วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย

อรวรรณ ตัณฑ์เจริญรัตน์

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ เป็นเอกสารประกอบการสอนวิชาสถิติ 511 วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย สำหรับนิสิตระดับปริญญาโท มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ซึ่งนิสิตเหล่านี้ต้องใช้วิชาสถิติเข้าช่วยเป็นเครื่องมือในการทำวิจัย เพื่อเป็นปริญญานิพนธ์ และด้วยเหตุที่วิชาสถิติ 511 เป็นรายวิชาเดียวที่จะวางพื้นฐานทางสถิติให้แก่นิสิตเหล่านี้ ทำให้วิชาสถิติ 511 นี้มีเนื้อหาครอบคลุมอย่างกว้างขวาง และจากประสบการณ์ที่ผู้เขียนได้สอนวิชานี้มาเป็นเวลาเกือบสิบปี พบว่านิสิตที่เข้ามาศึกษาต่อระดับปริญญาโท ที่ต้องเรียนวิชาสถิติ 511 เป็นวิชาบังคับ ส่วนใหญ่ไม่มีพื้นฐานทางสถิติมาก่อน จึงทำให้การสอนเป็นไปได้อย่างเชื่องช้า เป็นสาเหตุให้ผู้สอนไม่มีเวลาจากชั้นเรียนพอที่จะสอนและจัดกิจกรรมอย่างลึกซึ้ง และครบถ้วนในแต่ละเนื้อหาวิชา

อนึ่ง ในเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ จะได้กล่าวถึงเนื้อหาต่าง ๆ โดยทั่ว ๆ ไป เพื่อเป็นแนวทางให้นิสิตสามารถศึกษาค้นคว้าต่อไปด้วยตนเองได้ โดยผู้สอนมีความเชื่อว่า เมื่อผู้เรียนเข้าใจถึงจุดมุ่งหมาย และแนวทางของแต่ละเนื้อหาเบื้องต้นอย่างแท้จริงแล้ว นิสิตจะสามารถค้นคว้า และศึกษารายละเอียดของเนื้อหาวิชานั้น ๆ ต่อไปด้วยตนเองได้

ท้ายสุดนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่ให้ความคิด คำแนะนำ และความช่วยเหลือ โดยเฉพาะ อาจารย์เฉลิมชัย เมืองงาม

อรวรรณ ตัณฑ์เจริญรัตน์

สารบัญ

หน้า

หน้า

ตาราง

สถิติ 511 ชื่อรายวิชา วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย

Stat 511 Statistical Methods for Research

จำนวนหน่วยกิต 3 หน่วยกิต

วัตถุประสงค์

1. เพื่อฝึกฝนอบรมให้นิสิตมีความรู้ความสามารถเกี่ยวกับระเบียบวิธีทางสถิติ
2. มีความสามารถในการนำเทคนิคทางสถิติไปใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลได้
3. มีความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง
4. มีความสามารถในการตีความหมายจากผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้
5. เพื่อส่งเสริมให้มีทัศนคติที่ดีต่อวิธีทางสถิติ

เนื้อหาตามหลักสูตร

ทบทวนสถิติพื้นฐาน ความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่ม ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง การทดสอบสมมติฐาน การวิเคราะห์ความแปรปรวน การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม การวิเคราะห์ความถดถอย และสหสัมพันธ์

บทที่ 1

ความน่าจะเป็น (Probability)

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. ให้ผู้เรียนได้รู้จักเซทชนิดต่าง ๆ และสามารถบอกความแตกต่างกันของเซทเหล่านั้นได้
2. ให้ผู้เรียนสามารถบอกถึงพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดของการกระทำบางอย่างได้
3. ให้ผู้เรียนสามารถใช้วิธีการหนึ่งวิธีการใดในการคำนวณหาจำนวนตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างได้
4. ให้ผู้เรียนได้รู้จักความน่าจะเป็น และการคำนวณหาความน่าจะเป็น
5. ให้ผู้เรียนรู้จักเลือกใช้กฎของความน่าจะเป็นในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์บางเหตุการณ์

<u>เนื้อหา</u>

- เซท
  - การเท่ากันของเซท
  - เซทว่าง
  - เซทย่อย
  - เซทเอกภพ
- พื้นที่ตัวอย่าง
- จุดตัวอย่าง
- เหตุการณ์

- การนับจำนวนจุดตัวอย่าง

    การเขียนแผนภาพต้นไม้

    การใช้หลักการคูณ

    การใช้หลักการจัดลำดับ

    การใช้หลักในการจัดกลุ่ม

- ความน่าจะเป็น หรือโอกาส

    การคำนวณหาความน่าจะเป็น

    สรุปกฎเบื้องต้นโดยทั่วไปของความน่าจะเป็น

เซท (Sets)

ในชีวิตประจำวันแล้ว เราอาจจะได้ยินคำว่าเซทบ้างเป็นบางครั้ง เช่น เรามาจากคนละเซทกัน สีแดงมาจากเซทนั้น ส่วนสีเหลืองมาจากเซทนี้ หรือการซื้อทั้งเซทจะถูกกว่าแยกชิ้น ฯลฯ จากตัวอย่างดังกล่าวจะพอเป็นที่เข้าใจกันได้ว่า เซทคือกลุ่ม หรือพวกของสิ่งใด ๆ สิ่งหนึ่งนั่นเอง

ในทางคณิตศาสตร์ เซทคือกลุ่มของสมาชิกกลุ่มหนึ่งที่สมาชิกทุกตัวในกลุ่มนั้น ๆ มีคุณสมบัติเดียวกันภายใต้เงื่อนไขอันใดอันหนึ่ง เช่น เซทของอักษรไทย อักษรทุกตัวที่จะเป็นสมาชิกภายในเซทนี้ ต้องมีคุณสมบัติอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ทุกตัวต้องเป็นอักษรไทย นั่นคือ อักษรจาก ก - ฮ นั่นเอง โดยทั่วไปในทางคณิตศาสตร์จะใช้พยัญชนะภาษาอังกฤษตัวใหญ่แทนชื่อเซท เช่น A, B, X หรือ Y และใช้พยัญชนะตัวเล็ก เช่น a, b, x หรือ y แทนสมาชิกในเซท และการเขียนสัญลักษณ์แทนเซทจะเขียนในรูปทั่ว ๆ ไป ดังนี้

ชื่อเซท = {สมาชิกในเซท}

ดังนั้น ถ้าเราให้ A แทนชื่อเซทของตัวอักษรไทย และให้ a แทนสมาชิกในเซท เราสามารถเขียนเซทของอักษรไทยได้ดังนี้

A = {a|a เป็นอักษรไทย} อ่านว่า A เป็นสมาชิกที่มีคุณสมบัติว่า A เป็นอักษรไทย

หรือถ้าจะเขียนสมาชิกทุกตัวของเซทแทนการเขียนคุณสมบัติของสมาชิกเราจะเขียนเซท A ได้ดังนี้

A = {ก, ข, ค, ง, ..., ฮ}

โดยทั่วไปเซทจะมี 2 ชนิด คือ ชนิดแรกเป็นเซทที่เราสามารถทราบจำนวนแน่นอนของสมาชิกในเซท (Finite Set) และสามารถรู้แน่นอนว่าสมาชิกในเซทนั้น ๆ เป็นอะไรบ้าง เช่น เมื่อให้ B เป็นเซทของการเกิดแต้มจากการโยนลูกเต๋าลูกหนึ่ง เราสามารถเขียนเซท B ได้ดังนี้

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

เซทชนิดที่สองเป็นเซทที่ไม่สามารถรู้จำนวนแน่นอนของสมาชิกภายในเซท (Infinite Set) เช่น เมื่อให้ X เป็นเซทของเลขจำนวนเต็ม สมาชิกที่เป็นเลขจำนวนเต็มนั้นมีจำนวนไม่จำกัด

เราจะเขียนสัญลักษณ์แทนเซท X ได้ว่า

$X = \{x \mid x$ เป็นเลขจำนวนเต็ม$\}$

อ่านว่า เซท X มี x เป็นสมาชิกที่มีคุณสมบัติว่า x เป็นเลขจำนวนเต็ม

ตัวอย่างอื่น ๆ เช่น

$C = \{c \mid c$ เป็นดวงดาวในท้องฟ้า$\}$

เซทประเภท Infinite Set นี้ เราไม่สามารถเขียนสมาชิกทุกตัวของเซทได้ เนื่องจากไม่สามารถรู้จำนวนสมาชิกที่แน่นอน

ในเรื่องของเซท สัญลักษณ์ ε หมายถึงเป็นสมาชิกอยู่ใน เช่น $x \varepsilon A$ หมายถึง x เป็นสมาชิกอยู่ในเซท A และในทางตรงข้าม สัญลักษณ์ $\notin$ หมายถึง ไม่เป็นสมาชิกอยู่ใน เช่น $x \notin B$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกอยู่ในเซท B

การเท่ากันของเซท

นิยาม เซท A เท่ากับเซท B ก็ต่อเมื่อทั้งสองเซทนี้ มีสมาชิกเหมือนกัน หรือจะกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า เซท A เท่ากับ เซท B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกในเซท A เป็นสมาชิกในเซท B และทุก ๆ สมาชิกในเซท B เป็นสมาชิกในเซท A

ในกรณีที่เซท A เท่ากับเซท B เราเขียนได้ว่า $A = B$ และในทางตรงข้าม ถ้าเซท A ไม่เท่ากับเซท B เราเขียนได้ว่า $A \neq B$

ตัวอย่าง ถ้าให้ $A = \{2, 3, 5\}$ $B = \{3, 5, 2\}$ $C = \{1, 2, 3, 5\}$ เรากล่าวได้ว่า ดังนั้น $A = B$ (การเรียงลำดับสมาชิกในเซทไม่มีผลทำให้เซทแตกต่างกัน) $A \neq C$ และ $B \neq C$

เซทว่าง (Empty Set or Null Set)

นิยาม เซทว่างคือเซทที่ไม่มีสามาชิกอยู่ในเซทนั้นเลย สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซทว่าง คือ ϕ

ตัวอย่างของเซทว่างได้แก่ เซทของตัวเลขใดที่มีค่ามากกว่า ๑ และน้อยกว่า ๑ ดังนั้น จะเห็นได้ว่า เซทนี้ไม่มีสมาชิกใดอยู่เลย ถ้าให้ A เป็นชื่อของเซทนี้ จะเขียนได้ว่า

$$A = \{ \quad \}$$

หรือ $A = \phi$

ข้อสังเกต ถ้าเซท $B = \{ 0 \}$ ไม่ได้หมายความว่า เซท B เป็นเซทว่าง แต่เซท B มีสมาชิกอยู่ 1 ตัว คือ 0

<u>เซทย่อย</u> (Subsets)

ในบางกรณี ทุก ๆ สมาชิกของเซทหนึ่ง เป็นสมาชิกของอีกเซทหนึ่ง เช่น เซทของตัวสระ ในภาษาอังกฤษ {a, e, i, o, u} มีทุกสมาชิกเป็นสมาชิกของเซทพยัญชนะใน ภาษาอังกฤษ {a, b, c, ..., z} นั่นคือ ทุก ๆ สมาชิกในเซทของสระ เป็นสมาชิก ในเซทของพยัญชนะด้วย เราเรียกเซทสระเป็นเซทย่อยของพยัญชนะ

<u>นิยาม</u> A เป็นเซทย่อยของ B ก็ต่อเมื่อทุก ๆ สมาชิกใน A เป็นสมาชิกใน B ในกรณีที่ A เป็นเซทย่อยของ B เราใช้สัญลักษณ์ว่า $A \subseteq B$ และจากนิยามดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า เมื่อ $A = B$ จะได้ว่า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ ด้วย ในกรณีที่ A เป็นเซทย่อยของ B และ $A \neq B$ เราเรียกว่า A เป็นเซทย่อยสมบูรณ์ (proper subset) ของ B ใช้สัญลักษณ์ว่า $A \subset B$

<u>นิยาม</u> A เป็นเซทย่อยสมบูรณ์ ($A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกในเซท A เป็นสมาชิก ในเซท B และ $A \neq B$

ตัวอย่างอื่นเกี่ยวกับเซทย่อยสมบูรณ์ เช่น เซทของคนภาคกลาง เป็นเซทย่อยสมบูรณ์ ของเซทของคนไทย ฯลฯ

<u>เซทของเอกภพ</u> (Universal Set)

เราจะเห็นได้ว่า บางครั้งเซทหลายเซทเป็นเซทย่อยของเซทใดเซทหนึ่ง เช่น {๑, ๒}, {๑, ๒, ๓}, {๒, ๓}, {๑}, {๒} ต่างก็เป็นเซทย่อยของเซท {๑, ๒, ๓} เราจะเรียกเซท ที่มีเซทย่อยหลาย ๆ เซทนี้ว่า Universal Set ซึ่งใช้สัญลักษณ์ U

ในทุก ๆ Universal Set จะมีตัว Universal Set เอง และเซทว่าง (ϕ) เป็นเซทย่อย เช่น

เมื่อ $\cup$ = {1}

เซทย่อยของ $\cup$ จะมี {1} และ ϕ

รูทย่อยของ เมื่อ $\cup$ = {1, 2}

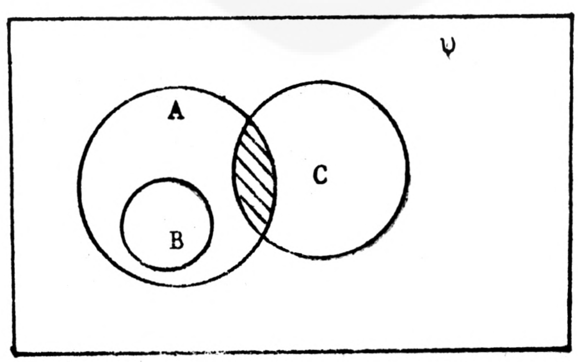
จะเป็น {1, 2}, {1}, {2} และ ϕ

เมื่อ $\cup$ = {1, 2, 3}

เซทย่อยจะเป็น {1, 2, 3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1}, {2}, {3} และ ϕ

จากตัวอย่างข้างต้นจะสังเกตได้ว่า จำนวนเซทย่อยที่อาจเป็นไปได้ของแต่ละ Universal Set ขึ้นอยู่กับจำนวนสมาชิกใน Universal Set เมื่อจำนวนสมาชิกเป็น 1 จำนวน เซทย่อยเป็น 2 เมื่อจำนวนสมาชิกเป็น 2 จำนวนเซทย่อยเป็น 4 เมื่อจำนวนสมาชิกเป็น 3 จำนวนเซทย่อยเป็น 8 นั่นคือ เมื่อจำนวนสมาชิกเป็น n จำนวนเซทย่อยก็จะเป็น 2^n นั่นเอง

โดยทั่วไปเราสามารถใช้แผนภาพของเวนน์ (Venn Diagram) อธิบายในเรื่องเซทได้ดี ในเรื่องแผนภาพของเวนน์ ปกติจะใช้วงกลมแทนเซทต่าง ๆ และสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทน Universal Set ในกรณีที่เซทมีสมาชิกร่วมกันก็จะใช้พื้นที่ร่วมกัน ตัวอย่าง



เซทย่อยของ Universal Set

จากรูปข้างบน เซท A, B และ C เป็นเซทย่อยของ $\cup$ และ B เป็นเซทย่อยของ A ส่วน A และ C มีสมาชิกบางส่วนร่วมกัน

พื้นที่ตัวอย่าง (Sample Space)

ในการทดลอง หรือการกระทำ (Experiment) อย่างใดอย่างหนึ่ง บางครั้งผลลัพธ์ (Outcomes) จากการกระทำนั้น ๆ จะมีออกมาหลายรูปลักษณะ เช่น ถ้าการกระทำเป็นการโยนเหรียญเพียงเหรียญเดียว ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นจากการกระทำมี ๒ รูปลักษณะ คือ หัว หรือ ก้อย แต่ถ้าการกระทำเป็นการโยนเหรียญ ๒ เหรียญ ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดจากการกระทำจะมี ๓ รูปลักษณะ คือ หัว - ก้อย, ก้อย - ก้อย, หัว - หัว หรือถ้าการกระทำเป็นการดึงไพ่ ๑ ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดจากการกระทำนั้นอาจจะเป็นไพ่หน้าใดหน้าหนึ่ง ในจำนวนไพ่ทั้งสำรับ 52 หน้า เราเรียกผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการกระทำหนึ่ง ๆ ว่าพื้นที่ตัวอย่างของการกระทำนั้น ๆ นั่นคือ หัว ก้อย เป็นพื้นที่ตัวอย่างของการโยนเหรียญ ๑ เหรียญ เป็นต้น

<u>นิยาม</u> พื้นที่ตัวอย่างคือเซทที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของการกระทำใดการกระทำหนึ่ง โดยไม่ทั่วไปใช้สัญลักษณ์ S แทนชื่อเซทของพื้นที่ตัวอย่าง

ในบางครั้งพื้นที่ตัวอย่างจะถูกเรียกว่า Universal Set ซึ่งใช้ U เป็นสัญลักษณ์ของเซท

ถ้า S_1 เป็นเซทของพื้นที่ตัวอย่างของการเกิดหน้าเหรียญจากการโยนเหรียญ ๑ เหรียญ เราจะได้เซท S_1 ดังนี้

$$S_1 = \{\text{หัว, ก้อย}\}$$

ในการกระทำหรือการทดลองบางอย่าง อาจมีเซทของพื้นที่ตัวอย่างของการกระทำนั้น ๆ มากกว่า ๑ เซท เพราะสมาชิกของเซทในพื้นที่ตัวอย่างขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของผลลัพธ์ที่ผู้กระทำการทดลองต้องการศึกษา เช่น การดึงไพ่ใบหนึ่งจากไพ่ทั้งสำรับ ถ้าผู้ทำการทดลองมีจุดมุ่งหมายในการศึกษาแตกต่างกัน เช่น ศึกษาถึงสีไพ่, หน้าไพ่, แต้มไพ่ ฯลฯ เซทของพื้นที่ตัวอย่างจะแตกต่างกันออกไปเช่น

$$S_{\text{สีไพ่}} = \{\text{ดำ, แดง}\}$$

$$S_{\text{หน้าไพ่}} = \{\text{โพดำ, โพธิ์แดง, ข้าวหลามตัด, ออกจิก}\}$$

$$S_{\text{แต้มไพ่}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$$

จุดตัวอย่าง (Sample point)

สมาชิกแต่ละตัวในเซทของพื้นที่ตัวอย่าง เป็นจุดตัวอย่างหนึ่ง ๆ เช่น หัวและก้อย เป็นจุดตัวอย่างสองจุดในพื้นที่ตัวอย่างของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ

นิยาม จุดตัวอย่าง (Sample point) คือ สมาชิกตัวหนึ่งในเซตของพื้นที่ตัวอย่าง

ตัวอย่าง ในการโยนลูกเต๋าลูกหนึ่งเพื่อดูแต้มที่เกิดขึ้นพื้นที่ตัวอย่างของแต้มลูกเต๋าจะเป็นดังนี้

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1, 2, 3, 4, 5 และ 6 แต่ละตัวก็จะเป็นจุดตัวอย่างของพื้นที่ตัวอย่าง S

เหตุการณ์ (Events)

ในการกระทำหรือการทดลอง บางครั้งผู้ทดลองมิได้สนใจพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดที่เกิดขึ้น แต่จะสนใจเพียงบางส่วนของพื้นที่ตัวอย่าง เช่น การโยนลูกเต๋า ถ้าผู้ทดลองสนใจแต่เพียงเหตุการณ์ (Event) ที่แต้มที่เกิดจะมีค่ามากกว่า 3 เท่านั้น นั่นคือ ผู้ทดลองจะสนใจเฉพาะกรณีที่ลูกเต๋าเกิดแต้ม 4, 5, 6

ให้ S แทนเซทของพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดของต้มลูกเต๋าเป็น

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ให้ A แทนเซทของเหตุการณ์ที่แต้มลูกเต๋ามีค่ามากกว่า 3

$$A = \{4, 5, 6\}$$

จะเห็นได้ว่า เซทของเหตุการณ์ จะเป็นเซทย่อยของเซทของพื้นที่ตัวอย่าง

นิยาม เหตุการณ์ (Event) คือเซทย่อยของพื้นที่ตัวอย่าง ซึ่งเซทของเหตการณ์ใดที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว เช่น เซทของแต้มลูกเต๋าที่มีค่าน้อยกว่า 2 ซึ่งได้แก่ {1} เราเรียกเหตุการณ์นี้ว่าเหตุการณ์เดียว (Single Event) แต่ถ้าเซทของเหตุการณ์ใดมีสมาชิกเกินกว่าหนึ่งตัว

เช่น เซทของแต้มลูกเต๋าที่เป็นเลขคู่ ซึ่งได้แก่ {2, 4, 6} เราเรียกเหตุการณ์นี้ว่าเหตุการณ์ร่วม (Compound Event) เหตุการร่วมบางเหตุการณ์อาจเกิดจากเหตุการณ์เดี่ยวหลาย ๆ เหตุการณ์รวมกัน

<u>การนับจำนวนจุดตัวอย่าง</u>

ในการหาค่าความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ใด จะต้องทราบถึงจุดตัวอย่างทั้งหมดที่เกิดขึ้นของเหตุการณ์ และพื้นที่ตัวอย่างนั้น ๆ ก่อน ตัวอย่างเช่น เมื่อต้องการทราบความน่าจะเป็นของการเกิดแต้มจำนวนคี่ของการโยนลูกเต๋าลูกหนึ่ง จะต้องทราบถึงจำนวนจุดตัวอย่างในเซทของพื้นที่ตัวอย่างของการเกิดแต้มของลูกเต๋า และจำนวนจุดตัวอย่างในเซทของเหตุการณ์การเกิดแต้มจำนวนคี่

ในบางเหตุการณ์ที่สลับซับซ้อนจะมีจุดตัวอย่างมาก เช่น การเกิดหน้าของการโยนเหรียญ ๓ เหรียญ มีจุดตัวอย่างที่เกิดขึ้นมากกว่าการเกิดหน้าของการโยนเหรียญเพียงเหรียญเดียว สำหรับเหตุการณ์ที่ซับซ้อนมาก ๆ เรามีวิธีหาจำนวนจุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างดังนี้ คือ

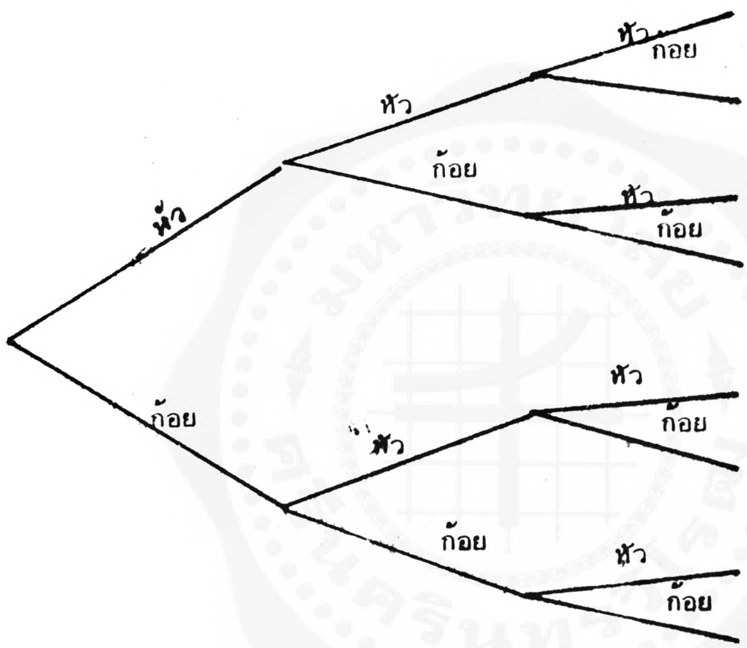
<u>วิธีเขียนแผนภาพต้นไม้</u> (Tree Diagram)

การเขียนแผนภาพต้นไม้ เป็นการเขียนแผนภาพตามลำดับขั้นของการเกิดเหตุการณ์ทั้งหมด แล้วจึงนับจำนวนจุดตัวอย่างที่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง จงหาจำนวนจุดตัวอย่างทั้งหมดในพื้นที่ตัวอย่างของการโยนเหรียญที่สมดุลย์สามครั้ง

แผนภาพต้นไม้ของการโยนเหรียญ ๓ ครั้ง

โยนครั้งที่ 1 โยนครั้งที่ 2 โยนครั้งที่ 3 จุดตัวอย่างที่เกิดขึ้น



หัว-หัว-หัว

หัว-หัว-ก้อย

หัว-ก้อย-หัว

หัว-ก้อย-ก้อย

ก้อย-หัว-หัว

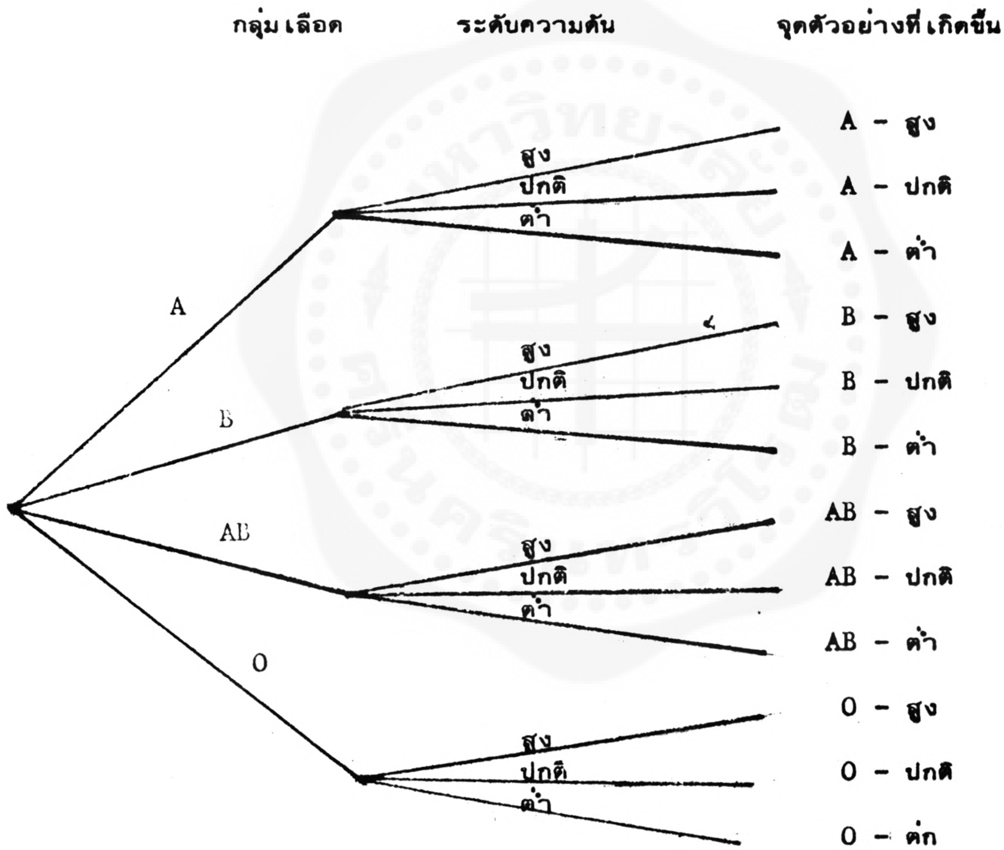
ก้อย-หัว-ก้อย

ก้อย-ก้อย-หัว

ก้อย-ก้อย-ก้อย

ตัวอย่างที่ ๒ ในการตรวจเลือดคนไข้ แพทย์จะแบ่งชนิดของเลือดออกเป็น ๔ กลุ่ม คือ กลุ่ม A กลุ่ม B กลุ่ม AB และกลุ่ม O และในเลือดแต่ละกลุ่ม แพทย์จะแบ่งระดับความดันออกเป็น ๓ ระดับ คือ ระดับความดันสูง ปกติ และ ต่ำ จงหาจุดตัวอย่างทั้งหมดที่อาจจะเกิดขึ้นได้

แผนภาพต้นไม้ของการแบ่งชนิดเลือดตามกลุ่มเลือดและระดับความดัน



2. การใช้หลักการคูณการจัดกลุ่มและการจัดลำดับ (Combination and Permutation)

<u>การใช้หลักการคูณ</u> (Multiplication)

จากตัวอย่างที่ 1 (ในเรื่องการหาจุดตัวอย่างโดยการเรียนแผนภาพต้นไม้) จะพบว่า การโยนเหรียญ 3 ครั้ง มีจำนวนตัวอย่างทั้งหมด 8 วิธี เมื่อเราวิเคราะห์ถึงแต่ละลำดับของการเกิดเหตุการณ์จากากรทดลองโดยเหรียญ 3 ครั้งมีดังนี้

ในการโยนเหรียญครั้งที่ 1 มีวิธีที่อาจเกิดขึ้นอยู่ 2 วิธี คือ หัวหรือก้อย

ในการโยนเหรียญครั้งที่ 2 มีวิธีที่อาจเกิดขึ้นอยู่ 2 วิธี คือ หัวหรือก้อย

ในการโยนเหรียญครั้งที่ 3 มีวิธีที่อาจเกิดขึ้นอยู่ 2 วิธี คือ หัวหรือก้อย

จะพบว่า ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนเป็น $2 \times 2 \times 2 = 8$ จำนวน

จากตัวอย่างที่ 2 (ในเรื่องการหาจุดตัวอย่างโดยการเรียนแผนภาพต้นไม้) จะพบว่า การแบ่งชนิดเลือดคนไข้ของแพทย์มีจำนวนจุดตัวอย่าง 12 จำนวน และขั้นตอนในการเกิดเหตุการณ์มี 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งชนิดของเลือดตามกลุ่มเลือด ซึ่งมีจำนวน 4 กลุ่มคือ A, B, AB และ O

ขั้นตอนที่ 2 แบ่งชนิดของเลือดตามระดับความดันซึ่งมีจำนวน 3 ระดับคือ สูง ปกติ และต่ำ

จะพบว่า ผลคูณของจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนเป็น $4 \times 3 = 12$ จำนวน

จากตัวอย่างทั้งสองเราพอสรุปหลักการหาจุดตัวอย่างจากการคูณจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอน ของการทดลองหรือการกระทำได้ดังนี้

ถ้าการกระทำหนึ่งมีลำดับขั้นของการกระทำนั้น ๆ อยู่ k ขั้น ในขั้นที่ 1 มีวิธีที่จะเป็นไปได้ n_1 วิธี ในขั้นที่ 2 มีวิธีที่จะเป็นไปได้ n_2 วิธี .... ในขั้นที่ k มีวิธีที่จะเป็นไปได้ n_k วิธี ดังนั้น จำนวนจุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างของการกระทำนั้น ๆ จะเป็น

$$n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots \times n_k \text{ จำนวน}$$

การใช้หลักการจัดลำดับ (Permutation)

การกระทำบางการกระทำ มีขั้นตอนในการเกิดการกระทำหลายขั้นตอน และจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนมีความสัมพันธ์กันโดยลดกำลังขั้นละ 1 วิธี เช่น ในการจัดลำดับเลข 1, 2 และ 3 จะเห็นได้ว่า ในขั้นแรกตัวเลขที่สามารถถูกจัดไว้ลำดับแรกอาจจะเป็น 1 หรือ 2 หรือ 3 ก็ได้ แต่ในขั้นต่อไป ตัวเลขจะต้องไม่ซ้ำกับตัวแรกที่เลือกไว้ ทำให้ในชั้นนี้มีเลขที่จะมาจัดลำดับได้เพียง 2 ตัวเท่านั้น ถึงจะไม่ซ้ำกับตัวแรก และในขั้นสุดท้าย มีเหลือเพียง 1 ตัวเท่านั้นที่ไม่ซ้ำกับ 2 ตัวแรก เราพอสรุปจำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 มีวิธีเลือกตัวเลข 3 วิธี (เริ่มต้นด้วย 1 หรือ 2 หรือ 3)

ขั้นที่ 2 มีวิธีเลือกตัวเลข 2 วิธี (โดยไม่ซ้ำกับเลขตัวแรก)

ขั้นที่ 3 มีวิธีเลือกตัวเลข 1 วิธี (โดยไม่ซ้ำกับเลข 2 ตัวแรก)

เมื่อใช้หลักการคูณจะพบว่า มีจำนวนจุดตัวอย่างที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด $3 \times 3 \times 2 = 6$ คือ 6 จุดตัวอย่าง จุดตัวอย่างต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นได้เป็นดังนี้

$$S = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $n!$ (อ่านว่า n-factorial) คือผลคูณของ $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ และเมื่อ $n = 0$ $0!$ มีค่า = 1

นั่นคือ $3 \times 2 \times 1$ ก็คือ $3!$

เราจะพบได้ว่า วิธีจัดลำดับของตัวเลข 3 ตัวที่กล่าวมามีอยู่ $3!$ วิธี

$= 3 \times 2 \times 1$

$= 6$ วิธี

เราพอสรุปได้ว่า ในการจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันจำนวน n สิ่ง จะมีวิธีจัดทั้งหมด $n!$ วิธี

ตัวอย่าง นักเรียนคนหนึ่งมีดินสอสีที่แตกต่างกันอยู่ 8 แท่ง เขามักจะเรียงดินสอสีทั้งหมดลงในกล่องแบบต่าง ๆ เช่น ขึ้นต้นด้วยสีเขียว ลงท้ายสีแดง ขึ้นต้นสีแดง ลงท้ายสีขาว ฯลฯ อยากทราบเด็กนักเรียนคนนี้มีวิธีเรียงดินสอสีลงกล่องได้แตกต่างกันกี่วิธี

(ถ้าจัดดินสอสี 8 แท่ง แท่งแรกอาจจะเริ่มด้วยสีใดก็ได้ โดยเลือกจากดินสอทั้ง 8 แท่ง แต่แท่งที่ 2 มีดินสอเหลือให้เลือกเพียง 7 แท่ง และแท่งที่สามจะมีโอกาสเลือกจาก 6 แท่ง ไปเรื่อย ๆ จนแท่งสุดท้าย ซึ่งมีโอกาสเลือกเพียง 1 วิธี นั่นคือไม่มีโอกาสเลือก)

จำนวนวิธีที่จะจัดดดินสอสี 8 แท่งลงกล่อง $= 8!$ วิธี

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ วิธี

$= 40,320$ วิธี

ในบางกรณี การจัดเรียงลำดับจากของทั้งหมด n สิ่ง บางครั้งเราอาจจะไม่เรียงทีเดียวครั้งละทั้งหมด n สิ่ง แต่อาจจะจัดเรียงครั้งละน้อยกว่า n สิ่ง เช่น จากดินสอสีทั้ง 8 แท่ง เด็กอาจจะนำมาจัดเรียงครั้งละ 3 แท่ง ให้สีแตกต่างกัน จำนวนวิธีที่เกิดขึ้นย่อมแตกต่างจากการเรียงดินสอทีเดียวทั้ง 8 แท่ง จะเห็นได้ว่าขั้นตอนของการจัดเรียงลำดับดินสอ 3 แท่ง จาก 8 แท่ง จะเป็นดังนี้

แท่งลำดับที่ 1 อาจจะเป็นดินสอแท่งใดแท่งหนึ่งใน 8 แท่งจะมีวิธีเลือกได้ 8 วิธี

แท่งลำดับที่ 2 อาจจะเป็นดินสอแท่งใดแท่งหนึ่งจากที่เหลือ 7 แท่งจึงมีวิธีเลือก 7 วิธี

แท่งลำดับที่ 3 อาจจะเป็นดินสอแท่งใดแท่งหนึ่งจากที่เหลือ 6 แท่งจึงมีวิธีเลือก 6 วิธี

ดังนั้น วิธีจัดเรียงดินสอดสี 3 แท่ง จากดินสอสี 8 แท่งที่แตกต่างกันจึงเป็น

$8 \times 7 \times 6 = 336$ วิธี

จะเห็นได้ว่า วิธีจัดเรียงลำดับดินสอสี 8 แท่งที่แตกต่างกัน

$$= 8 \times 7 \times 6$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{8!}{5!}$$

$$= \frac{8!}{(8-3)!}$$

นั่นคือ ถ้าจัดเรียงลำดับดินสอสี r แท่ง จากดินสอสี n แท่งที่แตกต่างกัน $= \frac{n!}{(n-r)!}$

ถ้าให้ $^{n}p_{r}$ แทนการจัดเรียงลำดับของ r สิ่งจากของที่แตกต่างกัน n สิ่ง จะได้

$$^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ในการจัดลำดับของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันโดยจัดทีละ r เมื่อ $r \leq n$ จำนวนวิธีที่จัดลำดับได้ทั้งหมดเป็น $\frac{n!}{(n-r)!}$

ตัวอย่าง ห้องเรียนห้องหนึ่ง มีนักเรียนจำนวน 30 คน และนักเรียนในห้องจะต้องเลือกหัวหน้าห้อง รองหัวหน้าห้อง และเหรัญญิก เพื่อเป็นกลุ่มผู้บริหารประจำห้องเรียน อยากทราบว่านักเรียนห้องนี้จะมีวิธีเลือกกลุ่มผู้บริหารที่แตกต่างกันได้กี่วิธี

(การเลือกในกรณีนี้เป็นการเลือกคน 3 คน มาดำรงตำแหน่งต่าง ๆ กันจากคน 30คน)

จำนวนวิธีเลือกคน 3 คนมาดำรงตำแหน่งที่แตกต่างกันจากคน 30 คน

$$= {}^{30}p_{3}$$

$$= \frac{30!}{(30-3)!}$$

$$= \frac{30!}{27!}$$

$$= \frac{30 \times 29 \times 28 \times \cancel{27!}}{\cancel{27!}}$$

$$= 30 \times 29 \times 28$$

$$= 24{,}360 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง ในการสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัย นักเรียนแต่ละคนมีสิทธิ์เลือกคณะวิชาที่ตนต้องการสมัครเข้าเรียนได้ไม่เกิน 4 คณะ โดยเรียงลำดับคณะวิชาที่ตนต้องการมากที่สุดไปถึงคณะวิชาที่ตนต้องการเข้าน้อยที่สุด ถ้าจำนวนคณะวิชาทั้งหมดที่นักเรียนสามารถเลือกได้มีจำนวน 20 คณะ อยากทราบว่านักเรียนแต่ละคนจะมีวิธีเลือกเข้ามหาวิทยาลัยได้กี่วิธี

วิธีเลือกคณะทั้งหมด $= {}^{20}p_{4} = \frac{20!}{(20-4)} = 20 \times 19 \times 18 \times 17$

$= 116280$ วิธี

การใช้หลักในการจัดกลุ่ม (Combination)

สำหรับการกระทำบางการกระทำที่มีลำดับของการเกิดการกระทำหลายขั้นตอน แต่บางครั้งลำดับของขั้นตอนก่อนหลังไม่มีผลทำให้จุดตัวอย่างแตกต่างกัน เช่น การหาผลรวมของเลข ๓ ตัว ที่เลือกจากเลข ๑, ๒, ๓, ๔ จะเห็นได้ว่า จุดตัวอย่างที่ได้จากการเลือกได้เลข ๑ - ๒ - ๓, 2-1-3 และ ๓ - ๒ - ๑ ต่างก็มีผลรวมเป็น ๖ เท่ากัน ในกรณีเช่นนี้ จำนวนจุดตัวอย่างที่แตกต่างกัน จะมีจำนวนน้อยกว่าการจัดลำดับ ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนก็แก่การแบ่งกลุ่มนักเรียนร่วมกันทำงาน เช่น การแบ่งกลุ่มละ ๓ คน จากคน ๓๐ คน ในกลุ่มหนึ่ง ๆ จะเลือกได้ใครก่อนใครหลัง เช่น ก - ข - ค หรือ ค - ก - ข กลุ่มเหล่านี้จะมีลักษณะเหมือนกัน คือมีคน ๓ คน ประกอบด้วย ก, ข, ค แต่ถ้ามีการกำหนดชี้เฉพาะว่า ในแต่ละกลุ่มจะประกอบด้วยหัวหน้า - รองหัวหน้า - เลขานุการ กลุ่มที่มีนาย ก เป็นหัวหน้า และกลุ่มที่มีนาย ก เป็นเลขานุการ จะแตกต่างกัน นั่นคือ ก-ข-ค และ ค-ก-ข จะแตกต่างกัน ในกรณีเช่นนี้เป็นการจัดลำดับมิใช่การจัดกลุ่ม

ถ้าให้มีการจับกลุ่มผู้ร่วมทำงานกลุ่มละ ๓ คน จาก ก, ข, ค และ ง พื้นที่ตัวอย่างของการจัดกลุ่มนี้คือ

S = {กขค, กขง, ขคง} ซึ่งมีจำนวนจุดตัวอย่างที่แตกต่างกัน ๔ จำนวน

จะเห็นได้ว่า การเลือกจัดกลุ่ม ๆ ละ ๓ สิ่ง จากสิ่งที่แตกต่างกัน ๔ สิ่ง มีวิธีจัด ๔ วิธี ถ้าให้สัญลักษณ์ ${}^{n}C_{r}$ แทนการจัดกลุ่มจากสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยจัดกลุ่มละ r สิ่ง จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้นจะได้ว่า

$${}^{4}C_{3} = 4 \qquad (n=4,\ r=3)$$

แต่ $$4 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ถ้าให้จัดกลุ่ม ๆ ละ ๒ คน จาก ก, ข, ค และ ง เช่นเดิม จะได้พื้นที่ตัวอย่างดังนี้

S = {กข, กค, กง, ขค, ขง, คง} ซึ่งมีจำนวน ๖ จุดตัวอย่าง

นั่นคือ $${}^{4}C_{2} = 6 \qquad (n=4,\ r=2)$$

แต่ $$6 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ดังนั้น เราสามารถสรุปการคำนวณหาจำนวนจุดตัวอย่างที่แตกต่างกัน จากการจับกลุ่ม ได้ดังนี้ คือ

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ในการจัดกลุ่มของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันโดยให้จัดกลุ่ม ๆ ละ r เมื่อ $r \leq n$ จำนวนวิธีที่จะจัดกลุ่มที่แตกต่างกันได้เป็น

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่ง อนุญาตให้คนงานในบริษัทหยุดพักได้ ๓ เดือนในปีหนึ่ง ๆ โดยเลือกหยุดพักในเดือนใด ๆ ก็ได้ อยากทราบว่าคนงานแต่ละคนในบริษัทนี้จะมีวิธีหยุดพักงานได้แตกต่างกันกี่วิธี

ในเวลา ๑ ปี หรือ ๑๒ เดือน คนงานจะเลือกพักงานได้ ๓ เดือน การจัดกลุ่มของเดือน ๓ เดือน จาก ๑๒ เดือน จะได้จำนวนกลุ่มที่แตกต่างกันอยู่ $^{12}C_{3}$

$$^{12}C_{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!}$$

$$= \frac{12!}{3!9!}$$

$$= 220 \text{ วิธี}$$

นั่นคือ คนงานสามารถเลือกพักงานได้แตกต่างกัน 220 วิธี

ตัวอย่าง ร้านขายก๋วยเตี๋ยวแห่งหนึ่งมีเส้นก๋วยเตี๋ยวให้ลูกค้าเลือก ๓ ชนิด คือ เส้นใหญ่ เส้นเล็ก และเส้นหมี่ โดยทั่วไปแล้วลูกค้าจะต้องบอกให้แน่นอนด้วยว่า ต้องการก๋วยเตี๋ยวน้ำ หรือแห้ง ส่วนเนื้อที่จะใส่ปรุงไปกับก๋วยเตี๋ยว จะมี ลูกชิ้น เนื้อสด เนื้อเปื่อย และตับโดยปกติผู้สั่งจะสั่งเนื้อเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือปนกันไม่เกิน ๒ อย่าง อยากทราบว่า โดยปกติแล้ว ลูกค้าจะมีวิธีสั่งก๋วยเตี๋ยวของเขาได้กี่วิธี

ลูกค้ามีวิธีเลือกเส้นก๋วยเตี๋ยวอยู่ 2 วิธี

และมีวิธีเลือกชนิดของก๋วยเตี๋ยว(น้ำหรือแห้ง) 2 วิธี

เมื่อลูกค้าต้องการเนื้อ 1 อย่าง เขามีวิธีเลือก 4 วิธี

หรือเมื่อเขาต้องการเนื้อ 2 อย่างผสมกิน เขามีวิธีเลือก

$$ {}^{4}C_{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} $$

$$ = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} $$

$$ = 6 $$ วิธี

ดังนั้นสำหรับการใส่เนื้อลูกค้ามีวิธีเลือก = 4 + 6 = 10 วิธี

นั่นคือลูกค้ามีวิธีเลือกสั่งก๋วยเตี๋ยวทั้งหมด = 3 x 2 x 10

= 60 วิธี

ความน่าจะเป็น หรือโอกาส (Probability)

ในชีวิตประจำวันเราอาจจะได้ยินการทำนาย หรือกล่าวถึงเรื่องโอกาส หรือความน่าจะเป็นอยู่เสมอ เช่น โอกาสที่จะถูกล็อตเตอรี่รางวัลที่หนึ่งมีน้อยมาก โอกาสที่ฝนจะตกในเดือนพฤษภาคมมีมากกว่าที่ฝนจะตกในเดือนเมษายน ไพ่มีสีแดงขึ้นมาหลายใบแล้วครั้งต่อไปน่าจะเป็นสีดำ ฯลฯ การกล่าวถึงโอกาสหรือความน่าจะเป็นในแต่ละอย่างมักจะมีทฤษฎีหรือความเชื่อเบื้องหลังอยู่ก่อน จึงจะกล่าวได้ว่า ความน่าจะเป็นหรือโอกาสในเรื่องนั้น ๆ มีมากน้อยกว่ากันแค่ไหน เช่น การทราบว่า ล็อตเตอรี่ล้านใบมีรางวัลที่ 1 เพียงใบเดียว หรือทราบว่าเดือนพฤษภาคมเป็นฤดูฝน จึงน่าจะมีฝนตกมากกว่าเดือนมีนาคมซึ่งอยู่ในฤดูร้อน

การคำนวณหาค่าของโอกาสหรือความน่าจะเป็น

ในพื้นที่ตัวอย่างของการกระทำหนึ่ง ๆ จุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างนั้น ๆ จะมีน้ำหนัก (weight) ของความเป็นไปได้ของการเกิดจุดตัวอย่างนั้น ๆ จุดตัวอย่างแต่ละจุดในพื้นที่ตัวอย่างเดียวกันอาจมีน้ำหนักของความเป็นไปได้เท่ากัน หรือต่างกันก็ได้ ทั้งนี้แล้วแต่เหตุผล

เบื้องหลังเช่น การโยนเหรียญที่สมดุลย์เหรียญหนึ่ง พื้นที่ตัวอย่างของการเกิดหัวและก้อย เป็น {หัว, ก้อย} น้ำหนักของการเกิดจุดตัวอย่างหัวและน้ำหนักของการเกิดจุดตัวอย่าง น่าจะเท่ากัน โดยเหตุผลที่เหรียญนั้นสมดุลย์ แต่ถ้าเหรียญนั้นไม่อยู่ในลักษณะสมดุลย์ เช่น ถูกถ่วงหน้าหัว พื้นที่ตัวอย่างจากการโยนเหรียญที่ไม่สมดุลย์ก็ยังคงเป็น {หัว, ก้อย} เช่นเดียวกัน แต่น้ำหนักของการเกิดจุดตัวอย่างหัวน่าจะมีมากกว่าการเกิดจุดตัวอย่างก้อย ด้วยเหตุที่เหรียญนั้นถูกถ่วงทางหน้าหัว เป็นต้น

ในการแข่งขันฟุตบอลระหว่างไทยและเกาหลีใต้นัดหนึ่งปรากฏว่า ผู้เชี่ยวชาญในวงการฟุตบอลกล่าวกันว่า โดยประสบการณ์ ฝีเท้าและชั้นเชิง ทีมไทยต้องชนะเกาหลีแน่นอน สามารถต่อรองได้ถึง ๒ ต่อ ๑ ส่วนการเสมอนั้นไม่มีเป็นเด็ดขาด จะมีก็แต่แพ้มากหรือน้อยเท่านั้น

จากข้อมูลดังกล่าวข้างบนจะเห็นว่า ถ้าให้ S เป็นเซทของพื้นที่ตัวอย่างของผลการแข่งขันจะปรากฏว่า ผลของการแข่งขันที่เป็นไปได้จะมีเพียง ๓ อย่าง คือ ไทยชนะ ไทยเสมอ หรือไทยแพ้ ดังนั้นเราสามารถเขียนเซทของ S ได้ดังนี้คือ

S = {ไทยชนะ, เสมอกัน, ไทยแพ้}

ถ้าให้ ๑ หน่วยของน้ำหนักความเป็นไปได้เป็น w หน่วย

ดังนั้น จุดตัวอย่างไทยชนะจะมีน้ำหนักของความเป็นไปได้เป็น $2w$ หน่วย

จุดตัวอย่างไทยแพ้จะมีน้ำหนักของความเป็นไปได้เป็น $1w$ หน่วย

จุดตัวอย่างเสมอกันจะมีน้ำหนักความเป็นไปได้เป็น $0w$ (ซึ่งเท่ากับ ๐) หน่วย

ผลรวมของน้ำหนักของทุกจุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดเป็น $2w + 1w + 0$ หน่วย

$= 3w$ หน่วย

<u>นิยาม</u> ความน่าจะเป็นของแต่ละจุดตัวอย่างคือความถี่สัมพัทธ์ (Relative frequency) ระหว่างน้ำหนักความเป็นไปได้ของจุดตัวอย่างนั้น ต่อผลรวมของน้ำหนักความเป็นไปได้ของทุกจุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างนั้น ๆ

จากตัวอย่างข้างต้น

ค่าความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างไทยชนะเป็น $\frac{2w}{3w} = \frac{2}{3}$

ค่าความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างไทยแพ้ เป็น $\frac{1w}{3w} = \frac{1}{3}$

ค่าความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างเสมอกัน เป็น $\frac{0w}{3w} = 0$

นั่นคือ ไทยมีโอกาสชนะ $\frac{2}{3}$ หรือ 66.66% มีโอกาสแพ้ 33.33%

ผลรวมของความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างไทยชนะ, ไทยแพ้ และเสมอกันเป็น

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 1$$

จะเห็นได้ว่า <u>ผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกจุดตัวอย่างในพื้นที่ตัวอย่างมีค่าเป็น ๑</u>

โดยทั่วไปเราใช้ Pr แทนความน่าจะเป็น เช่น Pr (ไทยชนะ) คือความน่าจะเป็นที่ไทยจะชนะ เมื่อ S เป็นพื้นที่ตัวอย่างจะได้ว่า

$$Pr\ (S) = 1$$

ถ้าในการแข่งขันฟุตบอลระหว่างไทยและเกาหลีใต้ครั้งนี้ ทั้งสองทีมต่างมีความสามารถพอ ๆ กัน ทำให้คาดการณ์ไม่ได้เลยว่าไทยจะชนะหรือแพ้ นั่นคือ กรณีใดกรณีหนึ่งใน ๓ กรณี คือ ไทยชนะ เสมอกัน หรือไทยแพ้ อาจเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กันหมด ดังนั้นน้ำหนักของความเป็นไปได้ของแต่ละจุดตัวอย่างจะเป็น

น้ำหนักความเป็นไปได้ของไทยชนะเป็น	w	หน่วย
น้ำหนักความเป็นไปได้ของเสมอกันเป็น	w	หน่วย
น้ำหนักความเป็นไปได้ของไทยแพ้เป็น	w	หน่วย
ผลรวมของน้ำหนักของทุกจุดตัวอย่างเป็น $w + w + w$ =	3w	หน่วย

$$Pr\ (\text{ไทยชนะ}) = \frac{w}{3w} = \frac{1}{3}$$

$$Pr\ (\text{ไทยเสนอ}) = \frac{w}{3w} = \frac{1}{3}$$

$$Pr\ (\text{ไทยแพ้}) = \frac{w}{3w} = \frac{1}{3}$$

แต่ถึงอย่างไรก็ตาม $Pr\ (S) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

นั่นคือ $Pr\ (S)$ เป็น 1 เสมอ

ปัญหาสำคัญในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น คือการกำหนดค่าน้ำหนักความเป็นไปได้ของแต่ละจุดตัวอย่าง ถ้าการกำหนดค่าน้ำหนักความเป็นไปได้ของแต่ละจุดตัวอย่างมีความคลาดเคลื่อนมาก การคำนวณค่าความน่าจะเป็น หรือโอกาสก็จะคลาดเคลื่อนตามไปด้วย ดังนั้น การกำหนดค่าน้ำหนักความเป็นไปได้จึงต้องมีทฤษฎีหรือความเชื่อเบื้องหลังที่เพียงพอ

สำหรับการกระทำบางการกระทำ การกำหนดน้ำหนักความเป็นไปได้ของแต่ละจุดตัวอย่าง อาจได้มาจากการทดลอง เช่นการเกิดหัวและก้อยของเหรียญที่สมดุลย์ หลังจากการทดลองโยนเหรียญอยู่หลาย ๆ พันครั้ง และบันทึกผลการทดลองไว้จะพบว่าจำนวนครั้งของการเกิดหัวจะเท่า ๆ กับจำนวนครั้งของการเกิดก้อย แสดงว่าน้ำหนักความเป็นไปได้ของการเกิดหัวเท่ากับน้ำหนักความเป็นไปได้ของการเกิดก้อย นั่นคือ

เมื่อน้ำหนักความเป็นไปได้ของการเกิดหัวเป็น w หน่วย

ดังนั้น น้ำหนักความเป็นไปได้ของการเกิดหัวเป็น w หน่วย

ผลรวมของน้ำหนักความเป็นไปได้ของทุกจุดตัวอย่างเป็น $w + w = 2w$ หน่วย

ดังนั้น $$Pr\ (\text{หัว}) = \frac{w}{2w} = \frac{1}{2}$$

$$Pr\ (\text{ก้อย}) = \frac{w}{2w} = \frac{1}{2}$$

เช่นเดียวกันกับการโยนเหรียญ จากการทดลองโยนลูกเต๋าที่สมดุลย์ ก็จะพบว่า น้ำหนักความเป็นไปได้ของทั้ง 6 หน้า เท่ากัน จึงทำให้โอกาสที่จะขึ้นแต่ละหน้าเป็น $\frac{1}{6}$

เหตุการณ์บางเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดตัวอย่าง ในพื้นที่ตัวอย่างมากกว่าหนึ่งจุด เช่น การโยนลูกเต๋าให้ได้หน้าคู่ พื้นที่ตัวอย่างของการเกิดหน้าของลูกเต๋า $\{1,2,3,4,5,6\}$ ส่วนการเกิดหน้าคู่ก็คือเมื่อจุดตัวอย่างมีค่าเป็น 2,4 และ 6 จะเห็นว่าเหตุการณ์นี้ประกอบด้วยจุดตัวอย่าง 3 จุด ถ้าแต่ละจุดตัวอย่างของการเกิดแต้มของลูกเต๋ามีน้ำหนักความเป็นไปได้เท่ากันแล้วดังนี้

เมื่อให้แต่ละจุดตัวอย่างมีน้ำหนักความเป็นไปได้ w หน่วย

ผลรวมน้ำหนักของความเป็นไปได้ของทุกแต้มเป็น $6w$ หน่วย

ผลรวมน้ำหนักความเป็นไปได้ของการเกิดหน้า 2,4,6 คือ $w + w + w = 3w$

นั่นคือ $$Pr\ (2,4,6) = \frac{3w}{6w} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

แต่ $$Pr\ (2) = \frac{1}{6}$$

$$Pr\ (4) = \frac{1}{6}$$

$$Pr\ (5) = \frac{1}{6}$$

$$Pr\ (2) + Pr\ (4) + Pr\ (6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

จะเห็นได้ว่า $Pr\ (2,4,6) = Pr\ (2) + Pr\ (4) + Pr\ (6)$

ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า <u>ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดตัวอย่างมากกว่าหนึ่งจุดตัวอย่าง คือผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกจุดตัวอย่างในเหตุการณ์นั้น</u>

<u>ในพื้นที่ตัวอย่างใดที่จุดตัวอย่างทุกจุดมีน้ำหนักของความเป็นไปได้เท่ากัน ถ้าให้ N เป็นจำนวนจุดในพื้นที่ตัวอย่างนั้น และ n เป็นจำนวนจุดตัวอย่างในเหตุการณ์ A ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A คือ ความถี่สัมพัทธ์ระหว่าง n ต่อ N</u>

นั่นคือ $$Pr\ (A) = \frac{n}{N}$$

ตัวอย่าง ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง ๓ ลูก สีขาว ๖ ลูก และสีดำ 7 ลูก จงหาความน่าจะเป็นในการล้วงลูกบอล ๑ ลูกได้สีแดง

(เมื่อลูกบอลอยู่ในกล่องเดียวกันจะเห็นว่าลูกบอลทุกลูกจะมีโอกาสถูกหยิบขึ้นมาเท่า ๆ กัน ดังนั้นค่าน้ำหนักความเป็นไปได้ของการหยิบได้ลูกบอลแต่ละลูกจะเท่ากัน)

$$\text{Pr (สีแดง)} = \frac{\text{จำนวนลูกบอลสีแดง}}{\text{จำนวนลูกบอลทั้งหมด}} = \frac{3}{3+5+7} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

จากตัวอย่างข้างบน

$$\text{Pr (สีดำ)} = \frac{7}{15}$$

$$\text{Pr (สีขาว)} = \frac{5}{15}$$

$$\text{Pr (สีดำ+สีขาว)} = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} + \frac{12}{15}$$

แต่ (สีดำ + สีขาว) ก็คือ (การไม่ได้สีแดง) ซึ่งเขียนโดยย่อว่า (แดง)'

จะเห็นว่า $\text{Pr (แดง)'} = \frac{12}{15} = 1 - \frac{3}{5} = 1 - \text{Pr (แดง)}$

นั่นคือ $\text{Pr (A)'} = 1 - \text{Pr (A)}$

ตัวอย่าง ถ้าความน่าจะเป็นของการเกิดฝนตกในเดือนเมษายนเป็น $\frac{1}{10}$ หรือ 10% จงหาความน่าจะเป็นของการไม่เกิดฝนตกในเดือนเมษายน

$$\text{Pr (ฝนตกเมษายน)} = \frac{1}{10} \text{ หรือ } 10\%$$

$$\text{Pr (ฝนตกเมษายน)'} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \text{ หรือ } 90\%$$

<u>สรุปกฎเบื้องต้นโดยทั่วไปของความน่าจะเป็น</u>

๑. $\text{Pr (A)} = \frac{n}{N}$ เมื่อทุกจุดตัวอย่างมีน้ำหนักของความเป็นไปได้เท่ากัน

๒. $1 \leq \text{Pr (A)} \leq 0$

๓. Pr (A หรือ B) = Pr (A) + Pr (B) เมื่อเหตุการณ์ A และ B ไม่ขึ้นต่อกัน (mutually exclusive)

๔. $Pr(A)' = 1 - Pr(A)$

๕. $Pr(S) = 1 = Pr(A) + Pr(A)'$

<u>กิจกรรมและแบบฝึกหัด</u>

1. ให้ผู้เรียนได้ยกตัวอย่างหัวข้อการทดลอง หรือการวิจัย 5 หัวข้อ เพื่อให้ผู้ร่วมชั้นช่วยกันฝึกหัด กำหนดพื้นที่ตัวอย่าง เช่น เมื่อต้องการเลือกนักเรียนที่ชื่อขึ้นต้นด้วยตัว ส. ในห้องเรียน

2. ให้ผู้เรียนกำหนดเหตุการณ์ 5 เหตุการณ์ขึ้น พร้อมทั้งคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เหล่านั้น ตัวอย่างเช่น เมื่อเหตุการณ์คือผู้ที่นั่งแถวหน้า จงหาโอกาสที่จะเลือกนิสิตอย่างสุ่มได้ผู้ที่นั่งแถวหน้า

3. ในการสอบครั้งหนึ่ง ครูผู้สอนบอกแก่นักเรียนว่า ถ้านักเรียนห้องนั้นมี ๑ คน

   ก. จงเขียนเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

   ข. โอกาสที่เด็กจะสอบได้ทุกคน หรือสอบตกทุกคนเป็นเท่าไร

4. ในการโยนเหรียญซึ่งอยู่ในลักษณะสมดุลย์อันหนึ่ง 5 ครั้ง อยากทราบว่าโอกาสที่จะโยนเหรียญแล้วขึ้นหัวเกิน 3 ครั้งเป็นเท่าไร

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุน็อต 1,000 ตัว มีเกลียวซ้าย 500 ตัว เกลียวขวา 500 ตัว จงหาโอกาสที่จะหยิบตัวอย่างขึ้นมา 15 ตัว แล้ว

   ก. ได้เกลียวขวาอย่างน้อย 11 ตัว

   ข. ได้เกลียวขวาไม่เกิน 3 ตัว

6. ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำอยู่ 20 ลูก สีแดง 30 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลอย่างสุ่ม จงหา Probability ของ

   ก. หยิบลูกบอล 5 ลูกได้สีแดงทั้งหมด

   ข. หยิบลูกบอล 3 ลูกได้สีดำ 2 ลูก สีแดง 1 ลูก

   ค. หยิบลูกบอล 4 ลูกให้ได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

บทที่ 2

ทบทวนสถิติเบื้องต้น

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. ให้ผู้เรียนได้รู้จักการใช้สัญลักษณ์ผลรวม และสามารถแปลความหมายของข้อมูลที่อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ผลรวมได้
2. ให้ผู้เรียนได้รู้จักเลือกใช้วิธีการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลางแบบต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับระดับของข้อมูล และสามารถคำนวณหาค่าตัวกลางเหล่านั้นได้
3. ให้ผู้เรียนได้รู้จักเลือกใช้วิธีการวัดการกระจายแบบต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับลักษณะของข้อมูล และสามารถคำนวณหาค่าการกระจายเหล่านั้นได้
4. ให้ผู้เรียนได้รู้จักมาตราการวัดระดับต่าง ๆ และสามารถยกตัวอย่างข้อมูลที่มาจากระดับการวัดต่าง ๆ ได้ถูกต้อง

<u>เนื้อหา</u>

- สัญลักษณ์ผลรวม
  - กฎบางประการเกี่ยวกับการใช้สัญลักษผลรวม
- การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง
  - ค่าเฉลี่ย
  - ค่ามัธยฐาน
  - ค่าฐานนิยม
- การวัดการกระจาย
  - พิสัย
  - ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย
  - ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวน
  - กฎบางประการเกี่ยวกับความแปรปรวน
- การบอกตำแหน่งข้อมูล

สัญลักษณ์ผลรวม (Summation Notation)

ในการคำนวณทางสถิติจะพบว่า การรวมค่าหลาย ๆ ค่ามักเป็นสิ่งจำเป็นและใช้บ่อยครั้ง เช่น ในการหาคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้องหนึ่งจำนวน 35 คน ซึ่งต้องนำคะแนนของนักเรียนทุกคนมารวมกันแล้วหารเฉลี่ยด้วยจำนวนนักเรียน

ถ้าให้ X_1 แทนคะแนนของนักเรียนคนที่ 1

X_2 แทนคะแนนของนักเรียนคนที่ 2

. .
. .
. .

