

539.12

ม. 243 ศ

ร. 3

สภาพัฒน์ได้ของแบบจำลองไอซิงชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิกแลตทิซ

เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลข้างเคียง

อันดับที่หนึ่ง สอง สาม และสี่

24 เม.ย. 2535



เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

สิงหาคม 2527

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ -

177767

สภาพัฒน์ได้ของแบบจำลองไอซิงชนิดเฟอแมกเนติกควิบิกแลตทิซ
เมื่อพิจารณาอัตราการกระจายโมเมนต์ข้างเคียง
อันดับที่หนึ่ง สอง สามและสี่



เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร
เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต
~ สิงหาคม 2527

สภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงชนิดสามมิติบนเฟซเช่นเตอรัวบิกแลตติซ สามารถหาได้จากการคำนวณหาค่าแรก ในการกระจายอุณหภูมิของพลังงานอิสระเฮล์มโฮลตซ์ เทอมเหล่านี้จะอยู่ในรูปแบบของความหนาแน่นและอันตรกิริยา ความเข้มข้นที่มีความเข้มข้นเท่ากัน สมบัติของความหนาแน่นและอุณหภูมิทำได้จากการใช้ออมพิวเตอร์ช่วยในการหาคำนวนวิธีที่แผนภาพที่เป็นไปได้สามารถบรรจุลงในแลตติซกาซ โดยใช้วิธีการประมาณเอกซ์ตราไปเลทกับอนุกรมของสภาพอัดได้ที่ความหนาแน่นวิกฤต ทำให้สามารถหาอุณหภูมิวิกฤต และ γ เอกซ์โปเนนที่ได้ ผลลัพธ์ของสภาพอัดได้ที่สามารถสรุปได้เป็น

1. ถ้าอันตรกิริยา ความเข้มข้นที่พิจารณาเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าวิกฤตลดลง
2. จากกราฟของสภาพอัดได้กับอุณหภูมิจะพบว่า สภาพอัดได้จะมีค่าเข้าใกล้อนันต์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต



COMPRESSIBILITY OF ISING MODEL ON FACE - CENTERED CUBIC
LATTICE WITH FIRST -, SECOND-, THIRD -, AND
FOURTH - NEIGHBOUR INTERACTIONS



Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University

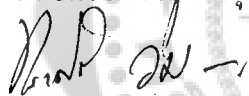
August 1984

The compressibility of the three dimensional Ising model on face - centered cubic lattice is investigated through extensive calculation of the first six terms in the high temperature expansion of Helmholtz free energy. These terms are expressed in the forms of the density and four interaction strengths of equal potential. The coefficients of density and temperature are determined through the sorting of all possible topological distinct diagrams with the help of computer. These results, in compressibility series expansion, are arranged and analyzed by extrapolation method at critical density to yield the critical temperature and γ - exponent. Final conclusion can be made as follow.

1. If higher interaction potential strengths are taken into consideration, the critical value will be decreasing.
2. Compressibility curve will reach the infinite when the temperature approaches its critical value.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิต และคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณา
ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร ปริญญา
การศึกษามหาบัณฑิตของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม



ประธาน

สุทัศน์ นกคำ

กรรมการ

คณะกรรมการสอบ



ประธาน

สุทัศน์ นกคำ

กรรมการ

กรรมการ

ประกาศคุณประการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และให้คำแนะนำอย่างดียิ่ง
จากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทรงศรี วัฒนวิชัย ประธานกรรมการที่ปรึกษา รอง-
ศาสตราจารย์ ดร. สุตัน ยกसान กรรมการที่ปรึกษา และรองศาสตราจารย์
ดร. ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ กรรมการสอบปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็น
อย่างสูง

บุญเรือง ศรีเทรัญ



สารบัญ

บทที่

หน้า

1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	จุดมุ่งหมายของการวิจัย	7
	ความสำคัญของการวิจัย	7
	ขอบเขตของการวิจัย	7
	นิยามศัพท์เฉพาะ	7
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	10
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	28
3	วิธีดำเนินการวิจัย	30
4	ผลการวิจัย	37
5	บทย่อ สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ	43
	บทย่อ	43
	จุดมุ่งหมายของการวิจัย	43
	วิธีดำเนินการวิจัย	43
	การวิเคราะห์ผล	43
	สรุปผลการวิจัย	43
	อภิปรายผลการวิจัย	44
	ข้อเสนอแนะในการวิจัย	46
	บรรณานุกรม	47
	ภาคผนวก	50

บัญชีตาราง

ตาราง

หน้า

1. แสดงจำนวนวิธีในการจัดแผนภาพเมื่อพิจารณาจำนวนบอนด์และ
อันดับของอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่เกี่ยวข้อง 24
2. ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n, m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จากการกระจาย
อนุกรมคลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,0,0,0) 33
3. ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n, m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จากการกระจาย
อนุกรมคลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,1,0,0) 34
4. ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n, m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จากการกระจาย
อนุกรมคลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,1,1,0) 35
5. ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n, m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จากการกระจาย
อนุกรมคลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,1,1,1) 36
6. แสดงค่าสัมประสิทธิ์ b_n ของ K^n จากส่วนกลับสภาพอัดได้
(K_T^{-1}) ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก .. 37
7. แสดงค่าสัมประสิทธิ์ a_n ของ K^n จากสภาพอัดได้ (K_T)
ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก 38
8. ค่าวิกฤตของอนุกรมสภาพอัดได้ของไอซิงแลตทิซกาซกรณีต่าง ๆ 40
9. แสดงค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จากการวิจัยครั้งนี้เปรียบ
เทียบกับค่าที่คำนวณไว้โดย คอมมส์และคอลลัม และ
ทรงศรี วิมลวิชัย 44
10. เปรียบเทียบค่าเอกซ์โปเนนซ์วิกฤต ν กับค่าวิกฤต K_C 46

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ

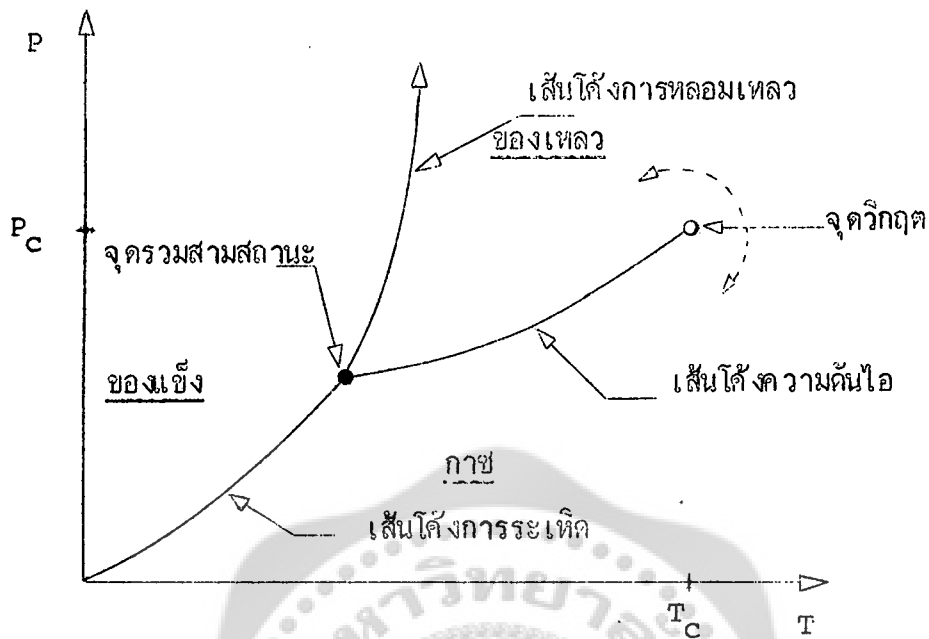
หน้า

1. กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและอุณหภูมิของระบบ
ของเหลว - ก๊าซ และของแข็ง 2
2. กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่นของ
ของเหลว - ก๊าซ ที่อุณหภูมิมากกว่า เท่ากับ และน้อยกว่า
อุณหภูมิวิกฤต 2
3. กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่น และอุณหภูมิ
ของของเหลว - ก๊าซ 3
4. แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลอันดับที่ หนึ่ง สอง
สามและสี่ ตามลำดับ 8
5. เฟสเซนเตอร์คิวบิกแลตทิซ 9
6. แสดงลักษณะของแผนภาพที่มีเส้นประยื่นออกมาจากวงกลม 20
7. แสดงแผนภาพวงกลมที่ยุบลงมาอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันได้ 21
8. แสดงแผนภาพที่มีสามบอนด์ 23
9. แสดงวิธีคำนวณหาจำนวนวิธีที่แผนภาพ  บรรจุลง
ในแลตทิซกาศชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก 25
10. กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{a_n} / a_{n-1}$ กับ $\frac{1}{n}$ 39
11. กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K_T F.C.C.(1,0,0,0)
 K_T F.C.C.(1,1,0,0) K_T F.C.C.(1,1,1,0) และ
 K_T F.C.C.(1,1,1,1) กับ K/K_C 41

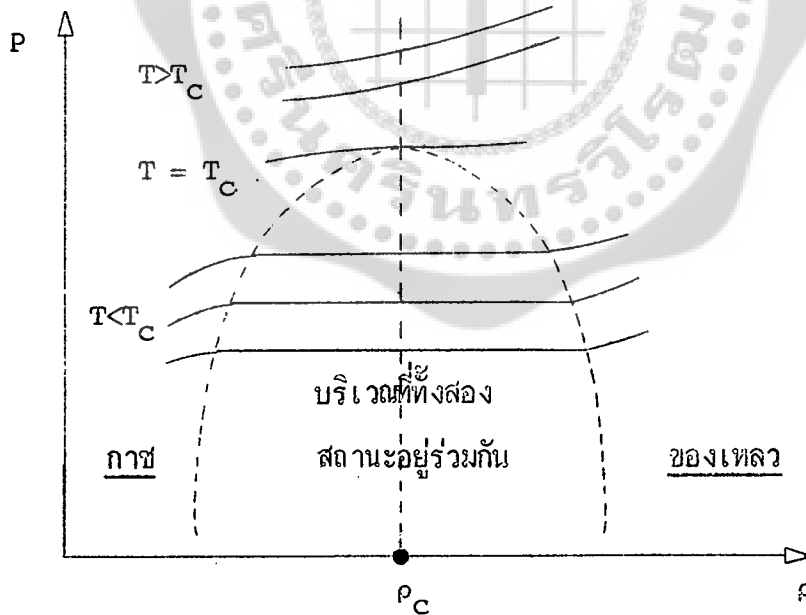
ภูมิหลัง

พฤติกรรมวิกฤต (critical behaviour) ของระบบของเหลว-กาซนั้นได้มีผู้ศึกษาค้นคว้ามาเป็นเวลามากกว่าร้อยปีแล้ว ในปี ค.ศ. 1869 แอนดรูว์ (Andrew) ได้ค้นพบพฤติกรรมวิกฤตของกาซคาร์บอนไดออกไซด์จากการทดลอง และในปี ค.ศ. 1872 แวน เดอร์ วอลล์ (van der Waals) ได้พบทฤษฎีที่อธิบายเกี่ยวกับพฤติกรรมวิกฤตของระบบของเหลว-กาซ และเรียกทฤษฎีนี้ว่า "ทฤษฎี แวน เดอร์ วอลล์" ของการเปลี่ยนสถานะของของเหลว-กาซ (Stanley, 1971 : 7)

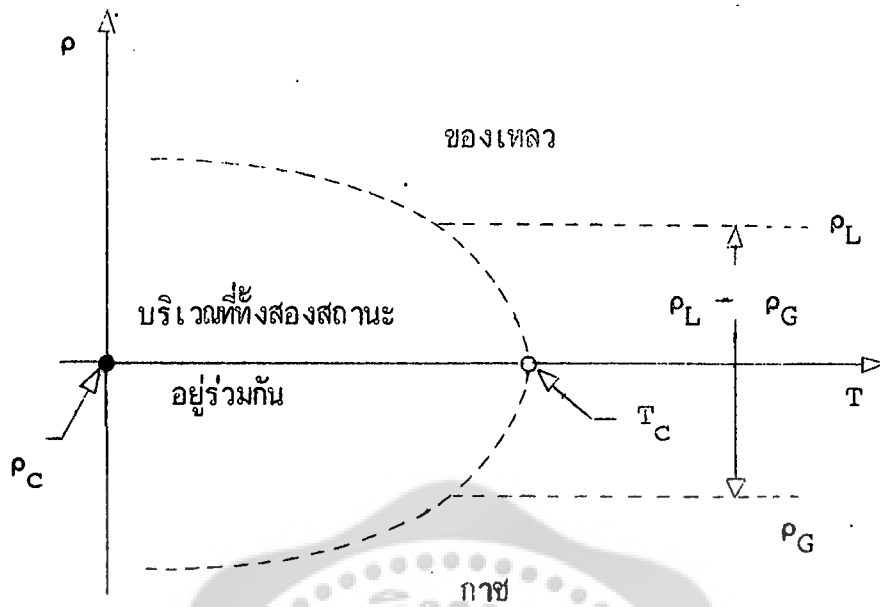
ในการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมวิกฤตของระบบของเหลว-กาซนั้นเราสามารถเชื่อมโยงสมการสถานะ $f(P, \rho, T) = 0$ กับตัวแปรทางอุณหพลศาสตร์ได้ด้วย ความดัน (P) ความหนาแน่น (ρ) และอุณหภูมิ (T) จากสมการสถานะนี้เราสามารถเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสามตัวลงบนพื้นผิวสามมิติได้ และแต่ละจุดซึ่งมีพิกัด (co - ordinate) เป็น P, ρ, T นี้จะแทนสถานะสมดุลของระบบ ความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เราสามารถแสดงได้ด้วยเส้นกราฟ $P - T$, $P - \rho$ และ $\rho - T$ ดังแสดงในภาพประกอบ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ



ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดัน และอุณหภูมิของระบบของ
เหลว-ก๊าซ และของแข็ง



ภาพประกอบ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดัน และความหนาแน่นของของ
เหลว-ก๊าซ ที่อุณหภูมิมากกว่า เท่ากับและน้อยกว่าอุณหภูมิวิกฤต



ภาพประกอบ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นและอุณหภูมิของของเหลว-ก๊าซ

จากภาพประกอบ 1 เราจะเห็นได้ว่า ระนาบ $p - T$ ถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนด้วยเส้นโค้งการระเหิด (sublimation curve) เส้นโค้งความดันไอ (vapour pressure curve) และเส้นโค้งการหลอมเหลว (fusion curve) แต่ละส่วนจะแทนสถานะทั้งสามของสสารคือ ของแข็ง ของเหลว และก๊าซ จุดแต่ละจุดบนเส้นโค้งทั้งสามเส้นนี้จะแทนสถานะสมดุลของสสารที่เส้นโค้งแต่ละเส้นแบ่งอยู่ สถานะสมดุลของสสารนี้เป็นภาวะที่สสารสองสถานะหรือมากกว่าสามารถอยู่ร่วมกันโดยบริเวณเดียวกันได้ และเราไม่สามารถบอกได้ว่าส่วนไหนเป็นสถานะอะไร และจากภาพประกอบนี้เราจะเห็นว่าเส้นโค้งความดันไอนี้จะสิ้นสุดลงที่จุด ๆ หนึ่ง และเรียกจุดนี้ว่า "จุดวิกฤต" (critical point) ที่จุดวิกฤตของเหลวและก๊าซจะมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature = T_C) ความดันเท่ากับความดันวิกฤต (critical pressure = P_C) และความหนาแน่นเท่ากับความหนาแน่นวิกฤต (critical density = ρ_C) ที่จุดนี้ของเหลวและก๊าซสามารถเปลี่ยนกับไปกลับมาได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ต้องผ่านเส้นโค้งความดันไอ นั่นคือที่จุดวิกฤตนี้เราไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่างสถานะของของเหลว และก๊าซได้

จากภาพประกอบ 2 และ 3 เราจะเห็นว่าที่อุณหภูมิต่ำมาก ๆ ผลต่างของความหนาแน่นของ ของเหลว (ρ_L) และความหนาแน่นของก๊าซ (ρ_G) จะมีค่ามาก เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นผลต่าง $\rho_L - \rho_G$ จะลดลงเรื่อย ๆ และเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต $\rho_L - \rho_G$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราเรียก $\rho_L - \rho_G$ ว่าเป็นค่า "พารามิเตอร์เชิงระเบียบ (order parameter) ของระบบของเหลว-ก๊าซ ที่วิกฤตนี้ค่าความหนาแน่นของของเหลวและความหนาแน่นของก๊าซจะมีค่าเท่ากันและมีค่าเท่ากับค่าความหนาแน่นวิกฤตนั่นเอง"

สภาพอัดได้ของระบบของเหลว-ก๊าซที่อุณหภูมิต่ำ (isothermal compressibility = K_T) เมื่อความดันเท่ากับความดันวิกฤตและความหนาแน่นเท่ากับค่าความหนาแน่นวิกฤต สามารถเขียนได้เป็น

เมื่อ

$$K_T \propto \epsilon^{-\gamma}$$

$$\epsilon = \frac{T - T_C}{T_C}, \quad T > T_C$$

γ เป็นค่าคงที่ใด ๆ เราเรียกว่า ค่าเอกซ์โปเนนตฺ์วิกฤต (critical point exponent) ของสภาพอัดได้

การศึกษาพฤติกรรมวิกฤตสมัยใหม่นั้นเริ่มในปี ค.ศ. 1941 ซึ่งกักเกนเฮล์ม (guggenheims) ได้ค้นพบว่าเส้นโค้งการอยู่ร่วมกัน (coexistence curve) ของระบบของเหลว-ก๊าซ ไม่เป็นรูปพาราโบลา ต่อมาในปี ค.ศ. 1944 ออนซาเกอร์ (Onsager) ได้ศึกษาไอซิงแลตทิซกาซแบบสองมิติโดยไม่พิจารณาถึงผลของสนามแม่เหล็กภายนอกและพบว่า ค่าความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่ จะเข้าใกล้ค่าอนันต์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต (Stanley. 1971 : 9) และในปี ค.ศ. 1952 แยงค์ และ ลี (Yang and Lee. 1952 : 404) ได้เสนอทฤษฎีการเป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็กของระบบสารแม่เหล็กซึ่งเขาใช้แบบจำลองแลตทิซกาซที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่องและพบว่าเส้นกราฟความดันและความหนาแน่นของระบบของเหลว-ก๊าซ จะคล้ายคลึงกับเส้นกราฟของการ

ทำให้เกิดอำนาจแม่เหล็ก (magnetization) ของระบบสารแม่เหล็ก

ในการใช้แบบจำลองไอซิงชนิดสองมิติศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมวิกฤตนั้นมีข้อบกพร่องหลายประการ (Stanley. 1971 : 16) เช่น เราไม่สามารถหาค่าเอกซ์โปเนนต์ β , γ และ γ' ได้ นอกจากนั้นค่าที่ได้จากการคำนวณโดยใช้แบบจำลองไอซิงชนิดสองมิตินั้นไม่สอดคล้องกับผลการทดลองในระบบของเหลว-ก๊าซทั่ว ๆ ไป นอกจากนี้แบบจำลองไอซิงชนิดสองมิติแล้วยังมีแบบจำลองต่าง ๆ เช่น แบบจำลองไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg model) แบบจำลองทรงกลม (spherical model) ที่เราสามารถใช้ศึกษาพฤติกรรมวิกฤตของระบบของเหลว-ก๊าซได้ แต่ก็มีข้อบกพร่องเหมือนกับแบบจำลองไอซิงชนิดสองมิติเช่นกัน ปัญหาหรือข้อบกพร่องเหล่านี้จะไม่พบในกรณีของการใช้แบบจำลองไอซิงชนิดสามมิติศึกษาระบบของเหลว-ก๊าซเลย

ในการใช้แบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซ ชนิดสามมิติศึกษาพฤติกรรมของระบบของเหลว-กาซ ณ. บริเวณวิกฤตนั้นเราไม่สามารถหาคำตอบที่แท้จริง (exact solution) ได้ แต่เราสามารถหาคำตอบที่ใกล้เคียงกับผลการทดลองได้โดยเริ่มจากการกระจายอนุกรมของพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz free energy) ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซแล้วใช้วิธีเอกซ์ตราโพลेट (extrapolate) หรือการประมาณค่าแบบพาเคต์ (Pade' approximants) เพื่อหาค่าวิกฤตจากอนุกรมที่เราต้องการศึกษา แฟร์เรลล์ และ แมเออร์ (Farrell and Meijer. 1972 : 3747) ใช้วิธีการประมาณค่าแบบพาเคต์เพื่อหาค่าเอกซ์โปเนนต์วิกฤตของสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซ สมมาตร ซิคญาติ (สมมาตร ซิคญาติ 2525 : 70) ใช้วิธีเอกซ์ตราโพลेटเพื่อหาค่าวิกฤตจากอนุกรมความร้อยละที่ปริมาตรคงที่ ปรากฏว่าค่าที่ได้ใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณโดย ดอมบ์และดอลตัน (Domb and Dalton. 1966 : 859) นอกจากนั้น แลนเดาและลิฟชิตซ์ (Londau and Lifshitz) ได้ใช้การกระจายอนุกรมเทเลอร์ศึกษาสภาพอัดได้ของแลตทิซกาซ และพบว่าสภาพอัดได้ของแลตทิซกาซจะเข้าใกล้ค่าอนันต์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต (Isihara. 1971 : 267)

ในการศึกษาแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซชนิดสามมิตินั้น เราพิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุล ทิศทางสปินของโมเลกุลที่พิจารณาทั้งสองแบบคือ

สปินในทิศขึ้น ($\uparrow$) และสปินในทิศลง ($\downarrow$) ดังนั้นอันตรกิริยาระหว่างสปินของ โมเลกุลมีสามแบบด้วยกันคือ ขึ้น - ขึ้น $\uparrow \uparrow$ ลง - ลง $\downarrow \downarrow$ และขึ้น - ลง $\uparrow \downarrow$ หรือ ลง - ขึ้น $\downarrow \uparrow$ อำนาจแม่เหล็กเฟอร์โร (ferromagnetism) จะเกิดขึ้นถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลอยู่ในลักษณะ $\uparrow \uparrow$ หรือ $\downarrow \downarrow$ และจะเกิดอำนาจแม่เหล็กแอนติเฟอร์โร (antiferromagnetism) ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลอยู่ในลักษณะ $\uparrow \downarrow$ จากการศึกษาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลนี้ ดอลตันและวูด (Dalton and Wood. 1969 : 1217) ได้พิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ใกล้กันสามอันดับแรกเพื่อศึกษาพฤติกรรมของแสงดิฟฟракชันแบบไอซิง ณ บริเวณวิกฤตโดยคิดว่าความแรง (potential strength) ของอันตรกิริยาระหว่างสปินแต่ละอันกับมีค่าเท่ากัน แฟร์เรลล์และแมเออร์ (Farrell and Meijer. 1972 : 3747) ได้หาค่าเอกซ์โปเนนท์วิกฤตของสภาพอัดไคของแบบจำลองไอซิงแสงดิฟฟракชัน โดยพิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ใกล้กันสี่อันดับแรกและคิดว่าความแรงของอันตรกิริยาระหว่างสปินแต่ละอันกับมีค่าไม่เท่ากันซึ่งค่าที่ได้นี้จะมีความถูกต้องมากกว่าค่าของ ดอลตันและวูด ทั้งนี้เพราะความแรงของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลนั้นมีค่าลดลงเมื่อระยะทางเพิ่มขึ้น

ในการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปรทางอุณหพลศาสตร์นั้นเราใช้การกระจายอนุกรมของฟังก์ชันการแบ่งส่วน (partition function) ซึ่งจะพิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลของไอซิงแสงดิฟฟракชัน และจากฟังก์ชันการแบ่งส่วนของแบบจำลองไอซิงแสงดิฟฟракชัน เราสามารถหาลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ โดยมีอุณหภูมิและความหนาแน่นเป็นตัวแปร วิธีนี้เป็นวิธีที่สะดวกในการศึกษาปริมาณต่าง ๆ ของแสงดิฟฟракชัน ณ บริเวณวิกฤต เช่น สภาพอัดไคหรือความร้อนจำเพาะ เป็นต้น แมเออร์ แฟร์เรลล์ และซอมเมอร์เฟลด์ (Meijer Farrell and Sommerfeldt. 1972 : 634) ใช้การกระจายคลัสเตอร์ (cluster expansion) หาลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของแบบจำลองไอซิงแสงดิฟฟракชันชนิดบอดีเซนเตอร์คิวบิก (body centered cubic lattice) และพิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ใกล้ที่สุดสี่อันดับแรก ซุลลิแวน (Sullivan. 1970 : 98) ใช้วิธีการกระจายคลัสเตอร์หาค่าวิกฤตจากอนุกรม

สภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดซิมเปิลคิวบิก (simple cubic lattice) และพบว่าสภาพอัดได้จะเข้าใกล้อนันต์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต

ในการศึกษาแบบจำลองไอซิ่งแลตทิซกาซนั้น ผู้วิจัยใช้แลตทิซชนิดเฟซเซนเตอร์คิวบิก (face - centered cubic lattice) ในสามมิติและศึกษาสภาพอัดได้ที่อุณหภูมิของแบบจำลองไอซิ่งแลตทิซกาซเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิ่งแลตทิซกาซ ชนิดเฟซเซนเตอร์คิวบิกในสามมิติ เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต
2. เพื่อหาค่าวิกฤตเมื่อความหนาแน่นเข้าใกล้ความหนาแน่นวิกฤต และเปรียบเทียบค่าที่ได้กับค่าของ คอมบ์และคอลตัน และค่าของวิลลาลิชซ์

