การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ปริญญานิพนธ์

ของ

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2549

การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

บทคัดย่อ

ของ

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
พฤษภาคม 2549

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี. (2549). *การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤติ, รองศาสตราจารย์อรพินท์ เจียระพงษ์.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เพื่อสร้างชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และเพื่อหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ซึ่งผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ผู้วิจัยนำเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน (แบบทดสอบวินิจฉัย) เรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยไปคัดเลือกนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 จำนวน 35 คน ภายหลังเรียนเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนจากอาจารย์ประจำวิชาเสร็จสิ้นแล้ว โดยนิสิตที่ผ่านการคัดเลือกจะเป็นกลุ่มตัวอย่าง และนำนิสิตกลุ่มตัวอย่างมาแก้ไขข้อบกพร่องโดยใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เมื่อนิสิตได้รับการแก้ไขในหน่วยการเรียนย่อยใดแล้ว ผู้วิจัยนำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนย่อยนั้นไปทดสอบนิสิต โดยนิสิตแต่ละคนสามารถทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานได้ไม่เกิน 2 ครั้ง และใช้คะแนนครั้งที่มากที่สุดของนิสิต สำหรับการหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ผลการวิจัยปรากฏว่า จากการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ สามารถสรุปลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ได้ดังนี้ 1) ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร 2) ด้านทักษะการคิดคำนวณ และ 3) ด้านการประยุกต์ และในการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ พบว่า จากนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน จำนวน 35 คน มีนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้จำนวน 26 คน คิดเป็นร้อยละ 74.29 ซึ่งนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้มีสัดส่วนมากกว่าร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่าชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์มีประสิทธิภาพ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

A STUDY AND REMEDY FOR THE DEFICIENCY OF THAKSIN UNIVERSITY

MATHEMATICS STUDENTS IN LEARNING INFINITE SERIES

AN ABSTRACT

BY

KETSARAPORN TENGMEESRI

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Education in Mathematics

At Srinakharinwirot University

May 2006

Ketsaraporn Tengmeesri. (2006). *A Study and remedy for the deficiency of Thaksin University mathematics students in learning infinite series.* Master thesis, M.Ed. (Mathematics). Bankok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assoc. Prof. Yongyuth Tanugrit, Assoc. Prof. Orapin Cheerrapong.

The aims of this research are to study the deficiency, to construct the programmed text for remedy the deficiency, and to find the efficiency of the programmed text for remedy the deficiency of Thaksin University mathematics students in learning infinite series.

In this research, the sample is the first year mathematics students of Thaksin University on academic year 2005 that have the deficiency in learning infinite series, that is, the first year mathematics students of Thaksin University on academic year 2005 that pass the selection by our diagnostic tests.

The number of the first year mathematics students of on academic year 2005 is 35. After they have learned the content of infinite series in each unit from their class, we use our diagnostic tests in each subunit to select them. The students passing the selection will be the sample. Next, we remedy the deficiency of the sample by using our programmed text. When the sample has remedied in which unit, we will test the sample by parallel tests in that unit. Note that, each student can be tested by parallel tests at most 2 times. Finally, we use the maximum score of all students in the sample for finding the efficiency of our programmed text for remedy the deficiency in learning infinite series.

Results indicated that Thaksin University mathematics students have deficiency in learning infinite series as follows: 1) using definitions, theorems, properties, laws, or formulas, 2) compute skill, and 3) applications. From 35 students having deficiency, there are 26 students that can be remedied the deficiency in learning infinite series, that is 74.29 % of students having deficiency. Hence, the proportion of students that can be remedied the deficiency is greater than 60% at a .05 level of significance. Therefore, we conclude with a 95% confidence interval that the programmed text for remedy the deficiency in learning infinite series has efficiency according to our hypothesis.

การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ปริญญานิพนธ์

ของ

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

พฤษภาคม 2549

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ของ
เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่ ...... เดือน .... พ.ศ. 2549

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤติ)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์อรพินท์ เจียระพงษ์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุติวรรณ เพ็ญเพียร)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ธนูชัย ภูอุดม)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจากรองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤติ ประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และรองศาสตราจารย์อรพินท์ เจียระพงษ์ กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ท่านทั้งสองได้เสียสละเวลาอันมีค่าเพื่อให้ความรู้ คำปรึกษาแนะนำ ข้อคิดเห็น ในการจัดทำงานวิจัยนี้ทุกขั้นตอน อีกทั้งทำให้ผู้วิจัยได้รับประสบการณ์ในการทำงานวิจัย ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุติวรรณ เพ็ญเพียร และอาจารย์ธนูชัย ภูอุดม ที่เป็นกรรมการในการสอบปริญญานิพนธ์ และได้ให้คำแนะนำเพิ่มเติมเพื่อให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล อาจารย์สมภพ ล่ำวัฒนพร และอาจารย์อลงกรณ์ แซ่ตั้ง ที่ได้เสียสละเวลาอันมีค่าให้ความช่วยเหลือในการตรวจเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เฉลิมศรี ชำนิ อาจารย์หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ และคณะครูอาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือ และเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย ตลอดจนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ที่ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ พ่อ แม่ พี่ น้อง และบุคคลในครอบครัวทุกท่านที่ให้กำลังใจที่ดีตลอดระยะเวลาที่ศึกษาและทำงานวิจัย

ขอขอบคุณ คุณวัชรุตม์ มูณีรัตน์ คุณกุลธร เสน่หา ที่ให้ความช่วยเหลือในการดำเนินการต่างๆ และขอบคุณพี่ และเพื่อนๆ นิสิตปริญญาโทวิชาเอกคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2546 ที่ได้แลกเปลี่ยนความรู้ และให้กำลังใจกันด้วยดีเสมอมา

คุณค่า ประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอน้อมรำลึกและบูชาพระคุณของพ่อ แม่ บูรพคณาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย และให้การสนับสนุนช่วยเหลือผู้วิจัยตลอดมา

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

บัญชีตาราง

ตาราง **หน้า**

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง **หน้า**

บัญชีตาราง (ต่อ)

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง **หน้า**

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง **หน้า**

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

การศึกษานั้นเป็นหัวใจในการพัฒนาคุณภาพของคนอันเป็นกำลังสำคัญในการพัฒนาชาติ การศึกษาเป็นเครื่องมือในการสร้างคนให้เป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ทั้งทางร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ และคุณธรรม มีจริยธรรมในการดำรงชีวิต สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (อุบล เล่นวารี. 2545: 44-46) พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ได้กำหนดแนวทางการปฏิรูปการศึกษา โดยให้ความสำคัญสูงสุดสำหรับกระบวนการเรียนรู้ที่ยึดผู้เรียนเป็นสำคัญ เพื่อให้ผู้เรียนพัฒนาเต็มศักยภาพ สามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองและรู้จักแสวงหาความรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต ทั้งนี้โดยจัดกระบวนการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ฝึกกระบวนการคิด ทักษะ รวมทั้งส่งเสริมให้คิดเป็น ทำเป็น และแก้ปัญหาเป็น (วรณัน ขุนศรี. 2546: 15) คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งในกระบวนการศึกษาซึ่งมีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ เนื่องจากคณิตศาสตร์ทำให้ผู้เรียนเป็นคนที่รู้จักคิดอย่างมีเหตุผล มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ฝึกให้ผู้เรียนคิดอย่างมีระบบและสามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจและแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). 2546: 1) อีกทั้งคณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาวิทยาการแขนงต่างๆ เกือบทุกสาขาวิชา ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งต่างใช้หลักการของคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น (ยุพิน พิพิธกุล. 2530: 2)

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533: 33) กล่าวว่า เนื่องจากลักษณะที่สำคัญประการหนึ่งของคณิตศาสตร์ คือ เป็นวิชาที่มีความต่อเนื่องกันเป็นลำดับขั้น การเรียนรู้เนื้อหาบางเรื่องทำไม่ได้เลยถ้าไม่เรียนรู้เรื่องที่เป็นพื้นฐานมาก่อน ดังนั้นสาเหตุประการหนึ่งที่ทำให้ผู้เรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ก็คือ การที่ต้องเรียนเรื่องใหม่โดยที่ยังขาดความรู้ความเข้าใจในเรื่องเดิมที่เป็นพื้นฐานของเรื่องใหม่ ทำให้ไม่สามารถเกิดการเรียนรู้เรื่องใหม่ที่กำลังเรียนได้ ดารณี คำแหง (2533: 8) ได้กล่าวไว้ว่าการที่ผู้เรียนจะประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์นั้น ครูผู้สอนต้องศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในเนื้อหาวิชาที่เป็นพื้นฐานสำคัญ และเนื้อหาวิชาที่มีปัญหามาก แล้วนำผลการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนมาพิจารณาถึงสาเหตุ และอุปสรรคทางการเรียนของผู้เรียนแต่ละคน เพื่อนำไปใช้ในการหาทางแก้ไขปัญหาทางการเรียนของผู้เรียนแต่ละคนได้ก่อนที่จะมีการสอบ

สารานุกรมวิกิพีเดีย (2548: ออนไลน์) กล่าวว่า ปัจจุบันวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้เข้ามาเป็นส่วนหนึ่งของชีวิตประจำวันมากขึ้น การพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีต้องมีคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญในการสร้างตัวแบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ รวมทั้งการหาผลเฉลยซึ่งสัมพันธ์กับปริมาณต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ก็จำเป็นต้องใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์แทบทั้งสิ้น การพัฒนาและการใช้แคลคูลัสได้ขยายผลไปแทบทุกส่วนของการใช้ชีวิตในยุคใหม่ และเป็นพื้นฐานของวิทยาศาสตร์เกือบทุกสาขาโดยเฉพาะฟิสิกส์และการพัฒนาสมัยใหม่เกือบทั้งหมด เช่น เทคนิคการก่อสร้าง การบิน และเทคโนโลยีอื่นๆ ซึ่งมีพื้นฐานมาจากแคลคูลัส นอกจากนี้แคลคูลัสยังเป็นความรู้พื้นฐานของการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) แคลคูลัสเวกเตอร์ (Vector Calculus) แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variations) การวิเคราะห์เชิงซ้อน (Complex Analysis) แคลคูลัสกณิกนันต์ (Infinitesimal Calculus) และทอพอโลยีเชิงอนุพันธ์ (Differential Topology)

ศรีบุตร แววเจริญ; และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2542: คำนำ) ได้กล่าวว่า แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งของสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนานำไปใช้ประยุกต์ในวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์สาขาต่างๆ อีกมากมาย ซึ่งก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ดีนั้น นิสิตนักศึกษาที่เรียนในสายวิทยาศาสตร์ จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจถ่องแท้ก่อน

ภุชงค์ แพรขาว (2542: 47) ได้กล่าวว่า วิชาแคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาที่เป็นการวิเคราะห์ สังเคราะห์ระหว่างพีชคณิต เรขาคณิต มโนมติ และยังเป็นวิชาที่แสดงให้เห็นแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักคณิตศาสตร์สมัยก่อน ซึ่งพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสจะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันและกราฟที่มีความสัมพันธ์กับการสร้างทฤษฎี การประยุกต์ใช้ในศาสตร์ต่างๆ ด้วยเหตุนี้วิชาแคลคูลัสจึงมีความสำคัญเสมือนเป็นเครื่องมือที่จำเป็นอย่างหนึ่งของนักศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

จากความสำคัญและประโยชน์ของวิชาแคลคูลัสดังกล่าว สถาบันอุดมศึกษาต่างๆ จึงจัดเป็นวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาสาขาวิทยาศาสตร์และสาขาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ทำให้จำนวนนักศึกษาที่เรียนวิชาแคลคูลัสมีจำนวนมากและเพิ่มมากขึ้นในทุกๆ ปีการศึกษา อาจารย์ผู้สอนวิชานี้ต้องประสบปัญหาในการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนเกิดขึ้นตามมา เช่นปัญหาความแตกต่างของความรู้พื้นฐานของนักศึกษาที่เริ่มเข้าสู่ระบบมหาวิทยาลัย ปัญหาความแตกต่างระหว่างบุคคลในด้านความสามารถทางการเรียนมีมากขึ้น เมื่อขนาดกลุ่มเรียนใหญ่ขึ้น ปัญหาการสอนเนื้อหาอย่างละเอียดไม่ทันตามเวลากำหนดในการเรียน โอกาสในการซักถามปัญหาจากอาจารย์ผู้บรรยายในกรณีที่นักศึกษาผู้นั้นมีปัญหาทางการเรียนมีน้อยลง เป็นต้น ซึ่งปัญหาต่างๆ เหล่านี้จะทำให้นักศึกษาเข้าใจเนื้อหาไม่ลึกซึ้งหรือมีความเข้าใจเนื้อหาผิดพลาดได้ และอาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ผู้เรียนไม่ประสบผลสัมฤทธิ์ที่ดี

จากสภาพปัญหาและแนวคิดข้างต้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนในรายวิชาแคลคูลัส โดยได้ทำการสำรวจเนื้อหาในวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 ซึ่งเป็นรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยการนำแบบสอบถามไปสำรวจความคิดเห็นของผู้สอนหรือเคยสอนในวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 10 คน จากการสำรวจพบว่าได้ผลดังแสดงในตาราง 1 ดังนี้

ตาราง 1 เนื้อหาที่เป็นปัญหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

วิชา	เรื่อง	ค่าเฉลี่ย	ระดับปัญหา
แคลคูลัส 1	ลิมิตและความต่อเนื่อง	1.93	ปานกลาง
	อนุพันธ์	2.20	ปานกลาง
	การประยุกต์ของอนุพันธ์	2.50	มาก
	ปริพันธ์	1.98	ปานกลาง
	ฟังก์ชันอดิศัย	2.35	มาก
	เทคนิคการหาปริพันธ์	2.23	ปานกลาง
	การประยุกต์ของปริพันธ์	2.12	ปานกลาง
	รูปแบบยังไม่กำหนดและปริพันธ์ไม่ตรงแบบ	2.20	ปานกลาง
แคลคูลัส 2	อนุกรมอนันต์	2.64	มาก
	เวกเตอร์และการเคลื่อนที่ในสามมิติ	1.94	ปานกลาง
	ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย	2.11	ปานกลาง
	ปริพันธ์หลายชั้น	2.32	มาก

เกณฑ์ของระดับปัญหา : 0 - 0.74 หมายถึงไม่มีปัญหา 0.75 – 1.49 หมายถึงมีปัญหาน้อย 1.50 – 2.24 หมายถึงมีปัญหาปานกลาง 2.25 – 3.00 หมายถึงมีปัญหามาก

จากตาราง 1 พบว่า เนื้อหาที่มีปัญหาในระดับมาก ได้แก่ การประยุกต์ของอนุพันธ์ ฟังก์ชันอดิศัย อนุกรมอนันต์ และปริพันธ์หลายชั้น แต่อนุกรมอนันต์เป็นเนื้อหาที่มีปัญหาในระดับมาก ซึ่งมีค่าเฉลี่ยมากกว่าเนื้อหาอื่นๆ นอกจากนั้น บุญมา ยิสาร (2528: 3) ได้กล่าวว่าเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการทดสอบการเป็นคอนเวอร์เจนซ์ หรือไดเวอร์เจนซ์ ของลำดับและอนุกรม ซึ่งเป็นเนื้อหาที่ยาก ดังนั้น ผู้วิจัยจึงเลือกที่จะแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

บุญชม ศรีสะอาด (2537: 76-77) กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปนับเป็นสื่อการเรียนการสอนอีกรูปแบบหนึ่งที่มุ่งให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเอง จะเร็วหรือช้าตามความสามารถของแต่ละบุคคล โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหลายๆ กรอบ (Frames) แต่ละกรอบจะมีเนื้อหาที่เรียบเรียงไว้ มุ่งให้เกิดการเรียนรู้ตามลำดับ ถวัลย์ มาศจรัส (2546: 20) กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปเปรียบเสมือนการเรียนกับครูผู้สอนแบบตัวต่อตัว ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ไปทีละน้อยตามลำดับขั้น จากง่ายไปยากตามศักยภาพและตามความสามารถของแต่ละคน สันทัด ภิบาลสุข (2522: 62-65) ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526: 195) และบุญชม ศรีสะอาด (2537: 83) ได้กล่าวถึงข้อดีของแบบเรียนสำเร็จรูปไว้ว่า ทำให้ผู้เรียนเกิดความอยากเรียน เป็นการสนองตอบในเรื่องความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคล ทำให้ผู้เรียนไม่รู้สึกว่ามีปมด้อย และมีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่องของตนได้ทันที นอกจากนั้น หรรษา นิลวิเชียร (2524: 19-20) ได้กล่าวว่า วิชาคณิตศาสตร์เหมาะแก่การนำมาสร้างบทเรียนสำเร็จรูป เพราะเป็นวิชาที่มีเหตุผล มีระเบียบ คำตอบดิ้นไม่ได้ และง่ายที่จะคาดว่าผู้เรียนจะตอบผิดตรงไหน ดังนั้นบทเรียนสำเร็จรูปจึงเป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาใช้เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนได้

เนื่องจากเรื่องอนุกรมอนันต์ประกอบด้วยเนื้อหาย่อยที่สามารถจัดลำดับเนื้อหาให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ไปทีละน้อยตามลำดับขั้น จากง่ายไปยากตามศักยภาพและตามความสามารถของแต่ละคน ผู้วิจัยคิดว่าบทเรียนสำเร็จรูปน่าจะเป็นเครื่องมือที่เหมาะสมสำหรับการเรียนการสอนที่ต้องการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ ดังนั้นจึงใช้แนวคิดของบทเรียนสำเร็จรูปจัดทำเป็นชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ สำหรับการวิจัยในครั้งนี้

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

2. เพื่อสร้างชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

3. เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

2. ได้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่สามารถนำไปใช้ในการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน ซึ่งช่วยแก้ไขข้อบกพร่องของนิสิตได้

3. เป็นแนวทางสำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องทางการศึกษาในการนำไปพัฒนา ปรับปรุงการเรียนการสอนและแก้ไขปัญหาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์หรือรายวิชาอื่นๆ

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ทั้งหมดที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ จากมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ซึ่งผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) ได้แก่ ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2. ตัวแปรตาม (Dependent Variable) ได้แก่ ประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งจำแนกเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ได้ 6 หน่วยการเรียน ดังนี้

หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง

หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ใช้ระยะเวลาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 เวลาที่ใช้ในการทดลองใช้นอกเวลาเรียนปกติไม่น้อยกว่า 25 ชั่วโมง

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **ข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์** หมายถึง ข้อผิดพลาดที่เกิดมาจากความไม่เข้าใจเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยจำแนกลักษณะข้อบกพร่องเป็น 3 ด้าน ดังนี้

ด้านที่ 1 ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎี สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.1 การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.2 การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.3 การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.4 การนำบทนิยามไปใช้ในการพิสูจน์

1.5 การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ด้านที่ 2 ด้านทักษะการคิดคำนวณ

2.1 การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

2.2 การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

2.3 ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

2.4 การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ด้านที่ 3 ด้านการประยุกต์

3.1 การนำความรู้ในเรื่องการแทนค่าตัวแปร การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ไปประยุกต์ใช้

3.2 การนำความรู้ในเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินไปประยุกต์ใช้

2. **ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง** หมายถึง ชุดบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้สำหรับแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

2.1 บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากการคัดเลือกของผู้วิจัยบรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยนิสิตจะศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้ ประกอบด้วย คำนำ จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน และหน่วยการเรียน 6 หน่วย ดังนี้

2.1.1 หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และการหาลิมิตของลำดับ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2

2.1.2 หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และอนุกรมเรขาคณิต แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

2.1.3 หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 7 หน่วย ได้แก่ การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยปริพันธ์ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 อนุกรมพี แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยอัตราส่วน แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 และการทดสอบโดยราก แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

2.1.4 หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ซึ่งมีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่ อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

2.1.5 หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2, 3

2.1.6 หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ซึ่งมีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่ อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และ3

แต่ละหน่วยการเรียนย่อยซึ่งแยกตามลักษณะข้อบกพร่องในแต่ละด้าน ประกอบด้วย

1. คำชี้แจง/คำแนะนำในการศึกษา
2. จุดประสงค์การเรียนรู้
3. กรอบ (Frame) แต่ละกรอบจะมีคำอธิบายเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่อง มีตัวอย่าง มีกิจกรรมให้นิสิตทำเพื่อทบทวนความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้ศึกษา พร้อมเฉลยคำตอบ

2.2 คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

2.2.1 จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2.2.2 กรอบแนวทางการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน ซึ่งเป็นการนำเสนอรายละเอียดในการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อให้การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้

2.2.3 แบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน พร้อมเฉลยคำตอบ

3. **แบบทดสอบวินิจฉัย** หมายถึง แบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อค้นหาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย ข้อคำถามแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ แบบทดสอบวินิจฉัยนี้มีจำนวน 15 ฉบับตามจำนวนหน่วยการเรียนย่อย

4. **แบบทดสอบคู่ขนาน** หมายถึง แบบทดสอบคู่ขนานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อศึกษาผลการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยข้อคำถามแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ และข้อคำถามจะคู่ขนานกับข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัย แบบทดสอบคู่ขนานนี้มีจำนวน 15 ฉบับตามจำนวนหน่วยการเรียนย่อย

5. **นิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน** หมายถึง นิสิตที่ผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยเป็นนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนอย่างน้อย 1 ด้าน

เกณฑ์ตัดสิน คือ ถ้านิสิตได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยน้อยกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตมีข้อบกพร่องทางการเรียน

6. **ประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์** หมายถึง ประสิทธิภาพที่ได้จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานหลังการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยมีเกณฑ์ตัดสินคือ เกณฑ์ 60/60 กล่าวคือ 60 ตัวแรก หมายถึง ถ้านิสิตได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของทุกหน่วยการเรียนอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ได้ และ 60 ตัวหลัง หมายถึง ถ้ามีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด แสดงว่าชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีประสิทธิภาพ

สมมติฐานของการวิจัย

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีประสิทธิภาพ

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    - 1.1 ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    - 1.2 ความสำคัญและประโยชน์ของการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    - 1.3 ลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
2. การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน
    - 2.1 การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนโดยการวินิจฉัย
    - 2.2 ความหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน
    - 2.3 ลักษณะของแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน
    - 2.4 เทคนิควิธีการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน
3. บทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.1 ความหมายของบทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.2 ลักษณะสำคัญของบทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.3 ประเภทของบทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.4 หลักการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.5 ขั้นตอนการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป
    - 3.6 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนสำเร็จรูป
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์
    - 4.1 งานวิจัยในประเทศ
    - 4.2 งานวิจัยต่างประเทศ
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้บทเรียนสำเร็จรูปในวิชาคณิตศาสตร์
    - 5.1 งานวิจัยในประเทศ
    - 5.2 งานวิจัยต่างประเทศ

1. การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

เวบสเตอร์ (Webster. 1993: 279) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องไว้ว่า ข้อบกพร่อง หมายถึง ส่วนประกอบหรือลักษณะของการมีประสิทธิภาพที่ถูกละเลยหรือขาดความสมบูรณ์ในส่วนสำคัญบางประการ ราชบัณฑิตยสถาน (2526: 458) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องว่าหมายถึง ลักษณะของความไม่ครบบริบูรณ์เท่าที่ควรมีควรเป็น ส่วนข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์นั้น ได้มีผู้ให้ความหมายไว้ ได้แก่ สมศักดิ์ ฉันทานุรักษ์ (2529: 7) กล่าวว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ไม่ประสบผลสำเร็จ ดารณี คำแหง (2533: 13) ได้ให้ความหมายของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ข้อผิดพลาดหรือสาเหตุที่เป็นปัญหาหรืออุปสรรคที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ หรือไม่สามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.2 ความสำคัญและประโยชน์ของการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

ชัยและอัง (Chai; & Ang. 1987: 189-198) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการหาปัญหาหรือข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่า ในการสอนคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ความผิดพลาดเป็นสิ่งสำคัญที่ทำให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพ การศึกษาหาความผิดพลาดจะทำให้การจัดหาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับความคิดของเด็ก ปัญหาทางคณิตศาสตร์และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหามีความหมายมากในการสอน ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักเรียนหลีกเลี่ยงปัญหา และสามารถอธิบายได้ว่าเพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงไม่มีพัฒนาการด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ นักวิจัยยืนยันว่าเมื่อความผิดพลาดของนักเรียนแสดงออกมา ทำให้เห็นว่าการเรียนรู้กำลังจะเริ่มขึ้นและสามารถทำให้มั่นคงขึ้นในภายหลัง

รี (Ree. 1987: 29-34) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการศึกษาข้อบกพร่อง ซึ่งสรุปว่าการศึกษาข้อบกพร่องอย่างมีประสิทธิภาพและการสอนที่เตรียมล่วงหน้าจะทำให้ตระหนักถึงอุปสรรคของนักเรียนโดยทั่วๆ ไป อีกทั้งตระหนักถึงการสอนที่เกี่ยวเนื่องกับแนวคิดและทักษะที่สำคัญ การศึกษาข้อบกพร่องอย่างละเอียดจะสามารถวิเคราะห์และพัฒนาความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากธรรมชาติและสิ่งรอบตัวของนักเรียนได้

1.3 ลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

คาเซย์ (Casey. 1987: 92) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความคลาดเคลื่อนนั้น แล้วสรุปลักษณะของข้อบกพร่องทางการเรียนโดยขยายจากทฤษฎีของนิวแมน (Newman) และได้แบ่งสาเหตุและประเภทของความผิดพลาดเป็น 9 ประเภท คือ

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม
3. ความเข้าใจในคำตอบ
4. การเลือกใช้กลยุทธในการแก้ปัญหา
5. การเลือกใช้ทักษะ
6. ทักษะในการแก้ปัญหา
7. การเสนอคำตอบ
8. ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นเนื่องจากขาดความระมัดระวัง
9. ความผิดพลาดซึ่งครูทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

นิทสา โมว์โชวิทย์-ฮาร์ดาร์ และคณะ (Nitsa Movshovitz-Hadar; et al. 1987: 3-14) ได้วิเคราะห์รูปแบบของข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยเห็นว่าข้อบกพร่องของนักเรียนจะเป็นแหล่งข้อมูลที่สำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ จึงศึกษาตามแนวคิดของ เอช ราดาซ (H. Radazt) ในเรื่องการจัดกลุ่มของข้อบกพร่อง โดยการดำเนินการวิเคราะห์ข้อบกพร่องของนักเรียนในวิชาพีชคณิต โดยสร้างเกณฑ์การพิจารณาข้อบกพร่อง 6 ประการ ดังนี้

1. การใช้ข้อมูลผิด
2. ข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา
3. การอ้างอิงวิธีการคิดหาเหตุผลที่ไม่สมบูรณ์
4. บิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร และนิยาม
5. ไม่มีการตรวจสอบในระหว่างแก้ปัญหา
6. ข้อบกพร่องในเทคนิคการทำ

แบลนโดและคณะ (Blando; et al. 1989: 301-308) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์และหารูปแบบความคลาดเคลื่อนทางเลขคณิต พบว่าลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเลขคณิต มี 4 ด้าน คือ

1. ความคลาดเคลื่อนในการใช้เครื่องหมายบวก ลบ คูณ และหาร โดยการทำผิดลำดับขั้นตอน เช่น บวกก่อนคูณ ลบก่อนหาร ละเลยความสำคัญของวงเล็บ เป็นต้น
2. ความคลาดเคลื่อนในการใช้เครื่องหมายผิด เช่น ใช้การหารแทนการบวก ใช้การลบแทนการบวก ใช้การคูณแทนการหาร เป็นต้น
3. ความคลาดเคลื่อนอื่นๆ เช่น การไม่ตอบ หรือการปฏิเสธที่จะแก้ปัญหา
4. ความคลาดเคลื่อนที่ไม่มีรูปแบบแน่นอน เนื่องจากขาดความระมัดระวังในการบวก (บวกผิด) เป็นต้น

จากการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในข้างต้น ทำให้สรุปได้ว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง สาเหตุที่ทำให้เป็นปัญหา ซึ่งส่งผลทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ หรือไม่สามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเมื่อพิจารณาถึงความสำคัญและประโยชน์ที่จะได้รับจากการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน จะเห็นว่าการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนของนักเรียนจะเป็นประโยชน์โดยตรงต่อตัวนักเรียนที่มีข้อบกพร่อง ซึ่งถ้านักเรียนได้รับการแก้ไขข้อบกพร่องนั้นๆ แล้ว ก็จะสามารถเรียนรู้ได้โดยไม่มีอุปสรรค ทำให้นักเรียนประสบผลสำเร็จในการเรียน นอกจากนักเรียนจะเป็นผู้ที่ได้รับประโยชน์จากการศึกษาข้อบกพร่อง ครูผู้สอนเองก็จะได้รับประโยชน์จากการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนของนักเรียนเช่นกัน เพราะการศึกษาข้อบกพร่องจะทำให้ครูทราบว่าเรื่องใดหรือหัวข้อใดที่นักเรียนมีข้อบกพร่อง และบกพร่องในลักษณะใด ข้อบกพร่องของนักเรียนจึงเป็นแหล่งข้อมูลที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งจะได้นำไปปรับปรุงการสอน รวมทั้งเตรียมบทเรียนได้ตามความต้องการของผู้เรียน หรือตามลักษณะข้อบกพร่องนั้น โดยเลือกใช้เทคนิคที่เหมาะสมกับนักเรียนในเนื้อหาแต่ละตอน

สำหรับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ได้ศึกษาในข้างต้น พบว่านักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษามีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ในด้านต่างๆ พอสรุปได้ดังนี้ ด้านการใช้ข้อมูล ด้านการใช้กฎ นิยาม สูตรหรือทฤษฎี ด้านการคิดคำนวณ การขาดทักษะพื้นฐาน การตีความด้านภาษา การใช้สัญลักษณ์ และไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา

2. การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน

2.1 การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนโดยการวินิจฉัย

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533: 33) กล่าวว่า เนื่องจากลักษณะสำคัญประการหนึ่งของคณิตศาสตร์ คือ เป็นวิชาที่มีความต่อเนื่องกันเป็นลำดับขั้น การเรียนรู้เนื้อหาบางเรื่องทำไม่ได้เลยถ้าไม่เรียนรู้เรื่องที่เป็นพื้นฐานมาก่อน ดังนั้นสาเหตุประการหนึ่งที่ทำให้เด็กไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ก็คือ การที่ต้องเรียนเรื่องใหม่โดยที่ยังขาดความรู้ความเข้าใจในเรื่องเดิมที่เป็นพื้นฐานของเรื่องใหม่ ทำให้ไม่สามารถเกิดการเรียนรู้เรื่องใหม่ที่กำลังเรียนได้ การวินิจฉัยการเรียนจึงเข้ามามีบทบาทเพื่อให้ทราบว่า สมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของเด็กอยู่ตรงจุดไหน ซึ่งการวินิจฉัยจะช่วยให้ทราบว่าปัญหาหรือข้อบกพร่องของเด็กอยู่ตรงไหน ดังนั้นการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนจึงถือเป็นการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนอีกวิธีหนึ่งที่ครูสามารถทำได้

โดยความหมายของการวินิจฉัย ได้มีนักการศึกษากล่าวไว้ได้แก่ ในพจนานุกรมการศึกษาของกูด (Good. 1945: 170) ได้ให้ความหมายของการวินิจฉัย (Diagnosis) ไว้ว่าการวินิจฉัยหมายถึงการค้นหาอุปสรรคหรือข้อบกพร่องในการเรียนรู้ และดวงเดือน อ่อนน่วม (2533: 33) ได้ให้ความหมาย

ของการวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์ โดยกล่าวว่า เมื่อนำความหมายของการวินิจฉัยมาใช้กับการเรียนคณิตศาสตร์ มักหมายถึง การวิเคราะห์หรือรวบรวมข้อมูลเพื่อให้ทราบรายละเอียดของจุดเด่น (สิ่งที่ดีอยู่แล้ว) หรือจุดด้อย (ข้อบกพร่องหรือสิ่งที่เป็นอุปสรรค) ในการเรียนคณิตศาสตร์ และสำหรับวิธีการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนนั้น รุจิร์ ภู่สาระ (2520: 18) ได้กล่าวว่า วิธีการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนมีหลายวิธี เช่น ใช้แบบทดสอบวินิจฉัย (Diagnostic Test) ใช้แบบทดสอบวัดเชาว์ปัญญา (Intelligence Test) หรือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ (Achievement Test) แต่เครื่องมือที่ใช้ตรวจสอบหารายละเอียดข้อบกพร่องที่ดีที่สุดคือ แบบทดสอบวินิจฉัย ซึ่งแบบทดสอบนี้มีคุณสมบัติที่ศึกษารายละเอียดเป็นเรื่องๆไป การวิเคราะห์หาข้อบกพร่องนั้นอาจทำได้กับทุกวิชาโดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์

กรอนลันด์ (Gronlund. 1981: 493-497) เสนอขั้นตอนการวินิจฉัยและแก้ไขข้อบกพร่องไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุตัวนักเรียนที่มีข้อบกพร่องสามารถทำได้หลายวิธี สำหรับในประเทศที่มีการใช้แบบทดสอบมาตรฐานกันอย่างแพร่หลายก็สามารถใช้แบบทดสอบมาตรฐานเป็นเครื่องมือสำหรับระบุว่าใครมีปัญหาในการเรียน ดังที่เสนอไว้แล้วในเรื่องการใช้แบบทดสอบคณิตศาสตร์มาตรฐาน (Standardized Mathematics Test) ในการวินิจฉัยระดับทั่วไป นอกจากนี้ครูยังอาจใช้การวินิจฉัยอย่างไม่เป็นทางการ โดยการศึกษาเอกสารต่างๆ ของทางโรงเรียน เช่น ระเบียนสะสม หรือใช้การสังเกตของครู เพราะครูมีประสบการณ์ในชั้นเรียนอยู่แล้วย่อมทำให้มองเห็นว่าใครมีปัญหาในการเรียนบ้าง ในการมองปัญหาของนักเรียนครูไม่ควรมองแต่ปัญหาด้านเนื้อหาวิชาเท่านั้น ครูควรมองปัญหาอื่นๆ ด้วย เช่น ด้านการปรับตัว ด้านอารมณ์ เพราะปัญหาเหล่านี้อาจมีผลกระทบต่อปัญหาด้านการเรียนของนักเรียน

2. การระบุข้อบกพร่องหรือปัญหาของนักเรียนมีหลายระดับ ในบางครั้งการวินิจฉัยเพียงระดับทั่วไปอาจให้ข้อมูลเพียงพอสำหรับการแก้ไข ในบางกรณีต้องการวินิจฉัยถึงระดับวิเคราะห์ และในบางกรณีอาจต้องการวินิจฉัยระดับละเอียดจึงสามารถหาข้อแก้ไขได้

3. การระบุองค์ประกอบที่เป็นสาเหตุของการมีข้อบกพร่อง ในบางครั้งปัญหาในการเรียนของนักเรียนอาจจะเกิดจากการสอนของครู ซึ่งครูทราบได้ง่ายจากการพบว่าเด็กส่วนใหญ่มีปัญหาเดียวกัน ปัญหาในลักษณะนี้แก้ไขได้ง่ายโดยครูปรับวิธีการสอนใหม่ แต่ถ้าหากนักเรียนมีปัญหาเฉพาะตัวแสดงว่าปัญหาไม่น่าจะเกิดจากวิธีการสอนที่ไม่เหมาะสมของครู ครูต้องศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับนักเรียนและสิ่งแวดล้อมที่เกี่ยวข้องกับนักเรียน

องค์ประกอบที่ควรพิจารณา เช่น สติปัญญา ทักษะการเรียน สุขภาพ การปรับตัวด้านอารมณ์ สิ่งแวดล้อมทางบ้าน เพราะสิ่งเหล่านี้อาจเป็นสาเหตุของปัญหาในการเรียน ถ้าครูได้ใช้วิธีการต่างๆ หลายวิธีดังที่กล่าวมาแล้ว เช่น การสังเกต การใช้แบบสอบถาม การพูดคุยกับนักเรียน การศึกษา

เอกสารที่มีข้อมูลเกี่ยวกับตัวนักเรียน หรือการพูดคุยกับผู้ปกครอง แล้วปรากฏว่ายังไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ก็อาจจะต้องอาศัยนักจิตวิทยาในหน่วยแนะแนวในโรงเรียนหรือหน่วยงานอื่น

4. การแก้ไขข้อบกพร่องไม่มีรูปแบบตายตัว ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของข้อบกพร่องแต่ละอย่าง ในบางกรณีอาจแก้ไขด้วยการทบทวนหรือสอนใหม่ แต่ในบางกรณีอาจต้องใช้ความพยายามในการสร้างแรงจูงใจแก้ปัญหาด้านอารมณ์หรือแก้ไขทักษะการทำงาน ในระหว่างการแก้ไขข้อบกพร่องการวัดและการประเมินผลสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้หลายแง่ดังนี้

4.1 ช่วยให้ทราบคำตอบของนักเรียนในสิ่งที่ครูอยากทราบ

4.2 ช่วยให้ข้อมูลสำหรับการวินิจฉัยต่อไปอีก

4.3 ช่วยให้นักเรียนเกิดความรู้สึกว่าประสบความสำเร็จ จากวิธีการให้คะแนนอย่างเหมาะสม

4.4 ส่งเสริมแรงจูงใจด้วยการกำหนดจุดประสงค์ให้แคบและให้ข้อมูลย้อนกลับทันทีเพื่อให้นักเรียนทราบความก้าวหน้าของตนเอง

4.5 ให้ข้อมูลเกี่ยวกับประสิทธิภาพในการแก้ไขข้อบกพร่อง

2.2 ความหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน

อดัมส์ และทอร์เกอสัน (Adams; & Torgerson. 1964: 39-40) กล่าวว่า แบบทดสอบวินิจฉัย คือ แบบทดสอบที่ใช้เพื่อชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่องและบอกถึงสาเหตุความบกพร่องนั้น ส่วนอีเบล (Ebel. 1965: 449) ให้ความหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยว่าเป็นแบบทดสอบที่ใช้สำหรับค้นหาจุดอ่อนหรือจุดบกพร่องในการเรียนวิชาต่างๆ เช่น การอ่าน หรือเลขคณิต และแบบทดสอบชนิดนี้จะสนใจเฉพาะคะแนนในแต่ละข้อหรือคะแนนของนักเรียนกลุ่มเล็กๆ ที่ทดสอบในแบบทดสอบอย่างเดียวกัน นอกจากนี้ เพนน์ (Payne. 1968: 167) อาห์แมน และกล็อค (Ahman; & Glock. 1975: 20) ได้ให้ความหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยไว้ว่า เป็นแบบทดสอบที่ใช้ทดสอบหลังจากการสอนสิ้นสุดลง โดยจะทำการทดสอบเป็นรายบุคคลหรือเป็นรายกลุ่มก็ได้ จุดมุ่งหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยก็คือ ช่วยให้ทราบถึงข้อบกพร่องเฉพาะที่เป็นพื้นฐานที่อยู่เบื้องหลังของผู้เรียน หรือเพื่อชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่องทางการเรียนในรายละเอียดแต่ละตอน อันเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน

วิเชียร เกตุสิงห์ (2530: 15) ให้ความหมายของแบบทดสอบวินิจฉัยว่า เป็นแบบทดสอบที่สร้างขึ้นมาทดสอบเพื่อหาข้อบกพร่องหรือจุดอ่อนในการเรียนแต่ละวิชาของนักเรียนเป็นเรื่องๆไป โดยแต่ละเรื่องจะมีข้อสอบมากข้อ นอกจากนั้น สุเทพ สันติวรานนท์ (2533: 69); สมใจ ฤทธิสนธิ (2537: 9) และสมนึก ภัททิยานี (2544: 58) มีความเห็นคล้ายคลึงกันพอสรุปได้ว่า แบบทดสอบวินิจฉัยเป็นแบบทดสอบที่สร้างขึ้น เพื่อชี้ให้เห็นจุดบกพร่องของนักเรียนที่เกิดขึ้นในการเรียนเนื้อหาวิชานั้นๆ อีกทั้งช่วยให้ทราบสาเหตุของความบกพร่องอันจะเป็นประโยชน์ในการเรียนให้เกิดการเรียนรู้เพิ่มขึ้น ปรับปรุง

การสอนของครูให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น แบบทดสอบประเภทนี้จะใช้สอบนักเรียนหลังจากทำการสอนจบทั้งรายบุคคลหรือกลุ่ม นับว่ามีประโยชน์มากในการเรียนการสอน

2.3 ลักษณะของแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน

สิงห์ (Singha. 1974: 200-205) กล่าวถึงลักษณะของแบบทดสอบวินิจฉัยว่า

1. ข้อคำถามจะต้องมีจำนวนมากๆ ข้อ ครอบคลุมจุดประสงค์ของการเรียน
2. ต้องมีการวิเคราะห์เนื้อหาก่อนสร้างแบบทดสอบ
3. ข้อคำถามควรเป็นคำถามง่ายๆ
4. ในแบบทดสอบแต่ละทักษะย่อยนั้นจะประกอบด้วยข้อสอบที่วัดในลักษณะเดียวกัน
5. ไม่จำกัดเวลาในการสอบ
6. ไม่มีเกณฑ์ปกติ (Norm) เพราะเป็นการทดสอบเพื่อค้นหาจุดอ่อนของนักเรียนมากกว่าที่จะเปรียบเทียบผลการเรียน
7. เป็นแบบทดสอบที่มีทั้งแบบทดสอบที่เป็นมาตรฐาน (Standardized Test) และแบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเอง (Teacher-made Test)
8. แบบทดสอบวินิจฉัยจะตั้งอยู่บนนิยามของการเรียนเพื่อรอบรู้เกี่ยวกับจุดอ่อนด้านความคิดรวบยอด (Concepts) และทักษะต่างๆ (Skills)

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2533: 54-55) ได้สรุปประเด็น อภิปราย และข้อสรุปเกี่ยวกับลักษณะของแบบทดสอบวินิจฉัยการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

1. วัดได้ทั้งแบบอิงเกณฑ์ (Criterion-Referenced) และแบบอิงกลุ่ม (Norm-Referenced) และเกณฑ์ปกติ (Norm) ไม่น่าจะเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับแบบทดสอบวินิจฉัย เพราะจุดประสงค์ของแบบทดสอบเพียงเพื่อระบุหรือชี้ให้เห็นจุดที่เป็นอุปสรรค ไม่ใช่เปรียบเทียบความสามารถกับคนอื่น
2. จุดประสงค์ของแบบทดสอบจำกัดเฉพาะจุดประสงค์ที่มีประโยชน์ต่อการวินิจฉัยเท่านั้น
3. ขอบเขตของเนื้อหามี 2 ลักษณะ คือ แบบทดสอบวินิจฉัยที่ยึดระดับชั้นเป็นหลัก เช่น แบบทดสอบวินิจฉัยเรื่องการบวก ชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 และแบบทดสอบวินิจฉัยที่ยึดเนื้อหาเป็นหลัก เช่น แบบทดสอบวินิจฉัยทักษะการคิดคำนวณเบื้องต้นเรื่องการบวก
4. ควรเป็นแบบทดสอบที่ไม่จำกัดเวลา คือ เป็นแบบทดสอบที่เปิดโอกาสให้ผู้สอบได้แสดงความสามารถอย่างเต็มที่โดยไม่จำกัดเวลา เรียกว่าเป็นแบบทดสอบที่มีอำนาจ (Power Test) ยกเว้นในกรณีที่มีจุดประสงค์ชัดเจนว่าเป็นแบบทดสอบที่เน้นความรวดเร็วในการคิด (Speed Test) จึงอาจกำหนดเวลาได้
5. เนื้อหาของแบบทดสอบควรครอบคลุมทุกแง่มุมของคณิตศาสตร์ เช่น ทักษะการคิดคำนวณ ความหมาย กระบวนการคิดคำนวณ การคิดในใจ

6. ไม่ควรวัดเฉพาะการรู้ระดับนามธรรมเท่านั้น ควรวัดการรู้ 3 ระดับ คือระดับรูปธรรม กึ่งรูปธรรม และนามธรรม หรืออาจวัดการรู้ 4 ระดับ ได้แก่ รูปธรรม กึ่งรูปธรรม กึ่งนามธรรม และนามธรรม

7. เน้นการให้คะแนนเป็นส่วนๆ (Part Scores) และการให้คะแนนของข้อสอบในแต่ละส่วนไม่เน้นคะแนนรวม

8. ข้อสอบได้มาจากการวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้อย่างละเอียด และการศึกษาที่เด็กมักทำผิด (Common Errors)

9. ข้อสอบควรจะง่ายเพื่อให้สามารถจำแนกระหว่างเด็กที่มีปัญหาได้ ข้อสอบแต่ละข้อควรมีระดับความยากต่ำ

10. เกณฑ์แสดงการรอบรู้ในเรื่องใดเรื่องหนึ่ง นิยมใช้เกณฑ์อย่างต่ำ 2 ใน 3 (67%) หรือ 3 ใน 4 (75%) เพื่อแสดงความมั่นใจว่าเด็กมีความรอบรู้ในเรื่องนั้นจริงมิใช่ทำผิดเพราะความเลินเล่อ

2.4 เทคนิควิธีการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน

ลินด์ควิสต์ (Lindquist. 1966: 37-38) ได้เสนอแนะเทคนิควิธีการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยไว้ ดังนี้

1. ต้องสร้างให้ครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์ที่ต้องการทดสอบ
2. คำถามในแต่ละข้อต้องสามารถวัดได้ตรงจุดประสงค์ที่ต้องการวัด
3. จะต้องมีการวิเคราะห์ข้อสอบอย่างละเอียด โดยอาจอาศัยการทดลองและความไม่เข้าใจในการเรียนเป็นหลัก
4. แบบทดสอบจะต้องสามารถแสดงให้เห็นถึงกระบวนการคิดของผู้เรียนอย่างเพียงพอที่จะค้นหาจุดบกพร่องในการเรียนได้
5. ต้องมีการเสนอแนะวิธีการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องที่พบไว้ด้วย
6. แบบทดสอบจะต้องสร้างให้ครอบคลุมลำดับขั้นของการเรียนรู้อย่างมีระบบ
7. แบบทดสอบจะต้องวัดจุดบกพร่องทางการเรียนที่ผ่านมาได้ และต้องสามารถค้นหาจุดบกพร่องจากเนื้อหาแต่ละตอนที่ทำการทดสอบได้
8. ผลของการทดสอบจะต้องบอกถึงความก้าวหน้าทางการเรียนของนักเรียนได้

สำนักงานทดสอบทางการศึกษา (กระทรวงศึกษาธิการ. 2539: 11) ได้กล่าวถึงวิธีการสร้างและพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัย มีขั้นตอนดังนี้ คือ

1. วิเคราะห์เนื้อหา กำหนดขอบเขตเนื้อหาและระดับพฤติกรรมอย่างละเอียด
2. สร้างตารางวิเคราะห์โครงสร้างของวิชา/รายวิชา
3. สร้างแบบทดสอบเพื่อสำรวจ (Survey Test)
4. เขียนจุดประสงค์การเรียนรู้/สมรรถภาพ/สมรรถภาพย่อย

5. หาแบบผิดหรือข้อบกพร่องที่คิดว่าน่าจะเกิดในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมหรือแบบฝึกหัดในแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้

6. เขียนแบบร่าง(Script) ของข้อสอบ หรือเขียนลักษณะเฉพาะข้อสอบ (Item Specification)

7. เขียนข้อสอบตามแบบร่าง (Script)

8. ตรวจสอบคุณภาพข้อสอบรายข้อ คือ ค่าความหมายรายข้อ (IOC), ความลำเอียง (Bias)

9. ทดลองสอบ หาค่าสถิติ ปรับปรุงคุณภาพข้อสอบ

10. จัดฉบับแบบทดสอบ ทดลองสอบ หาคุณภาพของแบบทดสอบ

11. เขียนคู่มือการสร้างและพัฒนาแบบทดสอบ คู่มือการใช้แบบทดสอบ การแปลความหมายของคะแนน และคู่มือในการวินิจฉัย

