

ผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานที่มีต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงาน
ต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2547
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

537.623

@1334

๑.3

ผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานที่มีต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์



๑๓ ก.ย. ๒๕๕๗

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม ๒๕๕๗

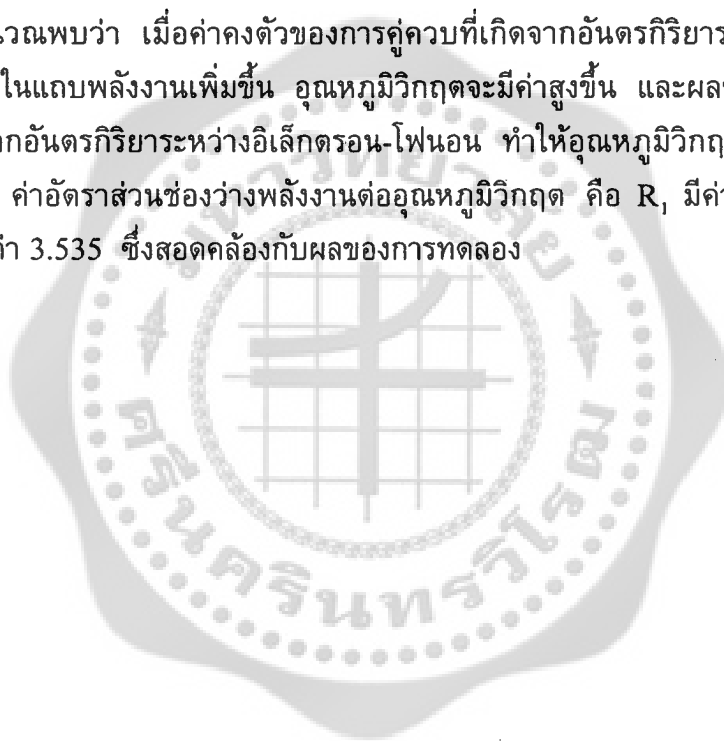
h 25/1/57

อดุลย์ บุราคร. (2547). ผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานที่มีต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดนี้เซียมไดโบไรด์.

ปริญญาโท กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
คณะกรรมการควบคุม : อาจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ , อาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาสมการแบบแม่นยำตรงของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดนี้เซียมไดโบไรด์ คำนึงถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน ที่มีต่อแบบจำลองสองแถบพลังงานของตัวนำยิ่งยวดนี้เซียมไดโบไรด์ ในบริเวณที่มีการคู่ควบแบบอ่อน

ผลการคำนวณพบว่า เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน และอันตรกิริยาภายในแถบพลังงานเพิ่มขึ้น อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูงขึ้น และผลของค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน-โฟนอน ทำให้อุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นมากกว่า ผลของอันตรกิริยาอื่น ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต คือ R_1 มีค่าระหว่าง 1.25 ถึง 2.56 และ R_2 จะมีค่า 3.535 ซึ่งสอดคล้องกับผลของการทดลอง



EFFECT OF INTERBAND INTERACTION ON GAP TO T_C RATIO
OF THE MgB_2 SUPERCONDUCTORS



Presented in partial fulfillment of requirements
for the Master of Education degree in Physics
at Srinakharinwirot University
May 2004

Adul Burakorn. (2004). *Effect of Interband Interaction on Gap to T_c Ratio of the MgB_2 Superconductors*. Master thesis, M.Ed.(Physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University.
Advisor Committee : Dr.Pongkaew Udomsamuthirun , Ahtit Limpongsa.

The purpose of this research is to find the exact equation of gap-to- T_c ratio of the MgB_2 superconductors by considering the effect of interband interaction in the two band model of the MgB_2 superconductors in a weak coupling region.

It is found that the critical temperature increases when the coupling constants of intraband interaction and interband interaction increase and the effect of the coupling constant of non-electron-phonon interaction causes higher value of T_c than the other interactions. The values of gap-to- T_c ratio, $R_1=1.25 - 2.56$ and $R_2=3.535$, correspond to the experiment data.



ปริญญาบัตร
เรื่อง

ผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานที่มีต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์

ของ
นายอดุลย์ บุราคร

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

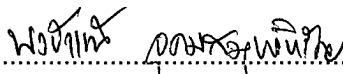


คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาพร หะวานนท์)

วันที่ 12 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญาบัตร



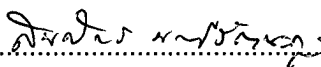
ประธาน

(อาจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรทรัพย์)



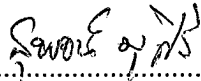
กรรมการ

(อาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา)



กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตน์กุล)



กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก อาจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ คำปรึกษา และอาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา ที่ได้คำปรึกษา คำแนะนำในการแก้ไขปัญหาและข้อบกพร่องต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาที่ทำงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกุล อาจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติม ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ให้คำปรึกษาและประสิทธิ์ประสาทวิชา ตลอดระยะเวลาของการศึกษาในสถาบันแห่งนี้

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ทุกท่าน ตลอดจนเพื่อนและคณะครูโรงเรียน ช่างบุญวิทยาที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในช่วงการทำงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และญาติทุกท่าน ที่ส่งเสริมให้การสนับสนุนในเรื่องต่าง ๆ และเป็นกำลังใจมาโดยตลอด

อดุลย์ บุราคร

สารบัญ

| บทที่ | หน้า |
|--|------|
| 1 บทนำ | 1 |
| ภูมิหลัง | 1 |
| การค้นพบตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง | 5 |
| การค้นพบตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ | 7 |
| ความมุ่งหมายของการวิจัย | 10 |
| ความสำคัญของการวิจัย | 10 |
| ขอบเขตของการวิจัย | 10 |
| 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง | 12 |
| แนวคิดทฤษฎีบีซีเอส | 12 |
| สมการช่องว่างพลังงาน ตามทฤษฎีบีซีเอส | 14 |
| การคำนวณหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต | 22 |
| แบบจำลองสองแถบพลังงาน | 42 |
| ผลการทดลองที่เกี่ยวข้องกับแมกนีเซียมไดโบไรด์ | 48 |
| งานวิจัยที่เกี่ยวกับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ของตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ | 51 |
| 3 วิธีดำเนินการวิจัย | 57 |
| 4 ผลการวิจัย | 80 |
| 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ | 96 |
| สรุปผล | 96 |
| อภิปรายผล | 98 |
| ข้อเสนอแนะ | 98 |
| บรรณานุกรม | 99 |
| ภาคผนวก | 103 |
| ประวัติย่อผู้วิจัย | 111 |

บัญชีตาราง

| ตาราง | หน้า |
|--|------|
| 1 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดของธาตุและสารประกอบโลหะ | 2 |
| 2 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนช่องว่างพลังงานอุณหภูมิวิกฤต จากการทดลองและตามทฤษฎีบีซีเอส | 13 |
| 3 แสดงอัตราส่วนของช่องพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของ La-Sr-Cu-O และ Y-Ba-Cu-O | 25 |



บัญชีภาพประกอบ

| ภาพประกอบ | หน้า |
|---|------|
| 1 แสดงความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ | 1 |
| 2 แสดงความแตกต่างของตัวนำสมบรูณ์และตัวนำยวดยิ่ง ขณะที่ $T > T_C$ และ $T < T_C$ | 3 |
| 3 แสดงปรากฏการณ์ทะลุผ่านของคู่คูเปอร์แบบเกียร์เวอร์และโจเซฟสัน | 4 |
| 4 แสดงฟลักซ์แม่เหล็กพุ่งผ่านตัวนำ (ก) สถานะปกติ (ข) สถานะนำยวดยิ่ง | 5 |
| 5 แสดงโครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงของ (ก) Y – Ba – CuO และ (ข) Hg – Ba – Ca – CuO | 6 |
| 6 แสดงโครงสร้างของ MgB ₂ ประกอบด้วยชั้นของโบรอน (B) แบบเดียวกับ แกรไฟต์และชั้น Mg เป็นแบบเฮกซะโกนอลโคลสแพค | 7 |
| 7 แสดงระนาบของโบรอน (B) และกลไกต่อการนำยวดยิ่ง | 8 |
| 8 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่เกิดเป็นคู่คูเปอร์ | 12 |
| 9 แสดงอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน | 13 |
| 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta(T)/\Delta(0)$ และ T/T_C โดยเปรียบเทียบกับ ทฤษฎีบีซีเอส (เส้นทึบ) กับผลการทดลอง Δ - ดีบุก, \circ – แทนทาลัม, \square - ไนโอเบียม | 21 |
| 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับอัตราส่วนของ ω_D/T_C | 27 |
| 12 แสดงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ α | 30 |
| 13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ α | 34 |
| 14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับอัตราส่วนของ δ/ω_D | 37 |
| 15 แสดงความสัมพันธ์อัตราส่วนของพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ $\frac{\omega_D}{T_C}$ | 42 |
| 16 แสดงความสัมพันธ์ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_C}$ กับ $\frac{T}{T_C}$ | 44 |
| 17 แสดงอัตราส่วนของสนามแม่เหล็ก M/H กับอุณหภูมิ (K) | 49 |
| 18 แสดงค่าความจุความร้อนต่ออุณหภูมิ $C_{es}/T(\text{JK}^2\text{mol})$ กับอุณหภูมิ (K) | 49 |
| 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $C/\gamma T(\text{JK}^2\text{mol})$ กับ T(K) | 50 |

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

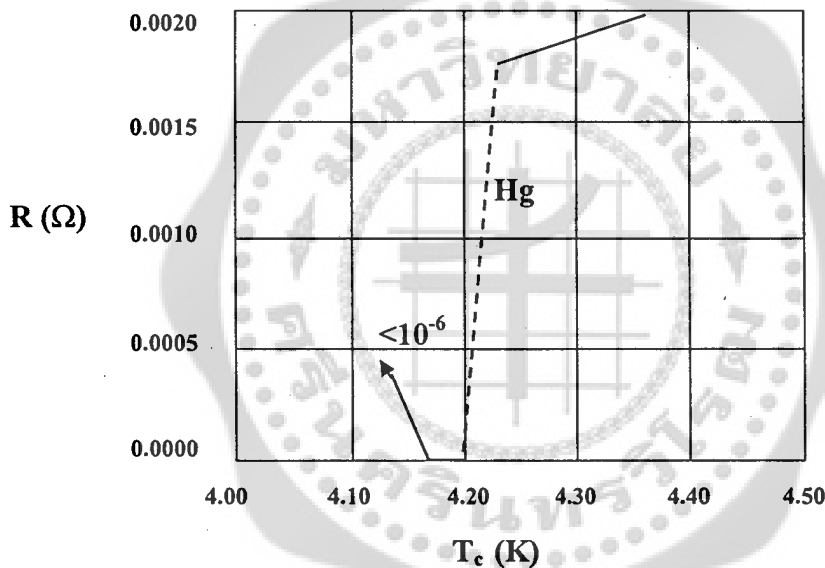
| ภาพประกอบ | หน้า |
|--|------|
| 20 แสดงค่าความจุความร้อน $C_{es} - C_n / \gamma T$ (JK ² mol) ต่ออุณหภูมิกับอุณหภูมิ (K) | 50 |
| 21 แสดงความสัมพันธ์ของ R_n / R_s กับ $T_C(H)/T$ | 51 |
| 22 แสดงการทะลุผ่านของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์ไฟฟ้า ที่อุณหภูมิ 2.5 K | 52 |
| 23 แสดงการทะลุผ่านรอยต่อของโลหะเงินกับแมกนีเซียมไดโบไรด์ | 52 |
| 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dI}{dV}$ กับความต่างศักย์ไฟฟ้า V | 53 |
| 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dI}{dV}$ กับ V | 54 |
| 26 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้าต่อศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลง | 54 |
| 27 แสดงช่องว่างพลังงาน (meV) กับอุณหภูมิ (K) | 55 |
| 28 แสดงค่าจากผลการทดลองรอยต่อของ Cu - MgB ₂ ที่อุณหภูมิ 4.2 K และเส้นกราฟจะเลื่อนขึ้นตามแนวตั้ง | 55 |
| 29 แสดงช่องว่างพลังงานต่อความต่างศักย์ไฟฟ้า (mV) | 56 |
| 30 แสดงแบบจำลองพลังงานศักย์ของคูคูเปอร์ | 64 |
| 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = 0.1-0.4$, $\lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$... | 86 |
| 32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_p = 0.1-0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ | 86 |
| 33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\mu_s = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$.. | 87 |
| 34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\mu_p = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ | 87 |
| 35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\omega_C/\omega_D = 1.5 - 10$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$ และ $\omega_D = 745$ K | 88 |
| 36 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.11 - 0.16$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ | 88 |
| 37 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.10 - 0.15$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ | 89 |

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในปี พ.ศ. 2454 ออนเนส (Ketterson, & Song. 1999 : 1 ; citing Onnes. 1911 : 1206 - 1226) นักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์ ได้ทดลองศึกษาวัดความต้านทานไฟฟ้า ของปรอทที่อุณหภูมิต่ำ พบว่า ที่อุณหภูมิต่ำประมาณ 4.2 K ปรอทจะหมดสภาพความต้านทานไฟฟ้าอย่างฉับพลัน จึงเรียกสภาวะเช่นนี้ว่า สภานำยวดยิ่ง (Superconductivity) และเรียกอุณหภูมิต่ำที่ตัวนำใดๆ หมดสภาพต้านทานไฟฟ้าอย่างฉับพลันว่าอุณหภูมิกวิกฤต (Critical Temperature) ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 กราฟแสดงความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ ที่มา: Ketterson; & Song. (1999). *Superconductivity*. p. 1.

ออนเนส เรียกตัวนำที่ไร้ความต้านทานไฟฟ้านี้ว่า ตัวนำยวดยิ่ง (Superconductors) ในสภาวะที่มีการนำไฟฟ้ายวดยิ่ง ถ้านำตัวนำยวดยิ่งมาทำเป็นรูปร่างแหวน ใส่กระแสไฟฟ้าให้แก่ตัวนำ แล้วเอาแหล่งจ่ายไฟฟ้าออก กระแสไฟฟ้าไหลในตัวนำจะมีค่าคงตัวตลอดเวลา เนื่องจากไม่มีผลของความต้านทานภายในตัววัสดุเลย เรียกกระแสไฟฟ้าไหลอยู่ตลอดเวลาเรียกว่า กระแสยืนยง (Persistent Current)

ในธรรมชาติ พบธาตุและสารประกอบจำนวนมากที่มีคุณสมบัติเป็นตัวนำยวดยิ่งโดยมีอุณหภูมิกวิกฤตที่ต่างกัน เช่น ไนโอเบียม (Nb) ไนโอเบียมทิน (Nb₃Sn) มีอุณหภูมิกวิกฤตเป็น 9.2 K และ 18 K ตามลำดับ ดังตาราง 1 ช่วงเวลานั้นยังไม่มีมีการค้นพบธาตุและสารประกอบใด

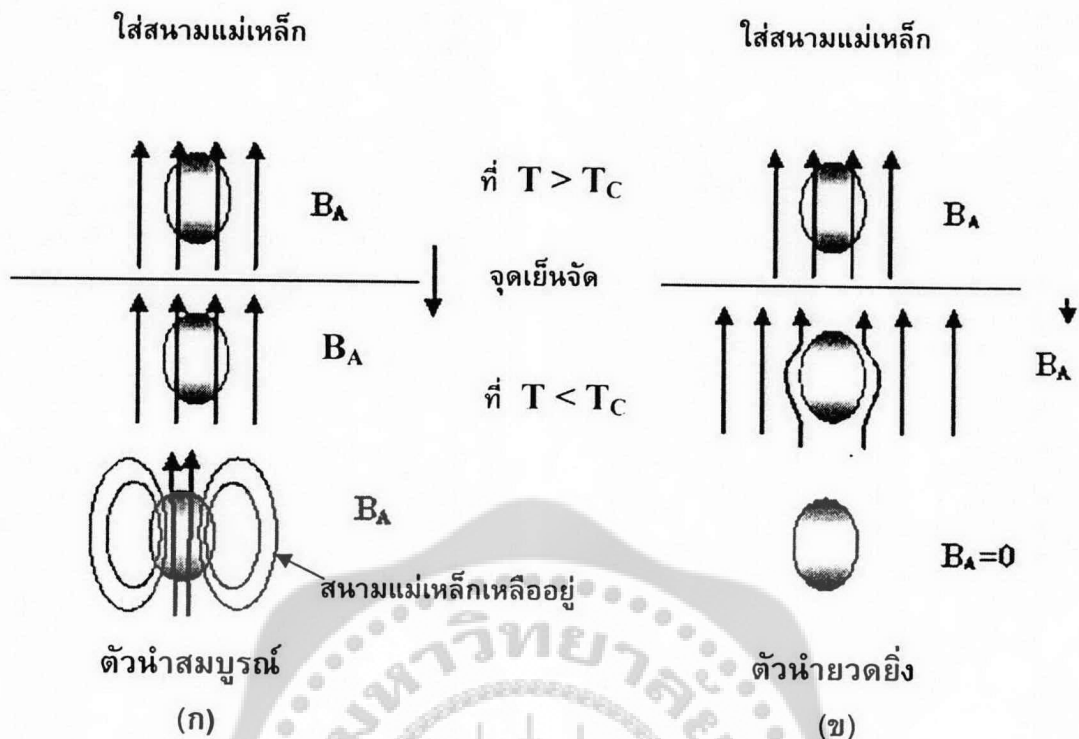
มีอุณหภูมิวิกฤตเกินกว่าอุณหภูมิวิกฤตของไนโอเบียมเจอร์เมเนียม (Nb_3Ge) ที่ 23 เคลวิน (Testardi; et al. 1974 : 1) จึงเข้าใจกันว่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งสำหรับสารประกอบโลหะคงมีค่าไม่สูงกว่านี้

ตาราง 1 แสดงอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งของธาตุและสารประกอบโลหะ

| วัสดุ | อุณหภูมิ (T_c) (K) |
|----------|---------------------------|
| Hf | 0.13 |
| Cd | 0.52 |
| Zn | 0.85 |
| Al | 1.2 |
| In | 3.4 |
| Hg | 4.2 |
| Pb | 7.2 |
| Nb | 9.3 |
| V_3Ge | 11.2 |
| V_3Si | 17.1 |
| Nb_3Sn | 18.1 |
| Nb_3Ge | 23 |

ที่มา: Poole, Farach, & Creswick. (2000). *Superconductivity*. p.167.

ในปี พ.ศ. 2476 ไมสส์เนอร์ และ ออกเซนเฟล (Orando, & Delin. 1991 : 4 ; citing Meissner, & Ochsenfeld. 1933 : 787) พบว่า วัสดุที่มีการนำยวดยิ่งจะมีพฤติกรรมเหมือนกับแม่เหล็กไดโอดอย่างสมบูรณ์ (Perfect Diamagnetic) ทดลองได้จากการนำตัวนำยวดยิ่งมาหล่อเลี้ยงด้วยสารทำความเย็น ทำให้วัสดุมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต แล้วใส่สนามแม่เหล็กจากภายนอก จะพบว่าสนามแม่เหล็กภายนอกถูกผลักออกจากภายในตัววัสดุ เนื่องมาจากสารตัวนำยวดยิ่งจะสร้างสนามแม่เหล็กภายในต้านสนามแม่เหล็กภายนอก ทำให้ผลรวมของสนามแม่เหล็กภายในตัววัสดุเป็นศูนย์ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์ (Meissner Effect) ดังภาพประกอบ 2 แต่ในกรณีที่สนามแม่เหล็กภายนอกมีความเข้มสูงพอสมควร ปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์ จะทำให้เกิดการยกตัว (Levitation) ของวัสดุที่เป็นตัวนำยวดยิ่งให้ลอยสูงขึ้น แต่ถ้าสนามแม่เหล็กภายนอกมีความเข้มสูงกว่าค่าสนามแม่เหล็กภายในตัวนำยวดยิ่งมาก ๆ สภาพการนำยวดยิ่งก็จะถูกทำลาย



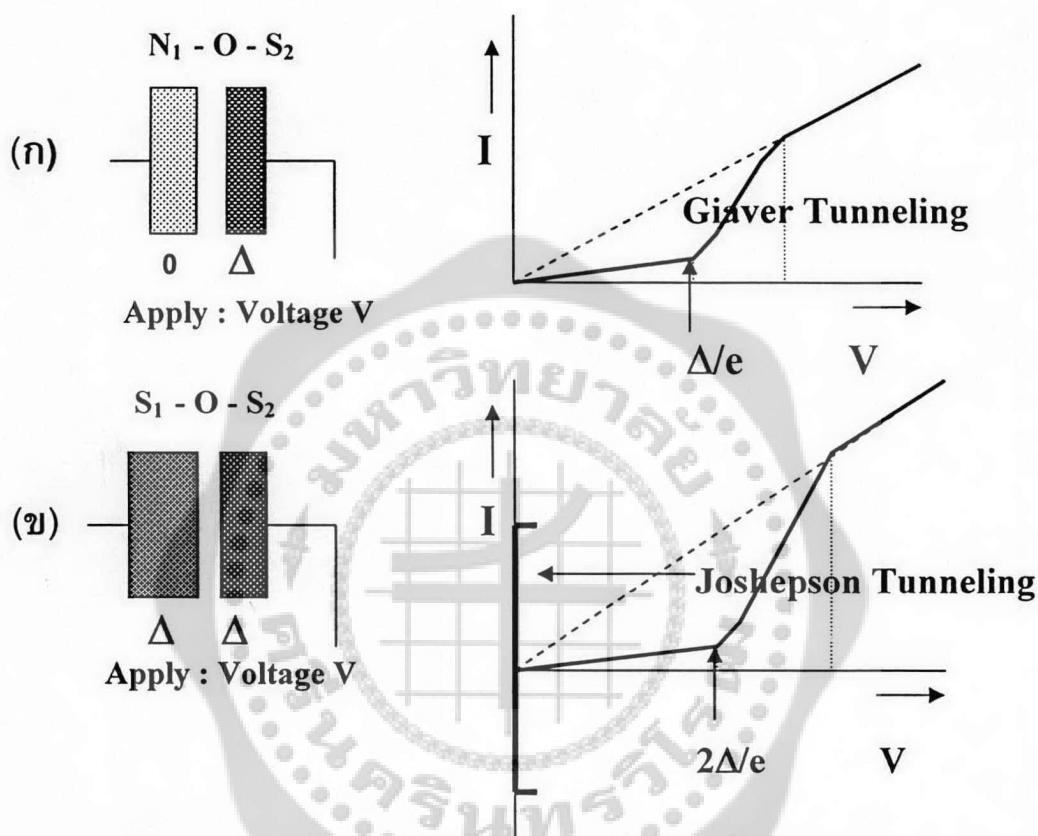
ภาพประกอบ 2 แสดงความแตกต่างของตัวนำสมบรูณ์และตัวนำวดยิ่ง
 (ก) ขณะที่ $T > T_c$ และ $T < T_c$ สนามแม่เหล็กพุ่งผ่านตัวนำสมบรูณ์
 (ข) ขณะที่ $T < T_c$ สนามแม่เหล็กจะถูกผลักออกจากตัวนำวดยิ่ง

ที่มา: Ibach, & Lüth. (1995). *Solid State Physics*. p.224.

ในปี พ.ศ. 2483 ฟรอลิช (Park. 1969 : 767 ; citing Frohlich. 1950 : 477) ค้นพบปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect) แสดงให้เห็นว่าสภาพนำวดยิ่งในตัวนำวดยิ่งแบบดั้งเดิมเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (Electron - Phonon Interaction) ต่อมาในปี พ.ศ. 2499 ฟรอลิช พบว่ามวลของไอโซโทปในตัวนำวดยิ่งทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นหรือลดลง สำหรับปรอท ($^{199.5}\text{Hg}$) มีอุณหภูมิวิกฤต 4.185 เคลวิน เปลี่ยนมวลไอโซโทปของปรอทไปเป็น ($^{203.4}\text{Hg}$) จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเท่ากับ 4.146 เคลวิน จากการทดลองจะพบว่ามวลไอโซโทปมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิเป็น $M^\alpha T_c = \text{ค่าคงที่}$ โดยที่ T_c เป็นอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่ง M เป็นมวลของไอโซโทป และ α เป็นสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป ซึ่งตามทฤษฎีบีซีเอสค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป (α) จะเท่ากับ 0.5 ซึ่งแสดงว่าสภาพการนำวดยิ่งเกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน

ในปี พ.ศ. 2493 เกียร์เวอร์ (Subramanyam, & Gopal. 1989 : 164 ; citing Giaever. 1960 : 147) ได้ทดสอบวัดช่องว่างพลังงาน (Energy Gap) แสดงให้เห็นการทะลุผ่านของคู่อิเล็กตรอนในโลหะปกติ (N_1) ที่ประกบติดกับตัวนำวดยิ่ง (S_2) โดยมีฉนวนกั้นตรงกลาง (O) มี

ความหนาประมาณ 20-30 อังสตรอม ดังภาพประกอบ 3 (ก) จากนั้นใส่ศักย์ไฟฟ้าสูงเข้ากับตัวนำยวดยิ่ง (S_2) และศักย์ไฟฟ้าต่ำต่อเข้ากับตัวนำโลหะ (N_1) ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิจะเริ่มเกิดการทะลุผ่านของคูคูเปอร์ เมื่อศักย์ไฟฟ้าที่ใส่เข้าไปสูงกว่าค่าหนึ่ง ($V > \Delta/e$) จะเกิดการทะลุผ่านของคูคูเปอร์จากตัวนำโลหะปกติ (N_1) ผ่านไปยังตัวนำยวดยิ่ง (S_2) โดยกระแสไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้นอย่างทันทีทันใด ดังกราฟ 3 (ก)

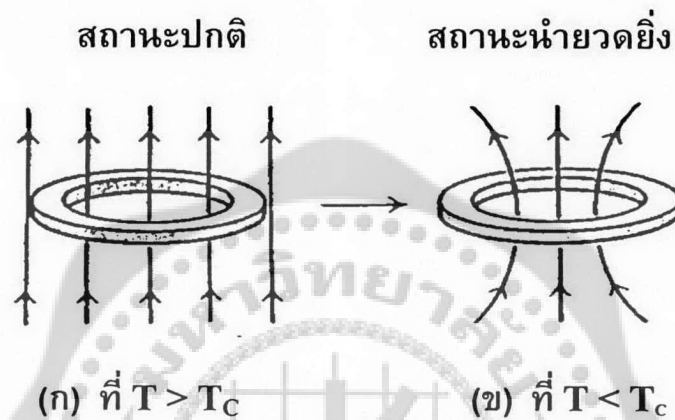


ภาพประกอบ 3 แสดงปรากฏการณ์ทะลุผ่านของคูคูเปอร์แบบเกียร์เวอร์และโจเซฟสัน
ที่มา: Subramanyam, & Gopal. (1989). *High Temperature Superconductors*. p.164.

ในปี พ.ศ. 2495 โจเซฟสัน (Josephson. 1962 : 251) ได้ทำการคำนวณหาค่าการไหลของกระแสไฟฟ้าทางทฤษฎีและได้นำมาใช้อธิบายการทดลองของกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านระหว่างตัวนำยวดยิ่ง 2 ชนิดที่ประกบติดกัน (S_1 -O- S_2) โดยมีฉนวนบาง (Barrier) คั่นตรงกลาง กระแสไฟฟ้าซึ่งเป็นพาหะของคูคูเปอร์จะเคลื่อนผ่านช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งชนิดที่หนึ่ง (S_1) - ฉนวน (O) - ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สอง (S_2) ดังภาพประกอบ 3 (ข) จะเกิดปรากฏการณ์การทะลุผ่าน (Tunneling Effect) ของคูคูเปอร์ เมื่อศักย์ไฟฟ้าที่ใส่เข้าไปมีค่ามากกว่าอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออิเล็กตรอน ($V > 2\Delta/e$) จะพบว่าค่ากระแสไฟฟ้ามีการกระโดดขึ้นอย่างทันทีทันใด เนื่องจากการใส่ศักย์ไฟฟ้าต่ำในตัวนำยวดยิ่งชนิดหนึ่ง (S_1) เกิดการทะลุผ่านของคูคูเปอร์จำนวนมากไปยังตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สอง (S_2) ดังกราฟที่ 3 (ข) ซึ่งในปัจจุบันรู้จักกันว่าเป็นปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson Effect) และมีการนำมาประยุกต์ใช้งานด้านอิเล็กทรอนิกส์

ดังเช่น SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) ใช้เป็นตัวเซนเซอร์ที่มีความไวสูงมากในการตรวจจับสนามแม่เหล็กที่มีค่าน้อยมาก ๆ

ในปี พ.ศ. 2498 เดเวอร์ แฟร์แบ็ง และคณะ (Deaver, Fairbank, & et al. 1961 : 43) ค้นพบฟลักซ์ควอนไทเซชัน (Flux Quantization) โดยนำตัวนำยิ่งยวดยิ่งทำเป็นรูวงแหวนภายใต้อุณหภูมิวิกฤต พบว่า ฟลักซ์ที่ถูกกับดักอยู่ในวงแหวนตัวนำยิ่งยวดจะมีค่า Φ เท่ากับ $n\hbar c/2e$ โดยจะเพิ่มขึ้นเป็นค่า ๆ ตามอัตราส่วนของจำนวนเต็ม คือ 1, 3, 5,... ตามลำดับ และ \hbar เป็นค่าคงที่ของพลังค์



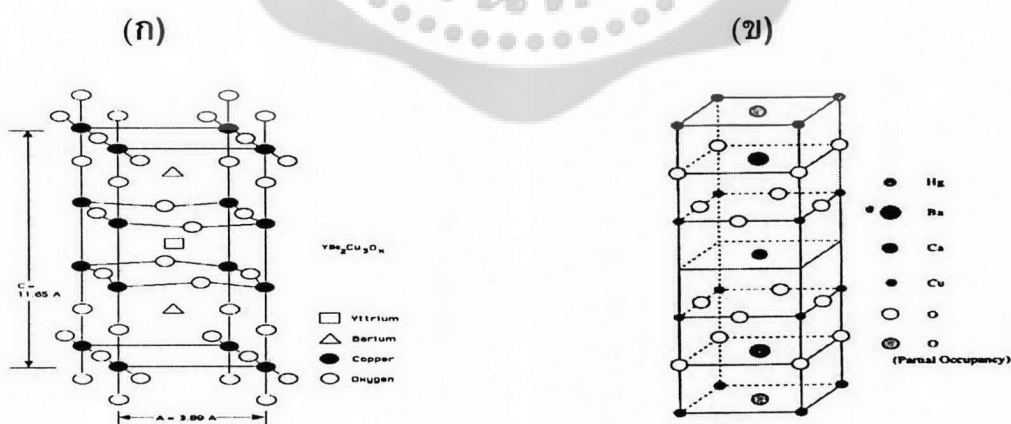
ภาพประกอบ 4 แสดง (ก) ฟลักซ์ขณะตัวนำยิ่งยวดอยู่ในสถานะปกติและ (ข) สถานะนำยวดยิ่งยวด ที่มา: Fetter, & Walecka. (1995). *Quantum Theory Of Many-Particle Systems*. p.416.

จากภาพประกอบ 4 (ข) เมื่อทำตัวนำยิ่งยวดเป็นรูวงแหวนภายใต้อุณหภูมิวิกฤต ตัวนำยิ่งยวดยังมีสถานะการนำยวดยิ่งยวด จากนั้นเหนี่ยวนำด้วยสนามแม่เหล็ก พบว่าจะเกิดกระแสไฟฟ้าไหลวนรอบวงแหวนเมื่อหยุดการเหนี่ยวนำจากสนามแม่เหล็กภายนอก ยังพบอีกว่ากระแสไฟฟ้าซึ่งไหลวนรอบวงแหวนอยู่นั้น จะเหนี่ยวนำให้เกิดฟลักซ์แม่เหล็กลอดผ่านพื้นที่วงในของวงแหวน โดยมีค่าเท่ากับฟลักซ์ควอนตัม โดยฟลักซ์ควอนตัมมีค่า $\Phi = \hbar c/e^* = 4 \times 10^{-7} \text{ gauss-cm}^2$ และฟลักซ์แม่เหล็กที่วัดได้มีค่า $\Phi_0 = \hbar c/2e = 2.0679 \times 10^{-7} \text{ gauss-cm}^2$ นั้นแสดงให้เห็นว่า $e^* = 2e$ โดย e^* ประกอบด้วยอิเล็กตรอนสองตัว ทำให้ยืนยันว่ากลไกของการนำยวดยิ่งยวดมาจากคูคูเปอร์

การค้นพบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

ในปี พ.ศ. 2529 เบทนอส และ โมลเลอร์ (Bednorz, & Müller. 1986 : 189) ที่ห้องปฏิบัติการของไอบีเอ็ม เมืองซูริกส์ ได้ค้นพบ สภาพนำยวดยิ่งยวดในสารกลุ่มใหม่ ที่มีองค์ประกอบของสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ (CuO_2) หรือที่เรียกว่า คิวเพรต (Cuprate) โดยสารตัวแรกที่ค้นพบ คือ $\text{La}_2\text{BaCuO}_4$ เป็นสารเซรามิก ที่อุณหภูมิห้องจะมีสภาพเป็นฉนวนไฟฟ้า แต่เมื่อลดอุณหภูมิลงจนต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 30 K จะกลายเป็นตัวนำยิ่งยวด การค้นพบของเบทนอสและโมลเลอร์ทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์คาดหวังว่าจะพบสารตัวนำ

ยวดยิ่งที่อุณหภูมิห้อง การค้นพบของเบททอนอสและโมลเลอร์ครั้งนี้ทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์ตกลงความเข้าใจเป็นแนวเดียวกันว่าสารกลุ่มที่มีอุณหภูมิวิกฤตไม่เกิน 35 K เป็นสารตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional Superconductors) และเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตเกิน 35 K ว่าเป็นตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (High - Temperature Superconductors) ต่อมาในปี พ.ศ. 2529 ชู และคณะ (Chu, et al. 1987 : 405) ค้นพบสารกลุ่มคิวเพอร์ทมีองค์ประกอบของแลนทานัม-แบเรียม-คิวเพอร์ท (La - Ba - CuO) ที่อุณหภูมิสูงถึง 40 K โดยเทคนิคการเพิ่มความดันให้กับสารตัวนำยวดยิ่ง ในปีเดียวกันยังมีการค้นพบสารกลุ่มคิวเพอร์ทอีกกลุ่มที่มีองค์ประกอบของอิตเทียม-แบเรียม-คิวเพอร์ท (Y - Ba - CuO) ดังภาพประกอบ 5 (ก) ซึ่งมีอุณหภูมิสูงถึง 93 K โดย วู และคณะ (Wu., et al. 1987 : 405) ซึ่งเป็นครั้งแรกที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่าจุดเดือดของไนโตรเจนเหลว คือ 77 K โดยสารมีลักษณะโครงสร้างเป็นแบบเพอร์รอฟสไกท์ (Cava, et al. 2001 : 54) และในปี พ.ศ.2536 กลุ่มนักฟิสิกส์ที่เมืองซูริกส์ ประเทศสวิตเซอร์แลนด์ ซึ่งมี ซีลิ่ง คาร์โทนี โกว์ และ ออท พบสารเซรามิกในกลุ่มปรอท - คิวเพอร์ท มีอุณหภูมิ 138 K ภายใต้อุณหภูมิสูง ซึ่งเป็นสารตัวนำยวดยิ่งที่ถูกเจือปนด้วยเทลเลียม (Tl) สารดังกล่าวประกอบด้วยปรอท-เทลเลียม-แบเรียม-แคลเซียม-คิวเพอร์ท (Hg - Tl - Ba - Ca - CuO) หลังจากนั้นการค้นพบสารตัวนำยวดยิ่งที่ให้อุณหภูมิวิกฤตสูง ๆ ในกลุ่มเซรามิกอื่น ๆ อีกจำนวนมาก จากรายงานในวารสารฟิสิกส์รีพอร์ทโดยไครสัน (Krison. 1997 : 23) ในปี พ.ศ. 2540 พบตัวนำยวดยิ่งชนิดอุณหภูมิสูงจำพวกสารเซรามิกแล้วถึง 288,347 ชนิด และในเดือนเมษายน พ.ศ. 2543 กลุ่มนักฟิสิกส์ที่ห้องวิจัยนานาชาติโรว์เลนดท์ เบิร์กเลย์ร่วมกับมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียที่เบิร์กเลย์ พบสารตัวนำยวดยิ่งที่ให้อุณหภูมิวิกฤตสูงอยู่ในกลุ่มบิสมัท-สตรอนเชียม-แคลเซียม-คิวเพอร์ท ($\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+d}$) โดยใช้เทคนิคการโด๊ป ให้อุณหภูมิจากเดิม 88 K เป็น 95 K



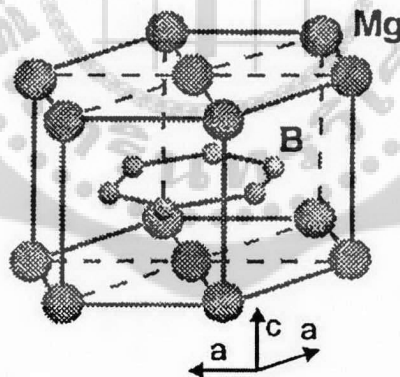
ภาพประกอบ 5 แสดงโครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง มีระนาบ CuO ซ้อนเป็นชั้นๆ ของ (ก) Y - Ba - CuO (ข) Hg - Ba - Ca - CuO ซึ่งยังไม่ได้เจือด้วย Tl

ที่มา: Burns. (1992). *High-Temperature Superconductivity : Introduction*. pp. 63- 64.

ทะซุย และ เคิร์ทเลย์ (Tsuei, & Kirtley. 1997 : 282-287) ได้แสดงกลไกการเกิดสภาพนำวดยิ่งในกลุ่มของคิวเพรท โดยใช้ผลของฟลักซ์ควอนตัมเป็นเลขเศษส่วนจำนวนครึ่งในตัวของนำวดยิ่งที่เป็นวงแหวน Φ เท่ากับ $(n+1/2)hc/e$ ซึ่งสัมพันธ์จะเป็นจำนวนเต็มครึ่ง คือ $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ตามลำดับ สรุปว่าผลที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากการจับคู่ของคูคูเปอร์ในชั้นแถบพลังงานย่อยของ $d_{x^2-y^2}, d_{x-y}, d_{y-z}, d_{z-x}$ ในองค์ประกอบของคอปเปอร์ออกไซด์ โดยพบว่าอิเล็กตรอนในชั้นแถบพลังงานย่อย $d_{x^2-y^2}$ มีกลไกการจับคู่ของอิเล็กตรอนเกิดเป็นคูคูเปอร์ที่เด่นชัดมากที่สุด อิเล็กตรอนในชั้นแถบพลังงานย่อย $d_{x^2-y^2}$ จะเรียกว่าเป็นชนิดคลื่นดี (d-wave) จะให้ลักษณะการจับคู่ของอิเล็กตรอนที่เด่นชัดมากกว่าชนิดคลื่นเอส (s-wave) ในสารประกอบ $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7, \text{GdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7, \text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ และ $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_6$

การค้นพบตัวนำวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ในปี พ.ศ. 2544 นากามัสซึ อะคิมิตซึ และคณะ (Nagomatsu, Akimitsu, et al. 2001 : 63) ได้ค้นพบว่า แมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) มีสภาพนำวดยิ่งและแสดงอุณหภูมิวิกฤตสูงประมาณ 40 K แมกนีเซียมไดโบไรด์มีโครงสร้างง่าย ๆ ที่ประกอบด้วยธาตุโลหะ 2 ชนิด (Binary Compound) คือ ธาตุแมกนีเซียม (Mg) 1 อะตอมและธาตุโบรอน (B) 2 อะตอม ดังภาพประกอบ 6



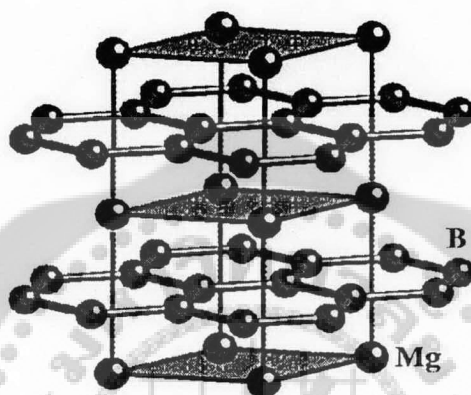
ภาพประกอบ 6 แสดงโครงสร้างของ MgB_2 ประกอบด้วยชั้นของโบรอน (B) แบบเดียวกับแกรไฟต์และชั้น Mg เป็นแบบเฮกซะโกนอลโคลสแพค

ที่มา: Nagomatsu, Akimitsu, et al. (2001). *Nature* (London). 410. pp.63-64.