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อแสดงให้เห็นว่าผลที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ทำให้ทฤษฎีที่มีอยู่เดิมมีความน่าเชื่อถือยิ่งขึ้น

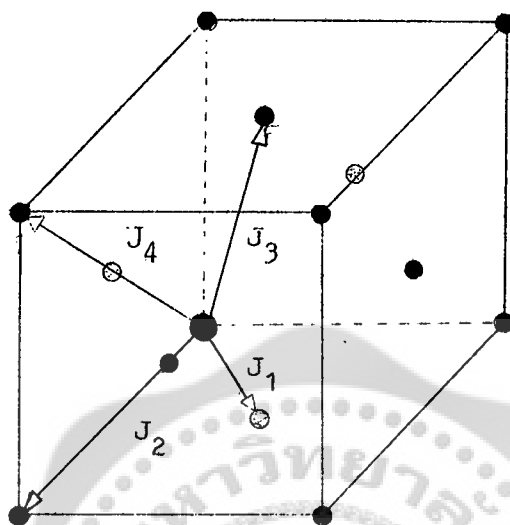
ขอบเขตของการวิจัย

ในการศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟซเซนเตอร์คิวบิกในสามมิติเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤตนั้น ผู้วิจัยใช้การกระจายอนุกรมลัสเตอร์เพื่อหาพลังงานอิสระ เฮล์มโฮลทซ์ถึงพลที่อุณหภูมิยกกำลังหกและพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ใกล้กันที่สุดสี่อันดับแรกโดยคิดว่า ความแรงของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลทุกอันดับมีค่าเท่ากันและเท่ากับหนึ่ง และจะไม่พิจารณาถึงผลของสนามแม่เหล็กภายนอก

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. อันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุล เป็นแรงที่เกิดขึ้นระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ตามตำแหน่งต่าง ๆ ในแลตทิซกาซ ถ้าเป็นแลตทิซกาซชนิดเฟซเซนเตอร์คิวบิก

จะมีอันตรกิริยาเกิดขึ้นทั้งหมดสี่อันดับในหนึ่งแลตทิซ ดังภาพประกอบ 4



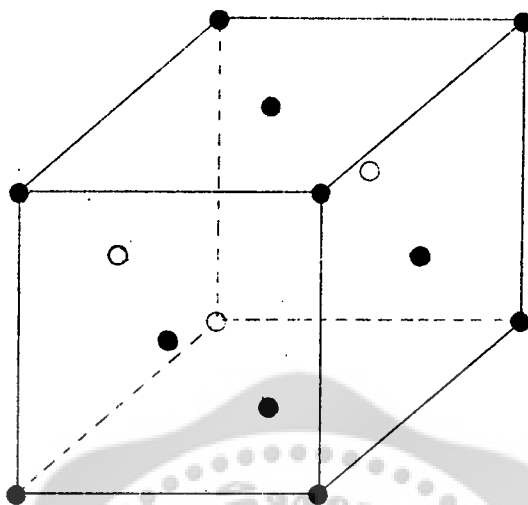
ภาพประกอบ 4 แสดงอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลอันดับที่หนึ่ง สอง สามและสี่ตามลำดับ

2. อุณหภูมิวิกฤต (critical temperature) คืออุณหภูมิที่ทำให้ของเหลวและก๊าซเปลี่ยนสถานะกลับไปกลับมาได้อย่างต่อเนื่อง

3. พารามิเตอร์เชิงระเบียบ (order parameter) เป็นค่าความแตกต่างระหว่างความหนาแน่นของของเหลวและความหนาแน่นของก๊าซ ที่อุณหภูมิวิกฤต ความหนาแน่นของของเหลวและการละเท่ากันและเท่ากับ ความหนาแน่นวิกฤต

4. แบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซ (Ising lattice gas model) เป็นแบบจำลองที่สร้างขึ้นเมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลของแลตทิซกาซซึ่งมีโมเลกุลอยู่กันอย่างไม่ต่อเนื่อง คือมีการจัดวางตัวในโครงสร้างแบบแลตทิซ และมีสปินชี้ทิศ $\uparrow$ และ $\downarrow$ เท่านั้น

5. เฟซเซนเตอร์คิวบิกแลตทิซ (face - centered cubic lattice) เป็นแลตทิซชนิดหนึ่งที่มีโครงสร้างเป็นรูปลูกบาศก์ ซึ่งมีโมเลกุลอยู่ที่มุมต่าง ๆ ของลูกบาศก์ และที่จุดกึ่งกลางของพื้นผิวแต่ละด้าน ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 เฟสเซนเตอร์คิวบิกแลตทิซ

6. ค่าวิกฤต (critical value = K_c) เป็นส่วนกลับของผลคูณระหว่างค่าแรงดันกับอุณหภูมิวิกฤต ซึ่งเขียนได้เป็น $K_c = \frac{1}{K T_c}$
7. สภาพอัดได้ที่อุณหภูมิคงที่ (isothermal compressibility = K_T) ของระบบของเหลว-ก๊าซ เป็นการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรต่อความดันที่เปลี่ยนไปเมื่ออุณหภูมิคงที่ซึ่งเขียนได้เป็น $K_T = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$ และเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ค่าอุณหภูมิวิกฤต $\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$ จะมีค่าเป็นอนันต์

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาพฤติกรรมของระบบของเหลว-กาซนั้น ไอซิงได้สร้างแบบจำลองของสารแม่เหล็กเฟอร์โรแมกเนติกโดยเขาคิดว่าโมเลกุลของเอทิลีนกาซนั้นมีสปินอยู่สองลักษณะคือ สปินในทิศขึ้น ($\uparrow$) และสปินในทิศลง ($\downarrow$) และอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลเกิดขึ้นได้สามแบบคือ $\uparrow \uparrow$, $\downarrow \downarrow$ และ $\uparrow \downarrow$ หรือ $\downarrow \uparrow$ ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลมีลักษณะเป็น $\uparrow \uparrow$ หรือ $\downarrow \downarrow$ จะเกิดอำนาจแม่เหล็กเฟอร์โรและมีค่าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลเป็น $+J$ ถ้าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลเป็น $\uparrow \downarrow$ หรือ $\downarrow \uparrow$ จะเกิดอำนาจแม่เหล็กแอนติเฟอร์โร และมีค่าอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลเป็น $-J$ (Huang.

1963 : 329) พลังงานของแบบจำลองไอซิงสเตติซกาซ สามารถเขียนได้เป็น

$$E_I \{s_i\} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i \quad \dots (1)$$

- ซึ่ง
- $E_I \{s_i\}$ คือพลังงานของแบบจำลองสเตติซกาซแบบไอซิง
 - J_{ij} คือพลังงานเนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลตัวที่ i และตัวที่ j
 - $s_i s_j$ คืออันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลตัวที่ i และตัวที่ j ซึ่งเท่ากับ $+1$ เมื่อสปินตัวที่ i และตัวที่ j มีทิศทางเดียวกัน และเท่ากับ -1 เมื่อสปินมีทิศทางตรงข้ามกัน
 - $\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j$ คือ ผลรวมของพลังงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลตัวที่ i และตัวที่ j
 - B คือสนามแม่เหล็กภายนอก
 - s_i คือค่าของสปินของโมเลกุลตัวที่ i ซึ่งเท่ากับ $+1$ ถ้าสปินมีทิศขึ้น และเท่ากับ -1 เมื่อสปินมีทิศลง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยไม่พิจารณาถึงผลของสนามแม่เหล็กภายนอกสมการที่ (1)

จึงเขียนได้เป็น

$$E_I \{s_i\} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} s_i s_j \quad \dots (2)$$

พิจารณาในกรณีที่ $J > 0$ ฟังก์ชันการแบ่งส่วนแคนอนิคัล (Canonical partition function) ของไอซิงแลตทิซกาซ เขียนได้เป็น

$$Q_I(N,T) = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} e^{-\beta E_I \{s_i\}} \quad \dots (3)$$

ถ้าพิจารณาระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค N อนุภาค เราพบว่าอนุภาคแต่ละอนุภาคนั้นจะมีสนามหักเหอยู่รอบ ๆ ซึ่งสนามนี้จะเกิดใกล้ ๆ ตัวอนุภาคทำให้เกิดปริมาตรเล็ก ๆ ขึ้น และเราถือว่าในปริมาตรเล็ก ๆ นี้จะมีอนุภาคอยู่ได้เพียงหนึ่งอนุภาคเท่านั้น อย่างไรก็ตามถ้ามีอนุภาคสองอนุภาคอยู่ใกล้กันก็จะมีแรงกระทำซึ่งกันและกันและทำให้มีปริมาตรเพิ่มขึ้น ดังนั้นปริมาตรนี้จึงขึ้นกับตำแหน่งของอนุภาคที่มีแรงกระทำระหว่างกัน ในกรณีของไอซิงแลตทิซกาซก็เช่นเดียวกันอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลแต่ละโมเลกุลก็คือสนามหักเหระหว่างโมเลกุล พลังงานของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซก็คือ พลังงานศักย์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลนั่นเอง จากสมการที่ (3) เราเขียนได้เป็น

$$Q_I(N,T) = \frac{1}{N!} \sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_N=1}^L e^{-\beta U(r_i - r_j)} \quad \dots (4)$$

ซึ่ง N คือ จำนวนโมเลกุลทั้งหมดของระบบ
 $U(r_i - r_j)$ คือ พลังงานศักย์ของระบบที่ขึ้นกับระยะทางระหว่างโมเลกุลทั้งสองที่มีอันตรกิริยาระหว่างกัน
 L คือ จำนวนตำแหน่งของแลตทิซ (lattice site)
 $Q_I(N,T)$ คือ ฟังก์ชันการแบ่งส่วนแคนอนิคัลของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซ
 β คือ ส่วนกลับของผลคูณระหว่างค่าคงที่โบลทซ์มานกับอุณหภูมิซึ่งเขียนได้เป็น $\beta = 1/kT$

สำหรับระบบที่มี N อนุภาค จะมีจำนวนคู่ของอันตรกิริยาที่แตกต่างกันอยู่ $\frac{N(N-1)}{2}$ คู่ ดังนั้น $U(r_i - r_j)$ จึงเป็นผลรวมของ $\frac{N(N-1)}{2}$ คู่นั้นคือ

$$U(r_i - r_j) = \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} u(r_i - r_j) \quad \dots (5)$$

ซึ่ง $u(r_i - r_j)$ เป็นพลังงานศักย์ระหว่างโมเลกุลตัวที่ i และตัวที่ j และ $u(r_i - r_j) = 0$ เมื่อโมเลกุลทั้งสองมีระยะห่างกันมาก ๆ ฟังก์ชันการแบ่งส่วนแคนอนิคัลของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซ เขียนได้เป็น

$$Q_I(N, T) = \frac{1}{N!} \sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_N=1}^L e^{-\beta \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} u(r_i - r_j)} \quad \dots (6)$$

จากฟังก์ชันการแบ่งส่วนแคนอนิคัล พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซสามารถเขียนได้เป็น

$$F_I(N, T) = -kT \ln Q_I(N, T) \quad \dots (7)$$

$F_I(N, T)$ สามารถแทนได้ด้วย F เมื่อ $B = 0$ ดังนั้น

$$-\beta F = \ln \left[\frac{1}{N!} \sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_N=1}^L e^{-\beta \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} u(r_i - r_j)} \right] \quad \dots (8)$$

เนื่องจากว่าเอกซ์โปเนนเชียล (exponential) ของผลรวมจะมีค่าเท่ากับผลคูณของเอกซ์โปเนนเชียล ดังนั้น

$$e^{-\beta \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} u(r_i - r_j)} = \prod_{N \geq i > j \geq 1}^L e^{-\beta u(r_i - r_j)} \quad \dots (9)$$

เพื่อความสะดวกเรานิยามฟังก์ชัน

$$e^{-\beta u(r_i - r_j)} = 1 + f_{ij} \quad \dots (10)$$

ดังนั้น

$$\prod_{N \geq i > j \geq 1} e^{-\beta u(r_i - r_j)} = \prod_{N \geq i > j \geq 1} (1 + f_{ij}) \quad \dots (11)$$

แทนค่าสมการที่ (11) ลงในสมการที่ (8) แล้วกระจาย เราจะได้สมการพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ เป็น

$$- \beta F = \ln \left[\frac{1}{N!} \sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_N=1}^L \left(1 + \sum_{\langle ij \rangle} f_{ij} + \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\langle i'j' \rangle} f_{ij} f_{i'j'} + \dots \right) \right] \quad \dots (12)$$

นิพจน์ (expression) ของพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ในสมการที่ (12) นี้ ได้มาจากสมมุติฐานที่ว่าอนุภาคสองอนุภาคจะอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันไม่ได้ และเราจะไม่พิจารณาอันตรกิริยาในลักษณะ $f_{ij} f_{ij}$ ถ้าอนุภาคสองอนุภาคอยู่ตำแหน่งเดียวกันได้ $1 + f_{ii} = 0$ หรือ $f_{ii} = -1$ นิพจน์พลังงานศักย์ที่ถูกต้องกว่าเป็นอนันต์

ถ้าพิจารณาเทอมแรกของสมการที่ (12) ก็คือ

$$\sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_N=1}^L 1$$

ซึ่งผลรวมแต่ละครั้งเท่ากับ L ดังนั้นผลรวมทั้งหมด N ครั้ง จะได้เป็น L^N ถ้า $L^N/N!$ นี้จะให้สมการที่แสดงสถานะก๊าซอุดมคตินี้คือ $PV = NkT$ สำหรับผลรวมของเทอมที่สองในสมการที่ (12) จะสมนัยกับการชนกันของโมเลกุลที่ต่างกันซึ่งมีอยู่เป็นจำนวน $\frac{N(N-1)}{2}$ คู่ เนื่องจาก $N \gg 2$ โมเลกุลหนึ่งต่างจากโมเลกุลตัวที่ i และ j ดังนั้นเมื่อรวมโมเลกุลจำนวน $N-2$ ครั้งจะได้ L^{N-2} ดังนั้น

$$\sum_{r_1=1}^L \dots \sum_{r_{N-2}=1}^L \sum_{\langle ij \rangle} f_{ij} = L^{N-2} \frac{N(N-1)}{2} \sum_{\langle ij \rangle} f_{ij} \quad \dots (13)$$

พจน์อื่น ๆ ที่เหลือเราก็คิดในทำนองเดียวกัน ดังนั้นพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์จึงเขียนได้เป็น

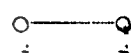
$$- \beta F = \ln \left[\frac{1}{N!} \left(L^N + L^{N-2} \frac{N(N-1)}{2} \langle f_{ij} \rangle + \dots \right) \right] \quad \dots (14)$$

ในกรณีที่ N และ L มีค่ามาก ๆ $\frac{N(N-1)}{2}$ จึงมีค่าประมาณ $N^2/2$ และ $N/L = \rho$

พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์จึงเขียนได้เป็น

$$- \beta F = \ln \left[\frac{L^N}{N!} \left(1 + \frac{\rho^2}{2!} \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} f_{ij} + \dots \right) \right] \quad \dots (15)$$

การรวมกันหลาย ๆ ครั้งของ f_{ij} ก็คือ อันตรกิริยาระหว่างคู่อะตอมโมเลกุลที่ต่างกัน

เมเยอร์ (Mayer, 1940 : 286) ได้แทน f_{ij} ด้วยแผนภาพ 

จุดกลมจะแทนโมเลกุลตัวที่ i และ j เส้นตรงแทนแขนของอนุภาคที่เกิดจากอันตรกิริยา

ระหว่างโมเลกุลตัวที่ i และ j

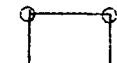
เนื่องจาก $\ln AB = \ln A + \ln B$ ดังนั้นสมการที่ (15) จึงเขียนได้เป็น

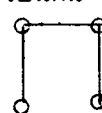
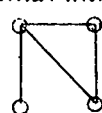
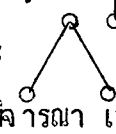
$$- \beta F = \ln \frac{L^N}{N!} + \ln \left[1 + \frac{\rho^2}{2!} \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} f_{ij} + \dots \right] \quad \dots (16)$$

โดยใช้การประมาณสเตอร์ลิงส์ (Stirling's approximation) ของ $\ln N! = N \ln N - N$ เทอมแรกของสมการที่ (16) สามารถเขียนได้เป็น

$$\ln \frac{L^N}{N!} = L (\rho - \rho \ln \rho) = \sum_{r=1}^L \rho (1 - \ln \rho) \quad \text{ดังนั้นสมการที่ (16) เราเขียนได้เป็น}$$

$$- \beta F = \sum_{r=1}^L \rho (1 - \ln \rho) + \ln \left[1 + \frac{\rho^2}{2!} \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^{N-1} f_{ij} + \dots \right] \quad \dots (17)$$

เทอมที่สองของสมการที่ (17) นั้นแสดงอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุล อันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลเหล่านี้สามารถแทนได้ด้วยแผนภาพ ซึ่งมีสองชนิดด้วยกันคือ แผนภาพลดทอนไม่ได้ (irreducible diagram) ซึ่งมีลักษณะ  ,  , 

เป็นต้น และแผนภาพลดทอนได้ (reducible diagram) ซึ่งมีลักษณะ  ,  , 

เป็นต้น สำหรับแผนภาพลดทอนได้จะไม่นำมาพิจารณา เพราะ

ว่าเป็นผลมาจากแผนภาพลดทอนไม่ได้ ดังนั้นอันตรกิริยาที่เราพิจารณานั้นจึงเป็นอันตรกิริยาแบบแผนภาพลดทอนไม่ได้ เมเยอร์ (Mayer. 1940 : 291) แสดงให้เห็นว่า เราสามารถเขียนส่วนที่เกี่ยวข้องกับอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลในรูปใหม่ได้โดยให้ $V = 1/\rho = L/N$ พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์สามารถเขียนได้เป็น

$$-\beta F = \sum_{r=1}^L \rho (1 - \ln \rho) + \sum_{r=1}^L \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} \beta_k \rho^{k+1} \quad \dots (18)$$

โดยที่ β_k คือ อินทิกรัลลดทอนไม่ได้ (irreducible integral) และเขียนได้เป็น

$$\beta_k = \frac{1}{k!V} \int \int \int \dots \int \sum_{k+1 \geq i > j \geq 1} \prod f_{ij} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_{k+1} \quad \dots (19)$$

ตัวอย่างของอินทิกรัลลดทอนไม่ได้สามอันดับแรกคือ

$$\beta_1 = \frac{1}{V} \int \int f_{21} d\tau_1 d\tau_2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2!V} \int \int \int f_{32} f_{31} f_{21} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

$$\beta_3 = \frac{1}{3!V} \int \int \int \int \left(3f_{43}f_{32}f_{21}f_{41} + 6f_{43}f_{32}f_{21}f_{41}f_{31} + f_{43}f_{32}f_{21}f_{41}f_{42}f_{31} \right) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4$$

อินทิกรัลลดทอนไม่ได้เหล่านี้สามารถแทนได้ด้วยแผนภาพดังนี้

$$\beta_1 = \text{Diagram 1: A horizontal line connecting two circles labeled 1 and 2.}$$

$$\beta_2 = \text{Diagram 2: A triangle with vertices labeled 1, 2, and 3. Vertex 1 is at the top, 2 at the bottom right, and 3 at the bottom left. All vertices are connected by lines.}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_3 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \\ \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \\ \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \\ \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \\ \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \\ \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \\ \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \\ \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \\ \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \\ \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \\ \text{Diagram 65} \\ \text{Diagram 66} \\ \text{Diagram 67} \\ \text{Diagram 68} \\ \text{Diagram 69} \\ \text{Diagram 70} \\ \text{Diagram 71} \\ \text{Diagram 72} \\ \text{Diagram 73} \\ \text{Diagram 74} \\ \text{Diagram 75} \\ \text{Diagram 76} \\ \text{Diagram 77} \\ \text{Diagram 78} \\ \text{Diagram 79} \\ \text{Diagram 80} \\ \text{Diagram 81} \\ \text{Diagram 82} \\ \text{Diagram 83} \\ \text{Diagram 84} \\ \text{Diagram 85} \\ \text{Diagram 86} \\ \text{Diagram 87} \\ \text{Diagram 88} \\ \text{Diagram 89} \\ \text{Diagram 90} \\ \text{Diagram 91} \\ \text{Diagram 92} \\ \text{Diagram 93} \\ \text{Diagram 94} \\ \text{Diagram 95} \\ \text{Diagram 96} \\ \text{Diagram 97} \\ \text{Diagram 98} \\ \text{Diagram 99} \\ \text{Diagram 100} \end{array} \\
 &= 3 \begin{array}{c} \text{Diagram 101} \\ \text{Diagram 102} \\ \text{Diagram 103} \end{array} + 6 \begin{array}{c} \text{Diagram 104} \\ \text{Diagram 105} \\ \text{Diagram 106} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 107} \\ \text{Diagram 108} \\ \text{Diagram 109} \end{array}
 \end{aligned}$$

เราจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ 3, 6 และ 1 ใน β_3 นั้นก็คือ ตัวเลขที่แสดงจำนวนของ แผนภาพพลทอนไม่ได้ที่รวมเป็น β_3

เพื่อที่จะกระจายพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ให้เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ เราจึง กระจายเทอมเอกซ์โปเนนเชียลใน พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ให้อยู่ในรูปของอนุ- กรมเทเลอร์ (Taylor series) ซึ่งค่าของ f_{ij} นี้จะแสดงทั้งส่วนที่ไม่ขึ้นกับ อุณหภูมิ และส่วนที่ขึ้นกับอุณหภูมิได้ถ้าเรากำหนดค่าให้

$$u(r_i - r_j) = -J(r_i - r_j) s_i s_j \quad \dots (20)$$

$$= \begin{cases} -J & \text{เมื่อ } r_i \neq r_j \\ \infty & \text{เมื่อ } r_i = r_j \end{cases}$$

ถ้าโมเลกุลทั้งสองอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน แสดงว่าอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลทั้งสองจะ ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ นั่นคือเมื่อ $r_i = r_j$ แล้ว $u(r_i - r_j) = \infty$ ดังนั้นสมการที่ (10) จะได้อันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลของส่วนที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมินั้นคือ

$$f_0 = -1 \quad \dots (21)$$

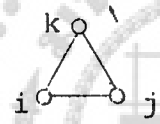
และอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลส่วนที่ขึ้นกับอุณหภูมิคือ

$$f_{ij} = e^{\beta J} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} \quad \dots (22)$$

สมการที่ (22) เราสามารถเขียนแทนด้วยแผนภาพได้ดังนี้

$$f_{ij} = \text{---} \circ \text{---} \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ + \dots$$

เทอมที่สองของสมการที่ (17) ซึ่งแสดงอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลนี้จะประกอบด้วย วงกลมและบอนด์ (bond) แบบ f_0 และ f_1 เชื่อมต่อระหว่างวงกลม ในกรณี ที่ $r_i = r_j$ เราสามารถแทนได้ด้วยแผนภาพ $\text{---} \circ \text{---} \circ$

พิจารณาแผนภาพ  ซึ่งแทน $f_{ij} f_{jk} f_{ki}$ เราสามารถกระจาย แต่ละเทอมของ f ให้เป็นฟังก์ชันของ βJ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_{ij} f_{jk} f_{ki} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\beta J)^l}{l!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta J)^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} \\ &= \beta^3 J_{ij} J_{jk} J_{ki} \left[1 + \beta \frac{J_{ij} + J_{jk} + J_{ki}}{2!} \right. \\ &\quad + \beta^2 \frac{J_{ij}^2 + J_{jk}^2 + J_{ki}^2}{3!} + \beta^2 \frac{J_{ij} J_{jk} + J_{jk} J_{ki} + J_{ki} J_{ij}}{2!2!} \\ &\quad \left. + \beta^3 \frac{J_{ij} J_{jk} J_{ki} + \dots}{2!2!2!} + \dots \right] \quad \dots (23) \end{aligned}$$

วงกลมทุกวงกลมใช้แทนโมเลกุลและบอนด์ทุกบอนด์ที่เชื่อมระหว่างวงกลมจะมีความ แรงของอันตรกิริยาเท่ากับ βJ ถ้าระหว่างวงกลมนั้นมีบอนด์ทั้งหมด N บอนด์ เราต้อง คูณความแรงของอันตรกิริยาด้วย $1/N!$ เนื่องจากบอนด์ต่าง ๆ ระหว่างวงกลมนั้นเหมือน กันและสามารถสลับที่กันได้ ดังนั้นเทอม $f_{ij} f_{jk} f_{ki}$ สามารถแทนได้ด้วยแผนภาพดังนี้

$$\begin{aligned}
 - \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ f \quad f \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} &= \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ \beta J \quad \beta J \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} + \left[\begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^2}{2!} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^2}{2!} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^2}{2!} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^3}{3!} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^3}{3!} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \frac{(\beta J)^3}{3!} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \quad j \end{array} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