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน อาจกล่าวได้ว่าการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนถือเป็นการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนอีกวิธีหนึ่งที่สามารถทำได้ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิต โดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัย ซึ่งเริ่มจากการวิเคราะห์เนื้อหาและลักษณะข้อบกพร่องของเนื้อหาในเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยแบ่งเนื้อหาเป็นหน่วยการเรียน และแต่ละหน่วยการเรียนประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อยซึ่งจะแยกตามลักษณะข้อบกพร่องในแต่ละด้าน โดยข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัยเป็นข้อคำถามเกี่ยวกับลักษณะข้อบกพร่องอย่างน้อย 1 ด้าน ข้อคำถามเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ เพราะสามารถชี้ให้เห็นถึงข้อบกพร่อง และสามารถแยกแยะข้อบกพร่องของผู้เรียนได้อย่างละเอียด ทำให้ทราบว่าจุดใดหรือเรื่องใดที่ผู้เรียนมีข้อบกพร่อง แบบทดสอบวินิจฉัยมีจำนวน 15 ฉบับตามจำนวนหน่วยการเรียนย่อย ซึ่งจะเน้นการให้คะแนนเป็นหน่วยการเรียนย่อยมากกว่าคะแนนรวมทั้งหมด โดยนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน หมายถึง นิสิตที่ผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยเป็นนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนอย่างน้อย 1 ด้าน เกณฑ์ตัดสิน คือ ถ้านิสิตได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยน้อยกว่าร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตมีข้อบกพร่องทางการเรียน

3. บทเรียนสำเร็จรูป

3.1 ความหมายของบทเรียนสำเร็จรูป

บุญชม ศรีสะอาด (2537: 76-77) กล่าวถึงบทเรียนสำเร็จรูปว่า เป็นสื่อการเรียนการสอนที่มุ่งให้ผู้เรียนเรียนด้วยตนเองจะเร็วหรือช้าตามความสามารถของแต่ละบุคคล โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็นหลายๆ กรอบ (Frames) แต่ละกรอบจะมีเนื้อหาที่เรียบเรียงไว้ มุ่งให้เกิดการเรียนรู้ตามลำดับ โดยมีส่วนที่ผู้เรียนจะต้องตอบสนองด้วยการเขียนคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปการเติมคำลงในช่องว่าง เลือกคำตอบ ฯลฯ และมีส่วนที่เป็นเฉลยคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งอาจอยู่ข้างหลังของกรอบ หรืออยู่ที่ส่วนอื่นของบทเรียนก็ได้ และบทเรียนสำเร็จรูปที่สมบูรณ์จะมีแบบทดสอบวัดความก้าวหน้าของการเรียน

กิดานันท์ มลิทอง (2540: 115-116) กล่าวว่า การสอนแบบโปรแกรมเป็นลักษณะของการสอนรายบุคคล หรือที่เรียกกันว่า “การศึกษารายบุคคล” บทเรียนโปรแกรมประกอบด้วยเนื้อหาความรู้ คำถาม และคำตอบ โดยจะแบ่งเนื้อหาบทเรียนนั้นออกเป็นเนื้อหาย่อยๆ จัดลำดับเป็นขั้นตอนในรูปแบบของกรอบหรือเฟรม (Frame) โดยในแต่ละกรอบจะเสนอเนื้อหาเป็นขั้นตอนทีละน้อยในทุกขั้นตอนของการเรียนจะมีคำถามเพื่อทดสอบผู้เรียน และมีคำตอบที่ถูกต้องให้ผู้เรียนทราบเพื่อเป็นข้อมูลป้อนกลับทันทีเป็นการเสริมแรง บทเรียนแบบโปรแกรมจะบรรจุไว้ในสื่อชนิดต่างๆ เช่น หนังสือตำราเรียน สไลด์ ฟิล์มสทริป เครื่องคอมพิวเตอร์ และเครื่องช่วยสอน ฯลฯ

ถวัลย์ มาศจรัส (2546: 17) กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปหรือบทเรียนแบบโปรแกรม คือ บทเรียนที่ผู้สอนจัดทำขึ้น เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ผู้เรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้ในแต่ละสาระการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในบทเรียนแต่ละบทเรียนด้วยตนเอง โดยเริ่มจากเนื้อหาสาระที่ง่ายๆ ไปสู่เนื้อหาสาระที่ยากขึ้นไปตามลำดับ เป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นโดยกำหนดเนื้อหา วัตถุประสงค์ วิธีการ และสื่อการเรียนการสอนไว้ล่วงหน้า ผู้เรียนสามารถศึกษาค้นคว้าและประเมินผลการเรียนด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้

3.2 ลักษณะสำคัญของบทเรียนสำเร็จรูป

ทรอส์ (Traw. 1963: 93); ร็อทแมน และโจเนส (Rothman; & Jones. 1971: 134-135); ไพโรจน์ เบาใจ (2520: 1-2); ประยงค์ นาโค (2527: 20-21); ถวัลย์ มาศจรัส (2546: 20) ได้กล่าวถึงลักษณะที่สำคัญของบทเรียนสำเร็จรูป ซึ่งพอจะสรุปได้ดังนี้

1. เนื้อหาวิชาถูกแบ่งออกเป็นขั้นย่อยๆ ซึ่งเรียกว่า “กรอบ” (Frames) และกรอบเหล่านี้จะเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยมีขนาดแตกต่างกันตั้งแต่หนึ่งประโยคจนถึงข้อความเป็นตอนๆ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนไปทีละน้อย จากสิ่งที่รู้แล้วสู่ความรู้ใหม่เป็นการเร้าความสนใจของผู้เรียนไปในตัว

2. ภายในแต่ละกรอบจะประกอบด้วยองค์ประกอบ ดังนี้คือ

2.1 ข้อมูล (Information) ส่วนที่เป็นข้อมูล อาจจะอยู่ในรูปคำอธิบาย แผนภาพ รูปภาพ หรือแผนผัง เป็นต้น

2.2 คำถาม (Question) ส่วนที่เป็นคำถาม เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนคิด และใช้ความรู้จากข้อมูลที่ให้

2.3 ช่องว่างให้เติมคำตอบ (Place for Response) เพื่อให้ผู้เรียนมีการตอบสนอง ทำให้ผู้เรียนแต่ละคนเกิดความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้จากการมีส่วนร่วมในกิจกรรมต่างๆ ของบทเรียน

2.4 คำตอบที่ถูกต้อง (Confirmation of Response) ผู้เรียนจะได้รับการเสริมแรงย้อนกลับทันที (Immediate Feed-back Reinforcement) คือจะได้ทราบคำตอบที่ถูกต้องทันที ซึ่งทำให้ผู้เรียนทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

2.5 คำชี้แจง (Instruction) เป็นส่วนที่เป็นข้อความชี้แจงกิจกรรมที่ผู้เรียนจะกระทำเมื่อศึกษากรอบนั้นๆ เสร็จสมบูรณ์แล้ว

ซึ่งองค์ประกอบทั้ง 5 ประการดังกล่าว ไม่จำเป็นต้องมีอยู่ในกรอบทุกกรอบ

3. การจัดเรียงลำดับหน่วยย่อยๆ ของบทเรียนต้องต่อเนื่องกันไปตามลำดับจากง่ายไปหายาก การนำเสนอเนื้อหาในแต่ละกรอบควรลำดับขั้นของเรื่องให้ชัดเจนเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ และทำให้ผู้เรียนตอบสนองหรือมีส่วนร่วมในการเรียนจากกิจกรรมต่างๆ ที่กำหนดไว้ในกรอบ เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในเนื้อหา และมีทักษะในเรื่องที่จะเรียนเรื่องนั้นได้โดยตรง

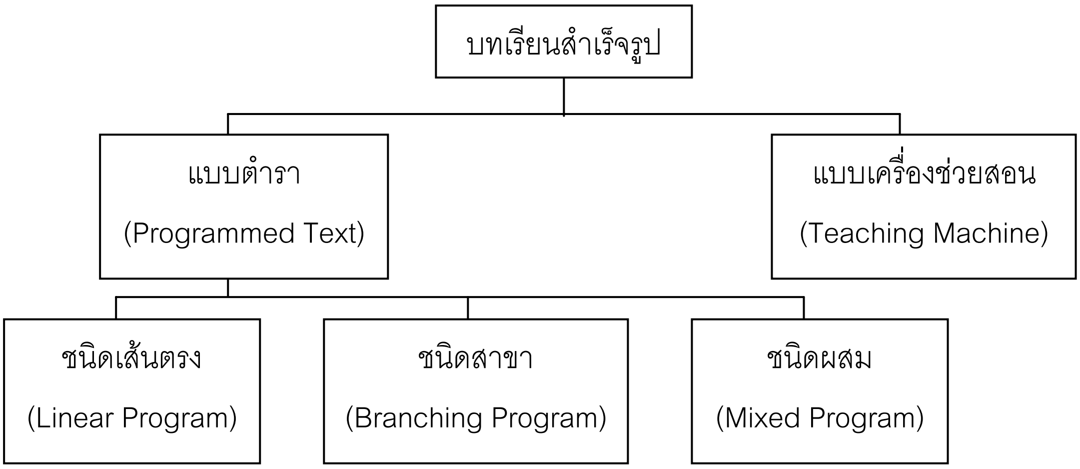
4. ผู้เรียนค่อยๆ เรียนเพิ่มเติมขึ้นเรื่อยๆ ทีละขั้น

5. ตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล ผู้เรียนมีโอกาสเรียนด้วยตนเองโดยไม่จำกัดเวลา การใช้เวลาศึกษาบทเรียนนั้นขึ้นอยู่กับสติปัญญาและความสามารถของผู้เรียนแต่ละคน

6. บทเรียนสำเร็จรูปยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง ดังนั้นจึงต้องนำเอาบทเรียนที่เขียนขึ้นไปทดลองกับผู้ที่สามารถใช้บทเรียนนั้นได้ เพื่อแก้ไขจุดบกพร่องและปรับปรุงให้สมบูรณ์ขึ้นก่อนนำไปใช้จริง

3.3 **ประเภทของบทเรียนสำเร็จรูป**

ยุพิน พิพิธกุล (2530: 108-117) ได้แบ่งบทเรียนสำเร็จรูปไว้ตามแผนผังดังต่อไปนี้

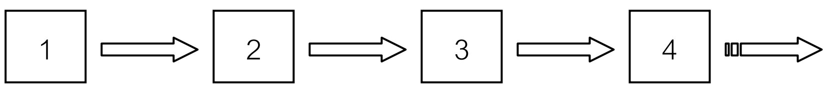


ภาพประกอบ 1 ประเภทของบทเรียนสำเร็จรูป

ในที่นี้จะขอนำมากล่าวเฉพาะบทเรียนสำเร็จรูปแบบตำราเท่านั้น ซึ่งยุพิน พิพิธกุล (2530: 108-117); และธีระชัย ปูรณโชติ (2539: 11-20) ได้กล่าวถึงบทเรียนสำเร็จรูปแบบตำรา (Program Text) ไว้สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

บทเรียนสำเร็จรูปแบบตำรา (Program Text) มักเป็นรูปเล่มคล้ายตำรา นักเรียนสามารถเรียนด้วยตนเอง แบ่งเป็น 3 ชนิด คือ

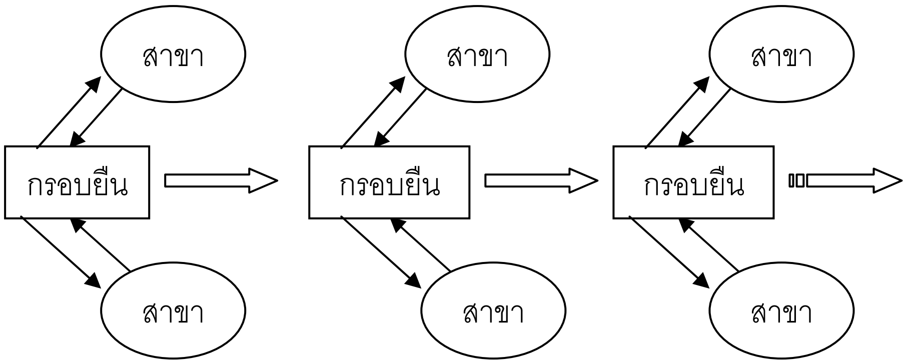
1. บทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง (Linear Program) เป็นบทเรียนที่เสนอเนื้อหาทีละน้อยบรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับสัมพันธ์กัน โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก ส่วนเฉลยคำตอบจะอยู่ในกรอบถัดไป หรืออยู่ในกรอบเดียวกันก็ได้ ผู้เรียนจะต้องเรียนตามลำดับทีละกรอบ บทเรียนแบบนี้เหมาะสำหรับวิชาที่เป็นเนื้อหาสาระ หรือความรู้ความเข้าใจ แบบแผนของบทเรียนสำเร็จรูปชนิดนี้มีดังนี้คือ



ภาพประกอบ 2 แบบแผนของบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง

2. บทเรียนสำเร็จรูปชนิดสาขา (Branching Program) บทเรียนแบบนี้จะประกอบด้วยกรอบหลักซึ่งผู้เรียนทุกคนต้องเรียน เรียกว่ากรอบยืน ในแต่ละกรอบยืนจะบรรจุเนื้อหาที่เป็นหลักของ

เรื่องที่จะสอนอย่างสั้นๆ ประมาณ 1-2 ย่อหน้า แล้วติดตามด้วยคำถามให้ผู้เรียนตอบ ลักษณะของคำถามเป็นแบบให้เลือกตอบ 2-3 ตัวเลือก ในแต่ละตัวเลือกจะระบุหน้ากำกับไว้ให้ผู้เรียนพลิกไปดูถ้าผู้เรียนเลือกตัวเลือกเหล่านั้น ในกรอบยืนแต่ละกรอบจะมีกรอบสาขาจำนวน 1-2 กรอบ แต่ละกรอบสาขานี้มีไว้สอน หรือให้คำแนะนำผู้เรียนที่เลือกคำตอบไม่ถูกต้องแล้วค่อยให้ผู้เรียนกลับไปยังกรอบยืนเดิมอีกครั้ง แบบแผนของบทเรียนสำเร็จรูปชนิดนี้มีดังนี้คือ



ภาพประกอบ 3 แบบแผนของบทเรียนสำเร็จรูปชนิดสาขา

3. บทเรียนสำเร็จรูปชนิดผสม (Mixed Program) เป็นบทเรียนที่ใช้บทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรงและบทเรียนสำเร็จรูปชนิดสาขาผสมกัน

3.4 หลักการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป

ฟาย (Fine. 1962: 58); วิชทีช และสกูลลาร์ (Wittich; & Schullar. 1968: 513) ได้กล่าวถึงหลักการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป ซึ่งพอจะสรุปได้ดังนี้

1. ในแต่ละกรอบจะต้องนำเสนอเนื้อหาแต่ละเรื่องอย่างชัดเจน มีคำถามหรือคำสั่งให้ผู้เรียนตอบสนองต่อเรื่องนั้นโดยตรง

2. ในแต่ละกรอบต้องมีความต่อเนื่องกัน สามารถจูงใจให้ผู้เรียนคิดใคร่ครวญ เพื่อค้นหาคำตอบที่ถูกต้อง และต้องมีการแจ้งผลการตอบสนองทันที ในกรณีที่ผู้เรียนตอบผิดก็ต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแก้ตัว และปรับปรุงการตอบสนองของตนจนกว่าจะถูก

3. ผู้เรียนแต่ละคนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองตามอัตรากำลังความสามารถเฉพาะบุคคลและเป็นอิสระจากคนอื่นๆ

4. บทเรียนสำเร็จรูปต้องมีการจัดลำดับตามหลักตรรกวิทยาจากง่ายไปหายาก

ธีระชัย ปูรณโชติ (2532: 25-26) ได้เสนอหลักการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปไว้ ดังนี้

1. คำนึงถึงตัวผู้เรียน ได้แก่ อายุ พื้นฐานความรู้หรือประสบการณ์เดิม ทักษะ ความสามารถในการเรียน และความต้องการของผู้เรียน

2. คำนึงถึงผลที่ต้องการหรือวัตถุประสงค์ของบทเรียนว่าต้องการให้ผู้เรียนได้เรียนรู้อะไร

3. คำนึงถึงแบบของบทเรียนว่าควรเสนอในรูปแบบใด คือ แบบเส้นตรง แบบสาขา หรือแบบผสม เพื่อให้เหมาะสมกับเนื้อหาวิชา ผู้เรียน และวัตถุประสงค์ เช่น เนื้อหาเป็นประเภทความรู้ ความจำ หรือความคิดเห็น ผู้เรียนเป็นนักเรียนเก่งหรืออ่อน ฯลฯ

4. ไม่มีการจำกัดเวลาของผู้เรียน การเรียนจะดำเนินไปตามอัตราความสามารถของแต่ละบุคคล โดยไม่คำนึงถึงการทำเสร็จก่อนหรือหลังผู้อื่น

5. เนื้อหาวิชาจะต้องแบ่งเป็นหัวข้อเรื่องใหญ่ๆ ก่อน แล้วแบ่งเป็นหัวข้อย่อยๆ แต่ละหน่วยย่อยจะต้องทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในหน่วยย่อยถัดไป เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ไปทีละน้อยๆ ทีละขั้น

6. ให้มีเนื้อหาและคำอธิบายที่ดึงดูดความสนใจของผู้เรียน

7. เนื้อหาแต่ละกรอบควรใช้ภาษาที่ชัดเจน ถูกต้องตามหลักภาษา เหมาะสมกับความรู้และอายุของผู้เรียน เนื้อเรื่องถูกต้องตามหลักของวิชา และมีความต่อเนื่องในแต่ละกรอบ

8. แต่ละกรอบต้องนำเสนอเนื้อหาเฉพาะเรื่องอย่างชัดเจน และมีคำถามหรือคำสั่งให้ผู้เรียนตอบสนองต่อเรื่องนั้นโดยตรง และไม่ควรมีความรู้ใหม่เกิน 1 อย่าง

9. ให้มีการย้ำ ทบทวน และทดสอบตนเอง

10. จะต้องให้ผู้เรียนรู้ผลของการตอบคำถามว่าถูกต้องหรือผิดทันที เพื่อช่วยให้การเรียนดียิ่งขึ้น และเป็นการให้การเสริมแรงในทันทีด้วย

11. มีการชี้แนะคู่กันไปกับการตอบสนอง

12. ลดการชี้แนะและการนำทาง ออกไปทีละน้อยจนหมดในที่สุด เพื่อช่วยให้ผู้เรียนสามารถตอบสนองด้วยตนเองอย่างถูกต้องตามลำพัง

3.5 ขั้นตอนการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป

เปรื่อง กุมุท (2516: 50); ไพโรจน์ เบาใจ (2520: 9-13); ชม ภูมิภาค (2521: 120-122); ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526: 195); บุญชม ศรีสะอาด (2537: 79-83); และถวัลย์ มาศจรัส (2546: 22-26) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป ซึ่งสรุปรายละเอียดได้ ดังนี้

1. ขั้นเลือกเนื้อหา ผู้เขียนบทเรียนสำเร็จรูปจะต้องศึกษาหลักสูตรของระดับชั้นที่จะนำมาเขียนบทเรียนสำเร็จรูปอย่างละเอียดว่าจะสอนอะไร มีเนื้อหาอะไรบ้าง

2. ขั้นตั้งวัตถุประสงค์หรือจุดมุ่งหมายเป็นตัวกำหนดแนวทางในการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมการเรียนรู้ของผู้เรียน และกำหนดแนวทางการสอนของครูไปพร้อมๆกัน ซึ่งได้จากการจำกัดความถึงพฤติกรรมขั้นสุดท้าย ทำให้รู้ถึงพฤติกรรมต่างๆ ที่จะนำผู้เรียนไปถึงพฤติกรรมขั้นสุดท้าย

3. ขั้นเขียนคำชี้แจงและวิธีการเรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป ข้อนี้อาจเขียนหลังจากที่เขียนบทเรียนแล้วก็ได้ ในคำชี้แจงส่วนใหญ่จะบอกว่ามีกี่หน้า กี่กรอบ ที่จะเรียนและบอกวิธีการเรียนว่าต้องทำอย่างไรบ้าง

4. ขั้นการนำเนื้อหามาเขียนเป็นบทเรียนสำเร็จรูป เมื่อกำหนดเนื้อหาที่จะนำมาจัดทำเป็นบทเรียนสำเร็จรูปแล้ว ขั้นตอนการเขียนบทเรียนมีวิธีการดังนี้

4.1 นำเนื้อหาที่จะเขียนเป็นบทเรียนสำเร็จรูปมาแยกเป็นหน่วยย่อยๆ ในแต่ละหน่วยนั้นต้องเป็นพื้นฐานที่จะทำให้เกิดความรู้ความเข้าใจในหน่วยย่อยถัดไป

4.2 เขียนบทเรียนสำเร็จรูป โดยแบ่งเป็นกรอบ (Frame) ต่างๆ ตั้งแต่กรอบแรกจนถึงกรอบสุดท้าย อาจเขียนเป็นแบบเส้นตรง (Linear Program) หรือแบบสาขา (Branching Program) ก็ได้ โดยหาคำอธิบายที่ดึงดูดความสนใจของผู้เรียน และต้องเป็นคำอธิบายที่ผู้เรียนตีความหมายได้ถูกต้อง เขียนด้วยถ้อยคำที่ชัดเจนถูกต้องตามหลักภาษา หากต้องใช้คำศัพท์ก็ต้องเหมาะสมกับพื้นฐานและอายุของผู้เรียน เนื้อเรื่องจะต้องถูกต้องตามหลักวิชา และมีความสัมพันธ์ต่อเนื่องกันในแต่ละกรอบนอกจากนั้นต้องหาคำถาม/กิจกรรมที่ผู้เรียนได้มีส่วนร่วม ตลอดจนการคิดหาวิธีการประเมินผลกิจกรรมของผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนรู้ผลของตนเองด้วย

5. ขั้นแก้ไขบทเรียนสำเร็จรูป หลังจากเขียนบทเรียนเสร็จแล้ว ควรทิ้งไว้สักระยะหนึ่งแล้วนำมาพิจารณาจุดบกพร่อง เพื่อแก้ไขให้ดียิ่งขึ้น โดยการพิจารณาด้านต่างๆ ดังนี้

5.1 การแก้ไขความถูกต้องของเนื้อหา โดยผู้เขียนและผู้เชี่ยวชาญทางเนื้อหานั้นๆ ตรวจสอบ 2-3 คน

5.2 การแก้ไขด้านการเรียบเรียงภาษา เพื่อขัดเกลาให้ถูกต้องตามหลักทางภาษาอ่านแล้วเข้าใจง่าย และเข้าใจถูกต้องชัดเจน

5.3 การแก้ไขด้านเทคนิคการเขียน พิจารณาเกี่ยวกับความต่อเนื่องของบทเรียน เป็นขั้นตอนตามลำดับ ความเหมาะสมของการแบ่งกรอบ ความเหมาะสมและคุณภาพของภาพที่ใช้ เป็นต้น

6. ขั้นทดลองและปรับปรุงบทเรียนสำเร็จรูป ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ

6.1 การทดลองใช้เป็นรายบุคคล โดยนำบทเรียนไปทดลองใช้กับผู้เรียนที่เรียนอ่อนหรือปานกลาง เพราะจะช่วยให้ได้ข้อมูลในการแก้ไขจุดบกพร่องได้ดี ถ้าข้อความใดที่ผู้เรียนไม่เข้าใจหรือมีความคิดเห็นเกี่ยวกับบทเรียนนั้นๆ ผู้เขียนจะบันทึกและอภิปรายกับผู้เรียนเพื่อให้ทราบจุดที่ต้อง

ปรับปรุงแก้ไข ซึ่งในการทดลองจะทำไปทีละคน ประมาณ 3-4 คน แล้วนำข้อมูลที่ได้ทั้งหมดมาปรับปรุงบทเรียนให้ดียิ่งขึ้น

6.2 การทดลองใช้กับกลุ่มเล็ก นำบทเรียนที่ผ่านการปรับปรุงจากการทดลองรายบุคคลมาทดลองใช้กับผู้เรียนกลุ่มเล็ก ที่มีความสามารถในการเรียนค่อนข้างต่ำหรือปานกลาง ประมาณ 5-10 คน โดยใช้วิธีการเดียวกับขั้นตอนที่ 1 เพื่อรวบรวมปัญหา และข้อบกพร่องต่างๆ หลังจากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขบทเรียน

6.3 การทดลองใช้ในห้องเรียน เป็นการทดสอบครั้งสุดท้ายของกระบวนการทดสอบประสิทธิภาพของบทเรียนสำเร็จรูป การทดสอบในขั้นนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผู้สร้างมั่นใจได้ว่าบทเรียนสำเร็จรูปที่สร้างขึ้นมานั้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ โดยการนำบทเรียนที่ปรับปรุงในขั้นที่ 2 ไปทดลองใช้กับผู้เรียนจำนวน 30 คน เพื่อหาประสิทธิภาพของบทเรียนสำเร็จรูปตามเกณฑ์ โดยใช้วิธีมาตรฐาน 80/80 (ชัยยงค์ พรหมวงศ์. 2532: 469-497)

3.6 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนสำเร็จรูป

ถวัลย์ มาศจรัส (2546: 27) กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปจัดเป็นสื่อการเรียนการสอนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยการอ่าน และทำกิจกรรมเพื่อให้เกิดการเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ซึ่งดำเนินไปตามความสามารถของตน คล้ายกับผู้เรียนได้เรียนกับครูตัวต่อตัว ซึ่งถือว่าเป็นการตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล

สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนสำเร็จรูปนั้น ยุพิน พิพิธกุล (2530: 107); และถวัลย์ มาศจรัส (2546: 27) ได้กล่าวไว้ สรุปได้ดังนี้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยบทเรียนสำเร็จรูปมี 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นเตรียมการสำหรับผู้สอน

1.1 ผู้สอนออกแบบและจัดทำบทเรียนสำเร็จรูปตามกระบวนการและขั้นตอนการสร้างบทเรียนสำเร็จรูป

2. ขั้นปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้

2.1 ผู้สอนนำเข้าสู่บทเรียน โดยการแนะนำขั้นตอนการเรียนรู้ที่เป็นรูปแบบเฉพาะของบทเรียนสำเร็จรูป

2.2 มอบบทเรียนสำเร็จรูปให้ผู้เรียนศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนด

2.3 ผู้สอนให้ข้อเสนอแนะแก่ผู้เรียนเมื่อผู้เรียนต้องการความช่วยเหลือ

3. ขั้นสรุป

3.1 ผู้เรียนสรุปผลการเรียนรู้ของตนเอง เมื่อถึงกรอบสาระการเรียนรู้สรุปหรือกรอบจบของบทเรียนสำเร็จรูป

3.2 ผู้สอนสรุปเนื้อหาสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนสำเร็จรูปในข้างต้นนั้น จะเห็นได้ว่าบทเรียนสำเร็จรูปเป็นบทเรียนที่สร้างขึ้นเพื่อให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยการนำเนื้อหาสาระที่จะให้ผู้เรียนได้เรียนรู้มาแตกออกเป็นหน่วยย่อยๆ เรียกว่า กรอบ (Frame) เพื่อให้ง่ายแก่การเรียนรู้ของผู้เรียน ในแต่ละกรอบจะมีความต่อเนื่องกันตามลำดับก่อนหลัง โดยจะเสนอเนื้อหาทีละน้อย มีคำถามให้ผู้เรียนได้คิดและตอบแล้วเฉลยคำตอบให้ทราบทันทีว่าถูกหรือผิด ถวัลย์ มาศจรัส (2546: 20) ได้กล่าวว่า บทเรียนสำเร็จรูปเปรียบเสมือนการเรียนกับครูผู้สอนแบบตัวต่อตัว ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ไปทีละน้อยตามลำดับขั้น จากง่ายไปยากตามศักยภาพและความสามารถของแต่ละคน สันทัด ภิบาลสุข (2522: 62-65); ไชยยศ เรืองสุวรรณ (2526: 195); และบุญชม ศรีสะอาด (2537: 83) ได้กล่าวถึงข้อดีของแบบเรียนสำเร็จรูปไว้ว่า ทำให้ผู้เรียนเกิดความอยากเรียน เป็นการสนองตอบในเรื่องความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคล ทำให้ผู้เรียนไม่รู้สึกว่ามีปมด้อย และมีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่องของตนได้ทันที ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้แนวคิดของบทเรียนสำเร็จรูปจัดทำเป็นชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ สำหรับการวิจัยครั้งนี้ โดยชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ประกอบด้วย

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากการคัดเลือกของผู้วิจัยบรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยนิสิตจะศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้ ประกอบด้วย คำนำ จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน และหน่วยการเรียน 6 หน่วย
2. คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์

4.1 งานวิจัยในประเทศ

ดารณี คำแหง (2533: 167-170) ได้ทำการวิจัยเรื่องการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จำนวน 320 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบถามเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ จำนวน 2 ฉบับ ประกอบด้วย แบบสอบถามชนิดเลือกตอบ

และแบบสอบถามชนิดความเรียง โดยที่แบบสอบถามแต่ละฉบับสร้างขึ้นให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ลำดับและอนุกรม ผลการวิจัยพบว่า จากแบบสอบถามทั้ง 2 ฉบับ นักเรียนมีข้อบกพร่องมากที่สุด เรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทบางประการของกรุ๊ปและคุณสมบัติการเท่ากันไปใช้พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้หรือวิจารณ์การพิสูจน์ได้ โดยมีสาเหตุสำคัญเนื่องจากนักเรียนประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีไม่ถูกต้อง และเมื่อพิจารณาเฉพาะแบบสอบถามชนิดเลือกตอบ พบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องมากที่สุด เรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบางประการของกรุ๊ปและคุณสมบัติการเท่ากันไปใช้พิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้หรือวิจารณ์การพิสูจน์ได้ โดยมีสาเหตุสำคัญ เนื่องมาจากนักเรียนประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีไม่ถูกต้อง เมื่อพิจารณาเฉพาะแบบสอบถามชนิดความเรียง พบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องมากที่สุดในเรื่องการนำความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้หาค่าตัวแปรพร้อมทั้งหาอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณได้ โดยมีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนจำนิยามอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณผิด

วรรณรัตน์ วิบูลสุข (2539: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องกำหนดการเชิงเส้น ของนักศึกษาของมหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ธุรกิจ จำนวน 188 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องกำหนดการเชิงเส้น แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 48 ข้อ ผลการวิจัยพบว่าเมื่อจำแนกตามเนื้อหา นักศึกษามีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์มากที่สุดในเรื่องการแก้โจทย์ปัญหากำหนดการเชิงเส้นโดยใช้กราฟ ร้อยละ47.85 และเมื่อจำแนกตามจุดประสงค์การเรียนรู้ นักศึกษามีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์มากที่สุดในจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 4 การกำหนดตัวแปรของปัญหา ร้อยละ 50.54

สุกัลยา ฉายสุวรรณ (2539: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความรู้พื้นฐานทางพีชคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตกรุงเทพมหานคร กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 661 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบแบบเลือกตอบจำนวน 2 ฉบับ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ในรูป $ax^2 + bx + c$ โดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ร้อยละ 68 ซึ่งมีสาเหตุสำคัญมาจากการขาดความรอบคอบในเรื่องเลขยกกำลัง และบกพร่องในเรื่องสมการกำลังสอง ร้อยละ 49.70 โดยมีสาเหตุสำคัญมาจากการขาดความรอบคอบในการแทนค่าสูตรด้วยจำนวนเต็มลบ

สุภาพ วชิรศิริ (2544: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการสร้างและการใช้แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ด้านการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง การบวก ลบ คูณ และหาร โดยใช้สมการสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลการเรียนวิชา

คณิตศาสตร์ในระดับ 0 หรือ 1 จำนวน 200 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร โดยใช้สมการ เป็นแบบทดสอบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า ข้อบกพร่องทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้านการแก้โจทย์ปัญหาเรื่อง การบวก ลบ คูณ และหารโดยใช้สมการที่พบมากที่สุด คือ การเขียนสมการผิดและหารผิด

กิติยารัตน์ ภูริพัฒน์ (2545: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จำนวน 957 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบสำรวจแบบอัตนัย และแบบทดสอบวินิจฉัยแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก เรื่องฟังก์ชันและโคไซน์ ค่าของฟังก์ชันและโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม การอ่านค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติจากตาราง กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผลการวิจัยพบว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดจุดบกพร่องเรียงตามลำดับจากมากไปหาน้อยคือ บกพร่องในการคิดคำนวณ ไม่เข้าใจค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติและหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่ได้ ไม่เข้าใจการกำหนดเครื่องหมายในควอดรันต์ตามลำดับ

ทศพร ทักษิมา (2545: 53-58) ได้ทำการวิจัยเรื่องการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องระบบสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตจังหวัดฉะเชิงเทรา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน จำนวน 25 คน โดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัยจำนวน 4 ฉบับ ทำการทดสอบนักเรียน แล้วคัดเลือกนักเรียนที่มีข้อบกพร่องในด้านต่างๆ จากนั้นทำการซ่อมเสริมนักเรียนที่มีข้อบกพร่องด้วยชุดการเรียนการสอนซ่อมเสริมจำนวน 4 ชุด แยกตามเนื้อหาย่อย จุดประสงค์การเรียนรู้ และลักษณะข้อบกพร่อง หลังจากนั้นทำการซ่อมเสริมจนครบทุกลักษณะข้อบกพร่องในทุกด้านที่นักเรียนมี และให้นักเรียนทำแบบทดสอบคู่ขนานเพื่อศึกษาผลของการซ่อมเสริมในแต่ละเนื้อหาย่อย พบว่า คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานหลังการซ่อมเสริมสูงกว่าคะแนนที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยก่อนการซ่อมเสริมที่ระดับนัยสำคัญ .01

นิภาพร นาอ่อน (2545: 52-56) ได้ทำการวิจัยเรื่องการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในเขตจังหวัดร้อยเอ็ด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน ดังนี้

หน่วยที่ 1 เรื่องความหมายของฟังก์ชัน จำนวน 30 คน

หน่วยที่ 2 เรื่องตัวอย่างฟังก์ชันที่ควรรู้จัก จำนวน 30 คน

หน่วยที่ 3 เรื่องฟังก์ชันคอมโพสิต จำนวน 30 คน

หน่วยที่ 4 เรื่องฟังก์ชันอินเวอร์ส จำนวน 30 คน

หน่วยที่ 5 เรื่องพีชคณิตของฟังก์ชัน จำนวน 30 คน

โดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัยจำนวน 5 หน่วย ทำการทดสอบนักเรียน แล้วคัดเลือกนักเรียนที่มีข้อบกพร่องในด้านต่างๆ จากนั้นทำการซ่อมเสริมนักเรียนที่มีข้อบกพร่อง ด้วยชุดการเรียนการสอนซ่อมเสริม แยกตามเนื้อหาย่อย จุดประสงค์การเรียนรู้ และลักษณะข้อบกพร่อง หลังจากทำการซ่อมเสริมจนครบทุกลักษณะข้อบกพร่องในทุกด้านที่นักเรียนมี ให้นักเรียนทำแบบทดสอบคู่ขนานเพื่อศึกษาผลของการซ่อมเสริมในแต่ละเนื้อหาย่อย พบว่า คะแนนของนักเรียนที่ได้จากแบบทดสอบคู่ขนานหลังการซ่อมเสริม สูงกว่าคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัยก่อนการซ่อมเสริมที่ระดับนัยสำคัญ .01

4.2 งานวิจัยต่างประเทศ

เดวิส (Davis. 1979: 125-A) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อผิดพลาดในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ เลขคณิต พีชคณิต เรขาคณิต และแคลคูลัส ซึ่งพบว่าข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีดังนี้ข้อผิดพลาดเกี่ยวกับการสุ่ม กฎเกณฑ์ ลำดับโครงสร้าง การตีความด้านภาษาโดยสรุปประโยคที่แสดงเกี่ยวกับกริยาการให้เหตุผลและการใช้กฎเกณฑ์ผิดลำดับขั้นตอน

ออง และลิม (Ong; & Lim. 1987: 199 -205) ได้ทำการวิจัยเรื่องความเข้าใจและข้อผิดพลาดในวิชาพีชคณิต โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจผลการสอนเกี่ยวกับความเข้าใจในวิชาพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาในสิงคโปร์ กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มีอายุระหว่าง 15-16 ปี จำนวน 3 กลุ่ม เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 365 คน นักเรียนระดับเตรียมอุดมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 339 คน และนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 267 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบพีชคณิตที่ผู้วิจัยดัดแปลงมาจากของอีแวน (Evans) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนจำนวนมากที่มีอายุระหว่าง 15-16 ปี ไม่สามารถแก้ปัญหาพีชคณิตง่ายๆ ได้ และสาเหตุข้อผิดพลาดส่วนใหญ่เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจในการใช้ตัวอักษรแทนตัวแปรหรือค่าคงที่ นักเรียนไม่สามารถแก้สมการซึ่งมีตัวแปรหรือสมการที่ยากกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ และนักเรียนใช้การแทนค่าจำนวนในสมการโดยไม่พิจารณากรณีที่เป็นไปไม่ได้

โคลแกน (Colgan. 1991: 91-A) ได้ทำการวิจัยเรื่องการวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการแก้ไขโจทย์ในวิชาอันตคณิตศาสตร์ (Finite Mathematics) ของนักศึกษาระดับวิทยาลัย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาในมหาวิทยาลัยอินเดียนนา จำนวน 250 คน โดยศึกษาจากการทดสอบย่อย การสอบและจากแบบทดสอบวัดทักษะทางคณิตศาสตร์ พบว่าข้อบกพร่องของนักศึกษานั้นอธิบายได้โดยใช้การแจกแจงลักษณะข้อบกพร่องของ โมว์โชวิทย์-ฮาร์ดาร์, ซาสลาฟสกี้ และอินบา (Movshovitz-Hadar; Zaslavsky; & Inner. 1987) ข้อบกพร่องที่ได้เรียงจากมากไปหาน้อย ได้แก่ ข้อบกพร่องด้าน

การใช้ภาษา การขาดความรอบคอบ และเทคนิควิธีการ ในทุกระดับคะแนน นักศึกษามีเปอร์เซ็นต์ของข้อบกพร่องแต่ละชนิดเท่าๆ กัน และมีนักการศึกษาบางส่วนบกพร่องด้านทักษะการคิดคำนวณ และบางส่วนบกพร่องด้านทักษะการแก้ปัญหา

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งในประเทศและต่างประเทศดังกล่าว สรุปได้ว่ามีการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา และระดับมหาวิทยาลัย โดยอาศัยแบบทดสอบวินิจฉัย ชนิดเลือกตอบหรือชนิดอัตนัยแสดงวิธีทำ ซึ่งพบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ด้านต่างๆ ได้แก่ ด้านการคิดคำนวณ การขาดทักษะพื้นฐาน การใช้กฎ นิยาม สูตรหรือทฤษฎี การใช้ข้อมูล การตีความด้านภาษา การใช้สัญลักษณ์ และไม่มีการตรวจสอบระหว่างการแก้ปัญหา เป็นต้น

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้บทเรียนสำเร็จรูปในวิชาคณิตศาสตร์

5.1 งานวิจัยในประเทศ

สิริรัตน์ ชมพันธ์ (2533: 128) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกลุ่มทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องบทประยุกต์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ครูสอนตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เจือจันทร์ กัลยา (2534: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสนใจในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปประกอบภาพการ์ตูน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เจษฎา จงสืบสุข (2542: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ระหว่างการเรียนเป็นกลุ่มโดยใช้บทเรียนโปรแกรม เอกสารแนะแนวทางและการเรียนรู้จากครู โรงเรียนสารวิทยา กรุงเทพมหานคร ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างการเรียนเป็นกลุ่มโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการเรียนจากครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระหว่างการเรียนเป็นกลุ่มโดยใช้เอกสารแนะแนวทางกับการเรียนจากครูแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างการเรียนเป็นกลุ่มโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการใช้เอกสารแนะแนวทางไม่แตกต่างกัน

5.2 งานวิจัยต่างประเทศ

ริกส์ (Riggs. 1967: 2784-A) ได้ทำการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องกราฟสำหรับนักเรียนเกรด 5 และทำการสอนดังนี้ กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปและไม่ได้รับการสอนจากครู กลุ่มที่ 2 สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปและได้รับการสอนจากครูเพิ่มเติม กลุ่มที่ 3 สอนโดยใช้ครูอย่างเดียวไม่ใช้บทเรียนสำเร็จรูป ผลปรากฏว่า กลุ่มที่สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป 2 กลุ่ม มีผลต่อการพัฒนาทักษะในการเรียนรู้เรื่องกราฟสูงกว่ากลุ่มที่สอนโดยครูอย่างเดียว

อิสเตอร์เดย์ (Easterday. 1968: 303-307) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนแบบบรรยายตามปกติในวิชาพีชคณิต เมื่อปี ค.ศ. 1968 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 ผลปรากฏว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูป มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนจากการฟังคำบรรยายจากครูผู้สอน

คอลลาแกรน (Collagan. 1969: 1070-A) ได้เปรียบเทียบการสอนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปกับการสอนปกติในวิชาคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ ของนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย ผลปรากฏว่า ผลการสอนด้วยบทเรียนสำเร็จรูปให้ผลการสอนดีกว่าการสอนปกติ

ไวท์ (White. 1970: 3373-A) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลการใช้บทเรียนโปรแกรมในการสอนคณิตศาสตร์ระดับมหาวิทยาลัยของนักศึกษาที่มีพื้นฐานวิชาคณิตศาสตร์อ่อน ตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาจำนวน 132 คน แบ่งเป็นกลุ่มควบคุม 58 คน ได้รับการสอนแบบปกติ และกลุ่มทดลอง 74 คน ได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรม ผลปรากฏว่า กลุ่มที่เรียนจากบทเรียนโปรแกรมทำคะแนนในเรื่องการคำนวณได้สูงกว่ากลุ่มที่เรียนแบบปกติ แต่การแก้โจทย์ปัญหาของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการใช้บทเรียนสำเร็จรูป จะเห็นว่าได้มีการนำบทเรียนสำเร็จรูปมาใช้ทั้งในระดับประถมศึกษา มัธยมศึกษา และระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งพบว่าการใช้บทเรียนสำเร็จรูปในการสอนสามารถช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่าการสอนแบบปกติ และยังเป็นการสนองตอบในเรื่องความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคล ทำให้ผู้เรียนไม่รู้สึกว่ามีปมด้อย และมีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่องของตนได้ทันที ด้วยเหตุนี้ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่ดำเนินการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยใช้แบบทดสอบวินิจฉัยเป็นเครื่องมือในการคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปสำหรับแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิต ผู้วิจัยคาดว่าเครื่องมือที่สร้างขึ้นจะช่วยแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนให้แก่นิสิตได้อย่างถูกต้อง และช่วยให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ดีขึ้น อันจะมีผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตสูงขึ้น

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ มีความมุ่งหมายเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียน สร้างชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ และศึกษาผลการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปดังกล่าว โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้ (ดูภาพประกอบ 4 และภาพประกอบ 5)

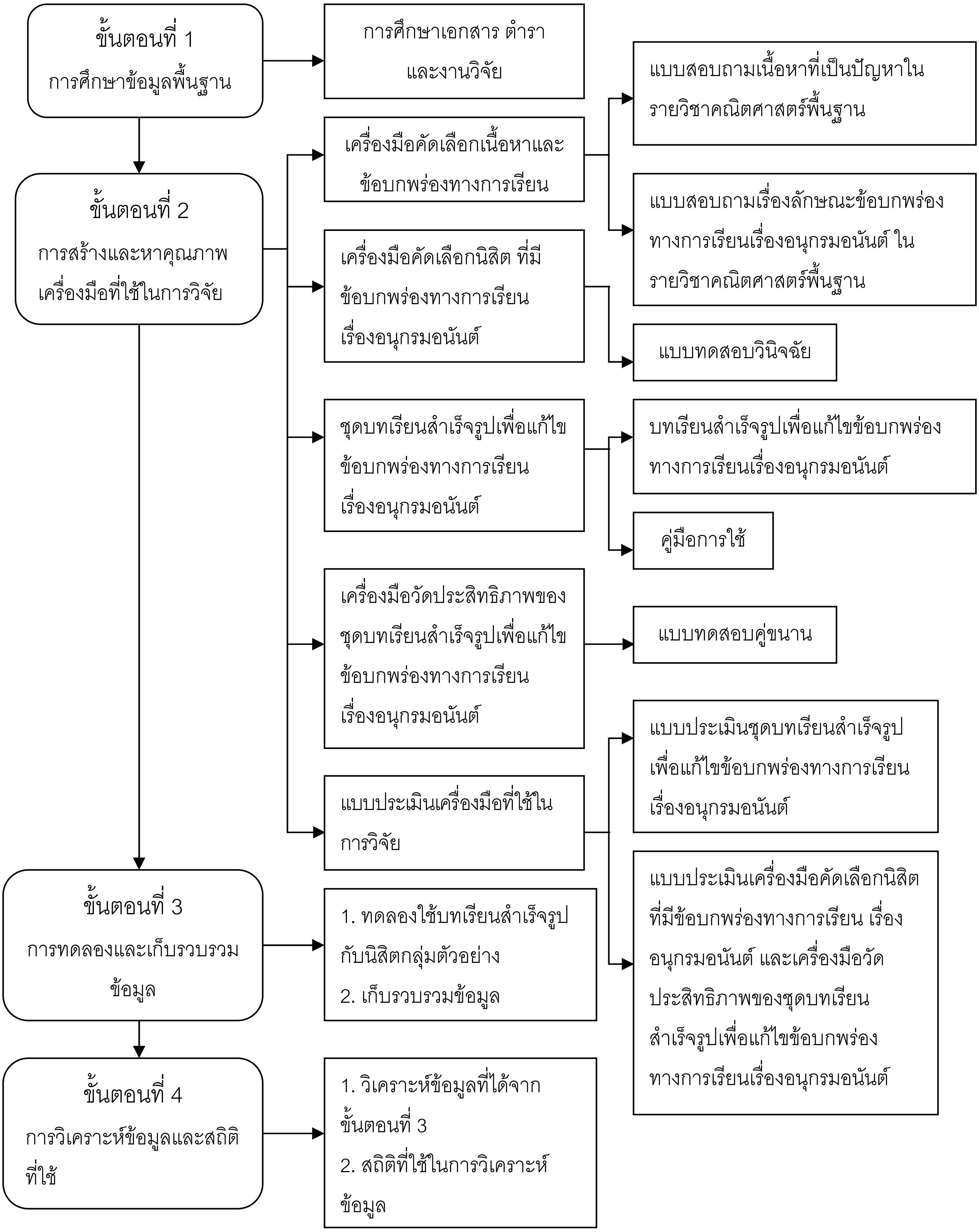
ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

