

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

ปริณูณานิพนธ์
ของ
กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2553

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสารใน 2 มิติ

ปริญาณพนธ์
ของ
กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2553
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

บทคัดย่อ
ของ
กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มีนาคม 2553

กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา. (2553). ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย

ศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์ ดร.สิริ สิรินิลกุล,

อาจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์.

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ ภายใต้อันตรกิริยาอนุโลมบีซึ่งกำหนดให้ประจุบวกไม่เคลื่อนที่และสสารเป็นกลางทางไฟฟ้า $\sum_{i=1}^k Z_i = N$ โดยที่ $k \geq 2$ เมื่อ k แทนจำนวนนิวเคลียส จำนวนนี้ได้จากการพิจารณาขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์อนุโลมบีที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและอันตรกิริยาระหว่างนิวเคลียสซึ่งอยู่ในรูปของความหนาแน่นของอนุภาค $\rho(\mathbf{x})$ โดยที่ $\int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N$ และขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ซึ่งอยู่ในรูปของ $\int d^3\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})$ พลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนแสดงในรูปฟังก์ชันของจำนวนอิเล็กตรอนและจำนวนนิวเคลียส โดยขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ได้แก่ $E_N > -4q N(1 + Z_{\max})$ ในหน่วยรีดเบิร์ก เมื่อ q แทนจำนวนของสถานะสปินที่มีผลต่อแต่ละอนุภาค และ $q = (2s+1)$ เมื่อ s แทนเลขสปินของอนุภาค จากขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น $-E_N \sim N$ สรุปได้ว่าผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้นจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสสารประเภทเฟอร์มิออนจะเกิดการขยายตัวของสสารจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบใน 2 มิติ และสสารที่เป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลีหรือสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติยังคงความเสถียร ในขณะที่ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ได้แก่ $E_N > -4N^2(1 + Z_{\max})$ เมื่อ $Z_{\max}$ แทนประจุของนิวเคลียสที่มากที่สุดในหน่วยของ $|e|$ และเมื่อนำขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติดังกล่าวมาพิจารณา ร่วมกับขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ $E_N < -0.0002N^2$ ซึ่งนำเสนอโดยมูทพรและมานเคียน (2547) จะได้ขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ได้แก่ $-4N^2(1 + Z_{\max}) < E_N < -0.0002N^2$ ในหน่วยรีดเบิร์ก และจากขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น $-E_N \sim N^2$ สรุปได้ว่าการยุบตัวของสสารประเภทโบซอนจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบใน 2 มิติ คือความไม่เสถียรอันเนื่องจากการคายพลังงานของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก

LOWER BOUNDS FOR THE GROUND STATE ENERGY OF MATTER IN
TWO DIMENSIONS

AN ABSTRACT
BY
KITTIKAK SHIWONGSA

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Physics
at Srinakharinwirot University
March 2010

Kittisak Shiwongsa. (2010) *Lower Bounds for the Ground State Energy of Matter in Two Dimensions*. Master thesis, M.Ed. (Physics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Dr. Siri Sirininlakul, Dr. Pisuttawan Sripirom.

The lower bounds for the ground state energy in two dimensions with Coulomb interactions, fixed positive charges and nature matter $\sum_{i=1}^k Z_i = N$ in the case $k \geq 2$ where k is the nuclei number are obtained by considering the general bound for Coulomb potential due to electron - electron interaction and nucleus - nucleus interaction, which is written in term of particle density $\rho(\mathbf{x})$, $\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N$ and the lower bound for expectation value of kinetic energy, which is in term of $\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})$. The ground state energy of boson and fermion types as functions of the number N of electrons and of the nuclear charges by the lower bound for the ground state energy of fermionic matter in two dimensions is $E_N > -4\underline{q} N(1 + Z_{\max})$ in Rydberg unit, where $\underline{q}$ is the number of spin states available to each particle, $\underline{q} = (2s+1)$ where s is spin number. Furthermore, the bound for the ground state energy of fermionic matter $-E_N \sim N$ it follows that the difference of ground state energy is zero which implies that fermionic matter would inflate when two systems brought together which satisfying with the exclusion principle, in the other word, fermionic matter remains stable. The lower bound for the ground state energy of bosonic matter in two dimensions is $E_N > -4N^2(1 + Z_{\max})$ where $Z_{\max}$ corresponds to the nucleus with largest charge in units of $|e|$. When combining this lower bound with the upper bound in two dimensions, derived by Muthaporn C. and Manoukian E.B. (2004), which is $E_N < -0.0002N^2$, the range of the ground state energy of bosonic matter in two dimensions, which is $-4N^2(1 + Z_{\max}) < E_N < -0.0002N^2$ in Rydberg unit, is possessed. As for the bound for the ground state energy of bosonic matter, $-E_N \sim N^2$ so that in two dimensions, the collapse of the two systems into one is unstable as the released energy becomes overwhelmingly large for large number of particle.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง
ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ
ของ
กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)
วันที่.....เดือน.....พ.ศ. 2553

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร.ศิริ สิรินิลกุล)

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แคมมณี)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ศิริ สิรินิลกุล)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.ชัยพจน์ มุทาพร)

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัย

จาก

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประกาศคุณูปการ

เนื่องด้วยปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยฟิสิกส์ทฤษฎี ซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะและ
ชี้แนะการทำงานจาก อาจารย์ ดร. สิริ สิรินิลกุล และอาจารย์ ดร. พิศุทธวรรณ ศรีภิรมย์ จนทำให้งาน
ลุล่วงได้ด้วยดี รวมทั้งความเมตตาและน้ำใจของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของการทำวิจัยที่
ผ่านมา ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.สุพิชญ์ แชนมณี ที่ชี้แนะบางเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่
ใช้แก้ปัญหาในงานวิจัยนี้ และอาจารย์ ดร.ชัยพจน์ มุทาพร ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการ
ในการสอบปากเปล่า รวมทั้งคำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพิ่มเติมเกี่ยวกับปริญญานิพนธ์
ฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้
ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่คอย
ช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำงานวิจัยตลอดมา

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และญาติๆ ทุกคน ที่ให้กำลังใจ และ
สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

กิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	4
ความสำคัญของการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยนี้	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
อะตอม	6
ฟังก์ชันเดลตาดีแรกใน 2 มิติ	21
ฟังก์ชันคลื่นและความหนาแน่นของอนุภาคใน 2 มิติ	22
อนุภาคโบซอนและอนุภาคเฟอร์มิออน	30
กฎ $N^{5/3}$ สำหรับอนุภาคโบซอน	31
ผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติ	33
อสมการที่นำมาประยุกต์ใช้	35
ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย	39
อนุกรมเทย์เลอร์	40
ฟังก์ชันเบสเซล	41
เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	47
3 วิธีดำเนินงานวิจัย	49
ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์กู่ลอมบ์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ	50
ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ	84
ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ	92
ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์กู่ลอมบ์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ	93
ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ	99
ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ	102
4 ผลการวิจัย	104

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ.....	107
สรุปผลการวิจัย.....	107
อภิปรายผลการวิจัย.....	107
ข้อเสนอแนะ.....	109
บรรณานุกรม.....	110
ภาคผนวก.....	113
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	136

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ความสัมพันธ์ระหว่างเลขควอนตัม (n, ℓ, m_ℓ) กับเซलय่อยและจำนวนออร์บิทัล....	17

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 เวกเตอร์ตำแหน่งของนิวเคลียสและอิเล็กตรอนตัวที่ i และตัวที่ j ใน 3 มิติ.....	1
2 ตารางธาตุ.....	7
3 ระบบพิกัดที่ใช้แทนแบบจำลองของอิเล็กตรอนในอะตอม โดยสมมติให้นิวเคลียส อยู่ที่จุดกำเนิด $[0,0,0]$ และแทน $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$	12
4 พิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)	14
5 เครื่องมือของสเตอริโอ – เกอร์ลาซ.....	18
6 กราฟ $f(t)u_0(t) = 1u_0(t)$	39
7 กราฟ $f(t)u_a(t) = 1u_a(t)$	40
8 แผนภูมิแสดงกระบวนการหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร ใน 2 มิติ.....	49

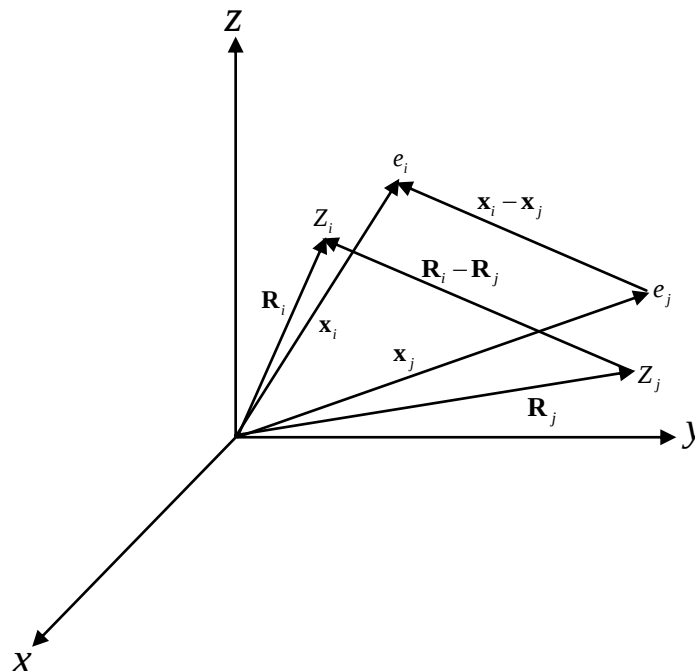
บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ความสำเร็จหนึ่งที่สำคัญของกลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ได้แก่ การอธิบายความเสถียรภาพ (Stability) และพลังงานที่สถานะพื้น (Ground State Energy) ของอะตอมไฮโดรเจน หรือสภาวะที่อิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนมีพลังงานอยู่ในระดับต่ำที่สุด หรือกล่าวว่าเป็นสภาวะที่อะตอมเสถียรมากที่สุด ความเสถียรและพลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมไฮโดรเจนได้อธิบายไว้ในกลศาสตร์ของชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger Mechanics) และหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg Uncertainty Principle) แต่ไม่สามารถนำการอธิบายพลังงานที่สถานะพื้นดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับปัญหาของอะตอมที่ซับซ้อน หรือระบบที่มีอนุภาคจำนวนมากได้

ในปี ค.ศ. 1967 ไดซอน; และเลนาร์ด (Dyson; & Lenard. 1967: 423) ได้ใช้วิธีการประมาณค่าหาพลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมที่ซับซ้อนภายใต้ศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอนุภาค พบว่าสามารถพิจารณาพลังงานที่สถานะพื้นจากเลขยกกำลังของอนุภาค ดังนี้ $-E_N \sim N^\gamma$ เมื่อ E_N แทนพลังงานที่สถานะพื้นในระบบ N อนุภาค และ N แทนจำนวนอิเล็กตรอน โดยที่จำนวนจริง $\gamma > 1$



ภาพประกอบ 1 เวกเตอร์ตำแหน่งของนิวเคลียสและอิเล็กตรอนตัวที่ i และตัวที่ j ใน 3 มิติ

พิจารณาภาพประกอบ 1 เขียนตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian Operator) ได้ ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \sum_{i<j}^k V(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k V(\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j) \quad (1.0.1)$$

เมื่อ	$\sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m}$	แทนพลังงานจลน์ของระบบ
	N	แทนจำนวนอิเล็กตรอน
	$\hat{\mathbf{p}}_i$	แทนตัวดำเนินการเวกเตอร์โมเมนตัมของอิเล็กตรอนตัวที่ i
	m	แทนมวลของอิเล็กตรอน
	$\sum_{i<j}^N V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$	แทนศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนตัวที่ i กับอิเล็กตรอนตัวที่ j
	$\mathbf{x}_i$	แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอิเล็กตรอนตัวที่ i
	$\mathbf{x}_j$	แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของอิเล็กตรอนตัวที่ j
	$\sum_{i<j}^k V(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)$	แทนศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างนิวเคลียสตัวที่ i กับนิวเคลียสตัวที่ j
	k	แทนจำนวนนิวเคลียส
	$\mathbf{R}_i$	แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของนิวเคลียสตัวที่ i
	$\mathbf{R}_j$	แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของนิวเคลียสตัวที่ j
	$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k V(\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j)$	แทนศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนตัวที่ i กับนิวเคลียสตัวที่ j

เมื่อต้องการหาพลังงานที่สถานะพื้น จากสมการ (1.0.1) พบว่าสมการชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger Equation; $\hat{H}\Psi = E\Psi$) ไม่สามารถใช้กับพจน์ที่ 2 ในด้านขวามือ ของสมการ (1.0.1) ได้ แต่สามารถหาพลังงานที่สถานะพื้น ของอนุภาค จำนวนมาก จากการใช้เทคนิคการประมาณ ได้ ดังนั้นพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคในกลศาสตร์ควอนตัม (E_N) จึงเป็นค่าประมาณ

ไดซอนและเลนาร์ด พบว่าเมื่อพิจารณาตามศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน ($V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \equiv V(\mathbf{x})$) ในรูปต่างๆ พลังงานที่สถานะพื้น E_N ในกลศาสตร์ควอนตัม จะมีค่าได้ดังต่อไปนี้

1. $-E_N \sim N$ สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออนและ $-E_N \sim N^{7/5}$ สำหรับอนุภาคโบซอน ถ้า

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad (1.0.2)$$

2. $-E_N \sim N$ สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออนและอนุภาคโบซอน ถ้า

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1 - e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \quad (1.0.3)$$

เมื่อ μ แทนค่าคงที่ใดๆ

3. $-E_N \sim N^2$ สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออนและอนุภาคโบซอน ถ้า

$$V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| e^{-\mu|\mathbf{x}|} \quad (1.0.4)$$

จากเงื่อนไขข้างต้น จะเห็นว่าสำหรับสสารประเภทโบซอน (Bosonic Matter) พลังงานที่สถานะพื้นจะเป็นไปตามกฎ เลขยกกำลัง $-E_N \sim N^\gamma$ โดยเลขยกกำลังของ N ต้องมีค่ามากกว่า 1 ($\gamma > 1$) ยิ่งไปกว่านั้น กฎเลขยกกำลัง ดังกล่าวยังแสดง ถึงอเสถียรภาพของสสาร เมื่อพิจารณาจากระบบที่มีอนุภาคประจุบวก N อนุภาค และอนุภาคประจุลบ N อนุภาค ดังนั้นระบบของสสารที่เป็นกลางจะประกอบด้วย $2N$ อนุภาค เมื่อนำระบบ $2N$ อนุภาค 2 ระบบ มารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(2N + 2N)$ อนุภาค แต่ในกรณีของสสารประเภท โบซอนจะพิจารณาเฉพาะ อนุภาคประจุลบ เท่านั้น เนื่องจาก อนุภาค ประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่ ดังนั้นโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย N อนุภาค เมื่อนำ ระบบ N อนุภาค 2 ระบบ มารวมกัน โครงสร้างของสสาร จะประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค การคายพลังงานของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก จะมีอิทธิพลต่อการยุบตัว ของสสารประเภทโบซอนจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบ ที่เป็นสัดส่วนกับ $((2N)^\gamma - 2(N)^\gamma)$ นั่นคือพลังงานที่สถานะพื้นจะลดลงและมีลักษณะไม่เชิงเส้น นี่ไม่ใช่กรณีของสสารประเภทเฟอร์มิออนที่มีพลังงานที่สถานะพื้นเพิ่มมากขึ้นและมีลักษณะเชิงเส้นเท่านั้นและยังคงเสถียร ดังนั้นการหาค่ากำลังเดียวของ N สำหรับพลังงานที่สถานะพื้นของสสารจึงเป็นสิ่งสำคัญมาก

ในการหาพลังงานที่สถานะพื้นของสสารที่ผ่านมา นักวิจัยหลายท่านได้ศึกษา หาพลังงานที่สถานะพื้นของสสารโดยใช้ฟังก์ชันคลื่นทดลอง (Trial Wave Function) เช่น ในปี ค.ศ. 2004 มาโน - เกียน และมูทาพร (Manoukian E.B.; & Muthaporn C. 2004: 152 – 154) ได้ใช้ฟังก์ชันคลื่น

ทดลอง ดังนี้ $\psi_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^v \left(\frac{1}{\sqrt{L_0}} \cos \left(\frac{\pi(x_i - L_i^{(j)})}{2L_0} \right) \right)$ เพื่อหาขอบเขตบนของพลังงาน ที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอน เมื่อ $L_i^{(j)}$ แทนความยาวของแต่ละด้านของบล็อก และได้ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นในมิติใดๆ ดังนี้ $E_N < -\left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) \frac{N^{(2+v)/v}}{16\pi^2 v^3 (2)^v}$ เมื่อ $N \geq (2)^v$ และ v แทนจำนวนมิติใดๆ แต่เนื่องจากขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนยังไม่สามารถหาในรูปของมิติใดๆ ได้

เพื่อให้ครอบคลุมขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารและ กำจัดปัญหาในการหาฟังก์ชันคลื่นทดลองที่สอดคล้องกับระบบที่ประกอบด้วย N อนุภาค ผู้วิจัยจึงสนใจ หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร จากการ พิจารณาความหนาแน่น ของอนุภาค ที่สอดคล้องกับ $\int d^n \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N$ แทนการใช้ฟังก์ชันคลื่นทดลอง โดยเริ่มพิจารณาระบบใน 2 มิติ เพื่อเป็นแนวทางในการหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารในมิติใดๆ ในลำดับต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายของการวิจัยไว้ ดังนี้

หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร ประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ

ความสำคัญของการวิจัย

1. ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารโดยไม่ จำเป็นต้องพิจารณาจากฟังก์ชันคลื่นทดลอง

2. ได้ใช้ประโยชน์จาก หลักการทางฟิสิกส์และเทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นพร้อมทั้ง ทำให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความ เสถียรของสสารใน 2 มิติ

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้มุ่งหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและ สสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ด้วยเทคนิคทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากระบบที่เป็นกลางทางไฟฟ้าภายใต้ศักย์คูโลมบ์และตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนของระบบ ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^N V(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k V(\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j) \quad (1.0.5)$$

และจำนวนของอนุภาคที่ได้จากเงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$$\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N \quad (1.0.6)$$

เมื่อ $\rho(\mathbf{x})$ แทนความหนาแน่นของอนุภาค

ซึ่งมีขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. หาและได้ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ
2. หาและได้ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ
3. หาและได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยนี้

สามารถอธิบายเสถียรภาพของสสารใน 2 มิติ ด้วยขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎี

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ประกอบด้วย

- 2.1 อะตอม (Atom)
- 2.2 ฟังก์ชันเดลตาดีแรกใน 2 มิติ (The Dirac Delta Function in Two Dimensions)
- 2.3 ฟังก์ชันคลื่นและความหนาแน่นของอนุภาคใน 2 มิติ (Wave Function and the Particle Density in Two Dimensions)
- 2.4 อนุภาคโบซอนและอนุภาคเฟอร์มิออน (Bosons and Fermions)
- 2.5 กฎ $N^{5/3}$ สำหรับอนุภาคโบซอน (The $N^{5/3}$ Law for Bosons)
- 2.6 ผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติ (Fourier Transform in Two Dimensions)
- 2.7 อสมการที่นำมาประยุกต์ใช้
- 2.8 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit Step Function)
- 2.9 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)
- 2.10 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

2.1 อะตอม (Atom)

อะตอมเป็นหน่วยมูลฐาน (Basic Unit) ของสสาร อะตอมประกอบไปด้วยนิวเคลียสที่เป็นแกนกลางซึ่งประกอบด้วย การรวมกันของนิวตรอนที่เป็นกลางทางไฟฟ้าและโปรตอนที่มีประจุเป็นบวก (ยกเว้นในกรณีของไฮโดรเจน 1 อะตอม จะไม่มีนิวตรอน) ล้อมรอบด้วยหมอกอิเล็กตรอนที่มีประจุเป็นลบ อิเล็กตรอน ในอะตอม ยึดเหนี่ยวกับนิวเคลียสด้วยแรงไฟฟ้าสถิต (Electromagnetic Force) อะตอมจะแบ่งประเภทตามจำนวนของโปรตอน และนิวตรอนในนิวเคลียส จำนวนของโปรตอนกำหนดตามธาตุเคมี (Chemical Element) และจำนวนของนิวตรอนกำหนดตามไอโซโทป (Isotope) ของธาตุ อะตอมพบได้ในสสารทุกชนิดและเป็นรากฐานของการศึกษาวิชาเคมีและฟิสิกส์ อะตอมแต่ละชนิดมีชื่อเรียกต่างกันไปตามจำนวนอนุภาคที่ประกอบขึ้นเป็นอะตอมนั้น เรียกว่าตารางธาตุ ดังภาพประกอบ 2

Explore **key information** about the chemical elements through this periodic table

Group	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Period																			
1	1 H																	2 He	
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	
6	55 Cs	56 Ba	*	71 Lu	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	**	103 Lr	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo
*Lanthanoids			*	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb		
**Actinoids			**	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No		

ภาพประกอบ 2 ตารางธาตุ

ที่มา: WebElements Periodic Table. (2009). (Online).

อนุภาคหลักที่พบได้ในอะตอมทั่วไปมี 3 ชนิด ได้แก่

- โปรตอน (Proton) คืออนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเป็นบวกจะอยู่ในนิวเคลียสหรือใจกลางของธาตุ ธาตุเดียวกันจะมีจำนวนโปรตอนเท่ากัน
- นิวตรอน (Neutron) คืออนุภาคที่เป็นกลางไม่มีประจุไฟฟ้าอยู่ในนิวเคลียส จะมีจำนวนใกล้เคียงกับจำนวนโปรตอนแต่อาจจะแตกต่างกันได้
- อิเล็กตรอน (Electron) คืออนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเป็นลบวิ่งอยู่รอบๆ นิวเคลียส โดยปกติจำนวนอิเล็กตรอนในอะตอมที่เป็นกลางทางไฟฟ้าจะมีเท่ากับ จำนวนโปรตอน อิเล็กตรอนมีค่าสปีนเป็นจำนวนครึ่ง $\left(s = \frac{1}{2}\right)$ เป็นอนุภาคเฟอร์มิออนชนิดหนึ่ง

2.1.1 ทฤษฎีอะตอมของบอห์ร (Bohr's Atomic Theory)

ในปี ค.ศ. 1913 นีล บอห์ร (Neil Bohr) ได้เสนอทฤษฎีอะตอมของไฮโดรเจนขึ้นซึ่งสามารถอธิบายสเปกตรัมที่สังเกตเห็นได้ ทฤษฎีอะตอมของบอห์รเป็นการรวมฟิสิกส์ยุคเก่าและแนวความคิดของการควอนไทซ์พลังงานที่เสนอขึ้นมาโดย แมกซ์ พลังค์ (Max Planck) ในปี ค.ศ. 1900 นั่นคือทฤษฎีนี้เป็นทฤษฎีควอนตัมยุคเก่าของอะตอมไฮโดรเจน โดยมีสมมติฐานเบื้องต้นดังต่อไปนี้

สมมติฐาน 1 อิเล็กตรอนในอะตอมสามารถเคลื่อนที่รอบนิวเคลียสได้ในวงโคจรวงกลมที่แน่นอนโดยไม่มีการแผ่รังสีออกมา สถานะเหล่านี้เรียกว่าสถานะนิ่งของอะตอม (หรือของระบบ) และการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในสถานะนิ่งนี้ จะเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของกลศาสตร์ยุคเก่า

สมมติฐาน 2 สถานะนิ่งที่ยอมให้อิเล็กตรอนอยู่ได้นี้เป็นสถานะซึ่งโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิทัล (orbital angular momentum) ของอิเล็กตรอน เป็นจำนวนเต็มเท่าของ $\hbar$ กล่าวคือ

$$L = mvr = n\hbar \quad (2.1.1)$$

เมื่อ n แทนเลขควอนตัมหลัก (Principal Quantum Number) และ $n = 1, 2, 3, \dots$

สมมติฐาน 3 การปล่อยหรือดูดกลืนรังสีเกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนกระโดดจากสถานะนิ่งหนึ่งไปยังอีกสถานะนิ่งหนึ่ง เรียกว่าอะตอมเกิดการเปลี่ยนสถานะ (Transition) การเปลี่ยนสถานะสถานะนี้จะทำให้อะตอมปล่อยหรือดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (หรือโฟตอน) ที่มีพลังงาน

$$\Delta E = h\nu = E_i - E_f \quad (2.1.2)$$

สำหรับสมมติฐาน 3 มีเหตุผลที่สนับสนุนจากสมมติฐานควอนตัมของ พลังค์ แต่เหตุผลที่สนับสนุนสมมติฐาน 2 มีขึ้นหลังจากที่บอร์ได้ตั้งสมมติฐานแล้วเป็นเวลาหลายปี กล่าวคือจากสมมติฐานของเดอ บรอยล์ (De Broglie's Hypothesis) ในปี ค.ศ. 1923 ซึ่งเกี่ยวกับคุณสมบัติคลื่นของสสาร เดอ บรอยล์คิดว่ามีคลื่นอิเล็กตรอนที่ล้อมรอบนิวเคลียสอยู่แทนที่จะเป็นอนุภาคอิเล็กตรอน และวงโคจรของบอร์แต่ละวงโคจรจะต้องประกอบด้วยจำนวนเต็มของอิเล็กตรอนเดอ บรอยล์ วงโคจรแรกมีเส้นรอบวงเท่ากับหนึ่งความยาวคลื่นอิเล็กตรอน วงที่สองมีเส้นรอบวงเท่ากับสองความยาวคลื่น และวงโคจรต่อไปแต่ละวงมีความยาวของเส้นรอบวงต่างจากวงถัดไปหนึ่งความยาวคลื่นเสมอ ดังนั้น

$$2\pi r = n\lambda \quad (2.1.3)$$

จากสมมติฐานของเดอ บรอยล์

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (2.1.4)$$

แทนค่าสมการ (2.1.1) ลงในสมการ (2.1.3) จะได้

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad (2.1.5)$$

ระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจน หาได้จากการสมมติว่าอิเล็กตรอนเคลื่อนที่อยู่ในวงโคจรวงกลมที่เป็นสถานะหนึ่ง มีรัศมี r_n ด้วยความเร็ว v_n ดังนั้นแรงคูลอมบ์เท่ากับแรงสู่ศูนย์กลาง

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad (2.1.6)$$

แต่ v_n จากสมมติฐานข้อที่ 2 หรือจากสมการ (2.1.5) คือ

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \quad (2.1.7)$$

แทนค่า v_n จากสมการ (2.1.7) ลงในสมการ (2.1.6) จะได้สมการของรัศมีของวงโคจรของอิเล็กตรอน คือ

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0 \quad (2.1.8)$$

เมื่อ $n=1,2,3,\dots$ และ $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$ เป็นรัศมีวงโคจรเริ่มต้นของบอห์ร์สำหรับอะตอมไฮโดรเจน

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \quad \text{และ} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5821 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad \text{แทนค่า} \quad a_0 = 0.5292 \text{ \AA}$$

