การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ปริญญานิพนธ์

ของ

ถนอม ชำนาญพันธ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มีนาคม 2546

ลิขสิทธิ์เป็นของ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

บทคัดย่อ

ของ

ถนอม ชำนาญพันธ์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มีนาคม 2546

ถนอม ชำนาญพันธ์. (2546). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. ปริญญานิพนธ์ กศ.ม.(คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่ม, อาจารย์ ละเอียด ปรารถนาดี.

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อสร้างบทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 ที่ได้มาจากการสุ่มแบบเกาะกลุ่มจาก 9 ห้องเรียน ดำเนินการทดลองโดยใช้บทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนด้วยตนเอง ใช้เวลาในการสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที เมื่อสอนกลุ่มตัวอย่างครบตามเนื้อหาที่กำหนดแล้ว ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น แล้วนำคะแนนสอบมาวิเคราะห์โดยใช้สถิติทดสอบ Z

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

A STUDY OF THE ACHIEVEMENT OF MATHAYOM SUKSA III STUDENTS IN LEARNING AN INTRODUCTION TO THEORY OF POLYNOMIAL EQUATIONS

AN ABSTRACT

BY

TANOM CHAMNARNPAN

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
March 2003

Tanom Chamnarnpan. (2003). A Study of The Achievement of Mathayom Suksa III Students in Learning an Introduction to Theory of Polynomial Equations. Master Thesis. M.Ed.(Mathematics) Bangkok: Graduate School. Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assoc. Prof. Dr. Narong Punnim, Mrs. Laied Prathnadee

The purposes of this research were to construct the Introduction to Theory of Polynomial Equations lesson for Mathayom Suksa III students and to study the achievement of learning on Introduction to Theory of Polynomial Equations.

Thirty – eight nineth graders (Mathayom Suksa III) who were students at Thonburi Woratapee Pharark School in Bangkok, during the first semester of the 2002 academic year, were taken part in this study. They were selected by a cluster sampling of nine classes. The Introduction to Theory of Polynomial Equations lesson was designed to teach for a total of 20 periods of 50 minutes each. The researcher taught and guided the subjects according to the lesson. An achievement posttest was given at the end of the lesson. The z – test for population proportion was used in the analysis of the data.

The finding reveals the following :

The z – test for population proportion showed that The Mathayom Suksa III students learned significantly in terms of Introduction to Theory of Polynomial Equations at the .01 level.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ของ
นายถนอม ชำนาญพันธ์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.นภาภรณ์ หะวานนท์)
วันที่ ..7.. เดือน..สิงหาคม..... พ.ศ. 2546

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

..... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม)

..... กรรมการ
(อาจารย์ละเอียด ปรารถนาดี)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส)

..... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์รวีวรรณ งามสันติกุล)

ประกาศคุณูปการ

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณรงค์ ปั้นนิ่ม ที่กรุณารับเป็นประธานกรรมการควบคุม และ อาจารย์ละเอียด ปรารถนาดี กรรมการควบคุม ที่กรุณาสละเวลาอันมีค่า ให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่าง ๆที่มีประโยชน์อย่างยิ่งต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ไขปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียดมาโดยตลอดทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.สมเดช บุญประจักษ์ และ ดร.ยุพร ริมชลการ ที่กรุณารับเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจบทเรียน คู่มือครูและแบบทดสอบ เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแส และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์รวีวรรณ งามสันติกุล ที่ให้ความกรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่าและให้ข้อคิดในสิ่งที่เป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัยทำให้งานวิจัยฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ นายสิรัตน์ สุทธิดารา อดีตผู้อำนวยการโรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ที่ให้การสนับสนุนส่งเสริม และ นายสมเกียรติ เจริญฉิม ผู้อำนวยการโรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ ที่ให้การอนุเคราะห์ สนับสนุนในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวมรวมข้อมูล ที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ อย่างสุดซึ้ง ที่ให้การอบรม สอนสั่ง สนับสนุนการศึกษาตลอดจนให้กำลังใจ แก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด และ ครูอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรม สอนสั่ง ผู้วิจัย

ขอขอบคุณ คุณประนอม ชำนาญพันธ์ น้องสาว และ คุณอัมพร วิชัยศรี ที่ให้กำลังใจ สนับสนุนตลอดจนให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ แก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณ คุณยุวดี อยู่สบาย ที่กรุณาให้คำแนะนำในการเขียนบทคัดย่อภาษาอังกฤษของงานวิจัย

ขอขอบคุณ คุณอัจฉรา ดีประเสริฐวิทย์ นักเรียน และ คณะครูหมวดวิชาคณิตศาสตร์ฝ่ายโสตทัศนศึกษา โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ ที่กรุณาให้ความอนุเคราะห์ในการทดลองใช้เครื่องมือ

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณ คุณเอนก จันทรจรูญ และ คุณสุกัญญา ยีกา ที่ช่วยตรวจแก้คำผิดและเพื่อน ๆ นิสิตปริญญาโท รุ่นปี พ.ศ. 2542 ทุกคนที่เป็นกำลังใจ ทำให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ถนอม ชำนาญพันธ์

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ	1
	ภูมิหลัง	1
	ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
	ความสำคัญของการวิจัย	4
	ขอบเขตของการวิจัย	4
	ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	4
	ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	4
	ตัวแปรที่ศึกษา	4
	นิยามศัพท์เฉพาะ	5
	สมมติฐานของการวิจัย	5
2	เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
	เอกสารที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	7
	งานวิจัยในประเทศ	8
	งานวิจัยต่างประเทศ	10
3	วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า	12
	การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง	12
	ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	12
	การเลือกกลุ่มตัวอย่าง	12
	การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาวิจัย	13
	การเก็บรวบรวมข้อมูล	15
	การวิเคราะห์ข้อมูล	15
4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	16
	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น	16
	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น	17
	ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น	18

สารบัญ(ต่อ)

บทที่ หน้า

5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 19
สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล 19
ความมุ่งหมายของการวิจัย 19
สมมติฐานของการวิจัย 19
วิธีดำเนินการวิจัย 19
การวิเคราะห์ข้อมูล 19
สรุปผลการวิจัย 20
อภิปรายผล 20
ข้อเสนอแนะ 21

บรรณานุกรม 22

ภาคผนวก 27
ภาคผนวก ก. การวิเคราะห์ข้อมูล 28
ภาคผนวก ข. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 32
ภาคผนวก ค. แบบเรียนและคู่มือครูเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 41
ภาคผนวก ง. แผนการสอนรายคาบเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 103
ภาคผนวก จ รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่านที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครูและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 134

ประวัติย่อของผู้วิจัย 136

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 16

2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 17

3 ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 18

4 ค่า p ค่า r และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 30

5 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น 31

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์ถือได้ว่าเป็นศาสตร์บริสุทธิ์สาขาหนึ่งอีกทั้งยังเป็นวิทยาศาสตร์สาขาแรกๆที่เกิดขึ้นในโลกนับตั้งแต่สมัยโบราณมาแล้ว และพบว่าในศาสตร์สาขาอื่นๆ ได้นำเอาคณิตศาสตร์ไปใช้ เช่น นักชีววิทยาได้นำทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ไปใช้เพื่อศึกษาในการสืบทอด ในด้านอุตสาหกรรมได้นำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการผลิต ตลอดจนใช้เป็นพื้นฐานสำหรับการค้นคว้าวิจัยทุกประเภท ซึ่งสอดคล้องกับ ยุพิน พิพิธกุล (2524 : 1) ที่กล่าวว่า "คณิตศาสตร์เป็นรากฐานของวิทยาการหลายสาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น" นอกจากนั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นปัจจัยที่สำคัญอย่างหนึ่งในการพัฒนาคุณภาพมนุษย์เพราะคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาความคิดของผู้เรียนให้เป็นคนที่มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถคิดอย่างมีระบบ มีเหตุผลและแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ จากความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ดังกล่าว กระทรวงศึกษาธิการจึงได้จัดให้มีการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ทุกระดับชั้น โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น มีจุดประสงค์เพื่อให้ผู้เรียนมีทักษะการคำนวณ ใช้แก้ปัญหาต่างๆในชีวิตประจำวัน และ ฝึกให้รู้จักคิดวิเคราะห์อย่างมีเหตุผล และสามารถใช้เหตุผลในการแสดงความคิดเห็นอย่างมีระบบ ชัดเจน และรัดกุม (ยุพิน พิพิธกุล. 2530 : 20 – 21)

ในปัจจุบันกล่าวได้ว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นยังไม่บรรลุเป้าหมายตามเกณฑ์ที่วางไว้ดังเห็นได้จากรายงานการประเมินคุณภาพการศึกษาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2540 สำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ใช้กลุ่มตัวอย่างของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สำหรับกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ จำนวน 79,574 คน จากโรงเรียนทุกสังกัด จำนวน 994 โรงเรียน พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ต่ำมาก โดยมีคะแนนเฉลี่ยจากการสอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 14.75 จากคะแนนเต็ม 40 คะแนน และทางกรมวิชาการเห็นว่าความสามารถด้านคณิตศาสตร์ควรได้รับการพัฒนาอย่างเร่งด่วน (กรมวิชาการ. 2542 : 3 – 29) การที่ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำมาก อาจเนื่องมาจากสาเหตุหลายองค์ประกอบด้วยกัน เช่น หลักสูตร เนื้อหา ครู วิธีการสอนของครู ผู้เรียน และ สิ่งแวดล้อมทางการเรียน (รพีพร ใจอุ่น : 2534 : 3)จากการสำรวจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตการศึกษา6 ของ ทัศนียา เขมะชิต (2517 : 94) พบว่า เนื้อหาที่เป็นปัญหาระดับกลางของรายวิชา ค312 และ ค322 ได้แก่ การแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ชนิดา พลแสน (2534 : 40) พบว่านักเรียนจำนวนมากมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสองซึ่งหัวข้อดังกล่าวเป็นพื้นฐานที่จะใช้ในการเรียนระดับที่สูงขึ้น ในขณะที่ สุกัลยา ฉายสุวรรณ (2539 : 46 – 48) ได้ทำการวิจัยโดยการสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความรู้พื้นฐานทางพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตกรุงเทพมหานคร พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ และบกพร่องในเรื่องสมการกำลังสอง เช่นกัน

เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญต่อมนุษย์ โดยเฉพาะในแง่ที่จำเป็นต้องนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวัน ดังนั้นเมื่อวิถีชีวิตและสิ่งแวดล้อมของสังคมมีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์จึงควรได้รับการปรับปรุงเปลี่ยนแปลงให้สอดคล้องกับวิถีชีวิตและสิ่งแวดล้อมที่เปลี่ยนไป

โดยเลือกเนื้อหาใหม่ๆที่มีคุณภาพและสอดคล้องกับสภาพสังคมในปัจจุบันเข้ามาแทนที่ เพื่อให้สอดคล้องกับความเจริญก้าวหน้าในด้านต่างๆที่เกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว ถึงแม้ว่าในช่วงทศวรรษที่ผ่านมา ประเทศไทยได้มีการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์มาบ้างแล้วก็ตาม แต่การปรับปรุงเปลี่ยนแปลงของต่างประเทศยังมีการพัฒนาอยู่เสมอและดำเนินการอย่างต่อเนื่องโดยเฉพาะประเทศสหรัฐอเมริกา โดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teacher of Mathematics : NCTM) ได้จัดทำ เอกสารหลักการและมาตรฐานการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่มีชื่อว่า NCTM : Principles and Standards for School Mathematics หลังจากการทำประชาพิจารณ์เรียบร้อยแล้วออกเผยแพร่ในปี ค.ศ. 2000 (พ.ศ. 2543) เพื่อใช้เป็นมาตรฐานหลักสูตรและเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของนักเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งได้ระบุเนื้อหาคณิตศาสตร์ระดับเกรด 9 – 12 ควรเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ดังนี้ จำนวนและตัวดำเนินการ พีชคณิต เรขาคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น การแก้ปัญหา การให้เหตุผลและการพิสูจน์ การสื่อสาร/การสื่อความหมาย การเชื่อมโยง การแสดงและการนำเสนอ สำหรับประเทศไทย กระทรวงศึกษาธิการได้มอบหมายให้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เป็นหน่วยงานที่รับผิดชอบเกี่ยวกับการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้จัดทำมาตรฐานการเรียนรู้ไว้ใน เอกสารคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2544 เพื่อเป็นมาตรฐานเดียวกัน ประกอบด้วยมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน (12 ปี) และมาตรฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์เลือก โดยที่สาระการเรียนรู้ของกลุ่มวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน (12 ปี) มีจุดประสงค์เพื่อพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหา พัฒนาทักษะ/กระบวนการ รวมทั้งสามารถนำความรู้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อและประยุกต์ในการดำรงชีวิต แบ่งออกเป็น 4 ช่วงชั้น ได้แก่ ช่วงชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 – 3 ช่วงชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 ช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3 และ ช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ส่วนสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เลือกได้กำหนดไว้ใน 2 ช่วงชั้น ได้แก่ ช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3 ในช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เป็นสาระการเรียนรู้ที่สถานศึกษาเป็นผู้จัดการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้สาระที่เป็นเนื้อหาวิชาให้กว้างขึ้น เข้มข้นขึ้น หรือฝึกทักษะกระบวนการมากขึ้น โดยพิจารณาจากสาระหลักที่กำหนดไว้ให้เหมาะสมกับความสามารถและความต้องการของผู้เรียน สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ ได้กำหนดให้พหุนามเป็นหัวข้อหนึ่งที่บรรจุอยู่ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ส่วนหัวข้อการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยวิธีการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ เป็นหัวข้อที่บรรจุในสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ของช่วงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2544 : 151 และ กรมวิชาการ. 2545 : 153)

ในการเรียนการสอนเรื่องพหุนาม เริ่มจากการบวก การลบ การคูณ การหาร พหุนาม การแยกตัวประกอบของพหุนาม การแก้สมการพหุนาม ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของพีชคณิตถือเป็นพื้นฐานสำคัญอย่างยิ่ง ที่จะใช้ในการเรียนในระดับสูงขึ้นไป ดังคำกล่าวของ สิริพร ทิพย์คง ที่กล่าวว่า " พีชคณิตเปรียบเสมือนประตูสำหรับเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในอนาคตและเป็นสิ่งจำเป็นที่ทุกคนจะต้องเรียนรู้ " (สิริพร ทิพย์คง. 2544 : 6) แต่จากงานวิจัยของ ทัศนียา เขมะชิต (2517 : 94) ชนิดา พลแสน (2534 : 40) และ สุกัลยา ฉายสุวรรณ (2539 : 46 – 48) พบว่านักเรียนส่วนมากยังมีข้อบกพร่องในหัวข้อการหารพหุนาม การแยกตัวประกอบของพหุนาม การหาคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยวิธีการแยกตัวประกอบ

ของพหุนาม หรือ การทำให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ หรือ ใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เป็นเนื้อหาที่บรรจุอยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ส่วนการหาคำตอบของสมการพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง จะใช้วิธีการแยกตัวประกอบของพหุนาม แต่ไม่มีสูตรสำหรับใช้ในการหาคำตอบของสมการ การหาคำตอบของสมการพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองโดยวิธีการแยกตัวประกอบพหุนาม จะหาได้ง่ายเฉพาะสมการพหุนามที่มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ เช่น คำตอบของสมการ $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ แต่การหาคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะ จะไม่สามารถนำวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามมาใช้ในการหาคำตอบได้โดยง่าย แต่ไม่ได้หมายความว่า สมการพหุนามดังกล่าวไม่มีคำตอบ เช่น คำตอบของสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ เป็นต้น

ในการหาคำตอบของสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ พบว่า ไม่สามารถใช้วิธีการแยกตัวประกอบในการหาคำตอบของสมการได้ หรือ ใช้การทดลองแทนค่า x ด้วยจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม ดังตาราง

x	...	-3	-2	- 1	0	1	2	3	...
$x^3 - x - 1$	...	-31	- 7	-1	-1	-1	5	23	...

จากตารางพบว่า เมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็มลงในสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ แล้วไม่มีค่าใดที่ทำให้สมการ $x^3 - x - 1 = 0$ เป็นจริง วิธีการดังกล่าวต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก ยิ่งถ้าแทนค่าของตัวแปรด้วยจำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปเศษส่วนด้วยแล้ว ยิ่งต้องใช้เวลามากขึ้น ดังนั้นวิธีการหาคำตอบของสมการด้วยการทดลองแทนค่าของตัวแปร ในบางกรณีอาจเป็นวิธีการที่ไม่เหมาะสม และไม่สามารถจะนำไปสู่คำตอบของสมการได้ โดยเฉพาะในกรณีที่คำตอบของสมการพหุนามนั้นมีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะ

ด้วยความสำคัญและเหตุผลข้างต้น ผู้วิจัยจึงมีแนวคิดที่จะพัฒนาบทเรียนที่ประกอบด้วยหัวข้อการหารสังเคราะห์ ทฤษฎีบทตัวประกอบ ทฤษฎีบทเศษเหลือ และ การประมาณคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนอตรรกยะด้วยจำนวนตรรกยะ เพื่อนำเสนอเป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถนำไปใช้หาคำตอบของสมการพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองได้ง่ายขึ้น พร้อมทั้งศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้นว่ามีความเป็นไปได้หรือไม่ เพื่อเป็นแนวทางในการพิจารณาปรับปรุงหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจบรรจุลงในสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ความสำคัญของการวิจัย

1. ผลการศึกษาครั้งนี้ สามารถนำไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงหลักสูตรระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นต่อไป

2. ผลการศึกษาครั้งนี้ ทำให้ได้บทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการเบื้องต้นที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้นและสามารถนำไปเป็นเอกสารประกอบในการเรียนสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เลือก

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร 1 ห้องเรียน จำนวน 38 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (Cluster Sampling) จากทั้งหมด 9 ห้องเรียน ซึ่งทางโรงเรียนได้จัดนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนในระดับสูง ระดับกลาง และระดับต่ำ เข้าเรียนในห้องเรียนเดียวกัน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ใช้เวลาในการทดลองสอนกลุ่มตัวอย่างเป็นเวลา 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหา เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ซึ่งประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1 การหารสังเคราะห์

2 ทฤษฎีบทเศษเหลือ

3 ทฤษฎีบทตัวประกอบ

4 การหาคำตอบของสมการพหุนาม ที่เป็นจำนวนตรรกยะ

5 การหาคำตอบของสมการพหุนาม ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ บทเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หมายถึง นักเรียนที่กำลังศึกษาอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค011 ของโรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น หมายถึง ความสามารถทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งวัดจากคะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. เกณฑ์ หมายถึง ร้อยละ 50 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้าผู้เรียนได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนได้ตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนรวมถือว่าผู้นั้นสอบผ่านเกณฑ์ (กระทรวงศึกษาธิการ. 2534 : 28)

4. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น หมายถึง ข้อสอบวัดความสามารถทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ

5. สมการพหุนามเบื้องต้น หมายถึงสมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีดีกรีไม่เกิน 3

สมมติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ข้อตกลงเบื้องต้น

1.ในการวิจัยครั้งนี้ บทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น มีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้สอนได้

2.ผลการวิจัยถือจากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังหัวข้อต่อไปนี้คือ

เอกสารที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางด้านสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งพฤติกรรมที่พึงประสงค์ด้านสติปัญญาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิลสัน (Wilson. 1971 : 643 – 696) ได้แบ่งพฤติกรรมการเรียนรู้ที่พึงประสงค์ในวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาออกเป็น 2 ด้าน ได้แก่

1. พฤติกรรมด้านความรู้และความคิด (Cognitive Domain)

2. พฤติกรรมด้านความรู้สึก (Affective Domain)

สำหรับพฤติกรรมด้านความรู้และความคิด (Cognitive Domain) แบ่งออกเป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ ความจำ ด้านการคิดคำนวณ (Computation) ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำที่สุด แบ่งออกเป็น 3 ขั้น ดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific Facts) เป็นความสามารถที่ระลึกถึงข้อเท็จจริงต่างๆ ที่นักเรียนเคยได้รับการเรียนการการสอนมาแล้ว คำถามจะเกี่ยวข้องกับข้อเท็จจริงตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สะสมมาเป็นระยะเวลานาน

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์และบทนิยาม (Knowledge of Terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำคำศัพท์และบทนิยามต่างๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรง หรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability of Carry Out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้ว มาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบที่วัดความสามารถด้านนี้ ต้องเป็นโจทย์ง่ายคล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณ แต่ซับซ้อนมากขึ้น แบ่งได้เป็น 6 ขั้นดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concept) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ ความจำที่เกี่ยวข้องกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคติเป็นนามธรรมซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่างๆ ซึ่งต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความ หรือ ยกตัวอย่างของมโนคตินั้น สามารถทำได้โดยการใช้คำพูดของตนหรือเลือกความหมายที่กำหนดให้โดยเขียนในรูปใหม่ หรือ ยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียนในชั้นเรียน มิฉะนั้นจะเป็นเพียงการวัดความจำเท่านั้น

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎทางคณิตศาสตร์ และ การสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles, Rules and Generalization) เป็นความสามารถในการนำหลักการ กฎและความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาจนได้แนวทางในการแก้ปัญหา คำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎที่นักเรียนเพิ่งเคยพบครั้งแรก อาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ได้

2.3 ความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้ เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหาจากแบบหนึ่งเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem Elements From One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นรูปสมการ ซึ่งมีความหมายคงเดิม ไม่รวมไปถึงกระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms) อาจกล่าวได้ว่าเป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ

2.5 ความสามารถในการคิดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow a Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและความเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่วๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) เป็นความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหา ซึ่งอาจจะอยู่ในรูปข้อความ ตัวเลข ข้อมูลทางสถิติ หรือ กราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบในระหว่างเรียน หรือ แบบฝึกหัดที่นักเรียนเลือกกระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาได้ไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้น คือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับความเข้าใจและเลือกกระบวนการ ในการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุป ตัดสินใจ การแก้ปัญหาขั้นนี้ อาจต้องใช้วิธีการคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่าอะไรคือข้อมูลที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่นใดบ้างที่อาจจะเป็นตัวอย่างในการหาคำตอบของปัญหาที่กำลังประสบอยู่ หรือต้องแยกโจทย์ปัญหาออกมาพิจารณาเป็นส่วนๆ มีการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบ หรือ ผลลัพธ์ที่ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบ ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้องอาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ระลึกถึงข้อมูลที่กำหนดให้ การเปลี่ยนรูปปัญหา การจัดกระทำกับข้อมูล และ การระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูล หรือ สิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาให้พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็นหรือไม่เคยทำมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตของเนื้อหาวิชาที่เรียน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกันเพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่า เป็นพฤติกรรมขั้นสูงของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 5 ขั้น ดังนี้

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) นักเรียนต้องอาศัยการคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจมโนมติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่างๆที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา แทนการจำความสัมพันธ์เดิมที่เคยพบมาแล้วมาใช้กับข้อมูลชุดใหม่

4.3 ความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการสร้างภาษา เพื่อยืนยันข้อความทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล โดยอาศัยนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทต่างๆ ที่เรียนมาแล้วไปพิสูจน์โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อน

4.4 ความสามารถในการวิพากษ์วิจารณ์ข้อพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) เป็นความสามารถที่ควบคู่กับความสามารถในการสร้างข้อพิสูจน์ อาจเป็นพฤติกรรมที่มีความซับซ้อนน้อยกว่าพฤติกรรมในการสร้างข้อพิสูจน์ พฤติกรรมในขั้นนี้ต้องการให้นักเรียนสามารถตรวจสอบข้อพิสูจน์ว่าถูกต้องหรือไม่ หรือมีขั้นตอนใดผิดบ้าง

4.5 ความสามารถในการสร้างสูตรและการทดสอบความถูกต้องให้มีผลใช้ได้กรณีทั่วไป (Ability to Formulate and Validate Generalizations) เป็นความสามารถในการค้นพบสูตร หรือกระบวนการแก้ปัญหา และพิสูจน์ได้ว่าสามารถใช้เป็นกรณีทั่วไปได้ (ศรีภรณ์ ณะวงศ์ษา. 2542 : 41 – 43)

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสามารถ หรือ ระดับของผลสัมฤทธิ์ของบุคคล หลังจากการเรียนหรือการฝึกอบรม

งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยที่ผู้วิจัยรวบรวมมานี้ เป็นงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ที่นำเนื้อหาในระดับชั้นสูงเมื่อได้รับการปรับปรุงเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัยมาสอนในระดับชั้นที่ต่ำกว่าของนักเรียน ได้แก่

อำพล ธรรมเจริญ (2516 : 40 – 45) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น จากการวิเคราะห์ข้อมูล ปรากฏว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการคิดเชิงนามธรรมในวิชาคณิตศาสตร์พอที่จะเรียนเรื่องโทโพโลยีและเรขาคณิตแปลงสภาพ เรื่องพีชคณิตแนวใหม่ เรื่องตรีโกณมิติและกราฟ และเรื่องสถิติและความน่าจะเป็นได้ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ปรากฏว่า มีความสามารถในการเรียนเรื่อง สถิติและความน่าจะเป็น ส่วนเรื่องอื่นๆ ยังสรุปไม่ได้ นอกจากนี้ผลการศึกษาค้นคว้ายังปรากฏว่านักเรียนชายมีความสามารถในการคิดเชิงนามธรรมสูงกว่านักเรียนหญิง และ นักเรียนในกรุงเทพมหานคร มีความสามารถดังกล่าวดีกว่านักเรียนในต่างจังหวัด ต่อมาอีก 1 ปี เสกสรร ดำกระบี่ (2517 : 20 – 25) ได้ทำการวิจัย

เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ลิมิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ไม่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องลิมิต ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องลิมิต ในปีเดียวกันนั่นเอง วิทยา รุ่งอดุลพิศาล (2517 : 39) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพ (Transformation Geometry) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3 สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพเบื้องต้นได้ โดยที่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ มัธยมศึกษาปีที่ 2 ขณะเดียวกัน บุญมา สมสวัสดิ์ (2517 : 35 – 38) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา การทดลองสอนเรื่อง เซตเบื้องต้นกับนักเรียนชั้นอนุบาล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนอนุบาลสามารถเรียนเรื่องเซตเบื้องต้นตามบทเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ การนำเสนองานวิจัยในเรื่องนี้ถือว่าเป็นการริเริ่มแนวคิดใหม่ทางคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์ เพราะเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์หลายสาขา และในปัจจุบันได้มีการนำมาบรรจุไว้ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และ สุเทพ ทองอยู่ (2517 : 35 – 38) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถเรียนเรื่องความน่าจะเป็นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ ต่อมาภายหลังได้มีการนำมาบรรจุอยู่ในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และ มัธยมศึกษาปีที่ 6 ในปีถัดมา พิชากร แปลงประสพโชค (2518 : 32 – 37) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ ในปัจจุบันได้นำมาสอนในระดับมัธยมศึกษา โดยแทรกอยู่ทั้งระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย ในปีเดียวกันนั้น ธ.ธง พวงสุวรรณ (2518 : 31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้น ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ประถมศึกษาปีที่ 6 ประถมศึกษาปีที่ 7 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้นได้ ต่อจากนั้นในปี พ.ศ. 2519 ได้มีผู้วิจัยอีกอย่างน้อย 3 ท่าน ได้แก่ ณรงค์ ปั้นนิ่ม (2519 : 17 – 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอที่จะเรียนเรื่องอสมการและค่าสัมบูรณ์เบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น งานวิจัยนี้นับว่ามีประโยชน์ยิ่ง และในปัจจุบันได้นำหัวข้อนี้มาบรรจุลงในหลักสูตรชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ขณะที่ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล (2519 : 24) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ไม่มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ส่วนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ มัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาดังกล่าวได้ และ ชวลิต เอี่ยมเจริญ (2519 : 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตโพรเจคทีฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องเรขาคณิตโพรเจคทีฟเบื้องต้นที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ดีกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนที่มีความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เพียงเล็กน้อยก็สามารถเรียนวิชาเรขาคณิตโพรเจคทีฟเบื้องต้นได้ ถัดมาอีก 2 ปี สุมานะ อาจหาญ (2521 : 20) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องพีชคณิตเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3

มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องพีชคณิตศาสตร์เบื้องต้นได้ อีก 5 ปีต่อมา บุญเกิด ชำนาญการค้า (2526 : 34 – 35) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องแคลคูลัสเบื้องต้นหรือไม่ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องแคลคูลัสเบื้องต้นได้ จากนั้นอีก 1 ปี ศุภชัย ทองศิริ (2527 : 36 – 37) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นได้ และอีก 2 ปีต่อมา วันชัย ทัพปุรณะ (2529 : 29 – 31) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนเรื่องเวกเตอร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 วิชาเลือกสายที่ 1 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องเวกเตอร์ จนกระทั่ง 9 ปีต่อมา ดี บางกระ (2538 : 19) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนฟังก์ชันก่อกำเนิด ผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด จากนั้นอีก 1 ปีต่อมา อำพล โต้ตอบ (2539 : 29) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการหาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนาม อีก 3 ปีต่อมา ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม (2542 : 28) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นได้ ในอีก 2 ปีถัดมา รจนา รัตนานิคม (2542 : 29) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็น ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็น สูงกว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จากที่กล่าวมาจะพบว่า ในระยะเวลาหลายสิบปีที่ผ่านมามีผู้วิจัยพยายามศึกษาเพื่อนำเนื้อหาที่สอนอยู่ในระดับสูงมาปรับปรุงแล้วนำมาสอนในระดับที่ต่ำกว่า

งานวิจัยต่างประเทศ

สำหรับงานวิจัยในต่างประเทศได้มีผู้วิจัยเกี่ยวกับการนำเนื้อหาที่สอนในระดับสูงลงมาทดลองสอนในระดับที่ต่ำกว่า ผู้วิจัยขอยกตัวอย่าง ดังนี้

กัปรัด (Gubrud. 1971 : 6468 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถในการเรียนเรื่อง การบวกเวกเตอร์ของนักเรียนเกรด 8 – 10 ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนเกรด 8 และเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำ และ นักเรียนเกรด 9 และเกรด 10 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์ นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์สูง และนักเรียนเกรด 10 มีความสามารถในการรวบรวมเนื้อหาเกี่ยวกับการบวกเวกเตอร์ได้อย่างชัดเจนมากกว่านักเรียนเกรด 8 นักเรียนเกรด 9 ที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่ำและนักเรียนในระดับชั้นที่สูงกว่ามีความสามารถในการเรียนเรื่องการบวกเวกเตอร์มากกว่านักเรียนในระดับชั้นที่ต่ำกว่า และในปีเดียวกันนั่นเอง กัลลิค (Gallick. 1971 : 4035 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสามารถในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ของนักเรียนเกรด 5 เกรด 6 เกรด 9 และเกรด 10 ผลการศึกษาสรุปว่า นักเรียนเกรด 5 และ เกรด 6

มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์โดยมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน นักเรียนเกรด 9 และ เกรด 10 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์โดยนักเรียนเกรด 9 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่า นักเรียนเกรด 10 นักเรียนเกรด 9 และ เกรด 10 มีความสามารถในการเรียนมากกว่านักเรียนเกรด 5 และ เกรด 6 ดังนั้นจึงควรสอนวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ในเกรด 9 ต่อมาอีก 3 ปี ไวท์ (White.1974 : 1969 – A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษา ความสามารถของนักเรียนเกรด 7 และ เกรด 8 ในการเรียนมโนมติเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนเกรด 7 และ เกรด 8 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนเรื่องมโนมติเบื้องต้นของความน่าจะเป็น และ ไวท์ ได้เสนอให้นำเนื้อหาเรื่องความน่าจะเป็นเบื้องต้นบรรจุในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 และ ในปี 1989 ไวนิ่ง (Vining. 1989 : 380 – A อ้างมาจาก ดี บางกระ. 2538 : 11) ได้ทำการศึกษาหัวข้อเรื่องและแนวความคิดของคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหลักสูตรมัธยมศึกษา กำหนดโดยสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) ไวนิ่งได้สำรวจความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่สอนคณิตศาสตร์เต็มหน่วย ในหัวข้อที่สัมพันธ์กับวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วยในหลักสูตรของชั้นมัธยมศึกษาปรากฏว่าผู้เชี่ยวชาญเห็นพ้องต้องกันว่าคณิตศาสตร์เต็มหน่วยที่มีในระดับสูงซึ่งแยกมาสอนในระดับมัธยมศึกษามีความเหมาะสม จากที่กล่าวมาแล้วจะพบว่านักการศึกษาในต่างประเทศก็ได้มีความพยายามที่จะทำการวิจัยเพื่อศึกษาถึงความเป็นไปได้ที่จะนำเนื้อหาในระดับที่สูงลงมาสอนได้ระดับที่ต่ำกว่าอย่างต่อเนื่องเช่นกัน

บทที่ 3
วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

1. การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย
3. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การจัดกระทำและการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและการเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร

การเลือกกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 011 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียนประมาณ 40 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม (cluster sampling) จากทั้งหมด 9 ห้องเรียน สาเหตุที่ใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม เพราะทางโรงเรียนได้จัดให้นักเรียนที่มีความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ ในระดับสูง ระดับปานกลาง และ ระดับต่ำ เข้าเรียนในห้องเรียนเดียวกัน

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

1. พหุนาม ดีกรีพหุนาม
2. การบวกและการลบพหุนาม
3. การคูณและการหารพหุนาม
4. การหารสังเคราะห์
5. ทฤษฎีบทเศษเหลือ
6. ทฤษฎีบทตัวประกอบ
7. การหาคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะ

8. การหาคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. บทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอนในเวลา 20 คาบ คาบละ 50 นาที ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาดังหัวข้อ ต่อไปนี้

1. พหุนาม ดีกรีพหุนาม	1 คาบ
2. การบวกและการลบพหุนาม	2 คาบ
3. การคูณพหุนามและการหารพหุนาม	2 คาบ
4. ทฤษฎีบทเศษเหลือ	3 คาบ
5. ทฤษฎีบทตัวประกอบ	2 คาบ
6. การหารสังเคราะห์	3 คาบ
7. การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนตรรกยะ	3 คาบ
8. การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนอตรรกยะ	4 คาบ

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ

การสร้างบทเรียนและคู่มือครู เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ตามลำดับขั้นตอนการสร้างต่อไปนี้

1. ศึกษาเนื้อหา เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น จากเอกสารและหนังสือ ดังต่อไปนี้

1.1 ทฤษฎีสมการเบื้องต้น (มานัส บุญยัง. 2534 : 41 – 59)

1.2 ทฤษฎีสมการเบื้องต้น (สุพรรณ เพ็งชัย. 2544 : 48 – 61)

1.3 ทฤษฎีสมการพหุนาม (มัลลิกา ศรีกมล. 2526 : 9 – 12)

1.4 Algebra for College Students (Gustafson & Frisk. 1999 : 772 – 815)

1.5 Beginning and Intermediate Algebra (Gustafson & Frisk. 1998 : 57 – 387)

1.6 Algebra for Problem Solving (Freilich , Berman & Johnson. 1989 : 92 - 149)

1.7 Mathematics Problems Algebra (Aleksanova. 1990 : 133 – 199)

1.8 College Algebra (Sullivan. 1987 : 352 – 374)

1.9 Problem Books in Mathematics (Halmos. 1989 : 1 – 12)

2. สร้างบทเรียนและคู่มือครู ซึ่งประกอบด้วย เนื้อหา และ แบบฝึกหัด ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

2.1 สร้างบทเรียน เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ซึ่งประกอบด้วย บทนำ การบวกพหุนาม การลบพหุนาม การคูณพหุนาม การหารพหุนาม การหารสังเคราะห์ ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ การหาคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะ การหารากของสมการที่เป็นจำนวนอตรรกยะ เพื่อใช้สอนในเวลา 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที

2.2 จัดทำคู่มือครู โดยจัดทำเป็นแผนการสอนรายคาบประกอบด้วย ชื่อหัวข้อ เวลาที่ใช้สอน สาระสำคัญของเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนการสอน การวัดและประเมินผล จำนวน 20 คาบ ๆ ละ 50 นาที ดังนี้

คาบที่ 1	พหุนาม ดีกรีของพหุนาม
คาบที่ 2	การบวกพหุนาม
คาบที่ 3	การลบพหุนาม
คาบที่ 4 - 5	การคูณพหุนาม และ การหารพหุนาม
คาบที่ 6 – 8	ทฤษฎีบทเศษเหลือ และ การนำไปใช้
คาบที่ 9 – 10	ทฤษฎีบทตัวประกอบ และ การนำไปใช้
คาบที่ 11 – 13	การหารสังเคราะห์
คาบที่ 14 – 16	การหาคำตอบของสมการพหุนาม ที่เป็นจำนวนตรรกยะ
คาบที่ 17 – 20	การหาคำตอบของสมการพหุนาม ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

2.3 นำบทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้เชี่ยวชาญ 2 ท่าน เพื่อพิจารณาความเหมาะสมในด้านเนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน ความเหมาะสมของภาษา และระยะเวลา แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง

2.4 นำบทเรียนและคู่มือครูไปปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และ ผู้เชี่ยวชาญ 2 ท่าน จากนั้นนำไปทดลองสอนกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งไม่ใช่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน ที่เป็นอาสาสมัคร โดยใช้เวลาสอนรวม 20 คาบ คาบละ 50 นาที โดยผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนด้วยตนเอง หลังจากทดลองสอนในแต่ละคาบ ผู้วิจัยสังเกตและจดบันทึกข้อบกพร่องในด้านความยากง่าย ภาษาที่ใช้ และ เวลา ของบทเรียนและคู่มือครู

2.5 นำบทเรียนและคู่มือครู ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว ให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้เชี่ยวชาญ 2 ท่าน ตรวจแก้ไขอีกครั้งหนึ่ง เป็นการปรับปรุงเพื่อให้ได้บทเรียนและคู่มือครูที่สมบูรณ์พร้อมที่จะนำไปทดลองสอนกับกลุ่มตัวอย่าง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

1. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 60 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหาและสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

2. นำแบบทดสอบ เสนอคณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ เพื่อให้ได้แบบทดสอบที่มีความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา และสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

3. นำแบบสอบที่ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการและผู้เชี่ยวชาญ ไปทดสอบกับนักเรียน จำนวน 10 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่ผ่านการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นมาแล้ว โดยใช้เวลาในการทำข้อสอบ 120 นาที

4. นำข้อสอบมาตรวจให้คะแนนดังนี้ ข้อที่ตอบถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่ตอบผิดหรือไม่ตอบหรือตอบมากกว่า 1 ตัวเลือก ให้ 0 คะแนน จากนั้นข้อสอบไปวิเคราะห์เพื่อหาค่าความยากง่าย (p) และ หาค่าอำนาจจำแนก (r)

5. คัดเลือกข้อสอบแบบที่มี ค่าความยากง่าย (p) ตั้งแต่ 0.2 ถึง 0.8 และ ค่าอำนาจจำแนก (r) ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ไว้จำนวน 40 ข้อ แล้วนำมาหาค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบแบบปรนัย โดยใช้สูตรของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (KR-20)

6. นำข้อสอบที่คัดเลือกแล้วจำนวน 40 ข้อ ไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่าง

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 38 คน โดยใช้บทเรียนและคู่มือครูที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น การสอนกลุ่มตัวอย่างดังกล่าวจะสอนนอกเวลาเรียนปกติ วันละ 1 คาบ คาบละ 50 นาที จำนวน 20 วัน รวม 20 คาบ

2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนครบ 20 คาบ ให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัย จำนวน 40 ข้อ โดยใช้เวลาในการทำข้อสอบ 90 นาที

3. นำแบบทดสอบวัดผลการทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น มาตรวจให้คะแนน ดังนี้ ข้อที่ถูกให้ 1 คะแนน ข้อที่เลือกคำตอบผิดหรือไม่ตอบหรือเลือกตอบมากกว่า 1 ข้อ ให้ข้อละ 0 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)

2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นได้มากกว่า ร้อยละ 50 ขึ้นไป ของนักเรียนทั้งหมด โดยใช้การทดสอบเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร ใช้ค่าสถิติ Z (Z-Test for Population Proportion)

3. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.1 ค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)

3.2 ค่าสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อสอบได้แก่ ค่าความเชื่อมั่นของข้อสอบปรนัย โดยใช้สูตร KR-20 หาค่าความยากง่าย (p) และ ค่าอำนาจจำแนก (r)

3.3 สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ ค่าสถิติ Z

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องสมการพหุนามเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 1 ห้องเรียน จำนวน 38 คน โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ตอนที่ 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ตอนที่ 3 ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่ผู้วิจัยนำมาวิเคราะห์ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ จังหวัดกรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 1 ห้องเรียน จำนวน 38 คน ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลตามล่าดับ ดังนี้

ตอนที่ 1 : ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ค่าเฉลี่ยเลขคณิตคิดเป็นร้อยละของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 3	38	40	23.84	56.645	4.12

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่า คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 38 คน มีคะแนนเฉลี่ยเป็น 23.84 คิดเป็นร้อยละ 56.645 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.12

ตอนที่ 2 : ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนจากการทำแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	38	30	78.947

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 78.947 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ตอนที่ 3 : ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ตาราง 3 ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนคน	จำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	สถิติทดสอบ Z
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3	38	30	3.580**

** มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย และการวิเคราะห์ข้อมูล

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามเนื้อหาที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น

สมมุติฐานของการวิจัย

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้นได้มากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 1 ห้องเรียน 38 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1.บทเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้สอน 20 คาบ

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นข้อสอบแบบปรนัย ชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ผู้วิจัยสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 38 คน โดยใช้บทเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ใช้เวลาสอน 20 คาบ คาบละ 50 นาที

2. เมื่อเสร็จสิ้นการเรียน 20 คาบ แล้วให้นักเรียนกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ซึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 90 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ตามบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น หลังจากนั้นผู้วิจัยได้นำข้อมูลมาวิเคราะห์ผลตามลำดับดังนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

2. ค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

3. ผลการทดสอบการสอบผ่านเกณฑ์การเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

สรุปผลการวิจัย

ผลการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปรากฏผลดังนี้

1. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 38 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 23.84 และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนเป็น 4.02 คะแนนและมีนักเรียนที่มีคะแนนสูงกว่าคะแนนเฉลี่ยจำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 36.84 ของนักเรียนทั้งหมด

2. นักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็มมีจำนวน 30 คนคิดเป็นร้อยละ 78.947 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

3. ผลการทดสอบที่ว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ได้มากกว่าร้อยละ 50 ของนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 โดยจำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์คิดเป็นร้อยละ 78.947 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถเพียงพอในการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

อภิปรายผล

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น จากบทเรียนที่ผู้วิจัยเรียบเรียงขึ้น ทั้งนี้อาจมาจาก

1.1 บทเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ที่ผู้วิจัยได้พยายามเรียบเรียงขึ้น ซึ่งเนื้อหาได้ปรับปรุงให้เหมาะสมกับวัย มีการยกตัวอย่างหลายตัวอย่างประกอบอย่างชัดเจน โดยเริ่มจากเนื้อหาพื้นฐานอย่างง่าย ปานกลาง และ ยากตามลำดับ

1.2 นักเรียนส่วนใหญ่มีความตั้งใจและสนใจในการเรียนดีมาก ซึ่งพบได้จากการซักถามในชั้นและการทำแบบฝึกหัด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะ เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นเนื้อหาวิชาใหม่ที่มีลักษณะท้าทายความสามารถของผู้เรียน

1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ผู้วิจัยได้สอนขั้นตอนการคิดอย่างละเอียด และ เมื่อผู้เรียนไม่เข้าใจในหัวข้อใด ผู้วิจัยก็เปิดโอกาสให้ซักถามได้อย่างเต็มที่ทั้งภายในและภายนอกชั้นเรียน

1.4 การจัดกิจกรรมการเรียน ผู้วิจัยใช้สื่อและวิธีการสอนที่หลากหลาย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของเนื้อหาและเวลา เช่น วิธีการถาม – ตอบ การนำเครื่องคิดเลขมาช่วยในการคำนวณ การแสดงลักษณะของกราฟโดยใช้โปรแกรม Maple เป็นต้น โดยพยายามเน้นกิจกรรม เพื่อให้ผู้เรียนทดลองและค้นพบด้วยตนเองก่อน ทำให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาได้

2. ค่าเฉลี่ยของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ไม่สูงมากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่านักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความสามารถในระดับปานกลาง

3. นักเรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจในวิธีการหาคำตอบที่เป็นจำนวนอตรรกยะของสมการพหุนามและสามารถนำไปใช้ได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะว่านักเรียนได้เรียนรู้และฝึกฝนในหัวข้อทฤษฎีเศษเหลือ และการแทนค่าจำนวนจริง ในหัวข้อก่อนหน้า ประกอบกับผู้วิจัยให้เวลากับการเรียนหัวข้อนี้ถึง 4 คาบ

ข้อเสนอแนะ

1. จากผลการวิจัยปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการเรียนเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ดังนั้นผลการวิจัยนี้น่าจะเป็นแนวทางให้ผู้จัดทำหลักสูตรกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 พิจารณาเลือกเนื้อหาเรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น นำมาบรรจุในคณิตศาสตร์เลือก ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. การจัดการเรียนการสอน เรื่องทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ผู้สอนควรส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองให้มากที่สุด ในบางหัวข้อผู้สอนควรมีบทบาทเป็นเพียงผู้แนะนำและสนับสนุนนักเรียนเพื่อให้นักเรียนเกิดกระบวนในการคิด วิเคราะห์ และแก้ปัญหาได้

3. ควรทำการวิจัยเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ซ้ำอีกครั้งโดยใช้กลุ่มตัวอย่างให้มีขนาดใหญ่ขึ้นและมีขอบเขตกว้างขึ้น เพื่อจะได้ข้อสรุปที่แน่นอนและชัดเจนมากยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กรมวิชาการ. (2539). *การศึกษาการใช้หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).* ม.ป.พ.

_____. (2542). *รายงานผลการประเมินคุณภาพการศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2540.* กรุงเทพฯ : สำนักงานทดสอบทางการศึกษา กรมวิชาการ.

_____. (2545). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์รับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

ชนิดา พลแสน. (2534). *การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนาม ดีกรีสอง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ชวลิต เอี่ยมเจริญ. (2519). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา เรขาคณิตโปรเจคทีฟ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษาประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม. (2519). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง อสมการ และค่าสัมบูรณ์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ดี บางกระ. (2538). *การศึกษาความสามารถของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในการเรียนเรื่องฟังก์ชัน* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ทัศนียา เขมะชิต. (2527). *การสำรวจเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตการศึกษา 6* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ธ.ธง พวงสุวรรณ. (2518). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เบื้องต้นของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม. (2542). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

บุญมา สมสวัสดิ์. (2517). *การศึกษาการทดลองสอนเรื่องเซตเบื้องต้นกับนักเรียนระดับชั้นอนุบาล.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

บุญเกิด ชำนาญการค้า. (2526). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาแคลคูลัสเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ประเวศ ก่อเกียรติศิริกุล. (2519). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชา เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

พิชากร แปลงประสพโชค. (2518). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

มัลลิกา ศรีกมล. (2526). *ทฤษฎีสมการโพลิโนเมียล.* เชียงใหม่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. ถ่ายเอกสาร.

มานัส บุญยัง. (2529). *ทฤษฎีสมการเบื้องต้น.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ยุพิน พิพิธกุล. (2524). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : บพิทการพิมพ์.

_____. (2530). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รจนา รัตนานิคม. (2544). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้เรียนสำคัญที่สุด.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถ่ายเอกสาร.

รพีพร ใจอุ่น. (2534). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนาม โดยการสอนและไม่สอนเสริมความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน.*วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

วิทยา รุ่งอดุลพิศาล. (2517). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาเรขาคณิตแปลงสภาพ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

วันชัย ทัพพะปรุณะ. (2529). *การทดลองสอนเวกเตอร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, กระทรวงศึกษาธิการ.(2544). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2544.* กรุงเทพฯ : ม.ป.พ. ถ่ายเอกสาร.

สุกัลยา ฉายสุวรรณ. (2539). *การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยความรู้พื้นฐานทางพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในเขตกรุงเทพมหานคร.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

สิริพร ทิพย์คง.(2543,พฤศจิกายน-ธันวาคม 2543-มกราคม 2544). " อนาคตของการเรียนและการสอนพีชคณิต ", *วารสารคณิตศาสตร์.* 506-508 : 6 – 10.

สุพรรณ เพ็งชัย. (2544). *ทฤษฎีสมการเบื้องต้น.* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สุวีริยาสาส์น.

สุมานะ อาจหาญ. (2521). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง พีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ ปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

สุเทพ ทองอยู่. (2517). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องความน่าจะเป็นของนักเรียนชั้นมัธยมตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

เสกสรรค์ ดำกระบี่. (2517). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องลิมิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายสายสามัญ แผนกวิทยาศาสตร์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2534). *คู่มือการประเมินผลการเรียนตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).* กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

ศึกษาธิการ, กระทรวง. (2535). *หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้น พุทธศักราช 2524 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533).* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.

ศุภชัย ทองศิริ. (2527). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องกรุ๊ปเบื้องต้นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. ถ่ายเอกสาร.

ศรีภรณ์ ณะวงศ์ษา. (2542). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนแบบ TEAMS-GAMES- TOURNAMENT STUDENT TEAMS – ACHIEVEMENT DIVISION และการสอนตามคู่มือครู.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

อรศรี ปุราคำ. (2542). " ก้าวแรกของคณิตศาสตร์แนวใหม่ ในหลักสูตรมัธยมศึกษาของไทย ", *ในรายงานผลการวิเคราะห์หลักสูตรคณิตศาสตร์.* หน้า 14 – 27. กรุเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรไทย.

อำพล โต้ตอบ. (2539). *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง คำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนของสมการพหุนามของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

อำพล ธรรมเจริญ. (2516). *การศึกษาความสามารถทางการคิดเชิงนามธรรมในคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : วิทยาลัยวิชาการศึกษา ประสานมิตร. ถ่ายเอกสาร.

Aleksanova, Irene. (1990). *Mathematics Problems Algebra.* Moscow : Mir Publishers.

Aufmann, Richard N. & Barker, Vernon C. and Nation, Richard D. (1993). *College Algebra.* Boston. : Houghton Mifflin Company.

Gallick, Mary Catherine. (1971, February). "Acheievement of Fifth , Sixth and tenth Grades in Coordinate Geometry," *Dissertation Abstracts International.* 31(8) : 4035-A.

Gubrud, Allan Roy. (1971, June). "The effect of an Advance Organizer and a Concrete Experience on Learning the Concept of Vectors in Junior and Senior High School," *Dissertation Abstracts International.* 31(12) : 6468-A.

Gustafson, David R. & Peter ,D. (1999). Frisk. *Alebra for College Students.* California. : Brooks/Cole Publishing Company.

Gustafson, David R. & Peter ,D. (1999). Frisk. *Alebra for College Students*. California. : Brooks/Cole Publishing Company.

Halmos, P.R. (1989). *Problem Books in Mathematics.* New York : Springer-Verlag Inc.

Larson Hostetler Hodgkins.(1989). *College Algebra.* Lexington : D.C. Heath and Company.

Brant, Shoko Aogaichi & Zeidman, Edward A. (1996). *Intermediate Algebra A Functional Approach.* New York : HarperCollins College Publishers.

Sullivan, Michael. (1987). College Algebra. U.S.A. : Prentice-Hall.

