

การศึกษาการเปรียบเทียบระหว่างความนิ่มนวลสูงสุดกับการประหยัดพลังงานสูงสุดของ
ระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ปริญญานิพนธ์
ของ
สมชาย เครืออยู่

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551

การศึกษาการเปรียบเทียบระหว่างความมั่นคงสูงสุดกับการประหยัดพลังงานสูงสุดของ
ระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ปริญาณิพนธ์
ของ
สมชาย เครืออยู่

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

เมษายน 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาการเปรียบเทียบระหว่างความนิ่มนวลสูงสุดกับการประหยัดพลังงานสูงสุดของ
ระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น

บทคัดย่อ
ของ
สมชาย เครืออยู่

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551

สมชาย เครืออยู่(2551)การศึกษา การเปรียบเทียบ ระหว่าง ความนิ่มนวลสูงสุด กับ การประหยัดพลังงานสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ปริญญานิพนธ์ วศ.ม(วิศวกรรมเครื่องกล) กรุงเทพมหานคร:บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ คณะกรรมการควบคุม : พันโท ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระเกล้า, พันโท ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง

การใช้พลังงานน้อยที่สุดและความนิ่มนวลเป็นสิ่งที่ต้องการในการวางแผนเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์โดยทั่วไป เช่น รถยนต์ ลิฟท์ที่ใช้ความเร็วสูง และ หุ่นยนต์ที่ทำงานในการหยิบจับสิ่งของที่แตกหักและเสียหายง่าย แต่อย่างไรก็ตามนักวิจัยจำนวนมาก ได้พิจารณาปัญหาของระบบพลศาสตร์ดังกล่าวโดยตั้งเป้าวัตถุประสงค์ ไม่ว่าจะเป็นการใช้พลังงานน้อยที่สุด หรือ ให้มีความนิ่มนวลสูงสุด ตามความต้องการโดยรวมของแต่ละประเภทของปัญหาแยกจากกัน โครงการวิจัยนี้จะทำการวิจัยในสิ่งที่น่าสนใจมากระหว่าง การใช้พลังงานน้อยที่สุดและ ความนิ่มนวลสูงสุด(Minimum Jerk and Minimum Energy) ในการวางแผนการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์โดยทั่วไป ที่จะประสานทั้งสอง วัตถุประสงค์เข้าด้วยกัน ปัญหาทั้งสองจะถูกแก้ปัญหาคำตอบโดย ทฤษฎีความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ ด้วยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข ซึ่งจะทำให้สามารถที่จะจำลองการเคลื่อนที่และเปรียบเทียบได้ทั้งคำตอบที่ได้โดยชัดเจน และการเปรียบเทียบในเชิงของสถิติศาสตร์

สุดท้ายแล้วคาดว่า เจื่อนไซ พิเศษที่ แตกต่างจากการพิจารณาปัญหาแบบเดิมๆ จะมีผลเข้ามาเกี่ยวข้อง ในการนำไปใช้งาน ในการควบคุม ระบบพลศาสตร์ ได้จริงและแก้ไขปัญหาเรื่องขอเวลาเริ่มต้นในการควบคุมระบบจริงอีกด้วย

A STUDY ON THE COMPARISON BETWEEN MINIMUM JERK AND MINIMUM
ENERGY OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS.

AN ABSTRACT
BY
SOMCHAI KERYOO

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

April 2008

Somchai Keryoo (2008). *A Study on the Compariso Betwee Minimum Jerk and MinimEnergy of Nonlinear Dynamic systems*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering)
Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University Advist: Commit Lt.Col.
Assst. Prof. Dr.Tawiwat Veeraklaew...: Lt. Col. Asst.Prof. Dr.Anotai
Suksangpanomrung.

Most of the robots and advanced mobile machines nowadays are designed so that they are optimized on their energy consumption. Consequently, the trajectory planning of these robots are done through the minimum energy approaches. Nevertheless, in some applications, we do need the robot manipulator to be working very smoothly so that we can avoid damaging the product that the manipulator is handling. In other words, we would like to minimize the jerk of the movement of that robot as to give it the smoothest motion. We know that the minimum energy is the function of the acceleration, $\ddot{x}$, so we expect the minimization of jerk, $\ddot{\ddot{x}}$, to reveal relatively the same result concerning the energy consumption issue. Therefore, this research paper aims to search for the optimal point that has the minimum jerk along its path consuming minimum energy. And since this would be applicable to the robot manipulators and other high speed devices, which are highly nonlinear, we would focus our research on the nonlinear applications. Nevertheless, the example of linear problem will also be included for a better first time understanding of the overall picture of what this research paper is all about

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	2
ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
ออปติไมซ์เซชัน(Optimization).....	3
พลศาสตร์ออปติไมซ์เซชัน(Dynamic Optimization)	6
แคลคูลัสของฟาริเอชัน(Calculus of Variations).....	7
ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน(Functionals of Variance Functions).....	10
ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ(Functionals with Constraints).....	13
การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสของฟาริเอเบิล(Calculus of Variation with Dynamic Optimization)	16
สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน(Dynamic Optimization Conclusion)	18
ทฤษฎีการประหยัดพลังงานสูงสุด(Minimum Energy).....	19
ทฤษฎีความนิ่มนวลสูงสุด(Minimum Jerk).....	20
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	22
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	24
การกำหนดปัญหา (State of the Problem).....	26
ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์.....	25
การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	29
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	30
ผลการทดสอบ.....	30
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	34

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปและวิจารณ์.....	36
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	36
ข้อเสนอแนะ.....	36
บรรณานุกรม.....	37
ภาคผนวก.....	38
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	61

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การใช้พลังงานน้อยที่สุดและความนุ่มนวล เป็นที่ต้องการในการวางแผนเคลื่อนที่ในระบบพลศาสตร์โดยทั่วไป เช่น รถยนต์ ลิฟท์ที่ใช้ความเร็วสูง และ หุ่นยนต์ที่ทำงานในการหยิบจับสิ่งของที่แตกหักและเสียหายง่าย แต่อย่างไรก็ตามนักวิจัยจำนวนมาก ได้พิจารณาปัญหาของระบบพลศาสตร์ดังกล่าวโดยตั้งเป้าวัตถุประสงค์ ไม่ว่าจะเป็นการใช้พลังงานน้อยที่สุด หรือ ให้มีความนุ่มนวลสูงสุด ตามความต้องการโดยรวมของแต่ละประเภทของปัญหาแยกจากกัน โครงการวิจัยนี้จะทำการวิจัยในสิ่งที่น่าสนใจมากระหว่าง การใช้พลังงานน้อยที่สุดและ ความนุ่มนวลสูงสุด(Minimum Jerk and Minimum Energy) ในการวางแผนการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์โดยทั่วไป ที่จะประสานทั้งสอง วัตถุประสงค์เข้าด้วยกัน ปัญหาทั้งสองจะถูกแก้ปัญหาคำตอบโดย ทฤษฎีความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ ด้วยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข ซึ่งจะทำให้สามารถที่จะจำลองการเคลื่อนที่และเปรียบเทียบได้ทั้งคำตอบที่ได้โดยชัดเจน และการเปรียบเทียบในเชิงของสถิติศาสตร์ สุดท้ายแล้วคาดว่า เจื่อนไขพิเศษที่แตกต่างจากการพิจารณาปัญหาแบบเดิมๆ น่าจะมีผลเข้ามาเกี่ยวข้องในการนำไปใช้งาน ในการควบคุมระบบพลศาสตร์ได้จริงและแก้ไขปัญหาระยะของเวลาเริ่มต้นในการควบคุมระบบจริงอีกด้วย

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อนำเอาเทคนิค วิธีความเหมาะสมสูงสุด มาประยุกต์ใช้ กับปัญหาทางพลศาสตร์กับปัญหาการเปรียบเทียบ ระหว่าง ความนุ่มนวลสูงสุด กับการประหยัดพลังงานสูงสุด (Minimum Jerk and Minimum Energy)

1.2.2 เพื่อพิสูจน์ถึงทฤษฎีหลักการปัญหาทางด้านความเหมาะสมสูงสุด มาเปรียบเทียบกันระหว่างการแก้ปัญหา การเปรียบเทียบระหว่าง ความนุ่มนวลสูงสุด กับการประหยัดพลังงานสูงสุด (Minimum Jerk and Minimum Energy) ของระบบพลศาสตร์แบบ ไม่เชิงเส้น

1.2.3 เพื่อนำเสนอถึง การเปรียบเทียบข้อดี และ ข้อด้อยของ การหาคำตอบของหลักการ ใช้ ความนุ่มนวลสูงสุดกับ หลักการพลังงานสูงสุด ของปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น (ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์)

1.3. ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 การศึกษาวิจัยครั้งนี้จะนำเอาปัญหาความเหมาะสมสูงสุด ในการใช้ความโน้มถ่วงสูงสุดเปรียบเทียบกับหลักการใช้พลังงานสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Non-linear systems)

1.3.2 ใช้สมการการเคลื่อนที่มาเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

1.3.3 ใช้โปรแกรมแมทแล็บ(Matlab) เขียนโปรแกรมการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยการติดต่อรับข้อมูลจากผู้ใช้งาน (GUI.)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถนำการประมวลผลโปรแกรมที่ได้ ไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้นจะเป็นรูปแบบใด ก็สามารถที่จะใช้การประมวลผลโปรแกรม ที่ภายในสภาวะเงื่อนไขเดียวกัน เพื่อหาคำตอบนำมาใช้ในการเปรียบเทียบ

1.4.2 สามารถนำเสนอหลักการ ใช้ความโน้มถ่วงสูงสุด(Minimum Jerk) และการประหยัดพลังงานสูงสุด (Minimum Energy) โดยที่สภาวะข้อมูลตัวแปรที่เหมือนกัน