อะตอมของโบรอนแต่ละตัวจะจับกับอะตอมของโบรอนข้างเคียงอีก 3 ตัว เรียงกันลักษณะเดียวกับแกรไฟต์ (Graphite Type) ระหว่างระนาบของโบรอน 6 ตัวที่จับพันธะเป็น 6 เหลี่ยมจะมีอะตอมของแมกนีเซียมอยู่ตรงกลาง วางตัวแบบเฮกซะโกนอล โคลส แพค (Hexagonal - close - packed) เรียงตัวซ้อนกันตามแกน c ระยะห่างระหว่างระนาบของโบรอนกับระนาบของโบรอนที่อยู่ชั้นถัดไปจะมากกว่าระยะห่างระหว่างระนาบของโบรอนกับแมกนีเซียม พลังงานระหว่างพันธะของ

แมกนีเซียมกับโบรอน (Mg - B) จะอ่อนกว่าพลังงานของพันธะระหว่างแมกนีเซียมกับแมกนีเซียม (Mg - Mg) ส่วนพันธะระหว่างโบรอนกับโบรอน (B - B) จะมีความแข็งแรงมากกว่า

อะตอมของแมกนีเซียมให้อิเล็กตรอน 2 ตัวแก่โบรอนในแถบนำ (Conduction Band) การไม่สมมาตรของระนาบโบรอนมีผลต่อการเกิดสภาพนำเวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์ เช่นเดียวกับระนาบของคิวเพอร์ทในตัวนำเวดยิ่งชนิดอุณหภูมิสูง สภาพการนำเวดยิ่งเกิดจากอิเล็กตรอนของแมกนีเซียมแลกเปลี่ยนโฟนอนกับโบรอน ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แสดงระนาบของโบรอน (B) เรียงตัวแบบกราฟไฟต์

ที่มา: Yildirim. (2003). (Online). Available : <http://www.ncnr.nist.gov/staff/taner/mgb2>. Retrieved September 12, 2003.

ธรรมชาติของแมกนีเซียมไดโบไรด์จะเป็นโลหะที่มีการเรียงตัวของชั้นโบรอนลักษณะสองมิติ (2D Sheet) และอะตอมของโบรอนจะสั้นด้วยความถี่สูง แต่เมื่อลดอุณหภูมิลงอะตอมของธาตุจะอยู่เรียงชิดกันมากขึ้น อะตอมของธาตุโบรอนจะลดระดับพลังงานต่ำลง ความถี่ของการสั่นจะน้อยลง มีผลทำให้มีสภาพการนำเวดยิ่งที่ดีขึ้น สำหรับการสังเคราะห์แมกนีเซียมไดโบไรด์ (Yakinci, et.al. 2002 : 607) จะใช้แมกนีเซียมผง (Alfa Acer co. Mg 99.8 % purity) และโบรอนผง (Alfa Acer co. B 99.6 % purity) ในอัตราส่วนโดยมวล 1 : 2 อัดเม็ดโดยมีแผ่นแทนทาลัมรองรับในท่อควอทซ์ แล้วนำไปเผาที่อุณหภูมิ 950 องศาเซลเซียส ในเวลา 6 ชั่วโมง ภายใต้ความดัน 3 GPa แล้วค่อยลดอุณหภูมิลงทุก 2 ชั่วโมง จากนั้นนำมาทดสอบคุณสมบัติต่าง ๆ

ในปี พ.ศ. 2545 บุคโค และคณะ (Bud'Ko, et al. 2001 : 1877) พบปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์ของธาตุ ^{11}B และ ^{10}B ทำให้อุณหภูมิเพิ่มขึ้น 1 K โดยมีค่าสัมประสิทธิ์มวลไอโซโทป (α) ประมาณ 0.26 ซึ่งเป็นหลักฐานยืนยันที่ชัดเจนว่าการจับคู่ของอิเล็กตรอนทำให้เกิดการปล่อยโฟนอนในระนาบของโบรอน ขณะเดียวกัน ฮิงค์ และคณะ (Hink, et al. 2001 : 457) ได้ใช้เทคนิค NMR สำหรับวัดค่าไอโซโทปของธาตุ ^{11}B พบว่า (α_{B}) ประมาณ 0.26 และ (α_{Mg}) ประมาณ 0.02 และ $\alpha_{\text{T}} = \alpha_{\text{B}} + \alpha_{\text{Mg}} \sim 0.3$ ปีเดียวกันกลุ่มนัก

ฟิสิกส์ ซึ่งมี หวัง พลาคโคสกี และ จุนอด (Wang, Plackowski, & Junod. 2001 : 179) หาค่าความจุความร้อนของก้อนแมกนีเซียมไดโบไรด์ช่วงอุณหภูมิ 2 ถึง 300 K พบความจุความร้อนมีค่าไม่ต่อเนื่อง คือ $\Delta C(T_c)/\gamma T_c = 0.8$ จากค่าความจุความร้อนที่สถานะปกติ เมื่อ ค่า $\gamma = 2.7 \text{ mJ/K}^2 \cdot \text{mol}$ การวัดแมกนีเซียมแสดงให้เห็นว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สอง (Type II Superconductors) โดยมีสนามแม่เหล็กวิกฤตแรก คือ $H_{c1}(0)$ ประมาณ 27 ถึง 48 มิลลิเทสลา (Buzza, & Yamashita. 2001 : R103-R106) ออท และคณะ (Ott, et al. 2002 : 479) ได้แสดงอุณหภูมิที่ขึ้นกับสนามแม่เหล็กวิกฤตที่สอง ($H_{c2}(0)$) จะอยู่ในช่วง 15 ถึง 40 เทสลา แสดงความไม่ขึ้นกับทิศทาง (Anisotropic) ของแมกนีเซียมไดโบไรด์อย่างชัดเจนจากการใส่สนามแม่เหล็กในระนาบ ab และในระนาบ c พบว่าค่าอัตราส่วนแอนไอโซโทรปิก $H_{c2}(H_{ab})/H_{c2}(H_{bc}) = 0.2$ จากการทดสอบบริเวณของอุณหภูมิวิกฤต ค่าความยาวอาพันธ์ (Coherence Length) ประมาณ $\xi_{ab} = 65$ อังสตรอม และ $\xi_c = 25$ อังสตรอม (Ott, et al. 2002 : 245) ค่าความลึกของการทะลุทะลวง (Penetration Depth) ประมาณ 1,200 และ 1,850 อังสตรอม (Ott, et al. 2002 : 479.citing. Bennemann, & Ketterson. 2002 : 479) ค่าพารามิเตอร์แอนไอโซโทรปิกจะอยู่ระหว่าง 6 และ 9 ค่าอันตรกิริยาการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนโฟนอน (λ) ประมาณ 0.6 และ 1.8 นาโนเมตร (Ott, et al. 2002 : 479) ต่อมา หลิว และคณะ (Liu, et al. 2001 : 0870051) เสนอว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์ยังมีลักษณะของแถบพลังงานแบบเฉพาะตัวซึ่งมีทั้งแถบพลังงานในแบบสองมิติและแบบสามมิติ ซึ่งจะมีสภาพนำยวดยิ่งที่เป็นแบบมัลติแบนด์ (Multiband) สำหรับช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์นั้นได้รับการยืนยันทั้งในแง่ทฤษฎีและในแง่ของการทดลองว่ามีช่องว่างพลังงานสองช่อง แต่ปรากฏว่าค่าช่องว่างพลังงานที่ได้ยังไม่ชัดเจนนัก ซึ่งเท่าที่ได้ศึกษาพอสรุปได้ว่า มีช่องว่างพลังงานที่เป็นแถบเล็ก (Δ_{small}) มีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 1.2 - 4 meV และช่องว่างพลังงานแถบกว้าง (Δ_{Large}) มีค่าอยู่ในช่วง 4-8 meV ซึ่งจุดนี้ทำให้ผู้วิจัยให้ความสนใจในการนำมาเป็นประเด็นปัญหาทำงานวิจัยในครั้งนี้

นอกจากแมกนีเซียมไดโบไรด์แล้วยังมีการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งที่มีองค์ประกอบของธาตุสองชนิดอื่น ๆ อีก (Buzza, & Yamashita. 2001 : R103-R106) เช่น แทนทาลัมไดโบไรด์ (TaB_2) มีอุณหภูมิวิกฤต 9.5 K เบอริลเลียมไดโบไรด์ ($\text{BeB}_{2.75}$) มีอุณหภูมิวิกฤต 0.7 K และ สารแกรไฟต์ซัลเฟต (C-S) มีอุณหภูมิวิกฤต 35 K นอกจากนี้ นักฟิสิกส์ยังได้ศึกษาการเกิดโฮล โดยการได้ปด้วยอะตอมของธาตุ Li, Na, Cu เข้าไปในแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ทำให้มีลักษณะเป็นสารเทอร์นารีคอมพาวด์ (Ternary Compound) เช่น $\text{Mg}_{1-x}\text{Li}_x\text{B}_2$, $\text{Mg}_{1-x}\text{Na}_x\text{B}_2$ และ $\text{Mg}_{1-x}\text{Cu}_x\text{B}_2$ และอนุมูลของโลหะมีตระกูลไดโบไรด์ (Noble Metal Diboride) เช่น AgB_2 , AuB_2 , CuB_2 แต่ทั้งหมดนี้ก็ให้ค่าอุณหภูมิไม่สูงเท่ากับแมกนีเซียมไดโบไรด์

ในแง่ของการนำมาประยุกต์ใช้งานของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) มีข้อดีคือขึ้นรูปได้ง่ายในหลายลักษณะ เช่น ทำเป็นก้อน (Bulk) ฟิล์มบาง (Thin Film) ผง (Powder) เส้นลวด

(Wire) ผลึกเชิงเดี่ยว (Single Crystal) และเทป (Tape) การดึงเป็นเส้นหรือขึ้นรูปในลักษณะต่าง ๆ แล้วไม่เกิดการเปราะหรือแตกหักเหมือนในสารตัวนำยวดยิ่งจำพวกสารเซรามิก ในเวลานี้ แมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นความหวังของกลุ่มนักวิทยาศาสตร์ในการนำตัวนำยวดยิ่งมาประดิษฐ์ อุปกรณ์ต่าง ๆ ทางอิเล็กทรอนิกส์ใช้งานกันได้จริง ๆ สำหรับชีวิตประจำวันในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อคำนวณหาสมการของช่องว่างพลังงาน ของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ โดยใช้แบบจำลองแบบสองแถบพลังงาน (Two Band Model) ในกรอบของทฤษฎีบีซีเอส
2. เพื่อคำนวณหาสมการของอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ โดยใช้แบบจำลองแบบสองแถบพลังงาน ในกรอบของทฤษฎีบีซีเอส
3. เพื่อคำนวณหาสมการแบบแม่นยำตรงของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์
4. ใช้การคำนวณโดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลขแบบการทำซ้ำ (Iteration) เพื่อศึกษาผลของการทะลุผ่านแบบแม่นยำตรง ที่มีต่ออัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ความสำคัญของการวิจัย

ในการวิจัยในครั้งนี้มีความแตกต่างจากงานวิจัยอื่น โดยผู้วิจัยได้ใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน (Two Band Model) ที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานในขอบเขตของอันตรกิริยาอย่างอ่อน คำนวณโดยใช้วิธีระเบียบเชิงตัวเลขแบบวิธีการทำซ้ำ (Iteration) จะให้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิกวุดได้ใกล้เคียงกับการทดลองมากที่สุด สำหรับการอธิบายสมบัติของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

ขอบเขตของงานวิจัย

ในการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัย มุ่งศึกษาสมบัติของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่มีอันตรกิริยาแบบอ่อน ความถี่เดอบายในช่วงจำกัด และความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบคงที่ โดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานแบบสองแถบ ที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **Interband Interaction** หมายถึง อันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นคู่อุปเปอร์ระหว่างแถบพลังงานชั้นเอสและชั้นพี

2. **Intraband Interaction** หมายถึง อันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอนเป็นคู่คูเปอร์ภายในแถบพลังงานชั้นเอสหรือภายในแถบพลังงานชั้นพี

3. **MgB₂ Superconductors** หมายถึง ตัวนำยิ่งยวดในกลุ่มแมกนีเซียมไดโบไรด์

4. **Gap to T_c Ratio** หมายถึงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิของตัวนำยิ่งยวด

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์ เนื่องจากผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานของแถบพลังงานชั้นเอส และแถบพลังงานชั้นพี ซึ่งผู้วิจัยคาดว่าอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานนี้จะ เป็นค่าน้อย ๆ ที่รบกวนระบบ โดยใช้แบบจำลองสองแถบพลังงานจากการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจะให้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตที่ตรงกับการทดลองมากยิ่งขึ้น สำหรับตัวนำยิ่งยวดแมกนีเซียมไดโบไรด์ในแง่ของทฤษฎี



บทที่ 2

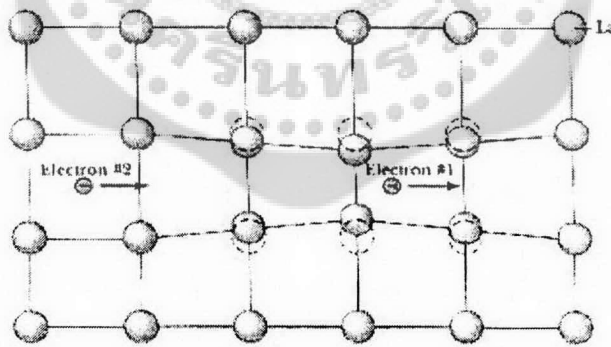
เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. แนวคิดทฤษฎีบีซีเอส
2. สมการการช่องว่างพลังงาน ตามทฤษฎีบีซีเอส
3. การคำนวณหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน
4. แบบจำลองสองแถบพลังงาน
5. ผลการทดลองที่เกี่ยวข้องกับแมกนีเซียมไดโบไรด์
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของแมกนีเซียมไดโบไรด์

แนวคิดทฤษฎีบีซีเอส

ในปี พ.ศ. 2500 บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชรีฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper, & Schrieffer, 1957 : 1175) อธิบายทฤษฎีในระดับจุลภาค (Microscopic Theory) ของสภาพการนำยวดยิ่ง เรียกชื่อย่อว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ตามตัวแรกของนามสกุลผู้ก่อตั้งทฤษฎีนี้ ซึ่งได้อธิบายสภาพนำยวดยิ่งว่าเกิดจากอันตรกิริยาแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนที่แลกเปลี่ยนโฟนอนกัน (Electron – Phonon – Electron Coupling)

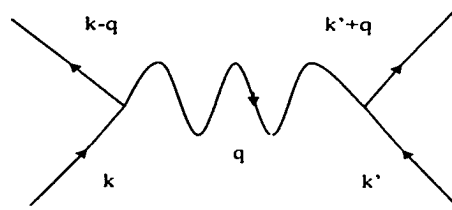


สถานะนำยวดยิ่ง

ภาพประกอบ 8 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคูคูเปอร์

ที่มา: Tsuei, & Kirtley. (1996, August). *Scientific American*. 50. p.6.

โดยปกติอิเล็กตรอนสองตัวมีประจุเหมือนกันจะผลักซึ่งกันและกันเนื่องจากแรงคูลอมบ์ แต่ในกรณีของตัวนำยวดยิ่งอิเล็กตรอนจะเสมือนมีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนสองตัว ซึ่งจะเรียกอิเล็กตรอนคู่นี้ว่า คูคูเปอร์ (Cooper Pair) อิเล็กตรอนในคูคูเปอร์ จะมีโมเมนตัมรวมเป็นศูนย์ โดยสปินทิศตรงข้ามกัน ($k \uparrow, -k \downarrow$)



ภาพประกอบ 9 แสดงอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน

ที่มา: Grosso, & Parravicini. (2000). *Solid State Physics*. p.719.

กลไกการเกิดคู่คูเปอร์จะเริ่มต้นจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน เมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่ผ่านเข้าไปในระหว่างกลุ่มอ็อนที่มีประจุบวกแล้วอิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดประจุบวกที่อยู่รอบ ๆ ให้เคลื่อนที่เข้าใกล้ ๆ ทำให้บริเวณรอบ ๆ อิเล็กตรอนมีความหนาแน่นของประจุบวกสูง การเคลื่อนที่ของประจุบวกทำให้มีการบิดเบี้ยวของแลตทิซ (Lattice) ไปมาจึงเกิดคลื่นแลตทิซ (Lattice Wave) เรียกว่า โฟนอน (Phonon; q) การบิดเบี้ยวของแลตทิซจะดึงอิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งเคลื่อนที่ตามมาติด ๆ กัน ทำให้ดูเหมือนว่าอิเล็กตรอนสองตัวนี้ดึงดูดกันดังภาพประกอบ 8 คู่คูเปอร์นี้จะเคลื่อนที่ไปอย่างเป็นระเบียบ จึงไม่เกิดการชนกันและไม่เกิดการกระเจิง (Scattering) ของอนุภาคภายในโครงผลึก ที่เป็นสาเหตุของการเกิดความต้านทานไฟฟ้าในลวดตัวนำปกติ

ทฤษฎีบีซีเอสได้ทำนายอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานของคู่คูเปอร์ในตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิองศาสมบูรณ์ ($R=2\Delta(0)/T_c$) มีค่าเท่ากับ 3.53 สำหรับตัวนำยิ่งยวดยี่ห้อทุกชนิด ซึ่งปรากฏว่าผลการทำนายสอดคล้องกับผลการทดลองดังแสดงในตาราง 2

ตาราง 2 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตจากการทดลองและตามทฤษฎีบีซีเอส

| สาร | $2\Delta_0/k_B T_c$ (การทดลอง) | $2\Delta_0/k_B T_c$ (ตามทฤษฎีบีซีเอส) |
|-----|-----------------------------------|--|
| Cd | 3.2 | 3.53 |
| Sn | 4.3 | 3.53 |
| Pb | 3.8 | 3.53 |
| Tl | 3.6 | 3.53 |

ที่มา: Poole, Farach, & Creswick. (2000). *Superconductivity*. p.167.

สมการชองว่างพลังงาน ตามทฤษฎีบีซีเอส

พิจารณาฮามิลโทเนียนของระบบตามทฤษฎีบีซีเอส เขียนได้เป็นดังนี้

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \quad (2.1)$$

โดย ϵ_k เป็นพลังงานจลน์ของคูคูเปอร์ที่ระดับผิวเฟอร์มี

$V_{kk'}$ เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคูคูเปอร์

$C_{k\uparrow}^+$ และ $C_{-k\downarrow}^+$ เป็นตัวดำเนินการสร้าง (Creation Operator) สปินขึ้น \uparrow และสปินลง \downarrow

$C_{-k\downarrow}$ และ $C_{k\uparrow}$ เป็นตัวดำเนินการทำลาย (Annihilation Operator) สปินลง \downarrow และสปินขึ้น \uparrow

ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น จะอยู่ในรูป

$$|\psi_s\rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2 C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+) |0\rangle \quad (2.2)$$

โดย $|0\rangle$ เป็นสถานะสูญญากาศ (Vacuum State)

u_k เป็นความน่าจะเป็นของแอมพลิจูดของการเกิดคูคูเปอร์ ($k \uparrow, -k \downarrow$)

v_k เป็นความน่าจะเป็นของแอมพลิจูดของการไม่เกิดคูคูเปอร์ ($k' \uparrow, -k' \downarrow$)

สำหรับในโลหะปกติ

$$\begin{aligned} u_k = 0, \quad v_k = 1 & \quad ; k < k_F \\ u_k = 1, \quad v_k = 0 & \quad ; k > k_F \end{aligned} \quad (2.3)$$

ซึ่ง u_k, v_k เป็นค่าจริงและเป็นฟังก์ชันคู่ (Even Function) และ

k_F เป็นเวกเตอร์คลื่นในเรคทิโปรคอลสเปซ (Reciprocal Space) ที่ระดับพลังงานเฟอร์มี

ทำการนอร์มอลไลต์ (Normalized) ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น จะได้

$$\langle \psi_s | \psi_s \rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2) = 1 \quad \text{เมื่อ } u_k^2 + v_k^2 = 1 \text{ สำหรับค่า } k \text{ ใด ๆ} \quad (2.4)$$

$$\text{ให้} \quad C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ = a_k + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k) \quad (2.5)$$

$$C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} = a_k + (C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} - a_k) \quad (2.6)$$

โดย $(C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวน (Fluctuation Operator)

a_k เป็นค่าคาดหวังที่จะพบคู่คูเปอร์ที่สถานะพื้น

$C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+$ เป็นตัวดำเนินการสร้างคู่คูเปอร์

$C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}$ เป็นตัวดำเนินการทำลายคู่คูเปอร์ให้แตกออก

$$a_k = \langle \psi_s | C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ | \psi_s \rangle = \langle \psi_s | C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} | \psi_s \rangle = u_k v_k \quad (2.7)$$

จากคุณสมบัติสลับที่การบวก (Anticommutate) คือ

$$\begin{aligned} \{C_{k\sigma}, C_{k'\sigma'}\} &= \{C_{k\sigma}^+, C_{k'\sigma'}^+\} = 0 \\ \{C_{k\sigma}, C_{k'\sigma'}^+\} &= \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'} \end{aligned} \quad (2.8)$$

นำตัวดำเนินการจากสมการ (2.5) และ (2.6) แทนลงในสมการ (2.1) จะได้ ฮามิลโทเนียน H_{BCS} เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} H_{BCS} &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} [a_k + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)] [a_{k'} + (C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'})] \\ &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} (a_k C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} + a_{k'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k a_{k'}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

โดยให้ตัวดำเนินการแปรปรวน $(C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)$ มีค่าน้อย ๆ และนิยามค่าพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน Δ_k เป็น

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} a_{k'} = - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} \quad (2.10)$$

สามารถเขียนสมการฮามิลโทเนียนใหม่ H_{BCS} ในรูปของ Δ_k ได้

$$H_{BCS} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_k \Delta_k [C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}] + \sum_k \Delta_k u_k v_k \quad (2.11)$$

ใช้การแปลงแบบโบโกลิบอฟ-วาลาติน (Bogoliubov - Valatin Transform) ให้

$$\begin{aligned} C_{k\uparrow} &= u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow}^+ , & C_{-k\downarrow} &= u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{k\uparrow}^+ \\ C_{k\uparrow}^+ &= u_k \gamma_{k\uparrow}^+ + v_k \gamma_{-k\downarrow} , & C_{-k\downarrow}^+ &= u_k \gamma_{-k\downarrow}^+ - v_k \gamma_{k\uparrow} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ขณะที่ การแปลงย้อนกลับ (Inverse Transform) จะเป็น

$$\begin{aligned}\gamma_{k\uparrow} &= u_k C_{k\uparrow} - v_k C_{-k\downarrow}^+ , & \gamma_{-k\downarrow} &= u_k C_{-k\downarrow} + v_k C_{k\uparrow}^+ \\ \gamma_{k\uparrow}^+ &= u_k C_{k\uparrow}^+ - v_k C_{-k\downarrow} , & \gamma_{-k\downarrow}^+ &= u_k C_{-k\downarrow}^+ + v_k C_{k\uparrow}\end{aligned}\quad (2.13)$$

โดย γ^+ เป็นตัวดำเนินการสร้างใหม่ โดยเป็นเฟอร์มิออน ที่มีแอมพลิจูด u_k
 γ เป็นตัวดำเนินการทำลายใหม่ โดยเป็นเฟอร์มิออน ที่มีแอมพลิจูด v_k
 และ จะได้สมบัติสลับที่การบวก (Anticommutate) คือ

$$\begin{aligned}\gamma_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}^+ &= 1 - \gamma_{k\uparrow}^+\gamma_{k\uparrow} , & \gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow}^+ &= 1 - \gamma_{-k\downarrow}^+\gamma_{-k\downarrow} \\ \gamma_{k\downarrow}\gamma_{k\downarrow}^+ &= -\gamma_{k\downarrow}^+\gamma_{k\downarrow} , & \gamma_{k\uparrow}^+\gamma_{k\downarrow} &= -\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\uparrow}^+\end{aligned}\quad (2.14)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} &= (u_k \gamma_{k\uparrow}^+ + v_k \gamma_{-k\downarrow})(u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow}^+) \\ &= u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow}^+ \\ &= u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}) \\ &= u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 - v_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}\end{aligned}\quad (2.15)$$

และ

$$\begin{aligned}C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} &= (u_k \gamma_{-k\downarrow}^+ - v_k \gamma_{k\uparrow})(u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{k\uparrow}^+) \\ &= u_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - u_k v_k (\gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow}^+) + v_k^2 \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\uparrow}^+ \\ &= u_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - u_k v_k (\gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow}^+) + v_k^2 (1 - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) \\ &= u_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - u_k v_k (\gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow}^+) + v_k^2 - v_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}\end{aligned}\quad (2.16)$$

และ

$$\begin{aligned}C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ &= (u_k \gamma_{k\uparrow}^+ + v_k \gamma_{-k\downarrow})(u_k \gamma_{-k\downarrow}^+ - v_k \gamma_{k\uparrow}) \\ &= u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}^+ - u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) - v_k^2 \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow}\end{aligned}\quad (2.17)$$

และ

$$\begin{aligned}C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} &= (u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{k\uparrow}^+)(u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow}^+) \\ &= u_k^2 \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow}^+ - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) - v_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}^+\end{aligned}\quad (2.18)$$

แทนด้วยสมการ (2.15) และสมการ (2.16) ลงในเทอมแรกของสมการ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} &= \sum_k \varepsilon_k \left[u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}) + v_k^2 (1 - \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow}) \right] \\ &\quad + u_k^2 \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow} - u_k v_k (\gamma_{k\downarrow} \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow}^+) + v_k^2 - v_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} \\ &= \sum_k \varepsilon_k \left[2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) + 2u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

แทนสมการ (2.17) และ (2.18) ในเทอมที่สองด้านขวาของสมการ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_k \Delta_k [C_{k\uparrow}^+ C_{k\downarrow}^+ + C_{k\downarrow} C_{k\uparrow}] &= \sum_k \Delta_k \left[u_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ - u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} - \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow}) - v_k^2 \gamma_{k\downarrow} \gamma_{k\downarrow} \right] \\ &\quad + u_k^2 \gamma_{k\downarrow} \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma_{k\downarrow} \gamma_{k\downarrow}^+ - \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow}^+) - v_k^2 \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} \\ &= \sum_k \Delta_k \left[2u_k v_k - 2u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow}) + (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

แทนสมการ (2.19) และสมการ (2.20) ลงในสมการ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} H_{\text{BCS}} &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_k \varepsilon_k \left[2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) + 2u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}) \right] \\ &+ \sum_k \Delta_k \left[2u_k v_k - 2u_k v_k (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\downarrow}^+ \gamma_{k\downarrow}) + (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}) \right] \\ &+ \sum_k \Delta_k \langle C_{k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \end{aligned} \right\} \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\sum_k \left[\varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2\Delta_k u_k v_k \right] [\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{k\downarrow}] \\ &+ \sum_k \left[2\varepsilon_k u_k v_k - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) \right] [\gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\downarrow} + \gamma_{k\downarrow} \gamma_{k\uparrow}] \\ &+ \sum_k \left[2\varepsilon_k v_k^2 - 2\Delta_k u_k v_k \right] + \sum_k \Delta_k \langle C_{k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

จากเงื่อนไขตามสมการ (2.8) และเทอมที่สองของสมการ (2.21) เป็นศูนย์ คือ

$$2\varepsilon_k u_k v_k - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) = 0 \quad (2.22)$$

เขียนแฮมิลโทเนียนใหม่ได้เป็น

$$H_{\text{BCS}} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_k [\varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2\Delta_k u_k v_k] [\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{-k\downarrow}^\dagger + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}] \\ + \sum_k [2\varepsilon_k v_k^2 - 2\Delta_k u_k v_k] \\ + \sum_k \Delta_k \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

พลังงานที่สถานะพื้นของตัวนำยวดยิ่ง W_S จะเป็นดังสมการ (2.24) แล้วแทนด้วยสมการ (2.10) จะได้ดังนี้

$$W_S = \langle \Psi_S | H_{\text{BCS}} | \Psi_S \rangle = 2 \sum_k \varepsilon_k v_k^2 + 2 \sum_{kk'} V_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \quad (2.24)$$

$$= \sum_k (2\varepsilon_k v_k^2 - 2\Delta_{k'} u_k v_k) \quad (2.25)$$

จากนิยามค่าพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงาน Δ_k ตามสมการ (2.10)

แทนค่า $u_k = \sin\theta_k$ และ $v_k = \cos\theta_k$ ในรูปเชิงขั้ว ซึ่งจะได้ $u_k^2 + v_k^2 = 1$ ทำให้

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad \text{และ} \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (2.26)$$

แทนสมการ (2.26) ลงในสมการ (2.25) จะได้สมการช่องว่างพลังงาน

$$\begin{aligned} \Delta_k &= -\frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} \\ &= -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

เมื่อ $E_{k'} = \sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}$ เป็นพลังงานของคูคูเปอร์ที่บริเวณผิวเฟอร์มี

แทนสมการ (2.26) ลงในเทอมแรกทางขวาของสมการ (2.21) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2\Delta_k u_k v_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2} \quad (2.28)$$

แทนสมการ (2.24) และสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.23) จะได้

$$H_{\text{BCS}} = \sum_k \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2} [\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{-k\downarrow}^\dagger + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}] + W_S + \sum_k \Delta_k \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \quad (2.29)$$

สมการของช่องว่างพลังงาน

$$\begin{aligned}
 \Delta_k \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle &= \Delta_k \langle (u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{k\uparrow}^+) (u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow}^+) \rangle \\
 &= \Delta_k \langle u_k v_k \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow}^+ - u_k v_k \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} \rangle \\
 &= \Delta_k u_k v_k \langle (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}) - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} \rangle \\
 &= \Delta_k u_k v_k ((1 - f_{k\sigma}) - f_{k\sigma}) \\
 &= \Delta_k u_k v_k (1 - 2f_{k\sigma}(E_k))
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

โดย $f_{k\sigma} = \frac{1}{\exp(\beta E_k) + 1}$ เป็นไปตามกฎการแจกแจงของเฟอร์มี-ดิแรก

$$W_k = \Delta_k \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle = \frac{\Delta}{2E_k} \tanh \frac{1}{2} (\beta E_k) \tag{2.31}$$

แทนสมการ (2.31) ลงในสมการ (2.25) จะได้สมการช่องว่างพลังงานเป็น

$$\begin{aligned}
 \Delta_k &= - \sum_{k'} V_{kk'} \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \\
 &= - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f(E_{k'})) \\
 &= - \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} \tanh \frac{\beta \sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}{2}, \quad \beta = \frac{1}{T}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

กำหนดให้

$$V_{kk'} = \begin{cases} V_0 & \text{เมื่อ } |\varepsilon_k| \leq h\omega_D \\ 0 & \text{เมื่อ } \varepsilon_k \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta(0) & \text{เมื่อ } |\varepsilon_k| \leq h\omega_D \\ 0 & \text{เมื่อ } |\varepsilon_k| \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดย ω_D เป็นความถี่ตัดออฟของเดอบาย (Debye Cut-Off Frequency)

V_0 เป็นแรงดึงดูดอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่อุณหภูมิศูนย์องศาสมบูรณ์

$\Delta_0(0)$ เป็นช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาสมบูรณ์

แทนเงื่อนไขดังกล่าวลงในสมการ (2.32) แล้วเปลี่ยน \sum_k เป็น $\int N(0) d\varepsilon$ โดย $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงานที่มีค่าคงตัว

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2(T)}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2(T)}}{2T} \quad (2.33)$$

พิจารณา ที่ $T = T_C$ ช่องว่างพลังงานจะเป็น $\Delta_0(T_C) = 0$ แทนค่าในสมการ (2.33)

$$\frac{1}{N(0)V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tanh \left(\frac{\varepsilon}{2T_C} \right)$$

กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$ และ $dx = \frac{d\varepsilon}{2T_C}$ ขณะที่ $\lambda = N(0)V_0$ เป็นค่าคงตัวของการคู่ควบ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{dx}{x} \tanh x$$

ทำการอินทิเกรตแบบแยกส่วน จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \tanh x \ln x \Big|_0^{\omega_D/2T_C} - \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{\ln x}{\cosh^2 x} dx \\ &= \tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \right) \ln \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \right) - \ln \left(\frac{\pi}{4e^\gamma} \right) \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $\frac{\omega_D}{2T_C} \rightarrow \infty$ จะทำให้ $\tanh \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \right) = 1$ ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \ln \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \cdot \frac{4e^\gamma}{\pi} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1.13\omega_D}{T_C} \right) \end{aligned}$$

จาก $\left(\frac{2e^\gamma}{\pi} \right) = 1.13$ เมื่อ $\gamma = 0.57721566\dots$

$$-\frac{1}{\lambda} = \ln \left(\frac{T_C}{1.13\omega_D} \right)$$

$$T_C = 1.13\omega_D e^{\frac{1}{\lambda}}$$

(2.34)

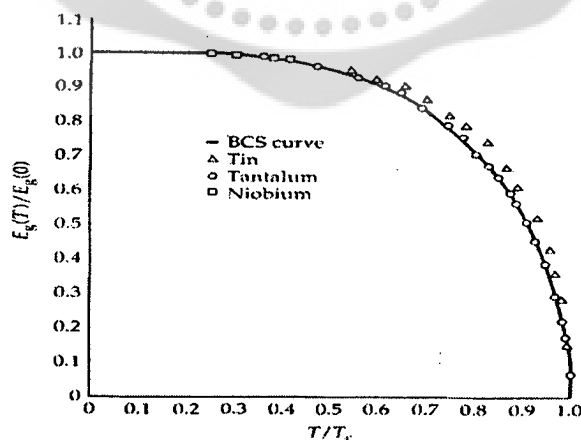
สมการ (2.34) เป็นสมการของอนุกรมวิกรมตามทฤษฎีบีซีเอส จะเห็นว่า T_c แปรผันตาม ω_D และขึ้นกับ λ ตามทฤษฎีบีซีเอส จะใช้อธิบายสมการของอนุกรมวิกรมได้ดี เมื่อ $\lambda < 1$ หมายถึงค่าคงตัวของการคู่ควบแบบอ่อน (Weak Coupling) และ เมื่อ $\lambda > 1$ จัดเป็นค่าคงตัวของการคู่ควบแบบแข็ง (Strong Coupling) ซึ่งไม่สามารถใช้ทฤษฎีบีซีเอสอธิบายได้

พิจารณา ที่ $T = 0$ K ค่า $\tanh(\infty) = 1$ สมการ (2.33) จะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2(0)}} \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\Delta_0(0)} \right) \Bigg|_0^{\omega_D} \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_0(0)} \right) \end{aligned}$$

ใช้การประมาณ $\sinh^{-1}x \approx \ln(2x)$ โดย $x \gg 1$ และเนื่องจาก $\omega_D > \Delta_0(0)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \ln \left(\frac{2\omega_D}{\Delta_0(0)} \right) \\ -\frac{1}{\lambda} &= \ln \left(\frac{\Delta_0(0)}{2\omega_D} \right) \\ \Delta_0(0) &= 2\omega_D \exp \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$



ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta(T)/\Delta(0)$ และ T/T_c โดยเปรียบเทียบกับ

ทฤษฎีบีซีเอส (เส้นทึบ) กับผลการทดลอง Δ (ติบุก) \circ (แทนทาลัม) \square (ไนโอเบียม)

ที่มา: Büchel. (1991). *Superconductivity*. p.65.

