรียนชนบทที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 33 คน ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 คิดเป็นร้อยละ 57.6 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนชนบท รองลงมาเป็นนักเรียนในกลุ่ม 0 มีจำนวนสูงถึงร้อยละ 36.4 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนชนบท ที่เหลือเป็นนักเรียนกลุ่ม 3 ซึ่งมีเพียง 2 คน หรือคิดเป็นร้อยละ 6.1 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนชนบท และไม่มีนักเรียนกลุ่ม 2 จากข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่านักเรียนโรงเรียนชนบทที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนมากถึงร้อยละ 94 ที่ไม่สามารถหาสูตรของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ กล่าวคือจากจำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยของโรงเรียนนี้จำนวนทั้งหมด 33 คน มีนักเรียนเพียง 2 คนเท่านั้นที่สามารถหาสูตรของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ที่น่าสนใจคือมีนักเรียนจำนวนมากที่ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะใด ๆ ของแบบรูปเชิงเส้นได้เลยจึงทำให้ไม่สามารถแม้แต่จะหาพจน์ถัดไปของแบบรูปเชิงเส้นที่กำหนดให้ได้

ส่วนนักเรียนโรงเรียนในเมืองมีจำนวนนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 รวมกันถึงร้อยละ 48.5 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนนี้ เท่ากับจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 1 และมีนักเรียนกลุ่ม 0 เพียง 1 คน หรือคิดเป็นร้อยละ 3.0 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนนี้ จากข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่านักเรียนโรงเรียนในเมืองเกือบทั้งหมดที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่อยู่ติดกันได้ และในจำนวนนี้ครึ่งหนึ่งสามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นที่กำหนดให้ได้

เมื่อนำข้อมูลจากตาราง 31 มาแสดงในรูปของแผนภูมิแท่ง จะเห็นได้ชัดว่านักเรียนจากทั้งสองโรงเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปแตกต่างกันในหลายประเด็น ได้แก่

1. นักเรียนกลุ่ม 0 ของโรงเรียนชนบทมีจำนวนมาก (ร้อยละ 36.4) ในขณะที่นักเรียนกลุ่ม 0 ของโรงเรียนในเมืองแทบไม่มีเลย (ร้อยละ 3)
2. นักเรียนกลุ่ม 2 ของโรงเรียนในเมืองมีจำนวนมาก (ร้อยละ 18.2) ในขณะที่โรงเรียนชนบทจะไม่มีนักเรียนกลุ่ม 2
3. จำนวนนักเรียนกลุ่ม 3 ของโรงเรียนในเมืองมีจำนวนมาก (ร้อยละ 30.3) ในขณะที่จำนวนนักเรียนกลุ่ม 3 ของโรงเรียนชนบทมีเพียงไม่กี่คน (ร้อยละ 6.1)
4. สัดส่วนของนักเรียนที่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) ของโรงเรียนในเมืองมีจำนวนประมาณกึ่งหนึ่งของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ในขณะที่ร้อยละ 94 ของนักเรียนจากโรงเรียนชนบทไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้

ดังนั้นเมื่อพิจารณาโดยภาพรวมจะเห็นได้ชัดเจนว่านักเรียนโรงเรียนที่เรียนในเมืองมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปดีกว่านักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบทมาก

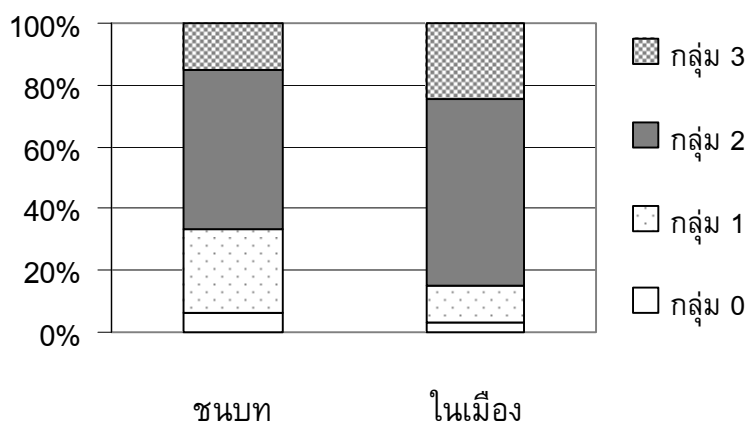
ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน จำแนกตามโรงเรียน มีรายละเอียดเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 32 จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย จำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม) และโรงเรียน

กลุ่ม โรงเรียน	กลุ่ม 0	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	รวม
ชนบท	2 (6.1/3.0)	9 (27.3/13.6)	17 (51.5/25.7)	5 (15.2/7.6)	33
ในเมือง	1 (3.0/1.5)	4 (12.1/6.1)	20 (60.6/30.3)	8 (24.3/12.1)	33

(a/b) หมายถึง (ร้อยละของระดับชั้น / ร้อยละของนักเรียนทั้งหมด)

แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตาม
ลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิด (กลุ่ม) และโรงเรียน



ภาพประกอบ 8 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนักเรียนจำแนกตามลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิด (กลุ่ม) และโรงเรียน

จากตาราง 32 นักเรียนโรงเรียนชนบทที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 33 คน ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 51.5 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนชนบททั้งหมด เช่นเดียวกับนักเรียนโรงเรียนในเมืองที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวนทั้งหมด 33 คน ส่วนใหญ่ก็มีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจัดอยู่ในกลุ่ม 2 คิดเป็นร้อยละ 60.6 ของจำนวนนักเรียนโรงเรียนในเมืองทั้งหมด นั่นหมายความว่านักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสองโรงเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ แต่จะใช้วิธีการคิดคำนวณในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด

ข้อแตกต่างระหว่างนักเรียนทั้งสองโรงเรียนคือสัดส่วนของนักเรียนกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 ถ้าพิจารณาจากแผนภูมิแท่งจะเห็นได้ชัดว่านักเรียนโรงเรียนในเมืองมีสัดส่วนของนักเรียนกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 หรือมีนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับสูงกว่านักเรียนโรงเรียนชนบทมาก คือคิดเป็นร้อยละ 84.7 และมีนักเรียนกลุ่ม 0 และกลุ่ม 1 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับเพียงร้อยละ 15.1 ของจำนวน

นักเรียนโรงเรียนในเมืองทั้งหมด ในขณะที่โรงเรียนชนบทมีนักเรียนกลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 รวมกันคิดเป็นร้อยละ 66.7 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แต่มีจำนวนนักเรียนกลุ่ม 0 และกลุ่ม 1 รวมกันถึงร้อยละ 33.3 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

กล่าวโดยสรุปจากข้อมูลที่นำเสนอมาทั้งหมดข้างต้นจะเห็นว่านักเรียนทั้งสองโรงเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดของจำนวนแตกต่างกันในบางประเด็นดังต่อไปนี้

1. นักเรียนกลุ่มต่ำ (กลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) โรงเรียนในชนบทมีเป็นจำนวนมาก (ร้อยละ 33.3) ในขณะที่นักเรียนกลุ่มต่ำของโรงเรียนในเมืองมีจำนวนน้อยกว่ามาก (ร้อยละ 15.1)

2. โรงเรียนในเมืองมีสัดส่วนของนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์สูงถึงประมาณ 1 ใน 4 ของนักเรียนโรงเรียนในเมืองทั้งหมด แต่โรงเรียนชนบทมีสัดส่วนของนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์เพียงประมาณ 1 ใน 7 ของนักเรียนโรงเรียนชนบททั้งหมดเท่านั้น

เมื่อพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลในภาพรวมทั้งเรื่องแบบรูปและเรื่องประโยคเปิดของจำนวนจะเห็นได้ชัดว่านักเรียนในชนบทยังเป็นรองนักเรียนโรงเรียนในเมืองอยู่พอสมควร แต่ทั้งนี้สัดส่วนของนักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสองโรงเรียนจะมีลักษณะใกล้เคียงกันคือ เรื่องแบบรูปมีนักเรียนกลุ่ม 1 มากที่สุด ส่วนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนมีนักเรียนกลุ่ม 2 มากที่สุด และที่น่าสนใจคือทั้งเรื่องแบบรูปและประโยคเปิดจะมีนักเรียนจากทั้งสองโรงเรียนที่สามารถใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ ในการสร้างข้อสรุปได้

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยในครั้งนี้เริ่มต้นจากการสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการจำแนกลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยการสังเคราะห์จากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ศึกษามาก่อนหน้า กรอบแนวคิดเบื้องต้นดังกล่าวได้นำมาใช้เป็นแนวทางในศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูป และเรื่องประโยคเปิดของจำนวนกับนักเรียนโดยตรงจากผลการทำแบบทดสอบและการสัมภาษณ์เพิ่มเติม

นักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในครั้งนี้ประกอบไปด้วยนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จำนวน 66 คน จาก 2 โรงเรียน โรงเรียนหนึ่งเป็นโรงเรียนในเมือง อีกโรงเรียนหนึ่งเป็นโรงเรียนในชนบท โรงเรียนละ 33 คน โดยคัดเลือกให้มีทั้งนักเรียนที่มีผลการเรียนดี ปานกลาง และต่ำ เพื่อให้ครอบคลุมทุกระดับความสามารถของผู้เรียนที่อาจส่งผลต่อลักษณะการให้เหตุผล ให้นักเรียนทั้งหมดทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตแล้วนำผลจากการทำแบบทดสอบมาวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียน ซึ่งพบว่าสามารถจำแนกนักเรียนออกได้เป็น 4 กลุ่ม จากนั้นจึงเลือกตัวแทนจากแต่ละกลุ่มออกมาได้จำนวน 19 คน เพื่อทำการสัมภาษณ์ในรายละเอียดเพิ่มเติมจากที่นักเรียนเขียนตอบมาในแบบทดสอบ ก่อนที่จะนำผลจากการทำแบบทดสอบและจากการสัมภาษณ์มาวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนแต่ละคนอีกครั้งหนึ่ง โดยมีผู้วิเคราะห์ 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัย และครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาจำนวน 2 คน ซึ่งผลการวิเคราะห์มีความเชื่อมั่นตามสูตรการหาค่าความเชื่อมั่นของไมล์สและฮูเบอร์แมนคิดเป็นร้อยละ 90 จากนั้นผู้วิจัยจึงได้ทำการสังเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละกลุ่มออกมา แล้วนำผลที่ได้มาปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้น ได้เป็นกรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายจำแนกเป็น 4 กลุ่ม ตามตารางที่ 23 24 และ 25 ในบทที่ 4 แล้วใช้กรอบแนวคิดดังกล่าววิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 66 คน เพื่อพิจารณานักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวน 66 คน ส่วนใหญ่มีลักษณะการให้เหตุผลเป็นอย่างไร นักเรียนแต่ละระดับชั้นมีลักษณะการให้เหตุผลแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร และนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบทมีลักษณะการให้เหตุผลแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร ซึ่งผลการวิจัยในครั้งนี้สามารถสรุปได้เป็นประเด็นต่าง ๆ ตามจุดมุ่งหมายของการวิจัย ดังต่อไปนี้

สรุปและอภิปรายผล

จุดมุ่งหมายข้อที่ 1 การพัฒนากรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย

จากการวิจัยในครั้งนี้ทำให้สามารถพัฒนากรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ซึ่งจากกรอบแนวคิดดังกล่าวทำให้พบว่าเมื่อเผชิญกับปัญหาเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูป และเรื่องประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนในระดับนี้แสดงลักษณะการให้เหตุผลออกมาเป็น 4 กลุ่ม ดังต่อไปนี้

แบบรูป

ในการวิจัยครั้งนี้ได้แบ่งลักษณะการให้เหตุผลเรื่องแบบรูปออกเป็นกลุ่ม 0 1 2 และ 3 ลักษณะโดยสรุปของแต่ละกลุ่ม เป็นดังต่อไปนี้

กลุ่ม 0 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลในเชิงประจักษ์ เช่น การนำจำนวนที่กำหนดให้ในโจทย์มาเป็นคำตอบ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ใด ๆ ในแบบรูปได้เลยแม้แต่พจน์ที่อยู่ถัดไปจากพจน์ที่กำหนดให้ กลุ่ม 1 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด กล่าวคือ ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถหาค่าของพจน์ถัดไปจากที่กำหนดให้ และพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ได้ แต่จะไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ กลุ่ม 2 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลเชิงอุปนัยเพื่อสร้างความสัมพันธ์ใน 2 มิติ ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง เป็นการสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาจากการพิจารณาพจน์ต้น ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้แล้วอ้างอิงไปสู่กรณีทั่วไป ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ และ กลุ่ม 3 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ใน 2 มิติ ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแบบรูป ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 2 แต่มีข้อแตกต่างกันที่นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่ปรากฏในสูตรแทนพจน์ทั่วไปมีความหมายและที่มาอย่างไร ในขณะที่นักเรียนกลุ่ม 2 จะไม่สามารถอธิบายได้ ข้อค้นพบดังกล่าวใกล้เคียงกับผลการศึกษาของเพกก์และคนอื่น ๆ (Pegg; & Redden. 1990: 112; Orton; & Orton. 1999: 104-120; Zack. 1995: 106-113; Bishop. 2000: 107-126; Natcha. 2005: 53-54) ที่แตกต่างคือในกลุ่มของนักเรียนที่สามารถสร้างสูตรแทนกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้นั้น ในงานวิจัยครั้งนี้พบว่า สามารถจำแนกออกได้เป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มของนักเรียนที่ใช้เหตุผลเชิงอุปนัยเพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง อีกกลุ่มหนึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ในแบบรูป นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนใน

กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3 ยังสามารถขยายความเข้าใจจากสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปไปสู่ความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรที่นอกเหนือไปจากการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าจากการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์อีกด้วย

จากข้อค้นพบดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปมีพัฒนาการตั้งแต่กลุ่มที่ไม่สามารถเข้าใจความสัมพันธ์ใด ๆ ในแบบรูปได้เลย จนถึงกลุ่มที่สามารถอ้างเหตุผลพิสูจน์ความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ ทำให้สามารถยืนยันได้ว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายสามารถใช้การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในการสร้างกฎเกณฑ์กรณีทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ศึกษาบางส่วนยังสามารถขยายความเข้าใจจากสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปไปสู่ความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรที่นอกเหนือไปจากการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าจากการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์อีกด้วย ดังนั้นจึงควรมีการศึกษาเพื่อพัฒนารูปแบบในการจัดการเรียนการสอนเรื่องแบบรูปในระดับประถมศึกษาตอนปลายให้นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไประหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ และให้นักเรียนสามารถขยายความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรที่นอกเหนือไปจากการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าได้ ซึ่งความสามารถดังกล่าวนี้คือความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่เป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น และควรจะเป็นเป้าหมายของการจัดให้นักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายด้วยเช่นกัน

ประโยคเปิดของจำนวน

ในการวิจัยครั้งนี้ได้แบ่งลักษณะการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวนออกเป็นกลุ่ม 0 1 2 และ 3 ลักษณะโดยสรุปของแต่ละกลุ่ม เป็นดังต่อไปนี้

กลุ่ม 0 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจผิดว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ เท่ากับ ____ และต้องแปลงประโยคให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวเสมอโดยไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคได้ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน ทำให้ไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดที่กำหนดให้จะมีลักษณะอย่างไร วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด คือการพยายามแปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป โจทย์ เท่ากับ ____ แล้วคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจว่าช่องว่างจะอยู่ในตำแหน่งใด แต่ต้องนำจำนวนในประโยคมาดำเนินการกันให้หมดทุกตัว การอ้างเหตุผลหรือการแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะที่ไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล กลุ่ม 1 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจผิดว่า

เครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน รวมทั้งไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้เช่นเดียวกับนักเรียนกลุ่ม 0 แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ กล่าวคือจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ เท่ากับ คำตอบ โดยไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ (ถ้ามี) ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ ทำให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ในกรณีที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีตัวเลขตัวเดียว แต่ในกรณีที่ประโยคเปิดมีตัวเลขอยู่ทางขวามือของเครื่องหมายมากกว่าหนึ่งจำนวนจะไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ โดยการนำกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกลับแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้อธิบายหรือให้ความสนใจกับจำนวนอื่นที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ การอ้างเหตุผลหรือการอธิบายสนับสนุนข้อสรุปมีรูปแบบ มีความคงเส้นคงวา แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้มาจากการมองประโยคเปิดของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูปของ โจทย์ เท่ากับ คำตอบ กลุ่ม 2 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับว่าคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้านซ้ายและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่นักเรียนกลุ่มนี้จะมองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ คือส่วนทางซ้ายและส่วนทางขวาทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร แต่จะสร้างข้อสรุปโดยใช้วิธีการคิดคำนวณ (Computational Thinking) ผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งเป็นวิธีการที่เกิดจากการมองประโยคแยกเป็นส่วน ๆ ไม่มองความสัมพันธ์ในภาพรวมทั้งประโยค ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล และ กลุ่ม 3 เป็นกลุ่มของนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือและนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยนักเรียนจะมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป นิพจน์ทางซ้าย เท่ากับ นิพจน์ทางขวา สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน เช่นเดียวกันกับนักเรียนกลุ่ม 2 แต่ต่างกันว่านักเรียนกลุ่มนี้นักเรียนกลุ่มนี้จะมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค ส่งผลให้นักเรียนสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะ

อย่างไร โดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความชัดเจนเพียงพอ และ สมเหตุสมผล

จากข้อค้นพบดังกล่าวข้างต้นจะเห็นว่า ความเข้าใจของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ มีทั้งนักเรียนที่เข้าใจผิดว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ และนักเรียนที่เข้าใจถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ไคเออแรนและคนอื่น ๆ (Kieran. 1981, Matz. 1982, Falkner Levi; & Carpenter. 1999, Carpenter & Levi. 2000, Jones; & Pratt. 2006) ข้อมูลดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าแม้ว่านักเรียนจะคุ้นเคยกับเครื่องหมายนี้มาตั้งแต่เริ่มเรียนคณิตศาสตร์แต่ก็ยังมีนักเรียนส่วนหนึ่งที่มีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน ทั้งนี้เหตุผลหนึ่งอาจเนื่องมาจากการรับรู้ที่เกิดจากการนำเสนอในชั้นเรียนประการหนึ่ง และอีกประการหนึ่งคือจากการนำเสนอของหนังสือเรียนที่มักจะสื่อความหมายของเครื่องหมายเท่ากับไปในแง่ของสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณเป็นส่วนใหญ่ นักเรียนที่ถูกสอนด้วยบทเรียนที่มีบริบทเกี่ยวกับการคำนวณในลักษณะ $5 + 4 = \underline{\hspace{1cm}}$ จะเกิดความสับสนเมื่อต้องหาคำตอบของประโยคเปิดประเภท $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ ประเด็นที่น่าสนใจคือความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนดังกล่าวจะเป็นอุปสรรคอย่างมากกับการเรียนรู้เรื่องสมการและพีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้น (McNeil. 2004)

นอกจากนี้ในกลุ่มของนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ ส่วนหนึ่งสามารถใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคในการสร้างข้อสรุป สอดคล้องกับข้อค้นพบของสตีเฟนและคณะ (Stephens; et al. 2006) ที่ค้นพบว่าเมื่อกำหนดให้นักเรียนหาจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนจะมีนักเรียนกลุ่มหนึ่งใช้วิธีการคิดในเชิงความสัมพันธ์ (Relational Thinking) ที่เกิดจากมองความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคที่อยู่ทั้งสองข้างของสมการโดยไม่ต้องใช้การคิดคำนวณ ซึ่งเขายืนยันคุณลักษณะดังกล่าวหากได้รับการพัฒนาจนติดเป็นนิสัยจะส่งผลดีอย่างมากต่อการเรียนพีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น

ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งที่น่าสนใจจากผลการวิจัยครั้งนี้พบว่านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มต่ำของเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) เป็นนักเรียนที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มต่ำ (กลุ่ม 0 และกลุ่ม 1) ของเรื่องแบบรูปด้วยเช่นกัน กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ นักเรียนที่มีความเข้าใจผิดว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์แทนการคำนวณ มองโครงสร้างของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป *โจทย์ เท่ากับ คำตอบ* และมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด จะเป็นนักเรียนที่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ นอกจากนี้จากการวิจัยยังพบว่านักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องแบบรูป (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) เป็นนักเรียนกลุ่มสูง (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) ของเรื่องประโยคเปิดของจำนวนด้วยเช่นกัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ นักเรียนที่สามารถ

วิเคราะห์ความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปทั่วไปขึ้นมาจากวิธีการอุปนัย หรือวิธีการพิสูจน์จากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ จะเป็นนักเรียนที่มองเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะของสัญลักษณ์แทนความสัมพันธ์ สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้อย่างสมบูรณ์ แต่นักเรียนมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องประโยคเปิดของจำนวน (กลุ่ม 2 และกลุ่ม 3) พบว่าจำนวนหนึ่งไม่ได้มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มสูงของเรื่องแบบรูป ทั้งนี้สาเหตุอาจเป็นเพราะว่าในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคนักเรียนสามารถใช้วิธีการที่หลากหลายในการสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ นอกเหนือจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค เช่น การใช้การคิดคำนวณ เป็นต้น แต่เมื่อเผชิญกับสถานการณ์เรื่องแบบรูปซึ่งต้องอาศัยเหตุผลในเชิงของความสัมพันธ์ จึงทำให้นักเรียนส่วนใหญ่ที่แม้จะมีพื้นฐานทางเลขคณิตในเชิงการคำนวณที่ดีแต่ก็จะไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนพีชคณิต จากข้อมูลดังกล่าวอาจตั้งข้อสังเกตได้ว่าถ้ามีการส่งเสริมให้นักเรียนมีนิสัยการให้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ตั้งแต่เริ่มเรียนเลขคณิต จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้พีชคณิตในอนาคตและความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในการเรียนเลขคณิตตั้งแต่เริ่มต้นเป็นอุปสรรคสำคัญหรือส่งผลต่อความล้มเหลวในการเรียนพีชคณิตของนักเรียนในอนาคต ซึ่งเป็นการยืนยันตามแนวคิดของสติเฟนและแมคเนล (Stephens; et al. 2006; McNeil. 2004)

จุดมุ่งหมายข้อที่ 2 การสำรวจความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

ผลจากการวิจัยในครั้งนี้พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยมีลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปจัดอยู่ในกลุ่ม 1 นั้นหมายความว่านักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เป็นนักเรียนที่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวออกมาได้ แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติได้ โดยนักเรียนจะมองความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปเป็นสูตรแบบความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ *ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์* ทำให้สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับพจน์ถัดไปพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ เหตุผลที่นักเรียนส่วนใหญ่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะใช้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดที่ต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าของพจน์ถัดไปและพจน์ใกล้ ๆ กล่าวคือนักเรียนส่วนใหญ่จะใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย แต่ลักษณะการอ้างเหตุผลจะไม่มี ความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือนักเรียนส่วนใหญ่จะใช้เหตุผลเกี่ยวกับการเทียบสัดส่วนซึ่งไม่ถูกต้อง จากผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบรูปของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ยังต้องเพิ่มเติมเรื่องของการส่งเสริมให้นักเรียนสามารถใช้การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตใน

การสร้างความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไประหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง ไม่ควรมุ่งเพียงการให้นักเรียนหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูปได้ โดยจะใช้วิธีการอย่างไรก็ได้ให้ได้มาซึ่งคำตอบเพียงด้านเดียวโดยไม่ได้ปลูกฝังหรือพัฒนาทักษะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตให้กับนักเรียน

ส่วนในเรื่อง**ประโยคเปิดของจำนวน**ผลจากการวิจัยพบว่า ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยจะอยู่ในกลุ่ม 2 นั้นหมายความว่านักเรียนส่วนใหญ่ในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เป็นนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับก็คือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้านซ้ายและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยจะมองความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป *ผลลัพธ์ทางซ้าย เท่ากับ ผลลัพธ์ทางขวา* สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่ยังคงมองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ คือส่วนทางซ้ายและส่วนทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิดสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้โดยใช้วิธีการคิดคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ไม่ได้ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ในการสร้างข้อสรุป จากผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับเลขคณิตในระดับประถมศึกษาตอนปลาย อาจต้องเพิ่มเติมเรื่องของการส่งเสริมให้นักเรียนสามารถใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ ซึ่งประเด็นดังกล่าวยังไม่ได้ถูกหยิบยกมาพิจารณาและให้ความสำคัญเท่าที่ควร ทั้ง ๆ ที่ความสามารถในการใช้เหตุผลเชิงความสัมพันธ์เป็นปัจจัยที่สำคัญที่จะส่งผลต่อการเชื่อมโยงแนวคิดทางเลขคณิตไปสู่แนวคิดทางพีชคณิต (Falkner, Levi; & Carpenter. 1999, Carpenter & Levi. 2000, Stephens; et al. 2006) ในระดับประถมศึกษาการที่นักเรียนสามารถใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์กับประโยคเปิดหรือนิพจน์ในทางเลขคณิตเท่ากับนักเรียนได้เรียนรู้โครงสร้างของการดำเนินการทางเลขคณิตอย่างไม่เป็นทางการ ประสบการณ์เหล่านี้มีความจำเป็นและส่งผลอย่างมากต่อความสำเร็จในการถ่ายทอดไปสู่การเรียนรู้พีชคณิตในอนาคต (Kieran. 1981)

จุดมุ่งหมายข้อที่ 3 การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6

เมื่อทำการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้งหมดแล้วพบว่า ลักษณะที่เหมือนกันของนักเรียนทั้งสามระดับชั้น คือจำนวนนักเรียนประมาณร้อยละ 50 ของทุกระดับชั้น มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 1 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้โดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด *ค่าของพจน์ถัดไป เท่ากับ ค่าของพจน์ก่อนหน้า บวก ผลต่างระหว่างพจน์* แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไป

ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 มีลักษณะที่เหมือนกันคือ มีนักเรียนกลุ่ม 0 ซึ่งไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ประมาณร้อยละ 22 และมีนักเรียนในกลุ่ม 2 และ 3 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้รวมกันประมาณร้อยละ 22 แตกต่างจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งมีสัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 2 และ 3 เป็นจำนวนมากคือประมาณร้อยละ 37 แต่มีจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 0 ในสัดส่วนที่น้อยมากคือประมาณร้อยละ 13 จากผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าในการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบรูปของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 ควรจัดให้มีความแตกต่างกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เช่น แบบรูปที่นำเสนอกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 อาจจะเป็นแบบรูปที่มองความสัมพันธ์ได้ง่ายกว่าแบบรูปที่นำเสนอกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 แต่ที่สำคัญก็คือการจัดการเรียนรู้เรื่องแบบรูปในทั้งสามระดับชั้นนั้น ต้องศึกษาวิธีการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนสามารถพิสูจน์กฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปให้ได้ และใช้กฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปดังกล่าวขยายแนวคิดเกี่ยวกับตัวแปรที่นอกเหนือไปจากตัวไม่ทราบค่า ซึ่งผลจากการวิจัยในครั้งนี้ยืนยันได้ว่านักเรียนส่วนหนึ่งของทั้งสามระดับชั้นสามารถพัฒนาไปถึงจุดหมายดังกล่าวได้

เมื่อทำการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยแล้วพบว่าลักษณะที่เหมือนกันของนักเรียนทั้งสามระดับชั้น คือจำนวนนักเรียนกว่าร้อยละ 50 ของทุกระดับชั้น มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 2 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และสามารถหาจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดได้โดยใช้เหตุผลในเชิงการคิดคำนวณ แต่นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ประมาณร้อยละ 23 และร้อยละ 27 ตามลำดับ ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด (กลุ่ม 3) ในขณะที่นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 มีประมาณร้อยละ 9 เท่านั้น จากผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้เรื่องประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ควรจัดให้มีความแตกต่างกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 เช่น ประโยคเปิดที่นำเสนอกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 อาจจะเป็นประโยคที่มองความสัมพันธ์ได้ง่ายหรือมีรูปแบบในการนำเสนอที่ช่วยให้นักเรียนสามารถมองความสัมพันธ์ได้ง่ายกว่าประโยคที่นำเสนอกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 แต่ประเด็นสำคัญที่ควรยึดไว้ก็คือต้องเน้นการสร้างนิสัยให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์เป็นสำคัญ เพราะประสบการณ์เหล่านี้มีความจำเป็นและส่งผลอย่างมากต่อความสำเร็จในการถ่ายโยงไปสู่การเรียนรู้พีชคณิตในอนาคต (Kieran. 1981, Falkner Levi; & Carpenter. 1999, Carpenter & Levi. 2000, Stephens; et al. 2006)

จุดมุ่งหมายข้อที่ 4 การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนในชนบท

เมื่อทำการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองกับนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบทที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้งหมดแล้วพบว่า

นักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบทส่วนใหญ่คิดเป็นร้อยละ 94 เป็นนักเรียนกลุ่ม 0 และ 1 ซึ่งไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ หรือพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ และมีสัดส่วนของนักเรียนกลุ่ม 0 ซึ่งเป็นนักเรียนที่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปของแบบรูปเชิงเส้นได้สูงถึงประมาณร้อยละ 37 ในขณะที่นักเรียนโรงเรียนในเมืองประมาณร้อยละ 49 สามารถหาค่าของพจน์ทั่วไปของแบบรูปเชิงเส้นได้ ในจำนวนนี้เป็นนักเรียนกลุ่ม 3 หรือนักเรียนสามารถอ้างเหตุผลพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้สูงถึงร้อยละ 30 และมีจำนวนนักเรียนในกลุ่ม 0 ซึ่งเป็นกลุ่มของนักเรียนที่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปของแบบรูปเชิงเส้นได้เพียงร้อยละ 3 เท่านั้น

นอกจากนี้เมื่อทำการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่อง**ประโยคเปิด**ของจำนวนของนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในเมืองกับนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบท ที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้งหมดแล้วพบว่า มีนักเรียนที่เรียนโรงเรียนในชนบทอยู่ในกลุ่ม 0 และ 1 ซึ่งมีความเข้าใจไม่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับสูงถึงประมาณร้อยละ 33 ในขณะที่นักเรียนโรงเรียนในเมืองที่มีความเข้าใจไม่ถูกต้องเกี่ยวกับความหมายของเครื่องหมายเท่ากับประมาณร้อยละ 15 เท่านั้น จากผลการวิจัยดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าบริบทของโรงเรียนที่แตกต่างกันอาจจะส่งผลต่อการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน ทั้งนี้การวิจัยในครั้งนี้ไม่ได้ศึกษาเจาะลึกต่อไปในส่วนที่ว่าความแตกต่างกันในด้านใดบ้างที่ส่งต่อความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน แต่จากการพิจารณาข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนพบว่า นักเรียนทั้งสองโรงเรียนมีความแตกต่างอยู่พอสมควรในด้าน พื้นฐานครอบครัว ลักษณะของชุมชนที่ตั้งของโรงเรียน และระบบการบริหารจัดการในโรงเรียน เป็นต้น

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้

ผลจากการทำวิจัยในครั้งนี้ทำให้ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะสำหรับครูผู้สอน นักพัฒนาหลักสูตร นักวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษา ผู้บริหารการศึกษาในระดับต่าง ๆ และผู้มีส่วนเกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้อัตนศึกษาในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ในประเด็นต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. การจัดการเรียนรู้สาระพีชคณิตเรื่องแบบรูปของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ควรพิจารณาเพิ่มวัตถุประสงค์ในส่วนของการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตที่เน้นการให้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ โดยมุ่งให้นักเรียนสามารถสร้างความความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไประหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ทั้งแบบการใช้วิธีอุปนัย หรือการพิสูจน์ขึ้นจากเงื่อนไขของแบบรูป รวมทั้งการขยายแนวคิดเกี่ยวกับเรื่องตัวแปรที่นอกเหนือไปจากการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าจากการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ไว้ในกลุ่มสาระเพิ่มเติม ซึ่งการพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการลักษณะดังกล่าวจะเป็นการสร้างพื้นฐานที่ดีสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้น

2. ในการออกแบบตำราเรียนหรือเอกสารประกอบการสอน ควรให้ความสำคัญกับการเลือกประเภทของแบบรูปที่นำเสนอ ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นต้องเป็นแบบรูปที่ซับซ้อน อาจเป็นเพียงแบบรูปเชิงเส้นที่มีสูตรทั่วไปแตกต่างกันออกไป เพื่อจะสามารถใช้เรื่องแบบรูปเป็นเครื่องมือเพื่อพัฒนานักเรียนให้สามารถใช้การให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับการสร้างความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไป และการขยายความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรที่มากกว่าการใช้แทนตัวไม่ทราบค่าได้ นอกจากนี้ในการนำเสนอแบบรูปควรนำเสนอประกอบกันทั้งที่เป็นรูปภาพและตัวเลข เพราะจากการวิจัยในครั้งนี้พบว่าจะเป็นแนวทางหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งของแบบรูปในกรณีทั่วไปได้ และในส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 และ 5 การนำเสนอเนื้อหาควรเลือกแบบรูปที่มองความสัมพันธ์ได้ง่ายกว่าหรือเลือกรูปแบบการนำเสนอแบบรูปที่เอื้อให้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ได้ง่ายกว่าแบบรูปที่ใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6

3. ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาตอนปลายควรตระหนักว่าลักษณะความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับนี้มีความแตกต่างกัน นักเรียนส่วนหนึ่ง (ส่วนน้อย) ใช้การให้เหตุผลเชิงประจักษ์จัดการกับแบบรูป นักเรียนบางคน (ส่วนมาก) มองความสัมพันธ์ในแบบรูปได้แค่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด และนักเรียนอีกส่วนหนึ่ง (จำนวนไม่น้อย) ใช้การอุปนัยหรือการพิสูจน์เพื่อสร้างกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ ทำให้นักเรียนแต่ละกลุ่มต้องการความช่วยเหลือต่างกัน ดังนั้นหากครูได้ศึกษาลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนให้เกิดความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง จะสามารถใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการวางแผนจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน

4. ในการจัดการเรียนรู้เลขคณิตควรให้ความสนใจเกี่ยวกับความเข้าใจของนักเรียนในความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และควรส่งเสริมให้นักเรียนสามารถใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ในการดำเนินการกับประโยคเปิดของจำนวน ซึ่งความสามารถดังกล่าวจะเป็นพื้นฐานที่ดีต่อการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการในอนาคต

5. ในการออกแบบตำราเรียนหรือเอกสารประกอบการสอน ควรนำเสนอเครื่องหมายเท่ากับไปในแนวทางที่จะทำให้นักเรียนเรียนเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับที่ถูกต้อง ออกแบบโดยเน้นการส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ในการสร้างข้อสรุป ควรตระหนักว่าการสอนเลขคณิตนอกจากต้องการให้นักเรียนสามารถใช้การดำเนินการทางเลขคณิตได้แล้ว อีกส่วนหนึ่งที่สามารถทำไปพร้อม ๆ กันได้คือการให้นักเรียนได้เห็นโครงสร้างของประโยคทางเลขคณิตอย่างไม่เป็นทางการ และการเน้นให้รู้จักใช้การให้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ เพื่อจะได้เป็นพื้นฐานที่ดีในการเรียนรู้พีชคณิตในระดับที่สูงขึ้น ควรส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะของสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทั้งสองข้าง ด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับอาจมีจำนวนมากกว่าหนึ่งจำนวนได้ ส่งเสริมให้นักเรียนได้เห็นความหมายที่หลากหลายของประโยค เช่น $5 = \dots$ (อะไรก็ได้บ้าง) ใช้คำพูด “เหมือนกันกับ” หรือ “มีค่าเท่ากันกับ” แทนคำว่า “ผลลัพธ์” เมื่ออ้างถึงเครื่องหมายเท่ากับ และ

การฝึกให้นักเรียนรู้จักใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์เพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด ควรเลือกกิจกรรม หรือรูปแบบการนำเสนอเนื้อหาที่เน้นให้นักเรียนได้เปรียบเทียบวิธีการคิดและการให้เหตุผลที่หลากหลาย ไม่ควรมุ่งเน้นให้ได้คำตอบที่ถูกต้องเพียงด้านเดียว

6. ในการประเมินผลและการสร้างเครื่องมือวัด ควรประเมินลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียน ไม่ใช่แค่เพียงพิจารณาจากคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ กรอบแนวคิดในการอธิบายลักษณะการให้เหตุผลที่ได้จากงานวิจัยในครั้งนี้อาจใช้เป็นแนวทางหรือกรอบในการประเมินผล และการสร้างเครื่องมือวัดความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนได้ ถ้าจุดมุ่งหมายของการจัดการเรียนรู้มีเป้าหมายเพื่อการเตรียมพื้นฐานที่ดีในการเรียนพีชคณิตในอนาคต

ข้อเสนอแนะสำหรับการทำวิจัยต่อไป

1. การวิจัยในครั้งนี้เป็นการวิจัยที่ใช้ระเบียบวิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ และทำการศึกษากับกลุ่มนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในบริบทหนึ่ง ผลการวิจัยที่ได้จึงเป็นเพียงข้อสรุปจากบริบทของนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยเท่านั้น จึงอาจมีข้อจำกัดในการนำไปใช้อ้างอิงกับบริบทอื่นๆ ที่แตกต่างไปจากบริบทที่ศึกษาในครั้งนี้ อย่างไรก็ตามหากผลการวิจัยนี้ได้รับการทดสอบว่าเป็นสอดคล้องกับบริบทอื่นๆ ในการทำวิจัยครั้งต่อ ๆ ไปสามารถนำมาพัฒนาต่อเป็นทฤษฎีที่สามารถใช้อธิบายลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่สมบูรณ์ขึ้นมาได้ นอกจากนี้หากได้มีการศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตกับนักเรียนในช่วงชั้นอื่นๆ รวมถึงสาระอื่นๆ นอกเหนือจากสาระพีชคณิต ข้อมูลที่ได้จะมีประโยชน์อย่างมากต่อการพัฒนาหรือปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโอกาสต่อไป

2. จากผลการวิจัยในครั้งนี้ที่พบว่าบริบทของโรงเรียนส่งผลต่อการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียน จึงควรได้มีการศึกษารายละเอียดต่อไปว่า ปัจจัยด้านใดบ้างที่จะส่งเสริมให้นักเรียนสามารถพัฒนานิสัยในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิต (Algebraic Reasoning Habits)

3. ควรมีการศึกษารูปแบบในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนในแต่ละระดับชั้น หรือศึกษารูปแบบในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตจากกลุ่มเดิมไปสู่กลุ่มสูงสุดหรือกลุ่มที่สูงขึ้นตามกรอบแนวคิดที่พัฒนาขึ้นจากการวิจัยในครั้งนี้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ปิยวดี วงษ์ใหญ่. (2548). การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ: เอส พี เอ็น การพิมพ์.
- Baroody, A. J. (1993). *Problem Solving, Reasoning, and Communicating, K-8: Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Baroody, A. J.; & Ginsburg, H.P. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *Elementary School Journal*. 84: 199-212.
- Battista, M.; & Brown, C. (1998). Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking. *Teaching Children Mathematics*. January: 470-478.
- Beggs, Andy. (1994). Mathematics: Content and Process. In *Mathematics Education: A Handbook for Teacher, Volume 1*. Edited by Jim Neyland. pp 183-192. The Wellington College of Education, Wellington: New Zealand.
- Behr, M.; Erlwanger, S.; & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*. 92: 13-18.
- Bigg, John B.; & Collis, Kevin F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes)*. New York: Academic Press.
- _____. (1991). Multimodel Learning and Intelligent Behavior. In *Reconceptualization and Measurement Intelligence*. Edited by H. Rowe. pp. 57-76. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Bishop, Joyce Wolfer. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal*. 12(2): 107-126.
- Bloom, B. S.; et al. (1956). *Taxonomy of educational objectives: Handbook 1, cognitive domain*. New York: Mckay.
- Booth, L.R. (1989). A Question of Structure. In *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Edited by S. Wagner and C. Kieran. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Boyatzis, Richard E. (1998). *Transforming Qualitative Information: Theometric Analysis and Code Development*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Cai, Jinfa. (2004). Developing Algebraic Thinking in the earlier Grades from an International Perspective. *The Mathematics Educator*. 8(1): 1-5.