โดยการแทนบอนด์ f_{ij} ด้วย βJ จำนวน N บอนด์ พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 - \beta F / L &= \rho (1 - \ln \rho) + \text{ผลรวมทั้งหมดของแผนภาพที่เชื่อมต่อกันด้วยบอนด์} \\
 &\text{เดียวและมากกว่าหนึ่งบอนด์ขึ้นไปโดยแผนภาพเหล่านี้ประกอบด้วยบอนด์} \\
 &\text{แบบ } f_0 \text{ และ } \beta J \text{ และวงกลมที่มีความหนาแน่น } \rho(r) \dots (24)
 \end{aligned}$$

เนื่องจากพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ประกอบด้วยส่วนที่ขึ้นกับอุณหภูมิและส่วนที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ เพื่อที่จะรวมเทอมที่มีบอนด์แบบ βJ โดยเริ่มพิจารณาส่วนที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ (hard core) ซึ่งจะมีแผนภาพเป็นเส้นประเชื่อมต่อระหว่างวงกลมเท่านั้น ดังนั้นพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของส่วนที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิจึงคำนวณได้โดยตรงจากทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem) คือ ถ้ามีตำแหน่งเลขชี้กำลังที่แตกต่างกันอยู่ L ตำแหน่ง ถ้าจะบรรจุโมเลกุลที่มีโคออร์ดิเนตแตกต่างกันครั้งละ N โมเลกุล จะมีวิธีการจัดทั้งหมด

$L!/N! (L - N)!$ วิธี ดังนั้นพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของส่วนที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิคือ

$$- \beta F_{\text{ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ}} = \ln \left[\frac{L!}{N! (L - N)!} \right] \quad \dots (25)$$

โดยใช้การประมาณแบบสเตอร์ลิง และจาก $\frac{N}{L} = p$ เราจะได้ว่า

$$- \beta F_{\text{ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ}} = - \sum_{r=1}^L \left[p \ln p + (1 - p) \ln (1 - p) \right] \dots (26)$$

เทียบกับสมการที่ (24) เราจะได้ว่า

$$\sum_{r=1}^L (p - p \ln p) + \text{ผลรวมของแผนภาพที่มีบอนด์แบบ } f_0 \text{ และวงกลมที่มีความ}$$

$$\text{หนาแน่น } p(r) = - \sum_{r=1}^L \left[p \ln p + (1 - p) \ln (1 - p) \right]$$

ดังนั้นผลรวมของแผนภาพที่มีบอนด์แบบ f_0 และวงกลมที่มีความหนาแน่น $p(r)$

$$\text{จะเท่ากับ } - \sum_{r=1}^L \left[p + (1 - p) \ln (1 - p) \right]$$

ดังนั้นพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์จึงเขียนได้เป็น

$$- \frac{\beta F}{L} = - \left[p \ln p + (1 - p) \ln (1 - p) \right] + \text{ผลรวมทั้งหมดของแผนภาพ}$$

ที่มีบอนด์เดี่ยวและเชื่อมต่อกันมากกว่าหนึ่งบอนด์ ซึ่งประกอบด้วยบอนด์

แบบ f_0 และ βJ และวงกลมมีน้ำหนัก $p(r)$ โดยแต่ละ

แผนภาพเหล่านี้จะต้องประกอบด้วยบอนด์แบบ βJ อย่างน้อยหนึ่ง

บอนด์

... (27)

พิจารณาแผนภาพที่มีวงกลมวงหนึ่งหรือหลายวงที่มีเส้นประยื่นออกมาดังแสดงใน

ภาพประกอบ 6

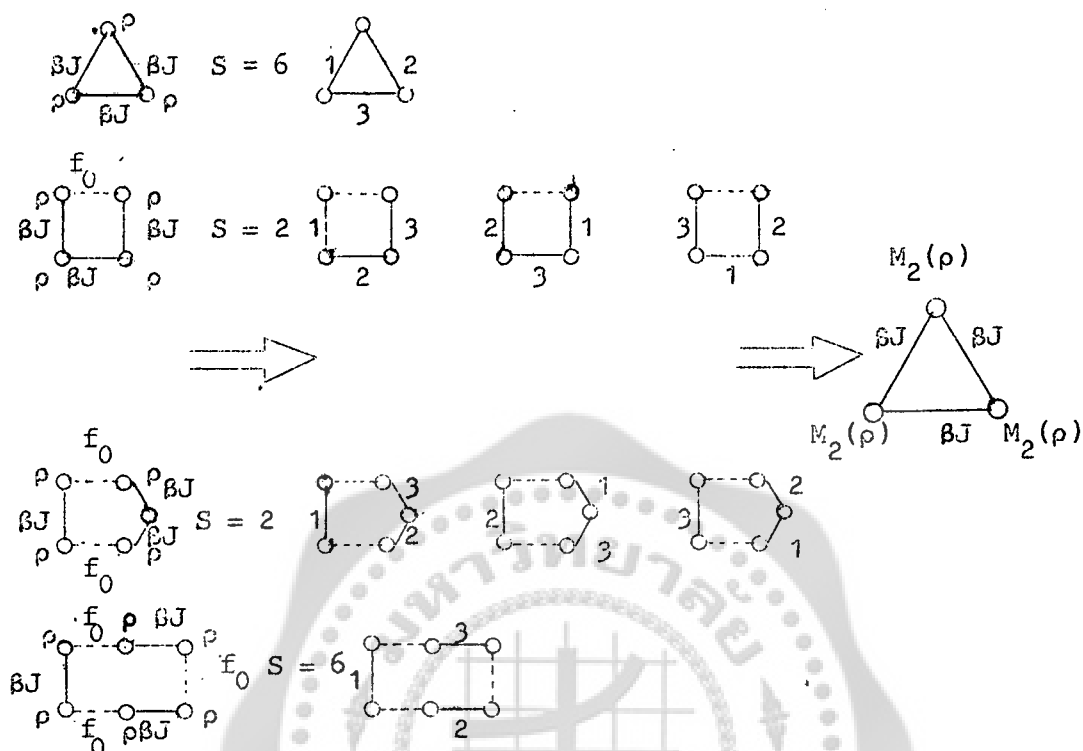
$$(-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^4 = 0$$

ภาพประกอบ 6 แสดงลักษณะของแผนภาพที่มีเส้นประยื่นออกมาจากวงกลม

จะเห็นว่าเส้นประเหล่านี้จะแทนบอนด์แบบ f_0 ซึ่งหมายความว่าวงกลมที่เชื่อมด้วยเส้นประทั้งหมดนั้นอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน เนื่องจากบอนด์แบบ f_0 มีค่าเท่ากับลบหนึ่ง ดังนั้นผลรวมของแผนภาพที่มีเส้นประจะต้องเป็นศูนย์ พลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์เขียนได้เป็น

$$-\frac{\beta F}{L} = - \left[p \ln p + (1-p) \ln (1-p) \right] + \text{ผลรวมทั้งหมดของแผนภาพที่มีบอนด์เดี่ยวและเชื่อมต่อกันมากกว่าหนึ่งบอนด์ซึ่งประกอบด้วยบอนด์แบบ } f_0 \text{ และแบบ } \beta_1 \text{ และวงกลมทุกโหนด } p(r) \text{ โดยแต่ละวงกลมจะต้องมีบอนด์แบบ } \beta_1 \text{ ยื่นออกมาอย่างน้อยหนึ่งบอนด์} \dots (28)$$

การพิจารณาหาสมการทางคณิตศาสตร์สำหรับแทนแผนภาพลักษณะต่าง ๆ นั้นจะสะดวกขึ้นถ้าให้ $M_n(p)$ เป็นตัวประกอบน้ำหนัก (weight factor) ของวงกลม $p(r)$ โดยที่ n เป็นจำนวนของบอนด์ที่ยื่นออกมาจากวงกลม เนื่องจาก f_0 เกิดขึ้นเพราะวงกลมที่เชื่อมกันอยู่นั้นอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน ดังนั้นวงกลมเหล่านี้จึงสามารถที่จะยุบ (collapse) ลงมาเป็นวงกลมเดียวกันได้โดยมีบอนด์แบบ f_0 เชื่อมต่อกันไว้ ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แสดงแผนภาพวงกลมที่ยุบลงมาอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันได้

ภาพประกอบ 7 แสดงแผนภาพแบบสามเหลี่ยมซึ่งวงกลมแต่ละวงจะมีบอนด์แบบ BJ สองบอนด์ยื่นออกมา $M_2(p)$ เป็นตัวประกอบนำหน้าของวงกลมในแผนภาพแบบนี้ ดังนั้นตัวประกอบนำหน้าของแผนภาพแบบสามเหลี่ยมคือ

$$M_2(p) M_2(p) M_2(p) = p^3 - 3p^4 + 3p^5 - p^6$$

จากภาพประกอบ 7 จะเห็นว่าแผนภาพทั้งสี่ชุดนี้จะมีบอนด์ BJ สามบอนด์ เมื่อนำแผนภาพทุกชุดที่มีจำนวนบอนด์เท่ากันและตัวประกอบนำหน้า $M_2(p)$ ของวงกลมที่มีบอนด์ BJ มารวมกันจะได้ค่าเป็น $(BJ)^3 (p^3 - 3p^4 + 3p^5 - p^6)$ ซึ่งจะเท่ากับ $(BJ)^3 M_2(p) M_2(p) M_2(p)$ ผลที่ได้ประกอบด้วยบอนด์แบบ BJ และตัวประกอบนำหน้า $M_2(p)$ ของวงกลมแต่ละวงในแผนภาพแบบสามเหลี่ยม ถ้าบอนด์หนึ่งบอนด์ถูกแทนที่ด้วยบอนด์หลาย ๆ บอนด์แล้วผลที่ได้จะเหมือนเดิมแต่เลขสมมาตร

(symmetry) ของแต่ละชุดจะไม่เท่ากัน ถ้า $M_n(\rho)$ จึงขึ้นอยู่กับจำนวนบอนด์ที่ขึ้นออกมาจากวงกลม สูตรทั่ว ๆ ไปของตัวประกอบน้ำหนัก $M_n(\rho)$ นั้น เอสฟานเคียร์รี และคนอื่น ๆ (Esfandiari and others. 1981 : 1301) ได้แสดงไว้ดังนี้

$$M_n(\rho) = \sum_{v=1}^n W_{n,v} \rho^v \quad \dots (29)$$

$$\text{เมื่อ } W_{n,v} = v W_{n-1,v} - (v-1) W_{n-1,v-1}$$

$$\text{ซึ่ง } n \geq 2 \quad \text{และ} \quad 1 \leq v \leq n$$

$$\text{โดยที่ } W_{1,1} = 1 \quad \text{และ} \quad W_{n,v} = 0 \quad \text{ถ้า } v = 0 \quad \text{หรือ} \quad v > n$$

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พิจารณาจำนวนบอนด์ที่ขึ้นออกมาจากวงกลมตั้งแต่หนึ่งถึงหกบอนด์ ดังนั้น $M_n(\rho)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$M_1(\rho) = \rho \quad \dots (30)$$

$$M_2(\rho) = \rho - \rho^2 \quad \dots (31)$$

$$M_3(\rho) = \rho - 3\rho^2 + 2\rho^3 \quad \dots (32)$$

$$M_4(\rho) = \rho - 7\rho^2 + 12\rho^3 - 6\rho^4 \quad \dots (33)$$

$$M_5(\rho) = \rho - 15\rho^2 + 50\rho^3 - 60\rho^4 + 24\rho^5 \quad \dots (34)$$

$$M_6(\rho) = \rho - 31\rho^2 + 180\rho^3 - 390\rho^4 + 360\rho^5 - 120\rho^6 \quad \dots (35)$$

ในการหาพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ขึ้น แมเออร์ แฟร์เรลล์ และ ซอมเมอร์เฟลด์ (Meijer, Farrell and Sommerfeldt. 1972 : 116) ได้แสดงสมการของพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ไว้ดังนี้

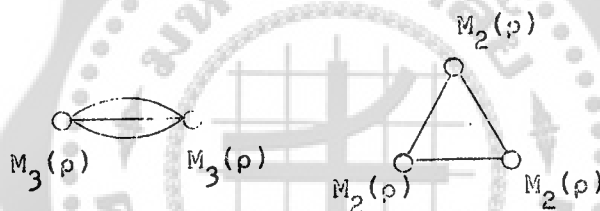
$$-\frac{\beta F}{L} = - \left[\rho \ln \rho + (1 - \rho) \ln (1 - \rho) \right] + \sum_{n=1}^6 \sum_{m=2}^{2n} C(n, m) \rho^m K^n + O(K^7) \quad \dots (36)$$

เมื่อ $K = \beta J$

$C(n, m)$ คือ สัมประสิทธิ์ของ $\rho^m K^n$

$O(K^7)$ เป็นผลรวมของแผนภาพที่มีบอนด์ตั้งแต่เจ็ดบอนด์ขึ้นไป ซึ่งจะไม่พิจารณาในการวิจัยครั้งนี้

พิจารณาแผนภาพที่มีสามบอนด์ดังแสดงในภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 แสดงแผนภาพที่มีสามบอนด์

เนื่องจากแผนภาพแต่ละแบบมีสามบอนด์ ดังนั้นความแรงของอันตรกิริยาจึงเป็น $(\beta J)^3$ และถ้าเราพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่อยู่ใกล้ที่สุดสองอันดับแรก ดังนั้น $n = n_1 + n_2 = 3$ ซึ่ง n_1 เป็นจำนวนบอนด์ของอันตรกิริยาอันดับที่หนึ่ง n_2 เป็นจำนวนบอนด์ของอันตรกิริยาอันดับที่สอง n เป็นผลรวมของบอนด์ของอันตรกิริยาทุกอันดับ เนื่องจากเรากำหนดให้ความแรงของอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลเท่ากันทุกอันดับและกำหนดค่าเท่ากับหนึ่ง ดังนั้น $J_1 = J_2 = 1$

แผนภาพแบบสามบอนด์เราสามารถจัดได้สี่แบบ คือ

1), $n_1 = 3$, $n_2 = 0$

2) $n_1 = 2$, $n_2 = 1$

3) $n_1 = 1$, $n_2 = 2$

4) $n_1 = 0$, $n_2 = 3$

จำนวนวิธีในการจัดแผนภาพเมื่อพิจารณาจำนวนบอนด์และอันดับของอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลนั้นเราสามารถหาได้จากตาราง 1

ตาราง 1 แสดงจำนวนวิธีในการจัดแผนภาพเมื่อพิจารณาจำนวนบอนด์และอันดับของอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่เกี่ยวข้อง

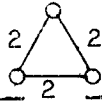
จำนวนวิธีในการจัดแผนภาพ							
อันดับ ของอันตรกิริยา ระหว่างโมเลกุล	จำนวนบอนด์ทั้งหมด ในแผนภาพ	1	2	3	4	5	6
อันดับที่หนึ่ง		1	1	1	1	1	1
อันดับที่หนึ่งและสอง		2	3	4	5	6	7
อันดับที่หนึ่ง สอง และสาม		3	6	10	15	21	28
อันดับที่หนึ่ง สอง สาม และสี่		4	10	20	35	56	84

ดังนั้นผลรวมของแผนภาพแบบสามเหลี่ยมที่สามารถบรรจุลงในเลขทศนิยมหนึ่ง
เฟส เช่น เติร์ทวิคิหารด้วยค่าสมมาตรของแต่ละแผนภาพมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\text{จำนวนวิธีที่แผนภาพ} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \triangle \\ 1 \end{array} \text{บรรจุในเลขทศนิยม}}{S_1}$$

$$+ \frac{\text{จำนวนวิธีที่แผนภาพ} \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \triangle \\ 2 \end{array} \text{บรรจุในเลขทศนิยม}}{S_2}$$

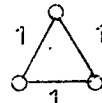
$$+ \frac{\text{จำนวนวิธีที่แผนภาพ} \begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \triangle \\ 1 \end{array} \text{บรรจุในเลขทศนิยม}}{S_3}$$

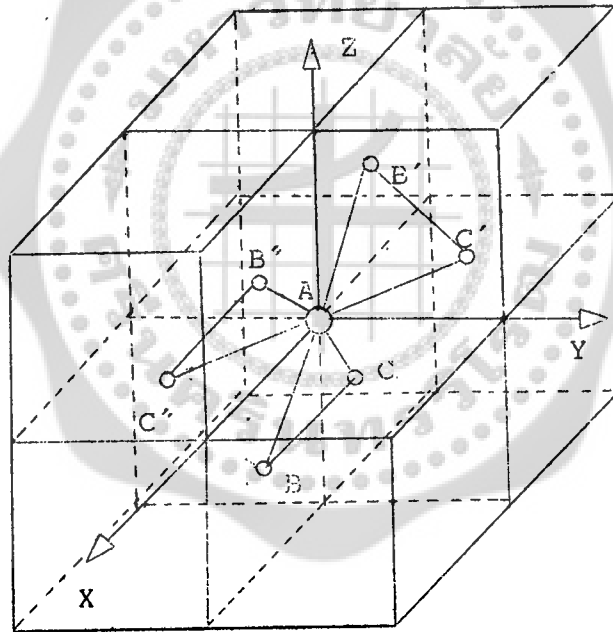
+ จำนวนวิธีที่แผนภาพ  บรรจุในเลขตติย

S_4

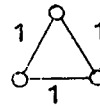
โดยที่ S คือเลขสมมาตร ซึ่ง $S_1 = 6$, $S_2 = 2$, $S_3 = 2$ และ

$$S_4 = 6$$

ในการคำนวณหาจำนวนวิธีที่แผนภาพ  บรรจุลงในเลขตติยกาชชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิกนั้น เราทำได้ดังนี้



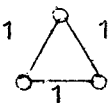
ภาพประกอบ 9 แสดงวิธีคำนวณหาจำนวนวิธีที่แผนภาพ

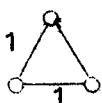
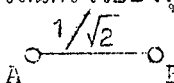


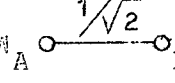
บรรจุลงใน

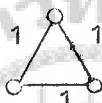
เลขตติยกาชชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก

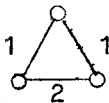
สมมติว่าความยาวแต่ละด้านของเฟสเซนเตอร์คิวบิกเท่ากับหนึ่งหน่วย ดังนั้น
 อนุกรมกิริยาอันดับที่หนึ่งจะมีระยะห่างเท่ากับ $1/\sqrt{2}$ หน่วย อนุกรมกิริยาอันดับที่สองจะมี
 ระยะห่างเท่ากับหนึ่งหน่วย อนุกรมกิริยาอันดับที่สามจะมีระยะห่างเท่ากับ $\sqrt{3}/2$ หน่วย

และอันตรกิริยาอันดับที่สี่จะมีระยะห่างเท่ากับ $\sqrt{2}$ หน่วย เนื่องจากแผนภาพ  แสดงถึงอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่ใกล้ที่สุดอันดับที่หนึ่งทั้งสามบอนด์ ดังนั้นแผนภาพ

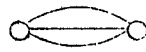
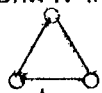
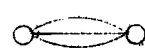
 จึงเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวของด้านแต่ละด้านเป็น $1/\sqrt{2}$ หน่วย จากภาพประกอบ 9 ถ้าให้ A เป็นจุดเริ่มต้นแล้วลากเส้นตรงไปยังจุด B ใด ๆ ให้นิยาว $1/\sqrt{2}$ หน่วย เราพบว่าจำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพ  ลงในเลขดัชนีนี้ได้

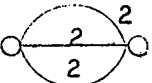
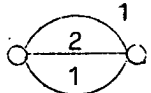
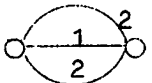
เท่ากับ 12 วิธี ถ้าใช้จุด B เป็นจุดเริ่มต้นแล้วลากเส้นตรงไปยังจุด C ใด ๆ ให้นิยาว $1/\sqrt{2}$ หน่วย เราพบว่ามีเพียงสี่วิธีเท่านั้นที่จะบรรจุแผนภาพ  ลงในเลขดัชนีนี้ ต่อจากนั้นลากเส้นตรงต่อจากจุด C ใด ๆ ไปยังจุดเริ่มต้นโดยให้มีความยาว $1/\sqrt{2}$

หน่วย เราพบว่ามีเพียงหนึ่งวิธีเท่านั้นที่จะลากเส้นตรง CA ให้นิยาวเท่ากับ $1/\sqrt{2}$ หน่วย ได้ จำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพ  ลงในเลขดัชนีจะได้เป็น $12 \cdot 4 \cdot 1 = 48$ วิธี

โดยวิธีการเดียวกันนี้เราพบว่าจะมี 24 วิธี ที่จะบรรจุแผนภาพ  ลงในเลขดัชนีได้ สำหรับแผนภาพที่เหลือนั้นบรรจุลงในเลขดัชนีไม่ได้ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A triangle with vertices labeled } M_2(\rho), M_2(\rho), M_2(\rho) \text{ and edges labeled } \beta J \\
 & = M_2^3(\rho) \left[\frac{48}{6} \left(\frac{1}{kT} \right)^3 + \frac{24}{2} \left(\frac{1}{kT} \right)^3 + 0 + 0 \right] \\
 & = 20 \left(\frac{1}{kT} \right)^3 (\rho^3 - 3\rho^4 + 3\rho^5 - \rho^6) \\
 & = (20\rho^3 - 60\rho^4 + 60\rho^5 - 20\rho^6) \left(\frac{1}{kT} \right)^3 \dots (37)
 \end{aligned}$$

ต่อไปพิจารณาแผนภาพ  ซึ่งมีตัวประกอบน้ำหนักเป็น $M_3(\rho)$ และมีบอนด์ยื่นออกมาจากวงกลมสามบอนด์ จึงทำให้ค่าของอันตรกิริยาเป็น $\left(\frac{1}{kT} \right)^3$ เหมือนกับแผนภาพ  จำนวนวิธีที่บรรจุแผนภาพ  ลงในเลขดัชนีจะมีจำนวนเท่ากับกรณีที่มีบอนด์เดียวแต่เลขสมมาตรไม่เหมือนกัน โดยวิธีการเดียวกันกับการบรรจุ

แผนภาพ  ลงในเลขดัชนีกล่าวข้างต้น พบว่าจำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพ
และ  ลงในเลขดัชนี จะมีค่าเป็น 12 และ ทุก วิธีตาม
ลำดับ และเลขสมมาตรจะเท่ากับ 12 ทั้งสองกรณี ส่วนแผนภาพ  และ
 ไม่สามารถบรรจุลงในเลขดัชนีได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 5: A circle with two vertices and two edges, labeled } M_3(p) \text{ and } M_3(p). \quad (8J)^3 \\
 & = M_3^2(p) \left[\frac{12}{12} \left(\frac{1}{kT} \right)^3 + \frac{6}{12} \left(\frac{1}{kT} \right)^3 + 0 + 0 \right] \\
 & = 1.5 \left(\frac{1}{kT} \right)^3 (p^2 - 6p^3 + 13p^4 - 12p^5 + 4p^6) \\
 & = (1.5p^2 - 9p^3 + 19.5p^4 - 18p^5 + 6p^6) \left(\frac{1}{kT} \right)^3 \dots (38)
 \end{aligned}$$

เมื่อนำสมการที่ (37) และ (38) มารวมกัน จะได้เป็น

$$\left(\frac{1}{kT} \right)^3 (1.5p^2 + 11p^3 - 40.5p^4 + 42p^5 - 14p^6) = \sum_{m=2}^6 C(3,m) p^m \left(\frac{1}{kT} \right)^3 \dots (39)$$

สำหรับแผนภาพที่มีลักษณะซับซ้อนกว่าแผนภาพดังกล่าวข้างต้น เราจะใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการหาคำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพแบบต่าง ๆ ลงในเลขดัชนีชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ใช้ผลการหาคำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพของ ทรงศรี วิมลวิชัย (Vimolvanich, 1973 : 66) ดังแสดงไว้ในภาคผนวก

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1966 ดอมบ์และดอลตัน (Domb and Dalton. 1966 : 859) ใช้วิธีเอกซ์ตราโพลีเลตหาค่าวิกฤตของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเทอร์คิวบิก เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาที่ใกล้ที่สุดสามอันดับแรกได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.0257$ โดยที่ $K_C = J/kT_C$ ส่วนไซส์และคนอื่น ๆ (Sykes and others. 1972 : 667 - 673) ได้คำนวณหาค่าวิกฤตของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเทอร์คิวบิกโดยใช้การกระจายอนุกรมลัสเตอร์ และได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.15740$

ในปี ค.ศ. 1970 กันท์และเบเกอร์ (Gaunt and Baker. 1970 : 1184) ใช้วิธีเอกซ์ตราโพลีเลตในการหาค่าเอกซ์โปเนนท์วิกฤต β , γ' และ δ ของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเทอร์คิวบิกในสองมิติ ได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.10175$ โดยที่ $K_C = \tanh J/kT$ นอกจากนี้เบเกอร์ (Baker. 1961 : 768) ใช้การประมาณพาเคต์หาค่าวิกฤตของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเทอร์คิวบิกในสามมิติโดยพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่ใกล้ที่สุดสามอันดับแรก และได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.101767$ โดยที่ $K_C = \tanh J/kT$ ดอมบ์และไซส์ (Domb and Sykes. 1957 : 1415) ใช้วิธีเอกซ์ตราโพลีเลตคำนวณหาค่าวิกฤตของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดเฟสเซนเทอร์คิวบิกในสามมิติ ได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.1017501$ โดยที่ $K_C = \tanh J/kT$ เราจะเห็นว่าค่าวิกฤตที่ได้จากการประมาณแบบพาเคต์ หรือใช้วิธีเอกซ์ตราโพลีเลตนั้นค่าที่ได้จะใกล้เคียงกันมาก

ในปี ค.ศ. 1972 แฟร์เรลล์และเมเจอร์ (Farrell and Meijer. 1972 : 3747 - 3750) ใช้การประมาณแบบพาเคต์คำนวณหาค่าเอกซ์โปเนนท์ γ ของสภาพัดได้ของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดซิมเบิลคิวบิก เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่ใกล้ที่สุดสี่อันดับแรกและเขาคิดว่าความแรงของอันตรกิริยาแต่ละอันดับไม่เท่ากัน เขาพบว่าค่าเอกซ์โปเนนท์ γ และค่าวิกฤต K_C มีความแตกต่างกันน้อยกว่าสี่เปอร์เซ็นต์ ดอลตันและวูด (Dalton and Wood. 1969 : 1271 - 1302) ใช้วิธีการกระจายอนุกรมกำลัง (power series) ของฟังก์ชันการแบ่งส่วน เพื่อศึกษาแลตทิซกาซแบบไอซิ่ง ณ บริเวณวิกฤต เขาใช้การประมาณแบบพาเคต์หาค่าเอกซ์โปเนนท์วิกฤต β และ

γ' เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่ใกล้ที่สุดสามอันดับแรก และคิดว่าความแรงของอันตรกิริยาทุกอันดับมีค่าเท่ากัน เขาพบว่าสำหรับไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดสองมิตินี้

$0.122 \leq \beta \leq 0.134$ และสำหรับไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดสามมิตินี้ $0.308 \leq \beta \leq 0.328$

และ $1.18 \leq \gamma' \leq 1.28$ เมื่อใช้แลตทิซกาซแบบซิมเปิลคิวบิก และเขาพบว่าถ้าใช้

ไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดบอดีเซนเตอร์คิวบิกแล้ว $0.345 \leq \beta \leq 0.365$ และ

$1.01 \leq \gamma' \leq 1.14$

ไนท์ ค.ศ. 1979 โบลท์และสเวนส์เซน (Blote and Swendsen.