X_{35} แทนคะแนนของนักเรียนคนที่ 35

ผลรวมของคะแนนของนักเรียนทั้ง 35 คน คือ $X_1 + X_2 + \ldots + X_{35}$

ในทางคณิตศาสตร์จะใช้อักษรกรีก Σ (Capital Sigma) เป็นสัญลักษณ์แทนการรวม ซึ่งโดยทั่วไปจะอ่านว่า Sigma หรือ Summation และใช้ตัวเลขห้อย (Subscript) ข้างล่างเป็นดัชนีบอกถึงจำนวนที่ต้องการเริ่มรวมไปจนถึงเลขบนเครื่องหมาย Σ ซึ่งเป็นดัชนีบอกจำนวนสุดท้ายที่ต้องการรวม เช่น $\sum_{i=1}^{35} X_i$ หมายถึงรวมค่า X ตั้งแต่ X_1 ไปจนถึง X_{35}

$\sum_{i=7}^{10} Y_i$ หมายถึงการรวมค่าตั้งแต่ Y_7 ไปจนถึง Y_{10} เป็นต้น

การใช้เครื่องหมาย Σ แทนการรวมทำให้เกิดความสะดวกแก่การเรียน และการเข้าใจ ดังเช่นจากตัวอย่างการหาคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน 35 คน เราอาจเขียนได้ดังนี้

$$\text{คะแนนเฉลี่ย} = \frac{\sum_{i=1}^{35} X_i}{35}$$ เมื่อ X แทนคะแนนของนักเรียน

รูปทั่ว ๆ ไปของการเขียนเครื่องหมาย Σ จะเป็น $\sum_{i=a}^{n} X_i \quad (a \leq n)$

นั่นคือ $$\sum_{i=a}^{n} X_i = X_a + X_{a+1} + X_{a+2} + \dots + X_n$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\sum_{i=1}^{9} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3 + \dots + X_nY_n$$

$$\sum_{i=5}^{10} 2X_i = 2X_5 + 2X_6 + \dots + 2X_{10}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} X_i\right)\left(\sum_{i=2}^{5} Y_i\right) = (X_1 + X_2 + X_3)(Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5)$$

ฯลฯ

<u>กฎบางประการเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ผลรวม</u>

1. การรวมค่าตัวแปรที่มากกว่าหนึ่งตัว

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i+Y_i+Z_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

พิสูจน์ $\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i + Z_i) = (X_1 + Y_1 + Z_1) + (X_2 + Y_2 + Z_2) + \ldots$

$+ (X_n + Y_n + Z_n)$

$= (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$

$+ (Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} Z_i$

จากกฎนี้ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

1.1 $\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i - Z_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i$

1.2 $\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i - Z_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Z_i$

๒. การรวมผลคูณตัวแปรกับค่าคงที่

$\sum_{i=1}^{n} c X_i = c \sum_{i=1}^{n} X_i$ (เมื่อ c คือค่าคงที่)

พิสูจน์

$\sum_{i=1}^{n} c X_i = c X_1 + c X_2 + c X_3 + \ldots + c X_n$

$= c (X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$

$= c \sum_{i=1}^{n} X_i$

จากกฎนี้ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

2.1 $\sum_{i=1}^{n} X_i / c = 1/c \sum_{i=1}^{n} X_i$

2.2 $\sum_{i=1}^{n} pq X_i = pq \sum_{i=1}^{n} X_i$ (เมื่อ p และ q เป็นค่าคงที่)

๓. การรวมค่าคงที่

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$ (เมื่อ c คือค่าคงที่)

พิสูจน์

$$\sum_{i=1}^{n} c = \frac{\underbrace{c + c + \ldots + c}}{n} = \frac{nc}{n} = c$$

จากกฎนี้ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

3.1 $$\sum_{i=1}^{n} pq = npq$$ (เมื่อ p, q คือค่าคงที่)

3.2 $$\sum_{i=1}^{n} p/_q = np/_q$$ (เมื่อ p, q คือค่าคงที่)

๔. การใช้เครื่องสัญลักษณ์การรวมมากกว่า ๑ ตัว ซึ่งเป็นการรวมแบบมากกว่า ๒ มิติ

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_j} X_{ij} = \sum_{j=1}^{k_1} X_{1j} + \sum_{j=1}^{k_2} X_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$$

เช่น การหาผลรวมของรายได้ของทุกวันใน ๑ ปี

$$\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{k_i} X_{ij} = \sum_{j=1}^{31} X_{1j} + \sum_{j=1}^{28} X_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{31} X_{12j}$$

ข้อสังเกต ค่าของ i = 1 ถึง 12 คือจำนวนของเดือน และค่าของ k_j ที่แตกต่างกันไปคือค่าของจำนวนวันในแต่ละเดือนนั่นเอง

ตัวอย่างการใช้กฎการใช้สัญลักษณ์ผลรวม

ตัวอย่างที่ ๑ จงหาผลรวมของ $\sum_{k=1}^{5} X + \sum_{y=1}^{4} Y^2$

$$\sum_{x=1}^{5} X = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{y=1}^{4} Y^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

นั่นคือ $\sum_{X=1}^{5} X + \sum_{y=1}^{4} Y^2 = 15 + 30 = 45$

ตัวอย่างที่ ๒ เมื่อ $X_1 = 5$ $Y_1 = 3$

$X_2 = 6$ $Y_2 = 4$

$X_3 = 8$ $Y_3 = 2$

จงหาค่าของ

$$\sum_{i=1}^{3} (2X_i - Y_i)$$

วิธีทำ

$$\sum_{i=1}^{3} (2X_i - Y_i) = \sum_{i=1}^{3} 2X_i - \sum_{i=1}^{3} Y_i$$

$$= 2\sum_{i=1}^{3} X_i - \sum_{i=1}^{3} Y_i$$

$$= 2(X_1 + X_2 + X_3) - (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

$$= 2(5 + 6 + 8) - (3 + 4 + 2)$$

$$= 2(19) - 9$$

$$= 38 - 9$$

$$= 29$$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{3} (X_i + Y_i)^2$ เมื่อ $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$

$Y_1 = -1, Y_2 = -2, Y_3 = -3$

$$\sum_{i=1}^{3} (X_i + Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (X_i^2 + 2X_iY_i + Y_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 + \sum_{i=1}^{3} 2X_iY_i + \sum_{i=1}^{3} Y_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{3} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3} X_iY_i + \sum_{i=1}^{3} Y_i^2$$

$$= (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + 2(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3)$$
$$+ (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2) + 2\left[1(-1) + 2(-2) + 3(-3)\right] +$$
$$\left[(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2\right]$$

$$= 14 + 2(-14) + 14$$

$$= 0$$

<u>การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง</u> (Measure of Central Tendency)

โดยทั่วไปการกล่าวถึงคุณลักษณะของข้อมูลกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งอย่างรวม ๆ เรามักจะเลือกเอาค่าใดค่าหนึ่งที่พอจะเป็นตัวแทนของข้อมูลทั้งกลุ่มได้มากล่าว เช่น สุนัขพันธุ์อัลเซเชี่ยนดุ คนตำบล "ก" มีรายได้ประมาณ <u>1,200</u> บาท ต่อเดือน <u>คนไทย</u>ชอบกินทุเรียน ฯลฯ ซึ่งในความเป็นจริงแล้วสุนัขพันธุ์อัลเซเชียนบางตัวอาจขี้ขลาด คนในตำบล "ก" อาจมีรายได้มากหรือน้อยกว่า 1,200 บาท ต่อเดือน คนไทยบางคนอาจไม่ชอบกินทุเรียน เป็นต้น แต่โดยส่วนใหญ่ หรือส่วนเฉลี่ยแล้ว คำกล่าวข้างต้นมีส่วนถูกอยู่มาก

ในการตัดสินว่าอะไรจะเป็นตัวแทนที่ดีของข้อมูลกลุ่มหนึ่ง ๆ นั้น ผู้ตัดสินจะต้องไม่เลือกเอาตัวแทนที่เป็นเพียงส่วนน้อยของกลุ่ม เช่น ถ้าคนกลุ่มหนึ่ง 20 คน เป็นคนจนเพียงคนเดียว เราก็จะไม่กล่าวว่าคนกลุ่มนี้จน แต่จะใกล้ความเป็นจริงมากกว่าถ้าจะกล่าวว่า คนกลุ่มนี้รวย ทั้ง ๆ ที่มีคนจนอยู่ 1 คน หรือถ้าจะอยากทราบถึงรายได้โดยทั่วไปของคนกลุ่มหนึ่ง ผู้ตอบคำถามอาจจะไม่เลือกเอารายได้ของคนใดคนหนึ่งในกลุ่มมาเป็นตัวแทนของกลุ่ม แต่อาจจะนำเอารายได้ของคนทั้งหมดมารวมแล้วเฉลี่ยออกได้เป็นคำตอบที่เป็นตัวแทนของรายได้กลุ่ม สิ่งที่ควรคำนึงถึงในการหาตัวแทนของกลุ่มก็คือ ตัวแทนที่ได้ต้องมีคุณลักษณะใกล้เคียงกับข้อมูลส่วนใหญ่ในกลุ่ม ซึ่งโดยส่วนใหญ่มักเป็นค่ากลาง ๆ ในทางสถิติมีวิธีการหาตัวแทนของกลุ่มข้อมูลที่เรียกว่าการวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง คือวิธีการที่จะหาค่าใดค่าหนึ่งให้เป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูลทั้งหมด โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ค่าที่นิยมใช้เป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูลมี 3 ชนิด คือ

1. ค่าเฉลี่ย หรือมัชฌิมเลขคณิต (Mean)
2. ค่ามัธยฐาน (Median)
3. ค่าฐานนิยม (Mode)

<u>ค่าเฉลี่ย (Mean) ใช้อักษรย่อว่า μ หรือ $\bar{X}$</u>

ค่าเฉลี่ย คือค่าตัวกลางที่คำนวณโดยการรวมค่าข้อมูลทุกตัว แล้วหารเฉลี่ยด้วยจำนวนข้อมูลทั้งหมด ตัวอย่างเช่น เด็กกลุ่มหนึ่ง 5 คน อายุ 10 ปี 5 ปี 12 ปี 11 ปี และ 12 ปี

ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยอายุของเด็กกลุ่มนี้จะเป็น $\frac{10 + 5 + 12 + 11 + 12}{5}$ ซึ่งมีค่าเป็น 10 ปี เราสามารถกล่าวถึงข้อมูลทั้งกลุ่มได้ว่า เด็กกลุ่มนี้มีอายุเฉลี่ย 10 ปี

จะเห็นได้ว่า การหาค่าตัวกลางโดยใช้ค่าเฉลี่ยนี้ จะต้องนำค่าสังเกตทุกค่ามารวมกัน ดังนั้น ค่าสังเกตที่จะรวมกันได้จะต้องเป็นค่าสังเกตที่ได้มาจากการวัดแบบมาตราอันตรภาค หรือมาตราอัตราส่วนเท่านั้น

โดยปกติเราใช้สัญลักษณ์ μ (มิว) แทนค่าเฉลี่ยของประชากร ดังนั้น μ คือค่าพารามีเตอร์ ค่าหนึ่ง ถ้าให้ n คือจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดในประชากร และค่าสังเกตในประชากรเป็นดังนี้ $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

สำหรับกลุ่มตัวอย่าง เราจะใช้สัญลักษณ์ $\bar{X}$ (X - bar) แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ดังนั้น $\bar{X}$ คือค่าสถิติค่าหนึ่ง ถ้าให้ N เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง เราจะได้

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$$

ในกรณีที่ข้อมูลหมู่ มีการแจกแจงความถี่ (frequency) แล้ว เช่น เด็กอายุ 10 ปี มี 7 คน (7 คือค่าความถี่) อายุ 8 ปี มี 4 คน อายุ 5ปี มี 3 คน สูตรการหาค่าเฉลี่ยจะเป็น

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{N} \qquad (f_i \text{ คือความถี่ของ } X_i)$$

จากตัวอย่างข้างบนจะได้

$$\bar{X} = \frac{(7 \times 10) + (4 \times 8) + (3 \times 5)}{7 + 4 + 3} = 8.357 \text{ ปี}$$

กฎบางประการเกี่ยวกับการหาค่าเฉลี่ย

กฎข้อที่ 1 เมื่อ x เป็นตัวแปร และ C เป็นค่าคงที่

$$\bar{X}_{(x+c)} = \bar{X}_x + C$$

และ
$$\bar{X}_{(x-c)} = \bar{X}_x - C$$

พิสูจน์

$$\bar{X}_{(x+c)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i+C)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=1}^{N} C}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} + \frac{NC}{N}$$

$$= \bar{X} + C$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\bar{X}_{(x-c)} = \bar{X} - C$$

ตัวอย่าง คนงาน 5 คน มีรายได้แตกต่างกันดังนี้คือ 60, 70, 80, 50, และ 40 บาท แต่เมื่อทุกคนทำงานล่วงเวลา ทุกคนจะได้เงินเพิ่มคนละ 30 บาท เท่ากันหมด จงหาค่าเฉลี่ยของรายได้เมื่อทุกคนทำงานปกติ และเมื่อทุกคนทำงานล่วงเวลาด้วย

เมื่อให้ $\bar{X}_{\text{ปกติ}}$ แทนค่าเฉลี่ยของการทำงานปกติ

และ $\bar{X}_{\text{ปกติ+ล่วงเวลา}}$ แทนค่าเฉลี่ยของการทำงานปกติและล่วงเวลา

$$\bar{X}_{\text{ปกติ}} = \frac{60 + 70 + 80 + 50 + 40}{5} = 60$$

ดังนั้น ในเวลาทำงานปกติคนงานกลุ่มนี้มีรายได้เฉลี่ย 60 บาท

เมื่อคนงานทุกคนทำงานล่วงเวลา จะได้รายได้เพิ่ม 30 บาท เท่ากันทุกคน

จาก $\bar{X}_{x+c} = \bar{X}_{x} + C = 60 + 30 = 90$

ดังนั้น รายได้เฉลี่ยเมื่อทำงานล่วงเวลาของคนงานกลุ่มนี้เป็น 90 บาท

<u>กฎข้อที่ ๒</u> เมื่อ X เป็นตัวแปร และ C เป็นค่าคงที่

$$\bar{X}_{Cx} = C\bar{X}$$

และ $$\bar{X}_{x/C} = \frac{1}{C}\bar{X}$$

พิสูจน์

$$\bar{X}_{Cx} = \frac{\sum_{i=1}^{N} CX_i}{N}$$

$$= \frac{C\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = C\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

$$= C\bar{X}$$

ในทำนองเดียวกัน เราก็อาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\bar{X}_{x/C} = \frac{1}{C}\bar{X}$$

ตัวอย่าง ในการชั่งน้ำหนักลูกหมู 5 ตัว ปรากฏว่าหนักดังนี้ 15, 22, 30, 25 และ 22 กิโลกรัม จงหาค่าน้ำหนักเฉลี่ยของหมูทั้ง 5 ตัวนี้เป็นกิโลกรัม และเป็นกรัม

ให้ $\bar{X}_{\text{กก}}$ เป็นค่าเฉลี่ยของน้ำหนักหมูเป็นกิโลกรัม

$\bar{X}_{\text{กรัม}}$ เป็นค่าเฉลี่ยของน้ำหนักหมูเป็นกรัม

ดังนั้น $$\bar{X}_{\text{กก}} = \frac{15 + 22 + 30 + 25 + 22}{5}$$

$$= \frac{114}{5} = 22.8 \quad \text{กิโลกรัม}$$

น้ำหนักของหมู เมื่อคิดเป็นกรัม จำนวนกรัมคือ 100 x จำนวนของกิโลกรัม

$$\therefore \bar{X}_{\text{กรัม}} = 22.8 \times 100$$

$$= 2280 \text{ กรัม}$$

ค่ามัธยฐาน (Median) ใช้อักษรย่อว่า Mdn

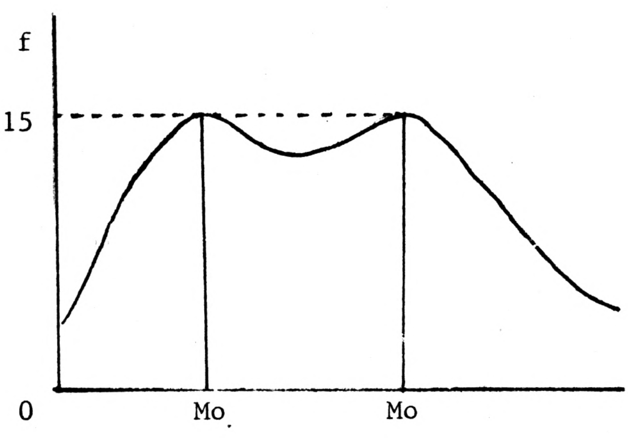
ค่ามัธยฐานคือค่าสังเกตที่อยู่กึ่งกลางที่สุดในจำนวนข้อมูลทั้งหมด เมื่อเรียงลำดับค่าของข้อมูลแล้ว เช่นข้อมูลชุดหนึ่งเป็น 2, 4, 3, 6, 5 จากข้อมูลดังกล่าว เมื่อเรียงลำดับค่า ของข้อมูลจะเป็น 2, 3, 4, 5, 6 ค่า 4 จะอยู่กึ่งกลางระหว่างข้อมูลทั้งหมด ดังนั้น ค่ามัธยฐานของข้อมูลกลุ่มนี้เป็น 4 ในกรณีที่ไม่มีค่าสังเกตใดอยู่กึ่งกลางพอดี ได้แก่ในกรณีที่จำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่ ในกรณีเช่นนี้ให้ใช้ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตคู่ที่อยู่ใกล้ศูนย์กลางที่สุด ตัวอย่างเช่น 10, 12, 9, 15, 13, 16 เมื่อเรียงข้อมูลแล้วจะได้ 9, 10, 12, 13, 15, 16 12 และ 13 คือค่าสังเกตที่อยู่ใกล้ศูนย์กลางที่สุด ดังนั้น ค่ามัธยฐานคือค่าเฉลี่ยระหว่าง 12 และ 13 นั่นคือ $\frac{12 + 13}{2} = 12.5$ จะสังเกตได้ว่า ถ้า N เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด ค่ามัธยฐานคือ ค่าสังเกตในตำแหน่งที่ $\frac{N + 1}{2}$

ค่ามัธยฐาน เป็นค่าตัวกลางที่เหมาะสมมาก เมื่อมีข้อมูลบางค่าที่แตกต่างจากกลุ่มมาก ๆ เพราะค่าของข้อมูลที่โด่งไปข้างใดข้างหนึ่ง มิได้มีผลทำให้ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของข้อมูลเปลี่ยนแปลง เช่น ข้อมูล 10, 12, 15, 17, 20, 25, 550 ค่าข้อมูล 550 เป็นค่าที่แตกต่างไปจากกลุ่มมาก แต่ก็มิได้ทำให้ค่ามัธยฐานเปลี่ยนไปจาก 17 และถึงแม้ค่า 550 จะเปลี่ยนเป็น 750 ค่ามัธยฐานก็ยังคงเป็น 17 คงเดิม ซึ่งในกรณีเช่นนี้ ถ้าใช้ค่าเฉลี่ยเป็นตัวกลาง ข้อมูลที่แตกต่างออกไปมากคือ 550 จะทำให้ค่าเฉลี่ยที่ได้ แตกต่างไปจากข้อมูลส่วนใหญ่ ดังนั้น การใช้ค่ามัธยฐาน จึงเหมาะสมมากเมื่อใช้กับกลุ่มข้อมูลที่มีความเบ้ (skewness) มาก ๆ เช่นนี้ แต่ข้อเสียของการใช้ค่ามัธยฐานคือ ค่าของมัธยฐานจะเปลี่ยนแปลงไปได้ง่าย เมื่อข้อมูลมีจำนวนน้อย เพราะเมื่อจำนวนข้อมูลเปลี่ยนแปลงไปเพียง ±1 ศูนย์กลางของข้อมูลจะเปลี่ยนแปลงไปทันที และสำหรับข้อมูลกลุ่มเล็ก ๆ เมื่อศูนย์กลางเปลี่ยนไปเล็กน้อย ค่าของมัธยฐานอาจแตกต่างจากเดิมไปมาก แต่สำหรับข้อมูลกลุ่มใหญ่ ๆ ค่าของข้อมูลที่อยู่ใกล้ศูนย์กลาง ส่วนใหญ่จะใกล้เคียงกัน

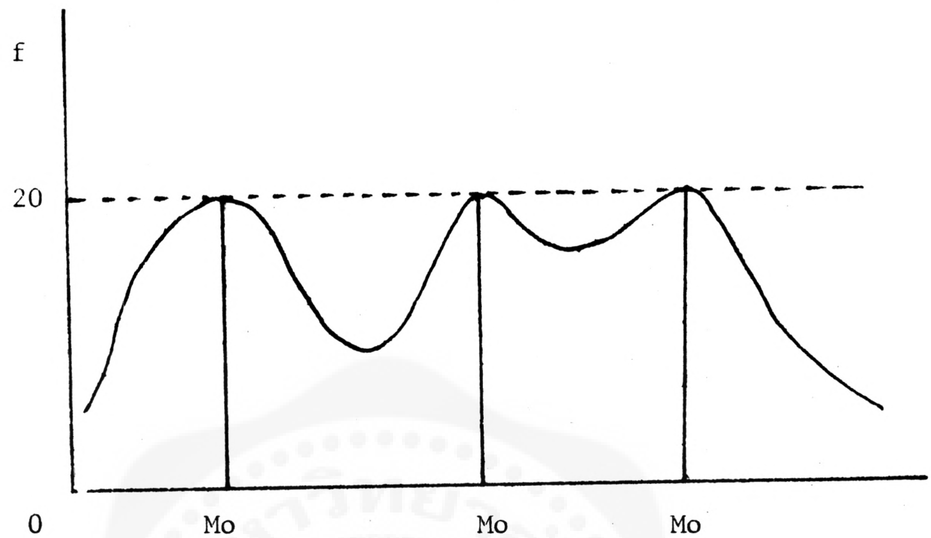
ค่าฐานนิยม (Mode) ใช้อักษรย่อว่า Mo

ค่าฐานนิยม เป็นการหาค่าตัวกลางแบบง่าย ๆ และคร่าว ๆ และสามารถใช้ได้กับข้อมูลที่ได้จากการวัดในระดับต่ำ เช่นระดับนามบัญญัติได้ เพราะการหาค่าฐานนิยม เป็นการยึดเอาค่าสังเกตที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุด กล่าวคือ มีความถี่สูงสุดในจำนวนข้อมูลกลุ่มนั้น ๆ เช่น ข้อมูลกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้ 2, 3, 4, 3, 2, 5, 3, 6, 3, 4 จะเห็นได้ว่า ค่าสังเกต 3 เกิดขึ้นบ่อยที่สุด หรือมีความถี่สูงสุด นั่นคือ ค่าฐานนิยมของข้อมูลกลุ่มนี้คือ 3 ตัวแปรบางชนิด ไม่สามารถใช้มาตราการวัดได้เกินกว่าระดับนามบัญญัติ เช่น การวัดเชื้อชาติของคนกลุ่มหนึ่ง ปรากฏว่าเป็นคนไทย 20 คน ลาว 5 คน จีน 3 คน ในการหาค่าตัวกลางเพื่อเป็นตัวแทนของข้อมูลกลุ่มนี้ เราไม่สามารถหาค่ามัธยฐานได้ เพราะไม่สามารถเรียงลำดับเชื้อชาติได้ว่าเชื้อชาติไหนมากหรือน้อย หรือดี หรือเลว กว่ากัน ในทำนองเดียวกัน ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลกลุ่มนี้ได้ เพราะไม่สามารถหาค่าผลรวมของเชื้อชาติเหล่านี้ได้ ดังนั้น ค่าตัวกลางที่เป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของข้อมูลลักษณะนี้คือ ค่าฐานนิยม

ในข้อมูลบางกลุ่ม จะมีค่าสังเกตเกินกว่าหนึ่งค่า ที่มีความถี่เท่ากัน และเป็นความถี่สูงสุดของกลุ่ม ถ้าในกรณีที่มีค่าสังเกตเพียง 2 ตัว ที่มีความถี่สูงสุด และเท่ากัน เราเรียกว่าข้อมูลกลุ่มนี้มีค่าฐานนิยม 2 ค่า (Bimodal) แต่ถ้าในกรณีที่มีค่าสังเกตเกินกว่า 2 ค่าที่มีความถี่สูงสุดและเท่ากันมากกว่า 2 ค่า เราเรียกว่าข้อมูลกลุ่มนี้มีฐานนิยมหลายค่า (Multimodal)

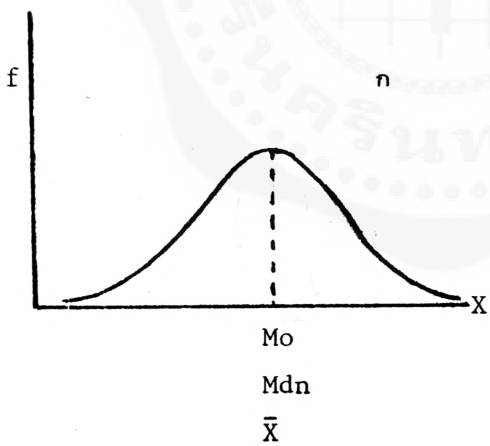


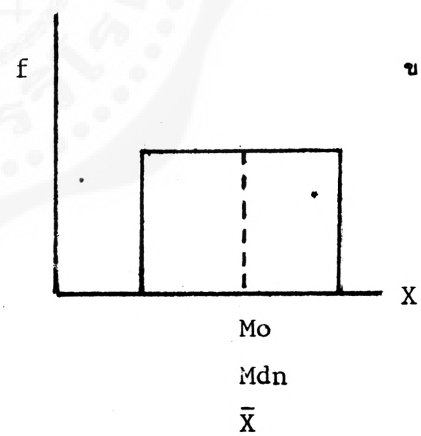
กราฟแสดงการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าฐานนิยม 2 ค่า (Bimodal)



กราฟแสดงการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าฐานนิยมหลายค่า (Multimodal)

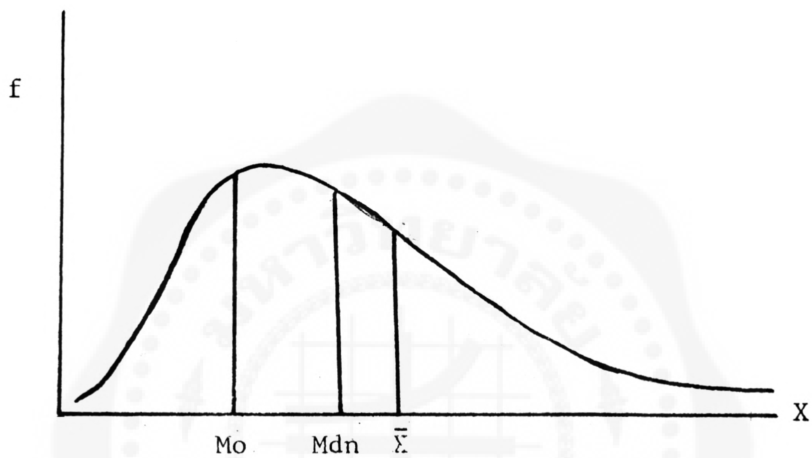
ในกรณีที่ข้อมูลกลุ่มนั้นมีการแจกแจงในลักษณะสมมาตร (Symmetry) ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม จะมีค่าเท่ากันหมด



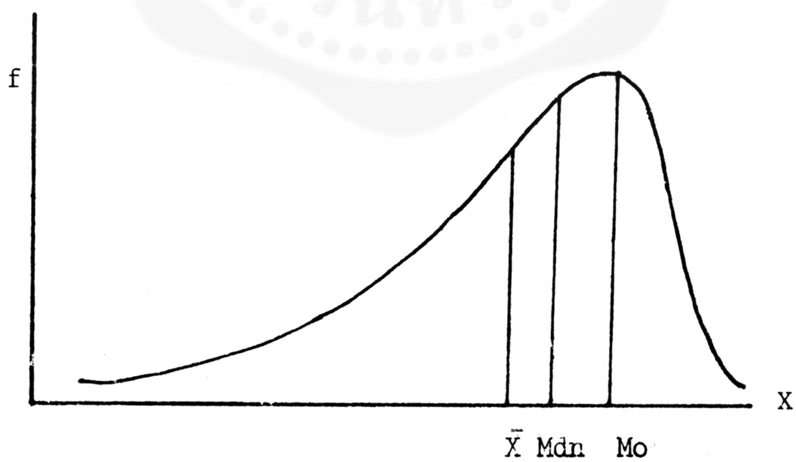


กราฟแสดงการแจกแจงของข้อมูลที่อยู่ในลักษณะสมมาตร ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยมจะอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน (ในรูป ข. ทุกค่าสังเกต X เป็น Mo)

ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงเป็นแบบไม่สมมาตร นั่นคือมีความเบ้ (Skewness) ไปทางใดก็ตาม ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม จะมีค่าแตกต่างกัน กล่าวคือ ถ้าข้อมูลเบ้ไปทางบวก (Positive Skewness) ค่าเฉลี่ยจะสูงกว่าค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม แต่ถ้าข้อมูลเบ้ไปทางลบ (Negative Skewness) ค่าฐานนิยมจะสูงกว่าค่ามัธยฐาน และค่าเฉลี่ย



กราฟแสดงการแจกแจงของข้อมูลทที่เบ้ไปทางบวก ค่าเฉลี่ยจะสูงกว่าค่ามัธยฐาน และฐานนิยม



กราฟแสดงการแจกแจงของข้อมูลที่เบ้ไปทางลบ ค่าฐานนิยมจะสูงกว่าค่ามัธยฐาน และค่าเฉลี่ย

ในการกำหนดค่าตัวกลางที่จะเป็นตัวแทนที่ดีของกลุ่มข้อมูลหนึ่ง ๆ นอกจากคำนึงถึงความเป็นไปได้จากระดับการวัดค่าสังเกต เช่น มีการวัดอยู่ในระดับที่จะนำข้อมูลมารวมกันได้หรือไม่ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นแล้ว ยังต้องคำนึงถึงความเหมาะสมของลักษณะการกระจายของข้อมูลด้วย กล่าวคือ ถ้ากลุ่มข้อมูลใดมีความเบ้มาก ๆ ค่ามัธยฐานอาจจะเป็นค่าที่ดีที่สุด แต่โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ค่าเฉลี่ยเป็นตัวกลางที่สำคัญ และใช้บ่อยมากในวิชาสถิติ เพราะถ้าข้อมูลมาจากการวัดในระดับสูง และการแจกแจงไม่เบ้ผิดปกติมากเกินไปแล้ว ค่าเฉลี่ยจะเป็นตัวกลางที่เป็นตัวแทนได้ดีกว่าตัวกลางอื่น

การวัดการกระจาย (Measure of Variation)

การบอกถึงคุณลักษณะของข้อมูลกลุ่มหนึ่งกลุ่มใดอย่างรวม ๆ ค่าตัวกลางจะบอกให้ทราบถึงค่าของข้อมูลทั้งกลุ่มว่าส่วนใหญ่หรือโดยเฉลี่ยมีค่าเท่าใด แต่คุณลักษณะที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งของกลุ่มข้อมูล คือการรู้ว่าค่าสังเกตแต่ละตัวในกลุ่มข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกันหรือแตกต่างกันมากน้อยเพียงใด ถ้าค่าสังเกตส่วนใหญ่ในกลุ่มข้อมูลไม่แตกต่างกันมาก เราเรียกว่าข้อมูลกลุ่มนั้นมีการกระจายน้อย แต่ถ้าค่าสังเกตในกลุ่มข้อมูลมีค่าแตกต่างกันมากแล้ว เราเรียกว่ากลุ่มข้อมูลนั้นมีการกระจายมาก ตัวอย่างเช่น กลุ่มข้อมูล 1,3,4,7,3,2 มีการกระจายมากกว่ากลุ่มข้อมูล 4,5,4,4,6 เป็นต้น

ค่าที่นิยมใช้บอกการกระจายของกลุ่มข้อมูลในวิชาสถิติได้แก่

1. พิสัย (Range)
2. ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation)
3. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) หรือความแปรปรวน (Vaiance)

พิสัย (Range) คือค่าความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตสูงสุดและค่าสังเกตต่ำสุดของข้อมูลกลุ่มนั้น เช่นเมื่อข้อมูลกลุ่มหนึ่งเป็น 4,6,8,12,2,19 ค่าสังเกตที่มีค่าสูงสุดของข้อมูลกลุ่มนี้คือ 19 และค่าสังเกตที่มีค่าต่ำสุดคือ 2 ดังนั้น พิสัย คือ 19-2 หรือ 17 เราเรียกว่าข้อมูลกลุ่มนี้มีค่าการกระจายพิสัยเป็น 17

ในกลุ่มข้อมูลที่มีค่าสังเกตสูงสุดหรือต่ำสุด แตกต่างไปจากค่าสังเกตส่วนใหญ่ในกลุ่มมาก ๆ จะทำให้ค่าพิสัยใหญ่กว่าค่าพิสัยที่ควรจะเป็นของกลุ่มข้อมูลนั้น เช่น เมื่อคนกลุ่มหนึ่งอายุ 40,45,42,43,46 และ 2 ปี จะเห็นว่าค่า 2 แตกต่างไปจากกลุ่มมาก ค่าพิสัยของอายุกลุ่มนี้เป็น 46 - 2 = 44 แต่เมื่อพิจารณาจากกลุ่มทั้งหมดแล้วจะเห็นได้ว่า คนส่วนใหญ่ในกลุ่มนี้คือคนระหว่างอายุ 40 - 46 ซึ่งน่าจะมีค่าพิสัยเพียง 6 เป็นต้น ในกรณีที่ลักษณะข้อมูลเป็นเช่นนี้ ไม่ควรจะใช้ค่าพิสัยวัดค่าการกระจายของข้อมูล

ด้วยเหตุที่การวัดการกระจายโดยใช้พิสัย เป็นการคำนวณค่าการกระจายจากค่าสังเกต เพียง 2 ค่า คือค่าสูงสุดและต่ำสุดเท่านั้น ไม่ว่ากลุ่มข้อมูลนั้นจะมีขนาดเล็กหรือใหญ่ หรือมีลักษณะภายในประการใด ดังนั้นการวัดการกระจายแบบนี้จึงไม่ใช่วิธีที่ดีนัก แต่เป็นวิธีที่สามารถคิดได้ง่ายและรวดเร็ว

<u>ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย</u> (Mean Average) เป็นการหาค่าการกระจายโดยยึดเอาค่าเฉลี่ยเป็นหลัก จากนั้นจึงคำนวณหาค่าเฉลี่ยของผลต่างของข้อมูลทุกตัวที่ต่างจากค่าเฉลี่ยโดยไม่คำนึงถึงทิศทาง เช่น กลุ่มข้อมูล 2,4,5,7,4,2 มีค่าเฉลี่ยเป็น

$$\text{ค่าเฉลี่ย } (\bar{X}) = \frac{2 + 4 + 5 + 7 + 4 + 3}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

ค่าแตกต่างของข้อมูลทุกตัวที่ต่างจากค่าเฉลี่ยเมื่อไม่คำนึงถึงทิศทางเป็น

ข้อมูล	ค่าเฉลี่ย	ค่าแตกต่าง
2	4	2
4	4	0
5	4	1
7	4	3
4	4	0
2	4	2

ผลรวมของค่าแตกต่าง = 8

ดังนั้นค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย (ค่าเฉลี่ยของผลรวมค่าแตกต่าง) = $\frac{8}{6} = 1.66$

เมื่อ X_i แทนข้อมูลตัวที่ i จะเห็นได้ว่าผลต่างจากข้อมูลตัวที่ i กับ $\bar{X}$ คือ $X_i - \bar{X}$ นั่นเอง

X_i	$\bar{X}$	$X_i - \bar{X}$
2	4	-2
4	4	0
5	4	1
7	4	3
4	4	0
2	4	-2

$$\sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X}) = 0$$

จะเห็นได้ว่า ผลรวมของ $(X_i - \bar{X})$ จะเป็น ศูนย์ และจะเป็นเช่นนี้กับข้อมูลทุกชุดไป นั่นคือผลรวมของผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยกับข้อมูลทุกตัว จะมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อคำนึงถึงทิศ-ทางของความแตกต่างด้วย

ในทางคณิตศาสตร์ เราใช้ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ซึ่งมีสัญลักษณ์เป็น $|\ \ |$ แทนค่าของสิ่งใดสิ่งหนึ่งเมื่อไม่คำนึงถึงทิศทาง ดังตัวอย่าง

ค่าสัมบูรณ์ของ 2 ซึ่งเขียนได้ว่า $|2|$ จะเท่ากับ 2

ค่าสัมบูรณ์ของ -2 ซึ่งเขียนได้ว่า $|-2|$ จะเท่ากับ 2 เช่นกัน

ดังนั้น ผลต่างของข้อมูลแต่ละตัวเมื่อไม่คิดทิศทางก็คือ $|X_i - \bar{X}|$ ซึ่งจากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วเราจะเขียนได้ว่า

X_i	$\bar{X}$	$\lvert X_i - \bar{X}\rvert$
2	4	2
4	4	0
5	4	1
7	4	3
4	4	0
2	4	2

$$\sum_{i=1}^{6} \lvert X_i - \bar{X}\rvert = 8$$

เมื่อ N เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมด เราจะได้ว่า

$$\text{ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lvert X_i - \bar{X}\rvert}{N}$$

โดยทั่วไปเราใช้สัญลักษณ์ AD แทนค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย ดังนี้

$$AD = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lvert X_i - \bar{X}\rvert}{N}$$

<u>ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน</u> (Standard Deviation and Variance) เป็นการบอกค่าการกระจายที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย คือคำนวณหาค่าเฉลี่ยจากค่าแตกต่างระหว่างค่าสังเกตทุกตัวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มข้อมูล แต่ในการคำนวณหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานใช้วิธีการยกกำลังสองค่าแตกต่างระหว่างค่าสังเกตและค่าเฉลี่ยของกลุ่มข้อมูล แทนการใช้ค่าสัมบูรณ์ ในการคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน การยกกำลังสองค่าแตกต่างทำให้ค่าแตกต่างที่เป็นลบมีค่าเปลี่ยนเป็นบวก เช่นเดียวกับการใช้ค่าสัมบูรณ์ แต่การยกกำลังสองทำให้ค่าแตกต่างมีค่าเพิ่มขึ้น (การยกกำลังสองทำให้ค่าระยะทางเปลี่ยนมาเป็นค่าพื้นที่) ดังนั้นในการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน จึงต้องถอดราก

ที่สองของค่าที่ยกกำลังสองไปแล้ว (ค่าเบี่ยงเบนเป็นค่าระยะทาง) ถ้าเป็นการบอกในรูปพื้นที่ (ไม่ถอดรากที่สอง) เป็นการบอกกว่าความแปรปรวน นั่นคือค่าความแปรปรวนคือค่ากำลังสองของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานนั่นเอง

จากตัวอย่างในเรื่องค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ย ถ้าต้องการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มข้อมูล 2,4,5,7,4,2 ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 4

X_i	$\bar{X}$	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$
2	4	-2	4
4	4	0	0
5	4	1	1
7	4	3	0
4	4	0	0
2	4	-2	4

$$\sum_{i=1}^{6} (X_i - \bar{X})^2 = 18$$

จะเห็นได้ว่า ผลรวมเมื่อนำผลต่าง $(X_i - \bar{X})$ ยกกำลังสองจะได้ค่าเป็นผลบวกทั้งหมด จะเห็นได้ว่า $\sum_{i=1}^{6} (X_i - \bar{X})^2$ จะไม่เท่ากับศูนย์ (ยกเว้นกลุ่มข้อมูลทุกตัวมีค่าเท่ากัน)

หาค่าเฉลี่ยของผลรวมค่าแตกต่างยกกำลังสองจะได้ $= \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}{N}$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ถอดรากที่สองของค่าเฉลี่ย) $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N}}$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้อักษรกรีก σ (sigma) แทนค่าพารามิเตอร์ที่เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มประชากร เมื่อ n เป็นจำนวนค่าสังเกตในประชากรจะได้

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}}$$

สำหรับกลุ่มตัวอย่างโดยทั่วไปจะใช้อักษรย่อ S หรือ SD แทนค่าสถิติที่เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

แต่สำหรับกลุ่มตัวอย่างสูตรการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจะเป็น

$$S^2 = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$

N คือจำนวนค่าสังเกตในกลุ่มตัวอย่าง ค่า N จะถูกหักออก 1 นั่นคือตัวหาร N เปลี่ยนเป็น N-1 ทั้งนี้เพื่อเป็นการแก้ความลำเอียง (bias) สำหรับองศาแห่งความเป็นอิสระ (Degree of Freedom ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไป) เมื่อ N มีค่ามากเข้าใกล้ค่าอนันต์ ค่า N จะเข้าใกล้ N-1 กล่าวคือ ค่า N และ N-1 ไม่แตกต่างกันมากนัก สามารถใช้แทนกันได้

ในบางกรณีการบอกถึงค่าการกระจายจะบอกในรูปพื้นที่ ค่าที่นิยมใช้คือพื้นที่ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ยกกำลังสอง) ซึ่งเรียกว่าค่าความแปรปรวน (Variance) โดยใช้ σ^2 เป็นอักษรย่อของค่าความแปรปรวนของกลุ่มประชากร และ S^2 เป็นอักษรย่อแทนค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

ดังนั้นเราจะได้

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i-1}^{n} (X_i - \quad)^2}{n}$$

และ

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}$$

<u>การคำนวณค่าความแปรปรวนโดยตรงจากข้อมูลโดยมิต้องคำนวนค่าเฉลี่ยก่อน</u>

จากการคำนวนค่า $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ และ $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$

เมื่อใช้ค่า $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ หรือ $\dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$ แทนค่าใน μ หรือ $\bar{X}$ จากสูตรการหาค่า σ^2 และ S^2 ข้างต้น จะได้ว่า

$$\sigma^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N\ (N-1)}$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2\mu X_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{n} X_i + n\,\mu^2}{n}$$

แทนค่า $\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ จะได้

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\,\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i + n \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2}$$

นั่นคือเราจะได้ว่า $\sigma^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทนค่า

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} \quad \text{ในสูตร } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{N(N-1)}$$

เราจะพิสูจน์ได้ว่า $S^2 = \frac{N\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{N(N-1)}$

จากสูตรการหาความแปรปรวนจากข้อมูลโดยตรง เราก็สามารถคำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากข้อมูลโดยตรงได้เช่นกัน ซึ่งจะได้

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n^2}}$$

และ $S = \sqrt{\dfrac{N \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N(N-1)}}$

ตัวอย่าง จงหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากกลุ่มตัวอย่าง 3, 6, 4, 5, 7, 9

วิธีทำ

X_i	X_i^2
3	9
6	36
4	16
5	25
7	49
9	81
$\Sigma X_i = 34$	$\Sigma X_i^2 = 216$

$N = 6$

จาก $S = \sqrt{\dfrac{N \sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}{N(N-1)}}$

$$= \sqrt{\frac{6 \times 216 - (34)^2}{6(6-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{140}{50}} = \sqrt{4.6667} = 2.16025$$

กฎบางประการเกี่ยวกับความแปรปรวน

กฎข้อที่ 1 เมื่อ X เป็นค่าตัวแปร และ C เป็นค่าคงที่ และ

$\sigma^2 X$ เป็นค่าความแปรปรวนของ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$

$\sigma^2 (X + C)$ เป็นค่าความแปรปรวนของ $X_1 + C, X_2 + C, X_3 + C, \ldots + X_n + C$

จะได้

$$\sigma^2 (X + C) = \sigma^2 X$$

พิสูจน์ ค่าเฉลี่ยของ $X_1 + C, X_2 + C, X_3 + C \ldots, X_n + C$ คือ $\mu + C$

ดังนั้น $$\sigma^2_{(X + C)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} [(X_i + C) - (\mu + C)]^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i + C - \mu - C)^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n^2}$$

นั่นคือ $$\sigma^2_{(X + C)} = \sigma^2 X$$

หรือ $$\sigma^2_{(X - C)} = \sigma^2 X$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$S^2_{(X + C)} = S^2_X$$

$$S^2_{(X - C)} = S^2_X$$

จากกฎข้อนี้ดังนี้ กลุ่มข้อมูล 1, 2, 3, 4 และ 5 และกลุ่มข้อมูล 11, 12, 13, 14, 15 จะมีความแปรปรวน หรือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน

กฎข้อที่ ๒ เมื่อ C เป็นค่าคงที่

$$\sigma^2_{CX} = C\sigma^2_{\theta}X$$

พิสูจน ค่าเฉลี่ยของข้อมูล CX_1, CX_2, CX_3, ..., CX_n คือ $C\mu$

$$\sigma^2_{CX} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (CX_i - C\mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (C^2X_i^2 - 2\ C^2X_i\ + C^2\mu^2)}{n^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} C^2\ (X_i^2 - 2X_i\mu - \mu^2)}{n^2}$$

$$= \frac{C^2 \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n^2}$$

$$= C^2\sigma^2_X$$

นั่นคือ $\sigma^2 CX = C^2\sigma^2_X$

หรือ $\sigma CX = C\sigma X$

ในทำนองเดียวกัน

$$\sigma_{X/C} = \frac{1}{C^2}\ \sigma^2_X$$

$$\sigma_{X/C} = \frac{1}{C}\ \sigma_X$$

หรือในทำนองเดียวกัน เราอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$S^2_{CX} = C^2 S^2_X$$

$$S_{CX} = C\ S_X$$

$$S^2_{X/C} = \frac{1}{C^2} S^2_X$$

$$S_{X/C} = \frac{1}{C} S_X$$

ตัวอย่าง เช่นการวัดเป็นเซนติเมตรจะมีค่าความแปรปรวนใหญ่กว่าการวัดเป็นเมตรอยู่ $(100)^2$ เท่า

นั่นคือ

$$S^2_{ม} = (100)^2\ S^2_{ซม}$$

หรือการวัดเป็นเซนติเมตร มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานใหญ่กว่าการวัดเป็นเมตรอยู่ 100 เท่า

$$S_{ม} = 100\ S_{ซม}$$

ระดับการวัด (Measurement Scale)

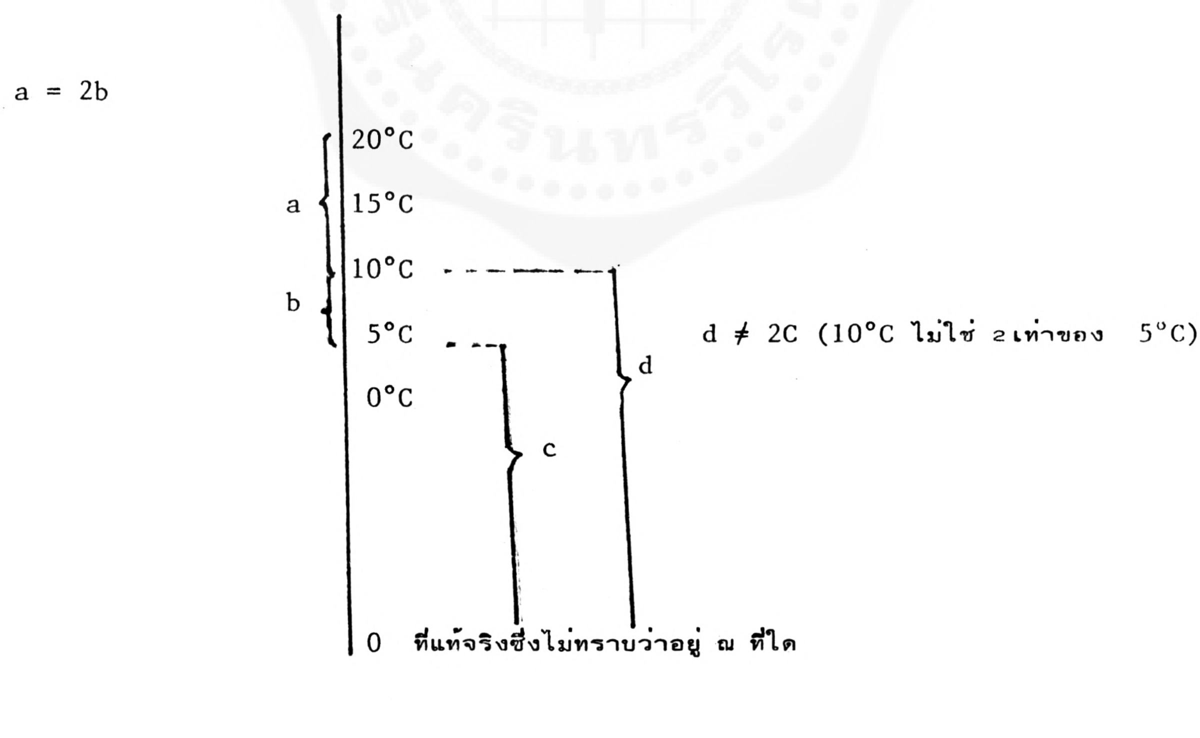
สตีเวน (Steven, 1946, 1958, 1968) เป็นผู้ที่เชื่อว่า การวัด (Measurement) เป็นสิ่งสำคัญในวิชาสถิติ ถ้าไม่มีการวัด วิชาสถิติก็จะไม่มีความสำคัญใด ๆ ทั้งสิ้น แต่ถ้าการวัดเที่ยงตรง และถูกต้องมากขึ้นเท่าไร ความจำเป็นในการใช้วิชาสถิติก็จะลดน้อยลง สตีเวนได้แบ่งระดับการวัดในทางวิทยาศาสตร์ออกเป็น 4 ระดับดังนี้คือ

1. ระดับนามบัญญัติ (Nominal Scale) การวัดในระดับนี้เป็นเพียงการกำหนดชื่อให้กับสิ่งที่ต้องการวัดเท่านั้น เช่นการกำหนดชื่อสีว่า ดำ แดง การกำหนดชื่อคนว่า เล็ก ใหญ่ ฯลฯ ชื่อที่กำหนดให้เหล่านี้ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้ ทั้งด้านปริมาณ หรือคุณภาพ เช่น บอกไม่ได้ว่า สีดำใหญ่กว่าสีแดง หรือสีดำดีกว่าสีแดง หรือ คนชื่อเล็กตัวเล็กกว่าคนชื่อใหญ่ หรือดีกว่าคนชื่อใหญ่ การวัดในระดับนี้ แม้จะใช้ตัวเลขเป็นการกำหนดชื่อ ตัวเลขเหล่านั้นก็มิได้แสดงถึงปริมาณ เช่น การกำหนดเบอร์ให้นักกีฬาในทีมว่า เบอร์ 5 เบอร์ 6 ฯลฯ ก็มิได้หมายความว่า เบอร์ 5 เล็กกว่าเบอร์ 6 เป็นต้น ตัวอย่างอื่นของการวัดในระดับนี้เช่น การตั้งชื่อประเทศ ชื่อเมือง ชื่อสัตว์ ฯลฯ การวัดในระดับนี้เป็นการวัดแบบง่าย ๆ และหยาบที่สุด คุณสมบัติของการวัดในระดับนี้มีการแบ่งพวก แบ่งกลุ่ม แบ่งชนิด เท่านั้น ค่าสถิติที่สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่ได้จากการวัดในระดับนี้ ก็เป็นเพียงสถิติง่าย ๆเช่น การนับจำนวน การเทียบสัดส่วน การคิดเปอร์เซ็นต์ การหาตัวกลางแบบฐานนิยม (Mode) เป็นต้น

2. ระดับเรียงลำดับ (Ordinal Scale) การวัดในระดับนี้ เป็นการวัดที่สามารถจัดเรียงลำดับความแตกต่างได้ อาจเป็นไปในทางปริมาณ หรือ คุณภาพ เช่น ใหญ่-เล็ก ดี-เลว สูง-กลาง-ต่ำ ฯลฯ แต่ยังไม่สามารถบอกถึงปริมาณความแตกต่างในแต่ละคู่ลำดับได้ ตัวอย่างการวัดในระดับนี้เช่น การประกวดนางงาม การแข่งขันกีฬา ฯลฯ ซึ่งสามารทราบได้แต่เพียงว่า ที่ 1 สวยหรือเก่งกว่าที่ 2 และที่ 2 สวยหรือเก่งกว่าที่ 3 แต่ยังไม่สามารถบอกได้ว่า ที่ 1 สวยหรือดีกว่าที่ 2 อยู่เท่าไร มากเท่ากับที่ 2 สวยหรือดีกว่าที่ 3 หรือไม่ แม้ว่าการวัดในระดับนี้ให้ความหมายมากกว่าการวัดในระดับนามบัญญัติ แต่ค่าสถิติที่สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่ได้จากการวัดในระดับนี้ยังคงเป็นเพียงสถิติเบื้องต้น เช่น ลำดับตำแหน่งที่ (Centile) ตัวกลางฐานนิยม (Median)

ค่าสหสัมพันธ์แบบเรียงลำดับ (Rank Correlation Coefficient) เป็นต้น

3. ระดับอันตรภาค (Interval Scale) การวัดในระดับนี้ เป็นการวัดที่สามารถกำหนดค่าตัวเลขแทนผลของการวัดลงไปได้แน่นอน และแต่ละช่วงของตัวเลขในหน่วยเดียวกันเท่ากัน นั่นคือ ช่วงระหว่าง 1-2 และ 2-3 เท่ากัน ด้วยเหตุนี้เองการวัดในมาตรานี้จึงสามารถแสดงถึงลำดับและเปรียบเทียบค่าความแตกต่างในแต่ละคู่ลำดับได้ แต่จุดศูนย์ของการวัดระดับนี้ยังไม่ใช่ศูนย์สัมบูรณ์ (Absolute Zero) ตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจนคือการวัดอุณหภูมิ 0°C (Celcias) มิได้หมายความว่าไม่มีความร้อนอยู่เลยหรือ 0°F (Farenhite) ก็ตาม และข้อที่น่าสังเกตคือ 0°C และ 0°F มิได้อยู่ที่จุดเดียวกัน แต่ในหน่วยใดหน่วยหนึ่ง สามารถบอกถึงความแตกต่างของคู่ลำดับได้ เช่น ช่วง 20°C - 10°C แตกต่างกันอยู่ 10°C และ 10°C - 5°C แตกต่างกันอยู่ 5°C จะเห็นว่า 20°C - 10°C มีความแตกต่างเป็นสองเท่าของความแตกต่างระหว่าง 10°C - 5°C แต่ไม่สามารถบอกได้ว่า 10°C มีความร้อนเป็น 2 เท่าของ 5°C เนื่องจากไม่ทราบถึงจุดความร้อนที่แน่นอนของการไม่มีความร้อนเลย



การวัดส่วนใหญ่ในทางพฤติกรรมศาสตร์จะเป็นการวัดอยู่ในระดับนี้ เพราะไม่สามารถจะหาจุดศูนย์สัมบูรณ์ได้ เช่นการวัดความรู้เด็กโดยใช้คะแนนเป็นเกณฑ์ การที่เด็กสอบวิชาเลขคณิตได้ศูนย์ มิได้หมายความว่าเด็กมิได้มีความรู้ในวิชานั้น ๆ เลย คนที่ได้ 10 คะแนน ไม่ได้หมายความว่าเขามีความรู้มากกว่าคนที่ได้ 5 คะแนนอยู่ 2 เท่า เป็นต้น ข้อมูลที่ได้จากการวัดในมาตรานี้ สามารถใช้ค่าสถิติได้มากกว่ามาตราเรียงลำดับ สถิติที่สามารถใช้ได้ เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Mean) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสหสัมพันธ์แบบเปียรสัน (Pearson Product Moment) การตรวจสอบสมมุติฐานโดยใช้การแจกแจงแบบ t (t-distribution) การตรวจสอบสมมุติฐานโดยใช้การแจกแบบ F (F-distribution) ฯลฯ

4. **มาตราอัตราส่วน (Ratio Score)** เป็นการวัดที่อยู่ในระดับสูงกว่าระดับอันตรภาค คือนอกจากใช้ตัวเลขแทนผลของการวัด และแต่ละช่วงของการวัดเป็นหน่วยเดียวกัน ยังสามารถเปรียบเทียบกันได้แล้ว ยังเป็นการวัดที่มีศูนย์ที่แท้จริง หรือศูนย์สัมบูรณ์ (Absolute Zero) ทำให้ค่าแต่ละค่าในหน่วยการวัดเดียวกันสามารถเปรียบเทียบกันได้ เช่น การวัดส่วนสูง การที่ส่วนสูง 0 ซม. ก็แสดงว่าไม่มีส่วนสูงอยู่เลย แม้จะวัดในหน่วยอื่นเช่นนิ้ว การไม่มีส่วนสูงเลยก็จะได้ 0 นิ้วเช่นกัน นั่นคือ การมี 0 ที่สัมบูรณ์ (Absolute Zero) และนอกจากนั้นในแต่ละจุดบนหน่วยเดียวกัน เราก็สามารถเปรียบเทียบกันได้ เช่น สูง 10 ซม. เป็น 2 เท่าของสูง 5 ซม.แน่นอน การวัดในมาตราอัตราส่วนนี้ สามารถใช้สถิติในระดับสูงได้ทุกชนิด

การบอกตำแหน่งของข้อมูล

ในข้อมูลกลุ่มหนึ่ง ๆ เมื่ออยากทราบว่าข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งอยู่ ณ ตำแหน่งใด ในหมู่ข้อมูลทั้งหมด เรามีวิธีบอกได้หลายวิธี เช่น บอกลำดับที่ ตัวอย่างการบอกตำแหน่งของข้อมูลแบบนี้ที่ใช้บ่อยได้แก่ การบอกผลการสอบแข่งขัน เช่น นาย ก. สอบได้คะแนนเป็นลำดับที่ 1 การบอกลำดับที่เช่นนี้จะมีความหมายที่ไม่แน่นอนคงที่ เช่นการสอบได้ที่ 5 จากผู้เข้าสอบทั้งหมด 5 คน กับการสอบได้ที่ 5 จากผู้เข้าสอบทั้งหมด 1,000 คน จะเห็นได้ว่า ที่ 5 ทั้ง 2 อย่างนั้นแตกต่างกัน คนที่มีเงินมากที่สุดของตำบล กับคนที่มีเงินมากที่สุดของประเทศ ย่อมแตกต่างกัน การบอกตำแหน่งที่มีความหมายมากกว่าลำดับที่ และเป็นที่นิยมใช้ได้แก่ การบอกอัตราส่วนของจำนวนข้อมูลที่มีค่าต่ำกว่าข้อมูลตัวนั้น ในมาตราใดมาตราหนึ่ง มาตราที่นิยมใช้อยู่มีอยู่ 3 มาตรา คือ ในมาตราร้อยส่วน (Percentile) ในมาตราสิบส่วน (Decile) และในมาตรา 4 ส่วน (Quartile)

เปอร์เซ็นไทล์ (Percentile) เป็นการบอกตำแหน่งของข้อมูล โดยบอกให้ทราบว่า เมื่อแบ่งจำนวนข้อมูลทั้งหมดออกเป็น 100 ส่วน จะมีข้อมูลที่มีค่าต่ำกว่าข้อมูลที่ต้องการทราบตำแหน่งอยู่เป็นจำนวนกี่ส่วน เช่น เมื่อนาย ก. สอบได้คะแนนเป็นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 76 ซึ่งใช้อักษรย่อว่า P_{76} หมายความว่า ถ้าจำนวนผู้เข้าสอบทั้งหมดเป็นร้อย จะมีผู้ได้คะแนนต่ำกว่านาย ก. อยู่ 76 คน ดังนั้น ไม่ว่าจำนวนผู้เข้าสอบจะเป็นเท่าไรก็ตาม P_{76} จากจำนวนผู้เข้าสอบ 500 คน หรือ P_{76} จากจำนวนผู้เข้าสอบ 50 คน จะมีความหมายเดียวกัน คือ ถ้ามีผู้เข้าสอบจำนวน 100 คน จะมีผู้ที่ได้คะแนนต่ำกว่า P_{76} อยู่ 76 คน

ตัวอย่าง จากข้อมูล 20, 22, 36, 25, 24, 20, 15, 15, 12, 22, 24, 31, 20, 38, 40, 37, 41, 35, 34, และ 33 จงหาว่า

ก. ข้อมูลที่ 35 คือ ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าไร

ข. P_{60} คือข้อมูลอะไร

วิธีทำ เรียงลำดับข้อมูล

41, 40, 38, 36, 35, 34, 33, 31, 25, 24, 24, 22, 22, 20, 20, 20, 19, 15, 12

ก.

ข้อมูลทั้งหมด 20 จำนวน มีข้อมูลที่ต่ำกว่า 35 อยู่ = 14 จำนวน

ถ้าข้อมูลทั้งหมด 100 จำนวนจะมีข้อมูลต่ำกว่า 35 อยู่ $= \frac{14 \times 100}{20}$

= 70 จำนวน

$\therefore$ ข้อมูลที่ 35 อยู่เปอร์เซ็นไทล์ที่ 70

ข.

P_{60} หมายความว่า

ถ้าข้อมูลมีจำนวนทั้งหมด 100 จำนวน จะมีข้อมูลอยู่ต่ำกว่า P_{60}

= 60 จำนวน

แต่ข้อมูลมีเพียง 20 จำนวน จะมีข้อมูลอยู่ต่ำกว่า P_{60} $= \frac{60 \times 20}{100}$

= 12 จำนวน

ข้อมูลที่มีข้อมูลอื่นอยู่ต่ำกว่า 12 จำนวนคือ 33

ดังนั้น P_{60} คือ 33

เดไซล์ (Decile) เป็นการบอกตำแหน่งของข้อมูล โดยบอกให้ทราบว่า เมื่อแบ่งจำนวนข้อมูลทั้งหมดออกเป็น 10 ส่วน จะมีค่าต่ำกว่าข้อมูลที่ต้องการทราบตำแหน่งอยู่เป็นจำนวนกี่ส่วน เช่น เดไซล์ที่ 5 โดยทั่วไปใช้อักษรย่อ D_5 หมายความว่า เมื่อแบ่งจำนวนข้อมูลเป็น 10 ส่วน มีข้อมูลที่อยู่ต่ำกว่า D_5 อยู่ 5 ส่วน

เมื่อเปรียบเทียบเดไซล์ กับ เปอร์เซ็นไทล์ แล้วจะเห็นว่า

$D_5 = P_{50}$

$D_7 = P_{70}$

ฯลฯ

ตัวอย่าง จากข้อมูลในตัวอย่างเรื่องเปอร์เซ็นไทล์

ก. 36 อยู่ตำแหน่งเดไซล์ที่เท่าไร

ข. D_5 คือข้อมูลอะไร

วิธีทำ

ก.

ข้อมูลทั้งหมด 20 จำนวน มีข้อมูลที่ต่ำกว่า 36 อยู่ = 15 จำนวน

ถ้าข้อมูลทั้งหมด 10 จำนวนจะมีข้อมูลต่ำกว่า 36 อยู่ $= \frac{15 \times 10}{20}$

= 7.5 จำนวน

ดังนั้น ข้อมูล 36 คือ $D_{7.5}$

ข.

D_5 หมายความว่า

ถ้าข้อมูลทั้งหมด 10 จำนวน จะมีข้อมูลที่อยู่ต่ำกว่า D_5 อยู่ = 5 จำนวน

ข้อมูลทั้งหมด 20 จำนวน จะมีข้อมูลอยู่ต่ำกว่า D_5 อยู่ $= \frac{5 \times 20}{10}$

= 10 จำนวน

ข้อมูลที่อยู่สูงกว่าข้อมูลอื่น 10 จำนวน คือ 25

ดังนั้น D_5 คือ 25

ควอร์ไทล์ (Quartile) เป็นการบอกตำแหน่งของข้อมูลในมาตราที่หยาบกว่าเปอร์เซ็นไทล์ และเดไซล์ นั่นคือ ในมาตราส่วนเป็น 4 เมื่อแบ่งจำนวนข้อมูลทั้งหมดออกเป็น 4 ส่วน จะมีข้อมูลที่มีค่าต่ำกว่าข้อมูลที่ต้องการทราบตำแหน่งเป็นจำนวนกี่ส่วน โดยปกติจะใช้ตัวย่อ Q เช่น Q_2 หมายถึง ควอร์ไทล์ ที่ 2 ซึ่งหมายความว่า ในจำนวนข้อมูลทั้งหมด 4 ส่วน จะมีข้อมูลที่มีค่าต่ำกว่า Q_2 อยู่ 2 ส่วน

เมื่อเปรียบเทียบ ควอร์ไทล์ กับ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์ จะได้ดังนี้

$$Q_1 = D_{2.5} = P_{25}$$

$$Q_2 = D_5 = P_{50}$$

$$Q_3 = D_{7.5} = P_{75}$$

วิธีการคำนวณหาตำแหน่งควอร์ไทล์ ก็มีวิธีการเดียวกับการหาตำแหน่งเดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างคุณลักษณะต่าง ๆ 10 อย่าง และวิเคราะห์ว่า ข้อมูลที่ได้จากคุณลักษณะเหล่านั้น จะอยู่ในระดับใด เช่น เพศ, อายุ ฯลฯ และบอกชนิดของตัวกลางและค่าการกระจายที่ควรได้

2. คะแนนสอบวัดกลุ่มตัวอย่างชุดหนึ่งมีดังนี้

   102, 112, 116, 127, 113, 114, 120, 135

   121, 101, 103, 100, 104, 102, 105, 111

   ก. จงหาความแปรปรวนและความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

   ข. เอา 100 ลบออกทุกตัว แล้วหาเหมือนข้อ ก.