1.4.3 ใช้เป็นเอกสารอ้างอิงการควบคุมระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้น ในรูปกรณีการเปรียบเทียบระหว่างความโน้มถ่วงสูงสุดกับการประหยัดพลังงานสูงสุด (Minimum Jerk and Minimum Energy)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาและทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

- 2.1 ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)
- 2.2 พลศาสตร์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)
- 2.3 แคลคูลัสออฟวาเรียนชัน (Calculus of Variations)
- 2.4 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of Variance Functions)
- 2.5 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)
- 2.6 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟวาเรียนชัน (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)
- 2.7 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)
- 2.8 ทฤษฎีการประหยัดพลังงานสูงสุด (Minimum Energy)
- 2.9 ทฤษฎีความนิ่มนวลสูงสุด (Minimum Jerk)
- 2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าที่เหมาะสมที่สุดนี้จะได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization Goal) ทำเพื่อให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์ และความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งาน เราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา แต่ในการค้นหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธีออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องกำหนดลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสียก่อน คือ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables), ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) และดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

2.1.1 ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่บอกถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์ตัวแปรคือตัวที่ไม่ทราบค่าและต้องทำการหาค่าออกมา ดีไซน์วาริเอเบิลนั้นผู้ออกแบบจำเป็นต้องใช้ประสบการณ์, ความชำนาญ, ข้อกำหนดของวิธี และพื้นฐานความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจหลักการและวิธีการของดีไซน์วาริเอเบิล คือต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท์ (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิลจะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ ทางเลขคณิตได้ ดีไซน์วาริเอเบิลสามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิลเหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิลและในทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขห้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียน

สัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้คือ $[X]$, x หรือ x , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i=1,2,\dots,n$

2.1.2 ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะ แตกต่างกันไป เช่น ภาระที่กระทำ คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซน์วาริเอเบิลและเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้ คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

2.1.3 ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซน์วาริเอเบิล และดีไซน์พารามิเตอร์มาประเมินค่าและเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วยดีไซน์ฟังก์ชันนี้ สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซน์ออปเจกทิฟ และหรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาค่าการออกแบบที่เหมาะสมขึ้นมา และต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าเป็นการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็กลายเป็นออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี้ก็จะเป็นคอนสเทรนต์ (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

2.1.4 รูปแบบมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นเป็นองค์ประกอบโดยทั่วไปของแบบจำลองเพื่อหาค่าทางคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) และมีการเขียนในทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\text{สอดคล้องกับเงื่อนไข } g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, l = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

เขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ } f(X), [X]_n \quad (2.5)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข: } [g(X)]_l = 0 \quad (2.6)$$

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2.7)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2.8)$$

2.1.5 ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่มี ดีไซน์วาริเอเบิลไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สถิติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

2.1.5.1 กรณีหาค่าน้อยสุด (Minimum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมินิมัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.9)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมินิมัม (Local minimum)

2.1.5.2 กรณีหาค่ามากที่สุด (Maximum)

กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอล แมกซิмум (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2.10)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่า โลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

2.2 พลศาสตร์ออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization)

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ ขึ้นกับเวลาจะถูกเรียกว่าพลศาสตร์และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์มาเป็นตัวแสดงระบบพลศาสตร์ (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสแตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไปหรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2.11) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2.11) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสถานะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลา ให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้ห่อปเจกทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุด หรือ มากสุดปัญหาไดนามิกจะเรียก ห่อปเจกทิฟว์ฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.12)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสถานะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่

ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time history) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือนอนลิเนียร์ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสเตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

2.3 แคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบชั้นความเสถียรเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับชั้นความเสถียร (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (2.13)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจจะขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.14)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสออฟวาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.3.1 ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดี่ยว (Functionals of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบชั้นความเสถียรเดี่ยว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้

2.3.2 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่ (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$

และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั้นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x+h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2.15)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2.16)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้น เมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) ก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2.17)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้ อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ พบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.18)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.3.3. กำหนดเวลาสุดท้ายคงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.3.2) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามขอบใจ ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} = 0 \quad (2.20)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0 \quad (2.21)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

2.3.4 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (2.3.2) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Desire function) ที่เป็น เอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x + h] - J[x] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt - \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) dt \end{aligned} \quad (2.22)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\ &\quad + F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นเขียนสมการใหม่ได้

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น(Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x|_{t_f}$, $\delta x|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น(Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} = 0 \quad (2.27)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.4 ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functionals of Variance Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

2.4.1 กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้คงที่(Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals)

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2.28)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt\end{aligned}\quad (2.29)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2.30)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2.31)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้อีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้ อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

ซึ่งสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้

2.4.2 กำหนดเวลาสุดท้ายไว้คงที่แต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (2.4.1) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการของหัวข้อ (2.4.1) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ จึงสามารถกำหนดได้ตามการใช้งาน ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

ซึ่งสมการนี้เรียกว่าสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

2.4.3 เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้เป็นรูปแบบทั่วไปที่ใช้เป็นเงื่อนไขหลักในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมแต่ก็มีวิธีการหาค่าตอบใกล้เคียงกับกรณี (2.4.1) ถ้า $x_i(t), i = 1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functionals) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \end{aligned} \quad (2.37)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ &\quad + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการก็จะพบว่า

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการจะเป็น

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\ & + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไข

ขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.41)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.42)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

2.5 ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functionals with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

2.5.1 ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

พิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2.43)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$

ซึ่งจะเป็น F ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อใช้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้ายทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารถทำการหาเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

2.5.2 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.44)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial \dot{x}_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

เมื่อเงื่อนไขจำเป็น (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนccessอรีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2.46)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned} \left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

2.5.3 ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

หัวข้อ (2.5.1 และ 2.5.2) เราสามารถเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j = 1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์ มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2.48)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \\ \text{เมื่อ } F' = & F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j \end{aligned} \quad (2.50)$$

ทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็น (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

2.6 การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชันด้วยแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of Variation with Dynamic Optimization)

จากที่กล่าวมาแล้วในส่วนของแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of variation) นั้นพบว่า มีประโยชน์อย่างมากกับการนำมาแก้ปัญหาทางด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนั้นต่อไปนี้จะมาดูวิธีการนำเอาแคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of variation) มาใช้แก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังนี้

2.6.1 เวลาสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed Final Time)

ลักษณะเช่นนี้ถือว่าเป็นลักษณะที่ถือว่าธรรมดาทั่วไปแต่ต้องเป็นระบบที่เข้าข่ายดังนี้คือ มีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นและเวลาสุดท้ายคือ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed end time) และระบบจะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_f)$ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น รถไฟที่วิ่งระหว่างเมืองสองเมืองที่มีกำหนดเวลาออกและเวลาถึงสถานีไว้ตายตัวแล้ว ซึ่งออปปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) อาจจะเป็นการสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงที่น้อยที่สุดก็ได้ ซึ่งเราจะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัวแต่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลา

2.6.2 เวลาสุดท้ายแปรผัน (Variable Final Time)

ลักษณะเช่นนี้มีลักษณะคล้ายกับหัวข้อ (2.6.1) เพียงแต่ที่เวลาสุดท้าย t_f แปรผันได้ แต่ต้องมีรูปแบบการระบุปัญหาโดยสมการ (2.11), มีลักษณะของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ดังสมการ (2.12), เวลาเริ่มต้นคือ t_0 ถูกกำหนดไว้ตายตัว (Fixed start time) แต่เวลาสุดท้าย t_f มีการแปรผัน (Variable end time) และมีการระบุสภาวะเริ่มต้นไว้แล้ว $x_1(t_0), \dots, x_n(t_f)$ ตามลำดับ เช่น การแข่งรถเป็นต้น จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่พบในงานด้านไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) 3 ลักษณะด้วยกัน คือ สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ตายตัว, สภาวะสุดท้าย $x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)$ ถูกกำหนดไว้ให้เป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) และสุดท้ายคือคอนโทรลวารีเอเบิลและสเตตวารีเอเบิล (Control variables and state variables) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับตลอดเวลาการเคลื่อนที่ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.6.3 สภาวะสุดท้ายถูกกำหนดไว้ตายตัว (Final States are Prescribed)

ปัญหานี้มีฟังก์ชันนอล (Functional) เป็น

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.53)$$

เมื่อ

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) [f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) - \dot{x}_i] \quad (2.54)$$

เมื่อ $\lambda_i(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange Multipliers) ด้วยการกำหนดเวลาและสภาวะเริ่มต้น รวมทั้งระบบสภาวะสุดท้ายไว้ ดังนั้นจะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันดังนี้

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{x_j} dt + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{u_k} dt \\
& + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \delta u_k \Big|_{t_0} \right) \\
& + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L' - \sum_{j=1}^n \dot{x}_j \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{k=1}^m \dot{u}_k \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right]_{t_f} \delta t_f
\end{aligned} \tag{2.55}$$

เมื่อเราทำการประเมินค่าแต่ละส่วนในสมการ ก็จะทำให้เราสามารถหาเงื่อนไขจำเป็น (Necessary Conditions) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_j &= -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, j=1, \dots, n \\
\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} &= 0, k=1, \dots, m \\
\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + L + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right]_{t_f} &= 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

ผลเฉลยของสภาวะ (States) $x_j(t)$, ลากรานจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multipliers) $\lambda_j(t)$ (บางครั้งเรียกโคสเทต (Costates)), คอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_k(t)$ และเวลาสุดท้าย t_f สามารถหาค่าได้โดยการใช้สเตตอีควชัน (State equations) คือสมการ (2.11) จำนวน n สมการ, โคสเทตอีควชัน (Costate equations) คือสมการ (2.56) จำนวน n สมการ และเอตดิชันนอลอีควชันคือสมการ (2.56) จำนวน m สมการและสมการเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) คือสมการ (2.56) ทำให้มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First order differential equations) อยู่จำนวน $2n$ สมการ และมีสมการสามัญ (Ordinary equations) จำนวน $m+1$ สมการ ในการหาผลเฉลยนี้มีความจำเป็นจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จำนวน $2n$ เงื่อนไข และต้องกำหนดสภาวะที่เวลา t_0 และ t_f ด้วย