1979 : 2077) ใช้วิธี มอนติ - คาร์โล รีโนร์มัลไรเซชัน กรุ๊ป (Monte - Carlo renormalization group) เพื่อหาค่าพลังงานอิสระของไอซิ่งแลตทิซกาซชนิดซิมเปิลคิวบิก โดยพิจารณาอันตรกิริยาที่ใกล้ที่สุดสี่อันดับแรกและได้ถึงผลของสนามแม่เหล็กภายนอก

ด้วย เขาได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.44338$ โดยที่ $K_C = J/kT_C$ ต่อมา ยูมิงชีและคนอื่น ๆ

(Yu - Ming Shih and others. 1980 : 299) ใช้วิธีแปรผันของทาคานอฟ

(Kadanoff's variational method) เพื่อหาค่าพลังงานอิสระของแลตทิซกาซแบบ

ไอซิ่งชนิดบอดีเซนเตอร์คิวบิกโดยพิจารณาอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่ใกล้ที่สุดสี่อันดับ

แรกและได้ถึงผลของสนามแม่เหล็กภายนอก เขาได้ค่าวิกฤต $K_C = 0.162134$

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาสภาพัฒน์ได้ของแบบจำลองไอซิงโมเดลศึกษาชนิดเฟสเช่น เฟอร์ริวีกในสามมิติ นั้น เราสามารถศึกษาได้ตามลำดับต่อไปนี้

หาค่าพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของแบบจำลองไอซิงโมเดลศึกษาชนิดเฟสเช่น- เฟอร์ริวีกในสามมิติโดยวิธีการกระจายอนุกรมกำลังเฟอร์ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$- \beta F / L = - \left[\rho \ln \rho + (1 - \rho) \ln (1 - \rho) \right] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=2}^{2N} C(n, m) \rho^m K^n + O(K^7) \quad \dots (40)$$

เมื่อ K คือ βJ และ J คือความแรงของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุล

$C(n, m)$ คือสัมประสิทธิ์ของ $\rho^m K^n$

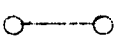
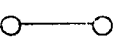
N คือ จำนวนบอนด์ที่นอกออกมาจากวงกลมเพื่อเชื่อมต่อกับวงกลมอื่น ๆ

ถ้าเราพิจารณาถึงกรณีที่มีอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่อยู่ใกล้ที่สุดอันต้นแรกและมีเพียงหกบอนด์ที่นอกออกมาจากวงกลมเพื่อเชื่อมต่อกับวงกลมอื่น ๆ แล้ว เราสามารถเขียนพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ได้เป็น

$$- \beta F / L = - \left[\rho \ln \rho + (1 - \rho) \ln (1 - \rho) \right] + \sum_{n=1}^6 \sum_{m=2}^{12} C(n, m) \rho^m K^n + O(K^7) \quad \dots (41)$$

ซึ่ง $O(K^7)$ คือ ผลรวมของแผนภาพที่มีบอนด์ตั้งแต่เจ็ดบอนด์ขึ้นไปซึ่งจะไม่พิจารณาในการวิจัยครั้งนี้

สมการที่ (41) เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของแผนภาพจะได้เป็น

ค่า A/S คือ จำนวนวิธีที่จะบรรจุแผนภาพแต่ละแบบลงในเฟสเซนเตอร์คิวบิก
 ทารด้วยเลขสมมาตรของแผนภาพแบบนั้น ๆ เช่นแผนภาพ  จะมีอยู่ 12 วิธี
 ที่จะบรรจุลงในเฟสเซนเตอร์คิวบิก และมีเลขสมมาตรเท่ากับสอง ดังนั้นค่า A/S ของ
 แผนภาพ  จึงเท่ากับหก

$M_1(\rho)$ คือ ตัวประกอบนำหนักของแผนภาพ  จากสมการที่ (30)
 $M_1(\rho)$ มีค่าเท่ากับ ρ

ดังนั้นอันตรกิริยาแบบแผนภาพ  จึงมีค่าเท่ากับ $6\rho^2K$ เลขหก
 ในที่นี้คือสัมประสิทธิ์ $C(1,2)$ ของ ρ^2K

อันตรกิริยาแบบแผนภาพ  ที่แทนด้วยหมายเลข 2000 จะมีค่าเท่า
 กับ ค่า A/S ของหมายเลข 2000 คูณกับ $M_2^2(\rho) K^2$

ค่า A/S ของหมายเลข 2000 มีค่าเท่ากับสาม

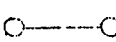
$M_2(\rho)$ คือตัวประกอบนำหนักของแผนภาพ  จากสมการที่ (31)
 $M_2(\rho)$ มีค่าเท่ากับ $\rho - \rho^2$

ดังนั้นอันตรกิริยาแบบแผนภาพ  จึงมีค่าเท่ากับ $(3\rho^2 - 6\rho^3 + 3\rho^4) K^2$
 ซึ่ง บวกสาม ลบหก และบวกสามนั่นก็คือค่าสัมประสิทธิ์ $C(2,2)$ $C(2,3)$ และ
 $C(2,4)$ ของ $\rho^2 K^2$ $\rho^3 K^2$ และ $\rho^4 K^2$ ตามลำดับ

สำหรับอันตรกิริยาแบบแผนภาพอื่น ๆ ตามสมการที่ (42) นั้น การหาค่าสัม-
 ประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ ก็มีวิธีการเช่นเดียวกับแผนภาพดังกล่าวแล้วข้าง
 ต้น และค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ ของ F.C.C. (1,0,0,0)
 ได้แสดงไว้ในตาราง 2

ตาราง 2 ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จากการกระจายอนุกรม
 คลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,0,0,0)

C (n,m)						
$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
2	6	3	1	0.25	0.05	0.08333
3	0	-6	2	8.5	8.5	5.4834
4	0	3	-11	-34.25	-10.75	49.25833
5	0	0	12	57	-75	-566.5
6	0	0	-4	-54	285.4	2749
7	0	0	0	30	-468	-8023
8	0	0	0	-7.5	423	14665.75
9	0	0	0	0	-240	-16800
10	0	0	0	0	40.8	11720
11	0	0	0	0	0	-4560
12	0	0	0	0	0	760

ดังนั้นการหาค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ ของ F.C.C. (1,1,0,0)
 F.C.C. (1,1,1,0) และ F.C.C. (1,1,1,1) จึงมีวิธีการคล้ายคลึงกับกรณีของ
 F.C.C. (1,0,0,0) แต่อันดับของอันตรกิริยาที่พิจารณาจะเพิ่มขึ้น เช่น แผนภาพ
 ของ F.C.C. (1,1,0,0) จะประกอบด้วยหมายเลข 1000 และ
 0100 หรือของ F.C.C. (1,1,1,0) จะประกอบด้วยหมายเลข 1000, 0100
 และ 0010 หรือของ F.C.C. (1,1,1,1) จะประกอบด้วยหมายเลข 1000,
 0100, 0010 และ 0001 แผนภาพแบบอื่น ๆ ตามสมการที่ (42) จะประกอบด้วย
 หมายเลขต่าง ๆ ดังแสดงไว้ในภาคผนวก และค่า A/S ของหมายเลขทุกหมายเลข
 เลขของแต่ละแผนภาพได้แสดงไว้ในภาคผนวก เช่นกับ ตัวประกอบน้ำหนัก $M_n(\rho)$

ของตัวเลขแผนภาพแสดงไว้ในสมการที่ (30) - (35)

ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $p^m K^n$ ของ F.C.C. (1,1,0,0)
F.C.C. (1,1,1,0) และ F.C.C. (1,1,1,1) ได้แสดงไว้ในตาราง 3 ตาราง 4 และ
ตาราง 5 ตามลำดับ

ตาราง 3 ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $p^m K^n$ ที่ได้จากการกระจายอนุกรม
คลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,1,0,0)

$C(n,m)$						
$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
2	9	4.5	1.5	0.375	0.075	0.0125
3	0	-9	11	24.75	22.75	14.225
4	0	4.5	-40.5	-40.875	187.875	500.627
5	0	0	42	-64.5	-1090.5	-1738.63
6	0	0	-14	186	2308.1	1170.38
7	0	0	0	-141	-2682	2438.3
8	0	0	0	35.25	1939.5	-5104.835
9	0	0	0	0	-846	4263.6
10	0	0	0	0	169.2	-2119.48
11	0	0	0	0	0	696.96
12	0	0	0	0	0	-115.16

ตาราง 4 ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $p^m K^n$ ที่ได้จากการกระจายอนุกรม
 คลัสเตอร์ของ F.C.C. (1,1,1,0)

$C(n,m)$						
$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
2	21	10.5	3.5	0.875	0.175	0.029166
3	0	-21	103	173.75	161.75	91.191667
4	0	10.5	-326.5	1180.625	6096.375	12400.144
5	0	0	330	-6298.5	-338.5	148185.37
6	0	0	-110	10062	-88193.1	-255782.62
7	0	0	0	-6825	228722	-2031757.7
8	0	0	0	2418.75	-248469.5	7944021.7
9	0	0	0	0	127526	-12229341
10	0	0	0	0	-25505.2	9718021.5
11	0	0	0	0	0	-3966629
12	0	0	0	0	0	661104.84

ตาราง 5 ค่าสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ ที่ได้จาก การกระจายอนุกรม
คลัสเตอร์ของ P.C.C. (1,1,1,1)

$C(n,m)$						
$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6
2	27	13.5	4.5	1.125	0.225	0.0375
3	0	-27	183	299.25	255.75	155.175
4	0	13.5	-571.5	3351.375	15282.125	28481.413
5	0	0	576	-16114.5	29075	579655.25
6	0	0	-192	25227	-366495.2	-1278996.5
7	0	0	0	-17019	860882	-53318045
8	0	0	0	4254.75	-909033.5	23426357
9	0	0	0	0	462542	-36989530
10	0	0	0	0	-92509.4	29653832
11	0	0	0	0	0	-12112596
12	0	0	0	0	0	2023266

ถ้านำสัมประสิทธิ์ $C(n,m)$ ของ $\rho^m K^n$ จากตาราง 2 ตาราง 3
ตาราง 4 และตาราง 5 แทนลงในสมการที่(41) จะได้สมการพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์
ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซซนิกเฟสเซนเตอร์คิวบิกที่สมการตามจำนวนอันดับของอันตรกิริยา
ระหว่างสปินของโมเลกุลที่พิจารณาซึ่งมีความหนาแน่น (ρ) และอุณหภูมิ (K) เป็นตัวแปร

ผลการวิจัย

ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์และส่วนกลับของสภาพอัดได้ที่อุณหภูมิคงที่ของระบบของเหลว-ก๊าซ เราเขียนได้เป็น

$$K_T^{-1} = p^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} (F/L) \right] \dots (43)$$

เมื่อแทนค่าพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ที่ได้ จากสมการที่ (41) ลงในสมการที่ (43) ส่วนกลับของสภาพอัดได้ จากสมการที่ (43) จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันโพลีโนเมียลของความหนาแน่นและอุณหภูมิยกกำลังต่าง ๆ เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ความหนาแน่นจะมีค่าเท่ากับความหนาแน่นวิกฤตและมีค่าเท่ากับ $1/2$ และเมื่อแทนค่า $p = 1/2$ ลงในสมการที่ (43) ส่วนกลับของสภาพอัดได้จะอยู่ในรูปอนุกรมของอุณหภูมิยกกำลังต่าง ๆ ดังแสดงไว้ในตาราง 6

ตาราง 6 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ b_n ของ K^n จากสมการ $K_T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n K^n$ ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาสซินิกเฟสเซปเตอรัวติก

b_n							
K^n F.C.C. (J_1, J_2, J_3, J_4)	K^0	K	K^2	K^3	K^4	K^5	K^6
F.C.C.(1,0,0,0)	4	-12	3	2.5	2.6875	3.55625	6.705693
F.C.C.(1,1,0,0)	4	-18	4.5	6.75	14.34375	33.340625	85.955334
F.C.C.(1,1,1,0)	4	-42	10.5	44.75	279.96875	1880.0644	16815.218
F.C.C.(1,1,1,1)	4	-54	13.5	76.5	646.03175	5716.5912	85940.371

เนื่องจาก $K = \beta J$ ซึ่ง J มีค่าเท่ากับหนึ่ง ดังนั้น $K = \beta$ สัมประสิทธิ์ a_n ของอนุกรมยกกำลังต่าง ๆ ของสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงเลขตติภาคชนิดเฟส-เช่นเทอร์คิวบิกแสดงไว้ในตาราง 7

ตาราง 7 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ a_n ของ K^n จากสมการ $K_T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n K^n$ ของแบบจำลองไอซิงเลขตติภาคชนิดเฟสเช่นเทอร์คิวบิก

a_n							
K^n F.C.C. (J_1, J_2, J_3, J_4)	K^0	K	K^2	K^3	K^4	K^5	K^6
F.C.C.(1,0,0,0)	1	12	132	1400	14590.8	150035.2	1528837.4
F.C.C.(1,1,0,0)	1	18	306	5076	62998	1344515.3	21641059
F.C.C.(1,1,1,0)	1	42	1722	69844	2813133.9	112751370.5	4502732590.1
F.C.C.(1,1,1,1)	1	54	2862	150408	7860041.7	409120985.1	21198568454.4

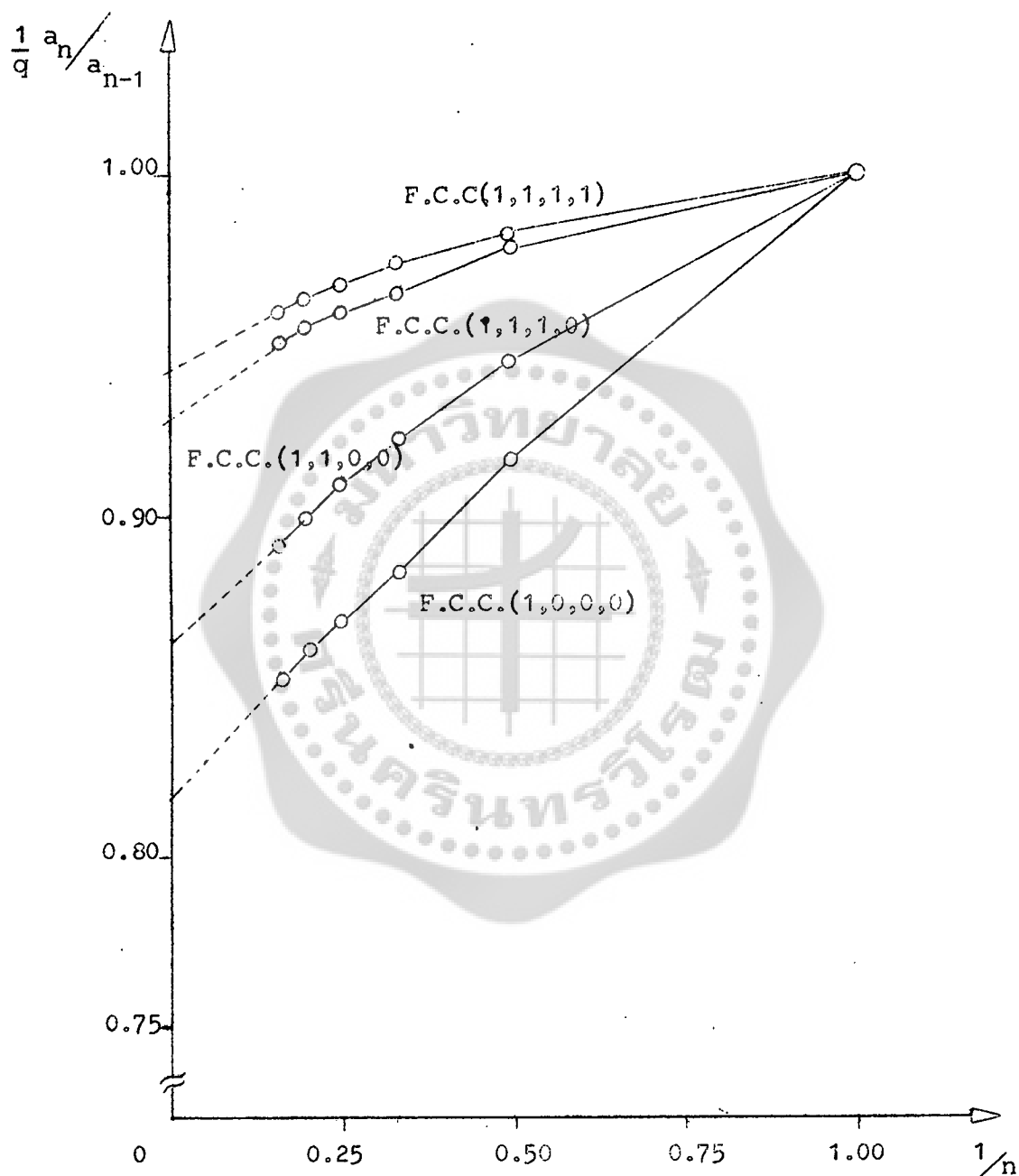
จากตาราง 7 เราจะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ K^n ของสภาพอัดได้มีค่าเป็นบวกทั้งหมด ดังนั้นการหาค่าวิกฤต (K_c) จากอนุกรมของสภาพอัดได้นี้เราจึงใช้วิธีเอกซ์ตรา-โพลาร์ซึ่งเป็นวิธีการหาค่ารัศมีของการลู่อเข้า (radius of convergence) ของอนุกรมที่มีค่าอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นบวกทั้งหมด (Domb and Green, 1974 : 199) ค่ารัศมีของการลู่อเข้า หาได้จากสูตร

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \dots (44)$$

เมื่อนำค่าสัมประสิทธิ์ของ K ยกกำลังต่าง ๆ ของอนุกรมสภาพอัดได้มาเขียนกราฟระหว่าง $\frac{1}{q} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ กับ $\frac{1}{n}$ เมื่อ q คือตัวเลขโคออร์ดิเนชัน (coordination

number) ซึ่งเป็นผลรวมของจำนวนอันตรกิริยาระหว่างโมเลกุลที่อยู่ใกล้ที่สุดทุกอันดับที่

พิจารณา เราจะได้กราฟดังภาพประกอบ 10



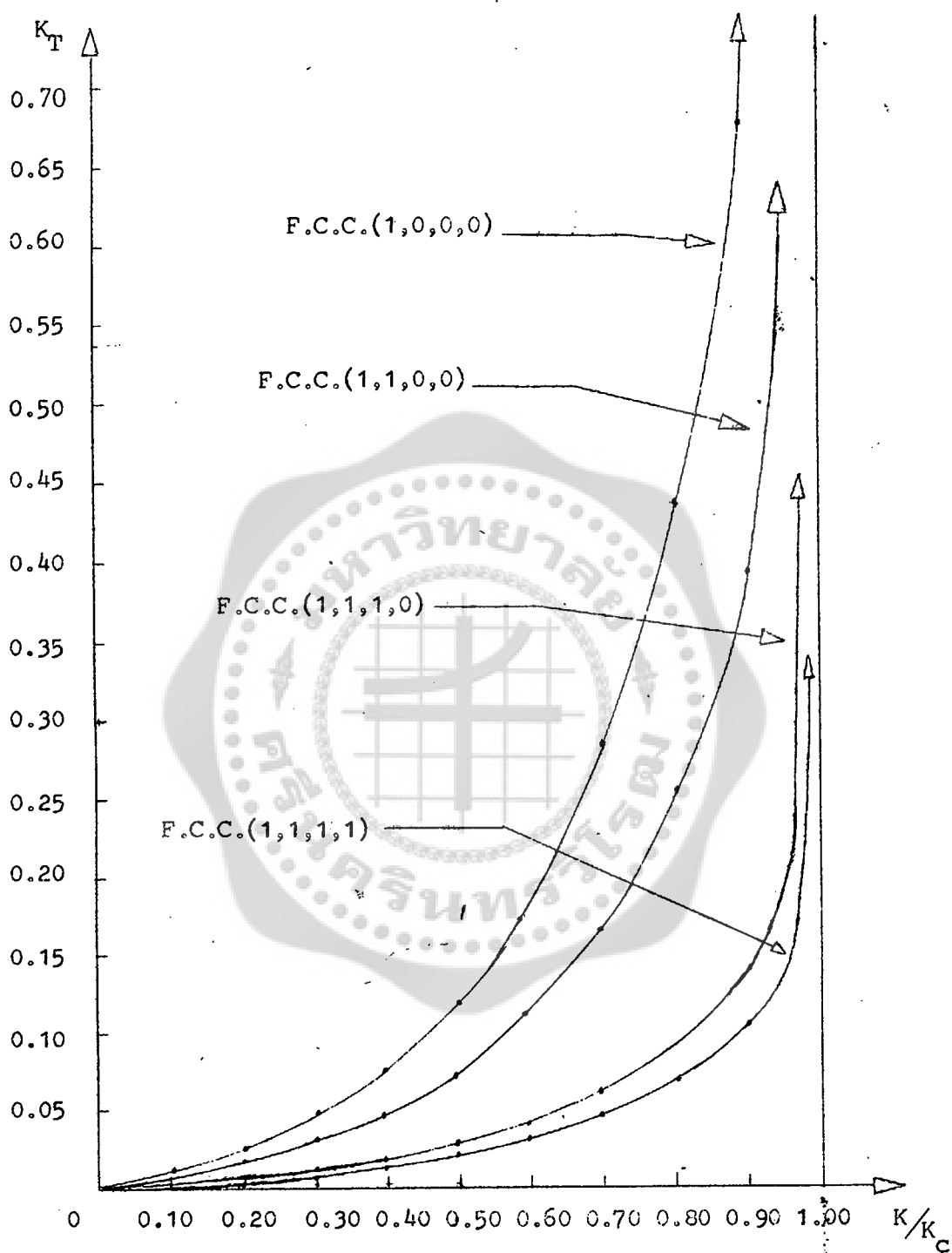
ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{1}{q} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ กับ $\frac{1}{n}$

จากกราฟในภาพประกอบ 10 เราจะได้ว่าวิกฤตของอนุกรมสภาพอัดได้ดังแสดง
ในตาราง 8

ตาราง 8 ค่าวิกฤตของอนุกรมสภาพอัดได้ของไฮโดรเจนเทียบกับก๊าซในกรณีต่าง ๆ

F.C.C. (J_1, J_2, J_3, J_4)	η	K_C
F.C.C. (1, 0, 0, 0)	12	0.102375
F.C.C. (1, 1, 0, 0)	18	0.0544496
F.C.C. (1, 1, 1, 0)	42	0.025712
F.C.C. (1, 1, 1, 1)	54	0.01970

กราฟระหว่าง K_T กับ K/K_C แสดงไว้ในภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K_T F.C.C.(1,0,0,0)

K_T F.C.C.(1,1,0,0) K_T F.C.C.(1,1,1,0) และ K_T F.C.C.(1,1,1,1)

กับ K/K_C

จากภาพประกอบ 11 เราจะเห็นว่าเส้นกราฟของสภาพัฒน์ได้ของแบบจำลอง
ไอซิงเลทติซ จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $K = K_C$



บทย่อ สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

บทย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีความหมายเพื่อศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิ่ง สหติชกาชชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก ในสามมิติเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต โดยพิจารณาถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลที่อยู่ข้างเคียงอันดับที่หนึ่งถึงอันดับที่สี่

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเริ่มต้นด้วยการหาค่าพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของไอซิ่ง สหติชกาชชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิก โดยวิธีการกระจายอนุกรมลัสเตอร์ จากนั้นหาอนุกรมสภาพอัดได้ที่อุณหภูมิคงที่จากสูตร

$$K_T = 1 / \rho^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (F/L) \right]$$

