ผลของความหนาแน่นสถานะที่มีต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ในตัวนำยวดยิ่ง แบบ 2 แถบ

ปริญญานิพนธ์

ของ

ปริญญา ซังคะนารถ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของกรศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาศึกษามหาบัณฑิต สาขา วิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2548

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

537.623
ป458พ
ส.3

ผลของความหนาแน่นสถานะที่มีต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ในตัวนำยวดยิ่ง แบบ 2 แถบ

26 ส.ค. 2548

บทคัดย่อ

ของ

ปริญญา ซังคะน้ารถ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาศึกษามหาบัณฑิต สาขา วิชาฟิสิกส์
พฤษภาคม 2548

ท 277254

ปริญญา ซังคะนารถ. (2548). *ผลของความหนาแน่นสถานะที่มีต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่ง แบบ 2 แถบ*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ, อาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลของความหนาแน่นสถานะที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤต และ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ในตัวนำยวดยิ่งแบบ 2 แถบ ที่พบในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางประเภท ผู้วิจัยได้แสดงการคำนวณหาสมการแบบแม่นตรงของอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่ได้จากกรณีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีความสอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงเป็นอย่างดี แต่สำหรับความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป สามารถอธิบายกรณีของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิดได้เท่านั้น

THE EFFECT OF DENSITY OF STATE ON ISOTOPE EFFECT COEFFICIENT OF TWO - BAND SUPERCONDUCTORS

AN ABSTRACT

BY

PARINYA CHANGKANART

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Master of Education Degree in Physics

at Srinakharinwirot University

May 2005

Parinya Changkanart. (2005). *The Effect of Density of State on Isotope effect Coefficient of Two - Band Superconductors.* Master. Thesis, M.Ed. (physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Asst. Prof. Dr. Pongkaew Udomsamuthirun, Artith Limpongsa.

The purpose of this research is to study the effect of density of state on critical temperature and isotope effect coefficient of two – band superconductor that found in magnesium diboride and some kind of high -T_c superconductor. Exact analytical expressions for the critical temperature and isotope effect coefficient with constant and van Hove singularity density of state are derived. We find that our isotope effect coefficient with constant density of state can fit well with experimental data of MgB_2 superconductor and some kind of high - T_c superconductor but the isotope effect coefficient with van Hove singularity density of state can fit well only in some kind of high - T_c superconductor.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

ผลของความหนาแน่นสถานะที่มีต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป
ในตัวนำยวดยิ่ง แบบ 2 แถบ

ของ
นางปริญญา ชังคะนารถ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่.....เดือน.....พ.ศ. 2548

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.....ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)

.....กรรมการ
(อาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

.....กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ ดร. วิชุดา บุญยรัตกลิน)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ ด้วยความช่วยเหลือจาก ผศ.ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำช่วยเหลือตลอดระยะเวลาการทำวิจัย ด้วยความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณอาจารย์อาทิตย์ ลิ้มพงษา ศ. ดร.สุทัศน์ ยกส้าน และ ดร.วิชุดา บุญยรัตกลิน ที่ให้ความอนุเคราะห์ ในการเป็นกรรมการ ในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมทั้งให้คำแนะนำและแก้ไขเพิ่มเติมทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ให้คำปรึกษาให้ความรู้ และความเป็นกันเองกับผู้วิจัยตลอดระยะเวลาการศึกษาในสถานแห่งนี้

ขอขอคุณเพื่อนนิสิตทั้ง กศ.ม. ฟิสิกส์ และ วท.ม. ฟิสิกส์ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำวิจัย

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณ บิดา – มารดา และบุคคลในครอบครัวทุกๆ คนที่ให้กำลังใจในเรื่องต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด

ปริญญา ชังคะนารถ

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	7
	ความสำคัญของการวิจัย	7
	ขอบเขตของการวิจัย	7
	นิยามศัพท์	7
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	9
3	วิธีดำเนินการวิจัย	30
4	ผลการวิจัย	47
5	สรุป อภิปราย และข้อเสนอแนะ	64
	สรุปผล	64
	อภิปรายผล	66
	ข้อเสนอแนะ	67
บรรณานุกรม		68
ภาคผนวก		71
ประวัติย่อผู้วิจัย		86

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

1. แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปต่ออุณหภูมิวิกฤตของ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$ 56

2. แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปต่ออุณหภูมิวิกฤตของ $(Y_{1-x-y}Pr_xCa_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$ 56

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ หน้า

1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทานไฟฟ้า กับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ 1

2 กราฟระหว่างความหนาแน่นกระแสและสนามแม่เหล็กวิกฤต กับอุณหภูมิ 2

3 ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ 3

4 แสดงโครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งลันทานัมคอปเปอร์ออกไซด์ 4

5 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งกับปีการค้นพบ 5

6 แสดงโครงสร้างของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) 5

7 แสดงการวางตัวของระนาบโบรอนที่ทำให้เกิดโครงสร้างแบบระนาบในตัวนำยวดยิ่ง 6

8 แสดงการเสียรูปทรงของโครงผลึก เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในโครงผลึก 9

9 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่าโฟนอน 10

10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤตของ MgB_2 25

11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต 28

12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.1$ และ $\mu_2 = 0.1$ 48

13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.4$ และ $\mu_2 = 0.1$ 49

14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\mu_1 = 0.23$ และ $\mu_2 = 0.23$ 50

15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$ 51

16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 1.0$ และ $\mu_2 = 1.0$ 52

17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวกับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 และ μ_{12} โดย $\lambda_{12} = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$ 53

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวกับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28$ K 54

19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.004$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110$ K 55

20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับอุณหภูมิวิกฤต..... 57

21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปกับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_1 = 0.2$, $\mu_1 = 0.2$ และ $\mu_2 = 0.1$ 58

22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 0.4$, $\mu_1 = 0.4$ และ $\mu_2 = 0.4$ 58

23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.02$ และ $\mu_2 = 0.1$ 59

24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.01$, $\mu_1 = 0.03$ และ $\mu_2 = 0.1$ 60

25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28$ K 61

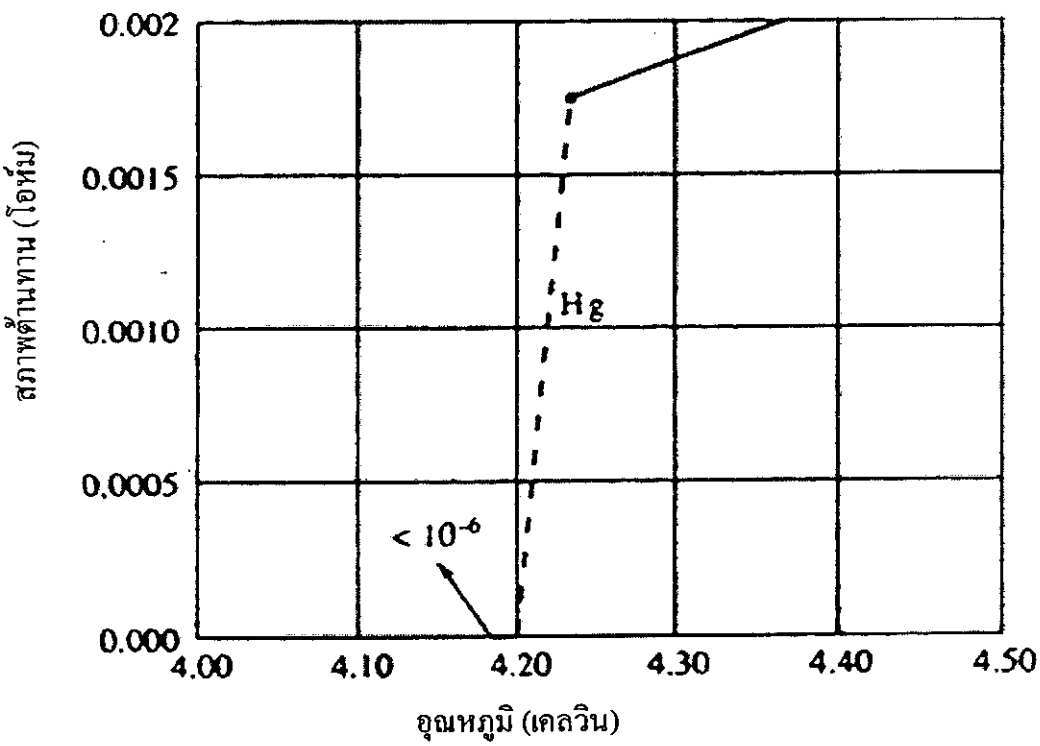
26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.003$, $\lambda_2 = 0.07$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110$ K 62

27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับอุณหภูมิวิกฤต..... 63

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ภูมิหลัง

ในปี ค.ศ. 1908 คาร์เมอร์ลิงห์ ออนเนส (Buckel. 1991 : 1 ; citing Onnes Kamerlingh. 1908. Superconductivity Fundamentals and Applications. p.1) นักวิทยาศาสตร์ชาวฮอลันดา ได้ประสบผลสำเร็จในการผลิตฮีเลียมเหลวได้เป็นครั้งแรก หลังจากนั้น ในปี ค.ศ. 1911 เขา ได้ทดลองศึกษาวัดสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทที่อุณหภูมิต่ำ พบว่าสภาพต้านทานของปรอทเป็นศูนย์หรือปรอทหมดสภาพต้านทานไฟฟ้าอย่างฉับพลัน เมื่ออุณหภูมิลดต่ำกว่า 4.2 K จึงเรียกปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้ว่า "สภาพนำยวดยิ่ง" (Superconductivity) และตัวนำที่มีคุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า "ตัวนำยวดยิ่ง" (Superconductor) ดังภาพประกอบ 1

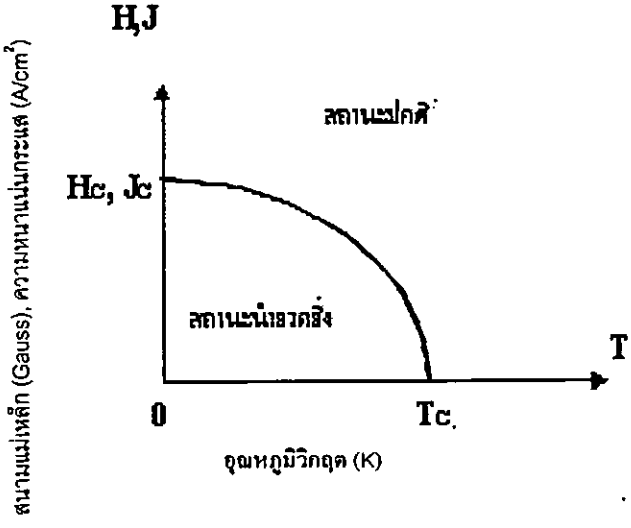


ภาพประกอบ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์
ที่มา : Buckel. (1991). Superconductivity Fundamentals and Applications. p.3.

อุณหภูมิที่ตัวนำแบบปกติเปลี่ยนไปสู่สภาพการนำยวดยิ่ง เรียกว่าอุณหภูมิวิกฤต (T_c) มีค่าที่ขึ้นกับสมบัติกายภาพของสาร มีการค้นพบสารตัวนำยวดยิ่งมากมาย ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตที่ต่างกัน เช่น ไนโอเบียม (Nb) ไนโอเบียมทิน (Nb_3Sn) มีอุณหภูมิวิกฤตเป็น 9.2 K และ 18 K ตามลำดับ

ในปี ค.ศ. 1913 ออนเนส (Sacchetti. 2000 : 2618 ; citing Onnes. 1913) ได้ทดลองพบว่า เมื่อเพิ่มความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าให้มีค่าสูงกว่าค่าๆ หนึ่ง สารจะกลายสภาพเป็นตัวนำปกติทันที เรียกความหนาแน่นกระแสไฟฟ้านี้ว่า "ความหนาแน่นกระแสวิกฤต" (Critical current density, J_c) ซึ่งปริมาณนี้ขึ้นกับอุณหภูมิ กล่าวคือ J_c มีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากศูนย์เคลวิน และจะเป็นศูนย์ที่ T_c ตามภาพประกอบ 2

ในปี ค.ศ. 1914 ออนเนสได้พบอีกว่ากระบวนการเปลี่ยนตัวนำยวดยิ่งไปเป็นตัวนำปกติไม่ได้ทำได้เฉพาะการเพิ่มอุณหภูมิเท่านั้น แต่การนำสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงถึงค่าหนึ่งคือ H_c ซึ่งเรียกว่าสนามแม่เหล็กวิกฤต (Critical magnetic field) มากระทำต่อตัวนำยวดยิ่ง ก็สามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งให้กลายเป็นตัวนำปกติได้เช่นกัน ค่าสนามวิกฤตนี้ขึ้นกับอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิมีค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤตความเข้มของสนามแม่เหล็กวิกฤตก็จะมีค่าน้อยลง สามารถเขียนเป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 กราฟระหว่างความหนาแน่นกระแสและสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ
ที่มา : Kresin; & Wolf. (1990) Fundamentals Superconductivity. p.10.

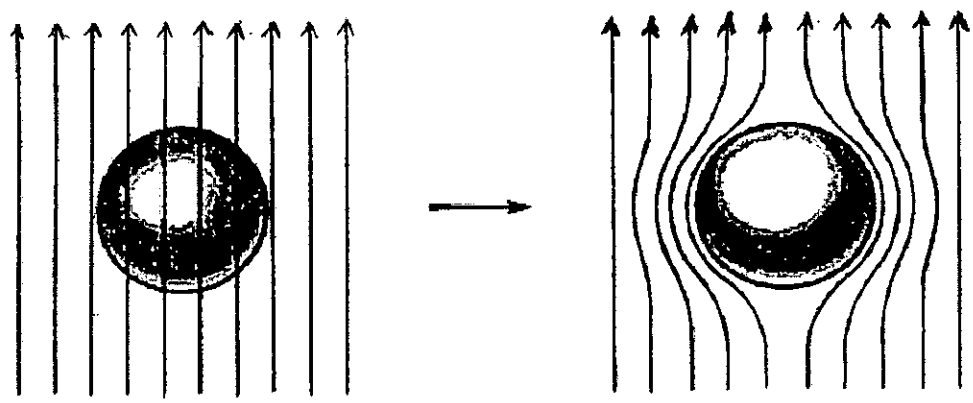
สนามแม่เหล็กวิกฤต เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ มีรูปแบบสมการเป็นดังนี้

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \qquad (1.1)$$

เมื่อ $H_c(0)$ เป็นสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

สมการ (1.1) แสดงว่าที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สนามวิกฤตมีค่ามากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1933 ไมส์เนอร์ และออคเซนเฟ๋ลด์ (Ketterson ; & Buckel. 1999 : 2 ; citing Meissner ; & Ochsenfeld. 1933. Naturwissen. P.21:787) ได้พบสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของตัวนำยวดยิ่งว่า ที่อุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กสามารถทะลุทะลวงเข้าไปในเนื้อสารได้ แต่เมื่ออุณหภูมิลดลงจนต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตสารเปลี่ยนเป็นตัวนำยวดยิ่ง สนามแม่เหล็กจะถูกผลักให้เบนออกมา โดยมีสนามแม่เหล็กภายในเป็นศูนย์ หรือกล่าวได้ว่าสารตัวนำยวดยิ่งมีสมบัติของสารแม่เหล็กไดอาแบบสมบูรณ์ (Perfect Diamagnet) และอธิบายว่าสาเหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำซึ่งเกิดขึ้นที่ผิวของสารตัวนำยวดยิ่งนั้นสร้างสนามแม่เหล็กต่อต้านสนามภายนอกที่เข้าไปกระทำ ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า "ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Meissner effect)" ดังภาพประกอบ 3



ก) $T>T_c$ สถานะปกติ ข) $T<T_c$ สถานะนำยวดยิ่ง

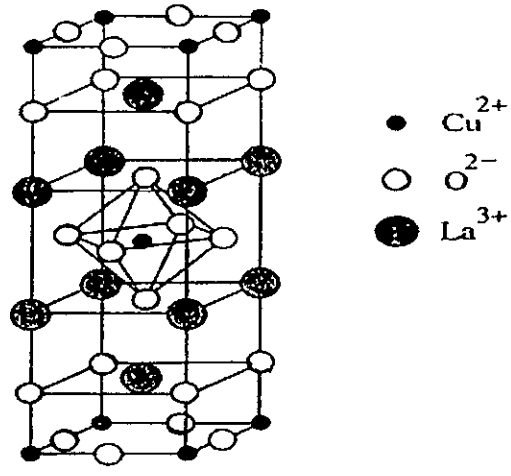
ภาพประกอบ 3 ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์

ที่มา : Ketterson; & Song. (1999) Superconductivity. p.3.

หลังจากที่ออนเนสได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่งแล้วนั้น นักวิทยาศาสตร์ได้ทำการวิจัยตัวนำยวดยิ่งชนิดต่างๆอีกหลายชนิด และได้พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่ามากที่สุดที่ 23 K ในสารประกอบไนโอเบียมเยอร์มาเนียม (Nb_3Ge) (Testardi; et al. 1974 :1) และจากนั้นมาเป็นเวลานับสิบปีที่นักวิทยาศาสตร์ได้พยายามวิจัยเพื่อให้ได้ตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 23 K แต่ไม่ประสบผลสำเร็จ ในขณะเดียวกันการศึกษาวิจัยเชิงทฤษฎีและเชิงปฏิบัติทำให้นักวิทยาศาสตร์หลายคนเชื่อว่า ตัวนำยวดยิ่งในธรรมชาตินำจะมีอุณหภูมิวิกฤตจำกัดคือไม่เกิน 30 K และเรียกตัวนำนี้ว่า " ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ " (Low Temperature Superconductors) หรือตัวนำยวดยิ่งแบบดั้งเดิม (Conventional Superconductors)

1.2 การค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

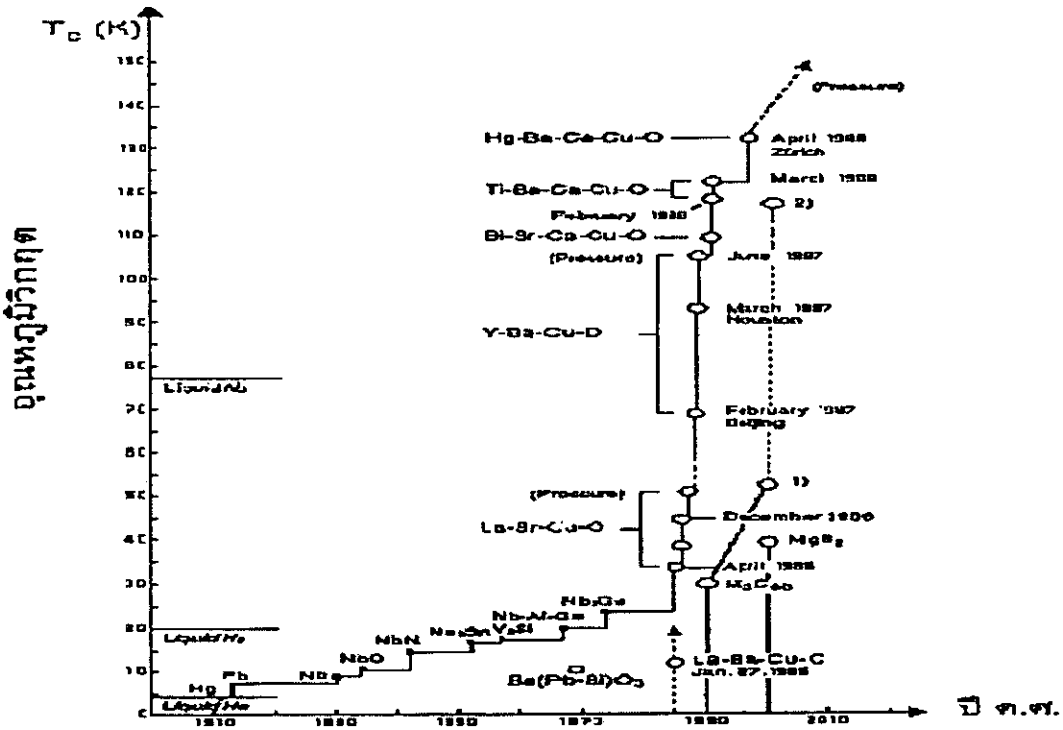
ในปี ค.ศ. 1986 เบ็ดนอร์ซ และมูลเลอร์ (Bednorz and Muller. 1986: 189) ได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่งในสารกลุ่มใหม่ ที่มีองค์ประกอบของสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ (CuO_2) ที่เรียกว่า คิวเพรท (Cuprate) โดยสารประกอบกลุ่มแรกที่ค้นพบ ได้แก่ สารประกอบกลุ่มลันทานัมคอปเปอร์ออกไซด์ (La – Cu – O) เมื่อถูกเจือด้วย Ba กลายสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิประมาณ 35 K ซึ่งถือว่าเป็นอุณหภูมิวิกฤตที่สูง ทำให้นักวิทยาศาสตร์หันมาสนใจศึกษาสภาพนำยวดยิ่งเพิ่มขึ้นอีกครั้ง มีโครงสร้างดังภาพประกอบ 4



ภาพประกอบ 4 แสดงโครงสร้างของตัวนำยวดยิ่งลันทานัมคอปเปอร์ออกไซด์

ที่มา: Gross; & Pastori. (2000). Superconductor. p.665.

การค้นพบครั้งนี้ถือว่าเป็นการพลิกประวัติศาสตร์การศึกษาตัวนำยวดยิ่ง โดยที่นักวิทยาศาสตร์ทั้งสองเป็นผู้ค้นพบสารประกอบที่มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 30 – 40 K เป็นครั้งแรก ต่อมา ชู และคณะ (Chu; et al. 1987 : 908) ได้พบว่าสารประกอบ Y-Ba-Cu-O มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 90-100 K และเรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิสูงกว่า 30 K นี้ว่า "ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง" (High Temperature Superconductors) การค้นพบนี้แสดงถึงปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิสูง ซึ่งนับเป็นความก้าวหน้าในการประยุกต์เพราะสภาพนำยวดยิ่งที่เกิดขึ้นในตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิต่ำ นั้นต้องประสบปัญหายุ่งยากในการสร้างห้องปฏิบัติการที่มีอุณหภูมิต่ำมากๆและต้องใช้การลงทุนสูงเพราะต้องใช้ฮีเลียมเหลวที่มีจุดเดือด 4 K มาเป็นตัวหล่อเย็น ฮีเลียมเหลวมีราคาแพงมากและกำลังจะหมดไปจากโลก ดังนั้นวงการวิทยาศาสตร์จึงได้กลับมาสนใจตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงอีกครั้ง ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงใช้ไนโตรเจนเหลวที่มีจุดเดือด 77 K ในการหล่อเย็นและมีราคาเพียง 10% ของราคาฮีเลียมเหลว

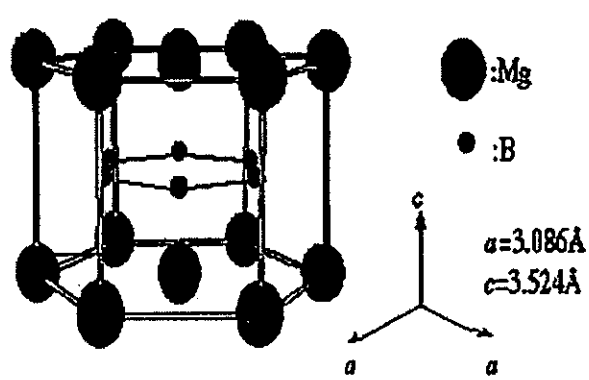


ภาพประกอบ 5 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งกับปีการค้นพบ

ที่มา : Bennesmann; & Ketterson. (2003).The Physics of Superconductor. p.387

1.3 การค้นพบตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์

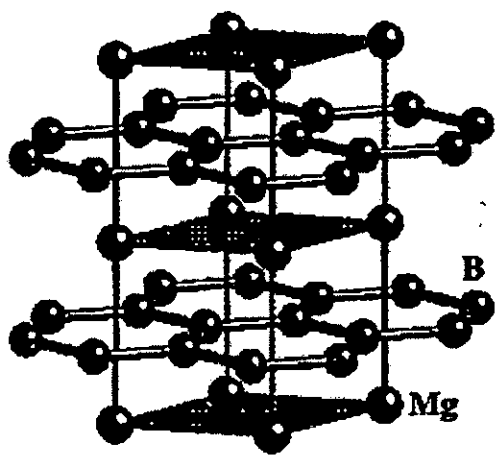
ในปี ค.ศ. 2001 อะคิมิซึ นากามัสซึ และคณะ (Akimitsu; Nagomatsu; et al. 2001 : 63) ได้ค้นพบว่า แมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) มีสภาพนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิวิกฤตสูงประมาณ 40 K แมกนีเซียมไดโบไรด์ ประกอบด้วยธาตุโลหะ 2 ชนิด คือ ธาตุแมกนีเซียม (Mg) 1 อะตอมและธาตุโบรอน (B) 2 อะตอม ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แสดงโครงสร้างของแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2)

ที่มา: Buzea; & Yamashita. (2001). Review of Superconductivity Properties MgB_2 p.3

อะตอมโบรอนแต่ละตัวจะจับกับอะตอมโบรอนข้างเคียงอีก 3 ตัว เรียงกันลักษณะเดียวกับแกรไฟต์ ระหว่างระนาบของโบรอนมีอะตอมแมกนีเซียมอยู่ตรงกลาง วางตัวแบบเฮกซะโกนอลเรียงตัวกันตามแกน c ระยะห่างระหว่างระนาบของโบรอนที่อยู่ชั้นถัดไปจะมากกว่าระยะห่างระหว่างระนาบของโบรอนกับแมกนีเซียมดังภาพประกอบ 7 พลังงานระหว่างพันธะของแมกนีเซียม (Mg - B) จะอ่อนกว่าพลังงานของพันธะระหว่างแมกนีเซียมกับแมกนีเซียม (Mg - Mg) ส่วนพันธะระหว่างโบรอนกับ โบรอน (B – B) จะมีความแข็งแรงมากกว่า อะตอมของแมกนีเซียมให้อิเล็กตรอน 2 ตัวแก่โบรอนในแถบนำ การไม่สมมาตรของระนาบโบรอนมีผลต่อการเกิดสภาพนำยวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์เช่นเดียวกับระนาบของคิวเพรทในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง สภาพนำยวดยิ่งเกิดจากอิเล็กตรอนของแมกนีเซียมแลกเปลี่ยนโฟนอนกับโบรอน



ภาพประกอบ 7 แสดงการวางตัวของระนาบโบรอนที่ทำให้เกิดโครงสร้างแบบระนาบในตัวนำยวดยิ่ง MgB_2

ที่มา : Yildirim. (2003).(Online). Available from : http://www.ncnr.nist.gov/mgb2. Accessed September 28,2004.