นำสมการ (2.35) คูณด้วย 2 แล้วหารด้วยสมการ (2.34) จะได้

$$R = \frac{2\Delta(0)}{T_c} = 3.53 \quad (2.36)$$

ความสัมพันธ์ (2.36) เป็นสมการของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ที่ยอมรับกันว่า เป็นค่าคงตัวที่เป็นจริงสำหรับตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิมทุกชนิด (Conventional Superconductors)

การคำนวณหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน

ในปี พ.ศ. 2536 เจดีโน เดอลาโน และ รูบีโอ (Getino, de Llano, & Rubio. 1993 : 597) ได้คำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤตแบบแม่นยำและใกล้เคียงกับค่าแม่นยำ มีช่องว่างพลังงานที่อุณหภูมิศูนย์องศาสมบูรณ์ $\Delta(0)$ จากการคำนวณ ดังนั้น R เป็นค่าที่ได้จากการ ศึกษาขยายขอบเขตโดยการพิสูจน์สมการช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตอย่างแม่นยำ และคำนวณค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตแบบแม่นยำ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และใช้ความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบแวนโฮฟ ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง คำนวณจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(T)}}{2T}\right)}{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(T)}} dE \quad (2.37)$$

โดย V เป็นพลังงานศักย์ของการจับคู่ของอิเล็กตรอน (Coupling Potential)
 N(E) เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงาน (Density of States)
 E_F เป็นพลังงานเฟอร์มี (Fermi Energy)

สำหรับความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบแวนโฮฟ จะอยู่ในรูป

$$N(E) = N(0) \ln \left| \frac{E_F}{E - E_F} \right| \quad (2.38)$$

จาก $\varepsilon = \sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(T)}$ และแทนสมการ (2.38) ลงในสมการ (2.37) จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (2.39)$$

โดย $\varepsilon = E - E_F$

พิจารณา ที่ $T = T_C$, $\Delta(T) = 0$ และใช้การประมาณ สำหรับ $\tanh x = 1$ เมื่อ $x \gg 1$ และ $\tanh x = x$ เมื่อ $x \ll 1$ จะได้ $\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) = 1$ สมการจะได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{2}{N(0)V} &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \\ &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.40)$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $R = 2\Delta(0)/T_C$ จะได้ $\Delta(0) = RT_C/2$ แทนลงในสมการ (2.40) เขียนใหม่ได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{RT_C}{2}\right)^2}} d\varepsilon \quad (2.41)$$

ให้สมการที่ (2.39) เท่ากับสมการที่ (2.41) จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{RT_C}{2}\right)^2}} d\varepsilon \quad (2.42)$$

โดย $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{2T_C}$ แทนลงทางด้านซ้ายของสมการที่ (2.42)

และ $x = \frac{\varepsilon}{\Delta(0)}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{\Delta(0)}$ แทนลงทางด้านขวาของสมการที่ (2.42)

จะเขียนสมการที่ (2.42) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{\tanh x}{x} \ln \left| \frac{E_F}{2xT_C} \right| dx - \int_0^{2\omega_D/RT_C} \frac{\ln \left| \frac{2E_F}{RT_C} \right|}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= 0 \\ \ln \left| \frac{E_F}{2T_C} \right| \left\{ I_1(\omega_D, T_C) - \sinh^{-1}\left(\frac{2\omega_D}{RT_C}\right) - I_2(\omega_D, T_C) + (\omega_D, T_C, R) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } I_1(\omega_D, T_C) &= \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{dx}{x} \tanh x \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{(2n+1)\pi T_C} \right) \end{aligned}$$

$$I_2(\omega_D, T_C) = \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{dx}{x} \ln x \tanh x$$

$$= \ln \left(\frac{\omega_D}{T_C} \right) I_1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{2k!}{(2n+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2} \left\{ K - \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{(2k-2\ell+1)} \tanh(2k-2\ell+1)K \right\}$$

$$\text{เมื่อ } K = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{(2n+1)\pi T_C} \right)$$

$$\begin{aligned} I_2(\omega_D, T_C, R) &= \int_0^{2\omega_D/RT_C} dx \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= x \ln \left| \frac{E_F}{8} \right| + \frac{1}{2} \text{Li}_2[\exp(-2x)] + \frac{1}{2} x^2 - \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \text{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \text{ เป็นค่า Euler Dilogarithmic Function อันดับสอง}$$

(ภาคผนวก ข-1)

$$x = \sinh^{-1} \left(\frac{2\omega_D}{RT_C} \right) \approx \ln \left(\frac{4\omega_D}{RT_C} \right)$$

$$R = \frac{4E_F}{T_C} \exp \left\{ -\sqrt{\ln^2 \left(\frac{E_F}{2T_C} \right) - 2I_2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \right) + 2 \ln \left(\frac{T_F}{2T_C} \right) \left[I_1 - \ln \left(\frac{\omega_D}{2T_C} \right) \right]} \right\}$$

(2.43)

ตาราง 3 แสดงอัตราส่วนของช่องพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของ La-Sr-Cu-O และ Y-Ba-Cu-O

| T_c (K) | θ_D (K) | T_F (K) | $2\Delta(0)/k_B T_c$ |
|--------------------|----------------|-----------|----------------------|
| 40 (La-Sr-Cu-O) | 400 | 5548 | 3.64 |
| | 500 | 5548 | 3.66 |
| | 754 | 5580 | 3.53 |
| 90 (Y-Ba-Cu-O) | 300 | 8807 | 3.60 |
| | 400 | 8807 | 3.63 |
| | 754 | 8807 | 3.68 |

ที่มา: Getino, de Llano, & Rubio. (1993). *Physical Review B*. 48(1) : 598.

ในปี พ.ศ. 2539 รัตนบุรี อุดมสมุทรศิริ และยกसान (Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yoksan. 1996 : 485) ได้ศึกษาหาอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ($R = 2\Delta(0)/T_c$) ในตัวนำยิ่งยวดชนิดอุณหภูมิสูงที่มีความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามแบบของแวนโฮฟ (Van Hove Singularity Density of States) ภายใต้ขอบเขตของทฤษฎีบีซีเอส หาค่าของอินทิกรัลของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) อย่างแม่นยำ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข การคำนวณเริ่มจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส (BCS gap equation)

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(T)}}{2T_c}\right)}{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(T)}} dE \quad (2.44)$$

โดย V เป็นพลังงานศักย์ของการจับคู่ของอิเล็กตรอน (Coupling Potential)
 $N(E)$ เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงาน (Density of States)
 E_F เป็นพลังงานเฟอร์มี (Fermi Energy)

สำหรับความหนาแน่นสถานะความหนาแน่นแบบแวนโฮฟ จากสมการ (2.38) ในสมการที่ (2.37)

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{\omega_D}^{\omega_D} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) \ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (2.45)$$

โดย $\varepsilon = E - E_F$

พิจารณา ที่ $T = T_C$, $\Delta(T) = 0$ และ $\varepsilon = \sqrt{(E - E_F)^2 + \Delta^2(T)}$ สมการจะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{2}{N(0)V} &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \\ \frac{2}{N(0)V} &= \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.46)$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $R = 2 \Delta(0)/T_C$ จะได้ $\Delta(0) = RT_C/2$ แทนลงในสมการ (2.46) เขียนใหม่ได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{RT_C}{2}\right)^2}} d\varepsilon \quad (2.47)$$

ให้สมการที่ (2.45) เท่ากับสมการที่ (2.47) จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) \ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right| \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F}{\varepsilon} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{RT_C}{2}\right)^2}} d\varepsilon \quad (2.48)$$

กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{2T_C}$ แทนลงในด้านซ้ายของสมการที่ (2.48)

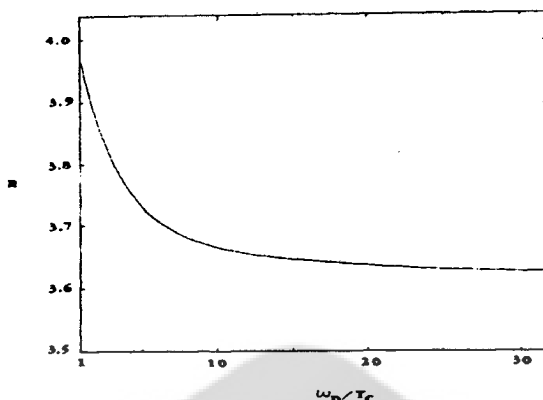
และ $x = \frac{\varepsilon}{\Delta(0)}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{\Delta(0)}$ แทนลงในด้านขวาของสมการที่ (2.48)

จะเขียนสมการที่ (2.48) ใหม่ได้ดังนี้

$$\int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{\tanh x}{x} \ln \left| \frac{E_F}{2xT_C} \right| dx = \int_0^{2\omega_D/RT_C} \frac{\ln \left| \frac{2E_F}{RT_C} \right|}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (2.49)$$

ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคำนวณหาค่า R จากสมการที่ (2.40) สำหรับตัวนำวดยิ่ง ซึ่งได้ให้ข้อสังเกตสำหรับค่า E_F คงที่ ค่า ω_D/T_C ที่มากกว่าจะให้ค่า R ที่ลดต่ำลง แต่สำหรับงานวิจัยนี้คำนวณหาค่า R โดยใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานแบบแวนโฮฟ พบว่าค่าอัตราส่วน

ช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) จะลดลง ขณะที่ค่า ω_D/T_C เพิ่มขึ้น และมีความโน้มเอียงเข้าสู่ทฤษฎีบีซีเอส สำหรับค่า ω_D/T_C ที่สูง ๆ ตามภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับอัตราส่วนของ ω_D/T_C

ที่มา: Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yoksan. (1996, March). *Journal Of Superconductivity*. 9(5) : 486.

ในปี พ.ศ. 2534 แมททีส และ โมลิน่า (Mattis, & Molina. 1991 : 12565) ได้คำนวณหาค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต โดยใช้สมการอินกรัลแบบมีขอบเขตจำกัด โดยใช้ความหนาแน่นสถานะพลังงานในรูป $N(\epsilon) = A|\epsilon|^\alpha$ โดย A เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ α มีค่าอยู่ในช่วง $-1 < \alpha < 1$ และให้ $\epsilon(k) = E_k - E_F$ และพบว่าเมื่อค่า α มีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานมีค่าลดลง การคำนวณเริ่มต้นจากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส

เมื่อ $T = T_C$, $\Delta(T) = 0$ จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(E-E_F) \tanh\left(\frac{E-E_F}{2T_C}\right)}{E-E_F} d\epsilon \quad (2.50)$$

ที่ $T = 0$, $\tanh \infty = 1$ จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(E-E_F)}{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(0)}} d\epsilon \quad (2.51)$$

ให้สมการ (2.50) เท่ากับสมการ (2.51) จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(E-E_F) \tanh\left(\frac{E-E_F}{2T_C}\right)}{E-E_F} d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(E-E_F)}{\sqrt{(E-E_F)^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon \quad (2.52)$$

ให้ $\varepsilon = E - E_F$ จะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(\varepsilon) d\varepsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon)^2 + \Delta^2(0)}} - \frac{1}{\varepsilon} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) \right\} = 0 \quad (2.53)$$

แทนความหนาแน่นสถานะพลังงาน $N(\varepsilon) = A|\varepsilon|^\alpha$ ลงในสมการ (2.52)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A|\varepsilon|^\alpha}{\sqrt{(\varepsilon)^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A|\varepsilon|^\alpha}{\varepsilon} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) d\varepsilon \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^\alpha}{\sqrt{1 + \frac{\Delta^2(0)}{\varepsilon^2}}} d\varepsilon &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^\alpha}{\varepsilon} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.54)$$

กำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{2T_C}$ แทนลงทางด้านขวาของสมการที่ (2.54)

และ $x = \frac{\varepsilon}{\Delta(0)}$, $dx = \frac{d\varepsilon}{\Delta(0)}$ แทนลงทางด้านซ้ายของสมการที่ (2.54)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta(0)}{\Delta(0)} |\Delta(0)x|^\alpha \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2T_C}{2T_C} x^{-1} (2T_C x)^\alpha \tanh x dx$$

$$\Delta^\alpha(0) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dx = (2T_C)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1+\alpha} \tanh x dx$$

$$R^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dx = 4^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1+\alpha} \tanh x dx$$

$$R^\alpha = \frac{4^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^{-1+\alpha} \tanh x dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dx}$$

$$R = 4 \left(\frac{\int_0^{\infty} x^{-1+\alpha} \tanh x \, dx}{\int_0^{\infty} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.55)$$

สำหรับกรณี $\alpha < 0$ สมการที่ (2.55) จะเป็น

$$R = 4 \left(\frac{\int_0^{\infty} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^{\infty} x^{-1+\alpha} \tanh x dx} \right)^{\frac{1}{-\alpha}} \quad (2.56)$$

สำหรับกรณี $\alpha > 0$ จากสมการ (2.54) จะได้

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varepsilon|^\alpha d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) - 1 - \left[1 + \frac{\Delta^2(0)}{\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} = 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{|\varepsilon|^\alpha}{\varepsilon} \left(1 - \left[1 + \frac{\Delta^2(0)}{\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} \right) d\varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{|\varepsilon|^\alpha \left(1 - \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right) \right)}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.57)$$

แทนสมการที่ (2.57) ทางซ้ายด้วย $x = \frac{\varepsilon}{\Delta(0)}$ ได้ $dx = \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon$

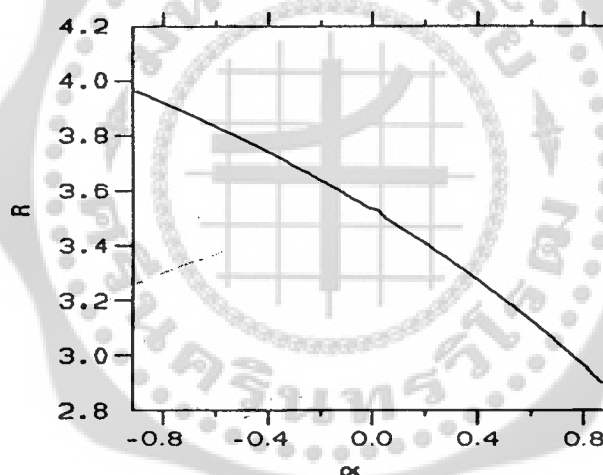
แทนสมการที่ (2.57) ทางขวาด้วย $x = \frac{\varepsilon}{2T_c}$ ได้ $dx = \frac{1}{2T_c} d\varepsilon$

$$\int_0^{\infty} \frac{\Delta^\alpha(0) |x|^\alpha \Delta(0)}{x \Delta(0)} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{|2T_c x|^\alpha (1 - \tanh x)}{2T_c x} 2T_c dx$$

$$R^\alpha \int_0^\infty x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx = 4^\alpha \int_0^\infty x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx$$

$$R^\alpha = \frac{4^\alpha \int_0^\infty x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx}{\int_0^\infty x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx}$$

$$R = 4 \left(\frac{\int_0^\infty x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx}{\int_0^\infty x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.58)$$



ภาพประกอบ 12 แสดงอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ α ที่มา: Mattis, & Molina. (1991). *Physical Review B*. p.12565.

อุดมสมุทหิรัญ รัตน์บุรี และยกसान (Udomsamuthirun, Ratanaburi, & Yoksan. 1996 : 603) ได้ศึกษาหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต $2\Delta(0)/T_c$ ในสถานะนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอส โดยแสดงการคำนวณเชิงตัวเลขของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ซึ่งใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานในรูป $|A|e^\alpha$ เมื่อ A และ α เป็นโมเดลพารามิเตอร์ (Model Parameter) พบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) เลื่อนขึ้นเล็กน้อย และยังพบอีกว่าค่าขอบเขตของการอินทิเกรตแบบจำกัดจะให้ค่า R ที่สูงกว่าที่คำนวณได้ตามทฤษฎีบีซีเอส แสดงการคำนวณโดยเริ่มจากสมการ (2.41) และสมการ (2.42) ได้ดังนี้

เมื่อ $T = 0$ สมการช่องว่างพลังงาน (2.51) จะเป็น $\Delta(T) = \Delta(0)$ จะได้สมการเป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E)}{\sqrt{(E)^2 + \Delta^2(0)}} dE$$

เมื่อ $T = T_C$ จากสมการช่องว่างพลังงาน (2.50) จะเป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{E}{2T_C}\right)}{E} dE$$

ใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานในรูป

$$N(E) = A|E|^\alpha \quad (2.59)$$

โดย

A เป็นค่าคงตัวใด ๆ

α เป็นค่าพารามิเตอร์ตามแบบจำลอง มีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1

จากสมการที่ (2.44) แทนด้วยความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามสมการที่ (2.46) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} &= \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{A|E|^\alpha}{\sqrt{(E)^2 + \Delta^2(0)}} dE \\ &= \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} A|E|^\alpha \left[1 + \frac{\Delta^2(0)}{E^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dE \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\text{กำหนดให้ } x = \frac{E}{\Delta(0)} \quad \text{ได้ } dx = \frac{dE}{\Delta(0)} \quad (2.61)$$

แทนสมการที่ (2.48) ลงในสมการที่ (2.47) จะได้

$$\frac{2}{V} = A\Delta^\alpha(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2.62)$$

$$\text{กำหนดให้ } R = \frac{2\Delta(0)}{T_C} \quad \text{ได้ } \Delta(0) = \frac{RT_C}{2} \quad \text{แทนในสมการที่ (2.49)}$$

$$\frac{2}{V} = A \left(\frac{RT_C}{2} \right)^\alpha \int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.63)$$

จากสมการที่ (2.50) แทนด้วยความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามสมการที่ (2.59) จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{A |\epsilon|^\alpha \tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_C}\right)}{\epsilon} d\epsilon \quad (2.64)$$

กำหนดให้ $x = \frac{\epsilon}{2T_C}$ ได้ $dx = \frac{d\epsilon}{2T_C}$ (2.65)

แทนค่าในสมการที่ (2.64) ได้

$$\begin{aligned} \frac{2}{V} &= A \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{2T_C}{2T_C} x^{-1} (2T_C x)^\alpha \tanh x dx \\ &= A (2T_C)^\alpha \int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx \end{aligned} \quad (2.66)$$

สมการที่ (2.63) เท่ากับสมการที่ (2.66) จะได้

$$\begin{aligned} R^\alpha \int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx &= 4^\alpha \int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx \\ R^\alpha &= \frac{4^\alpha \int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx}{\int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx} \\ R &= 4 \left(\frac{\int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx}{\int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

สำหรับกรณี $\alpha < 0$ สมการที่ (2.67) จะเป็น

$$R = 4 \left(\frac{\int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx} \right)^{\frac{1}{|\alpha|}}$$

$$R = 4 \left(\frac{\int_{-\omega_D}^{\omega_D} |x|^{-1+\alpha} \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} \tanh x dx} \right)^{\frac{1}{|\alpha|}} \quad (2.68)$$

สำหรับกรณี $\alpha > 0$ ให้สมการที่ (2.60) เท่ากับสมการที่ (2.64)

$$\int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{A |\varepsilon|^\alpha}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\Delta^2(0)}{\varepsilon^2} \right]^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{A |\varepsilon|^\alpha \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{|\varepsilon|^\alpha}{\varepsilon} \left(1 - \left[1 + \frac{\Delta^2(0)}{\varepsilon^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) d\varepsilon = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{|\varepsilon|^\alpha \left(1 - \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_C}\right) \right)}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.69)$$

แทนสมการที่ (2.69) ทางซ้ายด้วย $x = \frac{\varepsilon}{\Delta(0)}$ ได้ $dx = \frac{1}{\Delta(0)} d\varepsilon$

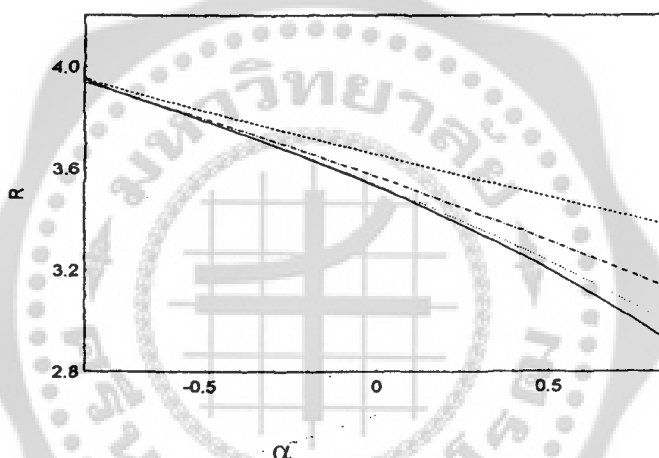
แทนสมการที่ (2.69) ทางขวาด้วย $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$ ได้ $dx = \frac{1}{2T_C} d\varepsilon$

$$\int_0^{2\omega_D/RT_C} \frac{\Delta^\alpha(0) |x|^\alpha \Delta(0)}{x \Delta(0)} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{|2T_C x|^\alpha (1 - \tanh x)}{2T_C x} 2T_C dx$$

$$\left(\frac{RT_C}{2} \right)^\alpha \int_0^{2\omega_D/RT_C} x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx = (2T_C)^\alpha \int_0^{\omega_D/2T_C} x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx$$

$$R^\alpha = \frac{4^\alpha \int_0^{\omega_D/2T_c} x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx}{\int_0^{2\omega_D/RT_c} x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx}$$

$$R = 4 \left(\frac{\int_0^{\omega_D/2T_c} x^{-1+\alpha} (1 - \tanh x) dx}{\int_0^{2\omega_D/RT_c} x^{-1+\alpha} \left(1 - \left[1 + \frac{1}{x^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) dx} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.70)$$



ภาพประกอบ 13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ α เส้น (——) แมททีสและโมลิน่า $\omega_D/T_c \rightarrow \infty$, (-----) $\omega_D/T_c = 754/90$, (.....) $\omega_D/T_c = 754/40$ และ (-.-.-.-) $\omega_D/T_c = 400/90$

ที่มา: Udomsamuthirun, Ratanaburi, & Yoksan. (1996, June). *Journal Of Superconductivity*. 9(6) : 603.

ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคำนวณหาค่า R จากสมการที่ (2.68) และสมการที่ (2.70) แสดงความสัมพันธ์ในกราฟรูป 13 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ α จากกราฟทำให้ทราบว่าขอบเขตบนของการอินทิเกรตมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงค่า R และพบว่าค่า ω_D/T_c ที่กว้างจะทำให้ค่า R มีค่าลดลง ซึ่งสอดคล้องกับการคำนวณหาค่า R ของรัตนบุรี (Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yoksan. 1996 : 485) งานวิจัยนี้ให้ข้อสังเกตว่าที่ $\alpha=0$ (ความหนาแน่นสถานะมีค่าคงตัว) ค่าของ R จากงานวิจัยนี้มีค่ามากกว่าทฤษฎีบีซีเอส

งานวิจัยนี้ได้ปรับปรุงการคำนวณหาค่า R ของแมททีสและโมลิน่า โดยแสดงค่าความถี่ขีดจำกัดที่เหมาะสม พบว่าค่า ω_D/T_c ที่น้อยลงทำให้ค่า R เพิ่มขึ้น เนื่องจากว่าค่า ω_D/T_c ที่ลดลงมี

ผลต่อค่ายังผลของบริเวณความหนาแน่นสถานะพลังงาน ดังนั้นค่า R จะมากขึ้น ซึ่งมากกว่าที่แสดงด้วยความหนาแน่นสถานะพลังงานในรูปยกกำลังใกล้เคียงกับผิวเฟอร์มี โดยทฤษฎีบีซีเอสแบบเดิมยังอธิบายค่า R ในช่วงสูง ๆ ผิดปกติไม่ได้

ในปี พ.ศ.2540 รัตนบุรี อุดมสมุทธีรวิญ และยกसान (Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yoksan. 1997 : 1) ได้ศึกษาหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิ-วิกฤต (R) ที่เป็นฟังก์ชันของการเลื่อนขึ้นจากระดับพลังงานเฟอร์มีสำหรับตัวนำวอดยิ่งที่มีความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบแวนโฮฟ เป็นฟังก์ชันที่มีการเลื่อนขึ้น (δ) ของระดับพลังงานเฟอร์มี พบค่า R ซึ่งไม่สมมาตรขึ้นกับ δ ที่เปลี่ยนแปลงอย่างมาก และเมื่อ $\delta=0$ จะอยู่ที่ระดับพลังงานเฟอร์มีคงที่ งานวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงตัวเลขแสดงค่า R ที่กว้างที่สุดเกิดขึ้นเมื่อ $\delta \neq 0$ การคำนวณเริ่มจากสมการ

เมื่อ $T=0$, $\Delta(T) = \Delta(0)$, $\tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_c}\right) = 1$ สมการช่องว่างพลังงาน (2.50) จะเป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E)}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\epsilon$$

กำหนดให้ V เป็นพลังงานศักย์ของการจับคู่ของอิเล็กตรอนคงที่
 $N(E)$ เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงาน

เมื่อ $T = T_c$ จะได้สมการช่องว่างพลังงาน (2.51) เป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_c}\right)}{\epsilon} d\epsilon$$

ใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานแบบแวนโฮฟ รูป 2 มิติ

$$N(E) = N(0) \ln \left| \frac{E_F + \delta}{E - (E_F - \delta)} \right| \quad (2.71)$$

โดย δ คือพลังงานที่เลื่อนไปจากระดับพลังงานเฟอร์มี

$N(0)$ คือความหนาแน่นสถานะของพลังงานที่ระดับผิวเฟอร์มีค่าคงตัว

แทนสมการที่ (2.71) ลงในสมการที่ (2.70) จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(0) \ln \left| \frac{E_F - \delta}{E - (E_F - \delta)} \right| \tanh \left(\frac{\varepsilon}{2T_C} \right)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\ln \left| \frac{E_F - \delta}{E - E_F + \delta} \right| \tanh \left(\frac{\varepsilon}{2T_C} \right)}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (2.72)$$

ถ้ากำหนดให้ $x = \frac{\varepsilon}{2T_C}$ ได้ $dx = \frac{d\varepsilon}{2T_C}$ (2.73)

แทนสมการที่ (2.51) ลงในสมการที่ (2.72) จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{-\omega_D/2T_C}^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{E_F - \delta}{\varepsilon + \delta} \right| \tanh x dx$$

$$= \int_{-\omega_D/2T_C}^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{E_F - \delta}{2T_C x + \delta} \right| \tanh x dx \quad (2.74)$$

แทนสมการที่ (2.50) ด้วยความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามสมการที่ (2.71) จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(0) \ln \left| \frac{E_F - \delta}{E - (E_F - \delta)} \right|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2(0)}} d\varepsilon \quad (2.75)$$

กำหนดให้ $\varepsilon = \frac{RT_C x}{2}$ ได้ $d\varepsilon = \frac{RT_C}{2} dx$

$$R = \frac{2\Delta(0)}{T_C}, \quad \Delta(0) = \frac{RT_C}{2}, \quad \varepsilon = E - E_F \quad (2.76)$$

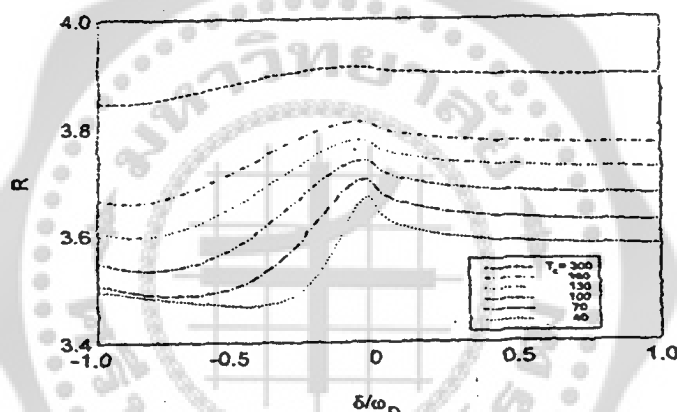
แทนสมการที่ (2.76) ลงในสมการที่ (2.77) จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_b^{2\omega_D/RT_C} \frac{\left(\frac{2}{RT_C} \right) \left(\frac{RT_C}{2} \right) \ln \left| \frac{E_F - \delta}{\left(\frac{RT_C x}{2} \right) + \delta} \right|}{\left(\frac{2}{RT_C} \right) \left(\frac{RT_C}{2} \right) \sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_b^{2\omega_D/RT_c} \frac{\ln \left| \frac{E_F - \delta}{\left(\frac{RT_c x}{2}\right) + \delta} \right|}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (2.77)$$

เนื่องจากสมการที่ (2.74) เท่ากับสมการที่ (2.77) จะได้

$$\int_b^{2\omega_D/RT_c} \frac{1}{x} \ln \left| \frac{E_F - \delta}{2T_c x + \delta} \right| \tanh x \, dx = \int_b^{2\omega_D/RT_c} \frac{\ln \left| \frac{E_F - \delta}{\left(\frac{RT_c x}{2}\right) + \delta} \right|}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad (2.78)$$



ภาพประกอบ 14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ($R=2\Delta(0)/T_c$) กับอัตราส่วนของ δ/ω_D

ที่มา: Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yokson. (1997). *Journal of Superconductivity*. 10(1) : 3.

คำนวณหาค่า R_{max} และ δ/ω_D โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจากสมการที่ (2.65) และสมการที่ (2.66) โดยเลือกค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการทดลอง ให้ข้อสังเกตว่าตรงจุดยอดของกราฟจะเป็นตำแหน่งของ R ที่เลื่อนขึ้น ซึ่งอยู่ในส่วนของการเจือสารเมื่อ T_c เพิ่มขึ้น สรุปได้ว่า ภายใต้ทฤษฎีบีซีเอส เราจะศึกษาผลของระดับพลังงานเฟอร์มิที่เลื่อนขึ้น โดยใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามแบบของแวนโฮฟ กับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต ซึ่งโดยทั่วไปค่า R จะมีค่ามากที่สุดเมื่อมีการเจือสารสูงสุด โดยเมื่อ $\delta \neq 0$ จะแสดงถึงความไม่สมมาตรของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่มีสารเจือ

ในปี พ.ศ. 2539 อุดมสมุทรหิรัญ ยกสันและไครสัน (Udomsamuthirun, Yokson, & Crison. 1997 : 189) ได้ศึกษาผลของการบิดเบี้ยวในตัวนำยิ่งยวดที่มีโครงสร้างผลึกแบบ

ออร์โทโรมบิก และการกระโดดของอิเล็กตรอนที่อยู่ใกล้เคียงซึ่งอยู่ในลำดับถัดไปลำดับที่สอง กับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต โดยใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานตามแบบของแวนโฮฟ พบว่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตจะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ของการกระโดดของอิเล็กตรอนและค่าพารามิเตอร์ของการบิดเบี้ยวของโครงสร้างผลึก โดยเฉพาะอย่างยิ่งได้แสดงให้เห็นการบิดเบี้ยวของโครงสร้างผลึกแบบออร์โทโรมบิก จะทำให้ค่า R เพิ่มขึ้น และการลดลงของจำนวนอิเล็กตรอนที่อยู่ใกล้เคียงถัดไปอันดับสอง ทำให้ค่า R ลดลงด้วย การคำนวณเริ่มจาก

เมื่อ $T = T_c$ สมการช่องว่างพลังงาน (2.50) จะเป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_c}\right)}{\epsilon} d\epsilon$$

พิจารณา เมื่อ $T = 0$ จะทำให้ $\Delta(T_c) = \Delta(0)$ สมการช่องว่างพลังงาน (2.51) จะเขียนได้เป็นดังนี้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E)}{\sqrt{(E)^2 + \Delta^2(0)}} d\epsilon$$

กำหนดให้ $R = \frac{2\Delta(0)}{T_c}$ จะได้ $\Delta(0) = \frac{RT_c}{2}$ แทนลงในสมการที่ (2.68) จะได้

$$\frac{2}{V} = \int_{E_F - \omega_D}^{E_F + \omega_D} \frac{N(E)}{\sqrt{(E)^2 + \left(\frac{RT_c}{2}\right)^2}} d\epsilon \quad (2.79)$$

สมการ (2.77) เท่ากับสมการ (2.79) จะได้

$$\int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{N(E) \tanh\left(\frac{\epsilon}{2T_c}\right)}{\epsilon} d\epsilon = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{N(E)}{\sqrt{(E)^2 + \left(\frac{RT_c}{2}\right)^2}} d\epsilon \quad (2.80)$$

งานวิจัยนี้คำนวณหาค่า R โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยใช้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานในรูป 2 มิติ เพื่อพิจารณาผลึกแบบออร์โทโรมบิกอย่างง่าย ๆ ของตัวนำยวดยิ่งชนิดอุณหภูมิสูงของคอปเปอร์ออกไซด์ (Cu-O) โดยโครงสร้างแถบพลังงานจะจำลองตามแบบของแถบพลังงานยึดเหนี่ยวแบบแน่น (The Tight Binding Energy) ดังนี้

$$E(k) = -2t\cos k_x - 2t_b\cos k_y + 4t_2\cos k_x\cos k_y - 2t'\cos k_z \quad (2.81)$$

โดย k_x, k_y, k_z เป็นมุมที่เกิดจากระนาบ k - space และ $r_1 = \frac{t_b}{t}$, $r_2 = \frac{2t_2}{t}$, $r' = \frac{t'}{t}$ แทนลงในสมการที่ (2.81) จะได้

$$\begin{aligned} E(k) &= -2t\cos k_x - 2tr_1\cos k_y + 2tr_2\cos k_x\cos k_y - 2tr'\cos k_z \\ &= 2t(-\cos k_x - r_1\cos k_y + r_2\cos k_x\cos k_y - r'\cos k_z) \end{aligned}$$

พิจารณาเพียงใน 2 มิติ จะเห็นว่า $k_z=0$, $r' \ll 1$ และ $v = \cos k_y$

$$\begin{aligned} W(k_x, k_y) &= -\cos k_x - r_1\cos k_y + r_2\cos k_x\cos k_y \\ &= -\cos k_x - r_1v + r_2v\cos k_x \end{aligned}$$

และ $E(k) = 2tW(k_x, k_y)$ (2.82)

ความหนาแน่นสถานะของพลังงานสำหรับอิเล็กตรอนจะอยู่ในแบบ 2 มิติ ในรูป(ภาคผนวก ข-7)

$$N(E) = \pi^2 \int_0^\pi dk_x \int_0^\pi dk_y \delta(E - 2tW(k_x, k_y)) \quad (2.83)$$

$$= \frac{1}{2t\pi^2} \int_0^\pi \frac{d\cos k_y}{\sqrt{\sin^2 k_y [(1-r_2v)^2 - (\varepsilon + r_1v)^2]}}$$

$$= \frac{1}{2t\pi^2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)((1-r_2v)^2 - (\varepsilon + r_1v)^2)}}$$

$$= \frac{1}{2t\pi^2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{\sqrt{(1-v)((-1)-v) \left(v - \frac{(1-\varepsilon)}{(r_1+r_2)} \right) \left(v - \frac{-(1+\varepsilon)}{(r_1+r_2)} \right)}} \quad (2.84)$$

กำหนดขอบเขตของการอินทิเกรต ดังนี้

$$v_2 = \min \left[1, \frac{(1-\varepsilon)}{(r_1+r_2)} \right] \quad \text{และ} \quad v_1 = \max \left[-1, \frac{-(1+\varepsilon)}{(r_1+r_2)} \right]$$

เงื่อนไข เมื่อ $v_1 = -1$, $v_2 = \frac{(1-\varepsilon)}{(r_1+r_2)}$ ขณะที่ $1+r_1+r_2 \geq \varepsilon \geq 1-r_1-r_2$

$$v_1 = -1, v_2 = 1 \quad \text{ขณะที่} \quad 1 - r_1 - r_2 \geq \varepsilon \geq -1 + r_1 - r_2$$

$$\text{และ} \quad v_2 = 1, v_1 = \frac{-(1-\varepsilon)}{(r_1+r_2)} \quad \text{ขณะที่} \quad -1 + r_1 - r_2 \geq \varepsilon \geq -1 - r_1 + r_2$$

เมื่ออินทิเกรตจะได้ความหนาแน่นสถานะของพลังงานในรูป

$$N(E) = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{r_1+r_2} \varepsilon} K \left[\frac{\sqrt{(1+r_1)^2 - (\varepsilon-r_2)^2}}{\sqrt{4(r_1+r_2)\varepsilon}} \right] \quad (2.85)$$

ขณะที่ $1+r_1+r_2 \geq \varepsilon \geq 1-r_1-r_2$ หรือ $-1+r_1-r_2 \geq \varepsilon \geq -1-r_1+r_2$

$$N(E) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(1+r_1)^2 - (\varepsilon-r_2)^2}} K \left[\frac{\sqrt{4(r_1+r_2)\varepsilon}}{\sqrt{(1+r_1)^2 - (\varepsilon-r_2)^2}} \right] \quad (2.86)$$

ขณะที่ $1-r_1-r_2 \geq \varepsilon \geq -1+r_1-r_2$ และ $K(x) = F\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$

โดย $K(x)$ หรือ $F\left(\frac{\pi}{2}, x\right)$ เป็นอีลิปติกอินทิกรัลสมบูรณ์แบบที่ 1 (The Complete Elliptic Integral First Kind) จะพบว่าความหนาแน่นสถานะของพลังงานจะมีจุดยอด 2 จุดที่บริเวณ

$\varepsilon_+ = 1 - r_1 - r_2$ และ $\varepsilon_- = -1 + r_1 - r_2$ แทน $K(x) \cong \ln \left[\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right]$ โดย $x \cong 1$ จะเขียนความหนาแน่นสถานะของพลังงานใหม่บริเวณใกล้จุดยอด ε_{\pm} ได้โดยการประมาณค่าเป็น

$$N(E) = \frac{1}{2\pi^2 \sqrt{(1 \mp r_1)(r_1 \pm r_2)}} \ln \left[\frac{8\sqrt{(1 \mp r_1)(r_1 \pm r_2)}}{\sqrt{2(\varepsilon - \varepsilon_{\pm})(1-r_1)}} \right] \quad (2.87)$$

โดย r_1 คืออัตราส่วนของอินทิกรัลไปตามทิศทาง a ต่ออินทิกรัลไปตามทิศทาง b

r_2 คือความรุนแรงของการกระโดดของอิเล็กตรอนที่อยู่ใกล้เคียงถัดไปอันดับที่สอง

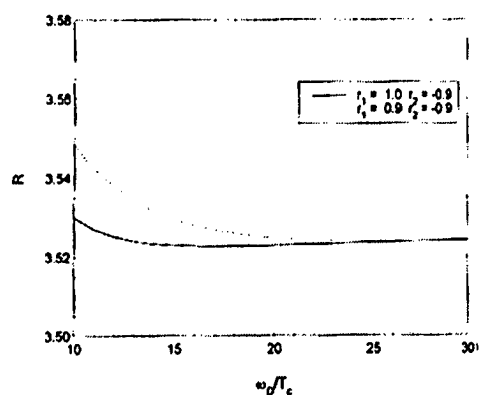
ความหนาแน่นสถานะของพลังงาน $N(E)$ เกิดจากโครงสร้างแบบชนิดออร์โทโรมบิก ($r_1 \neq 1$) ระยะระหว่างจุดยอด 2 จุด จะเป็น $\varepsilon_+ - \varepsilon_- = 2(1-r_1)$ โดยจะอยู่ในแนวซึ่งตั้งฉากกันในรูปโครงสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อพิจารณาในแนว 2 มิติให้ ($r_1=1$) จุดยอดที่สูงที่สุดมี 2 จุด คือ ε_+ และ ε_- จะเกิดจุดยอดเพียงจุดเดียวเมื่อให้ $\varepsilon_+ = \varepsilon_- = -r_2$ ความหนาแน่นสถานะของพลังงานจะอยู่ในรูป

$$N(E) = N(0) \left[\ln \left| \frac{E_F}{(E-E_s)} \right| + C \right] \quad (2.88)$$

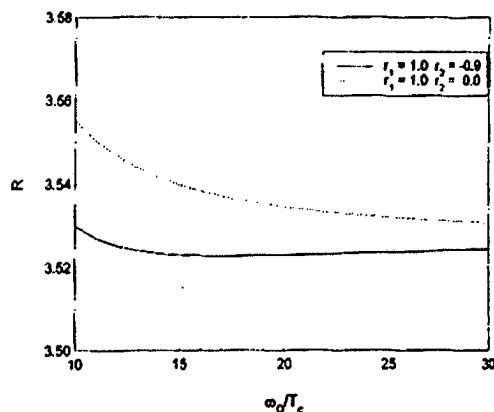
$$\text{โดย } N(0) = \frac{1}{2t\pi^2 \sqrt{(1-r_2^2)}}, \quad C = \ln \left| \frac{16t\sqrt{(1-r_2^2)}}{E_F} \right|, \quad E_s = 2t\epsilon_{\pm}$$

ในสมการ (2.80), (2.86) และ (2.87) คำนวณหาค่า R โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สำหรับค่าพารามิเตอร์ที่ต่างกันดังนี้ $E_F = 5,000$ K, $t = 3,000$ K และ $\omega_D = 700$ K และให้ $r_2 = -0.9$ จะได้ค่า R ที่แปรผันกับค่า r_1 และ $\frac{\omega_D}{T_C}$ ดังกราฟรูป 15(ก) ซึ่งจะเห็นว่าค่า R จะลดลง ตาม $\frac{\omega_D}{T_C}$ ที่ลดลง ซึ่งสอดคล้องกับผลของงานวิจัยของรัตนบุรี อุดมสมุทรหิรัญ และยกसान (Ratanaburi, Udomsamuthirun, & Yokson. 1997 : 1) การเลื่อนขึ้นของค่า R ที่ได้จาก ทฤษฎีบีซีเอส โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $\frac{\omega_D}{T_C} > 2.0$ การลดลงของค่า r_1 ในช่วงจาก 1 ถึง 0.9 ทำให้ ค่า R เพิ่มขึ้น สำหรับสเปซพารามิเตอร์ ได้ค่าแตกต่างกันไป 0.3 % เราให้ข้อสังเกตว่าขอบเขต $\frac{\omega_D}{T_C} \rightarrow \infty$ ค่า R ที่แปรผันตาม r_1 จะไม่สามารถวัดค่าได้

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลของการกระโดดของอิเล็กตรอนใกล้เคียงอันดับที่สองต่อค่า R สำหรับผลึกสี่เหลี่ยมจตุรัส ($r_1=1$) การแปรผันของค่า R กับ $\frac{\omega_D}{T_C}$ สำหรับค่าที่มีความต่างของ $r_2=(0-0.9)$ แสดงโดยกราฟ 15 (ก) จะสังเกตเห็นว่าจากกราฟค่า R จะเลื่อนลง เมื่อ r_2 เพิ่มขึ้น ความแตกต่างของ R จะมีค่ามากที่สุด 0.6 % เมื่อ $r_2=0$ และ $r_2=-0.9$ ดังรูป 15(ข) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของค่า R ที่ลดลงกับค่า $\frac{\omega_D}{T_C}$ ที่เพิ่มขึ้น



(ก)



(ข)

ภาพประกอบ 15 แสดงความสัมพันธ์อัตราส่วนของพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R) กับ $\frac{\omega_D}{T_C}$

ที่มา: Udomsamuthirun, Yokson, & Crison. (1997). *Journal of Superconductivity*. 10(3) : 189.

