

การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วย
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปริญญาานิพนธ์
ของ
ทวีพล พิรทรัพย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2550

การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วย
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ปริญญาานิพนธ์
ของ
ทวีพล พิรทรัพย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2550

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วย
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

บทคัดย่อ
ของ
ทวีพล พิรทรัพย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2550

ทวีพล พิรทรัพย์. (2550). การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. ปรินซ์นิพนธ์ วิศวกรรมเครื่องกล. กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิชิต บัวแก้ว, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน.

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติของเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเครื่องยนต์ที่ใช้ในการวิจัยคือ เครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็กยี่ห้อ Honda รุ่น G200 แบบสูบเดี่ยว 4 จังหวะ และพารามิเตอร์ที่ศึกษาคือน้ำมันหล่อลื่น SAE 30, 40 และ 50 วิเคราะห์ที่อุณหภูมิ 140, 160 และ 180 °C ที่ความเร็วรอบ 1400, 2500 และ 3600 rpm ตามลำดับ โดยการใช้โปรแกรม ANSYS 9.0 ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและการเปลี่ยนรูปร่างในแต่ละโหมดเทียบกับความถี่ใช้งานของเครื่องยนต์ ซึ่งแบ่งการวิจัยออกเป็นกรณีการวิจัยกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัสระหว่าง ลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ ก้านสูบกับเพลาลูกเบี้ยว

ผลการวิจัยพบว่า น้ำมันหล่อลื่นมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติโดยทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าห่างจากความถี่ใช้งานของเครื่องยนต์มาก และการเปลี่ยนชนิดของน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากัน ดังนั้นโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องไม่เกิดขึ้นเลย โดยกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 532.11 Hz. และกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ อุณหภูมิ 160 °C ความเร็วรอบ 2500 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ และอุณหภูมิ 180 °C ความเร็วรอบ 3600 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ ขณะที่ความถี่ใช้งานมีค่า 23.3 - 60 Hz.

A Parametric Study of Internal Combustion Engine Upon
The Natural Frequency Using Finite Element Method

AN ABSTRACT
BY
TAWEEPON PEERASAP

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

March 2007

Taweepon Peerasap. (2007). *A Parametric Study of Internal Combustion Engine Upon The Natural Frequency Using Finite Element Method*. Master Thesis, M.Eng (Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Asst. Prof. Vichit Buakaew, Asst. Prof. Dr. Suparerk Sirivedin.

The aim of this research is to analyze the effect of parameters on natural frequency of the internal combustion engine. The engine used in this study is a four-stroke one piston Honda G200 model. The parameters studied in this work are lubricants SAE30 SAE40 & SAE50 grades running at working temperatures of 140, 160 & 180 °C with the engine speeds of 1400, 2500 & 3600 rpm respectively. ANSYS 9.0, the finite element program, is used to obtain the values of natural frequency and mode shape for each mode to compare engine's working frequency. The research is separated assumption to consider and not consider the lubricant between the gap of piston and piston pin, piston pin and connecting rod, and connecting rod and crankshaft.

The results have found that the lubricants have effect to natural frequency value by to make more natural frequency than working frequency and changing lubricant grades have found that the natural frequency values are same. Therefore, failure due to resonance may not occur. The model without lubricant has shown natural frequency at mode 1 of 532.11 Hz. While the models that taking the lubrications into consideration have found the natural frequencies at mode 1 to be 1,346.7, 1,346.7 and 1,346.7 Hz at the temperature of 140 °C and the engine speed of 1400 rpm for SAE30, 40 and 50 respectively. When the temperature has increased to 160 °C at the engine speed of 2500 rpm, the natural frequencies at mode 1 have found to be 1,346.7, 1,346.7 and 1,346.7 Hz. Finally, at the temperature of 180 °C with the engine speed of 3600 rpm, the natural frequencies at mode1 are 1,346.7, 1,346.7 and 1,346.7 Hz. It can be seen that the working frequencies at working speed of the engine, which is ranging from 23.3 - 60 Hz.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายใน
ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ของ
ทวีพล พิรทรัพย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เพ็ญศิริ จีระเดชากุล)
วันที่ เดือน มีนาคม พ.ศ. 2550

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

.....ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิจิต บัวแก้ว)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

.....ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร. ธนู ญายาย)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วิจิต บัวแก้ว)

.....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน)

.....กรรมการ
(พันโท ผศ. ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์เรื่อง การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษาและคำแนะนำ ตลอดจนการตรวจสอบความถูกต้องในปริญญานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. ธนุ ญะฉาย ที่ให้เกียรติเป็นประธานในการสอบปริญญานิพนธ์ ตลอดจนให้คำแนะนำในการแก้ไขและปรับปรุงปริญญานิพนธ์นี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระเกล้า ที่ให้เกียรติเป็นกรรมการในการสอบปริญญานิพนธ์ ตลอดจนให้คำแนะนำในการแก้ไขและปรับปรุงปริญญานิพนธ์นี้ให้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคณาจารย์ โครงการความร่วมมือทางวิชาการระหว่างมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒกับโรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้กับผู้วิจัย

ผู้วิจัยขอขอบคุณบริษัทสามมิตรมอเตอร์ ที่กรุณาให้ยืมใช้โปรแกรม ANSYS 9.0 ในการทำปริญญานิพนธ์ครั้งนี้

ผู้วิจัยขอขอบคุณพี่ปริญญาโทรุ่น 1 ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจในการทำปริญญานิพนธ์ครั้งนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่อบรมสั่งสอนเลี้ยงดู และขอขอบคุณพี่น้องของผู้วิจัยที่ให้กำลังใจด้วยดีเสมอมา

ทวีพล พิรทรัพย์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
ขอบเขตของการวิจัย.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
หลักการทำงานของเครื่องยนต์.....	3
หลักการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	4
วิธีการทางพลศาสตร์.....	13
ไฟไนต์เอลิเมนต์และสติฟเนสเมทริกซ์.....	43
การรวมตัวกันทางสถิติ.....	53
ไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบพลศาสตร์.....	58
การออกแบบตัวหน่วงของระบบไฮโดรไดนามิกส์.....	68
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	75
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	76
อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย.....	76
วิธีดำเนินการวิจัย.....	76
4 ผลการวิจัย.....	85
ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	86
ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	89
ผลการเปรียบเทียบเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาและ พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	104
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	109
สรุปผล.....	109
อภิปรายผล.....	110
ข้อเสนอแนะ.....	110

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
บรรณานุกรม.....	111
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก รูปเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนสูบเดี่ยว ยี่ห้อ ฮอนด้า รุ่น G200.....	115
ภาคผนวก ข รูปชิ้นส่วนเครื่องยนต์สันดาปภายใน.....	117
ภาคผนวก ค แบบชิ้นส่วนเครื่องยนต์สันดาปภายใน.....	122
ภาคผนวก ง แสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่าสตีเฟนส์และความหน่วง.....	127
ภาคผนวก จ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความเร็วรอบ.....	132
ภาคผนวก ฉ การคำนวณหาอัตราส่วนการหน่วง.....	134
ภาคผนวก ช ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม ANSYS 9.0.....	136
ภาคผนวก ซ การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกล แห่งประเทศไทยครั้งที่ 20.....	140
ภาคผนวก ฌ คำอธิบายสัญลักษณ์และหน่วย.....	148
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	150

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 สรุปสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดกายภาพและพิกัดหลัก.....	31
2 สรุปสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดกายภาพและพิกัดหลักแบบมีแรงภายนอก กระทำ	33
3 แสดงสมการที่ใช้ในการหาค่าสตีเฟนส (K) และความหน่วง (C) ในกรณีตัวหน่วง ที่มีขนาดสั้นและยาว.....	75
4 แสดงสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ที่ใช้ในการวิจัย.....	79
5 แสดงค่าที่ได้จากการคำนวณหาค่าสตีเฟนสและค่าความหน่วงของน้ำมันหล่อลื่น...	84
6 แสดงความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	86
7 แสดงความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	90
8 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีไม่ พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	104
9 แสดงสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเกรดต่างๆ.....	129
10 แสดงผลที่ได้จากโปรแกรมเมื่อพิจารณาที่ SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm.....	135
11 แสดงค่าความถี่ที่ได้จากโปรแกรม ANSYS 9.0 เทียบกับทฤษฎี.....	138

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงชิ้นส่วนเครื่องยนต์และการเคลื่อนที่ขึ้นและลงของลูกสูบ.....	3
2 แสดงเอลิเมนต์มิติเดียว.....	5
3 แสดงเอลิเมนต์แบบสองมิติ (ก) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ข) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม.....	6
4 แสดงเอลิเมนต์แบบสามมิติ (ก) ชนิดปริซึม หรือชนิดทรงหกหน้า (ข) ชนิดกรวย สามเหลี่ยม หรือชนิดทรงสี่หน้า.....	7
5 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	8
6 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	9
7 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมโค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยมย่อย..	9
8 แสดงเอลิเมนต์ที่มีค่าสถิติเฟนสและค่าความหน่วง.....	10
9 แสดงระบบไม่มีตัวหน่วงแบบระดับความเร็ว 3 ชั้น.....	14
10 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 1.....	20
11 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 2.....	21
12 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 3.....	22
13 แผนภาพการคำนวณโมดัล.....	23
14 แสดงตัวอย่างระบบที่มีระดับชั้นเสรีที่สอง.....	40
15 แบบจำลองที่มีระดับความเร็ว 6 ชั้น.....	44
16 การปรับปรุงสปริงเอลิเมนต์สถิติเฟนสเมตริกส์.....	44
17 แบบจำลองคานแบบ 2 เอลิเมนต์.....	48
18 เอลิเมนต์สถิติเฟนสเมตริกซ์ของคาน.....	49
19 คำจำกัดความของสถิติเฟนสเมตริกซ์คานและระดับความเร็ว.....	50
20 เมตริกซ์มวลเหมือนกันในรูปแบบเอลิเมนต์คาน.....	60
21 แสดงแรงกระทำที่เกิดขึ้นในระบบไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamic damper).....	68
22 แสดงพิกัดความเฉื่อย.....	71
23 แสดงการเปรียบเทียบเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลลา (D) และความยาว (L).....	72
24 แสดงชิ้นส่วนของเครื่องยนต์สันดาปภายใน (ก) ลูกสูบ (ข) สลักลูกสูบ (ค) ก้านสูบ (ง) เพลลาข้อเหวี่ยง (จ) ชิ้นส่วนประกอบเข้าด้วยกัน.....	77
25 แสดงการเปิดไฟล์ข้อมูล ACIS.....	78
26 แสดงก้านสูบอยู่บนพื้นที่การทำงานของโปรแกรม.....	78

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
27 แสดงหน้าต่างในการกำหนดสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์.....	79
28 แสดงการใช้คำสั่ง Glue.....	80
29 แสดงชิ้นส่วนของเครื่องยนต์ประกอบเป็นชิ้นเดียว.....	80
30 แสดงชนิดเอลิเมนต์ SOLID45 ในโปรแกรม ANSYS.....	81
31 แสดงค่าตั้งต้นในการทำเจนเนอร์เรทเมชอัตโนมัติ.....	81
32 แสดงตัวอย่างที่ได้จากการเจนเนอร์เรทเมช.....	82
33 แสดงการเลือกการวิเคราะห์แบบโมดัล.....	82
34 แสดงการเลือกวิธีการวิเคราะห์และจำนวนโมเมนต์.....	83
35 แสดงการเลือกใช้เอลิเมนต์ที่ผิวสัมผัส.....	84
36 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	87
37 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 30.....	92
38 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40.....	94
39 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 50.....	96
40 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 140 °C และความเร็วรอบ 1400 rpm.....	98
41 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 160 °C และความเร็วรอบ 2500 rpm.....	100
42 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 180 °C และความเร็วรอบ 3600 rpm.....	102
43 แสดงผลการเปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปร่างที่โหนดต่างๆกรณีไม่พิจารณา และพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น.....	106
44 รูปเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนสูบเดี่ยว ยี่ห้อ ฮอนด้า รุ่น G200.....	116
45 ลูกสูบ.....	118
46 สลักลูกสูบ.....	119
47 ก้านสูบ.....	120
48 เฟลาข้อเหวี่ยง.....	121
49 แบบลูกสูบ.....	123
50 แบบสลักลูกสูบ.....	124

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
51 แบบก้านสูบ.....	125
52 แบบเพลาช้อเหวี่ยง.....	126
53 แสดงสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นระหว่างความหนืดกับอุณหภูมิ.....	128
54 แสดงคานที่มีปลายด้านหนึ่งยึดติดกับผนังและอีกข้างอิสระ.....	137
55 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 1.....	138
56 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 2.....	138
57 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 3.....	139
58 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 4.....	139
59 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 5.....	139

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ชิ้นงานส่วนใหญ่จะมีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นอยู่เสมอ ซึ่งในบางครั้งก็ไม่สามารถหลีกเลี่ยงไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนได้ การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นนั้นอาจทำให้ชิ้นงานเกิดการล้า (Fatigue) หรือการสั่นสะเทือนเกิดการสั่นพ้อง (Resonance) ขึ้น ซึ่งอาจทำให้ชิ้นงานเกิดการเสียหายได้ ในทางวิศวกรรมได้พยายามศึกษาและวิเคราะห์ถึงการสั่นสะเทือน เพื่อที่จะทำนายพฤติกรรมทางพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน ซึ่งจะทำให้เข้าใจถึงปัญหาและสามารถแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นได้ ดังนั้นในปัจจุบันการออกแบบชิ้นงานส่วนใหญ่ได้คำนึงถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นเพื่อป้องกันการเสียหายของชิ้นงานในขณะทำงานอยู่

การทำนายการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นนั้นเป็นการยากที่จะหาค่าได้โดยไม่ได้ใช้อุปกรณ์ช่วยในการคำนวณ ดังนั้นคงจะปฏิเสธไม่ได้ว่าคอมพิวเตอร์จึงมีผลต่องานด้านวิศวกรรมเป็นอย่างมากในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้น โดยจะใช้โปรแกรมทางวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ช่วยในการคำนวณ ซึ่งเป็นวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical) ที่มีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น อีกทั้งยังเป็นการคำนวณที่รวดเร็ว และมีค่าใช้จ่ายในการทดลองที่ต่ำ โดยปัจจุบันเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวาง

ในประเทศไทยเป็นประเทศเกษตรกรรม จึงมีเครื่องจักรกลทางการเกษตรมากมายหลายชนิด โดยจะมีต้นกำลังมาจากเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็ก ที่เป็นแหล่งกำเนิดเสียงและการสั่นสะเทือน โดยหลักการทำงานของเครื่องยนต์จะมีการเผาไหม้ในห้องเผาไหม้ และจะส่งแรงผลักดันไปยังลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยง โดยมีสลักลูกสูบเป็นตัวยึดกันระหว่างลูกสูบและก้านสูบ และก้านสูบจะยึดกับเพลาช้อเหวี่ยง ทำให้เครื่องจักรกลทางการเกษตรสามารถทำงานได้ จะเห็นได้ว่าชิ้นส่วนของเครื่องยนต์ทั้งสี่ชิ้นจะได้รับการสั่นสะเทือนเป็นอย่างมาก ในปริณูณานิพนธ์นี้จะทำการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนเครื่องยนต์ทั้งสี่ชิ้น โดยพิจารณาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติอันได้แก่ ชนิดของน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัส ที่มีคุณสมบัติขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความเร็วรอบว่ามีผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติอย่างไร

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติของเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 พารามิเตอร์ที่ทำการศึกษาสำหรับการวิจัยนี้คือ น้ำมันหล่อลื่นตามมาตรฐาน SAE 30, 40, 50 วิเคราะห์ที่อุณหภูมิ 140 °C, 160 °C, 180 °C ที่ความเร็วรอบ 1,400 rpm, 2,500 rpm และ 3,600 rpm ตามลำดับ
- 1.3.2 ชิ้นส่วนเครื่องยนต์ที่ใช้ในการทำวิจัยนี้คือ ลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยง ซึ่งเป็นของเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็กยี่ห้อ Honda, รุ่น G200, แบบสูบเดี่ยว 4 จังหวะ วาล์วด้านข้าง, ปริมาตรกระบอกสูบ 197 CC.

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 พัฒนาและปรับปรุงเครื่องยนต์สันดาปภายในเพื่อลดต้นทุนในการผลิต
- 1.4.2 เป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้กับงานจริงในการวิเคราะห์ปัญหาแบบอื่นได้

บทที่ 2

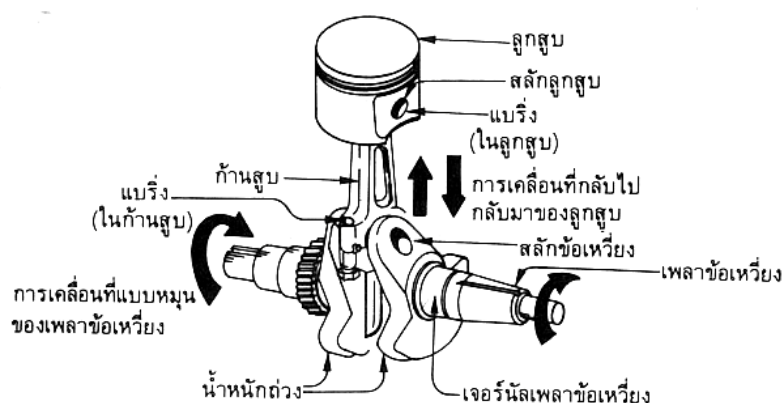
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทที่ 2 จะกล่าวถึงงานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ หลักการทำงานของเครื่องยนต์ หลักการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ วิธีการทางพลศาสตร์ ไฟไนต์เอลิเมนต์ และสตีเฟนสมเทริกซ์ การรวมตัวกันทางสถิติ ไฟไนต์เอลิเมนต์ในระบบพลศาสตร์ การออกแบบตัวหน่วงของระบบไฮโดรไดนามิกส์ งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังรายละเอียดดังนี้

2.1 หลักการทำงานของเครื่องยนต์

2.1.1 โครงสร้างของเครื่องยนต์แบบลูกสูบ

โครงสร้างของเครื่องยนต์แบบลูกสูบจะประกอบไปด้วย ลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ เพลาข้อเหวี่ยง ซึ่งหลักการทำงานของเครื่องยนต์คือมีลูกสูบเคลื่อนที่ขึ้นลงภายในกระบอกสูบ จะทำให้สลักข้อเหวี่ยงของเพลาข้อเหวี่ยงเคลื่อนที่เป็นวงกลม ดังภาพประกอบ 1 เมื่อลูกสูบเริ่มเคลื่อนที่ลง ก้านสูบจะเอียงไปข้างหนึ่ง ซึ่งทำให้ปลายด้านล่างของก้านสูบเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามการเคลื่อนที่ของสลักข้อเหวี่ยง เมื่อลูกสูบเคลื่อนที่ขึ้น ก้านสูบก็จะเอียงไปอีกด้านหนึ่งเช่นกัน



ภาพประกอบ 1 แสดงชิ้นส่วนเครื่องยนต์และการเคลื่อนที่ขึ้นและลงของลูกสูบ

2.1.2 คุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเครื่องยนต์

น้ำมันหล่อลื่นมีส่วนสำคัญในระบบเครื่องยนต์เป็นอย่างมาก ซึ่งน้ำมันหล่อลื่นจะเข้าไปหล่อเลี้ยงชิ้นส่วนเครื่องยนต์เพื่อลดการสึกหรอ ลดแรงกระแทก ช่วยทำให้เครื่องยนต์เย็นลง และยังทำหน้าที่ทำความสะอาดชิ้นส่วนเครื่องยนต์ ดังนั้นน้ำมันหล่อลื่นควรมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. ความหนืด (Viscosity) เป็นการวัดความต้านทานการไหลของน้ำมันหล่อลื่น น้ำมันหล่อลื่นที่มีความหนืดต่ำสามารถไหลได้ง่ายและมีฟิล์มบาง ส่วนน้ำมันหล่อลื่นที่มีความหนืดสูงจะมีฟิล์มหนาและไหลยากขึ้น

น้ำมันหล่อลื่นควรมีความหนืดเหมาะสมที่ทำให้สามารถไหลผ่านไปตามจุดต่างๆ ได้ง่าย แต่ไม่ควรมีความหนืดต่ำเกินไปจนทำให้ฟิล์มน้ำมันหล่อลื่นบางมาก ซึ่งจะมีผลทำให้ชิ้นส่วนของโลหะเสียดสีกันจนสึกหรออย่างรวดเร็ว

แต่ถ้าน้ำมันหล่อลื่นมีความหนืดสูงมาก ซึ่งจะมีฟิล์มน้ำมันหนามากเกินไป น้ำมันหล่อลื่นไหลอย่างช้าๆ ไปตามชิ้นส่วนต่างๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในขณะเครื่องยนต์ยังเย็นอยู่ ทำให้ชิ้นส่วนเหล่านั้นขาดน้ำมันหล่อลื่นและสึกหรอเร็ว เครื่องยนต์ต้องสูญเสียกำลังไปบางส่วนเนื่องจากความหนืดสูง และในขณะสตาร์ทเครื่องยนต์ต้องใช้กำลังขับเคลื่อนจากมอเตอร์สตาร์ทค่อนข้างสูง

ดังนั้นน้ำมันหล่อลื่นที่ใช้ควรมีความหนืดเหมาะสมและควรใช้ตามที่คุณผลิตกำหนดให้ใช้

2. ดัชนีความหนืด (Viscosity index) เป็นการวัดการเปลี่ยนแปลงความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ เพราะน้ำมันหล่อลื่นมีความหนืดสูงที่อุณหภูมิต่ำและมีความหนืดต่ำที่อุณหภูมิสูง น้ำมันหล่อลื่นที่ใช้กับเครื่องยนต์ควรมีความหนืดคงที่สม่ำเสมอทั้งอุณหภูมิต่ำและสูง แต่เป็นไปได้ที่จะผลิตน้ำมันหล่อลื่นที่มีคุณสมบัติดังกล่าว เพียงแต่ปรับปรุงไม่ให้น้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนแปลงความหนืดมากเกินไปเมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนแปลง

น้ำมันหล่อลื่นเกรดเดียวหรือน้ำมันหล่อลื่นความหนืดเดียว (Single-viscosity oil) เป็นน้ำมันหล่อลื่นที่เปลี่ยนแปลงความหนืดตามการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้ง่าย น้ำมันหล่อลื่นชนิดนี้มีค่าดัชนีความหนืดต่ำ ต่อมาจึงได้มีการปรับปรุงเพิ่มค่าดัชนีความหนืดโดยเติมสารเสริมบางอย่างลงในน้ำมันหล่อลื่น ทำให้น้ำมันมีแนวโน้มที่จะรักษาความหนืดเอาไว้ให้คงเดิมทั้งร้อนและเย็น

3. ตัวเลขความหนืด เป็นตัวเลขแสดงเกรดน้ำมันหล่อลื่นประเภทเกรดเดียวมีหลายค่า ทั้งน้ำมันที่ใช้ในฤดูหนาวและฤดูอื่นๆ น้ำมันหล่อลื่นสำหรับฤดูหนาวได้แก่ SAE 5W, SAE 10W, SAE 15W, SAE 20E และ SAE 25W

สำหรับ SAE นั้นย่อมาจาก “The Society of Automotive Engineers” ซึ่งหมายถึงสมาคมวิศวกรรมยานยนต์ และตัวอักษร W นั้นย่อมาจากคำว่า “Winter” ซึ่งหมายถึงฤดูหนาว สำหรับประเทศไทยนั้น น้ำมันเกรดเดียวพวกนี้ไม่ได้ใช้เพราะฤดูหนาวของประเทศไทยอากาศไม่หนาวจัด

น้ำมันเกรดเดียวอื่นๆ ได้แก่ SAE 20, SAE 30, SAE 40 และ SAE 50 ตัวเลขยิ่งสูงน้ำมันยิ่งมีความหนืดสูง

2.2 หลักการวิเคราะห์โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

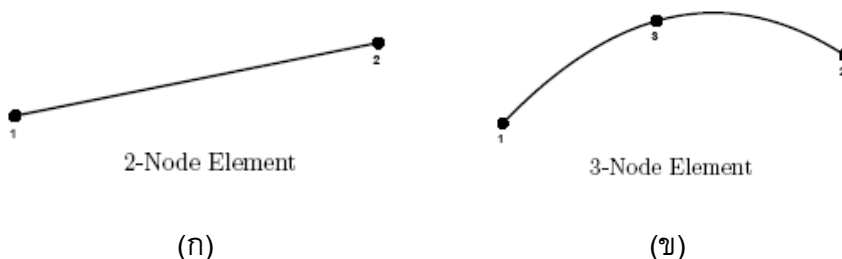
2.2.1 ประเภทของเอลิเมนต์

การวิเคราะห์โครงสร้างหรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำเป็นต้องแบ่งโครงสร้างหรือชิ้นส่วนออกเป็นส่วนเล็กๆ และเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับรูปร่าง

ลักษณะของงานและการกระทำของโหนด ชนิดของเอลิเมนต์อาจจะแบ่งออกได้ 3 ประเภทตามมิติ คือ เอลิเมนต์สำหรับปัญหามิติเดียว สองมิติ และสามมิติ

1. เอลิเมนต์มิติเดียว

เอลิเมนต์มิติเดียวเป็นเอลิเมนต์ที่นิยมนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามิติเดียว เช่น ชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำในแนวแกนชิ้นส่วนที่รับแรงบิด การโก่งของคาน การนำความร้อนในทิศทางเดียว โครงสร้างแบบสองมิติและสามมิติ เป็นต้น โดยเอลิเมนต์มิติเดียวจะมีรูปร่างดังภาพประกอบ 2



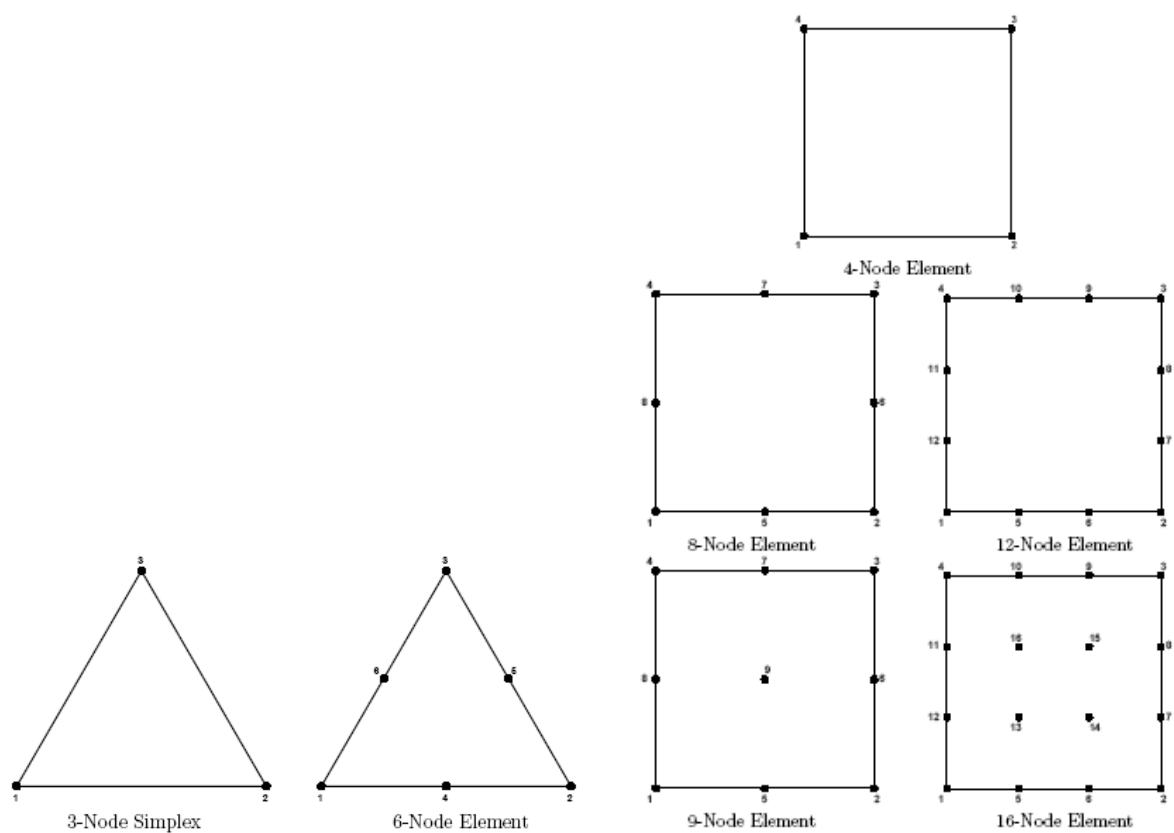
ภาพประกอบ 2 แสดงเอลิเมนต์มิติเดียว

2. เอลิเมนต์สองมิติ

เอลิเมนต์สองมิติมักใช้กับการวิเคราะห์ความเค้น - ความเครียดบนปัญหาแบบระนาบ โดยทั่วไปเอลิเมนต์สองมิติจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้านที่เป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ดังภาพประกอบ 3

3. เอลิเมนต์สามมิติ

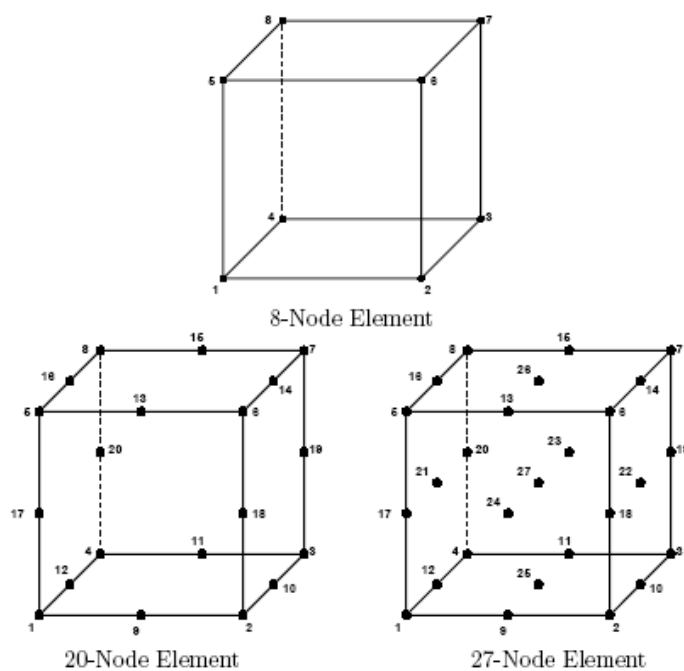
เอลิเมนต์สามมิติจะใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติทั่วไป โดยลักษณะของเอลิเมนต์จะเป็นสี่เหลี่ยมปริซึมและรูปกรวยสามเหลี่ยม ดังภาพประกอบ 4



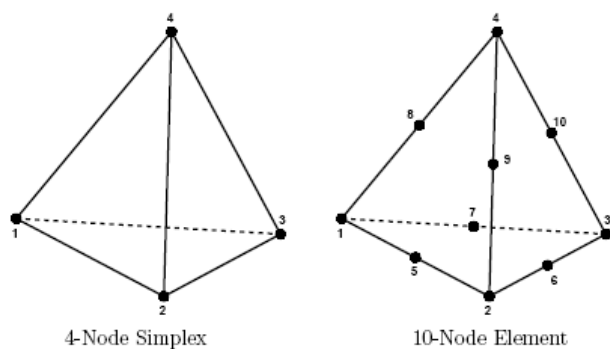
(ก)

(ข)

ภาพประกอบ 3 แสดงเอลิเมนต์แบบสองมิติ (ก) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ข) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม



(ก)



(ข)

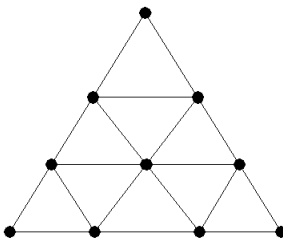
ภาพประกอบ 4 แสดงเอลิเมนต์แบบสามมิติ (ก) ชนิดปริซึม หรือชนิดทรงหกหน้า (ข) ชนิดกรวย สามเหลี่ยม หรือชนิดทรงสี่หน้า

2.2.2 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ เพื่อความสะดวกจะพิจารณาโดยเลือกใช้เอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับปัญหาของชิ้นส่วนเครื่องจักรกลที่กำลังพิจารณา

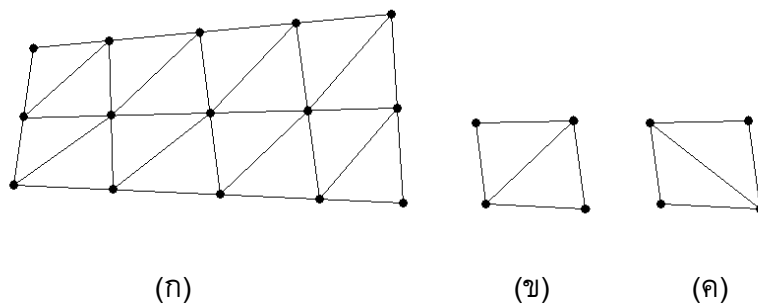
การแบ่งชิ้นส่วนอาจจะเริ่มแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม หรือสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ๆ ก่อนแล้วจึงแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยอีกครั้งหนึ่ง ตำแหน่งของโหนดภายนอกของเอลิเมนต์ย่อยควรจะอยู่ในตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนรูปร่างของชิ้นส่วน หรือตำแหน่งที่มีแรงกระทำหรือตำแหน่งที่มีการใช้วัสดุต่างๆ กัน

ชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมในภาพประกอบ 5 ก่อนข้างจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยได้ง่าย คือ กำหนดโหนดในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้มีจำนวนเท่ากัน ลากเส้นโค้งโยงระหว่างโหนดจะได้ โหนดตรงที่เส้นตัดกันเพิ่มขึ้น โดยชิ้นส่วนจะถูกแบ่งออกเป็น 9 เอลิเมนต์แต่ละด้านจะมีสี่โหนดระยะระหว่างโหนดของแต่ละด้านของสามเหลี่ยม ไม่จำเป็นต้องเท่ากันขนาดของเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ จึงมีขนาดแตกต่างกันตามที่ต้องการ ถ้าเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยกัน เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่าจะให้ผลเฉลยที่ดีที่สุดแต่ถ้าจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมใดๆ มุมภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมควรจะอยู่ระหว่าง 30° ถึง 120°



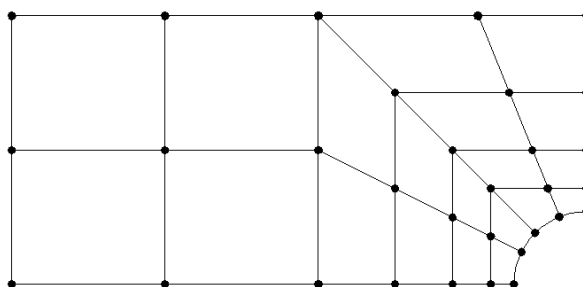
ภาพประกอบ 5 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

สำหรับชิ้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมในภาพประกอบ 6 (ก) การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ นั้นทำได้สะดวก คือ กำหนดโหนดในแต่ละด้านของสี่เหลี่ยม ลากเส้นระหว่างโหนดที่อยู่ตรงข้าม จุดตัดของแต่ละเส้นจะเป็นโหนดภายในของชิ้นส่วน และถ้าต้องการจะแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยก็ทำได้โดยลากเส้นทแยงมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม การลากเส้นทแยงมุมนั้นควรจะเลือกเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุด เพราะจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีสัดส่วนใกล้เคียงสามเหลี่ยมด้านเท่ามากขึ้น ดูตัวอย่างในภาพประกอบ 6 (ข) และ (ค) ในกรณีที่เลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สัดส่วนด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมควรจะเท่ากับ 1 จึงจะทำให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นยำตรงมากขึ้น



ภาพประกอบ 6 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ในภาพประกอบ 7 ระยะระหว่างโหนดของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจะมีขนาดต่างกัน ทั้งนี้เพื่อให้เอลิเมนต์ในบริเวณขอบที่เป็นส่วนโค้งมีขนาดเล็ก คือพยายามทำให้แบบจำลองมีขนาดใกล้เคียงกับขนาดของชิ้นส่วนจริงมากที่สุด ปกติไม่นิยมแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเท่ากัน และมีรูปร่างเหมือนกันตลอดชิ้นส่วน เพราะบริเวณที่มีความเค้นสูงหรือบริเวณที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ ควรจะแบ่งให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ส่วนบริเวณที่ไกลออกไปจะแบ่งให้มีขนาดโตขึ้น การเปลี่ยนของเอลิเมนต์จะมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน วิธีที่ง่ายที่สุดของการเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์ กำหนดให้จำนวนโหนดบนด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้แตกต่างกัน



ภาพประกอบ 7 แสดงการแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมโค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและสามเหลี่ยมย่อย