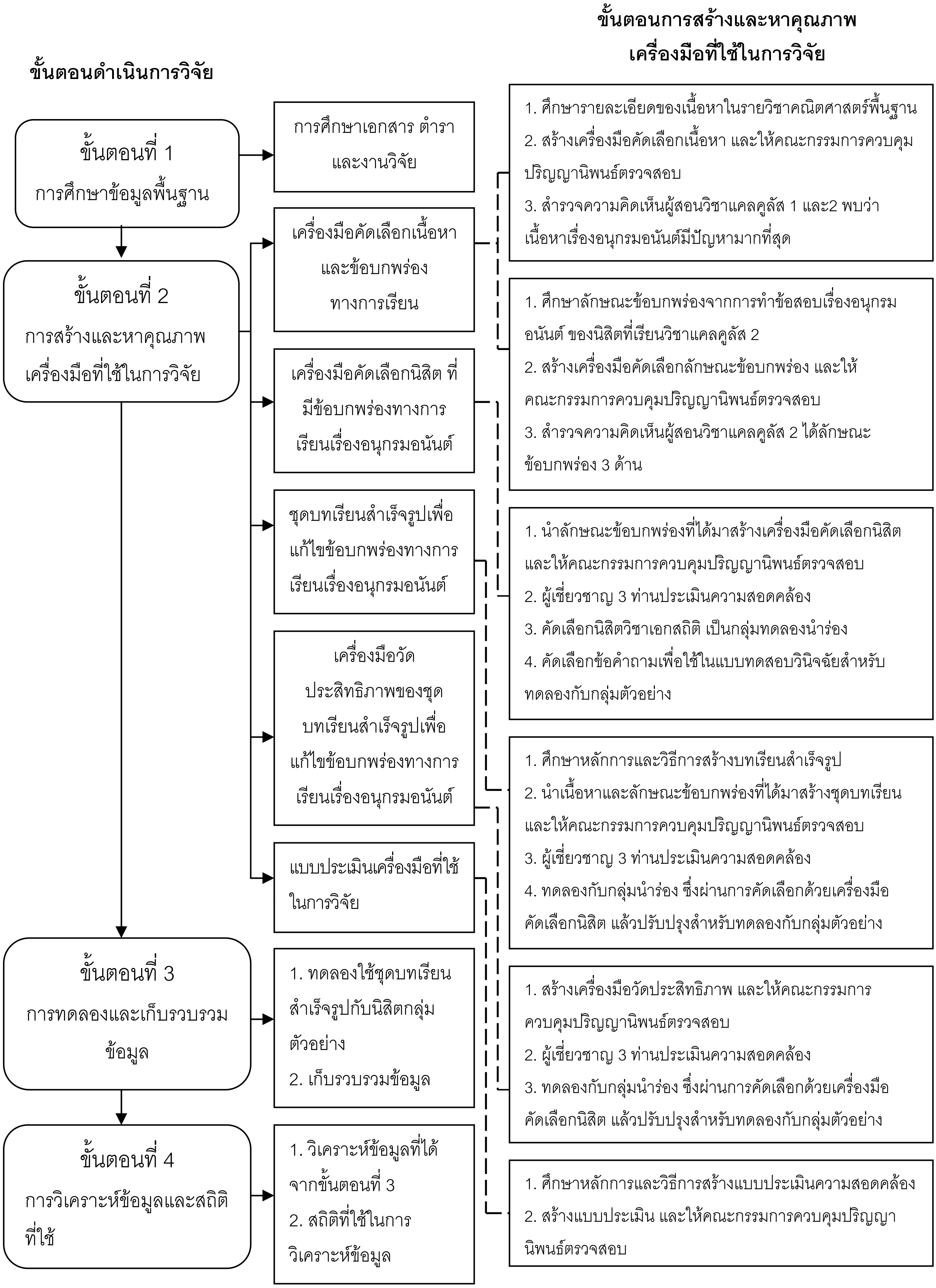
ขั้นตอนที่ 3 การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นตอนที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

ขั้นตอนดำเนินการวิจัย



ภาพประกอบ 4 ขั้นตอนดำเนินการวิจัย



ภาพประกอบ 5 ขั้นตอนการสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ศึกษาข้อมูลพื้นฐานจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศ สอบถามความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญและคณะกรรมการที่ปรึกษาปริญญานิพนธ์ ในหัวข้อต่างๆ ต่อไปนี้

1. การสร้างแบบสอบถาม
2. หลักสูตรและเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
3. การวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์และการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องและแบบทดสอบคู่ขนาน
4. การสร้างบทเรียนสำเร็จรูป
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยมีดังนี้

1. เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาและข้อบกพร่องทางการเรียน ประกอบด้วย
   1.1 เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
   1.2 เครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
2. เครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
3. ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
4. เครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
5. แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ เป็นแบบสอบถามเนื้อหาที่เป็นปัญหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อสำรวจความคิดเห็นของผู้สอนหรือเคยสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ แบบสอบถามนี้มีสเกลการวัดระดับปัญหาเป็นแบบอันดับ 4 อันดับ ดังนี้ 0 : ไม่มีปัญหา 1: มีปัญหาน้อย 2: มีปัญหาปานกลาง 3: มีปัญหามาก

เกณฑ์ตัดสิน คือ เป็นปัญหาในระดับมาก กล่าวคือ ถ้าเนื้อหาใดมีคะแนนเฉลี่ยมากกว่า 2.25 แสดงว่าเนื้อหาเป็นปัญหาในระดับมาก ถ้ามีเนื้อหาที่เป็นปัญหาในระดับมากเป็นจำนวนมากกว่า 1 เนื้อหา จะเลือกเนื้อหาที่มีคะแนนเฉลี่ยมากกว่า

การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

มีขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ศึกษาหลักการและวิธีการสร้างแบบสอบถามจากตำราและเอกสารต่างๆ และศึกษารายละเอียดของเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

<u>ขั้นที่ 2</u> สร้างแบบสอบถามเนื้อหาที่เป็นปัญหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ และนำแบบสอบถามที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบ แล้วนำผลมาปรับปรุง

<u>ขั้นที่ 3</u> นำแบบสอบถามที่ได้จากขั้นที่ 2 ไปสำรวจความคิดเห็นของผู้สอนหรือเคยสอนในวิชาแคลคูลัส 1 และแคลคูลัส 2 ซึ่งเป็นรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 10 คน และนำผลคะแนนความคิดเห็นที่ได้มาคัดเลือกเนื้อหาที่เป็นปัญหาตามเกณฑ์ตัดสินที่กำหนด ซึ่งผลปรากฏว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหามากที่สุดคือ อนุกรมอนันต์

2.2 เครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบสอบถามเรื่องลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์ ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อสำรวจความคิดเห็นของผู้สอนหรือเคยสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน จำนวน 10 คน แบบสอบถามนี้มีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 2 ประเภท ดังนี้ ไม่มีข้อบกพร่อง และมีข้อบกพร่อง เกณฑ์ตัดสินคือ มีอย่างน้อย 1 คน กล่าวว่ามีข้อบกพร่อง กล่าวคือ ถ้าลักษณะข้อบกพร่องใดมีอย่างน้อย 1 คน กล่าวว่ามีข้อบกพร่อง จะคัดเลือกไว้เป็นลักษณะข้อบกพร่องที่ใช้ในเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

มีขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> ศึกษาหลักการและวิธีการสร้างแบบสอบถามจากตำราและเอกสารต่างๆ และศึกษาหาลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ จากการทำข้อสอบเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิต

ที่เรียนวิชาแคลคูลัส 2 ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2547

ขั้นที่ 2 นำลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่พบจากขั้นที่ 1 มาสร้างเป็นข้อคำถามในแบบสอบถามเรื่องลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน และนำแบบสอบถามที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบ แล้วนำผลมาปรับปรุง

ขั้นที่ 3 นำแบบสอบถามที่ได้จากขั้นที่ 2 ไปสำรวจความคิดเห็นของผู้สอนหรือเคยสอนวิชาแคลคูลัส 2 ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 10 คน และนำผลคะแนนความคิดเห็นที่ได้มาคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องตามเกณฑ์ตัดสินที่กำหนด ผลปรากฏว่าได้ลักษณะข้อบกพร่อง 3 ด้าน ได้แก่ ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎี สมบัติ กฎ หรือสูตร ด้านทักษะการคิดคำนวณ และด้านการประยุกต์

2.3 เครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อค้นหาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ข้อคำถามเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ แบบทดสอบวินิจฉัยนี้มีจำนวน 15 ฉบับตามจำนวนหน่วยการเรียนย่อย ซึ่งแต่ละหน่วยการเรียนย่อยใช้เวลาในการทดสอบประมาณ 20 นาที รวมระยะเวลาในการทดสอบด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยประมาณ 5 ชั่วโมง

การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษาหลักการและวิธีการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยจากตำราและเอกสารต่างๆ และนำลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากเครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์มาสร้างเป็นข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัยสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนย่อย แล้วนำแบบทดสอบวินิจฉัยที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำผลมาปรับปรุง

ขั้นที่ 2 นำแบบทดสอบวินิจฉัยที่ได้จากขั้นที่ 2 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อประเมินความสอดคล้อง ด้วยแบบประเมินเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ คัดเลือกข้อคำถามที่มีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป มาเป็นข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัยที่จะใช้ในการทดลองต่อไป

<u>ขั้นที่ 3</u> นำแบบทดสอบวินิจฉัยไปคัดเลือกนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกสถิติ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส 2 เรื่องอนุกรมอนันต์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 จำนวน 25 คน และนิสิตเหล่านี้ได้เรียนเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ จากอาจารย์ประจำวิชาแล้ว นิสิตที่ได้รับการคัดเลือกจะใช้เป็นกลุ่มทดลองนำร่อง

<u>ขั้นที่ 4</u> นำแบบทดสอบวินิจฉัยที่ได้จากขั้นที่ 3 มาคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และคัดเลือกข้อคำถามที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2 - 0.8 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป เพื่อใช้เป็นข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัยสำหรับทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง พร้อมทั้งหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัย

2.4 ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นชุดบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้สำหรับแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

2.4.1 บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากการคัดเลือกของผู้วิจัยบรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยนิสิตจะศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้ บทเรียนใช้เวลาทั้งหมดประมาณ 15 ชั่วโมง ประกอบด้วย คำนำ จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และหน่วยการเรียน 6 หน่วย ดังนี้

หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 2 ชั่วโมงประกอบด้วย หน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และการหาลิมิตของลำดับ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2

หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 2 ชั่วโมง ประกอบด้วย หน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และอนุกรมเรขาคณิต แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 5 ชั่วโมง 30 นาที ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 7 หน่วย ได้แก่ การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยปริพันธ์ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 อนุกรมพี แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยอัตราส่วน แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 และการทดสอบโดยราก แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 1 ชั่วโมง 30 นาที ซึ่งมีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่ อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 2 ชั่วโมง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่ การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2, 3

หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ใช้เวลาไม่น้อยกว่า 2 ชั่วโมง ซึ่งมีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่ อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน แยกตามลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1, 2 และ3

แต่ละหน่วยการเรียนย่อยซึ่งแยกตามลักษณะข้อบกพร่องในแต่ละด้าน ประกอบด้วย

1. คำชี้แจง/คำแนะนำในการศึกษา
2. จุดประสงค์การเรียนรู้
3. กรอบ (Frame) แต่ละกรอบจะมีคำอธิบายเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องมีตัวอย่าง มีกิจกรรมให้นิสิตทำเพื่อทบทวนความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้ศึกษา พร้อมเฉลยคำตอบ

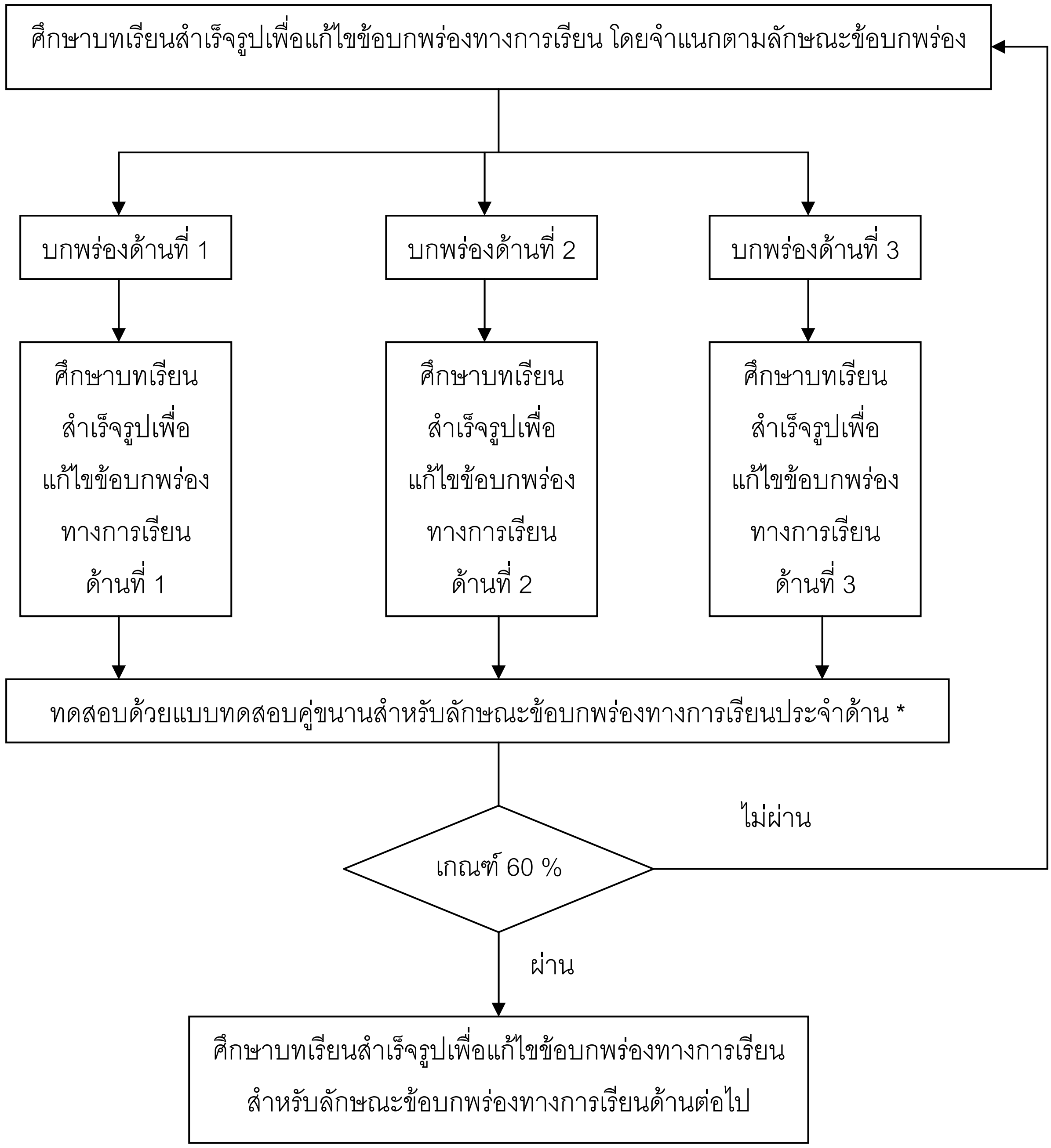
2.4.2 คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

2.4.2.1 จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2.4.2.2 กรอบแนวทางการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน ซึ่งเป็นการนำเสนอรายละเอียดในการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อให้การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยมีขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมแสดงดังภาพประกอบ 6

2.4.2.3 แบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน พร้อมเฉลยคำตอบ

ขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนย่อย



* นิสิตแต่ละคนสามารถทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานได้ไม่เกิน 2 ครั้ง และใช้คะแนนมากที่สุดของนิสิต สำหรับการวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ภาพประกอบ 6 แผนผังแสดงขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน สำหรับแต่ละหน่วยการเรียนย่อย

การสร้างและหาคุณภาพชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษาหลักการและวิธีการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปจากตำราและเอกสารต่างๆ

ขั้นที่ 2 นำเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์และลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากเครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มาสร้างเป็นชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และนำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำผลมาปรับปรุง

ขั้นที่ 3 นำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ได้จากขั้นที่ 2 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ประเมินความสอดคล้องด้วยแบบประเมินชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ขั้นที่ 4 นำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ผ่านการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญไปทดลองกับกลุ่มนำร่อง ซึ่งผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ภายหลังการทดลองนำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์มาปรับปรุงภาษา และเวลาที่ใช้ เพื่อให้เหมาะสมสำหรับนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2.5 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบทดสอบคู่ขนานที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อศึกษาผลการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยแบบทดสอบคู่ขนานมีข้อคำถามที่คู่ขนานกับข้อคำถามในแบบทดสอบวินิจฉัย ข้อคำถามเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีทำ แบบทดสอบคู่ขนานนี้มีจำนวน 15 ฉบับตามจำนวนหน่วยการเรียนย่อย ซึ่งแต่ละหน่วยการเรียนย่อยใช้เวลาในการทดสอบประมาณ 20 นาที รวมระยะเวลาในการทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานประมาณ 5 ชั่วโมง

การสร้างและหาคุณภาพเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างแบบทดสอบคู่ขนานสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนรู้ย่อย นำแบบทดสอบคู่ขนานที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ แล้วนำผลมาปรับปรุง

ขั้นที่ 2 นำแบบทดสอบคู่ขนานที่ได้จากขั้นที่ 1 ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อประเมินความสอดคล้องด้วยแบบประเมินเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ คัดเลือกข้อคำถามที่มีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปมาเป็นข้อคำถามในแบบทดสอบคู่ขนานที่จะใช้ในการทดลอง

ขั้นที่ 3 นำแบบทดสอบคู่ขนานไปทดลองกับกลุ่มนำร่อง ซึ่งผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแล้ว ภายหลังการทดลองนำแบบทดสอบคู่ขนานมาคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และคัดเลือกข้อคำถามที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.2-0.8 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป เพื่อใช้เป็นข้อคำถามในแบบทดสอบคู่ขนานสำหรับทดลองกับกลุ่มตัวอย่างพร้อมทั้งหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบคู่ขนาน

2.6 แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ประกอบด้วย

1. แบบประเมินเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบประเมินความสอดคล้องซึ่งมีสเกลการวัดแบบแยกประเภทดังนี้ -1: ไม่สอดคล้อง 0: ไม่แน่ใจ 1: สอดคล้อง

2. แบบประเมินเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบประเมินความสอดคล้องซึ่งมีสเกลการวัดแบบแยกประเภทดังนี้ -1: ไม่สอดคล้อง 0: ไม่แน่ใจ 1: สอดคล้อง

3. แบบประเมินชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นแบบประเมินความสอดคล้องซึ่งมีสเกลการวัดแบบแยกประเภทดังนี้ -1: ไม่สอดคล้อง 0: ไม่แน่ใจ 1: สอดคล้อง

เกณฑ์การตัดสินสำหรับแบบประเมินทั้งหมดคือ ถ้าข้อคำถามใดมีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป แสดงว่าข้อคำถามนั้นมีความสอดคล้องกัน และสามารถนำไปใช้ในการทดลองได้

การสร้างแบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษาหลักการและวิธีการสร้างแบบประเมินความสอดคล้องจากตำราและเอกสารต่างๆ

ขั้นที่ 2 สร้างแบบประเมินดังนี้

2.1 แบบประเมินเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2.2 แบบประเมินเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2.3 แบบประเมินชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ขั้นที่ 3 นำแบบประเมินทั้งหมดในขั้นที่ 2 ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ตรวจสอบและนำผลมาปรับปรุงเพื่อใช้ในการทดลองต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้วิจัยนำเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน (แบบทดสอบวินิจฉัย) เรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียน ที่ผ่านการปรับปรุงภายหลังทดลองกับกลุ่มนำร่องแล้ว ไปคัดเลือกนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส 2 เรื่องอนุกรมอนันต์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 จำนวน 35 คน ภายหลังเรียนเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนจากอาจารย์ประจำวิชาเสร็จสิ้นแล้ว โดยนิสิตที่ผ่านการคัดเลือกจะเป็นกลุ่มตัวอย่าง

ขั้นที่ 2 นำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง ภายหลังการทดลองนำผลที่ได้ไปทดสอบสมมุติฐานของการวิจัย พร้อมทั้งวิเคราะห์หาจำนวนนิสิตที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องแต่ละด้าน เพื่อใช้ประกอบการอภิปรายผลของการทดลอง

ขั้นตอนที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

4.1 การวิเคราะห์ข้อมูล

ทดสอบสมมุติฐานของการวิจัย โดยใช้การทดสอบ Z (Z-Test) สำหรับสัดส่วนประชากร 1 กลุ่ม

4.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและร้อยละ
2. ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) โดยวิธีหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค
3. ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)
4. การทดสอบ Z (Z-Test) สำหรับสัดส่วนประชากร 1 กลุ่ม

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 มีการศึกษา 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 คัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ด้วยแบบทดสอบวินิจฉัย

ขั้นที่ 2 นำนิสิตที่ผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยมาแก้ไขข้อบกพร่องโดยใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ขั้นที่ 3 หาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์โดยใช้แบบทดสอบคู่ขนาน

ผู้วิจัยเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลแบ่งเป็น 2 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1 ผลการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ แสดงในตาราง 2 ถึงตาราง 8 ภาพประกอบ 7 และภาพประกอบ 8

ส่วนที่ 2 ผลการหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย 3 ตอนคือ

ตอนที่ 1 ทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย) แสดงในตาราง 9

ตอนที่ 2 ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ แสดงในตาราง 10

ตอนที่ 3 ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ แสดงในตาราง 11

ส่วนที่ 1 ผลการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน และคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบคู่ขนานเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนซึ่งมีจำนวน 6 หน่วย ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อยทั้งหมด 15 หน่วย ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 35 คน ได้ผลการวิเคราะห์แสดงในตาราง 2 ถึงตาราง 8 ภาพประกอบ 7 และภาพประกอบ 8

ตาราง 2 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนของหน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติของอสมการมาใช้ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับได้ สมบัติดังกล่าวคือ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $x > y$ แล้ว $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ เช่น ในการพิจารณา $\left\| a_n - L \right\|$ เพื่อหาจำนวนเต็มบวก N (แปรค่าตาม ε) - ไม่เข้าใจบทนิยามของลำดับ $\{a_n\}$ ที่มีลิมิต หรือจำบทนิยามไม่ได้ ทำให้ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เช่น เขียนบทนิยามไม่ได้ หรือแสดงการพิสูจน์ลิมิตของลำดับไม่ครบขั้นตอน คือ หาจำนวนเต็มบวก N ได้ แต่ไม่ได้แสดงว่า $\left\| a_n - L \right\| < \varepsilon$ แล้วสรุปว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$	34 (97.14)	27 (79.41)	7 (20.59)
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - ในขั้นตอนการพิจารณา $\left\| a_n - L \right\|$ เพื่อหาค่าของจำนวนเต็มบวก N ไม่สามารถคำนวณหาผลลบของเศษส่วนได้ถูกต้อง เนื่องจากขาดทักษะ	23 (65.71)	15 (65.22)	8 (34.78)

ตาราง 2 (ต่อ)

<table>
<tr><th rowspan="2">หน่วยการเรียนย่อยที่</th><th rowspan="2">ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 1</th><th rowspan="2">จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง</th><th colspan="2">จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)</th></tr>
<tr><th>แก้ไขข้อบกพร่องได้</th><th>แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้</th></tr>
<tr><td></td><td>ในการหาผลลบของเศษส่วน เช่น ไม่สามารถคำนวณหาค่าของ $\left|\frac{2\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n+7}}-\frac{2}{3}\right|$ ได้ถูกต้อง ทำให้ไม่สามารถเชื่อมโยงการพิสูจน์ได้

3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์</td><td>

–</td><td>

–</td><td>

–</td></tr>
<tr><td>2. การหาลิมิตของลำดับ</td><td>**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร**
- ไม่สามารถหาลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เนื่องจาก
1. ไม่เข้าใจทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ ซึ่งได้แก่ ทฤษฎีบทต่อไปนี้
1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $\lvert r \rvert < 1$ โดยนิสิตจะไม่พิจารณาว่า $\lvert r \rvert < 1$ หรือไม่
1.2 ทฤษฎีบทบีบอัด (The Squeeze Theorem) เช่น นิสิตไม่สามารถแสดงได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 0$ โดยอาศัยทฤษฎีบทบีบอัดได้
2. ไม่เข้าใจการใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล (L’Hôpital’s Rule) ในการหาลิมิตของลำดับ เช่น</td><td>34
(97.14)</td><td>27
(79.41)</td><td>7
(20.59)</td></tr>
</table>

ตาราง 2 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	2.1 เมื่อกำหนดให้หา $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ มีนิสิตส่วนมากที่ตอบทันที โดยไม่ได้แสดงวิธีทำว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ ไม่สามารถหาค่าได้ หรือไม่มีลิมิต เพราะ n (ตัวเศษ) เป็นเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น 1 และ $\sqrt{n}$ (ตัวส่วน) เป็นเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น $\frac{1}{2}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1 โดยไม่ได้พิจารณาว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(n+1)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}=\infty$ ซึ่งสามารถใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลในการหาลิมิตของลำดับได้			
	2.2 เมื่อกำหนดให้หา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ มีนิสิตบางส่วนที่ไม่ทราบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 1^∞ จึงตอบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ไม่สามารถหาค่าได้ หรือไม่มีลิมิต และมีนิสิตที่ไม่เข้าใจหรือไม่ได้ใช้สมบัติของลอการิทึมธรรมชาติช่วยในการเปลี่ยนรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 1^∞ ให้เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $0\cdot\infty$ นอกจากนั้นยังไม่สามารถเปลี่ยนรูปแบบจาก $0\cdot\infty$ ให้เป็น $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ได้ถูกต้อง			

ตาราง 2 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	3. ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติของฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียล และทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชันคอมโพสิท นั่นคือ ทราบว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = -1$ แต่ไม่สามารถหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty} y$ ได้ 4. ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติของเลขยกกำลังในการหา $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}{2^n-5^{n-1}}$ คือ ในกระบวนการหาลิมิตดังกล่าวซึ่งจะต้องทำให้แต่ละจำนวนอยู่ในรูปของ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ แต่มีนิสิตที่ไม่ทราบว่าจะต้องนำ 5^n ไปหารทั้งตัวเศษและตัวส่วน หรือมีนิสิตที่ไม่สามารถหาค่าของ $\dfrac{5^{n+1}}{5^n}, \dfrac{2\cdot 3^{n-1}}{5^n}$ หรือ $\dfrac{5^{n-1}}{5^n}$ ได้ หรือไม่ทราบว่า $\dfrac{2^n}{5^n} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ 5. จำสูตรของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ ที่นำไปใช้ในหลักเกณฑ์โลปิตาล (L'Hôpital's Rule) ไม่ได้ เช่น ในการหาอนุพันธ์ของ $\ln(x+1)$, $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ หรือ $\sqrt{x}$ เป็นต้น			

ตาราง 2 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - ไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ - ไม่สามารถหา $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)$ ได้ถูกต้อง เนื่องจาก ไม่สามารถหาจำนวน คือ $\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n+\sqrt{n^2-n}}$ ซึ่งต้องนำไปคูณกับ $n-\sqrt{n^2-n}$ ได้ หรือหาจำนวนที่นำไปคูณกับ $n-\sqrt{n^2-n}$ ไม่ถูกต้อง เช่น $\frac{n-\sqrt{n^2+n}}{n-\sqrt{n^2+n}}$ หรือ $\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{n+\sqrt{n^2+n}}$ เป็นต้น - คำนวณหาลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ไม่ถูกต้อง ทำให้ได้ข้อสรุปของการเป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าผิดพลาด	34 (97.14)	27 (79.41)	7 (20.59)
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–

ตาราง 3 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน ของหน่วยการเรียนที่ 2 เรื่องอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 2	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถหาลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ของอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เนื่องจากไม่เข้าใจ หรือจำไม่ได้ว่า $S_1 = a_1$ $S_2 = a_1 + a_2$ $\vdots$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ - ในการพิจารณาการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ นิสิตจะสับสนโดยจะพิจารณาจาก $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ แทนการพิจารณาจาก $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ เช่น เมื่อกำหนดอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ นิสิตจะหาผลบวกของอนุกรมดังกล่าว โดยการหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ และจะตอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ ซึ่งไม่ถูกต้อง - ไม่สามารถสรุปผลจากการหา $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ของอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ได้ถูกต้อง เช่นหาได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3}$ แต่กลับสรุปว่า อนุกรมอนันต์	35 (100)	23 (65.71)	12 (34.29)

ตาราง 3 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 2	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ที่กำหนดให้ไม่ลู่เข้า เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3} < 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{3} \neq 0$			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - ไม่สามารถหาลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ของอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เนื่องจาก 1. ขาดทักษะในเรื่องระบบสมการ เช่น ทราบว่า $S_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n}$ แต่ไม่สามารถหาสมการ คือ $\frac{1}{5}S_n = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}}$ ในการสร้างระบบสมการ ที่จะนำมาแก้ระบบสมการเพื่อหา S_n ได้ หรือ สามารถสร้างระบบสมการได้ แต่ไม่สามารถแก้ระบบสมการเพื่อหา S_n ได้ถูกต้อง 2. ขาดความรู้ในเรื่องของการเขียนเศษส่วนตรรกยะให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย เช่น เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$ ให้ แต่ไม่สามารถเขียน $\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$ ให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยได้ คือ $\frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}$	29 (82.86)	17 (58.62)	12 (41.38)

ตาราง 3 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 2	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	- คำนวณหา $\lim_{n\to\infty} S_n$ ไม่ถูกต้อง จึงทำให้ได้ผลบวกของอนุกรมอนันต์ที่ไม่ถูกต้อง **3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์**	–	–	–
2.อนุกรมเรขาคณิต	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่เข้าใจความหมายของอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ จึงทำให้ไม่สามารถระบุจำนวนจริงคงตัว a และ r ได้ - ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของอนุกรมเรขาคณิตมาใช้ในการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมเรขาคณิตได้ กล่าวคือ เมื่อกำหนดอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ให้ นิสิตจะไม่พิจารณาว่า $\lvert r \rvert < 1$ หรือ $\lvert r \rvert \geq 1$ ซึ่งการพิจารณาดังกล่าวจะเป็นการพิจารณาว่าอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ และถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าก็จะสามารถหาผลบวกได้ แต่จะมุ่งหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เพียงอย่างเดียวไม่ว่า $\lvert r \rvert < 1$ หรือ $\lvert r \rvert \geq 1$ ก็ตาม	33 (94.29)	25 (75.76)	8 (24.24)

ตาราง 3 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 2	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–

ตาราง 4 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน ของหน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า เนื่องจากไม่สามารถใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท คือ ทฤษฎีบทกล่าวว่า ถ้าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ดังนั้นข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท คือ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า มาใช้ในการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้าได้	30 (85.71)	25 (83.33)	5 (16.67)
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–
2. การทดสอบด้วยปริพันธ์	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการทดสอบด้วยปริพันธ์หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ เช่น ไม่สามารถบอกเงื่อนไขของ $f(x)$ ที่ใช้ในการทดสอบด้วยปริพันธ์	19 (54.29)	19 (100)	–

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง) แก้ไขข้อบกพร่องได้	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง) แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	หรือบอกเงื่อนไขไม่ถูกต้อง หรือไม่สมบูรณ์ - สับสนระหว่างการใช้ตัวแปร n กับตัวแปร x ในการพิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ - สรุปผลจากปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ที่หาได้ไม่ถูกต้อง ทำให้การพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ผิดพลาด - จำสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆไม่ได้หรือจำได้ไม่ถูกต้อง เช่น จำสูตรในการหาปริพันธ์ของ $\frac{1}{u^2+a^2}$ ไม่ได้ เป็นต้น			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - หาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก 1. ขาดทักษะในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยใช้วิธีการแทนตัวแปรและใช้สูตรพื้นฐานของปริพันธ์ เช่น การหาค่าของ $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$ หรือการหาค่าของ $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$ เป็นต้น 2. ในขั้นตอนการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ นิสิตคำนวณหาลิมิตของ	35 (100)	6 (17.14)	29 (82.86)

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	ฟังก์ชันต่างๆ ไม่ได้ หรือไม่ถูกต้อง เช่น $\lim_{b\to\infty} \ln\left(b^3+5\right)$, $\lim_{b\to\infty} e^{-b^3}$ หรือ $\lim_{b\to\infty} \tan^{-1}b$ เป็นต้น 3. ความผิดพลาดในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนต่างๆ **3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์**	 –	 –	 –
3. อนุกรมพี	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่เข้าใจบทนิยามของอนุกรมพี หรือบทนิยามและสมบัติพื้นฐานของเลขยกกำลังหรือจำบทนิยามและสมบัติดังกล่าวไม่ได้ จึงทำให้ไม่สามารถหาค่า p จากอนุกรมที่กำหนด ให้ได้ เช่น เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ หรืออนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}}$ นิสิตไม่สามารถหาค่า p ได้ หรือหาค่า p ได้ไม่ถูกต้อง - ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของอนุกรมพี หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ (ไม่ทราบว่า อนุกรมพี $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$และเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า เมื่อ $p \leq 1$) จึงทำให้ไม่สามารถพิจารณา	19 (54.29)	16 (84.21)	3 (15.79)

ตาราง 4 (ต่อ)

<table>
<tr><th rowspan="2">หน่วยการเรียนย่อยที่</th><th rowspan="2">ลักษณะข้อบกพร่อง
ของหน่วยการเรียนที่ 3</th><th rowspan="2">จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง</th><th colspan="2">จำนวนนิสิต
(ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)</th></tr>
<tr><th>แก้ไขข้อบกพร่องได้</th><th>แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้</th></tr>
<tr><td></td><td>การลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ

3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์</td><td>

–

–</td><td>

–

–</td><td>

–

–</td></tr>
<tr><td>4. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</td><td>1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร
- ไม่สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับบทนิยามของการข่ม (dominate) มาใช้ในการพิจารณาการข่มของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ว่าอนุกรมใดข่มและอนุกรมใดถูกข่ม
- ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการเปรียบเทียบ หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ รวมทั้งไม่สามารถสังเกตได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า จึงทำให้ไม่สามารถหาอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าที่จะมาเปรียบเทียบได้ เช่น เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ ให้ นิสิตไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทของการเปรียบเทียบมาพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมทั้งสามได้</td><td>34
(97.14)</td><td>24
(70.59)</td><td>10
(29.41)</td></tr>
</table>

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–
5. การทดสอบด้วยอัตราส่วน	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถพิจารณาได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าโดยการทดสอบด้วยอัตราส่วนได้ เนื่องจาก 1. ไม่เข้าใจบทนิยามและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลังหรือจำบทนิยามและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลังไม่ได้จึงทำให้หา $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ได้ไม่ถูกต้อง เช่น ในการหา $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เมื่อกำหนดให้ $a_n = \frac{2^n+3}{7^n+1}$ เป็นต้น 2. ไม่เข้าใจทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ จึงทำให้หาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ได้ไม่ถูกต้อง เช่น ในการหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(2n+2)(2n+1)}{n+5}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)}{\left(7+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{3}{2^n}\right)}$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	34 (97.14)	26 (76.47)	8 (23.53)

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	เป็นต้น 3. ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการทดสอบด้วยอัตราส่วน หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ เช่น หา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{7}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 1 แต่สรุปว่าเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า หรือหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{7}{2}$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 1 แต่สรุปว่าเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า 4. ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริง e มาใช้ในการสรุปการลู่เข้าของอนุกรม คือ หา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ แต่สรุปว่าอนุกรมที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเข้าใจว่า $e < 1$			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–
6. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของการเปรียบเทียบลิมิตมาใช้ในการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เนื่องจาก	35 (100)	29 (82.86)	6 (17.14)

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	1. ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการเปรียบเทียบลิมิต หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ รวมทั้งไม่สามารถพิจารณาหาอนุกรมที่จะนำมาเปรียบเทียบลิมิตกับอนุกรมที่กำหนดให้ได้ หรือหาได้ไม่ถูกต้อง ยกตัวอย่างเช่น กำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n5^n}$ โดยอนุกรมที่นิสิตนำมาเปรียบเทียบลิมิต คือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ แทนที่จะเป็นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ หรือเมื่อกำหนดอนุกรม$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2-1}{\left(n^2-5\right)(3n+2)}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{lnn})^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ ให้ นิสิตไม่สามารถหาอนุกรมที่จะนำมาเปรียบเทียบลิมิตได้ หรือหาได้ไม่ถูกต้อง จากตัวอย่างดังกล่าว จึงทำให้การสรุปผลจากการหาค่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ไม่ถูกต้อง - ไม่เข้าใจทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ จึงทำให้หาค่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ได้ไม่ถูกต้อง - ไม่เข้าใจการใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล (L’Hôpital’s Rule) ในการหาค่า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ เช่น ในกรณีที่ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\ln n\right)^2}{n}$ ซึ่งต้องอาศัยการใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล			

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	(L'Hôpital's Rule) หาอนุพันธ์ของตัวเศษและตัวส่วน แต่นิสิตไม่สามารถใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล (L'Hôpital's Rule) ได้ จึงสรุปว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–
7. การทดสอบโดยราก	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่สามารถพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าโดยการทดสอบโดยราก เนื่องจาก 1. ไม่เข้าใจบทนิยามและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลัง หรือจำบทนิยามและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลังไม่ได้ จึงทำให้หา $\sqrt[n]{a_n}$ ได้ไม่ถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดให้ $a_n = \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ นิสิตจะหา $\sqrt[n]{a_n}$ ไม่ได้หรือหาได้ไม่ถูกต้อง	30 (85.71)	28 (93.33)	2 (6.67)

ตาราง 4 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 3	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	2. ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการทดสอบโดยราก หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ จึงทำให้สรุปผลที่ได้จากการหา $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ไม่ถูกต้อง ยกตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$ แต่บอกว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า หรือ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ แต่บอกว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า เป็นต้น			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–

ตาราง 5 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน ของหน่วยการเรียนที่ 4 เรื่องอนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 4	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่เข้าใจบทนิยามของอนุกรมสลับหรือจำบทนิยามไม่ได้ จึงไม่สามารถระบุ a_n ของอนุกรมสลับที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง เช่น เมื่อกำหนดอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ นิสิตจะระบุ $a_n=\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ แทนที่จะระบุว่า $a_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ - ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับ นิสิตโดยส่วนใหญ่จะจำทฤษฎีบทของการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับไม่ได้ โดยที่นิสิตจะพิจารณาเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อของทฤษฎีบทไม่ครบ เช่น ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับ เมื่อกำหนดอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ นิสิตเพียงแต่แสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$ โดยไม่ได้แสดงว่า 1) $a_n > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ 2) จะมีจำนวนเต็มบวก k สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > k$ $a_n > a_{n+1}$ - ไม่เข้าใจหรือจำบทนิยามของการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขไม่ได้	35 (100)	26 (74.29)	9 (25.71)

ตาราง 5 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 4	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	จึงทำให้การสรุปผลผิดพลาด เช่น ในกรณีของการพิจารณาการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข เมื่อกำหนดอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ให้ นิสิตเพียงแต่แสดงการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับเท่านั้น ซึ่งอนุกรมสลับนี้ลู่เข้า จึงสรุปว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ซึ่งไม่ถูกต้อง เพราะถ้าพิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า ดังนั้นการสรุปผลที่ถูกต้องคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข 2. ไม่สามารถนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ จากหน่วยการเรียนที่ 3 เช่น การทดสอบด้วยอัตราส่วน การทดสอบอนุกรมพี การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ มาพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$ เช่น ในการพิจารณาการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์หรือการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+2)!}{n!10^{n}}$			

ตาราง 5 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 4	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	จำเป็นต้องอาศัยทฤษฎีบทการทดสอบด้วยอัตราส่วน หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ จำเป็น ต้องอาศัยทฤษฎีบทของอนุกรมพี หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}}{n+5^{n}}$ จำเป็นต้องอาศัยทฤษฎีบทของการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–

ตาราง 6 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน ของหน่วยการเรียนที่ 5 เรื่องอนุกรมยกกำลัง

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 5	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - ไม่เข้าใจหรือจำทฤษฎีบทหรือจำขั้นตอนการทดสอบด้วยอัตราส่วนและการทดสอบการลู่เข้าสัมบูรณ์ (Absolute Convergence Test) ไม่ได้ จึงทำให้ไม่สามารถคำนวณหา $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\|$ ได้ และไม่สามารถพิจารณาได้ว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ลู่เข้าในช่วงใด - ไม่เข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของเลขยกกำลังหรือจำสมบัติไม่ได้ จึงทำให้หา $\left\|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\|$ ได้ไม่ถูกต้อง - ไม่เข้าใจหรือจำทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตไม่ได้หรือไม่ถูกต้อง จึงทำให้หา $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\|$ ได้ไม่ถูกต้อง เช่น $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}\right\|$ ซึ่งนิสิตตอบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\| = \infty$ หรือ	35 (100)	25 (71.43)	10 (28.57)

ตาราง 6 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 5	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\|$ $=\left\|x+3\right\|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+2)(2n+1)}{n+1}$ ซึ่งนิสิตตอบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right\|=\left\|x+3\right\|$ เพราะเข้าใจว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n+2)(2n+1)}{n+1}=1$ เป็นต้น - ขาดทักษะความรู้ในเรื่องอสมการของค่าสัมบูรณ์ เช่น ทราบว่าอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้า เมื่อ $\left\|x+3\right\|<1$ แต่กลับบอกว่า $2<x<4$ จึงทำให้หาช่วงการลู่เข้าของอนุกรมผิดพลาด - ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมไม่ครบขั้นตอน คือ ไม่ได้ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่จุดปลายทั้งสองข้าง หรือทดสอบที่จุดปลายจุดใดจุดหนึ่ง แล้วสรุปช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม เช่น ทราบว่าอนุกรมนี้ลู่เข้า เมื่อ $-4<x<-2$ แต่ไม่ได้ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่จุดปลายทั้งสองข้าง คือ ไม่ได้พิจารณาอนุกรมเมื่อ $x=-4$ และ $x=-2$ หรือพิจารณาเพียงค่าใดค่าหนึ่ง - ไม่เข้าใจทฤษฎีบทของการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในหน่วยการเรียนที่ 3 และ 4			

ตาราง 6 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 5	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	หรือจำทฤษฎีบทไม่ได้ เช่น บอกไม่ได้หรือบอกได้ไม่ถูกต้องว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ไม่ลู่เข้า หรือ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ลู่เข้า (ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข) จึงทำให้พิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมที่จุดปลายไม่ถูกต้อง			
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ	–	–	–
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์	–	–	–
2. การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร**	–	–	–
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - ขาดทักษะในการคิดคำนวณในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{4+x}$ - ขาดทักษะในการคิดคำนวณในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $g(x)=\frac{1}{4+x}$	35 (100)	10 (28.57)	25 (71.43)

ตาราง 6 (ต่อ)

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 5	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์ - ขาดทักษะในการนำฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดให้มาประยุกต์ โดยไม่สามารถเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปของ $\frac{1}{1-\square}$ ได้ นั่นคือ ทำให้ไม่สามารถเขียน $f(x)$ ให้อยู่ในรูปของอนุกรมยกกำลัง (โดยใช้การแทนค่าตัวแปร) ได้ เช่น เมื่อกำหนด $f(x)=\frac{x}{x-2}$ หรือ $f(x)=\frac{1}{4+x}$ เป็นต้น - ขาดทักษะในการนำความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการหาอนุกรมยกกำลังที่กำหนดให้ เช่น เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{(4+x)^2}$ นิสิตส่วนใหญ่มองไม่ออกว่าจะต้องใช้การหาอนุพันธ์มาช่วยในการหาอนุกรมยกกำลังของฟังก์ชันดังกล่าว คือ มองไม่ออกว่าจะต้องหาอนุพันธ์ของ $\frac{1}{4+x}$ ซึ่ง $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4+x}\right)=-\frac{1}{(4+x)^2}$ และใช้ผลที่ได้นี้ในการหาอนุกรมยกกำลังของ $f(x)$ ต่อไป - ขาดทักษะในการนำความรู้ในเรื่องการหาปริพันธ์มาประยุกต์ใช้ในการหาอนุกรมยกกำลังที่กำหนดให้ เช่น เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $g(x)=\ln(4+x)$ นิสิตไม่สามารถใช้การหา	34 (97.14)	15 (44.12)	19 (55.88)

ตาราง 6 (ต่อ)

<table>
<tr><td rowspan="2">หน่วยการเรียนย่อยที่</td><td rowspan="2">ลักษณะข้อบกพร่อง
ของหน่วยการเรียนที่ 5</td><td rowspan="2">จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง</td><td colspan="2">จำนวนนิสิต
(ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)</td></tr>
<tr><td>แก้ไขข้อบกพร่องได้</td><td>แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้</td></tr>
<tr><td></td><td>ปริพันธ์มาช่วยในการหาอนุกรมยกกำลังของฟังก์ชันดังกล่าว คือ มองไม่ออกว่าจะต้องหาปริพันธ์ของ $\frac{1}{4+x}$ นั่นคือไม่ทราบว่า $\int \frac{1}{4+x}\, d(4+x) = \ln(4+x) + C$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

ตาราง 7 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน ของหน่วยการเรียนที่ 6 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 6	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	**1. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร** - จำบทนิยามของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินไม่ได้ หรือจำได้ไม่ถูกต้อง จึงทำให้หาอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ได้ หรือไม่ถูกต้อง	27 (77.14)	24 (88.89)	3 (11.11)
	2. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ - ขาดทักษะในการคิดคำนวณในการหาอนุพันธ์อันดับต่างๆ ของฟังก์ชัน เช่น $e^{-x}, \frac{1}{x}, \ln(1+x)$ และ $\sin 2x$ เป็นต้น - ขาดทักษะในการคิดคำนวณในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\frac{\tan^{-1}x}{x}$ เมื่อทราบว่า $\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots$ -เขียนฟังก์ชันที่กำหนดให้ในรูปสัญกรณ์ซิกมาไม่ถูกต้อง เช่น เขียนไม่ได้ว่า $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e(x+1)^n}{n!}$ ซึ่งเป็น	34 (97.14)	20 (58.82)	14 (41.18)

ตาราง 7 (ต่อ)

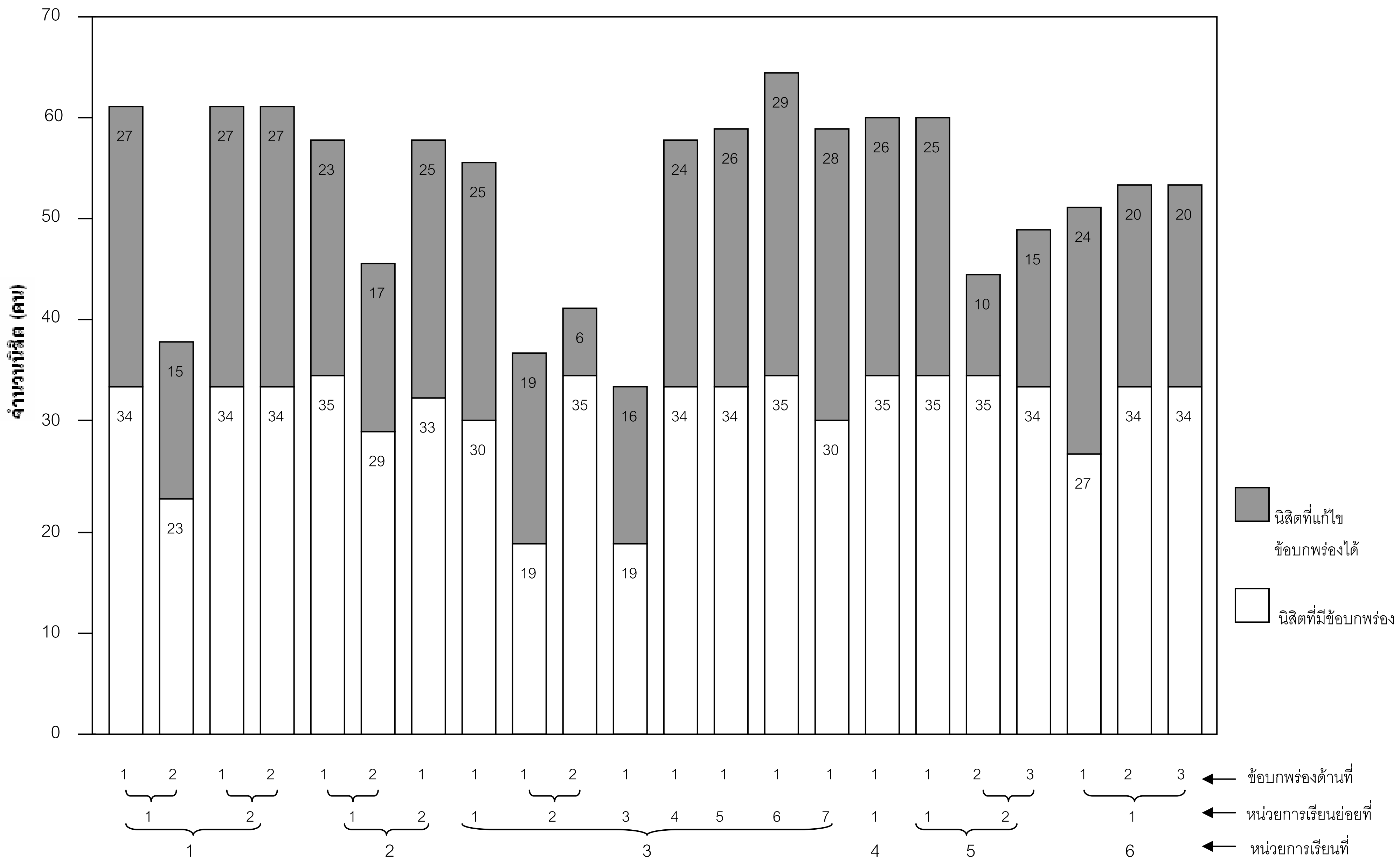
หน่วยการเรียนย่อยที่	ลักษณะข้อบกพร่องของหน่วยการเรียนที่ 6	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิตที่มีข้อบกพร่อง)	
			แก้ไขข้อบกพร่องได้	แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้
	อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x)=e^{-x}$ ที่ $x=-1$ หรือ $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ ซึ่งเป็นอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\ln(1+x)$ ทำให้การหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้ไม่ถูกต้อง - ความผิดพลาดในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนต่างๆ			
	3. ลักษณะข้อบกพร่องในด้านการประยุกต์ - ขาดทักษะในการนำความรู้ในเรื่องการแทนค่า การบวก ลบ คูณ และหาร มาประยุกต์ใช้ในการหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่างๆ ที่กำหนดให้ เช่น ในการหาอนุกรมแมคลอรินของ $x\sin 3x, \cosh(2x), \frac{\tan^{-1}x}{x}$ เป็นต้น	34 (97.14)	20 (58.82)	14 (41.18)