ธรรมชาติของแมกนีเซียมไดโบไรด์จะเป็นโลหะที่มีการเรียงตัวของชั้นโบรอนลักษณะสองมิติ และอะตอมของโบรอนจะสั่นด้วยความถี่สูง แต่เมื่อลดอุณหภูมิลงอะตอมของธาตุจะเรียงชิดกันมากขึ้น อะตอมของธาตุโบรอนจะลดระดับพลังงานต่ำลง ความถี่ของการสั่นจะน้อยลง มีผลทำให้มีสภาพนำยวดยิ่งที่ดีขึ้น สำหรับการสังเคราะห์แมกนีเซียมไดโบไรด์ (Yakinci.; et al. 2002 : 607) ทำได้โดยใช้แมกนีเซียมผง (Alfa Acer co. Mg 99.8 % purity) และโบรอนผง (Alfa Acer co. B 99.6 % purity) ผสมกันในอัตราส่วนโดยมวล 1 : 2 อัดเม็ดโดยใช้แผ่นแทนทาลัมรองรับในท่อควอทซ์ แล้วนำไปเผาที่อุณหภูมิ 950 องศาเซลเซียส ในเวลา 6 ชม. ภายใต้ความดัน 3 GPA แล้วค่อยลดอุณหภูมิลงทุก 2 ชม.

ในปี ค.ศ. 2001 บุดโค และคณะ (Bud'ko ; et al. 2001 :1877) ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์โดยใช้ธาตุ ^{11}B เป็น ^{10}B จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้น 1K โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปประมาณ 0.26 ซึ่งเป็นหลักฐานยืนยันที่ชัดเจนว่าการจับคู่ของอิเล็กตรอนที่มีโฟนอนในระนาบของโบรอนเป็นตัวช่วย ซึ่งเป็นกลไกสำคัญในการทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งในแมกนีเซียมไดโบไรด์

การนำแมกนีเซียมไดโบไรด์มาประยุกต์ใช้งาน มีข้อดีคือขึ้นรูปได้ง่ายในหลายลักษณะ เช่น ทำเป็นก้อน (Bulk) ฟิล์มบาง (Thin Film) ผง (Powder) เส้นลวด (Wire) ผลึกเชิงเดี่ยว (Single Crystal) และเทป (Tape) เมื่อดึงเป็นเส้นหรือขึ้นรูปในลักษณะต่างๆ แล้วไม่เกิดการเปราะ หรือแตกหักง่ายเหมือนในสารตัวนำยวดยิ่งจำพวกสารเซรามิกซ์ ดังนั้นแมกนีเซียมไดโบไรด์จึงเป็นความหวังของนักวิทยาศาสตร์ในการนำตัวนำยวดยิ่งมาประดิษฐ์อุปกรณ์ต่างๆ ทางอิเล็กทรอนิกส์เพื่อให้สามารถใช้งานได้จริงในชีวิตประจำวันในอนาคต

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ ในขอบเขตการควบคู่อย่างอ่อนโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป

2. เพื่อคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบในขอบเขตอันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อนโดยมีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวน โฮป

3. นำผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับผลการทดลองที่ใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์และสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

ความสำคัญของการวิจัย

เพื่อศึกษาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์และสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงชนิดสองแถบ โดยใช้อันตรกิริยาการจับคู่อย่างอ่อนตามทฤษฎีบีซีเอส ที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป

ขอบเขตของงานวิจัย

1. หาสมการของอุณหภูมิวิกฤตและสมการของสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิด 2 แถบ ที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป

2. คำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรม Mathematica เพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. **ปรากฏการณ์ไอโซโทป** คือปรากฏการณ์ที่อุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งแปรตามมวลไอโซโทป

2. **อันตรกิริยาอิเล็กตรอนโฟนอน** คืออันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนโดยมีโฟนอนเป็นตัวกลาง

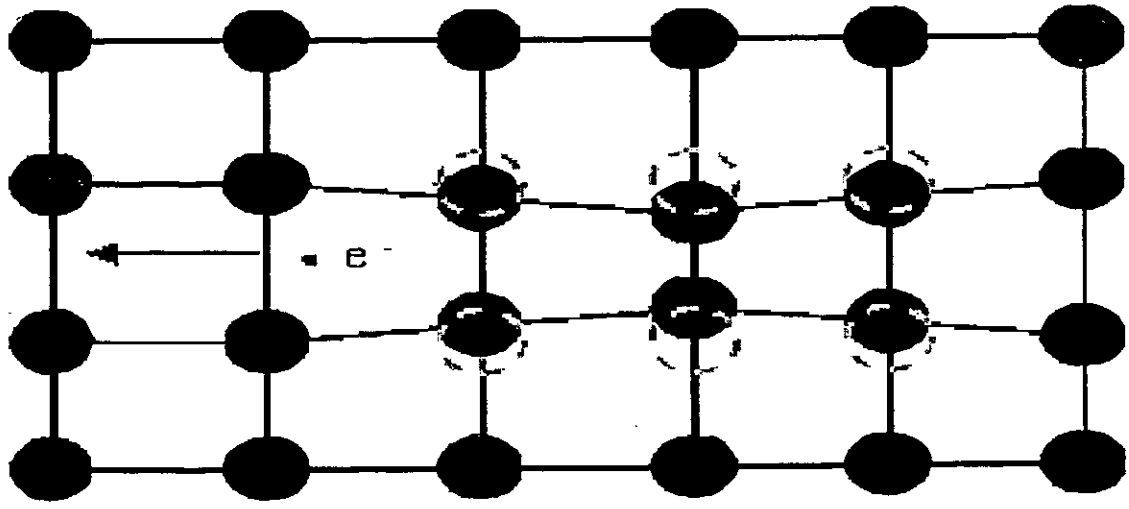
3. **อันตรกิริยาระหว่างแถบ** คืออันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอนที่เกิดจากแถบพลังงานชั้นเอสและชั้นพี

บทที่ 2
เอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่ง และได้ศึกษาตามหัวข้อต่อไปนี้คือ ทฤษฎีบีซีเอส (BCS -Theory) ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect) และความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป แบบจำลองแบบสองแถบและในการคำนวณจะกำหนดให้ $\hbar = 1$ และ $k_B = 1$ ซึ่งจะกล่าวถึงในรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

2.1 ทฤษฎีบีซีเอส

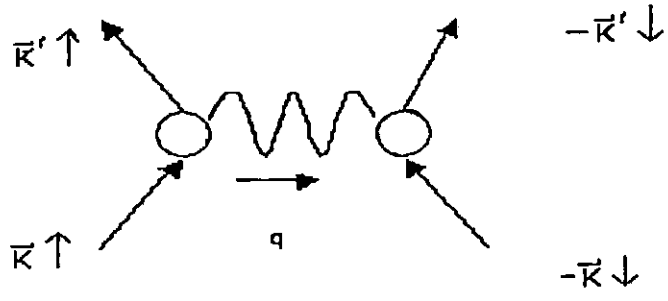
ในปี ค.ศ. 1957 บาร์ดีน คูเปอร์ และซรีฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1957 : 1175) ได้เสนอทฤษฎีบีซีเอส ที่อธิบายกลไกสำคัญ ที่ทำให้ตัวนำปกติเป็นตัวนำยวดยิ่งคืออันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน ซึ่งเกิดได้เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในผลึก ทำอันตรกิริยากับแลตทิซผลึกและทำให้แลตทิซเสียรูป ดังภาพประกอบ 8 ทฤษฎีบีซีเอสประสบผลสำเร็จในการอธิบายสมบัติโดยทั่วไปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ แต่ต่อมาเมื่อมีการค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงทฤษฎีบีซีเอสก็ไม่สามารถอธิบายได้ดีนัก



ภาพประกอบ 8 แสดงการเสียรูปทรงของโครงผลึก เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในโครงผลึก

ที่มา : Buckel. (1991). Superconductivity Fundamentals and Applications. p.31.

อันตรกิริยาทางไฟฟ้าจะเกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนผ่านเข้าไประหว่างกลุ่มอิออนที่มีประจุบวก และอิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดอิออนบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ ทำให้บริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนตัวนี้มีความหนาแน่นของอิออนบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งทำให้มีผลกระทบต่ออิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้บริเวณนั้น โดยอิเล็กตรอนจะถูกกลุ่มอิออนบวกดึงดูดให้เข้าใกล้ ทำให้ดูเหมือนอิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดอิเล็กตรอนตัวหลัง จึงเสมือนว่ามีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนเกิดขึ้น เกิดการจับคู่ของอิเล็กตรอนทั้งสองด้วยอันตรกิริยาดึงดูด แต่ทั้งนี้อันตรกิริยาแบบดึงดูดมีค่าสูงกว่าอันตรกิริยาผลักแบบคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนที่มาจับคู่กันในบริเวณใกล้ผิวเฟอร์มีนี้ เรียกอิเล็กตรอนที่เกิดการจับคู่กันว่า คู่คูเปอร์ (Cooper Pairs) คู่คูเปอร์นี้จะสามารถเกิดขึ้นได้ต้องประกอบด้วยอิเล็กตรอนสองตัวที่มีขนาดโมเมนตัมเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม $\{\bar{p}_{\uparrow}, \bar{p}_{\downarrow}\}$ และมีสปินตรงกันข้ามแทนอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่าโฟนอน
ที่มา : Buckel. (1991) : Superconductivity Fundamentals and Application p.35

การที่อิเล็กตรอนสองตัวมาจับคู่กันทำให้อิเล็กตรอนต้องสูญเสียพลังงาน จึงเป็นผลทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Energy gap) เกิดขึ้นตามทฤษฎีบีซีเอส พลังงาน (E) ของอิเล็กตรอนของคู่คูเปอร์มีขนาดเป็น

$$E_k = \left(\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

เมื่อ ε_k คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

และ $\Delta(T)$ คือช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่ง

จากแผนภาพประกอบ 9 สามารถนำมาเขียนฮาร์มิลโทเนียนตามแบบสมการบีซีเอส ได้สมการเป็น

$$H_{BCS} = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \tag{2.2}$$

โดย ε_k เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนของคู่คูเปอร์ที่ระดับผิวเฟอร์มี

$V_{kk'}$ เป็นพลังงานศักย์เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดของโฟนอนกับอิเล็กตรอน

$C^+_{k\uparrow}$ เป็นตัวดำเนินการสร้าง (Creation Operator)

$C_{k'\uparrow}$ เป็นตัวดำเนินการทำลาย (Anihilation Operator)

ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น จะอยู่ในรูป

$$|\psi_s\rangle = \prod_k \left(u_k^2 + v_k^2 C^+_k C^+_{-k}\right)|0\rangle \tag{2.3}$$

โดย $|0\rangle$ เป็นสถานะสุญญากาศ (Vacuum State)

u_k เป็นแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นของการเกิดคู่คูเปอร์ $(k\uparrow, -k\downarrow)$

v_k เป็นแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นของการไม่เกิดคู่คูเปอร์ $\left(k'\uparrow, -k'\downarrow\right)$

สำหรับในสถานะปกติ

$$\begin{aligned} u_k &= 0 \quad , \quad v_k = 1 \quad ; k < k_F \\ u_k &= 1 \quad , \quad v_k = 0 \quad ; k > k_F \end{aligned} \tag{2.4}$$

ซึ่ง u_k, v_k เป็นค่าจริงและเป็นฟังก์ชันคู่ และ k_F เป็นเวกเตอร์คลื่น

ทำการนอร์มอลไลซ์ (Normalized) ฟังก์ชั่นคลื่นที่สถานะพื้น จะได้

$$\langle \Psi_s | \Psi_s \rangle = \left\langle 0 \middle| \left(u_k + v_k c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow}\right)\left(u_k + v_k c^+_{k\uparrow} c^+_{-k\downarrow}\right) \right| 0 \right\rangle$$

$$= \prod_k \left(u_k^2 + v_k^2\right) = 1 \quad \text{เมื่อ } \left(u_k^2 + v_k^2\right) = 1 \text{ สำหรับค่า k ใด ๆ} \tag{2.5}$$

ให้ $$C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} = a_k + \left(C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} - a_k\right)$$

$$C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} = a_{k'} + \left(C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'}\right) \tag{2.6}$$

โดย $C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} - a_k$ เป็นตัวดำเนินการแปรปรวน

a_k เป็นค่าคาดหมายที่จะพบคู่คูเปอร์ที่สถานะพื้น

$C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow}$ เป็นตัวดำเนินการสร้างคู่คูเปอร์

$C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}$ เป็นตัวดำเนินการทำลายคู่คูเปอร์ให้แตกออก

$$a_k = \langle \Psi_s | C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} | \Psi_s \rangle = \langle C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} \rangle = u_k v_k$$
$$a'_k = \langle \Psi_s | C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} | \Psi_s \rangle = \langle C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle = u'_k v'_k \qquad (2.7)$$

จากความสัมพันธ์แอนทิคอมมิวต์(Anticommute)คือ

$$\{C_{k\sigma}, C_{K'\sigma'}\} = \{C^+_{k\sigma} C^+_{k'\sigma'}\} = 0$$
$$\{C_{k\sigma}, C^+_{k'\sigma'}\} = \delta_{kk'}\delta_{\delta\delta'} \qquad (2.8)$$

นำตัวดำเนินการจากสมการ (2.6) – (2.8) แทนค่าในสมการ (2.2)

$$H_{BCS} = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{K\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} \{a_k + (C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} - a_k)\}\{a_{k'} + (C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} - a_{k'})\}$$

$$= \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} \{a_k C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} + a_{k'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} - a_k a_{k'}\} \qquad (2.9)$$

นิยามค่าพารามิเตอร์ช่องว่างพลังงาน Δ_k เป็น

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} a_{k'} = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} \qquad (2.10)$$

สามารถเขียนสมการฮามิลโทเนียนใหม่ในรูปของ Δ_k ได้

$$H_{BCS} = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_k \Delta_k [C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} + C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow}] + \sum_k \Delta_k u_{k'} v_{k'} \qquad (2.11)$$

ใช้การแปลงแบบโบโกลิบอฟ-วาลาติน (Bogoliubov – Valatin Transform) กำหนดให้

$$C_{k\uparrow} = u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma^+_{-k\downarrow} \quad , \quad C_{-k\downarrow} = u_k \gamma_{-k\downarrow} - v_k \gamma^+_{k\uparrow}$$
$$C^+_{k\uparrow} = u_k \gamma^+_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow} \quad , \quad C^+_{-k\downarrow} = u_k \gamma^+_{-k\downarrow} - v_k \gamma_{-k\uparrow} \qquad (2.12)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} C^+_{k\uparrow} C_{k\uparrow} &= (u_k \gamma^+_{k\uparrow} + v_k \gamma_{-k\downarrow})(u_k \gamma_{k\uparrow} + v_k \gamma^+_{-k\downarrow}) \\ &= u_k^2 \gamma^+_{k\uparrow} \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma^+_{k\uparrow} \gamma^+_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 \gamma_{-k\downarrow} \gamma^+_{-k\downarrow} \\ &= u_k^2 \gamma^+_{k\uparrow} \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma^+_{k\uparrow} \gamma^+_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 (1 - \gamma^+_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow}) \\ &= u_k^2 \gamma^+_{k\uparrow} \gamma_{k\uparrow} + u_k v_k (\gamma^+_{k\uparrow} \gamma^+_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow} \gamma_{-k\downarrow}) + v_k^2 - v_k^2 \gamma^+_{-k\downarrow} \gamma_{-k\downarrow} \end{aligned} \qquad (2.13)$$

และ

$$\begin{aligned} C^{+}_{-k\downarrow}C_{-k\downarrow} &= \left(u_k\gamma^{+}_{-k\downarrow} - v_k\gamma_{-k\downarrow}\right)\left(u_k\gamma_{-k\downarrow} - v_k\gamma^{+}_{-k\downarrow}\right) \\ &= u_k^2\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{k\uparrow}\right) + v_k^2\gamma_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{k\uparrow} \\ &= u_k^2\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{k\uparrow}\right) + v_k^2\left(1 - \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right) \\ &= u_k^2\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{k\uparrow}\right) + v_k^2 - v_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} \end{aligned} \tag{2.14}$$

และ

$$\begin{aligned} C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow} &= \left(u_k\gamma^{+}_{k\uparrow} + v_k\gamma_{-k\downarrow}\right)\left(u_k\gamma^{+}_{-k\downarrow} - v_k\gamma_{-k\downarrow}\right) \\ &= u_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} - \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow}\right) - v_k^2\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\downarrow} \end{aligned} \tag{2.15}$$

และ

$$\begin{aligned} C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow} &= \left(u_k\gamma_{-k\downarrow} - v_k\gamma^{+}_{k\uparrow}\right)\left(u_k\gamma_{k\uparrow} + v_k\gamma^{+}_{-k\downarrow}\right) \\ &= u_k^2\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\uparrow} + u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} - \gamma^{+}_{-k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) - v_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} \end{aligned} \tag{2.16}$$

แทนด้วยสมการ (2.13) และสมการ (2.14) ลงในเทอมแรกของสมการ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k\sigma}\varepsilon_kC^{+}_{k\sigma}C_{k\sigma} &= \sum_k\varepsilon_k\left[\begin{array}{l} u_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow} + u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{-}_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right) + v_k^2\left(1 - \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow}\right) \\ + u_k^2\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{k\uparrow}\right) + v_k^2 - v_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} \end{array}\right] \\ &= \sum_k\varepsilon_k\left[2v_k^2 + \left(u_k^2 - v_k^2\right)\left(\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) + 2u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\uparrow}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.17}$$

แทนค่าสมการ (2.15) และ (2.16) ในเทอมที่สองด้านขวาของสมการ (2.11) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_k\Delta_k\left[C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow} + C_{-k'\downarrow}C_{k'\uparrow}\right] &= \sum_k\Delta_k\left[\begin{array}{l} u_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} - u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} - \gamma^{+}_{-k\downarrow}\,\gamma_{-k\downarrow}\right) - v_k^2\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\downarrow} \\ + u_k^2\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\uparrow} + u_kv_k\left(\gamma_{-k\downarrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} - \gamma^{+}_{-k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) - v_k^2\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} \end{array}\right] \\ &= \sum_k\Delta_k\left[2u_kv_k - 2u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.18}$$

แทนสมการ (2.17) และ สมการ (2.18) ลงในสมการ (2.11) จะได้

$$H_{BCS} = \left\{\begin{array}{l} \sum_k\left(u_k^2 - v_k^2\right)\left(\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) \\ \left[2v_k^2 + \left(u_k^2 - v_k^2\right)\left(\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) + 2u_kv_k\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right)\right] \\ + \sum_k\Delta_k\left[2u_kv_k - 2u_kv_k\left(\gamma^{+}_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow} + \gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma_{k\uparrow}\right) + \left(u_k^2 - v_k^2\right)\left(\gamma^{+}_{k\uparrow}\gamma^{+}_{-k\downarrow} + \gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right)\right] \\ + \sum_k\Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle \end{array}\right\} \tag{2.19}$$

$$H_{BCS}=\left\{\begin{array}{l}\sum_k\left[\varepsilon_k\left(u_k^2-v_k^2\right)+2\Delta_k u_k v_k\right]\left[\left(\gamma_{k\uparrow}^{+}\gamma_{-k\downarrow}^{+}+\gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right)\right] \\ +\sum_k\left[2\varepsilon_k u_k v_k-\Delta_k\left(u_k^2-v_k^2\right)\left[\gamma_{k\uparrow}^{+}\gamma_{-k\downarrow}+\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{k\uparrow}\right]\right] \\ +\sum_k\left[2\varepsilon_k v_k^2-2\Delta_k u_k v_k\right]+\sum_k\Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle\end{array}\right\} \tag{2.20}$$

จากเงื่อนไขตามสมการ (2.8) และเทอมที่สองของสมการ (2.20) เป็นศูนย์ คือ

$$2\varepsilon_k u_k v_k-\Delta_k\left(u_k^2-v_k^2\right)=0 \tag{2.21}$$

เขียนฮามิลโทเนียนใหม่ได้เป็น

$$H_{BCS}=\left\{\begin{array}{l}\sum_k\left[\varepsilon_k\left(u_k^2-v_k^2\right)+2\Delta_k u_k v_k\right]\left[\left(\gamma_{k\uparrow}^{+}\gamma_{-k\downarrow}^{+}+\gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right)\right] \\ +\sum_k\left[2\varepsilon_k v_k^2-2\Delta_k u_k v_k\right] \\ +\sum_k\Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle\end{array}\right\} \tag{2.22}$$

พลังงานที่สถานะพื้นของตัวนำยวดยิ่ง เป็น

$$w_s=\left\langle\psi_s\left|H_{BCS}\right|\psi_s\right\rangle=2\sum_k\varepsilon_k v_k^2+2\sum_{kk'}v_{kk'}u_k v_k u_{k'}v_{k'} \tag{2.23}$$

$$=\sum_k\left[2\varepsilon_k v_k^2-2\Delta_k u_k v_k\right] \tag{2.24}$$

จากนิยามค่าพารามิเตอร์ของช่องว่างพลังงาน Δ_k ตามสมการ (2.10)
แทนค่า $u_k=\sin\theta_k$ และ $v_k=\cos\theta_k$ ในรูปเชิงขั้ว ซึ่งจะได้ $\left(u_k^2+v_k^2\right)=1$ ทำให้

$$u_k^2=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}}\right] \quad \text{และ} \quad v_k^2=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}}\right] \tag{2.25}$$

แทนสมการ (2.25) และสมการ (2.24) จะได้สมการช่องว่างพลังงาน

$$\begin{aligned}\Delta_k &= -\sum \mathrm{v}_{kk'}\mathrm{u}_{kk'} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k'}\mathrm{v}_{kk'}\frac{\Delta_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}} \\ &= -\sum_{k'}\mathrm{v}_{kk'}\frac{\Delta_k}{2E_k}\end{aligned} \tag{2.26}$$

จากสมการ (2.22) กำหนดให้

$$2\varepsilon_k \mathrm{u}_k \mathrm{v}_k - \Delta_k\left(\mathrm{u}_\mathrm{k}^2 + \mathrm{v}_\mathrm{k}^2\right) = 0 \tag{2.27}$$

เมื่อ $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2(T)}$ เป็นพลังงานของอิเล็กตรอนของคู่คูเปอร์ที่ผิวเฟอร์มี แทนสมการ (2.25) ลงในสมการแรกทางขวาของสมการ (2.21) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\varepsilon_k\left(\mathrm{u}_k^2 - \mathrm{v}_k^2\right) + 2\Delta_k \mathrm{u}_k \mathrm{v}_k = \sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2} \tag{2.28}$$

แทนสมการ (2.23) และสมการ (2.28) ลงในสมการ (2.22) จะได้

$$H_{BCS} = \sum_k \sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\left[\gamma_{k\uparrow}^+\gamma_{-k\downarrow}^+ + \gamma_{k\uparrow}\gamma_{-k\downarrow}\right] + W_s + \sum_k \Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle \tag{2.29}$$

พิจารณาสมการช่องว่างพลังงาน

$$\begin{aligned}\Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle &= \Delta_k\left\langle \mathrm{u}_k\mathrm{v}_k\gamma_{-k\downarrow}\gamma_{-k\downarrow}^+ - \mathrm{u}_k\mathrm{v}_k\gamma_{k\uparrow}^+\gamma_{k\uparrow}\right\rangle \\ &= \Delta_k\mathrm{u}_k\mathrm{v}_k\left\langle\left(1-\gamma_{-k\downarrow}^+\gamma_{-k\downarrow}\right)-\gamma_{k\uparrow}^+\gamma_{k\uparrow}\right\rangle \\ &= \Delta_k\mathrm{u}_k\mathrm{v}_k\left[1-2f_{k\sigma}(E_k)\right]\end{aligned} \tag{2.30}$$

โดย $\mathrm{f}_{\mathrm{k}\sigma} = \dfrac{1}{\exp\left(\mathrm{E}_\mathrm{k}/\mathrm{T}\right)+1}$ เป็นสมการการแจกแจงของเฟอร์มี - ดิแรก แทนค่าในสมการ (2.30) แล้วจัดเทอมใหม่ จะได้

$$\Delta_k\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle = \frac{\Delta}{2E_k}\tanh\frac{1}{2}\left(\beta E_k\right) \tag{2.31}$$

แทนสมการ(2.31) ลงในสมการ (2.22) จะได้สมการช่องว่างพลังงานเป็น

$$\begin{aligned}\Delta_k &= -\sum_{k'} \mathrm{v}_{kk'} \langle C_{k\downarrow} C_{k\uparrow} \rangle \\ &= -\sum_{k'} \mathrm{v}_{kk'} \mathrm{u}_{k'} \mathrm{v}_{k'} [1 - 2f(E_k)] \\ &= -\frac{1}{2} - \sum_{k'} \mathrm{v}_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_{k'}^2}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_{k'}^2}}{2T}\end{aligned} \tag{2.32}$$

กำหนดให้

$$\mathrm{v}_{kk'} = \begin{cases} \mathrm{v}_0 & ; |\varepsilon_k| \le \omega_D \\ 0 & ; \ others \end{cases}$$

และ

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_0 & ; |\varepsilon_k| \le \omega_D \\ 0 & ; \ others \end{cases}$$

โดย ω_D เป็นความถี่คัทออฟของเดอบาย (Debye cut – off frequency)

v_0 เป็นศักย์แบบดึงดูดของอันตรกิริยาของคู่คูเปอร์ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบรูณ์

Δ_0 เป็นช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาสัมบรูณ์

แทนเงื่อนไขดังกล่าวลงในสมการ (2.32) แล้วเปลี่ยน $\sum_k$ เป็น $\int N(0) d\varepsilon$ โดย $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะของพลังงานแบบคงตัวในบริเวณผิวเฟอร์มี

$$\frac{2}{N(0)\mathrm{v}} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2(T)}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_0^2(T)}}{2T} \tag{2.33}$$