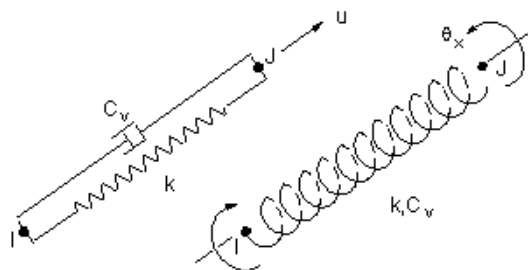
2.2.3 ข้อแนะนำสำหรับการจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องกำหนดแบบจำลองขึ้นให้เหมือนกับรูปร่างลักษณะเดิมของปัญหาให้มากที่สุด อย่างไรก็ตามข้อเสนอนี้จะช่วยให้การกำหนดแบบจำลองมีประสิทธิภาพสูงขึ้นหรือให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกับค่าแม่นยำ หรือทำให้เชื่อมั่นได้ว่าผลการคำนวณมีความเป็นไปได้ตามสภาพการใช้งานจริงของชิ้นส่วนนั้น ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การกำหนดขนาดความแตกต่างของเอลิเมนต์ ไม่ควรเกินสามเท่าของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกัน หรือที่มีจุดต่อร่วมกัน
2. เอลิเมนต์ที่ใช้ควรมีสัดส่วนของรูปร่างที่เหมาะสม พยายามทำให้สัดส่วนของรูปร่างของเอลิเมนต์ด้านยาวที่สุดต่อด้านสั้นที่สุดไม่เกิน 10 : 1 เอลิเมนต์ที่มีสัดส่วนดังกล่าวใกล้เคียงกันจะทำให้ผลเฉลยมีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริง ส่วนมุมภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมควรมีค่าอยู่ในช่วงประมาณ 30 ถึง 150 องศา
3. การเลือกใช้เอลิเมนต์ ควรจะพยายามให้ความต่อเนื่องของการกระจัดในระหว่างเอลิเมนต์ และไม่ควรถูกเชื่อมต่อกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้นกำลังสอง ที่ประกอบด้วย 8 โหนด เข้ากันกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีลักษณะเป็นเชิงเส้น ประกอบด้วย 4 โหนด
4. ควรเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กๆ บริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นสูง และที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ เช่น บริเวณที่มีความเค้นจะมีความหนาแน่นสูง ส่วนบริเวณที่มีความแตกต่างของความเค้นต่ำควรใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นตามความเหมาะสม
5. ควรใช้ความสมมาตรของชิ้นงานช่วย ซึ่งได้แก่ ความสมมาตรของรูปร่าง ความสมมาตรของวัสดุ และความสมมาตรของภาระที่กระทำ เพื่อลดแบบจำลองไฟในเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กที่สุดและประหยัดเวลาในการประมวลผล
6. การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองไฟในเอลิเมนต์ จะต้องคำนึงถึงสภาพความเป็นจริงของปัญหา

2.2.4 เอลิเมนต์ที่ผิวสัมผัส (Contact Element)

ในบริเวณตรงผิวสัมผัสของชิ้นงาน จะทำการจำลองเอลิเมนต์ตรงผิวสัมผัสดังกล่าวประกอบ 8 ซึ่งเป็นการจำลองโดยมีค่าสปริงเนส (Spring) และความหน่วง (Damping) โดยเอลิเมนต์ชนิดนี้จะใช้ได้ทั้งในแนวแกน (Longitudinal) หรือการบิดตามแนวแกน (Torsion) ถ้าเป็นแบบแนวแกน ค่าสปริงเนสและค่าความหน่วงจะใช้ได้ทั้งในการอัดหรือยืดตามแนวแกนเดียว ซึ่งไม่สามารถหาการโก่ง (Bending) หรือการบิดได้ (Torsion) ส่วนแบบการบิดตามแนวแกนจะใช้ได้เฉพาะการหมุนเท่านั้น



ภาพประกอบ 8 แสดงเอลิเมนต์ที่มีค่าสปริงเนสและค่าความหน่วง

ในที่นี้จะยกตัวอย่างของระบบความเสถียรขึ้นที่หนึ่งที่แสดงค่าของสติฟเนสและความหน่วงมีค่าดังสมการต่อไปนี้

$$[K_e] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[C_e] = C_v \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

เมื่อ	k	คือ	ค่าสติฟเนส (Stiffness)
	C_v	คือ	$C_{v1} + C_{v2} v $
	C_{v1}	คือ	สัมประสิทธิ์ตัวหน่วงคงที่
	C_{v2}	คือ	สัมประสิทธิ์ตัวหน่วงเชิงเส้น
	v	คือ	ความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างโหนด

ต่อไปจะนำเสนอระบบความเสถียรขึ้นที่สาม ซึ่งจะมีรูปสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$[K_i] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[C_i] = C_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[S_I] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

เมื่อตัวห้อย I หมายถึง ระยะพิกัดฉากของเอลิเมนต์

โดยที่ F คือ แรงในเอลิเมนต์

L คือ ระยะระหว่างสองโหนด

จากความสัมพันธ์ข้างต้นสามารถหาผลเฉลยทั่วไปได้ดังสมการที่ (6) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงผลเฉลยทั่วไปที่รวมทั้งผลเฉลยตามแนวแกนและตามการบิดตามแนวแกน

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \frac{A}{L} \\ u'_J - u'_I \\ v'_J - v'_I \\ w'_J - w'_I \\ \theta'_{xJ} - \theta'_{xI} \\ \theta'_{yJ} - \theta'_{yI} \\ \theta'_{zJ} - \theta'_{zI} \\ P_J - P_I \\ T_J - T \end{Bmatrix} \quad (6)$$

เมื่อ $A = (X_J - X_I)(u_J - u_I) + (Y_J - Y_I)(v_J - v_I) + (Z_J - Z_I)(w_J - w_I)$

X, Y, Z คือ พิกัดฉากของจุดอ้างอิงรวม

u, v, w คือ ระยะพิกัดฉากของจุดอ้างอิงรวม

u', v', w' คือ ระยะพิกัดฉากของจุดอ้างอิงย่อย

$\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z$ คือ ระยะหมุนตามแนวแกนเมื่อเทียบกับจุดอ้างอิงย่อย

P คือ ความดัน

T คือ อุณหภูมิ

ในกรณีที่เป็นแบบเชิงเส้น แรงที่ได้จะเป็นไปตามสมการที่ (7)

$$F_s = k\varepsilon_0 \quad (7)$$

เมื่อ F_s คือ แรงตามแนวแกนหรือแรงบิดตามแนวแกน

ส่วนกรณีที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น แรงที่ได้จะเป็นไปตามสมการที่ (8)

$$F_D = C_v v \quad (8)$$

เมื่อ F_D คือ แรงจากตัวหน่วงตามแนวแกนหรือแรงจากตัวหน่วงตามการบิด
 v คือ ความเร็วสัมพัทธ์

2.3 วิธีการทางพลศาสตร์

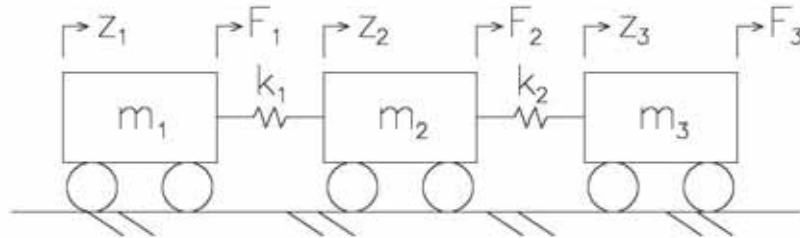
ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงการวิเคราะห์แบบโมดัล (Modal Analysis) ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติ โดยจะทำการสรุปหลักการวิเคราะห์โมดัลแบบเชิงเส้น ดังรายละเอียดดังนี้

1. ทำการหาค่าเจาะจง ซึ่งค่าเจาะจงนี้จะเป็นตัวบอกความถี่ที่เกิดการสั่นพ้องและรูปร่างในโหมดต่างๆ อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานในการเข้าใจพฤติกรรมการเคลื่อนไหวของระบบ
2. ใช้เวกเตอร์เจาะจงในการแก้ปัญหา หรือใช้เส้นทแยงมุมของสมการเกี่ยวโยงเริ่มต้น ในการยอมให้ผลลัพธ์ของปัญหาระดับความถี่ใดๆ แทนที่การแก้ปัญหาที่กำหนดสมการเกี่ยวโยงใดๆ
3. ถ้าการคำนวณแต่ละโหมดจนไปถึงภาพรวมทั้งหมด ซึ่งจะอนุญาตให้ทำการลดขนาดของปัญหา โดยกำจัดโหมดที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์ของระดับความถี่ได้ หรือแม้แต่โหมดที่มีความถี่สูงที่มีการช่วยเหลือน้อยในระบบความถี่ต่ำก็สามารถกำจัดได้
4. ทำการเขียนระบบเมทริกซ์ A โดยละเอียด และรวบรวมเมทริกซ์เริ่มแรกและเมทริกซ์ผลลัพธ์ B และ C ตามลำดับ โดยการประมาณเวกเตอร์เจาะจง ปัญหาของขอบเขตความถี่และแรงที่กระทำชั่วคราว สามารถทำการแก้ปัญหาได้ ถ้าเวกเตอร์เจาะจงสมบูรณ์เป็นแบบที่เหมาะสม โดยสถานะเริ่มต้นของปัญหาชั่วคราวสามารถแก้ได้เหมือนกัน สำหรับระบบที่มีตัวหน่วงนิดเดียว สามารถเพิ่มความหน่วงให้เหมาะสม ขณะที่ยังยอมให้สมการเป็นแบบอิสระ

2.3.1 ปัญหาค่าเจาะจง

1. สมการการเคลื่อนที่

ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างของสมการการเคลื่อนที่อย่างง่าย โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำกับระบบดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ 9 แสดงระบบไม่มีตัวหน่วงแบบระดับความเสรี 3 ชั้น

$$[m]\{\ddot{z}\} + [k]\{z\} = \{0\} \quad (9)$$

เมื่อ	$[m]$	คือ	มวลของระบบ (kg)
	$[k]$	คือ	สติฟเนสของระบบ (N/m)
	$\{\ddot{z}\}$	คือ	ความเร่ง (m/s^2)
	$\{\dot{z}\}$	คือ	ความเร็ว (m/s)

จากภาพประกอบ 9 กำหนดให้ $k_1 = k_2 = k$ และ $c_1 = c_2 = 0$ ซึ่งจะได้สมการอยู่ในรูปของเมทริกซ์ดังสมการ (10)

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2. คำจำกัดความของโหมดปกติ

ระบบที่เป็นแบบอนุรักษ์ โดยที่นี้จะกล่าวถึงระบบที่ไม่มีตัวหน่วง ในความหมายของโหมดปกติจะหมายถึงความถี่ที่แน่นอนทุกๆจุดในระบบที่มีการสั่นสะเทือนเท่ากับความถี่และเฟส อีกทั้งทุกๆจุดในระบบจะมีการเคลื่อนที่เล็กน้อยจนไปถึงมากในจุดเดียวกันและเวลาเดียวกัน โดยโหมดปกติสามารถแสดงดังสมการ (11)

$$\{z\}_i = \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i) = \{z\}_{mi} \text{Im}(e^{j\omega_i t + \phi_i}) \quad (11)$$

เมื่อ	$\{z\}_i$	คือ	เวกเตอร์ของการเคลื่อนที่สำหรับทุกๆระดับความเสรีที่ความถี่ i
	$\{z\}_{mi}$	คือ	เวกเตอร์เจาะจงที่ i และเป็นรูปร่างโหมด (Mode Shape) ที่การสั่นพ้อง i
	ω_i	คือ	ค่าเจาะจงที่ i และเป็นการสั่นพ้อง i
	Φ_i	คือ	มุมเฟส

สำหรับระบบระดับความเสรี 3 ชั้น จะได้สมการที่ (12)

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_{m1i} \\ z_{m2i} \\ z_{m3i} \end{Bmatrix} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (12)$$

ในเทอมของ z_{mki} จะมี k ซึ่งหมายถึงระดับความเสรี และ i หมายถึง โหมด

3. ค่าเจาะจงและคุณสมบัติของสมการ

จากสมการ (11) ทำอนุพันธ์ 2 ครั้ง จะได้ความเร่งดังสมการ (13)

$$\{\ddot{z}\}_i = -\omega_i^2 \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (13)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ (13) แทนลงในสมการ (9) จะได้สมการ (14)

$$[m](-\omega_i^2 \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i)) + [k](\{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i)) = 0 \quad (14)$$

จากสมการที่ได้จะได้ว่า

$$-\omega_i^2 [m]\{z\}_{mi} + [k]\{z\}_{mi} = 0 \quad (15)$$

$$[k]\{z\}_{mi} = \omega_i^2 [m]\{z\}_{mi} \quad (16)$$

สมการ (16) เป็นค่าเจาะจงของปัญหาในระบบ โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$[A]\{z\} = [\lambda]\{z\} \quad (17)$$

จากสมการ (16) จะเห็นปัญหาในระบบ ซึ่งมี $[m]$ อยู่ทางขวามือของสมการ ในทางปฏิบัติแล้วสามารถคำนวณหาค่าได้เลยแต่ในคอมพิวเตอร์นั้นไม่สามารถทำการคำนวณได้ จึงต้องย้ายสมการทางด้านขวามือมาอยู่ทางซ้ายมือเป็นสมการแบบฮอโมจีเนียส (Homogeneous Equation) ดังสมการ (18)

$$([k] - \omega_i^2 [m])\{z\}_{mi} = 0 \quad (18)$$

ทำการขยายสมการให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์จะได้

$$\left\{ \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \right\} \{z\}_{mi} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} k - \omega_i^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_i^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \{z\}_{mi} = 0 \quad (20)$$

กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของสมการเมทริกซ์มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้

$$\begin{bmatrix} k - \omega_i^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_i^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากดีเทอร์มิแนนท์จะเป็นสมการแบบโพลิโนเมียล (Polynomial) ในเทอมของ ω_i^2 ซึ่งค่ารากของสมการที่ได้คือ ค่าเจาะจง (Eigenvalue) ค่าโพล (Poles) หรือ ค่าความถี่สั่นพ้อง (Resonant Frequencies) ของระบบ

$$\begin{aligned} -m^3 \omega^6 + 4km^2 \omega^4 - 3k^2 m \omega^2 &= 0 \\ \omega^2 (-m^3 \omega^4 + 4km^2 \omega^2 - 3k^2 m) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

จะเห็นได้ว่ามีค่ารากอยู่สองค่าที่มีค่าที่จุดเริ่มต้น

$$\omega_1 = 0 \quad (23)$$

ทำการหาค่ารากของสมการที่เหลือจะได้

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{-4km^2 \pm (16k^2m^4 - 12k^2m^4)^{\frac{1}{2}}}{-2m^3} \\
&= \frac{-4km^2 \pm 2km^2}{-2m^3} \\
&= \frac{-6k}{-2m}, \frac{-2k}{-2m} \\
&= \frac{3k}{m}, \frac{k}{m}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \pm \sqrt{\frac{3k}{m}} \\
\omega_3 &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned} \tag{25}$$

จะได้ว่าค่าเจาะจงทั้งหมดสามคู่ หรือมีค่าทั้งหมดหกค่า ซึ่งเป็นค่ารูปร่างโหมด (Mode Shape) ในความถี่ธรรมชาติ

2.3.2 เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvectors)

จากสมการ (18) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} k - \omega_i^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_i^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{m1i} \\ z_{m2i} \\ z_{m3i} \end{Bmatrix} = 0 \tag{26}$$

เนื่องจากสมการ (26) เป็นเมทริกซ์อย่างง่าย ถ้าเป็นเมทริกซ์ขนาดใหญ่สามารถหาเวกเตอร์เจาะจงได้ดังสมการ (27)

$$[H]_i \{Z\}_i = \{0\} \tag{27}$$

โดยที่ $[H]_i = [k - \omega_i^2 m]$ เป็นเมทริกซ์เฉพาะ (Characteristic Matrix) ดังนั้นสามารถหาความถี่ธรรมชาติของระบบได้โดยกำหนดให้

$$\det[H]_i = 0 \tag{28}$$

สมการ (28) เป็นสมการพหุนาม และมีกำลังสูงสุดเป็น n

$$\begin{aligned} a_n (\omega_i^2)^n + a_{n-1} (\omega_i^2)^{n-1} + \dots + a_0 &= 0 \\ (\omega_1^2 - P_1)(\omega_2^2 - P_2) \dots (\omega_n^2 - P_n) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

สมการ (29) จะมีรากทั้งหมด n ราก โดยที่แต่ละรากของสมการจะสอดคล้องกับค่าลักษณะเฉพาะของระบบ $\omega_i^2 = P_i$ ส่วนเวกเตอร์เจาะจง $\{Z\}_i$ หาจากการพิจารณาเมทริกซ์ผกผันของ $[H]_i$

$$[H]_i^{-1} = \frac{adj[H]_i}{det[H]_i} \quad (30)$$

คูณตลอดสมการ (30) ด้วย $det[H]_i$ ได้

$$\begin{aligned} det[H]_i [H]_i [H]_i^{-1} &= [H]_i adj[H]_i \\ det[H]_i [I] &= [H]_i adj[H]_i = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

สมการ (31) มีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะว่า $det[H]_i = 0$ ตามสมการ (28) ดังนั้นจะได้ว่า

$$[H]_i adj[H]_i = 0 \quad (32)$$

เทียบสมการ (32) กับสมการ (27) จะได้ว่า

$$\{Z\}_i = adj[H]_i \quad (33)$$

จากสมการ (33) จะเห็นได้ว่า $\{Z\}_i$ เป็นเวกเตอร์ แต่ $adj[H]_i$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งจะเท่ากันไม่ได้ แต่ในทางปฏิบัติหมายถึง $\{Z\}_i$ มีค่าเท่ากับเมทริกซ์แนวตั้ง (Column Matrix) ของ $adj[H]_i$ ที่แนวตั้งใดแนวตั้งหนึ่งเท่านั้น โดยที่จะได้ $\{Z\}_i$ เป็นแนวตั้งใดๆ ของ $adj[H]_i$ เพื่อความเหมาะสม จะกำหนดสมการ (33) ใหม่เป็น

$$\{Z\}_i = \{adj[H]_i\}_c \quad (34)$$

โดยที่ $\{adj[H]_i\}_c$ หมายถึง เมทริกซ์แนวตั้งใดแนวตั้งหนึ่งที่เลือกออกมา

แต่ในที่นี้จะทำการหาดีเทอร์มิแนนต์จากสมการ (26) และไม่พิจารณาตัวห้อย m และ i ในเทอม z

$$(k - \omega_i^2 m)z_1 - kz_2 = 0 \quad (35)$$

$$-kz_1 + (2k - \omega_i^2 m)z_2 - kz_3 = 0 \quad (36)$$

จากสมการ (35) ทำการเขียนสมการใหม่โดยย้าย z_1 ไปอยู่ทางขวามือ แล้วทำสัดส่วนให้เป็น z_2/z_1

$$-kz_2 = -(k - \omega_i^2 m)z_1 \quad (37)$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{k - \omega_i^2 m}{k} \quad (38)$$

จากสมการ (36) ทำการหาสัดส่วน z_3/z_1 จะได้

$$(2k - \omega_i^2 m)z_2 - kz_3 = kz_1 \quad (39)$$

$$(2k - \omega_i^2 m)\left(\frac{z_2}{z_1}\right) - \frac{kz_3}{z_1} = k \quad (40)$$

$$(2k - \omega_i^2 m)\left(\frac{k - \omega_i^2 m}{k}\right) - \frac{kz_3}{z_1} = k \quad (41)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{(2k - \omega_i^2 m)(k - \omega_i^2 m)}{k^2} - 1 \quad (42)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{m^2 \omega_i^4 - 3km\omega_i^2 + k^2}{k^2} \quad (43)$$

จากสมการข้างต้นเป็นสมการทั่วไปของเวกเตอร์เจาะจง ถ้าทำการเลือก z_1 ให้มีค่าเท่ากับ 1 จากอัตราส่วนที่ได้สองสมการข้างต้น ก็สามารถหาค่า z_2 และ z_3

เมื่อค่าเจาะจงที่ได้นั้นเป็น $(n+1)$ และมีค่าที่ไม่ทราบ (ω_i, z_{mi}) โดยสำหรับระบบที่มีสมการการเคลื่อนที่ n สมการ ซึ่งเวกเตอร์เจาะจงเป็นค่าอัตราส่วนสำหรับการเคลื่อนที่ (Displacement) ไม่ใช่ค่าสมบูรณ์ของแมกนิจูด (Absolute Magnitudes) สำหรับโหมดที่หนึ่งของระบบมีค่าที่ไม่ทราบคือ $\omega_i, z_{m11}, z_{m21}, z_{m31}$ และสมการการเคลื่อนที่อีกสามสมการ

ค่าที่ใช้แทนสำหรับค่าเจาะจงสามค่าในอัตราส่วนของเวกเตอร์เจาะจงทั่วไปข้างต้น โดยสมมุติให้ $m_1 = m_2 = m = 1$ และ $k_1 = k_2 = k = 1$

สำหรับโหมดที่ 1 เมื่อ $\omega_1^2 = 0$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{k}{k} = 1 \quad (44)$$

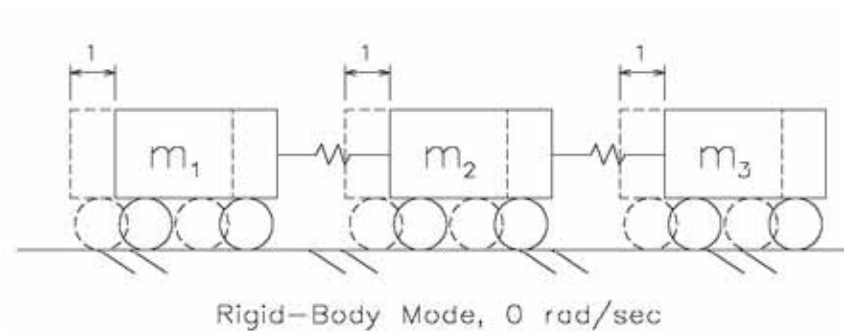
$$z_2 = z_1 \quad (45)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{(2k)(k)}{k^2} - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (46)$$

$$z_3 = z_1 \quad (47)$$

กำหนดให้ $z_1 = 1$ จะได้

$$\{z\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (48)$$



ภาพประกอบ 10 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 1

สำหรับโหมดที่ 2 เมื่อ $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$

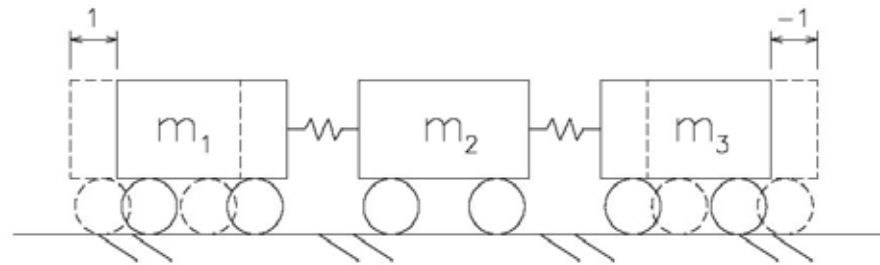
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{k - \left(\frac{k}{m}\right)m}{k} = 0 \quad (49)$$

$$z_2 = 0 \quad (50)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{\left(2k - \left(\frac{k}{m}\right)m\right)\left(k - \left(\frac{k}{m}\right)m\right)}{k^2} - 1 = \frac{(2k - k)(0)}{k^2} - 1 = -1 \quad (51)$$

$$z_3 = -z_1 \quad (52)$$

$$\{z\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (53)$$



Second Mode, Middle Mass Stationary, 1 rad/sec

ภาพประกอบ 11 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 2

สำหรับโหมดที่ 3 เมื่อ $\omega_3^2 = \frac{3k}{m}$

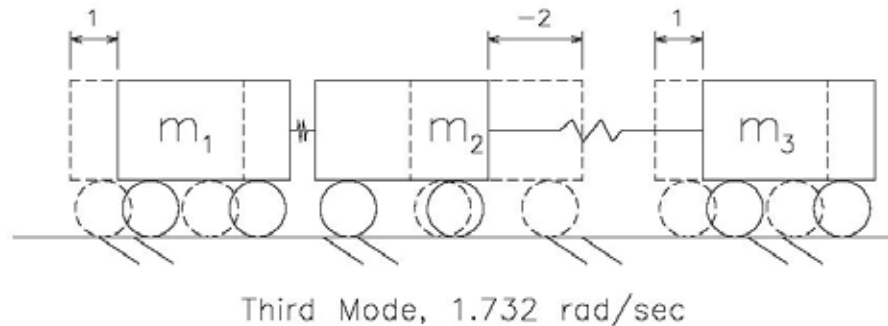
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{k - \left(\frac{3k}{m}\right)m}{k} = \frac{-2k}{k} = -2 \quad (54)$$

$$z_2 = -2z_1 \quad (55)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{\left(2k - \left(\frac{3k}{m}\right)m\right)\left(k - \left(\frac{3k}{m}\right)m\right)}{k^2} - 1 = \frac{(-k)(-2k)}{k^2} - 1 = \frac{2k^2}{k^2} - 1 = 1 \quad (56)$$

$$z_3 = z_1 \quad (57)$$

$$\{z\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (58)$$



ภาพประกอบ 12 แสดงรูปร่างโหมดการเคลื่อนที่ในโหมดที่ 3

2.3.3 การแปลผลลัพธ์ที่ได้จากเวกเตอร์เจาะจง

ผลลัพธ์ที่ได้จากโหมดที่ 1 จะเห็นได้ว่าถ้ามวลทั้งหมดเริ่มต้นที่ศูนย์ หรือเริ่มต้นที่ความเร็วเท่ากัน และระยะการเคลื่อนที่คูณด้วย $[1 \ 1 \ 1]^T$ เมื่อ T หมายถึง การสลับเปลี่ยน (Transpose) ระบบจะมีการเคลื่อนที่ที่ความเร็วเท่ากัน และมีระยะการเคลื่อนที่เท่ากัน โดยไม่มีความสัมพันธ์กับมวล

ส่วนผลลัพธ์ที่ได้จากโหมดที่ 2 และ 3 จะเห็นได้ว่าถ้าระบบเริ่มปล่อยที่ความเร็วเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ เมื่อนำระยะการเคลื่อนที่คูณด้วยเวกเตอร์เจาะจง ระบบจะเกิดการสั่นในโหมดนั้นๆ เมื่อมวลเกิดการเคลื่อนที่ในตำแหน่งที่น้อยที่สุดหรือมากที่สุดในช่วงเวลาเดียวกัน

สำหรับระบบอื่นๆที่มีระยะการเคลื่อนที่ไม่เท่ากับศูนย์ ผลลัพธ์ที่ได้จะเกิดจากการเอาระยะการเคลื่อนที่เริ่มต้นคูณด้วยเวกเตอร์เจาะจงในโหมดนั้นๆ

2.3.4 โมดัลเมทริกซ์ (Modal Matrix)

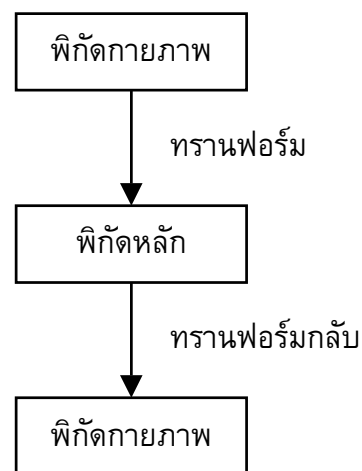
จากหัวข้อดังกล่าวข้างต้นได้กำหนดเวกเตอร์เจาะจงสามค่า ในหัวข้อนี้จะทำการอธิบายถึงโมดัลเมทริกซ์ โดยโมดัลเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมทริกซ์ โดยสดมภ์ของเมทริกซ์จะเป็นเวกเตอร์เจาะจง ซึ่งโหมดที่ 1 จะเริ่มจากสดมภ์ที่ 1 และไล่ลำดับถัดไป ดังสมการ (59)

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{mode :} & 1 & 2 & 3 & \\
 [z]_m = & \begin{bmatrix} z_{m11} & z_{m12} & z_{m13} \\ z_{m21} & z_{m22} & z_{m23} \\ z_{m31} & z_{m32} & z_{m33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{DOF1} \\ \leftarrow \text{DOF2} \\ \leftarrow \text{DOF3} \end{array} & (59) \\
 & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} & &
 \end{array}$$

สำหรับระบบเสรี 3 ชั้นจะได้

$$[z]_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

2.3.5 สมการการเคลื่อนที่ไม่เกี่ยวข้อง



ภาพประกอบ 13 แผนภาพการคำนวณโมดัล

ภาพประกอบ 13 แสดงถึงแผนภาพการคำนวณโมดัลโดยใช้ลาปลาซทรานฟอร์ม (Laplace Transforms) สำหรับการคำนวณสมการอนุพันธ์ เมื่อสมการอนุพันธ์ถูกเปลี่ยนรูปไปเป็นสมการพีชคณิต จากนั้นจะทำการคำนวณสมการพีชคณิตแล้วทำการเปลี่ยนกลับไปทำการคำนวณในปัญหาเริ่มต้น

การทราบค่าเส้นทแยงมุมเมทริกซ์ของมวลและสติฟเนส (Mass and Stiffness matrices) ซึ่งจะทำให้การเตรียมค่าของสมการไม่เกี่ยวข้อง

จากสภาวะที่ยืนยันได้ว่าค่าเส้นทแยงมุมนี้ยังคงเป็นเวกเตอร์เจาะจงที่มีความเป็นอิสระและเป็นเชิงเส้นที่ n ซึ่งเมทริกซ์ของมวลและสติฟเนสเมทริกซ์ยังคงสมมาตรหรือถ้าเป็นความแตกต่างกัน n ของค่าเจาะจง

กลับไปสู่สมการเริ่มต้นของสมการการเคลื่อนที่

$$[m]\{\ddot{z}\} + [k]\{z\} = 0 \quad (61)$$

มีโหมดปกติ (Normal mode) ที่ความถี่ “ i ”

$$\{z\}_i = \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (62)$$

ทำการอนุพันธ์สองครั้งจะได้ความเร่งดังสมการ

$$\{\ddot{z}\}_i = -\omega_i^2 \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (63)$$

นำสมการ (62) และ (63) แทนในสมการ (61) จะได้

$$[m](-\omega_i^2 \{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i)) + [k](\{z\}_{mi} \sin(\omega_i t + \phi_i)) = 0 \quad (64)$$

ทำการยกเลิกในเทอมของ $\sin$ จะได้

$$-\omega_i^2 [m]\{z\}_{mi} + [k]\{z\}_{mi} = 0 \quad (65)$$

ทำการเขียนใหม่และให้อยู่ในโหมด “ i^{th} ” และ “ j^{th} ”

$$[k]\{z\}_{mi} = \omega_i^2 [m]\{z\}_{mi} \quad (66)$$

$$[k]\{z\}_{mj} = \omega_j^2 [m]\{z\}_{mj} \quad (67)$$

$\{z\}_{mi}$ และ $\{z\}_{mj}$ เป็นเวกเตอร์เจาะจง ส่วน “ i^{th} ” และ “ j^{th} ” เป็นสตมภ์ของเมทริกซ์

ทำการคูณด้านหน้าด้วยทรานโพสต์ของ $\{z\}_{mj}$, $\{z\}_{mj}^T$ ในสมการ (66) จะได้

$$\{z\}_{mj}^T [k]\{z\}_{mi} = \omega_i^2 \{z\}_{mj}^T [m]\{z\}_{mi} \quad (68)$$

ทำการทรานโพสต์สมการ (67) เมื่อคูณสมบัติทางเมทริกซ์จะได้ $[AB]^T = B^T A^T$

$$\{z\}_{mj}^T [k]^T = \omega_j^2 \{z\}_{mj}^T [m]^T \quad (69)$$

เมื่อ m และ k มีความสมมาตร ดังนั้น $[m]^T = [m]$ และ $[k]^T = [k]$

$$\{z\}_{mj}^T[k] = \omega_j^2 \{z\}_{mj}^T[m] \quad (70)$$

ทำการคูณด้านหลังสมการ (70) ด้วย $\{z\}_{mi}$

$$\{z\}_{mj}^T[k]\{z\}_{mi} = \omega_j^2 \{z\}_{mj}^T[m]\{z\}_{mi} \quad (71)$$

นำสมการ (71) ไปลบกับสมการ (68) จะได้

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{z\}_{mj}^T[m]\{z\}_{mi} \quad (72)$$

เมื่อ $i \neq j$ ดังนั้นในเทอมของ $\omega_i^2 - \omega_j^2$ จึงไม่เท่ากับศูนย์ นั้นหมายความว่าในเทอมของ $\{z\}_{mj}^T[m]\{z\}_{mi}$ ต้องเท่ากับศูนย์

$$\{z\}_{mj}^T[m]\{z\}_{mi} = 0 \quad (73)$$

จากสมการ (73) จะทำการพิจารณาขนาดของเมทริกซ์ที่ได้จากการคูณกัน

$$\begin{aligned} \{z\}_{mj}^T &= 1 \times n \\ [m] &= n \times n \\ \{z\}_{mi} &= n \times 1 \end{aligned} \quad (74)$$

$$(1 \times n) \times (n \times n) \times (n \times 1) = (1 \times 1) = \text{scalar} \quad (75)$$

จากสมการ (73) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\{z\}_{mj}^T[m]\{z\}_{mi} = [m]_{ij} = 0 \quad (76)$$

เมื่อ m_{ij} เป็นเส้นทแยงมุมในเทอมของเมทริกซ์มวลในระบบพิกัดหลัก

กล่าวได้ว่าเวกเตอร์เจาะจงของ $\{z\}_{mi}$ และ $\{z\}_{mj}$ ตั้งฉากกับ $[m]$ ซึ่งการตั้งฉากนี้เป็นการกำหนดคุณสมบัติของเส้นทแยงมุมในเทอมของ m ว่าเท่ากับศูนย์

กลับไปยังสมการ (76) ถ้ากำหนดให้ $i = j$ ดังนั้น $(\omega_i^2 - \omega_j^2) = 0$ ดังนั้นในเทอมของ

$\{z\}_{mj}^T [m] \{z\}_{mi} = [m]_{ij}$ ซึ่งค่าของสติฟเนสเมทริกซ์ $[k]$ จะมีลักษณะเดียวกัน

การแทนที่เส้นทแยงมุมเมทริกซ์มวลและสติฟเนสเมทริกซ์โดยการคูณข้างหน้าและข้างหลังสมการ ซึ่งโมดัลเมทริกซ์จะใช้หนึ่งในเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์

$$[m]_n = \{z\}_m^T [m] \{z\}_m \quad (77)$$

$$[k]_n = \{z\}_m^T [k] \{z\}_m \quad (78)$$

2.3.6 เวกเตอร์เจาะจงปกติ

เวกเตอร์เจาะจงเป็นค่าที่รู้ถึงอัตราส่วนของการเคลื่อนที่ ซึ่งไม่ใช่ค่าสมบูรณ์ของแอมพลิจูด (Absolute magnitudes) เมื่อทำการคำนวณเวกเตอร์เจาะจงจะกำหนดค่าแอมพลิจูด (Amplitude) ในระดับความถี่ที่ 1 ให้เป็น 1 ได้ โดยจะกล่าวถึงเทคนิคในการทำให้เป็นเวกเตอร์เจาะจงปกติโดยผลของเวกเตอร์เจาะจงปกติในเทอมของสมการอนุพันธ์

1. การทำให้เป็นปกติโดยการทำให้เหมือนกัน

นี่เป็นวิธีหนึ่งในการทำให้เหมือนกัน โดยค่าที่มากที่สุดในเวกเตอร์เมทริกซ์จะถูกทำการหารด้วยค่าที่มากที่สุด ซึ่งจะหารเป็นแบบสโตมภ์ โดยเมทริกซ์ที่ได้จะให้ $[z]_n$ เมื่อ n หมายถึง normalized ดังตัวอย่าง

$$[z]_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [z]_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (79)$$

จะใช้เมทริกซ์ที่ได้จากการแปลงรูปแล้วไปใช้ในการหาค่าเมทริกซ์มวลดังสมการข้างล่าง

$$[z]_n^T [m] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m & m \\ m & 0 & -m \\ -0.5m & m & -0.5m \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$[m]_n = [z]_n^T [m] [z]_n = \begin{bmatrix} m & m & m \\ m & 0 & -m \\ -0.5m & m & -0.5m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 1.5m \end{bmatrix} \quad (81)$$

ในทำนองเดียวกันจะทำการหาสตีเฟนสมเมทริกซ์

$$[z]_n^T[k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k \\ -1.5k & 3k & -1.5k \end{bmatrix} \quad (82)$$

$$[k]_n = [z]_n^T[k][z]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -k \\ -1.5k & 3k & -1.5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 4.5k \end{bmatrix} \quad (83)$$

2. การทำให้ปกติโดยการใช้มวล

มีวิธีการอื่นๆ ที่จะทำให้เมทริกซ์มวลเป็นเมทริกซ์ปกติตั้งสมการข้างล่าง

$$[z]_{mi}^T[m][z]_{ni} = 1.0 \quad (84)$$

สมการ (84) เป็นการทำให้เส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ m มีค่าเท่ากับ 1.0 ซึ่งวิธีนี้ได้มาจากโปรแกรม ANSYS และจากสมการ (84) ตัวห้อยท้ายของโมดัลเมทริกซ์ “ ni ” ใน $[z]_{ni}$ นั้นหมายถึง เวกเตอร์เจาะจงปกติ i^{th} โดยเวกเตอร์ปกติจะกำหนดเป็น

$$[z]_{ni} = \frac{[z]_{mi}}{([z]_{mi}^T[m][z]_{mi})^{\frac{1}{2}}} = \frac{[z]_{mi}}{q_i} \quad (85)$$

เมื่อ q_i กำหนดให้เป็น

$$q_i = \left[\sum_{j=i}^n z_{mji} \left(\sum_{k=1}^n m_{jk} z_{mki} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (86)$$

สำหรับเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์มวล ซึ่ง q สามารถทำให้เป็นแบบง่ายได้ โดยให้เทอมของ m_{jk} มีค่าเท่ากับศูนย์

$$q_i = \left[\sum_{k=1}^n m_k z_{mki}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (87)$$

ทำการจัดการกับ $[m]$ โดย $[z]_n$ ซึ่งเมทริกซ์มวลควรจะทำทรานฟอร์ม (Transformed) ให้เป็นสมการเมทริกซ์ โดยเริ่มจาก $[z]_m$ และ q จากสมการข้างต้นจะได้

$$[z]_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= [m(1)^2 + m(1)^2 + m(1)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3m} \\ q_2 &= [m(1)^2 + m(0)^2 + m(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2m} \\ q_3 &= [m(1)^2 + m(-2)^2 + m(1)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6m} \end{aligned} \quad (89)$$