แบบจำลองชนิดสองแถบพลังงาน

ในปี พ.ศ. 2502 ซูล แมทเทียสและวอร์คเกอร์ (Suhl, Matthias, & Walker. 1959 : 552) ได้ศึกษาสภาพนำเวดิงตามทฤษฎีบีซีเอส ในกรณีของแถบพลังงานที่เหลื่อมซ้อนกันของแถบพลังงาน 2 แถบ โดยมีการแลกเปลี่ยนอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานที่เหลื่อมซ้อนกัน อย่างเช่นในแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น d โดยวิเคราะห์ระบบเขียนสมการฮามิลโทเนียนจากแม่และการดูดกลืนโฟนอน จะแทนกระบวนการด้วยทางเดินทั้งสี่แนวของอิเล็กตรอน

เมื่ออิเล็กตรอนในชั้น s และ d จะถูกดูดกลืนและปล่อยโฟนอนที่เลขคลื่นเท่ากับผลต่างของเลขคลื่นของอิเล็กตรอน 2 ตัว ซึ่งอิเล็กตรอนทั้งสองตัวจะอยู่บริเวณใกล้เคียงกับผิวเฟอร์มิตามทฤษฎีบีซีเอส

$$H = H_s + H_d + H_{int} \quad (2.89)$$

กำหนดให้

H คือ ฮามิลโทเนียนรวม

H_s คือ ฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานภายในชั้น s

H_d คือ ฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานภายในชั้น d

H_{int} คือ ฮามิลโทเนียนของระหว่างแถบพลังงานชั้น s และชั้น d

โดย

$$\begin{aligned}
 H_s &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{skk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \\
 H_d &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{dkk'} d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow} \\
 H_{int} &= - \sum_{kk'} V_{sd} (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow} + d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow})
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

เมื่อ ε_{ks} เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานชั้น s ที่ระดับผิวเฟอร์มี

ε_{kd} เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานชั้น d ที่ระดับผิวเฟอร์มี

$V_{skk'}$ เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอนในแถบพลังงานภายในชั้น s

$V_{dkk'}$ เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่อิเล็กตรอนในแถบพลังงานภายในชั้น d

V_{sd} เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานชั้น s และชั้น d กับโฟนอน

$C_{k\uparrow}^+$ และ $d_{k\uparrow}^+$ เป็นตัวดำเนินการสร้างในแถบพลังงานภายในชั้น s และ d

$C_{k\downarrow}$ และ $d_{k\downarrow}$ เป็นตัวดำเนินการทำลายในแถบพลังงานภายในชั้น s และ d

ใช้การแปลงแบบโบโกลิวอฟ โดยให้ตัวดำเนินการ เป็น e และ f ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 C_{k\uparrow} &= \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) e_{k\uparrow} + \sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) e_{-k\downarrow}^+, & C_{k\downarrow} &= \cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right) e_{k\downarrow} - \sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) e_{-k\uparrow}^+ \\
 d_{k\uparrow} &= \cos\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) f_{k\uparrow} + \sin\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) f_{-k\downarrow}^+, & d_{k\downarrow} &= \cos\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) f_{k\downarrow} - \sin\left(\frac{\varphi_k}{2}\right) f_{-k\uparrow}^+
 \end{aligned}$$

ค่าพารามิเตอร์ θ, φ จะแสดงโดยแทน $C_{k\uparrow}$ และ $d_{k\uparrow}$ ในสมการที่ (2.90) และทำให้เท่ากับศูนย์สัมประสิทธิ์ของ $e_{k\uparrow}^+ e_{-k\downarrow}^+$ และ $e_{-k\downarrow} e_{k\uparrow}$ เช่นเดียวกับเทอมของ f จะได้ผลลัพธ์ของสมการจะเป็น

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ks} \sin\theta_k - [V_{sd} D + V_{ss} D] \cos\theta_k &= 0 \\
 \varepsilon_{kd} \sin\varphi_k - [V_{dd} D + V_{sd} D] \cos\varphi_k &= 0
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

และ

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sum_k \sin\theta_k [1 - 2f_s(E_{ks})], \\
 D &= \frac{1}{2} \sum_k \sin\varphi_k [1 - 2f_d(E_{kd})]
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

เมื่อ $f_s(E_{ks})$, $f_d(E_{kd})$ เป็นจำนวนคู่อิเล็กตรอนจากแถบพลังงานชั้น s และ d ซึ่งถูกกระตุ้นด้วยพลังงาน E_{ks} และ E_{kd} ตามลำดับ ซึ่งพลังงานนี้จะมีค่าเป็น

$$E_{ks} = \sqrt{\varepsilon_{ks}^2 + A^2}, \quad E_{kd} = \sqrt{\varepsilon_{kd}^2 + A^2}$$

และ

$$A = V_{sd} D + V_{ss} S, \quad B = V_{dd} D + V_{sd} S$$

ซึ่งเงื่อนไขสมการที่ (2.91) และ (2.92) สอดคล้องกัน มีอีกสองสมการอย่างเดียวกันของ A และ B

$$A[1 - V_{ss} N_s F(A)] = B V_{sd} N_d F(B),$$

$$B[1 - V_{dd} N_d F(B)] = B V_{sd} N_d F(A)$$

ขณะที่

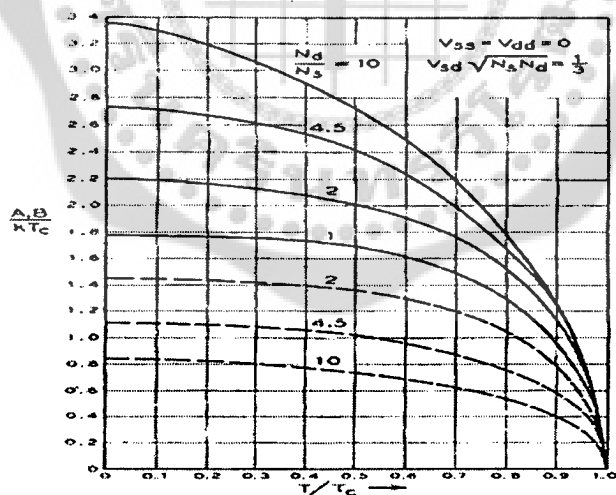
$$F(A) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + A^2}}{2T_C}\right)}{\sqrt{\epsilon^2 + A^2}} d\epsilon, \quad F(B) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + B^2}}{2T_C}\right)}{\sqrt{\epsilon^2 + B^2}} d\epsilon$$

เมื่อ N_s และ N_d เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงานในแถบพลังงานชั้น s และ d บริเวณใกล้ ๆ ผิวเฟอร์มีอุณหภูมิจุดจะได้อสมการกำลังสองดังนี้

$$[V_{ss} + N_d (V_{sd}^2 - V_{ss} V_{dd}) F(0)] [V_{dd} + N_s (V_{sd}^2 + V_{ss} V_{dd}) F(0)] = V_{sd}^2$$

หลังจากที่แก้สมการนี้ เมื่อ $F(0)$ และใช้ทฤษฎีบีซีเอสแสดงอุณหภูมิจุด (T_C) จะได้

$$T_C = 1.14 \omega_D e^{\frac{\left[\left(\frac{V_{sd}^2}{N_s N_d} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{V_{dd} V_{ss}}{N_s N_d} \right)^2 \right] \frac{1}{2} \left(\frac{V_{dd} + V_{ss}}{N_s N_d} \right)}{V_{sd}^2 - V_{ss} V_{dd}}} \quad (2.93)$$



ภาพประกอบ 16 แสดงความสัมพันธ์ $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_C}$ กับ $\frac{T}{T_C}$

ที่มา: Suhl, Matthias, & Walker. (1959, December). *Physical Review Letters*. 3(12) : 554.

ให้ทั้ง A และ B เป็นพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานซึ่งมีค่าเข้าสู่ศูนย์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งใช้กับการกระเจิงของอิเล็กตรอนในระหว่างแถบพลังงาน (Interband) เท่านั้น ($V_{ss} = V_{dd} = 0$) จะได้ค่าอุณหภูมิจุดเป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส ตามภาพประกอบ 16

โอโกเย (Okoye. 1998 : 53) ใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงานชนิด 2 แถบ หาค่าอนุกรมวิฤตและอธิบายปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำเวดจ์ชนิดอนุกรมวิฤตสูงชนิดคอปเปอร์-ออกไซด์ โดยตรวจสอบการรวมกันของอันตรกิริยาภายในแถบพลังงานของชั้น d และชั้น p และอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนพาหะระหว่างแถบพลังงานชั้น d และชั้น p กับโฟนอน คำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผลที่ได้สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากเชิงทดลองและจากสมการฮามิลโทเนียน

$$H = H_d + H_p + H_{int} \quad (2.94)$$

โดย H_d เป็นฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานภายในชั้น d
 H_p เป็นฮามิลโทเนียนของแถบพลังงานภายในชั้น p
 H_{int} เป็นฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาของระหว่างแถบพลังงานกับโฟนอน

$$\begin{aligned} H_d &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} d_{k\sigma}^+ d_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{dkk'} d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow}, \\ H_p &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_{k\sigma} P_{k\sigma}^+ P_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{pkk'} P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow}, \\ H_{int} &= - \sum_{kk'} V_{dp} (d_{k\uparrow}^+ d_{-k\downarrow}^+ P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow} + P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

ใช้การแปลงแบบโบโกลิวอฟ-วาလာติน ของตัวดำเนินการ $P_{k\uparrow}$ และ $d_{k\uparrow}$ ให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} P_{k\uparrow} &= - \sum_k V_{pkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} [1 - 2f(\varepsilon_{pk'})] - \sum_{k'} V_{dpkk'} \frac{\Delta_{dk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk'}^2}} [1 - 2f(\varepsilon_{dk'})] \\ d_{k\uparrow} &= - \sum_k V_{dkk'} \frac{\Delta_{dk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk'}^2}} [1 - 2f(\varepsilon_{dk'})] - \sum_{k'} V_{dpkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\varepsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} [1 - 2f(\varepsilon_{pk'})] \end{aligned} \quad (2.96)$$

ตามทฤษฎีบีซีเอสจะมีอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอนุภาค ซึ่ง V_{pk} เป็นอันตรกิริยาที่มีการเปลี่ยนแปลงพลังงานเพียงเล็กน้อยของอนุภาค, U_c เป็นอันตรกิริยาดึงดูดแบบรุนแรงที่ขึ้นอยู่กับความถี่โฟนอน โดยจะแทนอันตรกิริยาผลึกและอันตรกิริยาดึงดูด $-U$,

$$\text{สำหรับแถบพลังงานชั้น } d \quad V_{dkk'}(\varepsilon) = -V_{ph}^d - U_{cd} \quad (2.97)$$

$$\text{สำหรับแถบพลังงานชั้น } p \quad V_{pkk'}(\varepsilon) = -V_{ph}^p - U_{cd} \quad (2.98)$$

$$\text{สำหรับระหว่างแถบพลังงานชั้น } d \text{ และ } p \quad V_{dpkk'}(\varepsilon) = -V_{ph}^{dp} - U_{cdp} \quad (2.99)$$

โดยเงื่อนไข

$$V_{ikk}(\varepsilon) = \begin{cases} -V_{ph}^i & \text{เมื่อ } -\omega_D < \omega < \omega_D \\ -U_{ci} & \text{เมื่อ } \omega_D < \omega < \omega_C \end{cases}, i = d, p \quad (2.100)$$

แทนเงื่อนไขของสมการ (2.97) - (2.100) ลงในสมการ (2.96) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{pk}(\varepsilon_p) = & -N_p(0) \iint [-V_{ph}^p(\varepsilon_{pk} - \varepsilon_{pk}') - U_{cp}] \frac{\Delta_{pk}(\varepsilon_{pk}') (1 - 2f(\varepsilon_{pk}'))}{2\varepsilon_{pk}'} d\varepsilon_{pk}' \\ & - N_d(0) \iint [-V_{ph}^{pd}(\varepsilon_{dk} - \varepsilon_{dk}') - U_{cp}] \frac{\Delta_{dk}(\varepsilon_{dk}') (1 - 2f(\varepsilon_{dk}'))}{2\varepsilon_{dk}'} d\varepsilon_{dk}' \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{dk}(\varepsilon_d) = & -N_d(0) \iint [-V_{ph}^d(\varepsilon_{dk} - \varepsilon_{dk}') - U_{cd}] \frac{\Delta_{dk}(\varepsilon_{dk}') (1 - 2f(\varepsilon_{dk}'))}{2\varepsilon_{dk}'} d\varepsilon_{dk}' \\ & - N_p(0) \iint [-V_{ph}^{pd}(\varepsilon_{pk} - \varepsilon_{pk}') - U_{cdp}] \frac{\Delta_{pk}(\varepsilon_{pk}') (1 - 2f(\varepsilon_{pk}'))}{2\varepsilon_{pdk}'} d\varepsilon_{pdk}' \end{aligned} \quad (2.102)$$

ให้ค่าพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานอยู่ในรูป

$$\Delta_{ik} = \Delta_{io} \beta_i(k) + \Delta_{ia} (1 - \beta_i(k)) \quad ; i = p, d \quad (2.103)$$

เปรียบเทียบส่วนของอันตรกิริยาคูลอมบ์ จากสมการที่ (2.101) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{po} = & N_p(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} V_{ph}^p(\varepsilon_{pk} - \varepsilon_{pk}') \frac{\Delta_{po}(\varepsilon_{pk}') (1 - 2f(\varepsilon_{pk}'))}{2\varepsilon_{pk}'} d\varepsilon_{pk}' \\ & + N_d(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} V_{ph}^{dp}(\varepsilon_{dk} - \varepsilon_{dk}') \frac{\Delta_{do}(\varepsilon_{dk}') (1 - 2f(\varepsilon_{dk}'))}{2\varepsilon_{dk}'} d\varepsilon_{dk}' + \Delta_{pa} \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{pa} = & N_p(0) \int_{-\omega_C}^{\omega_C} U_{cp} \frac{\Delta_{pa}(\varepsilon_{pk}') (1 - 2f(\varepsilon_{pk}'))}{2\varepsilon_{pk}'} d\varepsilon_{pk}' \\ & + N_d(0) \int_{-\omega_C}^{\omega_C} U_{cp} \frac{\Delta_{da}(\varepsilon_{dk}') (1 - 2f(\varepsilon_{dk}'))}{2\varepsilon_{dk}'} d\varepsilon_{dk}' \end{aligned} \quad (2.105)$$

และสมการที่ (2.92) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{do} = N_d(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} V_{ph}^p(\varepsilon_{dk} - \varepsilon'_{dk}) \frac{\Delta_{do}(\varepsilon'_{dk})(1-2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}} d\varepsilon'_{dk} \\ + N_p(0) \int_{-\omega_D}^{\omega_D} V_{ph}^{dp}(\varepsilon_{pk} - \varepsilon'_{pk}) \frac{\Delta_{do}(\varepsilon'_{pk})(1-2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pk}} d\varepsilon'_{pk} + \Delta_{da} \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{da} = N_d(0) \int_{-\omega_C}^{\omega_C} U_{cd} \frac{\Delta_{da}(\varepsilon'_{dk})(1-2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}} d\varepsilon'_{dk} \\ + N_p(0) \int_{-\omega_C}^{\omega_C} U_{cpd} \frac{\Delta_{pa}(\varepsilon'_{pk})(1-2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pk}} d\varepsilon'_{pk} \end{aligned} \quad (2.107)$$

เมื่อ $T_C = 0$ จะได้สมการที่ (2.104), (2.105), (2.106) และ (2.107) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\Delta_{po} = \lambda_1 \Delta_{po} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{po}}\right) + \lambda_{12} \Delta_{do} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{do}}\right) + \Delta_{pa} \quad (2.108)$$

$$\Delta_{pa} = \mu_1 \left\{ \Delta_{po} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{po}}\right) + \Delta_{pa} \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right) \right\} + \mu_{12} \left\{ \Delta_{po} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{po}}\right) + \Delta_{da} \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right) \right\} \quad (2.109)$$

$$\Delta_{do} = \lambda_2 \Delta_{do} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{do}}\right) + \lambda_{12} \Delta_{do} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{po}}\right) + \Delta_{da} \quad (2.110)$$

$$\Delta_{da} = \mu_2 \left\{ \Delta_{do} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{do}}\right) + \Delta_{da} \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right) \right\} + \mu_{12} \left\{ \Delta_{po} \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{do}}\right) + \Delta_{pa} \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right) \right\} \quad (2.111)$$

เมื่อให้

$$\begin{aligned} \lambda_i = N_i(0) V_{ph}^i, \quad \mu_i = N_i(0) U_{ci} \quad ; i = p, d \\ \lambda_{ij} = N_i(0) V_{ph}^{ij}, \quad \mu_{ij} = N_i(0) U_{cij} \quad ; i \neq j \text{ โดย } \{i, j = p, d\} \end{aligned}$$

จัดรูปสมการที่ (2.108), (2.109), (2.110) และ (2.111) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & -\lambda_{12} & 0 \\ -\mu_1 F & 1-\mu_1 G & -\mu_{12} F & -\mu_1 G \\ -\lambda_{12} F & 0 & \lambda_2 F & -1 \\ -\mu_{12} F & \mu_{12} G & -\mu_2 F & -\mu_2 G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{po} \\ \Delta_{pa} \\ \Delta_{do} \\ \Delta_{da} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.112)$$

โดยให้

$$F = \ln\left(\frac{1.14\omega_D}{T_C}\right), \quad G = \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{do} &= \Delta_{po} = \Delta_{io}, & \Delta_{pa} &= \Delta_{da} = \Delta_{ia}, \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda, & \mu_1 &= \mu_2 = \mu\end{aligned}$$

จากสมการที่ (2.108), (2.109), (2.110) และ (2.111) เขียนโดยแทนเงื่อนไขด้านบนนี้ จะได้

$$\begin{aligned}\Delta_o (1 - (\lambda + \lambda_{12})F - \Delta_a) &= 0 \\ \Delta_a (1 - (\mu + \mu_{12})G - (\mu + \mu_{12})\Delta_o F) &= 0\end{aligned}\quad (2.113)$$

เขียนสมการที่ (2.113) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ 2×2 จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 - (\lambda + \lambda_{12})F & -1 \\ -(\mu + \mu_{12})F & 1 - (\mu + \mu_{12})G \end{bmatrix} = 0 \quad (2.114)$$

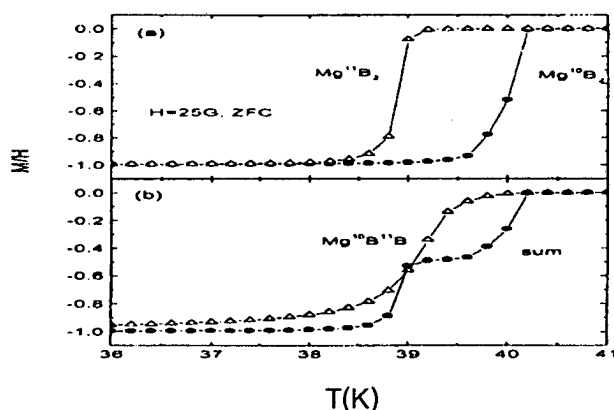
จะได้

$$T_C = 1.14 \omega_D e^{\left(\frac{1}{\lambda + \lambda_{12} + \mu} \right)} \quad (2.115)$$

ในการคำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทป จะสัมพันธ์กับฟังก์ชันของ $\frac{\mu^*}{\lambda}$ และสัมพันธ์กับกับอันตรกิริยาดึงดูดแบบบรุนแรง (μ^*) เทียบกับอันตรกิริยาของการจับคู่ของอิเล็กตรอนโฟนอนระหว่างแถบพลังงาน ($\lambda + \lambda_{12}$) ซึ่งทำนายได้ว่าถ้าผลของพารามิเตอร์ของการจับคู่อิเล็กตรอนโฟนอนเป็นบวกจะทำให้สัมประสิทธิ์จะลดลง ในขณะที่อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าสูงขึ้นสำหรับค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่ได้จากข้อมูลทางทฤษฎีที่ใกล้เคียงกับผลเชิงทดลองที่สุดคือเมื่อ $\lambda + \lambda_{12} = 0.1$ สำหรับ $\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{BiO}_3$ เมื่อ $\mu^*/\lambda = 3.75$ ให้ค่า T_C เท่ากับ 28 K

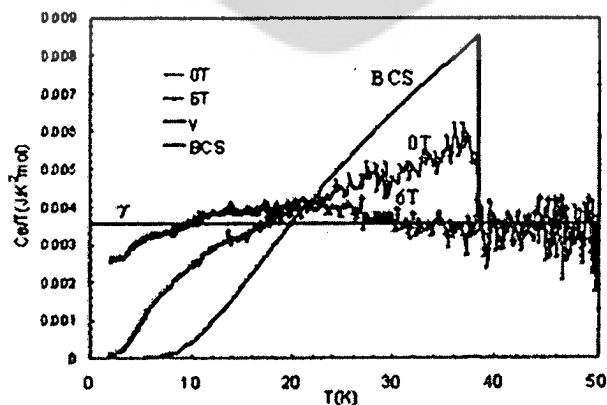
ผลการทดลองที่เกี่ยวข้องกับแมกนีเซียมไดโบไรด์

บุคโค และคณะ (Bud'Ko, et al. 2002 : 1877) ได้รายงานว่าสามารถวิเคราะห์และหาค่าจากปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect) ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ซึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีองค์ประกอบของธาตุโลหะ 2 ชนิด แสดงถึงการนำยิ่งยวดแบบเดียวกับตัวนำยิ่งยวดชนิดอุณหภูมิสูง โดยมีอุณหภูมิวิกฤต 40.2 K (^{10}B) การวัดอุณหภูมิวิกฤตพบว่าอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้น 1 K ระหว่าง Mg^{11}B_2 และ Mg^{10}B_2 แสดงว่าค่าไอโซโทปของโบรอนมีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตปรากฏการณ์ไอโซโทปของโบรอนในแมกนีเซียมไดโบไรด์จะสอดคล้องกับวัสดุที่เป็นตัวกลางของโฟนอนในตัวนำยิ่งยวดตามทฤษฎีบีซีเอส



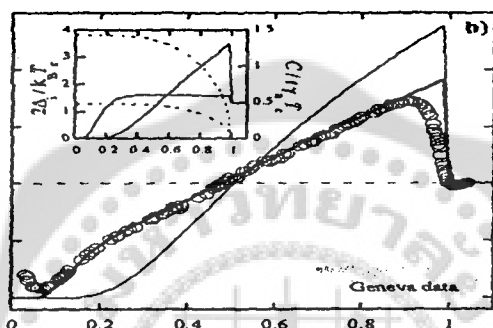
ภาพประกอบ 17 แสดงอัตราส่วนของสนามแม่เหล็ก M/H กับอุณหภูมิ (K)
ที่มา: Bud'Ko, et al. (2002). *Physical Review B*. 86(9) : 1877.

มาซิดะและซาซากิ (Machida, & Sasaki, 2002 : 094507-094513) ได้ศึกษาถึงคุณสมบัติของแมกนีเซียมไดโบไรด์ โดยได้สังเคราะห์ผลึกเชิงเดี่ยวและผลึกเชิงซ้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์ภายใต้ความดัน หาค่าความจุความร้อนของผลึกเชิงซ้อนของแมกนีเซียม-ไดโบไรด์ในช่วงอุณหภูมิ 2 และ 60 K ในสนามแม่เหล็ก 6 เทสลา ผลการทดลองพบว่าให้สัมประสิทธิ์ความจุความร้อนของอิเล็กตรอน (C_{es}) $\gamma = 3.51 \text{ mJ/K}^2\text{mol}$ และความจุความร้อนกระโดด $2.8 \text{ mJ/K}^2\text{mol}$ ที่อุณหภูมิวิกฤต 38.5 K ซึ่งจะแสดงว่าความจุความร้อนของแมกนีเซียมไดโบไรด์จะกว้างอย่างมาก จากตัวนำยิ่งยวดดั้งเดิมตามแบบทฤษฎีบีซีเอสที่มีอันตรกิริยาคู่ควบแบบอ่อน ผลการทดลองวัดคุณสมบัติทางแม่เหล็กของผลึกเชิงเดี่ยว พบว่าอุณหภูมิวิกฤตที่ 38 K มีความกว้างของการเปลี่ยนอุณหภูมิ $\Delta T_C = 0.8 \text{ K}$ และการนำยิ่งยวดที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง อัตราส่วน γ จะเพิ่มขึ้นจาก 1 เมื่อ T_C ถึง 4 ที่ 25 K



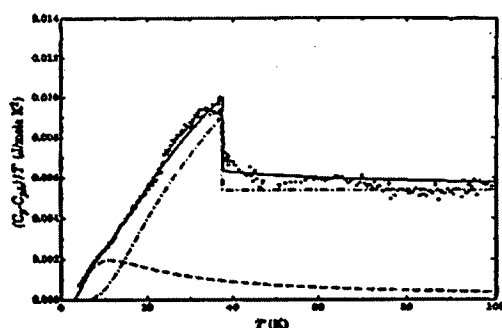
ภาพประกอบ 18 แสดงค่าความจุความร้อนต่ออุณหภูมิ C_{es}/T (JK^2mol) กับอุณหภูมิ (K)
ที่มา: Machida, & Sasaki. (2003). *Physical Review B*. 67 : 094513.

เบวาร์เคท์ และคณะ (Bouquet, et al. 2002 : 856) ได้รายงานการวัดความจุความร้อนผลึกเดี่ยวของ MgB_2 ขนาด 0.5 g ในสนามแม่เหล็กขนาด 14 เทสลา ภายใต้อุณหภูมิวิกฤต 3 K แสดงความจุความร้อนต่ออุณหภูมิ จะลดลงอย่างเชิงเส้น โดยความจุความร้อนจะขึ้นกับสนามแม่เหล็กและขึ้นกับทิศทาง (Anisotropic) ผลการทดลองนี้ตรงกับสภาพนำเวดิงชนิดสองแถบพลังงาน โดยแถบพลังงานช่องเล็กกว่าจะไม่ขึ้นกับทิศทาง (Isotropic) และช่องว่างพลังงานมีค่าประมาณ 5 meV เป็นช่องว่างพลังงานขนาดใหญ่กว่าจะขึ้นกับทิศทาง และความแตกต่างของสนามแม่เหล็กวิกฤตสูงสุดมีความจำเป็นต่อการอธิบายสถานะการนำเวดิงของแมกนีเซียมไดโบไรด์



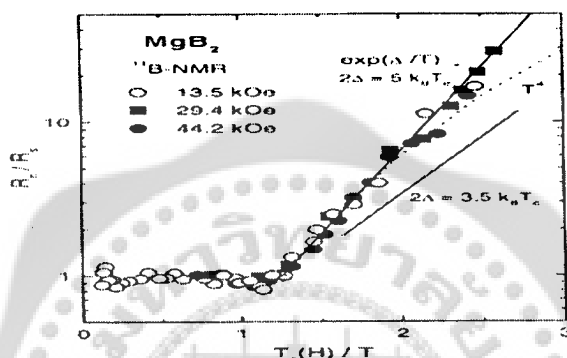
ภาพประกอบ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $C/\gamma T$ (JK^2mol) กับ T (K)
ที่มา: Bouquet, et al. (2002). *Europhysics Letters*. 56 : 856.

วอลติ และคณะ (Wälti, et al. 2001 : 172515) ได้ศึกษาการวัดความจุความร้อนของตัวนำเวดิงแมกนีเซียมไดโบไรด์อยู่ในช่วงประมาณ 3 และ 220 K โดยประยุกต์แบบจำลองของเดอบาย-ไอสไตน์ ทำให้มีความถูกต้องของความจุความร้อนรวม จากผลการทดลองความจุความร้อนของอิเล็กตรอนแสดงถึงค่าคงที่ของคู่ควิบอิเล็กตรอนโฟนอน (λ) ≤ 0.4 ข้อมูลของงานวิจัยนี้ทำนายความจุความร้อนในสถานะในสถานะการนำเวดิงของแมกนีเซียมไดโบไรด์ แสดงโดยตัวนำเวดิงชนิดดั้งเดิมตามทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 20 แสดงค่าความจุความร้อน $C_{es} - C_n/\gamma T$ (JK^2mol) ต่ออุณหภูมิกับอุณหภูมิ (K)
ที่มา: Wälti, et al. (2001). *Physical Review B*. 64 : 172515.

โกทิกาวา และคณะ (Kotegawa, et al. 2001 : 1270011) ได้ใช้เทคนิคนิวเคลียร์แมกเนติกเรโซแนนซ์ (NMR) วัดค่าอัตราของ Nuclear Spin - Lattice Relaxation ของ ^{11}B พบว่าการนำวัดยิ่งของแมกนีเซียมไดโบไรด์แสดงลักษณะสปินแบบซิงเกท (Singlet) คือ $l=0$ โดยเป็นตัวนำวัดยิ่งแบบคลื่นเอส และมีการจับคู่ของอิเล็กตรอนแบบรุนแรง (Strong Coupling) ขณะที่ค่าช่องว่างพลังงานแถบกว้าง เป็นแบบไม่สมมาตรและค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน ซึ่งมีค่ามากกว่าตามที่ทฤษฎีบีซีเอสทำนายไว้ แสดงให้เห็นว่าอันตรกิริยาอิเล็กตรอน-โฟนอน มีส่วนสำคัญอย่างมากสำหรับสภาพนำวัดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์

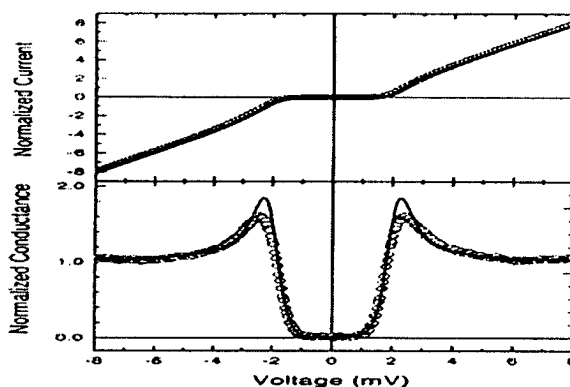


ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ของ R_n/R_s กับ $T_c(H)/T$

ที่มา: Kotegawa, et al. (2001, September). *Physical Review Letters*. 87(12) : 1270011.

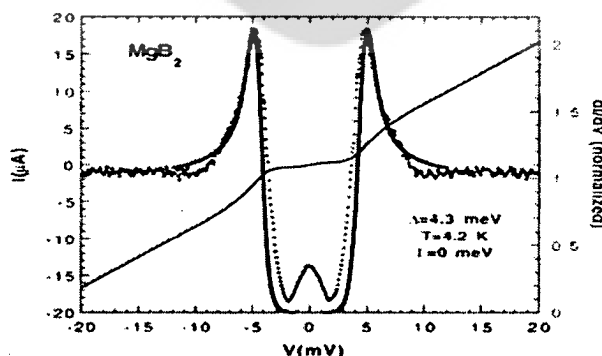
งานวิจัยที่เกี่ยวกับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของแมกนีเซียมไดโบไรด์

รูบีโอ-โบลินเจอร์ ซูว์ดิรอฟ และ เวียร์ไอรา (Rubio – Bollinger, Suderow, & Vieira. 2001 : 5582) ศึกษาการทะลุผ่านของค่ากระแสไฟฟ้าผ่านช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ในบริเวณขอบของผิวหน้าเล็ก ๆ (Small Grain) โดยใช้เทคนิคแบบ STM (Scanning Tunneling Microscope) ได้ผลการทดลองที่สอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ได้ค่าช่องว่างพลังงานประมาณ $\Delta = 2 \text{ meV}$ และทำนายค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน $2\Delta(0)/k_B T_c \sim 1.2 - 4$ ตามทฤษฎีบีซีเอสที่มีอันตรกิริยาของการจับคู่ของอิเล็กตรอนแบบอ่อน



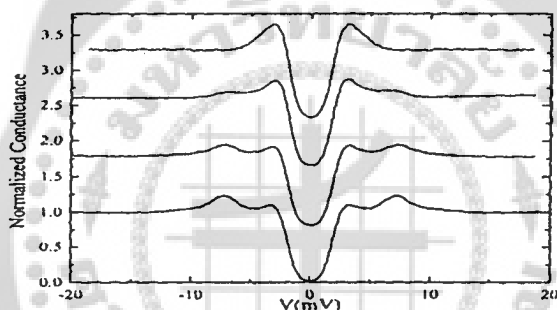
ภาพประกอบ 22 แสดงการทะลุผ่านของกระแสไฟฟ้าและความต่างศักย์ไฟฟ้าที่อุณหภูมิ 2.5 K
ที่มา: Rubio-Bollinger, Suderow, & Vieira. (2001, June). *Physical Review Letters*.
86(24) : 5582-5584.

ชมิทส์ และคณะ (Schmidt, et al. 2001 : 2205041) ได้ศึกษาการทะลุผ่านของช่องว่างพลังงานของแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยใช้เทคนิค PCS (Point Contact Spectroscopy) โดยมีจุดที่ต่อกันของปลายหัวเข็มที่ทำจากโลหะเงินกับแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่ได้จากการขึ้นรูปเป็นเม็ดเล็ก ๆ และผ่านกระบวนการเผาเรียบร้อยแล้ว พบว่าค่ากระแสไฟฟ้าที่เปลี่ยนไปเทียบกับความต่างศักย์ที่ให้แกตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์จะค่อย ๆ ลดลงแล้วทะลุผ่านช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งวัดค่าช่องว่างพลังงานได้ประมาณ $\Delta = 4.3$ meV ค่าจะน้อยกว่าทฤษฎีบีซีเอสสำหรับแบบอันตรกิริยาการจับคู่ของคูเปอร์แบบอ่อน ๆ โดยมีค่าเท่ากับ 5.9 meV สำหรับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่อุณหภูมิวิกฤต 39 K และจะได้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตมีค่าประมาณ 1.25



ภาพประกอบ 23 แสดงการทะลุผ่านรอยต่อของโลหะเงินกับแมกนีเซียมไดโบไรด์ค่ากระแสไฟฟ้า (เส้นประ) ความแตกต่างของการนำไฟฟ้า (เส้นจุดเล็ก) ซึ่งเทียบกับความต่างศักย์ไฟฟ้า ที่อุณหภูมิวิกฤตประมาณ 4.2 K และค่าที่เฉลี่ย (เส้นหนา)
ที่มา: Schmidt, et al. (2001). *Physical Review B*. 63(22) : 220504(R1).

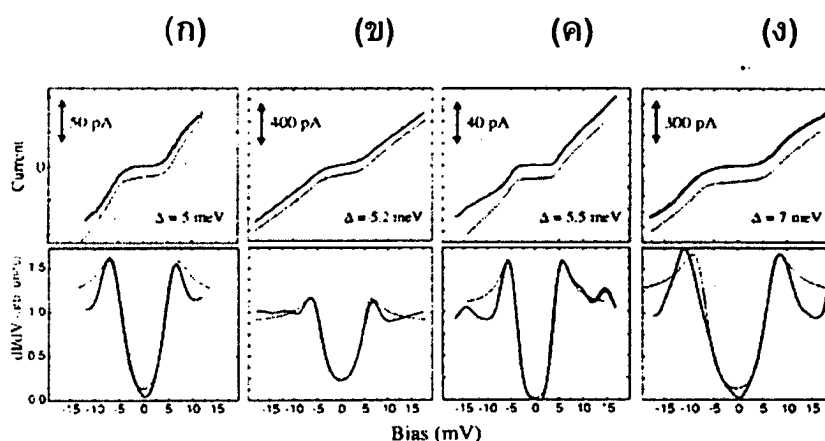
อิวาโลน และคณะ (Ivarone, et al. 2002 : 4374) ได้ศึกษาสภาพนำยวดยิ่งสองแถบพลังงานในแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) โดยใช้เทคนิควิธี STM (Scanning Tunneling Microscope) พบว่าช่องว่างพลังงาน (Δ_1) เท่ากับ 2.3 meV และ Δ_2 เท่ากับ 7.1 meV ความแตกต่างของสเปกตรัมของ PDOS (Partial Density Of States) เป็นสิ่งที่สะท้อนทิศทางต่าง ๆ การทะลุผ่านที่แตกต่างกันไปจากระบบหลายแถบพลังงาน โดยการสังเกตสิ่งที่สอดคล้องกับองค์ประกอบของสภาพนำยวดยิ่งชนิดสองแถบพลังงาน ที่เป็นการแสดงด้วยอันตรกิริยาคู่ควบที่นำยวดยิ่งของระหว่างแถบพลังงานและการกระเจิงของอนุภาคควอไซต์ ซึ่งการศึกษาการทันนัลลิ่งจะแสดงช่องว่างพลังงานเล็ก ๆ อย่างเดียวแน่นอน และแสดงช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งขณะอุณหภูมิวิกฤต จะเป็นการยืนยันว่าสภาพนำยวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์จะเป็นช่องว่างพลังงานแบบหลายช่อง



ภาพประกอบ 24 แสดง dI/dV และความต่างศักย์ไฟฟ้า (V)

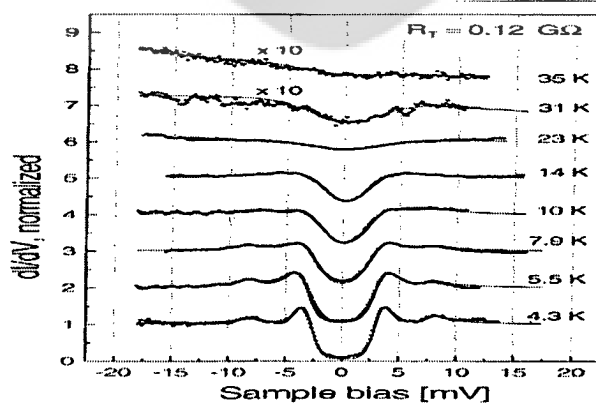
ที่มา: Ivarone, et al. (2002, May). *Physical Review Letters*. 86(19) : 4345.