พิจารณา ที่ $T = T_c$ ช่องว่างพลังงานจะเป็น $\Delta_0(T_c) = 0$ แทนค่าในสมการ (2.33)

$$\frac{1}{N(0)\mathrm{v}_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tanh\left[\frac{\varepsilon}{2T_c}\right]$$

จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง เป็น

$$T_c = 1.13\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)\mathrm{v}_0}\right) \tag{2.34}$$

พิจารณา ที่ T= 0 K ค่า $\tanh(\infty)=1$ สมการ (2.33) จะเป็น

$$\frac{1}{N(0)v_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2(0)}}$$
$$= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta_0(0)}\right)$$

ใช้การประมาณ $\sinh^{-1} x \approx \ln(2x)$ โดย $x \gg 1$ และเนื่องจาก $\omega_D \gg \Delta(0)$ ดังนั้น

$$\Delta_0(0) = 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)v_0}\right) \qquad (2.35)$$

สมการ (2.35) เป็นสมการของช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งตามทฤษฎีบีซีเอส

2.2 ปรากฏการณ์ไอโซโทปและความหนาแน่นสถานะ

ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope Effect) คือ ปรากฏการณ์ที่อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งเป็นปฏิภาคผกผันกับมวลของไอโซโทป เขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$T_c \alpha M^{-\alpha} \qquad (2.36)$$

โดย M คือมวลของไอโซโทป

T_c คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง

และ α คือสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป

ตามทฤษฎีบีซีเอส พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเท่ากับ 0.5 เสมอ ซึ่งก่อนหน้านี้ ในปีค.ศ. 1922 ออนเนสและไทน์ (Buckel. 1991 : 43 ; citting Tuyn. 1922) ได้ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปโดยใช้ไอโซโทปของตะกั่ว (Pb) แต่การทดลองก็ล้มเหลว ต่อมามีนักวิทยาศาสตร์ได้พยายามทดลองอีก แต่ไม่ประสบผลสำเร็จ

ในปี ค.ศ.1989 ฟังและวอก (Fung & Kwok. 1989 : 355-357) ได้ศึกษาผลของการโดปออกซิเจนต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงประเภทเซรามิก โดยคำนึงถึงผลของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน พบว่าได้ผลสอดคล้องกับการทดลองของสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_7$ และ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$

ในปี ค.ศ. 1990 ครอฟอร์ด และคณะ (Crawford.; et al. 1990 : 282) ทำการทดลองวัดค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในสารประกอบ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ เมื่อแทน O^{16} ด้วย O^{18} พบว่า เมื่อให้ x น้อยกว่า 0.15 ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป มีค่าอยู่ที่ระหว่าง 0.40 ถึง 0.64 และเมื่อ x มีค่ามากกว่า 0.15 ได้ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปประมาณ 0.10

ในปี ค.ศ. 1990 ซุย และคณะ (Tsuei; et al.1990 : 2724-2727) ได้ศึกษาตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีคอปเปอร์ออกไซด์เป็นองค์ประกอบในสารประกอบ Y – Ba – Cu – O และ Bi – Sr – Ca – Cu - O พบว่ามีค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปเข้าใกล้ศูนย์ และจากรายงานวิจัยของครอฟอร์ด และคณะ (Crawford;et al.1990) ได้แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ขึ้นอยู่กับความเข้มในระดับการโดปของ (x) โดยใช้การคำนวณความความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปใน 2 มิติ เป็นแนวทางในการทำให้เกิดความเข้าใจ ปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมากยิ่งขึ้น

โดยใช้แบบจำลองความหนาแน่นเป็น

$$N(E)=N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right| \tag{2.37}$$

แทนค่าในสมการช่องว่างพลังงานของ BCS เป็น

$$\frac{2}{N(0)V}=\int_{E_F-\omega_D}^{E_F+\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right|\tanh\left[\frac{E-E_F}{2T_c}\right]\frac{dE}{E-E_F} \tag{2.38}$$

ใช้การประมาณ เนื่องจาก $\tanh X = X$ เมื่อ $X < 1$ (2.39)

และ $\tanh X = 1$ เมื่อ $X > 1$ (2.40)

แทนค่าสมการ (2.39) และ (2.40) ในสมการ (2.38) จะได้

$$\frac{2}{V}=\int_{E_F-\omega_D}^{E_F+\omega_D}N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right|\tanh\left[\frac{E-E_F}{2T_c}\right]\frac{dE}{E-E_F}$$

$$\frac{2}{N(0)V}=\int_{E_F-\omega_D}^{E_F+\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\tanh\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X}$$

$$= 2\int_{0}^{2T_c} \ln\left|\frac{E_F}{X}\right| \tanh\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X} + 2\int_{2T_c}^{\omega_D} \ln\left|\frac{E_F}{X}\right| \tanh\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X}$$

$$= 2\int_{0}^{2T_c} \ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X} \quad + 2\int_{2T_c}^{\omega_D} \ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\frac{dX}{X}$$

$$= \left[\ln\frac{eE_F}{2T_c}\right]^2 - \ln^2\frac{E_F}{\omega_D} + 1$$

ได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = 1.36E_F \exp\left\{-\left[\frac{2}{N(0)v} + \left[\ln\frac{E_F}{\omega_D}\right]^2 - 1\right]^{1/2}\right\} \tag{2.41}$$

หาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปได้

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left[\left\{\ln\left(\frac{T_F}{T_{c0}}\right) + \frac{\delta^2}{2T_{c0}^2}\right\} \Big/ \left\{\ln\left(\frac{1.36T_F}{T_c}\right) - \frac{\delta^2}{8T_c^2}\right\}\right] \tag{2.42}$$

โดย δ คือตัวแปรที่แสดงค่าที่เลื่อนไปของระดับเฟอร์มี

T_F คืออุณหภูมิที่ระดับเฟอร์มี

T_{c0} คืออุณหภูมิขีดจำกัดของโฟ – นอน

T_c คืออุณหภูมิวิกฤต

ซึ่งเป็นสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป่

ในปี ค.ศ. 1990 ยกส้าน (Yoksan. 1990 : 223-236)ได้ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงโดยใช้แบบจำลองความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป ในการคำนวณได้สมมติความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเบอร์มีที่มีโครงสร้าง 2 มิติของระนาบคิวเพรทในรูปของ ลอกาลิทึม จากการคำนวณพบว่า เมื่ออุณหภูมิวิกฤต เพิ่มขึ้นสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลง

ของ ลอกาลิทึม จากการคำนวณพบว่า เมื่ออุณหภูมิวิกฤต เพิ่มขึ้นสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลง

โดยใช้แบบจำลองสถานะเป็นดังนี้

$$N(E)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi^2 t}K\left[1-\left(\dfrac{E}{4t}\right)^2\right] & ;|E|\langle 4t \\ 0 & ;|E|\rangle 4t\end{cases}$$

เมื่อ t เป็นพลังงานจำกัดของ V_2

K เป็นอินทิกลันเชิงวงรีลำดับหนึ่ง

เมื่อกำหนดให้ศักย์ของการเกิดสภาพนำยวดยิ่งเป็น

$$v_{kk'}=\begin{cases}-v_1-v_2 & ,0\langle E\langle \omega_D \\ -v_2 & ,\omega_D\langle E\langle 4t\end{cases} \qquad (2.43)$$

เมื่อ v_1 เป็นศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโฟนอน

v_2 เป็นศักย์ที่เกิดจากอันตรกิริยาที่ไม่ใช่อิเล็กตรอนโฟนอน

E เป็นพลังงานอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มี

ω_D เป็นความถี่คัทออฟของเดอบาย

จากสมการ (2.43) กำหนดช่องว่างพลังงานในรูปแบบเดียวกันได้เป็น

$$\Delta(k,T)=\begin{cases}\Delta_0(T)\Delta_1 & ,E\langle \omega_D \\ \Delta_0(T)\Delta_2 & ,E\rangle \omega_D\end{cases} \qquad (2.44)$$

โดย Δ_1 และ Δ_2 เป็นค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ แทนค่าสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.44) จากสมการช่องว่างพลังงานตามแบบบีซีเอส

$$\Delta(k)=\frac{1}{2}\sum_q \frac{v(k-q)\Delta(q)}{\sqrt{E^2+\Delta^2(q)}}\tanh\frac{\sqrt{E^2+\Delta(q)}}{2kT} \qquad (2.45)$$

แทนค่าสมการ (2.43) - (2.45) ในสมการช่องว่างพลังงานได้

$$\Delta_1\left[1-(v_1+v_2)\sum_1(T)\right]=\Delta_2 v_2\sum_2(T)$$

$$\Delta_1 v_2\sum_1(T)=\Delta_2\left[1-v_2\sum_2(T)\right] \tag{2.46}$$

เมื่อ

$$\sum_1(T)=\int_0^{\omega_D}\frac{dEN(E)}{\sqrt{E^2+\Delta_0^2\Delta_1^2}}\tanh\frac{\sqrt{E^2+\Delta_0^2\Delta_1^2}}{2T}$$

และ (2.47)

$$\sum_2(T)=\int_{\omega_D}^{4t}\frac{dEN(E)}{\sqrt{E^2+\Delta_0^2\Delta_2^2}}\tanh\frac{\sqrt{E^2+\Delta_0^2\Delta_2^2}}{2T}$$

และจากสมการ (2.46) จะได้

$$1+\lambda F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)+\sigma F\left(\frac{4t}{2T_c}\right)+\lambda\sigma F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)x\left[F\left(\frac{4t}{2T}\right)-F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\right]=0 \tag{2.48}$$

เมื่อ $\lambda=\frac{v_1}{2\pi^2 t}$ และ $\sigma=\frac{v_2}{2\pi^2 t}$ และ $F\left(\frac{Y}{2T_c}\right)=\int_0^{16t}\frac{dX\ln X}{X}\tanh\left(\frac{8tx}{T_c}\right)$

ใช้วิธีการประมาณค่า เพื่อคำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤต ได้ดังนี้

$$T_c=1.134\omega_D\exp\left\{\frac{1}{\frac{\lambda+\sigma^*}{\ln(\omega_D/16t)}-0.6646}\right\} \tag{2.49}$$

เมื่อ

$$\sigma^*=\frac{\sigma}{1-\frac{\sigma}{2}\ln\left(\frac{4t}{\omega_D}\right)\ln\left(\frac{64}{\omega_D}\right)} \tag{2.50}$$

จากสมการ (2.49) คำนวณหาค่า สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปเป็น

$$\alpha=\frac{1}{2}\left\{1-\left[1-\lambda\ln\left(\frac{0.6646\omega_D}{16t}+\ln\frac{\omega_D}{16t}\ln\frac{T_c}{1.13\omega_D}\right)\right]^2-\ln\left(\frac{T_c/1.13\omega_D}{\ln\omega_D/16t}\right)\right\} \tag{2.51}$$

h 277254 7.5

และหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปโดยวิธีแม่นตรง จากสมการ (2.48) ได้

$$\alpha = \frac{1}{2}\left\{\left[1-\frac{H(\omega_D/2T_c)}{\ln\frac{\omega_D}{16t}\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)}\right]\times\left[1-\frac{[1+\lambda F(\omega_D/2T_c)]}{\lambda F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\left[2+\lambda F\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)\right]}\right]^2\right\}^{-1} \times \frac{\left[\ln\frac{1}{4}\tanh\frac{4t}{2T_c}-H\left(\frac{4t}{2T_c}\right)\right]}{\ln\frac{\omega_D}{16t}\tanh\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)-H\left(\frac{\omega_D}{2T_c}\right)} \qquad (2.52)$$

เมื่อ $H\left(\frac{y}{2T_c}\right)=\int_0^{y/16t}\frac{dx}{x}\tanh\left(\frac{8tx}{T_c}\right)$

จากการคำนวณสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปเมื่อใช้แบบจำลองความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป พบว่าเมื่ออุณหภูมิวิกฤตเพิ่ม จะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปลดลง

ในปี ค.ศ. 1991 แฟรงค์และคณะ (Franck.; et al.1991:5318) ศึกษาปรากฏการณ์ไอโซโทปในสารประกอบ $(Y_{1-x}Pr_x)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ ที่ x = 0.2 , 0.3 , 0.4 และ 0.5 พบว่าการเพิ่มของ x และการลดลงของอุณหภูมิวิกฤต ความเข้มของการโดป Pr ที่สูงที่สุดจะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเข้าใกล้ 0.5 แสดงว่าค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปขึ้นอยู่กับความเข้มของการโดป

ในปี ค.ศ. 1993 เกทติโน และคณะ (Getino; et al. 1993 : 597) ได้คำนวณศึกษาการหาอุณหภูมิวิกฤตตามทฤษฎีบีซีเอส โดยใช้แบบจำลองความหนาแน่นแบบแวนโฮปเป็น

$$N(E)=N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right|$$

หาอุณหภูมิโดยใช้วิธีการเชิงตัวเลข ได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c=\frac{1}{2}T_F\exp\left\{-\left[\left(\frac{1}{N(0)v}+D\left(\frac{\theta_D}{2Tc},\frac{T_F}{2T_c}\right)\right)2\coth\frac{\theta_D}{2T_c}+\ln^2\frac{T_F}{\theta_D}\right]^{1/2}\right\} \qquad (2.53)$$

เมื่อ T_F เป็นอุณหภูมิระดับเฟอร์มี

θ_D เป็นความถี่เดอบาย

$$D(Z,W)=D\left(\frac{\theta_D}{2T_c},\frac{T_F}{2T_c}\right)=\int_0^x dx\left[\ln x\ln\frac{W}{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x\right]\sec h^2 x$$

เมื่อ $Z=\frac{\theta_D}{2T_c}$ และ $x=\frac{E-E_F}{2k_BT_c}$, $W=\frac{E_F}{2k_BT_c}$

ในปี ค.ศ. 1995 เซาราบและรอย (Sourabh & Roy.1995 : 265-371) ได้พยายามอธิบายการเลื่อนของสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป เนื่องจากการโดปในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง โดยใช้ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนสถานะตามแบบแผนของแวนโฮปใน 2 มิติ โดยกำหนดความหนาแน่นสถานะเป็น

$$N(\varepsilon)=N_0\ln\left|\frac{E_F-\delta}{\varepsilon-(E_F-\delta)}\right| \tag{2.54}$$

เมื่อ δ เป็นตัวแปรที่แสดงค่าที่เลื่อนไปของระดับเฟอร์มี

หาสมการอุณหภูมิวิกฤตได้จากสมการ

$$1+(\lambda+\sigma)G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c\right)-\sigma G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c,\frac{E_c}{2k_BT_c}\right)+\lambda\sigma G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c\right)G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c,\frac{E_c}{2k_BT_c}\right)=0 \tag{2.55}$$

เขียน G^{δ} อยู่ในรูปอินทิเกรต จะได้

$$G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c\right)=\int_{-\theta_D^c}^{\theta_D^c}d\xi\,\frac{\tanh\xi}{\xi}\ln\left|\frac{\theta_F^c-\theta_\delta^c}{\xi+\theta_\delta^c}\right| \tag{2.56}$$

และ

$$\begin{aligned}G^{\delta}\left(\theta_F^c,\theta_D^c,\frac{E_c}{2k_BT_c}\right)=\frac{1}{2}\Bigg(&\int_{-E_c/2k_BT_c}^{\theta_D^c}d\xi\,\frac{\tanh\xi}{\xi}\ln\left|\frac{\theta_F^c-\theta_\delta^c}{\xi+\theta_\delta^c}\right|+\int_{-\theta_D^c}^{\theta_D^c}d\xi\,\frac{\tanh\xi}{\xi}\ln\left|\frac{\theta_F^c-\theta_\delta^c}{\xi+\theta_\delta^c}\right|\\&+\int_{\theta_D^c}^{E_c/2k_BT_c}d\xi\,\frac{\tanh\xi}{\xi}\ln\left|\frac{\theta_F^c-\theta_\delta^c}{\xi+\theta_\delta^c}\right|\Bigg)\end{aligned} \tag{2.57}$$

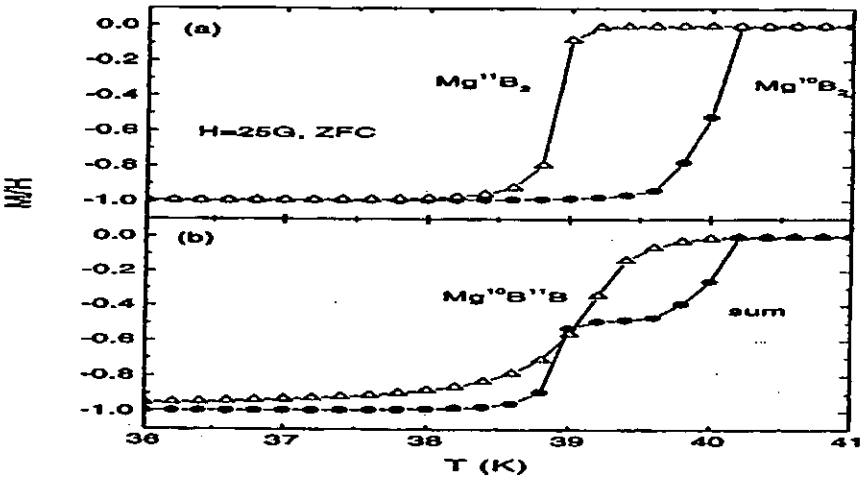
กำหนดให้ $\theta_\delta^c = \frac{T_\delta}{2T_c}$ และ T_δ เป็นอุณหภูมิที่สอดคล้องกับพลังงานที่เปลี่ยนแปลงตาม δ หาสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปได้เป็น

$$\alpha_, = \frac{1}{2}\tanh\left(\theta_D^c\right)\left(\ln\left|\frac{T_F - T_\delta}{T_D + T_\delta}\right| + \ln\left|\frac{T_F - T_\delta}{-T_D + T_\delta}\right|\right) x \frac{1 - \left[1 - \lambda G^\delta\left(\theta_F^c, \theta_D^c\right)\right]^2}{F_\eta^\delta\left(\theta_F^c, \theta_D^c\right) + F^\delta\left(\theta_F^c, \theta_D^c, \frac{E_c}{2k_B T_c}\right)\left[1 - \lambda G\left(\theta_F^c, \theta_D^c\right)\right]^2} \quad (2.58)$$

ในปี ค.ศ. 1996 วิคซ์โค (Wiecko.1996 : 286) ได้คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป โดยใช้แบบจำลองของฮับบาร์ดพบว่าค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงเป็นฟังก์ชันของความไม่เป็นระเบียบ โดยมีแนวโน้มที่จะไม่เป็นฟังก์ชันของการโดป เหมือนที่เคยได้ศึกษามาโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมากกว่า 0.5 และจากการทดลองได้ประยุกต์แบบจำลองนี้กับพารามิเตอร์พบว่าอัตราส่วน ของช่องว่างพลังงาน กับอุณหภูมิวิกฤตมีความสัมพันธ์กัน โดยช่องว่างพลังงานจะมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพิ่มขึ้นและเมื่ออุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤตช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นศูนย์

ในปี ค.ศ. 1997 วลาดิเมียร์ และคณะ (Vladimir; et al.1997:107) ได้ศึกษาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ในสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, $Y_{1-x}Pr_xCu_3O_{7-\delta}$, $YBa_2(Cu_{1-x}Zn)_3O_{7-\delta}$ โดยการเปลี่ยนไอโซโทปของออกซิเจน ^{16}O เป็น ^{18}O จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงซึ่งให้ผลสอดคล้องกับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

ในปีค.ศ. 2001 บุดโคและฮิงค์ (Bud'ko; & Hink. 2001 : 1877-1880) แสดงกระบวนการเตรียมและการวิเคราะห์หาค่าสัมประสิทธ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์ พบว่ามีสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของโบรอนเท่ากับ 0.3 และมีสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมเท่ากับ 0.02 ดังนั้นจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดมีค่าประมาณ 0.3 ดังภาพประกอบ 10 แสดงว่าอันตรกริยาอิเล็กตรอนโฟนอนเป็นกลไกสำคัญในการเกิดสภาพนำยวดยิ่งของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ซึ่งสอดคล้องกับธาตุที่มีโฟนอนเป็นตัวกลางตามทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤตของ MgB_2

ที่มา : Bud'ko; et al. (2001). Physical Review Letter. pp 1877-1880

2.3 ตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบ

โอโกเย่ (Okoye. 1998 :53) ใช้แบบจำลองของตัวนำยวดยิ่งที่มีแถบพลังงานสองแถบในการคำนวณหา ปรากฏการณ์ไอโซโทป ของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง การคำนวณแสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ของ ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงสอดคล้องกับผลการทดลองทั้งนี้ขึ้นกับค่าของตัวแปรของแบบจำลอง

ฮามิลโทเนียนของตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานเป็น

$$H = H_d + H_p + H_{int} \tag{2.59}$$

โดยที่ H_d และ H_pเป็นฮามิลโทเนียนของแถบ d และ p และ H_{int} เป็นฮามิลโทเนียนระหว่างแถบ d และ p ตามลำดับ กล่าวคือ

$$H_d = \sum_{ks} \varepsilon_{ds}\ d^+_{ks} d_{ks} - \sum_{kk'} v_{dkk'} d^+_{k\uparrow} d^+_{-k\downarrow} d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow} \tag{2.60}$$

$$H_p = \sum_{ks} \varepsilon_{ps}\ p^+_{ks} p_{ks} - \sum_{kk'} v_{pkk'} p^+_{k\uparrow} p^+_{-k\downarrow} p_{-k'\downarrow} p_{k'\uparrow} \tag{2.61}$$

และ

$$H_{int} = -\sum_{kk'} v_{dpkk'} \left(d^+_{k\uparrow} d^+_{-k\downarrow} p_{-k'\downarrow} p_{k'\uparrow} + p^+_{k\uparrow} p^+_{-k\downarrow} d_{-k'\downarrow} d_{k'\uparrow} \right) \tag{2.62}$$

เมื่อ ε_{ds} และ ε_{ps} เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานทั้งสองในบริเวณผิวเฟอร์มีของแถบ d และ p ตามลำดับ

s เป็นดัชนีของการสปิน ↑ หรือ ↓

k เป็นเวกเตอร์คลื่น

$v_{dpkk'}$ เป็นอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในรูปเมทริกซ์ระหว่างแถบ p และ d และ $V_{pkk'}$ และ $V_{dkk'}$ เป็นอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอนในรูปเมทริกซ์ในแถบ p และ d ตามลำดับ

สมการ (2.62) เป็นสมการของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานของโฟนอนในรูปเมทริกซ์ $V_{dpkk'}$ ตามแนวทางของซุฮิ และคณะ (Suhi; et al ; 1959 : 552) คอนโด (Kondo; 1963 : 1) กริสโตฟิล และคณะ (Kristoffel; et al 1994 :1) และมีผู้สนใจนำมาศึกษาอีกหลายกลุ่ม โดยใช้ การแปลง Bogoliubov-Valation ของตัวดำเนินการ $p_{k\uparrow}$ และ $d_{k\uparrow}$ จะได้สมการช่องว่างพลังงานตามสมการ

$$\Delta_{pk} = -\sum_{K'} v_{pkk'} \frac{\Delta_{pk'}}{2(\varepsilon_{pk'}^2 + \Delta_{pk}^2)^{1/2}} \left(1 - 2f(\varepsilon_{pk'})\right) - \sum_{k'} v_{dpkk'} \frac{\Delta_{dK'}}{2(\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk}^2)^{1/2}} (1 - 2f(\varepsilon)) \qquad (2.63)$$

$$\Delta_{dk} = -\sum_{K'} v_{dkk'} \frac{\Delta_{dK'}}{2(\varepsilon_{dk'}^2 + \Delta_{dk}^2)^{1/2}} \left(1 - 2f(\varepsilon_{dk'})\right) - \sum_{k'} v_{dpkk'} \frac{\Delta_{dk'}}{2(\varepsilon_{pk}^2 + \Delta_{pk}^2)^{1/2}} (1 - 2f(\varepsilon)) \qquad (2.64)$$

เมื่อ Δ_{pk}, Δ_{dk} เป็นช่องว่างพลังงานสำหรับแถบ p และ d ตามลำดับ

$f(\varepsilon_{pk}), f(\varepsilon_{dk})$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของเฟอร์มีดิแรก

อันตรกิริยาระหว่างโฟนอนที่อยู่ในรูปเมทริกซ์สามารถพิจารณาได้ 2 ส่วน คือ ส่วนแรก V_{pK} ที่เป็นการดึงดูดของโฟนอน และส่วนที่สอง U_c เป็นแรงดึงดูดทางไฟฟ้าอื่นที่ไม่ขึ้นกับโฟนอน เขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

$$V_{ikk'(\omega)} = -V_{ph}^{d} - U_{ic} \quad , 0 < |\omega| < \omega_D$$

$$= -U_{ic} \quad , \omega_D < |\omega| < \omega_c \qquad (2.65)$$

เมื่อ i = p ,d และ ω_c เป็นความถี่คัทออฟของศักย์ดึงดูดในอันตรกิริยาที่ไม่ขึ้นกับโฟนอน และ

ω_D เป็นความถี่คัทออฟของเดอบาย

แทนค่าสมการ (2.65) ลงในสมการ (2.63) และ (2.64) แล้วแทน $\sum$ ด้วย $\int N(0)d\varepsilon$ โดย $N_p(0)$, $N_d(0)$ แทนความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวของสถานะในระดับพลังงานเฟอร์มี สำหรับ p และ d

$$\Delta_{pk}(\varepsilon_p) = -N_p(0)\int\left[-v_{ph}^{p}(\varepsilon_{pk}-\varepsilon'_{pk})-U_{cp}\right]\frac{\Delta_{pk}(\varepsilon'_{pk})(1-2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pk}}d\varepsilon'_{pk}$$

$$-N_p(0)\int\left[-v_{ph}^{pd}(\varepsilon_{dk}-\varepsilon'_{dk})-U_{cp}\right]\frac{\Delta_{dk}(\varepsilon'_{dk})(1-2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}}d\varepsilon'_{dk} \qquad (2.66)$$

$$\Delta_{dk}(\varepsilon_d) = -N_d(0)\int\left[-v_{ph}^{d}(\varepsilon_{dk}-\varepsilon'_{dk})-U_{cd}\right]\frac{\Delta_{dk}(\varepsilon'_{dk})(1-2f(\varepsilon'_{dk}))}{2\varepsilon'_{dk}}d\varepsilon'_{dk}$$

$$-N_p(0)\int\left[-v_{ph}^{pd}(\varepsilon_{pk}-\varepsilon'_{pk})-U_{cdp}\right]\frac{\Delta_{pk}(\varepsilon'_{pk})(1-2f(\varepsilon'_{pk}))}{2\varepsilon'_{pdk}}d\varepsilon'_{pdk} \qquad (2.67)$$

เขียนสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 F & -1 & -\lambda_{12} & 0 \\ -\mu_1 F & 1-\mu_1 G & -\mu_{12}F & -\mu G \\ -\lambda_{21}F & 0 & 1-\lambda_2 F & -1 \\ -\mu_{12}F & -\mu_{12}G-\mu_2 F & & 1-\mu_2 G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_{po} \\ \Delta_{p\alpha} \\ \Delta_{do} \\ \Delta_{d\alpha} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.68)$$

เมื่อ $F = \ln\left[\frac{1.14\omega_D}{T_c}\right]$ และ $G = \ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_D}\right]$

ให้ $\Delta_0(1-(\lambda+\lambda_{12})F)-\Delta_\alpha = 0, \Delta_\alpha(1-(\mu+\mu_{12})G)-(\mu+\mu_{12})\Delta_0 F = 0$ สามารถลดรูปสมการเมทริกให้เหลือขนาด 2 x 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} 1-(\lambda+\lambda_{12})F & -1 \\ -(\mu+\mu_{12})F & 1-(\mu+\mu_{12})G \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.69)$$

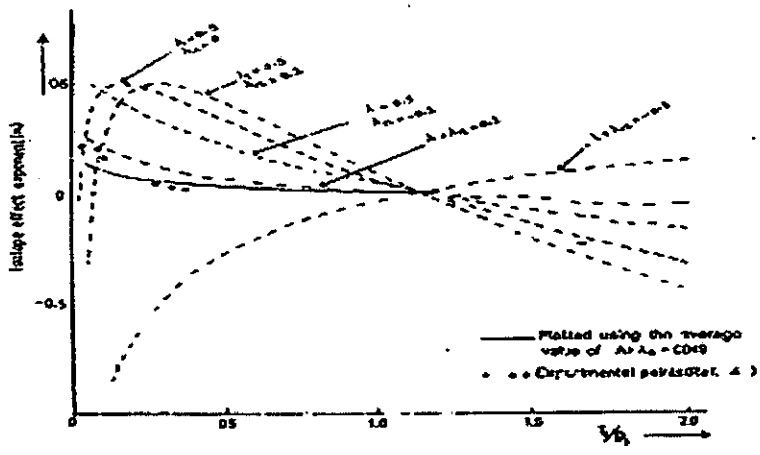
จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = 1.14\omega_D e^{-\left(\frac{1}{\lambda+\lambda_{12}+\mu^*}\right)} \qquad (2.70)$$

จะได้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป

$$\alpha = \frac{1}{2}\left\{1-\left[1+(\lambda+\lambda_{12})\ln\left[\frac{T_c}{1.14\omega_D}\right]\right]^2\right\} \qquad (2.71)$$

สามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปได้จากฟังก์ชันของ μ^*/λ ที่เกี่ยวข้องกับความแรงของอันตรกิริยาคูลอมบ์ μ^* การเปรียบเทียบอันตรกิริยาระหว่างแถบของอิเล็กตรอน – โฟนอน ดังแสดงภาพประกอบ 11 พบว่าพารามิเตอร์ λ_{12} ได้ค่า บวก หรือ ลบ โดยจะมีค่าลดลงตามอัตราส่วนของพารามิเตอร์ยังผล การลดลงจะเร็วขึ้นเมื่อแรงอันตรกิริยาระหว่างแถบอิเล็กตรอน – โฟนอนเป็นแรงดูด



ภาพประกอบ 11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต

ที่มา : Okoye. (1998). Chinese Journal of Physics p. 61

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้แบบจำลองแบบพลังงานสองแถบมาอธิบายเชิงทดลองโดยการวัดค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ในสารตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูง ค่ายังผลของอันตรกิริยาดูดของอิเล็กตรอน μ^* และพารามิเตอร์การเข้าคู่ในแถบพลังงานมีค่าเพิ่มขึ้นและจะเพิ่มขึ้น แม้ว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป(α) จะลดลงเมื่อค่า μ^*/λ เพิ่มขึ้น แต่ค่ายังผลลดลงอย่างรวดเร็วเมื่ออันตรกิริยาโฟนอนระหว่างแถบพลังงาน (λ_{12}) มีค่าเป็นลบ ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป (α) จะขึ้นกับอุณหภูมิวิกฤต (T_c) ในลักษณะนี้เป็นผลที่สอดคล้องกับการทดลองที่ได้ทำนายไว้

ในปี ค.ศ. 1999 โอโกเย่ (Okoye. 1999 : 197) ได้อธิบายการเลื่อนของไอโซโทปซึ่งได้จากสมการช่องว่างพลังงานตามทฤษฎีของบีซีเอส ชนิด 2 แถบพลังงาน กับพลังงานเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับความหนาแน่นสถานะและสันนิษฐานว่าเกิดจากอิเล็กตรอนโฟนอนและกลไกอันตรกิริยาประจุศูนย์กลางแรงดึงดูดซึ่งเกิดขึ้นในขณะเดียวกัน ผลลัพธ์ที่แสดงนั้นไม่เป็นไปตามกฎเกณฑ์ของการเลื่อนไอโซโทปของตังนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงอย่างที่ควรเป็นตามแบบจำลองที่เคยได้อธิบายไว้

เขี

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 F-\lambda_1\omega_D & -1 & -(\lambda_{12}F+\lambda'_{12}\omega_D) & 0 \\ -(\mu_1 F+\mu'_1\omega_D) & 1-\mu_1 G-\mu'_1(\omega_c-\omega_D) & -(\mu^2_{12}F+k_2\omega_D) & -(\mu^2_{12}G+k_2(\omega_c-\omega_D)) \\ -(\lambda_{12}F+\lambda'_{12}\omega_D) & 0 & (1-\lambda_2 F-\lambda'_2\omega_D) & -1 \\ -(\mu^1_{12}F+k_1\omega_D) & -(\mu^1_{12}G+k_1(\omega_c-\omega_D)) & -(\mu_2 F+\mu'_2\omega_D) & 1-\mu_2 G-\mu'_2(\omega_c-\omega_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{1o} \\ \Delta_{1\alpha} \\ \Delta_{2o} \\ \Delta_{2\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

เมื่อ $F=\ln\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{10}}\right)=\left(\frac{2\omega_D}{\Delta_{20}}\right)$ และ $G=\ln\left[\frac{\omega_c}{\omega_D}\right]$

ลดรูปสมการเมตริกซ์ให้มีขนาด 2 x 2 โดยกำหนดให้ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$; $\mu_1=\mu_2=\mu$; $\mu'_1=\mu'_2=\mu$;

$\lambda^1_{12}=\lambda^1_{12}=\lambda_{12}$; $\lambda'_1=\lambda'_2=\lambda'$; $\mu^1_{12}=\mu^1_{12}=\mu_{12}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1-(\lambda+\lambda_{12})F-(\lambda'+\lambda'_{12})\omega_D & -1 \\ -((\mu+\mu_{12})F+(\mu'+k)\omega_D) & 1-(\mu+\mu_{12})G-(\mu'+k)(\omega_c-\omega_D) \end{bmatrix}=0 \qquad (2.72)$$

จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตเป็นดังนี้

$$T_c=1.14\omega_D e^{\left\{-\left(\frac{1-\omega_D(\lambda'+\lambda'_{12}+k^*)}{\lambda+\lambda_{12}+\mu^*}\right)\right\}} \qquad (2.73)$$

เมื่อ

$$k^*=\frac{\mu'+\mu}{1-(\mu+\mu_{12})G-(\mu'+k)(\omega_c-\omega_D)}$$

และ

$$\mu^*=\frac{\mu+\mu_{12}}{1-(\mu+\mu_{12})G-(\mu'+k)(\omega_c-\omega_D)}$$

หาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปได้

$$\beta=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\lambda+\lambda_{12}+\mu^*}\left\{(\lambda'+\lambda'_{12}+k^*)\omega_D-\frac{\omega_D(k^*)^2}{(\mu'+k)}[(\mu+\mu_{12})+\omega_D(\mu'+)]\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(1-\omega_D(\lambda'+\lambda'_{12}+k^*))(\mu^*)^2}{\lambda+\lambda_{12}+\mu^*}-\frac{\omega_D(1-\omega_D(\lambda'+\lambda'_{12}+k^*))(\mu^*)^2(\mu'+k)}{(\lambda+\lambda_{12}+\mu^*)(\mu+\mu_{12})}\right\}\right] \qquad (2.74)$$

จากการคำนวณพบว่าเมื่อพารามิเตอร์ซึ่งเกิดจากการจับคู่ของอิเล็กตรอนโฟนอนมีการเพิ่ม สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปก็จะเพิ่มขึ้นด้วย

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยนี้มีจุดประสงค์ เพื่อคำนวณหาผลของความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป ที่มีต่อค่าอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยวดยิ่งแบบ 2 แถบ ซึ่งพบในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางประเภท เช่น $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$ และ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$ จากการทดลองของ (Soerensen and Gygax : 1995 : 11848)

ขั้นตอนที่ 1

คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ ในขอบเขตการควบคู่อย่างอ่อนโดยใช้ฮามิลโทเนียนตามแบบของโอโกเย่ (Okoye. 1998:53) ดังนี้

$$H = H_1 + H_2 + H_{int} \tag{3.1}$$

เมื่อ H เป็นฮามิลโทเนียนรวมของระบบ

H_1 เป็นฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาการเกิดคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 1

H_2 เป็นฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาการเกิดคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 2

H_{int} เป็นฮามิลโทเนียนของอันตรกิริยาของระหว่างแถบพลังงานในชั้นที่ 1 และ 2

โดย

$$H_1 = \sum_{ks} \varepsilon_{1s}\, C^+_{ks} C_{ks} - \sum_{kk'} v_{11kk'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow}$$

$$H_2 = \sum_{ks} \varepsilon_{2s}\, p^+_{ks} p_{ks} - \sum_{kk'} v_{22kk'} p^+_{k\uparrow} p^+_{-k\downarrow} p_{-k'\downarrow} p_{k'\uparrow}$$

$$H_{int} = -\sum_{kk'} v_{12kk'} \left(C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} p_{-k'\downarrow} p_{-'\uparrow} p^+_{-k\downarrow} + p^+_{k\uparrow} p^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \right) \tag{3.2}$$

เมื่อ ε_{1k} และ ε_{2k} เป็นพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนในแถบพลังงานที่บริเวณผิวเฟอร์มีของแถบพลังงานที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$v_{11kk'}$ และ $v_{22kk'}$ เป็นพลังงานศักย์ดึงดูดของคู่คูเปอร์ในแถบพลังงานที่ 1 และ 2

$v_{12kk'}$ เป็นพลังงานศักย์ดึงดูดที่เกิดจากอันตรกิริยาการจับคู่ของอิเล็กตรอนระหว่างแถบที่ 1 และ 2

C^{+}_{ks} และ p^{+}_{ks} เป็นตัวดำเนินการสร้างของแถบพลังงานที่ 1 และ 2

C_{ks} และ p_{ks} เป็นตัวดำเนินการทำลายของแถบพลังงานที่ 1 และ 2

s เป็นดัชนีของการสปิน $\uparrow$ หรือ $\downarrow$

k เป็นเวกเตอร์คลื่น

ใช้การแปลงแบบโบโกลิวบอฟ – วาลาติน เขียนฮามิลโทเนียนใหม่ได้ดังนี้

$$H_1 = \sum_{ks}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_{1k}^2}\left[C^{+}_{k\uparrow}C_{k\uparrow}+C^{+}_{-k'\downarrow}C_{-k'\downarrow}\right]-\sum_{kk'}\Delta_{1k}\left[C_{-k'\downarrow}C_{k'\uparrow}+C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow}\right]+\Delta_{1k}\left\langle C_{-k'\downarrow}C_{k'\uparrow}\right\rangle$$

$$H_2 = \sum_{k}\sqrt{\varepsilon_k^2+\Delta_{2k}^2}\left[p^{+}_{k\uparrow}p_{k\uparrow}+p^{+}_{-k'\downarrow}p_{-k'\downarrow}\right]-\sum_{kk'}\Delta_{2k}\left[p_{-k'\downarrow}p_{k'\uparrow}+p^{+}_{k\uparrow}p^{+}_{-k\downarrow}\right]+\Delta_{2k}\left\langle C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right\rangle$$

$$H_{int} = -v_{12kk'}\left[\left\langle C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow}\right\rangle p_{k'\downarrow}p_{k'\uparrow}-C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow}\left\langle p_{-k'\downarrow}p_{k'\uparrow}\right\rangle+\left\langle C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow}\right\rangle\left\langle p_{-k'\downarrow}p_{k'\uparrow}\right\rangle\right] \qquad (3.3)$$

โดย $\Delta_{1k}=\left\langle C^{+}_{k\uparrow}C^{+}_{-k\downarrow}\right\rangle$ และ $\Delta_{2k}=\left\langle p^{+}_{k\uparrow}p^{+}_{-k\downarrow}\right\rangle$

แก้สมการจะได้สมการของช่องว่างพลังงานดังนี้

$$\Delta_{1k} = -\sum_{k'}v_{11kk'}\frac{\Delta_{1k'}}{2\sqrt{\varepsilon_{1k'}^2+\Delta_{1k'}^2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{1k'}^2+\Delta^2{}_{1k'}}}{2T}\right)-\sum_{k'}v_{12kk'}\frac{\Delta_{2k'}}{2\sqrt{\varepsilon_{2k'}^2+\Delta^2{}_{2k'}}}\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{2k'}^2+\Delta^2{}_{2k'}}}{2T}\right)$$

$$\Delta_{2k} = -\sum_{k'}v_{22kk'}\frac{\Delta_{2k'}}{2\sqrt{\varepsilon_{2k'}^2+\Delta_{2k'}^2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{2k'}^2+\Delta^2{}_{2k'}}}{2T}\right)-\sum_{k'}v_{12kk'}\frac{\Delta_{1k'}}{2\sqrt{\varepsilon_{1k'}^2+\Delta^2{}_{1k'}}}\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{1k'}^2+\Delta^2{}_{1k'}}}{2T}\right) \qquad (3.4)$$

แทนค่า $v_{kk'}$ โดยกำหนดให้ศักย์ในการดึงดูดที่ทำให้เกิดคู่คูเปอร์ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วนตามสมการ เมื่อ

$$V_{ikk'(\omega)} = -V^{i}_{ph}-U_{ic},\ 0<|\omega|<\omega_D$$
$$= -U_{ic},\ \omega_D<|\omega|<\omega_c \qquad (3.5)$$

โดย i = เป็นแถบพลังงานชั้น 1 , 2 และระหว่างแถบ 1 และ 2 แล้วแทนค่าในสมการ (3.4) โดยแทน $\sum$ ด้วย $\int N(0)d\varepsilon$ เมื่อ $N(0)$ เป็นความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว

$$\Delta_{11} = \left(v_{ph}^{1} + U_c^{1}\right)N(0)\Delta_{11}I_1 + U_c^{1}N(0)\Delta_{12}I_2 + \left(v_{ph}^{21} + U_c^{21}\right)N(0)\Delta_{21}I_1 + U_c^{21}N(0)\Delta_{22}I_2$$

$$\Delta_{21} = \left(v_{ph}^{2} + U_c^{2}\right)N(0)\Delta_{21}I_1 + U_c^{2}N(0)\Delta_{22}I_2 + \left(v_{ph}^{12} + U_c^{12}\right)N(0)\Delta_{11}I_1 + U_c^{12}N(0)\Delta_{12}I_2$$

$$\Delta_{12} = U_c^{1}N(0)\Delta_{11}I_1 + U_c^{1}N(0)\Delta_{12}I_2 + U_c^{21}N(0)\Delta_{21}I_1 + U_c^{21}N(0)\Delta_{22}I_2$$

$$\Delta_{22} = U_c^{2}N(0)\Delta_{21}I_1 + U_c^{2}N(0)\Delta_{22}I_2 + U_c^{12}N(0)\Delta_{11}I_1 + U_c^{12}N(0)\Delta_{12}I_2 \qquad (3.6)$$

โดย v_{ph}^{1} , v_{ph}^{2} , v_{ph}^{12} , v_{ph}^{21} คือ อันตรกริยาดึงดูดแบบอ่อนที่ขึ้นอยู่กับความถี่โฟนอน ในแถบ 1 , 2 ระหว่างแถบ 1 กับ 2 และ ระหว่างแถบ 2 กับ 1 ตามลำดับ

U_c^{1} , U_c^{2} , U_c^{12} , U_c^{21} คือ อันตรกริยาดึงดูดแบบรุนแรงที่ขึ้นอยู่กับความถี่โฟนอน ในแถบ 1 , 2 ระหว่างแถบ 1 กับ 2 และ ระหว่างแถบ 2 กับ 1 ตามลำดับ

Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} , Δ_{22} คือ ช่องว่างพลังงาน ในแถบ 1 , 2 ระหว่างแถบ1กับ 2 และ ระหว่างแถบ 2 กับ 1 ตามลำดับ

เมื่อ $$I_1 = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon \qquad (3.7\text{-ก})$$

และ $$I_2 = \int_{\omega_D}^{\omega_c} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon \qquad (3.7\text{-ข})$$

กำหนดให้ $\lambda = N(0)v$ เป็นค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกริยาของอิเล็กตรอน – โฟนอน และ $\mu = N(0)U_c$ เป็นค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกริยาของอิเล็กตรอน – โฟนอน และให้

$$\lambda_1 = N(0)v_{ph}^{1} \quad , \quad \lambda_2 = N(0)v_{ph}^{2} \quad , \quad \lambda_{12} = N(0)v_{ph}^{12} \quad , \quad \lambda_{21} = N(0)v_{ph}^{21}$$
$$\mu_1 = N(0)U_{ph}^{1} \quad , \quad \mu_2 = N(0)U_{ph}^{2} \quad , \quad \mu_{12} = N(0)U_{ph}^{12} \quad , \quad \mu_{21} = N(0)U_{ph}^{21}$$

โดย λ_1 , λ_2 , λ_{12} คือ ค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่เกิดจากอันตรกริยาของ
อิเล็กตรอน – โฟนอน ในแถบ 1 , 2 และ ระหว่างแถบ1และ 2 ตามลำดับ

μ_1 , μ_2 , μ_{12} คือ ค่าคงตัวของการคู่ควบของพลังงานศักย์ที่ไม่ได้เกิดจากอันตรกริยาของ
อิเล็กตรอน – โฟนอน ในแถบ 1 , 2 และ ระหว่างแถบ1และ 2 ตามลำดับ

นำสมการ (3.6) มาเขียนใหม่เป็น

$$\Delta_{11} = (\lambda_1 + \mu_1)\Delta_{11}I_1 + \mu_1\Delta_{12}I_2 + (\lambda_{21} + \mu_{21})\Delta_{21}I_1 + \mu_{21}\Delta_{22}I_2$$

$$\Delta_{21} = (\lambda_2 + \mu_2)\Delta_{21}I_1 + \mu_2\Delta_{22}I_2 + (\lambda_{12} + \mu_{12})\Delta_{11}I_1 + \mu_{12}\Delta_{12}I_2$$

$$\Delta_{12} = \mu_1\Delta_{11}I_1 + \mu_1\Delta_{12}I_2 + \mu_{21}\Delta_{21}I_1 + \mu_{21}\Delta_{22}I_2$$

$$\Delta_{22} = \mu_2\Delta_{21}I_1 + \mu_2\Delta_{22}I_2 + \mu_{12}\Delta_{11}I_1 + \mu_{12}\Delta_{12}I_2$$

กำหนดให้ $\lambda_{12} = \lambda_{21}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$ นำมาเขียนในรูปเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1 & (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12}I_2\\ (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & (\lambda_2+\mu_2)I_1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_{12}I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12}I_2\\ \mu_{12}I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{22}\end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1-1 & (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12}I_2\\ (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & (\lambda_2+\mu_2)I_1-1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_{12}I_1 & \mu_1 I_2-1 & \mu_{12}I_2\\ \mu_{12}I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{22}\end{bmatrix} = 0$$

เนื่องจาก Δ_1 และ Δ_2 มีค่าใดๆ จะได้

$$\det\begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1-1 & (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12}I_2\\ (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & (\lambda_2+\mu_2)I_1-1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_{12}I_1 & \mu_1 I_2-1 & \mu_{12}I_2\\ \mu_{12}I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2-1\end{bmatrix} = 0 \qquad (3.9)$$

แก้สมการเซ็กคิวลาร์จะได้

$$1-I_1\lambda_1-I_1\lambda_2-I_1\mu_1-I_1\mu_2-I_1^2\lambda_{12}^2+\lambda_1\lambda_2I_1^2+I_1^2\lambda_1\mu_1-2I_1^2\lambda_{12}\mu_{12}-I_1^2\mu_{12}^2$$
$$+I_1^2\lambda_1\mu_2+I_1^2\mu_1\mu_2-I_2\mu_1-I_2\mu_2+I_1I_2\lambda_1\mu_1+I_1I_2\lambda_2\mu_1-2I_1I_2\mu_{12}^2+I_1I_2\lambda_1\mu_2$$
$$+I_1I_2\lambda_2\mu_2+2I_1I_2\mu_1\mu_2+I_1^2I_2\lambda_{12}^2\mu_1-I_1^2I_2\lambda_1\lambda_2\mu_1+I_1^2I_2\lambda_1\mu_{12}^2+I_1^2I_2\lambda_2\mu_{12}^2$$
$$+I_1^2I_2\lambda_{12}^2\mu_2-I_1^2I_2\lambda_1\lambda_2\mu_2-I_1^2I_2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_1^2I_2\lambda_2\mu_1\mu_2-I_2^2\mu_{12}^2+I_2^2\mu_1\mu_2$$
$$+I_1I_2^2\lambda_1\mu_{12}^2+I_1I_2^2\lambda_2\mu_{12}^2-I_1I_2^2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_1I_2^2\lambda_2\mu_1\mu_2+I_1^2I_2^2\lambda_{12}^2\mu_{12}^2-I_1^2I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}^2$$
$$-I_1^2I_2^2\lambda_{12}^2\mu_1\mu_2+I_1^2I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2=0$$

แก้สมการหา I_1 ได้

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2-I_2\lambda_1\mu_1-I_2\lambda_2\mu_2+2I_2\mu_{12}^2-I_2\lambda_1\mu_2-I_2\lambda_2\mu_2-2I_2\mu_1\mu_2-I_2^2\lambda_1\mu_{12}^2$$
$$-I_2^2\lambda_2\mu_{12}^2+I_2^2\lambda_1\mu_1\mu_2+I_2^2\lambda_2\mu_1\mu_2\pm\mathrm{Sqrt}((-\lambda_1-\lambda_2-\mu_1-\mu_2+I_2\lambda_1\mu_1+I_2\lambda_2\mu_2$$
$$-2I_2\mu_{12}^2+I_2\lambda_1\mu_2+I_2\lambda_2\mu_2+2I_2\mu_1\mu_2+I_2^2\lambda_1\mu_{12}^2+I_2^2\lambda_2\mu_{12}^2-I_2^2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_2^2\lambda_2\mu_1\mu_2)^2$$
$$-4(1-I_2\mu_1-I_2\mu_2+I_2^2\mu_1\mu_2-I_2^2\mu_{12}^2)(\lambda_1\lambda_2-\lambda_{12}^2+\lambda_2\mu_1-2\lambda_{12}\mu_{12}-\mu_{12}^2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\mu_2$$
$$+I_2\lambda_{12}^2\mu_1-I_2\lambda_1\lambda_2\mu_1+I_2\lambda_1\mu_{12}^2+I_2\lambda_2\mu_{12}^2+I_2\lambda_{12}^2\mu_2-I_2\lambda_1\lambda_2\mu_2-I_2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_2\lambda_2\mu_1\mu_2$$
$$+I_2^2\lambda_{12}^2\mu_{12}^2-I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}^2-I_2^2\lambda_{12}^2\mu_1\mu_2+I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2))$$
$$/2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_{12}^2+\lambda_1\mu_1-2\lambda_{12}\mu_{12}-\mu_{12}^2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\mu_2+I_2\lambda_{12}^2\mu_1-I_2\lambda_1\lambda_2\mu_1+I_2\lambda_1\mu_{12}^2+I_2\lambda_2\mu_{12}^2$$
$$+I_2\lambda_{12}^2\mu_2-I_2\lambda_1\lambda_2\mu_2-I_2\lambda_1\mu_1\mu_2-I_2\lambda_2\mu_1\mu_2+I_2^2\lambda_{12}^2\mu_{12}^2-I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}^2-I_2^2\lambda_{12}^2\mu_1\mu_2+I_2^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2)$$

ทำการจัดรูปสมการใหม่

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2-(-\mu_{12}^2+2\mu_1\mu_2+\lambda_1(\mu_1+\mu_2)+\lambda_2(\mu_1+\mu_2))I_2-I_2^2(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)$$
$$\pm\mathrm{Sqrt}\,[[\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2$$
$$I_2(-\mu_{12}^2+2\mu_1\mu_2+\lambda_1(\mu_1+\mu_2)+\lambda_2(\mu_1+\mu_2))-I_2^2(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)]^2$$
$$+4[\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_2\mu_1+2\lambda_{12}\mu_{12}+\mu_{12}^2-\lambda_1\mu_2-\mu_1\mu_2-I_2^2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)$$
$$+I_2(-\lambda_2\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_1\mu_2-\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)+\lambda_1(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2+\lambda_2(\mu_1+\mu_2)))]$$
$$-[1-I_2(\mu_1+\mu_2)+I_2^2(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2)]]/$$
$$2[-\lambda_{12}^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_{12}^2+\lambda_1\mu_1-2\lambda_{12}\mu_{12}-\mu_{12}^2+\lambda_1\mu_2+\mu_1\mu_2+I_2^2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)$$
$$+I_2(\lambda_2\mu_{12}^2-\lambda_2\mu_1\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)-\lambda_1(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2+\lambda_2(\mu_1+\mu_2)))$$