โมดัลเมทริกซ์ปกติจะทำการเปรียบเทียบกับมวลได้เป็น

$$[z]_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (90)$$

ทำการทรานฟอร์ม $[z]_n$ แล้วไปคูณกับเมทริกซ์มวล

$$[z]_n^T [m] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{6m}} & \frac{-2}{\sqrt{6m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{\sqrt{3m}} & \frac{m}{\sqrt{3m}} & \frac{m}{\sqrt{3m}} \\ \frac{m}{\sqrt{2m}} & 0 & \frac{-m}{\sqrt{2m}} \\ \frac{m}{\sqrt{6m}} & \frac{-2m}{\sqrt{6m}} & \frac{m}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$[m]_n = [z]_n^T [m] [z]_n = \begin{bmatrix} \frac{m}{\sqrt{3m}} & \frac{m}{\sqrt{3m}} & \frac{m}{\sqrt{3m}} \\ \frac{m}{\sqrt{2m}} & 0 & \frac{-m}{\sqrt{2m}} \\ \frac{m}{\sqrt{6m}} & \frac{-2m}{\sqrt{6m}} & \frac{m}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6m}} \\ \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}} \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$\begin{aligned}
[m]_n &= \begin{bmatrix} \left(\frac{m}{3m} + \frac{m}{3m} + \frac{m}{3m}\right) & \left(\frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{2}} + 0 - \frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{m}{m\sqrt{2}\sqrt{3}} + 0 - \frac{m}{m\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{m}{2m} + 0 + \frac{m}{2m}\right) \\ \left(\frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}} - \frac{2m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}} + \frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{m}{m\sqrt{2}\sqrt{6}} + 0 - \frac{m}{m\sqrt{6}\sqrt{2}}\right) \\ & \left(\frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}} - \frac{2m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}} + \frac{m}{m\sqrt{3}\sqrt{6}}\right) \\ & \left(\frac{m}{m\sqrt{2}\sqrt{6}} + 0 - \frac{m}{m\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) \\ & \left(\frac{m}{6m} + \frac{4m}{6m} + \frac{m}{6m}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{93}$$

ในทำนองเดียวกันทำการทรานฟอร์มสติเฟเนสมetriksจะได้

$$\begin{aligned}
[z]_n^T[k] &= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{k}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 0\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \left(0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \left(0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + 0\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) & \left(0 + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{94}$$

$$[k]_n = [z]_n^T[k][z]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{-6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \frac{k}{m} \tag{95}$$

$$[k]_n = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) & 0 \\ \left(\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} - 0 - \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) \\ \left(\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} - 0 - \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) & \left(\frac{3}{6} + \frac{12}{6} + \frac{3}{6}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

$$[k]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{k}{m} \quad (97)$$

จะเห็นว่าสตีเฟนเมทริกซ์ปกติจะเป็นเส้นทแยงมุมเมทริกซ์ที่แสดงถึงค่าเจาะจงสามค่า โดยในเทอมที่เห็นนั้นเป็นที่ทราบกันว่าเป็นเมทริกซ์สเปคตรัล (Spectral matrix)

2.3.7 การตรวจสอบสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดหลัก

1. สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดกายภาพ (Equations of Motion in Physical Coordinate System)

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (98)$$

ค่าเจาะจง

$$\omega_1 = 0 \quad (99)$$

$$\omega_2 = \pm \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (100)$$

$$\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (100)$$

เวกเตอร์จะจงเมื่อเทียบกับมวล

$$[z]_n = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (101)$$

2. สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดหลัก (Equations of Motion in Principal Coordinate System)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ z_{p3} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (102)$$

3. อธิบายสมการการเคลื่อนที่เมทริกซ์ทั้งสองของระบบพิกัด

ตาราง 1 สรุปสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดกายภาพและพิกัดหลัก

พิกัดกายภาพ	พิกัดหลัก
$m\ddot{z}_1 + kz_1 - kz_2 = 0$ $m\ddot{z}_2 - kz_1 + 2kz_2 - kz_3 = 0$ $m\ddot{z}_3 - kz_2 + kz_3 = 0$	$\ddot{z}_{p1} = 0$ $\ddot{z}_{p2} + \frac{k}{m}z_{p2} = 0$ $\ddot{z}_{p3} + \frac{3k}{m}z_{p3} = 0$
สมการนี้เป็นสมการเกี่ยวโยงและสามารถทำการหาคำตอบได้พร้อมกัน	สมการฮอร์โมจีเนียสเป็นสมการไม่เกี่ยวโยงและสามารถหาคำตอบได้อย่างอิสระ

2.3.8 สภาวะเริ่มต้นที่มีแรงมากระทำ

ตอนนี้ได้ทราบถึงการสร้างสมการการเคลื่อนที่ของฮอร์โมจีเนียสแบบไม่เกี่ยวโยงในระบบ แต่ตอนนี้ต้องทราบถึงสภาวะเริ่มต้นที่มีแรงมากระทำในระบบพิกัดหลัก ซึ่งก็ยังสามารถแก้ปัญหาแบบชั่วคราวและแรงตอบสนองในระบบพิกัดหลักโดยใช้สมการไม่เกี่ยวโยง

กลับไปยังสมการการเคลื่อนที่ที่มีแรงกระทำ

$$[m]\{\ddot{z}\} + [k]\{z\} = \{F\} \quad (103)$$

คูณด้วย $[z]_n^T$ ข้างหน้าสมการ โดยมาจากการทรานโพสดีโมดัลเมทริกซ์

$$[z]_n^T [m]\{\ddot{z}\} + [z]_n^T [k]\{z\} = [z]_n^T \{F\} \quad (104)$$

ทำการเพิ่มเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identify matrix) $I = [z]_n [z]_n^{-1}$

$$[z]_n^T [m] \underbrace{[z]_n [z]_n^{-1}}_I \{\ddot{z}\} + [z]_n^T [k] \underbrace{[z]_n [z]_n^{-1}}_I \{z\} = [z]_n^T \{F\} \quad (105)$$

ทำการเขียนและจับกลุ่มใหม่

$$\underbrace{[z]_n^T [m] [z]_n}_{[m]_p} \underbrace{[z]_n^{-1} \{\ddot{z}\}}_{\{\ddot{z}\}_p} + \underbrace{[z]_n^T [k] [z]_n}_{[k]_p} \underbrace{[z]_n^{-1} \{z\}}_{\{z\}_p} = \underbrace{[z]_n^T \{F\}}_{\{F\}_p} \quad (106)$$

เมื่อ $[z]_n^T [m] [z]_n$ และ $[z]_n^T [k] [z]_n$ เป็นการแสดงถึงเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์มวลและสติฟเนส เมทริกซ์โดยกำหนดค่าจำกัดความเป็น

$[m]_p$	คือ	เส้นทแยงมุมเมทริกซ์มวลหลัก (nxn)
$[k]_p$	คือ	เส้นทแยงมุมสติฟเนสเมทริกซ์ (nxn)
$[z]_n^{-1} \{\ddot{z}\} = \{\ddot{z}\}_p$	คือ	เวกเตอร์ความเร่งในพิกัดหลัก
$[z]_n^{-1} \{z\} = \{z\}_p$	คือ	เวกเตอร์การกระจัดในพิกัดหลัก
$[z]_n^T \{F\} = \{F\}_p$	คือ	เวกเตอร์แรงในพิกัดหลัก

จากสมการข้างต้นสามารถให้ค่าจำกัดความของความเร็วและการเคลื่อนที่ในพิกัดกายภาพและพิกัดหลักดังสมการข้างล่าง

$$\begin{aligned} \{\ddot{z}\}_p &= [z]_n^{-1} \{\ddot{z}\} \\ \{z\}_p &= [z]_n^{-1} \{z\} \end{aligned} \quad (107)$$

ทำนองเดียวกันสำหรับสถานะเริ่มต้นของการเคลื่อนที่และความเร็วจะได้

$$\begin{aligned}\{z\}_{op} &= [z]_n^{-1}\{z\}_o \\ \{\dot{z}\}_{op} &= [z]_n^{-1}\{\dot{z}\}_o\end{aligned}\quad (108)$$

ในสมการ (108) จะเห็นได้ว่า $\{z\}_{op}$ และ $\{\dot{z}\}_{op}$ เป็นเวกเตอร์เริ่มต้นของการเคลื่อนที่และความเร็วในระบบพิกัดหลักค่า $\{z\}_o$ และ $\{\dot{z}\}_o$ เป็นเวกเตอร์เริ่มต้นของการเคลื่อนที่และความเร็วในระบบพิกัดกายภาพ

2.3.9 สรุปสมการการเคลื่อนที่ทั้งสองระบบ

ตาราง 2 สรุปสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดกายภาพและพิกัดหลักแบบมีแรงภายนอกกระทำ

พิกัดกายภาพ	พิกัดหลัก
$\begin{aligned}m\ddot{z}_1 + kz_1 - kz_2 &= F_1 \\ m\ddot{z}_2 - kz_1 + 2kz_2 - kz_3 &= F_2 \\ m\ddot{z}_3 - kz_2 + kz_3 &= F_3\end{aligned}$	$\begin{aligned}\ddot{z}_{p1} &= F_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} + \frac{k}{m}z_{p2} &= F_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} + \frac{3k}{m}z_{p3} &= F_{p3}\end{aligned}$
สภาวะเริ่มต้น : $z_1, z_2, z_3, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3$	สภาวะเริ่มต้น : $z_{p1}, z_{p2}, z_{p3}, \dot{z}_{p1}, \dot{z}_{p2}, \dot{z}_{p3}$

ความไม่คงที่ในพิกัดกายภาพเป็นตำแหน่งและความเร็วของมวล ถ้าความไม่คงที่ของพิกัดหลักเป็นระยะทางและความเร็วสำหรับการเปลี่ยนแปลงแต่ละโหมดนั้นๆ

สมการในพิกัดหลักนั้นง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งสมการจะเป็นแบบไม่เกี่ยวโยงและเป็นจุดวิกฤตของการเคลื่อนที่ ในหัวข้อถัดไปจะทำการกลับรูปจากระบบพิกัดหลักไปยังระบบพิกัดกายภาพเพื่อหาผลลัพธ์สุดท้าย

2.3.10 การเปลี่ยนรูปจากพิกัดหลักไปยังพิกัดกายภาพ

แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดกายภาพและพิกัดหลัก

$$[z]_n^{-1}\{z\} = \{z\}_p \quad (109)$$

คุณ $[z]_n$ ด้านหน้าสมการ (109) จะได้

$$\underbrace{[z]_n [z]_n^{-1}}_I \{z\} = [z]_n \{z\}_p \quad (110)$$

$$\{z\} = [z]_n \{z\}_p \quad (111)$$

ดังนั้นเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดกายภาพจะได้มาจากการคูณข้างหน้าสมการของเวกเตอร์การเคลื่อนที่ในระบบพิกัดหลักโดยใช้ $[z]_n$ เป็นตัวคูณ ซึ่งในทำนองเดียวกันก็สามารถหาความเร็วดังสมการ

$$\{\dot{z}\} = [z]_n \{\dot{z}\}_p \quad (112)$$

2.3.11 การลดขนาดรูปร่างเมื่อทำการเลือกระดับความเสรีที่ต้องการ

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงการลดระดับขั้นเสรีที่เกิดขึ้นอย่างไร และจะอธิบายอย่างเป็นขั้นตอนในการลดขนาด โดยเริ่มจากสมการการเคลื่อนที่ในสภาวะเริ่มต้นในระบบพิกัดกายภาพ

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 + kz_1 - kz_2 &= F_1 \\ m\ddot{z}_2 - kz_1 + 2kz_2 - kz_3 &= F_2 \\ m\ddot{z}_3 - kz_2 + kz_3 &= F_3 \end{aligned} \quad (113)$$

เมื่อสภาวะเริ่มต้นคือ $z_1, z_2, z_3, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3 = 0$

ทำการหาเวกเตอร์เจาะจงโดยให้เป็นเวกเตอร์เจาะจงปกติและทำการเทียบกับมวลและโมดัลเมทริกซ์จากสมการของเวกเตอร์เจาะจง

$$[z]_n = \begin{bmatrix} z_{n11} & z_{n12} & z_{n13} \\ z_{n21} & z_{n22} & z_{n23} \\ z_{n31} & z_{n32} & z_{n33} \end{bmatrix} \quad (114)$$

ทรานฟอร์มแรงจากพิกัดกายภาพไปเป็นพิกัดหลัก

$$\{F\}_p = [z]_n^T \{F\} \quad (115)$$

เขียนสมการการเคลื่อนที่ใหม่ให้อยู่ในรูปพิกัดหลัก

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{p1} &= F_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} + \omega_2^2 z_{p2} &= F_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} + \omega_3^2 z_{p3} &= F_{p3}\end{aligned}$$

$$\text{สภาวะเริ่มต้น} : z_{p1}, z_{p2}, z_{p3}, \dot{z}_{p1}, \dot{z}_{p2}, \dot{z}_{p3} = 0 \quad (116)$$

ทำการคำนวณสมการในระบบพิกัดหลักของเวลาหรือความถี่ แล้วทำการทรานฟอร์มกลับไปยังพิกัดกายภาพ

$$\begin{aligned}\{z\} &= [z]_n \{z\}_p \\ \{\dot{z}\} &= [z]_n \{\dot{z}\}_p\end{aligned} \quad (117)$$

จากสองสมการข้างต้น จะกำหนดให้สภาวะเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ ซึ่งเกี่ยวพันไปถึงการคูณด้านหน้าสมการโดยสลับเปลี่ยน (Transpose) ของโมดัลเมทริกซ์ ($\{F\} \rightarrow \{F\}_p$) ในสมการ (115) และ โมดัลเมทริกซ์ ($\{z\}_p \rightarrow \{z\}$) ในสมการ (117) และทำการทรานฟอร์มแรงดังสมการ

$$\{F\}_p = [z]_n^T \{F\} \quad (118)$$

$$\begin{aligned}[z]_n^T \{F\} &= \begin{bmatrix} z_{n11} & z_{n12} & z_{n13} \\ z_{n21} & z_{n22} & z_{n23} \\ z_{n31} & z_{n32} & z_{n33} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{n11} & z_{n21} & z_{n31} \\ z_{n12} & z_{n22} & z_{n32} \\ z_{n13} & z_{n23} & z_{n33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z_{n11}F_1 + z_{n21}F_2 + z_{n31}F_3 \\ z_{n12}F_1 + z_{n22}F_2 + z_{n32}F_3 \\ z_{n13}F_1 + z_{n23}F_2 + z_{n33}F_3 \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (119)$$

การคูณด้วย F_1 ในสดมภ์แรกเป็นเอลิเมนต์ของแถวแรกของโมดัลเมทริกซ์ การคูณด้วย F_2 ในสดมภ์ที่สองเป็นเอลิเมนต์ของแถวที่สองของโมดัลเมทริกซ์ และการคูณด้วย F_3 ในสดมภ์ที่สามเป็นเอลิเมนต์ของแถวที่สามของโมดัลเมทริกซ์ ถ้าสมมุติว่าแรงนี้เป็นการกระทำเฉพาะมวลที่หนึ่ง คือเป็น F_1 ดังนั้นเฉพาะแถวแรกของโมดัลเมทริกซ์นี้ต้องการทรานฟอร์มแรงในระบบพิกัดกายภาพไปยังแรงในระบบพิกัดหลัก โดยจะยกตัวอย่างการทรานฟอร์มของการกระจัดตั้งสมการข้างล่าง

$$\{z\} = [z]_n \{z\}_p \quad (120)$$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = [z]_n \{z\}_p = \begin{bmatrix} z_{n11} & z_{n12} & z_{n13} \\ z_{n21} & z_{n22} & z_{n23} \\ z_{n31} & z_{n32} & z_{n33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ z_{p3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{n11}z_{p1} + z_{n12}z_{p2} + z_{n13}z_{p3} \\ z_{n21}z_{p1} + z_{n22}z_{p2} + z_{n23}z_{p3} \\ z_{n31}z_{p1} + z_{n32}z_{p2} + z_{n33}z_{p3} \end{bmatrix} \quad (121)$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของการจัดหลักในแถวแรกเป็นเอลิเมนต์ของแถวแรกของโมดัลเมทริกซ์ ในทำนองเดียวกันกับสัมประสิทธิ์ของแถวที่สองและสามเป็นเอลิเมนต์แถวที่สองและสามของโมดัลเมทริกซ์ ถ้าสมมุติให้การกระจกรูปร่างเป็นที่กำลังให้ความสนใจในมวลที่สองและ z_2 ดังนั้นแถวที่สองของโมดัลเมทริกซ์ต้องการทรานฟอร์มเป็นการเคลื่อนที่สามตัวได้แก่ z_{p1} , z_{p2} , z_{p3} ในพิกัดหลักไปเป็น z_2

2.3.12 ความหน่วงในระบบที่มีโหมดหลัก

ความหน่วงเป็นระบบที่สมบูรณ์แบบในทางเครื่องกลแต่ก็เป็นการยากที่จะทำนายพฤติกรรมในหัวข้อนี้จะทำการอธิบายในเรื่องของเงื่อนไขถ้าเมทริกซ์ความหน่วงทำให้เป็นแบบเส้นทแยงมุมได้ และหาสมการความหน่วงได้ แต่โดยทั่วไปเมทริกซ์ความหน่วงไม่สามารถเป็นแบบเมทริกซ์เฉยได้ โดยมีเวกเตอร์เจาะจงแบบไม่มีตัวหน่วง แต่เมทริกซ์มวลและสติฟเนสเมทริกซ์สามารถหาได้ ซึ่งในที่นี้จะอธิบายถึงสัดส่วนของตัวหน่วง (Proportional damping) ในระบบไฟไนต์เอลิเมนต์ส่วนใหญ่

1. ขอบเขตที่จำเป็นในระบบตัวหน่วงของโหมดหลัก

เมื่อระบบอนุรักษ์โดยไม่มีตัวหน่วง โหมดปกติของการสั่นสะเทือนจะลู่ออก แต่ถ้าระบบมีตัวหน่วง การเปลี่ยนรูปร่างโหมดอาจจะเหมือนกรณีไม่มีตัวหน่วง และในส่วนต่างๆของระบบอาจจะผ่านตำแหน่งต่ำสุดและสูงสุดในเวลานั้น ดังสมการ

$$\{z\}_i = \{z\}_{mi} \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad \text{สำหรับโหมด } i^{\text{th}} \quad (122)$$

สภาวะของโหมดปกติที่มีตัวหน่วงจะมีเมทริกซ์ตัวหน่วงที่เป็นเชิงเส้นรวมอยู่กับเมทริกซ์มวลและสติฟเนสเมทริกซ์ ถ้ารู้ค่า m และ k ที่เป็นเส้นทแยงมุมโดยการจัดตัวที่เป็นโมดัลเมทริกซ์ ซึ่งเมื่อ c เป็นแบบอิสระจะทำการคูณข้างหน้าและหลังสมการโมดัลเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ m และ k ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่จะเป็น

$$[m]\{\ddot{z}\} + [c]\{\dot{z}\} + [k]\{z\} = \{F\} \quad (123)$$

เมื่อเมทริกซ์ตัวหน่วงเป็นเชิงเส้นที่รวมกับ m และ k

$$[c] = a[m] + b[k] \quad (124)$$

$$[c]_p = [z]_n^T [c] [z]_n \quad (125)$$

เมื่อ $[z]_n$ เป็นโมดัลเมทริกซ์ปกติ

$$[m]\{\ddot{z}\} + [c]\{\dot{z}\} + [k]\{z\} = \{F\} \quad (126)$$

$$\underbrace{[z]_n^T [m] [z]_n [z]_n^{-1} \{\ddot{z}\}}_{[I]} + \underbrace{[z]_n^T [c] [z]_n [z]_n^{-1} \{\dot{z}\}}_{[c]_p} + \underbrace{[z]_n^T [k] [z]_n [z]_n^{-1} \{z\}}_{[k]_p} = \underbrace{[z]_n^T \{F\}}_{\{F\}_p} \quad (127)$$

ทำการเปลี่ยน $[c]$ ให้เป็น $[c]_p$ เมื่อ $[c] = a[m] + b[k]$

$$[c] = a[m] + b[k] \quad (128)$$

$$\begin{aligned} [z]_n^T [c] [z]_n &= a[z]_n^T [m] [z]_n + b[z]_n^T [k] [z]_n \\ &= a[I] + b[k]_p \end{aligned} \quad (129)$$

เมื่อ $[k]_p$ เป็นเมทริกซ์เฉียงและเป็นค่าเจาะจง ดังนั้นสมการที่โหมด i^{th} จะเป็น

$$\ddot{z}_{pi} + (a + b\omega_i^2)\dot{z}_{pi} + \omega_i^2 z_{pi} = F_{pi} \quad (130)$$

ทำการเขียนใหม่โดยกำหนดให้

$$c_{pi} = a + b\omega_i^2 = 2\zeta_i \omega_i \quad (131)$$

เมื่อ ζ_i เป็นเปอร์เซ็นต์ของความหน่วงวิกฤตสำหรับโหมด i^{th}

$$\zeta_i = \left(\frac{c_i}{c_{cr}} \right)_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_{pi} m_{pi}}} = \frac{c_i}{2m_{pi} \sqrt{\omega_i^2}} \quad (132)$$

ดังนั้น

$$\zeta_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (133)$$

ทำการเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปปกติหลัก

$$\ddot{z}_{pi} + 2\zeta_i \omega_i \dot{z}_{pi} + \omega_i^2 z_{pi} = F_{pi} \quad (134)$$

ชนิดของตัวหน่วงนี้คือตัวหน่วงสัดส่วน (Proportional Damping) เมื่อตัวหน่วงแต่ละโหนดเป็นส่วนกับตัวหน่วงวิกฤตในแต่ละโหนด และตัวหน่วงยังคงเป็นสัดส่วนกับความเร็ว ถ้าค่าความหน่วงที่มีอยู่ทุกๆ โหนดอาจจะเรียกว่า ความหน่วงสม่ำเสมอ (Uniform damping) ค่าความหน่วงยังสามารถตั้งให้เป็นแบบอิสระโดยเรียกว่า ความหน่วงไม่สม่ำเสมอ (Non-uniform damping)

2. ชนิดความแตกต่างของตัวหน่วง

2.1 ตัวหน่วงสัดส่วนอย่างง่าย

ความหนืดของตัวหน่วงในแต่ละโหนดสามารถหาค่าเปอร์เซ็นต์ของตัวหน่วงวิกฤตได้ดังสมการ, ζ

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{pi} + 2\zeta \omega_i \dot{z}_{pi} + \omega_i^2 z_{pi} &= F_{pi} \\ \{\ddot{z}\}_p + 2\zeta ([k]_p)^{\frac{1}{2}} \{\dot{z}\}_p + [k]_p \{z\}_p &= \{F\}_p \end{aligned} \quad (135)$$

จะเห็นได้ว่าสมการนี้จะมีความคล้ายคลึงกับระดับความเสถียรที่หนึ่ง

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + c\dot{z} + kz &= F \\ \ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z &= \frac{F}{m} \end{aligned} \quad (136)$$

กำหนดให้ตัวหน่วงวิกฤตเป็น $c_{cr} = 2\sqrt{km}$ และกำหนดให้คูณด้วยความเร็วจะเป็น

$$\begin{aligned} \frac{c}{m} &= 2\zeta \omega_n \\ &= 2 \frac{c}{c_{cr}} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \frac{2c}{2\sqrt{km}} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} \\ &= \frac{c}{m} \end{aligned} \quad (137)$$

ทำการเขียนสมการใหม่

$$\ddot{z} + 2\zeta \omega_n \dot{z} + \omega_n^2 z = \frac{F}{m} \quad (138)$$

2.2 สติฟเนสสัดส่วนที่สัมพันธ์กับตัวหน่วง

ในกรณีโหมดยสูง ๆ ค่าความถี่ของตัวหน่วงจะมีความสัมพันธ์กับความหน่วงวิกฤตในสัดส่วนกับความถี่ในโหมดยปกติ โดยพื้นฐานจะให้ $a = 0$

$$\zeta_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \Bigg| = \frac{b\omega_i}{2}$$

$$a = 0 \quad (139)$$

ถ้าค่าของ ζ_1 โดยสมมติให้โหมดยแรกกำหนดให้เป็น b

$$b = \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \quad (140)$$

และค่าในโหมดยอื่นๆเป็น i

$$\zeta_i = \zeta_1 \frac{\omega_1}{\omega_i} \quad (141)$$

2.3 เมทริกซ์มวลสัดส่วนที่ค่าสมบรูณ์ของตัวหน่วง

ค่าสมบรูณ์ของตัวหน่วง (Absolute Damping) จะให้ $b = 0$ เป็นเปอร์เซ็นต์ของตัวหน่วงวิกฤตซึ่งจะตรงข้ามกับสัดส่วนของความถี่ธรรมชาติ โดยจะทำการลดตัวหน่วงในโหมดยใดๆซึ่งความถี่จะเพิ่มขึ้น

$$\zeta_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \Bigg| = \frac{a}{2\omega_i}$$

$$b = 0 \quad (142)$$

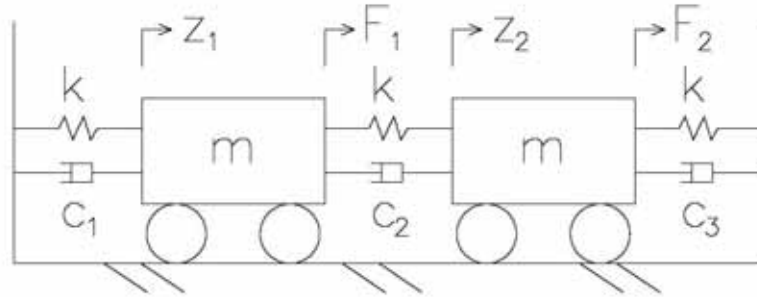
ถ้าสมมติให้ค่าของ ζ_1 เป็นโหมดยแรกจะกำหนดให้เป็น a

$$a = 2\zeta_1\omega_1 \quad (143)$$

สำหรับโหมดยใดๆที่ i

$$\zeta_i = \frac{\omega_1\zeta_1}{\omega_i} \quad (144)$$

2.3.13 การกำหนดเมทริกซ์ตัวหน่วงเมื่อทำการสมมุติตัวหน่วงสัดส่วน



ภาพประกอบ 14 แสดงตัวอย่างระบบที่มีระดับขั้นเสรีที่สอง

สมการที่น่าสนใจในการถามว่าเอลิเมนต์ของเมทริกซ์ตัวหน่วงควรจะเป็นปัญหาระดับขั้นเสรีที่สอง ดังในภาพประกอบ 14 ซึ่งจะใช้เวกเตอร์เจาะจงจากกรณีไม่มีตัวหน่วงเพื่อทำการหาเมทริกซ์ตัวหน่วง โดยจะทำการคำนวณหาค่าเฉพาะเจาะจงของตัวหน่วงอิสระซึ่งเป็นเส้นทแยงมุม

1. การคำนวณหาค่าความหน่วง (Solving for Damping Values)

เริ่มต้นที่ค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่ไม่มีตัวหน่วง

$$\begin{aligned}
 [m] &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} & [k] &= \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} & [c] &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \\
 [z]_m &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & [z]_n &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & [k]_p &= \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & \frac{3k}{m} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (145)$$

การคำนวณหาเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์มวล สมมุติให้ตัวหน่วงสัดส่วนและทราบเส้นทแยงมุมของสติเฟเนสมเมทริกซ์ว่าเป็นค่าเจาะจง

$$[c]_p = [z]_n^T [c] [z]_n = 2\zeta \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{bmatrix} = 2\zeta [k]_p^{\frac{1}{2}} \quad (146)$$

ทำการคูณข้างหน้าด้วย $([z]_n^T)^{-1}$ และคูณข้างหลังด้วย $([z]_n)^{-1}$

$$\underbrace{([z]_n^T)^{-1} [z]_n^T}_I [c] \underbrace{[z]_n ([z]_n)^{-1}}_I = 2\zeta ([z]_n^T)^{-1} [k]_p^{\frac{1}{2}} ([z]_n)^{-1} \quad (147)$$

$$[c] = 2\zeta([z]_n^T)^{-1}[k]_p^{\frac{1}{2}}([z]_n)^{-1} \quad (148)$$

สำหรับระดับชั้นเสรีที่สอง $[z]_n = [z]_n^T$

$$[z]_n^{-1} = ([z]_n^T)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{2m}}{(-1-1)} = \frac{\sqrt{2m}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} [z]_n^{-1}[k]_p^{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2m}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2k}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} [z]_n^{-1}[k]_p^{\frac{1}{2}}[z]_n^{-1} &= \frac{\sqrt{2k}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2m}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{km}}{4} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} [c] &= 2\zeta \frac{\sqrt{km}}{2} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \zeta \sqrt{km} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (152)$$

สามารถหาค่าจำเพาะสำหรับสามตัวหนังสือ

$$\begin{aligned} -c_2 &= \zeta \sqrt{km} (1-\sqrt{3}) \\ c_2 &= \zeta \sqrt{km} (\sqrt{3}-1) \\ &= \zeta \sqrt{km} (0.732) \end{aligned} \quad (153)$$

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= c_2 + c_3 = \zeta \sqrt{km}(1 + \sqrt{3}) \\
c_1 = c_3 &= \zeta \sqrt{km}(1 + \sqrt{3}) - c_2 \\
&= \zeta \sqrt{km}[(1 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)] \\
&= \zeta \sqrt{km}(2) \\
&= 2\zeta \sqrt{km}
\end{aligned} \tag{154}$$

จะสรุปได้ว่า

$$c_1 = c_3 = 2\zeta \sqrt{km} \tag{155}$$

$$c_2 = \zeta \sqrt{km}(0.732) \tag{156}$$

ผลลัพธ์ที่ได้ทั้งสามค่าของความหน่วงเป็นการยากที่จะเดาในการสร้างเส้นทแยงมุมเมทริกซ์ความหน่วง ถ้ากำหนดให้เป็นเมทริกซ์ 2×2 จะเป็นการยากในการสมมุติเพื่อหาค่าที่แท้จริงของปัญหา ดังนั้นเวลาทำการคำนวณย้อนกลับในฟังก์ชันภาพควรจะเหมือนกับค่าที่แท้จริงของโครงสร้าง

2. ทำการตรวจสอบเมทริกซ์ความหน่วงด้วยวิธีเรย์ไลส์

จากหัวข้อข้างต้นได้ทำการหาค่า c_1 , c_2 และ c_3 ซึ่งเป็นค่าที่ยอมรับได้ในสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งยังสามารถใช้วิธีเรย์ไลส์ทำการตรวจสอบ โดย $[c]$ สามารถรวมกับ $[k]$ และ $[m]$ ได้จริงดังสมการ

$$[c] = \zeta \sqrt{km} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix} = a \left\{ m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} + b \left\{ k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \tag{157}$$

มีตัวไม่ทราบอยู่สองตัว คือ a และ b และโดยเฉพาะทั้งสองสมการ เมื่อเส้นทแยงมุมเอลิเมนต์ทั้งสองเหมือนกันและยังสมมาตรกัน อันดับแรกควรจะพิจารณาที่นอกเหนือจากเส้นทแยงมุม ซึ่งสมการจะมาจากสองด้านข้างต้น

$$\begin{aligned}
\zeta \sqrt{km}(1 - \sqrt{3}) &= am(0) + bk(-1) \\
b &= \zeta \sqrt{km} \frac{(\sqrt{3} - 1)}{k} = \zeta \sqrt{\frac{m}{k}}(\sqrt{3} - 1)
\end{aligned} \tag{158}$$

สมการจากเส้นทแยงมุม

$$\begin{aligned}
\zeta\sqrt{km}(1+\sqrt{3}) &= am + 2bk \\
&= am + 2\left[\zeta\sqrt{\frac{m}{k}}(\sqrt{3}-1)\right]k \\
&= am + 2\zeta\sqrt{mk}(\sqrt{3}-1)
\end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned}
am &= \zeta\sqrt{km}(1+\sqrt{3}) - 2\zeta\sqrt{mk}(\sqrt{3}-1) \\
&= \zeta\sqrt{km}[1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2] \\
&= \zeta\sqrt{km}[3-\sqrt{3}]
\end{aligned} \tag{160}$$

$$a = \zeta\sqrt{\frac{k}{m}}[3-\sqrt{3}] \tag{161}$$

ทำการตรวจสอบทั้งสองค่าของ a และ b

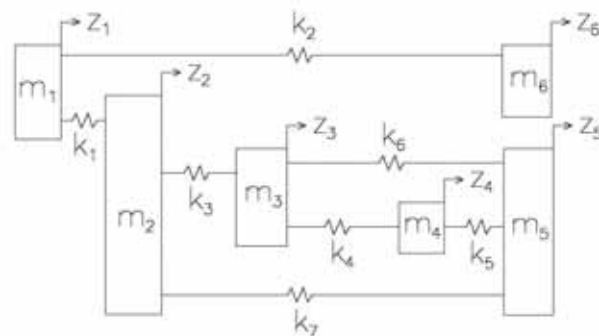
$$\begin{aligned}
\zeta\sqrt{km}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix} &= \zeta\sqrt{\frac{k}{m}}(m)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}[3-\sqrt{3}] \\
&\quad + \zeta\sqrt{\frac{m}{k}}(k)(\sqrt{3}-1)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \zeta\sqrt{km}\left\{\begin{bmatrix} (3-\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & (3-\sqrt{3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-2 & -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & 2\sqrt{3}-2 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \zeta\sqrt{km}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{162}$$

จะเห็นได้ว่า [c] เป็นแบบเชิงเส้นที่ได้รวมกับ [k] และ [m] และเงื่อนไขเรย์ไลส์

2.4 ไฟไนต์เอลิเมนต์และสติฟเนสเมทริกซ์

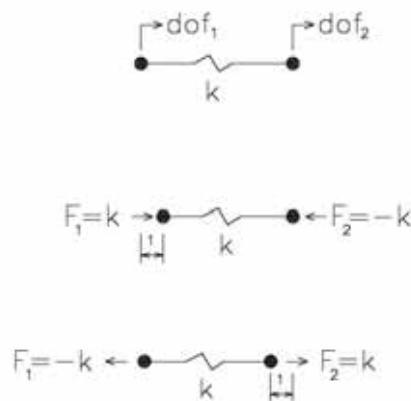
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการสร้างสติฟเนสเมทริกซ์รวม โดยจะใช้วิธีพารามิเตอร์ก้อน (Lumped parameter) ขนาดระดับความเสรีขึ้น 6 และจะยกตัวอย่างในการลดรูปแบบก्यानในหัวข้อต่อไป

2.4.1 แบบจำลองที่มีระดับความเสรี 6 ชั้น



ภาพประกอบ 15 แบบจำลองที่มีระดับความเสรี 6 ชั้น

สามารถกำหนดเอลิเมนต์ของสติฟเนสเมทริกซ์สำหรับแต่ละสปริงในรูปได้ เมื่อขนาดเอลิเมนต์ของสติฟเนสเมทริกซ์เป็น $(n \times n)$ และ n คือจำนวนตัวเลขทั้งหมดของระดับความเสรีที่สัมพันธ์กับเอลิเมนต์ สำหรับสปริงอันเดียวจะเป็นระดับความเสรี 2 ชั้น โดยการเคลื่อนที่ในทิศทาง z ที่จุดปลายสุดสองข้าง จะกลายเป็นเมทริกซ์ 2×2 และแต่ละเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์ สามารถกำหนดให้เป็นวิธีการวิเคราะห์ โดยการเคลื่อนที่แรกของทางซ้ายมือของแถวแรกและทางขวามือของระดับความเสรีสำหรับแถวที่สอง ดังแสดงในภาพประกอบ 16



ภาพประกอบ 16 การปรับปรุงสปริงเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์

ผลลัพธ์ของเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์, $[k]_{el}$ สำหรับการรวมสปริงเอลิเมนต์จะเป็น

$$[k]_{el,i} = \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \quad (163)$$

สำหรับสปริงเอลิเมนต์ที่ 3 จะเป็น

$$[k]_{e1,3} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (164)$$

1. การสร้างสติฟเนสเมทริกซ์รวมโดยใช้เอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์

จำนวนทั้งหมดของระดับความเสรีสำหรับปัญหานี้เป็น 6 ชั้น ดังนั้นสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะเป็นเมทริกซ์ขนาด 6x6 แต่ละแถวและสดมภ์ สำหรับทุกๆสติฟเนสเมทริกซ์สามารถเป็นระดับความเสรีรวม

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 1 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 1 และ 2 โดยแถว 1 และ 2 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,1} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad (165)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 2 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 1 และ 6 โดยแถว 1 และ 6 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,2} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (166)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 3 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 2 และ 3 โดยแถว 2 และ 3 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,3} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (167)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 4 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 3 และ 4 โดยแถว 3 และ 4 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,4} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (168)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 5 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 4 และ 5 โดยแถว 4 และ 5 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,5} = \begin{bmatrix} k_5 & -k_5 \\ -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \quad (169)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 6 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 3 และ 5 โดยแถว 3 และ 5 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,6} = \begin{bmatrix} k_6 & -k_6 \\ -k_6 & k_6 \end{bmatrix} \quad (170)$$

สำหรับเอลิเมนต์ที่ 7 ซึ่งได้สัมพันธ์กับระดับความเสรีของ 2 และ 5 โดยแถว 2 และ 5 ของสติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีค่าเป็น

$$[k]_{e1,7} = \begin{bmatrix} k_7 & -k_7 \\ -k_7 & k_7 \end{bmatrix} \quad (171)$$

สติฟเนสเมทริกซ์รวมจะมีขนาด 6x6 โดยแต่ละเอลิเมนต์เป็นวงกลม และจะทำการเพิ่มก่อนหน้านี้เมทริกซ์ภายในเป็น

$$[k]_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (172)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 จะเป็น

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (173)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 2

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (174)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 3

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (175)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 4

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (176)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 5

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (177)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 6