2.7 สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน(Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยมจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.11) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i=1, \dots, n \tag{2.57}$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไข

บังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2.58)$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาพลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของแปรผัน (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ν_i λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{i=1}^q \nu_i s_i + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt \quad (2.59)$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

$$\begin{aligned} \Phi' &= \Phi + \sum_{i=1}^q \nu_i s_i \\ \text{เมื่อ} \quad L' &= L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) \end{aligned} \quad (2.60)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากับและเชิงเปรียบเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอม ที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

2.8 ทฤษฎีการประหยัดพลังงานสูงสุด(Mimimum Energy)

ระบบพลศาสตร์การเคลื่อนที่แบบไม่เชิงเส้นส่วนใหญ่สามารถอธิบายแสดงโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i = 1, \dots, n$$

จาก (2.11) เมื่อ $x \in R^n, u \in R^m$ เป็นเวกเตอร์สถานะและเวกเตอร์ควบคุม (States and control vectors)

ตามลำดับ x_0 คือเวกเตอร์แสดงเงื่อนไขสถานะที่เริ่มต้น t_0 , คือ เวลาเริ่มต้น $F(t)$ เป็นสเกลลาร์เมตริกซ์ขนาด $n \times n$ และ $g(t)$ คือสเกลลาร์เมตริกซ์ขนาด $n \times m$ โดยที่ข้อกำหนดของปัญหา (statement of problem) คือการคำนวณหา ตัวควบคุมป้อนเข้า (control input), $u(t)$ และ ตัวแปรสถานะ (state variable), $x(t)$ ดังนั้นดัชนีสมรรถนะที่น้อยที่สุด (Minimum performance index) คือ

$$\text{Cost function} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2 dt \quad i=1, \dots, m \quad (2.61)$$

$$J = \int_0^1 u_1^2 dt \quad (2.62)$$

สำหรับสมการที่ (2.62) การใช้ค่าคำนวณค่าระบบหนึ่งของการแปรปรวน, ถูกกำหนดแสดงด้วยตัวแปร F จะได้

$$F = u_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(u_1 - \dot{x}_2) \quad (2.63)$$

กำหนดให้สภาวะจำกัด (Necessary condition)

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ u_1 &= -\frac{\lambda_2}{2} \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.9 ทฤษฎีความหิมนวลสูงสุด (Minimum Jerk)

ปัญหาการหิมนวลสูงสุดมีรูปแบบแน่นอนเช่นเดียวกับปัญหาการประหยัดพลังงานสูงสุดในสมการที่ (2.62) อย่างไรก็ตาม, เพราะว่าเป็นอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสิ่งที่นำเข้าหน่วยควบคุมซึ่งได้รับการพิจารณา, สมการที่ (2.62) เพราะการรวมถึงการพิจารณาของความหิมนวลเข้าไปในระบบ (Control input) ตามที่แสดงข้างล่าง

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

ที่ซึ่งสมภาวะเส้นเขตจากเริ่มต้น($t=0$)และเวลาสิ้นสุดท้าย($t=1$)คือเช่นเดียวกับปัญหาพลังงานน้อยที่สุดให้ Boundary condition $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_1(1)=1$ และ $x_2(1)=0$
ค่าความจำเป็นพล(การกระตุก)ทำงานในปัญหานี้กำหนดให้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i^2 dt \quad i=1,\dots,m$$

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 dt \quad (2.66)$$

$$\text{ให้ } \text{jerk} = u = \tilde{u} = \ddot{x}(t) = \frac{d^3 x(t)}{dt^3} \quad (2.67)$$

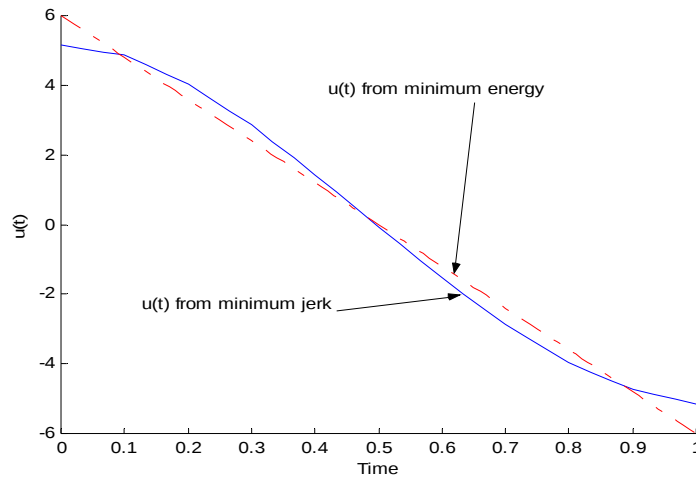
นี่คือค่าจำเป็นพลเป็นฟังก์ชันเทียบเวลาดังต่อไปนี้ โพรซีเจอร์เช่นเดียวกันที่ใช้ในปัญหาพลังงานน้อยที่สุดคือ F

$$F = \tilde{u}_1^2 + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(x_3 - \dot{x}_2) + \lambda_3(\tilde{u}_1 - \dot{x}_3) \quad (2.68)$$

การกำหนดขอบเขตจำกัด ของปัญหาการจำเป็นพลสูงสุด(Necessary Condition)คือ

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_1 &= -\lambda_3/2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

ผลลัพธ์จากค่าตัวเลขเมื่อสร้างกราฟจะการคำนวณด้วยโปรแกรมได้ดังรูปด้านล่าง



ภาพประกอบ 1 กราฟเปรียบเทียบความนิ่มนวลสูงสุดกับการประหยัดพลังงาน

2.10 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ซุนิล เค. อังกราวัล, ทวีวัชร วีระเกล้า และ บี.ซี.ฟาเบียน(2004) (Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw ;& B.C. Fabien.2004)ในการใช้ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดที่เป็นที่ยอมรับแล้ววาระบบการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงมีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณ เมื่อนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเสมออันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ในบทความฉบับนี้ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจน ในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการชั้นสูงและสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งการที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัย ได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีตรงและวิธีอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

เอ็ม. วี. เบน และ เอ็ม. เอ. อัลโครตา การ์เซีย(2002) (M .V. Bain ;& M. A. Alcorta Garcia. 2002,) เอกสารฉบับนี้เสนอการแก้ปัญหาค่าสูงสุดของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear systems) โดยการเปลี่ยนสมการของระบบให้เป็นสมการพหุนามของเทเลอร์ที่มีเลขยกกำลังเท่ากับสาม และทำการเปรียบเทียบกับค่าคำนวณค่าตัวแปรโดยใช้ระบบที่เป็นเชิงเส้น (Linear system) พบว่าระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถประมาณค่าของตัวแปรได้ดีกว่าระบบที่เป็นเชิงเส้น

ทวิวัชร วีระแก้ว และ ปเสฏฐา สารลักษณ์ (2549) ศึกษาการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยสุดกับความนิ่มนวลสูงสุด ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้นและใช้วิธีการหาค่าอย่างต่อเนืองโดยวิธีทางตรง(Direct method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผลที่ได้จะใกล้เคียงกัน แต่ผลรับของความนิ่มนวลสูงสุดจะไม่สามารถหาคำตอบได้ในรูปของสมการเชิงเส้น ในขณะที่การประหยัดพลังงานสูงสุดสามารถทำได้

ชิลเลอร์ เฮท เซง และ วี วอง (Shiler H. Chang and V. Wong 2000) ฉบับนี้ได้กล่าวถึงผลการทดลองสำหรับ การควบคุมเวลาที่เหมาะสมที่สุด (Time optimal control) สำหรับหุ่นยนต์แขนกล (Robotic manipulators) ซึ่งจะแก้ปัญหาแบบที่ไม่ต่อเนื่อง สมการการเคลื่อนที่ที่มีลำดับมาก หรือระบบการเคลื่อนที่ที่ไม่มีรูปแบบที่แน่นอนและมีการล่าช้า (Delay) จากการควบคุมผู้เขียนเสนอให้ใช้ Simplified model และกำหนดการควบคุมการตอบสนองโดยได้ทดลองกับ UCLA direct drive ซึ่งผลการทดลองสามารถลดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ทั้งยังเพิ่มความแม่นยำในการเคลื่อนที่ให้กับเครื่อง มือที่นำมาทดลองด้วย

อัมราพร บุญประเททอง (2547) ศึกษาการแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง-กุตตา” (The direct approach of general dynamic optimal control: nonlinear programming and Runge-Kutta method) โดยการแก้ปัญหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Dynamic-optimization problem) โดยใช้ Numerical integration ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) กำหนดเป็นปัญหาแล้วนำมาหาคำตอบด้วยวิธีของการแก้ปัญหาสำหรับโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยสร้างกระบวนการหาคำตอบตามขั้นตอนบนโปรแกรม MATLAB และติดต่อผู้ใช้ได้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูล เพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานและเปิดกว้างแก่ผู้ที่เริ่มศึกษา Optimization กระบวนการคำนวณใช้การคำนวณทาง Symbolic ประกอบกับ Optimization toolbox ในโปรแกรม MATLAB

จากงานวิจัยที่กล่าวมาพบว่ายังไม่มีท่านใดได้นำมาประยุกต์ใช้กับระบบทางพลศาสตร์ของแขนกลดังนี้นงานวิจัยนี้จะเป็นการนำเสนอการประยุกต์ใช้กับระบบทางพลศาสตร์ของแขนกลชนิดโพลาร์(Polar manipulator)