กำหนดให้ $a_\lambda=\dfrac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\dfrac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_t}$ และ $b_\mu=\dfrac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}=\dfrac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_t}$

เมื่อ $\lambda_t=\lambda_1+\lambda_2$ และ $\mu_t=\mu_1+\mu_2$

จะได้

$$I_1 = (\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right] \pm \text{Sqrt}\left[\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right)^2 + 4\left(\frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t}-\frac{(\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t}-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)\right])/ -2\left[\frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}}{\lambda_t\mu_t}-\frac{(\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2)}{\lambda_t\mu_t}-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right]$$

จัดรูปสมการใหม่โดยกำหนดให้ $A_t = \frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}-\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2}{\lambda_t\mu_t}$ ท้ายที่สุดจะได้

$$I_1 = (\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right] \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right)^2 + 4\left(A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)\right]})/ -2\left[A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right] \tag{3.10}$$

ต่อไปจะพิจารณาสมการ (3.10) แบบประมาณ โดยกำหนดให้

$$\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right)^2 \rangle\ 4\left(A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)$$

$$I_1 = \frac{\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2}{-2\left[A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right]} \pm \frac{\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2}{-2\left[A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right]}\left[1+4\left(A_t-I_2(a_\lambda+b_\mu)-I_2^2a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)\right]^{1/2}$$

กระจายฟังค์ชันในรูป $(1+x)^n \approx 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2!}+n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!}+\cdots$

จะได้

$$I_1 = \frac{\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2}{-2\left[A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right]}\left\{1\pm\left(1+\frac{2\left(A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left[\frac{4\left(A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]^2}\right]^2\right)\right\}$$

สมการข้างบนจะมี 2 คำตอบ คือ

$$I_1(+)\cong\frac{2\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right)}{-2\left[A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right]}-\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]} \quad (3.11)$$

$$I_1(-)\cong\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]} \quad (3.12)$$

ในกรณีนี้จะพิจารณาที่ $I_1(-)$

$$I_1(-)=\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t}\right)\left(\frac{1}{\mu_t}-I_2-b_\mu I_2^2\right)}{\frac{1}{\mu_t}-I_2-b_\mu\lambda_t I_2^2+b_\mu\lambda_t I_2^2-b_\mu I_2^2+\frac{1}{\lambda_t}\left(1+2b_\mu I_2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\lambda_t}\right)}{\left\{1+\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t}\right)(1+2b_\mu I_2)}{\left(\frac{1}{\mu_t}-I_2-b_\mu\lambda_t I_2^2\right)}+\frac{b_\mu I_2^2(\lambda_t-1)}{\left(\frac{1}{\mu_t}-I_2-b_\mu\lambda_t I_2^2\right)}\right\}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\lambda_t}\right)}{\left\{1+\left(\frac{\mu_t}{\lambda_t}\right)\frac{(1+2b_\mu I_2)}{(1-\mu_t I_2-b_\mu\mu_t\lambda_t I_2^2)}+\frac{(\lambda_t-1)}{\frac{1}{b_\mu I_2^2}+\mu_t\left(\frac{1}{2b_\mu I_2}-\lambda_t\right)}\right\}} \quad (3.13)$$

พิจารณากรณีตัวนำยวดยิ่งแบบแถบพลังงานเดียวจะได้ $\lambda_t = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 \quad ;\lambda_2 = 0$

$\mu_t = \mu_1 + \mu_2 = \mu_1 \quad ;\mu_2 = 0$ และ $b_\mu = \frac{\mu_{12}^2 - \mu_1\mu_2}{\mu_t} = 0 \quad ;\mu_{12}^2 = 0 \quad , \quad \mu_1\mu_2 = 0$

จากสมการ (3.13) แทนค่าตามเงื่อนข้างต้น

$$I_1(-) = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)}{\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\mu}-I_2\right)}{\left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}-I_2\right]}$$

$$= \frac{1}{\lambda\left(1+\frac{\mu}{\lambda(1-\mu I_2)}\right)} = \frac{1}{\lambda\left(1+\frac{\mu^*}{\lambda}\right)}$$

ดังนั้น

$$I_1 = \frac{1}{\lambda - \mu^*}$$

เมื่อ $\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu I_2}$ ซึ่งตรงกับสมการ (32.4) ของหนังสือสภาพนำยวดยิ่งของแคท เทอร์สันและซอง (J.B. Ketterson & S.N.Song. Superconductivity. 1999 : 244) แสดงว่า $I_1(-)$ สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแถบพลังงานเดียวได้ และถ้าพิจารณา $I_1(+)$ จะพบว่าไม่สามารถลดรูปลงได้ ดังนั้น $I_1(-)$ เท่านั้นที่เป็นคำตอบของสมการ

เนื่องจาก $I_1 = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$ ซึ่งจากการคำนวณหาค่า I_1 โดยใช้การประมาณตามแบบ BCS เมื่อ $\omega_D \rangle T_c$ ได้ $I_1 \approx \ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_c}\right)$ นำไปแทนค่าในสมการ (3.10) จะได้

$$T_c = \left(\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\right)\omega_D \exp\left(\frac{\left[\frac{1}{\mu_t} + \frac{1}{\lambda_t} + I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t} - 1\right) - b_\mu I_2^2\right] \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu_t} + \frac{1}{\lambda_t} + I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t} - 1\right) - b_\mu I_2^2\right)^2 + 4\left(A_t - I_2(a_\lambda + b_\mu) - I_2^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t \mu_t} - \frac{I_2}{\lambda_t} - \frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)\right]}}{-2\left[A_t - I_2(a_\lambda + b_\mu) - I_2^2 a_\lambda b_\mu\right]}\right) \quad (3.14)$$

และ

$$T_c \cong 1.13\omega_D \exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{\lambda_t}\right)}{\left\{1 + \left(\frac{\mu_t}{\lambda_t}\right)\frac{(1 + 2b_\mu I_2)}{(1 - \mu_t I_2 - b_\mu \mu_t \lambda_t I_2^2)} + \frac{(\lambda_t - 1)}{\frac{1}{b_\mu I_2^2} + \mu_t\left(\frac{1}{2b_\mu I_2} - \lambda_t\right)}\right\}}\right) \quad (3.15)$$

สมการ (3.14) เป็น สมการของอุณหภูมิวิกฤตแบบไม่ประมาณ และสมการ (3.15) เป็น สมการของอุณหภูมิวิกฤตแบบประมาณ

ต่อไปจะพิจารณาสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่ได้ในกรณีต่างๆ

1. กรณีตัวนำยวดยิ่งแบบสองแถบพลังงานที่ไม่มีพลังงานศักย์ดึงดูดในเทอมที่ไม่ใช่อันตรกิริยาของอิเล็กตรอนโฟนอน ($U_c = 0$) ได้ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_{12} = 0$ แทนในสมการ (3.8) และให้ $\Delta_{11} = \Delta_1$, $\Delta_{21} = \Delta_2$ จะได้

$$\begin{bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 I_1 & \lambda_{12} I_1\\ \lambda_{12} I_1 & \lambda_2 I_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda_1 I_1 - 1 & \lambda_{12} I_1\\ \lambda_{12} I_1 & \lambda_2 I_1 - 1\end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda_1 I_1 - 1)(\lambda_2 I_1 - 1) - (\lambda_{12} I_1)^2 = 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 I_1^2 - \lambda_1 I_1 - \lambda_2 I_1 - \lambda_{12}^2 I_1^2 + 1 = 0$$

$$I_1^2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2) - (\lambda_1 + \lambda_2) I_1 + 1 = 0$$

$$I_1 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}}{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}$$

แทนค่า I_1 ตามการประมาณแบบ BCS ได้

$$\ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_c}\right) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}}{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}$$

$$T_c = \left(\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\right)\omega_D \exp\left(-\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}}{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}\right)$$

$$T_c = 1.13\omega_D e^{-\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}}{2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}^2)}\right)} \qquad (3.16)$$

เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตของแบบจำลองสองแถบพลังงานที่ไม่มีเทอมของอันตรกริยาที่ไม่ใช่ของอิเล็กตรอน – โฟนอน ซึ่งตรงกับสมการ (33.5) ของหนังสือสภาพนำยวดยิ่งของแคทเทอร์สันและซอง (J.B. Ketterson & S.N.Song. Superconductivity. 1999 : 244)

2. กรณีตัวนำยวดยิ่งแบบแถบพลังงานเดียวที่มีพลังงานศักย์ดึงดูดในเทอมของอันตรกิริยาที่ไม่ใช่อิเล็กตรอนโฟนอน โดยกำหนดให้ $\Delta_{21}=0$ และ $\Delta_{22}=0$ จะได้

$$\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1 & \mu_1 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_1 I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{12}\end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1-1 & \mu_1 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_1 I_2-1\end{bmatrix}=0$$

$$((\lambda_1+\mu_1)I_1-1)(\mu_1 I_2-1)-\mu_1 I_1\mu_1 I_2=0$$

$$(\lambda_1 I_1\mu_1 I_2+\mu_1 I_1\mu_1 I_2-\mu_1 I_2-(\lambda_1+\mu_1)I_1+1)-\mu_1 I_1\mu_1 I_2=0$$

$$\mu_1 I_2(\lambda_1 I_1-1)-(\lambda_1 I_1-1)-\mu_1 I_1=0$$

$$(\lambda_1 I_1-1)(\mu_1 I_2-1)-\mu_1 I_1=0$$

$$I_1=\frac{1}{\lambda_1-\frac{\mu_1}{\mu_1 I_2-1}}$$

กำหนดให้ $\mu^*=\frac{\mu_1}{\mu_1 I_2-1}$ จะได้

$$I_1=\frac{1}{\lambda_1-\mu^*}$$

แทนค่า I_1 ได้

$$\ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_c}\right)=\frac{1}{\lambda_1-\mu^*}$$

$$T_c=\left(\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\right)\omega_D\exp\left(\frac{1}{\lambda_1-\mu^*}\right)$$

$$T_c = 1.13\omega_D e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1 - \mu^*}\right)} \qquad (3.17)$$

เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตของแบบสองแถบพลังงานเดียวที่มีเทอมของอันตรกิริยาที่ไม่ใช่อิเล็กตรอน – โฟนอน ซึ่งตรงกับสมการ (32.4) จากหนังสือสภาพนำยวดยิ่งของแคทเทอร์สันและซอง (J.B.Ketterson & S.N.Song. Superconductivity.1999 : 240)

จะเห็นว่าสมการ (3.14) สามารถอธิบายสมการอุณหภูมิวิกฤตของแบบจำลองแถบพลังงานได้คลอบคลุมทั้งสองกรณีได้เป็นอย่างดี

ขั้นตอนที่ 2

คำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ โดย

ตามสมการได้ $\alpha = -\dfrac{\partial \ln T_c}{\partial \ln M}$

$$= \frac{-\dfrac{\partial \ln T_c}{\partial \ln \omega_D}}{\dfrac{\partial \ln M}{\partial \ln \omega_D}}$$

$$= \frac{1\partial \ln T_c}{2\partial \ln \omega_D}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} \qquad (3.18)$$

โดย $\dfrac{\partial \ln M}{\partial \ln \omega_D} = -\dfrac{1}{2}$ ตามการประมาณในขอบเขตการสั่นแบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย

นำสมการของอุณหภูมิวิกฤตตามสมการ (3.14) ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาแทนค่าเพื่อคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบที่มีความหนาแน่นสถานะคงตัว โดยนำสมการ (3.9) มาหาอนุพันธ์ของ T_c เทียบกับ ω_D แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = T_c[\lambda_1+\lambda_2+I_1\{2\lambda_{12}(\lambda_{12}+2\mu_{12})+\lambda_1(-2\lambda_2+\mu_1-\mu_2)+\lambda_2(-\mu_1+\mu_2)+$$
$$[-\lambda_1\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_{12}^2-(\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1)\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)]I_1\}-$$
$$[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_1(\mu_1+\mu_2+(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2)I_1)]I_2-$$
$$(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_1)I_2^2]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]/$$
$$\omega_D[-[[-\mu_1-\mu_2+I_1\{(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1-2\mu_{12}^2+(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\mu_2+$$
$$[-\lambda_1\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_{12}^2-(\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1)\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)]I_1\}-$$
$$2(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)[1-(\lambda_1+\lambda_2)I_1+(-\lambda_{12}^2+\lambda_1\lambda_2)I_1^2]I_2]\tanh\left[\frac{\omega_c}{2T_c}\right]]+$$
$$[\lambda_1+\lambda_2+I_1\{2\lambda_{12}(\lambda_{12}+2\mu_{12})+\lambda_1(-2\lambda_2+\mu_1-\mu_2)+\lambda_2(-\mu_1+\mu_2)+$$
$$[-\lambda_1\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_{12}^2-(\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1)\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)]I_1\}-$$
$$[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_1(\mu_1+\mu_2+(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2)I_1)]I_2-$$
$$(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_1)I_2^2]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]])\}\}$$

จัดรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = \left(\frac{Tc}{\omega_D}\right)1/(1-\frac{[B]\tanh\left[\frac{\omega_c}{2T_c}\right]}{[A]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}) \qquad (3.19)$$

เมื่อกำหนดให้

$$[A]=[\lambda_t+I_1\{2\lambda_t a_\lambda+4\lambda_{12}\mu_{12}+(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1-\mu_2)+[(a_\lambda+b_\mu)\mu_t\lambda_t]I_1\}-$$
$$-[\mu_t\lambda_t(1+2a_\lambda I_1(1-b_\mu I_1))I_2-b_\mu(1+2a_\lambda I_1)I_2^2]$$
$$[B]=-[-\mu_t+\{\mu_t\lambda_t(1+(b_\mu+a_\lambda)I_1)\}-2\mu_t b_\mu(1+(1-\lambda_t I_1(1+a_\lambda I_1)I_2)]$$

นำสมการ (3.19) แทนในสมการ (3.18) จะได้

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\left(\frac{T_c}{\omega_D}\right)1/(1-\frac{[B]\tanh\left[\frac{\omega_c}{2T_c}\right]}{[A]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1-\dfrac{[B]\tanh\left[\dfrac{\omega_c}{2T_c}\right]}{[A]\tanh\left[\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right]}}\right) \tag{3.20}$$

สมการ (3.20) เป็นสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ ในขอบเขตการควบคู่อย่างอ่อนที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว

ขั้นตอนที่ 3

คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ ในขอบเขตการควบคู่อย่างอ่อนที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

โดยใช้สมการความหนาแน่นสถานะตามสมการ

$$N(E) = N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E - E_F}\right| \tag{3.21}$$

แทนในสมการ (3.4) จะได้

$$\Delta_{11} = \left(v_{ph}^{1} + U_c^{1}\right)N(0)\Delta_{11}I_3 + U_c^{1}N(0)\Delta_{12}I_4 + \left(v_{ph}^{21} + U_c^{21}\right)N(0)\Delta_{21}I_3 + U_c^{21}N(0)\Delta_{22}I_4$$

$$\Delta_{21} = \left(v_{ph}^{2} + U_c^{2}\right)N(0)\Delta_{21}I_3 + U_c^{2}N(0)\Delta_{22}I_4 + \left(v_{ph}^{12} + U_c^{12}\right)N(0)\Delta_{11}I_3 + U_c^{12}N(0)\Delta_{12}I_4$$

$$\Delta_{12} = U_c^{1}N(0)\Delta_{11}I_3 + U_c^{1}N(0)\Delta_{12}I_4 + U_c^{21}N(0)\Delta_{21}I_3 + U_c^{21}N(0)\Delta_{22}I_4$$

$$\Delta_{22} = U_c^{2}N(0)\Delta_{21}I_3 + U_c^{2}N(0)\Delta_{22}I_4 + U_c^{12}N(0)\Delta_{11}I_3 + U_c^{12}N(0)\Delta_{12}I_4$$

โดย

$$I_3 = \int_0^{\omega_D} \ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right| \frac{\tanh\left(\dfrac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon \tag{3.22}$$

และ $$I_4 = \int_{\omega_D}^{\omega_c} \ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right| \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon \qquad (3.23)$$

เขียนในรูปเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(v_{ph}^{1}+U_c^{1}\right)N(0)I_3 & \left(v_{ph}^{21}+U_c^{21}\right)N(0)I_3 & U_c^{1}N(0)I_4 & U_c^{21}N(0)I_4 \\ \left(v_{ph}^{12}+U_c^{12}\right)N(0)I_3 & \left(v_{ph}^{2}+U_c^{2}\right)N(0)I_3 & U_c^{12}N(0)I_4 & U_c^{2}N(0)I_4 \\ U_c^{1}N(0)I_3 & U_c^{21}N(0)I_3 & U_c^{1}N(0)I_4 & U_c^{21}N(0)I_4 \\ U_c^{12}N(0)I_3 & U_c^{2}N(0)I_3 & U_c^{12}N(0)I_4 & U_c^{2}N(0)I_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Delta_{11}\\ \Delta_{21}\\ \Delta_{12}\\ \Delta_{22}\end{bmatrix}$$

จัดรูปสมการตามเงื่อนไขสมการ (3.5) - (3.6) แล้วแก้สมการเซ็กคิวลาร์ จะได้

$$\begin{aligned} &1 - I_3\lambda_1 - I_3\lambda_2 - I_3\mu_1 - I_3\mu_2 - I_3^2\lambda_{12}^2 + \lambda_1\lambda_2 I_3^2 + I_3^2\lambda_1\mu_1 - 2I_3^2\lambda_{12}\mu_{12} - I_3^2\mu_{12}^2 \\ &+ I_3^2\lambda_1\mu_2 + I_3^2\mu_1\mu_2 - I_4\mu_1 - I_4\mu_2 + I_3I_4\lambda_1\mu_1 + I_3I_4\lambda_2\mu_1 - 2I_3I_4\mu_{12}^2 + I_3I_4\lambda_1\mu_2 \\ &+ I_3I_4\lambda_2\mu_2 + 2I_3I_4\mu_1\mu_2 + I_3^2I_4\lambda_{12}^2\mu_1 - I_3^2I_4\lambda_1\lambda_2\mu_1 + I_3^2I_4\lambda_1\mu_{12}^2 + I_3^2I_4\lambda_2\mu_{12}^2 \\ &+ I_3^2I_4\lambda_{12}^2\mu_2 - I_3^2I_4\lambda_1\lambda_2\mu_2 - I_3^2I_4\lambda_1\mu_1\mu_2 - I_3^2I_4\lambda_2\mu_1\mu_2 - I_4^2\mu_{12}^2 + I_4^2\mu_1\mu_2 \\ &+ I_3I_4^2\lambda_1\mu_{12}^2 + I_3I_4^2\lambda_2\mu_{12}^2 - I_3I_4^2\lambda_1\mu_1\mu_2 - I_3I_4^2\lambda_2\mu_1\mu_2 + I_3^2I_4^2\lambda_{12}^2\mu_{12}^2 - I_3^2I_4^2\lambda_1\lambda_2\mu_{12}^2 \\ &- I_3^2I_4^2\lambda_{12}^2\mu_1\mu_2 + I_3^2I_4^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 = 0 \end{aligned}$$

สมการที่ได้จะมีรูปแบบกับกรณีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวตามสมการ (3.10) เพียงแต่ว่ามี I_3 แทน I_1 และ I_4 แทน I_2

และ $I_3 = \int_0^{\omega_D} \ln\left|\frac{E_F}{\varepsilon}\right| \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$ คำนวณหาค่า I_3 โดยใช้การประมาณตามแบบ BCS ได้

$I_3 \approx \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1.36E_F}{T_c}\right)^2 - \ln\left(\frac{E_F}{\omega_D}\right)^2 - 1\right)$ ซึ่งตรงกับการทดลองของซุย และคณะ (Tsuei; et al.1990 : 2724-2727) นำไปแทนค่าในสมการ (3.10) จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c = 1.36E_F \exp\{-[2/[\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_4\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_4^2\right]-$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_4\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_4^2\right)^2+4\left(A_t-I_4\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_4^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_4}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_4^2}{\lambda_t}\right)\right]}/$$

$$-2\left[A_t-I_4\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_4^2 a_\lambda b_\mu\right]]+\left[\ln\frac{E_F}{\omega_D}\right]^2-1]^{1/2}\}$$

(3.24)

ขั้นตอนที่ 4

นำสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของสารตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ โดยทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่สอง จะได้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปเป็น

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D} = T_c[\lambda_1+\lambda_2+I_3\{2\lambda_{12}(\lambda_{12}+2\mu_{12})+\lambda_1(-2\lambda_2+\mu_1-\mu_2)+\lambda_2(-\mu_1+\mu_2)+$$
$$[-\lambda_1\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_{12}^2-(\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1)\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)]I_3\}-$$
$$[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_3(\mu_1+\mu_2+(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2)I_3)]I_4-$$
$$(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_3)I_4^2]\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]/$$
$$(\omega_D(F[\omega_c](-\mu_1-\mu_2+I_3\{(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1-2\mu_{12}^2+(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\mu_2+$$
$$[-\lambda_1\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_{12}^2-(\lambda_1\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)\mu_1)\mu_2+\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)]I_3\}-$$
$$2(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)[1-(\lambda_1+\lambda_2)I_3+(-\lambda_{12}^2+\lambda_1\lambda_2)I_3^2]I_4]+$$
$$F[\omega_D][-\lambda_1-\lambda_2+I_3\{-2\lambda_{12}(\lambda_{12}+2\mu_{12})+\lambda_1(2\lambda_2-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2(\mu_1-\mu_2)+$$
$$[-\lambda_1\mu_{12}^2+\lambda_2\mu_1\mu_2-\lambda_{12}^2(\mu_1+\mu_2)+\lambda_1(\lambda_2\mu_1-\mu_{12}^2+(\lambda_2+\mu_1)\mu_2)]I_3-$$
$$[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_3(\mu_1+\mu_2+(-\mu_{12}^2+\mu_1\mu_2)I_3)]I_4-$$
$$(\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2+2(\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2)I_3)I_4^2])))\}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\frac{\partial T_c}{\partial \omega_D}=\left(\frac{T_c}{\omega_D}\right)\left(\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{-F(\omega_c)\frac{[B]}{[A]}+F(\omega_D)}\right)$$

เมื่อ

$$F(\omega) = \int_0^{\omega/2T_c} d\varepsilon \ln\left(\frac{E_F}{2T_c\varepsilon}\right)\sec h^2(\varepsilon)$$

นำสมการ (3.20) แทนในสมการ (3.13) จะได้

$$\alpha_{VHS} = \frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\left(\frac{T_c}{\omega_D}\right)\left(\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{-F(\omega_c)\frac{[B]}{[A]}+F(\omega_D)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{-F(\omega_c)\frac{[B]}{[A]}+F(\omega_D)}\right) \qquad (3.25)$$

สมการ (3.21) เป็นสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งชนิดสองแถบ ในขอบเขตการควบคู่อย่างอ่อนที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

ขั้นตอนที่ 5

นำผลการคำนวณสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่ได้เปรียบเทียบกับผลการทดลองของบุดโคและคณะ (Bud'ko ; et al : 2001 : 187) ที่ใช้แมกนีเซียมไดโบไรด์ และนำไปเปรียบเทียบกับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด เช่น $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$ (Soerensen and Gygax : 1995 : 11848) และ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$ (Soerensen and Gygax : 1995 : 11848)

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

มีความเข้าใจเกี่ยวกับกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง ในตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมากขึ้น

บทที่ 4
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยที่ดำเนินมาตามขั้นตอนในบทที่ 3 เป็นการคำนวณหาค่าปริมาณต่างๆ อย่างแม่นตรง เพื่อศึกษาผลที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน สำหรับตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด ได้แก่ อุณหภูมิวิกฤต สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป โดยกำหนดให้มีแถบพลังงานเป็นชนิดสองแถบ อันเนื่องมาจากอันตรกิริยาดึงดูดของคู่คูเปอร์ตามวิธีของโอโกเย่ ซึ่งเกิดจากกอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงาน ของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานชั้น 1 และ 2 ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงของพลังงาน และได้ผลการวิจัยดังนี้

นำสมการของอุณหภูมิวิกฤต ตามสมการ (3.14) ทั้งที่เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวแบบแม่นตรงของแถบพลังงานชั้น 1 และ 2 โดยพิจารณาขณะที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต $(T = T_c)$ จะได้สมการดังนี้

$$T_c = 1.13\omega_D \exp-\left(\left[\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right]\pm\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_2\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_2^2\right)^2+4\left(A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_2}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_2^2}{\lambda_t}\right)\right]}\right)/ -2\left[A_t-I_2\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_2^2 a_\lambda b_\mu\right]\right)$$

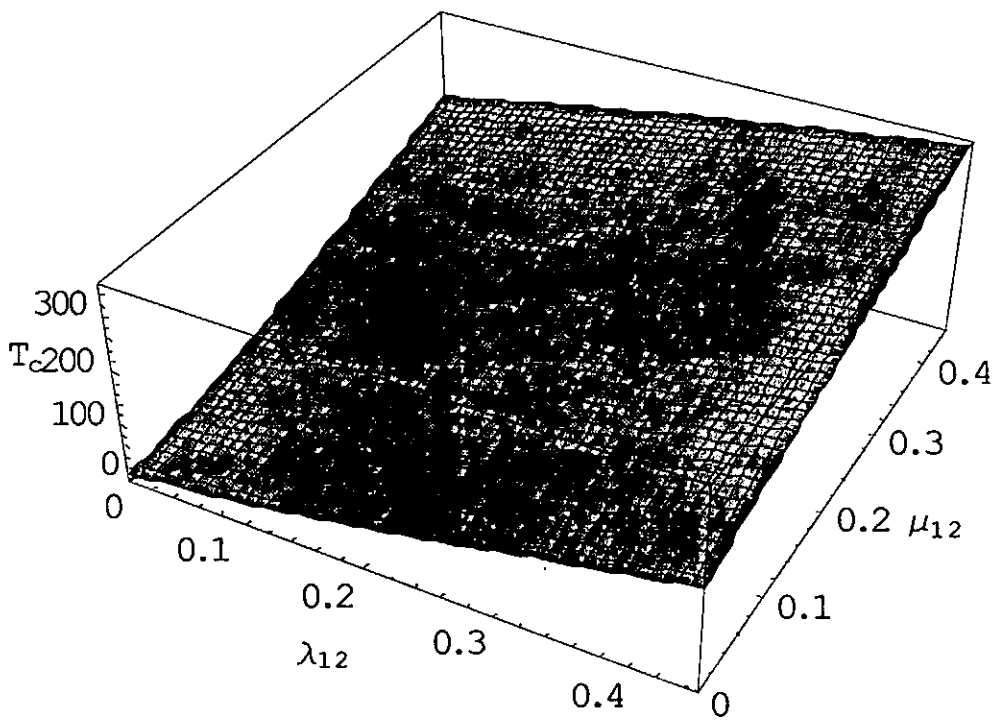
กำหนดให้ $a_\lambda = \frac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_{12}^2-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_t}$ และ $b_\mu = \frac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} = \frac{\mu_{12}^2-\mu_1\mu_2}{\mu_t}$