ตาราง 8 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำแนกตามลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

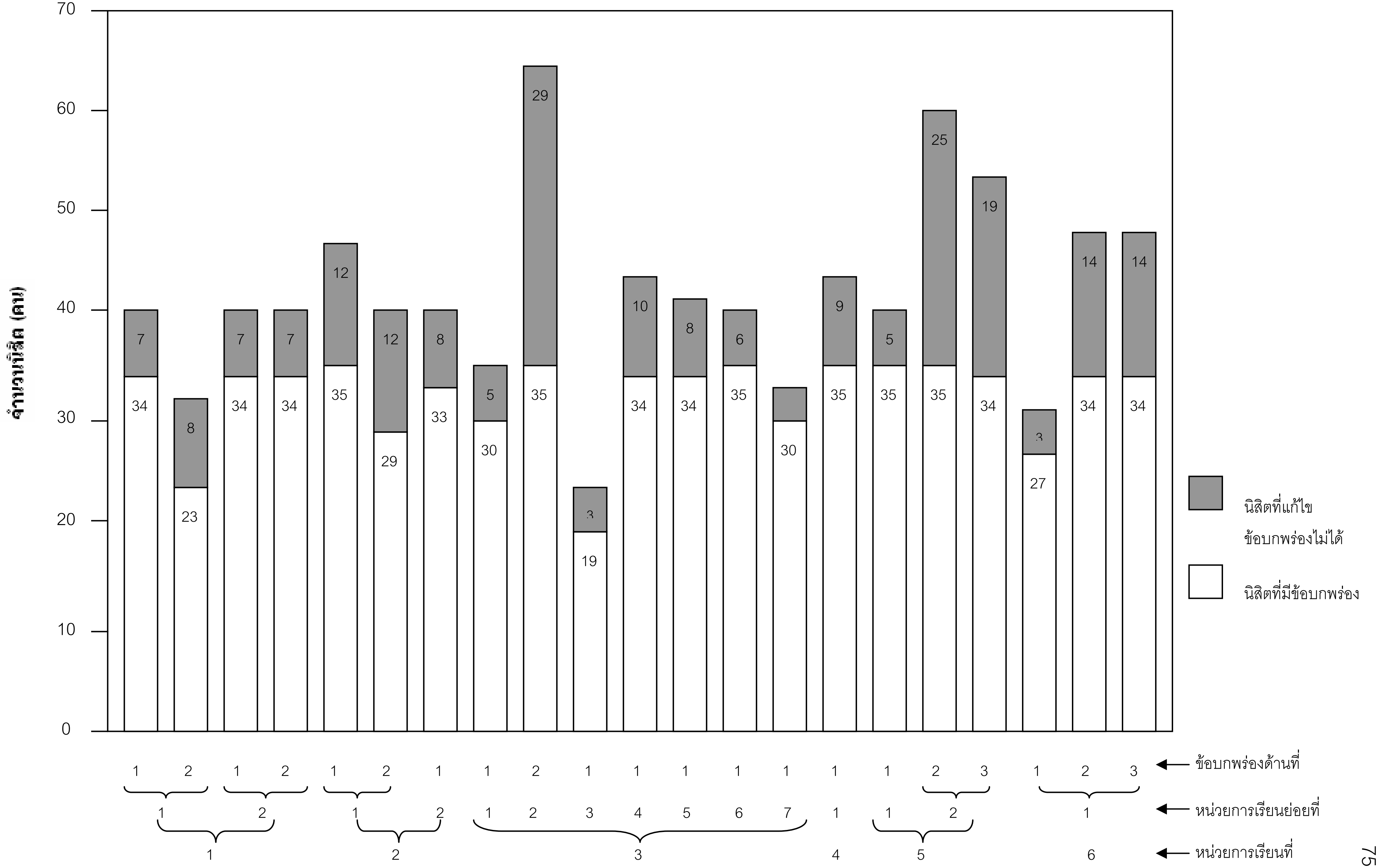
ลักษณะข้อบกพร่อง	หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้
1. ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร	1. ลำดับของจำนวนจริง	1. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ	34 (97.14)	27 (79.41)
		2. การหาลิมิตของลำดับ	34 (97.14)	27 (79.41)
	2. อนุกรมอนันต์	1. การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์	35 (100)	23 (65.71)
		2. อนุกรมเรขาคณิต	33 (94.29)	25 (75.76)
	3. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์	1. การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า	30 (85.71)	25 (83.33)
		2. การทดสอบด้วยปริพันธ์	19 (54.29)	19 (100)
		3. อนุกรมพี	19 (54.29)	16 (84.21)
		4. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ	34 (97.14)	24 (70.59)
		5. การทดสอบด้วยอัตราส่วน	34 (97.14)	26 (76.47)
		6. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต	35 (100)	29 (82.86)
		7. การทดสอบโดยราก	30 (85.71)	28 (93.33)
	4. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	1. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	35 (100)	26 (74.29)
	5. อนุกรมยกกำลัง	1. การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง	35 (100)	25 (71.43)
	6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	27 (77.14)	24 (88.89)
2. ด้านทักษะการคิดคำนวณ	1. ลำดับของจำนวนจริง	1. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ	23 (65.71)	15 (65.22)
		2. การหาลิมิตของลำดับ	34 (97.14)	27 (79.41)
	2. อนุกรมอนันต์	1. การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์	29 (82.86)	17 (58.62)

ตาราง 8 (ต่อ)

ลักษณะข้อบกพร่อง	หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต 35 คน) ที่มีข้อบกพร่อง	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้
2. ด้านทักษะการคิดคำนวณ	3. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์	2. การทดสอบด้วยปริพันธ์	35 (100)	6 (17.14)
	5. อนุกรมยกกำลัง	2. การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง	35 (100)	10 (28.57)
	6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	34 (97.14)	20 (58.82)
3. ด้านการประยุกต์	5. อนุกรมยกกำลัง	2. การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง	34 (97.14)	15 (44.12)
	6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	34 (97.14)	20 (58.82)



ภาพประกอบ 7 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้



ภาพประกอบ 8 แผนภูมิแท่งแสดงจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนไม่ได้

จากตาราง 2 ถึงตาราง 8 (ดูภาพประกอบ 7 และภาพประกอบ 8) พบว่านิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 35 คน มีข้อบกพร่องเกี่ยวกับเรื่องอนุกรมอนันต์ ดังนี้

1. หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง

1.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ นิสิตมีข้อบกพร่อง

1.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

1.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 23 คน คิดเป็นร้อยละ 65.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 15 คน คิดเป็นร้อยละ 65.22 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 34.78

1.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับ นิสิตมีข้อบกพร่อง

1.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

1.2.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

2. หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์

2.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ นิสิตมีข้อบกพร่อง

2.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 23 คน คิดเป็นร้อยละ 65.71 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 12 คน คิดเป็นร้อยละ 34.29

2.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 17 คน คิดเป็นร้อยละ 58.62 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 12 คน คิดเป็นร้อยละ 41.38

2.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมเรขาคณิต นิสิตมีข้อบกพร่อง

2.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 33 คน คิดเป็นร้อยละ 94.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 75.76 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 24.24

3. หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

3.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 30 คน คิดเป็นร้อยละ 85.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 83.33 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 5 คน คิดเป็นร้อยละ 16.67

3.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 19 คน คิดเป็นร้อยละ 54.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 19 คน คิดเป็นร้อยละ 100

3.2.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 6 คน คิดเป็นร้อยละ 17.14 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86

3.3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.3.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 19 คน คิดเป็นร้อยละ 54.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 16 คน คิดเป็นร้อยละ 84.21 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 3 คน คิดเป็นร้อยละ 15.79

3.4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.4.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 24 คน คิดเป็นร้อยละ 70.59 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 19.41

3.5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วน นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.5.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 26 คน คิดเป็นร้อยละ 76.47 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 23.53

3.6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.6.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 6 คน คิดเป็นร้อยละ 17.14

3.7 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยราก นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.7.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 30 คน คิดเป็นร้อยละ 85.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 28 คน คิดเป็นร้อยละ 93.33 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67

4. หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

4.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข นิสิตมีข้อบกพร่อง

4.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 26 คน คิดเป็นร้อยละ 74.29 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 9 คน คิดเป็นร้อยละ 25.71

5. หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง

5.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง นิสิตมีข้อบกพร่อง

5.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 71.43 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 28.57

5.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง นิสิตมีข้อบกพร่อง

5.2.1 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 28.57 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 71.43

5.2.2 ด้านที่ 3 การประยุกต์ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 15 คน คิดเป็นร้อยละ 44.12 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 19 คน คิดเป็นร้อยละ 55.88

6. หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

6.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน นิสิตมีข้อบกพร่อง

6.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 27 คน คิดเป็นร้อยละ 77.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 24 คน คิดเป็นร้อยละ 88.89 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 3 คน คิดเป็นร้อยละ 11.11

6.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 20 คน คิดเป็นร้อยละ 58.82 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 14 คน คิดเป็นร้อยละ 41.18

6.1.3 ด้านที่ 3 การประยุกต์ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 20 คน คิดเป็นร้อยละ 58.82 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 14 คน คิดเป็นร้อยละ41.18

ตาราง 9 จำนวนนิสิต (คน) และร้อยละของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนย่อย จำแนกตามจำนวนครั้งของการทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนาน

หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ จากการทำแบบทดสอบคู่ขนาน ครั้งที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ จากการทำแบบทดสอบคู่ขนาน ครั้งที่ 2
1. ลำดับของจำนวนจริง	1. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ	34	9 (26.47)	17 (50.00)
	2. การหาลิมิตของลำดับ	34	1 (2.94)	24 (70.59)
2. อนุกรมอนันต์	1. การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์	35	2 (5.71)	20 (57.14)
	2. อนุกรมเรขาคณิต	33	4 (12.12)	21 (63.64)
3. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์	1. การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า	30	11 (36.67)	14 (46.67)
	2. การทดสอบด้วยปริพันธ์	35	3 (8.57)	3 (8.57)
	3. อนุกรมพี	19	9 (47.37)	7 (36.84)
	4. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ	34	4 (11.76)	20 (58.82)
	5. การทดสอบด้วยอัตราส่วน	34	10 (29.41)	16 (47.06)
	6. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต	35	5 (14.29)	24 (68.57)
	7. การทดสอบโดยราก	30	13 (43.33)	15 (50.00)
4. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	1. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	35	10 (28.57)	16 (45.71)
5. อนุกรมยกกำลัง	1. การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง	35	11 (31.43)	14 (40.00)

ตาราง 9 (ต่อ)

หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 1	จำนวนนิสิต (ร้อยละของนิสิต) ที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 2
5. อนุกรมยกกำลัง	2. การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง	35	0 (0)	0 (0)
6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	34	9 (26.47)	12 (35.29)

จากตาราง 9 พบว่า ภายหลังการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ สรุปการแก้ไขข้อบกพร่องโดยพิจารณาตามจำนวนครั้งที่นิสิตทำแบบทดสอบคู่ขนานได้ดังนี้

1. หน่วยการเรียนย่อยที่มีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 1 เป็นจำนวนมากที่สุด คือ หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 (อนุกรมพี) ของหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) โดยมีนิสิตดังกล่าวจำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 47.37

2. หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 1 คือ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง) ของหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง)

3. หน่วยการเรียนย่อยที่มีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 2 เป็นจำนวนมากที่สุด คือ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การหาลิมิตของลำดับ) ของหน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) โดยมีนิสิตดังกล่าวจำนวน 24 คน คิดเป็นร้อยละ 70.59

4. หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้จากการทำแบบทดสอบคู่ขนานครั้งที่ 2 คือ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง) ของหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง)

<u>ส่วนที่ 2</u> ผลการหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

<u>ตอนที่ 1</u> ทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย)

ทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยใช้เกณฑ์ 60/60 โดยที่ 60 ตัวแรก หมายถึง ถ้านิสิตได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของทุกหน่วยการเรียนอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ได้ และ 60 ตัวหลัง หมายถึง ถ้ามีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด แสดงว่าชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีประสิทธิภาพ ผลการทดสอบแสดงดังตาราง 10

ตาราง 10 ค่าสถิติทดสอบ Z ของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ ภายหลังการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

จำนวนนิสิตทั้งหมด (คน)	จำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้	ค่าสถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต	ค่าพี
35	26	74.29	1.69 *	1.645	0.0455

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

จากตาราง 10 พบว่า นิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ มีสัดส่วนมากกว่าร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีประสิทธิภาพ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

<u>ตอนที่ 2</u> ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์โดยใช้เกณฑ์ 60/60 โดยที่ 60 ตัวแรก หมายถึง ถ้านิสิตได้

คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนใดอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของหน่วยการเรียนนั้นได้ และ 60 ตัวหลังหมายถึง ถ้ามีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมดแสดงว่าหน่วยการเรียนนั้นมีประสิทธิภาพ ผลการทดสอบแสดงดังตาราง 11

ตาราง 11 ค่าสถิติทดสอบ Z ของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ ภายหลังการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียน

หน่วยการเรียน	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้	ค่าสถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต	ค่าพี	ประสิทธิภาพ
1. ลำดับของจำนวนจริง	35	27	77.14	2.05 *	1.645	0.0202	มี
2. อนุกรมอนันต์	35	24	68.57	1.09	1.645	0.1379	ไม่มี
3. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์	35	26	74.29	1.69 *	1.645	0.0455	มี
4. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	35	26	74.29	1.69 *	1.645	0.0455	มี
5. อนุกรมยกกำลัง	35	8	22.86	-4.47 **	-2.326	น้อยกว่า 0.00003	ไม่มี
6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	34	21	61.76	0.24	1.645	0.4052	ไม่มี

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 11 แบ่งผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 กลุ่มดังนี้

กลุ่ม 1 หน่วยการเรียนที่มีประสิทธิภาพ

ด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) หน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) และหน่วยการเรียนที่ 4 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

กลุ่ม 2 หน่วยการเรียนที่ไม่มีมีประสิทธิภาพ

1. ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ได้ว่า หน่วยการเรียนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) และหน่วยการเรียนที่ 6 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน)
2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง)

<u>ตอนที่ 3</u> ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์โดยใช้เกณฑ์ 60/60 โดยที่ 60 ตัวแรก หมายถึง ถ้านิสิตได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนย่อยใดอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงว่านิสิตแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของหน่วยการเรียนย่อยนั้นได้ และ 60 ตัวหลังหมายถึง ถ้ามีนิสิตซึ่งแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมดแสดงว่าหน่วยการเรียนย่อยนั้นมีประสิทธิภาพ ผลการทดสอบแสดงดังตาราง 12

ตาราง 12 ค่าสถิติทดสอบ Z ของจำนวนนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ ภายหลังการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนย่อย

หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้	ค่าสถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต	ค่าพี	ประสิทธิภาพ
1. ลำดับของจำนวนจริง	1. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ	34	26	76.47	1.90 *	1.645	0.0287	มี
	2. การหาลิมิตของลำดับ	34	25	73.53	1.67 *	1.645	0.0475	มี

ตาราง 12 (ต่อ)

หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้	ค่าสถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต	ค่าพี	ประสิทธิภาพ
2. อนุกรมอนันต์	1. การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์	35	22	62.86	0.36	1.645	0.3594	ไม่มี
	2. อนุกรมเรขาคณิต	33	25	75.76	1.88 *	1.645	0.0301	มี
3. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์	1. การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า	30	25	83.33	2.57 **	2.326	0.0051	มี
	2. การทดสอบด้วยปริพันธ์	35	6	17.14	-5.19 **	-2.326	น้อยกว่า 0.00003	ไม่มี
	3. อนุกรมพี	19	16	84.21	2.14 *	1.645	0.0162	มี
	4. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ	34	24	70.59	1.31	1.645	0.0951	ไม่มี
	5. การทดสอบด้วยอัตราส่วน	34	26	76.47	1.90 *	1.645	0.0287	มี
	6. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต	35	29	82.86	2.78 **	2.326	0.0027	มี
	7. การทดสอบโดยราก	30	28	93.33	3.69 **	2.326	0.0001	มี
4. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	1. อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข	35	26	74.29	1.69 *	1.645	0.0455	มี

ตาราง 12 (ต่อ)

หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่	จำนวนนิสิตที่มีข้อบกพร่อง (คน)	จำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้ (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องได้	ค่าสถิติทดสอบ Z	ค่าวิกฤต	ค่าพี	ประสิทธิภาพ
5. อนุกรมยกกำลัง	1. การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง	35	25	71.43	1.33	1.645	0.0918	ไม่มี
	2. การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง	35	0	0	-7.24 **	-2.326	น้อยกว่า 0.00003	ไม่มี
6. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	1. อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน	34	21	61.76	0.24	1.645	0.4052	ไม่มี

* มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .01

จากตาราง 12 แบ่งผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 กลุ่มดังนี้

กลุ่ม 1 หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ

1. ด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพมีดังนี้

1.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ) และหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การหาลิมิตของลำดับ)

1.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (อนุกรมเรขาคณิต)

1.3 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 (อนุกรมพี) และหน่วยการเรียนที่ 5 (การทดสอบด้วยอัตราส่วน)

1.4 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 4 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (อนุกรมสลับการลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพมีดังนี้

2.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า) หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 (การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต) และหน่วยการเรียนย่อยที่ 7 (การทดสอบโดยราก)

กลุ่ม 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ

1. ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ได้ว่า หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

1.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์)

1.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 (การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ)

1.3 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง)

1.4 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 6 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน)

2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

2.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การทดสอบด้วยปริพันธ์)

2.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง)

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
2. เพื่อสร้างชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
3. เพื่อหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

สมมติฐานของการวิจัย

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีประสิทธิภาพ

วิธีดำเนินการทดลอง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ซึ่งผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยกลุ่มตัวอย่างมีจำนวนดังต่อไปนี้

1. หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง ประกอบด้วย
    1.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ จำนวน 34 คน
    1.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับ จำนวน 34 คน
2. หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย
    2.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ จำนวน 35 คน
    2.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมเรขาคณิต จำนวน 33 คน
3. หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย
    3.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า จำนวน 30 คน

3.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ จำนวน 35 คน

3.3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี จำนวน 19 คน

3.4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ จำนวน 34 คน

3.5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วนจำนวน 34 คน

3.6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต จำนวน 35 คน

3.7 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยราก จำนวน 30 คน

4. หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

4.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข จำนวน 35 คน

5. หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง ประกอบด้วย

5.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้า และรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง จำนวน 35 คน

5.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง จำนวน 35 คน

6. หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

6.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน จำนวน 34 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาและข้อบกพร่องทางการเรียน ประกอบด้วย

1.1 เครื่องมือคัดเลือกเนื้อหาในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

1.2 เครื่องมือคัดเลือกลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2. เครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบวินิจฉัย)

3. ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

4. เครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน)

5. แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

วิธีดำเนินการ

1. ผู้วิจัยนำเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน (แบบทดสอบวินิจฉัย) เรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียน ที่ผ่านการปรับปรุงภายหลังทดลองกับกลุ่มนำร่องแล้ว

ไปคัดเลือกนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ที่เรียนวิชาแคลคูลัส 2 เรื่องอนุกรมอนันต์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 จำนวน 35 คน ภายหลังเรียนเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียนจากอาจารย์ประจำวิชาเสร็จสิ้นแล้ว โดยนิสิตที่ผ่านการคัดเลือกจะเป็นกลุ่มตัวอย่าง

2. นำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง ภายหลังการทดลองนำผลที่ได้ไปทดสอบสมมุติฐานของการวิจัย พร้อมทั้งวิเคราะห์หาจำนวนนิสิตที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องแต่ละด้าน เพื่อใช้ประกอบการอภิปรายผลของการทดลอง

3. วิเคราะห์ผลการทดลอง

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 มีการศึกษา 3 ขั้นดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> คัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ด้วยแบบทดสอบวินิจฉัย

<u>ขั้นที่ 2</u> นำนิสิตที่ผ่านการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยมาแก้ไขข้อบกพร่องโดยใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

<u>ขั้นที่ 3</u> หาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์โดยใช้แบบทดสอบคู่ขนาน

ผู้วิจัยเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล แบ่งเป็น 2 ส่วนดังนี้

<u>ส่วนที่ 1</u> ผลการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

<u>ส่วนที่ 2</u> ผลการหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย 3 ตอนคือ

<u>ตอนที่ 1</u> ทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย)

<u>ตอนที่ 2</u> ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

<u>ตอนที่ 3</u> ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ปรากฏผลดังนี้

ส่วนที่ 1 ผลการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยใช้คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียน และคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบคู่ขนานเรื่องอนุกรมอนันต์ ในแต่ละหน่วยการเรียน ซึ่งมีจำนวน 6 หน่วย ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อยทั้งหมด 15 หน่วย ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 35 คน ผลปรากฏว่า

1. หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง

1.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ นิสิตมีข้อบกพร่อง

1.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

1.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 23 คน คิดเป็นร้อยละ 65.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 15 คน คิดเป็นร้อยละ 65.22 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 34.78

1.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับ นิสิตมีข้อบกพร่อง

1.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

1.2.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 27 คน คิดเป็นร้อยละ 79.41 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 7 คน คิดเป็นร้อยละ 20.59

2. หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์

2.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ นิสิตมีข้อบกพร่อง

2.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 23 คน คิดเป็นร้อยละ 65.71 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 12 คน คิดเป็นร้อยละ 34.29

2.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 17 คน คิดเป็นร้อยละ 58.62 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 12 คน คิดเป็นร้อยละ 41.38

2.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมเรขาคณิต นิสิตมีข้อบกพร่อง

2.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 33 คน คิดเป็นร้อยละ 94.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 75.76 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 24.24

3. หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

3.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 30 คน คิดเป็นร้อยละ 85.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 83.33 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 5 คน คิดเป็นร้อยละ 16.67

3.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.2.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 19 คน คิดเป็นร้อยละ 54.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 19 คน คิดเป็นร้อยละ 100

3.2.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 6 คน คิดเป็นร้อยละ 17.14 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86

3.3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.3.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 19 คน คิดเป็นร้อยละ 54.29 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 16 คน คิดเป็นร้อยละ 84.21 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 3 คน คิดเป็นร้อยละ 15.79

3.4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.4.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 24 คน คิดเป็นร้อยละ 70.59 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 19.41

3.5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วน นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.5.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 26 คน คิดเป็นร้อยละ 76.47 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 8 คน คิดเป็นร้อยละ 23.53

3.6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.6.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 29 คน คิดเป็นร้อยละ 82.86 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 6 คน คิดเป็นร้อยละ 17.14

3.7 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยราก นิสิตมีข้อบกพร่อง

3.7.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 30 คน คิดเป็นร้อยละ 85.71 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 28 คน คิดเป็นร้อยละ 93.33 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 2 คน คิดเป็นร้อยละ 6.67

4. หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

4.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข นิสิตมีข้อบกพร่อง

4.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 26 คน คิดเป็นร้อยละ 74.29 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 9 คน คิดเป็นร้อยละ 25.71

5. หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง

5.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง นิสิตมีข้อบกพร่อง

5.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 71.43 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 28.57

5.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง นิสิตมีข้อบกพร่อง

5.2.1 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 35 คน คิดเป็นร้อยละ 100 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 10 คน คิดเป็นร้อยละ 28.57 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 25 คน คิดเป็นร้อยละ 71.43

5.2.2 ด้านที่ 3 การประยุกต์ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 15 คน คิดเป็นร้อยละ 44.12 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 19 คน คิดเป็นร้อยละ 55.88

6. หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

6.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน นิสิตมีข้อบกพร่อง

6.1.1 ด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร มีนิสิตบกพร่อง 27 คน คิดเป็นร้อยละ 77.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 24 คน คิดเป็นร้อยละ 88.89 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 3 คน คิดเป็นร้อยละ 11.11

6.1.2 ด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 20 คน คิดเป็นร้อยละ 58.82 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 14 คน คิดเป็นร้อยละ 41.18

6.1.3 ด้านที่ 3 การประยุกต์ มีนิสิตบกพร่อง 34 คน คิดเป็นร้อยละ 97.14 แก้ไขข้อบกพร่องได้ 20 คน คิดเป็นร้อยละ 58.82 แก้ไขข้อบกพร่องไม่ได้ 14 คน คิดเป็นร้อยละ 41.18

ส่วนที่ 2 ผลการหาประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย 3 ตอนคือ

ตอนที่ 1 ทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย) พบว่านิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนได้ มีสัดส่วนมากกว่าร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่าชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์มีประสิทธิภาพ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

ตอนที่ 2 ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่มดังนี้

กลุ่ม 1 หน่วยการเรียนที่มีประสิทธิภาพ

ด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) หน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) และหน่วยการเรียนที่ 4 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

กลุ่ม 2 หน่วยการเรียนที่ไม่มีมีประสิทธิภาพ

1. ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ได้ว่า หน่วยการเรียนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) และหน่วยการเรียนที่ 6 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน)
2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง)

ตอนที่ 3 ทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่มดังนี้

กลุ่ม 1 หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ

1. ด้วยความเชื่อมั่น 95% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

1.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ) และหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การหาลิมิตของลำดับ)

1.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (อนุกรมเรขาคณิต)

1.3 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 (อนุกรมพี) และหน่วยการเรียนที่ 5 (การทดสอบด้วยอัตราส่วน)

1.4 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 4 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

2.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า) หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 (การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต) และหน่วยการเรียนย่อยที่ 7 (การทดสอบโดยราก)

กลุ่ม 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ

1. ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ได้ว่า หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

1.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์)

1.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 (การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ)

1.3 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง)

1.4 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 6 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน)

2. ด้วยความเชื่อมั่น 99% มีเหตุผลเพียงพอที่จะกล่าวว่า หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ มีดังนี้

2.1 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การทดสอบด้วยปริพันธ์)

2.2 สำหรับหน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง) หน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 (การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง)

อภิปรายผล

จากการศึกษาและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ พบว่า

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมีประสิทธิภาพ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจาก

1. ลักษณะเฉพาะของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากการคัดเลือกของผู้วิจัย บรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก มีคำถามให้นิสิตได้คิดและตอบ แล้วเฉลยคำตอบให้ทราบทันทีว่าถูกหรือผิด เปรียบเสมือนการเรียนกับครูผู้สอนแบบตัวต่อตัว ให้นิสิตได้เรียนรู้ไปทีละน้อยตามลำดับขั้น จากง่ายไปยากตามศักยภาพและความสามารถของแต่ละคน โดยนิสิตจะศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้ ทำให้นิสิตไม่รู้สึกว่ามีปมด้อย และมีโอกาสแก้ไขข้อบกพร่องของตนได้ทันที และนิสิตส่วนใหญ่ซึ่งมีความตั้งใจในการศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยก็สามารถทำคะแนนจากแบบทดสอบคู่ขนานได้ดี

2. ระยะเวลาที่ให้นิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยจะให้เวลาประมาณ 1 – 2 วัน ซึ่งเป็นเวลาที่เพียงพอและเหมาะสม เนื่องจากนิสิตต้องใช้เวลาในการทำความเข้าใจเนื้อหาและทำกิจกรรมของบทเรียนสำเร็จรูปในแต่ละหน่วยการเรียนย่อย เพื่อเตรียมตัวสำหรับการทำแบบทดสอบคู่ขนาน นิสิตจึงอยู่ในสภาพที่ไม่เร่งรีบเกินไป ไม่ต้องแข่งขันกับใคร ทำให้รู้สึกว่ามีความมั่นใจในตัวเองมากขึ้น อีกทั้งผู้วิจัยได้เปิดโอกาสให้กับนิสิตที่ไม่เข้าใจในเนื้อหาของหน่วยการเรียนย่อยได้ซักถามข้อสงสัยต่างๆ โดยผู้วิจัยจะอธิบายเนื้อหา หรือยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้กับนิสิตหลังจากที่นิสิตได้ศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปด้วยตนเองมาแล้ว ก่อนการทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนาน

นอกจากนี้จากการทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียน 6 หน่วย และการทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อย 15 หน่วยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ พบว่า

1. หน่วยการเรียนที่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 1 (ลำดับของจำนวนจริง) หน่วยการเรียนที่ 3 (การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์) และหน่วยการเรียนที่ 4 (อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข) เนื่องจาก หน่วยการเรียนย่อยส่วนใหญ่ของหน่วยการเรียนทั้ง 3 หน่วยมีประสิทธิภาพ โดยที่หน่วยการเรียนย่อยเกือบทุกหน่วยจะมีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับการวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องในด้านบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ซึ่งนิสิตส่วนใหญ่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะในบทเรียนสำเร็จรูปด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของแต่ละหน่วยการเรียนย่อย จะเริ่มด้วยกรอบบทนำซึ่งจะเป็นกล่าวถึงที่มาความสำคัญของบทนิยาม หรือทฤษฎีบท หรือเป็นการอธิบายบทนิยาม หรือทฤษฎีบท โดยใช้ภาษาที่ง่ายต่อการเข้าใจของนิสิต และได้แสดงตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับบทนิยาม หรือทฤษฎีบทที่กล่าวถึงทันทีหลังจากที่นิสิตได้เรียนรู้บทนิยาม หรือทฤษฎีบทไปแล้ว ในกรณีที่หน่วยการเรียนย่อยนั้นมีหลายบทนิยามหรือหลายทฤษฎีบท เพื่อให้นิสิตเข้าใจและสามารถนำบทนิยาม หรือทฤษฎีบทไปใช้ได้อย่างถูกต้องไม่สับสน และในบทเรียนสำเร็จรูปด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของแต่ละหน่วยการเรียนย่อยยังได้มีการทบทวนสมบัติ กฎ หรือสูตรต่างๆ ที่นิสิตเคยรู้มาแล้ว และจำเป็นต้องใช้ความรู้เหล่านั้นในการศึกษาหน่วยการเรียนย่อยนั้นๆ ด้วย

2. หน่วยการเรียนที่ไม่มีประสิทธิภาพ ได้แก่ หน่วยการเรียนที่ 2 (อนุกรมอนันต์) หน่วยการเรียนที่ 5 (อนุกรมยกกำลัง) และหน่วยการเรียนที่ 6 (อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน) เนื่องจากหน่วยการเรียนย่อยส่วนใหญ่ของหน่วยการเรียนทั้ง 3 หน่วยไม่มีประสิทธิภาพ โดยที่หน่วยการเรียนย่อยเกือบทุกหน่วยมีเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณและด้านการประยุกต์ ซึ่งมีนิสิตที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องได้น้อย โดยในด้านทักษะการคิดคำนวณนั้น จะเห็นได้ว่าทักษะการคิดคำนวณที่จำเป็นต้องใช้ ได้แก่ การเขียนเศษส่วนตรรกยะให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย การใช้ความรู้ในการหาอนุพันธ์และหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ค่อนข้างยากและซับซ้อน เช่น การหาอนุพันธ์อันดับต่างๆ ของฟังก์ชัน หรือการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะโดยใช้วิธีการแทนตัวแปรและใช้สูตรปริพันธ์พื้นฐาน แม้ว่านิสิตจะได้ศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับการเขียนเศษส่วนตรรกยะให้เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย การหาอนุพันธ์ และการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแล้วก็ตาม แต่ก็เป็นการศึกษาเพียงแค่ระยะเวลาสั้นๆ ซึ่งในความเป็นจริงทักษะการคิดคำนวณเหล่านี้เป็นทักษะที่ต้องได้รับการฝึกฝนอย่างต่อเนื่องและสม่ำเสมอ โดยอาศัยการทำโจทย์ในเรื่องดังกล่าวให้มาก จึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่ยากและซับซ้อนได้ และสำหรับในด้านการประยุกต์นิสิตยังขาดประสบการณ์ ขาดการฝึกฝนและขาดทักษะในการทำโจทย์เกี่ยวกับการประยุกต์ และอาจเป็นผลมาจากการที่นิสิตมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณเกี่ยวกับ การหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันจึงทำให้นิสิตทำโจทย์ประยุกต์ในหน่วยการเรียนย่อยดังกล่าวไม่ได้

ข้อเสนอแนะ

จากการวิจัยครั้งนี้ มีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 ในการเรียนคณิตศาสตร์นั้น จำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานในเรื่องที่เรียนมาแล้ว ดังนั้นการแก้ไขข้อบกพร่องเสียตั้งแต่เริ่มเรียน จะทำให้นักเรียน หรือนิสิตมีทักษะพื้นฐานที่ดี ซึ่งวิธีการหนึ่งที่ทำได้ก็คือ ใช้วิธีการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของนิสิตก่อนที่จะเรียนในเนื้อหาใหม่ ดังนั้นจึงควรมีการส่งเสริมให้ครูผู้สอนสนใจการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของนักเรียนหรือนิสิตให้มากขึ้น

1.2 เนื่องจากการใช้แบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนของนิสิต และการใช้บทเรียนสำเร็จรูปที่สามารถแก้ไขข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่องนั้นๆ มีแนวโน้มว่าจะสามารถช่วยแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของนิสิตได้ และยังเป็นการช่วยลดภาระของครูผู้สอน เพราะการศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปก็เปรียบเสมือนกับการได้เรียนกับครูผู้สอนแบบตัวต่อตัว ดังนั้นจึงควรมีการนำแบบทดสอบวินิจฉัยและบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของนิสิตมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนอย่างแพร่หลาย

1.3 ครูผู้สอนควรศึกษาลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนที่ผู้วิจัยได้วินิจฉัยไว้ โดยได้วินิจฉัยพร้อมยกตัวอย่างถึงลักษณะข้อบกพร่องของนิสิตที่ได้จากการทำแบบทดสอบวินิจฉัยไว้อย่างละเอียด เพื่อจะได้นำผลของการวินิจฉัยดังกล่าวไปปรับปรุง หรือพัฒนาการเรียนการสอนให้ดียิ่งขึ้น

1.4 จากผลการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์นั้น ผู้วิจัยสังเกตได้ว่านิสิตที่แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยไม่ได้นั้นส่วนใหญ่จะเป็นนิสิตคนเดิมๆ เสมอ ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนครูผู้สอนควรตระหนักและให้ความสนใจกับนิสิตกลุ่มนี้เป็นพิเศษ นอกจากนั้นผู้วิจัยยังได้ติดตามผลคะแนนสอบระหว่างภาคของนิสิตที่ได้รับการวินิจฉัยข้อบกพร่องและการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ซึ่งจะเห็นได้ว่านิสิตส่วนใหญ่สามารถทำคะแนนในเรื่องอนุกรมอนันต์ได้ดีกว่าคะแนนในเรื่องอื่นๆ เช่น เวกเตอร์และการเคลื่อนที่ในสามมิติ หรือฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย เป็นต้น รวมทั้งนิสิตกลุ่มนี้ยังสามารถทำคะแนนในเรื่องอนุกรมอนันต์ได้ดีกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับนิสิตกลุ่มอื่นๆ ที่เรียนวิชาแคลคูลัส 2 ด้วย

1.5 ในการนำชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ไปใช้ ครูผู้สอนต้องศึกษารายละเอียดของคู่มือการใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน โดยประกอบด้วย จุดประสงค์ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และกรอบแนวทางการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่อง

ทางการเรียน ซึ่งเป็นการนำเสนอรายละเอียดในการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อให้การดำเนินกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้

2. ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

2.1 ควรมีการศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนของนักเรียน หรือนิสิตในลักษณะเดียวกันนี้กับเนื้อหาอื่นๆ และระดับอื่นๆ

2.2 ควรมีการสร้างและพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยและชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนในลักษณะเดียวกันนี้กับเนื้อหาอื่นๆ หรือรายวิชาอื่นๆ เพื่อเป็นประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอน

2.3 ควรนำแบบทดสอบวินิจฉัย แบบทดสอบคู่ขนาน และชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับปรุงแก้ไข และนำไปทดลองซ้ำกับกลุ่มตัวอย่างอื่นๆ โดยจากการทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนย่อยของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์เห็นได้ว่าจะมีบางหน่วยการเรียนย่อยที่ไม่มีประสิทธิภาพ ซึ่งส่วนใหญ่จะมีเนื้อหาวิชาที่ค่อนข้างยากและเกี่ยวข้องกับลักษณะข้อบกพร่องในด้านทักษะการคิดคำนวณ และด้านการประยุกต์ ดังนั้นผู้ที่จะทำวิจัยในครั้งต่อไปควรให้ความสำคัญในการสร้างบทเรียนสำเร็จรูปในหน่วยการเรียนย่อยเหล่านี้ให้มาก พร้อมทั้งสำรวจเจตคติของนิสิตที่มีต่อการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยใช้ชุดบทเรียนสำเร็จรูปตามแนวทางที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

2.4 ควรมีการศึกษาเพื่อหาวิธีการในแบบอื่นๆ เช่น การจัดการเรียนการสอนแบบเป็นกลุ่มซึ่งในแต่ละกลุ่มจะมีสมาชิกที่เรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน คละกันไป เพื่อนิสิตที่มีเข้าใจจะได้อธิบายให้กับเพื่อนนิสิตที่ไม่เข้าใจ เพราะบางครั้งนิสิตที่มีข้อสงสัยอาจไม่กล้าถามครูผู้สอนโดยตรงซึ่งก็จะเป็นการช่วยเหลือนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน ตลอดทั้งส่งเสริมนิสิตที่เรียนเก่งให้เรียนดียิ่งขึ้นกว่าเดิม

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กรมวิชาการ. สำนักทดสอบทางการศึกษา. (2539). *แนวทางการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยเพื่อพัฒนาการเรียนการสอน.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

กิติยารัตน์ ภูริพัฒน์. (2545). *การพัฒนาแบบทดสอบวินิจฉัยในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การวิจัยและประเมินผลการศึกษา). อุบลราชธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี. ถ่ายเอกสาร.

กิดานันท์ มลิทอง. (2540). *เทคโนโลยีการศึกษาและนวัตกรรม.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชวนพิมพ์.

กมล เอกไทยเจริญ. (2545). *แคลคูลัส 2 และเทคนิคการใช้ Graphing Calculator.* กรุงเทพฯ: ธีรพงษ์การพิมพ์.

เจษฎา จงสืบสุข. (2542). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ระหว่างการเรียนเป็นกลุ่มโดยใช้บทเรียนโปรแกรม เอกสารแนะแนวทางและการเรียนรู้จากครู โรงเรียนสารวิทยา กรุงเทพมหานคร.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

เจือจันทร์ กัลยา. (2534). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสนใจในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนโดยใช้บทเรียนสำเร็จรูปประกอบภาพการ์ตูน.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ชม ภูมิภาค. (2521). *จิตวิทยาการเรียนการสอน.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

ชัยยงค์ พรหมวงศ์. (2532). *สื่อการสอนระดับประถมศึกษา.* พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ไชยยศ เรืองสุวรรณ. (2526). *เทคโนโลยีทางการศึกษา หลักการและแนวทางปฏิบัติ.* กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

ดวงเดือน อ่อนน่วม. (2533). *การสอนซ่อมเสริมคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ดารณี คำแหง. (2533). *การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* ปริญญานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

ถวัลย์ มาศจรัส. (2546). *นวัตกรรมการศึกษา ชุด บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ผู้เรียนและการจัดทำผลงานอาจารย์ 3 (ครูชำนาญการ ครูเชี่ยวชาญและครูเชี่ยวชาญพิเศษ).* กรุงเทพฯ: ธารอักษร.

ทศพร ทักษิมา. (2545). *การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องระบบสมการ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

นิภาพร นาอ่อน. (2545). *การศึกษาและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

โทมัส, จอร์จ. (2548). *Thomas'Calculus แคลคูลัส.* แปลโดย เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต; และคนอื่นๆ. กรุงเทพฯ: เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า.

ธีรชัย ปูรณโชติ. (2532). *การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเส้นทางสู่อาจารย์ 3.* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

__________. (2539). *การสร้างบทเรียนสำเร็จรูปเส้นทางสู่อาจารย์ 3.* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

บุญชม ศรีสะอาด. (2537). *การพัฒนาการสอน.* กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

บุญมา ยิสาร. (2528). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องลำดับและอนุกรมโดยวิธีสอนแบบ PSI.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ประยงค์ นาโค. (2527). *ผลการสอน 3 แบบ ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเป็นผู้นำ และความคงทนในการเรียนรู้ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

เปรื่อง กุมุท. (2516). *โฉมใหม่ของเทคโนโลยีกับการปฏิรูปการศึกษา.* กรุงเทพฯ: อักษรสัมพันธ์.

ไพโรจน์ เบาใจ. (2520). *คู่มือการเขียนบทเรียนโปรแกรม.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ภุชงค์ แพรขาว. (2542, มกราคม-เมษายน). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสระหว่างกลุ่มเรียนขนาดเล็ก : กรณีศึกษานักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. *วารสารวิจัยและพัฒนา มจธ.* 22(1): 47.

ยงยุทธ ธนูกฤติ; และ เอนก จันทรจรูญ. (2547). *คณิตศาสตร์ 2 MA 112 Mathematics II.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2526). *พจนานุกรมฉบับราชบัณฑิตยสถาน พ.ศ. 2525.* กรุงเทพฯ: อักษรเจริญทัศน์.

รุจิร์ ภู่สาระ. (2520). *เอกสารประกอบคำบรรยายกระบวนวิชาการวัดและการประเมินผลการศึกษา.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาการทดสอบและการวิจัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. (2543). *เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

วิกิพีเดีย สารานุกรม. (2548). *แคลคูลัส.* สืบค้นเมื่อ 1 พฤศจิกายน 2548, จาก http://th.wikipebia.org/wiki/แคลคูลัส

วิเชียร เกตุสิงห์. (2530). *หลักการสร้างและวิเคราะห์เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.* กรุงเทพฯ: ไทยวัฒนาพานิช.

วรณัน ขุนศรี. (2546, กันยายน). “การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์.” *วารสารการศึกษา กทม.* 26(12): 15-17.

วรรณรัตน์ วิบูลสุข. (2539). *การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องกำหนดการเชิงเส้น ของนักศึกษามหาวิทยาลัยหัวเฉียวเฉลิมพระเกียรติ.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การสอนคณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). *การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.* กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). *คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ศรีเมืองการพิมพ์.

สมใจ ฤทธิสนธิ. (2537). *การสร้างแบบทดสอบ.* กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต.

สมนึก ภัททิยานี. (2544). *การวัดผลทางการศึกษา.* พิมพ์ครั้งที่ 3. กาฬสินธุ์ฯ: ประสานการพิมพ์.

สมศักดิ์ ฉันทานุรักษ์. (2529). *การวินิจฉัยข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนแผนการเรียนเกษตรกรรม เขตการศึกษา 6.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ถ่ายเอกสาร.

สันทัด ภิบาลสุข. (2522). *นวัตกรรมทางการศึกษา.* กรุงเทพฯ: ภาควิชาเทคโนโลยีทางการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน.

สิริรัตน์ ชมพันธ์. (2533). *การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกลุ่มทักษะคณิตศาสตร์เรื่องบทประยุกต์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่สอนโดยใช้บทเรียนโปรแกรมกับการสอนปกติ.* ระยอง: ศูนย์วิชาการจังหวัด หน่วยศึกษานิเทศก์ สำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดระยอง.

สุกัลยา ฉายสุวรรณ. (2539). *การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องทศนิยมสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในจังหวัดราชบุรี.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (การวัดผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

สุเทพ สันติวรานนท์. (2533, สิงหาคม-มีนาคม). แบบทดสอบวินิจฉัยและแนวทางการสร้าง. *วารสารศึกษาศาสตร์.* (61): 67-74.

สุภาพ วชิรศิริ. (2544). *การสร้างและการใช้แบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์ด้านการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องการบวก ลบ คูณ และหาร โดยใช้สมการ สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. (การวัดและประเมินผลการศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยรามคำแหง. ถ่ายเอกสาร.

หรรษา นิลวิเชียร. (2524). *การผลิตบทเรียนสำเร็จรูปสไลด์เทป.* สงขลา: มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.

อุบล เล่นวารี. (2545, กรกฎาคม). “คณิตศาสตร์เพชรยอดมงกุฏ: ตัวอย่างการมีส่วนร่วมตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ.” *วารสารวิชาการ.* 5(7): 44-46.

Adams, Georgia S. and Theodore L. Torgerson. (1964). *Measurement and Evaluation in Education Psychology and Guidance.* New York: Richart and Winston.

Ahmann, S.J. and Glock, M.D. (1975). *Evaluating Pupil Growth : Principles of Tests and Measurement.* 5th ed. Boston: Allyn & Bacon.

Blando, J.A., Kelly, N.E., Schacider, B.R. and Sleeman, D. (1989, May). “Analyzing and Modeling Arithmetic Error,” *Journal for Research in Mathematics Education.* 20(3): 301-308.

Casay, L.M. (1987). *Measurement and Evaluation School Learning.* Massachusetts: Newton & Company.

Chai, C.M. and Ang, B.H. (1987, June). “Identifying the Reasons Underlying Pupils Particular Error in Simple Algebraic Expressions and Equations,” *Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematics Education (ICMI-SEAMS).*

Colgan, M.D. (1991, July). “An Anslysis of Problem – Solving Errors Made throughout a

College – level Finite Mathematics Course," *Dissertation Abstracts International.* 52(1): 91 - A.

Collagan, Robert B. (1969, September). "The Construction and Evaluation of a Programmed Course in Mathematics Necessary for Success in College Physical Science," *Dissertation Abstracts International.* 3(9): 1070 - A.

Davis, R.B. (1979). *Error Analysis in High School Mathematics.* San Francisco American Educational in Research Association.

Easterday, Kenneth and Helen Easterday. (1968, March). "Ninth – Grade Algebra Programmed Instruction and Sex Differences : An Experiment I," *The Mathematics Teacher.* 51(3): 303 - 307.

Ebel, Robert L. (1965*).* *Measuring Educational Achievement.* New Jersey: Practice – Hall, Engle Wood Cliffs.

Fine, Benjamim. (1962). *Teacher Machines.* New York: Stering Publishing Co. Inc.

Good, Carter V. ed. (1945). *Dictionary of Education.* New York: McGraw – Hill Book.

Gronlund, Norman. E. (1981). *Measurement and Evaluation in Teaching.* 4th ed. New York: Macmillan Publishing Co, Inc.

LindGuist, Everet Franklin. (1966). *Educational Measurement* . Washinggton, D.C.: American Council on Education.

Movshovitz – Hadar, N., Zaslavsky, O., and Inbar, S. (1987, January). "Analyzing and Modeling Arithmetic Errors," *Journal for Research in Mathematics Education.* 18(1): 3 -14.

Ong, S.T. and S.K. Lim. (1987, June). "Understanding and Error in Algebra". *Processing of Forth Southeast Asian Conference on Mathematical Education.* 199 – 205.

Payne, David A. (1968). *The Specification and Measurement of Learning Outcomes.* Waltkam, Mass: Blaisdell.