3. ถ้าประชากรกลุ่มหนึ่งมี คน ทำการสอบวัดด้วยแบบทดสอบชนิดหนึ่ง ได้ $\Sigma X = 10$, $\Sigma X^2 = 260$ และ $\sigma^2 = 25$ ประชากรกลุ่มนี้มีกี่คน

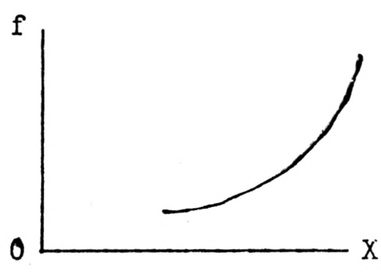
4. กลุ่มตัวอย่างกลุ่มหนึ่งมี 10 คน หา $\bar{X}$ ได้ 3 คะแนน $\Sigma X^2 = 100$ จงคำนวณหาความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

5. จงคำนวณผลรวมของคะแนนมาตรฐานแต่ละตัวยกกำลังสอง จากข้อมูล 2, 4, 5, 6 และ 8

6. จงเขียนรูปการแจกแจงความถี่ที่น่าจะมีค่า Mean เท่ากับค่า Median เท่ากับค่า Mode

7. ถ้าข้อมูล X, Y, Z มีค่าเฉลี่ยเป็น 10 อยากทราบว่าข้อมูล 2X, 2Y, 2Z มีค่าเฉลี่ยเป็นเท่าไร

8. ถ้าการแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่งเป็นรูปดังนี้



จงเปรียบเทียบค่า Mode และค่า Mean

บทที่ ๓

ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม

จุดมุ่งหมาย

1. ให้ผู้เรียนรู้จักตัวแปรสุ่มชนิดต่าง ๆ
2. ให้ผู้เรียนรู้จักการแจกแจงชนิดไม่ต่อเนื่อง โดยเฉพาะการแจกแจงทวินาม และสามารถคำนวณค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงได้
3. ให้ผู้เรียนรู้จักการแจกแจงชนิดต่อเนื่อง โดยเฉพาะการแจกแจงปกติ ของคะแนนมาตรฐานโดยสามารถใช้พื้นที่ใต้โค้งปกติช่วยในการหาความน่าจะเป็นต่าง ๆ ได้

เนื้อหา

- ชนิดของตัวแปร
- การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดไม่ต่อเนื่อง
- การแจกแจงทวินาม
- การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดต่อเนื่อง
- การแจกแจงปกติ
- พื้นที่ใต้โค้งปกติ
- การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ โดยใช้ตาราง

ตัวแปรสุ่ม และการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม (Random Variable and Distribution)

ในการทดลองใด ๆ ที่ผู้ทดลองไม่สามารถรู้ผล (outcome) ของการทดลองล่วงหน้า จนกว่าการทดลองจะผ่านพ้นไปแล้ว การทดลองแบบนี้เป็นการทดลองเชิงสุ่ม (Random Trial) ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ ผู้ทดลองจะยังไม่รู้ว่าผลของการโยนเหรียญจะเกิดหัวหรือก้อย จนกว่าการโยนเหรียญนั้น ๆ จะผ่านพ้นไปแล้ว ในบางครั้ง ผู้ทดลองจะไม่ได้สนใจถึงผลของการทดลอง แต่สนใจถึงคุณลักษณะใดคุณลักษณะหนึ่งของผลการทดลอง เช่น ไม่ได้สนใจการเกิดหัวหรือก้อยของการโยนเหรียญ แต่สนใจถึงจำนวนการเกิดหัวของผลการโยนเหรียญแต่ละครั้ง เช่นเมื่อโยนเหรียญ 2 เหรียญ ถ้าผลของการโยนเหรียญเป็น HH จำนวนการเกิดหัวเป็น 2, HT หรือ TH มีจำนวนการเกิดหัวเป็น 1 และ TT มีจำนวนการเกิดหัวเป็น 0 เป็นต้น

นั่นคือ เมื่อให้ X เป็นจำนวนหัวที่เกิดขึ้น

ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ ค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, เรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variable) ของการโยนเหรียญ 2 เหรียญ

นิยาม ตัวแปรสุ่ม คือฟังชั่นที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง (real number) ซึ่งถูกกำหนดโดยแต่ละสมาชิกในพื้นที่ตัวอย่าง

โดยทั่ว ๆ ไปใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น X, Y แทนฟังชั่นของตัวแปรสุ่ม และอักษรตัวเล็ก เช่น x, y แทนค่าของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง ในการเลือกนักเรียน 2 คน (โดยเลือกแล้วไม่กลับคืนสู่กลุ่ม) จากกลุ่มนักเรียนซึ่งเป็นชาย 4 คน และหญิง 3 คน เมื่อให้ Y เป็นจำนวนของการเลือกได้ผู้หญิง จงแสดงตัวแปรสุ่มของ Y

ผลจากการเลือกและค่าของตัวแปรสุ่ม Y จะเป็นดังตารางนี้คือ

เหตุการณ์	y
ญ ญ	2
ญ ช	1
ช ญ	1
ช ช	0

ตัวอย่าง เมื่อให้ X เป็นฟังชั่นที่ให้ค่าของกำลังสองของแต้มจากลูกเต๋า จงแสดงค่าตัวแปรสุ่ม X ที่เกิดจากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

เหตุการณ์	X
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

<u>ชนิดของตัวแปรสุ่ม</u>

ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ชนิดใหญ่ ๆ คือ

- ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)
- ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable)

ในทางวิจัย ผู้วิจัยส่วนใหญ่มักเรียกค่าตัวแปรสุ่มที่ใช้ในงานวิจัยเรื่องนั้น ๆ ว่าข้อมูล (Data)

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง คือตัวแปรสุ่มที่สามารถให้ค่าต่อเนื่องกันหลาย ๆ ค่านับไม่ถ้วน เช่น ตัวแปรสุ่มเกี่ยวกับน้ำหนัก ค่าน้ำหนักระหว่าง 60 - 70 กก. อาจจะเป็นค่าอื่น ๆ ได้อีกมากมายหลายค่า เช่น 60.1, 65.99, 60.7561 ฯลฯ ค่าของตัวแปรสุ่มชนิดนี้จะไม่มีค่าที่แท้จริง ทั้งนี้เป็นเพราะเราไม่สามารถกำหนดจุดใดจุดหนึ่งที่แน่นอนของค่าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องได้ เพราะค่าเหล่านี้จะต่อเนื่องกันตลอดและเรียงกันเป็นเส้นตรง ค่าที่แท้จริงของตัวแปรชนิดนี้จะมีลักษณะเป็นช่วง (Interval) เช่น เมื่อค่าตัวแปรสุ่มเป็น 160.5 คือค่าช่วงระหว่าง 160.45 - 160.55 หรือเมื่อค่าตัวแปรสุ่มเป็น 60.125 ค่าที่แท้จริงคือค่าช่วงระหว่าง 60.1245 - 60.1255 เป็นต้น การเรียงเซทของพื้นที่ตัวอย่าง หรือตัวแปรสุ่ม ไม่สามารถเขียนสมาชิกทุกตัวที่อาจเป็นไปได้ในเซทได้ จึงมักเรียงอยู่ในรูปที่แสดงคุณสมบัติของสมาชิกมากกว่า เช่น เซทของพื้นที่ตัวอย่างของอายุ

$$S = \{x \mid 120 > x > 0\}$$

(พื้นที่ตัวอย่าง S มี x เป็นสมาชิกที่มีคุณสมบัติว่า x มีค่าน้อยกว่า 120 และมากกว่า ๐)

หรือ เซทของตัวแปรสุ่ม Y เมื่อ y คือจำนวนเวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหา

ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง คือค่าของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจุดหนึ่งจุดใดโดยเฉพาะ และค่าต่าง ๆ เหล่านี้จะเป็นค่าที่แท้จริง ตัวแปรสุ่มชนิดนี้ส่วนใหญ่ได้แก่จำนวนนับต่าง ๆ เช่น จำนวนการเกิดหัว จำนวนคู่ของครอบครัวที่หย่าร้าง มีค่าของตัวแปรสุ่มเป็น 0, 1, 3,4, ฯลฯ

การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distribution)

การแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรชนิดไม่ต่อเนื่อง เป็นการแจกแจงของค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง ค่าของความน่าจะเป็นทุกค่าจะเป็นค่าบวก

และผลรวมของค่าความน่าจะเป็นของทุกจุดในพื้นที่ตัวอย่างจะเป็น ๑

ตัวอย่างการโยนเหรียญ ๓ เหรียญ มีพื้นที่ตัวอย่างเป็นดังนี้

S = {TTT TTH THT THH HTT HTH HHH}

เมื่อ Y เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนการเกิดหัว พื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดจะมีค่า y ดังนี้

S	y
TTT	0
TTH	1
THH	2
HTT	1
HTH	2
HHH	3

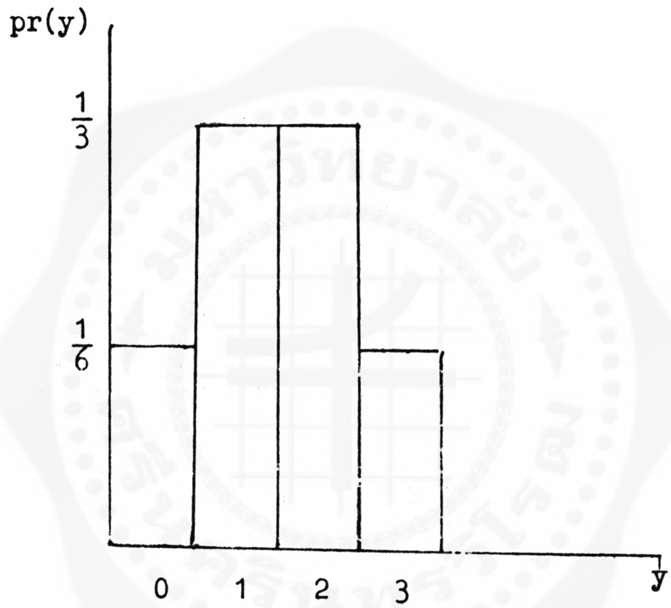
และเมื่อคำนึงถึงเซทของ Y และความน่าจะเป็นของการเกิด Y แต่ละจุด จะเป็นดังนี้

Y	Pr(Y)
0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$

จะเห็นได้ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม จะมีค่าเป็น 1

$$\Sigma pr(Y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

กราฟที่ใช้เขียนแสดงความน่าจะเป็นชนิดไม่ต่อเนื่องส่วนใหญ่ใช้กราฟแท่ง (Histogram) เช่นจากตัวอย่างข้างต้นแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้



<u>ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงความน่าจะเป็น (Mean and Variance of Probability Distribution)</u>

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงความน่าจะเป็นคือ ผลรวมของผลคูณของตัวแปรสุ่มกับความน่าจะเป็นของการเกิดตัวแปรสุ่มนั้น ๆ

$$\mu = \Sigma x \, pr(x)$$

ค่าความแปรปรวนของการแจกแจงความน่าจะเป็น คือผลรวมของผลคูณค่าแตกต่างระหว่างตัวแปรสุ่ม และค่าเฉลี่ยยกกำลังสอง กับความน่าจะเป็นของการเกิดตัวแปรสุ่มนั้น

นั่นคือ $$\sigma^2 = \Sigma\,(x-\mu)^2 pr(x)$$

หรือ เมื่อกระจายค่าจะได้ว่า

$$\sigma^2 = [\Sigma\, x^2\, pr(x)] - \mu^2$$

ตัวอย่าง จงหาค่าเฉลี่ยและค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงของความน่าจะเป็น ในการเกิดแต้ม ๑ ถึง ๖ จากการโยนลูกเต๋า ๑ ลูก

เมื่อให้ χ เป็นตัวแปรสุ่มของจำนวนแต้มของลูกเต๋าในแต่ละหน้า

ค่าของตัวแปรสุ่มในพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดและความน่าจะเป็นจะเป็นดังนี้

χ	$pr(x)$	$pr(x)$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2 pr(x)$
1	1/6	1/6	-5/2	25/24
2	1/6	2/6	-3/2	9/24
3	1/6	3/6	-1/2	1/24
4	1/6	4/6	1/2	1/24
5	1/6	5/6	3/2	9/24
6	1/6	6/6	5/2	25/24
Σ	1	23/6		70/24

$$\mu = \Sigma\, x\, pr(x)$$
$$= \frac{23}{6}$$
$$= 3.83$$

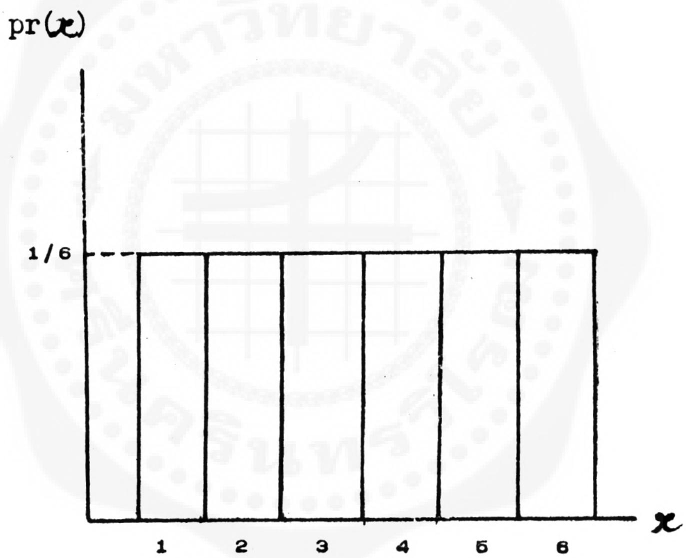
$$\sigma^2 = \Sigma (x-\mu)^2 \, pr(x)$$

$$= \frac{70}{24}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{70}{24}} = \sqrt{2.916}$$

$$= 1.707$$

นั่นคือ การกระจายนี้จะมีค่าเฉลี่ย 3.83 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจะเป็น 1.707 การกระจายสามารถแสดงเป็นรูปกราฟได้ดังนี้



การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

การทดลองบางอย่างมีผลที่เกิดจากการทดลองได้เพียง 2 วิธี การโยนเหรียญ 1 เหรียญ ผลคือหัวหรือก้อย การสอบผลคือ ได้ หรือ ตก การคลอดบุตร คือ หญิง หรือ ชาย หรือการทดลองบางอย่างผู้สนใจจะแบ่งผลที่เกิดขึ้นทั้งหมดออกเป็นเพียง 2 ชนิด การโยนลูกเต๋า ผลจะเป็นหน้า คู่ หรือ คี่ หรือผลจากการโยนลูกเต๋าแบ่งเป็นแต้มที่เป็น 1 และแต้มที่มากกว่า 1 เป็นต้น ค่าตัวแปรสุ่มที่ได้จากผลการทดลองแบบนี้ เรียกว่าตัวแปรสุ่ม-

แบบทวินาม และผลการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม เรียกว่าการแจกแจงแบบทวินาม

การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรทวินามสามารถทำได้โดยง่าย โดยใช้ทฤษฎีทวินาม (Binomial Theorem) โดยแบ่งชนิดของผลการทดลองออกเป็น ความสำเร็จ (Success) และความไม่สำเร็จ (Failure) เช่นให้ผลการเกิดหัวเป็นความสำเร็จและการเกิดก้อยเป็นความไม่สำเร็จ เมื่อให้ n เป็นจำนวนครั้งของการทดลอง และเมื่อให้ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จ ค่าความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จจะเป็น $1 - p$ หรือ q เช่นเมื่อความน่าจะเป็นของความสำเร็จเป็น $\frac{1}{4}$ ความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จจะเป็น $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

เมื่อจำนวนการทดลองเป็น n การกระจายของความน่าจะเป็น $(p + q)^n$ ตัวอย่างเช่น

$$(p + q)^1 = p + q$$

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

$$(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

จะเห็นได้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์หน้าเหตุการณ์ที่เกิดจากการทดลองทั้งหมด คือจำนวนวิธีการจัดกลุ่มตั้งแต่ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$

ดังนั้น

$$(p + q)^n = \binom{n}{0}p^n + \binom{n}{1}pq^{n-1} + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}p^n$$

จะเห็นว่า $pr(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$

ตัวอย่าง ค่าความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญได้หัวจะเป็น $\frac{1}{2}$ ดังนั้น $p = \frac{1}{2}$ และ $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ เหตุการณ์ต่าง ๆ ของการโยนเหรียญ 5 ครั้งจะเป็นดังนี้

$$(p + q)^5 = (5_5)p^5 + (5_4)p^4q + (5_3)p^3q^2 + (5_2)p^2q^3 + (5_1)pq^4 + (5_0)q^5$$

ความน่าจะเป็นของการเกิดหัวทั้ง ๕ ครั้งเป็น $(5_0)p^5 = \frac{5!}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

ความน่าจะเป็นของการเกิดหัว ๔ ครั้งเป็น $(5_4)p^4q = \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32}$

ความน่าจะเป็นของการเกิดหัว ๓ ครั้งเป็น $(5_3)p^3q^2 = \frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$

ความน่าจะเป็นของการเกิดหัว ๒ ครั้งเป็น $(5_2)p^2q^3 = \frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$

ความน่าจะเป็นของการเกิดหัว ๑ ครั้งเป็น $(5_1)p^1q^4 = \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$

ความน่าจะเป็นของการเกิดก้อย ๕ ครั้งเป็น $(5_0)q^5 = \frac{5!}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

ผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น

$$= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}$$

$$= \frac{32}{32}$$

$$= 1$$

นั่นคือ ผลรวมของความน่าจะเป็นของค่าของตัวแปรสุ่มทวินามในพื้นที่ตัวอย่างทั้งหมดเป็น ๑

การหาค่าสัมประสิทธิ์ของเหตุการณ์ต่าง ๆ อาจจะหาได้จากสามเหลี่ยมของปาสคาล (Pascal's Triangle) ค่าสัมประสิทธิ์จากสามเหลี่ยมของปาสคาลเป็นดังนี้

$(p+q)^1$ 1 1

$(p+q)^2$ 1 2 1

$(p+q)^3$ 1 3 3 1

$(p+q)^4$ 1 4 6 4 1

$(p+q)^5$ 1 5 10 10 5 1

$(p+q)^6$ 1 6 15 20 15 6 1

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

ตัวอย่างเช่น เมื่อการทดลองเป็น $(p+q)^5$ เหตุการณ์ต่าง ๆ ทั้งหมดจะเป็น

$$p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

ตัวอย่าง ในการทดลองใช้ยาชนิดใหม่รักษามะเร็งในหนูปรากฏว่า จะมีหนูรอดตาย 80% จงหาความน่าจะเป็นที่อาจจะเกิดขึ้นทั้งหมด เมื่อใช้ยาชนิดนี้รักษาหนู 5 ตัว

ให้ p เป็นความน่าจะเป็นที่หนูจะรอดตาย $= 80\% = .8$

ดังนั้น q (ความน่าจะเป็นที่หนูจะตาย) $= 1 - .8 = .2$

เหตุการณ์ต่าง ๆ ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้น

จำนวนหนูรอดตาย x	ความน่าจะเป็น $pr(x)$				
5	p^5	=	$(.8)^5$	=	.32768
4	$5p^4q$	=	$5(.8)^4(.2)$	=	.40960
3	$10p^3q^2$	=	$10(.8)^3(.2)^2$	=	.20480
2	$10p^2q^3$	=	$10(.8)^2(.2)^3$	=	.05120
1	$5pq^4$	=	$5(.8)(.2)^4$	=	.00640
0	q^5	=	$(.2)^5$	=	.00032

ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงทวินาม

ในการทดลอง n ครั้ง และความน่าจะเป็นของความสำเร็จเป็น p ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงจะเป็น

$$\mu = np$$

ค่าความแปรปรวนเป็น

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

ตัวอย่าง ในการตอบแบบทดสอบแบบเลือกตอบชนิด ๕ ตัวเลือก และในแต่ละข้อมีตัวเลือกถูกเพียงตัวเดียว ถ้านักเรียนเลือกตอบข้อสอบอย่างสุ่ม (โดยการเดา) ๒๒๕ ข้อ จงหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่จะได้จากการเดานี้

การตอบข้อสอบ 225 ข้อ นั่นคือ $n = 225$

ความน่าจะเป็นของการเดาถูก $(p) = \frac{1}{5}$

ความน่าจะเป็นของการเดาผิด $(q) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

จาก

$$\mu = np$$

ดังนั้น
$$\mu = 225 \times \frac{1}{5}$$
$$= 45$$

จาก
$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{225 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}$$
$$= \sqrt{36}$$
$$= 6$$

นั่นคือคะแนนเฉลี่ยจากการเดาข้อสอบ 225 ข้อ เป็น 45 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 6

การแจกแจงของความน่าจะเป็นชนิดต่อเนื่อง (Continuous Probability Distribution)

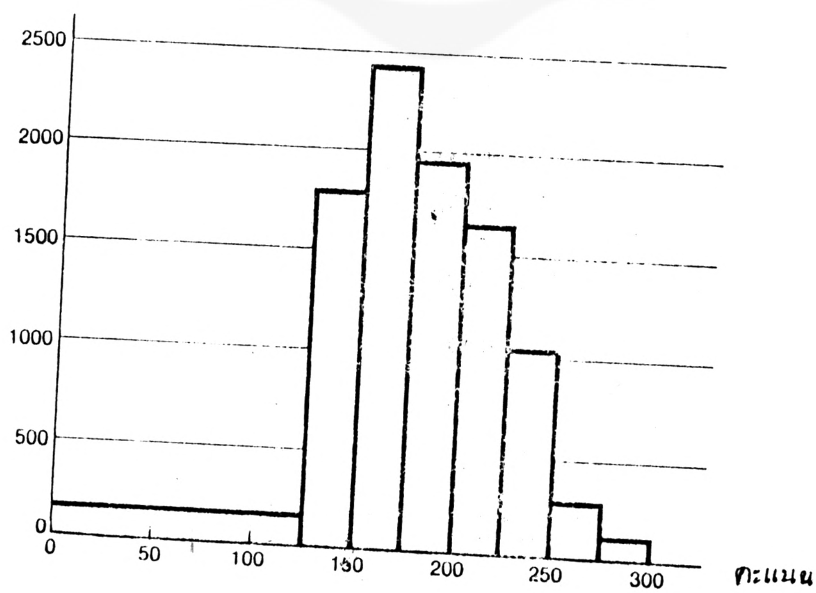
การแจกแจงของความน่าจะเป็นชนิดต่อเนื่อง คือการแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง และโดยที่ลักษณะของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องนั้นไม่มีค่าที่แท้จริง เพียงแต่อาศัยช่วงใดช่วงหนึ่งบอกค่าที่ใกล้เคียงที่สุด และการบอกค่าความน่าจะเป็นของข้อมูลนั้น ๆ ก็เป็นการบอกพื้นที่ระหว่างข้อมูลช่วงนั้น เมื่อให้พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเป็น 1 ดังนั้นในบางครั้งจะเรียกการแจกแจงชนิดนี้ว่า การแจกแจงความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (Probability Density)

ตัวอย่าง ครูคนหนึ่งได้สร้างแบบทดสอบวัดทัศนคติในเชิงวิทยาศาสตร์ขึ้น หลังจากนั้นเขาได้ทดสอบเด็กจากจังหวัดต่าง ๆ ทั่วประเทศ แล้วนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบมาแจกแจงหาค่าความถี่ ปรากฏว่าได้ช่วงคะแนนและความถี่ดังตารางข้างล่างนี้

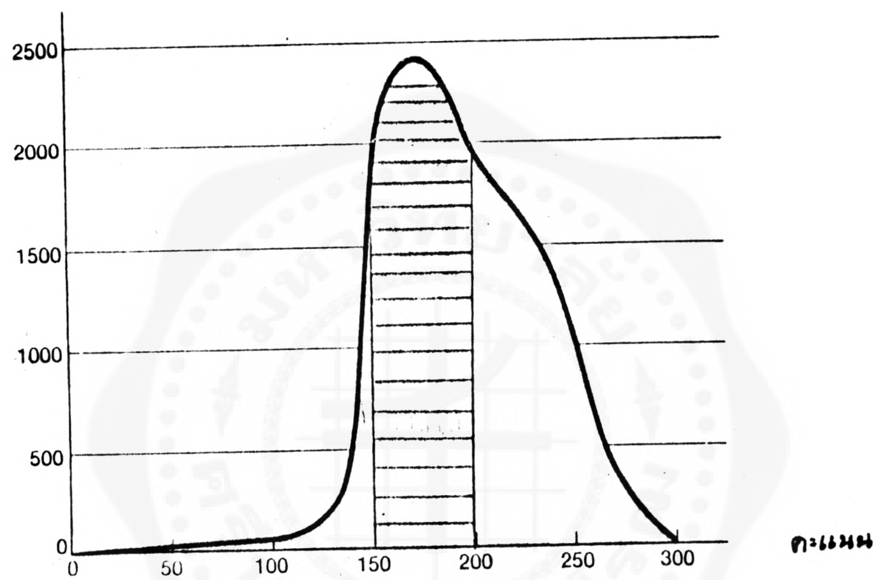
คะแนน	ความถี่	ความน่าจะเป็น
126	812	.0812
126-150	1764	.1764
151-175	2433	.2433
176-200	1911	.1911
201-225	1646	.1646
226-250	294	.0294
276-300	103	.0103

และเมื่อนำคะแนนและความถี่จากตารางไปเขียนกราฟแท่ง จะได้ดังนี้

ความถี่



และโดยที่ลักษณะของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องซึ่งเป็นลักษณะที่ไม่ขาดตอนกัน ดังนั้น ในแต่ละชั้นคะแนนยังมีช่วงที่อาจจะมีค่าของตัวแปรสุ่มอยู่อีก ดังนั้น กราฟที่ใช้แทนตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องมักจะใช้กราฟเส้นโค้ง เพื่อที่จะไม่ให้ช่วงชั้นของความถี่ขาดตอน โค้งแสดงความถี่ของคะแนนแต่ละช่วงจะเป็นดังนี้คือ



ค่าความน่าจะเป็นของคะแนน 150 - 200 หรือ pr $(150 \leq x \leq 200)$ คือพื้นที่ใต้โค้งระหว่างคะแนน 150 ถึง 200 (ช่วงแรเงาขวาง) เมื่อพื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเป็น 1 ส่วน ช่วงพื้นที่ส่วนเล็ก คือค่าความน่าจะเป็นที่คะแนนต่ำกว่า 150 หรือ pr$(x < 150)$ และช่วงที่เหลือคือค่าความน่าจะเป็นของการให้คะแนนมากกว่า 200 หรือ pr $(x > 200)$

$$\text{pr}\ (x < 150) + \text{pr}\ (150 \leq x \leq 200) + \text{pr}\ (x > 200) = 1$$

การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงของค่าที่ได้จากตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง โดยทั่วไปจะมีหลายแบบ แต่การแจกแจงที่สำคัญต่อการใช้สถิติอ้างอิง (Inferential Statistics) ได้แก่การแจกแจงที่เป็นโค้งปกติ ซึ่งเป็นการแจกแจงที่มีโค้งเป็นรูประฆังคว่ำและสมมาตร และมีลักษณะพิเศษเฉพาะตัวดังจะได้กล่าวต่อไป คุณลักษณะส่วนใหญ่ตามธรรมชาติจะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ เช่น ส่วนสูงของมนุษย์ น้ำหนัก สติปัญญา ขนาดของต้นไม้ ฯลฯ

นักคณิตศาสตร์ที่ได้ศึกษาถึงคุณลักษณะของโค้งปกติมีหลายท่าน เช่น อับราฮัม เดอมัวร์ (Abraham De Moivre 1667-1754) เปียร์ เอส ลาเพลซ (Pierre S. Laplace 1749-1827) และ คาร์ล เกาส์ (Karl Gauss 1777-1855) ซึ่งเดอร์มัวร์ เป็นคนแรกที่ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับโค้งปกติ แต่เขาก็ได้เลิกสนใจเสียก่อน ผู้ที่พยายามศึกษาและค้นคว้าเกี่ยวกับโค้งปกติที่สำคัญได้แก่ เกาส์ ดังนั้นบางครั้งจะมีผู้เรียกการแจกแจงแบบนี้ว่า การแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian Distribution)

สมการและคุณสมบัติทั่ว ๆ ไปของโค้งปกติ

เมื่อให้ y เป็นค่าความสูงของโค้งปกติ

X ค่าของตัวแปร

μ ค่าเฉลี่ยของประชากร X

σ ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของประชากร X

e คือฐานของค่าลอกธรรมชาติ (Natural log) ซึ่ง = 2.7183

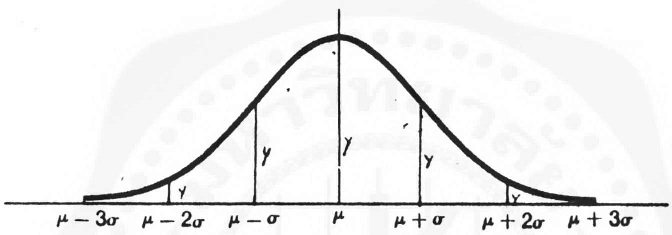
¶ คือค่าคงที่ = $\frac{22}{7}$

สมการของโค้งปกติจะเป็นดังนี้

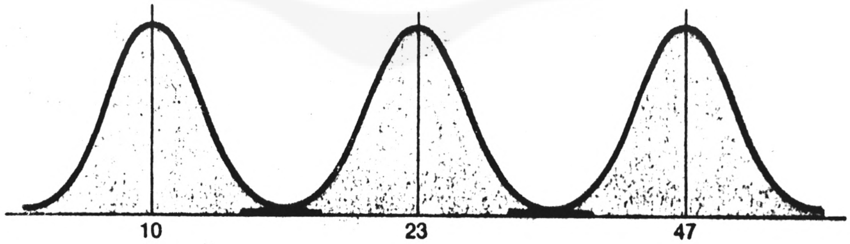
$$y = \frac{1}{\sqrt{2¶}\sigma} e^{-\frac{1}{2}[(X-\mu)/\sigma]^2}$$

จากสมการจะเห็นได้ว่า ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (μ σ) จะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งและการกระจายของโค้งปกติ และเมื่อคำนวณค่า Y จากค่า X ต่าง ๆ กันแล้ว โค้งที่ได้จากการจุด X, Y ดังกล่าวจะมีลักษณะ

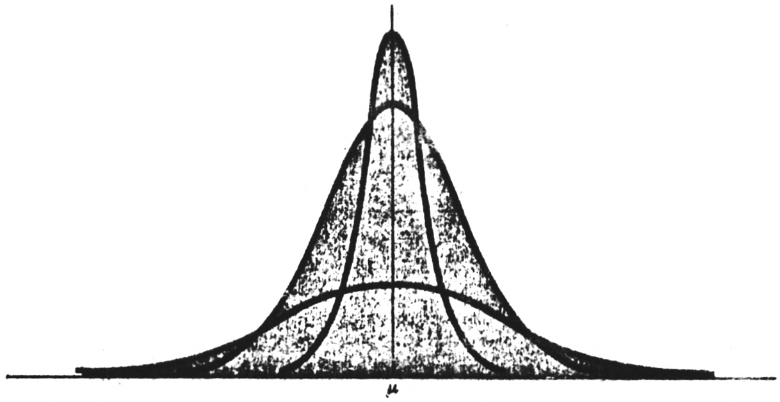
1. เป็นโค้งรูประฆังคว่ำที่สมมาตร (Symmetrical bell Shape)
2. ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม อยู่ ณ ตำแหน่งเดียวกัน
3. ค่า Y ที่ปลายทั้งสองข้างของโค้ง จะเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อค่า X เข้าใกล้ค่าอนันต์ (infinity)



ข้อที่น่าสังเกตอีกอย่างหนึ่งของโค้งปกติคือ ปลายทั้งสองข้างของโค้ง จะไม่จดกับแกน X นั่นคือ X จะมีค่าได้ตั้งแต่ $+\infty$ ถึง $-\infty$ ความสูงของโค้งแต่ละจุดขึ้นอยู่กับค่า Y เมื่อ X มีค่าเลย ± 4 เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($\pm 4\sigma$) ค่า Y จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้พื้นที่ใต้โค้งหลังจากค่า X มากกว่า $\pm 4\sigma$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ด้วย



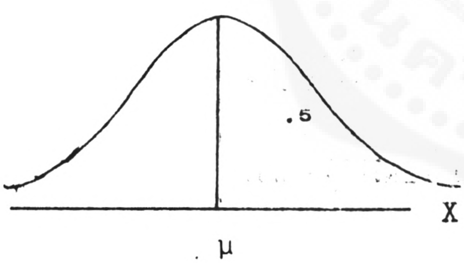
จากภาพข้างบนจะเห็นว่า โค้งปกติที่อยู่ ณ ที่ตำแหน่งแตกต่างกัน ทำให้มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน (μ = 10, 23, 47) แต่โค้งทั้ง 3 มีลักษณะเท่ากันทุกประการ นั่นคือ จะมีค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน



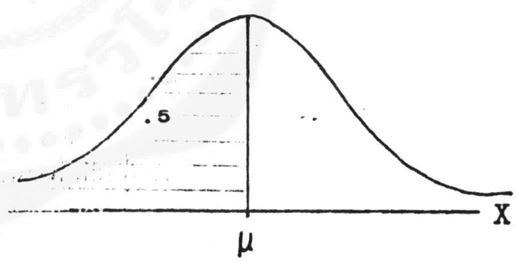
จากภาพข้างบนจะเห็นได้ว่ามีโค้งปกติหลายโค้งที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน แต่มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานแตกต่างกัน

<u>พื้นที่ใต้โค้งปกติ</u>

พื้นที่ใต้โค้งปกติใช้แทนพื้นที่ของความน่าจะเป็นได้ เมื่อให้พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเป็น ๑ ส่วน จะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ย $Pr\ (X > \mu)$ เป็น $\frac{1}{2}$ หรือ .5 และความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ย $Pr\ (X > \mu)$ เป็น $\frac{1}{2}$ หรือ .5 เช่นกัน



โอกาสที่ X จะมีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ยเป็น .๕

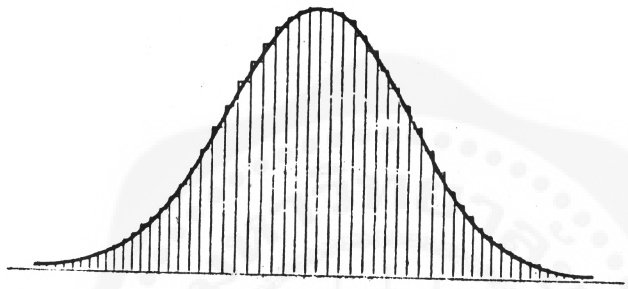


โอกาสที่ X จะมีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเป็น .๕

โดยปกติค่าเฉลี่ย อาจมีค่าเป็นตัวเลขใด ๆ ก็ได้ เช่นอายุเฉลี่ยของมนุษย์เป็น ๖๘ ปี ความเร็วเฉลี่ยของรถยนต์เป็น ๖๕ กิโลเมตรต่อชั่วโมง อุณหภูมิเฉลี่ยในเขตศูนย์สูตรเป็น ๓๖ °C ฯลฯ และในทำนองเดียวกัน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานก็อาจจะเป็นค่าจำนวนบวกใด ๆ ก็ได้แล้วแต่กรณี แต่ไม่ว่ากรณีใด ๆ ก็ตาม โค้งปกติที่อยู่ n ตำแหน่งต่างกัน มีค่าเฉลี่ยต่างกัน และมีการกระจายต่างกัน จะมีลักษณะที่สำคัญเหมือนกันคือลักษณะสมมาตร (Symmetry) ซึ่งจากคุณสมบัติ

ที่สำคัญอันนี้เอง ทำให้ง่ายต่อการคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ

นักคณิตศาสตร์ได้สร้างตารางคำนวณหาพื้นที่ใต้โค้งปกติโดยใช้วิธีการรวม (integration) พื้นที่ที่ได้จากสมมาตรของโค้งปกติ เมื่อกำหนดช่วงของค่า X ให้เป็นช่วงเล็ก และเมื่อกำหนดให้ผลรวมของพื้นที่ใต้โค้งปกติทั้งหมดเป็น 1



และเพื่อให้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติที่สร้างขึ้นนี้ ใช้ได้กับโค้งปกติทุกรูปแบบ การคำนวณจึงใช้วิธีคำนวณจากโค้งปกติของข้อมูลมาตรฐาน (Standard Score หรือ Z-score) แทน

ข้อมูลมาตรฐาน หรือคะแนนมาตรฐาน คือข้อมูลซึ่งถูกแปลงจากข้อมูลดิบให้เป็นข้อมูลที่เป็นสัดส่วนของความแตกต่างระหว่างข้อมูลกับค่าเฉลี่ยต่อค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน หรืออาจจะกล่าวอย่างง่าย ๆ ว่า ข้อมูลมาตรฐานคือค่าที่บอกให้ทราบว่า ข้อมูลเดิมแตกต่างจากค่าเฉลี่ยเป็นกี่เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เมื่อให้ Z แทนข้อมูลมาตรฐาน จะได้ว่า

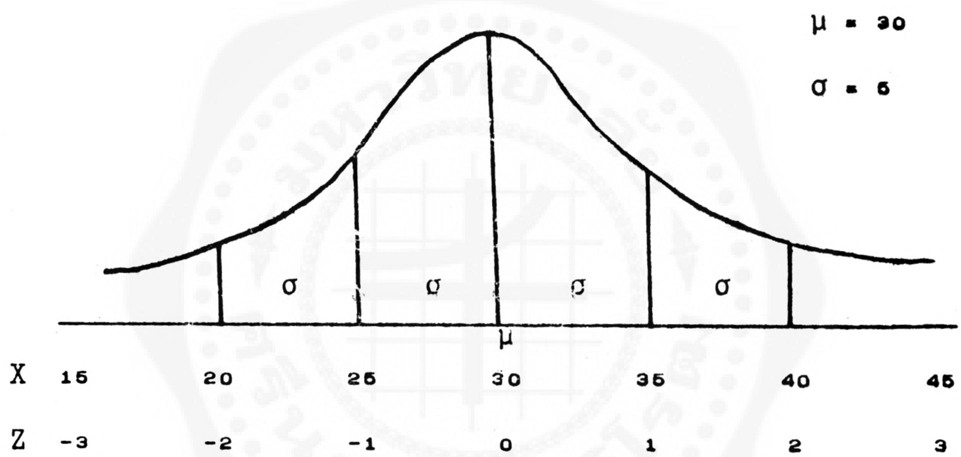
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

เมื่อ X มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย จะได้ค่าข้อมูลมาตรฐาน (Z) เป็น 0

เมื่อ X มีค่าแตกต่างจากค่าเฉลี่ยอยู่เท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ข้อมูล
มาตรฐาน (Z) จะมีค่าเป็น 1 หรือ -1

เมื่อ X มีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ย ข้อมูลมาตรฐาน (Z) จะมีค่าเป็น +

เมื่อ X มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ย ข้อมูลมาตรฐาน (Z) จะมีค่าเป็น -



ภาพแสดงข้อมูลมาตรฐานจากข้อมูลดิบที่มี μ เป็น 30 และ σ เป็น 5

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของโค้งปกติ Z จะมีค่าเท่ากับ 1

พิสูจน์

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]^2}{n}$$

แต่

$$\mu_Z = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}{n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X-\mu)^2}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X-\mu)^2}{n} = \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2$$

$$= 1$$

ดังนั้น เราอาจสรุปได้ว่า โค้งปกติของ Z ไม่ว่าจะมาจากโค้งปกติของข้อมูลใด ค่าเฉลี่ยของ Z จะเป็น 0 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Z จะเป็น 1 เสมอ

ตัวอย่าง การแจกแจงปกติของข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 26 มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3 อยากทราบว่า

ก. ข้อมูล 32 จะเป็นข้อมูลมาตรฐานเท่าใด

ข. ข้อมูลมาตรฐาน -1.5 คือข้อมูลดิบอะไร

วิธีทำ

ก. จาก $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$\therefore Z = \frac{32 - 26}{3}$

ข้อมูล 32 คือข้อมูลมาตรฐาน 2

$$\text{จาก} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$-1.5 = \frac{X - 26}{3}$$

$$-4.5 = X - 26$$

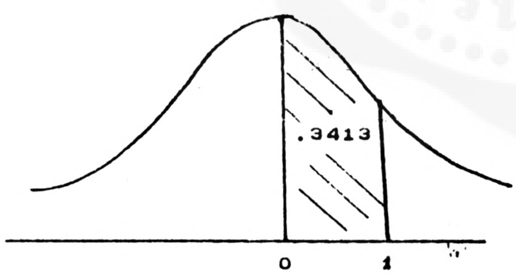
$$X = 26 - 4.5$$

$$= 21.5$$

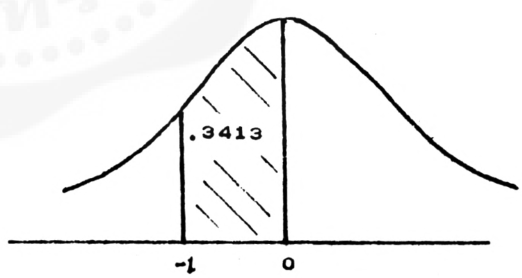
ดังนั้น ข้อมูลมาตรฐาน -1.5 คือข้อมูลดิบ 21.5

<u>การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติโดยตาราง</u>

ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติส่วนใหญ่จะเป็นตารางที่กำหนดพื้นที่ใต้โค้งจากจุดกึ่งกลางของโค้ง ตามค่า Z ที่แตกต่างกันออกไป เช่น เมื่อค่า Z เป็น 1 พื้นที่ใต้โค้งจากจุดกึ่งกลางของโค้งคือ .3413 ดังนั้น พื้นที่จากจุดกึ่งกลางโค้งไปยังค่า Z = -1 ก็จะมีพื้นที่เป็น .3413 เป็นต้น (ดูตารางใต้โค้งปกติท้ายเล่มประกอบ)



แสดงพื้นที่ใต้โค้ง $\bar{Z}$ ไปยังค่า Z เป็น 1



แสดงพื้นที่ใต้โค้งจาก $\bar{Z}$ ไปยังค่า Z เป็น -1

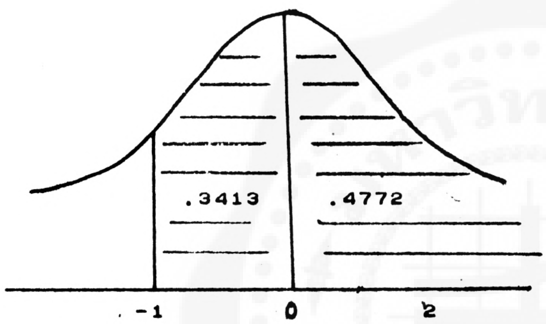
พื้นที่ใต้โค้งปกติจากค่าเฉลี่ยไปยังค่า Z เป็น 1 เป็น .3413 หมายความว่า เมื่อพื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเป็น 1 ส่วน จะมีพื้นที่ใต้โค้ง เมื่อค่า $0 \leq Z \leq 1$ เป็น ส่วน หรือกล่าวในแง่ของความน่าจะเป็นได้ว่า

$$Pr\ (0 \leq Z \leq 1) = .3413$$

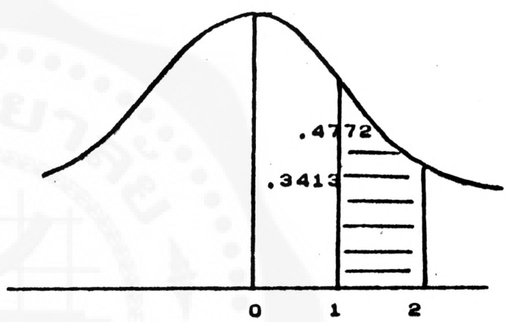
ในทำนองเดียวกัน

$$Pr(-1 \leq Z \leq 0) = .3413$$

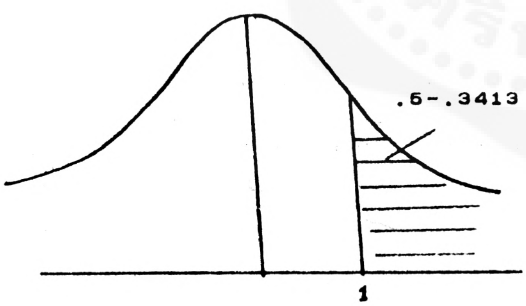
การอ่านค่าพื้นที่ใต้โค้งปกติจากตารางสามารถอ่านค่าพื้นที่เมื่อทราบค่า Z หรือหาค่า Z เมื่อทราบส่วนของพื้นที่ใต้โค้ง ตัวอย่างเช่น



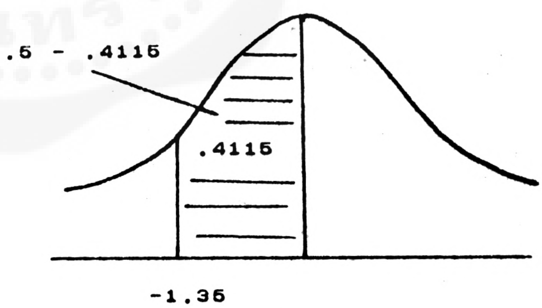
$Pr(-1 \leq Z \leq 2) = .3413+.4772$



$Pr(1 \leq Z \leq 2) = .4772-.3413$

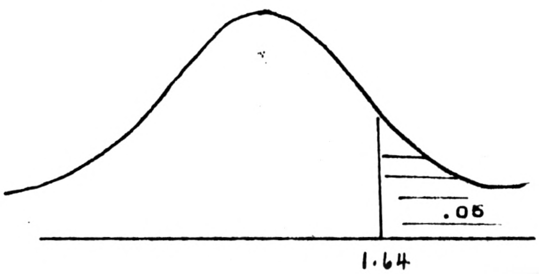


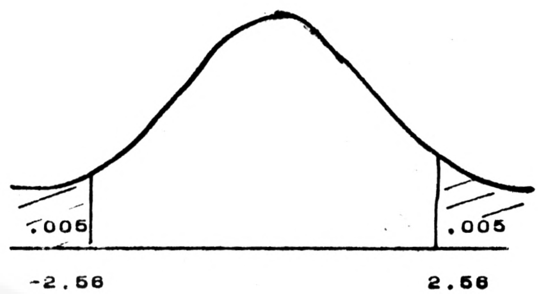
$Pr(X \geq 1) = .5 - .3413$



$Pr(X \leq -1.35) = .5 - .4115$

แสดงวิธีหาค่าความน่าจะเป็นในช่วง Z ต่าง ๆ กัน





พื้นที่ใต้โค้งเป็น .05 ที่ค่า Z เป็น 1.64

พื้นที่ใต้โค้งที่ปลายทั้งสองเป็น .005 เมื่อ $Z = \pm 2.56$

ตัวอย่าง การแจกแจงความสูงของผู้หญิงไทยเป็นการแจกแจงแบบโค้งปกติ โดยมีความสูงเฉลี่ยเป็น 155 ซม. และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 4 ซม. อยากทราบว่า

ก. มีผู้หญิงไทยสูงเกิน 160 ซม. อยู่กี่เปอร์เซ็นต์

ข. โอกาสที่จะเลือกผู้หญิงคนหนึ่งอย่างสุ่มแล้วได้ผู้หญิงที่เตี้ยกว่า 125 ซม. เป็นเท่าไร

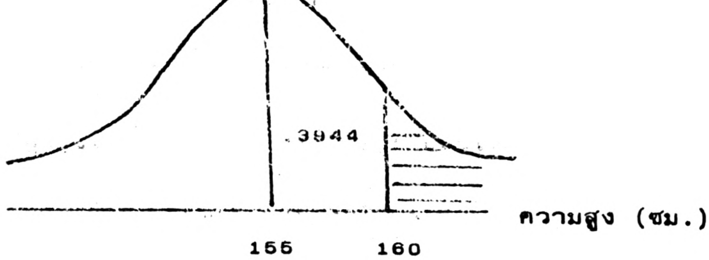
ค. ถ้าผู้หญิงไทยทั้งหมดมี 25 ล้านคน อยากทราบว่ามีประมาณกี่ล้านคนที่มีความสูงระหว่าง 150 - 160 ซม.

จากโจทย์การแจกแจงของความสูงของหญิงไทย มี

μ = 155 ซม.

σ = 4 ซม.

ก.



$Z = 1.25$

เมื่อความสูงเป็น 160 ซม. ข้อมูลมาตรฐานจะเป็น

จาก $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{160 - 155}{4}$$

$$= 1.25$$

จากตาราง พื้นที่ใต้โค้งปกติจากแนวค่าเฉลี่ยถึง Z 1.25 เป็น .3944

$\therefore$ พื้นที่ใต้โค้งส่วนที่สูงเกินกว่า 160 ซม. คือ .5 - .3944 = .1056

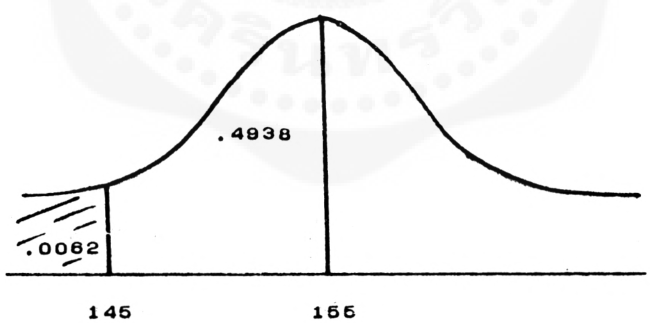
นั่นคือ ใน 1 ส่วน จะมีผู้หญิงที่สูงกว่า 160 ซม. อยู่ = .1056 ส่วน

ใน 100 ส่วน จะมีผู้หญิงที่สูงกว่า 160 ซม.อยู่ $= \frac{.1056 \times 100}{1}$

= 10.56 ส่วน

นั่นคือ จะมีผู้หญิงที่สูงกว่า 160 ซม. อยู่ประมาณ 10.56%

ข.



(Z = -2.5)

จาก $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ดังนั้น ข้อมูลมาตรฐานของ 145 คือ

$$Z = \frac{145 - 155}{4}$$

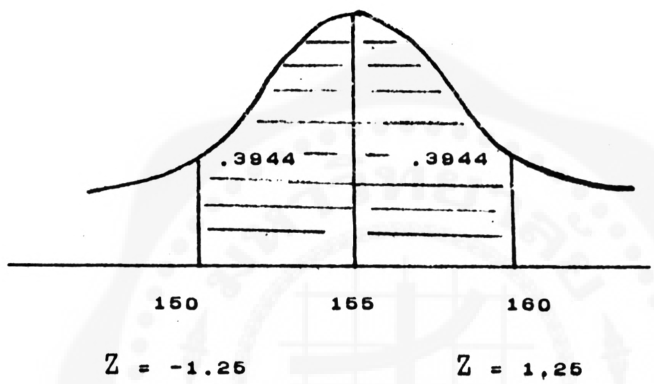
$$= -2.5$$

จากตาราง พื้นที่ใต้โค้งปกติจากแนวค่าเฉลี่ยถึง -2.5 เป็น .4938

∴ พื้นที่ใต้โค้งส่วนที่ต่ำกว่า 145 ซม. คือ .5 - .4938 = .0062

ดังนั้น โอกาสที่จะเลือกผู้หญิงอย่างสุ่มได้ผู้หญิงที่เตี้ยกว่า 145 ซม. เป็น .0062

ค.



จาก $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

ข้อมูลมาตรฐานของ 150 เป็น

$$Z = \frac{150 - 155}{4} = -1.25$$

ข้อมูลมาตรฐานของ 160 เป็น

$$Z = \frac{160 - 155}{4} = 1.25$$

จากตาราง พื้นที่ใต้โค้งปกติจากแนวเฉลี่ยถึง -1.25 เป็น .3944

พื้นที่ใต้โค้งปกติจากแนวเฉลี่ยถึง 1.25 เป็น .3944

ดังนั้น พื้นที่จากความสูง 150 ซม. ถึง 160 ซม. เป็น .3944 + .3944

= .9888

ถ้าจำนวนผู้หญิงไทยทั้งหมดมี 25 ล้านคน

นั่นคือ พื้นที่ใต้โค้ง 1 ส่วน คิดเป็นจำนวนคน	=	25	ล้านคน
ถ้าพื้นที่ใต้โค้ง .9888 ส่วน คิดเป็นจำนวนคน	=	25 x .9888	
	=	24.72	ล้านคน

นั่นคือ มีผู้หญิงที่สูงระหว่าง 150 ซม. ถึง 160 ซม. อยู่ 24.72 ล้านคน

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. จงยกตัวอย่างตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องมาอย่างละ 3 ตัวแปร
2. จงหาความน่าจะเป็นในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ได้เหรียญที่ขึ้นหัวอย่างน้อย 2 เหรียญ
3. จงเขียนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นทั้งหมดของการตอบข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก 10 ข้อ
4. จงหาความน่าจะเป็นของการตอบข้อสอบในข้อ 3 ได้ 6 หรือ 7 คะแนน
5. จงคำนวณผลรวมของคะแนนมาตรฐานแต่ละตัวยกกำลังสอง จากข้อมูล 2,4,5,6 และ 8
6. ข้อสอบวิชาสังคมศึกษาจำนวน 50 ข้อ สอบนักศึกษา 290 คน ได้คะแนนเฉลี่ย 32.50 และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4.80 จงหาคะแนนมาตรฐานของนักศึกษาที่สอบได้คะแนน 28, 36, 45 และ 20
7. ในการตรวจสอบส้มเขียวหวานจากสวนแห่งหนึ่ง จำนวน 1200 ผล ปรากฏว่า มีน้ำหนักเฉลี่ยผลละ 20 กรัม ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักส้มเป็น 2.5 กรัม อยากทราบว่า

    ก. มีส้มจำนวนกี่ผลที่หนักเกิน 25 กรัม

    ข. ถ้าส้มมีน้ำหนักต่ำกว่า 12.5 กรัม ต้องคัดทิ้ง จะมีส้มกี่เปอร์เซ็นต์ที่ต้องถูกคัดทิ้ง

บทที่ 4

ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง

จุดมุ่งหมาย

1. ให้ผู้เรียนได้รู้จักความแตกต่างระหว่างกลุ่มตัวอย่างและประชากร
2. ให้ผู้เรียนได้รู้จักวิธีสุ่มตัวอย่างแบบต่าง ๆ และเหตุผลในการเลือกใช้แต่ละวิธี
3. ให้ผู้เรียนได้รู้จักคุณลักษณะของค่าพารามิเตอร์ และค่าสถิติ โดยสามารถบอกถึงความแตกต่างของค่าทั้งสองได้
4. ให้ผู้เรียนสามารถเขียนกราฟการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง และบอกถึงคุณลักษณะทั่ว ๆ ไป
5. ให้ผู้เรียนสามารถกะประมาณค่า μ ในระดับความเชื่อมั่นต่าง ๆ กัน

เนื้อหา

- ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
- วิธีสุ่มตัวอย่าง
- ค่าพารามิเตอร์ และสถิติ
- การแจกแจงค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง
- การเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืน
- การกะประมาณค่าพารามิเตอร์

ทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling Theory)

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร (populations)

ในการทดลอง หรือการศึกษาวิจัยเรื่องใด ๆ ก็ตาม ค่าของตัวแปรสุ่มทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการทดลองจะเป็นประชากร (population) ของการทดลอง หรือของการศึกษาวิจัยเรื่องนั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้าจะศึกษาเรื่องความสูงของคนไทย ตัวแปรสุ่มที่ได้จากการวัดความสูงของคนไทยทั้งหมด จะเป็นประชากรของการศึกษาในครั้งนี้ (ตัวแปรสุ่มทั้งหมดจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนคนไทยทั้งหมด)

นิยาม ประชากรของการศึกษา หรือการทดลองใด คือ เซทของตัวแปรสุ่มทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา หรือการทดลองนั้น ๆ

ขนาดของประชากร

ในการศึกษาถึงอายุของคนงานจากโรงงานแห่งหนึ่ง ซึ่งมีจำนวน ๕๐๐ คน ดังนั้นตัวแปรสุ่มที่ได้จากการศึกษาซึ่งเป็นประชากรของการศึกษาครั้งนี้คือ ค่าอายุของคนงาน ๕๐๐ ค่า ในกรณีเช่นนี้ขนาดของประชากรจะเท่ากับ ๕๐๐ ถ้าให้ n แทนขนาดของประชากร จะได้ n = ๕๐๐ จะเห็นได้ว่า จำนวนตัวแปรสุ่มในเซทของประชากรจะเป็นตัวบอกขนาดของประชากร

ในบางกรณี เราไม่สามารถทราบจำนวนตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาวิจัยเรื่องนั้น ๆ ได้ เช่น การศึกษาวิจัยเรื่องพฤติกรรมการกินของเด็กอายุระหว่าง ๕ - ๖ ขวบ ย่อมเป็นการยากที่จะทราบได้แน่นอนว่า เด็กอายุระหว่าง ๕ - ๖ ขวบ ในโลกนี้มีจำนวนอยู่เท่าไร ซึ่งทำให้ผู้ศึกษาวิจัยไม่สามารถทราบตัวแปรสุ่มทุกค่าของประชากรนี้ได้ และไม่สามารถบอกได้ว่าประชากรนี้มีขนาดเท่าใด

เมื่อยึดขนาดของประชากรเป็นเกณฑ์ เราสามารถแบ่งประชากรได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. ประชากรที่รู้ขนาดแน่นอน (Finite Population) ตัวอย่างของประชากรชนิดนี้ได้แก่ การศึกษาเกี่ยวกับนิสิตในมหาวิทยาลัย การศึกษาเกี่ยวกับประเทศต่าง ๆ ในทวีปเอเชีย ฯลฯ ผู้วิจัยสามารถทราบจำนวนนิสิตในมหาวิทยาลัยที่แน่นอน หรือทราบจำนวนประเทศต่าง ๆ ในทวีปเอเชียที่แน่นอนได้

2. ประชากรที่ไม่รู้ขนาดแน่นอน (Infinite Population) ส่วนใหญ่ของประชากรประเภทนี้จะมีขนาดใหญ่จนไม่สามารถรู้จำนวนที่แท้จริงได้ ตัวอย่างเช่น การศึกษาเกี่ยวกับดวงดาวในกาแลคซี่ การศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม ฯลฯ ผู้วิจัยไม่สามารถทราบจำนวนดวงดาวทั้งหมดในกาแลคซี หรือจำนวนสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนมทั้งหมดในโลกได้

<u>กลุ่มตัวอย่าง (Samples)</u>

โดยปกติบ่อยครั้งที่ผู้ศึกษาวิจัยไม่สามารถทำการศึกษากับประชากรทั้งหมดได้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุความสิ้นเปลือง เช่น การศึกษาเรื่องเกี่ยวกับนิสิตมหาวิทยาลัย ผู้ศึกษาอาจไม่มีค่าใช้จ่ายเพียงพอที่จะศึกษา นิสิตทุกคนในมหาวิทยาลัย และทุกมหาวิทยาลัย เป็นต้น หรือสาเหตุมาจากประชากรเป็นประชากรที่ไม่รู้ขนาดแน่นอน เช่น การศึกษาวงจรชีวิตของแมลงวัน ซึ่งไม่ทราบแน่ว่าแมลงวันทั้งหมดมีจำนวนเท่าใด และไม่จำเป็นที่จะต้องศึกษากับแมลงวันทุกตัว หรือ เช่น การตรวจเลือดคนไข้ของแพทย์ เลือดทั้งหมดในกายคนไข้คือประชากรที่จะต้องศึกษา แต่ถ้าแพทย์นำเลือดทั้งหมดของคนไข้ไปศึกษา นอกจากไม่เกิดประโยชน์มากไปกว่าการศึกษาเลือดเพียงบางส่วน เพราะเลือดในกายคนไข้จะมีคุณลักษณะเหมือนกันในเวลาเดียวกันแล้ว คนไข้ยังอาจตายได้ถ้าต้องสูบเลือดออกจากตัวทั้งหมด เป็นต้น

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น บางครั้งผู้ศึกษาวิจัยจะไม่ทำการศึกษาจากประชากรทั้งหมด จะเลือกศึกษาจากเพียงส่วนหนึ่งส่วนใดของประชากรซึ่งเรียกว่ากลุ่มตัวอย่าง (Sample)

นิยาม กลุ่มตัวอย่าง คือเซทย่อยที่แท้จริง (Proper Set) ของประชากร

การศึกษาจากกลุ่มตัวอย่างจะใกล้เคียงกับการศึกษาจากประชากรหรือไม่ ขึ้นอยู่กับว่า กลุ่มตัวอย่างที่ผู้ศึกษาเลือกมาเป็นตัวแทนที่ดีของประชากขหรือไม่ นั่นคือ กลุ่มตัวอย่างมีคุณสมบัติใกล้เคียงกับคุณสมบัติของประชากรหรือไม่

วิธีสุ่มตัวอย่าง (Random Sampling)

ปัญหาสำคัญในการให้ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่าง คือทำอย่างไรจึงจะได้กลุ่มตัวอย่างที่มีลักษณะใกล้เคียงกับลักษณะของประชากรมากที่สุด เช่น ถ้าประชากร คือกลุ่มของอายุของคนทุกวัย ทำอย่างไรจึงจะเลือกได้กลุ่มตัวอย่างที่มีประกอบด้วยอายุของคนทุกวัยเช่นกัน หลักการเบื้องต้นในการเลือกกลุ่มตัวอย่างก็คือ ให้สมาชิกทุกตัวในประชากรมีโอกาสที่จะถูกเลือกมาเป็นสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างเท่า ๆ กัน ซึ่งในทางคณิตศาสตร์เห็นว่า วิธีที่จะทำให้สมาชิกทุกตัวในเซทของประชากรมีโอกาสถูกเลือกเท่า ๆ กัน คือต้องให้มีการเลือกแบบสุ่ม (random) วิธีการเลือกแบบสุ่มโดยทั่วไปจะต้องทำอย่างไม่ลำเอียง เช่นวิธีการจับสลากจากจำนวนทั้งหมดเป็นต้น

ในการทำวิจัยวิธีสุ่มให้ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนที่ดีของประชากรนั้น มีวิธีที่นิยมใช้ 4 วิธี คือ

1. วิธีสุ่มอย่างง่าย (Simple Random Sampling) หมายถึงการเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยสุ่มสมาชิกแต่ละตัวจากประชากรทั้งหมดมาเป็นสมาชิกของกลุ่มตัวอย่าง วิธีการสุ่มเช่นนี้อาจทำได้โดยการจับสลาก หรือการใช้ตารางเลขสุ่ม ตารางเลขสุ่มคือตารางที่มีตัวเลขต่าง ๆ เรียงกันอยู่อย่างสุ่ม ซึ่งตัวเลขเหล่านี้เป็นตัวเลขที่ได้มาอย่างไม่จำเพาะเจาะจง เช่นได้มาจากการใช้ไฟฟ้าหมุนแผ่นกลมซึ่งแบ่งออกเป็น 10 ช่อง และช่องหนึ่ง ๆ มีเลขตั้งแต่ 0, 1, 2,....., 9 เมื่อแผ่นกลมหยุดและลูกศรชี้ที่ตัวใด ก็บันทึกเลขเหล่านั้นต่อ ๆ กันไปรวมเป็นตารางเลขสุ่ม

การใช้ตารางสุ่ม ผู้วิจัยควรกำหนดหมายเลขให้แก่สมาชิกทุกตัวในประชากรเสียก่อน เริ่มตั้งแต่ 0, 1, 2,.... จนหมดทุกตัว แล้วเริ่มอ่านค่าจากตารางสุ่ม โดยการเริ่มอ่านจากที่ใดที่หนึ่งอย่างไม่จำเพาะเจาะจง เช่น หลับตาชี้ลงบนตารางเลขสุ่มแล้วเริ่มอ่านจากค่าที่ชี้ได้นั้น โดยอาจจะอ่านไปทางซ้าย หรือทางขวา หรือข้างบน หรือข้างล่างก็ได้ ถ้าขนาดของประชากรเป็นหลักหน่วย (ไม่เกิน 10) ก็อ่านเลขจากตารางสุ่มทีละหลักแล้วเลือกเอาสมาชิกที่มีหมายเลขตรงกับเลขจากตารางสุ่มที่อ่านได้ ถ้าตัวเลขจากตารางสุ่มที่อ่านได้มีค่าใหญ่กว่าขนาดของประชากร หรือซ้ำกับเลขจำนวนเดิม ก็ข้ามอ่านเลขจำนวนอื่นต่อไป ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไปจนกว่าจะได้จำนวนสมาชิกในกลุ่มตัวอย่างเท่าที่ต้องการ ถ้าขนาดของประชากรเป็นหลักสิบ (ไม่เกิน 100) ก็อ่านเลขจากตารางสุ่มทีละ 2 ตัว ถ้าขนาดของประชากรเป็นหลักร้อย (ไม่เกิน 1000) ก็อ่านเลขจากตารางสุ่มทีละ 3 ตัว ฯลฯ

19300	98389	95130	36323	33381	98930	60278	33338	45778	86643	78214
19301	17245	58145	89635	19473	61690	33549	70476	35153	41736	96170
19302	01289	68740	70432	43824	98577	50959	36855	79112	01047	33005
19303	98182	43535	79938	72575	13602	44115	11316	55879	78224	96740
19304	59266	39490	21582	09389	93679	26320	51754	42930	93809	06815
19305	42162	43375	78976	89654	71446	77779	95460	41250	01551	42552
19306	50357	15046	27813	34984	32297	57063	65418	79579	23870	00982
19307	11326	67204	56708	28022	80243	51848	06119	59285	86325	02877
19308	55636	06783	60962	12436	75218	38374	43797	65961	52366	83357
19309	31149	06588	27838	17511	02935	69747	88322	70380	77368	04222
19310	25055	23402	60275	81173	21950	63463	09389	83095	90744	44178
19311	35150	34706	08126	35809	57489	51799	01665	13834	97714	55167
19312	61486	33467	28352	58951	70174	21360	99318	69504	65556	02724
19313	44444	86623	28371	23287	36548	30503	76550	24593	27517	63304
19314	14825	81523	62729	36417	67047	16506	76410	42372	55040	27431
19315	59079	46755	72348	69595	53408	92708	67110	68260	79820	91123
19316	48391	76486	60421	69414	37271	89276	07577	43880	08133	09898
19317	67072	33693	81976	68018	89363	39340	93294	82290	95922	96329
19318	86050	07331	89994	36265	62934	47361	25352	61467	51683	43833
19319	84426	40439	57595	37715	16639	06343	00144	98294	64512	19201
19320	41048	26126	02664	23909	50517	65201	07369	79308	79981	40286
19321	30335	84930	99485	68202	79272	91220	76515	23902	29430	42049
19322	33524	27659	20526	52412	86213	60767	70235	36975	28660	90993
19323	26764	20591	20308	75604	49285	46100	13120	18694	63017	85112
19324	85741	22843	16202	48470	97412	65416	36996	52391	81122	95157

SOURCE RAND Corporation, *A Million Random Digits with One Hundred Thousand Normal Deviates* (Glencoe, Ill. Free Press, 1955), excerpt from page 387. Used by permission.