ซึ่งอนุกรมที่ได้จะอยู่ในรูปของอุณหภูมิยกกำลังต่าง ๆ จากนั้นจึงหาค่าวิกฤต K_C ด้วยวิธีเอกซ์ตราโพล และแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง K_T กับ K/K_C ด้วยเส้นกราฟ

การวิเคราะห์ผล

พิจารณาสภาพอัดได้จากกราฟระหว่าง K_T กับ K/K_C

สรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิ่ง สหติชกาชชนิดเฟสเซนเตอร์คิวบิกนี้จะพิจารณาในสี่กรณีด้วยกันคือ F.C.C. (1,0,0,0), F.C.C. (1,1,0,0) F.C.C. (1,1,1,0) และ F.C.C. (1,1,1,1) เมื่อพิจารณาอันตรกิริยาระหว่าง

โมเลกุลอันดับที่หนึ่ง อันดับหนึ่งและสอง อันดับหนึ่ง สอง และสาม และอันดับหนึ่ง สอง สามและสี่ ตามลำดับ

การศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงและศึกษาชนิดเฟสเช่น เฟอร์ริคทั้งสี่กรณีสามารถสรุปได้ว่า สภาพอัดได้จะเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤตสำหรับค่าวิกฤต K_C ของอนุกรมสภาพอัดได้แต่ละกรณีนี้จะมีความแตกต่างกันดังแสดงไว้ในตาราง 9 โดยเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้โดย ดอมม์และคอลลตัน (Domb and Dalton. 1966 : 859) และค่าที่คำนวณได้โดย ทรงศรี วิมลวนิชย์ (Vimolvanich. 1973 : 66) ดังตาราง 9

ตาราง 9 แสดงค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จากการวิจัยครั้งนี้เปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณไว้โดย ดอมม์และคอลลตันและทรงศรี วิมลวนิชย์

K_T	ค่าวิกฤต K_C		
	ค่าที่คำนวณได้จากการวิจัยครั้งนี้	ค่าที่ได้จากการคำนวณของดอมม์และคอลลตัน	ค่าที่ได้จากการคำนวณของทรงศรี วิมลวนิชย์
F.C.C.(1,0,0,0)	0.102375	0.10208	0.1021
F.C.C.(1,1,0,0)	0.0644496	0.06445	0.0644
F.C.C.(1,1,1,0)	0.025712	0.0257	0.0255
F.C.C.(1,1,1,1)	0.01970	..	0.0195

อภิปรายผลการวิจัย

จากการวิจัยเพื่อศึกษาสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงและศึกษาชนิดเฟสเช่น เฟอร์ริคทั้งสี่กรณีพบว่าค่าวิกฤต K_C ของอนุกรมสภาพอัดได้จะมีค่าลดลงเมื่ออันตรกิริยาระหว่างสปินของโมเลกุลอันดับต่าง ๆ มากขึ้น ค่าวิกฤต K_C นั้นขึ้นอยู่กับ

กับจำนวนอันดับของอันตรกิริยาระหว่างสปินที่พิจารณา นั่นคือถ้าจำนวนอันดับของอันตรกิริยาเพิ่มขึ้นค่าวิกฤต K_C จะลดลง จากตาราง 9 เราสรุปได้ว่า ในกรณีของ F.C.C. (1,0,0,0) ค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จะมากกว่าค่าของคอมบ์และคอลตัน และค่าของ ทรงศรี วิมลวิชัย อยู่ 0.288 % และ 0.269 % ตามลำดับ

ในกรณีของ F.C.C. (1,1,0,0) ค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จะน้อยกว่าค่าของคอมบ์และคอลตันอยู่ 0.0006 % และมากกว่าค่าของทรงศรี วิมลวิชัย อยู่ 0.077 %

ในกรณีของ F.C.C. (1,1,1,0) ค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จะมากกว่าค่าของคอมบ์และคอลตัน และค่าของ ทรงศรี วิมลวิชัย อยู่ 0.046 % และ 0.831 % ตามลำดับ

ในกรณีของ F.C.C. (1,1,1,1) ค่าวิกฤต K_C ที่คำนวณได้จะมากกว่าค่าของ ทรงศรี วิมลวิชัย อยู่ 1.019 %

จะเห็นว่าค่าวิกฤตที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้มากกว่าค่าของคอมบ์และคอลตัน และค่าของ ทรงศรี วิมลวิชัย โดยเฉลี่ยประมาณ 0.351 % นับว่าใกล้เคียงกันมาก ค่าที่แตกต่างกันนี้เนื่องมาจากการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้พิจารณาจำนวนบอนด์ระหว่างโมเลกุลเพียงหกบอนด์ ส่วนผู้วิจัยทั้งสามท่านได้พิจารณาจำนวนบอนด์ระหว่างโมเลกุลถึงเจ็ดบอนด์ทำให้มีความละเอียดมากกว่า แสดงว่าค่าวิกฤตนั้นขึ้นอยู่กับจำนวนบอนด์ระหว่างโมเลกุลด้วย

จากกราฟระหว่าง $\frac{1}{q} a_n/a_{n-1}$ กับ $1/n$ สามารถนำไปหาค่าเอกซ์โปเนนซ์วิกฤต γ (critical point exponent γ) ของสภาพอัดได้ โดยใช้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเอกซ์โปเนนซ์วิกฤต γ กับค่าวิกฤต K_C ซึ่งเขียนได้เป็น

$$\text{ความลาดเอียง (slope) ของเส้นตรง} = \frac{\gamma-1}{K_C} \quad \dots (45)$$

ค่าเอกซ์โปเนนซ์วิกฤต γ ของสภาพอัดได้ทั้งสี่กรณีเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต K_C แสดงไว้ในตาราง 10

ตาราง 10 เปรียบเทียบค่าเอกซ์โปเนนต์วิกฤต γ กับค่าวิกฤต K_C

	F.C.C.(1,0,0,0)	F.C.C.(1,1,0,0)	F.C.C.(1,1,1,0)	F.C.C.(1,1,1,1)
K_C	0.102375	0.0644496	0.025712	0.01970
γ	1.248	1.191	1.098	1.053

จากกราฟสภาพอัดได้ของแบบจำลองไอซิงแลตทิซกาซชนิดเฟสเช่นเตอร์คิวบิกทั้งสี่กรณีพบว่าสภาพอัดได้จะเข้าใกล้หนึ่งเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤตซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของแลนเดาว์ และลิฟชิตซ์ (Landau and Lifshitz) ซึ่งใช้การกระจายแบบเทเลอร์เพื่อศึกษาสภาพอัดได้ของแลตทิซกาซและเขาพบว่าสภาพอัดได้จะเข้าใกล้หนึ่งเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต (Isihara. 1971 : 267)

ข้อเสนอแนะในการวิจัย

ในการศึกษาเกี่ยวกับตัวแปรทางอุณหพลศาสตร์ของแลตทิซกาซชนิดต่าง ๆ นี้จะเริ่มจากการหาพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ของแลตทิซกาซนั้น ๆ ก่อนเสมอ ผู้วิจัยมีความเห็นและข้อเสนอแนะดังนี้

1. ในการวิจัย ผู้วิจัยควรมีความรู้เกี่ยวกับเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งด้านการเขียนโปรแกรม
2. ควรจะกำหนดค่าเอกซ์โปเนนต์วิกฤตของสภาพอัดได้ (γ - exponent) ค่าเอกซ์โปเนนต์วิกฤตของความร้อนจำเพาะ (α - exponent) หรือค่าเอกซ์โปเนนต์วิกฤตของชัสเชปติบิลิตี้ (γ' - exponent) เป็นต้น โดยพิจารณาความแรงของอันตรกิริยาแต่ละอันตบไม่เท่ากัน
3. ศึกษาวิธีการหาพลังงานอิสระเฮล์มโฮลทซ์ โดยวิธีการกระจายอนุกรมแบบเทเลอร์ วิธีมอนติ - คาร์โล รินอร์มัลไรเซชัน กรุป หรือใช้การแปรผันของคาตาโนฟ เป็นต้น



บรรณานุกรม

สมมาตร ชิตญาติ ความร้อค่าเพาะของไอซิง: เทคนิคการในสามมิติ ชนิดเฟสเช่นเตอร์คิวบิก
เพื่อพิจารณาอันตรกิริยาที่ใกล้ที่สุดสามอันดับแรก ปรินทิพินท์ กศ.ม. มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 2525, 70 หน้า อัดสำเนา

Baker , George A , Jr. "Application of the Pade' Approximant Method to the Investigation of some Magnetic Properties of the Ising Model," Physical Review. vol. 124, no. 3 : 768 - 774, November 1, 1961.

Brote , H.W.J. and R.H. Swendsen. "Critical Behaviour of the Three-Dimensional Ising Model," Physical Review. 20 : 2077 - 2089, 1979.

Dalton, N.W. and D.W. Wood "Critical Point Behaviour of the Ising Model with Higher - Neighbour Interactions Present," Journal of Mathematical Physics. vol. 10, no. 7 : 1271 - 1282, July 1969.

Domb , C. and N.W. Dalton. "Critical Statistics with long - range forces I. The equivalent neighbour model," Proceeding of the Physical Society. vol. 89 : 859 - 871, 1966.

Domb , C. and M.S. Green. Phase Transitions and Critical Phenomena III. 1 st. ed., London. Academic Press Inc., 1976. 694 p.

Domb , C. and M.F. Sykes. "Specific Heat of a Ferromagnetic Substance Above the Curies Point," Physical Review. 108 : 1415 , 1957.

Esfandiori , P and others. "New generating functions and results for the density polynomials of the lattice gas", Physical Review B. vol. 24 no. 3 August 1981, 1293 - 1311

Farrell , Richard A. and Paul H.E. Meijer. "Compressibility Exponent from Ising to Mean - Field Theories," Physical Review B. vol. 5, no. 9 : 3747 - 3750, May 1, 1972.

Gaunt , D.S. and G.A. Baker. "Low - Temperature Critical Exponent from High Temperature Series : The Ising Model," Physical Review B. 1 : 1184, 1969

Huang , Kerson. Statistical Mechanics. 1 st. ed., London. John Wiley and Sons Inc., 1963. 470 p.

Ishihara , A. Statistical Physics. New York. Academic Press., 1971. 438 p.

Meijer , P.H.E., R.A. Farrell and E.E. Sommerfeldt. "Cluster Expansion of the Lattice Gas : Determination of the First Ten High - Temperature Coefficients," Physica. **113** : 114 - 127, 1972.

Stanley , H.E. Introduction of Phase Transition and Critical Phenomena ed., Oxford, Clarendon Press., 1971. 308 p.

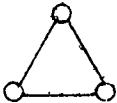
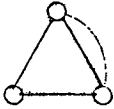
Sykes , M.F., D.L. Hunter , D.S. Mechenzie and B.R. Heap.
"Specific heat of a three dimensional Ising ferromagnetic above the Curie temperature II," Journal of Physics A : General Physics. vol. 5;

Vimolvanich , S. Influence of Long - Range Potentials on the Critical Behaviour of a Face - Centered Cubic Lattice Gas. Doctor's thesis. Catholic University , 1973. 66 p. Photocopied

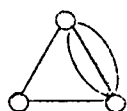
Yang , C.N. and T.D. Lee. Physical Review. **87** : 404 - 410, 1952.

Yu - Ming Shih and others. "Calculation of Free Energies for a Three Dimensional Ising Model by a Modified Kadanoff's Variation Method," Physical Review. **21(1)** : 299, 1980.



DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
									
1	1000	12		6	4^2	0002	12		3
2	0100	6		3					
3	0010	24		12					
4	0001	12		6	1^3	3000	12		1
									
					2^3	0300	6		0.5
					3^3	0030	24		2
444	0003	48		8	4^3	0003	12		1
333	0030	48		8					
111	3000	48		8					
433	0021	24		12	1^4	4000	12		0.85
422	0201	24		12	2^4	0400	6		0.125
411	2001	12		6	3^4	0040	24		0.50
332	0120	48		2^4	4^4	0004	12		0.25
331	1020	48		2^4					
311	2010	48		2^4					
211	2100	24		12	1^5	5000	12		0.05
321	1110	24		24	2^5	0500	6		0.025
431	1011	48		48	3^5	0050	24		0.1
									
					4^5	0005	12		0.05
1^2	2000	12		3					
2^2	0200	6		1.5	$4^2 44$	0004	48		12
3^2	0020	24		6	$3^2 33$	0040	48		12

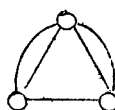
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$1^2 11$	4000	48		12	$3^3 33$	0050	48		4
$4^2 33$	0022	24		6	$1^3 11$	5000	48		4
433^2	0031	24		12	$4^3 33$	0023	24		2
$4^2 22$	0202	24		6	433^3	0041	24		4
422^2	0301	24		12	$4^3 22$	0203	24		2
$4^2 11$	2002	12		3	422^3	0401	24		4
411^2	3001	12		6	$4^3 11$	2003	12		1
$3^2 32$	0130	48		24	411^3	4001	12		2
332^2	0220	48		12	$3^3 32$	0140	48		8
$3^2 31$	1030	48		24	332^3	0320	48		4
331^2	2020	48		12	$3^3 31$	1040	48		8
$3^2 11$	2020	48		12	331^3	3020	48		4
311^2	3010	48		24	$3^3 11$	2030	48		4
$2^2 11$	2200	24		6	311^3	4010	48		8
211^2	3100	24		12	$2^3 11$	2300	24		2
$3^2 21$	1120	24		12	211^3	4100	24		4
321^2	2110	24		12	$3^3 21$	1130	24		4
$32^2 1$	1210	24		12	$32^3 1$	1310	24		4
$4^2 31$	1012	48		24	321^3	3110	24		4
$43^2 1$	1021	48		24	$4^3 31$	1013	48		8
431^2	2011	48		24	$43^3 1$	1031	48		8
					431^3	3011	48		8

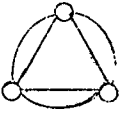
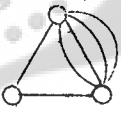
 $4^3 44$

0005

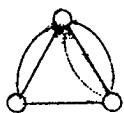
48

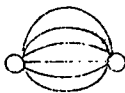
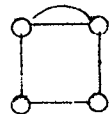
4



<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4^2 4^2 4$	0005	48		6					
$3^2 3^2 3$	0050	48		6					
$1^2 1^2 1$	5000	48		6					
$4^2 3^2 3$	0032	24		6	$4^2 4^2 4^2$	0006	48		1
$4 3^2 3^2$	0041	24		3	$3^2 3^2 3^2$	0060	48		1
$4^2 2^2 2$	0302	24		6	$1^2 1^2 1^2$	6000	48		1
$4 2^2 2^2$	0401	24		3	$4^2 3^2 3^2$	0042	24		1.5
$4^2 1^2 1$	3002	12		3	$4^2 2^2 2^2$	0402	24		1.5
$4 1^2 1^2$	4001	12	1.50		$4^2 1^2 1^2$	4002	12		0.75
$3^2 3^2 2$	0140	48		6	$3^2 3^2 2^2$	0240	48		3
$3 3^2 2^2$	0230	48		12	$3^2 3^2 1^2$	2040	48		3
$3^2 3^2 1$	1040	48		6	$3^2 1^2 1^2$	4020	48		3
$3 3^2 1^2$	2030	48		12	$2^2 1^2 1^2$	4200	24		1.5
$3^2 1^2 1$	3020	48		12	$3^2 2^2 1^2$	2220	24		3
$3 1^2 1^2$	4010	48		6	$4^2 3^2 1^2$	2022	48		6
$2^2 1^2 1$	3200	24		6					
$2 1^2 1^2$	4100	24		3					
$3^2 2^2 1$	1220	24		6					
$3 2^2 1^2$	2210	24		6	$4^4 4 4$	0006	48		1
$3^2 2 1^2$	2120	24		6	$3^4 3 3$	0060	48		1
$4^2 3^2 1$	1022	48		12	$1^4 1 1$	6000	48		1
$4 3^2 1^2$	2021	48		12	$4^4 3 3$	0024	24		0.5
$4^2 3 1^2$	2012	48		12	$4 3 3^4$	0051	25		1
					$4^4 2 2$	0204	24		0.5
					$4 2 2^4$	0501	24		1

DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
4^4_{11}	2004	12		0.25	$4^3_2 2^2_2$	0303	24		2
4_{11}^4	5001	12		0.5	$4^2_2 2^2_3$	0402	24		2
3^4_{32}	0150	48		2	$4_2 2^2_3$	0501	24		2
332^4	0420	48		1	$4^3_{11} 2^2$	3003	12		1
3^4_{31}	1050	48		2	$4^2_{11} 3^3$	4002	12		1
331^4	4020	48		1	$4_1 2^2_1 3^3$	5001	12		1
3^4_{11}	2040	48		1	$3^3_{32} 2^2$	0240	48		4
311^4	5010	48		2	$3^2_{32} 3^3$	0330	48		4
2^4_{11}	2400	24		0.5	$3^3_{32} 2^2$	0150	48		4
211^4	5100	24		1	$3^3_{31} 2^2$	2040	48		4
3^4_{21}	1140	24		1	$3^2_{31} 3^3$	3030	48		4
32^4_1	1410	24		1	$3^3_{32} 1^3$	1050	48		4
321^4	4110	24		1	$3^3_{11} 2^2$	3030	48		4
4^4_{31}	1014	48		2	$3^2_{11} 3^3$	4020	48		4
43^4_1	1041	48		2	$31^2_1 3^3$	5010	48		4
431^4	4011	48		2	$2^3_{11} 2^2$	3300	24		2
					$2^2_{11} 3^3$	4200	24		2
					$21^2_1 3^3$	5100	24		2
					$3^3_{21} 2^2$	2130	24		2
$4^3_4 2^2_4$	0006	48		4	$3^2_{21} 3^3$	3120	24		2
$3^3_{32} 2^2_3$	0060	48		4	$3^3_{22} 1^3$	1230	24		2
$1^3_1 2^2_1$	6000	48		4	$3^2_{23} 1^3$	1320	24		2
$4^3_{33} 2^2$	0033	24		2	$32^3_1 2^2$	2310	24		2
$4^2_{33} 3^3$	0042	24		2	$32^2_1 3^3$	3210	24		2
$43^2_3 2^2_3$	0051	24		2					



DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
$4^3 3 1^2$	2013	48		4	$4^2 2 4 2$	0203	192		48
$4^2 3 1^3$	3012	48		4	$4 2 4 2^2$	0302			48
$4^3 3^2 1$	1023	48		4	$3^2 3 2 2$	0230	72		36
$4^2 3^3 1$	1032	48		4	$3 3 2 2^2$	0320			36
$4 3^2 1^3$	3021	48		4	$3^2 2 3 2$	0230	216		54
$4 3^3 1^2$	2031	48		4	$3 2 3 2^2$	0320	216		54
					$4^2 4 1 1$	2003	48		24
					$4 4 1 1^2$	3002			24
1^6	6000	12		1/120	$4^2 1 4 1$	2003	192		48
2^6	0600	6		1/240	$4 1 4 1^2$	3002			48
3^6	0060	24		1/60	$3^2 3 1 1$	2030	504		252
4^6	0006	12		1/120	$3 3 1 1^2$	3020			252
					$3^2 1 3 1$	2030	792		198
					$3 1 3 1^2$	3020			198
$4^2 4 4 4$	0005	264	252	63	$2 2^2 1 1$	2300	24		12
$3^2 3 3 3$	0050	1248	1244	311	$2 2 1 1^2$	3200			12
$2^2 2 2 2$	0500	24	18	4.5	$2^2 1 2 1$	2300	96		24
$1^2 1 1 1$	5000	264	253	63	$2 1 2 1^2$	3200			24
$4^2 4 3 3$	0023	240		120	$4^2 4 3 1$	1013	192		96
$4 4 3 3^2$	0032	240		120	$4 4^2 3 1$	1013			96
$4^2 3 4 3$	0023	528		132	$4 4 3^2 1$	1022			96
$4 3 4 3^2$	0032			132	$4 4 3 1^2$	2012			96
$4^2 4 2 2$	0203	120		60	$4^2 3 4 1$	1013	192		96
$4 4 2 2^2$	0302			60	$4 3^2 4 1$	1022			

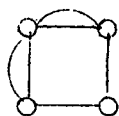
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
4341^2	2012				433^22	0131			
4^2313	1022	384		96	4332^2	0221			
43^213	1031			96	4^2323	0122	240		60
431^23	2021	384		96	43^223	0131			120
4^2331	1022	384		192	432^23	0221			60
43^231	1031				4^2311	2012	240		120
433^21	1031				43^211	2021			
4331^2	2021				431^21	3011			
3^2231	1130	240		120	4311^2	3011			
32^231	1220			60	4^2131	2012	240		60
3231^2	2120				41^231	3011			120
3^2312	1130	240		120	413^21	2021			60
33^212	1130				4^2211	2102	96		48
331^22	2120				42^211	2201	96		48
3312^2	1220				421^21	3101			
3^2221	1220	96		48	4211^2	3101			
32^221	1310				3^2211	2120	192		96
322^21	1310				32^211	2210			
3221^2	2210				321^21	3110			
3^2212	1220	96		24	3211^2	3110			
32^212	1310			48	3^2121	2120	192		48
321^22	2210			24	31^221	3110			96
4^2332	0122	240		120	312^21	2210			48
43^232	0131				4^2121	2102	96		24

DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
$4_1^2 2_1$	3101			48	$4_1^2 3_{12}$	1112	168		84
$4_{12}^2 1$	2201			24	$4_3^2 1_2$	1121			
$4_1^2 333$	0032	576		144	$4_3 1_1^2 2$	2111			
$4_3 3_3^2 3$	0041				$4_3 1_2^2$	1211			
$4_3 3_3 3^2$	0041			288	$4_1^2 2_3 1$	1112	168		84
$3^2 3_3 2$	0140	288		144	$4_2^2 3_1$	1211			
$3_3^2 3_2$	0140			72	$4_2 3_3^2 1$	1121			
$3_3 3_2^2$	0230				$4_2 3_1^2$	2111			
$3^2 3_3 1$	1040	864		432					
$3_3^2 3_1$	1040			216					
$3_3 3_1^2$	2030								
$3^2 1_{11}$	3020	432		108	$4_4 4_4 4_3$	0006	264	252	21
$3_{11}^2 1$	4010				$3_3 3_3 3^3$	0060	1248	1224	102
$3_{11} 1_1^2$	4010			216	$2_2 2_2 2^3$	0600	24	18	1.5
$2^2 1_{11}$	3200	144		36	$1_{11} 1_1^3$	6000	264	252	21
$2_{11}^2 1$	4100				$4^3 4_3 3$	0024	240		40
$2_{11} 1_1^2$	4100			72	$4_4 3_3 3^3$	0042			
$4^2 1_{11}$	3002	144		36	$4^3 3_4 3$	0024	528		44
$4_{11}^2 1$	4001				$4_3^3 4_3$	0042			
$4_{11} 1_1^2$	4001			72	$4^3 4_2 2$	0204	120		20
$4_1^2 3_2 1$	1112	168		84	$4_4 2_2^3$	0402			
$4_3^2 2_1$	1121				$4^3 2_4 2$	0204	192		16
$4_3 2_1^2$	1211				$4_2^3 4_2$	0402			
$4_3 2_1^2$	2111				$3^3 3_2 2$	0240	72		12

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
3322 ³	0420				431 ³ 3	3021			32
3 ³ 232	0240	216		13	4 ³ 331	1023	384		64
32 ³ 32	0420				43 ³ 31	1041			
4 ³ 411	2004	48		8	433 ³ 1	1041			
4411 ³	4002				4331 ³	3021			
4 ³ 141	2004	192		16	3 ³ 231	1140	340		40
41 ³ 41	4002				32 ³ 31	1320			20
3 ³ 311	2040	504		84	3231 ³	3120			
3311 ³	4020				3 ³ 312	1140	240		40
3 ³ 131	2040	792		66	33 ³ 12	1140			
3131 ³	4020				331 ³ 2	3120			
2 ³ 211	2400	24		4	3312 ³	1320			
2211 ³	4200				3 ³ 221	1230	96		16
2 ³ 121	2400	96		8	32 ³ 21	1410			
2121 ³	4200				322 ³ 1	1410	96		16
4 ³ 431	1014	192		32	3221 ³	3210			
44 ³ 31	1014				3 ³ 212	1230	96		8
443 ³ 1	1032				32 ³ 12	1410			16
4431 ³	3012				321 ³ 2	3210			8
4 ³ 341	1014	192		32	4 ³ 332	0123	240		40
43 ³ 41	1032			16	43 ³ 32	0141			
4341 ³	3012				433 ³ 2	0141			
4 ³ 313	1033	384		32	4332 ³	0321			
43 ³ 13	1041			64	4 ³ 323	0123	240		20

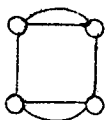
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
43 ³ 23	0141			40	43 ² 33	0051			96
432 ² 3	0321			20	433 ³ 3	0051			48
43 ³ 11	2013	240		40	33 ³ 32	0150	288		48
43 ³ 11	2031				33 ³ 32	0150			24
431 ³ 1	4011				3332 ³	0330			
4311 ³	4011				3 ³ 331	1050	864		144
43 ³ 131	2013	240		20	33 ³ 31	1050			72
41 ³ 31	4011			40	3331 ³	3030			
413 ³ 1	2031			20	3 ³ 111	3030	432		36
43 ³ 211	2103	96		16	31 ³ 11	5010			72
42 ³ 11	2301				311 ³ 1	5010			36
421 ³ 1	4101				23 ³ 111	3300	144		12
4211 ³	4101				21 ³ 11	5100			24
43 ³ 121	2103	96		8	211 ³ 1	5100			12
41 ³ 21	4101			16	43 ³ 111	3003	144		12
412 ³ 1	2301			8	41 ³ 11	5001			24
33 ³ 211	2130	192		32	411 ³ 1	5001			12
32 ³ 11	2310				43 ³ 21	1113	168		28
321 ³ 1	4110				43 ³ 21	1131			
3211 ³	4110				432 ³ 1	1311			
33 ³ 121	2130			16	4321 ³	3111			
31 ³ 21	4110			32	43 ³ 12	1113	168		28
312 ³ 1	2310			16	43 ³ 12	1131			
43 ³ 333	0033	576		48	431 ³ 2	3111			