สอดคล้องกับค่าที่วัดได้จากการทดลอง ดังนั้นตามทฤษฎีของบอห์ร์ อิเล็กตรอนจะอยู่ได้เฉพาะวงโคจรที่กำหนดให้ ดังนี้

$$r_n = a_0, 4a_0, 9a_0, 16a_0, \dots \quad (2.1.9)$$

เราสามารถหาความเร็วของอิเล็กตรอนในวงโคจรเหล่านี้ได้โดยแทนค่า r_n จากสมการ (2.1.8) ในสมการ (2.1.7) จะได้

$$v_n = \frac{1}{n} \frac{e^2}{\hbar 4\pi\epsilon_0} = \frac{v_1}{n} \quad (2.1.10)$$

$$\text{เมื่อ } v_1 = \frac{\hbar}{ma_0} = \frac{e^2}{\hbar 4\pi\epsilon_0}$$

พลังงานรวม E_n ของอิเล็กตรอนในวงโคจรที่ n เป็นผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์กล่าวคือ

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{e^2}{r_n 4\pi\epsilon_0} \right) \quad (2.1.11)$$

แทนค่า v_n จากสมการ (2.1.10) และ r_n จากสมการ (2.1.8) ลงในสมการ (2.1.11) จะได้

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{e^4 m}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \right) \quad (2.1.12)$$

หรือ

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} \quad (2.1.13)$$

$$\text{เมื่อ } E_1 = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} = -13.6 \text{ eV}$$

โดยที่ E_1 เป็นพลังงานของอิเล็กตรอนในวงโคจรแรกของบอห์ร์สำหรับอะตอมไฮโดรเจน สำหรับ $n=1,2,3,\dots$ ระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจนคือ

$$E_n = E_1, \frac{E_1}{4}, \frac{E_1}{9}, \frac{E_1}{16}, \dots \quad (2.1.14)$$

โดยปกติแล้วอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนจะอยู่ในสถานะพลังงานต่ำสุดเสมอ (ในกรณีนี้คือวงโคจรแรกของบอร์ $n=1$) สถานะพลังงานนี้เรียกว่าสถานะพื้น หรือสถานะปกติ (Normal State) ของอะตอมไฮโดรเจน พลังงานที่ทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมเท่ากับขนาด E_1 ($+13.6\text{ eV}$) ของพลังงานสถานะพื้น ซึ่งเรียกว่าพลังงานการแตกตัวเป็นไอออน (Ionization Energy) ถ้าอิเล็กตรอนอยู่ในสถานะที่มีพลังงานมากกว่าสถานะพื้น อิเล็กตรอนและอะตอมนั้นอยู่ในสถานะกระตุ้น (Excited State) พลังงานที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะอิเล็กตรอนจากสถานะพื้นไปยังสถานะกระตุ้น E_n คือ $(E_n - E_1)$ และเรียกว่าพลังงานการกระตุ้น (Excitation Energy)

2.1.2 โครงสร้างอะตอม (Atomic Structure)¹

แบบจำลองของอะตอมที่ได้รับการยอมรับมากที่สุดคือแบบจำลอง อะตอมเชิงคลื่น (Wave Model) ซึ่งพัฒนามาจากแบบจำลองอะตอมของบอร์ (Bohr Model) ในกลศาสตร์ควอนตัมแบบจำลองอะตอมเชิงคลื่นอย่างง่าย เขียนได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น (Wave Function) ที่สอดคล้องกับสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (Time Dependent Schrödinger Wave Equation) ดังนี้

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.1.15)$$

เมื่อ	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$	แทนตัวดำเนินการพลังงาน (Energy Operator ; $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$)
	$\Psi(\mathbf{x}, t)$	แทนฟังก์ชันเจาะจง (Eigenfunction)
	$\mathbf{x}$	แทนเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคใน 3 มิติ
	t	แทนเวลาใดๆ ในระบบ
	$\hat{H}$	แทนตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน

สมการ (2.1.15) พิจารณาจากสถานะนิ่ง (Stationary State) ผลลัพธ์ของสมการชเรอดิงเงอร์สามารถแยกฟังก์ชันพิจารณาได้ ดังนี้

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) T(t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-iEt/\hbar} \quad (2.1.16)$$

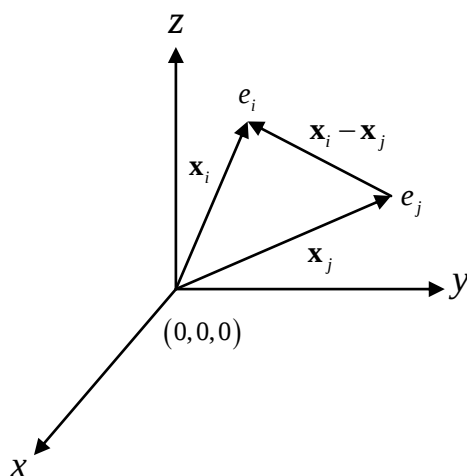
¹ Bethe, A. Hans and Jackiw, W. Roman (1993). *Intermediate Quantum Mechanics*. 3rd ed. pp. 1 – 5.

เมื่อ $\psi(\mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคเท่านั้น
 $T(t)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาเท่านั้น

สมการ (2.1.16) เขียนสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Time Independent Schrödinger Wave Equation) ได้ ดังนี้

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (2.1.17)$$

เมื่อ E แทนค่าเฉพาะของพลังงาน (Energy Eigenvalue)



ภาพประกอบ 3 ระบบพิกัดที่ใช้แทนแบบจำลองของอิเล็กตรอนในอะตอม โดยสมมติให้นิวเคลียสอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ และแทน $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$

ที่มา: Tang C.L. (2005). *Fundamentals of Quantum Mechanics for Solid State Electronics and Optics*. p. 111.

ถ้าไม่สนใจ อันตรกิริยาจากสปินของอิเล็กตรอน ผลจากปฏิกริยานิวเคลียร์ และกำหนดให้ตำแหน่งของนิวเคลียสอยู่กับที่และอยู่ที่จุดกำเนิด $[0,0,0]$ ดังภาพประกอบ 3 สามารถเขียนตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนภายใต้พลังงานศักย์คูลอมบ์ของอิเล็กตรอนในอะตอมได้ ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \quad (2.1.18)$$

เมื่อ	$\sum_{i<j}^N \frac{e^2}{ \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j }$	แทนพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง อิเล็กตรอนตัวที่ i กับอิเล็กตรอนตัวที่ j
	$- e $	แทนประจุของอิเล็กตรอน
	$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{ \mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j }$	แทนพลังงานศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่าง อิเล็กตรอนตัวที่ i กับนิวเคลียสตัวที่ j
	Ze	แทนประจุของนิวเคลียส

สมการ (2.1.18) แทนตัวดำเนินการของเวกเตอร์โมเมนตัม ($\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$) พิจารณาในหน่วยอะตอมของฮาร์ทรี่ (Hartree's Atomic Unit (au)) โดยกำหนดให้ค่าคงที่ต่างๆ เท่ากับหนึ่ง ($e = \hbar = m = 1$) และใช้รัศมีอะตอมไฮโดรเจนของบอร์ $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ เขียนสมการที่ (2.1.24) ได้ ดังนี้

$$\left[\sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + 2 \left(E + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} - \sum_{i<j}^N \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right) \right] \psi = 0 \quad (2.1.19)$$

โดยที่

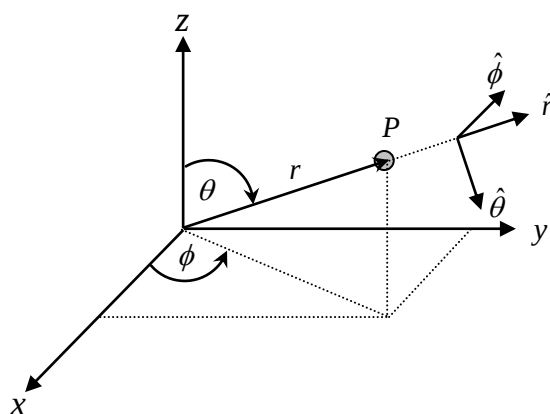
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (2.1.20)$$

เมื่อ	∇	แทนลาปลาเซียน (Laplacian) ในพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates)
	θ	แทนมุมเชิงขั้ว (Polar Angle)
	ϕ	แทนมุมแอดิมูทัล (Azimuthal Angle)

สำหรับกรณีอะตอมไฮโดรเจน สมการ (2.1.19) สามารถพิสูจน์ให้เป็นค่าที่แน่นอนได้ และจะมีระดับพลังงานในหน่วยของริดเบิร์ก $\left(1\text{Ry} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 13.6057\text{ eV}\right)$ คือ

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \text{Ry} \quad (2.1.21)$$

เมื่อ	Z	แทนเลขอะตอม (Atomic Number)
	n	แทนเลขควอนตัมหลัก (Principal Quantum Number)



ภาพประกอบ 4 พิกัดทรงกลม (r, θ, ϕ)

ที่มา: Griffiths, David J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. p. 123

ผลลัพธ์ของสมการ (2.1.19) สำหรับอะตอมไฮโดรเจน ในระบบทรงกลม ดังภาพประกอบ 4 สามารถพิจารณาแยกออกมาได้เป็น 3 ส่วน คือ

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (2.1.22)$$

เมื่อ	$R(r)$	แทนส่วนของฟังก์ชันที่ขึ้นกับรัศมี r
	$\Theta(\theta)$	แทนส่วนของฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม θ
	$\Phi(\phi)$	แทนส่วนของฟังก์ชันที่ขึ้นกับมุม ϕ

แยกสมการด้านขวามือของสมการ (2.1.22) เพื่อหาผลลัพธ์ที่สะฟังก์ชัน ได้ดังต่อไปนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[2 \left(E - \frac{Z}{r} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] R &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \Theta &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.23)$$

เมื่อ ℓ แทนเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (2.1.23) นำไปสู่เลขควอนตัม 3 ชนิด ซึ่งเป็นตัวกำหนดสถานะของอิเล็กตรอนในอะตอม ได้แก่ เลขควอนตัมหลัก (n) เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม (ℓ) และเลขควอนตัมแม่เหล็ก (m_ℓ)

2.1.3 เลขควอนตัม (Quantum Number)

ใช้ความรู้พื้นฐานทางกลศาสตร์ควอนตัมสร้างสมการคลื่น (Wave Equation) เพื่อคำนวณหาโอกาสที่จะพบอิเล็กตรอนในระดับพลังงานต่างๆ จากสมการคลื่นทำให้ทราบว่าเราไม่สามารถบอกตำแหน่งที่แน่นอนของอิเล็กตรอนได้ ตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก แต่อิเล็กตรอนจะกระจายอยู่ทั่วทุกทิศทางของอะตอม ดังนั้นแบบจำลองอะตอมที่สามารถอธิบายอิเล็กตรอนในอะตอมในลักษณะนี้ได้ดีที่สุด คือแบบจำลองอะตอมแบบกลุ่มหมอก ซึ่งเป็นแบบจำลองอะตอมของชเรอดิงเงอร์ กล่าวว่า “อะตอมประกอบด้วยกลุ่มหมอกอิเล็กตรอนรอบ นิวเคลียสที่มีลักษณะเป็นทรงกลม บริเวณกลุ่มหมอกที่บ่งชี้แสดงว่าโอกาสที่จะพบอิเล็กตรอนมีมากและบริเวณกลุ่มหมอกจางแสดงว่าโอกาสที่จะพบอิเล็กตรอนมีน้อย ” ที่อยู่ของอิเล็กตรอนหรือบริเวณที่มีโอกาสพบอิเล็กตรอน เรียกว่า “ออร์บิทัล (Orbital)” ซึ่งออร์บิทัลที่มีระดับพลังงานเท่ากันเรียกว่า “เชลล์ (Shell)” กลุ่มของเชลล์ย่อยเรียกว่า “เชลล์ย่อย (Subshell)” ขนาดและรูปร่างของออร์บิทัลจะขึ้นอยู่กับสภาพพลังงานของอิเล็กตรอนอนุภาคนั้นๆ อิเล็กตรอนที่มีระดับพลังงานต่ำจะมีออร์บิทัลอยู่ใกล้ นิวเคลียส ส่วนอิเล็กตรอนที่มีระดับพลังงานสูงจะอยู่ห่างนิวเคลียสเป็นระยะทางเพิ่มขึ้นและพบว่าพลังงานของอิเล็กตรอนมีค่าห่างกันเป็นช่วงคงที่ (Quantized) เป็นไปตามทฤษฎีควอนตัม (Quantum Theory) จะใช้เลขควอนตัม 4 ชนิด เพื่อกำหนดพลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอม ดังนี้

2.1.3.1 เลขควอนตัมหลัก (The Principle Quantum Number) ใช้กำหนดพลังงานของอิเล็กตรอนในเชลล์ต่างๆ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย n ซึ่งมีค่าตั้งแต่ $1, 2, 3, \dots, \infty$ เมื่อเปรียบเทียบกับเชลล์อิเล็กตรอนในทฤษฎีของบอร์ จะเห็นได้ว่า $n=1$ คือเชลล์ K , $n=2$ คือเชลล์ L และ $n=3$ คือเชลล์ M เป็นต้น อิเล็กตรอนในแต่ละเชลล์จะมีจำนวนไม่เกิน $2n^2$ อนุภาค

2.1.3.2 เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม (The Angular Momentum Quantum Number) ใช้กำหนดโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอน ซึ่งจะบอกรูปร่างของออร์บิทัล หรือหมอกอิเล็กตรอนนั้นๆ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย ℓ และมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มขึ้นกับเลขควอนตัมหลักที่มีค่าตั้งแต่ $0, 1, 2, \dots$ ถึง $(n-1)$ จากสมมติฐานของบอร์ โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนขึ้นอยู่กับเลขควอนตัมสำคัญ $\left(L = \frac{nh}{2\pi} \right)$ แต่จากการหาคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้ทฤษฎีควอนตัมพบว่า

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar \quad (2.1.24)$$

ที่สถานะพื้นฐาน $n=1$ จะได้ $\ell=0$ โมเมนตัมเชิงมุมมีค่าเพียงค่าเดียวคือศูนย์

ที่สถานะกระตุ้น $n=2$ จะได้ $\ell=0, 1$ โมเมนตัมเชิงมุมมี 2 ค่า คือ $0, \sqrt{2} \hbar$

ที่สถานะกระตุ้น $n=3$ จะได้ $\ell=0, 1, 2$ โมเมนตัมเชิงมุมมี 3 ค่า คือ $0, \sqrt{2} \hbar, \sqrt{6} \hbar$

ที่ระดับพลังงาน n เดียวกัน แต่อิเล็กตรอนที่ระดับพลังงานเดียวกันนี้ มีโมเมนตัมเชิงมุมต่างกัน เรียกสภาพเช่นนี้ว่าเป็นสภาพซ้อนสถานะ (Degeneracy) เช่น $n=3$ จะมี 3 สภาพซ้อนสถานะ

2.1.3.3 เลขควอนตัมแม่เหล็ก (The Magnetic Quantum Number) ใช้กำหนดทิศทางอิเล็กตรอนของออร์บิทัลย่อยในเชลล์ย่อยต่างๆ หรือเป็นตัวกำหนดโมเมนตัมเชิงมุมในสนามแม่เหล็ก ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย m_ℓ ค่า m_ℓ ขึ้นอยู่กับเลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุม จะมีค่าตั้งแต่ $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ถึง $\pm \ell$

ตาราง 1 ความสัมพันธ์ระหว่างเลขควอนตัม (n, ℓ, m_ℓ) กับเซลย่อยและจำนวนออร์บิทัล

n	ℓ	เซลย่อย	m_ℓ	จำนวนออร์บิทัล
1	0	1s	0	1
2	0	2s	0	1
	1	2p	-1 0 1	3
3	0	3s	0	1
	1	3p	-1 0 1	3
	2	3d	-2 -1 0 1 2	5

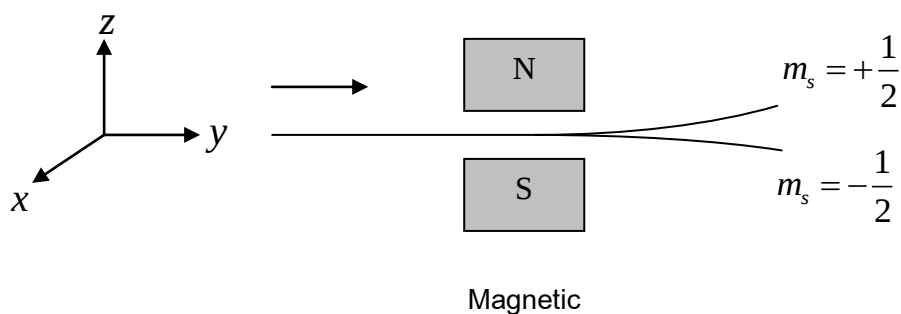
ที่มา: Liboff L. Richard. (1992). *Introductory Quantum Mechanics*. p. 441.

1.1.3.4 เลขควอนตัมของการหมุน (The Spin Quantum Number) ในปี ค.ศ. 1925 กูดสมิท (S.A. Goudsmit) และอะลันเบ็ค (G.E. Uhlenbeck) พบว่าอิเล็กตรอนมีโมเมนตัมเชิงมุมเพิ่มมาอีก 1 ตัวนอกเหนือไปจากโมเมนตัมเชิงมุมที่เกิดจากการโคจรรอบนิวเคลียส โมเมนตัมเชิงมุมนี้เกิดจากการที่อิเล็กตรอนหมุนรอบตัวเอง เรียกว่า สปิน (Spin) เรียกชื่อโมเมนตัมเชิงมุมนี้ว่าโมเมนตัมเชิงมุมของการหมุนรอบตัวเอง (Spin Angular Momentum ; $\vec{S}$) เป็นปริมาณเวกเตอร์และมีสภาพควอนไทซ์ (Quantize) เลขควอนตัม s เรียกว่าเลขควอนตัมของการหมุน (Spin Quantum number) มีค่าเพียงค่าเดียวคือ $\frac{1}{2}$ โมเมนตัมเชิงมุมของการหมุน ($\vec{S}$) หาได้จาก

$$\vec{S} = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad (2.1.25)$$

เมื่อ $s = \frac{1}{2}$ จะได้

$$\vec{S} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \hbar \quad (2.1.26)$$



ภาพประกอบ 5 เครื่องมือของสเตอร์น – เกอร์ลาช (The Stern - Gerlach Apparatus)

ที่มา: Griffiths, David J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. p. 163.

เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอกผ่านในอะตอม ดังภาพประกอบ 5 พบว่าเวกเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมของการหมุนสามารถจัดตัวได้สองลักษณะ คือขนานและสวนกับทิศทางของสนามแม่เหล็กภายนอก จะได้เลขควอนตัมแม่เหล็กของการหมุน (m_s Spin Magnetic Quantum Number) 2 ค่าคือสปินขึ้น (Spin Up) $+\frac{1}{2}$ และสปินลง (Spin Down) $-\frac{1}{2}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า อิเล็กตรอนในอะตอมไม่สามารถใช้เลขควอนตัม n เพียงตัวเดียว เหมือนกับแบบจำลองของบอร์ ได้อีกต่อไป การบอกสถานะของอิเล็กตรอนในอะตอมซึ่งมีพฤติกรรมเป็นแบบคลื่นนั้นต้องใช้เลขควอนตัม 4 ตัว คือ n, ℓ, m_ℓ และ m_s

2.1.4 หลักการกีดกันของเพาลี (Pauli's Exclusion Principle)

หลักการกีดกันกล่าวว่าอิเล็กตรอนสองตัวใด ๆ จะมีเลขควอนตัมทั้งสี่เหมือนกันทั้งหมดไม่ได้ (หรือกล่าวว่า ในอะตอม ณ สถานะทางควอนตัมหนึ่งๆ จะมีอิเล็กตรอนเกินหนึ่งตัวไม่ได้) ใช้อธิบายการจัดอิเล็กตรอนในอะตอมในออร์บิทัลใดๆ ของอะตอมจะมีอิเล็กตรอนได้สูงสุด 2 ตัว อิเล็กตรอน 2 ตัวนี้จะมีเลขควอนตัม (n, ℓ, m_ℓ) เหมือนกัน ดังนั้นตามหลักกีดกันอิเล็กตรอน 2 ตัวนี้ จะมีเลขควอนตัมตัวที่ 4 คือ เลขควอนตัมสปินต่างกัน นั่นคือตัวหนึ่งจะมีสปิน ขึ้น ส่วนอีกตัวหนึ่งจะมีสปินลง

2.1.5 พลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมไฮโดรเจน (Ground State Energy for the Hydrogenic Atom)¹

พลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมไฮโดรเจน โดยพิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา กำหนดให้อะตอมไฮโดรเจนมี $N=1$ และ $Z>0$ (ปกติ $N=1$ และ $Z=1$) สมมติให้นิวเคลียสอยู่กับที่ และมีประจุ Ze สถานะของอิเล็กตรอนเป็นไปตามฟังก์ชันคลื่น $\psi(\mathbf{x})$ โดย $|\psi(\mathbf{x})|^2$ แทนความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอิเล็กตรอนที่ตำแหน่ง $\mathbf{x}$ เนื่องจาก $|\psi(\mathbf{x})|^2$ เป็นฟังก์ชันคลื่นที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์ (Normalization) สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$\|\psi\|_2^2 = \int d^3\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2 = 1 \quad (2.1.27)$$

พลังงานจลน์ในกลศาสตร์ควอนตัมแทนด้วย

$$\langle \psi | T | \psi \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3\mathbf{x} |\nabla \psi(\mathbf{x})|^2 \quad (2.1.28)$$

เมื่อ $\hbar$ แทนค่าคงที่ของพลังค์ (Planck's Constant) $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0545 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$

พิจารณาจากพลังงานศักย์คูลอมบ์ สามารถเขียนสมการพลังงานศักย์ในกลศาสตร์ควอนตัมได้ ดังนี้

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = \int d^3\mathbf{x} \left(-\frac{(Ze)^2}{|\mathbf{x}|} \right) |\psi(\mathbf{x})|^2 \quad (2.1.29)$$

พลังงานรวมกลศาสตร์ควอนตัม $\langle \psi | E | \psi \rangle$ ของอะตอมในฟังก์ชันคลื่น ψ แสดงได้ ดังนี้

$$\langle \psi | E | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | T | \psi \rangle + \langle \psi | V | \psi \rangle \quad (2.1.30)$$

¹Loss Michael. (2005). *Stability of Matter*. pp. 15 – 17.

สมการ (2.1.28) - (2.1.30) พิจารณาค่าของพลังงานในหน่วยริดเบิร์ก และระยะห่างพิจารณาจากรัศมีอะตอมของ บอห์ร์ ในเงื่อนไขเบื้องต้น พิจารณาค่าของพลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมไฮโดรเจน ได้ ดังนี้

$$\langle \psi | E | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \int d^3\mathbf{x} \left| (\nabla \psi(\mathbf{x})) \right|^2 - Z \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}|} |\psi(\mathbf{x})|^2 \quad (2.1.31)$$

สมการ (2.1.38) ใช้สมการชเรอดิงเงอร์ เพื่อพิสูจน์หาฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น ψ_0 ของอะตอมไฮโดรเจนโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ได้ ดังนี้

$$-\nabla^2 \psi_0 - \frac{Z}{|\mathbf{x}|} \psi_0 = -\frac{Z^2}{4} \psi_0 \quad (2.1.32)$$

ดังนั้นค่าเฉพาะของพลังงานที่สถานะพื้น คือ

$$E_0 = -\frac{Z^2}{4} \quad (2.1.33)$$

เมื่อ E_0 แทนพลังงานที่สถานะพื้นของอะตอมไฮโดรเจนในหน่วย $\frac{2\pi e^4}{\hbar^2}$

ค่าคงที่ $\frac{2\pi e^4}{\hbar^2}$ สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$2mc^2 \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} = 2mc^2 \alpha^2 \quad (2.2.34)$$

ในขณะที่ $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137.03599911(46)}$ และพลังงาน $2mc^2 \alpha^2 = 4\text{Ry}$ ผลลัพธ์ของฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น คือ

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \frac{e^{-Z|\mathbf{x}|/2}}{(8\pi)^{1/2}} \quad (2.1.35)$$

2.2 ฟังก์ชันเดลตาดีแรกใน 2 มิติ (The Dirac Delta Function in Two Dimensions)

ฟังก์ชันเดลตาดีแรกใน 2 มิตินิยามให้อยู่ในรูปปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$\int d^2\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) \quad (2.2.1)$$

เมื่อ $\delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ แทนฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ มีค่าเป็นศูนย์ทุกแห่งยกเว้น $\mathbf{x}$ มีค่าใกล้ $\mathbf{x}_0$
 $\mathbf{x}$ แทนเวกเตอร์ตำแหน่งใน 2 มิติ

ให้ฟังก์ชัน $\tilde{f}(\mathbf{k})$ เป็นผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(\mathbf{x})$ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ \tilde{f}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

เมื่อ $f(\mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค $\mathbf{x}$
 $\tilde{f}(\mathbf{k})$ แทนผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(\mathbf{x})$
 $\mathbf{k}$ แทนเวกเตอร์คลื่น โดย $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[\int d^2\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} f(\mathbf{x}') \right] \\ &= \int d^2\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right] \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

สมการ (2.2.3) เทียบกับสมการ (2.2.1) ได้ ดังนี้

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.2.4)$$

และภายใต้เงื่อนไขของการนอร์มอลไลซ์

$$\int d^2\mathbf{x} \delta^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 1 \quad (2.2.5)$$

แทนสมการ (2.2.4) และ (2.2.5) ในสมการ (2.2.3) ได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int d^2\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \delta^{(2)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\ &= f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

2.3 ฟังก์ชันคลื่นและความหนาแน่นของอนุภาคใน 2 มิติ (Wave Function and the Particle Density in Two Dimensions)

ในปี ค.ศ.1926 ชเรอดิงเงอร์ ได้เสนอทฤษฎีเกี่ยวกับสภาวะของอิเล็กตรอนในอะตอม กล่าวว่าแต่ละสภาวะของอิเล็กตรอนในวงโคจร จะต้องระบุด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "ฟังก์ชันคลื่น" แทนด้วยสัญลักษณ์ " Ψ " ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของสมการอนุพันธ์อันดับสองที่ใช้ได้กับระบบทางฟิสิกส์ใดๆ ที่สูตรพลังงานของอนุภาคใน ระบบนั้น สมการดังกล่าว เรียกว่า "สมการชเรอดิงเงอร์" ซึ่งมีรูปแบบสมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + V \Psi(\mathbf{x}, t) &= E \Psi(\mathbf{x}, t) \\ \nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

เมื่อ	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi$	แทนตัวดำเนินการโมเมนตัม
	∇	แทนลาปลาเซียนใน 2 มิติ
	E	แทนพลังงานรวมของระบบ
	V	แทนพลังงานศักย์ของระบบ