ตัวอย่างตารางเลขสุ่ม (Random digits)

๒. วิธีสุ่มอย่างมีระบบ (Systematic Random Sampling) คือการกำหนดระบบใดระบบหนึ่งขึ้นมา เช่นการแบ่งกลุ่มนักเรียนโดยให้เข้าแถวและนับ ๑ ถึง ๔ และรวมคนที่นับเลขเดียวกันเข้าด้วยกันเป็นกลุ่มตัวอย่าง เป็นต้น

๓. วิธีสุ่มตัวอย่างแบบแบ่งพวก (Stratified Random Sampling) วิธีการนี้จะเริ่มด้วยการแบ่งประชากรออกเป็นพวกตามคุณลักษณะใดคุณลักษณะหนึ่งเสียก่อน แล้วจึงใช้วิธีสุ่มอย่างง่ายจากแต่ละพวก เช่น แบ่งนิสิตออกเป็นชั้นปีก่อนแล้วจึงสุ่มตัวอย่างจากนิสิตแต่ละชั้นปีมารวมกันเป็นกลุ่มตัวอย่าง

๔. วิธีสุ่มตัวอย่างแบบเลือกกลุ่ม (Cluster Random Sampling) วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบนี้จะเริ่มโดยแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่ม ๆ เสียก่อน แล้วใช้วิธีสุ่มอย่างง่ายเลือกเอากลุ่มใดกลุ่มหนึ่งมาเป็นกลุ่มตัวอย่าง เช่น การแบ่งนิสิตออกเป็นคณะ แล้วใช้วิธีสุ่มอย่างง่ายสุ่มเอาคณะใดคณะหนึ่ง หรือมากกว่าหนึ่งคณะมาเป็นกลุ่มตัวอย่าง

<u>ค่าพารามีเตอร์และค่าสถิติ (Parameter and Statistic)</u>

ค่าที่เกิดจากการจัดกระทำทางฟังชั่นคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ คูณ หาร หาค่าเฉลี่ย คิดสัดส่วน ฯลฯ จากตัวแปรสุ่มทั้งหมดของประชากร เรียกว่าค่าพารามีเตอร์

ค่าที่เกิดจากการจัดกระทำตามฟังชั่นคณิตศาสตร์จากตัวแปรสุ่มของกลุ่มตัวอย่างใด ๆ ก็ตาม เรียกว่าค่าสถิติ

โดยทั่วไปในวิชาสถิติมักใช้อักษรกรีก แทนค่าพารามีเตอร์ และอักษรลาตินแทนค่าสถิติ ตัวอย่างเช่น

	พารามิเตอร์	สถิติ
ค่าเฉลี่ย (Mean) μ x̄	μ	$\bar{X}$
ค่าความแปรปรวน (Variance) σ^2 S^2	σ^2	S^2
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) σ S	σ	S
ค่าสัดส่วน (Proportion) P P	p	P
ค่าสหสัมพันธ์แบบเปียร์สัน (Pearson Correlation Coefficient)	R	r
จำนวนตัวแปรสุ่ม (Number of cases)	n	N

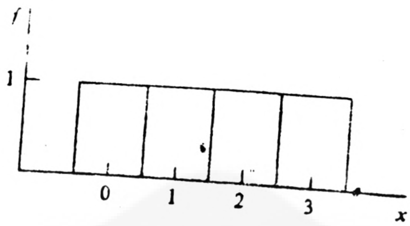
ฯลฯ

<u>การแจกแจงค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง (Distribution of Sample Means)</u>

จากเหตุผลที่ว่า การวิจัยบ่อยครั้งที่ผู้วิจัยไม่สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลจากประชากรทั้งหมดได้ ซึ่งอาจจะด้วยเหตุผลต่าง ๆ เช่น ขาดทุนทรัพย์ หรือด้วยลักษณะของกลุ่มตัวแปรของ เช่น ส่วนใหญ่มีลักษณะเหมือน ๆ กัน ฯลฯ ผู้วิจัยจึงมักเลือกเพียงบางส่วนของประชากรที่เรียกว่ากลุ่มตัวอย่างแทน แล้วพยายามใช้ค่าสถิติที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างนั้น ๆ ประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากร วิธีการเช่นนี้คือวิธีการของสถิติอ้างอิง (Inferential Statistics)

การเลือกกลุ่มตัวอย่างจากประชากรหนึ่ง ๆ อาจเลือกกลุ่มตัวอย่างที่ต่างกันได้หลายกลุ่ม นั่นคือถ้าขนาดของประชากรเป็น n และขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ต้องการเป็น N จำนวนวิธีที่จะเลือกกลุ่มตัวอย่างคือ จำนวนการจัดกลุ่ม (Combination) ของ n สิ่ง เลือกกลุ่มละ N สิ่ง และในทุกกลุ่มตัวอย่างที่เป็นไปได้เมื่อนำค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง (Sample Means) ทั้งหมดมาศึกษาดูการแจกแจง จะพบว่า จะมีการแจกแจงเข้าใกล้โค้งปกติ

ตัวอย่างเช่น สมมติให้ประชากรหนึ่งมีสมาชิกเป็น ๐, ๑, ๒, ๓ ซึ่งจะเห็นได้ว่า สมาชิกแต่ละตัวมีความถี่เป็นหนึ่ง นั่นคือประชากรชุดนี้มีการแจกแจงเป็นแบบ เอกภาพ (Uniform)



กราฟแท่งของการแจกแจงของสมาชิกแต่ละตัวในประชากร

เมื่อเลือกกลุ่มตัวอย่างจากประชากรชุดนี้ โดยให้ขนาดกลุ่มตัวอย่างเป็น ๒ และสุ่ม โดยวิธีจับสลากแล้วใส่คืน (with replacement) จะมีวิธีจัดกลุ่มตัวอย่างได้ทั้งหมด $4^2 = 16$ วิธี และในแต่ละกลุ่มตัวอย่างจะมีค่าเฉลี่ยดังตารางต่อไปนี้คือ

No.	Sample	$\bar{x}$	No.	Sample	$\bar{x}$
1	0, 0	0	9	2, 0	1.0
2	0, 1	0.5	10	2, 1	1.5
3	0, 2	1.0	11	2, 2	2.0
4	0, 3	1.5	12	2, 3	2.5
5	1, 0	0.5	13	3, 0	1.5
6	1, 1	1.0	14	3, 1	2.0
7	1, 2	1.5	15	3, 2	2.5
8	1, 3	2.0	16	3, 3	3.0

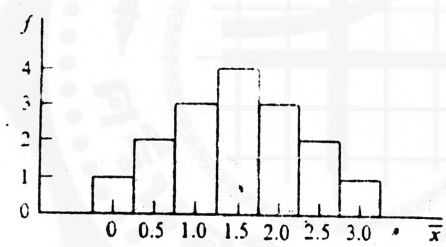
ตารางแสดงสมาชิกและค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มตัวอย่างที่อาจเป็นไปได้

จากตารางข้างบนจะเห็นได้ว่า ค่าเฉลี่ของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง อาจมีค่าได้ตั้งแต่ ๐ - ๓ และเมื่อรวบรวมความถี่ของค่าเฉลี่ยที่มีค่าซ้ำกัน จะได้ดังตารางต่อไปนี้

$\bar{x}$	f
0	1
0.5	2
1.0	3
1.5	4
2.0	3
2.5	2
3.0	1

ตารางแสดงการแจกแจงความถี่ของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

และเมื่อนำค่าเฉลี่ยและความถี่จากตารางมาแสดงโดยใช้กราฟแท่ง จะสังเกตได้ว่าการแจกแจงของกราฟมีลักษณะเข้าใกล้โค้งปกติ



กราฟแท่งแสดงความถี่ของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

จากตัวอย่างข้างต้น ค่าเฉลี่ยของประชากร จะเป็น $\frac{0+1+2+3}{4}$

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{(0\times1)+(0.5\times2)+(1\times3)+(1.5\times4)+(2\times3)+(2.5\times2)+(3\times1)}{16}$$

$$= \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

จะเห็นได้ว่า ค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ย ($\mu_{\bar{X}}$) จะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของประชากร (μ)

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

และเมื่อนำประชากรทั้งหมดมาคำนวณหาค่าความแปรปรวน จะได้

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (X - \mu)^2}{n}$$

$$= \frac{5}{4}$$

และเมื่อคำนวณค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง จะได้

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\Sigma (\bar{X} - \mu_{\bar{X}})^2}{n_{\bar{X}}}$$

$$= \frac{5}{8}$$

ซึ่ง $$\frac{5}{8} = \frac{\frac{5}{4}}{2}$$

แต่ 2 คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง และ $\frac{5}{4}$ คือ σ^2

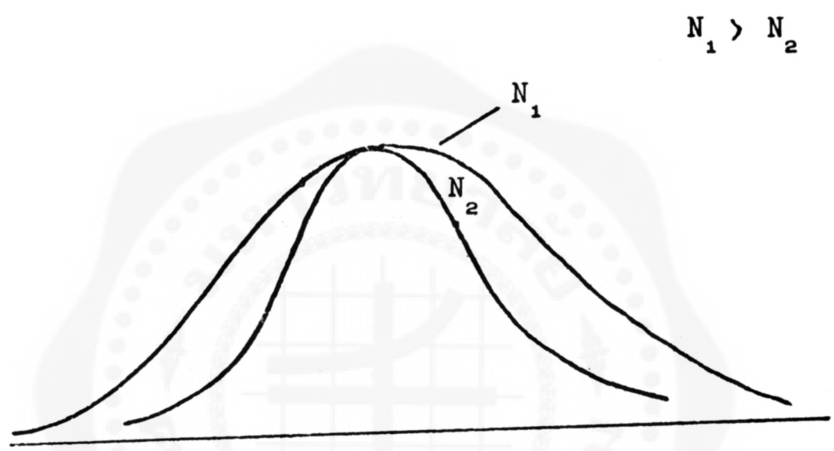
ดังนั้น $$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{N}$$

นั่นคือ $\sigma^2_{\bar{X}}$ (ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน) $= \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

ดังนั้นแม้การเลือกขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรก็ตาม สิ่งที่จะเป็นจริงเสมอ คือ $\mu_{\bar{X}} = \mu$

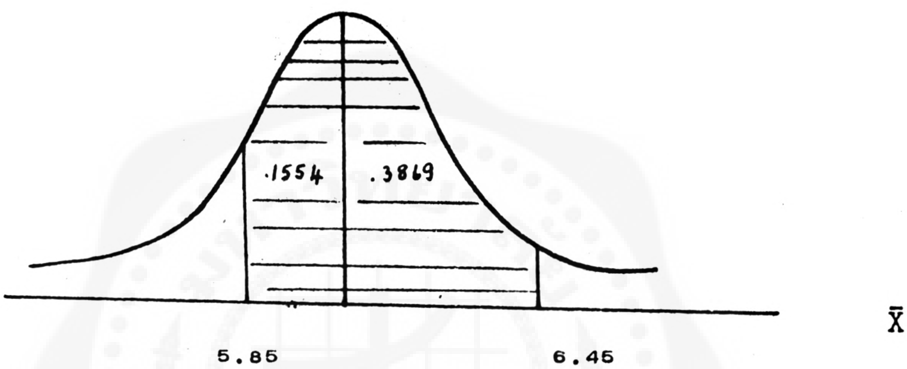
และ $$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า ขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะไม่ทำให้ค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ย ($\mu_{\bar{X}}$) เปลี่ยนแปลง แต่จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน ($\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$) เปลี่ยนแปลง นั่นคือ เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างใหญ่ขึ้น ค่าความแปรปรวนจะมีค่าลดลง ดังแสดงในรูป



หมายเหตุ การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจะมีค่าเข้าใกล้โค้งปกติที่แท้จริง เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดมากกว่า 30 ($N > 30$) ในกรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กกว่า 30 ($N < 30$) การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจะเข้าใกล้โค้งปกติก็ต่อเมื่อประชากรมีลักษณะเข้าใกล้โค้งปกติ

ตัวอย่าง ถ้าให้ประชากรเป็น 3, 3, 3, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9 เลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเลือกแล้วใส่คืน (with replacement) ให้ขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น 36 จงหาโอกาสที่จะเลือกกลุ่มตัวอย่างที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 5.85 ถึง 6.45



จากประชากร เมื่อคำนวณค่า $\mu = 6$

และ $\sigma^2 = 5$

ดังนั้น การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจะมี

$$\mu_{\bar{X}} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} = \frac{5}{36}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = 0.37$$

ค่า $$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

$$Z_{5.85} = \frac{5.85 - 6}{0.37}$$

$$= -.405$$

$$Z_{6.45} = \frac{6.45 - 6}{0.37}$$

$$= 1.216$$

เมื่อเปิดตารางจะได้

พื้นที่ระหว่าง 5.85 ถึง 6.45 = .1554 + .3869

= .5423

นั่นคือ โอกาสที่จะเลือกกลุ่มตัวอย่างได้ค่าเฉลี่ยเป็น 5.85 ถึง 6.45 เป็น 54.23%

การเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืน (without replacement)

การเลือกกลุ่มตัวอย่างบางอย่าง จะมีสิ่งเดียวกันมากกว่า 1 ครั้ง ในกลุ่มตัวอย่างหนึ่ง ๆ ไม่ได้ เช่น การจัดกลุ่มคน ฯลฯ เมื่อประชากรมีขนาดเป็น n และ กลุ่มตัวอย่างมีขนาด N จำนวนวิธีที่จะเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยวิธีไม่ใส่คืน คือจำนวนการจัดลำดับ (Permutation) ของ N สิ่ง จากของทั้งหมด n สิ่ง นั่นคือ $P(^{N}n)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{N!}{(n-N)!}$$

จากตัวอย่างที่มีประชากรเป็น 0, 1, 2, 3 ซึ่งมี μ เป็น $\frac{3}{2}$ และ σ เป็น $\frac{5}{4}$ เมื่อเลือกกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาด 2 เช่นเดิม จะมีวิธีเลือกกลุ่มตัวอย่างได้ $= \frac{4!}{(4-2)!} =$ 12 วิธี และจะได้ค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างต่าง ๆ ดังนี้คือ

No.	Sample	$\bar{x}$		No.	Sample	$\bar{x}$
1	0, 1	0.5		7	1, 0	0.5
2	0, 2	1.0		8	2, 0	1.0
3	0, 3	1.5		9	3, 0	1.5
4	1, 2	1.5		10	2, 1	1.5
5	1, 3	2.0		11	3, 1	2.0
6	2, 3	2.5		12	3, 2	2.5

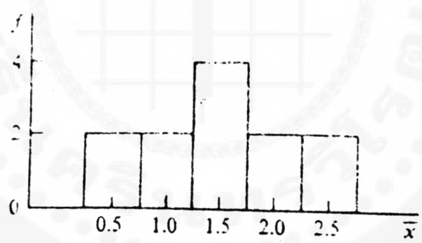
ตารางแสดงกลุ่มตัวอย่างและค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ได้จากการเลือกแล้วไม่ใส่คืน

และเมื่อแจกแจงความถี่ของค่าเฉลี่ยที่มีค่าซ้ำกัน จะแสดงความถี่ของค่าเฉลี่ย ดังตารางข้างล่างนี้

$\bar{x}$	f
0.5	2
1.0	2
1.5	4
2.0	2
2.5	2

ตารางแสดงความถี่ของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

และเมื่อนำค่าเฉลี่ยแสดงการแจกแจงโดยใช้กราฟแท่ง จะได้การแจกแจงดังนี้



กราฟแท่งแสดงความถี่ของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

เมื่อนำค่าเฉลี่ยที่ได้มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ย ($\mu_{\bar{X}}$) จะได้ = μ คือ $\frac{3}{2}$ และเมื่อนำค่าเฉลี่ยมาคำนวณหาความแปรปรวน จะได้ค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยเป็น

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\Sigma\,(\bar{X} - \mu_{\bar{X}})^2}{12} = \frac{5}{12}$$

เมื่อ 4 เป็นขนาดของประชากร

2 เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

$\frac{5}{4}$ เป็นความแปรปรวนของประชากร

$$\frac{5}{12} = \frac{\frac{5}{4}}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{n-N}{n-1}\right)$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{n-N}{n-1}\right)$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{n-N}{n-1}}$$

เมื่อประชากรมีขนาดใหญ่มาก ๆ ค่า n - N จะเข้าใกล้ n - 1 นั่นคือ

$$\frac{n-N}{n-1} \rightarrow 1$$

ดังนั้น $\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

ตัวอย่าง โรงงานผลิตหลอดไฟฟ้าแห่งหนึ่งพบว่า ช่วงของอายุการใช้งานหลดไฟฟ้ามีการแจกแจงเป็นโค้งปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น 800 ชั่วโมง และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 40 ชั่วโมง จงหาว่า กลุ่มตัวอย่างที่มีหลอดไฟ 16 หลอด จะมีโอกาสที่มีอายุเฉลี่ยของการใช้งานต่ำกว่า 775 ชั่วโมงเป็นเท่าไร ?

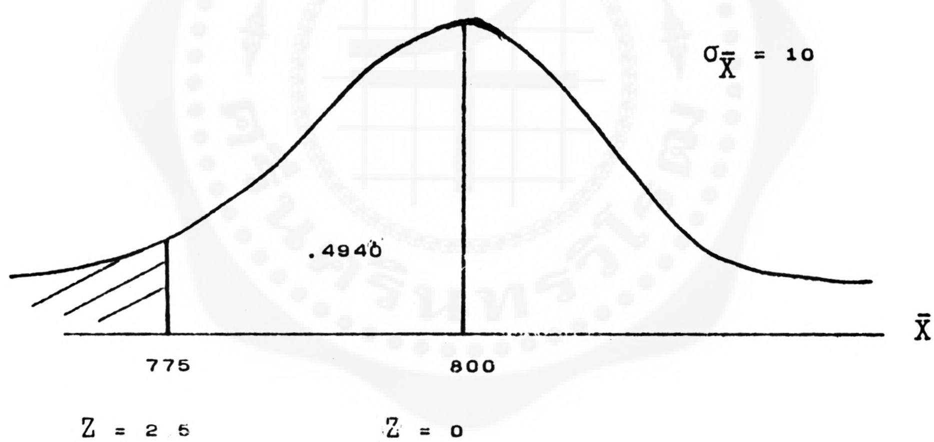
จาก $\mu_{\bar{X}} = \mu$

$\therefore \quad \mu_{\bar{X}} = 800$

และจาก $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{N}$

$\therefore \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{16}$

$= 10$



จาก $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

$$Z_{775} = \frac{755 - 800}{10} = -2.5$$

จากการเปิดตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

พื้นที่ส่วนที่น้อยกว่า 775 $= .5 - 494$

$= .006$

นั่นคือ โอกาสกลุ่มตัวอย่างขนาด 16 หลอด จะมีอายุการใช้งานเฉลี่ย ต่ำกว่า 775 เป็น .6%

<u>สรุปคุณสมบัติของการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง</u>

1. การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง มีแนวโน้มที่จะเป็นโค้งปกติ ไม่ว่าการแจกแจงของประชากรจะเป็นโค้งปกติหรือไม่

2. เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างจะมีคุณสมบัติเข้าใกล้โค้งปกติมากขึ้น

3. เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น การกระจายของค่าเฉลี่ยจะน้อยลง

4. การกระจายของความแปรปรวนจากกลุ่มตัวอย่าง จะไม่เป็นโค้งปกติ (การกระจายของความแปรปรวนมีลักษณะพิเศษเฉพาะตัว ซึ่งจะได้อธิบายในบทต่อ ๆ ไป)

การกะประมาณค่าพารามิเตอร์ (Estimation of Parameters)

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อผู้วิจัยจัดกระทำกับกลุ่มตัวอย่างแทนการจัดกระทำกับประชากรทั้งหมด ค่าฟังชั่นต่าง ๆ ที่คำนวณได้จะเป็นค่าสถิติของกลุ่มตัวอย่างนั้น และผู้วิจัยมักจะไม่รวบรวมข้อมูลทั้งหมดของประชากรเพื่อที่จะหาค่าพารามิเตอร์ แต่จะใช้ค่าสถิติที่ได้เป็นตัวกะประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ควรจะเป็น

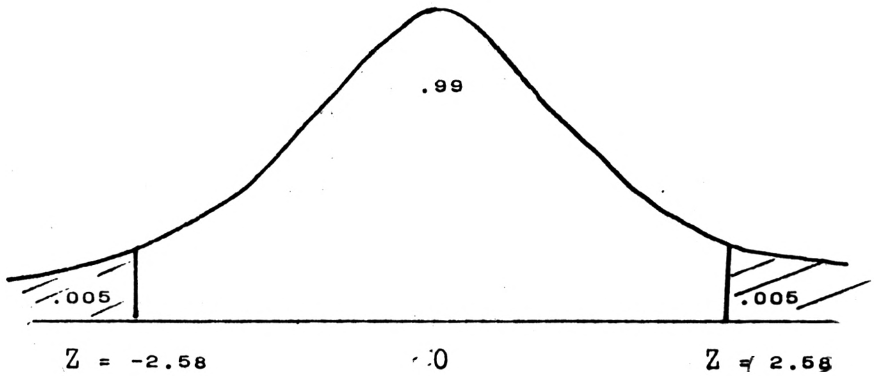
วิธีการกะประมาณค่าพารามิเตอร์มี ๒ วิธี คือ

๑. การกะประมาณแบบจุด (Point Estimation) เป็นการกะประมาณโดยใช้ค่าสถิติที่คำนวณได้จากกลุ่มตัวอย่างเป็นตัวกะประมาณค่าพารามิเตอร์เลย เช่นใช้ $\bar{X}$ เป็นตัวกะประมาณค่า μ

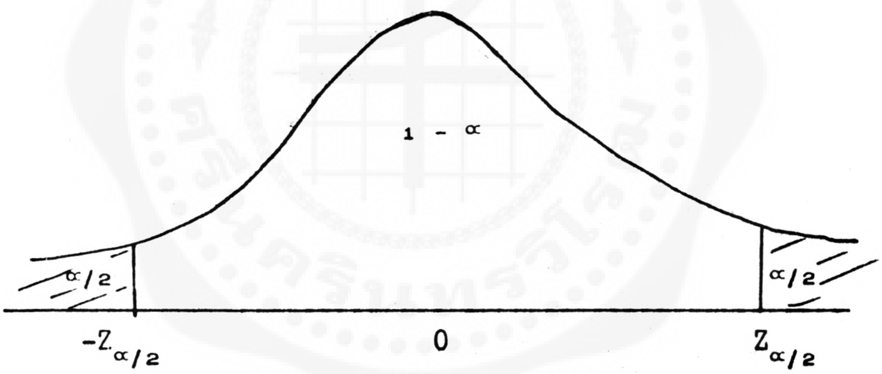
การกะประมาณแบบจุดนี้ เราไม่สามารถคิดคำนวณค่าความผิดพลาดของการกะประมาณได้ เพียงแต่คาดว่าตัวกะประมาณนั้นจะไม่ผิดไปจากค่าพารามิเตอร์มากนัก

๒. การกะประมาณแบบช่วง (Interval Estimation) เป็นการกะประมาณโดยการคาดว่า ค่าพารามิเตอร์ น่าจะมีค่าเป็นค่าใดค่าหนึ่งระหว่างจุด ๒ จุด เช่นเมื่อให้ a และ b เป็นจุด ๒ จุด และกะประมาณค่า μ ว่า $a > \mu > b$ เป็นต้น ช่วงของการกะประมาณนี้บางครั้งเรียกว่าช่วงของความเชื่อมั่น ซึ่งโดยทั่วไปจะคิดเป็นร้อยละนั่นคือพื้นที่ในช่วงระหว่างจุดที่ใช้เป็นตัวกะประมาณ จะเป็นตัวดัชนีบอกค่าความเชื่อมั่น

ตัวอย่างเช่น ถ้าการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างทั้งหลายเป็นโค้งปกติ ดังนั้นข้อมูลมาตรฐาน (ดูเรื่องโค้งปกติประกอบ) ของค่าเฉลี่ยทั้งหมด จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติด้วย ถ้าให้ช่วงของการกะประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร (μ) คือช่วงจากข้อมูลมาตรฐาน -2.58 Z ถึง 2.58 Z และจากตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติพบว่า พื้นที่ใต้โค้งระหว่าง -2.58 Z ถึง 2.58 Z เป็น .99 นั่นคือ การกะประมาณ μ ครั้งนี้มีความเชื่อมั่น .99 หรือ 99%



ถ้าให้ α (alpha) แทนพื้นที่ส่วนที่อยู่นอกเหนือช่วงการประมาณค่า ดังนั้น พื้นที่ในช่วงการประมาณค่า จะเป็น $1 - \alpha$ และพื้นที่ในแต่ละปลายทั้ง 2 ด้าน จะเป็น $\alpha/2$ และเมื่อให้ข้อมูลมาตรฐานที่ช่วงทั้งสองเป็น $Z_{\alpha/2}$ และ $-Z_{\alpha/2}$



และตามที่การแจกแจงของค่าเฉลี่ยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ ดังนั้น ความน่าจะเป็น $1 - \alpha$ คือความน่าจะเป็นที่ค่า $\bar{X}$ จะมีค่าอยู่ในช่วง $\mu \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ นั่นคือ $\mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{X} < \mu + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ และถ้าให้ค่าแตกต่างระหว่าง $\bar{X}$ และ μ เป็นค่าความผิดพลาด E (Error) นั่นคือ $E = |\mu - \bar{X}|$ ค่าสูงสุดการกะประมาณผิดพลาด (Maximum error of Estimation) จะเป็น

$$E_{max} = \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

แบบฝึกหัดและกิจกรรม

1. ค้นคว้าปริญญานิพนธ์ 5 เรื่อง และบอกถึงกลุ่มตัวอย่างและประชากรของงานวิจัยเรื่องนั้น ๆ

2. ทดลองเลือกกลุ่มตัวอย่างจากผู้เรียนในห้องอย่างสุ่มมา 10 คน โดยกล่าวถึงวิธีที่ใช้ในการเลือกกลุ่มตัวอย่าง ขบวนการ และเหตุผลที่เลือกใช้วิธีนั้น ๆ

3. จงเขียนกราฟแสดงการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง ขนาด 5 ตัวอย่าง ที่เลือกได้จากประชากรต่อไปนี้ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

4. ระดับคะแนนเฉลี่ยมาตรฐานของเด็กไทยในวิชาวิทยาศาสตร์ เป็น 62 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเฉลี่ยเป็น 18 ถ้าโรงเรียนหนึ่งแบ่งนักเรียนในระดับนี้เป็นห้องละ 30 คน อยากทราบว่าโอกาสที่นักเรียนแต่ละห้องของเขาจะได้คะแนนต่ำกว่า 60 คะแนนอยู่เท่าไร

บทที่ ๖

การทดสอบสมมติฐาน

จุดมุ่งหมาย

1. ให้ผู้เรียนสามารถบอกความแตกต่างของสมมติฐานเป็นกลาง (Null Hypothesis) และสมมติฐานไม่เป็นกลาง (Alternative Hypothesis)
2. ให้ผู้เรียนสามารถบอกถึงประเภทของความผิดพลาดของการทดสอบสมมติฐานที่อาจเกิดขึ้นในการทำวิจัยได้ เมื่อสมมติว่าผลการวิจัยยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง และเมื่อผลการวิจัยไม่ยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง
3. ให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นของความผิดพลาดประเภทที่ I หรือ II ได้
4. เพื่อยกตัวอย่างหัวข้อการวิจัยในด้านต่าง ๆ ให้ผู้เรียนสามารถเลือกตัดสินใจว่าจะให้ความผิดพลาดประเภทที่ I เกิดขึ้นมาก หรือน้อย โดยบอกเหตุผลประกอบได้ถูกต้อง
5. ให้ผู้เรียนสามารถบอกวิธีเพิ่มอำนาจในการทดสอบได้

เนื้อหา

- ความหมายของสมมติฐานและการทดสอบสมมติฐาน
- ความผิดพลาดประเภทที่ I และความผิดพลาดประเภทที่ II
- ความน่าจะเป็นของการเกิดความผิดพลาดแบบที่ I
- การกำหนดพื้นที่ส่วนที่เป็น α และการตรวจสอบสองทางและทางเดียว
- ความน่าจะเป็นของการเกิดความผิดพลาดแบบที่ II
- การคำนวณความน่าจะเป็นแบบ I และแบบ II
- อำนาจของการทดสอบ
- องศาแห่งความเป็นอิสระ

การทดสอบสมมติฐาน (Testing Hypothesis)

ความหมายของสมมติฐานและการทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐานทางสถิติ คือการคาดการณ์ค่าพารามิเตอร์ของคุณลักษณะใดคุณลักษณะหนึ่งของประชากรหนึ่ง ๆ หรือหลายประชากร

การทดสอบสมมติฐาน คือการหาข้อสรุปว่าจะยอมรับว่าสมมติฐานที่ตั้งขึ้นนั้นเป็นจริงหรือไม่ การลงสรุปที่จะยอมรับหรือไม่ยอมรับ (ปฏิเสธ) สมมติฐานซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าพารามิเตอร์ นั้นจะถูกต้องแน่นอนก็ต่อเมื่อเราได้สำรวจ หรือตรวจสอบคุณลักษณะนั้น ๆ จากประชากรทั้งหมด แต่ในการวิจัยจริง ๆ บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยจะตรวจสอบสมมติฐานจากกลุ่มตัวอย่างแทนประชากรทั้งหมด การลงสรุปจากการตรวจสอบกลุ่มตัวอย่างนี้ จะต้องหาวิธีการใดที่จะทำให้การลงสรุปนั้น ๆ มีความผิดพลาดน้อยที่สุด หรือมีการเสี่ยงน้อยที่สุดที่จะลงสรุปผิด ๆ

ตัวอย่างเช่น ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง เรามีการคาดการณ์ หรือสมมติฐานว่าสัดส่วนของการขึ้น หัว : ก้อย น่าจะเป็น 1 : 1 และเมื่อทำการทดสอบโยนเหรียญนั้นดู 10 ครั้ง ปรากฏว่า เหรียญขึ้นหัว 6 ครั้ง ก้อย 4 ครั้ง ซึ่งจากการทดสอบโยนเพียง 10 ครั้งนี้ อัตราส่วนของการขึ้นหัวต่อก้อยเป็น 6 : 4 หรือ 3 : 2 และจากผลของการทดลองนี้เองจะไม่ตรงกับสมมติฐานที่ว่า อัตราส่วนของหัวต่อก้อยน่าจะเป็น 1 : 1 แต่ในการวิจัยอีกครั้งหนึ่งได้ทำการทดลองโยนเหรียญ 2000 ครั้ง ปรากฏว่าขึ้นหัว 998 ครั้ง ขึ้นก้อย 1002 ครั้ง อัตราส่วนของหัวต่อก้อยเป็น 998 : 1002 ซึ่งใกล้เคียงอัตราส่วน 1 : 1 การวิจัยครั้งหลังนี้จะมีผลใกล้เคียงกับสมมติฐานมากกว่าการทดลองครั้งแรก

จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า การตรวจสอบสมมติฐานนั้นผู้วิจัยอาจจะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งไว้แล้วแต่ผลของการวิจัยแต่ละครั้ง การยอมรับคือการยอมรับว่า สมมติฐานที่ตั้งไว้นั้นถูกต้อง ส่วนการปฏิเสธคือการสรุปว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้นั้นผิด ผู้ปฏิเสธส่วนใหญ่จะไปเลือกยอมรับเหตุการณ์อื่นที่ตรงกันข้ามกับสมมติฐานนั้น ๆ แทน

โดยทั่วไป สมมติฐานที่เราคาดการณ์ขึ้น เราจะเรียกว่าสมมติฐานเป็นกลาง (Null Hypothesis) ใช้สัญลักษณ์ Ho ส่วนสมมติฐานที่ตรงข้ามกับสมมติฐานเป็นกลาง เรียกว่าสมมติฐานไม่เป็นกลาง (Alternative Hypothesis) ใช้สัญลักษณ์ H1 แทน การตั้งสมมติฐานที่เป็นกลางของผู้วิจัย ผู้วิจัยอาจจะตั้งขึ้นโดยอาศัยทฤษฎี หรือเหตุผลสนับสนุนเบื้องหลัง

จากตัวอย่างการโยนเหรียญที่กล่าวมาแล้วข้างต้น จะมีสมมติฐานเป็นดังนี้

H_0 : p (สัดส่วน) = 1 : 1

H_1 คือสิ่งที่ตรงข้ามกับ H_0 นั่นคือ

$H_1 : p \neq 1 : 1$

ถ้าผู้วิจัยทำการทดลองหรือตรวจสอบแล้วพบว่า เขาไม่สามารถยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง (H_0) เขาจะไปยอมรับสิ่งที่ตรงข้ามคือสมมติฐานไม่เป็นกลาง (H_1) แทนจากตัวอย่างข้างบน ถ้ามีการยอมรับ H_1 ที่ว่า $p \neq 1 : 1$ หมายความว่า ค่าของ p อาจจะเป็นอะไรก็ได้ ยกเว้น 1 : 1 เช่น p = 1 : 2, p = 2 : 1, p = 3 : 4 ฯลฯ

ถ้าในการวิจัย ผู้วิจัยคาดว่าคนไทยมีส่วนสูงโดยเฉลี่ยเป็น 161 เซ็นติเมตร สมมติฐานในการทดสอบสมมติฐานจะเป็นดังนี้

$H_0 : \mu = 161$ ซม.

$H_1 : \mu \neq 161$ ซม.

ถ้ามีการยอมรับ H_1 ที่ว่า $\mu \neq 161$ นั่นคือ ค่าของ μ จะเป็นอะไรก็ได้ ยกเว้น 161 หรือเรียกได้ว่า ค่า $161 > \mu > 161$

ในการทดสอบสติปัญญา (IQ) ผู้วิจัยคาดว่า ชาวยุโรป ชาวเอเชีย และชาวอัฟริกามีความแปรปรวนของระดับสติปัญญาไม่แตกต่างกัน สมมติฐานในการทดสอบก็จะเป็น

$H_0 \; : \; \sigma^2_{\text{ยุโรป}} = \sigma^2_{\text{เอเชีย}} = \sigma^2_{\text{อัฟริกา}}$

$H_1 \; : \; (\sigma^2_{\text{ยุโรป}} = \sigma^2_{\text{เอเชีย}} = \sigma^2_{\text{อัฟริกา}})'$

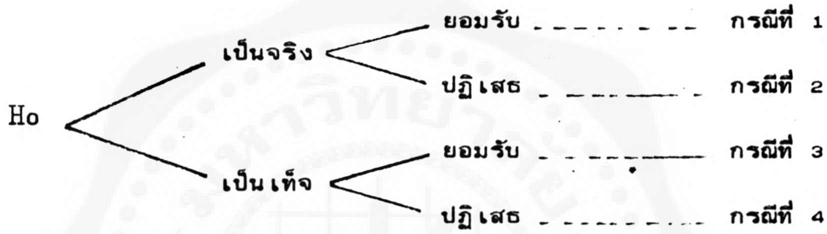
หมายเหตุ $(\sigma^2_{\text{ยุโรป}} = \sigma^2_{\text{เอเชีย}} = \sigma^2_{\text{อัฟริกา}})'$ หมายความว่า ข้อความที่ว่าความแปรปรวนของชาวยุโรป เท่ากับความแปรปรวนของชาวเอเชีย เท่ากับความแปรปรวนของชาวอัฟริกาไม่เป็นจริง กล่าวคือ อาจจะมีความแปรปรวนคู่ใดคู่หนึ่งที่ไม่เท่ากัน หรือความแปรปรวนทุกตัวไม่เท่ากันทั้งหมด ฯลฯ

ความผิดพลาดประเภท I และประเภท II (Type I and Type II error)

ในการตั้งสมมติฐานเป็นกลาง ผู้วิจัยจะเป็นผู้กำหนดขึ้นโดยอาศัยกฎเกณฑ์ ทฤษฎี ผลงานวิจัย หรือความรู้ต่าง ๆ มาช่วยในการกำหนดสมมติฐานเป็นกลาง บางครั้งสมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้น อาจถูกต้องตามความเป็นจริง แต่บางครั้งก็อาจจะผิดโดยที่ไม่มีผู้ใดทราบ ตัวอย่างเช่น ผู้วิจัยผู้หนึ่งตั้งสมมติฐานเป็นกลางเกี่ยวกับการเกิดเป็นชายหรือหญิงว่า อัตราส่วนที่จะเกิดเป็นชายต่อหญิง = ๑ : ๑ โดยผู้วิจัยได้อาศัยทฤษฎีของความน่าจะเป็นเข้าช่วยในการตัดสินใจ แต่ในปัจจุบันวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์เจริญขึ้นมาก ทำให้มนุษย์มีส่วนในการกำหนดเพศของบุตรที่จะเกิดได้ และอาจจะมีผลต่ออัตราส่วนของเพศของบุตร ดังนั้นการตั้งสมมติฐานเป็นกลางว่า อัตราส่วน ชาย : หญิง เป็น ๑ : ๑ อาจจะยังถูกอยู่ หรืออาจผิดไม่มีผู้ใดทราบ กล่าวคือในการตั้งสมมติฐานเป็นกลางครั้งหนึ่ง ๆ สิ่งที่อาจจะเป็นไปได้มี ๒ กรณี คือ สมมติฐานที่ตั้งขึ้นนั้นเป็นจริง (ถูก) หรือเป็นเท็จ (ผิด)

```
      ┌ เป็นจริง
Ho ──┤
      └ เป็นเท็จ
```

และดังที่ทราบแล้วว่า การทดสอบสมมติฐาน คือการตรวจสอบว่ามีเหตุผลเพียงพอหรือไม่ที่จะยอมรับ หรือปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้น ดังนั้น ไม่ว่าสมมติฐานเป็นกลางที่ผู้วิจัยได้ตั้งไว้จะเป็นจริงหรือเท็จก็ตาม ผลจากการตรวจสอบก็จะมีอยู่ 2 กรณี คือ ยอมรับ หรือ ปฏิเสธ กล่าวคือ เมื่อสมมติฐานเป็นกลางเป็นจริง ก็อาจจะถูกยอมรับ หรือปฏิเสธ หรือเมื่อสมมติฐานเป็นกลางเป็นเท็จก็อาจจะถูกยอมรับหรือปฏิเสธได้เช่นกัน เหตุการณ์ต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นในการทดสอบสมมติฐานจึงมี 4 กรณี ดังนี้คือ



จากเหตุการณ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้ง 4 กรณี จะเห็นได้ว่า กรณีที่ 1 เป็นการยอมรับ Ho เมื่อ Ho เป็นจริง ซึ่งการยอมรับในสิ่งที่เป็นจริงเป็นสิ่งที่ดี ถ้าการทดสอบสมมติฐานในการวิจัยเป็นไปตามกรณีนี้ แสดงว่าการวิจัยครั้งนี้ไม่มีความผิดพลาดเกิดขึ้น

ในกรณีที่ 2 เป็นการปฏิเสธสิ่งที่เป็นจริง การวิจัยที่เกิดผลในกรณีเช่นนี้แสดงว่าผู้วิจัยได้ทำความผิดพลาดเกิดขึ้นตอนใดตอนหนึ่ง จึงไม่สามารถหาเหตุผลหรือข้อมูลมาสนับสนุน Ho ได้เพียงพอ หรือข้อมูลที่ได้มาเกิดมีความผิดพลาด ทำให้ผู้วิจัยต้องปฏิเสธ Ho การปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลางที่เป็นจริง (Reject true Null Hypothesis) นี้ ในทางวิจัยถือว่าเป็นความผิดพลาดแบบที่ I (Type I error)

ในกรณีที่ 3 เป็นการยอมรับ Ho ที่เป็นเท็จ (Accept False Null Hypothesis) นับว่าเป็นความผิดพลาดอย่างหนึ่ง ซึ่งอาจเกิดจากความผิดพลาดในการหาทฤษฎีสนับสนุนการตั้งสมมติฐานที่เป็นกลาง หรือผิดพลาดในการเลือกกลุ่มตัวอย่าง การเก็บข้อมูล ฯลฯ ทำให้ข้อมูลที่ได้มา เป็นเหตุผล ผู้วิจัยต้องยอมรับ Ho โดยที่ Ho ที่ตั้งไว้นั้นผิด ความผิดพลาดชนิดนี้ในทาง

วิจัยเรียกว่าเป็นความผิดพลาดแบบที่ II (Type II error)

ในกรณีที่ 4 การปฏิเสธสิ่งที่เป็นเท็จ นับว่าเป็นสิ่งที่ถูกต้อง ดังนั้นการสรุปผลการวิจัยเป็นไปตามกรณีนี้ แสดงว่าไม่มีความผิดพลาดจากการทำวิจัยครั้งนี้

Ho	ยอมรับ	ปฏิเสธ
จริง	-	ผิดพลาดแบบ I
เท็จ	ผิดพลาดแบบ II	-

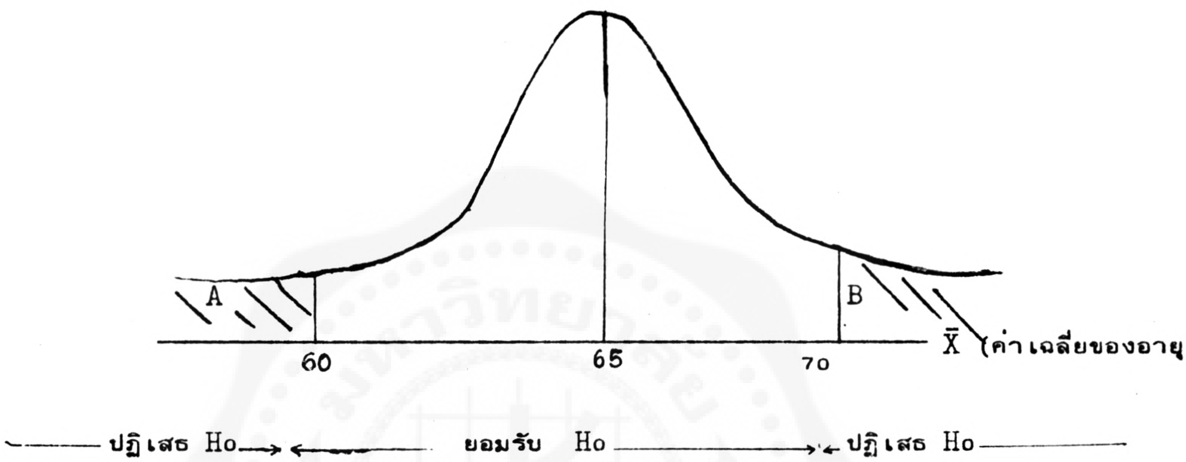
ตารางแสดงความผิดพลาดแบบที่ I และแบบที่ II

<u>ความน่าจะเป็นของการเกิดความผิดพลาดแบบที่ I</u>

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า สมมติฐานเป็นกลางที่ผู้วิจัยตั้งขึ้นด้วยเหตุผลใด ๆ ก็ตาม ไม่มีผู้ใดรู้ได้ว่าถูกหรือผิด จนกว่าจะได้มีการหาค่าพารามีเตอร์ที่แท้จริงของประชากรเหล่านั้นเสียก่อน ซึ่งถ้ามีการหาค่าพารามีเตอร์ของประชากรได้จริงแล้ว การทดสอบสมมติฐานก็ไม่จำเป็นต้องมีขึ้น เพราะสามารถลงสรุปการวิจัยได้จากค่าของพารามีเตอร์โดยตรง โดยไม่มีความผิดพลาดใด ๆ ทั้งสิ้น

การตั้งสมมติฐานและการตรวจสอบสมมติฐาน เกิดจากในกรณีที่ผู้วิจัยไม่ทราบค่าพารามีเตอร์ที่แท้จริงของประชากร แต่ทราบเพียงค่าสถิติที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างของประชากรเหล่านั้น ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ผู้วิจัยจะไม่ทราบว่า สมมติฐานเป็นกลางที่ได้ตั้งขึ้นนั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ในการตรวจสอบสมมติฐานผู้วิจัยต้องเป็นผู้กำหนดไว้ในการวิจัยของตนว่า ใช้ลักษณะใด สมมติฐานที่ตั้งขึ้นจึงน่าจะเป็นสมมติฐานที่ผิด การกำหนดอาจทำได้โดยกำหนดช่วงของการยอมรับ เช่น ถ้าตั้งสมมติฐานเป็นกลางว่า คนไทยมีอายุโดยเฉลี่ยเป็น ๖๕ และถ้าอายุเฉลี่ยยังอยู่ในช่วง ๖๐ - ๗๐ ก็ยังถือว่าอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ แต่ถ้าแตกต่างไปจากนี้ก็จะถือว่าสมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้นนั้นผิด โดยที่การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรมีลักษณะเป็น

โค้งปกติ ดังนั้น บริเวณของการยอมรับและปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลางจากการกำหนดช่วงจะเป็นดังนี้



ภาพแสดงการยอมรับ Ho เมื่อ $60 \leq \bar{X} \leq 70$

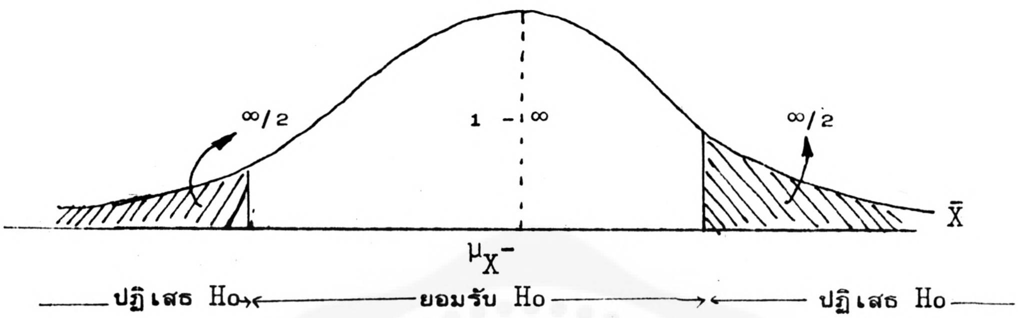
การกำหนดช่วงการยอมรับ ผู้วิจัยสามารถคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นจากพื้นที่ของส่วนที่คาดว่า ถ้าสมมติฐานที่เป็นกลางอยู่ในช่วงเหล่านี้ ถือว่าผิด ในรูปได้แก่พื้นที่ A และ B

อีกวิธีหนึ่งของการกำหนดความผิดพลาดของสมมติฐานเป็นกลางที่อาจจะเกิดขึ้น อาจทำได้โดยผู้วิจัยเป็นผู้กำหนดว่า จะให้โอกาสของการเกิดความผิดพลาดแบบนี้เป็นเท่าไร ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้วิจัยกำหนดว่า ให้การวิจัยของตนมีโอกาสเกิดความผิดพลาดแบบที่ I เป็น .01 หรือ 1% ซึ่งหมายความว่า ถ้าเขาพบว่าการวิจัยของเขาต้องปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลางแล้วมีโอกาสอยู่ 1% ที่เขาจะปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นจริง ค่าของโอกาสที่อนุญาตให้เกิดความผิดพลาดแบบที่ I นี้ บางทีเรียกว่าค่า แอลฟ่า (α) ดังนั้น บางครั้งความผิดพลาดแบบที่ I จะถูกเรียกว่าความผิดพลาดแบบแอลฟ่า (α - error) เมื่อให้ความผิดพลาดแบบที่ I .01 นั่นคือ ค่า α = .01

การกำหนดค่า α จะเล็กหรือใหญ่นั้นขึ้นอยู่กับผู้วิจัย โดยผู้วิจัยควรจะศึกษาจากทฤษฎีและกฎเกณฑ์เบื้องหลังของสิ่งที่เกี่ยวข้องกับเรื่องในการวิจัยครั้งนั้น ๆ เสียก่อน ถ้าผู้วิจัยมั่นใจว่า สมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้นมีโอกาสที่จะเป็นเท็จหรือผิดได้น้อยมาก กล่าวคือมั่นใจว่าสมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้นถูกต้อง การวิจัยก็ควรที่จะกำหนดค่า α ไว้ต่ำ ๆ เช่น .01 หรือ .001 เพื่อที่จะทำให้โอกาสของการยอมรับสมมติฐานมีมากขึ้น (เมื่อ α = 1% โอกาสของการยอมรับเป็น 99% เมื่อ α = .001 โอกาสของการยอมรับเป็น 99.9%) เพราะการยอมรับสมมติฐานที่เป็นจริงจะไม่ทำให้ผู้วิจัยทำความผิดพลาดใด ๆ จากการวิจัยครั้งนี้ (เหตุการณ์ในกรณีที่ 1) หรือในกรณีที่ถ้าเกิดความผิดพลาดทางด้านการปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นจริงแล้วเสียหายน้อยกว่าการยอมรับสมมติฐานที่เป็นเท็จ เช่น เมื่อเราคาดว่าคน ๆ หนึ่งเป็นขโมย ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่าเขาเป็นขโมยก็จะฆ่าทิ้ง สมมติฐานที่เป็นกลางคือ ชายคนนั้นไม่ได้เป็นขโมย ถ้าตั้งค่า α มาก ๆ โอกาสที่เราจะฆ่าคนบริสุทธิ์ทิ้งก็มีมากกว่าเมื่อตั้ง α น้อย ๆ ถ้าผู้วิจัยคิดว่า การปล่อยให้คนผิดอยู่ไม่เสียหายเท่าฆ่าคนบริสุทธิ์ทิ้ง ก็ควรตั้งค่า α ต่ำ ๆ เช่น .0001 เพื่อให้โอกาสที่จะเกิดความผิดพลาดแบบที่ I มีต่ำมาก แต่เมื่อผู้วิจัยไม่มั่นใจนักว่า สมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งขึ้นจะถูกต้อง ผู้วิจัยควรจะกำหนดค่า α มาก ๆ เช่น .05 หรือ .1 เพื่อให้โอกาสที่จะปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลางมีมากขึ้น และการปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลางที่ผิด จะไม่ทำให้ผู้วิจัยทำความผิดพลาดใด ๆ เกิดขึ้น (เหตุการณ์ในกรณีที่ 4)

<u>การกำหนดพื้นที่ส่วนที่เป็น α และการตรวจสอบ 2 ทางและทางเดียว</u>

เนื่องจากการกระจายของ $\bar{x}$ ของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรหนึ่ง ๆ จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ โดยมี $\mu_{\bar{X}} = \mu$ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{N}$ ดังนั้นการกำหนดพื้นที่ส่วนที่เป็น α จึงกำหนดไว้ในส่วนที่เบี่ยงเบนจาก $\mu_{\bar{X}}$ เพราะกลุ่มตัวอย่างที่มีค่าเฉลี่ยเบี่ยงเบนจาก μ มากที่สุด มีโอกาสจะเป็นกลุ่มตัวอย่างที่มีคุณลักษณะแตกต่างจากประชากรมากที่สุด การกำหนดพื้นที่ α จึงอาจกำหนดไว้ที่ปลายทั้ง 2 ข้างของการแจกแจง ดังรูป



ภาพแสดงการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง และการกำหนดพื้นที่ส่วนที่เป็น α

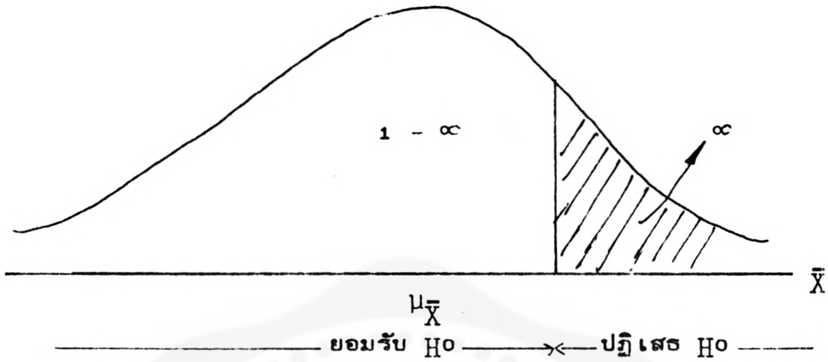
พื้นที่ส่วนแรเงาในรูปคือพื้นที่ส่วนที่จะปฏิเสธ Ho เมื่อค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างตกอยู่ในบริเวณพื้นที่เหล่านี้ บริเวณพื้นที่เหล่านี้บางทีเรียกว่าพื้นที่วิกฤต (Critical Region) เมื่อ α = .01 หมายถึงพื้นที่วิกฤตทั้งหมดเป็น .01 หรือ 1 ใน 100 ส่วน ดังนั้นในรูปเมื่อแบ่งพื้นที่วิกฤตออกเป็น 2 ข้างเช่นนี้ พื้นที่วิกฤตแต่ละด้านจึงเป็น $\alpha/2$ = .005 การกำหนดพื้นที่วิกฤตเป็น 2 ด้านนี้ เรียกว่าการทดสอบแบบ 2 ข้าง (Two-sided Test or Two-tailed Test) สมมติฐานในการตรวจสอบจะเป็นดังนี้

$$H_0 \;:\; \theta_1 = \theta_2$$

$$H_1 \;:\; \theta_1 \neq \theta_2$$

เมื่อ θ คือค่าพารามีเตอร์ใด ๆ ก็ตาม

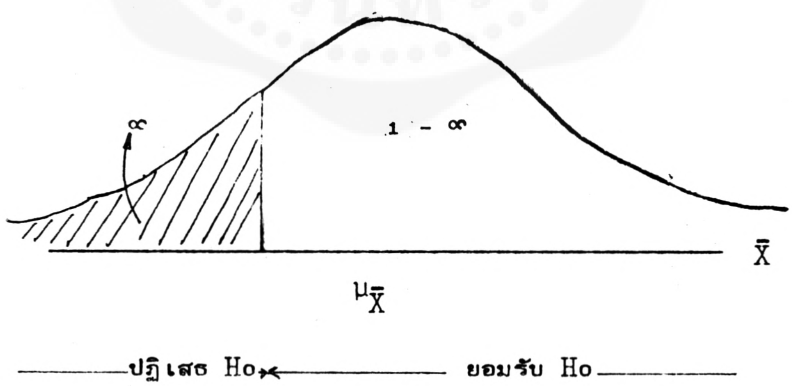
ในบางกรณีผู้วิจัยกำหนดพื้นที่วิกฤต α ไว้ด้านใดด้านหนึ่งเพียงด้านเดียว เพราะมีเหตุผลสนับสนุนว่า ถ้าผลการวิจัยปฏิเสธสมมติฐานเป็นกลาง เหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นเป็นเพียงด้านใดด้านหนึ่งจาก μ เท่านั้น การทดสอบแบบนี้เรียกว่าการทดสอบด้านเดียว (One-sided Test or One-tailed Test) โดยมีลักษณะการทดสอบและสมมติฐานดังนี้คือ



H_0 : $\theta_1 = \theta_2$

H_1 : $\theta_1 > \theta_2$

หรือ

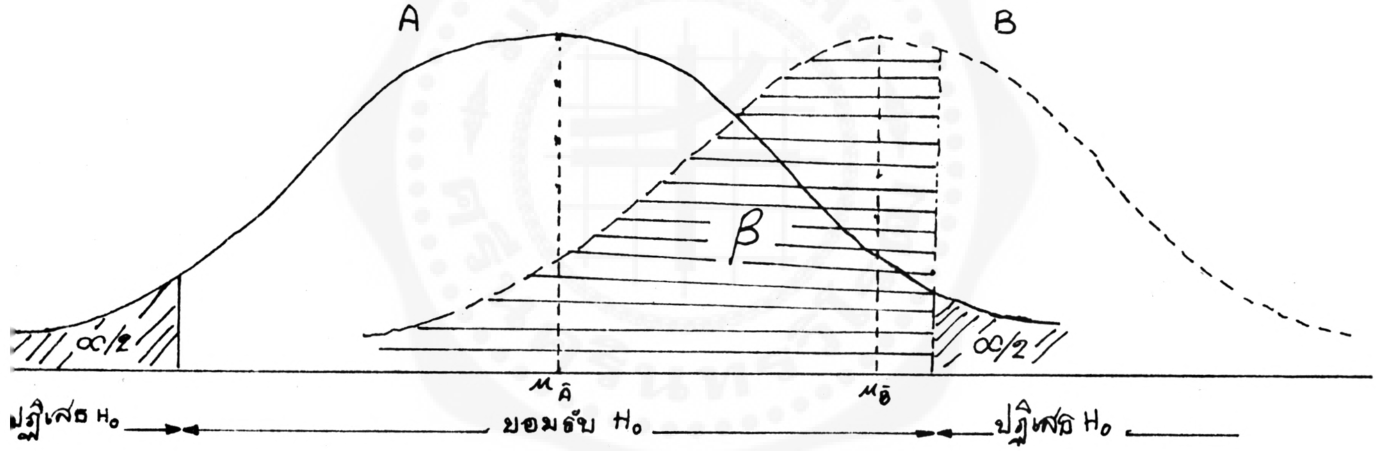


H_0 : $\theta_1 = \theta_2$

H_1 : $\theta_1 < \theta_2$

ความน่าจะเป็นของการเกิดความผิดพลาดแบบที่ II

ความผิดพลาดแบบที่ II จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ การทดสอบพบว่าจะต้องยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง และสมมติฐานเป็นกลางที่ตั้งไว้นั้นผิด หรือเป็นเท็จ การคำนวณหาความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ II คือการคำนวณหาพื้นที่ของโค้งปกติของการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากประชากรหนึ่ง ที่เข้าไปอยู่ในเขตยอมรับของการแจกแจงค่าเฉลี่ยจากประชากรอีกประชากรหนึ่ง (พื้นที่ส่วน β ในภาพ)



ตัวอย่างเช่นเมื่อ $H_0 : \mu_A = \mu_B$

$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$

จากรูป เมื่อการแจกแจงค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจากประชากร A มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ A มีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงเป็น $\mu_{\bar{A}}$ และการแจกแจงค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจากประชากร B มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ B และมีค่าเฉลี่ยของการแจกแจงเป็น $\mu_{\bar{B}}$

ถ้า $\mu_{\bar{B}}$ ตกอยู่ในพื้นที่วิกฤต (ส่วนที่ปฏิเสธ Ho) ผลการวิจัยนี้ก็จะปฏิเสธ Ho

ซึ่งเป็นสมมติฐานเป็นกลาง ความผิดพลาดแบบ II หรือการยอมรับสมมติฐานเป็นกลางที่ผิดก็จะไม่เกิดขึ้น จะเกิดแต่ความผิดพลาดแบบ I ซึ่งเท่ากับ α

ถ้า $\mu_{\bar{B}}$ ตกอยู่ในส่วนที่ยอมรับ Ho ผลการวิจัยนี้ก็ต้องยอมรับสมมติฐานที่เป็นกลาง (ดังตัวอย่างในรูป) โอกาสที่จะเกิดความผิดพลาดแบบ II คือพื้นที่ของการแจกแจง β ที่อยู่ในเขตของการยอมรับ Ho (ส่วนที่แรเงาด้วยเส้นขวาง) กำหนดให้พื้นที่ส่วนนี้มีชื่อเรียกว่า เบต้า (β) ดังนั้น บางครั้งความผิดพลาดแบบ II จะถูกเรียกว่าความผิดพลาดแบบ เบต้า (β - error)

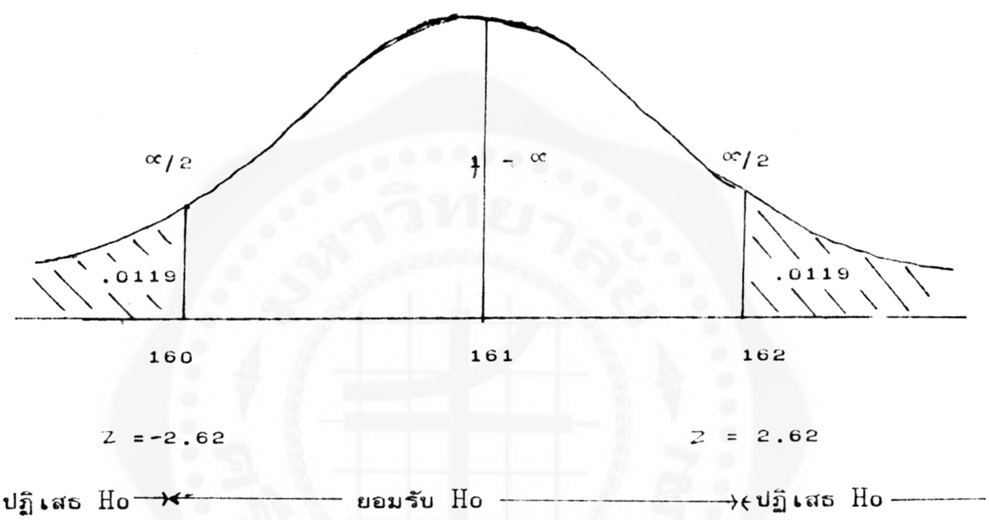
ข้อสังเกต ถ้า $\mu_{\bar{B}}$ มีค่าใกล้กับ $\mu_{\bar{A}}$ มากยิ่งขึ้น ค่าของ β จะยิ่งเพิ่มขึ้นและในทางตรงกันข้าม ถ้า $\mu_{\bar{B}}$ อยู่ห่างจาก $\mu_{\bar{A}}$ มากยิ่งขึ้น ค่าของ β ก็จะลดลง โดยเฉพาะเมื่อ $\mu_{\bar{B}}$ ห่างจาก $\mu_{\bar{A}}$ เข้าไปอยู่ในพื้นที่วิกฤต ค่าของ β จะเป็น 0 เพราะจะไม่เกิดความผิดพลาดแบบ II ขึ้น

ในการทดสอบสมมติฐาน เมื่อทราบถึงคุณลักษณะพื้นฐานของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนของประชากร และการกำหนดช่วงการยอมรับสำหรับการวิจัยครั้งนั้น ๆ เราก็สามารถหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดทั้งสองได้

ตัวอย่าง 1 จากการสำรวจกลุ่มตัวอย่างคนไทย 81 คน พบว่ามีความสูงเฉลี่ยเป็น 161 ซม. และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 3.98 และถ้าคนกลุ่มใดมีความสูงเฉลี่ยอยู่ในช่วง 160 - 162 ก็ยังถือว่ามีความสูงเฉลี่ยเท่ากับคนไทย จากการสำรวจคนลาวจำนวน 64 คน พบว่า มีความสูงเฉลี่ยเป็น 161.8 และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 4.00 จงคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ I หรือความผิดพลาดแบบ II ในการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของประชากรไทยและลาว

การคำนวณหาค่า ๙

ไทย



จาก

$$\bar{X}_{\text{ไทย}} = 161 \quad \text{ดังนั้น ค่าประมาณ} \quad \mu_{\bar{X}} = 161$$

$$S_{\text{ไทย}} = 1.86 \quad \text{ดังนั้น ค่าประมาณ} \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \frac{1.98}{\sqrt{81}}$$

$$= \frac{3.98}{9} = .442$$

ช่วงการยอมรับเป็น 160 - 162

จาก $$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

ดังนั้น ที่ $$Z_{160} = \frac{160 - 161}{.442}$$

$$= - 2.26$$

$$Z_{162} = \frac{162 - 161}{.442}$$

$$= 2.26$$

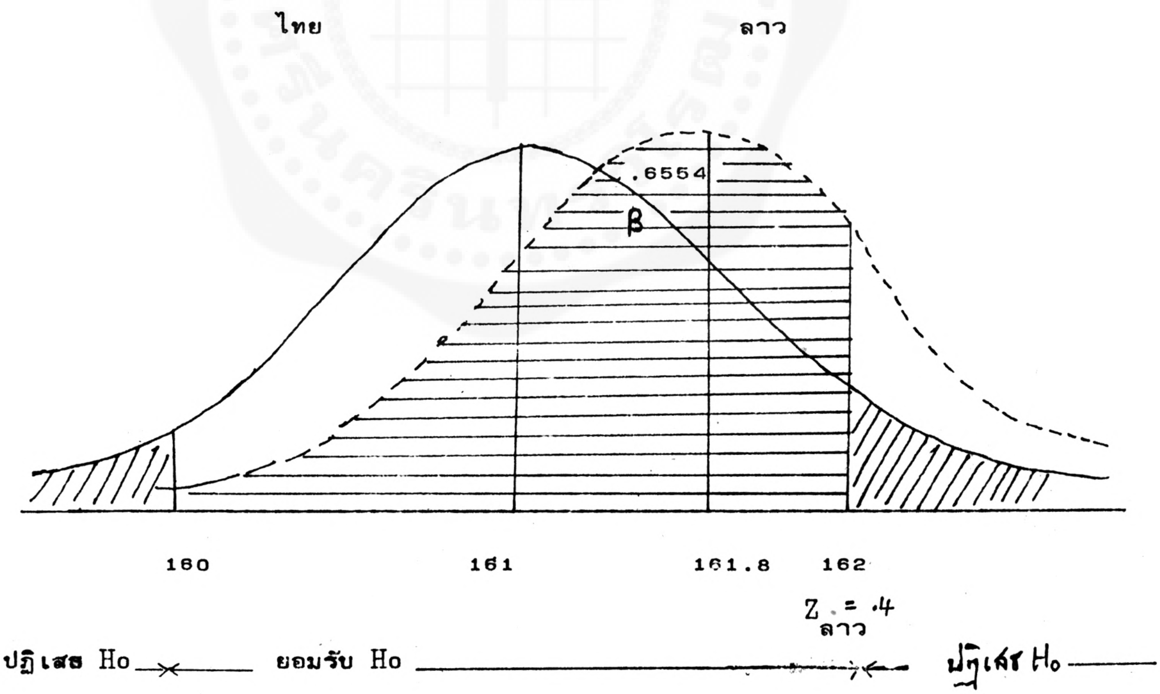
จากตารางโค้งปกติ พื้นที่นอกเขต $Z \pm 2.26$ เป็น .0119 ซึ่ง $= \alpha/2$

ดังนั้น ค่า α = .0119 + .0119

= .0238

นั่นคือ ถ้าเกิดความผิดพลาดแบบ I ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดจะเป็น .0238 หรือ 2.38%

<u>การคำนวณหาค่า β</u>



จาก $\bar{X}_{ลาว} = 161.8$ ดังนั้นค่าประมาณ $\mu_{\bar{X}} = 161.8$

$S_{ลาว} = 4.0$ ดังนั้นค่าประมาณ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{N}} = \frac{40}{\sqrt{64}}$

$$= \frac{40}{8} = .5$$

จุดที่ปฏิเสธ Ho ความสูง 162 คือ ค่าข้อมูลมาตรฐาน (ลาว)

$$= \frac{162 - 161.8}{.5}$$

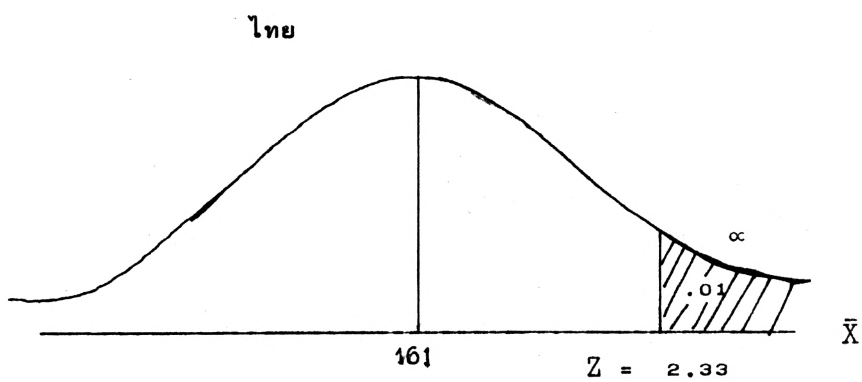
$$= .4$$

จากตารางโค้งปกติ พื้นที่ β (ส่วนที่อยู่ใต้ $Z = .4$) เป็น $= .6554$

นั่นคือความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ II เป็น .6554 หรือ 65.54%

ตัวอย่างที่ 2 จากโจทย์ในตัวอย่าง 1 ถ้าผู้วิจัยกำหนดให้ความผิดพลาดแบบ I เกิดขึ้นได้ 1% และผู้วิจัยเชื่อว่า คนลาวต้องมีส่วนสูงเฉลี่ยมากกว่าคนไทย จึงทำการทดสอบเพียงด้านเดียว จงคำนวณหาค่าความผิดพลาดแบบ II ในการทดสอบนี้

การวัดด้านเดียว และ $\alpha = 1\%$ คือพื้นที่ $\alpha = .01$



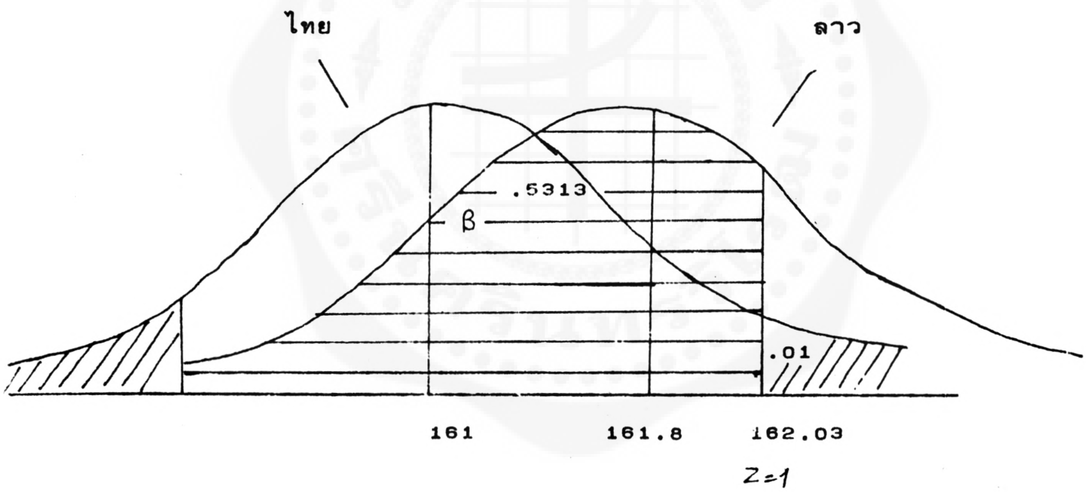
จากตารางโค้งปกติ ค่าคะแนนมาตรฐานเมื่อพื้นที่วิกฤต = .05 และอยู่ทางด้านเดียว เป็น 2.33

จาก $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$

ดังนั้น $2.33 = \dfrac{X - 161}{.442}$

$\bar{X} = .442 \times 2.33 + 161$

$= 162.03$



เมื่อ $\bar{X}$ เป็น 162.3 ค่าคะแนนมาตรฐานของประชากรลาว $= \dfrac{162.3 - 161.8}{.5}$

$= 1.0$

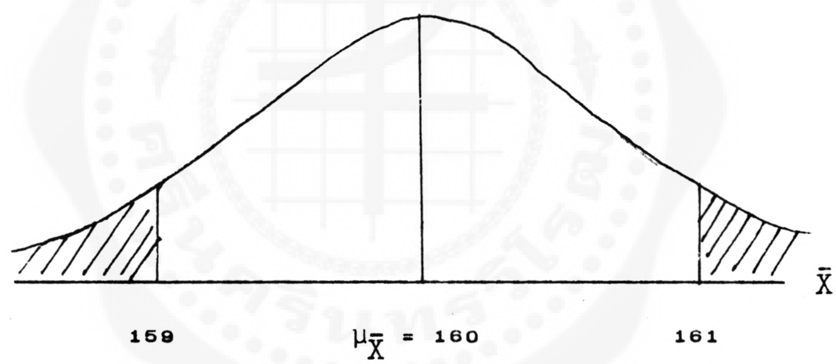
จากตาราง พื้นที่ β (ส่วนที่อยู่ใต้ Z = 1)

นั่นคือ ความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ II เป็น .8413 หรือ 84.13%

การลดค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ I และแบบ II

การที่จะลดค่าความน่าจะเป็นในการทำผิดแบบ I หรือลดค่า II ผู้วิจัยสามารถทำการลดได้โดยเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่าง หรือขยายขอบเขตของการยอมรับออกไป

ตัวอย่างเช่น ประชากรหนึ่งมีการแจกแจงของความสูงเป็นโค้งปกติ โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) เป็น 3.6 มีความสูงเฉลี่ย (μ) เป็น 160 ดังนั้น การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างขนาด 36 จะเป็นดังนี้



ถ้าให้ขอบเขตของการยอมรับสมมติฐานเป็น $159 < \bar{X} < 161$ ความน่าจะเป็นของพื้นที่ส่วนที่แรเงาคือพื้นที่ส่วนที่จะปฏิเสธสมมติฐาน (α)

ดังนั้น $\alpha = pr\ (X < 159) + pr\ (X > 161)$.