Rothman, J. and Jones C. Wyatt. (1971). "Education for Application of Practice Skill in Community Organization and Social Planning," in *A New Look Field Instruction.* New York: Association Press.

Ree, R.M. (1987, June). “The Use of Diagnostic Assessment in Secondary Mathematics,” *Proceedings of Forth Southeast Asian Conference on Mathematics Education (ICMI–SEAMS).* 29-34.

Riggs, Corinne Withiow. (1967, March). “The Construction Evaluation of Programmer Test on Interpretation of Graphs for Grade, *“Dissertation Abstracts International”.* 27(9): 2748 – A.

Singha, H.S. (1974). *Modern Education Teaching.* New Delhi: Sterling Publishing PVT.LTD.

Traw, William Clark. (1963). *Teacher and Technology*. New York: Meredith Publishing Company.

Webster. (1993). *Webster’s New World Dictionary of American English.* 3rd ed. New York: Prentice Hall.

White, C.C. (1970, February). The Use of Programmed Texts of Remedial Mathematics Instruction in College,” *Dissertation Abstracts International.* 30(8): 3373 - A.

Wittich, W.A. and F.C. Schuller. (1968*). Audio – Visual Materials Their Nature and Use.* Tokyo: Weatherhill.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ช่วยตรวจสอบความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบวินิจฉัย) เครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน) และตรวจสอบความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ พร้อมทั้งตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ มีดังนี้

1. อาจารย์ ดร. กรวิกา ก้องกุล

   อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

2. อาจารย์สมภพ ล่ำวัฒนพร

   อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

3. อาจารย์อลงกรณ์ แซ่ตั้ง

   อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ภาคผนวก ข
ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

ตาราง 13 ผลการประเมินเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบวินิจฉัย) สำหรับนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยผู้เชี่ยวชาญ

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 13 (ต่อ)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 4 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 13 (ต่อ)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 6 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 14 ผลการประเมินเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน) สำหรับนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยผู้เชี่ยวชาญ

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 14 (ต่อ)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	5	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 4 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 2	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 14 (ต่อ)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
หน่วยการเรียนที่ 6 ฉบับที่ 1	1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	4	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 15 ผลการประเมินชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ สำหรับนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยผู้เชี่ยวชาญ

บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่ ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
2	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
3	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 15 (ต่อ)

บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อยที่ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
		คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
3	หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
4	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
5	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 3	1	1	1	3	1	ใช้ได้
6	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2	1	1	1	3	1	ใช้ได้
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 3	1	1	1	3	1	ใช้ได้

ตาราง 16 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริงแต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.43	0.80	0.55
	2	0.21	0.37	
2	1			0.81
	1.1	0.49	0.98	
	1.2	0.47	0.67	
	1.3	0.35	0.69	
	1.4	0.21	0.42	
	1.5	0.31	0.62	
	2			
	2.1	0.29	0.58	
	2.2	0.22	0.22	
	3			
	3.1	0.42	0.83	
	3.2	0.50	0.67	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.55	0.57	0.77
	2	0.32	0.53	
2	1			0.62
	1.1	0.77	0.47	
	1.2	0.48	0.21	
	1.3	0.51	0.81	
	1.4	0.58	0.83	
	1.5	0.21	0.22	
	2			
	2.1	0.71	0.42	
	2.2	0.80	0.50	
	3			
	3.1	0.67	0.67	
	3.2	0.75	0.50	

ตาราง 17 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์แต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.80
	1.1	0.25	0.50	
	1.2	0.50	1	
	2			
	2.1	0.50	1	
	2.2	0.50	1	
	2.3	0.25	0.50	
2	1			0.65
	1.1	0.45	0.77	
	1.2	0.20	0.40	
	1.3	0.38	0.77	
	2	0.43	0.73	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.50
	1.1	0.50	0.50	
	1.2	0.48	0.96	
	2			
	2.1	0.59	0.44	
	2.2	0.44	0.32	
	2.3	0.34	0.69	
2	1			0.52
	1.1	0.80	0.40	
	1.2	0.50	1	
	1.3	0.60	0.80	
	2	0.63	0.36	

ตาราง 18 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์แต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.33	0.67	0.83
	2	0.25	0.50	
	3	0.35	0.71	
	4	0.23	0.46	
	5	0.31	0.63	
2	1	0.25	0.25	0.78
	2	0.73	0.33	
	3	0.80	0.40	
3	1	0.75	0.50	0.43
	2	0.75	0.50	
	3	0.75	0.50	
	4	0.75	0.50	
	5	0.5	1	
4	1	0.79	0.42	0.66
	2	0.79	0.42	
	3	0.77	0.46	
	4	0.36	0.72	
	5	0.33	0.67	
5	1	0.25	0.43	0.67
	2	0.38	0.25	
	3	0.37	0.20	
6	1	0.38	0.77	0.42
	2	0.24	0.48	
	3	0.28	0.56	
7	1	0.75	0.50	0.70
	2	0.50	1	
	3	0.22	0.22	
	4	0.67	0.67	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.67	0.67	0.89
	2	0.58	0.83	
	3	0.75	0.50	
	4	0.79	0.42	
	5	0.50	1	
2	1	0.68	0.47	0.57
	2	0.60	0.80	
	3	0.75	0.50	
3	1	0.50	1	0.85
	2	0.50	1	
	3	0.50	1	
	4	0.50	1	
	5	0.50	1	
4	1	0.75	0.50	0.64
	2	0.50	1	
	3	0.33	0.67	
	4	0.54	0.75	
	5	0.25	0.50	
5	1	0.35	0.46	0.64
	2	0.67	0.67	
	3	0.68	0.63	
6	1	0.42	0.83	0.86
	2	0.50	1	
	3	0.50	1	
7	1	0.69	0.38	0.76
	2	0.63	0.38	
	3	0.48	0.96	
	4	0.65	0.80	

ตาราง 19 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขแต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.65
	1.1	0.69	0.54	
	1.2	0.48	0.96	
	2			
	2.1	0.45	0.37	
	2.2	0.56	0.91	
	2.3	0.39	0.78	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.54
	1.1	0.71	0.42	
	1.2	0.39	0.44	
	2			
	2.1	0.25	0.37	
	2.2	0.52	0.70	
	2.3	0.50	1	

ตาราง 20 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลังแต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.44	0.78	0.81
	2	0.36	0.50	
	3	0.40	0.67	
2	1	0.67	0.67	0.65
	2			
	2.1	0.54	0.67	
	2.2	0.39	0.33	
	2.3	0.46	0.92	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1	0.20	0.40	0.70
	2	0.33	0.65	
	3	0.51	0.98	
2	1	0.58	0.83	0.72
	2			
	2.1	0.50	1	
	2.2	0.27	0.53	
	2.3	0.24	0.47	

ตาราง 21 ค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินแต่ละฉบับ

แบบทดสอบวินิจฉัย

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.89
	1.1	0.67	0.29	
	1.2	0.39	0.78	
	2			
	2.1	0.43	0.87	
	2.2	0.68	0.23	
	3			
	3.1	0.42	0.83	
	3.2	0.39	0.78	
	4	0.40	0.27	

แบบทดสอบคู่ขนาน

ฉบับที่	ข้อที่	p	r	ค่าความเชื่อมั่น
1	1			0.82
	1.1	0.50	1	
	1.2	0.44	0.22	
	2			
	2.1	0.25	0.50	
	2.2	0.5	1	
	3			
	3.1	0.5	1	
	3.2	0.5	1	
	4	0.5	1	

<u>หมายเหตุ</u>

1. การหาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบอัตนัย ใช้วิธีการแบ่งกลุ่มนิสิตที่เข้าสอบออกเป็นกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน โดยเทคนิค 25% ของนิสิตที่เข้าสอบทั้งหมด โดยคำนวณจากสูตรที่ D.R Whitney and D.L Sabers (1970) ได้เสนอไว้ดังนี้

(ล้วน สายยศ. 2543: 199 – 201)

$$p = \frac{S_U + S_L - 2NX_{min}}{2N\left(X_{max} - X_{min}\right)} \quad \text{และ} \quad r = \frac{S_U - S_L}{N\left(X_{max} - X_{min}\right)}$$

เมื่อ S_U หมายถึง ผลรวมของคะแนนกลุ่มเก่ง

S_L หมายถึง ผลรวมของคะแนนกลุ่มอ่อน

N หมายถึง จำนวนผู้เข้าสอบของกลุ่มเก่ง (หรือกลุ่มอ่อน)

X_{max} หมายถึง คะแนนที่นิสิตทำได้สูงสุด

X_{min} หมายถึง คะแนนที่นิสิตทำได้ต่ำสุด

2. ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบแต่ละฉบับ คำนวณโดยใช้วิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์แอลฟา (α-Coefficient) โดยมีสูตรดังนี้

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left\{1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma^2}\right\}$$

เมื่อ k หมายถึง จำนวนข้อสอบ

σ_i^2 หมายถึง คะแนนความแปรปรวนเป็นรายข้อ

σ^2 หมายถึง คะแนนความแปรปรวนของทั้งฉบับ

ตาราง 22 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน คะแนนเต็ม 20 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	10
2	3.5	20
3	0	18
4	4	16
5	0	19
6	2	20
7	0	16
8	0	12
9	0	16
10	3	18
11	2	18
12	1	18
13	0	14
14	0	16
15	7	18
16	0	15
17	2	8
18	0	10
19	1	17
20	0	9
21	0	18
22	1	15
23	2	19
24	5	17
25	11	10
26	8	18
27	0	14
28	2	9
29	0	11
30	2	13
31	1	7
32	8	15
33	1	12
34	0	12

ตาราง 23 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน คะแนนเต็ม 30 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	15
2	9.5	18
3	12.5	18
4	8	24.5
5	6	23.5
6	0.5	28.5
7	6	30
8	7.5	25
9	4.5	30
10	8.5	27
11	6	24.5
12	7	16
13	7.5	21
14	2	24.5
15	10.5	24.5
16	12.5	23.5
17	5	23
18	3.5	13.5
19	5	15
20	2.5	18.5
21	1	28
22	6	20.5
23	17	24.5
24	5.5	30
25	0	26
26	0.5	25
27	17	19
28	0	13
29	6	26
30	1	15
31	0	10
32	5	12
33	0	14
34	2	22

ตาราง 24 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	8
2	0	6
3	1	12
4	4	7
5	0	12
6	5	12
7	0	7
8	5	10
9	0	7
10	4	15
11	1	10
12	0	15
13	7	11
14	0	7.5
15	1	10
16	3	10
17	2	12.5
18	1	9
19	0	10
20	0	12
21	0	12.5
22	4	12
23	3	10
24	7	12
25	3	12
26	0	12.5
27	3	15
28	3	10
29	0	5
30	1	6
31	1	5
32	0	6
33	0	8
34	0	5.5
35	0	7

ตาราง 25 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมเรขาคณิต ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 33 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	1	7
2	1	12.5
3	1	12.5
4	1	15
5	0	10
6	0	15
7	1	10.5
8	5	12.5
9	2	15
10	1	14
11	2.5	12.5
12	3.5	15
13	0	15
14	0	15
15	2	14
16	0	15
17	3.5	7
18	0	8
19	0	12.5
20	5	15
21	3.5	12.5
22	4	15
23	4.5	15
24	3	9
25	0	15
26	3.5	7
27	1	8
28	1	10
29	2.5	8
30	0	7.5
31	1	5.5
32	0	9
33	3	10

ตาราง 26 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 30 คน คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	5
2	1	6
3	0	10
4	0	8
5	0	6
6	1	8
7	0	8
8	0	6
9	0	8
10	0	8
11	2	10
12	2	8
13	0	6
14	0	6
15	0	10
16	0	6
17	0	10
18	0	10
19	0	8
20	0	6
21	0	6
22	0	10
23	5	6
24	0	4
25	0	4
26	2	5
27	0	7
28	0	8
29	0	4
30	0	8

ตาราง 27 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	4	5
2	0	7
3	3	7
4	3	11
5	0	7
6	0	6
7	1.5	7
8	0	6
9	0	7
10	2	9
11	3	6
12	1	6
13	3	12
14	1	6
15	0	8
16	0	8
17	3	11
18	6	4
19	0	8
20	0	5
21	0	7
22	0	7
23	2	11
24	7	2
25	6	5
26	0	7
27	1	6
28	0	8
29	7	5
30	2	3
31	0	2
32	0.5	8
33	0	4
34	0.5	6
35	0	10

ตาราง 28 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 19 คน คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	2	6
2	0	10
3	0	10
4	2	6
5	0	10
6	4	10
7	0	6
8	0	10
9	0	4
10	0	10
11	0	10
12	0	10
13	0	8
14	0	6
15	5	8
16	0	5
17	0	6
18	0	5
19	2	8

ตาราง 29 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	2	8
2	0	11
3	0	12
4	6	14
5	3	11
6	3	15
7	0	14
8	3	12
9	3	12
10	7	11
11	1	11
12	1	8
13	5	14
14	0	11
15	0	15
16	4	12
17	0	14
18	2	8
19	0	5
20	0	9
21	0	14
22	0	12
23	7	9
24	1	14
25	0	14
26	1	14
27	3	6
28	0	5
29	0	13
30	4	6
31	0	9
32	1	7
33	0	7
34	4	6

ตาราง 30 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วน ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน	คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	9	23	4	9
2	0	12	24	2	9
3	3	7	25	0	15
4	4	11	26	3	9
5	4	15	27	4.5	7
6	4	9	28	0	8
7	4	12	29	6	12
8	4	12	30	0	10
9	5	12	31	0	8
10	7	12	32	0	9.5
11	6	10	33	2	8
12	3	9	34	4	8
13	5	9			
14	0	10			
15	1.5	15			
16	4	12			
17	4.5	9			
18	6	7			
19	2	7			
20	0	15			
21	6	10.5			
22	5	15			

ตาราง 31 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	6
2	0	10
3	1	10
4	0	12
5	0	9
6	1	9
7	1	12
8	0	12
9	0	12
10	0	10
11	0	6
12	1	10
13	5	9
14	0	6
15	0	10
16	0	10
17	0	10
18	0	10
19	0	10
20	1	10
21	0	15
22	3.5	10
23	3	10
24	0	15
25	0	10
26	0	15
27	2	10
28	0	5
29	0	10
30	0	10
31	0	9
32	0	8
33	0	5
34	0	10
35	0	9

ตาราง 32 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยราก ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 30 คน คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	8
2	0	7
3	1.5	7
4	1	7
5	3	7
6	4	10
7	3	9
8	4	7
9	3	9
10	4	10
11	2.5	7
12	2	10
13	2.5	6
14	3	7
15	2.5	10
16	2	6
17	3	10
18	0	5
19	0	10
20	0	7
21	0	10
22	3	7
23	2	6
24	0	7
25	0	7
26	0	6
27	0	8
28	0	4
29	0	6
30	0	10

ตาราง 33 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 20 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	10
2	0	13
3	0	15
4	0	14
5	0	12
6	0	12
7	0	12
8	0	12
9	0.5	20
10	8	20
11	0	12
12	0.5	20
13	2.5	15
14	0	7
15	0	14
16	0	20
17	0	20
18	0	8
19	0	5
20	0	16.5
21	0	17
22	0	19.5
23	0.5	17
24	0	15
25	0	14
26	0	12.5
27	0	16
28	0	10
29	0	9
30	0	13
31	0	10
32	0	12
33	0	7
34	0	7
35	5	14

ตาราง 34 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	10
2	0	13.5
3	1	9.5
4	1.5	13.5
5	0.5	8.5
6	1.5	13.5
7	0.5	9
8	3.5	12
9	0	13.5
10	3.5	9
11	0	11.5
12	0	6.5
13	3.5	14.5
14	0	5.5
15	2	13.5
16	3	12
17	3	13.5
18	0	5
19	0	7
20	0	12
21	0	12
22	0	10.5

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
23	8.5	13
24	0	12.5
25	0	14.5
26	0	11.5
27	0	14.5
28	0	8
29	0	7
30	0.5	12
31	0	8
32	0	10
33	0	10
34	0	6
35	0.5	8

ตาราง 35 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน คะแนนเต็ม 15 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	2
2	4	5
3	0	3.5
4	0	5
5	0	3.5
6	0	5
7	0	5
8	0	5
9	0	5
10	0	5
11	0	3.5
12	0	5
13	1.5	5
14	0	3.5
15	0	3.5
16	0	3.5
17	0	3.5
18	0	3
19	0	0
20	0	3.5
21	0	2
22	0	6
23	0	7
24	0	5
25	0	5
26	0	2
27	0	5
28	0	2
29	0	3
30	0	4.5
31	0	5.5
32	0	0
33	0	5
34	0	3
35	0	5

ตาราง 36 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวินิจฉัย และแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 34 คน คะแนนเต็ม 25 คะแนน

คนที่	คะแนนของแบบทดสอบวินิจฉัย	คะแนนของแบบทดสอบคู่ขนาน
1	0	10
2	0	16
3	3	8.5
4	0	18.5
5	0.5	16.5
6	1	20.5
7	1	16.5
8	4.5	18
9	0	15.5
10	0	16.5
11	0	11.5
12	12.5	23
13	0	19
14	0	16.5
15	10	16
16	2.5	21.5
17	0	12
18	0	2
19	0	11
20	0	17.5
21	0	9
22	7	21
23	0	18.5
24	0	17.5
25	0	18.5
26	0	11
27	0	12
28	0	10
29	0	15
30	0	10
31	0	9.5
32	0	15
33	0	5
34	0	16

ตาราง 37 คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบคู่ขนานจำนวน 6 หน่วยการเรียน รวมทั้งหมด 15 หน่วยการเรียนย่อย และร้อยละของคะแนนเฉลี่ยจากแบบทดสอบคู่ขนานในทุกหน่วยการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบคู่ขนาน																
	หน่วยการเรียนที่ หน่วยการเรียนย่อยที่ (คะแนนเต็ม)															คะแนนรวม (เต็ม 245 คะแนน)	คะแนนเฉลี่ยของทุกหน่วยการเรียน คิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม
	1		2		3							4	5		6		
	1 (20)	2 (30)	1 (15)	2 (15)	1 (10)	2 (15)	3 (10)	4 (15)	5 (15)	6 (15)	7 (10)	1 (20)	1 (15)	2 (15)	1 (25)		
1	10	15	8	7	5	5	6	8	9	6	8	10	10	2	10	119	48.57
2	20	18	6	12.5	6	7	10	11	12	10	7	13	13.5	5	16	167	68.16
3	18	18	12	12.5	10	7	10	12	7	10	7	15	9.5	3.5	8.5	160	65.31
4	16	24.5	7	15	8	11	6	14	11	12	7	14	13.5	5	18.5	182.5	74.49
5	19	23.5	12	10	6	7	10	11	15	9	7	12	8.5	3.5	16.5	170	69.39
6	20	28.5	12	15	8	6	ผ*	15	9	9	10	12	13.5	5	20.5	183.5	78.09
7	16	30	7	10.5	8	7	10	14	12	12	9	12	9	5	16.5	178	72.65
8	12	25	10	12.5	ผ*	6	ผ*	12	12	12	7	12	12	5	18	155.5	69.11
9	16	30	7	15	6	7	ผ*	12	12	12	9	20	13.5	5	15.5	180	76.60
10	18	27	15	ผ*	8	9	ผ*	11	12	10	10	20	9	5	ผ*	154	78.97
11	18	24.5	10	14	8	6	6	11	10	6	7	12	11.5	3.5	16.5	164	66.94
12	18	16	15	12.5	10	6	ผ*	8	9	10	10	20	6.5	5	11.5	157.5	67.02
13	ผ*	21	11	15	8	12	ผ*	14	9	9	ผ*	15	14.5	5	23	156.5	76.34
14	14	24.5	7.5	15	6	6	ผ*	11	10	6	6	7	5.5	3.5	19	141	60
15	16	24.5	10	15	6	8	10	15	15	10	7	14	13.5	3.5	16.5	184	75.10
16	18	23.5	10	14	ผ*	8	ผ*	12	ผ*	10	ผ*	20	12	3.5	16	147	73.50
17	15	23	12.5	15	10	11	ผ*	14	12	10	10	20	13.5	3.5	21.5	191	81.28
18	8	13.5	9	7	ผ*	4	ผ*	8	9	10	6	8	5	3	12	102.5	45.56
19	10	15	10	8	6	8	4	5	7	10	10	5	7	0	2	107	43.67

ตาราง 37 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ หน่วยการเรียนย่อยที่ (คะแนนเต็ม)															คะแนนรวม (เต็ม 245 คะแนน)	คะแนนเฉลี่ยของทุกหน่วยการเรียนคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม
	1		2		3							4	5		6		
	1 (20)	2 (30)	1 (15)	2 (15)	1 (10)	2 (15)	3 (10)	4 (15)	5 (15)	6 (15)	7 (10)	1 (20)	1 (15)	2 (15)	1 (25)		
20	17	18.5	12	12.5	10	5	10	9	7	10	5	16.5	12	3.5	11	159	64.90
21	9	28	12.5	15	10	7	10	14	15	15	10	17	12	2	17.5	194	79.18
22	18	20.5	12	12.5	8	7	ผ*	12	10.5	10	ผ*	19.5	10.5	6	9	155.5	69.11
23	15	24.5	10	15	ผ*	11	10	ผ*	15	10	ผ*	17	13	7	21	168.5	80.24
24	19	ผ*	12	15	6	2	ผ*	9	9	15	7	15	12.5	5	18.5	145	70.73
25	17	30	12	9	6	5	ผ*	14	9	10	ผ*	14	14.5	5	17.5	163	72.44
26	10	26	12.5	15	10	7	8	14	15	15	10	12.5	11.5	2	18.5	187	76.33
27	18	25	15	ผ*	ผ*	6	ผ*	14	9	10	7	16	14.5	5	11	150.5	71.67
28	14	19	10	7	6	8	ผ*	6	7	5	6	10	8	2	12	120	51.06
29	9	13	5	8	4	5	6	5	8	10	7	9	7	3	10	109	44.50
30	11	26	6	10	4	3	8	13	12	10	7	13	12	4.5	15	154.5	63.06
31	13	15	5	8	5	2	5	6	10	9	6	10	8	5.5	10	117.5	47.96
32	7	10	6	7.5	7	8	6	9	8	8	8	12	10	0	9.5	116	47.35
33	15	12	8	5.5	8	4	5	7	9.5	5	4	7	10	5	15	120	48.98
34	12	14	5.5	9	4	6	8	7	8	10	6	7	6	3	5	110.5	45.10
35	12	22	7	10	8	10	ผ*	6	8	9	10	14	8	5	16	145	61.70

* นิสิตสามารถทำแบบทดสอบวินิจฉัยผ่านเกณฑ์ 60%

การทดสอบประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (ทดสอบสมมติฐานของการวิจัย) เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของทุกหน่วยการเรียนอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{26}{35} = 0.74$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.74 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.14}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 1.69$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.69 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนเฉลี่ยจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของทุกหน่วยการเรียนอย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\left(1 - p_0\right)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{27}{35} = 0.77$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.77 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1 - 0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.17}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 2.05$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $2.05 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{24}{35} = 0.69$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.69 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.09}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 1.09$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.09 < 1.65$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{26}{35} = 0.74$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.74 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.14}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 1.69$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.69 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$

$H_1 : p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{26}{35} = 0.74$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.74 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}} = \frac{0.14}{\sqrt{0.00686}} = 1.69$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.69 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 4 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \geq 0.60$

$H_1 \ : \ p < 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{8}{35} = 0.23$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.23 - 0.60}{\sqrt{\dfrac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{-0.37}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= -4.47$$

เพราะว่า $-Z_{.01} = -2.33$

ดังนั้น $-4.47 < -2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนน้อยกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากรนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 6 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{21}{34} = 0.62$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.62 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{34}}}$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{0.00706}}$$

$$= 0.24$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $0.24 < 1.65$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 6 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{26}{34} = 0.76$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.76 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{34}}}$$

$$= \frac{0.16}{\sqrt{0.00706}}$$

$$= 1.90$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.90 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{25}{34} = 0.74$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.74 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{34}}}$$

$$= \frac{0.14}{\sqrt{0.00706}}$$

$$= 1.67$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.67 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$

$H_1 : p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$\hat{P} = \frac{22}{35} = 0.63$

$p_0 = 0.60$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.63 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.03}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 0.36$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $0.36 < 1.65$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมเรขาคณิตของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากรนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \;:\; p \leq 0.60$

$H_1 \;:\; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{25}{33} = 0.76$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 33 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.76 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{33}}}$$

$$= \frac{0.16}{\sqrt{0.00727}}$$

$$= 1.88$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.88 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{25}{30} = 0.83$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 30 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.83 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{30}}}$$

$$= \frac{0.23}{\sqrt{0.008}}$$

$$= 2.57$$

เพราะว่า $Z_{.01} = 2.33$

ดังนั้น $2.57 > 2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \geq 0.60$

$H_1 \; : \; p < 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{6}{35} = 0.17$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{0.17 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}} \\ &= \frac{-0.43}{\sqrt{0.00686}} \\ &= -5.19 \end{aligned}$$

เพราะว่า $-Z_{.01} = -2.33$

ดังนั้น $-5.19 < -2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนน้อยกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \;:\; p \leq 0.60$

$H_1 \;:\; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{16}{19} = 0.84$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 19 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.84 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{19}}}$$

$$= \frac{0.24}{\sqrt{0.01263}}$$

$$= 2.14$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $2.14 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$\hat{P} = \frac{24}{34} = 0.71$

$p_0 = 0.60$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$\begin{aligned} Z &= \frac{0.71 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{34}}} \\ &= \frac{0.11}{\sqrt{0.00706}} \\ &= 1.31 \end{aligned}$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.31 < 1.65$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วน ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$

$H_1 : p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{26}{34} = 0.76$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.76 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{34}}}$$

$$= \frac{0.16}{\sqrt{0.00706}}$$

$$= 1.90$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.90 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{29}{35} = 0.83$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.83 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{0.23}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 2.78$$

เพราะว่า $Z_{.01} = 2.33$

ดังนั้น $2.78 > 2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยรากของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \leq 0.60$

$H_1 \ : \ p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{28}{30} = 0.93$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 30 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.93 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1 - 0.60)}{30}}}$$

$$= \frac{0.33}{\sqrt{0.008}}$$

$$= 3.69$$

เพราะว่า $Z_{.01} = 2.33$

ดังนั้น $3.69 > 2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 : p \leq 0.60$

$H_1 : p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{26}{35} = 0.74$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.74 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}} = \frac{0.14}{\sqrt{0.00686}} = 1.69$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.65$

ดังนั้น $1.69 > 1.65$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \;:\; p \le 0.60$

$H_1 \;:\; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\left(1 - p_0\right)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\hat{P} = \frac{25}{35} = 0.71$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.71 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60\left(1 - 0.60\right)}{35}}}$$

$$= \frac{0.11}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= 1.33$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.645$

ดังนั้น $1.33 < 1.645$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \ : \ p \geq 0.60$

$H_1 \ : \ p < 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{0}{35} = 0$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 35 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{35}}}$$

$$= \frac{-0.60}{\sqrt{0.00686}}$$

$$= -7.24$$

เพราะว่า $-Z_{.01} = -2.33$

ดังนั้น $-7.24 < -2.33$

จึงสรุปว่า ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนน้อยกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การทดสอบประสิทธิภาพของหน่วยการเรียนที่ 6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์เกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร นิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งใช้ค่าสถิติ Z ทดสอบ (Z – test for Population)

สมมติฐาน คือ $H_0 \; : \; p \leq 0.60$

$H_1 \; : \; p > 0.60$

ค่าสถิติทดสอบ

$$Z = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0\left(1 - p_0\right)}{n}}}$$

เมื่อ $\widehat{P}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม

$$\widehat{P} = \frac{21}{34} = 0.62$$

$$p_0 = 0.60$$

n แทนจำนวนนิสิต จำนวน 34 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.62 - 0.60}{\sqrt{\dfrac{0.60(1 - 0.60)}{34}}}$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{0.00706}}$$

$$= 0.24$$

เพราะว่า $Z_{.05} = 1.645$

ดังนั้น $0.24 < 1.645$

จึงสรุปว่า ยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .05

แสดงว่า ผลของการทดสอบไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นั่นคือ นิสิตที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนที่ 6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อย่างน้อยที่สุดร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม มีจำนวนอย่างมากที่สุดเท่ากับร้อยละ 60 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

ภาคผนวก ค
แบบประเมินความสอดคล้อง

แบบประเมินความสอดคล้อง
ของเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์
(แบบทดสอบวินิจฉัย)

ในขั้นตอนของการหาคุณภาพของเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบวินิจฉัย) ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญพิจารณาข้อคำถามแต่ละข้อว่ามีความสอดคล้องกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์หรือไม่ และได้โปรดแสดงความคิดเห็น โดยทำเครื่องหมาย √ ในช่องว่าง

1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง สอดคล้อง

0 หมายถึง ไม่แน่ใจ

-1 หมายถึง ไม่สอดคล้อง

แบบประเมินความสอดคล้องของเครื่องมือคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบวินิจฉัย)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน		
		1	0	-1
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 2	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1	1 2 3 4 5			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3	1 2 3 4 5			

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะข้อบกพร่อง ทางการเรียน		
		1	0	-1
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4	1 2 3 4 5			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7	1 2 3 4			
หน่วยการเรียนที่ 4 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 1	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 2	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 6 ฉบับที่ 1	1 2 3 4			

แบบประเมินความสอดคล้อง
ของเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง
ทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน)

ในขั้นตอนของการหาคุณภาพของเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน) ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญพิจารณาข้อคำถามแต่ละข้อว่ามีความสอดคล้องกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์หรือไม่ และได้โปรดแสดงความคิดเห็น โดยทำเครื่องหมาย √ ในช่องว่าง

1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง สอดคล้อง
0 หมายถึง ไม่แน่ใจ
-1 หมายถึง ไม่สอดคล้อง

แบบประเมินความสอดคล้องของเครื่องมือวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูป เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ (แบบทดสอบคู่ขนาน)

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน		
		1	0	-1
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 2 ฉบับที่ 2	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1	1 2 3 4 5			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3	1 2 3 4 5			

หน่วยการเรียน ฉบับที่	ข้อที่	ความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน		
		1	0	-1
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4	1 2 3 4 5			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7	1 2 3 4			
หน่วยการเรียนที่ 4 ฉบับที่ 1	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 1	1 2 3			
หน่วยการเรียนที่ 5 ฉบับที่ 2	1 2			
หน่วยการเรียนที่ 6 ฉบับที่ 1	1 2 3 4			

แบบประเมินความสอดคล้อง
ของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ในขั้นตอนของการหาคุณภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โดยให้ผู้เชี่ยวชาญพิจารณาเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนว่ามีความสอดคล้องกับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์หรือไม่ และได้โปรดแสดงความคิดเห็น โดยทำเครื่องหมาย √ ในช่องว่าง

1 0 -1

เมื่อ 1 หมายถึง สอดคล้อง

0 หมายถึง ไม่แน่ใจ

-1 หมายถึง ไม่สอดคล้อง

แบบประเมินความสอดคล้องของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์

บทเรียนสำเร็จรูป หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อย ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่	ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน		
		1	0	-1
1	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
2	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
3	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			

บทเรียนสำเร็จรูป หน่วยการเรียนที่	หน่วยการเรียนย่อย ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่	ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน		
		1	0	-1
3	หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
4	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
5	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 3			
6	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2			
	หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 3			

หมายเหตุ

ลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนด้านที่ 1 คือ ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนด้านที่ 2 คือ ด้านทักษะการคิดคำนวณ

ลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนด้านที่ 3 คือ ด้านการประยุกต์

ภาคผนวก ง
ตัวอย่างชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน
เรื่องอนุกรมอนันต์

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

เรื่องอนุกรมอนันต์

Brook Taylor

(1685–1731)

Colin Maclaurin

(1698–1746)

จัดทำโดย

นางสาวเกษราภรณ์ เต็งมีศรี

วิชาเอกคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์

ชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นชุดบทเรียนสำเร็จรูปที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เพื่อใช้สำหรับแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่องที่ได้จากการคัดเลือกของผู้วิจัย บรรจุลงในกรอบที่ต่อเนื่องกันตามลำดับ โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปหายาก โดยนิสิตจะศึกษาด้วยตนเองตามลำดับขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้ บทเรียนใช้เวลาทั้งหมดประมาณ 12 ชั่วโมง ประกอบด้วย คำนำ จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และหน่วยการเรียน 6 หน่วย

2. คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วย

2.1 จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

2.2 กรอบแนวทางการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน ซึ่งเป็นการนำเสนอรายละเอียดในการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อให้การดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนบรรลุจุดประสงค์การเรียนรู้

2.3 แบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน พร้อมเฉลยคำตอบ

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

เรื่องอนุกรมอนันต์

จัดทำโดย

นางสาวเกษราภรณ์ เต็งมีศรี

วิชาเอกคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คำนำ

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์นี้ ใช้สำหรับนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ได้มาจากการคัดเลือกด้วยแบบทดสอบวินิจฉัย ซึ่งจะเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่อง 3 ด้าน ได้แก่ ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ด้านทักษะการคิดคำนวณ และด้านการประยุกต์ โดยให้นิสิตศึกษาด้วยตนเองตามขั้นตอนและกิจกรรมที่กำหนดไว้

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียน 6 หน่วย ซึ่งแต่ละหน่วยจะประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย รวมทั้งหมด 15 หน่วย และในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยประกอบด้วย คำชี้แจง/คำแนะนำในการศึกษา จุดประสงค์การเรียนรู้ และกรอบ โดยแต่ละกรอบจะมีคำอธิบายเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่อง มีตัวอย่าง มีกิจกรรมให้นิสิตทำ เพื่อทบทวนความเข้าใจในเนื้อหาที่ได้ศึกษา พร้อมเฉลยคำตอบ

ผู้จัดทำหวังว่าบทเรียนสำเร็จรูปชุดนี้จะช่วยแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนให้แก่นิสิตได้อย่างถูกต้อง และช่วยให้เกิดความเข้าใจในเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ดีขึ้น อันจะมีผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตสูงขึ้น

เกษราภรณ์ เต็งมีศรี

จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เพื่อเป็นเครื่องมือในการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ของนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียน

หน่วยการเรียน 6 หน่วย มีดังนี้

1. หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่
   1.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ
   1.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการหาลิมิตของลำดับ
2. หน่วยการเรียนที่ 2 เรื่องอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่
   2.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์
   2.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องอนุกรมเรขาคณิต
3. หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 7 หน่วย ได้แก่
   3.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า
   3.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์
   3.3 หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 เรื่องอนุกรมพี
   3.4 หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ
   3.5 หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน
   3.6 หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต
   3.7 หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 เรื่องการทดสอบโดยราก
4. หน่วยการเรียนที่ 4 เรื่องอนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ซึ่งมี 1 หน่วยการเรียนย่อย ได้แก่
   4.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องอนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข
5. หน่วยการเรียนที่ 5 เรื่องอนุกรมยกกำลัง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่
   5.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง
   5.2 หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมกำลัง
6. หน่วยการเรียนที่ 6 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ซึ่งมีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่
   6.1 หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งเป็นตอนย่อยๆ ดังนี้

1. การทบทวนสมบัติของอสมการที่ใช้ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ
2. การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถ

1. นำสมบัติของอสมการไปใช้ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับได้
2. แสดงการพิสูจน์ลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้

กรอบที่ 1

ทบทวนการใช้สมบัติของอสมการ

สมบัติของอสมการที่จำเป็นจะต้องใช้ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ได้แก่สมบัติต่อไปนี้

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก

1. ถ้า $x \geq y$ แล้ว $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ และ ถ้า $x \leq y$ แล้ว $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

2. ถ้า $x > y$ แล้ว $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ และ ถ้า $x < y$ แล้ว $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับนั้น เราจะต้องหาจำนวนเต็มบวก N (แปรค่าตาม ε) ซึ่งจะต้องใช้สมบัติของอสมการที่กล่าวข้างต้นมาช่วยในการพิจารณา โดยศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้ n และ N เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq N$
แล้ว จะได้ว่า $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$

(1) เนื่องจาก $n + 1 > n$
ดังนั้น

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

(2) เนื่องจาก $\sqrt{n^2+n+1} > \sqrt{n^2} = n$
ดังนั้น

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$$

(3) ให้ $n > 2$ เนื่องจาก $3\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} + 4(n-2) > 4(n-2) = 4n - 8 \geq 4N - 8$
ดังนั้น

$$\frac{1}{3\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}+4(n-2)} < \frac{1}{4(n-2)} = \frac{1}{4n-8} \leq \frac{1}{4N-8}$$

■

กิจกรรมที่ 1 ให้ n และ N เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq N$ จงเติมเครื่องหมาย $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ หรือ $=$ ในช่องสี่เหลี่ยมให้ถูกต้อง

(1)

$$\frac{1}{n} \ \square \ \frac{1}{N}$$

(2) เนื่องจาก

$$\begin{aligned} n + 7 &> n \\ &\square \ N \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+7} &< \frac{1}{n} \\ &\square \ \frac{1}{N} \end{aligned}$$

(3) เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sqrt{4n^2 + 3n + 2} &\ \square \ \sqrt{4n^2} \\ &\ \square \ 2n \\ &\ \square \ n \\ &\ \square \ N \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 3n + 2}} &\ \square \ \frac{1}{n} \\ &\ \square \ \frac{1}{N} \end{aligned}$$

(4) ให้ $n > 3$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \sqrt{n+3}\sqrt{n+5} + 2(n-3) &\ \square \ 2(n-3) \\ &\ \square \ 2n - 6 \end{aligned}$$

$$\square\ 2\mathrm{N}-6$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}+3}\sqrt{\mathrm{n}+5}+2(\mathrm{n}-3)} \ \square\ \frac{1}{2\mathrm{n}-6}$$

$$\square\ \frac{1}{2\mathrm{N}-6}$$

$\blacksquare$

กรอบที่ 2

บทนำ

อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ คือผลบวกของพจน์ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ จำนวนพจน์อนันต์ ซึ่งในการศึกษาเรื่องนี้ เพื่อจะให้ความหมายของอนุกรมอนันต์ว่าคืออะไร หาได้หรือไม่ อย่างไร

พิจารณา

$$\begin{aligned} 0.\dot{7} &= 0.777\ldots \\ &= 0.7 + 0.07 + 0.007 + \ldots \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

ซึ่งอนุกรมอนันต์นี้ ผู้เรียนเคยใช้มาแล้ว

พิจารณา

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

อนุกรมอนันต์ทั้งสามนี้ หาค่าได้หรือไม่ อย่างไร

ดังนั้น ปัญหาที่น่าสนใจในขณะนี้คือ จะมีวิธีกำหนดความหมายของอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ได้อย่างไร

เรากำหนดความหมายของอนุกรมอนันต์ โดยพิจารณาจาก

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

เราเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยของลำดับ** $\{a_n\}$

และการพิจารณาว่าอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ สามารถหาผลบวกได้หรือไม่ได้นั้น ให้พิจารณาจากลำดับของผลบวกย่อย $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ ว่ามีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงใดหรือไม่ เมื่อ n มีค่าใหญ่มากๆ หรือ $\lim_{n\to\infty} S_n$ มีค่าหรือไม่

ดังนั้น การศึกษาเรื่องอนุกรมอนันต์ เราต้องศึกษาเรื่อง**ลำดับและลิมิตของลำดับ** ดังนี้

ลำดับ (Sequences)

คำว่า **ลำดับ** ในที่นี้ คือ การนำจำนวนจริงมาเรียงลำดับ ดังนี้

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

จำนวนจริง a_1 เรียกว่า **พจน์ที่ 1** จำนวนจริง a_2 เรียกว่า **พจน์ที่ 2** เป็นเช่นนี้เรื่อยไป โดยทั่วไป a_n เรียกว่า **พจน์ที่ n**

ในทางคณิตศาสตร์ การเรียงลำดับ คือ การจับคู่ระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนจริง ซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชัน**

บทนิยาม 1 **ลำดับ** คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

นั่นคือ ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ หมายถึง ฟังก์ชัน f ซึ่งมีโดเมนเท่ากับเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งนิยามว่า

$$\begin{aligned} f(1) &= a_1 \\ f(2) &= a_2 \\ &\vdots \\ f(n) &= a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของลำดับ

$$f_1 = \{(1,1),(2,3),(3,5),\ldots,(n,2n-1),\ldots\}$$

$$f_2 = \{(1,1),(2,2),(3,6),\ldots,(n,n!),\ldots\}$$

$$f_3 = \{(1,1),(2,2),(3,4),\ldots,(n,2^{n-1}),\ldots\}$$

ลำดับเหล่านี้เขียนในรูปกำหนดเงื่อนไข จะได้เป็น

$$f_1 = \{(n,2n-1) \mid n \in I^+\}$$

$$f_2 = \{(n,n!) \mid n \in I^+\}$$

$$f_3 = \{(n,2^{n-1}) \mid n \in I^+\}$$

ดังนั้นลำดับในกรณีทั่วไปคือ $f = \{(n,f(n)) \mid n \in I^+\}$ เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญลักษณ์ $\{a_n\}$ หรือสัญลักษณ์ที่คล้ายกัน แทนลำดับ และเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n ของลำดับ $\{a_n\}$ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$

กรอบที่ 3

ลิมิตของลำดับ

กำหนด ลำดับ $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1+1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1 \\
a_2 &= \frac{2+1}{2^2+1} = \frac{3}{5} \\
a_3 &= \frac{3+1}{3^2+1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\
&\vdots \\
a_{100} &= \frac{100+1}{100^2+1} = \frac{101}{10001}
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า a_n มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากๆ

และเราจะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (1)

เราให้คำนิยามลำดับ $\{a_n\}$ ที่มีลิมิต ดังนี้

บทนิยาม 2

ลำดับ $\{a_n\}$ จะ**ลู่เข้า**สู่ค่า L ถ้ามีจำนวนบวก ε ใดๆ แล้วจะต้องมีจำนวนเต็ม N ที่ซึ่งทุกจำนวน n ที่ $n > N$ แล้วทำให้ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ลำดับ $\{a_n\}$ ไม่ลู่เข้าเมื่อหาค่า L ไม่ได้ และ $\{a_n\}$ จะลู่เข้าสู่ค่า L เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

โดยในที่นี้ L คือลิมิตของลำดับ

ในบทนิยาม 2 แทนการกล่าวว่า a_n เข้าใกล้ L เมื่อ n มีค่ามากๆ โดยเราสามารถทำให้ a_n ใกล้ L เท่าไรก็ได้ เมื่อ n มีค่ามากพอ หรือ

$\left|a_n - L\right| < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε เมื่อ $n > N$ สำหรับจำนวนเต็มบวก N บางตัว

ดังนั้นในการแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ก็คือ

ทุกจำนวนจริงบวก ε เราจะหาจำนวนเต็มบวก N (แปรค่าตามε) ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0.001$

วิธีทำ

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

ให้ $\frac{1}{n+1} < 0.001$

หรือ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$

$n+1 > 1000$

$n > 999$

จะได้ว่า $N = 999$

และสำหรับจำนวนเต็มบวก $N > 999$ เราก็สามารถหา n ที่ทำให้ $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0.001$ ได้เช่นเดียวกัน

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก N ตั้งแต่ 999 เป็นต้นไป จะทำให้ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0.001$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (2.1)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

การวิเคราะห์ เราจะพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ โดย

เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ เราจะหา N ได้อย่างไร

ในการหา N ให้เริ่มจากการหา $\left|a_n - L\right|$

จากโจทย์ $a_n = 1/n$ และ $L = 0$

ดังนั้น $$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \qquad \text{เมื่อ } n > N \qquad \text{..........} (1)$$

ในบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) ให้ $\left|a_n - L\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\frac{1}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \frac{1}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\left|a_n - L\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

■

ในตัวอย่างที่ 4

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{100}$ จะได้ $N > \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$ นั่นคือ ถ้า $N > 100$ แล้ว $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{100}$

ให้ $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ จะได้ $N > \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000$ นั่นคือ ถ้า $N > 1000$ แล้ว $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{1000}$

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}=2$

การวิเคราะห์

เราจะพิสูจน์ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}=2$ โดย

เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ เราจะหา N ได้อย่างไร

ในการหา N ให้เริ่มจากการหา $\left|a_n - L\right|$

จากโจทย์ $a_n = (2n + 3)/(n + 1)$ และ $L = 2$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right| \\ &= \left|\frac{2n-3-2(n+1)}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{2n-3-2n-2}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{-5}{n+1}\right| \\ &= \frac{5}{n+1} \\ &< \frac{5}{n} < \frac{5}{N} \qquad \text{เมื่อ } n > N \qquad \text{.......... (1)}\end{aligned}$$

ในบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) ให้ $\left|a_n - L\right| < \dfrac{5}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\dfrac{5}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \dfrac{5}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{5}{\varepsilon}\right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned}\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right| \\ &= \left|\frac{2n-3-2(n+1)}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{2n-3-2n-2}{n+1}\right|\end{aligned}$$

$$= \left| \frac{-5}{n+1} \right|$$
$$= \frac{5}{n+1}$$
$$< \frac{5}{n} < \frac{5}{N} < \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (2.2)

ตัวอย่างที่ 6 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

การวิเคราะห์

เราจะพิสูจน์ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$ โดย

เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ เราจะหา N ได้อย่างไร

ในการหา N ให้เริ่มจากการหา $\left| a_n - L \right|$

จากโจทย์ $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$ และ $L = \frac{1}{2}$

ดังนั้น
$$\left| a_n - L \right| = \left| \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \right|$$
$$= \left| \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \right|$$
$$= \left| \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right|$$
$$= \left| \frac{(n+1) - n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right|$$
$$= \left| \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 2n} \right|$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 2n}$$
$$< \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \qquad \text{เมื่อ } n > N \text{ .... (1)}$$

ในบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) ให้ $\left|a_n - L\right| < \dfrac{1}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| \\
&= \left|\frac{(n+1) - n}{2\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 2n}\right| \\
&= \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 2n} \\
&< \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (3)

กิจกรรมที่ 2

(1) กำหนดลำดับ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

จงหา $a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

$\vdots$

$a_{100} =$

เมื่อ n มีค่ามากๆ แล้ว a_n เข้าหาจำนวนจริงใด

ตอบ................และ เขียนแทนด้วย..

■

(2) กำหนดลำดับ $\left\{\dfrac{3n+1}{2n+5}\right\}$

(2.1) จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{3n+1}{2n+5} - \dfrac{3}{2}\right| < 0.1$

วิธีทำ

(2.2) จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$

⊙ **การหา N**

จากโจทย์ $a_n =$ ……………… และ $L =$ ……….

ดังนั้น $\left|a_n - L\right| = \left| \qquad\qquad \right|$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N \left(N > \qquad \right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\left|a_n - L\right| = \left| \qquad\qquad \right|$$

นั่นคือ ……………………..

■

(3) จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}} = \dfrac{1}{4}$

⊙ **การหา N**

จากโจทย์ $a_n =$ .... และ $L =$ ....

ดังนั้น $\left|a_n - L\right| = \left| \qquad\qquad \right|$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \qquad \right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\left|a_n - L\right| = \left| \qquad\qquad \right|$$

นั่นคือ ....