White, Charles William. (1974, October). " A Study of the Ability of Seventh and Eighth Grade Students to Learn Basic Concepts of Probability and the Relationship between Achievement," *Dissertation Abstracts International.* 35(4) : 1969-A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การวิเคราะห์ผลข้อมูล

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากรของนักเรียนขั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งใช้สถิติทดสอบ Z (Z – test)

สมมติฐานคือ $H_0 : p \leq 0.50$

$H_1 : p > 0.50$

สถิติทดสอบ $$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

เมื่อ $\hat{p}$ แทน สัดส่วนของจำนวนนักเรียนในกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 50 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม ซึ่ง $\hat{p} = \frac{30}{38} = 0.79$

$p_0 = 0.50$

n แทน จำนวนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 38 คน

แทนค่า

$$Z = \frac{0.79 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.50(1-0.50)}{38}}}$$

$$= \frac{0.29}{0.081}$$

$$= 3.580$$

แต่ $Z_{.01} = 2.33$

เพราะว่า $3.580 > 2.33$

ปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ .01

นั่นคือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น เป็นจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตาราง 4 ค่า p ค่า r และ ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบปรนัยวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ข้อที่	ค่า p	ค่า r	ข้อที่	ค่า p	ค่า r
1	0.80	0.40	21	0.42	0.20
2	0.71	0.30	22	0.57	0.50
3	0.80	0.30	23	0.74	0.20
4	0.50	0.25	24	0.26	0.62
5	0.42	0.60	25	0.65	0.43
6	0.47	0.40	26	0.80	0.25
7	0.57	0.56	27	0.34	0.30
8	0.73	0.40	28	0.42	0.40
9	0.80	0.50	29	0.65	0.25
10	0.80	0.30	30	0.52	0.25
11	0.76	0.50	31	0.36	0.70
12	0.73	0.20	32	0.50	0.40
13	0.78	0.25	33	0.42	0.40
14	0.26	0.64	34	0.60	0.40
15	0.80	0.23	35	0.57	0.40
16	0.44	0.60	36	0.36	0.65
17	0.47	0.30	37	0.23	0.37
18	0.63	0.70	38	0.60	0.40
19	0.78	0.45	39	0.76	0.35
20	0.80	0.50	40	0.42	0.20

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (KR – 20)

$$r_{tt} = \frac{N}{N-1}\left[1-\frac{\sum pq}{s^2}\right]$$

$$= \frac{40}{39}\left[1-\frac{8.52}{28.26}\right]$$

$$= \frac{40}{39}\left[1-0.30\right]$$

$$= \frac{40}{39}(0.70)$$

$$= 0.7179$$

หมายเหตุ s คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนของนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 คน

ตาราง 5 การคำนวณหาค่าเฉลี่ยของคะแนนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น (คะแนนเต็ม 40 คะแนน)

x	f	fx	x^2	fx^2
33	1	33	1089	1089
30	1	30	900	900
29	6	174	841	5046
27	1	24	729	729
26	2	52	676	1352
25	2	50	625	1250
24	1	24	576	576
23	3	69	529	1587
22	2	44	484	968
21	7	147	441	3087
20	4	80	400	1600
19	5	95	361	1805
18	3	54	324	972
	$\sum f = 38$	$\sum fx = 879$		$\sum fx^2 = 20961$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{879}{38} = 23.84$$

$$S. = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - \left(\sum fx\right)^2}{N(N-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{38(20961) - (879)^2}{38(37)}}$$

$$= \sqrt{\frac{796518 - 772641}{1406}}$$

$$= \sqrt{\frac{23877}{1406}}$$

$$= \sqrt{16.98}$$

$$= 4.12$$

ภาคผนวก ข
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

แบบทดสอบวัดผลสัมฤธิ์ทางการเรียน

เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เวลาสอบ 90 นาที คะแนนเต็ม 40 คะแนน

****

คำชี้แจง แบบทดสอบนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ มีทั้งหมด 7 หน้า

1. การตอบแบบทดสอบแบบปรนัย ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย × (กากบาท) ในช่องที่ตรงกับข้อคำตอบที่ต้องการในกระดาษคำตอบ
   เช่น ต้องการเลือกตัวเลือก ก เป็นคำตอบ ให้ทำเครื่องหมายดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง	จ
1	×				
2					

1.1 ถ้าต้องการเปลี่ยนตัวเลือก ก เป็นตัวเลือก ง ให้ขีดเส้นทับเครื่องหมายเดิมแล้วจึงทำเครื่องหมายใหม่ดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง	จ
1	=			×	
2					

1.2 การตอบแต่ละข้อ ห้ามขีดคำตอบเกิน 1 คำตอบ

2. ห้ามขีดเขียนหรือทำเครื่องหมายใด ๆ ลงในแบบทดสอบนี้เป็นอันขาด

แบบทดสอบเรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น หน้าที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

1. นิพจน์ในข้อใดเป็นเอกนาม

ก. $3x^2$ และ $\frac{2}{x^2}$ ข. 0 และ x^{-1}

ค. $\frac{1}{4}x^3$ และ $3x^{-2}$ ง. 5 และ $\frac{3}{4}x$

2. ผลลัพธ์ของ $-2(3x^2 + x^2) - 5(2x^2 - x^2)$ เท่ากับข้อใด

ก. $-3x^2$ ข. $-13x^2$

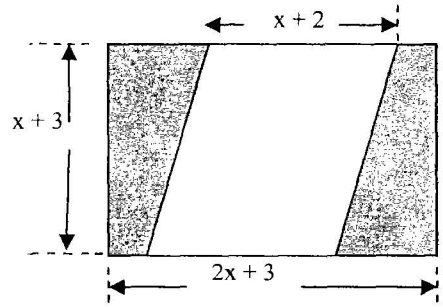
ค. $-14x^2$ ง. $-23x^2$

3. กำหนด $P(x) = 5x^2 - 6x - 12$, $Q(x) = -3x^2 - 9x + 5$ แล้ว $P(x) + Q(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. $2x^2 - 15x - 7$ ข. $2x^2 - 3x - 7$

ค. $8x^2 - 15x - 7$ ง. $8x^2 + 15x - 7$

4. พื้นที่ส่วนที่แรเงาตรงกับข้อใด



ก. $x^2 + 4x + 3$

ข. $4x + 3$

ค. $2x + 6$

ง. $x + 3$

5. กำหนด $P(x) = 7x - 8$, $Q(x) = 5x + 6$, $R(x) = 8x + 12$ แล้ว $P(x) - Q(x) + R(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. $6x + 2$ ข. $10x + 10$

ค. $10x - 2$ ง. $20x + 10$

6. กำหนด $P(x) = -8x + 3$, $Q(x) = -6x - 20$, $R(x) = -3x + 9$ แล้ว $P(x) + Q(x) - R(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. $-11x - 8$ ข. $-17x - 26$

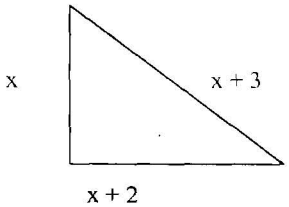
ค. $-17x - 8$ ง. $-11x - 26$

7. กำหนด $P(x) = 8x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = -2x^2 + 7x - 4$, $R(x) = 2x^2 - 4x + 3$ แล้ว $P(x) + Q(x) - R(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. $8x^2 + 8x - 4$ ข. $4x^2 + 16x - 10$

ค. $4x^2 + 8x - 4$ ง. $8x^2 + 16x - 10$

8. พหุนามในข้อใดแสดงความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมดังรูป



ก. $P(x) = 3x + 5$

ข $P(x) = 3x + 1$

ค. $P(x) = x + 5$

ง. $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)$

9. ผลคูณของ $(3x^2 - 4x + 1)(2x - 1)$ เท่ากับข้อใด

ก. $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$ ข. $6x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

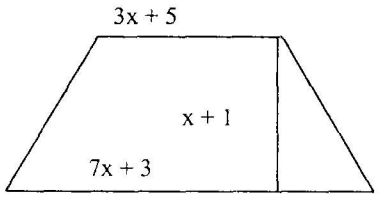
ค. $6x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ ง. $6x^3 - 11x^2 - 6x - 1$

10. ผลคูณของ $(3x^2 - 2)(x + 2)$ เท่ากับข้อใด

ก. $3x^3 + 6x^2 - 2x - 4$ ข. $3x^3 + 4x^2 - 4$

ค. $3x^3 + 8x^2 - 4$ ง. $3x^3 - 4$

11. เขียนพหุนามแสดงพื้นที่ของรูปที่กำหนด ได้ดังข้อใด เมื่อ A(x) แทนพื้นที่ของรูป



ก. $A(x) = 5x^2 - 9x + 4$

ข. $A(x) = 5x^2 + 9x + 4$

ค. $A(x) = 5x^2 + 9x - 4$

ง. $A(x) = 5x^2 - 9x - 4$

12. ผลหารที่เกิดจากการหาร $(6x^2 + 7x + 2)$ ด้วย $(2x + 1)$ เท่ากับข้อใด

ก. $3x + 2$ ข. $3x - 2$

ค. $6x + 4$ ง. $6x - 4$

13. ถ้าต้องการทราบผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $(3x^3 - x^2 + 4x - 2)$ ด้วย $(x - 1)$ ควรใช้วิธีการใด จึงเหมาะสมที่สุด

ก. วิธีการตั้งหารยาว ข. วิธีการหารสังเคราะห์

ค. วิธีการของทฤษฎีเศษเหลือ ง. วิธีการของทฤษฎีตัวประกอบ

14. ผลหารที่เกิดจากการหาร $(x^3 + 1)$ ด้วย $(x + 1)$ เท่ากับข้อใด

ก. $x^2 - x + 1$ ข. $x^2 - 2x + 1$

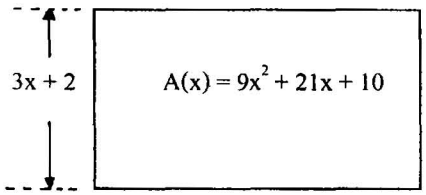
ค. $x^2 + 2x + 1$ ง. $x^2 + x + 1$

15. ผลหารที่เกิดจากการหาร $(2x^3 - 3x + 1)$ ด้วย $(x - 2)$ เท่ากับข้อใด

ก. $2x^2 + 4x + 5$ เศษ 11 ข. $2x^2 - 4x + 5$ เศษ 11

ค. $2x^2 + 4x - 5$ เศษ 11 ง. $2x^2 - 4x + 5$ เศษ 11

16. ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูป เท่ากับข้อใด เมื่อ A(x) แทนพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า



ก. $9x + 15$

ข. $3x + 5$

ค. $9x - 15$

ง. $3x - 5$

17. ถ้าต้องการทราบเฉพาะเศษที่เกิดจากการหาร $(5x^3 - 24x^2 + 9)$ ด้วย $(5x + 1)$ ควรใช้วิธีการใดจึงเหมาะสมที่สุด

ก. วิธีการตั้งหารยาว ข. วิธีการหารสังเคราะห์

ค. วิธีการของทฤษฎีเศษเหลือ ง. วิธีการแยกตัวประกอบ

18. ถ้า $P(x) = x^2 - 5x$ แล้ว $P(2) + P(3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. 12

ค. – 10 ง. – 12

19. ถ้า $P(x) = x^2 - 5x$ แล้ว $P(P(0))$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. 12

ค. 18 ง. – 3

20. กำหนด $P(x) = x^3 - x^2 + kx + 4$ แล้ว k มีค่าเท่ากับข้อใด เมื่อ $P(2) = 0$

ก. 2 ข. 4

ค. – 2 ง. – 4

21. ผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 6x^2 - x - 12$ ด้วย $2x + 3$ ตรงกับข้อใด

ก. $3x - 5$ เศษ 27 ข. $3x - 5$ เศษ – 27

ค. $3x - 5$ เศษ 3 ง. $6x - 10$ เศษ 3

22. ผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 6$ ด้วย $x - 1$ ตรงกับข้อใด

ก. $3x^2 + x + 2$ เศษ 0 ข. $3x^2 + x + 2$ เศษ 8

ค. $3x^2 - 5x + 6$ เศษ 0 ง. $3x^2 - 5x + 6$ เศษ 8

23. ในการหาค่า k ที่ทำให้เศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^3 + 3x^2 + k$ ด้วย $x + 2$ มีค่าเป็น 0 ควรใช้วิธีการใด จึงเหมาะสมที่สุด

ก. วิธีการตั้งหารยาว ข. วิธีการหารสังเคราะห์

ค. วิธีการของทฤษฎีบทเศษเหลือ ง. วิธีการแยกตัวประกอบ

24. จากขั้นตอนการหารสังเคราะห์ ค่าของ a , b , c และ d ตรงกับข้อใด

2	a	b	c	d
		2	0	0
	1	0	0	1

ก. $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 1$ ข. $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $d = -1$

ค. $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 1$ ง. $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = -1$

25. จากขั้นตอนการหารพหุนามดีกรี 3 ด้วย $x - r$ ค่าของ r ตรงกับข้อใด

r	1	3	−2	−4
		−1	−2	4
	1	2	0	0

ก. $r = 1$ ข. $r = -1$

ค. $r = 2$ ง. $r = -2$

26. เงื่อนไขในข้อใดที่ทำให้ $(x + 4)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = x^3 - 13x + 12$

ก. $P(4) = 0$ ข. $x + 4$ หาร $P(x)$ ได้ลงตัว

ค. ถูกทั้งข้อ ก และ ข้อ ข ง. ผิดทั้งข้อ ก และ ข้อ ข

27. ถ้า $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 8$ แล้ว ควรใช้วิธีการใดหาตัวประกอบตัวที่เหลือจึงจะเหมาะสมที่สุด

ก. วิธีการตั้งหารยาว ข. วิธีการหารสังเคราะห์

ค. วิธีการของทฤษฎีบทเศษเหลือ ง. วิธีการแยกตัวประกอบ

28. สมการพหุนามที่มีดีกรี 3 และมีค่ารากเป็น 2 , - 2 , 3 ตรงกับข้อใด

ก. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ ข. $x^3 + 7x^2 + 16x + 12 = 0$

ค. $x^3 + 7x^2 - 4x + 12 = 0$ ง. $x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$

29. ถ้า (x – 2) หาร $P(x) = x^3 - x^2 + 2kx + 4$ ได้ลงตัว แล้ว k มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $k = 0$ ข. $k = 2$

ค. $k = -2$ ง. $k = 4$

30. จำนวนตรรกยะทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการ $2x^3 + 9x^2 - 2x - 9 = 0$ คือข้อใด

ก. $1, -1, -\frac{9}{2}$ ข. $1, -1, 3$

ค. $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}$ ง. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}$

31. คำตอบของสมการ $(2x + 1)(x - 5) = 0$ ตรงกับข้อใด

ก. $x = \frac{1}{2}, -5$ ข. $x = -\frac{1}{2}, -5$

ค. $x = -\frac{1}{2}, 5$ ง. $x = \frac{1}{2}, 5$

32. คำตอบของสมการ $(x + 3)(4x^2 - 1) = 0$ ตรงกับข้อใด

ก. $x = \pm\frac{1}{4}, 3$ ข. $x = \pm\frac{1}{4}, \pm 3$

ค. $x = \pm\frac{1}{2}, -3$ ง. $x = \pm\frac{1}{2}, \pm 3$

33. คำตอบของสมการ $(x - 5)(x^2 + 3x - 18) = 0$ ตรงกับข้อใด

ก. $x = 3, 5, 6$ ข. $x = 3, 5, -6$

ค. $x = -3, -5, 6$ ง. $x = -3, -5, -6$

34. คำตอบของสมการ $x^3 - 3x - 2 = 0$ ตรงกับข้อใด

ก. $x = -1, 2$ ข. $x = 1, -2$

ค. $x = -1, -2$ ง. $x = -1, -2$

35. ถ้า – 1 เป็นคำตอบหนึ่ง ของสมการ $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$ การหาคำตอบที่เหลือควรใช้วิธีการใดจึงจะเหมาะสมที่สุด

ก. วิธีการตั้งหารยาว ข. วิธีการหารสังเคราะห์

ค. วิธีการของทฤษฎีบทเศษเหลือ ง. วิธีการแยกตัวประกอบ

36. การประมาณคำตอบของสมการ $x^3 - 9 = 0$ ในขั้นตอนแรกของการประมาณคำตอบได้ผลดังนี้ $f(2) = 2^3 - 9 = -1$ และ $f(3) = 3^3 - 9 = 18$ ขั้นตอนต่อไปในการประมาณคำตอบควรนำจำนวนใดมาพิจารณา

ก. – 1 และ 18 ข. 2 และ 3

ค. f(2) และ f(3) ง. –1 และ 9

ใช้ข้อมูลด้านล่างตอบคำถามข้อ 37 ถึง 40

จงประมาณคำตอบของสมการ $x^3 + x - 1 = 0$ (ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

<u>แนวคิด</u> ให้ $f(x) = x^3 + x - 1$

<u>ขั้นที่ 1</u> ถ้า $x = 1$ จะได้ $f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1$

<u>ขั้นที่ 2</u> ถ้า $x_2 = 0.5$ จะได้ $f(0.5) = -0.375$

<u>ขั้นที่ 3</u> ถ้า $x_3 = 0.75$ จะได้ $f(0.75) = 0.1718$

<u>ขั้นที่ 4</u> ถ้า $x_4 = 0.625$ จะได้ $f(0.625) = -0.1308$

<u>ขั้นที่ 5</u> ถ้า $x_5 = 0.6875$ จะได้ $f(0.6875) = 0.01245$

<u>ขั้นที่ 6</u> ถ้า $x_6 = 0.65625$ จะได้ $f(0.65625) = -0.06113$

<u>ขั้นที่ 7</u> ถ้า $x_7 = 0.671875$ จะได้ $f(0.671875) = -0.02483$

<u>ขั้นที่ 8</u> ถ้า $x_8 = 0.679688$ จะได้ $f(0.679688) = -0.00631$

<u>ขั้นที่ 9</u> ถ้า $x_9 = 0.683594$ จะได้ $f(0.68594) = 0.003038$

<u>ขั้นที่ 10</u> ถ้า $x_{10} = 0.681641$ จะได้ $f(0.681641) = -0.00165$

37.ในกระบวนการ<u>ขั้นที่ 1</u> ค่าของ f(0) และ f(1) ทำให้นักเรียนทราบข้อเท็จจริงในข้อใด

ก. จุด (1, f(1)) อยู่เหนือแกน x และ f(1) อยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ 1 หน่วย

ข. จะมีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการอยู่ในช่วง 0 ถึง 1

ค. จุด (0, f(0)) อยู่ใต้แกน x และ f(0) อยู่ห่างจากแกน x เป็นระยะ 1 หน่วย

ง. ถูกทุกข้อ

38. ใน<u>ขั้นที่ 6</u> นักเรียนสามารถหา x_6 ได้อย่างไร

ก. แบ่งครึ่งช่วง x_2 กับ x_3 ข. แบ่งครึ่งช่วง x_2 กับ x_4

ค. แบ่งครึ่งช่วง x_4 กับ x_5 ง. แบ่งครึ่งช่วง x_3 กับ x_5

39. นักเรียนควรเลือกใช้ค่า x ในขั้นตอนใด เป็นคำตอบจึงจะเหมาะสมที่สุด

ก. ขั้นตอนที่ 7 ข. ขั้นตอนที่ 8

ค. ขั้นตอนที่ 9 ง. ขั้นตอนที่ 10

40. คำตอบของสมการ $4x^3 + 14x - 8 = 0$ ที่คำตอบอยู่ใน (0 , 1) ตรงกับข้อใด (ประมาณถูกต้องถึงทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

ก. $x \approx 0.33$ ข. $x \approx 0.43$

ค. $x \approx 0.53$ ง. $x \approx 0.63$

****

ภาคผนวก ค
บทเรียนและคู่มือครู เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

บทเรียนประกอบด้วย

1. ความรู้พื้นฐาน

    เอกนาม พหุนาม การบวก การลบ การคูณ การหาร พหุนาม (5 คาบ)

2. ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

    1. ทฤษฎีบทเศษเหลือ (3 คาบ)

    2. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (2 คาบ)

    3. การหารสังเคราะห์ (3 คาบ)

    4. การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนตรรกยะ (3 คาบ)

    5. การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนอตรรกยะ (4 คาบ)

เนื้อหาเป็นการนำเสนอวิธีการหาคำตอบของสมการพหุนามที่มีดีกรีไม่เกิน 3 ซึ่งมีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ โดยใช้ การหารสังเคราะห์ ทฤษฎีบทเศษเหลือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ และวิธีการหาคำตอบของสมการพหุนามที่มีดีกรีไม่เกิน 3 ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ โดยการประมาณคำตอบด้วยจำนวนตรรกยะ

ในการจัดการเรียนการสอน ครูควรดัดแปลงวิธีการสอนให้เหมาะสมกับเนื้อหาในแต่ละหัวข้อโดยคำนึงถึงระดับสติปัญญา และความสามารถของผู้เรียน โดยที่ครูอาจเป็นผู้อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนช่วยกันตอบคำถาม ร่วมกันทำกิจกรรมในห้องเรียน ถ้าเป็นไปได้ควรให้นักเรียนสรุปบทเรียนเอง โดยครูอาจเสริมให้บ้างเพื่อให้การสรุปเป็นไปอย่างถูกต้อง

จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำบท

นักเรียนสามารถ

1. หาเศษเหลือจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(x-r)$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือได้
2. หาตัวประกอบของพหุนามที่กำหนด โดยใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบได้
3. หาผลลัพธ์และเศษของพหุนามที่กำหนด โดยวิธีการหารสังเคราะห์
4. หาคำตอบของสมการพหุนามที่มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะได้
5. หาคำตอบของสมการพหุนามที่มีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะได้

ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ในบทนำนี้จะกล่าวถึง เลขยกกำลัง เอกนาม การบวก การลบ การคูณ และการหาร เอกนาม การบวก การลบ การคูณและการหารพหุนาม ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานโดยสังเขป โดยที่แบบเรียนชุดนี้จะกล่าวถึงพหุนามตัวแปรเดียวเท่านั้น เพื่อนำไปใช้อ้างอิงในการเรียนหัวข้อที่ต้องอาศัยพื้นความรู้ดังกล่าว สำหรับรายละเอียดในแต่ละหัวข้อที่มีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว ผู้เรียนจะศึกษาได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไป เช่น หนังสือแบบเรียน หรือหนังสือคู่มือคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ส่วนหัวข้ออื่นจะกล่าวถึง ในคราวที่ผู้เรียนจะนำไปใช้อ้างอิงต่อไป

ทบทวนเอกนาม

<u>บทนิยามที่ 1</u> **เอกนามของ x คือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป ax^k**

โดยที่ a เป็นจำนวนจริงใดๆ x เป็นตัวแปร และ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เราเรียก a ว่า สัมประสิทธิ์ของเอกนาม

ถ้า $a \neq 0$ แล้วเรียก k ว่า ดีกรีของเอกนาม

ตัวอย่างเช่น $8x^3, -5x^3, x^2, 2x^2, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x^4$ **เป็นต้น**

$8x^3$ หมายถึง $8 \times x^3$ สามารถเขียนได้อีกหลายลักษณะ เช่น $8 \cdot x^3$ หรือ $(8)(x^3)$

$\frac{1}{2}x^4$ หมายถึง $\frac{1}{2} \times x^4$ สามารถเขียนได้อีกหลายลักษณะ เช่น $\frac{1}{2}x^4$ หรือ $(\frac{1}{2})(x^4)$

จากตัวอย่างพบว่า

$8x^3$ และ $-5x^3$ มีตัวแปรเป็นตัวเดียวกันคือ x และมีดีกรีเท่ากันคือ 3

$x^2, 2x^2$ และ $\frac{1}{2}x^2$ มีตัวแปรเป็นตัวเดียวกันคือ x และมีดีกรีเท่ากันคือ 2

เราเรียกเอกนามใดๆที่มีตัวแปรเดียวกันและดีกรีเท่ากัน ว่า เอกนามที่คล้ายกัน

ในเอกนามที่คล้ายกันเราสามารถนำเอกนามเหล่านั้นมา บวก ลบ เพื่อเขียนเป็น เอกนามเดียวกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง

กำหนดให้ a , b , c เป็นจำนวนจริงใดๆ

$a(b + c) = ab + ac$ **หรือ** $ba + ca = (b + c)a$ **ได้ดังนี้**

$8x^3 + (-5x^3) = (8 + (-5))x^3 = (8 + (-5))x^3 = 3x^3$

$8x^3 - (-5x^3) = (8 - (-5))x^3 = (8 + 5)x^3 = 13x^3$

$x^2 + 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 = (1 + 2 + \frac{1}{2})x^2 = (3\frac{1}{2})x^2 = \frac{7}{2}x^2$

$x^2 - 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 = (1 - 2 - \frac{1}{2})x^2 = (-1\frac{1}{2})x^2 = -\frac{3}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2$ และ $\frac{1}{2}x^4$ มีตัว x เป็นตัวเดียวกัน แต่มีดีกรีคือ 2 และ 4 ซึ่งไม่เท่ากัน

เราเรียกนิพจน์ในลักษณะดังกล่าวว่า เอกนามที่ไม่คล้ายกัน ทำให้ไม่สามารถเขียนรวมเป็นพจน์เดียวกันได้ และสามารถเขียนได้เป็น $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4$ หรือ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4$ เท่านั้น

ปัญหาที่ 1 จงระบุว่าเอกนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้เอกนามสองเอกนามใดที่เป็นเอกนามคล้าย

1. $2x$ กับ $3x$ ตอบ.....
2. $0.5x^2$ กับ $3x^2$ ตอบ.....
3. $-1.5x^3$ กับ $2.4x^2$ ตอบ.....
4. $\sqrt{2}\,x^6$ กับ $\sqrt{5}\,x^6$ ตอบ.....
5. $-\frac{1}{5}x$ กับ $3x$ ตอบ.....
6. $0.5x^5$ กับ $0.3x^6$ ตอบ.....
7. $0.5x^{-2}$ กับ $3x^2$ ตอบ.....
8. $-\frac{3}{7}x^{21}$ กับ $-\frac{5}{13}3x^{21}$ ตอบ.....
9. 0 กับ 3 ตอบ.....
10. $0.5x^{\frac{1}{2}}$ กับ $3x^{\frac{1}{2}}$ ตอบ.....

ปัญหาที่ 2 จงเขียนเอกนามที่กำหนดให้ ให้เป็นผลสำเร็จโดยใช้สมบัติการแจกแจง

1. $5x + 3x + 2x$ = ...=.....
2. $5x^2 + 12x^2$ = ... = ...
3. $5x^2 - 2x^2 + 6x^2$ =.....=.....
4. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^2$ =.....=.....

ในการคูณ และการหารเอกนามตั้งแต่สองเอกนามใดๆ นั้นเราต้องใช้
สมบัติของเลขยกกำลัง โดยที่ m , n เป็นจำนวนเต็ม

1. $a^m a^n = a^{m+n}$, 2. $(a^m)^n = a^{mn}$, 3. $(ab)^m = a^m b^m$
4. $a^0 = 1$ โดยที่ $a \neq 0$, 5. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ โดยที่ $m \geq n$

กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริง หรือ นิพจน์เชิงพีชคณิต โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

การคูณด้วย 0 (ศูนย์)

$0x^k = 0$ เช่น $0x^2 = 0$

การคูณด้วย 1 (หนึ่ง)

$1x^k = x^k$ เช่น $1(5) = 5$

$1(3x^2) = 3x^2$

เพื่อความเข้าใจลองศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาและเขียนนิพจน์ที่กำหนดให้ ให้เป็นผลสำเร็จ

1. $(4x^3)(x)(x^4) = 4x^{3+1+4} = 4x^8$
2. $(3^2)(x^4)(x) = 9x^{4+1} = 9x^5$
3. $(3^2)(x^5)(x^2) = 9x^{5+2} =$ .....
4. $\frac{1}{4}(x^2)^3 =$.....=.....
5. $3(5x)(\frac{1}{3}x) =$ .....=.....
6. $(3^2x)(x)(x^2)^4 =$.....=.....

เอกนาม $3x, x^2, -8x^2, \frac{2}{3}x^2$ และ 25 เรียก $3, 1, -8, \frac{2}{3}$ ว่า **สัมประสิทธิ์**

$25 = 25(1) = 25x^0$ **(เนื่องจากสมบัติของเลขยกกำลัง** $x^0 = 1$**)**

ดังนั้นเราจึงเรียก 25 ว่า เอกนามดีกรี ศูนย์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็น 25

สรุป **เรียก นิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป** ax^k; k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ว่า เอกนามของ x

ถ้า $a \neq 0$ แล้วจะเรียก k ว่า ดีกรีของเอกนาม

<u>ข้อควรระวัง!</u> เมื่อ $a = 0$ จะได้ $ax^k = 0$ ไม่ว่า x^k จะมีค่าเป็นเท่าใด ดังนั้น

เราจึงไม่นิยามดีกรีของ ax^k **เมื่อ** $a = 0$

<u>บทนิยามที่ 2</u> พหุนามของตัวแปร x คือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ และ a_0 โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n จำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient) และ

เรียก $P(x)$ ว่า พหุนามของตัวแปร x ดีกรี n และอ่าน P(x) ว่า P ของ x

พหุนามเป็นนิพจน์เชิงพีชคณิต ที่ซึ่งในแต่ละพจน์เป็นเอกนาม ตัวอย่างเช่น

$8x$ เป็นพหุนามของ x ที่มีพจน์เดียว เรียก พหุนามลักษณะนี้ว่า เอกนาม

$3x + 2$ เป็นพหุนามของ x ที่ประกอบด้วยพจน์สองพจน์ เรียกพหุนามลักษณะนี้ว่า ทวินาม

$4y^2 - 2y + 3$ เป็นพหุนามของ y ที่ประกอบด้วยพจน์สามพจน์ เรียก พหุนามลักษณะนี้ว่า ไตรนาม

<u>ข้อสังเกต</u> นิพจน์ $2x^3 - 3x^{-2}$ ไม่เป็นพหุนามเพราะพจน์ที่สองมีดีกรีเป็นลบรวมอยู่ด้วย

ในกรณีที่ ตัวแปรของพหุนาม เป็นตัวอื่นเช่น y จะเขียนแทนด้วย P(y) เป็นต้น

<u>ปัญหาที่ 3</u> บอกว่าแต่ละนิพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นพหุนามหรือไม่ ถ้าเป็นจงบอกว่า

พหุนามใดเป็น เอกนาม ทวินาม หรือ ไตรนาม

1. $x^2 + 2x + 1$ เป็นพหุนาม ที่เรียกว่า ไตรนาม
2. $3x^2 - 2x - 3$ .....
3. $\frac{1}{2}x^3 - 3x + 5$ .....

4. $\frac{2}{x} - 3$ .....

5. $7x^3 - 2x + 5$ .....

6. $5x^4 + 3x$ .....

7. $3x^3 + 4x^4 - 3x^3$ .....

8. $-5x^2$ .....

9. $\frac{a}{4}$ .....

10. $2y - 3\sqrt{y}$ .....