จาก $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = \dfrac{3.6}{\sqrt{36}} = .6$

จาก $Z_{\bar{X}} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}$

$$Z_{159} = \frac{159 - 160}{.6} = -1.67$$

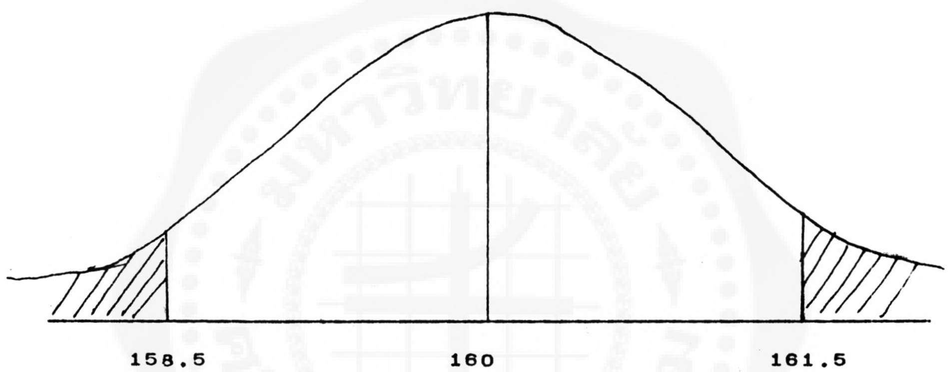
$$Z_{161} = \frac{161 - 160}{.6} = 1.67$$

พื้นที่เมื่อ $Z < -1.67 = .0475$

และพื้นที่เมื่อ $Z > 1.67 = .0475$

ดังนั้น $\alpha = .0475 + .0475 = .0950$

เมื่อขยายขอบเขตของการยอมรับจาก 159 - 161 เป็น 158.5 - 161.5



$$\alpha = pr\ (X < 158.5) + pr\ (X > 161.5)$$

$$Z_{158.5} = \frac{158.5 - 160}{.6} = -2.5$$

$$Z_{161.5} = \frac{161.5 - 160}{.6} = 2.5$$

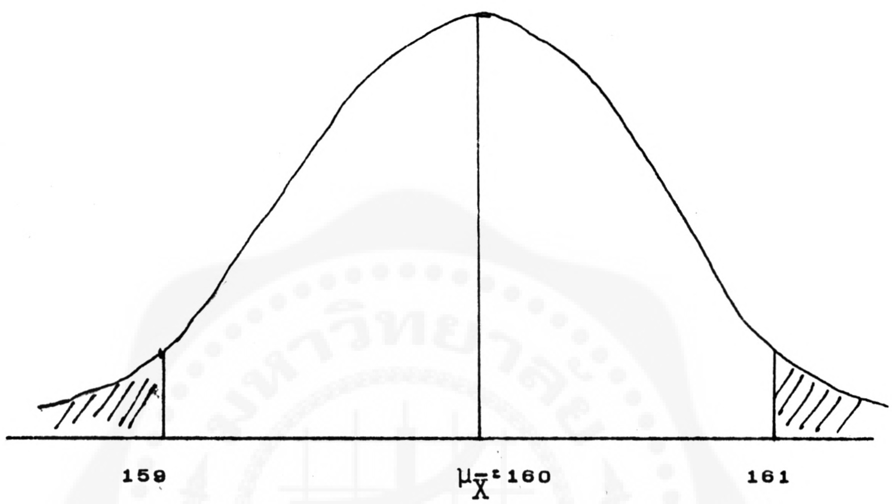
พื้นที่ส่วนที่ $Z < -2.5$ คือ $.0062$

พื้นที่ส่วนที่ $Z > 2.5$ คือ $.0062$

ดังนั้น $\alpha = .0062 + .0062 = .0124$

จะเห็นได้ว่า เมื่อขยายขอบเขตของการยอมรับค่าของ α ลดลง นั่นคือ โอกาสที่จะทำผิดแบบ I จะลดลง

หรือ เมื่อ เพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่าง สมมติให้ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง เปลี่ยนจาก ๓๖ เป็น ๖๔ ดังนั้น ค่าความคลาด เคลื่อนของการแจกแจงของค่า เฉลี่ย ($\sigma_{\bar{X}}$) จะ เปลี่ยนแปลง



จาก $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{3.6}{\sqrt{64}} = .45$

$$Z_{159} = \frac{159 - 160}{.45} = -2.22$$

$$Z_{161} = \frac{161 - 160}{.45} = 2.22$$

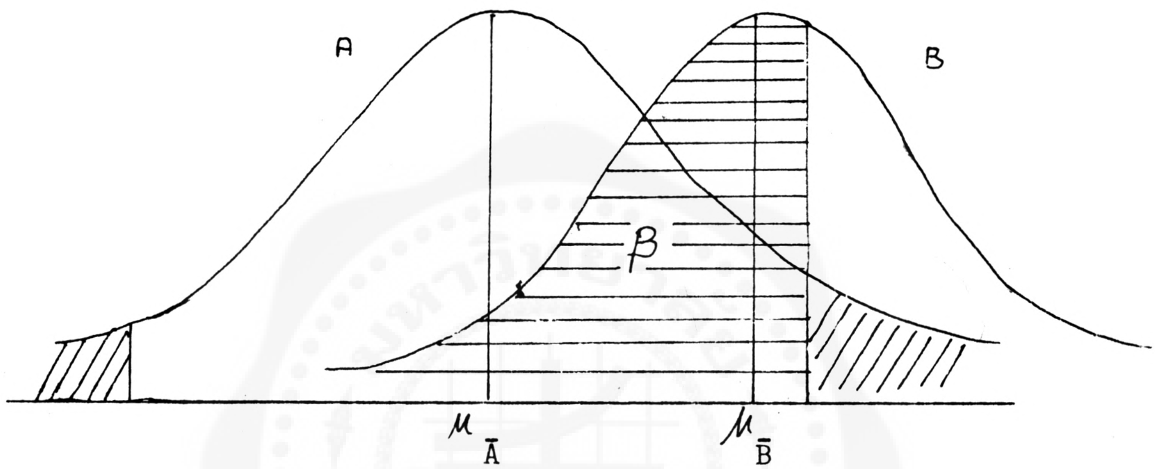
พื้นที่เมื่อ $Z < -2.22$ เป็น .0264

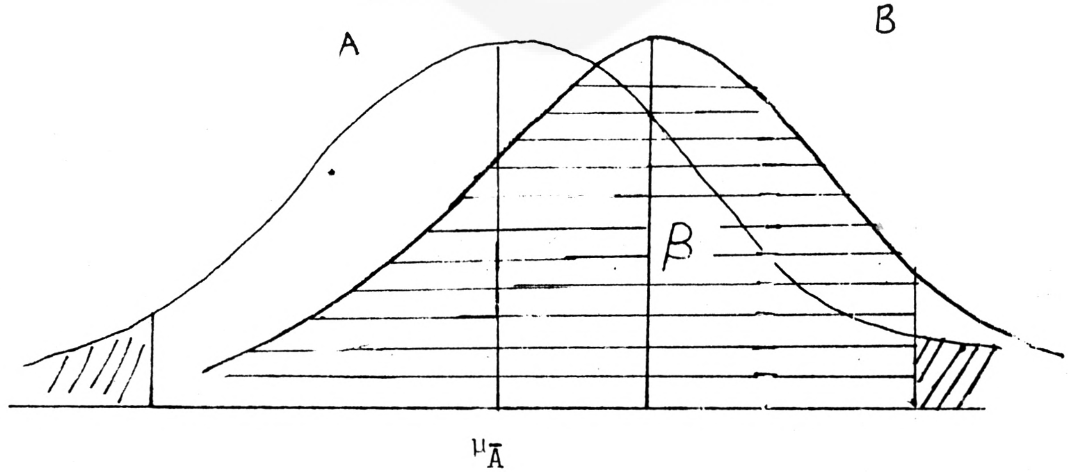
พื้นที่เมื่อ $Z > 2.22$ เป็น .0264

ดังนั้น $\alpha = .0264 + .0264 = .0528$

จะเห็นได้ว่า เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเปลี่ยนจาก ๓๖ เป็น 64 ค่าของ α จะลดลงจาก .๐๙๕๐ เป็น .๐๕๒๘

ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนแบบ II หรือค่า β จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อค่าเฉลี่ยที่ต้องการตรวจสอบเข้าใกล้ค่า ที่แท้จริง





จะเห็นได้ว่า จากภาพหลังเมื่อค่าเฉลี่ย $\mu_{\bar{B}}$ ของ B เข้าใกล้ $\mu_{\bar{A}}$ ของ A มากกว่ารูปแรก ทำให้ค่า β เพิ่มขึ้นมากกว่ารูปแรก

วิธีลดค่า β จะทำได้โดยวิธีเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่างเช่นกัน เพราะจะทำให้ค่า $6_{\bar{x}}$ ลดลงและทำให้ค่า Z ของค่าเฉลี่ยที่สองต่างกันมากขึ้น ซึ่งมีผลทำให้ค่าB ลดลงดังรูปที่กล่าวมาแล้ว

จากตัวอย่างต่าง ๆ ข้างต้น เราพอจะสรุปคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ ของความผิดพลาดทั้งสองแบบได้ดังนี้

๑. ความผิดพลาดทั้งแบบ I และแบบ II มีความสัมพันธ์กัน เมื่อพยายามลดโอกาสที่จะทำผิดแบบใดแบบหนึ่งจะทำให้โอกาสที่จะทำผิดพลาดอีกแบบหนึ่งเพิ่มขึ้น เมื่อกลุ่มตัวอย่างเท่าเดิม

๒. การปรับช่วงของการยอมรับจะเปลี่ยนแปลงค่า ∝ และ β

๓. การเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่างจะทำให้โอกาสของการทำผิดพลาดทั้ง ๒ แบบลดลง

๔. เมื่อยอมรับสมมติฐานเป็นกลาง การทำผิดแบบ β จะมากขึ้นเมื่อค่าที่ต้องการตรวจสอบใกล้เคียงกับค่าพารามีเตอร์จากสมมติฐานเป็นกลาง ถ้าค่าทั้ง ๒ แตกต่างกันยิ่งมาก ค่า β จะยิ่งลดลง

<u>อำนาจของการทดสอบ (Power of Test)</u>

ในการทดสอบสมมติฐานแต่ละครั้ง อำนาจของการทดสอบแต่ละครั้งจะขึ้นอยู่กับค่าความน่าจะเป็นของความผิดพลาดแบบ II(β) โดยอำนาจของการทดสอบแต่ละครั้งจะมีค่าเป็น 1 - β ดังนั้น ในการทดสอบใด ๆ ก็ตามถ้า β มีค่ามาก ค่าอำนาจของการทดสอบก็จะน้อย และด้วยเหตุผลเช่นเดียวกันกับการลดค่าความผิดพลาด วิธีเพิ่มอำนาจการทดสอบวิธีหนึ่งก็คือ การเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

องศาแห่งความเป็นอิสระ (Degrees of Freedom ใช้คำย่อว่า df)

องศาแห่งความเป็นอิสระของตัวแปรหนึ่ง ๆ คือจำนวนค่าสังเกตของตัวแปรที่สามารถเกิดขึ้นได้อย่างเป็นอิสระ คือมีค่าเป็นอะไรก็ได้โดยมิได้มีอะไรมาบังคับ เช่น เมื่อ X เป็นตัวแปร ถ้า X มีค่า 3 ค่า อะไรก็ได้ เราเรียกว่า X มีค่าองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น 3 แต่ในกรณีที่กล่าวว่า X 3 ค่านี้มีค่าเป็นอะไรก็ได้ แต่มีข้อจำกัด (restriction) หนึ่งข้อว่า ค่าของ X นั้นต้องรวมกันได้ 20 นั่นคือ ถ้าให้ X_1, X_2, และ X_3 เป็นค่าของ X ทั้ง 3 นั้น ข้อจำกัดจะเป็น

$$X_1 + X_2 + X_3 = 20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ข้อจำกัด } 1$$

จะเห็นได้ว่า ถ้า X_1 มีค่าเป็น 10, X_2 มีค่าเป็น 5, X_3 ต้องมีค่าเป็น 5 เท่านั้น

หรือ ถ้า X_1 มีค่าเป็น 15, X_2 มีค่าเป็น -3, X_3 ต้องมีค่าเป็น 8 เท่านั้น

หรือ ถ้า X_1 มีค่าเป็น 10, X_2 มีค่าเป็น 10, X_3 ต้องมีค่าเป็น 0 เท่านั้น

ฯลฯ

จะเห็นได้ว่า ค่าที่จะเป็นอิสระได้จะมีเพียง 2 ตัวเท่านั้น ส่วนค่าตัวที่ 3 ต้องเป็นค่าที่รวมกับค่าทั้ง 2 แล้วมีค่าเป็นไปตามข้อจำกัด ในกรณีเช่นนี้เราเรียกว่า X มีค่าองศาแห่งความอิสระเป็น 2

ถ้ามีข้อจำกัดเพิ่มขึ้นว่า

$$X_1 + X_2 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ ข้อจำกัด } 2$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถกำหนดค่าใดค่าหนึ่งได้ตามใจชอบเพียงค่าเดียว เช่น เมื่อกำหนด X = 5 ค่า X_2 ต้องเป็น 5 จึงจะเป็นไปตามข้อจำกัดที่ 2 และ X_3 ต้องเป็น 10 จึงเป็นไปตามข้อจำกัดที่ 1 เราเรียกว่า มีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ 1

องศาแห่งความเป็นอิสระจะขึ้นอยู่จำนวนข้อจำกัด เมื่อจำนวนข้อจำกัดมีมากขึ้น จำนวนองศาแห่งความเป็นอิสระจะลดลง

ในการวิจัยครั้งหนึ่ง มีข้อมูล 50 ตัว ค่าของข้อมูลทั้ง 50 ตัว จะเป็นอะไรก็ได้ขึ้นอยู่กับตัวอย่างในกลุ่มตัวอย่าง และเมื่อไม่มีข้อจำกัดใด ๆ เลย เราเรียกว่าตัวแปรตัวนั้นมีค่าองศาแห่งความอิสระเป็น 50 (df = 50) กล่าวคือ ข้อมูลแต่ละตัวต่างก็มีความเป็นอิสระในตัวมันเอง คือมีองศาแห่งความเป็นอิสระตัวละ 1 แต่ถ้าข้อมูลชุดนี้มี 50 ตัว แต่มีข้อจำกัดว่า มี $\bar{X}$ เป็น 25 จะเห็นได้ว่า ข้อมูลชุดนี้ถ้าปล่อยให้แต่ละตัวมีความเป็นอิสระก็จะมีได้เพียง 49 ตัว ส่วนตัวสุดท้าย จะต้องเป็นตัวที่เมื่อนำไปรวมแล้วจะทำให้ $\bar{X}$ ของข้อมูลชุดนี้เป็น 25 นั่นคือข้อมูลชุดนี้มีองศาแห่งความเป็นอิสระเพียง 49 จะเห็นได้ว่าเมื่อมีข้อจำกัด 1 ข้อ จะทำให้ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระลดลงไป 1 (49 = 50 - 1)

$$X_1, X_2, X_3 \;..........\; X_{50}$$

$$\bar{X} = 25 \quad .... \text{ ข้อจำกัด}$$

$$df = 50 - 1$$

ค่าสถิติหลายตัวมีองศาแห่งความเป็นอิสระไม่เท่ากัน เช่น ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยตัวแปรจะมีค่าเท่ากับจำนวนข้อมูล โดยไม่มีข้อจำกัดใด ๆ ดังนั้น ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระจะเท่ากับจำนวนข้อมูล

ในการหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$SD = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}}$$

ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) เป็นค่าคงที่ และมีเพียงค่าเดียวสำหรับข้อมูลชุดหนึ่ง ๆ ดังนั้นการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจะมีข้อจำกัด 1 ข้อ คือค่าของ $\bar{X}$ ดังนั้น SD จะมีองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น N - 1

หรือเมื่อค่าสถิติ t เป็น

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

ข้อจำกัดคือค่าคงที่ของ $\bar{X}$ ดังนั้น องศาแห่งความเป็นอิสระจะเป็น $N - 1$

แต่เมื่อค่าสถิติ t เป็น

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

ข้อจำกัดคือค่าคงที่ของ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ ดังนั้น องศาแห่งความเป็นอิสระจึงถูกลดลงด้วย ๒ เป็นต้น

แบบฝึกหัด และกิจกรรม

ให้ผู้เรียนค้นคว้างานวิจัย 5 ชิ้น และบอกถึงเรื่องต่อไปนี้ของงานวิจัย

1. สมมติฐานเป็นกลาง และสมมติฐานที่ไม่เป็นกลางทางสถิติ
2. ประเภทความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นของงานวิจัยเหล่านั้น
3. คำนวณความน่าจะเป็นของความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นที่กล่าวไว้ในข้อ 2
4. วิจารณ์ว่า ผลงานวิจัยน่าเชื่อถือได้มากเท่าใด ควรปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงค่า α หรือไม่
5. องศาแห่งความเป็นอิสระของสถิติที่ใช้ทดสอบ

บทที่ ๖

การแจกแจงไคสแควร์ (χ^2)

จุดมุ่งหมาย

1.. ให้ผู้เรียนได้รู้จักสถิติ χ^2 ที่สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่เป็นความถี่

2. ให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ได้ว่า สมมติฐานจากการทดลองเกี่ยวกับข้อมูลแบบความถี่เหล่านั้นจะใช้สถิติ χ^2 แบบใด

3. ให้ผู้เรียนสามารถตั้งสมมติฐานสำหรับการทดสอบโดยใช้สถิติ χ^2 ได้

4. ให้ผู้เรียนสามารถคำนวณ ค่า χ^2 แบบต่าง ๆ ได้

5. ให้ผู้เรียนรู้จักการแปลผลจากสถิติ χ^2

เนื้อหา

- การแจกแจงไคสแควร์
- การทดสอบความแตกต่างของสัดส่วน
- การใช้ χ^2 ทดสอบความเป็นอิสระ

  การใช้ค่าปรับเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก กับตาราง 2 × 2
- การตรวจสอบสภาวะรูปสนิทของโค้ง

การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

ไค-สแควร์ ใช้ตัวย่อว่า χ^2 เป็นสถิติที่ใช้ตรวจสอบสมมติฐานของข้อมูลที่มีคุณสมบัติเป็นความถี่ (Count or discret Data) เช่นจำนวนชาย-หญิง จำนวนผู้ลงคะแนนเสียงให้ผู้แทนเบอร์ต่าง ๆ ฯลฯ หรือสำหรับข้อมูลแบบต่อเนื่องที่ถูกบังคับให้เป็นจำนวนนับ เช่น อายุนับเป็นข้อมูลชนิดต่อเนื่อง แต่จำนวนคนที่อยู่ในช่วงอายุต่าง ๆ กันเป็นความถี่ เราอาจกล่าวได้ว่า คนที่มีอายุระหว่าง 13 - 15 ปี มี 50 คน หรือคนที่มีอายุ 20 - 22 ปี มี 30 คน ฯลฯ จำนวนข้อมูลอายุที่ถือตามจำนวนคนนี้ เรียกว่าข้อมูลแบบต่อเนื่องที่ถูกบังคับให้เป็นจำนวนนับ ฯลฯ

ค่าสถิติไค-สแควร์ เป็นค่าสถิติที่ยึดถือความแตกต่างระหว่างค่าความถี่ที่เกิดขึ้นจริง (observed frequency) และค่าความถี่ที่ควรจะเป็นตามทฤษฎี (expected frequency) เช่น หญิง 4 คน คลอดบุตรเป็นชาย 3 คน และหญิง 1 คน ค่า 3 และ 1 เป็นค่าความถี่ที่เกิดขึ้นจริง ส่วนตามทฤษฎีแล้ว การเกิดเป็นชาย หรือหญิง น่าจะมีอัตราส่วนเท่ากัน กล่าวคือ บุตร 4 คน น่าจะเป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน ค่า 2 และ 2 เป็นค่าความถี่ที่ควรจะเป็นตามหลักการ หรือทฤษฎี เป็นต้น ค่าไค-สแควร์คำนวณจากผลรวมค่ากำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าความถี่ที่เกิดขึ้นจริง และความถี่ที่ควรจะเป็นตามทฤษฎี และค่ากำลังสองนี้ถูกหารเฉลี่ยด้วยค่าความถี่ที่ควรจะเป็นตามทฤษฎี กล่าวคือ

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(\text{ความถี่จริง} - \text{ความถี่คาดหวัง})^2}{\text{ความถี่ที่คาดหวัง}}$$

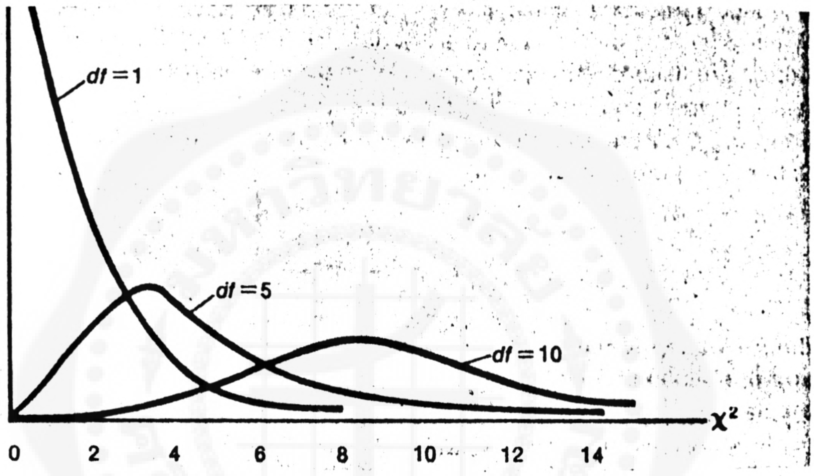
ถ้าให้ f_0 แทนความถี่ที่เกิดขึ้นจริง (observed frequency)

fe แทนความถี่ที่คาดว่าจะเกิดตามหลักการหรือทฤษฎี (Expected frequency)

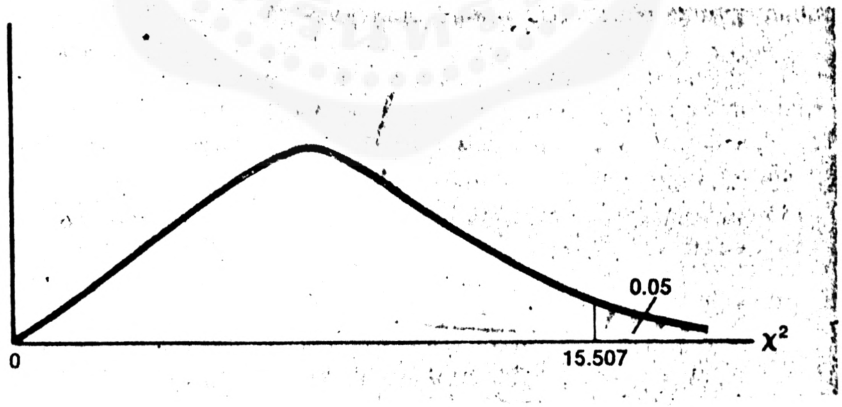
$$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_0 - fe)^2}{fe}$$

จากสูตรการคำนวณค่าสถิติไค-สแควร์ จะพบว่า ค่าของไค-สแควร์คือค่าของพื้นที่ (ยกกำลังสอง) ดังนั้น ค่าของไค-สแควร์เป็นค่าบวกเสมอ ค่าที่น้อยที่สุดของไค-สแควร์คือ 0 ซึ่งเกิดขึ้นในกรณีที่ความถี่ที่สังเกต (f_0) และความถี่ที่ตามหลักการหรือทฤษฎี (fe) เท่ากันทุกกรณีนั่นเอง

ตัวอย่างการแจกแจงไค-สแควร์ และพื้นที่วิกฤต เมื่อองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น ๘



การแจกแจง χ^2 เมื่อค่าองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น 1, 5, 10



การแจกแจง χ^2 เมื่อค่าองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น ๘

ข้อตกลงเบื้องต้นในการใช้สถิติไค-สแควร์มีดังนี้

1. กลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มต้องเป็นอิสระจากกัน

2. ความถี่หนึ่ง ๆ จะต้องเกิดในที่แห่งเดียว เช่น เมื่อนาย ก. ชอบการเมือง ก็ลงความถี่ตรงช่องที่นาย ก. ชอบการเมือง แล้วจะไปลงอีกว่า นาย ก. ไม่ชอบการเมืองไม่ได้

3. กลุ่มตัวอย่างจะต้องใหญ่พอที่จะทำให้ความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่องไม่น้อยกว่า 10 ($fe \leq 10$) ถ้ามีค่าน้อยกว่า 10 ต้องมีการปรับ เช่นรวมช่องที่ใกล้เคียงกันเป็นช่องเดียวกัน เช่นเมื่อเป็นกลุ่มนักเรียนเป็น ม.1,ม.2,ม.3,ม.3,ม.5,ม.6 อาจจะรวมเป็น ม.1-2, ม.3-4,ม.5-6 ฯลฯ แต่ในกรณีที่มีค่าองศาแห่งความเป็นอิสระเป็นเพียง 1 (มีเพียง 2 ช่อง) ถ้าเกิดการรวมช่องจะทำให้ไม่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ ในกรณีเช่นนี้ไม่ต้องมีการปรับรวมช่อง ถึงแม้ว่าความถี่ที่คาดหวังในแต่ละช่องจะน้อยกว่า 10 แต่ให้ใช้วิธีการปรับแก้ของ Yate (Yate's Crrection) ซึ่งจะได้กล่าวถึงในตอนต่อ ๆ ไป

การใช้สถิติไค-สแควร์ในการทดสอบสมมติฐานโดยทั่ว ๆ ไปจะใช้ใน 3 ลักษณะดังนี้ คือ

ก. การทดสอบความแตกต่างของสัดส่วน (Proportion)

ข. การทดสอบความเป็นอิสระ (Test of Independence)

ค. การทดสอบสภาวะรูปสนิทของโค้งต่าง ๆ (Curve Fitting)

<u>การทดสอบความแตกต่างของสัดส่วน</u>

โดยทั่วไป เราสามารถใช้ไค-สแควร์ในการทดสอบความแตกต่างของสัดส่วนในเรื่องต่าง ๆ ได้ในกรณีที่สัดส่วนเหล่านั้น คืออัตราส่วนของความถี่สองความถี่ เช่น สัดส่วนของนักเรียนห้องต่าง ๆ ที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ เป็น $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ฯลฯ ค่าสัดส่วนแต่ละตัวในที่นี้หมายถึง $\frac{\text{จำนวนนักเรียนที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้}}{\text{จำนวนนักเรียนที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยทั้งหมด}}$ ฯลฯ

การบอกถึงความถี่ในรูปเปอร์เซ็นต์ ก็หมายถึงการบอกสิ่งนั้น ๆ ในรูปของสัดส่วนที่มีจำนวนส่วนเป็น 100 นั่นเอง ตัวอย่างเช่น จำนวนผู้ไปใช้สิทธิ์ลงคะแนนเสียงของประชาชนในจังหวัดหนึ่ง เป็น 85.5% ย่อมหมายถึงสัดส่วน $\frac{85.5}{100}$ หรือ $\frac{855}{1000}$ นั่นเอง ดังนั้น การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ต่าง ๆ ของความถี่ เราก็สามารถใช้สถิติ χ^2 ตรวจสอบความแตกต่างของเปอร์เซ็นต์ได้เช่นกัน

เมื่อให้ p_i (i มีค่าตั้งแต่ $1, 2, \ldots, k$) เป็นสัดส่วนของแต่ละกลุ่มตัวอย่าง สมมติฐานในการทดสอบสัดส่วนจะเป็นดังนี้

$$H_0 : P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_k$$

H_1 : มีสัดส่วนอย่างน้อย 1 คู่ที่แตกต่างกัน

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระของการตรวจสอบสัดส่วนนี้คือ $k - 1$ เมื่อ k คือจำนวนของกลุ่มตัวอย่าง

ตัวอย่าง ในการสำรวจนิสิตมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งพบว่า นิสิตส่วนหนึ่งเห็นด้วยกับการที่ทางมหาวิทยาลัยจะอนุญาตให้นิสิตลงทะเบียนกับนิสิตภาคค่ำได้ในบางวิชา แต่นิสิตส่วนหนึ่งไม่เห็นด้วย ผู้สำรวจคาดว่า สัดส่วนของความคิดเห็นในแต่ละชั้นปีจะเท่ากัน ผลการสำรวจเป็นดังนี้

		ปี 1	ปี 2	ปี 3	ปี 4	รวม
เห็นด้วย	f_0	99	98	98	97	392
	fe	(107.8)	(102.9)	(93.1)	(88.2)	
ไม่เห็นด้วย	f_0	121	112	92	83	408
	fe	(112.2)	(107.1)	(96.9)	(91.8)	
		220	210	190	180	800

H_0 : $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ หรือสัดส่วนความคิดเห็นของนิสิตทุกชั้นปีเท่ากัน

H_1 : มีนิสิตอย่างน้อย 2 ชั้นปีที่มีสัดส่วนของความคิดเห็นแตกต่างกัน

หมายเหตุ ค่าความถี่ในวงเล็บคือค่าความถี่ที่คาดหวังซึ่งคำนวณได้โดยยึดเอาสัดส่วนของจำนวนรวมเป็นหลัก นั่นคือ สัดส่วนที่คาดหวังของการเห็นด้วย เช่น $\frac{392}{800}$ และสัดส่วนที่คาดหวังของการไม่เห็นด้วย คือ $\frac{408}{800}$ ตัวอย่างการหาค่าคาดหวังของการเห็นด้วยของนิสิตปี 1 จำนวน 220 คน คือ $\frac{392}{800} \times 220 = 107.8$

ค่าคาดหวังของการไม่เห็นด้วยของนิสิตปี 1 คือ $\frac{408}{800} \times 220 = 112.2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

ดังนั้น $$\chi^2 = \Sigma \frac{(f_0-fe)^2}{fe}$$

$$\chi^2 = \frac{(99-107.8)^2}{107.8} + \frac{(121-112.2)^2}{112.2} + \frac{(98-102.9)^2}{102.9} + \frac{(112-107.1)^2}{107.1} + \frac{(98-93.1)^2}{93.1} + \frac{(92-96.9)^2}{96.9} + \frac{(97-88.2)^2}{88.2} + \frac{(83-91.8)^2}{91.8}$$

$$= 4.093$$

จากตาราง $\chi^2_{(.05,3)} = 7.815$

ค่า χ^2 ที่คำนวณได้ (4.093) น้อยกว่า χ^2 ที่เปิดจากตาราง (7.815) ดังนั้นจึงต้องยอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือสัดส่วนความคิดเห็นของทุกชั้นปี ในเรื่องการลงทะเบียนกับนิสิตภาคค่ำเท่ากัน

การใช้ χ^2 ทดสอบความเป็นอิสระ

ในการใช้ไคสแควร์ทดสอบความเป็นอิสระ หรือความไม่ขึ้นต่อกันนี้ เป็นการตรวจสอบดูความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ให้ข้อมูลอยู่ในระดับต่ำ เช่น ระดับนามบัญญัติ หรือเรียงลำดับเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ตัวแปรการศึกษา และเพศ เมื่อตัวแปรการศึกษามีข้อมูลเป็น ไม่จบปริญญา จบปริญญาตรี จบปริญญาโท จบปริญญาเอก และเพศก็ให้ข้อมูลเป็นเพียง ชาย หญิง จะเห็นได้ว่าทั้งข้อมูลของตัวแปรการศึกษาและตัวแปรเพศ เป็นข้อมูลในระดับเรียงลำดับ และระดับนามบัญญัติ ซึ่งเป็นข้อมูลในระดับต่ำ การทดสอบไคสแควร์แบบนี้จะกำหนดค่าต่าง ๆ ของตัวแปรออกมาในรูปตารางเรียกว่า Contingency table โดยให้แต่ละด้าน (มิติ) ของตารางแทนคุณลักษณะของตัวแปรแต่ละตัว ดังตัวอย่างข้างต้นจะกำหนดเป็นตารางได้ดังนี้

ระดับการศึกษา

เพศ	ต่ำกว่าปริญญาตรี	ปริญญาตรี	ปริญญาโท	ปริญญาเอก
ชาย				
หญิง				

เมื่อใช้อักษรย่อ r แทนจำนวนแถวของตัวแปร

และอักษรย่อ c แทนจำนวนคอลัมน์ของตัวแปร

ดังนั้นตาราง Contingency table ที่ได้จะมีจำนวนช่องในตารางทั้งหมดเป็น r x c

สมมติฐานในการทดสอบความเป็นอิสระโดยใช้ไคสแควร์จะเป็นดังนี้

H_0 : ตัวแปรที่ต้องการตรวจสอบเป็นอิสระจากกัน

H_1 : ตัวแปรที่ต้องการตรวจสอบไม่เป็นอิสระจากกัน (ขึ้นต่อกัน)

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระของการตรวจสอบเป็น $(c-1)(r-1)$

ตัวอย่าง จากการใช้แบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับกฎหมายทำแท้งปรากฏว่า คนที่มีระดับการศึกษาแตกต่างกันมีความคิดเห็นแตกต่างกันดังนี้

ความคิดเห็น

การศึกษา	เห็นด้วยอย่างมาก	เห็นด้วย	เฉย ๆ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างมาก	รวม
สูงกว่าปริญญา	15 (8,9)	20 (12.4)	40 (37.3)	5 (10.7)	0 (10.7)	80
จบปริญญา	10 (13.3)	15 (18.7)	70 (56.0)	20 (16.0)	5 (16.0)	120
จบมัธยม	10 (6.7)	20 (9.3)	25 (28.0)	5 (8.0)	0 (8.0)	60
จบประถม	15 (21.1)	15 (29.6)	135 (88.7)	30 (25.3)	55 (25.3)	190
รวม	50	70	210	60	60	450

H_0 : ความคิดเห็นและระดับการศึกษาเป็นอิสระจากกัน (ความคิดเห็นไม่ขึ้นอยู่กับระดับการศึกษา)

H_1 : ความคิดเห็นขึ้นอยู่กับระดับการศึกษา

หมายเหตุ ค่าในวงเล็บคือค่าความถี่ที่คาดหวังโดยคำนวณจากความน่าจะเป็นของแต่ละกรณี

ตัวอย่างเช่น คนที่จบสูงกว่าปริญญามี 80 คน นั่นคือคนทั้งหมดมีโอกาสจะเป็นคนหนึ่งในผู้จบสูงกว่าปริญญา = 80/450 และ พวกที่เห็นด้วยมากมีจำนวน 50 คน นั่นคือ โอกาสที่จะเป็นผู้เห็นด้วยมากเป็น 50/450 ดังนั้นโอกาสที่จะเป็นผู้จบปริญญาและเห็นด้วยมาก (ช่องที่ 1 แถวที่1) เป็น $\frac{80}{450} \times \frac{50}{450}$

ดังนั้นในจำนวน 450 คนน่าจะเป็นคนจำพวกนี้ $= \frac{80}{450} \times \frac{50}{450} \times 450$

$$= \frac{80 \times 50}{450} = 8.9$$

นั่นคือ fe ของผู้ที่จบสูงกว่าปริญญาและเห็นด้วยมาก = 8.9

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า

fe ของผู้ที่จบสูงกว่าปริญญาและเห็นด้วย $= \frac{70}{450} \times \frac{80}{450} \times 450 = 12.4$

$\vdots$

fe ของผู้จบประถมและไม่เห็นด้วยอย่างมาก $= \frac{60}{450} \times \frac{190}{450} \times 450 = 22.3$

จาก $\chi^2 = \Sigma \frac{(fo-fe)^2}{fe}$

$$\text{ดังนั้น } \chi^2 = \frac{(15-8.9)^2}{8.9} + \frac{(20-12.4)^2}{12.4} + \frac{(40-37.3)^2}{37.3} + \frac{(5-110.7)^2}{10.7}$$

$$+ \frac{(0-10.7)^2}{10.7} + \frac{(10-13.3)^2}{13.3} + \frac{(15-18.7)^2}{18.7} + \frac{(70-56)^2}{56}$$

$$+ \frac{(5-8)^2}{8} + \frac{(0-8)^2}{8} + \frac{(15-21.1)^2}{21.1} + \frac{(15-29.6)^2}{29.6}$$

$$+ \frac{(135-88.7)^2}{88.7} + \frac{(30-25.3)^2}{25.3} + \frac{(55-25.3)^2}{25.3}$$

$= 128.64$

$df = (5-1)(4-1) = 12$

$\chi^2_{(.01,12)} = 26.217$

ค่า χ^2 ที่คำนวณได้ (128.64) มากกว่าค่า χ^2 จากตาราง (26.217) ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก ไปยอมรับสมมติฐานอื่น นั่นคือ ความคิดเห็นต่อกฎหมายการทำแท้งเกี่ยวข้องกับระดับการศึกษาด้วย

ในกรณีที่ Contingency table เป็นแบบ 2 × 2 กล่าวคือ ทั้ง 2 คุณลักษณะต่างก็แบ่งออกเป็น 2 ระดับ ตัวอย่างเช่น การตรวจดูว่า เพศ กับ การเป็นมะเร็งจะเกี่ยวข้องต่อกันหรือไม่

การเป็นมะเร็ง

		เป็น	ไม่เป็น	รวม
เพศ	ชาย	a	b	a+b
	หญิง	c	d	c+d
	รวม	a+c	b+d	N

ถ้าให้ a, b, c และ d เป็นความถี่ที่สำรวจได้ และ N เป็นจำนวนความถี่ที่รวมทั้งหมด เราจะสรุปรวมหาค่าไคสแควร์ได้ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{N[(ad)-(bc)]^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ตัวอย่างเช่น จากตารางข้างบน เมื่อมีความถี่เป็นดังนี้

	เป็นมะเร็ง	ไม่เป็น	
หญิง	40	28	68
ชาย	50	18	68
	90	46	136

จงตรวจสอบดูว่า การเป็นมะเร็งขึ้นอยู่กับเพศหรือไม่

H_0 : การเป็นมะเร็งไม่ขึ้นกับเพศ

H_1 : การเป็นมะเร็งขึ้นกับเพศ

จาก $$\chi^2 = \frac{N\,[(ad) - (bc)]^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ดังนั้น $$\chi^2 = \frac{136\,[(40\times18) - (28\times15)]^2}{68\times68\times90\times46}$$

$$= \frac{136\,(720 - 1400)^2}{19,143,360} + \frac{62,886,400}{19,143,360}$$

$$= 3.285$$

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ (df) = (2-1)(2-1) = 1

จากตาราง $\chi^2_{(1,.05)}$ = 3.841

ดังนั้น χ^2 จากการคำนวณ < χ^2 จากตาราง

นั่นคือ ต้องยอมรับสมมติฐานที่เป็นกลางที่ว่า การเป็นมะเร็งไม่ขึ้นกับเพศ

การใช้ค่าปรับเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก กับตาราง 2×2

ในกรณีที่ค่าความถี่ที่คาดหวังมีขนาดเล็กมาก นั่นคือมีค่าน้อยกว่า 10 ค่า χ^2 ที่คำนวณได้มักจะใหญ่กว่าที่ควรจะเป็น ในกรณีที่ค่าองศาแห่งความอิสระเป็น 1 เราใช้วิธีการปรับค่าของ Yate (Yates' correction) ค่าปรับแก้นี้ปรับแก้จากข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง ไปเป็นข้อมูลแบบต่อเนื่อง ทั้งนี้เป็นเพราะค่า χ^2 เป็นการคำนวณจาก ข้อมูลที่ไม่ต่อเนื่อง ส่วนค่าต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณไคสแควร์นั้นนำไปใช้เทียบกับการแจกแจงของความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นการแจกแจงของข้อมูลแบบต่อเนื่อง เมื่อกลุ่มตัวอย่างใหญ่ ๆ ค่าความถี่ที่คาดหวังมาก ๆ ค่าปรับแก้นี้จะไม่มีผลมากนัก แต่เมื่อค่าความถี่ที่คาดหวังมีขนาดเล็ก ค่าปรับแก้จะมีผลมาก

การใช้ค่าปรับแก้ของ Yate จะใช้ในกรณีที่ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น 1 เท่านั้น โดยใช้สูตรดังนี้

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(|fo-fe|-.5)^2}{fe}$$

หรือเมื่อค่า a, b, c, d เป็นความถี่ในตารางดังนี้

a	b	
c	d	
		N

ค่าไคสแควร์หลังจากปรับแก้ด้วยค่าค่าปรับแก้ Yate จะได้ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{N\,(|ad - bc| - N/2)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

การตรวจสอบสภาวะรูปสนิทของโค้ง

การตรวจสอบสภาวะรูปสนิทของโค้ง หมายถึงการตรวจสอบดูว่าโค้งหนึ่ง ๆ มีลักษณะของโค้งเป็นไปหรือใกล้เคียงกับโค้งที่กำหนดไว้หรือไม่ การตรวจสอบทำได้โดยกำหนดหาค่าความถี่ ณ จุดต่าง ๆ ของทั้งโค้งที่กำหนดให้ และโค้งที่ต้องการเปรียบเทียบ แล้วคำนวณหาค่าสถิติไคสแควร์จากความถี่ของโค้งทั้งสอง ณ จุดต่าง ๆ เหล่านั้น

การใช้สถิติไคสแควร์ตรวจสอบสภาวะรูปสนิทนี้ จะมีองศาแห่งความเป็นอิสระเป็น $n-1$ เมื่อ n คือ จำนวนตำแหน่งของความถี่

ตัวอย่าง จากสถิติการตรวจสอบความสนใจในการใช้เวลาว่างของนิสิตระดับมหาวิทยาลัย พบว่า 40% ชอบดูโทรทัศน์ 20% ชอบเที่ยวนอกบ้าน 20% ชอบอ่านหนังสือ 10% ชอบเล่นกีฬา และอีก 10% ชอบทำกิจกรรมอย่างอื่น ๆ ในการสำรวจนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 500 คน จะพบว่าการใช้เวลาว่างของนิสิต 166 คน ชอบเล่นกีฬา 97 คน ชอบออกเที่ยวนอกบ้าน 134 คน ชอบอ่านหนังสือ 61 คน ชอบเล่นกีฬา และอีก 42 คน ชอบทำกิจกรรมอย่างอื่น ๆ จงตรวจสอบดูว่าลักษณะความสนใจของการใช้เวลาว่างของนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เหมือนกับลักษณะความสนใจของนิสิตระดับมหาวิทยาลัยโดยทั่วไปหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

	ดูโทรทัศน์	เที่ยวนอกบ้าน	อ่านหนังสือ	กีฬา	อื่น ๆ	รวม
(ความถี่ที่เกิดขึ้น) ประสานมิตร	166	97	134	61	42	500
(ความถี่คาดหวัง) มหาวิทยาลัยทั่วไป	200	100	100	50	50	500

หมายเหตุ การคำนวณค่าความถี่ที่คาดหวัง คำนวณได้จากความถี่รวมและทฤษฎีที่มีอยู่ ตัวอย่างเช่น ความถี่รวมในที่นี้เป็น 500 และ 40% ชอบดูโทรทัศน์ ดังนั้น จำนวนนิสิตที่ชอบดูโทรทัศน์น่าจะเป็น $\frac{500 \times 40}{100} = 200$ คน ฯลฯ

H_0 : ลักษณะความสนใจของนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เป็นไปตามความสนใจของนิสิตระดับมหาวิทยาลัยโดยทั่วไป

H_1 : ลักษณะความสนใจของนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร แตกต่างจากลักษณะความสนใจของนิสิตระดับมหาวิทยาลัยโดยทั่วไป

จาก $$\chi^2 = \Sigma\frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

ดังนั้น $$= \frac{(166-200)^2}{200} + \frac{(97-100)^2}{100} + \frac{(134-100)^2}{100} + \frac{(61-50)^2}{50} + \frac{(42-50)^2}{50}$$

$$= \frac{1156}{290} + \frac{9}{100} + \frac{1156}{100} + \frac{121}{50} + \frac{64}{50}$$

$$= 21.13$$

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ $= 5 - 1 = 4$

จากตาราง $\chi^2_{(4,.05)} = 9.488$

ดังนั้น χ^2 ที่คำนวณได้ $> \chi^2$ จากตาราง

นั่นคือปฏิเสธกับสมมติฐานที่เป็นกลาง (H_0) กล่าวคือยอมรับสมมติฐานที่ว่า ลักษณะความสนใจของนิสิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร แตกต่างจากลักษณะความสนใจของนิสิตมหาวิทยาลัยโดยทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่าง จากการสำรวจความสามารถทางด้านการคิดหาเหตุผลของเด็กกลุ่มหนึ่ง จำนวน 400 คน จะปรากฏว่า มีความฉลาดแบ่งเป็นระดับต่าง ๆ ได้ดังนี้

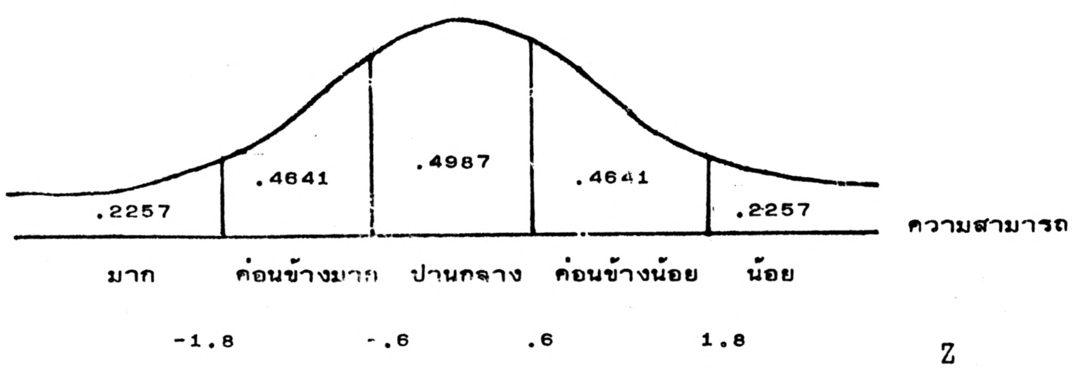
ระดับมาก	10	คน
ระดับค่อนข้างมาก	122	คน
ระดับปานกลาง	160	คน
ระดับค่อนข้างน้อย	88	คน
ระดับน้อย	20	คน

ถ้าตามทฤษฎีแล้ว ความสามารถทางด้านการคิดหาเหตุผลของเด็กในระดับนี้จะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ จงทดสอบดูว่าการแจกแจงความสามารถของเด็กกลุ่มนี้ เป็นโค้งปกติด้วยหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

H_0 : การแจกแจงของความสามารถทางด้านการคิดหาเหตุผลของเด็กกลุ่มนี้เป็นโค้งปกติ

H_1 : การแจกแจงของความสามารถทางด้านการคิดหาเหตุผลของเด็กกลุ่มนี้ไม่เป็นโค้งปกติ

ถ้าการกระจายของความถี่เป็นโค้งปกติ พื้นที่โค้งปกติของความสามารถระดับต่าง ๆ ทั้ง 5 ระดับ จะแบ่งตามพื้นที่ออกเป็นดังนี้



ดังนั้น ค่าความถี่ที่คาดหวังของนักเรียน 400 น่าจะเป็นดังนี้

ความสามารถมาก = .2257 × 400 ≅ 14 คน

ความสามารถค่อนข้างมาก = .4641 × 400 ≅ 96 คน

ความสามารถปานกลาง = .4987 × 400 ≅ 180 คน

ความสามารถค่อนข้างน้อย = .4641 × 400 ≅ 96 คน

ความสามาถน้อย = .2257 × 400 ≅ 14 คน

	มาก	ค่อนข้างมาก	ปานกลาง	ค่อนข้างน้อย	น้อย	รวม
ความถี่จริง	10	122	160	88	20	400
ความถี่คาดหวัง	14	96	180	96	14	400

จาก $\chi^2 = \Sigma \frac{(f_0-fe)^2}{fe}$

ดังนั้น $\chi^2 = \frac{(122-96)^2}{96} + \frac{(160-180)^2}{180} + \frac{(88-96)^2}{96} + \frac{(20-14)^2}{14}$

$= 6.82$

ค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ = 5-1 = 4

จากตาราง $\chi^2_{(4,.05)}$ = 9.488

ดังนั้น χ^2 คำนวณ > χ^2 จากตาราง

กล่าวคือสรุปได้ว่า ปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลาง (H_0) ยอมรับว่า การแจกแจงของความสามารถทางด้านการคิดหาเหตุผลของเด็กกลุ่มนี้ ไม่เป็นโค้งปกติ

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. ให้ผู้เรียนช่วยกันยกตัวอย่างหัวข้อการวิจัยที่น่าจะมีข้อมูลเป็นความถี่มา 5 ตัวอย่าง
2. ให้ผู้เรียนช่วยกันตัดสินใจว่า สามารมารถใช้สถิติ χ^2 แบบใดได้หรือไม่สำหรับตัวอย่างหัวข้อวิจัยในข้อ 1
3. จากการโยนลูกเต๋าลูกหนึ่ง 48 ครั้ง ปรากฏว่า

ขึ้นหน้า	1	20	ครั้ง
	2	5	ครั้ง
	3	4	ครั้ง
	4	10	ครั้ง
	5	5	ครั้ง
	6	4	ครั้ง

และต้องการตรวจสอบความสมดุลย์ของลูกเต๋าลูกนี้ที่ระดับ .05

ก. จงเขียนสมมติฐานทางสถิติ และสมมติฐานในการวิจัยของการตรวจสอบครั้งนี้

ข. จงแสดงการตรวจสอบ

ค. ถ้าความเป็นจริงลูกเต๋านี้สมดุลย์ ผู้ตรวจสอบได้ทำความผิดอะไรหรือไม่จากการตรวจสอบ

4. ถ้าจากการเก็บข้อมูลครั้งหนึ่งปรากฏว่า สัตว์ชนิดหนึ่งมีขนและขนาดดังต่อไปนี้

		สีขน		
		ดำ	ด่าง	ขาว
ขนาด	ใหญ่	10	5	5
	กลาง	2	2	6
	เล็ก	3	3	9

ถ้าต้องการตรวจสอบดูว่า สีขนและขนาดมีความสัมพันธ์หรือความเป็นอิสระต่อกัน

ก. จงตั้งสมมติฐานในการทดสอบครั้งนี้

ข. ในการทดสอบนี้ใช้สถิติอะไร

ค. จงหาจำนวนสัตว์ที่คาดหวังว่าน่าจะมีขนาดกลางและขนสีดำ ขนาดใหญ่และขนสีขาว

ง. degree of freedom ของการทดสอบเป็นเท่าไร และถ้า $\alpha = .05$ Critical region จะเริ่มจากจุดไหน

จ. ถ้าเราปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งขึ้น จะสรุปผลการทดสอบว่าอย่างไร

5. ชายแก่ผู้หนึ่งอยากจะแก้ตัวแทนสุภาษิตที่ว่า "โคแก่ชอบกินหญ้าอ่อน" เขาจึงพยายามทำการวิจัยที่สรุปว่า การชอบเด็กสาว ๆ กับอายุไม่มีความสัมพันธ์กัน นั่นคือไม่ว่าหนุ่มหรือแก่ก็ชอบเด็กสาวพอ ๆ กัน หลังจากเขาไปสอบถามชายแก่ 30 คน ปรากฏว่าเป็นผู้ชอบเด็กสาว ๆ เสีย 20 คน นอกนั้นไม่ชอบ และจากการสอบถามชายหนุ่ม 25 คน ปรากฏว่าชอบเด็กสาว 21 คน นอกนั้นไม่ชอบ

ก. จงวางแผนในการทดสอบการวิจัยให้แก่ชายผู้นี้

ข. ถ้าเขาจะได้ข้อสรุปว่า ไม่ว่าหนุ่มหรือแก่ก็ชอบเด็กสาวได้ทั้งนั้น ผลการวิจัยของเขาจะต้องยอมรับ หรือปฏิเสธสมมติฐานที่ตั้งขึ้น

6. จงแปลความหมายจากค่าสถิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

จากตารางที่กำหนดให้เป็นตารางที่ศึกษาเกี่ยวกับความคิดเห็นต่อสิ่งหนึ่งระหว่างชายหญิง จงแปลความหมายตัวเลขในตาราง

ตาราง แสดงการเปรียบเทียบความถี่ของความคิดเห็นระหว่างชายหญิง

		χ^2
ก.	ท่านชอบเรียนวิชาสถิติเพียงใด	3.24
ข.	สถิติมีประโยชน์ต่อท่านเพียงใด	9.25*
ค.	สถิติเป็นวิชาที่เรียนยากเพียงใด	2.65
ง.	สถิติเป็นวิชาที่จำเป็นสำหรับนิสิตปริญญาโทเพียงใด	13.56**
จ.	สถิติทำให้คนฉลาดหรือไม่	10.22*

*มีนัยสำคัญที่ = .05

**มีนัยสำคัญที่ = .01

บทที่ 7

การทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วน

จุดมุ่งหมาย

1. ให้ผู้เรียนได้รู้ถึงข้อจำกัดเบื้องต้นของวิธีการทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วนแบบต่าง ๆ

2. ให้นิสิตได้ฝึกหัดวิเคราะห์ข้อมูลในการทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย และสัดส่วนต่าง ๆ

3. ให้นิสิตได้ฝึกหัดแปลผลจากการวิเคราะห์ข้อมูลจากการทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วนแบบต่าง ๆ

4. ให้นิสิตสามารถเลือกใช้วิธีการทดสอบ เกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วนแบบต่าง ๆ ได้สอดคล้องกับงานวิจัย

เนื้อหา

- การทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรเดียว
- การทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรเดียวเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก
- การทดสอบค่าสัดส่วนจากประชากรเดียว
- การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจากสองประชากร
- การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจากสองประชากรเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก
- การทดสอบค่าความแตกต่างระหว่างสัดส่วน

การทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วน (Test Concerning Means and Proportions)

ค่าเฉลี่ยเป็นค่าที่นิยมใช้เป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูลต่าง ๆ เช่นเมื่อกล่าวถึงความสูงของเด็ก 10 ขวบ เป็น 100 ซม. ค่า 100 ซม. ส่วนใหญ่ก็คือค่าเฉลี่ยของเด็ก 10 ขวบ เมื่อกล่าวถึงความสามารถของชายแตกต่างจากหญิง ก็ย่อมหมายถึงความสามารถเฉลี่ยของชายแตกต่างจากค่าเฉลี่ยของหญิง เป็นต้น ดังนั้น การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยจึงเป็นสิ่งที่พบได้บ่อยมากในการวิจัย ในทำนองเดียวกัน ถ้าข้อมูลอยู่ในรูปจำนวนนับ(Countable) ค่าตัวแทนของกลุ่มมักบอกอยู่ในรูปสัดส่วน เช่น ครึ่งหนึ่งของเด็กนักเรียนชอบดูการ์ตูน หรือ 60% ของผลผลิตมีคุณภาพต่ำกว่ามาตรฐานที่ตั้งไว้ ฯลฯ

การทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรเดียว

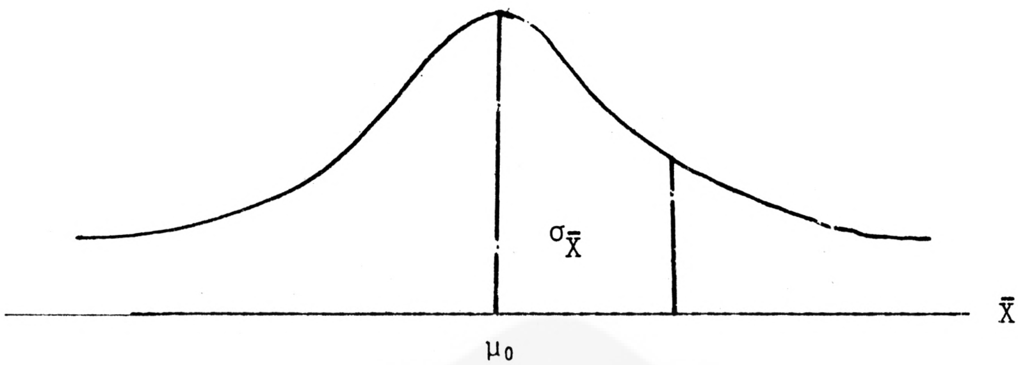
ในบางครั้ง ผู้วิจัยต้องการทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของประชากรที่ตนศึกษา จะเท่ากับค่าคงที่หนึ่ง ๆ หรือไม่ เช่น อยากทราบว่า ค่าเฉลี่ยของระดับสติปัญญาของเด็กระดับมหาวิทยาลัยเป็น 150 หรือไม่ หรือเมื่อทราบว่าอายุเฉลี่ยของการใช้งานของถังปลาสติก เป็น 5 ปี อยากทราบว่าอายุเฉลี่ยของการใช้งานของถังสังกะสีจะเป็น 5 ปีด้วยหรือไม่ เป็นต้น ถ้าให้ μ เป็นค่าเฉลี่ยของประชากรที่ผู้วิจัยทำการศึกษา และ μ_0 เป็นค่าคงที่ ดังนั้น สมมติฐานของการทดสอบค่าเฉลี่ยประชากรเดียวดังกล่าวจะเป็นดังนี้คือ

$H_0 \; : \; \mu = \mu_0$

$H_1 \; : \; \mu \neq \mu_0$ (สำหรับการทดสอบสองทาง)

หรือ $H_1 \; : \; \mu > \mu_0$ หรือ $\mu < \mu_0$ (สำหรับการทดสอบทางเดียว)

ในการตรวจสอบสมมติฐานเมื่อเรายอมรับว่า ถ้าค่าเฉลี่ยของประชากรเป็น μ_0 จริง ๆ แล้ว โค้งปกติของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดก็จะมี $\mu_{\bar{X}} = \mu_0$ และเมื่อทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร หรือกลุ่มตัวอย่าง อย่างใดอย่างหนึ่งก็สามารถใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานนั้นกะประมาณค่า $\sigma_{\bar{X}}$ ของการแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรทั้งหมดได้ ($\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$) โดยมีรูปการแจกแจงเป็นดังนี้



การแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างที่มีค่าเฉลี่ยของประชากรเป็น μ_0

<u>เมื่อกลุ่มตัวอย่างที่ขนาดใหญ่ (N > 30)</u>

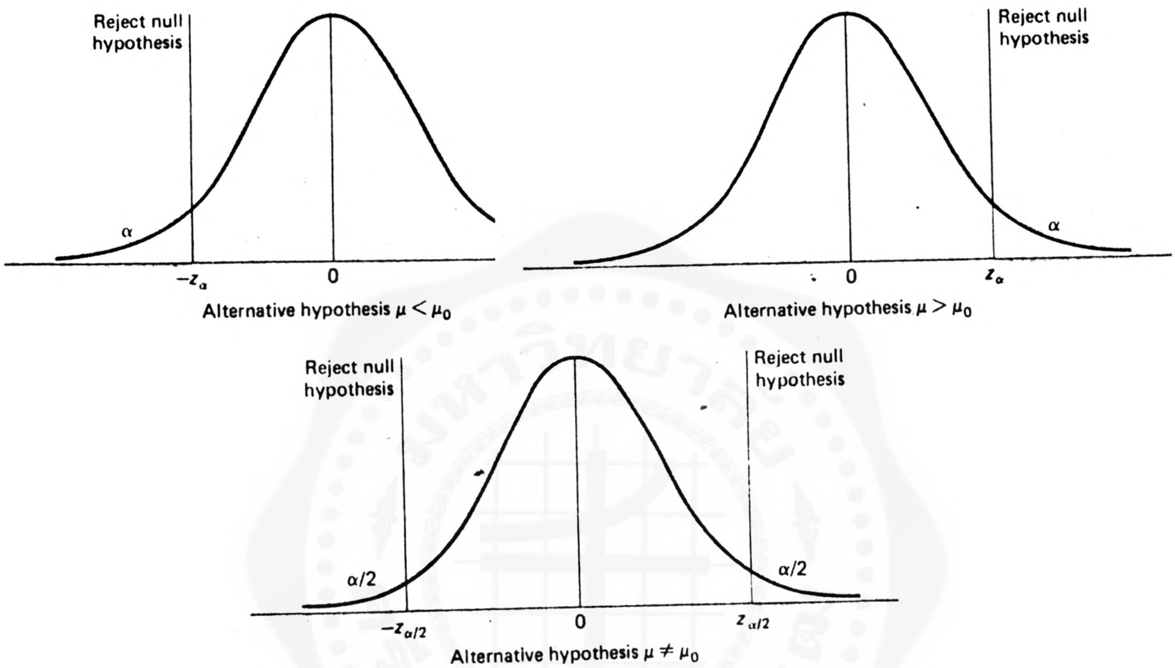
เมื่อกลุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ศึกษามีขนาดใหญ่กว่า 30 เราสามารถใช้การแจกแจงของ Z เปรียบเทียบโค้งของการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างที่มี $\mu_{\bar{X}} = \mu_0$ และ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ โดยค่าคะแนนมาตรฐานของการแจกแจงของโค้งนี้จะมีค่าดังนี้

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}}$$

ผลจากการทดสอบสมมติฐาน การยอมรับ หรือปฏิเสธสมมติฐาน จะมีลักษณะสรุปได้ดังนี้

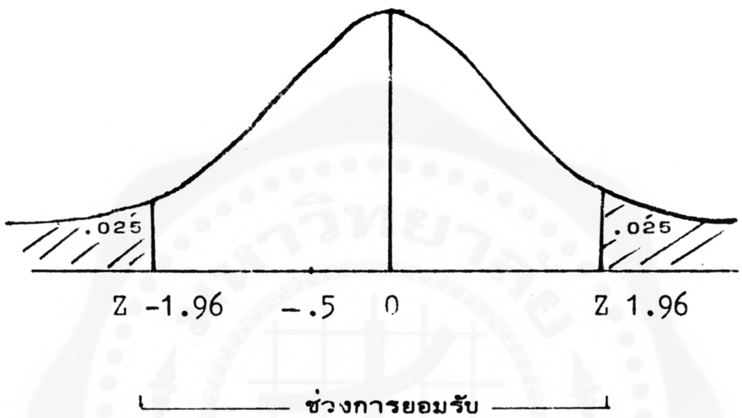
H_1	ปฏิเสธ H_o เมื่อ	ยอมรับ H_o เมื่อ
$\mu < \mu_0$	$Z < -Z_\alpha$	$Z \geq -Z_\alpha$
$\mu > \mu_0$	$Z > Z_\alpha$	$Z \leq Z_\alpha$
$\mu \neq \mu_0$	$Z < -Z_{\alpha/2}$ or $Z > Z_{\alpha/2}$	$-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$

และรูปแสดงพื้นที่วิกฤตของการทดสอบแบบทางเดียว และสองทางจะเป็นดังนี้



ตัวอย่าง จากการตรวจสอบที่ทำมาแล้วปรากฏว่า เด็กไทยระดับชั้นประถมปีที่ 4 จะมีผลสัมฤทธิ์ในวิชาคณิตศาสตร์เมื่อใช้แบบทดสอบมาตรฐานเป็น 57 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 5 โรงเรียนในจังหวัดพะเยาต้องการตรวจสอบว่า นักเรียนของโรงเรียนมีความสามารถทางวิชาวิทยาศาสตร์ตามเกณฑ์ระดับชาติหรือไม่ ครูจึงนำแบบทดสอบมาตรฐานมาทดสอบเด็กของตนเองจำนวน 25 คน ปรากฏว่าได้คะแนนเฉลี่ยเป็น 56.5 อยากทราบว่า ถ้ายอมให้มีการผิดพลาดแบบ α เกิดขึ้น .05 จะสรุปได้ว่าเด็กโรงเรียนนี้ยังอยู่ในเกณฑ์ทั่วไปของเด็กไทยได้หรือไม่

เมื่อ α = .05



สมมติฐานในการทดสอบ

$$H_0 : \mu = 57$$

$$H_1 : \mu \neq 57$$

ตรวจสอบว่า ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) 56.5 จะอยู่ในช่วงการยอมรับหรือไม่ เมื่อ σ = 5

จาก $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}$$

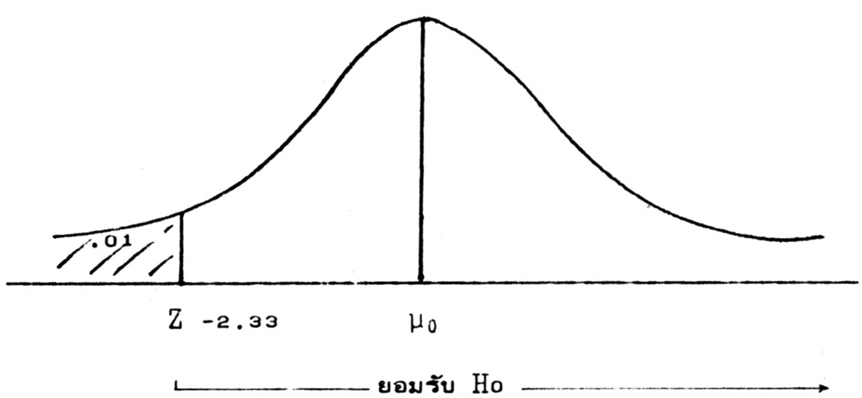
$$= \frac{56.5 - 57}{5/\sqrt{25}}$$

$$= -.5$$

จะเห็นได้ว่า ค่า Z ที่ทำการตรวจสอบ ยังอยู่ในช่วงการยอมรับ $-1.96 < Z < 1.96$ ดังนั้น เราจึงยอมรับสมมติฐานหลักที่ว่า $\mu = 57$ นั่นคือเด็กนักเรียนของโรงเรียนนี้มีค่าเฉลี่ยจากการสอบวิทยาศาสตร์อยู่ในเกณฑ์เดียวกับเด็กไทย โดยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

ตัวอย่าง บริษัทผลิตเครื่องกีฬาแห่งหนึ่งได้พัฒนาเส้นเอ็นที่ใช้สำหรับไม้ตีเทนนิส โดยใช้วัสดุชนิดใหม่ และเขาอ้างว่า เส้นเอ็นชนิดใหม่นี้มีความแข็งแรงที่จะรับแรงกระแทกได้ถึง 15 ปอนด์ หรือมากกว่า และมีความเบี่ยงเบนมาตรฐานความแข็งแรงเป็น 0.5 ปอนด์ และเพื่อตรวจสอบคำอ้างนี้ จึงมีการทดลองวัดความแข็งแรงของเส้นเอ็นโดยวิธีเลือกทดสอบไม้เทนนิสอย่างสุ่มจำนวน 64 อัน พบว่า มีค่าเฉลี่ยของความแข็งแรงเป็น 14.8 ปอนด์ จงทดสอบดูว่าคำกล่าวของบริษัทจะเป็นที่เชื่อถือได้หรือไม่ในระดับนัยสำคัญ .01

การทดสอบเป็นการทดสอบทางเดียว คือทางด้านต่ำ



สมมติฐานในการทดสอบ เป็น

$$H_0 : \mu = 15$$

$$H_1 \quad \mu < 15$$

ตรวจสอบว่า ค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) 14.8 ปอนด์ จะอยู่ในช่วงของการยอมรับหรือไม่

$$\text{จาก} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}$$

$$= \frac{14.8 - 15}{.05/\sqrt{64}} = -3.2$$

จะเห็นได้ว่า ค่ามาตรฐานที่คำนวณได้ตกอยู่ในพื้นที่ช่วงที่ต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 นั่นคือ ค่าเฉลี่ยของความแข็งแรงน้อยกว่า 15 ปอนด์ ขัดกับที่บริษัทอ้างไว้ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01

<u>การทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรเดียว เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก</u>

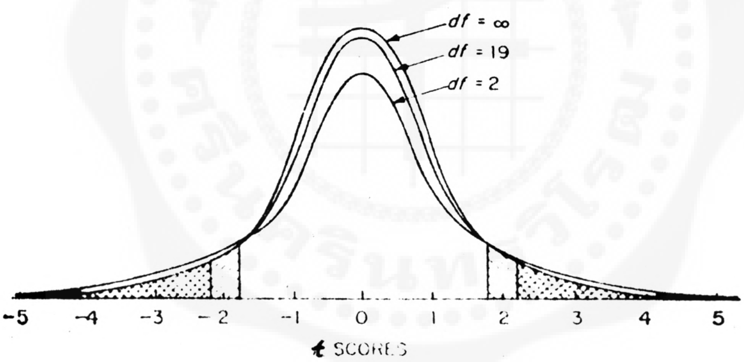
โดยทั่วไปแล้วไม่ว่าประชากรจะมีการแจกแจงเป็นเช่นใดก็ตาม การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ($N > 30$) จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ แต่เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างเล็กกว่า 30 ($N < 30$) <u>การแจกแจงของประชากรต้องมีลักษณะเป็นโค้งปกติจึงจะทำให้การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างมีลักษณะเป็นโค้งปกติ</u>

ชาวอังกฤษชื่อ Gosset ได้ทำการศึกษาถึงเรื่องนี้ โดยจากการศึกษาเขาพบว่า ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากกลุ่มตัวอย่าง (S) สามารถใช้เป็นตัวประมาณค่าที่ดีสำหรับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร (σ) และจากนั้นเขาได้ใช้ค่า S เป็นตัวกำหนดทฤษฎีการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเล็กเหล่านี้ เขาได้ตีพิมพ์ผลการศึกษาของเขาในนามปากกา Student's t ดังนั้น การแจกแจงที่เขาค้นพบนี้จึงเรียกโดยทั่วไปว่า Student's t distribution หรือ t-distribution

โดยมีค่า $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}}$

ที่องศาแห่งความเป็นอิสระเป็น N-1 (ตารางของพื้นที่ใต้โค้ง t มีแนบท้ายเล่ม)