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4_3 1_2^2$	1311				$4^2 4^2_{11}$	2004	48		6
$4^3_2 3_1$	1113	168		28	$4_4 2^2_1$	3003			12
$4_2 3^3_1$	1311				$4_4 1^2_1^2$	4002			6
$4_2 3^3_1$	1131				$4^2_1 2^2_4$	3003	192		48
$4_2 3_1^3$	3111				$3^2_3 2^2_{11}$	2040	504		63
					$3_3 2^2_1^2$	3030			126
					$3_3 1^2_1^2$	4020			63
					$3^2_1 2^2_3$	3030	792		198
					$2^2_2 2^2_{11}$	2400	24		3
$4^2_4 4^2_{44}$	0006	264	252	31.5	$2_2 2^2_1^2$	3300			6
$3^2_3 2^2_{33}$	0060	1248	1224	153	$2_2 1^2_1^2$	4200			3
$2^2_2 2^2_{22}$	0600	24	18	2.25	$2^2_1 2^2_{21}$	3300	96		24
$1^2_1 2^2_{11}$	6000	264	252	31.5	$4^2_4 4^2_{51}$	1014	192		48
$4^2_4 4^2_{33}$	0024	240		30	$4_4 2^2_3$	1023			
$4_4 2^2_3$	0033			60	$4_4 3^2_1^2$	2022			
$4_4 3^2_3^2$	0042			30	$4^2_4 3_1^2$	2013			
$4^2_3 2^2_{43}$	0033	528		132	$4^2_3 2^2_{41}$	1023	192		48
$4^2_4 2^2_{22}$	0204	120		15	$4_3 4^2_1^2$	2013			
$4_4 2^2_2$	0303			30	$4^2_3 2^2_{13}$	1032	384		96
$4_4 2^2_2^2$	0402			15	$4_3 1^2_3^2$	2031			
$4^2_2 2^2_{42}$	0303	192		48	$4^2_3 2^2_{31}$	1032	384		96
$3^2_3 2^2_{22}$	2040	72		9	$4_3 2^2_3^2$	1041			
$3_3 2^2_2$	0330			18	$4_3 3^2_1^2$	2031			
$3_3 2^2_2^2$	0420			9	$4^2_3 3_1^2$	2022			
$3^2_2 2^2_{32}$	0330	216		54					

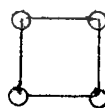


<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$3^2 2^2 31$	1230	240		60	$4^2 2^2 11$	2202	96		24
$323^2 1^2$	2130				$42^2 1^2 1$	3201			
$3^2 3^2 12$	1140	240		60	$421^2 1^2$	4101			
$33^2 1^2 2$	2130				$4^2 211^2$	3102			
$331^2 2^2$	2220				$4^2 1^2 21$	3102	96		24
$3^2 312^2$	1230				$412^2 1^2$	3201			
$3^2 2^2 21$	1320	96		24	$3^2 2^2 11$	2220	192		48
$32^2 2^2 1$	1410				$32^2 1^2 1$	3210			
$322^2 1^2$	2310				$321^2 1^2$	4110			
$3^2 221^2$	2220				$3^2 211^2$	3120			
$3^2 2^2 12$	1320	96		24	$3^2 1^2 21$	3120	192		48
$321^2 2^2$	2310				$312^2 1^2$	3210			
$4^2 3^2 32$	0132	240		60	$4^2 3^2 33$	0042	576		144
$43^2 3^2 3$	0141				$43^2 3^2 3$	0051			
$433^2 2^2$	0231				$3^2 3^2 32$	0150	288		72
$4^2 332^2$	0222				$333^2 2^2$	0240			
$4^2 3^2 23$	0132	240		60	$3^2 3^2 13$	1050	864		216
$432^2 3^2$	0231				$331^2 3^2$	2040			
$4^2 3^2 11$	2022	240		60	$3^2 1^2 11$	4020	432		108
$43^2 1^2 1$	3021				$311^2 1^2$	5010			
$431^2 1^2$	4011				$2^2 1^2 11$	4200	144		36
$4^2 311^2$	3012				$211^2 1^2$	5100			
$4^2 1^2 31$	3012	240		60	$4^2 1^2 11$	4002	144		36
$413^2 1^2$	3021				$411^2 1^2$	5001			

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4^2 3^2 2_1$	1122	168		42	$4_2^2 4_2^2$	0402			
$4_3^2 2^2 1$	1221				$3^2 3_2^2 2$	0330	74		18
$4_3 2^2 1^2$	2211				$3^2 2_3^2 2$	0240	216		13.5
$4^2 3_2 1^2$	2112				$3_2^2 3_2^2$	0420			
$4^2 3^2 1_2$	1122	168		42	$4^2 4_1^2 1$	3003	48		12
$4_3 2^2 1_2$	2121				$4^2 1_4 2_1$	2004	192		12
$4_3 1^2 2^2$	2211				$4_1^2 4_1^2$	4002			
$4^2 3_1 2^2$	1212				$3^2 3_1^2 1$	3030	504		126
$4^2 2^2 3_1$	1212	168		42	$3^2 1_3^2 1$	2040	792		49.5
$4_2^2 3^2 1$	1221				$3_1^2 3_1^2$	4020			
$4_2 3^2 1^2$	2121				$2^2 2_1^2 1$	3300	24		6
$4^2 2_3 1^2$	2112				$2^2 1_2^2 1$	2400	96		6
					$2_1^2 2_1^2$	4200			
					$4^2 4_3^2 1$	1023	192		42
					$4_1^2 3_1^2$	2013			
$4^2 4_4^2 4$	0006	264	252	15.75	$4^2 3_4^2 1$	1014	192		24
$3^2 3_3^2 3$	0060	1248	1224	76.5	$4_3^2 4_1^2$	2022			
$2^2 2_2^2 2$	0600	24	18	1.125	$4^2 3_1^2 3$	2022	384		48
$1^2 1_1^2 1$	6000	264	252	15.75	$4_3^2 1_3^2$	1041			
$4^2 4_3^2 3$	0033	240		60	$4^2 3_3^2 1$	1032	384		96
$4^2 3_4^2 3$	0024	528		33	$4_3^2 3_1^2$	2031			
$4_3^2 4_3^2$	0042				$3^2 2_3^2 1$	1140	240		60
$4^2 4_2^2 2$	0303	120		30	$3_2^2 3_1^2$	2220			
$4^2 2_4^2 2$	0204	192		12	$3^2 3_1^2 2$	2130	240		60



<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
33^212^2	1230				33^232^2	0240			
3^222^21	1320	96		24	3^233^21	1050	864		108
32^221^2	2310				33^231^2	2040			
3^221^22	2220	96		12	3^211^21	4020	432		54
32^212^2	1410				31^211^2	5010			
4^233^22	0132	240		60	2^211^21	4200	144		18
43^232^2	0231				21^211^2	5100			
4^232^23	0222	240		30	4^211^21	4002	144		18
43^223^2	0141				41^211^2	5001			
4^231^21	3012	240		60	4^232^21	1212	168		42
43^211^2	3021				43^221^2	2121			
4^213^21	2022	240		30	4^231^22	2112	168		42
41^231^2	4011				43^212^2	1221			
4^221^21	3102	96		24	4^223^21	1122	168		42
42^211^2	3201				42^231^2	2211			
3^221^21	3120	192		48					
32^211^2	3210								
3^212^21	2220	192		24					
31^221^2	4110				4444	0004	264	252	31.5
4^212^21	2202	96		12	3333	0040	1248	1224	153
41^221^2	4101				2222	0400	24	18	2.25
4^233^23	0042	576		72	1111	4000	264	252	31.5
43^233^2	0051				4433	0022	240		120
3^233^22	0150	288		36	4343	0022	528		132

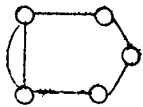


<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
4422	0202	120		60	3121	2110	192		96
4242	0202	192		48	4121	2101	96		48
3322	0220	72		36	4333	0031	576		288
3232	0220	216		54	3332	0130	288		144
4411	2002	48		24	3313	1030	864		432
4141	2002	192		48	3111	3010	432		216
3311	2020	504		252	2111	3100	144		72
3131	2020	792		198	4111	3001	144		72
2211	2200	24		12	4321	1111	168		168
2121	2200	96		24	4312	1111	168		168
4431	1012	192		192	4231	1111	168		168
4341	1012	192		96					
4313	1021	384		192					
4331	1021	384		384					
3231	1120	240		120	44444	0005	1680	1440	144
3312	1120	240		240	33333	0050	17520	17280	1728
3221	1210	96		96	11111	5000	1680	1440	144
3212	1210	96		48	43333	0041	10272	10224	5112
4332	0121	240		240	41111	4001	1368	1344	672
4323	0121	240		120	31111	4010	3264	3168	1584
4311	2011	240		240	21111	4100	912	864	432
4131	2011	240		120	33313	1040	12768	12672	6336
4211	2101	96		96	42222	0401	192	144	72
3211	2110	192		192	33332	0140	5856	5760	2880

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
44433	0023	1536	1514	756	44431	1013	1056	1008	1008
44422	0203	672	648	324	44341	1013	1584		1584
44343	0023	2952		1476	43313	1031	7200		7200
44333	0032	1584		1584	43331	1031	6096		6096
44242	0203	1224		612	33312	1130	3696	3672	3672
43433	0032	4752		2376	33231	1130	4248		4248
44411	2003	264	252	126	43111	3011	2064	2016	2016
44141	2003	972		486	42111	3101	720		720
33311	2030	7680	7632	3816	41311	3011	2592		2592
33131	2030	9360		4680	41211	3101	408		408
22211	2300	96	72	36	32111	3110	1536	1512	1512
22121	2300	216		108	31211	3110	1800		1800
44111	3002	576		288	32221	1310	240	216	216
41411	3002	1152		576	32212	1310	360		360
33111	3020	4560	4512	2256	44332	0122	1584		1584
31311	3020	6240		3120	44323	0122	1584		792
22111	3200	288		144	43432	0122	2160		2160
21211	3200	576		288	43342	0122	2160		1080
33232	0230	1584		792	43322	0221	552		552
33222	0320	336	288	144	43232	0221	1272		1272
32322	0320	576		288	43223	0221	1128		564
33322	0230	1296		648	42332	0221	696		348
43332	0131	2880		2880	44331	1022	2352		2352
43323	0131	2880		2880	44313	1022	2352		1176

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
43431	1022	2928		2828	32311	2120	2640		1320
43341	1022	2928		1464	32211	2210	528		528
33221	1220	864		864	32131	2120	3216		3216
33212	1220	1152		576	32121	2210	816		816
32321	1220	1152		1152	32112	2210	816		408
32231	1220	864		432	31221	2210	528		264
44311	2012	1248		1248	44321	1112	912		912
44211	2102	480		480	44312	1112	912		912
44131	2012	1248		624	44231	1112	912		912
44121	2102	480		240	43421	1112	1200		1200
43411	2012	1824		912	43241	1112	1200		1200
43311	2021	3888		3888	43142	1112	1200		1200
43141	2012	1824		1824	43321	1121	1824		1824
43131	2021	4464		4464	43312	1121	1824		1824
43113	2021	4176		2088	43231	1121	1824		1824
42411	2102	768		384	43213	1121	1824		1824
42211	2201	120		120	43132	1121	1824		1824
42121	2201	480		480	42331	1121	1824		1824
42112	2201	192		96	42312	1211	768		768
41421	2102	768		768	43221	1211	480		480
41331	2021	4176		2088	43212	1211	768		768
41221	2201	408		204	43122	1211	480		480
33211	2120	2064		2064	42321	1211	768		768
33121	2120	2640		1320	42311	2111	1152		1152

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
42231	1211	480		480	3 ² 3331	1050	12768	12672	6336
43211	2111	1152		1152	33 ² 331	1050			
43121	2111	1152		1152	33331 ²	2040			3168
43112	2111	1152		1152	4 ² 2222	0402	192	144	36
42131	2111	1152		1152	42 ² 222	0501			72
41321	2111	1152		1152	422 ² 22	0501			
					2 ² 3333	0240	5856	5760	1440
					23 ² 333	0150			2880
					233 ² 33	0150			
44444 ²	0006	1680	1440	360	4 ² 4433	0024	1536	1512	756
33333 ²	0060	17520	17280	4320	44 ² 433	0024			378
11111 ²	6000	1680	1440	360	4443 ² 3	0033			756
4 ² 3333	0042	10272	10224	2556	4 ² 4422	0204	672	648	324
43 ² 333	0051			5112	44 ² 422	0204			162
433 ² 33	0051				4442 ² 2	0303			324
4 ² 1111	4002	1368	1344	336	4 ² 4343	0024	2952		1476
41 ² 111	5001			672	443 ² 43	003			
411 ² 11	5001			672	4434 ² 3	0024	2952		738
3 ² 1111	4020	3264	3168	792	4 ² 4333	0033	1584		792
31 ² 111	5010			1584	443 ² 33	0042			
311 ² 11	5010				4433 ² 3	0042			396
2 ² 1111	4200	912	864	216	4 ² 4242	0204	1224		612
21 ² 111	5100			432	44 ² 42	0303			
211 ² 11	5100				4424 ² 2	0204			306



<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4^2 3433$	0033	4752		2376	$4^2 1411$	3003	1152		576
$43^2 433$	0042			1188	$41^2 411$	4002			288
$4343^2 3$	0042			2376	$4141^2 1$	4002			576
$4^2 4411$	2004	264	252	126	$3^2 3111$	3030	4560	4512	2256
$44^2 411$	2004			63	$331^2 11$	4020			
44411^2	3003			126	$3311^2 1$	4020			1128
$4^2 4141$	2004	972		486	$3^2 1311$	3030	6240		3120
$441^2 41$	3003				$31^2 311$	4020			1060
$4414^2 1$	2004			243	$3131^2 1$	4020			3120
$3^2 3311$	2040	7680	7632	3816	$2^2 2111$	3300	288		144
$33^2 311$	2040			1908	$221^2 11$	4200			
$3331^2 1$	3030			3816	$2211^2 1$	4200			72
$3^2 3131$	2040	9360		4680	$2^2 1211$	3300	576		288
$331^2 31$	3030				$21^2 211$	4200			144
$3313^2 1$	2040			2340	$2121^2 1$	4200			288
$2^2 2211$	2100	96	72	36	$3^2 3232$	0240	1584		792
$22^2 211$	2400			18	$332^2 32$	0330			
$2221^2 1$	3300			36	$3323^2 2$	0240			296
$2^2 2121$	2400	216		108	$3^2 3222$	0330	336	288	144
$221^2 21$	3300				$332^2 22$	0420			
$2212^2 1$	2400			54	$3322^2 2$	0420			72
$4^2 4111$	3003	576		288	$3^2 2322$	0330	576		288
$441^2 11$	4002				$32^2 322$	0420			144
$4411^2 1$	4002			144	$3232^2 2$	0420			288

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
3^23322	0240	1296		648	43^2313	1041			
33^2322	0240			324	433^213	1041			
3332^22	0330			648	4331^23	2031			
4^23332	0132	2880		1440	43313^2	1041			
43^2332	0141				4^23331	1032	6096		3048
433^232	0141				43^2331	1041			
4333^22	0141				433^231	1041			
43332^2	0231				4333^21	1041			
4^23323	0132	2880		1440	43331^2	2031			
43^2323	0141				3^23312	1140	3696	3672	1826
433^223	0141				33^2312	1140			
4332^23	0231				333^212	1140	3696	3672	1826
43323^2	0141				3331^22	2130			
4^24431	1014	1056	1008	504	33312^2	1230			
44^2431	1014				3^23231	1140	4248		2124
444^231	1014				33^2231	1140			
4443^21	1023				332^231	1230			
44431^2	2013				3323^21	1140			
4^24341	1014	1584		792	33231^2	2130			
44^2341	1014				4^23111	3012	2064	2016	1008
443^241	1023				43^2111	3021			
4434^21	1014				431^211	4011			
44341^2	2013				4311^21	4011			
4^23313	1032	7200		3600	43111^2	4011			

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4^2 2111$	3102	720		360	$312^2 11$	3210			
$42^2 111$	3201				$3121^2 1$	4110			
$421^2 11$	4101				31211^2	4110			
$4211^2 1$	4101				$3^2 2221$	1320	240		108
42111^2	4101				$32^2 221$	1410			
$4^2 1311$	3012	2592		1296	$322^2 21$	1410			
$41^2 311$	4011				$3222^2 1$	1410			
$413^2 11$	3021				32221^2	2310			
$4131^2 1$	4011				$3^2 2212$	1320	360		180
41311^2	4011				$32^2 212$	1410			
$4^2 1211$	3102	408		204	$322^2 12$	1410			
$41^2 211$	4101				$3221^2 2$	2310			
$412^2 11$	3201				32212^2	1410			
$4121^2 1$	4101				$4^2 4332$	0123	1584		792
41211^2	4101				$44^2 332$	0123			
$3^2 2111$	3120	1536	1512	756	$443^2 32$	0132			
$32^2 111$	3210				$4433^2 2$	0132			
$321^2 11$	4110				44332^2	0222			
$3211^2 1$	4110				$4^2 4323$	0123	1584		792
32111^2	4110				$443^2 23$	0132			
$3^2 1211$	3120	1800		900	$4432^2 3$	0222			396
$31^2 211$	4110				$4^2 3432$	0123	2160		1080

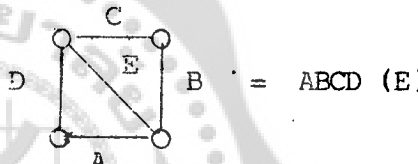
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
43^2432	0132				44^2331	1023			
434^232	0123				443^231	1032			
4343^22	0132				443^21	1032			
43432^2	0222				44331^2	2022			
4^23342	0123	2160		1080	4^24313	1023	2352		1176
43^2342	0132				443^213	1032			
43342^2	0222			540	4431^23	2022			588
4^23322	0222	552		276	4^23431	1023	2928		1464
43^2322	0231				43^2431	1032			
433^222	0231				434^231	1023			
4332^22	0321				43431^2	2022			
43322^2	0321				4343^21	1032			
4^23232	0222	1272		636	4^23341	1023	2928		1464
43^2232	0231				43^2341	1032			
432^232	0321				43341^2	2022			732
4323^22	0231				3^23221	1230	864		432
43232^2	0321				33^2221	1230			
4^23223	0222	1128		262	332^221	1320			
43^2223	0231			564	3322^21	1320			
432^223	0321				33221^2	2220			
4^22332	0222	696		174	3^23212	1230	1152		576
42^2332	0321			348	332^212	1320			
423^232	0231				3321^22	2220			288
4^24331	1023	2352		1176	3^22321	1230	1152		576

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
32 ² 321	1320				43 ² 411	2022			456
323 ² 21	1230				4341 ² 1	3012			912
3232 ² 1	1320				4 ² 3311	2022	3888		1944
32321 ²	2220				43 ² 311	2031			
3 ² 2231	1230	864		432	433 ² 11	2031			
32 ² 231	1320				4331 ² 1	3021			
32231 ²	2220			216	43311	3021			3888
4 ² 4311	2013	1248		624	4 ² 3141	2013	1824		912
44 ² 311	2013				43 ² 141	2022			
443 ² 11	2022				431 ² 41	3012			
4431 ² 1	3012				4314 ² 1	2013			
44311 ²	3012				43141 ²	3012			
4 ² 4211	2103	480		240	4 ² 3131	2022	4464		2232
44 ² 211	2103				43 ² 131	2031			
442 ² 11	2202				431 ² 31	3021			
4421 ² 1	3102				4313 ² 1	2031			
44211 ²	3102				43131 ²	3021			
4 ² 4131	2013	1248		624	4 ² 3113	2022	4176		1044
441 ² 31	3012			1248	43 ² 113	2031			2088
4413 ² 1	2022			312	431 ² 13	3021			
4 ² 4121	2103	480		240	4 ² 2411	2103	768		384
441 ² 21	3102			480	42 ² 411	2202			192
4412 ² 1	2202			120	4241 ² 1	3102			384
4 ² 3411	2013	1824		912	4 ² 2211	2202	120		60

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$42^2 211$	2301				$33^2 211$	2130			
$422^2 11$	2301				$332^2 11$	2220			
$4221^2 1$	3201				$3321^2 1$	3120			
42211^2	3201				33211^2	3120			
$4^2 2121$	2202	480		240	$3^2 3121$	2130	2640		1320
$42^2 121$	2301				$331^2 21$	3120			
$421^2 21$	3201				$3312^2 1$	2220			660
$4212^2 1$	2301				$3^2 2311$	2130	2640		1320
42121^2	3201				$32^2 311$	2220			660
$4^2 2112$	2202	192		48	$3231^2 1$	3120			1320
$42^2 112$	2301			96	$3^2 2211$	2220	528		264
$421^2 12$	3201				$32^2 211$	2310			
$4^2 1421$	2103	768		384	$322^2 11$	2310			
$4142^2 1$	2202				$3221^2 1$	3210			
$41^2 421$	3102				32211^2	3210			
$414^2 21$	2103				$3^2 2131$	2130	3216		1608
41421^2	3102				$32^2 131$	2220			
$4^2 1331$	2022	4176		1044	$321^2 31$	3120			
$41^2 331$	3021			2088	$3213^2 1$	2130			
$413^2 31$	2031				32131^2	3120			
$4^2 1221$	2202	408		102	$3^2 2121$	2220	816		408
$41^2 221$	3201			204	$32^2 121$	2310			
$4122^2 1$	2301				$321^2 21$	3210			
$3^2 3211$	2130	2064		1032	$3212^2 1$	2310			

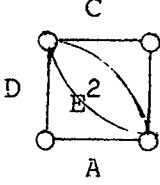
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
32121 ²	3210				434 ² 21	1113			
3 ² 2112	2220	816		204	4342 ² 1	1212			
32 ² 112	2310			408	43421 ²	2112			
321 ² 12	3210				4 ² 3241	1113	1200		600
3 ² 1221	2220	528		132	43 ² 241	1122			
31 ² 221	3210			204	432 ² 41	1212			
312 ² 21	2310				4324 ² 1	1113			
4 ² 4321	1113	912		456	43241 ²	2112			
44 ² 321	1113				4 ² 3142	1113	1200		600
443 ² 21	1122				43 ² 142	1122			
4432 ² 1	1212				431 ² 42	2112			
44321 ²	2112				4314 ² 2	1113			
4 ² 4312	1113	912		456	43142 ²	1212			
44 ² 312	1113	912		456	4 ² 3312	1122	1824		912
443 ² 12	1122				43 ² 312	1131			
4431 ² 2	2112				433 ² 12	1131			
44312 ²	1212				4331 ² 2	2121			
4 ² 4231	1113	912		456	43312 ²	1221			
44 ² 231	1113				4 ² 3231	1122	1824		912
442 ² 31	1212				43 ² 231	1131			
4423 ² 1	1122				432 ² 31	1221			
44231 ²	2112				4323 ² 1	1131	1824		912
4 ² 3421	1113	1200		600	43231 ²	2121			
43 ² 421	1122				4 ² 3213	1122	1824		912

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4_3^2 213$	1131				$4_3^2 3212$	1212	768		384
$4_3 2^2 13$	1221				$4_3^2 212$	1221			
$4_3 21^2 3$	2121				$4_3 2^2 12$	1311			
$4_3 213^2$	1131				$4_3 21^2 2$	2211			
$4_3^2 3132$	1122	1824		912	$4_3 212^2$	1311			
$4_3^2 132$	1131				$4_3^2 3122$	1212	480		240
$4_3 1^2 32$	2121				$4_3^2 122$	1221			
$4_3 13^2 2$	1131				$4_3 1^2 22$	2211			
$4_3 132^2$	1221				$4_3 12^2 2$	1311			
$4_3^2 2331$	1122	1824		912	$4_3 122^2$	1311			
$4_3 2^2 331$	1221				$4_3^2 3321$	1212	768		384
$4_3 2^2 31$	1131				$4_3^2 321$	1311			
$4_3 23^2 1$	1131				$4_3 2^2 21$	1221			
$4_3 2331^2$	2121				$4_3 23^2 1$	1311			
$4_3^2 2312$	1212	768		384	$4_3 232^2 1$	2211			
$4_3^2 2312$	1311				$4_3^2 2311$	2112	1152		576
$4_3 2^2 12$	1221				$4_3 2^2 311$	2211			
$4_3 231^2 2$	2211				$4_3 23^2 11$	2121			
$4_3 2312^2$	1311				$4_3 231^2 1$	3111			
$4_3^2 3221$	1212	480		240	$4_3 2311^2$	3111			
$4_3^2 221$	1221				$4_3^2 2231$	1212	480		240
$4_3 2^2 21$	1311				$4_3^2 231$	1311			
$4_3 22^2 1$	1311				$4_3 22^2 31$	1311			
$4_3 221^2$	2211				$4_3 223^2 1$	1221			