■

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1) $\leq$

(2) $\geq$, $\leq$

(3) $>$, $=$, $>$, $\geq$, $<$, $\leq$

(4) $>$, $=$, $\geq$, $<$, $\leq$

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1) $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{3}{4}$, … , $a_{100} = \dfrac{100}{101}$

เมื่อ n มีค่ามากๆ แล้ว a_n เข้าหาจำนวนจริงใด

ตอบ 1 และ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

■

(2.1)

วิธีทำ
$$\left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n+1) - 3(2n+5)}{2(2n+5)}\right|$$
$$= \left|\frac{6n+2-6n-15}{4n+10}\right| = \left|-\frac{13}{4n+10}\right| = \frac{13}{4n+10} < 0.1$$

ให้ $\dfrac{13}{4n+10} < 0.1$

หรือ $\dfrac{13}{4n+10} < \dfrac{1}{10}$

$130 < 4n+10$

$120 > 4n$

$n > 30$

จะได้ว่า $N = 30$

และสำหรับจำนวนเต็มบวก $N > 30$ ก็สามารถหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\left|\dfrac{3n+1}{2n+5} - \dfrac{3}{2}\right| < 0.1$ ได้เช่นเดียวกัน

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก N ตั้งแต่ 30 เป็นต้นไป จะทำให้ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{3n+1}{2n+5} - \dfrac{3}{2}\right| < 0.1$

■

(2.2) จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+5}=\dfrac{3}{2}$

⊙ **การหา N**

จากโจทย์ $a_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$ และ $L = \dfrac{3}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{3n+1}{2n+5}-\frac{3}{2}\right| \\
&= \left|\frac{2(3n+1)-3(2n+5)}{2(2n+5)}\right| \\
&= \left|\frac{6n+2-6n-15}{4n+10}\right| \\
&= \left|-\frac{13}{4n+10}\right| \\
&= \frac{13}{4n+10} \\
&< \frac{13}{4n} < \frac{13}{n} < \frac{13}{N} \qquad \text{เมื่อ } n > N \text{ .... (1)}
\end{aligned}$$

ในบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) ให้ $\left|a_n - L\right| < \dfrac{13}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\dfrac{13}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \dfrac{13}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{13}{\varepsilon}\right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{3n+1}{2n+5}-\frac{3}{2}\right| \\
&= \left|\frac{2(3n+1)-3(2n+5)}{2(2n+5)}\right| \\
&= \left|\frac{6n+2-6n-15}{4n+10}\right| \\
&= \left|-\frac{13}{4n+10}\right| \\
&= \frac{13}{4n+10}
\end{aligned}$$

$$< \frac{13}{4n} < \frac{13}{n} < \frac{13}{N} < \frac{13}{\frac{13}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$

■

(3) จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}} = \frac{1}{4}$

⊙ **<u>การหา N</u>**

จากโจทย์ $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}}$ และ $L = \frac{1}{4}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}} - \frac{1}{4}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}\right| \\
&= \left|\frac{n+1-(n+2)}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4(n+2)}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4n+8}\right| \\
&= \frac{1}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4n+8} \\
&< \frac{1}{4n+8} < \frac{1}{4n} < \frac{1}{4N} \quad \text{เมื่อ } n > N \quad .... (1)
\end{aligned}$$

ในบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) ให้ $\left|a_n - L\right| < \frac{1}{4N} < \varepsilon$

พิจารณา $\frac{1}{4N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \frac{1}{4\varepsilon}$

ในการพิสูจน์ บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $\mathrm{N}\left(\mathrm{N} > \dfrac{1}{4\varepsilon}\right)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}} - \frac{1}{4}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{4\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}\right| \\
&= \left|\frac{n+1-(n+2)}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4(n+2)}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4n+8}\right| \\
&= \frac{1}{4\sqrt{(n+1)(n+2)} + 4n+8} \\
&< \frac{1}{4n+8} < \frac{1}{4n} < \frac{1}{4N} < \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n+2}} = \frac{1}{4}$

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2

ทักษะการคิดคำนวณ

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การหาผลบวกและผลลบของเศษส่วน

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ ในด้านทักษะการคิดคำนวณจบแล้ว นิสิตสามารถหาผลบวก และผลลบของเศษส่วนได้

กรอบที่ 1

ในกรอบนี้ จะทบทวนการบวก และการลบเศษส่วน เพื่อใช้สำหรับการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

การบวก การลบ เศษส่วน

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

สำหรับการพิสูจน์ลิมิตของลำดับนั้น เศษส่วนจะอยู่ในรูปที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นพหุนามลบกับเศษส่วนที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งการบวก หรือการลบนั้น สามารถทำได้เช่นเดียวกับ การบวก และการลบเศษส่วนที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนจริงใดๆ ดังที่เสนอไว้

ตัวอย่างที่ 1

1. $$\frac{10}{3}-\frac{2}{7}=\frac{(10)(7)-(2)(3)}{(3)(7)}=\frac{70-6}{21}=\frac{64}{21}$$

2. $$\begin{aligned}\frac{4n+5}{3n-2}-\frac{4}{3}&=\frac{(4n+5)(3)-(4)(3n-2)}{(3n-2)(3)}\\&=\frac{12n+15-12n+8}{9n-6}\\&=\frac{23}{9n-6}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+3}}{5\sqrt{n+2}}-\frac{1}{5}&=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{5\sqrt{n+2}}\\&=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{5\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}\\&=\frac{n+3-(n+2)}{5\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)}\\&=\frac{n+3-n-2}{5\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}+5(n+2)}\\&=\frac{1}{5\sqrt{(n+2)(n+3)}+5n+10}\end{aligned}$$

■

กิจกรรมที่ 1 จงหาผลลัพธ์ในข้อต่อไปนี้

1. $\dfrac{3n-5}{4n+7}-\dfrac{3}{4}$

วิธีทำ $\dfrac{3n-5}{4n+7}-\dfrac{3}{4}=$

2. $\dfrac{n^2+3}{2n^2+1}-\dfrac{1}{2}$

วิธีทำ $\dfrac{n^2+3}{2n^2+1}-\dfrac{1}{2}=$

3. $\dfrac{2\sqrt{n+5}}{3\sqrt{n+3}}-\dfrac{2}{3}$

วิธีทำ $\dfrac{2\sqrt{n+5}}{3\sqrt{n+3}}-\dfrac{2}{3}=$

เฉลยกิจกรรมที่ 1

1. $$\frac{3n-5}{4n+7}-\frac{3}{4}=\frac{(3n-5)(4)-(3)(4n+7)}{(4n+7)(4)}$$
$$=\frac{12n-20-12n-21}{16n+28}$$
$$=\frac{-41}{16n+28}$$

2. $$\frac{n^2+3}{2n^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{\left(n^2+3\right)(2)-\left(2n^2+1\right)}{\left(2n^2+1\right)(2)}$$
$$=\frac{2n^2+6-2n^2-1}{4n^2+2}$$
$$=\frac{5}{4n^2+2}$$

3. $$\frac{2\sqrt{n+5}}{3\sqrt{n+3}}-\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{n+5}-2\sqrt{n+3}}{3\sqrt{n+3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{n+5}-2\sqrt{n+3}}{3\sqrt{n+3}}\cdot\frac{2\sqrt{n+5}+2\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+5}+2\sqrt{n+3}}$$
$$=\frac{4(n+5)-4(n+3)}{3\sqrt{n+3}\left(2\sqrt{n+5}+2\sqrt{n+3}\right)}$$
$$=\frac{4n+20-4n-12}{6\sqrt{(n+3)(n+5)}+6(n+3)}$$
$$=\frac{8}{6\sqrt{(n+3)(n+5)}+6n+18}$$
$$=\frac{4}{3\sqrt{(n+3)(n+5)}+3n+9}$$

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการหาลิมิตของลำดับ

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การหาลิมิตของลำดับ ซึ่งอาศัยการพิจารณาจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถบอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยพิจารณาจากการหาลิมิตของลำดับ ซึ่งอาศัยการพิจารณาจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

กรอบที่ 1

ในการหาลิมิตของลำดับจำเป็นจะต้องใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับหลายทฤษฎี ซึ่งได้เสนอไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ทุก $x \geq n_0$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $a_n = f(n)$ ทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$ ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะรวบรวมทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับที่จำเป็น เพื่อนำมาใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้จะคล้ายกับทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันที่ผู้เรียนได้ศึกษามาแล้ว

ทฤษฎีบท 2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$ เมื่อ $p > 0$ และ $a_n > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ เมื่อ $p > 0$

***ทฤษฎีบท 3* (The Squeeze Theorem)** ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับ

ซึ่งมี n_0 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ทุก $n \geq n_0$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

ทฤษฎีบท 3 กล่าวว่า ลำดับซึ่งถูกขนาบด้วยลำดับสองลำดับซึ่งลู่เข้าหาจำนวนจริงเดียวกัน ลำดับที่ถูกขนาบจะเป็นลำดับลู่เข้าด้วย และลู่เข้าหาจำนวนจริงนั้นด้วย

ทฤษฎีบท 4

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

กรอบที่ 2

ในกรอบนี้ จะเสนอตัวอย่างการหาลิมิตของลำดับ โดยใช้ทฤษฎีบท 2 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าลำดับในข้อต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตของลำดับ

(1) $\left\{\dfrac{3n+4}{2n-1}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{3n^3-n+2}{n^2-2n+3}\right\}$ (3) $\left\{\dfrac{2n-5}{n^2-n+5}\right\}$

วิธีทำ

(1) ให้ $\{a_n\} = \dfrac{3n+4}{2n-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{2n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n+4}{n}}{\dfrac{2n-1}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{n}}{2-\dfrac{1}{n}}\\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}\\ &= \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n+4}{2n-1}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ $\dfrac{3}{2}$

■

(2) ให้ $\{a_n\} = \dfrac{3n^3-n+2}{n^2-2n+3}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+2}{n^2-2n+3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^3-n+2}{n^2}}{\dfrac{n^2-2n+3}{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} 3n$ ไม่มีลิมิต และลิมิตอื่นๆ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $\dfrac{\lim_{n\to\infty} 3n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}$ ไม่มีลิมิต

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n^3 - n + 2}{n^2 - 2n + 3}\right\}$ เป็นลำดับไม่ลู่เข้า

■

(3) ให้ $\{a_n\} = \dfrac{2n-5}{n^2 - n + 5}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n^2-n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-5}{n^2}}{\frac{n^2-n+5}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}$$

$$= \frac{0-0}{1-0+0} = 0$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{2n-5}{n^2 - n + 5}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ 0

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ 1 [(1)-(3)]

ถ้า a_n และ b_n เป็นพหุนามดีกรี p และ q โดย

$$a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \ldots + c_1 n + c_0 \quad , \; c_p \neq 0$$
$$b_n = d_q n^q + d_{q-1} n^{q-1} + \ldots + d_1 n + d_0 \quad , \; d_q \neq 0$$
$$c_i, d_j \in \mathbb{R} \quad , i = 0, 1, 2, \ldots, p \quad , \; j = 0, 1, 2, \ldots, q$$

จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } p < q \\ \dfrac{c_p}{d_p} & \text{เมื่อ } p = q \\ \text{ไม่มีลิมิต} & \text{เมื่อ } p > q \end{cases}$$

เช่น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 + 3n - 7}{2n^5 - 4n - 1} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + n - 10}{4n^2 - 2n + 5} = \dfrac{3}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 + 2n - 1}{2n - n + 9}$ ไม่มีลิมิต

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ 2

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1} + 3^{n-1}}{2^{n+1} + 5^{n-1}}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 3^{n-1}}{2^{n+1} + 5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5^{n+1} + 3^{n-1}}{5^n}}{\dfrac{2^{n+1} + 5^{n-1}}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{2\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{1}{5}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5}}$$

$$= \frac{5 + \left(\frac{1}{3} \cdot 0\right)}{(2 \cdot 0) + \frac{1}{5}} = 25$$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ 1 [(4)]

กิจกรรมที่ 1

1. กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเป็น**ลำดับลู่เข้า**หรือไม่ **(แสดงวิธีทำโดยละเอียด)**

(1) $\left\{\dfrac{3n+1}{n^2-3}\right\}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3n+1}{\square}}{\dfrac{n^2-3}{\square}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\square}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\square}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\square}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\square}{\square}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\square}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\square}{\square}}$$

$$= \frac{\square + \square}{\square - \square} = \ldots\ldots$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n+1}{n^2-3}\right\}$ เป็นลำดับ...........

■

(2) $\left\{\dfrac{1-n+2n^2}{2+3n-n^2}\right\}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n+2n^2}{2+3n-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-n+2n^2}{\square}}{\dfrac{2+3n-n^2}{\square}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\square}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{\square}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square}{\square}}$$

$$= \frac{\square - \square + \square}{\square + \square - \square} = \ldots\ldots$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{1-n+2n^2}{2+3n-n^2}\right\}$ เป็นลำดับ...........

■

(3) $\left\{\dfrac{n^2}{3n+1}\right\}$

วิธีทำ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^2}{\square}}{\frac{3n+1}{\square}}$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^2}{3n+1}\right\}$ เป็นลำดับ...........

■

(4) $\left\{\dfrac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n}+5^{n-1}}\right\}$

วิธีทำ $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n}+5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{\square}}{\dfrac{2^{n}+5^{n-1}}{\square}}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n}+5^{n-1}}\right\}$ เป็นลำดับ...........

■

2. กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ **(เติมเฉพาะคำตอบ)**

(1) $\left\{\dfrac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}\right\}$

วิธีทำ $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}=\ldots\ldots\ldots$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}\right\}$ เป็นลำดับ...........

(2) $\left\{\dfrac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1}\right\}$

วิธีทำ $$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1} = \ldots\ldots\ldots$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1}\right\}$ เป็นลำดับ...........

(3) $\left\{\dfrac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4}\right\}$

วิธีทำ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4} = \ldots\ldots\ldots$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4}\right\}$ เป็นลำดับ...........

■

กรอบที่ 3

ในกรอบนี้ จะเสนอตัวอย่างการหาลิมิตของลำดับ โดยใช้ทฤษฎีบท 3 และทฤษฎีบท 4 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1) $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ (3) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n}\right\}$ (4) $\left\{\dfrac{\sin n}{n^2-2n+3}\right\}$

วิธีทำ (1) เนื่องจาก $-1 \le \cos n \le 1$ ดังนั้น $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n}$

เราทราบว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{n} = 0$

(2) เนื่องจาก $2^n > n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $0 \le \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$

เราทราบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$

(3) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\dfrac{1}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 4 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n} = 0$

(4) เนื่องจาก $0 \le \left|\dfrac{\sin n}{n^2-2n+3}\right| \le \dfrac{1}{n^2-2n+3}$

และเราทราบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2-2n+3} = 0$

ดังนั้นโดยใช้ทฤษฎีบท 3 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2-2n+3}\right| = 0$

และจากทฤษฎีบท 4 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^2-2n+3} = 0$

■

กิจกรรมที่ 2 จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

(1) $\left\{(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n}}\right\}$

วิธีทำ

(2) $\left\{\dfrac{\sin n}{n^{2}}\right\}$

วิธีทำ

กรอบที่ 4

ในกรอบนี้ จะเสนอตัวอย่างการหาลิมิตของลำดับ โดยใช้ทฤษฎีบท 1 ซึ่งจะทำให้เราสามารถใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล (L'Hôpital's Rule) เพื่อหาลิมิตของลำดับได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\ ,\ x\geq 1$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty=\lim\limits_{x\to\infty}x$ ดังนั้นเราจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลเพื่อหาลิมิตของลำดับ จะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

โดยทฤษฎีบท 1 จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$

■

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{5n}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{5x}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}2^x=\infty=\lim\limits_{x\to\infty}5x$ ดังนั้นเราจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลเพื่อหาลิมิตของลำดับ จะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{5}=\infty$$

ดังนั้น ลำดับ $\left\{\frac{2^n}{5n}\right\}$ เป็นลำดับไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 3 ข้อ 1

ตัวอย่างที่ 6 ลำดับ $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิต

พิจารณา $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 1^∞

ให้ $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

พิจารณาลอการิทึมธรรมชาติของ y

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x \\ &= x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด $\infty\cdot 0$ และทำการเปลี่ยนรูปแบบของ $\infty\cdot 0$ ให้เป็น $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แต่ในข้อนี้จะเปลี่ยนเป็นรูปแบบของ $\dfrac{0}{0}$ โดยวิธีการเปลี่ยนรูปแบบจาก $\infty\cdot 0$ เป็น $\dfrac{0}{0}$ ให้ทำดังนี้

$$x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

วิธีทำ

จากการใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลที่กล่าวมาในข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(x+1)(x-1)}\cdot\left(-x^2\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty} y\right] = 2$

หรือ $e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty} y\right)} = e^2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2$

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2$

ดังนั้น สรุปได้ว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและมีลิมิตเท่ากับ e^2

■

หมายเหตุ การจะเลือกว่าควรเปลี่ยนรูปแบบจาก $\infty\cdot 0$ เป็น $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ขึ้นอยู่กับความยากง่ายต่อการหาอนุพันธ์ที่ใช้ในหลักเกณฑ์โลปิตาลต่อไป

สรุปการคำนวณหาลิมิตที่เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดในรูปยกกำลังชนิด $0^0, \infty^0, 1^\infty$

ลิมิตที่อยู่ในรูป

$$\lim_{n\to\infty} f(x)^{g(x)}$$

เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 0^0 หรือ ∞^0 หรือ 1^∞ เมื่อ

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = 0$ หรือ

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = 0$ หรือ

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \infty$

การคำนวณหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดชนิดดังกล่าวนี้ ให้ใช้สมบัติของลอการิทึมธรรมชาติช่วยในการเปลี่ยนรูปแบบยกกำลัง ให้เป็นการคูณดังนี้

สมมติให้ $y = f(x)^{g(x)}$

ดังนั้น $\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$

$= g(x)\ln f(x)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)\ln f(x)\right]$

ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)\ln f(x)\right] = k$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln y) = k$

หรือ $\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty} y\right] = k$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^k$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)^{g(x)}\right] = e^k$

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 3 ข้อ 2

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

วิธีทำ การหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ ทำได้โดยการนำสังยุค (Conjugate) ของ $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ คือ $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$ คูณทั้งเศษและส่วนของ $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &= 0\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 3 ข้อ 3

กรอบที่ 5

ลิมิตต่อไปนี้เป็นลิมิตที่จะเจอบ่อยในโจทย์ที่เกี่ยวกับการหาลิมิตของลำดับ และสามารถนำไปใช้หาลิมิตในรูปแบบที่ซับซ้อนขึ้นได้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$	4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (x > 0)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (\lvert x\rvert < 1)$	5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$	6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad (k \in \mathbb{R})$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 2\cdot 0 = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^{\frac{1}{n}})^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (1)^2 = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(3^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} (1\cdot 1) = 1$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad ; \left(\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1\right)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 3 ข้อ 4

กิจกรรมที่ 3 จงหา ***ลิมิต*** ของลำดับในข้อต่อไปนี้

1. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

2. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

วิธีทำ

3. $a_n = \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)$

วิธีทำ

■

4. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้

4.1 $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$

วิธีทำ

4.2 $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$

วิธีทำ

4.3 $a_n = \dfrac{\ln n^5}{2n}$

วิธีทำ

■

4.4 $a_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

วิธีทำ

4.5 $a_n = \sqrt[n]{n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

วิธีทำ

4.6 $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

วิธีทำ

■

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n+1}{n^2}}{\dfrac{n^2-3}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{0+0}{1-0}=0$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n+1}{n^2-3}\right\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**

■

(2)

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n+2n^2}{2+3n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-n+2n^2}{n^2}}{\dfrac{2+3n-n^2}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{0-0+2}{0+0-1}=-2$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{1-n+2n^2}{2+3n-n^2}\right\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**

■

(3)

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{3n+1}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} n$ ไม่มีลิมิต และลิมิตอื่นๆ เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $\dfrac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$ ไม่มีลิมิต

แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^2}{3n+1}\right\}$ เป็นลำดับ**ไม่ลู่เข้า**

■

(4)

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{2^n+5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{5^n}}{\frac{2^n+5^{n-1}}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5-\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{5-\left(\frac{2}{3}\cdot 0\right)}{0+\frac{1}{5}} = 25$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{5^{n+1}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n}+5^{n-1}}\right\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**

■

2. กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ **(เติมเฉพาะคำตอบ)**

(1) $\left\{\dfrac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}\right\}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}=\frac{3}{5}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{3n^2-5n+9}{-10-3n+5n^2}\right\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**

(2) $\left\{\dfrac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1}\right\}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1}=0$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{-4n+3}{4n^3+2n^2-5n+1}\right\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**

(3) $\left\{\dfrac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4}\right\}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4} \text{ ไม่มีลิมิต}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{n^4+2n^3-4n+8}{3n^3-5n+4}\right\}$ เป็นลำดับ**ไม่ลู่เข้า**

■

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1) $\left\{(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n}}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 \le \left|(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n}}\right| \le \dfrac{1}{n}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้นโดยใช้ทฤษฎีบทบีบอัดจะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n}}\right| = 0$

และจากทฤษฎีบท 4 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{3^{n}} = 0$

■

(2) $\left\{\dfrac{\sin n}{n^{2}}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 \le \left|\dfrac{\sin n}{n^{2}}\right| \le \dfrac{1}{n^{2}}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{2}} = 0$

ดังนั้นโดยใช้ทฤษฎีบทบีบอัดจะได้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^{2}}\right| = 0$

และจากทฤษฎีบท 4 สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^{2}} = 0$

■

เฉลยกิจกรรมที่ 3

1. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x+1) = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}$

ดังนั้นเราจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลเพื่อหาลิมิตของลำดับ จะได้

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 1 จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

■

2. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$ เป็นรูปแบบยังไม่กำหนดชนิด 1^∞

ให้ $y = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

พิจารณาลอการิทึมธรรมชาติของ y

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x \\ &= x\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$

วิธีทำ

จากการใช้หลักเกณฑ์โลปิตาลในข้างต้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2(2x)-(x^2-1)(2x)}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2x}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x\left(x^2-1\right)}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x\left(x^2-1\right)}\cdot\left(-x^2\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x^2-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\ln\left[\lim_{x\to\infty} y\right] = 0$ หรือ $e^{\ln\left[\lim_{x\to\infty} y\right]} = e^0 = 1$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

ดังนั้น สรุปได้ว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและมีลิมิตเท่ากับ 1

■

3. $a_n = \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

วิธีทำ การหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$ ทำได้โดยการนำสังยุค (Conjugate) ของ $\sqrt{n^2+3n}-n$ คือ $\sqrt{n^2+3n}+n$ คูณทั้งเศษและส่วนของ $\sqrt{n^2+3n}-n$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+3n}-n\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}}+\frac{n}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1} \\
&= \frac{3}{\sqrt{(1+0)}+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) = \frac{3}{2}$

■

4. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้ **(โดยใช้ความรู้จากกรอบที่ 5)**

4.1 $a_n = \frac{(-2)^n}{n!}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{n!} = 0$

4.2 $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n}+\dfrac{5}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$

และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n = e^5$

4.3 $a_n = \dfrac{\ln n^5}{2n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n^5}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\ln n}{2n} = \dfrac{5}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n^5}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\ln n}{2n} = \dfrac{5}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = \dfrac{5}{2}\cdot 0 = 0$

4.4 $a_n = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (|x| < 1)$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n = 0 \qquad \left(\because \left|-\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{3}{4} < 1\right)$

4.5 $a_n = \sqrt[n]{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{1}{n}}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{1}{n}}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}[1\cdot 1] = 1$

4.6 $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4^n n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4n^{\frac{1}{n}}\right) = 4\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 4\cdot 1 = 4$

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 1 เรื่องลำดับของจำนวนจริง

หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการหาลิมิตของลำดับ

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2

ทักษะการคิดคำนวณ

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. ทบทวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการหาลิมิตของลำดับ ในด้านการทักษะการคิดคำนวณจบแล้ว นิสิตสามารถ

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

กรอบที่ 1

ในกรอบนี้จะทบทวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งจะต้องใช้ในหลักเกณฑ์โลปิตาลเพื่อหา ลิมิตของลำดับ

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ใช้บ่อยๆ ในหลักเกณฑ์โลปิตาลเพื่อหาลิมิตของลำดับ มีดังต่อไปนี้

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(x^c) = cx^{c-1}$
3. $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$
4. $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$
5. $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$
6. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$
8. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
9. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln x$
10. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 2\pi$
2. $f(x) = x^6$
3. $f(r) = -r$
4. $f(u) = 3u$
5. $f(v) = 4v^{10}$
6. $f(t) = t^8 + 12t^5 - 4t^4 + 10t^3 - 6t + 5$
7. $f(x) = (6x^3 - 2x)\ (7x^4 + 5x^2)$
8. $f(x) = \frac{6}{x^3}$
9. $f(x) = \sqrt{x}$
10. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$

วิธีทำ 1. $f'(x) = 0$

2. $f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$

3. $f(r) = (-1)r$ **ดังนั้น** $f'(r) = (-1)(1 \cdot r^{1-1}) = -1$

4. $f'(u) = 3(1 \cdot u^{1-1}) = 3$

5. $f'(v) = 4(10 \cdot v^{10-1}) = 40v^9$

6. $f'(t) = 8t^{8-1} + 12(5t^{5-1}) - 4(4t^{4-1}) + 10(3t^{3-1}) - 6(1) + 0$

$= 8t^7 + 60t^4 - 16t^3 + 30t^2 - 6$

7. $f'(x) = (6x^3 - 2x)(28x^3 + 10x) + (7x^4 + 5x^2)(18x^2 - 2)$

$= 294x^6 + 80x^4 - 30x^2$

8. $f(x) = 6x^{-3}$ **ดังนั้น** $f'(x) = 6(-3x^{-3-1}) = -18x^{-4}$

9. $f(x) = x^{1/2}$ **ดังนั้น** $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $$f'(x) = \frac{(x^3+6)(2x+1)-(x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3+6)^2}$$

■

นอกจากสูตรเหล่านี้แล้วจำเป็นต้องรู้จักกฎลูกโซ่ด้วย

กฎลูกโซ่ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ $F(x) = f(g(x))$ แล้ว

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

หรือเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{d(g(x))}f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุพันธ์ของ

(1) $y = \ln(2x+1)$ (2) $y = \ln\left(\dfrac{5x}{3x+1}\right)$

วิธีทำ (1) ให้ $u = 2x+1$ จะได้ $y = \ln u$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \text{ และ } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x+1) = 2$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{u})(2) = \frac{2}{2x+1}$$

(2) ให้ $u = \dfrac{5x}{3x+1}$ จะได้ $y = \ln u$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \text{ และ } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5x}{3x+1}\right) = \frac{(3x+1)\cdot 5 - 5x\cdot 3}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{15x+5-15x}{(3x+1)^2}$$

$$= \frac{5}{(3x+1)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\left[\frac{5}{(3x+1)^2}\right] = \frac{1}{\frac{5x}{3x+1}}\left[\frac{5}{(3x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{3x+1}{5x}\left[\frac{5}{(3x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{x(3x+1)} = \frac{1}{3x^2+x}$$

■

กิจกรรมที่ 1

(1) จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ จาก $y = \dfrac{2x^2-4x+3}{3x+5}$

วิธีทำ

(2) จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ จาก $y = \ln(7x+5)$

วิธีทำ

(3) จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ จาก $y = \ln\left(\dfrac{1+5x^2}{3x+2}\right)$

วิธีทำ

(ดูเฉลยในหน้าถัดไป)

เฉลยกิจกรรมที่ 1

1. ***วิธีทำ***

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x+5)(4x-4)-\left(2x^2-4x+3\right)(3)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{12x^2-12x+20x-20-6x^2+12x+9}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{6x^2+20x-11}{(3x+5)^2}$$

■

2. ***วิธีทำ*** ให้ u = 7x+5 จะได้ y = ln u ดังนั้น

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \text{ และ } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(7x+5) = 7$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{1}{u})(7) = \frac{7}{7x+5}$$

■

3. ***วิธีทำ*** ให้ $u = \dfrac{1+5x^2}{3x+2}$ จะได้ y = ln u ดังนั้น

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\ln u) = \frac{1}{u} \text{ และ } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+5x^2}{3x+2}\right) = \frac{(3x+2)(10x)-\left(1+5x^2\right)(3)}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{30x^2+20x-3+15x^2}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{45x^2+20x-3}{(3x+2)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\left[\frac{45x^2+20x-3}{(3x+2)^2}\right] = \frac{1}{\frac{1+5x^2}{3x+2}}\left[\frac{45x^2+20x-3}{(3x+2)^2}\right]$$

$$= \frac{3x+2}{1+5x^2}\left[\frac{45x^2+20x-3}{(3x+2)^2}\right]$$

$$= \frac{45x^2+20x-3}{\left(1+5x^2\right)(3x+2)}$$

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎหรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้าที่กำหนดให้ได้

กรอบที่ 1

บทนำ

การพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ โดยพิจารณาจากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์บางอนุกรม เช่น อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

โดย

$$S_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$S_4 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{41}{24}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

จะเห็นได้ว่าเป็นเรื่องยากที่เราจะหาลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ของอนุกรมอนันต์นี้

เนื่องจาก ในการประยุกต์อนุกรมอนันต์นั้น เราจะนำอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าไปใช้ ส่วนอนุกรมอนันต์ที่ไม่ลู่เข้าไม่ได้นำไปใช้ เราจึงสนใจเฉพาะอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้า และการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์เท่านั้น

ตัวอย่างเช่น อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เราสามารถพิจารณาได้ดังนี้

เนื่องจาก $n! > 3^n$ เมื่อ $n > 7$ ดังนั้น $\frac{1}{n!} < \frac{1}{3^n}$

แต่เราทราบแล้วว่า อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมเรขาคณิต

ซึ่ง $r = \frac{1}{3} < 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย และจะลู่เข้าหาจำนวนจริงค่าหนึ่งซึ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{1}{2}$

กรอบที่ 2

ในกรอบนี้ จะเสนอวิธีตรวจสอบว่าอนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้ ลู่เข้าหรือไม่ โดยการทดสอบจะมีหลายวิธี ซึ่งจะนำเสนอในรูปของทฤษฎีบท ดังต่อไปนี้

การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1 ถ้าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 1 คือ

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า

ซึ่งจะเอาไว้ใช้ทดสอบ สำหรับ**อนุกรมไม่ลู่เข้า**

ตัวอย่างที่ 1 จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+2}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(n+2)$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^3+5n-2}$

วิธีทำ

(1) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1 \neq 0$ ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+2}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

(2) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+2) = \infty \neq 0$ ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(n+2)$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

(3) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n = e^3 \neq 0$ ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

(4) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

(5) เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^3+5n-2} = 0$

ดังนั้น เราจึงไม่สามารถใช้ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎีบท 1 ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมนี้ได้ สำหรับอนุกรมที่กำหนดให้นี้ จำเป็นต้องใช้การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมวิธีอื่น ซึ่งจะได้นำเสนอต่อไป

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 1 ไม่เป็นความจริง นั่นคือ

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

ตัวอย่างเช่น

(1) อนุกรม ฮาร์มอนิก (harmonic series)

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ เป็นอนุกรมที่มี $a_n = \dfrac{1}{n}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

แต่อนุกรมนี้เป็น**อนุกรมไม่ลู่เข้า**

(2) อนุกรม $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}++\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี

ค่า $r = \dfrac{1}{2}$ และ $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$

อนุกรมนี้**เป็นอนุกรมลู่เข้า** เพราะ $r = \dfrac{1}{2} < 1$

และผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$

กิจกรรมที่ 1 ***จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อต่อไปนี้***

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{2n+3}$

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2-1}{4n^3+3n+2}$

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+(-1)^n\right)$

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n}$

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{4n^{5}}$

วิธีทำ

■

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{2n+3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{2n+3} = \infty \neq 0$ ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{2n+3}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2-1}{4n^3+3n+2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-1}{4n^3+3n+2} = \frac{1}{4} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2-1}{4n^3+3n+2}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+(-1)^n\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(1+(-1)^n\right)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+(-1)^n\right)$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{4n^5}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^5} = \lim_{n\to\infty} 2n^{\frac{5}{n}} = 2\cdot 1 = 2 \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{4n^5}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ได้

กรอบที่ 1

การทดสอบด้วยปริพันธ์ (The integral Test)

การทดสอบด้วยปริพันธ์ เป็นการนำความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบมาช่วยในการทดสอบอนุกรม รายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 **การทดสอบด้วยปริพันธ์**

ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลงบนช่วง $[a,\infty]$, $a \in I^+$ $f(n) = a_n$ ทุก $n \in I^+$ จะได้ว่า

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าขึ้นอยู่กับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ดังนี้

(1) ถ้า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ไม่ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

จากทฤษฎีบท 1 อาจจะกล่าวอีกแบบหนึ่งได้ว่า แทนที่เราจะทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า เราจะเปลี่ยนไปทดสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^{b} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b}+1\right] = 0+1 = 1 \end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

ตัวอย่างที่ 2 จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{b} - 2\right] = \infty \end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ไม่ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (1) - (2)

ตัวอย่างที่ 3 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} b - \frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

แสดงว่า $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (3)

ตัวอย่างที่ 4 จงทดสอบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

จะได้ว่า
$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{1}{2e}$$

แสดงว่า $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (4)

สิ่งที่พึงระวัง นิสิตอย่าเข้าใจผิดว่าผลบวกของอนุกรมมีค่าเท่ากับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ โดยพิจารณาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนด อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

ซึ่งเราทราบแล้วว่าเป็นอนุกรมนี้ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า โดย $a = 1$ และ $r = \frac{1}{2}$

และผลบวกของอนุกรมนี้ เท่ากับ $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

และถ้าเราจะทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ โดยใช้**การทดสอบด้วยปริพันธ์**

โดยกำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2^{x-1}}$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_3^{\infty} f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{2^{x-1}}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b 2^{1-x}\,dx \\
&= 2\lim_{b\to\infty} \int_1^b 2^{-x}\,dx \\
&= 2\lim_{b\to\infty} \int_1^b 2^{-x} \cdot \frac{d(-x)}{-1} \\
&= -2\lim_{b\to\infty} \left[\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_1^b \\
&= -\frac{2}{\ln 2} \lim_{b\to\infty} \left[2^{-b} - 2^{-1}\right] \\
&= -\frac{2}{\ln 2}\left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.443
\end{aligned}$$

ดังนั้น เราสรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ ลู่เข้า แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ และ $\int_1^{\infty} \frac{1}{2^{x-1}}\,dx$ มีค่าเท่ากัน

■

กิจกรรมที่ 1 ***จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยใช้ <u>การทดสอบด้วยปริพันธ์</u> (The integral Test)***

(1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1}$

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 3$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_3^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_3^{b} \frac{\ln x}{x}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_3^{b} \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{d(\ln x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^b \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[(\ln b)^2 - (\ln 3)^2\right] \\ &= \infty\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ ไม่ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2)

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d(2x+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[2(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_1^b\end{aligned}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{2x+1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{2b+1}-\sqrt{3}\right]$$

$$= \infty$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ ไม่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3)

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{1}{3x^2+1}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}x\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}b-\tan^{-1}\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}b-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4)

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^2 e^{-x^3}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^2 e^{-x^3}\cdot\frac{d\left(e^{-x^3}\right)}{-3x^2} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^{b} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^3}}-\frac{1}{e}\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left(0-\frac{1}{e}\right) \\
&= \frac{1}{3e}
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 2

ทักษะการคิดคำนวณ

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

โดยจะเสนอเนื้อหาทีละน้อย มีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านทักษะการคิดคำนวณ นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์ ในด้านการทักษะการคิดคำนวณจบแล้ว นิสิตสามารถบอกได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ ลู่เข้าหรือไม่ และถ้าลู่เข้าสามารถหาค่าปริพันธ์ได้

กรอบที่ 1

ในกรอบนี้ จะทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ซึ่งจะต้องใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (การทดสอบด้วยปริพันธ์)

ก่อนจะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ จะขอทบทวนสูตรปริพันธ์พื้นฐานดังนี้

$\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$

$\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

$\int e^u\,du = e^u + C$

$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ เมื่อ $a > 0$

$\int \sin u\,du = -\cos u + C$

$\int \cos u\,du = \sin u + C$

$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

$\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

$\int \dfrac{1}{u^2+a^2}\,du = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

รูปแบบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ที่จะนำไปใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (การทดสอบด้วยปริพันธ์) คือ รูปแบบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบนช่วงอนันต์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

> กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,\infty)$
> นิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ในรูปของลิมิตดังต่อไปนี้
>
> $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{.................} \ (\mathrm{I})$$

ถ้าลิมิตใน (I) หาค่าได้ จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ลู่เข้า (convergent) และค่าลิมิตที่ได้เป็นค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบนั้น ถ้าลิมิตใน (I) หาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ไม่ลู่เข้า (divergent)

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[1,\infty)$ และ $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in [1,\infty)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-2} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b}+1\right] \\ &= 0+1=1\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ ลู่เข้า และ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

■

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx$

วิธีทำ
$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x}{x^2+5} dx$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right) = 2x$

$$d\left(x^2+5\right) = 2x\ dx \quad \text{และ} \quad dx = \frac{d\left(x^2+5\right)}{2x}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x}{x^2+5} \cdot \frac{d\left(x^2+5\right)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{d\left(x^2+5\right)}{\left(x^2+5\right)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(x^2+5\right)\right]_1^b \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left(b^2+5\right) - \ln 6\right] \\ &= \infty\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx$ ไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (1)-(2)

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\ dx$

วิธีทำ

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\ dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}\ dx$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(-x^2\right) = -2x$

$$d\left(-x^2\right) = -2x\ dx \quad \text{และ}\ dx = \frac{d\left(-x^2\right)}{-2x}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\ dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}\cdot\frac{d\left(-x^2\right)}{-2x}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x^2}d\left(-x^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x^2}\right]_1^{b}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b^2}-e^{-1}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}
\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\ dx$ ลู่เข้า และ $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\ dx = \frac{1}{2e}$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (3)

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\ dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\ dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{3x^2+1}dx\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}dx
\end{aligned}$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}$

$$d\left(\sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}\ dx \quad \text{และ}\ dx = \frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น $$\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}\cdot\frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3}}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^{b}\frac{1}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}\cdot d\left(\sqrt{3}x\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}x\right]_1^b$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}b-\tan^{-1}\sqrt{3}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\sqrt{3}b-\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\,dx$ ลู่เข้า และ $\int_1^{\infty}\frac{1}{3x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ ■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (4)

กิจกรรมที่ 1

(1) จงหา $\int_1^{\infty}\frac{8x}{2x^2+3}\,dx$

วิธีทำ

(2) จงหา $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\, dx$

วิธีทำ

(3) จงหา $\int_{1}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$

วิธีทำ

(4) จงหา $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1) จงหา $\int_1^{\infty} \frac{8x}{2x^2+3}\,dx$

วิธีทำ

$$\int_1^{\infty} \frac{8x}{2x^2+3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{8x}{2x^2+3}\,dx$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right) = 4x$

$$d\left(2x^2+3\right) = 4x\,dx \quad \text{และ } dx = \frac{d\left(2x^2+3\right)}{4x}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{8x}{2x^2+5}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{8x}{2x^2+5}\cdot\frac{d\left(2x^2+3\right)}{4x}\\ &= 2\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d\left(2x^2+3\right)}{\left(2x^2+3\right)}\\ &= 2\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(2x^2+3\right)\right]_1^{b}\\ &= 2\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(2b^2+3\right)-\ln 5\right]\\ &= \infty\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} \frac{8x}{2x^2+3}\,dx$ ไม่ลู่เข้า

■

(2) จงหา $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\,dx$

วิธีทำ

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\,dx$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}(5x+3) = 5$

$$d(5x+3) = 5\,dx \quad \text{และ } dx = \frac{d(5x+3)}{5}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\cdot\frac{d(5x+3)}{5}\\ &= \frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}(5x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot d(5x+3)\\ &= \frac{2}{5}\lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{5x+3}\right]_1^{b}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{5b+3} - 2\sqrt{2}\right]$$
$$= \infty$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5x+3}}\, dx$ ไม่ลู่เข้า

■

(3) จงหา $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$

วิธีทำ

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^2 e^{-x^3}\, dx$$

พิจารณา $\frac{d}{dx}\left(-x^3\right) = -3x^2$

$$d\left(-x^3\right) = -3x^2\, dx \quad \text{และ } dx = \frac{d\left(-x^3\right)}{-3x^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^2 e^{-x^3} \cdot \frac{d\left(-x^3\right)}{-3x^2} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x^3} d\left(-x^3\right) \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x^3}\right]_1^{b} \\
&= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b^3} - e^{-1}\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{3e}
\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$ ลู่เข้า และ $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \frac{1}{3e}$

■

(4) จงหา $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

วิธีทำ

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1\right] \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1} b - \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

แสดงว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ ลู่เข้า และ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}$

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 เรื่องอนุกรมพี

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมพี ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งเป็นได้ ดังนี้

1. อนุกรมพี

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมพี ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องอนุกรมพี ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถบอกได้ว่าอนุกรมพีที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

กรอบที่ 1

การทดสอบด้วยปริพันธ์เหมาะที่จะใช้ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่เราสามารถหาปริพันธ์ได้ง่าย โดยเฉพาะอนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงคงตัว จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมพี** (p-series) ถ้า $p = 1$ เรียกว่า **อนุกรมฮาร์มอนิก** (harmonic series)

บทนิยาม 1 เราเรียกอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริงใดๆ ว่า อนุกรมพี (p-series)

ทฤษฎีบท 1 อนุกรม p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่างที่ 1

(1) อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

เป็นอนุกรม**ลู่เข้า** เพราะเป็นอนุกรมพี ที่มี $p = 3 > 1$

(2) อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

เป็นอนุกรม**ไม่ลู่เข้า** เพราะเป็นอนุกรมพี ที่มี $p = 1/3 < 1$

(3) อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

เป็นอนุกรม**ลู่เข้า** เพราะเป็นอนุกรมพี ที่มี $p = 3/2 > 1$

■

ผู้เรียนอย่าสับสน อนุกรมพีกับอนุกรมเรขาคณิตมีความแตกต่างกัน คือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

เป็น**อนุกรมพี** ซึ่งจะเห็นว่าฐานของตัวส่วนของแต่ละพจน์จะมีค่าเปลี่ยนไป (เป็น 1, 2, 3, . . .) แต่เลขชี้กำลังของทุกพจน์จะเท่ากับ p ในขณะที่

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^1} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots$$

เป็น**อนุกรมเรขาคณิต** ซึ่งจะเห็นว่าฐานของตัวส่วนของทุกพจน์เท่ากับ p แต่เลขชี้กำลังของแต่ละพจน์จะมีค่าเปลี่ยนไป (เป็น 1, 2, 3, . . .)

กิจกรรมที่ 1 ***จงเติมคำตอบลงในตารางต่อไปนี้ให้ถูกต้อง***

อนุกรม	เรขาคณิต/พี	r/p	ลู่เข้า/ไม่ลู่เข้า
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$	อนุกรมพี	$p = 2$	ลู่เข้า
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$			
3. $\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \ldots$			
4. $1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots$			
5. $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots$			
6. $1 + 2^{-3} + 3^{-3} + \ldots + n^{-3} + \ldots$			
7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{2}}$			
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$			

เฉลยกิจกรรมที่ 1

อนุกรม	เรขาคณิต/พี	r/p	ลู่เข้า/ไม่ลู่เข้า
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$	อนุกรมพี	$p = 2$	ลู่เข้า
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$	อนุกรมเรขาคณิต	$r = \frac{1}{2}$	ลู่เข้า
3. $\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n + \ldots$	อนุกรมเรขาคณิต	$r = \frac{3}{2}$	ไม่ลู่เข้า
4. $1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots$	อนุกรมพี	$p = \frac{3}{2}$	ลู่เข้า
5. $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots$	อนุกรมพี	$p = -5$	ไม่ลู่เข้า
6. $1 + 2^{-3} + 3^{-3} + \ldots + n^{-3} + \ldots$	อนุกรมพี	$p = 3$	ลู่เข้า
7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{2}}$	อนุกรมพี	$p = \frac{5}{2}$	ลู่เข้า
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$	อนุกรมพี	$p = \frac{1}{4}$	ไม่ลู่เข้า

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การข่ม (dominate)
2. การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบได้

กรอบที่ 1

บทนิยาม 1 ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมอนันต์สองอนุกรม

ถ้ามีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $a_n \le b_n$ ทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge k$ แล้ว กล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ข่ม (dominate) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ตัวอย่างที่ 1

(1) เนื่องจาก $\frac{1}{3+5^n} < \frac{1}{5^n}$ ทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge 1$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ ข่มอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^n}$

หรือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^n}$ ถูกข่มด้วยอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

(2) เนื่องจาก $n! > 3^n$ เมื่อ $n \ge 8$

ดังนั้น $\frac{1}{n!} < \frac{1}{3^n}$ เมื่อ $n \ge 8$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ข่มอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

หรือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ถูกข่มด้วยอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(3) เนื่องจาก $\frac{n}{\sqrt{n^5+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}-1}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ข่มอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$

หรือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$ ถูกข่มด้วยอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

(4) เนื่องจาก $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ หรือ $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ ข่มอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

หรือ อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ ถูกข่มด้วยอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$

■

กิจกรรมที่ 1 จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

(1) เนื่องจาก $\dfrac{1}{n^2+1} \boxed{<} \dfrac{1}{n^2}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ (..............) อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

ข่ม/ถูกข่มด้วย

(2) เนื่องจาก $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^7+1}} <$ .... $= \dfrac{n^2}{\square} = \dfrac{1}{\square}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\square}$ (..............) อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^7+1}}$

ข่ม/ถูกข่มด้วย

(3) เนื่องจาก $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} \; \square \; \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (..............) อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$

ข่ม/ถูกข่มด้วย

(4) เนื่องจาก $\dfrac{n}{2n^2-5} >$ .... $= \dfrac{\square}{\square}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\square}{\square}$ (..............) อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2-5}$

ข่ม/ถูกข่มด้วย

(5) เนื่องจาก $\dfrac{n^2+1}{n^4+1} \; \square \; \dfrac{n^2+1}{n^4} \; \square$ .... $= \dfrac{2}{n^2}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ (..............) อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$

ข่ม/ถูกข่มด้วย

■

กรอบที่ 2

บทนำ

สำหรับอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้านั้น เราทราบแล้วว่าจะเป็นอนุกรมที่มีผลบวก ซึ่งพิจารณาได้จากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมอนันต์ จะลู่เข้าหาจำนวนจริงค่าหนึ่ง และอนุกรมอนันต์นี้จะมีผลบวกเท่ากับจำนวนจริงค่านั้น

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมอนันต์ โดยอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ข่มอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ นั่นคือ มี $k \in I^+$ ซึ่ง $a_n \le b_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge k$

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่มีผลบวก (ลู่เข้า) จะทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่มีผลบวก (ลู่เข้า) ด้วย

และถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่มีผลบวก (ไม่ลู่เข้า) ก็จะทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่มีผลบวก (ไม่ลู่เข้า) ด้วยเช่นกัน

การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ (The comparison Test)

ทฤษฎีบท 1

ให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมอนันต์สองอนุกรม และมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $a_n \le b_n$ ทุกจำนวนเต็มบวก $n \ge k$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 2 จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

วิธีทำ

(1) เนื่องจาก $\frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n}$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{3}$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) เนื่องจาก $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \frac{1}{2}$ ซึ่งไม่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า จึงทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) เนื่องจาก $n! > 3^n$ เมื่อ $n \geq 8$

ดังนั้น $\frac{1}{n!} < \frac{1}{3^n}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{3}$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4) เนื่องจาก $\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$

และเราทราบว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

โดยที่ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมพีที่มี $p = 2 > 1$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(5) เนื่องจาก $n^n > n^2$ เมื่อ $n \geq 3$

ดังนั้น $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ และอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี $p = 2$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

กิจกรรมที่ 2 ***จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า <u>โดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</u>***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3n^2+4n+1}$

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{3n-1}$

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1) เนื่องจาก $\dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$ **ถูกข่มด้วย** อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

(2) เนื่องจาก $\dfrac{n^2}{\sqrt{n^7+1}} < \dfrac{n^2}{\sqrt{n^7}} = \dfrac{n^2}{n^{\frac{7}{2}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ **ข่ม** อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^7+1}}$

(3) เนื่องจาก $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ **ถูกข่มด้วย** อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$

(4) เนื่องจาก $\dfrac{n}{2n^2-5} > \dfrac{n}{2n^2} = \dfrac{1}{2n}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ **ถูกข่มด้วย** อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2-5}$

(5) เนื่องจาก $\dfrac{n^2+1}{n^4+1} < \dfrac{n^2+1}{n^4} < \dfrac{n^2+n^2}{n^4} = \dfrac{2n^2}{n^4} = \dfrac{2}{n^2}$

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ **ข่ม** อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$

■

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1)

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{10}{3n^2+4n+1} < \frac{10}{3n^2}$

และเราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3n^2} = \frac{10}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมพีที่มี $p = 2 > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3n^2+4n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2)

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{2^n}{1+3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{2}{3}$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3)

วิธีทำ เนื่องจาก $(n+1)! > 3^n$ เมื่อ $n \geq 4$

ดังนั้น $\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{3^n}$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{1}{3}$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4)

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{3\sqrt{n}}{3n-1} > \dfrac{3\sqrt{n}}{3n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

และอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \dfrac{1}{2}$ ซึ่งไม่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt{n}}{3n-1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5)

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^7+1}} < \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \dfrac{n}{n^{\frac{7}{3}}} = \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

และอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \dfrac{4}{3} > 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้า
ของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎหรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งเป็นตอนย่อยๆ ดังนี้

1. ทบทวนความหมายและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลัง
2. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถ

1. หาอัตราส่วนของ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ โดยทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ เมื่อกำหนด a_n ให้

2. ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม โดยใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วนได้

กรอบที่ 1

ในกรอบนี้ จะทบทวนความหมายและสมบัติทางพีชคณิตของเลขยกกำลัง เพื่อเป็นการเตรียมพร้อมสำหรับการทดสอบด้วยอัตราส่วนต่อไป

ทบทวนเลขยกกำลัง

ในทางพีชคณิต เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม หรือเป็นจำนวนตรรกยะ และฐานเป็นจำนวนจริงบวก นิยามดังนี้

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

(1) $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n}$

(2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n}}$

(3) $a^0 = 1$

และถ้า p, q เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $q \geq 2$ แล้ว

(4) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

(5) $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง มีสมบัติพื้นฐาน ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $a > 0$, $b > 0$ และ m, n เป็นจำนวนจริง แล้ว

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ ต่อไปนี้ จงหาอัตราส่วนของ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ โดยเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $\left\{\dfrac{n^{10}}{10^n}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{2^n + 5}{3^n}\right\}$ (3) $\left\{\dfrac{5^n}{n\left(3^{n+1}\right)}\right\}$

วิธีทำ

(1) ให้ $a_n = \dfrac{n^{10}}{10^n}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}}}{\dfrac{n^{10}}{10^n}}$$
$$= \frac{(n+1)^{10}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n^{10}}$$
$$= \frac{(n+1)^{10}}{10^n \cdot 10} \cdot \frac{10^n}{n^{10}}$$
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}$$

■

(2) ให้ $a_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^n+5}{3^n}}$$
$$= \frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n+5}$$
$$= \frac{2^{n+1}+5}{3(2^n+5)}$$
$$= \frac{2^n\left(2+\dfrac{5}{2^n}\right)}{3\cdot 2^n\left(1+\dfrac{5}{2^n}\right)} = \frac{\left(2+\dfrac{5}{2^n}\right)}{3\left(1+\dfrac{5}{2^n}\right)}$$

■

(3) ให้ $a_n = \dfrac{5^n}{n\left(3^{n+1}\right)}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{(n+1)\left(3^{n+2}\right)}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)\left(3^{n+2}\right)}}{\dfrac{5^n}{n\left(3^{n+1}\right)}}$$

$$= \frac{5^{n+1}}{(n+1)\left(3^{n+2}\right)} \cdot \frac{n\left(3^{n+1}\right)}{5^{n}}$$

$$= \frac{5^{n} \cdot 5}{(n+1) \cdot 3^{n} \cdot 3^{2}} \cdot \frac{n \cdot 3^{n} \cdot 3}{5^{n}}$$

$$= \frac{5n}{3(n+1)}$$

■

กิจกรรมที่ 1 กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ ***ต่อไปนี้ จงหาอัตราส่วนของ*** $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ***โดยเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย***

(1) $\left\{\frac{(2n)^5}{3^{n+1}}\right\}$

วิธีทำ ให้ $a_n =$ .... ดังนั้น $a_{n+1} =$ ....