ฟังก์ชันคลื่นเป็นเพียงฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ที่อาศัยแนวคิดของโจเซฟฟูรีเยร์ (Joseph Fourier) ซึ่งอธิบายเกี่ยวกับ ฟังก์ชันแบบคาบใดๆ ($f(t)$) โดยที่สามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันฮาร์โมนิกอย่างง่าย ชเรอดิงเงอร์มีแนวคิดว่าสถานะของพลังงานในอะตอมต้อง

สัมพันธ์กับสภาวะทางธรรมชาติของอะตอมซึ่งมีการสั่นตลอดเวลาด้วย ค่าความถี่ต่างๆ ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นที่ชเรอดิงเงอร์เสนอจึงเป็นฟังก์ชันแบบคาบที่สามารถประยุกต์ใช้กับแนวคิดของฟูรีเยร์

2.3.1 กลุ่มคลื่นใน 2 มิติ (Wave Packets in Two Dimensions)

พิจารณากลุ่มคลื่นจากการรวมกันของคลื่นฮาร์มอนิกสั่นในเชิงระนาบหลายขบวนสามารถใช้การวิเคราะห์ฟูรีเยร์ (Fourier Analysis) มาอธิบายรูปร่างของกลุ่มคลื่นได้ โดยพิจารณาจากฟังก์ชันคลื่นของกลุ่มคลื่นทั่วไป ที่ประกอบด้วยคลื่นฮาร์มอนิกหลายคลื่น รวมกัน พิจารณาจากผลการแปลงฟูรีเยร์ใน 2 มิติ ดังนี้

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \tilde{\psi}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

เมื่อ $\psi(\mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันคลื่นใน 2 มิติ
 $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ แทนผลการแปลงฟูรีเยร์ของ $\psi(\mathbf{x})$

สำหรับอนุภาคอิสระ ณ เวลา t เมื่อแทน $\omega = \frac{E}{\hbar}$ คือ

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \tilde{\psi}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.3.3)$$

2.3.2 ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 2 มิติ

พิจารณาจากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และกำหนดให้อนุภาคอิสระมีพลังงานมากกว่าศูนย์ ($E > 0$) เขียนสมการชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติ ดังนี้

$$\nabla^2 \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0 \quad (2.3.4)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ k^2 &= \frac{2mE}{\hbar^2}\end{aligned}$$

ผลลัพธ์ของสมการ (2.3.4) อยู่ในรูปฟังก์ชันที่สามารถแยกตัวแปร (Separable Function) ใน 2 มิติ พิจารณาพิกัดฉาก (Cartesian Coordinates) ได้ ดังนี้

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.3.5)$$

เมื่อ $\psi(x, y)$ แทนฟังก์ชันคลื่นใน 2 มิติ
 $X(x)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x
 $Y(y)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ y

แทนสมการ (2.3.5) ในสมการ (2.3.4) ได้ ดังนี้

$$\left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y) + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \right) \left((k_x^2 + k_y^2) X(x) Y(y) \right) = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\text{เมื่อ} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

นำ $X(x)Y(y)$ หารทั้งสองข้างของสมการ (2.3.6) จะได้

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_x^2 + k_y^2 &= 0 \\ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) &= 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

ผลลัพธ์ของสมการ (2.3.6) คือ

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= C_0 e^{ik_x x} \\ Y(y) &= C_1 e^{ik_y y} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

เมื่อ C_0 แทนค่าคงที่ที่ได้จากการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองของ $X(x)$
 C_1 แทนค่าคงที่ที่ได้จากการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองของ $Y(y)$

นอร์มอลไลซ์สมการ (2.3.8) เพื่อหาค่าคงที่ C_0 และ C_1 ได้ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

แทนสมการ (2.3.9) ในสมการ (2.3.8) ได้ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_x x} \\ Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_y y} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

แทนค่าสมการ (2.3.10) ในสมการ (2.3.5) จะได้ผลลัพธ์ของสมการชเรอดิงเงอร์ใน 2 มิติ ดังนี้

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.3.11)$$

เมื่อ $\mathbf{k}$ แทนเวกเตอร์คลื่น

สมการ (2.3.11) เป็นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระใน 2 มิติ ที่นอร์มอลไลซ์แล้ว จากความสัมพันธ์ของ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ และ $\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2$ จากสมการ (2.3.7) เขียนพลังงานรวมได้ ดังนี้

$$E = E_x + E_y = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{k}^2 \quad (2.3.12)$$

พลังงานรวมในสมการ (2.3.12) จะขึ้นกับขนาดของ เวกเตอร์คลื่น ($\mathbf{k}$) ซึ่งความแตกต่างของการกำหนดตำแหน่งของเวกเตอร์คลื่นจะอยู่ภายใต้เงื่อนไข ดังนี้

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \text{ เป็นค่าคงที่} \quad (2.3.13)$$

แทน $\omega = \frac{E}{\hbar}$ จะได้ผลลัพธ์ของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา ดังนี้

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.3.14)$$

2.3.3 ฟังก์ชันคลื่นของระบบอนุภาคจำนวนมาก (Wave Function of Many Particle Systems)

ตามทฤษฎีอนุภาคในกลศาสตร์แผนเดิม (Classical Mechanics) อนุภาคสามารถแยกแยะออกจากกันได้ และจะพิจารณาเฉพาะอนุภาคที่ไม่มีปฏิกริยาซึ่งกันและกัน มีพลังงานและจำนวนอนุภาคคงตัว สำหรับอนุภาคในกลศาสตร์ควอนตัม อนุภาคไม่สามารถแยกแยะออกจากกันได้ เนื่องจากอนุภาคแต่ละตัวจะมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ การเรียงสับเปลี่ยนเลขควอนตัมของแต่ละอนุภาคไม่สามารถระบุได้ ฟังก์ชันคลื่นรวมของระบบจะเป็นผลรวมของฟังก์ชันที่เป็ นไปได้ทั้งหมดของอนุภาค กำหนดให้ ξ_i แทนพิกัดของอนุภาค ตัวที่ i โดย $\xi_i = (\mathbf{x}_i, \sigma_i)$ เมื่อ $\mathbf{x}_i$ แทนเวกเตอร์พิกัดตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i และ σ_i แทนพิกัดสปินของอนุภาคตัวที่ i ฟังก์ชันคลื่นของระบบ N อนุภาค เขียนใหม่ได้เป็น $\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ กำหนดตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยน $\hat{P}_{ij}$ เป็นตัวดำเนินการ สับเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i กับตัวที่ j ในฟังก์ชันคลื่นของระบบ N อนุภาค ดังนี้

$$\hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) = \psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \quad (2.3.15)$$

เมื่อ $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \\ &= \hat{P}_{ji}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.16)$$

เมื่อ $\hat{P}_{ij} = \hat{P}_{ji}$

ในรูปแบบทั่วไปตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยนจะไม่สลับที่กัน (Commutative) ดังนั้น

$$\hat{P}_{ij}\hat{P}_{kl} \neq \hat{P}_{kl}\hat{P}_{ij} \quad \text{หรือ} \quad [\hat{P}_{ij}, \hat{P}_{kl}] \neq 0 \quad ; (ij \neq kl) \quad (2.3.17)$$

ตัวอย่างเช่นในกรณีสถานะของอนุภาค 4 ตัว $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \left(\frac{3\xi_4}{\xi_2\xi_3} \right) e^{-i\xi_1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\hat{P}_{12}\hat{P}_{14}\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \hat{P}_{12}\psi(\xi_4, \xi_2, \xi_3, \xi_1) = \psi(\xi_2, \xi_4, \xi_3, \xi_1) = \left(\frac{3\xi_1}{\xi_4\xi_3} \right) e^{-i\xi_2} \\ \hat{P}_{14}\hat{P}_{12}\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \hat{P}_{14}\psi(\xi_2, \xi_1, \xi_3, \xi_4) = \psi(\xi_4, \xi_1, \xi_3, \xi_2) = \left(\frac{3\xi_2}{\xi_1\xi_3} \right) e^{-i\xi_4}\end{aligned}\quad (2.3.18)$$

สมการ (2.3.16) กำหนดให้ $\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N)$ เป็นสถานะเจาะจงของ $\hat{P}_{ij}$ และกำหนดให้ p เป็นค่าเจาะจงของ $\hat{P}_{ij}$ เขียนสมการได้ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned}\hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \\ &= p\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N)\end{aligned} \right\} \quad (2.3.19)$$

ถ้าดำเนินการ $\hat{P}_{ij}$ ในสมการ (2.3.19) อีกครั้งพิภพ ξ_i และ ξ_j ในฟังก์ชันคลื่นจะเกิดการสับเปลี่ยนกัน 2 ครั้ง เขียนสมการ (2.3.19) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned}\hat{P}_{ij}^2\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) &= p\hat{P}_{ij}\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \\ &= p^2\psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N) \\ &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_N)\end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

ค่าเจาะจงยกกำลังสองในสมการ (2.3.20) มีค่าเท่ากับหนึ่ง ($p^2=1$) ดังนั้น $p=\pm 1$ ฟังก์ชันคลื่นที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง $+1$ เรียกว่าฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร (Symmetric Wave Function) ส่วนฟังก์ชันคลื่นที่สมมูลกับค่าเจาะจง -1 เรียกว่าฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร (Antisymmetric Wave Function) ดังนั้นในกลศาสตร์ควอนตัมแบ่งฟังก์ชันคลื่นออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

2.3.3.1 ฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร เมื่อพิจารณาฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตรใน ระบบ N อนุภาค จาก ระบบอนุภาคเดี่ยว $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ เขียนสมการฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร ได้ ดังนี้

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \hat{P}[\varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_2), \dots, \varphi_N(\xi_N)] \quad (2.3.21)$$

เมื่อ ψ แทนฟังก์ชันคลื่นรวมของระบบที่สมมาตร

$\frac{1}{\sqrt{N!}}$	แทนค่าคงที่ที่ได้จากเงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์
$\hat{P}[\dots]$	แทนตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคและเลขควอนตัม
φ	แทนฟังก์ชันคลื่นที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละอนุภาค ตั้งแต่อนุภาคตัวที่ 1 ถึงอนุภาคตัวที่ N

2.3.3.2 ฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร ฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร ในระบบ N อนุภาค จากระบบอนุภาคเดี่ยว $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ นิยามในรูปของสเลเตอร์ดีเทอร์มิแนนต์ (Slater Determinant)¹ ดังนี้

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P [\varphi_1(\xi_1) \varphi_2(\xi_2), \dots, \varphi_N(\xi_N)] \quad (2.3.22)$$

หรือ

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \varphi_1(\xi_2) & \cdots & \varphi_1(\xi_N) \\ \varphi_2(\xi_1) & \varphi_2(\xi_2) & \cdots & \varphi_2(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(\xi_1) & \varphi_N(\xi_2) & \cdots & \varphi_N(\xi_N) \end{vmatrix} \quad (2.3.23)$$

เมื่อ	ψ	แทนฟังก์ชันคลื่นรวมของระบบที่ปฏิสมมาตร
	P	แทนตัวดำเนินการเรียงสับเปลี่ยนอนุภาคและเลขควอนตัม
	φ	แทนฟังก์ชันคลื่นที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละอนุภาค ตั้งแต่อนุภาคตัวที่ 1 ถึงอนุภาคตัวที่ N
	แถวในแนวนอน (Rows)	แทนสถานะของอนุภาค
	แถวในแนวตั้ง (Columns)	แทนพิกัดอนุภาค

¹Zettili Nouredine. (2001). *Quantum Mechanics Concepts and Applications*.

จากเงื่อนไขเชิงตั้งฉากปกติ (Orthonormal) จะได้

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.3.24)$$

และภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (2.3.25)$$

2.3.4 ความหนาแน่นของอนุภาค ใน 2 มิติ (The Particle Density in Two Dimensions)¹

ความหนาแน่นของอนุภาค $\rho(\mathbf{x})$ จะสมนัยกับฟังก์ชันคลื่นของระบบ N อนุภาค ภายใต้เงื่อนไข นอร์มอลไลซ์ เมื่อ $\rho(\mathbf{x})d^2\mathbf{x}$ แทนค่าความคาดหวังของจำนวนอนุภาค ในพื้นที่น้อยๆ $d^2\mathbf{x}$ รอบจุด $\mathbf{x}$ เขียนสมการความหนาแน่นของอนุภาคได้ดังนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2, \dots, d^2\mathbf{x}_N \hat{\rho}(\mathbf{x}) |\psi(\mathbf{x}_1\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \quad (2.3.26)$$

เมื่อ $\hat{\rho}(\mathbf{x})$ แทนตัวดำเนินการที่สมนัยกับความหนาแน่นของอนุภาค
 ψ แทนฟังก์ชันคลื่นของแต่ละอนุภาค

เนื่องจากอนุภาคมีลักษณะเป็น จุดอนุภาค ตัวดำเนินการ ตำแหน่งของอนุภาคตัวที่ i แทนด้วย $\hat{\mathbf{x}}_i$ ตัวดำเนินการตำแหน่งนิยามได้ดังนี้

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_i} \delta(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}) \quad (2.3.27)$$

เมื่อ $\delta(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันความหนาแน่นของอนุภาคที่เวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{x}$ ตัวที่ i
 σ_i แทนตัวกำหนดสปินของอนุภาคตัวที่ i

¹ Baer Rio. (2008, October). *Electron Density Functional Theory*. pp. 30 – 32.

พิจารณาสมการ (2.3.27) ตามนิยามของฟังก์ชันเดลตา ดังนี้

$$\int d^2\mathbf{x}_1 \delta^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}) \quad (2.3.28)$$

แทนสมการ (2.3.27) ในสมการ (2.3.26) ได้ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2, \dots, d^2\mathbf{x}_N \delta(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}) |\psi(\mathbf{x}_1\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2, \dots, d^2\mathbf{x}_N \delta(\hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}) |\psi(\mathbf{x}_1\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

จากสมการ (2.3.29) เนื่องจากอนุภาคมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ (Identical particles) ดังนั้นสามารถแทนอนุภาคที่เวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{x}_i$ ด้วย $\mathbf{x}_1$ ได้และนำผลรวมของอนุภาคที่เหมือนกันทุกประการ (N) คูณในสมการ (2.3.29) เป็น

$$\rho(\mathbf{x}) = N \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \quad (2.3.30)$$

เมื่อ $\rho(\mathbf{x})$ แทนการรวมกันของความหนาแน่นของอนุภาคทั้งหมด
 N แทนจำนวนรวมของอนุภาค

ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์สมการที่ (2.3.30) แสดงได้ดังนี้

$$\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N \quad (2.3.1.33)$$

2.4 อนุภาคโบซอนและอนุภาคเฟอร์มิออน (Bosons and Fermions)

ในทางกลศาสตร์ควอนตัม แบ่งประเภท ของอนุภาคตามรูปแบบฟังก์ชันคลื่น และสปิน ได้ดังต่อไปนี้

2.4.1 อนุภาคโบซอน (Bosons)

อนุภาคโบซอน เป็นอนุภาคที่มีฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร และมีเลขสปินเป็นเลขจำนวนเต็ม (Integral Spin) ไม่เป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลี ดังนั้นในแต่ละสถานะควอนตัมจะมีอนุภาคอยู่ได้ไม่จำกัด

2.4.2 อนุภาคเฟอร์มิออน (Fermions)

อนุภาคเฟอร์มิออนเป็นอนุภาคที่มีฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร และมีเลขสปินเป็นเลขจำนวนครึ่ง (Half – Integral Spin) ถ้านำอนุภาคเฟอร์มิออน 2 อนุภาค ไปอยู่ในสถานะเดียวกันจะได้ฟังก์ชันคลื่นรวมเป็นศูนย์ เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นเป็นแบบปฏิสมมาตร ซึ่งจะสอดคล้องกับหลักกีดกันของเพาลี

2.5 กฎ $N^{5/3}$ สำหรับอนุภาคโบซอน (The $N^{5/3}$ Law for Bosons)¹

ในปี ค.ศ. 1978 ลีป (Lieb) ได้ตั้งกฎเลขยกกำลังของ N ที่ $N^{5/3}$ สำหรับอนุภาคโบซอน โดยพิจารณาจากงานวิจัยของ ไดซอน และเลนาร์ด (Dyson, Freeman J; & Lenard A. 1967: 423) ที่ได้ใช้ความรู้ทางกลศาสตร์ควอนตัมพิสูจน์หาความเสถียรของสสาร ภายใต้เงื่อนไขแรงคูโลมบ์ พบว่าขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออนแสดงค่าได้ดังนี้

$$E_0 \geq -A_f N \quad (2.5.1)$$

เมื่อ A_f แทนค่าคงที่ที่ได้จากอนุภาคเฟอร์มิออน

จากสมการ (2.5.1) ไม่จำเป็นต้องพิจารณาจาก เงื่อนไขความเป็นกลางทางไฟฟ้า โดยกำหนดให้อนุภาคที่มีประจุบวกและอนุภาคที่มีประจุลบ มีมวล m เท่ากัน จากเงื่อนไขทั้งสองนี้เป็นสิ่งสำคัญมากต่อการกำหนดขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้น ของอนุภาค ลีป และเทอริง (Lieb E.H; & Thirring W.E. 1975: 687) ได้ศึกษาและปรับปรุงหาค่า คงที่ A_f จากสมการ (2.5.1) โดยใช้เงื่อนไขความเป็นกลางทางไฟฟ้า พบว่าค่าที่เหมาะสมที่สุดของ A_f คือ

$$A_f \leq -22.24Ry \quad (2.5.2)$$

เมื่อ Ry แทนค่าคงที่ของริดเบิร์ก

¹ Lieb, Elliott H. (1979). *The $N^{5/3}$ Law for Bosons*. In *Stability of Matter from Atoms to Stars*. Thirring W. pp. 327 – 329.

ต่อมาพวกเขา ได้พิสูจน์หาขอบเขตล่าง ของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน โดยพิจารณาจากเงื่อนไขความเป็นกลางทางไฟฟ้า และแทน ประจุของอนุภาคประจุบวกและอนุภาค ประจุลบเป็น $\pm e$ พิจารณาเงื่อนไขโดยกำหนด มวลของอนุภาค ประจุเป็นลบ เป็น m_e ส่วนมวลของอนุภาคประจุบวกสามารถมีมวลมากเป็นอนันต์ได้ พบว่าขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน คือ

$$E_0 \geq -A_b N^{5/3} \quad (2.5.3)$$

เมื่อ A_b แทนค่าคงที่ที่ได้จากอนุภาคโบซอน

ลึบได้หาค่าคงที่ที่เหมาะสมของ A_b คือ

$$A_b \leq 14.01 \text{ Ry} \quad (2.5.4)$$

ไดซอนหาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอนโดยการคำนวณจากการแปรผันเชิงซ้อน พบว่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอนเป็น

$$E_0 \leq -BN^{7/5} \quad (2.5.5)$$

เมื่อ B แทนค่าคงที่ที่ได้จากอนุภาคโบซอน

ผลลัพธ์ที่ได้ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน ไดซอนพบว่า ถ้ากำหนดให้อนุภาคทั้งหมดมีมวลที่แน่นอน จะพิจารณาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอนจากกฎเลขยกกำลังของ N ที่ $N^{7/5}$ ซึ่งเป็นไปตามกฎ $N^{7/5}$ สำหรับประจุโบซอนของ คอน์ลอน; ลึบ; และ ฮอว์กิงเชอร์ยูน (Conlon; Lieb E; & Horng, Tzer Yau. 1988: 417 - 448) ซึ่งไม่ใช่กฎของ $N^{5/3}$ กฎเลขยกกำลังของ N ที่ $N^{5/3}$ จะเป็นจริงได้ถ้าพิจารณาภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้อนุภาคประจุบวกมีมวลเป็นอนันต์ และประจุของนิวเคลียสต้องมากกว่าศูนย์ ($Z|e| > 0$) จากเงื่อนไขเบื้องต้น ไดซอนได้พิสูจน์หาขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน พบว่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอนเป็น

$$E_0 \leq -CN^{5/3} \quad (2.5.6)$$

เมื่อ C แทนค่าคงที่ที่ได้จากอนุภาคโบซอน

ซึ่งขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้น ของอนุภาคโบซอน เมื่อพิจารณาจากเลขยกกำลังของ N ในสมการ (2.5.3) และ (2.5.6) พบว่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของ อนุภาคโบซอนจะมีขอบเขตเดียวกัน ถ้าพิจารณาจากประจุของ อนุภาคประจุลบ $(-|e|)$ มีมวล m_e และระบบนี้เป็นกลางทางไฟฟ้า พบว่าค่าคงที่ C มีค่าเป็น

$$C \geq \frac{1}{108} Z^{4/3} \text{Ry} \quad (2.5.7)$$

ขอบเขตจำกัดนี้จำนวนอนุภาคประจุลบจะลู่เข้าสู่ค่าอนันต์ $N \rightarrow \infty$ และมวลของอนุภาคประจุบวกก็ จะลู่เข้าสู่ค่าอนันต์ด้วย

2.6 ผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติ (Fourier Transforms in Two Dimensions)

พิจารณา ฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวกเตอร์ตำแหน่ง $f(\mathbf{x})$ กับฟังก์ชันที่ขึ้นกับ เวกเตอร์คลื่น $\tilde{f}(\mathbf{k})$ ความสัมพันธ์ระหว่างสองฟังก์ชันนี้ สามารถเขียนในรูปแบบของการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติ ได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.6.1a)$$

และ

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.6.1b)$$

เมื่อ $\tilde{f}(\mathbf{k})$ แทนผลการแปลงฟูเรียร์ของ $f(\mathbf{x})$

ในกลศาสตร์ควอนตัม ถ้า $f(\mathbf{x})$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาค จะเรียกผลการแปลงฟูเรียร์ $\tilde{f}(\mathbf{k})$ เป็นฟังก์ชันคลื่นในปริภูมิโมเมนตัม โดย $|f(\mathbf{x})|^2$ และ $|\tilde{f}(\mathbf{k})|^2$ คือการแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution) ของเวกเตอร์ตำแหน่งและเวกเตอร์โมเมนตัม ตามลำดับ

2.6.1 ผลการแปลงฟูเรียร์ 2 มิติในพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาวงกลมที่สมมาตรและพิกัดเชิงขั้ว สามารถนำมาใช้ในปริภูมิการแปลงโดยดัดแปลงจากพิกัดเชิงขั้ว (ρ, ϕ) และความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta; & y &= r \sin \theta \\p &= \rho \cos \phi; & q &= \rho \sin \phi\end{aligned}$$

โดย

$$A(\rho, \phi) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r, \theta) e^{2\pi i(\rho \cos \phi \cdot r \cos \theta + \rho \sin \phi \cdot r \sin \theta)} r \, dr \, d\theta \quad (2.6.2)$$

ในขณะที่ $r \, dr \, d\theta$ เป็นส่วนประกอบของพื้นที่ในปริพันธ์ สามารถหาผลลัพธ์ของ สมการ (2.6.2) โดยใช้วิธีจาโคเบียน (Jacobian) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ ดังนั้นเขียนสมการที่ (2.6.2) ใหม่ได้ ดังนี้

$$A(\rho, \phi) = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r, \theta) e^{2\pi i \rho r \cos(\theta - \phi)} r \, dr \, d\theta \quad (2.6.3)$$

แยกฟังก์ชัน A ออกเป็น $P(r)\Theta(\theta)$ แล้วแยกหาปริพันธ์ จะได้

$$A(\rho, \phi) = \int_{r=0}^{\infty} P(r) \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} \Theta(\theta) e^{2\pi i \rho r \cos(\theta - \phi)} d\theta \right] r \, dr \quad (2.6.4)$$

ถ้าสมการ (2.6.4) เป็นวงกลมที่สมมาตรฟังก์ชัน A จะเป็นฟังก์ชันของ r เท่านั้น และกำหนดให้ $\Theta(\theta) = 1$ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ ดังนี้

$$A(\rho, \phi) = \int_{r=0}^{\infty} P(r) \left[\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{2\pi i \rho r \cos(\theta - \phi)} d\theta \right] r \, dr \quad (2.6.5)$$

จากสมการ (2.6.5) กำหนดให้ $\theta - \phi = \alpha$ เป็นตัวแปรอิสระ และ $d\theta = d\alpha$ หาปริพันธ์ของพจน์ α ได้

$$\int_0^{2\pi} e^{2\pi i \rho r \cos \alpha} d\alpha = 2\pi J_0(2\pi \rho r) \quad (2.6.7)$$

เมื่อ J_0 แทนฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับศูนย์

ดังนั้น

$$A(\rho) = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} P(r) r J_0(2\pi \rho r) dr \quad (2.6.8)$$

สมการ (2.6.8) เรียกว่า “การแปลงฮานเคิล” (Hankel Transform)

2.7 อสมการที่นำมาประยุกต์ใช้

2.7.1 อสมการโคชี – ชวาร์ซ (Cauchy – Schwarz Inequality ; CSI)

อสมการโคชี – ชวาร์ซ เป็นที่รู้จักกัน ในชื่อ อสมการโคชี อสมการชวาร์ซ หรือ อสมการโคชี – บุนยาคอฟสกี – ชวาร์ซ (Cauchy – Bunyakowski – Schwarz Inequality) เป็นการนำอสมการไปใช้ กับฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ สูงๆ ได้แก่ พีชคณิตเชิงเส้น (Linear Algebra) สามารถประยุกต์ใช้กับเวกเตอร์ (Vectors) ในการวิเคราะห์จะประยุกต์ใช้กับอนุกรมอนันต์ (Infinite Series) และการหาปริพันธ์ของ ของผลลัพท์ ในทฤษฎีของความน่าจะเป็น (Probability Theory) นำไปประยุกต์ใช้กับความแปรปรวน (Variances) และความแปรปรวนร่วม (Covariances) อสมการโคชี – ชวาร์ซ ที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ และเวกเตอร์ $\mathbf{y}$ ให้ปริภูมิผลคูณภายใน (Inner Product Space) คือ

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \quad (2.7.1)$$

เมื่อ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ แทนผลคูณภายใน (Inner Product)

หรือเขียนอสมการโคชี – ชวาร์ซ (CSI) ในรูปของปริภูมิเวกเตอร์ค่าจริง (Real Vector Space) สำหรับ $f \in H$ และ $g \in H$ เมื่อ H แทนปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) ของชวาร์ซได้ ดังนี้

$$|(f, g)|^2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (2.7.2)$$

เมื่อ (f, g) แทนผลคูณภายใน
 $\|(\cdot)\|$ แทนนอร์ม (Norm) โดย $\|f\|_2 = \left(\int d^n \mathbf{x} |f(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2}$
 และ $\|g\|_2 = \left(\int d^n \mathbf{x} |g(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2}$

หรือพิจารณาในอีกลักษณะหนึ่งถ้าให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสองเซตที่ไม่เจาะจงใดๆ ของจำนวนจริง เขียนในรูปผลบวกได้ ดังนี้

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \quad (2.7.3)$$

เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริงใดๆ

อสมการ (2.7.3) จะเป็นจริงถ้าลำดับ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสัดส่วนกัน (Proportion) หรือเขียนในรูปปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$\int_a^b dx |f(x)g(x)|^2 \leq \int_a^b dx |f(x)|^2 \int_a^b dx |g(x)|^2 \quad (2.7.4)$$

เมื่อ x แทนตัวแปรอิสระใดๆ
 $f(x)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x
 $g(x)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x