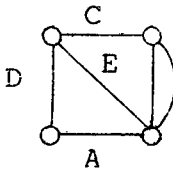
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
42231^2	2211				4213^21	2121			
4^22213	1212	480		240	42131^2	3111			
42^2213	1311				4^21321	2112	1152		576
422^213	1311				41^2321	3111			
4221^23	2211				413^221	2121			
42213^2	1221				4132^21	2211			
4^23211	2112	1152		576	41321^2	3111			
43^2211	2121								
432^211	2211								
4321^21	3111				$4444(4)$	0005	144	192	48
43211^2	3111				$4433(1)$	1022	144	192	96
4^23121	2112	1152		576	$4334(4)$	0023	96		48
43^2121	2121				$4431(1)$	2012	48		
431^221	3111				$4431(3)$	1022	48		
4312^21	2211				$4314(4)$	1013	192		
43121^2	3111				$4422(2)$	0302	72	96	48
4^23112	2112	1152		576	$4224(4)$	0203	96		48
43^2112	2121				$4411(3)$	2012	48	96	48
431^212	3111				$4114(4)$	2003	48		24
4311^22	3111				$4343(1)$	1022	192		96
43112^2	2211				$4343(3)$	0032	24		12
4^22131	2112	1152		576	$4341(1)$	2012	48		
42^2131	2211				$4341(3)$	1022	48		
421^231	3111								

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
4333(1)	1031	192			4242(2)	0302	96		48
4333(3)	0041	48			4231(1)	2111	24		
4233(1)	1121	96			4231(3)	1121	96		
4332(2)	0221	192			4132(2)	1211	96		
4233(3)	0131	48			4211(1)	3101	24		
4331(1)	2021	48			4211(3)	2111	48		
4133(1)	2021	192			4112(2)	2201	96		
4331(3)	1031	96			4141(1)	3002	12		6
4133(3)	1031	48			4141(3)	2012	96		48
4323(1)	1121	96			4131(1)	3011	48		
4323(3)	0131	48			4131(3)	2021	96		
4321(1)	2111	24			4121(1)	3101	24		
4123(1)	2111	96			4121(3)	2111	48		
4321(3)	1121	96			4111(1)	4001	48		
4123(3)	1121	24			4111(3)	3011	96		
4313(1)	2021	192			3333(1)	1040	144	192	48
4313(3)	1031	48			3333(2)	0140	336	334	96
4312(2)	1211	96			3333(3)	0050	48	96	24
4213(1)	2111	96			3333(4)	0041	24	48	12
4213(3)	1121	24			3332(1)	1130	96		
4311(1)	3011	48			3332(3)	0140	96		
4311(3)	2021	96			3331(1)	2030	192		
4113(1)	3011	192			3331(2)	1130	192		
4113(3)	2021	48			3331(3)	1040	96		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
3331(4)	1031	96			3212(3)	1220	48		
3322(1)	1220	24	48	24	3211(1)	3110	96		
3322(3)	0230	48	96	48	3211(3)	2120	48		
3223(4)	0221	48		24	3112(1)	3110	96		
3213(1)	2120	96			3112(3)	2120	96		
3213(3)	1130	48			3131(1)	3020	192		96
3321(1)	2120	96			3131(2)	2120	96		48
3321(3)	1130	96			3131(3)	2030	96		48
3113(1)	3020	192		96	3131(4)	2021	192		96
3113(2)	2120	192		96	3121(1)	3110	96		
3113(3)	2030	96		48	3121(3)	2120	48		
3113(4)	2021	24		12	3111(1)	4010	192		
3311(1)	3020	144	192	96	3111(2)	3110	96		
3311(2)	2120	72	96	48	3111(3)	3020	96		
3311(3)	2030	48	96	48	3111(4)	3011	48		
3311(4)	2021	144	192	96	2222(4)	0301	24	48	12
3232(1)	1220	48		24	2211(1)	3200	24	48	24
3232(3)	0230	96		48	2112(4)	2201	24		12
3231(1)	2120	96			2121(1)	3200	48		24
3231(3)	1130	96			2121(3)	2210	24		12
3122(1)	2210	48			2111(1)	4100	96		
3122(3)	1220	48			2111(3)	3110	48		
3221(4)	1211	96			1111(1)	5000	144	192	48
3212(1)	2210	48			1111(2)	4100	72	96	24

DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
1111(3)	4010	48	96	24	4331(3 ²)	1041	96		48
					4133(1 ²)	3021	192		96
					4133(3 ²)	1041	48		24
					4323(1 ²)	2121	96		48
					4323(3 ²)	0141	48		24
4444(4 ²)	0006	144	192	24	4321(1 ²)	3111	24		12
4433(1 ²)	2022	144	192	48	4321(3 ²)	1131	96		48
4334(4 ²)	0024	96		24	4123(1 ²)	3111	96		48
4431(1 ²)	3012	48		24	4123(3 ²)	1131	24		12
4431(3 ²)	1032	48		24	4313(1 ²)	3021	192		96
4314(4 ²)	1014	192		96	4313(3 ²)	1041	48		24
4422(2 ²)	0402	72	96	24	4312(2 ²)	1311	96		48
4224(4 ²)	0204	96		24	4213(1 ²)	3111	96		48
4411(3 ²)	2022	48	96	24	4213(3 ²)	1131	24		12
4114(4 ²)	2004	48		12	4311(1 ²)	4011	48		24
4343(1 ²)	2022	192		48	4311(3 ²)	2031	96		48
4343(3 ²)	0042	24		6	4113(1 ²)	4011	192		96
4341(1 ²)	3012	48		24	4113(3 ²)	2031	48		24
4341(3 ²)	1032	48		24	4242(2 ²)	0402	96		24
4333(1 ²)	2031	192		96	4231(1 ²)	3111	24		12
4333(3 ²)	0051	48		24	4231(3 ²)	1131	96		48
4233(1 ²)	2121	96		48	4132(2 ²)	1311	96		48
4332(2 ²)	0321	192		96	4211(1 ²)	4101	24		12
4233(3 ²)	0141	48		24	4211(3 ²)	2121	48		24
4331(1 ²)	3021	48		48					

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
4112(2 ²)	2301	96		48	3321(1 ²)	3120	96		48
4141(1 ²)	4002	12		3	3321(3 ²)	1140	96		48
4141(3 ²)	2022	96		24	3113(1 ²)	4020	192		48
4131(1 ²)	4011	48		24	3113(2 ²)	2220	192		48
4131(3 ²)	2031	96		48	3113(3 ²)	2040	96		24
4121(1 ²)	4101	24		12	3113(4 ²)	2022	24		6
4121(3 ²)	2121	48		24	3311(1 ²)	4020	144	192	48
4111(1 ²)	5001	48		24	3311(2 ²)	2220	72	96	24
4111(3 ²)	3021	96		48	3311(3 ²)	2040	48	96	24
3333(1 ²)	2040	144	192	24	3311(4 ²)	2022	144	192	48
3333(2 ²)	0240	336	384	48	3232(1 ²)	2220	48		12
3333(3 ²)	0060	48	96	12	3232(3 ²)	0240	96		24
3333(4 ²)	0042	24	48	6	3231(1 ²)	3120	96		48
3332(1 ²)	2130	96		48	3231(3 ²)	1140	96		48
3332(3 ²)	0150	96		48	3122(1 ²)	3210	48		24
3331(1 ²)	3030	192		96	3122(3 ²)	1230	48		24
3331(2 ²)	1230	192		96	3221(4 ²)	1212	96		48
3331(3 ²)	1050	96		48	3212(1 ²)	3210	48		24
3331(4 ²)	1032	96		48	3212(3 ²)	1230	48		24
3322(1 ²)	2220	24	48	12	3211(1 ²)	4110	96		48
3322(3 ²)	0240	48	96	24	3211(3 ²)	2130	48		24
3223(4 ²)	0222	48		12	3112(1 ²)	4110	96		48
3213(1 ²)	3120	96		48	3112(3 ²)	2130	96		48
3213(3 ²)	1140	48		24	3131(1 ²)	4020	192		48

DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S	DESIGNATION	WXYZ	V	A	A/S
3131(2 ²)	2220	96		24	443 ² 3(1)	1032	144	192	96
3131(3 ²)	2040	96		24	4 ² 334(1)	1023	96		48
3131(4 ²)	2022	192		48	43 ² 34(1)	1032	96		48
3121(1 ²)	4110	96		48	4 ² 431(1)	2013	48		24
3121(3 ²)	2130	48		24	44 ² 31(1)	2013			
3111(1 ²)	5010	192		96	4431 ² (1)	3012			
3111(2 ²)	3210	96		48	443 ² 1(1)	2022			
3111(3 ²)	3030	96		48	4 ² 431(3)	1023	48		24
3111(4 ²)	3012	48		24	44 ² 31(3)	1023			
2222(4 ²)	0402	24	48	6	443 ² 1(3)	1032			
2211(1 ²)	4200	24	48	12	4431 ² (3)	2022			
2112(4 ²)	2202	24		6	4 ² 314(4)	1014	192		96
2121(1 ²)	4200	48		12	43 ² 14(4)	1023			
2121(3 ²)	2220	24		6	431 ² 4(4)	2013			
2111(1 ²)	5100	96		48	4314 ² (4)	1014			
2111(3 ²)	3120	48		24	4 ² 422(2)	0303	72	96	48
1111(1 ²)	6000	144	192	24	442 ² 2(2)	0402			
1111(2 ²)	4200	72	96	12	4 ² 224(4)	0204	96		48
1111(3 ²)	4020	48	96	12	42 ² 24(4)	0303			
 $B^2 = A(B^2) CDE$					4 ² 411(3)	2013	48	96	48
					441 ² 1(3)	3012			
					4 ² 114(4)	2004	48		24
					41 ² 14(4)	3003			
4444 ² (4)	0006	144	192	96	4 ² 343(1)	1023	192		96

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$43^243(1)$	1032				$43^232(2)$	0231			
$4^2343(3)$	0033	24		12	$433^22(2)$	0231			
$43^243(3)$	0042				$4332^2(2)$	0321			
$4^2341(1)$	2013	48		24	$4^2233(3)$	0132	48		24
$43^241(1)$	2022				$42^233(3)$	0231			
$434^21(1)$	2013				$423^23(3)$	0141			
$4341^2(1)$	3012				$4233^2(3)$	0141			
$4^2341(3)$	1023	48		24	$4^2331(1)$	2022	48		24
$43^241(3)$	1032				$43^231(1)$	2031			
$434^21(3)$	1023				$433^21(1)$	2031			
$4341^2(3)$	2022				$4331^2(1)$	3021			
$4^2333(1)$	1032	192		96	$4^2331(3)$	1032	96		48
$43^233(1)$	1041				$43^231(3)$	1041			
$433^23(1)$	1041				$433^21(3)$	1041	96		48
$4333^2(1)$	1041				$4331^2(3)$	2031			
$4^2333(3)$	0042	48		24	$4^2133(1)$	2022	192		96
$43^233(3)$	0051				$41^233(1)$	3021			
$433^23(3)$	0051				$413^23(1)$	2031			
$4333^2(3)$	0051				$4133^2(1)$	2031			
$4^2233(1)$	1122	96		48	$4^2323(1)$	1122	96		48
$42^233(1)$	1221				$43^223(1)$	1131			
$423^23(1)$	1131				$432^23(1)$	1221			
$4233^2(1)$	1131				$4323^2(1)$	1131			
$4^2332(2)$	0222	192		96	$4^2133(3)$	1032	48		24

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$41^2\bar{3}3(3)$	2031				$43^213(1)$	2031			
$413^23(3)$	1041				$431^23(1)$	3021			
$4133^2(3)$	1041				$4313^2(1)$	2031			
$4^2323(3)$	0132	48		24	$4^2313(3)$	1032	48		24
$43^223(3)$	0141				$43^213(3)$	1041			
$432^23(3)$	0231				$431^23(3)$	2031			
$4323^2(3)$	0141				$4313^2(3)$	1041			
$4^2321(1)$	2112	24		12	$4^2312(2)$	1212	96		48
$43^221(1)$	2121				$43^212(2)$	1221			
$432^21(1)$	2211				$431^22(2)$	2211			
$4321^2(1)$	3111				$4312^2(2)$	1311			
$4^2321(3)$	1122	96		48	$4^2213(1)$	2112	96		48
$43^221(3)$	1131				$42^213(1)$	2211			
$432^21(3)$	1221				$421^23(1)$	3111			
$4321^2(3)$	2121				$4213^2(1)$	2121			
$4^2123(1)$	2112	96		48	$4^2213(3)$	1122	24		12
$41^223(1)$	3111				$42^213(3)$	1221			
$412^23(1)$	2211				$421^23(3)$	2121			
$4123^2(1)$	2121				$4213^2(3)$	1131			
$4^2123(3)$	1122	24		12	$4^2311(1)$	3012	48		24
$41^223(3)$	2121				$43^211(1)$	3021			
$412^23(3)$	1221				$431^21(1)$	4011			
$4123^2(3)$	1131				$4311^2(1)$	4011			
$4^2313(1)$	2022	192		96	$4^2311(3)$	2022	96		48

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$43^211(3)$	2031				$4132^2(2)$	1311			
$431^21(3)$	3021				$4^2211(1)$	3102	24		12
$4311^2(3)$	3021	96		48	$42^211(1)$	3201			
$4^2113(1)$	3012	192		96	$421^21(1)$	4101			
$41^213(1)$	4011				$4211^2(1)$	4101			
$411^23(1)$	4011				$4^2211(3)$	2112	48		24
$4113^2(1)$	3021				$42^211(3)$	2211			
$4^2113(3)$	2022	48		24	$421^21(3)$	3111			
$41^213(3)$	3021				$4211^2(3)$	3111	48		24
$411^23(3)$	3021				$4^2112(2)$	2202	96		48
$4113^2(3)$	2031				$41^212(2)$	3201			
$4^2242(2)$	0303	96		48	$411^22(2)$	3201			
$42^242(2)$	0402				$4112^2(2)$	2301			
$4^2231(1)$	2112	24		12	$4^2141(1)$	3003	12		6
$42^231(1)$	2211				$41^241(1)$	4002			
$423^21(1)$	2121				$4^2141(3)$	2013	96		48
$4231^2(1)$	3111				$41^241(3)$	3012			
$4^2231(3)$	1122	96		48	4^2131	3012	48		24
$42^231(3)$	1221				$41^231(1)$	4011			
$423^21(3)$	1131				$413^21(1)$	3021			
$4231^2(3)$	2121				$4131^2(1)$	4011			
$4^2132(2)$	1212	96		48	$4^2131(3)$	2022	96		48
$41^232(2)$	2211				$41^231(3)$	3021			
$413^22(2)$	1221				$413^21(3)$	2031			

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$4131^2(3)$	3021				$3332^2(1)$	1230			
$4^2121(1)$	3102	24		12	$3^2332(3)$	0150	96		48
$41^221(1)$	4101				$33^232(3)$	0150			
$412^21(1)$	3201				$333^22(3)$	0150			
$4121^2(1)$	4101				$3332^2(3)$	0240			
$4^2121(3)$	2112	48		24	$3^2331(1)$	2040	192		96
$41^221(3)$	3111				$33^231(1)$	2040			
$412^21(3)$	2211				$333^21(1)$	2040			
$4121^2(3)$	3111				$3331^2(1)$	3030			
$4^2111(1)$	4002	48		24	$3^2331(2)$	1140	192		96
$41^211(1)$	5001				$33^231(2)$	1140			
$411^21(1)$	5001				$333^21(2)$	1140			
$4111^2(1)$	5001				$3331^2(2)$	2130			
$4^2111(3)$	3012	96		48	$3^2331(3)$	1050	96		48
$41^211(3)$	4011				$33^231(3)$	1050			
$411^21(3)$	4011				$333^21(3)$	1050			
$4111^2(1)$	4011				$3331^2(3)$	2040			
$3333^2(1)$	1050	144	192	96	$3^2331(4)$	1041	96		48
$3333^2(2)$	0150	336	384	192	$33^231(4)$	1041			
$3333^2(3)$	0060	48	96	48	$333^21(4)$	1041			
$3333^2(4)$	0051	24	48	24	$3331^2(4)$	2031	96		48
$3^2332(1)$	1140	96		48	$3^2322(1)$	1230	24	48	24
$33^232(1)$	1140				$332^22(1)$	1320			
$333^22(1)$	1140				$3^2322(3)$	0240	48	96	48

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$332^22(3)$	0330				$31^213(3)$	3030	96		48
$3^2223(4)$	0231	48		24	$3^2113(4)$	2031	24		12
$32^223(4)$	0321				$31^213(4)$	3021	24		
$3^2213(1)$	2130	96		48	$3^2311(1)$	3030	144	192	96
$32^213(1)$	2220				$331^21(1)$	4020			
$321^23(1)$	3120				$3^2311(2)$	2130	72	96	48
$3213^2(1)$	2130				$331^21(2)$	3120			
$3^2213(3)$	1140	48		24	$3^2311(3)$	2040	48	96	48
$32^213(3)$	1230				$331^21(3)$	3030			
$321^23(3)$	2130				$3^2311(4)$	2031	144	192	96
$3213^2(3)$	1140				$331^21(4)$	3021			
$3^2321(1)$	2130	96		48	$3^2232(1)$	1230	48		24
$33^221(1)$	2130				$32^232(1)$	1320			
$332^21(1)$	2220				$3^2232(3)$	0240	96		48
$3321^2(1)$	3120				$32^232(3)$	0330			
$3^2321(3)$	1140	96		48	$3^2231(1)$	2130	96		48
$33^221(3)$	1140				$32^231(1)$	2220			
$332^21(3)$	1230				$323^21(1)$	2130			
$3321^2(3)$	2130				$3231^2(1)$	3120			
$3^2113(1)$	3030	192		96	$3^2231(3)$	1140	96		48
$31^213(1)$	4020				$32^231(3)$	1230			
$3^2113(2)$	2130	192		96	$323^21(3)$	1140			
$31^213(2)$	3120				$3231^2(3)$	2130			
$3^2113(3)$	2040	96		48	$3^2122(1)$	2220	48		24

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$31^2 22(1)$	3210				$32^2 11(3)$	2220			
$312^2 2(1)$	2310				$321^2 1(3)$	3120			
$3122^2(1)$	2310				$3211^2(3)$	3120			
$3^2 122(3)$	1230	48		24	$3^2 112(1)$	3120	96		48
$31^2 22(3)$	2220	48		24	$31^2 12(1)$	4110			
$312^2 2(3)$	1320				$311^2 2(1)$	4110			
$3122^2(3)$	1320				$3112^2(1)$	3210			
$3^2 221(4)$	1221	96		48	$3^2 112(3)$	2130	96		48
$32^2 21(4)$	1311				$31^2 12(3)$	3120			
$322^2 1(4)$	1311				$311^2 2(3)$	3120			
$3221^2(4)$	2211				$3112^2(3)$	2220			
$3^2 212(1)$	2220	48		24	$3^2 131(1)$	3030	192		96
$32^2 12(1)$	2310				$31^2 31(1)$	4020			
$321^2 2(1)$	3210				$3^2 131(2)$	2130	96		48
$3212^2(1)$	2310				$31^2 31(2)$	3120			
$3^2 212(3)$	1230	48		24	$3^2 131(3)$	2040	96		48
$32^2 12(3)$	1320				$31^2 31(3)$	3030			
$321^2 2(3)$	2220				$3^2 131(4)$	2031	192		96
$3212^2(3)$	1320				$31^2 31(4)$	3021			
$3^2 211(1)$	3120	96		48	$3^2 121(1)$	3120	96		48
$32^2 11(1)$	3210				$31^2 21(1)$	4110			
$321^2 1(1)$	4110				$312^2 1(1)$	3210			
$3211^2(1)$	4110				$3121^2(1)$	4110			
$3^2 211(3)$	2130	48		24	$3^2 121(3)$	2130	48		24

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
$31^2 21(3)$	3120				$21^2 21(1)$	4200			
$312^2 1(3)$	2220				$2^2 121(3)$	2310	24		12
$3121^2(3)$	3120				$21^2 21(3)$	3210			
$3^2 111(1)$	4020	192		96	$2^2 111(1)$	4200	96		48
$31^2 11(1)$	5010				$21^2 11(1)$	5100			
$311^2 1(1)$	5010				$211^2 1(1)$	5100			
$3111^2(1)$	5010				$2111^2(1)$	5100			
$3^2 111(2)$	3120	96		48	$2^2 111(3)$	3210	48		24
$31^2 11(2)$	4110				$21^2 11(3)$	4110			
$311^2 1(2)$	4110				$211^2 1(3)$	4110			
$3111^2(2)$	4110				$2111^2(3)$	4110			
$3^2 111(3)$	3030	96		48	$1^2 111(1)$	6000	144	192	96
$31^2 11(3)$	4020				$1^2 111(2)$	5100	72	96	48
$311^2 1(3)$	4020				$1^2 111(3)$	5010	48	96	48
$3111^2(3)$	4020								
$3^2 111(4)$	3021	48		24					
$31^2 11(4)$	4011								
$311^2 1(4)$	4011								
$3111^2(4)$	4011								
$2222^2(4)$	0501	24	48	24					
$2^2 211(1)$	3300	24	48	24					
$221^2 1(1)$	4200								
$2^2 112(4)$	3201	24		12					
$21^2 12(4)$	3201								
$2^2 121(1)$	3300	48		24					

$B = (AB) (CD) (EF)$

					$(44)(44)(44)$	0006	432	1212	101
					$(33)(33)(33)$	0060	3312	7032	586
					$(22)(22)(22)$	0600	0	66	5.5
					$(11)(11)(11)$	6000	432	1212	101
					$(44)(44)(31)$	1014	576	768	384
					$(43)(33)(32)$	0141	576		576
					$(43)(33)(23)$	0141	576		576

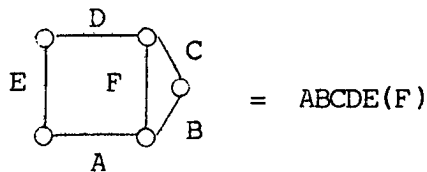
<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
(42)(33)(33)	0141	1392	1632	816	(33)(32)(23)	0240	192	480	240
(43)(33)(31)	1041	1344		1344	(33)(33)(11)	2040	2040	2544	636
(43)(33)(13)	1041	1344		1344	(33)(31)(31)	2040	2592		1296
(41)(33)(33)	1041	768	1152	576	(33)(31)(13)	2040	1728	2592	1296
(43)(11)(11)	4011	624	864	432	(33)(22)(22)	0420	48	120	30
(41)(13)(11)	4011	384		384	(33)(11)(11)	4020	1248	1752	438
(33)(33)(21)	1140	624	864	432	(31)(31)(11)	4020	1536		768
(33)(32)(31)	1140	672		672	(31)(13)(11)	4020	1104	1536	768
(33)(32)(13)	1140	672		672	(22)(22)(11)	2400	24	48	12
(31)(22)(22)	1410	96	192	96	(21)(21)(11)	4200	240		120
(31)(21)(11)	4110	480		480	(21)(12)(11)	4200	96	240	120
(31)(12)(11)	4110	480		480	(44)(33)(31)	1032	384		
(32)(11)(11)	4110	384	576	288	(44)(31)(11)	3012	192		
(44)(44)(33)	0024	624	864	216	(43)(43)(41)	1023	384		
(44)(44)(22)	0204	360	480	120	(43)(43)(32)	0132	576		
(44)(44)(11)	2004	144	192	48	(43)(43)(31)	1032	1056		
(44)(33)(33)	0042	384	624	156	(43)(41)(43)	1023	192	384	192
(44)(22)(22)	0402	96	216	54	(43)(41)(41)	2013	240		
(43)(43)(33)	0042	1344		672	(43)(41)(33)	1032	576		
(43)(34)(33)	0042	768	1344	672	(43)(41)(14)	2013	48	240	120
(41)(41)(11)	4002	240		120	(43)(41)(11)	3012	288		
(41)(14)(11)	4002	96	240	120	(43)(34)(41)	1023	192	384	192
(33)(33)(22)	0240	120	192	48	(43)(34)(32)	0132	336	576	288
(33)(32)(32)	0240	480		240	(43)(34)(23)	0132	336	576	288