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กกว่า 30 การแจกแจงของ t เมื่อองศาแห่งความเป็นอิสระแตกต่างกัน จะเป็นโค้งปกติที่มีลักษณะแตกต่างกัน ซึ่งจะมีผลต่อช่วงของการปฏิเสธ หรือยอมรับสมมติฐานที่เป็นกลาง กล่าวคือ เมื่อองศาแห่งความเป็นอิสระแตกต่างกัน ช่วงแห่งการยอมรับและปฏิเสธสมมติฐานจะแตกต่างกัน และเมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นมาก ๆ การแจกแจงของ t จะมีลักษณะเข้าใกล้การแจกแจงของ Z



ภาพแสดงการแจกแจงของ t เมื่อ df แตกต่างกัน

ตัวอย่าง ในการลงทะเบียนโดยปกตินิสิตระดับปริญญาตรีจะใช้เวลาในการลงทะเบียนโดยเฉลี่ย 50 นาที ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 10 นาที หลังจากนำคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในระบบการลงทะเบียนของนิสิตปรากฏว่า จากกลุ่มตัวอย่าง 12 ราย นิสิตใช้เวลาในการลงทะเบียนโดยเฉลี่ย 40 นาที ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 11.9 นาที จงทดสอบดูว่า เวลาเฉลี่ยของการลงทะเบียนแบบใช้คอมพิวเตอร์ใช้เวลาน้อยกว่าเดิมจริงที่ระดับนัยสำคัญ .05

สมมติฐานในการทดสอบ เป็น

$$H_0 : \mu = 50$$

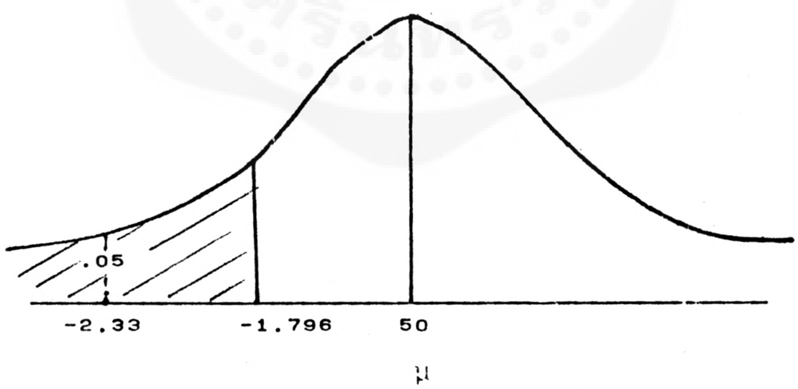
$$H_1 : \mu < 50$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{N}}$$

$$= \frac{42 - 50}{11.9/\sqrt{12}}$$

$$= -2.33$$

ค่า $t_{(11,.05)}$ จากตาราง $= 1.796$



ดังนั้น เราจึงปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการลงทะเบียนทำให้ใช้เวลาน้อยกว่าเดิมจริงที่ระดับนัยสำคัญ .05

ตัวอย่าง นักจิตวิทยาเชื่อว่า วัยรุ่นสมัยปัจจุบันมีความรับผิดชอบน้อยกว่าวัยรุ่นสมัยก่อน เพื่อทดสอบความเชื่อนี้ นักจิตวิทยาจึงได้ทำการทดลอง โดยเลือกวัยรุ่นในสมัยปัจจุบันอย่างสุ่ม ๙ คน ปรากฏว่า ดัชนีของความรับผิดชอบเป็น .63 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน .12 แต่ในอดีต 30 ปีที่แล้ว ดัชนีของความรับผิดชอบของวัยรุ่น เป็น .74 การแจกแจงของความรับผิดชอบยังคงเป็นโค้งปกติทุกสมัย จงตรวจสอบความเชื่อของนักจิตวิทยาผู้นี้

สมมติฐานในการตรวจสอบ

$$H_0 : \mu = .74$$

$$H_1 : \mu < .74$$

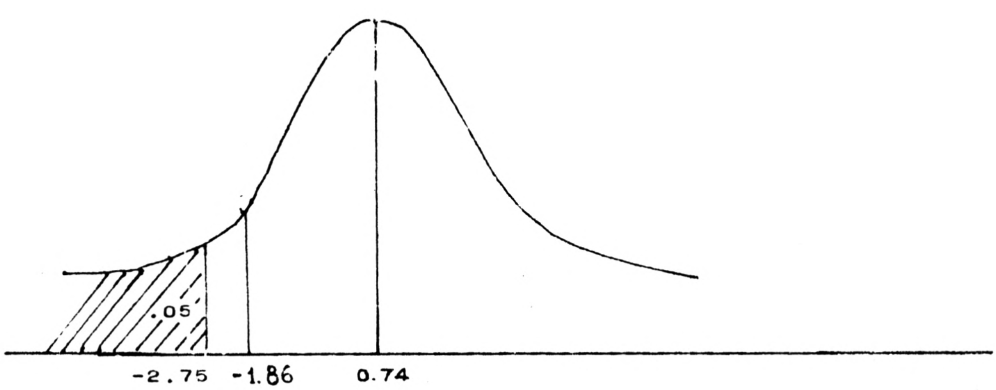
จาก

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}}$$

$$= \frac{.63 - .74}{.12/\sqrt{9}}$$

$$= -2.75$$

จากตาราง $t_{(8,.05)} = 1.86$



ดังนั้น เราต้องปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1 กล่าวคือ เชื่อว่าวัยรุ่นปัจจุบันมีความรับผิดชอบน้อยกว่าวัยรุ่นในอดีตจริงที่ระดับนัยสำคัญ .05

การทดสอบค่าสัดส่วนจากประชากรเดียว

ในการตรวจสอบค่าสัดส่วนของประชากรใดประชากรหนึ่งว่ามีค่าสัดส่วนเป็นไปตามค่าใดค่าหนึ่งหรือไม่ เราก็สามารถใช้สถิติ Z ช่วยในการตรวจสอบได้เช่นกันโดยที่

$$Z = \frac{p - p_0}{\sigma_p}$$

เมื่อ p คือค่าสัดส่วนจากประชากรที่ต้องการตรวจสอบ

p_0 คือค่าคงที่

σ_p เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของสัดส่วน

$$= \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad \text{หรือ} \quad \sqrt{\frac{pq}{N}}$$

$$(q = 1-p)$$

โดยสมมติฐานของการทดสอบเป็น

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \neq p_0$ (สำหรับการทดสอบสองทาง)

หรือ $H_1 : p < p_0$ หรือ $p > p_0$ (สำหรับการทดสอบสองทาง)

ตัวอย่าง มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีความเชื่อว่า นิสิตของมหาวิทยาลัยแห่งนี้อย่างน้อย 15% ต้องมาจากครอบครัวที่มีฐานะดี เมื่อตรวจสอบความเชื่อนี้ทางฝ่ายกิจกรรมนิสิตได้ทำการสำรวจกลุ่มตัวอย่างของนิสิต 100 คน พบว่า มีเพียง 63 คนที่มาจากครอบครัวฐานะดี จงตรวจสอบดูว่า ความเชื่อของมหาวิทยาลัยแห่งนี้ค่อนข้างจะเกินความเป็นจริง โดยให้ความเชื่อมั่นของการตรวจสอบครั้งนี้เป็น 95%

สมมติฐานในการทดสอบ

$$H_0 : p = .63$$

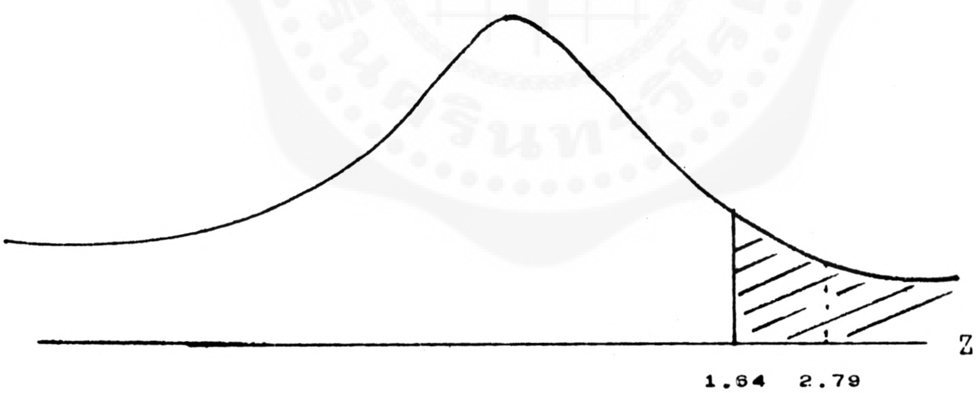
$$H_1 : p > .63$$

จาก $$Z = \frac{p - p_0}{\sigma_p}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{N}} = \sqrt{\frac{(.75)(.25)}{100}} = .043$$

ดังนั้น $$Z = \frac{.75 - .63}{.043}$$

$$= 2.79$$



ค่า $Z_{(.05)}$ จากตารางคือ -1.64

Z จากการคำนวณคือ - 2.79

ดังนั้น เราจึงต้องปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลางและยอมรับสมมติฐานอื่น กล่าวคือ สัดส่วนของนิสิตของมหาวิทยาลัยนี้ที่มหาวิทยาลัยเอ่ยอ้างมากกว่าสัดส่วนที่เป็นจริง อย่างเชื่อถือได้ 95%

<u>การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจากสองประชากร</u> (Testing the Difference between two Means)

บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยต้องศึกษากลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่ม ที่แต่ละกลุ่มมาจากประชากรที่ต่างกัน และผู้วิจัยต้องการทดสอบดูว่า ผลที่ได้จากการศึกษากลุ่มตัวอย่างทั้งสองนั้นจะลงสรุปถึงประชากรได้หรือไม่ว่า ประชากรของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองนั้นจะแตกต่างกันหรือไม่ ตัวอย่างเช่น เมื่อผู้วิจัยได้ศึกษาคุณภาพของเครื่องรับโทรทัศน์จากกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งเป็นเครื่องรับโทรทัศน์ที่ผลิตภายในประเทศ ส่วนอีกกลุ่มหนึ่งเป็นเครื่องรับโทรทัศน์ที่สั่งเข้ามาจากต่างประเทศ และผู้วิจัยต้องการผลที่ได้จากการศึกษานี้ลงสรุปว่า เครื่องรับโทรทัศน์ที่ผลิตภายในประเทศ มีคุณภาพไม่แตกต่างจากเครื่องรับโทรทัศน์ที่สั่งเข้ามาจากต่างประเทศ จะเห็นว่า ประชากรที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยดังกล่าว คือ ประชากรของเครื่องรับโทรทัศน์ที่ผลิตภายในประเทศ และประชากรของเครื่องรับโทรทัศน์ที่สั่งเข้ามาจากต่างประเทศ

เมื่อให้ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ๒ กลุ่ม ที่มาจากประชากรที่แตกต่างกัน และกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มนั้นทั้งคู่ต่างก็มีขนาดใหญ่และเป็นอิสระจากกัน โดยมีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น N_1 และ N_2 ตามลำดับ ค่าแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยทั้งสอง $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ จะมีการแจกแจงเข้าใกล้โค้งปกติที่มีค่าเฉลี่ยและค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็นดังนี้

$$\mu_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \mu_1 - \mu_2$$

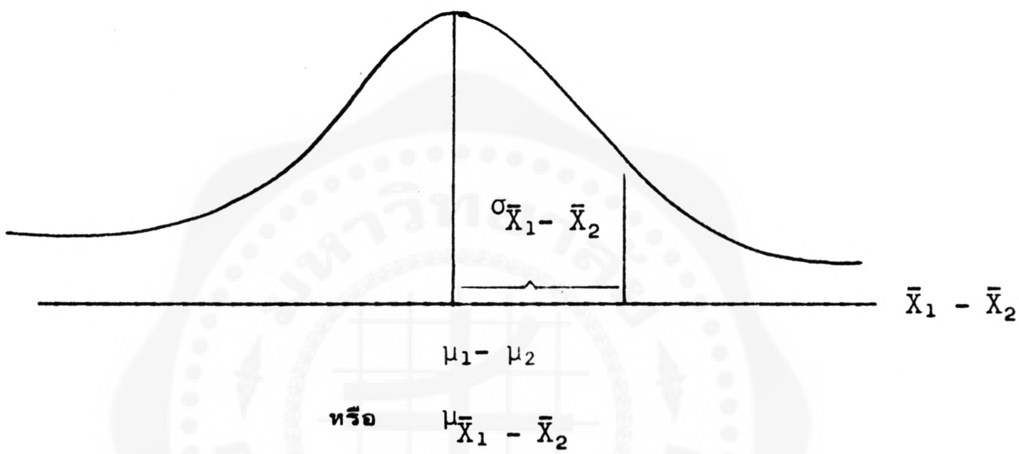
$$\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

เมื่อ μ_1 และ μ_2 เป็นค่าเฉลี่ยของประชากรที่ ๑ และ ๒ ตามลำดับ

σ_1^2 และ σ_2^2 เป็นค่าความแปรปรวนของประชากรที่ ๑ และ ๒ ตามลำดับ

N_1 และ N_2 เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ ๑ และ ๒ ตามลำดับ

กล่าวคือ การแจกแจงของ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติเช่นเดียวกับการแจกแจงของ Z



ดังนั้นเราจึงสามารถใช้คุณสมบัติของโค้งปกติหาค่าคะแนนมาตรฐานเข้าช่วยในการทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐานในการทดสอบความแตกต่างระหว่างประชากร 2 ประชากรจะเป็น

$H_0 \;:\; \mu_1 - \mu_2 = 0$ หรือ $\mu_1 = \mu_2$

(สำหรับการทดสอบ 2 ทาง) $H_1 \;:\; \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ หรือ $\mu_1 \neq \mu_2$

(หรือสำหรับการทดสอบทางเดียวจะมี H_1 เป็น)

$H_1 \;:\; \mu_1 - \mu_2 > 0$ หรือ $\mu_1 > \mu_2$

$H_1 \;:\; \mu_1 - \mu_2 < 0$ หรือ $\mu_1 < \mu_2$

นั่นคือ ค่าของความแตกต่างมาตรฐานจะเป็นดังนี้

$$Z_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

แต่ $\mu_{(\bar{X} - \bar{X}_1)} = \mu_1 - \mu_2$ ซึ่งมีค่า $= 0$ ตามสมมติฐานที่เป็นกลาง

ดังนั้น

$$Z_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

$$= \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่ว ๆ ไป ผู้วิจัยจะไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) แต่จะทราบค่าความแปรปรวนขอ งกลุ่มตัวอย่าง (S^2) และในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้ค่าความแปรปรวนจากกลุ่มตัวอย่างทั้งสอง(S_1^2 และ S_2^2) กะประมาณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ได้ ดังนั้นค่าคะแนนมาตรฐานของความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจะเป็น

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

ตัวอย่าง ถ้าผู้วิจัยตั้งข้อสังเกตว่า น้ำหนักตัวของแม่บ้านที่อยู่กับบ้าน และทำงานนอกบ้าน ไม่น่าจะแตกต่างกัน และเพื่อสนับสนุนข้อสังเกต เขาได้รวบรวมข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม โดยกลุ่มแรกเป็นแม่บ้านที่อยู่กับบ้าน และกลุ่มที่ 2 เป็นแม่บ้านที่ทำงานนอกบ้าน ปรากฏว่าได้ผลดังนี้

$$N_1 = 120, \quad \bar{X}_1 = 62.7, \quad S_1 = 2.5$$

$$N_2 = 150, \quad \bar{X}_2 = 61.8, \quad S_2 = 2.62$$

จงตรวจสอบดูว่า ข้อสังเกตของนักวิจัยผู้นี้น่าจะเป็นจริงที่ระดับนัยสำคัญ .01

สมมติฐานในการทดสอบ

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

จาก $$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

แทนค่าได้ $$Z = \frac{62.7 - 61.8}{\sqrt{\frac{(2.5)^2}{120} + \frac{(2.62)^2}{150}}}$$

$$= 2.88$$

ค่า $Z_{.01}$ จากตารางเป็น 2.58

ค่า Z ที่ได้จากการคำนวณ > ค่า Z จากตาราง ดังนั้น เราต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ น้ำหนักตัวของแม่บ้านที่อยู่บ้าน และทำงานนอกบ้าน แตกต่างกันอย่างเชื่อถือได้ 99% หรือข้อสังเกตของนักวิจัยไม่เป็นจริงที่ระดับ .01

การทดสอบค่าความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจากสองประชากร เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

ในบางครั้ง กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาวิจัยมีขนาดเล็ก ($N < 30$) ทำให้ลักษณะการแจกแจงของความแตกต่างระหว่าง $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ ไม่มีลักษณะของการแจกแจง Z แต่การแจกแจงของค่าความแตกต่างของ $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ จะมีลักษณะคล้ายการแจกแจง t เมื่อ

1. กลุ่มตัวอย่างทั้งสองมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ
2. เมื่อประชากรทั้งสองมีค่าความแปรปรวนเท่ากัน ($\sigma_2^2 = \sigma_2^2$) ค่าการแจกแจง t จะเป็น

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$

ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ (df) $= N_1 + N_2 - 2$

และเมื่อ S_p^2 คือค่าความแปรปรวนร่วม การหาค่าความแปรปรวนร่วมทำได้โดยนำค่าเบี่ยงเบนยกกำลังสองของทั้งสองกลุ่มตัวอย่างมารวมกัน แล้วหารเฉลี่ยด้วย df

ดังนั้น $$S_p^2 = \frac{\Sigma(\bar{X}_1 - \bar{X}_1)^2 + \Sigma(\bar{X}_2 - \bar{X}_2)^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

$$= \frac{(N_1-1)\dfrac{\Sigma(X_1-\bar{X}_1)^2}{(N_1-1)} + (N_2-1)\dfrac{\Sigma(X_2-\bar{X}_2)^2}{(N_2-1)}}{N_1 + N_2 - 2}$$

$$= \frac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-2)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

ดังนั้น $$S_p = \sqrt{\frac{(N_1-1)S_1^2 + (N_2-1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

3. เมื่อประชากรทั้งสองมีค่าความแปรปรวนไม่เท่ากัน ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) ค่าการแจกแจงของ t จะเป็น

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}}$$

โดยมี

$$df = \frac{\left[\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}\right]^2}{\frac{(S_1^2 / N)^2}{N_1-1} + \frac{(S_2^2 / N_2)^2}{N_2-1}}$$

ตัวอย่าง ครูคนหนึ่งได้ทำการทดลองวิธีการสอนภาษาอังกฤษ 2 วิธี เขาได้เลือกกลุ่มตัวอย่างอย่างสุ่มจากนักเรียนห้องเดียวกันกลุ่มละ 14 คน เท่ากัน ทำการทดลองการสอนทั้งสองวิธี ปรากฏว่าจากการทดสอบนักเรียนที่เรียนโดยใช้วิธีแรกได้คะแนนเฉลี่ย 43.8 โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 4.6 และนักเรียนที่ทำการเรียนวิธีที่ 2 ได้คะแนนเฉลี่ยเป็น 38.6 และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 5.2 จะทดสอบดูว่า ผลจากการเรียนจากวิธีที่ 1 น่าจะดีกว่าวิธีที่ 2 อย่างเชื่อมั่นได้ 99% ครูผู้นี้เชื่อว่าการแจกแจงของประชากรทั้งสองโรงเรียนจะเป็นโค้งปกติ และความแปรปรวนของประชากรเท่ากัน

สมมติฐานในการทดสอบเป็น

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

จาก $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}}}$

และจาก $S_p = \sqrt{\dfrac{(N_1 - 1)S_1^2 + (N_2 - 1)S_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$

แทนค่าจะได้ $S_p = \sqrt{\dfrac{(14-1)(4.6)^2 + (14-1)(5.2)^2}{14 + 14 - 2}}$

$= 3.44$

ดังนั้น $t = \dfrac{43.8 - 38.6}{3.44\sqrt{\dfrac{1}{14} + \dfrac{1}{14}}}$

$= 2.81$

$df = 14 + 14 - 2$

จากตาราง $t_{(26,.01)}$ การทดสอบแบบทางเดียวเป็น 2.479

ดังนั้น ค่า t จากการคำนวณ > ค่า t จากตาราง ทำให้ต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ วิธีการสอบแบบที่ ๑ ได้ผลดีกว่าวิธีการสอบแบบที่ ๒ อย่างเชื่อถือได้ ๙๙%

การทดสอบค่าความแตกต่างระหว่างสัดส่วน (Differences between Proportions)

เมื่อกลุ่มตัวอย่างจากประชากรสองกลุ่มให้ค่าข้อมูลที่เป็นจำนวนนับ เช่น ผู้ที่มีอายุถึง 70 เป็นชาย 54% เป็นหญิง 62% และเมื่อผู้วิจัยต้องการตรวจสอบว่าประชากรทั้งสองจะมีค่าสัดส่วนเหล่านี้แตกต่างกันหรือไม่ การตรวจสอบอาจทำได้โดยใช้ลักษณะของการแจกแจงของ Z เมื่อ

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{S_{Dp}}$$

S_{Dp} คือค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานในการแจกแจงค่าความแตกต่างของสัดส่วนที่มีค่าดังนี้

$$S_{Dp} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}}$$

เมื่อ p_1 เป็นสัดส่วนจากกลุ่มตัวอย่างที่ 1

p_2 เป็นค่าสัดส่วนจากกลุ่มตัวอย่างที่ 2

N_1 คือขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ 1

N_2 คือขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ 2

และก็ต่อเมื่อ N_1p_1, $N_1(1-p_1)$, N_2p_2 และ $N_2(1-p_2)$ มีค่าไม่ต่ำกว่า 5

ตัวอย่าง จากการหยั่งเสียงของรัฐบาลปรากฏว่า คนในกรุงเทพ 45 ใน 60 ยังคงพอใจรัฐบาลอยู่ แต่ในชนบทมีเพียง 48 ใน 80 เท่านั้นที่ยังคงพอใจรัฐบาลนี้ จงตรวจสอบดูว่า สัดส่วนของคนกรุงเทพที่พอใจรัฐบาลสูงกว่าสัดส่วนของคนชนบท อย่างเชื่อถือได้มีระดับ 95%

สมมติฐานของการตรวจสอบ

$H_0 : p = p_2$

$H_1 : p_1 > p_2$

เมื่อ p คือสัดส่วนของคนกรุงเทพที่พอใจรัฐบาล $\frac{45}{60} = .75$

p_2 คือสัดส่วนของคนชนบทที่พอใจรัฐบาล $\frac{48}{80} = .60$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{S_{Dp}}$$

$$Z_{Dp} = \sqrt{\frac{p_1(1-p\ )}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.75)(.25)}{60} + \frac{(.60)(.40)}{80}}$$

$$= \sqrt{.003125 + .003}$$

$$= .078$$

ดังนั้น $$Z = \frac{.75 - .60}{.078}$$

$$= 1.92$$

จากตาราง $Z_{.05} = 1.64$ เมื่อเป็นการทดสอบทางเดียว

ดังนั้น ค่า Z จากการคำนวณ > ค่า Z จากตาราง นั่นคือต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ คนในกรุงเทพมีสัดส่วนของคนที่พอใจรัฐบาลมากกว่าสัดส่วนของคนชนบท อย่างเชื่อถือได้ ๙๕%

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างหัวข้อเรื่องการวิจัยที่น่าจะใช้การทดสอบแบบ

   ค่าเฉลี่ยจากประชากรเดียว

   ค่าเฉลี่ยจากสองประชากร

   สัดส่วนจากประชากรเดียว

   สัดส่วนจากสองประชากร

2. ให้ผู้เรียนค้นคว้างานวิจัยจากปริญญานิพนธ์ที่มีการทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยและสัดส่วน มาคนละ 5 ฉบับ โดยแต่ละฉบับให้

   - ตั้งสมมติฐานทางสถิติสำหรับการทดสอบนั้น ๆ
   - สรุปผลวิเคราะห์ทางสถิติ
   - สรุปผลทางสถิติว่าเป็นการยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลาง

3. ข้อสอบวิชาสังคมศึกษาจำนวน 50 ข้อ สอบนักศึกษา 290 คน ได้คะแนนเฉลี่ย 32.50 และความเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4.80 จงหาคะแนนมาตรฐานของนักศึกษาที่สอบได้คะแนน 28, 36, 45, และ 20

4. ถ้า N มีค่าเป็น 500 จงเปรียบเทียบ t-distribution และ Z- distribution

5. คนไทยทั่วไปมีน้ำหนักเฉลี่ย 55 กิโลกรัม ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักเป็น 7 กิโลกรัม จากการสุ่มตัวอย่างคนกลุ่มหนึ่งจำนวน 64 คน ปรากฏว่า มีน้ำหนักเฉลี่ย 60 กิโลกรัม จงตรวจสอบดูว่า น้ำหนักของคนกลุ่มนี้มีค่าเฉลี่ยเกินกว่าน้ำหนักเฉลี่ยของคนไทยโดยทั่วไป ที่ระดับนัยสำคัญ .05

   ก. จงเขียน Null - Hypothesis และ Alternative - Hypothesis ของการตรวจสอบครั้งนี้

   ข. จงทดสอบ Null - Hypothesis ที่ตั้งไว้นั้น

   ค. ถ้า Null - Hypothesis ที่ตั้งไว้นั้นเป็น Hypothesis ที่ผิดไปจากความจริง เขาจะทำความผิดในการวิจัยอย่างหนึ่งอย่างใดหรือไม่

๖. ผลการทดสอบความสามารถในการใช้ภาษาของนักเรียน ม. ๑ ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม ๆ ละ ๑๐๐ คน ได้ค่าสถิติจากการคำนวณเท่ากับ ๒.๓๓ และค่าสถิติจากตาราง เมื่อ α = .๐๕ คือ ๑.๙๖ จงแปลผลการวิเคราะห์ข้อมูลนี้ด้วยข้อความที่ชัดเจนและสมบูรณ์ตามหลักสถิติ

7. ในการใช้สูตร

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

ก. มีข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับ populations ว่าอย่างไร

ข. มีข้อตกลงเกี่ยวกับ Samples ว่าอย่างไร

๘. ถ้าให้นักเรียนในชั้นของเราเป็นกลุ่มตัวอย่างของนักเรียนปริญญาโท มศว ประสานมิตร จงรวบรวมรายได้ และรายจ่าย ต่อเดือนของกลุ่มตัวอย่างนี้ แล้ว

๑) จง Test ว่า μ รายได้ และ μ รายจ่าย แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ .๐๑ หรือไม่

๙. ในการทดสอบการกระโดดสูงของนักเรียนชายจำนวน ๕๐ คน ปรากฏว่า นักเรียนชายสามารถกระโดดได้สูงเฉลี่ย ๑๓๐ ซม. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการกระโดด ๑๐ ซม. และจากการทดสอบหญิงจำนวน ๑๐๐ คน ปรากฏว่ากระโดดได้สูงเฉลี่ย ๙๐ ซม. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการกระโดดเป็น ๑๕ ซม. จงทดสอบดูว่าชายและหญิงกระโดดสูงได้แตกต่างกันจริงหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .๐๑

บทที่ ๘

การตรวจสอบค่าความแปรปรวนของประชากร

จุดมุ่งหมาย

1. ให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความแปรปรวนของประชากรกับค่าคงที่
2. ให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความเท่ากันของความแปรปรวนจาก 2 ประชากร
3. ให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความเท่ากันของความแปรปรวนจากหลายประชากร

เนื้อหา

- การตรวจสอบค่าความแปรปรวนของประชากรเท่ากับค่าความแปรปรวนที่กำหนดให้
- การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 2 ค่า
- การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนจากหลายประชากร

การตรวจสอบค่าความแปรปรวนของประชากร (Test Concerning Variances)

การตรวจสอบว่าค่าความแปรปรวนของประชากรเท่ากับค่าความแปรปรวนที่กำหนดให้

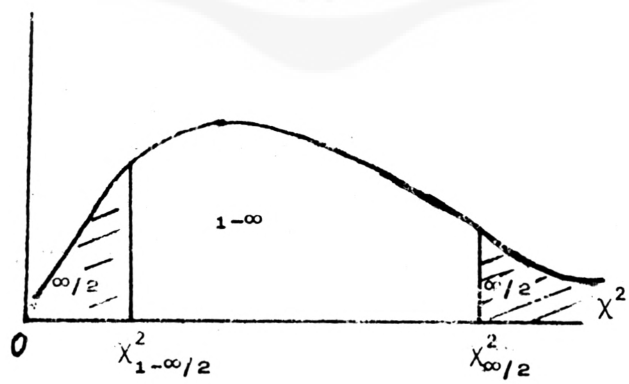
เมื่อเราต้องการจะตรวจสอบดูว่า ประชากรที่มีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ มีค่าความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับค่าความแปรปรวนที่กำหนดให้ (σ_0^2) หรือไม่ และเมื่อการทดสอบนี้เป็นการทดสอบที่ไม่กำหนดทิศทาง สมมติฐานของการทดสอบจะเป็นดังนี้

$$H_0 \; : \; \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 \; : \; \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

ถ้ากลุ่มตัวอย่างกลุ่มหนึ่งจากประชากรนี้มีขนาดเป็น N และกลุ่มตัวอย่างนี้มีความแปรปรวนเป็น S^2 เราสามารถใช้การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-square distribution) เข้าตรวจสอบ โดยคำนวณค่าของ χ^2 ได้ดังนี้

$$\chi^2 = \frac{(N-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

ค่า χ^2 ที่คำนวณได้ จะมีองศาแห่งความเป็นอิสระที่ N-1



ค่า χ^2 ที่จะอยู่ในระดับที่จะปฏิเสธ H_0 จะเป็นค่าที่ตกอยู่ในบริเวณแรเงาของรูปข้างบน

โดยปกติทั่ว ๆ ไปแล้ว เมื่อ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ค่าประมาณของ σ^2 มีโอกาสที่จะใหญ่กว่าค่า σ_0^2 และทำให้ χ^2 ตกอยู่ในเขตปฏิเสธทางด้านขวามือ หรือ เมื่อ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ค่าประมาณของ σ^2 มีโอกาสที่จะเล็กกว่า σ_0^2 และทำให้ค่า χ^2 ตกอยู่ในปฏิเสธทางด้านซ้ายมือ

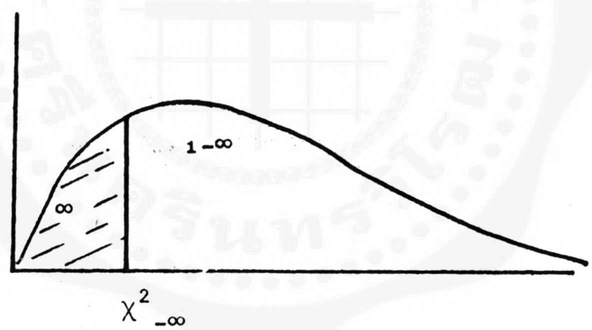
ถ้าการทดสอบเป็นการทดสอบอย่างมีทิศทาง, จะทำให้สมมติฐานของการทดสอบเป็นดังนี้

$$H_0 \quad : \quad \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 \quad : \quad \sigma^2 < \sigma_0^2$$

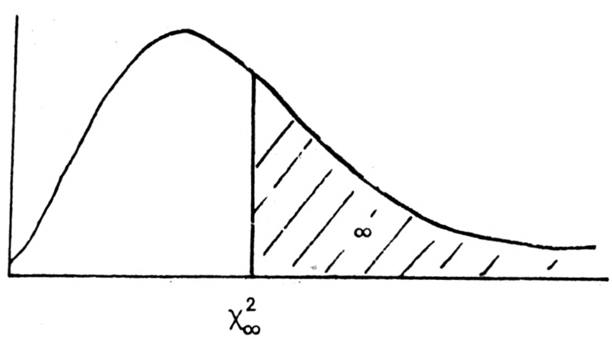
หรือ $H_1 \quad : \quad \sigma^2 > \sigma_0^2$

ขอบเขตของการปฏิเสธ Ho จะเป็นดังนี้



เมื่อ H_1 เป็น $\sigma^2 < \sigma_0^2$

และ



เมื่อ H_1 เป็น $\sigma^2 > \sigma_0^2$

เราพอจะสรุปขบวนการตรวจสอบความแปรปรวนของประชากรที่มีการแจกแจงเป็นปกติว่า มีความแปรปรวนเท่ากับค่าที่กำหนดหรือไม่ดังนี้คือ

๑. กำหนด $H_0 \; : \; \sigma^2 = \sigma_0^2$

๒. กำหนด $H_1 \; : \; \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

หรือ $H_1 \; : \; \sigma^2 < \sigma_0^2$

หรือ $H_1 \; : \; \sigma^2 > \sigma_0^2$

๓. กำหนดค่า α

4. หาขอบเขตของการปฏิเสธ H_0 ซึ่งขึ้นอยู่กับว่า H_1 เป็นอะไร

๕. คำนวณค่า S^2 จากกลุ่มตัวอย่างขนาด N แล้วคำนวณค่า

$$\chi^2 = \frac{(N-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

๖. สรุปว่า จะยอมรับหรือปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลาง H_0 ถ้าปฏิเสธสมมติฐานที่เป็นกลาง ก็ไม่ยอมรับสมมติฐานที่ไม่เป็นกลาง H_1

ตัวอย่าง บริษัทผลิตรถยนต์แห่งหนึ่งกล่าวว่า อายุของแบตเตอรี่รถยนต์ของเขามีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น .๙ ปี ในการทดสอบได้เลือกแบตเตอรี่มาเป็นตัวอย่างจำนวน 10 ตัว ปรากฏว่า มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุแบตเตอรี่เป็น 102 ปี จงตรวจสอบดูว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุแบตเตอรี่จากโรงงานนี้น่าจะมากกว่า .๙ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

วิธีทำ

ความแปรปรวนของแบตเตอรี่ของโรงงานนี้เป็น .๘1

$H_0 \; : \; \sigma^2 = .81$

$H_1 \; : \; \sigma^2 > .81$

จากกลุ่มตัวอย่างขนาด 10 ซึ่งมีความแปรปรวนเป็น 1.44

$$\chi^2 = \frac{(N-1)\ S^2}{\sigma_0^2}$$

$$= \frac{(9)\ (1.44)}{(.81)}$$

$$= 16.0$$

ค่า χ^2 เมื่อ df = 9 ที่ ∞ = .05 เป็น 16.919

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า เรายอมรับ H_0 นั่นคือ ค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุแบตเตอรี่จากโรงงานนี้เท่ากับ .9 ปี ที่ระดับนัยสำคัญ .05 หรืออย่างเชื่อถือได้ 95%

เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาด $\geq$30 เราสามารถใช้การแจกแจงของข้อมูลมาตรฐาน (Z-distribution) เป็นตัวตรวจสอบได้ โดยมีค่า Z เป็น

$$Z = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0^2 \ / \ \sqrt{2N}}$$

ตัวอย่าง โดยทั่วไปแล้วในการตรวจสอบความยาวของการทำกิโลที่ใช้เป็นเครื่องชั่ง จะมีความเบี่ยงเบนของความผิดพลาดเป็น .04 กรัม เมื่อจะทดสอบสมมติฐานนี้ ได้ทำการทดสอบเครื่องชั่ง 35 อัน ปรากฏว่ามีค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของความผิดพลาดของการชั่งเป็น .053 กรัม จงทดสอบดูว่า ตาชั่งนี้มีค่าความเบี่ยงเบนของความผิดพลาดมากกว่า .04 กรัม ที่กล่าวไว้ข้างต้น ที่ระดับนัยสำคัญ .01

$$H_0 \ : \ \sigma^2 = .04$$

$$H_1 \ : \ \sigma^2 > .04$$

จาก $$Z = \frac{S - \sigma_0}{\sigma_0 / \sqrt{2N}}$$

$$= \frac{.053 - .04}{.04/\sqrt{70}}$$

$$= 2.72$$

ค่า Z ที่ระดับนัยสำคัญ .01 = 2.33

นั่นคือ เราปฏิเสธ H_0 แสดงว่า ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของความผิดพลาดในการชั่งมากกว่า .04 กรัม ที่ระดับนัยสำคัญ .01

การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน 2 ค่า (Test for the Equality of Two Variances)

นอกเหนือจากการทดสอบค่าเฉลี่ยแล้ว ในบางครั้งเราอยากจะตรวจสอบดูว่า ค่าการกระจาย จะแตกต่างกว่ากันหรือไม่อย่างไร เพื่อใช้ประกอบในการตัดสินใจเรื่องบางเรื่อง เช่น เมื่อเรารู้แล้วว่า อายุการใช้งานของถังแก๊สเหล็ก และถังแก๊สไฟเบอร์มีอายุเฉลี่ยเท่ากัน และถ้าเราทราบลักษณะการกระจายของอายุการใช้งานด้วย ก็จะเป็นส่วนประกอบที่สำคัญของการตัดสินใจ เพราะถ้าค่าการกระจายของอายุการใช้งานของเหล็กน้อยกว่า การกระจายของอายุการใช้งานของไฟเบอร์ โรงงานผู้ผลิตถังแก๊สก็จะใช้เลือกใช้ถังเหล็กเพื่อความคงทนถาวรที่แน่นอนกว่าถังไฟเบอร์ เป็นต้น

เมื่อการแจกแจงของประชากรเป็นโค้งปกติ ในการตรวจสอบค่าการกระจายเรามักจะตรวจสอบค่าความแปรปรวนจากกลุ่มตัวอย่าง เพื่อลงสรุปว่า ค่าความแปรปรวนของประชากรที่กลุ่มตัวอย่างเหล่านั้นเป็นตัวแทน จะมีค่าความแปรปรวนแตกต่างกันหรือไม่ เมื่อให้กลุ่มตัวอย่างจากประชากรหนึ่งมีขนาดเป็น N_1 และความแปรปรวนเป็น S_1^2 และกลุ่มตัวอย่างจากอีกประชากรหนึ่งมีขนาดเป็น N_2 และมีความแปรปรวนเป็น S_2^2 ค่าอัตราส่วนระหว่าง $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ จะมีการแจกแจง

เช่นเดียวกันกับการแจกแจงของ F (F - distribution) ที่องศาแห่งความเป็นอิสระที่ $N_1 - 1$ และ $N_2 - 1$ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ค่า F ตรวจสอบอัตราส่วนของ S_1^2 / S_2^2 ได้ แต่ความยุ่งยากของการใช้ค่า F คือ ตารางของค่า F ส่วนใหญ่จะกำหนดให้เมื่อ $\infty = .01$ และ $\infty = .05$ เท่านั้น ทำให้เราทราบเฉพาะค่าทางขวามือ ดังนั้น เราจึงมักทำอัตราส่วนของ S_1^2 และ S_2^2 ให้ใหญ่ไว้ นั่นคือ เอาตัวที่มีค่ามากเป็นตัวตั้ง

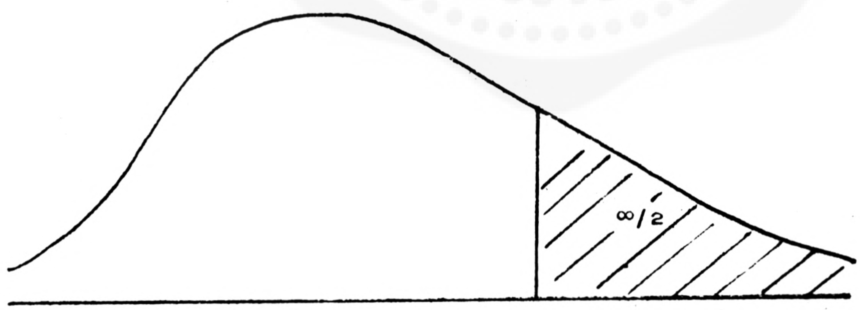
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{หรือ} \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad \text{(เอาค่ามากเป็นตัวตั้ง)}$$

และในการทดสอบสองทาง สมมติฐานการทดสอบจะเป็น

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

ขอบเขตของการปฏิเสธสมมติฐานจะเป็น



$F\ \infty/2$

แต่เนื่องจากตาราง F เป็นตารางเมื่อค่า ∞ เป็น .01 หรือ .05 เท่านั้น ดังนั้นในการทดสอบ 2 ด้าน เมื่อใช้ตาราง .01 คือค่า $\infty/2 = .01$ หรือ $\infty = .02$ และในทำนองเดียวกัน เมื่อใช้ตาราง .05 นั่นคือค่า $\infty/2 = .05$ หรือ $\infty = .10$ นั่นเอง

แต่สำหรับการทดสอบทางเดียว เมื่อสมมติฐานของการทดสอบเป็น

$$H_0 \quad : \quad \sigma_1^2 \; = \; \sigma_2^2$$

$$H_1 \quad : \quad \sigma_1^2 \; > \; \sigma_2^2 \qquad \text{(เมื่อ } F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\text{)}$$

หรือ $$H_1 \quad : \quad \sigma_2^2 \; > \; \sigma_1^2 \qquad \text{(เมื่อ } F = \frac{S_2^2}{S_1^2}\text{)}$$

ค่า ∞ จากตารางก็คือค่า ∞ ของการทดสอบเหล่านั้น

ตัวอย่าง เมื่อใช้แบบทดสอบมาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์ ทำการทดสอบเด็กชาย 25 คน และเด็กหญิง 16 คน พบว่า คะแนนของเด็กชายมีความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 8 และคะแนนของเด็กหญิง มีความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 7 อยากรู้ว่าเด็กชายและเด็กหญิง จะมีความแปรปรวนของคะแนนแตกต่างกันหรือไม่

$$H_0 \quad : \quad \sigma_{ช}^2 \; = \; \sigma_{ญ}^2$$

$$H_1 \quad : \quad \sigma_{ช}^2 \; \neq \; \sigma_{ญ}^2$$

$$F \;=\; \frac{8^2}{7^2} \;=\; \frac{64}{49} \;=\; 1.306$$

จากตาราง ค่า $F_{(.01,24,15)} = 3.29$

สรุปได้ว่า เราต้องยอมรับ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .02 ($\because$ เป็นการทดสอบสองทาง) นั่นคือ ความแปรปรวนของคะแนนเด็กชายและเด็กหญิงไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .02

<u>การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนจากหลายประชากร</u>

การตรวจสอบความเท่ากันของความแปรปรวน เป็นสิ่งสำคัญมากต่อการทดสอบสมมติฐานเบื้องต้น ก่อนที่จะใช้สถิติบางชนิด เช่น การวิเคราะห์ความแปรปรวน ซึ่งต้องมีสมมติฐานเบื้องต้นว่า ความแปรปรวนของทุกประชากรต้องเท่ากันเสียก่อน แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปแล้ว เราจะทราบเฉพาะค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรต่าง ๆ

การตรวจสอบจึงต้องใช้ค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างกะประมาณค่าและใช้วิธีของบาร์ทเลท (Bartlett's Test) ซึ่งเป็นวิธีการที่อาศัยการแจกแจงแบบไค-สแควร์ (Chi-Square distribution) ช่วยในการตรวจสอบ วิธีการของบาร์ทเลทนี้อาจจะทำได้ดังนี้คือ

สมมติให้ประชากรจำนวน k ประชากรมี $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$ เป็นความแปรปรวนของประชากร 1, 2, ... ,k ตามลำดับ ดังนั้นสมมติฐานในการทดสอบจะเป็น

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

H_1 : มีความแปรปรวนอย่างน้อยสองตัวไม่เท่ากัน

ให้ $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_k^2$ เป็นความแปรปรวนจากกลุ่มตัวอย่างที่มาจากประชากรที่ 1, 2,....,k ตามลำดับ และขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับเช่นกัน

ให้ $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ หรือ $\sum_{i=1}^{k} n_i$

จะได้ความแปรปรวนร่วม $(S_p^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2}{N - k}$

ให้ $M = (N - k) \log S_p^2 - \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \log S_i^2$

$$C = 1 + \frac{1}{3(K-1)} \left[\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k}\right]$$

ค่าไคสแควร์ (χ^2) = $2.3026 \times \frac{M}{C}$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ k - 1

ข้อที่น่าสังเกตคือ ค่า M จะใหญ่เมื่อความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มตัวอย่างมีความแตกต่างกันมาก และเป็นศูนย์เมื่อความแปรปรวนของทุกกลุ่มตัวอย่างเท่ากัน

ตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่าง 3 กลุ่ม จากประชากร 3 ประชากร มีความแปรปรวนเป็น 1.583, 2.3 และ 2.7 และมีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น 4, 6 และ 5 ตามลำดับ จงทดสอบว่า ประชากรทั้งสามนี้ มีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ที่ $\infty = .05$

วิธีทำ

สมมติฐานในการทดสอบ

H_0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

H_1 : มีความแปรปรวนอย่างน้อยของ 2 ประชากรแตกต่างกัน

จาก
$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\, S_i^2}{N - k}$$

$$= \frac{(4-1)(1.583)+(6-1)(2.3)+(5-1)(2.7)}{(4+6+5)-3}$$

$$= 2.254$$

จาก
$$M = (N - k)\log S_p^2 - \sum_{i=1}^{k} (n_i-1)\log S_i^2$$

$$= (15-3)\log 2.254-(3\log 1.583+5\log 2.3+4\log 2.7)$$

$$= (12)(0.353)-[(3)(0.1995)+(5)(0.3617)+(4)(0.4314)]$$

$$= 0.1034$$

จาก $$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N-k}\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3x2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)$$

$$= 1.1167$$

จาก $$\chi^2 = 2.3026 \frac{M}{C}$$

$$\therefore \quad \chi^2 = \frac{(2.3026)(0.1034)}{1.1167} = 0.213$$

จากตาราง $\chi^2_{(2,.05)} = 5.991$

จะเห็นว่า ค่า χ^2 จากการคำนวณ < ค่า χ^2 จากตาราง นั่นคือ เราต้องยอมรับ H_0 ที่ว่า ประชากรทั้งสามมีความแปรปรวนเท่ากัน

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. จงบอกถึงสถิติที่มีข้อตกลงเบื้องต้นของการเท่ากันของความแปรปรวน

2. กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม มีข้อมูลดังนี้

   กลุ่ม 1 : 5, 6, 9, 12, 13, 14, 9, 8, 5, 2

   กลุ่ม 2 : 10, 12, 13, 12, 15, 9, 16, 13, 9, 15, 16, 12

   จงตรวจสอบดูว่า กลุ่มตัวอย่างทั้งสองมาจากประชากรที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่

3. ในการทดสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมปีที่ 1 จาก 3 โรงเรียน โดยใช้นักเรียนโรงเรียนละ 10 คน ผลปรากฏเป็นคะแนนดังนี้

   โรงเรียนที่ 1 : 25, 23, 46, 39, 47, 45, 32, 41, 15, 20

   โรงเรียนที่ 2 : 36, 37, 29, 38, 40, 42, 36, 41, 43, 37

   โรงเรียนที่ 3 : 36, 10, 51, 42, 10, 9, 45, 39, 37, 12

   จงตรวจสอบดูว่า ความแปรปรวนของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมปีที่ 1 ของ 3 โรงเรียนนี้ จะแตกต่างกันหรือไม่

บทที่ ๙

การวิเคราะห์ความแปรปรวน

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. ให้ผู้เรียนวิเคราะห์หัวข้อการวิจัยต่าง ๆ ได้ว่า สามารถใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้หรือไม่ (ตรวจดูว่า มีข้อตกลงเบื้องต้นครบพอที่จะใช้ ANOVA ได้)
2. สำหรับการทดสอบค่าความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ย ให้ผู้เรียนสามารถ
   ก. คำนวณค่า F
   ข. ตรวจสอบนัยสำคัญของ F ที่ระดับนัยสำคัญต่าง ๆ
3. ให้ผู้เรียนรู้จักวิธีคำนวณค่าความแตกต่างรายคู่แบบต่าง ๆ หลังจากพบนัยสำคัญของค่าสถิติ F

<u>เนื้อหา</u>

- ข้อตกลงเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน
- การคำนวณค่ากะประมาณของความแปรปรวนของประชากร
- วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยคิดคำนวณจากคะแนนดิบ และขนาดของกลุ่มตัวอย่างไม่เท่ากัน
- การตรวจสอบรายคู่เมื่อพบความแตกต่างจากการวิเคราะห์ความแปรปรวน
- การวิเคราะห์ความแปรปรวนเมื่อมีเพียง 2 กลุ่มตัวอย่าง

การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance)

ในการวิจัยบางเรื่อง ผู้วิจัยต้องการทราบว่าค่าเฉลี่ยของประชากรต่าง ๆ แตกต่างกันหรือไม่ เช่น การวิจัยผลจากการใช้ปุ๋ย 3 ชนิดต่อต้นข้าว ผู้วิจัยใช้วิธีหาค่าเฉลี่ยของผลผลิตของข้าวหลังจากใช้ปุ๋ยเหล่านั้นแล้วนำมาเปรียบเทียบความแตกต่าง หรือการวิจัยที่อยากทราบว่า เด็กจากประเทศต่าง ๆ 5 ประเทศ จะมีความสามารถทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันหรือไม่ ผู้วิจัยอาจทำได้โดยเลือกกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนของแต่ละประเทศแล้วนำค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มตัวอย่างมาเปรียบเทียบความแตกต่างกัน ในการทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่ 2 ประชากรขึ้นไป เราสามารถใช้วิธีการทางสถิติที่เรียกว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) หรือเรียกโดยย่อว่า ANOVA

<u>ข้อความเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนคือ</u>

1. ประชากรทุกประชากรมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ (Normality of Population)

2. ประชากรทุกประชากรมีความแปรปรวนเป็นเอกพันธ์ (Homogeneity of Variance)

3. กลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มตัวอย่างที่ได้มาอย่างสุ่ม (Random Samples)

4. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มต่างก็เป็นอิสระต่อกัน (Independent Samples)

สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นสถิติที่ใช้การเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างค่ากะประมาณความแปรปรวนของประชากร (σ^2) เมื่อประมาณค่ามาจากความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างต่าง ๆ ($S^2_{\bar{X}}$) และเมื่อประมาณค่ามาจากการหาค่าความแปรปรวนร่วม (Pooled Variance) จากค่าความแปรปรวนของทุกกลุ่มตัวอย่าง แล้วนำค่าอัตราส่วนนี้ไปเปรียบเทียบกับการแจกแจงแบบ F (F-distribution)

$$F = \frac{\text{ค่าประมาณ } \sigma^2 \text{ ที่ได้จากค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากทุกกลุ่มตัวอย่าง}}{\text{ค่าประมาณ } \sigma^2 \text{ ที่ได้จากการหาค่าความแปรปรวนร่วมจากความแปรปรวนของทุกกลุ่มตัวอย่าง}}$$

ข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรมีความสำคัญต่อสถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนมาก เพราะถ้าความแปรปรวนของประชากรไม่เท่ากันแล้วค่าอัตราส่วนของความแปรปรวนจะมีการแจกแจงไม่เป็นการแจกแจงของ F และเมื่อนำอัตราส่วนที่ไม่มีการแจกแจงเป็น F ไปเทียบกับตารางสถิติ F จะทำให้การแปลผลผิดพลาดไป ดังนั้นก่อนที่จะใช้เทคนิคการวิเคราะห์ความแปรปรวน ควรจะมีการตรวจสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนจากทุกประชากรเสียก่อน วิธีที่นิยมใช้มากคือวิธีการของบาร์ทเลท (Bartlett) ซึ่งจะกล่าวถึงในตอนต่อไป

สมมติฐานในการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยจากหลายประชากรโดยใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนจะเป็นดังนี้

$H_0 \; : \; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ (เมื่อ k คือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง)

$H_1 \; : \; (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k)'$

หรือมีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ค่าที่ไม่เท่ากัน

ในกรณีที่ค่า F ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่า F ซึ่งเป็นค่าวิกฤตจากตาราง แสดงว่าอัตราส่วนของความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่าง และค่าความแปรปรวนของทุกกลุ่มตัวอย่างมีค่าไม่แตกต่างกันมากนัก ไม่มากพอที่จะปฏิเสธ H_0 กล่าวคือ ต้องยอมรับว่าทุกประชากรมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน หรือเป็นประชากรเดียวกัน หรืออาจกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า กลุ่มตัวอย่างต่าง ๆ นั้นมาจากประชากรที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน

<u>การคำนวณค่ากะประมาณของความแปรปรวนของประชากร</u> (Estimating Population Variance)

สมมุติให้กลุ่มตัวอย่างทั้งหมด k กลุ่ม สุ่มมาจากประชากรเดียวกัน และกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมีข้อมูลกลุ่มละ n ตัว

ค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มจะเป็น $S_1^2, S_2^2, S_3^2, \ldots, S_k^2$ ซึ่งค่าความแปรปรวนแต่ละตัวต่างก็สามารถใช้เป็นค่ากะประมาณของค่าความแปรปรวนของประชากรได้ แต่ค่าเฉลี่ยของค่าความแปรปรวนจากทุกกลุ่มตัวอย่าง (mean square within samples) ใช้ตัวย่อว่า MS_{within} จะเป็นค่ากะประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรได้ดีที่สุด

MEAN SQUARE WITHIN SAMPLES

$$MS_{within} = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_k^2}{k}$$

(เมื่อกลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มมีขนาดเท่ากัน)

และเมื่อให้ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มเป็น $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \ldots, \bar{X}_k$ ถ้ากลุ่มตัวอย่างทั้งหมดมาจากประชากรเดียวกันซึ่งมีค่าความแปรปรวนเป็น σ^2 ดังนั้นเราสามารถคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของค่าเฉลี่ยได้ดังนี้

จาก $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ เมื่อ n เป็นขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

หรือ $\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n$

นั่นคือ $\sigma^2 = n\sigma_{\bar{x}}^2$

และเมื่อให้ $\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยรวมของทุกกลุ่มตัวอย่าง

เราจะได้ $$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{[(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (\bar{X}_k - \bar{X})^2]}{k-1}$$

ดังนั้น $$n\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{n}{k-1}[(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (\bar{X}_k - \bar{X})^2]$$

นั่นคือ $$\sigma^2 = \frac{n}{k-1}[(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + \ldots + (\bar{X}_k - \bar{X})^2]$$

ค่าประมาณ σ^2 ที่ได้จากค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากทุกกลุ่มตัวอย่าง (Mean Square between Sample) ใช้ตัวย่อว่า $MS_{between}$

MEAN SQUARE BETWEEN SAMPLES	$MS_{between} = \frac{n}{k-1}\,[(\bar{X}_1-\bar{X})^2+(\bar{X}_2-\bar{X})^2+\ldots+(\bar{X}_k-\bar{X})^2]$

จะเห็นได้ว่า ถ้าค่า $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2, \ldots \bar{X}_k$ ใกล้เคียงกันมาก นั่นคือมาจากประชากรที่เท่ากัน หรือประชากรเดียวกัน ค่า $MS_{between}$ จะมีขนาดเล็ก แต่ถ้าค่า $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$ แตกต่างกันมากค่า $MS_{betweem}$ จะมีขนาดใหญ่

$$\text{จากค่า } F = \frac{\text{ค่าประมาณ } \sigma^2 \text{ ที่ได้จากค่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยจากทุกกลุ่มตัวอย่าง}}{\text{ค่าประมาณ } \sigma^2 \text{ ที่ได้จากการหาค่าความแปรปรวนร่วมจากความแปรปรวนของทุกกลุ่มตัวอย่าง}}$$

นั่นคือ

$$F - \text{ratio} \qquad F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

จากสูตรการหาค่า F จะเห็นได้ว่า ถ้า $MS_{between}$ มีค่าใหญ่ ค่า F จะมีค่ามาก แต่ถ้า $MS_{between}$ มีค่าเล็ก ค่า F จะมีค่าน้อย หรือกล่าวได้โดยสรุปว่า ถ้าค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างต่าง ๆ มีค่าใกล้เคียงกันมาก ค่า F ก็จะมีขนาดเล็ก แต่ถ้าค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างต่าง ๆ มีค่าแตกต่างกันมาก ค่า F ก็จะมีขนาดใหญ่

การแจกแจงของ F ขึ้นอยู่กับองศาแห่งความเป็นอิสระของ $MS_{between}$ และ MS_{within} ค่า $MS_{between}$ เกี่ยวพันกับค่าเฉลี่ยจำนวน k ตัว เมื่อ k คือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง และค่าเฉลี่ย รวมทั้งหมด ($\bar{X}$) ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้นองศาแห่งความเป็นอิสระของ $MS_{between}$ $= k - 1$ และ ค่า MS_{within} เกี่ยวข้องกับ S^2 ของทุกกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งในแต่ละกลุ่มตัวอย่างต้องเกี่ยวพันกับข้อมูลทั้งหมด และค่าเฉลี่ยของแต่ละกลุ่มตัวอย่างซึ่งเป็นค่าคงที่ ๑ ตัว นั่นคือในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง มีค่า df เป็น n-1 ทำให้ค่า df ของ MS_{within} ซึ่งเกี่ยวข้องกับ

ทุกกลุ่มตัวอย่าง (จำนวน k กลุ่ม) เป็น $k(n-1) = kn - k$ ถ้าให้ N แทนจำนวนของข้อมูลทุกกลุ่มตัวอย่าง จะเห็นได้ว่า $kn = N$ นั่นคือ df ของ $MS_{within} = N-k$

ในการเปิดตารางค่าการแจกแจงของ F ต้องดูที่องศาแห่งความเป็นอิสระที่ $k-1$ และ $N-k$ ประกอบกัน (ดูตารางท้ายเล่มประกอบ)

ตัวอย่าง ครูผู้หนึ่งทำการทดลองวิธีการแนวความคิดในการสอนของเขา 3 วิธีดังนี้คือ ทุกครั้งที่มีการสอนจบบทครูจะแจกบทสรุปให้ วิธีที่ 2 คือ หลังจากการสอนจบบทจะมีการสอบย่อย และแบบที่ 3 คือ หลังจากการสอนแล้วมีการเปิดเวลาทบทวนให้กับผู้ที่ยังไม่เข้าใจนอกเวลาของชั้นเรียน เพื่อที่จะทราบความแตกต่างของวิธีการสอนทั้งสามนี้ ผู้สอนจึงเลือกนักเรียนอย่างสุ่มออกมา 3 กลุ่ม ๆ ละ 10 คน ทำการทดลองแต่ละวิธี แล้วใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์แบบเดียวกันวัดผลของนักเรียนทั้ง 3 กลุ่มนั้น ปรากฏว่าได้ผลดังนี้

กลุ่มที่ 1 : 38, 54, 39, 52, 63, 54, 47, 52, 46, 25

กลุ่มที่ 2 : 58, 44, 63, 94, 72, 42, 89, 68, 53, 47

กลุ่มที่ 3 : 76, 81, 83, 84, 51, 67, 40, 89, 76, 53

ครูผู้นี้ทราบมาก่อนว่า การแจกแจงของคะแนนของทุกประชากรเป็นโค้งปกติ และมีความแปรปรวนเท่ากัน จงตรวจสอบดูว่า คะแนนจากวิธีการสอนทั้ง 3 วิธีนี้แตกต่างกันหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ .05

เมื่อให้การสอนทั้ง 3 วิธีเป็นการสอนวิธีที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ สมมติฐานในการทดสอบจะเป็นดังนี้

$H_0 \; : \; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$H_1 \; : \; (\mu_1 = \mu = \mu_3)'$ หรือมีค่าเฉลี่ยของคะแนนอย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

X_1	$X_1 - \bar{X}_1$	$(X_1-\bar{X}_1)^2$	X_2	$X_2-\bar{X}_2$	$(X_2-\bar{X}_2)^2$	X_3	$X_3-\bar{X}_3$	$(X_3-\bar{X}_3)^2$
38	-9	81	58	-5	25	76	9	81
54	7	49	44	-19	361	51	-16	256
39	-8	64	63	0	0	83	16	256
52	5	25	94	31	961	84	17	289
63	16	256	72	9	81	51	-16	256
54	7	49	42	-21	441	67	0	0
47	0	0	80	26	676	40	-27	729
52	5	25	68	5	25	89	22	484
46	-1	1	53	-10	100	76	9	81
25	-22	484	47	-16	256	53	-14	196
470		1034	630		2926	670		2628

$\bar{X}_1 = 47 \qquad \bar{X}_2 = 63 \qquad \bar{X}_3 = 67$

$S_1^2 = \frac{1034}{9} = 114.89 \quad S_2^2 = \frac{2926}{9} = 325.11 \quad S_3^2 = \frac{2628}{9} = 292$

ดังนั้น $MS_{within} = \frac{114.89 + 325.11 + 292}{3}$

$= \frac{732}{3} = 244$

ค่าเฉลี่ยรวม

$\bar{X} = \frac{470 + 630 + 670}{30} = \frac{1770}{30} = 59.0$

$MS_{between} = \frac{10}{3-1} [(47 - 59)^2 + (63 - 59)^2 + (67 - 59)^2]$

$$= \frac{10}{2}\left[(-12)^2 + (4)^2 + (8)^2\right]$$

$$= 5(144 + 16 + 64)$$

$$= 5(224)$$

$$= 1120$$

นั่นคือ $F = \frac{1120}{244} = 4.59$

ที่ $\alpha = .05$ ค่า df ของ $MS_{between} = 3 - 1 = 2$

df ของ $MS_{within} = 30 - 3 = 27$

ค่า $F_{(3,\ 2,\ .05)}$ จากตาราง $= 3.35$

จะเห็นได้ว่า ค่า F จากการคำนวณ > ค่า F จากตาราง กล่าวคือต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ มีผลของการสอนอย่างน้อยสองวิธีที่แตกต่างกัน

<u>วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยคิดคำนวณจากคะแนนดิบและขนาดของกลุ่มตัวอย่างอาจไม่เท่ากัน</u>

การทดลองทุกครั้ง ไม่จำเป็นที่ผู้ทำการทดลองจะต้องใช้กลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเท่ากัน เมื่อให้ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ คือขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ 1, 2, 3,...,k ตามลำดับ เราสามารถหาค่าประมาณของความแปรปรวนทั้งหมด (MS_{within}) จากความแปรปรวนของแต่ละกลุ่มตัวอย่างได้ดังนี้

$$MS_{within} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + \ldots + (n_k - 1)S_k^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1)}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 + \ldots + (n_k - 1)S_k^2}{n - k}$$

เมื่อ N เป็นผลรวมของขนาดกลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่ม ($N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$)

จาก

$$S_i^2 = \frac{\Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n_i}}{n_i - 1}$$

ดังนั้น $$(n_i - 1)S_i^2 = \Sigma X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n_i}$$

แทนค่าใน MS_{within} จะได้

$$MS_{within} = \frac{\Sigma X_1^2 - \frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \Sigma X_2^2 - \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \Sigma X_k^2 - \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}}{N - k}$$

$$= \frac{(\Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2 + \ldots + \Sigma X_k^2) - [\frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}]}{N - k}$$

แต่ $\Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2 + \ldots + \Sigma X_k^2 = \Sigma X^2$

ดังนั้น $$MS_{within} = \frac{\Sigma X^2 \quad [\frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}]}{N - k}$$

และ $\Sigma X^2 - [\frac{(\Sigma X_2)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}]$ คือผลรวมของกำลังสองภายในกลุ่ม (Sum Square within Sample ใช้ตัวย่อว่า SS_{within})

และ N - k คือองศาแห่งความเป็นอิสระของ MS_{within}

ดังนั้น $MS_{within} = \frac{SS_{within}}{df}$

ในทำนองเดียวกัน เราอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$MS_{between} = \frac{SS_{between}}{df}$$

เมื่อ $SS_{between} = \frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k} - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$

ผลรวมกำลังสองของค่าแตกต่างระหว่างค่าข้อมูลทุกตัวกับค่าเฉลี่ย (Total Sum of Square ใช้ตัวย่อว่า SS_{total}) คือผลรวมของ SS_{within} และ $SS_{between}$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} SS_{total} &= SS_{within} + SS_{between} \\ &= (\Sigma X^2) - \left[\frac{(\Sigma X_1)^2}{n} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}\right] \\ &\quad + \left[\frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}\right] - \frac{(\Sigma X)^2}{N} \\ &= \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N} \end{aligned}$$

$$SS_{total} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

สรุปการคำนวณค่า F เมื่อแต่ละกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่าใดก็ได้ดังนี้

SUM OF SQUARES BETWEEN SAMPLES	$SS_{between} = \frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k} - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$
SUM OF SQUARES WITHIN SAMPLES	$SS_{within} = X^2 - \left[\frac{(\Sigma X_1)^2}{n} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \ldots + \frac{(\Sigma X_k)^2}{n_k}\right]$

MEAN SQUARES BETWEEN SAMPLES | $MS_{between} = \dfrac{SS_{between}}{k - 1}$

MEAN SQUARE WITHIN SAMPLES | $MS_{within} = \dfrac{SS_{within}}{N - k}$

$$F = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

Source of Variation	df	SS	MS	F
Between Samples	k - 1	$SS_{between}$	$\dfrac{SS_{between}}{k-1}$	$\dfrac{MS_{between}}{MS_{within}}$
Within Samples	N - k	SS_{within}	$\dfrac{SS_{within}}{n - k}$	
TOTAL	N - 1	SS_{total}		

ตัวอย่าง นักจิตวิทยาได้ทำการทดสอบการเรียนรู้ของหนูในการหาทางออกจากเขาวงกต เขาได้แบ่งหนูออกเป็น 4 พวก โดยให้หนูแต่ละพวกได้มีโอกาสเรียนรู้มาเป็นระยะเวลาที่แตกต่างกัน กล่าวคือ กลุ่มที่ 1 6 เดือน กลุ่มที่ 2 3 เดือน กลุ่มที่ 3 1 เดือน และกลุ่มที่ 4 เป็นกลุ่มควบคุม หลังจากนั้นได้ทำการจับเวลาของหนูแต่ละกลุ่ม ปรากฏว่า ผลของการใช้เวลาในการหาทางออกจากเขาวงกตหน่วยเป็นนาที เป็นดังนี้

กลุ่มที่ 1 : 13, 11, 6, 12, 7, 15, 14

กลุ่มที่ 2 : 9, 13, 15, 11, 10, 6, 7, 9

กลุ่มที่ 3 : 6, 9, 13, 10, 9, 7

กลุ่มที่ 4 : 16, 10, 14, 17, 9, 11, 14

ผู้ทดลองเชื่อว่า ประชากรของแต่ละกลุ่มจะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และมีความแปรปรวนเท่ากัน จงตรวจสอบดูว่า หนูทั้ง 4 กลุ่มนี้ใช้เวลาในการหาทางออกจากเขาวงกตแตกต่างกันหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .05

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

H : มี μ อย่างน้อย 1 คู่ที่ไม่เท่ากัน

	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2	X_4	X_4^2
	13	169	9	81	6	36	16	256
	11	121	13	169	9	81	10	100
	6	36	15	225	13	169	14	196
	18	324	11	121	10	100	17	289
	3	49	10	100	9	81	9	81
	15	225	6	36	7	49	11	121
	14	196	7	49			14	196
			9	81				
Σ	84	1120	80	862	54	516	91	1239

$\Sigma X = 84 + 80 + 54 = 91 = 309$ และ $\Sigma X^2 = 1120 + 862 + 516 + 1239 = 3737$

$n_1 = 7,\ n_2 = 8,\ n_3 = 6,\ n_4 = 7$ $\quad N = 7 + 8 + 6 + 7 = 28$

$k = 4$

จาก $SS_{between} = \frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \frac{(\Sigma X_3)^2}{n_3} + \frac{(\Sigma X_4)^2}{n_4} - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$

$= \frac{(84)^2}{7} + \frac{(80)^2}{8} + \frac{(54)^2}{6} + \frac{(91)^2}{7} - \frac{(309)^2}{28}$

$= 3477 - 3410.04$

$= 66.96$

จาก $SS_{within} = \Sigma X^2 - [\frac{(\Sigma X_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma X_2)^2}{n_2} + \frac{(\Sigma X_3)^2}{n_3} + \frac{(\Sigma X_4)^2}{n_4}]$