- Carpenter, Tom.; et al. (2005). *Developing Algebraic Reasoning in the Elementary School*. Retrieved August 7, 2005, from [http://www.wcer.wisc.edu/news/coverStories/developing_algebraic .php](http://www.wcer.wisc.edu/news/coverStories/developing_algebraic.php).
- Carpenter, Thomas P.; & Moser, James M. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One Through Three. *Journal for Research in Mathematics Education*. 15(3): 179-202.
- Carpenter, T. P.; & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in Primary Grades*. Retrieved July 22, 2006, from <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla>.
- Cathcart, W. George.; et al. (2003). *Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools*. 3rd ed. New Jersey: Upper Saddle River.
- Chazan, Daniel; & Yerushalmy, Michel. (2003). On Appreciating the Cognitive Complexity of School Algebra: Research on Algebra Learning and Direction of curricular Change. In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Edited by Jeremy, Kilpatrick Gary, W. Martin and Deborah Schifter. pp 123-135. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Christmas, T. Paul.; & Fey, T. James. (1999). Communicating the Importance of Algebra to Students. In *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Edited by Barbara Moses. pp 5-13. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Cobb, Paul; et al. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22: 3-29.
- Davis, R. (1984). *Learning Mathematics : The cognitive science approach to Mathematics education*. Norwood, New Jersey: Ablex.
- Falkner, P. Karen; Levi, Linda; & Carpenter P. Thomas. (1999). *Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra*. Retrieved July 27, 2006, from <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla/publication>.
- Gonzalez, M.M.; Ambrose, Rebacca; & Martinez, C.M. (2004). *The Transition from Arithmetic to Algebra: Misconceptions of the Equal Sign*. Retrieved July 23, 2006, from http://www.emis.de/proceedings/PME28/SO/SO110_MOLINA-Gonzalezpdf.
- Greenes, C.; & Findell, C. (1999). Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Edited by Lee V. Stiff and Frances R. Curcio. pp. 127-137. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

- Jones, Graham A.; et al. (1996). Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27(3): 310-336.
- Jones, Graham A.; et al. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics*. 32: 101-125.
- Jones, Graham A.; et al. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(4): 269-307.
- Jones, Graham A.; Thornton, Carol A.; & Putt Ian J. (1994). A Model for Nurturing and Assessing Multidigit Number Sense among first Grade Children. *Educational Studies in Mathematics*. 27: 117-143.
- Jones, Ian.; & Pratt, Dave. (2006). *Three Utilities for the Equal Sign*. Retrieved July 23, 2006, from http://www.warwick.ac.uk/lcll/skills/eportfolio /students/eportfolio dictionary/current/edrfac/ publication/jones_threeutilities.pdf.
- Kamol Natcha. (2005). *A Framework for Characterizing Lower Secondary School Students' Algebraic Thinking*. Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate school, Srinakharinwirot University.
- Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In *Mathematics Classrooms That Promote Understanding*. Edited by E. Fennema. and T. Romberg. pp. 133-155. Mahwah, New Jersey: Erlbaum.
- Kim, Mi Sun. (2005). *Alignment of classroom history assessments and the 7th national curriculum in Korea: Assess historical knowledge and reasoning skills*. Dissertation, Ph.D. Pittsburgh: Graduate faculty of the school of education, University of Pittsburgh.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*. 12: 317-326.
- _____. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Edited by S. Wagner and C. Kieran. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Knuth, Eric J.; et al. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*. 37(4): 297-312.
- Kuchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variable. *Mathematics in school*. 7(4): 23-26.
- Kriegler, Shelley. (2003). *Just What is Algebraic Thinking?* Retrieved August 31, 2003, from <http://www.math.ucla.edu/~Kriegler/pub/algebrat.html>.

- Krulik, S.; Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights, Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Krulik, S.; Rudnick, J. (1995). *The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Elementary School*. Needham Heights, Massachusetts: Allyn and Bacon.
- Lappan, Glenda & Schram, W. Pamela (1989). Communication and Reasoning: Critical Dimensions of Sense Making in Mathematics. In *New Directions for Elementary School Mathematics*, Yearbook. pp 14-30. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Leighton, P. Jacqueline. (2004). Defining and Describing Reason. In *the Nature of Reasoning*. Edited by Jacqueline P. Leighton. & Robert J. Sternberg. pp 1-11. New York: Cambridge University Press.
- Lew, H. C. (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. *The Mathematics Educator*. 8(1): 1-5.
- Matz, Marilyn. (1982). Towards a Process Model for School Algebra Errors. In *Intelligent Tutoring Systems*. Edited by Derick Sleemann and John Seeley Brown. pp 25-50. New York: Academic Press.
- McNeil, M. Nicole. (2004). *Don't teach me 2+2 equals 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning*. Retrieved July 23, 2006, from <http://www.cogsci.northwestern.edu/cogsci2004/papers/paper353.pdf>.
- Miles, Matthew B.; & Huberman, A. Michael. (1994). *Qualitative Data Analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Mooney, Edward S. (2002). A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 4(1): 23-63.
- National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (2005). *Developing Algebraic Reasoning in the Elementary School*. Retrieved July 21, 2005, from http://www.wcer.wisc.edu/news/coverstories/developing_algebraic.php.
- _____. (2006). *Key Ideas about Algebraic Reasoning and Mathematics*. Retrieved July 23, 2006, from <http://www.wcer.wisc.edu/ncisla/teachers/keyideas.html>.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching*

Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

_____. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

_____. (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

_____. (2005). *Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved June 7, 2005, from <http://www.nctm.org/standards/standards.htm>.

Orton, Anthony; & Orton, Jean. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Edited by Anthony Orton. pp. 104-120. London: Cassell.

O'Daffer, Phares G.; & Bruce A. Thornquist. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning, and Proof. In *Research Ideas for the Classroom: High School Mathematics*. Edited by Patricia S. Wilson. pp 39-56. New York: Macmillan Publishing Company.

Pegg, John; & Redden, E. (1990). Procedures for, and Experience in, Introducing Algebra in New South Wales. *Mathematics Teacher*. 83(5): 386-391.

Piaget, J.; & Inhelder, B. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basic Book.

Quellmalz, E. S. (1987). Developing Reasoning Skills. In *Teaching Thinking Skills: Theory and Practice*. Edited by Joan B. Baron & Robert J. Sternberg. pp 86-105. New York: W. H. Freeman Company.

Quellmalz, E. S.; & Hoskyn, Jannita. (1997). Classroom Assessment of Reasoning Strategies. In *Handbook of Classroom Assessment: Learning, Achievement, and Adjustment*. Edited by Gary D. Phye. pp 103-130. San Diego: Academic Press.

Reading, Chris. (2005). Reactions to Data Students' Understanding of Data Interpretation. Retrieved August 31, 2005, from <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/2/Topic9zr.pdf>.

Russell, Susan Jo. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, Year Book. Edited by

- Lee V. Stiff & Frances R. Curcio. pp 1-12. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Saenz-Ludlow, A.; & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*. 35(2): 153-87.
- Schifter, Deborah. (1999). Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking in Grades K-6 . In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, Year Book. Edited by Lee V. Stiff & Frances R. Curcio. pp 62-81. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Schliemann, D. Analucia.; et al. (1998). *Solving Algebra Problems Before Algebra Instruction*. Retrieved July 23, 2006, from <http://www.earlyalgebra.terc.edu/OurPapers/Schliemann%20et%20al%201998.pdf>.
- Sternberg, J. Robert. (2004). What do we know about the nature of reasoning ? In *the nature of reasoning*. Edited by Jacqueline P. Leighton and Robert J. Sternberg. pp 443-455. Cambridge University Press.
- _____. (1999). The Nature of Mathematical Reasoning. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, Year Book. Edited by Lee V. Stiff & Frances Curcio. pp 1-12. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- _____. (1984). How can we teach Intelligence. *Educational Leadership*. 42(1): 38-48.
- Stiggins, J. Richard. (1994). *Student-Centered Classroom Assessment*. Upper Saddle River, New Jersey: Merrill/Prentice Hall.
- _____. (1997). *Student-Centered Classroom Assessment* (2nd ed.). New Jersey: Macmillan College Publishing Company, Inc.
- Streen, Lynn Arthur. (1999). Twenty Questions About Mathematical Reasoning. In *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, Year Book. Edited by Lee V. Stiff & Frances R. Curcio. pp 1-12. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Taba, H. (1962). *Curriculum development: Theory and practice* (3rd ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Merrill/Prentice Hall.
- Tarr, J. E.; & Jones, Graham A. (1997). A Framework for Assessing Middle School Students' Thinking in Conditional Probability and Independence. *Mathematics Education Research Journal*. 9: 39-59.
- The American Heritage Dictionary. (2006). Retrieved August 21, 2006, from <http://www.answers.com/topic/reasoning>.
- The International Association for the Evaluation of Educational achievement (IEA).

- TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) Assessment Frameworks and Specifications 2003*. Boston: Chestnut Hill.
- Taylor, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago: University of Chicago Press.
- Usiskin, Zalman. (1999). Doing Algebra in Grades K-4. In *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Edited by Barbara Moses. pp 5-13. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- van Hiele, Pierre M. (1985). The Child's and Geometry. In *English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Edited by D. Fuys, D. Geddes and R. Tischler. pp. 243-252. New York: Brooklyn College, School of Education.
- Vermeulen, C.F. (1996). Students' Awareness of the Distributive Property. Retrieved August 18, 2006, from <http://www.academic.sun.ac.za/mathed/Malati/ Spanje.htm>.
- Watson; et al. (1995). A Model for Assessing Higher Order Thinking in Statistical. *Educational Research and Evaluation*. 1: 247-275.
- Wikipedia Encyclopedia. (2006). Retrieved August 22, 2006, from <http://www.en.wikipedia.org/wiki/reason>.
- Yackel, Erna (1997). A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades. *Teaching Children Mathematics*. February (3): 276-280.
- Zack, V. (1995). Algebraic Thinking in Upper Elementary School: The Role of Collaboration in Making Meaning of Generalization. In *Proceeding of the Annual Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp. 106-113. (19th, Recife, Brazil, July 22-27, 1995).

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือ

ผศ.เมธี ลิ้มอักษร

อาจารย์ ดร.เรวดี กระโหมวงศ์

อาจารย์ ดร.ณัฏชา กมล

อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

อาจารย์ประจำภาควิชาการประเมินผลและวิจัย

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

อาจารย์ประจำภาควิชามัธยมศึกษา

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ผู้ให้รหัสข้อมูล

อาจารย์ธิดารัตน์ พรหมณะ

อาจารย์เสาวรัตน์ งามแก้ว

อาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

โรงเรียนชุมชนวัดเกาะเพชร จังหวัดนครศรีธรรมราช

อาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา

โรงเรียนบ้านทุ่งกรวด จังหวัดนครศรีธรรมราช

ภาคผนวก ข

การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป

ภาคผนวก ข

การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป

แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องแบบรูป

การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายในครั้งนี้ จะพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลที่เกิดจากการที่นักเรียนได้วิเคราะห์แบบรูป สร้างข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ถัดไปและพจน์ทั่วไปของแบบรูป และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยแบบรูปที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแบบรูปที่มีพจน์ทั่วไปอยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นจำนวน 3 แบบรูป ดังต่อไปนี้

1. จากรูปของกล่องลูกบาศก์วางซ้อนกัน ถ้ากำหนดให้ $\square$ แทนพื้นที่ผิว 1 ตารางหน่วย จะสังเกตว่า

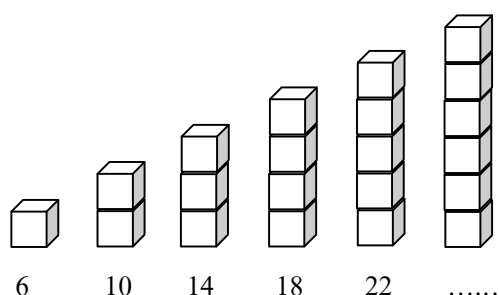
กล่อง 1 ใบ มีพื้นที่ผิว 6 ตารางหน่วย

กล่อง 2 ใบ มีพื้นที่ผิว 10 ตารางหน่วย

กล่อง 3 ใบ มีพื้นที่ผิว 14 ตารางหน่วย

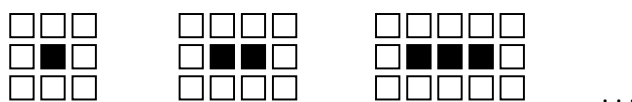
กล่อง 4 ใบ มีพื้นที่ผิว 18 ตารางหน่วย

กล่อง 5 ใบ มีพื้นที่ผิว 22 ตารางหน่วย



จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

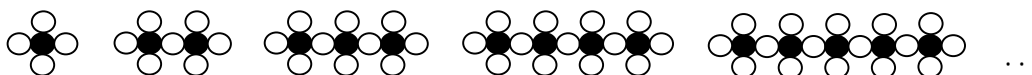
- 1.1) ถ้านำกล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 6 ใบ จะมีพื้นที่ผิวกี่ตารางหน่วย
 - 1.2) ถ้านำกล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 7 ใบ จะมีพื้นที่ผิวกี่ตารางหน่วย
 - 1.3) ถ้านำกล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 30 ใบ จะมีพื้นที่ผิวกี่ตารางหน่วย
 - 1.4) ถ้านำกล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 100 ใบ จะมีพื้นที่ผิวกี่ตารางหน่วย
2. จากการปูแผ่นกระเบื้องเป็นลวดลายดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด



- 2.1) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาวกี่แผ่น
- 2.2) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 30 แผ่น จะต้องใช้

กระเบื้องสีขาวก็แผ่น

- 2.3) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 100 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาวกี่แผ่น
3. จากการร้อยลูกปัดให้มีลวดลายดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด



- 3.1) ต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 6 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด
- 3.2) ต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 30 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด
- 3.3) ต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 100 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด

การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายโดยผู้วิเคราะห์จำนวน 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยซึ่งเป็นครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาจำนวน 2 คน ทำให้พบว่า ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเกี่ยวกับเรื่องแบบรูปสามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่มด้วยกัน ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้ (ชื่อนักเรียนที่อ้างถึงเป็นชื่อสมมุติ)

นักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 0 มีจำนวน 2 คน ทั้งคู่เป็นนักเรียนจากโรงเรียนชนบท ซึ่งข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนมีรายละเอียด ดังตาราง 33

ตาราง 33 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 0

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กหญิงดาวเรือง	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	อ่อน
เด็กชายเพชร	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 4	11	อ่อน

ลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนในกลุ่มนี้将无法วิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใด ๆ ของแบบรูปได้เลย ลักษณะหรือองค์ประกอบของแบบรูปที่นักเรียนกลุ่มนี้ให้ความสนใจส่วนใหญ่จะเป็นลักษณะหรือ

องค์ประกอบที่ไม่เกี่ยวข้องหรือไม่สามารถนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่เข้าใจว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร และไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ เช่นในแบบรูปข้อที่ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวที่เกิดจากการนำกล่องสี่เหลี่ยมมาวางซ้อนกัน นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์ออกมาได้ว่าทำไมกล่อง 1 ใบถึงมีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย กล่อง 2 ใบทำไมถึงมีพื้นที่ 10 ตารางหน่วย กล่าวคือนักเรียนจะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าพื้นที่ของกล่องสี่เหลี่ยมที่วางซ้อนกันเกิดจากการนับจำนวนหน้าของกล่อง โดยจะไม่นับหน้าที่ยาวซ้อนกัน นอกจากนี้แม้ว่าแบบรูปในข้อนี้จะมีการกำหนดตัวเลขซึ่งเป็นพื้นที่ของกล่อง 1 ใบ จนถึงกล่อง 5 ใบ ไว้ แต่นักเรียนในกลุ่มนี้ก็ยังไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าตัวเลขเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร นั่นคือไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่พจน์ในแบบรูปออกมาได้ และในที่สุดก็จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนกล่องและพื้นที่ของกล่องนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร นั่นคือไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ของเพชรต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร

- ครู: ข้อ 1 กล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน โจทย์กำหนดว่ากล่อง 1 ใบมีพื้นที่ 6 ตร.หน่วย
เข้าใจมั้ยว่าทำไมถึงมีพื้นที่ 6 ตร.หน่วย
- เพชร: ไม่ทราบครับ
- ครู: ไม่เป็นไร กล่อง 2 ใบวางซ้อนกันมีพื้นที่ 10 ตร.หน่วย อธิบายได้มั้ย 2 ใบ
ทำไมถึงมี 10 ตร.หน่วย
- เพชร: (นิ่ง)
- ครู: ไม่เป็นไร มาดูข้อ 1.1 กล่องวางซ้อนกัน 6 ใบ จะมีพื้นที่เท่าไร เพชรตอบเท่าไร
- เพชร: 6 ตารางหน่วย
- ครู: ทำไมถึง 6
- เพชร: (นิ่ง)
- ครู: 6 ตัวนี้เ้ามาจากไหน
- เพชร: จากตรงนี้ครับ (ชี้ที่ตัวเลข 6 ในโจทย์)

เช่นเดียวกันกับในข้อ 2 ซึ่งเป็นแบบรูปที่เกิดจากลดทอนในการปูแผ่นกระเบื้องสีดำและสีขาว นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้เพียงแค่ว่าจำนวนกระเบื้องสีดำเพิ่มขึ้นทีละ 1 แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าในขณะที่จำนวนกระเบื้องสีดำเพิ่มขึ้น กระเบื้องสีขาวจะมีการเพิ่มขึ้นตามไปด้วย กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์ของแบบรูปมีความสัมพันธ์

กันอย่างไร และทำนองเดียวกันกับในข้อที่ 1 คือในที่สุดนักเรียนกลุ่มนี้ก็จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนกระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวที่ปูตามลวดลายที่กำหนดนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ของดาวเรืองต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงดาวเรือง

ครู: มาดูข้อ 2 เขาทำอะไรเนีย

ดาวเรือง: ปูกระเบื้อง

ครู: เขาปูยังงี้ มีระเบียบในการปูมั๊ย

ดาวเรือง: ปูเป็นแถว

ครู: เป็นแถวยังงี้ มีรายละเอียดอีกมั๊ย

ดาวเรือง: (นิ่ง)

ครู: ถ้ากระเบื้องสีดำ 1 แผ่นต้องใช้กระเบื้องสีขาวกี่แผ่น

ดาวเรือง: 3 แผ่น

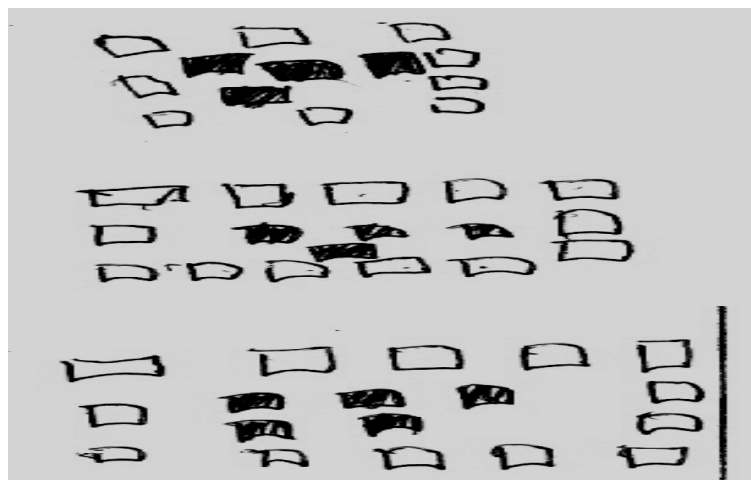
ครู: ดูยังงี้อธิบายได้มั๊ย

ดาวเรือง: 2 แผ่นค่ะ

ครู: ดูยังงี้

ดาวเรือง: แผ่นนี้ (ชี้สีขาวแถว 2 แผ่นแรก) กับแผ่นนี้ (ชี้กระเบื้องสีขาวแถว 2 แผ่นที่ 3)

หลักฐานที่ทำให้เห็นได้ชัดอีกอย่างหนึ่งว่านักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ของแบบรูปได้คือ เมื่อกำหนดให้นักเรียนลองวาดรูปของการปูแผ่นกระเบื้องของพจน์ถัดไปจากโจทย์ที่กำหนดให้ ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มนี้จะวาดรูปของการปูแผ่นกระเบื้องออกมาโดยไม่ได้นำถึงกฎเกณฑ์ตามแบบรูปที่ได้กำหนดให้ ดังรูปต่อไปนี้ที่เพชรวาดออกมาเมื่อผู้สัมภาษณ์ลองให้วาดรูปของการปูแผ่นกระเบื้องในรูปต่อ ๆ มาที่ต้องใช้กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น และ 5 แผ่น ตามลำดับ



ภาพประกอบ 9 รูปของการปูแผ่นกระเบื้องพจน์ที่ 4 และ 5 ของเพชร

แบบรูปในข้อ 3 ซึ่งเป็นแบบรูปของการร้อยลูกปัดเป็นลวดลายโดยใช้ลูกปัดสีดำและสีขาวก็เช่นเดียวกันคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้แค่จำนวนลูกปัดสีดำเพิ่มขึ้นทีละ 1 แต่จะไม่สนใจว่าจำนวนลูกปัดสีขาวก็มีการเพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนตามจำนวนของลูกปัดสีขาว และในที่สุดก็ไม่สามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนลูกปัดสีดำและจำนวนลูกปัดสีขาวที่ใช้ในการร้อยตามลวดลายที่กำหนดนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ของเพชรต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร

ครู: มาดูข้อ 3 เขาทำอะไรเนีย มีอะไรบ้าง

เพชร: ดอกไม้

ครู: มีลักษณะเป็นไงบ้างดอกไม้

เพชร: สวยครับ

ครู: ไหนลองอ่านโจทย์ซิ

เพชร: (อ่านโจทย์)

ครู: ตกลงรูปนี้ไม่ใช่ดอกไม้เนาะ เป็นการร้อยลูกปัดนะ ข้อ 3.1 ถ้าร้อยลูกปัดแบบนี้โดยใช้สีดำ 6 จะต้องใช้สีขาวกี่เม็ด

เพชร: 21 เม็ด

ครู: คิดยังไง

เพชร: เอา $15 + 6$ ครับ

ครู: 15 คืออะไร
 เพชร: จำนวนลูกบัตสี่ดำ (นับลูกบัตสี่ดำทั้งหมดในรูปที่กำหนดมาให้)
 ครู: แล้ว 6 ละ
 เพชร: (ชี้ที่เลข 6 ในโจทย์)

จากที่นำเสนอมาทั้งหมดจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์แบบรูป นักเรียนในกลุ่ม 0 มีลักษณะที่สำคัญดังนี้

1. ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใด ๆ ของแบบรูปที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย
2. ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร กล่าวคือไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป
3. ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ กล่าวคือไม่เข้าใจว่าในขณะที่ตำแหน่งของพจน์เพิ่มขึ้นจะส่งผลต่อค่าของพจน์นั้นอย่างไร กล่าวอีกนัยหนึ่งไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถหาพจน์ถัดไป รวมทั้งพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปจากแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ส่วนใหญ่จะสร้างข้อสรุปขึ้นจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง หรืออ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป ลักษณะของข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้สามารถสรุปได้ ดังตาราง 34

ตาราง 34 แสดงลักษณะข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 0

ข้อ ที่	พจน์ถัดไป	พจน์ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป	วิธีการ (เหตุผล)
1	6	30	100	หาไม่ได้	เอาตัวเลขที่ปรากฏในโจทย์มาตอบ เช่น เมื่อโจทย์ถามว่าถ้านำกลองมาซ้อนกัน 30 ใบ จะมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย นักเรียนจะตอบว่า 30 ตารางหน่วย

ตาราง 34 (ต่อ)

ข้อ ที่	พจน์ถัดไป	พจน์ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป	วิธีการ (เหตุผล)
2	36	60	200	หาไม่ได้	พจน์ถัดไปใช้วิธีนับจำนวนแผ่น กระเบื้องในแบบรูปที่กำหนดมาให้ ทั้งหมด ส่วนพจน์ที่ 30 และ พจน์ที่ 100 ใช้วิธีนำตัวเลขที่ ปรากฏในโจทย์มาบวกกันสองครั้ง เช่นเมื่อโจทย์ถามว่าถ้าต้องการปู กระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดย ใช้กระเบื้องสีดำ 30 แผ่น จะต้อง ใช้กระเบื้องสีขาวกี่แผ่น นักเรียน จะเอา $30 + 30 = 60$ แผ่น
3	21	30	200	หาไม่ได้	พจน์ถัดไปได้จากการนับจำนวน ลูกปัดสีดำที่โจทย์กำหนดมาให้ ทั้งหมดได้ 15 เม็ด รวมกับตัวเลข ที่ปรากฏในโจทย์คือ 6 เม็ด ได้ เป็น 21 เม็ด พจน์ที่ 30 และ 100 ได้จากการเดาแต่ยังคงอิงอยู่ กับตัวเลขที่ปรากฏในโจทย์ เช่น เมื่อโจทย์ถามว่าถ้าต้องการร้อย ลูกปัดตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้ ลูกปัดสีดำ 100 เม็ด จะต้องใช้ ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด นักเรียนจะเอา $2 \times 100 = 200$ เป็นต้น

จากตารางข้างต้นจะเห็นว่าลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้เกิดจากการอ้างเหตุผลใน
เชิงประจักษ์ที่ไม่มีความสมเหตุสมผล เมื่อเห็นตัวเลขใดในโจทย์ก็พยายามเอาตัวเลขนั้นมาใช้

ประกอบสร้างข้อสรุป โดยไม่ได้คำนึงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละพจน์ในแบบรูปหรือกฎเกณฑ์ของแบบรูปแต่อย่างใด ทั้งนี้เพราะนักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์และกฎเกณฑ์ดังกล่าวได้นั่นเอง ตัวอย่างของรูปแบบการให้เหตุผลเชิงประจักษ์ของนักเรียนในกลุ่มนี้มีหลายลักษณะ แต่ทุกลักษณะก็มีรูปแบบคล้ายคลึงกันขึ้นอยู่กับว่านักเรียนแต่ละคนให้ความสนใจกับส่วนไหนของโจทย์ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงดาวเรือง ข้อ 2

ครู: มาดูข้อ 2.1 กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น ต้องใช้กระเบื้องสีขาวกี่แผ่น หนูตอบ...

ดาวเรือง: 7 แผ่นค่ะ

ครู: คิดอย่างไรเอ่ย

ดาวเรือง: ตรงนี้ 4 (ชี้ที่ตัวเลข 4 ในโจทย์) แล้วบวกไปอีก 3 เป็น 7

ครู: ทำไมต้องบวก 3 ด้วยล่ะ

ดาวเรือง: เพราะกระเบื้องสีขาวต้องมากกว่าสีดำ

ครู: ดูนะสิว่าสีขาวมากกว่าสีดำ

ดาวเรือง: ดูจากรูปนี้เป็นหลักค่ะ (ชี้ที่รูปทอมที่ 3)

ครู: ดูนะสิอธิบายสิ

ดาวเรือง: รูปนี้สีดำ 3 แผ่น สีขาว 6 แผ่น สีขาวมากกว่าอยู่ 3 ค่ะ

ครู: สีขาว 6 แผ่น ดูตรงไหนบ้างนับให้ดูสิ

ดาวเรือง: 1 2 3 4 5 6 (ชี้ที่สีขาว 3 แผ่น แถวบนและ 3 แผ่น แถวล่างที่ตรงกับ สีดำในรูป พจน์ที่ 3)

จากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าการสร้างข้อสรุปของดาวเรืองนั้นเป็นการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป ในที่นี้คือเธอเลือกเอาตัวเลขในโจทย์ที่กำหนดมาให้ (ตำแหน่งของพจน์) นำมาบวกกับจำนวนกระเบื้องสีขาวในรูปของพจน์ที่ 3 และเลือกนับเฉพาะกระเบื้องสีขาวที่อยู่ตรงกับกระเบื้องสีดำ เพื่อสร้างเป็นข้อสรุป

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร ข้อ 1

ครู: มาดูข้อ 1.1 กล่องวางซ้อนกัน 6 ใบ จะมีพื้นที่เท่าไร ผมตอบเท่าไร

เพชร: 6 ครับ

ครู: เอามาจากไหน 6

เพชร: จากตรงนี้ครับ (ชี้ที่ตัวเลข 6 ในโจทย์)

ครู: ข้อ 1.2 ถ้านำกล่องมาวางซ้อนกัน 7 ใบจะมีพื้นที่
 เพชร: 7 ตร.หน่วย
 ครู: เอามาจากไหน 7
 เพชร: ตรงนี้ครับ (ชี้ที่ตัวเลข 7 ในโจทย์)
 ครู: ข้อ 1.3 ถ้ากล่องวางซ้อนกัน 30 ใบ เราตอบ...
 เพชร: 30 ตร.หน่วย
 ครู: เอา 30 มาจากไหน
 เพชร: ตรงนี้ครับ (ชี้ที่ตัวเลข 30 ในโจทย์)
 ครู: พอเป็น 100 ใบ (ข้อ 1.4) เราก็ตอบ
 เพชร: 100 ตร.หน่วย
 ครู: เอามาจากโจทย์เหมือนเดิม ?
 เพชร: ครับ

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร ข้อ 2

ครู: ข้อ 2.1 ถ้าต้องปูกระเบื้องโดยใช้สีดำ 4 แผ่น จะต้องใช้สีขาวกี่แผ่น
 เพชร: 36 แผ่นครับ
 ครู: คิดยังไงได้ 36
 เพชร: นับตรงนี้ครับ (ชี้ที่รูป)
 ครู: นับให้ดูได้มั้ย
 เพชร: (นับจำนวนกระเบื้องที่ให้มาในรูปทั้งหมดได้ 36 แผ่น)

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร ข้อ 3

ครู: ข้อ 3.1 ถ้าวอยลูกบัตแบบนี้โดยใช้สีดำ 6 เม็ด จะต้องใช้สีขาวกี่เม็ด
 เพชร: 21 เม็ด
 ครู: คิดยังไง
 เพชร: เอา $15 + 6$ ครับ
 ครู: 15 คืออะไรเอามาจากไหน
 เพชร: นับจำนวนลูกบัตสีดำครับ
 ครู: นับยังไงไหนลองนับให้ดูซิครับ
 เพชร: (นับลูกบัตสีดำรวมกันทุกพจน์ที่โจทย์กำหนดมาให้)
 ครู: แล้ว 6 ละ

เพชร: (ชี้ที่เลข 6 ในโจทย์)

ทำนองเดียวกันกับกรณีของดาวเรียงจากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าลักษณะการอ้างเหตุผลของเพชรเป็นการใช้หลักฐานเชิงประจักษ์ที่ไม่คำนึงถึงความสมเหตุสมผล เช่น ในข้อ 1 ใช้การนำตัวเลขในโจทย์มาเป็นข้อสรุป ในข้อ 2 ใช้การนับจำนวนกระเบื้องทั้งหมดมาเป็นข้อสรุป และในข้อ 3 ใช้วิธีการในลักษณะเดียวกันกับวิธีการของดาวเรียง

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกลและพจน์ทั่วไปของแบบรูปนั้น นักเรียนในกลุ่มนี้มีลักษณะสำคัญดังนี้

1. ไม่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้
2. วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกิดจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุสมผล หรืออ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป
3. ลักษณะการอ้างเหตุผลจะเป็นการใช้วิธีเชิงประจักษ์ คือการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น ใช้การนำตัวเลขในโจทย์มาเป็นข้อสรุป การเลือกใช้ข้อมูลจากพจน์ใดพจน์หนึ่งมาประกอบการสร้างข้อสรุป ซึ่งไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุสมผล

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่มีการประเมินข้อสรุปของตน แต่เมื่อถูกถามว่าจะแน่ใจได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องนักเรียนจะไม่รู้ว่าประเมินคำตอบของตนอย่างไร หรือมักจะใช้เกณฑ์ในการประเมินที่ไม่มีความสมเหตุสมผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิมเพื่อให้แน่ใจอีกครั้ง ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงดาวเรียง

ครู: เมื่อจำนวนกล่องเพิ่มมากขึ้นเป็น 30 ใบ จะทำอย่างไร

ดาวเรียง: เอา 30×2 ได้ 60

ครู: มันใจมั๊ย ข้อนี้นะเราตอบถูก

ดาวเรียง: มันใจค่ะ

ครู: รู้ได้อย่างไรว่าคำตอบเราถูก มีวิธีการอะไรจะตรวจสอบดูได้มั๊ย

ดาวเรียง: ก็ลองเอา 30×2 ดู ว่าได้ 60 มั๊ย

ตาราง 35 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 0

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A01 ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใดๆของแบบรูปที่จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย A02 ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร กล่าวคือไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป A03 ไม่สามารถวิเคราะห์หากฎเกณฑ์ของแบบรูปได้ กล่าวคือไม่เข้าใจว่าในขณะที่ตำแหน่งของพจน์เพิ่มขึ้นจะส่งผลต่อค่าของพจน์นั้นอย่างไร กล่าวอีกนัยหนึ่งไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น	I01 ไม่สามารถหาพจน์ถัดไปพจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ I02 วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกิดจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง หรืออ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป I03 ลักษณะการอ้างเหตุผลจะเป็นการใช้วิธีเชิงประจักษ์ คือการเลือกเอาข้อมูลเฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น ใช้การนำตัวเลขในโจทย์มาเป็นข้อสรุป การเลือกใช้ข้อมูลจากพจน์ใดพจน์หนึ่งมาประกอบการสร้างข้อสรุป ซึ่งไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุผล	E01 เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่มีการประเมินข้อสรุปของตน E02 เมื่อถูกถามว่าจะแน่ใจได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องนักเรียนจะไม่รู้ว่าประเมินคำตอบของตนอย่างไร หรือประเมินโดยใช้เกณฑ์การประเมินที่ไม่สมเหตุผล ผล เช่น การทำซ้ำวิธีการเดิม

นักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายมีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 1 มีจำนวน 5 คน ประกอบด้วยนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 จากทั้งสองโรงเรียน ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้ง 5 คน มีรายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 36 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 1

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กหญิงพิกุล	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ปานกลาง
เด็กชายมรกต	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายไข่มุก	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ปานกลาง
เด็กชายเพทาย	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	อ่อน
เด็กหญิงจำปี	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี

ลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ ซึ่งเป็นการมองความสัมพันธ์ในมิติเดียว แต่จะไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้ เช่น ในแบบรูปข้อ 1 นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่วางซ้อนกันจะมีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 4 ไปเรื่อย ๆ กล่าวคือนักเรียนจะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าค่าของพจน์ที่ 1 น้อยกว่าค่าของพจน์ที่ 2 อยู่ 4 ค่าของพจน์ที่ 2 น้อยกว่าค่าของพจน์ที่ 3 อยู่ 4 และความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันจะเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ หรือถ้ามองอีกนัยหนึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ที่อยู่ติดกันได้ว่าอยู่ในรูป

$$\text{ค่าของพจน์ถัดไป} = \text{ค่าของพจน์ก่อนหน้า} + 4$$

แต่นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกล่องและพื้นที่ของกล่อง ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์ของพิกุลต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล

ครู: ลองอ่านโจทย์ข้อ 1 ให้ครูฟังซิ

พิกุล: (อ่านโจทย์ข้อ 1)

ครู: กล่อง 1 ใบ มีพื้นที่ 6 ตร.หน่วย กล่อง 2 ใบ มีพื้นที่ 10 ตร.หน่วย กล่อง

3 ใบ มีพื้นที่ 14 ตร.หน่วย ไปเรื่อยๆ อธิบายครูได้มัยว่าทำไม 1 ใบมี 6 2 ใบ ทำไม่ถึงเป็น 10 3 ใบ ทำไมเป็น 14

พิกุล: เพราะมันเพิ่มทีละ 4 ตารางหน่วย ค่ะ

ครู: ไม่สงสัยหรือว่าทำไมกล่อง 2 ใบ วางซ้อนกันต้องมีพื้นที่ 10 ตารางหน่วย

พิกุล: ตอนแรกก็สงสัยค่ะ คือจาก 6 เป็น 10 แต่พอดูจาก 10 เป็น 14 หนูก็ไม่สงสัยอีกเลยเพราะมันเพิ่มทีละ 4

ทำนองเดียวกันกับในแบบรูปข้อ 2 นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนแผ่นกระเบื้องสีขาวมีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 2 หรือสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องสีขาวของแต่ละพจน์ที่อยู่ติดกันได้ว่าอยู่ในรูป

$$\text{จำนวนกระเบื้องสีขาวของพจน์ถัดไป} = \text{จำนวนกระเบื้องสีขาวของพจน์ก่อนหน้า} + 2$$

แต่นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนกระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์ของจำปีต่อไปนี้

สัมภาษณ์เด็กหญิงจำปี

ครู: ลวดลายที่เขาปูกระเบื้องเป็นอย่างไรอธิบายได้มัย

จำปี: รูปแรก สีดำ 1 แผ่น สีขาว 8 รูปที่ 2 สีดำ 2 สีขาว 10 รูปที่ 3 สีดำ 3 สีขาว 12 กระเบื้องสีขาวจะเพิ่มทีละ 2 ค่ะ

ครู: ข้อ 2.1 กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น หนูตอบว่าต้องใช้สีขาวเท่าไร

จำปี: 14 แผ่น ค่ะ

ครู: คิดมายังไง

จำปี: เอามาวางต่อกัน เพิ่มสีดำไป 1 สีขาวเพิ่ม 2 (ซึ่งรูปตอนที่ 3) ก็เป็น 14 ค่ะ

ครู: สีดำเพิ่มโดดไปเป็น 30 แผ่น หนูตอบว่าต้องใช้สีขาวกี่แผ่น

จำปี: 66 แผ่น ค่ะ

ครู: คิดยังไง

จำปี: เหมือนเดิมค่ะ บวกเพิ่มไปทีละ 2 ค่ะ

$$5 \text{ แผ่น} = 16$$

$$6 \text{ แผ่น} = 18$$

แล้วไปเรื่อยๆ จนถึง 30 แผ่นค่ะ

จากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าเมื่อต้องการหาจำนวนกระเบื้องสีขาวในพจน์ที่ 30 จำปียังคงใช้วิธีการบวกเพิ่มทีละ 2 ไปเรื่อยๆ จากพจน์ที่ 5 จนถึงพจน์ที่ 30 ซึ่งแสดงว่าจำปียังไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องสีขาวและจำนวนกระเบื้องสีดำของแต่ละพจน์ได้ ในกรณีของแบบรูปข้อ 3 ก็เช่นเดียวกันคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนลูกปัดสีขาวเพิ่มขึ้นทีละ 3 หรือสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีขาวของแต่ละพจน์ที่อยู่ติดกันได้ว่าอยู่ในรูป

$$\text{จำนวนลูกปัดสีขาวของพจน์ถัดไป} = \text{จำนวนลูกปัดสีขาวของพจน์ก่อนหน้า} + 3$$

แต่จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนลูกปัดสีขาวและจำนวนลูกปัดสีดำในแต่ละพจน์มีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์ของไข่มุกต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายไข่มุก

ครู: อธิบายได้มั้ยว่าลวดลายในการร้อยลูกปัดของเขาเป็นอย่างไร

ไข่มุก: เป็นลายดอกไม้สีขาว เพิ่มขึ้นทีละ 3

ครู: เพิ่มขึ้นทีละ 3 ยังไง

ไข่มุก: จาก 4 เป็น 7 เพิ่มขึ้น 3 (ชี้ที่เขียนมา) 7 เป็น 10 ก็ 3 เพิ่ม 3 3 3 ไปเรื่อยๆ พอเป็น 6 เม็ด ก็เพิ่มจาก 16 มาเป็น 19

จากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์แบบรูป นักเรียนในกลุ่ม 1 จะมีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวออกมาได้
2. ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้
3. มองความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปเป็นสูตรแบบความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วมระหว่างพจน์

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

สืบเนื่องจากการที่นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ ทำให้สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยใช้ความสัมพันธ์

แบบเวียนเกิดในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วมระหว่างพจน์ คือต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป เช่นต้องใช้ค่าของพจน์ที่ 29 เพื่อหาค่าของพจน์ที่ 30 ด้วยข้อจำกัดนี้เองทำให้นักเรียนในกลุ่มนี้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ลักษณะของข้อสรุป และวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1 สรุปได้ดังตาราง 37

ตาราง 37 แสดงลักษณะข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

ข้อที่	พจน์ถัดไป	พจน์ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป
1	26	120, 122, 126	400, 330, 420, 408	หาไม่ได้
วิธีการ (เหตุผล)	จาก 22 นับเพิ่มไป อีก 4	<u>ตอบ 120</u> เพราะ $30 \times 4 = 120$ <u>ตอบ 122</u> เพราะ ถ้านับเพิ่มไปที่ละ 4 จนครบ 30 ไบ จะได้ 122 <u>ตอบ 126</u> เพราะ กล่อง 10 ไบ มี พื้นที่ 42 ดังนั้น กล่อง 30 ไบ มี พื้นที่ $42 \times 3 =$ 126	<u>ตอบ 400</u> เพราะ $100 \times 4 = 400$ <u>ตอบ 330</u> เพราะถ้านับเพิ่มไปที่ละ 4 จน ครบ 100 ไบจะได้ 330 (นับผิด) <u>ตอบ 420</u> เพราะกล่อง 10 ไบ มีพื้นที่ 42 กล่อง 50 ไบ มีพื้นที่ $42 \times 5 = 210$ ดังนั้นกล่อง 100 ไบ มีพื้นที่ $210 + 210$ $= 420$ <u>ตอบ 408</u> เพราะกล่อง 10 ไบ มีพื้นที่ 42 และ กล่อง 30 ไบ มีพื้นที่ 122 ดังนั้น กล่อง 100 ไบ มีพื้นที่ $122+122+122+42 = 408$	
2	14	68, 66, 78	200, 224, 260	หาไม่ได้
วิธีการ (เหตุผล)	จาก 12 นับ เพิ่มไปอีก 2 หรือวาด รูปกรณี กระเบื้องดำ 4 แผ่น แล้ว นับจำนวน	<u>ตอบ 68</u> เพราะ วาดรูปกรณี กระเบื้องสีดำ 30 แผ่น แล้วนับ จำนวนกระเบื้อง สีขาว (วาดรูป ถูกต้องนับผิด)	<u>ตอบ 200</u> โดยเอา $100 \times 2 = 200$ <u>ตอบ 224</u> โดยการเอา $66 + 66 + 66 +$ $26 = 224$ โดย 66 คือจำนวนกระเบื้อง สีขาวในพจน์ที่ 30 และ 26 คือจำนวน กระเบื้องสีขาวในพจน์ที่ 10 <u>ตอบ 260</u> โดยเอา 26 (กระเบื้องสี ดำ 10 แผ่น) $\times 5 = 130$ จากนั้นเอา	

ตาราง 37 (ต่อ)

ข้อที่	พจน์ถัดไป	พจน์ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป
	กระเบื้องสีขาวได้ 14 แผ่น	<u>ตอบ 66</u> โดยการบวกเพิ่มทีละ 2 จนถึงพจน์ที่ 30 <u>ตอบ 78</u> เพราะกระเบื้องสีดำ 10 แผ่น ต้องใช้กระเบื้องสีขาว 26 แผ่น ถ้ากระเบื้องสีดำ 30 แผ่น ต้องใช้กระเบื้องสีขาว $3 \times 26 = 78$ แผ่น	$130 + 130 = 260$	
3	19	91	304, 310	หาไม่ได้
วิธีการ (เหตุผล)	จำนวนลูกบัตสีขาวเพิ่มขึ้นทีละ 3	<u>ตอบ 91</u> มาจากการนับเพิ่มทีละ 3 ไปจนถึงพจน์ที่ 30 <u>ตอบ 93</u> มาจากการเอา 31(พจน์ที่ 10 ที่ได้มาจากการนับเพิ่มทีละ 3) $\times 3$	<u>ตอบ 303</u> เพราะ ลูกบัตสีดำ 30 เม็ด ใช้ลูกบัตสีขาว 91 เม็ด 60 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว 182 เม็ด ลูกบัตสีดำ 90 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว 273 เม็ด และลูกบัตสีดำ 10 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว 31 เม็ด ดังนั้นลูกบัตสีดำ 100 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว $273 + 30 = 303$ เม็ด <u>ตอบ 310</u> เพราะลูกบัตสีดำ 50 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว $31 \times 5 = 155$ เม็ด ดังนั้นลูกบัตสีดำ 100 เม็ด ต้องใช้ลูกบัตสีขาว $155 + 155 = 310$ เม็ด	

จากตารางจะพบว่านักเรียนในกลุ่มนี้แม้ว่าจะสามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ด้วยข้อจำกัดของวิธีการที่ใช้คือ ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วมระหว่างพจน์ ซึ่งต้องใช้เวลามากในการหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ นักเรียนกลุ่มนี้จึงพยายามหาวิธีการที่ทำให้สร้างสรุปได้รวดเร็วขึ้น แต่เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ วิธีการที่นำมาใช้ในการหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ จึงเป็นวิธีการที่ไม่ถูกต้องและไม่สมเหตุสมผล เช่นในกรณีของแบบรูปข้อ 1 นักเรียนในกลุ่มนี้ทุกคนจะสามารถหาค่าของพจน์ถัดไปคือพจน์ที่ 6 ได้โดยอ้างเหตุผลว่าขนาดของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมีค่าเพิ่มขึ้นครั้งละ 4 กล่าวคือจาก 6 เพิ่มอีก 4 เป็น 10 จาก 10 เพิ่มอีก 4 เป็น 14 ... ดังนั้นถ้านำกล่องมาวางซ้อนกัน 6 ใบ จะมีพื้นที่เท่ากับ $22 + 4 = 26$ ตารางหน่วย แต่เมื่อกำหนดให้นักเรียนในกลุ่มนี้หาค่าของพจน์ที่ 30 จะมีเพียงนักเรียนบางคนที่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ โดยใช้วิธีการบวกเพิ่มไปที่ละ 4 จนถึงพจน์ที่ 30 ในขณะที่นักเรียนหลายคนในกลุ่มนี้เห็นว่าการบวกเพิ่มไปเรื่อย ๆ นั้นเป็นวิธีการที่ทำให้เสียเวลาจึงพยายามหาวิธีการที่ทำให้คิดคำตอบได้อย่างรวดเร็วขึ้น เช่นการนำค่าของผลต่างระหว่างพจน์คือ 4 มาคูณกับตำแหน่งของพจน์คือ 30 หรือใช้การบวกเพิ่มที่ละ 4 ไปจนถึงพจน์ที่ 10 ได้ 42 แล้วหาค่าของพจน์ที่ 30 โดยการเอา $42 \times 3 = 126$ เป็นต้น ทำนองเดียวกันกับในกรณีของการหาค่าของพจน์ที่ 100 นักเรียนในกลุ่มนี้บางคนจะใช้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องในการสร้างข้อสรุป กล่าวคือนักเรียนจะอธิบายในลักษณะที่ว่า

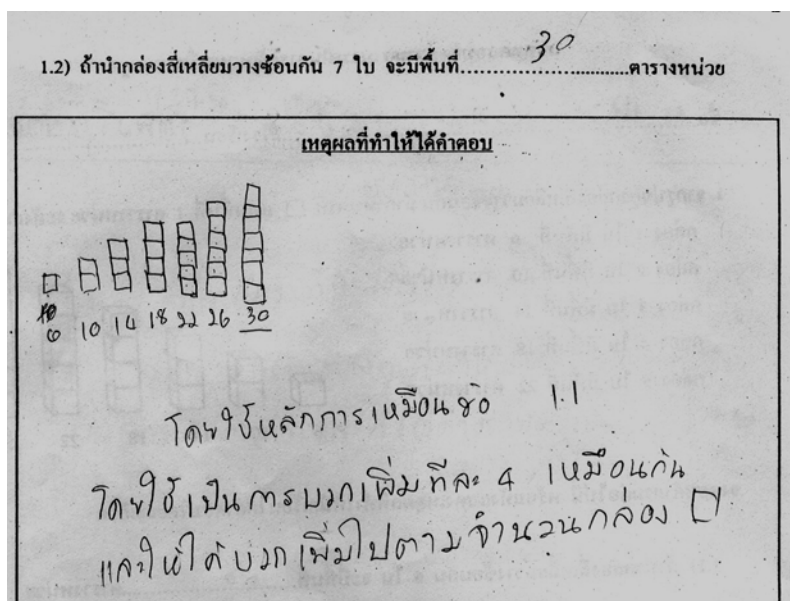
กล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 30 ใบ มีพื้นที่ 126 ตารางหน่วย

กล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 60 ใบ มีพื้นที่ 252 ตารางหน่วย

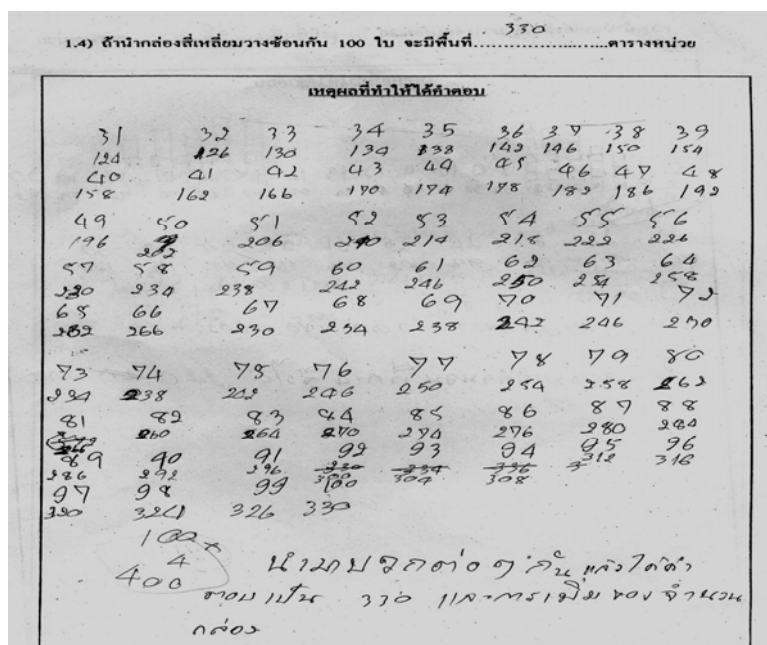
กล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 90 ใบ มีพื้นที่ 378 ตารางหน่วย

กล่องสี่เหลี่ยมวางซ้อนกัน 100 ใบ มีพื้นที่ $378 + 42 = 420$ ตารางหน่วย

ในขณะที่นักเรียนบางคนในกลุ่มนี้ยังคงใช้ความพยายามที่จะนับเพิ่มที่ละ 4 ไปจนถึงพจน์ที่ 100 ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างการเขียนตอบในแบบทดสอบและบทสัมภาษณ์ของนักเรียนต่อไปนี้



ภาพประกอบ 10 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเพทาย ข้อ 1.2



ภาพประกอบ 11 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเพทาย ข้อ 1.4

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงจำปี

- ครู: ข้อ 1.1 เขาเอากล่องมาซ้อนกัน 6 ใบหนูตอบว่ามีพื้นที่เท่าไร
- จำปี: 26 ตร.หน่วย ค่ะ
- ครู: อธิบายชิตีดิยังไ
- จำปี: หนูเอา $22 + 4 = 26$ ค่ะ
- ครู: ทำไมต้องบวก 4 ละ
- จำปี: จากกล่อง 1 ใบ ไปเป็นกล่อง 2 ใบ ก็จาก 6 ไป 10 เพิ่มขึ้น 4 10 ไป 14 ก็เพิ่มขึ้น 4 ค่ะ
- ครู: หนูอธิบายได้มัยว่าทำไมกล่อง 1 ใบมีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย
- จำปี: (อธิบายไม่ได้)
- ครู: ตอนที่ทำโจทย์ข้อนี้หนูได้คิดมัยว่าทำไมกล่อง 1 ใบ ถึงมีพื้นที่ 6 ตร.หน่วย 2 ใบซ้อนกันทำไมถึงมีพื้นที่ 10 ตร.หน่วย
- จำปี: ไม่คิดเลยคะ
- ครู: พอกกล่องเพิ่มเป็น 7 ใบ (ข้อ 1.2) หนูตอบว่ามีพื้นที่ 30 ตร.หน่วย ...
- จำปี: ก็เอา $26 + 4$ ค่ะ
- ครู: พอกกล่องเพิ่มเป็น 30 ใบ (ข้อ 1.3) ทำไ
- จำปี: หนูก็บวกเพิ่มทีละ 4 ค่ะ (หัวเราะ)
- ครู: ได้คำตอบ ...
- จำปี: 122 ค่ะ
- ครู: 8 ใบ 9 ใบ 10 ใบ บวกทีละ 4 ไปเรื่อยจนถึง 30 ใบ ...
- จำปี: ค่ะ
- ครู: พอกกล่องเพิ่มเป็น 100 ใบ (ข้อ 1.4) ทำไยัง
- จำปี: 30 ใบ เท่ากับ 122
60 ใบ เท่ากับ 244
90 ใบ เท่ากับ 366
แล้วก็อีก 10 ใบ เท่ากับ 42 ก็เอามารวมกัน $366 + 42$ ได้ 408 ตารางหน่วยคะ

ทำนองเดียวกันกับแบบรูปในข้อ 2 นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับพจน์ถัดไป และพจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง กล่าวคือนักเรียนตอบได้ถูกต้องว่าถ้าปูกระเบื้องตาม ลวดลายที่กำหนดให้โดยใช้กระเบื้องสีดำจำนวน 4 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาว 14 แผ่น วิธีการที่ใช้คือการบวกเพิ่มทีละ 2 ซึ่งได้มาจากการสังเกตพบว่าจำนวนกระเบื้องสีขาวมีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 2

แต่ในกรณีที่โจทย์กำหนดให้นักเรียนหาค่าของพจน์ที่ 30 นักเรียนกลุ่มนี้บางคนสามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้โดยการพยายามบวกเพิ่มไปที่ละ 2 เรื่อย ๆ ไปจนถึงพจน์ที่ 30 ในขณะที่นักเรียนหลายคนในกลุ่มนี้คิดว่าการทำเช่นนั้นจะทำให้เสียเวลาจึงพยายามหาวิธีการที่เห็นว่าง่ายและสะดวกกว่า แต่เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ วิธีการที่ใช้ในการหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ จึงเป็นวิธีการที่ไม่ถูกต้องและไม่สมเหตุผล เช่น การนับเพิ่มไปที่ละ 2 จนถึงพจน์ที่ 10 ได้จำนวนกระเบื้องสีขาว 26 แผ่น แล้วเอา $26 \times 3 = 78$ หรือไม่ก็ใช้การวาดรูปพจน์ที่ 30 ออกมาแล้วนับจำนวนกระเบื้องสีขาว และเมื่อโจทย์กำหนดให้นักเรียนหาพจน์ที่ 100 จะไม่มีนักเรียนคนใดในกลุ่มนี้ที่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย เพราะส่วนใหญ่จะใช้วิธีเดียวกันคือการนำคำตอบของพจน์ที่ 30 มาบวกกัน 3 ครั้ง แล้วบวกด้วยคำตอบของพจน์ที่ 10 เช่นกรณีของจำปี ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงจำปี

- จำปี: กระเบื้องสีขาวจะเพิ่มทีละ 2 ค่ะ
 ครู: เพราะฉะนั้น ข้อ 1.1 กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น หนูตอบว่าต้องใช้สีขาวเท่าไร
 จำปี: 14 แผ่น ค่ะ
 ครู: คิดมายังไง
 จำปี: เอามาวางต่อกัน เพิ่มสีดำไป 1 สีขาวเพิ่ม 2 (ที่รูปทอมที่ 3) ก็เป็น 14 ค่ะ
 ครู: ถ้าสีดำ 5 แผ่นล่ะ
 จำปี: สีขาวก็เป็น 16 แผ่นค่ะ (ตอบทันที)
 ครู: สีดำเพิ่มโดดไปเป็น 30 แผ่น หนูตอบว่าต้องใช้สีขาวกี่แผ่น
 จำปี: 66 แผ่น ค่ะ
 ครู: คิดยังไง
 จำปี: เหมือนเดิมค่ะ บวกเพิ่มไปที่ละ 2 ค่ะ
 ครู: บวกยังไง
 จำปี: เนี่ยค่ะ (ชี้ที่เขียนมาในข้อสอบ)

$$5 \text{ แผ่น} = 16$$

$$6 \text{ แผ่น} = 18$$
 แล้วไปเรื่อย ๆ
 ครู: จนถึง ...
 จำปี: 30 ค่ะ
 ครู: ได้เท่าไร

จำปี: 66 แผ่นค่ะ
 ครู: ข้อ 2.3 สืบมาเป็น 100 แผ่น อธิบายซิ
 จำปี: 30 แผ่น เท่ากับ 66 เอา $66 + 66 + 66$ และ 10 แผ่น เท่ากับ 26
 ก็เอา $66 + 66 + 66 + 26$ ได้ 224 แผ่น

นอกจากนี้ยังมีนักเรียนบางคนใช้วิธีการลักษณะใกล้เคียงกันกับวิธีการของจำปี แต่คำตอบที่ได้ไม่เท่ากัน เช่นวิธีการของมรกต ดังจะพิจารณาได้จากการเขียนตอบในแบบทดสอบดังต่อไปนี้

2.1) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาว.....14.....แผ่น

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

กระเบื้องสีดำ 1 แผ่น จะเพิ่มพื้นที่ได้ 1 ส่วน
 กระเบื้องสีขาว จะเพิ่มพื้นที่ได้ 2 ส่วน
 ถ้ากระเบื้องดำ 3 แผ่น จะใช้กระเบื้องขาว
 12 แผ่น ถ้ากระเบื้องดำ 4 แผ่น ต้องใช้
 กระเบื้องขาว 14 แผ่น

5	16
6	18
7	20
8	22
9	24

2.2) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 30 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาว.....78.....แผ่น

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

ถ้า กระเบื้องดำ 10 แผ่น จะต้องใช้
 กระเบื้องขาว 26 แผ่น โดยเอา $26 \times 3 = 78$

2.3) ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าวโดยใช้กระเบื้องสีดำ 100 แผ่น จะต้องใช้กระเบื้องสีขาว.....260.....แผ่น

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

ถ้าใช้กระเบื้องดำ 50 แผ่น ต้องใช้กระเบื้อง
 ขาว 130 แผ่น ผมเลยเอา $130 + 130 = 260$

50	26	x
10	5	
	130	

ภาพประกอบ 12 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กชายมรกต ข้อ 2.1 – 2.3

สำหรับแบบรูปในข้อที่ 3 ก็เช่นเดียวกันคือนักเรียนทุกคนในกลุ่มนี้สามารถหาพจน์ถัดไปคือ พจน์ที่ 6 ของแบบรูปได้ โดยใช้วิธีการนับเพิ่มทีละ 3 แต่จะมีนักเรียนเพียงบางคนเท่านั้นที่สามารถหาพจน์ที่ 30 ของแบบรูปได้โดยใช้วิธีการนับเพิ่มทีละ 3 ไปเรื่อย ๆ จนถึงพจน์ที่ 30 ในขณะที่นักเรียนส่วนใหญ่ในกลุ่มนี้จะไม่ยอมใช้วิธีการนับเพิ่มทีละ 3 ในการหาค่าของพจน์ที่ 30 กลับพยายามที่จะหาวิธีการที่สะดวกและรวดเร็วกว่า แต่เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ วิธีการที่ใช้ในการหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ จึงเป็นวิธีการที่ไม่ถูกต้องและไม่สมเหตุผล เช่น การนับเพิ่มไปทีละ 3 จนถึงพจน์ที่ 10 ได้จำนวนลูกปัดสีขาว 31 เม็ด แล้วเอา $31 \times 3 = 93$ หรือไม่ก็เอา $30 \times 3 = 90$ ไปเลยก็มี และเมื่อโจทย์กำหนดให้นักเรียนหาพจน์ที่ 100 จะไม่มีนักเรียนคนใดในกลุ่มนี้ที่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้เลย เพราะส่วนใหญ่จะใช้วิธีเดียวกันคือการนำคำตอบของพจน์ที่ 30 มาบวกกัน 3 ครั้ง แล้วบวกด้วยคำตอบของพจน์ที่ 10 ดังจะพิจารณาได้จากการเขียนตอบในแบบทดสอบของจำปี ดังต่อไปนี้

3.2) ถ้าต้องการร้อยลูกปัดกลวงแบบนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 30 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาว.....เม็ด

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

ลูกปัดสีดำ	๘	เม็ด	=	ลูกปัดสีขาว	๑๙	เม็ด
๑๑	๗	๑๑	=	๑๑	๑๙	๑๑
๑๑	๘	๑๑	=	๑๑	๒๘	๑๑
๑๑	๙	๑๑	=	๑๑	๓๗	๑๑
๑๑	๑๐	๑๑	=	๑๑	๔๖	๑๑
๑๑	๑๑	๑๑	=	๑๑	๕๕	๑๑
	๑๒		=		๖๔	
	๑๓		=		๗๓	
	๑๔		=		๘๒	
	๑๕		=		๙๑	
	๑๖		=		๑๐๐	
	๑๗		=		๑๐๙	
	๑๘		=		๑๑๘	
	๑๙		=		๑๒๗	
	๒๐		=		๑๓๖	
	๒๑		=		๑๔๕	
	๒๒		=		๑๕๔	
	๒๓		=		๑๖๓	
	๒๔		=		๑๗๒	
	๒๕		=		๑๘๑	
	๒๖		=		๑๙๐	
	๒๗		=		๑๙๙	
	๒๘		=		๒๐๘	
	๒๙		=		๒๑๗	
	๓๐		=		๒๒๖	
ลูกปัดสีขาว เม็ดที่ ๓๐ = ๓ เม็ด					๒๓๕	

ภาพประกอบ 13 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงจำปี ข้อ 3.2

3.3) ต้องการร้อยลูกปัดคล้ายนี้โดยใช้ลูกปัดสีค่า 100 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาว...304 เม็ด

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ					
ลูกปัดสีฟ้า	30	=	ลูกปัดสีขาว	91 ~~95~~	เม็ด
"	30	>	"	91 ~~95~~	"
"	30	=	"	91 ~~95~~	"
"	10	=	"	31 ~~35~~	"
รวม				304	เม็ด
ลูกปัดสีฟ้า 100 เม็ด ลูกปัดสีขาว 304 เม็ด					

ภาพประกอบ 14 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงจำปี ข้อ 3.3

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 1 มีลักษณะที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้
2. วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะอาศัยเหตุผลจากความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในรูปค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วมระหว่างพจน์ คือต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป
3. ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ใกล้เคียง ๆ กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะดังนี้

ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 2 มีค่าเท่ากับ a

ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 3 มีค่าเท่ากับ a

ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ a

ดังนั้นผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันจะมีผลต่างเท่ากับ a เสมอ

4. ลักษณะการอ้างเหตุผลไม่มีความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องในลักษณะ

พจน์ที่ 10 มีค่าเป็น a ดังนั้นพจน์ที่ 100 ต้องมีค่าเป็น $3a + 3a + 3a + a$ หรือ $10a$

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

จากการสังเกตของผู้สัมภาษณ์ในขณะที่สัมภาษณ์พบว่านักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้ว จะไม่มีการคิดกลับไปทบทวนถึงความเป็นไปได้ของข้อสรุปของตน และเมื่อผู้สัมภาษณ์ลองกระตุ้นว่ามีวิธีการอะไรบ้างที่จะตรวจสอบว่าข้อสรุปที่ได้นั้นเป็นข้อสรุปที่ถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้ไม่สามารถที่จะอธิบายได้หรือไม่รู้ว่าจะประเมินคำตอบของตนอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายมรกต

ครู: มั่นใจมั๊ยว่าคำตอบของเราถูก

มรกต: (นิ่ง)

ครู: มีวิธีอะไรที่จะตรวจสอบได้มั๊ยว่าคำตอบของเราถูก

มรกต: ไม่รู้เหมือนกันครับ

ตาราง 38 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 1

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการ ประเมินความ น่าเชื่อถือของ ข้อสรุป
A11 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวออกมาได้	I11 สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้	E11 เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะไม่มีการประเมินข้อสรุปของตน
A12 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง	I12 วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะใช้ความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วม	E12 เมื่อถูกถามว่าจะแน่ใจได้อย่างไรว่าคำตอบ

ตาราง 38 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการ ประเมินความ น่าเชื่อถือของ ข้อสรุป
ตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้ A13 มองความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปเป็นสูตรแบบความสัมพันธ์เวียนเกิดคือค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างร่วมระหว่างพจน์	ระหว่างพจน์ คือต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ต่อไป I13 ลักษณะการอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าของพจน์ถัดไป และพจน์ใกล้เคียง ๆ กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในลักษณะดังนี้ ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 2 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 3 มีค่าเท่ากับ a ผลต่างระหว่างค่าของพจน์ที่ 3 กับพจน์ที่ 4 มีค่าเท่ากับ a ดังนั้นผลต่างระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันจะมีผลต่างเท่ากับ a เสมอ I14 ลักษณะการอ้างเหตุผลไม่มีความสมเหตุสมผลในส่วนของการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วนที่ไม่ถูกต้องในลักษณะ พจน์ที่ 10 มีค่าเป็น a ดังนั้นพจน์ที่ 100 ต้องมีค่าเป็น $3a + 3a + 3a + a$ หรือ $10a$	ที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องนักเรียนจะไม่รู้ว่าประเมินคำตอบของตนอย่างไร

นักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่มที่ 2 มีจำนวน 4 คน ประกอบด้วย นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ทั้งหมดเป็นนักเรียนจากโรงเรียนในเมือง และเป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับปานกลางถึงดี ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้งสิ้น มีรายละเอียดดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 39 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 2

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กหญิงบัวตอง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กหญิงซ้องนาง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ปานกลาง
เด็กหญิงยี่โก	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ปานกลาง
เด็กชายทองคำ	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี

ลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ครบถ้วนทุกรายละเอียด มองเห็นทั้งความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น สามารถเข้าใจแบบรูปที่นำเสนอทั้งในรูปของภาพและในรูปของตัวเลข และสามารถอธิบายได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร แต่นักเรียนในกลุ่มนี้จะให้ความสนใจกับการนำเสนอในรูปตัวเลขมากกว่าการนำเสนอเป็นรูปภาพ ทำให้นักเรียนพยายามที่จะวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งโดยการพิจารณาจากตัวเลขเพียงด้านเดียวโดยไม่สนใจที่จะพิจารณาจากภาพ

ในแบบรูปข้อ 1 นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่ากล่อง 1 ใบมีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย เพราะกล่องมี 6 หน้า กล่อง 2 ใบ มีพื้นที่ 10 ตารางหน่วย เพราะไม่นับด้านที่ซ้อนทับกัน ทำให้นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปภาพและตัวเลขที่นำเสนอในแบบรูป นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าพื้นที่ของกล่องสี่เหลี่ยมที่วางซ้อนกันมีการเพิ่มขึ้นเหมือนกับการนับเพิ่มทีละ 4 ไม่เพียงเท่านั้นนักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถวิเคราะห์ต่อไปอีกได้ว่าจำนวนกล่องและพื้นที่ของกล่องมีความสัมพันธ์กันในรูป

$$\text{พื้นที่ของกล่อง} = (4 \times \text{จำนวนกล่อง}) + 2$$

โดยสูตรแทนพจน์ทั่วไปที่สร้างขึ้นนี้จะเกิดจากการสุม คือนักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถอธิบายได้ว่า 4 ที่นำมาคูณคืออะไร 2 ที่นำมาบวกคืออะไร เพียงแต่รู้ว่าสูตรนี้ทำให้ได้คำตอบตรงตามตัวเลขในแบบรูปเท่านั้นเป็นใช้ได้ ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงช้องนาง

ครู: ข้อ 1 ลองอ่านโจทย์ให้ครูฟังซิ

ช้องนาง: (อ่านโจทย์)

ครู: กล่องวางซ้อนกัน เขาซ้อนลักษณะยังไง

ช้องนาง: ซ้อนขึ้นไปเรื่อยๆ

ครู: กล่อง 1 ใบมีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย อธิบายได้มัยว่าทำไม

ช้องนาง: เพราะกล่องรูปลูกบาศก์มันจะมี 6 หน้า

ครู: ที่นี้ 2 ใบทำไมถึงมี 10 ตารางหน่วย

ช้องนาง: เพราะว่ามันโดนลบไป 2 ที่มันซ้อนทับกัน

ครู: มาดูข้อ 1.1 ถ้าวางกล่องซ้อนกัน 6 ใบจะมีพื้นที่... หนูเติมเท่าไร

ช้องนาง: 26 ตารางหน่วย

ครู: ลองอธิบายซิว่าทำอย่างไรถึงได้ 26 ตารางหน่วย

ช้องนาง: ถ้าเอาเลขแทนพื้นที่ตารางหน่วยตรงนี้ (ชี้ที่ 6 10 14 18 22

มาเขียนเรียงกันอย่างนี้แล้วก็หาว่า เลขตัวไหน (สูตรไหน) จะทำให้ได้ค่าเท่ากับ 6 หนูหาได้ว่าถ้าเอา $4 \times 1 + 2$ จะได้ 6 ถ้า 10 ก็เป็น $4 \times 2 + 2$ ถ้า 14 ก็เป็น $4 \times 3 + 2$ ซึ่งมันจะเปลี่ยนเลขตรงนี้ (ชี้ที่ 1 2 3 ในแต่ละสูตร) ไปตามจำนวนกล่อง กล่อง 1 ใบตรงนี้ก็เลข 1 กล่อง 2 ใบ เลขตรงนี้ก็ 2 กล่อง 3 ใบ เลขตรงนี้ก็ 3 ซึ่งถ้าใช้ตามนี้ก็จะได้เหมือนกับที่เขากำหนดให้มา (ชี้ที่เลข 6 10 14 18 22 ในโจทย์)

ครู: พอกล่อง 6 ใบก็ทำไง

ช้องนาง: เอา $4 \times 6 + 2 = 26$

ครู: สูตรนี้เราคิดขึ้นมาได้อย่างไร ทำไมต้องเอา 4 คูณแล้วบวกด้วย 2

ช้องนาง: (นิ่ง)

ครู: เคยเอาตัวอื่นคูณมัยที่ไม่ใช่ 4 ตอนทีคิดนะ

ช้องนาง: ตอนคิดเคยเอาตัวอื่นคูณ แต่ว่า...