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

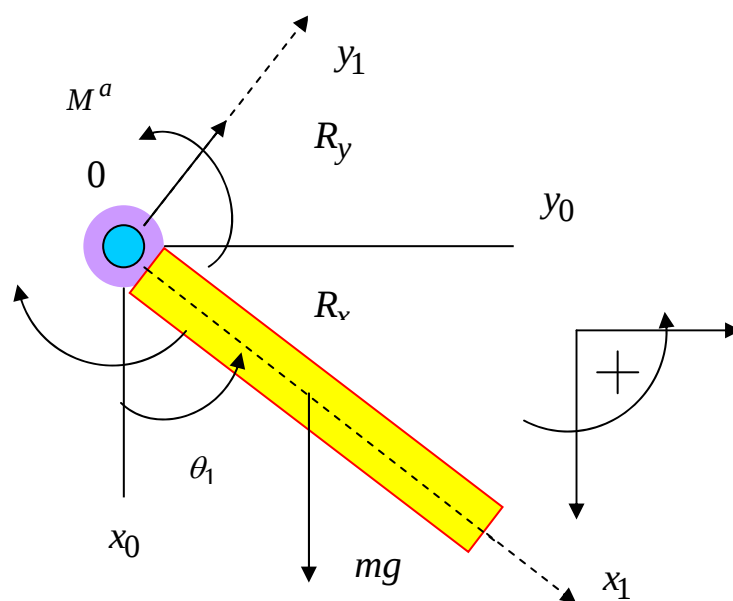
ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 3.1 การกำหนดปัญหา (Problem Statement)
- 3.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The Polar Manipulator Problem)
- 3.3 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Programing)

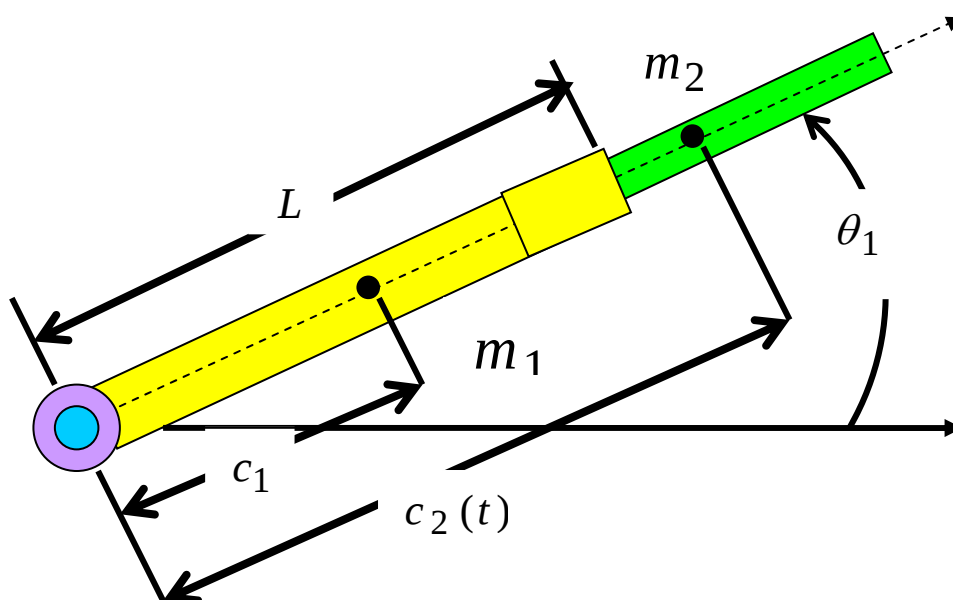
3.1การกำหนดปัญหา (Problem Statement)

ส่วนมากหุ่นยนต์ เครื่องจักรกลที่มีการเคลื่อนไหวต่าง ๆ ถูกออกแบบเพื่อให้มีความเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ถูกทำให้เหมาะสมกับการประหยัดพลังงานสูงสุดหรือบนความโน้มถ่วงสูงสุดของการเคลื่อนไหว ผลที่สุดก็คือ การวางแผนการเคลื่อนที่และการออกแบบของหุ่นยนต์เหล่านี้ทำผ่านอย่างแต่เพียงผู้เดียวจำนวนมากมายเข้าใกล้เช่นเดียวกันกับพลังงานน้อยที่สุดและความโน้มถ่วงสูงสุด แต่ทว่า ในโปรแกรมจำนวนหนึ่ง หุ่นยนต์ต้องการทำงานเสี่ยงอันตรายซึ่งทำให้เสียหายตัวอย่าง หุ่นยนต์มีการสัมผัสขณะที่การประหยัดพลังงานในเวลาเดียวกัน กล่าวอีกอย่างหนึ่ง เราอาจจะต้องการเพื่อลดการกระตุกของการเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์เพราะการให้ราบรื่นที่สุด การเคลื่อนไหวที่ให้นับรวมทั้งความเหมาะสมของหุ่นยนต์ในการประหยัดพลังงานอีกด้วย รูปแบบทั่วไปของปัญหาไดนามิคประกอบด้วยสมการของการเคลื่อนที่, สภาวะเริ่มต้น, และสภาวะขอบเขตที่สนใจในงานวิจัยนี้จะรวมถึงปัญหาสองเงื่อนไข คือ สภาวะเริ่มต้น สภาวะขอบเขต แต่ละปัญหาอาจจะกำหนดเป็นจุดประสงค์ของโปรแกรมชัดเจน, การควบคุมหุ่นยนต์โดยประหยัดพลังงานจะถูกออกแบบเพื่อให้มีการเคลื่อนไหว สิ่งนี้เป็นปัญหาภาวะที่ดีที่สุดของระบบไดนามิค การค้นคว้าวิจัยแสดงเปรียบเทียบสองสิ่งเพื่อดูความสัมพันธ์ ระหว่างความโน้มถ่วงสูงสุดและการประหยัดพลังงานสูงสุด

เพราะฉะนั้น งานวิจัยค้นคว้าหาความสัมพันธ์ระหว่างการโน้มถ่วงสูงสุดและการประหยัดพลังงานสูงสุดโดยใช้วิธีสภาวะที่ดีที่สุดเพื่อหาทางเลือกใหม่นี้สามารถเขียนโปรแกรมเรารู้ว่าการประหยัดพลังงานสูงสุดคือฟังก์ชันของอัตราเร่ง ดังนั้นเราหวังว่าความโน้มถ่วงสูงสุดจะแสดงผลลัพธ์ซึ่งคล้ายกับการประหยัดพลังงานสูงสุด



ภาพประกอบ 2 หุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว (One-Armed Manipulator)



ภาพประกอบ 3 หุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (Polar Manipulator)

3.2 ปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The Polar Manipulator Problem)

พิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว มีก้อนมวล m ความยาวของแขนกล l ดังภาพประกอบ 2. กำหนดให้ u เป็นส่วนที่เป็นส่วนป้อนเข้า (Actuator Input) ที่ฐานและมีตัวป้องกันความผิดพลาดตามสัดส่วนของแรงคู่ควบในแนวรัศมี R_x อยู่ด้วยกัน ต่อจากนั้นเราจะสมมติให้ค่ากระแสต้านแรงเสียดทานเป็น C_f และมีขนาดเป็น $C_f = \mu\varepsilon|R_x|$ เมื่อ R_x คือ ส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยา ในแนวรัศมีที่จุดรองรับ O , μ คือ สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างปลอกและแกนดุมหมุน c คือรัศมีของดุมหมุน ระบบมี 1 องศาอิสระ และ แขนกลโพลาร์ ดังภาพประกอบ 3 เป็นแขนกลที่มีการพัฒนามาจากแขนกลเดี่ยวโดยต่อเพิ่มแขนกลอีกหนึ่งช่วงให้มีความยาวมากกว่าเดิมและสามารถเลื่อนเข้าออกในแนวแกนเดียวกันพร้อมกับยกท่ามุมกับพื้นระดับพิจารณาระบบพลศาสตร์ของหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ ส่วนที่เป็นส่วนป้อนเข้า (Input) ระบบมี 1 องศาอิสระ และ มีสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_1 + \mu\epsilon m \frac{L}{2}\dot{\theta}_1^2 \\ & + \left(mg \frac{L}{2}\sin(\theta_1) + \mu\epsilon mg \cos(\theta_1) \right) \\ & = M^a \end{aligned} \quad (3.1)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลเดี่ยว(3.1) โดยเพิ่มแขนต่ออีกหนึ่งช่วงซึ่งก็เท่ากับเพิ่มตัวแปรของปัญหามากขึ้นคือ L =ความยาวของแขนกลใหม่, m คือมวลของชิ้นต่อโยงกับจุดศูนย์กลางมวลที่เป็นระยะทาง $L/2$ จากฐานของลูกตุ้ม, g คือ ค่าคงที่ความโน้มถ่วงของโลก และ M^a คือตัวขับเคลื่อนที่ป้อนเข้าระบบ ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นบน θ_1 และ $\dot{\theta}_1$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสมอสสูงสุด

(Minimum Energy) คือ $J = + \int_{t_0}^{t_f} (M^a)^2 dt$ วิธีการเคลื่อนที่ที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ

$-100 \leq M^a \leq 100$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS คือ $L = 1.0, m = 1.0, g = 9.8, \mu = 0.3$, และ $\varepsilon = 0.01$ ระบบที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสองสามารถนำมาเขียนในรูปแบบ ปริภูมิ-สเตท (State space) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของแขนกลโพลาร์คือ

$$\begin{aligned} & m_1gc_1 \cos(\theta_1) + m_2gc_2 \cos(\theta_1) + (c_1^2m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2c_2^2)\ddot{\theta}_1 + \\ & 2m_2c_2\dot{c}_2\dot{\theta}_1 = u_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$-m_2g \sin(\theta_1) - m_2\ddot{c}_2 + m_2c_2\dot{\theta}_1^2 = u_2, \quad (3.3)$$