ถ้าพิจารณาในอีกลักษณะหนึ่งถ้าให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสองเซตที่ไม่เจาะจงใดๆ ของจำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers) เขียนในรูปผลบวกได้ ดังนี้

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \quad (2.7.5)$$

อสมการ (2.7.5) จะเป็นจริงถ้าลำดับ $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสัดส่วนกัน โดย $|a_k|^2 = (a_k)^* (a_k)$ และ $|b_k|^2 = (b_k)^* (b_k)$ เมื่อ $(a_j)^*$ แทนสังยุคเชิงซ้อนของ (a_j) และ $(b_j)^*$ แทนสังยุคเชิงซ้อนของ (b_j)

2.7.2 อสมการของยัง (Young's Inequality)

รูปแบบมาตรฐาน ของอสมการของยัง จะพิจารณากรณีที่ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ p, q เป็นจำนวนจริงบวก (Positive Real Numbers) ซึ่ง $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ โดยที่

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (2.7.6)$$

ดังนั้นทั้งสองข้างจะมีค่าเท่ากันถ้า $a^p = b^q$ จากการวิเคราะห์จำนวนจริงซึ่งพิสูจน์ครั้งแรกโดยยัง ในปี ค.ศ. 1912 ซึ่งเรียกว่าอสมการของยัง กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันใดๆ และเลขจำนวนจริงบวก p, q, r มีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $1 \leq p, q, r \leq \infty$ และ $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) \geq 1$ โดยที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ อสมการของยังแสดงได้ ดังนี้

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (2.7.7)$$

เมื่อ $\|f * g\|$ แทนคอนโวลูชัน (Convolution) ระหว่างฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g

เขียน $\|f\|_p$ และ $\|g\|_q$ ในรูปปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$\|f\|_p = \left(\int dx |f(x)|^p \right)^{1/p} \quad \text{และ} \quad \|g\|_q = \left(\int dx |g(x)|^q \right)^{1/q} \quad (2.7.8)$$

เมื่อ x แทนตัวแปรอิสระใดๆ
 $f(x)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x
 $g(x)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x

แทนสมการ (2.7.8) ลงในสมการ (2.7.7) จะได้

$$\|f * g\|_r \leq \left(\int dx |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int dx |g(x)|^q \right)^{1/q} \quad (2.7.9)$$

2.7.3 อสมการของโฮลเดอร์ (Hölder's Inequality)

อสมการโฮลเดอร์เดิมมีชื่อว่า “ออตโตโฮลเดอร์” เป็นอสมการเบื้องต้น ในรูปปริพันธ์กำลัง โดยกำหนดให้ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ เมื่อ $1 \leq p, q \leq \infty$ อสมการโฮลเดอร์เขียนในรูปอิทีกรัลได้ ดังนี้

$$\int_a^b dx |f(x)g(x)| \leq \left[\int_a^b dx |f(x)|^p \right]^{1/p} \left[\int_a^b dx |g(x)|^q \right]^{1/q} \quad (2.7.10)$$

เมื่อ	$f(x)$	แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x
	$g(x)$	แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x
	a และ b	แทนเลขจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ

จากอสมการ (2.7.10) ถ้า $p = q = 2$ อสมการ (2.7.10) จะกลายเป็นอสมการชวาร์ซ

อสมการของโฮลเดอร์เขียนในรูปผลบวก ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสองเซตที่ไม่เจาะจงใดๆ ของจำนวนจริง เขียนในรูปผลบวกได้ ดังนี้

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q} \quad (2.7.11)$$

จากอสมการ (2.7.11) ถ้า $p = q = 2$ อสมการ (2.7.11) จะกลายเป็นอสมการโคชี

ถ้าพิจารณาในอีกลักษณะหนึ่งถ้าให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นสองเซตที่ไม่เจาะจงใดๆ ของจำนวนเชิงซ้อน เขียนในรูปผลบวกได้ ดังนี้

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q} \quad (2.7.12)$$

2.7.4 อสมการของมินคอฟสกี (Minkowski's Inequality)

กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ แทน 2 เซตใดๆของจำนวนจริงบวก และจำนวนจริง $p > 1$ เขียนอสมการของมินคอฟสกีได้ ดังนี้

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \quad (2.7.13)$$

2.8 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (Unit Step Function)

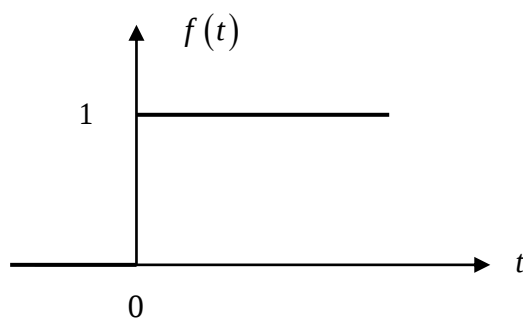
ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยคิดค้นโดย โอลิเวอร์ เฮวิไซด์ (Oliver Heaviside) วิศวกรไฟฟ้าชาวอังกฤษ จึงมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “ฟังก์ชันเฮวิไซด์ (Heaviside Function)” ฟังก์ชันชนิดนี้มีค่าเพียง 2 ระดับ คือ 0 กับ 1 โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $u_a(t)$ หรือ $u(t-a)$ เมื่อ a คือตำแหน่งของ t ที่ฟังก์ชันเปลี่ยนระดับจาก 0 ไปเป็น 1 และตำแหน่ง $a \geq 0$ เขียนสมการได้ ดังนี้

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases} \quad (2.8.1)$$

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยจะใช้กำหนดจุดเริ่มต้นของการเกิดกราฟ เช่น

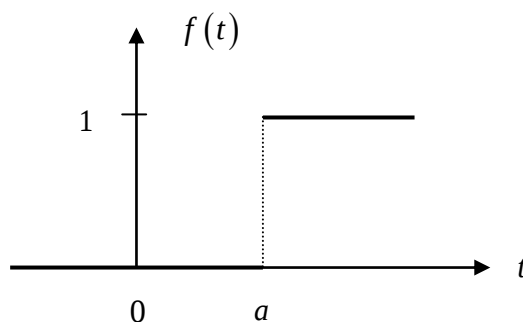
- $f(t)u_0(t) = 1u_0(t)$ จะมีค่าคงที่เท่ากับ 1 โดยเกิดขึ้นตั้งแต่ $t > 0$
- $f(t)u_a(t) = 1u_a(t)$ จะมีค่าคงที่เท่ากับ 1 โดยเกิดขึ้นตั้งแต่ $t > a$

จากความสัมพันธ์ทั้งสองสมการเราสามารถเขียนกราฟได้ ดังภาพประกอบ 6 และภาพประกอบ 7 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 6 กราฟ $f(t)u_0(t) = 1u_0(t)$

ที่มา: Kreyszig Erwin. (2006). *Advanced Engineering Mathematics*. 9th ed.



ภาพประกอบ 7 กราฟ $f(t)u_a(t) = 1u_a(t)$

ที่มา: Kreyszig Erwin. (2006). *Advanced Engineering Mathematics*. 9th ed.

p. 234.

2.9 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series)

วิธีอนุกรมกำลังเป็นวิธีการพื้นฐานที่ใช้หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ลักษณะของคำตอบจะอยู่ในรูปอนุกรมกำลัง คำตอบในรูปอนุกรมกำลังจะทำให้เกิดฟังก์ชันพิเศษ (Special Function) เช่น ฟังก์ชันเบสเซล ฟังก์ชันเลจองด์ เป็นต้น การเขียนฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลังจะเขียนโดยใช้หลักการของอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's Series) หรือหลักการของอนุกรมเทเลอร์ อนุกรมแมคลอรินจะใช้กระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมกำลังในรูป x ยกกำลัง (อนุกรมกำลังรอบจุดศูนย์) ส่วนอนุกรมเทเลอร์จะใช้กระจายฟังก์ชันเป็นอนุกรมกำลังในรูป $x - x_0$ ยกกำลัง (อนุกรมกำลังรอบจุด x_0) ได้สมการเป็น

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\
 &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots \quad (2.9.1)
 \end{aligned}$$

เมื่อ	$f(x)$	แทนฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function) ที่จุด $x - x_0$
	a_n	แทนค่าคงที่ เรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์ (Coefficient) ของอนุกรมกำลัง
		โดย $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$
	x_0	แทนจุดศูนย์กลางของอนุกรม (Center of Series)
	n	แทนค่าดัชนี (Index)

หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกได้ ดังนี้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2.9.2)$$

เมื่อ $n!$ แทนตัวประกอบในการคูณของ n
 $f^{(n)}(x_0)$ แทนอนุพันธ์อันดับ n ของ f หาค่าที่ x_0

2.10 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel Function)

ฟังก์ชันเบสเซลเป็นฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์ของสมการอนุพันธ์เบสเซลที่ศึกษา โดย ฟรีดริค วิลเฮล์ม เบสเซล (Friedrich Wilhelm Bessel) ฟังก์ชันเบสเซลเป็นฟังก์ชันพิเศษทางคณิตศาสตร์ ลักษณะของสมการอนุพันธ์เบสเซลแสดงดังสมการอนุพันธ์ ดังนี้

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.10.1)$$

เมื่อ ν แทนเลขจำนวนจริงที่ไม่มีค่าเป็นลบ ($\nu \geq 0$)

เรียกสมการ (2.10.1) ว่าสมการเบสเซลอันดับ ν และเรียกคำตอบของสมการนี้ว่าฟังก์ชัน เบสเซล อันดับ ν

สมการ (2.10.1) กำหนดให้ $P_0(x) = x^2, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - \nu^2$ และ $p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}, P_0(0) = 0$ ที่ตำแหน่ง $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติซึ่งกำหนดรูปแบบคำตอบตามวิธีโฟรเบเนียสได้ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad a_0 \neq 0 \\ y' &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) a_k x^{k+r-1} \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_k x^{k+r-2} \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

สำหรับอนุกรมเทย์เลอร์ที่กล่าวถึงในข้างต้นจะใช้ตัว n แทนดัชนีในกรณีนี้จะเปลี่ยน ดัชนีเป็นตัว k เนื่องจากจะใช้ n แทนสัญลักษณ์ในบางส่วนของฟังก์ชันเบสเซลภายหลัง

แทนสมการ (2.10.2) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.10.1) แล้วใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$(r^2 - \nu^2)a_0 = 0 \quad (\text{สมการดัชนี}) \quad (2.10.3a)$$

$$[(r+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0 \quad (2.10.3b)$$

$$(k+r)^2 a_k - \nu^2 a_k + a_{k-2} = 0$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - \nu^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (2.10.3c)$$

จากสมการ (2.10.3c) เป็นความสัมพันธ์หาค่า r ในสมการ (2.10.3a) ได้เป็น 2 กรณีดังนี้ โดยกำหนดให้ $r_1 = \nu, r_2 = -\nu$

- กรณีที่ $r_1 = \nu$ แทนค่า r ลงในสมการ (2.10.3b) และสมการ (2.10.3c) โดยเฉพาะในสมการ (2.10.3b) จะเป็นจริงเมื่อ $a_1 = 0$ เทียบสัมประสิทธิ์ k เพื่อหาค่า a สามารถหาค่า a_{2k} ; $k = 1, 2, 3, \dots$ จากนั้นใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันแกมมา ดังนี้ $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, ; $\alpha > 0$ จะได้สมการของ a_{2k} ได้เป็น

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} a_0 \quad (2.10.4)$$

เมื่อ Γ แทนฟังก์ชันแกมมา

จากสมการ (2.10.4) เปลี่ยน k เป็น $2k$ เปลี่ยน r เป็น ν

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu} \\ y_1 &= a_0 2^\nu \Gamma(\nu+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \cdot \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (2.10.5)$$

เมื่อ a_0 แทนค่าคงที่ไม่ใช่จะจง $a_0 = \frac{1}{2\Gamma(\nu+1)}$

แทน y_1 ด้วย $J_\nu(x)$ ได้สมการ ดังนี้

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.10.6)$$

เรียก $J_\nu(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ ν (Bessel Function of the First Kind of Order ν) ทางด้านการประยุกต์ส่วนมากจะใช้สมการอันดับ 0 และ 1

- กรณีที่ $r_2 = -\nu$ จากสมการ (2.10.6) เปลี่ยน ν เป็น $-\nu$ จะได้

$$J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k-\nu} k! \Gamma(k-\nu+1)} \quad (2.10.7)$$

เรียก $J_{-\nu}(x)$ ว่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ $-\nu$ (Bessel Function of the First Kind of Order $-\nu$) ทั้งสมการ (2.10.6) และ (2.10.7) เป็นอนุกรมที่ลู่ออกทุกค่าของ x กรณีที่ ν เป็นเลขจำนวนเต็ม จะเขียนแทน ν ด้วย n ในสมการ (2.10.6)

$$J_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+n} k! \Gamma(n+k+1)} \quad (2.10.8)$$

ฟังก์ชันเบสเซลในรูปการกระจายจาโคบี (Jacobi Expansion) แสดงได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} e^{ix \cos \theta} &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos(n\theta) \\ e^{ix \cos \theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

อาฟเคน และเวเบอร์ (Arfken and Weber H. J.)¹ แสดงฟังก์ชันเบสเซลในรูปการกระจายปริพันธ์ (Integral Expansion) ได้ ดังนี้

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi d\theta e^{ix \cos \theta} \cos(n\theta) \quad (2.10.10a)$$

และ

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{in\theta} \cdot e^{ix \cos \theta} \quad (2.10.10b)$$

2.10.1 สมการอนุพันธ์ เบสเซล แบบปรับปรุง อันดับ ν (Modified Bessel Differential Equation of Order ν)

รูปแบบสมการอนุพันธ์ของสมการเบสเซลแบบปรับปรุง คือ

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (2.10.11)$$

และ

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (2.10.12)$$

เมื่อ ν คือพารามิเตอร์ที่เป็นเลขจำนวนจริง เป็นตัวกำหนด ผลลัพธ์ของสองเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นต่อกัน ผลลัพธ์ของสองเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นต่อกันในสมการ (2.10.11) เป็นสมการ เบสเซล ชนิดที่หนึ่ง แบบปรับปรุงอันดับ ν เขียนแทนด้วย $I_\nu(x)$ และ $I_{-\nu}(x)$ ผลลัพธ์ในสมการ (2.10.12) เป็นสมการ เบสเซลชนิดที่สองแบบปรับปรุงอันดับ ν เขียนแทนด้วย $K_\nu(x)$ ผลลัพธ์ทั่วไปของสมการ (2.10.11) คือ

$$y = AI_\nu(x) - BI_{-\nu}(x) \quad (2.10.13)$$

¹ Arfken, George B; & Weber, Hans J. (1995). *Mathematical Methods for Physicists*. 4th ed. p. 633.

เมื่ออันดับ ν เป็นจำนวนเต็ม แทน $\nu = n$ ในกรณี ฟังก์ชัน เบสเซล แบบปรับปรุง $I_n(x)$ และ $I_{-n}(x)$ จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเพราะ $I_{-n}(x) = I_n(x)$ ผลลัพธ์ในสมการ (2.10.12) จะเป็นอิสระเชิงเส้น กับ $I_\nu(x)$ โดย $K_\nu(x)$ จะไม่คำนึงถึงค่าของ ν ผลลัพธ์จากสมการ (2.10.12) สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$y = AI_\nu(x) - BK_\nu(x) \quad (2.10.14)$$

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองแบบปรับปรุงอันดับ ν สามารถดัดแปลงได้ ดังนี้

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (2.10.15)$$

และเมื่อ ν เป็นจำนวนเต็ม ($\nu = n$) หรือศูนย์ โดย $K_n(x) = K_{-n}(x)$ [$n = 0, 1, 2, \dots$] จะได้

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x) \quad (2.10.16)$$

แสดงค่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งแบบปรับปรุง $I_\nu(x)$; $I_{-\nu}(x)$ และ $I_n(x)$ ได้ ดังนี้

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+2k}}{2^{\nu+2k} k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.10.17)$$

และ

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-\nu}}{2^{2k-\nu} k! \Gamma(k+1-\nu)} \quad (2.10.18)$$

เมื่อ ν เป็นจำนวนเต็ม ($\nu = n$) หรือศูนย์ เขียนสมการ (2.10.17) ได้ ดังนี้

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!} \quad (2.10.19)$$

เจฟฟรีย์ ออลาน (Jeffrey Alan)¹ แสดง $K_n(x)$ ในรูปผลรวมได้ ดังนี้

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{1}{4} x^2 \right)^k + (-1)^{n+k} \ln \left(\frac{x}{2} \right) I_n(x) + (-1)^n \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^n \times \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)] \left(-\frac{1}{4} \right)^k \frac{(x^2)^k}{k!(n+k)!} \quad (2.10.20)$$

เมื่อ $\psi(x)$ แทนฟังก์ชันไคแกมมา (Digamma function)

อับราโมวิทซ์ และสเตกันซ์² แสดง $K_n(x)$ ในรูปปริพันธ์ได้ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} K_\nu(x) &= \sec \left(\frac{1}{2} \nu \pi \right) \int_0^\infty \cos(x \sinh t) \cosh(\nu t) dt \\ &= \csc \left(\frac{1}{2} \nu \pi \right) \int_0^\infty \sin(x \sinh t) \sinh(\nu t) dt \end{aligned} \right\} ; (|\operatorname{Re} \nu| < 1, x > 0) \quad (2.10.21)$$

¹ Jeffrey Alan. (1995). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. p. 273.

² Abramowitz M; & Stegun I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Table*. p. 376.

เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1968 เลนาร์ด; และไดซอน (Lenard A.; & Dyson Freeman J.) ได้ศึกษาความเสถียรภาพของสสาร พบว่าขอบเขตล่างของพลังงานที่ สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ

$E_N \geq -\frac{Aq^{2/3}Nme^4}{\hbar^2}$ เมื่อ q แทนสปินจำนวนมาก, N แทนจำนวนรวมของอนุภาค ประจุลบ, m มวลของอนุภาคประจุลบ, e แทนประจุของอนุภาค และ A แทนค่าคงที่

ในปี ค.ศ. 1975 ลีป; และเทอริง (Lieb E. H.; & Thirring W. E.) ได้ศึกษาหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของอนุภาคเฟอร์มิออน พบว่าภายใต้เงื่อนไขของการนอร์มอลไลซ์ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ $T_\psi \geq 2^{2/3}K \int_{R^3} d\mathbf{x} \rho_\psi(\mathbf{x})^{5/3}$ เมื่อ ψ แทนฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร และ K แทนค่าคงที่สากล ต่อมาพวกเขาพบว่าค่าคงที่สากล K มีค่าเป็น $K = (2.7709)2^{-2/3} = 1.7455$ ดังนั้น ขอบเขต ล่างของ พลังงานจลน์ของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ

$T \geq \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})^{5/3}$ เมื่อ $\rho(\mathbf{x})$ แทนความหนาแน่นของอนุภาค และได้ขอบ

ล่างของพลังงานที่สถานะพื้น คือ $\langle \psi | H | \psi \rangle \geq -2.08N \left[1 + \left(\sum_{j=1}^k \frac{Z_j^{7/3}}{N} \right)^{1/2} \right]^2$

ในปี ค.ศ. 1976 ลีป; และเทอริง (Lieb E. H.; & Thirring W. E.) ได้ศึกษาหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออนและอนุภาคโบซอน พบว่าขอบเขตล่างของพลังงาน

ที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ $\langle \psi | H | \psi \rangle \geq -1.13q^{2/3}N \left[1 + \left(\frac{\sum_{j=1}^k Z_j^{7/3}}{N} \right)^{1/2} \right]^2$ เมื่อพิจารณา

เลขยกกำลังของ N โดยแทน $q=2$ (สปินอิเล็กตรอน $\frac{1}{2}$) ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคเฟอร์มิออน คือ $E_N \sim N$ และได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน คือ $E_N \sim N^{5/3}$

ในปี ค.ศ. 1981 ลีป; และสตีเฟน อ็อกซฟอร์ด (Lieb E. H.; & Stephen Oxford) ได้ศึกษาและปรับปรุงค่าคงที่ของขอบเขตล่างที่ได้จากศักย์คูโลมบ์ พบว่าพลังงานของคูโลมบ์ที่เกิดจากแรงผลักกันระหว่างอนุภาค มีขอบเขตล่าง คือ $V \geq -Ce^{2/3} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})^{4/3}$ ค่าคงที่ที่เหมาะสมที่สุดของ C จะต้องมีค่ามากกว่า 1.23

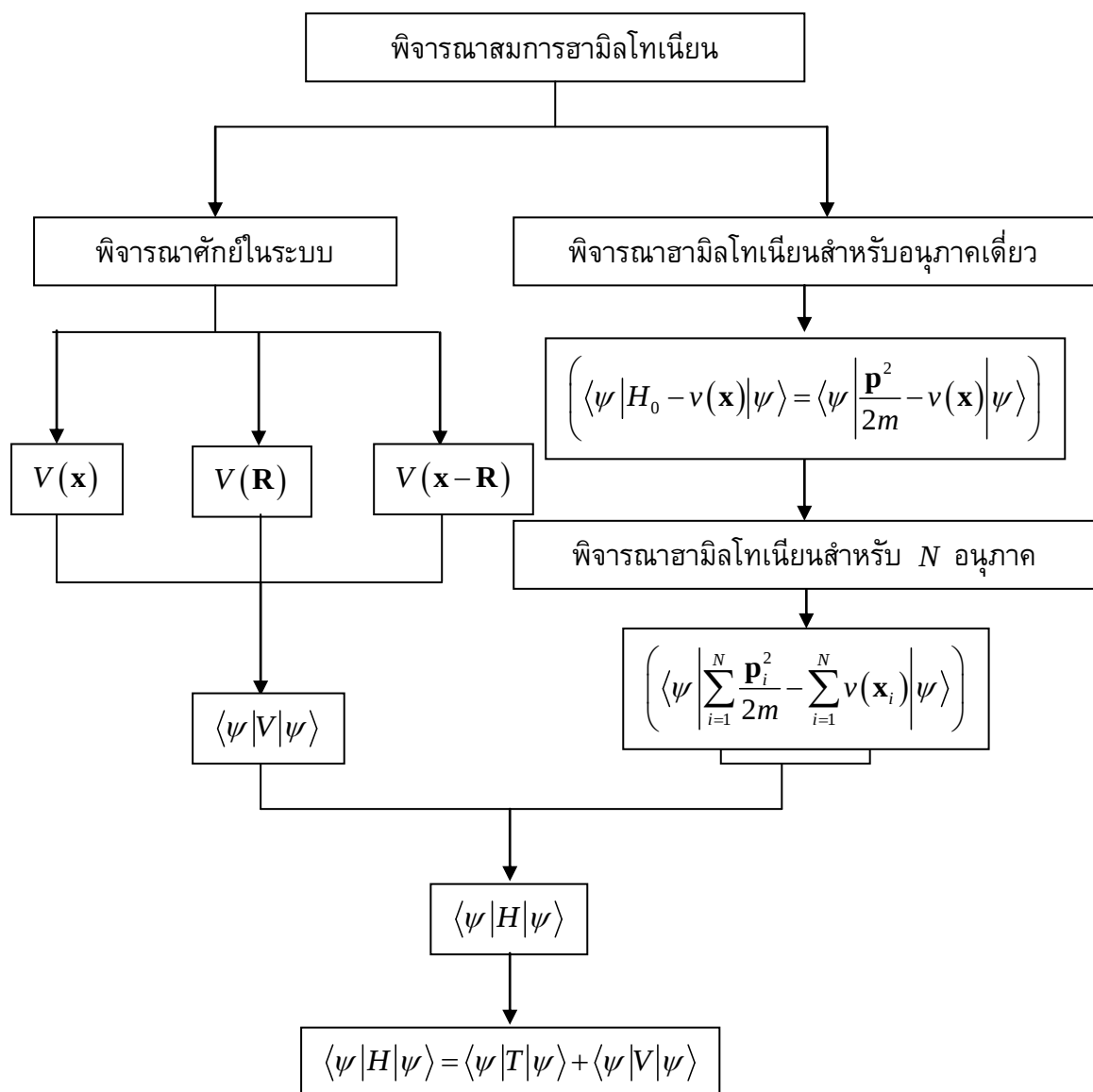
ในปี ค.ศ. 1988 คอนลอน; ลีป; และยูน (Conlon; Lieb; & Yau H. T.) ได้ทำการพิสูจน์หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน โดยการสมมติให้ $N \leq k$ เมื่อ N แทนจำนวนอนุภาคประจุเป็นลบ และ k แทนอนุภาคประจุเป็นบวก พบว่าพลังงานที่สถานะพื้นของอนุภาคโบซอน อ $E(N, k) \geq -AN^{7/5}$ และถ้าสมมติให้ $N = k$ และจำนวนอนุภาคประจุเป็นลบ มีค่ามากๆ ทำให้ ค่าคงที่ A จากพลังงานที่สถานะพื้นสำหรับอนุภาคโบซอนจะมีค่าเป็น 0.79

ในปี ค.ศ. 2004 มุทาพร และมานูเกียน (Muthaporn C.; & Manoukian E.B.) พบว่าขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นแบบแมนตรง E_N ของอนุภาคโบซอนที่มีประจุลบ N อนุภาค และอนุภาคโบซอนที่มีประจุบวก N อนุภาค โดยกำหนดให้อนุภาคโบซอนที่มีประจุบวกไม่เคลื่อนที่กับอันตรกิริยาคูลอมบ์ในมิติใดๆ ν คือ $E_N < -\frac{N^{(2+\nu)/\nu}}{16\pi^2\nu^3(2)^\nu}$ ในหน่วยรีดเบิร์ก โดย $N \geq (2)^\nu$ ในคุณสมบัติเฉพาะนี้พบว่าความไม่เสถียรภาพของ สารประเภทโบซอนไม่เป็นลักษณะที่เกี่ยวข้องกับจำนวนมิติของอวกาศ

บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

ในปริศยานี้พจน์นี้เราหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติจากผลรวมของขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์และขอบเขตล่างของพลังงานจลน์โดยใช้ผลการแปลงฟูเรียร์และอสมการที่กล่าวถึงในบทที่ 2 ซึ่งเขียนเป็นแผนภูมิแสดงกระบวนการหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติได้ ดังนี้



ภาพประกอบ 8 แผนภูมิแสดงกระบวนการหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ

3.1. ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ (The General Bound for Coulomb Potential Energy of Bosonic Matter in Two Dimensions)

จากตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียนใน 2 มิติตั้งสมการ (1.0.1) ภายใต้เงื่อนไข ศักย์คูลอมบ์ และกำหนดให้ $4\pi\epsilon_0 = 1$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + V_1(\mathbf{x}) + V_2(\mathbf{R}) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|}\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ} \quad V_1(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) &= \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\ V_2(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) &= \sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}\end{aligned}$$

สมการ (3.1.1) คือกรณีที่จำนวนนิวเคลียสมากกว่าหรือเท่ากับสอง ($k \geq 2$) และสสารเป็นกลางทางไฟฟ้า $\left(\sum_{i=1}^k Z_i = N\right)$ เท่านั้น