ครู: เช่นเลขอะไร

ข้อนาง: เช่นเลข 2 แต่พอได้ 6 แล้ว สูตรเดียวกันมันจะไม่ได้ 10 ก็เลยลอง 6 ก่อน
 โดยลองเอา $4 \times 1 + 2$ ได้ 6 แล้วใช้กับ 10 ก็ได้เหมือนกัน คือ $4 \times 2 + 2$
 แล้วก็ลองเช็คดูทั้ง 5 ตัว (6, 10, 14, 18, 22) ปรากฏว่าใช้ได้หมดจนแน่ใจว่า
 สูตรนี้ใช้ได้

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$4 \times 2 + 2$ $4 \times 4 + 2$ $4 \times 3 + 2$ $4 \times 5 + 2$

6 10 14 18 22

$4 \times 1 + 2$

เพราะฉะนั้น $4 \times 6 + 2 = 26$

ภาพประกอบ 15 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงช้องนาง ข้อ 1.1

เช่นเดียวกันกับแบบรูปในข้อ 2 นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าในแบบรูป
 ที่กำหนดให้ประกอบด้วยกระเบื้องสีดำและกระเบื้องสีขาวในขณะที่จำนวนกระเบื้องสีดำเพิ่มขึ้นทีละ 1
 จำนวนกระเบื้องสีขาวจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มยังสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวน
 กระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์มีความสัมพันธ์กันในรูป

$$\text{จำนวนกระเบื้องสีขาว} = (\text{จำนวนกระเบื้องสีดำ} \times 2) + 6$$

แต่วิธีการในการได้สูตรนี้มาเกิดจากการพิจารณาที่จำนวนกระเบื้องสีขาวแล้วพยายาม
 หาตัวเลขมาดำเนินการกับจำนวนกระเบื้องสีดำในแต่ละพจน์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับจำนวนกระเบื้องสีขาว
 ในพจน์นั้น โดยไม่รู้ว่เลข 2 ที่นำมาคูณ และเลข 6 ที่นำมาบวกมีที่มาอย่างไร และนอกจาก
 ความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้ว ยังมีนักเรียนในกลุ่มนี้บางคนเช่นทองคำ มองความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน
 กระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวในรูปแบบที่แตกต่างออกไป คือมองว่า

$$\text{จำนวนกระเบื้องสีขาว} = (\text{จำนวนถัดไป} + \text{จำนวนถัดไปอีก}) + 3$$

เช่น ถ้าจะหาจำนวนกระเบื้องสีขาวในพจน์ที่ 4 (กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{จำนวนกระเบื้องสีขาวพจน์ที่ 4} &= 5 \text{ (จำนวนถัดไปจาก 4)} + 6 \text{ (จำนวนถัดไปอีกจาก 4)} + 3 \\ &= 14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{จำนวนกระเบื้องสีขาวพจน์ที่ 30} &= 31 + 32 + 3 \\ &= 66\end{aligned}$$

ซึ่งสูตรดังกล่าวได้มาในทำนองเดียวกันทั้งสองสูตรคือได้มาจากการสุ่มตัวเลขมาดำเนินการกัน เพื่อให้ได้ผลลัพธ์สอดคล้องกับจำนวนกระเบื้องสีขาว ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงบัวทอง และเด็กชายทองคำ ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงบัวทอง

ครู: มาดูข้อ 2 จากการปูแผ่นกระเบื้องเป็นลวดลายดังรูปเข้าใจมั๊ย ลวดลาย ดังรูป

บัวทอง: เข้าใจค่ะ

ครู: ลวดลายเป็นไง

บัวทอง: สีดำอยู่ข้างในและสีขาวอยู่ข้างนอก

ครู: สีดำเป็นไง

บัวทอง: เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ และสีขาวจะเพิ่มตาม

ครู: คำถามถามว่ากระเบื้องสีดำ 4 แผ่น จะต้องใช้สีขาวกี่แผ่น

บัวทอง: หนูตอบว่า 14 แผ่นค่ะ

ครู: เพราะ ...

บัวทอง: เพราะว่า สีดำ 1 แผ่น สีขาวจะมี 8 แผ่น

 สีดำ 2 แผ่น สีขาวจะมี 10 แผ่น

 สีดำ 3 แผ่น สีขาวจะมี 12 แผ่น

และก็กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น หนูคิดว่ามันจะได้ 14 ค่ะ เพราะว่า 8 10

12 14 มันเพิ่มขึ้นทีละ 2 ค่ะ

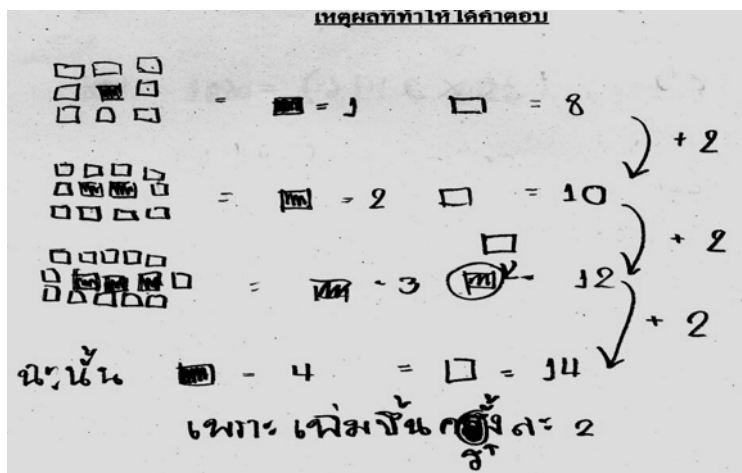
ครู: เหมือนที่เขียนมาในข้อสอบ

บัวทอง: ค่ะ

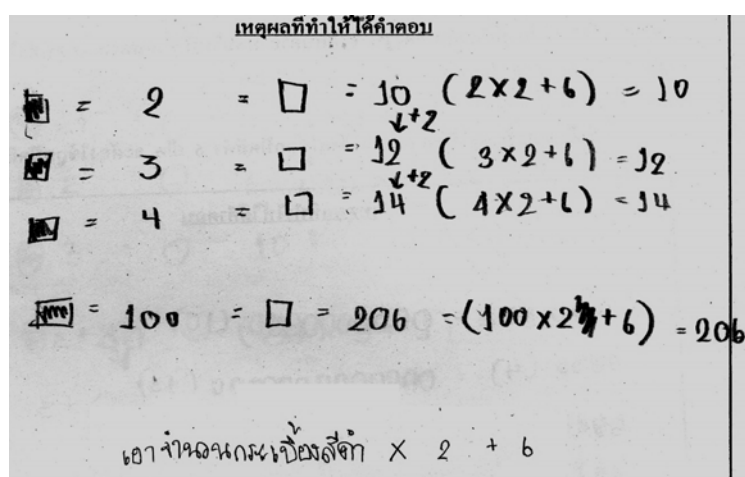
ครู: ข้อ 2.2 สีดำกระโดดไปเป็น 30 แผ่น

บัวทอง: หนูตอบ 66

- ครู: คิดยังไง
- บัวตอง: ตอนแรกก็ยังไม่ออกนะค่ะ แต่พอหนูเห็นมันเพิ่มขึ้นทีละ 2 ไข่ม้อยค่ะ ก็เลยทำเหมือนข้อ 1 คือ $1 \times 2 = 2$ ก็เอามาบวก 6 และมันก็ได้ตามจำนวนที่เขาให้ไว้ค่ะ
- ครู: จำนวนที่เขาให้ไว้คืออะไรบ้าง
- บัวตอง: 8 10 12 ค่ะ
- ครู: ก็คือพยายามที่ทำให้ได้ 8 และสูตรเดียวกันทำให้ได้ 10 ด้วย
- บัวตอง: ค่ะ
- ครู: ในสูตรตัวไหนเปลี่ยนบ้าง
- บัวตอง: 1 2 3
- ครู: 1 2 3 นี่คืออะไร
- บัวตอง: จำนวนกระเบื้องสีดำค่ะ เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ
- ครู: ตอนคิดสูตรหนูได้รูปที่เขาให้มาบ้างหรือเปล่า
- บัวตอง: ก็ดูค่ะ
- ครู: แล้วการดูรูปช่วยให้หนูคิดสูตรได้หรือเปล่า
- บัวตอง: การคิดสูตรของหนูก็คิดตามตัวเลข ก็คือพยายามหาอะไรมาคูณ มาบวกกันให้ได้ตามตัวเลข
- ครู: กรณีสีดำ 100 แผ่นก็สูตรเดียวกันก็ใช้ได้หมดเลย ถ้าเกิดสีดำ 1,000 แผ่น
- บัวตอง: หนูก็เอา $1,000 \times 2$ ได้ 2,000 บวก 6 ก็จะได้ 2,006 ค่ะ
- ครู: เพราะฉะนั้นสีดำกี่แผ่นหนูก็คิดได้หมดเลย
- บัวตอง: ค่ะ คือใช้สูตรที่คิด
- ครู: ก็คือ
- บัวตอง: จำนวนกระเบื้องสีดำ $\times 2 + 6$ ค่ะ
- ครู: โดยที่ 2 กับ 6 นี่หนูสุ่มหามาเพื่อให้ได้ตามตัวเลขที่เขากำหนดมาให้
- บัวตอง: ใช่ค่ะ



ภาพประกอบ 16 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงบัวทอง ข้อ 2.1



ภาพประกอบ 17 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงบัวทอง ข้อ 2.3

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองคำ

ครู: มาดูข้อ 2 ลวดลายการปูกระเบื้องเป็นไง

ทองคำ: แผ่นสีขาวจะล้อมรอบแผ่นสีดำ

ครู: ข้อ 2.1 ถ้ากระเบื้องสีดำ 4 แผ่น จะต้องใช้สีขาวกี่แผ่น

ทองคำ: 14 แผ่น

ครู: เริ่มต้นคิดยังไง

ทองคำ: กระเบื้องสีดำ 1 แผ่น สีขาว 8

กระเบื้องสีดำ 2 แผ่น สีขาว 10

กระเบื้องสีดำ 3 แผ่น สีขาว 12 ไปเรื่อยๆ

ครู: แล้วยังไงต่อ

ทองคำ: ก็คิดสูตร

ครู: คิดยังไง

ทองคำ: ก็คือลองไปเรื่อย ว่าจะได้เท่าไร

ครู: สุดท้ายออกมาเป็น

ทองคำ: สูตร = (จำนวนถัดไป + จำนวนถัดไปอีก) + 3 ก็คือสมมุติถ้าโจทย์ถามว่ากระเบื้องสีดำ 3 แผ่น จะต้องใช้สีขาวกี่แผ่น จำนวนถัดไปก็คือ 4 จำนวนถัดไปอีกก็คือ 5 แล้วก็บวก 3

ครู: กรณีสีดำ 4 แผ่น ลองคิดให้ดูซิ

ทองคำ: จำนวนถัดไปคือ 5 จำนวนถัดไปอีกคือ 6 แล้วบวกด้วย 3 ได้เป็น $(5 + 6) + 3 = 14$

ครู: สูตรนี้ได้มาจากการลองหาความสัมพันธ์ไปเรื่อยๆ จนพบใช่ไหม

ทองคำ: ใช่ครับ

ครู: (พลิกไปข้อ 2.2) โอ! 30 แผ่นก็ยังใช้ได้อยู่ $(30 + 31) + 3 = 66$ เคยเรียนมาหรือ เปล่าเนี่ย

ทองคำ: ไม่เคย

ครู: นั่งคิดเอาในห้องสอบเนี่ยนะ

ทองคำ: ครับ

ครู: แล้ว 3 นี้มาจากไหน

ทองคำ: ตั้งขึ้นเอง ก็ตามสูตร

ครู: เอาตัวเลขมาคิดเอา แล้วตั้งขึ้นเอง

ทองคำ: ครับ

ครู: วิธีการนี้ไม่ได้ไปจำมาจากไหนนะ

ทองคำ: ไม่ครับ

ครู: คิดเอาในห้องเลย

ทองคำ: ครับ

ครู: พอสีดำ 100 แผ่น

$$\begin{aligned}
 \text{ทองคำ: สูตร} &= (\text{จำนวนถัดไป} + \text{จำนวนถัดไปอีก}) + 3 \\
 &= (101 + 102) + 3 \\
 &= 206 \quad \text{แผ่น}
 \end{aligned}$$

ในกรณีของแบบรูปข้อ 3 ก็เช่นเดียวกันนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่าในแบบรูปที่กำหนดให้ประกอบด้วยลูกบัตสีดำและลูกบัตสีขาว จำนวนลูกบัตสีขาวเพิ่มขึ้นทีละ 2 ไปเรื่อย ๆ นอกจากนี้ยังสามารถวิเคราะห์ได้ว่า

$$\text{จำนวนลูกบัตสีขาว} = (\text{จำนวนลูกบัตสีดำ}) \times 3 + 1$$

แต่วิธีการในการได้สูตรนี้มาเกิดจากการพิจารณาที่จำนวนลูกบัตสีขาวแล้วพยายามหาตัวเลขมาดำเนินการกันกับจำนวนลูกบัตสีดำในแต่ละพจน์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เท่ากับจำนวนลูกบัตสีขาวในพจน์นั้น โดยไม่รู้ตัวเลข 3 ที่นำมาคูณ และเลข 1 ที่นำมาบวกมีที่มาอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่าง บทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของยี่โก ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงยี่โก

ครู: มาดูข้อ 3 บ้าง เห็นมีจุดๆ บนรูปเพื่ออะไรเนี่ย

ยี่โก: นับค่ะ

ครู: รูปแรกนับได้..

ยี่โก: 4

ครู: รูปที่ 2

ยี่โก: 7 ค่ะ

ครู: อ้อ ตามที่เขียนมาในข้อสอบใช่ไหม

ยี่โก: ค่ะ

ครู: จากสีดำ 5 เป็นสีดำ 6 เม็ด ทำไม่ถึงได้ 19

ยี่โก: ก็จากการที่ลูกบัตสีดำเพิ่มขึ้น ลูกบัตสีขาวก็จะเพิ่มขึ้นด้วยจากลูกบัตสีดำ 5 เม็ด นับสีขาวได้ 16 เม็ด ถ้าลูกบัตสีดำ 6 เม็ด ก็เพิ่มขึ้นอีก 3 ก็เป็น 19 เม็ด

ครู: ต่อไปพอลูกบัตสีดำเพิ่มเป็น 30 เม็ด คิดยังไง

ยี่โก: ก็หาสูตรจาก ลูกบัตสีดำ 1 เม็ด ใช้ลูกบัตสีขาว 4 เม็ด ก็คือ

$$(1 \times 3) + 1 = 4 \text{ พอลูกบัตสีดำ 2 เม็ด ใช้ลูกบัตสีขาว ก็เอา}$$

$$(2 \times 3) + 1 \text{ เท่ากับ 7 ลูกบัตสีดำ 3 เม็ด ก็ } (3 \times 3) + 1 \text{ ได้ 10 เม็ด}$$

- ลูกปิดสี่ดำ 4 เม็ด ก็เอา $(4 \times 3) + 1$ ได้ 13 เม็ด
- ครู: o.k. พอเป็น 30 เม็ด เราก็คง ...
- ยี่โก: $(30 \times 3) + 1 = 91$
- ครู: ที่นี้คำถามสำคัญ สูตรนี้คิดมาได้ยังไง รู้ได้อย่างไรว่าต้องเอาสี่ดำ คุณ 3 แล้วบวกด้วย 1 จึงได้จำนวนเม็ดสีขาว
- ยี่โก: (คิด)
- ครู: สูตรนี้คิดทีเดียวยังได้เลยหรือว่าคิดหลายครั้ง
- ยี่โก: คิดประมาณ 2 ครั้งค่ะ
- ครู: ครั้งแรกทำอะไร
- ยี่โก: เอา 1×4 มันก็ได้ 4 เลย แต่พอตัวต่อไป ถ้าเอา $2 \times 4 = 8$ มันไม่ได้ 7
- ครู: เราจะสามารถอธิบายจากรูปได้มั๊ย
- ยี่โก: (คิดอยู่นาน)
- ครู: ไหนลองเขียนสูตรของข้อนี้ซิ
- ยี่โก: เขียน $\bigcirc = (\bullet \times 3) + 1$
- ครู: 3 คืออะไรถ้าดูจากรูป 1 คืออะไรถ้าดูจากรูป
- ยี่โก: มันไม่ได้ดูจากรูป มันคิดมาจากตัวเลข

ลูกปัดสี่ดำ 1 2 3 4 5 ... เม็ด

ลูกปัดสีขาว 4 10 13 16 ... เม็ด

$(1 \times 3) + 1$ $(2 \times 3) + 1$ $(3 \times 3) + 1$ $(5 \times 3) + 1$

$(4 \times 3) + 1$

ลูกปัดสี่ดำ 30 เม็ด

$(30 \times 3) + 1$

$= 90 + 1$

$= 91$

ได้ลูกปัดสีขาว

นอกจากความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้ว ยังมีนักเรียนในกลุ่มนี้บางคนเช่นทองคำ มองความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีดำและจำนวนลูกปัดสีขาวในรูปแบบที่แตกต่างออกไป คือมองว่า

$$\text{จำนวนลูกปัดสีขาว} = (\text{จำนวนลูกปัดสีดำ} \times 2) + \text{จำนวนถัดไป}$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น จำนวนลูกปัดสีขาวพจน์ที่ 6} &= (6 \times 2) + 7 \text{ (จำนวนถัดไปจาก 6)} \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จำนวนลูกปัดสีขาวพจน์ที่ 30} &= (30 \times 2) + 31 \\ &= 66 \end{aligned}$$

ซึ่งสูตรดังกล่าวได้มาในทำนองเดียวกันทั้งสองสูตรคือได้มาจากการสุมตัวเลขมาดำเนินการกัน เพื่อให้ได้ผลลัพธ์สอดคล้องกับจำนวนลูกปัดสีขาว

จากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์แบบรูป นักเรียนกลุ่ม 2 มีลักษณะที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ครบถ้วนทุกรายละเอียด มองเห็นทั้งความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น
2. สามารถเข้าใจแบบรูปที่นำเสนอทั้งในรูปของภาพและในรูปของตัวเลข และสามารถอธิบายได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร
3. ให้ความสนใจกับการนำเสนอในรูปตัวเลขมากกว่าการนำเสนอเป็นรูปภาพ ทำให้นักเรียนพยายามที่จะวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง โดยการพิจารณาจากตัวเลขเพียงด้านเดียวโดยไม่สนใจความหมายจากรูปภาพ

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

สืบเนื่องจากการที่นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ทั้งความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง จึงทำให้นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล รวมไปถึงพจน์ทั่วไป ได้อย่างถูกต้อง โดยนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปออกมาได้อย่างสมบูรณ์ แต่สูตรที่สร้างขึ้นจะเกิดจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลักโดยไม่ได้สนใจความหมายหรือที่มาของตัวเลขในสูตรแต่อย่างใด กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปมาจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของ

ทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้มันเป็นจริง โดยไม่สนใจว่าตัวเลขที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร ลักษณะของข้อสรุปและวิธีการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้ สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 40 แสดงลักษณะของข้อสรุปและวิธีการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

ข้อ ที่	พจน์ ถัดไป	พจน์ ที่ 30	พจน์ ที่ 100	พจน์ทั่วไป	วิธีการ (เหตุผล)
1	26	122	402	พื้นที่กล่อง = (จำนวนกล่อง $\times 4$) + 2	หาสูตรของพจน์ทั่วไปแล้ว แทนค่าในสูตร สูตรของพจน์ทั่วไปหามา โดยการสุมหาสูตรที่ใช้ได้ กับพจน์ต้น ๆ ตามที่โจทย์ กำหนดให้ แล้วใช้การ อุปนัยสรุปว่าสูตรดังกล่าว เป็นจริงกับทุกพจน์
2	14	66	206	จำนวนกระเบื้องสีขาว = (จำนวน กระเบื้องสีดำ $\times 2$) + 6 จำนวนกระเบื้องสีขาว = (จำนวนถัดไป + จำนวนถัดไปอีก) + 3	
3	19	91	301	จำนวนลูกปัดสีขาว = (จำนวนลูกปัดสี ดำ $\times 3$) + 1 จำนวนลูกปัดสีขาว = (จำนวนลูกปัดสี ดำ $\times 2$) + จำนวนถัดไป	

ลักษณะเด่นที่สำคัญของนักเรียนในกลุ่มนี้คือการที่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ใด ๆ ได้อย่างสมบูรณ์และที่นอกเหนือไปจากนั้นคือนักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้อีกด้วย และยังสามารถอธิบายเกี่ยวกับสูตรที่เป็นตัวแปรได้อย่างสมบูรณ์ ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ของทองคำต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองคำ

ครู: พอเป็น 7 ใบเราไม่ใช้วิธีการเดิมแล้วนี่ คิดยังไง

ทองคำ: หาความสัมพันธ์ของมันก่อน แล้วก็ลองใช้ บวก คูณ กันไปเรื่อย ๆ

ครู: ลองชี้ให้ดูซิว่าความสัมพันธ์ที่ว่ามันคืออะไร

ทองคำ: ก็คือกล่อง 1 ใบ พื้นที่ 6 เกิดจาก 1 คูณ 4 แล้วบวก 2

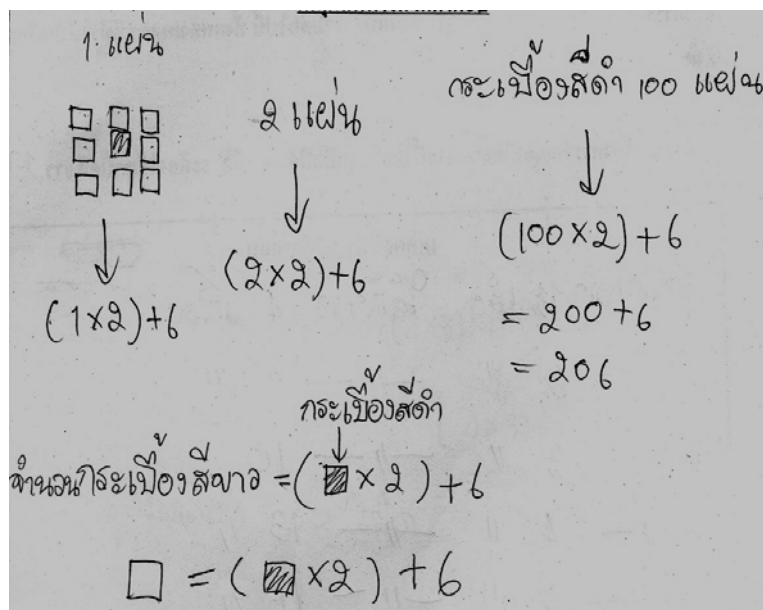
- 2 ใบก็ 2 คุณ 4 บวก 2 จะได้ 10 3 ใบก็ 3 คุณ 4 บวก 2 จะได้ 14
- ครู: ถาถามนดนึ่ง เรารู้ได้งว่าต้งคุณ 4 ทำไมม่คุณ 5 คุณ 7 ...
- ทองคำ: เพราะว่ถ้คุณ 5 หรือ คุณ 7 จะม่ได้ความสัมพันธ์ตรงน้ (ช้ที่เลข 6 , 10 , 14 , ...)
- ครู: วกการที่คุณ 4 แล้วบวก 2 เราคดมาด้อย่างไรเริ่มแรกเลย
- ทองคำ: ตอนแรกก็ลองคดมั่วๆ วก่อนให้ได้เท่ากับ 6 , 10 , 14 , ... แล้วจะหาเจอเอง
- ครู: แต่สุดท้ายก็ได้วีนนี้คือ เอา ...
- ทองคำ: จำนวนกล้ง $\times 4$ แล้วก็บวก 2
- ครู: 4 น้เอามาจากไหนก็ม่รู้คือสุมมา
- ทองคำ: ครบ
- ครู: 2 ก็เหมือนกัน
- ทองคำ: ครบ
- ครู: เพราะฉนั้นพอเป็นกล้ง 30 ใบ ก็ทำง
- ทองคำ: ก็ใช้สูตรเหมือนเดิม เพราะถ้านับมนนับม่ได้เพราะต้ง 30 ใบ
ก็เอา $30 \times 4 + 2$
- ครู: พอเป็น 100 ก็เหมือนกัน เอา $100 \times 4 + 2$
- ทองคำ: ครบ
- ครู: ถ้เกิดเอากล้งมาซ้นกันสัก 1,000,000 ใบ คดว่จะมีพื้นที่เท่าไร
- ทองคำ: 4 ล้าน 2 ครบ (ตอบทันที)
- ครู: จากสูตรที่เขียนมาเนี้ย ถ้เขียนแบบมีตัว x เหมือนที่เราเคยเขียนได้ไหม
- ทองคำ: ได้ครับ
- ครู: อะ ! ลองเขียนช้
- ทองคำ: เขียน พ.ท. กล้ง = $(n \times 4) + 2$
- ครู: n เป็นอะไรได้บ้าง
- ทองคำ: เป็นได้หลายจำนวน
- ครู: n ของเราคืออะไร
- ทองคำ: n คือจำนวนกล้ง แล้วแต่ว่าโจทย์จะให้มาอย่างไร
- ครู: ที่น้ พท.กล้ง ใช้ตัวอื่นแทนได้ไหม
- ทองคำ: ก็ได้
- ครู: ไหนลองเขียนให้ดูช้
- ทองคำ: เขียน $m = (n \times 4) + 2$

ครู: n มีค่าได้กี่ค่า
 ทองคำ: หลายค่า
 ครู: m ละ เป็นตัวเลขอะไรได้บ้าง มันขึ้นอยู่กับอะไร
 ทองคำ: ขึ้นอยู่กับ n ขึ้นอยู่กับฝั่งขวา
 ครู: ถ้า n มาก m จะเป็นอย่างไร
 ทองคำ: มาก
 ครู: ถ้า n น้อย
 ทองคำ: m ก็น้อย

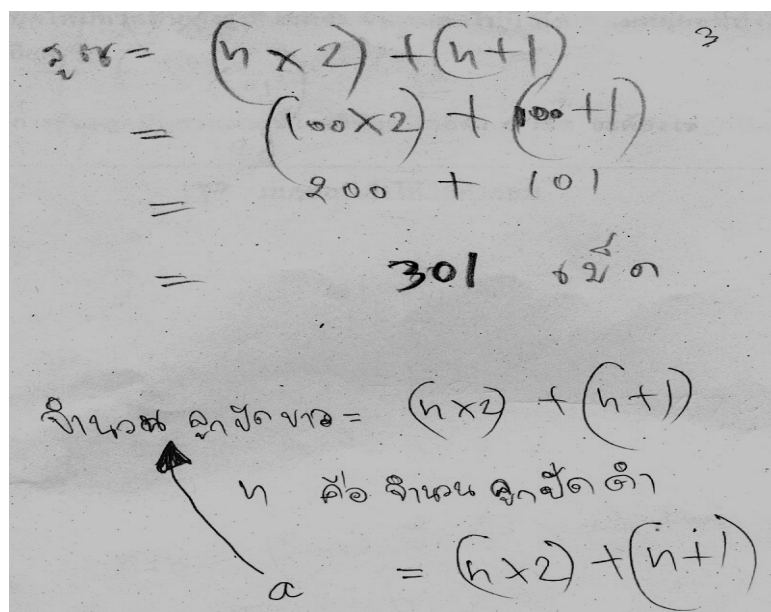
นอกจากทองคำแล้วนักเรียนส่วนใหญ่ในกลุ่มนี้ก็สามารถเขียนสูตรของพจน์ทั่วไปในรูปของสัญลักษณ์หรือตัวแปรออกมาได้ ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างการเขียนตอบในแบบทดสอบของนักเรียนดังต่อไปนี้

1 2 3 4 5 ... 100
 6 10 14 18 22 ...
 $(1 \times 4) + 2$
 $(2 \times 4) + 2$
 $(3 \times 4) + 2$
 $(4 \times 4) + 2$
 $(5 \times 4) + 2$
 $(100 \times 4) + 2$
 $= 400 + 2$
 $= 402$
 จำนวนกล่อง เท่ากับ จำนวนกล่อง
 คูณด้วย 4 แล้วบวกสอง
 ดังนั้น $\square = (\text{จำนวนกล่อง} \times 4) + 2$
 $n = (\square \times 4) + 2$

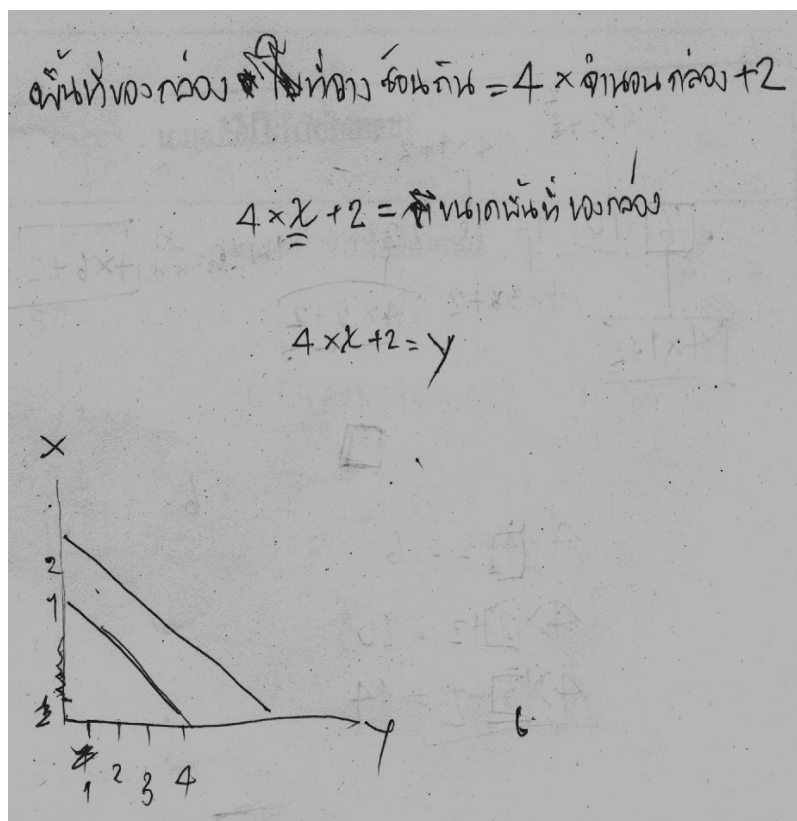
ภาพประกอบ 20 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงยีโก ข้อ 1



ภาพประกอบ 21 การเขียนตอบในแบบทดสอบของเด็กหญิงอีโก ข้อ 2



ภาพประกอบ 22 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายทองคำ ข้อ 3



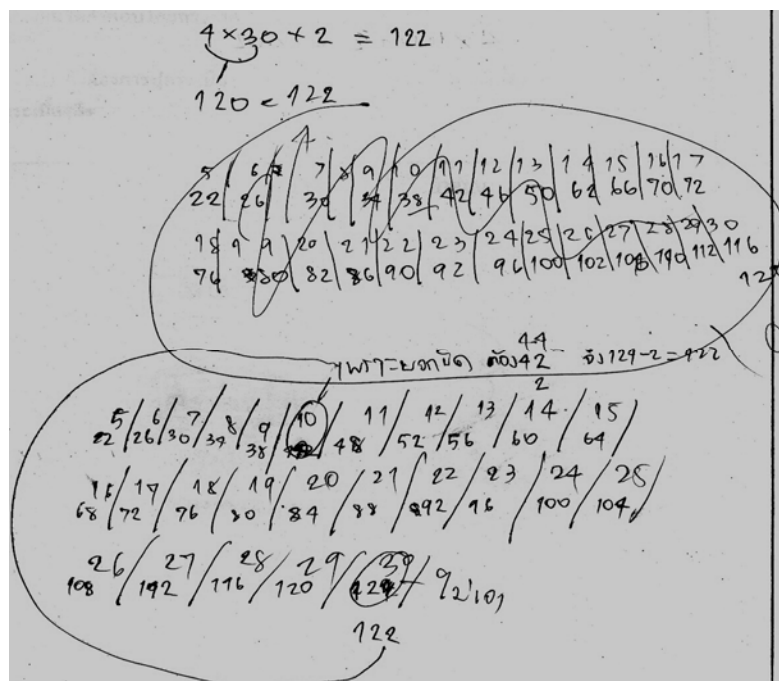
ภาพประกอบ 23 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงช้องนาง ข้อ 1

กล่าวโดยสรุปจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 2 มีลักษณะที่สำคัญดังนี้

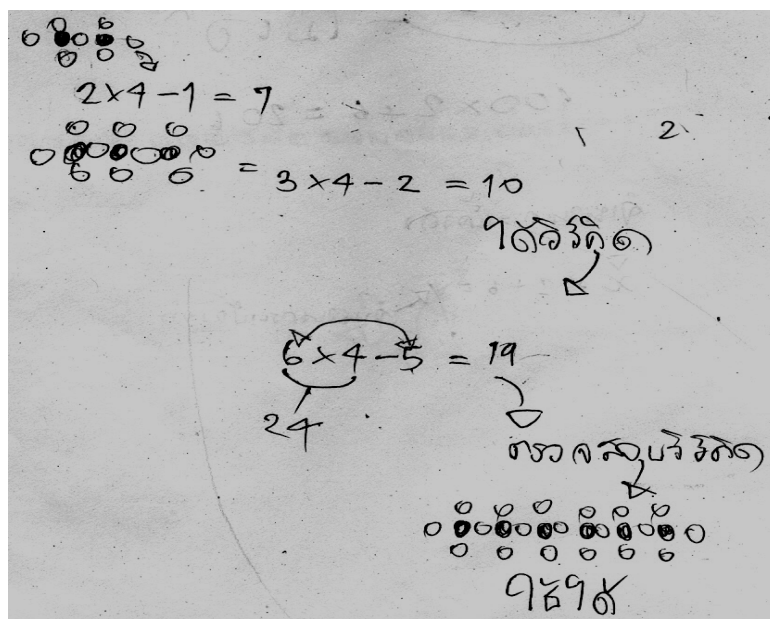
1. สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์
2. สามารถสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลัก โดยไม่ได้สนใจความหมายหรือที่มาของตัวเลขในสูตรแต่อย่างใด กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปมาจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์ต้น ๆ ที่กำหนดให้นั้นเป็นจริง แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นนั้นต้องเป็นจริงกับทุก ๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าตัวเลขที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร
3. สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ และสามารถอธิบายความหมายของสูตรที่เป็นตัวแปรได้อย่างสมบูรณ์

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อสามารถสร้างสูตรในการหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้แล้ว และเมื่อนำไปสร้างข้อสรุปหรือหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูป จะมีการคิดเกี่ยวกับวิธีการคิดของตนอีกครั้งหนึ่ง หรือมีการตรวจสอบหรือประเมินความน่าเชื่อถือของวิธีการคิดและข้อสรุปของตนให้แน่ใจอีกครั้งหนึ่ง โดยจะใช้วิธีการที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ตนใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น กรณีของช้องนาง นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จากโรงเรียนในเมือง ได้พรรณารอยของพฤติกรรมดังกล่าวในการหาค่าของพจน์ที่ 30 ของแบบรูปข้อ 1 กล่าวคือ ในการหาค่าของพจน์ที่ 30 ช้องนางใช้วิธีการแทนค่าในสูตรของพจน์ทั่วไปที่เธอสร้างขึ้นมา คือ เอา $4 \times 30 + 2 = 122$ แต่หลังจากได้คำตอบแล้วเธอยังมีการคิดซ้ำอีกครั้งหนึ่งโดยใช้วิธีการที่ต่างออกไป คือการบวกเพิ่มทีละ 4 ไปเรื่อย ๆ จนถึงพจน์ที่ 30 ซึ่งการบวกเพิ่มครั้งแรกได้คำตอบไม่ตรงกับการคิดโดยใช้สูตร เธอก็พยายามตรวจสอบข้อผิดพลาดในการบวกจนเจอ แล้วก็ลองบวกเพิ่มใหม่อีกจนพบว่าคำตอบโดยการใช้อนุกรม และการหาคำตอบโดยการบวกเพิ่มได้ผลเท่ากัน ทำนองเดียวกันกับในข้อ 3 เธอได้ทดสอบวิธีการหาค่าของพจน์ที่ 6 โดยการใช้อนุกรม กับการวาดรูปการร้อยลูกปัดที่ใช้สีด้า 6 เม็ด ตามลวดลายในแบบรูปที่กำหนดให้ ดังจะพิจารณาได้จากการเขียนตอบในแบบทดสอบ ดังรูปต่อไปนี้



ภาพประกอบ 24 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงช้องนาง ข้อ 1.3



ภาพประกอบ 25 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงช้องนาง ข้อ 3.1

พฤติกรรมลักษณะดังกล่าวสามารถพบได้กับนักเรียนคนอื่น ๆ ในกลุ่มนี้ แม้นักเรียนบางคน อาจจะไม่ได้แสดงออกมาเองเหมือนกรณีของช้องนาง แต่เมื่อผู้สัมภาษณ์ใช้คำถามว่า จะตรวจสอบได้ อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้นั้นถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้ทุกคนสามารถอธิบายวิธีการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน โดยการใช้วิธีการอื่นในการหาคำตอบ เพื่อเปรียบเทียบว่าผลของ 2 วิธี มีค่าเท่ากันหรือไม่ ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองคำ

ครู: มั่นใจมั๊ยข้อ 1.1

ทองคำ: มั่นใจครับ

ครู: เข็คยังงเวว่าเราตอบถุก

ทองคำ: (ซึ่งที่รปกล่องซ้อนกัน 6 ใบ) นับจากรปโดยไม่นับด้านที่ไม่ทับกัน

ครู: ถ้าเอากล่องมาซ้อนกัน 50 ใบ แล้วมีคนตอบว่ามีพื้นที่ 203 ตารางหน่วย เราคิดว่าเขาตอบถูกไหม

ทองคำ: คิดว่าไม่ถูกครับ เพราะว่าไม่ตรงกับความสัมพันธ์ จำนวนกล่อง $\times 4 + 2$ ครับ

ครู: แล้วมันใจได้อย่างไรว่าสูตรนี้ถูก

ทองคำ: ก็ลองคิดตั้งแต่ต้นๆ ถ้าตรงตามสูตรนี้ก็ใช้ได้ครับ

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่า ในส่วนของการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อสร้างข้อสรุปได้แล้วนักเรียนกลุ่มนี้จะมีการคิดเกี่ยวกับวิธีการคิดของตนอีกครั้งหนึ่ง หรือมีการตรวจสอบหรือประเมินความน่าเชื่อถือของวิธีการคิดและข้อสรุปของตนให้แน่ใจอีกครั้งหนึ่ง
2. ในการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปจะใช้วิธีการเปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน คือวิธีที่ทำให้ได้ข้อสรุปมาคือการแทนค่าในสูตรทั่วไปที่สร้างขึ้น กับวิธีที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ตนใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น การวาดรูปตามข้อกำหนดในแบบรูป หรือการบวกเพิ่ม เป็นต้น ว่าจะทำให้ได้ข้อสรุปเหมือนกันหรือไม่