เมื่อ $\lambda_t = \lambda_1+\lambda_2$ และ $\mu_t = \mu_1+\mu_2$ และ $A_t = \frac{a_\lambda}{\mu_t}+\frac{b_\mu}{\lambda_t}+\frac{2\lambda_{12}\mu_{12}-\lambda_2\mu_1-\lambda_1\mu_2}{\lambda_t\mu_t}$

จากการคำนวณเชิงตัวเลข พบว่าสมการ (3.14) เป็นสมการที่สอดคล้องกับค่าอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากการทดลอง ซึ่งในการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤต จะใช้สมการ (3.9) มาวิเคราะห์เชิงตัวเลขวิธีโดยวิธีทำซ้ำด้วยการคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

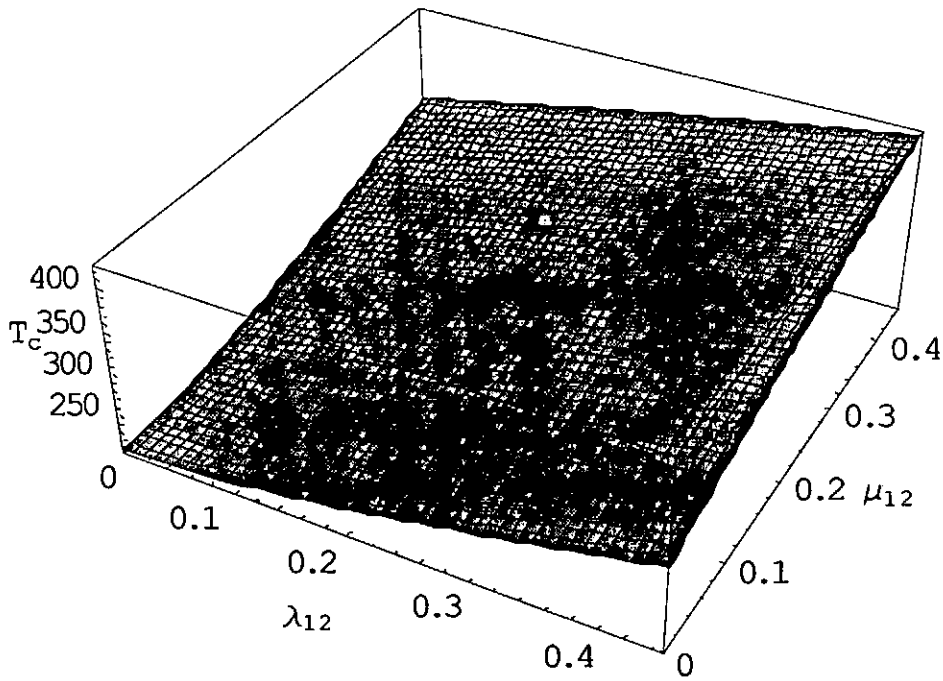
$$\det\begin{bmatrix}(\lambda_1+\mu_1)I_1-1 & (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & \mu_1 I_2 & \mu_{12}I_2\\ (\lambda_{12}+\mu_{12})I_1 & (\lambda_2+\mu_2)I_1-1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2\\ \mu_1 I_1 & \mu_{12}I_1 & \mu_1 I_2-1 & \mu_{12}I_2\\ \mu_{12}I_1 & \mu_2 I_1 & \mu_{12}I_2 & \mu_2 I_2-1\end{bmatrix}=0$$

แล้วนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} โดยกำหนดให้ $T_c = 40\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.1$ และ $\mu_2 = 0.1$

จากภาพประกอบ 12 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม



ภาพประกอบ 13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.4$ และ $\mu_2 = 0.1$

จากภาพประกอบ 13 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม

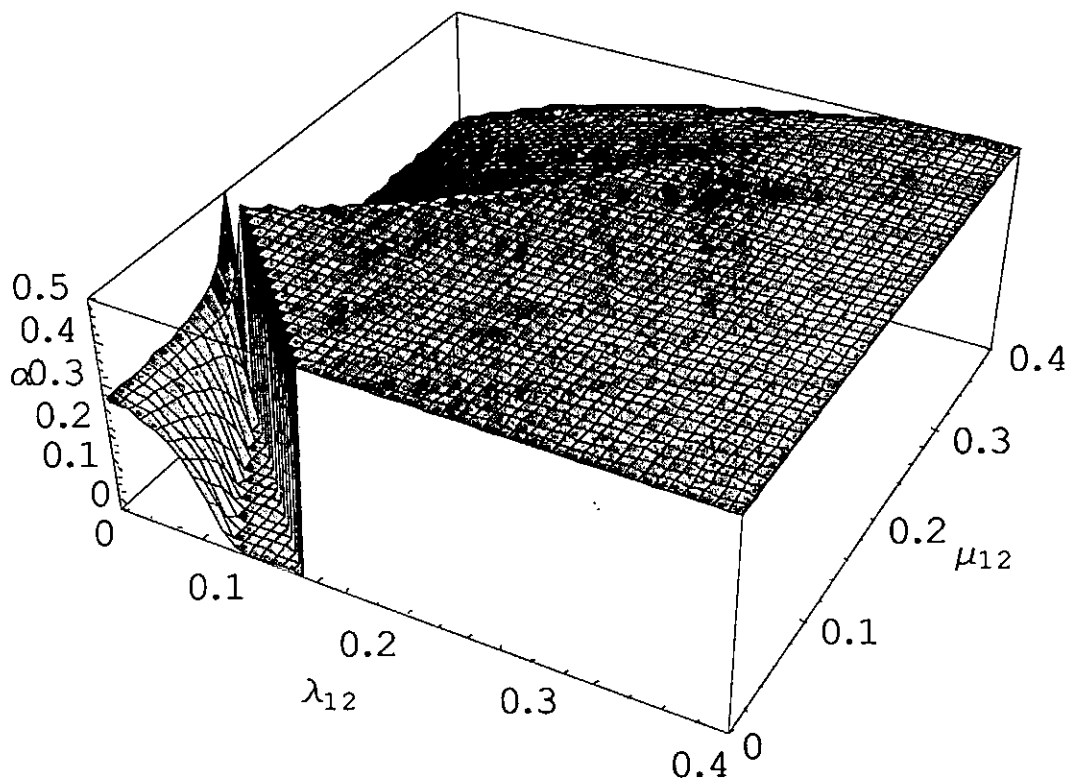
นำสมการ (3.14) ซึ่งเป็นการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมาวิเคราะห์เชิงตัวเลขวิธี โดยวิธีทำซ้ำด้วยการคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica ตามสมการ

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1 - \dfrac{[B]\tanh\left[\dfrac{\omega_c}{2T_c}\right]}{[A]\tanh\left[\dfrac{\omega_D}{2T_c}\right]}}\right)$$

เมื่อกำหนดให้

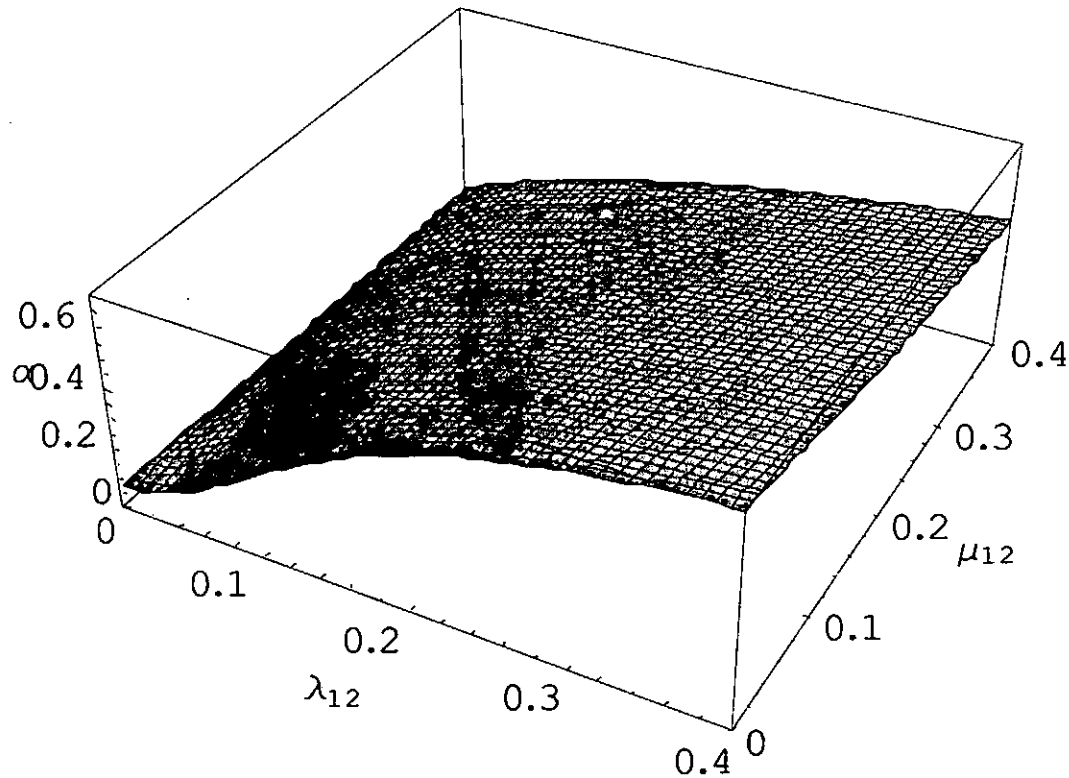
$$[A] = [\lambda_t + I_1\{2\lambda_t a_\lambda + 4\lambda_{12}\mu_{12} + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2) + [(a_\lambda + b_\mu)\mu_t\lambda_t]I_1\} -$$
$$-[\mu_t\lambda_t(1 + 2a_\lambda I_1(1 - b_\mu I_1))I_2 - b_\mu(1 + 2a_\lambda I_1)I_2^2]$$
$$[B] = -[-\mu_t + \{\mu_t\lambda_t(1 + (b_\mu + a_\lambda)I_1)\} - 2\mu_t b_\mu(1 + (1 - \lambda_t I_1(1 + a_\lambda I_1)I_2)]$$

แล้วนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 , λ_2 , μ_1 และ μ_2 โดยกำหนดให้ ค่าคงตัวของการคู่ควบ $T_c = 40\ K$, $\omega_D = 754\ K$,
$\omega_c = 800\ K$ ดังภาพประกอบ 14 – 16



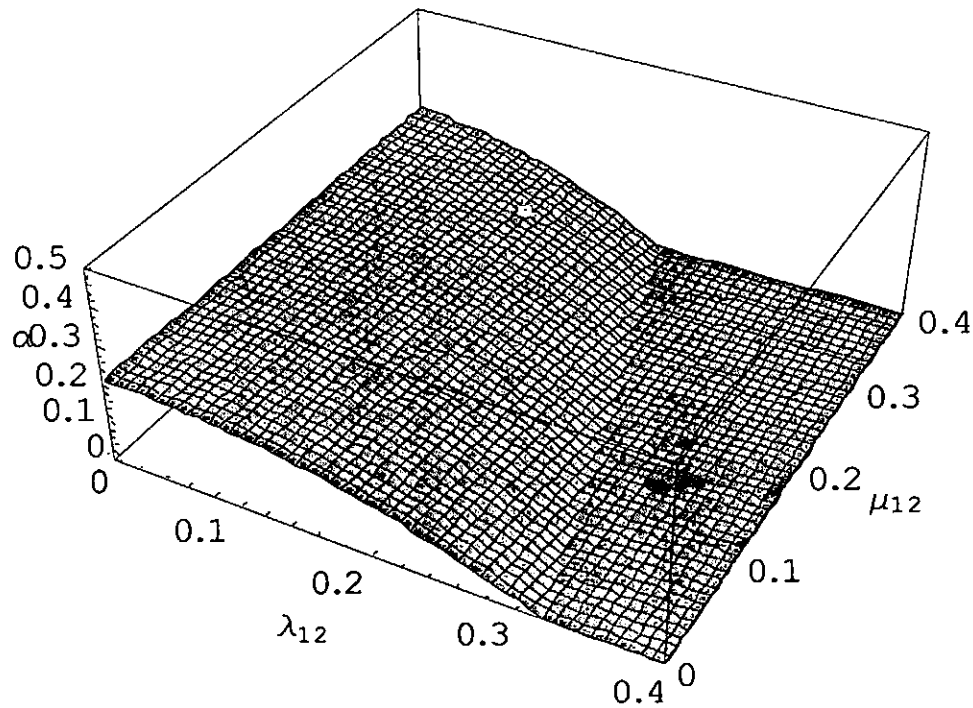
ภาพประกอบ 14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\mu_1 = 0.23$ และ $\mu_2 = 0.23$

จากภาพประกอบ 14 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเริ่มที่ประมาณ 0.2 แล้วค่อยๆ ลดลงต่ำกว่า 0 แล้วมีการกระโดดเพิ่มขึ้นเกินกว่า 0.5 เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม



ภาพประกอบ 15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$

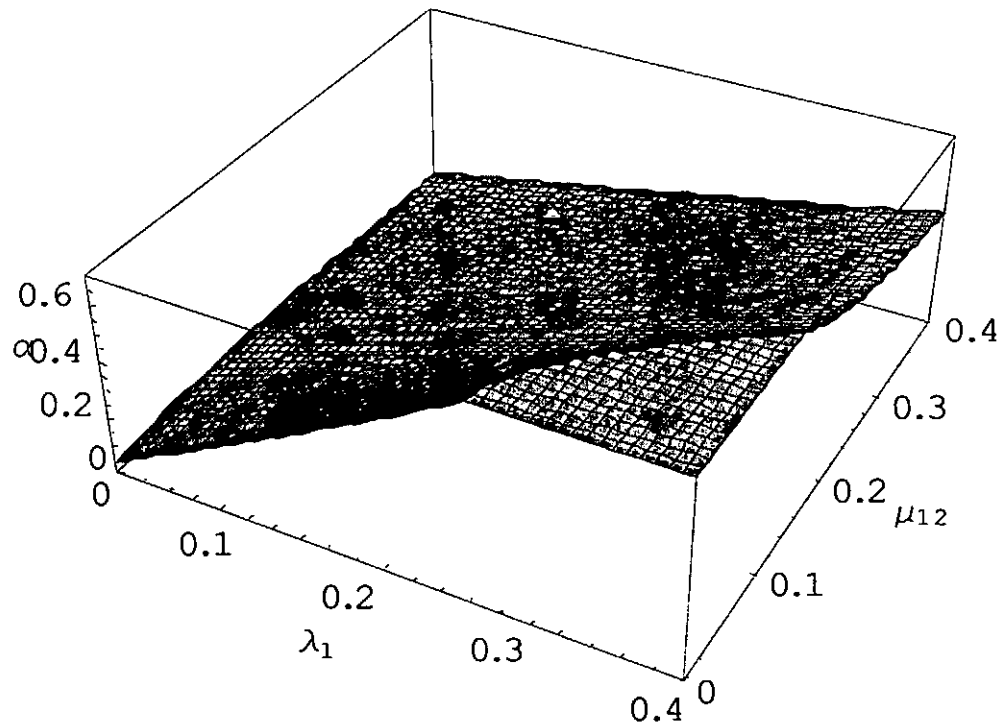
จากภาพประกอบ 15 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม



ภาพประกอบ 16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 1.0$ และ $\mu_2 = 1.0$

จากภาพประกอบ 16 พบว่าถ้าให้ $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 1.0$ และ $\mu_2 = 1.0$ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าลดลง เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม

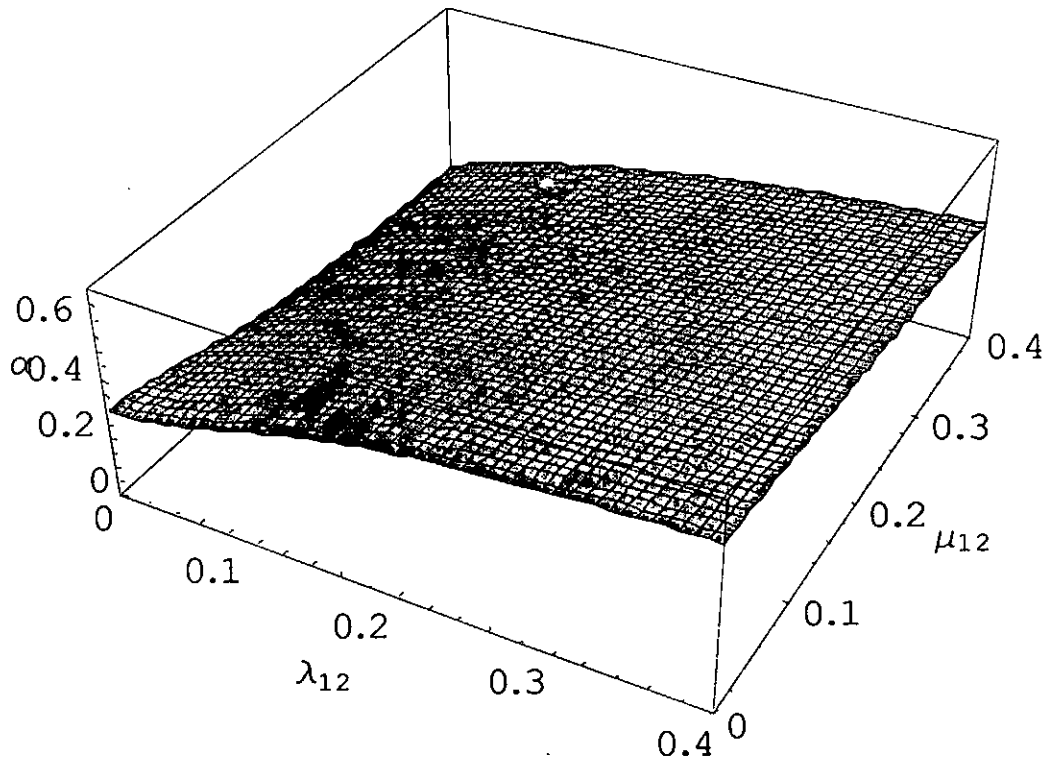
นำสมการ (3.14) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 และ μ_{12} โดยกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบ $\lambda_{12} = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$ $T_c = 40\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 และ μ_{12} โดย $\lambda_{12} = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$

จากภาพประกอบ 17 พบว่าถ้าให้ $\lambda_{12} = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.25$ และ $\mu_2 = 0.15$ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 และ μ_{12} เพิ่ม

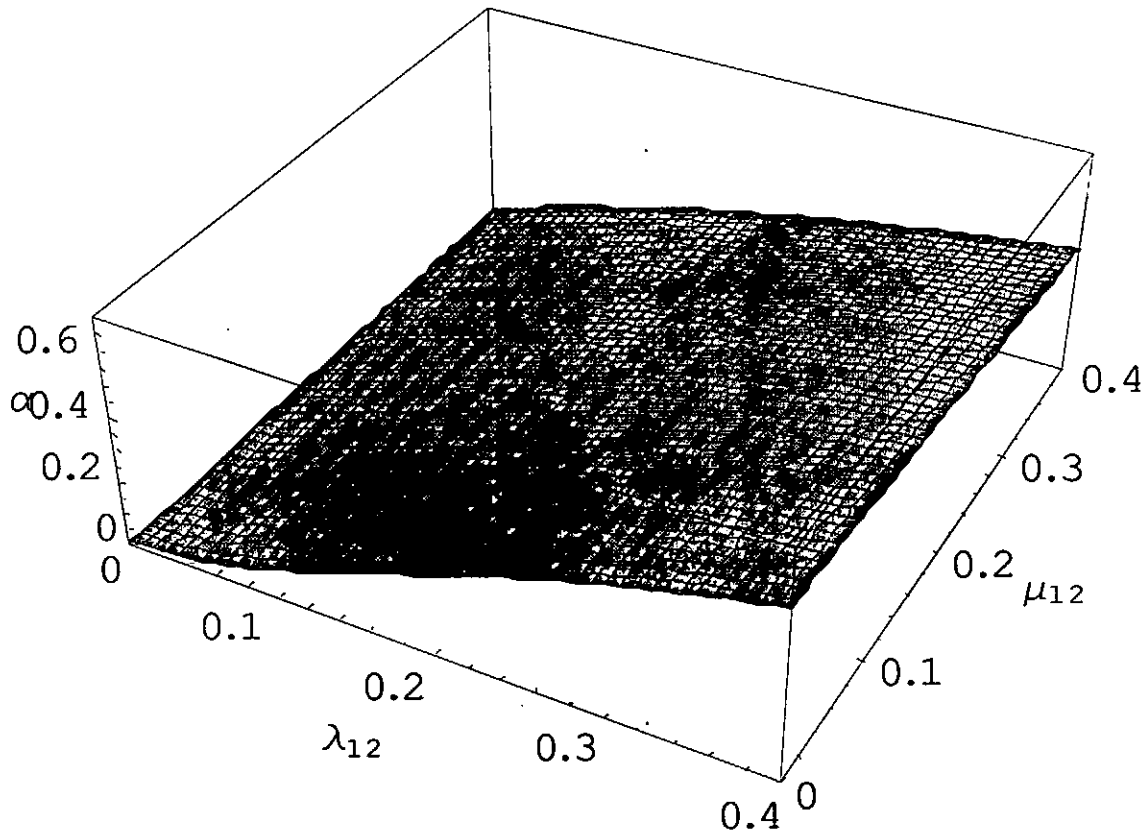
นำสมการ (3.14) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1, λ_2, μ_1 และ μ_2 เมื่อมีการเปลี่ยนอุณหภูมิวกฤตเป็น $T_c = 28\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ ดังภาพประกอบ 18



ภาพประกอบ 18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28\ K$

จากภาพประกอบ 18 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28\ K$ มีค่าเพิ่มขึ้นตั้งแต่ประมาณ 0.2 แต่ไม่เกิน 0.5

นำสมการ (3.14) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1, λ_2, μ_1 และ μ_2 โดยกำหนดให้ ค่าคงตัวของการคู่ควบ $T_c = 110\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ ดังภาพประกอบ 19



ภาพประกอบ 19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.004$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110\ K$

ภาพประกอบ 19 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.004$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110\ K$ มีค่าเพิ่มขึ้นตั้งแต่ประมาณ 0 แต่ไม่เกิน 0.5

นำสมการของอุณหภูมิวิกฤต (T_c) ตามสมการ (3.14) และสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป (α) ตามสมการ (3.20) มาคำนวณด้วยวิธีการทำซ้ำ แล้วนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวกับอุณหภูมิวิกฤต แล้วนำผลการคำนวณ มาเปรียบเทียบกับการทดลอง โดยนำผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่ง $(Y_{1-x-y}Pr_xCa_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$ และ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$ (Soerensen and Gygax : 1995 : 11848) ตามตาราง 1-2

ตาราง 1 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปต่ออุณหภูมิวิกฤตของ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$

z(%)	$T_c(K)$	α
20	67.5	0.04
25	63.0	0.04
40	55.4	0.07
50	38.5	0.02
60	29.4	0.09
70	19.1	0.12
75	12.7	0.13

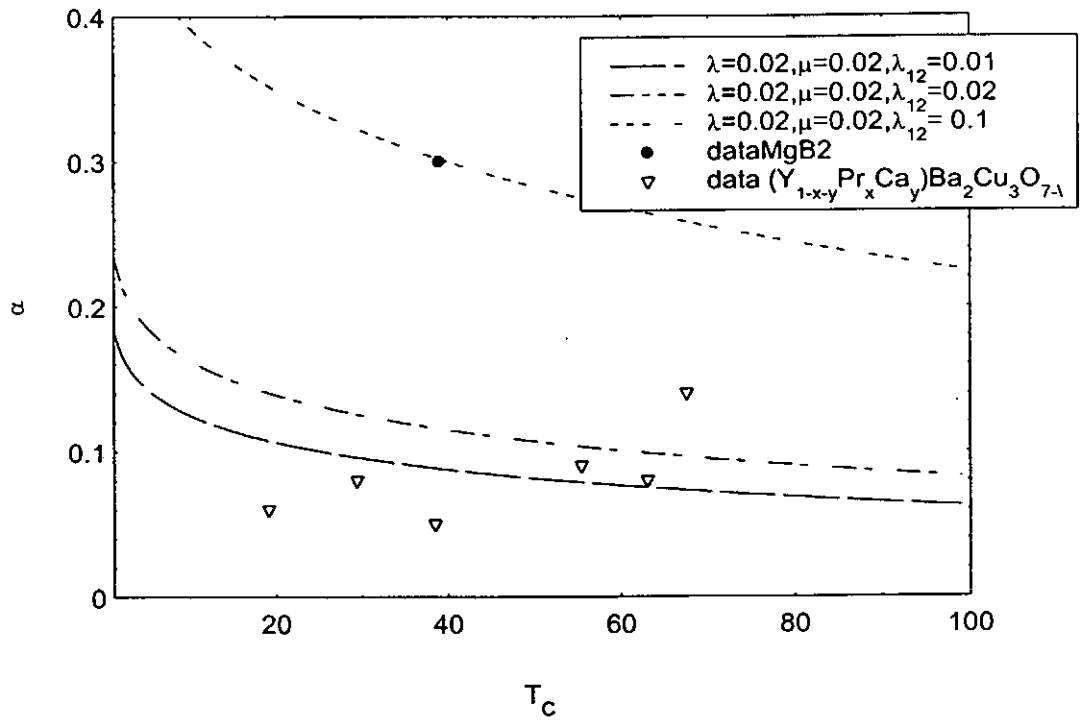
ที่มา : Soerensen G., and Gygax S., (1995) Phys. Rev. B (51) :11848

ตาราง 2 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปต่ออุณหภูมิวิกฤตของ $(Y_{1-x-y}\ Pr_x\ Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$

x(%)	y(%)	$T_c(K)$	α
20	0	67.5	0.14
20	5	63.0	0.08
20	10	55.4	0.09
20	15	38.5	0.05
20	20	29.4	0.08
20	25	19.4	0.06

