

การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ปริญญาพันธ์
ของ
จิตติษฐ์ ละออปักษิน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
เมษายน 2550

การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ปริญญาพันธ์
ของ
จิตติษฐ์ ละออปักษิน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
เมษายน 2550
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

บทคัดย่อ
ของ
จิตติษฐ์ ละออปักษิน

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
เมษายน 2550

จิณดิษฐ์ ละออปักษิน. (2550). การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ด. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

คณะกรรมการควบคุม : ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นน้อม, รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ, รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียรพะพงษ์.

การวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อพัฒนา และศึกษาประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายหลังสิ้นสุดการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ผู้วิจัยพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ให้เป็นหลักสูตรที่มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ประกอบด้วยเนื้อหา 5 หน่วย คือ ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด แลตทิส การหุ้มห่อและการบรรจุ และการวัดแบ่งส่วนสมดุล ใช้เวลาเรียน 10 วัน วันละ 3 ชั่วโมง ทดสอบความสามารถด้านเนื้อหา 2 ครั้ง ครั้งละ 2 ชั่วโมง รวม 34 ชั่วโมง โดยหลักสูตรประกอบด้วย เอกสารประกอบการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้ และเอกสารคู่มือครู ผู้วิจัยนำหลักสูตรไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ร่วมประเมินความคิดเห็น จากนั้นนำหลักสูตรไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างจำนวน 23 คน ในภาคเรียนที่ 1/2549 โดยรูปแบบการจัดการเรียนการสอนมีทั้งการสอนรวมทั้งชั้นเรียน ใช้วิธีการสอนแบบใช้ปัญหำนำเข้าสู่บทเรียน และการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อยที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล เน้นให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้จากการทดลองปฏิบัติจริง โดยมีกลุ่มย่อยกลุ่มละ 4 คน ประเมินความสามารถด้านเนื้อหาด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ประเมินพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบสำรวจรายการ และวัดเจตคติด้วยแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการวิจัยพบว่า

1. หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

2. หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความสามารถด้านเนื้อหาด้วยความเชื่อมั่น 95 %

3. หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยความเชื่อมั่น 95 %

4. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ที่ดีด้วยความเชื่อมั่น 95 %

5. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีด้วยความเชื่อมั่น 95 %

THE DEVELOPMENT OF DISCRETE GEOMETRY CURRICULUM FOR UPPER
SECONDARY STUDENTS WITH HIGH MATHEMATICS ACHIEVEMENT

AN ABSTRACT

BY

JINNADIT LAORPAKSIN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Doctor of Education degree in Mathematics Education
at Srinakharinwirot University

April 2007

Jinnadit Laorpaksin. (2007). *The Development of Discrete Geometry Curriculum for Upper Secondary Students with High Mathematics Achievement*. Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Prof. Dr. Narong Punnim, Assoc. Prof. Dr. Suwattana Eamoraphan, Assoc. Prof. Orapin Jierapong.

The objectives of this research are to develop discrete geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement and to study its effectiveness. We also aim to study their attitude towards mathematics after learning the curriculum.

The researcher developed a discrete geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement. We designed classroom activities with having students as the main focal point and promoting learning by self-experience. The content of the discrete geometry curriculum is fundamentals of reasoning and mathematical proof, universal measuring boxes, lattice, wrapping and packing and equipartitions of measures. The curriculum developed is a course for duration of 10 days with three hours for each day. There are two tests each with two hours. Totally, 34 hours. The course includes: learning material for students, learning management plan and a manual for teacher. After the curriculum was evaluated by three specialists, it was experimented with 23 students assigned as the experimental group during the first semester of 2549 academic year. The classroom activities include both problems motivated lectures and group activities (each groups consists four students) designed to improve student's mathematical reasoning skill. The activities allow students to inquire knowledge from various self-experiment. There are four dimensions that needed to be evaluated. The researcher evaluated those dimensions as follows : student's content ability from achievement tests, student's mathematical reasoning ability from activity reports, student's mathematical reasoning behavior from instructor's checklist and student's attitude towards mathematics from attitude test.

The research found that:

1. The Discrete Geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement is effective according to the comments by three specialists.
2. The Discrete Geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement is effective in the content ability with the 95% confident level.
3. The Discrete Geometry curriculum for upper secondary students with high

mathematics achievement is effective in the mathematical reasoning ability with the 95% confident level.

4. After learning the Discrete Geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement, student's mathematical reasoning behavior is still in good level with the 95% confident level.

5. After learning the Discrete Geometry curriculum for upper secondary students with high mathematics achievement, student shows good attitude towards mathematics with the 95% confident level.

ปริญญาานิพนธ์

เรื่อง

การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ของ

จิตติษฐ์ ละออปักษิน

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษาดุษฐ์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)

วันที่.....เดือน.....พ.ศ. 2550

คณะกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

(ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนั่ม)

..... ประธาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เศวตมาลย์)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ)

..... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนั่ม)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียรพะงษ์)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียรพะงษ์)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่ง เจนจิต)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดีเป็นเพราะความอนุเคราะห์จากหลายท่านหลายฝ่าย ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนึ่ง ที่กรุณารับเป็นประธานคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และสละเวลาอันมีค่าในการให้คำปรึกษา คำแนะนำ และความรู้อันเป็นส่วนสำคัญยิ่งของปริญญานิพนธ์ ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุวัฒนา เอี่ยมอพรพรรณ และรองศาสตราจารย์ อรพินท์ เจียรพงษ์ คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ ที่ได้อุทิศเวลาอย่างมากให้กับผู้วิจัยในการให้คำปรึกษา คำแนะนำด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง จนทำให้ปริญญานิพนธ์สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.จิน อากิยามา และดร.โทชิโนริ ซาไก ที่ได้ให้ความรู้ และเปิดมุมมองใหม่ทางเรขาคณิตวิยุต ตลอดจนแนะนำและมอบเอกสารงานวิจัยที่เป็นประโยชน์ยิ่งในการทำปริญญานิพนธ์ ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ เสวตมัลย์ ที่กรุณารับเป็นประธานคณะกรรมการสอบปากเปล่า และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รุ่ง เชนจิต ที่รับเป็นกรรมการสอบปากเปล่า ซึ่งทั้งสองท่านได้ให้ข้อเสนอแนะ และคำแนะนำอันเป็นประโยชน์ยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วนิดา เหมะกุล อาจารย์ ดร.สุรสาล ผาสุข และอาจารย์รังสิมา สายรัตนทองคำ ที่ให้ความช่วยเหลือ และให้ข้อคิดเห็น ตลอดจนช่วยแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ในการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต และการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ขอกราบขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ได้มอบความรู้ทั้งทางด้านคณิตศาสตร์ และคณิตศาสตร์ศึกษาแก่ผู้วิจัย ขอกราบขอบพระคุณคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ได้พิจารณาอนุมัติทุนอุดหนุนการศึกษาโครงการพัฒนาอาจารย์ สาขาขาดแคลน สาขาวิชาคณิตศาสตร์แก่ผู้วิจัย

ขอขอบพระคุณโรงเรียนอำนวยการศิลป์ โรงเรียนราชินี โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ และขอขอบใจนักเรียนของทั้งสามโรงเรียนที่มีส่วนร่วมทั้งในการพัฒนาหลักสูตร และการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ขอขอบคุณอาจารย์ไพโรจน์ น่วมนุ้ม ที่ได้เสียสละเวลามาเป็นผู้ช่วยวิจัย

ขอขอบคุณพี่ๆ ร่วมหลักสูตรทั้งสี่ท่าน ตลอดจนเหล่ากัลยาณมิตรมากมายที่ให้ความช่วยเหลือ และเป็นกำลังใจอันมีค่ายิ่งเสมอมา

ขอขอบพระคุณครอบครัว ที่เป็นพลังใจอย่างมหาศาล

ผู้วิจัยรู้สึกเป็นเกียรติอย่างสูง และหวังว่าผลของการวิจัยจะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาการศึกษาคณิตศาสตร์ในประเทศไทย คุณค่าและประโยชน์ทั้งหลายอันเกิดขึ้นแต่การวิจัยครั้งนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาคุณบิดา มารดา ตลอดจนครูผู้ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัยตั้งแต่เบื้องต้นจนจบจนปัจจุบัน

จิตติษฐ์ ละออปักษิน

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย.....	4
ความสำคัญของการวิจัย.....	5
ขอบเขตการวิจัย.....	5
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	5
สมมติฐานในการวิจัย.....	9
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์.....	10
เรขาคณิตวิยุต.....	21
การประเมินหลักสูตร.....	27
แบบทดสอบอิงเกณฑ์.....	33
การให้เหตุผล.....	35
เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์.....	48
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	50
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	53
ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย.....	54
การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน.....	56
การสร้างและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง.....	56
การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	61
การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล.....	66
การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้.....	67
4 ผลการวิจัย.....	68
ตอนที่ 1 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	68

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4 (ต่อ) คณิตศาสตร์สูง ด้านผู้เชี่ยวชาญ.....	
ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต..... สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการ.. เรียนคณิตศาสตร์สูง.....	69
ผลการประเมินความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต..... สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการ.. เรียนคณิตศาสตร์สูง.....	70
ตอนที่ 2 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน..... คณิตศาสตร์สูง ด้านผลการใช้หลักสูตร.....	73
ประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความ..... สามารถด้านเนื้อหา.....	73
ประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความ..... สามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	75
ประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านพฤติกรรม การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	78
ตอนที่ 3 ผลของการศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์..... ภายหลังสิ้นสุดการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับ มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง...	81
ตอนที่ 4 ข้อค้นพบด้านผลการใช้หลักสูตรที่ได้จากการศึกษา..... ประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยม.... ศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง.....	83
ข้อค้นพบด้านความสามารถด้านเนื้อหา.....	83
ข้อค้นพบด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	86
ข้อค้นพบด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์.....	87
สรุปผลการศึกษาค้นคว้า.....	88

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	89
ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัย.....	89
สรุปผลการวิจัย.....	96
การอภิปรายผล.....	98
ข้อเสนอแนะ.....	101
ข้อเสนอแนะทั่วไป.....	101
ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป.....	102
บรรณานุกรม.....	103
ภาคผนวก.....	112
ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ ผู้ช่วยวิจัย และนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	113
ภาคผนวก ข หลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยม.....	116
ศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง.....	
ภาคผนวก ค เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย.....	160
ภาคผนวก ง ผลการหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย.....	196
ภาคผนวก จ ข้อมูลและผลการวิเคราะห์ข้อมูลของกลุ่มตัวอย่าง.....	205
ภาคผนวก ฉ ตัวอย่างผลงานนักเรียน.....	217
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	223

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต..... สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการ... เรียนคณิตศาสตร์สูง.....	69
2 ผลการประเมินความสอดคล้องโดยภาพรวมของโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง.....	70
3 ผลการประเมินความสอดคล้องของเนื้อหาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต..... สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการ... เรียนคณิตศาสตร์สูง.....	71
4 ผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างสื่อการเรียนกับกิจกรรมการเรียนการสอน.....	72
5 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถ... ด้านเนื้อหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน.....	73
6 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถ... ด้านเนื้อหาของนักเรียนซึ่งสอบผ่านเกณฑ์ 75.....	74
7 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน.....	75
8 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนซึ่งสอบผ่านเกณฑ์ 1.5.....	77
9 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านพฤติกรรมในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน.....	78

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง		หน้า
10	ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านพฤติกรรมในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนซึ่งมีพฤติกรรมการให้เหตุผล...ทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี.....	80
11	ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน....	81
12	ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี.....	82
13	ผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	198
14	ผลการประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม.....	198
15	ผลการประเมินแบบสำรวจรายการ.....	199
16	ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหาของนักเรียนกลุ่มนาร์่อง จำนวน.... 12 คน.....	201
17	ผลการหาค่าความยากง่ายรายข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทาง... การเรียน.....	202
18	ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหาที่ได้จากทดสอบกลุ่มตัวอย่าง..... ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	207
19	ผลคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากแบบ รายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม.....	209
20	ผลการประเมินพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้แบบ..... สำรวจรายการ.....	211
21	ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์.....	213

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของไทเลอร์.....	13
2 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของทาบา.....	15
3 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของกรมวิชาการ.....	17
4 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของวิชัย วงษ์ใหญ่.....	19
5 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต.....	20
6 ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการจัดการศึกษาตามแนวคิดของไทเลอร์	28
7 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของทาบา.....	30
8 ปฏิสัมพันธ์ของตัวแปรในมิติต่าง ๆ.....	30
9 ลำดับของการคิด.....	38
10 บทบาทของครูที่ส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผล.....	44
11 แผนภาพแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย.....	54
12 แผนภาพแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย การสร้างและพัฒนาหลักสูตร และการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	55
13 แผนภาพแสดงขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรม.....	59
14 การหาคำตอบโดยใช้วิธีแบ่งกรณี.....	218
15 การคำนวณปริมาตรโดยตรง ทำให้ได้ปริมาตรไม่ครบทุกกรณี.....	219
16 การกำหนดกระดาษห่อต้นแบบที่ผิดพลาด.....	220
17 การหาข้อสรุปที่ไม่ครบถ้วน.....	221
18 การหาข้อสรุปที่ขาดการเขียนรายละเอียดของตัวแปร.....	221
19 การยืนยันข้อสรุปในกิจกรรมเรื่องทฤษฎีบทของพีคที่แสดงได้ครบ..... ทุกกรณี.....	222
20 การยืนยันข้อสรุปในกิจกรรมเรื่องการแบ่งเค้ก ที่แสดงได้อย่างดีเยี่ยม...	222

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

การศึกษาเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ ให้มีความสามารถในด้านต่าง ๆ ทั้งด้านความรู้ คุณธรรม ความเข้าใจ ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา แก้ไขปัญหา การปรับตัวให้เข้ากับสังคมที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ ก็คือการพัฒนาประเทศและสังคม จุดประสงค์หลักของแผนการศึกษาแห่งชาติ (พ.ศ. 2545 - 2559) จึงมุ่งเน้นการพัฒนาคนให้เป็นคนดีคนเก่ง และมีความสุขสมบูรณ์ทั้งร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ คุณธรรม มีจริยธรรมในการดำรงชีวิต สามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2545: 6) ดังนั้นการจัดการศึกษาจึงควรเป็นไปตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 หมวด 4 แนวการจัดการศึกษา มาตรา 22 ที่ระบุว่า “การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ” (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2545: 13)

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ถือว่าเป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญยิ่งในการพัฒนาคนเพราะคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ฝึกกระบวนการคิด ฝึกการแก้ปัญหา ส่งเสริมความมีเหตุผล มีความคิดริเริ่ม มีระบบระเบียบในการคิด ช่วยพัฒนาศักยภาพของแต่ละบุคคลให้เป็นคนที่มีสมรรถนะ ดังเห็นได้จากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ที่ได้สะท้อนถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ ที่เน้นให้ผู้เรียนมีความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนการจัดการกระบวนการการเรียนรู้ให้เน้นการฝึกทักษะกระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2545: 14)

วิद्यุตคณิต (Discrete Mathematics) เป็นคณิตศาสตร์สาขาหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับการจัดวัตถุเต็มหน่วย รวมถึงหลักเกณฑ์และเทคนิคที่หลากหลายซึ่งพบได้ในชีวิตประจำวัน มีบทบาทอย่างมากที่ช่วยให้ผู้เรียนเห็นความเกี่ยวข้องระหว่างคณิตศาสตร์และโลกจริง (Rosenstein. 1997: 4) ในประเทศไทย วิद्यุตคณิตเป็นวิชาที่ใช้อยู่ในระดับอุดมศึกษา โดยเป็นวิชาพื้นฐานสำหรับหลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์ เนื้อหาที่ควรครอบคลุมตามคำแนะนำของสมาคมการคำนวณเชิงเครื่องจักรกลร่วมกับสถาบันไฟฟ้าและวิศวกรรมไฟฟ้า (ACM/IEEE: Association for Computing Machinery / The Institute of Electrical and Electronics Engineers) ฉบับปี ค.ศ. 1991 และค.ศ. 2001 นั้นมีเรื่อง เซต ฟังก์ชัน ตรรกะ พีชคณิตบูลีน ทฤษฎีกราฟ เมทริกซ์ กลวิธีการพิสูจน์คณิตศาสตร์เชิงการจัด ความน่าจะเป็น และจำนวนสุ่ม วิद्यุตคณิตบรรจุเนื้อหาที่จำเป็นเพื่อปูพื้นความรู้ให้นักเรียนสามารถสร้างตัวแบบ วิเคราะห์ แก้ไขปัญหา และพิสูจน์ผลที่ได้ (สมชาย ประสิทธิ์

จุดระกูล. 2544: คำนำ(iii)) นอกจากนี้วิद्यุคณิตยังเกี่ยวข้องกับการออกแบบ การวิเคราะห์ชั้น ตอนวิธีเพื่อแก้ปัญหา และพัฒนาทฤษฎีซึ่งใช้มากในการพัฒนาเทคโนโลยีทางคอมพิวเตอร์ (Hart. 1991: 68) ในปี ค.ศ. 1989 สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM: The National Council of Teachers of Mathematics) ได้ร่วมกันจัดทำ “มาตรฐานหลักสูตรและการประเมินผลวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)” โดยได้จัดให้วิद्यุคณิตเป็นหนึ่งในมาตรฐานด้านเนื้อหาสำหรับนักเรียนเกรด 9 – 12 (NCTM. 1989: 176) ต่อมาในปี ค.ศ. 2000 ได้จัดทำ “หลักการและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (Principles and Standards for School Mathematics 2000)” ในเอกสารฉบับนี้ได้แนะนำให้กระจายหัวข้อหลักของวิद्यุคณิตที่เคยแยกไว้ต่างหาก โดยให้แทรกไว้ในมาตรฐานอื่นๆ และได้ขยายช่วงอายุที่ควรศึกษาวิद्यุคณิตเป็นตั้งแต่อนุบาลถึงเกรด 12 (NCTM. 2000: 31) ดังนั้นวิद्यุคณิตจึงสามารถนำไปใช้สอนและควรนำไปใช้สอนตั้งแต่ระดับอนุบาลถึงมัธยม (Rosenstein. 1997: 1) โดยการบูรณาการเข้ากับเนื้อหาและหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียน (NCTM. 2000: 31) ปัญหาทางวิद्यุคณิตสามารถจำแนกตามประเภทของการหาคำตอบได้สามประการคือ การพิจารณาว่าปัญหานั้นมีคำตอบหรือไม่ คำตอบที่เป็นไปได้มีทั้งหมดกี่แบบ และคำตอบใดเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Dossey. 1991: 1 - 2) เนื้อหาวิद्यุคณิตที่นิยมนำไปประยุกต์และเสริมในการเรียนการสอนคือ ทฤษฎีเซตและหัวข้อที่เกี่ยวข้อง คอมบินาทอริก และทฤษฎีกราฟเบื้องต้น อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ตรรกศาสตร์พื้นฐาน (Kenneth. 1991: 80-81) โดยเฉพาะทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ได้ถูกจัดให้เป็นหนึ่งในรายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ในช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) ในคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2545: 161)

นอกจากเนื้อหาวิद्यุคณิตที่ได้กล่าวมาแล้ว ยังมีเนื้อหาวิद्यุคณิตแนวทางใหม่ คือ เรขาคณิตวิद्यุค (Discrete Geometry) ซึ่งเกิดขึ้นจากการขยายงานวิจัยของกลุ่มนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาทฤษฎีกราฟเมื่อไม่นานมานี้ (Akiyama, Kano and Urabe. 1998: preface(v)) เรขาคณิตวิद्यุคเป็นวิद्यุคณิตที่ศึกษาเกี่ยวกับการบรรจุ (Packing) การหุ้มห่อ (Covering) ไทลิง (Tiling) รวมไปถึงเรขาคณิตเชิงการจัด (Combinatorial Geometry) รูปทรงหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์ (Convex Polytopes) การจัดเรียงของจุด เส้น ระนาบ วงกลม หรือรูปเรขาคณิตอื่นๆ ในระนาบ ปริภูมิสามมิติ และในปริภูมิที่มีมิติสูงกว่า (Goodman and O' Rourke. 1997: preface(vii)) โดยเรขาคณิตวิद्यุคสามารถนำมาปรับเพื่อใช้ในการเรียนการสอนในทุกๆระดับได้เป็นอย่างดี ดังเห็นได้จากการนำเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุคมาใช้สอนในประเทศญี่ปุ่น เพื่อช่วยแก้ปัญหาความรู้สึกและท่าทีของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ (Akiyama and Sakai. 1998: 113) เพราะนักเรียนญี่ปุ่นสามารถทำคะแนนในการสอบวัดความรู้ระดับนานาชาติในหลายๆ โครงการได้อยู่ในเกณฑ์ที่ดีถึงดีมาก แต่จากการสำรวจความคิดเห็นพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ ไม่สนุกในการเรียน ขาดความสามารถในการค้นคว้าและแสดงความคิดเห็น ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการตื่นตัวและพยายามที่จะแก้ปัญหานี้ในหลายมิติ ทั้งแนวคิดในการปรับลดเวลาเรียนให้น้อยลง และการเพิ่มหรือทำให้นักเรียนรู้สึกสนุกสนาน และได้ความรู้ไปพร้อมๆกัน (Tolbert. 2001: 22) จิน อากิยามา (Jin Akiyama) หนึ่งในผู้มีบทบาทใน

วงการการศึกษาของประเทศญี่ปุ่น ได้ผลิตสื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์รวมถึงสื่อการสอนเรื่องเรขาคณิตวิद्यุต (The Research Institute of Educational Development. 2000: 18-61) มาใช้ในชั้นเรียน เพื่อช่วยให้นักเรียนได้เกิดความรู้สึกตื่นเต้นที่ได้ค้นพบข้อเท็จจริง หรือความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์ ด้วยตนเอง กระตุ้นให้นักเรียนได้มีประสบการณ์ในการทดลอง สังเกต สร้างข้อความคาดการณ์ และตรวจสอบพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ (Akiyama, Sakai, Torigoe and Watanabe. 2000: 1-2) และยังสามารถสอนเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุตให้กับนักเรียนญี่ปุ่นผ่านทางสถานีเอ็นเอชเค (NHK: Japan Broadcasting Corporation) อย่างต่อเนื่อง (Akiyama and Sakai. 1998: 114) นอกจากนี้ยังมีการผลักดันให้เกิดการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตวิद्यุตในโรงเรียน โดยผ่านทางการจัดอบรมครูคณิตศาสตร์เพื่อแนะนำให้ครูได้รู้จักเรขาคณิตวิद्यุต เห็นประโยชน์ในการเรียนเรขาคณิตวิद्यุต และได้แนวคิดในการนำเรขาคณิตวิद्यุตไปประยุกต์ใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

ในประเทศไทย จากการศึกษาของผู้วิจัยพบว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เป็นอยู่นั้น นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ได้สัมผัสกับสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวเขาเลย (สุรสาล ผาสุข. 2546: 3) ครูยังคงใช้วิธีสอนแบบบอกเป็นส่วนมาก (ยุพิน พิพิธกุล. 2528: 24) เน้นความจำในเรื่องสูตร นิยาม และวิธีการหาคำตอบที่ถูกต้อง โดยสอนให้นักเรียนแก้ปัญหาโจทย์ด้วยวิธีการที่แน่นอนวิธีเดียว (กิตติ พัฒนตระกูลสุข. 2546: 54) ซึ่งเป็นการเรียนการสอนเป็นแบบทางเดียว ขาดการค้นคว้าทดลอง เน้นเนื้อหาขาดกระบวนการ มองเห็นคณิตศาสตร์เป็นเรื่องไกลตัว ไม่มีประโยชน์ และไม่ค่อยสนุกกับวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนไม่สามารถนำสิ่งที่เรียนไปใช้กับสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ (จรรยา ภูอุดม. 2545: 23-24) จากแนวคิดที่ว่า “คณิตศาสตร์คือการให้เหตุผล” (NCTM. 1989: 29) และการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ (Baroody. 1993: 2-25) ดังนั้นการให้เหตุผลจึงเป็นกระบวนการที่สำคัญที่เน้นในการจัดการเรียนรู้ ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่ช่วยให้เข้าใจคณิตศาสตร์ (NCTM. 2000: 56, Russell. 1999: 1) ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ เชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผลที่นักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้ สามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง (สสวท. 2547: 3) ซึ่งการแสดงเหตุผลที่ดีนั้น มีคุณค่ามากกว่าคำตอบที่ถูกต้อง (NCTM. 1989: 6) กอปรกับตามทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Theory of Intellectual Development) ที่ได้แบ่งการพัฒนาการของความสามารถในการเรียนรู้ออกเป็น 4 ระยะ โดยในระยะที่ 4 คือระยะปฏิบัติการนามธรรม (Formal Operation Period) นั้นอยู่ในช่วงอายุประมาณ 11-15 ปี ตรงกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งเป็นระยะที่เด็กเริ่มคิดในรูปของการตั้งสมมติฐานและทดสอบสมมติฐาน มีการคิดในเชิงนามธรรม ใช้หลักเหตุผลทางตรรกศาสตร์ที่เป็นอิสระจากเนื้อหา ใช้วิธีการทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์แก้ปัญหา แต่ด้วยข้อจำกัดและความแตกต่างระหว่างบุคคล เป็นเหตุให้นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ไม่มีความสามารถปฏิบัติการนามธรรมได้เหมือนๆ กันทุกคน ดังนั้นนักเรียนที่มีความพร้อมสำหรับระยะปฏิบัติการนามธรรมอย่างเต็มที่ น่าจะเป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (สุวัฒนา อุทัยรัตน์. 2525: 102-103 ; วัลลภา แนวจำปา. 2528: 17-18 ; นฤมล แซ่เตีย. 2532: 26-27) และเนื่องจาก

องค์ประกอบหลัก 3 ประการที่ช่วยให้นักเรียนสามารถแสดงเหตุผลได้ดี คือ 1) นักเรียนมีความรู้พื้นฐานเพียงพอ 2) นักเรียนเข้าใจปัญหาและมีแรงจูงใจในการแก้ปัญหา 3) นักเรียนมีความคุ้นเคยกับเนื้อหาเรื่องนั้นๆ (Kilpatrick, Swafford and Findel. 2001) ประกอบกับเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุตเป็นเนื้อหาใหม่ที่มีความซับซ้อน ใช้ความรู้พื้นฐานหลายเรื่องในการเรียน และจำเป็น ต้องมีขั้นตอนของการตรวจสอบข้อความคาดการณ์ การพิสูจน์ทฤษฎีบท การให้เหตุผลแบบนิรนัย ซึ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับระเบียบวิธีการพิสูจน์ทางตรรกศาสตร์ ซึ่งเป็นความรู้ใหม่ที่นักเรียนไม่คุ้นเคย ดังนั้นเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุตในส่วนนี้ จึงน่าจะเหมาะกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

จากสาเหตุที่ได้กล่าวมา และจากการศึกษาเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตวิद्यุตประโยชน์ของเรขาคณิตวิद्यุต ประกอบกับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานได้ระบุให้ “สถานศึกษาสามารถจัดทำหลักสูตรการเรียนรู้อื่นๆเพิ่มเติม เป็นหน่วยการเรียนรู้ รายวิชาใหม่ๆ รายวิชาที่มีความเข้มข้นอย่างหลากหลาย ให้ผู้เรียนได้เลือกเรียนตามความถนัด ความสนใจ ความต้องการ และความแตกต่างระหว่างบุคคล” (กรมวิชาการ. 2544: 9) ซึ่งหมายถึงการจัดทำรายวิชาเพิ่มเติมใหม่ ที่น่าสนใจหรือมีความยากในระดับสูงขึ้นไป สำหรับผู้ที่เรียนกลุ่มสาระนั้นๆ ได้ในระดับดี ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง เพื่อใช้เป็นหนึ่งนในสาระการเรียนรู้อื่นๆเพิ่มเติม และช่วยให้นักเรียนได้เกิดทักษะกระบวนการโดยเฉพาะการให้เหตุผล เห็นความสำคัญของการให้เหตุผล เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มั่นใจในการทำคณิตศาสตร์ เกิดความเข้าใจอย่างถ่องแท้ในเนื้อหาและกระบวนการการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนการได้เห็นบทบาทประยุกต์ที่เกี่ยวข้องและสามารถนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ตั้งความมุ่งหมายไว้ดังนี้

1. เพื่อพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
3. เพื่อศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ภายหลังจากสิ้นสุดการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ความสำคัญของการวิจัย

ผลการวิจัยครั้งนี้ทำให้

1. ได้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และใช้เป็นรายวิชาเพิ่มเติมใหม่ สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
2. ได้กิจกรรมและสื่อการสอนเรื่องเรขาคณิตวิद्यุต ที่เน้นให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง
3. ได้หลักสูตรที่อาจทำให้นักเรียนเห็นคุณค่าของสิ่งที่เรียน และอาจเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
4. เป็นแนวทางในการพัฒนาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมใหม่ สำหรับนักเรียนระดับช่วงชั้นอื่นๆ ต่อไป

ขอบเขตการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิตลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวนประมาณ 20 คน

ตัวแปรที่ศึกษา

1. ตัวแปรอิสระ ได้แก่ หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ประกอบด้วย เอกสารประกอบการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิद्यุต และเอกสารคู่มือครู
2. ตัวแปรตาม ได้แก่
 - 2.1 ประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ประกอบด้วยประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และประสิทธิภาพด้านผลการใช้หลักสูตร
 - 2.2 เจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. เรขาคณิตวิद्यุต หมายถึง การศึกษาเรขาคณิตในเชิงของวิद्यุตคณิต โดยมีเนื้อหา คณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับ การให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measuring Boxes) แลตทิซ (Lattice) การหุ้มห่อและการบรรจุ (Wrapping and Packing) และการวัดแบ่งส่วนสมดุลง (Equipartitions of Measures)
2. นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 และระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลการเรียนเฉลี่ยราย

วิชาคณิตศาสตร์สองรายวิชาเป็นดังนี้ คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีผลการเรียนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 สองรายวิชาไม่ต่ำกว่า 3 และนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีผลการเรียนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 สองรายวิชาไม่ต่ำกว่า 3

3. นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ที่ได้ผ่านการเรียนเนื้อหาเรื่อง เซต จำนวนจริง ตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน เรขาคณิต การหาพื้นที่ การหาปริมาตร เรขาคณิตวิเคราะห์ ตรีโกณมิติ

4. หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง หมายถึง หลักสูตรที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้สอนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ใช้เวลา 34 ชั่วโมง หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต ประกอบด้วยเอกสาร 3 เล่มคือ

4.1 เอกสารประกอบการเรียน มีเนื้อหา 5 หน่วย ได้แก่ ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด แลตทิกซ์ การหุ้มห่อและการบรรจุ และการวัดแบ่งส่วนสมดุลง ในตอนท้ายของแต่ละหน่วยจะมีโจทย์ปัญหาสำหรับฝึกทักษะพร้อมเฉลย

4.2 แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิद्यุต ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของหลักสูตร และแผนการจัดการเรียนรู้ มีทั้งสิ้น 10 แผน แผนละ 3 ชั่วโมง แต่ละแผนประกอบด้วย สาระการ เรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สาระการ เรียนรู้ย่อย กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน การวัด และการประเมินผล กิจกรรมการเรียนการสอนประกอบด้วย การสอนรวมทั้งชั้น ใช้วิธีการสอนแบบ ใช้ปัญหา นำเข้าสู่บทเรียน และการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อยที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล และเน้นให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้จากการทดลองปฏิบัติจริง มีกลุ่มย่อยประมาณกลุ่มละ 4 คน

4.3 เอกสารคู่มือครู ประกอบด้วย

4.3.1 จุดมุ่งหมายของหลักสูตร

4.3.2 กำหนดเวลาการสอนเรขาคณิตวิद्यุต

4.3.3 กรอบแนวการจัดการเรียนการสอน

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลใน 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล โดยวัดจากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมซึ่งเป็นแบบรายงานที่ให้นักเรียนใช้เขียนแสดงผลของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่ม ให้คะแนนเป็นกลุ่ม มีเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด 4 ระดับ ดังนี้ 0 : ต้องแก้ไข 1 : พอใช้ 2 : ดี และ 3 : ดีมาก

6. พฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง พฤติกรรมหรือการแสดงออกที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลของนักเรียน ใน 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล โดยวัดจากแบบสำรวจรายการ ซึ่งครูใช้บันทึกข้อมูลจากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงออกระหว่างปฏิบัติกิจกรรมกลุ่ม โดยมีรายการประเมินเป็นพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกในแต่ละด้าน รวม 14 รายการ

7. ประสิทธิภาพของหลักสูตร หมายถึง องค์ประกอบสองประการคือ

7.1 ประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ เป็นประสิทธิภาพที่ได้จากการประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ด้วยแบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยพิจารณาจาก 2 ด้านคือ

7.1.1 ด้านความเหมาะสมของโครงสร้างหลักสูตร วัดจากแบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง วัดความเหมาะสม 6 ด้าน ได้แก่ จุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหาของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน การวัดการประเมินผล และแผนการจัดการเรียนรู้ โดยมีสเกลการวัดแบบอันดับ 5 อันดับ ดังนี้ 1 : เหมาะสมน้อยที่สุด 2 : เหมาะสมน้อย 3 : เหมาะสมปานกลาง 4 : เหมาะสมมาก และ 5 : เหมาะสมมากที่สุด โดยถ้ามีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 3.51 ขึ้นไปและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานไม่เกิน 1 แสดงว่าโครงสร้างหลักสูตรมีความเหมาะสม

7.1.2 ด้านความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตร วัดจากแบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยวัดความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรดังนี้

ก. ความสอดคล้องของจุดมุ่งหมายหลักสูตรกับเนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน และผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

ข. ความสอดคล้องของกิจกรรมการเรียนการสอนกับการวัดการประเมินผล

ค. ความสอดคล้องของเนื้อหาของหลักสูตรกับจำนวนหน่วยการเรียนรู้

ง. ความสอดคล้องของเนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับเวลา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน และการวัดการประเมินผล

จ. ความสอดคล้องของสื่อการเรียนในแต่ละหน่วยกับกิจกรรมการเรียนการสอน

แบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 3 ประเภทดังนี้ -1 : ไม่สอดคล้อง 0 : ไม่แน่ใจ และ 1 : สอดคล้อง โดยถ้ามีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปแสดงว่าโครงสร้างหลักสูตรมีความสอดคล้อง

เกณฑ์ตัดสินคือ ถ้าโครงสร้างหลักสูตรมีความเหมาะสมและมีความสอดคล้องแสดงว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

7.2 ประสิทธิภาพด้านผลการใช้หลักสูตร เป็นประสิทธิภาพที่ได้จากการวัดนักเรียนใน 3 ด้านคือ

7.2.1 ด้านความสามารถด้านเนื้อหา วัดด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีคิด ประกอบด้วยคะแนน 2 ส่วนคือ คะแนนความสามารถด้านเนื้อหาเรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และแลตทิส คะแนนเต็ม 20 คะแนน และคะแนนความสามารถด้านเนื้อหาเรื่องการหุ้มห่อและการบรรจุ และการวัดแบ่งส่วนสมดุลง คะแนนเต็ม 20 คะแนน รวมคะแนนเต็มทั้ง 2 ส่วน คือ 40 คะแนน

เกณฑ์ตัดสินคือ เกณฑ์ 75 / 75 กล่าวคือ 75 ตัวแรกหมายถึง ถ้านักเรียนได้คะแนนรวมทั้งสองส่วนตั้งแต่ร้อยละ 75 ของคะแนนเต็มขึ้นไป จะถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านเนื้อหา และ 75 ตัวหลังหมายถึง ถ้ามีนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านเนื้อหา มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แสดงว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพด้านความสามารถด้านเนื้อหา

7.2.2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ วัดด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งเป็นแบบรายงานที่ให้นักเรียนใช้เขียนแสดงผลของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล มีเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด 4 ระดับ ดังนี้ 0 : ต้องแก้ไข 1 : พอใช้ 2 : ดี และ 3 : ดีมาก

เกณฑ์ตัดสินคือ เกณฑ์ 1.5 / 75 กล่าวคือ 1.5 ตัวแรกหมายถึง ถ้านักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 1.5 ขึ้นไปจะถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และ 75 ตัวหลังหมายถึง ถ้ามีนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แสดงว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

7.2.3 ด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ วัดด้วยแบบสำรวจรายการ ซึ่งครูใช้บันทึกข้อมูลจากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงออกระหว่างปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผล 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

เกณฑ์ตัดสินคือ ในแต่ละกิจกรรม ถ้ามีจำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกเกินครึ่งหนึ่งของจำนวนรายการทั้งหมด แสดงว่านักเรียนมีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

8. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ทำที่ความคิดเห็น ความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดได้จากแบบวัดเจตคติที่พัฒนามาจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของสมพร แผลงภู (สมพร แผลงภู. 2541: 203-206) มีสเกลการวัดแบบอันดับ 5 อันดับ โดยแบบวัดนี้จะวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรต่อไปนี้ การเห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ความสนุกในการเรียนและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ความใฝ่รู้ในการเรียนคณิตศาสตร์ การเห็นจุดเด่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากวิชาอื่น ความขยันทำแบบฝึกหัด ความถนัดในการเรียนคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน และความรู้สึกในการเข้าร่วมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

เกณฑ์ตัดสินคือ เกณฑ์ 3.5 / 75 กล่าวคือ 3.5 ตัวแรกหมายถึง ถ้านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 3.5 ขึ้นไป จะถือว่านักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี และ 75 ตัวหลังหมายถึง ถ้ามีนักเรียนที่มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แสดงว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

สมมติฐานในการวิจัย

1. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยมีจำนวนนักเรียนที่มีพฤติกรรมการให้เหตุผลอยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
4. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 3.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยจะนำเสนอตามลำดับ ดังนี้

1. การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์
2. เรขาคณิตวิยุต
3. การประเมินหลักสูตร
4. แบบทดสอบอิงเกณฑ์
5. การให้เหตุผล
6. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของหลักสูตรและการพัฒนาหลักสูตร

ทาบ (Taba, 1962: 10) ให้ความหมายของหลักสูตรว่าหมายถึง แผนเพื่อการเรียนรู้ ซึ่งโดยทั่วไปจะประกอบด้วยเป้าหมาย วัตถุประสงค์ เนื้อหา การจัดการเรียนการสอน และไม่ว่าจะยึดวัตถุประสงค์หรือเนื้อหาเป็นสำคัญ จะต้องมีการประเมินผลหลักสูตรเสมอ

เซเลอร์และอเล็กซานเดอร์ (Saylor & Alexander, 1971: 16) ได้กล่าวว่า หลักสูตรหมายถึง แผนสำหรับการจัดโอกาสการเรียนรู้ให้แก่บุคคลกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง เพื่อบรรลุเป้าหมายหรือจุดหมายที่วางไว้โดยมีโรงเรียนเป็นผู้รับผิดชอบ

สวัสดี ประทุมราช และคณะ (2521: 1) ได้ให้ความหมายของหลักสูตรว่า หลักสูตร คือ แผนหรือแนวทางการจัดการศึกษา ทั้งในระบบและนอกระบบโรงเรียนที่ชี้แนะให้ผู้บริหารการศึกษา ครู อาจารย์ ตลอดจนผู้ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการศึกษาได้จัดประสบการณ์ทั้งหมดตามที่หลักสูตรกำหนด เพื่อให้เยาวชนหรือพลเมืองของประเทศได้พัฒนาตนเองทั้งในด้านความรู้ ทักษะ และคุณสมบัติอันพึงประสงค์ตามความมุ่งหมายของการจัดการศึกษาของชาติ

โบแชมพ์ (Beauchamp, 1981: 7) กล่าวว่าหลักสูตร คือ แผนที่เขียนขึ้นเพื่อแสดงขอบเขตและการดำเนินงานของโครงการการศึกษาที่จัดขึ้นในสถานศึกษา

กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (2531: 1) ได้ให้ความหมายของหลักสูตรว่า หลักสูตร คือ ข้อกำหนดว่าด้วยจุดหมาย แนวทาง วิธีการ และเนื้อหาสาระในการจัดการเรียนการสอนใน

โรงเรียน เพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความสามารถ ทักษะ และพฤติกรรมตามที่กำหนดในจุดมุ่งหมายของการศึกษา

ซาร์จ บัควี (2532: 64) กล่าวว่า หลักสูตร คือ แผนซึ่งได้ออกแบบจัดทำขึ้นเพื่อแสดงถึงจุดมุ่งหมาย การจัดเนื้อหาสาระ กิจกรรม และมวลประสบการณ์ในแต่ละโปรแกรมการศึกษา เพื่อให้ นักเรียนมีพัฒนาการในด้านต่างๆ ตามจุดมุ่งหมายที่ได้กำหนดไว้

สจัต อุทรานันท์ (2532: 31) กล่าวว่า การพัฒนาหลักสูตรนั้นอาจเป็นการทำหลักสูตรที่มีอยู่แล้วให้ดีขึ้น หรือการสร้างหลักสูตรขึ้นมาใหม่ก็ได้ โดยในการพัฒนาหลักสูตรจะประกอบด้วย 3 มิติ (Dimensions) คือ

1. การวางแผนจัดทำหรือยกร่างหลักสูตร (Curriculum Planning) ประกอบด้วย การวิเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน การกำหนดจุดมุ่งหมาย การกำหนดเนื้อหาสาระและประสบการณ์การเรียนรู้ การกำหนดการวัดการประเมินผลการเรียนรู้
2. การใช้หลักสูตร (Curriculum Implementation) ประกอบด้วย การจัดทำวัสดุหลักสูตรต่างๆ ที่ช่วยให้ผู้ใช้หลักสูตรสามารถใช้หลักสูตรได้อย่างมีประสิทธิภาพ การผลิตและใช้สื่อการเรียนการสอนต่างๆ การเตรียมบุคลากร การบริหารหลักสูตร และการดำเนินการสอนตามหลักสูตร
3. การประเมินผลหลักสูตร (Curriculum Evaluation) ประกอบด้วย การประเมินเอกสารหลักสูตร การประเมินการใช้หลักสูตร การประเมินผลสัมฤทธิ์ของหลักสูตร และการประเมินหลักสูตรทั้งระบบ

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ (2545: 26) ได้ให้ความหมายของการพัฒนาหลักสูตร (Curriculum Development) ไว้ว่า หมายถึง กระบวนการการวางแผนจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทุกประเภท เพื่อให้ นักเรียนเกิดการเปลี่ยนแปลงตามจุดประสงค์ที่กำหนด โดยมีการวางแผนประเมินผลเพื่อให้ทราบแน่ชัดว่า การเปลี่ยนแปลงในตัวนักเรียนนั้นบรรลุจุดประสงค์จริงหรือไม่

การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิทยุตในงานวิจัยนี้ ให้ความหมายของหลักสูตรตามแนวคิดที่ว่า หลักสูตร คือ แผนสำหรับจัดโอกาสการเรียนรู้ หรือประสบการณ์ที่คาดหวังแก่นักเรียน โดยการสร้างหลักสูตรจะเน้นเกี่ยวกับจุดมุ่งหมายหรือวัตถุประสงค์ การออกแบบหลักสูตร การนำหลักสูตรไปใช้และการประเมินผล เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้ที่เกี่ยวข้องได้ปฏิบัติโดยมุ่งให้ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถทั้งนี้ จะให้ความสำคัญกับการจัดประสบการณ์ต่างๆ แก่นักเรียน เน้นที่ประสบการณ์ที่จะทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และพัฒนาตามที่ได้กำหนดไว้ตามเนื้อหาสาระในรายวิชา

1.2 รูปแบบของการพัฒนาหลักสูตร

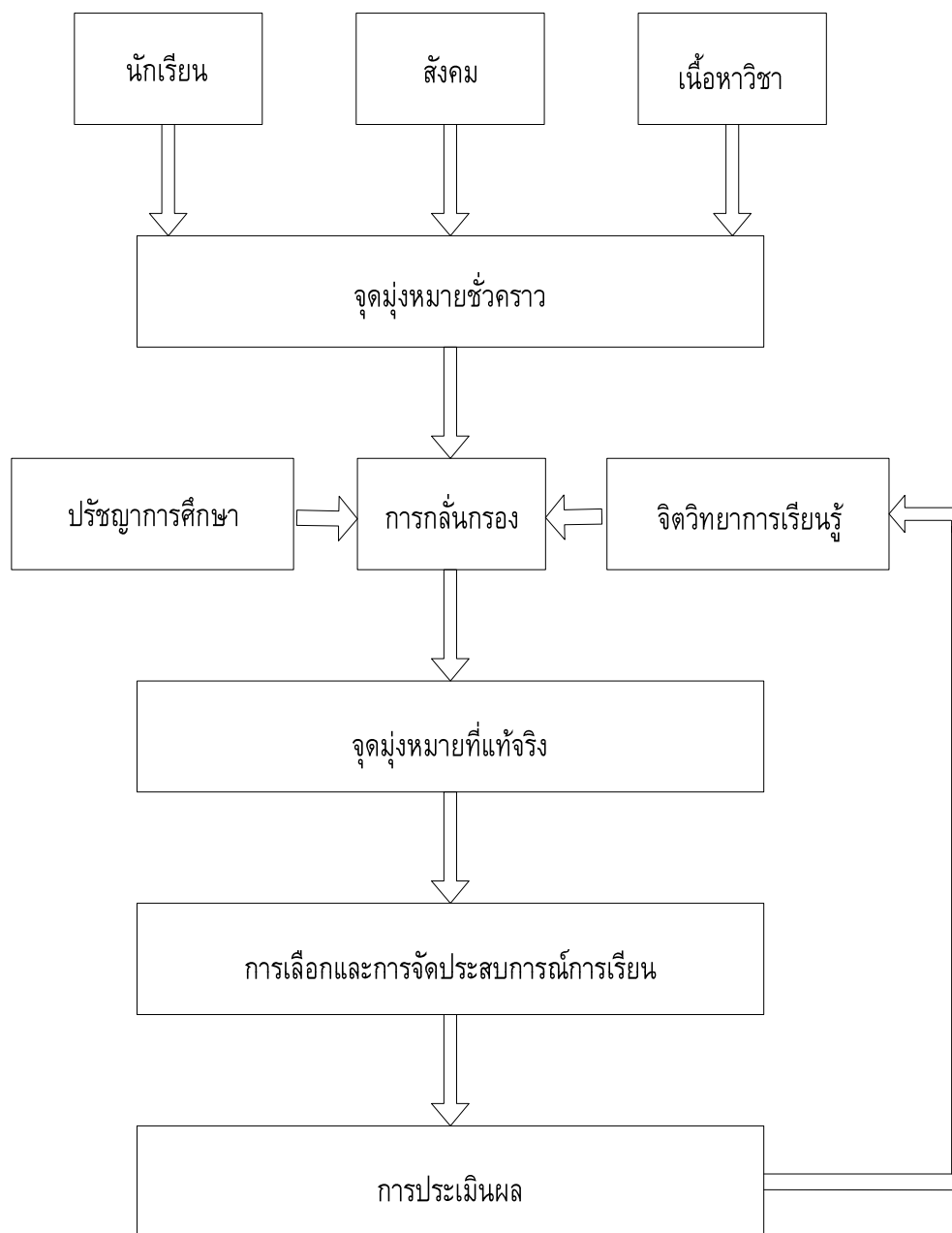
1.2.1 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของไทเลอร์

ไทเลอร์ (Tyler. 1949: 12) ได้เสนอหลักการและเหตุผลในการพัฒนาหลักสูตร (Tyler rationale) ซึ่งบุคคลที่มีส่วนร่วมในการพัฒนาหลักสูตร จะต้องตอบคำถามพื้นฐาน 4 ประการ คือ

1. อะไรเป็นจุดมุ่งหมายของการศึกษา (Educational Purposes) ที่ต้องการให้โรงเรียนปฏิบัติ
2. ทำอย่างไรจึงจะจัดประสบการณ์การศึกษา (Educational Experiences) ให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้
3. ประสบการณ์ทางการศึกษาที่กำหนดนั้น สามารถจัดให้มีประสิทธิภาพได้อย่างไร
4. จะประเมินผลประสิทธิภาพของประสบการณ์การศึกษาอย่างไร จึงจะตัดสินได้ว่าบรรลุตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้

รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของไทเลอร์ ให้ความสำคัญกับการตอบคำถามพื้นฐานทั้ง 4 ประการตามลำดับ ซึ่งคือการกำหนดจุดมุ่งหมาย การกำหนดประสบการณ์การศึกษา การจัดประสบการณ์การศึกษา และการประเมินผลหลักสูตร โดยจุดประสงค์ชั่วคราวจะได้จากการศึกษาข้อมูล 3 แหล่งคือ นักเรียน สังคม และเนื้อหาวิชา จากนั้นจุดมุ่งหมายชั่วคราวจะได้รับการกลั่นกรองจากปรัชญาการศึกษา และจิตวิทยาการเรียนรู้ ซึ่งจะทำให้จุดมุ่งหมายมีความชัดเจนขึ้นจนกลายเป็นจุดมุ่งหมายที่แท้จริง จากนั้นเป็นกระบวนการเลือกประสบการณ์การเรียนรู้หรือประสบการณ์การศึกษาสำหรับนักเรียนเพื่อให้บรรลุตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดขึ้น และการประเมินผลหลักสูตร

รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของไทเลอร์สามารถสรุปได้ดังภาพประกอบ 1



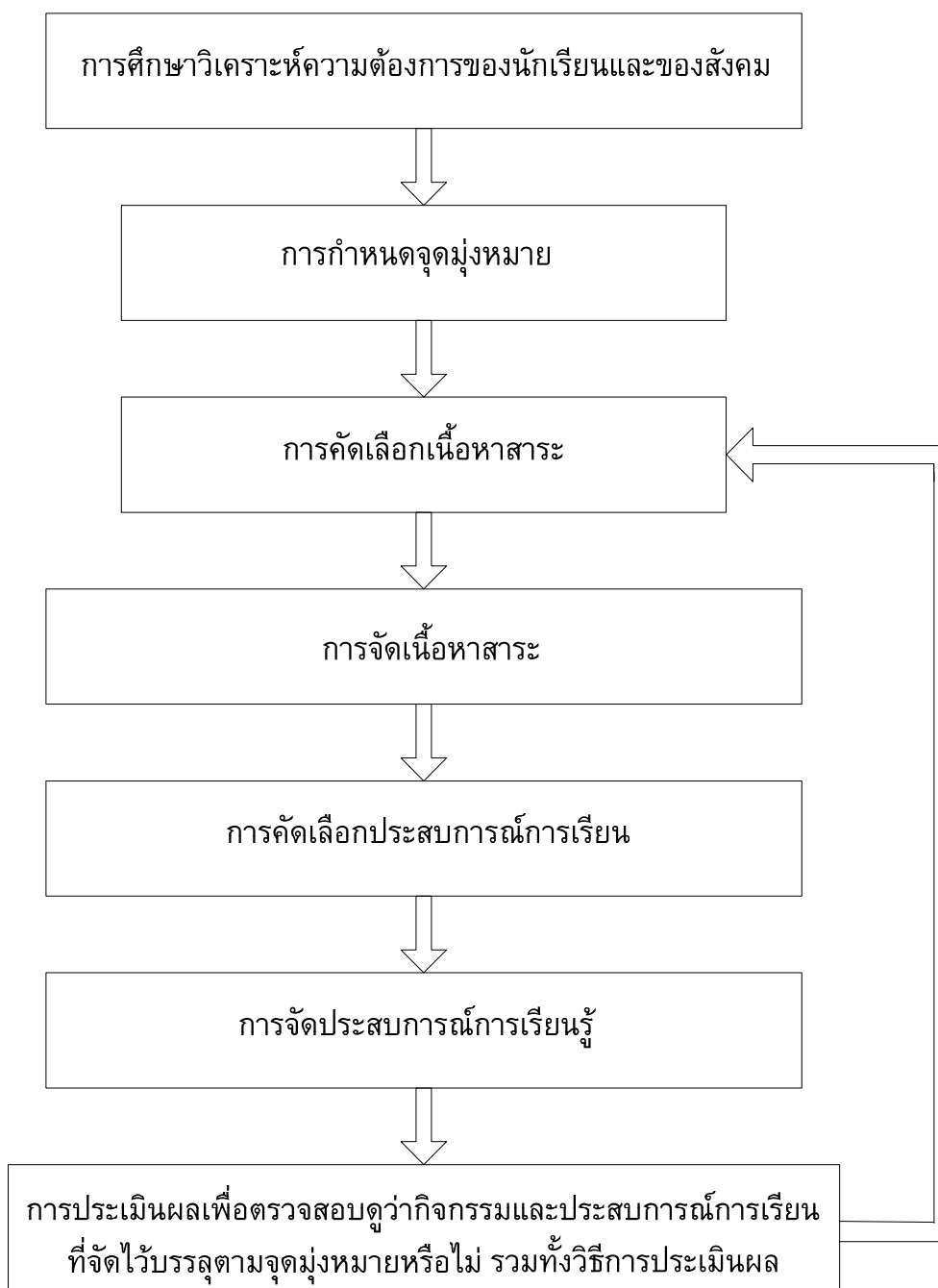
ภาพประกอบ 1 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของไทยเลอร์ (Oliva, 1982: 133)

1.2.2 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของทาบา

ทาบา (Taba. 1962: 12) ได้เสนอแนวคิดในการพัฒนาหลักสูตรเหมือนไทเลอร์ แต่เห็นว่าหลักสูตรควรได้รับการออกแบบและพัฒนาโดยผู้ใช้ ซึ่งคือครูผู้สอน โดยครูจะค่อยๆ สร้างหลักสูตรจากหน่วยการเรียนการสอนย่อยๆ สำหรับการสอนในโรงเรียนแล้วค่อยปรับขยายเป็นหลักสูตร ซึ่งเป็นการพัฒนาจากสิ่งที่เฉพาะเจาะจง แล้วขยายสู่สิ่งที่กว้างขึ้น ทาบาสอนกระบวนการพัฒนาหลักสูตรจากล่างขึ้นบน (Grassroots Approach) ซึ่งเป็นกระบวนการ 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. วิเคราะห์ความต้องการของนักเรียน (Diagnosis of Needs) โดยการวิเคราะห์หา ช่องว่าง จุดบกพร่อง ตลอดจนสภาพปัญหา ความต้องการ และความจำเป็นต่างๆ ของสังคมและนักเรียน
2. กำหนดจุดมุ่งหมาย (Formulation of Objectives) หรือเป้าหมายหรือจุดหมายของ หลักสูตรหลังจากวิเคราะห์ความต้องการของนักเรียนแล้ว
3. คัดเลือกเนื้อหาสาระ (Selection of Content) โดยให้สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่กำหนดด้วย ความสามารถของนักเรียน โดยเนื้อหาสาระต้องมีความเชื่อถือได้ และสำคัญต่อการเรียนรู้ของนักเรียนด้วย
4. การจัดเนื้อหาสาระ (Organization of Content) หรือการเรียงลำดับเนื้อหา ต้องคำนึงถึงความต่อเนื่อง ความยากง่ายของเนื้อหา วุฒิภาวะ ความพร้อมและความสนใจของนักเรียน
5. คัดเลือกประสบการณ์การเรียนรู้ (Selection of Learning Experiences) เพื่อให้ นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาที่กำหนด ครูผู้สอนหรือผู้ที่เกี่ยวข้องต้องเป็นผู้กำหนด กิจกรรมการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับเนื้อหาวิชา และจุดประสงค์ของหลักสูตร
6. จัดประสบการณ์การเรียนรู้ (Organization of Learning Experiences) ต้องคำนึงถึงเนื้อหาสาระ ลำดับขั้นตอน ความต่อเนื่อง โดยบูรณาการมวลความรู้ต่างๆ เพื่อให้เกิดประสิทธิผลแก่นักเรียนมากที่สุด
7. กำหนดรูปแบบการประเมินผลตามจุดมุ่งหมาย (Determination of What to Evaluate and of the Ways and Means of Doing it) โดยต้องตัดสินใจว่าต้องการประเมินอะไร เพื่อตรวจสอบว่าหลักสูตรที่พัฒนาขึ้นบรรลุตามจุดมุ่งหมายหรือไม่ใช้ เครื่องมืออะไรในการประเมิน

รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของทาบาสามารถสรุปได้ดังภาพประกอบ 2



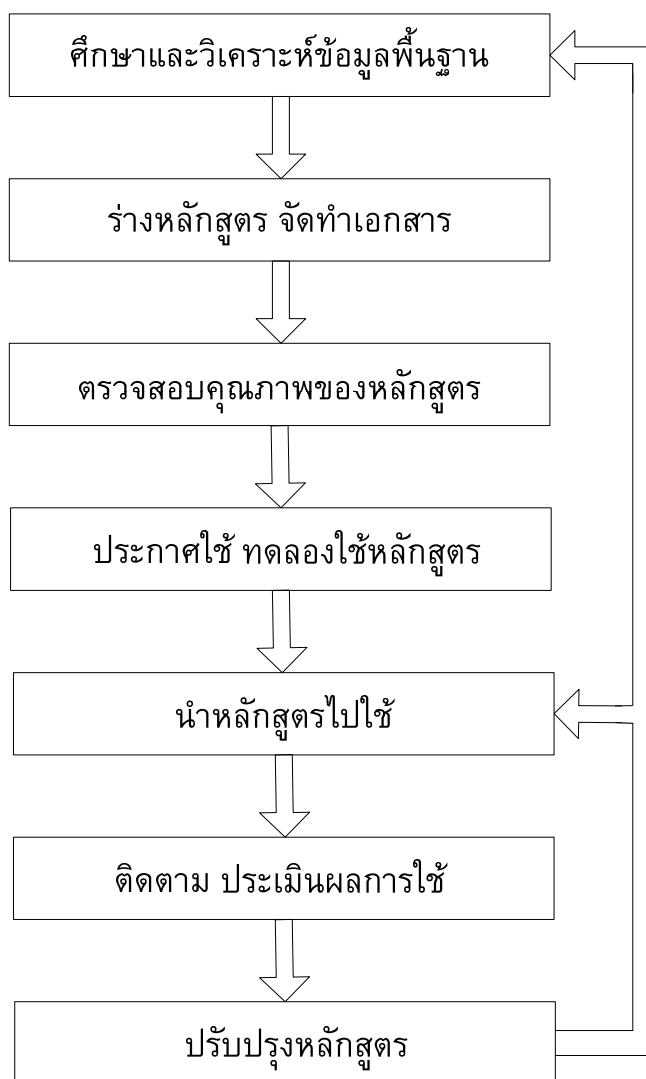
ภาพประกอบ 2 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของทาบ (Taba. 1962: 12)

1.2.3 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของกรมวิชาการ

ในปีพ.ศ.2533 กรมวิชาการได้เสนอวิธีการพัฒนาหลักสูตรในลักษณะการทำงานร่วมกัน (Cooperative Approach) ระหว่างบุคลากรที่เกี่ยวข้องในทุกฝ่าย โดยแบ่งเป็น 6 ขั้นตอน (วิชัย วงษ์ใหญ่. 2538: 75) คือ

1. การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน ได้แก่การสำรวจสภาพปัญหา การศึกษา เศรษฐกิจสังคม การเมือง วัฒนธรรม รวมทั้งวิเคราะห์แนวคิด ทฤษฎีใหม่ๆ เกี่ยวกับการพัฒนาหลักสูตร
2. การร่างหลักสูตร จัดทำเอกสารหลักสูตร กรมวิชาการได้แต่งตั้งคณะกรรมการพัฒนาหลักสูตร ซึ่งมีองค์ประกอบของคณะกรรมการพัฒนาหลักสูตรมีหลากหลาย มีบทบาทหน้าที่ กำหนดจุดมุ่งหมาย หลักการโครงสร้างของหลักสูตร กำหนดจุดประสงค์และรายละเอียดของเนื้อหารายวิชา จัดทำคู่มือหลักสูตร คู่มือครู และหนังสือเรียน
3. การตรวจสอบคุณภาพของหลักสูตร คณะกรรมการอำนวยการพัฒนาหลักสูตรและผู้เชี่ยวชาญประเมินร่างหลักสูตรและเอกสารต่างๆ แล้วปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปทดลองใช้
4. การประกาศใช้หลักสูตรและทดลองใช้หลักสูตร คณะกรรมการพัฒนาหลักสูตรได้นำหลักสูตรที่ผ่านการประเมินคุณภาพในขั้นตอนที่ 3 แล้วมาปรับปรุงเพื่อนำไปทดลองในโรงเรียนร่วมพัฒนาการใช้หลักสูตรพร้อมติดตามผลการทดลองใช้เป็นระยะๆ เพื่อตรวจสอบคุณภาพของหลักสูตร และประกาศการใช้หลักสูตร
5. การนำหลักสูตรไปใช้ คณะกรรมการพัฒนาหลักสูตรได้วางแผนการใช้หลักสูตร เตรียมการประชาสัมพันธ์หลักสูตร อบรมชี้แจง ประชุมสัมมนา ศึกษานิเทศก์ ครู ผู้บริหารและบุคลากรที่เกี่ยวข้องกับการใช้หลักสูตร
6. การติดตามประเมินผล การใช้หลักสูตร การบริการและสนับสนุนการใช้หลักสูตร และให้โรงเรียนประเมินตนเองเกี่ยวกับการใช้หลักสูตร ส่งเสริมให้กรมเจ้าสังกัดประเมินผลของการใช้หลักสูตรเพื่อปรับปรุงคุณภาพการศึกษา ส่วนกรมวิชาการร่วมมือกับโรงเรียนและกรมเจ้าสังกัดประเมินหลักสูตรในภาพรวม

รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของกรมวิชาการสามารถสรุปได้ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของกรมวิชาการ (วิชัย วงษ์ใหญ่. 2538: 75)

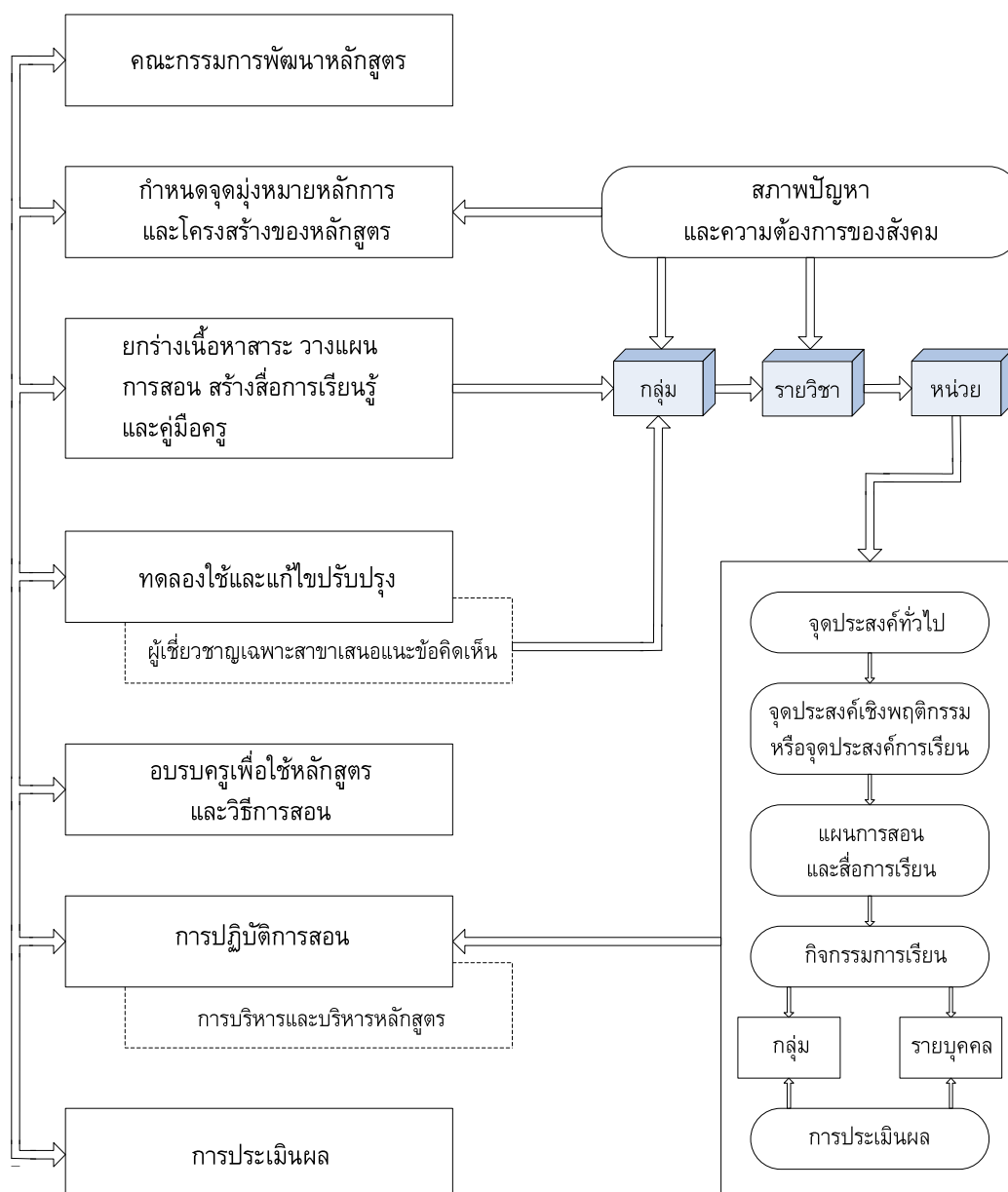
1.2.4 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของวิชัย วงษ์ใหญ่

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2538: 77) ได้สรุปแนวคิดและขั้นตอนกระบวนการพัฒนาหลักสูตร

ดังนี้

1. คณะกรรมการพัฒนาหลักสูตร กำหนดจุดมุ่งหมาย หลักการและโครงสร้างและ ความต้องการออกแบบหลักสูตรขึ้นมา โดยอาศัยข้อมูลจากสภาพปัญหาและความ ต้องการของสังคมปัจจุบันโดยปรึกษาหารือกับผู้เชี่ยวชาญแต่ละสาขาวิชาอย่าง สม่ำเสมอ
2. ยกร่างเนื้อหาสาระ แต่ละกลุ่มประสบการณ์ แต่ละหน่วยการเรียนรู้และแต่ละรายวิชา โดยปรึกษาหารือกับผู้เชี่ยวชาญแต่ละสาขาวิชา คณะกรรมการพัฒนาหลักสูตรร่วมกับ ผู้เชี่ยวชาญแต่ละสาขาวิชาเป็นผู้กำหนดจุดมุ่งหมาย จุดประสงค์ทั่วไป จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หรือจุดประสงค์การเรียนรู้ วางแผนการสอน ทำบันทึกการ สอน ผลิตสื่อการเรียน จัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นกลุ่มหรือรายบุคคล
3. นำหลักสูตรที่พัฒนาแล้วไปทดลองใช้ในโรงเรียนนาร่อง (โรงเรียนทดลองใช้ หลักสูตรใหม่) โดยคณะกรรมการพัฒนาหลักสูตรได้กำหนดไว้ ถ้ามีข้อบกพร่องก็ ทำการแก้ไข ปรับปรุง โดยปรึกษาหารือกับผู้เชี่ยวชาญเฉพาะสาขาอยู่ตลอดเวลา
4. อบรมครู ผู้บริหารทุกระดับ และบุคลากรทางการศึกษาให้เข้าใจหลักสูตรใหม่ เพื่อ จะได้ใช้หลักสูตรใหม่ให้ถูกต้องเหมาะสม ตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร รวมทั้งการ ประชาสัมพันธ์หลักสูตรให้ผู้ที่เกี่ยวข้องทราบ
5. นำหลักสูตรไปใช้ปฏิบัติการสอนในโรงเรียน ประกาศใช้หลักสูตร สนับสนุนให้ผู้ บริหารและครูนำหลักสูตรไปปฏิบัติให้เกิดประโยชน์ในโรงเรียนต่อไป ซึ่งกิจกรรม การใช้หลักสูตรใหม่มี 4 ประการคือ 1. การแปลงหลักสูตรไปสู่การสอน 2. ผู้บริหาร จัดเตรียมสิ่งต่างๆ เช่น บุคลากร วัสดุหลักสูตร 3. การสอน 4. การประเมินผล

รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของวิชัย วงษ์ใหญ่ สามารถสรุปได้ดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรของวิชัย วงษ์ใหญ่ (วิชัย วงษ์ใหญ่, 2538: 77)

จากการศึกษารูปแบบของการพัฒนาหลักสูตรตามที่กล่าวมา ผู้วิจัยได้ประมวลเป็นขั้นตอน เพื่อใช้เป็นรูปแบบการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ซึ่งประกอบด้วย 6 ขั้นตอนคือ

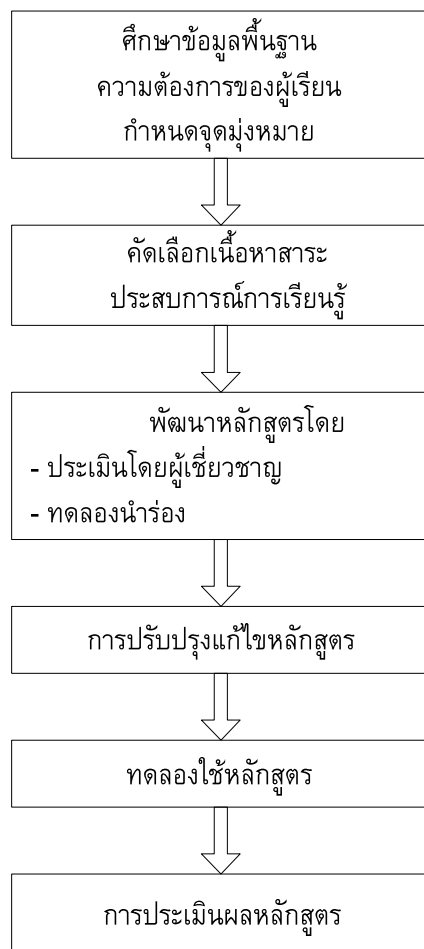
1. ศึกษาข้อมูลพื้นฐาน ความต้องการของผู้เรียน กำหนดจุดมุ่งหมาย
2. คัดเลือกเนื้อหาสาระ ประสบการณ์การเรียนรู้
3. พัฒนาหลักสูตร โดยการประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ และทดลองนำร่อง

4. การปรับปรุงแก้ไขหลักสูตร

5. ทดลองใช้หลักสูตร

6. ประเมินผลหลักสูตร

ขั้นตอนทั้ง 6 สามารถสรุปได้ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 รูปแบบการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต

2. เรขาคณิตวิद्यุต

เนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต

กู๊ดแมนและโอริวเก (Goodman and O' Rourke, 1997: preface(viii)) ได้ให้ความหมายของเรขาคณิตวิद्यุตไว้ว่า เป็นคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับการบรรจุ (Packing) การหุ้มห่อ (Covering) ไทลิง (Tiling) รวมไปถึงเรขาคณิตเชิงการจัด (Combinatorial Geometry) รูปทรงหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์ (Convex Polytopes) การจัดเรียงของจุด เส้น ระนาบ วงกลม หรือรูปเรขาคณิตอื่นๆ ในระนาบ ปริภูมิสามมิติ และในปริภูมิที่มีมิติสูงกว่า ส่วนเรขาคณิตเชิงคำนวณ (Computational Geometry) ได้ให้ความหมายว่า หมายถึงการออกแบบและวิเคราะห์ขั้นตอนวิธีของรูปเรขาคณิต (geometric algorithm)

อากิยามา คาโน และอุราเบ (Akiyama, Kano and Urabe, 1998: preface(v)) กล่าวว่า ความสนใจในเรขาคณิตเชิงคำนวณ (Computational Geometry) เกิดขึ้นจากกลุ่มของวิศวกรชาวญี่ปุ่นเมื่อประมาณยี่สิบปีที่แล้ว ขณะที่ความสนใจในเรขาคณิตวิद्यุตเกิดจากการขยายงานวิจัยของกลุ่มนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษาทฤษฎีกราฟเมื่อไม่นานมานี้.

อากิยามา และซาคาย (Akiyama and Sakai, 1998: 113-135) ได้กล่าวถึงการนำเนื้อหาบางส่วนของเรขาคณิตวิद्यุต เรื่อง การห่อลูกบาศก์ (Wrapping a Cube) ตาข่ายของลูกบาศก์ที่มีเส้นรอบวงสั้นสุด (Net of a Cube with Minimum Perimeter) การห่อแบบดับเบิล (Double Packing Solids) แม่พิมพ์รูปทรงหลายเหลี่ยม (Polyhedral Stampers) คาไลโดสโคป (Kaleidoscope) ภาพดอกไม้จากการสะท้อน (Image of Flower-like Solids by Reflection) โต๊ะอเนกประสงค์ (Omni-purpose Table) และการแบ่งแบบสมบูรณ์ (Perfect Division of a Solid) มาใช้สอนนักเรียนผ่านสถานีโทรทัศน์เอ็นเอชเค (NHK: Japan Broadcasting Corporation) เพื่อช่วยแก้ปัญหาเกี่ยวกับความรู้สึกและท่าทีของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เพราะถึงแม้ว่านักเรียนญี่ปุ่นจะสามารถทำคะแนนในการสอบวัดความรู้คณิตศาสตร์ระดับนานาชาติในหลายๆ โครงการได้ในเกณฑ์ดีถึงดีมาก แต่จากการสำรวจพบว่า นักเรียน 52% เกลียดหรือไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ 38% คิดว่าคณิตศาสตร์ไม่สำคัญต่อการใช้ชีวิตประจำวัน และ 82% คาดหวังว่าจะได้ทำงานที่ไม่เกี่ยวข้องกับการใช้คณิตศาสตร์ โดยจุดประสงค์ของการผลิตบทเรียนทางโทรทัศน์ในครั้งนี้คือ

1. เพื่อให้คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มหัศจรรย์ น่าพิศวง น่าสนใจสำหรับนักเรียน
2. เพื่อเน้นถึงบทบาทของคณิตศาสตร์ต่อเทคโนโลยีขั้นสูงในยุคปัจจุบัน
3. เพื่อกระตุ้นและแสดงให้เห็นว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์สามารถได้มาจากการสำรวจและสังเกตผ่านสื่อหรือโมเดลที่จับต้องได้
4. เพื่อทำทนายจินตนาการและความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียน

ในการผลิตบทเรียนครั้งนี้ได้ผลิตออกมาหลายชุด (series) แต่ละชุดมีประมาณ 20 บทเรียน ออกอากาศ 30 นาทีต่อครั้ง เอกสารประกอบการเรียนสามารถหาซื้อได้ตามร้านหนังสือ

ท้องถิ่น และจากการสำรวจพบว่าในแต่ละชุดจะมีผู้ชมมากกว่าหนึ่งล้านคน ซึ่งได้รับการตอบรับจาก ผู้ชม และนัก เรียนเป็นอย่างดี

อาคิยามา ซาไก โทริโกะ และวาตานาเบ (Akiyama, Sakai, Torigoe and Watanabe, 2000: 1) กล่าวว่าคณะกรรมการหลักสูตรแห่งชาติ (National Curriculum Committee) ของญี่ปุ่น ได้แนะนำให้ใช้สื่อหรือโมเดลที่จับต้องได้เพื่อช่วยให้นักเรียนเกิดแนวคิดเชิงนามธรรม มองเห็นและมีความเข้าใจใหม่ในคณิตศาสตร์ที่ยากหรือที่เป็นนามธรรมได้ โดยจากการศึกษาของ มหาวิทยาลัยโตเกียวในการสอนโดยใช้สื่อหรือโมเดลที่จับต้องได้ตามคำแนะนำกับนักเรียนมัธยมศึกษา พบว่า

1. นักเรียนยังคงจำภาพโมเดลแทนมโนคติทางคณิตศาสตร์ที่ยากได้ และเริ่มซาบซึ้งกับมโนคตินั้นๆ
2. นักเรียนเริ่มเกิดความรู้สึกอยากเรียนรู้ และกล้าตั้งคำถาม
3. นักเรียนเกิดความพึงพอใจที่เห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่สามารถเข้าใจได้
4. นักเรียนเริ่มเห็นประโยชน์ของโมเดลและเริ่มสร้างสรรค์โมเดลของตนเองเมื่อเผชิญกับปัญหาที่ยาก
5. ผู้เรียนคณิตศาสตร์ได้เข้าและไม่ชอบคณิตศาสตร์ มีโอกาสที่จะได้เปลี่ยนมุมมองต่อวิชาคณิตศาสตร์
6. นักเรียนในทุกระดับความสามารถมีส่วนร่วมในชั้นเรียน

จากข้อมูลทีกล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่าเรขาคณิตวิยุตเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์แนวทางใหม่ที่ศึกษาเรขาคณิตในเชิงของวิยุตคณิต มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับการบรรจุ (Packing) การหุ้มห่อ (Covering) ไทลิง (Tiling) รวมไปถึงเรขาคณิตเชิงการจัด (Combinatorial Geometry) รูปทรงหลายเหลี่ยมคอนเวกซ์ (Convex Polytopes) การจัดเรียงของจุด เส้น ระนาบ วงกลม หรือรูปเรขาคณิตอื่นๆ ในระนาบ ปริภูมิสามมิติ และในปริภูมิที่มีมิติสูงกว่า โดยสามารถนำมาปรับเพื่อใช้สอนนักเรียนในระดับต่ำกว่าอุดมศึกษาได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีแนวความคิดว่าในการคัดเลือกเนื้อหาเรขาคณิตวิยุตควรคำนึงถึงความเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยเป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาในโลกจริงที่พบได้ในชีวิตประจำวันที่เหมาะสม และเอื้อต่อการใช้สื่อหรือโมเดลในการสำรวจ สังเกต สร้างข้อความคาดการณ์ และตรวจสอบข้อความคาดการณ์ เพื่อช่วยให้นักเรียนเห็นกระบวนการการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ เห็นบทประยุกต์ และสามารถนำไปใช้ได้ในชีวิตจริง โดยเนื้อหาเนื้อหาของเรขาคณิตวิยุตในหลักสูตรมีสองส่วนคือ ความรู้พื้นฐาน ได้แก่ การให้เหตุผล และระเบียบวิธีการพิสูจน์ ส่วนที่สองเป็นเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต ได้แก่ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measuring Boxes) แลตทิซ (Lattice) การบรรจุและการหุ้มห่อ (Packing and Wrapping) และการวัดแบ่งส่วนสมดุล (Equipartitions of Measures)

การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตวิद्यุต

การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ

กรมวิชาการ (2541: 1-5) ได้ให้ความหมายของการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญว่า หมายถึงการสอนที่มุ่งจัดกิจกรรมที่สอดคล้องกับการดำรงชีวิต เหมาะสมกับความสามารถ และความสนใจของผู้เรียน โดยให้นักเรียนมีส่วนร่วมและลงมือปฏิบัติจริงทุกขั้นตอนจนเกิดการเรียนรู้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังให้ความหมายของ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญว่า หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนได้เรียนจากการจัดมวลประสบการณ์ที่หลากหลาย คำนี้ถึงผลประโยชน์ที่จะเกิดกับผู้เรียน และตอบสนองการเรียนรู้ของผู้เรียนตามความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยผู้เรียนมีโอกาสเลือกกิจกรรมและได้ลงมือปฏิบัติจริง สรุปเป็นความรู้ใหม่ และเกิดเป็นความภูมิใจต่อความสำเร็จของตน ครูเป็นผู้อำนวยความสะดวก จัดสถานการณ์ แหล่งความรู้ และสื่อที่เหมาะสมเอื้ออำนวยต่อการพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน

ยุพิน พิพิธกุล (2541: 3) กล่าวว่า การเรียนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง หมายถึง กระบวนการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ โดยคิดค้น สร้าง และสรุปความรู้ด้วยตนเอง สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นและนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ได้

สิริพร ทิพย์คง (2545: 17) ได้กล่าวถึงแนวการจัดการเรียนที่ยึดผู้เรียนเป็นสำคัญ ว่า หมายถึงกระบวนการที่พัฒนาร่างกาย จิตใจ สติปัญญา ความรู้ และคุณธรรมของผู้เรียนให้เจริญออกมา โดยการสร้างให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมรู้ ร่วมคิด ร่วมกระทำ ผู้สอนทำหน้าที่ร่วมวางแผนในกิจกรรมที่เหมาะสม กระตุ้นให้ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม ส่งเสริมความคิดและอำนวยความสะดวกให้ผู้เรียนได้พัฒนาตนเองอย่างเต็มที่ ตามความต้องการ ตามความสนใจ และเต็มตามศักยภาพของผู้เรียน นอกจากนี้ กรมวิชาการ (2541: 1-5) ได้แบ่งประเภทของการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ออกเป็น 2 แบบ คือ 1)แบบเน้นกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นหลัก ซึ่งได้แก่ การสอนแบบใช้ปัญหาเป็นหลัก การสอนแบบร่วมมือ การสอนแบบเน้นกระบวนการทางวิทยาศาสตร์ การสอนแบบเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การสอนแบบคิดอย่างมีวิจารณญาณ เป็นต้น 2) แบบเน้นสื่อ เป็นการสอนที่มีลักษณะดังเช่น สอนโดยใช้บทเรียนแบบโปรแกรม สอนโดยใช้ชุดการสอนรายบุคคล สอนโดยใช้โปรแกรม CAI เป็นต้น โดยได้กำหนดลักษณะการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ คือ

1. เป็นการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนมีส่วนร่วม และมีบทบาทในการเรียนการสอนตามความสนใจ ความสามารถ ตั้งแต่การร่วมกำหนดจุดประสงค์ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อ การประเมินผล
2. เป็นการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากการลงมือทำกิจกรรม การปฏิบัติ การแก้ปัญหา การศึกษาด้วยตนเอง จากสื่อ เพื่อน และครู

3. เป็นการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนได้มีโอกาสฝึกฝนทักษะต่างๆ เช่น ทักษะการคิดวิเคราะห์ การสังเกต การค้นคว้า การจดบันทึก การสังเคราะห์ การสรุปข้อความรู้ต่างๆของตนเอง
4. เป็นการเรียนการสอนที่ให้ผู้เรียนได้มีโอกาสสร้างความสัมพันธ์ แลกเปลี่ยนความรู้ และความคิดกับเพื่อนจากการทำกิจกรรมต่างๆ

วิธีสอนแบบค้นพบ และวิธีสอนแบบสืบสวนสอบสวน

ยูพิน พิพิทกุล (2520: 1-7) กล่าวว่า วิธีการสอนโดยการค้นพบ (Discovery Method) เป็นการสอนให้เกิดความสัมพัทธ์มองเห็นโครงสร้าง เกิดความคิดรวบยอด แล้วนำไปสู่ข้อสรุป หรือกฎเกณฑ์ การสอนแบบนี้เน้นไปที่ตัวนักเรียน โดยนักเรียนเป็นผู้ค้นพบด้วยตนเอง บทบาทของครูเป็นเพียงผู้กระตุ้นให้นักเรียนคิดหรือทำเท่านั้น

สิริพร ทิพย์คง (2545: 138-148) กล่าวว่าวิธีสอนแบบค้นพบ เป็นวิธีการสอนที่ต้องการให้นักเรียนได้ค้นพบ กฎเกณฑ์ ข้อสรุปน้อยๆไปได้ด้วยตนเอง วิธีสอนแบบค้นพบแบ่งเป็น 3 ลักษณะ

1. การค้นพบด้วยตนเองของนักเรียนรายบุคคล โดยครูยกตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง แล้วให้นักเรียนสังเกตจากตัวอย่างเหล่านั้นจนมองเห็นแบบรูป (Pattern) สามารถสรุปเป็นน้อยๆไป (Generalization) ได้ด้วยตนเอง
2. การค้นพบโดยการแนะนำ (Guided Discovery) ของครู หรือวิธีการสอนแบบโซเครติก (The Socratic Method) เป็นการสอนที่ใช้การโต้ตอบ ชักถามระหว่างครูกับนักเรียน และการแนะนำแนวทางของครูผู้สอนจนนักเรียนสามารถสรุปกฎเกณฑ์ได้
3. การค้นพบโดยกลุ่มหรือคณะหรือทีม (Team Learning) โดยนักเรียนร่วมมือกันปรึกษาหารือช่วยกันค้นหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งอาจใช้การลงมือปฏิบัติหรือทดลอง

นอกจากนี้วิธีสอนแบบค้นพบอาจแบ่งตามแนวทางการสอน ตามคำแนะนำของนักคณิตศาสตร์บางท่านเช่น คูนีย์ เดวิส และเฮนเดอสัน (Cooney, Davis and Henderson) ได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. การค้นพบแบบอุปนัย (Inductive Discovery) ซึ่งเป็นกระบวนการสอนที่เริ่มจากการยกตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่าง ซึ่งอาจเป็นตัวอย่างที่เฉพาะเจาะจง ตัวอย่างที่ถูกต้อง และตัวอย่างที่ผิดแล้วให้นักเรียนได้สังเกต ทดลองหาคำตอบด้วยการคาดเดา (Guess) อย่างมีระบบ มีเหตุผลเกี่ยวกับตัวอย่างนั้นๆ แล้วจึงสรุปเป็นกฎเกณฑ์ตั้งเป็นสมมติฐานขึ้น
2. การค้นพบแบบนิรนัย (Deductive Discovery) เป็นกระบวนการสอนที่เริ่มด้วยความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์และข้อสรุป กฎเกณฑ์ หรือสมมติฐานที่ตั้งขึ้นแล้วกระตุ้นให้นักเรียนค้นหาความจริงเหล่านั้น โดยใช้ความรู้ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 183) ได้ให้ความหมายของการเรียนรู้ด้วยการค้นพบ (Discovery Learning) ว่าเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม ผู้เรียนจะประมวลข้อมูลข่าวสารจากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม ซึ่งผู้เรียนแต่ละคนจะมีประสบการณ์และพื้นความรู้ที่แตกต่างกัน การเรียนรู้เกิดจากการที่ผู้เรียนสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบใหม่กับความรู้เดิม แล้วนำมาสร้างเป็นความหมายใหม่ ทำให้เกิดการเรียนรู้โดยการค้นพบ

ซัชแมน (Suchman, 1962: 50) ได้พัฒนารูปแบบการสอนแบบสืบสวนสอบสวน (Inquiry) ซึ่งเป็นรูปแบบการสอนที่มุ่งเน้นการสอนให้นักเรียนมีทักษะ สอบสวนหาความรู้ และอธิบายเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนรู้จักการแสวงหาวิธีอธิบายความเป็นไปต่างๆ อย่างมีหลักเกณฑ์ ได้พัฒนาความสามารถทางสติปัญญา ทักษะต่างๆ ที่จำเป็นในการเสาะแสวงหาความรู้ที่เกิดมาจากความอยากรู้อยากเห็นของนักเรียนเอง โดยเริ่มจากการรวบรวมข้อมูลและสรุปความเป็นหลักการเพื่ออธิบายเหตุการณ์นั้นๆ โดยการสอนรูปแบบนี้ ครูจะมีบทบาทเป็นเพียงผู้จัดการด้านการเรียนการสอน และผู้คอยดูแล (Instruction Manager and Monitor) เท่านั้น ซัชแมน เชื่อว่า

1. มนุษย์ต้องการสืบสวนสอบสวนโดยธรรมชาติอยู่แล้วเมื่อพบกับเหตุการณ์ที่สงสัย
2. มนุษย์สามารถตระหนัก และเรียนรู้ที่จะวิเคราะห์ยุทธวิธีการคิดของตนเองได้
3. ยุทธวิธีการคิดแบบใหม่ๆ สามารถสอนได้โดยตรงเพิ่มเติมจากยุทธวิธีที่มีมาแต่เดิม
4. การสืบสวนสอบสวนโดยใช้วิธีการร่วมมือกัน ช่วยส่งเสริมความคิดที่กว้างขวาง และช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้ความรู้ต่างๆ จากการทดลอง ทดสอบ และพิสูจน์ โดยความรู้ที่ได้มานั้นสามารถสามารถอธิบายได้ในหลายวิธี

ลาสเลย์ แมทซินสกี และโรเลย์ (Lasley, T.J., Matczynski, T.J., Rowley, J.B., 2002: 76) ได้กล่าวถึงโมเดลการสอนที่ช่วยพัฒนาการให้เหตุผล ซึ่งคือการสอนแบบสืบสวนสอบสวน (Inquiry) โดยให้ความหมายว่า การสืบสวนสอบสวนเป็นการสอนเพื่อให้นักเรียนได้ตั้งคำถาม สร้างสรรค์สมมติฐาน และตรวจสอบทฤษฎี โดยการใช้เหตุการณ์ที่ขัดแย้งหรือสถานการณ์ที่ซับซ้อนเป็นฐานในการอภิปรายของนักเรียน โมเดลการสอนแบบสืบสวนสอบสวนจะช่วยให้นักเรียนพัฒนาทักษะการให้เหตุผล การตั้งสมมติฐาน การประเมิน และการแก้ปัญหา ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนรู้ เพราะนักเรียนจะสามารถใช้ความรู้เดิมที่มีอยู่ก่อนในการสำรวจเพื่อให้เหตุผลรองรับสิ่งที่คาดว่าจะเป็น โดยการสอนแบบสืบสวนสอบสวนมีเอกลักษณ์ที่โดดเด่นกว่าการสอนในรูปแบบอื่นใน 2 ประการ คือ 1) เป็นการสร้างความรู้บนความอยากรู้อยากเห็นตามธรรมชาติของนักเรียน 2) ช่วยให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างการตั้งคำถามและการหาคำตอบ เพราะนักเรียนที่มีความสามารถสูงส่วนใหญ่ จะมีความสามารถในการหาคำตอบได้ในระดับดี แต่ขาดการใส่ใจต่อการตั้งคำถาม ดังนั้นในการสอนแบบสืบสวนสอบสวน ครูต้องช่วยให้นักเรียนได้เข้าถึงเนื้อหาโดยผ่านการสำรวจ การค้นพบ และการใช้การคิดวิเคราะห์ (Good and Brophy, 1994: 482) โดยจะต้องคำนึงถึงคำว่า “ ความรู้ ” ใน 2 ประเด็นคือ ความรู้เดิมของนักเรียน และความรู้ใหม่

สำหรับนักเรียน นอกจากนี้เทคนิคการสอนแบบสืบสวนสอบสวน – ค้นพบ (Inquiry – Discovery Techniques) ยังสามารถปรับเพื่อใช้สอนได้กับนักเรียนในทุกช่วงอายุ (Ornstein, A.C., Lasley, T.J., 2000: 27)

ออร์นสไตน์ และลาสเลย์ (Ornstein, A.C., Lasley, T.J., 2000: 28) กล่าวถึงพฤติกรรมของครูที่มีผลต่อพฤติกรรมการสืบสวนสอบสวน – ค้นพบ ดังนี้

1. ยอมรับความคิดเห็นของนักเรียน
2. ต่อยอดความสนใจและความสร้างสรรค์ของนักเรียน
3. คำหนึ่งถึงข้อจำกัดส่วนบุคคลของนักเรียน
4. จัดสิ่งแวดล้อมที่เป็นที่ยอมรับของนักเรียนและช่วยกระตุ้นนักเรียน
5. มีความคาดหวังในตัวนักเรียนสูง
6. มีทัศนคติทางการศึกษาที่กว้างขวาง ก้าวพ้นข้อจำกัดของชั้นเรียน
7. พัฒนาทักษะการสื่อสาร
8. ต้องการให้นักเรียนได้ประยุกต์ความรู้
9. ให้ความสำคัญกับกระบวนการการเรียนรู้มากกว่าผลลัพธ์
10. ส่งเสริมการเรียนรู้เชิงลึก
11. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ปฏิบัติกิจกรรมต่อไปจนจบ
12. ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตนเอง
13. อนุญาตให้นักเรียนมีส่วนในการเลือกและตัดสินใจเกี่ยวกับกิจกรรมในชั้นเรียน
14. ออกแบบประสบการณ์การเรียนรู้ให้เป็นกิจกรรมที่นักเรียนต้องการ สนใจ เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง
15. สนับสนุนให้ได้ทดลองและใช้คำถามที่เสริมเจตคติ
16. ลดความกังวล สร้างบรรยากาศที่ดีในชั้นเรียน
17. สนับสนุนการคิดแหวกแนว และแนวคิดใหม่
18. สนับสนุนการประเมินตนเองของนักเรียนให้เป็นนิสัย
19. จัดหาองค์ประกอบที่สำคัญสำหรับนักเรียนเพื่อเสริมความเข้าใจในจุดมุ่งหมาย กฏ โดยต้องไม่ส่งผลลบต่อพฤติกรรมที่สร้างสรรค์ของนักเรียน
20. ช่วยให้นักเรียนได้ตระหนักถึงความสัมพันธ์ของวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และ สังคมศาสตร์

จากข้อมูลข้างต้น ผู้วิจัยมีแนวคิดในการกำหนดกรอบการจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตวิศุต โดยให้เป็นการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ มีวิธีการสอนแบบรวมทั้งชั้นเรียน โดยครูผู้สอน และการปฏิบัติกิจกรรมที่เน้นการทำงานเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน ซึ่งในการสอนรวมทั้งชั้น ใช้วิธีการสอนแบบใช้ปัญหานำเข้าสู่บทเรียน มีการยกตัวอย่างผ่านสื่ออุปกรณ์หรือโมเดล ประกอบการสอน ส่วนในการปฏิบัติกิจกรรม จะใช้วิธีการสอนแบบค้นพบ และวิธีการสอนแบบสืบสวนสอบสวน โดยให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้จากการทดลองปฏิบัติจริง มีการสังเกต

รวบรวมข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ และตรวจสอบข้อความคาดการณ์ ได้ค้นพบความรู้ใหม่ด้วยตนเอง โดยรูปแบบของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้นนำเข้าสู่การปฏิบัติกิจกรรม ขั้นการปฏิบัติกิจกรรม และขั้นการสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม

3. การประเมินหลักสูตร

3.1 แนวคิดในการประเมินหลักสูตร

กู๊ด (Good. 1963: 209) กล่าวว่า การประเมินหลักสูตร คือการประเมินผลของกิจกรรมการเรียนภายในขอบข่ายของการสอน ที่เน้นเฉพาะจุดประสงค์ของการตัดสินใจในความถูกต้องของจุดมุ่งหมาย ความสัมพันธ์และความต่อเนื่องของเนื้อหา และผลสัมฤทธิ์ของวัตถุประสงค์เฉพาะซึ่งนำไปสู่การตัดสินใจในการวางแผน การจัดโครงการ การต่อเนื่องและการหมุนเวียนของกิจกรรมโครงการต่างๆ ที่จะจัดให้มีขึ้น

ครอนบัค (Cronbach. 1970: 231) ให้ความหมายของการประเมินหลักสูตรว่า คือการรวบรวมข้อมูลและการใช้ข้อมูลเพื่อตัดสินใจในเรื่องหลักสูตรการศึกษา

สตัฟฟีลบีม และคณะ (Stufflebeam et al. 1971: 128) กล่าวว่า การประเมินคือกระบวนการการหาข้อมูล เก็บข้อมูลเพื่อนำมาใช้ในการตัดสินใจทางเลือกที่ดีกว่าเดิม

ทิตนา แชมมณี (2528: 113 – 114) กล่าวว่า โดยทั่วไปการประเมินหลักสูตรใดๆ จะมีจุดมุ่งหมายอยู่ 3 ประการ คือ

1. เพื่อหาคุณค่าของหลักสูตรนั้น โดยดูว่า หลักสูตรที่จัดขึ้นสามารถสนองตามจุดมุ่งหมายหลักตามที่หลักสูตรนั้นต้องการหรือไม่
2. เพื่อตัดสินใจว่า การวางเค้าโครงและรูปแบบของหลักสูตร ตลอดจนการบริหารงานและการสอนตามหลักสูตร เป็นไปในทางที่ถูกต้องแล้วหรือไม่
3. เพื่อวัดผลดูว่า ผลผลิตคือนักเรียนนั้นเป็นอย่างไร

การประเมินหลักสูตรที่ดีควรประเมินเป็นระยะๆ ซึ่งโดยทั่วไปแบ่งออกเป็น 3 ระยะคือ

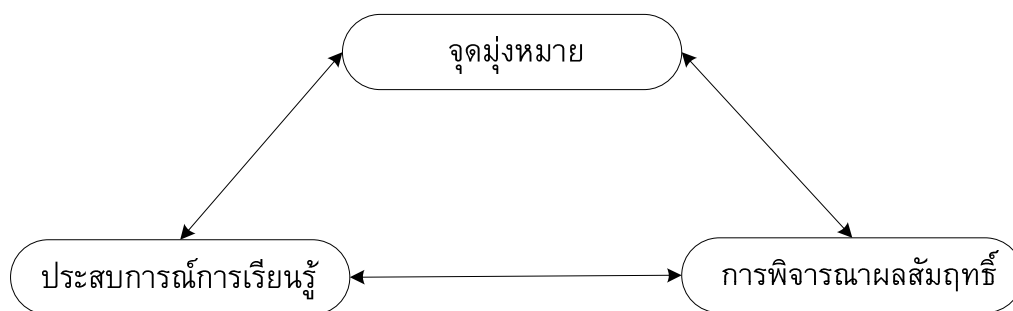
1. การประเมินหลักสูตรก่อนนำหลักสูตรไปใช้ เป็นการประเมินเพื่อหาความเป็นไปได้ของการใช้หลักสูตร ตรวจสอบคุณภาพของหลักสูตรเพื่อปรับปรุงก่อนนำไปใช้จริง การประเมินหลักสูตรในระยะนี้ ต้องอาศัยความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญทางด้านพัฒนาหลักสูตรด้านเนื้อหาวิชา ด้านวิชาชีพครู ด้านการวัดผลเป็นต้น
2. การประเมินหลักสูตรระหว่างการดำเนินการใช้หลักสูตร เป็นการประเมินเพื่อตรวจสอบว่าหลักสูตรที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปใช้จริงได้ดีเพียงใด มีจุดบกพร่องที่ใด เพื่อจะได้แก้ไขปรับปรุงให้เหมาะสม
3. การประเมินหลักสูตรหลังการใช้หลักสูตร เป็นการประเมินองค์ประกอบด้านต่างๆ ของ

หลักสูตรทั้งหมด เพื่อสรุปผลของการใช้หลักสูตรและตัดสินใจว่าหลักสูตรนั้นบรรลุตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้หรือไม่ ควรดำเนินการใช้ต่อไป ควรปรับปรุงแก้ไข หรือควรรยกเลิก

3.2 รูปแบบการประเมินหลักสูตร

3.2.1 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของไทเลอร์ (Tyler's Model of Evaluation)

ไทเลอร์ (Tyler. 1949: 110 - 125) ได้กล่าวว่าการศึกษาคือ “การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม” ดังนั้นการประเมินหลักสูตรในความหมายของไทเลอร์ จึงเป็นการเปรียบเทียบว่าพฤติกรรมที่เปลี่ยนแปลงไปเป็นไปตามจุดประสงค์ที่ได้ตั้งไว้หรือไม่ โดยการศึกษารายละเอียดขององค์ประกอบของการจัดการศึกษา 3 ส่วนคือ จุดมุ่งหมายของการศึกษา การจัดประสบการณ์การเรียนรู้ และการพิจารณาผลสัมฤทธิ์ของนักเรียน ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการจัดการศึกษาทั้ง 3 ส่วน แสดงได้ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบการจัดการศึกษาตามแนวคิดของไทเลอร์ (Tyler. 1949: 110 - 125)

ตามแนวคิดดังกล่าวนี้ พื้นฐานของการจัดหลักสูตรก็คือ ผู้จัดทำหลักสูตรจะต้องสามารถวางจุดมุ่งหมายที่ชัดเจนว่าต้องการให้นักเรียนมีพฤติกรรมเป็นอย่างไรเมื่อเรียนจบหลักสูตรแล้ว และพยายามจัดประสบการณ์การสอนเพื่อช่วยให้นักเรียนเปลี่ยนพฤติกรรมไปตามที่ต้องการ ดังนั้นรูปแบบการประเมินหลักสูตรของไทเลอร์จึงมีจุดเน้นอยู่ที่การดูผลผลิตของหลักสูตรว่าตรงตามจุดมุ่งหมายหรือไม่ ยึดความสำเร็จของจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้เป็นหลัก(Goal Attainment Model) ไทเลอร์ถือว่าการประเมินหลักสูตรเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนการสอน และเป็นส่วนหนึ่งของการพัฒนาหลักสูตร ซึ่งได้เสนอขั้นตอนการเรียนการสอนและการประเมินผลดังนี้

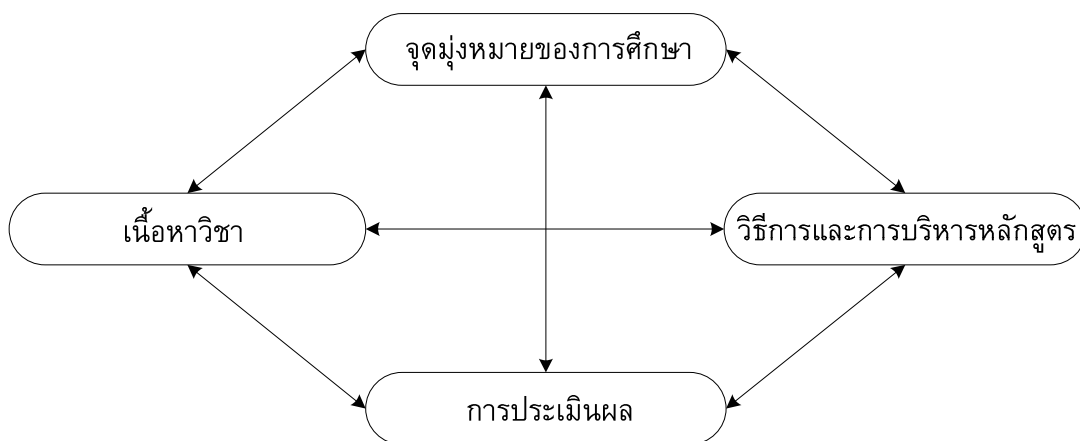
1. กำหนดจุดมุ่งหมายอย่างกว้าง โดยการวิเคราะห์ปัจจัยองค์ประกอบต่างๆ ในการการกำหนดจุดมุ่งหมาย (Goal Sources) คือ นักเรียน สังคม เนื้อหาสาระ ส่วนปัจจัยที่กำหนดขอบเขตของจุดมุ่งหมาย (Goal Screens) คือ จิตวิทยาการศึกษา และปรัชญาการศึกษา

2. กำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมอย่างชัดเจน เฉพาะเจาะจง ซึ่งจะเป็นพฤติกรรมที่ต้องการวัดในภายหลังจัดประสบการณ์การเรียนรู้
3. กำหนดเนื้อหาหรือประสบการณ์การเรียนรู้เพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายตามที่ตั้งไว้
4. เลือกวิธีการเรียนการสอนที่เหมาะสมที่จะทำให้เนื้อหาหรือประสบการณ์ที่วางไว้ประสบความสำเร็จ
5. ประเมินผลโดยการตัดสินด้วยการวัดผลทางการศึกษาหรือการทดสอบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน
6. ถ้าไม่บรรลุตามจุดมุ่งหมายที่วางไว้ จะต้องมีการตัดสินที่จะยกเลิกหรือปรับปรุงแก้ไขหลักสูตรนั้น แต่ถ้าบรรลุตามจุดมุ่งหมายก็อาจใช้เป็นข้อมูลย้อนกลับ (Feedback) เพื่อปรับปรุงการกำหนดจุดมุ่งหมายหรือใช้เป็นข้อมูลในการพัฒนาคุณภาพของหลักสูตร

การประเมินตามรูปแบบของไทเลอร์จึงถือว่าเป็นกระบวนการเวียนซ้ำ นอกจากนั้นการเปลี่ยนแปลงข้อแก้ไขหรือปรับปรุงจุดมุ่งหมายของหลักสูตรที่ประเมินนั้นก็ส่งผลให้เกิดการปรับปรุงวิธีการในการประเมินด้วย (Worthen and Sanders. 1973: 156) การประเมินตามรูปแบบนี้จึงมีลักษณะเป็นการประเมินผลสรุป (Summative Evaluation) มากกว่าการประเมินผลความก้าวหน้า (Formative Evaluation)

3.2.2 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของทาบา (Taba's Model of Evaluation)

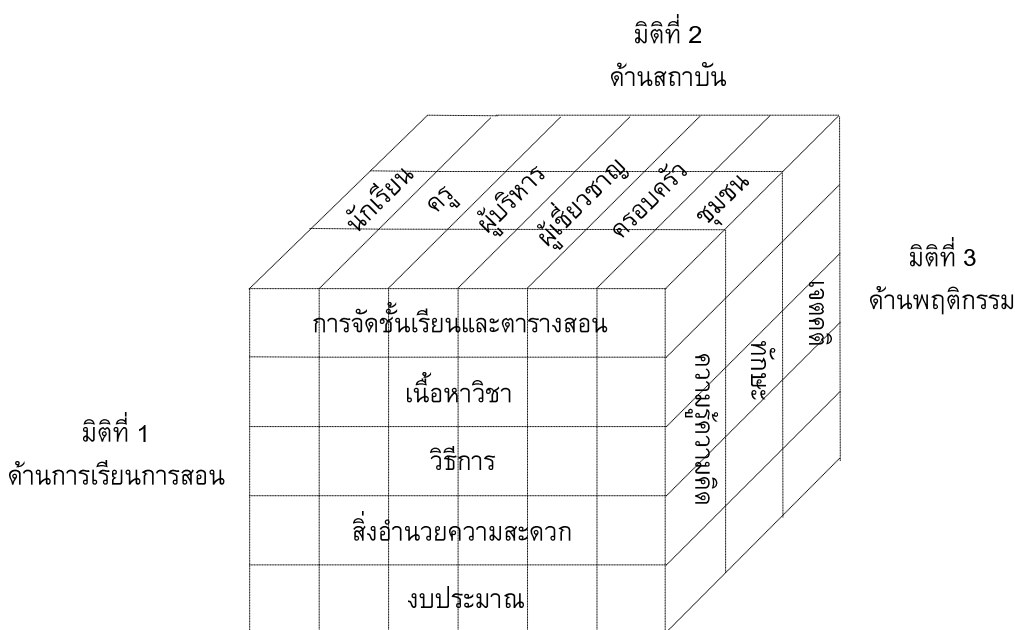
ทาบา (Taba. 1962: 413 - 444) ได้เสนอรูปแบบการพัฒนาหลักสูตรชื่อว่า "A Conceptual Framework for Curriculum Design" ซึ่งอธิบายการประเมินผลว่าเป็นการพิจารณาขั้นตอนต่างๆ ของการพัฒนาหลักสูตรว่าสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายที่ตั้งไว้หรือไม่ เช่นเดียวกับรูปแบบของไทเลอร์ แต่มีส่วนที่แตกต่างคือ การแยกพิจารณาองค์ประกอบต่างๆ ของการจัดการศึกษา 4 ส่วนคือ จุดมุ่งหมายของการศึกษา วิธีการและการบริหารหลักสูตร เนื้อหาวิชา และการประเมินผล ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบจัดการศึกษาทั้ง 4 ส่วน แสดงได้ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของทาบา (Taba. 1962: 413 - 444)

3.2.3 รูปแบบการประเมินหลักสูตรของแฮมมอนด์

โรเบิร์ต แฮมมอนด์ (Robert Hammond) (วิชัย วงษ์ใหญ่. 2538: 21 - 28) ได้เสนอรูปแบบการประเมินหลักสูตรที่ยึดจุดมุ่งหมายเป็นหลัก ซึ่งคล้ายกับรูปแบบของไทเลอร์ โดยจุดเน้นของรูปแบบการประเมินนี้คือ แนวคิดที่ว่าความสำเร็จของหลักสูตรจะขึ้นอยู่กับปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ของตัวแปรในมิติต่างๆ ที่อยู่ในสภาวะแวดล้อมทางการศึกษา ซึ่งประกอบด้วย 3 มิติ ได้แก่ มิติด้านการสอน (Instructional Dimension) มิติด้านสถาบัน (Institutional Dimension) และ มิติด้านพฤติกรรม (Behavioral Dimension) ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 ปฏิสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในมิติต่างๆ (วิชัย วงษ์ใหญ่. 2538: 21 - 28)

1. มิติด้านการเรียนการสอน ประกอบด้วยตัวแปรสำคัญ 5 ตัวแปรคือ

1.1 การจัดชั้นเรียนและตารางสอน เป็นเรื่องของการจัดครูและนักเรียนให้พบกัน และดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งต้องคำนึงถึงเวลาและสถานที่ (Time and Space)

1.2 เนื้อหาวิชา คือ เนื้อหาวิชาที่จะนำมาจัดการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย โครงสร้างความรู้ ความคิดรวบยอด และวิธีการแสวงหาความรู้ตามลักษณะเฉพาะของแต่ละวิชา การจัดลำดับเนื้อหาให้เหมาะสมกับระดับวุฒิภาวะของผู้เรียนและชั้นเรียนแต่ละระดับ

1.3 วิธีการ หมายถึง หลักการเรียนรู้ การออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนทั้ง ปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูกับนักเรียน และระหว่างนักเรียนด้วยกันเอง หลักการเรียนรู้ควรคำนึงถึง องค์ประกอบ 4 ประการ คือ การให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม (Active Participation) การให้ข้อมูลย้อนกลับทันที (Immediated Feedback) การให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์แห่งความสำเร็จ (Successful Experiences) การแบ่งและการจัดลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ที่ละน้อย (Gradual Approximation) การออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องคำนึงถึงธรรมชาติของผู้เรียน ลักษณะของวิชา รวมทั้งวิธีสอน ทั้งสามส่วนนี้จะมีอิทธิพลและส่งผลซึ่งกันและกัน

1.4 สิ่งอำนวยความสะดวกต่างๆ คือ สถานที่ อุปกรณ์ เครื่องมือและอุปกรณ์พิเศษ ห้องปฏิบัติการ วัสดุสิ้นเปลืองต่างๆ รวมถึงสิ่งที่มีผลต่อการใช้หลักสูตรและการสอนด้านอื่นๆ

1.5 งบประมาณ หมายถึง เงินที่ใช้ในการทำให้งานใช้หลักสูตรประสบผลสำเร็จ เช่น การจัดการเรียนการสอน การซ่อมแซม เงินเดือนครู ค่าจ้างบุคลากร เป็นต้น

2. มิติด้านสถาบัน ประกอบด้วยตัวแปรสำคัญ 6 ตัวแปรคือ

2.1 นักเรียน มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ อายุ เพศ ระดับชั้นที่กำลังศึกษา ความสนใจ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สุขภาพกาย สุขภาพจิต และภูมิหลังทางครอบครัว

2.2 ครู มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ อายุ เพศ วุฒิ การศึกษา ประสบการณ์การสอน เงินเดือน กิจกรรมยามว่าง การฝึกอบรมเพิ่มเติมเกี่ยวกับการใช้หลักสูตรใน 1 - 3 ปี และความพึงพอใจในการปฏิบัติการ

2.3 ผู้บริหาร มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ อายุ เพศ วุฒิ การศึกษา ประสบการณ์การบริหาร เงินเดือน ความพึงพอใจในการปฏิบัติงานด้านวิชาการ ลักษณะทางบุคลิกภาพ การฝึกอบรมเพิ่มเติมในช่วง 1 - 3 ปี

2.4 ผู้เชี่ยวชาญ มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ อายุ เพศ ความเชี่ยวชาญเฉพาะด้าน ลักษณะของการให้คำปรึกษา การให้ความช่วยเหลือ ลักษณะทางบุคลิกภาพ และความพึงพอใจในการปฏิบัติงาน

2.5 ครอบครัว มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ สถานภาพทางครอบครัว สมรสแล้ว อยู่ร่วมกัน หย่าร้าง แยกกันอยู่ ขนาดของครัวครัว รายได้ สถานที่อยู่ การศึกษา การเป็นสมาชิกของสมาคม การโยกย้าย ระยะเวลาที่อยู่ในชุมชน การโยกย้าย จำนวนลูก และญาติที่อยู่ร่วมโรงเรียน

2.6 ชุมชน มีองค์ประกอบที่ต้องคำนึงถึงในการประเมินหลักสูตร คือ สภาพชุมชน จำนวนประชากร ความแตกต่างของอายุสมาชิกในชุมชน ความเชื่อ ค่านิยม ประเพณี ศาสนา เศรษฐกิจ สภาพการให้บริการทางสุขภาพอนามัย การรับนวัตกรรมเทคโนโลยี