พิจารณาเฉพาะศักย์พจน์ที่ 2 ($V_1(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$) และพจน์ที่ 3 ($V_2(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)$) ในด้านซ้ายมือของสมการ (3.1.1) ส่วนพจน์ที่ 4 เราจะนำมาพิจารณาในภายหลัง หาขอบเขตทั่วไปของศักย์ในระบบของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ โดยกำหนดให้ฟังก์ชัน $V(\mathbf{x})$ และ $v(\mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันของจำนวนจริง บวกใดๆ เขียนความสัมพันธ์ ระหว่าง $V(\mathbf{x})$ และ $v(\mathbf{x})$ คือ $V(\mathbf{x}) \geq v(\mathbf{x})$ เลือกให้ $v(\mathbf{x}) \geq 0$ ดังนั้น $v(0) < \infty$ และกำหนดให้ $V(\mathbf{x})$ และ $v(\mathbf{x})$ มีค่าตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$V(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{|\mathbf{x}|} \quad (3.1.2a)$$

และ

$$v(\mathbf{x}) = \frac{e^2(1 - e^{-\lambda|\mathbf{x}|})}{|\mathbf{x}|} \quad (3.1.2b)$$

$$v(0) = \lim_{x \rightarrow 0} v(\mathbf{x}) \quad (3.1.2c)$$

เมื่อ λ แทนตัวแปรใดๆ และกำหนดให้ตัวแปร $\lambda > 0$

นิยามฟังก์ชัน $v(\mathbf{x})$ ในรูปผลการแปลงฟูเรียร์ ผกผันและผลการแปลงฟูเรียร์ ใน 2 มิติตามลำดับดังต่อไปนี้

$$v(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.3a)$$

และ

$$\tilde{v}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} v(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.3b)$$

เมื่อ $\mathbf{k}$ แทนเวกเตอร์ใน 2 มิติ
 $\mathbf{x}$ แทนเวกเตอร์ใน 2 มิติ

จากสมการ (3.1.3a) จะเห็นว่าถ้า $v(\mathbf{x}) \geq 0$ แล้ว $\tilde{v}(\mathbf{k}) \geq 0$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.1.3a) และ (3.1.3b) นิยามฟังก์ชัน $V(\mathbf{x})$ ในรูปผลการแปลงฟูเรียร์ ผกผันและผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.4a)$$

และ

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.4b)$$

ในทำนองเดียวกันกับ $v(\mathbf{x})$ กำหนดให้ $\phi(\mathbf{x})$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงบวกใดๆ โดยที่

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (3.1.5a)$$

ฟังก์ชันจำนวนจริง $\rho(\mathbf{x})$ แทนฟังก์ชันความหนาแน่นของอนุภาค และ

$$\phi(\mathbf{x}') = \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.1.5b)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.1.3a) และ (3.1.3b) นิยามฟังก์ชัน $\phi(\mathbf{x})$ ในรูปผลการแปลงฟูเรียร์ ผกผันและผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.6a)$$

และ

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.6b)$$

ในทำนองเดียวกับสมการ (3.1.6a) และ (3.1.6b) นิยามฟังก์ชันจำนวนจริง $\rho(\mathbf{x})$ ในรูปผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันและผลการแปลงฟูเรียร์ใน 2 มิติตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.7a)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.7b)$$

กำหนดให้ A_j เป็นค่าคงที่ที่เป็นจำนวนจริงบวก จากคุณสมบัติของผลการแปลงฟูเรียร์ จะได้

$$\left. \begin{aligned} A_1 \phi(\mathbf{x}_1) &= A_1 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1} \\ A_2 \phi(\mathbf{x}_2) &= A_2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2} \\ A_3 \phi(\mathbf{x}_3) &= A_3 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_3} \\ &\vdots \\ A_k \phi(\mathbf{x}_k) &= A_k \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

จากสมการ (3.1.8) เราสามารถเขียนผลบวก กเชิงเส้นของ $A_1 \phi(\mathbf{x}_1), A_2 \phi(\mathbf{x}_2), \dots, A_k \phi(\mathbf{x}_k)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & A_1 \phi(\mathbf{x}_1) + A_2 \phi(\mathbf{x}_2) + A_3 \phi(\mathbf{x}_3) + \dots + A_k \phi(\mathbf{x}_k) \\ &= A_1 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1} + A_2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2} + A_3 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_3} \\ &+ \dots + A_k \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_k} \end{aligned} \quad (3.1.9a)$$

หรือ

$$\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \sum_{j=1}^k A_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \quad (3.1.9b)$$

$$\text{เมื่อ } A_1 \phi(\mathbf{x}_1) + A_2 \phi(\mathbf{x}_2) + A_3 \phi(\mathbf{x}_3) + \dots + A_k \phi(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j)$$

นำ $\frac{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}}{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}}$ คูณด้านขวามือของสมการ (3.1.9b) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \sum_{j=1}^k A_j e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \left(\frac{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}}{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}} \right) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}} \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

จากอสมการโคชี – ชวาร์ซ

$$|(f, g)|^2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (3.1.11)$$

กำหนดให้ $f(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})}{(2\pi)^2 \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}}$ และ $g(\mathbf{k}) = \frac{\sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j}}{(2\pi)^2}$ โดยในกรณี 2 มิติ แทน

$n=2$ พิจารณาจากอสมการ (2.7.2) แทน $f(\mathbf{k})$ และ $g(\mathbf{k})$ ลงในอสมการ (3.1.11) จะได้

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \right) \right|^2 &\leq \left(\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})}{\sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}} \right|^2 \right) \left(\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \right) \\ \therefore \left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \right)^2 &\leq \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

พิจารณาพจน์ $\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2$ ในด้านขวามือของอสมการ (3.1.12) ดังนี้

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 = \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right)^* \left(\sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right) \quad (3.1.13)$$

กำหนดให้ดัชนี $j=i$ ในพจน์ที่ 2 ด้านขวามือของสมการ (3.1.13) เขียนสมการ (3.1.13) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right)^* \left(\sum_{i=1}^k A_i \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \right) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right) \left(\sum_{i=1}^k A_i \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \right) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \right) \\ &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 = \sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \quad (3.1.14)$$

แทนผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\tilde{v}(\mathbf{k})$ ดังสมการ (3.1.3a) ลงในด้านขวามือของสมการ (3.1.14) จะได้

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left| \sum_{j=1}^k A_j \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 = \sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.1.15)$$

$$\text{เมื่อ} \quad v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}$$

แทนสมการ (3.1.15) ลงในสมการ (3.1.12) จะได้

$$\left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \right)^2 \leq \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.1.16)$$

เขียนพจน์ $\sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i$ ในสมการ (3.1.16) ใหม่ ดังนี้

$$\sum_{j=1}^k A_j \sum_{i=1}^k A_i = \sum_{i,j=1}^k A_i A_j \quad (3.1.17)$$

แทนสมการ (3.1.17) ลงในสมการ (3.1.16) จะได้

$$\left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \right)^2 \leq \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \sum_{i,j=1}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.1.18a)$$

และ

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j)\right)^2}{\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})}} \leq \sum_{i,j=1}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.1.18b)$$

พิจารณาจำนวนจริง c และ d เมื่อ $d > 0$ ดังนี้

$$\begin{aligned} (c-d)^2 &\geq 0 \\ c^2 - 2cd + d^2 &\geq 0 \\ c^2 &\geq 2cd - d^2 \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

นำ $2d$ หารทั้งสองข้างของอสมการ (3.1.19) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{2d} &\geq \frac{2cd}{2d} - \frac{d^2}{2d} \\ \frac{c^2}{2d} &\geq c - \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

จากอสมการ (3.1.20) แทนจำนวนจริง c และ d ตามลำดับ ดังต่อไปนี้

$$c = \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \quad (3.1.21a)$$

และ

$$d = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \quad (3.1.21b)$$

แทนสมการ (3.1.21a) และ (3.1.21b) ลงในสมการ (3.1.20) จะได้

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) \right)^2}{\int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})}} \geq \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \quad (3.1.22)$$

แทนสมการ (3.1.22) ลงในสมการ (3.1.18b) จะได้

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \quad (3.1.23)$$

พิจารณาพจน์ในด้านซ้ายมือของสมการ (3.1.23) ในกรณีที่ดัชนี $i \neq j$ และ $i = j$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) &= \sum_{i < j} A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=j=1}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &= \sum_{i < j} A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k A_j^2 v(0) \\ &= \sum_{i < j} A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

แทนสมการ (3.1.24) ลงในสมการ (3.1.23) จะได้

$$\sum_{i < j} A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \geq \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})}$$

และ

$$\sum_{i < j} A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq \sum_{j=1}^k A_j \phi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \quad (3.1.25)$$

จากสมการ (3.1.5b) เราแทน $\mathbf{x}'$ ด้วย $\mathbf{x}_j$ จะได้

$$\phi(\mathbf{x}_j) = \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3.1.26)$$

แทนสมการ (3.1.26) ลงในสมการ (3.1.25) จะได้

$$\sum_{i < j}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \quad (3.1.27)$$

เราสามารถหา $|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2$ ในสมการ (3.1.27) จากสมการ (3.1.5a) และ (3.1.5b) โดยกำหนดให้ $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$ แทนผลการแปลงฟูเรียร์ของ $\phi(\mathbf{x}')$ จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x}' \phi(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (3.1.28)$$

โดยที่

$$|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2 = \tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \quad (3.1.29)$$

เมื่อ $\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})$ แทนค่าสังยุคเชิงซ้อนของ $\tilde{\phi}(\mathbf{k})$

แทนสมการ (3.1.5b) ลงในสมการ (3.1.28) จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (3.1.30)$$

พิจารณาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของ $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$, $\tilde{\rho}^*(\mathbf{k})$ และ $\tilde{V}(\mathbf{k})$, $\tilde{V}^*(\mathbf{k})$ ดังต่อไปนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.31a)$$

$$\rho^*(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.31b)$$

$$V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (3.1.31c)$$

$$V^*(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (3.1.31d)$$

เมื่อ	$\rho^*(\mathbf{x})$	แทนฟังก์ชันสังยุคเชิงซ้อนของ $\rho(\mathbf{x})$
	$V^*(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$	แทนฟังก์ชันสังยุคเชิงซ้อนของ $V(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$

เนื่องจาก $\rho(\mathbf{x})$ และ $V(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ใดๆ ดังนั้น $\rho(\mathbf{x}) = \rho^*(\mathbf{x})$ และ $V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = V^*(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้นเขียนสมการ (3.1.30) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V^*(\mathbf{x}-\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (3.1.32)$$

แทนสมการ (3.1.31d) ลงในสมการ (3.1.32) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{V}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \\ &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{V}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})} \\ &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{V}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d^2\mathbf{x}'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{x}'\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

พิจารณาคูณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ ดังต่อไปนี้

$$\delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \int \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \quad (3.1.34a)$$

$$\int d^2\mathbf{k}' \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = 1 \quad (3.1.34b)$$

และ

$$\int d^2\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = f(\mathbf{k}') \quad (3.1.34c)$$

แทนสมการ (3.1.34a) ลงในสมการ (3.1.33) ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{V}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \delta^{(2)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \tilde{V}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.1.35)$$

แทนสมการ (3.1.34b) และ (3.1.34c) ในสมการ (3.1.35) จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.1.36)$$

เพราะฉะนั้นเราเขียนสมการ (3.1.36) ในรูปผลการแปลงฟูเรียร์จากสมการ (3.1.7b) ได้ ดังนี้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \quad (3.1.37)$$

แทนสมการ (3.1.31a) ในสมการ (3.1.36) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{x} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \int \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.1.38)$$

พิจารณาคูณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติจากสมการ (3.1.34a) จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \delta^{(2)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (3.1.39)$$

แทนสมการ (3.1.34b) และ (3.1.34c) ในสมการ (3.1.39) จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \quad (3.1.40)$$

จากสมการ (3.1.40) จะเห็นว่าสมการ (3.1.38) เท่ากับสมการ (3.1.37)

$$\tilde{V}^*(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \tilde{V}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \int \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \quad (3.1.41)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.1.28) และ (3.1.30) พิจารณาหา $\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})$ จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{y}' \phi(\mathbf{y}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \\ &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho^*(\mathbf{y}) V^*(\mathbf{y}-\mathbf{y}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'}\end{aligned}\quad (3.1.42)$$

เนื่องจาก $\rho(\mathbf{y})$ และ $V(\mathbf{y}-\mathbf{y}')$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ใดๆ ดังนั้น $\rho(\mathbf{y}) = \rho^*(\mathbf{y})$ และ $V(\mathbf{y}-\mathbf{y}') = V^*(\mathbf{y}-\mathbf{y}')$ ตามลำดับ เขียนสมการ (3.1.42) ใหม่ ดังนี้

$$\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho^*(\mathbf{y}) V(\mathbf{y}-\mathbf{y}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \quad (3.1.43)$$

เปลี่ยนตัวแปร $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ และ $(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = (\mathbf{y}-\mathbf{y}')$ ในสมการ (3.1.31b) และ (3.1.31c) โดยที่ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ ต่างก็เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งใน 2 มิติ จากนั้นแทนลงในสมการ (3.1.43) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}')} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \\ &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{y}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{y}'} \\ &= \int d^2\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \int d^2\mathbf{k}'' \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{y}} \int \frac{d^2\mathbf{y}'}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{y}'}\end{aligned}\quad (3.1.44)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติดังสมการ (3.1.34a), (3.1.34b) และ (3.1.34c) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \int d^2\mathbf{k}'' \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{y}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'') \\ &= \int d^2\mathbf{y} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \\ &= \int d^2\mathbf{y} \tilde{V}(\mathbf{k}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} \\ &= \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') \tilde{V}(\mathbf{k}) \int \frac{d^2\mathbf{y}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{y}} \\ &= \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') \tilde{V}(\mathbf{k}) \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ &= \int d^2\mathbf{k}' \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}') \tilde{V}(\mathbf{k}) \\ &= \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k})\end{aligned}\quad (3.1.45)$$

คูณสมการ (3.1.40) กับสมการ (3.1.45) เพื่อหา $\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) = |\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2$ จะได้

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k}) = \tilde{V}(\mathbf{k})\tilde{V}^*(\mathbf{k})\tilde{\rho}(\mathbf{k})\tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \quad (3.1.46a)$$

หรือ

$$|\tilde{\phi}(\mathbf{k})|^2 = |\tilde{V}(\mathbf{k})|^2 |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \quad (3.1.46b)$$

แทนสมการ (3.1.46b) ในสมการ (3.1.27) จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ & \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

บวกพจน์ $\frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})}$ และ $-\frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})}$ ที่ด้านขวามือของสมการ

(3.1.47) เพื่อให้สอดคล้องกับกรณีที่เรากำหนดให้ $V(\mathbf{x}) \geq v(\mathbf{x})$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ & \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

ในทำนองเดียวกับสมการ (3.1.5a) และ (3.1.5b) กำหนดให้ $\varphi(\mathbf{x})$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงใดๆ โดยที่

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') v(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (3.1.49a)$$

และ

$$\varphi(\mathbf{x}') = \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.1.49b)$$

จากสมการ (3.1.49b) พิจารณาผลการแปลงฟูรีเยร์ $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x}' \varphi(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int d^2\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \int d^2\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) v^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{v}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{v}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{v}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d^2\mathbf{x}'}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}'} \quad (3.1.50) \end{aligned}$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ ในสมการ (3.1.49a) เขียนสมการ (3.1.50) ใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{v}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\ &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{k}' \delta^{(2)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \tilde{v}^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.51) \end{aligned}$$

แทนสมการ (3.1.34b) และ (3.1.34c) ในสมการ (3.1.51) จะได้

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \tilde{v}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.1.52)$$

เพราะฉะนั้นเราเขียนสมการ (3.1.52) ในรูปผลการแปลงฟูรีเยร์จากสมการ (3.1.7b) ได้ ดังนี้

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = \tilde{v}^*(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \quad (3.1.53)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (3.1.42) และ (3.1.42) พิจารณาหา $\tilde{\varphi}^*(\mathbf{k})$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}^*(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho^*(\mathbf{y}) v^*(\mathbf{y}-\mathbf{y}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) v(\mathbf{y}-\mathbf{y}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{y}')} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{y}' \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{y}'\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \\
 &= \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \int \frac{d^2\mathbf{y}'}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{y}'\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}
 \end{aligned} \tag{3.1.54}$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ ในสมการ (3.1.34a) จะได้

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}^*(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int d^2\mathbf{k}' \tilde{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\
 &= \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int d^2\mathbf{k}' \delta^{(2)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tilde{v}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}}
 \end{aligned} \tag{3.1.55}$$

แทนสมการ (3.1.34b) และ (3.1.34c) ในสมการ (3.1.55) จะได้

$$\tilde{\varphi}^*(\mathbf{k}) = \tilde{v}(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \tag{3.1.56}$$

นำ $\tilde{v}(\mathbf{k})$ หารทั้งสองข้างของสมการ (3.1.56) จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{\varphi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} &= \frac{\tilde{v}(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \\
 &= \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}
 \end{aligned} \tag{3.1.57}$$

จากนั้นคูณ $\tilde{\varphi}(\mathbf{k})$ จากสมการ (3.1.32) กับสมการ (3.1.57) จะได้

$$\frac{\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} = \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \tag{3.1.58}$$

ดังนั้น เราสามารถหา $\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})}$ ได้ เมื่อ $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ และพิจารณาจาก คุณสมบัติของ

ฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ ดังสมการ (3.1.34a), (3.1.34b) และ (3.1.34c) จะได้

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} &= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \\
 &= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}')} \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}')} \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \delta^{(2)}(\mathbf{y}-\mathbf{x}') \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{y} \delta^{(2)}(\mathbf{y}-\mathbf{x}') \rho(\mathbf{y}) \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{3.1.59}
 \end{aligned}$$

แทนสมการ (3.1.31a), (3.1.31b) และ (3.1.31c) ลงในสมการ (3.1.59) และพิจารณาคุณสมบัติฟังก์ชันเดลตาใน 2 มิติ ดังสมการ (3.1.34a), (3.1.34b) และ (3.1.34c) จะได้

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{k})\tilde{\phi}^*(\mathbf{k})}{\tilde{v}(\mathbf{k})} &= \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{x}' \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}} \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \int \frac{d^2\mathbf{x}'}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{x}'} \\
 &= \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{v}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}} \int d^2\mathbf{k}' \tilde{\rho}(\mathbf{k}') \delta^{(2)}(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^2\mathbf{x} \rho^*(\mathbf{x}) \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}'') \\
&= \int d^2\mathbf{x} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d^2\mathbf{k}''}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}'') e^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}} \tilde{\rho}(\mathbf{k}'') \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}'' \tilde{V}(\mathbf{k}'') \tilde{\rho}(\mathbf{k}'') \int \frac{d^2\mathbf{x}}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}'' \tilde{V}(\mathbf{k}'') \tilde{\rho}(\mathbf{k}'') \delta^{(2)}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \int d^2\mathbf{k}'' \delta^{(2)}(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k}'') \tilde{\rho}(\mathbf{k}'') \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \tilde{V}(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}) \tilde{\rho}^*(\mathbf{k}) \tilde{\rho}(\mathbf{k}) \\
&= \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}) |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2
\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

จะเห็นว่าสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสมการ (3.1.59) และสมการ (3.1.60) ได้ ดังนี้

$$\int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{k}) |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \tag{3.1.61}$$

แทนสมการ (3.1.59) และ (3.1.60) ลงในสมการ (3.1.48) จะได้

$$\begin{aligned}
&\sum_{i < j}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\
&\geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{V}(\mathbf{k})} - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \tilde{V}(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k A_j^2 v(0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{V}(\mathbf{k})} + \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \tilde{V}(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i < j}^k A_i A_j v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\
 & \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \tilde{V}(\mathbf{k}) \right] \quad (3.1.62)
 \end{aligned}$$

เนื่องจากเรานิยามให้ $V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0$ ดังนั้นเขียนอสมการ (3.1.62) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i < j}^k A_i A_j V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\
 & \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \frac{1}{2} v(0) \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{|\tilde{V}(\mathbf{k})|^2}{\tilde{v}(\mathbf{k})} - \tilde{V}(\mathbf{k}) \right] \quad (3.1.63)
 \end{aligned}$$

จากอสมการ (3.1.63) เราจะใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อหา $v(0)$, $\tilde{v}(\mathbf{k})$ และ $\tilde{V}(\mathbf{k})$ ตามลำดับ ดังนี้

เนื่องจากไม่สามารถหาปริพันธ์ของ $v(\mathbf{x})$ เพื่อหา $v(0)$ ได้ เราจึงใช้อนุกรมเทย์เลอร์ตั้งสมการ (2.9.1) เพื่อหา $v(0)$ พิจารณา พจน์ $e^{-\lambda|\mathbf{x}|}$ ในด้านขวามือของ สมการ (3.1.2b) โดยกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = e^{-\lambda x}$ พิจารณาที่ $x_0 = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-\lambda x} \\
 f'(x) &= -\lambda e^{-\lambda x} \\
 f''(x) &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \\
 f'''(x) &= -\lambda^3 e^{-\lambda x} \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(x) &= (-1)^n \lambda^n e^{-\lambda x} \quad (3.1.64)
 \end{aligned}$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

แทน $x_0 = 0$ ในสมการ (3.1.64) จะได้

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= -\lambda \\ f''(0) &= \lambda^2 \\ f'''(0) &= -\lambda^3 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^n \lambda^n \end{aligned} \right\} \quad (3.1.65)$$

แทนสมการ (3.1.65) ลงในสมการ (2.9.1) จะได้

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \dots \\ &= 1 - \lambda(x) + \frac{\lambda^2}{2!}(x)^2 - \frac{\lambda^3}{3!}(x)^3 + \dots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!}(x)^n + \dots \end{aligned}$$

และจากสมการ (2.9.2) จะได้

$$e^{-\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n (x)^n}{n!} \quad (3.1.66)$$

แทนสมการ (3.1.66) ลงในสมการ (3.1.2b) เพื่อหาค่า $v(0)$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} v(x) &= e^2 \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n (x)^n}{n!} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= e^2 \left(\frac{1}{x} - \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n (x)^n}{x(n!)} \right\} \right) \\ &= e^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n (x)^n}{x(n!)} \right) \\ &= e^2 \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n (x)^n}{x(n!)} \right) \end{aligned} \quad (3.1.67)$$

กระจายสมการ (3.1.67) จะได้

$$v(x) = e^2 \left(\lambda - \frac{1}{2!} \lambda^2 x + \frac{1}{3!} \lambda^3 x^2 - \frac{1}{4!} \lambda^4 x^3 + \dots \right) \quad (3.1.68)$$

กำหนดให้ $x \rightarrow 0$ ในสมการ (3.1.68) จะได้

$$v(0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^2 \left(\lambda - \frac{1}{2!} \lambda^2 x + \frac{1}{3!} \lambda^3 x^2 - \frac{1}{4!} \lambda^4 x^3 + \dots \right) = e^2 \lambda \quad (3.1.69)$$

หา $\tilde{v}(\mathbf{k})$ โดยพิจารณาจากสมการ (3.1.2b) โดยกำหนดให้

$$\int d^2 \mathbf{x}(\cdot) = \int_0^\infty x dx \int_0^{2\pi} d\theta(\cdot) \quad (3.1.70a)$$

และ

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k x \cos \theta \quad (3.1.70b)$$

แทนสมการ (3.1.70a) และ (3.1.70b) ในสมการ (3.1.2b) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\mathbf{k}) &= \int d^2 \mathbf{x} v(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int d^2 \mathbf{x} \frac{e^2 (1 - e^{-\lambda|\mathbf{x}|})}{|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^2 (1 - e^{-\lambda x})}{x} e^{-ikx \cos \theta} x dx d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 - e^{-\lambda x}) e^{-ikx \cos \theta} dx d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (e^{-ikx \cos \theta} - e^{-ikx \cos \theta} e^{-\lambda x}) dx d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty dx \int_0^{2\pi} (e^{-ikx \cos \theta} - e^{-ikx \cos \theta} e^{-\lambda x}) d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty dx \left(\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta - \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} e^{-\lambda x} d\theta \right) \end{aligned} \quad (3.1.71)$$

หาปริพันธ์ของ $\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta$ เทียบตัวแปร θ จะได้

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta = 2\pi J_0(kx) \quad (3.1.72)$$

เมื่อ J_0 แทนฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับศูนย์

แทนสมการ (3.1.72) ลงในสมการ (3.1.71) จะได้

$$\tilde{v}(\mathbf{k}) = e^2 \left(2\pi \int_0^\infty J_0(kx) dx - 2\pi \int_0^\infty e^{-\lambda x} J_0(kx) dx \right) \quad (3.1.73)$$

กราดซ์เทห์น และไรซิค (Gradshteyn, J.S. and Ryzhik, I.M.)¹ หาปริพันธ์ของ $\int_0^\infty J_0(kx) dx$ และ

$\int_0^\infty e^{-\lambda x} J_0(kx) dx$ เทียบตัวแปร x ได้ ดังนี้

$$\int_0^\infty J_0(kx) dx = \frac{1}{k} \quad (3.1.74a)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} J_0(kx) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \quad (3.1.74b)$$

¹ Gradshteyn I. S; & Ryzhik I. M. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. 6th ed. pp. 653 – 686.