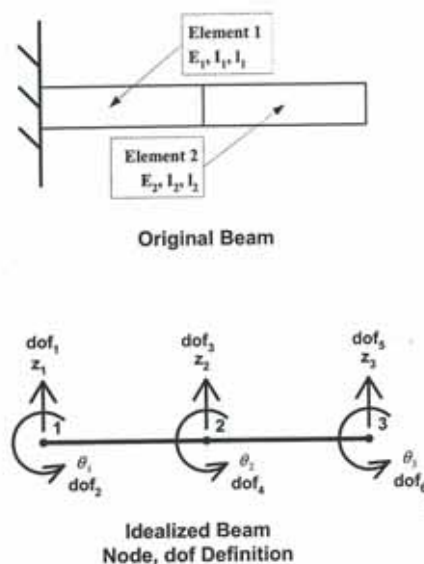
$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_6 & -k_4 & -k_6 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & 0 & -k_6 & -k_5 & k_5 + k_6 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (178)$$

หลังจากเพิ่มเอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ 1 ถึง 7 ซึ่งจะได้เมทริกซ์รวมเป็น

$$[k]_g = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & k_1 + k_3 + k_7 & -k_3 & 0 & -k_7 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_6 & -k_4 & -k_6 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 & 0 \\ 0 & -k_7 & -k_6 & -k_5 & k_5 + k_6 + k_7 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (179)$$

2.4.2 คานที่มีสองเอลิเมนต์

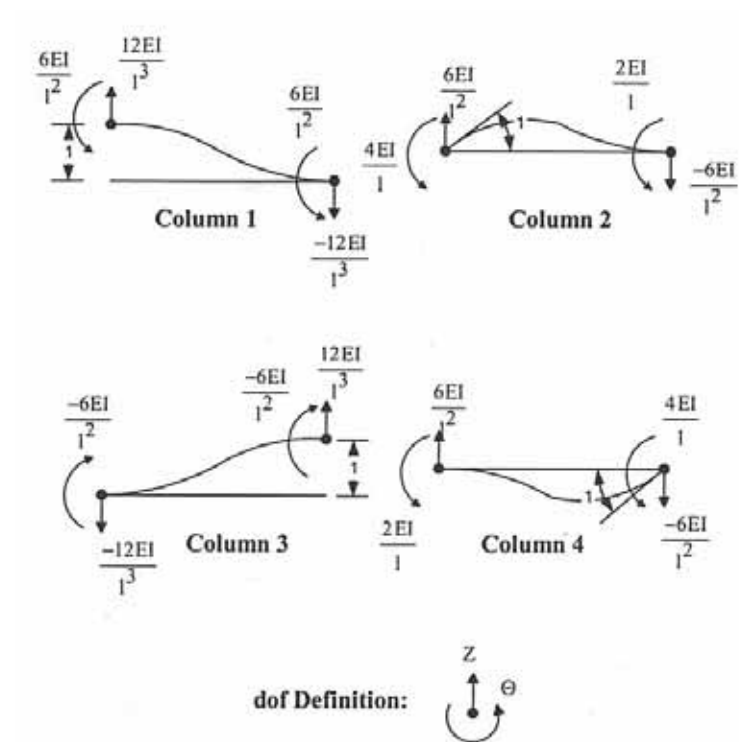
ในที่นี้จะทำการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสถิต สำหรับคานที่มีขนาดสองเอลิเมนต์ ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 แบบจำลองคานแบบ 2 เอลิเมนต์

1. เอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์

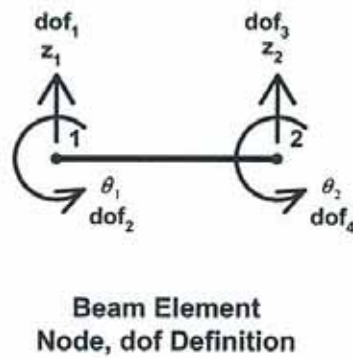
เอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์สามารถปรับปรุงโดยพื้นฐานทางกลศาสตร์ของแข็งในการหาแรงที่จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแต่ละโหนด



ภาพประกอบ 18 เอลิเมนต์สติฟเนสเมทริกซ์ของคาน

2. คำจำกัดความระดับความเสรีของสติฟเนสเมทริกซ์ของคาน
จากภาพประกอบ 19 ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็น

$$[k]_{e1,i} = E_i I_i \begin{bmatrix} \frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} & -\frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} \\ -\frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} \end{bmatrix} \quad (180)$$



ภาพประกอบ 19 คำจำกัดความของสตีฟเนสเมทริกซ์คานและระดับความเสรี

3. สร้างสตีฟเนสเมทริกซ์รวม

ในการสร้างสตีฟเนสเมทริกซ์รวมจะทำการเริ่มเมทริกซ์ขนาด 6x6 ซึ่งเป็นระดับความเสรี 6 ขึ้น ก่อนทำการเปลี่ยนตำแหน่งในแต่ละโหนด

$$[k]_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (181)$$

เอลิเมนต์สตีฟเนสขนาด 4x4 มีอยู่ 2 เมทริกซ์จะเป็น

$$[k]_{e1,1} = E_1 I_1 \begin{bmatrix} \frac{12}{I_1^3} & \frac{6}{I_1^2} & \frac{-12}{I_1^3} & \frac{6}{I_1^2} \\ \frac{6}{I_1^2} & \frac{4}{I_1} & \frac{-6}{I_1^2} & \frac{2}{I_1} \\ \frac{-12}{I_1^3} & \frac{-6}{I_1^2} & \frac{12}{I_1^3} & \frac{-6}{I_1^2} \\ \frac{6}{I_1^2} & \frac{2}{I_1} & \frac{-6}{I_1^2} & \frac{4}{I_1} \end{bmatrix} \quad (182)$$

$$[k]_{e1,2} = E_2 I_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{I_2^3} & \frac{6}{I_2^2} & \frac{-12}{I_2^3} & \frac{6}{I_2^2} \\ \frac{6}{I_2^2} & \frac{4}{I_2} & \frac{-6}{I_2^2} & \frac{2}{I_2} \\ \frac{-12}{I_2^3} & \frac{-6}{I_2^2} & \frac{12}{I_2^3} & \frac{-6}{I_2^2} \\ \frac{6}{I_2^2} & \frac{2}{I_2} & \frac{-6}{I_2^2} & \frac{4}{I_2} \end{bmatrix} \quad (183)$$

สร้างสติฟเนสเมทริกซ์รวมโดยการเติมสมการ (182) จะได้

$$[k]_g = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{-12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{4E_1 I_1}{I_1} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{2E_1 I_1}{I_1} & 0 & 0 \\ \frac{-12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{2E_1 I_1}{I_1} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{4E_1 I_1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (184)$$

และทำการเพิ่มสมการ (183) ลงใน (184) จะได้

$$[k]_g = \begin{bmatrix} \frac{12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{-12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{4E_1 I_1}{I_1} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{2E_1 I_1}{I_1} & 0 & 0 \\ \frac{-12E_1 I_1}{I_1^3} & \frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} & \left(\frac{12E_1 I_1}{I_1^3} + \frac{12E_2 I_2}{I_2^3} \right) & \left(\frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} + \frac{6E_2 I_2}{I_2^2} \right) & \frac{-12E_2 I_2}{I_2^3} & \frac{6E_2 I_2}{I_2^2} \\ \frac{6E_1 I_1}{I_1^2} & \frac{2E_1 I_1}{I_1} & \left(\frac{-6E_1 I_1}{I_1^2} + \frac{6E_2 I_2}{I_2^2} \right) & \left(\frac{4E_1 I_1}{I_1} + \frac{4E_2 I_2}{I_2} \right) & \frac{-6E_2 I_2}{I_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{I_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{-12E_2 I_2}{I_2^3} & \frac{-6E_2 I_2}{I_2^2} & \frac{12E_2 I_2}{I_2^3} & \frac{-6E_2 I_2}{I_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6E_2 I_2}{I_2^2} & \frac{2E_2 I_2}{I_2^2} & \frac{-6E_2 I_2}{I_2^2} & \frac{4E_2 I_2}{I_2} \end{bmatrix} \quad (185)$$

4. การกำจัดค่าบังคับของระดับความเสรีจากสตีเฟนสมเมทริกซ์

สมการสตีเฟนสมเมทริกซ์รวมจะรวมระดับความเสรีไปด้วย ซึ่งเป็นค่าคงที่ เชิงเส้น และการหมุนของโหนดที่ 1 การกำจัดระดับความเสรีที่จะกำจัดแฉกและสดมภ์ ซึ่งจะเกี่ยวพันกับระดับความเสรีรวมแบบคงที่ โดยลดสตีเฟนสมเมทริกซ์รวมเป็น 4x4 เมทริกซ์

$$[k]_g = \begin{bmatrix} \left(\frac{12E_1I_1}{I_1^3} + \frac{12E_2I_2}{I_2^3} \right) & \left(\frac{-6E_1I_1}{I_1^2} + \frac{6E_2I_2}{I_2^2} \right) & \frac{-12E_2I_2}{I_2^3} & \frac{6E_2I_2}{I_2^2} \\ \left(\frac{-6E_1I_1}{I_1^2} + \frac{6E_2I_2}{I_2^2} \right) & \left(\frac{4E_1I_1}{I_1} + \frac{4E_2I_2}{I_2} \right) & \frac{-6E_2I_2}{I_2^2} & \frac{2E_2I_2}{I_2^2} \\ \frac{-12E_2I_2}{I_2^3} & \frac{-6E_2I_2}{I_2^2} & \frac{12E_2I_2}{I_2^3} & \frac{-6E_2I_2}{I_2^2} \\ \frac{6E_2I_2}{I_2^2} & \frac{2E_2I_2}{I_2^2} & \frac{-6E_2I_2}{I_2^2} & \frac{4E_2I_2}{I_2} \end{bmatrix} \quad (186)$$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณจะลดรูปของ E, I, L จะได้สมการ

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{24}{I^3} & 0 & \frac{-12}{I^3} & \frac{6}{I^2} \\ 0 & \frac{8}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{2}{I} \\ \frac{-12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} & \frac{12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} \\ \frac{6}{I^2} & \frac{2}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{4}{I} \end{bmatrix} \quad (187)$$

5. การหาผลเฉลยแบบสถิตโดยมีแรงกระทำที่ปลายคาน

ในตัวอย่างจะคำนวณหาการเคลื่อนที่ของระบบในแรงแกน z ที่ปลายคานและสมการสมดุลทางสถิตจะเป็น

$$[k]_g \{z\} = \{F\} \quad (188)$$

ขยายสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} k_{g11} & k_{g12} & k_{g13} & k_{g14} \\ k_{g21} & k_{g22} & k_{g23} & k_{g24} \\ k_{g31} & k_{g32} & k_{g33} & k_{g34} \\ k_{g41} & k_{g42} & k_{g43} & k_{g44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (189)$$

เมื่อ	z_1	คือ	การเคลื่อนที่ของโหนด 2
	z_2	คือ	การหมุนของโหนด 2
	z_3	คือ	การเคลื่อนที่ของโหนด 3
	z_4	คือ	การหมุนของโหนด 3
	F_1	คือ	แรงกระทำที่โหนด 2
	F_2	คือ	โมเมนต์กระทำที่โหนด 2
	F_3	คือ	แรงกระทำที่โหนด 3
	F_4	คือ	โมเมนต์กระทำที่โหนด 3

2.5 การรวมตัวกันทางสถิติ

1. อนุพันธ์

การแก้ปัญหасวมการสถิติ (Static) อาจไม่จำเป็นต้องใช้คอมพิวเตอร์ แต่การอินเวอร์ส 4×4 โดยมือทำได้ยาก ดังนั้นจะทำการลดปัญหาให้เป็น 2×2 โดยใช้การรวมตัวกันทางสถิติ ซึ่งไม่สามารถใช้ได้กับทุกปัญหาทางสถิติได้ แต่เป็นการนำการลดรูปปัญหามาใช้กับการรวมตัวทางพลศาสตร์

การรวมตัวกันทางสถิติเป็นการแยกระดับความเสรีของตัวหลักและตัวรองของระดับความเสรี ถ้าระดับความเสรีหลักถูกเลือก ซึ่งพวกมันจะรวมระดับความเสรีทั้งหมดอันได้แก่ แรงโมเมนต์ที่กระทำ และการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้น โดยผลลัพธ์ที่ได้จะถูกตัดออก ถ้าระดับความเสรีถูกกำหนดให้รวมระดับความเสรีอันได้แก่ แรงและโมเมนต์และการเคลื่อนที่ จะเป็นเทคนิคที่จะสร้างความคลาดเคลื่อนได้

สำหรับการวิเคราะห์ความถูกต้องทางสถิติ ระดับความเสรีหลักเป็นการถูกเลือกให้เป็นระดับความเสรีของแรง และโมเมนต์ที่กระทำ และการเคลื่อนที่และการหมุนตัว

สำหรับปัญหาระดับความเสรีหลักทางพลศาสตร์เป็นแบบอย่างที่เป็นการเคลื่อนที่ของโหนดมวลที่มากที่สุด และการหมุนของโมเมนต์มวลที่มากที่สุดของโหนดที่มีความเฉื่อยมากที่สุด ซึ่งระดับความเสรีรองเป็นการเคลื่อนที่และหมุน ที่สัมพันธ์กับโหนดที่มีความเฉื่อยน้อยสุด

สำหรับปัญหา 2 เอลิเมนต์ของคาน จะทำการหาการเคลื่อนที่ 2 ตัวของโหนด 2 และ 3 ในระดับความเสรีหลักและจะกำจัดการหมุน 2 ตัว ในอันดับแรกจะต้องทำการปรับปรุงทฤษฎีในตัวอย่างคาน

อันดับแรกเป็นการกำจัดการระดับความเสรีของแฉกและสดมภ์ของสติฟเนสเมทริกซ์ ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ที่จะถูกลด z_a และไม่ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ z_b รวมทั้งการเคลื่อนที่ที่ 2 และ 4 ของแฉกและสดมภ์ของสติฟเนสเมทริกซ์คาน กลายเป็น 1 และ 2 ของแฉกและสดมภ์ ซึ่งการย้าย 1 และ 3 ของแฉกและสดมภ์ไปเป็นตำแหน่ง 2 และ 4

$$[k]\{z\} = \{F\} \quad (190)$$

$$\begin{bmatrix} [k]_{aa} & [k]_{ab} \\ [k]_{ba} & [k]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{z\}_a \\ \{z\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}_a \\ \{F\}_b \end{Bmatrix} \quad (191)$$

ทำการคูณสมการเมทริกซ์แรกเป็น

$$[k]_{aa} \{z\}_a + [k]_{ab} \{z\}_b = \{F\}_a \quad (192)$$

หา $\{z\}_a$

$$\{z\}_a = [k]_{aa}^{-1} (\{F\}_a - [k]_{ab} \{z\}_b) \quad (193)$$

ถ้าไม่มีแรง (โมเมนต์) มากระทำที่ขึ้นอยู่กับระดับความเสรี, $F_a = [0]$ และสมการข้างบนกลายเป็น

$$\{z\}_a = [k]_{aa}^{-1} (-[k]_{ab} \{z\}_b) = -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \{z\}_b \quad (194)$$

ทำการเขียนใหม่ในเวกเตอร์ของ $\{z\}_b$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{z\}_a \\ \{z\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \\ [I] \end{Bmatrix} \{z\}_b = \begin{Bmatrix} -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \{z\}_b \\ \{z\}_b \end{Bmatrix} \quad (195)$$

ทำการเขียนให้กระชับ

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{z\}_a \\ \{z\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \\ [I] \end{Bmatrix} \{z\}_b = \begin{Bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{Bmatrix} \{z\}_b = [T] \{z\}_b \quad (196)$$

เมื่อ

$$[T]_{ab} = -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \quad (197)$$

กลับไปยังสมการสมดุลทางสถิต

$$[k] \{z\} = [k] ([T] \{z\}_b) = \{F\} \quad (198)$$

คูณ $[T]^T$ ทั้งสองข้าง เพื่อลดจำนวนระดับความเสรีจาก (a+b) ไป b

$$([T]^T [k] [T]) \{z\}_b = [T]^T \{F\} \quad (199)$$

ขยายความในเทอมวงเล็บของสมการข้างบนและกำหนด k_{bb}^* เป็น

$$\begin{aligned}
 [k]_{bb}^* &= [T]^T [k] [T] = \begin{bmatrix} [T]_{ab}^T & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k]_{aa} & [k]_{ab} \\ [k]_{ba} & [k]_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ([T]_{ab}^T [k]_{aa} + [k]_{ba}) & ([T]_{ab}^T [k]_{ab} + [k]_{bb}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} \\
 &= ([T]_{ab}^T [k]_{aa} + [k]_{ba}) [T]_{ab} + ([T]_{ab}^T [k]_{ab} + [k]_{bb}) [I] \\
 &= [T]_{ab}^T [k]_{aa} [T]_{ab} + [k]_{ba} [T]_{ab} + [T]_{ab}^T [k]_{ab} + [k]_{bb} \\
 &= (-[k]_{ba} [k]_{aa}^{-1}) [k]_{aa} (-[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab}) + [k]_{ba} (-[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab}) + (-[k]_{ba} [k]_{aa}^{-1}) [k]_{ab} + [k]_{bb} \\
 &= [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} + [k]_{bb} \\
 &= [k]_{bb} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab}
 \end{aligned} \tag{200}$$

เมื่อ $[T]_{ab} = -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab}$ และ $[T]_{ab}^T = -[k]_{ba} [k]_{aa}^{-1}$

ดังนั้นปัญหาระบบความถี่เริ่มต้นที่ (a+b) สามารถเปลี่ยนรูปเป็น a, ปัญหาระดับความถี่ “b” โดยการแบ่งและขึ้นอยู่และไม่ขึ้นอยู่กับระดับความถี่ และแก้ปัญหาในการลดรูปสติฟเนสเมทริกซ์ $[k]_{bb}^*$ และลดรูปเวกเตอร์แรง $\{F\}_b^*$

$$\begin{aligned}
 \{F\}_b^* &= [T]^T \{F\} \\
 &= \begin{bmatrix} [T]_{ab}^T & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{F\}_a \\ \{F\}_b \end{bmatrix} = [T]_{ba} \{F\}_a + \{F\}_b \\
 &= \{F\}_b - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} \{F\}_a
 \end{aligned} \tag{201}$$

ทำการลดปัญหากลายเป็น

$$[k]_{bb}^* \{z\}_b = \{F\}_b^* \tag{202}$$

หลังจากทราบระดับความถี่ของ z_b และระดับความถี่ของ z_a สามารถถูกขยายให้มี z_b เมื่อ $\{F\}_a = \{0\}$

$$\{z\}_a = -[k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \{z\}_b \tag{203}$$

2. การแก้ปัญหาสองเอลิเมนต์คานในแบบสถิตย์

การแก้ปัญหาคานสำหรับแรงที่กระทำที่ปลาย ดังค่าสถิติในสข้างล่าง

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{24}{I^3} & 0 & \frac{-12}{I^3} & \frac{6}{I^2} \\ 0 & \frac{8}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{2}{I} \\ \frac{-12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} & \frac{12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} \\ \frac{6}{I^2} & \frac{2}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{4}{I} \end{bmatrix} \quad (204)$$

จัดแถว 1 ไป 3, 2 ไป 1, 3 ไป 4, และ 4 ไป 2

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{2}{I} \\ \frac{6}{I^2} & \frac{2}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{4}{I} \\ \frac{24}{I^3} & 0 & \frac{-12}{I^3} & \frac{6}{I^2} \\ \frac{-12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} & \frac{12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} \end{bmatrix} \quad (205)$$

จัดสดมภ์ 1 ไป 3, 2 ไป 1, 3 ไป 4 และ 4 ไป 2

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{8}{I} & \frac{2}{I} & 0 & \frac{-6}{I^2} \\ \frac{2}{I} & \frac{4}{I} & \frac{6}{I^2} & \frac{-6}{I^2} \\ 0 & \frac{6}{I^2} & \frac{24}{I^3} & \frac{-12}{I^3} \\ \frac{-6}{I^2} & \frac{-6}{I^2} & \frac{-12}{I^3} & \frac{12}{I^3} \end{bmatrix} \quad (206)$$

ทำการแยกเมทริกซ์ออกเป็นเมทริกซ์ย่อย a และ b

$$\begin{aligned} [k]_{aa} &= \frac{EI}{I} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & [k]_{ab} &= \frac{EI}{I^2} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \\ [k]_{ba} &= \frac{EI}{I^2} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} & [k]_{bb} &= \frac{EI}{I^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (207)$$

ทำการอินเวอร์ส $[k]_{aa}$

$$[k]_{aa}^{-1} = \frac{1}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (208)$$

$$-[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} = \frac{-1}{14I} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 24 & -18 \end{bmatrix} \quad (209)$$

$$[k]_{ba}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} = \frac{EI}{14I^3} \begin{bmatrix} 144 & -108 \\ -108 & 144 \end{bmatrix} \quad (210)$$

$$\begin{aligned} [k]_{bb}^* &= [k]_{bb} - [k]_{ba}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \\ &= \frac{EI}{14I^3} \left\{ \begin{bmatrix} 336 & -168 \\ -168 & 168 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 144 & -108 \\ -108 & 144 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{EI}{14I^3} \begin{bmatrix} 192 & -60 \\ -60 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (211)$$

$$[k]_{bb}^{*-1} = \frac{14I^3}{1008EI} \begin{bmatrix} 24 & 60 \\ 60 & 192 \end{bmatrix} = \frac{I^3}{72EI} \begin{bmatrix} 24 & 60 \\ 60 & 192 \end{bmatrix} \quad (212)$$

แก้ปัญหาคำนวณการเคลื่อนที่ของค่า z_b สำหรับแรงที่ปลาย P

$$\begin{aligned} \{z\}_b &= \begin{Bmatrix} z_2 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [k]_{bb}^{*-1} \{F\}_b^* \\ &= \frac{I^3}{72EI} \begin{bmatrix} 24 & 60 \\ 60 & 192 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} \\ &= \frac{PI^3}{72EI} \begin{Bmatrix} 60 \\ 192 \end{Bmatrix} = \frac{PI^3}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{60}{72} \\ \frac{192}{72} \end{Bmatrix} = \frac{PI^3}{EI} \begin{Bmatrix} \frac{5}{6} \\ 8 \\ 3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (213)$$

การเคลื่อนที่ที่ปลายคาน

$$z_3 = \frac{8PI^3}{3EI} \quad (214)$$

สมการที่มีข้อเสียในการหาการเคลื่อนที่ที่ปลายคาน

$$z_{tip} = \frac{PL^3}{3EI} \quad (215)$$

ถ้ารู้ความยาวคาน $L = 2l$

$$z_{tip} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P(2l)^3}{3EI} = \frac{8Pl^3}{3EI} \quad (216)$$

การลดรูปปัญหาสามารถทำให้ถูกต้องได้ แต่ไม่สามารถแก้ปัญหสมการการลดรูปของปัญหาสถิตได้โดยการคำนวณด้วยมือ

2.6 ไฟไนเอลิเมนต์ในระบบพลศาสตร์

2.6.1 ระดับความเสรีขั้น 6 ของเมทริกซ์มวลหลัก

เมทริกซ์มวลก่อนเป็นตัวอย่างในการสร้างความเข้าใจ เพราะว่าเป็นแบบระดับความเสรีขั้นเดียวที่เกี่ยวกับแต่ละเอลิเมนต์มวล ดังสมการตัวอย่างข้างล่าง 6x6 เมทริกซ์มวล ซึ่งสามารถสร้างให้เป็นระดับความเสรีขั้น 6 ได้

$$[m]_g = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix} \quad (217)$$

2.6.2 ระบบพลศาสตร์ของคาน

1. รูปแบบเมทริกซ์มวล

ในการแก้ปัญหาแบบพลวัตของคาน จำเป็นต้องทำการปรับปรุงเมทริกซ์มวลให้เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่สมบูรณ์ สำหรับไฟไนเอลิเมนต์คาน จำนวนความแตกต่างของสมการเมทริกซ์มวลแต่ละอันได้ถูกปกคลุมไปด้วย

1. มวลก้อน (Lumped mass) จะมีเฉพาะการเคลื่อนที่เท่านั้น
2. มวลก้อน (Lumped mass) จะมีทั้งการเคลื่อนที่และการหมุน
3. มวลเหมือนกัน (Consistent mass) จะมีผลต่อการกระจายมวล

2. มวลก้อน

เอลิเมนต์ของพารามิเตอร์มวลก้อนและเทอมความเฉื่อยในเมทริกซ์มวลจะสัมพันธ์กับโหนดความเฉื่อยความเร่งจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง และยังทำให้เทอมเส้นทแยงมุมของสมการ (218) แสดงถึงเมทริกซ์มวลก้อนที่รวมการเคลื่อนที่และการหมุน

$$[m]_I = \begin{bmatrix} \left(\frac{mI}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{mI^3}{24} + \frac{mIy}{2A}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{mI}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{mI^3}{24} + \frac{mIy}{2A}\right) \end{bmatrix} \quad (218)$$

สำหรับมวลก้อนในทอมของการเคลื่อนที่ จากสมการ (218) จะกำหนดให้เท่ากับศูนย์ เมื่อ m เป็นมวลต่อความยาวหนึ่งหน่วย, I เป็นความยาวเอลิเมนต์, Iy เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของหน้าตัดในแกน y และ A เป็นพื้นที่

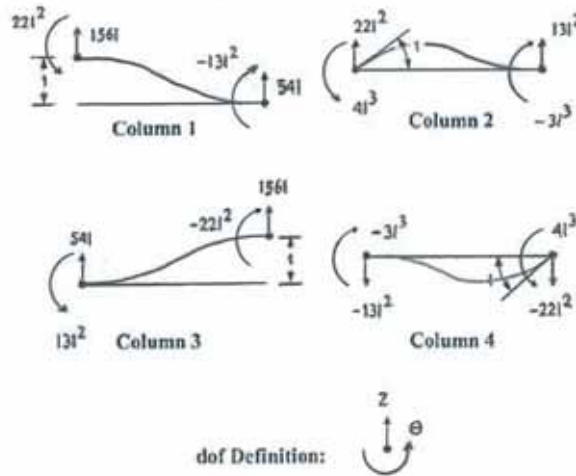
3. มวลเหมือนกัน

จะเห็นการปรับปรุงตามข้างล่าง ซึ่งเมทริกซ์มวลเหมือนกันของเอลิเมนต์คานเป็นเมทริกซ์เต็ม โดยเมทริกซ์เต็มสามารถรวมเอลิเมนต์อื่นๆได้ ในทางเดียวกันเป็นสตีฟเนสเมทริกซ์ที่รวมกัน

เอลิเมนต์ของเมทริกซ์มวลเหมือนกัน สำหรับคานจะเป็น เมื่อ m = มวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว และ L = ความยาว

$$[m]_e = \frac{mI}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22I & 54 & -13I \\ 22I & 4I^2 & 13I & -3I^2 \\ 54 & 13I & 156 & -22I \\ -13I & -3I^2 & -22I & 4I^2 \end{bmatrix} \quad (219)$$

ภาพประกอบ 20 แสดงความเร่งหนึ่งหน่วยของแต่ละเอลิเมนต์ของระดับความเสรีชั้น 4 ซึ่งสัมพันธ์กับ 4 สดมภ์ของเมทริกซ์มวลเหมือนกัน



ภาพประกอบ 20 เมทริกซ์มวลเหมือนกันในรูปแบบเอลิเมนต์คาน

2.6.3 พลศาสตร์ของคานแบบ 2 เอลิเมนต์

สตีฟเนสเมทริกซ์หลักของคานแบบ 2 เอลิเมนต์ ดังสมการ

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{24}{I^3} & 0 & \frac{-12}{I^3} & \frac{6}{I^2} \\ 0 & \frac{8}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{2}{I} \\ \frac{-12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} & \frac{12}{I^3} & \frac{-6}{I^2} \\ \frac{6}{I^2} & \frac{2}{I} & \frac{-6}{I^2} & \frac{4}{I} \end{bmatrix} \quad (220)$$

เมทริกซ์มวลหลักสามารถสร้างโดยการรวมในแต่ละเทอมของคานดังสมการ

$$[m]_g = \frac{I}{420} \begin{bmatrix} 156m_1I_1 & 22m_1I_1^2 & 54m_1I_1 & 13m_1I_1^2 & (156m_1I_1 + 156m_2I_2) & (-22m_1I_1^2 + 22m_2I_2^2) \\ 22m_1I_1^2 & 4m_1I_1^3 & 13m_1I_1^2 & (-22m_1I_1^2 + 22m_2I_2^2) & 54m_2I_2 & -13m_2I_2^2 \\ 54m_1I_1 & 13m_1I_1^2 & (-22m_1I_1^2 + 22m_2I_2^2) & 54m_2I_2 & -13m_2I_2^2 & 4m_2I_2^2 \\ -13m_1I_1^2 & -3m_1I_1^3 & (4m_1I_1^3 + 4m_2I_2^3) & 13m_2I_2^2 & -22m_2I_2^2 & 4m_2I_2^2 \\ 0 & 0 & 13m_2I_2^2 & 156m_2I_2 & -22m_2I_2^2 & 4m_2I_2^2 \\ 0 & 0 & -3m_2I_2^3 & -22m_2I_2^2 & 4m_2I_2^2 & 4m_2I_2^2 \end{bmatrix} \quad (221)$$

สมมุติให้ 2 เอลิเมนต์มีคุณสมบัติและความยาวเท่ากัน จะได้สมการ

$$[m]_g = \frac{I}{420} \begin{bmatrix} 156mI & 22mI^2 & 54mI & -13mI^2 & 0 & 0 \\ 22mI^2 & 4mI^3 & 13mI^2 & -3mI^3 & 0 & 0 \\ 54mI & 13mI^2 & 312mI & 0 & 54mI & -13mI^2 \\ -13mI^2 & -3mI^3 & 0 & 8mI^3 & 13mI^2 & -3mI^3 \\ 0 & 0 & 54mI & 13mI^2 & 156mI & -22mI^2 \\ 0 & 0 & -13mI^2 & -3mI^3 & -22mI^2 & 4mI^3 \end{bmatrix} \quad (222)$$

เนื่องจากคานาได้ถูกยึดที่ปลาย ดังนั้นการจัดแถวและสดมภ์ที่ 1 และ 2 จะได้

$$[m]_g = \frac{I}{420} \begin{bmatrix} 312mI & 0 & 54mI & -13mI^2 \\ 0 & 8mI^3 & 13mI^2 & -3mI^3 \\ 54mI & 13mI^2 & 156mI & -22mI^2 \\ -13mI^2 & -3mI^3 & -22mI^2 & 4mI^3 \end{bmatrix} \quad (223)$$

ทำการหาค่าเจาะจงสำหรับสมการการเคลื่อนที่

$$[m]_g \{\ddot{z}\} + [k]_g \{z\} = \{0\} \quad (224)$$

2.6.4 การลดรูปกุยาน

การลดรูปกุยานเป็นวิธีหนึ่งที่จะทำการลดจำนวนระดับความเสรีของปัญหาพลศาสตร์ ในทำนองเดียวกันกับการรวมตัวกันทางสถิติของปัญหาสถิต ความแตกต่างของการรวมตัวกันทางสถิติ โดยการลดรูปกุยานจะเกิดความผิดพลาดที่จะขึ้นอยู่กับการเลือกระดับความเสรีในการลดรูป อาจเป็นอิสระหรือเป็นระดับความเสรีรอง โดยส่วนใหญ่จะเลือกระดับความเสรีในการลดรูปเป็นแบบ การเปลี่ยนแปลงของโหนด ซึ่งจะสัมพันธ์กับมวลที่มีค่าน้อยและการหมุนของโหนดที่สัมพันธ์กับโมเมนต์ของมวลน้อย

การไม่ทำการเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กับโหนดที่มีมวลมากและการหมุนของมวลมากที่สัมพันธ์กับโมเมนต์มวลมากที่เป็นระดับความเสรีอิสระ ในปัญหาของไฟไนเอลิเมนต์ การวิเคราะห์จะกำหนดตัวหลักที่เป็นระดับความเสรีเมื่อมีแรงและโมเมนต์มากระทำ เมื่อการเคลื่อนตัวหรือการหมุนเป็นความต้องการของผลลัพธ์หรือเมื่อรู้มวลมากหรือโมเมนต์มวลที่เกิดขึ้น โปรแกรมไฟไนเอลิเมนต์จะยอมให้เลือกการเพิ่มระดับความเสรีและเพิ่มการตั้งค่าตัวหลัก เป็นพื้นฐานที่โปรแกรมจะทำการค้นหาเส้นทแยงมุมเมทริกซ์มวลและเพิ่มระดับความเสรี

1. อนุพันธ์การลดรูปกุยาน

เริ่มต้นสมการการเคลื่อนที่แบบไม่มีตัวหน่วง

$$[m]\{\ddot{z}\} + [k]\{z\} = \{0\} \quad (225)$$

ทำการจัดใหม่

$$\begin{bmatrix} m_{aa} & m_{ab} \\ m_{ba} & m_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_a \\ \ddot{z}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_a \\ z_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (226)$$

ทำการคูณในสมการแรกของเมทริกซ์

$$[m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a + [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b + [k]_{aa}\{z\}_a + [k]_{ab}\{z\}_b = \{F\}_a \quad (227)$$

หา $\{z\}_a$

$$\begin{aligned} \{z\}_a &= [k]_{aa}^{-1}(\{F\}_a - [k]_{ab}\{z\}_b - [m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a - [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b) \\ &= -[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab}\{z\}_b + [k]_{aa}^{-1}(\{F\}_a - [m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a - [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b) \end{aligned} \quad (228)$$

ให้ z_a ขึ้นอยู่กับสมการทางขวามือ ดังสมการ (229)

$$\{z\}_a = -[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab}\{z\}_b \quad (229)$$

ในการเลือกระดับความเสรีที่จะทำการลด ซึ่งจะไม่รวมทุกๆ ระดับความเสรีที่มีแรงกระทำ ดังนั้น $\{F\}_a = 0$ สมดุลทางสถิตสามารถประมาณได้ในเทอมของวงเล็บของสมการ (228) ให้เป็นศูนย์ ให้ $\{F\}_a = 0$ และทำการอนุพันธ์สองครั้งจะได้เทอม $[m]_{ab}$

$$\begin{aligned} 0 &= \{F\}_a - [m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a - [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b \\ &= -[m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a - [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b \\ &= -[m]_{aa}(-[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab}\{\ddot{z}\}_b) - [m]_{ab}\{\ddot{z}\}_b \\ &= [m]_{aa}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} - [m]_{ab} \\ [m]_{ab} &= [m]_{aa}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \end{aligned} \quad (230)$$

สมมติให้ $[m]_{aa}\{\ddot{z}\}_a$ เป็นศูนย์ และ $[m]_{aa}$ และ $[m]_{ab}$ มีความสัมพันธ์ในสมการ (230) แรงระหว่าง $\{\ddot{z}\}_a$ และ $\{\ddot{z}\}_b$ ระดับความเสรีได้ถูกสัมพันธ์กับสถิติเฟสใน (230) จะเรียกได้ว่าสมดุลทางสถิต ให้หยุดสมการ (229) ก่อน เวกเตอร์การเคลื่อนที่ $\{z\}$ สามารถเขียนในเทอม $\{z\}_b$ อย่างเดียว

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} \{z\}_a \\ \{z\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \\ [I] \end{Bmatrix} \{z\}_b = \begin{Bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{Bmatrix} \{z\}_b = [T]\{z\}_b \quad (231)$$

เมื่อ

$$[T]_{ab} = -[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \quad (232)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} \quad (233)$$

แทนที่ด้วยสมการ (230) ด้วยอนุพันธ์ของสมการ (225)

$$[m][T]\{\ddot{z}\}_b + [k][T]\{z\}_b = \{F\} \quad (234)$$

สมการ (234) ยังคงบรรจุด้วยระดับความเสรี (a+b) ดังนั้นก่อนทำการคูณด้วย $[T]^T$ เป็นความต้องการในการลดระดับความเสรี (b) และกลับไปยังสมการในการลดเมทริกซ์มวลและสติฟเนสเมทริกซ์

$$([T]^T[m][T])\{\ddot{z}\}_b + ([T]^T[k][T])\{z\}_b = [T]^T\{F\} \quad (235)$$

ทำการเขียนใหม่

$$[m]_{bb}^*\{\ddot{z}\}_b + [k]_{bb}^*\{z\}_b = \{F\}_b^* \quad (236)$$

สมการ (236) เป็นการลดขั้นสุดท้ายของสมการการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถทำการหาการเคลื่อนที่ของ b การเคลื่อนที่ a (สมมุติให้เป็นสมดุลทางสถิต) สามารถหาได้จากสมการ (229)

$[k]_{bb}^*$ สามารถแสดงให้เป็นการรวมตัวทางสถิตจะได้

$$\begin{aligned} [k]_{bb}^* &= [T]_{ab}^T [I] \begin{bmatrix} [k]_{aa} & [k]_{ab} \\ [k]_{ba} & [k]_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} \\ &= \left(([T]_{ab}^T [k]_{aa} + [k]_{ba}) \quad ([T]_{ab}^T [k]_{ab} + [k]_{bb}) \right) \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} \\ &= [T]_{ab}^T [k]_{aa} [T]_{ab} + [k]_{ba} [T]_{ab} + [T]_{ab}^T [k]_{ab} + [k]_{bb} \\ &= [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{aa} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} + [k]_{bb} \\ &= [k]_{bb} - [k]_{ba} [k]_{aa}^{-1} [k]_{ab} \end{aligned} \quad (237)$$

2. การแก้ปัญหาโดยใช้การลดรูปฐานในระบบคานาสองเอลิเมนต์

จากสมการ (206) ทำการเขียนใหม่อีกครั้งจะได้

$$[k]_g = EI \begin{bmatrix} \frac{8}{l} & \frac{2}{l} & 0 & \frac{-6}{l^2} \\ \frac{2}{l} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{-6}{l^2} \\ 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{24}{l^3} & \frac{-12}{l^3} \\ \frac{-6}{l^2} & \frac{-6}{l^2} & \frac{-12}{l^3} & \frac{12}{l^3} \end{bmatrix} \quad (238)$$