ที่มา : Soerensen G., and Gygax S., (1995) Phys. Rev. B (51) :11848

จะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับอุณหภูมิวิกฤต ดังภาพประกอบ 20



ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับอุณหภูมิวิกฤต

จากภาพประกอบ 20 พบว่าการคำนวณสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีบางค่าที่ตรงการทดลองของแมกนีเซียมไดโบไรด์ และบางจุดให้ผลใกล้เคียงกับตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

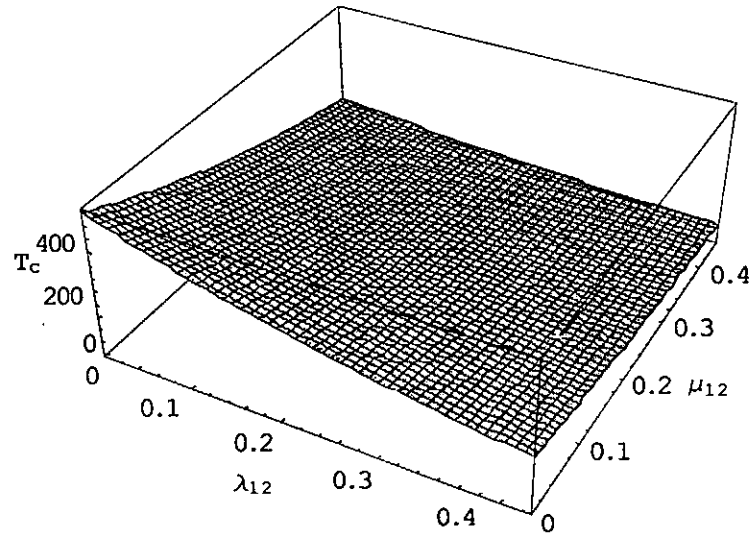
นำสมการของอุณหภูมิวิกฤต ตามสมการ (3.24) ที่เป็นสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปของแถบพลังงานชั้น 1 และ 2 โดยพิจารณาขณะที่อุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิวิกฤต $(T = T_c)$ จะได้สมการดังนี้

$$T_c = 1.36E_F \exp\{-[2/[\left[\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_4\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_4^2\right]-$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{1}{\mu_t}+\frac{1}{\lambda_t}+I_4\left(\frac{2b_\mu}{\lambda_t}-1\right)-b_\mu I_4^2\right)^2+4\left(A_t-I_4\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_4^2 a_\lambda b_\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_t\mu_t}-\frac{I_4}{\lambda_t}-\frac{b_\mu I_4^2}{\lambda_t}\right)\right]}$$

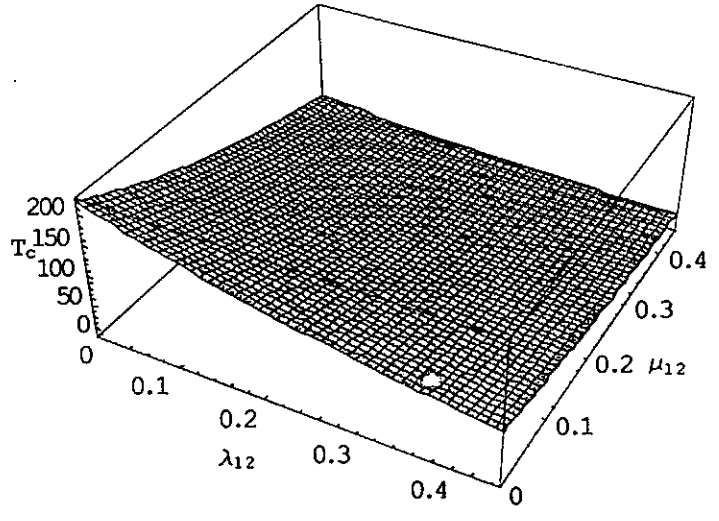
$$-2\left[A_t-I_4\left(a_\lambda+b_\mu\right)-I_4^2 a_\lambda b_\mu\right]]+\left[\ln\frac{E_F}{\omega_D}\right]^2-1]^{1/2}\}$$

นำผลการคำนวณของอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปที่ได้จากสมการช้างต้นนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} ดังภาพประกอบ 21 – 22



ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.2$, $\mu_1 = 0.2$ และ $\mu_2 = 0.2$

จากภาพประกอบ 21 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าลดลง



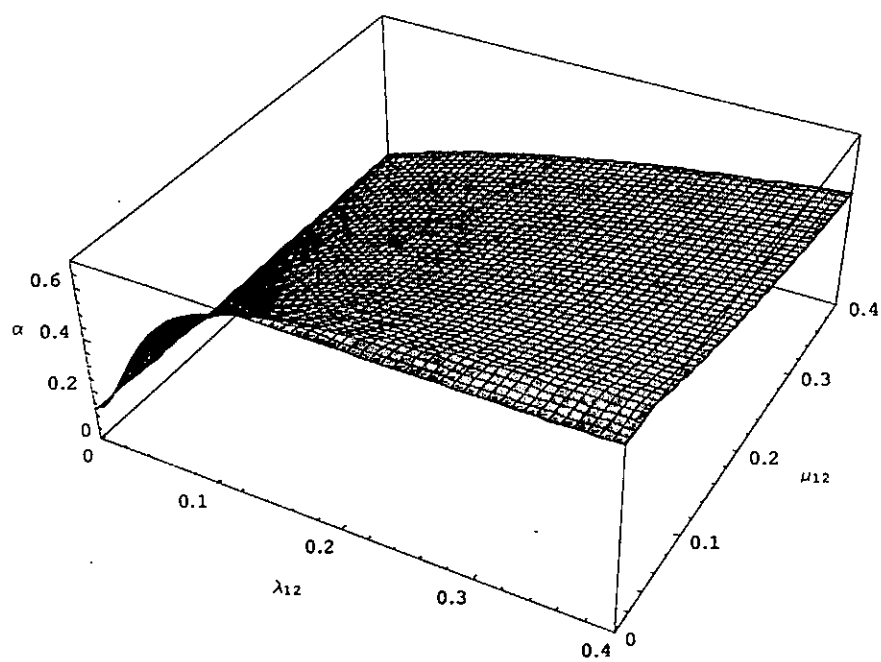
ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.4$, $\lambda_2 = 0.4$, $\mu_1 = 0.4$ และ $\mu_2 = 0.4$

จากภาพประกอบ 22 พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าลดลง

นำสมการ (3.25) ซึ่งเป็นการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมาวิเคราะห์เชิงตัวเลขวิธี โดยวิธีทำซ้ำด้วยการคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica ตามสมการ

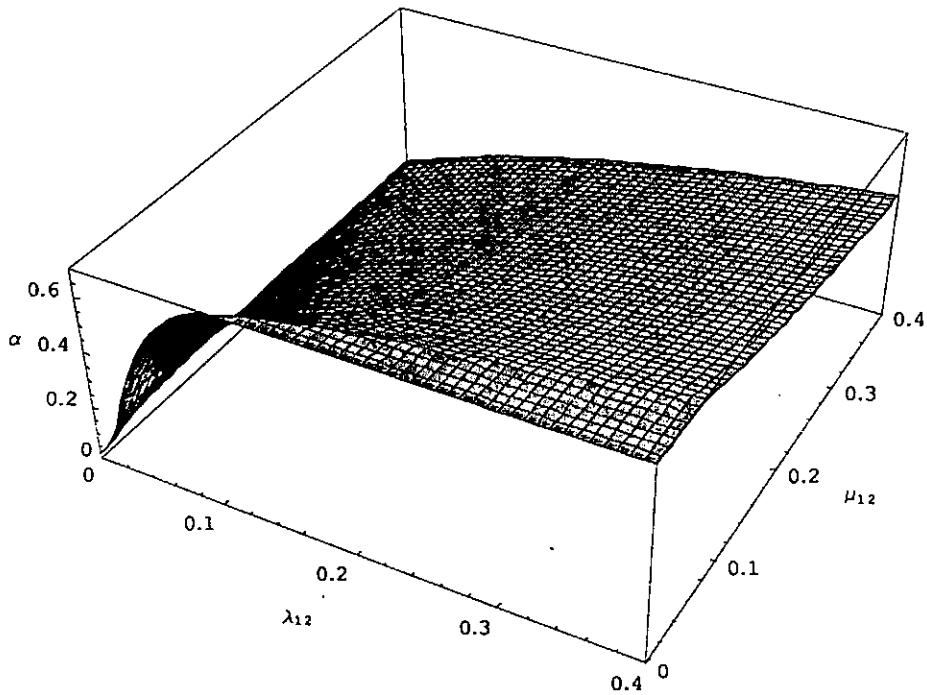
$$\alpha_{VHS} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left[\frac{E_F}{\omega_D}\right]\tanh\left[\frac{\omega_D}{2T_c}\right]}{-F(\omega_c)\frac{[B]}{[A]}+F(\omega_D)} \right)$$

แล้วนำสมการ (3.25) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 , λ_2 , μ_1 และ μ_2 โดยกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบ $T_c = 40\ K, \omega_c = 800\ K\ \omega_D = 754\ K, E_F = 5000$ ดังภาพประกอบ 23 – 24



ภาพประกอบ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.02$ และ $\mu_2 = 0.1$

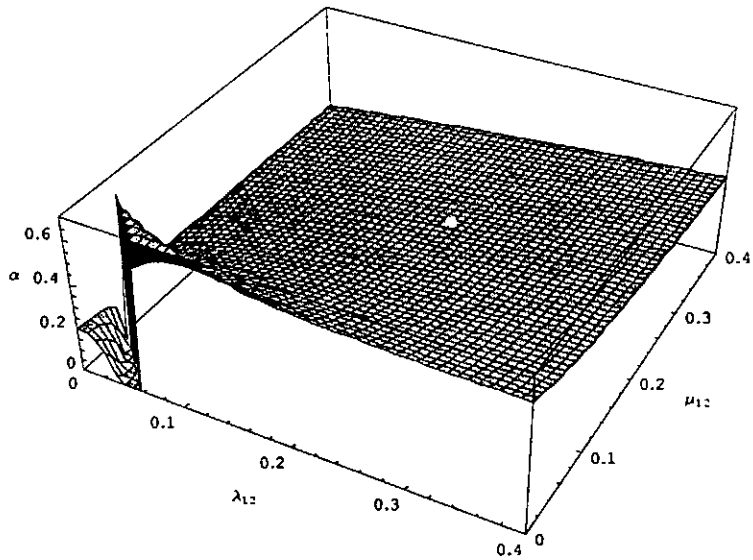
จากภาพประกอบ 23 พบว่าถ้าให้ $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.02$, $\mu_1 = 0.02$ และ $\mu_2 = 0.1$ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม



ภาพประกอบ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.01$, $\mu_1 = 0.03$ และ $\mu_2 = 0.1$

จากภาพประกอบ 24 พบว่าถ้าให้ $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.01$, $\mu_1 = 0.03$ และ $\mu_2 = 0.1$ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} เพิ่ม

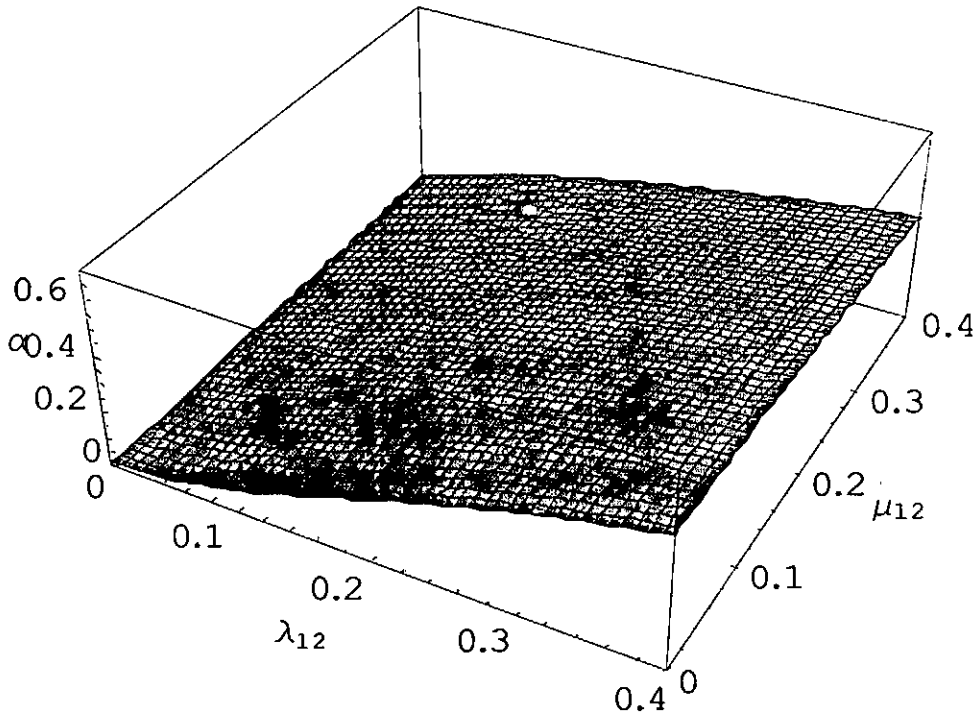
นำสมการ (3.25) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1 , λ_2 , μ_1 และ μ_2 โดยกำหนดให้ ค่าคงตัวของการคู่ควบ $T_c = 28\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$, $E_F = 5000$ ดังภาพประกอบ 25



ภาพประกอบ 25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28\ K$

ภาพประกอบ 25 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.08$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.05$ ของ $Ba_{0.6}K_{0.4}BiO_3$ ที่ $T_c = 28\ K$ มีค่าเริ่มต้นที่ประมาณ 0.2 แล้วค่อยลดลงหลังจากนั้นก็มีการกระโดดแล้วค่อยลดลงจนมีค่าประมาณ 0.5

นำสมการ (3.25) มาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_1, λ_2, μ_1 และ μ_2 โดยกำหนดให้ ค่าคงตัวของการคู่ควบ $T_c = 110\ K$, $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$, $E_F = 5000$ ดังภาพประกอบ 26

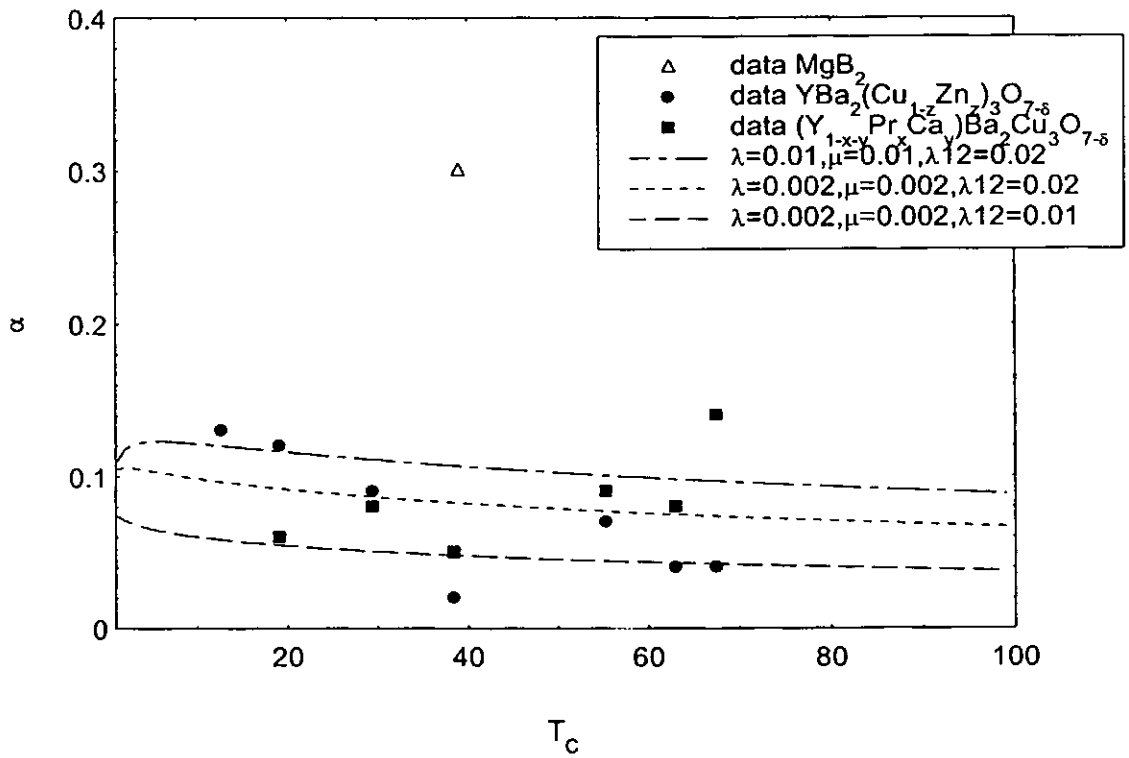


ภาพประกอบ 26 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.003$, $\lambda_2 = 0.07$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110\ K$

ภาพประกอบ 26 พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับค่าคงตัวของการคู่ควบ λ_{12} และ μ_{12} โดย $\lambda_1 = 0.003$, $\lambda_2 = 0.07$, $\mu_1 = 0.07$ และ $\mu_2 = 0.5$ ของ $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-x}$ ที่ $T_c = 110\ K$ มีค่าเพิ่มขึ้นตั้งแต่ประมาณ 0 แต่ไม่เกิน 0.5

นำสมการของอุณหภูมิวิกฤต (T_c) ตามสมการ (3.24) และสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป (α) ตามสมการ (3.25) มาคำนวณด้วยวิธีการทำซ้ำ แล้วนำมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวกับอุณหภูมิวิกฤต แล้วนำผลการคำนวณ มาเปรียบเทียบกับการทดลอง โดยนำผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่ง $(Y_{1-x-y}Pr_xCa_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$ และ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\gamma}$ (Soerensen and Gygax : 1995 : 11848) ตามตาราง 1-2

จะได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว กับอุณหภูมิวิกฤต ดังภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป กับอุณหภูมิวิกฤต

จากภาพประกอบ 27 พบว่าการคำนวณสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป มีบางค่าที่ตรงการทดลองของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง แต่ไม่สอดคล้องกับแมกนีเซียมไดโบไรด์

บทที่ 5
สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาผลของอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานแถบ 1 และ 2 คำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของ MgB_2 และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางตัว โดยใช้ความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวและแบบแวนโฮป ซึ่งมีอันตรกิริยาระหว่างแถบพลังงานนี้เป็นพลังงานปริมาณน้อยๆที่เกิดจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนระหว่างแถบพลังงานแถบ 1 และ 2 ทำให้พลังงานมีการเปลี่ยนแปลง

สรุปผล

ในการคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต ได้ผลต่างๆดังนี้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต กับค่าคงตัวของการคู่ควบดังนี้

จากภาพประกอบ 12 – 13 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบ $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.1$, $\mu_1 = 0.1$ และ $\mu_2 = 0.1$ แล้วเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบแต่ละตัว โดยมีค่าไม่เกิน 0.5 ที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพิ่มขึ้นตามค่าคงตัวของการคู่ควบ

จากภาพประกอบ 21 – 22 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบ $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.2$, $\mu_1 = 0.2$ และ $\mu_2 = 0.2$ แล้วเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบแต่ละตัว โดยมีค่าไม่เกิน 0.5 ที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าลดลงตามค่าคงตัวของการคู่ควบ

2. ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปกับค่าคงตัวของการคู่ควบมีดังนี้

จากภาพประกอบ 14 - 17 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบมีค่าเป็นแปรเปลี่ยน $\lambda_1 < 0.02$, $\lambda_2 < 0.02$, $\mu_1 < 1.0$, $\mu_2 < 1.0$ โดยมีพลังงานขอบเขต $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ และอุณหภูมิวิกฤต $T_c = 40\ K$ พบว่าเมื่อเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบจะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีค่าเพิ่มขึ้นแต่ไม่เกิน 0.5

จากภาพประกอบ 18 -19 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบมีค่าเป็นแปรเปลี่ยน $\lambda_{12} < 0.02$, $\lambda_2 < 0.02$, $\mu_1 < 0.25$, $\mu_2 < 0.15$ โดยมีพลังงานขอบเขต $\omega_D = 754\ K$, $\omega_c = 800\ K$ และแปรเปลี่ยนอุณหภูมิวิกฤต T_c เป็น 28 , 110 K ตามลำดับ พบว่าเมื่อเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบจะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีค่าเพิ่มขึ้น

จากภาพประกอบ 23 - 24 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบมีค่าเป็นแปรเปลี่ยน $\lambda_1 < 0.02$, $\lambda_2 < 0.02$, $\mu_1 < 0.05$, $\mu_2 < 0.05$ โดยมีพลังงานขอบเขต $\omega_D = 754$ K , $\omega_c = 800$ K , $E_F = 5000$ และอุณหภูมิวิกฤต $T_c = 40$ K มีค่าคงที่พบว่าเมื่อเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบจะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีค่าเพิ่มขึ้น

จากภาพประกอบ 25 - 26 เมื่อกำหนดให้ค่าคงตัวของการคู่ควบมีค่าเป็น λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 โดยมีพลังงานขอบเขต $\omega_D = 754$ K , $\omega_c = 800$ K , $E_F = 5000$ และแปรเปลี่ยนอุณหภูมิวิกฤต T_c เป็น 28 ,110 K ตามลำดับ พบว่าเมื่อเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบจะทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งให้ผลสอดคล้องกับการทดลอง

3. ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤตมีดังนี้

จากภาพประกอบ 20 พบว่าเมื่อใช้ความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวจะทำให้ตัวนำยวดยิ่ง MgB_2 และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิดสามารถคำนวณได้ผลซึ่งตรงตามทฤษฎีของ BCS โดยการเลือกค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในขอบเขตการคู่ควบน้อยๆ มีผลทำให้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปน้อยกว่า 0.5 และจากการเขียนกราฟจะเห็น MgB_2 จะตรงกับผลที่คำนวณได้

จากภาพประกอบ 27 พบว่าเมื่อใช้ความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปตัวนำยวดยิ่ง MgB_2 ไม่สามารถคำนวณให้ผลได้ตรงกับค่าที่ทดลองได้ โดยค่าที่คำนวณได้จะมีค่าน้อยกว่า MgB_2 แต่ตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิดสามารถคำนวณให้ผลได้ตรงกับค่าที่ทดลองได้ซึ่งจะมีค่าอยู่ที่ประมาณต่ำกว่า 0.3

เมื่อพิจารณา พบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิดมีค่าไม่เกิน 0.5 และจากการเปลี่ยนค่าคงตัวของการคู่ควบ พบว่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด ไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่าคงตัวของการคู่ควบตัวใดตัวหนึ่งเท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับค่าคงตัวของการคู่ควบทั้งสี่ตัว ที่มีค่าเหมาะสมกันเท่านั้นและใช้ได้กับสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว และสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปจะใช้ได้กับตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิสูงบางชนิด

อภิปรายผล

1. จากผลการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวพบว่าค่าของอุณหภูมิวิกฤตจะขึ้นกับค่าคงตัวของการคู่ควบถ้าเพิ่มค่าคงตัวอุณหภูมิวิกฤตเพิ่ม ส่วนการคำนวณอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนามแน่นสถานะแบบแวนโฮปจะให้ผลการคำนวณที่ตรงข้าม กล่าวคือถ้าเพิ่มค่าคงตัวของการคู่ควบจะทำให้อุณหภูมิวิกฤตลด

2. จากผลการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัวของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ ได้ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปประมาณ 0.3 ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลอง ของบุดโค และฮิงค์ และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด เช่น จากการทดลองของ Soerensen G., and Gygax S., (1995) Phys. Rev. B (51) ในกลุ่มของ $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$, $(Y_{1-x}\,Pr_x)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ และ $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Cay)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$

3. จากผลการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป ให้ผลไม่สอดคล้องกับการทดลองของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์ แต่การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป จะให้ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปสอดคล้องกับผลการทดลองของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด เช่น จากการทดลองของ Soerensen G., and Gygax S., (1995) Phys. Rev. B (51) ในกลุ่มของ $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\gamma}$, $(Y_{1-x}\,Pr_x)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ และ $(Y_{1-x-y}\,Pr_x\,Ca_y)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$

4. จากผลการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเทียบกับสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ของตัวนำยวดยิ่งแมกนีเซียมไดโบไรด์และตัวนำยวดยิ่งบางชนิด โดยการเปลี่ยนค่าคงตัวของการคู่ควบ ผู้วิจัยพบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าคงตัวของการคู่ควบเพิ่ม แสดงว่าผลจากอันตรกิริยาที่ไม่ใช่โฟนอน จะเพิ่มกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งของแมกนีเซียมไดโบไรด์และตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงบางชนิด

ตามทฤษฎีบีซีเอสพบว่า กลไกสำคัญที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง มีอันตรกิริยาอิเล็กตรอน – โฟนอน เป็นกลไกสำคัญ ให้ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป เท่ากับ 0.5 และจากผลการวิจัยพบว่าเมื่อใช้ความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว เพื่อหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปพบว่ามีสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปมีความสอดคล้องกับการทดลอง แต่ความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮปจะใช้อธิบายสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงได้ดี

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการช่องว่างพลังงานแบบสองแถบพลังงาน โดยใช้ขอบเขตความหนาแน่นสถานะทั้งแบบคงตัว และแบบแวนโฮป และใช้อันตรกิริยาของอิเล็กตรอน – โฟนอนอย่างอ่อน จากการคำนวณได้ใช้แบบจำลองที่มีตัวแปรมากเกินไป ทำให้ผลที่ได้จากการคำนวณไม่ละเอียดเพียงพอ น่าจะมีการจัดรูปแบบสมการโดยใช้แบบจำลองที่มีความหนาแน่นสถานะแบบอื่นๆที่สามารถรวมสมการให้มีตัวแปรน้อยลง แล้วนำมาวิเคราะห์ดู ว่าแบบใดให้ผลใกล้เคียงกับผลการทดลอง และเหมาะสมกว่า หรืออาจมีเงื่อนไขอื่นที่ยังไม่ได้ศึกษาภายใต้แนวคิดเดียวกันเช่น สมการช่องว่างพลังงานที่มีมากกว่าสองแถบ ผลของความหนาแน่นสถานะที่มีอันตรกิริยาแบบรุนแรงต่อไป

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Bardeen, J. Cooper, N. & Shrieffer, J.R. (1959). "Theory of Superconductivity," *Physical Review.* 108(5) : 1175 -1204.