3. มิติด้านพฤติกรรม ประกอบด้วยพฤติกรรม 3 ด้าน คือ

3.1 พฤติกรรมด้านความรู้ (Cognitive Domain) คือ พฤติกรรมเกี่ยวกับความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์และการประเมินค่า การตรวจสอบผลสัมฤทธิ์ของผู้เรียนในด้านองค์ประกอบย่อยของพฤติกรรม ซึ่งอาจใช้แบบทดสอบมาตรฐานเป็นเครื่องมือในการประเมิน

3.2 พฤติกรรมด้านทักษะ (Psychomotor Domain) คือ การกระทำทั้งหลายที่ใช้การประสานงานของประสาทกล้ามเนื้อ หรือพฤติกรรมที่เกี่ยวข้องกับการใช้มือปฏิบัติงานต่างๆ

3.3 พฤติกรรมด้านเจตคติ (Affective Domain) คือ พฤติกรรมที่เกี่ยวกับความสนใจ ความชอบ ไม่ชอบ ทัศนคติ ความซาบซึ้ง และค่านิยม

แนวคิดในการประเมินหลักสูตรของแอมมอนต์ใช้แนวคิดของไทเลอร์ โดยการกำหนด จุดมุ่งหมายและใช้ข้อมูลที่ได้จากการประเมินผลในการปรับปรุงจุดมุ่งหมายของหลักสูตรนั้น นอกจากนี้ยังให้ความสำคัญกับการวิเคราะห์ตัวแปรของมิติด้านการสอน และมิติด้านสถาบันซึ่งมีผลต่อความสำเร็จของหลักสูตร

จากประเด็นและรูปแบบการประเมินหลักสูตรต่างๆ ผู้วิจัยมีแนวคิดในการประเมินหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตที่ได้พัฒนาขึ้น โดยแบ่งออกเป็นสองขั้นตอน คือ ประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ ด้วยแบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ซึ่งมีมาตรวัดตามจุดประสงค์ และการประเมินโดยการนำหลักสูตรไปทดลองใช้จริงกับกลุ่มตัวอย่าง โดยในขั้นตอนนี้จะมีการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และวัดพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากแบบสำรวจรายการ ซึ่งเป็นการประเมินระหว่างการใช้หลักสูตร วัดความรอบรู้ในเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต ด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ได้พัฒนาขึ้น และวัดเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการประเมินหลังการใช้หลักสูตร

4. แบบทดสอบอิงเกณฑ์

4.1 ความหมายและประเภทของแบบทดสอบอิงเกณฑ์

เกลเซอร์และนิทโก (Glaser and Klaus. 1962: 519 - 521) กล่าวว่า แบบทดสอบอิงเกณฑ์หมายถึง แบบสอบที่สร้างขึ้นอย่างพิถีพิถันเพื่อการวัดผลซึ่งสามารถที่จะแปลความหมายได้โดยตรงตามมาตรฐานของความสามารถที่กำหนดไว้

พอบแฮมและฮูเซค (Popham and Husek. 1969: 1 - 9) ให้ทัศนะว่า แบบทดสอบอิงเกณฑ์ คือ แบบทดสอบเพื่อใช้วัดสภาพที่แน่นอนของแต่ละบุคคล โดยอาศัยเกณฑ์บางอย่าง เช่น มาตรฐานของความสามารถหรือพฤติกรรมที่ได้นิยามไว้อย่างดีแล้ว

บุญเชิด ภิญโญนนตพงษ์ (2542: 49) ให้ความหมายของการวัดแบบอิงเกณฑ์ (Criterion Reference Measurement) ไว้ว่า คือ การวัดผลทางการศึกษาที่มุ่งค้นหาว่านักเรียนมีหรือไม่มีความสามารถในเรื่องใด โดยอาศัยเครื่องมือวัดที่สร้างขึ้นมาโดยเฉพาะ พร้อมทั้งกำหนดคะแนนเกณฑ์ หรือคะแนนจุดตัดที่บ่งชี้ว่ามาตรฐานการปฏิบัติในเรื่องนั้น และแปลความหมายโดยนำเอาคะแนนผลการปฏิบัติงานนั้นไปเทียบกับคะแนนจุดตัดที่กำหนดไว้

แบบทดสอบอิงเกณฑ์ (Criterion Referenced Test) เป็นแบบทดสอบที่บรรจุเนื้อหาสาระที่เฉพาะเจาะจงสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนการสอน และมีคะแนนจุดตัดหรือเกณฑ์สำหรับใช้ตัดสินว่าผู้ทดสอบมีความรอบรู้ตามเกณฑ์ที่กำหนดหรือไม่ การสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์ สามารถจำแนกตามแนวคิดได้ 2 ชนิด (บุญเชิด ภิญโญนนตพงษ์. 2542: 50 -51) ดังนี้

1. แบบทดสอบอิงมวลพฤติกรรม (Objective Reference Test) การสร้างข้อสอบอิงมวลพฤติกรรม จะเขียนจากกฎเกณฑ์ที่กำหนดขอบข่ายของมวลเนื้อหาโดยอาศัยวิธีการต่าง ๆ เช่น ใช้จุดประสงค์ขยายความ (Amplified Objectives) ใช้การออกแบบลักษณะเฉพาะของแบบทดสอบ (Test Specification) เป็นต้น แบบทดสอบอิงมวลพฤติกรรม เป็นแบบทดสอบที่ตรวจสอบความรู้ ความสามารถของนักเรียนโดยยึดมวลพฤติกรรมความรู้ ความสามารถที่นิยามไว้อย่างชัดเจน
2. แบบทดสอบอิงมวลเนื้อหา (Domain Reference Test) การสร้างข้อสอบอิงเกณฑ์ชนิดนี้ จะเขียนข้อสอบให้สอดคล้องกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและจุดประสงค์การสอนแบบ ทดสอบอิงจุดประสงค์ เป็นแบบทดสอบที่ใช้จำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่มรอบรู้กับกลุ่มไม่รอบรู้ในแต่ละจุดประสงค์หลัก

4.2 การวิเคราะห์แบบทดสอบอิงเกณฑ์

การวิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบอิงเกณฑ์สามารถจำแนกเป็น 2 วิธี (บุญเชิด ภิญโญนนตพงษ์. 2527: 68 ; อ้างอิงจาก Hambleton et al. 1978: 34 - 37) ดังนี้

1. อาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชา ซึ่งเป็นวิธีพิจารณาว่าข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หรือลักษณะเฉพาะของมวลความรู้ที่ต้องการวัดมีความสอดคล้องกันหรือไม่ การพิจารณาเช่นนี้ต้องมั่นใจก่อนว่าจุดประสงค์ หรือลักษณะเฉพาะของมวลความรู้เขียนไว้อย่างชัดเจน โดยใช้การตรวจสอบกับตารางเฉพาะที่ได้มาจากการวิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์ การวิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาโดยอาศัยดุลพินิจของผู้เชี่ยวชาญเนื้อหาวิชาตัดสินนี้ โรวิเนลลีและแฮมเบิลตัน ได้เสนอไว้ 3 วิธี คือ ใช้ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ ใช้ดัชนีความเหมาะสมระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ และใช้ดัชนีการจับคู่ระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์
2. อาศัยเทคนิคการตรวจสอบจากการทดลองหรือเทคนิคเชิงประจักษ์ (Empirical Techniques) เป็นวิธีพิจารณาว่าข้อสอบที่สร้างขึ้นเป็นตัวแทนของจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมหรือมวลความรู้หรือไม่ โดยใช้การตรวจสอบกับนักเรียนแล้วนำผลที่ได้มาตัดสิน วิธีการวิเคราะห์ความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหาโดยอาศัยเทคนิคการตรวจสอบจากการทดลอง ได้แก่ วิธีของครอนบาค (Cronbach) และวิธีของเบรนนันและสโกลูว์ (Brennan and Stolurow)

จากข้อมูลต่างๆ เกี่ยวกับแบบทดสอบอิงเกณฑ์ที่ได้ศึกษามา ผู้วิจัยมีแนวคิดในการสร้างและพัฒนาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เพื่อใช้วัดความรอบรู้ในเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต ดังนี้ ในขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จะสร้างตามแนวคิดของแบบทดสอบอิงเกณฑ์แบบอิงมวลเนื้อหา โดยเป็นแบบอัตโนมัติแสดงวิธีคิด เพื่อวัดความรอบรู้ในเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต ในขั้นตอนการพัฒนาแบบทดสอบ จะใช้การประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญด้วยแบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ผลที่ได้จากการประเมินจะนำมาวิเคราะห์โดยใช้ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์ ซึ่งคำนวณจากค่า IOC, \bar{X} และ S โดยพิจารณาจากเกณฑ์ (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. 2528: 63-64 ; อ้างอิงจาก Rovinelle; & Hambleton. 1977) ดังนี้ ถ้าค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของผู้เชี่ยวชาญตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปจึงจะถือว่า ข้อสอบและจุดประสงค์มีความสอดคล้องกัน และจะเลือกข้อสอบข้อนั้นไว้ในแบบทดสอบอิงเกณฑ์ ถ้าดัชนีความสอดคล้องต่ำกว่า 0.5 จะถือว่าข้อสอบไม่ได้วัดหรือไม่เป็นตัวแทนของจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมข้อนั้น และจะนำข้อสอบข้อนั้นไปปรับปรุงแก้ไขใหม่หรืออาจตัดทิ้ง

5. การให้เหตุผล

5.1 ความสำคัญของการให้เหตุผล

การให้เหตุผลเป็นเป้าหมายที่สำคัญประการหนึ่งในการเรียนคณิตศาสตร์ ดังหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 (สสวท. 2545: 6-7) ที่ได้ระบุสาระในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไว้ 6 สาระ ประกอบด้วย

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

โดยในสาระที่ 6 ได้กำหนดมาตรฐานไว้ 5 ด้าน คือ

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

มาตรฐาน ค 6.5 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

“คณิตศาสตร์คือการให้เหตุผล” (NCTM. 1989: 29) และการให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ (Baroody. 1993: 2-25) ดังนั้น การให้เหตุผลจึงเป็นกระบวนการที่สำคัญที่ถูกเน้นในการจัดการเรียนรู้ ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นองค์ประกอบที่สำคัญที่ช่วยให้เข้าใจคณิตศาสตร์ (NCTM. 2000: 56, Russell. 1999: 1) ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ เชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผลที่นักเรียนสามารถทำความเข้าใจได้ สามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้ด้วยตนเอง (สสวท.2547: 3) ซึ่งการแสดงเหตุผลที่ดีนั้น มีคุณค่ามากกว่าคำตอบที่ถูกต้อง (NCTM. 1989: 6) นอกจากนี้ทักษะการให้เหตุผลในคณิตศาสตร์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ (Baroody. 1993: 2-52 – 2-60) เพราะการเรียนรู้ในสิ่งต่างๆ การแก้ปัญหาในชีวิตจริง จะต้องใช้การพิจารณาและตัดสินใจด้วยตนเอง ด้วยเหตุและผล(Lappan and Schram. 1989: 18)

การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นสิ่งที่สำคัญและจำเป็น เพราะการฝึกให้นักเรียนใช้เหตุผลจะช่วยให้ (สสวท. 2547: 4)

1. นักเรียนเข้าใจแนวคิดคณิตศาสตร์นั้นๆ ได้ดีและสามารถปรับแนวคิดให้มีความแจ่มชัดและลึกซึ้งขึ้น
 2. นักเรียนสามารถตรวจสอบแนวคิดพร้อมทั้งให้เหตุผลได้
 3. นักเรียนได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นและเรียนรู้จากกันและกัน
 4. นักเรียนสามารถอธิบายและสรุปผลที่ได้เหมาะสม
 5. นักเรียนยอมรับแนวคิดใหม่ที่มีเหตุผลกว่าแนวคิดเดิม
 6. เป็นพื้นฐานของการเรียนคณิตศาสตร์ระดับสูงต่อไป
- ดังนั้นในการพัฒนานักเรียนให้เป็นผู้ที่มีความสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาได้นั้น

จำเป็นต้องพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล สามารถคิดอย่างมีเหตุผล และนำเหตุผลนั้นไปใช้ในการตัดสินใจได้

5.2 ความหมายของการให้เหตุผล

เทอร์สตัน (Thurstone. 1938 : Primary Mental Ability) กล่าวว่า การคิดอย่างมีเหตุผลเป็นหนึ่งในเจ็ดสมรรถภาพที่สำคัญ ที่รวมเป็นความสามารถทางการคิดพื้นฐาน (Primary Mental Ability) อันได้แก่ สมรรถภาพทางด้านตัวเลข ภาษา ความจำ ความคล่องแคล่วในการจำ การคิดอย่างมีเหตุผล มิติสัมพันธ์ และการรับรู้

บรูเนอร์และคนอื่นๆ (Bruner and Others. 1966: 20) กล่าวว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ใช้ในการสร้างความคิดรวบยอด (Concept Formation) ที่เกี่ยวข้องกับข้อความจริงที่ได้รับ และเป็นกระบวนการที่ใช้ในการแปลความหมายของข้อมูล รวมถึงการสรุปอ้างอิงด้วยการจำแนกรายละเอียด การเชื่อมโยง ความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ได้รับ ตลอดจนเป็นกระบวนการเกี่ยวกับการนำกฎเกณฑ์ไปประยุกต์ใช้ได้อย่างมีเหตุผล

กิลฟอร์ด (Guilford. 1967: 11) กล่าวว่า การคิดเป็นการค้นหาหลักการ (Abstraction) โดยจำแนกแยกแยะสมบัติของสิ่งต่างๆ หรือข้อความจริงที่ได้รับ แล้วทำการวิเคราะห์เพื่อหาข้อสรุปอันเป็นหลักการของข้อความจริงนั้นๆ รวมทั้งการนำหลักการดังกล่าวไปใช้ในสถานการณ์ที่แตกต่างไปจากเดิม (Generalization)

ฮิลการ์ด (Hilgard. 1967: 336) ได้ให้ทัศนะว่าการคิดเป็นพฤติกรรมที่เกิดขึ้นในสมอง ซึ่งเป็นกระบวนการการใช้สัญลักษณ์ซึ่งแทนสิ่งของหรือสถานการณ์ต่างๆ มาสร้างเป็นความคิดรวบยอด

เปียเจต์ (Piaget. 1969: 58) ให้ทัศนะเกี่ยวกับการคิดไว้ว่า การคิดหมายถึงการกระทำสิ่งต่างๆ ด้วยปัญญา การคิดของบุคคลเป็นกระบวนการในสองลักษณะ คือ เป็นกระบวนการปรับโครงสร้าง (Assimilation) โดยการจัดสิ่งเร้าหรือข้อความจริงที่ได้รับให้เข้ากับประสบการณ์เดิมที่มีอยู่กับกระบวนการปรับเปลี่ยนโครงสร้าง (Accommodation) โดยการปรับประสบการณ์เดิมให้เข้ากับข้อความจริงที่รับรู้ใหม่ บุคคลจะใช้การคิดทั้งสองลักษณะนี้ร่วมกันหรือสลับกัน เพื่อปรับความคิด

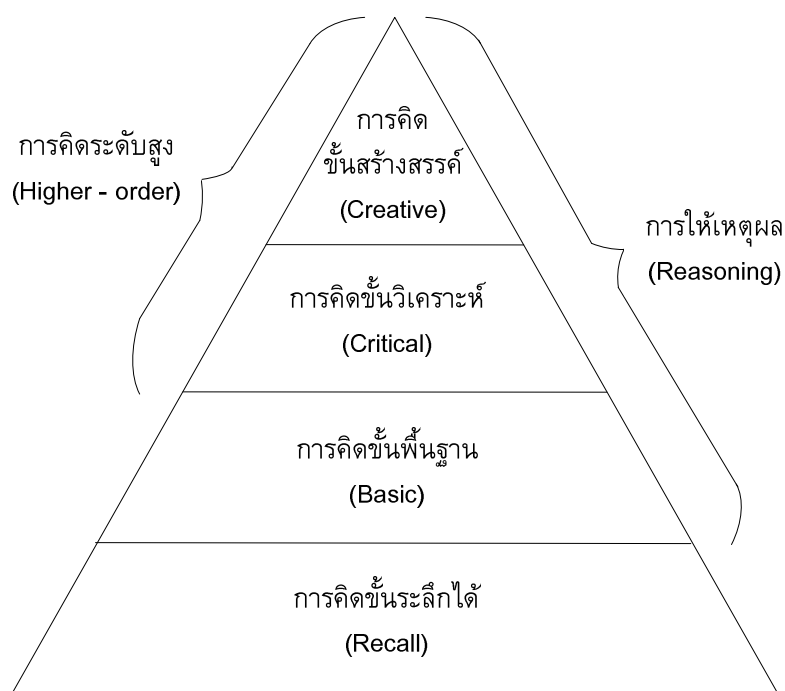
ของตนให้เข้าใจสิ่งเร้ามากที่สุด ผลของการปรับเปลี่ยนการคิดดังกล่าวจะช่วยพัฒนาวิธีการคิดของบุคคลจากระดับหนึ่งไปสู่วิธีการคิดอีกระดับหนึ่งที่สูงกว่า

กรีนวูด (Greenwood. 1993: 144) กล่าวว่า การคิดทางคณิตศาสตร์หมายถึงความสามารถในการเข้าใจแบบรูป ทาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และการสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงคำตอบหรือผลลัพธ์ ซึ่งถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

ครุณิกและรูดนิค (Krulik and Rudnick. 1993: 3) ได้กล่าวว่า การคิดหมายถึงความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างข้อคาดเดา หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล และอธิบายข้อสรุป ยืนยันข้อสรุปนั้น

โอดาฟเฟอร์และธอนควิสท์ (O' Daffer and Thornquist. 1993: 43) ได้ให้ทัศนะว่าการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) และให้ความหมายของการคิดทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิด และความสัมพันธ์ของแนวคิด ท้ายสุดคือแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

จากทัศนะและแนวคิดของนักจิตวิทยาและนักการศึกษาดังที่กล่าวมา จะเห็นได้ว่าการคิดและการให้เหตุผลมีส่วนที่เกี่ยวข้องกัน ครุณิกและรูดนิค ได้อธิบายถึงความเกี่ยวข้องนี้ โดยเขาได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ระดับคือ ชั้นระลึกได้ (recall) ชั้นพื้นฐาน (Basic) ชั้นวิเคราะห์ (Critical) และชั้นสร้างสรรค์ (Creative) โดยได้จัดให้การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่เหนือจากระดับระลึกได้ ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 ลำดับของการคิด(Krulik and Rudnick. 1993 : 3)

ครูลิขและรุตนิค อธิบายว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละขั้นตอนที่แสดงในแผนภาพไม่ได้แยกออกจากกันอย่างสิ้นเชิง โดยแต่ละขั้นจะมีส่วนที่เหลื่อมล้ำทับซ้อนกันบ้าง จากแผนภาพดังกล่าว จะเห็นว่าการให้เหตุผล จะอยู่ในการคิดขั้นพื้นฐาน ขั้นวิเคราะห์ และขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิเคราะห์ และการคิดขั้นสร้างสรรค์นั้น ครูลิขและรุตนิคเรียกว่าเป็นการคิดระดับสูง(Higher – order Thinking)

โอดาฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990: 378) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สอดคล้องกับ ครูลิขและรุตนิค โดยมองว่าการให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างหลักการ การสรุปแนวคิดที่สมเหตุสมผลและการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดนั้น

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งอเมริกา (NCTM. 2000: 57) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลว่าเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่สามารถพัฒนาได้ โดยได้กำหนดมาตรฐานการให้เหตุผลและการพิสูจน์ตั้งแต่ระดับก่อนอนุบาลจนถึงเกรด 12 ดังนี้

1. ตระหนักว่าการให้เหตุผลและการพิสูจน์เป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์
2. สร้างและสำรวจข้อคาดเดาเชิงคณิตศาสตร์
3. พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์
4. เลือกใช้เหตุผลและการพิสูจน์แบบต่างๆ อย่างหลากหลาย

จากความหมายของการคิด ความสัมพันธ์ระหว่างการคิดและการให้เหตุผล รวมถึงจุดเน้นของการให้เหตุผลในระดับต่างๆ สามารถสรุปได้เป็นความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลว่าหมายถึง ความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุป และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

5.3 ประเภทของการให้เหตุผล

โอดาฟเฟอร์ (O' Daffer. 1990: 378) กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีอยู่ 2 ประเภทคือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสังเกตขั้นพื้นฐานของกรณีเฉพาะหลายๆ ตัวอย่าง เพื่อค้นหาแบบรูป หรือสร้างข้อคาดเดา แล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ต่างๆ ไป
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่เป็นตรรกะ โดยใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานคือ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก และจะได้ผลสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎเกณฑ์ที่เป็นจริงเสมอ

บาร์ดูดี (Baroody. 1993: 2-59) แบ่งการให้เหตุผลเป็น 3 ประเภท คือการให้เหตุผลแบบอุปนัย การให้เหตุผลแบบนิรนัย และการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึก (Intuitive Reasoning) ซึ่งเป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) ลางสังหรณ์ ไม่มีข้อมูลที่จำเป็นประกอบการตัดสินใจ อาจเป็นการตัดสินใจจากสิ่งที่เห็นได้ชัด หรือจากความรู้สึกภายใน โดยบาร์ดูดีได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของการให้เหตุผลทั้ง 3 ประเภทว่า ในกระบวนการสืบค้นทางคณิตศาสตร์มักเริ่มด้วยการสรุปจากการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึก หรือแบบอุปนัย ที่เรียกว่าการสร้างข้อคาดเดา (Conjecture) แล้วตรวจสอบพิสูจน์ข้อคาดเดาซึ่งคือการให้เหตุผลแบบนิรนัยนั่นเอง

เมื่อพิจารณาสาระคณิตศาสตร์ หรือเนื้อหาเรื่องที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิต จะพบว่ายังมีการให้เหตุผลอีกประเภทหนึ่ง คือการให้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial Reasoning) โดยในคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ (สสวท. 2545: 280) ได้ให้นิยามว่า เป็นเหตุผลที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิ ในที่นี้เป็นการใช้ความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ของรูปเรขาคณิต และความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตมาให้เหตุผล หรืออธิบายปรากฏการณ์ หรือแก้ปัญหาทางเรขาคณิต

นอกจากนี้ สติกกิน (สสวท. 2547: 6- 7 ; อ้างอิงจาก Stiggins, Richard. Student – Centered Classroom Assessment) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลหลักๆ 3 แบบคือ การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ การให้เหตุผลแบบประเมิน โดยอธิบายไว้ดังนี้

การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (Analytical Reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ ซึ่งประกอบกันเป็นสิ่งนั้นๆ เป็นการศึกษาลึกลงในส่วนย่อยๆ เมื่อต้องการศึกษาสิ่งนั้นอย่างลึกซึ้งก็ใช้การวิเคราะห์เพื่อศึกษารายละเอียด หรือในกรณีที่ต้องการ

แก้ปัญหา นักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา แล้วนำความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหานั้นๆ

การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (Comparative Reasoning) เป็นกระบวนการศึกษาว่า สิ่งนั้นๆ มีอะไรที่เหมือนกัน มีอะไรที่ต่างกัน ในบางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่ต่างกัน บางโอกาสเราต้องศึกษาส่วนที่เหมือนกัน การใช้การให้เหตุผลวิธีนี้จะต้องมีความรู้ความเข้าใจสิ่งที่ต้องการเปรียบเทียบอย่างลึกซึ้ง มีข้อตกลงอย่างชัดเจนว่า อะไรที่ถือว่าเหมือนกัน อะไรที่ถือว่าต่างกัน ก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบ

การให้เหตุผลในการประเมิน (Evaluative Reasoning) เป็นการใช้เหตุผลประเมินเมื่อเราตัดสินคุณค่า หรือความถูกต้องโดยใช้เหตุผล อาศัยความสมเหตุสมผลเป็นเครื่องตัดสิน

นอกจากนี้สติกนียังกล่าวถึงการให้เหตุผลในลักษณะอื่นๆ อีกได้แก่

การสังเคราะห์ (Synthesizing) เป็นการนำข้อมูลต่างๆ มาหลอมรวมเป็นข้อสรุป หรือเป็นการนำข้อมูลจากหลายๆ แหล่งมาทำความเข้าใจและหาข้อสรุป

การจำแนก (Classifying) เป็นการจัดแบ่งประเภท เช่น การจำแนกประเภทของพืช ประเภทของสัตว์ ซึ่งการจำแนกในลักษณะนี้ ผู้จำแนกต้องรู้จักแต่ละประเภทที่ต้องจำแนกเป็นอย่างดี และอาศัยการให้เหตุผลในการจำแนก

การอนุมาน (Inferential) เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

จากการศึกษาประเภทของการให้เหตุผลตามแนวคิดต่างๆ ที่กล่าวมา ทำให้ได้แนวคิดว่าการให้เหตุผลสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ จะเน้นที่การให้เหตุผลแบบอุปนัย การให้เหตุผลแบบนิรนัย และการให้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ โดยมุ่งให้นักเรียนได้รวบรวม หาความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ ข้อสรุป และตรวจสอบยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

5.4 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล

กิลฟอร์ดและฮอฟเนอร์ (Guilford and Hoepfner. 1971: 28-32) ได้ให้ทัศนะว่า การพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้น ต้องเริ่มจากการส่งเสริมบุคคลให้ได้คิดอย่างมีเหตุผล ความสามารถในการให้เหตุผลนี้เป็นสิ่งที่ฝึกได้ และเป็นสิ่งจำเป็นที่โรงเรียนต้องจัดทำ โดยสอนควบคู่กับเนื้อหาปกติในสถานการณ์ต่างๆ ที่เหมาะสม

แบรนต์ (สมเดช บุญประจักษ์. 2540: 39; อ้างอิงจาก Brandt. 1984: 3) ได้กล่าวถึงแนวการสอนที่ทำให้เกิดทักษะการคิดที่เป็นพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล โดยแบ่งเป็น 3 แนวทางคือ

แนวทางการสอนเพื่อให้อคิด (Teaching for Thinking)

แนวทางการสอนการคิด (Teaching of Thinking)

แนวทางการสอนที่เกี่ยวกับการคิด (Teaching about Thinking) โดยมีรายละเอียดของแต่ละแนวทางดังนี้

การสอนเพื่อให้เกิดคิด เป็นการสอนที่เน้นในเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของนักเรียน

การสอนการคิด เป็นการสอนที่เน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิด โดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางในการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทางตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวทางการสอน

การสอนเกี่ยวกับการคิด เป็นการสอนที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอน โดยมุ่งให้นักเรียนได้รู้ถึงสิ่งที่มีความคิดของตนเอง รู้ว่าตนเองกำลังคิดอะไร ต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิด(Metacognition) ของตนเอง

แลปแพนและสแชรหม (Lappan and Schram. 1989: 18-19) กล่าวว่า ในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล ควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหาวิธีพิสูจน์ สังเกตรูปแบบ ชี้แจงเหตุผลของแนวคิด โดยอธิบายรูปแบบแสดงด้วยภาพหรือแบบจำลอง และตอบคำถามต่างๆ เช่น “ทำไม” “อะไรจะเกิดขึ้น ถ้า...” “จงให้ตัวอย่างของ...” “สามารถใช้วิธีการอื่นได้หรือไม่ ถ้าการดำเนินการเดิมไม่บรรลุผล” ซึ่งล้วนเป็นคำถามที่ก่อให้เกิดการคิด การสร้างข้อความคาดคะเน การกำหนดแบบจำลอง(Modeling) และการอธิบาย ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์

โรแวนและมอร์โรว์ (Rowan and Morrow. 1993: 16-18) ได้กล่าวว่า บรรยากาศในชั้นเรียนเป็นสิ่งที่สำคัญมาก ครูต้องจัดบรรยากาศที่แสดงให้นักเรียนเห็นว่า การให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง บรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว หากแต่ต้องเป็นบรรยากาศที่สนับสนุน ส่งเสริม ให้นักเรียนได้พูดอธิบาย และแสดงเหตุผลของแนวคิด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท. 2545: 195) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมให้นักเรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักให้เหตุผล ซึ่งมี 3 ประการคือ

1. ควรให้นักเรียนได้พบกับโจทย์หรือปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของนักเรียนที่จะคิดและให้เหตุผลในการหาคำตอบได้
2. ให้นักเรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการใช้ และให้เหตุผลของตนเอง
3. ครูช่วยสรุปและชี้แจงให้นักเรียนเข้าใจว่า เหตุผลของนักเรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ ขาดตกบกพร่องอย่างไร

นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดการเรียนการสอนที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลอีกว่า ผู้สอนควรจัดสถานการณ์หรือปัญหาที่น่าสนใจให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติ ครูสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนและคอยช่วยเหลือโดยกระตุ้นหรือชี้แนะอย่างกว้างๆ โดยใช้คำถาม

กระตุ้นด้วยคำว่า “ทำไม” “อย่างไร” “เพราะเหตุใด” เป็นต้น พร้อมทั้งให้ข้อคิดเพิ่มเติมอีก เช่น “ถ้า.....แล้ว นักเรียนคิดว่า.....จะเป็นอย่างไร” นักเรียนที่ให้เหตุผลได้ไม่สมบูรณ์ ครูจะต้องไม่ตัดสินด้วยคำว่า ไม่ถูกต้อง แต่อาจใช้คำพูดเสริมแรงและให้กำลังใจว่า คำตอบที่นักเรียนตอบมามีบางส่วนที่ถูกต้อง นักเรียนคนใดจะให้คำอธิบายหรือให้เหตุผลเพิ่มเติมของเพื่อนได้อีกบ้าง เพื่อให้ให้นักเรียนมีการเรียนรู้ร่วมกันมากขึ้น ในการจัดการเรียนรู้ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลาย โจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ควรเป็นปัญหาปลายเปิด(Open-ended Problem) ที่นักเรียนสามารถแสดงความคิดเห็น หรือให้เหตุผลที่แตกต่างกันได้

ยังมีปัจจัยที่สำคัญยิ่งอีกปัจจัยหนึ่ง ที่มีส่วนช่วยในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล ซึ่งคือ ครูและการจัดการเรียนการสอน บทบาทของครูที่จะส่งเสริม และพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล (สสวท. 2547: 15) คือ

1. ครูต้องสร้างบรรยากาศให้นักเรียนตระหนักในสิ่งต่อไปนี้

- 1.1 การเรียนคณิตศาสตร์ให้เรียนด้วยความเข้าใจ ก่อนอื่นครูต้องทำให้นักเรียนเกิดความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่นักเรียนสามารถเข้าใจได้ และต้องเรียนด้วยความเข้าใจ นักเรียนหรือบุคคลต่างๆ ไปมักจะมีความคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก เรียนไม่รู้เรื่อง ไม่มีความสามารถเพียงพอที่จะเข้าใจได้ วิธีการเรียนต้องใช้การจดจำ จำขั้นตอนวิธีการ จำสูตรเพื่อหาคำตอบโดยไม่รู้ว่าจะทำไมจึงทำเช่นนั้น ความคิดเช่นนี้ทำให้เมื่อวิชาคณิตศาสตร์ เห็นว่าคณิตศาสตร์มีไว้สำหรับคนเก่งเท่านั้น แนวคิดเช่นนี้สกัดกั้นการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีความสุขและเห็นคุณค่า ครูมีบทบาทสำคัญยิ่งในการสร้างบรรยากาศให้นักเรียนรู้สึก่วิชานี้ไม่ยาก
- 1.2 ให้นักเรียนเรียนรู้อย่างมีเหตุผล นักเรียนจะต้องรู้ว่าทำไม เพราะอะไร และสามารถแสดงเหตุผลได้
- 1.3 ครูต้องทำให้นักเรียนรู้ว่า ครูให้ความสำคัญต่อความเข้าใจและการให้เหตุผล โดยครูจะต้องประเมินสิ่งเหล่านี้อย่างสม่ำเสมอ ที่สำคัญเมื่อนักเรียนสามารถให้เหตุผลที่ดีครูควรให้การเสริมแรงทันที
2. ให้นักเรียนอธิบายแนวคิดและให้เหตุผลยืนยันแนวคิดนั้นๆ การให้เหตุผลอาจทำได้ด้วยวาจา ด้วยการเขียน โดยใช้ภาษาง่ายๆ หรือใช้อุปกรณ์แสดงให้เห็นจริง
3. ควรถามบ่อยๆ และใช้คำถามอย่างต่อเนื่อง คำถามที่ใช้ควรเป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนคิดและแสดงเหตุผล
4. สนับสนุนให้นักเรียนสร้างข้อคาดเดาบนพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล
5. เปิดโอกาสให้ทดสอบและปรับแต่งข้อคาดเดาโดยอาศัยเหตุผล
6. ให้นักเรียนได้วิเคราะห์แบบรูป รวมทั้งสร้างแบบรูปเอง
7. ใช้วิธีแสดงสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างให้นักเรียนได้สรุปแนวคิดนั้น
8. ใช้ปัญหาปลายเปิด
9. ให้มีการอภิปรายในชั้นเรียน เพื่อหากรณีทั่วไป

10. ทำท่ายให้นักเรียนคิด และทำกิจกรรม
 11. ให้ความสำคัญในการฟังความคิดเห็นของนักเรียน และให้นักเรียนได้ฝึกการรับฟังทำความเข้าใจเหตุผลของผู้อื่น
 12. มีความยืดหยุ่น สามารถปรับแนวการอภิปรายให้เข้ากับวิธีคิดของนักเรียน
 13. มีความอดทน ใจเวลา ให้โอกาสแก่นักเรียน
 14. เน้นความเป็นเหตุเป็นผลมากกว่ากฎเกณฑ์หรือการอาศัยคำที่ใช้เป็นกุญแจไปสู่การบอกวิธีการ
 15. ครูควรใช้ภาษาที่เหมาะสมรัดกุม เพื่อให้นักเรียนได้เกิดการเรียนรู้ ครูไม่ควรตำหนิเมื่อนักเรียนใช้ภาษาไม่ถูกต้อง ไม่เหมาะสม ไม่รัดกุม ครูไม่ควรตติติง แต่ควรช่วยสรุปอีกครั้ง
 16. ครูควรใช้ภาษาตรรกศาสตร์ในเหตุการณ์ทั่ว ๆ ไปให้นักเรียนคุ้นเคย
 17. ครูจะต้องสร้างความเข้าใจว่าครูให้ความสำคัญกับการให้เหตุผล ในการประเมินจะต้องมีคะแนนจากการประเมินการให้เหตุผลจากงานที่ให้ทำ หรือในข้อสอบจะต้องมีส่วนที่ให้นักเรียนแสดงเหตุผล
- บทบาทของครูที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลแสดงได้ด้วยภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 บทบาทของครูที่ส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผล (สสวท. 2545: 195)

จากการศึกษาแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลจากที่กล่าวมา ทำให้ได้แนวคิดว่าการพัฒนาความสามารถเหตุผลต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล ในบรรยากาศที่สนับสนุน ส่งเสริม ให้นักเรียนได้พูดอธิบาย และแสดงเหตุผลของแนวคิด การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลสำหรับงานวิจัยครั้งนี้ จะใช้แนวทางการสอนเพื่อให้เกิด มีการปฏิบัติกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ทดลองเพื่อรวบรวมและหาความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ สร้างข้อสรุป และตรวจสอบยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นกิจกรรมที่ช่วยส่งเสริมการให้เหตุผลแบบอุปนัย และนิรนัย

5.5 การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลด้วยการให้คะแนนแบบรูบรีค

กรมวิชาการ (2539: 54 - 59) ได้ให้ความหมายของเกณฑ์การให้คะแนนว่า หมายถึงเครื่องมือที่ใช้เป็นแนวทางประเมินการปฏิบัติงานของนักเรียนโดยการสร้างแนวทางการให้คะแนน (Scoring Guide) ซึ่งจะต้องกำหนดมาตรวัด (Scale) และรายการของคุณลักษณะที่บรรยายถึงความสามารถในการแสดงออกของแต่ละจุดในมาตรวัดไว้อย่างชัดเจน การให้คะแนนแบบรูบรีคซึ่งเป็นการให้คะแนนที่จะตอบคำถามว่านักเรียนทำอะไรได้สำเร็จหรือไม่ หรือมีความสำเร็จในระดับใด โดยทั่วไปการให้คะแนนแบบรูบรีคมี 2 รูปแบบคือ

1. การให้คะแนนเป็นภาพรวม (Holistic Score) คือการให้คะแนนผ่านชิ้นงาน โดยดูภาพรวมของชิ้นงานนั้น แล้วเขียนอธิบายคุณภาพของงานหรือความสำเร็จของงานเป็นชิ้นๆ การให้คะแนนมีได้หลายวิธี เช่น การให้คะแนนโดยแบ่งตามคุณภาพของงานเป็น 3 กอง การให้คะแนนโดยการกำหนดระดับของความผิดพลาดโดยพิจารณาจากความบกพร่องของคำตอบว่ามีมากน้อยเพียงใดแล้วหักจากระดับสูงสุดลงมาที่ระดับ
2. การให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ (Analytic Score) เพื่อให้การมองคุณภาพของงานหรือความสามารถของนักเรียนเป็นไปอย่างชัดเจนจึงได้มีการแยกองค์ประกอบของการให้คะแนนและอธิบายคุณภาพของงานในแต่ละองค์ประกอบของงานเป็น 4 ด้าน คือ
 - 2.1 ความเข้าใจในความคิดรวบยอด ข้อเท็จจริง
 - 2.2 การสื่อความหมาย สื่อสาร
 - 2.3 การใช้กระบวนการและยุทธวิธี
 - 2.4 ความสำเร็จของงาน

กู๊ดริช (Goodrich.1997: 14-17) กล่าวว่า รูบรีค (Rubric) คือข้อความที่แสดงรายละเอียดของเกณฑ์คุณภาพการเรียนรู้ จากระดับที่ยอดเยี่ยมไปจนถึงระดับที่ต้องพัฒนา ซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อใช้วัดผลกระบวนการในการทำงานของนักเรียน โดยรูบรีคจะให้รายละเอียดข้อมูลย้อนกลับในการพัฒนาชิ้นงานและจะมีการประเมินผลในชิ้นงานสุดท้าย กู๊ดริช กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้การให้คะแนนแบบรูบรีคเป็นสิ่งที่น่าสนใจสำหรับครูและนักเรียน ดังนี้

1. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูงสำหรับการสอนสามารถสะท้อน และช่วยให้นักเรียนปรับปรุงการทำงานได้ตลอดเวลาเหมือนการให้การตรวจตราโดยครู เกณฑ์ที่สร้างขึ้นจะช่วยให้นักเรียนได้เห็นถึงแนวทางในการทำงานที่จะทำให้บรรลุจุดมุ่งหมายของเนื้อหาต่างๆ ได้ดีขึ้น ดังนั้นสิ่งที่สำคัญที่สุดของการให้คะแนนแบบรูบรีคก็คือ การนิยามเกณฑ์หรือระดับของคุณภาพ
2. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค จะทำให้นักเรียนมีความละเอียดรอบคอบในการตัดสินคุณภาพงานของตนเองและผู้อื่น ทำให้ตระหนักถึงความแตกต่างระหว่างงานที่

เสร็จและงานที่มีคุณภาพ

3. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคจะช่วยลดเวลาของครูในการประเมินชิ้นงาน และเมื่อมีเกณฑ์ที่ชัดเจนนักเรียนก็สามารถวิเคราะห์และประเมินชิ้นงานของตนเองและผู้อื่นได้อย่างเที่ยงตรง มีความยุติธรรม เป็นที่ยอมรับของคนอื่นในชั้นเรียน
 4. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคเป็นสิ่งที่ง่ายต่อการใช้และการอธิบาย
- นอกจากนี้กูตรีซ ยังกล่าวถึงการสร้างเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคว่าสามารถทำได้โดย

มีนักเรียนเป็นผู้ช่วย (เชษฐา ชาบง. 2544: 44) คือ

1. กำหนดโครงร่าง คุณลักษณะที่ต้องการวัดผลโดยอาศัยประสบการณ์ในการสอนของตนเองว่าการจะผ่านจุดมุ่งหมายการเรียนรู้หนึ่ง ๆ ต้องมีคุณลักษณะอย่างไรบ้าง และในแต่ละลักษณะควรมีคุณภาพที่ระดับ
2. นำคุณลักษณะและระดับคุณภาพที่ต้องการประเมิน ชี้แจงกับผู้เรียนและใช้วิธีระดมสมองเพื่อเพิ่มเติมหรือตัดบางคุณลักษณะ ทั้งนี้การเพิ่มหรือตัดคุณลักษณะใดควรพิจารณาเหตุผลสนับสนุนและการยอมรับของนักเรียนส่วนใหญ่
3. เมื่อได้ระดับคุณลักษณะที่ต้องการวัดแล้วต่อมาคือการสร้างระดับคุณภาพที่ต้องการจวัด
4. เมื่อได้โครงร่างอันประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ คุณลักษณะที่ต้องการวัดและระดับคุณภาพของแต่ละคุณลักษณะเรียบร้อยแล้ว ให้แสดงโครงร่างกับนักเรียนเพื่อถามความเห็น หรือข้อเสนอแนะอีกครั้ง ซึ่งนักเรียนอาจจะมีข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงก่อนนำไปใช้

พอบแฮม (Popham. 1997: 72 - 75) ให้ความหมายของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคว่าหมายถึงการแนะนำการให้คะแนนเพื่อใช้ประเมินคุณภาพของการตอบสนองของนักเรียน โดยเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคจะมีลักษณะเฉพาะที่สำคัญคือ เกณฑ์ การนิยามคุณภาพ ยุทธวิธีการให้คะแนน ซึ่งอาจเป็นวิธีการให้คะแนนแบบภาพรวมหรือแบบแยกองค์ประกอบอย่างใดอย่างหนึ่ง เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค มักใช้ในการตัดสินคำตอบของผู้เรียนในแบบทดสอบ หรือชิ้นงานที่มีการเขียนตอบบรรยาย อธิบาย หรือใช้ในการทดสอบการปฏิบัติเพื่อพิจารณาว่า ผู้เรียนมีทักษะอยู่ในระดับใด โดยถ้านักเรียนทำการทดสอบภาคปฏิบัติได้ดี แสดงว่านักเรียนมีความรอบรู้และมีทักษะในการนำไปปฏิบัติได้ดี นอกจากนี้พอบแฮมได้ให้ข้อสังเกตและคำแนะนำในการพัฒนาเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค ดังนี้

1. เกณฑ์ต่างๆ ควรเป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการสอนซึ่งถือเป็นองค์ประกอบที่ตรงประเด็นที่สุดของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีค
2. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคควรมีจำนวนเกณฑ์ประมาณ 3 – 5 เกณฑ์ และต้องเป็นเกณฑ์ที่มีจุดหมายแน่นอน
3. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคไม่ควรมีความยาวมากเกินไป
4. เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบรีคแต่ละเกณฑ์ต้องสามารถแทนคุณสมบัติที่สำคัญของ

ทักษะที่จะประเมิน

5. ผู้ประเมินต้องตระหนักว่าผลที่ประเมินเป็นเพียงตัวแทนของทักษะ ไม่ใช่ตัวทักษะ ดังนั้นการสอนจึงต้องมุ่งไปที่ทักษะไม่ใช่สอนเพื่อมุ่งไปสู่การทดสอบหรือการประเมิน

คูนีย์ (สุรสาธ ภาสข. 2546: 30; อ้างอิงจาก Cooney. 1999 : Developing New Strategies for Teaching Mathematics.) ได้ให้ความหมายของเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีควา หมายถึงแนว ทางในการให้คะแนน โดยการกำหนดเกณฑ์ให้กับแต่ละส่วนของงานและกำหนดระดับของคุณภาพ สำหรับเกณฑ์แต่ละเกณฑ์ คูนีย์ได้กล่าวถึงข้อดีของการใช้การประเมินโดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนไว้ดังนี้

1. เป็นการประเมินที่ช่วยให้ครูมุ่งประเด็นไปในสิ่งที่นักเรียนรู้และสิ่งที่นักเรียนสามารถทำได้
2. เป็นการประเมินที่ทำให้การให้คะแนนมีความยุติธรรม คงเส้นคงวา
3. เป็นการประเมินที่ทำให้นักเรียนได้เข้าใจความคาดหวังของครูว่าครูต้องการอะไร นอกจากนี้ยังได้กำหนดระดับของคุณภาพสำหรับแต่ละเกณฑ์ โดยแบ่งเป็น 4 ระดับดังนี้
 - 3 หมายถึง คำตอบถูกต้องมีกระบวนการของการให้เหตุผล มีความเหมาะสมและสามารถสื่อสารได้อย่างชัดเจน
 - 2 หมายถึง คำตอบแสดงถึงสาระสำคัญและการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมแต่ขาดวิธีการบางอย่าง
 - 1 หมายถึง คำตอบแสดงถึงการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมบางอย่างแต่ล้มเหลว ในการกล่าวถึงแนวคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นหัวข้อหลัก
 - 0 หมายถึง คำตอบแสดงถึงการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ที่ไม่เหมาะสม

จากข้อมูลต่าง ๆ เกี่ยวกับการให้เหตุผลที่ได้ศึกษามา อาจกล่าวได้โดยสรุปว่าความสามารถในการให้เหตุผลเป็นสิ่งที่พัฒนาได้ แต่ต้องใช้เวลาในการฝึก จึงจำเป็นต้องจัดประสบการณ์ให้สม่ำเสมอในทุกๆระดับชั้น โดยสอดแทรกการให้เหตุผลเข้าในทุกหน่วยการเรียนรู้ ซึ่งต้องสอดคล้องกับวัยและระดับชั้นของนักเรียน ต้องส่งเสริมให้นักเรียนได้เห็นคุณค่า และตระหนักว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผล สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้พัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต ที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผล การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การสร้างข้อคาดเดา การหาข้อสรุป และยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ผ่านการทำกิจกรรมกลุ่มและเดี่ยวในบรรยากาศที่สนับสนุนให้มีการพูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น แนวคิด ชี้แจงเหตุผลและยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผล จะประเมินการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในแต่ละชั้นตอน ด้วยวิธีการให้คะแนนแบบรูปรีควา ซึ่งใช้ยุทธวิธีการให้คะแนนแบบแยกองค์ประกอบ ผ่านชิ้นงานโดยพิจารณาจากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งมี การพิจารณาความสามารถในการให้เหตุผลใน 3 ด้าน คือ ความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุป และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล โดยในแต่ละ

ระดับจะมีเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีค 4 ระดับ คือตั้งแต่ 0 ถึง 3 โดยถ้าคะแนนเฉลี่ยในแต่ละกิจกรรมมีค่าตั้งไม่น้อยกว่าระดับ 1.5 จะถือว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในกิจกรรมนั้นอยู่ในเกณฑ์ดี และถ้าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เฉลี่ยของทุกกิจกรรมมีค่าไม่น้อยกว่าระดับ 1.5 จะถือว่าความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของทุกกิจกรรมอยู่ในเกณฑ์ดี ตลอดจนมีการสัมภาษณ์เพิ่มเติม และประเมินพฤติกรรม การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ด้วยแบบสำรวจรายการ ซึ่งเป็นแบบบันทึกข้อมูลที่ได้จากการสังเกต พฤติกรรมของนักเรียนระหว่างเรียน และระหว่างปฏิบัติการ กรรม โดยมีรายการประเมินเป็น พฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมาในแต่ละขั้นตอนของการคิดวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

6. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

6.1 ความหมายของเจตคติ

กู๊ด (Good. 1963: 1) ฮิลการ์ด (Hillgard. 1967: 583-594) เทอร์สตัน (Thurstone. 1967: 77) ได้ให้ความหมายของเจตคติไว้ในทำนองเดียวกันว่า หมายถึงท่าที ความคิดเห็น ความรู้สึกของบุคคลต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง หลังจากที่บุคคลได้รับประสบการณ์ในสิ่งนั้น ซึ่งแสดงออกในลักษณะที่เอนเอียงไปในทางใดทางหนึ่ง เช่น รักเกลียดพอใจหรือไม่พอใจ และพร้อมที่จะเอนเอียงไปในลักษณะเดิมเมื่อประสบกับสิ่งนั้นอีก

แอน อนาสตาซี (Anne Anastasi. 1969: 480) กล่าวว่า เจตคติหมายถึงความโน้มเอียงที่แสดงออกว่าชอบหรือไม่ชอบต่อสิ่งต่างๆ เช่น เชื้อชาติ ขนบธรรมเนียมประเพณี หรือสถาบันต่างๆ เจตคติไม่สามารถสังเกตได้โดยตรง แต่สามารถสรุปพาดพิงจากพฤติกรรมภายนอกทั้งที่ต้องใช้ภาษาหรือไม่ต้องใช้ภาษาก็ได้

แซลแมน และเซียร์ส (Zellman and Sears. 1971: 27,109-136) กล่าวว่า เจตคติเป็นสิ่งที่เกิดจากการเรียนรู้หรือได้รับประสบการณ์ จึงเป็นสิ่งที่เปลี่ยนแปลงได้ง่าย โดยอาจเปลี่ยนแปลงจากบวกเป็นลบหรือจากลบเป็นบวกก็ได้

ยูพิน พิพิธกุล (2527: 13) กล่าวว่า เจตคติหมายถึงความรู้สึกของบุคคลที่มีต่อสิ่งเร้าอันเป็นสภาพแวดล้อมภายนอก เช่น บุคคล วัตถุ เหตุการณ์ ซึ่งความรู้สึกนี้อาจจะเป็นไปได้ทั้งทางบวกหรือทางลบ

พรรณี ช เจนจิต (2538: 543) ได้กล่าวว่า เจตคติเป็นเรื่องของความรู้สึกทั้งที่พอใจและไม่พอใจที่บุคคลมีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งมีอิทธิพลทำให้แต่ละคนสนองตอบต่อสิ่งเร้าแตกต่างกันไป โดยเจตคติของบุคคลที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่งอาจเกิดขึ้นได้จากสาเหตุหลายประการ เช่น เกิดจากประสบการณ์ของบุคคลนั้นโดยตรง หรืออาจเกิดจากการรับถ่ายทอดจากเจตคติเดิมที่มีอยู่แล้ว

สุรางค์ โค้วตระกูล (2544: 366) ได้ให้ความหมายของเจตคติไว้ว่า เจตคติเป็นอชฌาสัย (Disposition) หรือแนวโน้มที่มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมสนองตอบต่อสิ่งแวดล้อมหรือสิ่งเร้า ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งคน วัตถุ สิ่งของหรือความคิด (Ideas) เจตคติอาจเป็นบวกหรือลบ ถ้าบุคคลมีเจตคติบวกต่อสิ่งใด ก็จะมีพฤติกรรมที่จะเผชิญกับสิ่งนั้น ถ้ามีเจตคติลบก็จะหลีกเลี่ยง

จากแนวคิดของนักจิตวิทยาและนักการศึกษา พอจะสรุปได้ว่า เจตคติหมายถึงความรู้สึกที่แสดงออกมาทางด้านความคิดเห็น หรือลักษณะท่าทาง ซึ่งเป็นความรู้สึกที่ตอบสนองทั้งในทางดีหรือตรงข้ามหลังจากมีประสบการณ์ในด้านนั้นแล้ว ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เป็นท่าทีความคิดเห็น ความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังจากมีประสบการณ์ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ และเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนแสดงพฤติกรรมที่จะสนองต่อวิชาคณิตศาสตร์ไปทางใดทางหนึ่ง หรือลักษณะใดลักษณะหนึ่ง

6.2 การวัดเจตคติ

เซคคันด์และแบคแมน (Second and Backman. 1964: 103) กล่าวว่าแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์แบบหนึ่งที่มีผู้นิยมใช้กันมากคือ แบบวัดการประเมินค่าจากผลรวม(The Method of Summated Ratings) ซึ่งเป็นวิธีการของ ลิเคอร์ท(Likert's Method) โดยมีหลักการอยู่ว่า ถ้าผู้ตอบได้คะแนนรวมจากแบบวัดมากเท่าใดก็แสดงว่าผู้ตอบมีเจตคติที่ดี วิธีการก็คือ สร้างข้อคำถามให้มีคำตอบแบบมาตรวัด 5 อันดับ คือ เห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง และกำหนดค่าคะแนนประจำข้อให้เป็น 5, 4, 3, 2 และ 1 ตามลำดับ

เทอร์สตัน (Thurstone. 1967: 77) ได้ให้ความคิดเห็นว่า เจตคติจะวัดโดยตรงไม่ได้ หากต้องวัดจากการแสดงออกในรูปแบบของความคิดเห็น หรือภาษาพูด โดยการสร้างแบบวัดที่ตอบว่าเห็นด้วย หรือไม่เห็นด้วยกับข้อความในแบบวัดเจตคติ

สุภาพ วาดเขียน (2525: 193) กล่าวว่า แบบวัดเจตคติต่างก็มีจุดอ่อนอยู่ที่ผู้ตอบสามารถบิดเบือนหรือหลอกลวงได้ จึงต้องการให้ผู้ตอบตอบคำถามอย่างจริงจัง ดังนั้นแบบวัดประเภทนี้ จึงสามารถวัดได้เฉพาะลักษณะซึ่งผู้ตอบสามารถจะให้คำตอบได้ หรือมีความประสงค์ที่จะให้คำตอบหรือเปิดเผยในสิ่งที่อยากจะเปิดเผย

อนันต์ จันท์กรวี (2526: 326) กล่าวว่า การสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนเป็นการวัดความสนใจและเจตคติที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด แต่ต้องอาศัยเวลาในการสังเกต ซึ่งครูผู้สอนควรสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนตลอดทั้งภาคเรียน

จากการศึกษาข้อมูลต่างๆ เกี่ยวกับเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ พบว่าการวัดเจตคติและความสนใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ให้ได้ผลที่ถูกต้องที่สุดนั้น นับเป็นสิ่งที่เป็นไปได้ยาก เนื่องจากเจตคติเป็นสิ่งที่เกี่ยวเนื่องกับจิตใจ ความคิด ทั้งยังมีปัจจัยอื่นเข้ามาเกี่ยวข้อง และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กันในทางบวก ดังนั้นเจตคติจึงถือ

เป็นเครื่องบ่งชี้ประการหนึ่งซึ่งใช้ในการปรับปรุงการเรียนการสอน โดยถ้าเราสามารถทราบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นอย่างไร หลังจากได้รับประสบการณ์จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดให้ ก็จะทำให้ครูสามารถใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอนให้เหมาะสม ซึ่งจะช่วยเสริมให้นักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์และส่งผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เลชเชอร์ (Leshner. 1971: 2487-A) ได้ศึกษาการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์กับนักเรียนเกรด 4 - 7 พบว่า ความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ระหว่างชั้นมีความแตกต่างกัน นั่นคือ นักเรียนชั้นสูงจะมีความสามารถในการคิดเชิงตรรกศาสตร์สูงกว่านักเรียนชั้นที่ต่ำกว่า ซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาของ พอนแลนด์ (Pallrand. 1979: 445-451) ซึ่งศึกษาการคิดแบบรูปธรรมที่กำลังเปลี่ยนแปลงไปสู่การคิดแบบนามธรรม ซึ่งได้ข้อสรุปที่สำคัญดังนี้

1. เด็กในช่วงความคิดแบบนามธรรมสามารถคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ได้
2. ระดับการศึกษาที่ต่างกัน ทำให้การคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์แตกต่างกัน
3. การคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์มีความสัมพันธ์กันทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรย์ (Ray. 1979: 3220-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของการใช้คำถามในระดับต่ำกับคำถามในระดับสูง ที่มีต่อเหตุผลในเรื่องที่เป็นนามธรรมและการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายในวิชาเคมี ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ใช้คำถามในระดับสูงสามารถทำข้อสอบในเรื่องของความมีเหตุมีผลเชิงนามธรรมและการคิดอย่างมีเหตุผล ได้คะแนนสูงกว่าอีกกลุ่มอย่างมีนัยสำคัญ

วิลเลียม (William. 1981: 1605-A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาเปรียบเทียบทัศนคติผลสัมฤทธิ์ และความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ระหว่างการสอนแบบสืบสวนสอบสวนหาความรู้ กับการสอนแบบเดิมที่มีครูเป็นศูนย์กลางในวิชาประวัติศาสตร์อเมริกา ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มที่สอนแบบสืบสวนสอบสวนหาความรู้ สูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบเดิมที่มีครูเป็นศูนย์กลาง

วัฒนา หงษ์ภู (2523: 50-51) ได้ศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 และเจตคติของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงไม่แตกต่างกันที่ระดับ 0.05