ทำการแยกและกำหนด 4 เมทริกซ์ย่อยโดยแสดง a และ b

$$\begin{aligned} [k]_{aa} &= \frac{EI}{I} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & [k]_{ab} &= \frac{EI}{I^2} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \\ [k]_{ba} &= \frac{EI}{I^2} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} & [k]_{bb} &= \frac{EI}{I^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (239)$$

ทำการหา $[k]_{aa}^{-1}$

$$[k]_{aa}^{-1} = \frac{I}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (240)$$

$$-[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} = \frac{-I}{14I} \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 24 & -18 \end{bmatrix} \quad (241)$$

$$[k]_{ba}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} = \frac{-EI}{14I^3} \begin{bmatrix} 144 & -108 \\ -108 & 144 \end{bmatrix} \quad (242)$$

$$\begin{aligned} [k]_{bb}^* &= [k]_{bb} - [k]_{ba}[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \\ &= \frac{EI}{14I^3} \left\{ \begin{bmatrix} 336 & -168 \\ -168 & 168 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 144 & -108 \\ -108 & 144 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{EI}{14I^3} \begin{bmatrix} 192 & -60 \\ -60 & 24 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (243)$$

ทรานฟอร์มเมทริกซ์ [T] จะได้

$$[T] = \begin{bmatrix} [T]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[k]_{aa}^{-1}[k]_{ab} \\ [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{14I} & \frac{6}{14I} \\ -\frac{24}{14I} & \frac{18}{14I} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (244)$$

เมทริกซ์มวลจะต้องทำการจัดใหม่ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ย่อย a และ b และทรานฟอร์มเป็น $[m]_{bb}^*$

$$[m]_g = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 312mI & 0 & 54mI & -13mI^2 \\ 0 & 8mI^3 & 13mI^2 & -3mI^3 \\ 54mI & 13mI^2 & 156mI & -22mI^2 \\ -13mI^2 & -3mI^3 & -22mI^2 & 4mI^3 \end{bmatrix} \quad (245)$$

จัดแถว 1 ไป 3 , 2 ไป 1 , 3 ไป 4 และ 4 ไป 2

$$[m]_g = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 0 & 8mI^3 & 13mI^2 & -3mI^3 \\ -13mI^2 & -3mI^3 & -22mI^2 & 4mI^3 \\ 312mI & 0 & 54mI & -13mI^2 \\ 54mI & 13mI^2 & 156mI & -22mI^2 \end{bmatrix} \quad (246)$$

จัดสตมภ์ 1 ไป 3 , 2 ไป 1 , 3 ไป 4 และ 4 ไป 2

$$[m]_g = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 8I^3 & -3I^3 & 0 & 13I^2 \\ -3I^3 & 4I^3 & -13I^2 & -22I^2 \\ 0 & -13I^2 & 312I & 54I \\ 13I^2 & -22I^2 & 54I & 156I \end{bmatrix} \quad (247)$$

ทำการแยกเมทริกซ์ย่อย

$$\begin{aligned} [m]_{aa} &= \frac{mI^3}{420} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} & [m]_{ab} &= \frac{mI^2}{420} \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -13 & -22 \end{bmatrix} \\ [m]_{ba} &= \frac{mI^2}{420} \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 13 & -22 \end{bmatrix} & [m]_{bb} &= \frac{mI}{420} \begin{bmatrix} 312 & 54 \\ 54 & 156 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (248)$$

การหาค่า $[m]_{bb}^*$

$$[m]_{bb}^* = [T]^T [m] [T] \quad (249)$$

จะได้ค่า

$$[m]_{bb}^* = mI \begin{bmatrix} \frac{1528}{1715} & \frac{241}{471} \\ \frac{241}{471} & \frac{1372}{1715} \end{bmatrix} \quad (250)$$

2.6.5 ค่าเจาะจงของการลดสมการสำหรับคานสองเอลิเมนต์

การลดสมการอันดับสองของการเคลื่อนที่ ได้ถูกแสดงไว้ในสมการ (251) และ (252) โดยใช้ สติฟเนสเมทริกซ์ 2x2 จากการรวมสมการสภาวะสถิตตั้งสมการ (211) จะทำการแสดงพื้นที่ทาง สถิต จากการลดสมการอันดับสอง ซึ่งจะมีประโยชน์ในการหาว่าจะทำการย้อนกลับของสมการ อันดับสอง ซึ่งเต็มไปด้วยเมทริกซ์มวลในรูปแบบพื้นที่ทางสถิตอีกครั้ง การหาสมการการ เคลื่อนที่ในรูปแบบพื้นที่ทางสถิตจะใช้สัญลักษณ์โปรแกรมทางพีชคณิตมาหาค่าเจาะจง

$$[m]_{bb}^* \{\ddot{z}\}_b + [k]_{bb}^* \{z\}_b = \{0\} \quad (251)$$

$$mI \begin{bmatrix} \frac{1528}{1715} & \frac{241}{471} \\ \frac{241}{471} & \frac{1372}{1715} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_{b1} \\ \ddot{z}_{b2} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{14I^3} \begin{bmatrix} 192 & -60 \\ -60 & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{b1} \\ z_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (252)$$

z_{b1} และ z_{b2} เป็นการลดระดับความเสรีที่ 1 และ 2 ที่การเคลื่อนที่ของโหนด 2 และ 3

โดยปกติแล้วจะทำการหาแต่ละสมการการเคลื่อนที่สำหรับอนุพันธ์อันดับสูง และจะทำการ เปลี่ยนแปลงไปเป็นรูปแบบของพื้นที่ทางสถิต แต่ไม่สามารถทำได้เพราะว่าเต็มไปด้วยเมทริกซ์มวล ซึ่งในความหมายว่าพวกนั้นมีค่ามากกว่าอนุพันธ์อันดับ 1, 2 ในแต่ละสมการ ในปัญหาแบบนี้อันดับ แรกจะเปลี่ยนแปลงสมการไปเป็นรูปแบบทางสถิต จะทำการย้อนกลับของเมทริกซ์มวลและก่อนการ คูณ สิ่งที่ยังเหลืออยู่ของเมทริกซ์เอกลักษณ์ในการคูณกับอนุพันธ์เวกเตอร์

การย้อนกลับไปรูปแบบของพื้นที่ทางสถิต เมื่อ x_1 และ x_2 เป็นการเคลื่อนที่และความเร็ว ของโหนด 2 และ x_3 และ x_4 เป็นการเคลื่อนที่และความเร็วของโหนด 3 ตามลำดับ

$$[m]_{ss} \{\dot{x}\} + [k]_{ss} \{x\} = \{0\} \quad (253)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1528mI}{1715} & 0 & \frac{241mI}{1372} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{241mI}{1372} & 0 & \frac{471mI}{1715} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{192EI}{14I^3} & 0 & \frac{-60EI}{14I^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-60EI}{14I^3} & 0 & \frac{24EI}{14I^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (254)$$

เมื่อในเทอม “I” จะอยู่บนเส้นทแยงมุมในเมทริกซ์มวล และ “-I” จะเป็นนอกเส้นทแยงมุมในสติฟเนส เมทริกซ์ ทำการย้อนกับ $[m]_{ss}$

$$[m]_{ss}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{263760}{205367mI} & 0 & \frac{-168700}{205367mI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-168700}{205367mI} & 0 & \frac{855680}{205367mI} \end{bmatrix} \quad (255)$$

ก่อนทำการคูณสมการการเคลื่อนที่ โดย $[m]_{ss}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4340280EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{-1419600EI}{205367I^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-5980800EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{2189880EI}{205367mI^4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (256)$$

ทำการเขียนใหม่โดยปราศจากเมทริกซ์เอกลักษณ์

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{4340280EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{-1419600EI}{205367I^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{-5980800EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{2189880EI}{205367mI^4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (257)$$

การทำการย้อนกลับไปรูปแบบมาตรฐานของพื้นที่ทางสถิติ $\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$

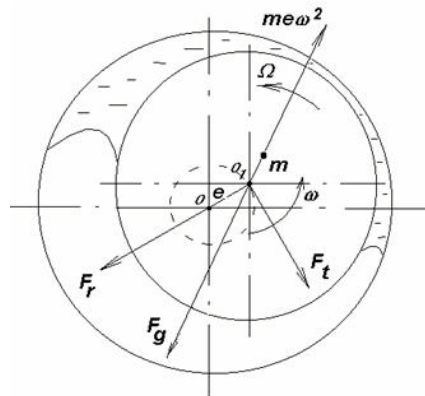
$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-4340280EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{1419600EI}{205367I^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5980800EI}{205367mI^4} & 0 & \frac{-2189880EI}{205367mI^4} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (258)$$

ใช้สัญลักษณ์โปรแกรมทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาสำหรับค่าเจาะจง

$$f_{1,2} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \left(\frac{2}{205367} \right) \frac{\sqrt{43127070} \sqrt{E \operatorname{Im}(3887 \pm 20\sqrt{34178})}}{mI^2} \quad (259)$$

2.7 การออกแบบตัวหน่วงของระบบไฮโดรไดนามิกส์ (Design of a Hydrodynamic damper support)

การออกแบบระบบไฮโดรไดนามิกส์ สามารถหาได้จากแรงที่กระทำดังภาพประกอบ 21



ภาพประกอบ 21 แสดงแรงกระทำที่เกิดขึ้นในระบบไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamic damper)

จากภาพประกอบ 21 แสดงแรงกระทำที่เกิดขึ้นโดยมีแรงกระทำดังนี้

- $me\omega^2$ คือ แรงที่ไม่สมดุลย์ของโรเตอร์ (Rotor unbalance force)
- F_g คือ แรงไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamic force)
- F_t คือ แรงในแนวรัศมีของแบร์ริง (Bearing radial force)
- F_r คือ แรงในแนวสัมผัสของตัวหน่วง (Damping tangential force)

2.7.1 การหาค่าตัวหน่วงของระบบไฮโดรไดนามิกส์โดยวิธีตัวแปรไร้มิติ (Non-dimensional parameter)

โดยปกติแล้วการออกแบบค่าตัวหน่วงของระบบไฮโดรไดนามิกส์ จะใช้ในสภาวะการทำงานที่มีความเร็วรอบสูงๆ ซึ่งจะเป็นช่วงการทำงานวิกฤต โดยที่นี้จะทำการกำหนดค่าเป็น ω_c และสภาวะการทำงานปกติจะเป็น ω โดยตัวแปรที่สำคัญในการกำหนดค่าความหน่วง (Damping) และค่าสตีฟเนส (Stiffness) จะประกอบไปด้วยค่า รัศมีของตัวหน่วง (Damper radius), ความยาว, ช่องว่างของเพลลาและแบริ่ง (Clearance) ซึ่งตัวหน่วงสามารถหาได้จากพารามิเตอร์ดังนี้

1. แบริ่งพารามิเตอร์ (Bearing parameter, B)

$$B = \frac{\mu \cdot R \cdot L_R^3}{m_B \cdot \omega_c \cdot \delta^3} \quad (260)$$

เมื่อ	μ	คือ ค่าความหนืดของสารหล่อลื่น , Pa.sec
	R	คือ รัศมีของแบริ่ง , m
	L_R	คือ ความยาวฟิล์มของแบริ่ง , m
	m_B	คือ น้ำหนักที่กระทำแบริ่ง , kg
	ω_c	คือ ความเร็วรอบวิกฤต , s^{-1}
	δ	คือ ระยะห่างระหว่างเพลลากับแบริ่ง , m

ค่า L_R จะแบ่งได้เป็นสองกรณีคือ

- ตัวหน่วงที่ไม่มีตัวป้องกันไม่ให้สารหล่อลื่นไหลออก

$$L_R = \sqrt[3]{\sum L_i^3} \quad (261)$$

- ตัวหน่วงที่มีตัวป้องกันไม่ให้สารหล่อลื่นไหลออก (เช่น แหวนลูกสูบ)

$$L_R = \sqrt[3]{\sum (1.58L_i)^3} \quad (262)$$

เมื่อ	L_i	คือ ความยาวระหว่างแบริ่งกับเพลลา
-------	-------	----------------------------------

2. พารามิเตอร์ความเร่ง (Gravity parameter, $\bar{W}$)

$$\bar{W} = \frac{W_B}{m_B \cdot \omega^2} \quad ; \quad W_B = m_B \cdot g \quad (263)$$

3. พารามิเตอร์ไม่สมดุลย์ (Unbalance parameter, U)

$$U = \frac{F_u}{m_D \cdot \delta \cdot \omega^2} = \frac{e_u}{\delta} \quad (264)$$

เมื่อ	F_u	คือ	แรงกระทำที่ไม่สมดุล ($m_D \cdot e_u \cdot \omega^2$)
	m_D	คือ	น้ำหนักที่กระทำกึ่งกลางเพลาระหว่างแบร์ริงสองข้าง
	e_u	คือ	ระยะเยื้องศูนย์

4. อัตราส่วนความถี่ (Frequency ratio, Ω)

$$\Omega = \omega / \omega_c \quad (265)$$

5. อัตราส่วนมวล (Mass ratio, α)

$$\alpha = m / m_D \quad (266)$$

พารามิเตอร์ที่กล่าวข้างต้น จะใช้เฉพาะพารามิเตอร์ที่มีผลต่อการคำนวณเท่านั้น คือ B และ $\overline{W}$ ส่วนพารามิเตอร์ตัวอื่นๆจะไม่ได้ใช้ในการคำนวณ

2.7.2 การหาค่าความหน่วงและค่าสติฟเนสของไฮโดรไดนามิกส์

สามารถหาค่าความหน่วงและค่าสติฟเนสได้จากสมการเรโนลด์ (Reynolds) โดยสมมุติฐานมีดังต่อไปนี้

1. ระยะห่างระหว่างเพลากับแบร์ริงมีค่าแคบ
2. การไหลของน้ำมันคงที่
3. น้ำมันที่ใช้เป็นแบบของไหลที่อัดตัวไม่ได้
4. ความหนืดของน้ำมันคงที่
5. ไม่พิจารณาค่าความเฉื่อยของน้ำมัน

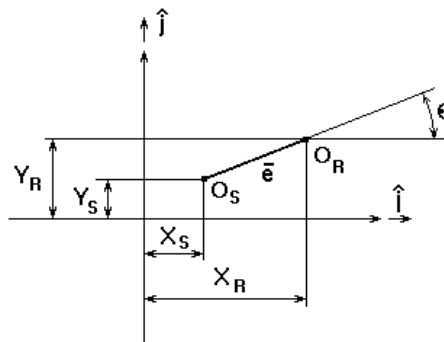
โดยสมการที่ได้จะเป็นดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial}{\partial x} (hu) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (267)$$

เมื่อ	$x = R\theta$	คือ	ระบบเส้นรอบวง (Circumference coordinate)
	$u = R(w_1 - w_2)$	คือ	ความเร็วในแนวแกน (โดยปกติถ้าตัวหน่วงไม่เกิดการหมุน จะพิจารณา ให้ $u = 0$)
	h	คือ	ความหนาของฟิล์มน้ำมัน

จากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่าการพิจารณาการไหลสองทิศทาง คือการไหลในแนวแกน และแนวรัศมี ในการพิจารณาอย่างถูกต้องควรจะพิจารณาค่าความเฉื่อยของน้ำมัน (Oil inertia), การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent flow) เป็นต้น แต่ในที่นี้จะพิจารณาตัวแปรที่สำคัญที่มีผลต่อการคำนวณเท่านั้น

จากสมการดังกล่าวข้างต้น สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรของตัวหน่วง และระบบพิกัดตั้งภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 22 แสดงพิกัดความเฉื่อย

จากภาพประกอบ 22 สามารถหาระยะ $\bar{e}$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\bar{e} = (X_R - X_S)\hat{i} + (Y_R - Y_S)\hat{j} \quad (268)$$

$$\dot{\bar{e}} = (\dot{X}_R - \dot{X}_S)\hat{i} + (\dot{Y}_R - \dot{Y}_S)\hat{j} \quad (269)$$

เมื่อ

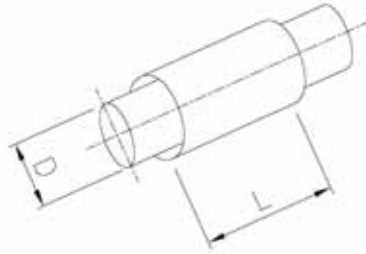
$$h = \delta - \bar{e} \cdot r = \delta - (X_R - X_S)\cos\theta - (Y_R - Y_S)\sin\theta \quad (270)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{1}{R} [(X_R - X_S)\sin\theta - (Y_R - Y_S)\cos\theta] \quad (271)$$

และ

$$\frac{dh}{dt} = -(X'_R - X'_S)\cos\theta - (Y'_R - Y'_S)\sin\theta \quad (272)$$

จากสมการข้างต้นจะใช้ในการอธิบายในทอมของตัวหน่วงที่มีขนาดสั้น (Short damper) และตัวหน่วงที่มีขนาดยาว (Long damper) โดยการแบ่งตัวหน่วงว่ามีขนาดสั้นหรือยาวจะขึ้นอยู่กับเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลลาและความยาวตามแนวแกนระหว่างเพลากับแบร์ริง ดังภาพประกอบ 23



ภาพประกอบ 23 แสดงการเปรียบเทียบเส้นผ่านศูนย์กลางของเพลลา (D) และความยาว (L)

จากภาพประกอบ 23 ถ้าความยาว L มีค่ามากกว่า D มากๆ จะเป็นตัวหน่วงที่มีขนาดยาว (Long damper) และถ้า L น้อยกว่า D มากๆ จะเป็นตัวหน่วงที่มีขนาดสั้น (Short damper)

กรณีตัวหน่วงที่มีขนาดยาว (Long damper) จะได้ฟังก์ชันของสมการเป็น

$$P(\theta, z) = P(\theta, 0) \left(1 - \frac{z^2}{L^2} \right) \quad (273)$$

กรณีตัวหน่วงที่มีขนาดสั้น (Short damper) จะได้ฟังก์ชันของสมการเป็น

$$P(\theta, z) = P(\theta, 0) \left(1 - \frac{4z^2}{L^2} \right) \quad (274)$$

โดยกำหนดสมมติฐานให้ $u=0$ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากสมการเรโนลด์ (Reynolds) จะเป็นดังนี้
กรณีตัวหน่วงที่มีขนาดยาว (Long damper)

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dP}{dx} \right) - \frac{2h^3}{L^2} P(\theta, 0) = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (275)$$

กรณีตัวหน่วงที่มีขนาดสั้น (Short damper)

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dP}{dx} \right) - \frac{8h^3}{L^2} P(\theta, 0) = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (276)$$

สมการที่ได้เหล่านี้จะทำการคำนวณโดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ค่าอนุพันธ์ที่ได้จากสมการข้างบนจะเป็น

$$h^3 \frac{d^2 P}{dx^2} - 3h^2 \frac{dh}{dx} \frac{dP}{dx} = 12\mu \frac{dh}{dt} + 2 \frac{P(\theta,0)h^3}{L^2} \quad (277)$$

$$h^3 \frac{d^2 P}{dx^2} - 3h^2 \frac{dh}{dx} \frac{dP}{dx} = 12\mu \frac{dh}{dt} + 8 \frac{P(\theta,0)h^3}{L^2} \quad (278)$$

ทำการเปลี่ยนอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 เมื่อเทียบกับวิธีผลต่างศูนย์กลาง (Central difference) จะได้

$$\left(\frac{dP}{dx} \right)_{i,k} = \frac{P_{i,k} - P_{i+1,k}}{2\Delta x} \quad (279)$$

$$\left(\frac{d^2 P}{dx^2} \right)_{i,k} = \frac{P_{i+1,k} - 2P_{i,k} + P_{i-1,k}}{\Delta x^2} \quad (280)$$

และ

$$P_{i-1} \left(\frac{h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{3h_i^2}{2\Delta x} \frac{dh_i}{dx} \right) + P_i \left(-\frac{2h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{2h_i^3}{L^2} \right) + P_{i+1} \left(\frac{h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{3h_i^2}{2\Delta x} \frac{dh_i}{dx} \right) = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (281)$$

$$P_{i-1} \left(\frac{h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{3h_i^2}{2\Delta x} \frac{dh_i}{dx} \right) + P_i \left(-\frac{2h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{8h_i^3}{L^2} \right) + P_{i+1} \left(\frac{h_i^3}{\Delta x^2} - \frac{3h_i^2}{2\Delta x} \frac{dh_i}{dx} \right) = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (282)$$

ทำการเขียนสมการใหม่โดยการใช้ระบบเมทริกซ์ทำการหาค่า ซึ่งจะกำหนดขอบเขตเริ่มต้นของการไหลของน้ำมันดังนี้

$$\begin{cases} \frac{dP}{dx} = 0 \\ P = P_{vapour} \end{cases} \quad (283)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปของวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ในเทอมของ

$$P_{i,k} = P_{vap} \quad \text{และ} \quad P_{i,k} < P_{vap} \quad (284)$$

2.7.3 แรงไฮโดรไดนามิกส์และสัมประสิทธิ์การเคลื่อนที่

แรงที่เกิดขึ้นภายในสามารถคำนวณได้โดยการอินทิเกรต (Integrate) ฟังก์ชันการกระจายตัวของความดัน โดยแรงในแนวแกน X และ Y สามารถหาได้ดังนี้

$$F_x = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \cos \theta \cdot R d\theta dz \quad (285)$$

$$F_y = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P(\theta, z) \sin \theta \cdot R d\theta dz \quad (286)$$

ถ้าทราบการกระจายตัวของความดันภายในฟิล์มน้ำมัน (Oil film) ก็สามารถใช้ระเบียบการเชิงตัวเลข (Numerical) ของวิธีซิมสัน (Symson method) โดยค่าความหน่วงและค่าสติฟเนส จะมีค่าเป็น

$$[C_{ij}]_{2 \times 2} = \left[-\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right] ; \quad [K_{ij}]_{2 \times 2} = \left[-\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right] \quad (287)$$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและสติฟเนส สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$K_o = -\frac{F_r}{\dot{e}} ; \quad C_o = -\frac{F_\tau}{\dot{e}} \quad (288)$$

เมื่อค่า F_r และ F_τ คือแรงไฮโดรไดนามิกส์ (Hydrodynamic force) ในแนวรัศมีและแนวตั้งฉากกับรัศมี

ทำการเปลี่ยนระบบพิกัด (X,Y) ไปเป็นระบบพิกัดการหมุน (Rotating Coordinate) (r, τ) จะได้สมการใหม่เป็นดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_\tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (289)$$

2.7.4 รูปแบบการประมาณค่าตัวหน่วง

การหาค่าตัวหน่วงนั้นจะใช้สมการเรโนลด์ (Reynolds) โดยมีสมมติฐานดังต่อไปนี้

1. การออกแบบได้พิจารณาถึงน้ำหนักสมดุลของโรเตอร์ในขณะหมุนอยู่ในแบร์ริง
2. การกระจายตัวของน้ำมันจะต้องสมมาตรกัน

จากสมมติฐานข้างต้นสามารถสรุปสมการออกมาเป็นตัวหน่วงที่มีขนาดสั้น (Short damper) และตัวหน่วงที่มีขนาดยาว (Long damper) ดังตาราง 3

ตาราง 3 แสดงสมการที่ใช้ในการหาค่าสติฟเนส (K) และความหน่วง (C) ในกรณีตัวหน่วงที่มีขนาดสั้นและยาว

ชนิดตัวหน่วง	K	C
Short damper	$\frac{RL^3\mu\omega}{\delta^3} \cdot \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}$	$\frac{RL^3\mu}{2\delta^3} \cdot \frac{\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$
Long damper	$\frac{R^3L\mu\omega}{\delta^3} \cdot \frac{24\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$	$\frac{R^3L\mu}{\delta^3} \cdot \frac{12\pi}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}$

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Sun-Min Kim; et al. เป็นการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในเพลาล้อ และได้พิจารณาถึงผลกระทบที่เกิดจากหน้าสัมผัสระหว่างชิ้นส่วนยึดติดว่ามีผลต่อการสั่นสะเทือนอย่างไร โดยหน้าสัมผัสนี้จะประกอบไปด้วยสลัก (Bolt) จะทำการยึดกันระหว่างหน้าแปลน (Flange) และล้อ (Wheel) และจะมี Taper ที่สัมผัสกับเพลลา (Shaft) และหน้าแปลน (Flange) โดยทำการจำลองในหน้าสัมผัสเป็นแบบสติฟเนส (Stiffness) จากผลการทดลองที่ได้ทั้งการทดลองและการจำลองทางวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical) พบว่า โหมดที่ 1 และ 2 จะมีผลกระทบจากแรงกระทำที่หน้าสัมผัสของ Taper โหมดที่ 3 จะแสดงผลกระทบตรงหน้าสัมผัสระหว่างผิวด้านในและผิวด้านนอกของหน้าแปลน (Flange) โหมดที่ 4 จะแสดงถึงผลกระทบจากจำนวนสลัก (Bolt)

Prandstotter M.; Riener H.; & Steinbatz M. ได้ทำการวิเคราะห์ความล้าที่เกิดขึ้นในเพลลาข้อเหวี่ยง ซึ่งได้พิจารณาถึงน้ำมันหล่อลื่นในแบร์ริง เพื่อให้ผลที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ซึ่งในการวิเคราะห์พบว่าเมื่อมีความเร็วรอบสูง จะทำให้คุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนไป และยังทำให้มีค่าความเค้น (Stress) สูงในบริเวณแบร์ริง

Carlini A.; & Rivola A. ได้ศึกษาการไม่เป็นเชิงเส้น (Non linear) ของเพลาลูกเบี้ยว (Camshaft) ที่มีการรองรับด้วยแบร์ริง ซึ่งได้ทำการจำลองรูปแบบในการวิเคราะห์ที่มีทั้งค่าสติฟเนส (Stiffness) และค่าความหน่วง (Damping) เพื่อใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical) และได้ทำการทดลองเพื่อเปรียบเทียบ โดยมีการพิจารณาถึงน้ำมันหล่อลื่นในแบร์ริงด้วย ซึ่งจากผลการทดลองที่ได้โดยพิจารณาเทอมของความเร็วเชิงมุม และความเร่งของเพลาลูกเบี้ยวพบว่า ผลการทดลองที่ได้จากการทดลองและการคำนวณมีค่าออกมาใกล้เคียงกัน

M. Leontiev ได้ทำการเขียนรายงานเรื่อง “ Damping Support ” ซึ่งรายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของบริษัท Samsung Aerospace Engine Research & Development Center โดยเนื้อหาของรายงานเป็นการสรุปการหาค่าสติฟเนส (Stiffness) และค่าความหน่วง (Damping) ของโรเตอร์แบร์ริง (Rotor-bearing) ในรูปของสมการที่สามารถคำนวณหาค่าได้โดยง่าย

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

บทที่ 3 จะกล่าวถึงวิธีดำเนินการวิจัย ได้แก่ อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย วิธีดำเนินการวิจัย ดังรายละเอียดดังนี้

3.1 อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเพื่อศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติของเครื่องยนต์สันดาปภายในมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณและวิเคราะห์ โดยมีรายละเอียดดังนี้ Microsoft Window XP, Pentium 4 CPU 1.5 GHz, Ram 1.00 GB, Hard Disk 40 GB.
2. ชิ้นส่วนเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนสูบเดี่ยวของ ฮอนด้า รุ่น G200 มีส่วนประกอบคือ ลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยง เพื่อใช้ในการจำลองรูปร่างและวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติ
3. เวอร์เนียร์คาร์ลิปเปอร์ ที่ใช้ในการวัดชิ้นส่วนเครื่องยนต์
4. โปรแกรม SolidWorks 2004 และ โปรแกรม ANSYS 9.0

3.2 วิธีดำเนินการวิจัย

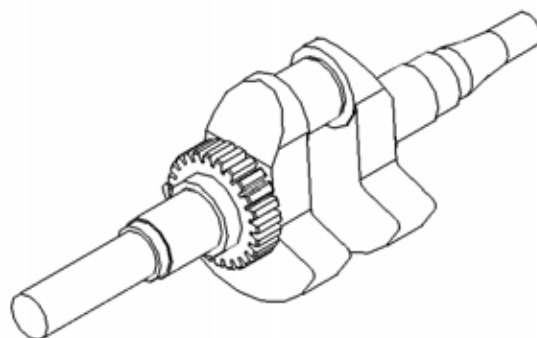
ในขั้นตอนนี้จะกล่าวถึงวิธีดำเนินการวิจัยอย่างละเอียดและวิธีการคำนวณ เพื่อนำไปสู่ผลการวิจัยที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม ANSYS 9.0 โดยจะแบ่งการวิจัยที่ได้ออกเป็น เครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัสระหว่าง ลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง ดังรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.2.1 เครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

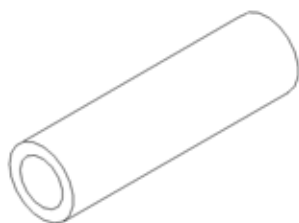
1. ทำการวัดชิ้นส่วนเครื่องยนต์โดยใช้เวอร์เนียร์คาร์ลิปเปอร์วัดขนาดชิ้นส่วนเครื่องยนต์ ซึ่งขนาดที่ได้ดูได้จากภาคผนวก ค. จากนั้นจึงทำการจำลองชิ้นส่วนเครื่องยนต์โดยใช้โปรแกรม SolidWorks และบันทึกไฟล์เป็น ACIS file (.SAT) ดังภาพประกอบ 24
2. เปิดโปรแกรม ANSYS แล้วเปิดแฟ้มแบบจำลองที่ได้จากโปรแกรม SolidWorks (ACIS file) โดยเปิดไฟล์ข้อมูลทำการวิเคราะห์ที่ละชิ้นส่วนเข้ามาในโปรแกรม ANSYS ดังภาพประกอบ 25



(ก)



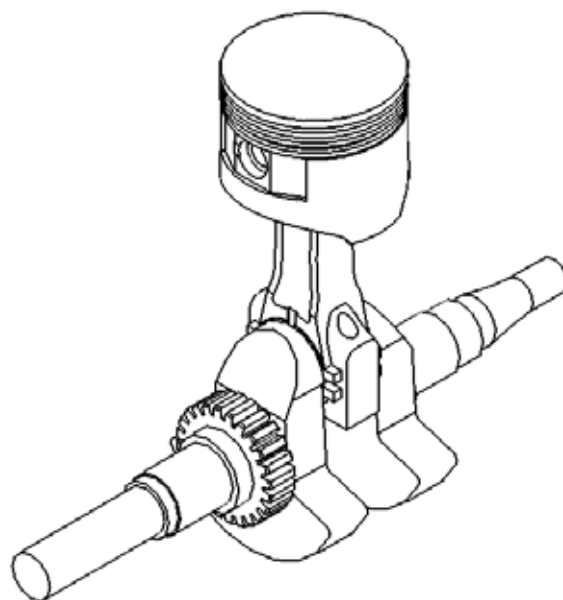
(ง)



(ข)

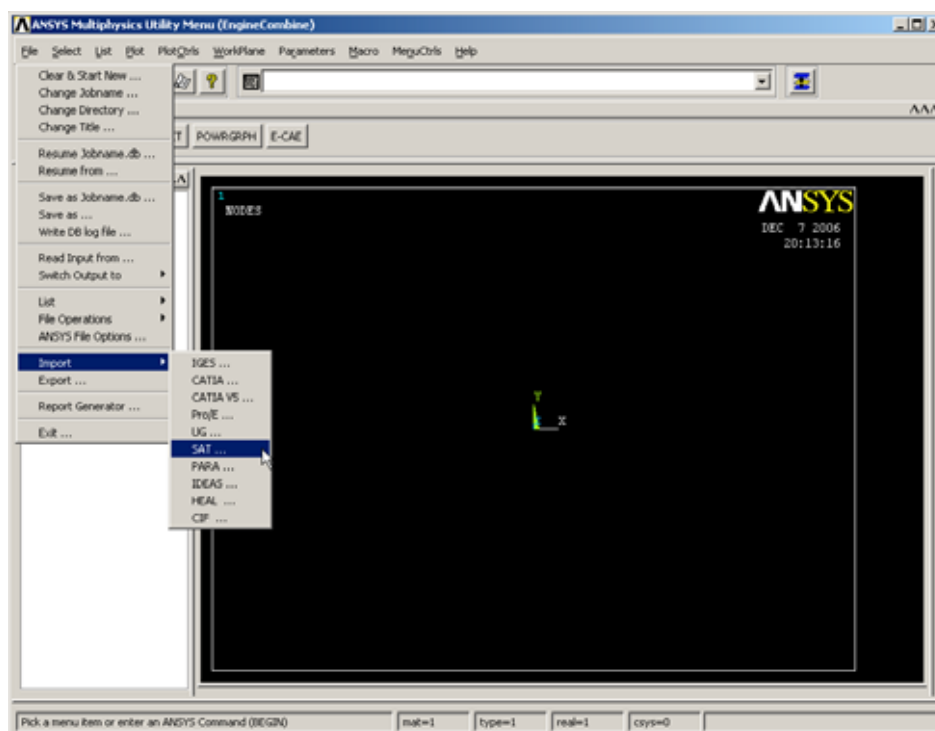


(ค)



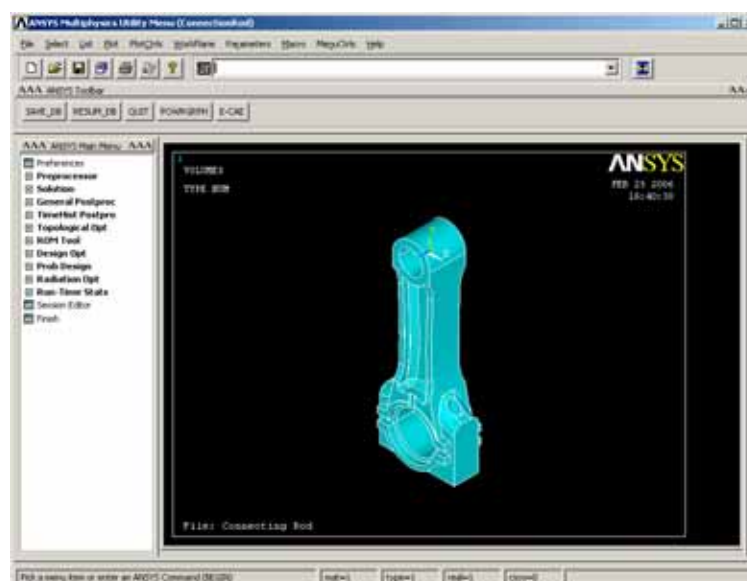
(จ)

ภาพประกอบ 24 แสดงชิ้นส่วนของเครื่องยนต์สันดาปภายใน (ก) ลูกสูบ (ข) สลักลูกสูบ (ค) ฝาปิดลูกสูบ (ง) เฟลาข้อเหวี่ยง (จ) ชิ้นส่วนประกอบเข้าด้วยกัน



ภาพประกอบ 25 แสดงการเปิดไฟล์ข้อมูล ACIS

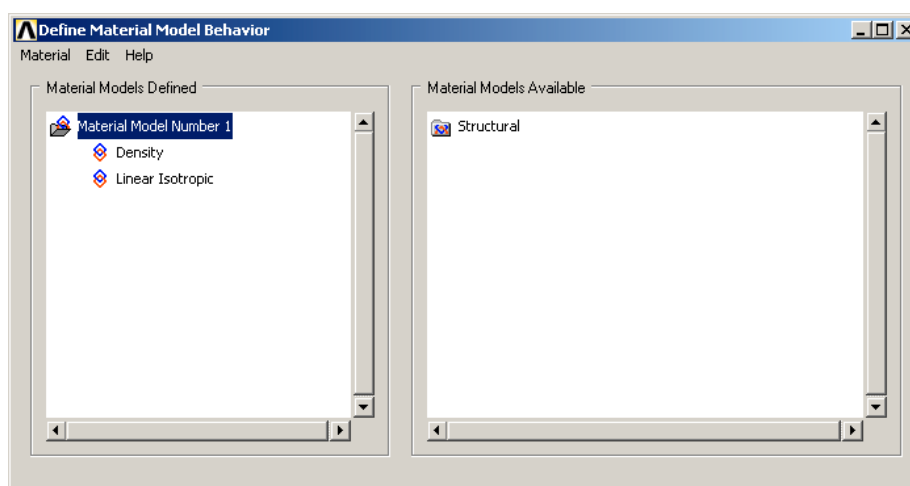
3. แบบจำลองที่ได้จะแสดงอยู่บนพื้นที่การทำงานของโปรแกรมดังภาพประกอบ 26 จากนั้นจะทำการกำหนดสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ตามตาราง 4 โดยในโปรแกรมจะแสดงข้อมูลดังภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 26 แสดงก้านสูบอยู่บนพื้นที่การทำงานของโปรแกรม

ตาราง 4 แสดงสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ที่ใช้ในการวิจัย

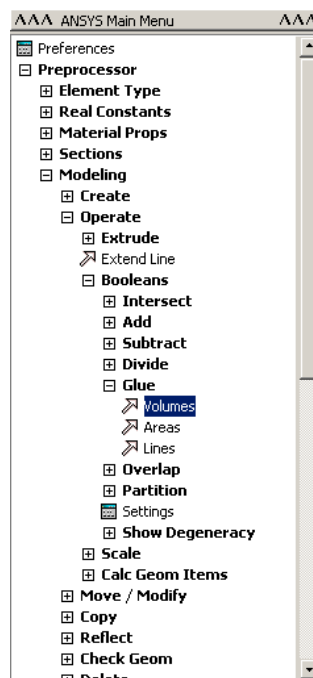
ชิ้นส่วน เครื่องยนต์	ชนิดวัสดุ	ความหนาแน่นมวล (kg / m ³)	โมดูลัสยืดหยุ่น (Pa)	อัตราส่วน ปัวซอง
ลูกสูบ	Aluminium-Si/Mg Cast Alloy	2.7e+3	7.1e+10	0.33
สลักลูกสูบ	Cast Steel	7.85e+3	2e+11	0.31
ก้านสูบ	Aluminium-Copper Cast Alloy	2.9e+3	7.1e+10	0.33
เพลาค้อ เหวี่ยง	Cast Steel	7.85e+3	2e+11	0.31