Bednorz, J.G. & Muller, K.A. (1986, April). "Possible High T_c Superconductivity in the Be – La – Cu - O System," *Zertachrift or Physik B.* (64): 189 -196

Bouquet, F. et al. (2001). "Phenomenological Two – Gap Model for the Specific Heat of MgB_2. " *Euro Physics Letters.* (56) : 856.

Bud'ko, et al. (2001, February). "Boron Isotope effect in Superconducting MgB_2". *Physical Review Letters.* 86(9) : 1877 - 1880.

Buckel.W. (1991). *Superconductivity : Fundamental and Applications.* New York : VCH Publihers Inc.

Chu, C.W. et al. (1987, January). " Evidence for Superconductivity above 40 K in the La – Ba -Cu-O Compound System," *Physical Review Letters.* 58(4) : 405 - 410.

Franck, J.P. & Mohamed, M.A.K. "Observation of Oxygen Isotope effect in Superconducting" *Physical Review B.* (44) : 5318 -5321.

Grosso, G. & Pastori. (2000). *Superconductivity.* UK. : Acadamic Press.

Kristoffel, N. (1997, May). "Interband Gap Feature of a Two – Band Supercnductor," *Physica Status Solidi*(b). 201 : 13 -14.

Ketterson, J.B. & Song, S.N. (1999). *Superconductivity.* UK. : Springer.

Kresin, H. & Wolf,V.Z. (1990). *Fundamentals of Superconductor.* New York : Plenum Publishing

Ketterson, & Buckel. (1999) . :2.; citing Meissner., & Ochsenfeld.(1933) Naturewissenschaften. (21) : 787

M*ü* ller, K.A. (1986) Review of Modern Physics. *Physical Review B.* (64) : p.189.

Okoye, C.M.I. (1997, February). "A Two Band Model of the Isotope Effect of the High T_c Superconductors ". *Chinese Journal of Physics.* 36(1) : 53 -64.

Okoye, C.M.I. (1999, February). "Isotope shift exponent in two band high -T_c Superconductors with linear energy dependent electronic density of states".*Physica C.* (313) : 197 – 204

Soerensen G. & Gygax S. (1995,May) "Evaluation of Oxygen Isotope Experiments on Pr-,Ca-, and Zn- substituted $YBa_2Cu_3O_7$ " *Physical Review B* (51) :11848 - 11859

Testardi, L.R. Wernick, J.H. & Royer, W.A. (1974). *Solid state Community.* 15(1).

Tsuei, C.C. & Kirtley, J.R. (1997,August). " Phase – Sensitive Tess of Pairing Symmetry in Cuprate Superconductors, " *Physica C.* 282 – 287 : 4 – 11.

Yoksan, S. (1991). *Isotope effect in High – t_c Superconductors.* Solid State Communication. (78). : 236-286

ภาคผนวก

ภาคผนวก
การคำนวณอุณหภูมิวิกฤต

ภาคผนวก ก

การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤต

พิจารณาสมการ (3.7- ก)

$$I_1(T_c) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$$

พิจารณา $I_1(T_c) = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon} d\varepsilon$ โดยใช้การเปลี่ยนตัวแปร $x = \frac{\varepsilon}{2T_c}$ จะได้ $dx = \frac{1}{2T_c} d\varepsilon$

ขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็น 0 ถึง $\frac{\omega_D}{2T_c}$

แทนค่าจะได้ $$I_1(T_c) = \int_0^{\omega_D} \frac{1}{x} \tanh x dx \qquad (1\text{-ก})$$

จากความสัมพันธ์ $\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + a^2}$ โดย $a = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ สำหรับเฟอร์มิออน แทนลงในสมการ จะได้

$$I_1(T_c) = \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + a^2}\right) dx$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\omega_D/2T_c} \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \tanh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{(2n+1)\pi T_c}\right)$$

พิจารณาระบบในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ สามารถใช้การประมาณซึ่งจะได้ $\frac{\omega_D}{\pi T_c} \to \infty$ ทำให้

$\tanh^{-1}\infty = \frac{\pi}{2}$ นำมาแทนค่าในสมการ(3.1) โดยใช้หลักการรวม ตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\omega_D}{2T_c} - \frac{1}{2}$ จะได้

$$I_1(T_c) = 2\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

พิจารณาเทอม $\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)}$ กระจายในรูปอนุกรมอนันต์จะได้

$$\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n+1)} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{\omega_D/2T_c}$$

$$= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{\omega_D/2T_c} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\omega_D/2T_c-1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c}} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c}-\frac{1}{2}} \frac{1}{n}$$

$$= \gamma + \ln\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}\left\{\gamma + \ln\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

เมื่อ $\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} = \gamma + \ln N$ เมื่อ $N \to \infty$ และ $\gamma = 0.5772156649$ (Jahnke ; & Emde.1945:235)

$$= \ln\left(\frac{2e^{\gamma}\omega_D}{\pi T_c}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1.13\omega_D}{T_c}\right) \qquad \text{(2-ก)}$$

ภาคผนวก ข

พิจารณาสมการ (3.7-ข)

$$I_2(T_c)=\int_{\omega_D}^{\omega_c}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon$$

สำหรับ $I_2(T_c)=\int_{\omega_D}^{\omega_c}\frac{\tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T_c}\right)}{\varepsilon}d\varepsilon$ ใช้การเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x=\frac{\varepsilon}{2T_c}$ จะได้ $dx=\frac{1}{2T_c}d\varepsilon$

ขอบเขตของการอินทิเกรตจะเป็น 0 ถึง $\frac{\omega_D}{2T_c}$ และใช้ $\tanh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x}{x^2+a^2}$

โดย $a=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ เนื่องจาก $\omega_c \rangle \omega_D$ ทำให้ $\int_{\omega_D/2T_c}^{\omega_c/2T_c}=\int_0^{\omega_c/2T_c}-\int_0^{\omega_D/2T_c}$ จะเป็น

$$\begin{aligned}
I_2(T_c) &= \int_{\omega_D/2T_c}^{\omega_c/2T_c}\frac{1}{x}\tanh x dx \\
&= \int_0^{\omega_c/2T_c}\frac{1}{x}\tanh x dx-\int_0^{\omega_D/2T_c}\frac{1}{x}\tanh x dx \\
&= \int_0^{\omega_c/2T_c}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x}{x^2+a^2}\right)dx-\int_0^{\omega_D/2T_c}\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x}{x^2+a^2}\right)dx \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega_c/2T_c}\frac{1}{x^2+a^2}dx-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\omega_D/2T_c}\frac{1}{x^2+a^2}dx \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi T_c}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi T_c}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi T_c}\right)\right]
\end{aligned}$$

(1-ข)

พิจารณา กรณีที่ $\omega_D \rangle\rangle T_c$ ซึ่งจะได้ $\frac{\omega_D}{2T_c}\to\infty$ มีขอบเขตตั้งแต่ $n=0-\left(\frac{\omega_D}{2T_c}-\frac{1}{2}\right)$ จะได้

$\sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c}-\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\ln\left(\frac{1.13\omega_D}{T_c}\right)$ แทนลงในสมการ (1-ข) จะได้

$$\begin{aligned}
I_2(T_c) &= \left[\ln\left(\frac{1.13\omega_c}{T_c}\right)-\ln\left(\frac{1.13\omega_D}{T_c}\right)\right] \\
&= \ln\left(\frac{\omega_c}{\omega_D}\right)
\end{aligned}$$

(2-ข)

ภาคผนวก ค

การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤต

โดยใช้แบบจำลองความหนาแน่นเป็น

$$N(E)=N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right| \qquad (1\text{-ค})$$

แทนค่าในสมการช่องว่างพลังงานของ BCS เป็น

$$\frac{2}{N(0)v}=\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right|\tanh\left[\frac{E-E_F}{2Tc}\right]\frac{dE}{E-E_F} \qquad (2\text{-ค})$$

ใช้การประมาณ เนื่องจาก $\tanh X = X$ เมื่อ $X \langle 1$ (3-ค)

และ $\tanh X = 1$ เมื่อ $X \rangle 1$ (4-ค)

แทนค่าสมการ (3-ค) และ (4-ค) ในสมการ (2.ค)

$$\frac{2}{v}=\int_{-\omega_D}^{\omega_D}N(0)\ln\left|\frac{E_F}{E-E_F}\right|\tanh\left[\frac{E-E_F}{2Tc}\right]\frac{dE}{E-E_F}$$

$$\frac{2}{N(0)v}=\int_{-\omega_D}^{\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\tanh\left[\frac{X}{2Tc}\right]\frac{dX}{X}$$

$$=2\int_{0}^{2T_c}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\tanh\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X}+2\int_{2T_c}^{\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\tanh\left[\frac{X}{2T_c}\right]\frac{dX}{X}$$

$$=2\int_{0}^{2T_c}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\left[\frac{X}{2Tc}\right]\frac{dX}{X}+2\int_{2T_c}^{\omega_D}\ln\left|\frac{E_F}{X}\right|\frac{dX}{X}$$

$$=\left[\ln\frac{eE_F}{2T_c}\right]^2-\ln^2\frac{E_F}{\omega_D}+1$$

ได้อุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$T_c=1.36E_F\exp\left\{-\left[\frac{2}{N(0)v}+\left[\ln\frac{E_F}{\omega_D}\right]^2-1\right]^{1/2}\right\} \qquad (5\text{-ค})$$

ภาคผนวก

โปรแกรม Mathimatica 4.0

โปรแกรม Mathematica 4.0
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว

```
ClearAll[tc, ff11, t3, x, i1, i2, aa];

ωd = 754; ef = 5000;
ωc = 800;


λ1 = 0.1;
λ2 = 0.1;

μ1 = 0.4;
μ2 = 0.1;

i2 = N[Log[ωc / ωd]];



tc[λ12_, μ12_] := 1.13 * ωd * Exp[(-1) * ((λ1 + λ2 + μ1 + μ2
          + i2 * (-((λ1 + λ2) * μ1) - (λ1 + λ2 + 2 * μ1) * μ2
             + 2 * μ12 * μ12 + (λ1 + λ2) * (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2)
          - Sqrt[(λ1 - λ2 + μ1 - μ2) ^2 + 4 * (λ12 + μ12) * (λ12 + μ12)
            + i2 * (-μ1 - μ2 + (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2) * (2 * ((λ1 - λ2) * (λ1 - λ2 + μ1 - μ2)
                  + 2 * (λ12 * μ12 + λ12 * (2 * λ12 + μ12))) +
               ((λ1 - λ2) ^2 + 4 * λ12 * λ12) * i2 * (-μ1 - μ2 + (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2))]) /
        (2 * ((λ1 + μ1) * (λ2 + μ2) - (λ12 + μ12) * (λ12 + μ12) +
            i2 * (-(λ2 * μ1 * μ2) + λ12 * λ12 * (μ1 + μ2) + λ2 * μ12 * μ12
               - λ1 * (μ1 * μ2 + λ2 * (μ1 + μ2) - μ12 * μ12)
               + (λ1 * λ2 - λ12 * λ12) * (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2))))];


Plot3D[tc[λ12, μ12], {λ12, 0, 0.45}, {μ12, 0, 0.45}, PlotPoints → 50,
 AxesLabel → {"λ12", "μ12", "Tc"}]
```

โปรแกรม Mathematica 4.0
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

```
ClearAll[tc, ff11, t3, x, i1, i2, aa];

ωd = 754; ef = 5000;
ωc = 800;

λ1 = 0.4;
λ2 = 0.4;

μ1 = 0.4;
μ2 = 0.4;

i2 = N[(Log[ef^2 / (ωd * ωc)]) * (Log[ωc / ωd])];

tc[λ12_, μ12_] := 1.36 * ef * Exp[(-1) * (((2 / ((λ1 + λ2 + μ1 + μ2 + i2 * (-((λ1 + λ2) * μ1)
                    - (λ1 + λ2 + 2 * μ1) * μ2 + 2 * μ12 * μ12 + (λ1 + λ2) * (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2)
                - Sqrt[(λ1 - λ2 + μ1 - μ2)^2 + 4 * (λ12 + μ12) * (λ12 + μ12)
                  + i2 * (-μ1 - μ2 + (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2) * (2 * ((λ1 - λ2) * (λ1 - λ2 + μ1 - μ2)
                        + 2 * (λ12 * μ12 + λ12 * (2 * λ12 + μ12)))
                    + ((λ1 - λ2)^2 + 4 * λ12 * λ12) * i2 * (-μ1 - μ2 + (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2))]) /
              (2 * ((λ1 + μ1) * (λ2 + μ2) - (λ12 + μ12) * (λ12 + μ12)
                + i2 * (-(λ2 * μ1 * μ2) + λ12 * λ12 * (μ1 + μ2) + λ2 * μ12 * μ12
                  - λ1 * (μ1 * μ2 + λ2 * (μ1 + μ2) - μ12 * μ12)
                  + (λ1 * λ2 - λ12 * λ12) * (μ1 * μ2 - μ12 * μ12) * i2)))) + Log[ef / ωd])^2 - 1)^(1/2

Plot3D[tc[λ12, μ12], {λ12, 0, 0.45}, {μ12, 0, 0.45}, PlotPoints → 50,
 AxesLabel → {"λ12", "μ12", "Tc"}]
Print[N[tc[0.45, 0]], "    ", N[tc[0, 0.45]]]
```

โปรแกรม Mathematica 4.0
การคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป

กรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว

```
ClearAll[a];

ωd = 745;
ωc = 800;

λ2 = 0.003;
λ1 = 0.07;

μ1 = 0.07;
μ2 = 0.5;

tc = 125;

i1 = NIntegrate[Tanh[x/(2*tc)]/x, {x, 0.0, ωd}];
i2 = NIntegrate[Tanh[x/(2*tc)]/x, {x, ωd, ωc}];

a[λ12_, μ12_] :=
  (1/2) *
   ((λ1 + λ2 +
       i1 * (2 * λ12 * (λ12 + 2*μ12) + λ1 * (-2 * λ2 + μ1 - μ2) +
          λ2 * (-μ1 + μ2) (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2
             - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2 + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) -
       ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2) + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1 * (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i2 -
       (μ12^2 - μ1 * μ2) * (λ1 + λ2 + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1) * i2^2) * Tanh[ωd/(2 * tc)]) /
    ((-((-μ1 - μ2 + i1 * ((λ1 + λ2) * μ1 - 2 * μ12^2 + (λ1 + λ2 + 2 * μ1) * μ2
              + (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2 - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2
                 + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) - 2 * (μ12^2 - μ1 * μ2) * (1 - (λ1 + λ2) * i1
              + (-λ12^2 + λ1 * λ2) * i1^2) * i2) * Tanh[ωc/(2 * tc)]) +
       (λ1 + λ2 + i1 * (2 * λ12 * (λ12 + 2*μ12) + λ1 * (-2 * λ2 + μ1 - μ2) + λ2 * (-μ1 + μ2) +
          (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2 - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2
             + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) - ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2)
          + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1 * (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i2
        - (μ12^2 - μ1 * μ2) * (λ1 + λ2 + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1) * i2^2) * Tanh[ωd/(2 * tc)]));

Plot3D[N[a[λ12, μ12]], {λ12, 0.0, 0.4}, {μ12, 0.0, 0.4}, PlotPoints → 50,
 PlotRange → {0, 0.7}, AxesLabel → {"λ12", "μ12", "α"}]
```

กรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

```
ClearAll[a, i1, i2, f, ff];

  ωd = 400;   λ2 = 0.02;
  ωc = 500;   λ1 = 0.02;

  μ1 = 0.02;  ef = 5000;
  μ2 = 0.02;  tc = 40;

  i1 = NIntegrate[Log[ef / x] * Tanh[x / (2 * tc)] / x, {x, 0.0, ωd}, MinRecursion → 5,
     MaxRecursion → 15];
  i2 = NIntegrate[Log[ef / x] * Tanh[x / (2 * tc)] / x, {x, ωd, ωc}, MinRecursion → 5,
     MaxRecursion → 15];
  f = NIntegrate[Log[ef / x] * ((Sech[x / (2 * tc)])^2) / x, {x, 0, ωd}, MinRecursion → 5,
     MaxRecursion → 15];
  ff = NIntegrate[Log[ef / x] * ((Sech[x / (2 * tc)])^2) / x, {x, 0, ωc}, MinRecursion → 5,
     MaxRecursion → 15];

  a[λ12_, μ12_] := (1/2 * ωd/tc) *
    (-2 * tc^2 *
       (λ1 + λ2 + i1 * (2 * λ12 * (λ12 + 2 * μ12) + λ1 * (-2 * λ2 + μ1 - μ2) + λ2 * (-μ1 + μ2) +
            (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2 - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2 + λ12^2 *
                (μ1 + μ2)) * i1) - ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2) + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1 *
             (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i2 - (μ12^2 - μ1 * μ2) *
          (λ1 + λ2 + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1) * i2^2) * Log[ef / ωd] * Tanh[ωd / (2 * tc)]) /
     (ωd * ff *
        (-μ1 - μ2 + i1 * ((λ1 + λ2) * μ1 - 2 * μ12^2 + (λ1 + λ2 + 2 * μ1) * μ2 +
             (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2
                - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2 + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) -
          2 * (μ12^2 - μ1 * μ2) * (1 - (λ1 + λ2) * i1 + (-λ12^2 + λ1 * λ2) * i1^2) * i2) +
       f *
        (-λ1 - λ2 + i1 * (-2 * λ12 * (λ12 + 2 * μ12) + λ2 *
              (μ1 - μ2) + λ1 * (2 * λ2 - μ1 + μ2) +
             (-(λ2 * μ12^2) + λ2 * μ1 * μ2 - λ12^2 * (μ1 + μ2) + λ1 * (λ2 * μ1 - μ12^2
                  + (λ2 + μ1) * μ2)) * i1) + ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2)
             + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1 * (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i2 + (μ12^2 - μ1 * μ2) *

Plot3D[N[a[λ12, μ12]], {λ12, 0.0, 0.4}, {μ12, 0.0, 0.4}, PlotPoints → 50,
 PlotRange → {0, 0.6}, Shading → False, AxesLabel → {"λ12", "μ12", "α"}]
```

โปรแกรม Mathematica 4.0
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตต่อสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป

กรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบคงตัว

```
ClearAll[tc, ff11, t3, x, i1, i2, aa];

ωd = 754; ef = 5000;
ωc = 800;
tc = 1;

λ1 = 0.02; λ12 = 0.1;
λ2 = 0.02;
μ1 = 0.02;
μ2 = 0.02;

While[tc < 100,
 i1 = NIntegrate[Tanh[x/(2*tc)]/x, {x, 0.0, ωd}];
 i2 = NIntegrate[Tanh[x/(2*tc)]/x, {x, ωd, ωc}];

 ff11[μ12_, λ12_] := Det[{{(λ1+μ1)*i1-1, (λ12+μ12)*i1, μ1*i2, μ12*i2},
                          {(λ12+μ12)*i1, (λ2+μ2)*i1-1, μ12*i2, μ2*i2},
                          {μ1*i1, μ12*i1, μ1*i2-1, μ12*i2},
                          {μ12*i1, μ2*i1, μ12*i2, μ2*i2-1}}];

 aa[λ12_, μ12_] :=
  (1/2)*
   ((λ1+λ2+i1*(2*λ12*(λ12+2*μ12)+λ1*(-2*λ2+μ1-μ2)+λ2*(-μ1+μ2)+
          (-(λ1*λ2*μ1)+λ1*μ12^2+λ2*μ12^2
            -(λ1*λ2+(λ1+λ2)*μ1)*μ2+λ12^2*(μ1+μ2))*i1)-
       ((λ1+λ2)*(μ1+μ2)+2*(λ12^2-λ1*λ2)*i1*(μ1+μ2+(-μ12^2+μ1*μ2)*i1))*i2-
       (μ12^2-μ1*μ2)*(λ1+λ2+2*(λ12^2-λ1*λ2)*i1)*i2^2)*Tanh[ωd/(2*tc)])/
    ((-((-μ1-μ2+
          i1*((λ1+λ2)*μ1-2*μ12^2
            +(λ1+λ2+2*μ1)*μ2+(-(λ1*λ2*μ1)+λ1*μ12^2+λ2*μ12^2
              -(λ1*λ2+(λ1+λ2)*μ1)*μ2+λ12^2*(μ1+μ2))*i1)
          -2*(μ12^2-μ1*μ2)*(1-(λ1+λ2)*i1
            +(-λ12^2+λ1*λ2)*i1^2)*i2)*Tanh[ωc/(2*tc)])+
      (λ1+λ2+i1*(2*λ12*(λ12+2*μ12)+λ1*(-2*λ2+μ1-μ2)+λ2*(-μ1+μ2)+
          (-(λ1*λ2*μ1)+λ1*μ12^2+λ2*μ12^2
            -(λ1*λ2+(λ1+λ2)*μ1)*μ2+λ12^2*(μ1+μ2))*i1)-
       ((λ1+λ2)*(μ1+μ2)+2*(λ12^2-λ1*λ2)*i1*(μ1+μ2+(-μ12^2+μ1*μ2)*i1))*i2-
       (μ12^2-μ1*μ2)*(λ1+λ2+2*(λ12^2-λ1*λ2)*i1)*i2^2)*Tanh[ωd/(2*tc)]));
```

```
μ12 = 0.1;
 h = 0.000001;


     b = 3;
     While[b > 0.000001,
                    p1 = μ12;
                    sff = ff11[μ12, λ12];
                    ssf1 = ff11[μ12 + h, λ12];
                    μ12 = μ12 - sff * h / (ssf1 - sff);
                    b = Abs[μ12 - p1];
           ];
 Print[tc, "      ", N[aa[λ12, μ12]]];

 tc = tc + 1;]
```

กรณีที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

```
ClearAll[tc, ff11, t3, x, i1, i2, aa];

ωD = 754; ef = 5000;      λ1 = 0.01; λ12 = 0.02;
ωc = 800;                 λ2 = 0.01;
tc = 1;                   μ1 = 0.01;
μ2 = 0.01;

While[tc < 100,
 i1 = NIntegrate[Log[ef / x] * Tanh[x / (2 * tc)] / x, {x, 0, ωD}, MinRecursion → 5,
   MaxRecursion → 15];
 i2 = NIntegrate[Log[ef / x] * Tanh[x / (2 * tc)] / x, {x, ωD, ωc}, MinRecursion → 5,
   MaxRecursion → 15];

 fwd = NIntegrate[Abs[Log[ef / (2 * tc * x)]] * (Sech[x])^2, {x, 0, N[ωD / (2 * tc)]},
   MinRecursion → 5, MaxRecursion → 15];
 fwc = NIntegrate[Abs[Log[ef / (2 * tc * x)]] * (Sech[x])^2, {x, 0, N[ωc / (2 * tc)]},
   MinRecursion → 5, MaxRecursion → 15];

 ff11[μ12_, λ12_] := Det[{{(λ1 + μ1) * i1 - 1, (λ12 + μ12) * i1, μ1 * i2, μ12 * i2},
   {(λ12 + μ12) * i1, (λ2 + μ2) * i1 - 1, μ12 * i2, μ2 * i2},
   {μ1 * i1, μ12 * i1, μ1 * i2 - 1, μ12 * i2},
   {μ12 * i1, μ2 * i1, μ12 * i2, μ2 * i2 - 1}}];

 aa[λ12_, μ12_] := (1/2) * (ωD/tc) *
   (-((tc *
       (λ1 + λ2 + i1 * (2 * λ12 * (λ12 + 2 * μ12) + λ1 * (-2 * λ2 + μ1 - μ2) + λ2 * (-μ1 + μ2) +
           (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2
             - (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2 + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) - ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2) + 2 *
         (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i2 - (μ12^2 - μ1 * μ2) *
        (λ1 + λ2 + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1) * i2^2) * Log[ef / ωD] * Tanh[ωD / (2 * tc)]) /
     (ωD *
       (fwc * (-μ1 - μ2 + i1 * ((λ1 + λ2) * μ1 - 2 * μ12^2 + (λ1 + λ2 + 2 * μ1) * μ2 +
             (-(λ1 * λ2 * μ1) + λ1 * μ12^2 + λ2 * μ12^2 -
               (λ1 * λ2 + (λ1 + λ2) * μ1) * μ2 + λ12^2 * (μ1 + μ2)) * i1) - 2 * (μ12^2 - μ1 * μ2) * (1
         i2) + fwd * (-λ1 - λ2 + i1 * (-2 * λ12 * (λ12 + 2 * μ12) + λ2 * (μ1 - μ2) + λ1 * (2 * λ2 - μ1 +
             (-(λ2 * μ12^2) + λ2 * μ1 * μ2 - λ12^2 * (μ1 + μ2) +
               λ1 * (λ2 * μ1 - μ12^2 + (λ2 + μ1) * μ2)) * i1) +
         ((λ1 + λ2) * (μ1 + μ2) + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1 * (μ1 + μ2 + (-μ12^2 + μ1 * μ2) * i1)) * i
         (μ12^2 - μ1 * μ2) * (λ1 + λ2 + 2 * (λ12^2 - λ1 * λ2) * i1) * i2^2))));
```

```
μ12 = 0.1;
 h = 0.000001;


     b = 3;
     While[b > 0.000001,
                    p1 = μ12;
                    sff = ff11[μ12, λ12];
                    ssf1 = ff11[μ12 + h, λ12];
                    μ12 = μ12 - sff * h / (ssf1 - sff);
                    b = Abs[μ12 - p1];
           ];
 Print[tc, "      ", N[aa[λ12, μ12]]];

 tc = tc + 1;]
```

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ – สกุล	นางปริญญา ชังคะนารถ
วันเดือนปีเกิด	19 มกราคม 2518
สถานที่เกิด	อ. นามน จ. กาฬสินธุ์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	189 หมู่ 7 ต. นามน อ. นามน จ. กาฬสินธุ์ 46230
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 5
สถานที่ทำงานปัจุบัน	โรงเรียนแก้วเสด็จพิทยาคม ต. หนองแวง อ. สมเด็จ จ. กาฬสินธุ์

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2536	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนสมเด็จพิทยาคม
พ.ศ. 2540	คบ. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
พ.ศ. 2548	กศ.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