เมื่อ $u_1(t)$ และ $u_2(t)$ คือ ตัวป้อนเข้า (Actuator Input) ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวเนื่องกับตัวแปร $\theta_1(t)$ และ $c_2(t)$ ตามลำดับ สมการที่ (3.2) สามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสเทท (State-Space) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{-m_1 g c_1 \cos(\theta_1) - m_2 g c_2 \cos(\theta_1) - 2m_2 c_2 c_3 \theta_2 + u_1}{c_1^2 m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2 c_2^2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

เมื่อ

$$\dot{c}_2 = c_3 \quad (3.5)$$

$$\dot{c}_3 = -g \sin(\theta_1) + c_2 \theta_2^2 - \frac{u_2}{m_2} \quad (3.6)$$

ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุมระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นของ θ_1 , $\dot{\theta}_1$, c_2 และ $\dot{c}_2$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสมอสสูงสุด (Minimum Energy) คือ สมการประหยัดพลังงานสูงสุดของแขนกลแบบโพลาร์

3.2.1 การประหยัดพลังงานสูงสุดของแขนกลแบบโพลาร์

$$J = + \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (3.7)$$

วิธีการเคลื่อนที่ที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-100 \leq u_1 \leq 100$ และ $-100 \leq u_2 \leq 100$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS. ดังนี้

$$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3, g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

$$\begin{aligned}\theta_1(0) &= 0 \\ \theta_2(0) &= 0 \\ \theta_1(t_f) &= \pi / 2 \\ \theta_2(t_f) &= 0 \\ c_1(0) &= L / 2 \\ c_1(t_f) &= L / 2 \\ \dot{c}_1(0) &= 0 \\ c_2(0) &= L / 2 \\ c_2(t_f) &= L \\ \dot{c}_2(0) &= 0 \\ \dot{c}_2(t_f) &= 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

ค่าพารามิเตอร์คือ

$$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3,$$

$$g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0,$$

แทนค่าลงในสมการที่ (3.7) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (29.4) \cos(\theta_1) + (9.8)c_2 \cos(\theta_1) \\ & + (90.2 + c_2^2)\ddot{\theta}_1 + 2c_2\dot{c}_2\dot{\theta}_1 = u_1, \\ & -9.8\sin(\theta_1) - \ddot{c}_2 + c_2\dot{\theta}_1^2 = u_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.2 ความหิ้นมวลสูงสุดของหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ (The Polar Manipulator Problem)

ให้วัตถุประสงค์เป็นไปในการควบคุม ระบบจากการกำหนดเซตของเงื่อนไขเริ่มต้นของ $\theta_1, \dot{\theta}_1, c_2$ และ $\dot{c}_2$ ที่เวลาเริ่มต้น t_0 โดยที่ระบุจุดเป้าหมายไว้ที่ t_f ขณะค่าคอสสูงสุด (Minimum Energy) คือ สมการความหิ้นมวลสูงสุดของหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์

$$\begin{aligned} J &= + \int_{t_0}^{t_f} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2) dt \\ &= + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\theta}_3^2 dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{โดย } \dot{u}_1 = \tilde{u}_1 \text{ และ } \dot{u}_2 = \tilde{u}_2$$

$$\dot{\theta}_2 = \theta_3 \quad (3.11)$$

$$\dot{\theta}_3 = \ddot{x} = \frac{d^3(x)}{dt^3} \quad (3.12)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{-m_1gc_1 \sin \theta_1 - m_2gc_2 \sin \theta_1(\dot{\theta}_1) - 2m_2c_2c_3\dot{\theta}_2}{c_1^2m_1 + I_{g1} + I_{g2} + m_2c_2^2} + \frac{du}{dt} \quad (3.12)$$

วิธีการเคลื่อนที่จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับ $-100 \leq u_1 \leq 100$ และ $-100 \leq u_2 \leq 100$ ในระหว่างการเคลื่อนที่ ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแบบจำลองในหน่วยเป็นระบบ MKS.ดังนี้

$$L = 1.0, m_1, m_2 = 1.0, c_1 = 3, g = 9.8, I_{g1} = I_{g2} = 1.0$$

เงื่อนไขขอบเขต(Boundary condition) ทั้ง 2 จุดกำหนดโดย

$$\theta_1 = 0$$

$$\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\dot{\theta}_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
c_1(t_f) &= L / 2 \\
\dot{c}_1(0) &= 0 \\
c_2(0) &= L / 2 \\
c_2(t_f) &= L \\
\dot{c}_2(0) &= 0 \\
\dot{c}_2(t_f) &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.3 การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer programming)

การออกแบบโปรแกรมนั้นต้องการใช้งานโดยเชื่อมโยงกับกล่องเครื่องมือ(Toolbox) ของโปรแกรมแมทแล็บ(Matlab)โดยพัฒนานำเอาสมการอนุพันธ์อันดับ 3 $= \frac{d^3 y}{dt^3} = \ddot{x}$ = ความโน้มถ่วงสูงสุด(Minimum Jerk)มาใช้ร่วมกับฟังก์ชันของออปติไมต์เซชันโซลเวอร์ (Optimization solver) และฟังก์ชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งเป็นกล่องเครื่องมือออปติไมต์เซชัน (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วในโปรแกรมแมทแล็บเป็นฟังก์ชันหลักในการแก้ปัญหา (T.Veeraklaew. 1999: Thesis) ซึ่งฟังก์ชันต่างๆ ภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำหน้าที่ดังนี้

ขั้นแรก เมื่อรับอินพุต(Input) จาก user.m มาแล้วจะคืนค่าของเงื่อนไขบังคับที่เป็นอ็ควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)และอ็ควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ซึ่งแทนค่าออปติไมต์เซชันพารามิเตอร์ (Optimization parameter) $\underline{a}$ ลงไปแล้ว

ขั้นที่สอง เป็นการแทนค่าของ $F(\underline{a})$

ขั้นที่สาม เป็นการรับค่าจากสองขั้นตอนแรกนำมาคำนวณจนกว่าจะได้คำตอบ $\underline{a}^*$

โดยทั่วไป การหาคำตอบของนอนลินเนียร์โปรแกรมมิ่ง (Nonlinear programming) จะมีการปรับเปลี่ยน ค่าเกรเดียน (Gradient) ของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และจาโคเบียน (Jacobian) ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ตลอดเวลาซึ่งในที่นี้ใช้การคำนวณแบบแบ่งช่วงตรงกลาง (Central difference) ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเกรเดียน (Gradient) และจาโคเบียน (Jacobian) ไว้แล้วทำให้การคำนวณจะรวดเร็วขึ้น

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอผลงาน ดังนี้

4.1 ผลการทดสอบ

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบจะประกอบไปด้วยกรณีของปัญหาหุ่นยนต์แขนกลแบบโพลาร์ ตามลำดับ คือผลการจัดเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1, ผลการจัดเชิงเส้น (เลื่อนเข้าและออก) ของแขนกลชั้นต่อโยง 2 ความเร็วเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1 และความเร็วเชิงเส้นของแขนกลชั้นต่อโยง 2 ซึ่งจะพิจารณาในหลักการ การประหยัดพลังงานสูงสุดเปรียบเทียบกับหลักการความโน้มถ่วงสูงสุด

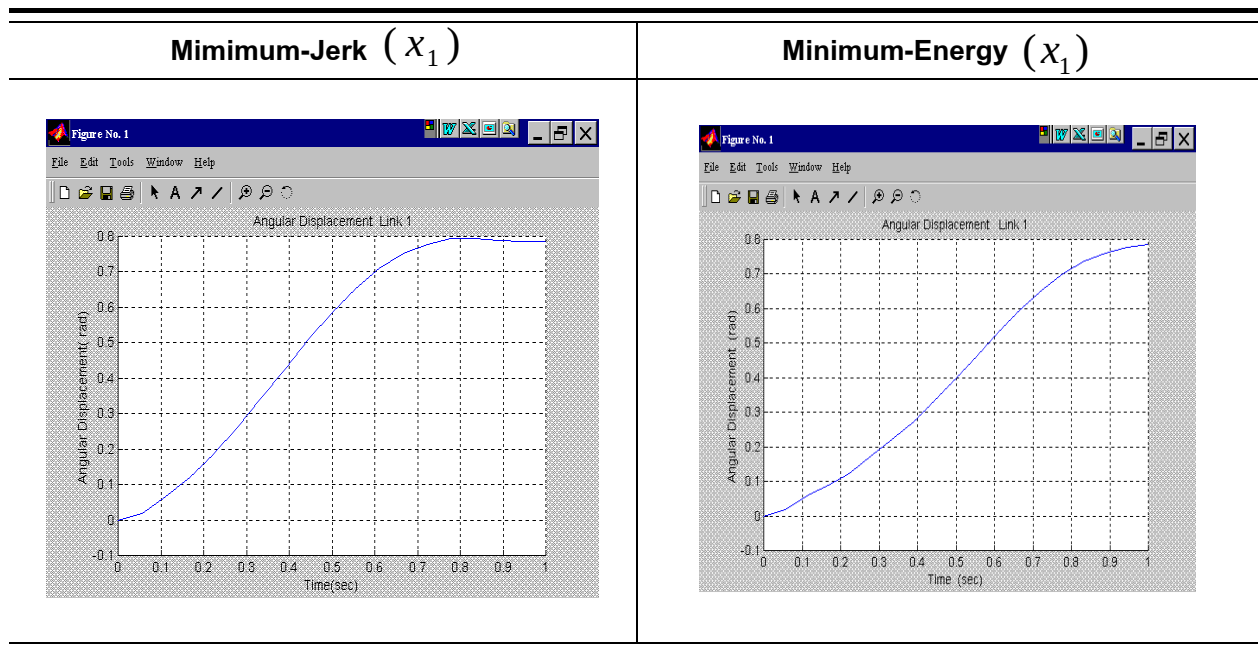
ในการนำเสนอผลการทดสอบโปรแกรมนั้นจำเป็นที่จะต้อง กำหนดตัวแปรและหน่วยที่ใช้ให้เหมือนกันในการทดสอบทุกกรณีดังแสดงในตารางที่ 1 และผลการทดสอบแสดงเป็นกราฟเพื่อการเปรียบเทียบผลการทดสอบดังนี้