แทนสมการ (3.1.74a) และ (3.1.74b) ลงในสมการ (3.1.73) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{v}(\mathbf{k}) &= 2\pi e^2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \right) \\ &= 2\pi e^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - k}{k\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \right)\end{aligned}\quad (3.1.75)$$

เมื่อเราหาค่าผลการแปลงฟูรีเยร์ของศักย์คูลอมบ์ $V(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$ ผลการแปลงฟูรีเยร์ของ $V(\mathbf{x})$ จะไม่นิยามในกรณีที่ $k=0$ แต่อย่างไรก็ตามถ้าเราพิจารณาจากศักย์ยูกาวา (Yukawa Potential) ดังนี้

$$V_\mu(\mathbf{x}) = \frac{e^2 e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mu > 0 \quad (3.1.76)$$

เมื่อ $V_\mu(\mathbf{x})$ แทนศักย์ยูกาวา

กำหนดให้ $\mu \rightarrow 0$ ในสมการ (3.1.76) เพื่อหาผลการแปลงฟูรีเยร์ของศักย์คูลอมบ์ เราจะต้องหาผลการแปลงฟูรีเยร์ของ $V_\mu(\mathbf{x})$ จากสมการ (3.1.76) โดยกำหนดให้ $\tilde{v}_\mu(\mathbf{k})$ แทนผลการแปลงฟูรีเยร์ของศักย์ยูกาวา $V_\mu(\mathbf{x})$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{v}_\mu(\mathbf{k}) &= \int d^2\mathbf{x} V_\mu(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int d^2\mathbf{x} \frac{e^2 e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3.1.77)$$

แทนสมการ (3.1.70a) และ (3.1.70b) ลงในสมการ (3.1.77) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{v}_\mu(\mathbf{k}) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^2 e^{-\mu x}}{x} e^{-ikx \cos \theta} x dx d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\mu x} e^{-ikx \cos \theta} dx d\theta \\ &= e^2 \int_0^\infty e^{-\mu x} \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta dx\end{aligned}\quad (3.1.78)$$

แทนสมการ (3.1.72) ลงในสมการ (3.1.78) จะได้

$$\tilde{v}_\mu(\mathbf{k}) = 2\pi e^2 \int_0^\infty e^{-\mu x} J_0(kx) dx \quad (3.1.79)$$

จากสมการ (3.1.74b) หาปริพันธ์ของ $\int_0^\infty e^{-\mu x} J_0(kx) dx$ เทียบตัวแปร x จะได้

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} J_0(kx) dx = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \quad (3.1.80)$$

แทนสมการ (3.1.80) ลงในสมการ (3.1.79) จะได้

$$\tilde{v}_\mu(\mathbf{k}) = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \quad (3.1.81)$$

จากสมการ (3.1.81) ผลลัพธ์ที่ได้ เป็นคำตอบที่น่าพอใจมากใน กรณีที่ $k=0$ นั่นคือ $k^2=0$ ในความเป็นจริงปฏิกิริยาจากขอบเขตในช่วง ระยะสั้นๆของแรงนิวเคลียร์ศักรัยยูกว่าที่จะเพิ่ม μ เข้าไป แต่ในอำนาจดึงดูดของ แม่เหล็กไฟฟ้า จะมีขอบเขตในช่วง ระยะอนันต์ μ จะมีค่าเป็นศูนย์ และ $V_\mu(\mathbf{x}) = \frac{e^2 e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|}$ จะลดลงเป็น $\tilde{V}_{\mu \rightarrow 0}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$ ผลการแปลงฟูเรียร์ของศักย์คูลอมบ์ใน 2 มิติ จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mu \rightarrow 0}(\mathbf{k}) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2\pi e^2}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \\ &= \frac{2\pi e^2}{k} \end{aligned} \quad (3.1.82)$$

เพื่อพิสูจน์ว่า $\tilde{V}_{\mu \rightarrow 0}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$ จริง เราจะพิจารณาได้จากผลการแปลงฟูเรียร์ของ $\tilde{V}(\mathbf{k})$ โดยแทนสมการ (3.1.70a), (3.1.70b) และสมการ (3.1.2a) ลงในสมการ (3.1.4b) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} V(\mathbf{x}) e^{-ikx \cos \theta} x dx d\theta \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^2}{x} e^{-ikx \cos \theta} x dx d\theta \end{aligned}$$

$$= e^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} dx d\theta \quad (3.1.83)$$

แทนสมการ (3.1.72) และสมการ (3.1.74) ลงในสมการ (3.1.83) จะได้

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\mathbf{k}) &= 2\pi e^2 \int_0^\infty J_0(kx) dx \\ &= \frac{2\pi e^2}{k} \end{aligned} \quad (3.1.84)$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (3.1.84) แสดงให้เห็นว่า $\tilde{V}_{\mu \rightarrow 0}(\mathbf{x}) \rightarrow \frac{e^2}{|\mathbf{x}|}$

แทนสมการ (3.1.69), (3.1.75), และ (3.1.82) ลงในสมการ (3.1.63) จะได้

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j}^k \frac{A_i A_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\ & \geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ & \quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{\left| 2\pi e^2 \left(\frac{1}{k} \right) \right|^2}{2\pi e^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - k}{k\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \right)} - \frac{2\pi e^2}{k} \right] \\ & = \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ & \quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{4\pi^2 e^4}{2\pi e^2 k^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - k}{k\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \right)} - \frac{2\pi e^2}{k} \right] \\ & = \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ & \quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left[\frac{2\pi e^2 k (\sqrt{\lambda^2 + k^2})}{k^2 (\sqrt{\lambda^2 + k^2} - k)} - \frac{2\pi e^2}{k} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&\quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 2\pi e^2 \left[\frac{(\sqrt{\lambda^2+k^2})}{k\sqrt{\lambda^2+k^2}-k^2} - \frac{1}{k} \right] \\
&= \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&\quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left(2\pi e^2 \left[\frac{k(\sqrt{\lambda^2+k^2})-k\sqrt{\lambda^2+k^2}+k^2}{k^2(\sqrt{\lambda^2+k^2}-k)} \right] \right) \\
&= \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&\quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left(2\pi e^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{\lambda^2+k^2}-k)} \right] \right) \\
\therefore \sum_{i<j}^k \frac{A_i A_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\
&\geq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
&\quad - \pi e^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{(\sqrt{\lambda^2+k^2}-k)} \right) \tag{3.1.85}
\end{aligned}$$

อสมการ (3.1.85) คืออสมการทั่วไปขอบเขตล่างของศักย์คูลอมบ์ของสสารใน 2 มิติ
 เราจะหาขอบเขตของ λ จากอสมการ (3.1.85) ได้ โดยพิจารณาจาก อสมการของมินคอฟสกี
 (Minkowski's Inequality) ดังนี้

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \tag{3.1.86}$$

แทน $n=1$, $p=2$ และ $a=\lambda$, $b=k$ ในอสมการ (3.1.86) จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\lambda+k)^2} &\leq \sqrt{\lambda^2} + \sqrt{k^2} \\
\sqrt{(\lambda+k)^2} - k &\leq \sqrt{\lambda^2} + \sqrt{k^2} - k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{(\lambda+k)^2}-k} \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda^2}+\sqrt{k^2}-k} \\
\therefore -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+k)^2}-k} & \leq -\frac{1}{\lambda}
\end{aligned} \tag{3.1.87}$$

และพิจารณาจาก

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(\lambda^2+k^2)}-k \leq \sqrt{(\lambda+k)^2}-k \\
& \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+k^2)}-k} \geq \frac{1}{\sqrt{(\lambda+k)^2}-k} \\
\therefore -\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+k^2)}-k} & \leq -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+k)^2}-k}
\end{aligned} \tag{3.1.88}$$

แทนอสมการ (3.1.88) ลงในอสมการ (3.1.87) จะได้

$$-\frac{1}{\lambda} \geq -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+k^2}-k} \tag{3.1.89}$$

เขียนความสัมพันธ์ระหว่างอสมการ (3.1.89) กับพจน์ด้านขวามือของอสมการ (3.1.85) จะได้

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{2} e^2 \lambda \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
& - \pi e^2 \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{\rho}(\mathbf{k})|^2 \left(\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda^2+k^2}-k \right)} \right) \\
& \leq \sum_{j=1}^k A_j \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{2} e^2 \lambda_0 \sum_{j=1}^k A_j^2 \\
& - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.1.90}$$

ในลักษณะเฉพาะนี้เลือกพิจารณาเฉพาะกรณี

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^k \frac{A_i A_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} &= \sum_{j=1}^k A_j \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{1}{2} e^2 \lambda_0 \sum_{j=1}^k A_j^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.1.91)$$

ในกรณีเฉพาะนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อตัวแปร $\lambda = \lambda_0$ เท่านั้น
เพื่อหาขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ และง่ายต่อการพิจารณา
เราจะกำหนดให้สสารประเภทโบซอนมีสปินเป็นศูนย์ เขียนสมการ ความหนาแน่นของอนุภาค
 $\rho(\mathbf{x})$ ได้ ดังนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = N \int d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \quad (3.1.92)$$

เมื่อ ψ แทนฟังก์ชันคลื่นของสสารประเภทโบซอนแบบสมมาตรและอยู่ภายใต้
เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์
 N แทนจำนวนอิเล็กตรอน

ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$$\int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N \quad (3.1.93)$$

และ

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.94)$$

เพื่อให้สมการ (3.1.91) สอดคล้องกับพจน์ศักย์คูลอมบ์ ในสมการ (3.1.1) พิจารณาศักย์คูลอมบ์ซึ่ง
เกิดจาก 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน แทนค่าคงที่จำนวนจริงบวก $A_i = 1$, $A_j = 1$ ลงในสมการ (3.1.95) และให้ $k \rightarrow N$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} &= e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^N (1) - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.1.95)$$

กรณีที่ 2 ศักย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างนิวเคลียส แทนค่าคงที่จำนวนจริงบวก $A_i = Z_i$ และ $A_j = Z_j$ ลงในสมการ (3.1.91) และให้ $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{R}_i$ และ $\mathbf{x}_j \rightarrow \mathbf{R}_j$ จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{j=1}^k Z_j^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.1.96)$$

สมการ (3.1.96) จะพิจารณาภายใต้เงื่อนไข $k \geq 2$ เท่านั้น
แทนสมการ (3.1.95) และ (3.1.96) ในสมการ (3.1.1) จะได้

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^N (1) \\ &\quad - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - e^2 \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^N (1) \\ &\quad - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \end{aligned} \quad (3.1.97)$$

จากเงื่อนไข $\sum_{i=1}^k Z_i = N$, $k \geq 2$ และ $\sum_{i=1}^N (1) = N$ เขียนสมการ (3.1.97) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \\ & - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\ & - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \end{aligned} \quad (3.1.98)$$

เราสามารถคำนวณหาพลังงานศักย์ของสสารประจุ ภายบอซอนใน 2 มิติจากสมการ (3.1.8) โดยดำเนินการตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน $\hat{H}$ กับฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร ψ ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์ $\int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N$ ซึ่ง $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ และความเป็นกลางทางไฟฟ้า $\left(\sum_{i=1}^k Z_i = N \right)$ โดยที่ $k \geq 2$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right| \psi \right\rangle \\ &- \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \\ &- \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \end{aligned} \quad (3.1.99)$$

แยกพิจารณาสมการ (3.1.99) ทีละพจน์ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขในสมการ (3.1.92) - (3.1.94) ได้ ดังต่อไปนี้
เขียนพจน์ที่ 1 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle &= \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) T \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
&= T \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
&= T
\end{aligned} \tag{3.1.100}$$

เขียนพจน์ที่ 2 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
&= \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
&= \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
&= \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
&= \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \\
&\quad + \cdots + \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N|} \\
&= e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{3.1.101}$$

เขียนพจน์ที่ 3 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\left\langle \psi \left| e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right| \psi \right\rangle \\
&= \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \psi(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
&= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
&= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
&= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{3.1.102}$$

เขียนพจน์ที่ 4 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} N \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} N
 \end{aligned} \tag{3.1.103}$$

เขียนพจน์ที่ 5 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \psi (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \psi (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi (\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \rho (\mathbf{x}') \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.1.104}$$

เขียนพจน์ที่ 6 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}', \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \tag{3.1.105}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 7 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \tag{3.1.106}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 8 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.99) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi (\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \left(\frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}_j|} + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \frac{\rho(\mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{R}_j|} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \tag{3.1.107}
 \end{aligned}$$

แทนสมการ (3.1.100) - (3.1.107) ลงในสมการ (3.1.99) จะได้

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= T + e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0}{2} N \\
 &\quad - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 &= T - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \lambda_0}{2} N - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \\
 &= T - \frac{2\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \tag{3.1.108}
 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ของ สมการ (3.1.108) เทียบตัวแปร λ_0 เพื่อหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) ของ λ_0 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \frac{\partial}{\partial \lambda_0} T - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{2\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
 0 &= 0 - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{2\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{2\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\
 \frac{e^2}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \lambda_0 &= -2\pi e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{1}{\lambda_0} \\
 \frac{e^2}{2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) &= \frac{2\pi e^2}{\lambda_0^2} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\
 \lambda_0^2 &= 4\pi e^2 \frac{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{e^2 \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)} \\
 &= 4\pi \frac{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lambda_0 = 2 \left(\pi \frac{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)} \right)^{1/2} \quad (3.1.109)$$

แทนสมการ (3.1.109) ลงในสมการ (3.1.108) จะได้

$$\begin{aligned}
 &\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \\
 &= T - \frac{2\pi e^2}{2 \left(\pi \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2}} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2}{2} \frac{2 \left(\pi \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2}}{\left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2}} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$= T - e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (3.1.110)$$

ดังนั้นพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = T - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (3.1.111)$$

สมการ (3.1.111) จะบอกเป็นนัยเกี่ยวกับขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ T ซึ่งควรจะอยู่ในรูปของ $\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})$
จากสมการ (3.1.111) ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = -2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (3.1.112)$$

3.2 ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ (The Lower Bound for the Kinetic Energy of Bosonic Matter in Two Dimensions)

พิจารณาสมการชวิงเงอร์ (Schwinger's Inequality) (Schwinger J. 1961: 122-129) ใน 2 มิติ สำหรับจำนวนของค่าเจาะจง $\leq -\xi$ โดยที่ $\xi > 0$ ภายใต้ตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียน $\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right)$ จะได้สมการ ดังนี้

$$N_{-\xi}(H_0 - v(\mathbf{x})) \leq \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\xi} \right) \left(\int d^2 \mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.1)$$

เพื่อหา ξ กำหนดให้

$$1 = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\xi} \right) \left(\int d^2 \mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.2)$$

และ

$$\xi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) \left(\int d^2 \mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.3)$$

จากอสมการ (3.2.3) เราจะได้ $N_{-\xi}(H_0 - v(\mathbf{x})) < 1$ ถ้าเราเลือกให้ ξ มีค่า ดังนี้

$$\xi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1 + \delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.4)$$

เมื่อ δ แทนค่าคงที่ใดๆ ที่มีค่าน้อยมากๆ และ $\delta > 0$

หรือเขียนอสมการ (3.2.4) ได้ ดังนี้

$$-\xi = -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1 + \delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.5)$$

ในกรณีที่ $N_{-\xi} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) < 1$ ซึ่งหมายถึง $N_{-\xi} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) = 0$ เนื่องจาก จำนวนของค่าเฉพาะ $(N_{-\xi})$ ควรจะเป็นจำนวนธรรมชาติ (Natural Number) ดังนั้น $N_{-\xi} \neq 0$ แสดงให้เห็นว่าพจน์ $\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) = 0$ หมายถึงสเปกตรัม (Spectrum) ของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน $\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right)$ จะหายไป เมื่อมีพลังงานน้อยกว่าหรือเท่ากับ $-\xi$ ดังนั้น พจน์ด้านขวามือของอสมการ (3.2.5) คือขอบเขตล่างของพลังงาน $(-\xi)$ ภายใต้ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน $\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right)$

$$-\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1 + \delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (3.2.6)$$

สำหรับระบบ 1 อนุภาคเราสามารถหาขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของ พลังงานจลน์ T โดยพิจารณาจากเงื่อนไขความหนาแน่นของอนุภาค ดังนี้ $\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = 1$ และ $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ เมื่อ $\psi(\mathbf{x})$ คือฟังก์ชันคลื่นแบบ สมมาตรและนิยามฟังก์ชันที่เป็นบวก $v(\mathbf{x})$ ให้สอดคล้องกับความหนาแน่นของอนุภาค ดังนี้

$$v(\mathbf{x}) = \gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \quad (3.2.7)$$

เมื่อ α และ γ แทนค่าคงที่ที่มีค่าที่แน่นอน

ฟังก์ชัน $v(\mathbf{x})$ ในสมการ (3.2.7) ไม่ใช่ฟังก์ชันของพลังงานศักย์ของตัวดำเนินการฮามิลโทเนียน แต่ $v(\mathbf{x})$ คือพจน์ที่เพิ่มเข้าไปเพื่อที่จะหาค่าขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ T เท่านั้น

จากนั้นคำนวณหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ในระบบ 1 อนุภาค โดยดำเนินการพจน์ $H_0 - v(\mathbf{x})$ เข้าไปในฟังก์ชันคลื่น ψ เพื่อหาค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ T จากเงื่อนไข $\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = 1$ และ $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | H_0 - v(\mathbf{x}) | \psi \rangle &= \left\langle \psi \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle \\
 &= \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) \psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N) \\
 &= \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \int d^2\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right) \int d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right) \\
 &= \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \left(T - \gamma T \frac{\rho(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \quad ; \alpha = 1, N = 1 \\
 &= \left(T \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) - \gamma T \frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\
 &= (T - \gamma T)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\langle \psi | H_0 - v(\mathbf{x}) | \psi \rangle = -(\gamma - 1)T \quad (3.2.8)$$

นำสมการ (3.2.8) ไปพิจารณาร่วมกับขอบเขตล่างของพลังงาน $(-\xi)$ ภายใต้ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนที่หาได้ใน (3.2.6) จะได้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - v(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle &\geq -\xi \\ &\geq -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

แทนพจน์ด้านขวามือจากสมการ (3.2.8) ในสมการ (3.2.9) จะได้

$$\begin{aligned} -(\gamma-1)T &\geq -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) ; v(\mathbf{x}) = \gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \\ &= -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \int d^2\mathbf{x} \left(\gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right)^2 \\ \therefore -(\gamma-1)T &\geq -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\gamma^2 T^2 \frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x})}{\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x}) \right)^2} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(\gamma-1)T \leq \gamma^2 T^2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x})}{\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x}) \right)^2} \right) \quad (3.2.10)$$

กำหนดให้ $2\alpha = \alpha + 1$ และ $\alpha = 1$ ในสมการ (3.2.10) จะได้

$$\begin{aligned} (\gamma-1)T &\leq \gamma^2 T^2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x})}{\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x}) \right)^2} \right) \\ &= \gamma^2 T^2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\frac{1}{\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^{1+1}(\mathbf{x}) \right)} \right) \\ \therefore (\gamma-1)T &\leq \gamma^2 T^2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \frac{1}{\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$T \geq \frac{(\gamma-1)}{\gamma^2} \left(\frac{2\hbar^2}{m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \quad (3.2.11)$$

หาอนุพันธ์ของอสมการ (3.2.11) เทียบตัวแปร γ เพื่อหาค่าของ γ ที่เหมาะสมที่สุด ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{(\gamma-1)}{\gamma^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{\gamma} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{1}{\gamma^2} &= 0 \\ -\frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\gamma^3} &= 0 \\ \frac{2}{\gamma^3} &= \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\gamma = 2 \quad (3.2.12)$$

แทนสมการ (3.2.12) ลงในอสมการ (3.2.11) จะได้ขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงาน จลน์ T ในระบบ 1 อนุภาค ดังนี้

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{(2-1)}{2^2} \left(\frac{2\hbar^2}{m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2\hbar^2}{m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\ \therefore T &\geq \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

เราสามารถหาขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ของอนุภาคโบซอน สำหรับระบบ N อนุภาค ได้โดยพิจารณาจากอนุภาคโบซอนที่เหมือนกันทุกประการ N อนุภาค ซึ่งมีมวล m เท่ากัน และพิจารณาจากความหนาแน่นของอนุภาค ได้จากสมการ (3.1.95) - (3.1.97) เมื่อกำหนดให้สปินมีค่าเป็นศูนย์ แทนค่า $\gamma=2$ และ $\alpha=1$ ลงในสมการ (3.2.7) จะได้

$$v(\mathbf{x}) = 2 \frac{\rho(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} T \quad (3.2.14)$$

เพื่อหาค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ในระบบ N อนุภาค เราดำเนินการพจน์ $\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}$ และ $\sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i)$ กับฟังก์ชันคลื่นแบบสมมาตร ψ ภายใต้เงื่อนไข $\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = 1$ และ $\rho(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$ ได้ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle = T \quad (3.2.15)$$

และ

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) \right| \psi \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N) v(\mathbf{x}_i) \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N v(\mathbf{x}_i) |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &= \int d^2\mathbf{x} (v(\mathbf{x}_1)) \int d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &\quad + \int d^2\mathbf{x}_2 (v(\mathbf{x}_2)) \int d^2\mathbf{x} \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &\quad + \int d^2\mathbf{x}_N (v(\mathbf{x}_N)) \int d^2\mathbf{x} \cdots d^2\mathbf{x}_{N-1} |\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x})) + \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x}_2 \rho(\mathbf{x}_2) (v(\mathbf{x}_2)) + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x}_N \rho(\mathbf{x}_N) (v(\mathbf{x}_N)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} T \right) + \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x}_2 \rho(\mathbf{x}_2) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2)}{\int d^2\mathbf{x}_2 \rho^2(\mathbf{x}_2)} T \right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2\mathbf{x}_N \rho(\mathbf{x}_N) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x}_N)}{\int d^2\mathbf{x}_N \rho^2(\mathbf{x}_N)} T \right) \\
&= 2T \frac{\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \\
&= 2T \frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) \right| \psi \right\rangle = 2T \quad (3.2.16)$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x})$ และฟังก์ชัน $v(\mathbf{x})$ ไม่ใช่ฟังก์ชันของพลังงานศักย์ของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนใดๆ แต่ $v(\mathbf{x})$ คือฟังก์ชันที่เพิ่มเข้าไปเพื่อที่จะหาค่าขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ T (สำหรับอนุภาคโบซอนที่เหมือนกันทุกประการ N อนุภาค) ใน 2 มิติ

พิจารณาตัวดำเนินการ

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \quad (3.2.17)$$

นิยามให้ตัวดำเนินการใน (3.2.17) คือแฮมิลโทเนียนที่สมมุติขึ้นมาของอนุภาคโบซอน N อนุภาคที่ไม่มีปฏิกิริยาต่อกันซึ่งอย่างไรก็ตามตัวดำเนินการนี้จะมีปฏิกิริยากับศักย์ภายนอก $v(\mathbf{x})$

จากสมการ (3.2.15) และ (3.2.16) จะได้

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \right| \psi \right\rangle &= T - 2T \\
&= -T
\end{aligned} \quad (3.2.18)$$

เพื่อให้ได้ขอบเขตล่าง ที่เป็นขอบเขตสุดท้าย ของสเปกตรัม ของตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียน ใน (3.2.17) เราสามารถใส่อนุภาคโบซอน N อนุภาคในสถานะเดียวกันได้ โดยไม่ต้องพิจารณาตาม หลักการกีดกันของเพาลี (ใส่อนุภาคโบซอนทั้งหมด N อนุภาค ที่บริเวณสเปกตรัม ที่มีค่าต่ำที่สุด ของ $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right)$) ดังนั้นตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนในสมการ (3.2.18) จะมีขอบเขตลดลง โดยจำนวนอนุภาคโบซอน N อนุภาคคูณกับขอบเขตล่างของพลังงาน $(-\xi)$ ภายใต้ตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียนใน (3.2.6) ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \right| \psi \right\rangle &\geq -N\xi \\ &\geq -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

แทนพจน์ด้านขวามือของสมการ (3.2.18) ลงในพจน์ด้านซ้ายมือของสมการ (3.2.19) จะได้

$$\begin{aligned} -T &\geq -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \\ &= -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left[\int d^2\mathbf{x} \left(\gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right)^2 \right] \\ &= -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left[\left(\int d^2\mathbf{x} 2 \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right)^2 \right] \quad ; \alpha=1 \\ &= -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) (2)^2 T^2 \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^1(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{1+1}(\mathbf{x})} \right)^2 \\ &= -N \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) (2)^2 T^2 \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\ &= -N \left(\frac{4m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) T^2 \left(\frac{1}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\ &= -N \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \frac{(1+\delta)}{\pi} T^2 \left(\frac{1}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\ \therefore -T &\leq -\frac{1}{N} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

จากอสมการ (3.2.20) เราจะได้ขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์สำหรับอนุภาคโบซอนที่เหมือนกันทุกประการ N อนุภาคใน 2 มิติ คือ

$$T \geq \frac{1}{N} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \quad (3.2.21)$$

3.3 ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร ประเภทโบซอนใน 2 มิติ (Lower Bound for the Ground State Energy of Bosonic Matter in Two Dimensions)

หาขอบเขตล่างของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ โดยแทนอสมการ (3.2.21) ลงในอสมการ (3.1.111) จะได้

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &\geq \frac{1}{N} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right) - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

กำหนดให้ $\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} = A$ และ $\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} = C$ ดังนั้นเขียนอสมการ (3.3.1) ใหม่ได้ดังนี้

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq \frac{C}{N} A^2 - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} A \quad (3.3.2)$$

พิจารณาอสมการ (3.3.2) ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &\geq \frac{C}{N} \left(A^2 - 2e^2 \pi^{1/2} \frac{N}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} A \right) \\ &= \frac{C}{N} \left(A - e^2 \pi^{1/2} \frac{N}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 - \frac{C}{N} \left(e^2 \pi^{1/2} \frac{N}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\ &> -\frac{C}{N} \left(e^2 \pi^{1/2} \frac{N}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{N}{C} e^4 \pi \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
&= -\frac{N}{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)}} e^4 \pi \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
&= -\left(\frac{2me^4}{\hbar^2} \right) (1+\delta) N \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
&= -4 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N^2 (1+\delta) \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^k Z_i^2}{N} \right) \\
\therefore \langle \psi | H | \psi \rangle &> -4 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N^2 (1+\delta) \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^k Z_i^2}{N} \right) \tag{3.3.3}
\end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ค่าคงที่ δ มีค่าน้อยมากๆ หรือ $\delta \ll N$ และ $Z_i \ll N$ ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N^2 (1 + Z_{\max}) \tag{3.3.4}$$

เมื่อ $Z_{\max}$ แทนประจุของนิวเคลียสที่มากที่สุดที่สุดในหน่วยของ $|e|$

3.4 ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน ใน 2 มิติ (The General Bound for Coulomb Potential Energy of Fermionic Matter in Two Dimensions)

เราจะพิจารณาหาขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ของสสารประเภทเฟอร์มิออน ใน 2 มิติได้จากอนุภาคเฟอร์มิออนที่เหมือนกันทุกประการ N อนุภาค โดยพิจารณาจาก ความหนาแน่นของอนุภาค $\rho(\mathbf{x})$ ดังนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = N \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_1 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x} \sigma_1, \mathbf{x}_2 \sigma_2, \cdots \mathbf{x}_N \sigma_N)|^2 \tag{3.4.1}$$

เมื่อ σ แทนตัวกำหนดค่าสปิน

ψ แทนฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร

ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$$\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N \quad (3.4.2)$$

และ

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \\ &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

แยกพิจารณาพจน์ ด้านขวามือของ สมการ (3.1.103) ที่ละพจน์ โดยพิจารณาความหนาแน่นของอนุภาคดั้งเงื่อนไขจากสมการ (3.4.1) - (3.4.3) ได้ ดังต่อไปนี้
เขียนพจน์ที่ 1 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} &\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle \\ &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \\ &\quad \times \psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \\ &= T \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N) \\ &= T \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2\mathbf{x} d^2\mathbf{x}_2 \cdots d^2\mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \\ &= T \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

เขียนพจน์ที่ 2 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^N e^2 \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \\
 & \quad + \cdots + \frac{e^2}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_N|} \\
 &= e^2 \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{3.4.5}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 3 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}'', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}'', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}'', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}'', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}'' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\sigma_1 \mathbf{x}'', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= e^2 \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{3.4.6}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 4 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \left| \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \right|^2 \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} N
 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

เขียนพจน์ที่ 5 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \\
 &\quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \\
 &\quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &\quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_2} \int d^2 \mathbf{x}'_2 \cdots d^2 \mathbf{x}'_N \left| \psi (\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \right|^2 \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x}) \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \rho (\mathbf{x}') \\
 &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2 (\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