เดชา นุ่นพันธ์ (2525: 43) ได้ศึกษาวิจัยเรื่อง “ผลของการสอนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความภูมิใจในตนเอง และทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” พบว่าการสอนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์จะส่งผลต่อเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

กรรณิการ์ วีระเวชเจริญชัย (2526: 46-50) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านจำนวน มิติสัมพันธ์ และเหตุผลเชิงนามธรรมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่าความสามารถทางด้านจำนวน มิติสัมพันธ์ และเหตุผลเชิงนามธรรมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

จันทร์เพ็ญ ธนาศุภกรกุล (2526: 64) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

สมเจตน์ ไวยาการณ์ (2530: 93) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษารูปแบบการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ การวางแผน การสร้างแนวคิดรวบยอด การนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ และการประเมินผล ผลการวิจัยพบว่ารูปแบบการสอนที่สร้างขึ้นสามารถสอนให้นักเรียนเกิดพฤติกรรมการคิดตามทักษะของบลูมและคนอื่น ๆ ได้ทุกระดับพฤติกรรม แต่พฤติกรรมการคิดดังกล่าวต้องการเวลาสอนแตกต่างกัน โดยเฉพาะพฤติกรรมการคิดด้านการสังเคราะห์และการประเมินค่า ต้องการเวลาในการสอนมากกว่าพฤติกรรมการคิดด้านการวิเคราะห์ เมื่อเปรียบเทียบกับการสอนตามปกติแล้วพบว่า รูปแบบการสอนที่สร้างขึ้นช่วยให้นักเรียนทุกระดับการเรียน ทั้งที่มีผลการเรียนดี ปานกลาง และผลการเรียนต่ำ มีความสามารถด้านการใช้เหตุผลในทุกๆ ด้านสูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ส่วนการสอนตามปกติช่วยส่งเสริมความสามารถด้านการใช้เหตุผลของผู้เรียนเฉพาะผู้ที่มีผลการเรียนระดับปานกลางเท่านั้น ข้อค้นพบดังกล่าวสรุปได้ว่า รูปแบบการสอนที่สร้างขึ้นเหมาะสมที่จะนำไปใช้ประกอบการสอนในโรงเรียน เพื่อส่งเสริมความสามารถด้านการใช้เหตุผลของนักเรียนได้เป็นอย่างดี

สุภานันท์ เสถียรศรี (2536: 125-128) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ การคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2535 โรงเรียนยานนาเวศวิทยาคม เขตสาทร กรุงเทพมหานคร ที่เรียนโดยใช้แบบฝึกกิจกรรมการคิดกับการสอนตามคู่มือครู ผลการวิจัยพบว่า แบบฝึกกิจกรรมการคิดสามารถพัฒนาการคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนได้ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้แบบฝึกกิจกรรมการคิดกับที่เรียนตามคู่มือครู แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 338) ได้ออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในสามประการคือ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล และการใช้คณิตศาสตร์สื่อสาร โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ พัฒนาโดยผ่าน

กระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนโรงเรียนพระนารายณ์และโรงเรียนดงตาลวิทยา จังหวัดลพบุรี จำนวน 154 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 75 คน และกลุ่มควบคุม 79 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

สมพร แผลงภู (2541: 117) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ” พบว่าเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองแตกต่างจากกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

จรรยา ภูอุดม (2544: 107-110) ได้พัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นนักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ โดยรูปแบบดังกล่าวมีองค์ประกอบหลัก 7 ประการได้แก่ สถานการณ์ปัญหา ความรู้สึ้อยากแก้ปัญหา ปฏิสัมพันธ์ทางสังคม ความรู้ความสามารถเดิม กิจกรรมการแก้ปัญหา พัฒนาการทางปัญญา และเจตคติต่อการเรียน ส่วนเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้เป็นตัวอย่างในการทดลองรูปแบบที่พัฒนาขึ้น ได้แก่ ปริมาตรและพื้นผิว ความคล้าย และการนำเสนอข้อมูล ผลการวิจัยพบว่ารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นนักเรียนเป็นผู้สร้างความรู้ที่สร้างขึ้น เป็นรูปแบบการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพอีกรูปแบบหนึ่ง ที่ช่วยให้นักเรียนมีพัฒนาการด้านทักษะการคิดเชิงเหตุ ผลดีกว่านักเรียนที่เรียนตามปกติ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 124) ได้วิจัยเรื่อง “กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” พบว่านักเรียนมีเจตคติหลังเรียนอยู่ในเกณฑ์ดี

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนา (Research and Development) ซึ่งประกอบด้วย การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และการทดลองใช้หลักสูตรเพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร ศึกษาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ศึกษาพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตที่พัฒนาขึ้น โดยในการวิจัยผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

โดยศึกษาจากเอกสาร ตำรา บทความ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องตลอดจนความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษา

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ประกอบด้วยเอกสาร 3 เล่ม คือเอกสารประกอบการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิद्यุต และเอกสารคู่มือครู

ขั้นตอนที่ 3 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง แบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และแบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 4 การทดลองและรวบรวมข้อมูล

นำหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และเครื่องมือที่ได้พัฒนาแล้วไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง แล้วเก็บข้อมูลที่ได้จากการทดลองเพื่อนำไปวิเคราะห์

ขั้นตอนที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

นำข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ไปวิเคราะห์หาผลตามสมมติฐานของการวิจัย และความมุ่งหมายของการวิจัย และสรุปผลการทดลอง

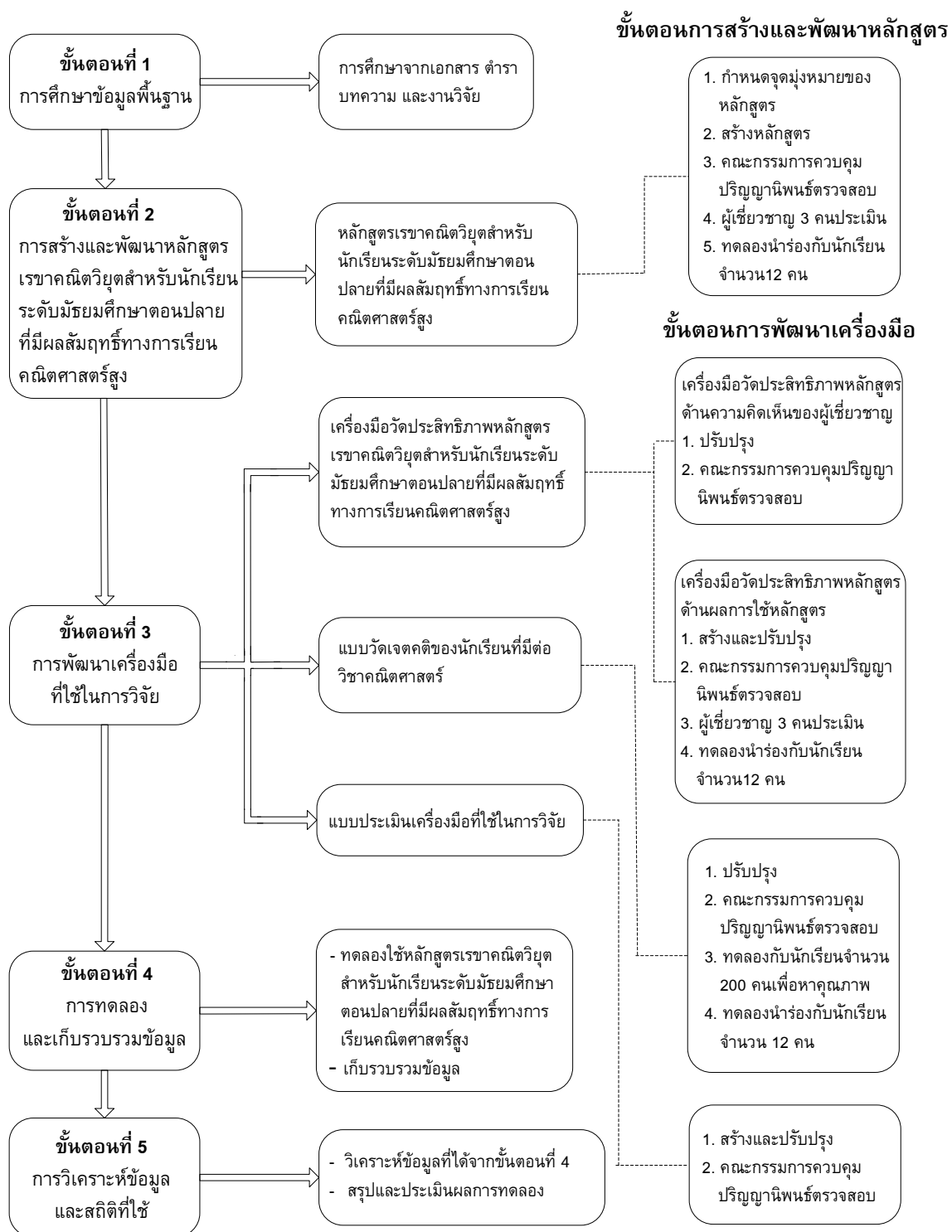
โดยขั้นตอนการดำเนินการวิจัยทั้ง 5 ขั้นตอนในการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง แสดงได้ดังภาพประกอบ 11 และ 12

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย



ภาพประกอบ 11 แผนภาพแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย



ภาพประกอบ 12 แผนภาพแสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย การสร้างและพัฒนาหลักสูตร และการพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ศึกษาค้นคว้า และรวบรวมเอกสาร ตำรา บทความ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ตลอดจนความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์ศึกษา เพื่อให้ได้ข้อมูลในการนำมาสร้างและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง รวมถึงกิจกรรมการสอนและสื่อการสอนเรื่องเรขาคณิตวิद्यุตด้วย โดยศึกษาในหัวข้อต่อไปนี้

- 1.1 การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์
- 1.2 เรขาคณิตวิद्यุต
- 1.3 การประเมินหลักสูตร
- 1.4 แบบทดสอบอิงเกณฑ์
- 1.5 การให้เหตุผล
- 1.6 เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
- 1.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง เป็นหลักสูตรที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้สอนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ใช้เวลา 34 ชั่วโมง มีจุดมุ่งหมายของหลักสูตร 5 ข้อ ดังนี้

1. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต
2. นักเรียนมีความสามารถและตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล
3. นักเรียนมีความสามารถในการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริงได้
4. นักเรียนเข้าใจในกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์
5. นักเรียนมีความสามารถในการทำงานเป็นกลุ่ม

หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต ประกอบด้วย เอกสาร 3 เล่มคือ

1. เอกสารประกอบการเรียน ประกอบด้วยเนื้อหา 5 หน่วย โดยในตอนท้ายของแต่ละหน่วยจะมีโจทย์ปัญหาสำหรับฝึกทักษะพร้อมเฉลย

หน่วยที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ ใช้เวลา 6 ชั่วโมง

หน่วยที่ 2 กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measuring Boxes) ประกอบด้วย เนื้อหา บทนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Definition of Universal Measuring Boxes) กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน (Orthogonal Measuring Boxes) และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ใช้เวลา 6 ชั่วโมง

หน่วยที่ 3 แลตทิซ (Lattice) ประกอบด้วยเนื้อหา จุดแลตทิซและพื้นที่ (Lattice Points and Area) ทฤษฎีบทของพิค (Pick ' s Theorem) รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแลตทิซ (Lattice Regular Polygons) ระยะทางที่เป็นจำนวนเต็ม (Integral Distances) และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ใช้เวลา 6 ชั่วโมง

หน่วยที่ 4 การหุ้มห่อและการบรรจุ (Wrapping and Packing) ประกอบด้วย การห่อรูปทรงลูกบาศก์ (Wrapping a Cube) การห่อทรงลูกบาศก์ด้วยแถบกระดาษโดยใช้พื้นที่กระดาษน้อยสุด (Wrapping a Cube with Minimum Area of Paper) การห่อแบบดับเบิล (Double Packing Solids) และการบรรจุ (Packing) ใช้เวลา 6 ชั่วโมง

หน่วยที่ 5 การวัดแบ่งส่วนสมมูล (Equipartitions of Measures) ประกอบด้วย การวัดแบ่งส่วนสมมูลบนระนาบ (Equipartitions of Measures on the Plane) ทฤษฎีแฮมแซนวิช (Ham Sandwich Theorem) การแบ่งส่วนสมบูรณ์ของเค้ก (Radial Perfect partitions of Cake) ใช้เวลา 6 ชั่วโมง

2. แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิยุต ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของหลักสูตร และแผนการจัดการเรียนรู้ 10 แผน แผนละ 3 ชั่วโมง แต่ละแผนประกอบด้วย

2.1 สารการเรียนรู้

2.2 ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

2.3 สารการเรียนรู้ย่อย

2.4 กิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยกำหนดกรอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยรูปแบบของการจัดการเรียนการสอนสำหรับเนื้อหาเรขาคณิตวิยุตในแต่ละหน่วย มีทั้งแบบสอนรวมทั้งชั้นเรียนโดยครูผู้สอน และการปฏิบัติกิจกรรมที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลและการทำงานเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คน การสอนรวมทั้งชั้น ใช้วิธีสอนแบบใช้ปัญหำนำเข้าสู่บทเรียน มีการยกตัวอย่างผ่านสื่ออุปกรณ์หรือโมเดลประกอบการสอน ส่วนการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มจะเน้นให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้จากการทดลองปฏิบัติจริง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ขั้นที่ 1 การปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้นเรียน มีขั้นตอนดังนี้

1. ครูนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์จริงด้วยวาจา หรือใช้สื่อประกอบพร้อมแสดงให้เห็นถึงความสำคัญและความน่าสนใจของปัญหา เพื่อจูงใจและโน้มน้าวให้นักเรียนมีความรู้สึกอยากที่จะแก้ปัญหา
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปราย ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา โดยมีครูเป็นผู้กระตุ้นผ่านคำถามที่น่าสนใจ

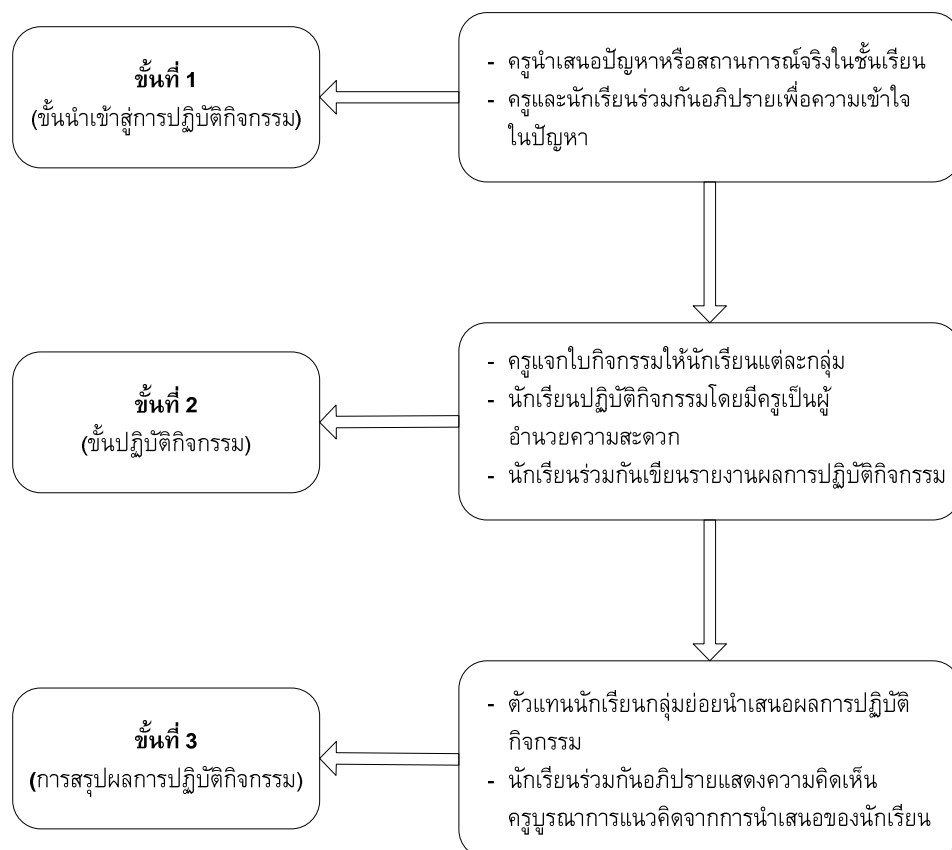
ขั้นที่ 2 การปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่มย่อย มีขั้นตอนดังนี้

1. ครูแจกใบกิจกรรมให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม โดยใบกิจกรรมจะมีการนำเสนอปัญหาพร้อมคำชี้แจงเกี่ยวกับการปฏิบัติกิจกรรม
2. ครูอำนวยความสะดวกระหว่างนักเรียนปฏิบัติกิจกรรม ถ้ากลุ่มใดมีปัญหาครูเข้าไปให้คำแนะนำและความช่วยเหลือเท่าที่จำเป็น ครูสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 1 กลุ่มต่อ 1 กิจกรรม หมุนเวียนกันไป ผลที่ได้จากการสังเกตบันทึกลงในแบบสำรวจรายการ ในกรณีที่มีนักเรียนบางกลุ่มสามารถหาคำตอบของปัญหาได้เร็วกว่ากลุ่มอื่น ครูให้นักเรียนทบทวนการหาคำตอบที่ได้ หาคำตอบด้วยแนวทางที่ต่างจากเดิม ขยายข้อปัญหา หรือแก้ปัญหาเพิ่มเติมที่เตรียมสำรองไว้

ขั้นที่ 3 การปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่มใหญ่ โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ครูให้นักเรียนกลุ่มย่อยแต่ละกลุ่ม ส่งตัวแทนนำเสนอผลของการปฏิบัติกิจกรรมของกลุ่มครั้งละกลุ่ม
2. นักเรียนทุกกลุ่มร่วมกันอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเห็น
3. ครูบูรณาการแนวคิดจากการนำเสนอของนักเรียนแต่ละกลุ่มย่อย แล้วสรุปเป็นประเด็นให้ชัดเจนขึ้น

ขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรม สรุปได้ดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 แผนภาพแสดงขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรม

2.5 สื่อการเรียนรู้ เป็นสื่อการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับเนื้อหาและการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย อุปกรณ์ หรือโมเดลเพื่อใช้ประกอบการอธิบายเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต และใช้ในการปฏิบัติกิจกรรม เอกสารประกอบการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม แบบฝึกทักษะ

2.6 การวัดและการประเมินผล ในการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มแต่ละครั้ง จะประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ประเมินพฤติกรรมในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากแบบสำรวจรายการ เมื่อนักเรียนเรียนจบเนื้อหาหน่วยที่ 3 จะประเมินความสามารถด้านเนื้อหาด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ฉบับที่ 1 และภายหลังเรียนจบเนื้อหาหน่วยที่ 5 จะประเมินความสามารถด้านเนื้อหาด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ฉบับที่ 2 และวัดเจตคติด้วยแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

3. เอกสารคู่มือครู ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของหลักสูตร กำหนดเวลาการสอน เรขาคณิตวิยุต และกรอบแนวการจัดการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย ข้อเสนอแนะ บทบาทของครู ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู และแนวการตอบการปฏิบัติกิจกรรม

ขั้นตอนการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดจุดมุ่งหมายของหลักสูตรโดยมุ่งเน้นให้นักเรียนมีความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต และมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล และกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริง และสามารถทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มได้

ขั้นที่ 2 สร้างหลักสูตรให้เป็นหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตที่มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ใช้เวลาเรียน 10 วัน วันละ 3 ชั่วโมง ทดสอบความสามารถด้านเนื้อหา 2 ครั้ง ครั้งละ 2 ชั่วโมง รวม 34 ชั่วโมง โดยหลักสูตรประกอบด้วย เอกสารประกอบการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิद्यุต เอกสารคู่มือครู

ขั้นที่ 3 นำหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตที่สร้างขึ้นให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบความถูกต้อง แล้วนำข้อเสนอแนะที่ได้มาแก้ไขปรับปรุง

ขั้นที่ 4 นำหลักสูตรที่ปรับปรุงแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน ประเมินความเหมาะสมและความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรโดยใช้แบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง แล้วนำคะแนนที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย โดยถ้าคะแนนเฉลี่ยของความเหมาะสมมีค่าตั้งแต่ 3.51 ขึ้นไป และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าไม่เกิน 1 และถ้าคะแนนเฉลี่ยของความสอดคล้องมีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. 2528: 63-64 ; อ้างอิงจาก Rovinelle; & Hambleton. 1977) แสดงว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

ขั้นที่ 5 นำหลักสูตรที่มีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนักร้องจำนวน 12 คน ซึ่งเป็นนักเรียนจากโรงเรียนอานวยศิลป์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 8 คน และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 4 คน เนื่องจากโรงเรียนอานวยศิลป์เป็นโรงเรียนที่มีผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2548 เป็นลำดับที่ 28 จากทั้งหมด 3,170 โรงเรียน ดังนั้นพอจะกล่าวได้ว่านักเรียนกลุ่มนักร้องนี้มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง นักเรียนกลุ่มนักร้องเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน (ดูนิยามศัพท์เฉพาะ หน้า 6) นักเรียนกลุ่มนักร้องจำนวน 12 คน ผ่านการคัดเลือกจากนักเรียนที่สมัครเข้าร่วมโครงการจำนวน 20 คน โดยคัดเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงจำนวน 12 คนแรก เมื่อสิ้นสุดการทดลองนักร้อง นำผลที่ได้ไปปรับปรุงแก้ไขหลักสูตร แล้วนำหลักสูตรที่ปรับปรุง ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบก่อนนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

ขั้นที่ 6 นำหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไปทดลองใช้เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร โดยกลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวน 23 คน มีกระบวนการที่ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างคือ ดำเนินการประชาสัมพันธ์หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตให้นักเรียนทราบล่วงหน้าถึงรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิद्यุต และคุณสมบัติพื้นฐานของผู้เรียนที่ต้องมีผลการเรียนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 สองรายวิชาไม่ต่ำกว่า 3 และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน แล้วเปิดรับสมัครนักเรียนเข้าร่วมโครงการ ซึ่งมีนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์สนใจสมัครเข้าร่วมโครงการจำนวน 23 คน จากนั้นนำผลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตรต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

3.1 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ประกอบด้วยเครื่องมือวัดประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และเครื่องมือวัดประสิทธิภาพด้านผลการใช้หลักสูตร

3.2 แบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

3.3 แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

3.1 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ประกอบด้วยเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร

3.1.1 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

ได้แก่ แบบประเมินโครงร่างของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยแบบประเมินประกอบด้วย 3 ตอนคือ

ตอนที่ 1 ประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตร โดยประเมินว่าองค์ประกอบต่างๆ ของหลักสูตร คือ จุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหาของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน การวัดและการประเมินผล มีความเหมาะสมมากน้อยเพียงใด แบบประเมินมีสเกลการวัดแบบอันดับ 5 อันดับ ตามเกณฑ์ดังนี้ 1 : เหมาะสมน้อยที่สุด 2 : เหมาะสมน้อย 3 : เหมาะสมปานกลาง 4 : เหมาะสมมาก และ 5 : เหมาะสมมากที่สุด

ตอนที่ 2 ประเมินความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตร โดยประเมินว่าองค์ประกอบต่างๆของหลักสูตร คือ จุดมุ่งหมายของหลักสูตร เนื้อหาของหลักสูตร กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน การวัดและการประเมินผล และแผนการจัดการเรียนรู้ มีความสอดคล้องกันหรือไม่ แบบประเมินมีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 3 ประเภทดังนี้ -1 : ไม่สอดคล้อง 0 : ไม่แน่ใจ และ 1 : สอดคล้อง

ตอนที่ 3 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

3.1.2 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร ประกอบด้วย

1. เครื่องมือวัดความสามารถด้านเนื้อหา ได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีคิด จำนวน 2 ฉบับ ฉบับที่ 1 วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 1 ถึง 3 มี 5 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน ใช้ทดสอบเมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยที่ 3 แล้ว ฉบับที่ 2 วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 4 และ 5 มี 5 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน ใช้ทดสอบเมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยที่ 5 แล้ว รวมคะแนนเต็มทั้งสองฉบับคือ 40 คะแนน ใช้เวลาสอบฉบับละ 2 ชั่วโมง

2. เครื่องมือวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งเป็นแบบรายงานที่ให้นักเรียนใช้เขียนแสดงผลของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล มีเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีด 4 ระดับ ดังนี้ 0 : ต้องแก้ไข 1 : พอใช้ 2 : ดี และ 3 : ดีมาก จำนวน 10 ฉบับ และในกรณีที่ผู้ตรวจให้คะแนน มีข้อสงสัยเกี่ยวกับแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มใด จะใช้การสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มนั้นเพื่อเก็บข้อมูลเพิ่มเติม

3. เครื่องมือวัดพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ แบบสำรวจรายการ ซึ่งครูใช้บันทึกข้อมูลจากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงออกระหว่างปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผล 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล มีรายการประเมินเป็นพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกในแต่ละด้าน รวม 14 รายการ

ขั้นตอนการพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีดังนี้

1. การพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ
ขั้นที่ 1 นำแบบประเมินความคิดเห็นเกี่ยวกับโครงสร้างหลักสูตรทฤษฎีจำนวนที่พัฒนาโดย นิตติยา ปภาพจน์ (2540: 140-151) แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงสร้างหลักสูตรพีชคณิตที่พัฒนาโดย ยุพร ริมชการ (2543: 259-267) และแบบประเมินความคิดเห็น

เกี่ยวกับโครงร่างโปรแกรมคอมบินาทอริกเบื้องต้นที่พัฒนาโดย จีรัตน์ สุวรรณ (2546: 71-78) มาปรับปรุงให้เป็นแบบประเมินโครงร่างของหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ขั้นที่ 2 นำแบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงที่ปรับปรุง ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญา นิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้อง นำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขเพื่อใช้เป็นแบบประเมินโครงร่างหลักสูตรต่อไป

2. การพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร

ขั้นที่ 1 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 2 ฉบับ เพื่อใช้วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 1 ถึง 3 และใช้วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 4 และ 5 สร้างแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม จำนวน 10 ฉบับ สำหรับแต่ละแผนจัดการเรียนรู้ และนำแบบสำรวจรายการของกรมวิชาการ (2539: 46-48) มาปรับปรุงเป็นแบบสำรวจรายการเพื่อให้ครูใช้บันทึกพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นที่ 2 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่สร้างขึ้น พร้อมนำแบบสำรวจรายการที่ปรับปรุงแล้ว ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญา นิพนธ์ตรวจสอบความเหมาะสม และความถูกต้องทั้งในแง่เนื้อหาและภาษาที่ใช้ แล้วนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการที่ได้ปรับปรุงแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 คนประเมินด้วยแบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบประเมินแบบสำรวจรายการ ผลปรากฏว่า แบบประเมินทั้งสามมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) เป็น 1.00

ขั้นที่ 4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองนำร่องกับนักเรียนโรงเรียนอำนวยการศิลป์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานมาก่อน จำนวน 12 คน นำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาหาความเชื่อมั่นโดยใช้วิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach alpha procedure) หาค่าอำนาจจำแนกและค่าความยากง่าย โดยคัดเลือกเฉพาะข้อคำถามที่มีค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.2-1.0 และค่าความยากง่ายระหว่าง 0.2-0.8 ผลปรากฏว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีค่าความเชื่อมั่นตามวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach alpha procedure) เท่ากับ 0.846 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.34 – 0.76 และค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.56 – 0.78

3.2 แบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

เป็นแบบทดสอบวัดเกี่ยวกับความรู้สึก ทศนคติและความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายหลังจากมีประสบการณ์ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจแสดงความรู้สึกในทางบวก คือ พอใจ ชอบ เห็นด้วย หรือแสดงความรู้สึกในทางลบ คือ ไม่พอใจ ไม่ชอบ ไม่เห็นด้วย จำนวน 30 ข้อ พัฒนาจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ สมพร แผลงภู (สมพร แผลงภู. 2541: 203-206) โดยข้อคำถามที่ปรากฏในแบบวัดเจตคติแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ ข้อความเชิงนิมมาน (Favorable statement) มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้ 5 : เห็นด้วยอย่างยิ่ง 4 : เห็นด้วย 3 : ไม่แน่ใจ 2 : ไม่เห็นด้วย และ 1 : ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง ข้อความเชิงนิเสธ (Unfavorable statement) มีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้ 5 : ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง 4 : ไม่เห็นด้วย 3 : ไม่แน่ใจ 2 : เห็นด้วย และ 1 : เห็นด้วยอย่างยิ่ง

ขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของสมพร แผลงภู ซึ่งหาคุณภาพโดยใช้ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มาปรับปรุงภาษาและข้อคำถามให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อใช้เป็นแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัย

ขั้นที่ 2 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่สร้างในขั้นที่ 1 ไปให้คณะกรรมการควบคุม ปรินญาณิพันธ์ตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความเป็นไปได้และภาษาที่ใช้ แล้วนำคำแนะนำและ ข้อเสนอแนะที่ได้มาทำการปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำแบบวัดเจตคติที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปสอบถามกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนวิทย์-คณิต โรงเรียนราชินี และโรงเรียนอำนวยการศิลป์ (ดูขั้นที่ 5 ของขั้นตอนการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิชุด) ทั้งหมดจำนวน 200 คน เนื่องจากนักเรียนจากโรงเรียนอำนวยการศิลป์ มีจำนวน 60 คน ซึ่งไม่เพียงพอกับจำนวนที่ต้องการ จึงคัดเลือกนักเรียนที่เหลือจากโรงเรียนราชินี ซึ่งเป็นโรงเรียนที่มีผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2548 เป็นลำดับที่ 21 จากทั้งหมด 3,170 โรงเรียน ดังนั้นพอจะกล่าวได้ว่านักเรียนทั้ง 200 คน มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำผลที่ได้จากแบบวัดเจตคติมาคำนวณหาค่าอำนาจจำแนกของแต่ละข้อโดยหาค่าสหสัมพันธ์ โดยคัดเลือกเฉพาะข้อคำถามที่มีค่าอำนาจจำแนกมากกว่าศูนย์ และหาคุณภาพของแบบวัดทั้งฉบับ โดยหาความเชื่อมั่นของเครื่อง มีวัด (Reliability) ด้วยวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach alpha procedure) ผลปรากฏว่า แบบวัดเจตคติ มีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.9177 และข้อคำถามมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.1949 – 0.7247

ขั้นที่ 4 นำแบบวัดเจตคติทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงแล้ว ไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำร่องจำนวน 12 คน แล้วนำผลที่ได้จากการวิจัยนำร่องไปปรับปรุงแก้ไขแบบวัดเจตคติทางคณิตศาสตร์ ก่อนนำไปใช้จริงในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3.3 แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ได้แก่

1. แบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับเนื้อหาในแต่ละหน่วย มีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 3 ประเภทดังนี้ -1 : ไม่สอดคล้อง 0 : ไม่แน่ใจ และ 1 : สอดคล้อง โดยถ้าข้อคำถามใดมีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป แสดงว่าข้อคำถามนั้นมีความสอดคล้องกัน (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. 2528: 63-64 ; อ้างอิงจาก Rovinelle; & Hambleton. 1977) สามารถนำไปใช้ในการทดลองได้

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

2. แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องของแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม กับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร ซึ่งมีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 3 ประเภท คือ -1 : ไม่สอดคล้อง 0 : ไม่แน่ใจ และ 1 : สอดคล้อง โดยถ้าในแต่ละประเด็นการประเมิน มีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป แสดงว่าประเด็นการประเมินนั้นมีความสอดคล้องกัน (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. 2528: 63-64 ; อ้างอิงจาก Rovinelle; & Hambleton. 1977) สามารถนำไปใช้ในการทดลองได้

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

3. แบบประเมินแบบสำรวจรายการ แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการ กับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีสเกลการวัดแบบแยกประเภท 3 ประเภท คือ -1 : ไม่สอดคล้อง 0 : ไม่แน่ใจ และ 1 : สอดคล้อง โดยถ้าในแต่ละประเด็นการประเมิน มีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป แสดงว่าประเด็นการประเมินนั้นมีความสอดคล้องกัน (สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. 2528: 63-64 ; อ้างอิงจาก Rovinelle; & Hambleton. 1977) สามารถนำไปใช้ในการทดลองได้

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

ขั้นตอนการพัฒนาแบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 นำแบบประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบอิงเกณฑ์วัดความรู้และความสามารถในเนื้อหาทฤษฎีจำนวนที่พัฒนาโดย นิตติยา ปภากจน์ (2540: 185-188) แบบประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบอิงเกณฑ์เพื่อวัดความรู้ และความสามารถในเนื้อหา

คอมบินาทอริกเบื้องต้นที่พัฒนาโดย จีร์ราร์ด สุวรรณ์ (2546: 79-81) มาปรับปรุงให้เป็นแบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบประเมินแบบสำรวจรายการ

ขั้นที่ 2 นำแบบประเมินทั้ง 3 ฉบับไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสม แล้วนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขจนได้เป็นแบบประเมินฉบับสมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การทดลองใช้หลักสูตรและเก็บรวบรวมข้อมูลผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้วิจัยขอหนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัย เพื่อทำปริญญาบัตรจากบัณฑิตวิทยาลัยเพื่อนำไปขอความอนุเคราะห์จากโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

ขั้นที่ 2 ผู้วิจัยนำหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไปทดลองใช้เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร โดยกลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวน 23 คน มีกระบวนการที่ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างคือ ดำเนินการประชาสัมพันธ์หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตให้นักเรียนทราบล่วงหน้าถึงรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิद्यุต และคุณสมบัติพื้นฐานของผู้เรียนที่ต้องมีผลการเรียนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 สองรายวิชาไม่ต่ำกว่า 3 และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จากนั้นเปิดรับสมัครนักเรียนเข้าร่วมโครงการ ซึ่งมีนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์สนใจสมัครเข้าร่วมโครงการจำนวน 23 คน

ผู้วิจัยทดลองสอนกลุ่มตัวอย่างด้วยตนเอง โดยดำเนินการสอนในเวลาเรียนปกติ ในภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2549 ดำเนินการสอนสัปดาห์ละหนึ่งครั้ง ครั้งละ 3 ชั่วโมง เป็นเวลา 10 สัปดาห์ และทดสอบความสามารถด้านเนื้อหาสองครั้ง ครั้งละ 2 ชั่วโมง รวมใช้เวลาทั้งสิ้น 34 ชั่วโมง ในระหว่างการสอนมีการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มและวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม วัดพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยแบบสำรวจรายการ โดยหลังจากสิ้นสุดการสอนหน่วยที่ 3 และหน่วยที่ 5 ผู้วิจัยจะนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ฉบับที่ 1 และ 2 ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างตามลำดับ แล้วนำข้อมูลที่ได้จากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม แบบสำรวจรายการ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร นอกจากนี้หลังการทดลองเสร็จสิ้น ผู้วิจัยจะวัดเจตคติของกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากนั้นนำผลที่ได้ไปวิเคราะห์เพื่อศึกษาและทดสอบสมมติฐานในการวิจัยต่อไป

ขั้นตอนที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

5.1 การวิเคราะห์ข้อมูล

นำข้อมูลที่รวบรวมจากการทดลองมาวิเคราะห์ดังนี้

5.1.1 ทดสอบสมมติฐานข้อ 1 ที่ว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต์มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test)

5.1.2 ทดสอบสมมติฐานข้อ 2 ที่ว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต์มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test)

5.1.3 ทดสอบสมมติฐานข้อ 3 ที่ว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต์มีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยมีจำนวนนักเรียนที่มีพฤติกรรมการให้เหตุผลอยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test)

5.1.4 ทดสอบสมมติฐานข้อ 4 ที่ว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต์มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 3.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test)

5.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

5.2.1 หาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา (content validity) โดยใช้ค่า \bar{X} , S และค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC)

5.2.2 หาความเชื่อมั่น (Reliability) ด้วยวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบัค (Cronbach alpha procedure)

5.2.3 หาค่าอำนาจจำแนก ค่าความยากง่าย

5.2.4 การทดสอบทวินาม (Binomial Test)

5.2.5 หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิจัย ซึ่งแบ่งออกเป็นสี่ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านผู้เชี่ยวชาญ

ตอนที่ 2 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านผลการใช้หลักสูตร

ตอนที่ 3 ผลของการศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ภายหลังจากสิ้นสุดการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ตอนที่ 4 ข้อค้นพบด้านผลการใช้หลักสูตรที่ได้จากการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ตอนที่ 1 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านผู้เชี่ยวชาญ

ประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ได้จากการประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญด้วยแบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง โดยพิจารณาจาก 2 ด้านคือ ด้านความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตร และด้านความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร ได้ผลแสดงดังตาราง 1 ถึง 4

1.1 ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ได้ผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ผลการประเมินความเหมาะสมของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ประเด็นการประเมิน	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	แปลผล
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร	4.43	0.53	เหมาะสม
2. เนื้อหาของหลักสูตร	4.43	0.85	เหมาะสม
3. กิจกรรมการเรียนการสอน	4.42	0.74	เหมาะสม
4. สื่อการเรียน	4.00	0.82	เหมาะสม
5. การวัดการประเมินผล	4.67	0.44	เหมาะสม
6. แผนการจัดการเรียนรู้	4.36	0.74	เหมาะสม
ภาพรวม	4.39	0.72	เหมาะสม

เกณฑ์ : คะแนนเฉลี่ยมีค่าตั้งแต่ 3.51 ขึ้นไป และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าไม่เกิน 1 แสดงว่าโครงสร้างหลักสูตรมีความเหมาะสม

จากตาราง 1 พบว่าโดยภาพรวมผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความเหมาะสม (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.39) เมื่อพิจารณารายด้านพบว่าแต่ละด้านมีความเหมาะสม (ค่าเฉลี่ยตั้งแต่ 4.00 ถึง 4.67) โดยด้านการวัดการประเมินผลมีความเหมาะสมมากที่สุด (ค่าเฉลี่ย 4.67) และผู้เชี่ยวชาญมีความคิดเห็นใกล้เคียงกันมากที่สุด (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.44) เมื่อเทียบกับด้านอื่นๆ

นอกจากนี้ผู้เชี่ยวชาญยังแสดงความคิดเห็น ให้เพิ่มแบบฝึกหัดเรื่องระเบียบวิธีการพิสูจน์การผลิตสื่อทางไอซีที(ICT) การขยายเวลาและจัดเครื่องช่วยคำนวณที่เหมาะสมสำหรับกิจกรรมที่ซับซ้อน และแนะนำแหล่งความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูและนักเรียน

1.2 ผลการประเมินความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ได้ผลดังตาราง 2 ถึงตาราง 4

ตาราง 2 ผลการประเมินความสอดคล้องโดยภาพรวมของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ประเด็นการประเมิน	เนื้อหา		กิจกรรมการเรียนการสอน		ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	
	IOC	แปลผล	IOC	แปลผล	IOC	แปลผล
จุดมุ่งหมายของหลักสูตร	1.00	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง
การวัดการประเมินผล	-	-	0.67	สอดคล้อง	-	-
จำนวนหน่วยการเรียนรู้	0.67	สอดคล้อง	-	-	-	-

เกณฑ์ : ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปแสดงว่ามีความสอดคล้อง

จากตาราง 2 พบว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีจุดมุ่งหมายของหลักสูตรสอดคล้องกับเนื้อหา สอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนการสอน โดยผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าสอดคล้องเหมือนกันทั้งหมด (IOC เท่ากับ 1.00) นอกจากนี้จะเห็นว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นจุดมุ่งหมายของหลักสูตรสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง การวัดการประเมินผลสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนการสอน และจำนวนหน่วยการเรียนรู้สอดคล้องกับเนื้อหา โดยผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าสอดคล้องแต่ไม่เหมือนกันทั้งหมด (IOC เท่ากับ 0.67)

ตาราง 3 ผลการประเมินความสอดคล้องของเนื้อหาของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

เนื้อหาหน่วยที่	เวลา		กิจกรรมการเรียนการสอน		สื่อการเรียน		การวัดการประเมินผล	
	IOC	แปลผล	IOC	แปลผล	IOC	แปลผล	IOC	แปลผล
1. ความรู้พื้นฐาน	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง
2. กล้องวัดปริมาตร ได้ทุกขนาด	0.67	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง
3. แลตทิส	0.67	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	1.00	สอดคล้อง
4. การหุ้มท่อและ การบรรจุ	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง	0.67	สอดคล้อง
รวมทุกหน่วย	0.67	สอดคล้อง	0.80	สอดคล้อง	0.74	สอดคล้อง	0.80	สอดคล้อง

เกณฑ์ : ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปแสดงว่ามีความสอดคล้อง

จากตาราง 3 พบว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเนื้อหารวมทุกหน่วยสอดคล้องกับเวลา กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน และการวัดการประเมินผล โดยผู้เชี่ยวชาญทั้งสามมีความเห็นว่าสอดคล้องแต่ไม่เหมือนกันทั้งหมด (IOC ไม่เท่ากับ 1)

ตาราง 4 ผลการประเมินความสอดคล้องระหว่างสื่อการเรียนกับกิจกรรมการเรียนการสอน

สื่อการเรียนหน่วยที่	กิจกรรมการเรียนการสอน	
	IOC	แปลผล
1. ความรู้พื้นฐาน	0.67	สอดคล้อง
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	1.00	สอดคล้อง
3. แลตทิส	0.67	สอดคล้อง
4. การหุ้มท่อและการบรรจุ	0.67	สอดคล้อง
5. การวัดแบ่งส่วนสมมูล	0.67	สอดคล้อง
รวมทุกหน่วย	0.74	สอดคล้อง

เกณฑ์ : ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไปแสดงว่ามีความสอดคล้อง

จากตาราง 4 พบว่าผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าโดยภาพรวมสื่อการเรียนในเนื้อหาทั้ง 5 หน่วย มีความสอดคล้องกับกิจกรรมการเรียนการสอน (IOC เท่ากับ 0.74) โดยสื่อการเรียน เรื่อง กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าสอดคล้องเหมือนกันทั้งหมด (IOC เท่ากับ 1.00) ส่วนสื่อการเรียนในหน่วยที่เหลือ ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าสอดคล้องแต่ไม่เหมือนกันทั้งหมด (IOC เท่ากับ 0.67)

จากตาราง 1 พบว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความเหมาะสมตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และจากตาราง 2 ถึงตาราง 4 พบว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสอดคล้องตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ นั่นคือหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

ตอนที่ 2 ผลของการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านผลการใช้หลักสูตร

ประสิทธิภาพด้านผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงเป็นประสิทธิภาพที่ได้จากการวัดนักเรียนใน 3 ด้าน คือ ด้านความสามารถด้านเนื้อหา ซึ่งวัดด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดด้วยแบบสำรวจรายการ

2.1 ประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถด้านเนื้อหา

ได้ผลดังตาราง 5 และตาราง 6

ตาราง 5 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถด้านเนื้อหาของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน

ความสามารถด้านเนื้อหา	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ส่วนที่ 1 เนื้อหาหน่วยที่ 1 ถึง 3				
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	4.00	3.39	84.75	0.62
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	8.00	6.70	83.75	1.05
3. แลตทิจ	8.00	7.00	87.50	0.78
ส่วนที่ 2 เนื้อหาหน่วยที่ 4 และ 5				
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	12.00	9.01	75.08	1.78
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุล	8.00	6.78	84.75	1.11
คะแนนรวมสองส่วน	40.00	32.88	82.20	2.83

เกณฑ์ : เกณฑ์ 75 กล่าวคือถ้านักเรียนได้คะแนนรวมตั้งแต่ร้อยละ 75 ของคะแนนเต็มขึ้นไป (30 คะแนนขึ้นไปจากคะแนนเต็ม 40 คะแนน) ถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านเนื้อหา

จากตาราง 5 ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านเนื้อหา (คะแนนรวมเป็นร้อยละ 82.20 ของคะแนนเต็ม) โดยมีความสามารถด้านเนื้อหา เรื่อง แลตทิซ มากที่สุด (คะแนนรวมเป็นร้อยละ 87.50 ของคะแนนเต็ม) และมีความสามารถด้านเนื้อหา เรื่องการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์แตกต่างกันน้อยที่สุด (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 0.62) เมื่อเปรียบเทียบกับเนื้อหาที่เหลือ

ตาราง 6 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถด้านเนื้อหาของนักเรียนซึ่งสอบผ่านเกณฑ์ 75

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์ (ร้อยละ)	p - Value
นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	23	22 (95.65)	0.012 *

$p^* < .05$

จากตาราง 6 ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% หลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความสามารถด้านเนื้อหา

2.2 ประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ได้ผลดังตาราง 7 และตาราง 8

ตาราง 7 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน

ความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล
ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์				
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้ เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	3.00	3.00	0.00	
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	3.00	2.25	0.35	
3. แลตทิจ	3.00	2.50	0.87	
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	3.00	2.50	0.50	
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	3.00	2.92	0.24	
ภาพรวม	3.00	2.63	0.60	ผ่านเกณฑ์
ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์				
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้ เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	3.00	2.83	0.40	
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	3.00	2.75	0.60	
3. แลตทิจ	3.00	2.33	1.11	
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	3.00	2.50	0.88	
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	3.00	3.00	0.00	
ภาพรวม	3.00	2.68	0.74	ผ่านเกณฑ์

ตาราง 7 (ต่อ)

ความสามารถในการให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	แปลผล
ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล				
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้ เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	3.00	2.58	0.65	
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	3.00	2.58	0.51	
3. แลตทิจ	3.00	2.25	1.09	
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	3.00	2.25	1.02	
5. การวัดแบ่งส่วนสมมูล	3.00	2.83	0.57	
ภาพรวม	3.00	2.50	0.83	ผ่านเกณฑ์
ภาพรวมทั้งหมด	3.00	2.61	0.73	ผ่านเกณฑ์

เกณฑ์ : เกณฑ์ 1.5 กล่าวคือถ้านักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 1.5 ขึ้นไปจะถือว่านักเรียนผ่าน
เกณฑ์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากตาราง 7 ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิชุด สำหรับนักเรียน
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผ่านเกณฑ์ความสามารถ
ด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.61) เมื่อพิจารณารายด้านพบว่า

1. ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างผ่านเกณฑ์ความสามารถในการ
ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.63) โดยมีความสามารถในการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์ เรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์มากที่สุด (ค่าเฉลี่ย
เท่ากับ 3.00) และนักเรียนทุกคนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่ากัน (ส่วน
เบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.00)

2. ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างผ่านเกณฑ์ความ
สามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.68) โดยมีความสามารถในการให้
เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องการวัดแบ่งส่วนสมมูลมากที่สุด (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3.00) และนักเรียนทุก
คนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่ากัน (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.00)

3. ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล นักเรียนกลุ่มตัวอย่างผ่านเกณฑ์ความ
สามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.50) โดยมีความสามารถในการให้

เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องการวัดแบ่งส่วนสมมูลมากที่สุด (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2.83) และนักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดแตกต่างกันน้อยที่สุด (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.51) เมื่อเปรียบเทียบกับเนื้อหาที่เหลือ

ตาราง 8 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนซึ่งสอบผ่านเกณฑ์ 1.5

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์ (ร้อยละ)	p - Value
นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	23	23 (100.00)	0.001 *

p * < .05

จากตาราง 8 ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสอบผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.3 ประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ได้ผลตามตาราง 9 และตาราง 10

ตาราง 9 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน

พฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	จำนวนรายการที่ประเมิน	จำนวนรายการที่แสดงออก (ร้อยละ)	แปลผล
ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	10	10 (100.00)	เกณฑ์ดี
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	10	8 (80.00)	เกณฑ์ดี
3. แลตทึช	10	9 (90.00)	เกณฑ์ดี
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	10	9 (90.00)	เกณฑ์ดี
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	10	9 (90.00)	เกณฑ์ดี
ภาพรวม	50	45 (90.00)	เกณฑ์ดี
ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	9	9 (100.00)	เกณฑ์ดี
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	8	6 (75.00)	เกณฑ์ดี
3. แลตทึช	7	7 (100.00)	เกณฑ์ดี
4. การหุ้มห่อและการบรรจุ	6	3 (50.00)	เกณฑ์ดี
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	8	8 (100.00)	เกณฑ์ดี
ภาพรวม	38	33 (86.84)	เกณฑ์ดี

ตาราง 9 (ต่อ)

พฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	จำนวนรายการที่ประเมิน	จำนวนรายการที่แสดงออก (ร้อยละ)	แปลผล
ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			
1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์	6	6 (100.00)	เกณฑ์ดี
2. กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด	8	4 (50.00)	เกณฑ์ดี
3 แลตทิกซ์	7	4 (57.14)	เกณฑ์ดี
4 การหุ้มห่อและการบรรจุ	8	4 (50.00)	เกณฑ์ดี
5. การวัดแบ่งส่วนสมดุลง	8	4 (50.00)	เกณฑ์ดี
ภาพรวม	37	22 (59.46)	เกณฑ์ดี
ภาพรวมทั้งหมด	125	100 (80.00)	เกณฑ์ดี

เกณฑ์ : ถ้ามีจำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกเกินครึ่งหนึ่งของจำนวนรายการทั้งหมด แสดงว่านักเรียนมีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

จากตาราง 9 ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกคิดเป็นร้อยละ 80.00 ของจำนวนรายการที่ประเมิน) เมื่อพิจารณารายด้านพบว่า

1. ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกคิดเป็นร้อยละ 90.00 ของจำนวนรายการที่ประเมิน) โดยนักเรียนแสดงพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์มากที่สุด (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงคิดเป็นร้อยละ 100.00 ของจำนวนรายการที่ประเมิน)

2. ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกคิดเป็นร้อยละ 86.84 ของจำนวนรายการที่ประเมิน) โดยนักเรียนแสดงพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ เรื่องแลตทิกซ์ และเรื่องการวัดแบ่ง

ส่วนสมดุลงมากที่สุด (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงคิดเป็นร้อยละ 100.00 ของจำนวนรายการที่ประเมิน)

3. ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกคิดเป็นร้อยละ 59.46 ของจำนวนรายการที่ประเมิน) โดยนักเรียนแสดงพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์มากที่สุด (จำนวนรายการที่นักเรียนแสดงคิดเป็นร้อยละ 100 ของจำนวนรายการที่ประเมิน)

ตาราง 10 ผลการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงด้านพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน ซึ่งมีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (ร้อยละ)	p – Value
นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	23	23 (100.00)	0.001 *

$p * < .05$

จากตาราง 10 ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

ตอนที่ 3 ผลของการศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ภายหลังจากการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ วัดได้จากการทำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดยแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์มีจำนวน 30 ข้อ แบ่งเป็น 8 กลุ่มประเด็นคำถาม ได้แก่ การเห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ความสนุกในการเรียนและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ความใฝ่รู้ในการเรียนคณิตศาสตร์ การเห็นจุดเด่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากวิชาอื่น ความขยันทำแบบฝึกหัด ความถนัดในการเรียนคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน และความรู้สึกในการเข้าร่วมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ได้ผลตามตาราง 11 และตาราง 12

ตาราง 11 ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 23 คน

กลุ่มประเด็นคำถาม	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	แปลผล
1. การเห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์	4.50	0.58	ผ่านเกณฑ์
2. ความสนุกในการเรียนและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	4.00	0.79	ผ่านเกณฑ์
3. ความใฝ่รู้ในการเรียนคณิตศาสตร์	3.70	0.91	ผ่านเกณฑ์
4. การเห็นจุดเด่นของวิชาคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากวิชาอื่น	4.03	0.88	ผ่านเกณฑ์
5. ความขยันทำแบบฝึกหัด	3.63	1.00	ผ่านเกณฑ์
6. ความถนัดในการเรียนคณิตศาสตร์	3.82	0.94	ผ่านเกณฑ์
7. การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน	3.86	0.91	ผ่านเกณฑ์
8. ความรู้สึกในการเข้าร่วมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์	3.89	0.85	ผ่านเกณฑ์
รวมทั้งฉบับ	3.93	0.90	ผ่านเกณฑ์

เกณฑ์ : เกณฑ์ 3.5 กล่าวคือถ้านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 3.5 ขึ้นไป จะถือว่านักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

จากตาราง 11 ปรากฏว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3.93) โดยนักเรียนมีเจตคติต่อการเห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีในระดับมากที่สุด (ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.50) และมีระดับเจตคติแตกต่างกันน้อยที่สุด (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.58) เมื่อเทียบกับกลุ่มประเด็นคำถามที่เหลือ

ตาราง 12 ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	จำนวนนักเรียนที่มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี (ร้อยละ)	P – Value
นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง	23	23 (100.00)	0.001 *

$p * < .05$

จากตาราง 12 ปรากฏว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย

นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

ตอนที่ 4 ข้อค้นพบด้านผลการใช้หลักสูตรที่ได้จากการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตร เรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์สูง

ในการศึกษาประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอน
ปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผู้วิจัยได้นำหลักสูตรไปใช้กับนักเรียนกลุ่มทดลอง
นาร่องจำนวน 12 คน และใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 23 คน โดยในการทดลองใช้หลักสูตร
นี้ผู้วิจัยได้ข้อค้นพบในด้านความสามารถด้านเนื้อหา ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทาง
คณิตศาสตร์ และด้านพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดในหัวข้อ 4.1 ถึง 4.3

4.1 ข้อค้นพบด้านความสามารถด้านเนื้อหา

4.1.1 เนื้อหาหน่วยที่ 1 เรื่องความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์

4.1.1.1 ความสามารถด้านเนื้อหาระหว่างเรียน

กลุ่มทดลองนาร่อง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 12 คน มีความเข้าใจในเรื่องการให้
เหตุผล นักเรียนจำนวน 5 คนจาก 12 คน มีความเข้าใจเรื่องระเบียบวิธีการพิสูจน์ แต่ไม่สามารถ
เขียนพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์โดยเฉพาะการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน มีความเข้าใจเรื่องการให้เหตุผลและ
ระเบียบวิธีการพิสูจน์ โดยสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ในรูปแบบต่างๆ ได้อย่างถูกต้องรัดกุม

4.1.1.2 ความสามารถด้านเนื้อหาหลังเรียน จากโจทย์ที่ว่า “ บริษัทผลิตตู้จำหน่าย

สินค้าอัตโนมัติ ต้องการออกแบบให้ตู้สามารถใช้ชิพแทนเงินในการชำระค่าสินค้า และเพื่อจะได้ไม่
ต้องผลิตชิพหลายราคา บริษัทจึงผลิตชิพเฉพาะราคา 3 บาท และ 8 บาทเท่านั้น อยากทราบว่า
บริษัทจะสามารถตั้งราคาสินค้าในตู้จำหน่ายในราคาเท่าใดได้บ้าง ผู้ซื้อจึงสามารถซื้อสินค้าโดยใช้
ชิพหยอดตู้จำหน่ายสินค้า โดยไม่มีการทอน จงพิสูจน์ให้เห็นจริง”

กลุ่มทดลองนาร่อง : ในจำนวนนักเรียน 12 คน มีนักเรียนจำนวน 4 คน ที่สามารถ
เขียนแสดงคำตอบได้อย่างสมบูรณ์ มีนักเรียนจำนวน 5 คน มีแนวคิดในการใช้อุปนัยเชิง
คณิตศาสตร์ แต่ยังไม่พร้อมเรื่องการเขียนพิสูจน์ และมีนักเรียนจำนวน 3 คน ใช้วิธีการทดลองแทน
ค่าในกรณีย่อยแล้วสรุปเป็นกรณีทั่วไป

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน สามารถตอบคำถามได้ โดยมีนักเรียน
จำนวน 10 คน ใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และมีนักเรียนจำนวน 13 คน ใช้วิธีอื่นๆ
ที่หลากหลายซึ่งมีความถูกต้อง เช่น การพิสูจน์โดยแบ่งกรณี ดังแสดงในภาคผนวก ฎ
ภาพประกอบ 14

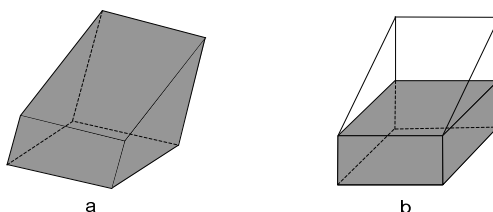
4.1.2 เนื้อหาหน่วยที่ 2 เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