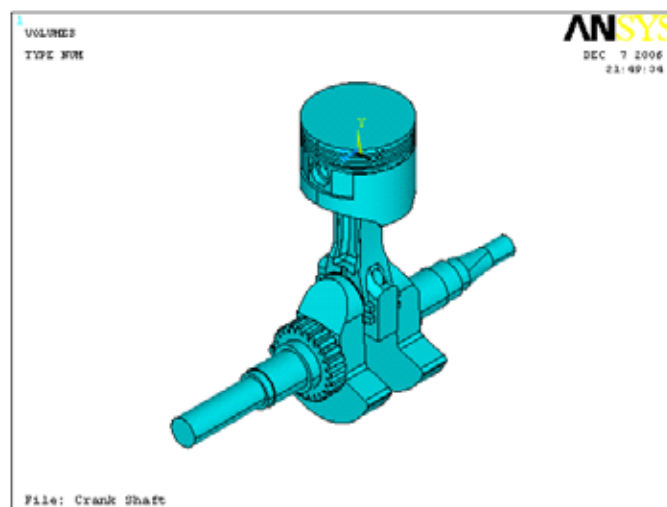
ภาพประกอบ 27 แสดงหน้าต่างในการกำหนดสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์

4. ในกรณีนี้จะพิจารณาชิ้นส่วนประกอบเป็นชิ้นเดียวกันโดยใช้คำสั่ง Glue เพื่อให้ชิ้นส่วนยึดติดกันเหมือนเป็นชิ้นเดียวกัน ดังภาพประกอบ 28 และ 29

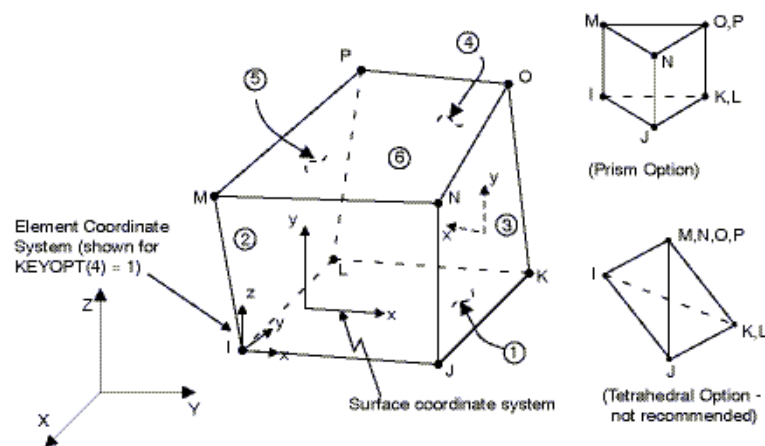
5. ทำการเจนเนอร์เรตเมช (Generated mesh) โดยเลือกใช้เอลิเมนต์ SOLID45 ในโปรแกรม ANSYS ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สามมิติดังภาพประกอบ 30



ภาพประกอบ 28 แสดงการใช้คำสั่ง Glue

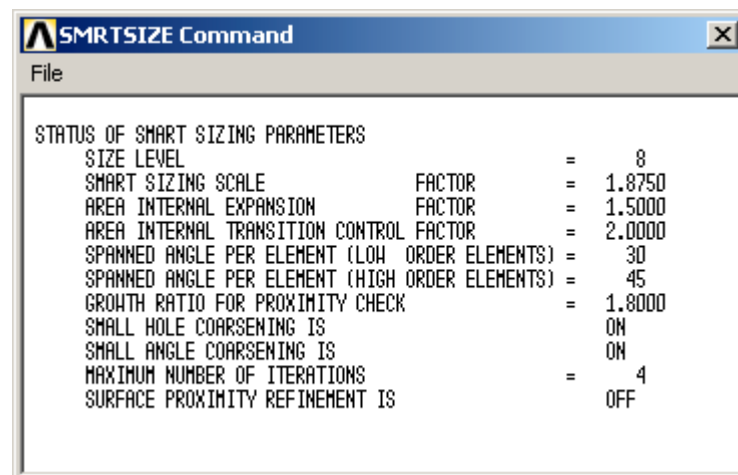


ภาพประกอบ 29 แสดงชิ้นส่วนของเครื่องยนต์ประกอบเป็นชิ้นเดียว



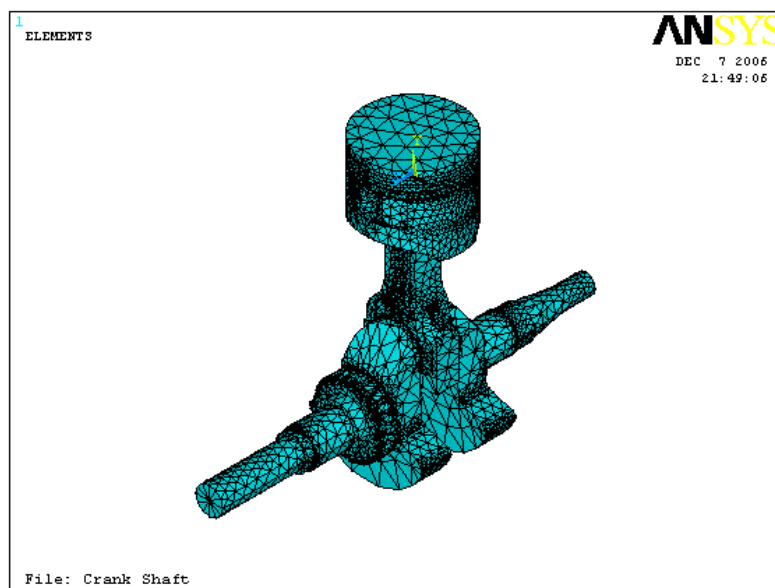
ภาพประกอบ 30 แสดงชนิดเอลิเมนต์ SOLID45 ในโปรแกรม ANSYS

และทำเจเนอเรทเมชโดยเลือกแบบอัตโนมัติ โดยเลือก Smart Size 8 โดยมีค่าตั้งต้นในการเจเนอเรทเมชดังภาพประกอบ 31



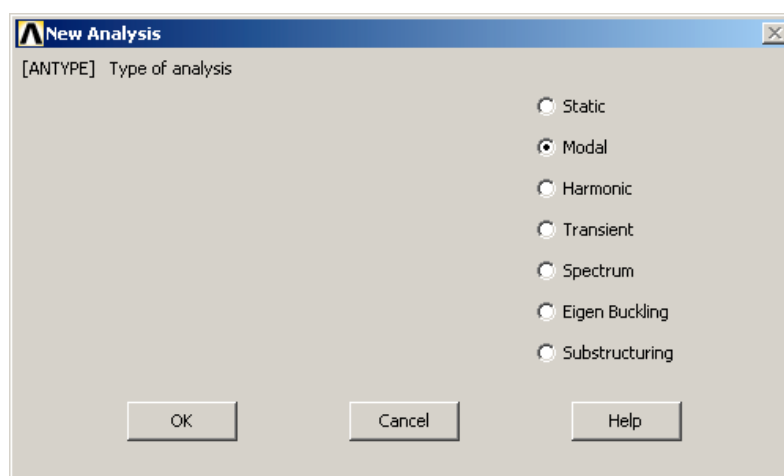
ภาพประกอบ 31 แสดงค่าตั้งต้นในการทำเจเนอเรทเมชอัตโนมัติ

ผลที่ได้จากการเจเนอเรทเมชพบว่า ลูกสูบมีจำนวนเอลิเมนต์ 13,318 เอลิเมนต์ 3,898 โหนด, สลักลูกสูบ 1,341 เอลิเมนต์ 472 โหนด, ก้านสูบ 20,680 เอลิเมนต์ 5,419 โหนด และเพลลาข้อเหวี่ยง 74,681 เอลิเมนต์ 15,207 โหนด ดังตัวอย่างภาพประกอบ 32

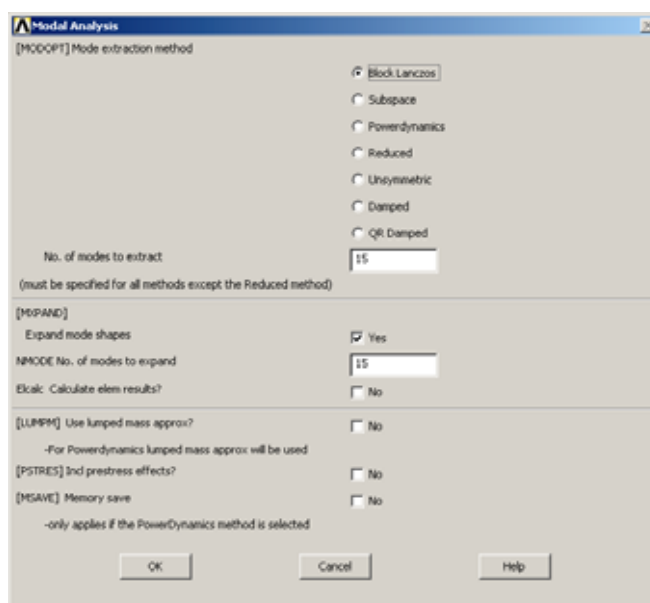


ภาพประกอบ 32 แสดงตัวอย่างที่ได้จากการเจนเนอร์เรตเมช

6. ทำการหาค่าความถี่ธรรมชาติจากโปรแกรมโดยเข้าไปเลือกวิธีการวิเคราะห์แบบโมดัล (Modal Analysis) จากนั้นทำการเลือก Analysis option เพื่อกำหนดวิธีการคำนวณและจำนวนโหมดที่ต้องการทราบ ดังภาพประกอบ 33 และ 34



ภาพประกอบ 33 แสดงการเลือกการวิเคราะห์แบบโมดัล

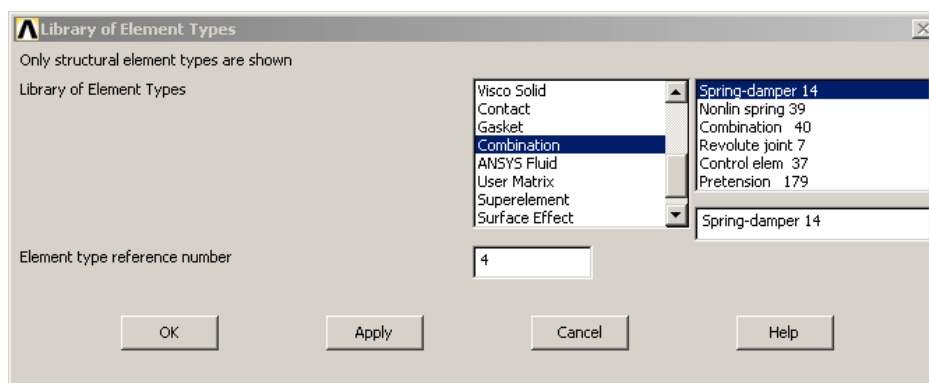


ภาพประกอบ 34 แสดงการเลือกวิธีการวิเคราะห์และจำนวนโหมด

7. ทำการประมวลผลและบันทึกผลการวิจัยที่ได้จากการไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

3.2.2 เครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

1. เปิดโปรแกรม ANSYS แล้วเปิดแฟ้มแบบจำลองจากโปรแกรม SolidWorks (ACIS file) โดยทำการเปิดชิ้นส่วนเข้ามาในโปรแกรม ANSYS ที่ละชิ้นส่วน
2. กำหนดสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ดังตาราง 4
3. ในที่นี้จะพิจารณาชิ้นส่วนเป็นชิ้นเดียวกันแบบมีน้ำมันหล่อลื่น โดยจะใช้เอลิเมนต์ที่ผิวสัมผัส (Contact element) ดังภาพประกอบ 35 มาช่วยในการพิจารณาตรงผิวสัมผัสระหว่างลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง ซึ่งข้อดีของการใช้เอลิเมนต์ที่ผิวสัมผัสคือ สามารถกำหนดค่าความสติฟเนสและค่าความหน่วงที่เกิดขึ้นได้ในน้ำมันหล่อลื่นซึ่งขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความเร็วรอบในการทำงาน โดยวิธีการคำนวณสามารถดูได้ในภาคผนวก ง แต่ในที่นี้จะสรุปผลที่ได้จากการคำนวณดังตาราง 5
4. ทำการเจนเนอร์เรทเมชพบว่า ลูกสูบมีจำนวนเอลิเมนต์ 14,190 เอลิเมนต์ 4,121 โหนด, สลักลูกสูบ 1,620 เอลิเมนต์ 552 โหนด, ก้านสูบ 19,460 เอลิเมนต์ 5,077 โหนด และเพลาช้อเหวี่ยง 67,793 เอลิเมนต์ 14,058 โหนด
5. ทำการคำนวณจากโปรแกรมโดยวิธีโมดัล
6. บันทึกผลการวิจัยที่ได้จากการพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น



ภาพประกอบ 35 แสดงการเลือกใช้เอลิเมนต์ที่ผิวสัมผัส

ตาราง 5 แสดงค่าที่ได้จากการคำนวณหาค่าสติฟเนสและค่าความหน่วงของน้ำมันหล่อลื่น

ชนิดของน้ำมันหล่อลื่น	อุณหภูมิ 140°C , 1400 rpm		อุณหภูมิ 160°C , 2500 rpm		อุณหภูมิ 180°C , 3600 rpm	
	K (N/m)	C (Ns/m)	K (N/m)	C (Ns/m)	K (N/m)	C (Ns/m)
SAE 30	542.39	6.6576	702.75	4.8306	768.75	3.6697
SAE 40	660.57	8.1083	841.54	5.7846	907.87	4.3337
SAE 50	816.66	10.024	1019.7	7.0095	1082.2	5.166

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับบทนี้ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัยโดยแบ่งออกเป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น
2. ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น
3. ผลการเปรียบเทียบเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

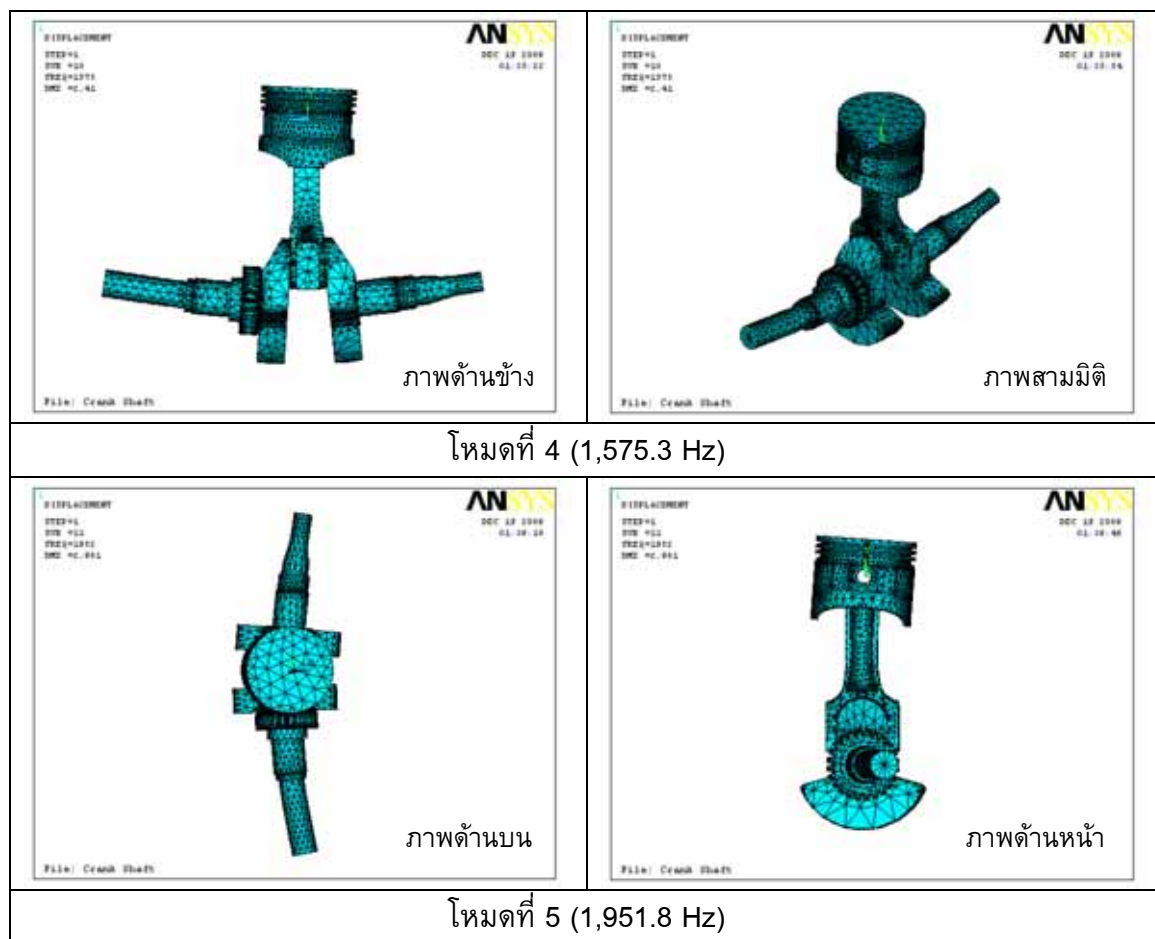
4.1 ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัสระหว่างลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง มีผลการวิจัยแสดงดังตาราง 6 และ ภาพประกอบ 36

ตาราง 6 แสดงความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

โหมดที่	ผลที่ได้จากการวิจัย		สมบัติของเครื่องยนต์	
	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ใช้งาน (Hz)	ความเร็วรอบ เครื่องยนต์ (rpm)
1	532.11	31,926.6	23.3 – 60	1,400 – 3,600
2	687.12	41,227.2		
3	1,256.8	75,408		
4	1,575.3	94,518		
5	1,951.8	117,108		

จากตาราง 6 พบว่าโหมดที่ 1 มีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 532.11 Hz เมื่อเทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 31,926.6 rpm, โหมดที่ 2 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 687.12 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 41,227.2 rpm, โหมดที่ 3 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,256.8 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 75,408 rpm, โหมดที่ 4 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,575.3 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 94,518 rpm และโหมดที่ 5 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,951.8 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 117,108 rpm จะเห็นได้ว่าค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบที่ได้มีค่ามากกว่าความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบใช้งานของเครื่องยนต์มาก แสดงว่าโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องไม่เกิดขึ้น



ภาพประกอบ 36 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น (ต่อ)

จากภาพประกอบ 36 พบว่าโหมดที่ 1 เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีการกระจัดเท่ากับ 2.519 mm. โหมดที่ 2 เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีการกระจัดเท่ากับ 2.9 mm. โหมดที่ 3 เมื่อมองด้านหน้าจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีการกระจัดเท่ากับ 2.426 mm. โหมดที่ 4 เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช่อเหวี่ยงและมีการกระจัดเท่ากับ 2.41 mm. โหมดที่ 5 เมื่อมองด้านบนจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช่อเหวี่ยงและมีการกระจัดเท่ากับ 2.981 mm. จะเห็นว่าแต่ละโหมดเกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่ไม่เหมือนกัน

4.2 ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

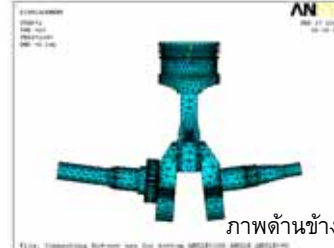
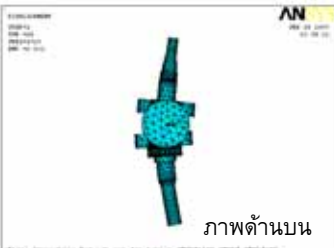
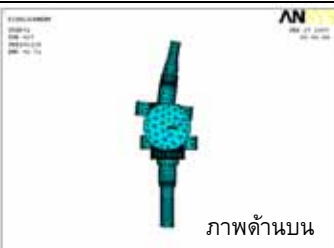
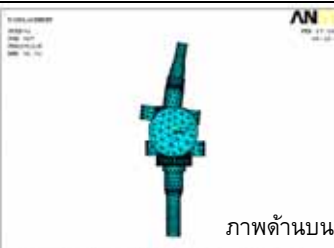
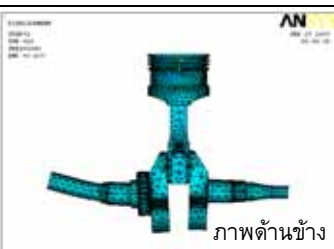
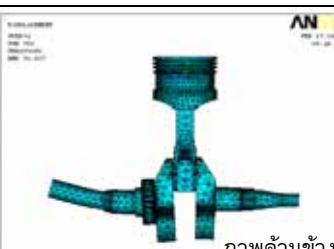
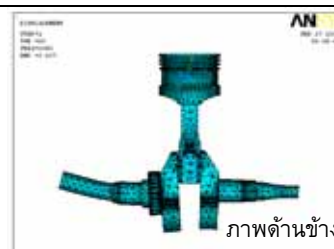
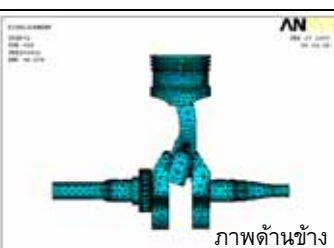
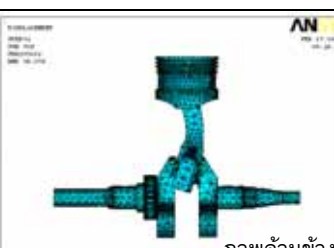
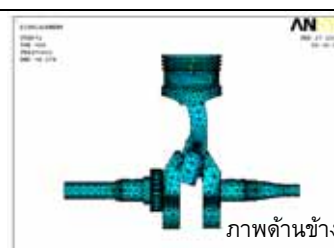
ผลการวิจัยเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัสระหว่างลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง ซึ่งพารามิเตอร์ที่ทำการศึกษาคือ ชนิดของน้ำมันหล่อลื่น อุณหภูมิ และความเร็วรอบของเครื่องยนต์ มีผลการวิจัยแสดงดังตาราง 7 และภาพประกอบ 37 - 42

ตาราง 7 แสดงความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

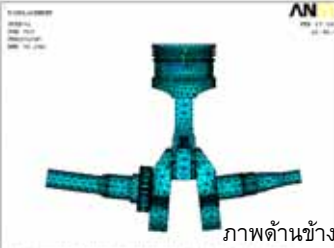
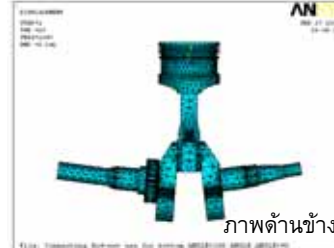
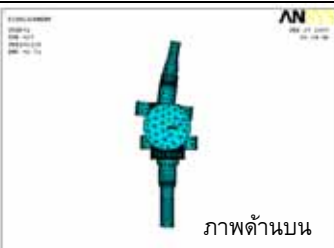
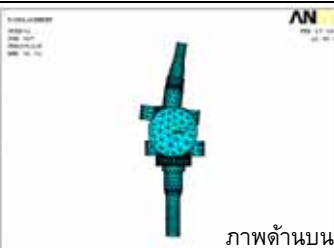
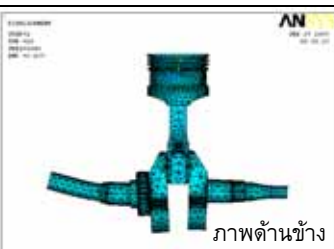
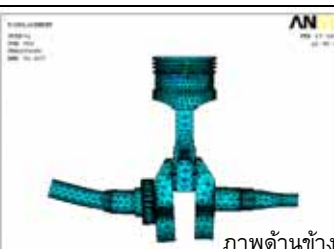
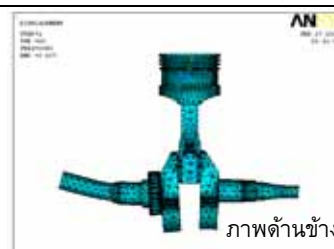
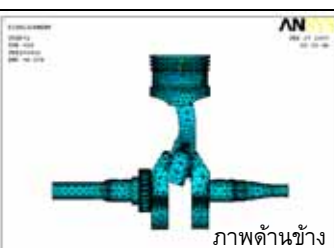
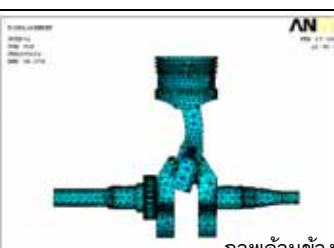
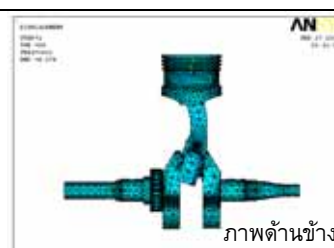
โหมดที่	ผลที่ได้จากการวิจัย																		สมบัติของ เครื่องยนต์	
	SAE 30						SAE 40						SAE 50						ความถี่ใช้งาน (Hz)	ความเร็วรอบเครื่องยนต์ (rpm)
	อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm		อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm		อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm		อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm		อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm		อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm		อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm		อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm		อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm			
	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)	ความถี่ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็วรอบ (rpm)		
1	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	1,346.7	80,802	23.3 – 60	1,400 – 3,600
2	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488	1,724.8	103,488		
3	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346	2,139.1	128,346		
4	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424	3,090.4	185,424		
5	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314	3,821.9	229,314		

จากตาราง 7 พบว่าที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz เมื่อเทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 80,802, 80,802, 80,802 rpm ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ ขณะที่อุณหภูมิ 160 °C ความเร็วรอบ 2500 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz เมื่อเทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 80,802, 80,802, 80,802 rpm ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ และขณะที่อุณหภูมิ 180 °C ความเร็วรอบ 3600 rpm มีค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดที่ 1 เท่ากับ 1,346.7, 1,346.7, 1,346.7 Hz เมื่อเทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 80,802, 80,802, 80,802 rpm ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE30, SAE40 และ SAE50 ตามลำดับ

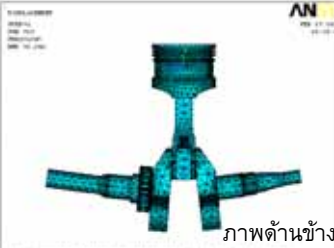
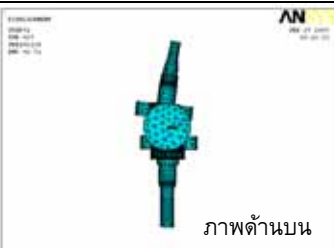
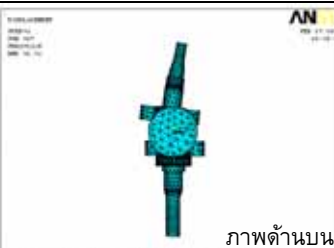
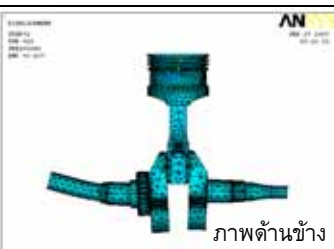
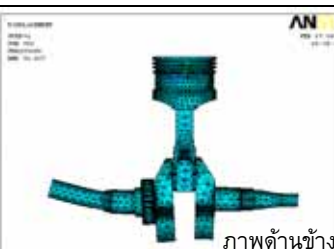
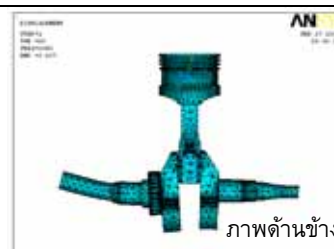
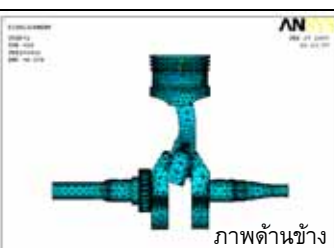
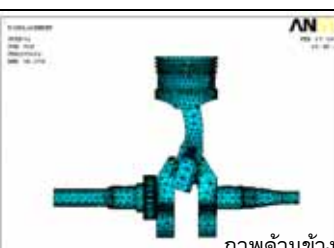
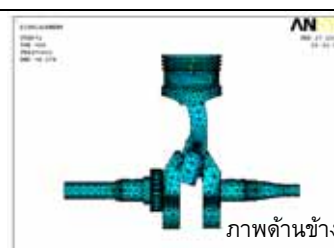
เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นเกรดต่างๆ ณ อุณหภูมิและความเร็วรอบเปลี่ยนแปลง พบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่าเท่ากันในแต่ละโหมด อีกทั้งค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบที่ได้มีค่ามากกว่าความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบใช้งานของเครื่องยนต์มาก แสดงว่าโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องไม่เกิดขึ้น

อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm	อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm	อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 37 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 30

อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm	อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm	อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 38 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40

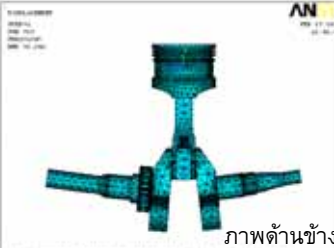
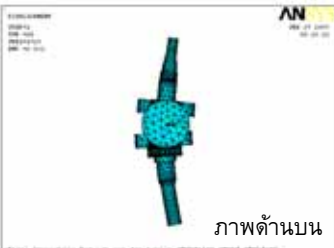
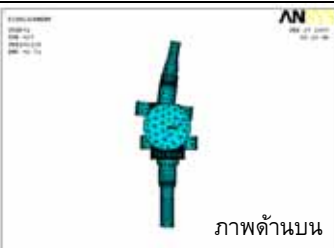
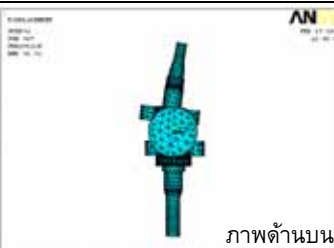
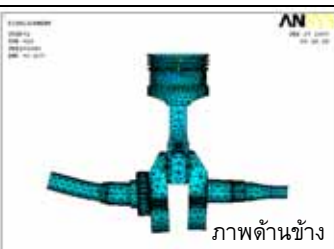
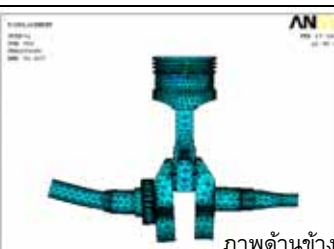
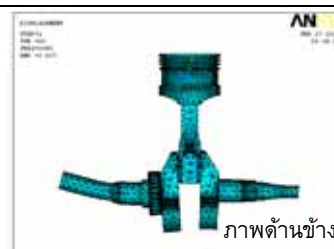
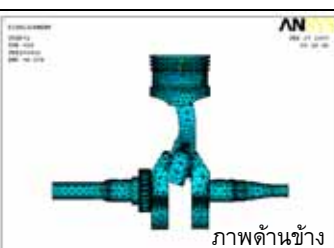
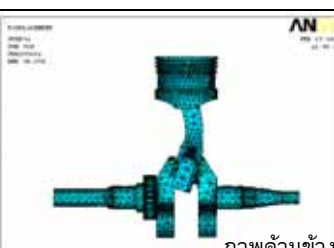
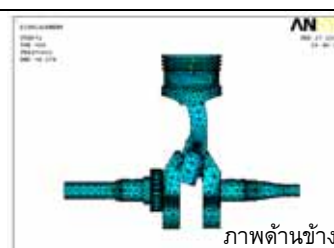
อุณหภูมิ 140 °C, 1400 rpm	อุณหภูมิ 160 °C, 2500 rpm	อุณหภูมิ 180 °C, 3600 rpm
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 39 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 50

SAE 30	SAE 40	SAE 50
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

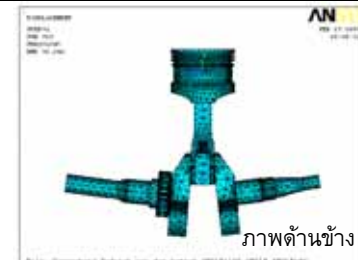
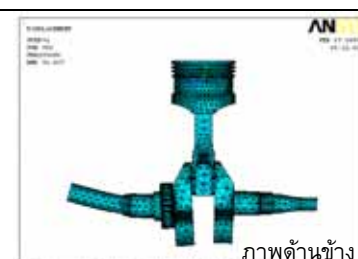
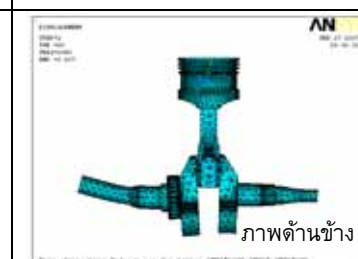
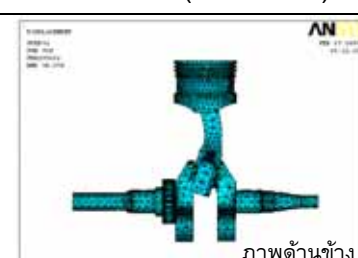
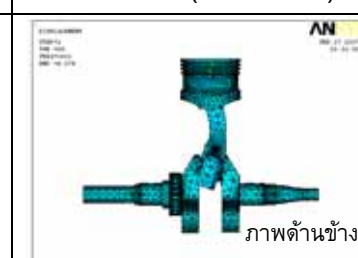
ภาพประกอบ 40 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 140 °C และความเร็รรอบ 1400 rpm

เมื่อพิจารณาที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm และชนิดของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนแปลง พบว่าเกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เหมือนกันและค่าการกระจัดมีค่าเท่ากัน โดยโหมดที่ 1 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 2 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 3 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 4 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 5 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบ

SAE 30	SAE 40	SAE 50
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 41 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 160 °C และความเร็รรอบ 2500 rpm

เมื่อพิจารณาที่อุณหภูมิ 160 °C ความเร็วรอบ 2500 rpm และชนิดของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนแปลง พบว่าเกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เหมือนกันและค่าการกระจัดมีค่าเท่ากัน โดยโหมดที่ 1 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 2 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 3 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 4 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 5 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบ

SAE 30	SAE 40	SAE 50
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 42 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆ กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 180 °C และความเร็รรอบ 3600 rpm

เมื่อพิจารณาที่อุณหภูมิ 180 °C ความเร็วรอบ 3600 rpm และชนิดของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนแปลง พบว่าเกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เหมือนกันและค่าการกระจัดมีค่าเท่ากัน โดยโหมดที่ 1 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 2 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 3 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 4 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยง โหมดที่ 5 เกิดการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบ

4.3 ผลการเปรียบเทียบเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น โดยกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นจะนำค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C และความเร็รรอบ 1400 rpm มาทำการเปรียบเทียบ เนื่องจากการเปลี่ยนชนิดของน้ำมันหล่อลื่น ณ อุณหภูมิและความเร็รรอบเปลี่ยนแปลง มีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากัน ดังแสดงผลที่ได้ในตารางที่ 8 และภาพประกอบ 43

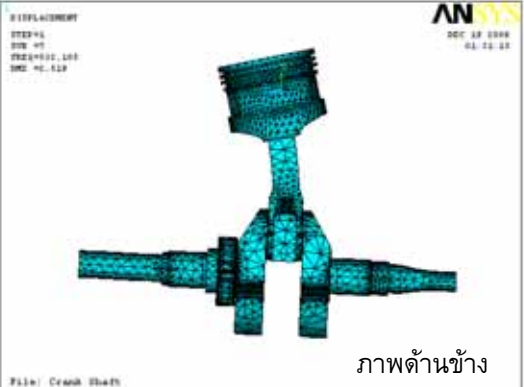
ตาราง 8 แสดงผลการเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นแต่ละโหมดกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

โหมดที่	ผลที่ได้จากการวิจัย				สมบัติของเครื่องยนต์	
	ไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น		พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็รรอบ 1400 rpm		ความถี่ใช้งาน (Hz)	ความเร็รรอบเครื่องยนต์ (rpm)
	ความถี่ ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็ว รอบ (rpm)	ความถี่ ธรรมชาติ (Hz)	ความเร็ว รอบ (rpm)		
1	532.11	31,926.6	1,346.7	80,802	23.3 – 60	1,400 – 3,600
2	687.12	41,227.2	1,724.8	103,488		
3	1,256.8	75,408	2,139.1	128,346		
4	1,575.3	94,518	3,090.4	185,424		
5	1,951.8	117,108	3,821.9	229,314		

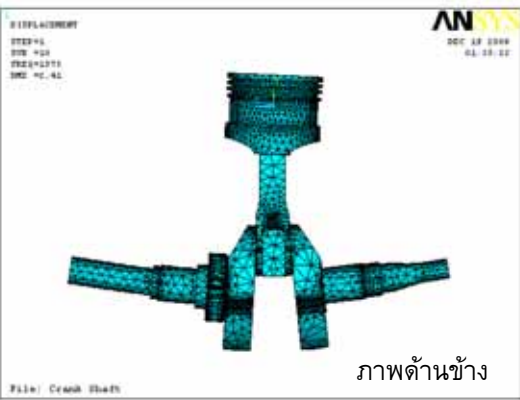
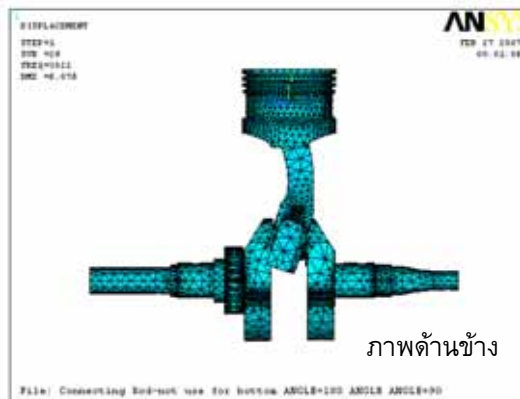
จากตาราง 8 พบว่าโหมดที่ 1 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 532.11 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 31,926.6 rpm และกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,346.7 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 80,802 rpm โหมดที่ 2 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 687.12 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 41,227.2 rpm และกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,724.8 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 103,488 rpm โหมดที่ 3 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,256.8 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 75,408 rpm และกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 2,139.1 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 128,346 rpm โหมดที่ 4 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,575.3 Hz เทียบเป็นความเร็รรอบเท่ากับ 94,518 rpm และกรณีพิจารณาน้ำมัน

หล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 3,090.4 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 185,424 rpm โหมดที่ 5 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,951.8 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 117,108 rpm และกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติ 3,821.9 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบเท่ากับ 229,314 rpm

ดังนั้นกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นจะมีค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบมากกว่ากรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น อีกทั้งยังมากกว่าความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบใช้งานของเครื่องยนต์มาก แสดงว่าโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องไม่เกิดขึ้น

กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น	กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 1 (532.11 Hz)	โหมดที่ 1 (1346.7 Hz)
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 2 (687.12 Hz)	โหมดที่ 2 (1724.8 Hz)
 ภาพด้านหน้า	 ภาพด้านบน
โหมดที่ 3 (1,256.8 Hz)	โหมดที่ 3 (2139.1 Hz)

ภาพประกอบ 43 แสดงผลการเปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น	กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm
 ภาพด้านข้าง	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 4 (1,575.3 Hz)	โหมดที่ 4 (3090.4 Hz)
 ภาพด้านบน	 ภาพด้านข้าง
โหมดที่ 5 (1,951.8 Hz)	โหมดที่ 5 (3821.9 Hz)

ภาพประกอบ 43 แสดงผลการเปรียบเทียบการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดต่างๆกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น (ต่อ)

จากภาพประกอบ 43 พบว่าโหมดที่ 1 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.519 mm. ขณะที่กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.241 mm.