$5x^4 + 3x$ เป็นพหุนามที่เรียกว่าทวินาม มีดีกรีของพจน์แรกคือ 4 และดีกรีของพจน์อื่นๆน้อยกว่า 4 เรากล่าวได้ว่าดีกรีพหุนามคือ 4

$3x^3 + 4x^6 - 3x^2$ เป็นพหุนามที่เรียกว่า ไตรนาม มีดีกรีของพจน์สองคือ 6 และดีกรีของพจน์อื่นๆน้อยกว่า 6 เรากล่าวได้ว่าดีกรีพหุนามคือ 6

ดังนั้น เราเรียกดีกรีที่สูงที่สุดของพหุนามในรูปผลสำเร็จว่า ดีกรีพหุนาม

<u>ปัญหาที่ 4</u> บอกดีกรีของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $-4x^3 - 5x^2 + 3x$ .....

2. $5y^2 + 7y^2 - 16y^5$ .....

3. $-17c^4 + 12c$ .....

4. $15q^4 - 25q^2$ .....

5. $-14t^4 + 12t^3$ .....

การบวกและการลบพหุนาม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการบวกและการลบซึ่งจำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐาน ดังต่อไปนี้

สมบัติการสลับที่

$a + b = b + a$ เช่น $5 + 8 = 8 + 5$

$4x + x^2 = x^2 + 4x$

สมบัติการแจกแจง

$a(b + c) = ab + ac$ เช่น $2(3 + 4) = (2)(3) + (2)(4)$

$(3x)(4x + 5) = (3x)(4x) + (3x)(5)$

$(b + c)a = ba + ca$ เช่น $(7 + 3)(2) = (7)(2) + (3)(2)$

$(x + 5)(x) = (x)(x) + (5)(x)$

สมบัติการจัดหมู่การบวก

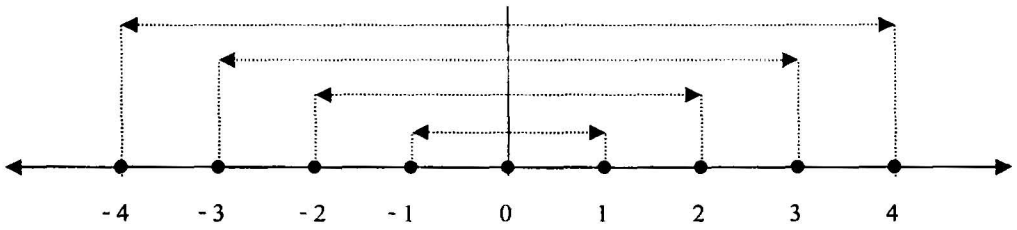
$(a + b) + c = a + (b + c)$ เช่น $(2 + 4) + 6 = 2 + (4 + 6)$

$(x + 5) + 4x^2 = x + (5 + 4x^2)$

<u>ข้อสังเกต</u> จากการบวกเอกนาม เราจะพบว่า ในกรณีที่เอกนามที่กำหนดให้เป็นเอกนามที่คล้ายกัน เราสามารถบวกเอกนามเหล่านั้นได้

<u>บทนิยามที่ 3</u> ในระบบจำนวนจริง จำนวนตรงข้ามของ a หมายถึง จำนวนจริงเมื่อบวกกับ a แล้ว ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์

นักเรียนพิจารณาเส้นจำนวนข้างล่างนี้



พบว่า ระยะจาก 0 ถึง - 1 มีระยะทางเท่ากับ ระยะจาก 0 ถึง 1

ระยะจาก 0 ถึง - 2 มีระยะทางเท่ากับ ระยะจาก 0 ถึง 2

ระยะจาก 0 ถึง - 3 มีระยะทางเท่ากับ ระยะจาก 0 ถึง 3

ระยะจาก 0 ถึง - 4 มีระยะทางเท่ากับ ระยะจาก 0 ถึง 4

ฯ ล ฯ

แสดงว่า จำนวนจริงทุกๆ จำนวน จะมี จำนวนจริงมาบวกกับจำนวนจริงที่กำหนดให้ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ เราเรียกจำนวนจริงที่มีสมบัติดังกล่าว ว่า จำนวนตรงข้าม ดังนั้น

เรียก – 1 ว่า จำนวนตรงข้ามของ 1 และ เรียก 1 ว่า จำนวนตรงข้ามของ – 1

เรียก – 2 ว่า จำนวนตรงข้ามของ 2 และ เรียก 2 ว่า จำนวนตรงข้ามของ – 2

เรียก – 3 ว่า จำนวนตรงข้ามของ 3 และ เรียก 3 ว่า จำนวนตรงข้ามของ – 3

เรียก – 3x ว่า จำนวนตรงข้ามของ 3x และ เรียก 3x ว่า จำนวนตรงข้ามของ – 3x

ฯ ล ฯ

<u>ปัญหาที่ 5</u> จงหาจำนวนตรงข้ามของจำนวนจริงต่อไปนี้

1. **จำนวนตรงข้ามของ** 7 คือ .....
2. จำนวนตรงข้ามของ -11 คือ .....
3. **จำนวนตรงข้ามของ** - 0.5 คือ .....
4. จำนวนตรงข้ามของ $\frac{1}{2}$ คือ .....
5. จำนวนตรงข้ามของ $(\sqrt{2}+5)$ คือ .....
6. จำนวนตรงข้ามของ 3x คือ ..... เมื่อ $x \neq 0$
7. จำนวนตรงข้ามของ - 0.5x คือ ..... เมื่อ $x \neq 0$
8. จำนวนตรงข้ามของ $-(\sqrt{3}-2)$ คือ .....

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $P(x) = 7x + 3$, $Q(x) = 5x + 20$ จงหา $P(x) + Q(x)$

วิธีทำที่ 1

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (7x + 3) + (5x + 20) \\ &= 7x + 3 + 5x + 20 \\ &= 7x + 5x + 3 + 20 \\ &= (7 - 5)x + 23 \\ &= 2x + 23 \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบ อาจบวกในแนวตั้งได้ดังนี้

วิธีทำที่ 2

$$\begin{aligned} P(x) &= 7x + 3 \\ Q(x) &= \underline{5x + 20} \quad + \\ P(x) + Q(x) &= \underline{\underline{12x + 23}} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $P(x) = x^2 - 6x - 3$, $Q(x) = -4x^2 + x - 4$ จงหา $P(x) + Q(x)$

วิธีทำที่ 1

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^2 - 6x - 3) + (-4x^2 + x - 4) \\ &= x^2 - 6x - 3 + (-4x^2) + x + (-4) \\ &= x^2 + (-4x^2) + (-6x) + x + (-3) + (-4) \\ &= (1 + (-4))x^2 + ((-6) + 1)x + ((-3) + (-4)) \\ &= -3x^2 + (-5)x + (-7) \\ &= -3x^2 - 5x - 7 \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบ อาจบวกในแนวตั้งได้ดังนี้

วิธีทำที่ 2

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 6x - 3 \\ Q(x) &= \underline{-4x^2 + x - 4} \quad + \\ P(x) + Q(x) &= \underline{\underline{-3x^2 - 5x - 7}} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $P(x) = x^2 - 7x - 8$, $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 10$ จงหา $P(x) + Q(x)$

วิธีทำที่ 1

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (x^2 - 7x - 8) + (x^3 + 3x^2 + 10) \\ &= x^2 - 7x - 8 + x^3 + 3x^2 + 10 \\ &= x^3 + (x^2 + 3x^2) - 7x + (-8 + 10) \\ &= x^3 + (1 + 3)x^2 - 7x + 2 \\ &= x^3 + 4x^2 - 7x + 2 \end{aligned}$$

วิธีทำที่ 2 จากที่กำหนดจะพบว่า พหุนาม $P(x)$ และ $Q(x)$ มีสามพจน์ก็จริงแต่ $P(x)$ มีบางพจน์ที่ขาดไปได้แก่ พจน์ที่มีดีกรี 3 ในขณะที่ $Q(x)$ มีบางพจน์ทีขาดไปได้แก่ พจน์ที่มีดีกรี 1 ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการทำและป้องกันข้อผิดพลาดที่จะเกิดขึ้น เรา จึงเขียน พหุนาม $P(x)$ และ $Q(x)$ ใหม่ดังนี้ $P(x) = 0x^3 + 1x^2 - 7x - 8$ และ $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 0x + 10$

$P(x) = 0x^3 + 1x^2 - 7x - 8$

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 0x + 10$ +

$P(x) + Q(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $P(x) = 3x^3 - 7x + 2$, $Q(x) = 7x^2 + 2x - 7$ จงหา $P(x) + Q(x)$

วิธีทำ $P(x) + Q(x) = (3x^3 - 7x + 2) + (7x^2 + 2x - 7)$

$P(x) = 3x^3 + 0x^2 - 7x + 2$

$Q(x) = 0x^3 + 7x^2 + 2x - 7$ +

$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 7x^2 - 5x - 5$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $P(x) = 3(x^2 - 3x + 1)$ และ $Q(x) = 2(3x^2 + x + 4)$ จงหา $P(x)+Q(x)$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 3(x^2 - 3x + 1)$

$= 3x^2 - 9x + 3$

$Q(x) = 2(3x^2 + x + 4)$

$= 6x^2 + 2x + 8$

$P(x) + Q(x) = (3 + 6)x^2 + (-9 + 2)x + (3+8)$

$= 9x^2 - 7x + 11$

ตัวอย่างที่ 7 ให้ $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 10$, $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x + 2$ จงหา $P(x) + Q(x)$

วิธีทำ $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x - 10$

$Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{9}x + 2$ +

$P(x) + Q(x) = 0x^2 - \frac{5}{9}x - 9$

<u>ปัญหาที่ 6</u> ให้ $P(x) = 8x + 4$, $Q(x) = 3x + 12$ จงหา $P(x) + Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 7 ให้ $P(x) = x^2 + 5x + 6$, $Q(x) = -2x^2 - 6x + 8$ จงหา $P(x) + Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 8 ให้ $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, $Q(x) = x^2 + 5x - 8$ จงหา $P(x) + Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 9 ให้ $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 4$, $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - 5$ จงหา $P(x) + Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

นักเรียนพิจารณาการบวกจำนวนเต็มต่อไปนี้

$4 - 4 = 0$ และ $0 = (-4) + 4$

$(-4) + 4 = 0$ และ $0 = 4 + (-4)$

พบว่า $4 - 4 = 0 = 4 + (-4)$

นั่นคือ $4 - 4 = 4 + (-4)$

ดังนั้นเราจึงตกลงการเขียน $a - b$ คือ $a + (-b)$

บทนิยามที่ 4 ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ เป็นพหุนามใดๆ

จะมีจำนวนจริง r ในระบบจำนวนจริง ซึ่ง

$rP(x) = ra_n x^n + ra_{n-1}x^{n-1} + ra_{n-2}x^{n-2} + \ldots + ra_1 x^1 + ra_0$

จากนิยามจะได้

เช่น $(x+5)(x^2+4) = (x)(x^2+4) + (5)(x^2+4)$

$(2x)(x^2+4) = (2x)(x^2) + (2x)(4)$

1. $r(P(x) + Q(x)) = rP(x) + rQ(x)$

เช่น $2[(x^2+3) + (x+1)] = (2)(x^2+3) + (2)(x+1)$

2. $1P(x) = P(x)$

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราทราบว่า $1 + (-1) = 0$

$P(x)[1 + (-1)] = P(x)[0]$

$1P(x) + (-1)P(x) = 0$

3. $1P(x) + (-1)P(x) = 0$

เราจึงตกลงเขียน $(-1)P(x) = -P(x)$

และตกลงเขียน $P(x) - Q(x)$ แทน $P(x) + (-1)Q(x)$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $P(x) = 3x - 8$, $Q(x) = 5x + 2$ จงหา $-P(x)$ และ $-Q(x)$

วิธีทำ จาก $-P(x) = (-1)P(x)$

จะได้ $-(3x-8) = (-1)(3x-8)$

$= -3x + 8$

และ $-Q(x) = (-1)Q(x)$

จะได้ $-(5x+2) = (-1)(5x+2)$

$= -5x - 2$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $P(x) = -3x^3 + 2x - 8$, $Q(x) = -5x^2 - x - 2$ จงหา $-P(x)$ และ $-Q(x)$

วิธีทำ จาก $-P(x) = (-1)P(x)$

จะได้ $-(-3x^3 + 2x - 8) = (-1)(-3x^3 + 2x - 8)$

$= 3x^3 - 2x + 8$

และ $-Q(x) = (-1)Q(x)$

จะได้ $-(-5x^2 - x - 2) = (-1)(-5x^2 - x - 2)$

$= 5x^2 + x + 2$

ตัวอย่างที่ 11 ให้ $P(x) = 8x + 2$, $Q(x) = -3x + 4$ จงหา $P(x) - Q(x)$

วิธีทำ จากที่กำหนด พหุนามที่เป็นตัวลบคือ $Q(x) = -3x + 4$ เราสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$

$= (8x + 2) + (-(-3x + 4))$

$= (8x + 2) + (3x - 4)$

ดังนั้น

$P(x) = 8x + 2$

$(-Q(x)) = 3x - 4$ +

$P(x) - Q(x) = 11x - 2$

ตัวอย่างที่ 12 ให้ $P(x) = -9x^3 + 3x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 14x^2$ จงหา $P(x) - Q(x)$

วิธีทำ จากที่กำหนดพหุนามที่เป็นตัวลบคือ $Q(x) = 5x^3 - 14x^2$ เราสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$
$$= (-9x^3 + 3x^2) + (-(5x^3 - 14x^2))$$
$$= (-9x^3 + 3x^2) + (-5x^3 + 14x^2)$$

ดังนั้น

$$P(x) = -9x^3 + 3x^2$$
$$(-Q(x)) = -5x^3 + 14x^2$$
$$P(x) - Q(x) = -14x^3 + 17x^2$$

ตัวอย่างที่ 13 ให้ $P(x) = -3x^2 + 5x$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$ จงหา $P(x) - Q(x)$

วิธีทำ จากที่กำหนด พหุนามที่เป็นตัวลบคือ $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$ เราสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$
$$= (0x^3 - 3x^2 + 5x + 0) + (-(2x^3 - 3x^2 + 0x + 10))$$
$$= (0x^3 - 3x^2 + 5x + 0) + (-2x^3 + 3x^2 - 0x - 10)$$

$$P(x) = 0x^3 - 3x^2 + 5x + 0$$
$$(-Q(x)) = -2x^3 + 3x^2 - 0x - 10$$
$$P(x) - Q(x) = -2x^3 + 0x^2 + 5x - 10$$

<u>ปัญหาที่ 10</u> ให้ $P(x) = 12x + 9$, $Q(x) = 8x - 6$ จงหา $P(x) - Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 11</u> ให้ $P(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = x^2 - 7x - 3$ จงหา $P(x) - Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 12</u> ให้ $P(x) = 7x^3 - 3x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = x^3 - 7x + 3$ จงหา $P(x) - Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 13 ให้ $P(x) = -7x^3 + 3x^2 - 2$, $Q(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x$ จงหา $P(x) - Q(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 14 ให้ $P(x) = 7x - 8$, $Q(x) = 5x - 6$ และ $R(x) = 8x + 12$ จงหา $P(x) - Q(x) + R(x)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้นเราพบว่าในการบวกและลบพหุนามตั้งแต่สองพหุนาม เราจะทำการบวกและลบเฉพาะสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่คล้ายกันในพหุนามนั้น และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามสองพหุนามใดๆ

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

กรณีที่ $n = m$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 x^1 + b_1)x^1 + (a_0 + b_0)$$

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 x^1 - b_1)x^1 + (a_0 - b_0)$$

กรณีที่ $n \neq m$

$$P(x) + Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1) + (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1) + (a_0 + b_0)$$

$$P(x) - Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1) - (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1) - (a_0 + b_0)$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $P(x)$ เมื่อกำหนด $Q(x) = -2x^3 + x^2 - 1$ และ $P(x) + Q(x) = x^3 - x^2 + 7x - 2$

วิธีทำ ให้ $P(x) + Q(x) = x^3 - x^2 + 7x - 2$

$Q(x) = -2x^3 + x^2 - 1$

$P(x) + Q(x) = x^3 - x^2 + 7x - 2$

$P(x) + Q(x) - Q(x) = (x^3 - x^2 + 7x - 2) - (-2x^3 + x^2 - 1)$

ดังนั้น $P(x) = (1 - (-2))x^3 + (-1 + 1)x^2 + 7x + (-2 + (-1))$

$= 3x^3 + 7x - 3$

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $P(x)$ เมื่อกำหนด $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x$ และ $P(x) + Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2$

วิธีทำ ให้ $P(x) + Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2$

$Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x$

$P(x) + Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2$

$P(x) + Q(x) - Q(x) = (3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2) - (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)$

ดังนั้น $P(x) = (3 - 3)x^4 + (6 - (-2))x^3 + (-1 - 1)x^2 + (7 - 1)x - 2$

$= 8x^3 - 2x^2 + 6x - 2$

<u>ปัญหาที่ 15</u> จงหาพหุนาม P(x) เมื่อนำไปลบออกจาก $Q(x) = 4x^3 - x^2 + 1$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น $x^3 + 4x^2 - 2$

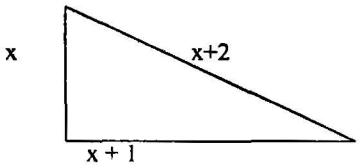
แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 16</u> จงเขียนพหุนามแสดงความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม(ดังรูป)



แนวคิด.....

.....

ตัวอย่างที่ 15 กำหนด $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$ และ $Q(x) = 2x^2 + 4x - 3$ จงหา $P(x) - Q(x)$

วิธีทำ $P(x) - Q(x) = P(x) + (- Q(x))$

$= (3x^2 - 2x + 4) + (- (2x^2 + 4x - 3))$

$= (3x^2 - 2x + 4) + (- 2x^2 + (- 4x) + 3)$

$= (3 + (- 2))x^2 + ((- 2) + (- 4))x + (4 + 3))$

$= (1)x^2 + (- 6)x + 7$

$= x^2 - 6x + 7$

ตัวอย่างที่ 16 ให้ $P(x) = -8x + 3$, $Q(x) = - 6x - 20$ **และ** $R(x) = -3x + 9$ **จงหา** $P(x) - Q(x) + R(x)$

วิธีทำ $P(x) - Q(x) + R(x) = P(x) + (- Q(x)) + R(x)$

$= (-8x + 3) + (- (- 6x - 20)) + (-3x + 9)$

$= (-8x + 3) + (6x + 20) + (-3x + 9)$

นำมาเขียนแสดงได้ดังนี้

$P(x) = - 8x + 3$

$(-Q(x)) = 6x + 20$ +

$(R(x)) = - 3x + 9$ +

$P(x) - Q(x) + R(x) = - 5x + 32$

ปัญหาที่ 17 จงหาพหุนาม P(x) เมื่อนำไปบวกกับ $Q(x) = 3x^2 - 6x + 9$ แล้วมีผลบวกเท่ากับ $4x^2 - 3x - 2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

การคูณพหุนาม

การคูณจำนวนเต็ม เช่น 25×12 เราสามารถหาผลคูณของจำนวนเต็มดังกล่าวได้โดยการตั้งคูณดังนี้

$$\begin{array}{rl} 25 & \\ \underline{12} & \times \\ 50 & \longleftarrow (10 + 2) \\ \underline{250} & + \longleftarrow (25 \times 2) \\ 300 & \longleftarrow (25 \times 10) \end{array}$$

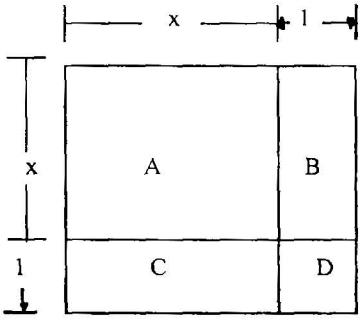
สำหรับการคูณพหุนามก็มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับการคูณในระบบจำนวนเต็ม โดยที่ พหุนามนั้นเขียนอยู่ในรูป $(2x + 5)(x + 2)$ ซึ่งเป็นนิพจน์ทางพีชคณิตในขณะที่ 25×12 เป็นการเขียนในรูปของเลขคณิต ถ้าพิจารณากันอย่างถ้วนถี่จะพบว่ามีลักษณะคล้ายกัน เพื่อความเข้าใจนักเรียนลองพิจารณาตารางข้างล่างต่อไปนี้

ค่าประจำตำแหน่ง	จำนวนเต็ม	เลขยกกำลัง	พจน์เอกนาม
หลักหน่วย	1	10^0	1
หลักสิบ	10	10^1	x
หลักร้อย	100	10^2	x^2
หลักพัน	1,000	10^3	x^3
หลักหมื่น	10,000	10^4	x^4
หลักแสน	100,000	10^5	x^5
หลักล้าน	1,000,000	10^6	x^6

จากพหุนาม $(2x + 5)(x + 2)$ ในพีชคณิตสามารถเทียบเคียงได้กับจำนวน 25×12 เมื่อ $x = 10$ นั่นเอง ดังนั้นในการคูณพหุนามจึงสามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{rl} 2x + 5 & \\ \underline{x + 2} & \times \\ 4x + 10 & \longleftarrow (2x + 5)(2) \\ \underline{2x^2 + 5x + 0} & + \longleftarrow (2x + 5)(x) \\ 2x^2 + 9x + 10 & \end{array}$$

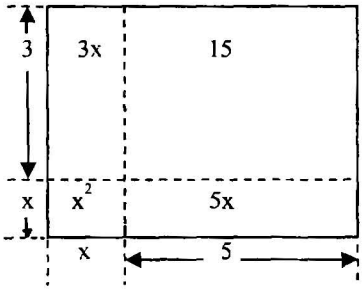
ให้นักเรียนพิจารณารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและตอบคำถามต่อไปนี้



1. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูป A .....
2. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูป B .....
3. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูป C .....
4. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูป D .....
5. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปใหญ่ .....
6. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมใหญ่กับพื้นที่สี่เหลี่ยมย่อยสัมพันธ์กันอย่างไร

.....

ตัวอย่างที่ 16 จงหาพื้นที่ภายในของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและผลคูณของ $(x + 3)(x + 5)$



วิธีทำ จากรูป นักเรียนจะพบว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปเล็กที่อยู่ภายในมีพื้นที่เท่ากับ x^2 , 5x , 3x , 15 ตามลำดับ และเมื่อนำพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กเหล่านั้นมารวมกัน จะมีพื้นที่ $x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$ ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปใหญ่นั่นเอง นักเรียนพิจารณาผลคูณของ $(x + 3)(x + 5)$ นำมาตั้งคูณได้ดังนี้

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ \underline{x + 5} \quad \times \\ 5x + 15 \\ \underline{x^2 + 3x + 0} \quad + \\ x^2 + 8x + 15 \end{array}$$

นักเรียนจะเห็นว่าผลคูณของพหุนามสามารถแสดงได้ด้วยพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อความเข้าใจ ลองพิจารณาตัวอย่างเพิ่มเติมดังนี้

ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลคูณของ $(x + 2)(x + 7)$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ \underline{x + 7} \\ 7x + 14 \\ \underline{x^2 + 2x + 0} \\ x^2 + 9x + 14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

ปัญหาที่ 18 จงหาผลคูณของ $(4x + 1)(2x - 3)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 19 จงหาผลคูณของ $(6x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 20 จงหาผลคูณของ $(9x - 1)(8x^2 - 6x + 1)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 21 จงหาผลคูณของ $(5x^2 + 2x + 1)(x^2 - 3x + 5)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 22 ความยาว ความกว้าง และความสูง ของกล่องใบหนึ่ง เป็น x , 2x และ 3x + 5 นิ้ว ตามลำดับ จงเขียนพหุนามแทนปริมาตรของกล่องใบนี้

แนวคิด.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 23 จงหาเขียนพหุนามแสดงพื้นที่ของพรมรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีความกว้างเป็น x + 3 เมตร และยาว 2x – 1 เมตร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 24 จงหาผลลัพธ์ของ $3x(2x-4)-3x^2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 18 จงหาผลคูณของ $(2x(x+2)-1)(2x-3(x+2))$

วิธีทำ จาก $(2x(x+2)-1) = [(2x)(x)+(2x)(2)]-1$

$= 2x^2 + 4x - 1$

$(2x-3(x+2)) = (2x)+[(-3)(x)+(-3)(2)]$

$= (2x)+[(-3x)+(-6)]$

$= [(2x)+(-3x)]+(-6)$

$= -x-6$

ดังนั้น $(2x(x+2)-1)(2x-3(x+2)) = (2x^2+4x-1)(-x-6)$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x - 1 \\ \underline{\qquad -x - 6} \\ -12x^2 - 24x + 6 \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 + x + 0} \\ -2x^3 - 16x^2 - 23x + 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

<u>ปัญหาที่ 25</u> จงหาผลคูณของ $(2x - 1)(2x^2 - 3(x + 2))$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 26</u> จงหาผลคูณของ $(2(x^2 - 1) - 3)(3x^3 - 3x(x + 2))$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 27</u> จงหาพหุนาม P(x) เมื่อนำ $x^2 + 2x - 3$ มารวมกับผลคูณของ $2x - 5$ และ $3x + 1$

แนวคิด .....

.....

.....