เขียนพจน์ที่ 6 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}' d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 & \quad \times \psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \} \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\sigma_1 \mathbf{x}', \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \\
 &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \tag{3.4.9}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 7 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \psi(\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \psi(\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{i=1}^k Z_i^2 \tag{3.4.10}
 \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 8 ในด้านขวามือของสมการ (3.1.103) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \right| \psi \right\rangle \\
 &= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \\
 & \quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \\
 & \quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^* (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 & \quad \times \psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi (\sigma_1 \mathbf{x}, \sigma_2 \mathbf{x}_2, \dots, \sigma_N \mathbf{x}_N)|^2 \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \left(\frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}_j|} + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \frac{\rho(\mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{R}_j|} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^k Z_j e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} \tag{3.4.11}
 \end{aligned}$$

จากสมการ (3.4.4) - (3.4.11) เมื่อเราพิจารณาค่าสปิน ในทางกลศาสตร์ควอนตัม พบว่า จะเกิดขึ้นได้ภายใต้สนามแม่เหล็กและหลักการกีดกันของเพาลีเท่านั้น ในกรณีพลังงานศักย์จะไม่ พิจารณาถึงหลักการกีดกันของเพาลี และสนามแม่เหล็ก ดังนั้นขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ของ สสารประเภทเฟอร์มิออนจึงเท่ากับขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ของสสารประเภทโบซอน ดังนี้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = T - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \tag{3.4.12}$$

สมการ (3.4.12) คือพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ

จากสมการ (3.4.12) ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = -2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (3.4.13)$$

3.5 ขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ (The Lower Bound for the Kinetic Energy of Fermionic Matter in Two Dimensions)

พิจารณาในระบบ N อนุภาค โดยจะพิจารณาจากอนุภาค เฟอร์มิออนที่เหมือนกัน ทุกประการในระบบ N อนุภาค ซึ่งมีมวล m เท่ากัน และความหนาแน่นของอนุภาคใน 2 มิติ เขียนในรูปของความหนาแน่นของอนุภาคได้ดังสมการ (3.4.1) และตัวกำหนดสปิน σ ในแต่ละค่าจะมีจำนวนของสถานะสปิน คือ $q = (2s+1)$ จำนวนทั้งหมดของอนุภาคเฟอร์มิออน N อนุภาคได้มาจากเงื่อนไขของการนอร์มอลไลซ์ดังสมการ (3.4.2) และฟังก์ชันคลื่น $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ เป็นฟังก์ชันที่สมมติขึ้นมาเพื่อให้เหมาะสมในทาง กลศาสตร์ สถิติ ซึ่งในกรณีนี้จะเป็นฟังก์ชันคลื่นแบบปฏิสมมาตร และในการเรียงสับเปลี่ยนกันของ 2 อนุภาคใดๆ จะเป็นการสับเปลี่ยนกันของเวกเตอร์ตำแหน่งและสปิน $(\mathbf{x}_i, \sigma_i) \Leftrightarrow (\mathbf{x}_j, \sigma_j)$

จากนั้นเราจะหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถิตินะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ในระบบ N อนุภาคโดยพิจารณาจากเงื่อนไขดังสมการ (3.4.1) - (3.4.3) ได้ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle = T \quad (3.5.1)$$

และพิจารณา $v(\mathbf{x})$ ในสมการ (3.2.16) จะได้

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) \right| \psi \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N, \sigma_N) v(\mathbf{x}_i) \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N, \sigma_N) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N v(\mathbf{x}_i) \left| \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \sigma_2, \dots, \mathbf{x}_N, \sigma_N) \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma_1 \cdots \sigma_N} \left(\int d^2 \mathbf{x} (v(\mathbf{x}_1)) \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \right. \\
&\quad + \int d^2 \mathbf{x}_2 (v(\mathbf{x}_2)) \int d^2 \mathbf{x} \cdots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \\
&\quad \left. + \int d^2 \mathbf{x}_N (v(\mathbf{x}_N)) \int d^2 \mathbf{x} \cdots d^2 \mathbf{x}_{N-1} |\psi(\mathbf{x}\sigma_1, \mathbf{x}_2\sigma_2, \cdots, \mathbf{x}_N\sigma_N)|^2 \right) \\
&= \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (v(\mathbf{x})) + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \rho(\mathbf{x}_2) (v(\mathbf{x}_2)) + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \rho(\mathbf{x}_N) (v(\mathbf{x}_N)) \\
&= \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x})}{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} T \right) + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \rho(\mathbf{x}_2) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2)}{\int d^2 \mathbf{x}_2 \rho^2(\mathbf{x}_2)} T \right) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \rho(\mathbf{x}_N) \left(2 \frac{\rho(\mathbf{x}_N)}{\int d^2 \mathbf{x}_N \rho^2(\mathbf{x}_N)} T \right) \\
&= 2T \frac{\int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x})}{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \\
&= 2T \frac{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) \right| \psi \right\rangle = 2T \quad (3.5.2)$$

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^N v(\mathbf{x}_i) = v(\mathbf{x})$ และฟังก์ชัน $v(\mathbf{x})$ ไม่ใช่ฟังก์ชัน ของพลังงานศักย์ของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนใดๆ แต่ $v(\mathbf{x})$ คือฟังก์ชันที่เพิ่มเข้าไปเพื่อที่จะหาค่าขอบเขตล่าง ของพลังงานจลน์ T (สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออนที่เหมือนกันทุกประการ N อนุภาค) ใน 2 มิติ

พิจารณาตัวดำเนินการ

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \quad (3.5.3)$$

นิยามให้ตัวดำเนินการจาก (3.5.3) คือแฮมิลโทเนียนที่สมมุติขึ้นมาจากอนุภาคเฟอร์มิออน N อนุภาคที่ไม่มีปฏิกิริยาต่อกัน ซึ่งอย่างไรก็ตามตัวดำเนินการใน (3.5.3) จะมีปฏิกิริยากับศักย์ภายนอก $v(\mathbf{x})$

จากสมการ (3.5.1) และสมการ (3.5.2) จะได้ค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ T ของอนุภาคเฟอร์มิออนในระบบ N อนุภาค คือ

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \right| \psi \right\rangle &= T - 2T \\ &= -T \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

เพื่อให้ได้ ขอบเขตล่าง ไปจนถึงขอบเขตสุดท้ายของ สเปกตรัมของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนใน (3.5.3) เราจะพิจารณาจากสปินจำนวนมากและสภาพซ้อนสถานะสปิน (Spin Degeneracy) โดยเราสามารถใส่อนุภาคเฟอร์มิออน N อนุภาคในสถานะของ พลังงานที่สถานะพื้นเดียวกันได้ โดยต้องพิจารณาจากหลักการกีดกันของเพาลี ถ้าอนุภาคเฟอร์มิออนมีจำนวนมากกว่าสถานะของพลังงานที่สถานะพื้น อนุภาคเฟอร์มิออนอิสระที่เหลือเราจะเลือกให้มีพลังงานจลน์น้อยมากๆ ($\rightarrow 0$) และแยกจากกันเป็นอนันต์ ดังนั้นขอบเขตของ พลังงานของตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนในสมการ (3.5.4) มีขอบเขตลดลงเนื่องจากจำนวนของสถานะสปินที่มีผลต่อแต่ละอนุภาค q คูณกับขอบเขตล่างของ พลังงาน ($-\xi$) ภายใต้ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนใน (3.2.6) จะได้

$$\begin{aligned} \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - v(\mathbf{x}_i) \right] \right| \psi \right\rangle &\geq -q\xi \\ &\geq -q \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

แทนสมการ (3.5.4) ลงในสมการ (3.5.5) จะได้

$$\begin{aligned} -T &\geq -q \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \\ &= -q \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left[\int d^2\mathbf{x} \left(\gamma \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right)^2 \right] \\ &= -q \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) \left[\left(\int d^2\mathbf{x} 2 \frac{\rho^\alpha(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{\alpha+1}(\mathbf{x})} T \right)^2 \right] \quad ; \alpha=1 \\ &= -q \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) (2)^2 T^2 \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^1(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^{1+1}(\mathbf{x})} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\underline{q} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) (2)^2 T^2 \left(\frac{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\
&= -\underline{q} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) T^2 \left(\frac{1}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\
&\geq -\underline{q} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2} \right) (1+\delta) T^2 \left(\frac{1}{\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x})} \right) \\
\therefore -T &\leq -\frac{1}{\underline{q}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\underline{q}$ แทนจำนวนของสถานะสปินที่มีผลต่อแต่ละอนุภาค และ $\underline{q} = (2s+1)$

ดังนั้นขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ

$$T \geq \frac{1}{\underline{q}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{1}{(1+\delta)} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \quad (3.5.6)$$

3.6 ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ (Lower Bound for the Ground State Energy of Fermionic Matter in Two Dimensions)

หาขอบเขตล่างของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ โดยแทนอสมการ (3.5.6) ในสมการ (3.4.12) ได้ ดังนี้

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq \frac{1}{\underline{q}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right) - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (3.6.1)$$

กำหนดให้ $\left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} = A$ และ $\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} = C$ เขียนอสมการ (3.6.1) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\langle \psi | H | \psi \rangle \geq \frac{C}{\underline{q}} A^2 - 2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} A \quad (3.6.2)$$

พิจารณาสมการ (3.6.2) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi | H | \psi \rangle \\
 & \geq \frac{C}{\underline{q}} \left(A^2 - 2e^2 \pi^{1/2} \frac{q}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} A \right) \\
 & = \frac{C}{\underline{q}} \left(A - e^2 \pi^{1/2} \frac{q}{C} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 - \frac{C}{\underline{q}} \left(\frac{q}{C} e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
 & > -\frac{C}{\underline{q}} \left(\frac{q}{C} e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
 & = -\frac{q}{C} e^4 \pi \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
 & = -\frac{\underline{q}}{\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)}} e^4 \pi \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
 & = -(1+\delta) \left(\frac{2me^4}{\hbar^2} \right) \underline{q} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right) \\
 \therefore \quad & \langle \psi | H | \psi \rangle \\
 & > -4\underline{q}(1+\delta) \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^k Z_i^2}{N} \right) \tag{3.6.3}
 \end{aligned}$$

กำหนดให้ δ มีค่าน้อยมากๆ หรือ $\delta \ll N$ และ $N \gg Z_i$ ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4\underline{q} \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N (1 + Z_{\max}) \tag{3.6.4}$$

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยนี้ได้หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ซึ่งดำเนินการตามขั้นตอนในบทที่ 3 ภายใต้ศกัณย์คูลอมบ์ เขียนสมการแฮมิลโทเนียนได้ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^k \frac{Z_j e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \quad (4.0.1)$$

โดยที่

$$\sum_{i=1}^k Z_i = N, k \geq 2 \quad (4.0.2)$$

จากสมการ (4.0.1) และ (4.0.2) เราคำนวณหา ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ได้ผลลัพธ์ ดังต่อไปนี้

1. จากสมการ (4.0.1) และ (4.0.2) คำนวณหาสมการของศกัณย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนที่ขึ้นกับความหนาแน่นของอนุภาค $\rho(\mathbf{x})$ ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} &= e^2 \sum_{i=1}^N \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} N - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

และ คำนวณหา สมการของศกัณย์คูลอมบ์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างนิวเคลียส ที่ขึ้นกับความหนาแน่นของอนุภาค $\rho(\mathbf{x})$ และ $k \geq 2$ ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} &= \sum_{j=1}^k e^2 Z_j \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad - \frac{e^2 \lambda_0}{2} \sum_{j=1}^k Z_j^2 - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

2. เนื่องจากในทาง กลศาสตร์ควอนตัม ในการศึกษาถึง สปิน พบว่าจะเกิดขึ้นได้ภายใต้สนามแม่เหล็กและหลักการกีดกันของเพาลีเท่านั้น ใน กรณีพลังงานศักย์จะไม่พิจารณาถึงหลักการกีดกันของเพาลี และเนื่องจากเราพิจารณาระบบของอนุภาคโบซอนในกรณีที่สปินมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ คูลอมบ์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนจึงเท่ากับขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์ คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอน เมื่อแทนผลลัพธ์ที่ได้จาก สมการ (4.1.1) และ (4.1.2) ลงในสมการ (4.0.1) แล้วดำเนินการกับฟังก์ชันคลื่น ψ ภายใต้เงื่อนไขของการนอร์มัลไลซ์ และ $\int d^2\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N$ เมื่อ $\rho(\mathbf{x})$ แทนความหนาแน่นของอนุภาค ได้ขอบเขตทั่วไปของ พลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ดังสมการ

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = -2e^2 \pi^{1/2} \left(N + \sum_{i=1}^k Z_i^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (4.2.1)$$

3. พิจารณาสมการชวิงเงอร์ใน 2 มิติ โดยไม่สนใจหลักการกีดกันของเพาลีและขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ในรูปยกกำลังของ ปริพันธ์ของ ρ^2 เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของอนุภาค คำนวณหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติได้ ดังสมการ

$$T \geq \frac{1}{N} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right) \quad (4.3.1)$$

4. พิจารณาสมการ ชวิงเงอร์ใน 2 มิติที่สอดคล้องตามหลักการกีดกันของเพาลี และขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ในรูปยกกำลังของ ปริพันธ์ของ ρ^2 คำนวณหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติได้ ดังสมการ

$$T \geq \frac{1}{q} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\pi}{(1+\delta)} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right) \quad (4.4.1)$$

5. จากสมการ (4.2.1) และสมการ (4.3.1) สามารถคำนวณหาขอบเขตล่างของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติได้ ดังนี้

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4 \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N^2 (1 + Z_{\max}) \quad (4.5.1)$$

หรือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4N^2 (1 + Z_{\max}) \quad (4.5.2)$$

อสมการ (4.5.2) พิจารณาในหน่วยริดเบิร์ก เมื่อ $1\text{Ry} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2}$

6. จากสมการ (4.2.1) และอสมการ (4.4.1) สามารถคำนวณหาขอบเขตล่างของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติได้ ดังนี้

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4q \left(\frac{me^4}{2\hbar^2} \right) N (1 + Z_{\max}) \quad (4.6.1)$$

หรือ

$$\langle \psi | H | \psi \rangle > -4q N (1 + Z_{\max}) \quad (4.6.2)$$

อสมการ (4.6.2) พิจารณาในหน่วยริดเบิร์ก

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยนี้เราได้กำหนดเงื่อนไขการวิเคราะห์หาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ จากระบบอนุภาคโบซอนและเฟอร์มิออนในระบบ N อนุภาค โดยพิจารณาภายใต้ศักย์คูลอมบ์ ผลลัพธ์ที่ได้แสดงในรูปฟังก์ชันของจำนวนอิเล็กตรอนและจำนวนนิวเคลียสสามารถสรุปผลและอภิปรายผลการวิจัยได้ ดังต่อไปนี้

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยนี้ได้ศึกษาหาขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร ประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ จากสมการ แฮมิลโทเนียน ภายใต้อันตรกิริยาคูลอมบ์ โดยที่ประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่และ สสารเป็นกลางทางไฟฟ้า ซึ่งจำนวนนิวเคลียสต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2 เท่านั้น ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสาร ประเภทโบซอนและเฟอร์มิออนใน 2 มิติ ดังนี้

1. ได้ขอบเขตล่างของ พลังงานที่สถานะพื้น ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ $E_N > -4\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right)N^2(1+Z_{\max})$ หรือ $E_N > -4N^2(1+Z_{\max})$ ในหน่วยริดเบิร์ก
2. ได้ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น ของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ $E_N > -4(q)\left(\frac{me^4}{2\hbar^2}\right)N(1+Z_{\max})$ หรือ $E_N > -4(q)N(1+Z_{\max})$ ในหน่วยริดเบิร์ก

อภิปรายผลการวิจัย

จากงานวิจัยของมูทาพรและมาโนเกียน ได้ขอบเขตบนของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ คือ $E_N < -0.0002N^2$ ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาขอบเขตบนร่วมกับขอบเขตล่างของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ที่ได้มาจะได้ขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนในระบบ N อนุภาค คือ $-4N^2(1+Z_{\max}) < E_N < -0.0002N^2$ ในหน่วยริดเบิร์ก

โดยที่ $1\text{Ry} = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 13.6057\text{eV}$ เมื่อ Ry แทนค่าคงที่ของริดเบิร์ก

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น E_N ของสสารประเภทโบซอนจะเป็นไปตามกฎเลขยกกำลังในรูป $-E_N \sim N^\gamma$ เมื่อ $\gamma > 1$ ซึ่งสำหรับกรณีใน 2 มิติเราพบว่า $\gamma = 2$ ดังนั้น $-E_N \sim N^2$ เลขยกกำลังนี้แสดงถึงความไม่เสถียรภาพของสสาร โดยพิจารณาได้จากระบบที่มีอนุภาคประจุบวก N อนุภาค และอนุภาคประจุลบ N อนุภาค ดังนั้นสสารที่เป็นกลางทางไฟฟ้าจะ ประกอบด้วย

$2N$ อนุภาค เมื่อนำระบบ $2N$ อนุภาค 2 ระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(2N + 2N)$ อนุภาค แต่ในงานวิจัยนี้ จะพิจารณาเฉพาะ ระบบที่มีอนุภาคประจุลบ N อนุภาค เท่านั้น เนื่องจากประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่ ดังนั้นโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย N อนุภาค เมื่อนำระบบ N อนุภาค 2 ระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค เมื่อพิจารณาโครงสร้างของสสารที่ประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค โดยเปรียบเทียบ ผลต่างระหว่างพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติหลังการรวมตัวกันแล้วของระบบ N อนุภาคจาก 2 ระบบรวมเป็น 1 ระบบกับพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ก่อนการรวมตัวกันของ 2 ระบบที่แต่ละระบบประกอบไปด้วย N อนุภาค ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับ $((2N)^2 - 2(N)^2)$ อนุภาค เมื่อพิจารณาผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้น พบว่า ผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้นจะมีค่าลดลง เนื่องจากการคายพลังงานของระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากซึ่งจะมีอิทธิพลต่อการยุบตัว ของสสารประเภทโบซอนจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบ สสารประเภทโบซอนในก้อนสสารจะยุบตัว ทำให้ลดลงกลายเป็นเฟสความหนาแน่นสูง การรวมตัวกันของ 2 วัตถุซึ่งมองเห็นด้วยตาเปล่าจะปลดปล่อยพลังงานออกมา เทียบได้กับการระเบิดอะตอม ดังนั้นแล้วสสารที่ไม่เป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลีหรือสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติจะไม่เสถียร

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้น E_N ของสสารประเภทเฟอร์มิออนจะเป็นไปตามกฎเลขยกกำลังในรูป $-E_N \sim N$ ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติจะมีเลขยกกำลังของ N เท่ากับ 1 เลขยกกำลังนี้แสดงถึงความเสถียรภาพของสสาร เมื่อพิจารณาจากระบบที่มีอนุภาคประจุบวก N อนุภาค และอนุภาคประจุลบ N อนุภาค ดังนั้นสสารที่เป็นกลางทางไฟฟ้าจะประกอบด้วย $2N$ อนุภาค เมื่อนำระบบ $2N$ อนุภาค 2 ระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(2N + 2N)$ อนุภาค แต่ในกรณีของสสารประเภทเฟอร์มิออนจะพิจารณาเฉพาะ อนุภาคประจุลบ N อนุภาคเท่านั้น เนื่องจากประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่ ดังนั้นโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย N อนุภาค เมื่อนำระบบ N อนุภาค 2 ระบบมารวมกันโครงสร้างของสสารจะประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค เมื่อพิจารณาโครงสร้างของสสารที่ประกอบด้วย $(N + N)$ อนุภาค โดยเปรียบเทียบ ผลต่างระหว่างพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติหลังการรวมตัวกันแล้วของระบบ N อนุภาคจาก 2 ระบบรวมเป็น 1 ระบบกับพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติก่อนการรวมตัวกันของ 2 ระบบที่แต่ละระบบประกอบไปด้วย N อนุภาค ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับ $((2N)^1 - 2(N)^1)$ อนุภาค เมื่อพิจารณาผลต่างของพลังงานที่สถานะพื้น พบว่าผลต่างของ พลังงานที่สถานะพื้น เป็นศูนย์ ดังนั้นสสารประเภทเฟอร์มิออนจะเกิดการขยายตัวของสสารจาก 2 ระบบเป็น 1 ระบบใน 2 มิติและสสารที่เป็นไปตามหลักการกีดกันของเพาลีหรือสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติยังคงความเสถียร

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยนี้เราได้ขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ เท่านั้น ส่วนในกรณีขอบเขตของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภทเฟอร์มิออนใน 2 มิติ เรายังไม่สามารถหาได้เนื่องจากขอบเขตบนของ พลังงานที่สถานะพื้นของสสารประเภท เฟอร์มิออนใน 2 มิติอยู่ในระหว่างการทำวิจัย

ข้อจำกัดข้อหนึ่งคือ ในการวิจัยนี้ศึกษาภายใต้เงื่อนไขศักย์ คูโลมบ์ โดยที่ประจุบวกถูกกำหนดให้อยู่กับที่ เท่านั้น ดังนั้นการวิจัยในอนาคต อาจพิจารณาศักย์ในรูปของลอการิทึม ตรีโกณมิติ หรือพิจารณาในระบบที่ประจุบวกเคลื่อนที่ หรือระบบอยู่ในสนามในลำดับต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Abramowitz M; & Stegun I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Table*. New York: Dover.
- Arfken, B. George; & Weber, J. Hans (1995). *Mathematical Methods for Physicists*. 4th ed. Ohio: Academic Press.
- Baer Rio. (2008, October). *Electron Density Functional Theory*. Israel: The Fritz Haber Center for Molecular Dynamics.
- Bethe, A. Hans; & Jackiw, W. Roman. (1993). *Intermediate Quantum Mechanics*. 3rd ed. Massachusetts: Addison – Wesley Publishing Company.
- Conlon, Lieb E; & Horng, Tzer Yau. (1988 May 12). *The $N^{7/5}$ Law for Charged Bosons*. Communications in Mathematical Physics. 116 : 417 – 448.
- Dyson, Freeman J; & Lenard A. (1967 May). *Stability of Matter I*. Journal of Mathematical Physics. 8 : 423.
- Hobby of Electronic. (1998). *Logarithm Table*. Retrieved May 20, 2009, from http://www.massmind.org/images/www/hobby_elec/e_logarithm.htm.
- Jeffrey Alan. (1995). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. Newcastle: Academic Press.
- Gradshteyn I. S; & Ryzhik I. M. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. 6th ed. Cambridge, U. K.: Academic Press.
- Griffiths, David J. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. Reed : Prentice Hall.
- Kreyszig Erwin. (2006). *Advanced Engineering Mathematics*. 9th ed. Ohio: John Wiley & Sons.
- Lenard A; & Dyson, Freeman J. (1968 May). *Stability of Matter II*. Journal of Mathematical Physics. 9 : 698.
- Liboff L. Richard. (1992). *Introductory Quantum Mechanics*. 2nd ed. New York: Addison – Wesley Publishing Company, Inc.
- Lieb, Elliott H; & Thirring, Walter E. (1975). *Bound for the Kinetic Energy of Fermions which Proves the Stability of Matter*. In *Stability of Matter from Atoms to Stars*. Thirring W. pp. 323 – 325. Vienna: Springer – Verlag.

- Lieb, Elliott H; & Thirring W. (1976). *Inequalities or the Moments of the Eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and Their Relation to Sobolev Inequalities*. In *Stability of Matter from Atoms to Stars*. Thirring W. pp. 135 – 168. Vienna: Springer – Verlag.
- Lieb, Elliott H. (1979). *The $N^{5/3}$ Law for Bosons*. In *Stability of Matter from Atoms to Stars*. Thirring W. pp. 327 – 329. Vienna: Springer – Verlag.
- Lieb, Elliott H; & Stephen Oxford. (1981). *Improved Lower Bound on the Indirect Coulomb Energy*. In *Stability of Matter from Atoms to Stars*. Thirring W. pp. 65 – 68. Vienna: Springer – Verlag.
- Loss Michael. (2005, November). *Stability of Matter*. Retrieved November 20, 2008 from E-mail: loss@math. Gatech. Edu © 2005 by the author.
- Manoukian E.B; & Muthaporn C. (2004, October). *Instability of Bosonic Matter in all Dimensions*. *Physical Review Letters A* 321: 152 – 154.
- Mark Winter. (2009). *WebElements Periodic Table*. Retrieved May 15, 2009, from <http://www.webelements.com>
- Muthaporn C; & Manoukian E.B. (2004, November). *N^2 Law For Bosons in 2D*. *Reports on Mathematical Physics*. Vol. 53: 415 – 424.
- Schwinger J. (1961). *On the Bound States of a Given Potential*. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 47: 122-129.
- Tang C.L. (2005). *Fundamentals of Quantum Mechanics for Solid State Electronics and Optics*. Cornell: Cambridge University Press.
- Thirring Waiter. (1990). [Dyson F. and Lieb H.] *The Stability of Matter from Atoms to Stars*. Vienna: Springer – Verlag.
- Zettili Nouredine. (2001). *Quantum Mechanics Concepts and Applications*. New York: John Wiley & Sons, LTD.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

อสมการชวิงเงอร์ (Schwinger Inequality) ใน 2 มิติ

ขอบเขตล่างของค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์ของสสารใน 2 มิติ

เพื่อหาขอบเขตล่างของพลังงานจลน์ T เราจะพิจารณาค่าความคาดหวังของพลังงานจลน์จากตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนของอนุภาคเดี่ยว ดังสมการ

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V \quad (\text{ก.1})$$

$$\begin{array}{ll} \text{เมื่อ } \hat{H}_0 & \text{แทนตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนอิสระ โดย } H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \\ V & \text{แทนพลังงานศักย์ของระบบ} \end{array}$$

เราจะคำนวณหาขอบเขตล่างของตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียน จากสมการ (ก.1) โดยเพิ่มตัวพารามิเตอร์ g เข้าไป เมื่อ $g \geq 0$ และนิยามสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$\hat{H}(g) = \hat{H}_0 + gV(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.2})$$

เมื่อแทนค่า $g=1$ ในสมการ (ก.2) พบว่าสมการจะสอดคล้องกับสมการ (ก.1)

พิจารณาพจน์ของพลังงานศักย์จากสมการ (ก.2) ตามวิธีฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) ดังนี้

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x})(1) \\ &= V(\mathbf{x})[\Theta(V(\mathbf{x})) + \Theta(-V(\mathbf{x}))] \\ &= V(\mathbf{x})\Theta(V(\mathbf{x})) + V(\mathbf{x})\Theta(-V(\mathbf{x})) \\ V(\mathbf{x}) &\geq V(\mathbf{x})\Theta(-V(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (\text{ก.3})$$

เนื่องจาก $V(\mathbf{x})\Theta(V(\mathbf{x})) \geq 0$ ในขณะที่ $\Theta(V(\mathbf{x})) + \Theta(-V(\mathbf{x})) = 1$

กำหนดให้ $-v(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Theta(-V(\mathbf{x}))$ และ $v(\mathbf{x}) \geq 0$ ดังนั้นเขียนอสมการ (ก.3) ใหม่ได้ ดังนี้

$$V(\mathbf{x}) \geq -v(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.4})$$

แทนอสมการ (ก.4) ลงในสมการ (ก.2) ได้ดังต่อไปนี้

$$\hat{H}(g) = \hat{H}_0 + gV(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.5})$$