4.1.2.1 ความสามารถด้านเนื้อหาระหว่างเรียน

กลุ่มทดลองนำร่อง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 12 คน มีความเข้าใจในนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด นักเรียนจำนวน 8 คนจาก 12 คน ไม่เข้าใจในบทพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน เข้าใจในนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม

4.1.2.2 ความสามารถด้านเนื้อหาหลังเรียน จากตัวอย่างโจทย์ที่ว่า “ให้ M เป็นภาชนะ โดยที่ถ้าใช้ M ตวงของเหลวตามรูป a จะได้ปริมาตร 10 ลูกบาศก์หน่วย และตวงของเหลวตามรูป b จะได้ปริมาตร 6 ลูกบาศก์หน่วย จงตรวจสอบว่าภาชนะ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่ ”



กลุ่มทดลองนำร่อง : ในจำนวนนักเรียน 12 คน มีนักเรียนจำนวน 6 สามารถเขียนอธิบายวิธีการตรวจสอบได้ดี และมีนักเรียนจำนวน 6 คน มีความเข้าใจในนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด แต่เขียนแสดงเหตุผลได้ไม่ครบทุกกรณี และเขียนสื่อความในวิธีการตวงบกพร่อง

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน เข้าใจในนิยาม และขั้นตอนของการหาคำตอบ โดยมีนักเรียนจำนวน 20 คน สามารถเขียนแสดงเหตุผลได้อย่างสมบูรณ์ มีนักเรียนจำนวน 1 คน ที่แสดงวิธีการตวงปริมาตรได้ไม่ครบทุกกรณีจึงทำให้ได้ข้อสรุปที่ผิดพลาด และมีนักเรียนจำนวน 2 คน ที่พยายามคำนวณปริมาตรของของเหลวโดยตรงโดยไม่อาศัยวิธีการเทเข้าออก ซึ่งทำให้ได้ปริมาตรของเหลวไม่ครบทุกกรณี ซึ่งนักเรียนทั้ง 2 คนนี้ ได้แสดงวิธีการหาคำตอบคล้ายกัน ดังแสดงในภาคผนวก ฅ ภาพประกอบ 15

4.1.3 เนื้อหาหน่วยที่ 3 เรื่องแอลติซ

4.1.3.1 ความสามารถด้านเนื้อหาระหว่างเรียน

กลุ่มทดลองนำร่อง : นักเรียนจำนวน 4 คนจาก 12 คน ไม่เข้าใจในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทของพีค ซึ่งอาศัยการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แบบเข้ม นักเรียนจำนวน 8 คนจาก 12 คน ไม่เข้าใจในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เรื่องระยะทางที่เป็นจำนวนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน มีความเข้าใจในการพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีค นักเรียนจำนวน 17 คนจาก 23 คน ไม่เข้าใจในบางส่วนของบทพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับระยะทางที่เป็นจำนวนเต็ม

4.1.3.2 ความสามารถด้านเนื้อหาหลังเรียน จากตัวอย่างโจทย์ที่ว่า “ จงแสดงเหตุผลว่าทำไมในระนาบ R^2 ไม่มีรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแลตทิซ ”

กลุ่มทดลองนำร่อง : ในจำนวนนักเรียน 12 คน มีนักเรียนจำนวน 8 คน ที่สามารถอ้างทฤษฎีบทที่เคยพบมาแล้ว มาช่วยในการแสดงเหตุผล และมีนักเรียนจำนวน 4 คน ที่ไม่สามารถเขียนแสดงเหตุผลใดๆ ได้

กลุ่มตัวอย่าง : ในจำนวนนักเรียน 23 คน มีนักเรียนจำนวน 18 คน ที่พิสูจน์ว่าไม่มีรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแลตทิซในระนาบ R^2 โดยอาศัยแนวทางของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เคยพบก่อน มีนักเรียนจำนวน 4 คน ที่อ้างทฤษฎีบทที่เคยพบมาแล้วโดยไม่แสดงบทพิสูจน์ และมีนักเรียนจำนวน 1 คน ที่ไม่สามารถเขียนแสดงเหตุผลใดๆ ได้

4.1.4 เนื้อหาหน่วยที่ 4 เรื่องการหุ้มห่อและการบรรจุ

4.1.4.1 ความสามารถด้านเนื้อหาระหว่างเรียน

กลุ่มทดลองนำร่อง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 12 คน เข้าใจในนิยามและการพิสูจน์ทฤษฎีที่เกี่ยวกับการหุ้มห่อ นักเรียนจำนวน 5 คนจาก 12 คน ไม่เข้าใจเรื่องทรงตันบรรจุแบบดับเบิล

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน มีความเข้าใจในนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการหุ้มห่อ การบรรจุ และทรงตันบรรจุแบบดับเบิล

4.1.4.2 ความสามารถด้านเนื้อหาหลังเรียน จากตัวอย่างโจทย์ที่ว่า “ ในการห่อของขวัญทรงลูกบาศก์ขนาด 27 ลูกบาศก์นิ้ว ด้วยแถบกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยพื้นผิวของของขวัญต้องถูกปิดทับหมดโดยไม่มีการฉีก ไม่ตึงยืด และไม่พลิกหน้ากระดาษ โดยพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ต้องไม่เกิน 55 ตารางนิ้ว ให้นักเรียนกำหนดความกว้างของแถบกระดาษและหาพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ห่อเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น ”

กลุ่มทดลองนำร่อง : ในจำนวนนักเรียน 12 คน มีนักเรียนจำนวน 3 คน ที่สามารถกำหนดความกว้างของแถบกระดาษ และเขียนแสดงเหตุผลได้อย่างสมบูรณ์ มีนักเรียนจำนวน 4 คน มีแนวคิดในการประยุกต์บทพิสูจน์ของทฤษฎีที่เคยพบแล้วในชั้นเรียน แต่ยังคงมีความบกพร่องในบางขั้นตอน และมีนักเรียนจำนวน 5 คน ที่ไม่สามารถทำโจทย์ข้อนี้ได้

กลุ่มตัวอย่าง : ในจำนวนนักเรียน 23 คน มีนักเรียนจำนวน 1 คน ที่ไม่สามารถทำโจทย์ข้อนี้ได้ มีนักเรียนจำนวน 17 คน ที่สามารถกำหนดความกว้างของแถบกระดาษ และเขียนแสดงเหตุผลได้อย่างสมบูรณ์ และมีนักเรียนจำนวน 5 คน มีความบกพร่องในการกำหนดกระดาษห่อต้นแบบจึงทำให้กำหนดความกว้างของแถบกระดาษห่อผิดพลาด ซึ่งนักเรียนทั้ง 5 คนนี้กำหนดกระดาษห่อต้นแบบผิดพลาดเหมือนกัน ดังแสดงในภาคผนวก ญ ภาพประกอบ 16

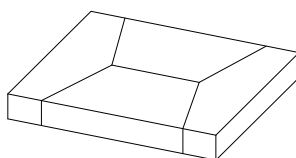
4.1.5 เนื้อหาหน่วยที่ 5 เรื่องการวัดแบ่งส่วนสมดุ

4.1.5.1 ความสามารถด้านเนื้อหาระหว่างเรียน

กลุ่มทดลองนำร่อง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 12 คน เข้าใจการแบ่งอาณาบริเวณจำกัดออกเป็นสองส่วน สี่ส่วนที่มีพื้นที่เท่ากัน นักเรียนจำนวน 10 คนจาก 12 คน ไม่สามารถประยุกต์เพื่อแบ่งอาณาบริเวณออกเป็นหกส่วนที่เท่ากันได้ นักเรียนจำนวน 4 คนจาก 12 คน ไม่เข้าใจในการแบ่งเค้กทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าและการวัดแผรีศมีอย่างสมบูรณ์

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน เข้าใจการแบ่งอาณาบริเวณจำกัดออกเป็นสองส่วน สี่ส่วนและหกส่วนที่มีพื้นที่เท่ากัน และเข้าใจในนิยามของการแบ่งเค้กอย่างสมบูรณ์ การแบ่งเค้กทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า และการวัดแผรีศมีอย่างสมบูรณ์

4.1.5.2 ความสามารถด้านเนื้อหาหลังเรียน จากตัวอย่างโจทย์ที่ว่า “ จงกำหนดความกว้าง ยาวของเค้ก ความยาวของรอยตัด และขนาดของมุมที่ใช้ในการตัด เพื่อให้การแบ่งเค้กฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสี่ชิ้น เป็นการแบ่งที่สมบูรณ์ ”



กลุ่มทดลองนำร่อง : ในจำนวนนักเรียน 12 คน มีนักเรียนจำนวน 7 คน สามารถกำหนดสัดส่วนต่างๆ ของเค้กได้อย่างถูกต้อง มีนักเรียนจำนวน 3 คน ที่มีความเข้าใจในนิยามแต่กำหนดสัดส่วนต่างๆ ของเค้กไม่ถูกต้อง และมีนักเรียนจำนวน 2 คน ที่ไม่เข้าใจในนิยามจึงคาดเดาสัดส่วนต่างๆ ของเค้กอย่างไร้หลักเกณฑ์

กลุ่มตัวอย่าง : นักเรียนทั้งหมดจำนวน 23 คน มีความเข้าใจในนิยามของการแบ่งที่สมบูรณ์ โดยมีนักเรียนจำนวน 21 คน สามารถกำหนดขนาดของมุมและสัดส่วนต่างๆ ได้อย่างถูกต้อง และมีนักเรียนจำนวน 2 คน ที่กำหนดสัดส่วนต่างๆ ของเค้กผิดพลาด ทำให้ได้เค้กที่มีครีมนไม่เท่ากัน

4.2 ข้อค้นพบด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.2.1 ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์

กลุ่มทดลองนำร่อง : โดยภาพรวมมีนักเรียนจำนวน 2 กลุ่มจาก 3 กลุ่ม สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ดีในเกือบทุกกิจกรรม มีนักเรียนจำนวน 1 กลุ่มจาก 3 กลุ่ม ที่พบความผิดพลาดในขั้นตอนของการเก็บข้อมูลในบางกิจกรรม ซึ่งส่วนใหญ่เป็นผลมาจากความเลินเล่อและอ่านคำสั่งไม่ชัดเจน และนักเรียนทั้งหมดจำนวน 3 กลุ่ม ยังบกพร่องเรื่องการเขียนบรรยายความและตอบคำถามไม่ครบถ้วน

กลุ่มตัวอย่าง : โดยภาพรวมนักเรียนทั้งหมดจำนวน 6 กลุ่ม สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ดี แต่ยังคงพร่องเรื่องการเขียนบรรยายความในกิจกรรมแรกๆ

4.2.2 ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์

กลุ่มทดลองนำร่อง : โดยภาพรวมนักเรียนจำนวน 2 กลุ่มจาก 3 กลุ่ม สามารถเขียนแสดงขั้นตอนการหาข้อสรุปได้ดี มีนักเรียนจำนวน 1 กลุ่มจาก 3 กลุ่ม ที่ยังคงพร่องในบางกิจกรรม โดยหาข้อสรุปไม่ครบถ้วน เช่น ในกิจกรรมเรื่องการตวงด้วยภาชนะฐานสามเหลี่ยม ดังแสดงในภาคผนวก ฎ ภาพประกอบ 17

กลุ่มตัวอย่าง : โดยภาพรวมนักเรียนทั้งหมดจำนวน 6 กลุ่มหาสามารถหาข้อสรุปได้ถูกต้อง แต่มีบางกิจกรรมที่บางกลุ่มมีความบกพร่องเรื่องการเขียนแสดงรายละเอียด และการกำหนดค่าตัวแปร เช่น ในกิจกรรมเรื่องหอคอยแห่งฮานอย ดังแสดงในภาคผนวก ฎ ภาพประกอบ 18

4.2.3 ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

กลุ่มทดลองนำร่อง : โดยภาพรวมนักเรียนทั้งหมดจำนวน 3 กลุ่ม เขียนแสดงยืนยันข้อสรุปได้ไม่ดี มีความบกพร่องในหลายกิจกรรม โดยบางกิจกรรมที่ซับซ้อนนักเรียนไม่สามารถทำได้เสร็จภายในเวลาที่กำหนด เช่น ในกิจกรรมเรื่องทฤษฎีบทของพีค ที่ทุกกลุ่มทำได้เฉพาะกรณีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และสามเหลี่ยมมุมฉาก

กลุ่มตัวอย่าง : โดยภาพรวมนักเรียนจำนวน 5 กลุ่มจาก 6 กลุ่ม สามารถเขียนแสดงยืนยันข้อสรุปได้อย่างสมเหตุสมผล โดยบางกิจกรรมสามารถทำได้เป็นอย่างดีมาก เช่น ในกิจกรรมเรื่องทฤษฎีบทของพีค มีนักเรียนจำนวน 1 กลุ่มจาก 6 กลุ่ม ที่สามารถเขียนแสดงเหตุผลได้อย่างครบถ้วนทุกกรณี และในกิจกรรมเรื่องการแบ่งเค้ก มีนักเรียนจำนวน 1 กลุ่มจาก 6 กลุ่ม ที่มีแนวคิดในการเขียนแสดงเหตุผลได้ดีเยี่ยม ดังแสดงในภาคผนวก ฎ ภาพประกอบ 19 และ 20 ตามลำดับ

4.3 ข้อค้นพบด้านพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.3.1 ด้านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์

โดยภาพรวมนักเรียนมีการร่วมกันอภิปรายเพื่อกำหนดตัวแปรที่สำคัญ และวางแผนถึงวิธีการเก็บข้อมูลจากการทดลอง โดยมักจะทดลองซ้ำเพื่อตรวจสอบข้อมูลที่ได้ในกิจกรรมที่ต้องใช้อุปกรณ์ โมเดล เช่น กิจกรรมเรื่องการตวงน้ำเต้าหู้ และหอคอยแห่งฮานอย มากกว่ากิจกรรมที่เก็บข้อมูลโดยอาศัยการคำนวณเพียงอย่างเดียว เช่น กิจกรรมเรื่องระยะทางที่เป็นจำนวนเต็ม และในบางกิจกรรมที่ซับซ้อน เช่น กิจกรรมเรื่องทฤษฎีบทของพีค และการตวงน้ำเต้าหู้ด้วยภาชนะฐานสามเหลี่ยม นักเรียนจะแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกลุ่มเพื่อตรวจสอบความถูกต้องก่อนสร้างข้อความคาดการณ์

4.3.2 ด้านการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์

โดยภาพรวมนักเรียนแต่ละกลุ่มมีความคิดเห็นที่หลากหลายในการสร้างข้อความคาดการณ์ โดยมักจะย้อนกลับไปเก็บข้อมูลหรือแลกเปลี่ยนข้อมูลกับกลุ่มอื่นเพื่อตรวจสอบหรือหักล้างข้อความคาดการณ์ที่สมาชิกในกลุ่มสร้างขึ้น โดยในขั้นตอนการหาข้อสรุปนี้ นักเรียนจะมีการอภิปรายกันอย่างกว้างขวาง

4.3.3 ด้านการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

โดยภาพรวมนักเรียนมักตรวจสอบข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ โดยใช้หลักการ บทนิยาม ทฤษฎี ที่เชื่อมโยงกับความรู้พื้นฐานในเรื่องเรขาคณิต แต่ในกิจกรรมเรื่องหอคอยแห่งฮานอย มีนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มจาก 6 กลุ่ม ที่ยืนยันข้อความคาดการณ์โดยใช้แนวคิดของการแก้ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งเป็นความรู้ที่สูงกว่าในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ในกิจกรรมเรื่องรูปทรงตันบรรจุแบบดับเบิล นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้ง 6 กลุ่ม ยืนยันข้อสรุปโดยอาศัยการสร้างโมเดลเพิ่มเติมตามโมเดลต้นแบบ เพื่อนำมาประกอบกันเป็นรูปทรงลูกบาศก์ ซึ่งเป็นการให้เหตุผลเชิงปริภูมิ เป็นที่น่าสังเกตว่าในขั้นตอนของการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลนี้ นักเรียนมักแยกกันคิด และมักเขียนแสดงเหตุผลยืนยันข้อสรุปเพียงแบบเดียว

สรุปผลการศึกษาค้นคว้า

จากผลการศึกษาทั้งหมดพบว่า หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง อาจนำไปใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนอื่นๆ เมื่อพิจารณาจาก

1. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

2. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยมีจำนวนนักเรียนที่มีพฤติกรรมการให้เหตุผลอยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

4. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 3.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .05

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีการดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้มีความมุ่งหมายเพื่อ

1. เพื่อพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
2. เพื่อศึกษาประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
3. เพื่อศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ ภายหลังจากสิ้นสุดการใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

สมมติฐานการวิจัย

หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง อาจนำไปใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนอื่นๆ โดยพิจารณาจากผลการทดลองดังนี้

1. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
2. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
3. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยมีจำนวนนักเรียนที่มีพฤติกรรมการให้เหตุผลอยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด
4. นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี โดยได้คะแนนเฉลี่ยผ่านเกณฑ์ 3.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีการดำเนินการวิจัย

การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้แก่ นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวน 23 คน

ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย มี 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การศึกษาข้อมูลพื้นฐาน

ศึกษาข้อมูลพื้นฐานจากเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศ ตลอดจนสอบถามความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ศึกษา และคณะกรรมการควบคุมปริญญาโท ในหัวข้อต่อไปนี้

1. การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์
2. เรขาคณิตวิฤต
3. การประเมินหลักสูตร
4. แบบทดสอบอิงเกณฑ์
5. การให้เหตุผล
6. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 การสร้างและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

หลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ผู้วิจัยกำหนดจุดมุ่งหมายของหลักสูตรโดยมุ่งเน้นให้นักเรียนมีความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตวิฤต และมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล และกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริง และสามารถทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มได้ โดยหลักสูตรที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเป็นหลักสูตรเพื่อใช้สอนนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ใช้เวลา 34 ชั่วโมง ประกอบด้วยเอกสาร 3 เล่ม คือ

1. เอกสารประกอบการเรียน ประกอบด้วยเนื้อหา 5 หน่วย โดยในตอนท้ายของแต่ละหน่วยจะมีโจทย์ปัญหาสำหรับฝึกทักษะพร้อมเฉลย หน่วยที่ 1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผล และระเบียบวิธีการพิสูจน์ เวลา 6 ชั่วโมง หน่วยที่ 2 กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal

Measuring Boxes) เวลา 6 ชั่วโมง หน่วยที่ 3 แลตทิซ (Lattice) เวลา 6 ชั่วโมง หน่วยที่ 4 การหุ้มห่อและการบรรจุ (Wrapping and Packing) เวลา 6 ชั่วโมง และหน่วยที่ 5 การวัดแบ่งส่วนสมมูล (Equipartitions of Measures) เวลา 6 ชั่วโมง

2. แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิยุต ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของหลักสูตร และแผนการจัดการเรียนรู้ 10 แผน แผนละ 3 ชั่วโมง แต่ละแผนประกอบด้วย สารการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง สารการเรียนรู้ย่อย กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียน การวัดและการประเมินผล

3. เอกสารคู่มือครู ประกอบด้วย จุดมุ่งหมายของหลักสูตร กำหนดเวลาการสอนเรขาคณิตวิยุต และกรอบแนวการจัดการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย ข้อเสนอแนะ บทบาทของครู ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู และแนวการตอบการปฏิบัติกิจกรรม

ขั้นตอนการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดจุดมุ่งหมายของหลักสูตรโดยมุ่งเน้นให้นักเรียนมีความสามารถด้านเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต และมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล และกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริง และสามารถทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มได้

ขั้นที่ 2 สร้างหลักสูตรให้เป็นหลักสูตรเรขาคณิตวิยุตที่มีกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญโดยส่งเสริมให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากการปฏิบัติจริง ใช้เวลาเรียน 10 วัน วันละ 3 ชั่วโมง ทดสอบความสามารถด้านเนื้อหา 2 ครั้ง ครั้งละ 2 ชั่วโมง รวม 34 ชั่วโมง โดยหลักสูตรประกอบด้วย เอกสารประกอบการเรียน แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิยุต เอกสารคู่มือครู

ขั้นที่ 3 นำหลักสูตรเรขาคณิตวิยุตที่สร้างขึ้นไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบความถูกต้อง แล้วนำข้อเสนอแนะที่ได้มาแก้ไขปรับปรุง

ขั้นที่ 4 นำหลักสูตรที่ปรับปรุงแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน ประเมินความเหมาะสมและความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรโดยใช้แบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง แล้วนำคะแนนที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย โดยถ้าคะแนนเฉลี่ยของความเหมาะสมมีค่าตั้งแต่ 3.51 ขึ้นไป และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าไม่เกิน 1 และถ้าคะแนนเฉลี่ยของความสอดคล้องมีค่าตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป แสดงว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ผลปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของความเหมาะสมมีค่าตั้งแต่ 4.00 ถึง 4.67 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าตั้งแต่ 0.44 ถึง 0.85 และดัชนีความสอดคล้อง (IOC) มีค่าตั้งแต่ 0.67 ถึง 1.00

ขั้นที่ 5 นำหลักสูตรที่มีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนักร้องจำนวน 12 คน ซึ่งเป็นนักเรียนจากโรงเรียนอำนวยการศิลป์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 8 คน และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 4 คน เนื่องจากโรงเรียนอำนวยการศิลป์เป็นโรงเรียนที่มีผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2548 เป็นลำดับที่ 28 จากทั้งหมด 3,170 โรงเรียน ดังนั้นพอจะกล่าวได้ว่านักเรียนกลุ่มนักร้องนี้มีความสามารถในเนื้อหาคณิตศาสตร์ใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง นักเรียนกลุ่มนักร้องเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน (ดูนิยามศัพท์เฉพาะหน้า 6) นักเรียนกลุ่มนักร้องจำนวน 12 คน ผ่านการคัดเลือกจากนักเรียนที่สมัครเข้าร่วมโครงการจำนวน 20 คน โดยคัดเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงจำนวน 12 คนแรก เมื่อสิ้นสุดการทดลองนักร้อง นำผลที่ได้ไปปรับปรุงแก้ไขหลักสูตร แล้วนำหลักสูตรที่ปรับปรุง ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรตรวจสอบก่อนนำไปใช้ทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

ขั้นที่ 6 นำหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไปทดลองใช้เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร โดยกลุ่มตัวอย่างคือนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวน 23 คน มีกระบวนการการได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างคือ ดำเนินการประชาสัมพันธ์หลักสูตรเรขาคณิตวิฤตให้นักเรียนทราบล่วงหน้าถึงรายละเอียดของเนื้อหาวิชาเรขาคณิตวิฤต และคุณสมบัติพื้นฐานของผู้เรียนที่ต้องมีผลการเรียนเฉลี่ยรายวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 สองรายวิชาไม่ต่ำกว่า 3 และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน แล้วเปิดรับสมัครนักเรียนเข้าร่วมโครงการ ซึ่งมีนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์สนใจสมัครเข้าร่วมโครงการจำนวน 23 คน จากนั้นนำผลที่ได้จากการทดลองไปวิเคราะห์เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตรต่อไป

ขั้นตอนที่ 3 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย

1. เครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ประกอบด้วย

1.1 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ได้แก่ แบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิฤต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มี 3 ตอนคือ ประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตร ประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร และสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

1.2 เครื่องมือวัดประสิทธิภาพด้านผลการใช้หลักสูตร ประกอบด้วย

1.2.1 เครื่องมือวัดความสามารถด้านเนื้อหา ได้แก่ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งเป็นแบบอัตนัยแสดงวิธีคิด จำนวน 2 ฉบับ ฉบับที่ 1 วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 1

ถึง 3 มี 5 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน ใช้ทดสอบเมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยที่ 3 แล้ว ฉบับที่ 2 วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 4 และ 5 มี 5 ข้อ คะแนนเต็ม 20 คะแนน ใช้ทดสอบเมื่อนักเรียนเรียนจบหน่วยที่ 5 แล้ว รวมคะแนนเต็มทั้งสองฉบับคือ 40 คะแนน ใช้เวลาสอบ ฉบับละ 2 ชั่วโมง

1.2.2 เครื่องมือวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม ซึ่งเป็นแบบรายงานที่ให้นักเรียนใช้เขียนแสดงผลของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล มีเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูปรีค 4 ระดับ ดังนี้ 0 : ต้องแก้ไข 1 : พอใช้ 2 : ดี และ 3 : ดีมาก จำนวน 10 ฉบับ

1.2.3 เครื่องมือวัดพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ แบบสำรวจรายการ ซึ่งครูใช้บันทึกข้อมูลจากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงออกระหว่างปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มในพฤติกรรมการให้เหตุผล 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล มีรายการประเมินเป็นพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกในแต่ละด้าน รวม 14 รายการ

ขั้นตอนการพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
มีดังนี้

1. การพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ
ขั้นที่ 1 นำแบบประเมินความคิดเห็นเกี่ยวกับโครงสร้างหลักสูตรทฤษฎีจำนวนที่พัฒนาโดย นิตติยา ปภาพจน์ (2540: 140-151) แบบประเมินความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญเกี่ยวกับโครงสร้างหลักสูตรพีชคณิตที่พัฒนาโดย ยุพร ริมชลการ (2543: 259-267) และแบบประเมินความคิดเห็นเกี่ยวกับโครงสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์เบื้องต้นที่พัฒนาโดย จีรรัตน์ สุวรรณ (2546: 71-78) มาปรับปรุงให้เป็นแบบประเมินโครงสร้างของหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

ขั้นที่ 2 นำแบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงที่ปรับปรุง ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญา นินพธ์ตรตรวจสอบความถูกต้อง นำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขเพื่อใช้เป็นแบบประเมินโครงสร้างหลักสูตรต่อไป

2. การพัฒนาเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร

ขั้นที่ 1 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำนวน 2 ฉบับ เพื่อวัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 1 ถึง 3 และใช้วัดความสามารถด้านเนื้อหาหน่วยที่ 4 และ 5 สร้างแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม จำนวน 10 ฉบับ สำหรับแต่ละแผนจัดการเรียนรู้ และนำแบบสำรวจรายการของกรมวิชาการ (2539: 46-48) มาปรับปรุงเป็นแบบสำรวจรายการเพื่อให้ครูใช้บันทึกพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นที่ 2 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่สร้างขึ้น พร้อมนำแบบสำรวจรายการที่ปรับปรุงแล้ว ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์ ตรวจสอบความเหมาะสม และความถูกต้องทั้งในแง่เนื้อหาและภาษาที่ใช้ แล้วนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการที่ได้ปรับปรุงแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญ 3 คนประเมินด้วยแบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบประเมินแบบสำรวจรายการ ผลปรากฏว่า แบบประเมินทั้งสามมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) เป็น 1.00

ขั้นที่ 4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการที่ปรับปรุงแล้วไปทดลองกับนักเรียนกลุ่มนำ จำนวน 12 คน นำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมาหาความเชื่อมั่นโดยวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบัก (Cronbach alpha procedure) หาค่าอำนาจจำแนกและค่าความยากง่าย โดยคัดเลือกเฉพาะข้อคำถามที่มีค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.2 ถึง 1.0 และค่าความยากง่ายระหว่าง 0.2 ถึง 0.8 ผลปรากฏว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความเชื่อมั่นตามวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบัก (Cronbach alpha procedure) เท่ากับ 0.846 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.34 ถึง 0.76 และค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.56 ถึง 0.78

2. แบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เป็นแบบทดสอบวัดเกี่ยวกับความรู้สึก ทศนคติ และความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายหลังจากมีประสบการณ์ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจแสดงความรู้สึกในทางบวก คือ พอใจ ชอบ เห็นด้วย หรือแสดงความรู้สึกในทางลบ คือ ไม่พอใจ ไม่ชอบ ไม่เห็นด้วย จำนวน 30 ข้อ พัฒนาจากแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของ สมพร แผลงภู (สมพร แผลงภู. 2541: 203-206)

ขั้นตอนการพัฒนาแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของสมพร แผลงภู ซึ่งหาคุณภาพโดยใช้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มาปรับปรุงภาษาและข้อคำถามให้เหมาะสมกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เพื่อใช้เป็นแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัย

ขั้นที่ 2 นำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ที่สร้างในขั้นที่ 1 ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาานิพนธ์ตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม ความเป็นไปได้และภาษาที่ใช้ แล้วนำคำแนะนำและข้อเสนอแนะที่ได้มาทำการปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 3 นำแบบวัดเจตคติที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปสอบถามกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แผนวิทย์-คณิต โรงเรียนราชินี และโรงเรียนอำนวยการศิลป์ (ดูขั้นที่ 5 ของขั้นตอนการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิชุด) ทั้งหมดจำนวน 200 คน เนื่องจากนักเรียนจากโรงเรียนอำนวยการศิลป์

มีจำนวน 60 คน ซึ่งไม่เพียงพอกับจำนวนที่ต้องการ จึงคัดเลือกนักเรียนที่เหลือจากโรงเรียนราชินี ซึ่งเป็นโรงเรียนที่มีผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2548 เป็นลำดับที่ 21 จากทั้งหมด 3,170 โรงเรียน ดังนั้นพอจะกล่าวได้ว่านักเรียนทั้ง 200 คน มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ใกล้เคียงกับกลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำผลที่ได้จากแบบวัดเจตคติมาคำนวณหาค่าอำนาจจำแนกของแต่ละข้อโดยหาค่าสหสัมพันธ์ โดยคัดเลือกเฉพาะข้อคำถามที่มีค่าอำนาจจำแนกมากกว่าศูนย์ และหาคุณภาพของแบบวัดทั้งฉบับ โดยหาความเชื่อมั่นของเครื่องมือวัด (Reliability) ด้วยวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach alpha procedure) ผลปรากฏว่า แบบวัดเจตคติมีความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.9177 และข้อคำถามมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.1949 – 0.7247

ขั้นที่ 4 นำแบบวัดเจตคติทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงและหาคุณภาพแล้ว ไปทดลองกับกลุ่มนักร้อง จำนวน 12 คน แล้วนำผลที่ได้จากการวิจัยนักร้องไปปรับปรุงแก้ไขแบบวัดเจตคติทางคณิตศาสตร์ ก่อนนำไปใช้จริงในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

3. แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่

3.1 แบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบ่งเป็น 2 ตอน คือ ประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับเนื้อหาในแต่ละหน่วย และสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

3.2. แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม แบ่งเป็น 2 ตอน คือ ประเมินความสอดคล้องของแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร และสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

3.3 แบบประเมินแบบสำรวจรายการ แบ่งเป็น 2 ตอน คือ ประเมินความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการ กับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และสอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

ขั้นตอนการพัฒนาแบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

มีดังนี้

ขั้นที่ 1 นำแบบประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบอิงเกณฑ์วัดความรู้และความสามารถในเนื้อหาทฤษฎีจำนวนที่พัฒนาโดย นิตติยา ปภากจน์ (2540: 185-188) แบบประเมินความสอดคล้องของแบบทดสอบอิงเกณฑ์เพื่อวัดความรู้และความสามารถในเนื้อหา คอมบินาทอริกเบื้องต้นที่พัฒนาโดย จีรัตน์ สุวรรณ (2546: 79-81) มาปรับปรุงให้เป็นแบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบประเมินแบบสำรวจรายการ

ขั้นที่ 2 นำแบบประเมินทั้ง 3 ฉบับไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาโทตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสม แล้วนำข้อเสนอแนะที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขจนได้เป็นแบบประเมินฉบับสมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 การทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การทดลองใช้หลักสูตรและเก็บรวบรวมข้อมูลผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้วิจัยขอหนังสือขอความอนุเคราะห์เก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัย เพื่อทำปริญญา
นิพนธ์จากบัณฑิตวิทยาลัยเพื่อนำไปขอความอนุเคราะห์จากโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์

ขั้นที่ 2 ผู้วิจัยนำหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มี
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ไปทดลองใช้เพื่อหาประสิทธิภาพของหลักสูตร โดยกลุ่มตัว
อย่างคือนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์สูง และผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานตามที่กำหนดมาก่อน จำนวน 23 คน มี
กระบวนการที่ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างคือ ดำเนินการประชาสัมพันธ์หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตให้
นักเรียนทราบล่วงหน้า ผ่านหัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์และอาจารย์ผู้ประสานงาน จากนั้นรับ
สมัครนักเรียนเข้าร่วมโครงการ

ผู้วิจัยทดลองสอนกลุ่มตัวอย่างด้วยตนเอง โดยดำเนินการสอนในเวลาเรียนปกติ ในภาค
การ ศึกษาต้น ปีการศึกษา 2549 ใช้เวลาทั้งสิ้น 34 ชั่วโมง ในระหว่างการสอนมีการปฏิบัติกิจกรรม
กลุ่มและวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม
วัดพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยแบบสำรวจรายการ โดยหลังจากสิ้นสุด
การสอนหน่วยที่ 3 และหน่วยที่ 5 ผู้วิจัยจะนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ฉบับที่ 1 และ
2 ไปทดสอบกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างตามลำดับ แล้วนำข้อมูลที่ได้จากแบบรายงานผลการปฏิบัติ
กิจกรรม แบบสำรวจรายการ และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ไปวิเคราะห์หาประสิทธิ
ภาพของหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร นอกจากนี้หลังการทดลองเสร็จสิ้น ผู้วิจัยวัดเจตคติของ
กลุ่มตัวอย่างด้วยแบบวัดเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จากนั้นนำผลที่ได้ไปวิเคราะห์
เพื่อศึกษาและทดสอบสมมติฐานในการวิจัย

ขั้นตอนที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองมาวิเคราะห์ดังนี้

1. การทดสอบสมมติฐานข้อที่ 1 ใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) เพื่อทดสอบ
สัดส่วนของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ 75
2. การทดสอบสมมติฐานข้อที่ 2 ใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) เพื่อทดสอบ
สัดส่วนของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ 1.5
3. การทดสอบสมมติฐานข้อที่ 3 ใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) เพื่อทดสอบ
สัดส่วนของนักเรียนที่มีพฤติกรรมการให้เหตุผลอยู่ในเกณฑ์ดี
4. การทดสอบสมมติฐานข้อที่ 4 ใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) เพื่อทดสอบ
สัดส่วนของนักเรียนที่ผ่านเกณฑ์ 3.5

สรุปผลการวิจัย

จากการวิจัยพบว่าหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง อาจนำไปใช้กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนอื่นๆ ได้ เมื่อพิจารณาจาก

1. ผลการหาประสิทธิภาพของหลักสูตรด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งได้จากการประเมินของผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน พบว่าประเด็นต่างๆ ขององค์ประกอบของหลักสูตรมีความเหมาะสมเฉลี่ยตั้งแต่ 4.00 ถึง 4.67 และมีค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตั้งแต่ 0.44 ถึง 0.85 แสดงว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความเหมาะสมตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ และพบว่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ระหว่างประเด็นต่างๆ ขององค์ประกอบของหลักสูตรมีค่าตั้งแต่ 0.67 ถึง 1.00 แสดงว่าโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสอดคล้องตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

นั่นคือหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

2. ผลการหาประสิทธิภาพของหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร ซึ่งพิจารณาจากการวัดนักเรียนใน 3 ด้านคือ ด้านความสามารถด้านเนื้อหา ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และด้านพฤติกรรมกรการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.1 ด้านความสามารถด้านเนื้อหา พบว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถด้านเนื้อหา โดยสอบผ่านเกณฑ์ 75 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีประสิทธิภาพด้านความสามารถด้านเนื้อหา

2.2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยสอบผ่านเกณฑ์ 1.5 มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีประสิทธิภาพด้านความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.3 ด้านพฤติกรรมกรการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

สูง มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีมากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

3. ผลการประเมินเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งได้จากการทำแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่านักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี มากกว่าร้อยละ 75 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานของการวิจัย นั่นคือด้วยความเชื่อมั่น 95% นักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

การอภิปรายผล

จากการวิจัยและพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง พบว่าหลักสูตรมีประสิทธิภาพ และนักเรียนที่เรียนหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีเจตคติอยู่ในเกณฑ์ดี โดยมีเหตุผลสนับสนุนดังนี้

1. ด้านประสิทธิภาพของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

1.1 เนื้อหาของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีสองส่วนคือ ความรู้พื้นฐาน ได้แก่ การให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ ส่วนที่สองเป็นเนื้อหาเรขาคณิตวิยุค ได้แก่ กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measuring Boxes) แลตทิซ (Lattice) การหุ้มห่อและการบรรจุ (Wrapping and Packing) และการวัดแบ่งส่วนสมดุลง (Equipartitions of Measures) แนวคิดในการคัดเลือกเนื้อหาพิจารณาถึงความเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยเป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาในโลกจริงที่พบได้ในชีวิตประจำวัน ทำให้นักเรียนรู้สึกว่าเป็นเรื่องใกล้ตัว ดึงดูดความสนใจ และกระตุ้นให้นักเรียนอยากศึกษา ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของทึเชนและคณะ (Thiessen, et al. 1989: 38) เกี่ยวกับการเลือกสถานการณ์ปัญหาที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ว่า ควรเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ทำให้นักเรียนรู้สึกว่ามีประโยชน์ น่าสนใจ ทำหาย หลากหลาย มีคุณค่าในเชิงนั้นทนาการ และนักเรียนรู้สึกสนุกกับการหาคำตอบ ซึ่งการจัดการ

เรียนรู้ที่ใช้สถานการณ์จริงที่สอดคล้องกับเนื้อหาจะเป็นประสบการณ์ที่มีความหมายและสำคัญต่อการเรียนรู้และช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนในชีวิตจริงได้ (Rey, Suydam & Lindquist. 1992: 44)

1.2 การจัดการเรียนการสอนเน้นที่ผู้เรียนเป็นสำคัญ มีวิธีการสอนแบบรวมทั้งชั้นเรียนและการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย

การสอนรวมทั้งชั้นเรียน ใช้วิธีการสอนแบบใช้ปัญหามาเข้าสู่บทเรียน ทำให้นักเรียนมีความรู้สึกท้าทาย อยากเรียนรู้ มีโอกาสในการคิด อภิปราย และแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ซึ่งช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียนมากขึ้น สอดคล้องกับ เบล (Bell. 1983: 205) ซึ่งกล่าวว่าการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แก้ปัญหาเป็นการสอนที่ให้นักเรียนได้เผชิญกับความขัดแย้ง (Conflict teaching) จะส่งผลต่อความคงทน และการถ่ายโยงความรู้มากกว่าการสอนแบบชี้แนะ (Direct teaching) โดยการสอนด้วยการบอกหรืออธิบายจะทำให้นักเรียนได้ความรู้แต่จะไม่ฝังใจ ซึ่งการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แก้ปัญหาจะเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้นำมโนคติทางคณิตศาสตร์มาใช้ จึงช่วยให้นักเรียนเห็นความเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และมีความแจ่มชัดใหม่มโนคติทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง (Riedesel, et al. 1996: 43)

การปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย ใช้วิธีการสอนแบบค้นพบ มีการจัดอุปกรณ์ โมเดลที่เหมาะสม เน้นส่งเสริมการให้เหตุผลของนักเรียน โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้จากการทดลองปฏิบัติจริง มีการสังเกต รวบรวมข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ ซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย และการตรวจสอบข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย จากนั้นเขียนแสดงผลที่ได้จากการปฏิบัติกิจกรรม ลงในแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม การปฏิบัติกิจกรรมดังกล่าวเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ค้นพบความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง ซึ่งทำให้นักเรียนมีศักยภาพทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล และคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลมากขึ้น สอดคล้องกับ ซันด์ (Sund. 1976: 184) ที่พบว่านักเรียนจะเรียนรู้ได้ดีที่สุดก็ต่อเมื่อได้เกี่ยวข้องโดยตรงกับการค้นคว้าหาความรู้โดยการจัดกิจกรรมที่จะนำไปสู่ความสำเร็จในการค้นคว้า และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ความคิดของตนเองอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งการจัดกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหาวิธีพิสูจน์ สังเกตรูปแบบ ชี้แจงเหตุผลของแนวคิด จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน (Lappan and Schram. 1989: 18-19) ในการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย จะจัดให้มีกลุ่มละ 4 คน เปิดโอกาสเสนอและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในกลุ่ม ร่วมกันอภิปรายตรวจสอบคำตอบที่ได้ จึงทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติที่ชัดเจน และลึกซึ้งขึ้น ทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี ซึ่งสอดคล้องกับ อัดัมและแฮมม (Adam and Hamm. 1990: 33) ที่กล่าวว่าการแก้ปัญหาร่วมกันเป็นกลุ่มจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จมากกว่าการแก้ปัญหาเพียงลำพังคนเดียว

1.3 บทบาทของครูในการจัดการเรียนการสอน กำหนดให้ครูมีหน้าที่อำนวยความสะดวกให้เกิดการเรียนรู้ สนับสนุนให้เกิดการพูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น แนวคิด ใช้คำถามกระตุ้นให้

เกิดการคิด ทำทนายให้เกิดการสำรวจ เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ และการตรวจสอบข้อความอย่างสมเหตุสมผล รวมถึงการให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียน ซึ่งแหล่งข้อมูลเพิ่มเติม ทำให้นักเรียนมีแรงจูงใจ ตื่นตัว พยายามในการค้นหาคำตอบ และภูมิใจในคำตอบ ซึ่งเป็นคำตอบที่นักเรียนได้ค้นพบด้วยตนเอง สอดคล้องกับเคททิน (Cattin, 1997: 3374-A) ที่พบว่านักเรียนชอบบทบาทของครูในฐานะที่เป็นผู้อำนวยการความสะดวกให้เกิดการเรียนรู้ เป็นแหล่งข้อมูล และเป็นผู้ให้การสนับสนุนความพยายามของนักเรียน

1.4 หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุตที่พัฒนาขึ้น เป็นหลักสูตรสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และเป็นนักเรียนที่ผ่านการเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานมาก่อน ดำเนินการสอนโดยเปิดเป็นรายวิชาเลือกในภาคเรียนปกติ ภาคการศึกษาต้น ปีการศึกษา 2549 โดยเริ่มดำเนินการประชาสัมพันธ์หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต แล้วเปิดรับสมัครนักเรียนซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว ซึ่งได้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ลงทะเบียนเรียนทั้งสิ้น 23 คน ในจำนวนนี้มีนักเรียนถึง 16 คน ที่ผ่านการอบรมจากมูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์ของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) จึงทำให้นักเรียนมีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดีมาก อีกทั้งยังได้รับการฝึกด้านการเขียนพิสูจน์มาก่อน จึงทำให้การเรียนเรื่อง ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ เป็นไปอย่างง่ายเหมือนการทบทวนสิ่งที่เคยเรียนรู้อยู่มาแล้ว ซึ่งระเบียบวิธีการพิสูจน์นับเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนเรื่องอื่นๆ ทำให้การศึกษาเรื่องต่อไปเป็นไปอย่างคล่องตัว

2. ด้านเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

2.1 เนื้อหาในหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาในโลกจริงที่พบได้ในชีวิตประจำวัน ส่งผลให้นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นเรื่องใกล้ตัว สามารถนำไปใช้ได้จริง เห็นประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สอดคล้องกับ ทิเชนและคณะ (Thiessen, et al. 1989: 38) ที่กล่าวว่าการศึกษาที่นักเรียนได้เผชิญสถานการณ์จริง จะทำให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์ รวมถึงสามารถมองเห็นว่าคณิตศาสตร์สัมพันธ์เกี่ยวข้องกับการใช้ชีวิตประจำวันทั้งในทางตรงและทางอ้อมอย่างไร

2.2 รูปแบบของการจัดการเรียนการสอน และการจัดกิจกรรมกลุ่มที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สืบสวนสอบสวนความรู้ด้วยตนเอง ผ่านการปฏิบัติกิจกรรมที่มีขั้นตอนของการทดลอง สังเกต เก็บรวบรวมข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ และตรวจสอบข้อความคาดการณ์ โดยใช้พื้นฐานความรู้ และทักษะที่มีมาก่อนของนักเรียนทำให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนรู้ และเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับท้าวอร์ (Taugaw, 1994: 2935-A) ที่พบว่าการสอนโดยให้นักเรียนได้ตั้งข้อความคาดการณ์ สำรวจ อภิปราย ตรวจสอบหาเหตุผลสนับสนุนและทำเป็นกรณีทั่วไปบนพื้นฐานความรู้ ทักษะ และเจตคติที่มีมาก่อนของนักเรียนโดยผ่านกระบวนการ

แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีผลทำให้ความสามารถในการแก้ปัญหาและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น

2.3 การปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ได้ช่วยเหลือสนับสนุนซึ่งกันและกัน ทำให้นักเรียนแต่ละคนได้มีส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรมตามความสามารถของตน รู้สึกเชื่อมั่นในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเอง ซึ่งส่งผลต่อเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สอดคล้องกับอดัมและแฮมม์ (Adam and Hamm. 1990: 33) ที่กล่าวว่า การใช้กระบวนการกลุ่มในการปฏิบัติกิจกรรมจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา มากกว่าการให้นักเรียนแก้ปัญหาเพียงลำพังคนเดียว และการประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาจะสามารถนำนักเรียนไปสู่เจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ได้

ข้อเสนอแนะ

จากการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และการทดลองใช้หลักสูตร ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ที่พัฒนาขึ้นเป็นหลักสูตรที่มีประสิทธิภาพ โดยผ่านการประเมินโดยผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้มาแล้วว่าใช้ได้ผลจริง สามารถทำให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต ส่งเสริมให้นักเรียนตระหนักและเห็นความสำคัญของการให้เหตุผล เข้าใจถึงกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการทำงานเป็นกลุ่มช่วยให้เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ไปประยุกต์เพื่อใช้แก้ปัญหาได้ ดังนั้นในการนำหลักสูตรไปใช้ ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ควรมีการทดลองใช้หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ในโรงเรียนอื่นๆ ที่มีความเหมาะสม
2. หลักสูตรเรขาคณิตวิยุต ให้ความสำคัญกับการพัฒนาการให้เหตุผล ดังนั้นเมื่อนำหลักสูตรไปใช้ครูต้องตระหนักถึงบทบาทที่เป็นเพียงผู้อำนวยความสะดวกตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตรรวมถึงมีความเข้าใจในเนื้อหาเป็นอย่างดี เพื่อให้การใช้หลักสูตรเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ
3. ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนมีเวลาในการปฏิบัติกิจกรรมมากขึ้น เพราะจะทำให้นักเรียนรู้สึกผ่อนคลาย ทำให้เกิดความคิดสร้างสรรค์ รวมถึงมีเวลาในการทบทวนคำตอบที่ได้
4. ครูควรขยายเวลาในการสอนเรื่องการให้เหตุผลและระเบียบวิธีการพิสูจน์ เพื่อปูพื้นฐานโดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ทดลองเขียนพิสูจน์ด้วยตนเอง

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุค สำหรับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระดับปกติ หรือสำหรับนักเรียนในช่วงชั้นอื่นๆ โดยปรับเนื้อหา กิจกรรม และระยะเวลาในการทำกิจกรรมให้เหมาะสม
2. ควรมีการพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตวิยุคเพิ่มเติม โดยคัดเลือกเนื้อหาใหม่ๆ รวมถึงพัฒนากิจกรรมที่น่าสนใจ ซึ่งสอดคล้องกับเนื้อหานั้นๆ โดยพิจารณาถึงความเหมาะสมกับระดับความสามารถ และระดับช่วงชั้นของนักเรียนที่ใช้หลักสูตร
3. ควรมีการวิจัยและติดตามผลระยะยาว (Longitudinal studies) เพื่อศึกษาว่าความสามารถ และพฤติกรรมในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความคงทนเพียงใด และมีการพัฒนาเพิ่มขึ้นหรือไม่ อย่างไร

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ. (2521). *หลักสูตรใหม่ (เอกสารแนะนำหลักสูตร ฉบับปรับปรุง)*
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์การศาสนา กรมการศาสนา
- .(2539). *การประเมินผลตามสภาพจริง*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.
- .(2541). *การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ*. กรุงเทพฯ: กระทรวงศึกษาธิการ
- .(2544). *หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. กรุงเทพฯ: ไทยร่มเกล้า.
- กรรณิการ์ วีระเวชเจริญชัย. (2526). *ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านจำนวน มติสัมพันธ์ และ
เหตุผลเชิงนามธรรมกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์* วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหา
บัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ่ายเอกสาร.
- กิตติ พัฒนตระกูลสุข. (2545-2546, พฤศจิกายน-ธันวาคม, มกราคม). “ การเรียนการสอนคณิตศาสตร์
ในระดับมัธยมศึกษาของประเทศไทยล้มเหลวจริงหรือ, ” *คณิตศาสตร์*. 46(530-532). 54-58.
- จรรยา ภูอุดม. (2544). *การพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นผู้เรียนเป็นผู้สร้าง
ความรู้*. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- .(2545, พฤษภาคม-กรกฎาคม). “ แนวการจัดการเรียนการสอนและการประเมินผลที่สอดคล้อง
คล้อยกับสาระที่ 6 ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์, ” *คณิตศาสตร์*. 46(524 - 526).14-37
- จรัสรัตน์ สุวรรณ. (2546). *การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เบื้องต้น สำหรับนักเรียนระดับมัธยม
ศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์*. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์
ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- จันทร์เพ็ญ ธนาศุภกรกุล. (2526). *ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
ความคิดสร้างสรรค์ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*. วิทยานิพนธ์ ครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ่ายเอกสาร.
- ฉวีวรรณ เศวตมาลย์. (2545). *การพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ:
สุวีริยาสาส์น.
- เชษฐา ชาบง. (2544). “รูบริค : อีกคำตอบสำหรับการวัดและประเมินผลเพื่อพัฒนาการเรียนรู้อตาม
สภาพที่แท้จริง,” *วารสารวิชาการ*. 4(2) : 42 – 45.
- ณรงค์ พ่วงศรี. (2525). *การสร้างแบบทดสอบการคิดอย่างมีเหตุผล*. วิทยานิพนธ์ ศศ.ม กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ถ่ายเอกสาร.
- เดชา นุ่นพันธ์. (2525). *ผลของการสอนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์ในด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
ความภูมิใจในตนเอง และทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1*.
วิทยานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่าย
เอกสาร.

- ทศนา แชมมณี (2528). “การประเมินผลหลักสูตร,” *รวมบทความทางการประเมินโครงการ*. บรรณาธิการโดยสมหวัง พิธิยานุวัฒน์. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- ธำรง บัวศรี. (2532). *ทฤษฎีหลักสูตร : การออกแบบและพัฒนา*. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.
- นฤมล แซ่เตี้ย. (2532). *ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์และเหตุผลเชิงนามธรรม กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เขตการศึกษา 11. วิทยานิพนธ์ ครุศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย* ถ่ายเอกสาร.
- นิตติยา ปภาพจน์. (2540). *การพัฒนาหลักสูตรทฤษฎีจำนวนเสริมสำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- บุญชม ศรีสะอาด. (2543). *การวิจัยเบื้องต้น*. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.
- บุญเชิด ภิญโญอนันตพงษ์. (2527). *การทดสอบอิงเกณฑ์ : แนวคิดและวิธีการ*. กรุงเทพฯ: โอเดียนสโตร์.
- (2542). “การวัดแบบอิงเกณฑ์” *สารานุกรมศึกษาศาสตร์*. กรุงเทพฯ: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2544). *กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- พรรณี ช.เจนจิต. (2538). *จิตวิทยาการสอน*. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: ดันอ้อ แกรมมี.
- พิชากร แปลงประสพโชค. (2540). *การพัฒนาหลักสูตรพิเศษทางเรขาคณิตเสริมสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- ยุพร ริมชลการ. (2543). *การพัฒนาหลักสูตรพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์. วิทยานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา)*. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2520, พฤศจิกายน-ธันวาคม). “วิธีสอนโดยการค้นพบ,” *คณิตศาสตร์*. 22(230-231). 3-7.
- (2527). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- (2528, มกราคม-กุมภาพันธ์). “แนวคิดในการสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย,” *คณิตศาสตร์*. 28(316-317). 24-48.
- (2541, กรกฎาคม-สิงหาคม). “การสอนโดยยึดนักเรียนเป็นศูนย์กลาง,” *คณิตศาสตร์*. 42(478-479). 2-8.
- วัลลภา แนวจำปา. (2528). *ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถทางเหตุผลเชิงนามธรรม ความคิดสร้างสรรค์ และความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของ*

- นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในเขตการศึกษา 10. วิทยานิพนธ์ คุรุศาสตรมหาบัณฑิต ภาค วิชามัธยมศึกษา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ่ายเอกสาร.
- วิชัย วงษ์ใหญ่. (2538). “ทฤษฎีและการพัฒนาหลักสูตร,” ใน *ประมวลสาระชุดวิชาการพัฒนาระบบการสอน = Instructional System Development* หน่วยที่ 1-4. กรุงเทพฯ: บัณฑิตศึกษา สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
- สังัด อุทรานันท์. (2532). *พื้นฐานและหลักการพัฒนาหลักสูตร*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มิตรสยาม.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: คุรุสภา.
- (2546). *คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์* กรุงเทพฯ: ศรีเมืองการพิมพ์.
- (2547). *การให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: เอส พี เอน การพิมพ์.
- สมชาย ประสิทธิ์จตุระกุล. (2544). *กัณฑ์คณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ด้านสุภาการพิมพ์.
- สมเจตน์ ไวยากรณ์. (2530). *รูปแบบการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการใช้เหตุผล*. ปรินญา นิพนธ์ กศ.ด. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- สมเดช บุญประจักษ์. (2540). *การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ*. ปรินญานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- สมพร แมลงภู. (2541). *การพัฒนารูปแบบเพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ* ปรินญานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- สวัสดิ์ ประทุมราช และคณะ. (2521). *การศึกษาความสอดคล้องระหว่างหลักสูตรการฝึกหัดครูกับหลักสูตรประถมศึกษา*. กรุงเทพฯ: ม.ป.ท.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.).
- สุภานันท์ เสถียรศรี. (2536). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ การคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยใช้แบบฝึกกิจกรรมการคิดกับการสอนตามคู่มือครู*. ปรินญานิพนธ์ กศ.ม.(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.
- สุภาพ วาดเขียน. (2525). *มาตรฐานและประเมินผลพฤติกรรม*. กรุงเทพฯ: ภาควิชาวิจัยการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุรศาล ผาสุข. (2546). *การศึกษาความสามารถและการคิดเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และผลในด้านเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย*. ปรินญานิพนธ์ กศ.ด.(คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.

- สุรางค์ โค้วตระกูล. (2544). *จิตวิทยาการศึกษา*. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.
- สุวัฒนา อุทัยรัตน์. (2525). "สมรรถภาพของครูคณิตศาสตร์," *เอกสารการสอนชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์หน่วย 1-7*. กรุงเทพฯ : สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2542). *พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545*. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิค.
- (2545). *แผนการศึกษาแห่งชาติ (พ.ศ.2545-2549) ฉบับสรุป*. กรุงเทพฯ: พริกหวานกราฟฟิค
- สำเร็จ บุญเรืองรัตน์. (2528, กันยายน - ธันวาคม). "แบบทดสอบแบบอิงเกณฑ์ : ความเที่ยงและความตรง," *วารสารการวัดผลการศึกษา*. 7(20) : 58 – 64.
- อนันต์ จันทร์กวี (2526). "การวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์," ใน*เอกสารการสอนชุดวิชาการสอนคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 8 - 15*. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.
- Adams, Dennis M. and Hamm, Mary E. (1990). *Cooperative Learning : Critical Thinking and Collaboration across the Curriculum*. Illinois: Charles C. Thomas.
- Akiyama, J. and Sakai, T. (1998). "Theorem and Problems in Basic Geometry Arisen from Everyday Life : Teaching Mathematical on Television,". *The Bulletin of The Research Institute of Education*. Tokai University (6) : 113 – 135.
- Akiyama, J., Kano, M. and Urabe, M. (1998). *Discrete and Computational Geometry*. Tokyo: Springer.
- Akiyama, J., Sakai, T., Torigoe, N., and Watanabe, Y.(2000). "Nonstandard Ways of Teaching Standard Mathematics II – Miscellaneous Properties of Circles,". *The Bulletin of The Research Institute of Education*. Tokai University (8) : 1 – 14.
- Anastasi, A. (1969). *Psychology Testing*. 3rd ed. New York : Mac-Millan.
- Baroody, A.J. (1993). *Problem Solving, Reasoning and Communication, K – 8 : Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmillan.
- Beauchamp, G.A. (1981). *A Curriculum Theory*. Itasca: F. E. Peacock.
- Bell, A. (1983). " *Diagnostic Teaching of Additive and Multiplicative Problems,*" in *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. R. Herscovics. P 205-210. Israel: Weizmann Institute of Science.
- Bobbitt, F. (1918). *The Curriculum*. Boston: Houghton Mifflin.
- Bruner, J.S. and Diver, R.R. (1966). *Studies in Cognitive Growth*. New York: John Wiley and Sons.
- Cattin, Deborah. (1997, May). " *A study of Self-Directed Learning in an Alternative Education Program for Adolescents,*" in *Dissertation Abstracts International*. 57(8). 3374-A. Michigan: Bell Howell.