เราพบว่า ผลคูณที่เกิดขึ้นในแต่ละบรรทัด มาจากการคูณพหุนามกับเอกนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง แล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้มารวมกัน ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามดังนี้

บทนิยาม การคูณพหุนาม

พหุนาม $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ และ

$Q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$ เป็นสองพหุนามใดๆ

$P(x)Q(x) = (P(x))(b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x^1 + b_0)$

$= (P(x))(b_mx^m) + (P(x))(b_{m-1}x^{m-1}) + \ldots + (P(x))(b_1x^1) + (P(x))(b_0)$

กล่าวได้ว่า $P(x)Q(x)$ คือ ผลรวมที่เกิดจากการเอาพจน์แต่ละพจน์ของพหุนาม $Q(x)$ คูณกับพจน์ของพหุนาม $P(x)$ ทุกพจน์นั่นเอง

การหารพหุนาม

ในการเรียนคณิตศาสตร์ในเรื่องของการหารในระบบของจำนวนเต็มนั้น นักเรียนคงได้พบเห็นและได้ทำการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็ม โดยนิยามการหารจำนวนจริงดังนี้

ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $b \neq 0$ แล้ว $a \div b = c$ นั่นคือ $c \times b = a$

ถ้า $a \div b = c$ เราเรียก a ว่า ตัวตั้ง เรียก b ว่า ตัวหาร และเรียก c ว่า ผลหาร

นักเรียนพิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

25 ← ผลหาร	66 ← ผลหาร
ตัวหาร → 5) 125 ← ตัวตั้ง	3) 199 ← ตัวตั้ง
100 ← (20 × 5 = 100)	180 ← (60 × 3 = 180)
25	19
25 ← (5 × 5 = 25)	18 ← (6 × 3 = 18)
0 ← เศษ	1 ← เศษ
นั่นคือ $125 = (25 \times 5) + 0$	นั่นคือ $199 = (66 \times 3) + 1$

การหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มถ้าเศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 เราเรียกว่าการหารลงตัว แต่ถ้าเศษที่เกิดจากการหารไม่เป็น 0 เราเรียกการหารนี้ว่า การหารไม่ลงตัว

ในการหารพหุนามด้วยพหุนามก็เช่นกัน ถ้าเศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 เรียกว่าการหารลงตัว แต่ถ้าเศษที่เกิดจากการหารไม่เป็น 0 เรียกการหารดังกล่าวว่า การหารไม่ลงตัว การหารพหุนามนักเรียนต้องใช้ สมบัติการหารเลขยกกำลัง ดังนี้

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆที่ไม่เป็น 0 โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $m \geq n$ แล้ว $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$ และ $a^0 = 1$

เพื่อให้นักเรียนได้เห็นภาพดังกล่าว นักเรียนพิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 19 จงหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.) $\frac{x^9}{x^5}$ 2.) $\frac{12x+11}{4}$

วิธีทำ

1.)

$$x^5 \overline{)\, x^9} \quad \leftarrow \text{ผลหาร } x^4$$
$$-x^9$$
$$0 \quad \leftarrow \text{เศษ}$$

นั่นคือ $x^9 = (x^5)(x^4) + 0$

2.)

$$4 \overline{)\, 12x + 11} \quad \leftarrow \text{ผลหาร } 3x + 2$$
$$-12x$$
$$+11$$
$$-8$$
$$3 \quad \leftarrow \text{เศษ}$$

นั่นคือ $12x + 11 = (3x + 2)(4) + 3$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1. $8x^4+12x^3-6x^2+20x \div 2x$

วิธีทำ 1

$$
\begin{array}{r|l}
2x & 8x^4+12x^3-6x^2+20x \\
 & \underline{8x^4} \\
 & \quad 12x^3- \\
 & \quad \underline{12x^3} \\
 & \quad\quad -6x^2- \\
 & \quad\quad \underline{-6x^2} \\
 & \quad\quad\quad +20x- \\
 & \quad\quad\quad \underline{20x} \\
 & \quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
\qquad 4x^3+6x^2-3x+10
$$

ดังนั้น $8x^4+12x^3-6x^2+20x = (2x)(4x^3+6x^2-3x+10)+0$

ผลหาร คือ $4x^3+6x^2-3x+10$ เศษ คือ 0 ตอบ

วิธีทำที่ 2 $8x^4+12x^3-6x^2+20x \div 2x$ สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{8x^4+12x^3-6x^2+20x}{2x} = \frac{8x^4}{2x}+\frac{12x^3}{2x}-\frac{6x^2}{2x}+\frac{20x}{2x}$$

$$= 4x^3+6x^2-3x+10$$

ผลหาร คือ $4x^3+6x^2-3x+10$ เศษ คือ 0 ตอบ

2. $(36x^3-6x^2+24x) \div (3x)$

วิธีทำที่ 1

$$
\begin{array}{r|l}
3x & 36x^3-6x^2+24x \\
 & \underline{36x^3} \\
 & \quad -6x^2- \\
 & \quad \underline{-6x^2} \\
 & \quad\quad +24x- \\
 & \quad\quad \underline{+24x} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
\qquad 12x^2-2x+8
$$

ดังนั้น $(36x^3-6x^2+26x) = (3x)(12x^2-2x+8)+0$

ผลหารคือ $12x^2-2x+8$ เศษคือ 0 ตอบ

วิธีทำที่ 2 $\dfrac{36x^3-6x^2+24x}{3x} = \dfrac{36x^3}{3x}-\dfrac{6x^2}{3x}+\dfrac{24x}{3x}$

$= 12x^2-2x+8$

ดังนั้น $(36x^3-6x^2+26x) = (3x)(12x^2-2x+8)+0$

ผลหารคือ $12x^2-2x+8$ เศษคือ 0 ตอบ

ตัวอย่างที่ 21 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจาก $6x^5-8x^4+10x^2 \div (-2x^4)$

วิธีทำที่1

$$\begin{array}{r|l} & -3x+4 \\ \hline -2x^4 & 6x^5-8x^4+10x^2 \\ & \underline{6x^5} \\ & \quad -8x^4 \\ & \quad \underline{-8x^4} \\ & \qquad\quad +10x^2 \end{array}$$

ดังนั้น $6x^5-8x^4+10x^2 = (-2x^4)(-3x+4)+10x^2$

ผลหารคือ $-3x+4$ เศษ คือ $10x^2$ ตอบ

วิธีทำที่ 2 $6x^5-8x^4+10x^2 \div (-2x^4) = \dfrac{6x^5-8x^4+10x^2}{-2x^4}$

$= \dfrac{6x^5}{-2x^4}-\dfrac{8x^4}{-2x^4}+\dfrac{10x^2}{-2x^4}$

$= -3x+4+\dfrac{10x^2}{-2x^4}$

ดังนั้น $6x^5-8x^4+10x^2 = (-2x^4)(-3x+4)+10x^2$

ผลหารคือ $-3x+4$ เศษ คือ $10x^2$ ตอบ

ปัญหาที่ 28 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)=3x-6$ ด้วย 3

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่29</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $2x^5 - 6x^4 + 8x^2$ ด้วย $-2x^3$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 30</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $16x^5 - 8x^2 + 12x$ ด้วย $4x^2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 22 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.) ให้ $P(x) = x^2 - 3x - 10$ หารด้วย $x + 2$

2.) ให้ $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 14$ หารด้วย $2x - 3$

วิธีทำ 1.)

$$\begin{array}{rl} & x - 5 \quad \longleftarrow \text{ผลหาร} \\ x + 2 \;\big)\; & x^2 - 3x - 10 \\ & \underline{x^2 + 2x} \quad \longleftarrow (x+2)(x) = x^2 + 2x \\ & \quad -5x - 10 \\ & \underline{-5x - 10} \quad \longleftarrow (x+2)(-5) = -5x - 10 \\ & \quad 0 \quad \longleftarrow \text{เศษ} \end{array}$$

ตัวหาร

ดังนั้น $(x^2 - 3x - 10) = (x - 5)(x + 2) + 0$

ผลหารคือ $x - 5$ เศษคือ 0

2.) จากกำหนด $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 14$ พบว่า พจน์ที่มีดีกรี 1 ไม่มี เพื่อลดความผิดพลาดเราจึงเขียน $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 14$ ใหม่ดังนี้ $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 14$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 2x - 3 \\
\hline
2x - 3 \;\big|\; 2x^3 - 7x^2 + 0x + 14 \\
\underline{2x^3 - 3x^2} \\
-4x^2 + 0x \\
\underline{-4x^2 + 6x} \\
-6x + 14 \\
\underline{-6x + 9} \\
5
\end{array}
$$

$\leftarrow (-7x^2) - (-3x^2) = -4x^2$

$\leftarrow (0 \cdot x - 6x = -6x)$

$\leftarrow (14 - 9 = 5)$

ดังนั้น $(2x^3 - 7x^2 - 4) = (x^2 - 2x - 3)(2x - 3) + 5$

ผลหารคือ $x^2 - 2x - 3$ เศษคือ 5

<u>ปัญหาที่ 31</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^2 + 5x + 13$ ด้วย $x + 3$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 32</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^2 + 3x + 6$ ด้วย $x + 3$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 33</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 6x^2 - 11x + 7$ ด้วย $3x + 2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 34 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^3 + 4x - 3$ หารด้วย $x - 2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ดังที่กล่าวมาแล้ว การเขียนผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม Q(x) สามารถเขียนได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ขั้นตอนวิธีการหาร

ให้ P(x) และ Q(x) เป็นพหุนามใดๆที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมี พหุนาม S(x) และ R(x) ซึ่งทำให้ $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$

โดยที่ $R(x) = 0$ หรือ ดีกรีของ $R(x) <$ ดีกรีของ $Q(x)$

จะเรียก S(x) ว่า ผลหาร และ R(x) ว่าเศษ จากการหาร P(x) ด้วย Q(x)

ตัวอย่างที่ 23 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^2 - 9x + 20$ หารด้วย $x - 7$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rl} & x - 2 \quad \longleftarrow \text{ ผลหาร} \\ x-7 \;\big)\; & x^2 - 9x + 20 \\ \text{ตัวหาร} \uparrow & \underline{x^2 - 7x} \quad \longleftarrow x(x-7) \\ & -2x + 20 \\ & \underline{-2x + 14} \quad \longleftarrow -2(x-7) \\ & \underline{\quad 6 \quad} \quad \longleftarrow \text{เศษ} \end{array}$$

ดังนั้น $x^2 - 9x + 20 = (x-2)(x-7) + 6$

ผลหาร คือ $x - 2$ เศษคือ 6 ตอบ

สรุป จากตัวอย่างที่ 20 และ 22.1 และปัญหาที่ 27 พบว่า เศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$ เป็นศูนย์ ดังนั้น การหารพหุนาม ด้วย พหุนาม ถ้าเศษ เป็นศูนย์ เรียกว่า การหารลงตัว แต่ถ้าเศษ ไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า การหารไม่ลงตัว

การหาค่าของพหุนาม

การเขียนพหุนามตัวแปรเดียวในหัวข้อต่อไปนี้จะใช้ สัญลักษณ์ P(x) หรือ Q(t) แทนพหุนาม เช่น

P(x) อ่านว่า P ของ x หรือ Q(t) อ่านว่า Q ของ t เป็นต้น โดยตัวอักษรที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บแทนตัวแปรในพหุนามที่กำหนด ดังนั้นสัญลักษณ์ P(x)หรือ Q(t) สามารถเขียนแทน พหุนาม $P(x) = x^2 - 5x + 3$ หรือ $Q(t) = 3t - 2$ ได้เช่นเดียวกัน ดังนั้นการแทนค่าจำนวนจริงใดๆในตัวแปร x ที่กำหนดในพหุนาม P(x) แล้วทำให้ได้ค่าของ P(x) เป็นจำนวนจริงใดๆมาเพียงค่าเดียว เราเรียกการกระทำดังกล่าวว่า การแทนค่าของ พหุนาม ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของพหุนาม $P(x) = x^2 - 5x + 3$ เมื่อ $x = 1$

จากที่กำหนด $P(x) = x^2 - 5x + 3$ เมื่อ $x = 1$

เราแทน 1 ใน $P(x) = x^2 - 5x + 3$

จะได้ว่า $P(1) = (1)^2 - 5(1) + 3$

$= 1 - 5 + 3$

$= -1$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของพหุนาม $P(x) = 3x^2 + 2$ เมื่อ

1.) $x = 0$ 2.) $x = -3$ 3.) $x = \frac{1}{5}$

วิธีทำ จาก $P(x) = 3x^2 + 2$

1) เมื่อ $x = 0$ จะได้ $P(0) = 3(0)^2 + 2$

$= 0 + 2$

$= 2$

2.) เมื่อ $x = -3$ จะได้ $P(-3) = 3(-3)^2 + 2$

$= 3(9) + 2$

$= 27 + 2$

$= 29$

3.) เมื่อ $x = \frac{1}{5}$ จะได้ $P(\frac{1}{5}) = 3(\frac{1}{5})^2 + 2$

$= 3(\frac{1}{25}) + 2$

$= \frac{3}{25} + 2$

$= \frac{53}{25}$

<u>ปัญหาที่ 35</u> ให้ $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ จงหาค่าของ $P(3)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 36</u> กำหนดให้ $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$ จงหาค่า $P(2)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 37</u> ให้ $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 10$ จงหาค่าของ $P(-2)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 38</u> ให้ $P(x) = -2x^4 - 3x^2 + 5x - 9$ จงหาค่าของ $P(-1)$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 39</u> หาค่าของ $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2$ เมื่อ $x = 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 26 ให้ $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$

1.) จงหาค่าของ $P(2)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$ โดยวิธีการตั้งหาร

วิธีทำ จาก $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$

1.) $P(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 5$

$= 2(4) - 6 + 5$

$= 8 - 6 + 5$

$= 7$

2.)

$$
\begin{array}{r|l}
x - 2 & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 - 3x + 5 \\
 & \underline{2x^2 - 4x} \\
 & \quad x + 5 \\
 & \quad \underline{x - 2} \\
 & \quad\quad 7
\end{array}
$$

ผลหารคือ $2x + 1$ เศษ คือ 7

ตัวอย่างที่ 27 ให้ $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 6$

1.) จงหาค่าของ $P(1)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 1$ โดยการตั้งหาร

วิธีทำ จาก $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 6$

1.) $P(1) = (1)^3 + (1)^2 + 4(1) - 6$

$= 1 + 1 + 4 - 6$

$= 0$

2.)

$$
\begin{array}{r|l}
x - 1 & x^2 + 2x + 6 \\
\cline{2-2}
 & x^3 + x^2 + 4x - 6 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & \quad + 2x^2 + 4x \\
 & \quad \underline{+ 2x^2 - 2x} \\
 & \quad\quad + 6x - 6 \\
 & \quad\quad \underline{+ 6x - 6} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

ผลหารคือ $x^2 + 2x + 6$ เศษ คือ 0 ตอบ

<u>ปัญหาที่ 40</u> กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 11$

1.) จงหาค่าของ $P(2)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$ โดยวิธีการตั้งหาร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 41 กำหนดให้ $P(x) = 3x^3 + x^2 + 2$

1.) จงหาค่าของ $P(-1)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x + 1$ โดยวิธีการตั้งหาร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 42 กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 - 6x - 36$

1.) จงหาค่าของ $P(3)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 3$ โดยวิธีการตั้งหาร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 43 กำหนดให้ $P(x) = x^3 - 8$

1.) จงหาค่าของ $P(2)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$ โดยวิธีการตั้งหาร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 44 กำหนดให้ $P(x) = 4x^3 - 4x^2 + 5x + 8$

1.) จงหาค่าของ $P(-\frac{1}{2})$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $2x - 1$ โดยวิธีการตั้งหาร

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

จากตัวอย่างและปัญหาที่นักเรียนได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้น พบว่าเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนามที่อยู่ในรูป $(x - r)$ โดยวิธีการตั้งหาร กับ ค่าที่เกิดจากการแทนค่าด้วยจำนวนจริง r ในพหุนาม $P(x)$ เป็นจำนวนเดียวกัน แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราต้องการทราบเฉพาะเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - r$ นักเรียนสามารถใช้วิธีการแทนค่าด้วยจำนวนจริง r ในพหุนาม $P(x)$ ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่ายและกระทัดรัดกว่าการตั้งหาร โดยที่วิธีการดังกล่าว สอดคล้องกับ ทฤษฎีบทเศษเหลือ กล่าวคือ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n และ หารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$ แล้ว เศษคือ $P(r)$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตัวอย่างที่ 28 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^2 - 5x - 36$ ด้วย $x - 9$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

วิธีทำ จากทฤษฎีบทเศษเหลือ จะได้ว่า เศษคือ $P(9)$

$P(x) = x^2 - 5x - 36$

$P(9) = (9)^2 - 5(9) - 36$

$= 81 - 45 - 36$

$= 0$

ดังนั้น เศษ คือ 0

ตัวอย่างที่ 29 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 8x^3 + 27$ ด้วย $2x + 3$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

วิธีทำ จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เขียน $2x + 3$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้เป็น $2(x - (-\frac{3}{2}))$

จะได้ว่า เศษคือ $P(-\frac{3}{2})$

$P(x) = 8x^3 + 27$

$P(-\frac{3}{2}) = 8(-\frac{3}{2})^3 + 27$

$= 8(-\frac{27}{8}) + 27$

$= -27 + 27$

$= 0$

ดังนั้น เศษ คือ 0

<u>ปัญหาที่ 45</u> **จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 3x^2 + 5x - 8$ ด้วย $x - 2$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ**

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 46</u> **จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^3 - x^2 - x - 15$ ด้วย $x - 3$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ**

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 47</u> **จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - 5x + 6$ ด้วย $x - \frac{2}{3}$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ**

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 48 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x-3$ หาร $P(x)=x^3-4x^2+x+k$ ลงตัว

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 49 เมื่อนำ $x-3$ หารพหุนาม $P(x)=x^2-8x+k$ และ $Q(x)=x^2-x-6$ แล้ว มีเศษเท่ากัน จงหาค่า k

แนวคิด .....

.....

.....

.....

จะสังเกตเห็นว่า $x-r$ หารพหุนาม $P(x)$ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า $P(x)=(x-r)Q(x)+R$ ถ้าเศษเป็น 0 แล้ว $x-r$ หารพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว หมายความว่า $(x-r)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนาม $P(x)$ นั่นเอง

โดยที่ $R=P(r)=0$ แล้ว $P(x)=(x-r)Q(x)+0$

เรียก $(x-r)$ ว่า ตัวหาร และ เรียก $Q(x)$ ว่าผลหาร

ถ้า $R=0$ แสดงว่า $x-r$ หารพหุนาม $P(x)$ ได้ลงตัว เช่น ตัวอย่าง 28และ 29 และเรียก $x-r$ ว่าตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามของ x ดีกรี n และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$P(r)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x-r$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

จากทฤษฎีบทดังกล่าวจะช่วยนักเรียนในการแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งจะกล่าวถึงภายหลัง

ตัวอย่างที่ 30 จงแสดงว่า $x-1$ หารพหุนาม $P(x)=x^2-2x+1$ ลงตัว

วิธีทำ ให้ $P(x)=x^2-2x+1$

ตัวหาร คือ $x-1$ จะได้เศษเป็น $P(1)$

$P(1)=(1)^2-2(1)+1$

$=1-2+1$

$=0$

จะพบว่า เศษเป็น 0 นั่นแสดงว่า $x-1$ หาร $P(x)$ ได้ลงตัว

กล่าวได้ว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ x^2-2x+1

และเราสามารถเขียน x^2-2x+1 ได้ดังนี้ $x^2-2x+1=(x-1)Q(x)+0$

ปัญหาที่ 50 จงแสดงว่า $x + 1$ หารพหุนาม $P(x) = x^2 - 4x - 5$ ลงตัว

แนวคิด .....

.....

.....

ปัญหาที่ 51 จงแสดงว่า $2x - 1$ หารพหุนาม $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$ ลงตัว

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 52 จงแสดงว่า $x - 2$ หารพหุนาม $P(x) = x^3 - 8$ ลงตัว

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 53 จงตรวจสอบว่า $x + 5$ หารพหุนาม $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ ลงตัวหรือไม่

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 54 กำหนด $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$ จงตรวจดูว่า $x - 2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$ หรือไม่

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 55 กำหนด $P(x) = x^3 + 27$ จงตรวจดูว่า $x + 3$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$ หรือไม่

แนวคิด .....

.....

.....

.....

การใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ ในการตรวจสอบว่าพหุนาม $x - r$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนาม $P(x)$ นั้น นักเรียนจะตรวจสอบดูว่า $P(r) = 0$ แต่จะ ไม่ทราบผลหาร ถ้านักเรียนต้องการทราบว่า ผลหาร นักเรียนต้องใช้วิธีการตั้งหาร ซึ่งใช้เวลามาก แต่มีวิธีการหนึ่งที่ทำให้นักเรียนสามารถหาผลหารได้อีกวิธีหนึ่ง นักเรียนลองพิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 31 กำหนด $2x + 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $6x^2 + 13x + 5$ จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือด้วยวิธีการตั้งหาร

วิธีทำที่ 1

$$\begin{array}{rl} & 3x + 5 \quad \longleftarrow \text{ผลหาร} \\ 2x + 1 \;\big)\; & 6x^2 + 13x + 5 \\ & \underline{6x^2 + 3x} \quad \longleftarrow 3x(2x + 1) \\ & 10x + 5 \\ & \underline{10x + 5} \quad \longleftarrow 5(2x + 1) \\ & 0 \quad \longleftarrow \text{เศษ} \end{array}$$

ตัวหาร

ดังนั้น $6x^2 + 13x + 5 = (3x + 5)(2x + 1) + 0$

ตัวประกอบตัวที่เหลือ คือ $3x + 5$

จากตัวอย่างนักเรียนจะเห็นส่วนที่สำคัญในการหารพหุนามนั้นเราจะใช้ในส่วนสัมประสิทธิ์ของพหุนามมากระทำการบวกและลบกัน ในส่วนของตัวแปรและดีกรีนั้นก็จะเรียงลำดับดีกรีจากมากไปน้อย เพื่อความสะดวกเราอาจจะเขียนเฉพาะสัมประสิทธิ์ ได้ดังนี้

วิธีที่ 2

$$\begin{array}{rl} & 3 \;\; +5 \quad \longleftarrow \text{ผลหาร} \\ 2 \;\; +1 \;\big)\; & 6 \;\; +13 \;\; +5 \\ & \underline{6 \;\; +3} \quad \longleftarrow 3(2 \quad +1) \\ & 10 \;\; +5 \\ & \underline{10 \;\; +5} \quad \longleftarrow 5(2 \quad +1) \\ & 0 \quad \longleftarrow \text{เศษ} \end{array}$$

ตัวหาร

ดังนั้น $6x^2 + 13x + 5 = (3x + 5)(2x + 1) + 0$

ตัวประกอบตัวที่เหลือ คือ $3x + 5$

ตัวอย่างที่ 32 ให้ $P(x) = x^3 + 27$

1.) จงหาค่าของ $P(-3)$

2.) ถ้า $x + 3$ จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือ ด้วยวิธีการตั้งหาร

วิธีทำ จาก $P(x) = x^3 + 27$

1.) $P(-3) = (-3)^3 + 27$

$= (-27) + 27$

$= 0$

$5x^3 - 24x^2 + 1 = (x - (-\frac{1}{5}))(5x^2 - 25x + 5) + 0$

$= 5(x - (-\frac{1}{5}))(x^2 - 5x + 1) + 0$

$= (5x + 1)(x^2 - 5x + 1) + 0$

ผลหารคือ $x^2 - 5x + 1$ เศษคือ 0

<u>ปัญหาที่ 59</u> จงหาผลหารและเศษ ที่เกิดจากการหาร $2x^3 + x^2 + x - 1$ ด้วย $2x - 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 60</u> **จงหาผลหารและเศษ ที่เกิดจากการหาร $2x^3 - x^2 + 3x + 2$ ด้วย $2x + 1$**

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 61</u> จงหาผลหารและเศษ ที่เกิดจากการหาร $4x^3 + x - 1$ ด้วย $2x - 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 62</u> จงหาผลหารและเศษ ที่เกิดจากการหาร $x^3 + x^2 - 5$ ด้วย $x - 2$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 9 \\
\hline
x + 3 & x^3 + 0x^2 + 0x + 27 \\
 & \underline{x^3 + 3x^2} \\
 & \quad -3x^2 + 0x \\
 & \quad \underline{-3x^2 - 9x} \\
 & \qquad 9x + 27 \\
 & \qquad \underline{9x - 27} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

ดังนั้น $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 0$

ตัวประกอบตัวที่เหลือ คือ $x^2 - 3x + 9$

วิธีที่ 2

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 + 3 + 3 \quad \longleftarrow \text{ผลหาร} \\
\hline
1 - 3 & 1 + 0 + 0 + 27 \\
 & \underline{1 - 3} \quad \longleftarrow 1(1 - 3) \\
 & \quad 3 + 0 \\
 & \quad \underline{3 - 9} \quad \longleftarrow 3(1 - 3) \\
 & \qquad 9 + 27 \\
 & \qquad \underline{9 - 27} \quad \longleftarrow 3(1 - 3) \\
 & \qquad\quad 0 \quad \longleftarrow \text{เศษ}
\end{array}
$$

ตัวหาร

ดังนั้น $x^3 + 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3) + 0$

ตัวประกอบตัวที่เหลือ คือ $x^2 + 3x + 3$

จากตัวอย่าง เราพบว่าพจน์แรกจะลบกันได้ 0 (ศูนย์)เสมอ ถ้าเราลดขั้นตอนดังกล่าวจะทำให้การหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนามด้วยพหุนาม ทำได้สั้น และง่ายกว่าการตั้งหารยาวอีกวิธีหนึ่ง เราเรียกการกระทำดังกล่าวว่า **การหารสังเคราะห์** เป็นวิธีการหาผลหารและเศษจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$ เมื่อ r เป็นจำนวนคงค่าได้อย่างรวดเร็ว นอกจากนั้นเรายังสามารถหาตัวประกอบอีกตัวหนึ่งของพหุนาม $P(x)$ ได้

กำหนดให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ โดยที่ $a_n \neq 0$

และ $S(x)$ เป็นผลลัพธ์ที่เกิดจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$

ดังนั้น $S(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

นำมาเขียนใหม่ได้ดังนี้

r	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0	.....(1)
		rb_{n-1}	$\ldots$	rb_2	rb_1	rb_0	+ .....(2)
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_1	b_0	$a_0 + rb_0$	.....(3)
							เศษ $R(x)$

จาก (1.) $a_n , a_{n-1} , \ldots , a_2 , a_1 , a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม P(x) โดยเรียงลำดับกำลังของ x จากมากไปน้อย

จาก (3) ได้ $b_{n-1} = a_n$

นำ r ไปคูณกับ b_{n-1} ไปวางใน (2) จะได้ $b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}$

นำ r ไปคูณกับ b_{n-2} ไปวางใน (2) จะได้ $b_{n-3} = a_{n-2} + rb_{n-2}$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนถึงขั้นสุดท้าย จะได้

ผลหาร คือ $S(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$

เศษคือ $R(x) = a_0 + rb_0$

การหาผลหารและเศษ ดังกล่าว เรียกว่า การหารสังเคราะห์

ข้อสังเกต การหารสังเคราะห์นั้น จะใช้ได้ในกรณีที่พหุนามที่เป็นตัวหารต้องมีสัมประสิทธิ์และดีกรีเป็นหนึ่งเท่านั้น

ดังนั้น เราสามารถเขียน วิธีทำที่ 2 ใหม่ได้ดังนี้

เขียน $x + 3$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้เป็น $x - (-3)$ และ $P(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 27$

$$\begin{array}{r|cccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 27 \\ & & -3 & 9 & -27 \\ \hline & 1 & -3 & 9 & 0 \end{array} \quad +$$

ดังนั้น $x^3 + 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3) + 0$

ตัวประกอบตัวที่เหลือ คือ $x^2 + 3x + 3$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 4x^3 + 32 - 8x^2$ ด้วย $x - 2$

วิธีทำ เขียนพหุนามโดยเรียงลำดับดีกรีจากมากไปน้อยได้ดังนี้ $4x^3 - 8x^2 + 0x + 32$

ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|cccc} 2 & 4 & -8 & 0 & 32 \\ & & 8 & 0 & 0 \\ \hline & 4 & 0 & 0 & 32 \end{array} \quad +$$

ผลหาร คือ $4x^2$ และ เศษ คือ 32

<u>ปัญหาที่ 56</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ ด้วย $x - 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 57</u> ให้ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$

1.) จงหาค่าของ $P(\frac{1}{2})$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 34 กำหนด $x-9$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^2 - 5x - 36$ จงหาผลหาร

วิธีทำ เราเขียน $x-9$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 9 & 1 & -5 & -36 \\ & & 9 & 36 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} +$$

ดังนั้น $x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4) + 0$

ผลหาร คือ $x+4$

ตัวอย่างที่ 35 กำหนด $x+2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 10$ จงหาผลหาร

วิธีทำ เราเขียน $x+2$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้ดังนี้ $x-(-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & +5 & +11 & +10 \\ & & -2 & -6 & -10 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 0 \end{array} +$$

ดังนั้น $x^3 + 5x^2 + 11x + 10 = (x+2)(x^2 + 3x + 5) + 0$

ผลหาร คือ $x^2 + 3x + 5$

หมายเหตุ ในการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$ ดีกรีของตัวแปรของผลหาร จะลดลงที่ละ 1

<u>ปัญหาที่ 58</u> จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^3 + 10x^2 + 31x + 35$ ด้วย $x+4$

แนวคิด เราเขียน $x+4$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้ดังนี้ .....

$$\begin{array}{r|rrrr} ..... & 1 & 10 & 31 & 35 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array} +$$

.....

ผลหารคือ .....เศษคือ .....