และ

$$\hat{H}(g) \geq \hat{H}_0 - gv(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.6})$$

กำหนดให้ $N_{-\xi}(\hat{H}(g))$ แทนจำนวนของค่าเจาะจงของ $\hat{H}_g \leq -\xi$ โดย $\xi > 0$ สร้างความสัมพันธ์ระหว่างค่าเจาะจงของสองตัวดำเนินการ $\hat{H}(g)$ และ $\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})$ สเปกตรัมของสองตัวดำเนินการนี้จะถูกกำหนดขอบเขตให้ลดลงเนื่องจากเวกเตอร์ $|\psi\rangle$ ทั้งหมดในขอบเขตกำเนิด (Domains) ของ $\hat{H}(g)$ และ $\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})$ จะได้

$$\langle \psi | \hat{H}(g) | \psi \rangle \geq \langle \psi | \hat{H}_0 - gv(\mathbf{x}) | \psi \rangle \geq -\xi \quad (\text{ก.7})$$

ดังนั้นจำนวนของค่าเจาะจงของสถานะขอบ (Bound State) ของ $\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})$ ไม่สามารถมีค่าที่น้อยกว่าจำนวนของค่าเจาะจงของสถานะขอบของ $\hat{H}(g)$ ได้ เขียนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของค่าเจาะจงของสถานะขอบของ $\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})$ และ $\hat{H}(g)$ ได้ ดังนี้

$$N_{-\xi}(\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})) \geq N_{-\xi}(\hat{H}_0 + gV(\mathbf{x})) \quad (\text{ก.8})$$

เมื่อ g' อยู่ในช่วง $0 < g' < g$ เขียนความสัมพันธ์ระหว่าง g' และ g ได้ ดังนี้

$$\hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x}) \geq \hat{H}_0 - gv(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.9})$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (ก.8) จะได้

$$N_{-\xi}(\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})) \geq N_{-\xi}(\hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x})) \quad (\text{ก.10})$$

จากอสมการ (ก.3) ถึง (ก.10) เราเขียนความสัมพันธ์ที่สำคัญได้ ดังนี้

$$N_{-\xi}(\hat{H}_0 - gv(\mathbf{x})) = [\text{จำนวนของค่าเจาะจงของ } g' \text{ จะอยู่ช่วงในช่วง } 0 < g' \leq g \text{ สำหรับ } \hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x}) \text{ จะมีค่าเจาะจงเท่ากับ } -\xi] \quad (\text{ก.11})$$

ดังนั้น $\hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x})$ มีพลังงานเป็น $-\xi$

พิจารณาสมการ (ก.11) ภายใต้เงื่อนไขของการนอร์มอลไลซ์ เราสามารถหาสมการค่า
เฉพาะ (Eigenvalue Equation) ของ $(\hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x}))$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (\hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x}))|\psi\rangle &= -\xi|\psi\rangle \quad ; \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \\
 \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - g'v(\mathbf{x})\right)|\psi\rangle &= -\xi|\psi\rangle \\
 \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \xi\right)|\psi\rangle &= g'v(\mathbf{x})|\psi\rangle \\
 &= g'\sqrt{v(\mathbf{x})}\sqrt{v(\mathbf{x})}|\psi\rangle \\
 &= g'\sqrt{v(\mathbf{x})}|\phi\rangle
 \end{aligned} \tag{ก.12}$$

$$\text{เมื่อ } |\phi\rangle = \sqrt{v(\mathbf{x})}|\psi\rangle$$

นำ $\sqrt{v(\mathbf{x})}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ (ก.12) จะได้

$$\begin{aligned}
 \sqrt{v(\mathbf{x})}\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \xi\right)|\psi\rangle &= g'\sqrt{v(\mathbf{x})}\sqrt{v(\mathbf{x})}|\phi\rangle \\
 \sqrt{v(\mathbf{x})}|\psi\rangle &= g'\sqrt{v(\mathbf{x})}\frac{1}{\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \xi\right)}\sqrt{v(\mathbf{x})}|\phi\rangle \\
 |\phi\rangle &= g'\hat{A}|\phi\rangle \\
 \hat{A}|\phi\rangle &= \frac{1}{g'}|\phi\rangle
 \end{aligned} \tag{ก.13}$$

เมื่อ A แทนตัวดำเนินการที่มีค่าเป็นบวกใดๆ

ตัวดำเนินการ A มีค่าดังนี้

$$\hat{A} = \sqrt{v(\mathbf{x})}\frac{1}{\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \xi\right)}\sqrt{v(\mathbf{x})} \tag{ก.14}$$

ค่าเจาะจงของตัวดำเนินการ $\hat{A}$ จากสมการ (ก.14) จะมีค่าเป็น $\frac{1}{g'}$ ซึ่งอยู่ในช่วง $0 < g' < g$ เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวดำเนินการ $\hat{A}$ กับค่าเจาะจง $\frac{1}{g'}$ โดยพิจารณาจากนิยามของฟังก์ชันเดล - ตาติแรก ดังนี้

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | \phi_m \rangle &= \delta_{nm} \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| &= \hat{I} \\ \hat{A} = \hat{I} \hat{A} \hat{I} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \right) \hat{A} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\phi_m\rangle \langle \phi_m| \right) = \sum_{nm} A_{nm} |\phi_n\rangle \langle \phi_m| \\ \hat{A}_{nm} &= \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_m \rangle\end{aligned}\quad (\text{ก.15})$$

เมื่อ $\hat{I}$ แทนตัวดำเนินการหน่วย (Unit Operator)

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\hat{A}^\rho &= \hat{I} \hat{A}^\rho \hat{I} = \hat{I} \frac{1}{g_j'^\rho} \hat{I} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j'\rangle \langle g_j'| \right) \frac{1}{g_j'^\rho} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j'\rangle \langle g_j'| \right) \\ \hat{A}^\rho &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{g_j'^\rho} |g_j'\rangle \langle g_j'| \end{aligned}\quad (\text{ก.16})$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อ} \quad \frac{1}{g_j'^\rho} &= \langle g_j' | \hat{A}^\rho | g_j' \rangle \\ \rho &\text{ แทนเลขจำนวนเต็มบวกใดๆ โดย } \rho \geq 0\end{aligned}$$

จากสมการ (ก.14) สำหรับ $\rho \geq 0$ เขียนลักษณะเฉพาะนี้ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\int d^v \mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{A}^\rho | \mathbf{x} \rangle &\geq \frac{1}{g^\rho} \times [\text{จำนวนของค่าเจาะจงทั้งหมดของ } g' \text{ ที่เป็นค่าเจาะจงของ } \hat{A} \text{ จะ} \\ &\text{อยู่ในช่วง } 0 < g' \leq g \text{ สำหรับ } \hat{H}_0 - g'v(\mathbf{x}) \text{ มีค่าเจาะจงเท่ากับ } -\xi] \end{aligned}\quad (\text{ก.17})$$

แทนอสมการ (ก.17) ลงในอสมการ (ก.11) จะได้

$$N_{-\xi}(\hat{H}_0 - g\nu(\mathbf{x})) \leq g^\rho \int d^3\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{A}^\rho | \mathbf{x} \rangle \quad (\text{ก.18})$$

อสมการ (ก.18) เรียกว่าอสมการชวิงเงอร์ (Schwinger's Inequality)

พิจารณาอสมการชวิงเงอร์ใน 2 มิติ โดยแทน $\nu = 2$, $g(\mathbf{x}) = 1$ และเราเลือกให้ $\rho = 2$ ลงในด้านขวามือของอสมการ (ก.18) เขียนสมการได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} g^\rho \int d^3\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{A}^\rho | \mathbf{x} \rangle &= 1^2 \int d^2\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{A}^2 | \mathbf{x} \rangle \\ \int d^2\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \hat{A}^2 | \mathbf{x} \rangle &= \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \hat{A} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \hat{A} | \mathbf{x} \rangle \\ &= \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \hat{A} | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x} | \hat{A} | \mathbf{x}' \rangle^* \\ &= \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' |\langle \mathbf{x} | \hat{A} | \mathbf{x}' \rangle|^2 \\ &= \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' \nu(\mathbf{x}) \nu(\mathbf{x}') \left| \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{ก.19})$$

พิจารณาในพจน์ $\left| \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \right|^2$ โดยกำหนดให้ $\left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle = \langle \mathbf{x} | \hat{A}(\mathbf{p}) | \mathbf{x}' \rangle$ และ

เขียนในรูปของความสัมพันธ์ลู่ใช้ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \right| &= \langle \mathbf{x} | \hat{A}(\mathbf{p}) | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^2\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2} \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \hat{A}(\mathbf{p}) | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^2\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2} e^{i\frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot \mathbf{x}} \langle \mathbf{p} | \hat{A}(\mathbf{p}) | \mathbf{p}' \rangle e^{-i\frac{\mathbf{p}'}{\hbar} \cdot \mathbf{x}'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}')/\hbar} \langle \mathbf{p} | \hat{A}(p) | \mathbf{p}' \rangle \\
&= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}')/\hbar} \hat{A}(\mathbf{p}) (2\pi\hbar)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
&= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \hat{A}(\mathbf{p}) (2\pi\hbar)^2 \int \frac{d^2 \mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^2} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}')/\hbar} \delta^{(2)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
&= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \hat{A}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \\
&= \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar}}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{e^{i p \beta \cos \theta / \hbar}}{\left[\frac{p^2}{2m} + \xi \right]} p dp d\theta \quad ; \beta = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \frac{1}{\left[\frac{p^2}{2m} + \xi \right]} p dp \int_0^{2\pi} e^{i p \beta \cos \theta / \hbar} d\theta \tag{ก.20}
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ของ $\int_0^{2\pi} e^{i p \beta \cos \theta / \hbar} d\theta$ เทียบตัวแปร θ จะได้

$$\int_0^{2\pi} e^{i p \beta \cos \theta / \hbar} d\theta = 2\pi J_0 \left(\frac{p\beta}{\hbar} \right) \tag{ก.21}$$

แทนสมการ (ก.21) ลงในสมการ (ก.20) จะได้

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle \right| &= \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \frac{J_0(p\beta/\hbar)}{\left[\frac{p^2}{2m} + \xi \right]} p dp \\
&= \frac{4m\pi}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \frac{p}{\left[p^2 + 2m\xi \right]} J_0 \left(\frac{p\beta}{\hbar} \right) dp \\
&= \frac{m}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{p}{\left[p^2 + 2m\xi \right]} J_0 \left(\frac{p\beta}{\hbar} \right) dp \tag{ก.22}
\end{aligned}$$

กราดซ์เทย์น และไรซิค¹ หาปริพันธ์ของ $\int_0^\infty \frac{p}{[p^2 + 2m\xi]} J_0\left(\frac{p\beta}{\hbar}\right) dp$ เทียบตัวแปร p ได้ ดังนี้

$$\int_0^\infty \frac{p}{[p^2 + k^2]} J_0(ap) dp = K_0(ak) \quad (\text{ก.23})$$

เมื่อ K_0 แทนฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองแบบปรับปรุงอันดับศูนย์

แทนสมการ (ก.23) และ $a = \frac{\beta}{\hbar}$, $k = \sqrt{2m\xi}$ ลงในด้านขวามือของสมการ (ก.22) จะได้

$$\left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle = \frac{m}{\pi \hbar^2} K_0\left(\frac{\beta \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \quad (\text{ก.24})$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{x} \left| \frac{1}{\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \xi \right]} \right| \mathbf{x}' \right\rangle^2 &= \left(\frac{m}{\pi \hbar^2} \right)^2 \left(K_0\left(\frac{\beta \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \\ &= \left(\frac{m}{\pi \hbar^2} \right)^2 \left(K_0\left(\frac{\beta \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 ; \beta = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= \left(\frac{m}{\pi \hbar^2} \right)^2 \left(K_0\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{ก.25})$$

¹ Gradshteyn I. S; & Ryzhik I. M. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. 6th ed. p. 663.

แทนสมการ (ก.25) ลงในสมการ (ก.19) จะได้

$$\begin{aligned}\int d^2\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | A^2 | \mathbf{x} \rangle &= \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' v(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}') \left(\frac{m}{\pi\hbar^2} \right)^2 \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \\ &= \left(\frac{m}{\pi\hbar^2} \right)^2 \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' v(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}') \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2\end{aligned}\quad (\text{ก.26})$$

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (ก.26) ลงในสมการ (ก.18) จะได้

$$N_{-\xi}(H_0 - v(\mathbf{x})) \leq \left(\frac{m}{\pi\hbar^2} \right)^2 \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' v(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}') \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \quad (\text{ก.27})$$

นิยามพจน์ด้านขวามือของสมการ (ก.27) ในรูปอสมการของยังได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\left\{ \left| \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}-\mathbf{x}') h(\mathbf{x}') \right|^r \right\}^{1/r} &\leq \left\{ \int d^2\mathbf{x} |f(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p} \left\{ \int d^2\mathbf{x} |g(\mathbf{x})|^q \right\}^{1/q} \\ &\quad \times \left\{ \int d^2\mathbf{x} |h(\mathbf{x})|^s \right\}^{1/s}\end{aligned}\quad (\text{ก.28})$$

จากเงื่อนไขอสมการของยัง $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r} + 1$ กำหนดให้ $r=1, p=2, s=2, q=1$ และแทนฟังก์ชันต่างๆได้ ดังต่อไปนี้

$$f(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \quad (\text{ก.29a})$$

$$g(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \quad (\text{ก.29b})$$

$$g(\mathbf{x}) = \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \quad (\text{ก.29c})$$

$$h(\mathbf{x}') = v(\mathbf{x}') \quad (\text{ก.29d})$$

แทนค่าของ p, s, q, r และสมการ (ก.29a) - (ก.29d) ลงในอสมการ (ก.28) จะได้

$$\begin{aligned}
 & \left| \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' v(\mathbf{x}) \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 v(\mathbf{x}') \right| \\
 & \leq \left(\int d^2\mathbf{x} |v(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \right) \times \left(\int d^2\mathbf{x} |v(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} \\
 & = \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})^2] \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})^2] \right)^{1/2} \times \left(\int d^2\mathbf{x} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \right) \\
 & \leq \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \left(\int d^2\mathbf{x} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{ก.30}$$

อิทีเกรตพจน์ที่ 2 ด้านขวามือของอสมการ (ก.30) จะได้

$$\begin{aligned}
 \int d^2\mathbf{x} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}|\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(K_0 \left(\frac{x\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 x dx d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \left(K_0 \left(\frac{x\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 x dx
 \end{aligned} \tag{ก.31}$$

หาปริพันธ์ของ $\int_0^\infty \left(K_0 \left(\frac{x\sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 x dx$ เทียบตัวแปร x จะได้

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty (K_0(xa))^2 x dx &= \int_0^\infty (K_0(u))^2 \frac{u}{a^2} du \quad ; u = xa \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty (K_0(u))^2 u du
 \end{aligned}$$

กราดซ์เทห์น และไรซิค¹ หาปริพันธ์ของ $\int_0^{\infty} (K_0(u))^2 u du$ เทียบตัวแปร u ได้ ดังนี้

$$\int_0^{\infty} (K_0(u))^2 u du = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty} (K_0(xa))^2 x dx = \frac{1}{2a^2} \quad (\text{ก.32})$$

แทนสมการ (ก.32) และแทน $a = \frac{\sqrt{2m\xi}}{\hbar}$ ลงในสมการ (ก.31) จะได้

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{x} \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 &= 2\pi \frac{\hbar^2}{2(2m\xi)} \\ &= \frac{\pi \hbar^2}{2m\xi} \end{aligned} \quad (\text{ก.33})$$

แทนสมการ (ก.33) ลงในสมการ (ก.30) จะได้

$$\left| \int d^2\mathbf{x} \int d^2\mathbf{x}' v(\mathbf{x}) \left(K_0 \left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \sqrt{2m\xi}}{\hbar} \right) \right)^2 v(\mathbf{x}') \right| \leq \frac{\pi \hbar^2}{2m\xi} \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2 \right) \quad (\text{ก.34})$$

¹ Gradshteyn I. S; & Ryzhik I. M. (2000). *Table of Integrals, Series, and Products*. 6th ed. p. 676.

ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (ก.34) ลงในสมการ (ก.27) จะได้

$$\begin{aligned} N_{-\xi}(H_0 - v(\mathbf{x})) &\leq \left(\frac{m}{\pi\hbar^2}\right)^2 \left(\frac{\pi\hbar^2}{2m\xi}\right) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2\right) \\ &\leq \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\xi}\right) \left(\int d^2\mathbf{x} [v(\mathbf{x})]^2\right) \end{aligned} \quad (\text{ก.35})$$

โดยที่ $v(\mathbf{x}) \geq 0$

ภาคผนวก ข

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นของสสารใน 2 มิติ ในกรณี $k = 1$

พิจารณาเงื่อนไขในกรณีที่ $k=1$

ในกรณีที่ $k=1$ เขียนสมการตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนได้ ดังนี้

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^1 \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_1|} \quad (ข.1)$$

โดยที่

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^1 \frac{Z_1 e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_1|} = \sum_{j=1}^N \frac{N e^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \quad (ข.2)$$

ในกรณีที่ $k=1$ พจน์ $\sum_{i<j}^k \frac{Z_i Z_j e^2}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|}$ จะหายไป เราสามารถเขียนพจน์ $\sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$ จากสมการ (3.1.99) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\sum_{i<j}^N \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = e^2 \sum_{j=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \quad (ข.3)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \\ &\quad - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^N \frac{N e^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^N e^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \\ &\quad + \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^N \frac{N e^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} - \sum_{j=1}^N \frac{N e^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} + \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\quad + e^2 \left(\sum_{j=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (ข.4) \end{aligned}$$

เราสามารถคำนวณหาขอบเขตล่างของพลังงานศักย์ของสสารประเภทโบซอนใน 2 มิติ ได้จากสมการ (ข.4) โดยพิจารณาจากตัวดำเนินการ แฮมิลโทเนียน $\hat{H}$ จากเงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์ความเป็นกลางทางไฟฟ้า $\left(\sum_{i=1}^k Z_i = N\right)$ และ $k=1$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \right| \psi \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^N \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right| \psi \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \psi \left| e^2 \left(\sum_{j=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right| \psi \right\rangle\end{aligned}\quad (ข.5)$$

แยกพิจารณาสมการ (ข.5) ทีละพจน์ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขความหนาแน่นของอนุภาค ดังต่อไปนี้

$$\rho(\mathbf{x}) = N \int d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \quad (ข.6)$$

ภายใต้เงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์

$$\int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = N \quad (ข.7)$$

และ

$$\begin{aligned}\langle \psi | \psi \rangle &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \dots d^2 \mathbf{x}_N |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &= 1\end{aligned}\quad (ข.8)$$

เขียนพจน์ที่ 1 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m} \right| \psi \right\rangle = T \quad (ข.9)$$

เขียนพจน์ที่ 2 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right| \psi \right\rangle = \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \quad (\text{ข.10})$$

เขียนพจน์ที่ 3 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \frac{e^2 \lambda_0 N}{2} \right| \psi \right\rangle = \frac{e^2 \lambda_0}{2} N \quad (\text{ข.11})$$

เขียนพจน์ที่ 4 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} & \left\langle \psi \left| \sum_{j=1}^N \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \right| \psi \right\rangle \\ &= \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{j=1}^N \frac{Ne^2}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \sum_{j=1}^k Ne^2 \sum_{i=1}^N \int d^2 \mathbf{x} d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{R}|} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \sum_{j=1}^k Ne^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{R}_j|} \int d^2 \mathbf{x}_2 \cdots d^2 \mathbf{x}_N \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \\ &= \sum_{j=1}^k Ne^2 \left\{ \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|} + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_2 \frac{\rho(\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}|} + \cdots + \frac{1}{N} \int d^2 \mathbf{x}_N \frac{\rho(\mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{R}|} \right\} \\ &= Ne^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|} \quad (\text{ข.12}) \end{aligned}$$

เขียนพจน์ที่ 5 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right| \psi \right\rangle = \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x} \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{ข.13})$$

เขียนพจน์ที่ 6 ในด้านขวามือของสมการ (ข.4) ใหม่ ดังนี้

$$\left\langle \psi \left| e^2 \left(\sum_{j=1}^N \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} - \int d^2 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \int d^2 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right| \psi \right\rangle = 0 \quad (\text{ข.14})$$

แทนสมการ (ข.9) - (ข.14) ลงในสมการ (ข.5) จะได้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = T - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \lambda_0}{2} N - Ne^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|} + \frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (\text{ข.15})$$

กำหนดขอบเขตพจน์ที่เป็นบวก $\frac{e^2}{2} \int d^2 \mathbf{x}' \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ จากสมการ (ข.15) ให้มีค่าลดลงจนเป็นศูนย์ ดังนั้นเขียนสมการ (ข.15) ใหม่ได้ ดังนี้

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = T - \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \lambda_0}{2} N - Ne^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|} \quad (\text{ข.16})$$

หาอนุพันธ์ของสมการ (ข.16) เทียบตัวแปร λ_0 เพื่อหา λ_0 ที่เหมาะสมที่สุด ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= \frac{\partial}{\partial \lambda_0} T - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} N - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} Ne^2 \int d^2 \mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{R}|} \\ 0 &= 0 - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} N \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{e^2 \lambda_0}{2} N &= - \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{\pi e^2}{\lambda_0} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\ \frac{e^2}{2} N \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \lambda_0 &= - \pi e^2 \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \frac{1}{\lambda_0} \\ \frac{e^2}{2} N &= \frac{\pi e^2}{\lambda_0^2} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\ \lambda_0^2 &= \frac{2 \pi e^2}{e^2 N} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{2 \pi}{N} \int d^2 \mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lambda_0 = \left(\frac{2\pi}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \quad (\text{ข.17})$$

แทนสมการ (ข.17) ลงในสมการ (ข.16) จะได้

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle &= T - \frac{\pi e^2}{\left(\frac{2\pi}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2}} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) - \frac{e^2}{2} N \left(\frac{2\pi}{N} \int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - Ne^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} \\ &= T - e^2 \left(\frac{\pi N}{2} \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - e^2 \left(\frac{\pi N}{2} \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - Ne^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} \quad (\text{ข.16}) \end{aligned}$$

ขอบเขตล่างของพลังงานที่สถานะพื้นแบบแม่นยำตรงของสสารใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = T - 2e^2 \left(\frac{\pi N}{2} \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - Ne^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} \quad (\text{ข.17})$$

จากสมการ (ข.17) ขอบเขตทั่วไปของพลังงานศักย์คูลอมบ์ของสสารประเภทโบซอน และเฟอร์มิออนใน 2 มิติ คือ

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = -2e^2 \left(\frac{\pi N}{2} \right)^{1/2} \left(\int d^2\mathbf{x} \rho^2(\mathbf{x}) \right)^{1/2} - Ne^2 \int d^2\mathbf{x} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}|} \quad (\text{ข.18})$$

ภาคผนวก ค

วิธีพิสูจน์หา $\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta$ และ $\int_0^{2\pi} e^{ikx \cos \theta} d\theta$

พิสูจน์หา $\int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos(kx \cos \theta) - i \sin(kx \cos \theta)) d\theta \quad ; e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(kx \cos \theta) d\theta - i \int_0^{2\pi} \sin(kx \cos \theta) d\theta \end{aligned} \quad (ค.1)$$

จากสมการ (ค.1) พิจารณาพจน์ $\cos(kx \cos \theta)$ ในรูปของอนุกรมกำลังได้ ดังนี้

$$\cos(kx \cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2m)!} \quad (ค.2)$$

จากสมการ (ค.1) พิจารณาพจน์ $i \sin(kx \cos \theta)$ ในรูปของอนุกรมกำลังได้ ดังนี้

$$i \sin(kx \cos \theta) = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (ค.3)$$

แทนสมการ (ค.2) และ (ค.3) ลงในสมการ (ค.1) ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ikx \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2m)!} - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2m)!} d\theta - i \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \theta d\theta - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n+1} d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \left[\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} x + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{m-1} \binom{2m}{p} \frac{\sin(2m-2p)x}{2m-2p} \right]_{-1}^1 \\ &\quad - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \sum_{q=1}^n \binom{2n+1}{q} \frac{\sin(2n-2q+1)x}{2n-2q+1} \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \left[\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} 2\pi + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{m-1} \binom{2m}{p} \frac{\sin 2\pi(2m-2p)}{2m-2p} \right] \\
&\quad - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2k+1)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \sum_{q=1}^n \binom{2n+1}{q} \frac{\sin 2\pi(2n-2q+1)}{2n-2q+1} \right] \\
&= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{2^{2m} (2m)!} \left(\frac{(2m)!}{(m!)^2} \right) \\
&= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \\
&= 2\pi J_0(kx)
\end{aligned} \tag{ค.4}$$

พิสูจน์หา $\int_0^{2\pi} e^{ikx \cos \theta} d\theta$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{ikx \cos \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} (\cos(kx \cos \theta) + i \sin(kx \cos \theta)) d\theta \quad ; e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(kx \cos \theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(kx \cos \theta) d\theta
\end{aligned} \tag{ค.5}$$

จากสมการ (ค.5) พิจารณาพจน์ $\cos(kx \cos \theta)$ ในรูปอนุกรมกำลังได้ ดังนี้

$$\cos(kx \cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2m)!} \tag{ค.6}$$

จากสมการ (ค.5) พิจารณาพจน์ $i \sin(kx \cos \theta)$ ในรูปอนุกรมกำลังได้ ดังนี้

$$i \sin(kx \cos \theta) = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2k+1)!} \tag{ค.7}$$

แทนสมการ (ค.6) และ (ค.7) ลงในสมการ (ค.5) ได้ ดังนี้

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m} \cos^{2m} \theta}{(2m)!} d\theta + \int_0^{2\pi} i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \theta d\theta + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2n+1} d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \left[\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} x + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{m-1} \binom{2m}{p} \frac{\sin(2m-2p)x}{2m-2p} \right]_0^{2\pi} \\
&\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \sum_{q=1}^n \binom{2n+1}{q} \frac{\sin(2n-2q+1)x}{2n-2q+1} \right]_0^{2\pi} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{(2m)!} \left[\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} 2\pi + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{p=0}^{m-1} \binom{2m}{p} \frac{\sin 2\pi(2m-2p)}{2m-2p} \right] \\
&\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{2^{2n}} \sum_{q=1}^n \binom{2n+1}{q} \frac{\sin 2\pi(2n-2q+1)}{2n-2q+1} \right] \\
&= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{2^{2m} (2m)!} \left(\frac{(2m)!}{(m!)^2} \right) \\
&= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kx)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \\
&= 2\pi J_0(kx)
\end{aligned}$$

(9.8)

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล	นายกิตติศักดิ์ ศรีวงศ์ษา
วัน เดือน ปีเกิด	10 ธันวาคม 2524
สถานที่เกิด	สกลนคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	99/3 หมู่ 2 ซอยสอนพัฒนา ถนนพังโคน – วาริช บ้านนาเหมือง ตำบลพังโคน อำเภอพังโคน จังหวัดสกลนคร 47160

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2544	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนสกลราชวิทยานุกูล
พ.ศ. 2548	คป. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร
พ.ศ. 2553	กศ.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