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
(43)(34)(31)	1032	672	1056	528	(41)(14)(31)	3012	96	336	168
(43)(34)(13)	1032	672	1056	528	(41)(14)(21)	3102	48	144	72
(43)(33)(11)	2031	864			(41)(13)(31)	3021	288	528	264
(43)(32)(32)	0231	384			(41)(12)(21)	3201	24	120	60
(43)(32)(23)	0231	144	384	192	(33)(32)(21)	1230	288		
(43)(31)(31)	2031	1104			(33)(32)(12)	1230	288		
(43)(31)(33)	2031	720			(33)(32)(11)	2130	576		
(43)(31)(11)	3021	864			(33)(31)(22)	1230	192		
(43)(23)(32)	0231	144	384	192	(33)(31)(21)	2130	672		
(43)(14)(41)	2013	48	240	120	(33)(31)(12)	2130	672		
(43)(14)(11)	3012	288			(33)(21)(11)	3120	480		
(43)(13)(31)	2031	720	1104	552	(32)(32)(31)	1230	432		
(43)(13)(11)	3021	864			(32)(32)(21)	1320	192		
(41)(41)(31)	3012	336			(32)(31)(32)	1230	192	432	216
(41)(41)(21)	3102	144			(32)(31)(31)	2130	624		
(41)(33)(31)	2031	672			(32)(31)(13)	2130	384	624	312
(41)(33)(13)	2031	672			(32)(31)(11)	3120	576		
(41)(33)(11)	3021	384			(32)(23)(31)	1230	192	432	216
(41)(31)(41)	3012	96	336	168	(32)(23)(21)	1320	96	192	96
(41)(31)(31)	3021	528			(32)(23)(12)	1320	96	192	96
(41)(31)(13)	3021	288	528	264	(32)(21)(21)	2310	144		
(41)(21)(41)	3102	48	144	72	(32)(21)(12)	2310	48	144	72
(41)(21)(21)	3201	120			(32)(21)(11)	3210	288		
(41)(21)(12)	3201	24	120	60	(32)(13)(11)	3120	576		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
(32)(12)(21)	2310	48	144	72	(33)(12)(21)	2220	96	336	168
(32)(12)(11)	3210	288			(32)(32)(11)	2220	384		192
(31)(31)(21)	3120	576			(32)(31)(21)	2220	288		
(31)(22)(11)	3210	96			(32)(31)(12)	2220	288		
(31)(21)(31)	3120	384	576	288	(32)(23)(11)	2220	192	288	144
(31)(21)(21)	3210	288			(32)(21)(31)	2220	288		
(31)(21)(12)	3210	96	192	96	(32)(13)(21)	2220	288		
(31)(13)(21)	3120	384	576	288	(31)(31)(22)	2220	384		192
(31)(12)(21)	3210	96	288	144	(31)(22)(31)	2220	288	384	192
(44)(33)(22)	0222	186		144	(44)(33)(11)	2022	96		48
(44)(31)(31)	2022	768		384	(44)(31)(22)	1212	384		
(44)(22)(11)	2202	96		48	(43)(43)(21)	1122	504		
(43)(41)(31)	2022	432			(43)(41)(32)	1122	240		
(43)(41)(13)	2022	432			(43)(41)(23)	1122	240		
(43)(34)(11)	2022	576	816	408	(43)(41)(21)	2112	192		
(43)(31)(41)	2022	432			(43)(41)(12)	2112	192		
(43)(43)(11)	2022	816			(43)(34)(21)	1122	336	504	252
(43)(14)(31)	2022	432			(43)(34)(12)	1122	336	504	252
(42)(42)(33)	0222	816		408	(43)(32)(41)	1122	240		
(42)(42)(11)	2202	384		192	(43)(32)(21)	1221	240		
(42)(33)(42)	0222	576		288	(43)(32)(12)	1221	240		
(42)(24)(11)	2202	288	384	192	(43)(32)(11)	2121	480		
(41)(41)(33)	2022	480		240	(43)(31)(21)	2121	528		
(33)(22)(11)	2220	48		24	(43)(31)(12)	2121	528		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
(43)(23)(41)	1122	240			(41)(32)(23)	1221	120	288	144
(43)(23)(21)	1221	240			(41)(32)(21)	2211	144		
(43)(23)(12)	1221	240			(41)(32)(13)	2121	336		
(43)(23)(11)	2121	480			(41)(32)(12)	2211	144		
(43)(21)(41)	2112	192			(41)(31)(32)	2121	336		
(43)(21)(31)	2121	528			(41)(23)(41)	2112	96	264	132
(43)(21)(21)	2211	264			(41)(23)(32)	1221	120	288	144
(43)(21)(12)	2211	96	264	132	(41)(23)(31)	2121	336		
(43)(14)(21)	2112	192			(41)(23)(21)	2211	144		
(43)(13)(21)	2121	528			(41)(23)(12)	2211	144		
(43)(12)(21)	2211	96	264	132	(43)(43)(43)	0033	768	1296	648
(42)(42)(31)	1212	600			(43)(34)(43)	0033	288	1008	168
(42)(33)(11)	2121	768			(42)(42)(42)	0303	432	552	276
(42)(31)(42)	1212	432	600	300	(42)(24)(42)	0303	192	552	92
(42)(31)(31)	2121	600			(41)(41)(41)	3003	96	288	144
(42)(31)(13)	2121	432	600	300	(33)(31)(11)	3030	1824		
(42)(24)(31)	1212	432	600	300	(32)(32)(32)	0330	144	360	180
(42)(13)(31)	2121	432	600	300	(31)(31)(31)	3030	1776	2568	1284
(41)(41)(32)	2112	264			(31)(13)(31)	3030	768	2280	380
(41)(33)(21)	2121	288			(21)(21)(21)	3300	48	72	36
(41)(33)(12)	2121	288			(43)(33)(33)	0051	1344	1920	960
(41)(32)(41)	2112	96	264	132	(41)(11)(11)	5001	240	384	192
(41)(32)(32)	1221	288			(33)(33)(32)	0150	480	768	384
(41)(32)(31)	2121	336			(33)(33)(31)	1050	2784	3648	1824

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
(31)(11)(11)	5010	960	1392	696	44444(4)	0006	334	624	
(21)(11)(11)	5100	336	480	240	44433(1)	1023	528	528	
(43)(33)(21)	1131	624			44433(3)	0033	144	144	
(43)(33)(12)	1131	624			44433(4)	0024	1128	1224	
(43)(32)(31)	1131	528			44431(1)	2013	288		
(43)(32)(13)	1131	528			44431(3)	1023	480		
(43)(31)(32)	1131	528			44431(4)	1014	2208		
(43)(23)(31)	1131	528			44422(2)	0303	312		
(43)(21)(11)	3111	432			44422(4)	0204	648		
(43)(12)(11)	3111	432			44411(3)	2013	144		
(42)(33)(31)	1131	768			44411(4)	2004	276	324	
(42)(33)(13)	1131	768			44343(1)	1023	1488		
(42)(31)(11)	3111	384			44343(3)	0033	744	768	
(42)(13)(11)	3111	384			44343(4)	0024	1056		
(41)(33)(32)	1131	384			44341(1)	2013	1200	1296	
(41)(33)(23)	1131	384			44341(3)	1023	1680	1680	
(41)(32)(11)	3111	288			44341(4)	1014	768		
(41)(31)(21)	3111	240			44333(1)	1032	2208	2314	
(41)(31)(12)	3111	240			44333(3)	0042	1008	1056	
(41)(23)(11)	3111	288			44333(4)	0033	1152		
(41)(21)(31)	3111	240			44332(1)	1122	960	1056	
(41)(13)(21)	3111	240			44332(2)	0222	1728		
					44332(3)	0132	672	720	
					44332(4)	0123	960		
					44331(1)	2022	2160	2256	



<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
44331(3)	1032	2160			44231(4)	1113	672		
44331(3)	1032	2160	2208		44211(1)	3102	168		
44331(4)	1023	1536			44211(2)	2202	768	864	
44323(1)	1122	960			44211(3)	2112	432		
44323(3)	0132	672	720		44211(4)	2103	384		
44323(4)	0123	480			44141(1)	3003	228	240	
44321(1)	2112	960	1008		44141(3)	2013	720		
44321(3)	1122	1152			44141(4)	2004	384		
44321(4)	1113	672			44131(1)	3012	384	432	
44313(1)	2022	1632	1728		44131(3)	2022	960	1152	
44313(3)	1032	816	864		44131(4)	2013	480		
44313(4)	1023	768			44121(1)	3102	168	192	
44312(1)	2112	720	768		44121(3)	2112	432	588	
44312(2)	1212	1056			44121(4)	2103	192		
44312(3)	1122	384	408		44111(1)	4022	288	336	
44312(4)	1113	672	762		44111(3)	3012	672	864	
44311(1)	3012	1632	1728		44111(4)	3003	288		
44311(3)	2022	1632	1680		43433(1)	1032	3456		
44311(4)	2013	960			43433(3)	0042	1680		
44242(2)	0303	1152	1248		43432(1)	1122	2400		
44242(4)	0204	384			43432(3)	0132	1776		
44231(1)	2112	240			43432(2)	0222	960		
44231(2)	1212	1056			43431(1)	2022	4032		
44231(3)	1122	768			43431(3)	1032	3360		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DEAIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
43421(1)	2112	1320			43322(2)	0321	240		
43421(3)	1122	1344			43322(3)	0231	264		
43421(2)	1212	672			43322(4)	0222	720		
43411(1)	3012	1200			43321(1)	2121	2640		
43411(3)	2022	1536			43321(3)	1131	2496		
43342(1)	1122	672			43313(1)	2031	8832		
43342(3)	0132	240			43313(2)	1131	3168		
43342(2)	0222	1728			43313(3)	1041	4512		
43341(1)	2022	1728			43313(4)	1032	3264		
43341(3)	1032	1728			43312(1)	2121	2592		
43333(1)	1041	5568			43312(2)	1221	960		
43333(2)	0141	2784	2832		43312(3)	1131	1632		
43333(3)	0051	2856	2904		43311(1)	3021	5136		
43333(4)	0042	984			43311(2)	2121	2352		
43332(1)	1131	3072			43311(3)	2031	4416		
43332(2)	0231	1152			43311(4)	2022	1008		
43332(3)	0141	2400			43241(1)	2112	1104		
43331(1)	2031	5808	5904		43241(2)	1212	672		
43331(2)	1131	3360	3456		43241(3)	1122	1512		
43331(3)	1041	5568	5564		43232(1)	1221	1392		
43331(4)	1032	1488	1536		43232(2)	0321	864		
43323(1)	1131	4128			43232(3)	0231	1656		
43323(3)	0141	3360			43231(1)	2121	2640		
43322(1)	1221	504			43231(3)	1131	2832		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
43223(1)	1221	696	720		43131(4)	2022	2304		
43223(3)	0231	504			43122(1)	2211	336		
43223(4)	0222	528			43122(2)	1311	288		
43221(1)	2211	576	624		43122(3)	1221	240		
43221(3)	1221	624	720		43122(4)	1212	864		
43221(4)	1212	384			43121(1)	3111	2112		
43213(1)	2121	3456			43121(3)	2121	1776		
43213(3)	1131	2304			43113(1)	3021	3408		
43212(1)	2211	1248			43113(2)	2121	1128		
43212(2)	1311	384			43113(3)	2031	1800		
43212(3)	1221	912			43113(4)	2022	984		
43211(1)	3111	2208			43112(1)	3111	2112		
43211(3)	2121	2016			43112(2)	2211	768		
43142(1)	2112	552			43112(3)	2121	1392		
43142(2)	1212	2112			43111(1)	4011	3456		
43142(3)	1122	648			43111(2)	3111	1488	1536	
43141(1)	3012	2064			43111(3)	3021	2832	2928	
43141(3)	2022	2928			43111(4)	3012	432	480	
43132(1)	2121	2592			42411(1)	3102	96		
43132(2)	1221	960			42411(2)	2202	768		
43132(3)	1131	1968			42411(3)	2112	336		
43131(1)	3021	5400			42332(1)	1221	240		
43131(2)	2121	2016			42332(2)	0321	288		
43131(3)	2031	4824			42332(3)	0231	288		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
42332(4)	0222	192			42141(1)	3102	672		
42331(1)	2121	1776			42141(2)	2202	384		
42331(2)	1221	960			42141(3)	2112	1200		
42331(3)	1131	2160			42131(1)	3111	1440		
42321(1)	2211	816			42131(2)	2211	768		
42321(2)	1311	384			42131(3)	2121	1536		
42321(3)	1221	1344			42121(1)	3201	672		
42312(1)	2211	528			42121(2)	2301	384		
42312(2)	1311	768			42121(3)	2211	696		
42312(3)	1221	576			42112(1)	3201	96		
42312(4)	1212	768			42112(2)	2301	96		
42311(1)	3111	1536			42112(3)	2211	72		
42311(2)	2211	768			42112(4)	2202	96		
42311(3)	2121	1776			42111(1)	4101	1200		
42231(1)	2211	240			42111(2)	3201	576		
42231(2)	1311	288			42111(3)	3111	1296		
42231(3)	1221	384			41411(1)	4002	672		
42231(4)	1212	864			41411(3)	3012	1152		
42222(2)	0501	72			41331(1)	3021	1704		
42222(4)	0402	264	336		41331(2)	2121	1032		
42211(1)	3201	72			41331(3)	2031	2668		
42211(2)	2301	72			41331(4)	2022	912		
42211(3)	2211	144			41321(1)	3111	1536		
42211(4)	2202	216			41321(3)	2121	2160		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
41311(1)	4011	2832			33331(4)	1041	3168		
41311(2)	3111	1392			33322(1)	1230	816		
41311(3)	3021	4032			33322(3)	0240	824		
41311(4)	3012	1056			33322(4)	0231	576		
41221(1)	3201	192			33321(1)	2130	4968		
41221(3)	2211	336			33321(2)	1230	1704	1352	
41221(4)	2202	192			33321(3)	1140	4128		
41211(1)	4101	624			33321(4)	1131	1488		
41211(3)	3111	792			33311(1)	3030	5136	5232	
41111(1)	5001	1032	1080		33311(2)	2130	2832		
41111(2)	4101	528	552		33311(3)	2040	3600	3639	
41111(3)	4011	1440	588		33311(4)	2031	1968		
41111(4)	4002	132			33232(1)	1230	1152		
33333(1)	1050	1632			33232(3)	0240	1368		
33333(2)	0150	1056			33231(1)	2130	5088	5184	
33333(3)	0060	1200	1248		33231(2)	1230	1872		
33333(4)	0051	528			33231(3)	1140	4800		
33332(1)	1140	2784			33231(4)	1131	2160		
33332(2)	0240	1296	1473		33222(1)	1320	144	192	
33332(3)	0150	2832	2928		33222(2)	0420	96		
33332(4)	0141	624			33222(3)	0330	96	144	
33331(1)	2040	6720	7102		33222(4)	0321	288		
33331(2)	1140	3744	3760		33221(1)	2220	1200	1248	
33331(3)	1050	4752	4848		33221(3)	1230	912	1008	

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
33221(4)	1221	768			32311(1)	3120	2016		
33212(1)	2220	1056			32311(2)	2220	768		
33212(3)	1240	864			32311(3)	2130	1680		
33211(1)	3120	3696	3792		32311(4)	2121	696		
33211(2)	2220	768			32231(1)	2220	720		
33211(3)	2130	2736	2928		32231(3)	1230	528		
33211(4)	2121	912			32231(4)	1221	384		
33131(1)	3030	5856	6048		32212(1)	2310	552		
33121(2)	2130	2692	2640		32212(3)	1320			
33131(3)	2040	2056			32212(4)	1311	336		
33131(4)	2031	3120			3222(1)	3210	192		
33121(1)	3120	1968	2064		32221(2)	1410	96		
33121(2)	2220	720	768		32221(3)	1320	192		
33121(3)	2130	1440			32221(4)	1311	480		
33121(4)	2121	672			32211(1)	3210	1008		
33111(1)	4020	3792	4080		32211(3)	2220	768		
33111(2)	3120	2064	2208		32211(4)	2211	480		
33111(3)	3030	2736	2976		32131(1)	3120	4752		
33111(4)	3021	1152			32131(2)	2220	1152		
32322(1)	1320	336			32131(3)	2130	3888		
32322(3)	0330	480			32131(4)	2121	2016		
32322(4)	0321	240			32121(1)	3210	1824		
32321(1)	2220	2016			32121(3)	2220	1296		
32321(3)	1230	2160			32112(1)	3210	864		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
3211(11)	4110	48		48	3131(43)	2031	48		24
4422(42)	0303	48		8	3311(34)	2031	48		24
3311(31)	3030	48		8	3331(21)	2130	48		48
3333(21)	1140	48		12	3321(11)	3120	48		48
3312(33)	1140	48		48	3311(21)	3120	48		24
2222(44)	0402	24		3					
3333(22)	0240	48		6					
3311(11)	4020	48		24					
1111(22)	4200	24		3					
4343(11)	2022	48		12					
3311(22)	2220	48		24					
3232(11)	2220	24		6					
4332(12)	1221	48		48					
3131(42)	2121	48		24					
3311(42)	2121	24		12					
4211(23)	2211	48		48					
3311(24)	2121	48		24					
4433(41)	1023	48		24					
4411(43)	2013	48		24					
3322(43)	0231	48		24					
2211(41)	3201	24		12					
3131(41)	3021	48		24					
3311(14)	3021	48		24					
4311(33)	2031	48		48					

Type AAAAAA

444444 0006 11640 8544 712

333333 0060 329184 321072 26756

222222 0600 264 132 11

111111 6000 11640 8544 712

Type AAAAAAB

433333 0051 175104 173088 86544

333332 0150 93600 92160 46080

333331 1050 212832 209664 104832

411111 5001 11280 10560 5280

311111 5010 24720 22272 11136

211111 5100 6480 5472 2736

Type AAAABB

444433 0024 10272 9504 4752

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
444343	0024	20112	19584	9792	222121	2400	600	504	252
443443	0024	24192	23808	5952	221221	2400	936		234
443333	0042	74808	74280	37140	441111	4002	6504	6396	3198
434333	0042	94752	94150	47076	414111	4002	10080	9852	4926
433433	0042	100584	100368	25092	411411	4002	11472	11426	2859
444422	0204	4272	3672	1836	331111	4020	38928	37104	18552
444242	0204	8040	7848	3924	313111	4020	50568	49200	24600
442442	0204	9864	9192	2268	311311	4020	53424	52656	13164
442222	0402	1248	888	444	221111	4200	2496	2328	1164
424222	0402	1728	1248	623	212111	4200	3792	3552	1776
422422	0102	1488	1104	276	211211	4200	4080	3840	960
333322	0240	22320	21744	10872					
333232	0240	29016	28512	14256	<u>Type AAAAEC</u>				
332332	0240	30336	29664	7416	433332	0141	48912	48384	
332222	0420	960	820	410	433323	0141	53376	52992	
323222	0420	1896	1630	840	433233	0141	52030	51838	25919
322322	0420	2544		636	444431	1014	6720	5760	
444411	2004	1680	1440	720	444341	1014	10560	10368	
444141	2004	5808	5616	2808	443441	1014	12672		6316
441441	2004	7920		1980	433331	1041	103056	101952	
333311	2040	117744	116208	58104	433313	1041	112648	112320	
333131	2040	144072	142992	71496	433133	1041	113664	113472	56736
331331	2040	150384	149904	37476	333321	1140	60048	59328	
222211	2400	192	144	72	333231	1140	64464	63936	

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
332331	1140	63168	62784	31392	333111	3030	65808	63936	31968
322221	1410	768	576		331311	3030	85248	84672	
322212	1410	1248	1152		313131	3030	105408		17568
322122	1410	1152		576	222111	3300	364	720	360
431111	4011	18192	17088		221211	3300	1584		
413111	4011	22080	21696		212121	3300	2448		408
411311	4011	23616	23424	11712					
421111	4101	3496	3280		<u>Type AAABBC</u>				
412111	4101	6312	6144		444332	0123	10320	10080	
411211	4101	5952	5856	2928	444323	0123	10320	10080	5040
321111	4110	11904	11136		443432	0123	15264		
312111	4110	13920	13440		443423	0123	15264		
311211	4110	13824	13440	6720	443342	0123	15264		
					434342	0123	18144		9072
<u>Type AAABBB</u>					443332	0132	21600		
444333	0033	28512	27936	13968	443323		21600		
443433	0033	37152			434332		25056		
434343	0033	44064		7344	434323		25056		12528
333222	0330	5184	4869	2448	433432		25056		
332232	0330	6624			433342		25056		12528
323232	0330	8352		1392	433322	0231	10080		
444111	3003	3168	3024	1512	433232		58608		
441411	3003	7056			433223		11232		
414141	3003	8784		1464	432332		14688		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
432323		14688		7344	332231		15456	15264	
423332		13536		6768	323231		21600		10800
432322	0321	3792			332221	1320	2976	2736	
432232		4944			332212		4176		
432223		3744	3504	1252	323221		4176	3984	
433222		2784	2352		323212		5616		2808
423322		3024	2640		3322321		4176		
423232		5232		2616	322231		2976	2736	1368
444331	1023	14784	14400		444311	2013	7296	7056	
444313		14784	14400	7200	444131		7296	7056	3528
443431		21312			443141		12240		
443341		21312			443411		12240		
434431		21312			441431		12240		7560
434341		25920		12960	434141		15120		
443331	1032	43824	43488		433311	2031	58608	58032	
443313		48192	48096		433131		69168	68976	
434331		57408	57312		433113		63504	63216	
434313		61920		30960	431331		68208	68016	
433431		56352	56064		431313		74736		37368
433341		52992	52704	26352	413331		64224	63792	31896
333221	1230	13296	12960		444211	2103	2688	2592	
333212		17184	16992	8496	444121		2688	2592	1296
332321		19392	19296		442141		4896		
332312		18432	17952		441421		4896		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
442411		4896			431411		18528	18336	
424141		6048		3024	414131		21264		10632
422211	2301	768	576		441121	3102	3744		
422121		1152			441112		3744		
422112		768	576		424111		5472		2736
421221		1728			421411		5472		
421212		1728		864	421141		5472		
412221		1248	1152	576	414121		5472		2736
333211	2130	33552	33120		433111	3021	33408	32688	
333121		38016	37728	18864	431311		39984	39600	
332311		36864	36576		431131		38352	37776	
332131		41280	41184		431113		35184	34416	17208
331321		42528	42240		413311		38064	37872	
323131		45792		22896	413131		44208		22104
322211	2310	1632	1440		422111	3201	1440		
322121		2592			421211		3456		
322112		2592			421121		3456		
321221		2592			421112		2304		1152
321212		3744		1872	412211		2592		
312221		1632	1440	720	412121		3456		1728
441131	3012	14400	14352		332111	3120	18480	18000	
441113		12336	12048		331211		22272	22032	
434111		16944	16656	8328	323111		21888	21456	10228
414311		19056	18960		321311		25728	25440	

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
321131		25680	25488		433132		35280		
313121		28368		14184	433123		34752	34704	
312121	3210	8352		4176	432331		31440	31248	
312211		5280	5184		432313		37008		
321112		6240	6048	3024	431332		33552		
321121		6818	6530		423331		29784	29520	
321211		7296	7200		432221	1311	1968	1800	
322111		4272	4032		432212		2808		
					432122		2232		
<u>Type AAABCD</u>					431222		1488	1224	
444321	1113	5568	5400		423221		2808		
444312		5568	5400		423212		3240		
444231		5568	5400		423122		1848	1656	
443412		8568			422321		2232		
443241		8568			422312		1848	1656	
443142		8568			422231		1488	1224	
442431		8568			432111	3111	9360	9072	
442341		8568			431211		10128	9936	
443421		8568			431121		10416	10224	
434241		10584			431112		9624	9360	
433321	1130	29232	28944		423111		10416	10224	
433312		31440	31248		421311		12240		
433231		30864	30672		421131		11376		
433213		32448	32400		413211		10848	10800	

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
413121		13104			431413		34728	34344	17172
412311		12000	11952		431341		35016	34632	17316
					442121	2202	2664		
<u>Type AABCC</u>					442112		1224		612
434322	0222	7344			441221		2376		1188
443322		3648	3600		441122		672	648	
443232		3496			424211		1224		
443223		7056		3526	424121		3816		1908
442332		5616		2808	422411		672	624	312
434232		11088		5544	422141		2376		
433422		3836	3840	1920	421421		3816		1908
433242		5904			421412		3528		1764
432423		10512		5256	421241		3816		1908
432342		11088		5544	332211	2220	7944	7752	
432432		11088		5544	332121		11088	11064	
443311	2022	25632	25584		332112		9288	8880	4440
443131		27816	27624		331221		9288	9216	4608
443113		25080	24792	12396	323211		10824	10776	
441331		26712	26520	13260	323121		12888	12696	6348
434311		30696	30504		322311		9024	8952	4476
434131		34920	34728	17364	322131		9864	9768	
433411		29328	29088	14544	321321		13512	13272	6636
433141		32328	32232		321312		13968	13920	6960
431431		32952	32184	16092	321231		13992	13869	6948

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
<u>Type AABBCD</u>									
443321	1122	12240			434212		6048		3024
443312		12240			432421		4896		
443231		12240			432412		6048		
443213		12240			432241		3744		
443131		12240			432142		6048		
442331		12240			431422		2688		
434321		15120			431242		4896		
434312		15120			424231		4896		
434231		15120			423241		6048		3024
433421		15120			433122	1221	5664		
433241		15120			432312		9120		
433142		15120			432321		9120		
432431		15120			432231		6816		
432413		15120			432213		6816		
432341		15120	7560		432132		9120		
431342		15120	7560		432123		9120		4560
443221	1212	3744			431322		5664		
443212		4896			431232		9120		
443122		2688			423321		9120		
442321		4896			433212		9120		
442312		4896			423312		7968		
442231		2688			423231		9120		
434221		2744			423213		9120		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>	<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
423132		7968		3984	431321		20976		
422331		5664			431312		22032		
443121	2112	6816			431231		19872		
443112		6816			431213		20304		10152
442131		6816			431132		19248		
441321		6816			423311		17424		
441132		6816			423131		22032		
441123		6816			421331		19776		
434211		9120			413321		19200		
434121		9120		4560	413231		20304		10152
432411		9120			432211	2211	4176		
432141		9120			432121		5616		
431421		9120			432112		5616		
431412		9120			431221		4176		
432241		9120			431212		5616		
431142		9120			431122		3024		
423141		9120			423211		5616		
424131		9120		4560	423121		5616		
433121	2121	19200			423112		1464		
433211		15840			422311		3024		
433112		17424			421321		5616		
432311		18672			421312		4464		2232
432131		20928			421231		5616		
432113		18672			413221		4176		

<u>DESIGNATION</u>	<u>WXYZ</u>	<u>V</u>	<u>A</u>	<u>A/S</u>
412321		5616		2808
422131		3024		