ตัวอย่างที่ 36 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ ด้วย $2x - 3$

วิธีทำ เราจะสังเกตพบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวหาร คือ $2x - 3$ ไม่เป็น 1 ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้ $r = 3$ ได้เนื่องจากตัวประกอบไม่ได้อยู่ในรูปของ $x - r$

แต่ $2x - 3 = 2(x - \frac{3}{2})$ ซึ่งหมายความว่า ถ้า $(x - \frac{3}{2})$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $2x - 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ด้วย

ถ้าเราใช้ $r = \frac{3}{2}$ และหาเศษที่เกิดจากการหารถ้าเป็น 0 แล้ว $x - \frac{3}{2}$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{3}{2} & 2 & -3 & 8 & -12 \\ & & 3 & 0 & 12 \\ \hline & 2 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

เนื่องจากเศษที่เหลือจากการหารเป็น 0 ดังนั้น $x - \frac{3}{2}$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$ โดยที่ผลหารคือ $2x^2 + 8 = 2(x^2 + 4)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 &= (x - \frac{3}{2})(2x^2 + 8) + 0 \\ &= 2(x - \frac{3}{2})(x^2 + 4) + 0 \\ &= (2x - 3)(x^2 + 4) + 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลหารคือ $x^2 + 4$ เศษคือ 0

ตัวอย่างที่ 37 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 5x^3 - 24x^2 + 1$ ด้วย $5x + 1$

วิธีทำ เราจะสังเกตพบว่าสัมประสิทธิ์ของตัวหาร คือ $5x + 1$ ไม่เป็น 1 ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้ $r = -1$ ได้เนื่องจากตัวประกอบไม่ได้อยู่ในรูปของ $x - r$

อย่างไรก็ตาม $5x + 1 = 5(x - (-\frac{1}{5}))$ ซึ่งหมายความว่า ถ้า $(x - (-\frac{1}{5}))$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $5x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ด้วย

เราเขียน $5x + 1$ ให้อยู่ในรูป $x - r$ ได้ดังนี้ $5(x - (-\frac{1}{5}))$

และเขียน $P(x) = 5x^3 - 24x^2 + 1$ ใหม่ได้ดังนี้ $P(x) = 5x^3 - 24x^2 + 0x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{5} & 5 & -24 & +0 & +1 \\ & & -1 & +5 & -1 \\ \hline & 5 & -25 & 5 & 0 \end{array}$$

ผลหารคือ $5x^2 - 25x + 5$ ดังนั้น

ตัวอย่างที่ 38 จงแสดงว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)=x^2-3x+2$
และจงหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

วิธีทำ จากทฤษฎีบทตัวประกอบ $x-2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)=x^2-3x+2$ ถ้า $P(2)=0$
ดังนั้น เราจะหาค่าของ $P(2)$ โดยแทน 2 ในสมการ $P(x)=x^2-3x+2$ ได้ดังนี้

$P(2)=(2)^2-3(2)+2 = 4-6+2 = 0$

นั่นแสดงว่า $x^2-3x+2=(x-2)Q(x)+0$

เนื่องจาก $P(2)=0$ ดังนั้น $x-2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

เราจะหาตัวประกอบที่เหลือ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -3 & 2 \\ & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} +$$

จะเห็นว่า เศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 นั่นแสดงว่า $x-2$ หาร x^2-3x+2 ได้ลงตัวและสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)+0$ ซึ่งจะได้ว่า $(x-1)$ และ $(x-2)$ เป็นตัวประกอบของ x^2-3x+2 ดังนั้น ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือ $(x-1)$

ตัวอย่างที่ 39 จงแสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)=2x^2-x-1$ และจงหาตัวประกอบที่เหลือ
ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

วิธีทำ จากทฤษฎีบทตัวประกอบ $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)=2x^2-x-1$ ถ้า $P(1)=0$
ดังนั้น เราจะหาค่าของ $P(1)$ โดยแทน 1 ในสมการ $P(x)=2x^2-x-1$ ได้ดังนี้

$P(1)=2(1)^2-(1)-1 = 2-1-1 = 0$

นั่นแสดงว่า $2x^2-x-1=(x-1)Q(x)+0$

เนื่องจาก $P(1)=0$ ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

เราจะหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & -1 & -1 \\ & & 2 & 1 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array} +$$

จะเห็นว่า เศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 นั่นแสดงว่า $x-1$ หาร $2x^2-x-1$ ได้ลงตัว และสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า $2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)+0$ ซึ่งจะได้ว่า $(x-1)$ และ $(2x+1)$ เป็นตัวประกอบของ x^2-3x+2

ดังนั้น ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือ $(2x+1)$

สรุป ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามและ $(x-r)$ หาร $P(x)$ มีเศษเป็น 0 แสดงว่า $(x-r)$ หาร $P(x)$ ได้ลงตัว และสามารถเขียน $P(x)$ ในรูปผลคูณของ $(x-r)$ และ $Q(x)$ ซึ่งเราเรียก $Q(x)$ ว่า ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งของ $P(x)$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 40 จงแสดงว่า $x+2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)=x^3+8$ และจงหาตัวประกอบที่เหลือด้วย
วิธีการหารสังเคราะห์

วิธีทำ จากทฤษฎีบทตัวประกอบ $x+2$ หรือ $x-(-2)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)=x^3+8$ ถ้า $P(-2)=0$
ดังนั้น เราจะหาค่าของ $P(-2)$ โดยแทน (-2) ในสมการ $P(x)=x^3+8$ ได้ดังนี้

$P(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0$

นั่นแสดงว่า $x^3+8=(x+2)Q(x)+0$

เนื่องจาก $P(-2)=0$ **ดังนั้น** $x+2$ **เป็นตัวประกอบของ** $P(x)$

เราจะหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \quad +$$

จะเห็นว่า เศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 นั่นแสดงว่า $x+2$ หาร x^3+8 ได้ลงตัว และสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)+0$ ซึ่งจะได้ว่า $(x+2)$ และ (x^2-2x+4) เป็นตัวประกอบของ x^3+8 ดังนั้น ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือ x^2-2x+4

ตัวอย่างที่ 41 ให้ $P(x)=3x^3-5x^2+3x-10$ ถ้า $P(2)=0$ และใช้ข้อความจริงดังกล่าวช่วยในการแยกตัวประกอบของ $P(x)=3x^3-5x^2+3x-10$

วิธีทำ **เนื่องจาก $P(2)=0$ และจากทฤษฎีบทตัวประกอบ จะได้ว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)=3x^3-5x^2+3x-10$**

เราจะหาผลหารด้วยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -5 & +3 & -10 \\ & & 6 & 2 & 10 \\ \hline & 3 & 1 & 5 & 0 \end{array} \quad +$$

จะเห็นว่า เศษที่เกิดจากการหารเป็น 0 นั่นแสดงว่า $x-2$ หาร $3x^2-x+5$ ได้ลงตัว และสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า $3x^3-5x^2+3x-10=(x-2)(3x^2-x+5)+0$ ซึ่งจะได้ว่า $(x-2)$ และ $(3x^2-x+5)$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3-5x^2+3x-10$ ดังนั้น

ตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือ $(3x^2-x+5)$

<u>ปัญหาที่ 63</u> (1) จงแสดงว่า $x-2$ เป็นตัวประกอบของ x^2+2x-8

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 6x + 8$

แนวคิด.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 64 (1) จงแสดงว่า $3x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 12x^2 + x - 6$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

(2) จงหาตัวประกอบที่เหลือของ $P(x) = 12x^2 + x - 6$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 65 (1) จงแสดงว่า $3x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 27x^3 - 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

(2) จงหาตัวประกอบที่เหลือของ $P(x) = 27x^3 - 1$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

แนวคิด .....

.....

.....

ปัญหาที่ 66 (1) จงแสดงว่า $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

(2) จงหาตัวประกอบที่เหลือของ $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

แนวคิด .....

.....

.....

ปัญหาที่ 67 (1) จงแสดงว่า $(2x - 5)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$

แนวคิด .....

.....

(2) จงหาตัวประกอบที่เหลือของ $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 68 ถ้า $(x + 1), (x - 2)$ เป็นตัวประกอบของสมการ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ แล้วตัวประกอบอีกตัวหนึ่งคือจำนวนใด

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 69 กำหนดให้ $P(1) = 0$ จงใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบช่วยในการแยกตัวประกอบของ $x^3 - 1$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนตรรกยะ

จากทฤษฎีบทการแยกตัวประกอบซึ่งเป็นทฤษฎีที่สำคัญอีกทฤษฎีหนึ่งที่จะช่วยในการหาค่ารากซึ่งเป็นคำตอบของสมการพหุนาม $P(x) = 0$ เพราะว่า เมื่อสามารถหา r_1 ด้วยวิธีการแทนค่าของ r_1 ลงในสมการพหุนาม $P(x)$ แล้วทำให้ $P(r_1) = 0$ นั่นแสดงว่า $x - r_1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

จากนั้นเราสามารถหาผลหารของพหุนาม $q_1(x)$ ด้วยวิธีการหารสังเคราะห์ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการพหุนามใหม่ได้เป็น $P(x) = (x - r_1)q_1(x) + 0$ โดยที่ $q_1(x)$ เป็นผลหารที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - r_1$

ขั้นตอนต่อไปเราจะหา r_2 ด้วยวิธีการแทนค่า r_2 ลงในพหุนาม $q_1(x)$ ถ้า พหุนาม $q_1(x) = 0$ จะได้ว่า $x - r_2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนาม $q_1(x)$ จะได้สมการเป็น $(x - r_1)(x - r_2)q_2(x) = 0$ โดยที่ $q_2(x)$ เป็นผลหารที่เกิดจากการหาร $q_1(x)$ ด้วย $x - r_2$ และดำเนินการทำนองเดียวกันไปเรื่อยๆ จนกระทั่งผลหารเป็นค่าคงที่หรือมีดีกรีน้อยกว่าตัวหาร จะได้สมการอยู่ในรูป $a(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) = 0$ และ สมบัติที่ว่า

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ซึ่งจะได้คำตอบของสมการคือ $x = r_1, r_2, \ldots, r_n$ ตามลำดับ

จาก $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง a_i ใดๆ $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ จะเรียกสมการที่อยู่ในรูป $P(x) = 0$ ว่า สมการพหุนามดีกรี n และเมื่อแทนตัวแปร x ด้วยจำนวนจริง r ใดๆ แล้วทำให้ $P(r) = 0$ จะเรียก r ว่า คำตอบของสมการพหุนาม $P(x) = 0$

กรณีที่ $n = 1$ สมการพหุนามจะอยู่ในรูป $P(x) = a_1x^1 + a_0 = 0$ โดยที่ $a_1 \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 1 มีชื่อเรียกว่า สมการดีกรีหนึ่ง

กรณีที่ $n = 2$ สมการพหุนามจะอยู่ในรูป $P(x) = a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ โดยที่ $a_2 \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 2 มีชื่อเรียกว่า สมการดีกรีสอง

กรณีที่ $n = 3$ สมการพหุนามจะอยู่ในรูป $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ โดยที่ $a_3 \neq 0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 3 มีชื่อเรียกว่า สมการดีกรีสาม เป็นต้น

นักเรียนลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 42 จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1.) $2x - 6 = 0$

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ 2x - 6 + 6 &= 0 + 6 \\ 2x &= 6 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

คำตอบของสมการคือ 3

2.) $x(x - 3)(x + 2) = 0$

วิธีทำ จาก $(a)(b) = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ดังนั้น

$x(x - 3)(x + 2) = 0$

$x = 0$ หรือ $x - 3 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$

หรือ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ หรือ $x + 2 - 2 = 0 - 2$

หรือ $x = 3$ หรือ $x = -2$

คำตอบของสมการคือ 0, 3 หรือ –2

3.) $(x - 2)(x - 2) = 0$

วิธีทำ จาก $(a)(b) = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ดังนั้น $(x - 2)(x - 2) = 0$

$x - 2 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

$x = 2$ หรือ $x = 2$

คำตอบของสมการคือ 2

4.) $(3x + 2)(x + 1) = 0$

วิธีทำ จาก $(a)(b) = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ดังนั้น $(3x + 2)(x + 1) = 0$

$3x + 2 = 0$ หรือ $x + 1 = 0$

$3x + 2 - 2 = 0 - 2$ หรือ $x + 1 - 1 = 0 - 1$

$3x = -2$ หรือ $x = -1$

$$\frac{3x}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

คำตอบของสมการคือ $-\frac{2}{3}$ หรือ -1

<u>ปัญหาที่ 70</u> จงหาคำตอบของสมการ $(2x - 1)(3x - 2) = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 71</u> จงหาคำตอบของสมการ $(x + 7)(x - 4)(x + 3) = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 72</u> จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 5x + 4 = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 73</u> จงหาคำตอบของสมการ $x^2 = 8x$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 74</u> จงหาคำตอบของสมการ $(x - 2)(x^2 - 4x + 4) = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 75</u> จงหาคำตอบของสมการ $(2x + 1)(4x^2 + 4x + 1) = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 76</u> จงหาคำตอบของสมการ $3x^2 - 11x - 20 = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 43 จงแสดงว่า -2 เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

แนวคิด -2 เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ ก็ต่อเมื่อ $P(-2) = 0$

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - 4(-2)^2 - 4(-2) + 16 \\ &= (-8) - 4(4) + 8 + 16 \\ &= (-8) - 16 + 8 + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $P(-2) = 0$ ดังนั้น -2 เป็นคำตอบของสมการ ตอบ

ตัวอย่างที่ 44 จงหาพหุนาม $P(x)$ ที่เป็นสมการพหุนามดีกรีสามที่มี $-3, -2$ และ 1 เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$

แนวคิด ให้ $P(x) = 0$ เป็นพหุนามดีกรีสามที่มี $-3, -2$ และ 1 เป็นคำตอบ

เราสามารถเขียนอยู่ในรูป $(x - r)$ ได้ดังนี้ $(x - (-3))(x - (-2))(x - 1)$

จะได้ว่า $$\begin{aligned} P(x) &= (x + 3)(x + 2)(x - 1) \\ &= (x + 3)(x^2 + x - 2) \\ &= (x)(x^2 + x - 2) + (3)(x^2 + x - 2) \\ &= (x^3 + x^2 - 2x) + (3x^2 + 3x - 6) \\ &= x^3 + 4x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนาม $P(x)$ คือ $x^3 + 4x^2 + x - 6$ ตอบ

ปัญหาที่ 77 จงแสดงว่า $-\frac{1}{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $6x^3 + 13x^2 + 4x + 3 = 0$

แนวคิด.....

.....

.....

ปัญหาที่ 78 จงหาพหุนาม P(x) ซึ่งเป็นสมการพหุนามดีกรี 2 ที่มี - 7 และ - 8 เป็นคำตอบของสมการ

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 79 จงหาพหุนาม P(x) ซึ่งเป็นสมการพหุนามดีกรี 3 ที่มี $-\frac{1}{2}$, 3 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 80 จงหาพหุนาม P(x)ที่เป็นสมการพหุนามดีกรี 3 โดยที่มี – 2, 2 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ในการแก้สมการพหุนามนั้น คำตอบของสมการที่หาได้อาจจะไม่เป็นจำนวนเต็มเสมอไป อาจอยู่ในรูปจำนวนตรรกยะที่เป็นเศษส่วน ซึ่งสามารถหาคำตอบนั้นได้จาก **ทฤษฎีบทรากที่เป็นจำนวนตรรกยะ** กล่าวคือ

ให้สมการพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าจำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ แล้ว k จะเป็นตัวประกอบของ a_0 และ m เป็นตัวประกอบของ a_n

ดังนั้นจำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ไม่จำเป็นต้องเป็นคำตอบของสมการเสมอไป ซึ่งจำนวนตรรกยะที่จะเลือกมาเป็นค่า r นั้น เมื่อแทนลงในสมการแล้วต้องทำให้ $P(r) = 0$ และ $\frac{k}{m}$ สามารถหาได้จากจำนวนจริงที่ k หาร a_0 ลงตัว และจำนวนจริง m หาร a_n ลงตัว เท่านั้น ดังตัวอย่างเช่น

ตัวอย่างที่ 45 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อาจเป็นคำตอบของ $2x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x + 3$ จะพบว่า $a_0 = 3$ และ $a_n = 2$

$a_0 = 3$ เขียนจำนวนเต็ม k ทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ 3

ดังนั้น k ที่เป็นตัวประกอบของ 3 คือ $\pm 1, \pm 3$

$a_n = 2$ เขียนจำนวนเต็ม m ทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ 2

ดังนั้น m ที่เป็นตัวประกอบของ 3 คือ $\pm 1, \pm 2$

จะได้จำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ เป็น $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อาจเป็นคำตอบของ $3x^3 + 11x^2 - 6x - 9 = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 6x - 9$ จะพบว่า $a_0 = -9$ และ $a_n = 3$

$a_0 = -9$ เขียนจำนวนเต็ม k ทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ -9

ดังนั้น k ที่เป็นตัวประกอบของ -9 คือ $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$a_n = 3$ เขียนจำนวนเต็ม m ทั้งหมดที่เป็นตัวประกอบของ 3

ดังนั้น m ที่เป็นตัวประกอบของ 3 คือ $\pm 1, \pm 3$

จากจำนวนตรรกยะทั้งหมดเราใช้ $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ เป็นตัวตั้ง และ $\pm 1, \pm 3$ เป็นตัวหาร

จะได้จำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ เป็น $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{3}$

<u>ปัญหาที่ 81</u> จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

แนวคิด .....

ปัญหาที่ 82 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 2x + 4 = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 83 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของสมการ $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 84 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของ $P(x) = 2x^3 + x^2 - 25x + 12$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 85 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของ $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 6x - 8$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>ปัญหาที่ 86</u> จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ ที่อาจเป็นคำตอบของ $P(x) = 2x^3 + 9x^2 - 2x - 9$

แนวคิด .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 47 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อาจเป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ .....(1)

a_n คือ 1 ตัวประกอบของ 1 คือ $m = \pm 1$

a_0 คือ -2 ตัวประกอบของ -2 คือ $k = \pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะที่อาจเป็นคำตอบของสมการ (1) ได้ คือจำนวนที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ โดยที่

$\frac{k}{m} = \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}$ หรือ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 2$ และจากทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทดลองเลือกค่าของ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $P(\frac{k}{m}) = 0$

พิจารณา $P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

ดังนั้นจะได้ว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^3 - 2x^2 - x + 2$

เราจะหาตัวประกอบตัวที่เหลือโดยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

1	1	−2	−1	+2
		1	−1	−2
	1	−1	−2	0

จาก (1) จะได้ $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

จะได้ $x - 1 = 0$ หรือ $x + 1 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$

$x = 1, -1$ และ 2

คำตอบของสมการคือ 1, -1 , 2

ตัวอย่างที่ 48 จงหาคำตอบของสมการ $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$

วิธีทำ ให้ $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ .....(1)

a_n คือ 2 ตัวประกอบของ 2 คือ $m = \pm 1, \pm 2$

a_0 คือ 3 ตัวประกอบของ 3 คือ $k = \pm 1, \pm 3$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะที่อาจเป็นคำตอบของสมการ (1) ได้ คือจำนวนที่อยู่ในรูป $\frac{k}{m}$ โดยที่

$\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 3, \pm\frac{3}{2}$ และจากทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทดลองเลือกค่าของ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $P(\frac{k}{m}) = 0$

พิจารณา $P(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$

ดังนั้นจะได้ว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

เราจะหาตัวประกอบตัวอื่นโดยวิธีการหารสังเคราะห์ ดังนี้

1	2	+3	−8	+3
		2	5	−3
	2	5	−3	0

จาก (1) จะได้ $(x - 1)(2x^2 + 5x - 3) = 0$

$(x - 1)(2x - 1)(x - 3) = 0$

จะได้ $x - 1 = 0$ หรือ $2x - 1 = 0$ หรือ $x - 3 = 0$

$x = 1, \frac{1}{2}$ และ 3

คำตอบของสมการคือ $1, \frac{1}{2}$ และ 3

ตัวอย่างที่ 49 จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $x^4 - 4x^3 - kx^2 + 6kx + 9 = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่งมากกว่า 1 แต่น้อยกว่า 9

วิธีทำ คำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะ ของสมการ $x^4 - 4x^3 - kx^2 + 6kx + 9 = 0$ ที่อาจเป็นไปได้คือ $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

จากที่กำหนดว่า สมการมีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะบวกซึ่งมากกว่า 1 แต่น้อยกว่า 9 สามารถสรุปได้ว่า 3 เป็นคำตอบ

ดังนั้น
$$\begin{aligned} (3)^4 - 4(3)^3 - k(3)^2 + 6k(3) + 9 &= 0 \\ 81 - 4(27) - k(9) + 18k + 9 &= 0 \\ 81 - 108 - 9k + 18k + 9 &= 0 \\ 9k &= 18 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

ตอบ

ปัญหาที่ 87 จงหาคำตอบของสมการ $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 88 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 89 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการ $4x^3 - 3x^2 - 25x - 6 = 0$

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 90 (1) จงหาค่า k ที่ทำให้สมการ $3x^3 + kx^2 - 8x - 8 = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะ จำนวนแรก คือ - 2

แนวคิด.....

.....

.....

.....

(2) จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการในข้อที่ (1)

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

ให้นักเรียนพิจารณาว่าจำนวนใดเป็นคำตอบของสมการ $x^2-3x+2=0$ โดยตอบคำถามต่อไปนี้

1. $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ ใช่หรือไม่
2. คำตอบของ $(x-1)(x-2)$ คือจำนวนใดบ้าง
3. **คำตอบที่ได้ในข้อ 2 เป็นคำตอบของสมการ $x^2-3x+2=0$ ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด**

วิธีการหาคำตอบของสมการ $x^2-3x+2=0$ สามารถหาคำตอบของสมการได้โดยวิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามและใช้สมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริงที่ว่า ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงใด และ $ab=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$ ดังนั้นจึงต้องหาค่ามาแทนตัวแปร x แล้วทำให้ $x-1$ หรือ $x-2$ เป็นศูนย์ ซึ่งได้แก่ 1 และ 2 ตามลำดับ แต่บางครั้งปัญหาเกี่ยวกับการหาคำตอบของสมการ $ax^2+bx+c=0$ อาจใช้สมบัติค่ารากที่สองมาช่วยในการหาคำตอบของสมการ ดังเช่น

ตัวอย่างที่ 50 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริง $x^2-2=0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ จาก $x^2-2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x \approx \pm 1.414$

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริง $x^2-2=0$ คือ ± 1.414

นักเรียนมีวิธีการหาคำตอบของสมการ $x^2-x-1=0$ ได้อย่างไร

นักเรียนจะพบว่าการหาคำตอบของสมการ $x^2-x-1=0$ ไม่สามารถหาคำตอบของสมการโดยวิธีการแยกตัวประกอบหรือใช้สมบัติเกี่ยวกับค่าราก แต่เราสามารถหาคำตอบของสมการได้จากสูตร $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ในขณะที่ตัวอย่างที่ 48 และ ปัญหาที่ 86 ถึง 89 เป็นสมการพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองและมีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ สามารถหาคำตอบของสมการโดยนำวิธีเกี่ยวกับการหารสังเคราะห์ ทฤษฎีบทเศษเหลือ หรือ ทฤษฎีบทตัวประกอบ มาประยุกต์ใช้ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในลำดับก่อนหน้า สำหรับสมการพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองบางสมการนั้นมีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือหาคำตอบไม่ได้ จะยังไม่กล่าวถึงในขณะนี้ แต่จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีของสมการพหุนามดีกรีสูงกว่าสองแต่ไม่เกินดีกรีสามที่มีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะ

เท่านั้น เช่น $x^3+x-1=0$ เป็นต้น นักเรียนจะพบว่าไม่สามารถใช้วิธีการหารสังเคราะห์ทฤษฎีเศษเหลือ หรือ แม้กระทั่งทฤษฎีบทตัวประกอบ แต่จะมีวิธีการหนึ่งที่ทำให้เราสามารถหาคำตอบของสมการโดยได้ค่าประมาณอย่างใกล้เคียง นักเรียนลองพิจารณาการหาคำตอบของสมการโดยการตอบคำถามจากตัวอย่างต่อไปนี้

1. นักเรียนมีวิธีการหาคำตอบของสมการ $x^3+x-1=0$ ได้อย่างไร

2. ลองแทน x ด้วย -1 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

3. ลองแทน x ด้วย 0 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

4. ลองแทน x ด้วย 1 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

5. ลองแทน x ด้วย 2 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

6. มีจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็มเป็นคำตอบของของสมการ $x^3+x-1=0$ หรือไม่ และนักเรียนคิดว่าสมการนี้มีคำตอบหรือไม่ เพราะอะไร

ถ้านักเรียนนำข้อมูลในข้อ 2 ถึงข้อ 5 มาเขียนลงบนกราฟและลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่างๆ พบว่าเส้นกราฟจะตัดแกน x ที่จุดๆหนึ่ง ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

7. แทน x ด้วย 0.5 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

8. แทน x ด้วย 0.75 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

9. แทน x ด้วย 0.625 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

10. แทน x ด้วย 0.6875 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร

ข้อที่ 10 พบว่าเมื่อแทน x ด้วย 0.6875 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ทำให้สมการที่ได้มีค่าใกล้เคียง 0 มากที่สุด เราสามารถกล่าวได้ว่า คำตอบของสมการ $x^3+x-1=0$ มีค่าโดยประมาณ 0.6875

จากคำตอบที่ได้จะพบว่าวิธีการหาคำตอบของสมการ $x^3+x-1=0$ เป็นดังนี้

ให้ $f(x) = x^3+x-1$

ขั้นที่ 1 แทน x ด้วย 0 และ 1 ลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ดังนี้

$$f(0) = (0)^3+(0)-1 = -1 < 0$$

$$f(1) = (1)^3+(1)-1 = 1 > 0$$

แสดงว่า มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอยู่ระหว่าง 0 และ 1

ขั้นที่ 2 นำค่าที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง 0 และ 1 คือ 0.5 แทนลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ดังนี้

$$f(0.5) = (0.5)^3+(0.5)-1 = -0.375 < 0$$

แสดงว่า มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอยู่ระหว่าง 0.5 และ 1

ขั้นที่ 3 นำค่าที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง 0.5 และ 1 คือ 0.75 แทนลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ดังนี้

$$f(0.75) = (0.75)^3+(0.75)-1 = 0.1718 > 0$$

แสดงว่า มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอยู่ระหว่าง 0.5 และ 0.75

ขั้นที่ 4 นำค่าที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง 0.5 และ 0.75 คือ 0.625 แทนลงในสมการ $x^3+x-1=0$ ได้ดังนี้

$$f(0.625) = (0.625)^3+(0.625)-1 = -0.1308 < 0$$

แสดงว่า มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอยู่ระหว่าง 0.625 และ 0.75

ขั้นที่ 5 นำค่าที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง 0.625 และ 0.75 คือ 0.6875 แทนลงในสมการ $x^3 + x - 1 = 0$ ได้ดังนี้

$$f(0.6875) = (0.6875)^3 + (0.6875) - 1 = 0.0124 \rangle 0$$

ซึ่งมีค่าใกล้ 0 มากที่สุด

นั่นคือ คำตอบสมการ $x^3 + x - 1 = 0$ ที่เป็นค่าประมาณที่ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง คือ 0.6875

ตัวอย่างที่ 51 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 - 5 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 2 ตำแหน่ง

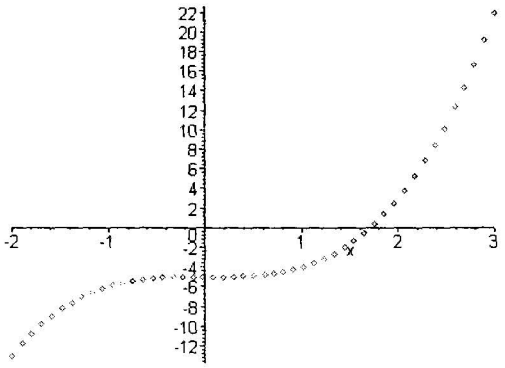
วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ให้ $f(x) = x^3 - 5$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $f(1) = 1^3 - 5 = -4$

ถ้า $x = 2$ จะได้ $f(2) = 2^3 - 5 = 3$

จะพบว่าจุด (1, - 4) อยู่ใต้แกน x และจุด (2, 3) อยู่เหนือแกน x และถ้าลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง จะต้องตัดแกน x ณ จุดๆหนึ่ง สมมุติว่าเป็น r ซึ่งอยู่ระหว่าง (1, 2) ซึ่งแสดงให้เห็นด้วยกราฟดังรูป