- Coswell, H. T. & Campbell, D. S. (1985). *Curriculum Development*. New York: American Book.
- Cronbach, L.J.(1970). *Essential of Psychological Testing*. 3rd ed. New York: Harper Row.
- Dossey, J.A. (1991). "Discrete Mathematics : The Math for Our Time," in *Discrete Mathematics across the Curriculum K – 12* yearbook. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Glaser, R. and Klaus, D.J. (1962). "Proficiency Measurement : Assessing Human Performance," *Psychological Principles in Systems Development*. ed. R.,M. Gagene. New York: Holl, Rine hart and Winston.
- Good, C.V. (1963). *Dictionary of Education*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill.
- Good, T. and Brophy, J.E. (1994). *Looking in Classrooms*. 6th ed. New York: Harper-Collins.
- Goodman, J. and O' Rourke, J. (1997). *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. New York: CRC Press.
- Goodrich, H. (1997, January). "Understanding Rubrics," *Education Leadership (Teaching for Authentic Student Performance)*. 54(4) : 14 – 17.
- Greenwood, J.J. (1993, November). "On the Nature of Teaching and Assessing 'Mathematical Power' and 'Mathematical Thinking'," *Arithmetic Teacher*. 41(3) : 144 - 152.
- Guilford, J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.
- Guilford, J.P. and Hoepfner. (1971). *The Analysis of Intelligence*. New York: McGraw – Hill.
- Hambleton, R.K. et al. (1978, July). "Criterion Reference Testing and Measurement : A Review Technical Issue and Development, " *Review of Education Research*. 48(5) : 1 - 47
- Hart, E. (1991). "Discrete Mathematics : An Exciting and Necessary Addition to the Secondary School Curriculum," in *Discrete Mathematics across the Curriculum K – 12* yearbook. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Hillgard, E.R. (1967). *Introduction to Psychology*. New York : Harcourt, Brace and World.
- Kenneth, P.B. (1991). "The Roles of Finite and Discrete Mathematics in College and High School Mathematics". in *Discrete Mathematics across the Curriculum K – 12* yearbook. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. and Findel, B. (Eds.). (2001). *Adding it up : Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Krulik, S. and Rudnick, J.A. (1993). *Reasoning and Problem Solving : A Handbook for Elementary School Teacher*. Boston: Allyn and Bacon.

- Lappan, G. and Schram, P.W. (1989). "Communication and Reasoning : Critical Dimensions of Sense Making in Mathematics," in *New Directions for Elementary School Mathematics Yearbook*. P.14-30. Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Lasley, T.J., Matczynski, T.J., Rowley, J.B. (1997). *Strategies for Teaching in a Diverse Society : Instructional Models*. Belmont, CA: Wadworth.
- Lavatelli, C.S., Walter J.M. and Theodore, K. (1972). *Elementary School Curriculum*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Leshner, R.E. (1971, November). "A Study of Logical Thinking in Grade Four Through Seven." *Dissertation Abstracts International*. 32 : 2487 – A.
- Muthukrishna, Anbanithi. (1993, May). " *Training Mathematical Reasoning : Direct Explanation versus Constructivist Learning,*" in *Dissertation Abstracts International*. 53(11) : 3834 – 3835 – A. Michigan: Bell Howell.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathemaics*. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- (2000). *Principles and Standards for School Mathematics 2000*. Reston, Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- O' Daffer, P.G. (1990, May). "Inductive and Deductive Reasoning," *The Mathematical Teacher*. 93(6) : 378-380.
- O' Daffer, P.G. and Thornquist, B.A. (1993). "Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof ," in *Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics*. P. 39-56. New York: Macmillan.
- Oliva, P.F. (1982). *Developing the Curriculum*. Boston: Little, Brown and Company.
- Ornstein, A.C. and Lesley, T.M. (2002). *Strategies for Effective Teaching*. 3rd ed. New York: Mcgraw-Hill.
- Piaget, J and Inhelder, B. (1969). *The Psychology of The Child*. Translated by Helen Weaver. New York: Basic Book.
- Pollrand, G.J. (1979, November). "The Transition to Formal Thought," *Journal Research in Science Teaching*. 5(6) : 445 – 451.
- Popham, W.J. (1997, October). "What's Wrong – and What's Right – with Rubrics," *Educational Leadership (School as safe Havens)*. 55(2) : 72 – 78.
- Popham, W.J. and Husek, T.R.(1969). "Implication of Criterion – Referenced Measurement," *Journal of Educational Measurement*. 6 : 1 – 9.

- Ray, C.L. (1979, December). "A Comparative Laboratory Study of the Effects of Lower Level and Higher Level Questions on Students' Abstract Reasoning and Critical Thinking in two Non-Directive High School Chemistry Classroom," *Dissertation Abstracts International*. 40 : 3220 - A
- Rey, Robert E. et al. (1992). *Helping Children Learn Mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Riedesel, C. Alan. et. al. (1996). *Teaching Elementary School Mathematics*. New York: Allyn and Bacon.
- Rosenstein, J.G. (1997). *Discrete Mathematics in the School : An Opportunity to Revitalize School Mathematics*. Reston, Virginia: American Mathematical Society and The National Council of Teacher of Mathematics.
- Rowan, T.E. and Lorna, J.M. (1993). *Implementing the K-8 Curriculum and Evaluation Standards Reading From the Arithmetic Teacher*. Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Russell, S.J. (1999). "Mathematical Reasoning in the Elementary Grades," in *Developing Mathematical Reasoning in Grades K – 12 yearbook*. P.1. Virginia: The National Council of Teacher of Mathematics.
- Saylor, J.G, & Alexander, W.M. (1971). *Planning Curriculum for Schools*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Second, P.F. and Backman, C.W. (1964). *Social Psychology*. Tokyo: McGraw-Hill Koyakusha.
- Shaver, J. and Harold B. (1968). *Democracy, Pluralism and the Social Studies*. Boston: Houghton Mifflin.
- Slavin, Robert E. (1980, Summer). " *Cooperative Learning*," *Review of Educational Research*. 50(2) : 315-342.
- Smith, B.O., Stanley. W.O. & Shores. J.H. (1957). *Fundamentals of Curriculum Development*. New York: Harcourt Brace & World.
- Steele, Diana Fern. (1996, May). " *A Constructivist Approach to Mathematics Teaching and Learning by a Fourth – Grade Teacher*," in *Dissertation Abstracts International*. 56(11). 4309-A. Michigan: Bell Howell.
- Steffe, L.P. (1991). " Perspectives on Constructivism in Teacher Education," in *Radical Constructivism in Action : Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld*. New York: RoutledgeFalmer.
- Stufflebeam, D.L., et al. (1971). *Educational Evaluation and Decision Making*. Illinois: Peacock.

- Suchman, J. (1962). *The Elementary School Training Program in Scientific Inquiry*. Research Project 216. Washington, D.C.: US Office of Education.
- Sund, Robert B. (1976). *Piaget For Education : A Multimedia Program*. Ohio: Charles E. Merrill Publishing Company, A Bell & Howell Company, 184 p.
- Taba, H. (1962). *Curriculum Development : Theory and Practice*. New York : Harcourt, Brance and World.
- Tougaw, Paol William. (1994, February). “ A Study of the Effect of Using an Open “ Approach ” to Teaching Mathematics and Language Arts Classes,” in *Dissertation Abstracts International*. 54(8). 2934-2935-A. Michigan: Bell Howell.
- The Research Institute of Educational Development. (2000). “Mathematical Art in ICME9,” in *ICME9: The 9th International Congress on Mathematical Education*. Tokai University. Japan.
- Thiessen, D et al. (1989). *Elmentary Mathematical Method*. New York: Mocmillan.
- Thomas, Christine Darling. (1994, January). “ Constructivism and African-American student’ Confidence in Mathematics,” in *Dissertation Abstracts International*. 54(7). 2499-2500-A. Michigan: Bell Howell.
- Thurstone, L.L. (1967). “Attitude Can be Measured”. in *Attitude Theory and Measurement*. New York: John Willey and Sons.
- Tolbert, K. (2001). For Japanese Students, Less May Be More. (online) Available: / <http://www.washingtonpost.com>. Retrieved September 26, 2004.
- Tyler, R.(1949). *Basic Principles of Curriculum and Instruction*. Chicago: Universiy of Chicago Press.
- Wheller, D.K. (1974). *Curriculum Process*. University of London. London: Press Ltd.
- William, J.M. (1981, October). “A Comparison Study of the Tradition Teaching Procedures on Student Attitude, Achievement and Critical Thinking Ability in 11th Grade United States History,” *Dissertation Abstracts International*. 42(4) : 1605 – A.
- Worthen, B.R. and Sanders, J.R. (1973). *Educational Evaluation : Theory and Practice*. Ohio: Charles A. Jones.
- Zellman, G.L. and Sears, D.O. (1971, January). “Childhood Origins of Tolerance for Dissent,” *Journal of Social Issue*. 27(9). : 109-136.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ ผู้ช่วยวิจัย และนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ และผู้ช่วยวิจัย

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญที่ให้ความอนุเคราะห์ประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง และประเมินเครื่องมือวัดประสิทธิภาพหลักสูตรด้านผลการใช้หลักสูตร

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. รองศาสตราจารย์ ดร. วนิดา เหมะกุล | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. อาจารย์ ดร. สุรสาธิต ผาสุข | คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏธนบุรี |
| 3. อาจารย์รังสิมา สายรัตนทองคำ | สาขาวิชาคณิตศาสตร์
โรงเรียนมหิตลวิทย์านุสรณ์ |

รายชื่อผู้ช่วยวิจัย

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. อาจารย์ไพโรจน์ น่วมน่วม | นิสิตปริญญาเอกสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |
|----------------------------|---|

รายชื่อนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีจำนวน 23 คน ได้แก่

1. นายณัฐวุธ มหิทธิหาญ
2. นายปรัชญา ลีนะเปสนันท์
3. นายปิยวัฒน์ มาตระกูล
4. นายณัฐเกียรติ ชัยเศรษฐกุล
5. นายอธิษฐ์ ชิตวรากร
6. นายฐิตชา ราชพิสุทธิกุล
7. นายทัศนันต์ นวลมณี
8. นายวรุฒิ สุขนทา
9. นายกานต์ อุดมแสงเพชร
10. นายธนภูมิ จงอุดมเกียรติ
11. นายวาทิศ เปี่ยมสัมฤทธิ์
12. นายวาทิ ศรีนิล
13. นายปพจน์ ธรรมเจริญพร
14. นายจอมธนา ไตรรัตน์วงศ์
15. นายณัฐพล ประชาเดชะ
16. นายทรงภพ ตันโชติกุล
17. นายนวิณ ปิติพรวิวัฒน์
18. นายปฏิภาณ ประเสริฐสม
19. นายสุภกฤษณ์ พนาสวัสดิ์วงศ์
20. นางสาวมุกุชเรขา ตั้งกิตติสุวรรณ
21. นางสาวศันสนีย์ เชิดชูธรรม
22. นายกัมปนาท เขมดำรง
23. นายฉายฉันท์ สร้อยศรีทอง

ภาคผนวก ข

หลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

- เอกสารประกอบการเรียน (หน่วยที่ 2)
- แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิद्यุต (แผนที่ 3 และ 4)
- เอกสารคู่มือครู (หน่วยที่ 2)

เอกสารประกอบการเรียน (หน่วยที่ 2)

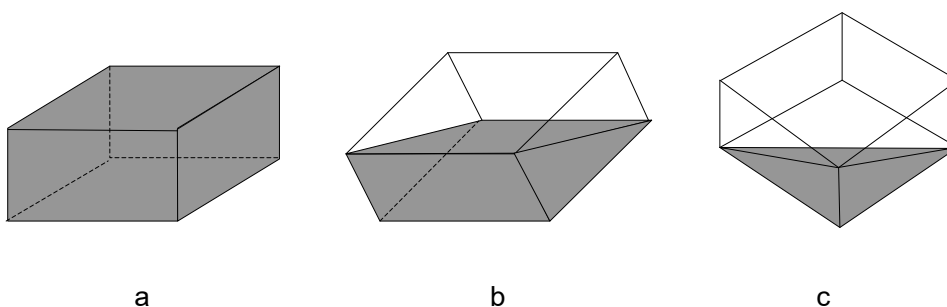
หน่วยที่ 2

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)

บทนำ

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนคงเคยได้พบเห็นเหตุการณ์เกี่ยวกับการวัดความยาว การหาพื้นที่ การหาปริมาตร เช่น การตวงเครื่องปรุงเพื่อประกอบอาหาร การชั่งข้าวสารหรือเนื้อหมู เพื่อจำหน่าย ซึ่งเห็นได้ว่าการชั่งตวงวัดเหล่านี้ ถ้าต้องการความแม่นยำในการวัด จำเป็นต้องมีสเกลหรือมาตรวัด เพื่อบอกขนาดหรือปริมาณ ถ้านักเรียนอยู่ในสถานการณ์ที่จำเป็นต้องตวงของเหลวให้ได้ตามปริมาตรที่กำหนดด้วยภาชนะที่ไม่มีมาตรวัด นักเรียนจะมีวิธีการตวงของเหลวนั้นได้อย่างไร

ในประเทศญี่ปุ่นมีการใช้กล่องสี่เหลี่ยมที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ ซึ่งมีความจุ 6 ลิตร ในการตวงของเหลวตั้งแต่ขนาด 1 ลิตร จนถึง 6 ลิตร โดยใช้เทคนิคการตวงของเหลวขนาด 6 ลิตร 3 ลิตร และ 1 ลิตร ดังรูป 1

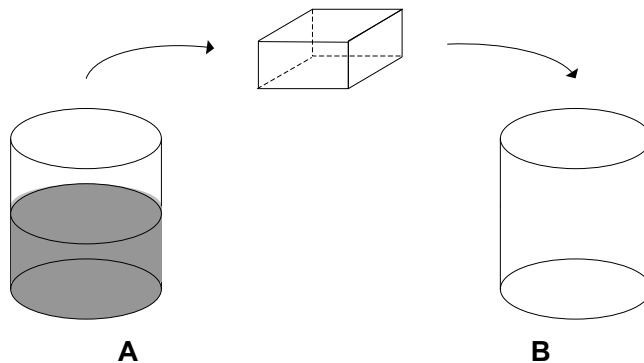


รูป 1

สำหรับการตวงของเหลวขนาด 2 ลิตร จะทำได้โดยการเริ่มตวงของเหลวขนาด 3 ลิตรดังรูป 1b แล้วเทของเหลวออกจนเหลือของเหลวในภาชนะ 1 ลิตรดังรูป 1c ทำให้ได้ว่าของเหลวที่เทออกไปมีปริมาตร 2 ลิตร ในการตวงของเหลวขนาด 4 ลิตร และ 5 ลิตร ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

นิยาม ให้ M เป็นภาชนะที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ และมีความจุ k ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ k เป็นจำนวนนับใดๆ จะเรียก M ว่าเป็น **กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)** ถ้าสามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวได้ตั้งแต่ขนาด 1, 2, 3, ..., k ลูกบาศก์หน่วย โดยกระบวนการการตวงของเหลวต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของการตวง 2 ข้อ

M



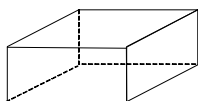
รูป 2

สำหรับการใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ใส่ยังภาชนะ B

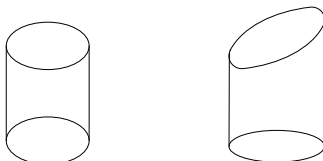
- อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ได้เพียงครั้งเดียว และสามารถเทของเหลวจากภาชนะ M กลับคืนภาชนะ A หรือเทใส่ยังภาชนะ B ก็ครั้งก็ได้ตามต้องการ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตักของเหลวคืนจากภาชนะ B
- ในการตวงของเหลวจะใช้เฉพาะจุดมุมของภาชนะ M เป็นเกณฑ์ในการตวง (ดูรูป 1) และ จุดมุมของผิวหน้าของของเหลวในภาชนะ M จะอาศัยจุดมุมของภาชนะ M อย่างน้อย 3 จุด

หมายเหตุ เมื่อกล่าวถึงการตวงของเหลวตั้งแต่นี้เป็นต้นไป จะหมายถึงการตวงของเหลวตามเงื่อนไข 1 และ 2

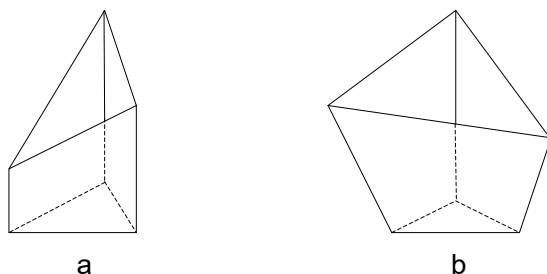
ตัวอย่างที่ 1 ภาชนะฐานสี่เหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสี่ตั้งฉากกับฐาน ซึ่งมีความสูงทั้งสี่ด้านเท่ากัน และมีความจุ 6 ลูกบาศก์หน่วย (ดูรูป) เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด



ตัวอย่างที่ 2 ภาชนะทรงกระบอก(ดูรูป) ไม่เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด(ทำไม ?)



เราสามารถแบ่งกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดเป็น 2 ประเภทคือ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน ดังรูป 3a และกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน ดังรูป 3b ซึ่งในหน่วยนี้จะศึกษาเฉพาะกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐานเท่านั้น



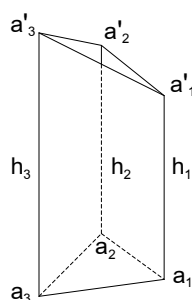
รูป 3

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

พิจารณาภาชนะทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน เพื่อความสะดวกในการคำนวณ สมมติให้ฐานของภาชนะนี้มีพื้นที่ 3 ตารางหน่วย และเรียกภาชนะนี้ว่า M ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาถึงเงื่อนไขที่ทำให้ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และความจุสูงสุดของ M ที่เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ในตอนท้ายจะกล่าวถึงทฤษฎีเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า M มีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ โดยที่ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ แล้วเราสามารถใส่ภาชนะ M ตวงของเหลวที่มีปริมาตรขนาด $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

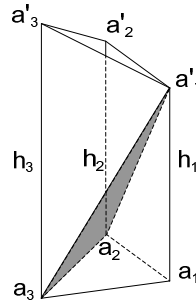
พิสูจน์ กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ เป็นจุดมุมทั้ง 6 จุดของภาชนะ M และให้ h_1, h_2, h_3 เป็นความสูงของทั้งสามด้านของภาชนะ M โดยที่ h_i เป็นระยะห่างระหว่าง a_i และ a'_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ ดังรูป 4



รูป 4

เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสามกรณี คือ

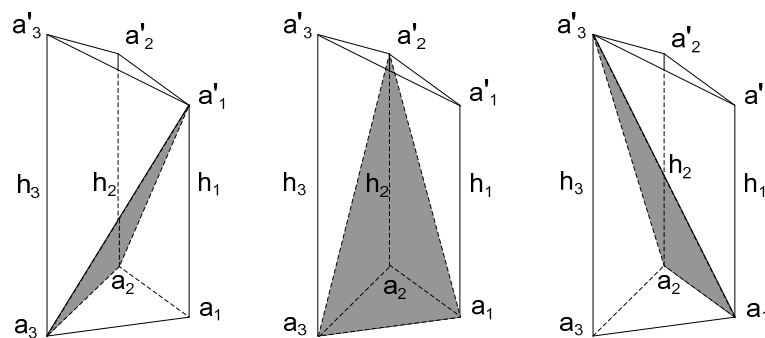
กรณีที่ 1 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด h_1, h_2 และ h_3 ลูกบาศก์หน่วย เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3 และ a'_1 ดังรูปที่ 5



รูป 5

เห็นได้ว่าของเหลวที่เหลืออยู่เป็นรูปทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยม ซึ่งมีความสูงเป็น h_1 หน่วย และมีฐานเป็นสามเหลี่ยม a_1, a_2, a_3 จากพื้นที่ฐานของ M เป็น 3 ตารางหน่วย ทำให้ได้ว่าปริมาตรของเหลวที่เหลืออยู่คือ $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot h_1 = h_1$ ลูกบาศก์หน่วย

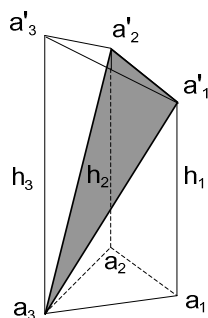
ในทำนองเดียวกันจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร h_2 ลูกบาศก์หน่วยและ h_3 ลูกบาศก์หน่วยได้โดยการเอียงภาชนะให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_2 และ a_1, a_2, a_3, a'_3 ตามลำดับ ดังรูป 6



รูป 6 แสดงการตวงของเหลวปริมาตร h_1, h_2 และ h_3 ลูกบาศก์หน่วย จากภาชนะ M

กรณีที่ 2 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด $h_1 + h_2, h_1 + h_3$ และ $h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_1 และ a'_2 ดังรูป 7



รูปที่ 7

จะเห็นได้ว่าของเหลวที่เหลืออยู่เป็นรูปทรงพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ที่มี a_1, a'_1, a'_2, a_2 เป็นฐาน สมมติให้ระยะห่างระหว่าง a_3 และเส้นตรงที่เชื่อม a_1 และ a_2 เป็น h เรียกรูปทรงของของเหลวที่เหลือนี้ว่า A

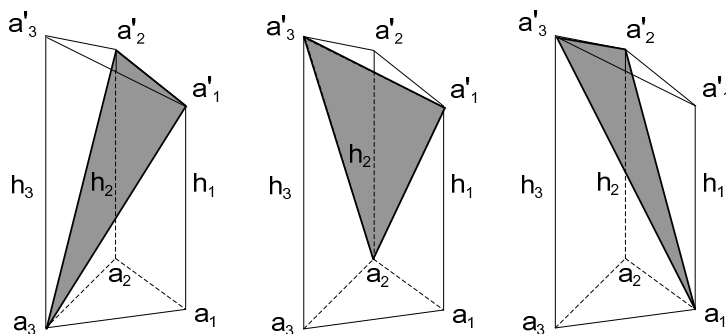
จากกรณีที่ 1 เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3 และ a'_1 ของเหลวจะมีปริมาตร h_1 ลูกบาศก์หน่วย (ดูรูป 5) สังเกตว่าของเหลวที่เหลือนี้ สามารถพิจารณาเป็นรูปทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีฐานเป็น a_1, a'_1, a_2 และมีระยะห่าง a_3 และเส้นตรงที่เชื่อม a_1 และ a_2 เป็น h (เหมือนรูปทรง A) เรียกรูปทรงของของเหลวที่เหลือนี้ว่า B

กำหนดระยะห่างระหว่าง a_1 และ a_2 เป็น h' โดยการเทียบสัดส่วนระหว่างปริมาตรและพื้นที่ฐานจะได้ว่า

$$\frac{\text{ปริมาตรรูปทรง A}}{\text{ปริมาตรรูปทรง B}} = \frac{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง A}}{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง B}} = \frac{\frac{h'(h_1+h_2)}{2}}{\frac{h_1 h'}{2}} = \frac{h_1+h_2}{h_1}$$

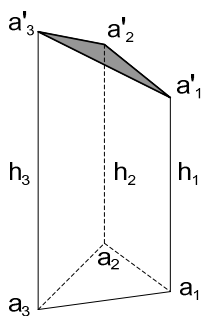
$$\begin{aligned} \therefore \text{ปริมาตรรูปทรง A} &= \frac{(h_1 + h_2)}{h_1} \text{ ปริมาตรรูปทรง B} \\ &= \frac{(h_1 + h_2)}{h_1} \cdot h_1 = h_1 + h_2 \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_1 และ a'_2 จะได้ของเหลวปริมาตร $h_1 + h_2$ ลูกบาศก์หน่วย ในทำนองเดียวกันเราสามารถวางของเหลวปริมาตร $h_1 + h_3$ และ $h_2 + h_3$ ได้โดยการเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวที่มีจุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_3$ และ $a_1, a_2, a_3, a'_2, a'_3$ ตามลำดับ ดังรูป 8



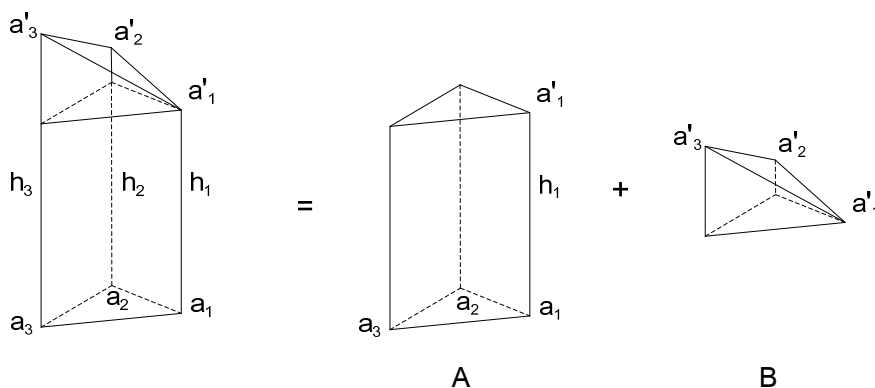
รูป 8 แสดงการตวงของเหลวปริมาตร $h_1 + h_2, h_1 + h_3$ และ $h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย จากภาชนะ M

กรณีที่ 3 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย ในกรณีนี้จะแสดงว่า การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวมียุคมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ (ดังรูป 9) จะได้ของเหลวปริมาตร $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย ซึ่งคือความจุของภาชนะ M



รูป 9

แยกพิจารณาภาชนะ M เป็นสองส่วนคือ A และ B ดังรูป 10



รูป 10

จะเห็นได้ว่าภาชนะ M ส่วนแรกมีความจุ $3h_1$ ลูกบาศก์หน่วย และจากกรณีที่สอง ภาชนะ M ส่วนที่สองมีความจุ $(h_2 - h_1) + (h_3 - h_1) = h_2 + h_3 - 2h_1$ ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ได้ว่าภาชนะ M สามารถบรรจุของเหลวปริมาตร $3h_1 + (h_2 + h_3 - 2h_1) = h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้นจากทั้งสามกรณี สรุปได้ว่า เราสามารถใช้ภาษาณะ M ดวงของเหลวปริมาตร $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ภาษาณะ M ที่มีความสูง 12, 13 และ 16 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ กำหนดให้ $h_1 = 12, h_2 = 13, h_3 = 16$ โดยทฤษฎีบทที่ 1 สามารถใช้ภาษาณะ M ดวงของเหลวปริมาตรขนาด 12, 13, 16, 25, 28, 29 และ 41 ลูกบาศก์หน่วยได้ ให้ $l_0 = 0, l_1 = h_1 = 12, l_2 = h_2 = 13, l_3 = h_3 = 16, l_4 = h_1 + h_2 = 25, l_5 = h_1 + h_3 = 28, l_6 = h_2 + h_3 = 29, l_7 = h_1 + h_2 + h_3 = 41$

กำหนดให้ $D = \{d_i \mid d_i = l_i - l_{i-1} \text{ โดยที่ } i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ดังนั้น $d_1 = 12, d_2 = 1, d_3 = 3, d_4 = 9, d_5 = 3, d_6 = 1, d_7 = 12$ และ $D = \{12, 1, 3, 9, 3, 1, 12\}$

สังเกตว่าสำหรับ $E \subseteq D$ จะได้ว่า $\sum_{d_i \in E} d_i$ เป็นปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาษาณะ

M ดวงได้ (สมมติให้การตวงครั้งนี้เป็นการตวงของเหลวจากภาษาณะ A ใส่ยังภาษาณะ B) เช่น

1. เมื่อ $E = \{d_2\}$ สังเกตว่า $d_2 = l_2 - l_1 = 13 - 12 = 1$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 1 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตวงของเหลวให้เต็มภาษาณะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวกลับคืนภาษาณะ A จนเหลือของเหลวในภาษาณะ M 13 ลูกบาศก์หน่วย
2. เทของเหลวจากภาษาณะ M ลงในภาษาณะ B จนเหลือของเหลวอยู่ในภาษาณะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ของเหลวในภาษาณะ B จะมีปริมาตร 1 ลูกบาศก์หน่วย

2. เมื่อ $E = \{d_2, d_6\}$ สังเกตว่า $d_6 + d_2 = (l_6 - l_5) + (l_2 - l_1) = (29 - 28) + (13 - 12) = 2$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตวงของเหลวให้เต็มภาษาณะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวกลับคืนภาษาณะ A จนเหลือของเหลวในภาษาณะ M 29 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวลงในภาษาณะ B จนเหลือของเหลวในภาษาณะ M 28 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาษาณะ B แล้ว 1 ลูกบาศก์หน่วย)
2. เทของเหลวจากภาษาณะ M ลงในภาษาณะ A จนเหลือของเหลวในภาษาณะ M 13 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวจากภาษาณะ M ลงในภาษาณะ B จนเหลือของเหลวในภาษาณะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ของเหลวในภาษาณะ B เพิ่มขึ้นอีก 1 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ของเหลวในภาษาณะ B จะมีปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย

3. เมื่อ $E = \{d_1, d_4, d_6, d_7\}$ สังเกต $d_7 + d_6 + d_4 + d_1 = (l_7 - l_6) + (l_6 - l_5) + (l_4 - l_3) + (l_1 - l_0) = (l_7 - l_5) + (l_4 - l_3) + l_1 = (41 - 28) + (25 - 16) + 12 = 34$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 34 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

- 1 ดวงของเหลวให้เต็มภาชนะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวลงในภาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาชนะ M 28 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาชนะ B แล้ว 13 ลูกบาศก์หน่วย)
 - 2 เทของเหลวจากภาชนะ M ลงในภาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาชนะ M 25 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวจากภาชนะ M ลงในภาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาชนะ M 16 ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ของเหลวในภาชนะ B เพิ่มขึ้นอีก 9 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาชนะ B แล้ว $13 + 9 = 22$ ลูกบาศก์หน่วย)
 - 3 ขั้นสุดท้าย เทของเหลวจากภาชนะ M คืนใส่ยังภาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาชนะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย แล้วเทของเหลวที่เหลือทั้งหมดลงในภาชนะ B ทำให้ของเหลวในภาชนะ B เพิ่มขึ้นอีก 12 ลูกบาศก์หน่วย
- ดังนั้น ของเหลวในภาชนะ B จะมีปริมาตร $13 + 9 + 12 = 34$ ลูกบาศก์หน่วย

จากตัวอย่างข้างต้น เห็นว่าเราสามารถใช้ภาชนะ M ดวงของเหลวให้ได้ปริมาตรต่างๆ กัน โดยมีการตวงขนาด l_0, l_1, \dots, l_7 เป็นพื้นฐาน สำหรับการตวงของเหลวให้ได้ปริมาตรขนาด 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 ลูกบาศก์หน่วย สามารถทำได้ตามกระบวนการข้างต้น (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

ดังนั้น เราสามารถใช้ภาชนะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย ตวงของเหลวปริมาตร 1, 2, ..., 41 ได้ นั่นคือ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

ข้อสังเกต สำหรับ $E = \{d_1, d_2, d_4, d_7\}$ จะตวงของเหลวได้ปริมาตร $d_7 + d_4 + d_2 + d_1$
 $= (l_7 - l_6) + (l_4 - l_3) + (l_2 - l_1) + (l_1 - l_0) = (l_7 - l_6) + (l_4 - l_3) + l_2 = (41 - 29) + (25 - 16) + 13$
 $= 12 + 9 + 13 = 34$ ลูกบาศก์หน่วย และจากตัวอย่างที่แสดงไว้ในบทพิสูจน์ข้างต้น พบว่าสามารถใช้ภาชนะ M ดวงของเหลวให้ได้ปริมาตร 34 ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ $E = \{d_1, d_4, d_6, d_7\}$
 นั่นคือเราสามารถตวงของเหลวให้ได้ปริมาตรเท่ากันด้วยขั้นตอนวิธีที่ต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 3 ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีด้านตั้งฉากกับฐาน คือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ ให้ M เป็นภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน ซึ่งมีพื้นที่ฐานเป็น 3 ตารางหน่วย และมีความสูงเป็นของด้านทั้งสามเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ

โดยไม่เสียไร้อะไรไปให้ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ และ $l_0 = 0, l_1 = h_1, l_2 = h_2, l_3 = h_3, l_4 = h_1 + h_2, l_5 = h_1 + h_3, l_6 = h_2 + h_3$ และ $l_7 = h_1 + h_2 + h_3$ ให้ $D = \{d_i \mid d_i = l_i - l_{i-1} \text{ โดยที่ } i = 1, 2, \dots, 7\}$ สังเกตว่าสำหรับแต่ละ $E \subseteq D, \sum_{d_i \in E} d_i$ เป็นปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาชนะ M ตวงได้

กรณีที่ 1 $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_1 + h_2 \leq h_1 + h_3 \leq h_2 + h_3 \leq h_1 + h_2 + h_3$

ดังนั้น $D = \{h_1, h_2 - h_1, h_3 - h_2, h_1 + h_2 - h_3, h_3 - h_2, h_2 - h_1, h_1\}$ ให้ $a = h_1$, $b = h_2 - h_1$, $c = h_3 - h_2$ และ $d = h_1 + h_2 - h_3$ สังเกตว่า $d = a - c$ ดังนั้นในเซต D มี a, b, c ปรากฏอย่างละสองครั้ง และ d ปรากฏเพียงครั้งเดียว

กำหนดให้ $U(i, j, k, l) = ia + jb + kc + ld$ เมื่อ $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ และ $l \in \{0, 1\}$ แทนปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาชนะ M ตวงได้ ซึ่งมีปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน $(3 \times 3 \times 3 \times 2) - 1 = 53$ แบบ จาก $d = a - c$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} U(i, j, k, l) &= ia + jb + kc + ld \\ &= (i + 1)a + jb + (k - 1)c + (l - 1)d \\ &= U(i + 1, j, k - 1, l - 1) \end{aligned}$$

เมื่อ $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \{1, 2\}$, $l = 1$

นั่นคือจะมีวิธีการตวงของเหลวจากภาชนะ M ด้วยวิธีที่แตกต่างกัน แต่ให้ปริมาตรของของเหลวเท่ากันอย่างน้อย $(2 \times 3 \times 2 \times 1) = 12$ แบบ ดังนั้นภาชนะ M สามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรแตกต่างกันไม่เกิน $53 - 12 = 41$ แบบ

กรณีที่ 2 $h_1 \leq h_2 \leq h_1 + h_2 \leq h_3 \leq h_1 + h_3 \leq h_2 + h_3 \leq h_1 + h_2 + h_3$

ดังนั้น $D = \{h_1, h_2 - h_1, h_1, h_3 - (h_1 + h_2), h_1, h_2 - h_1, h_1\}$ ให้ $a = h_1$, $b = h_2 - h_1$, $c = h_3 - (h_2 + h_1)$ สังเกตว่าในเซต D มี a ปรากฏ 4 ครั้ง b ปรากฏ 2 ครั้ง และ c ปรากฏเพียงครั้งเดียว

กำหนดให้ $U(i, j, k) = ia + jb + kc$ เมื่อ $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$ และ $k \in \{0, 1\}$ แทนปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาชนะ M ตวงได้ ซึ่งจะตวงได้ปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน $(5 \times 3 \times 2) - 1 = 29$ แบบ

จากทั้งสองกรณีสามารถสรุปได้ว่า กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน จะตวงของเหลวได้ปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน 41 แบบ และจากทฤษฎีบทที่ 2 ภาชนะ M ที่มีความสูง 12, 13 และ 16 เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย นั่นคือความจุของสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานคือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านตั้งฉากกับฐานโดยจะไม่แสดงบทพิสูจน์ไว้ เพราะมีขั้นตอนที่ซับซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4 ภาชนะ M ที่มีฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 6 ตารางหน่วย และมีความสูง 1, 32, 83, 691 หน่วย และ 2, 64, 166, 691 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

ทฤษฎีบทที่ 5 กล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีความจุสูงสุดมากกว่าหรือเท่ากับ 858 ลูกบาศก์หน่วย

เรื่องกล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ยังมีปัญหาเปิด (open problems) ที่น่าสนใจอีกมาก เช่น มีกล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานห้าเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานหรือไม่ ความสูงของแต่ละด้านควรเป็นเท่าใด ความจุสูงสุดของกล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานห้าเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานเป็นเท่าใด รวมถึงการขยายปัญหาสู่กรณีที่เปลี่ยนฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยม และการพิจารณากรณีกล้องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 2

1. จงแสดงวิธีการทวงของเหลวจากภาชนะ M ซึ่งเป็นภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 12, 13, 16 หน่วย ให้ได้ปริมาตรขนาด 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 ลูกบาศก์หน่วย
2. จากข้อ 1. จงยกตัวอย่างวิธีการทวงของเหลวจากภาชนะ M ด้วยวิธีที่ต่างกัน แต่ได้ปริมาตรของเหลวเท่ากัน
3. จงตรวจสอบว่าภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 4, 18, 19 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่
4. จงตรวจสอบว่าภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 4, 19, 22 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่
5. ให้ M เป็นภาชนะฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านตั้งฉากกับฐานและทุกด้านมีความสูงเท่ากัน จงหาความจุของ M ที่จะทำให้ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด
6. จงพิสูจน์ว่าความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านตั้งฉากกับฐานและทุกด้านมีความสูงเท่ากันคือ 6 ลูกบาศก์หน่วย

แผนการจัดการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตวิยุต (แผนที่ 3 และ 4)

จุดมุ่งหมายของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา
ตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

1. นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต
2. นักเรียนมีความสามารถและตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผล
3. นักเรียนมีความสามารถในการนำความรู้ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตจริงได้
4. นักเรียนเข้าใจในกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์
5. นักเรียนมีความสามารถในการทำงานเป็นกลุ่ม

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

บทนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

เวลา 3 ชั่วโมง

1. สาระการเรียนรู้

1.1 กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

บทนิยาม ให้ M เป็นภาชนะที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ และมีความจุ k ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ k เป็นจำนวนนับใดๆ จะเรียก M ว่าเป็น **กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)** ถ้าสามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวได้ตั้งแต่ขนาด 1, 2, 3, ..., k ลูกบาศก์หน่วย โดยกระบวนการตวงของเหลวต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของการตวง 2 ข้อ คือ

สำหรับการใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ใส่ยังภาชนะ B

1. อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ได้เพียงครั้งเดียว และสามารถเทของเหลวจากภาชนะ M กลับคืนภาชนะ A หรือเทใส่ยังภาชนะ B ก็ครั้งก็ได้ตามต้องการ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตักของเหลวคืนจากภาชนะ B
2. ในการตวงของเหลว เราจะใช้เฉพาะจุดมุมของภาชนะ M เป็นเกณฑ์ในการตวง และจุดมุมของผิวหน้าของของเหลวในภาชนะ M จะอาศัยจุดมุมของภาชนะ M อย่างน้อย 3 จุด

2. ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

2.1 นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดและกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

2.2 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐานไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

3. สาระการเรียนรู้ย่อย

ทบทวนเรื่องพื้นที่ และการหาปริมาตร

4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน (เนื้อหาเอกสารประกอบการเรียน หน่วยที่ 2 หน้า 12-14)

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยถามนักเรียนในชั้นให้ช่วยยกตัวอย่างเหตุการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องกับการวัดความยาว การหาพื้นที่ การหาปริมาตร เช่นการวัดความยาวของผ้าเพื่อจำหน่าย การรังวัดที่ดิน หรือการตวงเครื่องปรุงเพื่อประกอบอาหาร เป็นต้น

2. ครูทบทวนความรู้เรื่อง การหาพื้นที่และปริมาตรของรูปทรง โดยยกตัวอย่างโมเดลรูปหลายเหลี่ยมชนิดต่างๆ รูปทรงปริซึมสี่เหลี่ยม พีระมิดฐานสามเหลี่ยม และพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ที่มีการ

กำหนดความยาวของส่วนต่างๆ มาให้ แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาพื้นที่ และปริมาตรของรูปทรงดังกล่าว จากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปสูตรการหาพื้นที่และปริมาตรของรูปทรงต่างๆ

3. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าการวัดพื้นที่และปริมาตรข้างต้น จำเป็นต้องรู้ความยาวของส่วนต่างๆ จากนั้นครูยกตัวอย่างเทคนิคการวัดตามเอกสารคู่มือครู หน้า 27-29 แล้วให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงเทคนิคการวัดที่ง่ายต่อการจัดการตามตัวอย่าง

4. ครูแนะนำเทคนิคการตวงน้ำเต้าหู้ของญี่ปุ่นที่สามารถตวงน้ำเต้าหู้ให้ได้ปริมาตรต่างๆกัน โดยอาศัยกล่องไม้ที่ไม่มีมาตรวัดเพียงใบเดียว

5. ครูให้นักเรียนเข้ากลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คนตามที่แบ่งไว้แล้ว พร้อมแจกใบกิจกรรมที่ 3 และอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำกิจกรรม โดยให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาและตอบคำถามที่มีอยู่ในแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 3

6. ในระหว่างที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย ครูหมุนเวียนสังเกตการทำกิจกรรมของแต่ละกลุ่ม เข้าให้คำแนะนำช่วยเหลือเท่าที่จำเป็น ถ้ามีกลุ่มใดทำกิจกรรมเสร็จก่อน ครูให้นักเรียนกลุ่มนั้นทดลองหากล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดขนาดอื่นๆ หรือให้นักเรียนในกลุ่มนั้นช่วยกันคิดถึงรูปทรงอื่นๆ ที่สามารถเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดได้

7. ครูให้นักเรียนกลุ่มย่อยทุกกลุ่ม ออกมานำเสนอผลการปฏิบัติกิจกรรมหน้าชั้นเรียน โดยในการนำเสนอ ครูอาจช่วยเพิ่มเติมในบางส่วนที่ไม่ชัดเจน

8. เมื่อสิ้นสุดการนำเสนอหน้าชั้น ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และประโยชน์ของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่พบได้ในชีวิตประจำวัน

9. ครูยกตัวอย่างรูปทรงกระบอก และปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่มีความสูงเท่ากัน แล้วถามนักเรียนทั้งชั้นว่า รูปทรงดังกล่าวเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่ หรือถ้าเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดจะต้องมีความจุเท่าใด โดยให้นักเรียนอภิปรายหรือแสดงเหตุผลประกอบคำตอบ

10. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดรูปทรงอื่นๆ โดยภายหลังการอภิปรายครูสรุปถึงประเภทของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดว่า มี 2 ประเภทคือ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านทุกด้านตั้งฉากกับฐาน และกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน โดยยกตัวอย่างโมเดลประกอบ

11. ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบฝึกหัดท้ายหน่วยที่ 3 ข้อ 1,3 และ 6 เพื่อเพิ่มความเข้าใจในนิยามและเทคนิคการตวงโดยใช้กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด โดยหากมีนักเรียนที่ไม่เสร็จในชั้นเรียน ครูมอบหมายให้นักเรียนนำไปทำต่อเป็นการบ้าน

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 เอกสารประกอบการเรียนหน่วยที่ 2 หน้า 12-14

5.2 ใบกิจกรรมที่ 3 และแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 3

5.3 เอกสารคู่มือครู หน้า 27-31

5.4 อุปกรณ์สำหรับให้นักเรียนใช้ในการทำกิจกรรม ได้แก่ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดความ

จุ 6 ลูกบาศก์หน่วย ภาชนะบรรจุน้ำ 2 ใบ ปีกเกอร์หรือเหยือกตวงที่มีมาตรวัด

5.5 โมเดลสำหรับใช้ประกอบการเรียนเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ได้แก่ รูปทรงหลายเหลี่ยมชนิดต่างๆ รูปทรงปริซึมสี่เหลี่ยม พีระมิดฐานสามเหลี่ยม และพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม โมเดลกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านทุกด้านตั้งฉากกับฐาน และโมเดลกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน

6. การวัดและประเมินผล

วัดและประเมินผลด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม การสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างปฏิบัติกิจกรรม การสัมภาษณ์เพิ่มเติม ตลอดจนการรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม การถามตอบ การอภิปราย และการให้ความร่วมมือในชั้นเรียน

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

เวลา 3 ชั่วโมง

1. สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า M มีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ โดยที่ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ แล้วเราจะสามารถใช้ภาชนะ M ดวงของเหลวที่มีปริมาตรขนาด $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ภาชนะ M ที่มีความสูง 12, 13 และ 16 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย

ทฤษฎีบทที่ 3 ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านตั้งฉากกับฐาน คือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

ทฤษฎีบทที่ 4 ภาชนะ M ที่มีฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6 ตารางหน่วย และมีความสูง 1, 32, 83, 691 หน่วย และ 2, 64, 166, 691 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

ทฤษฎีบทที่ 5 ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน คือ 691 ลูกบาศก์หน่วย

2. ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- 2.1 นักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ได้
- 2.2 นักเรียนเข้าใจบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ 2 และ 3
- 2.3 นักเรียนมีความเข้าใจในทฤษฎีบทที่ 4-5

3. สาระการเรียนรู้ย่อย

ทบทวนเรื่องพื้นที่ การหาปริมาตร และนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน (เนื้อหาเอกสารประกอบการเรียน หน่วยที่ 2 หน้า 14-22)

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด จากนั้นครูให้นักเรียนในชั้นคาดเดาว่ากล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดจะมีรูปทรงเป็นอย่างไรได้บ้าง และรูปทรงประเภทใดไม่สามารถเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดได้อย่างแน่นอน

2. ครูยกตัวอย่างรูปทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยม แล้วถามนักเรียนว่ารูปทรงดังกล่าวจะสามารถตวงของเหลวได้ขนาดเท่าใดได้บ้าง จากนั้นครูให้นักเรียนเข้ากลุ่มย่อย กลุ่มละ 4 คนตามที่แบ่งไว้แล้ว พร้อมแจกใบกิจกรรมที่ 4 และอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำกิจกรรม โดยให้นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาและตอบคำถามที่มีอยู่ในแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 4

3. ในระหว่างที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย ครูหมุนเวียนสังเกตการทำกิจกรรมของแต่ละกลุ่ม เข้าให้คำแนะนำช่วยเหลือเท่าที่จำเป็น โดยกิจกรรมนี้จะมีความยากกว่ากิจกรรมที่ผ่านมา ครูอาจต้องเพิ่มบทบาทในการแนะนำมากกว่าปกติ แต่ถ้ามีกลุ่มใดทำกิจกรรมเสร็จก่อน ครูให้นักเรียนกลุ่มนั้นทำแบบฝึกหัดท้ายหน่วย

4. ครูให้นักเรียนกลุ่มย่อยทุกกลุ่ม ออกมานำเสนอผลการปฏิบัติกิจกรรมหน้าชั้นเรียน โดยในการนำเสนอ ครูอาจช่วยเพิ่มเติมในบางส่วนที่ไม่ชัดเจน

5. เมื่อสิ้นสุดการนำเสนอหน้าชั้น ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปถึงผลที่ได้จากการทำกิจกรรม

6. ครูยกตัวอย่างภาชนะรูปทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วยและมีความสูงของด้านทั้งสามเป็น 12, 13 และ 16 หน่วย แล้วพิสูจน์ว่าเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย โดยในการพิสูจน์ครูจะใช้คำถามนำให้นักเรียนเป็นผู้มีส่วนร่วมในการพิสูจน์ด้วย

7. ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนคาดเดาว่าจะมีกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดรูปทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วยที่มีความจุมากกว่า 41 ลูกบาศก์หน่วยหรือไม่ เพราะอะไร

8. ครูอธิบายถึงวิธีการพิสูจน์ว่าความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านตั้งฉากกับฐาน คือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

9. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยม จากนั้นครูอธิบายถึงการศึกษารื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดของนักคณิตศาสตร์ในปัจจุบันซึ่งอาศัยคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในการหาคำตอบ โดยในปัจจุบันมีทฤษฎีใหม่ๆ ที่เกี่ยวข้องกับกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดเกิดขึ้นเรื่อยๆ เช่นในทฤษฎีบทที่ 4 และ 5 นอกจากนี้ยังมีปัญหาเปิด ที่ยังไม่ได้รับการพิสูจน์อีกมาก

5. สื่อการเรียนรู้

5.1 เอกสารประกอบการเรียนหน่วยที่ 2 หน้า 14-22

5.2 ใบกิจกรรมที่ 4 และแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 4

5.3 อุปกรณ์สำหรับให้นักเรียนใช้ในการทำกิจกรรม ได้แก่ ภาชนะปริซึมฐานสามเหลี่ยม ภาชนะบรรจุน้ำ

5.4 โมเดลสำหรับใช้ประกอบการเรียนเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ได้แก่ พีระมิดฐานสามเหลี่ยมเพื่ออธิบายการหาปริมาตรพีระมิด

6. การวัดและประเมินผล

วัดและประเมินผลด้วยแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม การสังเกตพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างปฏิบัติกิจกรรม การสัมภาษณ์เพิ่มเติม ตลอดจนการรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม การถามตอบ การอภิปราย และการให้ความร่วมมือในชั้นเรียน

เอกสารคู่มือครู (หน่วยที่ 2)

กรอบแนวการจัดการเรียนการสอน หน่วยที่ 2

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (6 ชั่วโมง)

สำหรับหน่วยนี้จะเริ่มต้นด้วยการทบทวนความรู้เรื่องการหาพื้นที่ และการหาปริมาตร ซึ่งผู้เรียนได้เคยเรียนมาแล้วในช่วงชั้นที่ 3 เพื่อใช้เป็นความรู้พื้นฐานในการเรียนเนื้อหาเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ซึ่งมีเนื้อหาดังนี้ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน ทั้ง 5 ทฤษฎีบท รวมถึงการนำความรู้เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดไปใช้ในการแก้ปัญหาและสามารถเชื่อมโยงกับสถานการณ์ในชีวิตจริง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. นักเรียนมีความเข้าใจเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดและกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน
2. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐานไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
3. นักเรียนมีความเข้าใจ และสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐานได้

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง เป็นผลการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตรตั้งนั้นในการจัดการเรียนรู้ ครูต้องคำนึงถึงมาตรฐานการเรียนรู้ด้านทักษะกระบวนการ อันได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอ โดยเฉพาะการให้เหตุผล เป็นกระบวนการที่ครูต้องให้ความสำคัญเป็นพิเศษ นอกจากนี้ครูต้องเชื่อมโยงความรู้ต่างๆทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนวิธีการทำงานเป็นกลุ่ม ความมีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ และตระหนักในความสำคัญของการให้เหตุผล

ข้อเสนอแนะ

1. รูปแบบของการจัดการเรียนการสอนสำหรับเนื้อหาเรขาคณิตวิยุตินหน่วยนี้ มีทั้งแบบบรรยายรวมทั้งชั้นเรียนโดยครูผู้สอน และการปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่มย่อย ซึ่งในการบรรยายรวมทั้งชั้นใช้วิธีการสอนแบบใช้ปัญหานำเข้าสู่บทเรียน มีการยกตัวอย่างผ่านสื่ออุปกรณ์หรือโมเดลที่เป็นรูปธรรม จับต้องได้ เพื่ออธิบายเรื่องที่เป็นนามธรรม ส่วนในการปฏิบัติกิจกรรมเน้นให้นักเรียนได้ลงมือทดลองปฏิบัติจริง มีการสังเกต รวบรวมข้อมูล สร้างข้อาคัดเดา และตรวจสอบข้อาคัดเดา โดย

รูปแบบของการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่มย่อย แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้นนำเข้าสู่การปฏิบัติกิจกรรม ขั้นการปฏิบัติกิจกรรม และขั้นการสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรมการจัดการเรียนการสอน

2. ในการจัดการเรียนการสอนจะมุ่งเน้นในการให้เหตุผล ครูควรชี้แจง เน้นย้ำถึงความสำคัญของการให้เหตุผล และเกณฑ์ในการประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่มีขั้นตอนในการประเมิน 3 ขั้นตอนคือ ความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

3. การอภิปรายหรือยกตัวอย่างเหตุการณ์ในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เรียนจะช่วยให้ นักเรียนเกิดแรงจูงใจและสนใจในการเรียน เห็นประโยชน์ของสิ่งที่เรียน ครูจึงต้องให้ความสำคัญกับการอภิปรายในขั้นตอนนี้

4. จุดประสงค์ของการจัดกิจกรรมที่ 3 คือต้องการให้นักเรียนได้ซาบซึ้งและเข้าใจอย่างถ่องแท้ ในนิยามของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด โดยใช้เพียงความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตมาใช้ในการตรวจสอบข้อคาดเดา ซึ่งในขั้นตอนการเอียงโดยใช้มุมที่ฐานสามมุมและมุมบนหนึ่งมุม นักเรียนส่วนใหญ่จะคาดเดาปริมาตรผิดพลาด แต่นักเรียนจะรู้ว่าการคาดเดานั้นผิดพลาดถ้าใช้การคำนวณหาปริมาตรมาตรวจสอบ ครูจึงควรเน้นย้ำในจุดนี้ให้นักเรียนได้เห็นถึงความสำคัญของการให้เหตุผล

5. ครูต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ขยายปัญหาจากกล่องวัดปริมาตรที่เป็นภาชนะสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านทั้งสี่ตั้งฉากกับฐานไปสู่รูปทรงอื่นๆ

6. ในการเรียนเรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ในทฤษฎีที่ 1 มีขั้นตอนการพิสูจน์ที่ต้องอาศัยการแบ่งกรณี ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ออกแบบแนวทางการพิสูจน์ โดยในขั้นตอนการพิสูจน์จำเป็นอย่างยิ่งที่ครูต้องใช้ภาพประกอบและโมเดลเพื่อให้นักเรียนได้ทดลองเอียงภาชนะ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจในบทพิสูจน์มากยิ่งขึ้น

7. การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2 จะอ้างอิงจากทฤษฎีบทที่ 1 โดยอาศัยเทคนิคการตวงเพื่อให้ได้ปริมาตรต่างๆ ซึ่งครูอาจยกตัวอย่างการตวงในเบื้องต้น แล้วให้นักเรียนในชั้นแบ่งหน้าที่กันหาวิธีการตวงให้ได้ปริมาตรขนาดอื่นๆ

8. ในทฤษฎีบทที่ 3 เป็นทฤษฎีบทหลัก จะอ้างอิงจากทฤษฎีบทที่ 1 และ 2 โดยอาศัยความรู้พื้นฐานเรื่องเซต และหลักการนับเบื้องต้น ถ้านักเรียนบกพร่องในความรู้ส่วนนี้ ครูอาจทบทวนให้นักเรียนหรือให้นักเรียนเตรียมทบทวนมาล่วงหน้า

9. ในตอนท้ายของหน่วยนี้ ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบถึงปัญหาเปิดที่น่าสนใจที่เกี่ยวข้องกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตั้งปัญหา และขยายปัญหา

ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

หน่วยที่ 2

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)

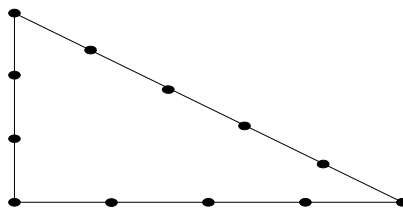
บทนำ

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนคงเคยได้พบเห็นเหตุการณ์เกี่ยวกับการวัดความยาว การหาพื้นที่ การหาปริมาตร เช่น การตวงเครื่องปรุงเพื่อประกอบอาหาร การชั่งข้าวสารหรือเนื้อหมู เพื่อจำหน่าย ซึ่งเห็นได้ว่าการชั่งตวงวัดเหล่านี้ ถ้าต้องการความแม่นยำในการวัด จำเป็นต้องมีสเกลหรือมาตรวัด เพื่อบอกขนาดหรือปริมาณ