ตาราง 1 การกำหนดตัวแปรและหน่วย

ตัวแปร	ความหมาย	หน่วยที่ใช้
x_1	การจัดเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1	rad
x_2	การจัดเชิงเส้นของแขนกลชั้นต่อโยง 2	m
$\dot{x}_1$	ความเร็วเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1	rad/sec
$\dot{x}_2$	ความเร็วเชิงเส้นของแขนกลชั้นต่อโยง 2	m/sec
Time	เวลาการเคลื่อนที่ของแขนกลชั้นต่อโยง 1 และ 2	sec

4.1.1 ผลการเปรียบเทียบค่าความโน้มถ่วงสูงสุดและการประหยัดพลังงานสูงสุดของแขนกลโพลาร์(Pola-Armed Mainpulator)

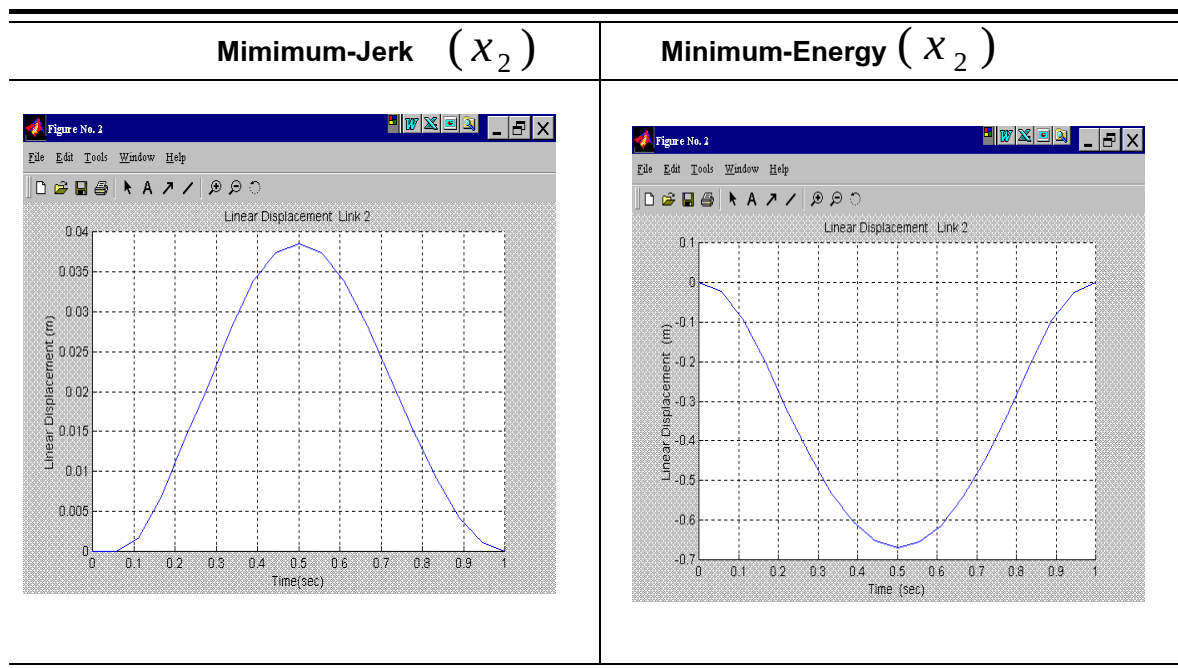
4.1.1.1 การเปรียบเทียบการจัดเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1 (x_1)



ภาพประกอบ4 ผลการเปรียบเทียบการจัดเชิงมุมของแขนกลชั้นต่อโยง 1 (x_1) เทียบกับเวลา

จากภาพประกอบ 4 เป็นผลของการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบคือ การวิเคราะห์โดยหลักการระหว่างการประหยัดพลังงานสูงสุด และความโน้มถ่วงสูงสุด ที่สังเกตได้จากภาพประกอบ 4 ในการแก้ปัญหา จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นของกราฟทั้งสองสอดคล้องกันโดยกราฟของหลักการความโน้มถ่วงสูงสุดจะมีช่วงกลางของกราฟเพิ่มขึ้น(มีระยะทางการหมุนเพิ่มโดยใช้เวลาเท่ากัน)เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการประหยัดพลังงาน ซึ่งการที่แขนกล 1 มีระยะทางการเคลื่อนมากขึ้นในช่วงเริ่มเคลื่อนและสิ้นสุดการเคลื่อนที่ จะทำให้อุปกรณ์ของแขนกลปลอดภัยไม่เสียหายได้เนื่องจากมีช่วงเวลาเพื่อ

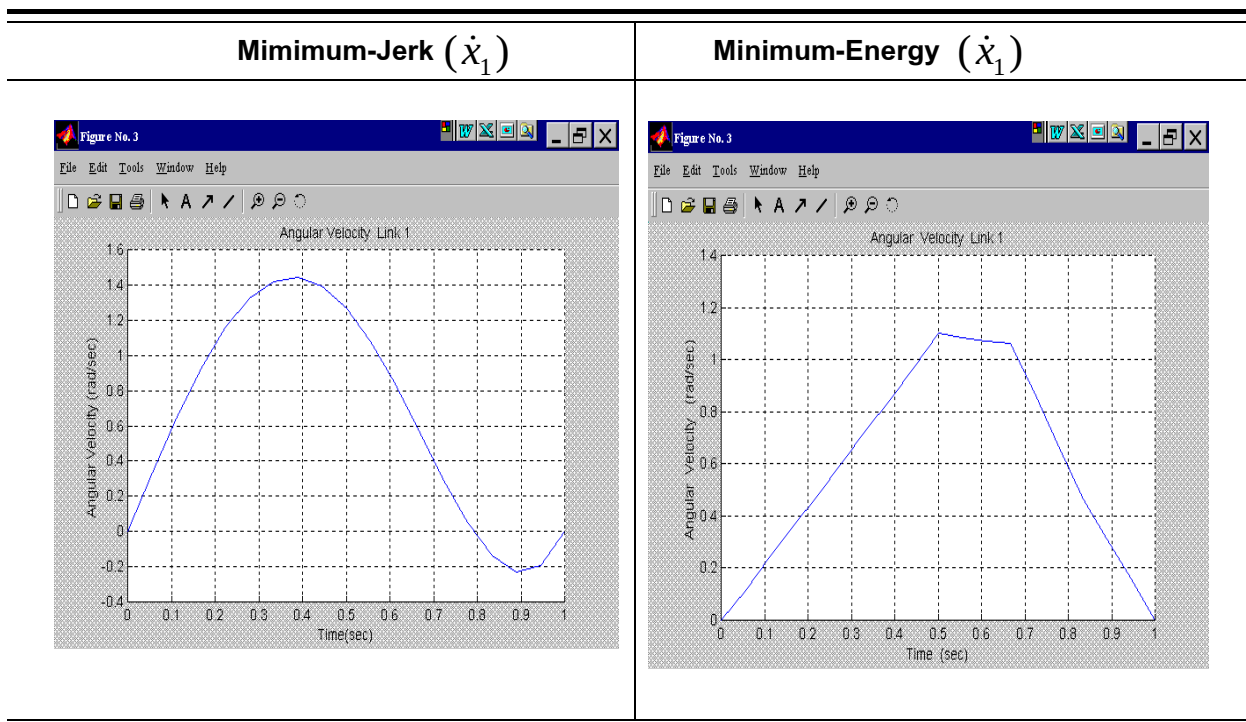
4.1.1.2 การเปรียบเทียบการจัดเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 (x_2)



ภาพประกอบ 5 ผลการเปรียบเทียบการจัดเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 (x_2) เทียบกับเวลา

กรณีของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 เคลื่อนที่ (เลื่อนเข้า-ออก) เทียบกับเวลาจากการใช้โปรแกรม คอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีรูปร่างแสดง ตรงกันข้ามกันทั้งสองวิธีแต่รูปกราฟยังสอดคล้องกันซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของแขนกล 2 และการประมวลผลที่โปรแกรมต่างกัน ดังภาพประกอบ 5

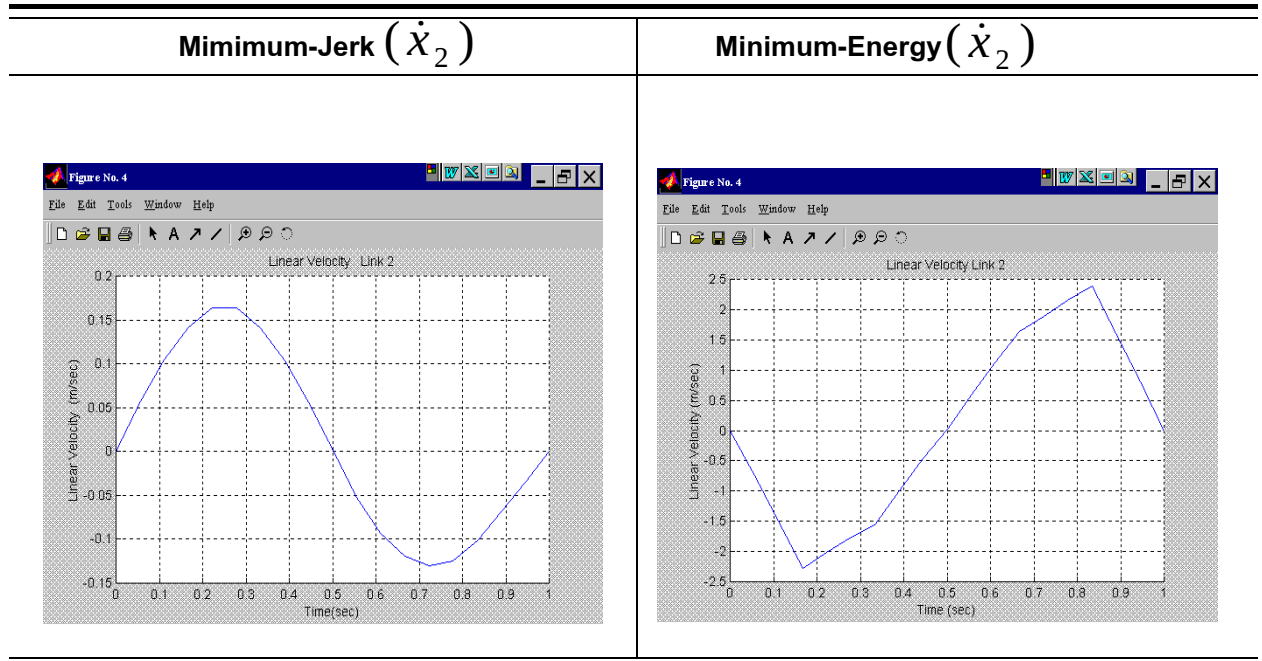
4.1.1.3 การเปรียบเทียบความเร็วเชิงมุมของแขนกลขึ้นต่อโยง 1 ($\dot{x}_1$)