$= 2737 - 3477$

$= 260$

$SS_{total} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$

$= 3737 - 3410.04$

$= 326.96$

ดังนั้น

$MS_{between} = \frac{66.96}{4-1} - \frac{66.96}{3} = 22.32$

$MS_{within} = \frac{260}{28-4} = \frac{260}{24} = 10.83$

$F = \frac{22.32}{10.83} = 2.06$

ดังแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

Source of Variance	df	SS	MS	F
Between Samples	3	66.96	22.32	2.06
Within Samples	24	260.00	10.83	
Total	27	326.96		

ค่า $F_{(3,24,.05)}$ จากตาราง = 3.01

จะเห็นได้ว่า F จากคำนวณ < F จากตาราง นั่นคือ ต้องยอมรับ H_0 กล่าวคือ ค่าเฉลี่ยของการใช้เวลาของหนูแต่ละกลุ่มในการหาทางออกจากเขาวงกต ไม่แตกต่างกันที่ระดับ .05

<u>การตรวจสอบรายคู่ เมื่อพบความแตกต่างจากการวิเคราะห์ความแปรปรวน</u>

เมื่อใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากหลายประชากรและพบความแตกต่าง แสดงว่ามีค่าเฉลี่ยอย่างน้อยหนึ่งคู่ที่มีความแตกต่างกัน และเพื่อที่จะทราบดูว่ามีคู่ใดบ้างที่มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกันจริง จึงต้องมีการทดสอบเป็นรายคู่ต่อไปอีก

เมื่อมีการทดสอบพบว่า A_1, A_2, A_3, A_4 มีความแตกต่างกัน การตรวจสอบรายคู่จะมีดังนี้

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	-	A_1A_2	A_1A_3	A_1A_4
A_2	-	-	A_2A_3	A_2A_4
A_2	-	-	-	A_2A
A_4	-	-	-	-

คู่ที่ต้องทดสอบความแตกต่าง จะมีจำนวนเท่ากับจำนวนการเลือกหมู่ของ 4 สิ่ง เลือกทีละ 2 สิ่ง ($^4C_2$) นั่นคือ 6 คู่ คือ A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_3 และ A_2A_4 เป็นต้น

<u>วิธีการทดสอบรายคู่</u>

ในการทดสอบรายคู่นั้น อาจใช้วิธีการต่าง ๆ ได้หลายวิธีแตกต่างกัน ซึ่งแต่ละวิธี อาจจะเน้นถึงการลดความผิดพลาดแบบ I (Type I error) แตกต่างกัน นั่นคือวิธีหนึ่ง อาจจะพบความแตกต่างได้ง่ายกว่าอีกวิธีหนึ่ง ซึ่งหมายความว่า วิธีที่พบความแตกต่างได้ง่าย กว่านั้น ยอมให้เกิดความผิดพลาดแบบ I ได้ง่ายกว่าเป็นต้น

วิธีโดยทั่วไปที่นิยมใช้ในการทดสอบรายคู่หลังจากพบความแตกต่างจากการวิเคราะห์ ความแปรปรวนแล้ว มีดังนี้คือ

1. ใช้สถิติ t (t-test) ตรวจสอบ โดยวิธีการตรวจสอบจะเป็นไปเช่นเดียวกับ การตรวจสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของประชากร 2 ประชากร ค่าสถิติ t เป็นแบบที่ กลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระจากกัน และความแปรปรวนของประชากรเท่ากัน กล่าวคือ

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

เมื่อ $$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนข้อมูลในกลุ่มตัวอย่างคู่ที่ต้องการทดสอบ

$\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างคู่ที่ทำการทดสอบ

S_1^2 และ S_2^2 เป็นค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างคู่ที่ทำการทดสอบ

วิธีการทดสอบก็เช่นเดียวกับวิธีใช้สถิติ t โดยทั่ว ๆ ไป (ดูเรื่องสถิติ t ประกอบ)

๒. ใช้วิธีการของเชฟเฟ่ (Scheffe's Method) ซึ่งเป็นวิธีการที่ค่อนข้างจะเข้มงวดต่อการเกิดความผิดพลาดแบบ I การคำนวณแบบนี้เป็นการคำนวณโดยใช้อัตราส่วน F ดังนี้

$$F = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{MS_W\ (w_1 + n_k)/n_1 n_2}$$

เมื่อ $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ คือค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ต้องการเปรียบเทียบ

n_1, n_2 คือขนาดของกลุ่มตัวอย่างทั้งสอง

MS_W คือค่า Mean Square Within Groups

เมื่อคำนวณค่าอัตราส่วน F ข้างบนได้แล้ว นำไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤติ ซึ่งคำนวณได้จากค่าวิกฤติ = F (k - 1) เมื่อ F คือค่า F จากตารางในการทดสอบ ANOVA

ตัวอย่าง ผลจากการวิเคราะห์ความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากวิธีสอนสามวิธี เป็นดังนี้

	$\bar{X}$	n
วิธีที่ 1	11.7	7
วิธีที่ 2	15.43	7
วิธีที่ 3	8.57	7

และค่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนดังตารางข้างล่างนี้

แหล่งความแปรปรวน	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	2	165.0	82.5	5.00
ภายในกลุ่ม	18	292.8	16.3	

ค่าวิกฤต $F_{(.05,2,18)} = 3.55$

จงตรวจสอบดูว่ามีวิธีสอนคู่ใดบ้างที่แตกต่างกันอย่างเชื่อถือได้

คำนวณ อัตราส่วน F เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีสอนวิธีที่ 1 และที่ 2

$$F = \frac{(11.7 - 15.43)^2}{16.3(7+7)/(7x7)}$$

$$= \frac{13.8384}{4.66} = 2.97$$

คำนวณ อัตราส่วน F เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีสอนวิธีที่ 1 และที่ 3

$$F = \frac{(11.71 - 8.57)^2}{(16.3)(7+7)/(7x7)}$$

$$= \frac{9.8596}{4.66} = 2.12$$

คำนวณ อัตราส่วน F เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีสอนวิธีที่ 2 และที่ 3

$$F = \frac{(15.43 - 8.57)^2}{(16.3)(7+7)/(7x7)}$$

$$= \frac{47.0596}{4.66} \qquad = 10.1$$

ผลคูณที่ต้องการใช้เปรียบเทียบ = 3.55 x (3 - 1)

= 7.10

	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 2
วิธีที่ 1	-	2.97	2.12
วิธีที่ 2		-	10.1*
วิธีที่ 3			-

* แตกต่างอย่างมีระดับนัยสำคัญที่ .05 (เพราะค่า 10.1 > 7.10)

3. วิธีของ นิวแมน-คูลส์(Newman-Keuls) เป็นวิธีทดสอบความแตกต่างที่ไม่เข้มงวดเรื่องความผิดพลาดแบบ 1 มากเท่าวิธีของเชฟเฟ่

วิธีการของนิวแมน-คูลส์ เริ่มจาก

1) เรียงลำดับค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างจากน้อยไปหามาก เช่น จากตัวอย่างที่กล่าวในวิธีการของเชฟเฟ่ เราสามารถเรียงลำดับได้ดังนี้

$\bar{X}_3$	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
8.57	11.71	15.43

2) กำหนดค่า r ของคู่ที่จะเปรียบเทียบ เมื่อ r คือ จำนวนค่าเฉลี่ยซึ่งนับจากค่าเฉลี่ยตัวหนึ่งถึงค่าเฉลี่ยตัวที่นำมาเปรียบเทียบ ดังตัวอย่างเช่นจากค่า $\bar{X}$ ในข้อ 1

เมื่อเปรียบเทียบ $\bar{X}_3$ และ $\bar{X}_1$ $r = 2$

$\bar{X}_3$ และ $\bar{X}_2$ $r = 3$

$\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ $r = 2$

หมายเหตุ ค่า r ต่ำสุดจะเท่ากับ 2 และสูงสุดเท่ากับจำนวนค่าเฉลี่ยเท่านั้น

๓) ใช้ตารางการแจกแจงของ Studentized Range Statistic การอ่านค่า q จากตารางดูจากค่า r ที่คำนวณได้ในข้อ ๒ และค่า $df = N - k$ เมื่อ N คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด และ k คือจำนวนกลุ่มตัวอย่าง

๔) คำนวณค่าวิกฤตของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่จาก $q\sqrt{\dfrac{MS_w}{\tilde{n}}}$

ถ้าทุกกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเท่ากันทุกกลุ่ม ๆ ละ n ค่า $\tilde{n} = n$

ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดไม่เท่ากันทุกกลุ่ม

$$\tilde{n} = \frac{k}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}}$$

๕) เปรียบเทียบค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยที่นำมาเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตในข้อ ๔ ถ้าค่าความแตกต่างมากกว่าค่าวิกฤต ก็แสดงว่าประชากรของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองมีค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน

จากตัวอย่างดังกล่าวข้างต้น

ผลต่างของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่

	ค่าเฉลี่ย	8.57	11.71	15.43
วิธีที่ ๓	8.57	-	3.14	6.86*
วิธีที่ ๑	11.71		-	3.72
วิธีที่ ๒	15,43			-

จากตัวอย่างดังกล่าวในเรื่องเชฟเฟ่ ค่า n ของทุกกลุ่มตัวอย่างเป็น 7 เท่ากัน ดังนี้ $\tilde{n} = n = 7$

เมื่อ $r = 2$ ค่าวิกฤตที่ .05 เป็น $2.97 \sqrt{\frac{16.3}{7}} = 4.53$

เมื่อ $r = 3$ ค่าวิกฤตที่ .05 เป็น $3.61 \sqrt{\frac{16.3}{7}} = 5.50$

จากตารางจะเห็นได้ว่า วิธีสอนวิธีที่ ๓ และวิธีที่ ๒ ที่ทำให้ผลเฉลี่ยของคะแนนแตกต่างกันที่ระดับ .05

<u>การวิเคราะห์ความแปรปรวนเมื่อมีเพียงสองกลุ่มตัวอย่าง</u>

ในการทดสอบหาความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของประชากร ๒ ประชากร อาจจะทำโดยวิธีหาค่าสถิติ t หรือใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนหาค่าสถิติ F ก็ได้ และค่าสถิติ F และสถิติ t จะมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$F = t^2$$

ตัวอย่าง กลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน และมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นปกติ และมีความแปรปรวนเท่ากัน ดังตารางข้างล่าง จงทดสอบว่าประชากรทั้งสองนี้จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากันหรือไม่

X	X_2		X^2	X_2^2
22	12		484	144
18	16		324	256
24	10		576	100
22	10		484	100
16	4		256	16
18	6		324	36
13	17		169	289
18	14		324	196
19	14		361	196
22	10		484	100
192	113		3786	1433

เมื่อใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน :

$\bar{X}_1 = 19.2 \quad \bar{X}_2 = 11.3$

$H_0 \quad \mu_1 = \mu_2$

$H_1 \quad \mu_1 \neq \mu_2$

$$SS_{between} = \frac{(192)^2}{10} + \frac{(113)^2}{10} - \frac{(305)^2}{20}$$

$$= (3686.4 + 1276.9) - 4651.25$$

$$= 4963.3 - 4651.25$$

$$= 312.05$$

$$SS_{within} = 5219 - [\frac{(192)^2}{10} + \frac{(113)^2}{10}]$$

$$= 5219 - 4963.3$$

$$= 255.7$$

$$F = \frac{312.05/1}{255.7/18} = \frac{312.05}{14.21} = 21.96$$

จากตาราง $F_{(1,18,.01)} = 8.29$

ค่า F ที่คำนวณ > ค่า F จากตาราง กล่าวคือเราต้องปฏิเสธ H_0 ที่ว่า $\mu_1 = \mu_2$ และยอมรับ H_1

เมื่อใช้สถิติ t ; $t = \dfrac{\bar{X} - \bar{X}_1}{\sqrt{\dfrac{\Sigma X^2 + \Sigma X_1^2}{(N_1 + N_2)} \left(\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}\right)}}$

$$= \frac{19.2 - 11.3}{\sqrt{\dfrac{99.6 + 156.1}{(10 + 10) - 2} \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}\right)}}$$

$$= \frac{7.9}{\sqrt{\dfrac{255.7}{18} (.1 + .1)}}$$

$$= \frac{7.9}{(14.20)(.2)}$$

$$= \frac{7.9}{1.685}$$

$$= 4.69$$

จะเห็นได้ว่า ค่า $F = t^2$ คือ $21.96 = (4.69)^2 \sim 21.99$

จากค่า $t_{(18,.01)} = 2.87$

จะเห็นได้ว่า ค่า t ที่คำนวณได้ > ค่า t จากตาราง กล่าวคือ ปฏิเสธ H_0 ที่ว่า $\mu_1 = \mu_2$ ไปยอมรับ H_1 ที่ว่า $\mu_1 \neq \mu_2$ เช่นเดียวกันกับการทดสอบด้วยสถิติ F และค่า t^2 มีค่าเท่ากับค่า F

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. ให้ผู้เรียนยกตัวอย่างหัวข้อการวิจัยที่น่าจะใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนมา 3 หัวข้อ

2. จากตารางที่กำหนดให้ เป็นการวิเคราะห์ความแปรปรวนของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการเลี้ยงดูด้วยอาหาร 3 ชนิด จงแปลผลตัวเลขของตาราง

Source of Variable	df	SS SS	MS	F
between groups.	2	69.24	34.62	6.67
within groups.	18	93.43	5.19	-
Total	20	162.67		

$$F_{.01\ (df = 2,\ 18)} = 6.01$$

3. จงพิจารณาตารางต่อไปนี้

Source	SS	df	MS	F
Between Groups	26.54	3	8.846	2.133
Within Groups	149.292	36	4.147	
Total	175.832	39		

ถ้าตารางข้างบน เป็นตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) เพื่อที่จะเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนหลังจากใช้อุปกรณ์การสอนชนิดต่าง ๆ กัน กลุ่มละชนิด

โดยใช้นักเรียนในแต่ละกลุ่มทดลองจำนวนเท่ากัน

ก. อยากทราบว่า ผู้วิจัยทำการทดลองโดยใช้อุปกรณ์การสอนกี่ชนิด

ข. กลุ่มตัวอย่างมีกี่กลุ่ม

ค. จงเขียนสมมติฐานที่เป็นกลางที่ใช้ในการทดสอบ (Null Hypothesis)

ง. ที่ระดับนัยสำคัญ .05 เขาสรุปผลการทดสอบได้ว่าอย่างไร

จ. จงบอกข้อตกลงเบื้องต้น (Assumption) ในการใช้ F-distribution ทดสอบครั้งนี้

4. ในการตรวจผลการสอบเข้าโรงเรียนแห่งหนึ่ง ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัย และมีนักเรียนอยู่เป็นจำนวนมาก จึงต้องใช้ครู 3 คน แต่ก่อนที่จะให้ครูทั้ง 3 คนนี้ตรวจแบบทดสอบทั้งหมดเพื่อให้แน่ใจว่าครูทั้ง 3 คนนี้ให้คะแนนไม่แตกต่างกันมากนัก จึงให้ครูทั้ง 3 คนนี้ทดลองตรวจข้อสอบของนักเรียน 8 คน ปรากฏว่าได้ผลดังนี้

นักเรียน	ครูคนที่ 1	ครูคนที่ 2	ครูคนที่ 3
1	6	4	2
2	6	3	6
3	8	4	8
4	10	8	8
5	12	6	8
6	14	10	9
7	16	8	10
8	20	11	8

จงตรวจสอบคะแนนของครูทั้ง 3 คนนี้

5. ถ้าอายุของคน 4 กลุ่มเป็นดังนี้

กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3	กลุ่ม 4
15	24	20	25
20	22	22	18
26	20	30	16
26	20	27	32
24	34		24
	18		

ก. จงตรวจสอบว่า กลุ่มคนทั้งสามดังกล่าวมีความแปรปรวนของประชากร แตกต่างกันหรือไม่

ข. ถ้าไม่พบความแตกต่างในข้อ ก. จงตรวจสอบดูว่า ค่าเฉลี่ยของประชากร ทั้ง 3 กลุ่มนั้นจะเท่ากันหรือไม่

ค. ถ้าพบความแตกต่างในข้อ ข. จงตรวจสอบดูว่า กลุ่มใดบ้างที่มีค่าความเฉลี่ย ของประชากรแตกต่างกัน

บทที่ 10

สหสัมพันธ์เส้นตรง

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. ให้ผู้เรียนรู้จักสหสัมพันธ์เส้นตรงแบบต่าง ๆ
2. ให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ เปียร์สัน พร้อมทั้งวิธีทดสอบนัยสำคัญ และการแปลความหมาย
3. ให้ผู้เรียนสามารถทดสอบความแตกต่างของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์สองค่าได้
4. ให้ผู้เรียนรู้จักวิธีคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน
5. ให้ผู้เรียนรู้จักวิธีคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ point biserial
6. ให้ผู้เรียนสามารถเลือกใช้ค่าสหสัมพันธ์แบบต่าง ๆ ให้เหมาะสมกับชนิดของข้อมูล

<u>เนื้อหา</u>

- ความสัมพันธ์เส้นตรงลักษณะต่าง ๆ
- การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ เปียร์สัน
- สมมติฐานเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติสหสัมพันธ์
- การแปลความหมายค่า r จากการคำนวณเปียร์สัน
- การทดสอบนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ เปียร์สัน (r)
- การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ เปียร์สัน 2 ค่า
- การทดสอบความแตกต่างของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากประชากรที่มีความสัมพันธ์กัน

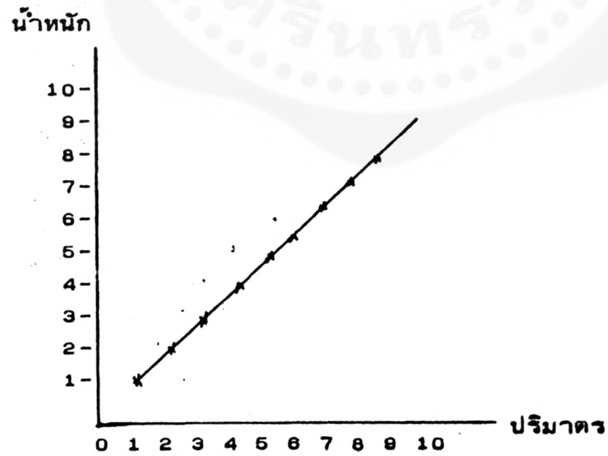
- การหาความสัมพันธ์ของข้อมูลระดับเรียงลำดับ
- การทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน
- การหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลชนิดต่อเนื่อง และข้อมูล 2 ระดับ
- การทดสอบนัยสำคัญ แบบ point Biserial
- สรุปการหาค่าความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ

สหสัมพันธ์เชิงเส้นตรง (Linear Correlation)

บ่อยครั้งที่เรามักจะสังเกตว่า น่าจะมีอะไรเกี่ยวข้องกันระหว่างตัวแปร ๒ ตัวแปร ที่มาจากแหล่งที่เกิดเดียวกัน (Bivariate Variable) เช่น ตัวแปรน้ำหนักและส่วนสูงของคน หรือค่าสังเกตที่มาจากตัวแปร 2 ตัวที่มาจากแหล่งที่เกิดที่มีความสัมพันธ์กัน เช่น ระดับสติปัญญาของพ่อ และลูก หรือความสูงของคู่แฝด ฯลฯ ในทางสถิติ มีวิธีวัดความเกี่ยวข้องดังกล่าวข้างต้นเรียกว่าการหาสหสัมพันธ์ (Correlation) ลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรอาจจะมีหลายรูปแบบ เช่น สัมพันธ์กันเป็นเส้นตรง (Linear Correlation) เป็นเส้นโค้ง (Curvilinear Correlation) ฯลฯ

ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงลักษณะต่าง ๆ

1. "เมื่อใส่น้ำเพิ่ม 1 ลูกบาศก์เซ็นติเมตร น้ำหนักของน้ำจะเพิ่มขึ้น 1 กรัม และเป็นเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป" จากคำกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่า สิ่งสองสิ่งคือปริมาตรของน้ำ และน้ำหนักของน้ำมีความเกี่ยวข้องกัน เราเรียกว่าน้ำหนักของน้ำและปริมาตรของน้ำมีความสัมพันธ์กัน เมื่อนำน้ำหนักของน้ำและปริมาตรของน้ำมากำหนดจุดบนกราฟ จะได้ภาพดังนี้

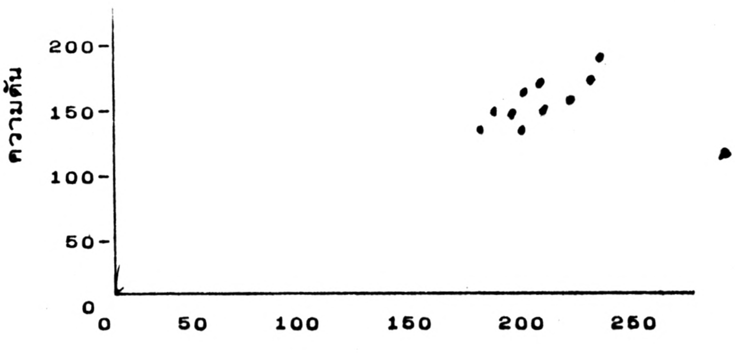


ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรและน้ำหนักของน้ำ

จะเห็นได้ว่า แนวของจุดบนเส้นกราฟจะอยู่เรียงกันเป็นเส้นตรงที่มีค่าหนึ่งเพิ่มขึ้น เมื่ออีกค่าหนึ่งเพิ่มขึ้น เราเรียกว่าน้ำหนักและปริมาตรน้ำมี<u>ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงที่สมบูรณ์แบบทางบวก</u>

๒. ในบางกรณี สิ่งสองสิ่งมีความสัมพันธ์กันแต่ไม่อยู่ในลักษณะที่สมบูรณ์ กล่าวคือ ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงไม่คงที่เสมอไป เช่น น้ำหนักและความดันเลือด เรามักพบเสมอว่าคนที่น้ำหนักมากความดันเลือดจะสูง แต่จะไม่เป็นเช่นนี้ทุกคนเสมอไป และอัตราส่วนการเพิ่มของน้ำหนัก และความดันจะไม่แน่นอนตายตัวสำหรับทุกคน ตัวอย่างเช่น เมื่อวัดน้ำหนักและความดันของคนจำนวน 10 คน ได้เป็นดังนี้

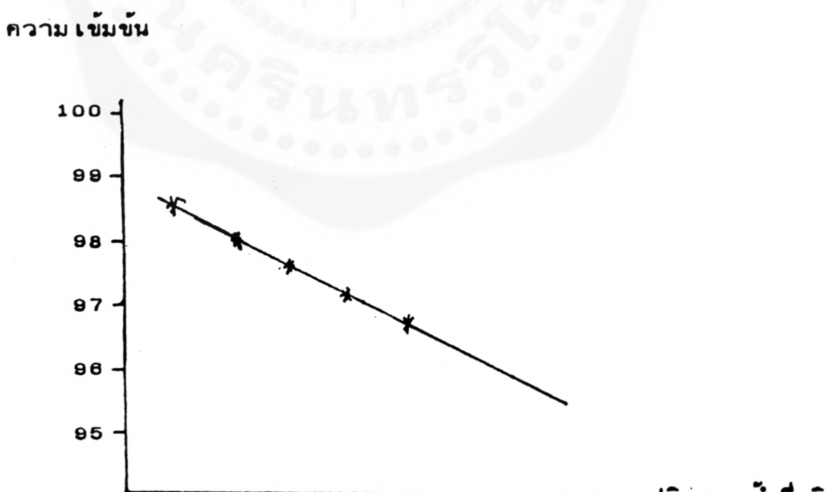
ตัวอย่าง	น.น.	ความดัน
1	188	140
2	231	160
3	176	130
4	194	130
5	244	180
6	207	160
7	198	140
8	217	150
9	181	140
10	194	150



ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันเลือดและน้ำหนักตัว

จะเห็นได้ว่า จุดต่าง ๆ ไม่เรียงกันเป็นเส้นตรง แต่ก็ยังมีลักษณะที่จะโน้มเอียงไปในทางเส้นตรง เราเรียกว่า น้ำหนักและความดันเลือดมี<u>ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงไม่สมบูรณ์แบบทางบวก</u>

๓. ในบางกรณีสิ่งสองสิ่งมีความสัมพันธ์กันในทางตรงกันข้าม เช่น เมื่อเติมน้ำลงในน้ำหมึก ความเข้มข้นของน้ำหมึกจะลดลง ถ้าทุก 1 ลูกบาศก์เซ็นติเมตรของน้ำที่หยดลงในน้ำหมึกจะทำให้น้ำหมึกลดความเข้มข้นลง 1% เมื่อนำปริมาตรของน้ำและความเข้มข้นของน้ำหมึกมากำหนดจุดลงบนกราฟจะได้ดังนี้



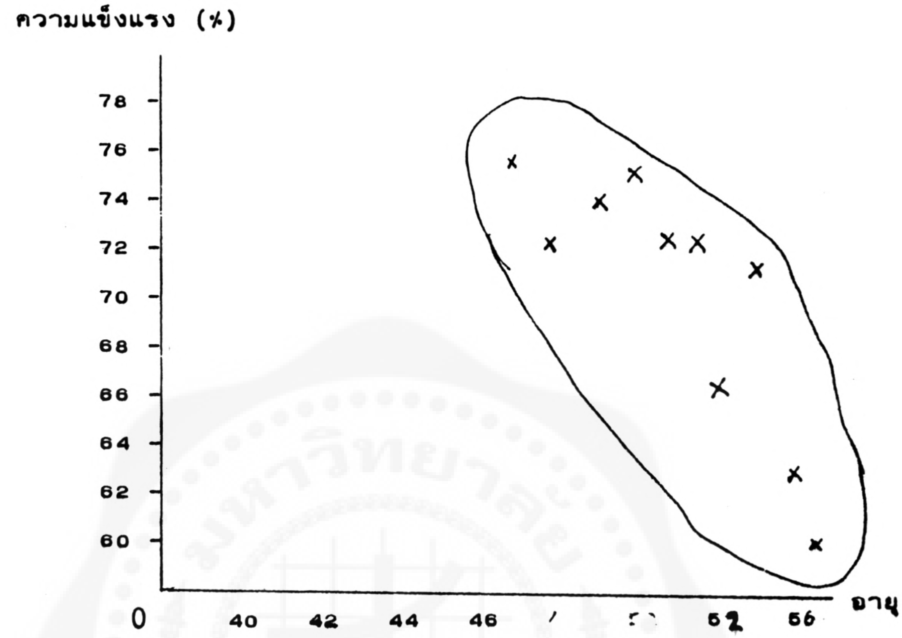
ภาพแสดงความสัมพันธ์ของปริมาตรน้ำที่เติมลงในน้ำหมึก และความเข้มข้นของน้ำหมึก

จะเห็นได้ว่า จุดทั้งหมดเรียงกันเป็นเส้นตรงเช่นกัน แต่กลับกันกับแบบที่ ๑ กล่าวคือ เมื่อค่าหนึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นอีกค่าหนึ่งจะมีค่าลดลง เราเรียกว่า ปริมาตรน้ำที่เติมและความเข้มข้นของน้ำหมึกมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงที่สมบูรณ์แบบทางลบ

4. ความสัมพันธ์ทางลบบางครั้งเป็นไปไม่สมบูรณ์แบบ คือเมื่อนำมากำหนดจุดลงบนกราฟ จะไม่เรียงกันเป็นเส้นตรงทีเดียว เช่น อายุหลังวัยหนุ่มสาวกับความแข็งแรงมักจะปรากฏว่า เมื่ออายุยิ่งมากขึ้น ความแข็งแรงจะลดลง แต่อัตราการลดของแต่ละคนอาจไม่เท่ากัน จากการวัดผู้สูงอายุจำนวน ๑๐ คน ปรากฏผลดังนี้

อายุ	ความแข็งแรงคิดเป็น%
46	74
49	71
51	70
49	72
53	68
54	69
50	70
55	65
56	60
47	70

เมื่อนำอายุและความแข็งแรงมากำหนดจุดลงบนกราฟ จะปรากฏผลดังนี้



ภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับความแข็งแรง

จะเห็นได้ว่า จุดต่าง ๆ ไม่เรียงกันเป็นเส้นตรง แต่ก็ยังมีลักษณะที่จะไปในทางเส้นตรง แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับความสัมพันธ์ในข้อ 2 เราเรียกความสัมพันธ์แบบนี้ว่า <u>มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงไม่สมบูรณ์แบบทางลบ</u>

5. ของบางสิ่งไม่มีความสัมพันธ์กันเลย เช่นน้ำหนักกับสติปัญญา กล่าวคือ เมื่อน้ำหนักมากหรือน้อย ไม่ได้แสดงว่าสติปัญญาต้องดีหรือเลวลงตามน้ำหนัก ลักษณะความสัมพันธ์จะเป็นดังนี้ เมื่อวัดน้ำหนักและ IQ ของคนจำนวน 10 คน ปรากฏผลดังนี้

น้ำหนัก	ระดับสติปัญญา (IQ)
42	138
44	140
51	130
43	140
52	150
59	130
47	120
48	140
50	110
45	120

เมื่อนำน้ำหนักและระดับสติปัญญามากำหนดจุดลงบนกราฟจะได้

ระดับสติปัญญา

150 -
140 -
130 -
120 -
110 -
100 -

น้ำหนัก

40 45 50 55 60

จะเห็นได้ว่า จุดบนกราฟอยู่กระจัดกระจายโดยทั่วไป ไม่มีแนวโน้มที่จะเป็นเส้นตรงไปในทางหนึ่งทางใดทั้งสิ้น เราเรียกว่าสิ่งสองสิ่งนี้ <u>ไม่มีความสัมพันธ์กัน หรือความสัมพันธ์เป็นศูนย์</u>

<u>การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน</u> (PearsonProduct Moment Coefficient of Correlation)

เซอร์ ฟรานซิส แกลตัน (Sir Francis Galton) ซึ่งเป็นนักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ ได้ทำการค้นคว้าเรื่องการถ่ายทอดทางพันธุกรรม เข้าได้ค้นคว้าถึงลักษณะของบิดามารดาที่ถ่ายทอดไปยังบุตร เขาพบว่า พ่อสูงมักจะทำให้ลูกสูงด้วย แต่ไม่สูงเท่าพ่อ และในกรณีที่พ่อเตี้ย ลูกจะเตี้ยแต่สูงกว่าพ่อ กล่าวคือ ลักษณะของบุตรจะมีแนวโน้มเข้าสู่ค่าส่วนกลาง จากการค้นพบครั้งนี้ แกลตันได้เขียนหนังสือชื่อ Regression Towards Mediocrity in Heredity Structure ในปี ค.ศ. 1885 และจากนั้นเขาคิดว่าน่าจะมีความสัมพันธ์อะไรสักอย่างหนึ่ง ระหว่างพ่อ-แม่ และลูก เขาจึงได้นำเรื่องนี้ไปปรึกษากับ ชาร์ล เพียร์สัน (Charl Pearson) ซึ่งเป็นนักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ เพียร์สันจึงคิดคำนวณสูตรพบว่า เมื่อตัวแปรสองตัวที่ได้ข้อมูลแบบต่อเนื่อง (Continuous Variable) และถ้าข้อมูลทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน ค่าเฉลี่ยของผลคูณของคะแนนมาตรฐานของข้อมูลจากตัวแปรทั้งสองจะไม่เป็น 0 เขาเรียกค่าเฉลี่ยนี้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสอง เมื่อให้ X และ Y เป็นตัวแปร 2 ตัว และ r_{xy} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X และ Y จะได้สูตรว่า

$$r_{xy} = \frac{\Sigma Zx\,Zy}{N}$$

เราเรียกค่าความสัมพันธ์ที่เพียร์สันค้นพบนี้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน ค่าต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ของ r_{xy} จะเป็นดังนี้

เมื่อตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงอย่างสมบูรณ์แบบทางบวก $r_{xy} = 1$

เมื่อตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงไม่สมบูรณ์แบบทางบวก $0 < r_{xy} < 1$

เมื่อตัวแปรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กันหรือความสัมพันธ์เป็นศูนย์ $r_{xy} = 0$

เมื่อตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงไม่สมบูรณ์แบบทางลบ $0 > r_{xy} > -1$

เมื่อตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงทางลบสมบูรณ์แบบ $r_{xy} = -1$

สรุปได้ว่า $-1 \geq r \geq 1$ เสมอ

ตัวอย่าง ในการทดสอบคะแนนภาษาอังกฤษและภาษาไทย ของนักเรียน ๑๐ คน ปรากฏผลตามตารางข้างล่าง จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของคะแนนภาษาอังกฤษ และภาษาไทย

คะแนน ภาษาอังกฤษ X	คะแนน ภาษาไทย Y	$(X-\bar{X})$	$(Y-\bar{Y})$	Zx	Zy	ZxZy
20	12	7	2	1.61	.54	.8694
18	16	5	6	1.15	1.62	1.8637
16	10	3	0	.69	.00	.0060
15	14	2	4	.46	1.08	.4965
14	12	1	2	.23	.54	.1242
12	10	-1	0	-.23	.00	.0000
12	9	-1	-1	-.23	-.27	.0621
10	8	-3	-2	-.69	-.54	.3726
8	7	-5	-3	-1.15	-.81	.9315
5	2	-8	-8	-1.84	-2.16	3.9744
ΣX 130	ΣY 100	Sx = 4.34				$\Sigma ZxZy$ = 8.6947
$\bar{X}$ 13	$\bar{Y}$ 10	S Y = 3.71				

จาก $r_{xy} = \frac{\Sigma ZxZy}{N}$

$$r_{xy} = \frac{8.6947}{10}$$

$$= .86947$$

นั่นคือ คะแนนภาษาอังกฤษและภาษาไทยของนักเรียนกลุ่มนี้ มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็น .86947 หรือ .87

การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ เพียร์สันจากคะแนนดิบ

จาก $$Z_x = \frac{X - \bar{X}}{S_x}$$

$$= \frac{Y - \bar{Y}}{S_y}$$

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(\frac{X-\bar{X}}{S_x})(\frac{Y-\bar{Y}}{S_y})}{N}$$

$$= \frac{\frac{1}{S_xS_y}\ \Sigma\ (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N}$$

$$\frac{\Sigma\ (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{N\ S_x\ S_y}$$

และจาก $$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{N\Sigma\ X^2 - (\ X)^2}{N^2}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{N\ \Sigma Y^2 - (\ Y)^2}{N^2}}$$

ดังนั้น $$\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = \Sigma\ (XY - Y\bar{X} - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y})$$

$$= \Sigma\ [XY - Y\frac{\Sigma X}{N} - X\frac{\Sigma Y}{N} + \frac{\Sigma X}{N}\frac{\Sigma Y}{N}]$$

$$= \Sigma\ XY - \frac{\Sigma Y \Sigma X}{N} - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{N} + \frac{N \Sigma X \Sigma Y}{N^2}$$

$$= \Sigma\ XY - \frac{\Sigma X\ \Sigma Y}{N}$$

ดังนั้น $$r_{xy} = \frac{\Sigma\ XY - [(\Sigma X)(\Sigma Y)\ /N]}{N\sqrt{\frac{N\ \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}{N^2}}\ \sqrt{\frac{N\ \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}{N^2}}}$$

$$= \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

ตัวอย่าง ในการชั่งน้ำหนัก (เป็นปอนด์) และตรวจวัดความดันโลหิตของคน ๑๐ คน ปรากฏผลดังตารางข้างล่าง จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักกับความดันโลหิต

คนที่	น้ำหนัก (X)	ความดัน (Y)	X^2	Y^2	XY
1	188	140	35,344	19,600	26,320
2	231	160	53,361	25,600	36,960
3	176	130	30,976	16,900	22,880
4	194	130	37,636	16,900	15,220
5	244	180	59,536	32,400	43,920
6	207	160	42,849	25,600	33,120
7	198	140	39,204	19,600	27,720
8	217	150	47,089	22,500	32,550
9	181	140	32,761	19,600	25,340
10	194	150	37,636	22,500	29,100
Σ	2,030	1,480	416,392	221,2-0	303,130

จาก $$r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[N\sum X^2 - (\sum X)^2][N\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

$$r = \frac{10\,(303,130)-(2030)(1480)}{\sqrt{[(10)(416,392)-(2030)^2][(10)(221,200)-(1480)^2]}}$$

$$= \frac{26900}{\sqrt{929,232,000}}$$

$$= 0.88$$

ในกรณีตัวอย่างข้างบนจะเห็นได้ว่า ตัวเลขมีค่ามาก เราสามารถนำค่าคงที่ใด ๆ มาบวก ลบ คูณ หาร กับค่า X และค่าคงที่ใด ๆ มาบวก ลบ คูณ หรือ หารกับค่า Y ก็ได้ เช่น

จากตัวอย่างข้างบน นำ 200 มาลบออกจากทุกค่าของ X และนำ 10 มาหารทุกค่าของ Y และลบออก 13 เราจะได้ค่า X และ Y ดังนี้

คนที่	น้ำหนัก (X)	ความดัน (Y)	X^2	Y^2	XY
1	-12	1	144	1	-12
2	31	3	961	9	93
3	-24	0	576	0	0
4	-6	0	36	0	0
5	44	5	1936	25	220
6	7	3	49	9	21
7	-2	1	4	1	-2
8	17	2	289	4	34
9	-19	1	361	1	-19
10	-6	2	36	4	-12
Σ	30	18	4392	54	323

$$r = \frac{10\,(323) - (30)(18)}{\sqrt{[10(4392) - (30)^2][10(54)-(18)^2]}}$$

$$= \frac{2690}{\sqrt{9,292,320}}$$

$$= 0.88$$

จะเห็นได้ว่า ค่าสัมประสิทธิสหสัมพันธ์เท่ากับครั้งแรก เมื่อคิดจากข้อมูลดิบทั้งหมด

สมมติฐานเบื้องต้นก่อนการใช้สถิติสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

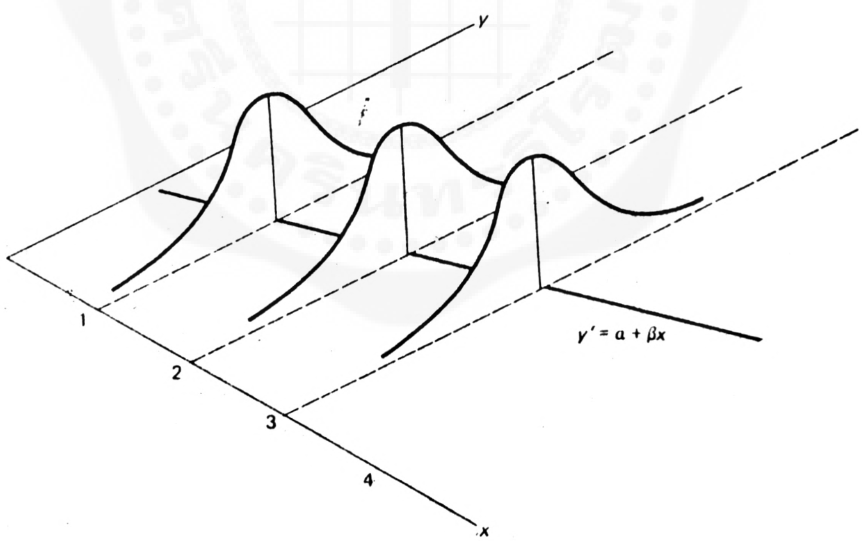
ในการใช้สถิติหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากกลุ่มตัวอย่าง จะต้องมีสมมติฐานเบื้องต้นดังนี้คือ

๑. กลุ่มตัวอย่างได้มาอย่างสุ่ม และค่าสังเกตที่ได้จากตัวแปรทั้งคู่นั้น เป็นอิสระจากกัน

๒. ประชากรของค่าสังเกตจากตัวแปรทั้งคู่ มีการกระจายเป็นโค้งปกติ

๓. เส้นกระถดถอยที่ใช้ในการพยากรณ์เป็นเส้นตรง (รายละเอียดของเส้นกระถดถอยจะกล่าวไว้ในตอนต่อ ๆ ไป)

๔. ความแปรปรวนของ Y ในแต่ละค่าของ X เท่ากัน และความแปรปรวนของ X ในแต่ละค่าของ Y เท่ากัน



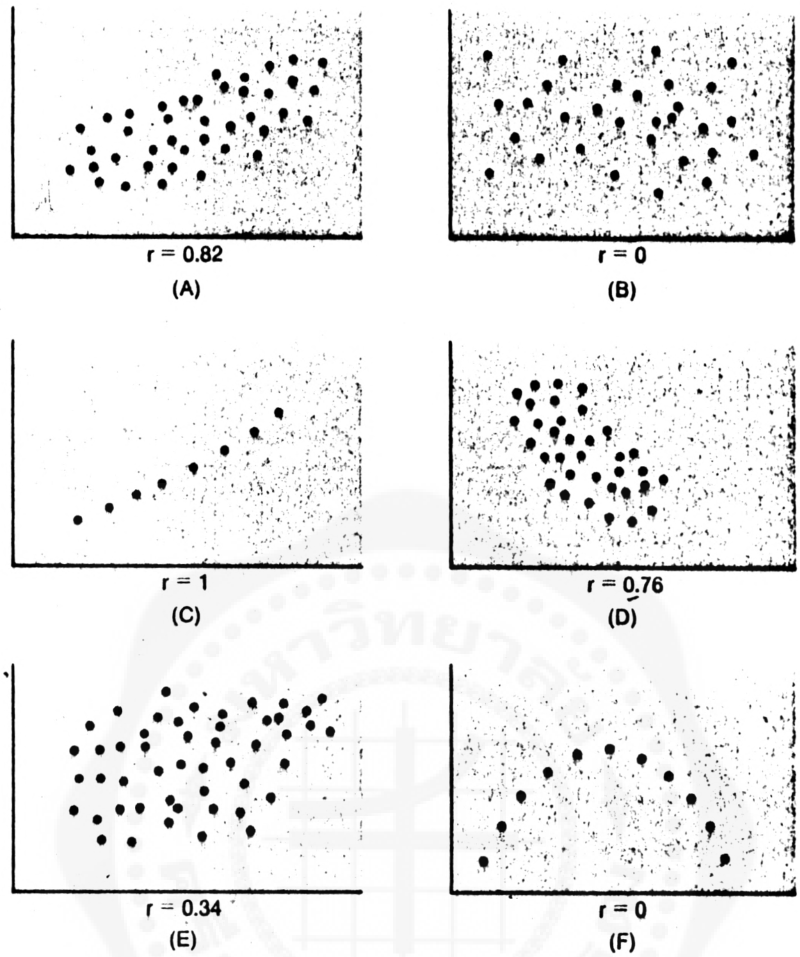
รูปแสดงการแจกแจงของ Y ในแต่ละค่าของ X

การแปลความหมายค่า γ จากการคำนวณเปียร์สัน

การคำนวณแบบเปียร์สัน มักใช้กับข้อมูลที่เป็นลักษณะต่อเนื่อง ~~จากทั้งสองตัวแปร และตามที่ได้กล่าวมาแล้วว่า~~ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็นการวัดความเกี่ยวข้องกันระหว่างตัวแปรสองตัว โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $r \geq .80$ จะถือว่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ค่อนข้างสูง ถ้า $80 \geq r \geq 30$ ถือว่ามีความสัมพันธ์ระดับปานกลาง ส่วน $r \leq .30$ ลงไปถือว่าเป็นความสัมพันธ์ที่อยู่ในระดับต่ำ และถ้า $r = 0$ คือตัวแปรทั้งสองตัวไม่มีความสัมพันธ์กันเลย

สิ่งที่ผู้ใช้สถิติหาค่าสหสัมพันธ์ต้องตระหนักไว้เสมอคือ การแปลผลค่า r คือการบอกถึงค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเท่านั้น ค่าสหสัมพันธ์มิได้บอกถึงว่า ตัวแปรตัวหนึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดผลกระทบต่อตัวแปรอีกตัวหนึ่งเป็นอันขาด เช่น เมื่อผู้วิจัยพบว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของคะแนนวิชาภาษาอังกฤษ และคะแนนวิชาภาษาไทยเป็น .89 ก็หมายความว่าคะแนนของทั้ง 2 วิชาดังกล่าวมีความสัมพันธ์กับ .89 เท่านั้น มิได้หมายถึงว่า เมื่อเรียนวิชาภาษาอังกฤษดี จะทำให้การเรียนวิชาภาษาไทยดี หรือสาเหตุที่เรียนภาษาอังกฤษดีเนื่องจากภาษาไทยดีเป็นต้น

การแปลผลค่า r อีกอย่างหนึ่งคือการแปลผลในทางความแปรปรวน คือค่าของ r^2 เช่นการทำนายค่าตัวแปรตัวหนึ่ง จะทำนายค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่งถูกต้องอยู่ $r^2 \times 100\%$ เช่น ตัวอย่างดังกล่าวข้างต้น เมื่อพบว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของคะแนนวิชาภาษาอังกฤษ และภาษาไทยเป็น .89 นั่นคือ เมื่อทราบคะแนนวิชาภาษาไทย จะทายคะแนนวิชาภาษาอังกฤษถูกประมาณ $(.89)^2 \times 100$ เปอร์เซ็นต์ หรือเท่ากับ 79.21% หรือเมื่อทราบคะแนนวิชาภาษาอังกฤษก็จะทายคะแนนวิชาภาษาไทยถูกอยู่ประมาณ 79.2% เช่นกัน



ภาพตัวอย่างเมื่อ r มีค่าต่าง ๆ กัน

<u>การทดสอบนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน</u> (r)

การคำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ส่วนใหญ่จะเป็นการคำนวณมาจากค่าสังเกตที่ได้มาจากกลุ่มตัวอย่าง ดังนั้นก่อนที่จะลงสรุปถึงความสัมพันธ์ระหว่างประชากรของกลุ่มตัวอย่างเหล่านั้น ต้องแน่ใจว่าขนาดของความสัมพันธ์นั้นมีมากเพียงพอที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดไว้ ในการทดสอบนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์นี้ ถ้าให้ ρ (rho) เป็นค่าความสัมพันธ์ระหว่างประชากรทั้งสอง สมมติฐานในการตรวจสอบค่าความสัมพันธ์จะเป็นดังนี้คือ

H_0 : $\rho = 0$ (ประชากรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กัน)

H_1 : $\rho \neq 0$ (ประชากรทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน)

หรือ เมื่อมีทิศทางในการตรวจสอบ

H_1 : $\rho > 0$ (ประชากรทั้งสองมีความสัมพันธ์ เชิงบวก)

หรือ H_1 : $\rho < 0$ (ประชากรทั้งสองมีความสัมพันธ์ เชิงลบ)

และใช้วิธีการตรวจสอบดังนี้

1. ใช้ค่าสถิติ Z เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($N > 30$) โดยมีสูตรดังนี้

$$Z = \frac{r}{\sqrt{N-1}}$$

ที่องศาแห่งความ เป็นอิสระ N - 2

2. ใช้ค่าสถิติ t เมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($N < 30$) โดยมีสูตรดังนี้

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{N-2}$$

ที่องศาแห่งความ เป็นอิสระ N - 2

3. หรือใช้ตารางหาค่านัยสำคัญของ r ซึ่งได้รวบรวมค่าคำนวณค่าวิกฤตของ Z หรือ t แล้วแต่กรณีไว้แล้ว การใช้ตารางค่านัยสำคัญ r นี้ มีองศาแห่งความ เป็นอิสระ เป็น N - 2

ตัวอย่าง เมื่อกลุ่มตัวอย่างในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ r มี ๒๖ คู่ พบว่า $r = .37$ จงตรวจสอบดูว่า ประชากรของตัวแปรทั้งสองนี้มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .๐๕

สมมติฐานการทดสอบ

H_0 : $\rho = 0$

H_1 : $\rho \neq 0$

วิธีที่ ๑ ใช้วิธีเปิดตาราง $r_{(23,.05)} = .4227$

จะเห็นว่า r จากการคำนวณ < r จากตาราง ดังนั้นจึงต้องยอมรับ H_0 ที่ว่าประชากรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กัน

วิธีที่ ๒

$$\text{จาก} \quad t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{N-2}$$

$$= \frac{.37}{\sqrt{1-(.37)^2}} \sqrt{(25-2)}$$

$$= \frac{.37}{\sqrt{1-.136}} (4.79)$$

$$= \frac{.37}{.929} (4.79)$$

$$= 1.907$$

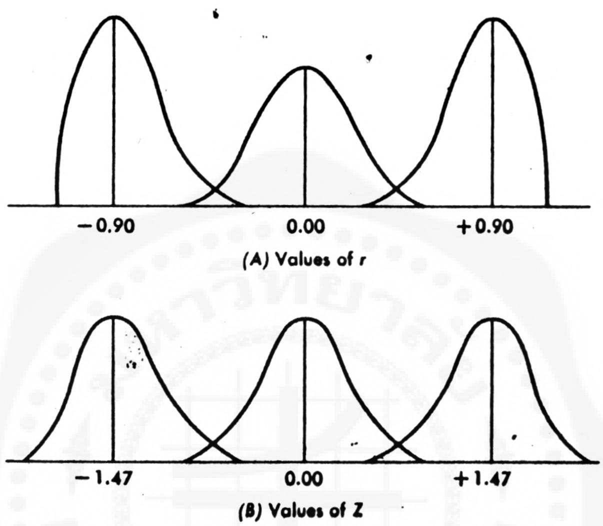
จากตาราง $t_{(23,.05)} = 2.086$

จะเห็นว่า t จากการคำนวณ < t จากตาราง ดังนั้นจึงต้องยอมรับ H_0 ที่ว่าประชากรทั้งสองไม่มีความสัมพันธ์กัน

การทดสอบความแตกต่างระหว่างสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเปียร์สัน ๒ ค่า

การตรวจสอบว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่คำนวณได้ (r) มีความสัมพันธ์ที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดให้หรือไม่นั้น เป็นการตรวจสอบว่า ค่าความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นสำหรับประชากรของตัวแปรคู่นั้น ๆ มีจริงหรือไม่ เชื่อถือได้หรือไม่ แต่บ่อยครั้งที่มีผู้สงสัยว่า ค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y (r_{xy}) แตกต่างจากค่าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร A และ B (r_{AB}) หรือไม่ ตัวอย่างเช่น ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลระหว่าง พอ - ลูก ชาวตะวันตกแตกต่างจาก พ่อ- ลูก ชาวเอเชียหรือไม่เป็นต้น

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ๒ ค่านั้น ทำได้โดยแปลงค่า r ให้เป็นค่ามาตรฐานของฟิชเชอร์ (Fisher's Z) เสียก่อน เนื่องจากการแจกแจงของค่า r โดยทั่ว ๆ ไปจะมีการแจกแจงไม่เป็นโค้งปกติ แต่หลังจากแปลงเป็นค่าคะแนนมาตรฐาน Z ตามสูตรของฟิชเชอร์แล้ว จะทำให้การแจกแจงของ Z เป็นโค้งปกติ (ค่าตารางการเปลี่ยน r เป็น Z มีอยู่ท้ายเล่ม)



A : ภาพแสดงการแจกแจงของ r เมื่อค่าเฉลี่ยของประชากรเป็น 0 ถึง ±9

B : ภาพแสดงการแจกแจงของ Z ของฟิชเชอร์ที่ได้จากค่า r ในรูป A

ค่าความคลาดเคลื่อนของการแจกแจงของ Z เป็นดังนี้

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

และค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างความแตกต่างของค่า Z ทั้ง ๒ ค่า ที่แปลงจากค่า r จะเป็น

$$S_{Dz} = \sqrt{S^2_{Z_1} + S^2_{Z_2}}$$

ดังนั้น $S_{DZ} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{N_1 - 3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{N_2 - 3}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}}$$

หลังจากนั้นก็หาค่าคะแนนมาตรฐานของค่าความแตกต่างระหว่าง Z_1 และ Z_2 เพื่อนำไปเทียบกับการแจกแจงของโค้งปกติ

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{S_{DZ}}$$

$$= \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{N_1-3} + \frac{1}{N_2-3}}}$$

ตัวอย่าง จากการสุ่มกลุ่มตัวอย่างพ่อ-ลูกชาวตะวันตกจำนวน 103 คู่ พบว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความสามารถทางการคิดอย่างมีเหตุผล ระหว่างพ่อ-ลูกเป็น .85 และการสุ่มกลุ่มตัวอย่างพ่อ-ลูกชาวเอเชีย 147 คู่ ปรากฏว่าความสัมพันธ์ในเรื่องเดียวกันนั้นเป็น .75 จงทดสอบดูว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของความสามารถทางการคิดอย่างมีเหตุผลของพ่อ-ลูกชาวตะวันตกและชาวเอเชียแตกต่างกันหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ .05

สมมติฐานเป็น

$H_0 : \rho_1 = \rho_2$

$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2$

จากตาราง แปลงค่า r เป็นค่า Z ของฟิชเชอร์

$r = .85$ คือ $Z = 1.256$

$r_2 = .75$ คือ $Z_2 = .973$

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{N_1-3} + \frac{1}{N_2-3}}}$$

$$= \frac{1.256 - .976}{\frac{1}{(103-3)} + \frac{1}{(147-3)}}$$

$$= \frac{.283}{\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{144}}}$$

$$= \frac{.283}{.13}$$

$$= 2.18$$

จากตาราง ค่า $Z_{.05}$ ของโค้งปกติ เป็น 1.96

ดังนั้น Z จากการคำนวณ > Z จากตาราง เราจึงต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 ที่ว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากร พ่อ-ลูกตะวันตก แตกต่างจากค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของประชากร พ่อ-ลูก ชาวเอเชีย

การทดสอบความแตกต่างของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากประชากรที่มีความสัมพันธ์กัน

ในบางครั้ง ค่า r ๒ ค่า เกิดจากประชากรที่มีความสัมพันธ์ร่วมกัน เช่น เมื่อ $r_{มช}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรที่ได้จากแม่และลูกชาย ส่วน $r_{มส}$ คือค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ได้จากแม่และลูกสาว จะเห็นได้ว่า ประชากรแม่เป็นประชากรร่วมที่ให้ค่าความ

สัมพันธ์ของทั้งคู่ การตรวจสอบความแตกต่างระหว่างค่า r ประเภทนี้ ทำได้โดยการคำนวณค่าสถิติจากสูตร

$$t = \frac{(r_{12} - r_{13}) \sqrt{(N-3)(1 + r_{23})}}{\sqrt{2(1-r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23})}}$$

ที่องศาแห่งความเป็นอิสระที่ N-3 เมื่อ N คือจำนวนคู่ของกลุ่มตัวอย่าง

จากนั้นจึงนำค่า t ไปเทียบกับค่าวิกฤตของ t จากตาราง

การหาความสัมพันธ์ของข้อมูลระดับเรียงลำดับ

ถ้าเราต้องการตรวจสอบดูว่า การจัดลำดับของค่าสังเกตจากตัวแปร ๒ กลุ่มมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ เช่นการจัดลำดับในการเลือกอาชีพของเพศชายและเพศหญิง จากอาชีพต่าง ๆ ที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ หรือ การจัดลำดับของ ๒ สิ่งจากตัวแปรกลุ่มหนึ่ง เช่น เมื่อให้ครูกลุ่มหนึ่งจัดลำดับความสำคัญของกิจกรรมนักเรียน ๖ อย่าง สำหรับเด็กระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษา และตรวจสอบว่า การจัดลำดับกิจกรรมสำหรับเด็ก ๒ กลุ่มนี้มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ฯลฯ การตรวจสอบความสัมพันธ์ของข้อมูลที่อยู่ในระดับเรียงลำดับนี้ทำได้โดยใช้การคำนวณค่าสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน (Spearman Rank Correlation)

การหาค่าสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน

เมื่อให้ R คือค่าสหสัมพันธ์ของการจัดลำดับ

D คือความแตกต่างของลำดับในข้อมูลแต่ละคู่

N คือจำนวนคู่ลำดับ

จะได้สูตร

$$R = 1 - \frac{6\ (\Sigma D^2)}{N\ (N^2-1)}$$

ตัวอย่าง เมื่อโรงเรียนหนึ่งเปลี่ยนผู้บริหาร ปรากฏว่าผู้บริหารใหม่จัดลำดับความสำคัญของกิจกรรมนักเรียน ๖ อย่างแตกต่างจากผู้บริหารเก่าอยู่บ้างดังตารางข้างล่าง จงหาความสัมพันธ์ในการจัดลำดับกิจกรรมนักเรียนของผู้บริหารใหม่และเก่านี้

	ผู้บริหารเก่า	ผู้บริหารใหม่	D	D^2
กิจกรรม 1	1	3	-2	4
กิจกรรม 2	5	6	-1	1
กิจกรรม 3	3	1	2	4
กิจกรรม 4	4	2	2	4
กิจกรรม 5	2	4	-2	4
กิจกรรม 6	6	5	1	1
				$\Sigma d^2 = 18$

$$R = 1 - \frac{6\ \Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 18}{6(6^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{108}{210}$$

$$= 1 - .51$$

$$= .49$$

นั่นคือความสัมพันธ์ระหว่างการจัดลำดับกิจกรรมของผู้บริหารใหม่ และผู้บริหารเก่าเป็น .49

การทดสอบนัยสำคัญของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน

ในการลงสรุปค่าสหสัมพันธ์แบบสเปียร์แมน R จากกลุ่มตัวอย่างไปสู่ประชากรว่าประชากรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ทำได้โดยวิธีเดียวกับการตรวจสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเปียร์สัน (r) โดยมีสูตร t เป็นดังนี้

$$t = \frac{R}{\sqrt{1 - N^2}} \left(\sqrt{N-2}\right)$$

องศาแห่งความเป็นอิสระของการตรวจสอบค่า t เป็น N-2 เมื่อ คือจำนวนลำดับหรือการใช้ตารางหาค่านัยสำคัญของ r (ตารางเดียวกับการตรวจสอบค่าสหสัมพันธ์ของเปียร์สัน)

ตัวอย่าง ในการเรียนการสอนวิชาสถิติ ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 11 ตอน ถ้าให้ครูที่สอนสถิติและครูที่สอนวิจัย 2 กลุ่มจัดลำดับความสำคัญของเนื้อหาทั้งหมด จะได้ผลรวมลำดับที่ของครูทุกคนในแต่ละเนื้อหาวิชาเป็นดังนี้

เนื้อหา	ครูสถิติ	ครูวิจัย
1	42	38
2	95	92
3	22	29
4	25	16
5	7	9
6	53	72
7	12	55
8	69	46
9	60	69
10	19	84
11	77	97

จงตรวจสอบดูว่า ทั้งครูสถิติและครูวิจัย จะจัดลำดับความสำคัญของเนื้อหาวิชาสถิติไม่แตกต่างกันที่ระดับ .01

เรียงลำดับที่ความสำคัญตามความเห็นของครูทั้งสองพวก ได้ดังนี้

เนื้อหา	ลำดับของครูสถิติ	ลำดับของครูวิจัย	D	D^2
1	6	4	2	4
2	11	10	1	1
3	4	3	1	1
4	5	2	3	9
5	1	1	0	0
6	7	8	-1	1
7	2	6	-4	16
8	9	5	4	16
9	8	11	-3	9
10	3	7	-4	16
11	10	9	1	1

$\Sigma D^2 = 74$

จาก

$$R = 1 - \frac{6\ \Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{74}{11\ (121-1)}$$

$$= 1 - \frac{444}{1320}$$

$$= 1 - 0.336$$

$$= .664$$

สมมติฐานในการทดสอบค่า R

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

ค่าองศาแห่งความอิสระ $11 - 2 = 9$

เมื่อเปิดจากตาราง $r_{(9,.05)} = .6021$

ดังนั้น r จากการคำนวณ > r จากตาราง ดังนั้นจึงต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ การเรียงลำดับเนื้อหาวิชาสถิติของครูสถิติและครูวิจัย มีความสัมพันธ์กัน

หรือการตรวจสอบโดยหาค่าสถิติ t

$$\text{จาก} \quad t = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2}} \sqrt{N-2}$$

$$= \frac{.664}{\sqrt{1-(.664)^2}} \sqrt{11-2}$$

$$= \frac{.664}{.748} (3)$$

$$= 2.663$$

จากตาราง $t_{(9,.05)} = 2.262$

t จากการคำนวณมากกว่า t จากตาราง ดังนั้น เราจึงต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 กล่าวคือ การเรียงลำดับเนื้อหาวิชาสถิติของครูสถิติและครูวิจัย มีสัมพันธ์กันที่ระดับนัยสำคัญ .05

การหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลชนิดต่อเนื่อง (Continuous) และข้อมูล 2 ระดับ (Dichs tomous)

ในการทำงานวิจัยจะพบว่า บ่อยครั้งที่ผู้วิจัยต้องการทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว ซึ่งตัวแปรตัวหนึ่งจะให้ค่าของข้อมูลชนิดต่อเนื่อง แต่อีกตัวแปรหนึ่งให้ค่าของข้อมูล 2 ระดับ เช่นการหาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก กับเพศ ซึ่งแบ่งออกเป็น ชาย-หญิง ในการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบนี้ มักใช้ค่าสัมประสิทธ์สหสัมพันธ์แบบ point biserial ซึ่งก็เป็นการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เช่นเดียวกับแบบของเปียร์สัน แต่เป็นการใช้ค่าสัดส่วนของข้อมูล 2 ระดับเข้าช่วยในการคำนวณ ซึ่งจะทำให้ได้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ point biserial (r_{pb}) เป็นดังนี้

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{S_t} \sqrt{pq}$$

เมื่อแบ่งตัวแปร 2 ระดับออกเป็น P และ Q

r_{pb} เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ point biserial

$\bar{X}_p$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปร p

$\bar{X}_q$ คือค่าเฉลี่ยของตัวแปร Q

p คืออัตราส่วนของจำนวนในตัวแปร P ต่อจำนวนทั้งหมด

q คืออัตราส่วนของจำนวนในตัวแปร Q ต่อจำนวนทั้งหมด

$$(q = 1 - p)$$

ตัวอย่าง ในการสำรวจความสนใจต่อด้านการเมืองของชายและหญิง เมื่อแบ่งระดับความสนใจทางการเมืองออกเป็น 5 ระดับ จาก 0 - 4 ปรากฏว่า จากการสำรวจพบว่า ระดับความสนใจทางการเมืองของแต่ละเพศเป็นไปตามตารางข้างล่าง จงหาว่า ความสนใจทางการเมืองมีความสัมพันธ์กับเพศ ชาย-หญิง หรือไม่

X (ความสนใจ)	f_p (ชาย)	f_q (หญิง)	f_t (รวม)	f_pX	f_qX	f_tX	$f_t(X - \bar{X})^2$
4	2	0	2	8	0	8	11.28
3	4	1	5	12	3	15	9.45
2	2	2	4	4	4	8	.56
1	1	7	8	1	7	8	3.12
0	1	4	5	0	0	0	13.2
รวม	10	14	24	25	14	39	37.61

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_q}{S_t} \sqrt{pq}$$

$$\bar{X}_p = \frac{25}{10} = 2.5$$

$$\bar{X}_q = \frac{14}{14} = 1.00$$

$$\bar{X} = \frac{39}{24} = 1.625$$

$$S_t = \sqrt{\frac{\Sigma f_t(X - \bar{X})^2}{N - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{37.61}{23}}$$

$$= \sqrt{1.635}$$

$$= 1.28$$

ดังนั้น $r_{pb} = \frac{2.5 - 1.0}{1.28} \sqrt{\frac{10}{24} \cdot \frac{14}{24}}$

$= (1.17)(.493)$

$= .576$

กล่าวคือ ความสนใจทางการเมืองและเพทศ มีความสัมพันธ์กัน .576

ในการตรวจแบบทดสอบ บ่อยครั้งที่การให้คะแนนข้อสอบแต่ละข้อเป็นคะแนนแบบ 2 ระดับ คือ ถูกได้ ๐ และผิด ได้ ๑ ข้อทดสอบเหล่านี้เช่นข้อสอบแบบ ถูก-ผิด ข้อทดสอบแบบเลือกตอบ ฯลฯ คะแนนรวมที่ได้จากแบบทดสอบส่วนใหญ่ถือว่าเป็นข้อมูลแบบต่อเนื่อง ดังนั้น การหาความสัมพันธ์ของคะแนนรวมกับการตอบถูก-ผิด จึงสามารถใช้เทคนิคการหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบ point biserial ได้ การหาความสัมพันธ์ชนิดนี้ใช้บ่อยในการวิเคราะห์ข้อสอบ (Item Analysis) เพื่อใช้เป็นค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบแต่ละข้อ สูตรที่ใช้หาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในการวิเคราะห์ข้อสอบ นิยมดัดแปลงเป็น

$$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_t}{S_t} \sqrt{\frac{p}{q}}$$

เมื่อ $\bar{X}_p$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนของผู้ที่ตอบถูก

$\bar{X}_t$ คือ ค่าเฉลี่ยของคะแนนของผู้ตอบแบบทดสอบทั้งหมด

S_t คือ ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของคะแนนของผู้ตอบแบบทดสอบทั้งหมด

p คือ ค่าสัดส่วนระหว่างจำนวนผู้ที่ตอบถูกกับจำนวนผู้ตอบแบบทดสอบทั้งหมด

q คือ ค่าสัดส่วนระหว่างจำนวนผู้ที่ตอบผิดกับจำนวนผู้ตอบแบบทดสอบทั้งหมด

$(q = 1 - p)$

ตัวอย่าง จากการตรวจคะแนนนักเรียนจำนวน ๑๐๐ คน ปรากฏว่า การตรวจให้คะแนนเป็นแบบ ๐-๑ คือผิดให้ ๐ คะแนน และถูกให้ ๑ คะแนน เมื่อตรวจสอบดูว่าคะแนนที่ได้มีความสัมพันธ์กับวิธีการตรวจให้คะแนนหรือไม่ ผู้สอนจึงเลือกดูว่าในข้อ ๑ มีนักเรียนที่ได้คะแนนต่าง ๆ กันตอบถูก-ผิดเป็นเช่นไร มีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ปรากฏว่า ผลของการตรวจสอบเป็นดังนี้

ช่วงคะแนน X	จำนวนผู้ตอบถูก f_p	จำนวนผู้ตอบผิด f_w	จำนวนผู้ตอบทั้งหมด f_t
70-74	3	0	3
65-69	6	1	7
60-64	6	2	8
55-59	5	4	9
50-54	6	2	8
45-49	7	6	13
40-44	6	8	14
35-39	3	6	9
30-34	3	9	12
25-29	1	4	5
20-24	0	12	12
	46	54	100

จากตารางข้างบน คำนวณหาค่า $\bar{X}_p = 52.2$

$$\bar{X}_t = 44.2$$

$$S_t = 14.2$$

$$p = \frac{46}{100} = .46$$

$$q = 1 - .46 = .54$$

จาก $$r_{pb} = \frac{\bar{X}_p - \bar{X}_t}{S_t}\sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{52.2 - 44.2}{14.2}\sqrt{\frac{.46}{.54}}$$

$$= \frac{8}{14.2}\sqrt{.851851}$$

$$= .563\ (.923)$$

$$= .52$$

คะแนนการสอบกับวิธีการตรวจแบบ 0-1 มีความสัมพันธ์กัน .52 หรือค่าอำนาจจำแนกของข้อทดสอบข้อ 1 เป็น .52

<u>การทดสอบนัยสำคัญของค่าสัมประสิทธิ์ point biserial</u>

การทดสอบนัยสำคัญของ r_{pb} ทำได้โยวิธีเดียวกันกับการทดสอบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน คือสามารถใช้ตารางหาค่านัยสำคัญของ r ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ N-2 หรือ ใช้ค่าสถิติ t จากสูตร

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{1 - r_{pb}^2}}\sqrt{N - 2}$$

ที่องศาแห่งความเป็นอิสระเป็น N-2 เมื่อ คือจำนวนข้อมูลทั้งหมด

ตัวอย่าง จากการคำนวณค่า r_{pb} เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของทัศนคติต่อการทำงานของพ่อค้า และข้าราชการ 100 คน พบว่า r_{pb} มีค่าเป็น .52 จงตรวจสอบดูว่า ความสัมพันธ์ r_{pb} ที่พบนี้เป็นความสัมพันธ์ที่เชื่อถือได้หรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ .01

$H : \rho = 0$

$H : \rho \neq 0$

เปิดตาราง $r_{(98,.05)} = .2673$

ดังนั้นค่า r_{pb} .52 มากกว่า r จากตาราง ทำให้ต้องปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1

หรือ จาก

$$t = \frac{r_{pb}}{\sqrt{1 - r^2_{pb}}} \sqrt{N - 2}$$

$$= \frac{.52}{\sqrt{1-(.52)^2}} \sqrt{100-2}$$

$$= \frac{.52}{\sqrt{1 - .2704}} (9.8995)$$

$$= \frac{5.1477}{.854}$$

$$= 6.03$$

จากตาราง $t_{(98,.01)} = 2.67$

ดังนั้น t จากการคำนวณ > t จากตาราง กล่าวคือ เราต้องปฏิเสธ H_0 และยอมรับ H_1 ที่ว่า ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันจริงที่ระดับนัยสำคัญ .๐๑ เช่นเดียวกับการเปิดจากตาราง

สรุปการหาค่าความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ

นอกจากการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของข้อมูลชนิดต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วเบื้องต้น ยังมีวิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ระหว่างข้อมูลชนิดอื่น ๆ ที่ไม่ได้กล่าวถึงในที่นี้อีกมาก ซึ่งจะสรุปค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ชนิดต่าง ๆ ที่ควรใช้ เมื่อข้อมูลมีคุณสมบัติต่างกันได้ดังนี้

Coefficient	Symbol	Variables X	Y
Pearson product-moment	r	Continuous	Continuous
Point biserial	r_{pb}	Continuous	True dichotomy
Biserial	r_b	Continuous	Continuous, but forced into a dichotomy
Tetrachoric	r_t	Continuous, but forced into a dichotomy	Continuous, but forced into a dichotomy
Phi or fourfold	Φ	True dichotomy	True dichotomy (see text)
Correlation ratio	η (eta)	Continuous	Continuous
Spearman rank order	ρ (rho)	Data in ranks or capable of being ranked	Same as for X
Kendall's coefficient of concordance	W	Used with three or more sets of ranks	
Kendall's tau	T	Data in ranks or capable of being ranked	

ตารางสรุป เทคนิคการหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ที่ควรใช้เมื่อข้อมูลมีคุณสมบัติต่าง ๆ กัน

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. จงยกตัวอย่างข้อมูลที่น่าจะมีความสัมพันธ์เป็น + เป็น 0 และเป็น - มาอย่างละ 1 คู่

2. จงรวบรวมข้อมูลรายได้และรายจ่ายของทุกคนในห้องเรียนแล้ว

   ก. กำหนดว่าควรจะใช้ค่าสหสัมพันธ์ชนิดใด

   ข. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ในข้อ ก.