ในแต่ละสาขาวิชาชีพ อาจมีเทคนิคเฉพาะเกี่ยวกับการวัดที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งมีความแม่นยำในระดับที่ยอมรับได้ และง่ายต่อการจัดการ เช่น

เทคนิคการสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากของชาวอียิปต์โบราณ

ชาวอียิปต์โบราณรู้จักการสร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยการนำเชือกที่มีปม 13 ปม ที่มีระยะห่างระหว่างแต่ละปมเท่าๆ กัน มาซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 3 หน่วย 4 หน่วย และ 5 หน่วย ดังรูป A



รูป A

ชาวบาบิโลนเนียนก็รู้จักวิธีหาจำนวนเต็มชุดอื่นๆ ที่เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่น 120,119, 169 และ 3546, 3367, 4825

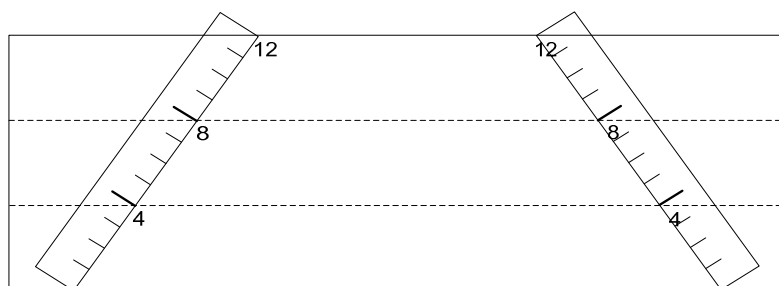
เทคนิคการแบ่งของช่างไม้

เมื่อต้องการแบ่งวัสดุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสามส่วนตามแนวยาว โดยมีอุปกรณ์คือไม้บรรทัดที่มีสเกลให้ นักเรียนจะทำอย่างไร? โดยทั่วไปมักจะวัดความกว้างของวัสดุสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วนำมาหารด้วยสาม ซึ่งอาจได้เพียงค่าประมาณ และทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ ดังรูป B



รูป B

ช่างไม้จะทำงานดังกล่าวโดยใช้เทคนิค แบ่งไม้บรรทัดเป็นสามส่วนแทน แล้วเอียงให้มุมของไม้บรรทัดที่อยู่ข้างเดียวกันตรงกับขอบของวัสดุรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป C

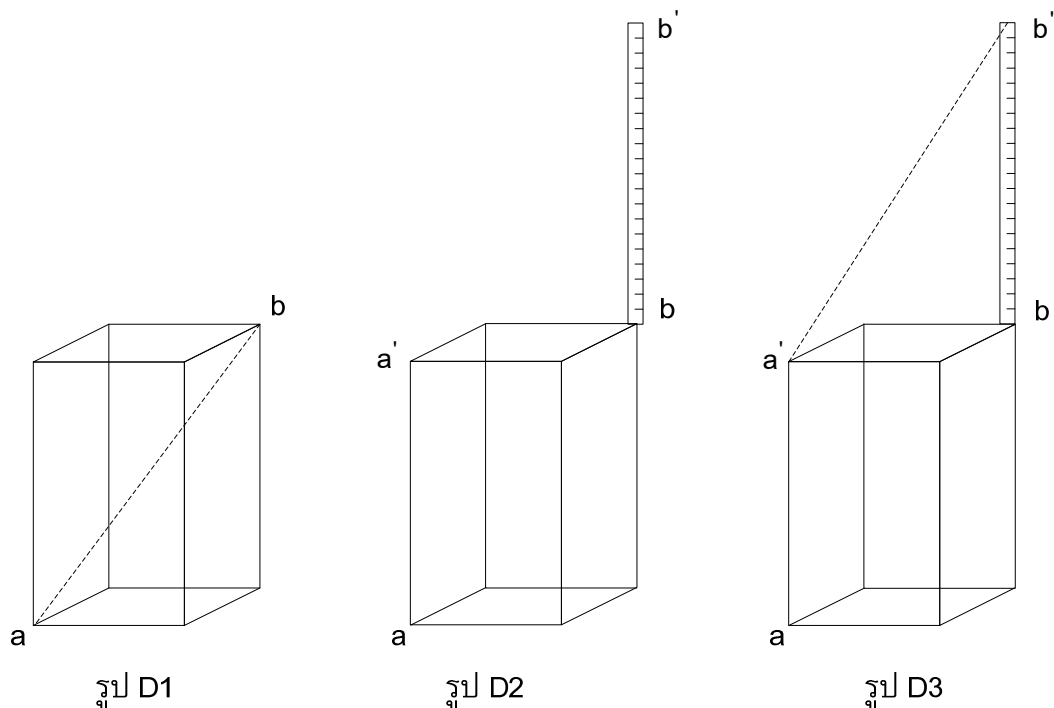


รูป C

เทคนิคการวัดแผ่นหินของชาวญี่ปุ่น

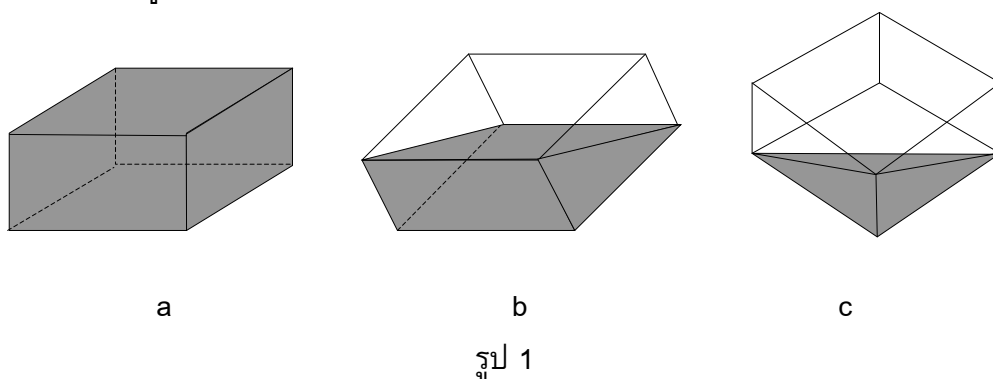
ร้านจำหน่ายแผ่นหินมีวิธีคำนวณราคาของหิน โดยพิจารณาจากความยาวจากจุดมุมที่อยู่ด้านล่าง(a) ถึงจุดมุมบนที่อยู่ฝั่งตรงข้าม(b) ดังรูป D1 นักเรียนจะมีวิธีในการหาความยาวนี้ได้อย่างไร? แนนอนว่าเราไม่สามารถวัดความยาวนี้ได้โดยตรง เพราะแผ่นหินเป็นทรงตัน นักเรียนคิดว่าจำเป็นต้องใช้สูตรคณิตศาสตร์อื่นใดหรือไม่ในการคำนวณ

พนักงานขายแผ่นหินมีวิธีคำนวณ ความยาวตามรูป D1 โดยใช้ไม้วัดความสูงของแผ่นหิน กำหนดตำแหน่ง b' ดังรูป D2 แล้วเลื่อนไม้วัดขึ้นไปต่อกับจุด b หลังจากนั้นจึงวัดความยาวระหว่างจุด a' กับ b' แทน ดังรูป D3



ถ้าหักเรียนอยู่ในสถานการณ์ที่จำเป็นต้องตวงของเหลวให้ได้ตามปริมาตรที่กำหนด ด้วยภาชนะที่ไม่มีมาตรวัด นักเรียนจะมีวิธีการตวงของเหลวนั้นได้อย่างไร

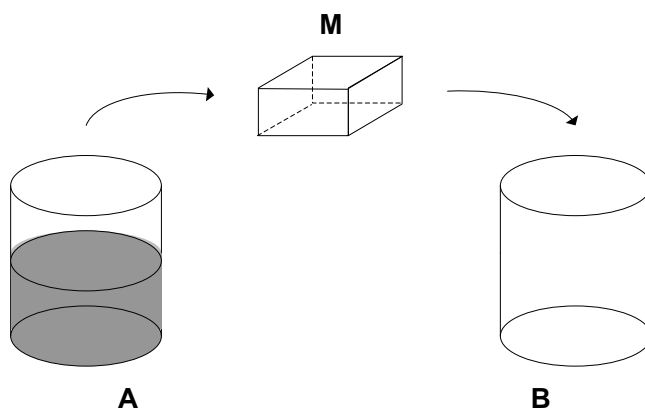
ในประเทศญี่ปุ่นมีการใช้กล่องสี่เหลี่ยมที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ ซึ่งมีความจุ 6 ลิตร ในการตวงของเหลวขนาดตั้งแต่ 1 ลิตร จนถึง 6 ลิตร โดยใช้เทคนิคการตวงของเหลวขนาด 6 ลิตร 3 ลิตร และ 1 ลิตร ดังรูป 1



รูป 1

สำหรับการตวงของเหลวขนาด 2 ลิตร จะทำได้โดยการเริ่มตวงของเหลวขนาด 3 ลิตรดังรูป 1b แล้วเทของเหลวออกจนเหลือของเหลวในภาชนะ 1 ลิตรดังรูป 1c ทำให้ได้ว่าของเหลวที่เทออกไปมีปริมาตร 2 ลิตร ในการตวงของเหลวขนาด 4 ลิตร และ 5 ลิตร ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน

นิยาม ให้ M เป็นภาชนะที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ และมีความจุ k ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ k เป็นจำนวนนับใดๆ จะเรียก M ว่าเป็น **กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)** ถ้าสามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวได้ตั้งแต่ขนาด 1, 2, 3, ..., k ลูกบาศก์หน่วย โดยกระบวนการการตวงของเหลวต้องเป็นไปตามเงื่อนไข ของการตวง 2 ข้อดังนี้

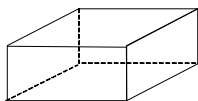


รูป 2

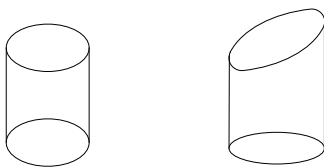
สำหรับการใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ใส่ยังภาชนะ B

- อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ได้เพียงครั้งเดียว และสามารถเทของเหลวจากภาชนะ M กลับคืนภาชนะ A หรือเทใส่ยังภาชนะ B ก็ครั้งก็ได้ตามต้องการ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้ภาชนะ M ตักของเหลวคืนจากภาชนะ B
 - ในการตวงของเหลว เราจะใช้เฉพาะจุดมุมของภาชนะ M เป็นเกณฑ์ในการตวง (ดูรูป 1) และจุดมุมของผิวหน้าของของเหลวในภาชนะ M จะอาศัยจุดมุมของภาชนะ M อย่างน้อย 3 จุด
- หมายเหตุ เมื่อกล่าวถึงการตวงของเหลวตั้งแต่นี้เป็นต้นไป จะหมายถึงการตวงของเหลวตามเงื่อนไข 1 และ 2

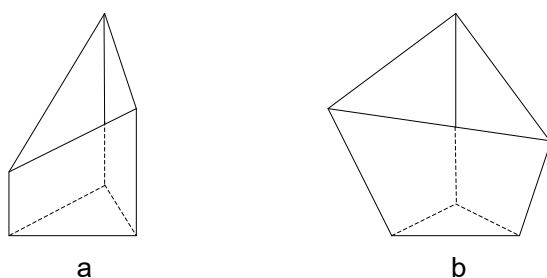
ตัวอย่างที่ 1 ภาชนะฐานสี่เหลี่ยมซึ่งด้านทั้งสี่ตั้งฉากกับฐาน ซึ่งมีความสูงทั้งสี่ด้านเท่ากัน และมีความจุ 6 ลูกบาศก์หน่วย (ดูรูป) เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด



ตัวอย่างที่ 2 ภาชนะทรงกระบอก(ดูรูป) ไม่เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด(ทำไม?)



เราสามารถแบ่งกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดเป็น 2 ประเภทคือ กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน ดังรูป 3a และกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน ดังรูป 3b ซึ่งในหน่วยนี้จะศึกษาเฉพาะกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐานเท่านั้น



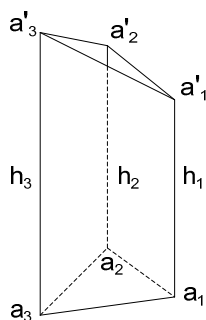
รูป 3

กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

พิจารณาภาชนะทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน เพื่อความสะดวกในการคำนวณ สมมติให้ฐานของภาชนะนี้มีพื้นที่ 3 ตารางหน่วย และเรียกภาชนะนี้ว่า M ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาถึงเงื่อนไขที่ทำให้ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด และความจุสูงสุดของ M ที่เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ในตอนท้ายจะกล่าวถึงทฤษฎีเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า M มีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ โดยที่ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ แล้วเราจะสามารถใส่ภาชนะ M ตวงของเหลวที่มีปริมาตรขนาด $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

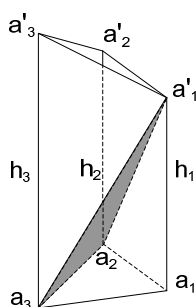
พิสูจน์ กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ เป็นจุดมุมทั้ง 6 จุดของภาชนะ M และให้ h_1, h_2, h_3 เป็นความสูงของทั้งสามด้านของภาชนะ M โดยที่ h_i เป็นระยะห่างระหว่าง a_i และ a'_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$ ดังรูป 4



รูป 4

เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสามกรณี คือ

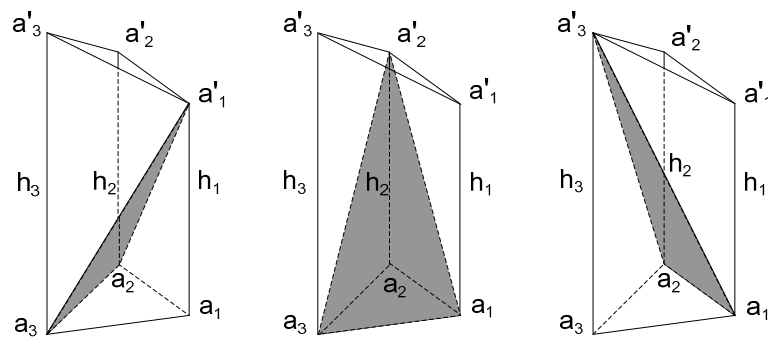
กรณีที่ 1 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด h_1, h_2 และ h_3 ลูกบาศก์หน่วย เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3 และ a'_1 ดังรูปที่ 5



รูป 5

จะเห็นว่าของเหลวที่เหลืออยู่เป็นรูปทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยม ซึ่งมีความสูงเป็น h_1 หน่วย และมีฐานเป็นสามเหลี่ยม a_1, a_2, a_3 จากพื้นที่ฐานของ M เป็น 3 ตารางหน่วย ทำให้ได้ว่า ปริมาตรของเหลวที่เหลืออยู่คือ $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot h_1 = h_1$ ลูกบาศก์ หน่วย

ในทำนองเดียวกันจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร h_2 ลูกบาศก์หน่วยและ h_3 ลูกบาศก์หน่วยได้โดยการเอียงภาชนะให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_2 และ a_1, a_2, a_3, a'_3 ตามลำดับ ดังรูป 6

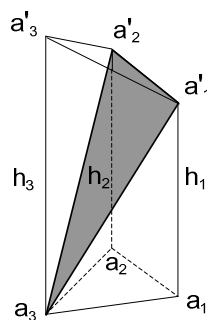


รูป 6 แสดงการตวงของเหลวปริมาตร h_1, h_2 และ h_3 ลูกบาศก์หน่วย จากภาชนะ M

กรณีที่ 2 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด $h_1 + h_2, h_1 + h_3$ และ $h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_1 และ a'_2

ดังรูป 7



รูปที่ 7

จะเห็นว่าของเหลวที่เหลืออยู่เป็นรูปทรงพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ที่มี a_1, a'_1, a'_2, a_2 เป็นฐาน สมมติให้ระยะห่างระหว่าง a_3 และเส้นตรงที่เชื่อม a_1 และ a_2 เป็น h เรียกรูปทรงของของเหลวที่เหลือนี้ว่า A

จากกรณีที่ 1 เมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวเป็นรูปทรงที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3 และ a'_1 ของเหลวจะมีปริมาตร h_1 ลูกบาศก์หน่วย (ดูรูป 5) สังเกตว่าของเหลวที่เหลือนี้ สามารถพิจารณาเป็นรูปทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีฐานเป็น a_1, a'_1, a_2 และมีระยะระหว่าง a_3 และเส้นตรงที่เชื่อม a_1 และ a_2 เป็น h (เหมือนรูปทรง A) เรียกรูปทรงของของเหลวที่เหลือนี้ว่า B

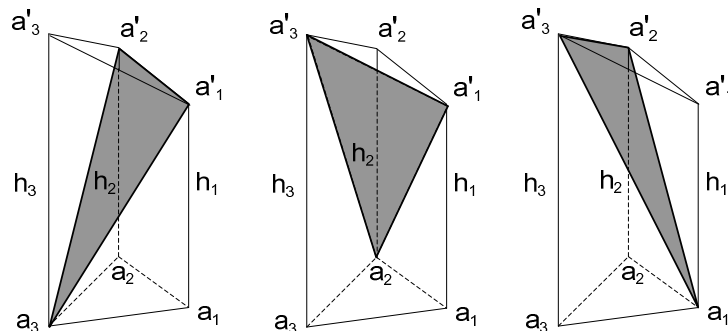
โดยการเทียบสัดส่วนระหว่างปริมาตรและพื้นที่ฐานจะได้ว่า

จาก	ปริมาตรรูปทรง A	=	(พื้นที่ฐานของรูปทรง A) (ความสูงของรูปทรง A)
	ปริมาตรรูปทรง B	=	(พื้นที่ฐานของรูปทรง B) (ความสูงของรูปทรง B)
เพราะว่า	ความสูงของรูปทรง A	=	ความสูงของรูปทรง B
นั่นคือ	$\frac{\text{ปริมาตรรูปทรง A}}{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง A}}$	=	$\frac{\text{ปริมาตรรูปทรง B}}{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง B}}$

$$\frac{\text{ปริมาตรรูปทรง A}}{\text{ปริมาตรรูปทรง B}} = \frac{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง A}}{\text{พื้นที่ฐานของรูปทรง B}} = \frac{\frac{h(h_1+h_2)}{2}}{\frac{h_1 h}{2}} = \frac{h_1+h_2}{h_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ปริมาตรรูปทรง A} &= \frac{(h_1+h_2)}{h_1} \text{ปริมาตรรูปทรง B} \\ &= \frac{(h_1+h_2)}{h_1} \cdot h_1 = h_1+h_2 \end{aligned}$$

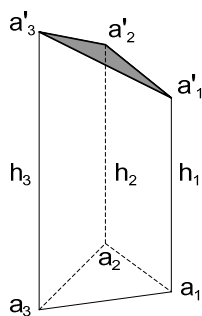
ดังนั้นเมื่อเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวที่มีจุดมุมเป็น a_1, a_2, a_3, a'_1 และ a'_2 จะได้ของเหลวปริมาตร h_1+h_2 ลูกบาศก์หน่วย ในทำนองเดียวกันเราสามารถตวงของเหลวปริมาตร h_1+h_3 และ h_2+h_3 ได้โดยการเอียงภาชนะ M ให้เหลือของเหลวที่มีจุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_3$ และ $a_1, a_2, a_3, a'_2, a'_3$ ตามลำดับ ดังรูป 8



รูป 8 แสดงการตวงของเหลวปริมาตร h_1+h_2, h_1+h_3 และ h_2+h_3 ลูกบาศก์หน่วยจากภาชนะ M

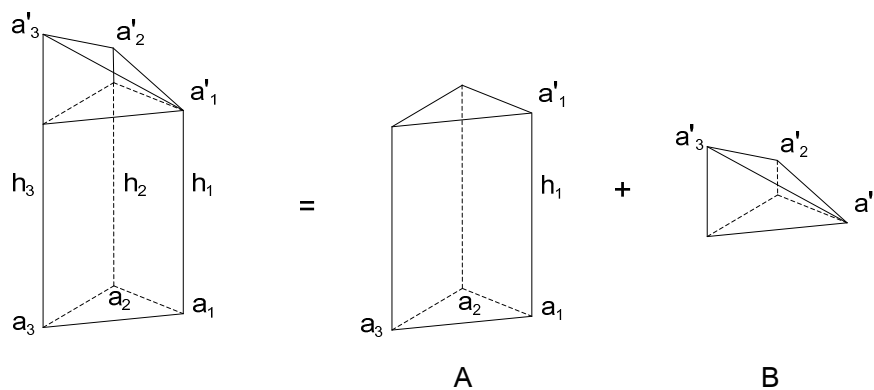
กรณีที่ 3 การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด $h_1+h_2+h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

ในกรณีนี้จะแสดงว่า การใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวที่มีจุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ (ดังรูป 9) จะได้ของเหลวปริมาตร $h_1+h_2+h_3$ ลูกบาศก์หน่วย ซึ่งคือความจุของภาชนะ M



รูป 9

แยกพิจารณาภาชนะ M เป็นสองส่วนคือ A และ B ดังรูป 10



รูป 10

จะเห็นได้ว่าภาชนะ M ส่วนแรกมีความจุ $3h_1$ ลูกบาศก์หน่วย และจากกรณีที่สอง ภาชนะ M ส่วนที่สองมีความจุ $(h_2 - h_1) + (h_3 - h_1) = h_2 + h_3 - 2h_1$ ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ได้ว่าภาชนะ M สามารถบรรจุของเหลวปริมาตร $3h_1 + (h_2 + h_3 - 2h_1) = h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้นจากทั้งสามกรณี สรุปได้ว่า เราสามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตร $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ $h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ภาชนะ M ที่มีความสูง 12, 13 และ 16 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ กำหนดให้ $h_1 = 12, h_2 = 13, h_3 = 16$ โดยทฤษฎีบทที่ 1 สามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวปริมาตรขนาด 12, 13, 16, 25, 28, 29 และ 41 ลูกบาศก์หน่วยได้ ให้ $l_0 = 0, l_1 = h_1 = 12, l_2 = h_2 = 13, l_3 = h_3 = 16, l_4 = h_1 + h_2 = 25, l_5 = h_1 + h_3 = 28, l_6 = h_2 + h_3 = 29, l_7 = h_1 + h_2 + h_3 = 41$

กำหนดให้ $D = \{d_i \mid d_i = l_i - l_{i-1} \text{ โดยที่ } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ดังนั้น $d_1 = 12, d_2 = 1, d_3 = 3, d_4 = 9, d_5 = 3, d_6 = 1, d_7 = 12$ และ $D = \{12, 1, 3, 9, 3, 1, 12\}$

สังเกตว่าสำหรับ $E \subseteq D$ จะได้ว่า $\sum_{d_i \in E} d_i$ เป็นปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาษาชนะ

M ตวงได้ (สมมติให้การตวงครั้งนี้เป็นการตวงของเหลวจากภาษาชนะ A ใส่อีกภาษาชนะ B) เช่น

1. เมื่อ $E = \{d_2\}$ สังเกตว่า $d_2 = l_2 - l_1 = 13 - 12 = 1$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 1 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตวงของเหลวให้เต็มภาษาชนะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวกลับคืนภาษาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 13 ลูกบาศก์หน่วย

2. เทของเหลวจากภาษาชนะ M ลงในภาษาชนะ B จนเหลือของเหลวอยู่ในภาษาชนะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ของเหลวในภาษาชนะ B จะมีปริมาตร 1 ลูกบาศก์หน่วย

2. เมื่อ $E = \{d_2, d_6\}$ สังเกตว่า $d_6 + d_2 = (l_6 - l_5) + (l_2 - l_1) = (29 - 28) + (13 - 12) = 2$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตวงของเหลวให้เต็มภาษาชนะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวกลับคืนภาษาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 29 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวลงในภาษาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 28 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาษาชนะ B แล้ว 1 ลูกบาศก์หน่วย)

2. เทของเหลวจากภาษาชนะ M ลงในภาษาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 13 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวจากภาษาชนะ M ลงในภาษาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ของเหลวในภาษาชนะ B เพิ่มขึ้นอีก 1 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ของเหลวในภาษาชนะ B จะมีปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย

3. เมื่อ $E = \{d_1, d_4, d_6, d_7\}$ สังเกต $d_7 + d_6 + d_4 + d_2 = (l_7 - l_6) + (l_6 - l_5) + (l_4 - l_3) + (l_1 - l_0) = (l_7 - l_5) + (l_4 - l_3) + l_1 = (41 - 28) + (25 - 16) + 12 = 34$ เราจะสามารถตวงของเหลวปริมาตร 34 ลูกบาศก์หน่วยได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตวงของเหลวให้เต็มภาษาชนะ M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย เทของเหลวลงในภาษาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 28 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาษาชนะ B แล้ว 13 ลูกบาศก์หน่วย)

2. เทของเหลวจากภาษาชนะ M ลงในภาษาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 25 ลูกบาศก์หน่วย จากนั้นเทของเหลวจากภาษาชนะ M ลงในภาษาชนะ B จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 16 ลูกบาศก์หน่วย ทำให้ของเหลวในภาษาชนะ B เพิ่มขึ้นอีก 9 ลูกบาศก์หน่วย (ตอนนี้มีของเหลวอยู่ในภาษาชนะ B แล้ว $13 + 9 = 22$ ลูกบาศก์หน่วย)

3. ขั้นสุดท้าย เทของเหลวจากภาษาชนะ M คืนใส่อีกภาษาชนะ A จนเหลือของเหลวในภาษาชนะ M 12 ลูกบาศก์หน่วย แล้วเทของเหลวที่เหลือทั้งหมดลงในภาษาชนะ B ทำให้ของเหลวในภาษาชนะ B เพิ่มขึ้นอีก 12 ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้น ของเหลวในภาษาชนะ B จะมีปริมาตร $13 + 9 + 12 = 34$ ลูกบาศก์หน่วย

จากตัวอย่างข้างต้น เห็นว่าเราสามารถใช้อนุกรม M ดวงของเหลวให้ได้ปริมาตรต่างๆ กัน โดยมีการตวงขนาด l_0, l_1, \dots, l_7 เป็นพื้นฐาน สำหรับการตวงของเหลวให้ได้ปริมาตรขนาด 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 ลูกบาศก์หน่วย สามารถทำได้ตามกระบวนการข้างต้น (ละไว้เป็นแบบฝึกหัด)

ดังนั้น เราสามารถใช้อนุกรม M ซึ่งมีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย ตวงของเหลวปริมาตร 1, 2, ..., 41 ได้ นั่นคือ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

ข้อสังเกต สำหรับ $E = \{d_1, d_2, d_4, d_7\}$ จะตวงของเหลวได้ปริมาตร $d_7 + d_4 + d_2 + d_1$
 $= (l_7 - l_6) + (l_4 - l_3) + (l_2 - l_1) + (l_1 - l_0) = (l_7 - l_6) + (l_4 - l_3) + l_2 = (41 - 29) + (25 - 16) + 13$
 $= 12 + 9 + 13 = 34$ ลูกบาศก์หน่วย และจากตัวอย่างที่แสดงไว้ในบทพิสูจน์ข้างต้น พบว่าสามารถใช้อนุกรม M ดวงของเหลวให้ได้ปริมาตร 34 ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ $E = \{d_1, d_4, d_6, d_7\}$

นั่นคือเราสามารถตวงของเหลวให้ได้ปริมาตรเท่ากันด้วยขั้นตอนวิธีที่ต่างกัน

ทฤษฎีบทที่ 3 ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านตั้งฉากกับฐาน คือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

พิสูจน์ ให้ M เป็นอนุกรมฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน ซึ่งมีพื้นที่ฐานเป็น 3 ตารางหน่วย และมีความสูงเป็นของด้านทั้งสามเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ

โดยไม่เสียหยาทั่วไปให้ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ และ $l_0 = 0, l_1 = h_1, l_2 = h_2, l_3 = h_3, l_4 = h_1 + h_2, l_5 = h_1 + h_3, l_6 = h_2 + h_3$ และ $l_7 = h_1 + h_2 + h_3$ ให้ $D = \{d_i \mid d_i = l_i - l_{i-1} \text{ โดยที่ } i = 1, 2, \dots, 7\}$ สังเกตว่าสำหรับแต่ละ $E \subseteq D, \sum_{d_i \in E} d_i$ เป็นปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้อนุกรม M ตวงได้

กรณีที่ 1 $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_1 + h_2 \leq h_1 + h_3 \leq h_2 + h_3 \leq h_1 + h_2 + h_3$

ดังนั้น $D = \{h_1, h_2 - h_1, h_3 - h_2, h_1 + h_2 - h_3, h_3 - h_2, h_2 - h_1, h_1\}$ ให้ $a = h_1, b = h_2 - h_1, c = h_3 - h_2$ และ $d = h_1 + h_2 - h_3$ สังเกตว่า $d = a - c$ และในเซต D มี a, b, c ปรากฏอย่างละสองครั้ง และ d ปรากฏเพียงครั้งเดียว

กำหนดให้ $U(i, j, k, l) = ia + jb + kc + ld$ เมื่อ $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ และ $l \in \{0, 1\}$ แทนปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้อนุกรม M ตวงได้ ซึ่งมีปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน $(3 \times 3 \times 3 \times 2) - 1 = 53$ แบบ จาก $d = a - c$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} U(i, j, k, l) &= ia + jb + kc + ld \\ &= (i+1)a + jb + (k-1)c + (l-1)d \\ &= U(i+1, j, k-1, l-1) \end{aligned}$$

เมื่อ $i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2\}, k \in \{1, 2\}, l = 1$

นั่นคือจะมีวิธีการตวงของเหลวจากอนุกรม M ด้วยวิธีที่แตกต่างกัน แต่ให้ปริมาตรของของเหลวเท่ากันอย่างน้อย $(2 \times 3 \times 2 \times 1) = 12$ แบบ ดังนั้นอนุกรม M สามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรแตกต่างกันไม่เกิน $53 - 12 = 41$ แบบ

$$\text{กรณีที่ 2 } h_1 \leq h_2 \leq h_1 + h_2 \leq h_3 \leq h_1 + h_3 \leq h_2 + h_3 \leq h_1 + h_2 + h_3$$

ดังนั้น $D = \{h_1, h_2 - h_1, h_1, h_3 - (h_1 + h_2), h_1, h_2 - h_1, h_1\}$

$a = h_1, b = h_2 - h_1, c = h_3 - (h_2 + h_1)$ สังเกตว่าในเซต D มี a ปรากฏ 4 ครั้ง b ปรากฏ 2 ครั้ง และ c ปรากฏเพียงครั้งเดียว

กำหนดให้ $U(i,j,k) = ia + jb + kc$ เมื่อ $i \in \{0,1,2,3,4\}, j \in \{0,1,2\}$ และ $k \in \{0,1\}$ แทนปริมาตรของของเหลวที่สามารถใช้ภาชนะ M ตวงได้ ซึ่งจะตวงได้ปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน $(5 \times 3 \times 2) - 1 = 29$ แบบ

จากทั้งสองกรณีสามารถสรุปได้ว่า กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน จะตวงของเหลวได้ปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดไม่เกิน 41 แบบ และจากทฤษฎีบทที่ 2. ภาชนะ M ที่มีความสูง 12, 13 และ 16 เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีความจุ 41 ลูกบาศก์หน่วย นั่นคือความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานคือ 41 ลูกบาศก์หน่วย

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานโดยจะไม่แสดงบทพิสูจน์ไว้ เพราะมีขั้นตอนที่ซับซ้อน

ทฤษฎีบทที่ 4 ภาชนะ M ที่มีฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 6 ตารางหน่วย และมีความสูง 1, 32, 83, 691 หน่วย และ 2, 64, 166, 691 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด

ทฤษฎีบทที่ 5 ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านตั้งฉากกับฐานคือ 691 ลูกบาศก์หน่วย

เรื่องกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด ยังมีปัญหาเปิด (open problems) ที่น่าสนใจอีกมาก เช่น มีกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานห้าเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานหรือไม่ ความสูงของแต่ละด้านควรเป็นเท่าใด ความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานห้าเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานเป็นเท่าใด รวมถึงการขยายปัญหาสู่กรณีที่เปลี่ยนฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยม และการพิจารณากรณีกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดที่มีด้านไม่ตั้งฉากกับฐาน

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 2

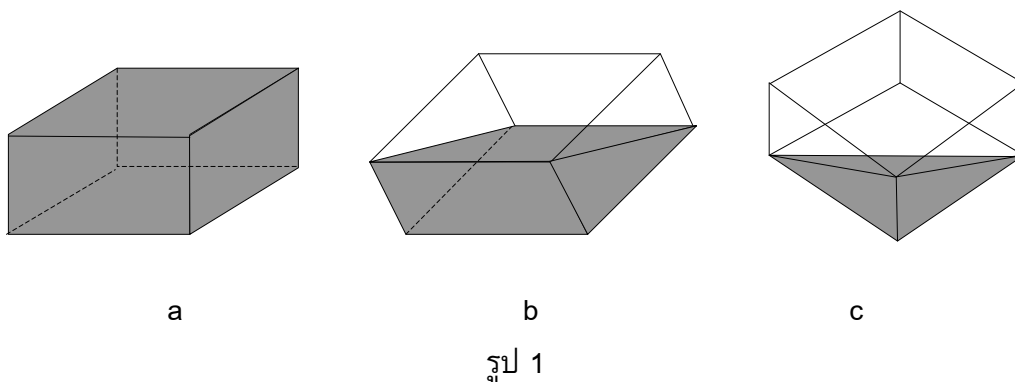
1. จงแสดงวิธีการทวงของเหลวจากภาชนะ M ซึ่งเป็นภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 12, 13, 16 หน่วย ให้ได้ปริมาตรขนาด 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41 ลูกบาศก์หน่วย
2. จากข้อ 1. จงยกตัวอย่างวิธีการทวงของเหลวจากภาชนะ M ด้วยวิธีที่ต่างกัน แต่ได้ปริมาตรของเหลวเท่ากัน
3. จงตรวจสอบว่าภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 4, 18, 19 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่
4. จงตรวจสอบว่าภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูง 4, 19, 22 หน่วย เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่
5. ให้ M เป็นภาชนะฐานสี่เหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานและทุกด้านมีความสูงเท่ากัน จงหาความจุของ M ที่จะทำให้ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด
6. จงพิสูจน์ว่าความจุสูงสุดของภาชนะฐานสี่เหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานและทุกด้านมีความสูงเท่ากัน และเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดคือ 6 ลูกบาศก์หน่วย
7. จงพิสูจน์ว่าความจุสูงสุดของภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านตั้งฉากกับฐานโดยทุกด้านมีความสูงเท่ากัน และมีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดคือ 3 ลูกบาศก์หน่วย

ใบกิจกรรมที่ 3

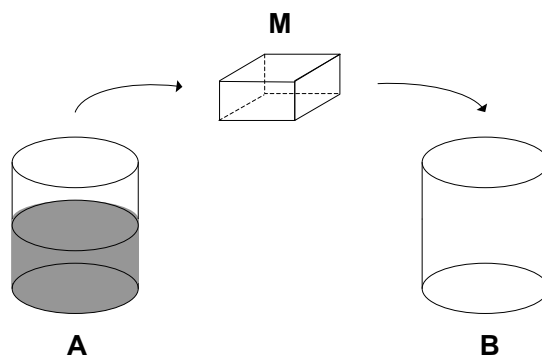
เรื่อง ตวงน้ำเต้าหู้

ในชีวิตประจำวัน นักเรียนคงเคยได้พบเห็นเหตุการณ์เกี่ยวกับการวัดความยาว การหาพื้นที่ การหาปริมาตร เช่น การตวงเครื่องปรุงเพื่อประกอบอาหาร การชั่งข้าวสารหรือเนื้อหมู เพื่อจำหน่าย ซึ่งเห็นได้ว่าการชั่งตวงวัดเหล่านี้ ถ้าต้องการความแม่นยำในการวัด จำเป็นต้องมีสเกลหรือมาตรวัด เพื่อบอกขนาดหรือปริมาณ ถ้านักเรียนอยู่ในสถานการณ์ที่จำเป็นต้องตวงของเหลวให้ได้ตามปริมาตรที่กำหนดด้วยภาชนะที่ไม่มีมาตรวัด นักเรียนจะมีวิธีการตวงของเหลวนั้นได้อย่างไร

ในประเทศญี่ปุ่นมีการใช้กล่องสี่เหลี่ยมที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาตร ในการตวงของเหลวให้ได้ปริมาตรแตกต่างกันไปดังรูป



นิยาม ให้ M เป็นภาชนะที่ไม่มีมาตรวัดบอกปริมาณ และมีความจุ k ลูกบาศก์หน่วย เมื่อ k เป็นจำนวนนับใดๆ จะเรียก M ว่าเป็น **กล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาด (Universal Measurable Box)** ถ้าสามารถใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวได้ตั้งแต่ขนาด $1, 2, 3, \dots, k$ ลูกบาศก์หน่วยโดยกระบวนการการตวงของเหลวต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของการตวง 2 ข้อ ดังนี้



รูป 2

สำหรับการใช้ภาชนะ M ตวงของเหลวจากภาชนะ A ใส่ยังภาชนะ B

1. อนุญาตให้ใช้ภาษา M ตวงของเหลวจากภาษา A ได้เพียงครั้งเดียว และสามารถเทของเหลวจากภาษา M กลับคืนภาษา A หรือเทใส่ยังภาษา B ก็ครั้งก็ได้ตามต้องการ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้ภาษา M ตักของเหลวคืนจากภาษา B
2. ในการตวงของเหลว เราจะใช้เฉพาะจุดมุมของภาษา M เป็นเกณฑ์ในการตวง (ดูรูป 1) และจุดมุมของผิวหน้าของของเหลวในภาษา M จะอาศัยจุดมุมของภาษา M อย่างน้อย 3 จุด

นักเรียนคิดว่ากล่องที่ให้ เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่

จึงเทน้ำเต้าหูจาก M ลงใน A จนเหลือค้างใน M 1 ลูกบาศก์หน่วย ดังนั้นใน B มีน้ำเต้าหู
3 ลูกบาศก์หน่วย

นักเรียนได้ทดลองในการตวงจริงกี่ครั้ง (ตามการปฏิบัติจริง)

6. ภาชนะที่ให้อาจตวงน้ำเต้าหูขนาด 1 ลูกบาศก์หน่วยได้หรือไม่ ได้

มีวิธีการอย่างไรในการตวง ตวงเต็มภาชนะ M แล้วเทน้ำเต้าหูคืน A จนเหลือในค้างอยู่ใน
 M เป็นตามรูป 1b แล้วเทน้ำเต้าหูทั้งหมดลงใน B ดังนั้นใน B มีน้ำเต้าหู 1 ลูกบาศก์หน่วย

นักเรียนได้ทดลองในการตวงจริงกี่ครั้ง (ตามการปฏิบัติจริง)

ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง (การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์)

1. ภาชนะที่ให้เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่ เพราะเหตุใด
ภาชนะที่ให้เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดเพราะสามารถตวงของเหลวตามเงื่อนไข
ได้ตั้งแต่ 1 ถึง 6 ลูกบาศก์หน่วย

2. นักเรียนคิดว่าข้อสรุปที่ได้ น่าเชื่อถือหรือไม่ เพราะเหตุใด
ไม่น่าเชื่อถือ เพราะแม้จะตวงเพื่อตรวจสอบหลายครั้ง แต่ก็อาจเกิดความคลาดเคลื่อน
ที่ผู้ตวงไม่สามารถสังเกตเห็นได้ด้วยตาเปล่า

การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

1. มีวิธีการอื่นในการยืนยันข้อสรุปข้างต้นหรือไม่ อย่างไร
ในการตรวจสอบว่าภาชนะ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่ เพียงพอ
ที่จะตรวจสอบเพียงว่าภาชนะ M สามารถตวงน้ำเต้าหูให้ได้ปริมาตร 3 และ 1 ลูกบาศก์
หน่วยหรือไม่ เพราะการตวงให้ได้ 2, 4 และ 5 ลูกบาศก์หน่วยสามารถทำได้ตามวิธีการ
ข้างต้น

สมมติให้ภาชนะ M มีความกว้าง ยาว และสูง เป็น x, y และ z หน่วยตามลำดับ
และการตวงเต็ม มีปริมาตร 6 ลูกบาศก์หน่วย นั่นคือ $xyz = 6$

การตวงตามรูป 1a ทำให้น้ำเต้าหูมีรูปทรงเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม และมีปริมาตรเป็น
 $\frac{1}{3}(xy)z = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ ลูกบาศก์หน่วย การตวงตามรูป 1a ทำให้น้ำเต้าหูมีรูปทรงเป็น

พีระมิดฐานสามเหลี่ยม และมีปริมาตรเป็น $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}xy)z = \frac{1}{6} \times 6 = 1$ ลูกบาศก์หน่วย

ดังนั้นภาชนะ M จึงสามารถตวงน้ำเต้าหูได้ 6, 3 และ 1 ลูกบาศก์หน่วย

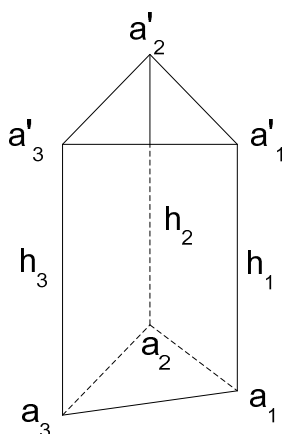
ใบกิจกรรมที่ 4

เรื่อง การตวงด้วยภาชนะฐานสามเหลี่ยม

นักเรียนได้รู้จักกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสี่เหลี่ยมที่มีความสูงเท่ากันมาแล้ว คำถามที่น่าสนใจคือภาชนะฐานสี่เหลี่ยมที่มีความสูงแตกต่างกันจะเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดได้หรือไม่ ถ้าได้ความสูงแต่ละด้านควรเป็นเท่าใด และภาชนะที่มีฐานเป็นรูปอื่น เช่น สามเหลี่ยม ห้าเหลี่ยม หกเหลี่ยม จะเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่ และจะต้องขึ้นกับความสูงของแต่ละด้านหรือไม่ คำถามเหล่านี้ถือว่าการขยายปัญหา หรือการขยายความรู้ให้กว้างขึ้นนั่นเอง โดยในการตรวจสอบว่าภาชนะแบบใดจะเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดนั้น มีความละเอียดซับซ้อน จึงจำเป็นต้องค่อยๆ แก้ปัญหาทีละขั้นตอน ในกิจกรรมนี้จะเป็นขั้นตอนแรกของการตรวจสอบว่าภาชนะฐานสามเหลี่ยมจะเป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดได้หรือไม่

จากภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย มีความสูงทั้งสามด้านเป็น 5, 6 และ 7 หน่วยตามลำดับตามรูป จะตวงของเหลวได้ปริมาตรเท่าใดบ้าง และในกรณีทั่วไปถ้าความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1 , h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ

นักเรียนคิดว่าภาชนะใบนี้จะสามารถตวงของเหลวได้ปริมาตรเท่าใดบ้าง



แนวตอบแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 4

กิจกรรมที่ 4 ชื่อกิจกรรม การตวงด้วยภาชนะฐานสามเหลี่ยม เวลา 1 ชั่วโมง
 กลุ่มที่ _____ สมาชิกในกลุ่มประกอบด้วย

1. _____ ประธานกลุ่ม2.
 _____ เลขานุการกลุ่ม3.
 _____ ผู้สับสนูน4.
 _____ ผู้รายงาน

ผลที่ได้จากการทดลองปฏิบัติจริง (การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์)

1. ถ้าภาชนะที่ให้มามีพื้นที่ฐานเป็น 3 ตารางหน่วย และมีความสูงเท่ากันคือ $h_1 = h_2 = h_3 = h$ ภาชนะนี้จะตวงของเหลวได้ปริมาตรเท่าใดบ้าง

h และ $3h$

2. จากภาชนะที่กำหนด นักเรียนคิดว่าจะสามารถตวงเหลวให้ได้ปริมาตรที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่แบบ

7 แบบ

3. จากจำนวนแบบของการตวงที่ได้ ถ้าให้นักเรียนแบ่งประเภทของวิธีการตวง โดยพิจารณาจากจำนวนของจุดมุมด้านบนของภาชนะที่ใช้ในการตวง จะแบ่งได้อย่างไร

3.1 การตวงโดยใช้จุดมุมบนของภาชนะ 1 จุด มีกี่แบบ อะไรบ้าง (อธิบายถึงวิธีการตวงโดยเขียนแสดงเฉพาะจุดมุมที่ใช้ในการตวง)

$a_1 a_2 a_3 a_1'$ $a_1 a_2 a_3 a_2'$ $a_1 a_2 a_3 a_3'$

3.2 การตวงโดยใช้จุดมุมบนของภาชนะ 2 จุด มีกี่แบบ อะไรบ้าง (อธิบายถึงวิธีการตวงโดยเขียนแสดงเฉพาะจุดมุมที่ใช้ในการตวง)

$a_1 a_2 a_3 a_1' a_2'$ $a_1 a_2 a_3 a_1' a_3'$ $a_1 a_2 a_3 a_2' a_3'$

3.3 การตวงโดยใช้จุดมุมบนของภาชนะ 3 จุด มีกี่แบบ อะไรบ้าง (อธิบายถึงวิธีการตวงโดยเขียนแสดงเฉพาะจุดมุมที่ใช้ในการตวง)

$a_1 a_2 a_3 a_1' a_2' a_3'$

4. ภาชนะที่ให้มาเป็นภาชนะฐานสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย มีความสูงทั้งสามด้านเป็น 5, 6 และ 7 หน่วยตามลำดับ เมื่อทดลองตวงของเหลวตามข้างต้นจะได้ของเหลวปริมาตรเท่าใดบ้าง

5, 6, 7, 11, 12, 13 และ 18 ลูกบาศก์หน่วย

5. ในการทวงแต่ละแบบ ปริมาตรที่ได้มีความสัมพันธ์กับความสูงของภาชนะหรือไม่ อย่างไร
- ปริมาตรที่ได้มีความสัมพันธ์กับความสูง จากภาชนะที่มีความสูง 5, 6 และ 7 หน่วย
- ปริมาตร 5 ลูกบาศก์หน่วย สัมพันธ์กับความสูง 5 หน่วย ปริมาตร 6 ลูกบาศก์หน่วย
- สัมพันธ์กับความสูง 5 หน่วย ปริมาตร 7 ลูกบาศก์หน่วย สัมพันธ์กับความสูง 5 หน่วย
- ปริมาตร 11 ลูกบาศก์หน่วย สัมพันธ์กับความสูง 5+6 หน่วย ปริมาตร 12 ลูกบาศก์หน่วย
- สัมพันธ์กับความสูง 5+7 หน่วย ปริมาตร 13 ลูกบาศก์หน่วย สัมพันธ์กับความสูง 6+7 หน่วย
- และปริมาตร 18 ลูกบาศก์หน่วย สัมพันธ์กับความสูง 5+6+7 หน่วย

ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง (การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์)

1. ถ้าภาชนะที่ให้มามีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วยตามลำดับ (ตามรูปในใบกิจกรรม) นักเรียนลองคาดเดาว่าภาชนะใบนี้จะตวงของเหลวได้กี่แบบ ด้วยวิธีการตวงแบบใด (อธิบายถึงวิธีการตวงโดยเขียนแสดงเฉพาะจุดมุมที่ใช้ในการตวง) และได้ปริมาตรเท่าใดบ้าง

7 แบบ

- $a_1 a_2 a_3 a'_1$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_1
- $a_1 a_2 a_3 a'_2$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_2
- $a_1 a_2 a_3 a'_3$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_3
- $a_1 a_2 a_3 a'_1 a'_2$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_1+h_2
- $a_1 a_2 a_3 a'_1 a'_3$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_1+h_3
- $a_1 a_2 a_3 a'_2 a'_3$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย h_2+h_3
- $a_1 a_2 a_3 a'_1 a'_2 a'_3$ ตวงของเหลวได้ h_1 ลูกบาศก์หน่วย $h_1+h_2+h_3$

การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

1. ให้นักเรียนพิสูจน์หรือแสดงเหตุผลเพื่อยืนยันว่า การตวงของเหลวที่ใช้จุดที่ฐานสามจุดและจุดด้านบนของหนึ่งจุด จะสามารถตวงของเหลวปริมาตร h_1 , h_2 และ h_3 ลูกบาศก์หน่วยได้จริง

จากการตวงของเหลวที่ใช้จุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a_1, a_2, a_3, a'_2$ และ a_1, a_2, a_3, a'_3 จะได้ของเหลวรูปทรงพีระมิดที่มีพื้นที่ฐานเป็น 3 ตารางหน่วย และมีความสูงของพีระมิดเป็น h_1, h_2 และ h_3 ตามลำดับ ซึ่งทำให้

$$\text{ปริมาตรของเหลวที่ตวงโดยใช้จุดมุมเป็น } a_1, a_2, a_3, a'_1 = \frac{1}{3} \times 3 \times h_1 = h_1$$

$$\text{ปริมาตรของเหลวที่ตวงโดยใช้จุดมุมเป็น } a_1, a_2, a_3, a'_2 = \frac{1}{3} \times 3 \times h_2 = h_2$$

$$\text{ปริมาตรของเหลวที่ตวงโดยใช้จุดมุมเป็น } a_1, a_2, a_3, a'_3 = \frac{1}{3} \times 3 \times h_3 = h_3$$

2. นักเรียนคิดว่าสำหรับของเหลวปริมาตรขนาดอื่น จะมีแนวคิดในการพิสูจน์อย่างไร

ปริมาตรของเหลวที่ตวงโดยใช้จุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_3$

และ $a_1, a_2, a_3, a'_2, a'_3$ พิจารณาการหาปริมาตรพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม

ปริมาตรของเหลวที่ตวงโดยใช้จุดมุมเป็น $a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3$ แยกพิจารณารูปทรงของ

ของเหลวเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนแรกเป็นรูปทรงพีระมิดฐานสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็น a_1, a_2, a_3

และมีความสูง h_1 ทำให้มีปริมาตร h_1 ลูกบาศก์หน่วย ของเหลวส่วนที่เหลือจะมีรูปทรง

เป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม แล้วพิจารณาการหาปริมาตรจากการหาปริมาตรพีระมิด

ฐานสี่เหลี่ยม แล้วนำปริมาตรจากทั้งสองส่วนรวมกัน

3. สมมติว่านักเรียนสามารถแสดงเหตุผลยืนยันได้แล้วว่า การตวงแต่ละแบบมีความสัมพันธ์กับความสูงของด้านทั้งสาม ให้นักเรียนเขียนแสดงทฤษฎีบทที่นักเรียนค้นพบ

ถ้าภาชนะรูปทรงปริซึมฐานสามเหลี่ยม มีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3

หน่วยตามลำดับ และมีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วยโดยที่ $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ แล้วเราจะสามารถ

ใช้ภาชนะนี้ตวงของเหลวที่มีปริมาตรขนาด $h_1, h_2, h_3, h_1 + h_2, h_1 + h_3, h_2 + h_3$ และ

$h_1 + h_2 + h_3$ ลูกบาศก์หน่วยได้

ภาคผนวก ค
เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย

- แบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง
- แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
- แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม (กิจกรรมที่ 5) และเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค
- แบบสำรวจรายการ
- แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
- แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับ
มัธยมศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

แบบประเมินโครงร่างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต สำหรับนักเรียนระดับมัธยม ศึกษาตอนปลายที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง

แบบประเมินนี้เป็นแบบประเมินโครงร่างหลักสูตร จัดทำขึ้นเพื่อให้ท่านซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญได้
กรุณาประเมินความเหมาะสม และความสอดคล้องระหว่างองค์ประกอบต่างๆ ของหลักสูตรโดยการ
ทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุด และเขียนข้อเสนอแนะอื่นๆ

แบบประเมินนี้แบ่งออกเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 แบบประเมินความเหมาะสมของโครงร่างหลักสูตร

ตอนที่ 2 แบบประเมินความสอดคล้องของโครงร่างหลักสูตร

ตอนที่ 3 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

ข้อมูลส่วนตัวผู้ประเมิน

ผู้เชี่ยวชาญสาขา _____

ประสบการณ์ในการทำงาน _____ ปี

สถานที่ทำงาน _____

ตอนที่ 1 แบบประเมินความเหมาะสมของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิद्यุต

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาหลักสูตรแล้วขอให้ท่านพิจารณาว่าองค์ประกอบต่างๆ ของหลักสูตรในข้อใดต่อไปนี้มีเหมาะสมมากน้อยเพียงใด

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร					
1.1 ส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้ความสามารถอย่างแท้จริง					
1.2 ส่งเสริมความสามารถด้านการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์					
1.3 สร้างเสริมนักเรียนที่เรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ในระดับดี					
1.4 ส่งเสริมผู้เรียนให้ได้ปฏิบัติจริงและเห็นถึงกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์					
1.5 ส่งเสริมการศึกษาหาความรู้ด้วยตนเอง					
1.6 ส่งเสริมการสร้างสรรคผลงานตามความสามารถและความสนใจของผู้เรียน					
1.7 พัฒนาศักยภาพของนักเรียนให้ได้ขีดสูงสุด					
1.8 ส่งเสริมให้นักเรียนได้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตวิद्यุต					
1.9 ส่งเสริมให้นักเรียนได้เห็นถึงการนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน					
1.10 ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
2. เนื้อหาของหลักสูตร					
2.1 เหมาะสมกับนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง					
2.2 นำไปปฏิบัติได้จริง					
2.3 เหมาะสมกับวัยของนักเรียน					
2.4 การกำหนดหัวข้อของเนื้อหาในหลักสูตรมีความเหมาะสม					
2.5 เนื้อหาแต่ละหน่วยในหลักสูตรมีความเหมาะสม					
2.6 จัดเรียงลำดับเนื้อหาอย่างเหมาะสม					
2.7 มีความเหมาะสมกับระยะเวลาที่กำหนด					
3. กิจกรรมการเรียนการสอน					
3.1 แผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละหน่วยมีความเหมาะสม					
3.2 เหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง					
3.3 เหมาะสมวัยของผู้เรียน					
3.4 ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์					
3.5 ส่งเสริมกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์					
3.6 เหมาะกับจุดมุ่งหมายหลักสูตร					
3.7 เหมาะสมกับเนื้อหาแต่ละหน่วย					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
หน่วยที่ 5					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
3.8 เหมาะสมกับการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง					
3.9 เหมาะสมในการนำไปปฏิบัติจริง					
3.10 ส่งเสริมการเรียนรู้ด้วยตนเอง					
3.11 ส่งเสริมให้นักเรียนได้ศึกษาหาความรู้ตามความสามารถและความสนใจ					
3.12 ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้มีโอกาสลงมือปฏิบัติจริง					
4. สื่อการเรียน					
4.1 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร					
4.2 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน					
4.3 เหมาะสมกับการส่งเสริมกระบวนการสืบสวนสอบสวนความรู้ทางคณิตศาสตร์					
4.4 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
5. การวัดการประเมินผล					
5.1 เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร					
5.2 เหมาะสมกับเนื้อหาของหลักสูตร					
5.3 เหมาะสมกับวัยของผู้เรียน					
5.4 เหมาะสมกับกิจกรรมและวิธีสอน					
5.5 เหมาะสมกับการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์					
5.6 เหมาะสมกับการวัดความรอบรู้ในเนื้อหาเรขาคณิตวิยุต					

ประเด็นการประเมิน	เห็นด้วยมากที่สุด	เห็นด้วยมาก	เห็นด้วยปานกลาง	เห็นด้วยน้อย	เห็นด้วยน้อยที่สุด
6. แผนการจัดการเรียนรู้					
6.1 ส่วนประกอบ(ระยะเวลา สารระ การเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ที่ คาดหวังกิจกรรมการเรียนรู้ การ สอน สื่อการเรียนการวัดและการ ประเมินผล) ในแต่ละหน่วยมี ความเหมาะสม					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
หน่วยที่ 5					
6.2 รายละเอียดของแผนการจัดการ เรียนรู้ในแต่ละหน่วยมีความ เหมาะสม					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
หน่วยที่ 5					
6.3 แผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละ หน่วยเหมาะกับการนำไปปฏิบัติ จริง					
หน่วยที่ 1					
หน่วยที่ 2					
หน่วยที่ 3					
หน่วยที่ 4					
หน่วยที่ 5					

ตอนที่ 2 แบบประเมินความสอดคล้องของโครงสร้างหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาหลักสูตรแล้วขอให้ท่านพิจารณาว่าองค์ประกอบต่างๆ ของหลักสูตร (จุดมุ่งหมาย เนื้อหา กิจกรรม สื่อการสอน การวัดและประเมินผล และแผนการสอน) มีความสอดคล้องกันหรือไม่

ประเด็นการประเมิน	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับเนื้อหาของหลักสูตร			
2. จุดมุ่งหมายของหลักสูตรกับกิจกรรมและวิธีการสอน			
3. เนื้อหาของหลักสูตรกับจำนวนหน่วยการเรียนรู้			
4. เนื้อหาของแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับเวลา			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			
5. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับกิจกรรมและวิธีการสอน			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			
6. เนื้อหาแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับสื่อการเรียนรู้			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			

ประเด็นการประเมิน	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
7. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับการวัด การประเมินผล			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			
8. เนื้อหาในแต่ละหน่วยการเรียนรู้กับแผนการ จัดการเรียนรู้			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			
9. กิจกรรมและวิธีการสอนกับสื่อการเรียนรู้ใน แต่ละหน่วย			
หน่วยที่ 1			
หน่วยที่ 2			
หน่วยที่ 3			
หน่วยที่ 4			
หน่วยที่ 5			
10. กิจกรรมและวิธีสอนกับการวัดและการ ประเมินผล			
11. ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังในแผนการจัดการ เรียนรู้กับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร			

ตอนที่ 3 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาหลักสูตรแล้วขอให้ท่านแสดงความคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะอื่นๆ ในประเด็นต่างๆ เพื่อผู้วิจัยจะได้ปรับปรุงแก้ไขโครงสร้างหลักสูตรให้ดีขึ้นก่อนที่จะนำไปใช้จริงต่อไป

1. จุดมุ่งหมายของหลักสูตร ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร และคิดว่ามีจุดใดควรแก้ไขบ้าง

2. เนื้อหาของหลักสูตร ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร และคิดว่ามีจุดใดบ้างควรแก้ไข (กรุณาช่วยพิจารณาการเขียนเนื้อหาในแต่ละหน่วย พร้อมทั้งช่วยแก้ไขและเขียนข้อเสนอแนะลงในเอกสารประกอบการเรียน)

3. ในด้านการจัดกิจกรรม ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร และคิดว่ามีจุดใดบ้างควรแก้ไข

4. ท่านคิดว่าสื่อการเรียนการสอนควรเพิ่มเติมสิ่งใดบ้าง

5. ท่านคิดว่าการจัดการประเมินผลควรแก้ไขเพิ่มเติมในประเด็นใดบ้าง อย่างไร

6. ในด้านแผนการจัดการเรียนรู้ ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร และคิดว่ามีจุดใดบ้างควรแก้ไข

7. ความคิดเห็นเพิ่มเติมเพื่อความสมบูรณ์ของหลักสูตรเรขาคณิตวิยุต

8. อื่นๆ

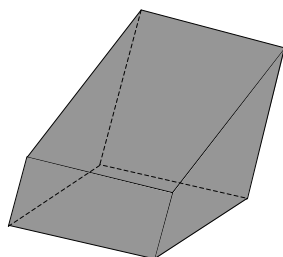
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพื่อวัดความสามารถด้านเนื้อหา
ฉบับที่ 1 ครอบคลุมเนื้อหาหน่วยที่ 1 – 3 เวลา 2 ชั่วโมง จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

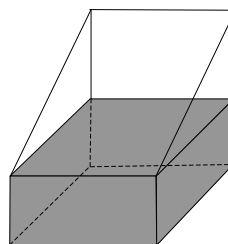
ชื่อ.....