ชโรนี ฟิเลเนอร์ และ มิลโล (Sharoni, Felner, & Millo. 2001 : 220508(4)) ได้ศึกษาคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ โดยใช้เทคนิค STM (Scanning Tunneling Microscope) และการวัดการเหนี่ยวนำของสนามแม่เหล็ก แสดงว่าช่วงที่อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันที่อุณหภูมิวิกฤตประมาณ 39 K โดยจะสอดคล้องกับงานวิจัยอื่น ๆ ที่ผ่านมาก่อนหน้านี้ การค่อย ๆ ลดลงของกระแสไฟฟ้าแล้วหักเหผ่านช่องว่างพลังงานเหมือนกับทฤษฎีบีซีเอสดังภาพประกอบที่ 25 ซึ่งจะได้ค่าพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงานอยู่ในช่วง 5 ถึง 7 meV ให้ค่าอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตเป็น $2\Delta(0)/k_B T \sim 3-4$ ยืนยันว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบคลื่นเอสที่มีอันตรกิริยาแบบอ่อนและผลจากการวัดการลดลงของกระแสไฟฟ้าและหักเหทะลุผ่านช่องว่างพลังงานนี้ แสดงว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดที่สอง (Type II Superconductors)

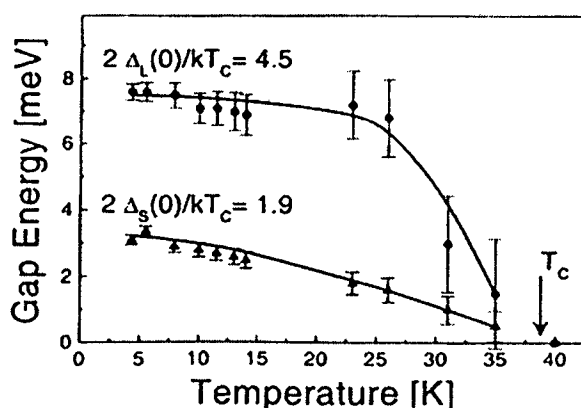


ภาพประกอบ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{dI}{dV}$ กับ V เส้นทึบเป็นผลที่ได้จากการทดลอง และเส้นประเป็นเส้นที่ได้จากการฟิตเคิร์ฟ (ก) $I=50$ pA, $\Delta=5$ meV (ข) $I=400$ pA, $\Delta=5.2$ meV (ค) $I=40$ pA, $\Delta=5.5$ meV (ง) $I=300$ pA, $\Delta=7$ meV
ที่มา: Sharoni, Felner, & Millo. (2001). *Physical Review B*. 63(22) : 220508(4).

กัวบิลิโอ และคณะ (Giubileo, et al. 2001 : 177008(4)) ได้รายงานการวัดค่าช่องว่างพลังงานสำหรับแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยใช้ STM (Scanning Tunneling Microscope) ซึ่งใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์ติดส่วนปลายและใช้ NbSe₂ เป็นแผ่นแบนรองรับ ขณะที่อุณหภูมิต่ำ ๆ จะพบว่าการทะลุผ่านช่องว่างพลังงานที่ระดับผิวเฟอร์มี โดยจะเป็นหลุมสองหลุมที่มีสองจุดยอดและจะเหมือนกันทั้งสองข้าง ที่ความต่างศักย์ไฟฟ้า $V_s = \pm 3.8$ mV และ $V_L = \pm 7.8$ mV โดยลักษณะของหลุมจะเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีสภาพนำยวดยิ่งแบบ 2 แถบพลังงาน



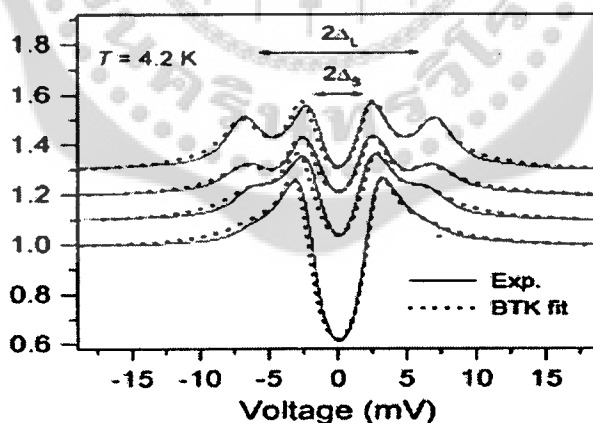
ภาพประกอบ 26 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงกระแสไฟฟ้าต่อศักย์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลง
ที่มา: Giubileo, et al. (2001, October). *Physical Review Letters*. 87(17) : 177008(4).



ภาพประกอบ 27 แสดงช่องว่างพลังงาน (meV) กับอุณหภูมิ (K)

ที่มา: Giubileo, et al. (2001, October). *Physical Review Letters*. 87(17) : 177008(4).

แซร์โบ และคณะ (Szabo, et al. 2001 : 137005) ใช้เทคนิคการสะท้อนของแอนดรีฟ (Andreev Reflection) พบว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์มีช่องว่างพลังงานแบบ 2 แถบ มีขนาดของช่องว่างพลังงานแถบเล็ก $\Delta_s = 2.8$ meV และช่องว่างพลังงานแถบกว้าง $\Delta_L = 7$ meV ตามลำดับ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับทฤษฎีปีซีเอสทำนายไว้ แสดงให้เห็นว่าแมกนีเซียมไดโบไรด์เป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีลักษณะเป็นแบบมัลติแบนด์ ที่อุณหภูมิวิกฤต 39 K และพบอีกว่าอุณหภูมิมีผลต่อการเกิดช่องว่างพลังงานแบบ 2 แถบด้วย ดังภาพประกอบ 28



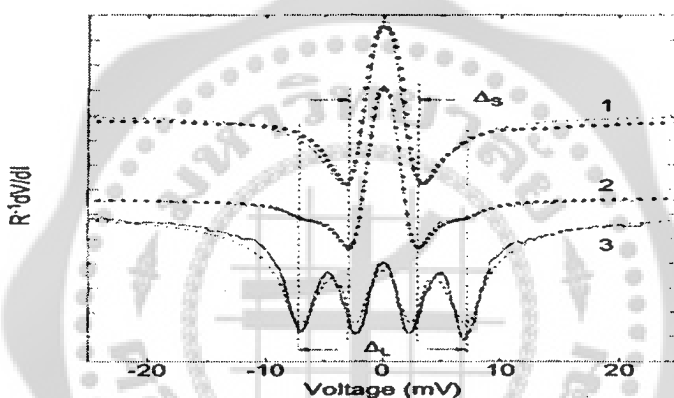
ภาพประกอบ 28 แสดงค่าจากผลการทดลองรอยต่อของ Cu - MgB₂ ที่อุณหภูมิ 4.2 K

เส้นกราฟจะเลื่อนขึ้นตามแนวตั้ง (เส้นทึบ) และกราฟจากการปรับค่า (เส้นประ) ขณะที่

$\Delta_s = 2.8 \pm 0.1$ meV และ $\Delta_L = 6.8 \pm 0.3$ meV ตามลำดับ

ที่มา: Szabo, et al. (2001, September). *Physical Review Letters*. 87(13) : 137005.

โบริซอฟและคณะ (Bobrov, et al. 2001 : 225-234) ได้ศึกษาช่องว่างพลังงานของตัวนำเวดจ์และอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนโฟนอนในแมกนีเซียมไดโบไรด์ชนิดฟิล์มบาง โดยได้ศึกษาด้วยเทคนิค PCS (Point Contact Spectroscopy) พบว่าค่าพารามิเตอร์ที่เป็นระเบียบของตัวนำเวดจ์และอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนโฟนอน (EPI) ในแมกนีเซียมไดโบไรด์อยู่บนแกน c ของฟิล์มบาง มีช่องว่างพลังงาน 2 ช่อง คือ $\Delta_{Small} \approx 2.6$ meV และ $\Delta_{Large} \approx 7.4$ meV ซึ่งตรงกับทฤษฎีบีซีเอส โดยอัตราส่วนช่องว่างพลังงานระหว่าง $\Delta_{Small} : \Delta_{Large}$ เป็น 1 : 3 ทำให้ต้องสร้างจุดเชื่อมต่อกันใหม่ของอันตรกิริยาอิเล็กตรอนโฟนอนเป็นฟังก์ชันไปบนแกน c ให้อยู่เหนือ 30 meV เท่ากับความหนาแน่นสถานะของพลังงาน ขณะเดียวกันได้มีแสดงค่าสูงสุดอยู่ในช่วง 20 meV ทำให้แสดงถึงความถี่ของโฟนอนในโหมดที่ต่ำ ๆ ที่มีความสำคัญต่อการจับคู่ จะแสดงถึงความเร็วเฟอร์มีของแมกนีเซียมไดโบไรด์ เท่ากับ 5×10^7 cm/s



ภาพประกอบ 29 แสดงอัตราส่วนของ dV/dI ต่อความต่างศักย์ไฟฟ้า (mV)

ที่มา: Bobrov, et al. (2001). *Physics and Chemistry*. p.225-234.

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดหาสมการช่องว่างพลังงาน ตามแนวคิดทฤษฎีบีซีเอสของแถบพลังงานแบบสองแถบที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน
2. กำหนดหาสมการของอุณหภูมิวิกฤต
3. กำหนดหาสมการของพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน
4. กำหนดหาสมการของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดหาสมการช่องว่างพลังงาน ตามแนวคิดทฤษฎีบีซีเอสของแถบพลังงานแบบสองแถบที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน

ในหนึ่งหน่วยเซลล์ของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ประกอบด้วยอะตอมของธาตุแมกนีเซียม 1 อะตอมและอะตอมของโบรอน 2 อะตอม การจัดเรียงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนของ Mg เป็น $(Ne)3s^2$ และการจัดเรียงระดับพลังงานของอิเล็กตรอนของ B เป็น $(He)2p^1$ จากการศึกษาของคริสโตฟเฟิล (Kristoffel, 1997 : R13) พบว่าการจับคู่ของอิเล็กตรอนภายในแถบพลังงาน s และภายในแถบพลังงาน p เกิดเป็นคู่อุปเปอร์ (Cooper Pair) เนื่องจากอันตรกิริยาอินทราแบนด์ (Intraband Interaction) และการไฮบริดไดเซชันระหว่างแถบพลังงาน s กับ p สามารถเกิดเป็นคู่อุปเปอร์ได้เช่นเดียวกัน เรียกอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานนี้ว่า อันตรกิริยาแบบอินเตอร์แบนด์ (Interband Interaction) ซึ่งจะเขียนแฮมิลโทเนียนของระบบได้ดังนี้

$$H = H_s + H_p + H_{int} \quad (3.1)$$

เมื่อ H เป็นแฮมิลโทเนียนรวมของระบบ

H_s เป็นแฮมิลโทเนียนตามทฤษฎีบีซีเอส ของอันตรกิริยาการเกิดคู่อุปเปอร์ของแถบพลังงาน s

H_p เป็นแฮมิลโทเนียนตามทฤษฎีบีซีเอส ของอันตรกิริยาการเกิดคู่อุปเปอร์ของแถบพลังงาน p

H_{int} เป็นแฮมิลโทเนียนที่เกิดจากอันตรกิริยาการเกิดคู่อุปเปอร์ระหว่างอิเล็กตรอนของแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p

เขียนในรูปสมการฮามิลโทเนียน ตามทฤษฎีบีซีเอส ได้ดังนี้

$$H_s = \sum_{k\sigma} \epsilon_{sk} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{sskk'} C_{k'\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \quad (3.2)$$

$$H_p = \sum_{k\sigma} \epsilon_{pk} P_{k\sigma}^+ P_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{ppkk'} P_{k'\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} \quad (3.3)$$

$$H_{int} = - \sum_{kk'} V_{spkk'} (C_{k'\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ P_{-k\downarrow} P_{k'\uparrow} + P_{k'\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k'\uparrow}) \quad (3.4)$$

- ขณะที่
- ϵ_{sk} คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน s ที่มีเลขคลื่น \bar{k}
 - ϵ_{pk} คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงาน p ที่มีเลขคลื่น \bar{k}
 - $V_{sskk'}$ คือพลังงานศักย์ดึงดูดของคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน s
 - $V_{ppkk'}$ คือพลังงานศักย์ดึงดูดของคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน p
 - $V_{spkk'}$ คือพลังงานศักย์ดึงดูดที่เกิดจากอันตรกิริยาการจับคู่กันของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p
 - $C_{k\sigma}^+$ และ $P_{k\sigma}^+$ คือตัวดำเนินการสร้างของแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p
 - $C_{k\sigma}$ และ $P_{k\sigma}$ คือตัวดำเนินการทำลายของแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p
 - σ คือดัชนีของสปิน จะแทน \uparrow คือสปินขึ้น และ \downarrow คือสปินลง

กำหนดตัวดำเนินการเช่นเดียวกับสมการ 2.5, 2.6 สำหรับตัวดำเนินการสร้างและตัวดำเนินการทำลายคูคูเปอร์ ทั้งในแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p จะได้

$$C_{k'\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ = a_k + (C_{k'\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k) \quad (3.5)$$

$$C_{-k\downarrow} C_{k'\uparrow} = a_{k'} + (C_{-k\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'}) \quad (3.6)$$

$$P_{k'\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ = b_k + (P_{k'\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ - b_k) \quad (3.7)$$

$$P_{-k\downarrow} P_{k'\uparrow} = b_{k'} + (P_{-k\downarrow} P_{k'\uparrow} - b_{k'}) \quad (3.8)$$

- เมื่อ
- $a_k, a_{k'}, b_k, b_{k'}$ เป็นค่าคาดหวังที่จะพบคูคูเปอร์ที่สถานะพื้น
 - $(C_{k'\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวนสำหรับสร้างคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน s
 - $(C_{-k\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'})$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวนสำหรับทำลายคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน s
 - $(P_{k'\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ - b_k)$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวนสำหรับสร้างคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน p
 - $(P_{-k\downarrow} P_{k'\uparrow} - b_{k'})$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวนสำหรับทำลายคูคูเปอร์ในแถบพลังงาน p

ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้นของแถบพลังงาน s จะเป็น $|\psi_s\rangle$ ดังนี้

$$|\psi_s\rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2 C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+) |0\rangle \quad (3.9)$$

ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้นของแถบพลังงาน p จะเป็น $|\psi_p\rangle$ ดังนี้

$$|\psi_p\rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2 P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+) |0\rangle \quad (3.10)$$

ทำการนอร์มอลไลซ์ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้นทั้งสองแถบพลังงานจะพบว่า มีค่าเท่ากับ 1 ดังนี้

$$\langle \psi_s | \psi_s \rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2) = 1 \quad \text{และ} \quad \langle \psi_p | \psi_p \rangle = \prod_k (u_k^2 + v_k^2) = 1 \quad (3.11)$$

โดย u_k เป็นความน่าจะเป็นของแอมพลิจูดการเกิดคูคูเปอร์ ($k \uparrow, -k \downarrow$)
 v_k เป็นความน่าจะเป็นของแอมพลิจูดที่ไม่เกิดคูคูเปอร์ ($-k' \downarrow, k' \uparrow$)
 $|0\rangle$ เป็นสถานะสุญญากาศ

จากค่าคาดหวังที่จะพบคูคูเปอร์ที่สถานะพื้น เป็นดังนี้

$$a_k = \langle \psi_s | C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ | \psi_s \rangle = u_k v_k \quad (3.12)$$

$$b_k = \langle \psi_s | P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ | \psi_s \rangle = u_k v_k \quad (3.13)$$

$$a_{k'} = \langle \psi_s | C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} | \psi_s \rangle = u_{k'} v_{k'} \quad (3.14)$$

$$b_{k'} = \langle \psi_s | P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} | \psi_s \rangle = u_{k'} v_{k'} \quad (3.15)$$

ที่เวกเตอร์คลื่น \vec{k} ใด ๆ จะทำให้ $u_k^2 + v_k^2 = 1$ ซึ่งเขียน $u_k = \sin \theta_k$, $v_k = \cos \theta_k$ ในรูปเชิงขั้ว จะได้

$$u_k^2 = \sin^2 \theta_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (3.16)$$

$$v_k^2 = \cos^2 \theta_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
u_k v_k &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Delta_k}{\sqrt{(\epsilon_k^2 + \Delta_k^2)}} \\
&= \frac{\Delta_k}{2E_k}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

พิจารณาเทอม H_s จากสมการ (3.2) จะแทนด้วยสมการ (3.5) – (3.6) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
H_s &= \sum_{k\sigma} \epsilon_{sk} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{sskk'} \left[a_k + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k) \right] \left[a_{k'} + (C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'}) \right] \\
&= \sum_{k\sigma} \epsilon_{sk} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{sskk'} \left[a_k C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_k a_{k'} - a_k a_{k'} + C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ a_{k'} + a_k a_{k'} + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k) (C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'}) \right]
\end{aligned}$$

ตัดเทอมที่แปรปรวนมาก ๆ ทิ้งจะได้

$$H_s = \sum_{k\sigma} \epsilon_{sk} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} - \sum_{kk'} V_{sskk'} \left(\langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} + C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle - \langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle \langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle \right) \tag{3.19}$$

นิยามค่าพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน Δ_{sk} ตามสมการ (2.10) ได้ดังนี้

$$\Delta_{sk} = -\sum_{k'} V_{sskk'} a_{k'} = -\sum_{k'} V_{sskk'} u_{k'} v_{k'} = -\sum_{k'} V_{sskk'} \langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle \tag{3.20}$$

ซึ่งจะพบว่า Δ_{sk} เท่ากับ $\Delta_{sk'}$ โดยพลังงานจลน์ของคู่คูเปอร์จะเป็น $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$ แทนสมการ (3.20) สามารถเขียนแฮมิลโทเนียนจากสมการ (3.19) ในเทอมของ Δ_{sk} และ $\Delta_{sk'}$ ได้

$$H_s = \sum_{k\sigma} \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2} [C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}] - \sum_{kk'} \Delta_{sk} [C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} + C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+] + \Delta_{sk} \langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle \tag{3.21}$$

และพิจารณาค่าคาดหวัง $\langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle$ แทนค่าจากสมการ (2.18) จะได้

$$\langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle = \langle (u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{k\uparrow}^+) (u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow}^+) \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle &= \langle (u_k^2 \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{k\uparrow} - v_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow}^+ + v_k u_k \gamma_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow}^+ - u_k v_k \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) \rangle \\
&= \langle u_k v_k (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}) - u_k v_k \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} \rangle \\
&= u_k v_k \langle (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow}) - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} \rangle \\
&= u_k v_k \left[(1 - \langle \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} \rangle) - \langle \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

จากสมการ (3.22) ดำเนินการตามหาค่าคาดหวังของเฟอร์มีออน (ภาคผนวก ก) จะได้

$$\begin{aligned}
\langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle &= u_k v_k [(1 - f(E_k)) - f(E_k)] \\
&= u_k v_k [1 - 2f(E_k)]
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(E_k) = \frac{1}{e^{-\epsilon_k/2T} + 1}$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงแบบเฟอร์มี – ดิแรค (Fermi-Dirac Distribution Function) ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle &= u_k v_k \left(1 - \frac{2}{e^{-\epsilon_k/2T} + 1} \right) \\
&= u_k v_k \left(\frac{e^{-\epsilon_k/2T} - 1}{e^{-\epsilon_k/2T} + 1} \right) \\
&= u_k v_k \tanh\left(\frac{E_k}{2T}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

แทนค่าสมการ (3.23) ในสมการของช่องว่างพลังงาน Δ_{sk} ตามสมการ (3.20) จะได้สมการเซฟคอนซิสเทนต์ (Self-Consistence Equation) สำหรับ Δ_{sk} เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\Delta_{sk} &= - \sum_{k'} V_{sskk'} u_{k'} v_{k'} \tanh\left(\frac{E_{k'}}{2T}\right) \\
&= - \sum_{k'} V_{sskk'} \frac{\Delta_{sk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}}{2T}\right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

พิจารณา เทอม H_p ตามสมการ (3.3) ในทำนองเดียวกัน H_s จะได้

$$H_p = \sum_{k\sigma} \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2} [P_{k\uparrow}^+ P_{k\uparrow} + P_{-k\downarrow}^+ P_{-k\downarrow}] - \sum_{kk'} \Delta_{sk} [P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} + P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+] + \Delta_{sk} \langle P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} \rangle \quad (3.25)$$

โดยสมการของช่องว่างพลังงาน Δ_{pk} เป็นดังนี้

$$\Delta_{pk} = - \sum_{k'} V_{ppkk'} \frac{\Delta_{pk}}{2\sqrt{\varepsilon_{pk}^2 + \Delta_{pk}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{pk}^2 + \Delta_{pk}^2}}{2T}\right) \quad (3.26)$$

พิจารณา เทอม H_{int} ตามสมการ (3.4) จะได้

$$H_{int} = - \sum_{kk'} V_{spkk'} C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} - \sum_{kk'} V_{spkk'} P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{kk'} V_{spkk'} [a_k + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)] [b_{k'} + (P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow} - b_{k'})] \\ &\quad - \sum_{kk'} V_{spkk'} [b_k + (P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ - b_k)] [a_{k'} + (C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'})] \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &= - \sum_{kk'} V_{spkk'} [a_k P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} - a_k b_{k'} - a_k b_{k'} + C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ b_{k'} + a_k b_{k'} + (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ - a_k)(P_{-k'\downarrow} P_{k'\uparrow} - b_{k'})] \\ &\quad - \sum_{kk'} V_{spkk'} [b_k C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} - b_k a_{k'} - b_k a_{k'} + P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ a_{k'} + b_k a_{k'} + (P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ - b_k)(C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'})] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$= - \sum_{kk'} V_{spkk'} [\langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} - C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \langle P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} \rangle + \langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle \langle P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} \rangle] \quad (3.30)$$

กำหนดให้ช่องว่างพลังงานระหว่างแถบพลังงาน s และ p โดย $\Delta_{sp} = \Delta_{ps}$ และ $V_{sp} = V_{ps}$ จะได้

$$\Delta_{sp} = - \sum_{k'} V_{spkk'} \langle C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \rangle \quad (3.31)$$

และ

$$\Delta_{ps} = - \sum_{k'} V_{spkk'} \langle P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+ \rangle \quad (3.32)$$

$$H_{int} = - \sum_{kk'} \Delta_{sp} [P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} - C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+] + \Delta_{sp} \langle P_{-k\downarrow} P_{k\uparrow} \rangle - \sum_{kk'} \Delta_{ps} [C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} - P_{k\uparrow}^+ P_{-k\downarrow}^+] + \Delta_{ps} \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \quad (3.33)$$

นำสมการเซฟคอนชิสเทนต์ มาพิจารณาจะได

$$\Delta_{sp} = - \sum_{k'} V_{spkk'} \frac{\Delta_{skk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk}^2 + \Delta_{sk}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk}^2 + \Delta_{sk}^2}}{2T}\right) \quad (3.34)$$

และ

$$\Delta_{ps} = - \sum_{k'} V_{pskk'} \frac{\Delta_{pkk'}}{2\sqrt{\epsilon_{pk}^2 + \Delta_{pk}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{pk}^2 + \Delta_{pk}^2}}{2T}\right) \quad (3.35)$$

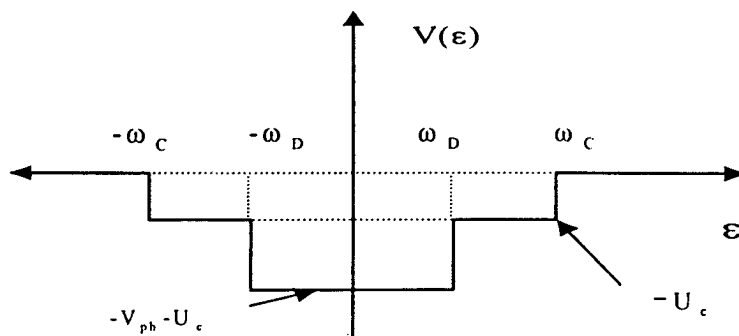
ในงานวิจัยนี้ ได้ใช้สมการช่องว่างพลังงานที่ได้มาจากสมการของ Δ_{sk} และ Δ_{pk} และเทอมที่เป็นช่องว่างพลังงานที่เกิดจากการไฮบริดไดเซชัน ตามสมการ (3.24) กับสมการ (3.35) และสมการ (3.26) กับสมการ (3.34) ดังนี้

$$\Delta_{sk} = - \sum_{k'} V_{sskk'} \frac{\Delta_{sk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{pskk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}}{2T}\right) \quad (3.36)$$

$$\Delta_{pk} = - \sum_{k'} V_{ppkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{spkk'} \frac{\Delta_{sk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}}{2T}\right) \quad (3.37)$$

ขั้นตอนที่ 2 การคำนวณหาสมการของอนุกรมวิฤต

การคำนวณจะเริ่มต้นจากสมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน ตามสมการ (3.36) และสมการ (3.37) เพื่อให้การศึกษาครอบคลุมมากขึ้น ในการวิจัยนี้จะพิจารณาอันตรกิริยาดึงดูดอิเล็กตรอน ประกอบด้วย 2 ส่วนคือ พลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาการแลกเปลี่ยนอิเล็กตรอน - โฟนอน - อิเล็กตรอน (V_{ph}) และพลังงานศักย์ดึงดูดอื่น ๆ ที่ไม่ได้เกิดจากโฟนอน (U_c) สำหรับพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาในแถบพลังงานชั้น s จะได้เป็น V_{ph}^s และ U_c^s สำหรับพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาในแถบพลังงานชั้น p จะได้เป็น V_{ph}^p และ U_c^p เขียนแบบจำลองของพลังงานศักย์ในแต่ละแถบพลังงาน ได้ดังภาพประกอบ 30



ภาพประกอบ 30 แสดงแบบจำลองพลังงานศักย์แบบสองหลุมของคู่คูเปอร์ในแต่ละแถบพลังงาน

จะได้แบบจำลองพลังงานศักย์แบบสองหลุมของคู่คูเปอร์ สำหรับแถบพลังงาน s เป็น

$$V_{ssk'k} = \begin{cases} -V_{ph}^s - U_{cs} & \text{เมื่อ } 0 < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_D \\ -U_{cs} & \text{เมื่อ } \omega_D < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_C \\ 0 & \text{เมื่อ } |\omega_k, \omega_{k'}| \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.38)$$

และ สำหรับแถบพลังงาน p จะเป็น

$$V_{ppk'k} = \begin{cases} -V_{ph}^p - U_{cp} & \text{เมื่อ } 0 < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_D \\ -U_{cp} & \text{เมื่อ } \omega_D < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_C \\ 0 & \text{เมื่อ } |\omega_k, \omega_{k'}| \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.39)$$

ในทำนองเดียวกัน กำหนดให้สมการช่องว่างพลังงาน Δ_{si} และ Δ_{pi} มีค่าคงตัว ซึ่ง $i = 1, 2$ เป็น

$$\Delta_{sk} = \begin{cases} \Delta_{s1} & \text{เมื่อ } 0 < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_D \\ \Delta_{s2} & \text{เมื่อ } \omega_D < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_C \\ 0 & \text{เมื่อ } |\omega_k, \omega_{k'}| \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.40)$$

และ

$$\Delta_{pk} = \begin{cases} \Delta_{p1} & \text{เมื่อ } 0 < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_D \\ \Delta_{p2} & \text{เมื่อ } \omega_D < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_C \\ 0 & \text{เมื่อ } |\omega_k, \omega_{k'}| \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases} \quad (3.41)$$

เปลี่ยนจาก \sum เป็น $\int N(0) d\epsilon$ โดย $N_s(0)$ และ $N_p(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะพลังงาน
ที่บริเวณผิวเฟอร์มีแบบคงตัวของแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p และจะพิจารณาที่
 $T = T_C$ จะได้ $\Delta_i(T_C) = 0$ เมื่อ $0 < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_D$ และแทนค่าสมการ (3.38) - (3.41) ลงใน
สมการ (3.36) เป็น

$$\begin{aligned} \Delta_{s1} = & (V_{ph}^s + U_c^s) N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^s N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \\ & + (V_{ph}^{ps} + U_c^{ps}) N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^s N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p1} = & (V_{ph}^p + U_c^p) N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^p N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \\ & + (V_{ph}^{sp} + U_c^{sp}) N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^{sp} N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \end{aligned} \quad (3.43)$$

และเมื่อ $\omega_D < |\omega_k, \omega_{k'}| < \omega_C$ จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{s2} = & U_c^s N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^s N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \\ & + U_c^{ps} N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^{ps} N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p2} = & U_c^p N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^p N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \\ & + U_c^{sp} N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k + U_c^{sp} N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \end{aligned} \quad (3.45)$$

กำหนดให้ $I_1(T_C) = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k$ (3.46)

และ $I_2(T_C) = \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k$ (3.47)

พิจารณา $I_1(T_C) = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k$ ใช้การเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = \frac{\epsilon_k}{2T_C}$ จะได้

$dx = \frac{1}{2T_C} d\epsilon_k$ ขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็น 0 ถึง $\frac{\omega_D}{2T_C}$

$$I_1(T_C) = \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \tanh x \, dx \quad (3.48)$$

ขณะที่ $\tanh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2+a^2}$ โดย $a = (n+\frac{1}{2})\pi$ สำหรับเฟอร์มิออน (Jeffrey. 1995 : 131) แทนลงในสมการที่ (3.48) จะได้

$$\begin{aligned} I_1(T_C) &= \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2+a^2} \right) dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x^2+a^2} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{(2n+1)\pi T_C} \right) \end{aligned}$$

พิจารณากรณีที่ $\omega_D \gg T_C$ ซึ่งจะได้ $\frac{\omega_D}{\pi T_C} \rightarrow \infty$ ทำให้ $\tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ และขอบเขตของการ

รวมตั้งแต่ $n=0$ ถึง $\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}$ ซึ่งจะได้

$$I_1(T_C) = \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad (3.49)$$

พิจารณาเทอม $\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)}$ กระจายในรูปของอนุกรมอนันต์จะได้

$$\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{\omega_D/2T_C}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{\omega_D/2T_C} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{\omega_D/2T_C - 1/2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} &= \sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_C}} \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_C} - 1/2} \frac{1}{N} \right) \\
&= \gamma + \ln\left(\frac{\omega_D}{\pi T_C}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \left[\gamma + \ln\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_C - 1/2}\right) \right] \\
&= \ln\left(\frac{2e^\gamma \omega_D}{\pi T_C}\right) \tag{3.50}
\end{aligned}$$

สำหรับ $I_2(T_C) = \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k$ ใช้การเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = \frac{\epsilon_k}{2T_C}$ จะได้

$$dx = \frac{1}{2T_C} d\epsilon \text{ ขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็น } 0 \text{ ถึง } \frac{\omega_D}{2T_C} \text{ และใช้ } \tanh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + a^2}$$

โดย $a = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ เนื่องจาก $\omega_C > \omega_D$ ทำให้ $\int_{\omega_D/2T_C}^{\omega_C/2T_C} = \int_0^{\omega_C/2T_C} - \int_0^{\omega_D/2T_C}$ จะได้

$$\begin{aligned}
I_2(T_C) &= \int_{\omega_D/2T_C}^{\omega_C/2T_C} \frac{1}{x} \tanh(x) dx \\
&= \int_0^{\omega_C/2T_C} \frac{1}{x} \tanh(x) dx - \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \tanh(x) dx \\
&= \int_0^{\omega_C/2T_C} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + a^2} \right) dx - \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + a^2} \right) dx \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_C/2T_C} \frac{1}{x^2 + a^2} dx - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D/2T_C} \frac{1}{x^2 + a^2} dx \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi T_C} \left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega_C}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi T_C}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi T_C}\right) \right]
\end{aligned}$$

(3.51)

พิจารณา กรณีที่ $\omega_D \gg T_C$ ซึ่งจะได้ $\frac{\omega_D}{2T_C} \rightarrow \infty$ และขอบเขตของการรวมตั้งแต่ $n=0$ ถึง

$$\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2} \text{ จะได้ } \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_C} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_C}\right) \text{ แทนลงในสมการ (3.51) จะได้ค่า}$$

$$\begin{aligned} I_2(T_C) &= \left[\ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_C}{\pi T_C}\right) - \ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_C}\right) \right] \\ &= \ln\left(\frac{\omega_C}{\omega_D}\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

สมการ $I_1(T_C)$ และ $I_2(T_C)$ ตามสมการ (3.50) และ (3.52) เป็นสมการของอนุกรมวิ-
กฤตแบบที่มีการประมาณและสามารถใช้ได้ดีเมื่อ $\omega_D \gg T_C$ และตามสมการ (3.48) และ (3.51)
เป็นสมการที่ไม่มีการประมาณ แทนลงในสมการ (3.42) - (3.45) ได้ดังนี้

$$\Delta_{s1} = (V_{ph}^s + U_c^s) N_s(0) \Delta_{s1} I_1 + U_c^s N_s(0) \Delta_{s2} I_2 + (V_{ph}^{ps} + U_c^{ps}) N_p(0) \Delta_{p1} I_1 + U_c^{ps} N_p(0) \Delta_{p2} I_2 \quad (3.53)$$

$$\Delta_{p1} = (V_{ph}^p + U_c^p) N_p(0) \Delta_{p1} I_1 + U_c^p N_p(0) \Delta_{p2} I_2 + (V_{ph}^{sp} + U_c^{sp}) N_s(0) \Delta_{s1} I_1 + U_c^{sp} N_s(0) \Delta_{s2} I_2 \quad (3.54)$$

$$\Delta_{s2} = U_c^s N_s(0) \Delta_{s1} I_1 + U_c^s N_s(0) \Delta_{s2} I_2 + U_c^{ps} N_p(0) \Delta_{p1} I_1 + U_c^{ps} N_p(0) \Delta_{p2} I_2 \quad (3.55)$$

$$\Delta_{p2} = U_c^p N_p(0) \Delta_{p1} I_1 + U_c^p N_p(0) \Delta_{p2} I_2 + U_c^{sp} N_s(0) \Delta_{s1} I_1 + U_c^{sp} N_s(0) \Delta_{s2} I_2 \quad (3.56)$$

นำสมการ (3.53) - (3.56) มาเขียนในรูปสมการซีคิวลาร์ (Secular Equation) จะได้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_{ph}^s + U_c^s) N_s(0) I_1 & (V_{ph}^{ps} + U_c^{ps}) N_p(0) I_1 & U_c^s N_s(0) I_2 & U_c^{ps} N_p(0) I_2 \\ (V_{ph}^{sp} + U_c^{sp}) N_s(0) I_1 & (V_{ph}^p + U_c^p) N_p(0) I_1 & U_c^{sp} N_s(0) I_2 & U_c^p N_p(0) I_2 \\ U_c^s N_s(0) I_1 & U_c^{ps} N_p(0) I_1 & U_c^s N_s(0) I_2 & U_c^{ps} N_p(0) I_2 \\ U_c^{sp} N_s(0) I_1 & U_c^p N_p(0) I_1 & U_c^{sp} N_s(0) I_2 & U_c^p N_p(0) I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

ต่อไปจะพิจารณาสมการ (3.57) ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

1. กรณีที่ตัวนำวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่ไม่มีพลังงานศักย์ถึงจุดแบบอื่น $U_c = 0$ ได้
 $\Delta_2 = 0$ แทนในสมการ (3.57) ให้ $\Delta_{s1} = \Delta_s$, $\Delta_{p1} = \Delta_p$ จะได้

$$\begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ph}^s N_s(0) I_1 & V_{ph}^{ps} N_p(0) I_1 \\ V_{ph}^{sp} N_s(0) I_1 & V_{ph}^p N_p(0) I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

สมการ (3.67) จะตรงกับสมการ (33.5) จากหนังสือของแคทเทอร์สันและซง (Ketterson, & Song, 1999 : 244)

พิจารณากรณีตัวนำวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่ไม่มีพลังงานศักย์ดึงดูดแบบอื่น ตามสมการ (3.58) ให้ $U_c = 0$ ได้ $\Delta_2 = 0$ และ $\Delta_{s1} = \Delta_{p1} = \Delta_1$, $\Delta_{s2} = \Delta_{p2} = \Delta_2$, $\lambda_s = \lambda_p = \lambda$, $\mu_s = \mu_p = \mu$ จะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_s I_1 & \lambda_{sp} I_1 \\ \lambda_{sp} I_1 & \lambda_p I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} \lambda_s I_1 - 1 & \lambda_{sp} I_1 \\ \lambda_{sp} I_1 & \lambda_p I_1 - 1 \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda_s I_1 - 1)(\lambda_p I_1 - 1) - (\lambda_{sp} I_1)^2 &= 0 \\ \lambda_s \lambda_p I_1^2 - \lambda_s I_1 - \lambda_p I_1 + 1 - \lambda_{sp}^2 I_1^2 &= 0 \\ I_1^2 (\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2) - (\lambda_s + \lambda_p) I_1 + 1 &= 0 \\ I_1 &= \frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)} \\ \ln \left(\frac{2e^{-c} \omega_D}{\pi T_C} \right) &= \frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)} \\ T_C &= \left(\frac{2e^{-c}}{\pi} \right) \omega_D \exp \left(- \frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

สมการ (3.59) เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตของแบบจำลองสองแถบพลังงานที่ไม่มีเทอมของอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ($U_c = 0$)

2. กรณีตัวนำวดยิ่งแบบแถบพลังงานเดียว คือ ไม่มีแถบพลังงานชั้น p แต่มีพลังงานศักย์ดึงดูดสองแบบ จะได้ $\Delta_p = 0$ และ $U^p = 0$ และ $V^p = 0$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_{ph}^s + U_c^s) N_s(0) I_1 & U_c^s N_s(0) I_2 \\ U_c^s N_s(0) I_1 & U_c^s N_s(0) I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{p1} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

สมการ (3.60) จะตรงกับสมการ (32.4) จากหนังสือของแคทเทอร์สันและซง (Ketterson, & Song, 1999 : 240)

พิจารณาสมการ (3.57) กรณีมีแถบพลังงานชั้น s เพียงแถบพลังงานเดียว จะได้ $\Delta_p = 0$ และ $U^p = 0$ และ $V^p = 0$ ได้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 & \mu_s I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_s I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1 & \mu_s I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_s I_2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[(\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1](\mu_s I_2 - 1) - \mu_s I_1 \mu_s I_2 = 0$$

$$(\lambda_s I_1 \mu_s I_2 + \mu_s I_1 \mu_s I_2) - (\lambda_s + \mu_s)I_1 - \mu_s I_2 + 1 - \mu_s I_1 \mu_s I_2 = 0$$

$$\lambda_s I_1 (\mu_s I_2 - 1) - \mu_s I_1 - (\mu_s I_2 - 1) = 0$$

$$(\lambda_s I_1 - 1)(\mu_s I_2 - 1) - \mu_s I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{1}{\lambda_s - \frac{\mu_s}{\mu_s I_2 - 1}}$$

กำหนดให้ $\mu^* = \frac{\mu_s}{\mu_s I_2 - 1}$ จะได้

$$I_1 = \frac{1}{\lambda_s - \mu^*}$$

แทนค่า I_1 แบบประมาณตามสมการ (3.50) จะได้

$$\ln \left(\frac{2e^{-c} \omega_D}{\pi T_C} \right) = \frac{1}{\lambda_s - \mu^*}$$

$$T_C = \left(\frac{2e^{-c}}{\pi} \right) \omega_D \exp \left(-\frac{1}{\lambda_s - \mu^*} \right) \quad (3.61)$$

สมการ (3.61) เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตของแถบพลังงานแถบเดียวที่มีเทอมของอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน (U_c) ซึ่งตรงกับสมการของอุณหภูมิวิกฤตของอีไลซ์เบิร์ก (Elishberg) เมื่อแทนค่า I_1 แบบไม่มีการประมาณจะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตแบบไม่มีการประมาณในกรณีตัวนำยวดยิ่งแบบแถบพลังงานเดียวที่มีผลเนื่องจากอันตรกิริยาอื่น