   ค. ทดสอบนัยสำคัญของค่าสหสัมพันธ์ที่คำนวณได้ที่ระดับนัยสำคัญ .01

3. ผู้เรียนในห้องช่วยกันยกตัวอย่างข้อมูลที่สามารถใช้ความสัมพันธ์แบบ

   ก. Pearson Product Moment

   ข. Spearman Rank Order

   ค. Point Biserial

4. อาจารย์ 2 คน ได้เรียงลำดับความสามารถของนักเรียน 11 คน ได้ดังนี้

นักเรียน	อาจารย์ 1	อาจารย์ 2
A	1	4
B	7	8
C	8	10
D	3	1
E	6	5
F	10	9
G	9	11
H	2	3
I	11	7
J	4	2
K	5	6

จงหาว่าอาจารย์ทั้งสองคนนี้ เรียงลำดับนักเรียนกลุ่มนี้อย่างมีความสัมพันธ์กันหรือไม่

บทที่ ๑๑

เส้นกระถดถอย หรือสมการพยากรณ์

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

๑. ให้ผู้เรียนสามารถคำนวณค่าต่าง ๆ และเขียนสมการพยากรณ์จากข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กันได้

๒. ให้ผู้เรียนรู้จักใช้สมการพยากรณ์ในการพยากรณ์ค่า

๓. ให้ผู้เรียนรู้จักคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์

<u>เนื้อหา</u>

- เส้นตรงกระถดถอย
- เทคนิครวมพื้นที่ให้น้อยที่สุด
- ค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์

เส้นตรงกระถดถอย หรือสมการพยากรณ์

(Linear Regression or Prediction Equation)

เส้นตรงกระถดถอย คือเส้นตรงที่เป็นตัวแทนความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัว และเครื่องหมาย ค่าของตัวแปรตัวหนึ่ง อาจใช้สมการของเส้นตรงกระถดถอยช่วยในการพยากรณ์ค่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งได้ ในบางครั้งเรียกสมการเส้นตรงกระถดถอยนี้ว่าสมการพยากรณ์ (Prediction Equation)

รูปแบบโดยทั่วไปของสมการเส้นตรงกระถดถอยคือ

$$y' = a + bx$$

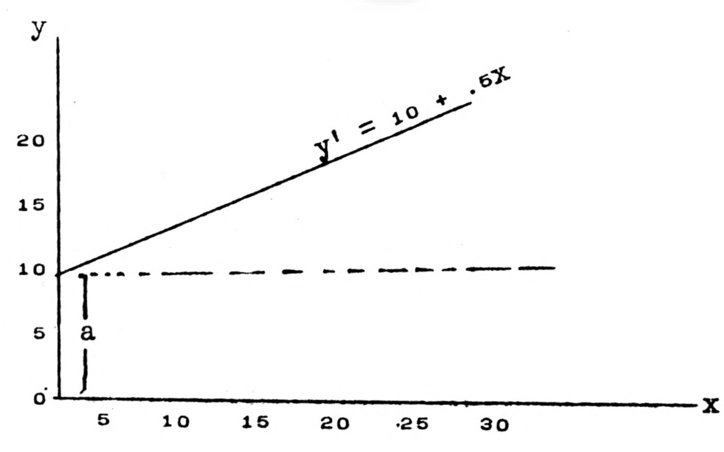
เมื่อ x, y เป็นค่าของตัวแปร 2 ตัว

a คือค่าที่เส้นตรงกระถดถอยตัดกับแกน y (y - intercept)

b คือค่าความเอียง (slope) ของเส้นตรงกระถดถอย

y' คือค่าพยากรณ์ของ y จากค่า x

ตัวอย่าง สมการเส้นตรง $Y' = a + bx$



$a = 10$

$b = .5$

การพยากรณ์ค่า y โดยใช้สมการเส้นตรงกระถดถอยเข้าช่วย

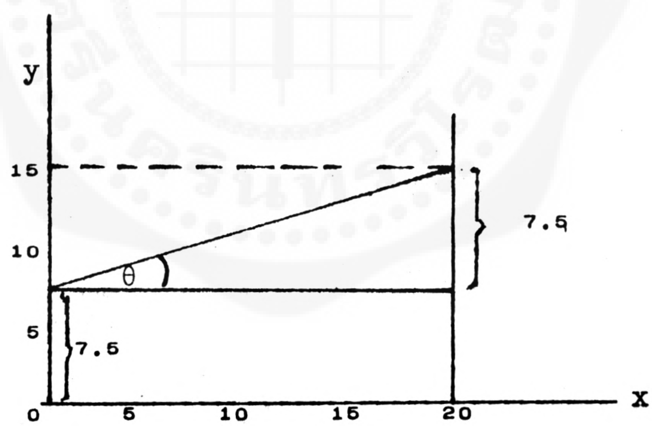
เมื่อ $x = 5 : y' = 10 + .5 \times 5 = 10 + 2.5 = 12.5$

เมื่อ $x = 10 : y' = 10 + .5 \times 10 = 10 + 5 = 15$

ฯลฯ

เมื่อความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงเป็นแบบสมบูรณ์แบบ ไม่ว่าประเภททางบวกหรือทางลบก็ตาม เส้นตรงเหล่านั้นจะเป็นเส้นตรงกระถดถอย โดยมีค่า a คือค่าที่เส้นตรงตัดกับแกน x และค่า b คือค่า tan ของมุมที่เส้นกระถดถอยทำกับแกน x

ตัวอย่างเช่น ความสัมพันธ์ของ x และ y เป็นรูปเส้นตรงดังนี้



จงหาสมการเส้นตรงกระถดถอยของ x และ y

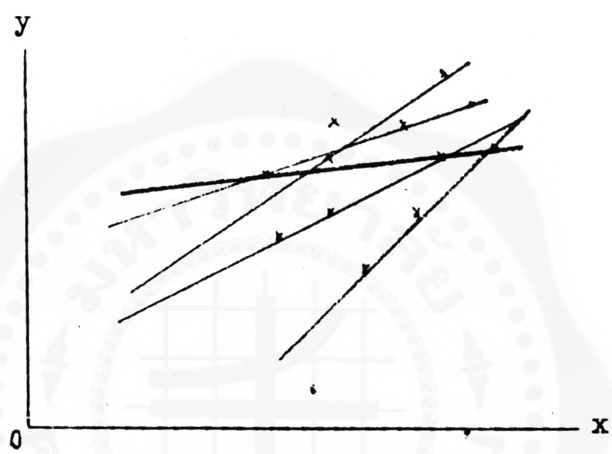
$a = 7.5$

$b = \tan\theta = \frac{17.5}{20} = .375$

$\therefore$ สมการกระถดถอยคือ $Y' = 7.5 + .375X$

เทคนิครวมพื้นที่ให้น้อยที่สุด (Sum of Least Square)

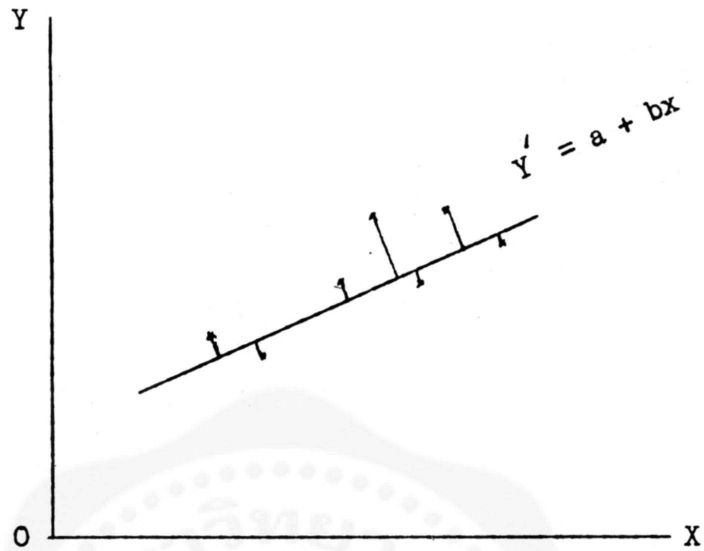
เมื่อจุดต่าง ๆ บนกราฟที่เกิดจากความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y ไม่เรียงกันเป็นเส้นตรง เส้นกระถดถอย ต้องเป็นเส้นที่เป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของความสัมพันธ์ชุดนี้ จึงจะให้การพยากรณ์เป็นไปได้ถูกต้องมากที่สุด



จุดที่เกิดจากความสัมพันธ์ที่ไม่สมบูรณ์แบบ เราอาจลากเส้นผ่านจุดเหล่านี้ได้มากมายหลายเส้น

Adrien Legender นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ได้คิดหาวิธีสร้างเส้นกระถดถอยให้กับจุดต่าง ๆ ที่เกิดจากความสัมพันธไม่สมบูรณ์แบบ วิธีการลากเส้นกระถดถอยของ Adrien Legender ใช้วิธีการที่เรียกว่าเทคนิคพื้นที่น้อยที่สุด (Sum of Least Square)

เทคนิครวมพื้นที่ให้น้อยที่สุด คือการลากเส้นผ่านกลุ่มจุดของความสัมพันธ์และเมื่อเส้นตรงใดที่ทำให้ผลรวมของพื้นที่ (ระยะทาง^2) จากจุดต่าง ๆ มายังเส้นตรงนั้น ๆ มีค่าน้อยที่สุด (นั่นคือทำให้ผลรวมของพื้นที่ของความคลาดเคลื่อนจากค่าที่เป็นจริง กับค่าพยากรณ์ที่เกิดจากเส้นตรงกระถดถอยมีค่าน้อยที่สุด) เส้นตรงนั้นเป็นเส้นกระถดถอยที่ดีที่สุด



จาก $Y' \quad = \quad a + bx$

และเมื่อ Y คือจุดที่เกิดขึ้นจริง ดังนั้น ค่าความคลาดเคลื่อนแต่ละจุดของ Y' ที่เกิดจากการใช้สมการกระถดถอยในการพยากรณ์เป็น

$$Y - Y' < Y - (a + bx)$$

ผลรวมพื้นที่ความคลาดเคลื่อนทั้งหมดจะเป็น

$$\Sigma(Y - Y')^2 - \Sigma[Y - (a + bx)^2]$$

เมื่อ N คือจำนวนจุดที่กำหนดจากความสัมพันธ์ X, Y และ จากการใช้วิชาแคลคูลัส โดยพยายามทำให้ค่า $\Sigma(Y - Y')^2$ เล็กที่สุด จะพิสูจน์ได้ว่า

เมื่อค่า $\Sigma(Y - Y')^2$ เล็กที่สุดก็ต่อเมื่อ

$$b \quad = \quad \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$$

และ $\quad a \quad = \quad \bar{Y} - b \ (\bar{X})$ หรือ $\dfrac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N(\Sigma X^2) - (\Sigma X)^2}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเขียนสมการกระถดถอยทำนายค่า X จากค่า Y จะได้สมการเป็นดังนี้

$$X' = a + by$$

เมื่อ $$b = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N(\Sigma Y^2)-(\Sigma Y)^2}$$

$$a = \bar{X} - b\ (\bar{Y}) \text{ หรือ } \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2)-(\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N(\Sigma Y^2)-(\Sigma Y)^2}$$

ตัวอย่าง ในการทดสอบภาษาอังกฤษแก่ผู้ที่เคยเรียนภาษาอังกฤษมาเป็นเวลาต่าง ๆ กันกลุ่มหนึ่ง ปรากฏว่าได้ผลดังตารางข้างล่าง จงเขียนสมการกระถดถอยใช้สำหรับพยากรณ์คะแนนภาษาอังกฤษจากจำนวนของปีที่เคยเรียนมา

จำนวนปีที่เรียน X	คะแนน Y	X^2	XY
3	57	9	171
4	78	16	312
4	72	16	288
2	58	4	116
5	89	25	445
3	63	9	189
4	73	16	292
5	84	25	420
3	75	9	225
2	48	4	96
รวม 35	697	133	2,564

สมการพยากรณ์คะแนนจากจำนวนปีที่ศึกษา คือ

$$Y' = a + bx$$

จาก $$b = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}$$

$$= \frac{10\ (2554)\ -\ (35)(697)}{105} = \frac{1145}{105} = 10.9$$

จาก $$a = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2)-(\Sigma X)(\Sigma XY)}{N(\Sigma X^2)-(\Sigma X)^2}$$

$$= \frac{(697)(133)-(35)(2554)}{10(133)-(35)^2} = \frac{3311}{105} = 31.5$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงกระถดถอย หรือสมการพยากรณ์จะเป็น

$$Y' = 31.5 + 10.9X$$

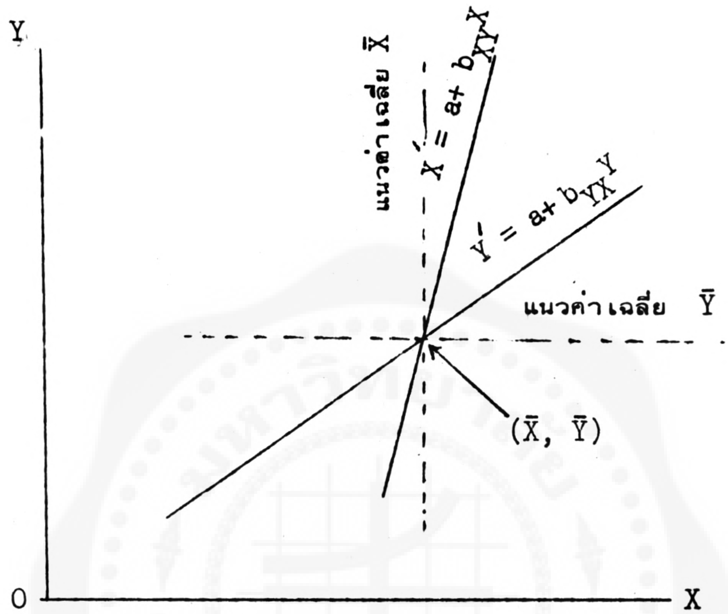
หมายเหตุ การใช้สมการพยากรณ์ที่คำนวณได้ ค่าที่ได้มาจากการพยากรณ์จะไม่ใช่ค่าที่แท้จริงเสมอไป เช่น เมื่อ $x = 3$ ค่า Y' จะเป็น

$$Y' = 31.5 + 10.9 \times 3 = 31.5 + 32.7 = 64.2$$

จะเห็นได้ว่าจากข้อมูลจริง เมื่อ X เป็น 3 ค่า Y' จะเป็น 67, 63 และ 75 เป็นต้น การใช้สมการพยากรณ์เป็นเพียงการให้ค่าที่จะทำได้ผลรวมของความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นน้อยที่สุดตามเทคนิค รวมพื้นที่ให้น้อยที่สุดเท่านั้น

ถ้าให้ b_{yx} แทนค่า b ที่พยากรณ์ Y จากค่า X และ b_{xy} แทนค่าพยากรณ์ X จาก Y

กราฟของสมการเส้นตรงกระถดถอยในการพยากรณ์ค่า Y จากค่า X และพยากรณ์ค่า X จากค่า Y จะตัดกันที่จุด ณ แนวค่าเฉลี่ยของแกน X และแนวค่าเฉลี่ยของแกน Y เสมอ



ภาพแสดงสมการพยากรณ์ค่า Y จาก X และพยากรณ์ค่า X จาก Y จะตัดกันที่แนว $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ และผลคูณของค่า b_{yx} และ b_{xy} จะมีค่าเท่ากับกำลังสองของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เสมอ กล่าวคือ

$$b_{yx}\, b_{xy} = r^2_{xy}$$

$$b_{YX} = r^2_{xy} / b_{xy}$$

เมื่อแทนค่า $$b_{xy} = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\,(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)^2}$$

และ $$r_{xy} = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

จะพิสูจน์ได้ว่า

$$b_{yx} = r_{xy} \frac{S_y}{S_x}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$b_{xy} = r_{xy} \frac{S_x}{S_y}$$

ดังนั้น จาก $a_{yx} = \bar{Y} - b_{yx}(\bar{X})$ และ $b_{yx} = r_{xy} \frac{S_y}{S_x}$

แทนค่าใน

$$Y' = a_{yx} + b_{yx}X$$

$$= \bar{Y} - r_{xy}\frac{S_y}{S_x}\bar{X} + r_{xy}\frac{S_y}{S_x}X$$

$$= \bar{Y} + r_{xy}\frac{S_y}{S_x}X - r_{xy}\frac{S_y}{S_x}\bar{X}$$

นั่นคือ $Y' = \bar{Y} + r_{xy}\frac{S_y}{Sx}(X - \bar{X})$

ในทำนองเดียวกัน เราอาจเขียนสมการพยากรณ์ค่า X จากค่า Y ได้เป็น

$$X' = \bar{X} + r_{xy}\frac{S_x}{S_y}(Y - \bar{Y})$$

สมการดังกล่าวนี้ เป็นสมการพยากรณ์เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรทั้งสอง

<u>ค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (Standard error of Estimate)</u>

จะเห็นได้ว่า การใช้สมการกระถดถ่อย ช่วยในการพยากรณ์ค่า X จากค่า Y หรือพยากรณ์ค่า Y จาก ค่า X ก็ตาม เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X และ Y ไม่เป็นไปอย่างสมบูรณ์แบบ ค่า X หรือ Y ที่พยากรณ์ได้อาจจะเบี่ยงเบนไปจากค่าที่เป็นจริงไปบ้าง โดยประชากรของความเบี่ยงเบนทั้งหมดจะมีการแจกแจงเป็นโค้งปกติ และมีความคลาดเคลื่อน (ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน) ของการพยากรณ์ เป็นดังนี้

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y')^2}{N-2}}$$

เมื่อ S_{yx} คือค่าความคลาดเคลื่อนของความเบี่ยงเบนจากการพยากรณ์ค่า Y จากค่า X

Y คือค่า Y ที่เป็นจริง

Y' คือค่า Y ที่ได้จากการพยากรณ์

N คือจำนวน Y ที่มีอยู่

ในทำนองเดียวกัน

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\Sigma(X - X')^2}{N-2}}$$

เมื่อ N มีขนาดใหญ่ ($N \geq 50$) สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ได้จากค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์จากสูตร

$$S_{yx} = S_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}$$

เมื่อ S_{yx} คือค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการพยากรณ์ค่า Y จากค่า X

S_y คือค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y ที่เกิดขึ้นจริง

r_{xy} คือค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X และ Y

ในทำนองเดียวกัน

$$S_{xy} = S_x \sqrt{1 - r_{xy}^2}$$

เมื่อต้องการใช้สูตรดังกล่าวนี้กับกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็กกว่า 50 ต้องใช้ $\sqrt{N/(N-2)}$ เป็นค่าแก้ความผิดพลาด โดยนำไปคูณกับ S_{xy} หรือ S_{yx} ที่คำนวณได้

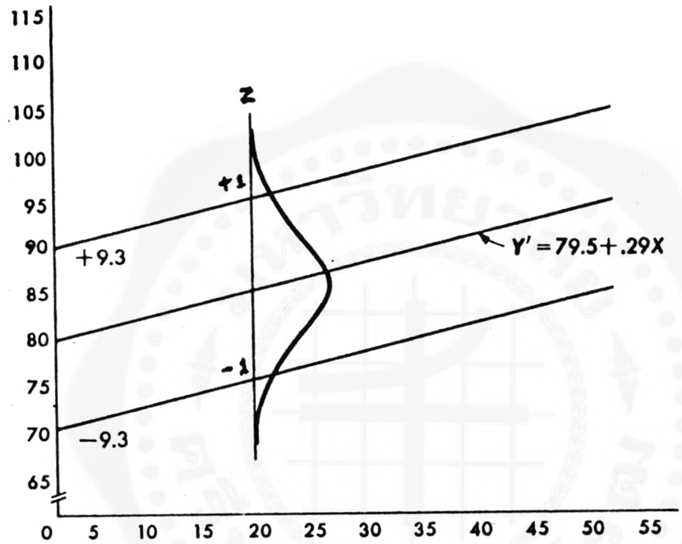
ตัวอย่าง จงหาค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่า Y จากค่า X เมื่อตัวแปร X และ Y มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็น .429 และค่า Y มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 10 กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเป็น 35

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad S_{yx} &= S_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \\ &= 10 \sqrt{1 - (.429)^2} \\ &= 10\ (.903) \\ &= 9.03 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากขนาดของกลุ่มตัวอย่าง <50 ดังนั้นต้องใช้ค่า $\sqrt{N/(N-2)}$ เป็นค่าแก้ โดยคูณกับค่า S_{yx} ที่คำนวณได้

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad S_{yx} &= (9.03) \sqrt{35/(35-2)} \\ &= (9.03)(1.029) \\ &= 9.3 \end{aligned}$$

ความหมายของความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็น ๙.๓ คือ โอกาสที่จะพยากรณ์คลาดเคลื่อนไประหว่าง +๙.๓ ถึง -๙.๓ เป็นพื้นที่ระหว่างค่าคะแนนมาตรฐาน ±1 หรือ 68.26% หรือแสดงได้ดังรูป



ภาพแสดงการแจกแจงของค่าเบี่ยงเบนจากการพยากรณ์ที่มีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็น ±๙.๓ เมื่อสมการพยากรณ์เป็น $Y' = 79.5 + .29X$

กิจกรรมและแบบฝึกหัด

1. ค้นคว้าปริญญานิพนธ์ที่ใช้การสร้างสมการพยากรณ์ 3 เล่ม และในแต่ละเล่ม

   ก. เขียนสมการพยากรณ์ของปริญญานิพนธ์นั้น

   ข. บอกค่า และ ของสมการพยากรณ์นั้น

2. จากการรวบรวมรายได้ และรายจ่ายของเพื่อร่วมห้องในเรื่องค่าสหสัมพันธ์ จงเขียนสมการพยากรณ์รายจ่ายจากรายได้ และคำนวณรายจ่ายของแต่ละคนจากสมการพยากรณ์ที่ได้

3. จากคะแนนสอบเข้าปรากฏว่า หลังจากเรียนไป 1 ปี เกรดของนิสิต 10 คน เป็นดังนี้

คะแนนสอบเข้า	เกรด
710	3.50
680	3.70
670	3.20
660	3.10
580	3.00
540	3.00
520	2.80
500	2.90
480	2.40
440	2.60

จงเขียนสมการพยากรณ์เกรดของนิสิตจากคะแนนสอบเข้า และคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์

บทที่ 12

การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. ให้ผู้เรียนได้ทราบถึงแนวความคิดของการวิจัยที่ควรจะใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม
2. ให้ผู้เรียนสามารถยกตัวอย่างหัวข้อการวิจัยที่น่าจะใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมได้
3. ให้ผู้เรียนทราบแนวทางการคำนวณหาค่า F จากการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

<u>เนื้อหา</u>

- การวิจัยที่มีตัวแปรอิทธิพล
- ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม
- วิธีคำนวณค่า F จาก ANCOVA

การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (Analysis of Covariance)

การวิจัยที่มีตัวแปรอิทธิพล

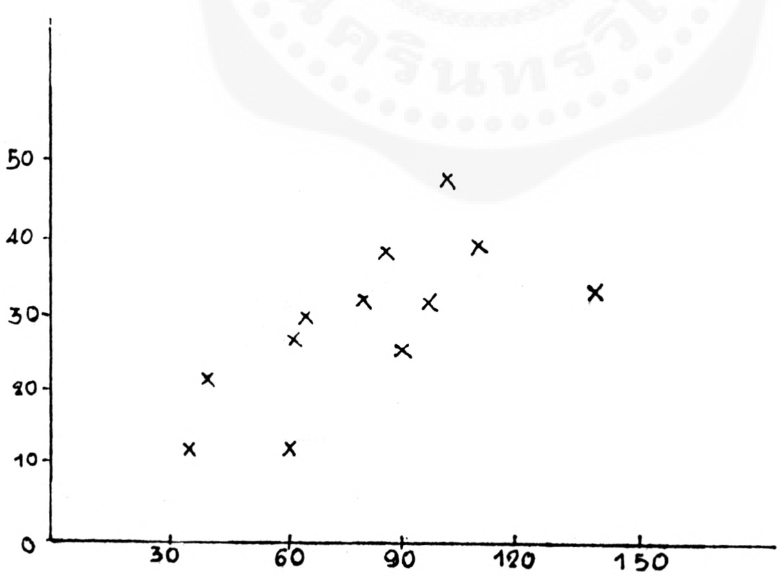
ในการทำวิจัย โดยปกติผู้วิจัยมักจะพยายามควบคุมตัวแปรภายนอกที่ไม่เกี่ยวข้องกับการวิจัยให้คงที่ กล่าวคือ พยายามไม่ให้มีผลจากตัวแปรภายนอกเลย หรือถ้ามีผลจากตัวแปรภายนอกเหล่านั้นก็ให้มีผลต่อทั้งกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุมเท่าเทียมกัน ตัวอย่างเช่น ในการทดลองใช้หญ้า ๓ ชนิดในการเลี้ยงวัว ผู้วิจัยได้ใช้วัว ๓ กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มกินหญ้าที่แตกต่างกัน ผู้วิจัยพยายามควบคุมตัวแปรภายนอกอื่น ๆ ให้ทั้งสองกลุ่มได้รับผลจากตัวแปรภายนอกเท่าเทียมกัน เช่น ใช้วัวพันธุ์เดียวกัน อายุปาน ๆ กัน ให้น้ำเท่า ๆ กัน เลี้ยงอยู่ในคอกเช่นเดียวกัน ให้ปริมาณหญ้าเท่ากัน ฯลฯผู้วิจัยวัดผลของการทดลองโดยยึดน้ำหนักของวัวที่เพิ่มขึ้นหลังจากการทดลองของแต่ละกลุ่ม แล้วนำค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่มไปหาค่าความแตกต่างด้วยสถิติ หรือ ดังที่กล่าวมาแล้ว สิ่งหนึ่งที่ผู้วิจัยจะพยายามควบคุมแต่ทำไม่ได้คือ น้ำหนักของวัวก่อนการทดลอง เพราะย่อมเป็นการยากมากที่จะให้วัวแต่ละตัวมีน้ำหนักเท่ากัน และโดยที่น้ำหนักเริ่มต้นของวัวที่ไม่เท่ากันอาจมีผลทำให้การเจริญเติบโตของวัวแตกต่างกัน กล่าวคือวัวโตกว่าอาจโตได้เร็วกว่าวัวตัวเล็กเป็นต้น และด้วยวิจัยนำเอาค่าน้ำหนักเริ่มต้นของวัวก่อนการทดลองมาเป็นตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการทดลองด้วย การสรุปผลจากการทดลองอาจจะแตกต่างไปจากการสรุปผลโดยไม่คำนึงถึงน้ำหนักเริ่มต้นของวัวโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อค่าสังเกตจากตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กับข้อมูลในการวิจัย ดังในตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น คือเมื่อน้ำหนักวัวก่อนทำการทดลองมีความสัมพันธ์กับค่าน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของวัวหลังจากการทดลอง ในกรณีเช่นนี้ต้องมีการปรับข้อมูลที่ได้ก่อนการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากข้อมูลเหล่านั้น

ตัวอย่างเช่น เมื่อข้อมูลของน้ำหนักวัวก่อนการทดลองเลี้ยงด้วยหญ้า 3 ชนิด และน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นจากการเลี้ยงด้วยหญ้า 3 ชนิด เป็นดังนี้

กลุ่มที่ 1		กลุ่มที่ 2		คลุ่มที่ 3	
Y_1	X_1	Y_2	X_2	Y_3	X_2
110	40	60	25	62	27
75	38	75	32	90	24
93	30	38	13	45	20
97	47	140	35	59	23
375	155	313	105	256	84

ให้ Y แทน น้ำหนักวัวก่อนการทดลอง (ตัวแปรอิทธิพล)

X แทน น้ำหนักวัวที่เพิ่มขึ้นหลังการทดลอง (ตัวแปรในการวิจัย)



ภาพแสดงความสัมพันธ์ของน้ำหนักวัวก่อนการทดลองและน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นหลังการทดลอง

จากภาพจะเห็นน่าจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง $(r>0)$ ระหว่าง Y และ X ในกรณีเช่นนี้เราใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ซึ่งเป็นวิธีการที่รวมเอาการวิเคราะห์ความแปรปรวนและค่าความกระถดถอยไว้ด้วยกัน จากตัวอย่างเราเรียกค่าของ Y เป็นตัวแปรที่ถูกอิทธิพลจากคุณลักษณะอื่น (Concomitant Variable) ในที่นี้คือค่าของ Y ถูกอิทธิพลจากตัวแปร X นั่นเอง

<u>ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม</u>

ข้อมูลที่จะทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมนั้นต้องมีลักษณะดังนี้

1. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มต้องเป็นอิสระจากกัน
2. การแจกแจงของประชากรของกลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มต้องเป็นโค้งปกติ
3. ประชากรทั้งหมดต้องเป็นเอกพันธ์ คือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots\ldots = \sigma_k^2$
4. ค่าสังเกตจากตัวแปรในการวิจัยและตัวแปรตามต้องมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง
5. สัมประสิทธิ์ของความกระถดถอยเป็นเอกพันธ์คือ $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k$

<u>วิธีการคำนวณค่า F จาก ANCOVA</u>

เมื่อให้ค่าสังเกตจากตัวแปรในการวิจัย และตัวแปรอิทธิพล เป็นดังนี้

กลุ่ม 1		กลุ่ม 2		. . .	กลุ่ม k			
Y_{11}	X_{11}	Y_{12}	X_{12}		Y_{1k}	X_{1k}		
Y_{21}	X_{21}	Y_{22}	X_{22}		Y_{2k}	X_{2k}		
Y_{31}	X_{31}	Y_{32}	X_{32}	. . .	Y_{3k}	X_{3k}		
	⋮				⋮			
Y_{n1}	X_{n1}	Y_{n2}	X_{n2}		Y_{nk}	X_{nk}	รวม	
$\bar{Y}_1$	$\bar{X}_1$	$\bar{Y}_2$	$\bar{X}_2$		$\bar{Y}_k$	$\bar{X}_k$	$\bar{Y}$	$\bar{X}$
T_{y1}	T_{x1}	T_{y2}	T_{x2}	. . .	T_{yk}	X_{xk}	T_y	T_x

จากข้อมูล คำนวณค่า SS (Sum Square) ของตัวแปรแต่ละตัวดังนี้

1. หาค่า SS ระหว่างกลุ่ม ทั้งของข้อมูล X และ Y ได้ดังนี้

$$SS_{b(Y)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{Yj}^2}{nj} - \frac{T_Y^2}{N}$$

$$SS_{b(X)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{Xj}^2}{\;} - \frac{T_X^2}{N}$$

๒. หาค่า SS ภายในกลุ่ม ทั้งของข้อมูล X และ Y ได้ดังนี้

$$SS_{w(Y)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n(j)} Y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{Y(j)}^2}{n(j)}$$

$$SS_{w(X)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n(j)} X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{T_{X(j)}^2}{n(j)}$$

๓. หาค่า SS ของผลคูณ (Products) ทั้งระหว่างกลุ่มและภายในกลุ่ม

$$SS_{b(p)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{X(j)}\, T_{Y(j)}}{n\ (j)} - \frac{T_X\, T_Y}{N}$$

$$SS_{w(p)} = T_{XY} - \sum_{j=1}^{k} \frac{T_{X(j)} T_{Y(j)}}{n(j)}$$

๔. หาค่า SS ของผลรวม ทั้งข้อมูล X ข้อมูล Y ได้ดังนี้

$$SS_{t(Y)} = SS_{b(y)} + SS_{w(y)}$$

$$SS_{t(X)} = SS_{b(X)} + SS_{w(X)}$$

$$SS_{t(p)} = SS_{b(p)} + SS_{w(p)}$$

5. หาค่าปรับของ sum of square (SS')

$$SS'_t = SS_{t(X)} - \frac{\{SS_{t(p)}\}^2}{SS_{t(Y)}}$$

$$SS'_w = SS_{w(X)} - \frac{\{SS_{w(p)}\}^2}{SS_{w(Y)}}$$

$$SS'_b = SS'_t - SS'_w$$

ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมจะเป็นดังนี้

แหล่งตัวแปร	SS'	df	MS'	F
ระหว่างกลุ่ม	SS'_b	k - 1	$\frac{SS'_b}{df}$	$\frac{MS'_b}{MS'_w}$
ภายในกลุ่ม	SS'_w	n-k-1	$\frac{SS'_w}{df}$	
	SS'_t	N-2		

สมมติฐานการทดลองและการเปิดตารางใช้ตารางการแจกแจงของ F เช่นเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยปกติ

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม เมื่อพบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร การทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรแต่ละคู่ต้องใช้ค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้ว ($\bar{X}'$, $\bar{Y}'$) โดยกำหนด

$$\bar{X} = \frac{T_X}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{T_Y}{N}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{T_{X_1}}{N_1} \quad : \quad \bar{Y}_1 = \frac{T_{Y_1}}{N_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{X}_k = \frac{T_{X_k}}{N_k} \quad : \quad \bar{Y}_k = \frac{T_{Y_k}}{n_k}$$

$$b_w = \frac{SS_{w(p)}}{SS_{w(y)}}$$

$$\bar{X}'_k = b_w\,(\bar{Y} - \bar{Y}_k) + \bar{X}_k$$

หลังจากนั้นจึงใช้วิธีตรวจสอบค่าเฉลี่ยที่ปรับปล้ว เช่นเดียวกับการตรวจสอบค่าเฉลี่ยรายคู่ หลังจากพบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยจากการสิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

<u>กิจกรรมและแบบฝึกหัด</u>

1. ให้ผู้เรียนช่วยกันคิดหัวข้อการวิจัยที่น่าจะใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม มา 3 หัวข้อ พร้อมทั้งระบุถึงตัวแปรอิทธิพลในแต่ละหัวข้อ

2. ให้ผู้เรียนไปอ่านการวิจัยที่ใช้สถิติการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมมากลุ่มละ 1 หัวข้อ เพื่อรายงานแก่เพื่อนร่วมชั้น (แบ่งผู้เรียนออกเป็นกลุ่มละ 4 คน) พร้อมทั้งวิจารณ์ถึงสาเหตุที่ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

3. ให้ผู้เรียนคำนวณค่า F จาก ANOVA และ ANCOVA จากตัวอย่างข้อมูลการทดลองเลี้ยงวัว 3 กลุ่มด้วยหญ้า 3 ชนิดจากโจทย์ในเนื้อหา

4. นิสิตผู้หนึ่ง ต้องการทำวิจัยให้เป็นแบบอย่าง จึงออกแบบแผนการวิจัย (Research Design) ให้สามารถควบคุมตัวแปรแทรกซ้อนได้มากที่สุด แต่จากการตรวจสอบก่อนการทดลองพบว่ายังมีตัวแปรที่ไม่ใช่ตัวแปรต้นบางตัว ส่งผลต่อตัวแปรตามที่ต้องการศึกษา

ท่านคิดว่าควรแนะนำให้นิสิตผู้นี้เลือกใช้สถิติอะไร เพราะเหตุใด

TABLES

ตาราง ๑

Squares, square roots, and reciprocals

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$1/n$	n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$1/n$
1	1	1.000	3.162	1.00000	51	2601	7.141	22.583	.01961
2	4	1.414	4.472	.50000	52	2704	7.211	22.804	.01923
3	9	1.732	5.477	.33333	53	2809	7.280	23.022	.01887
4	16	2.000	6.325	.25000	54	2916	7.348	23.238	.01852
5	25	2.236	7.071	.20000	55	3025	7.416	23.452	.01818
6	36	2.449	7.746	.16667	56	3136	7.483	23.664	.01786
7	49	2.646	8.367	.14286	57	3249	7.550	23.875	.01754
8	64	2.828	8.944	.12500	58	3364	7.616	24.083	.01724
9	81	3.000	9.487	.11111	59	3481	7.681	24.290	.01695
10	100	3.162	10.000	.10000	60	3600	7.746	24.495	.01667
11	121	3.317	10.488	.09091	61	3721	7.810	24.698	.01639
12	144	3.464	10.954	.08333	62	3844	7.874	24.900	.01613
13	169	3.606	11.402	.07692	63	3969	7.937	25.100	.01587
14	196	3.742	11.832	.07143	64	4096	8.000	25.298	.01562
15	225	3.873	12.247	.06667	65	4225	8.062	25.495	.01538
16	256	4.000	12.649	.06250	66	4356	8.124	25.690	.01515
17	289	4.123	13.038	.05882	67	4489	8.185	25.884	.01493
18	324	4.243	13.416	.05556	68	4624	8.246	26.077	.01471
19	361	4.359	13.784	.05263	69	4761	8.307	26.268	.01449
20	400	4.472	14.142	.05000	70	4900	8.367	26.458	.01429
21	441	4.583	14.491	.04762	71	5041	8.426	26.646	.01408
22	484	4.690	14.832	.04545	72	5184	8.485	26.833	.01389
23	529	4.796	15.166	.04348	73	5329	8.544	27.019	.01370
24	576	4.899	15.492	.04167	74	5476	8.602	27.203	.01351
25	625	5.000	15.811	.04000	75	5625	8.660	27.386	.01333
26	676	5.099	16.125	.03846	76	5776	8.718	27.568	.01316
27	729	5.196	16.432	.03704	77	5929	8.775	27.749	.01299
28	784	5.292	16.733	.03571	78	6084	8.832	27.928	.01282
29	841	5.385	17.029	.03448	79	6241	8.888	28.107	.01266
30	900	5.477	17.321	.03333	80	6400	8.944	28.284	.01250
31	961	5.568	17.607	.03226	81	6561	9.000	28.460	.01235
32	1024	5.657	17.889	.03125	82	6724	9.055	28.636	.01220
33	1089	5.745	18.166	.03030	83	6889	9.110	28.810	.01205
34	1156	5.831	18.439	.02941	84	7056	9.165	28.983	.01190
35	1225	5.916	18.708	.02857	85	7225	9.220	29.155	.01176
36	1296	6.000	18.974	.02778	86	7396	9.274	29.326	.01163
37	1369	6.083	19.235	.02703	87	7569	9.327	29.496	.01149
38	1444	6.164	19.494	.02632	88	7744	9.381	29.665	.01136
39	1521	6.245	19.748	.02564	89	7921	9.434	29.833	.01124
40	1600	6.325	20.000	.02500	90	8100	9.487	30.000	.01111
41	1681	6.403	20.248	.02439	91	8281	9.539	30.166	.01099
42	1764	6.481	20.494	.02381	92	8464	9.592	30.332	.01087
43	1849	6.557	20.736	.02326	93	8649	9.644	30.496	.01075
44	1936	6.633	20.976	.02273	94	8836	9.695	30.659	.01064
45	2025	6.708	21.213	.02222	95	9025	9.747	30.822	.01053
46	2116	6.782	21.448	.02174	96	9216	9.798	30.984	.01042
47	2209	6.856	21.679	.02128	97	9409	9.849	31.145	.01031
48	2304	6.928	21.909	.02083	98	9604	9.899	31.305	.01020
49	2401	7.000	22.136	.02041	99	9801	9.950	31.464	.01010
50	2500	7.071	22.361	.02000	100	10000	10.000	31.623	.01000

ตาราง ๒

COEFFICIENTS OF THE BINOMIAL DISTRIBUTION

Example: If $n = 8$ and $x = 6$, $\binom{8}{6} = 28$.

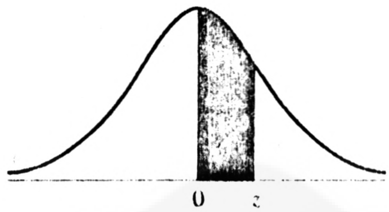
This table gives the value of $\binom{n}{x}$ in $\binom{n}{x}q^{n-x}p^{x}$, the general term of $(q + p)^n$.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Source: From *Statistical Analysis for Decision Making* by Morris Hamburg, © 1970 by Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

ตาราง ๓

AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL PROBABILITY DISTRIBUTION BETWEEN THE MEAN AND SUCCESSIVE VALUES OF z.



Example: If $z = 1.00$, then the area between the mean and this value of z is 0.3413.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
4.0	.49997									

Source: From *Statistical Analysis for Decision Making* by Morris Hamburg © 1970 by Harcourt Brace Jovanovich, Inc

ตาราง ๔

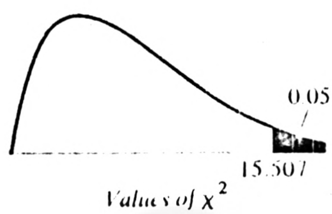
Critical Values of *t*

Degrees of Freedom	*One-tailed Test for α =*				
	0.100	0.050	0.025	0.10	0.005
	Confidence Interval or Two-tailed Test for α =				
	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.945	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 3 is taken from Table 12 of the *Biometrika Tables for Statisticians*, Volume I, Third Edition, by Pearson and Hartley.

ตาราง ๕

CHI SQUARE (χ^2) DISTRIBUTION



Example: In a chi square distribution with $df = 8$ degrees of freedom, the area to the right of a chi square value of 15.507 is 0.05.

Degrees of Freedom df	*Area in Right Tail*				
	.20	.10	.05	.02	.01
1	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

Source: Table A-7 is taken from Table IV of Fisher and Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by permission of the authors and publishers.

ตาราง ๖

Sample Size for Specified Confidence Limits and Precision When Sampling Attributes in Percent

A. 2σ Confidence Interval
(π = 0.5)[a]

Size of Population (N)	Sample Size (n) for Precision (e) of ±1%	±2%	±3%	±4%	±5%	±10%
500	[b]	[b]	[b]	[b]	222	83
1,000	[b]	[b]	[b]	385	286	91
1,500	[b]	[b]	638	441	316	94
2,000	[b]	[b]	714	476	333	95
2,500	[b]	1,250	769	500	345	96
3,000	[b]	1,364	811	517	353	97
3,500	[b]	1,458	843	530	359	97
4,000	[b]	1,538	870	541	364	98
4,500	[b]	1,607	891	549	367	98
5,000	[b]	1,667	909	556	370	98
6,000	[b]	1,765	938	566	375	98
7,000	[b]	1,842	959	574	378	99
8,000	[b]	1,905	976	580	381	99
9,000	[b]	1,957	989	584	383	99
10,000	5,000	2,000	1,000	588	385	99
15,000	6,000	2,143	1,034	600	390	99
20,000	6,667	2,222	1,053	606	392	100
25,000	7,143	2,273	1,064	610	394	100
50,000	8,333	2,381	1,087	617	397	100
100,000	9,091	2,439	1,099	621	398	100
$\rightarrow \infty$	10,000	2,500	1,111	625	400	100

[a] Formula for sample size when population proportion π is

$$n_0 = \frac{z^2\pi(1-\pi)N}{z^2\pi(1-\pi) + Ne^2}$$

This table assumes $\pi = 0.5$, $z = 2$:

$$n = \frac{2^2(0.5)^2 N}{2^2(0.5)^2 + Ne^2} = \frac{N}{1 + Ne^2}$$

$$n \geqq n_0$$

[b] In these cases the assumption of normal approximation is poor, and the formula does not apply.

(continued)

B. 3σ Confidence Interval

(π = 0.5)[a]

Population (N)	Sample Size (n) for Precision (e) of ±1%	±2%	±3%	±4%	±5%
500	b	b	b	b	b
1,000	b	b	b	b	474
1,500	b	b	b	726	563
2,000	b	b	b	826	621
2,500	b	b	b	900	662
3,000	b	b	1,364	958	692
3,500	b	b	1,458	1,003	716
4,000	b	b	1,539	1,041	735
4,500	b	b	1,607	1,071	750
5,000	b	b	1,667	1,098	763
6,000	b	2,903	1,765	1,139	783
7,000	b	3,119	1,842	1,171	798
8,000	b	3,303	1,905	1,196	809
9,000	b	3,462	1,957	1,216	818
10,000	b	3,600	2,000	1,233	826
15,000	b	4,091	2,143	1,286	849
20,000	b	4,390	2,222	1,314	861
25,000	11,842	4,592	2,273	1,331	869
50,000	15,517	5,056	2,381	1,368	884
100,000	18,367	5,325	2,439	1,387	892
→ ∞	22,500	5,625	2,500	1,406	900

[a] This table assumes $\pi = 0.5$, $z = 3$:

$$n = \frac{3^2(0.5)^2N}{3^2(0.5)^2 + Ne^2}$$

[b] In these cases the assumption of normal approximation is poor, and the formula does not apply.

SOURCE: From A Method for Employing Sampling Techniques in Housing Surveys, New York State Division of Housing, September, 1948; compiled by the Bureau of Research, New York State Division of Housing and Community Renewal. Reproduced by permission.

Values of F above which 5 percent (roman type) or 1 percent (boldface type) of the area falls

n_2	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	4,052	**4,999**	**5,403**	**5,625**	**5,764**	**5,859**	**5,928**	**5,981**	**6,022**	**6,056**	**6,082**	**6,106**	**6,142**	**6,169**	**6,208**	**6,234**	**6,258**	**6,286**	**6,302**	**6,323**	**6,334**	**6,352**	**6,361**	**6,366**
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	98.49	**99.00**	**99.17**	**99.25**	**99.30**	**99.33**	**99.34**	**99.36**	**99.38**	**99.40**	**99.41**	**99.42**	**99.43**	**99.44**	**99.45**	**99.46**	**99.47**	**99.48**	**99.48**	**99.49**	**99.49**	**99.49**	**99.50**	**99.50**
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	34.12	**30.82**	**29.46**	**28.71**	**28.24**	**27.91**	**27.67**	**27.49**	**27.34**	**27.23**	**27.13**	**27.05**	**26.92**	**26.83**	**26.69**	**26.60**	**26.50**	**26.41**	**26.35**	**26.27**	**26.23**	**26.18**	**26.14**	**26.12**
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	21.20	**18.00**	**16.69**	**15.98**	**15.52**	**15.21**	**14.98**	**14.80**	**14.66**	**14.54**	**14.45**	**14.37**	**14.24**	**14.15**	**14.02**	**13.93**	**13.83**	**13.74**	**13.69**	**13.61**	**13.57**	**13.52**	**13.48**	**13.46**
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	16.26	**13.27**	**12.06**	**11.39**	**10.97**	**10.67**	**10.45**	**10.27**	**10.15**	**10.05**	**9.96**	**9.89**	**9.77**	**9.68**	**9.55**	**9.47**	**9.38**	**9.29**	**9.24**	**9.17**	**9.13**	**9.07**	**9.04**	**9.02**
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	13.74	**10.92**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.79**	**7.72**	**7.60**	**7.52**	**7.39**	**7.31**	**7.23**	**7.14**	**7.09**	**7.02**	**6.99**	**6.94**	**6.90**	**6.88**
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	12.25	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**7.00**	**6.84**	**6.71**	**6.62**	**6.54**	**6.47**	**6.35**	**6.27**	**6.15**	**6.07**	**5.98**	**5.90**	**5.85**	**5.78**	**5.75**	**5.70**	**5.67**	**5.65**
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
	11.26	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.19**	**6.03**	**5.91**	**5.82**	**5.74**	**5.67**	**5.56**	**5.48**	**5.36**	**5.28**	**5.20**	**5.11**	**5.06**	**5.00**	**4.96**	**4.91**	**4.88**	**4.86**
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	10.56	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.62**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**5.18**	**5.11**	**5.00**	**4.92**	**4.80**	**4.73**	**4.64**	**4.56**	**4.51**	**4.45**	**4.41**	**4.36**	**4.33**	**4.31**
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	10.04	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.21**	**5.06**	**4.95**	**4.85**	**4.78**	**4.71**	**4.60**	**4.52**	**4.41**	**4.33**	**4.25**	**4.17**	**4.12**	**4.05**	**4.01**	**3.96**	**3.93**	**3.91**
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	9.65	**7.20**	**6.22**	**5.67**	**5.32**	**5.07**	**4.88**	**4.74**	**4.63**	**4.54**	**4.46**	**4.40**	**4.29**	**4.21**	**4.10**	**4.02**	**3.94**	**3.86**	**3.80**	**3.74**	**3.70**	**3.66**	**3.62**	**3.60**
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	9.33	**6.93**	**5.95**	**5.41**	**5.06**	**4.82**	**4.65**	**4.50**	**4.39**	**4.30**	**4.22**	**4.16**	**4.05**	**3.98**	**3.86**	**3.78**	**3.70**	**3.61**	**3.56**	**3.49**	**3.46**	**3.41**	**3.38**	**3.36**
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	9.07	**6.70**	**5.74**	**5.20**	**4.86**	**4.62**	**4.44**	**4.30**	**4.19**	**4.10**	**4.02**	**3.96**	**3.85**	**3.78**	**3.67**	**3.59**	**3.51**	**3.42**	**3.37**	**3.30**	**3.27**	**3.21**	**3.18**	**3.16**

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																							
27	4.21 7.68	3.35 5.49	2.96 4.60	2.73 4.11	2.57 3.79	2.46 3.56	2.37 3.39	2.30 3.26	2.25 3.14	2.20 3.06	2.16 2.98	2.13 2.93	2.08 2.83	2.03 2.74	1.97 2.63	1.93 2.55	1.88 2.47	1.84 2.38	1.80 2.33	1.76 2.25	1.74 2.21	1.71 2.16	1.68 2.12	1.67 2.10
28	4.20 7.64	3.34 5.45	2.95 4.57	2.71 4.07	2.56 3.76	2.44 3.53	2.36 3.36	2.29 3.23	2.24 3.11	2.19 3.03	2.15 2.95	2.12 2.90	2.06 2.80	2.02 2.71	1.96 2.60	1.91 2.52	1.87 2.44	1.81 2.35	1.78 2.30	1.75 2.22	1.72 2.18	1.69 2.13	1.67 2.09	1.65 2.06
29	4.18 7.60	3.33 5.42	2.93 4.54	2.70 4.04	2.54 3.73	2.43 3.50	2.35 3.33	2.28 3.20	2.22 3.08	2.18 3.00	2.14 2.92	2.10 2.87	2.05 2.77	2.00 2.68	1.94 2.57	1.90 2.49	1.85 2.41	1.80 2.32	1.77 2.27	1.73 2.19	1.71 2.15	1.68 2.10	1.65 2.06	1.64 2.03
30	4.17 7.56	3.32 5.39	2.92 4.51	2.69 4.02	2.53 3.70	2.42 3.47	2.34 3.30	2.27 3.17	2.21 3.06	2.16 2.98	2.12 2.90	2.09 2.84	2.04 2.74	1.99 2.66	1.93 2.55	1.89 2.47	1.84 2.38	1.79 2.29	1.76 2.24	1.72 2.16	1.69 2.13	1.66 2.07	1.64 2.03	1.62 2.01
32	4.15 7.50	3.30 5.34	2.90 4.46	2.67 3.97	2.51 3.66	2.40 3.42	2.32 3.25	2.25 3.12	2.19 3.01	2.14 2.94	2.10 2.86	2.07 2.80	2.02 2.70	1.97 2.62	1.91 2.51	1.86 2.42	1.82 2.34	1.76 2.25	1.74 2.20	1.69 2.12	1.67 2.08	1.64 2.02	1.61 1.98	1.59 1.96
34	4.13 7.44	3.28 5.29	2.88 4.42	2.65 3.93	2.49 3.61	2.38 3.38	2.30 3.21	2.23 3.08	2.17 2.97	2.12 2.89	2.08 2.82	2.05 2.76	2.00 2.66	1.95 2.58	1.89 2.47	1.84 2.38	1.80 2.30	1.74 2.21	1.71 2.15	1.67 2.08	1.64 2.04	1.61 1.98	1.59 1.94	1.57 1.91
36	4.11 7.39	3.26 5.25	2.86 4.38	2.63 3.89	2.48 3.58	2.36 3.35	2.28 3.18	2.21 3.04	2.15 2.94	2.10 2.86	2.06 2.78	2.03 2.72	1.98 2.62	1.93 2.54	1.87 2.43	1.82 2.35	1.78 2.26	1.72 2.17	1.69 2.12	1.65 2.04	1.62 2.00	1.59 1.94	1.56 1.90	1.55 1.87
38	4.10 7.35	3.25 5.21	2.85 4.34	2.62 3.86	2.46 3.54	2.35 3.32	2.26 3.15	2.19 3.02	2.14 2.91	2.09 2.82	2.05 2.75	2.02 2.69	1.96 2.59	1.92 2.51	1.85 2.40	1.80 2.32	1.76 2.22	1.71 2.14	1.67 2.08	1.63 2.00	1.60 1.97	1.57 1.90	1.54 1.86	1.53 1.84
40	4.08 7.31	3.23 5.18	2.84 4.31	2.61 3.83	2.45 3.51	2.34 3.29	2.25 3.12	2.18 2.99	2.12 2.88	2.07 2.80	2.04 2.73	2.00 2.66	1.95 2.56	1.90 2.49	1.84 2.37	1.79 2.29	1.74 2.20	1.69 2.11	1.66 2.05	1.61 1.97	1.59 1.94	1.55 1.88	1.53 1.84	1.51 1.81
42	4.07 7.27	3.22 5.15	2.83 4.29	2.59 3.80	2.44 3.49	2.32 3.26	2.24 3.10	2.17 2.96	2.41 2.86	2.06 2.77	2.02 2.70	1.99 2.64	1.94 2.54	1.89 2.46	1.82 2.35	1.78 2.26	1.73 2.17	1.68 2.08	1.64 2.02	1.60 1.94	1.57 1.91	1.54 1.85	1.51 1.80	1.49 1.78
44	4.06 7.24	3.21 5.12	2.82 4.26	2.58 3.78	2.43 3.46	2.31 3.24	2.23 3.07	2.16 2.94	2.10 2.84	2.05 2.75	2.01 2.68	1.98 2.62	1.92 2.52	1.88 2.44	1.81 2.32	1.76 2.24	1.72 2.15	1.66 2.06	1.63 2.00	1.58 1.92	1.56 1.88	1.52 1.82	1.50 1.78	1.48 1.75
46	4.05 7.21	3.20 5.10	2.81 4.24	2.57 3.76	2.42 3.44	2.30 3.22	2.22 3.05	2.14 2.92	2.09 2.82	2.04 2.73	2.00 2.66	1.97 2.60	1.91 2.50	1.87 2.42	1.80 2.30	1.75 2.22	1.71 2.13	1.65 2.04	1.62 1.98	1.57 1.90	1.54 1.86	1.51 1.80	1.48 1.76	1.46 1.72
48	4.04 7.19	3.19 5.08	2.80 4.22	2.56 3.74	2.41 3.42	2.30 3.20	2.21 3.04	2.14 2.90	2.08 2.80	2.03 2.71	1.99 2.64	1.96 2.58	1.90 2.48	1.86 2.40	1.79 2.28	1.74 2.20	1.70 2.11	1.64 2.02	1.61 1.96	1.56 1.88	1.53 1.84	1.50 1.78	1.47 1.73	1.45 1.70

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
	n_1 degrees of freedom (for greater mean square)																							
50	4.03 7.17	3.18 5.06	2.79 4.20	2.56 3.72	2.40 3.41	2.29 3.18	2.20 3.02	2.13 2.88	2.07 2.78	2.02 2.70	1.98 2.62	1.95 2.56	1.90 2.46	1.85 2.39	1.78 2.26	1.74 2.18	1.69 2.10	1.63 2.00	1.60 1.94	1.55 1.86	1.52 1.82	1.48 1.76	1.46 1.71	1.44 1.68
55	4.02 7.12	3.17 5.01	2.78 4.16	2.54 3.68	2.38 3.37	2.27 3.15	2.18 2.98	2.11 2.85	2.05 2.75	2.00 2.66	1.97 2.59	1.93 2.53	1.88 2.43	1.83 2.35	1.76 2.23	1.72 2.15	1.67 2.06	1.61 1.96	1.58 1.90	1.52 1.82	1.50 1.78	1.46 1.71	1.43 1.66	1.41 1.64
60	4.00 7.08	3.15 4.98	2.76 4.13	2.52 3.65	2.37 3.34	2.25 3.12	2.17 2.95	2.10 2.82	2.04 2.72	1.99 2.63	1.95 2.56	1.92 2.50	1.86 2.40	1.81 2.32	1.75 2.20	1.70 2.12	1.65 2.03	1.59 1.93	1.56 1.87	1.50 1.79	1.48 1.74	1.44 1.68	1.41 1.63	1.39 1.60
65	3.99 7.04	3.14 4.95	2.75 4.10	2.51 3.62	2.36 3.31	2.24 3.09	2.15 2.93	2.08 2.79	2.02 2.70	1.98 2.61	1.94 2.54	1.90 2.47	1.85 2.37	1.80 2.30	1.73 2.18	1.68 2.09	1.63 2.00	1.57 1.90	1.54 1.84	1.49 1.76	1.46 1.71	1.42 1.64	1.39 1.60	1.37 1.56
70	3.98 7.01	3.13 4.92	2.74 4.08	2.50 3.60	2.35 3.29	2.23 3.07	2.14 2.91	2.07 2.77	2.01 2.67	1.97 2.59	1.93 2.51	1.89 2.45	1.84 2.35	1.79 2.28	1.72 2.15	1.67 2.07	1.62 1.98	1.56 1.88	1.53 1.82	1.47 1.74	1.45 1.69	1.40 1.62	1.37 1.56	1.35 1.53
80	3.96 6.96	3.11 4.88	2.72 4.04	2.48 3.56	2.33 3.25	2.21 3.04	2.12 2.87	2.05 2.74	1.99 2.64	1.95 2.55	1.91 2.48	1.88 2.41	1.82 2.32	1.77 2.24	1.70 2.11	1.65 2.03	1.60 1.94	1.54 1.84	1.51 1.78	1.45 1.70	1.42 1.65	1.38 1.57	1.35 1.52	1.32 1.49
100	3.94 6.90	3.09 4.82	2.70 3.98	2.46 3.51	2.30 3.20	2.19 2.99	2.10 2.82	2.03 2.69	1.97 2.59	1.92 2.51	1.88 2.43	1.85 2.36	1.79 2.26	1.75 2.19	1.68 2.06	1.63 1.98	1.57 1.89	1.51 1.79	1.48 1.73	1.42 1.64	1.39 1.59	1.34 1.51	1.30 1.46	1.28 1.43
125	3.92 6.84	3.07 4.78	2.68 3.94	2.44 3.47	2.29 3.17	2.17 2.95	2.08 2.79	2.01 2.65	1.95 2.56	1.90 2.47	1.86 2.40	1.83 2.33	1.77 2.23	1.72 2.15	1.65 2.03	1.60 1.94	1.55 1.85	1.49 1.75	1.45 1.68	1.39 1.59	1.36 1.54	1.31 1.46	1.27 1.40	1.25 1.37
150	3.91 6.81	3.06 4.75	2.67 3.91	2.43 3.44	2.27 3.14	2.16 2.92	2.07 2.76	2.00 2.62	1.94 2.53	1.89 2.44	1.85 2.37	1.82 2.30	1.76 2.20	1.71 2.12	1.64 2.00	1.59 1.91	1.54 1.83	1.47 1.72	1.44 1.66	1.37 1.56	1.34 1.51	1.29 1.43	1.25 1.37	1.22 1.33
200	3.89 6.76	3.04 4.71	2.65 3.88	2.41 3.41	2.26 3.11	2.14 2.90	2.05 2.73	1.98 2.60	1.92 2.50	1.87 2.41	1.83 2.34	1.80 2.28	1.74 2.17	1.69 2.09	1.62 1.97	1.57 1.88	1.52 1.79	1.45 1.69	1.42 1.62	1.35 1.53	1.32 1.48	1.26 1.39	1.22 1.33	1.19 1.28
400	3.86 6.70	3.02 4.66	2.62 3.83	2.39 3.36	2.23 3.06	2.12 2.85	2.03 2.69	1.96 2.55	1.90 2.46	1.85 2.37	1.81 2.29	1.78 2.23	1.72 2.12	1.67 2.04	1.60 1.92	1.54 1.84	1.49 1.74	1.42 1.64	1.38 1.57	1.32 1.47	1.28 1.42	1.22 1.32	1.16 1.24	1.13 1.19
1000	3.85 6.66	3.00 4.62	2.61 3.80	2.38 3.34	2.22 3.04	2.10 2.82	2.02 2.66	1.95 2.53	1.89 2.43	1.84 2.34	1.80 2.26	1.76 2.20	1.70 2.09	1.65 2.01	1.58 1.89	1.53 1.81	1.47 1.71	1.41 1.61	1.36 1.54	1.30 1.44	1.26 1.38	1.19 1.28	1.13 1.19	1.08 1.11
∞	3.84 6.64	2.99 4.60	2.60 3.78	2.37 3.32	2.21 3.02	2.09 2.80	2.01 2.64	1.94 2.51	1.88 2.41	1.83 2.32	1.79 2.24	1.75 2.18	1.69 2.07	1.64 1.99	1.57 1.87	1.52 1.79	1.46 1.69	1.40 1.59	1.35 1.52	1.28 1.41	1.24 1.36	1.17 1.25	1.11 1.15	1.00 1.00

ตาราง ๘

Values of *r* (Simple Correlation Coefficient) for Different Levels of Significance

n	.1	.05	.02	.01	.001
1	.98769	.99692	.999507	.999877	.9999988
2	.90000	.95000	.98000	.990000	.99900
3	.8054	.8783	.93433	.95873	.99116
4	.7293	.8114	.8822	.91720	.97406
5	.6694	.7545	.8329	.8745	.95074
6	.6215	.7067	.7887	.8343	.92493
7	.5822	.6664	.7498	.7977	.8982
8	.5494	.6319	.7155	.7646	.8721
9	.5214	.6021	.6851	.7348	.8471
10	.4973	.5760	.6581	.7079	.8233
11	.4762	.5529	.6339	.6835	.8010
12	.4575	.5324	.6120	.6614	.7800
13	.4409	.5139	.5923	.6411	.7603
14	.4259	.4973	.5742	.6226	.7420
15	.4124	.4821	.5577	.6055	.7246
16	.4000	.4683	.5425	.5897	.7084
17	.3887	.4555	.5285	.5741	.6932
18	.3783	.4438	.5155	.5614	.6787
19	.3687	.4329	.5034	.5487	.6652
20	.3598	.4227	.4921	.5368	.6524
25	.3233	.3809	.4451	.4869	.5974
30	.2960	.3494	.4093	.4487	.5541
35	.2746	.3246	.3810	.4182	.5189
40	.2573	.3044	.3578	.3932	.4896
45	.2428	.2875	.3384	.3721	.4648
50	.2306	.2732	.3218	.3541	.4433
60	.2108	.2500	.2948	.3248	.4078
70	.1954	.2319	.2737	.3017	.3799
80	.1829	.2172	.2565	.2830	.3568
90	.1726	.2050	.2422	.2673	.3375
100	.1638	.1946	.2301	.2540	.3211

Source: This table is abridged from Table VII of Fisher & Yates: *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* published by Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, and by permission of the authors and publishers.

ตาราง ๙

Values of rho (rank-order correlation) beyond which 5 percent or 1 percent of the area falls

N	5%	1%
5	1.000	—
6	.886	1.000
7	.786	.929
8	.738	.881
9	.683	.833
10	.648	.794
12	.591	.777
14	.544	.715
16	.506	.665
18	.475	.625
20	.450	.591
22	.428	.562
24	.409	.537
26	.392	.515
28	.377	.496
30	.364	.478

บรรณานุกรม

จรัญ จันทลักขณา <u>วิธีวิเคราะห์และวางแผนงานวิจัย</u> ไทยวัฒนาพานิช ๒๕๑๙, ๔๔๒ หน้า

Byrkit , Donald R. <u>Elements of statistics.</u> Van nostrand Reinhold Company,New York , Cincinnati, Toronto, London, Melbourn, 1972, 324 p.

Downic, N.M. and Heath, R.W. <u>Basic Statistical Mothods.</u> Harper and Row publishers, New York, Evanston, London, 1970, 356 p.

Freud, john E. <u>Modern Elementary statistics.</u> Prentice Hall International Inc., London, 1979, 510 p.

Hamburg, Morris. <u>Basic statistics.</u> Harcenrt Brace Jovanovich Inc., New York, Chicago, San francisco, Atlanta, 1974, 451 p.

Ostle, Bernard. and Mensing, richard W., <u>Statistics in Research.</u> Iowa State university Press / Ames, 1975, 596 p.

Walpole, Ronald E. <u>Introduction to Statistics</u> The Macmillan Company , New York / Collier-Macmillan Limited, London, 1971, 365 p.

Yonng, Robert K., and Veldman, Donald J., <u>Introductory Statistics for the Behavioral Sciences.</u> Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto, London, Sydney, 1972, 559 p.