ขั้นที่ 2 หาจุดกึ่งกลางของ 1 และ 2 กำหนดให้เป็น x_1

โดยที่ $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

ถ้า $x_1 = 1.5$ จะได้ $f(1.5) = (1.5)^3 - 5 = 3.375 - 5 = -1.625 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.5 และ 2 แสดงดังตาราง

1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
- 1.625	- 0.904	- 0.087	0.832		3

จะพบว่า $f(1.7) = -0.087 < 0$ และ $f(1.8) = 0.832 > 0$

แสดงว่า r จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.7 และ 1.8

ขั้นที่ 3 หาจุดกึ่งกลางของ 1.7 กับ 1.8 กำหนดให้เป็น x_2

โดยที่ $x_2 = \frac{1.7+1.8}{2} = \frac{3.5}{2} = 1.75$

ถ้า $x_2 = 1.75$ จะได้ $f(1.75) = (1.75)^3 - 5 = 5.359 - 5 = 0.359 > 0$

ถ้า $x_2 = 1.7$ จะได้ $f(1.7) = -0.087 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.5 และ 2 แสดงดังตาราง

1.70	1.71	1.72	1.73	1.74	1.75
- 0.87	0.0002				0.359

จะพบว่า $f(1.7) = -0.087 < 0$ และ $f(1.71) = 0.0002 > 0$

แสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.7 กับ 1.71

นั่นแสดงให้เห็นว่า เมื่อ $x_2 = 1.71$ แล้ว $f(x_2)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ตามลำดับ

ดังนั้น ค่าโดยประมาณของสมการ $x^3 - 5 = 0$ ที่ถูกต้องถึงทศนิยม 2 ตำแหน่งคือ 1.71

ตัวอย่างที่ 52 จงประมาณคำตอบของสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ

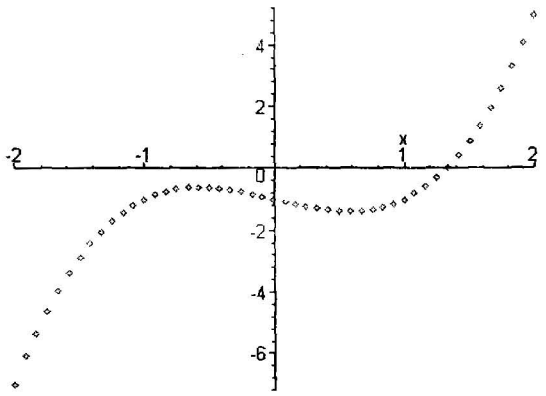
<u>ขั้นที่ 1</u> กำหนด $f(x) = x^3 - x - 1$

<u>ขั้นที่ 2</u> ถ้า $x = 1$; $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$

ถ้า $x = 2$; $f(2) = 2^3 - 1 - 1 = 6 > 0$

พบว่า $f(1) = -1$ และ $f(2) = 6$ นำมาเขียนเป็นกราฟ

จะพบว่า กราฟตัดแกน x ดังรูป



<u>ขั้นที่ 3</u> หาจุดกึ่งกลางของ 1 และ 2 กำหนดให้เป็น x_1

โดยที่ $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

ถ้า $x_1 = 1.5$ จะได้ $f(1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 1 = 0.875 > 0$ และ

จาก $x = 1$; $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1 และ 1.5

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
- 1			- 0.103	0.344	0.875

จากตาราง พบว่า $f(1.4) = 0.344 > 0$ และ $f(1.3) = -0.103 < 0$

นั่นแสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.3 และ 1.4

ขั้นที่ 4 หาจุดกึ่งกลางของ 1.3 และ 1.4 กำหนดให้เป็น x_2

โดยที่ $x_2 = \frac{1.3 + 1.4}{2} = 1.35$

ถ้า $x_1 = 1.35$ จะได้ $f(1.35) = (1.35)^3 - 1.35 - 1 = 0.110 > 0$ และ

จาก $x = 1.3$; $f(1.3) = -0.103 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.3 และ 1.35

1.30	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35
- 0.103		- 0.020	0.022	0.066	0.110

พบว่า $f(1.32) = -0.020 < 0$ และ $f(1.33) = 0.022 > 0$

นั่นแสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.32 และ 1.33

ขั้นที่ 5 หาจุดกึ่งกลางของ 1.32 และ 1.33 กำหนดให้เป็น x_3

โดยที่ $x_3 = \frac{1.32 + 1.33}{2} = 1.325$

ถ้า $x_3 = 1.325$ จะได้ $f(1.325) = (1.325)^3 - 1.325 - 1 = 0.0012 > 0$ และ

จาก $x = 1.32$; $f(1.32) = -0.020 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.32 และ 1.325

1.32	1.321	1.322	1.323	1.324	1.325
- 0.020				-0.0030	0.0012

จากตาราง พบว่า $f(1.324) = -0.0030 < 0$ และ $f(1.325) = 0.012 > 0$

นั่นแสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.324 และ 1.325

ขั้นที่ 6 หาจุดกึ่งกลางของ 1.324 และ 1.325 กำหนดให้เป็น x_4

โดยที่ $x_4 = \frac{1.324 + 1.325}{2} = 1.3245$

ถ้า $x_4 = 1.3245$ จะได้ $f(1.3245) = (1.3245)^3 - 1.3245 - 1 = -0.0009 < 0$ และ

จาก $x = 1.325$; $f(1.325) = 0.0012 > 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.3245 และ 1.325

1.3245	1.3246	1.3247	1.3248	1.3249	1.325
-0.0009		- 0.00007	0.0003	0.0007	0.0012

จากตารางพบว่า f(1.3247) = - 0.00007 < 0 และ f(1.3248) = 0.0003 > 0

นั่นแสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.324 และ 1.325

จะพบว่า เมื่อ x = 1.3248 จะทำให้ f(x) มีค่าเข้าใกล้จุดที่กราฟตัดแกน x มากที่สุด ทำให้เราสามารถพอสรุปได้ว่า คำตอบของสมการ $x^3 - x - 1 = 0 \approx 1.325$ นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 53 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 - 4x^2 - x + 5 = 0$ เมื่อ x มีค่าอยู่ในช่วง (1 , 2) ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

วิธีทำ

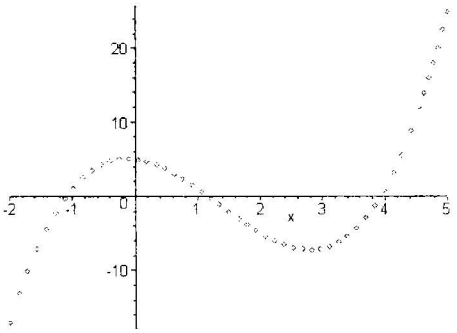
ขั้นที่ 1 กำหนด $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 5$

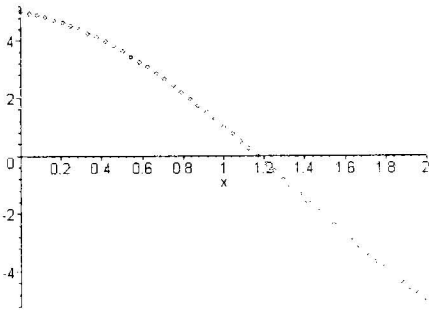
ขั้นที่ 2 ถ้า x = 1 ; $f(1) = 1^3 - 4(1)^2 - 1 + 5 = 1 > 0$

ถ้า x = 2 ; $f(2) = 2^3 - 4(2)^2 - 2 + 5 = -5 < 0$

พบว่า f(1) = 1 และ f(2) = − 5 นำมาเขียนเป็นกราฟ เมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุด กราฟตัดแกน x ดังรูป

กราฟของ $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 5$ ส่วนขยายของกราฟในช่วง (0,2)





ขั้นที่ 3 หาจุดกึ่งกลางของ 1 และ 2 กำหนดให้เป็น x_2

โดยที่ $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$

ถ้า x = 1.5 ; $f(1.5) = (1.5)^3 - 4(1.5)^2 - 1.5 + 5 = -2.125 < 0$

จาก x = 1.325 ; f(1.325) = 0.0012 > 0

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.325 และ 1.5

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1	0.391	- 0.232			- 2.125

พบว่า f(1.1) = 0.391 > 0 และ f(1.2) = - 0.232 < 0

นั่นแสดงว่า จะมีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.1 และ 1.2

ขั้นที่ 4 หาจุดกึ่งกลางของ 1.1 และ 1.2 กำหนดให้เป็น x_3

โดยที่ $x_3 = \frac{1.1+1.2}{2} = 1.15$

ถ้า $x = 1.15$; $f(1.15) = (1.15)^3 - 4(1.15)^2 - 1.15 + 5 = 0.080 > 0$

จาก $x = 1.2$; $f(1.2) = -0.232 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.15 และ 1.2

1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20
0.080	- 0.3824				- 0.232

พบว่า $f(1.15) = 0.080 > 0$ และ $f(1.16) = -0.3824 < 0$

นั่นแสดงว่า มีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.15 และ 1.16

ขั้นที่ 5 หาจุดกึ่งกลางของ 1.15 และ 1.16 กำหนดให้เป็น x_4

โดยที่ $x_4 = \frac{1.15+1.16}{2} = 1.155$

ถ้า $x = 1.155$; $f(1.155) = (1.155)^3 - 4(1.155)^2 - 1.155 + 5 = 0.049 > 0$

จาก $x = 1.16$; $f(1.16) = -0.3824 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.155 และ 1.16

1.155	1.156	1.157	1.158	1.159	1.160
0.049	0.043	- 0.354			- 0.3824

จะพบว่า $f(1.156) = 0.043 > 0$ และ $f(1.157) = -0.354 < 0$

นั่นแสดงว่า มีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.156 และ 1.157

ขั้นที่ 6 หาจุดกึ่งกลางของ 1.156 และ 1.157 กำหนดให้เป็น x_5

โดยที่ $x_5 = \frac{1.156+1.157}{2} = 1.1565$

ถ้า $x = 1.1565$; $f(1.1565) = (1.1565)^3 - 4(1.1565)^2 - 1.1565 + 5 = 0.0404 > 0$

จาก $x = 1.157$; $f(1.157) = -0.354 < 0$

แสดงว่า r จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 1.1565 และ 1.157

1.1565	1.1566	1.1567	1.1568	1.1569	1.157
0.0404			0.0385	0.0379	- 0.354

จะพบว่า $f(1.1569) = 0.00379 > 0$ และ $f(1.157) = -0.354 < 0$

นั่นแสดงว่า มีคำตอบที่อยู่ระหว่าง 1.1569 และ 1.157

จะพบว่า เมื่อ $x = 1.1569$ จะทำให้ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ จุดที่กราฟตัดแกน x มากที่สุด ทำให้เราสามารถพอสรุปได้ว่า

คำตอบของสมการ $x^3 - 4x - x + 5 = 0$ คือ $x \approx 1.156$ นั่นเอง

ปัญหาที่ 90 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 - 2 = 0$ ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 91 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

แนวคิด

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 92 จงแสดงว่า $x^3 - 2x - 5 = 0$ มีคำตอบอยู่ระหว่าง 2 กับ 3 (ประมาณถึงทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

แนวคิด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ปัญหาที่ 93 จงแสดงว่าสมการ $x^3 + 3x^2 - 8 = 0$ มีคำตอบอยู่ระหว่าง 1 กับ 2 (ประมาณให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

แนวคิด

ปัญหาที่ 94 จงแสดงว่าสมการ $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$ มีคำตอบอยู่ระหว่าง 2 กับ 3 (ประมาณให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

แนวคิด

<u>ปัญหาที่ 95</u> จงแสดงว่าสมการ $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ มีคำตอบอยู่ระหว่าง 1 กับ 2 (ประมาณให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

แนวคิด.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เราเรียกวิธีการประมาณค่าดังกล่าวข้างต้น สรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. หาจำนวนตรรกยะ (c) ที่แทนลงในสมการที่กำหนด ให้เป็น x_l และ x_r โดย $x_l < x_r$
2. ตรวจดูว่า $f(x_l)$, $f(x_r)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือไม่

สมมติว่า $f(x_l) < 0$ และ $f(x_r) > 0$ เราสามารถคำนวณหาค่า c ซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่าง x_l และ x_r แล้วคำนวณหา $f(c)$

ถ้า $f(c) = 0$ จะได้ว่าค่า c เป็นคำตอบ

ถ้า $f(c) \neq 0$ เราจะกระทำวิธีการใดวิธีการหนึ่งดังนี้

1. ถ้า $f(c) < 0$ รากที่ r อยู่ระหว่าง c และ x_r ซึ่งกรณีนี้ ในกระบวนการทำซ้ำเราให้ค่า c เป็นค่า x_l ใหม่
2. ถ้า $f(c) > 0$ รากที่ r อยู่ระหว่าง x_r และ c ซึ่งกรณีนี้ ในกระบวนการทำซ้ำเราให้ค่า c เป็นค่า x_r ใหม่

ภาคผนวก ง
แผนการสอนรายคาบ เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

แผนการสอนคาบที่ 1

เรื่อง พหุนาม ดีกรีพหุนาม เวลา 1 คาบเรียน 50 นาที

1. สาระสำคัญ

พหุนามของตัวแปร x คือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ มี $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นสัมประสิทธิ์ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient)

เรียก $P(x)$ ว่า พหุนามดีกรี n

ดีกรีของเอกนาม คือ ผลรวมของเลขชี้กำลังของตัวแปรทุกตัวในเอกนาม

ดีกรีของพหุนาม คือ ดีกรีสูงสุดในพหุนามผลสำเร็จ

ผลบวกของเอกนามที่คล้ายกันสามารถทำได้โดยการใช้สมบัติการแจกแจง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนระบุได้ว่านิพจน์ที่กำหนดมาให้นิพจน์ใดเป็นเอกนาม พหุนามได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 บอกได้ว่านิพจน์ที่กำหนดให้ นิพจน์ใดเป็นเอกนาม นิพจน์ใดเป็นพหุนาม

2.2.2 บอกดีกรีของเอกนามที่กำหนดให้ได้

2.2.3 บอกดีกรีของพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2.4 บอกได้ว่าเอกนามที่กำหนดให้คู่ใดคล้ายกัน

3. เนื้อหา

<u>บทนิยามที่ 1</u> เอกนาม

เอกนามหนึ่งตัวแปร คือ ผลคูณของค่าคงตัวกับตัวแปรที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ซึ่งเอกนามหนึ่งตัวแปร เขียนอยู่ในรูป ax^k ; k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เรียก a ว่า สัมประสิทธิ์ของเอกนาม

เรียก x ว่า ตัวแปร

ถ้า $a \neq 0$ แล้วจะเรียก k ว่า ดีกรีของเอกนาม

เอกนามสองเอกนามใดคล้ายกันก็ต่อเมื่อเอกนามทั้งสองเอกนามนั้นมีตัวแปรเป็นตัวเดียวกันและมีเลขชี้กำลังเท่ากัน

<u>บทนิยามที่ 2</u>

พหุนามของตัวแปร x คือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูป

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ มี $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ เป็นสัมประสิทธิ์ และ a_0 เป็นค่าคงที่ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

เรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient)

เรียก $P(x)$ ว่า **พหุนามดีกรี** n และ อ่าน $P(x)$ **ว่า** P **ของ** x

พหุนามที่มีเพียงพจน์เดียว เรียกว่า เอกนาม

พหุนามที่ประกอบด้วยพจน์เพียงสองพจน์ เรียกว่า ทวินาม

พหุนามที่ประกอบด้วยพจน์สามพจน์ เรียกว่า ไตรนาม

เรียก พหุนามที่ไม่มีพจน์ใด ๆคล้ายกัน ว่า พหุนามผลสำเร็จ

เรียก ดีกรีที่สูงที่สุดในพหุนามผลสำเร็จ ว่า ดีกรีของพหุนาม

การคูณด้วย 0 (ศูนย์) $0x^k = 0$ โดยที่ x^k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

การคูณด้วย 1 (หนึ่ง) $1x^k = x^k$ โดยที่ x^k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาและเขียนนิพจน์ที่กำหนดให้ ให้เป็นผลสำเร็จ

1. $(4x^3)(x)(x^4) = 4x^{3+1+4} = 4x^8$
2. $(3^2)(x^4)(x) = 9x^{4+1} = 9x^5$
3. $(3^2)(x^5)(x^2) = 9x^{5+2} =$ .....
4. $\frac{1}{4}(x^2)^3 =$.....=.....
5. $3(5x)(\frac{1}{3}x) =$ .....=.....
6. $(3^2x)(x)(x^2)^4 =$.....=.....

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนนักเรียนเกี่ยวกับ การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ ให้นักเรียนเขียนนิพจน์แทนการหาพื้นที่ดังกล่าว ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายนิยามที่ 1 ดีกรีของเอกนาม เอกนามที่คล้ายกัน พร้อมยกตัวอย่าง และให้นักเรียนทำ **ปัญหาที่ 1**
2. **ครูอธิบายทบทวนสมบัติการแจกแจง และให้นักเรียนทำปัญหาที่ 1**
3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1 พร้อมอธิบายประกอบ
4. ครูอธิบายนิยามที่ 2 ดีกรีพหุนาม ลักษณะของพหุนาม พร้อมยกตัวอย่าง และให้ นักเรียนทำ **ปัญหาที่ 3 และ ปัญหาที่ 4**

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับ ลักษณะของพหุนาม ดีกรีของพหุนาม

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 2

เรื่อง การบวกพหุนาม เวลา 1 คาบเรียน 50 นาที

1. สาระสำคัญ

การหาผลบวกของพหุนามสามารถทำได้โดยการรวมพจน์ที่คล้ายกัน

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 **จุดประสงค์ปลายทาง**

2.1.1 นักเรียนสามารถหาผลบวกพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2 **จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ**

2.2.1 เขียนนิพจน์โดยเขียนเรียงลำดับเลขชี้กำลังจากมากไปน้อยได้

2.2.2 หาผลบวกของเอกนามคล้ายได้

3. **เนื้อหา**

<u>บทนิยามที่ 3</u> ในระบบจำนวนจริง จำนวนตรงข้ามของ a หมายถึง จำนวนจริงเมื่อบวกกับ <u>a</u> แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์

สมบัติการสลับที่ $a+b = b+a$

สมบัติการแจกแจง $a(b+c) = ab+ac$ หรือ $(b+c)a = ba+ca$

สมบัติการจัดหมู่การบวก $(a+b)+c = a+(b+c)$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $P(x)=7x+3$, $Q(x)= 5x+20$ จงหา $P(x)+Q(x)$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $P(x)=x^2-6x-3$, $Q(x)= -4x^2+x-4$ จงหา $P(x)+Q(x)$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $P(x)=x^2-7x-8$, $Q(x)= x^3+3x^2+10$ จงหา $P(x)+Q(x)$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $P(x)=3x^3-7x+2$, $Q(x)=7x^2+2x-7$ จงหา $P(x)+Q(x)$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $P(x)=3(x^2-3x+1)$ และ $Q(x)=2(3x^2+x+4)$ จงหา $P(x)+Q(x)$

ตัวอย่างที่ 8 ให้ $P(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-10$, $Q(x)= -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{9}x+2$ จงหา $P(x)+Q(x)$

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่ม โดยที่นักเรียนแต่ละกลุ่มยกตัวอย่างเอกนามกลุ่มละ 5 ตัวอย่าง และสอบถามนักเรียนว่า สามารถทำเอกนามในแต่ละคู่ให้เป็นผลสำเร็จได้หรือไม่ เพราะอะไร

ขั้นสอน

1. ครูซักถามนักเรียนเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานและสมบัติที่ได้เรียนมาแล้ว

2. ครูอธิบายนิยามที่ 3

3. ครูยกตัวอย่างที่ 2, 3, 4, 5 , 6, 7 , 8 ตามลำดับ และอธิบายวิธีการ

4. ครูให้นักเรียนทำปัญหาที่ 5, 6, 7 , 8 , 9

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปวิธีการหาผลบวกพหุนามที่กำหนด

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 3

เรื่อง การลบพหุนาม เวลา 1 คาบเรียน 50 นาที

1. สาระสำคัญ

การหาผลลบของพหุนามสามารถทำได้โดยการรวมพจน์ที่คล้ายกัน

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 **จุดประสงค์ปลายทาง**

2.1.1 นักเรียนสามารถหาผลลบพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2 **จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ**

2.2.1 เขียนนิพจน์โดยเขียนเรียงลำดับเลขชี้กำลังจากมากไปน้อยได้

2.2.2 หาผลลบของเอกนามที่คล้ายกันได้

3. **เนื้อหา**

<u>บทนิยามที่ 4</u> ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ เป็นพหุนามใดๆ จะมีจำนวนจริง r ในระบบจำนวนจริง ซึ่ง

$$rP(x) = ra_n x^n + ra_{n-1}x^{n-1} + ra_{n-2}x^{n-2} + \ldots + ra_1 x^1 + ra_0$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $P(x) = 3x - 8$, $Q(x) = 5x + 2$ จงหา $-P(x)$ และ $-Q(x)$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $P(x) = -3x^3 + 2x - 8$, $Q(x) = -5x^2 - x - 2$

จงหา $-P(x)$ และ $-Q(x)$

ตัวอย่างที่ 11 ให้ $P(x) = 8x + 2$, $Q(x) = -3x + 4$ จงหา $P(x) - Q(x)$

ตัวอย่างที่ 12 ให้ $P(x) = -9x^3 + 3x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 14x^2$ จงหา $P(x) - Q(x)$

ตัวอย่างที่ 13 ให้ $P(x) = -3x^2 + 5x$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10$ จงหา $P(x) - Q(x)$

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวนเต็ม

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายบทนิยามที่ 4
2. ครูยกตัวอย่างที่ 9, 10, 11 ,12 ,13 ตามลำดับและอธิบายประกอบ
3. ครูให้นักเรียนทำปัญหาที่ 8, 9, 10, 11 ,12 ,13 และ 14 ตามลำดับ
4. ครูยกตัวอย่างที่ 15 , 16 ตามลำดับ และอธิบายประกอบ
5. ครูให้นักเรียนทำปัญหาที่ 17

ขั้นสรุป

ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปวิธีการลบพหุนามที่กำหนด

5. สื่อการสอน

1. ใบความรู้และใบงาน

2. แผ่นใสแสดงเส้นจำนวน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 4

เรื่อง การคูณพหุนาม เวลา 1 คาบเรียน 50 นาที

1. สาระสำคัญ

ให้ P(x) และ Q(x) เป็นสองพหุนามใดๆ

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$

$P(x)Q(x) = (P(x))(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x^1 + b_0)$

$= (P(x))(b_m x^m) + (P(x))(b_{m-1}x^{m-1}) + \ldots + (P(x))(b_1 x^1) + (P(x))(b_0)$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาผลคูณของพหุนามได้

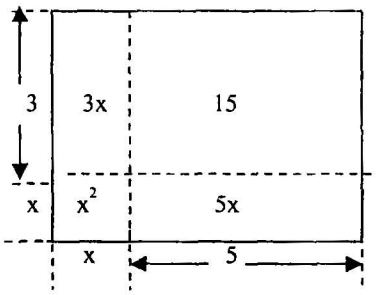
2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 หาผลคูณของเอกนามกับเอกนามที่กำหนดให้ได้

2.2.2 หาผลคูณของเอกนามกับพหุนามที่กำหนดให้ได้

3. เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 16 จงหาพื้นที่ภายในของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและผลคูณของ (x + 3)(x + 5)



ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลคูณของ (x + 2)(x + 7)

ตัวอย่างที่18 จงหาผลคูณของ (2x(x + 2) – 1)(2x – 3(x + 2))

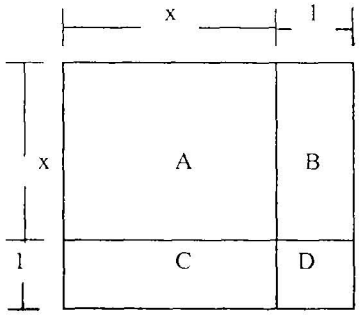
4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับการคูณในระบบจำนวนเต็มและสมบัติการแจกแจง

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปที่กำหนดและให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาพื้นที่บริเวณย่อยๆทั้ง 4 รูป



2. ครูยกตัวอย่างที่ 15, 16 และ 17 พร้อมอธิบายประกอบ

3. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 18, 19, 20, 21, 22 , 23 , 24

4. ครูยกตัวอย่างที่ 18 พร้อมอธิบายประกอบ

5. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 25, 26, 27

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการหาผลคูณของพหุนาม

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 5

เรื่อง การหารพหุนาม เวลา 1 คาบเรียน 50 นาที

1. สาระสำคัญ

การหารพหุนามด้วยเอกนาม

ทำได้โดยการนำเอกนามที่กำหนดไปหารทุก ๆพจน์ของพหุนามนั้น เช่น $\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}$

การหารพหุนามตัวตั้ง P(x) ด้วยพหุนาม Q(x) โดยวิธีการตั้งหารยาว ได้ผลหารเป็น S(x) และเศษเป็น R(x)

ถ้า $R(x)=0$ แสดงว่า Q(x) หาร P(x) ลงตัว

ถ้า $R(x)\neq 0$ แสดงว่า Q(x) หาร P(x) ไม่ลงตัว

และสามารถเขียนได้เป็น $P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 **จุดประสงค์ปลายทาง**

นักเรียนสามารถหาผลหารของพหุนามด้วยวิธีการตั้งหารยาวได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 หาผลหารของพหุนามด้วยเอกนามได้

3. เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 19 จงหาผลหารที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.) $\frac{x^9}{x^5}$ 2.) $\frac{12x+11}{4}$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.) $8x^4+12x^3-6x^2+20x \div 2x$

2.) $36x^3-6x^2+26x \div 3x$

ตัวอย่างที่21 จงหาผลหารและเศษ $6x^5-8x^4+10x^2 \div (-2x^4)$

ตัวอย่างที่ 22 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.) ให้ $P(x)=x^2-3x-10$ หารด้วย $x+2$

2.) ให้ $P(x)=2x^3-7x^2-4$ หารด้วย $2x-3$

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนวิธีการหารจำนวนเต็ม และซักถามปัญหาเกี่ยวกับขั้นตอนของการหาร

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างที่ 19 ,20 และ 21 พร้อมทั้งอธิบายประกอบ
2. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 28, 29 , 30
3. ครูยกตัวอย่างที่ 22 พร้อมทั้งอธิบายประกอบ
4. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 31
5. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นสองกลุ่มโดยให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมาทำปัญหาที่ 32 และ ปัญหาที่ 33 บนกระดาน

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการหารพหุนาม

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 6

เรื่อง การหาค่าของพหุนาม เวลา 1 คาบ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

การหาค่าพหุนาม เป็นการแทนค่าจำนวนจริงใด ๆ ในตัวแปร x ที่กำหนดในพหุนาม $P(x)$ แล้วทำให้ได้ค่าของ $P(x)$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เพียงค่าเดียว

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาค่าพหุนาม $P(x)$ เมื่อกำหนดค่าของตัวแปรมาให้ได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 แทนค่าของตัวแปรในพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2.2 หาค่าพหุนาม $P(x)$ เมื่อกำหนดค่าของตัวแปรมาให้ได้

2.2.3 หาเศษที่เกิดจากการหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - r$ โดยวิธีการตั้งหารได้

3. เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของพหุนาม $P(x) = x^2 - 5x + 3$ เมื่อ $x = 1$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของพหุนาม $P(x) = 3x^2 + 2$ เมื่อ

1.) $x = 0$ 2.) $x = -3$ 3.) $x = \frac{1}{5}$

ตัวอย่างที่ 26 ให้ $P(x) = 2x^2 - 3x - 5$

1.) จงหาค่าของ $P(2)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 2$ โดยวิธีการตั้งหาร