โหมดที่ 2 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.9 mm. ขณะที่กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านบนจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.831 mm.

โหมดที่ 3 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านหน้าจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.426 mm. ขณะที่กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านบนจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาช้อเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.71 mm.

โหมดที่ 4 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาคอเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.41 mm. ขณะที่กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาคอเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 3.837 mm.

โหมดที่ 5 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านบนจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่เพลาคอเหวี่ยงและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 2.981 mm. ขณะที่กรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น เมื่อมองด้านข้างจะเห็นการเปลี่ยนรูปร่างที่ก้านสูบและมีค่าการกระจัดเท่ากับ 6.076 mm.

ดังนั้นกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นจะมีการเปลี่ยนรูปร่างไม่เหมือนกันและค่าการกระจัดไม่เท่ากัน

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติของเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเครื่องยนต์ที่ใช้ในการวิจัยคือ เครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็กยี่ห้อ Honda รุ่น G200 แบบสูบเดี่ยว 4 จังหวะ และพารามิเตอร์ที่ศึกษาคือน้ำมันหล่อลื่น SAE 30, 40 และ 50 วิเคราะห์ที่อุณหภูมิ 140, 160 และ 180 °C ที่ความเร็วรอบที่ 1400, 2500 และ 3600 rpm ตามลำดับ โดยการวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม ANSYS 9.0 ในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติและการเปลี่ยนรูปร่างในแต่ละโหมดเทียบกับความถี่ใช้งานของเครื่องยนต์ ซึ่งแบ่งการวิจัยออกเป็นกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัสระหว่าง ลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ ก้านสูบกับเพลาลูกเบี้ยว

5.1 สรุปผล

5.1.1 เครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการวิจัยพบว่าเมื่อไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบมากกว่าความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบเครื่องยนต์มาก แสดงว่าโอกาสเกิดการสั่นพ้องไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย โดยโหมดที่ 1 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 532.11 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบ 31,926.6 rpm ขณะที่ความถี่ใช้งานมีค่า 23.3 - 60 Hz หรือความเร็วรอบเครื่องยนต์ 1,400 - 3,600 rpm

5.1.2 เครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการวิจัยพบว่าเมื่อพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบมากกว่าความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบเครื่องยนต์มาก แสดงว่าโอกาสเกิดการสั่นพ้องไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย และน้ำมันหล่อลื่น SAE 30, 40 และ 50 ณ อุณหภูมิและความเร็วรอบเปลี่ยนแปลง พบว่ามีค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบเท่ากัน โดยโหมดที่ 1 มีค่าความถี่ธรรมชาติ 1,346.7 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบประมาณ 80,802 rpm ขณะที่ความถี่ใช้งานมีค่า 23.3 - 60 Hz หรือความเร็วรอบเครื่องยนต์ 1,400 - 3,600 rpm

5.1.3 การเปรียบเทียบเครื่องยนต์สันดาปภายในกรณีไม่พิจารณาและพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการวิจัยพบว่าน้ำมันหล่อลื่นมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติหรือความเร็วรอบมีค่าห่างจากความถี่ใช้งานหรือความเร็วรอบเครื่องยนต์มาก ดังนั้นโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องไม่เกิดขึ้นเลย โดยโหมดที่ 1 กรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่า

ความถี่ธรรมชาติ 532.11 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบ 31,926.6 rpm ส่วนกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติประมาณ 1,346.7 Hz เทียบเป็นความเร็วรอบประมาณ 80,802 rpm ขณะที่ความถี่ใช้งานมีค่า 23.3 - 60 Hz หรือความเร็วรอบเครื่องยนต์ 1,400 - 3,600 rpm

5.2 อภิปรายผล

ผลการวิจัยพบว่าชิ้นส่วนเครื่องยนต์สันดาปภายในที่ประกอบเป็นชิ้นเดียวกันและไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นมีค่าความถี่ธรรมชาติต่ำกว่ากรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นอยู่มากนั้น เนื่องจากระบบที่ไม่มีตัวหน่วงจะมีค่าความถี่ธรรมชาติที่แปรผกผันกับมวล ทำให้กรณีที่พิจารณาเป็นชิ้นเดียวและไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นซึ่งมีระดับความเสรี 1 ชิ้น มีค่าความถี่ธรรมชาติที่น้อย เพราะมีมวลของระบบมาก ส่วนกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่ผิวสัมผัสระหว่างลูกสูบกับสลักลูกสูบ สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง ที่มีระดับความเสรี 4 ชิ้น มีค่าความถี่ธรรมชาติมาก เนื่องจากค่าความหน่วงที่ใส่ในระบบมีค่าน้อยมากจึงไม่มีผลต่อระบบ โดยมีค่าอัตราส่วนการหน่วง (Damping ratio) มีค่าเฉลี่ยประมาณ 0.000012 ดังแสดงในภาคผนวก จ ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จะมาจากแต่ละชิ้นส่วนของเครื่องยนต์สันดาปภายใน ซึ่งชิ้นส่วนเครื่องยนต์แต่ละชิ้นมีมวลน้อยกว่ามวลทั้งหมดของระบบ ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่ามาก และกรณีเปลี่ยนชนิดของน้ำมันหล่อลื่นพบว่าค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้มีค่าเท่ากันเนื่องจากค่าสติฟเนสและค่าความหน่วงที่ได้จากการเปลี่ยนชนิดของน้ำมันหล่อลื่นมีค่าไม่แตกต่างกันมาก

5.3 ข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยที่ได้เป็นการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในการทำนาย ดังนั้นควรจะทำการศึกษาทดลองเพื่อเปรียบเทียบกับผลการวิจัยที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- เดช พุทธเจริญทอง. (2548). *การวิเคราะห์การสั่นสะเทือน* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ศูนย์สื่อเสริม กรุงเทพฯ.
- เดช พุทธเจริญทอง. (2542). *การวิเคราะห์โครงสร้างพลศาสตร์*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ศูนย์สื่อเสริม กรุงเทพฯ.
- วิจิต บัวแก้ว, ชีรภัทร หลิมบุญเรือง และ พิสมัย พันธุ์ภัย. (2546). *การใช้โปรแกรม SolidWorks 2001 Plus ช่วยในการออกแบบ*. กรุงเทพฯ: วิรัตน์ เอ็ดดวูเคชั่น จำกัด.
- ธนู ญายาย. (2537). *การสั่นสะเทือนเชิงกล*. กรุงเทพฯ: สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น).
- ธีระยุทธ สุวรรณประทีป. (2539). *หลักการทำงานและการซ่อมบำรุงเครื่องยนต์*. กรุงเทพฯ: ซี เอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- Bhuhana, Bharat (2002). *Introduction to Tribology* , United State of America: John Wiley & Sons, Inc.
- Carlini A.; & Rivola A. *A Non Linear Elastodynamic Model of A Camshaft Supported by Journal Bearing*. (Online). Available from : URL : <http://diem1.ing.unibo.it/mechmach/rivola/pub28.html>. Retrieved April 18, 2002.
- Ewins, D. J. (2000). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Imperial College of Science, Technology and Medicine, London: Research Studies Press Ltd.
- Hatch, Michael R. (2001). *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Department of Mathematics and Statistics, University of Idaho, Michigan State University: John Wiley and Sons.
- Inman, Danel J. (1994). *Engineering Vibration*. Virginia Polytechnic Institute and State University, United State of America: Prentice-Hall Inc.
- Kim, Sun-Min., Ha, Jae-Hoon., Jeong, Sung-Ho. & Lee, Sun-Kyu . (2000). *Effect of Joint Condition on The Dynamic behavior of a Grinding Wheel Spindle*. (Online). Available from : URL : <http://micro.kjist.ac.kr/publication/publication-ij.htm>. Retrieved March 17, 2002.
- Leontiev M., (1996). *Damping Support Rotor-Bearing Dynamics Technology Design Guide*. (Online). Available from URL : <http://www.alfatran.com/solutions.shtml>. Retrieved February 17, 2003

- Prandstotter M., Riener H.; & Steinbatz M. (2002). *Simulation of an Engine Speed-Up Run*. (Online). Available from : URL :
http://mscsoftware.com/support/library/conf/adams/euro/2002/prpers/006_EUC_007_Magna%20Steyr.pdf. Retrieved April 3, 2002.
- Reddy, J. N. (1993). *An Introduction to The Finite Element Method* 2nd ed., Texas A&M University: McGraw-Hill.
- Singiresu, S. Rao (1995). *Mechanical Vibration* 3rd ed., Massachusetts Addison Wesley Reading.
- Stachowiak, Gwidon W. & Batchelor, Andrew W. (2001). *Engineering Tribology* 2nd ed., United State of America: Butterworth-Heinemann.
- Khonsari, Michael M. & Booser, E. Richard (2001). *Applied Tribology Bearing Design and Lubrication*, United State of America: John Wiley & Sons, Inc.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รูปเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนสูบเดียว ยี่ห้อ ฮอนด้า รุ่น G200



ภาพประกอบ 44 รูปเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนสูบเดี่ยว ยี่ห้อ ฮอนด้า รุ่น G200

ภาคผนวก ข
รูปชิ้นส่วนเครื่องยนต์สันดาปภายใน



ภาพประกอบ 45 ลูกสูบ



ภาพประกอบ 46 สลักลูกสูบ



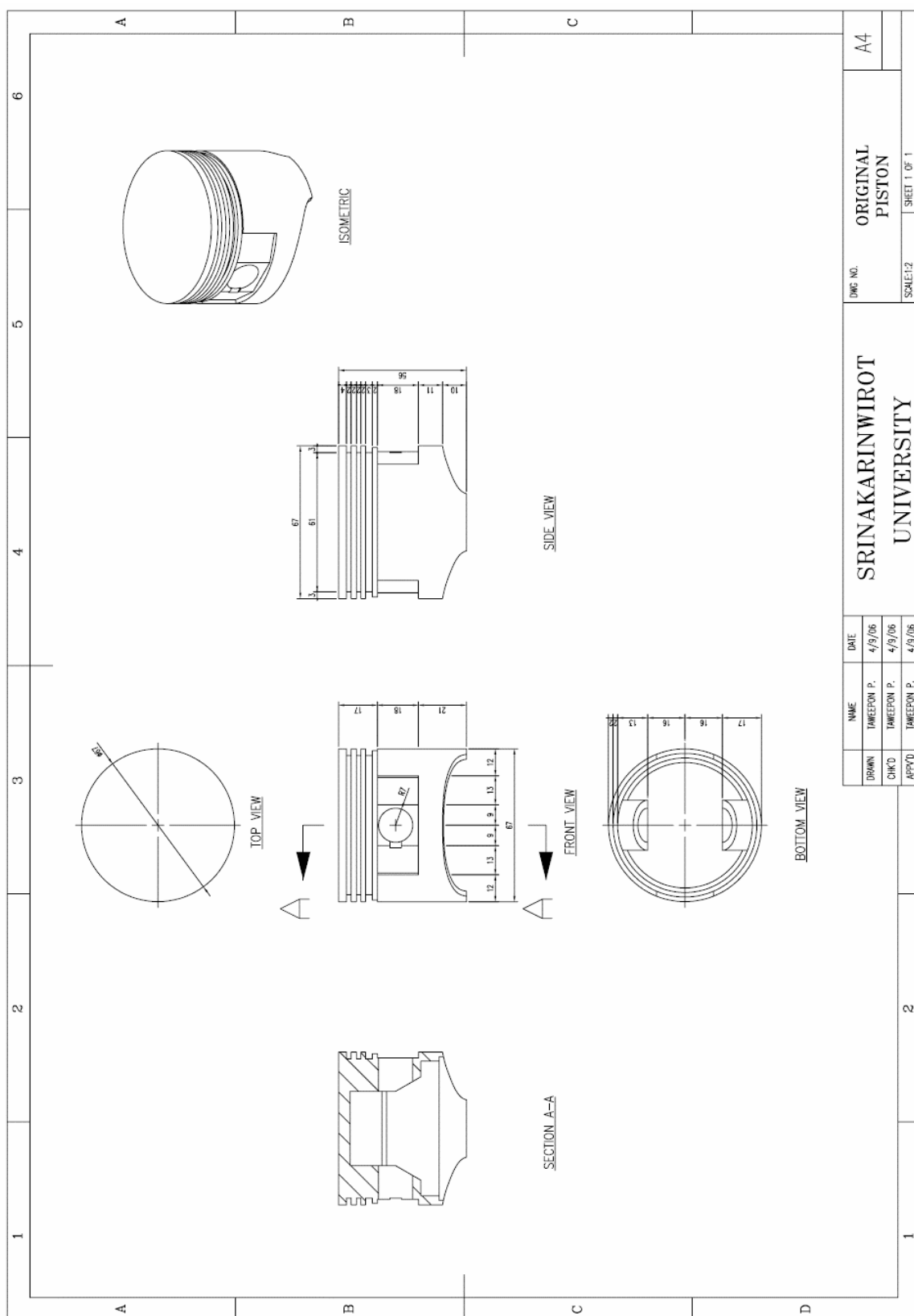
ภาพประกอบ 47 ก้านสูบ



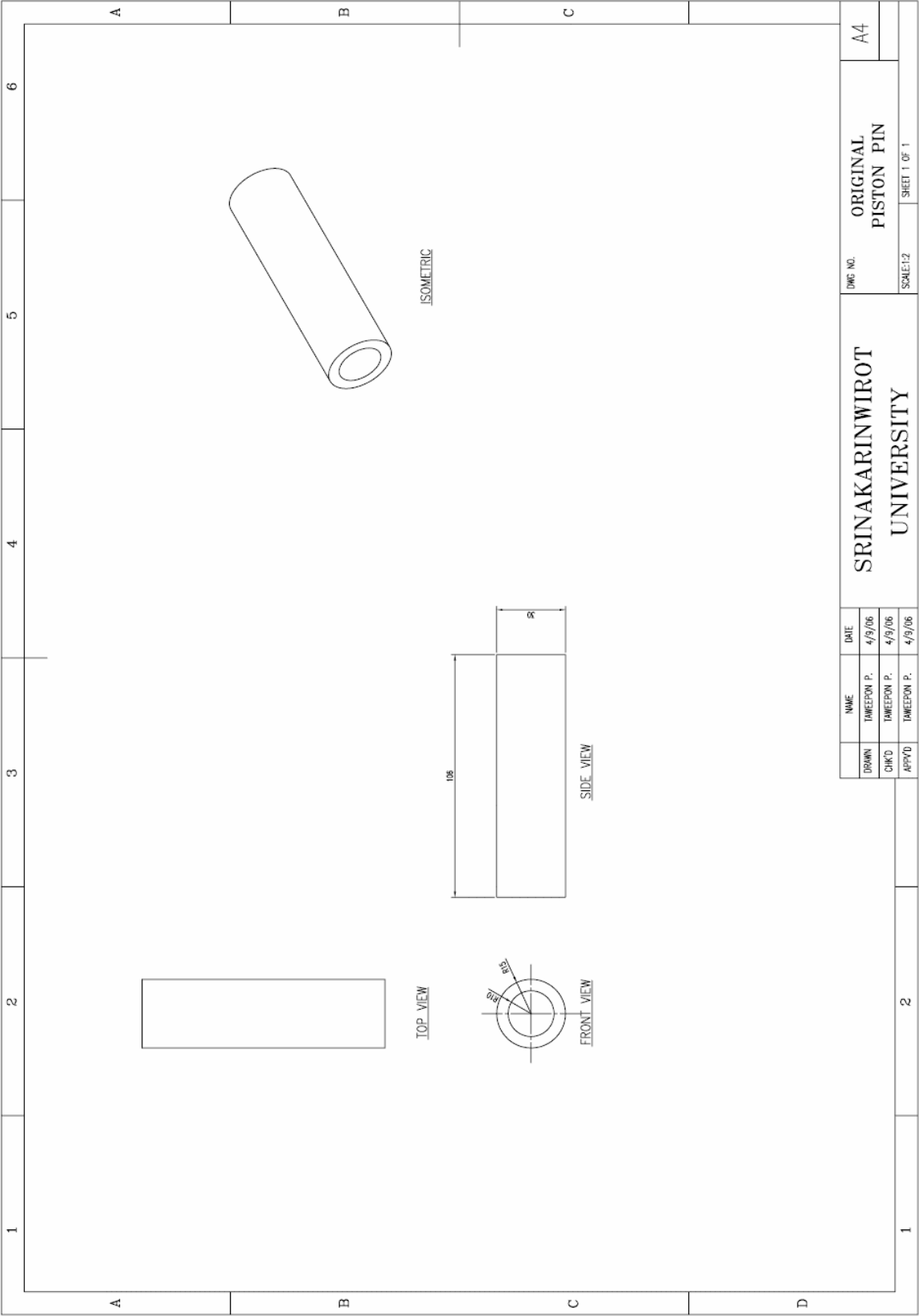
ภาพประกอบ 48 เฟลาข้อเหวี่ยง

ภาคผนวก ค

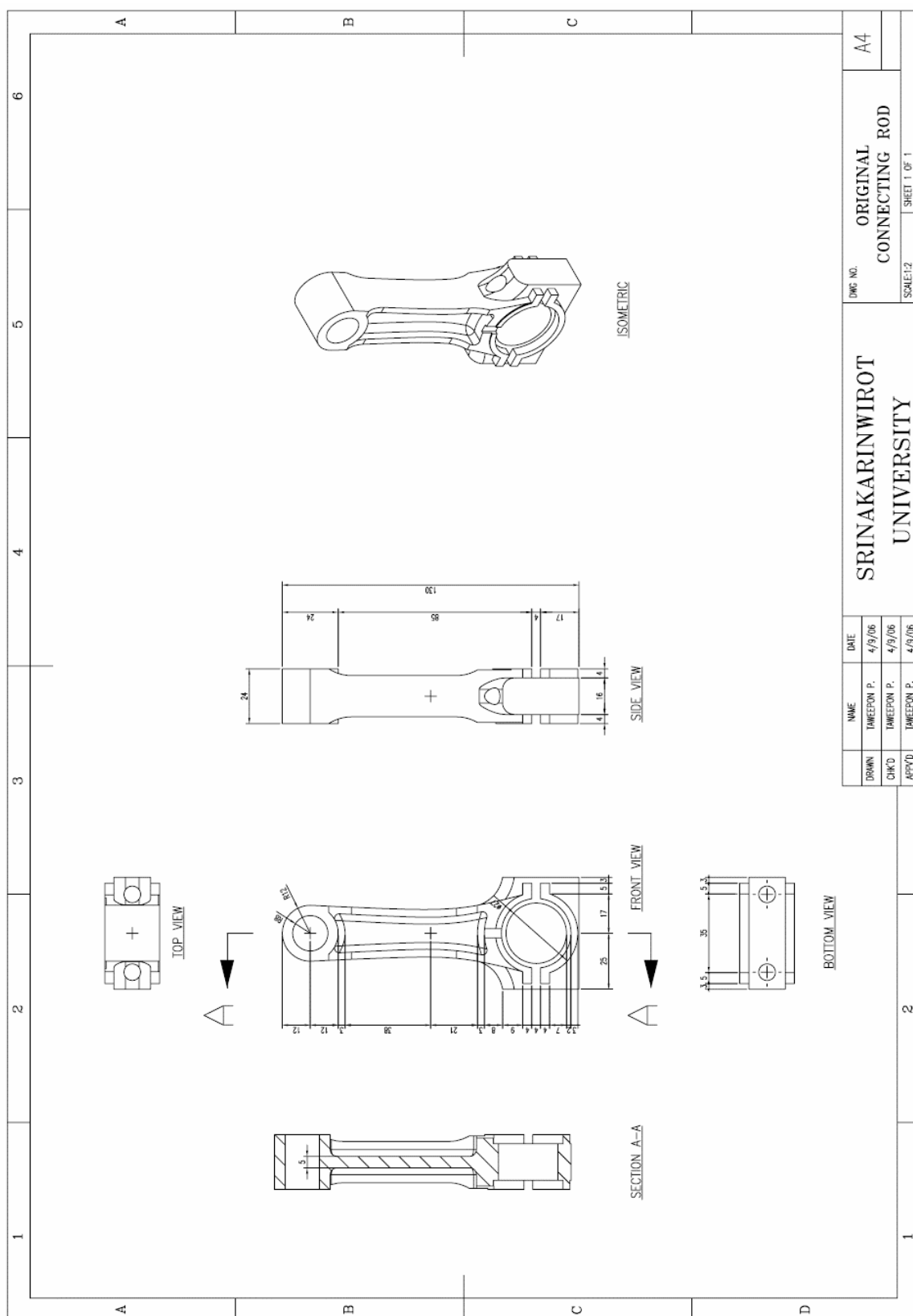
แบบขึ้นส่วนเครื่องยนต์สันดาปภายใน



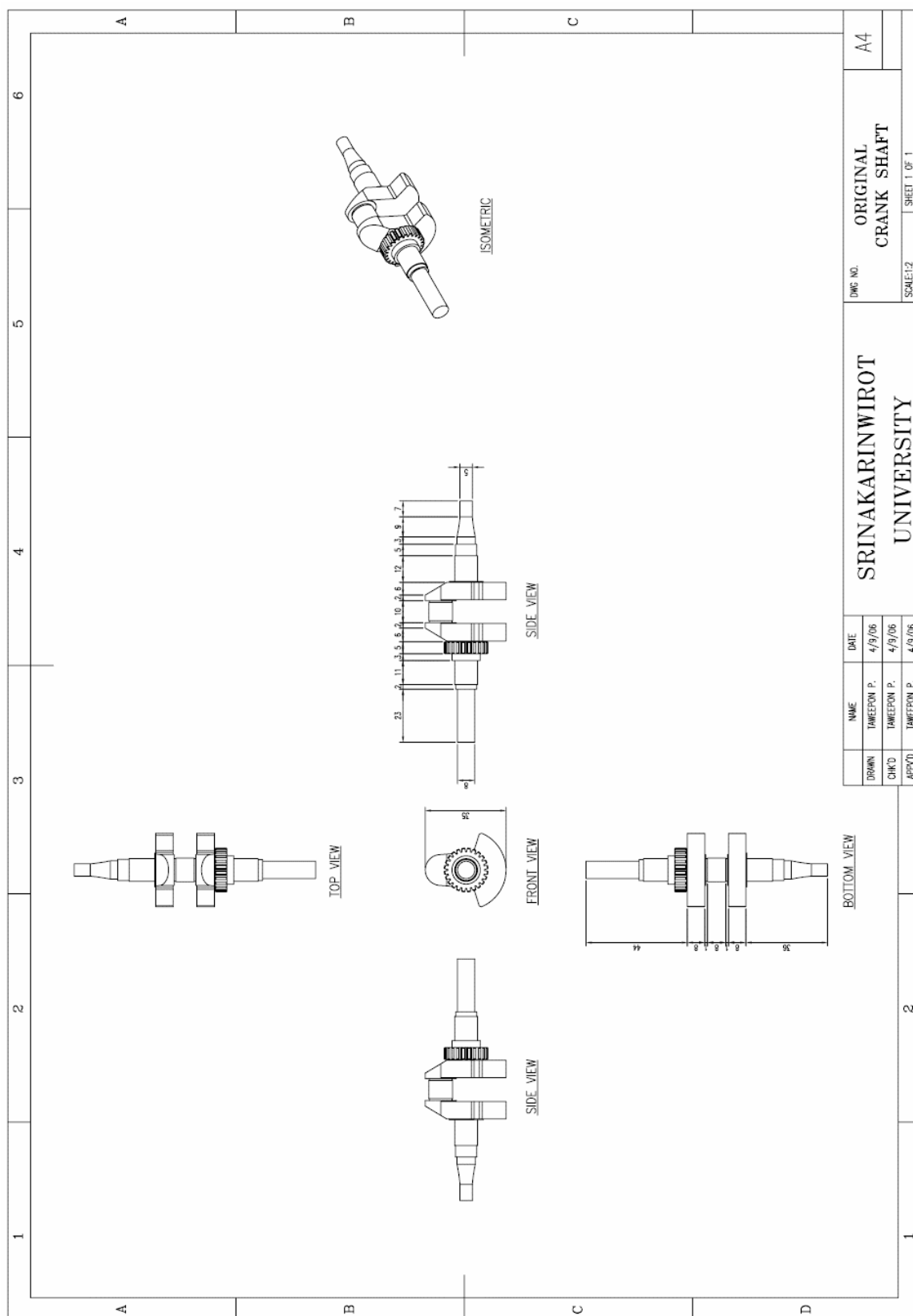
ภาพประกอบ 49 แบบลูกสูบ



ภาพประกอบ 50 แบบสลักลูกสูบ



ภาพประกอบ 51 แบบกำหนด



ภาพประกอบ 52 แบบเพลาค้อเหวี่ยง

ภาคผนวก ง

แสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่าสถิติและความน่าจะเป็น

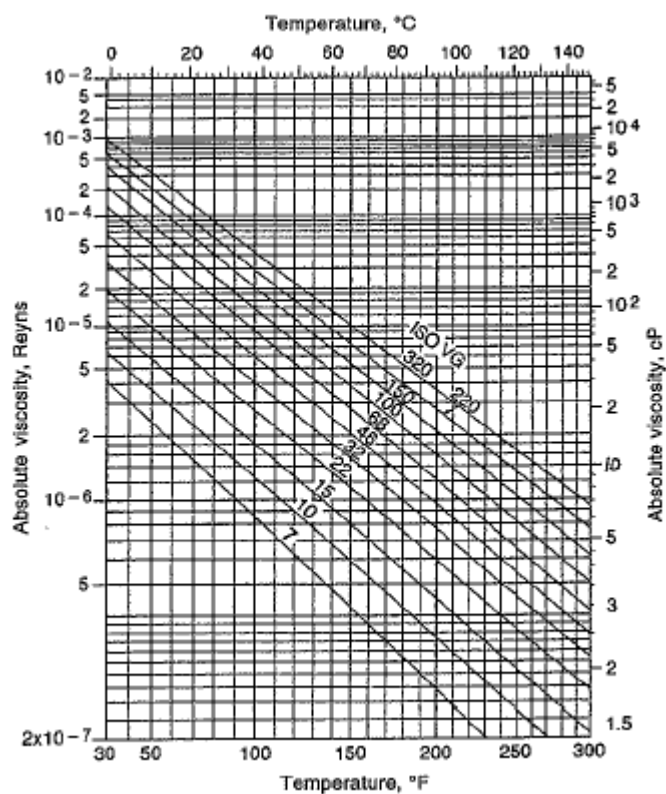
การคำนวณหาค่าสติฟเนสและค่าความหน่วงของน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณหน้าสัมผัส

ในที่นี้จะทำการยกตัวอย่างการคำนวณเพื่อหาค่าสติฟเนสและค่าความหน่วงของน้ำมันหล่อลื่น SAE30 ที่อุณหภูมิ 140°C และความเร็วรอบ 1400 rpm โดยมีค่าความหนืดตามมาตรฐานดังนี้

SAE30 @ 40°C มีค่า 93 cST

@ 100°C มีค่า 10.8 cST

โดยกราฟที่ได้จะเป็นกราฟ loglog ซึ่งจะทำให้เป็นเส้นตรงดังภาพประกอบ 53



ภาพประกอบ 53 แสดงสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นระหว่างความหนืดกับอุณหภูมิ

ตาราง 9 แสดงสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเกรดต่างๆ

Table 2.1. Representative Petroleum Lubricating Oils

Type	Viscosity, mm ² /s (cST)		Flash Point, °C	Pour Point, °C	Specific Gravity At 15°C	Viscosity Index	Common Additives ^a	Uses
	at 40°C	At 100°C						
Automobile (SAE)								
10W	28	4.9	204	-28	0.878	106	R, O, D, VI, P, W, F, M,	Automobile, truck, and marine reciprocating engines
20W	48	7.0	218	-24	0.884	103		
30	93	10.8	228	-20	0.890	100		
40	134	13.7	238	-16	0.895	97		
50	204	17.8	250	-10	0.901	94		
5W-30	65	10.4	210	-36	0.875	147		Railroad diesels Diesels
10W-30	62	10.3	208	-36	0.880	155		
20W-40	138	15.3	246	-21	0.897	114		
15W-40	108	15.0	218	-27	0.885	145		
Gear (SAE)							EP, O, R, P, F	Automotive and industrial gear units
80W-90	144	14.0	192	-22	0.900	93		
85W-140	416	27.5	210	-14	0.907	91	R, O, W, F, VI, F, M	Automotive hydraulic systems
Automatic transmission	38	7.0	188	-40	0.867	140		
Turbine							R, O	Steam turbines, electric motors industrial systems
Light	31	5.4	206	-10	0.863	107		
Medium	64	8.7	220	-6	0.876	105		
Heavy	79	9.9	230	-6	0.879	103	R, O, W	Machine tool hydraulic systems
Hydraulic fluids								
Light	30	5.3	206	-24	0.868	99		
Medium	43	6.5	210	-23	0.871	98		
Heavy	64	8.4	216	-22	0.875	97	R, O, W, VI, P	Aircraft hydraulic systems
Extra low temp	14	5.1	96	-62	0.859	370		
Aviation							D, P, F	Reciprocating aircraft engines
Grade 65	98	11.2	218	-23	0.876	100		
Grade 80	139	14.7	232	-23	0.887	105		
Grade 100	216	19.6	244	-18	0.893	100		
Grade 120	304	23.2	244	-18	0.893	95		

^a R, rust inhibitor; O, oxidation inhibitor; D, detergent-dispersant; VI, viscosity index improver; P, pour-point depressant; W, antiwear; EP, extreme pressure; F, antifoam; and M, friction modifier.

Source: Kennedy et. al. (1998).

แต่เนื่องจากอุณหภูมิที่ต้องการหาค่าความหนืดมีอุณหภูมิ 140 °C ดังนั้นจะต้องทำการหาค่าสัมประสิทธิ์จากอุณหภูมิและค่าความหนืดมาตรฐานดังสมการ (290)

$$\log \log(\nu + 0.7) = A - B \log T \quad (290)$$

ทำการแทนค่าที่ได้ตามมาตรฐาน

$$\begin{aligned} \log \log(93 + 0.7) &= A - B \log(40 + 273.1) \\ \log \log(10.8 + 0.7) &= A - B \log(100 + 273.1) \end{aligned} \quad (291)$$

ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} 0.2948 &= A - 2.4956 \\ 0.02559 &= A - 2.5718 \\ 0.2692 &= 0.0761B \\ B &= 3.5362 \\ A &= 9.1202 \end{aligned} \quad (292)$$

จะได้สมการทั่วไปของ SAE 30 ดังสมการที่ (293)

$$\log \log(\nu + 0.7) = 9.1202 - 3.5362 \log(T + 273.1) \quad (293)$$

ดังนั้นที่อุณหภูมิ 140 °C จะได้

$$\begin{aligned} \log \log(\nu + 0.7) &= 9.1202 - 3.5362 \log(140 + 273.1) \\ \nu &= 4.7966 \text{ cST} \end{aligned} \quad (294)$$

ที่อุณหภูมิ 15.6 °C จะมีความหนาแน่น (Density) 0.89 g/cc ดังนั้นหาค่าความหนาแน่นที่อุณหภูมิ 140 °C จะได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \text{Density @ } 140^\circ\text{C} &= 0.89[1 - 0.00063(140 - 15.6)] \\ &= 0.8202 \text{ g/cc} \end{aligned} \quad (295)$$

ดังนั้นจะได้ค่าความหนืดพลศาสตร์ (Dynamic viscosity)

$$\begin{aligned} \mu_{140^\circ\text{C}} &= 4.7966 \times 0.8202 \\ &= 3.9341 \text{ cP (mPa.s)} \\ &= 3.9341 \times 10^{-3} \text{ Pa.s} \end{aligned} \quad (296)$$

ทำการหาค่า K และ C ดังตาราง 3 ในบทที่ 2 จะได้

$$K = \frac{RL^3 \mu \omega}{\delta^3} \cdot \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (297)$$

$$C = \frac{RL^3 \mu}{2\delta^3} \cdot \frac{\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (298)$$

R	คือ	รัศมีแปรง, m
L	คือ	ความยาวฟิล์มของแปรง, m
μ	คือ	ค่าความหนืดของสารหล่อลื่น, N.s/m ²
ω	คือ	ความเร็วรอบ, s ⁻¹
δ	คือ	ระยะห่างระหว่างเพลากับแปรง, m
ε	คือ	0.4 – 0.5 ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงคงที่ (แนะนำให้ใช้ 0.4)

ทำการแทนค่าจะได้

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{(0.0075)(0.024)^3(3.9341 \times 10^{-3})(146.608)}{(0.0005)^3} \cdot \frac{2(0.4)}{(1-0.4^2)^2} \\
 &= 542.39 \text{ N/m}
 \end{aligned} \tag{299}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{(0.0075)(0.024)^3(3.9341 \times 10^{-3})}{2(0.0005)^3} \cdot \frac{\pi}{(1-0.4^2)^{3/2}} \\
 &= 6.6576 \text{ Ns/m}
 \end{aligned} \tag{300}$$

ภาคผนวก จ

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความเร็วรอบ

สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และความเร็วรอบ

จากผลการทดลองที่ได้ในบทที่ 4 ได้ทราบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากโปรแกรม ANSYS 9.0 ซึ่งสามารถแปลงเป็นความเร็วรอบได้ดังสมการ (301)

$$f = \frac{n}{60} \quad (301)$$

เมื่อ	f	คือ	ความถี่ (Hz)
	n	คือ	ความเร็วรอบ (rpm)

ภาคผนวก จ
การคำนวณหาค่าอัตราส่วนการหมุน

การคำนวณหาค่าอัตราส่วนการหน่วง

ตาราง 10 แสดงผลที่ได้จากโปรแกรมเมื่อพิจารณาที่ SAE 40 ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm

SET	FREQ (Damped)		FREQ (Undamped)	ω_n	ζ (Damping ratio)
1	-9.24E-03	1346.7 j	1346.7	1346.7	-0.0000068616
	-9.24E-03	-1346.7 j			
2	-1.36E-02	1724.8 j	1724.8	1724.8	-0.0000078815
	-1.36E-02	-1724.8 j			
3	-3.03E-03	2139.1 j	2139.1	2139.1	-0.0000014148
	-3.03E-03	-2139.1 j			
4	-9.82E-04	3090.4 j	3090.4	3090.4	-0.0000003177
	-9.82E-04	-3090.4 j			
5	-0.29753	3821.9 j	3821.9	3821.900012	-0.0000778487
	-0.29753	-3821.9 j			

ผลที่ได้จากสมการ FREQ (Damped) แสดงให้เห็นว่าระบบเป็นแบบ Underdamped เนื่องจากผลที่ได้ติดอยู่ในรูปจินตภาพ ดังนั้นสมการแบบ Underdamped จะเป็น

$$\begin{aligned}
 s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\
 \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\
 s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_d
 \end{aligned}
 \tag{302}$$

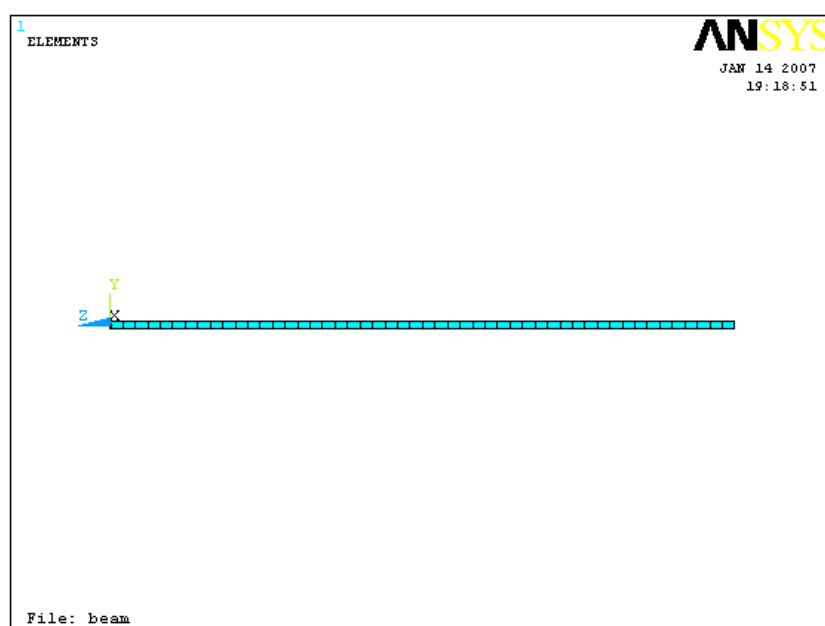
เมื่อ ω_d คือ ความถี่ธรรมชาติแบบมีตัวหน่วง
 ω_n คือ ความถี่ธรรมชาติแบบไม่มีตัวหน่วง
 ζ คือ อัตราส่วนการหน่วง (Damping ratio)