ภาพประกอบ 6 ผลการเปรียบเทียบความเร็วเชิงมุมของแขนกลขึ้นต่อโยง 1 ($\dot{x}_1$) เทียบกับเวลา

กรณีค่าความเร็วของแขนกล 1 เทียบกับเวลาจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบคือ การวิเคราะห์โดยหลักการระหว่างการประหยัพลังงานสูงสุด และความโน้มถ่วงสูงสุด ที่สังเกตได้จากภาพประกอบ 6 ในการแก้ปัญหา จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นกราฟทั้งสองสอดคล้องกันโดยกราฟของหลักการความโน้มถ่วงสูงสุดจะมีช่วงกลางของกราฟเพิ่มขึ้น (มีความเร็วเพิ่มโดยใช้เวลาเท่ากัน) และกราฟมีความโค้งมนต่อเนื่องเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการประหยัพลังงานสูงสุด

4.1.1.4 การเปรียบเทียบความเร็วเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 ($\dot{x}_2$)



ภาพประกอบ 7 ผลการเปรียบเทียบความเร็วเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 ($\dot{x}_2$) เทียบกับเวลา

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการคำนวณ ได้ผลของ กราฟที่แสดงผลตรงกันข้ามกัน ทั้งสองวิธี แต่รูปกราฟยังสอดคล้องกัน โดยวิธีความนิ่มนวลสูงสุด จะได้กราฟที่โค้งมนต่อเนื่อง ไม่หักมุมแหลมเหมือนวิธี การประหยัดพลังงานสูงสุด ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 และการประมวลผลต่างโปรแกรมกัน ดังภาพประกอบ 7

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.2.1 กรณีการจัดเชิงมุมของแขนกลขึ้นต่อโยง 1 (x_1) เคลื่อนที่เทียบเวลา

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบคือ การวิเคราะห์โดยหลักการระหว่างการประหยัดพลังงานสูงสุด และ ความนิ่มนวลสูงสุด ที่สังเกต ได้จากภาพประกอบ 4 ในการแก้ปัญหา จะพบว่า ลักษณะวิถีของเส้นของกราฟทั้งสองสอดคล้องกันโดยกราฟของหลักการความนิ่มนวลสูงสุดจะมีการประมวลผลช่วงกลางของกราฟเพิ่มขึ้นต่อเนื่องโค้งมน (มีระยะทางการหมุนเพิ่มโดยใช้เวลาเท่ากัน) เมื่อ

เปรียบเทียบกับวิธีการประหยัดพลังงาน ซึ่ง การที่แขนกล 1 มีระยะทางการเคลื่อนที่มากขึ้นในช่วงเริ่มเคลื่อนที่และสิ้นสุดการเคลื่อนที่ จะทำให้อุปกรณ์ของแขนกลปลอดภัยไม่เสียหายได้เนื่องจากมีช่วงเวลาเผื่อ

4.2.2 กรณีการจัดเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 (x_2) เคลื่อนที่ (เลื่อนเข้า-ออก) เทียบกับเวลาจากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีรูปแสดงตรงกันข้ามกันทั้งสองวิธี แต่รูปกราฟยังสอดคล้องกัน ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของแขนกล 2 และการประมวลผลต่างโปรแกรมกัน ดังภาพประกอบ 5

4.2.3 กรณีความเร็วเชิงมุมของแขนกลขึ้นต่อโยง 1 ($\dot{x}_1$) เทียบกับเวลา

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีความเหมือนกันในค่าแต่ละตัวแปรระหว่างปัญหาทั้งสองแบบคือ การวิเคราะห์โดยหลักการระหว่างการประหยัดพลังงานสูงสุด และความโน้มถ่วงสูงสุด ที่สังเกตได้จากภาพประกอบ 6 ในการแก้ปัญหา จะพบว่าลักษณะวิถีของเส้นกราฟทั้งสองสอดคล้องกันโดยกราฟของหลักการความโน้มถ่วงสูงสุดจะมีช่วงกลางของกราฟเพิ่มขึ้น(มีความเร็วเพิ่มโดยใช้เวลาเท่ากัน)และกราฟมีความโค้งมนต่อเนื่องเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการประหยัดพลังงาน

4.2.4 กรณีความเร็วเชิงเส้นของแขนกลขึ้นต่อโยง 2 ($\dot{x}_2$) เทียบกับเวลา

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณพบว่า กราฟมีรูปแสดงตรงกันข้ามกันทั้งสองวิธีแต่รูปกราฟยังสอดคล้องกัน ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่เข้าและออกของแขนกล 2 และการประมวลผลต่างโปรแกรมกัน ดังภาพประกอบ 7

จากการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในการคำนวณพบว่า มีความแตกต่างกัน ดังนี้เนื่องจากแขนกลโพลาไรซ์มีความสัมพันธ์ทางจลนศาสตร์แบบย้อนกลับ นั้นการเคลื่อนที่ของแขนกล 1 และ 2 สู่ตำแหน่งต่าง ๆ นั้นมีค่าพิกัดที่บอกตำแหน่งของแต่ละขึ้นต่อโยงได้หลากหลายลักษณะ ดังเช่นปัญหาที่เรียกว่า Elbow up และ Elbow down จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ของกราฟที่ต่างกันไปและผลของการใช้โปรแกรมต่างกันมาประมวลผลของสองปัญหา

จากภาพประกอบทั้งหมดที่แสดงด้านบน ในการวิเคราะห์ผลการทดสอบจากผลลัพธ์ที่แสดงเป็นกราฟ หลักการความโน้มถ่วงสูงสุด และหลักการประหยัดพลังงานสูงสุดถือว่ามีส่วนที่สอดคล้องกัน โดยวิธีการโน้มถ่วงสูงสุด จะได้กราฟที่โค้งมนต่อเนื่องกัน ซึ่งอยู่ในช่วงเวลาเท่ากัน และการเริ่มต้นและสิ้นสุดของกราฟด้วยวิธีการความโน้มถ่วงสูงสุดจะเคลื่อนที่อย่างต่อเนื่องเป็นลักษณะโค้งมนซึ่งเกิดจากการเรียงตัวของข้อมูลโดยการประมวลผลของโปรแกรม

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

การวิจัยในบทนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การพิจารณาเปรียบเทียบกันระหว่างความถี่ของสัญญาณสูงสุด(Minimum Jerk)กับการประหยัดพลังงานสูงสุด(Minimum Energy) ของแขนกลโพลาร์ มีผลการทดสอบและผลเฉลยที่สอดคล้องกัน โดยวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาของตัวอย่างปัญหานั้นนำมาศึกษา และถึงแม้ว่าจะมีข้อแตกต่างกันในบางกรณี แต่ลักษณะของเส้นกราฟของหลักการ การใช้ความถี่ของสัญญาณสูงสุดนั้นมีความราบเรียบ มากกว่าหลักการการใช้การประหยัดพลังงานสูงสุดแต่ถ้ามองโดยรวมแล้วถือว่าผลการทดสอบแต่ละวิธีมีความสอดคล้องกันแสดงว่า ในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบทางพลศาสตร์โดยใช้หลักการความถี่ของสัญญาณสูงสุดนั้นสามารถที่จะนำมาใช้หาค่าความเหมาะสมสูงสุดของแบบจำลองระบบทางพลศาสตร์ได้เช่นเดียวกันกับหลักการการใช้การประหยัดพลังงานสูงสุด ทำให้พอที่สรุปได้ว่าวิธีหลักการความถี่ของสัญญาณสูงสุดสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาของแบบจำลองระบบทางพลศาสตร์ จากการศึกษาวิจัยครั้งนี้สามารถนำไปปรับปรุง และพัฒนาใช้กับปัญหาที่มีลักษณะใกล้เคียงกันกับการศึกษาวิจัยนี้ได้ จากผลการทดสอบทั้งหมดการใช้หลักการความถี่ของสัญญาณสูงสุดสามารถบรรลุถึงข้อสมมติฐานในเรื่องความเหมือนกัน และสอดคล้องกันกับหลักการการใช้การประหยัดพลังงานสูงสุด เหตุผลอันหนึ่งก็คือการเพิ่มสมการของ คอสต์ฟังก์ชัน(Cost Function) นั้นเป็นฟังก์ชันสมการกำลังสาม ($Jerk = \frac{d^3x}{dt^3} = \ddot{x}$) ซึ่งได้ผลเฉลยนำไปสู่ปัญหาที่เป็นค่าที่เหมาะสมสูงสุดนั้นอย่างแน่นอน