จากสมการ (3.53) - (3.56) กำหนดให้ $\lambda = N(0)V$ เรียกว่า ค่าคงตัวของการคู่ควบ (Coupling Constant) ของพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน และ $\mu = N(0)U_c$ เป็นค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน

$$\begin{aligned}\lambda_s &= N_s(0)V_{ph}^s, & \lambda_p &= N_p(0)V_{ph}^p, & \lambda_{sp} &= N_s(0)V_{ph}^{sp} = N_p(0)V_{ph}^{sp} \\ \mu_s &= N_s(0)U_c^s, & \mu_p &= N_p(0)U_c^p, & \mu_{sp} &= N_s(0)U_c^{sp} = N_p(0)U_c^{sp}\end{aligned}\quad (3.62)$$

และ

$$\Delta_{s1} = (\lambda_s + \mu_s)\Delta_{s1}I_1 + \mu_s\Delta_{s2}I_2 + (\lambda_{ps} + \mu_{ps})\Delta_{p1}I_1 + \mu_{ps}\Delta_{p2}I_2 \quad (3.63)$$

$$\Delta_{p1} = (\lambda_p + \mu_p)\Delta_{p1}I_1 + \mu_p\Delta_{p2}I_2 + (\lambda_{sp} + \mu_{sp})\Delta_{s1}I_1 + \mu_{sp}\Delta_{s2}I_2 \quad (3.64)$$

และ

$$\Delta_{s2} = \mu_s\Delta_{s1}I_1 + \mu_s\Delta_{s2}I_2 + \mu_{ps}\Delta_{p1}I_1 + \mu_{ps}\Delta_{p2}I_2 \quad (3.65)$$

$$\Delta_{p2} = \mu_p\Delta_{p1}I_1 + \mu_p\Delta_{p2}I_2 + \mu_{sp}\Delta_{s1}I_1 + \mu_{sp}\Delta_{s2}I_2 \quad (3.66)$$

ซึ่งกำหนดให้ $\Delta_{s1} = \Delta_{p1} = \Delta_1$, $\Delta_{s2} = \Delta_{p2} = \Delta_2$, $\lambda_s = \lambda_p = \lambda$, $\mu_s = \mu_p = \mu$ (3.67)

นำสมการ (3.63) - (3.66) มาเขียนในรูปสมการซีคิวลาร์ (Secular Equation) จะได้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & (\lambda_p + \mu_p)I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_{sp} I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ \mu_{sp} I_1 & \mu_p I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & (\lambda_p + \mu_p)I_1 - 1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_{sp} I_1 & \mu_s I_2 - 1 & \mu_{sp} I_2 \\ \mu_{sp} I_1 & \mu_p I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} = 0$$

เนื่องจาก Δ_1 และ Δ_2 มีค่าใด ๆ จะได้

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & (\lambda_p + \mu_p)I_1 - 1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_{sp} I_1 & \mu_s I_2 - 1 & \mu_{sp} I_2 \\ \mu_{sp} I_1 & \mu_p I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & 1 - I_1 \lambda_p - I_1 \lambda_s + I_1^2 \lambda_p \lambda_s - I_1^2 \lambda_{sp}^2 - I_1 \mu_p - I_2 \mu_p + I_1 I_2 \lambda_p \mu_p + I_1^2 \lambda_s \mu_p + I_1 I_2 \lambda_s \mu_p - I_1^2 I_2 \lambda_p \lambda_s \mu_p \\ & + I_1^2 I_2 \lambda_{sp}^2 \mu_p - I_1 \mu_s - I_2 \mu_s + I_1^2 \lambda_p \mu_s + I_1 I_2 \lambda_p \mu_s + I_1 I_2 \lambda_s \mu_s - I_1^2 I_2 \lambda_p \lambda_s \mu_s + I_1^2 I_2 \lambda_{sp}^2 \mu_s + I_1^2 \mu_p \mu_s \\ & + 2I_1 I_2 \mu_p \mu_s + I_2^2 \mu_p \mu_s - I_1^2 I_2 \lambda_p \mu_p \mu_s - I_1 I_2^2 \lambda_p \mu_p \mu_s - I_1^2 I_2 \lambda_s \mu_p \mu_s - I_1 I_2^2 \lambda_s \mu_p \mu_s + I_1^2 I_2^2 \lambda_p \lambda_s \mu_p \mu_s \\ & - I_1^2 I_2^2 \lambda_{sp}^2 \mu_p \mu_s - 2I_1^2 \lambda_{sp} \mu_{sp} - I_1 \mu_{sp}^2 - 2I_1 I_2 \mu_{sp}^2 - I_2 \mu_{sp}^2 + I_1^2 I_2 \lambda_p \mu_{sp}^2 + I_1 I_2^2 \lambda_p \mu_{sp}^2 + I_1^2 I_2 \lambda_s \mu_{sp}^2 \\ & + I_1 I_2^2 \lambda_s \mu_{sp}^2 - I_1^2 I_2^2 \lambda_p \lambda_s \mu_{sp}^2 + I_1^2 I_2^2 \lambda_{sp}^2 \mu_{sp}^2 = 0 \end{aligned}$$

แก้สมการจะได้ I_1 ดังนี้

$$I_1 = \left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}} \right) \quad (3.70)$$

โดยที่ $A = 2(-1 + I_2 \mu_p)(-1 + I_2 \mu_s) - 2I_2^2 \mu_{sp}^2$

$$B = (\mu_p + \mu_s + 2I_2(-(\mu_p \mu_s) + \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_2 \mu_p)(-1 + I_2 \mu_s) - I_2^2 \mu_{sp}^2) + \lambda_s((-1 + I_2 \mu_p)(-1 + I_2 \mu_s) - I_2^2 \mu_{sp}^2)$$

$$C = \lambda_p + \lambda_s + \mu_p - I_2 \lambda_p \mu_p - I_2 \lambda_s \mu_p + (1 + I_2^2(\lambda_p + \lambda_s)\mu_p - I_2(\lambda_p + \lambda_s + 2\mu_p))\mu_s - I_2(-2 + I_2(\lambda_p + \lambda_s))\mu_{sp}^2$$

$$D = 4((-1 + I_2 \mu_p)(-1 + I_2 \mu_s) - I_2^2 \mu_{sp}^2)(\lambda_s \mu_p - 2\lambda_{sp} \mu_{sp} - (-1 + I_2 \lambda_s)(\mu_p \mu_s - \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_2 \mu_p)(-\mu_s + \lambda_s(-1 + I_2 \mu_s)) - I_2(-1 + I_2 \lambda_s)\mu_{sp}^2) + \lambda_{sp}^2(-1 + I_2(\mu_p + \mu_s) + I_2^2(-(\mu_p \mu_s) + \mu_{sp}^2)))$$

แทนค่า I_1 ตามสมการ (3.50) จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤต ดังนี้

$$\ln \left(\frac{2e^{\gamma} \omega_D}{\pi T_{Cl}} \right) = \left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}} \right)$$

$$T_c = \left(\frac{2e^r}{\pi} \right) \omega_D \exp \left(- \left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}} \right) \right) \quad (3.71)$$

สมการ (3.71) เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่มีผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน

ขั้นตอนที่ 3 การคำนวณหาสมการช่องว่างพลังงาน

พิจารณา ที่อุณหภูมิ $T=0$ และ $\Delta(T) = \Delta(0)$ ขณะที่ $T \rightarrow 0$ มีค่ามากจนเข้าสู่ค่าอนันต์ จะทำให้ $\lim_{T_c \rightarrow \infty} \tanh \left(\frac{\varepsilon}{2T} \right) = 1$ เขียนสมการช่องว่างพลังงานได้ดังนี้

พิจารณาที่ $T=0$ และช่วง $0 < |\omega| < \omega_D$

$$\begin{aligned} \Delta_{s1} = & (V_{ph}^s + U_c^s) N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^s N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \\ & + (V_{ph}^{ps} + U_c^{ps}) N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^{ps} N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p1} = & (V_{ph}^p + U_c^p) N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^p N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \\ & + (V_{ph}^{sp} + U_c^{sp}) N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^{sp} N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.73)$$

และช่วง $\omega_D < |\omega_k, \omega_k'| < \omega_c$ จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{s2} = & U_c^s N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^s N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \\ & + U_c^{ps} N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^{ps} N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p2} = & U_c^p N_p(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^p N_p(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \\ & + U_c^{sp} N_s(0) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + U_c^{sp} N_s(0) \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.75)$$

จากเงื่อนไขเหมือนกับสมการสมการ (3.62) แทนในสมการ (3.72) ถึง (3.75) จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{s1} &= (\lambda_s + \mu_s) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_s \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \\ &+ (\lambda_{ps} + \mu_{ps}) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_{ps} \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p1} &= (\lambda_p + \mu_p) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_p \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \\ &+ (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_{sp} \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.77)$$

และช่วง $\omega_D < |\omega_k, \omega_k'| < \omega_C$ จะได้

$$\begin{aligned} \Delta_{s2} &= \mu_s \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_s \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \\ &+ \mu_{ps} \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_{ps} \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p2} &= \mu_p \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{p1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_p \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{p2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{p2}^2(0)}} d\varepsilon \\ &+ \mu_{sp} \int_0^{\omega_D} \frac{\Delta_{s1}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s1}^2(0)}} d\varepsilon + \mu_{sp} \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{\Delta_{s2}(0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_{s2}^2(0)}} d\varepsilon \end{aligned} \quad (3.79)$$

กำหนดให้ สมการอินทิกรัลเป็น $I_3(\Delta_i)$ มีช่วงขอบเขตการอินทิเกรต 0 ถึง ω_D และ $I_4(\Delta_i)$ มีช่วงขอบเขตการอินทิเกรตจาก ω_D ถึง ω_C ดังนี้

$$I_3(\Delta_i) = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} d\varepsilon \quad (3.80)$$

$$I_4(\Delta_i) = \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} d\varepsilon \quad (3.81)$$

แทนสมการ (3.80) และ (3.81) ลงในสมการ (3.76)-(3.79) จะได้

$$\Delta_{s1} = (\lambda_s + \mu_s)\Delta_{s1} I_3(\Delta_{s1}) + \mu_s \Delta_{s2} I_4(\Delta_{s2}) + (\lambda_{ps} + \mu_{ps})\Delta_{p1} I_3(\Delta_{p1}) + \mu_{ps} \Delta_{p2} I_4(\Delta_{p2}) \quad (3.82)$$

$$\Delta_{p1} = (\lambda_p + \mu_p)\Delta_{p1} I_3(\Delta_{p2}) + \mu_p \Delta_{p2} I_4(\Delta_{p2}) + (\lambda_{sp} + \mu_{sp})\Delta_{s1} I_3(\Delta_{s1}) + \mu_{sp} \Delta_{s2} I_4(\Delta_{s2}) \quad (3.83)$$

และ

$$\Delta_{s2} = \mu_s \Delta_{s1} I_3(\Delta_{s1}) + \mu_s \Delta_{s2} I_4(\Delta_{s2}) + \mu_{ps} \Delta_{p1} I_3(\Delta_{p1}) + \mu_{ps} \Delta_{p2} I_4(\Delta_{p2}) \quad (3.84)$$

$$\Delta_{p2} = \mu_p \Delta_{p1} I_3(\Delta_{p1}) + \mu_p \Delta_{p2} I_4(\Delta_{p2}) + \mu_{sp} \Delta_{s1} I_3(\Delta_{s1}) + \mu_{sp} \Delta_{s2} I_4(\Delta_{s2}) \quad (3.85)$$

ซึ่งกำหนดให้ $\Delta_{s1} = \Delta_{p1} = \Delta_1$, $\Delta_{s2} = \Delta_{p2} = \Delta_2$, $\lambda_s = \lambda_p = \lambda$, $\mu_s = \mu_p = \mu$ จะได้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_3 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_3 & \mu_s I_4 & \mu_{sp} I_4 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_3 & (\lambda_p + \mu_p)I_3 & \mu_{sp} I_4 & \mu_p I_4 \\ \mu_s I_3 & \mu_{sp} I_3 & \mu_s I_4 & \mu_{sp} I_4 \\ \mu_{sp} I_3 & \mu_p I_3 & \mu_{sp} I_4 & \mu_p I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \\ \Delta_{p1} \\ \Delta_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

เนื่องจาก Δ_1 และ Δ_2 มีค่าใด ๆ ก็ได้

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_3 - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_3 & \mu_s I_4 & \mu_{sp} I_4 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_3 & (\lambda_p + \mu_p)I_3 - 1 & \mu_{sp} I_4 & \mu_p I_4 \\ \mu_s I_3 & \mu_{sp} I_3 & \mu_s I_4 - 1 & \mu_{sp} I_4 \\ \mu_{sp} I_3 & \mu_p I_3 & \mu_{sp} I_4 & \mu_p I_4 - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.87)$$

จะได้

$$\begin{aligned} & 1 - I_3 \lambda_p - I_3 \lambda_s + I_3^2 \lambda_p \lambda_s - I_3^2 \lambda_{sp}^2 - I_3 \mu_p - I_4 \mu_p + I_3 I_4 \lambda_p \mu_p + I_3^2 \lambda_s \mu_p + I_3 I_4 \lambda_s \mu_p - I_3^2 I_4 \lambda_p \lambda_s \mu_p \\ & + I_3^2 I_4 \lambda_{sp}^2 \mu_p - I_3 \mu_s - I_4 \mu_s + I_3^2 \lambda_p \mu_s + I_3 I_4 \lambda_p \mu_s + I_3 I_4 \lambda_s \mu_s - I_3^2 I_4 \lambda_p \lambda_s \mu_s + I_3^2 I_4 \lambda_{sp}^2 \mu_s + I_3^2 \mu_p \mu_s \\ & + 2I_3 I_4 \mu_p \mu_s + I_4^2 \mu_p \mu_s - I_3^2 I_4 \lambda_p \mu_p \mu_s - I_3^2 I_4 \lambda_p \mu_p \mu_s - I_3^2 I_4 \lambda_s \mu_p \mu_s - I_3^2 I_4 \lambda_s \mu_p \mu_s + I_3^2 I_4^2 \lambda_p \lambda_s \mu_p \mu_s \\ & - I_3^2 I_4^2 \lambda_{sp}^2 \mu_p \mu_s - 2I_3^2 \lambda_{sp} \mu_{sp} - I_3^2 \mu_{sp}^2 - 2I_3 I_4 \mu_{sp}^2 - I_4^2 \mu_{sp}^2 + I_3^2 I_4 \lambda_p \mu_{sp}^2 + I_3 I_4^2 \lambda_p \mu_{sp}^2 + I_3^2 I_4 \lambda_s \mu_{sp}^2 \\ & + I_3 I_4^2 \lambda_s \mu_{sp}^2 - I_3^2 I_4^2 \lambda_p \lambda_s \mu_{sp}^2 + I_3^2 I_4^2 \lambda_{sp}^2 \mu_{sp}^2 = 0 \end{aligned}$$

แก้สมการจะได้ค่า I_3 เป็นดังนี้

$$I_3 = \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) \quad (3.88)$$

โดยที่ $A' = 2(-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - 2I_4^2\mu_{sp}^2$

$$B' = (\mu_p + \mu_s + 2I_4(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2) + \lambda_s((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2))$$

$$C' = \lambda_p + \lambda_s + \mu_p - I_4\lambda_p\mu_p - I_4\lambda_s\mu_p + (1 + I_4^2(\lambda_p + \lambda_s))\mu_p - I_4(\lambda_p + \lambda_s + 2\mu_p)\mu_s - I_4(-2 + I_4(\lambda_p + \lambda_s))\mu_{sp}^2$$

$$D' = 4((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2)(\lambda_s\mu_p - 2\lambda_{sp}\mu_{sp} - (-1 + I_4\lambda_s)(\mu_p\mu_s - \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_4\mu_p)(-\mu_s + \lambda_s(-1 + I_4\mu_s)) - I_4(-1 + I_4\lambda_s)\mu_{sp}^2) + \lambda_{sp}^2(-1 + I_4(\mu_p + \mu_s) + I_4^2(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2)))$$

พิจารณา I_3 และ I_4 โดย $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ แทนค่าในสมการของ I_3 จะได้

$$\begin{aligned} I_3(\Delta_i) &= \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} dE \\ &= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

จาก $\sinh^{-1}x = \ln(2x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 2k} x^{-2k}$ เมื่อ $x^2 \geq 1$ (Jeffrey. 1995 : 131)

เนื่องจาก $\omega_D > \Delta_i(0)$ เสมอ จะได้

$$I_3(\Delta_i) = \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 2k} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k} \quad (3.90)$$

และ

$$\begin{aligned} I_4(\Delta_i) &= \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} dE \\ &= \int_0^{\omega_C} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} dE - \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_i^2(0)}} dE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4(\Delta_i) &= \ln\left(\frac{2\omega_c}{\Delta_i(0)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_c}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} - \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \\
&= \left\{ \ln\left(\frac{2\omega_c}{\Delta_i(0)}\right) - \ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_c}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \\
&= \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2 2k} \left(\left(\frac{\omega_c}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k} - \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k} \right) \\
&= \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! (\Delta_i(0))^{2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \left(\frac{1}{\omega_c^{2k}} - \frac{1}{\omega_D^{2k}} \right) \tag{3.91}
\end{aligned}$$

แทนค่า I_3 ตามสมการ (3.88) ลงในสมการ (3.90) จะได้สมการของช่องว่างพลังงาน เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} &= \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) \\
\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_i(0)}\right) &= \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \\
\Delta_i(0) &= 2\omega_D \exp \left[- \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \right] \tag{3.92}
\end{aligned}$$

ต่อไปจะพิจารณาสมการ (3.57) ในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

1. กรณีตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่ไม่มีพลังงานศักย์ดึงดูดแบบอื่น $U_c = 0$ ได้ $\Delta_2 = 0$ แทนในสมการ (3.57) ให้ $\Delta_{s1} = \Delta_s$, $\Delta_{p1} = \Delta_p$ จะได้

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_s I_3 & \lambda_{sp} I_3 \\ \lambda_{sp} I_3 & \lambda_p I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_s \\ \Delta_p \end{bmatrix} \\
\det \begin{bmatrix} \lambda_s I_3 - 1 & \lambda_{sp} I_3 \\ \lambda_{sp} I_3 & \lambda_p I_3 - 1 \end{bmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

$$(\lambda_s I_3 - 1)(\lambda_p I_3 - 1) - (\lambda_{sp} I_3)^2 = 0$$

$$\lambda_s \lambda_p I_3^2 - \lambda_s I_3 - \lambda_p I_3 + 1 - \lambda_{sp}^2 I_3^2 = 0$$

$$I_3^2 (\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2) - (\lambda_s + \lambda_p) I_3 + 1 = 0$$

$$I_3 = \frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}$$

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}$$

$$\Delta(0) = 2\omega_D \exp\left(-\frac{(\lambda_s + \lambda_p) \pm \sqrt{(\lambda_s + \lambda_p)^2 - 4(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}}{2(\lambda_s \lambda_p - \lambda_{sp}^2)}\right) \quad (3.93)$$

สมการ (3.93) เป็นสมการของช่องว่างพลังงานของแบบจำลองสองแถบพลังงานที่ไม่มีเทอมของอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ($U_c = 0$)

2. กรณีตัวนำเวดิงแบบแถบพลังงานเดี่ยว คือ ไม่มีแถบพลังงานชั้น p แต่มีพลังงานศักย์ดึงดูดสองแบบ จะได้ $\Delta_p = 0$ และ $U^p = 0$ และ $V^p = 0$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s) I_3 & \mu_s I_4 \\ \mu_s I_3 & \mu_s I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{s1} \\ \Delta_{s2} \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s) I_3 - 1 & \mu_s I_4 \\ \mu_s I_3 & \mu_s I_4 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$((\lambda_s + \mu_s) I_3 - 1)(\mu_s I_4 - 1) - \mu_s I_3 \mu_s I_4 = 0$$

$$(\lambda_s I_3 \mu_s I_4 + \mu_s I_3 \mu_s I_4) - (\lambda_s + \mu_s) I_3 - \mu_s I_4 + 1 - \mu_s I_3 \mu_s I_4 = 0$$

$$\lambda_s I_3 (\mu_s I_4 - 1) - \mu_s I_3 - (\mu_s I_4 - 1) = 0$$

$$(\lambda_s I_3 - 1)(\mu_s I_4 - 1) - \mu_s I_3 = 0$$

$$I_3 = \frac{1}{\lambda_s - \frac{\mu_s}{\mu_s I_4 - 1}}$$

กำหนดให้ $\mu' = \frac{\mu_s}{\mu_s I_4 - 1}$ จะได้

$$I_3 = \frac{1}{\lambda_s - \mu'}$$

$$\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta(0)}\right) = \frac{1}{\lambda_s - \mu'}$$

$$\Delta(0) = 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda_s - \mu'}\right) \quad (3.94)$$

สมการ (3.94) เป็นสมการของช่องว่างพลังงานของแถบพลังงานแถบเดียวที่มีเทอมของอันตร-กิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน (U_c)

ขั้นตอนที่ 4 การคำนวณหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

จากความสัมพันธ์ของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

$$R = \frac{2\Delta_i(0)}{T_c} \quad (3.95)$$

แทนสมการ (3.71) และสมการ (3.92) ลงในสมการ (3.95) จะได้

$$R = \frac{2 \left\{ 2\omega_D \exp\left[-\left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)}\right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k}\right] \right\}}{\left(\frac{2e^\gamma}{\pi}\right) \omega_D \exp\left[-\left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}}\right)\right]} \quad (3.96)$$

สมการ (3.96) เป็นสมการของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่มีผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินมาตามขั้นตอนในบทที่ 3 เป็นการคำนวณหาค่าปริมาณต่าง ๆ อย่างแม่นยำ เพื่อศึกษาผลที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน สำหรับตัวนำเวดจ์แมกนีเซียมไดโบไรด์ ได้แก่ อุณหภูมิวิกฤต ช่องว่างพลังงาน และอัตราส่วนช่องว่างพลังงาน โดยกำหนดให้มีแบบจำลองพลังงานศักย์เป็นแบบสองหลุมเนื่องมาจากอันตรกิริยาดึงดูดของคูคู-เปอร์ตามวิธีของไอโกเย่ และเนื่องมาจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน (Interband Interaction) ของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p เหมือนกับการศึกษาของคริสโตฟเฟล ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงของพลังงาน และได้ผลการวิจัยดังนี้

1. สมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน ที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน ตามทฤษฎีบีซีเอส คำนวณได้ดังสมการ (3.36) และ (3.37) คือ

$$\Delta_{sk} = - \sum_{k'} V_{sskk'} \frac{\Delta_{sk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{pskk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}}{2T}\right) \quad (3.36)$$

$$\Delta_{pk} = - \sum_{k'} V_{ppkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk'}^2}}{2T}\right) - \sum_{k'} V_{spkk'} \frac{\Delta_{sk'}}{2\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{\epsilon_{sk'}^2 + \Delta_{sk'}^2}}{2T}\right) \quad (3.37)$$

สมการ (3.36) และ (3.37) เป็นสมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน พบว่าสมการช่องว่างพลังงานของแถบพลังงานชั้น s และสมการช่องว่างพลังงานของแถบพลังงานชั้น p จะมีเทอมของสมการช่องว่างที่เกิดจากการไฮบริดไดเซชันของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานชั้น s กับแถบพลังงานชั้น p จากสมการทั้งสองจะพบว่า มีเทอมของพลังงานศักย์ดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนของแถบพลังงาน s และอิเล็กตรอนของแถบพลังงาน p คือ $V_{spkk'}$ และพลังงานศักย์ดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนของแถบพลังงาน p และอิเล็กตรอนของแถบพลังงาน s คือ $V_{pskk'}$ ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้พลังงานศักย์ $V_{spkk'}$ เท่ากับ $V_{pskk'}$ เพิ่มเข้าไปด้วย

2. สมการของอุณหภูมิวิกฤต ตามสมการ (3.71) ทั้งที่เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตแบบแมนตรงของแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p โดยพิจารณาขณะที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต ($T = T_C$) จะได้สมการดังนี้

$$T_C = \left(\frac{2e^\gamma}{\pi} \right) \omega_D \exp \left[- \left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}} \right) \right] \quad (3.71)$$

โดยที่ $A = 2(-1 + I_2\mu_p)(-1 + I_2\mu_s) - 2I_2^2\mu_{sp}^2$

$$B = (\mu_p + \mu_s + 2I_2(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_2\mu_p)(-1 + I_2\mu_s) - I_2^2\mu_{sp}^2) + \lambda_s((-1 + I_2\mu_p)(-1 + I_2\mu_s) - I_2^2\mu_{sp}^2)$$

$$C = \lambda_p + \lambda_s + \mu_p - I_2\lambda_p\mu_p - I_2\lambda_s\mu_p + (1 + I_2^2(\lambda_p + \lambda_s))\mu_p - I_2(\lambda_p + \lambda_s + 2\mu_p)\mu_s - I_2(-2 + I_2(\lambda_p + \lambda_s))\mu_{sp}^2$$

$$D = 4((-1 + I_2\mu_p)(-1 + I_2\mu_s) - I_2^2\mu_{sp}^2)(\lambda_s\mu_p - 2\lambda_{sp}\mu_{sp} - (-1 + I_2\lambda_s)(\mu_p\mu_s - \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_2\mu_p)(-\mu_s + \lambda_s(-1 + I_2\mu_s)) - I_2(-1 + I_2\lambda_s)\mu_{sp}^2) + \lambda_{sp}^2(-1 + I_2(\mu_p + \mu_s) + I_2^2(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2)))$$

จากการคำนวณเชิงตัวเลข พบว่าสมการ (3.71) เป็นสมการที่สอดคล้องกับค่าอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากการทดลอง

สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต (T_C) จะใช้สมการ (3.69) มาวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบวิธีทำซ้ำของนิวตัน-คอตต์ โดยคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & (\lambda_p + \mu_p)I_1 - 1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_{sp} I_1 & \mu_s I_2 - 1 & \mu_{sp} I_2 \\ \mu_{sp} I_1 & \mu_p I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.69)$$

และจากสมการ (3.69) แทนค่าคงตัวของการคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน สำหรับแถบพลังงาน s (λ) อยู่ในช่วง 0.1 ถึง 0.4 และความถี่เดอบาย (ω_D) แบบคงที่เท่ากับ 745 K และสัดส่วนของความถี่ตัดออฟของเดอบาย (Debye Cut-Off Frequency) เป็น ω_c ต่อความถี่ของพลังงานเดอบาย คือ ω_D มีค่าคงที่เท่ากับ 1.5 และพารามิเตอร์อื่นมีค่าคงที่เท่ากับ 0.1 ได้แก่ ค่าคงตัวของการคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนสำหรับ

แถบพลังงาน p (λ_p) และค่าคงตัวของการคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (λ_{sp}) แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง อุณหภูมิวิกฤต (T_C) กับค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน ระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (μ_{sp}) ดังภาพประกอบ (31)

แทนค่าคงตัวของการคู่ควบสำหรับแถบพลังงาน p (λ_p) ในช่วง 0.1 ถึง 0.4 และ พารามิเตอร์อื่นมีค่าคงที่ แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดัง ภาพประกอบ (32)

แทนค่า $\mu_s = 0.1 - 0.4$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (33)

แทนค่า $\mu_p = 0.1 - 0.4$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (34)

แทนค่า $\omega_C/\omega_D = 1.5 - 10$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่แล้วสามารถเขียนกราฟ ความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (35)

แทนค่า $\lambda_s = \lambda_p = 0.11 - 0.16$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (36)

แทนค่า $\mu_s = \mu_p = 0.11 - 0.16$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (37)

แทนค่า $\lambda_{sp} = 0.11 - 0.16$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ แล้วโดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ที่สามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดังภาพประกอบ (38)

แทนค่า $\lambda_s = \lambda_p = 0.11 - 0.15$, $\mu_s = \mu_p = 0.1 - 0.15$, $\lambda_{sp} = 0.11 - 0.45$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง T_C กับ μ_{sp} ได้ดัง ภาพประกอบ (39)

จากนั้นเขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\lambda_s = 0.1 - 0.4$, $\lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (40)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\lambda_p = 0.1 - 0.4$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (41)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\mu_s = 0.1 - 0.4$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (42)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\mu_p = 0.1 - 0.4$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (43)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\omega_c/\omega_D = 1.14 - 4.0$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (44)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\lambda_s = \lambda_p = 0.10 - 0.15$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (45)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\mu_s = \mu_p = 0.10 - 0.15$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (46)

เขียนกราฟระหว่าง T_C กับ λ_{sp} โดยแทนค่า $\mu_{sp} = 0.11 - 0.16$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่ ดังภาพประกอบ (47)

3. สมการของช่องว่างพลังงานเป็นแบบสองช่องว่างพลังงาน ได้แก่ แถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p จะพิจารณาที่อุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาสมบูรณ์ ($T = 0$ K) ได้เป็นดังนี้

$$\Delta_i(0) = 2\omega_D \exp \left[- \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)} \right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \right] \quad (3.84)$$

โดยที่ $A' = 2(-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - 2I_4^2\mu_{sp}^2$

$$B' = (\mu_p + \mu_s + 2I_4(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2) + \lambda_s((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2))$$

$$C' = \lambda_p + \lambda_s + \mu_p - I_4\lambda_p\mu_p - I_4\lambda_s\mu_p + (1 + I_4^2(\lambda_p + \lambda_s)\mu_p - I_4(\lambda_p + \lambda_s + 2\mu_p))\mu_s - I_4(-2 + I_4(\lambda_p + \lambda_s))\mu_{sp}^2$$

$$D' = 4((-1 + I_4\mu_p)(-1 + I_4\mu_s) - I_4^2\mu_{sp}^2)(\lambda_s\mu_p - 2\lambda_{sp}\mu_{sp} - (-1 + I_4\lambda_s)(\mu_p\mu_s - \mu_{sp}^2) + \lambda_p((-1 + I_4\mu_p)(-\mu_s + \lambda_s(-1 + I_4\mu_s)) - I_4(-1 + I_4\lambda_s)\mu_{sp}^2) + \lambda_{sp}^2(-1 + I_4(\mu_p + \mu_s) + I_4^2(-(\mu_p\mu_s) + \mu_{sp}^2)))$$

สำหรับการคำนวณหาช่องว่างพลังงาน ($\Delta_i(0)$) จะใช้สมการ (3.89) มาวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบวิธีทำซ้ำของนิวตัน-ค็อด โดยคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s) I_3(\Delta_1) - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) I_3(\Delta_1) & \mu_s I_4(\Delta_2) & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) I_3(\Delta_1) & (\lambda_p + \mu_p) I_3(\Delta_1) - 1 & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) & \mu_p I_4(\Delta_2) \\ \mu_s I_3(\Delta_1) & \mu_{sp} I_3(\Delta_1) & \mu_s I_4(\Delta_2) - 1 & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) \\ \mu_{sp} I_3(\Delta_1) & \mu_p I_3(\Delta_1) & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) & \mu_p I_4(\Delta_2) - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

4. สมการของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

$$R = \frac{2 \left\{ 2\omega_D \exp \left[- \left(\frac{A'}{B' + \sqrt{(C')^2 - D'}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! \left(\frac{\omega_D}{\Delta_i(0)} \right)^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \right] \right\}}{\left(\frac{2e^\gamma}{\pi} \right) \omega_D \exp \left[- \left(\frac{A}{B + \sqrt{(C)^2 - D}} \right) \right]}$$

สำหรับการคำนวณหาค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต $\left(\frac{2\Delta_i(0)}{T_C} \right)$ จะใช้สมการ (3.69) และ (3.89) มาวิเคราะห์เชิงตัวเลข แบบวิธีทำซ้ำของนิวตัน-คอต โดยคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica โดยหา $\Delta_i(0)$ จากสมการ

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s) I_3(\Delta_1) - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) I_3(\Delta_1) & \mu_s I_4(\Delta_2) & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) I_3(\Delta_1) & (\lambda_p + \mu_p) I_3(\Delta_1) - 1 & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) & \mu_p I_4(\Delta_2) \\ \mu_s I_3(\Delta_1) & \mu_{sp} I_3(\Delta_1) & \mu_s I_4(\Delta_2) - 1 & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) \\ \mu_{sp} I_3(\Delta_1) & \mu_p I_3(\Delta_1) & \mu_{sp} I_4(\Delta_2) & \mu_p I_4(\Delta_2) - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.89)$$

โดย
$$I_3 = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_1(0)} \right)$$

จาก $R_1 = \frac{2\Delta_1(0)}{T_C}$ โดยการใช้การเปลี่ยนตัวแปร ได้เป็น $\frac{R_1 T_C}{2} = \Delta_1(0)$ แทนลงใน I_3

$$I_3 = \sinh^{-1} \left[\frac{\omega_D}{\left(\frac{R_1 T_C}{2} \right)} \right] = \sinh^{-1} \left(\frac{2\omega_D}{R_1 T_C} \right)$$

และ
$$I_4 = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_C}{\Delta_2(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_D}{\Delta_2(0)} \right)$$

$$= \sinh^{-1} \left(\frac{2\omega_C}{R_2 T_C} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{2\omega_D}{R_2 T_C} \right)$$

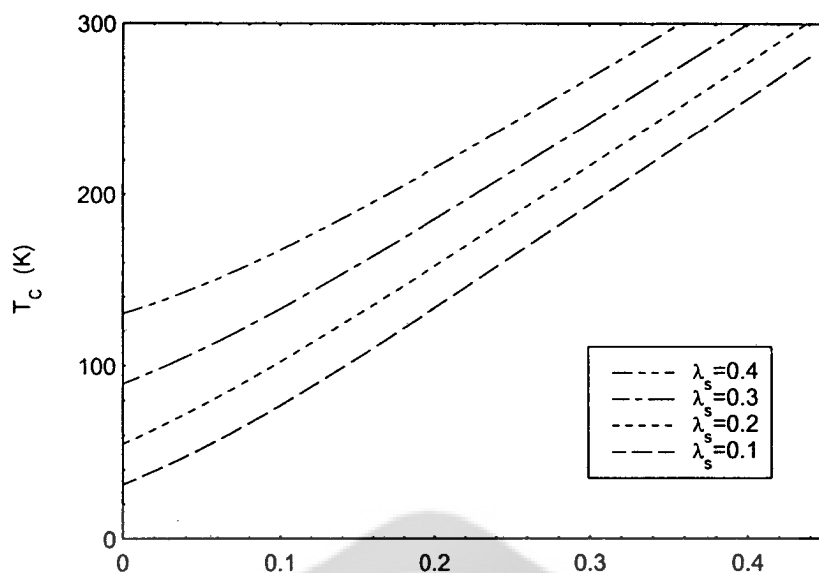
และจากสมการ

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda_s + \mu_s)I_1 - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & \mu_s I_2 & \mu_{sp} I_2 \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp})I_1 & (\lambda_p + \mu_p)I_1 - 1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 \\ \mu_s I_1 & \mu_{sp} I_1 & \mu_s I_2 - 1 & \mu_{sp} I_2 \\ \mu_{sp} I_1 & \mu_p I_1 & \mu_{sp} I_2 & \mu_p I_2 - 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.69)$$

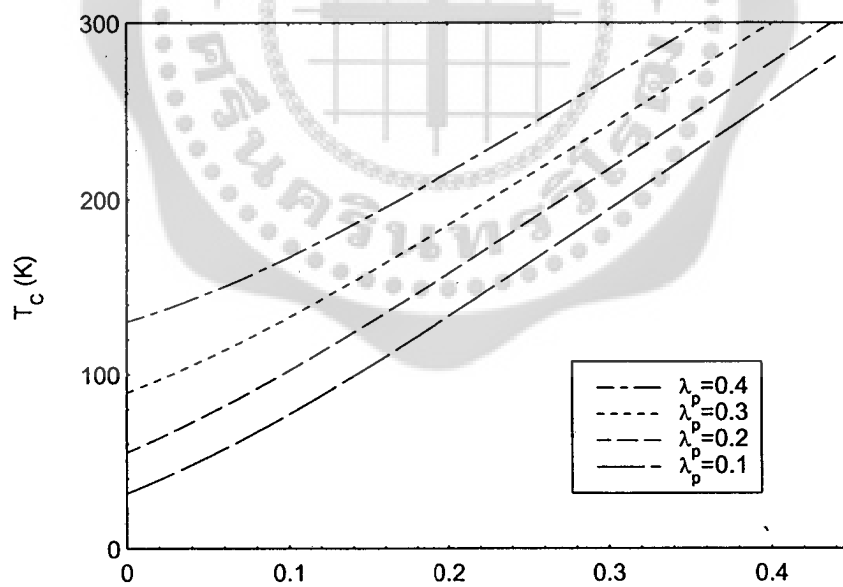
โดย
$$I_1(T_C) = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \quad (3.46)$$

และ
$$I_2(T_C) = \int_{\omega_D}^{\omega_C} \frac{1}{\epsilon_k} \tanh\left(\frac{\epsilon_k}{2T_C}\right) d\epsilon_k \quad (3.47)$$

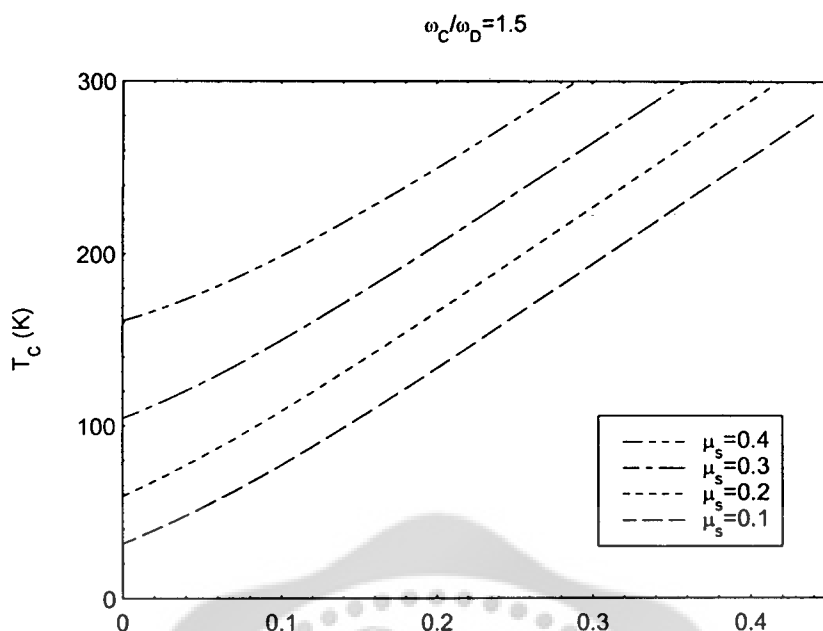
ใช้การกำหนดตัวแปร $\lambda_s = 0.1$, $\lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1 - 0.45$, $\mu_p = 0.1 - 0.45$, $\lambda_{sp} = 0.1 - 0.45$, $\mu_{sp} = 0.1 - 0.45$, $\frac{\omega_D}{T_C} = 2$, $\frac{\omega_C}{T_C} = 5$ และ $\omega_C > \omega_D$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R_1) กับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R_2) ได้ดังภาพประกอบ (48) และในกรณี และ $\omega_C < \omega_D$ โดยตัวแปรอื่น ๆ มีค่าคงที่แล้วสามารถเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R_1) กับอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต (R_2) ได้ดังภาพประกอบ (49)