ตาราง 41 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 2

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A21 สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของแบบรูปได้ครบถ้วนทุกรายละเอียดมองเห็นทั้งความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น A22 สามารถเข้าใจแบบรูปที่นำเสนอทั้งในรูปของภาพและในรูปของตัวเลข และสามารถอธิบายได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร A23 ให้ความสนใจกับการ	I21 สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ I22 สร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นจากการใช้กระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นหลักโดยไม่ได้สนใจความหมายหรือที่มาของตัวเลขในสูตรแต่อย่างใด กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างสูตรที่ใช้แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปมาจากการพิจารณาค่าของแต่ละพจน์ต้น ๆ ในแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วพยายามค้นหาสูตรที่ทำให้ค่าของทุกพจน์ต้น ๆ	E21 จะมีการคิดเกี่ยวกับวิธีการคิดของตนอีกครั้งหนึ่ง หรือมีการตรวจสอบหรือประเมินความน่าเชื่อถือของวิธีการคิดและข้อสรุปของตนให้แน่ใจอีกครั้งหนึ่งหลังจากได้ข้อสรุปแล้ว E22 ในการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปจะใช้วิธีการเปรียบเทียบวิธีการ 2 วิธีที่แตกต่างกัน คือวิธีที่ทำให้ได้ข้อสรุปมาคือการแทนค่าในสูตรทั่วไปที่สร้างขึ้น กับวิธีที่แตกต่างออกไปจากวิธีการที่ตนใช้ในการ

ตาราง 41 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
นำเสนอในรูปตัวเลข มากกว่าการนำเสนอเป็น รูปภาพ ทำให้นักเรียน พยายามที่จะวิเคราะห์หา ความสัมพันธ์ระหว่าง ตำแหน่งของพจน์กับค่าของ พจน์ในแต่ละตำแหน่งโดย การพิจารณาจากตัวเลข เพียงด้านเดียวโดยไม่สนใจ ความหมายจากรูปภาพ	ที่กำหนดให้มันเป็นจริง แล้วสรุปว่าสูตร ที่สร้างขึ้นนั้นต้องเป็นจริงกับทุกๆ พจน์ โดยไม่สนใจว่าตัวเลขที่นำมา ดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือ ความหมายอย่างไร 123 สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไป ให้อยู่ในรูปของตัวแปรหรือสัญลักษณ์ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับสูตรที่เป็น ตัวแปรได้อย่างสมบูรณ์	สร้างข้อสรุป เช่น การวาด รูปตามข้อกำหนดในแบบรูป หรือการบวกเพิ่ม เป็นต้น ว่าจะทำให้ได้ข้อสรุป เหมือนกันหรือไม่

นักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 3 มีจำนวน 3 คน ประกอบด้วย
นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 จากทั้งโรงเรียนในเมืองและโรงเรียนชนบท ทั้งหมดเป็น
นักเรียนที่มีผลการเรียนดี ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้ง 3 คน มีรายละเอียดดังตาราง 42

ตาราง 42 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 3

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กหญิงกาหลง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 4	10	ดี
เด็กชายหยก	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายโกเมน	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี

ลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบต่าง ๆ ของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ แต่ที่แตกต่างไปจากนักเรียนกลุ่ม 2 คือนักเรียนกลุ่มนี้จะมองแบบรูปอย่างมีความหมาย กล่าวคือ ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งนั้น นักเรียนในกลุ่มนี้จะสร้างความสัมพันธ์ดังกล่าวขึ้นมาจากความหมายที่มีอยู่ในแบบรูป ดังนั้นความสัมพันธ์ที่ได้มาจะไม่ใช้การได้มาโดยวิธีการอุปนัยเหมือนกับนักเรียนในกลุ่ม 2 แต่เป็นความสัมพันธ์ที่ได้มาจากการพิสูจน์ขึ้นจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้ นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่อยู่ในสูตรทั่วไปซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งคืออะไร มีที่มาหรือความหมายอย่างไร

ในแบบรูปข้อที่ 1 ซึ่งเป็นแบบรูปของพื้นที่ผิวข้างที่เกิดจากการวางกล่องสี่เหลี่ยมรูปลูกบาศก์ซ้อนกันทีละ 1 กล่อง ไปเรื่อย ๆ นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า พื้นที่ของกล่องที่วางซ้อนกันจะเกิดจากการนับจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยไม่นับด้านที่วางซ้อนกัน และในขณะที่จำนวนกล่องที่วางซ้อนกันเพิ่มขึ้นทีละ 1 พื้นที่ของกล่องจะเพิ่มขึ้นทีละ 4 หรือเมื่อกล่องเพิ่มขึ้น 1 ใบพื้นที่จะเพิ่มขึ้น 4 ตารางหน่วย นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถวิเคราะห์ได้ต่อไปอีกว่าการนับพื้นที่ของกล่องจะนับด้านข้างของกล่องแต่ละใบ 4 ด้าน และนับเพิ่มอีก 2 ด้าน จากด้านบนของกล่องใบบนสุดและด้านล่างของกล่องใบล่างสุด ดังนั้นพื้นที่ของกล่องจะมีค่าเท่ากับการเอาจำนวนกล่องคูณด้วย 4 เพราะแต่ละกล่องถูกนับด้านข้าง 4 ด้าน แล้วบวกด้วย 2 คือด้านบนสุดและด้านล่างสุดของกล่องที่วางซ้อนกัน นั่นคือนักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์หาสูตรของพจน์ทั่วไปของแบบรูปนี้ได้ว่าอยู่ในรูป

$$\text{พื้นที่ของกล่องที่วางซ้อนกัน} = (\text{จำนวนกล่อง} \times 4) + 2$$

ซึ่งเป็นสูตรแทนความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของกล่องและจำนวนกล่องที่ได้มาจากการพิสูจน์ขึ้นมาจากเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ในแบบรูป ดังจะสามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของนักเรียนในกลุ่มนี้ ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายโกเมน

ครู: กล่อง 1 ใบมีพื้นที่ 6 ตารางหน่วย เข้าใจไหม

- โกเมน: เข้าใจครับมันมี 6 หน้า
- ครู: กล่อง 2 ใบ ทำไมถึงมี 10
- โกเมน: เพราะ 2 หน้ามันมันทับกันอยู่ครับ ก็เลยไม่นับก็เลยลบ 2 ไป
- ครู: เพราะฉะนั้น 3 ใบมี 14 ก็...
- โกเมน: ลบไป 4 ครับ
- ครู: ที่นี้ข้อ 2.1 ถ้าเอากล่องมาซ้อนกัน 6 ใบ จะมีพื้นที่เท่าไร เราคิด
ยังไปถึงได้ 26 ตารางหน่วย
- โกเมน: ก็มันมีอยู่ 2 วิธีคือ มันจะห่างกันชั้นละ 4 พอดี แต่ถ้าเลขมากๆ มัน
จะยากมันไม่ค่อยแม่นยำครับ อีกวิธีหนึ่งคือ กล่องทุกชั้นจะมีหน้าข้าง 4 อัน
และบวกหัวกับท้ายอีก 2 ก็เลยบวก 2
- ครู: หัวกับท้ายคือ ...
- โกเมน: ล่างสุดกับบนสุดที่มันไม่ทับกัน
- ครู: แล้วทำไมถึงได้ 26
- โกเมน: ก็มันมี 6 ชั้น จึงเอา 6 คูณ 4 และบวก 2 เท่ากับ 26 ครับ
- ครู: 6 ก็คือ
- โกเมน: 6 ชั้น
- ครู: คูณ 4 นี่คืออะไร
- โกเมน: ด้านข้างครับ
- ครู: 2 คือ ...
- โกเมน: ด้านบนสุดและด้านล่างสุดครับ
- ครู: อ๊ะ! ลองเปิดข้อต่อไปซิ ตอนนี้เพิ่มเป็น 30 ใบ ก็ใช้วิธีการเดิม
- โกเมน: ครับ
- ครู: พอเป็น 100 ใบ ตรงนี้ก็เปลี่ยนเป็น ...
- โกเมน: 100 ครับ
- ครู: ถ้าเกิดให้หาสกล้านใบเนี่ยจะหาได้ไหม
- โกเมน: หาได้ครับ 4 ล้าน 2 ครับ

$$\begin{aligned} \text{กลุ่มที่ 1} &= (1 \times 4) + 2 = 6 \\ 2 &= (2 \times 4) + 2 = 10 \\ 3 &= (3 \times 4) + 2 = 14 \\ 4 &= (4 \times 4) + 2 = 18 \\ 5 &= (5 \times 4) + 2 = 22 \\ 6 &= (6 \times 4) + 2 = 26 \end{aligned}$$

เพราะ ทุกกลุ่มจะมีส่วนข้าง 4 ด้าน จึงคูณ 4
แล้วรวมหัวกับท้าย ซึ่ง + 2

ภาพประกอบ 26 การเขียนตอบในแบบทดสอบของโกเมน ข้อ 1.1

ทำนองเดียวกันกับแบบรูปในข้อที่ 2 ซึ่งเป็นแบบรูปของการปูแผ่นกระเบื้องสีดำและสีขาว เป็นลวดลาย นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่า ในแต่ละพจน์ที่อยู่ติดกันจำนวนกระเบื้องสีขาวจะมีจำนวนต่างกันอยู่ 2 แผ่น หรือถ้านับจำนวนกระเบื้องสีขาวเรียงไปเรื่อย ๆ ตั้งแต่พจน์แรกจะเป็นเหมือนกับการนับเพิ่มทีละ 2 หรือนักเรียนจะอธิบายออกมาว่าเมื่อจำนวนกระเบื้องสีดำเพิ่มขึ้นมา 1 แผ่น จำนวนกระเบื้องสีขาวจะเพิ่มขึ้น 2 แผ่น นั่นคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ ก็คือสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องสีขาวในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ว่า

$$\text{จำนวนกระเบื้องสีขาวพจน์ถัดไป} = \text{จำนวนกระเบื้องสีขาวพจน์ก่อนหน้า} + 2$$

นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถวิเคราะห์ต่อไปได้อีกว่าจำนวนกระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์มีความสัมพันธ์กัน โดยการสังเกตจากรูปลวดลายการปูกระเบื้องทำให้พบว่ากระเบื้องสีดำแต่ละแผ่นจะมีกระเบื้องสีขาวประกบด้านบนและด้านล่าง ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนกระเบื้องสีขาวที่อยู่ตรงกับกระเบื้องสีดำในแต่ละพจน์จะเท่ากับสองเท่าของจำนวนกระเบื้องสีดำในพจน์นั้น ต่อมานักเรียนในกลุ่มนี้จะสังเกตต่อไปอีกว่าในแต่ละพจน์จะมีจำนวนกระเบื้องสีขาวที่วางเรียงอยู่ด้านข้างและ

ไม่ได้อยู่ตรงด้านบนหรือด้านล่างของกระเบื้องสีดำอีก 6 แผ่น ดังนั้นจึงได้ข้อสรุปว่า จำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์จะเท่ากับจำนวนกระเบื้องสีดำในพจน์นั้นคูณด้วยสองแล้วบวกด้วยหก และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระเบื้องสีดำและจำนวนกระเบื้องสีขาวในแต่ละพจน์ออกมาได้ในรูปของสูตรแทนพจน์ทั่วไปได้ว่า

$$\text{จำนวนกระเบื้องสีขาว} = (\text{จำนวนกระเบื้องสีดำ} \times 2) + 6$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่ได้มาจากการพิสูจน์ให้เห็นจริงอย่างชัดเจนและสมเหตุสมผล แตกต่างจากการสร้างขึ้นโดยหลักของการอุปนัย ดังจะสามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของนักเรียนในกลุ่มนี้ ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก

ครู: มาดูข้อ 2 เขาทำอะไร

หยก: เขาปูกระเบื้องครับ

ครู: เขาปูยังงัยกระเบื้องนี้

หยก: กระเบื้องสีดำ 1 แผ่น ก็เอากระเบื้องสีขาวล้อมรอบ

ครู: พอ 2 แผ่น

หยก: 2 แผ่น ก็เอาสีขาวล้อมรอบเหมือนเดิมครับ

ครู: มีอะไรเปลี่ยนไปบ้าง

หยก: จำนวนของกระเบื้องสีขาวน้อยลงครับ คือ รูปแรกมันใช้สีขาว 8 แผ่น และรูปที่ 2 มันน่าจะได้ 16 แผ่นแต่มันก็ใช้ (สีขาว) แค่ 10 แผ่นเอง

ครู: เกิดข้อสังเกตอะไรขึ้นบ้าง

หยก: ตอนแรกผมก็คิดอะไรไม่ออก ก็เลยวาดรูปนี้ (รูปพจน์ที่ 4 ที่นักเรียนวาดขึ้นเองได้อย่างถูกต้อง) ขึ้นมา

ครู: แล้วก็นับเอา

หยก: นับสีขาวครับ

ครู: ได้ 14 แผ่น (ข้อ 1.1)

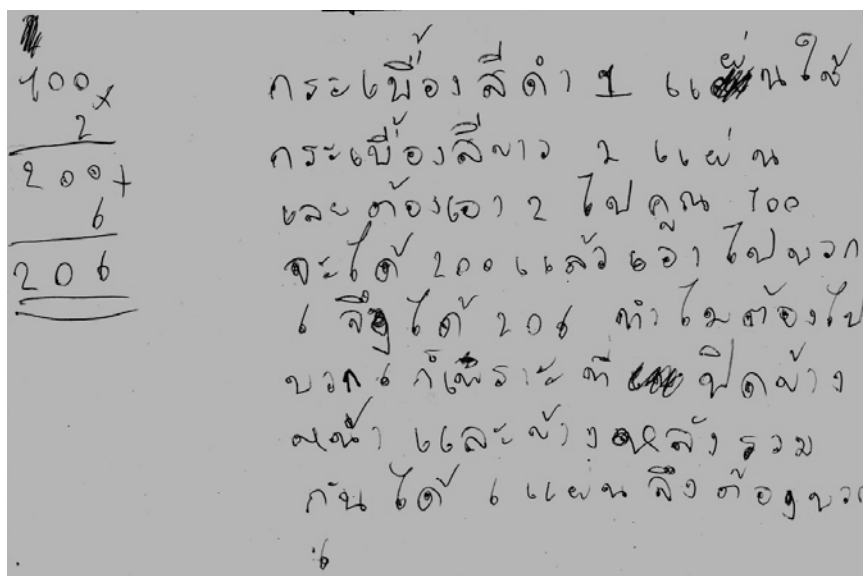
หยก: ครับ

ครู: ข้อนี้ก็ทำอย่างนี้ไปก่อน

หยก: ครับ

ครู: ที่นี้พอจำนวนแผ่นกระเบื้องสีดำมากๆ (30 แผ่น)

- หยก: ก็वादไม่ไหวครับ
- ครู: แล้ว...
- หยก: ก็เลยคิดหาวิธีครับ
- ครู: ลองเล่าตอนคิดหาวิธี
- หยก: (เปิดกลับไปรูปที่โจทย์กำหนดให้) ก็คือผมดูจากรูปนี้ครับ (ชี้ที่รูปเทอมที่ 2) กระเบื้องสีดำ 2 แผ่น จะมีสีขาวข้างบนและข้างล่าง 2 แผ่น สีดำ 1 แผ่นมีสีขาวบนล่าง 2 แผ่น และมันจะเป็นแบบนี้กับทุกรูป เป็นอย่างนี้กับสีดำทุกแผ่นเลย (ชี้ที่รูปที่ 3 ด้วย) แต่ตรงนี้ (ชี้ที่ด้านข้าง) ก็ยังอยู่เหมือนเดิม (เหมือนกันทุกรูป)
- ครู: อะไรอยู่เหมือนเดิม
- หยก: ด้านข้างของมันครับ
- ครู: ก็คือมีเท่าไร
- หยก: ข้างละ 3 เหมือนเดิมครับ (เหมือนกันทุกรูป)
- ครู: แล้ว...
- หยก: ผมก็เลยเอา 2 ไปคูณครับ คูณกับจำนวนกระเบื้องสีดำครับ
- ครู: ทำไมต้องเอา 2 คูณ
- หยก: เพราะสีดำ 1 แผ่นจะมีสีขาว 2 แผ่น (ประกบด้านบนและด้านล่าง)
- ครู: เสร็จแล้ว...
- หยก: เสร็จแล้วก็เอามาวกกับกระเบื้องสีขาวที่อยู่ด้านข้างครับ
- ครู: ก็แผ่น
- หยก: ข้างละ 3 แผ่นก็ได้เท่ากับ 6
- ครู: ก็เลยบวก 6
- หยก: ครับ
- ครู: เพราะฉะนั้นสูตรของเราคืออะไร เขียนให้ออกมาสวยๆ ซิ
- หยก: (เขียน) จำนวนกระเบื้องสีดำ $\times 2 + 6 =$ จำนวนกระเบื้องสีขาว



ภาพประกอบ 27 การเขียนตอบในแบบทดสอบของหยก ข้อ 2.3

ในแบบรูปข้อ 3 ซึ่งเป็นแบบรูปของการร้อยลูกปัดสีดำและสีขาวเป็นลวดลายก็เช่นเดียวกันคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่า ในแต่ละพจน์ที่อยู่ติดกันจำนวนลูกปัดสีขาวจะมีจำนวนต่างกันอยู่ 3 เม็ด หรือถ้านับจำนวนลูกปัดสีขาวเรียงไปเรื่อย ๆ ตั้งแต่พจน์แรกจะเป็นเหมือนกับการนับเพิ่มทีละ 3 หรือนักเรียนจะอธิบายออกมาว่าเมื่อจำนวนลูกปัดสีดำเพิ่มขึ้นมา 1 เม็ด จำนวนลูกปัดสีขาวจะเพิ่มขึ้น 3 เม็ด นั่นคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ ก็คือสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีขาวในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ว่า

$$\text{จำนวนลูกปัดสีขาวพจน์ถัดไป} = \text{จำนวนลูกปัดสีขาวพจน์ก่อนหน้า} + 3$$

นอกจากนี้นักเรียนในกลุ่มนี้ยังสามารถวิเคราะห์ต่อไปได้อีกว่าจำนวนลูกปัดสีดำและจำนวนลูกปัดสีขาวในแต่ละพจน์มีความสัมพันธ์กัน โดยการสังเกตจากรูปลวดลายในการร้อยลูกปัดทำให้พบว่าลูกปัดสีดำแต่ละเม็ดจะมีลูกปัดสีขาวประกบเป็นรูปเครื่องหมายน้อยกว่า ($<$) ดังนั้นจะได้ว่าจำนวนลูกปัดสีขาวที่ประกบลูกปัดสีดำเป็นรูปเครื่องหมายน้อยกว่าจะเท่ากับสามเท่าของจำนวนลูกปัดสีดำในพจน์นั้น ต่อมานักเรียนในกลุ่มนี้จะสังเกตต่อไปอีกว่าในแต่ละพจน์จะมีจำนวนลูกปัดสีขาวที่ปิดท้ายอยู่อีก 1 เม็ด เสมอ ดังนั้นจึงได้ข้อสรุปว่า จำนวนลูกปัดสีขาวในแต่ละพจน์จะเท่ากับจำนวนลูกปัดสีดำ

คุณด้วยสามแล้วบวกด้วยหนึ่ง และสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีดำและจำนวนลูกปัดสีขาวในแต่ละพจน์ออกมาได้ในรูปของสูตรแทนพจน์ทั่วไปได้ว่า

$$\text{จำนวนลูกปัดสีขาว} = (\text{จำนวนลูกปัดสีดำ} \times 3) + 1$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่ได้มาจากการพิสูจน์ให้เห็นจริงอย่างชัดเจนและสมเหตุสมผล แตกต่างจากการสร้างขึ้นโดยหลักของการอุปนัย ดังจะสามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของนักเรียนในกลุ่มนี้ ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์ของหยก

ครู: มาดูข้อ 3 เขาทำอะไรเนีย

หยก: เย็บลูกปัดครับ

ครู: ลวดสายในการเย็บเขาเป็นไงเนีย

หยก: เป็นรูปดอกไม้ครับ

ครู: สีดำกับสีขาวเกี่ยวข้องกันอย่างไร

หยก: สีขาวจะล้อมรอบสีดำครับ

ครู: ข้อ 3.1 ถ้าลูกปัดสีดำ 6 เม็ด หยกตอบว่าจะต้องใช้สีขาว 19 เม็ด

หยก: ครับ

ครู: ทำไง

หยก: ผมเอา 6×3 แล้วบวก 1 ครับ

ครู: 6 คืออะไร

หยก: 6 คือจำนวนลูกปัดสีดำครับ

ครู: แล้ว 3 ละ

หยก: 3 คือจำนวนลูกปัดสีขาวที่ผมดูอย่างนี้ครับ (ขีดคร่อมลูกสีขาวเป็นรูปเครื่องหมายน้อยกว่า ดังที่เด็กขีดในข้อสอบในรูปเทอมที่ 3 และ 4 ซึ่งสีดำ 1 เม็ดจะใช้สีขาว 3 เม็ดล้อมรอบเป็นรูปเครื่องหมายน้อยกว่า) แล้วต้อง (เป็นภาษาใต้แปลว่าพวกหรือกลุ่ม) สุดท้ายมันจะเหลือ 1 เม็ด ก็ใช้แทนตรงนี้ (ชี้ที่สูตรตรงบวก 1)

ครู: สีดำ 1 เม็ดใช้สีขาวล้อมรอบ 3 เม็ด (เป็นรูป <)

หยก: ครับ

ครู: แล้วเหลืออยู่...

หยก: 1 เม็ดครับ

ครู: ก็เลยเอามา...

หยก: บวกครับ

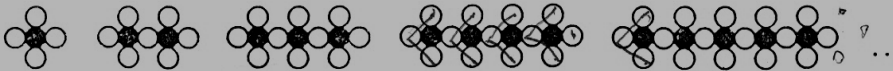
ครู: เพราะฉะนั้นสูตรของเราคืออะไร

หยก: เขียนเป็นรูปลูกปัดดีกว่านะครับ...

ครู: อ้อ...

หยก: (เขียน) $\bullet \times 3 + 1 = \bigcirc$

3.



$$\begin{array}{r}
 6 \times \\
 3 \\
 18 + \\
 1 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

ลูกปัดสีดำ 1 + 1 = 2 ให้

ลูกปัดสีขาว 3 แล้ว สีดำ

หน้า 3 ไปคูณ 6 จะได้ 18

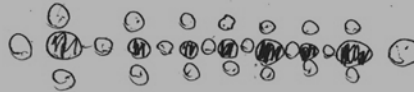
แล้วหน้า 18 ไปบวก 1 ก็เท่ากับ

19 ที่ตัวคูณบวก 1 ก็เพราะ

ต้องให้ลูกปัดสีดำอีก

1 แล้ว

$\bullet \times 3 + 1 = \bigcirc$



22

$7 \times 3 + 1 = 22$

ภาพประกอบ 28 การเขียนตอบในแบบทดสอบของหยก ข้อ 3.1

นอกจากนี้เมื่อนักเรียนบางคนในกลุ่มนี้มีลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปที่แตกต่างออกไป แต่มองโดยความหมายแล้วก็มีลักษณะใกล้เคียงกับลักษณะข้างต้นที่นำเสนอมา เช่นกรณีของกาหลง โดยในแบบรูปข้อ 3 กาหลงจะวิเคราะห์ว่าในแต่ละพจน์ลูกบัตสี่ดำแต่ละเม็ดจะมีลูกบัตสี่ขาวล้อมรอบอยู่ 3 เม็ด ยกเว้นลูกบัตสี่ดำเม็ดแรกจะมีลูกบัตสี่ขาวล้อมรอบเพียง 4 เม็ด ดังนั้นจำนวนลูกบัตสี่ขาวในแต่ละพจน์จะเท่ากับการเอาลูกบัตสี่ขาว 4 เม็ดที่ล้อมรอบลูกบัตสี่ดำเม็ดแรก บวกกับสามเท่าของลูกบัตสี่ดำเม็ดที่เหลือ เช่นกรณีพจน์ที่ 100 ก็จะได้ว่า

$$\text{จำนวนลูกบัตสี่ขาว} = 4 + (99 \times 3) = 301 \text{ เม็ด}$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่าลักษณะการวิเคราะห์แบบรูปของกาหลง ก็เป็นการพิสูจน์สูตรสำหรับพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้เช่นเดียวกันกับโกเมนและหยก แต่เป็นการมองในคนละมุมกันเท่านั้น ดังนั้นจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบในแบบทดสอบของนักเรียน ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์ของกาหลง

ครู: มาดูข้อ 3 ลองอ่านโจทย์อีก

กาหลง: นักเรียนอ่านโจทย์

ครู: ลวดลายดังรูปอีกแล้ว หมายความว่าอย่างไร อธิบายได้ไหม

กาหลง: ลูกบัตสี่ขาวล้อมรอบลูกบัตสี่ดำ ถ้าสี่ดำ 1 ลูก สีขาว 4 ถ้าสี่ดำ 2 ลูก สีขาว ก็เป็น 7 ค่ะ

ครู: ทำไม่ถึง 7 ทำไม่ 8 ละ

กาหลง: ก็อันใดอันหนึ่งต้องเป็น 4 อันที่เหลือเป็น 3

ครู: รูปที่ 3 ถ้าไม่ต้องนับ ได้สีขาวเท่าไร

กาหลง: (เขียน) 10

ครู: ทำอย่างไร

กาหลง: ก็ข้างหน้า 4 ข้างหลัง 3 สองรูปก็ 6 และ 4 บวก 6 ก็เป็น 10

ครู: แล้วรูปต่อไปละ (รูปเทอมที่ 4 สี่ดำ 4 เม็ด)

กาหลง: เขียน 13

ครู: ได้มาจากไหน 13

กาหลง: ข้างหน้า 4 (วงกลมรอบดำเม็ดแรกในข้อสอบ) ข้างหลัง 3 3 3

(สี่ดำเม็ดที่เหลืออีก 3 เม็ด) เป็น 9 และ 9 บวก 4 ก็เป็น 13

ครู: รูปสุดท้ายละ

กาหลง: เขียน 16

ครู: ที่นี้ข้อ 3.1 ลูกบัตสีดำ 6 เม็ดจะต้องใช้ลูกบัตสีขาว หนุตอบ 19 เม็ดอธิบายให้ฟังซิ

กาหลง: กรอบข้างหน้าหนุหมายถึงลูกบัตสีดำนุรูปแรกล้อมรอบด้วยลูกบัตสีขาว 4 เม็ด
สีดำนุเม็ดที่เหลือล้อมรอบด้วยลูกบัตสีขาว 3 เม็ด ก็จะได้เท่ากับ 15 เม็ด
เมื่อบวกกับ 4 เม็ดข้างหน้าจะได้เท่ากับ 19 เม็ด

ครู: หนุได้วิธีการนี้มาอย่างไร

กาหลง: ดูมาจากรูป

ครู: ข้อ 3.2 พอลูกบัตสีดำนุเพิ่มเป็น 30 เม็ด หนุเขียนว่า เอา $4 + (99 \times 3) = \square$

กาหลง: ยังไม่ได้เติมในช่องสี่เหลี่ยมคะ

ครู: ก็ได้เป็นคำตอบ 301 เม็ด

กาหลง: คะ (พร้อมกับเขียน $99 \times 3 + 4$ และคิดซ้ำอีกครั้งหนึ่ง)

ครู: ลองคิดเล่นๆ ซิว่าถ้านุลูกบัตสีดำนุ 1,000 เม็ด จะต้องใช้ลูกบัตสีขาวกี่เม็ด

กาหลง: (เขียน $4 + (999 \times 3)$) แล้วตอบ 3,001 เม็ด

Handwritten work showing calculations for the number of white beads needed to surround a square of black beads.

Vertical multiplication of 99 by 3:

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times 3 \\ \hline 297 \\ \hline \end{array}$$

Calculation of 4 + (99 x 3) = 301:

$$4 + (99 \times 3) = 301$$

Calculation of 4 + (999 x 3) = 3001:

$$4 + (999 \times 3) = 3001$$

Handwritten Thai text explaining the logic:

กรอบข้างหน้าทีล้อมรอบเป็น 4 เม็ด ทีเหลือนุล้อมรอบ 3 เม็ด เหลือ 99 รูป ก็จะได้ = 297 เม็ด + กับอีก 4 เม็ดข้างหน้า = 301 เม็ด

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาทั้งหมดจะเห็นว่าในส่วนของทวิเคราะห์แบบรูป นักเรียนในกลุ่ม 3 จะมีลักษณะที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบต่าง ๆ ของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร

2. สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์

3. สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้มาจะไม่ใช้การได้มาโดยวิธีการอุปนัย แต่เป็นความสัมพันธ์ที่ได้มาจากการพิสูจน์ขึ้นจากเงื่อนไขของแบบรูปที่กำหนดให้อย่างสมเหตุสมผล โดยนักเรียนในกลุ่มนี้สามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

สืบเนื่องจากการที่นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ทั้งความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์และความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง จึงทำให้นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล รวมไปถึงพจน์ทั่วไป ได้อย่างถูกต้อง โดยวิธีการในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไปที่เกิดจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง แล้วใช้วิธีการอ้างเหตุผลแบบนิรนัยเพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับค่าของพจน์ต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้หาค่า กล่าวคือจากสูตรทั่วไปที่พิสูจน์ขึ้นให้เห็นจริงแล้วอ้างอิงสูตรดังกล่าวไปหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ ลักษณะของข้อสรุปและวิธีการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้ สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 43 แสดงลักษณะของข้อสรุปและวิธีการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

ข้อ ที่	พจน์ ถัดไป	พจน์ ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป	วิธีการ (เหตุผล)
1	26	122	402	พื้นที่กล่อง = (จำนวนกล่อง $\times$ 4) + 2	<u>พิสูจน์ความสัมพันธ์</u> พื้นที่กล่อง = (จำนวนกล่อง $\times$ 4) + 2 <u>ใช้สร้างข้อสรุปในกรณีเฉพาะ</u>

ตาราง 43 (ต่อ)

ข้อ ที่	พจน์ ถัดไป	พจน์ ที่ 30	พจน์ที่ 100	พจน์ทั่วไป	วิธีการ (เหตุผล)
					ถ้ากล่องวางซ้อนกัน 6 ใบ จะได้ว่า พื้นที่กล่อง = $(6 \times 4) + 2 = 26$ ตร.หน่วย ถ้ากล่องวางซ้อนกัน 30 ใบ จะได้ว่า พื้นที่กล่อง = $(30 \times 4) + 2 = 122$ ตร.หน่วย ถ้ากล่องวางซ้อนกัน 100 ใบ จะได้ว่า พื้นที่กล่อง = $(100 \times 4) + 2 = 402$ ตร.หน่วย
2	14	66	206	จำนวน กระเบื้องสีขาว = (จำนวน กระเบื้องสีดำ x 2) + 6	<u>พิสูจน์ความสัมพันธ์</u> จำนวนกระเบื้องสีขาว = (จำนวนกระเบื้องสีดำ x 2) + 6 <u>ใช้สร้างข้อสรุปในกรณีเฉพาะ</u> ถ้าใช้กระเบื้องสีดำ 4 แผ่น จะได้ว่า จำนวนกระเบื้องสีขาว = $(4 \times 2) + 6 = 14$ แผ่น ถ้าใช้กระเบื้องสีดำ 30 แผ่น จะได้ว่า จำนวนกระเบื้องสีขาว = $(30 \times 2) + 6 = 66$ แผ่น ถ้าใช้กระเบื้องสีดำ 100 แผ่น จะได้ว่า จำนวนกระเบื้องสีขาว = $(100 \times 2) + 6 = 206$ แผ่น
3	19	91	301	<u>แบบ 1</u> จำนวนลูกปัดสี ขาว = (จำนวน ลูกปัดสีดำ x 3) + 1 <u>แบบ 2</u> จำนวนลูกปัดสี ขาว = 4 + 3 x (จำนวน ลูกปัดสีดำ - 1)	<u>พิสูจน์ความสัมพันธ์</u> จำนวนลูกปัดสีขาว = (จำนวนลูกปัดสีดำ x 3) + 1 <u>ใช้สร้างข้อสรุปในกรณีเฉพาะ</u> ถ้าใช้ลูกสีดำ 6 เม็ด จะได้ว่า จำนวนลูกปัดสีขาว = $(6 \times 3) + 1 = 19$ เม็ด ถ้าใช้ลูกสีดำ 30 เม็ด จะได้ว่า จำนวนลูกปัดสีขาว = $(30 \times 3) + 1 = 91$ เม็ด ถ้าใช้ลูกสีดำ 100 เม็ด จะได้ว่า จำนวนลูกปัดสีขาว = $(100 \times 3) + 1 = 301$ เม็ด

ลักษณะเด่นที่สำคัญของนักเรียนในกลุ่มนี้คือ การที่สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูป ได้อย่างสมบูรณ์ เช่นเดียวกันกับนักเรียนในกลุ่ม 2 แต่ข้อแตกต่างที่สำคัญของนักเรียนในสองกลุ่มนี้คือ การสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปของนักเรียนในกลุ่ม 3 จะเกิดขึ้นจากการพิจารณาแบบรูปที่กำหนดให้แล้วพิสูจน์ให้เห็นจริงว่าตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ไม่ใช้การสร้างสูตรแทนพจน์ทั่วไปขึ้นมาโดยวิธีการอุปนัยเหมือนกับนักเรียนในกลุ่ม 2

ลักษณะเด่นที่สำคัญอีกประการหนึ่งของนักเรียนในกลุ่มนี้คือ นักเรียนสามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้ สามารถอธิบายเกี่ยวกับตัวแปรที่ใช้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ เช่นเดียวกันกับนักเรียนในกลุ่ม 2 ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์และการเขียนตอบของนักเรียน ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายโกเมน

ครู: เพราะฉะนั้นสูตรของเราคืออะไร ... ที่ใช้ได้กับทุกแผ่นเลย

โกเมน: เขียน (จำนวนกระเบื้องสีดำ $\times 2$) + 6 = จำนวนกระเบื้องสีขาว

ครู: ทำเป็นตัวแปร x เหมือนที่เคยทำได้ไหม

โกเมน: เขียน $(y \times 2) + 6 = x$

ครู: x คืออะไร

โกเมน: จำนวนกระเบื้องสีขาว

ครู: เขียนให้ด้วย

โกเมน: นักเรียนเขียน x = จำนวนกระเบื้องสีขาว และ y = จำนวนกระเบื้องสีดำ

ครู: ถ้าตัว y เปลี่ยนจะมีผลต่ออะไร

โกเมน: ตัว y เปลี่ยนมีผลต่อตัว x

ครู: ถ้า y เพิ่มขึ้น x จะเป็นอย่างไร

โกเมน: เพิ่มขึ้น

ครู: เขียนกราฟได้ไหมกราฟของตัว x กับตัว y

โกเมน: จะเพิ่มขึ้น

ครู: ลองวาดรูปให้ดูได้ไหม

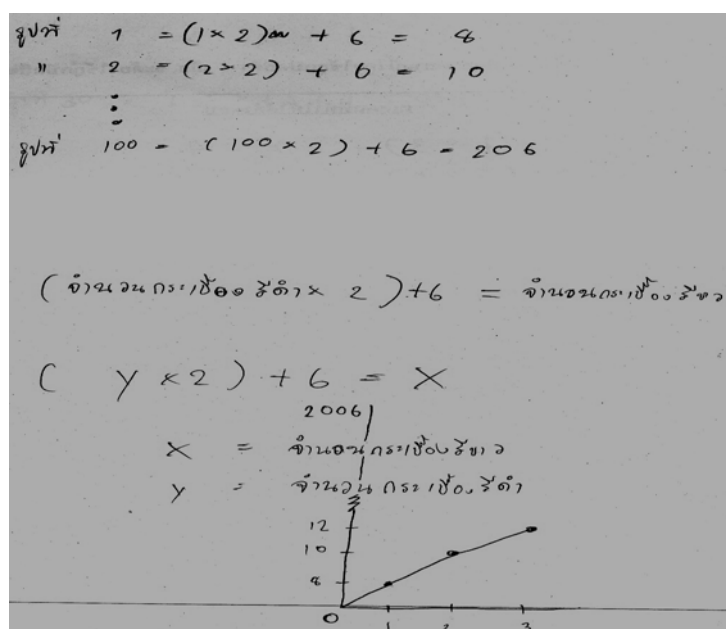
โกเมน: (วาดกราฟดังในข้อสอบ)

ครู: (ย้อนกลับมาที่ข้อ 1) ข้อ 1 เราจะเขียนคล้ายๆ กับข้อ 2 ยังไง

โกเมน: (จำนวนชั้นของกล่อง $\times 4$) + 2 = พื้นที่กล่อง

ครู: เขียนเป็นตัวแปรล่ะ

โกเมน: $(A \times 4) + 2 = B$
 ครู: B คือ ...
 โกเมน: พื้นที่กล่อง
 ครู: A ละ
 โกเมน: จำนวนชั้น
 ครู: ถ้า A เปลี่ยนจะมีผลต่อตัว ...
 โกเมน: B ครับ
 ครู: อะ A เพิ่มขึ้น B จะเป็นยังไง
 โกเมน: เพิ่มขึ้นครับ
 ครู: ถ้า A มีค่าเป็น 6 B จะเป็น
 โกเมน: 26 ครับ
 ครู: A มีค่าได้ค่าเดียวใช่ไหม
 โกเมน: ได้หลายค่าครับ
 ครู: B ละ
 โกเมน: หลายค่า