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำหรือเขียนอธิบายแนวคิดโดยละเอียด

- บริษัทผลิตตู้จำหน่ายสินค้าอัตโนมัติ ต้องการออกแบบให้ตู้สามารถใช้ชิพแทนเงินในการชำระค่าสินค้า และเพื่อจะได้ไม่ต้องผลิตชิพหลายราคา บริษัทจึงผลิตชิพเฉพาะราคา 3 บาท และ 8 บาท เท่านั้น อยากทราบว่าบริษัทจะสามารถตั้งราคาสินค้าในตู้จำหน่ายในราคาเท่าใดได้บ้าง ผู้ซื้อจึงสามารถซื้อสินค้าโดยใช้ชิพหยอดตู้จำหน่ายสินค้า โดยไม่มีการทอน จงพิสูจน์ให้เห็นจริง
- ให้ M เป็นภาชนะ โดยที่ถ้าใช้ M ตวงของเหลวตามรูป a จะได้ปริมาตร 10 ลูกบาศก์หน่วย และตวงของเหลวตามรูป b จะได้ปริมาตร 6 ลูกบาศก์หน่วย จงตรวจสอบว่าภาชนะ M เป็นกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่



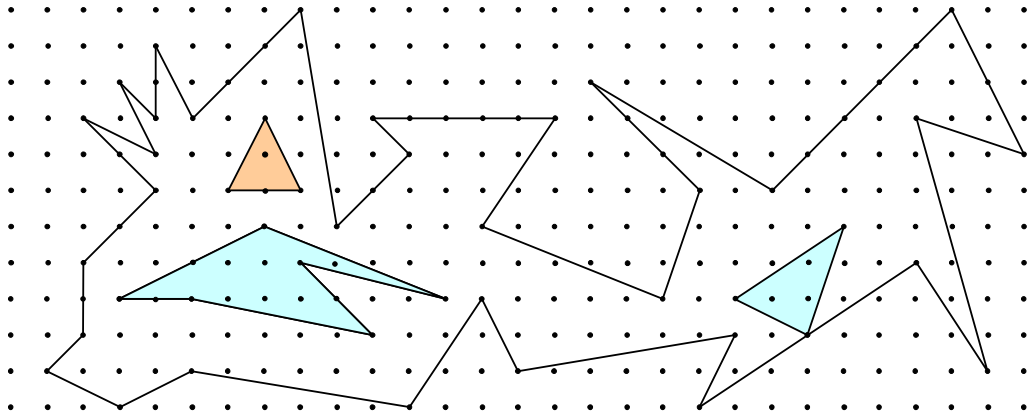
a



b

- จงพิสูจน์ว่าความจุสูงสุดของกล่องวัดปริมาตรได้ทุกขนาดฐานสามเหลี่ยม M ที่มีด้านตั้งฉากกับฐาน โดยทุกด้านมีความสูงเท่ากัน และมีพื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วยคือ 3 ลูกบาศก์หน่วย พร้อมทั้งหาความสูงของภาชนะ M
- จงแสดงเหตุผลว่าทำไมในระนาบ R^2 ไม่มีรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแลตทิซ

5. สนามกอล์ฟมีหลุมทราย 1 แห่ง และบึงน้ำ 2 แห่ง พื้นที่ที่เหลือปลูกหญ้า สมมติให้สนามตั้งอยู่บนพื้นราบ และแผนที่ที่ปรากฏมีระยะห่างระหว่างสองจุดใดๆ ตามแนวนอนหรือแนวตั้งเป็น 100 เมตร ถ้าเสียค่าปลูกหญ้าตารางเมตรละ 12 บาท จงใช้**ทฤษฎีบทของพิค**เพื่อคำนวณหาค่าปลูกหญ้าของสนามกอล์ฟแห่งนี้

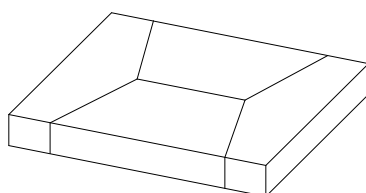


**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพื่อวัดความสามารถด้านเนื้อหา
ฉบับที่ 2 ครอบคลุมเนื้อหาหน่วยที่ 4 – 5 เวลา 2 ชั่วโมง จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน**

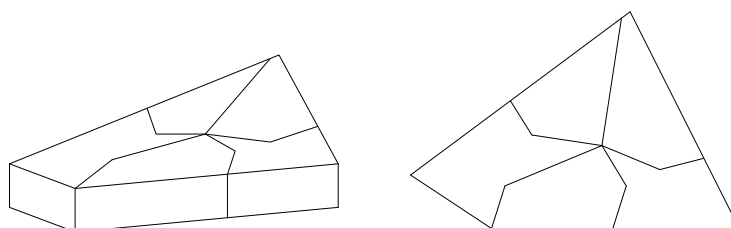
ชื่อ.....

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำหรือเขียนอธิบายแนวคิดโดยละเอียด

1. ในการห่อของขวัญรูปทรงลูกบาศก์ขนาด 27 ลูกบาศก์นิ้ว ด้วยแถบกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยพื้นที่ผิวของของขวัญต้องถูกปิดทับหมดโดยไม่มีการฉีก ไม่ดึงยึด และไม่พลิกหน้ากระดาษ โดยพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ต้องไม่เกิน 55 ตารางนิ้ว ให้นักเรียนกำหนดความกว้าง ยาว และหาพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ห่อเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น
2. จงยกตัวอย่างรูปทรงตัน 5 หน้าที่เป็นรูปทรงตันบรรจุแบบดับเบิล พร้อมวาดรูปและให้เหตุผลประกอบหรือแสดงให้เห็นจริงว่ารูปทรงตันดังกล่าวเป็นรูปทรงตันบรรจุแบบดับเบิลจริง
3. จงหาค่า n ทั้งหมด ที่ทำให้ปริซึมฐาน n เหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปทรงตันบรรจุแบบดับเบิล โดยแสดงเหตุผลประกอบ
4. จงกำหนดความกว้าง ยาวของเค้ก ความยาวของรอยตัด และขนาดของมุมที่ใช้ในการตัด เพื่อทำให้การแบ่งเค้กฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าออกเป็นสี่ชิ้นตามรูปด้านล่าง เป็นการแบ่งที่**สมบูรณ์**



5. การแบ่งเค้กออกเป็น 5 ชิ้นตามรูปด้านล่าง พบว่าเค้กแต่ละชิ้นมีปริมาณเนื้อเค้ก และครีมเท่าๆ กัน แต่ยังไม่ถือว่าเป็นการแบ่งที่**สมบูรณ์** เพราะมีเค้กบางชิ้นที่มีมุมภายในบางมุมมีขนาดใหญ่กว่า 180° จงกำหนดรอยการแบ่งใหม่เพื่อให้การแบ่งครั้งนี้ เป็นการแบ่งที่**สมบูรณ์** โดยกำหนดชื่อจุด แล้วอธิบายขั้นตอนวิธีการแบ่ง พร้อมแสดงเหตุผลประกอบ

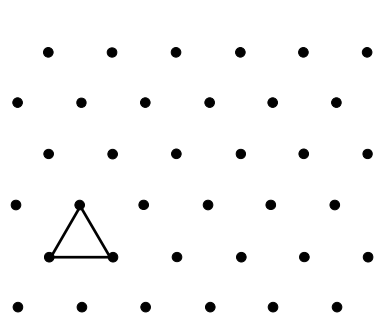


**แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม (กิจกรรมที่ 5)
และเกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค**

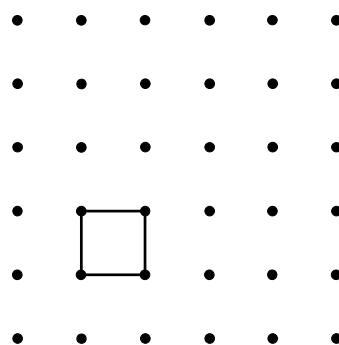
ใบกิจกรรมที่ 5

เรื่อง ทฤษฎีบทของพิก

แลตทิซ (lattice) คือชุดของจุดที่มีการจัดเรียงตัวอย่างเป็นระเบียบและแผ่เต็มระนาบ แลตทิซแบ่งเป็นสองประเภทคือ แลตทิซเชิงสามเหลี่ยม (triangular lattice) ซึ่งหมายถึงแลตทิซที่เมื่อเชื่อมสามจุดที่อยู่ใกล้กัน จะเกิดรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านมีขนาดหนึ่งหน่วย (unit triangle) ดังรูปที่ 1a และแลตทิซเชิงสี่เหลี่ยมจัตุรัส (square lattice) ซึ่งหมายถึงแลตทิซที่เมื่อเชื่อมสี่จุดที่อยู่ใกล้กัน จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านขนาดหนึ่งหน่วย (unit square) ดังรูปที่ 1b



a

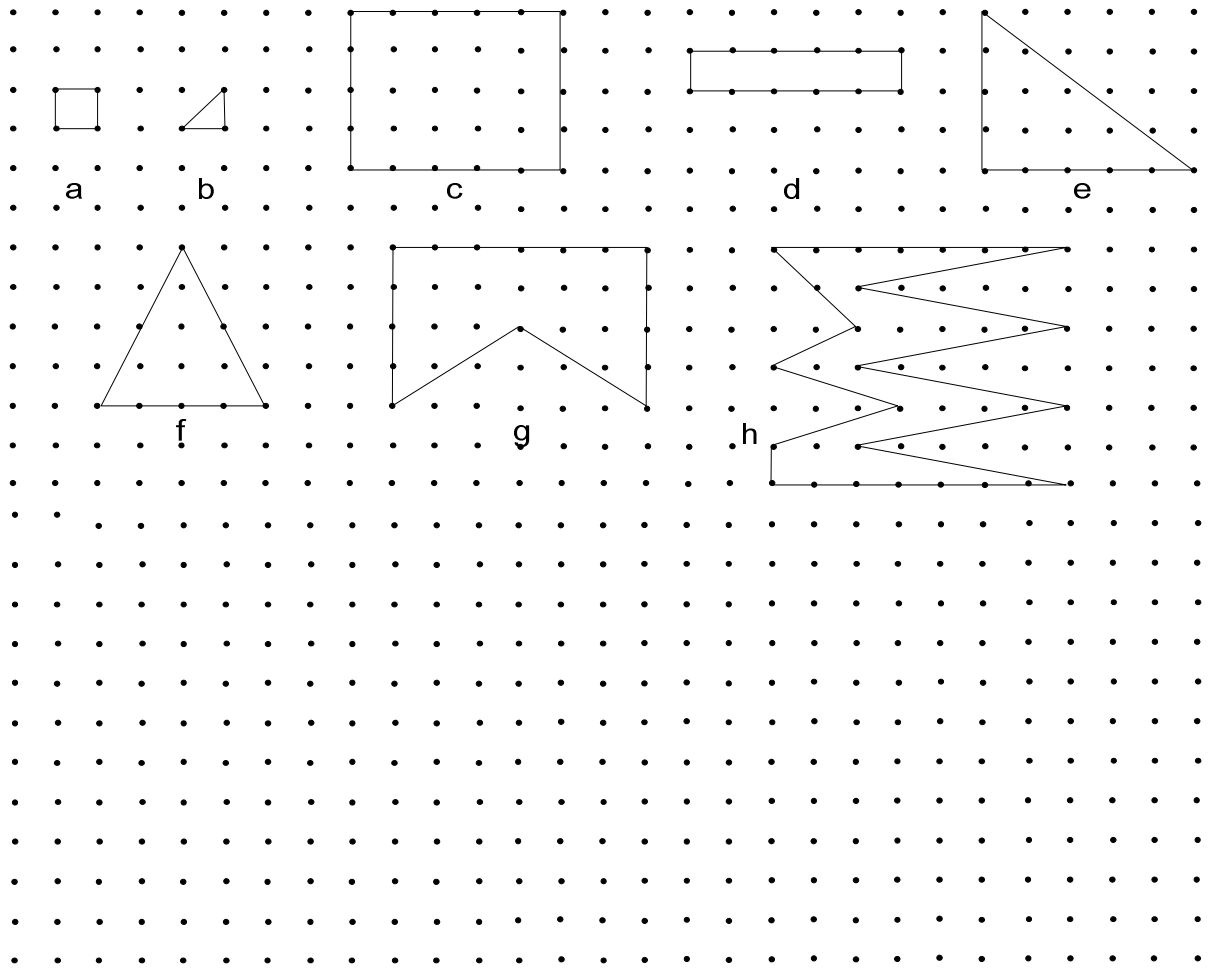


b

นิยาม จุดแลตทิซ (lattice point) คือจุดในระนาบที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม

นิยาม รูปหลายเหลี่ยมแลตทิซ (lattice polygon) คือรูปหลายเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็นจุดแลตทิซ

การคำนวณพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมแลตทิซ ในแลตทิซเชิงสี่เหลี่ยมจัตุรัสสามารถทำได้ง่าย โดยการแบ่งการคำนวณเป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อย ในปี ค.ศ.1899 นักคณิตศาสตร์ชาวออสเตรีย จอร์จ อะเล็กซานเดอร์ พิก (George Alexander Pick : 1859 - 1943) ได้ศึกษาและตีพิมพ์บทความที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ระหว่าง พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมแลตทิซ จำนวนจุดแลตทิซที่อยู่ภายในรูปหลายเหลี่ยมแลตทิซ และจำนวนจุดแลตทิซที่อยู่บนเส้นขอบของรูปหลายเหลี่ยมแลตทิซ ซึ่งต่อมารู้จักกันในชื่อของ ทฤษฎีบทของพิก (Pick's theorem)



จากรูป a, b, c, d, e, f, g และ h ให้นักเรียนสร้างรูปหลายเหลี่ยมแลตทิซอีก 2 รูป ตั้งชื่อ I และ j แล้วตอบคำถามจากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อสืบหาทฤษฎีบทของพิท

แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

กิจกรรมที่ 5 ชื่อกิจกรรม ทฤษฎีบทของพีค เวลา 1 ชั่วโมง

กลุ่มที่ _____ สมาชิกในกลุ่มประกอบด้วย

1. _____ ประธานกลุ่ม
2. _____ เลขานุการกลุ่ม
3. _____ ผู้สนับสนุน
4. _____ ผู้รายงาน

ผลที่ได้จากการทดลองปฏิบัติจริง (การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์)

รูป	จำนวนจุดแลตทิจที่อยู่ ภายในรูปหลายเหลี่ยม (I)	จำนวนจุดแลตทิจที่อยู่ตาม เส้นขอบของรูปหลายเหลี่ยม (B)	พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม แลตทิจที่ได้จากการคำนวณ
a			
b			
c			
d			
e			
f			
g			
h			
i			
j			

ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง (การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์)

1. จากข้อมูลข้างต้น นักเรียนคิดว่าทฤษฎีบทของพีค คือ

2. นักเรียนคิดว่าข้อสรุปที่ได้จากข้อหนึ่งน่าเชื่อถือหรือไม่ และเป็นจริงสำหรับรูปหลายเหลี่ยมแลตทิจ
ใดๆ หรือไม่

เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริก (Rubric Assessment)

การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์

- ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้อย่างชัดเจน โดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล กำหนดตัวแปรที่สำคัญ และอธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรนั้นได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน
- ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ไม่ชัดเจนโดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล แต่กำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร ถูกต้องเพียง 2 ใน 3
- ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถวิเคราะห์และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ไม่ชัดเจนโดยสามารถกำหนดแนวทางการทดลอง ดำเนินการทดลองเพื่อเก็บข้อมูลบันทึกผล แต่กำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปร ถูกต้องเพียง 1 ใน 3
- ระดับ 0 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าไม่สามารถวิเคราะห์และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ โดยไม่สามารถกำหนดตัวแปรหรืออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรได้

การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์

- ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง โดยสามารถสร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้อง ครอบคลุมกับสภาพปัญหา
- ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหา โดยสามารถสร้างข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้อย่างถูกต้อง แต่ขาดความครบถ้วน หรือมีข้อบกพร่องบางประการ
- ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในปัญหาม้าง โดยสามารถสร้างข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ที่สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง แต่ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป
- ระดับ 0 นักเรียนแสดงให้เห็นถึงความไม่เข้าใจในปัญหา โดยไม่สามารถสร้างข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้

การยืนยันข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

- ระดับ 3 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถยืนยันข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้อย่างชัดเจนโดยแสดงวิธีการยืนยันข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ ได้อย่างสมเหตุสมผล และมีการอ้างอิงที่ถูกต้อง
- ระดับ 2 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถยืนยันข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้ โดยแสดงสาระสำคัญได้ แต่ไม่ครบถ้วน อ้างอิงได้ถูกต้องบางส่วน มีข้อบกพร่องบางประการ หรือเหตุผลที่ใช้ไม่รัดกุมเพียงพอ
- ระดับ 1 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าสามารถยืนยันข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้บ้าง โดยแสดงเหตุผลเฉพาะบางกรณี แต่ไม่ได้แสดงเหตุผลในกรณีทั่วไป หรือมีการแสดงเหตุผลที่บกพร่อง ไม่ชัดเจน อ้างอิงไม่ถูกต้อง ไม่สมเหตุสมผลในบางกรณี
- ระดับ 0 นักเรียนแสดงให้เห็นว่าไม่สามารถยืนยันข้อสรุป หรือข้อความคาดการณ์ได้ โดยไม่แสดงความคิดเห็นใดๆ

แบบสำรวจรายการ

แบบสำรวจรายการ

กิจกรรมที่ _____ ชื่อกิจกรรม _____

กลุ่มที่ _____ สมาชิกในกลุ่มประกอบด้วย

1. _____ ประธานกลุ่ม
2. _____ เลขานุการกลุ่ม
3. _____ ผู้สันทนุสน
4. _____ ผู้รายงาน

การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์	มี	ไม่มี	
- อภิปรายวางแผนถึงวิธีการเก็บข้อมูล	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	1
- ทดลองปฏิบัติเพื่อเก็บและบันทึกข้อมูล	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2
- มีการทดลองซ้ำเพื่อยืนยันถึงผลที่ได้	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3
- อภิปรายเพื่อระบุถึงตัวแปรที่สำคัญ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	4
- อภิปรายถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	5
การหาข้อสรุปข้อความคาดการณ์			
- คาดคะเนผลการศึกษาหรือผลการทดลอง	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	6
- สร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์โดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	7
- สร้างข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์โดยใช้รูปแบบปิด	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	8
- อภิปรายถึงเหตุผลสำหรับข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	9
- ขยายข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ไปสู่กรณีทั่วไป	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	10
การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			
- ตรวจสอบข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์โดยใช้หลักการ บทนิยาม ทฤษฎี ที่เชื่อมโยงกับพื้นความรู้เดิม	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	11
- ตรวจสอบข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์โดยใช้แนวคิด และวิธีการนอกเหนือไปจากพื้นความรู้ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	12
- ยืนยันข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์โดยใช้เหตุผลเชิงปริภูมิ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13
- ให้เหตุผลมากกว่าหนึ่งวิธีในการยืนยันข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	14

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. แบบวัดฉบับนี้ต้องการให้นักเรียนแสดงความรู้สึก ความคิดเห็นที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความคิดเห็นของนักเรียนเป็นความคิดเห็นเฉพาะบุคคลไม่มีถูกหรือผิด ฉะนั้นขอให้ตอบให้ตรงกับความรู้สึกของนักเรียน
2. ในแต่ละข้อจะมีข้อความกำหนดให้ ขอให้ให้นักเรียนอ่านข้อความให้เข้าใจ แล้วแสดงความคิดเห็นที่มีต่อข้อความด้วยการทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องหนึ่งที่ตรงกับความคิดเห็นของนักเรียน ดังตัวอย่างการตอบดังนี้

ตัวอย่าง

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
1	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จำเป็นสำหรับการเรียนต่อ		✓			

แสดงว่าผู้ตอบเห็นด้วยกับข้อความที่กล่าวว่า “คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จำเป็นสำหรับการเรียนต่อ”

แบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
1	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างเป็นระบบ					
2	คณิตศาสตร์เป็นเรื่องเข้าใจง่ายเพราะมีขั้นตอน					
3	ฉันสนุกกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ยากและท้าทายความคิด					
4	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ฉันมีความกระตือรือร้นในการค้นคว้าหาความรู้อยู่เสมอ					
5	ฉันชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์มากกว่าวิชาอื่นที่ต้องใช้การท่องจำ					
6	ฉันชอบสนทนาความรู้ทางคณิตศาสตร์กับเพื่อน					
7	วิชาคณิตศาสตร์น่าเบื่อหน่าย					
8	ฉันสามารถเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้รวดเร็วกว่าวิชาอื่น					
9	ฉันสามารถตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าวิชาอื่น					
10	คณิตศาสตร์ช่วยให้การทำงานมีขั้นตอนดีขึ้น					
11	ฉันไม่สนุกกับการคิดคำนวณที่ซับซ้อน					
12	ฉันขยันทำแบบฝึกหัดวิชาคณิตศาสตร์					
13	ฉันไม่อยากทำการบ้านวิชาคณิตศาสตร์					
14	ฉันสบายใจเมื่อได้ทำกิจกรรมหรืองานที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
15	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เรียนสนุก					
16	ฉันชอบทำแบบฝึกหัดวิชาอื่นมากกว่าวิชาคณิตศาสตร์					
17	ฉันรู้สึกมั่นใจในการทำข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์					

ข้อที่	ข้อความ	เห็นด้วย อย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วย อย่างยิ่ง
18	ฉันชอบเข้าร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์					
19	คณิตศาสตร์ฝึกให้คนตัดสินใจอย่างมีเหตุผล					
20	เราสามารถดำรงชีพอยู่ได้โดยไม่ต้องอาศัยคณิตศาสตร์					
21	ฉันชอบคิดถึงสิ่งที่อยู่รอบตัวให้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อยู่เสมอ					
22	คณิตศาสตร์เป็นปัจจัยสำคัญต่อความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี					
23	ฉันรู้สึกหนักใจเมื่อเข้าสอบวิชาคณิตศาสตร์					
24	ฉันคิดว่าควรลดชั่วโมงเรียนวิชาคณิตศาสตร์และเพิ่มชั่วโมงเรียนวิชาอื่นแทน					
25	ฉันรู้สึกประหม่าและกลัว เมื่อครูให้ออกไปทำกิจกรรมคณิตศาสตร์หน้าชั้นเรียน					
26	ฉันชอบตอบปัญหาทางคณิตศาสตร์					
27	คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยากถ้าใช้ความพยายาม					
28	ฉันใช้เวลาในการทบทวนหรือหาความรู้เพิ่มเติมทางคณิตศาสตร์น้อยกว่าวิชาอื่น					
29	คนเรียนเก่งวิชาคณิตศาสตร์ชอบถือความคิดเห็นของตนเองเป็นใหญ่โดยไม่มีเหตุผล					
30	ฉันชอบนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในชีวิตประจำวันเสมอ เช่น การคิดเงินทอน					

แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย เป็นแบบประเมินที่อาศัยความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ จัดทำขึ้นเพื่อให้ท่านซึ่งเป็นผู้เชี่ยวชาญได้กรุณาประเมินโดยการทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงกับความคิดเห็นของท่านมากที่สุด พร้อมเขียนข้อเสนอแนะอื่นๆ โดยแบบประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วยแบบประเมิน 3 ส่วนมีรายละเอียดดังนี้

1. แบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบ่งเป็น 2 ตอน
 ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับเนื้อหาแต่ละหน่วย
 ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม
2. แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม แบ่งเป็น 2 ตอน
 ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องของแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมกับ
 จุดมุ่งหมายของหลักสูตร
 ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม
3. แบบประเมินแบบสำรวจรายการ แบ่งเป็น 2 ตอน
 ตอนที่ 1 ประเมินประเมินความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการกับพฤติกรรมทำให้
 เหตุผลทางคณิตศาสตร์
 ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

ข้อมูลส่วนตัวผู้ประเมิน

ผู้เชี่ยวชาญสาขา _____

ประสบการณ์ในการทำงาน _____ ปี

สถานที่ทำงาน _____

แบบประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับเนื้อหาแต่ละหน่วย

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแล้ว ขอให้ท่านพิจารณาว่าข้อคำถามแต่ละข้อกับหัวข้อเนื้อหาในแต่ละหน่วยที่กำหนดมีความสอดคล้องกันหรือไม่

ข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา	พิจารณาความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับหัวข้อเนื้อหา		
	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
ข้อ 1 กับเนื้อหาหน่วยที่ 1			
ข้อ 2 กับเนื้อหาหน่วยที่ 2			
ข้อ 3 กับเนื้อหาหน่วยที่ 2			
ข้อ 4 กับเนื้อหาหน่วยที่ 3			
ข้อ 5 กับเนื้อหาหน่วยที่ 3			
ข้อ 6 กับเนื้อหาหน่วยที่ 4			
ข้อ 7 กับเนื้อหาหน่วยที่ 4			
ข้อ 8 กับเนื้อหาหน่วยที่ 4			
ข้อ 9 กับเนื้อหาหน่วยที่ 5			
ข้อ 10 กับเนื้อหาหน่วยที่ 5			

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

คำชี้แจง หลังจากพิจารณาแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแล้ว ขอให้ท่านแสดงความคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะอื่นๆ เพื่อผู้วิจัยจะได้ปรับปรุงแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ก่อนที่จะนำไปใช้ต่อไป

แบบประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องของแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร
คำชี้แจง หลังจากพิจารณาแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมแล้ว ขอให้ท่านพิจารณาว่าแบบรายงาน
ผลการปฏิบัติกิจกรรมมีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตรหรือไม่

แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม	พิจารณาความสอดคล้องของแบบรายงาน ผลการปฏิบัติกิจกรรมกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร		
	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 1			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 2			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 3			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 4			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 5			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 6			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 7			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 8			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 9			
แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่ 10			

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

1. ในการประเมินผลโดยใช้เกณฑ์การให้คะแนนแบบรูบริค ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไรและคิดว่ามีจุดใดบ้างที่ควรแก้ไขปรับปรุง

2. ขอให้ท่านแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม เพื่อความสมบูรณ์ของแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

แบบประเมินแบบสำรวจรายการ

ตอนที่ 1 ประเมินความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการกับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คำชี้แจง หลังจากพิจารณาแบบสำรวจรายการแล้ว ขอให้ท่านพิจารณาว่าแบบสำรวจรายการมีความสอดคล้องกับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หรือไม่ โดยพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แบ่งเป็น 3 ด้านคือ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์ และการยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

รายการประเมินกับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	พิจารณาความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการกับพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์		
	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
รายการประเมินที่ 1 กับพฤติกรรม การวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
รายการประเมินที่ 2 กับพฤติกรรม การวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
รายการประเมินที่ 3 กับพฤติกรรม การวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
รายการประเมินที่ 4 กับพฤติกรรม การวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
รายการประเมินที่ 5 กับพฤติกรรม การวิเคราะห์ความสัมพันธ์			
รายการประเมินที่ 6 กับพฤติกรรม การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			
รายการประเมินที่ 7 กับพฤติกรรม การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			
รายการประเมินที่ 8 กับพฤติกรรม การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			
รายการประเมินที่ 9 กับพฤติกรรม การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			
รายการประเมินที่ 10 กับพฤติกรรม การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์			

รายการประเมินกับพฤติกรรมทำให้ เหตุผลทางคณิตศาสตร์	พิจารณาความสอดคล้องของแบบสำรวจรายการ กับพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์		
	สอดคล้อง	ไม่แน่ใจ	ไม่สอดคล้อง
รายการประเมินที่ 11 กับพฤติกรรม การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			
รายการประเมินที่ 12 กับพฤติกรรม การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			
รายการประเมินที่ 13 กับพฤติกรรม การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			
รายการประเมินที่ 14 กับพฤติกรรม การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล			

ตอนที่ 2 สอบถามความคิดเห็นเพิ่มเติม

1. รายการประเมินกับพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในแต่ละด้าน ท่านมีความคิดเห็นเพิ่มเติมอย่างไร และคิดว่ามีจุดใดบ้างควรแก้ไขหรือเพิ่มเติมบ้าง

2. ขอให้ท่านแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม เพื่อความสมบูรณ์ของแบบสำรวจรายการ

ภาคผนวก ง
ผลการหาคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย

- ผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการโดยผู้เชี่ยวชาญ
- ผลการหาค่าความเชื่อมั่น ค่าอำนาจจำแนก และค่าความยากง่าย ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
- ผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงาน
ผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการ โดยผู้เชี่ยวชาญ

ตาราง 13 ผลการประเมินแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อสอบข้อที่	เนื้อหาหน่วยที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	แปลผล
1.	1	1.00	สอดคล้อง
2.	2	1.00	สอดคล้อง
3.	2	1.00	สอดคล้อง
4.	3	1.00	สอดคล้อง
5.	3	1.00	สอดคล้อง
6.	4	1.00	สอดคล้อง
7.	4	1.00	สอดคล้อง
8.	4	1.00	สอดคล้อง
9.	5	1.00	สอดคล้อง
10.	5	1.00	สอดคล้อง

เกณฑ์ : คัดเลือกข้อคำถามที่มีดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

ตาราง 14 ผลการประเมินแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC)	แปลผล
1.	1.00	สอดคล้อง
2.	1.00	สอดคล้อง
3.	1.00	สอดคล้อง
4.	1.00	สอดคล้อง
5.	1.00	สอดคล้อง
6.	1.00	สอดคล้อง
7.	1.00	สอดคล้อง
8.	1.00	สอดคล้อง
9.	1.00	สอดคล้อง
10.	1.00	สอดคล้อง

เกณฑ์ : คัดเลือกแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมที่มีดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

ตาราง 15 ผลการประเมินแบบสำรวจรายการ

รายการประเมินที่	ดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของรายการประเมิน กับพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	แปลผล
1.	1.00	สอดคล้อง
2.	1.00	สอดคล้อง
3.	1.00	สอดคล้อง
4.	1.00	สอดคล้อง
5.	1.00	สอดคล้อง
6.	1.00	สอดคล้อง
7.	1.00	สอดคล้อง
8.	1.00	สอดคล้อง
9.	1.00	สอดคล้อง
10.	1.00	สอดคล้อง
11.	1.00	สอดคล้อง
12.	1.00	สอดคล้อง
13.	1.00	สอดคล้อง
14.	1.00	สอดคล้อง

เกณฑ์ : คัดเลือกรายการประเมินที่มีดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป

จากตาราง 13 ถึงตาราง 15 ปรากฏว่าข้อคำถามในแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีความสอดคล้องกับเนื้อหา แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรมสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของหลักสูตร และรายการประเมินในแบบสำรวจรายการสอดคล้องกับพฤติกรรมทำให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยผู้เชี่ยวชาญทั้ง 3 ท่านมีความคิดเห็นที่สอดคล้องเหมือนกันทั้งหมด (IOC เท่ากับ 1.00) แสดงว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม และแบบสำรวจรายการ มีคุณภาพสามารถนำไปใช้จริงกับกลุ่มตัวอย่าง

**ผลการหาค่าความเชื่อมั่น ค่าอำนาจจำแนก และค่าความยากง่าย
ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

ตาราง 16 ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหาของนักเรียนกลุ่มนักร้องจำนวน 12 คน

นักเรียนคนที่	คะแนนจากคำถามข้อที่									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2
2	2	3	2	2	2	2	2	2	3	3
3	2	3	2	2	2	2	3	3	2	2
4	2	2	1	2	2	2	1	2	2	2
5	2	3	2	2	2	1	2	2	2	2
6	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2
8	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1
9	2	3	3	2	3	2	2	3	2	2
10	2	2	3	2	2	2	3	3	3	2
11	2	2	3	2	3	2	3	3	2	3
12	3	3	3	2	3	2	2	3	3	2

ผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนกรายข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.846	10

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q01	19.33	10.788	.519	.834
Q02	18.83	10.333	.378	.851
Q03	19.17	8.697	.759	.807
Q04	19.50	10.455	.722	.822
Q05	19.08	10.629	.539	.832
Q06	19.50	11.364	.346	.846
Q07	19.25	9.659	.558	.831
Q08	18.92	9.902	.697	.818
Q09	19.17	9.970	.582	.828
Q10	19.25	10.568	.475	.837

ตาราง 17 ผลการหาค่าความยากง่ายรายข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ข้อสอบข้อที่	ค่าความยากง่าย
1	0.67
2	0.67
3	0.72
4	0.56
5	0.73
6	0.62
7	0.78
8	0.72
9	0.73
10	0.67

จากผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนกรายข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0 และผลการหาค่าความยากง่ายรายข้อของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปรากฏว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีค่าความเชื่อมั่นตามวิธีสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบัก (Cronbach alpha procedure) เท่ากับ 0.846 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.35-0.76 และค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.56-0.78 แสดงว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้จริงกับกลุ่มตัวอย่าง

**ผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนก
ของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์**

ผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนกรายข้อของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
.9177	30

Item-Total Statistics

	Scale Mean if Item Deleted	Scale Variance if Item Deleted	Corrected Item-Total Correlation	Cronbach's Alpha if Item Deleted
Q01	103.25	174.347	.254	.918
Q02	104.15	167.813	.546	.914
Q03	104.18	165.834	.653	.913
Q04	104.20	165.397	.652	.913
Q05	103.87	162.610	.635	.913
Q06	104.73	167.062	.484	.915
Q07	103.99	164.387	.620	.913
Q08	104.27	165.914	.595	.914
Q09	104.42	164.988	.611	.913
Q10	103.75	169.126	.454	.916
Q11	104.44	167.132	.437	.916
Q12	104.37	166.555	.535	.915
Q13	104.09	166.987	.510	.915
Q14	104.48	167.266	.566	.914
Q15	103.98	162.919	.725	.912
Q16	104.36	166.190	.486	.915
Q17	104.35	169.514	.454	.916
Q18	104.40	167.115	.589	.914
Q19	103.70	167.025	.548	.914
Q20	103.56	168.348	.378	.917
Q21	104.39	170.269	.396	.916
Q22	103.18	174.952	.195	.919
Q23	104.66	163.251	.572	.914
Q24	103.90	166.115	.539	.914
Q25	104.28	164.926	.551	.914
Q26	104.38	165.472	.687	.913
Q27	103.38	170.357	.406	.916
Q28	104.68	173.103	.216	.919
Q29	103.81	170.004	.325	.918
Q30	103.45	170.862	.393	.916

จากผลการหาค่าความเชื่อมั่น และค่าอำนาจจำแนกรายข้อของแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0 ปรากฏว่าข้อคำถามมีค่าอำนาจจำแนกระหว่าง 0.1949 – 0.7247 และแบบวัดเจตคติมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.9177 แสดงว่าแบบวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์มีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้จริงกับกลุ่มตัวอย่าง

ภาคผนวก จ

ข้อมูลและผลการวิเคราะห์ข้อมูลของกลุ่มตัวอย่าง

- ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหา
- ผลคะแนนความสามารถด้านในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- ผลการประเมินพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
- ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัย

ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหา

ตาราง 18 ผลคะแนนความสามารถด้านเนื้อหา ที่ได้จากการทดสอบกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

นักเรียนคนที่	คะแนนสอบฉบับที่ 1 (20 คะแนน)	คะแนนสอบฉบับที่ 1 (20 คะแนน)	คะแนนรวม (40 คะแนน)	แปลผล
1	17	15	32	ผ่านเกณฑ์
2	16	15	31	ผ่านเกณฑ์
3	15	16	31	ผ่านเกณฑ์
4	18	20	38	ผ่านเกณฑ์
5	17	13	30	ผ่านเกณฑ์
6	18	13	31	ผ่านเกณฑ์
7	17	17	34	ผ่านเกณฑ์
8	15	16	31	ผ่านเกณฑ์
9	17	15	32	ผ่านเกณฑ์
10	18	14	32	ผ่านเกณฑ์
11	17	15	32	ผ่านเกณฑ์
12	17	17	34	ผ่านเกณฑ์
13	19	19	38	ผ่านเกณฑ์
14	15	17	32	ผ่านเกณฑ์
15	16	17	33	ผ่านเกณฑ์
16	17	15	32	ผ่านเกณฑ์
17	17	18	35	ผ่านเกณฑ์
18	18	17	35	ผ่านเกณฑ์
19	17	19	36	ผ่านเกณฑ์
20	16	11	27	ไม่ผ่านเกณฑ์
21	17	16	33	ผ่านเกณฑ์
22	19	16	35	ผ่านเกณฑ์
23	20	20	40	ผ่านเกณฑ์

เกณฑ์ : เกณฑ์ 75 กล่าวคือถ้านักเรียนได้คะแนนรวมทั้งตั้งแต่ร้อยละ 75 ของคะแนนเต็มขึ้นไป (30
คะแนนขึ้นไปจากคะแนนเต็ม 40 คะแนน) จะถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ความสามารถด้านเนื้อหา

ผลคะแนนความสามารถด้านในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตาราง 19 ผลคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม

นักเรียนคนที่	คะแนนเฉลี่ยจากแบบรายงานผลการปฏิบัติกิจกรรม	แปลผล
1	2.88	ผ่านเกณฑ์
2	2.10	ผ่านเกณฑ์
3	2.47	ผ่านเกณฑ์
4	2.82	ผ่านเกณฑ์
5	2.03	ผ่านเกณฑ์
6	2.82	ผ่านเกณฑ์
7	2.30	ผ่านเกณฑ์
8	2.82	ผ่านเกณฑ์
9	2.70	ผ่านเกณฑ์
10	2.07	ผ่านเกณฑ์
11	2.70	ผ่านเกณฑ์
12	2.82	ผ่านเกณฑ์
13	2.82	ผ่านเกณฑ์
14	2.76	ผ่านเกณฑ์
15	2.07	ผ่านเกณฑ์
16	2.76	ผ่านเกณฑ์
17	2.77	ผ่านเกณฑ์
18	2.82	ผ่านเกณฑ์
19	2.77	ผ่านเกณฑ์
20	2.80	ผ่านเกณฑ์
21	2.80	ผ่านเกณฑ์
22	2.80	ผ่านเกณฑ์
23	2.80	ผ่านเกณฑ์

เกณฑ์ : เกณฑ์ 1.5 กล่าวคือถ้านักเรียนได้คะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 1.5 ขึ้นไปจะถือว่านักเรียนผ่านเกณฑ์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผลการประเมินพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตาราง 20 ผลการประเมินพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากแบบสำรวจรายการ

นักเรียนคนที่	สำรวจจากกิจกรรมที่	จำนวนรายการที่แสดงออก/ จำนวนรายการประเมินทั้งหมด	แปลผล
1	3, 9	17/25	เกณฑ์ดี
2	3, 9	17/25	เกณฑ์ดี
3	6	9/11	เกณฑ์ดี
4	2, 8	20/24	เกณฑ์ดี
5	6	9/11	เกณฑ์ดี
6	2, 8	20/24	เกณฑ์ดี
7	6	9/11	เกณฑ์ดี
8	2, 8	20/24	เกณฑ์ดี
9	5	11/13	เกณฑ์ดี
10	3, 9	17/25	เกณฑ์ดี
11	5	11/13	เกณฑ์ดี
12	4, 10	22/26	เกณฑ์ดี
13	2, 8	20/24	เกณฑ์ดี
14	4, 10	22/26	เกณฑ์ดี
15	3, 9	17/25	เกณฑ์ดี
16	4, 10	22/26	เกณฑ์ดี
17	5	11/13	เกณฑ์ดี
18	4, 10	22/26	เกณฑ์ดี
19	5	11/13	เกณฑ์ดี
20	1, 7	18/23	เกณฑ์ดี
21	1, 7	18/23	เกณฑ์ดี
22	1, 7	18/23	เกณฑ์ดี
23	1, 7	18/23	เกณฑ์ดี

เกณฑ์ : ถ้ามีจำนวนรายการที่นักเรียนแสดงออกเกินครึ่งหนึ่งของจำนวนรายการทั้งหมด แสดงว่านักเรียนมีพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

ตาราง 21 ผลการวัดเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

นักเรียนคนที่	คะแนนเฉลี่ย	แปลผล
1	3.50	เกณฑ์ดี
2	3.77	เกณฑ์ดี
3	3.80	เกณฑ์ดี
4	3.57	เกณฑ์ดี
5	3.57	เกณฑ์ดี
6	3.60	เกณฑ์ดี
7	3.53	เกณฑ์ดี
8	3.63	เกณฑ์ดี
9	4.10	เกณฑ์ดี
10	3.50	เกณฑ์ดี
11	4.00	เกณฑ์ดี
12	4.03	เกณฑ์ดี
13	4.23	เกณฑ์ดี
14	4.00	เกณฑ์ดี
15	3.93	เกณฑ์ดี
16	3.80	เกณฑ์ดี
17	4.10	เกณฑ์ดี
18	4.60	เกณฑ์ดี
19	4.03	เกณฑ์ดี
20	4.13	เกณฑ์ดี
21	4.23	เกณฑ์ดี
22	3.77	เกณฑ์ดี
23	4.50	เกณฑ์ดี

เกณฑ์ : เกณฑ์ 3.5 กล่าวคือถ้านักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยตั้งแต่ 3.5 ขึ้นไป จะถือว่านักเรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในเกณฑ์ดี

ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัย

ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัยข้อที่ 1 โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
score	23	.96	.209	0	1

Binomial Test

	Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)
score	Group 1	1	.22	.75	.012
	Group 2	0	.04		
	Total	23	1.00		

ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัยข้อที่ 2 โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
score	23	1.00	.000	1	1

Binomial Test

	Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)
score	Group 1	1	1.00	.75	.001
	Total	23	1.00		

ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัยข้อที่ 3 โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
score	23	1.00	.000	1	1

Binomial Test

	Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)
score	Group 1	1	1.00	.75	.001
	Total	23	1.00		

ผลการทดสอบสมมติฐานในการวิจัยข้อที่ 4 โดยการใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 14.0

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
score	23	1.00	.000	1	1

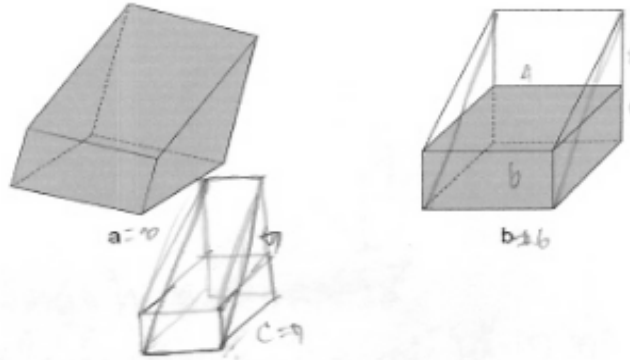
Binomial Test

	Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)	
score	Group 1	1	23	1.00	.75	.001
	Total	23	23	1.00		

ภาคผนวก ฉ
ตัวอย่างผลงานของนักเรียน

2

2. ให้ M เป็นภาชนะ โดยที่ถ้าใช้ M ดวงของเหลวตามรูป a จะได้ปริมาตร 10 ลูกบาศก์หน่วย และ ดวงของเหลวตามรูป b จะได้ปริมาตร 6 ลูกบาศก์หน่วย จงตรวจสอบว่าภาชนะ M เป็นกล่องวัด ปริมาตรได้ทุกขนาดหรือไม่



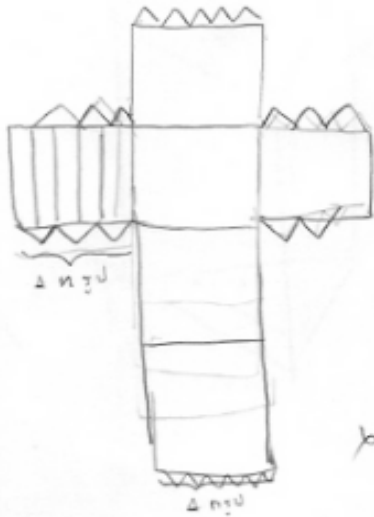
๑๐ : ช่องใส่ในหน้า a ✓
 ๕ : ๑ ๑ b ✓
 ๗ : ๑ ๑ c ✓
 ๑ : ๑ ๑ c แล้ว เจียดไว้ ๑๑ และที่ ๑๑ ตรง ๑๑ แล้วใส่ในหน้า b ✓
 4 : ๑ — ๑ a ๑ ————— ๑ b ✓
 3 : ๑ — ๑ a ๑ ————— ๑ c ✓
 ๗ : ๑ — ๑ a ๑ ————— ๑ c
 เหตุที่จนเหลือในหน้า b แล้วเหลือ ๑๑ และที่ ๑๑ ตรง ๑๑ แล้วใส่ในหน้า b ✓
 ที่เหลือ

๓ ๕ ๘
 ไม่ตรง

ภาพประกอบ 15 การคำนวณปริมาตรโดยตรง ทำให้ได้ปริมาตรไม่ครบทุกกรณี

4

1. ในการห่อของขวัญรูปทรงลูกบาศก์ขนาด 27 ลูกบาศก์นิ้ว ด้วยแถบกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยพื้นผิวของของขวัญต้องถูกปิดทั้งหมดโดยไม่มีการฉีก ไม่ตึงยึด และไม่พลิกหน้ากระดาษ โดยพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ต้องไม่เกิน 55 ตารางนิ้ว ให้นักเรียนกำหนดความกว้างของแถบกระดาษ และหาพื้นที่ของกระดาษที่ใช้ห่อเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น



กำหนด n นิ้ว n คือ ด้านอนสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นที่แต่ละด้านของกระดาษ
เส้นฐานนั้นไม่ใช่ด้านปลายสุดกระดาษ.

∴ ใช้ส่วนกระดาษมีความกว้าง $\frac{1}{2n}$ นิ้ว

รูปลูกบาศก์ขนาด 27 คบ. นิ้ว n ต้องใช้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ $3 \times$

ต้องห่อใช้กระดาษหน้า n รูป 2 มุมฉาก ที่มีพื้นที่ ไม่เกิน 55 ตร. นิ้ว

∴ ใช้ n พื้นที่น้อยสุดที่ต่อให้ n พื้นที่ Δ ที่เกินมา ≤ 55

$54 +$ พื้นที่ Δ ที่เกินมา ≤ 55

พื้นที่ Δ ที่เกินมา ≤ 1 .

เนื่องจากกระดาษใช้กระดาษหน้าของรูป 2 มุมฉาก กว้าง n นิ้ว n เส้น Δ ที่เกินมา $6n-1$

∴ แต่ละรูปใช้พื้นที่ $\frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2n^2}$ ตร. นิ้ว

พื้นที่ Δ ที่เกินมาทั้งหมด = $\frac{6n-1}{2n^2}$ ตร. นิ้ว

$\frac{6n-1}{2n^2} \leq 1$

∴ $6n-1 \leq 2n^2$

$2n^2 - 6n + 1 \geq 0$
 $(2n-1)(n-1) \geq 0$

เลือก $n = 3$ - แถบกระดาษมีความกว้าง $\frac{1}{6}$ นิ้ว

กระดาษที่ใช้ มีพื้นที่ $54 + \frac{6 \times 3 - 1}{2 \times 3^2} = 54 + \frac{17}{18}$ ตร. นิ้ว

ภาพประกอบ 16 การกำหนดกระดาษห่อต้นแบบที่ผิดพลาด

ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง (การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์)

1. ถ้าภาชนะที่ให้พื้นที่ฐาน 3 ตารางหน่วย และมีความสูงของทั้งสามด้านเป็น h_1, h_2 และ h_3 หน่วย ตามลำดับ (ตามรูปในใบกิจกรรม) นักเรียนคิดว่าภาชนะใบนี้จะตวงของเหลวได้กี่แบบ ด้วยวิธีการตวงแบบใด (อธิบายถึงวิธีการตวงโดยเขียนแสดงเฉพาะจุดมุมที่ใช้ในการตวง) และได้ปริมาตรเท่าใดบ้าง

	7 แบบ คือ		
	1. $a_1 a_2 a_3 a_1'$ ได้ปริมาตร	$(\frac{1}{3})(3)(h_1) = h_1$	✓
	2. $a_1 a_2 a_3 a_2'$ ได้ปริมาตร	$(\frac{1}{3})(3)(h_2) = h_2$	✓
	3. $a_1 a_2 a_3 a_3'$ ได้ปริมาตร	$(\frac{1}{3})(3)(h_3) = h_3$	✓
	4. $a_1 a_2 a_3 a_1'$ ได้ปริมาตร		
	5. $a_1 a_2 a_3 a_2'$ ได้ปริมาตร		
	6. $a_1 a_2 a_3 a_3'$ ได้ปริมาตร		
	7. $a_1 a_2 a_3 a_1'$ ได้ปริมาตร		

ภาพประกอบ 17 การหาข้อสรุปที่ไม่ครบถ้วน

ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง (การหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์)

1. นักเรียนคิดว่า จำนวนครั้งของการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้จำนวน n แผ่นมีความสัมพันธ์กับ จำนวนครั้งของการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้จำนวน $n-1$ แผ่นหรือไม่ ถ้ามีจะมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

แผ่นไม้ 101 แผ่น

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

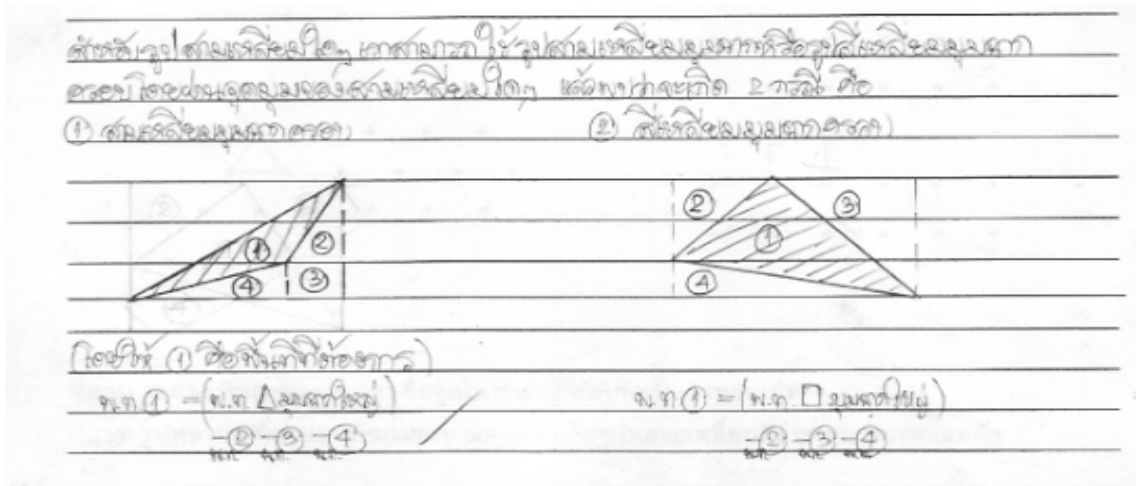
แผ่นไม้ 101 แผ่น

เมื่อ a_n คือ จำนวนครั้งของการเคลื่อนย้ายแผ่นไม้ n แผ่น

$n \geq 1 \quad n \geq 2$

$a_1 = 1 \quad \text{เมื่อ } a_1 = 1$

ภาพประกอบ 18 การหาข้อสรุปที่ขาดการเขียนแสดงรายละเอียดของตัวแปร



ภาพประกอบ 19 การยืนยันข้อสรุปในกิจกรรมเรื่องทฤษฎีบทของพิท ที่แสดงได้ครบทุกกรณี

การยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

1. ให้นักเรียนอธิบายหรือแสดงเหตุผล เพื่อยืนยันว่าข้อสรุปนั้นสมเหตุสมผล

จุด O เป็นจุดที่ O ได้เท่ากัน

เลื่อนจุด $A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ เป็นรอบ: X หน่วย
 เท่ากัน

จะได้ว่า $\Delta AOA' = \Delta BOB' = \Delta COC'$ เนื่องจาก สอดคล้องกัน และ สอดคล้องกัน

ดังนั้น $\square AOB'E = \square OCFB = \square AOC'D$

สรุป จะได้ว่า

แสดงว่า $\square EA'O'B' = \square FB'O'C' = \square A'O'C'D$

สรุปจะได้ว่า $\square EA'O'B' = \square EBOA - \Delta A'OA + \Delta BOB'$
 $= \square EBOA$

ในทำนองเดียวกัน

$\square FB'O'C' = \square OCFB$
 $\square A'O'C'D = \square AOC'D$

$\therefore \square EA'O'B' = \square FB'O'C' = \square A'O'C'D$

ภาพประกอบ 20 การยืนยันข้อสรุปในกิจกรรมเรื่องการแบ่งเค้ก ที่แสดงได้อย่างดีเยี่ยม

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ นายจิณดิษฐ์ ละออบักษิณ
 วันเดือนปีเกิด 24 สิงหาคม 2520
 สถานที่เกิด อำเภอเมือง จังหวัดปราจีนบุรี
 สถานที่อยู่ปัจจุบัน 15/64 อตมาศคอนโดมิเนียม ถนนรามคำแหง ซอย 22
 แขวงหัวหมาก เขตบางกะปิ กรุงเทพมหานคร 10240

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2541 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
 พ.ศ. 2544 วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
 พ.ศ. 2550 การศึกษาดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา
 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