ตัวอย่างที่ 27 ให้ $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 6$

1.) จงหาค่าของ $P(1)$

2.) จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - 1$ โดยการตั้งหาร

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

ครูทบทวนการหารพหุนาม

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างที่ 24 , 25 พร้อมอธิบายประกอบ
2. ครูให้นักเรียนฝึกทำปัญหาที่ 35 , 36 , 37 , 38 , 39
3. ครูยกตัวอย่างที่ 26 และ 27 พร้อมอธิบายประกอบ
4. ครูให้นักเรียนทำปัญหาที่ 40 , 41
5. ครูให้นักเรียนส่งตัวแทนมาทำปัญหาที่ 42 , 43 และ 44

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปวิธีการหาค่าของพหุนาม

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 7 - 8

เรื่อง ทฤษฎีบทเศษเหลือ เวลา 2 คาบเรียนๆละ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

ถ้าหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม $x - r$ แล้ว เศษคือ p(r) เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใดๆ

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง นักเรียนสามารถ

หาเศษเหลือจากการหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม $x - r$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 หา r เมื่อกำหนด $x - r$ ได้

2.2.2 แทนค่า r ในพหุนาม P(x) ที่กำหนดให้ได้

2.2.3 บอกได้ว่า $x - r$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม P(x) โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือได้

3. เนื้อหา

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ถ้า P(x) เป็นพหุนาม และหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม $x - r$ แล้ว เศษคือ p(r)

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตัวอย่างที่ 28 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = x^2 - 5x - 36$ ด้วย $x - 9$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ตัวอย่างที่ 29 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 8x^3 + 27$ ด้วย $2x + 3$ โดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนวิธีการหาค่าของพหุนามและการหารเศษ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 28 , 29

2. ให้นักเรียนฝึกทำปัญหาที่ 45, 46, 47, 48 , 49

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการหาเศษ โดยใช้ทฤษฎีเศษเหลือ

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 9 - 10

เรื่อง ทฤษฎีบทตัวประกอบ เวลา 2 คาบๆละ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ให้ P(x) เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว p(r) = 0 ก็ต่อเมื่อ x - r เป็นตัวประกอบของพหุนาม P(x)

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ โดยใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 แทนค่าตัวแปรในพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2.2 นำความรู้เรื่องการหารพหุนามหาตัวประกอบได้

2.2.3 นำความรู้เรื่องทฤษฎีบทเศษเหลือหาตัวประกอบของพหุนามได้

3. เนื้อหา

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ให้ P(x) เป็นพหุนามใน x ดีกรี n และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว p(r) = 0 ก็ต่อเมื่อ x - r เป็นตัวประกอบของพหุนาม P(x)

ตัวอย่างที่ 30 จงแสดงว่า $x - 1$ หารพหุนาม $P(x) = x^2 - 2x + 1$ ลงตัว

ตัวอย่างที่ 31 กำหนด $2x + 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $6x^2 + 13x + 5$

จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือด้วยวิธีการตั้งหาร

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทเศษเหลือและการแทนค่าตัวแปร

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างที่ 30 อธิบายประกอบ
2. ครูให้นักเรียนทำปัญหาที่ 50, 51, 52 , 52 , 53 , 54 , 55

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนรายคาบที่ 11 - 13

เรื่อง การหารสังเคราะห์ เวลา 3 คาบเรียนๆละ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

การหารสังเคราะห์ เป็นกระบวนการหารพหุนาม P(x) ด้วยพหุนาม x - r ที่ทำให้ทราบผลหารและเศษได้อย่างรวดเร็ว

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์และเศษที่เกิดจากหารหารพหุนามโดยวิธีการหารสังเคราะห์ได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 บอกพหุนามตัวตั้ง พหุนามตัวหาร ของพหุนามที่กำหนดให้ได้

2.2.2 บอกขั้นตอนการหารพหุนาม P(x) ด้วย x - r ได้

3. เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 31 กำหนด $2x + 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $6x^2 + 13x + 5$ จงหา ตัวประกอบตัวที่เหลือด้วยวิธีการตั้งหาร

ตัวอย่างที่ 32 ให้ $P(x) = x^3 + 27$

1.) จงหาค่าของ $P(-3)$

2.) ถ้า $x - 3$ จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือ ด้วยวิธีการตั้งหาร

ตัวอย่างที่ 33 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 4x^3 + 32 - 8x^2$ ด้วย $x - 2$

ตัวอย่างที่ 34 กำหนด $x - 9$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^2 - 5x - 36$ จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 35 กำหนด $x + 2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 11x + 10$ จงหาตัวประกอบตัวที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 36 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ ด้วย $2x - 3$

ตัวอย่างที่ 37 จงหาผลหารและเศษที่เกิดจากการหาร $P(x) = 5x^3 - 24x^2 + 1$ ด้วย $5x + 1$

ตัวอย่างที่ 38 จงแสดงว่า $x - 2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^2 - 3x + 2$ และจงหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

ตัวอย่างที่ 39 จงแสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = 2x^2 - x - 1$ และ จงหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

ตัวอย่างที่ 40 จงแสดงว่า $x + 2$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x) = x^3 + 8$ และ จงหาตัวประกอบที่เหลือด้วยวิธีการหารสังเคราะห์

การหารพหุนาม P(x) ด้วย x - r แบบสังเคราะห์ มีวิธีการดังนี้

1. เขียนสัมประสิทธิ์ของพหุนามโดยเรียงดีกรีตามลำดับกำลังของ x จากมากไปน้อย และเขียน 0 แทนจำนวนพจน์ที่หายไป (เขียนเรียงกันไปในบรรทัดแรก)

2. แทนตัวหาร x - r ด้วย r ไว้ทางซ้ายมือของข้อ (1)

3. ดึงสัมประสิทธิ์ของ x ที่กำลังสูงที่สุดลงมาไว้ในบรรทัดที่ 3 คูณด้วย r แล้วนำไปไว้ในบรรทัดที่ 2 ตรงกับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองบวกกัน แล้วนำผลบวกไปไว้บรรทัดที่ 3

4. นำ r ไปคูณกับผลบวก แล้วนำไปไว้ในบรรทัดที่ 2 ตรงกับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สามบวกกัน แล้วนำผลบวกไปไว้บรรทัดที่ 3 และทำแบบเดียวกันจนกระทั่งถึงพจน์สุดท้าย

5. จะได้พจน์สุดท้ายในบรรทัดที่ 3 เป็นเศษ และพจน์อื่น ๆ ในบรรทัดที่ 3 เป็นสัมประสิทธิ์ของผลหาร ซึ่งมีดีกรีน้อยกว่า P(x) อยู่ 1

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนการหารพหุนามด้วยวิธีการตั้งหารยาว

ขั้นสอน

1. ครูตัวอย่างที่ 31, 32 และ 33 พร้อมอธิบายประกอบ
2. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 56 และ 57
3. ครูตัวอย่างที่ 34, 35 , 36 , 37 พร้อมอธิบายประกอบ
4. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 58, 59, 60, 61 , 62
5. ครูตัวอย่างที่ 38, 39, 40 และ 41 พร้อมอธิบายประกอบ
6. ให้นักเรียนทำปัญหาที่ 62, 63, 64, 65, 66, 67 , 68 และ 69

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการหารสังเคราะห์

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 14 - 16

เรื่อง การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนตรรกยะ เวลา 3 คาบๆละ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_1 และ a_0 เป็นค่าคงที่ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่บวกหรือศูนย์ จะเรียกสมการที่อยู่ในรูป $P(x) = 0$ ว่า สมการพหุนามดีกรี n และเมื่อแทนตัวแปร x ด้วยจำนวนจริง r ใดๆ แล้วทำให้ $P(r) = 0$ จะเรียก r ว่า คำตอบของ สมการพหุนาม $P(x) = 0$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 จุดประสงค์ปลายทาง

นักเรียนสามารถหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการพหุนามได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 เขียนสมการพหุนาม P(x) ให้อยู่ในรูป $a(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) = 0$ ได้

2.2.2 หาคำตอบของสมการพหุนาม P(x) ที่กำหนดให้ได้

3. เนื้อหา

ให้ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_1 และ a_0 เป็นค่าคงที่ โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่บวกหรือศูนย์ จะเรียกสมการที่อยู่ในรูป $P(x) = 0$ ว่า สมการพหุนามดีกรี n และเมื่อแทนตัวแปร x ด้วยจำนวนจริง r ใดๆ แล้วทำให้ $P(r) = 0$ จะเรียก r ว่า คำตอบของ สมการพหุนาม $P(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 42 จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1.) $2x - 6 = 0$

2.) $x(x - 3)(x + 2) = 0$

3.) $(x - 2)(x - 2) = 0$

4.) $(3x + 2)(x + 1) = 0$

ตัวอย่างที่ 43 จงแสดงว่า -2 เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาพหุนาม P(x)ที่เป็นพหุนามดีกรีสามที่มี -3, -2 และ 1 เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 45 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อาจจะเป็นคำตอบของ $2x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่อาจจะเป็นคำตอบของ $3x^3 + 11x^2 - 6x - 9 = 0$

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนการหาคำตอบของสมการพหุนาม

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างที่ 42 และอธิบายประกอบ
2. ครูให้นักเรียนฝึกทำปัญหาที่ 70, 71, 72, 73, 74, 75 , 76
3. ครูยกตัวอย่างที่ 43, 44 และอธิบายประกอบ
4. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มโดยให้แต่ละกลุ่มฝึกทำปัญหาที่ 77, 78 , 79 , 80
5. ครูยกตัวอย่างที่ 45, 46 และอธิบายประกอบ
6. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มโดยให้แต่ละกลุ่มฝึกทำปัญหาที่ 81, 82 , 83 , 84 , 85 , 86
7. ครูยกตัวอย่างที่ 47, 48 และ 49 พร้อมอธิบายประกอบ
8. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มโดยให้แต่ละกลุ่มฝึกทำปัญหาที่ 87, 88 , 89 , 90

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการหาคำตอบที่เป็นจำนวนตรรกยะของสมการพหุนาม

5. สื่อการสอน

ใบความรู้และใบงาน

6. การวัดผลและประเมินผล

6.1 การตอบข้อซักถาม

6.2 การทำใบงานของนักเรียน

6.3 การตรวจใบงานของนักเรียน

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนคาบที่ 17 – 20

เรื่อง การหาคำตอบของสมการพหุนามที่เป็นจำนวนอตรรกยะ เวลา 4 คาบๆละ 50 นาที

1. สาระสำคัญ

คำตอบของสมการดีกรีหนึ่ง ที่เขียนอยู่ในรูป $ax + b = 0$ โดยที่ $a \neq 0$ คือ $x = -\frac{b}{a}$ และคำตอบของสมการดีกรีสองที่เขียนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$ เราสามารถหา คำตอบของสมการได้จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ หรือใช้สมบัติค่ารากที่สอง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 **จุดประสงค์ปลายทาง**

นักเรียนสามารถประมาณคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสามที่มีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะได้

2.2 จุดประสงค์นำทาง เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้วนักเรียนสามารถ

2.2.1 หาจำนวนจริงแทนค่าตัวแปรในสมการพหุนามที่กำหนดได้

2.2.2 หาคำตอบสมการพหุนามที่กำหนดได้เมื่อกำหนดขอบเขตมาให้ได้

2.2.3 บอกลักษณะและเขียนกราฟที่กำหนดด้วยพหุนามดีกรีสามได้

2.2.4 การประมาณคำตอบของสมการพหุนามดีกรีสามเป็นจำนวนอตรรกยะได้

3. เนื้อหา

คำตอบของสมการดีกรีสองที่เขียนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$ เราสามารถหาคำตอบของสมการได้จากสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ หรือใช้สมบัติค่ารากที่สอง

สมการพหุนามดีกรีสามที่กำหนดด้วยพหุนาม $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

ถ้าแทน x จำนวนจริง r ใดๆ แล้วทำให้สมการพหุนาม $P(x) = 0$ เรียก r ว่า คำตอบของสมการ

เช่น จงประมาณค่าคำตอบที่เป็นจำนวนจริง $x^3 + x - 1 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

การประมาณคำตอบของสมการพหุนามที่มีคำตอบเป็นจำนวนอตรรกยะ มีลำดับขั้นดังนี้

1. หาจำนวนเต็มที่แทนลงในตัวแปร $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

2. ถ้าจำนวนที่ได้มีเครื่องหมายตรงข้ามกันแล้ว จะมีจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่อยู่ในช่วงปิดดังกล่าว

3. นำช่วงที่ได้ มาแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่ากันแล้วดำเนินการตามข้อที่ 1และ 2

4. ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้จำนวนที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 50 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริง $x^2 - 2 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

ตัวอย่างที่ 51 จงประมาณคำตอบที่เป็นจำนวนจริง $x^2 - 5 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 2 ตำแหน่ง

ตัวอย่างที่ 52 จงประมาณค่าคำตอบของ $x^3 - x - 1 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

ตัวอย่างที่ 53 จงประมาณค่าคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของ $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 5$ เมื่อ x มีค่าอยู่ในช่วง (1 , 2) ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

4. กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

ครูทบทวนขั้นตอนการหาคำตอบของสมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ และให้นักเรียนเขียนกราฟในกระดาษกราฟ

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนลองแทนค่า x ด้วย 1, 2 ใน $P(x) = x^2 - 3x + 2$ แล้วสอบถามนักเรียนว่า P(x) มีค่าเป็นอย่างไร
2. ครูถามนักเรียนว่าค่าของ x มีค่าเท่าใดจึงจะทำให้ $P(x) = x + 1 = 0$
3. ครูให้นักเรียนลองแทนค่า $x = 0, 1, -1, 2, -2$ ใน $P(x) = x^2 + 2x + 1$ แล้วให้นักเรียนเขียนรูปกราฟลงบนกระดาษกราฟและสอบถามนักเรียนว่ากราฟตัดแกน x ที่จุดใดบ้าง
4. ครูถามนักเรียนว่าค่าของ x มีค่าเท่าใดจึงจะทำให้ $P(x) = x^2 + 2x + 1 = 0$
5. ครูให้นักเรียนลองแทนค่า $x = 0, 1, -1, 2, -2$ ใน $P(x) = x^3 - 3x + 1$ แล้วให้นักเรียนเขียนรูปกราฟลงบนกระดาษกราฟและสอบถามนักเรียนว่ากราฟตัดแกน x ที่จุดใดบ้าง
6. ครูถามนักเรียนว่าค่าของ x มีค่าเท่าใดจึงจะทำให้ $P(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$
7. ครูอธิบายให้นักเรียนเห็นว่าค่าของ x ที่ทำให้พหุนาม $P(x) = 0$ เป็นคำตอบของสมการพหุนามหรือคำตอบของสมการ
8. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ $P(x) = x^3 - 7$
9. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ $P(x) = x^3 - 3x - 1$
10. ครูอธิบายให้นักเรียนเห็นว่าค่าของ x ใน $P(x) = x^3 - 7$, $P(x) = x^3 - 3x - 1$ ไม่มีคำตอบของสมการพหุนามหรือคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนตรรกยะแต่ไม่ใช่ว่า สมการดังกล่าวไม่มีคำตอบ แต่คำตอบของสมการเป็นจำนวนอีกลักษณะหนึ่งที่เรียกว่าจำนวนอตรรกยะ
11. ครูถามนักเรียนว่าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่เป็นค่าคำตอบของสมการ $P(x) = x^3 - 2$ ด้วยวิธีการที่เคยเรียนมาได้หรือไม่
12. ครูให้นักเรียนลองแทนค่า $x = 0, 1, -1, 2, -2$ ใน $P(x) = x^3 - 2 = 0$ แล้วให้นักเรียนเขียนรูปกราฟลงบนกระดาษกราฟและสอบถามนักเรียนว่ากราฟตัดแกน x ที่จุดใดบ้าง
13. ครูถามนักเรียนว่าค่าของ x มีค่าเท่าใดจึงจะทำให้ $P(x) = x^3 - 2 = 0$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน
14. ครูอธิบายวิธีการและขั้นตอนการประมาณคำตอบสมการที่ต้องการ โดยให้นักเรียนช่วยกันคิดคำนวณ
15. ครูยกตัวอย่างสมการ $P(x) = x^3 - x - 1 = 0$ และถามนักเรียนว่าสามารถหาจำนวนตรรกยะที่เป็นค่าคำตอบของสมการด้วยวิธีการที่เคยเรียนมาได้หรือไม่

16. ครูให้นักเรียนลองแทนค่า x = 0, 1, - 1, 2, - 2 ใน $P(x) = x^3 - x - 1 = 0$ แล้วให้นักเรียนเขียนรูปกราฟลงบนกระดาษกราฟและสอบถามนักเรียนว่ากราฟตัดแกน x ที่จุดใดบ้าง

17. ครูถามนักเรียนว่าค่าของ x มีค่าเท่าใดจึงจะทำให้ $P(x) = x^3 - x - 1 = 0$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

18. ครูให้นักเรียนทดลองประมาณค่าพหุนาม $P(x) = x^3 - x - 1 = 0$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

19. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆละ 3 คน และให้แต่ละกลุ่มทำปัญหาที่ 90, 91

20. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำปัญหาที่ 92, 93, 94 และ 95

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการหาคำตอบของสมการ

5. สื่อการสอน

1. กระดาษกราฟ
2. แผ่นใส
3. เครื่องคิดเลข

6. การวัดผลและประเมินผล

1. จากการสังเกตและการตอบคำถาม
1. จากการทำงานที่มอบหมาย

7. บันทึกผลการสอน

7.1 ปัญหาและอุปสรรคที่พบ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.2 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยคำตอบ

ปัญหาที่ 1

1 เป็นเอกนามคล้าย

2 เป็นเอกนามคล้าย

3 เป็นเอกนามคล้าย

4 เป็นเอกนามคล้าย

5 เป็นเอกนามคล้าย

6 **เป็นเอกนามคล้าย**

7 **ไม่เป็นเอกนามคล้าย**

8 เป็นเอกนามคล้าย

9 เป็นเอกนามคล้าย

10 **ไม่เป็นเอกนามคล้าย**

ปัญหาที่ 2

1 $10x$

2 $17x^2$

3 $9x^2$

4 $\frac{5}{8}x^2$

ปัญหาที่ 3

1 เป็นพหุนาม เรียกว่าไตรนาม

2 **เป็นพหุนาม เรียกว่าไตรนาม**

3 **เป็นพหุนาม เรียกว่าไตรนาม**

4 ไม่เป็นเอกนาม

5 เป็นพหุนาม เรียกว่าไตรนาม

6 **เป็นพหุนาม เรียกว่าทวินาม**

7 **เป็นพหุนาม เรียกว่าไตรนาม**

8 เป็นเอกนาม

9 ไม่เป็นเอกนาม

10 ไม่เป็นเอกนาม

ปัญหาที่ 4

1 ดีกรี 3

2 ดีกรี 5

3 ดีกรี 4

4 ดีกรี 4

5 ดีกรี 4

ปัญหาที่ 5

1 ตอบ -7

2 ตอบ 11

3 ตอบ 0.5

4 ตอบ $-\frac{1}{2}$

5 ตอบ $-\left(\sqrt{2}+5\right)$

6 ตอบ $-3x$

7 ตอบ $0.5x$

8 ตอบ $\left(\sqrt{3}-2\right)$

ปัญหาที่ 6 ตอบ $11x+16$

ปัญหาที่ 7 ตอบ $-x^2-x+14$

ปัญหาที่ 8 ตอบ x^3-2x^2+5x-1

ปัญหาที่ 9 ตอบ $x^2+\frac{1}{2}x-9$

ปัญหาที่ 10 ตอบ $4x+15$

ปัญหาที่ 11 ตอบ $2x^2+2x+7$

ปัญหาที่ 12 ตอบ $6x^3-3x^2+2x+1$

ปัญหาที่ 13 ตอบ $-11x^3-2x^2-3x-2$

ปัญหาที่ 14 ตอบ $10x+10$

ปัญหาที่ 15 ตอบ $5x^3+3x^2-1$

ปัญหาที่ 16 ตอบ $3x+3$

ปัญหาที่ 17 ตอบ $x^2+3x-11$

ปัญหาที่ 18 ตอบ $8x^2-10x-3$

ปัญหาที่ 19 ตอบ $12x^3+26x^2+10x+1$

ปัญหาที่ 20 ตอบ $72x^3-62x^2+15x-1$

ปัญหาที่ 21 ตอบ $5x^4-13x^3+20x^2+7x+5$

ปัญหาที่ 22 ตอบ $6x^3+10x^2$

ปัญหาที่ 23 ตอบ $2x^2+5x-3$

ปัญหาที่ 24 ตอบ $3x^2-12x$

ปัญหาที่ 25 ตอบ $4x^3-8x^2-9x+6$

ปัญหาที่ 26 ตอบ $6x^5-6x^4-27x^3+15x^2-42x$

ปัญหาที่ 27 ตอบ $7x^2-11x-8$

ปัญหาที่ 28 ตอบ $x-2$ เศษ 0

ปัญหาที่ 29 ตอบ $-x^2-3x$ เศษ $8x^2$

ปัญหาที่ 30 ตอบ $4x^3-2$ เศษ $12x$

ปัญหาที่ 31 ตอบ $x+2$ เศษ 7

ปัญหาที่ 32 ตอบ x เศษ 6

ปัญหาที่ 33 ตอบ $2x-5$ เศษ 17

ปัญหาที่ 34 ตอบ x^2+2x+8 เศษ 13

ปัญหาที่ 35 ตอบ 10

ปัญหาที่ 36 ตอบ -3

ปัญหาที่ 37 ตอบ -60

ปัญหาที่ 38 ตอบ -15

ปัญหาที่ 39 ตอบ 0

ปัญหาที่ 40 (1) ตอบ 1 (2) ตอบ x^2-5x เศษ 1

ปัญหาที่ 41 (1) ตอบ 0 (2) ตอบ $3x^2-2x+2$ เศษ 0

ปัญหาที่ 42 (1) ตอบ 0 (2) ตอบ $2x^2+6x+12$ เศษ 0

ปัญหาที่ 43 (1) ตอบ 0 (2) ตอบ x^2+2x+4 เศษ 0

ปัญหาที่ 44 (1) ตอบ 4 (2) ตอบ $2x^2-3x+4$ เศษ 4

ปัญหาที่ 45 ตอบ 14

ปัญหาที่ 46 ตอบ 0

ปัญหาที่ 47 ตอบ -4

ปัญหาที่ 48 ตอบ 6

ปัญหาที่ 49 ตอบ 15

ปัญหาที่ 50 ตอบ หารลงตัว เพราะ $P(-1)=0$

ปัญหาที่ 51 ตอบ หารลงตัว เพราะ $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

ปัญหาที่ 52 ตอบ หารลงตัว เพราะ $P(2)=0$

ปัญหาที่ 53 ตอบ หารไม่ลงตัว เพราะ $P(-5)\neq 0$

ปัญหาที่ 54 ตอบ หารไม่ลงตัว เพราะ $P(2)\neq 0$

ปัญหาที่ 55 ตอบ $(x+3)$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$ หารลงตัว เพราะ $P(-3)=0$

ปัญหาที่ 56 ตอบ $2x^2+x+1$ เศษ 2

ปัญหาที่ 57 (1) ตอบ $P(\frac{1}{2})=0$ (2) ตอบ $2x^2-4x-6$ เศษ 0

ปัญหาที่ 58 ตอบ $(x-r)=(x-(-4))$ ผลหารคือ x^2+6x+7 เศษ 7

ปัญหาที่ 59 ตอบ ผลหารคือ $2x^2+2x+2$ เศษ 0

ปัญหาที่ 60 ตอบ ผลหารคือ $2x^2-2x+4$ เศษ 0

ปัญหาที่ 61 ตอบ ผลหารคือ $4x^2+2x+2$ เศษ 0

ปัญหาที่ 62 ตอบ ผลหารคือ $x^2 + 3x + 6$ เศษ 7

ปัญหาที่ 63 (1) ตอบ เพราะ $P(2) = 0$ (2) ตอบ $(x+4)(x+2)$

ปัญหาที่ 64 (1) ตอบ เพราะ $P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ (2) ตอบ $(4x+3)$

ปัญหาที่ 65 (1) ตอบ เพราะ $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ (2) ตอบ $3(9x^2+3x+1)$

ปัญหาที่ 66 (1) ตอบ เพราะ $P(-1) = 0$ (2) ตอบ $(3x^2 - x + 1)$

ปัญหาที่ 67 (1) ตอบ เพราะ $P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ (2) ตอบ $(x+1)$

ปัญหาที่ 68 ตอบ $(x-4)$

ปัญหาที่ 69 ตอบ $(x^2 + x + 1)$

ปัญหาที่ 70 ตอบ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

ปัญหาที่ 71 ตอบ $-7, 4, -3$

ปัญหาที่ 72 ตอบ 4, 1

ปัญหาที่ 73 ตอบ 0, 8

ปัญหาที่ 74 ตอบ 2

ปัญหาที่ 75 ตอบ $-\frac{1}{2}$

ปัญหาที่ 76 ตอบ $-\frac{4}{3}, 5$

ปัญหาที่ 77 ตอบ เพราะ $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

ปัญหาที่ 78 ตอบ $x^2 + 15x + 56 = 0$

ปัญหาที่ 79 ตอบ $2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$

ปัญหาที่ 80 ตอบ $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

ปัญหาที่ 81 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 3$

ปัญหาที่ 82 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

ปัญหาที่ 83 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

ปัญหาที่ 84 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

ปัญหาที่ 85 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$

ปัญหาที่ 86 ตอบ $\frac{k}{m} = \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$

ปัญหาที่ 87 ตอบ $-1, -3, 2$

ปัญหาที่ 88 ตอบ $1, 2, \frac{1}{3}$

ปัญหาที่ 89 ตอบ $-2, 3, -\frac{1}{4}$

ปัญหาที่ 90 (1) ตอบ $k = 4$ (2) ตอบ $-2, -\frac{2}{3}, 2$

ปัญหาที่ 91 ตอบ $x \approx 1.260$

ปัญหาที่ 92 ตอบ $x \approx 2.533$

ปัญหาที่ 93 ตอบ $x \approx 1.356$

ปัญหาที่ 94 ตอบ $x \approx 2.211$

ปัญหาที่ 95 ตอบ $x \approx 1.619$

****

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิ 2 ท่าน ที่ตรวจสอบบทเรียนและคู่มือครู และแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

1. ดร. สมเดช บุญประจักษ์
   อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
   สถาบันราชภัฏพระนคร
   จังหวัดกรุงเทพมหานคร

2. ดร. ยุพร ริมชลการ
   อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
   สถาบันราชภัฏเลย
   จังหวัดเลย

ภาคผนวก จ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ 2 ท่านที่ตรวจสอบแบบเรียน คู่มือครู และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ทฤษฎีสมการพหุนามเบื้องต้น

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายถนอม ชำนาญพันธ์
วันเดือนปีเกิด	28 มีนาคม 2504
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดนครสวรรค์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	295 ถ.ดินแดง แขวงดินแดง เขตดินแดง กรุงเทพมหานคร 10400
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	อาจารย์ 1 ระดับ 5
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนธนบุรีวรเทพีพลารักษ์ เขตธนบุรี จังหวัดกรุงเทพมหานคร 10600

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2520	ม.ศ. 3 จากโรงเรียนนครสวรรค์
พ.ศ. 2522	ม.ศ. 5 จากโรงเรียนนครสวรรค์
พ.ศ. 2524	ป.กศ. สูง(คณิตศาสตร์) จากวิทยาลัยครูนครสวรรค์
พ.ศ. 2526	ศษ.บ.(คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ. 2546	กศ.ม. (คณิตศาสตร์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