ดังนั้น $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

(2) $\left\{\frac{5^n + 4}{7^n}\right\}$

วิธีทำ ให้ $a_n =$ .... ดังนั้น $a_{n+1} =$ ....

ดังนั้น $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

(3) $\left\{\frac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 5^{n+2}}\right\}$

วิธีทำ ให้ $a_n =$ .... ดังนั้น $a_{n+1} =$ ....

ดังนั้น $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

กรอบที่ 2

บทนำ

อนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้า หรืออนุกรมที่หาผลบวกได้นั้น a_n จะต้องมีค่าลดลงเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ มี $k \in I^+$ ซึ่ง ถ้า $n \geq k$ แล้ว

$$a_{n+1} < a_n$$

หรือ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

ดังนั้น เราจึงสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

การทดสอบด้วยอัตราส่วน (The ratio Test)

ทฤษฎีบท 1

ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก และ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้า $L > 1$ แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

(3) ถ้า $L = 1$ ไม่มีผลสรุป

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(n+3)!}{3!n!3^n} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}} \cdot \frac{3!n!3^n}{(n+3)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)(n+3)!}{3!(n+1)n!3^{n+1}} \cdot \frac{3!n!3^n}{(n+3)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (1)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{10^n}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(2n)!}{10^n} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{\left(2(n+1)\right)!}{10^{n+1}} = \frac{(2n+2)!}{10^{n+1}}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10}(2n+2)(2n+1)$$
$$= \infty$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{10^n}$ ไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (2)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{2^n+5}{3^n} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n+5}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{3\left(2^n+5\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{2^n}}{\frac{3\left(2^n+5\right)}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{5}{2^n}\right)}{3\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2+5\cdot 0}{1+5\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{2}{3} < 1$$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (3)

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \qquad (e \approx 2.71828)$$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (4)

กิจกรรมที่ 2 ***จงใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อต่อไปนี้***

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4!n!4^n}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n =$ .... ดังนั้น $a_{n+1} =$ ....

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{4!n!4^n}$ เป็นอนุกรม.............

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

วิธีทำ

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5}{5^n + 3}$

วิธีทำ

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!}$

วิธีทำ

■

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{(2n)^5}{3^{n+1}}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{\left(2(n+1)\right)^5}{3^{n+2}} = \dfrac{(2n+2)^5}{3^{n+2}}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(2n+2)^5}{3^{n+2}}}{\dfrac{(2n)^5}{3^{n+1}}}$$
$$= \frac{(2n+2)^5}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(2n)^5}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^5$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$$

■

(2)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{5^n + 4}{7^n}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \dfrac{5^{n+1} + 4}{7^{n+1}}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{5^{n+1}+4}{7^{n+1}}}{\dfrac{5^n+4}{7^n}}$$
$$= \frac{5^{n+1}+4}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{5^n+4}$$
$$= \frac{5^{n+1}+4}{7\left(5^n+4\right)}$$
$$= \frac{5^n\left(5 + \dfrac{4}{5^n}\right)}{7 \cdot 5^n\left(1 + \dfrac{4}{5^n}\right)}$$
$$= \frac{\left(5 + \dfrac{4}{5^n}\right)}{7\left(1 + \dfrac{4}{5^n}\right)}$$

■

(3)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 5^{n+2}}$ **ดังนั้น** $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 5^{n+3}}$

ดังนั้น
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 5^{n+3}}}{\dfrac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 5^{n+2}}}$$
$$= \frac{2^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 5^{n+3}} \cdot \frac{n^2 5^{n+2}}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{2n^2}{5(n+1)^2}$$
$$= \frac{2n^2}{5n^2 + 10n + 5}$$

■

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1)

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(n+1)!}{4!n!4^n} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{4!(n+1)!4^{n+1}}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{4!(n+1)!4^{n+1}}\cdot\frac{4!n!4^n}{(n+1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+4}\\ &= \frac{1}{4} < 1\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4!n!4^n}$ ลู่เข้า

■

(2)

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\\ &= 4 > 1\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}$ ไม่ลู่เข้า

■

(3)

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{3^n + 5}{5^n + 3} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1} + 5}{5^{n+1} + 3}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5}{5^{n+1} + 3} \cdot \frac{5^n + 3}{3^n + 5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\left(3 + \frac{5}{3^n}\right)}{5^n\left(5 + \frac{3}{5^n}\right)} \cdot \frac{5^n\left(1 + \frac{3}{5^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3 + \frac{5}{3^n}\right)\left(1 + \frac{3}{5^n}\right)}{\left(5 + \frac{3}{5^n}\right)\left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}$$

$$= \frac{(3+0)(1+0)}{(5+0)(1+0)} \quad = \frac{3}{5} < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5}{5^n + 3}$ ลู่เข้า

■

(4)

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(2n)^n}{n!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{\left(2\,(n+1)\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+2)^n}{(n+1)(2n)^n}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2e > 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!}$ ไม่ลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิตได้

กรอบที่ 1

⦿ พิจารณาอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$

เราทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ โดยใช้**การทดสอบด้วยอัตราส่วน** ได้ดังนี้

กำหนดให้ $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\\ &= 1\end{aligned}$$

โดยที่ลิมิตเท่ากับ 1 จึงไม่สามารถสรุปได้ว่า อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

⦿ พิจารณาอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

เราจะทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ โดยใช้**การทดสอบด้วยอัตราส่วน**เช่นเดียวกัน โดย

กำหนดให้ $a_n = \frac{n+1}{n(n+2)}$ ดังนั้น $a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}$

จะได้
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)(n+3)}\cdot\frac{n(n+2)}{n+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

โดยที่ลิมิตเท่ากับ 1 จึงไม่สามารถสรุปได้ว่า อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

จากตัวอย่าง จะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ทั้งสองได้ ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ในกรณีตัวอย่างข้างต้น

การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต (The limit comparison Test)

ทฤษฎีบท 1 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรม และมีจำนวนเต็มบวก k ซึ่ง $a_n > 0$ และ $b_n > 0$ เมื่อ $n > k$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าพร้อมกัน

(2) ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้ากัน

(3) ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ไม่ลู่เข้าแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 1

(1) จากการทดสอบด้วยอัตราส่วน อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ มีลิมิตเท่ากับ 1 จึงยังไม่มีผลสรุป แต่ถ้าเราทดสอบโดยใช้ ทฤษฎีบท 1

โดยเลือก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรม p, p = 2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)} \cdot n^2 \\ &= 2 > 0\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) จากการทดสอบด้วยอัตราส่วน อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ มีลิมิตเท่ากับ 1 จึงยังไม่มีผลสรุป แต่ถ้าเราทดสอบโดยใช้ ทฤษฎีบท 1

โดยเลือก $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า (อนุกรม p, p = 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} \cdot n$$
$$= 1$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

ตัวอย่างที่ 2 จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ **โดยใช้ทฤษฎีบท 1**

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+5)}$

วิธีทำ

(1) กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2^n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - 1}}{\frac{1}{2^n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$$
$$= \frac{1}{1-0} = 1 > 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (1)

(2) กำหนดให้ $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

⊙ ถ้าเลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p = \dfrac{3}{2})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} (\ln n)^2 = \infty$$

ซึ่งไม่สามารถสรุปได้ว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

⊙ ถ้าเลือกอนุกรมไม่ลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p = 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} = 0$$

ก็ยังสรุปไม่ได้ว่า อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

⊙ ถ้าเลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n^p}$ โดยที่ $1 < p < 3/2$ ณ ที่นี้ให้ $p = 5/4$ จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{1}{4}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\ln n)\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{4} n^{-\frac{3}{4}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{8(\ln n)}{n^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{4}n^{-\frac{3}{4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{32}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (2)

(3) กำหนดให้ $a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+5)}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+5)}$ มีลักษณะไม่ลู่เข้า

เลือกอนุกรมไม่ลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p = 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)(n+5)}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+5)} \cdot n$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+5)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (3)

กิจกรรมที่ 1 ***จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในข้อต่อไปนี้ โดยใช้การเปรียบเทียบลิมิต***

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$

วิธีทำ

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2+3}{\left(n^2+1\right)(2n+5)}$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{n+2}{n3^n}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3^n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต $\left(r = \frac{1}{3} < 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n3^n}}{\frac{1}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+2)}{n3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n3^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2)

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ซึ่งเป็นอนุกรมพี $\left(p = \frac{3}{2} > 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2(\ln n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$= 2\cdot 0$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3)

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{4n^2+3}{(n^2+1)(2n+5)}$

อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+3}{(n^2+1)(2n+5)}$ มีลักษณะไม่ลู่เข้า

เลือกอนุกรมไม่ลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p = 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n^2+3}{(n^2+1)(2n+5)}}{\dfrac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2+3)}{(n^2+1)(2n+5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n}{2n^3+5n^2+2n+5}$$

$$= 2 > 0$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2+3}{(n^2+1)(2n+5)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 3 เรื่องการทดสอบการลู่เข้า ของอนุกรมอนันต์

หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 เรื่องการทดสอบโดยราก

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบโดยราก ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบโดยราก

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องการทดสอบโดยราก ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเรื่องการทดสอบโดยราก ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม โดยใช้การทดสอบโดยรากได้

กรอบที่ 1

พิจารณาอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+3}{3n+5}\right)^{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^{n}}$ และอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{3^{5n+2}}$

โดยจะเห็นว่า อนุกรมอนันต์ทั้งสาม เป็นอนุกรมที่มีพจน์ทั่วไปในรูปยกกำลัง ซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร วิธีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้นำเสนอไปแล้วนั้น อาจจะทำได้ยากสำหรับอนุกรมในลักษณะนี้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะเหมาะสำหรับการทดสอบอนุกรมในลักษณะดังกล่าว

การทดสอบโดยราก (The root test)

ทฤษฎีบท 1 ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่งทุกพจน์เป็นจำนวนจริงบวก และ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$ จะได้ว่า

(1) ถ้า $L < 1$ แล้ว อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

(2) ถ้า $L > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า

(3) ถ้า $L = 1$ ไม่มีผลสรุป

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้**ทฤษฎีบท 1** ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+3}{3n+5}\right)^{n}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^{n}}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5}\right)^{n}$

วิธีทำ

(1) ให้ $a_n = \left(\frac{6n+3}{3n+5}\right)^{n}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{6n+3}{3n+5}\right)^{n}} = \frac{6n+3}{3n+5}$ $\quad\left(\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a\right)$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{3n+5} = \frac{6}{3} = 2 > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+3}{3n+5}\right)^{n}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า ■

(2) ให้ $$a_n = \frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^n}$$

ดังนั้น $$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^n}} = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\ln(n+1)\right)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) ให้ $$a_n = \left(\frac{n}{5}\right)^n$$

ดังนั้น $$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{5}\right)^n}$$

$$= \left[\left(\frac{n}{5}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{5}$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5} = \infty$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

การใช้การทดสอบโดยรากสำหรับบางอนุกรม จำเป็นต้องใช้ความรู้เรื่องรูปแบบยังไม่กำหนด คำนวณหาลิมิตที่อยู่ในรูป

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{c}{n}} \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่}$$

ซึ่งเป็นรูปแบบยังไม่กำหนดที่อยู่ในรูป ∞^0 และจากการคำนวณ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{c}{n}} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จงทดสอบอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

วิธีทำ

ให้ $a_n = \frac{5^n}{n^5}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^5}} = \frac{5}{n^{\frac{5}{n}}}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^{\frac{5}{n}}}\right) = \frac{5}{1} = 5 > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

กิจกรรมที่ 1 จงใช้**ทฤษฎีบท 1** ทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{4n-1}\right)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n =$ .... ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} =$ ....

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^{n+1}}$

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{4n-1}\right)^n$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+3}{4n-1}\right)^n} = \dfrac{2n+3}{4n-1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{4n-1} = \dfrac{1}{2} < 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+3}{4n-1}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{n^n}{5^{n+1}}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{5^{n+1}}} = \dfrac{n}{5^{1+\frac{1}{n}}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{5^{1+\frac{1}{n}}} = \infty$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{5^{n+1}}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{2^{3n+1}}{n^n}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1}}{n^n}}$

$$= \left[\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{\left(2^{3n+1}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = 0 < 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{3n+1}}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4)

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n^3}} = \dfrac{3}{n^{\frac{3}{n}}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^{\frac{3}{n}}}\right) = \dfrac{3}{1} = 3 > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 6 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์
และอนุกรมแมคลอริน

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 6 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์
และอนุกรมแมคลอริน

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์
และอนุกรมแมคลอริน

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 1

การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ เนื้อหาการเรียนรู้แบ่งได้ ดังนี้

1. การหาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้
2. การหาอนุกรมแมคลอรินที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้
3. การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูป เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร จบแล้ว นิสิตสามารถ

1. หาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

2. หาอนุกรมแมคลอรินที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

3. หาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินได้

กรอบที่ 1

ในหน่วยการเรียนที่ 5 เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการแทนฟังก์ชันบางฟังก์ชันด้วยอนุกรมกำลัง ซึ่งฟังก์ชันที่ได้ศึกษาไปแล้ว เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $g(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, $h(x) = \frac{1}{3-x}$ เป็นต้น ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\frac{1}{1-\square}$

สำหรับหน่วยการเรียนนี้จะเป็นการขยายแนวคิด กล่าวคือเราสามารถแทนฟังก์ชันใดๆ ด้วยอนุกรมกำลังได้หรือไม่ ถ้าได้ จะหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมได้อย่างไร

พิจารณา

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots$$

หาอนุพันธ์ของ $f(x)$ และอนุพันธ์ของแต่ละพจน์จะได้

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \ldots$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \ldots$$

$$\vdots$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับ n คือ

$f^{(n)}(x) = n!\,a_n +$ ผลบวกของพจน์ที่มี $(x-a)$ เป็นตัวประกอบ

ถ้าให้ $x = a$ จะได้

$$f(a) = a_0$$

$$f'(a) = a_1$$

$$f''(a) = 1\cdot 2a_2$$

$$f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3a_3$$

และในรูปทั่วไป

$$f^{(n)}(a) = n!\,a_n$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ที่ n ของอนุกรมกำลังที่ใช้แทนฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{เมื่อ } n = 0, 1, 2, \ldots$$

เพราะฉะนั้นถ้าสามารถแทน $f(x)$ ด้วยอนุกรมกำลัง แล้วอนุกรมกำลังนั้นก็คือ

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

บทนิยาม 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วงเปิด I, $a \in I$ สำหรับทุก $x \in I$ เราเรียกอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

ว่า**อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ที่ก่อกำเนิด (generate) จาก f ที่ $x = a$ และเรียกอนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดจาก f ที่ $x = 0$ อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

ว่า**อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series)

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ***<u>อนุกรมเทย์เลอร์</u>*** ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

(1) $f(x) = \ln x \qquad x = 1$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x = 2$

วิธีทำ

(1) ให้ $f(x) = \ln x$ จะได้

$f(x) = \ln x$ ดังนั้น $f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ ดังนั้น $f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2}$ ดังนั้น $f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3}$ ดังนั้น $f'''(1) = 2 = 2!$

$f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$ ดังนั้น $f^{(4)}(1) = -6 = -3!$

$f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$ ดังนั้น $f^{(5)}(1) = 24 = 4!$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \ln x$ ที่ $x = 1$ คือ

$$\begin{aligned}
\ln x &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots \\
&= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{3!(x-1)^4}{4!} + \ldots \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^n(x-1)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|x-1\right|$$
$$= \left|x-1\right|$$

ให้ $\left|x-1\right| < 1$ จะได้ $0 < x < 2$

⊙ ถ้า $x = 0$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ ไม่ลู่เข้า (อนุกรม p, $p = 1$)

⊙ ถ้า $x = 2$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ ไม่ลู่เข้า (อนุกรม p, $p = 1$)

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(0, 2)$ รัศมีการลู่เข้า 1

■

(2) ให้

$f(x) = \frac{1}{x}$	ดังนั้น $f(2) = \frac{1}{2}$
$f'(x) = -x^{-2}$	ดังนั้น $f'(2) = -\frac{1}{2^2}$
$f''(x) = 2x^{-3}$	ดังนั้น $f''(2) = \frac{2}{2^3}$
$f'''(x) = -6x^{-4}$	ดังนั้น $f'''(2) = -\frac{6}{2^4} = -\frac{3!}{2^4}$
$f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$	ดังนั้น $f^{(4)}(2) = \frac{24}{2^5} = \frac{4!}{2^5}$
$\vdots$	$\vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่ $x = 2$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2!}{2^3 \cdot 2!}(x-2)^2 - \frac{3!}{2^4 \cdot 3!}(x-2)^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}$

ให้ $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+2}(x-2)^n}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}\right| \\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|x-2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|x-2\right|\end{aligned}$$

ให้ $\dfrac{1}{2}\left|x-2\right| < 1$ หรือ $\left|x-2\right| < 2$ จะได้ $0 < x < 4$

⊙ ถ้า $x = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-2)^{n-1}}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}2^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \quad \text{ไม่ลู่เข้า}\end{aligned}$$

⊙ ถ้า $x = 4$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{n-1}}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} \qquad \text{ไม่ลู่เข้า}\end{aligned}$$

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(0, 4)$ รัศมีการลู่เข้า 2

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (1) – (3)

กรอบที่ 2

เนื่องจากอนุกรมแมคลอรินของ f คืออนุกรมเทย์เลอร์ของ f ที่ $x = 0$ ซึ่งสามารถหาได้ง่ายกว่า ดังนั้นโดยทั่วไป เราจะสร้างอนุกรมยกกำลังที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชัน f เป็นอนุกรมแมคลอริน ยกเว้นในกรณีที่ f(0) หรือ อนุพันธ์อันดับต่างๆ ของ f เมื่อ $x = 0$ หาค่าไม่ได้ (ดังเช่น ตัวอย่างที่ 1) เราจึงหาอนุกรมยกกำลังที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชัน f เป็นอนุกรมเทย์เลอร์

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ***อนุกรมแมคลอริน*** ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = \sin x$

วิธีทำ

(1) ให้ $f(x) = e^x$ จะได้

$f(x) = e^x$ ดังนั้น $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ ดังนั้น $f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x$ ดังนั้น $f''(0) = 1$

$\vdots$ $\qquad\qquad\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = e^x$ คือ

$$
\begin{aligned}
e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|x\right| = 0 < 1 \quad \text{สำหรับทุก } x \in R
\end{aligned}
$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

(2) ให้ $f(x) = \sin x$ จะได้

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = \sin x & \text{ดังนั้น} & f(0) & = 0 \\
f'(x) = \cos x & \text{ดังนั้น} & f'(0) & = 1 \\
f''(x) = -\sin x & \text{ดังนั้น} & f''(0) & = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & \text{ดังนั้น} & f'''(0) & = -1 \\
f^{4}(x) = \sin x & \text{ดังนั้น} & f^{4}(0) & = 0 \\
\vdots & & & \vdots
\end{array}
$$

เนื่องจากอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ 0 มีค่าซ้ำเป็นวัฏจักร คือ 0, 1, 0, –1 ดังนั้นเราสามารถเขียนอนุกรมแมคลอรินได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sin x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \left| x^2 \right| = 0 < 1 \quad \text{สำหรับทุก } x \in R
\end{aligned}
$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞ ■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 2 ข้อ (1) – (3)

กิจกรรมที่ 1 จงหา ***อนุกรมเทย์เลอร์*** ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

(1) $f(x) = e^{-x}$ $\qquad x = -2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^{-x}$ ดังนั้น $f(-1) = e^{-(-2)} = e^{2}$

$f'(x) = -e^{-x}$ ดังนั้น $f'(-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f''(x) = \ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น $f''(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$f'''(x) = \ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น $f'''(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \ldots\ldots\ldots$ ที่ $x = \ldots\ldots$ คือ

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม ....

ให้ $f_n(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าคือ .... รัศมี..............

■

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $x = 1$

วิธีทำ

(3) $f(x) = \cos x$ $\qquad$ $x = \pi$

วิธีทำ

กิจกรรมที่ 2 จงหา ***อนุกรมแมคลอริน*** ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

(1) $f(x) = \cos 2x$

วิธีทำ

(2) $f(x) = \ln(1+x)$

วิธีทำ

(3) $f(x) = e^{3x}$

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^{-x}$ ดังนั้น $f(-2) = e^{-(-2)} = e^{2}$

$f'(x) = -e^{-x}$ ดังนั้น $f'(-2) = -e^{-(-2)} = -e^{2}$

$f''(x) = e^{-x}$ ดังนั้น $f''(-2) = e^{-(-2)} = e^{2}$

$f'''(x) = -e^{-x}$ ดังนั้น $f'''(-2) = -e^{-(-2)} = -e^{2}$

$\vdots$ $\vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = e^{-x}$ ที่ $x = -2$ คือ

$$\begin{aligned} e^{-x} &= f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3 + \ldots \\ &= e^2 - e^2(x+2) + \frac{e^2(x+2)^2}{2!} - \frac{e^2(x+2)^3}{3!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^2 (x+2)^n}{n!} \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^2 (x+2)^n}{n!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^2 (x+2)^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} e^2 (x+2)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} e^2 (x+2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^n e^2 (x+2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|x+2\right| \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ $\mathbb{R}$ รัศมี ∞

■

(2)

วิธีทำ ให้ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ดังนั้น $f(1) = 1$

$f'(x) = -x^{-2}$ ดังนั้น $f'(1) = -1$

$f''(x) = 2x^{-3}$ ดังนั้น $f''(1) = 2 = 2!$

$f'''(x) = -6x^{-4}$ ดังนั้น $f'''(1) = -6 = -3!$

$f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$ ดังนั้น $f^{(4)}(1) = 24 = 4!$

$\vdots$ $\vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่ $x = 1$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

ให้ $f_n(x) = (-1)^n (x-1)^n$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} (x-1)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{(-1)^n (x-1)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|x-1\right| \\ &= \left|x-1\right|\end{aligned}$$

ให้ $\left|x-1\right| < 1$ จะได้ $0 < x < 2$

⊙ ถ้า $x = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \qquad \text{ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า}\end{aligned}$$

⊙ ถ้า $x = 2$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad \text{ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า}\end{aligned}$$

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(0, 2)$ รัศมีการลู่เข้า 1

■

(3)

วิธีทำ ให้ $f(x) = \cos x$ ดังนั้น $f(\pi) = -1$

$f'(x) = -\sin x$ ดังนั้น $f'(\pi) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ ดังนั้น $f''(\pi) = 1$

$f'''(x) = \sin x$ ดังนั้น $f'''(\pi) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ ดังนั้น $f^{(4)}(\pi) = -1$

$\vdots$ $\vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \cos x$ ที่ $x = \pi$ คือ

$$\cos x = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \dots$$
$$= -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}(x-\pi)^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-\pi)^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(x-\pi)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= 0 < 1 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in R$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1)

วิธีทำ ให้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos 2x & &\text{ดังนั้น} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= -2\sin 2x & &\text{ดังนั้น} & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= -4\cos 2x & &\text{ดังนั้น} & f''(0) &= -4\\
f'''(x) &= 8\sin 2x & &\text{ดังนั้น} & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= 16\cos 2x & &\text{ดังนั้น} & f^{(4)}(0) &= 16\\
&\vdots & & & &\vdots
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \cos 2x$ คือ

$$
\begin{aligned}
\cos 2x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots\\
&= 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{64x^6}{6!} + \dots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$

ให้ $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{(2n)!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n 4^n x^{2n}}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{(2n+2)(2n+1)}\left|x^2\right|\\
&= 0 < 1 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in R
\end{aligned}
$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

(2)

วิธีทำ ให้ $f(x) = \ln(1+x)$ ดังนั้น $f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ ดังนั้น $f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$ ดังนั้น $f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ ดังนั้น $f'''(0) = 2 = 2!$

$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$ ดังนั้น $f^{(4)}(0) = -6 = -3!$

$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}$ ดังนั้น $f^{(5)}(0) = 24 = 4!$

$\vdots$ $\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \ln(1+x)$ คือ

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\
&= 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!x^3}{4!} + \ldots \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

ให้ $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(-1)^n x^{n+1}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\left|x\right| \\
&= \left|x\right|
\end{aligned}$$

ให้ $\left|x\right| < 1$ จะได้ $-1 < x < 1$

⊙ ถ้า $x = -1$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} f_n(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n+1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

⊙ ถ้า $x = 1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า (ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(-1, 1]$ รัศมีการลู่เข้า 1

■

(3)

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x} && \text{ดังนั้น} \quad f(0) = 1 \\ f'(x) &= 3e^{3x} && \text{ดังนั้น} \quad f'(0) = 3 \\ f''(x) &= 9e^{3x} && \text{ดังนั้น} \quad f''(0) = 9 \\ f'''(x) &= 27e^{3x} && \text{ดังนั้น} \quad f'''(0) = 27 \\ &\vdots && \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = e^{3x}$ คือ

$$\begin{aligned} e^{3x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + 3x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{27x^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(3x)^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(3x)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3x)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} |x| \\ &= 0 < 1 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in R \end{aligned}$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน

หน่วยการเรียนที่ 6 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์
และอนุกรมแมคลอริน

หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์
และอนุกรมแมคลอริน

ลักษณะข้อบกพร่องด้านที่ 3

การประยุกต์

คำชี้แจง

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนหน่วยนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้แก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการประยุกต์ ของนิสิตชั้นปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์ ซึ่งนิสิตสามารถศึกษาเนื้อหาด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ โดยมีตัวอย่างและกิจกรรมให้นิสิตทำ และเฉลยคำตอบให้ทราบทันที ทำให้นิสิตทราบว่าคำตอบของตนถูกหรือผิด และสามารถแก้ไขความเข้าใจผิดของตนได้ทันที

คำแนะนำสำหรับนิสิต

1. บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการประยุกต์ นิสิตสามารถศึกษาด้วยตนเอง มีเนื้อหา ตัวอย่าง กิจกรรม และเฉลยคำตอบของกิจกรรม

2. นิสิตควรมีสมาธิ และความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ในขณะศึกษาบทเรียน ไม่เปิดดูเฉลยคำตอบก่อนจนกว่านิสิตจะทำกิจกรรมเสร็จ แล้วจึงค่อยเปิดดูเฉลยคำตอบ

3. ขอให้นิสิตทำกิจกรรมด้วยความมั่นใจ ถ้าทำไม่ได้หรือสงสัยก็พยายามดูเนื้อหาที่ผ่านมา และนิสิตสามารถตรวจดูเฉลยคำตอบได้ทันทีหลังจากที่นิสิตทำกิจกรรมเสร็จแล้ว

4. เมื่อนิสิตได้ศึกษาและทราบความก้าวหน้าของตนแล้ว ให้เก็บบทเรียนสำเร็จรูปส่งคืนอาจารย์ผู้สอน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูป เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน ในด้านการประยุกต์จบแล้ว นิสิตสามารถ

1. หาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. ใช้ความรู้เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน หาค่าปริพันธ์ที่กำหนดให้ได้

กรอบที่ 1

พิจารณา $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ หรือ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ ฯลฯ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถหาค่าปริพันธ์เหล่านี้ได้โดยใช้เทคนิคการปริพันธ์ที่ผู้เรียนเคยศึกษาในรายวิชาแคลคูลัส 1 ดังนั้นปัญหาที่น่าสนใจก็คือ เราจะมีวิธีการใดที่สามารถหาค่าปริพันธ์เหล่านี้ได้

สาเหตุหนึ่งที่ทำให้อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินมีความสำคัญ คือ ช่วยให้เราสามารถหาปริพันธ์เหล่านี้ได้ ดังนั้น เราจะสร้างอนุกรมยกกำลังที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชัน f เป็นอนุกรมแมคลอรินสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้

ตาราง 1 ที่แสดงต่อไปนี้ เป็นการรวบรวมอนุกรมแมคลอรินที่เราใช้บ่อยครั้ง

อนุกรมแมคลอริน	ช่วงของการลู่เข้า
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + x^3 + \ldots$	$-1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$	$-1 \le x \le 1$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา**อนุกรมแมคลอริน**ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยใช้ตาราง 1

(1) $f(x) = e^{-x}$

(2) $f(x) = \sin(-2x)$

(3) $f(x) = \cosh x$

(4) $f(x) = x\sin x$

(5) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

วิธีทำ

(1) เนื่องจาก $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

ดังนั้น จากการแทน x ด้วย $-x$ จะได้ว่า

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } -\infty < -x < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

■

(2) เนื่องจาก $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

ดังนั้น $\sin(-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^3}{3!} + \frac{(-2x)^5}{5!} - \frac{(-2x)^7}{7!} + \ldots$ เมื่อ $-\infty < -2x < \infty$

$$= -2x + \frac{(2x)^3}{3!} - \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^7}{7!} - \frac{(2x)^9}{9!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

หรืออาจจะใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\sin(-2x) = -\sin(2x)$$

ดังนั้น $\sin(-2x) = -\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots\right]$

$$= -2x + \frac{(2x)^3}{3!} - \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^7}{7!} - \frac{(2x)^9}{9!} + \ldots$$

■

(3) เนื่องจาก $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ และ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

ดังนั้น $\cosh x = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^6}{6!} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

■

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (1) – (2)

(4) เนื่องจาก $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

ดังนั้น

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!} \qquad \text{เมื่อ } -\infty < x < \infty$$

■

(5) เนื่องจาก $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ และ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \text{เมื่อ } -1 < x \le 1$$

ดังนั้น จากการแทน x ด้วย $-x$ จะได้ว่า

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \ldots \qquad \text{เมื่อ } -1 < -x < 1$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

ดังนั้น

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

ให้นิสิตทำกิจกรรมที่ 1 ข้อ (3) - (4)

■

กิจกรรมที่ 1 จงหา ***อนุกรมแมคลอริน*** พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $f(x) = \cos\left(x^2\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos x =$ ....

ดังนั้น จากการแทน x ด้วย .... จะได้ว่า

$\cos\left(x^2\right) =$ ....

(2) $f(x) = \sinh(2x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sinh 2x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$

และ $e^{x} =$

ดังนั้น $e^{2x} =$

และ $e^{-2x} =$

ดังนั้น $\sinh 2x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$

$=$

(3) $f(x) = x^2 \cos(2x)$

วิธีทำ

(4) $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

วิธีทำ

กรอบที่ 2

ในกรอบนี้ เราจะใช้ความรู้ที่ได้ศึกษาจากกรอบที่ 1 มาช่วยในการหาปริพันธ์ ซึ่งไม่สามารถหาได้โดยการใช้เทคนิคการปริพันธ์ที่ผู้เรียนเคยได้ศึกษามาแล้ว

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int \sin x^2\,dx$ ในรูปของอนุกรมกำลัง และจงใช้อนุกรมดังกล่าว หาค่าโดยประมาณของ $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ (ใช้ 5 พจน์)

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty$

ดังนั้น แทน x ด้วย x^2 จะได้

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty$$

ดังนั้น

$$\int \sin x^2\,dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7(3!)} + \frac{x^{11}}{11(5!)} - \frac{x^{15}}{15(7!)} + \frac{x^{19}}{19(9!)} - \frac{x^{23}}{23(11!)} + \ldots$$

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7(3!)} + \frac{x^{11}}{11(5!)} - \frac{x^{15}}{15(7!)} + \frac{x^{19}}{19(9!)} - \frac{x^{23}}{23(11!)} + \ldots\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7(3!)} + \frac{1}{11(5!)} - \frac{1}{15(7!)} + \frac{1}{19(9!)} - \frac{1}{23(11!)} + \ldots$$

$$\approx 0.31027$$

■

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าประมาณของ $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ โดยใช้พจน์ที่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์

วิธีทำ เนื่องจาก $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

ดังนั้นแทน x ด้วย $-x^2$ จะได้

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

ดังนั้น

$$\int e^{-x^2}\,dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \dots$$

$$\approx 0.7428$$

■

กิจกรรมที่ 2

(1) จงหาค่าประมาณของ $\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ (ตอบเป็นทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

วิธีทำ

(2) จงหาค่าประมาณของ $\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\, dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์

(ตอบเป็นทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

วิธีทำ

(3) จงหาค่าประมาณของ $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์

(ตอบเป็นทศนิยม 5 ตำแหน่ง)

วิธีทำ

เฉลยกิจกรรมที่ 1

(1)

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

ดังนั้น จากการแทน x ด้วย x^2 จะได้ว่า

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)^6}{6!} + \dots$$
$$= 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \dots$$

■

(2)

วิธีทำ เนื่องจาก $\sinh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$ และ

และ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

ดังนั้น $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$

และ $e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \dots$

$$= 1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$$

ดังนั้น $\sinh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - 2x + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

$$= 2x + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \dots$$

■

(3)

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

ดังนั้น $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots$

เพราะฉะนั้น $x^2 \cos 2x = x^2\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots\right)$

$$= x^2 - \frac{2^2 x^4}{2!} + \frac{2^4 x^6}{4!} - \frac{2^6 x^8}{6!} + \ldots$$

■

(4)

วิธีทำ เนื่องจาก $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

ดังนั้น $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \ldots$

เพราะฉะนั้น $\frac{\ln(1+2x)}{x} = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \ldots\right)$

$$= 2 - \frac{2^2 x}{2} + \frac{2^3 x^2}{3} - \frac{2^4 x^3}{4} + \ldots$$

■

เฉลยกิจกรรมที่ 2

(1)

วิธีทำ เนื่องจาก $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

ดังนั้น

$$\int \tan^{-1}x\,dx = C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^6}{6\cdot 5} - \frac{x^8}{8\cdot 7} + \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^6}{6\cdot 5} - \frac{x^8}{8\cdot 7} + \ldots\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{56} + \ldots \\ &\approx 0.44881\end{aligned}$$

■

(2)

วิธีทำ เนื่องจาก $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

ดังนั้นแทน x ด้วย $-x^2$ จะได้

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

และจะได้ว่า $x^2e^{-x^2} = x^2 - x^4 + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^8}{3!} + \ldots$

ดังนั้น

$$\int e^{-x^2}\,dx = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7\cdot 2!} - \frac{x^9}{9\cdot 3!} + \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7\cdot 2!} - \frac{x^9}{9\cdot 3!} + \ldots\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7\cdot 2!} - \frac{1}{9\cdot 3!} + \ldots \\ &\approx 0.18624\end{aligned}$$

■

(3)

วิธีทำ เนื่องจาก $\ln\,(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

ดังนั้น

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$$
$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots$$

ดังนั้น

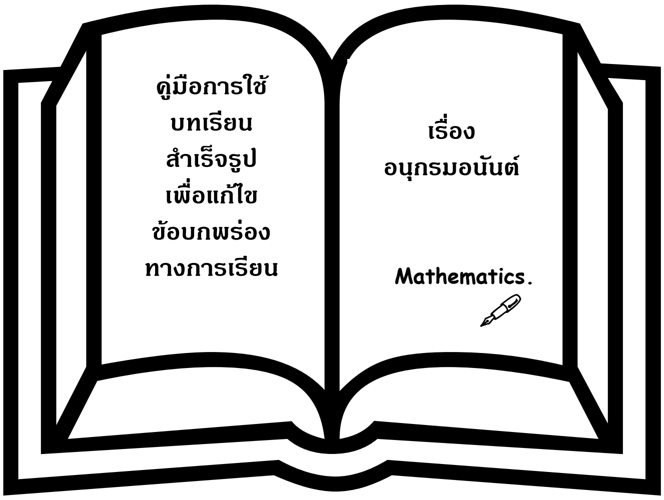
$$\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx = C+\; x-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 3}-\frac{x^4}{4\cdot 4}+\ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \left[x-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{3\cdot 3}-\frac{x^4}{4\cdot 4}+\ldots\right]_0^1$$
$$= 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$$
$$\approx 0.79861$$

■

คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูป
เพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน
เรื่องอนุกรมอนันต์



จัดทำโดย

นางสาวเกษราภรณ์ เต็งมีศรี

วิชาเอกคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

คู่มือการใช้บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์

จุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

เพื่อเป็นเครื่องมือในการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ของนิสิตปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 ที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

กรอบแนวทางการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

✎ บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ ที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์นี้ เป็นบทเรียนสำเร็จรูปชนิดเส้นตรง ซึ่งเสนอเนื้อหาที่เน้นลักษณะข้อบกพร่อง โดยจำแนกลักษณะข้อบกพร่อง เป็น 3 ด้าน ดังนี้

ด้านที่ 1 ด้านการใช้บทนิยาม ทฤษฎี สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

1.1 การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.2 การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.3 การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

1.4 การนำบทนิยามไปใช้ในการพิสูจน์

1.5 การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ด้านที่ 2 ด้านทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

2.1 การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

2.2 การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

2.3 ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

2.4 การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ด้านที่ 3 ด้านการประยุกต์ ประกอบด้วย

3.1 การนำความรู้ในเรื่องการแทนค่าตัวแปร การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ไปประยุกต์ใช้

3.2 การนำความรู้ในเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินไปประยุกต์ใช้

บทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ มีจำนวน 6 หน่วยการเรียน แบ่งเป็นหน่วยการเรียนย่อย รวมทั้งหมด 15 หน่วย ซึ่งแต่ละหน่วยการเรียนย่อยจะแยกตามลักษณะข้อบกพร่องในแต่ละด้าน ดังนี้

หน่วยการเรียนที่ 1 ลำดับของจำนวนจริง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การพิสูจน์ลิมิตของลำดับ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การนำบทนิยามไปใช้ในการพิสูจน์

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถนำสมบัติของอสมการไปใช้ในการพิสูจน์ลิมิตของลำดับได้ และสามารถแสดงการพิสูจน์ลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ได้

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถหาผลบวกและผลลบของเศษส่วนได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การหาลิมิตของลำดับ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การนำบทนิยามไปใช้ในการพิสูจน์

(จ) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยพิจารณาจากการหาลิมิตของลำดับ ซึ่งอาศัยการพิจารณาจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

หน่วยการเรียนที่ 2 อนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือไม่ และสามารถหาผลบวกของอนุกรมที่ลู่เข้าได้

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถเขียนเศษส่วนตรรกยะให้อยู่ในรูปผลบวกของเศษส่วนย่อยได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 อนุกรมอนันต์ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าอนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ และสามารถหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตได้

หน่วยการเรียนที่ 3 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 7 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า เวลา 30 นาที มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้าที่กำหนดให้ได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การทดสอบด้วยปริพันธ์ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ได้

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่กำหนดให้ ลู่เข้าหรือไม่ และถ้าลู่เข้าสามารถหาค่าปริพันธ์ได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 3 อนุกรมพี เวลา 30 นาที มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 3 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าอนุกรมพีที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 4 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 4 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 5 การทดสอบด้วยอัตราส่วน เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 5 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถหาอัตราส่วนของ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ โดยทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ เมื่อกำหนด a_n มาให้ และสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วนได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 6 การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 6 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิตได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 7 การทดสอบโดยราก เวลา 30 นาที มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 7 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้การทดสอบโดยรากได้

หน่วยการเรียนที่ 4 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข มีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมสลับ การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และการลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข เวลา 1 ชั่วโมง 30 นาที มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถบอกได้ว่าอนุกรมสลับที่กำหนดให้ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ หรือเป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

หน่วยการเรียนที่ 5 อนุกรมยกกำลัง ประกอบด้วยหน่วยการเรียนย่อย 2 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 การหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลังที่กำหนดให้ได้

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 2 การแทนฟังก์ชันด้วยอนุกรมยกกำลัง การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมยกกำลัง เวลา 1 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 3 การประยุกต์ ประกอบด้วย

(ก) การนำความรู้ในเรื่องการแทนค่าตัวแปร การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ไปประยุกต์ใช้

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 2 ข้อบกพร่องด้านที่ 3 ต้องการให้นิสิตสามารถใช้การแทนของอนุกรมเรขาคณิต หาอนุกรมยกกำลังของ x ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ พร้อมหาช่วงของการลู่เข้าได้ และสามารถใช้การหาอนุพันธ์หรือการหาปริพันธ์ของอนุกรมเรขาคณิต หาอนุกรมยกกำลังของ x ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ พร้อมหาช่วงของการลู่เข้าได้

หน่วยการเรียนที่ 6 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน มีหน่วยการเรียนย่อย 1 หน่วย ได้แก่

■ หน่วยการเรียนย่อยที่ 1 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน เวลา 2 ชั่วโมง มีจุดประสงค์ของบทเรียนสำเร็จรูปคือ

1. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร ประกอบด้วย

(ก) การจำบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ข) การเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ค) การประยุกต์ใช้ข้อมูลกับบทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

(ง) การสรุปผลจากการใช้บทนิยาม ทฤษฎีบท สมบัติ กฎ หรือสูตร

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 1 ต้องการให้นิสิตสามารถหาอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ และสามารถหาช่วงของการลู่เข้าและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินได้

2. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 2 ทักษะการคิดคำนวณ ประกอบด้วย

(ก) การมีทักษะในการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนจริง

(ข) การมีทักษะในหลักของพีชคณิตเบื้องต้น

(ค) ความรอบคอบในการเขียนตัวเลข หรือสัญลักษณ์

(ง) การทำตามขั้นตอนที่ถูกต้องของหลักการคำนวณ

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 2 ต้องการให้นิสิตสามารถหาอนุพันธ์อันดับต่างๆ และปริพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

3. แก้ไขข้อบกพร่องด้านที่ 3 การประยุกต์ ประกอบด้วย

(ก) การนำความรู้ในเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินไปประยุกต์ใช้

ภายหลังการใช้บทเรียนสำเร็จรูปหน่วยการเรียนย่อยที่ 1 ข้อบกพร่องด้านที่ 3 ต้องการให้นิสิตสามารถนำความรู้ในเรื่องการแทนค่า การบวก ลบ คูณ และหาร มาประยุกต์ใช้ในการหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ และสามารถใช้ความรู้ในเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน หาค่าปริพันธ์ที่กำหนดให้ได้

ขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมอนันต์

<u>ขั้นที่ 1</u> การคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน

✎ คัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน โดยนำแบบทดสอบวินิจฉัยในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยไปทดสอบนิสิต ซึ่งได้เรียนเนื้อหาเรื่องอนุกรมอนันต์ในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยจากอาจารย์ประจำวิชาเสร็จสิ้นแล้ว โดยทดสอบทีละหน่วยการเรียนย่อยตามเนื้อหาที่เรียนในห้องเรียน แล้วนำผลจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยในแต่ละฉบับของนิสิต มาคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน โดยใช้เกณฑ์ในการคัดเลือกนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียน คือ ถ้านิสิตได้คะแนนจากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวินิจฉัยน้อยกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนเต็ม แสดงว่านิสิตมีข้อบกพร่องทางการเรียน

<u>ขั้นที่ 2</u> การจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

✎ จัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ให้กับนิสิตที่มีข้อบกพร่องทางการเรียนในแต่ละหน่วยการเรียนย่อย โดยให้นิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่องของนิสิต ภายหลังจากที่นิสิตได้ศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องตามลักษณะข้อบกพร่องของนิสิตแล้ว ครูผู้สอนให้นิสิตทำแบบทดสอบคู่ขนานของหน่วยการเรียนย่อยนั้น

✎ ในกรณีที่นิสิตมีข้อบกพร่องทางการเรียนมากกว่า 1 ด้านในหน่วยการเรียนย่อยใด นิสิตจะต้องได้รับการแก้ไขข้อบกพร่องด้วยบทเรียนสำเร็จรูปของหน่วยการเรียนย่อยนั้นจนครบทุกด้านตามลักษณะข้อบกพร่อง และถ้านิสิตมีข้อบกพร่องหลายหน่วยการเรียนย่อย ให้นิสิตศึกษาเรียงลำดับตามลำดับหน่วยการเรียนย่อยของหน่วยการเรียนนั้น (ดูภาพประกอบ 1)