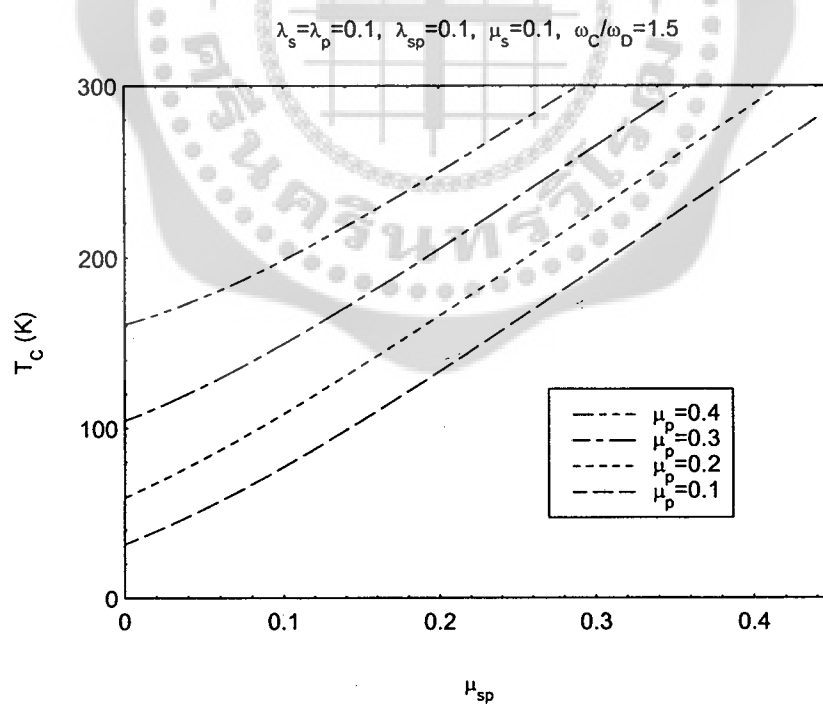
ภาพประกอบ 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง T_c กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = 0.1-0.4$, $\lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$



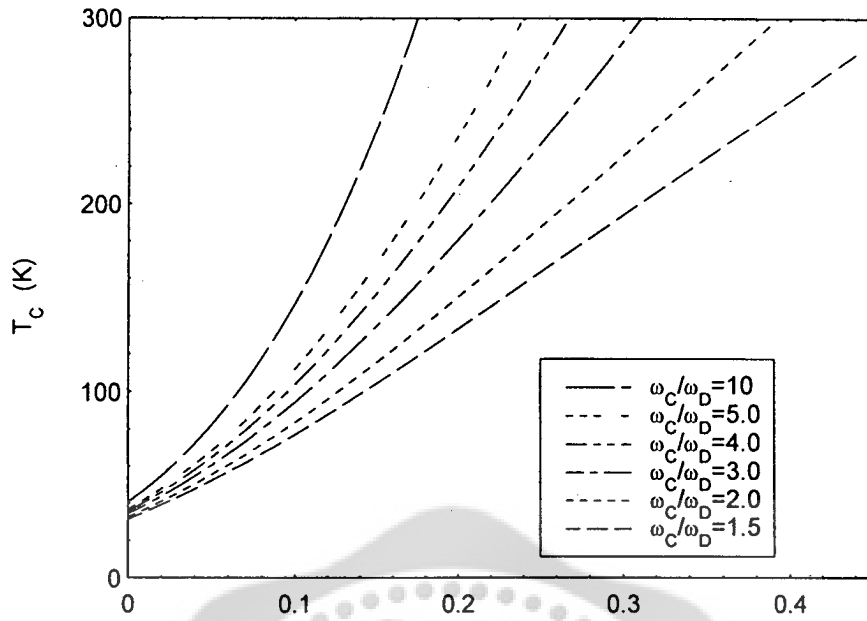
ภาพประกอบ 32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_c กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_p = 0.1-0.4$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_C/\omega_D = 1.5$



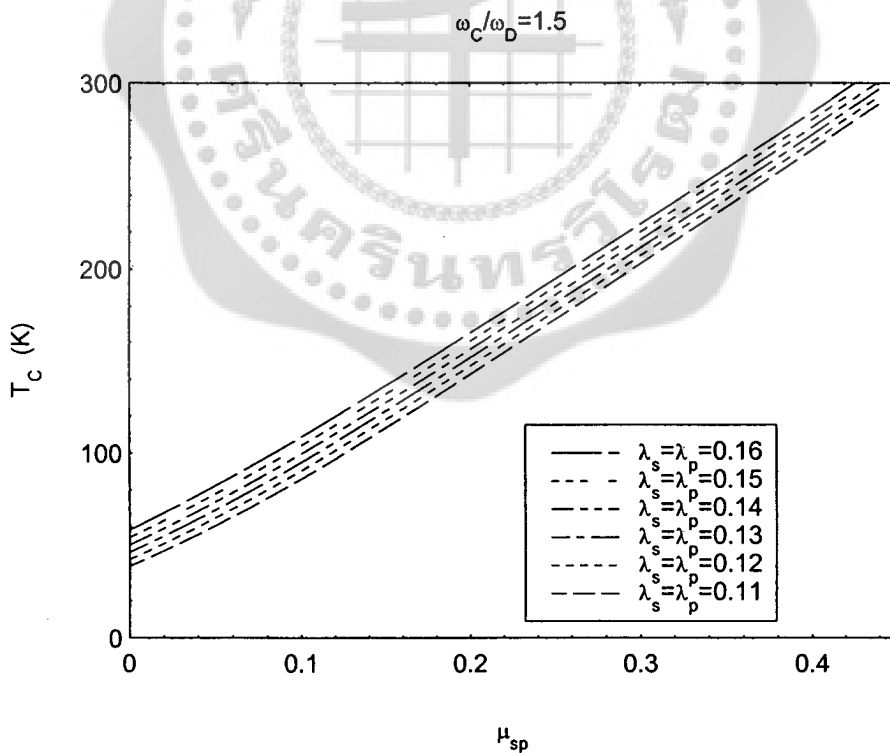
ภาพประกอบ 33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\mu_s = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



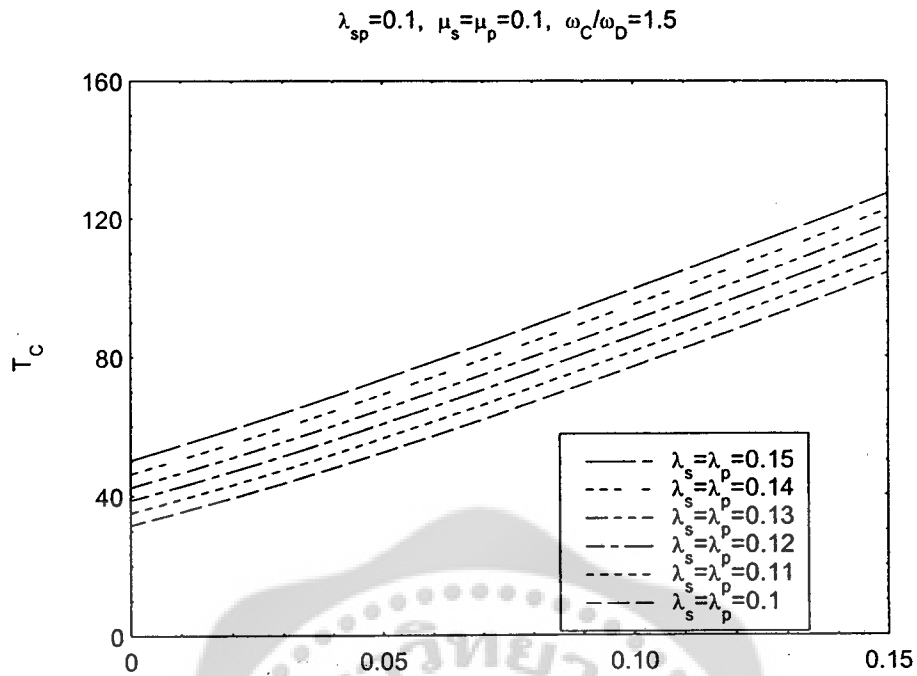
ภาพประกอบ 34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\mu_p = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



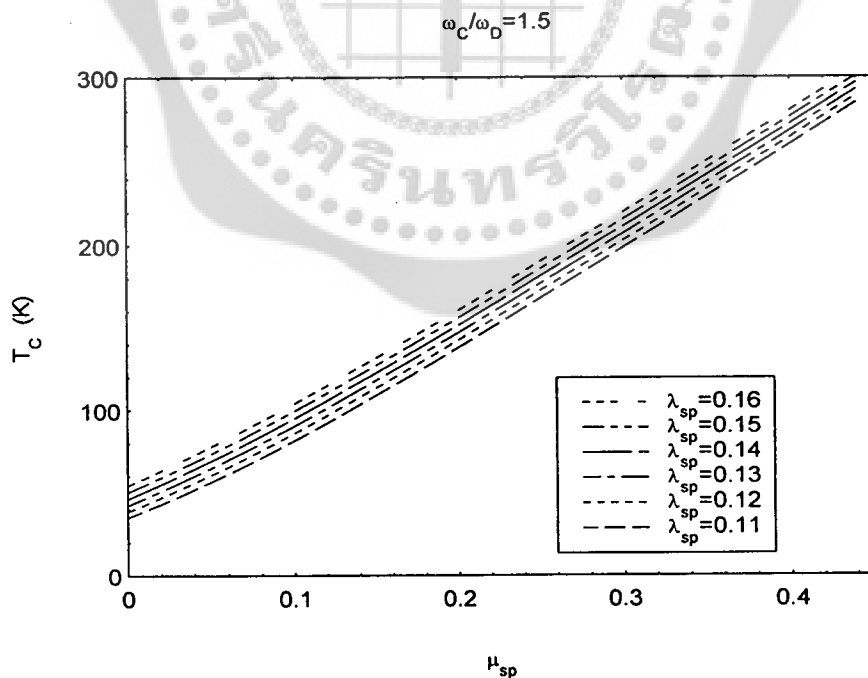
ภาพประกอบ 35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_c กับ μ_{sp} เมื่อ $\omega_c/\omega_D = 1.5 - 10$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$ และ $\omega_D = 745$ K



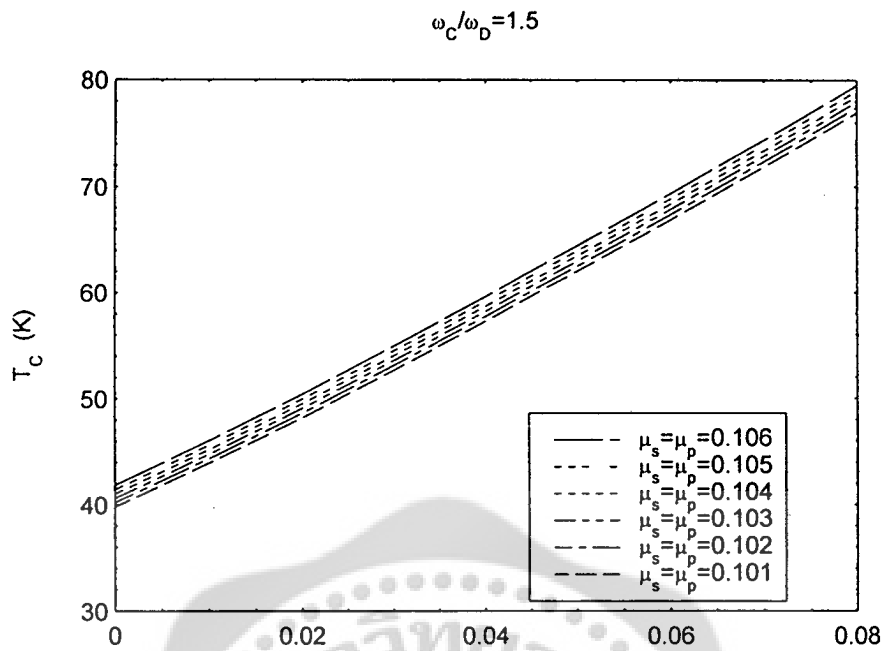
ภาพประกอบ 36 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_c กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.11 - 0.16$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



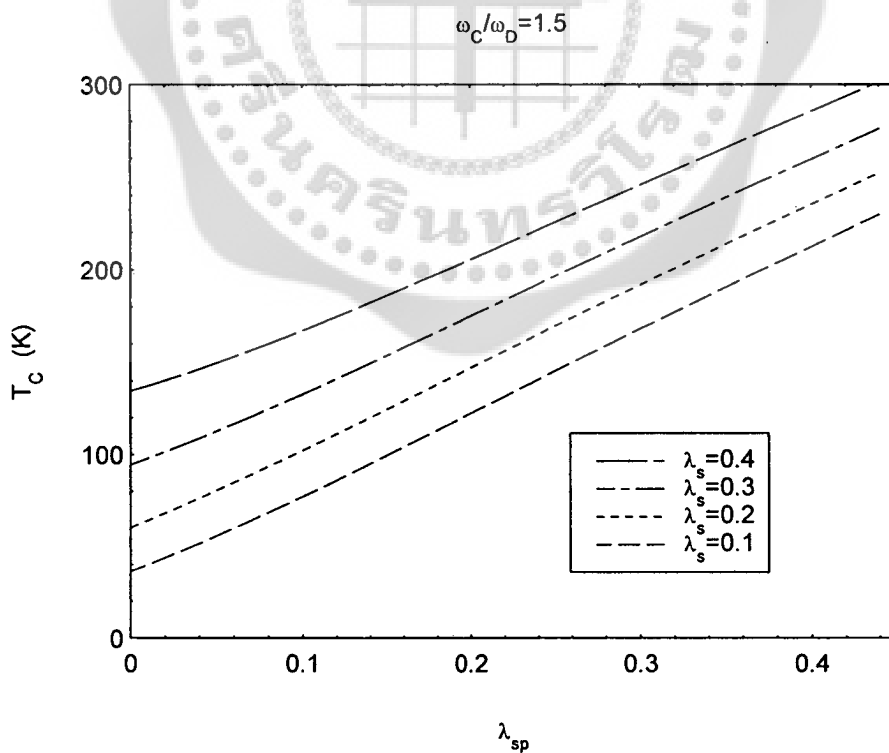
ภาพประกอบ 37 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.10 - 0.15$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\lambda_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



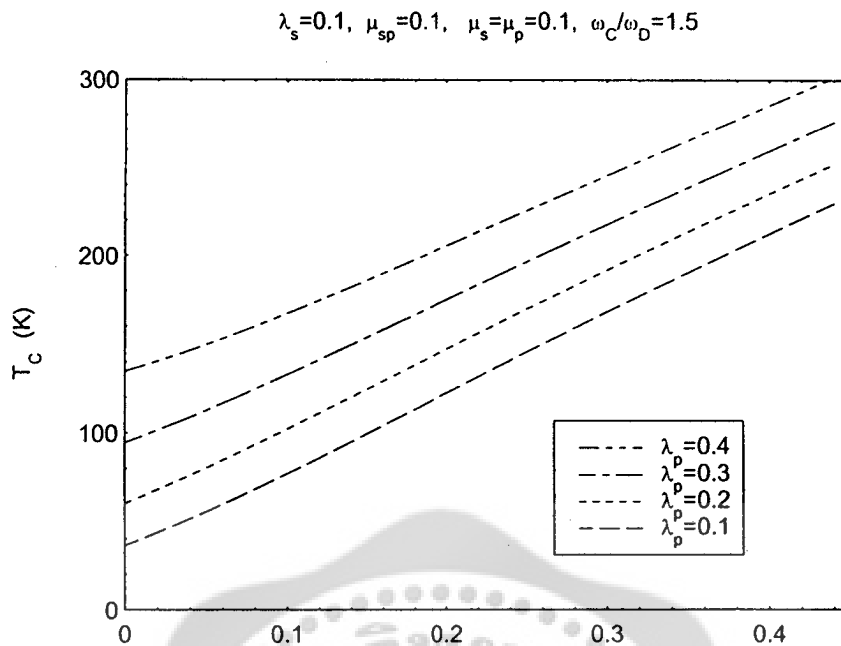
ภาพประกอบ 38 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_{sp} = 0.11 - 0.16$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



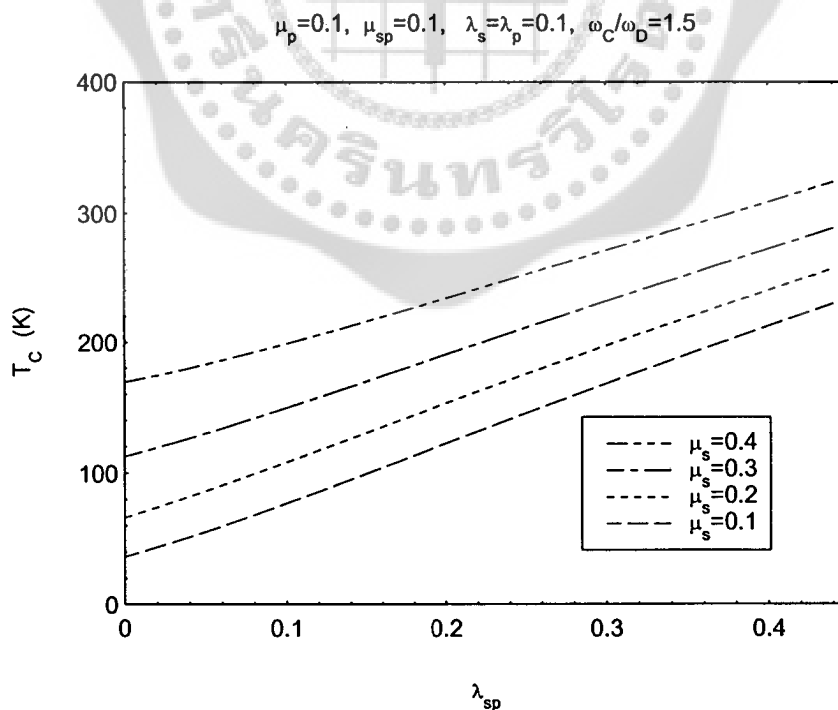
ภาพประกอบ 39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ μ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.112$, $\lambda_{sp} = 0.110$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



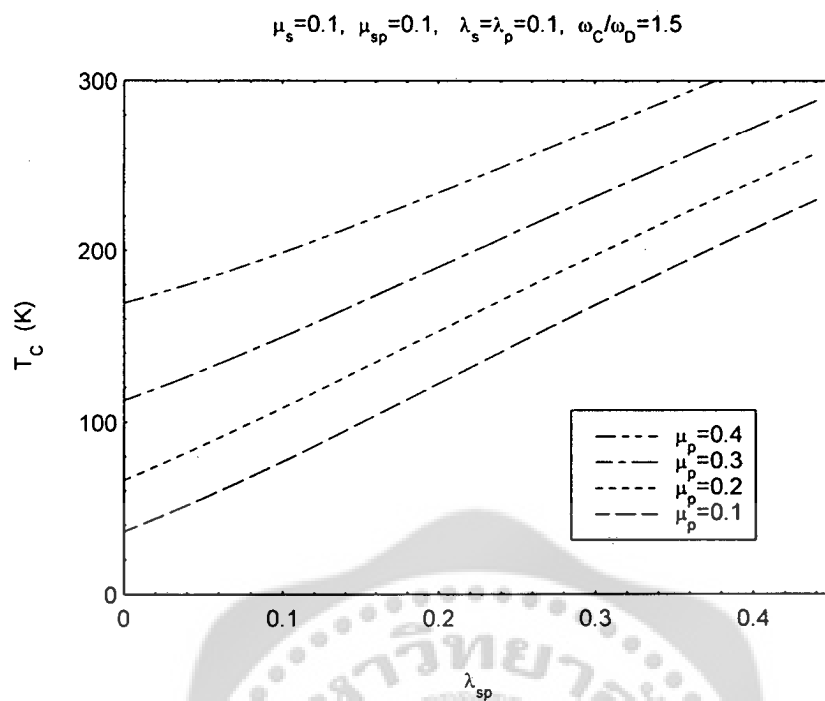
ภาพประกอบ 40 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = 0.1 - 0.4$, $\lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$ และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



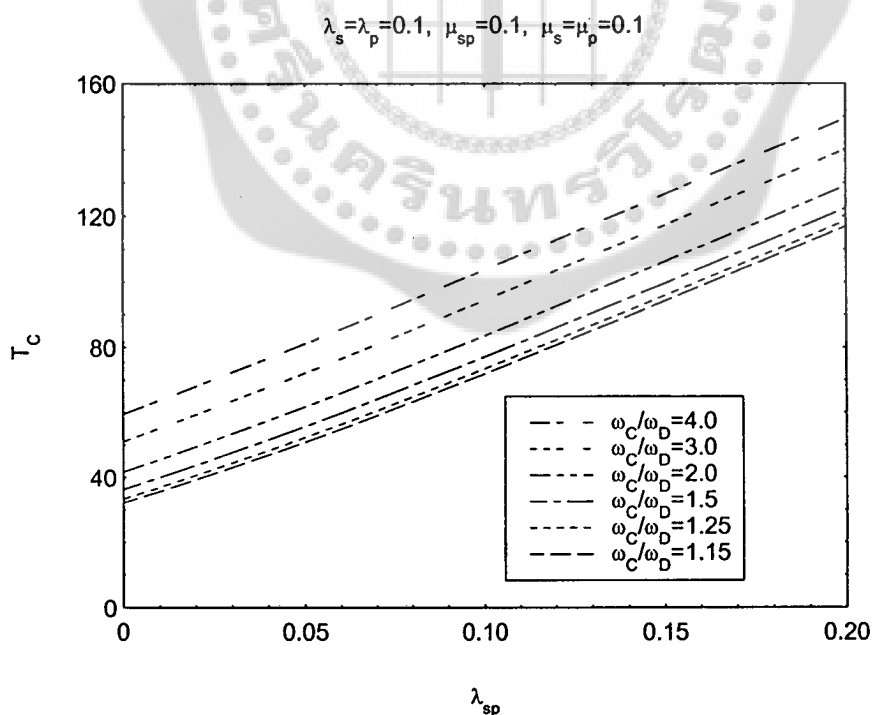
ภาพประกอบ 41 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\lambda_p = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$ และ $\omega_D = 745$ K



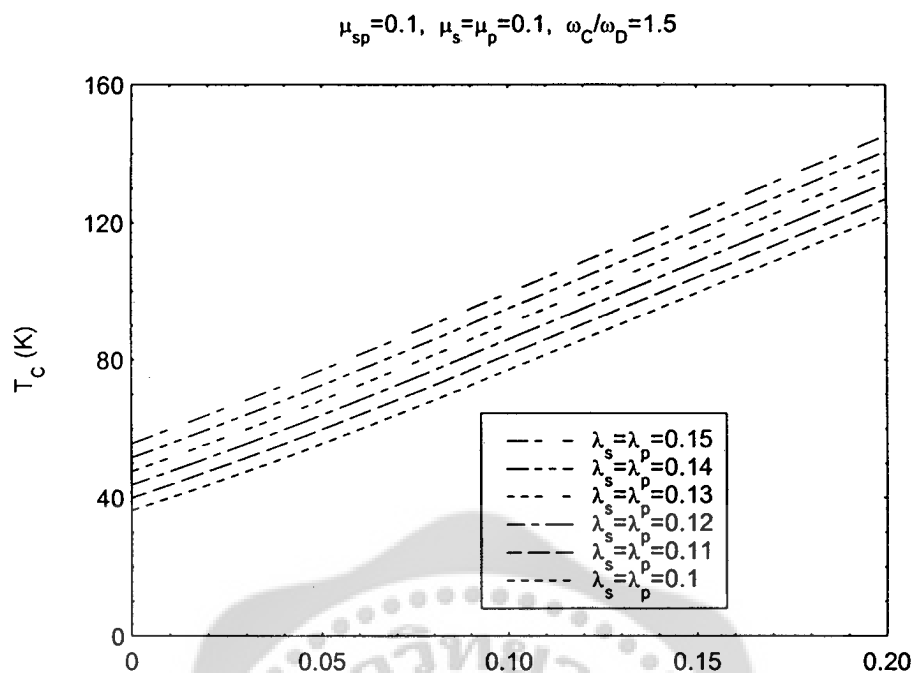
ภาพประกอบ 42 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\mu_s = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_p = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$ และ $\omega_D = 745$ K



ภาพประกอบ 43 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_c กับ λ_{sp} เมื่อ $\mu_p = 0.1 - 0.4$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$

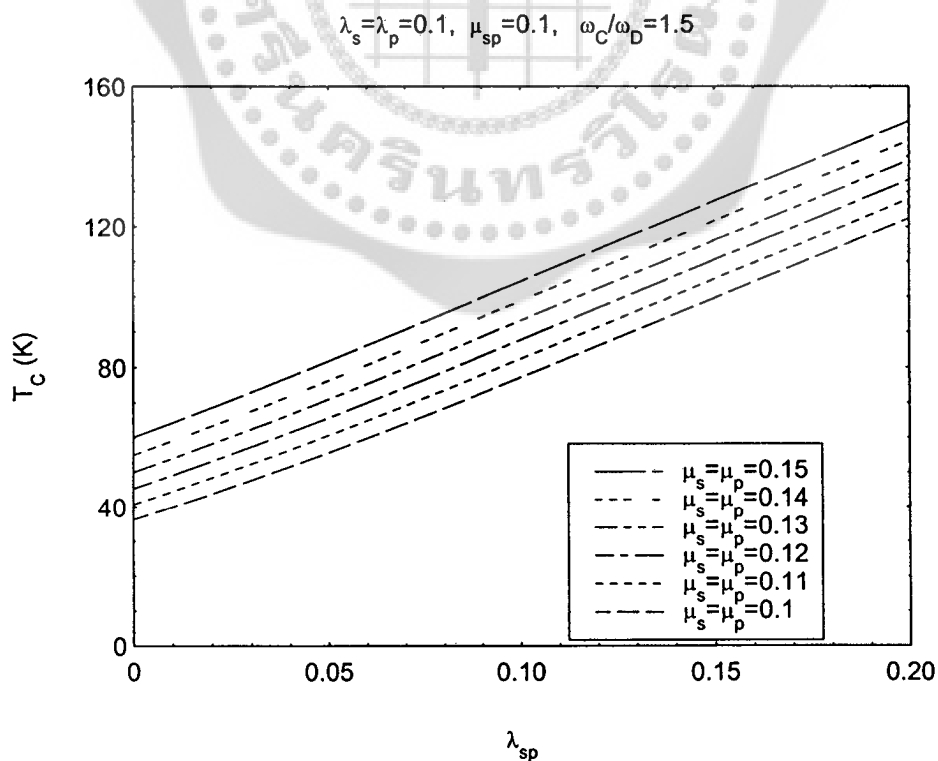


ภาพประกอบ 44 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_c กับ λ_{sp} เมื่อ $\omega_c/\omega_D = 1.15 - 4$, $\lambda_s = 0.1$, $\mu_s = 0.1$, $\mu_{sp} = 0.1$ และ $\omega_D = 745$ K



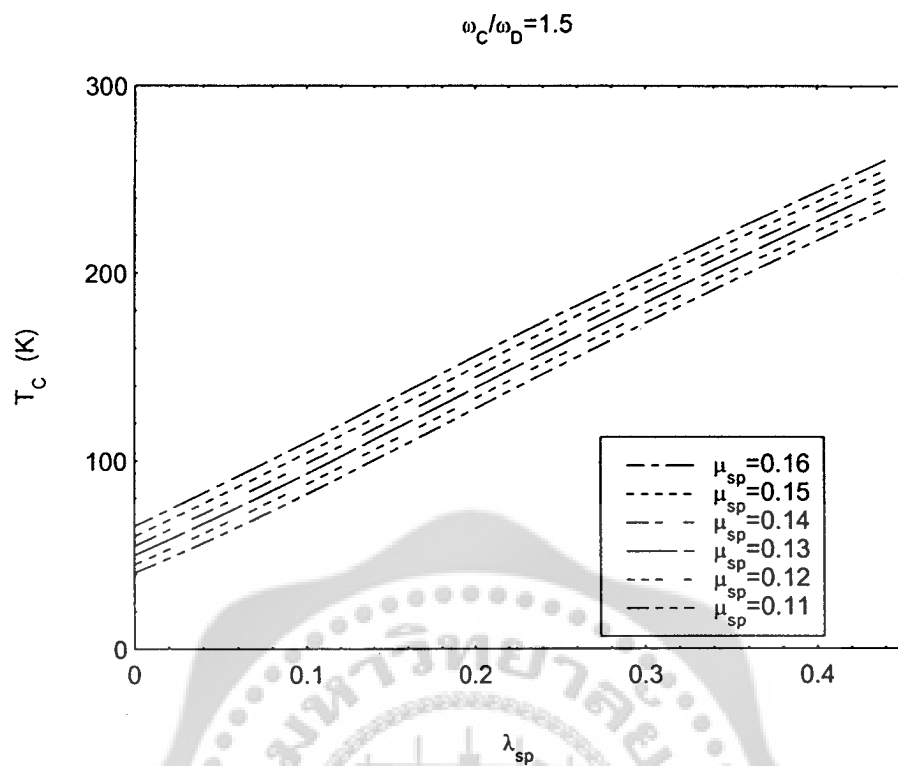
ภาพประกอบ 45 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\lambda_s = \lambda_p = 0.1 - 0.15$,

$\mu_s = \mu_p = 0.1, \mu_{sp} = 0.1, \omega_D = 745 \text{ K}$ และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$



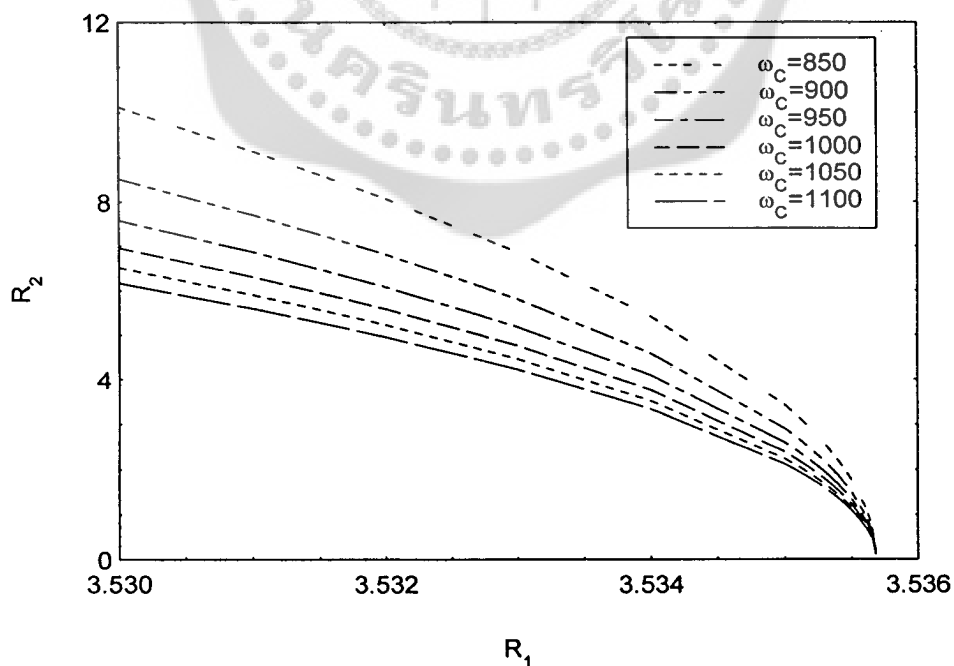
ภาพประกอบ 46 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\mu_s = \mu_p = 0.1 - 0.15$,

$\lambda_s = \lambda_p = 0.1, \mu_{sp} = 0.1, \omega_D = 745 \text{ K}$ และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$

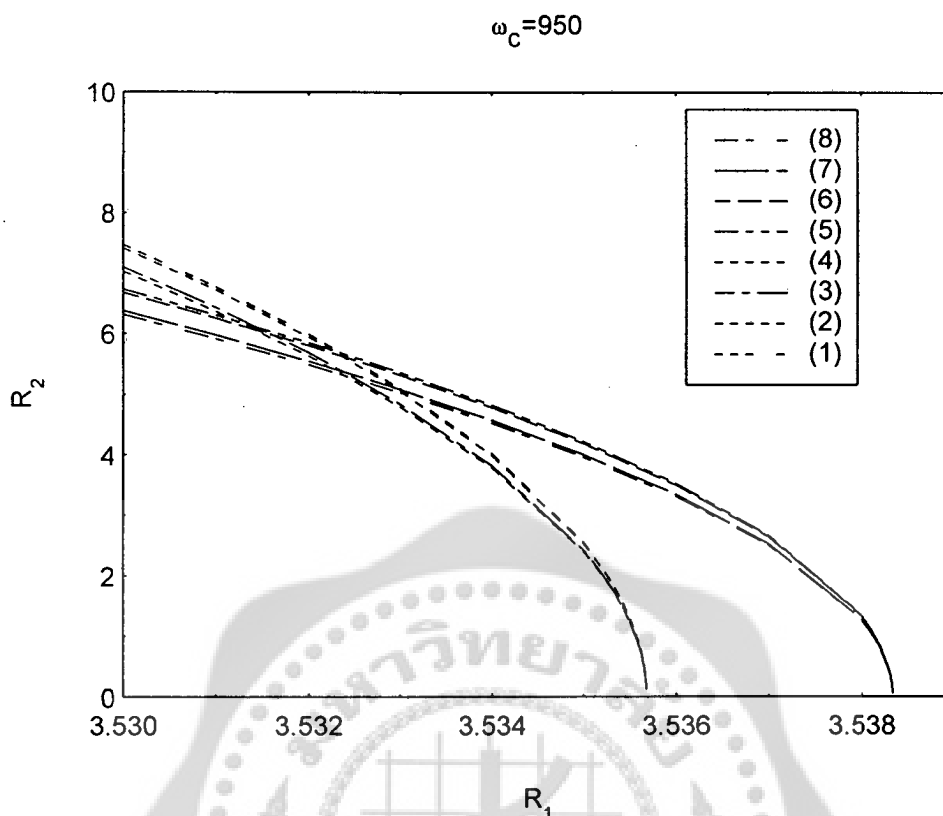


ภาพประกอบ 47 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ T_C กับ λ_{sp} เมื่อ $\mu_{sp} = 0.11 - 0.16$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 745$ K และ $\omega_c/\omega_D = 1.5$

$$\lambda_s = \lambda_p = 0.1, \mu_s = \mu_p = 0.1, \mu_{sp} = 0.1, \omega_D = 745$$



ภาพประกอบ 48 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต R_1 กับ R_2 ขณะที่ $\omega_c > \omega_D$



ภาพประกอบ 49 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออนุกรมวิฤต

R_1 กับ R_2 ขณะที่ $\omega_c > \omega_D$ และ ω_D มีค่าต่าง ๆ

- (1) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.112$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 745$
- (2) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1115$, $\mu_s = \mu_p = 0.1015$, $\omega_D = 745$
- (3) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.11$, $\omega_D = 745$
- (4) $\mu_{sp} \approx 0.115$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 745$
- (5) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.112$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 645$
- (6) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1115$, $\mu_s = \mu_p = 0.1015$, $\omega_D = 645$
- (7) $\mu_{sp} \approx 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.11$, $\omega_D = 645$
- (8) $\mu_{sp} \approx 0.115$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.1$, $\mu_s = \mu_p = 0.1$, $\omega_D = 645$

บทที่ 5

สรุปอภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน สำหรับตัวนำเวด-ยिंगแมกนีเซียมไดโบไรด์ โดยการพิจารณาที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต ($T=T_c$) และพิจารณาที่อุณหภูมิเท่ากับศูนย์องศาเคลวิน ($T = 0$ K) ซึ่งอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานนี้เป็นพลังงานปริมาณน้อย ๆ ที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานชั้น s และแถบพลังงานชั้น p ทำให้พลังงานมีการเปลี่ยนแปลง และโดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. แก๊สมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน ตามแนวคิดทฤษฎีบีซีเอสของที่มีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน
2. คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤต
3. คำนวณหาสมการของพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน
4. คำนวณหาสมการของอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

สรุปผลงานวิจัย

จากผลการคำนวณหาอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ที่มีอันตรกิริยาแถบพลังงาน ได้ผลดังนี้

จากภาพประกอบที่ 31-34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (μ_{sp}) โดยใช้ $\omega_c/\omega_p = 1.5$, $\omega_p = 745$ K (Bud'Ko, et.al. 2002 :1877) และ พบว่ากราฟไม่เป็นแบบเชิงเส้นจะมีลักษณะโค้งขึ้น โดยกราฟที่ได้จากภาพประกอบ 31 จะซ้อนทับกันพอดีกับกราฟจากภาพประกอบ 32 แสดงให้เห็นว่า λ_s เท่ากับ λ_p สำหรับตัวนำเวดยिंगแบบสองแถบพลังงาน และกราฟในภาพประกอบ 33 จะซ้อนทับกับกราฟจากภาพประกอบ 34 แสดงให้เห็นว่า μ_s เท่ากับ μ_p สำหรับตัวนำเวดยिंगแบบสองแถบพลังงาน และพบว่าค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนในแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p คือ μ_s และ μ_p จะทำให้ค่าอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นมากกว่าผลจากการเปลี่ยนแปลงของค่าคงตัวของการคู่ควบที่เกิดจากอิเล็กตรอน-โฟนอนในแถบพลังงาน s และแถบพลังงาน p และขณะที่อุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงขึ้นจะพบว่าค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอิเล็กตรอน-โฟนอนจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย

จากภาพประกอบที่ 35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของการคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (μ_{sp}) โดยเมื่อเพิ่มสัดส่วนของ ω_c/ω_p โดยให้พารามิเตอร์อื่นมีค่าคงที่ จะพบว่ายิ่งเพิ่มสัดส่วนของ ω_c/ω_p จะทำให้ค่าอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นมากอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งสัดส่วนของ $\omega_c/\omega_p = 1.5$ ที่ทำให้ได้ค่าอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 40 K

จากภาพประกอบที่ 36-39 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (μ_{sp}) โดยขณะที่ เพิ่ม λ_s กับ λ_p ขึ้นเท่า ๆ กันจะพบว่าอุณหภูมิวิกฤตจะสูงขึ้น สำหรับช่วงที่ λ_s กับ λ_p ไม่เกิน 0.12 จะอธิบายค่าอุณหภูมิวิกฤตช่วง 40 K และจะพบว่าค่าคงตัวของ การคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจาก อันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอน (μ_{sp}) มีค่าเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิวิกฤต ในขณะที่ให้ ค่าคงตัวของ การคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนสำหรับแถบพลังงาน s เท่ากับแถบพลังงาน p ($\mu_s = \mu_p$) มีค่าสูงขึ้น พบว่าจะมีผลต่อค่าอุณหภูมิวิกฤตน้อยกว่าผลจาก λ_s กับ λ_p ในขณะเดียวกันเมื่อเพิ่มค่าคงตัวของ การคู่ควบของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน (λ_{sp}) จะให้ทำให้ค่าอุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นอย่างเป็นสัดส่วนกับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่ไม่ได้เกิดจาก อิเล็กตรอน-โฟนอน โดยขณะที่ค่า $\mu_s = \mu_p = 0.103$, $\lambda_s = \lambda_p = 0.112$ และ $\lambda_{sp} = 0.110$ จะให้ ค่าอุณหภูมิวิกฤตเป็น 40.5 K