ภาพประกอบ 30 การเขียนตอบในแบบทดสอบของโกเมนข้อ 2

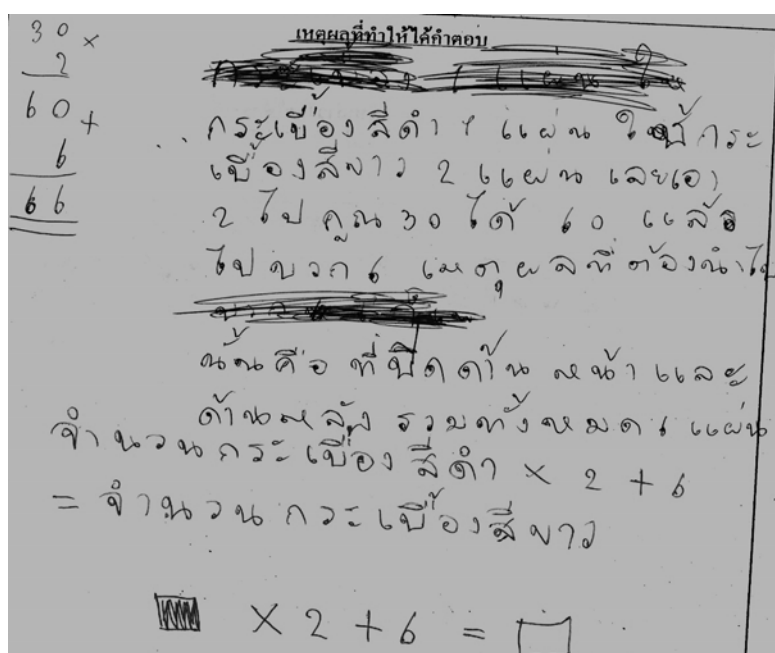
บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก ข้อ 2

- ครู: เพราะฉะนั้นสูตรของเราคืออะไร เขียนให้ออกมาสวยๆ ชี
- หยก: (เขียน) จำนวนกระเบื้องสีดำ $\times 2 + 6 =$ จำนวนกระเบื้องสีขาว
- ครู: เขียนให้สั้นกว่านี้ได้มั๊ย เอาแบบเข้าใจง่ายๆ ไม่ต้องใช้ตัวหนังสือได้มั๊ย
- หยก: เป็นภาพได้มั๊ยครับ
- ครู: ได้
- หยก: (เขียน) $\blacksquare \times 2 + 6 = \square$
- ครู: เออ...สวยขึ้น... $\blacksquare$ แทนอะไรได้บ้าง
- หยก: แทนจำนวนแผ่นกระเบื้องสีดำ แผ่นสีดำเราจะเอาก็แผ่นก็ได้ครับ
- ครู: $\blacksquare$ แทนด้วย 1 ได้มั๊ย
- หยก: ได้ครับ
- ครู: $\blacksquare$ แทน 20 ได้มั๊ย
- หยก: ได้ครับ
- ครู: ตกลง $\blacksquare$ แทนจำนวนใดก็จำนวนเนี่ย
- หยก: เยอะครับ
- ครู: อันนี้ละ ($\square$) แทนอะไรได้บ้าง
- หยก: อันนี้ก็คือแทนจำนวนแผ่นกระเบื้องสีขาวที่ได้ผลลัพธ์จากการเอาจำนวนแผ่นสีดำคูณ 2 แล้วก็บวก 6
- ครู: $\square$ ขึ้นอยู่กับอะไร
- หยก: ขึ้นอยู่กับจำนวน $\blacksquare$ ถ้า $\blacksquare$ เยอะ $\square$ ก็ล้อมรอบเยอะครับ
- ครู: เพราะฉะนั้น $\square$ มีได้หลายค่าเหมือนกัน
- หยก: ครับ
- ครู: ถ้า $\blacksquare$ เพิ่ม...
- หยก: $\square$ ก็เพิ่มเหมือนกันครับ
- ครู: ถ้า $\blacksquare$ ลด...
- หยก: $\square$ ก็ลดเหมือนกัน

บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก ข้อ 3

- ครู: เพราะฉะนั้นสูตรของเราคืออะไร
- หยก: เขียนเป็นรูปลูกบัตติกว่านะครับ ...
- ครู: อ้อ

- หยก: (เขียน) $\bullet \times 3 + 1 = \bigcirc$
- ครู: $\bullet$ เป็นตัวเลขอะไรได้บ้าง
- หยก: เป็นเลขอะไรก็ได้ครับ
- ครู: $\bigcirc$ ละ
- หยก: เป็นอะไรก็ได้ครับ แต่ต้องตาม $\bullet$ ถ้า $\bullet$ เพิ่ม $\bigcirc$ ก็ต้องเพิ่มไปด้วย
- ครู: $\bigcirc$ เป็น 3 ได้มัย
- หยก: (คิด) ไม่ได้ครับ $\bigcirc$ เป็นตัวเลขได้ไม่หมดครับก็ต้องตามจำนวน $\bullet$
- ครู: แสดงว่า $\bullet$ ใช้คำว่าทุกตัวได้มัย
- หยก: ได้ครับ
- ครู: $\bigcirc$ ใช้คำว่าทุกตัวได้มัย
- หยก: ไม่ได้ครับ
- ครู: ควรจะใช้คำว่าอะไรดี
- หยก: ใช้คำว่าตามจำนวนของลูกปัดสีดำ



ภาพประกอบ 31 การเขียนตอบในแบบทดสอบของหยก ข้อ 2

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 3 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูป ได้อย่างสมบูรณ์ ทั้งค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล รวมไปถึงพจน์ทั่วไป
2. วิธีการในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไปที่เกิดจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่ง แล้วใช้สร้างข้อสรุปเกี่ยวกับค่าของพจน์ต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้หาค่า กล่าวคือจากสูตรทั่วไปที่พิสูจน์ขึ้นให้เห็นจริงแล้วอ้างอิงสูตรดังกล่าวไปใช้หาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในกรณีเฉพาะ
3. สามารถแปลงสูตรของพจน์ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้ สามารถอธิบายเกี่ยวกับตัวแปรที่ใช้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์

การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

ไม่มีร่องรอยหรือหลักฐานอะไรเลยที่จะแสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะมีการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน ซึ่งอาจเป็นไปได้ว่าเป็นเพราะนักเรียนในกลุ่มนี้ได้ข้อสรุปมาจากการพิสูจน์ที่ทำให้เห็นชัดว่าวิธีการของตนต้องถูกต้องอย่างแน่นอน ก็เลยไม่มีประเด็นอะไรที่ต้องสงสัยหรือต้องตรวจสอบอีก ซึ่งไม่เหมือนกับกรณีของนักเรียนกลุ่ม 2 ที่ได้วิธีการสร้างข้อสรุปมาโดยวิธีอุปนัยจึงทำให้ไม่แน่ใจว่าวิธีการของตนเชื่อถือได้หรือไม่จึงพบร่องรอยว่านักเรียนในกลุ่ม 2 มักจะมีการคิดทวนทวนเกี่ยวกับวิธีการคิดของตนเสมอ

แม้ว่าจะไม่พบร่องรอยว่านักเรียนกลุ่มนี้ได้ประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน แต่เมื่อผู้สัมภาษณ์ถามกระตุ้นให้นักเรียนกลุ่มนี้ลองประเมินข้อสรุปของตน ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มนี้ก็สามารถอธิบายได้ว่าจะมีวิธีการอย่างไรบ้างในการตรวจสอบ ซึ่งส่วนใหญ่ก็ใช้วิธีการที่เหมือนกันกับนักเรียนในกลุ่ม 2 เช่น ลองทดสอบคำตอบที่คิดจากสูตรของตนกับ วิธีการอื่นที่แตกต่างออกไป เช่น การลองวาดรูปตามข้อกำหนดในแบบรูป เป็นต้น ดังจะพิจารณาได้จากตัวอย่างบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก

- ครู: มั่นใจมั๊ยข้อนี้
 หยก: มั่นใจครับคิดอยู่หลายรอบ
 ครู: แล้วจะเช็ดยังไงว่าวิธีการเราถูก
 หยก: ผมก็ไม่ได้คิดนะครับตอนนั้น
 ครู: แล้วมั่นใจได้ไง

- หยก: มันใจว่าต้องใช้วิธีแบบนี้แน่นอน
- ครู: ถ้าเราจะเช็คสูตรเราถูกเราจะเช็คอย่างไร
- หยก: สูตรหรือครับ . . .
- ครู: ถ้าเกิดเราบอกเพื่อนว่าข้อนี้เราต้องเอา ลูกบัตสี่ดำคูณ 3 แล้วบวก 1 แล้วจะได้ ลูกบัตสี่ขาว
- หยก: ครับ
- ครู: ถ้าเพื่อนถามเราต่อว่ารู้ได้อย่างไรว่าถูก เราจะอธิบายเพื่อนอย่างไร
- หยก: เราอาจจะวาดรูปก็ได้ครับ
- ครู: วาดยังงี้
- หยก: (วาดรูปกรณีสี่ดำ 7 เม็ด) จะเห็นว่าถ้าเรานับเฉพาะสีขาวจะได้ 22 เม็ด และถ้าเอา $7 \times 3 + 1 = 22$ เหมือนกัน
- ครู: สรุปว่า
- หยก: สูตรนี้ถูกครับ

ตาราง 44 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูปของนักเรียนกลุ่ม 3

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A31 สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบต่าง ๆ ของแบบรูปได้อย่างครบถ้วนทุกรายละเอียด เข้าใจการนำเสนอแบบรูปทั้งที่เป็นแบบรูปภาพและเป็นแบบตัวเลข รวมทั้งสามารถที่จะวิเคราะห์ได้ว่าการนำเสนอทั้งสองแบบมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร A32 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่า	I31 สามารถหาค่าของพจน์ต่าง ๆ ในแบบรูป ได้อย่างสมบูรณ์ ทั้งค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล รวมไปถึงพจน์ทั่วไป I32 วิธีการในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะเริ่มต้นจากการสร้างสูตรที่แทนกฎเกณฑ์ของแบบรูปในกรณีทั่วไปที่เกิดจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละ	E31 ไม่มีร่องรอยหรือหลักฐานอะไรเลยที่จะแสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปมาแล้วจะมีการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน E32 เมื่อผู้สัมภาษณ์ถามกระตุ้นให้นักเรียนกลุ่มนี้ลองประเมินข้อสรุปของตน นักเรียนกลุ่มนี้ก็สามารถที่จะอธิบายได้ว่าจะมีวิธีการตรวจสอบอย่างไร ซึ่งส่วนใหญ่จะเปรียบเทียบ 2 วิธีที่แตกต่างกัน

ตาราง 44 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
ของพจน์ถัดไป = ค่าของ พจน์ก่อนหน้า + ผลต่าง ระหว่างพจน์ A33 สามารถวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่ง ของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละ ตำแหน่งได้ ซึ่ง ความสัมพันธ์ที่ได้มาจะไม่ใช้ การได้มาโดยวิธีการอุปนัย แต่เป็นความสัมพันธ์ที่ได้มา จากการพิสูจน์ขึ้นจากภาพของ แบบรูปที่กำหนดให้อย่าง สมเหตุสมผล โดยนักเรียน ในกลุ่มนี้จะสามารถอธิบายได้ อย่างชัดเจนว่าตัวเลขที่ปรากฏ อยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูป คืออะไร และมีที่มาอย่างไร	ละตำแหน่ง แล้วใช้ในการสร้าง ข้อสรุปเกี่ยวกับค่าของพจน์ ต่างๆ ที่โจทย์กำหนดให้หาค่า กล่าวคือจากสูตรทั่วไปที่พิสูจน์ ขึ้นให้เห็นจริงแล้วอ้างอิงสูตร ดังกล่าวไปใช้หาค่าของพจน์ ต่างๆ ในกรณีเฉพาะ I33 สามารถแปลงสูตรของพจน์ ทั่วไปให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้ และสามารถอธิบายเกี่ยวกับตัว แปรที่ใช้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์	คือวิธีที่ทำให้ได้ข้อสรุปมาโดย การแทนค่าในสูตรทั่วไปที่สร้าง ขึ้น กับวิธีที่แตกต่างออกไปจาก วิธีการที่ตนใช้ในการสร้าง ข้อสรุป เช่น การวาดรูป ตาม ข้อกำหนดในแบบรูป

ภาคผนวก ค

การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

ภาคผนวก ค

การวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

การพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายในการวิจัยครั้งนี้ จะพิจารณาลักษณะการให้เหตุผลที่เกิดจากการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดของจำนวน การสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด และการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปที่ได้ โดยใช้โจทย์ที่เป็นประโยคเปิดของจำนวน 3 ข้อ แต่ละข้อเป็นการกำหนดให้นักเรียนหาจำนวนมาเติมลงในช่องว่างแล้วทำให้ประโยคเป็นจริง โดยโจทย์ทั้ง 3 ข้อจะมีลักษณะที่แตกต่างกันออกไป

โจทย์ข้อที่ 1 $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ จำนวนที่นักเรียนเติมลงในช่องว่างของข้อนี้จะสามารถชี้วัดได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะใด

โจทย์ข้อที่ 2 $63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$ จำนวนที่นักเรียนเติมลงในช่องว่างของข้อนี้สามารถชี้วัดได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะใด และนักเรียนได้ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ ในการสร้างข้อสรุปหรือไม่

โจทย์ข้อที่ 3 $555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$ จำนวนที่นักเรียนเติมลงในช่องว่างของข้อนี้สามารถชี้วัดได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับในลักษณะใด และนักเรียนได้ใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ในการสร้างข้อสรุปหรือไม่

ซึ่งในโจทย์แต่ละข้อนักเรียนจะต้องหาจำนวนมาเติมลงในช่องว่างพร้อมทั้งอธิบายเหตุผลที่ทำให้ได้ข้อสรุป ทั้งนี้เพื่อที่ผู้วิจัยจะได้เห็นถึงลักษณะการวิเคราะห์ประโยค การสร้างข้อสรุป รวมถึงการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนแต่ละคน

ผลการวิเคราะห์ลักษณะการให้เหตุผลที่นักเรียนกลุ่มเป้าหมายแสดงออกมาโดยผู้วิเคราะห์จำนวน 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยซึ่งเป็นครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาจำนวน 2 คน ทำให้พบว่า ลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายเกี่ยวกับเรื่องประโยคเปิดของจำนวน สามารถจำแนกออกได้เป็น 4 กลุ่มด้วยกัน ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้ (ชื่อนักเรียนที่อ้างถึงเป็นชื่อสมมุติ)

นักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 0 มีจำนวน 2 คน ทั้งสองคนเป็นนักเรียนจากโรงเรียนชนบท ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้งคู่ เป็นดังรายละเอียดในตารางต่อไปนี้

ตาราง 45 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 0

ชื่อ-สกุล	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กชายเพชร	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 4	11	อ่อน
เด็กหญิงดาวเรือง	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	อ่อน

ลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของนักเรียนกลุ่ม 0

นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะหรือองค์ประกอบใด ๆ ของประโยคเปิดได้เลย เมื่อเห็นประโยคเปิดนักเรียนจะมองเรียงไปตามลำดับโดยไม่เข้าใจว่าสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน เช่น จากประโยคเปิดในข้อ 1 $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ นักเรียนกลุ่มนี้จะมองเป็น $5 + 4 + 7 + 5 = \underline{\hspace{1cm}}$ หรือจากประโยคเปิดในข้อ 2 $63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$ นักเรียนกลุ่มนี้จะมองเป็น $63 + 29 + 30 = \underline{\hspace{1cm}}$ หรือมองเป็น $63 + 29 - 30 = \underline{\hspace{1cm}}$ ซึ่งเป็นการแปลงประโยคเอาเองโดยไม่มีเหตุผล ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดสามารถพิจารณาจากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร

ครู: มาดูข้อ 1 มีอะไรบ้าง

เพชร: $5 + 4 + 7 = 5 + 21$

ครู: เอา 21 มาจากไหน

เพชร: ผมเอามาวกกัน

ครู: เอาอะไรมาบวกกันบ้าง

เพชร: $5 + 4 + 7 + 5$

ครู: (ชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ) นี่เขาเรียกเครื่องหมายอะไรเนี่ย

เพชร: เท่ากับครับ

ครู: เขาเอาไว้ทำอะไรเอ่ย

เพชร: ไว้ใส่คำตอบครับ

ครู: มาดูข้อ 2 มีอะไรบ้าง

เพชร: $63 + 29$ เท่ากับ $80 + 30$

ครู: เต็ม 80

เพชร: ครับ

ครู: คิดมาอย่างไรถึงได้ 80 ลองเขียนให้ครูดูซิ

เพชร: (เขียน)

$$63 +$$

$$29$$

$$92 -$$

$$30$$

$$60$$

ครู: แล้วตกลงจะตอบอะไรล่ะ

เพชร: 60 (ลบเลขผิด)

ครู: ถามอีกนิดหนึ่ง พอเอา $63 + 29$ ได้ 92 แล้วทำไมต้องเอา 30 ไปลบออกจาก 92 ล่ะ

เพชร: (นิ่ง)

ครู: ไม่เป็นไร มาดูข้อ 3 บ้าง $555 + 18 \dots$

เพชร: ลบ 116 เท่ากับ 556

ครู: เพชรเติม 116...

เพชร: ครับ

ครู: คิดอย่างไรเอ่ย

เพชร: บวกกัน

ครู: เอาอะไรบวกกัน

เพชร: (เขียน)

$$555 +$$

$$18$$

$$573 -$$

$$556$$

$$\underline{17}$$

(แล้วพูดว่า) ได้ 17 ครับ

ครู: รู้ได้ไงว่าต้องเอา 556 มาลบถึงจะได้คำตอบ

เพชร: (นิ่ง)

ครู: มันใจมั๊ยข้อนี้ว่าตอบ 17

เพชร: มันใจครับ

ครู: จะเช็ดยังไงว่าคำตอบเราถูก

เพชร: (นิ่ง)

ครู: อธิบายครูได้มั๊ยว่าเติม 17 แล้วทำไมถึงถูกต้อง

เพชร: (นิ่ง)

ครู: ถ้าครูเติม 15 แทน 17 คิดว่าถูกมั๊ย

เพชร: ไม่แน่ใจครับ

ครู: อธิบายครูได้มั๊ยว่าทำไม เมื่อเอา $555 + 18$ ได้ 573
แล้วทำไมต้องเอา 556 มาลบ

เพชร: (นิ่ง)

ครู: จั๊นลองโจทย์นี้ $30 + 15 - \underline{\quad} = 40$ (หลัง 15 เป็นเครื่องหมายลบ)

เพชร: (เขียน)

30

15 ⁺

45 ₋

40

5

(แล้วพูดว่า) เติม 5 ครับ

ครู: เปลี่ยนโจทย์อีกที $30 + 15 + \underline{\quad} = 50$ (หลัง 15 เป็นเครื่องหมายบวก)

นักเรียน: (เขียน)

30 ⁺

15

45 ⁺

50

๑๕

(แล้วพูดว่า) เติม ๑๕ ครับ

ข้อสังเกตประการหนึ่งจากการพิจารณาบทสัมภาษณ์ข้างต้นจะเห็นว่านักเรียนในกลุ่มนี้มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ กล่าวคือ นักเรียนจะมองว่าด้านหน้าของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านหลังของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ ดังนั้นเมื่อเจอประโยคเปิดนักเรียนในกลุ่มนี้จะพยายามแปลงให้อยู่ในรูป

$$\text{โจทย์} = \underline{\hspace{2cm}}$$

เช่นจากประโยค $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ นักเรียนในกลุ่มนี้จะจัดรูปประโยคใหม่เป็น $5 + 4 + 7 = \underline{\hspace{1cm}}$ โดยไม่คำนึงถึงเหตุผลใด ๆ ทั้งสิ้น และเมื่อถูกถามว่าเครื่องหมายเท่ากับคืออะไร นักเรียนกลุ่มนี้จะตอบในทำนองว่าคือเครื่องหมายที่เอาไว้เติมคำตอบ ดังนั้นนักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน และไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

นอกจากนี้จากบทสัมภาษณ์ข้างต้นจะเห็นว่านอกจากนักเรียนในกลุ่มนี้จะพยายามแปลงประโยคเปิดให้อยู่ในรูป โจทย์ = $\underline{\hspace{2cm}}$ แล้วการย้ายจำนวนทางขวามือมายังด้านซ้ายมือก็ไม่ได้มีความคงเส้นคงวา กล่าวคือ บางครั้งอาจย้ายมาบวกและบางครั้งอาจย้ายมาลบทำให้ในข้อ 3 นักเรียนอาจจะตอบถูกหรือตอบผิดก็ได้ไม่มีความแน่นอน ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่ได้ใช้หลักเหตุผลอะไรเลยในการแปลงโจทย์

จากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์ประโยค นักเรียนในกลุ่ม 0 มีลักษณะที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. มีความเข้าใจผิดว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะมองว่าด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับต้องเป็นคำตอบ
2. มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ (นิพจน์) = $\underline{\hspace{2cm}}$
3. ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน
4. ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 0

จากบทสัมภาษณ์ของเพชรจะเห็นว่าเพชรตอบถูกในข้อ 3 ส่วนในข้อ 2 หากเลขไม่ผิด เพชรก็มีโอกาสที่จะตอบถูกด้วยเหมือนกัน แต่เมื่อลองวิเคราะห์ดูแล้วเหตุการณ์นี้เป็นเพียงความบังเอิญ เพราะเมื่อผู้สัมภาษณ์ลองกำหนดโจทย์ 2 แบบให้นักเรียนทำ คือ $30 + 15 - \underline{\quad} = 40$ (เครื่องหมายลบอยู่หน้าช่องว่าง) นักเรียนใช้วิธีเอา $30 + 15 - 40$ แต่เมื่อเปลี่ยนเป็น $30 + 15 + \underline{\quad} = 50$ (เครื่องหมายบวกอยู่หน้าช่องว่าง) นักเรียนใช้วิธีเอา $30 + 15 + 40$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแท้ที่จริงแล้ว เพชรจะไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องได้ วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะเกิดจากการมองเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณทำให้เพชรพยายามเปลี่ยนประโยคเปิดให้อยู่ในรูป โจทย์ = $\underline{\quad}$ แล้วจากนั้นก็นำจำนวนทางซ้ายทั้งหมดมาคำนวณหาผลลัพธ์

ทำนองเดียวกันกับนักเรียนอีกคนหนึ่งที่ถูกจัดอยู่ในกลุ่มนี้คือดาวเรือง นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนชนบท ซึ่งไม่สามารถหาข้อสรุปที่ถูกต้องได้ทั้ง 3 ข้อ และวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปก็เป็นวิธีการในลักษณะเดียวกันกับวิธีการของเพชร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงดาวเรือง

ครู: ข้อ 1 ในโจทย์มีอะไรบ้าง

ดาวเรือง: $5 + 4 + 7$ เท่ากับ $5 + 27$ ค่ะ

ครู: หนูเห็นเครื่องหมายเท่ากับไหม

ดาวเรือง: เห็นค่ะ

ครู: เขาเอาไว้อะไร เครื่องหมายเท่ากับในความคิดของหนู

ดาวเรือง: เท่ากับเมื่อคำตอบค่ะ

ครู: แสดงว่าต้องมีโจทย์มาก่อน

ดาวเรือง: ค่ะ

ครู: หลังเครื่องหมายเท่ากับเป็น...

ดาวเรือง: คำตอบ หรือโจทย์ต่อค่ะ

ครู: ข้อนี้ตกลงหนูเติม 27

ดาวเรือง: ค่ะ

ครู: ทำไมหนูถึงเติม 27

ดาวเรือง: เพราะเอา 5 บวก 4 ได้ 9 เอา 9 บวก 7 ได้ 16 เอา 16 บวก 5 (ซึ่งที่ 5 ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ) ได้ 21 เอา 21 บวก 6 ได้ 27

ครู: หนูเอา 6 มาจากไหน

ดาวเรือง: (นิ่ง)

- ครู: ไหนหนูลองเขียนซิว่าเมื่อกี้หนูเอาอะไรมาบวกกันบ้าง
- ดาวเรือง: (เขียน) $5 + 4 = 9$ $9 + 7 = 16$ $16 + 5 = 21$ เอา $21 + 6 = 27$
- ครู: อะ ที่ครูสงสัยก็คือ 6 ตัวนี้หนูเอามาจากไหน
- ดาวเรือง: ดูจากข้างหน้านี่เป็น 5 (ชี้ที่ 5 ทางซ้าย) แล้วบวกไปอีก 1 เป็น 6
- ครู: ทำไมต้องบวกไปอีก 1 ทำไมต้องเอา 5 บวกกับ 1 อีก
- ดาวเรือง: ดูจากเลข 4 ค่ะ (ตอบมั่ว)
- ครู: ถ้าครูลองเปลี่ยนโจทย์ใหม่เป็น $3 + 4 + 5 = 3 + \underline{\hspace{1cm}}$ หนูจะเติมอะไร
- ดาวเรือง: (คิดในใจอยู่พักหนึ่ง) 15 ค่ะ
- ครู: ทำไมถึงเติม 15
- ดาวเรือง: เอา $3 + 4 + 5$ ได้ 12 $12 + 3$ ได้ 15 ค่ะ
- ครู: ครูขอเปลี่ยนโจทย์อีกเป็น $6 + 9 + 2 = 6 + \underline{\hspace{1cm}}$ หนูจะเติมอะไร
- ดาวเรือง: เติม 23
- ครู: อธิบายซิ
- ดาวเรือง: เอา 9 บวก 2 เป็น 11 11 บวก 6 เป็น 17 17 บวก 6 เป็น 23
- ครู: ลองย้อนกลับมาดูข้อ 1 ใหม่ซิหนูเติมอะไร ครูเขียนโจทย์ให้ใหม่นะ $5 + 4 + 7$
 $= 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ หนูลองคิดซิว่าจะเติมอะไร
- ดาวเรือง: เติม 21 ค่ะ
- ครู: ทำไมตอบไม่เหมือนเดิมแล้วละ
- ดาวเรือง: ตอนแรกคิดผิดค่ะ
- ครู: ถ้าจะตรวจคำตอบดูว่าคำตอบเราถูกเนีย จะมีวิธีการตรวจคำตอบยังไง
- ดาวเรือง: เอาตัวเลขทั้งหมดมาบวกกันค่ะ ว่าได้ 21 หรือไม่
- ครู: มาดูข้อ 2 ไหนลองดูโจทย์ซิว่ามีอะไรบ้าง
- ดาวเรือง: $63 + 29$ เท่ากับ $123 + 30$ ค่ะ
- ครู: เห็นเครื่องหมายเท่ากับมั๊ย
- ดาวเรือง: เห็นค่ะ
- ครู: ใช้ทำอะไรได้บ้างเครื่องหมายเท่ากับ
- ดาวเรือง: ก่อนที่จะมีคำตอบค่ะ
- ครู: ข้อนี้หนูเติม 123 ลองอธิบายวิธีคิดให้ดูซิ
- ดาวเรือง: (เขียน) $63 + 29 = 92$
 $63 + 92 = 155$
 $155 - 30 = 125$

ครู: เอ้า แล้วตกลงหนูตอบเท่าไหร่?
 ดาวเรือง: 125 ค่ะ
 ครู: ทำไมต้องเอา $63 + 92$ อีกล่ะ
 ดาวเรือง: เพราะตรงนี้ไม่มีอะไร (ชี้ที่ช่องว่าง) ก็เลยเอา $63 + 92$
 ครู: แล้วทำไมต้องเอา $155 - 30$ อีก
 ดาวเรือง: เพราะพอบวกเพิ่มมันก็เป็นจำนวนมากก็เลยเอามาลบ
 ครู: ถ้าวกมันยิ่งมากก็เลยเอามาลบดีกว่า
 ดาวเรือง: ค่ะ
 ครู: มาดูข้อ 3 อ่านโจทย์ซี
 ดาวเรือง: $555 + 18 - 121$ เท่ากับ 556
 ครู: หนูตอบ 121
 ดาวเรือง: ค่ะ
 ครู: เอามาจากไหน 121
 ดาวเรือง: เอา 555 มาลบกับ 18 ได้ 375 เอา 375 ลบกับ 254 ได้ 121
 ครู: หนูเอา 254 มาจากไหน
 ดาวเรือง: แบ่งครึ่งมาจาก 555
 ครู: ถ้าจะตรวจคำตอบว่าถูกหรือไม่ เราจะตรวจยังไง
 ดาวเรือง: เอา $555 + 18 - 121$ แล้วดูว่าได้ 556 มั้ย
 ครู: กลับมาดูข้อ 2 ใหม่ถ้าให้คิดซ้ำอีกทีหนูจะเติมอะไร
 ดาวเรือง: (เขียน) $63 + 29 = 92$
 $92 + 30 = 122$ (แล้วพูดว่า) เติม 122 ค่ะ

จากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าแม้ดาวเรืองจะอธิบายอย่างสับสนวกไปวนมา แต่ก็พอที่จะจับประเด็นได้ว่าวิธีการที่เธอใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด คือการพยายามแปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป โจทย์ = ____ ในกรณีที่ประโยคเดิมไม่อยู่ในรูปดังกล่าว แล้วคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือได้เป็นข้อสรุปคือจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่าง ลักษณะที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งของนักเรียนในกลุ่มนี้คือ ลักษณะการอ้างเหตุผลหรือการอธิบายหรือแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของตน ซึ่งจากบทสัมภาษณ์ของนักเรียนทั้งสองคนในกลุ่มนี้จะพบว่า การอ้างเหตุผลหรือการอธิบายหรือแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะไม่มีรูปแบบหรือไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 0 มีลักษณะที่สำคัญ ดังนี้

1. ไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร
2. วิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด คือการพยายามแปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป โจทย์ = ____ แล้วคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือได้ผลลัพธ์เป็นข้อสรุปหรือจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่าง
3. การอ้างเหตุผลหรือการอธิบายหรือแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะไม่มีรูปแบบหรือไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 0

โดยปกติแล้วนักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปแล้วจะไม่มีมีการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน แต่เมื่อถูกกระตุ้นว่าจะแน่ใจได้อย่างไรว่าข้อสรุปที่ได้นั้นถูกต้อง นักเรียนในกลุ่มนี้จะพยายามอธิบายออกมาในลักษณะที่เป็นการคำนวณซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณในครั้งแรกไม่ผิดพลาด หรือแม้จะถูกกระตุ้นจากผู้สัมภาษณ์ก็ไม่สามารถที่จะประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตนได้ ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงดาวเรือง

ครู: ลองย้อนกลับมาดูข้อ 1 ใหม่ซิหนูเติมอะไร ครูเขียนโจทย์ให้ใหม่นะ
 $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$ หนูลองคิดซิว่าจะเติมอะไร

ดาวเรือง: เติม 21 ค่ะ

ครู: ถ้าจะตรวจคำตอบดูว่าคำตอบเราถูกเนีย จะมีวิธีการตรวจคำตอบยังไง

ดาวเรือง: เอาตัวเลขทั้งหมดมาบวกกันค่ะ ว่าได้ 21 หรือไม่

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพชร

ครู: มันใจมั๊ยข้อนี้ว่าตอบ 17

เพชร: มันใจครับ

ครู: จะเช็ดยังไงว่าคำตอบเราถูก

เพชร: (นิ่ง)

ครู: อธิบายครูได้มั๊ยว่าเติม 17 แล้วทำไมถึงถูกต้อง

เพชร: (นิ่ง)
 ครู: ถ้าครูเติม 15 แทน 17 คิดว่าถูกมั๊ย
 เพชร: ไม่แน่ใจครับ

กล่าวโดยสรุปจะเห็นว่าในส่วนของการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 0 มีลักษณะสำคัญ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อได้ข้อสรุปแล้วจะไม่มี การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน
2. เมื่อถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะใช้วิธีการคำนวณซ้ำอีกครั้งหนึ่ง เพื่อให้แน่ใจว่าการคำนวณในครั้งแรกไม่ผิดพลาด

ตาราง 46 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนกลุ่ม 0

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A01 มีความเข้าใจผิดว่า เครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ แทนการคำนวณ โดยนักเรียนจะ มองว่าด้านซ้ายมือของ เครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ และ ด้านขวามือของเครื่องหมาย เท่ากับต้องเป็นคำตอบ A02 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ ในรูป โจทย์ (นิพจน์) = ____ A03 ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากัน หรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่าง จะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสอง ของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน	I01 ไม่สามารถสร้างข้อสรุปที่ ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไป จากประโยคเปิดของจำนวนที่ กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิด จะมีลักษณะอย่างไร I02 วิธีการที่ใช้ในการสร้าง ข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไป จากประโยคเปิด คือการพยายาม แปลงประโยคเดิมให้อยู่ในรูป โจทย์ = ____ แล้วคำนวณค่า ของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือได้ผล ลัพธ์เป็นข้อสรุปหรือจำนวนที่จะ นำมาเติมลงในช่องว่าง โดย ต้องนำจำนวนที่กำหนดให้มา ดำเนินการกันให้หมดทุกตัว	E01 เมื่อได้ข้อสรุปแล้วจะ ไม่มี การประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป E02 เมื่อถูกกระตุ้นให้ ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะใช้วิธีการคำนวณ ซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจ ว่าการคำนวณในครั้งแรกไม่ ผิดพลาด

ตาราง 46 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A04 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด	I03 การอ้างเหตุผลหรือการอธิบายหรือแสดงหลักฐานเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่มนี้จะมีลักษณะไม่มีรูปแบบหรือไม่คงเส้นคงวา (กรณีเดียวกันแต่อ้างเหตุผลไม่เหมือนกัน) สับสน วกวน และไม่สมเหตุสมผล	

นักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลอยู่ในกลุ่ม 1 มีจำนวน 3 คน เป็นนักเรียนจากโรงเรียนในเมืองจำนวน 1 คน และโรงเรียนชนบท จำนวน 2 คน ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้ง 3 คน เป็นดังรายละเอียดในตารางต่อไปนี้

ตาราง 47 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 1

ชื่อ-สกุล	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กชายทองแดง	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 4	10	ปานกลาง
เด็กหญิงพิกุล	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ปานกลาง
เด็กชายเพทาย	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	อ่อน

ลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของนักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของประโยคเปิดของจำนวนได้ไม่ครบถ้วนทั้งหมด กล่าวคือนักเรียนกลุ่มนี้จะให้ความสนใจแต่เฉพาะจำนวนทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ โดยไม่สนใจจำนวนทางขวามือ เพราะนักเรียนในกลุ่มนี้มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ทุกข้อในรูป

โจทย์ = คำตอบ

โดยนักเรียนจะมองแยกย่อยประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ออกเป็น 3 ส่วน คือ กลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับซึ่งนักเรียนจะมองว่าเป็นโจทย์ เครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งนักเรียนจะมองว่าเป็นเครื่องหมายที่แทนการคำนวณ (Computational Sign) ค่าของกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ และคำตอบซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจากโจทย์และต้องอยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ นักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงเป็นสาเหตุให้นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน

ข้อสรุปข้างต้นสามารถยืนยันได้จากการที่ในข้อ 1 และ 2 นักเรียนกลุ่มนี้จะตอบผิด เพราะนักเรียนจะไม่สนใจเลข 5 ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ (ในกรณีของข้อ 1) และจะไม่สนใจเลข 30 ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ (ในกรณีของข้อ 2) แต่ในขณะที่ข้อ 3 นักเรียนบางคนอาจจะตอบถูกถ้าบวกลบเลขไม่ผิด เพราะนักเรียนจะสนใจตัวเลขหมดทุกตัวรวมทั้งจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับซึ่งมีเพียงตัวเดียวและนักเรียนกลุ่มนี้มองว่าเป็นคำตอบ นั่นคือนักเรียนจะมองว่ามีคำตอบอยู่แล้ว (คือ 556) จึงพยายามที่จะมองหาตัวเลขที่จะทำให้ทางซ้ายมีค่าเท่ากับ 556 ซึ่งสามารถพิจารณาเห็นได้ชัดเจนจากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: หนูเติมตัวเลขอะไรลงในช่องว่าง

พิกุล: เติมเลข 16 ค่ะ

ครู: อธิบายเหตุผลได้มั๊ย

พิกุล: หนูเอา $5 + 4 = 9$ แล้วเอา $9 + 7 = 16$ แล้วเอา 16 มาใส่ในช่องว่างค่ะ

ครู: ตอนทำโจทย์ข้อนี้หนูสนใจตรงไหนมากที่สุด

พิกุล: ตรงนี้ค่ะ (ชี้วงกลุ่มตัวเลขทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ)

ครู: หนูได้ใช้เลข 5 ตัวนี้บ้างมั๊ย (เลข 5 ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ)

พิกุล: ไม่เลยค่ะ

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 2 ($63 + 29 = \underline{\quad} + 30$)

ครู: หนูเติมอะไร

พิกุล: 92 ค่ะ

ครู: คิดยังไงลองอธิบายซิ

พิกุล: หนูเอา $63 + 29$

ครู: แล้ว 30 ละ (ครูชี้ที่เลข 30 ทางด้านขวามือ)