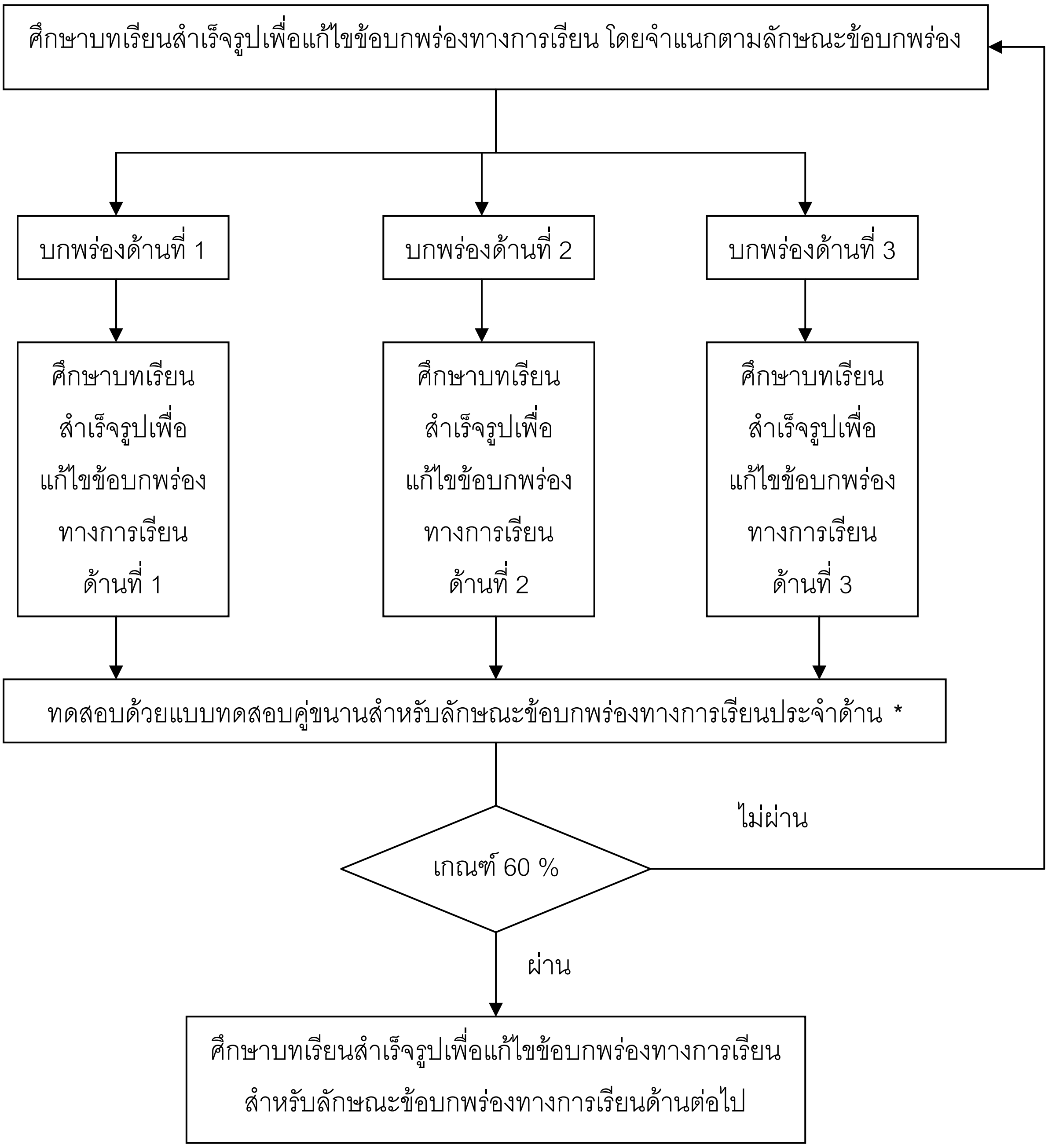
ข้อเสนอแนะ

✎ เนื่องจากในการดำเนินการทดลองของผู้วิจัยนั้น จะใช้นอกเวลาเรียนปกติในการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ และด้วยปัจจัยในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น นิสิตมีภาระงาน และจะต้องรับผิดชอบการเรียนในรายวิชาอื่นๆ และมีช่วงเวลาว่างที่ไม่ตรงกัน จึงทำให้มีปัญหาในการนัดหมายนิสิตในการจัดกิจกรรม ดังนั้นผู้วิจัยจึงให้เวลาในการศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปในแต่ละหน่วยการเรียนย่อยประมาณ 1-2 วัน เพื่อให้นิสิตได้มีโอกาสเตรียมความพร้อมสำหรับการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนอย่างเต็มที่ แต่สำหรับครูผู้สอนที่จัดกิจกรรม

การแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ โดยใช้เวลาเรียนปกตินั้น สามารถใช้ระยะเวลาตามที่ได้กำหนดไว้ในแต่ละหน่วยการเรียน

✎ ในการดำเนินการทดลองของผู้วิจัย นิสิตแต่ละคนสามารถทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานได้ไม่เกิน 2 ครั้ง และใช้คะแนนมากที่สุดของนิสิต สำหรับการวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ แต่สำหรับการจัดกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ในชั้นเรียนปกติ สามารถจัดให้นิสิตศึกษาบทเรียนสำเร็จรูปและทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนาน จนกว่าจะมั่นใจว่านิสิตสามารถแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนในหน่วยการเรียนย่อยนั้นๆ ได้ จึงจะทำการวินิจฉัยและแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์ในหน่วยการเรียนย่อยถัดไป

ขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนย่อย



* นิสิตแต่ละคนสามารถทดสอบด้วยแบบทดสอบคู่ขนานได้ไม่เกิน 2 ครั้ง และใช้คะแนนมากที่สุดของนิสิต สำหรับการวัดประสิทธิภาพของชุดบทเรียนสำเร็จรูปเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องอนุกรมอนันต์

ภาพประกอบ 1 แผนผังแสดงขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมการแก้ไขข้อบกพร่องทางการเรียนสำหรับแต่ละหน่วยการเรียนย่อย

แบบทดสอบวินิจฉัยและแบบทดสอบคู่ขนาน
พร้อมเฉลยคำตอบ

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1

แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียนเรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

จำนวน 2 ข้อ 20 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

---

1. กำหนดให้ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}$

   1.1 จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < 0.04$

   1.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n+7}} = \dfrac{2}{3}$

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

จำนวน 2 ข้อ 20 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

---

1. กำหนดให้ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n}{n+4}\right\}$

   1.1 จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{3n}{n+4} - 3\right| < 0.02$

   1.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+4} = 3$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1
เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

---

1. กำหนดให้ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}$

1.1 จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < 0.04$

วิธีทำ พิจารณา $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\dfrac{2n-2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\dfrac{-2}{n+1}\right| = \dfrac{2}{n+1}$

ดังนั้น $\dfrac{2}{n+1} < 0.04$

หรือ $\dfrac{2}{n+1} < \dfrac{4}{100}$

$200 < 4n+4$

$196 < 4n$

จะได้ว่า $n > 49$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก N ตั้งแต่ 49 เป็นต้นไป ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < 0.04$

■

1.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$

จากโจทย์ $a_n = 2n/n+1$ และ $L = 2$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \\
&= \left|\frac{2n-2(n+1)}{n+1}\right| \\
&= \left|\frac{-2}{n+1}\right| \\
&= \frac{2}{n+1} \\
&< \frac{2}{n} \\
&< \frac{2}{N} \quad \left(\because n > N\right) \quad \ldots\ldots\ldots(1)
\end{aligned}
$$

จากบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ว่า $\left|a_n - L\right| < \dfrac{2}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\dfrac{2}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \dfrac{2}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์จริง บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{2}{\varepsilon}\right)$ ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$แล้ว

$$\begin{aligned}\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| \\ &= \frac{2}{n+1} \\ &< \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$

■

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n+7}} = \dfrac{2}{3}$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \frac{2}{3}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+7}} - 1\right| \\
&= \frac{2}{3}\left|\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}}{\sqrt{n+7}}\right| \\
&= \frac{2}{3}\left|\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}}{\sqrt{n+7}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+7}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+7}}\right| \\
&= \frac{2}{3}\left|\frac{n+1-(n+7)}{\sqrt{(n+1)(n+7)}+n+7}\right| \\
&= \frac{2}{3}\left|\frac{-6}{\sqrt{(n+1)(n+7)}+n+7}\right| \\
&= \frac{4}{\sqrt{(n+1)(n+7)}+n+7} \\
&< \frac{4}{n+7} < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $N > \dfrac{4}{\varepsilon}$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{4}{\varepsilon}\right)$ ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \frac{2}{3}\left|\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+7}} - 1\right| \\
&= \frac{4}{\sqrt{(n+1)(n+7)}+n+7} \\
&< \frac{4}{n+7} < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n+7}} = \dfrac{2}{3}$

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 1
เรื่องการพิสูจน์ลิมิตของลำดับ

---

1. กำหนดให้ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{3n}{n+4}\right\}$

1.1 จงหาจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{3n}{n+4} - 3\right| < 0.02$

วิธีทำ พิจารณา $\left|\dfrac{3n}{n+4} - 3\right| = \left|\dfrac{3n-3(n+4)}{n+4}\right| = \left|\dfrac{-12}{n+4}\right| = \dfrac{12}{n+4}$

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad \frac{12}{n+4} &< 0.02 \\
\text{หรือ} \quad \frac{12}{n+4} &< \frac{2}{100} \\
1200 &< 2n+8 \\
1192 &< 2n \\
\text{จะได้ว่า} \quad n &> 596
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวก N ตั้งแต่ 596 เป็นต้นไป ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว $\left|\dfrac{3n}{n+4} - 3\right| < 0.02$

■

1.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+4} = 3$

จากโจทย์ $a_n = 3n/n+4$ และ $L = 3$

$$
\begin{aligned}
\text{พิจารณา } |a_n - L| &= \left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| \\
&= \left|\frac{3n-3(n+4)}{n+4}\right| \\
&= \left|\frac{-12}{n+4}\right| \\
&= \frac{12}{n+4} \\
&< \frac{12}{n} \\
&< \frac{12}{N} \quad \left(\because n > N\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(1)
\end{aligned}
$$

จากบทนิยาม 2 เราต้องการ $\left|a_n - L\right| < \varepsilon$

ดังนั้น จาก (1) จะได้ว่า $\left|a_n - L\right| < \dfrac{12}{N} < \varepsilon$

พิจารณา $\dfrac{12}{N} < \varepsilon$

ดังนั้น $N > \dfrac{12}{\varepsilon}$

ในการพิสูจน์จริง บทพิสูจน์จะเป็นดังนี้

การพิสูจน์

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N $\left(N > \dfrac{12}{\varepsilon}\right)$ ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$แล้ว

$$\begin{aligned} \left|a_n - L\right| &= \left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| \\ &= \frac{12}{n+4} \\ &< \frac{12}{n} < \frac{12}{N} < \frac{12}{\frac{12}{\varepsilon}} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n+4} = 3$

■

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{n+3-(n+1)}{2\sqrt{(n+1)(n+3)}+2(n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{2\sqrt{(n+1)(n+3)}+2n+2}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+n+1} \\
&< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\qquad N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

การพิสูจน์

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก $N \left(N > \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ ซึ่งทุกจำนวนเต็มบวก n ถ้า $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left|a_n - L\right| &= \left|\frac{\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+n+1} \\
&< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{2}$

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2
แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ
จำนวน 3 ข้อ 30 คะแนน เวลาสอบ 40 นาที

---

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ ***ลู่เข้า***หรือไม่ ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิต ***(แสดงวิธีทำโดยละเอียด)***

(1) $a_n = \dfrac{1-3n-5n^2}{10n^2+5n-2}$ **(5 คะแนน)**

(2) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ **(5 คะแนน)**

(3) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ **(5 คะแนน)**

(4) $a_n = \dfrac{5^{n+1} + 2 \cdot 3^{n-1}}{2^n - 5^{n-1}}$ **(5 คะแนน)**

(5) $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$ **(5 คะแนน)**

2. จงแสดงว่า

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ **(1.5 คะแนน)**

(2) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} = 0$ **(1.5 คะแนน)**

3. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้ **(โดยใช้สูตร)**

(1) $a_n = \sqrt[n]{5^n n}$ **(1 คะแนน)**

(2) $a_n = \frac{7^n}{n!}$ **(1 คะแนน)**

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการหาลิมิตของลำดับ

จำนวน 3 ข้อ 30 คะแนน เวลาสอบ 40 นาที

---

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ ***ลู่เข้า*** หรือไม่ ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิต ***(แสดงวิธีทำโดยละเอียด)***

(1) $a_n = \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 1}{4 - 3n + 2n^3}$ **(5 คะแนน)**

(2) $a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$ **(5 คะแนน)**

(3) $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^n$ **(5 คะแนน)**

(4) $a_n = \dfrac{7^{n+1} - 3 \cdot 5^{n-1}}{3^n + 7^{n-1}}$ **(5 คะแนน)**

(5) $a_n = \dfrac{\ln(2n+5)}{\sqrt{n}}$ **(5 คะแนน)**

2. จงแสดงว่า

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ **(1.5 คะแนน)**

(2) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{5^n} = 0$ **(1.5 คะแนน)**

3. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้ **(โดยใช้สูตร)**

(1) $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$ **(1 คะแนน)**

(2) $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$ **(1 คะแนน)**

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2
เรื่องการหาลิมิตของลำดับ

---

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้***ลู่เข้า***หรือไม่ ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิต ***(แสดงวิธีทำโดยละเอียด)***

(1) $a_n = \dfrac{1-3n-5n^2}{10n^2+5n-2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n-5n^2}{10n^2+5n-2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1-3n-5n^2}{n^2}}{\dfrac{10n^2+5n-2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}5}{\lim\limits_{n\to\infty}10 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}} \\
&= \frac{0-0-5}{10+0-0} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{1-3n-5n^2}{10n^2+5n-2}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ $-\dfrac{1}{2}$

■

(2) $a_n = n - \sqrt{n^2-n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2-n}}{n+\sqrt{n^2-n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-\left(n^2-n\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $\left\{n-\sqrt{n^2-n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ $\frac{1}{2}$

■

(3) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

วิธีทำ

ให้ $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

$$= x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)\left[\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$$

$$= -1$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = -1$$

$$\ln\lim_{x\to\infty} y = -1$$

$$e^{\ln\lim\limits_{x\to\infty} y} = \frac{1}{e}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{1}{e}$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

■

(4) $a_n = \dfrac{5^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}{2^n-5^{n-1}}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}{2^n-5^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}+2\cdot 3^{n-1}}{5^n}}{\dfrac{2^n-5^{n-1}}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\dfrac{1}{5}}$$

$$= \frac{5+\dfrac{2}{3}(0)}{0-\dfrac{1}{5}}$$

$$= -25$$

■

(5) $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

ให้ $y = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} y &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

2. จงแสดงว่า

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$

วิธีทำ

เนื่องจาก $-1 \le \sin n \le 1$

ดังนั้น $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\sin n}{n} \le \dfrac{1}{n}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n} = 0$

■

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n} = 0$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\left|(-1)^n\dfrac{1}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$

และ $2^n \ge n$ ทุก $n \in I$

ดังนั้น $0 \le \dfrac{1}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0$

■

3. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้ **(โดยใช้สูตร)**

(1) $a_n=\sqrt[n]{5^n n}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(5^n n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 5\cdot\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \\
&= 5\cdot 1 \quad = 5
\end{aligned}
$$

■

(2) $a_n=\frac{7^n}{n!}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{n!} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 1 ฉบับที่ 2
เรื่องการหาลิมิตของลำดับ

---

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้***ลู่เข้า***หรือไม่ ถ้าลู่เข้าจงหาลิมิต ***(แสดงวิธีทำโดยละเอียด)***

(1) $a_n = \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 1}{4 - 3n + 2n^3}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 2n^2 - 1}{4 - 3n + 2n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{5n^3 + 2n^2 - 1}{n^3}}{\dfrac{4 - 3n + 2n^3}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^3} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2} + 2} \\
&= \frac{5+0-0}{0-0+2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\left\{\dfrac{5n^3 + 2n^2 - 1}{4 - 3n + 2n^3}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ $\dfrac{5}{2}$

■

(2) $a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 5n} - n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 5n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 5n} + n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 5n - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{5n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+5n}{n^2}}+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty} 1}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}$$

แสดงว่า $\left\{\sqrt{n^2+5n}-n\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และลิมิตของลำดับเท่ากับ $\frac{5}{2}$

■

(3) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$

วิธีทำ

ให้ $y = \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$

$$\ln y = \ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^x$$

$$= x\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)\left[\frac{(3x-1)(3)-(3x+1)(3)}{(3x-1)^2}\right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{(3x+1)(3x-1)}$$

$$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \frac{2}{3}$$

$$\ln \lim_{x\to\infty} y = \frac{2}{3}$$

$$e^{\ln \lim_{x\to\infty} y} = e^{\frac{2}{3}}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to\infty} y = e^{\frac{2}{3}}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n = e^{\frac{2}{3}}$

■

(4) $a_n = \dfrac{7^{n+1} - 3\cdot 5^{n-1}}{3^n + 7^{n-1}}$

วิธีทำ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1} - 3\cdot 5^{n-1}}{3^n + 7^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{7^{n+1} - 3\cdot 5^{n-1}}{7^n}}{\dfrac{3^n + 7^{n-1}}{7^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7 - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{7}\right)^n + \dfrac{1}{7}}$$

$$= \frac{7 - \dfrac{3}{5}(0)}{0 + \dfrac{1}{7}}$$

$$= 49$$

■

(5) $a_n = \dfrac{\ln(2n+5)}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

$$\text{ให้} \quad y = \frac{\ln(2x+5)}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+5)}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x+5}\cdot(2)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4\sqrt{x}}{2x+5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

2. จงแสดงว่า

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$

วิธีทำ

เนื่องจาก $-1 \le \cos n \le 1$

ดังนั้น $-\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\cos n}{n} \le \dfrac{1}{n}$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$

■

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{5^n} = 0$

วิธีทำ

เนื่องจาก $\left|(-1)^n \dfrac{1}{5^n}\right| = \dfrac{1}{5^n}$

และ $5^n \ge n$ ทุก $n \in I$

ดังนั้น $0 \le \dfrac{1}{5^n} \le \dfrac{1}{n}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n} = 0$

■

3. จงหาลิมิตของลำดับในข้อต่อไปนี้ **(โดยใช้สูตร)**

(1) $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (4^n n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 4 \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \\ &= 4 \cdot 1 \ = 4\end{aligned}$$

■

(2) $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-4)^n}{n!} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1

แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 10 นาที

จงอธิบายว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ไม่ลู่เข้า

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 7}{3n^2 - 2n + 1}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3 - 4n + 5}{3n + 2}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right)$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^3}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1
แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า
จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 10 นาที

จงอธิบายว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ไม่ลู่เข้า

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + n + 3}{5n^3 - 2n + 1}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 4n - 1}{2n + 1}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + (-1)^{n+1}\right)$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^n$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{4n^3}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1
เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n+7}{3n^2-2n+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n+7}{3n^2-2n+1} = \frac{1}{3} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n+7}{3n^2-2n+1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3-4n+5}{3n+2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^3-4n+5}{3n+2} = \infty \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3-4n+5}{3n+2}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+(-1)^n\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(2+(-1)^n\right)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+(-1)^n\right)$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} = 1 \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^3}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 1
เรื่องการทดสอบอนุกรมไม่ลู่เข้า

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+n+3}{5n^3-2n+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n+3}{5n^3-2n+1} = \frac{2}{5} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+n+3}{5n^3-2n+1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n-1}{2n+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n-1}{2n+1} = \infty \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n-1}{2n+1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+(-1)^{n+1}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(3+(-1)^{n+1}\right)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+(-1)^{n+1}\right)$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^n = e^{-4} \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{4n^3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3} = \lim_{n\to\infty} 4^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^3}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2

แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยใช้ ***<u>การทดสอบด้วยปริพันธ์</u>***

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยใช้ ***การทดสอบด้วยปริพันธ์***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2+1}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4n^3 e^{-n^4}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2
เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยใช้ ***การทดสอบด้วยปริพันธ์***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+5}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+5}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{x^2}{x^3+5}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{x^2}{x^3+5}\cdot\frac{d\left(x^3+5\right)}{2x^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(x^3+5\right)\right]_1^{b} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(b^3+5\right)-\ln 6\right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$ ไม่ลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+5}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า
$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} x^2 e^{-x^3}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^2e^{-x^3}\cdot\frac{d\left(-x^3\right)}{-3x^2}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^b$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^3}}-\frac{1}{e}\right]$$
$$= -\frac{1}{3}\left(0-\frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{1}{3e}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} x^2e^{-x^3}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

จะเห็นว่า $f(x)>0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x\geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}x\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}b-\tan^{-1}1\right]\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}b-\frac{\pi}{4}\right]\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 2
เรื่องการทดสอบด้วยปริพันธ์

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า โดยใช้ ***การทดสอบด้วยปริพันธ์***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2+1}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{x}{2x^2+1}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{x}{2x^2+1}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{x}{2x^2+1}\cdot\frac{d\left(2x^2+1\right)}{4x} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(2x^2+1\right)\right]_1^b \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(2b^2+1\right)-\ln 3\right] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^{\infty} \frac{x}{2x^2+1}\,dx$ ไม่ลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^2+1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4n^3e^{-n^4}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x) = \frac{4x^3}{e^{x^4}}$$

จะเห็นว่า $f(x) > 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x \geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

จะได้ว่า

$$\int_1^{\infty} 4x^3e^{-x^4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} 4x^3e^{-x^4}\,dx$$

$$= 4\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^3e^{-x^4}\cdot\frac{d\left(-x^4\right)}{-4x^3}$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x^4}\right]_1^b$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{b^4}}-\frac{1}{e}\right]$$

$$= -\left(0-\frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{e}$$

แสดงว่า $\int_1^\infty 4x^3e^{-x^4}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4n^3e^{-n^4}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$

วิธีทำ ใช้การทดสอบด้วยปริพันธ์ โดยกำหนดให้

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3}$$

จะเห็นว่า $f(x)>0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และลดลง สำหรับทุก $x\geq 1$

พิจารณาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2+3}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^b \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\frac{b}{\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[\tan^{-1}\frac{b}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

แสดงว่า $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3}\,dx$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3
แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องอนุกรมพี
จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 10 นาที

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมพี (p-series) ในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $1 + 2^{-\frac{3}{5}} + 3^{-\frac{3}{5}} + \ldots + n^{-\frac{3}{5}} + \ldots$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องอนุกรมพี

จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 10 นาที

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมพี (p-series) ในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $1 + \frac{1}{2^{-7}} + \frac{1}{3^{-7}} + \ldots + \frac{1}{n^{-7}} + \ldots$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $1 + 2^{-\frac{4}{5}} + 3^{-\frac{4}{5}} + \ldots + n^{-\frac{4}{5}} + \ldots$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3
เรื่องอนุกรมพี

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมพี (p-series) ในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \frac{5}{3} > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \frac{7}{6} > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมพี $p = 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(4) $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots$

วิธีทำ เนื่องจาก $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-5}}$

เป็นอนุกรมพี $p = -5 < 1$

ดังนั้น $1 + \frac{1}{2^{-5}} + \frac{1}{3^{-5}} + \ldots + \frac{1}{n^{-5}} + \ldots$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $1+2^{-\frac{3}{5}}+3^{-\frac{3}{5}}+\ldots+n^{-\frac{3}{5}}+\ldots$

วิธีทำ เนื่องจาก $1+2^{-\frac{3}{5}}+3^{-\frac{3}{5}}+\ldots+n^{-\frac{3}{5}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}$

เป็นอนุกรมพี $p=\frac{3}{5}<1$

ดังนั้น $1+2^{-\frac{3}{5}}+3^{-\frac{3}{5}}+\ldots+n^{-\frac{3}{5}}+\ldots$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 3
เรื่องอนุกรมพี

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมพี (p-series) ในข้อต่อไปนี้

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{4}}}$ เป็นอนุกรมพี $p=\frac{7}{4}>1$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^7}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{5}{4}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{5}{4}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ เป็นอนุกรมพี $p=\frac{5}{4}>1$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{5}{4}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ เป็นอนุกรมพี $p=\frac{1}{3}<1$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(4) $1+\frac{1}{2^{-7}}+\frac{1}{3^{-7}}+\ldots+\frac{1}{n^{-7}}+\ldots$

วิธีทำ เนื่องจาก $1+\frac{1}{2^{-7}}+\frac{1}{3^{-7}}+\ldots+\frac{1}{n^{-7}}+\ldots.=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-7}}$

เป็นอนุกรมพี $p=-7<1$

ดังนั้น $1+\frac{1}{2^{-7}}+\frac{1}{3^{-7}}+\ldots+\frac{1}{n^{-7}}+\ldots$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $1+2^{-\frac{4}{5}}+3^{-\frac{4}{5}}+\ldots+n^{-\frac{4}{5}}+\ldots$

วิธีทำ เนื่องจาก $1+2^{-\frac{4}{5}}+3^{-\frac{4}{5}}+\ldots+n^{-\frac{4}{5}}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$

เป็นอนุกรมพี $p=\frac{4}{5}<1$

ดังนั้น $1+2^{-\frac{4}{5}}+3^{-\frac{4}{5}}+\ldots+n^{-\frac{4}{5}}+\ldots$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4

แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน

เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

จำนวน 5 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า <u>โดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</u>

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2+4n+2}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+5^n}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

จำนวน 5 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า <u>โดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</u>

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{7n^3+n+4}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2+7^n}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4
เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า <u>โดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</u>

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2+4n+2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{3}{5n^2+4n+2} < \frac{3}{5n^2}$

และเราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2} = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมพี $p = 2 > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2+4n+2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

วิธีทำ เนื่องจาก $n! > 3^n$ เมื่อ $n \geq 8$

ดังนั้น $\frac{1}{n!} < \frac{1}{3^n}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดย $r = \frac{1}{3} < 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+5^n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{3^n}{1+5^n} < \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = \frac{3}{5} < 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{n}}{n-1} > \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพี $p = \frac{1}{2} < 1$ ซึ่งไม่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $n^n > n^2$ เมื่อ $n \geq 3$

ดังนั้น $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี $p = 2 > 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 4
เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ

จงทดสอบอนุกรมที่กำหนดให้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้า <u>โดยใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ</u>

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{7n^3 + n + 4}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{8}{7n^3 + n + 4} < \frac{8}{7n^3}$

และเราทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{7n^3} = \frac{8}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะเป็นอนุกรมพี $p = 3 > 1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{7n^3}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{7n^3 + n + 4}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

วิธีทำ เนื่องจาก $(n-1)! > 2^n$ เมื่อ $n \geq 6$

ดังนั้น $\frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{2^n}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดย $r = \frac{1}{2} < 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2 + 7^n}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{5^n}{2 + 7^n} < \frac{5^n}{7^n} = \left(\frac{5}{7}\right)^n$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

โดย $r = \frac{5}{7} < 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2+7^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{2\sqrt{n}}{n-1} > \frac{2\sqrt{n}}{n} > \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพี โดย $p = \frac{1}{2} < 1$ ซึ่งไม่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $n^{n-1} > n^2$ เมื่อ $n \geq 4$

ดังนั้น $\frac{1}{n^{n-1}} < \frac{1}{n^2}$ และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี $p = 2 > 1$ ซึ่งลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5

แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน

เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน

จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงใช้การทดสอบ <u>ด้วยอัตราส่วน</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!3!}{(n+4)!}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}+3}{7^{n}+1}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n}}{n!}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน

จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงใช้การทดสอบ <u>ด้วยอัตราส่วน</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}(2n)!3!}{(n+3)!}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{5^n+2}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^n}{n!}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5
เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน

จงใช้การทดสอบ <u>ด้วยอัตราส่วน</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!3!}{(n+4)!}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{2^{n+1}(2n)!3!}{(n+4)!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+2}(2n+2)!3!}{(n+5)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}(2n+2)!3!}{(n+5)!} \cdot \frac{(n+4)!}{2^{n+1}(2n)!3!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+2)(2n+1)}{(n+5)} = \infty$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!3!}{(n+4)!}$ ไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{7^n+1}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{2^n+3}{7^n+1} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}+3}{7^{n+1}+1}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3}{7^{n+1}+1} \cdot \frac{7^n+1}{2^n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}{7^n\left(7+\frac{1}{7^n}\right)} \cdot \frac{7^n\left(1+\frac{1}{7^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)}{\left(7+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{3}{2^n}\right)} = \frac{(2+0)(1+0)}{(7+0)(1+0)} = \frac{2}{7} < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{7^n+1}$ ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ไม่ลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 5
เรื่องการทดสอบด้วยอัตราส่วน

จงใช้การทดสอบ <u>ด้วยอัตราส่วน</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+1}(2n)!3!}{(n+3)!}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{5^{n+1}(2n)!3!}{(n+3)!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+2}(2n+2)!3!}{(n+4)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+2}(2n+2)!3!}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{5^{n+1}(2n)!3!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(2n+2)(2n+1)}{(n+4)} = \infty$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n+1}(2n)!3!}{(n+3)!}$ ไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+5}{5^n+2}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{2^n+5}{5^n+2} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}+5}{5^{n+1}+2}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{5^{n+1}+2} \cdot \frac{5^n+2}{2^n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(2+\frac{5}{2^n}\right)}{5^n\left(5+\frac{2}{5^n}\right)} \cdot \frac{5^n\left(1+\frac{2}{5^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{5}{2^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{5}{2^n}\right)\left(1+\frac{2}{5^n}\right)}{\left(5+\frac{2}{5^n}\right)\left(1+\frac{5}{2^n}\right)} = \frac{(2+0)(1+0)}{(5+0)(1+0)} = \frac{2}{5} < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+5}{5^n+2}$ ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^n}{n!}$

วิธีทำ กำหนดให้

$$a_n = \frac{(5n)^n}{n!} \quad \text{ดังนั้น} \quad a_{n+1} = \frac{(5n+5)^{n+1}}{(n+1)!}$$

จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+5)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(5n)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n+5)^{n+1}}{(n+1)(5n)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^n}{n^n}$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= 5 \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 5e > 1$$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)^n}{n!}$ ไม่ลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6
แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน
เรื่อง การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต
จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงใช้ ***การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต*** ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n5^n}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2-1}{(n^2-5)(3n+2)}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6
แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต
จำนวน 3 ข้อ 15 คะแนน เวลาสอบ 20 นาที

จงใช้ ***การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต*** ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^2 2^n}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{(2n^2+1)(n-2)}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$ **(5 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6
เรื่อง การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต

จงใช้ <u>การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n5^n}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{3n+1}{n5^n}$ อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n5^n}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{5^n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต $\left(r = \dfrac{1}{5} < 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3n+1}{n5^n}}{\dfrac{1}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(3n+1)}{n5^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n}$$

$$= 3 > 0$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{n5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n^2-1}{\left(n^2-5\right)(3n+2)}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{6n^2-1}{\left(n^2-5\right)(3n+2)}$

อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6n^2-1}{\left(n^2-5\right)(3n+2)}$ มีลักษณะไม่ลู่เข้า

เลือกอนุกรมไม่ลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p=1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{6n^2-1}{(n^2-5)(3n+2)}}{\dfrac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(6n^2-1)}{(n^2-5)(3n+2)}$$

$$= 2 > 0$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6n^2-1}{(n^2-5)(3n+2)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ซึ่งเป็นอนุกรมพี $\left(p = \dfrac{3}{2} > 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2(\ln n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$= 2\cdot 0$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{5}{2}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 6
เรื่อง การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต

จงใช้ <u>การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบลิมิต</u> ตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^2 2^n}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{2n^2+5}{n^2 2^n}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^2 2^n}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2^n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต $\left(r = \frac{1}{2} < 1\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+5}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(2n^2+5\right)}{n^2 2^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5}{n^2} \\
&= 2 > 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{\left(2n^2+1\right)(n-2)}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{5n^2+1}{\left(2n^2+1\right)(n-2)}$

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{\left(2n^2+1\right)(n-2)}$ มีลักษณะไม่ลู่เข้า

เลือกอนุกรมไม่ลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรม p $(p = 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5n^2+1}{(2n^2+1)(n-2)}}{\dfrac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+n}{(2n^2+1)(n-2)}$$

$$= \frac{5}{2} > 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n^2+1}{(2n^2+1)(n-2)}$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$ มีลักษณะลู่เข้า

เลือกอนุกรมลู่เข้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ ซึ่งเป็นอนุกรมพี $\left(p = \dfrac{5}{4} > 1\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2(\ln n)\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2\sqrt{n}}}$$

$$= 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= 8 \cdot 0$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{7}{4}}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7
แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน เรื่องการทดสอบโดยราก
จำนวน 4 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 15 นาที

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ ***โดยใช้การทดสอบโดยราก (The root Test)***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^{n}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^{n}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\ln(n+1)\right)^{n}}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^{n}}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7

แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องการทดสอบโดยราก

จำนวน 4 ข้อ 10 คะแนน เวลาสอบ 15 นาที

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ ***<u>โดยใช้การทดสอบโดยราก (The root Test)</u>***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+5}{2n+7}\right)^{n}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7}\right)^{n}$ **(2 คะแนน)**

วิธีทำ

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^{n}}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n+3}}{n^{n}}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7
เรื่องการทดสอบโดยราก

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ <u>โดยใช้การทดสอบโดยราก (The root Test)</u>

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^n$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4n+3}{2n-1}\right)^n} = \frac{4n+3}{2n-1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+3}{2n-1} = 2 > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+5}{2n+7}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\frac{n}{4}\right)^n$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{4}\right)^n} = \frac{n}{4}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4}\right) = \infty$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln(n+1))^{n}}$

วิธีทำ ให้ $$a_n = \frac{n}{(\ln(n+1))^{n}}$$

ดังนั้น $$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln(n+1))^{n}}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\ln(n+1)}$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\ln(n+1)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln(n+1))^{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{3n+1}}{n^{n}}$

วิธีทำ ให้ $$a_n = \frac{2^{3n+1}}{n^{n}}$$

ดังนั้น $$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^{n}}}$$

$$= \left[\frac{2^{3n+1}}{n^{n}}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{\left(2^{3n+1}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n}$$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{3n+1}}{n^{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 3 ฉบับที่ 7
เรื่องการทดสอบโดยราก

จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้ ***<u>โดยใช้การทดสอบโดยราก (The root Test)</u>***

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6n+5}{2n+7}\right)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\dfrac{6n+5}{2n+7}\right)^n$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{6n+5}{2n+7}\right)^n} = \dfrac{6n+5}{2n+7}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+5}{2n+7} = 3 > 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4n+3}{2n-1}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{7}\right)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\dfrac{n}{7}\right)^n$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{7}\right)^n} = \dfrac{n}{7}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{7}\right) = \infty$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{7}\right)^n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

■

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln n)^n}$

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{n}{(\ln n)^n}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n}{(\ln n)^n}} = \dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\ln n}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\ln n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty} \ln n} = \dfrac{1}{\infty} = 0 < 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(\ln n)^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{2n+3}}{n^n}$

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{5^{2n+3}}{n^n}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{5^{2n+3}}{n^n}}$

$$= \left[\dfrac{5^{2n+3}}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \dfrac{\left(5^{2n+3}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \dfrac{5^{2+\frac{3}{n}}}{n}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{2+\frac{3}{n}}}{n} = 0 < 1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{2n+3}}{n^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

■

แบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 6
แบบทดสอบวินิจฉัยลักษณะข้อบกพร่องทางการเรียน
เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน
จำนวน 4 ข้อ 25 คะแนน เวลาสอบ 40 นาที

---

1. จงหา *อนุกรมเทย์เลอร์* ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

1.1 $f(x) = e^{-x}$ $x = -1$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

1.2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $x = 2$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

2. จงหา *อนุกรมแมคลอริน* ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

2.1 $f(x) = \ln(1+x)$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

2.2 $f(x) = \sin 2x$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

3. *<u>โดยใช้ตารางอนุกรมแมคลอริน</u>* จงหาอนุกรมแมคลอริน พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x\sin 3x$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

3.2 $f(x) = \cosh(2x)$ โดย $\left(\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

4. จงประมาณค่าของ $\int_0^1 \dfrac{\tan^{-1} x}{x}\,dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เป็นศูนย์ 4 พจน์ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

ตารางอนุกรมแมคลอริน

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1,\ 1)$

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \qquad (-1,\ 1]$

6. $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad [-1,\ 1]$

แบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 6
แบบทดสอบคู่ขนาน เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน
จำนวน 4 ข้อ 25 คะแนน เวลาสอบ 40 นาที

---

1. จงหา *อนุกรมเทย์เลอร์* ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

1.1 $f(x) = e^x$ $x = 2$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

1.2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $x = 3$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

2. จงหา *อนุกรมแมคลอริน* ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

2.1 $f(x) = \cos x$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

2.2 $f(x) = e^{5x}$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

3. *<u>โดยใช้ตารางอนุกรมแมคลอริน</u>* จงหาอนุกรมแมคลอริน พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x \tan^{-1}(2x)$ **(3 คะแนน)**

วิธีทำ

3.2 $f(x) = \sinh(3x)$ โดย $\left(\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

4. จงประมาณค่าของ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เป็นศูนย์ 4 พจน์ **(4 คะแนน)**

วิธีทำ

ตารางอนุกรมแมคลอริน

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1,\ 1)$

2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty,\ \infty)$

5. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \qquad (-1,\ 1]$

6. $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad [-1,\ 1]$

เฉลยแบบทดสอบวินิจฉัย หน่วยการเรียนที่ 6
เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

1. จงหา *<u>อนุกรมเทย์เลอร์</u>* ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

1.1 $f(x) = e^{-x}$ $\quad x = -1$

วิธีทำ ให้

$f(x) = e^{-x}$ ดังนั้น $f(-1) = e^{-(-1)} = e$

$f'(x) = -e^{-x}$ ดังนั้น $f'(-1) = -e^{-(-1)} = -e$

$f''(x) = e^{-x}$ ดังนั้น $f''(-1) = e^{-(-1)} = e$

$f'''(x) = -e^{-x}$ ดังนั้น $f'''(-1) = -e^{-(-1)} = -e$

$\vdots$ $\qquad\qquad \vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = e^{-x}$ ที่ $x = -1$ คือ

$$\begin{aligned} e^{-x} &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \ldots \\ &= e - e(x+1) + \frac{e(x+1)^2}{2!} - \frac{e(x+1)^3}{3!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e(x+1)^n}{n!} \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n e(x+1)^n}{n!}$

ให้ $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e(x+1)^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} e(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} e(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-1)^n e(x+1)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|x+1\right| \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ $\mathbb{R}$ รัศมี ∞

■

1.2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad\quad\quad$ $x = 2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ ดังนั้น $f(2) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -x^{-2}$ ดังนั้น $f'(2) = -\frac{1}{2^2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$ ดังนั้น $f''(2) = \frac{2}{2^3}$

$f'''(x) = -6x^{-4}$ ดังนั้น $f'''(2) = -\frac{6}{2^4} = -\frac{3!}{2^4}$

$f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$ ดังนั้น $f^{(4)}(2) = \frac{24}{2^5} = \frac{4!}{2^5}$

$\vdots \quad\quad\quad \vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \frac{1}{x}$ ที่ $x = 2$ คือ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{2!}{2^3 \cdot 2!}(x-2)^2 - \frac{3!}{2^4 \cdot 3!}(x-2)^3 + \ldots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}{2^n}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}(x-2)^n}{2^{n+1}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^{n+1}(x-2)^{n-1}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left|x-2\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x-2\right|
\end{aligned}$$

ให้ $\frac{1}{2}\left|x-2\right| < 1$ หรือ $\left|x-2\right| < 2$ จะได้ $0 < x < 4$

⊙ ถ้า $x = 0$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-2)^{n-1}}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}\, 2^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \quad \text{ไม่ลู่เข้า}$$

⊙ ถ้า $x = 4$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{n-1}}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} \qquad \text{ไม่ลู่เข้า}$$

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(0, 4)$ รัศมีการลู่เข้า 2

■

2. จงหา *<u>อนุกรมแมคลอริน</u>* ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

2.1 $f(x) = \ln(1+x)$

วิธีทำ ให้

$f(x) = \ln(1+x)$	ดังนั้น $f(0) = \ln 1 = 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$	ดังนั้น $f'(0) = 1$
$f''(x) = -(1+x)^{-2}$	ดังนั้น $f''(0) = -1$
$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$	ดังนั้น $f'''(0) = 2 = 2!$
$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$	ดังนั้น $f^{(4)}(0) = -6 = -3!$
$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}$	ดังนั้น $f^{(5)}(0) = 24 = 4!$
$\vdots$	$\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \ln(1+x)$ คือ

$$\ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!\,x^3}{4!} + \dots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, x^{n+1}}{n+1}$

ให้ $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{n+2}}{n+2}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(-1)^n x^{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\left|x\right| \\ &= \left|x\right|\end{aligned}$$

ให้ $\quad \left|x\right| < 1 \quad$ จะได้ $\quad -1 < x < 1$

⊙ ถ้า $x = -1$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$ ซึ่งเป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า

⊙ ถ้า $x = 1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า (ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข)

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(-1, 1]$ รัศมีการลู่เข้า 1

■

2.2 $\quad f(x) = \sin 2x$

วิธีทำ ให้

$f(x)$	$= \sin 2x$	ดังนั้น	$f(0) = 0$
$f'(x)$	$= 2\cos 2x$	ดังนั้น	$f'(0) = 2$
$f''(x)$	$= -4\sin 2x$	ดังนั้น	$f''(0) = 0$
$f'''(x)$	$= -8\cos 2x$	ดังนั้น	$f'''(0) = -8$
$f^4(x)$	$= 16\sin 2x$	ดังนั้น	$f^4(0) = 0$
	$\vdots$		$\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \sin 2x$ คือ

$$\begin{aligned}\sin 2x &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \dots\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n+3}}{(2n+3)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n (2x)^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(2n+3)(2n+2)} \left| x^2 \right| = 0 < 1 \quad \text{สำหรับทุก } x \in R$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

3. *<u>โดยใช้ตารางอนุกรมแมคลอริน</u>* จงหาอนุกรมแมคลอริน พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x\sin 3x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

ดังนั้น $\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \dots$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} x\sin 3x &= x\left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \dots\right) \\ &= 3x^2 - \frac{3^3x^4}{3!} + \frac{3^5x^6}{5!} - \frac{3^7x^8}{7!} + \dots \end{aligned}$$

■

3.2 $f(x) = \cosh(2x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cosh(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ และ

และ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

ดังนั้น $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots$

และ $$e^{-2x} = 1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+\dots$$
$$= 1-2x+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\dots$$

ดังนั้น $$\cosh(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\dots\right)+\left(1-2x+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\dots\right)\right]$$
$$= 1+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}+\dots$$

■

4. จงประมาณค่าของ $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x}dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์

วิธีทำ เนื่องจาก $$\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

ดังนั้น $$\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\dots$$

ดังนั้น
$$\int \frac{\tan^{-1}x}{x}dx = C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3}+\frac{x^5}{5\cdot 5}-\frac{x^7}{7\cdot 7}+\dots$$

เพราะฉะนั้น
$$\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{x}dx = \left[x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\frac{x^7}{7^2}+\dots\right]_0^1$$
$$= 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\dots$$
$$\approx 0.90848$$

■

เฉลยแบบทดสอบคู่ขนาน หน่วยการเรียนที่ 6
เรื่องอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน

1. จงหา *อนุกรมเทย์เลอร์* ที่ก่อกำเนิดจากฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

1.1 $f(x) = e^x$ $\quad\quad x = 2$

วิธีทำ ให้ $f(x) = e^x$ ดังนั้น $f(2) = e^2$

$f'(x) = e^x$ ดังนั้น $f'(2) = e^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = e^x$ ที่ $x = 2$ คือ

$$\begin{aligned} e^x &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \ldots \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2(x-2)^2}{2!} + \frac{e^2(x-2)^3}{3!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!} \end{aligned}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^2(x-2)^n}{n!}$

ให้ $f_n(x) = \dfrac{e^2(x-2)^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \dfrac{e^2(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^2(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^2(x-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|x-2\right| \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ $\mathbb{R}$ รัศมี ∞

■

1.2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad x = 3$

วิธีทำ ให้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} & \text{ดังนั้น } f(3) &= \frac{1}{3} \\
f'(x) &= -x^{-2} & \text{ดังนั้น } f'(3) &= -\frac{1}{3^2} \\
f''(x) &= 2x^{-3} & \text{ดังนั้น } f''(3) &= \frac{2}{3^3} \\
f'''(x) &= -6x^{-4} & \text{ดังนั้น } f'''(3) &= -\frac{6}{3^4} = -\frac{3!}{3^4} \\
f^{(4)}(x) &= 24x^{-5} & \text{ดังนั้น } f^{(4)}(3) &= \frac{24}{3^5} = \frac{4!}{3^5} \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่ $x = 3$ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3 + \dots \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2!}{3^3 \cdot 2!}(x-3)^2 - \frac{3!}{3^4 \cdot 3!}(x-3)^3 + \dots \\
&= \frac{1}{3} - \frac{(x-3)}{3^2} + \frac{(x-3)^2}{3^3} - \frac{(x-3)^3}{3^4} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n-1}}{3^n}
\end{aligned}
$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n-1}}{3^n}$

ให้ $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n-1}}{3^n}$ $\quad$ ดังนั้น $\quad f_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+2}(x-3)^{n}}{3^{n+1}}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-3)^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(-1)^{n+1}(x-3)^{n-1}}\right| \\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|x-3\right| \\
&= \frac{1}{3}\left|x-3\right|
\end{aligned}
$$

ให้ $\dfrac{1}{3}\left|x-3\right| < 1$ หรือ $\left|x-3\right| < 3$ จะได้ $0 < x < 6$

⊙ ถ้า $x = 0$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-3)^{n-1}}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \quad \text{ไม่ลู่เข้า}$$

⊙ ถ้า $x = 6$ จะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n-1}}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3} \qquad \text{ไม่ลู่เข้า}$$

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $(0, 6)$ รัศมีการลู่เข้า 3

■

2. จงหา *<u>อนุกรมแมคลอริน</u>* ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาช่วงและรัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้

2.1 $f(x) = \cos x$

วิธีทำ ให้

$f(x) = \cos x$	ดังนั้น $f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	ดังนั้น $f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	ดังนั้น $f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	ดังนั้น $f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	ดังนั้น $f^{(4)}(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = \cos x$ คือ

$$\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^2\right|}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= 0 < 1 \quad \text{สำหรับทุก } x \in R$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

2.2 $f(x) = e^{5x}$

วิธีทำ ให้

$f(x) = e^{5x}$	ดังนั้น	$f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = 5e^{5x}$	ดังนั้น	$f'(0) = 5e^0 = 5$
$f''(x) = 25e^{5x}$	ดังนั้น	$f''(0) = 25$
$f'''(x) = 125e^{5x}$	ดังนั้น	$f'''(0) = 125$
$\vdots$		$\vdots$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x) = e^{5x}$ คือ

$$e^{5x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^3}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}$$

ต่อไปจะหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}$

ให้ $f_n(x) = \frac{(5x)^n}{n!}$ ดังนั้น $f_{n+1}(x) = \frac{(5x)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(5x)^n}\right|$$

$$= 5\left|x\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \text{สำหรับทุก } x \in R$$

แสดงว่าอนุกรมนี้ลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าคือ R รัศมี ∞

■

3. *<u>โดยใช้ตารางอนุกรมแมคลอริน</u>* จงหาอนุกรมแมคลอริน พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x\tan^{-1}(2x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\tan^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots$

ดังนั้น $\tan^{-1}(2x) = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} - \dfrac{(2x)^7}{7!} + \dots$

เพราะฉะนั้น

$$x\tan^{-1}(2x) = x\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= 2x^2 - \frac{2^3x^4}{3!} + \frac{2^5x^6}{5!} - \frac{2^7x^8}{7!} + \dots$$

■

3.2 $f(x) = \sinh(3x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sinh(3x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)$

และ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

ดังนั้น $e^{3x} = 1 + 3x + \dfrac{(3x)^2}{2!} + \dfrac{(3x)^3}{3!} + \dots$

และ $e^{-3x} = 1 + (-3x) + \dfrac{(-3x)^2}{2!} + \dfrac{(-3x)^3}{3!} + \dots$

$$= 1 - 3x + \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \dots$$

ดังนั้น $\sinh(3x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{3x} - e^{-3x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - 3x + \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

$$= 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + \frac{(3x)^7}{7!} + \dots$$

■

4. จงประมาณค่าของ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ โดยใช้พจน์ที่ไม่เท่ากับศูนย์ 4 พจน์

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

ดังนั้น $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$

ดังนั้น

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx &= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots \\ &\approx 0.94608\end{aligned}$$

■

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวเกษราภรณ์ เต็งมีศรี
วันเดือนปีเกิด	22 มกราคม 2524
สถานที่เกิด	อำเภอเบตง จังหวัดยะลา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	26/7 ถนนสุขยางค์ ตำบลเบตง อำเภอเบตง จังหวัดยะลา 95110
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2534	ประถมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนบ้านเบตง “สุภาพอนุสรณ์” อำเภอเบตง จังหวัดยะลา
พ.ศ. 2536	ประถมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนบ้านเบตง “สุภาพอนุสรณ์” อำเภอเบตง จังหวัดยะลา
พ.ศ. 2539	มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนเบตง “วีระราษฎร์ประสาน” อำเภอเบตง จังหวัดยะลา
พ.ศ. 2542	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนคณะราษฎรบำรุง อำเภอเมือง จังหวัดยะลา
พ.ศ. 2546	การศึกษาบัณฑิต (กศ.บ.) วิชาเอกคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา
พ.ศ. 2549	การศึกษามหาบัณฑิต (กศ.ม.) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