จากภาพประกอบที่ 40-43 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (λ_{sp}) โดยใช้ $\omega_c / \omega_D = 1.5$, $\omega_D = 745$ K จะพบว่าขณะเพิ่มค่า λ_s , λ_p , μ_s และ μ_p จะทำให้อุณหภูมิวิกฤต สูงขึ้น ในขณะที่ค่าคงตัวของ การคู่ควบของอิเล็กตรอน-โฟนอนระหว่างแถบพลังงานมีค่าสูงขึ้นซึ่งจะ ได้กราฟมีลักษณะเป็นเชิงเส้น และเมื่อเพิ่มค่า μ_s และ μ_p จะให้ค่าอุณหภูมิวิกฤตที่สูงกว่าผลจาก การเพิ่มค่า λ_s และ λ_p

จากภาพประกอบที่ 44 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (λ_{sp}) ขณะที่เพิ่มสัดส่วนของ ω_c / ω_D อยู่ในช่วง 1.15-1.50 จะให้อุณหภูมิวิกฤตที่ไม่เกิน 40 K

จากภาพประกอบที่ 45-47 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c) กับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p (λ_{sp}) เมื่อเพิ่มค่า $\lambda_s = \lambda_p$, $\mu_s = \mu_p$ และ μ_{sp} ปรากฏว่าค่าอุณหภูมิวิกฤตเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของ μ_{sp} มีค่า มากกว่าที่เกิดจากการเพิ่มขึ้นของ $\mu_s = \mu_p$ และค่าอุณหภูมิวิกฤตที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของ $\mu_s = \mu_p$ จะมากกว่าที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของค่า $\lambda_s = \lambda_p$ โดยอุณหภูมิวิกฤตจะเพิ่มขึ้นอย่าง เป็นสัดส่วนกับค่าคงตัวของ การคู่ควบที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนระหว่าง แถบพลังงาน s กับแถบพลังงาน p

จากภาพประกอบที่ 48 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง R_1 กับ R_2 พบว่า อัตราส่วน ช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤตของแมกนีเซียมไดโบไรด์ที่ความถี่คัตออฟของเดอบาย (Debye Cut-Off Frequency) 850 K และความถี่เดอบาย 745 K จะได้ค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่อ อุณหภูมิวิกฤต R_1 เป็น 1.259 - 2.543 และ R_2 เป็น 3.535 - 3.544 ขณะที่เมื่อความถี่คัตออฟของ เดอบายมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 950 K และความถี่เดอบายมีค่า 745 K จะได้ค่า R_1 เป็น 1.259 - 2.569

และ R_2 เป็น 3.535 - 3.534 ขณะที่เมื่อความถี่คัตออฟของเดอบายมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 1050 K และความถี่เดอบายมีค่า 745 K จะได้ค่า R_1 เป็น 1.259 - 2.877 และ R_2 เป็น 3.535 - 3.535

อภิปรายผล

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขของค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต เป็นสองค่า ได้แก่ R_1 จะมีค่า 1.259 และ R_2 จะมีค่า 3.535 เมื่อ ความถี่คัตออฟของเดอบาย (Debye Cut-Off Frequency) เป็น 850 K ซึ่งตรงกับงานวิจัยของเบอว์เคห์ หวัง และคณะ และเมื่อความถี่คัตออฟของเดอบาย เป็น 900 K จะได้ค่า R_1 จะมีค่า 3.535 และ R_2 จะมีค่า 1.259 ตรงกับงานวิจัยของซมิทส์และคณะ เมื่อความถี่คัตออฟของเดอบาย 950 K ค่า R_1 จะมีค่า 3.532 และ R_2 จะมีค่า 5.036 ตรงกับงานวิจัยของซูลการ์ (Shulga, 2001 : 2205090) เมื่อความถี่คัตออฟของเดอบาย 1000 K ค่า R_1 จะมีค่า 3.534 ตรงกับทฤษฎีบี-ซีเอสและ R_2 จะมีค่า 3.597 โดยค่า R_2 จะตรงกับงานวิจัยของซาโรนีและคณะ เมื่อความถี่คัตออฟของเดอบาย 1050 K ค่า R_1 จะมีค่า 3.535 และ R_2 จะมีค่า 1.747 จะได้ค่า R_2 ตรงกับงานวิจัยของแซร์โบและคณะ แต่สำหรับค่า R_1 จะตรงกับทฤษฎีบีซีเอส แต่เมื่อค่า R_2 มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น 4.111 ค่า R_1 จะเท่ากับ 3.534 ซึ่งยังตรงกับทฤษฎีบีซีเอส แต่เมื่อความถี่คัตออฟของเดอบาย 1100 K ค่า R_1 จะมีค่า 3.535 และ R_2 จะมีค่า 1.310 จะพบว่าค่า R_2 ตรงกับงานวิจัยของหลิวและคณะสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีช่องว่างพลังงานแบบสามมิติ แต่สำหรับ R_1 ยังตรงกับทฤษฎีบีซีเอส แต่เมื่อ R_2 มีค่า 3.957 ค่า R_1 จะเป็น 3.534 โดยค่า R_2 จะตรงกับงานวิจัยของหลิวและคณะสำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มีช่องว่างพลังงานแบบสองมิติ

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงานสำหรับอธิบายตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ ขณะที่ผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานเป็นปริมาณที่มีค่าน้อย ๆ เพิ่มเข้า โดยใช้ขอบเขตของสถานะความหนาแน่นของพลังงานแบบคงที่ และใช้อันตรกิริยาของอิเล็กตรอน-โฟนอนอย่างอ่อน ซึ่งยังมีเงื่อนไขอื่นที่ยังไม่ได้ศึกษาโดยใช้แนวคิดเดียวกัน เช่น การศึกษาตัวนำยวดยิ่งที่มีช่องว่างพลังงานแบบสามแถบพลังงาน ผลของความหนาแน่นสถานะพลังงานแบบไม่คงที่ และในกรณีของอันตรกิริยาของการคู่ควบแบบแข็ง สมการของอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปศึกษาหาปรากฏการณ์ของไอโซโทปและปรากฏการณ์ของความดัน สำหรับอธิบายตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ ดังนั้นงานวิจัยต่อไปผู้วิจัยมีความเห็นว่าควรทำการวิจัยภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้



บรรณานุกรม

- Bardeen, J.; Cooper, N.; & Schrieffer, J.R. (1959). "Theory of Superconductivity," *Physical Review*. 108(5) : 1175 - 1204.
- Bednorz, J.G.; & Müller, K.A. (1986, April). "Possible High T_c Superconductivity in the Be-La-Cu-O System," *Zertachrift fur Physik B*. (64) : 189 - 193.
- Bennemann, K.H.; & Kettelson, J.B.; (2002). *The Physics of Superconductivitors(V.1 Conventional and High- T_c Superconductors)* . New York : Springer.
- Blatt, J.M. (1964). *Theory of Superconductivity*. New York : Academic Press.
- Bouquet, F.; et al. (2001,October). "Phenomenological Two - Gap Model for the Specific Heat of MgB_2 ," *Europhysics Letters*. 56 : 856.
- Bud'Ko, S.L.; et al. (2001,February). "Boron Isotope Effect in Superconducting MgB_2 ," *Physical Review Letters*. 86(9) : 1877-1880.
- Buzea; & Yamashita . (2001). "Review of Superconducting Properties of MgB_2 ," *Superconductors, Science & Technology*. 14(11) : R115-R146.
- Choi, H.J.; et al. (2002,July). "First - Principles Calculation of the Superconducting Transition in MgB_2 within the Anisotropic Eliashberg Formalism," *Physical Review B*. 66(2) : 0205131 - 0205134.
- Chu, C.W.; et al. (1987, January). "Evidence for Superconductivity above 40 K in the La-Ba-Cu-O Compound System," , New York 58(4) : 405-410.
- Deaver, B.S.; & Fairbank, W.M.; (1961,July). *Physical Review Letters*. 7(2) : 43-53.
- Fetter, A.L.; & Walecka, J.D. (1995). *Quantum Theory of Many - Particle System*. Singapore : McGrow – Hill.
- Getino, J.M.; de Llano, M.; & Rubio, H. (1993, July). "Properties of the Gap Energy in the van Hove Scernario of High - Temperature Superconductiviy," *Physical Review B*. 48(1) : 597 - 599.
- Giubileo, F.; et al. (2001, October). "Two-Gap State Density in MgB_2 : A True Bulk Property or a Proximity Effect," *Physical Review Letters*. 87(17) : 1770081 - 1770084.
- Gradshteyn, I.S.; & Ryzhik, I.M. (1965). *Table of Integrals, Series, and Products*, 4th ed. New York : Academic Press.
- Grosso, G.; & Parrvicini, G.P. (2000). *Solid State Physics*. London : Academic Press.
- Hink, D.G.; Claus, H.; & Jorgensen, J.D. (2001,May). " The complex nature of superconductivity in MgB_2 as revealed by the reduced total isotope effect," *Nature*. 411 : 457-460.
- Ibach, H.; & Lüth, H.; (1995). *Solid State Physics*, 2nd ed. New York : Springer.
- Iavarone, M.; et al. (2001, May). "Scanning Tunneling Spectroscopy in MgB_2 ," *Physical Review Letters*. 86(19) : 4374 - 4377.
- Jeffrey, A . (1995). *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*. New York : Academic Press.
- Josephson, B.D.; (1962). *Physical Review Letters*. 1 : 251-262.
- Junod, A.; et al. (2002). "Specific Heat of the 38 K Superconductor MgB_2 in the Normal and Superconducting State : Bulk Evidence for a Double Gap," *Journal of Superconductivity*. 40(5) : 68.

- Kristoffel, N. (1997, May). "Interband Gap Feature of a Two - Band Superconductor," *Physica Status Solidi (b)*. 201 : 13 - 14.
- Ketterson, J.B.; & Song, S.N. (1999). *Superconductivity*. Cambridge : Univesity Press.
- Kremer, R.K.; Gibson, B.J.; & Ahn, K. (2002, February). " Specific heat of MgB₂ in a one- and a two-band model from first-principles calculations," *Journal of Physics : Condens. Matter*. 14 : 1353-1360.
- Kortegawa, H.; et al. (2001, September). "Evidence for Strong - Coupling s - Wave Superconductivity in MgB₂ : ¹¹B NMR Study," *Physical Review Letters*. 87(12) : 1270011-1270014.
- Liu, A.Y.; Mazin, I.I.; & Kortus, J. (2001, August). "Beyond Eliashberg Superconductivity in MgB₂ : Anharmonicity, Two - Phonon Scattering and Multiple Gaps," *Physical Review Letters*. 87(8) : 0870051 - 0870054.
- Machida, Y.; & Sasaki, S. (2003, March). "Ambient-pressure synthesis of single-crystal MgB₂ and their superconducting anisotropy," *Physical Review B*. 67 : 094507 - 094513.
- Mattis, D.C.; & Molina, M. (1991, December). "Ratio $2\Delta(0)/kT_c$ in Superconductivity," *Physical Review B*. 44(22) : 12565 - 12566.
- Nagamatsu, J.; & Akimisu, J. (2001, March). "Superconductivity at 39 K in Magnesium Diboride," *Nature*. 410 : 63 - 64.
- Okoye, C.M.I. (1998, February). "A Two-Band Model of the Isotope Effect of the High T_c Superconductors," *Chinese Journal of Physics*. 36(1) : 53 - 54.
- Okoye, C.M.I. (1999, February). " Isotope Shift Exponent in Two - Band High - T_c Superconductors with Linear - Energy-Dependent Electronic Density of States," *Physica C*. 313 : 197 - 204.
- Orlando, T.P. & Delin, K.A. (1991). *Foundation of Applied Superconductivity*. New York. : Addison-Wesley.
- Park, R.D. (1962). *Superconductivity (In Two Volumes)*. New York : Marcel Dekker.
- Pludnikov, A.P.; Brychkov, Yu.A.; Marichev, O.I. *Integrals and Series*. Gordon and Breach Science Publishers, New York. 1992.
- Ratanaburi, S.; Udomsamuthirun, P.; & Yoksan, S. (1996, March). "Ratio $2\Delta(0)/kT_c$ in a van Hove Superconductor," *Journal of Superconductivity*. 9(5) : 485 - 486.
- Ratanaburi, S.; et al. (1997). "Gap - to - T_c Ratio as a Function of the Fermi Level Shift," *Journal of Superconductivity*. 10(1) : 1 - 2.
- Rubio - Bollinger, G.; Suderow, H.; & Vieira, S. (2001, June). "Tunneling Spectroscopy in Small Grains of Superconducting MgB₂," *Physical Review Letters*. 86(24) : 5582 - 5584.
- Sarkar, S.; & Das, A.N. (1994, May). "Isotope - Shift Exponent Pressure Coefficient of T_c, and the Superconducting Gap Ratio within the van Hove Scenario," *Physical Review B*. 49(18) : 13070 - 13074.
- Schmidt, H.; et al. (2001, May). "Energy Gap from Tunneling and Metallic Sharvin Contacts onto MgB₂ : Evidence for a Weakened Surface Layer," *Physical Review B*. 63(22) : 2205041 - 2205043.
- Sharoni, A.; Felner, I.; & Millo, O. (2001, May). "Tunneling Spectroscopy and Magnetization Measurements of the Superconducting Properties of MgB₂," *Physical Review B*. 63(22) : 2205081-2205084.

$$\begin{array}{cccc}
 (\lambda_s + \mu_s) * i33[r11] - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) * i33[r11] & \mu_s * i44[r22] & \mu_{sp} * i44[r22] \\
 (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) * i33[r11] & (\lambda_p + \mu_p) * i33[r11] - 1 & \mu_{sp} * i44[r22] & \mu_p * i44[r22] \\
 \mu_s * i33[r11] & \mu_{sp} * i33[r11] & \mu_s * i44[r22] - 1 & \mu_{sp} * i44[r22] \\
 \mu_{sp} * i33[r11] & \mu_p * i33[r11] & \mu_{sp} * i44[r22] & \mu_p * i44[r22] - 1
 \end{array}$$

};

h = 0.000001; r11 = 3.53; r22 = 2;

While[r11 < 4, b = 3;

While[b > 0.000000001,

p1 = r22;

sff = ff22[r11, r22];

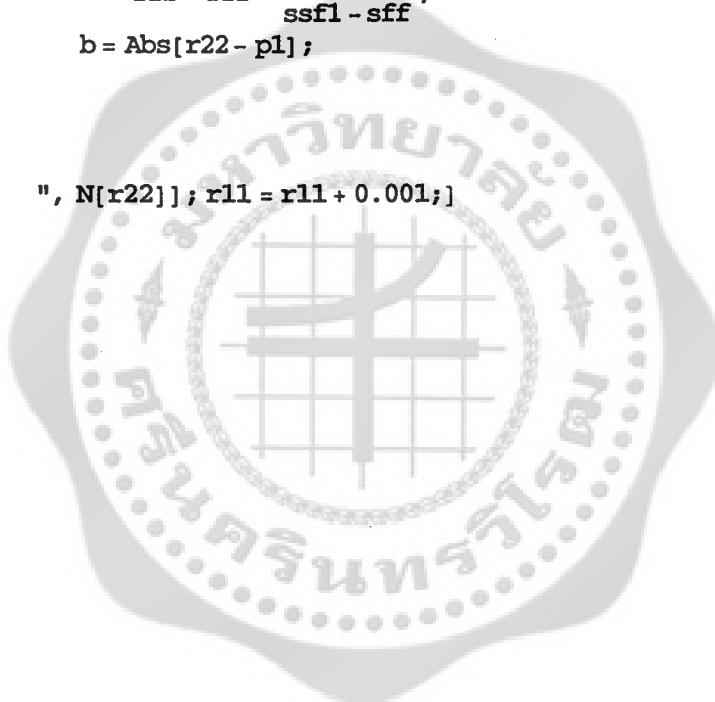
ssf1 = ff22[r11, r22 + h];

 r22 = r22 - $\frac{sff * h}{ssf1 - sff}$;

b = Abs[r22 - p1];

];

Print[r11, " ", N[r22]]; r11 = r11 + 0.001;]



- Shulga, S.V.; (2001, March). "The Upper Critical Field Problem in MgB_2 ," *Physical Review B*. 63(22) : 2205090-2205093.
- Suhl, H.; Matthias, B.T.; & Waker, L.R. (1959, December). "Bardeen-Cooper-Schrieffer Theory of Superconductivity in the Case of Overlapping Bands," *Physical Review Letters*. 3(12) : 552 - 554.
- Szabo, P.; et al. (2001, September). "Evidence for Two Superconducting Energy Gaps in MgB_2 by Point - Contact Spectroscopy," *Physical Review Letters*. 87(13) : 1370051 - 1370054
- Testardi, L.R.; Wernick, J.H.; & Royer, W.A. (1974). *Solid State Commum.* 15(1).
- Tsuei, C.C.; & Kirtley, J.R. (1997, August). "Phase - Sensitive Tests of Pairing Symmetry in Cuprate Superconductors," *Physica C*. 282-287 : 4 - 11.
- Udomsamuthirun, P.; et al. (1996, June). "Ratio $2\Delta(0)/kT_c$ in BCS Superconductivity," *Journal of Superconductivity : Incorporation Novel Magnetism*. 9(6) : 605 - 606.
- Udomsamuthirun, P.; Yoksan, S.; & Crison, M. (1997, March). "Effect of Orthorombic Distortion and Second-Nearest Hopping on Gap - to - T_c Ratio," *Journal of Superconductivity*. 10(3) : 189 - 191.
- Varshney, D.; Kumhar, R.P.; & Singh, R.K. (2002, October). "Influence of Electron - Phonon Interaction on Transition Temperature and Isotope Effect of $\text{Be}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{BiO}_3$," *Journal of Superconductivity ; Incorporating Novel Magnetism*. 14(5) : 623 - 630.
- Wälti, C.; et al. (2001, November). "Strong Electron - Phonon Coupling in Superconducting MgB_2 : A Specific Heat Study," *Physical Review B*. 64 : 172515 - 172519.
- Wu, M.K.; Ashburn, J.R.; & Jurng, C.J. (1987, March). "Superconductivity at 93 K in New Mixed - Phase Y-Ba-Cu-O Compound System at Ambient Pressure," *Physical Review Letters*. 58(9) : 908 - 910.
- Yildirim. (2003). (Online). Available : <http://www.ncnr.nist.gov/staff/taner/mgb2>. Retrieved September 12, 2003.



ภาคผนวก ก

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของจำนวนคู่คูเปอร์

การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของจำนวนคู่คูเปอร์

โดยอาศัยความสัมพันธ์ ตามสมการ (Blatt, 1964 : 233)

$$\langle Q_k \rangle_0 = \frac{\text{Trace}[Q_k \exp(-\beta H_0)]}{\text{Trace}[\exp(-\beta H_0)]} = \frac{\text{Trace}[Q_k \exp(-\beta W_k)]}{\text{Trace}[\exp(-\beta W_k)]}$$

โดยให้ Q_k เป็นตัวดำเนินการใด ๆ ซึ่งจะประยุกต์ใช้สูตรนี้กับการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของจำนวนเฟอร์มิออนที่จับคู่เป็นคู่คูเปอร์ ของ (k, σ)

พิจารณา

$$\langle \gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{k\sigma} \rangle_0 = \frac{\text{Trace}[\gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{k\sigma} \exp(-\beta \gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{k\sigma} / T)]}{\text{Trace}[\exp(-\beta \gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{k\sigma} / T)]}$$

โดยให้ $\sigma = \downarrow$ และ

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\exp(-\beta \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} / T)) &= \sum_{f_{-k\downarrow} = \uparrow, \downarrow} \sum_{f_{k\uparrow} = \uparrow, \downarrow} f_{-k\downarrow} \exp(-\beta \epsilon_k (f_{-k\downarrow} + f_{k\uparrow})) \\ &= \exp(-\beta \epsilon_k) (1 + \exp(-\beta \epsilon_k)) \end{aligned}$$

กำหนดให้ Q_k ในเทอมของตัวดำเนินการโบโกลิบอฟ จะได้

$$Q_k = u_k v_k (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow}) + u_k^2 \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow} - v_k^2 \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{k\uparrow}^+$$

$$\langle Q_k \rangle = u_k v_k (1 - \gamma_{-k\downarrow}^+ \gamma_{-k\downarrow} - \gamma_{k\uparrow}^+ \gamma_{k\uparrow})$$

$$= u_k v_k \tanh \frac{1}{2} (\beta \epsilon_k)$$



สูตรการคำนวณคณิตศาสตร์

สูตรการอินทิเกรต

$$1. \int_0^z \ln(\sinh y) dy = \frac{1}{2} L_{i_2}(e^{-2z}) - z \ln 2 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad (\text{ข-1})$$

$$\text{เมื่อโพลีล็อก(Polylog)} \quad L_{i_2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

(Pludnikov, Brychkov, & Marichev. 1992. : 652)

$$2. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\cosh^2 x} dx = -\ln\left(\frac{4e^{\gamma}}{\pi}\right) \quad (\text{ข-2})$$

$$\text{เมื่อ } \gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln p \right) = 0.5772156... \quad \gamma \text{ เป็นค่าคงที่ของออยเลอร์(Euler's Constant)}$$

(Gradshteyn, & Ryzhik. 1965: 984)

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{ข-3})$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{ข-4})$$

ฟังก์ชันอินเวอร์สไฮเปอร์โบลิก

(Jeffrey, 1995 : 131)

$$\sinh^{-1}x = \ln(2x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! x^{-2k}}{2^{2k} (k!)^2 2k} \quad \text{เมื่อ } x^2 \geq 1 \quad (\text{ข-5})$$

ฟังก์ชันแทนจไฮเปอร์โบลิก

$$\tanh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2+a^2} \quad (\text{ข-6})$$

อีลิปติกอินทิกรัลสมบูรณ์แบบที่ 1 (The Complete Elliptic Integral of the First Kind)

อินทิเกรตโดยการจัดรูปตาม Table of Integral Series and Products Handbook(3.147.5)(Gradshteyh, & Ryzhik. 1993 : 282)

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\delta, q) \quad (\text{ข-7})$$



โปรแกรม Mathematica 4.0

การคำนวณหาค่าอัตราส่วนช่องว่างพลังงานต่ออุณหภูมิวิกฤต

```
ClearAll[ff11, i11, i22, ff22, i33, i44, tc, r11, r22, wdd, wcc];
```

```
 $\lambda_s = 0.1; \lambda_p = 0.1; \lambda_{sp} = 0.001;$ 
```

```
 $\mu_s = 0.1; \mu_p = 0.1; \mu_{sp} = 0.1;$ 
```

```
wcc = 700; wdd = 600;
```

```
i11[tc_] := NIntegrate[Tanh[x] / x, {x, 0, wdd / (tc + 2)},  
MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
i22[tc_] := NIntegrate[Tanh[x] / x, {x, wdd / (tc + 2), wcc / (tc + 2)},  
MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
ff11[ $\lambda_{sp}$ _, tc_] := Det[
```

$$\begin{vmatrix} (\lambda_s + \mu_s) * i11[tc] - 1 & (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) * i11[tc] & \mu_s * i22[tc] & \mu_{sp} * i22[tc] \\ (\lambda_{sp} + \mu_{sp}) * i11[tc] & (\lambda_p + \mu_p) * i11[tc] - 1 & \mu_{sp} * i22[tc] & \mu_p * i22[tc] \\ \mu_s * i11[tc] & \mu_{sp} * i11[tc] & \mu_s * i22[tc] - 1 & \mu_{sp} * i22[tc] \\ \mu_{sp} * i11[tc] & \mu_p * i11[tc] & \mu_{sp} * i22[tc] & \mu_p * i22[tc] - 1 \end{vmatrix}$$

```
];
```

```
h = 0.000001; tc = 40;
```

```
b = 3;
```

```
While[b > 0.000000001,  
  p1 =  $\lambda_{sp}$ ;  
  sff = ff11[ $\lambda_{sp}$ , tc];  
  ssf1 = ff11[ $\lambda_{sp} + h$ , tc];  
   $\lambda_{sp} = \lambda_{sp} - \frac{sff * h}{ssf1 - sff}$ ;  
  b = Abs[ $\lambda_{sp} - p1$ ];
```

```
];
```

```
Print[ $\lambda_{sp}$ , " ", N[tc]];
```

```
i33[r11_] := NIntegrate[1 /  $\sqrt{x^2 + \left(\frac{r11 * tc}{2}\right)^2}$ , {x, 0, wdd},  
MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
i44[r22_] := NIntegrate[1 /  $\sqrt{x^2 + \left(\frac{r22 * tc}{2}\right)^2}$ , {x, wdd, wcc},  
MinRecursion -> 5, MaxRecursion -> 15];
```

```
ff22[r11_, r22_] := Det[
```



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

| | |
|------------------------------|---|
| ชื่อ-ชื่อสกุล | นายอดุลย์ บุราคร |
| วันเดือนปีเกิด | 27 เมษายน พ.ศ. 2515 |
| สถานที่เกิด | อำเภอสำโรงทาบ จังหวัดสุรินทร์ |
| สถานที่อยู่ปัจจุบัน | 71 หมู่ 11 ตำบลสำโรงทาบ อำเภอสำโรงทาบ จังหวัดสุรินทร์ 32170 โทร. 044-569354 |
| ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน | อาจารย์ 1 ระดับ 5 |
| สถานที่ทำงานปัจจุบัน | โรงเรียนช่างบุญวิทยา ตำบลกระโพ อำเภอท่าตูม จังหวัดสุรินทร์ 32120 โทร. 044-712063 |
| ประวัติการศึกษา | |
| พ.ศ. 2533 | ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนสุรวิทยาคาร จังหวัดสุรินทร์ |
| พ.ศ. 2538 | ครุศาสตรบัณฑิต จากสถาบันราชภัฏสุรินทร์ |
| พ.ศ. 2546 | การศึกษามหาบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |

งานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารงานวิจัย



อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติ ของตัวนำยวดยิ่ง MgB₂

Gap – to - T_c ratio of MgB₂ Superconductor

พงษ์แก้ว อุดมสมุทธิรุณ¹ และ อดุลย์ บุราคร¹

Pongkaew Udomsamuthirun and Adul Burakom

บทคัดย่อ

จากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งใน MgB₂ ที่อุณหภูมิประมาณ 40 K ทำให้เกิดความสนใจมากมายในสมบัติต่าง ๆ ของสารประกอบ intermetallic ชนิดนี้ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้ทำการคำนวณอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยวดยิ่ง MgB₂ โดยใช้แบบจำลอง แบบช่องว่างพลังงาน 2 แถบ และสถานะคู่แบบคลื่น s ในขอบเขตของการคู่ควบแบบอ่อน พบว่า เมื่อใช้ $\frac{2\Delta_1(0)}{T_c} \cong 3.53$ ค่าของ $\frac{2\Delta_2}{T_c}$ จะมีค่าได้ทั้งสูงกว่าและต่ำกว่า 3.53 ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลอง

Abstract

The recent discovery of superconductivity near 40 K in MgB₂ has generated much interest in the properties of this simple intermetallic compound . In this reseach, we can calculate the gap-to-T_c ratio of MgB₂ by using two-gap model and repairing state in weak coupling limited . We found that as value of $\frac{2\Delta_1(0)}{T_c} \cong 3.53 > \frac{2\Delta_2(0)}{T_c}$ value of $\frac{2\Delta_2(0)}{T_c}$ can be higher and less than 3.53 agreed with experimental data .

อัตราส่วนของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติ ของตัวนำยวดยิ่ง MgB₂
(Gap – to – T_c ratio of MgB₂ Superconductor)

คำนำ

เมื่อต้นปี 2544 Akimitsu และคณะ⁽¹⁾ ได้พบตัวนำยวดยิ่งชนิดใหม่ ใน MgB₂ ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤติ (T_c) ประมาณ 40 K โดย MgB₂ มีโครงสร้างผลึกแบบ hexagonal AlB₂ สลับชั้นของ B ที่มีลักษณะคล้ายชั้นของ graphite การค้นพบตัวนำยวดยิ่งใน MgB₂ ทำให้เกิดการตื่นตัวของนักวิทยาศาสตร์ เนื่องจากเป็นการค้นพบตัวนำยวดยิ่งชนิดใหม่ล่าสุดที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน และมี T_c ค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในกลุ่ม cuprate ทำให้คาดกันว่าอาจเป็นไปได้ที่จะมี T_c สูงเทียบเท่ากับกลุ่ม cuprate ด้วยการทดลอง Isotope Effect ของ MgB₂ โดย Bud'ho และคณะ⁽²⁾ พบว่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปมีค่าประมาณ 0.3 ซึ่งเพียงพอที่จะระบุได้ว่ากลไกของการเกิดสถานะนำยวดยิ่งมี electron-phonon interaction เป็นกลไกสำคัญและ MgB₂ เป็นตัวนำยวดยิ่งแบบ s - wave แต่ก็ยังมีสมบัติหลายประการที่ยังไม่สามารถหาคำอธิบายที่เหมาะสมได้

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะสนใจเฉพาะอัตราส่วนของช่องว่างพลังงาน (Δ) กับอุณหภูมิวิกฤติของ MgB₂ ซึ่งตามทฤษฎี BCS⁽³⁾ จะได้ค่า $\frac{2\Delta_2}{T_c} = 3.53$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวสำหรับตัวนำยวดยิ่งแบบ s - wave แต่จากผลการทดลองของ Rubio-Bollinge และคณะ⁽⁴⁾ พบว่า $\frac{2\Delta_2}{T_c} = 1.25$ และ Schmidt และคณะ⁽⁵⁾ พบว่าเท่ากับ 2.6 และในบางโครงสร้างได้เท่ากับ 1.5 และ 3 ก็มี Kremer และคณะ⁽⁶⁾ พบว่าเท่ากับ 4.2 ซึ่งพอสรุปได้ว่าค่าของ $\frac{2\Delta_2}{T_c}$ ใน MgB₂ มีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง 1.2 ถึง 4.2 และอาจเป็นไปได้ที่ใน MgB₂ จะมีช่องว่างพลังงานมากกว่า 1 ค่า

ผู้ทำการวิจัยทำการคำนวณทางทฤษฎีเพื่ออธิบายอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติของ MgB₂ โดยใช้แบบจำลองแบบช่องว่างพลังงาน 2 แถบ (two-gap model) สำหรับ ตัวนำยวดยิ่งที่มีค่าคู่ควมแบบอ่อน และเป็น s - wave ตามแบบทฤษฎี BCS

การคำนวณ

จากสมการช่องว่างพลังงานของ BCS⁽³⁾

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{V_{kk'}}{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}} \Delta_{k'} \tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}{2T}\right) \quad (1)$$

กำหนดให้กลไกของการเกิดสภาพนำวดยิ่งมีศักย์เป็น⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} V_{kk'} &= -V_1 - V_2 && \text{สำหรับ } |\varepsilon_k| \text{ และ } |\varepsilon_{k'}| < \omega_D \\ &= -V_2 && \text{สำหรับ } \omega_D < |\varepsilon_k| \text{ และ } |\varepsilon_{k'}| < \omega_D \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned} \quad (2)$$

ในที่นี้ให้ V_1 เป็นศักย์ที่เกิดจาก electron - phonon interaction และ V_2 เป็นศักย์ใด ๆ ที่เพิ่มเข้ามาซึ่งไม่ได้เกิดจาก electron - phonon interaction

ω_D และ ω_c เป็นพลังงาน cut-off ของ Debye และ V_2 ตามลำดับ และจากศักย์ตามสมการ (2) จะกำหนดให้มีช่องว่างพลังงานเป็น

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \Delta_1 && \text{สำหรับ } |\varepsilon_k| < \omega_D \\ &= \Delta_2 && \text{สำหรับ } |\varepsilon_k| < \omega_D \\ &= 0 && \text{อื่น ๆ} \end{aligned} \quad (3)$$

โดย Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ แทนค่าสมการ (2) และ (3) ในสมการ (1) โดยให้ตัวนำวดยิ่งมีความหนาแน่นสถานะคงที่เท่ากับ N_0 จะได้สมการ

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดย

$$I_{11} = -(\lambda_1 + \lambda_2)I_1, \quad I_{12} = -\lambda_2 I_2, \quad I_{21} = -\lambda_2 I_1 \quad \text{และ} \quad I_{22} = -\lambda_2 I_2$$

และ

$$I_1 = \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_1^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_1^2}}; \quad I_2 = \int_{\omega_D}^{\omega_c} d\varepsilon \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_2^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_2^2}}$$

และ

$$\lambda_1 = N_0 V_1, \quad \lambda_2 = N_0 V_2$$

แก้สมการ (4) จะได้

$$I_1 = \frac{1}{\lambda_1 + \mu^*} \quad (5)$$

โดย
$$\mu^* = \frac{\lambda_c}{1 - \lambda_c I_2} \quad (6)$$

ที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤติ ช่องว่างพลังงานจะมีขนาดเท่ากับศูนย์ หรือ $\Delta_1(T_c) = 0$ และ $\Delta_2(T_c) = 0$ สามารถคำนวณ I_1 และ I_2 ได้เป็น

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(n+1)} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{2nT_c \left(n + \frac{1}{2} \right)} \right)$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} \tan^{-1} \left(\left(\frac{\omega_c}{2nT_c \left(n + \frac{1}{2} \right)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D}{2nT_c \left(n + \frac{1}{2} \right)} \right) \right) \quad (7)$$

สำหรับกรณี $\frac{\omega_D}{2T_c} \rightarrow \infty$ จะได้

$$I_1 = \ln \left(\frac{1.13\omega_D}{T_c} \right) \quad \text{และ} \quad I_2 = \ln \left(\frac{\omega_c}{\omega_D} \right) \quad (8)$$

นำสมการ (8) แทนค่าในสมการ (9) จะได้

$$T_c = 1.13\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda_1 + \mu^*}} \quad (9)$$

ซึ่งก็คือสมการของอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยวดยิ่งที่มี 2 ช่องว่างพลังงาน และมีรูปแบบเดียวกับสมการของอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยวดยิ่งของ Eliashberg ⁽⁸⁾

พิจารณาที่อุณหภูมิศูนย์เคลวิน $\Delta_1 = \Delta_1(0)$ และ $\Delta_2 = \Delta_2(0)$ จะได้

$$I_1 = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\Delta_1(0)} \right) \quad \text{และ} \quad I_2 = \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\Delta_2(0)} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\Delta_2(0)} \right) \quad (10)$$

สำหรับ กรณี $\frac{\omega_D}{2T_c} \rightarrow \infty$ จะได้

$$I_1 = \ln \left(\frac{2\omega_D}{\Delta_1(0)} \right) \quad \text{และ} \quad I_2 = \ln \left(\frac{\omega_c}{\omega_D} \right) \quad (11)$$

แทนค่า สมการ (11) ในสมการ (9) จะได้

$$\Delta_1(0) = 2\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda_1 + \mu}} \quad (12)$$

ซึ่งเป็นสมการของช่องว่างพลังงานที่ 1

นำสมการ (12) หาค่าด้วยสมการที่ (9) แล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$\frac{2\Delta_1(0)}{T_c} = 3.53 \quad (13)$$

ก็คืออัตราส่วนของช่องว่างพลังงานที่ 1 กับอุณหภูมิวิกฤติ และในกรณีที่มีการประมาณ

$\frac{\omega_D}{2T_c} \rightarrow \infty$ ได้ค่าตรงกับทฤษฎี BCS แต่จะไม่สามารถหาสัดส่วนของ $\Delta_2(0)$ ได้

เพื่อที่จะได้ $\frac{2\Delta_2(0)}{T_c}$ ผู้ทำการวิจัย จะใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้สมการ (5) ,สมการ (7)

และสมการ (10) ในการคำนวณ โดยอาศัยการประมาณว่าค่า $\frac{2\Delta_1(0)}{T_c}$ มีค่าตามทฤษฎี BCS คือเท่ากับ 3.53 ได้ผลการคำนวณตามรูปที่ 1 และ 2

ผลการทดลองและวิจารณ์

จากรูปที่ 1 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤติกับ λ_c ใช้ $\omega_c = 600K$ $\omega_D = 750K$ ⁽²⁾ โดยแสดง $\lambda_p = 0.2$ พบว่าเมื่อ λ_c และ λ_p เพิ่มขึ้นทำให้อุณหภูมิวิกฤติเพิ่มขึ้นด้วย

และจากรูปที่ 2 ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\Delta_2(0)}{\Delta_1(0)}$ กับอุณหภูมิวิกฤติโดยใช้ $\Delta_1(0)$ ตามสมการ(3)พบว่า $\Delta_2(0)$ มีค่าที่มากกว่า $\Delta_1(0)$ และน้อยกว่า $\Delta_1(0)$ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับขนาดตัวแปร และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณความจุความร้อนของ MgB₂ โดยใช้แบบจำลองช่องว่างพลังงาน 2 แถบของ Bouquet และคณะ⁽⁹⁾ ซึ่งได้ $\frac{\Delta_2(0)}{\Delta_1(0)}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0.24 ถึง 0.41 ที่ $T_c \cong 40K$ เทียบกับผลการทดลอง โดยเฉลี่ยจะมี $\frac{2\Delta_1}{T_c} \sim 4.0$ และ $\frac{2\Delta_2}{T_c} \sim 1.2$ หรือ $\Delta_2(0)$ มีค่าน้อยกว่า $\Delta_1(0)$ โดยที่ $\Delta_1(0)$ มีค่าประมาณตามทฤษฎี BCS จากรูปที่ 2 เมื่อเปลี่ยนจาก $\Delta_1 = \frac{3.53T_c}{2}$ เป็น $\Delta_1 = \frac{3.535T_c}{2}$ บริเวณที่มี $\Delta_2(0)$ น้อยกว่า $\Delta_1(0)$ จะเปลี่ยนจาก $T_c \approx 20 K$ เป็น $T_c \approx 38 K$ ผลที่ได้ใกล้เคียงกับการผลการทดลอง

สรุป

งานวิจัยนี้ใช้การคำนวณตามแบบทฤษฎี BCS ที่พิจารณาตัวนำยวดยิ่งที่มีค่าคู่ควบแบบอ่อน และ s-wave ประกอบกับ

แบบจำลองช่องว่างพลังงาน 2 แถบ คำนวณอัตราส่วนของช่องว่างพลังงานกับอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยวดยิ่ง MgB_2 พบว่า $\frac{2\Delta_1}{T_c}$ จะมีค่าประมาณ 3.53 ส่วน $\frac{2\Delta_2}{T_c} < 3.53$ ได้ที่ $T_c \approx 38 \text{ K}$ เมื่อใช้

$\frac{2\Delta_1}{T_c} = 3.535$ ซึ่งใกล้เคียงกับผลการทดลอง

เอกสารอ้างอิง

- 1) J. Nagamatsu et al., Nature(London) 410 , 63 (2001) .
- 2) S.L. Bud'ko et al . , Phys.Rev. Lett . 86 , 1877 (2002) .
- 3) J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer , Phys. Rev . 106 , 162 (1957) .
- 4) G. Rubio – Bollinger , H. Suderow , and S. Vieira , Phys . Rev . Lett . 86 , 5582 (2001) .
- 5) H. Schmidt et al . , Phys . Rev . B 63 , 220504 (2001) .
- 6) R.K. Kremer , B.J. Gibson, and K. Ahn , cond – mat / 0102432V2 .
- 7) S. Yohsan , Solid State Communication 78 , 233(1991) .
- 8) G.M. Elioshberg , Soviet . Phys . JETP . 11 , 696(1960) ; 12 , 1000(1961) .
- 9) F. Bouquet et al . , Europhysics Letters . 56 , 856 (2001) .