พิกุล: ไม่ต้องใช้ค่ะ

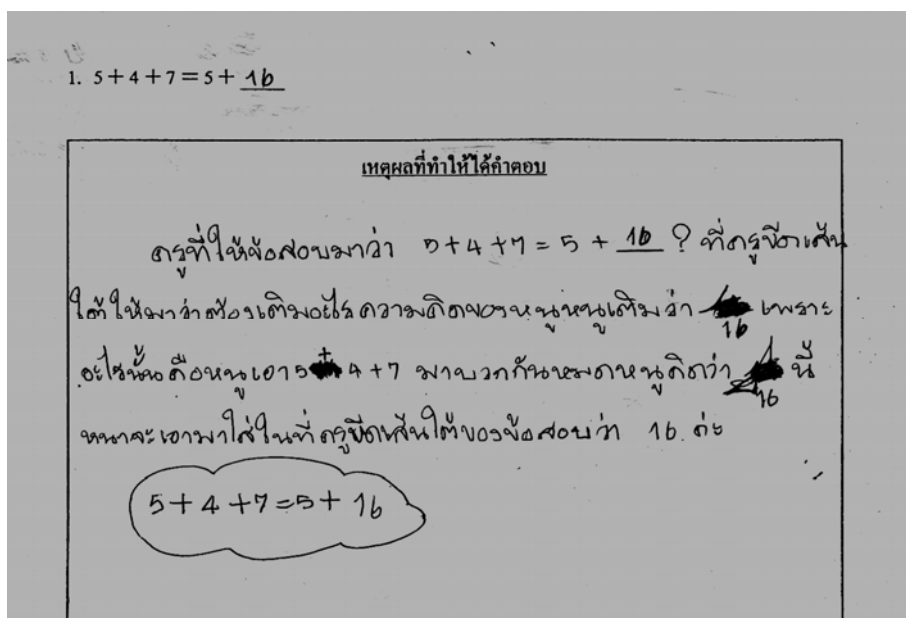
บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\quad} = 556$)

ครู: หนูเติมอะไร

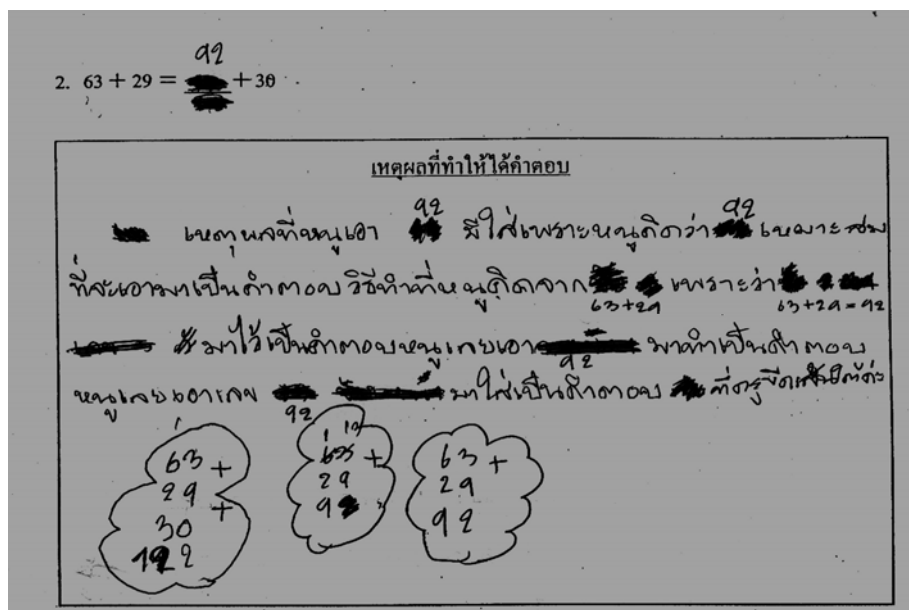
พิกุล: เติม 17 ค่ะ

ครู: คิดยังไง

พิกุล: เอา $555 + 18 = 573$ แล้วหาจำนวนอะไรที่ลบกับ 573 แล้วทำให้ได้ 556 ก็คือเลข 17 ค่ะ



ภาพประกอบ 32 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงพิกุล ข้อ 1



ภาพประกอบ 33 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงพิกุล ข้อ 2

ลักษณะสำคัญที่เด่นชัดที่สุดของนักเรียนในกลุ่มนี้คือมองว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนการคำนวณค่าของกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ รวมถึงไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับว่าต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งสามารถพิจารณาเห็นได้ชัดเจนจากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: ตอนทำโจทย์ข้อนี้หนูสนใจตรงไหนมากที่สุด

พิกุล: ตรงนี้ค่ะ (ชี้วงกลุ่มตัวเลขทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ)

ครู: หนูได้ใช้เลข 5 ตัวนี้บ้างมัย (เลข 5 ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ)

พิกุล: ไม่เลยค่ะ

ครู: หนูเห็นเครื่องหมายเท่ากับมัย

พิกุล: เห็นค่ะ

ครู: คืออะไรเครื่องหมายเท่ากับ เขาเอาไว้ใช้ทำอะไร

พิกุล: เป็นคำตอบค่ะ ต้องมีโจทย์อยู่ข้างหน้าแล้วข้างหลัง (ของเครื่องหมายเท่ากับ)

เป็นคำตอบ

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$)

ครู: ในความคิดของหนูข้อ 2 กับข้อ 3 มันต่างกันยังไง

พิกุล: มันต่างกันที่ว่า ข้อ 2 เครื่องหมายเท่ากับอยู่ตรงนี้ (ตรงกลาง) แต่ข้อ 3 เครื่องหมายเท่ากับอยู่หน้าคำตอบ

ครู: ข้อไหนยากกว่ากัน

พิกุล: ข้อ 3 ค่ะ

ครู: ทำไมถึงคิดว่าข้อ 3 ยากกว่า

พิกุล: เพราะข้อ 3 มีเลขเป็นหลักร้อยและมีทั้งการลบและการบวกกัน แต่ข้อ 2 แค่บวกกันครั้งเดียวคือเอา $63 + 29$ ก็เสร็จเลย

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดง ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: ทำไมทองแดงถึงเติม 16

ทองแดง: เพราะตรงนี้บวกกันหมดแล้ว (ชี้วนรอบตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ) เท่ากับ 16 ครับ

ครู: เห็นเครื่องหมายเท่ากับมั๊ย

ทองแดง: เห็นครับ

ครู: เอาไว้ทำอะไรเครื่องหมายเท่ากับ

ทองแดง: ไว้ใช้ตอนที่บวกเลขกันหมดแล้วครับ

ครู: ตอนบวกกันเสร็จแล้ว...

ทองแดง: ครับ...แล้วใส่เท่ากับอะไรไว้ข้างหลัง

นักเรียนกลุ่มนี้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่น ในข้อ 2 นักเรียนจะมองไม่เห็น ว่า 29 กับ 30 มีค่าต่างกันอยู่ 1 และจำนวนที่นำมาเติมในช่องว่างก็ต้องมีความสัมพันธ์ในทำนองเดียวกัน

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์ประโยคเปิด นักเรียนในกลุ่ม 1 มีลักษณะที่สำคัญ 3 ประการ ดังต่อไปนี้

1. มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ = คำตอบ โดยนักเรียนจะมองแยกย่อยประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ออกเป็น 3 ส่วน คือ กลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับซึ่งนักเรียนจะมองว่าเป็นโจทย์ เครื่องหมายเท่ากับซึ่งนักเรียนจะมองว่าเป็นเครื่องหมายที่แทนการคำนวณค่าของกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ และคำตอบซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจากโจทย์และต้องอยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ

2. นักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน

3. ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนกลุ่มนี้จะตอบผิดในข้อ 1 และข้อ 2 แต่นักเรียนส่วนใหญ่ในกลุ่มนี้จะตอบข้อ 3 ได้ถูกต้องโดยจะใช้วิธีการสุมตัวเลขมาลองเติมทีละตัวเพื่อตรวจสอบดูว่าได้ผลลัพธ์ตรงกับคำตอบที่อยู่ด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับหรือไม่ ส่วนคนที่ตอบข้อ 3 ผิดส่วนมากจะเกิดจากการคำนวณผิด ซึ่งวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปเกิดจากการมองประโยคเปิดในลักษณะของ โจทย์ = คำตอบ ข้อสรุปและวิธีการในการสร้างข้อสรุปเป็นดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 48 แสดงลักษณะข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

ข้อที่	โจทย์	ข้อสรุป(คำตอบ)	วิธีการ
1	$5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$	16	นำตัวเลขทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกัน
2	$63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$	92	นำตัวเลขทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกัน
3	$555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$	17 (ถ้าบวกลบถูก)	สุมตัวเลขมาเติมที่ทำให้ได้ผลลัพธ์ 556

จากตารางข้างต้นแสดงให้เห็นว่านักเรียนในกลุ่มนี้มีลักษณะการสร้างข้อสรุป โดยการนำกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้พิจารณาหรือให้ความสนใจกับจำนวนที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ

นอกจากนี้การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้แม้ว่าจะมีการให้เหตุผลประกอบ แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้มาจากการมองประโยคเปิดของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูปของ โจทย์ = คำตอบ ซึ่งส่งผลให้ได้ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง หลักฐานหรือเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้นำเสนอเพื่อสนับสนุนข้อสรุปจะเป็นการอ้างถึงความหมายของเครื่องหมายเท่ากับในแง่ของเครื่องหมายที่แทนการคำนวณค่าของนิพจน์

ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ แต่การอธิบายเหตุผลประกอบข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้ มีลักษณะคงเส้นคงวา ไม่สับสน หรือวกไปวนมาเหมือนนักเรียนกลุ่ม 0 ซึ่งสามารถพิจารณาเห็นได้อย่างชัดเจนจากพฤติกรรมที่นักเรียนกลุ่มนี้แสดงออกมา ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุล ข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$)

ครู: หนูเติมอะไร

พิกุล: เติม 17 ค่ะ

ครู: คิดยังไง

พิกุล: เอา $555 + 18 = 573$ แล้วหาจำนวนอะไรที่ลบกับ 573 แล้วทำให้ได้ 556 ก็คือเลข 17 ค่ะ

ครู: ในความคิดของหนูข้อ 2 กับข้อ 3 มันต่างกันยังไง

พิกุล: มันต่างกันว่า ข้อ 2 เครื่องหมายเท่ากับอยู่ตรงนี้ (ตรงกลาง) แต่ข้อ 3 เครื่องหมายเท่ากับอยู่หน้าคำตอบ

ครู: ข้อไหนยากกว่ากัน

พิกุล: ข้อ 3 ค่ะ

ครู: ทำไมถึงคิดว่าข้อ 3 ยากกว่า

พิกุล: เพราะข้อ 3 มีเลขเป็นหลักร้อยและมีทั้งการลบและการบวกกัน แต่ข้อ 2 แค่บวกกัน ครั้งเดียวคือเอา $63 + 29$ ก็เสร็จเลย

ครู: ถ้าครูตั้งโจทย์ใหม่เป็น $5 + 4 = \underline{\hspace{1cm}} + 4$ หนูจะเติมอะไร

พิกุล: เติม 9 ค่ะ

ครู: คิดยังไง

พิกุล: เอา $5 + 4$ ค่ะ

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดง ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: ทองแดงเติมอะไร

ทองแดง: เติม 16 ครับ

ครู: ทำไมถึงเติม 16

ทองแดง: $5 + 4 = 9$ $9 + 7 = 16$ ครับ

ครู: แล้ว 5 ตัวนี้ละ (ครูชี้ที่เลข 5 ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ) ได้ใช้บ้างมั๊ย

ทองแดง: ไม่ครับ

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดง ข้อ 2 ($63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$)

ครู: ข้อนี้โจทย์เป็นไง มีอะไรบ้าง

ทองแดง: เหมือนข้อ 1 ครับ

ครู: เหมือนข้อ 1 ยังไง

ทองแดง: เอาไปบวกกันครับ เอา $63 + 29$ ได้ 92 ครับ

ครู: แล้วทำไงต่อ

ทองแดง: เอาไปเติมในช่องว่าง

ครู: เห็น 30 มั้ย

ทองแดง: ครับ

ครู: ทำอะไรกับมันบ้าง

ทองแดง: เอาไว้บวกกับ 92 ครับ

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดง ข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$)

ครู: พอเห็นโจทย์ข้อ 3 ทองแดงมองตรงไหนก่อนเลย

ทองแดง: $555 + 18$

ครู: ข้อนี้ทองแดง ทำไม่ถึงเติม 28

ทองแดง: เพราะเมื่อลบกันแล้วมันเหลือ 556 ครับ

ครู: เอาอะไรมาลบกัน

ทองแดง: เอา $555 + 18 - 28$ ได้เท่ากับ 556 ครับ

ครู: เอา 28 มาจากไหน เริ่มถึงก็ใช้ 28 เลยหรือว่าใช้ตัวอื่นก่อน

ทองแดง: ใช้ 18 ก่อนครับ

ครู: ลองตัวอื่นอีกมั้ย

ทองแดง: ลอง 18 เสร็จแล้วไม่ได้ ก็ลอง 28 แล้วได้พอดี

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพทาย ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: ข้อนี้เพทายตอบเท่าไร

เพทาย: 18

ครู: คิดมาอย่างไรถึงได้ 18

เพทาย: เอาตัวเลขที่กำหนดมาบวกกัน 3 จำนวน คือ $5 + 4 + 7$ (บวกผิด)

ครู: ลองเติมโจทย์นี้สิ $3 + 4 + 9 = \underline{\hspace{1cm}} + 2$

เพทาย: เติม 16

ครู: ได้มาอย่างไร 16

เพทาย: เอา $3 + 4 + 9$ ครับ

ครู: เห็น 2 หรือเปล่านี้

เพทาย: (เขียน = 18 ต่อท้าย $16 + 2$; $3 + 4 + 9 = 16 + 2 = 18$)

1. $5 + 4 + 7 = 5 + 16$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$$\begin{array}{r} 5 + \\ 4 + \\ 7 \\ \hline 16 \end{array} = 5 + 8$$

เหตุผลที่คำตอบนี้มาเพราะ

เราได้ 10 จำนวนแล้ว 3 จำนวนที่ค่าเฉลี่ยให้มาบวกกัน

แล้วจึงได้คำตอบมาเป็น $5 + 16$

$3 + 4 + 9 = 16 + 2 = 18$

ภาพประกอบ 34 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายเพทาย ข้อ 1

3. $555 + 18 - 1129 = 556$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$$\begin{array}{r} 555 \\ + 18 \\ \hline 573 \\ + 1 \\ \hline 574 \\ + 1129 \\ \hline 1703 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1703 \\ - 1129 \\ \hline 574 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 574 \\ + 556 \\ \hline 1130 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1130 \\ - 1129 \\ \hline 1 \end{array}$$

ผมได้ 101 จำนวนที่ค่าเฉลี่ยมาบวกกัน

ก่อน แล้วนำ 18 + กับ 556 จึงได้คำตอบ

ตามนั้น มาเป็น 1130

ภาพประกอบ 35 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายเพทาย ข้อ 3

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 1 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนในกลุ่มนี้จะสามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องลงในช่องว่างของประโยคเปิดของจำนวนได้ ถ้าประโยคเปิดอยู่ในรูปแบบ โจทย์ = คำตอบ (มีจำนวนเดียว) แต่ถ้าประโยคเปิดอยู่ในรูปแบบอื่น จะไม่สามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องได้

2. สร้างข้อสรุปโดยการนำกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกลับกัน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้พิจารณาหรือให้ความสนใจกับจำนวนที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ

3. มีการให้เหตุผลประกอบ แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ได้มาจากการมองประโยคเปิดของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูปของ โจทย์ = คำตอบ ซึ่งส่งผลให้ได้ข้อสรุปที่ไม่ถูกต้อง หลักฐานหรือเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้นำเสนอเพื่อสนับสนุนข้อสรุปจะเป็นการอ้างถึงความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ ในแง่ของเครื่องหมายที่แทนการคำนวณค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ แต่การอธิบายเหตุผลประกอบข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้มีลักษณะคงเส้นคงวา ไม่สับสน หรือวกไปวนมา เหมือนนักเรียนกลุ่ม 0

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 1

นักเรียนกลุ่มนี้เมื่อหาข้อสรุปได้แล้วจะไม่มี การตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุป และเมื่อถูกถามให้ตรวจสอบคำตอบ นักเรียนบางคนจะใช้วิธีการคำนวณซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจ ในขณะที่บางคนก็ไม่ได้รู้เลยว่าประเมินคำตอบของตนอย่างไร หรือพยายามอธิบายไปอย่างสับสนวุ่นวาย ประเด็นอะไรไม่ได้ ซึ่งพิจารณาได้จากพฤติกรรมต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดงข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$)

ครู: มันใจมัยว่าคำตอบเราถูก

ทองแดง: ไม่ค่อยมั่นใจเท่าไรครับ

ครู: ถ้าจะตรวจดูว่าคำตอบของเราถูกต้องมัยจะมีวิธีการตรวจคำตอบอย่างไร

ทองแดง: (นั่งอยู่นาน)

ครู: สมมุติว่ามีเพื่อนเราสงสัยว่าเราตอบ 16 จะถูกหรือเปล่าเนี่ย เราจะอธิบายเขายังไง

ทองแดง: เอาไปลบกันครับ

ครู: ลบยังงัย

ทองแดง: เอา $16 - 7$

ครู: แล้ว...
 ทองแดง: ลบ 4 ลบ 5 ครบ (นั่งอยู่นาน)
 ครู: แล้วจะดูอย่างไรว่าคำตอบเราถูก
 ทองแดง: (นิ่ง)
 ครู: ลบแล้วต้องเหลือเท่าไร
 ทองแดง: ไม่ทราบครับ

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองแดงข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\quad} = 556$)

ครู: แล้วจะดูอย่างไรว่าคำตอบของเราถูกต้อง
 ทองแดง: เอา 556 บวกกับ 28 ครบ
 ครู: บวกแล้วต้องได้เท่าไร
 ทองแดง: (นิ่ง)

บทสัมภาษณ์เด็กชายเพทายข้อ 2 ($63 + 29 = \underline{\quad} + 30$)

ครู: แน่ใจมั๊ยข้อนี้
 เพทาย: แน่ใจครับ
 ครู: แน่ใจได้อย่างไร จะตรวจคำตอบยังไง
 เพทาย: (นิ่ง)

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุลข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\quad}$)

ครู: แล้วจะแน่ใจได้อย่างไรว่า 16 เป็นคำตอบที่ถูก มีวิธีการตรวจสอบมั๊ย
 พิกุล: คิดหุน... หุนว่า $5 + 4 + 7 = 16$ ค่ะ
 ครู: ถ้าจะให้ตรวจคำตอบอีกครั้งหนึ่งหุนจะทำอย่างไร
 พิกุล: (นิ่ง)

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงพิกุลข้อ 2 ($63 + 29 = \underline{\quad} + 30$)

ครู: ถ้าจะให้หุนตรวจคำตอบอีกครั้งหุนจะทำอย่างไร
 พิกุล: เอา $63 + 29$ เท่ากับ 92 และเอา 92 มาใส่ในช่องว่างบวกกับ 30

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปนักเรียนในกลุ่ม 1 เมื่อหาข้อสรุปได้แล้วจะไม่มี การตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุป และเมื่อ

ถูกกระตุ้นให้ประเมินคำตอบของตน นักเรียนไม่รู้ว่าประเมินคำตอบของตนเองอย่างไรหรือพยายาม ทบทวนวิธีการเดิมที่ใช้ในการหาคำตอบว่ามีข้อบกพร่องอย่างไรหรือไม่

ตาราง 49 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนกลุ่ม 1

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A11 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ ในรูป โจทย์ = คำตอบ โดย นักเรียนจะมองแยกย่อยประโยค เปิดของจำนวนที่กำหนดให้ ออกเป็น 3 ส่วน คือ กลุ่มตัว เลขที่อยู่ทางซ้ายมือของ เครื่องหมายเท่ากับซึ่งนักเรียนจะ มองว่าเป็น โจทย์ เครื่องหมาย เท่ากับซึ่งนักเรียนจะมองว่าเป็น เครื่องหมายที่แทนการคำนวณค่า ของกลุ่มตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือ ของเครื่องหมายเท่ากับและ คำตอบซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการ คำนวณจากโจทย์และต้องอยู่ ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ A13 ไม่สามารถวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวน ในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่ เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละ จำนวนในประโยคเปิด	I11 นักเรียนในกลุ่มนี้จะ สามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องลง ในช่องว่างของประโยคเปิด ของจำนวนได้ ถ้าประโยคเปิด อยู่ในรูปแบบ โจทย์ = คำตอบ (มีจำนวนเดียว) แต่ถ้าประโยค เปิดอยู่ในรูปแบบอื่นจะไม่ สามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องได้ I12 สร้างข้อสรุปโดยการนำกลุ่ม ตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของ เครื่องหมายเท่ากับมา บวกกลับกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้ พิจารณาหรือให้ความสนใจกับ จำนวนที่อยู่ทางขวามือของ เครื่องหมายเท่ากับ I13 มีการให้เหตุผลประกอบ แต่เป็นเหตุผลที่ไม่ถูกต้องที่ ได้มาจากการมองประโยคเปิด ของจำนวนจากซ้ายไปขวาในรูป ของ โจทย์ = คำตอบ หลักฐาน หรือเหตุผลที่นักเรียนกลุ่มนี้ นำเสนอเพื่อสนับสนุนข้อสรุปจะ	E11 เมื่อหาข้อสรุปได้แล้ว จะไม่มีตรวจสอบความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป E12 เมื่อถูกกระตุ้นให้ ประเมินคำตอบของตน นักเรียนจะพยายามทบทวน วิธีการเดิมที่ใช้ในการหา คำตอบว่ามีข้อบกพร่อง อย่างไรหรือไม่

ตาราง 49 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
	เป็นการอ้างถึงความหมายของ เครื่องหมายเท่ากับในแง่ของ เครื่องหมายที่แทนการคำนวณ ค่าของนิพจน์ที่อยู่ทางด้าน ซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ แต่การอธิบายเหตุผลประกอบ ข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้มี ลักษณะคงเส้นคงวา ไม่สับสน หรือวกไปวนมาเหมือนนักเรียน กลุ่ม 0	

นักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลอยู่ในกลุ่ม 2 มีจำนวน 7 คน เป็นนักเรียน
จากโรงเรียนในเมือง จำนวน 4 คน จากโรงเรียนชนบท จำนวน 3 คน ข้อมูลพื้นฐานของผู้เรียน
ทั้ง 7 คน ดังตาราง 50

ตาราง 50 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนในกลุ่ม 2

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ระดับ ผลการเรียน
เด็กชายหยก	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายมรกต	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายทองเหลือง	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ปานกลาง
เด็กหญิงช้องนาง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ปานกลาง

ตาราง 50 (ต่อ)

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ระดับ ผลการเรียน
เด็กหญิงยี่โก	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ปานกลาง
เด็กชายนิล	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ปานกลาง
เด็กชายทองคำ	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี

ลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของประโยคเปิดได้ครบถ้วนทั้งหมด กล่าวคือ นักเรียนในกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าในประโยคเปิดประกอบด้วยนิพจน์ทางซ้าย และนิพจน์ทางขวา นิพจน์ทั้งสองข้างมีความสัมพันธ์กันคือต้องมีค่าเท่ากัน แต่นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าแต่ละจำนวนในประโยคมีความสัมพันธ์กันอย่างไร ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงช้องนาง

ครู: ข้อ 1 มีอะไรบ้าง

ช้องนาง: $5 + 4 + 7$ เท่ากับ $5 + 11$

ครู: เราเติม 11

ช้องนาง: ค่ะ

ครู: อธิบายเหตุผลชี้ว่าทำไมถึงเติม 11

ช้องนาง: เพราะ 5 ทางซ้าย และ 5 ทางขวาเหมือนกันอยู่แล้ว
(ขีดเส้นโยง 5 ทั้งสองข้างแล้วเขียนว่าเท่ากัน) และ $4 + 7$ เท่ากับ 11

ครู: รู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้ถูก

ช้องนาง: เอา $5 + 4 + 7$ ได้ 16 และ $5 + 11$ ก็ได้ 16 เท่ากัน

ครู: นี่คือเครื่องหมายอะไร (ครูชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ)

ช้องนาง: เครื่องหมายเท่ากับ

ครู: เอาไว้ทำอะไรเครื่องหมายเท่ากับ

ช้องนาง: ไว้แสดงว่าเลข 2 จำนวนมีค่าเท่ากันก็จะเติมเครื่องหมายเท่ากับ

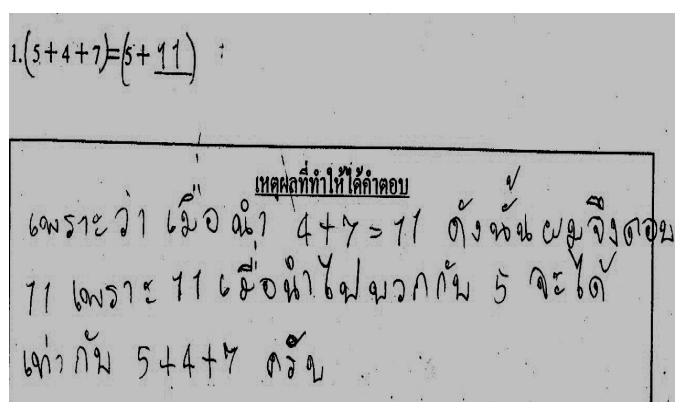
ครู: ถ้าครูจะถามว่าเครื่องหมายเท่ากับ หมายถึงอะไร หนูจะอธิบายว่าอย่างไร

ช้องนาง: หมายถึง เครื่องหมายที่ใช้แสดงว่าระหว่างจำนวน 2 จำนวนมีค่าเท่ากันมัย

นักเรียนกลุ่มนี้จะเข้าใจความสัมพันธ์ในประโยคเปิดของจำนวนในลักษณะที่เป็นการแยกมองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วน คือ

$$\text{ผลลัพธ์ทางซ้าย} = \text{ผลลัพธ์ทางขวา}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนในกลุ่มนี้มีความเข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์เท่ากันระหว่างกลุ่มจำนวนทางซ้ายและกลุ่มจำนวนทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ ดังจะพิจารณาได้จากการเขียนตอบในแบบทดสอบของหยก ซึ่งถ้าพิจารณาจากการเขียนอธิบายของหยก จะเห็นว่า หยกสนใจทุกจำนวนในประโยค รวมทั้งเลข 5 ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ นอกจากนี้ จะสังเกตว่าที่โจทย์หยกได้ทำเครื่องหมายวงเล็บล้อมรอบจำนวนในแต่ละข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าหยกมองประโยคเปิดของจำนวนเป็น 3 ส่วน คือส่วนของจำนวนที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ เครื่องหมายเท่ากับ และกลุ่มจำนวนที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ และเข้าใจความสัมพันธ์ในลักษณะที่ว่า $\text{ผลลัพธ์ทางซ้าย} = \text{ผลลัพธ์ทางขวา}$



ภาพประกอบ 36 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายหยก ข้อ 1

เมื่อพิจารณาการเขียนอธิบายของหยกในข้อ 2 และข้อ 3 พบว่าลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของหยกยังคงมีลักษณะเหมือนกับข้อ 1 แม้ว่าโจทย์ทั้งสองข้อดังกล่าวจะมีลักษณะที่เปลี่ยนไป กล่าวคือตัวเลขแต่ละตัวในประโยคจะมีความสัมพันธ์กัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าหยกมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด แม้ว่าผู้สัมภาษณ์จะพยายามถามว่ามีวิธีการง่ายและรวดเร็วหรือไม่

หรือไม่ แต่หยกก็ไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนได้ ดังภาพประกอบการเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายหยกดังต่อไปนี้

2. $63 + 29 = 62 + 30$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ
 $63 + 29$ เลขตัวหลัก 1 $63 + 29$ จะได้เท่ากับ 92 แล้วนำ 92 มาลบ 30 แล้วจะได้ 62 ครบ เลข 30 จึงตอบ 62 ครับ

3. $555 + 18 - 17 = 556$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ
 $555 + 18$ เลขตัวหลัก 18 จะได้ 573 ครบ แล้วนำ 573 ลบ ตัวตอบ ก็คือ 556 แล้ว จะได้เท่ากับ 17 เลขเลขตอบ 17 ครับ

ภาพประกอบ 37 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายหยก ข้อ 2 และข้อ 3

ลักษณะอีกอย่างหนึ่งที่ทำให้นักเรียนในกลุ่ม 2 มีความแตกต่างจากนักเรียนในกลุ่ม 1 อย่างชัดเจนคือ นักเรียนในกลุ่มนี้มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้านซ้ายและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก

ครู: ในความคิดของเรา เครื่องหมายเท่ากับคืออะไร

หยก: คือเครื่องหมายที่บอกว่าทั้งสองข้างนี้ (ชี้วงรอบกลุ่มตัวเลขทางด้านซ้ายมือและด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ) มีผลการคำนวณเท่ากัน ครับ

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงช้องนาง

ครู: นี่คือเครื่องหมายอะไร (ครูชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ)

ช้องนาง: เครื่องหมายเท่ากับ

ครู: เอาไว้ทำอะไรเครื่องหมายเท่ากับ

ช้องนาง: ไว้แสดงว่าเลข 2 จำนวนมีค่าเท่ากันก็จะเติมเครื่องหมายเท่ากับ

ครู: ถ้าครูจะถามว่าเครื่องหมายเท่ากับ หมายถึงอะไร หนูจะอธิบายว่าอย่างไร

ช้องนาง: หมายถึง เครื่องหมายที่ใช้แสดงว่าระหว่างจำนวน 2 จำนวนมีค่าเท่ากันมัย

ครู: ถ้าสมมุติ $\triangle = \square$ ถามว่า $\triangle - 3 = \square$ มัย

ช้องนาง: ไม่เท่ากัน

ครู: อธิบายได้มัย

ช้องนาง: เพราะค่าของ $\triangle$ เท่ากับค่าของ $\square$ แต่ค่าของ $\triangle$ ถูกลบด้วย 3 แล้ว
ทำให้ค่าของ $\triangle$ ลดลง แต่ค่า $\square$ ยังคงเท่าเดิมทำให้ค่ามันไม่เท่ากัน

ครู: จากตรงนี้ทำอย่างไรได้บ้างให้มันเท่ากัน

ช้องนาง: (เขียน) $\triangle - 3 = \square - 3$

ครู: ถ้าสมมุติ $\triangle = \square$ เขียนแบบอื่นอีกที่ทำให้ค่ามันยังคงเท่ากัน

ช้องนาง: (เขียน) $\triangle + 1 = \square + 1$

บทสัมภาษณ์เด็กชายทองเหลือง

ครู: เห็นเครื่องหมายเท่ากับมัย

ทองเหลือง: เห็นครับ

ครู: ตามความเข้าใจของเรา เครื่องหมายเท่ากับเราเอาไว้ทำอะไร

ทองเหลือง: ไว้แยกฝั่งครับ ฝั่งนี้ (ชี้ทางซ้าย) กับฝั่งนี้ (ชี้ทางขวา) แบบว่าบวกกัน
แล้วสองฝั่งต้องมีค่าเท่ากันครับ

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาทั้งหมดจะเห็นว่าในส่วนของการวิเคราะห์ประโยคเปิด
นักเรียนในกลุ่ม 2 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนในกลุ่มนี้มีความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทน
ความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้านซ้ายและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ
2. นักเรียนสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็น
จำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน
3. มองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วน คือส่วนของจำนวนที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ

เครื่องหมายเท่ากับ และกลุ่มจำนวนที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ และทั้ง 3 ส่วนสัมพันธ์กันในลักษณะ ผลลัพธ์ทางซ้าย = ผลลัพธ์ทางขวา

4. นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคได้

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนในกลุ่มนี้ทุกคนสามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องลงในประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ทั้ง 3 ข้อ โดยลักษณะของข้อสรุปและวิธีการในการสร้างข้อสรุป ดังตาราง 51

ตาราง 51 แสดงลักษณะข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

ข้อที่	โจทย์	ข้อสรุป(คำตอบ)	วิธีการ
1	$5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$	11	เอา $4 + 7$ หรือ เอา $5 + 4 + 7 = 16$ แล้วเอา $16 - 5 = 11$
2	$63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$	62	เอา $63 + 29 = 92$ แล้วเอา $92 - 30 = 62$
3	$555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$	17	เอา $555 + 18 = 573$ แล้วเอา $573 - 556 = 17$

จากตารางจะสังเกตว่านักเรียนในกลุ่มนี้สามารถหาคำตอบมาเติมในช่องว่างได้อย่างถูกต้องทั้ง 3 ข้อ โดยวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปจะเกิดจากความเข้าใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน ทำให้นักเรียนมองประโยคเปิดในรูปแบบ ผลลัพธ์ทางซ้าย = ผลลัพธ์ทางขวา จากนั้นใช้การคิดคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ได้ผลลัพธ์เท่าไรก็นำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งจะเห็นว่าการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลในเชิงของการคิดคำนวณ (Computational Thinking) เป็นหลัก ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กชายหยก

ครู: ข้อ 1 เขาให้ทำอะไร

หยก: เขาให้หาว่า 5 บวกอะไรได้เท่ากับ $5 + 4 + 7$

- ครู: เราเติมอะไร
 หยก: เติม 11 ครับ
 ครู: เพราะ...
 หยก: เพราะว่า $4 + 7 = 11$ ครับ
 ครู: สาเหตุที่ทำอย่างนี้เพราะอะไร
 หยก: เพราะว่าผมคิดว่า จะทำให้ได้ 16 เท่ากันครับ
 ครู: อ้อ ทำให้สองข้างเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน
 หยก: ครับ
 ครู: มาดูข้อ 2 $63 + 29$ เท่ากับอะไรบวก 30 หยกเติมอะไร
 หยก: เติม 62 ครับ
 ครู: คิดอย่างไร
 หยก: ก็เอา $63 + 29$ ได้ 925 แล้วก็เอามาลบกับ 30
 ครู: มีเหตุผลอะไรตอนที่เอา 30 มาลบ
 หยก: เพราะว่า 30 เป็นจำนวนที่เอามาวกกับช่องว่างแล้วทำให้ได้ 92 ครับ เท่ากับจำนวนที่อยู่อีกด้านหนึ่ง
 ครู: แล้วเวลาจะตรวจคำตอบ จะตรวจยังไง
 หยก: ก็เหมือนกันเดิมครับ เอออันนี้มาบวกกัน $(62 + 29)$ ว่าได้เท่าไร แล้วก็เอออันนี้มาบวกกัน $(62 + 30)$ แล้วดูว่าได้เท่ากันหรือเปล่า ถ้าได้เท่ากันก็ถูกครับ
 ครู: มาดูข้อ 3 บ้าง $555 + 18$ ลบอะไรได้ 556 หยกตอบเท่าไร
 หยก: 17 ครับ
 ครู: เพราะอะไร
 หยก: เมื่อเอา $555 + 18$ แล้วก็เอามาลบกับ 556 แล้วได้ 17
 ครู: ได้แล้วตอบเลยมัย
 หยก: ก็นั่งคิดอยู่เหมือนกันครับ
 ครู: คิดยังไง
 หยก: คิดว่า ตอนที่เอา $555 + 18$ เสร็จแล้วผมคิดว่าจะทำอย่างไรดีถึงจะได้จำนวนที่จะเอาไปเติมในช่องว่างก็เลยคิดได้ว่า จำนวนตรงนี้ $(555 + 18)$ ต้องเอามาลบกับจำนวนในช่องว่าง ก็เลยเอา 556 มาลบถึงจะได้เป็นจำนวนที่จะเติมในช่องว่าง

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงช้องนาง

ครู: ข้อ 1 อธิบายเหตุผลชี้ว่าทำไมถึงเติม 11

- ช้องนาง: เพราะ 5 ทางซ้าย และ 5 ทางขวาเหมือนกันอยู่แล้ว
(ขีดเส้นโยง 5 ทั้งสองข้างแล้วเขียนว่าเท่ากัน) และ $4 + 7$ เท่ากับ 11
(ขีดเส้นโยง $4 + 7$ กับ 11 ที่เดิม)
- ครู: รู้ได้อย่างไรว่าคำตอบนี้ถูก
- ช้องนาง: เอา $5 + 4 + 7$ ได้ 16 และ $5 + 11$ ก็ได้ 16 เท่ากัน
- ครู: ข้อ 2 $63 + 29$ เท่ากับอะไรบวก 30 เราเติมอะไร
- ช้องนาง: 62
- ครู: อธิบายซิ
- ช้องนาง: $63 + 29$ เท่ากับ 92 แล้วก็เอา 92 ลบ 30 ได้ 62
- ครู: คำตอบ 62 ที่ได้มาเกิดจากการเอา $92 - 30$ ใช่มั๊ย
- ช้องนาง: ค่ะ
- ครู: รู้ได้อย่างไรว่าต้องเอา $92 - 30$ จึงจะได้คำตอบที่ถูกต้อง
- ช้องนาง: เพราะข้างนี้ได้ 92 (ชี้วนทางซ้ายของเครื่องหมาย =) ข้างนี้มันมีอยู่ 30 แล้ว
ต้องการให้ได้ 92 เท่ากัน ก็เลยต้องเอา 30 ไปลบออกจาก 92
- ครู: ถ้าครูลองเปลี่ยนโจทย์เป็น $45 + 32 = \underline{\hspace{1cm}} + 33$ เราจะเติมอะไร
- ช้องนาง: (ขีดเส้นล้อมรอบ $45 + 32$) ตอนแรกเราต้องหาค่านี้ว่าได้เท่าไร
- ครู: อ้อ
- ช้องนาง: ได้เท่ากับ 77 (เขียน 77 ทางซ้าย) ซึ่งมันต้องเท่ากับทางนี้ (ขีดเส้น
ล้อมทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ) แต่มันมีอยู่แล้ว 33 ถ้าเอา 77 ไป
เติมเลยมันไม่ได้ เพราะมันจะได้ 110 ซึ่งมันไม่เท่ากัน เราจึงต้องเอา
 $77 - 33$ ได้ 44 ซึ่งทำให้ข้างนี้ได้ 77 ซึ่งเท่ากัน
- ครู: ข้อ 3 เราตอบ 17 อธิบายเหตุผลซิ
- ช้องนาง: ตอนแรกโจทย์ให้มีมามี 555 18 และ 556 เอา $555 + 18$ ก่อนได้
573 ซึ่งมันไม่เท่ากับ 556 ทำอย่างไรให้มันเท่ากัน เราก็ต้องหาตัวเลข
มาเติมในช่องว่างให้มันเท่ากัน ก็ต้องเอา $573 - 556$ ก็ได้เท่ากับ 17 ก็
เลยเติม 17 ในช่องว่าง ถ้าถามว่าถูกมั๊ยก็ต้องตรวจคำตอบดูโดยเอา
 $555 + 18 - 17$ จะได้เท่ากับ 556 มั๊ย
- ครู: ลองแล้ว...
- ช้องนาง: ลองแล้วค่ะ เขียนไว้ตรงนี้ (ชี้ในข้อสอบ)