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในการพัฒนาในขั้นต่อไปอาจเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาให้มากขึ้น เช่น ความซับซ้อนของแขนกลให้มีจำนวนองศาอิสระมากกว่า 2 องศาอิสระขึ้นไป โดยคิดถึงผลกระทบของโมเมนต์ความเฉื่อยซึ่งจะต้องคำนึงถึงรูปทรงของแขนกลด้วย รวมถึงความหลากหลายในชนิดของการเคลื่อนที่ของชิ้นต่อโยงในแขนกลและการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูง

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- ทวิวัชร วีระเกล้า ;และ ปเสฏฐา สารลักษณ์ (2549 ,พฤศจิกายน) ศึกษาการเปรียบเทียบ ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ พลังงานน้อยสุด กับ ความมั่นคงสูงสุด ในระบบพลศาสตร์ ที่เป็นเชิงเส้น, เอกสารประชุมทางวิชาการ เครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่15เล่มที่ 2 หน้า MC131-MC140, กรุงเทพฯ: รร.นายร้อยพระจุลจอมเกล้า
- มนัส สังวรศิลป์ และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล.(2543). คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.
- สุธรรม ศรีเกษม ; เมธิษฐ์ ทรงชัยกุล ; และสง่า ศรีสุภปริดา (2543) MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์. มหาวิทยาลัยรังสิต
- อัมราพร บุญประทะทอง (2547) ศึกษาการแก้ปัญหาดังด้วยวิธีตรงของระบบทางพลศาสตร์ที่เหมาะสม ด้วยวิธีการแก้ปัญหา ของโปรแกรม ที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของ รุนเง-กุตตา” (The direct approach of general dynamic optimal control: nonlinear programming and Runge - Kutta method) ปรินญาณพนธ์ วศ.ม,(วิศวกรรมเครื่องกล) กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.ถ่ายเอกสาร
- M .V. Bain ;& M. A. Alcorta Garcia (2002) *Optimal Control for Third Degree Polynoimial Systems*, Applied Mathematics E - Notes, 2 : 36-44.
- Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw. ;& B.C. Fabien, (2544) New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher – Order Dynamic Systems, AIAA. *Journal of Guidance Control and Dynamic* Vol.24 No.2 pp.228 – 236.
- Sunil K. Agrawal, ;& T.Veerakleaw, (2004) *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constrian Using Higher – Order Method with Penalty Function*, WCCM (Fourth World Congress on Computational Mechanics) Vol.1.
- Shiler H. Chang ;& V. Wong.(2003) *The Practical Implementation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators*, Robotic & Computer Integrate Manufacturing.

ภาคผนวก

คำอธิบายสัญลักษณ์

C_f	คือค่ากระแสต้านแรงเสียดทาน
c_1, c_2	ระยะจุดศูนย์กลางมวลแขนกล 1 และ 2
F	คือสเกลลาร์ฟังก์ชัน
g	คือความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก
g_j	คือฟังก์ชันอีควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Equality constraints)
I_g	คือโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia)
J	คือฟังก์ชันวัตถุประสงค์
L_1, L_2	คือยาวของแขนกล 1 และ 2
M^a	คือตัวขับเคลื่อนที่ป้อนเข้าระบบ
m_1, m_2	คือมวลของชิ้นต่อโยง(Link mass)
P	คือเวกเตอร์แมตริกซ์
$x(t)$	คือตัวแปรสถานะ
x_1	คือการขจัดเชิงมุมของแขนกลชิ้นต่อโยง 1 (Angular Displacement)
x_2	คือการขจัดเชิงเส้นของแขนกลชิ้นต่อโยง2 (Linear Displacement)
$\dot{x}_1$	คือความเร็วเชิงมุมของแขนกลชิ้นต่อโยง 1 (Angular velocity)
$\dot{x}_2$	คือความเร็วเชิงเส้นของแขนกลชิ้นต่อโยง 2 (Linear velocity)
$\ddot{x}$	คือความเร่งของแขนกล (Minimum Energy)
$\ddot{\ddot{x}}$	คือนิมนวลสูงสุดของแขนกล(Minimum Jerk)
R_x	คือ ส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยา ในแนวรัศมีที่จุดรองรับ
t_0	คือเวลาเริ่มต้น
t_f	คือเวลาที่จุดสุดท้าย
$\bar{u}(t)$	คือตัวแปรควบคุมป้อนเข้า
λ_i	คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multiplier)
μ	คือแรงเสียดทานระหว่างปลอกและแกนดุมหมุน(Column friction)

อภิธานศัพท์

Algebraic	สมการทางพีชคณิต
Automobiles	การเปลี่ยนแปลงรูปร่างอัตโนมัติ
Boundary condition	เงื่อนไขขอบเขต
Calculus of variable	แคลคูลัสความแปรปรวน
Cartesian space	คาร์ทีเซียนสเปซ
Constraints	เงื่อนไขบังคับ
Continuous derivatives	อนุพันธ์ต่อเนื่อง
Continuous time	เวลาต่อเนื่อง
Control input	คอนโทรลอินพุต
Control variable	คอนโทรลวารีเอเบิล
Cost functional	คอสฟังก์ชันนอล
Cylindrical joint	ข้อต่อแบบมีลูกสูบ
Dependent variable	ตัวแปรที่ไม่เป็นอิสระ
Detail study	การศึกษารายละเอียด
Differential equation	สมการเชิงอนุพันธ์
Direct method	วิธีตรง
Displacement	การขจัด
Dynamics constraints	ขอบเขตทางพลศาสตร์
Dynamics equation	สมการทางพลศาสตร์
Dynamics optimization problem	ปัญหาความเหมาะสมทางพลศาสตร์
Dynamics system	ระบบพลศาสตร์
End-effector	ปลายแขนหุ่นยนต์
Equality constraints	เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ
Extremize	ค่าตอบที่เหมาะสมที่สุด
Extremum	ค่าเหมาะสมสูงสุด
Final time	เวลาสุดท้าย
Forward Kinematics	ฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์
Functional	ฟังก์ชันนอล
General nonlinear constraints	เงื่อนไขบังคับของสมการที่ไม่เชิงเส้น
Graphic user interface	หน้าจอรับข้อมูล
Higher order systems	ลำดับที่สูงกว่า

Homogeneous matrix	โฮโมจีเนียสเมตริกซ์
Independent variable	ตัวแปรอิสระ
Indirect method	วิธีอ้อม
Initial condition	เงื่อนไขเริ่มต้น
Initial time	เวลาเริ่มต้น
Interval	ช่วงเวลา
Inertia matrix	เมตริกซ์ความเฉื่อย
Initial guess	ค่าเริ่มต้น
Inverse problems	ปัญหาผกผัน
Jacobian	จาโคเบียน
Jacobian matrix	จาโคเบียนเมตริกซ์
Joints	ข้อต่อ
Joint space	จอยส์สเปซ
Kinematics	พลศาสตร์การเคลื่อนที่
Lagrange method	วิธีของลากรางจ์
Lagrange multipliers	ตัวคูณลากรางจ์
Lower bounded	ขอบเขตล่าง
Minimum energy	การประหยัดพลังงานสูงสุด
Minimum jerk	ความนิ่มนวลสูงสุด
Mobile robot	หุ่นยนต์ชนิดเคลื่อนที่ได้
Necessary condition	เงื่อนไขค่าต่ำสุดและสูงสุด
Nonlinear dynamics	พลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น
Nonlinear systems	ระบบไม่เชิงเส้น
Numerical method	วิธีเชิงตัวเลข
Objective	เป้าหมายที่ต้องการ
Objective function	ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ
One arme manipulator	หุ่นยนต์แขนกลเดี่ยว
Optimal control problem	ปัญหาความเหมาะสมของระบบควบคุม
Optimization	ออฟติไมเซชัน
Optimization toolbox	ออฟติไมเซชันทูลบ็อกซ์
Optimum	ค่าที่เหมาะสมที่สุด
Optimum sulotion	คำตอบที่เหมาะสมที่สุด
Pick-and-place	งานที่ต้องหยิบยก
Polar manipulator	แขนกลโพลาร์

Prismatic	เคลื่อนที่แบบเชิงเส้น
Revolute	เคลื่อนที่แบบหมุน
Robotics system theory	ทฤษฎีของระบบหุ่นยนต์
Simulink	โครงสร้างแบบจำลอง
State equation	สมการแสดงสถานะ
State variable	สแตทวาริเอเบิล
Symbolic	ซิมโบลิกส์
Terminal condition	สภาวะที่ปลายทาง
The angle of rotation	องศาการหมุน
Time derivative	อนุพันธ์ของเวลา
Translation vector	เวกเตอร์การเคลื่อนที่
Translation energy	พลังงานการเคลื่อนที่
Unit vector	เวกเตอร์ 1 หน่วย
Upper bounded	ขอบเขตบน

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายสมชาย เครืออยู่
วันเดือนปีเกิด	18 พฤษภาคม 2511
สถานที่เกิด	ชลบุรี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	บ้านพักข้าราชการครู วิทยาลัยเทคนิคชลบุรี 205/28 ต.หนองซาก อ.บ้านบึง จ.ชลบุรี 20170
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2526	มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนเกาะโพธิ์ถั่วงามวิทยา อ. พนัสนิคม จ.ชลบุรี
พ.ศ. 2529	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ(ปวช.ช่างกลโรงงาน) จากวิทยาลัยเทคนิคชลบุรี จ.ชลบุรี
พ.ศ. 2532	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.เทคนิคการผลิต) จากวิทยาลัยเทคนิคชลบุรี จ.ชลบุรี
พ.ศ. 2537	ปริญญาตรี ครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิต (คอ.บ.วิศวกรรมอุตสาหการ) จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล
พ.ศ. 2550	ปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วศ.บ. วิศวกรรมเครื่องกล) จากสถาบันเทคโนโลยีปทุมวัน
พ.ศ. 2551	บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. วิศวกรรมเครื่องกล) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