จากบทสัมภาษณ์ข้างต้นจะเห็นว่านักเรียนกลุ่ม 2 มีลักษณะการอ้างเหตุผลที่มีแบบแผน สมเหตุสมผล มีการการนำเสนอหลักฐานและการอธิบายเพื่อให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน และเพียงพอ แต่ยังคงใช้เหตุผลในเชิงการคิดคำนวณในการสร้างข้อสรุป ซึ่งรูปแบบในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้มีลักษณะการอ้างเหตุผลดังตัวอย่างต่อไปนี้

- เหตุ 1: จำนวนที่เดิมในช่องว่างต้องทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน
- เหตุ 2: ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น 92 และทางขวามือมีอยู่ 30
- สรุป: ต้องเติม 62 ลงในช่องว่าง

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 2 มีลักษณะที่สำคัญ ดังนี้

1. สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร
2. การสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลในเชิงการคิดคำนวณ (Computational Thinking) เป็นหลัก โดยใช้วิธีการคิดคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ได้ผลลัพธ์เท่าไรก็นำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ
3. ใช้รูปแบบการอ้างเหตุผลที่มีแบบแผนสมเหตุสมผล มีการการนำเสนอหลักฐานและการอธิบายเพื่อให้เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปที่มีความถูกต้อง ชัดเจน และเพียงพอ แต่ยังคงใช้การคิดคำนวณในการสร้างข้อสรุป

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปแล้วมักจะไม่นึกถึงข้อสรุปที่ได้ทันที แต่จะมีการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตนเองอีกสักครั้งหนึ่ง ซึ่งจะสังเกตได้จากการเขียนอธิบายในข้อสอบของยี่สิบดังต่อไปนี้

1. $5 + 4 + 7 = 5 + 11$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$5 + 4 + 7 = 16$
 $16 - 5 = 11$

นำจำนวน $5 + 4 + 7 = 16$ มากลั่นได้เท่ากับ 16
 เลื่อนจำนวนกับ 5 จะได้คำตอบเท่ากับ 11
 ดังนั้น $5 + 11 = 16$ เท่ากันทั้งสองฝั่ง

2. $63 + 29 = 62 + 30$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$63 + 29$
 92
 $92 - 30$
 62

นำจำนวน $63 + 29$ มากลั่นได้คำตอบเท่ากับ 92
 นำ 92 มาลบ 30 ก็จะได้ 62
 ดังนั้น $62 + 30$ เท่ากับ 92 เท่ากันทั้งสองฝั่ง

$63 + 29 = 92$
 $62 + 30 = 92$

3. $555 + 18 - 17 = 556$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$555 + 18$
 573
 $573 - 17$
 556

นำจำนวน $555 + 18$ ได้ผลลัพธ์ 573
 นำ $573 - 556 = 17$
 ดังนั้น $555 + 18 - 17 = 556$

$555 + 18 - 17 = 556$

ภาพประกอบ 38 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงอีโก

จากภาพประกอบข้างต้น จะเห็นว่าเมื่ออีโกสามารถหาข้อสรุปได้แล้ว จะมีการคิดต่อไปว่า คำตอบที่ได้มีความสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยวิธีการที่ใช้ในการประเมินข้อสรุปของตนโดยใช้วิธีการเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ (Equivalence of Results) หลังจากที่ได้คำตอบลงไปในช่วงว่างแล้ว

นอกจากนี้เมื่อถูกผู้สัมภาษณ์ถามว่าจะแน่ใจได้อย่างไรว่าคำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้อง นักเรียนกลุ่มนี้ทุกคนจะสามารถแสดงวิธีการประเมินคำตอบของตนได้อย่างสมเหตุสมผล ด้วยวิธีการเปรียบเทียบผลลัพธ์ดังที่กล่าวมาแล้ว ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

ตาราง 52 แสดงลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 2

นักเรียน / ข้อที่	1. $5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\quad}$	2. $63 + 29 = \underline{\quad} + 30$	3. $555 + 18 - \underline{\quad} = 556$
ทองคำ	ครู: มันใจมัย ทองคำ: มันใจครับ ครู: มันใจได้อย่างไร ทองคำ: ก็ลองเติม 11 ดู ถ้าผลบวกเท่ากันทั้งสอง ข้างก็แสดงว่าถูกต้อง	ครู: ถ้าจะเช็คคำตอบที่ได้ถูกหรือไม่ จะต้องทำ อย่างไร ทองคำ: ก็ดูว่าทั้งสองข้าง เท่ากันหรือเปล่า ลองคิด ดูว่าบวกกันได้ 92 หรือไม่	ครู: พอได้คำตอบมาแล้ว เราได้มีการเช็คมัยว่ามัน ถูกหรือไม่ ทองคำ: เช็คครับ ครู: เช็คยังไง ทองคำ: ก็หาคำตอบของ ฝั่งซ้ายก็จะได้ 556 เท่ากับฝั่งขวา แสดงว่า ถูกต้องครับ
ทองเหลือง	ครู: ถ้าจะตรวจคำตอบข้อ นี้จะทำอย่างไร ทองเหลือง: ต้องเอาเลข ตรงนี้มาบวกกันครับ ครู: ยังไง... ทองเหลือง: $5 + 4 + 7$ ได้ 16 และ $5 + 11$ ก็ได้ 16 เท่ากันก็แสดงว่าถูก	ครู: ถ้าจะตรวจคำตอบจะ ทำอย่างไร ทองเหลือง: บวกเลขทั้ง สองฝั่งครับ ครู: ข้อนี้บวกแล้วต้อง เท่ากับ... ทองเหลือง: 92 ทั้งสอง ข้างครับ	-

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของ การประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปนักเรียนในกลุ่ม 2 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ข้อสรุปแล้วมักไม่ปักใจในข้อสรุปที่ได้ทันที แต่จะมีการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตนจนแน่ใจอีกครั้งหนึ่ง
2. วิธีการที่ใช้ในการประเมินข้อสรุปของตนจะใช้วิธีการเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ (Equivalence of Results) หลังจากที่ได้คำตอบลงไป ในช่องว่างแล้ว

ตาราง 53 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนกลุ่ม 2

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A21 นักเรียนในกลุ่มนี้จะมี ความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมาย เท่ากับว่าคือสัญลักษณ์ที่แทน ความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ ที่อยู่ทางด้าน ซ้ายและขวามือของเครื่องหมาย เท่ากับ A22 นักเรียนจะสามารถ วิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมา เติมลงในช่องว่างของประโยค เปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้ง สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ มีค่าเท่ากัน A23 มองประโยคเปิดเป็น 3 ส่วน คือส่วนของจำนวนที่อยู่ ทางซ้ายมือของเครื่องหมาย เท่ากับ เครื่องหมายเท่ากับ และกลุ่มจำนวนที่อยู่ทางขวามือ ของเครื่องหมายเท่ากับ และทั้ง 3 ส่วนสัมพันธ์กันในลักษณะ ผลลัพธ์ทางซ้าย = ผลลัพธ์ทางขวา A24 นักเรียนในกลุ่มนี้จะไม่ สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค ได้	I21 สามารถสร้างข้อสรุปที่ ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไป จากประโยคเปิดของจำนวนที่ กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิด จะมีลักษณะอย่างไร I22 การสร้างข้อสรุปของนักเรียน กลุ่มนี้จะใช้วิธีการคิดคำนวณ (Computational Thinking) เป็นหลัก โดยใช้วิธีการคิด คำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่ง ของเครื่องหมายเท่ากับ ได้ ผลลัพธ์เท่าไรก็นำมาลบกับ จำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่ง ของเครื่องหมายเท่ากับ I23 การอ้างเหตุผลที่มีแบบแผน สมเหตุสมผล มีการนำเสนอ หลักฐานและการอธิบายเพื่อให้ เหตุผลสนับสนุนข้อสรุปที่มีความ ถูกต้อง ชัดเจน และเพียงพอ แต่ยังคงใช้การคิดคำนวณในการ สร้างข้อสรุป ซึ่งในการสร้าง ข้อสรุปของนักเรียนกลุ่มนี้จะมี ลักษณะการอ้างเหตุผล ดังนี้ เหตุ 1: จำนวนที่เติมในช่องว่าง ต้องทำให้สองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่า เท่ากัน	E21 นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อได้ ข้อสรุปแล้วมักจะไม่นึกใจใน ข้อสรุปที่ได้นั้นทันที แต่จะมี การประเมินความน่าเชื่อถือ ของข้อสรุปของตนจนแน่ใจอีก ครั้งหนึ่ง E22 วิธีการที่ใช้ในการ ประเมินข้อสรุปของตนจะใช้ วิธีการเปรียบเทียบผลลัพธ์ทั้ง สองข้างของเครื่องหมาย เท่ากับว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่ (Equivalence of Results) หลังจากที่ได้คำตอบลงไป ใน ช่องว่างแล้ว

ตาราง 53 (ต่อ)

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
	เหตุ 2: ทางซ้ายมือของ เครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น 92 และทางขวามือมีอยู่ 30 สรุป: ต้องเติม 62 ลงใน ช่องว่าง	

นักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนกลุ่มเป้าหมายที่มีลักษณะการให้เหตุผลจัดอยู่ในกลุ่ม 3 มีจำนวน 6 คน เป็นนักเรียนจากโรงเรียนในเมือง และโรงเรียนชนบท โรงเรียนละ 3 คน ซึ่งมีทั้งนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ที่มีผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับดี ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนทั้ง 6 คน ดังตาราง 54

ตาราง 54 แสดงข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่ม 3

ชื่อ	โรงเรียน	ชั้น	อายุ (ปี)	ผลการเรียน
เด็กหญิงกาหลง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 4	10	ดี
เด็กหญิงบัวตอง	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายไข่มุก	ในเมือง	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กชายไพฑูรย์	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 5	11	ดี
เด็กหญิงจำปี	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี
เด็กชายมณี	ชนบท	ประถมศึกษาปีที่ 6	12	ดี

ลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของนักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนกลุ่มนี้สามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของประโยคเปิดได้อย่างสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น กล่าวคือ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ได้ว่าในประโยคเปิดประกอบด้วยนิพจน์ทางซ้าย และนิพจน์ทางขวา นิพจน์ทั้ง 2 ข้าง มีความสัมพันธ์กันคือต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้เข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใดๆ เช่นเดียวกับนักเรียนในกลุ่ม 2 แต่ที่นอกเหนือไปกว่านั้นนักเรียนกลุ่มนี้ยังสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิดได้อีกด้วย เช่นในข้อที่ 2 ($63 + 29 = \underline{\quad} + 30$) นักเรียนในกลุ่มนี้นอกจากจะวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงไปในช่วงว่างต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ผลลัพธ์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันแล้ว ยังสามารถวิเคราะห์ต่อไปได้อีกว่า 29 มีความสัมพันธ์กับ 30 คือมีค่าน้อยกว่า 30 อยู่ 1 ดังนั้นถ้าต้องการให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างจะต้องมีความสัมพันธ์กับ 63 ในลักษณะเดียวกัน คือจะต้องมีค่าน้อยกว่า 63 อยู่ 1 เช่นกัน หรือในกรณีของข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\quad} = 556$) นักเรียนกลุ่มนี้จะสามารถวิเคราะห์ได้ว่า 555 น้อยกว่า 556 อยู่ 1 ดังนั้นจำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่างต้องลบกับ 18 แล้วเหลือ 1 จึงจะทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้มีลักษณะการมองประโยคเปิดที่เป็นการมองในภาพรวมทั้งหมด ไม่ใช่แยกมองเป็นส่วน ๆ เหมือนกับนักเรียนกลุ่ม 2 และผลจากการที่นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ดังกล่าวออกมาได้จะนำไปสู่การสร้างข้อสรุปโดยใช้เหตุผลในเชิงของความสัมพันธ์ (Relational Thinking) ซึ่งถือเป็นลักษณะเด่นของนักเรียนในกลุ่มนี้เพราะเป็นวิธีการที่แม้ว่าจะทำให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้องเหมือนกับนักเรียนในกลุ่ม 2 แต่วิธีการแบบนี้จะง่าย และรวดเร็วกว่าการใช้เหตุผลในเชิงการคำนวณ (Computational Thinking) ที่เป็นวิธีการสร้างข้อสรุปของนักเรียนในกลุ่ม 2

ตัวอย่างของนักเรียนในกลุ่มนี้เช่น ไพฑูรย์ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนชนบทบัทธัมมาภรณ์ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าไพฑูรย์สามารถวิเคราะห์ได้ว่าในประโยคเปิดประกอบด้วยนิพจน์ทางซ้าย และนิพจน์ทางขวา นิพจน์ทั้งสองข้าง มีความสัมพันธ์กันคือต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าไพฑูรย์เข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับว่าเป็นสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่าง 2 นิพจน์ใด ๆ

บทสัมภาษณ์เด็กชายไพฑูรย์ ข้อ 1

ครู: ข้อ 1 ($5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\quad}$) ทำไม่ถึงเต็ม 11

ไพฑูรย์: เพราะว่าทำให้จำนวนข้างนี้ ($5 + 4 + 7$) บวกกันได้ 16 และข้างนี้ ($5 + 11$) บวกกันได้ 16 ครับ

ครู: นี่เครื่องหมายอะไร

ไพฑูรย์: เท่ากับครับ
 ครู: ไว้ทำอะไรเครื่องหมายเท่ากับ
 ไพฑูรย์: ไว้ดูว่าระหว่างข้างนี้ (ชี้ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ) กับข้างนี้ (ชี้ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ) เท่ากันหรือไม่ครับ
 ครู: ถ้าครูเติม 10 คิดว่าถูกมั๊ย
 ไพฑูรย์: ไม่ถูกครับ
 ครู: ทำไมถึงไม่ถูก
 ไพฑูรย์: ข้างนี้ (ชี้ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ) บวกกันได้ 16 แต่ถ้าเติม 10 ข้างนี้ (ชี้ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ) มันจะบวกกันได้ 15
 ครู: ไม่เท่ากัน
 ไพฑูรย์: ครับ

จากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าไพฑูรย์เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์ การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงไปในช่วงว่างต้องเป็น 11 เพื่อที่จะทำให้สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันคือเท่ากับ 16 และเมื่อพิจารณาบทสัมภาษณ์ไพฑูรย์ต่อไปในข้อ 2 และข้อ 3 จะเห็นว่าลักษณะในการมองประโยคเปิดของไพฑูรย์จะเป็นการมองประโยคเป็นองค์รวม ไม่ได้แยกมองเป็นส่วนๆ เนื่องจากไพฑูรย์สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิดได้อีกด้วย

บทสัมภาษณ์เด็กชายไพฑูรย์ ข้อ 2 และข้อ 3

ครู: ข้อ 2 ($63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$) ตอบ 62 คิดได้เร็วมั๊ยข้อนี้
 ไพฑูรย์: เร็วครับ
 ครู: คิดยังไง
 ไพฑูรย์: คำตอบ 62 กับ 63 มันต่างกันอยู่ 1 (ขีดเส้นโยง 62 กับ 63) แล้วก็ 30 กับ 29 มันก็ต่างกันอยู่ 1 (ขีดเส้นโยง 30 กับ 29)
 ครู: ข้อ 3 ($555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$) เราเติมอะไร
 ไพฑูรย์: เติม 17 ครับ
 ครู: คิดยังไง
 ไพฑูรย์: มันก็คล้าย ๆ กับข้อ 2 ครับ 556 มันต่างกับ 555 อยู่ 1 (ขีดเส้นโยง 555 กับ 556) และก็ตรงนี้นั่น 18 ถ้าเติม 17 มันก็ต่างกันอยู่ 1 เหมือนกัน
 ครู: ลองโจทย์ข้อนี้ซิ $380 + 25 - \underline{\hspace{1cm}} = 385$ เราจะเติมอะไรคิดแบบเร็ว ๆ

ไพฑูรย์: เต็ม 20 ครับ (ตอบอย่างรวดเร็ว)

ครู: คิดยังไง

ไพฑูรย์: 380 กับ 385 มันต่างกันอยู่ 5 (ขีดเส้นโยง 380 และ 385) 25 กับ 20 ก็ต่างกันอยู่ 5 เหมือนกัน (ขีดเส้นโยง 20 และ 25)

นอกจากนี้เมื่อพิจารณาจากการเขียนตอบในแบบทดสอบของไพฑูรย์จะสังเกตว่าในข้อ 2 มีการขีดโยงตัวเลข 63 กับ 62 และขีดโยง 29 กับ 30 แล้วเขียนตัวเลข 1 กำกับไว้เพื่อแสดงว่าทั้งสองคู่ต้องมีความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกันคือต่างกันอยู่ 1 เช่นเดียวกันกับในข้อ 3 ไพฑูรย์จะขีดโยงจับคู่ 555 กับ 556 และ 18 กับ 17 เพื่อแสดงความหมายในลักษณะเดียวกัน ดังภาพประกอบ 39

2. $63 + 29 = 62 + 30$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ
ดังต่อไปนี้

ดังต่อไปนี้

ผลต่าง 63 - 29 = 34 และ 62 - 30 = 32 จะเห็นว่า 34 - 32 = 2

3. $555 + 18 - 17 = 556$

ภาพประกอบ 39 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กชายไพฑูรย์

ในทำนองเดียวกับไพฑูรย์ นักเรียนในกลุ่มนี้ทุกคนสามารถวิเคราะห์องค์ประกอบของประโยคเปิดได้อย่างสมบูรณ์ครบถ้วนทุกประเด็น รวมถึงมองเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค แต่การแสดงออกอาจจะมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป ดังตาราง 55

ตาราง 55 แสดงลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิดของนักเรียนในกลุ่ม 3

นักเรียน	ลักษณะการวิเคราะห์ประโยคเปิด	
	ข้อ 2 ($63 + 29 = ___ + 30$)	ข้อ 3 ($555 + 18 - ___ = 556$)
จำปี	63 ให้ 29 เสีย 1 เท่ากับ 30 63 ก็เหลือ 62	เอาจาก 18 ให้ 555 เสีย 1 เป็น 556 แล้ว 18 ก็จะเหลือ 17 แล้วก็จะเท่ากันทั้งสองข้าง
ไข่มุก	$63 + 29$ มันมีค่าเท่ากับอีกข้างหนึ่ง แล้วก็ช่องว่างบวกกับ 30 ก็ต้องลดค่าของ 63 ไป 1 ก็เหลือ 62	$18 - 17$ เหลือ 1 บวกกับ 555 ได้ 556
บัวทอง	29 เอาจาก 63 มา 1 กลายเป็น 30 จาก 63 ก็เหลือ 62	คำตอบมันคือ 556 ตรงนี้คือ 555 หนูจึงเอา $18 - 17$ เหลือ 1 เมื่อบวกกับ 555 ก็จะได้ 556
กาหลง	29 หนูแทนให้เป็น 30 ดังนั้น 63 กลายเป็น 62	555 เพิ่มมา 1 เป็น 556 แล้ว 18 ลบอะไรจึงได้เท่ากับ 1 จึงได้ 17

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของ การวิเคราะห์ประโยคเปิด นักเรียนในกลุ่ม 3 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. เข้าใจว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือ และนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ
2. สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่างต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน
3. มองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค

ลักษณะการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนในกลุ่มนี้ทุกคนสามารถเติมจำนวนที่ถูกต้องลงในประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ทั้ง 3 ข้อ โดยในข้อ 2 และข้อ 3 นักเรียนในกลุ่มนี้ใช้วิธีการที่แตกต่างไปจากนักเรียนกลุ่ม 2 อย่างเห็นได้ชัด กล่าวคือ ในการสร้างข้อสรุปนักเรียนในกลุ่มนี้ใช้วิธีการที่เกิดจากการมองความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด ซึ่งลักษณะของข้อสรุปและวิธีการในการสร้างข้อสรุป ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 56 แสดงลักษณะข้อสรุปและวิธีการที่ใช้ในการสร้างข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

ข้อที่	โจทย์	ข้อสรุป (คำตอบ)	วิธีการ
1	$5 + 4 + 7 = 5 + \underline{\hspace{1cm}}$	11	มี 5 เหมือนกันทั้งทางซ้ายและขวาเพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จึงเติม 11 ซึ่งได้จากการเอา $4 + 7$
2	$63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$	62	29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1 เพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จำนวนที่เติมในช่องว่างจึงต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 ด้วย นั่นคือต้องเติม 62
3	$555 + 18 - \underline{\hspace{1cm}} = 556$	17	555 น้อยกว่า 556 อยู่ 1 เพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จำนวนที่เติมในช่องว่างต้องลบกับ 18 แล้วได้ 1 นั่นคือต้องเติม 17

จากตาราง 56 แสดงให้เห็นว่านักเรียนในกลุ่มนี้มีลักษณะการสร้างข้อสรุปที่แตกต่างไปจากนักเรียนในกลุ่ม 2 เพราะแม้ว่านักเรียนทั้งสองกลุ่มสามารถสร้างข้อสรุปได้ถูกต้องเหมือนกัน แต่วิธีการคิดและการให้เหตุผลมีรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป กล่าวคือนักเรียนในกลุ่มนี้จะใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการมองประโยคเปิดทั้งประโยค มองเป็นองค์รวมจนเกิดเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค เช่น ในประโยค $63 + 29 = \underline{\hspace{1cm}} + 30$ นักเรียนกลุ่มนี้มองว่า 29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1 และด้วยความเข้าใจที่ถูกต้องว่าเครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้าง จึงทำให้สามารถสร้างข้อสรุปได้ว่าช่องว่าง (จำนวนที่จะนำมาเติม) ต้องมีความสัมพันธ์กับ 63 ในลักษณะเดียวกันกับความสัมพันธ์ระหว่าง 29 และ 30 นั่นคือช่องว่าง (จำนวนที่จะนำมาเติม) ต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 นั่นก็คือต้องเติม 62 ลงในช่องว่าง ทำให้ได้คำตอบมาง่ายและรวดเร็วเพราะไม่ต้องคำนวณ และเมื่อเราลองพิจารณาเทียบเคียงระหว่างวิธีการที่นักเรียนกลุ่มนี้ใช้กับสูตรทางพีชคณิต $x + y = (x-a) + (y+a)$ จะเห็นว่ามีลักษณะที่ใกล้เคียงกันอย่างมาก ดังตารางเปรียบเทียบต่อไปนี้

ตาราง 57 แสดงการเปรียบเทียบลักษณะการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 3 กับสูตรทางพีชคณิต

สูตรทางพีชคณิต	วิธีการให้เหตุผลของนักเรียน
$x + y = (x-a) + (y+a)$	$63 + 29 = (63 - 1) + (29 + 1) = 62 + 30$ “29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1 เพื่อให้ทั้งสองข้างของ เครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จำนวนที่เติมในช่องว่างจึง ต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 ด้วย นั่นคือต้องเติม 62”

นอกจากนี้ลักษณะการอ้างเหตุผลของนักเรียนกลุ่ม 3 จะมีลักษณะที่มีรูปแบบเป็นทางการมากกว่ากลุ่มอื่น ๆ ที่ผ่านมา กล่าวคือ ก่อนการสร้างข้อสรุปมีการอ้างถึงกฎเกณฑ์ในกรณีทั่วไปลงสู่การสรุปในกรณีเฉพาะ ซึ่งถือว่าเป็นการให้เหตุผลที่มีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากตัวอย่างลักษณะการเขียนตอบในแบบทดสอบของบัวตอง นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนในเมือง ดังภาพประกอบ 40

2. $63 + 29 = \frac{62}{92} + \frac{30}{60} = 90$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$$63 + 29 = 92 - 30 = 62$$

$$(62) 63 + 29 (30) = 62 + 30$$

ใน 1

3. $555 + 18 - \frac{17}{557} = 556$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$$555 + 18 = 573 - 17 = 556$$

$$(554) 555 + 18 (17) = 556$$

ใน 1

ภาพประกอบ 40 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงบัวตอง

ในขณะที่สัมภาษณ์บัวตองพยายามอธิบายว่า เธอไม่ใช้วิธีการคำนวณในการหาคำตอบ แต่ว่าจะพิจารณาในลักษณะที่ว่า 29 เอาจาก 63 มา 1 จาก 63 ก็เหลือ 62 ทำนองเดียวกันในข้อ 3 เธอจะพิจารณาว่า ผังซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับคือ 556 ซึ่งต่างจาก 555 ทางฝั่งขวาของเครื่องหมายเท่ากับอยู่ 1 ดังนั้น 18 ต้องลบกับ 17 เพื่อจะได้ 1 มาบวกกับ 555 เพื่อให้ได้ 556 ซึ่งจากการอธิบายดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าบัวตองยึดหลักเกณฑ์หนึ่งไว้อย่างเชื่อมั่นคือ สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน และพยายามจะอธิบายในลักษณะที่คล้ายกับวิธีการให้เหตุผลแบบนิรนัย ดังนี้

เหตุ 1: สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน

เหตุ 2: 29 น้อยกว่า 30 อยู่ 1

สรุป: จำนวนที่เติมในช่องว่างจึงต้องน้อยกว่า 63 อยู่ 1 ด้วย นั่นคือต้องเติม 62

นอกจากบัวตองและไพฑูรย์แล้วนักเรียนคนอื่น ๆ ในกลุ่มนี้ก็มีลักษณะการให้เหตุผลไปในแนวเดียวกัน จะแตกต่างกันก็ตรงที่ข้อ 3 กล่าวคือในข้อนี้ผู้สัมภาษณ์ต้องใช้คำถามกระตุ้นเล็กน้อยนักเรียนจึงจะสามารถอธิบายออกมาในรูปของการมองความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคได้ เช่น ตัวอย่างของเด็กหญิงจำปี นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนชนบท โดยในการเขียนตอบในแบบทดสอบข้อ 2 เธอจะใช้วิธีการสร้างข้อสรุปจากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค แต่ในข้อ 3 เธอกลับเขียนแสดงเหตุผลมาในลักษณะเดียวกันกับนักเรียนในกลุ่ม 2 คือใช้วิธีการคำนวณ แต่เมื่อถูกกระตุ้นเล็กน้อยนักเรียนก็สามารถให้เหตุผลในลักษณะเดียวกันกับข้อ 2 ได้ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงจำปี

ครู: ข้อ 2 หนูเติม 62 อธิบายชิติดมาอย่างไร

จำปี: หนูเอา 63 ให้ 29 เสีย 1 ค่ะ เท่ากับ 30 ดังนั้น 63 ก็เหลือ 62 ค่ะ

ครู: ครูทวนนะ หนูเอา 63 ให้ 29 เสีย 1 จาก 29 ก็กลายเป็น 30

จำปี: ค่ะ

ครู: แล้ว 63 ก็เหลือ 62 เลยเติม 62 ลงในช่องว่าง

จำปี: ใช่ค่ะ

ครู: เห็นมีเขียน $63 + 29 = 92$ และ $62 + 30 = 92$ เขียนไว้ทำไมตรงนี้

จำปี: ทดสอบความถูกต้องค่ะ

ครู: มาดูข้อ 3 บ้าง หนูทำยังไงข้อนี้

จำปี: หนูเอา $555 + 18$ แล้วก็กลับด้วย 556 ค่ะ

- ครู: ได้ 17
- จำปี: ค่ะ
- ครู: คิดแบบข้อข้อ 2 ได้มั๊ย
- จำปี: น่าจะได้ค่ะ... เอาอันนี้ (18) ให้อันนี้ (555) 1 จำนวนค่ะ เป็น 556 แล้ว
18 ก็จะเหลือ 17 ถ้าเติม 17 ก็จะเท่ากันทั้งสองข้างค่ะ
- ครู: ลองดูโจทย์นี้ซิ $325 + 18 - \underline{\quad} = 330$
- จำปี: 13 ค่ะ (ตอบอย่างรวดเร็ว)
- ครู: ลองอีกข้อซิ $550 + 32 - \underline{\quad} = 555$
- จำปี: เติม 27 ค่ะ (ตอบอย่างรวดเร็วเช่นกัน)
- ครู: อีกข้อหนึ่ง $428 + 30 - \underline{\quad} = 430$
- จำปี: 28 ค่ะ
- ครู: อธิบายซิว่าเราคิดคำตอบมาอย่างไรข้อนี้
- จำปี: เอา 30 ให้ 428 เสีย 2 เป็น 430 แล้ว $28 - 28$ ก็หมดพอดีค่ะ

กล่าวโดยสรุปจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการสร้างข้อสรุป นักเรียนในกลุ่ม 3 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร
2. สร้างข้อสรุปโดยใช้วิธีการคิดในเชิงความสัมพันธ์ (Relational Thinking) ที่เกิดจากการมองประโยคเปิดทั้งประโยค มองเป็นองค์รวมจนเกิดเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคโดยไม่ใช้การคิดคำนวณ (Computational Thinking)
3. ลักษณะการอ้างเหตุผลของนักเรียนกลุ่มนี้จะเป็นการให้เหตุผลที่มีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล

ลักษณะการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของนักเรียนกลุ่ม 3

นักเรียนในกลุ่มนี้เมื่อหาข้อคำตอบหรือข้อสรุปได้แล้วจะมีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้นั้นมีความถูกต้องหรือไม่ ซึ่งสามารถพิจารณาจากตัวอย่างบทสัมภาษณ์ของจำปี นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ดังต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงจำปี

- ครู: ข้อ 2 หนูเติม 62 อธิบายซิคิดมาอย่างไร

- จำปี: หนูเอา 63 ให้ 29 เสีย 1 ค่ะ เท่ากับ 30 ดังนั้น 63 ก็เหลือ 62 ค่ะ
- ครู: ครูทวนนะ หนูเอา 63 ให้ 29 เสีย 1 จาก 29 ก็กลายเป็น 30
- จำปี: ค่ะ
- ครู: แล้ว 63 ก็เหลือ 62 เลยเติม 62 ลงในช่องว่าง
- จำปี: ใช่ค่ะ
- ครู: ในแบบทดสอบเห็นมีเขียน $63 + 29 = 92$ และ $60 + 30 = 92$
หนูเขียนไว้ทำไมตรงนี้
- จำปี: เอามาบวกกัน
- ครู: เพื่อ...
- จำปี: ทดสอบความถูกต้องค่ะ

ในการคิดหาคำตอบของจำปีจะใช้วิธีการพิจารณาจากความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิดโดยในข้อนี้เธออธิบายว่า “หนูเอา 63 ให้ 29 เสีย 1 เท่ากับ 30 ทำให้ 63 เหลือ 62” แต่จากบทสัมภาษณ์จะเห็นว่าเมื่อได้ข้อสรุปแล้วจำปียังมีการตรวจสอบคำตอบของตนอีกครั้งโดยใช้การพิจารณาว่าจำนวนที่เติมลงไปนั้นทำให้ค่าของทางด้านซ้ายและด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยการคำนวณผลลัพธ์ทางซ้ายและผลลัพธ์ทางขวาเพื่อนำมาเปรียบเทียบกัน

นอกจากนี้ยังมีร่องรอยอื่น ๆ อีกที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนกลุ่มนี้มีการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปของตน เช่น กรณีของกาหลง ดังจะพิจารณาได้จากบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

บทสัมภาษณ์เด็กหญิงกาหลง

- ครู: ทำไมถึงเติม 11 บอกได้มั๊ย
- กาหลง: ก็ 5 มีอยู่แล้ว (ชี้ที่ 5 ทางขวา) เอาสองตัวนี้ (ชี้ที่ 4 + 7) มาบวกกันก็ได้ 11
เสร็จแล้วก็จะได้เท่ากัน
- ครู: อะไรเท่ากันนะ
- กาหลง: 5 กับ 5 เหมือนกัน (ชี้ที่ 5 ทางซ้ายและขวา) ส่วนตรงนี้ (ชี้ที่ช่องว่าง)
มีแค่จำนวนเดียวเลยเอา 4 + 7 เท่ากับ 11 ก็เลยเติม 11 ลงในช่องว่าง
- ครู: แล้วจะเช็ดยังไงว่าคำตอบของเราเป็นคำตอบที่ถูกต้อง
- กาหลง: ก็เอาตรงนี้ 5 + 4 + 7 ได้ 16 และ 5 + 11 ก็เท่ากับ 16
- ครู: ตอนที่ทำข้อสอบได้ใช้แบบนี้มั๊ย
- กาหลง: เช็คค่ะ

เมื่อพิจารณาในแบบทดสอบของเธอพบว่า มีร่องรอยให้เห็นได้ชัดเจนว่ามีการตรวจสอบคำตอบโดยการพิจารณาว่าผลบวกทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน คือมีค่าเท่ากับ 16 ดังภาพประกอบ 41

1. $5 + 4 + 7 = 5 + 11$

เหตุผลที่ทำให้ได้คำตอบ

$5 + 4 + 7 = 5 + (4 + 7)$ คำนวณค่า
 บอกว่า $5 + 4 + 7 = ๑๖$ ก็ตอบว่า
 $= 5 + 11$ เพราะว่า พอเอา ๔ กับ ๗
~~บวก~~ รวมแล้ว ในวงเล็บ = 11

ภาพประกอบ 41 การเขียนตอบในแบบทดสอบเด็กหญิงกาหลง

กล่าวโดยสรุปในจากที่นำเสนอมาจะเห็นว่าในส่วนของการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปนักเรียนในกลุ่ม 3 มีลักษณะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

1. เมื่อหาข้อคำตอบหรือข้อสรุปได้แล้วจะมีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนเองอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้นั้นมีความถูกต้องหรือไม่
2. วิธีการที่ใช้ในการประเมินความน่าเชื่อถือของข้อสรุปจะใช้การพิจารณาว่าจำนวนที่เติมลงไปนั้นทำให้ค่าของทางด้านซ้ายมือและด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยการคำนวณผลลัพธ์ทางซ้ายและผลลัพธ์ทางขวาเพื่อนำมาเปรียบเทียบกัน

ตาราง 58 สรุปลักษณะการให้เหตุผลเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวนของนักเรียนกลุ่ม 3

ลักษณะการวิเคราะห์ ประโยคเปิด	ลักษณะการสร้างข้อสรุป	ลักษณะการประเมินความ น่าเชื่อถือของข้อสรุป
A31 มีความเข้าใจที่ถูกต้องว่า เครื่องหมายเท่ากับคือสัญลักษณ์ที่ใช้แทนความสัมพันธ์การเท่ากันระหว่างนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายมือ และนิพจน์ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ A32 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่าง ต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน A33 มองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยค	I31 สามารถสร้างข้อสรุปที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ ไม่ว่าประโยคเปิดจะมีลักษณะอย่างไร I32 สร้างข้อสรุปโดยใช้วิธีการคิดในเชิงความสัมพันธ์ (Relational Thinking) ซึ่งเกิดจากการมองความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค โดยไม่ใช้การคิดคำนวณ (Computational Thinking) I33 ลักษณะการอ้างเหตุผลของนักเรียนนี้จะเป็นการให้เหตุผลที่มีความชัดเจน เพียงพอ และสมเหตุสมผล	E31 มีการคิดทบทวนหรือตรวจสอบข้อสรุปของตนเองอีกครั้งหนึ่งเพื่อให้แน่ใจว่าข้อสรุปที่ได้นั้นมีความถูกต้องหรือไม่ E32 ใช้วิธีการการคำนวณผลลัพธ์ทางซ้ายและผลลัพธ์ทางขวาเพื่อนำมาเปรียบเทียบกันว่ามีค่าเท่ากันหรือไม่

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายวิษณุ นภาพันธ์
วันเดือนปีเกิด	18 มีนาคม 2517
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	88/4 หมู่ที่ 2 ตำบลนาพรุ อำเภอพระพรหม จังหวัดนครศรีธรรมราช 80000
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2536	มัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนร่อนพิบูลย์เกียรติวสุนทราภิวัดณ์ จังหวัดนครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2540	ครุศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 สถาบันราชภัฏนครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2544	การศึกษามหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยทักษิณ
พ.ศ. 2551	การศึกษาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตรศึกษา) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