จากความสัมพันธ์ที่ได้ในสมการ (302) สามารถหาอัตราส่วนการหน่วงได้ ดังแสดงในตาราง 10 ซึ่งพบว่าค่าอัตราส่วนการหน่วงมีค่าน้อยมากทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติแบบมีตัวหน่วงมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติแบบไม่มีตัวหน่วงดังแสดงในสมการ FREQ (Undamped)

ภาคผนวก ข
ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม ANSYS 9.0

ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม ANSYS 9.0

หัวข้อนี้จะทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรม ANSYS 9.0 เทียบกับทฤษฎีว่ามีความคลาดเคลื่อนมากหรือน้อย ในที่นี้จะพิจารณาตัวอย่างคานที่มีปลายด้านหนึ่งยึดไว้กับผนังและอีกปลายด้านหนึ่งปล่อยอิสระ โดยคานมีหน้าตัด $0.01 \text{ m} \times 0.01 \text{ m}$ และมีความยาว 1.0 m มีค่า Modulus of Elasticity (E) = $2.068 \text{ e}11 \text{ N/m}^2$ ความหนาแน่น (Density) = 7830 kg/m^3 โดยมีผลการทดลองที่ได้ดังนี้



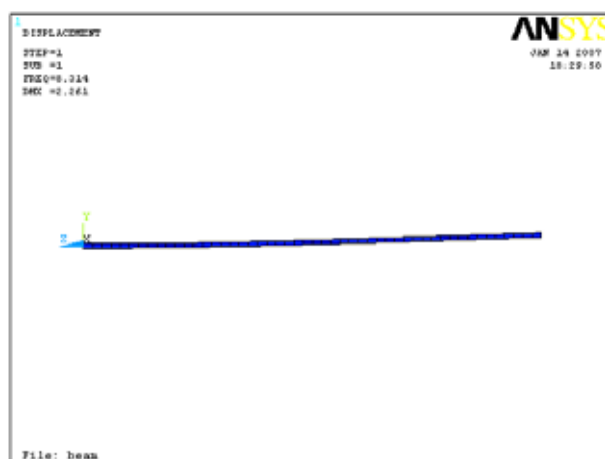
ภาพประกอบ 54 แสดงคานที่มีปลายด้านหนึ่งยึดติดกับผนังและอีกข้างอิสระ

จากภาพประกอบ 54 แสดงการจำลองคานในโปรแกรม ANSYS โดยมีจำนวนโหนดเท่ากับ 204 โหนด และจำนวนเอลิเมนต์เท่ากับ 50 เอลิเมนต์ จากนั้นทำการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติตาราง 11 และการเปลี่ยนรูปร่างที่โหมดที่ 1 - 5 ดังภาพประกอบ 55 - 59

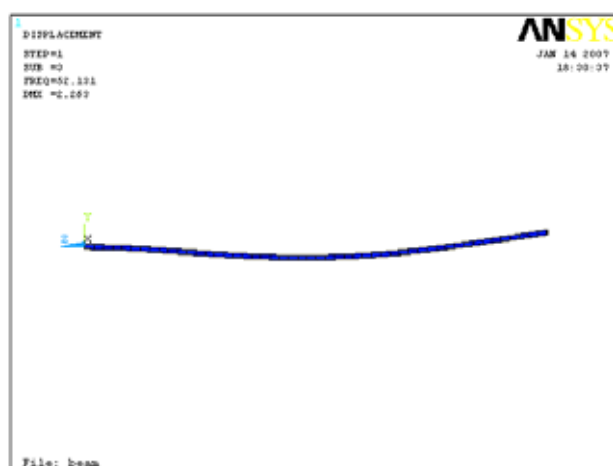
ตาราง 11 แสดงค่าความถี่ที่ได้จากโปรแกรม ANSYS 9.0 เทียบกับทฤษฎี

โหมด	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)		ความแตกต่าง (%)
	ทฤษฎี	โปรแกรม ANSYS 9.0	
1	8.311	8.3141	0.04
2	51.94	52.131	0.37
3	145.68	146.15	0.32
4	285.69	286.96	0.44
5	472.22	475.67	0.73

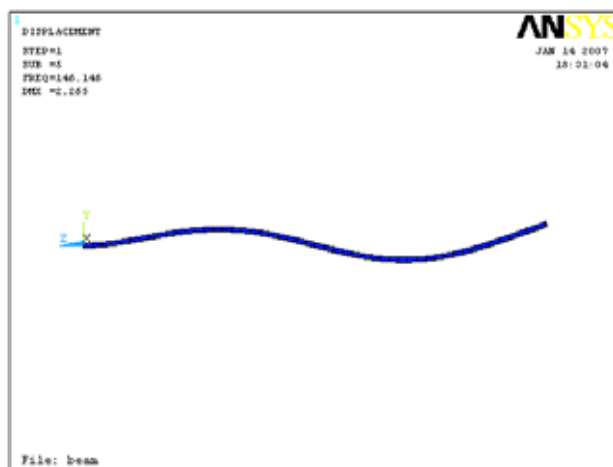
จะเห็นว่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างที่ได้มีค่าน้อยมาก แสดงให้เห็นว่าสามารถใช้โปรแกรมในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติได้



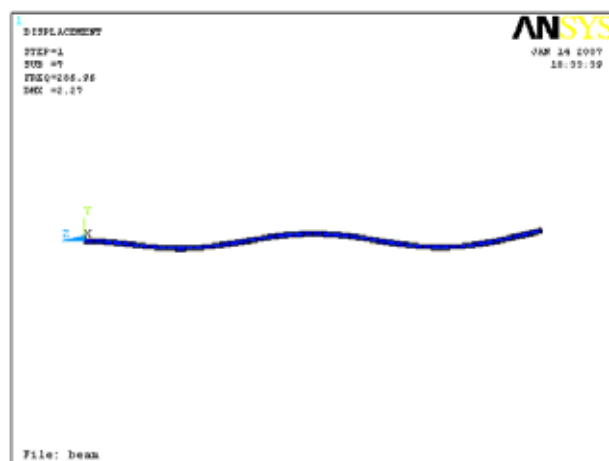
ภาพประกอบ 55 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 1



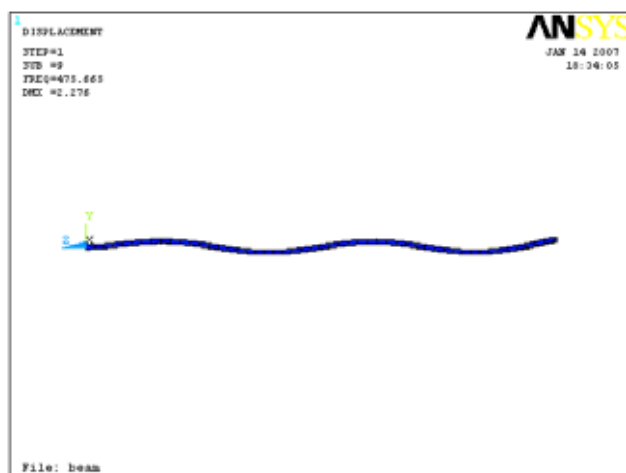
ภาพประกอบ 56 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 2



ภาพประกอบ 57 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 3



ภาพประกอบ 58 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 4



ภาพประกอบ 59 แสดงการเปลี่ยนรูปร่างของคานที่โหมดที่ 5

ภาคผนวก ข
การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกล
แห่งประเทศไทยครั้งที่ 20



Certificate of Participation

This is to certify that

Mr. Taweepon Peerasap

participated and presented a paper at the

***20th Conference of Mechanical Engineering
Network of Thailand***

organized by

***School of Mechanical Engineering
Institute of Engineering
Suranaree University of Technology***

18-20 October 2006

*Mandalin Golden Volley Hotel & Resort Khao-Yai
Nakhon Ratchasima*

*Assoc. Prof. Capt. Dr. Kontorn Chamniprasart
Chair of school*

*Assoc. Prof. Gp. Capt. Dr. Vorapot Khompis
Dean of Institute*

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 20
18-20 ตุลาคม 2549 จังหวัดนครราชสีมา

การศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายในด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

A Parametric Study of Internal Combustion Engine Upon The Natural Frequency Using Finite Element Method

ทวีพล พิรทรัพย์ วิชิต บัวแก้ว ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน

โครงการความร่วมมือระหว่าง มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กับ โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์ นครนายก 26120
โทรศัพท์ 0-2664-1000 ต่อ 2055 โทรสาร 0-3732-2609 E-mail: ptaweepon@yahoo.com vichitb@swu.ac.th ssv@kmitnb.ac.th

Taweepon Peerasap* Vichit Buakaew Suparerk Sirivedin

Srinakharinwirot University and Chulachomklao Royal Military Academy Jointed Graduated Program
Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Srinakharinwirot University, Ongkarak,
Nakhon-Nayok, 26120, Thailand

Tel: 0-2664-1000 Ext 2055 Fax: 0-3732-2609 E-mail: ptaweepon@yahoo.com vichitb@swu.ac.th ssv@kmitnb.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาพารามิเตอร์ที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติของเครื่องยนต์สันดาปภายใน โดยเครื่องยนต์ที่ใช้ในการวิจัยคือ เครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็กยี่ห้อ Honda รุ่น G200 แบบสูบเดี่ยว 4 จังหวะ และพารามิเตอร์ที่ศึกษาคือน้ำมันหล่อลื่น SAE 30, 40 และ 50 โดยวิเคราะห์ที่อุณหภูมิ 140, 160 และ 180 °C และความเร็วรอบที่ 1400, 2500 และ 3600 rpm ตามลำดับ การวิจัยนี้ใช้โปรแกรม ANSYS เป็นโปรแกรมในการวิเคราะห์หาค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้นในการวิจัยจะสร้างแบบจำลองตามสมมติฐานขึ้นสองลักษณะ โดยลักษณะแรกจะจำลองลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยงเข้าด้วยกัน โดยไม่มีน้ำมันหล่อลื่น ส่วนแบบจำลองลักษณะที่สองจะคำนึงถึงน้ำมันหล่อลื่นที่ช่องว่างระหว่างสลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง ผลการวิจัยพบว่าชิ้นส่วนที่ประกอบเข้าด้วยกัน ไม่มีน้ำมันหล่อลื่นที่ช่องว่าง มีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 532 Hz. สำหรับแบบจำลองที่มีน้ำมันหล่อลื่น SAE 30 40 และ 50 ที่ช่องว่าง ที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วรอบ 1400 rpm พบว่ามีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 1364.5 1363.3 และ 1363.3 Hz ตามลำดับ เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น 160 °C และความเร็วรอบเพิ่มขึ้นเป็น 2500 rpm ความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ 1365.6 1363.3 และ 1363.4 Hz และเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นเป็น 180 °C และความเร็ว

รอบเพิ่มขึ้นเป็น 3600 rpm ความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 จะมีค่าเท่ากับ 1366.9 1363.4 และ 1363.4 Hz ตามลำดับ ในขณะที่ความถี่ใช้งานของเครื่องยนต์อยู่ที่ 23.33 – 60 Hz ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบแล้วจะเห็นว่าแทบไม่มีโอกาสเกิดความเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้องเลย ผลการศึกษายังพบว่า ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากชนิดของน้ำมันหล่อลื่น อุณหภูมิ และความเร็วรอบ มีค่าแทบไม่แตกต่างกัน

Abstract

The aim of this research is to analyze the effect of parameters on natural frequency of the internal combustion engine. The engine used in this study is a four-stroke one piston Honda G200 model. The parameters studied in this work are lubricants SAE30 SAE40 & SAE50 grades running at working temperatures of 140, 160 & 180 °C with the engine speeds of 1400, 2500 & 3600 rpm respectively. ANSYS, the finite element program, is used to obtain the values of natural frequency. The engine was modeled based on these two following assumptions. The first assumption considers the engine parts in rigid mode, namely, piston, piston pin, connecting rod and crankshaft are connected without the lubricant. The second assumption

considers the lubricant between the gap of piston pin and connecting rod, and the gap of connecting rod and crankshaft. The results have shown that the model without lubricant has the natural frequency at mode 1 of 532 Hz. While the models that taking the lubricants into consideration have found the natural frequencies at mode1 to be 1364.5, 1363.3 and 1363.3 Hz at the temperature of 140 °C and the engine speed of 1400 rpm for SAE30, 40 and 50 respectively. When the temperature has increased to 160 °C at the engine speed of 2500 rpm, the natural frequencies at mode1 have found to be 1365.6, 1363.3 and 1363.4 Hz. Finally, at the temperature of 180 °C with the engine speed of 3600 rpm, the natural frequencies at mode1 are 1366.9, 1363.4 and 1363.4 Hz. It can be seen that the working frequencies at working speed of the engine, which is ranging from 2.33 – 60 Hz, are relatively lower than the results obtained by finite element analysis. Therefore, failure due to resonance may not occur. The results have also found that type of lubricants, the temperature and the engine speed have less effect on the natural frequency of the engine.

1. บทนำ

ชิ้นงานส่วนใหญ่จะมีการสั่นสะเทือนเกิดขึ้นอยู่เสมอ ซึ่งในบางครั้งก็ไม่สามารถหลีกเลี่ยงไม่ให้เกิดการสั่นสะเทือนได้ การสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นนั้นอาจทำให้ชิ้นงานเกิดการล้า (Fatigue) หรือการสั่นสะเทือนเกิดการสั่นพ้อง (Resonance) ขึ้น ซึ่งอาจทำให้ชิ้นงานเกิดการเสียหายได้ ในทางวิศวกรรมได้พยายามศึกษาและวิเคราะห์ถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้น เพื่อที่จะทำนายพฤติกรรมการทางพลศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน ซึ่งจะทำให้เข้าใจถึงปัญหาและสามารถแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นได้ ดังนั้นในปัจจุบันการออกแบบชิ้นงานส่วนใหญ่ได้คำนึงถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นเพื่อป้องกันการเสียหายของชิ้นงานในขณะทำงานอยู่

ประเทศไทยเป็นประเทศเกษตรกรรม จึงมีเครื่องจักรกลทางการเกษตรที่มีต้นกำเนิดมาจากเครื่องยนต์ก๊าซโซลีนขนาดเล็ก โดยเครื่องยนต์จะเป็นแหล่งกำเนิดเสียงและการสั่นสะเทือน ในการวิจัยนี้จะทำการศึกษาวาล์วที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติในเครื่องยนต์สันดาปภายใน ได้แก่ ลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยง ที่ประกอบเข้าด้วยกัน โดยมีปัจจัยในการพิจารณาถึงผลกระทบต่อค่าความถี่ธรรมชาติที่เกิดขึ้น คือน้ำมันหล่อลื่นตรงหน้าสัมผัสของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเกรดของน้ำมันหล่อลื่น อุณหภูมิ และความเร็วยรอบ ว่ามีผลกระทบต่อความถี่ธรรมชาติอย่างไร

2. ทฤษฎี

2.1 บทปริทัศน์วรรณกรรม

Prandstotter M.; Riener H.; & Steinbatz M. [1] ได้ทำการวิเคราะห์ความถี่ที่เกิดขึ้นในเพลาช้อเหวี่ยง ซึ่งได้พิจารณาถึงน้ำมันหล่อลื่นในแบริ่ง เพื่อที่จะให้ผลที่ได้จากการคำนวณมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ซึ่งในการวิเคราะห์พบว่าเมื่อมีความเร็วยรอบสูง จะทำให้คุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนไป และยังทำให้มีค่าความเค้น (Stress) สูงในบริเวณแบริ่ง

คุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเปลี่ยนไป และยังทำให้มีค่าความเค้น (Stress) สูงในบริเวณแบริ่ง

Carlini A.; & Rivola A. [2] ได้ศึกษาการไม่เป็นเชิงเส้น (Non linear) ของเพลาลูกเบี้ยว (Camshaft) ที่มีการรองรับด้วยแบริ่ง ซึ่งได้ทำการจำลองรูปแบบในการวิเคราะห์ที่มีทั้งค่าสปริง (Stiffness) และค่าความหน่วง (Damping) เพื่อใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical) และได้ทำการทดลองเพื่อเปรียบเทียบ โดยมีการพิจารณาถึงน้ำมันหล่อลื่นในแบริ่งด้วย ซึ่งจากผลการทดลองที่ได้โดยพิจารณาเทอมของความถี่เชิงมุม และความถี่ของเพลาลูกเบี้ยวพบว่า ผลการทดลองที่ได้จากการทดลองและการคำนวณมีค่าออกมาใกล้เคียงกัน

M. Leontiev [3] ได้ทำการเขียนรายงานเรื่อง Damping Support ซึ่งรายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของบริษัท Samsung Aerospace Engine Research & Development Center โดยเนื้อหาของรายงานเป็นการสรุปการหาค่าสปริง (Stiffness) และค่าความหน่วง (Damping) ของโรเตอร์แบริ่ง (Rotor-bearing) ในรูปของสมการที่สามารถคำนวณหาค่าได้โดยง่าย

2.2 คุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นเครื่องยนต์

น้ำมันหล่อลื่นมีส่วนสำคัญในระบบเครื่องยนต์เป็นอย่างมาก ซึ่งน้ำมันหล่อลื่นจะเข้าไปหล่อเลี้ยงชิ้นส่วนเครื่องยนต์เพื่อลดการสึกหรอ ลดแรงกระแทก ช่วยทำให้เครื่องยนต์เย็นลงและยังทำหน้าที่ทำความสะอาดชิ้นส่วนเครื่องยนต์ ดังนั้นน้ำมันหล่อลื่นควรมีคุณสมบัติดังนี้

1. ความหนืด (Viscosity) เป็นการวัดความต้านทานการไหลของน้ำมันหล่อลื่น
2. ดัชนีความหนืด (Viscosity index) เป็นการวัดการเปลี่ยนแปลงความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ
3. ตัวเลขความหนืด เป็นตัวเลขแสดงเกรดน้ำมันหล่อลื่นประเภทเกรดเดียวมีหลายค่า ทั้งน้ำมันที่ใช้ในฤดูหนาวและฤดูร้อนๆ น้ำมันเกรดเดียวกันๆ ได้แก่ SAE 20, SAE 30, SAE 40 และ SAE 50 ตัวเลขยิ่งสูงน้ำมันยิ่งมีความหนืดสูง [4]

2.3 สมการทางพลศาสตร์

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่าระบบที่เกิดการเคลื่อนที่นั้นจะมีความหน่วงเกิดขึ้นด้วยเสมอ การที่ไม่พิจารณาความหน่วงของระบบในทางปฏิบัติ นั้น จะกระทำเมื่อความหน่วงมีค่าน้อย หรือระยะเวลาในการพิจารณาแบบมีค่าน้อยกว่าคาบการสั่นธรรมชาติมาก นั่นคือในช่วงเวลาที่สนใจจะไม่มีความกระทบของความหน่วงเกิดขึ้นให้เห็นอย่างชัดเจนมากนัก ดังนั้นจึงไม่พิจารณาผลกระทบดังกล่าว

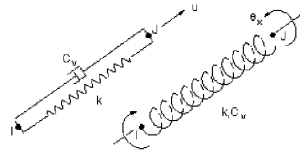
อย่างไรก็ตามหากว่าระบบที่พิจารณานี้เป็นระบบที่มีความหน่วงสูงและระยะเวลาที่พิจารณามีระยะเวลานาน จะต้องนำความหน่วงนี้เข้ามาพิจารณาด้วย และในการวิเคราะห์แบบไม่ดัดจะไม่พิจารณาแรงภายนอกกระทำกับระบบ ดังนั้นสมการที่ได้จะเป็นสมการ [5, 6]

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0 \quad (1)$$

- เมื่อ m คือ เมตริกซ์มวล
 c คือ เมตริกซ์ตัวหน่วง
 k คือ เมตริกซ์สปริง หรือเมตริกซ์ความแข็งตึง
 $\ddot{z}$ คือ เวกเตอร์ของความเร่ง
 $\dot{z}$ คือ เวกเตอร์ของความเร็ว
 z คือ เวกเตอร์ของระยะทาง

2.4 เอลิเมนต์สัมผัส (Contact Element)

ในบริเวณตรงผิวสัมผัสของชิ้นงาน จะทำการจำลองเอลิเมนต์ตรงผิวสัมผัสดังรูปที่ 1 ซึ่งเป็นการจำลองโดยมีค่าสปริง (Spring) และความหน่วง (Damping) ซึ่งเอลิเมนต์ชนิดนี้จะได้ใช้ในแนวแกน (Longitudinal) หรือการบิดตามแนวแกน (Torsional) โดยถ้าเป็นแบบแนวแกน ค่าสปริงและค่าความหน่วงจะใช้ได้ทั้งในการอัดหรือยืดตามแนวแกนเดียว ซึ่งไม่สามารถหาค่าการโก่ง (Bending) หรือการบิดได้ (Torsion) ส่วนแบบการบิดตามแนวแกนจะใช้ได้เฉพาะการหมุนเท่านั้น



รูปที่ 1 แสดงเอลิเมนต์ที่มีค่าสปริงและค่าความหน่วง

ตัวอย่างเช่น ระบบความเสถียรขึ้นที่หนึ่งที่แสดงค่าของสปริงและความหน่วงมีค่าดังสมการต่อไปนี้ [7]

$$[K_c] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[C_c] = C_v \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- เมื่อ k คือ ค่าสปริง (Stiffness)
 C_v คือ $C_{v1} + C_{v2}$ [N]
 C_{v1} คือ สัมประสิทธิ์ตัวหน่วงคงที่
 C_{v2} คือ สัมประสิทธิ์ตัวหน่วงเชิงเส้น
 v คือ ความเร็วสัมผัสพัทธ์ระหว่างโหนด

สำหรับระบบความเสถียรขึ้นที่สาม ซึ่งจะมีรูปสมการเมตริกซ์ดังนี้

$$[K_I] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[C_I] = C_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[S_I] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

เมื่อตัวห้อยในสมการ หมายถึง ระยะพิงก์ฉากของเอลิเมนต์

โดยที่ F คือ แรงในเอลิเมนต์

L คือ ระยะระหว่างสองโหนด

จากความสัมพันธ์ข้างต้นสามารถหาผลเฉลยทั่วไปได้จากสมการที่ (7) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงผลเฉลยทั่วไปที่รวมทั้งผลเฉลยตามแนวแกนและตามการบิดตามแนวแกน

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \frac{A}{L} \\ u'_j - u'_i \\ v'_j - v'_i \\ w'_j - w'_i \\ \theta'_{xj} - \theta'_{xi} \\ \theta'_{yj} - \theta'_{yi} \\ \theta'_{zj} - \theta'_{zi} \\ P_j - P_i \\ T_j - T_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

เมื่อ $A = (X_j - X_i)(u_j - u_i) + (Y_j - Y_i)(v_j - v_i) + (Z_j - Z_i)(w_j - w_i)$

X, Y, Z คือ พิกัดฉากของจุดอ้างอิงรวม

u, v, w คือ ระยะพิงก์ฉากของจุดอ้างอิงรวม

u', v', w' คือ ระยะพิงก์ฉากของจุดอ้างอิงย่อย

$\theta'_{x}, \theta'_{y}, \theta'_{z}$ คือ ระยะหมุนตามแนวแกนเมื่อเทียบกับจุดอ้างอิงย่อย

P คือ ความดัน

T คือ อุณหภูมิ

ในกรณีที่แบบเชิงเส้น แรงที่ได้จะเป็นไปตามสมการที่ (8)

$$F_s = k \varepsilon_0 \quad (8)$$

เมื่อ F_s คือ แรงตามแนวแกนหรือแรงบิดตามแนวแกน

ส่วนกรณีที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น แรงที่ได้จะเป็นไปตามสมการที่ (9)

$$F_D = C_v v \quad (9)$$

F_D คือ แรงจากตัวหน่วงตามแนวแกนหรือแรงจากตัวหน่วงตามปกติ

v คือ ความเร็วสัมพัทธ์

2.5 การหาค่าความหน่วงและค่าสปริงของไฮโดรไดนามิกส์

การหาค่าความหน่วงและค่าสปริงจะสามารถหาได้จากสมการ Reynolds โดยมีสมมุติฐานดังต่อไปนี้

1. ระยะห่างระหว่างเพลากับแบร้งมีค่าน้อยมาก
2. การไหลของน้ำมันคงที่
3. น้ำมันที่ใช้เป็นแบบของไหลที่อัดตัวไม่ได้
4. ความหนืดของน้ำมันคงที่
5. ไม่พิจารณาค่าความเฉื่อยของน้ำมัน

โดยสมการที่ได้จะเป็นดังต่อไปนี้ [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{\partial}{\partial x} (hu) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (10)$$

เมื่อ $x = R\theta$ คือ ระบบพิกัดฉาก (Circumferential coordinate)

$u = R(w_1 - w_2)$ คือ ความเร็วในแนวแกน (โดยปกติถ้าตัวหน่วงไม่เกิดการหมุน จะพิจารณาให้ $u = 0$)

h คือ ความหนาของฟิล์มน้ำมัน

จากสมมุติฐานข้างต้น สามารถหาค่าความแข็ง (Stiffness), K และค่าการหน่วง (damper), C ของน้ำมันหล่อลื่น ดังสมการต่อไปนี้

$$K = \frac{RL^3 \mu \omega}{\delta^3} \cdot \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \quad (11)$$

$$C = \frac{RL^3 \mu}{2\delta^3} \cdot \frac{\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (12)$$

2.6 คุณสมบัติน้ำมันหล่อลื่น

Michael M. [9] ได้อธิบายคุณสมบัติมาตรฐานของน้ำมันหล่อลื่น SAE 30, 40 และ 50 โดยมีความหนืด (Viscosity) ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงคุณสมบัติของค่าความหนืดมาตรฐาน

Type	Viscosity, cST	
	At 40 °C	At 100 °C
SAE 30	93	10.8
SAE 40	134	13.7
SAE 50	204	17.8

3. วิธีดำเนินการวิจัย

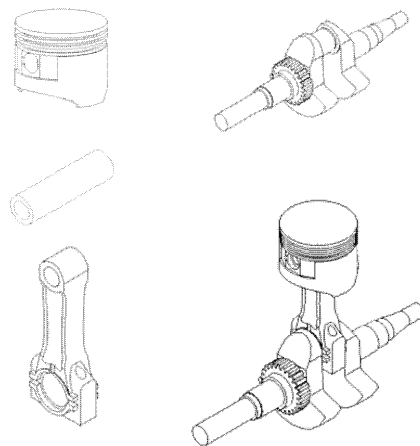
การดำเนินการวิจัยจะทำการวัดและจำลองชิ้นส่วนเครื่องยนต์ อันได้แก่ ลูกสูบ สลักลูกสูบ ก้านสูบ และเพลาช้อเหวี่ยงด้วยโปรแกรม SolidWorks ดังรูปที่ 2 จากนั้นทำการตั้งข้อมูลไปที่โปรแกรม ANSYS เพื่อทำการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติ โดยจะประกอบชิ้นส่วนของเครื่องยนต์เข้าด้วยกัน (Solid Model) และไม่มีน้ำมันหล่อลื่นเข้ามาเกี่ยวข้อง เพื่อทำการเปรียบเทียบค่าที่ได้กับกรณีการวิจัยที่มีน้ำมันหล่อลื่นตรงบริเวณส่วนสัมผัสระหว่าง สลักลูกสูบกับก้านสูบ และก้านสูบกับเพลาช้อเหวี่ยง โดยคุณสมบัติของน้ำมันหล่อลื่นจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความเร็วรอบของเครื่องยนต์ตามสมการที่ (11) และ (12) โดยผลการคำนวณที่ได้ จะนำไปใส่ในค่าคุณสมบัติของเอลิเมนต์สัมผัส ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

ชนิดของน้ำมันหล่อลื่น	อุณหภูมิ 140 °C , 1400 rpm		อุณหภูมิ 160 °C , 2500 rpm		อุณหภูมิ 180 °C , 3600 rpm	
	K (N/m)	C (Ns/m)	K (N/m)	C (Ns/m)	K (N/m)	C (Ns/m)
SAE 30	9.944e3	1.220e2	1.592e4	1.094e2	2.068e4	9.871e1
SAE 40	1.145e3	1.405e1	1.458e3	1.002e1	1.573e3	7.511e0
SAE 50	1.415e3	1.737e1	1.767e3	1.215e1	1.875e3	8.954e0

ตารางที่ 3 แสดงคุณสมบัติของชิ้นส่วนเครื่องยนต์ที่ใช้ในการศึกษา

ชิ้นส่วนเครื่องยนต์	ชนิดโลหะ	Mass Density (kg / m ³)	Elastic Modulus (Pa)	Poisson's Ratio
ลูกสูบ	Aluminium-Si/Mg Cast Alloy	2.7e+3	7.1e+10	0.33
สลักลูกสูบ	Cast Steel	7.85e+3	2e+11	0.31
ก้านสูบ	Aluminium-Copper Cast Alloy	2.9e+3	7.1e+10	0.33
เพลาช้อเหวี่ยง	Cast Steel	7.85e+3	2e+11	0.31



รูปที่ 2 แสดงชิ้นส่วนที่ได้ทำการจำลองจากโปรแกรม SolidWorks

4. ผลการวิจัย

เครื่องยนต์ที่ได้นำมาทำการวิจัย เป็นเครื่องยนต์แบบสูบเดี่ยว 4 จังหวะ ซึ่งมีความเร็วรอบในการทำงานอยู่ระหว่าง 1,400 – 3,600 รอบต่อนาที โดยในที่นี้จะเปลี่ยนจากความเร็วรอบต่อนาทีไปเป็นความถี่ใช้งานที่เกิดขึ้น เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่ได้ว่าแต่ละฐานนิยมนั้นเกิดความเสียหายหรือไม่ โดยพิจารณาได้จากสมการ

$$f = \frac{n}{60} \quad (13)$$

เมื่อ f คือ ความถี่ (Hz)

n คือ ความเร็วรอบ (rpm)

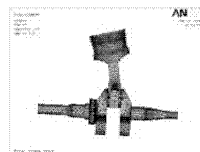
จากสมการที่ได้ข้างต้น จะได้ความถี่ใช้งานที่เกิดขึ้นบนเครื่องยนต์ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 2.33 – 60 Hz

4.1 ผลการวิจัยที่ได้จากการไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

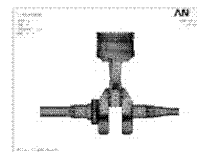
ผลการวิจัยที่ได้จะมีค่าดังตารางที่ 4 และ รูปที่ 3

ตารางที่ 4 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

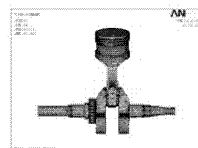
ฐานนิยมที่	ความถี่ (Hz)
1	532.11
2	687.12
3	1256.8
4	1575.3
5	1951.8



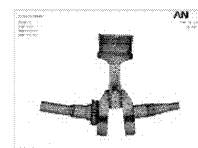
ฐานนิยมที่ 1



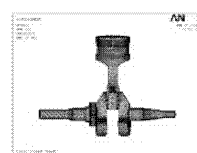
ฐานนิยมที่ 2



ฐานนิยมที่ 3



ฐานนิยมที่ 4



ฐานนิยมที่ 5

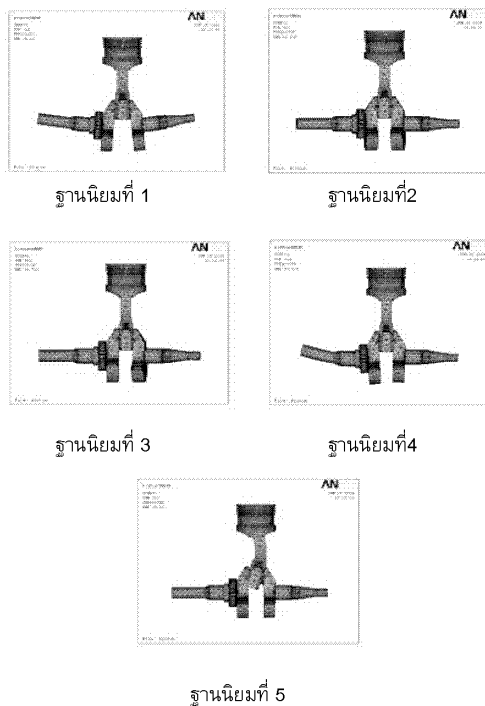
รูปที่ 3 แสดงการเปลี่ยนรูปของชิ้นส่วนกรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น ที่ฐานนิยมที่ 1 ถึง ฐานนิยมที่ 5

4.2 ผลการวิจัยที่ได้จากการพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ผลการวิจัยที่ได้จะมีค่าดังตารางที่ 5 และ รูปที่ 4

ตารางที่ 5 แสดงค่าความถี่ธรรมชาติกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่น

ฐานนิยมที่	ความถี่ที่ SAE 30 (Hz)			ความถี่ที่ SAE 40 (Hz)			ความถี่ที่ SAE 50 (Hz)		
	140 °C , 1400 rpm	160 °C , 2500 rpm	180 °C , 3600 rpm	140 °C , 1400 rpm	160 °C , 2500 rpm	180 °C , 3600 rpm	140 °C , 1400 rpm	160 °C , 2500 rpm	180 °C , 3600 rpm
1	1364.5	1365.6	1366.9	1363.3	1363.3	1363.4	1363.3	1363.4	1363.4
2	1739.3	1740.4	1741.5	1737.9	1737.9	1737.9	1737.9	1738	1738
3	2146	2146.2	2146.4	2145.8	2145.8	2145.8	2145.8	2145.8	2145.8
4	3103.6	3103.6	3103.6	3103.5	3103.5	3103.5	3103.5	3103.6	3103.6
5	3798.9	3805.3	3810.5	3789.3	3789.6	3789.7	3789.6	3790	3790.1



รูปที่ 4 แสดงการเปลี่ยนรูปของชิ้นส่วนกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นเกรด SAE 30 ที่อุณหภูมิ 140 °C และความเร็วยรอบ 1400 rpm ที่ฐานนิยมที่ 1 ถึง ฐานนิยมที่ 5

5. บทสรุป

ผลการวิจัยพบว่า ชิ้นส่วนที่ประกอบเป็นชิ้นเดียวกันและไม่มีน้ำมันหล่อลื่นมีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 532 Hz. ขณะที่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ 140 °C ความเร็วยรอบ 1400 rpm มีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 1364.5 1363.3 และ 1363.3 Hz ที่อุณหภูมิ 160 °C ความเร็วยรอบ 2500 rpm มีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 1365.6 1363.3 และ 1363.4 Hz และที่อุณหภูมิ 180 °C ความเร็วยรอบ 3600 rpm มีความถี่ธรรมชาติที่ฐานนิยมที่ 1 เท่ากับ 1366.9 1363.4 และ 1363.4 Hz ที่น้ำมันหล่อลื่น SAE 30 40 และ 50 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าน้ำมันหล่อลื่นมีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยกรณีพิจารณาน้ำมันหล่อลื่นจะมีค่าความถี่ธรรมชาติที่มากกว่ากรณีไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่น นอกจากนี้ค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการเปลี่ยนชนิดน้ำมันหล่อลื่นซึ่งขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความเร็วยรอบไม่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาติ โดยมีค่าแทบไม่แตกต่างกัน และเมื่อเทียบค่าความถี่ที่ได้จากการพิจารณาและไม่พิจารณาน้ำมันหล่อลื่นกับความถี่ใช้งานของเครื่องยนต์ที่ 23.33 – 60 Hz ก็ไม่มีโอกาสเกิดการเสียหายอันเนื่องมาจากการสั่นพ้อง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บริษัทสามมิตรมอเตอร์ จำกัด ผู้ให้การสนับสนุนโปรแกรม ANSYS ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] Prandstotter M.; Riener H.; & Steinbatz M., 2002. Simulation of an Engine Speed-Up Run.
http://mscsoftware.com/support/library/conf/adams/euro/2002/papers/006_EUC_007_Magna%20Steyr.pdf
- [2] Carlini A.; & Rivola A. (n.d.) A Non Linear Elastodynamic Model of A Camshaft Supported by Journal Bearing.
<http://diem1.ing.unibo.it/mechmach/rivola/pub28.html>
- [3] M. Leontiev, 1996. Damping Support.
<http://www.alfatran.com/solutions.shtml>
- [4] ชีระยุทธ สุวรรณประทีป, 1996. หลักการทำงานและการซ่อมบำรุงเครื่องยนต์, ซีเอ็ดดูเคชั่น, กรุงเทพฯ.
- [5] Michael R. Hatch, 2001. Vibration Simulation Using Matlab and Ansys. 1st ed., Chapman & Hall/CRC, United States of America.
- [6] เดช พุทธิเจริญทอง, 2004. การวิเคราะห์โครงสร้างพลศาสตร์, ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ, กรุงเทพฯ.
- [7] Ansys documentation.
- [8] M. Leontiev, 1996. Damper support, Rotor-Bearing Dynamics Technology Design Guide, pp.1-49.
- [9] Michael M. Khonsari, 2001, Applied Tribology Bearing Design and Lubrication, 1st ed., John Wiley & Sons, Inc., United States of America.

ภาคผนวก ฅ
คำอธิบายสัญลักษณ์และหน่วย

คำอธิบายสัญลักษณ์และหน่วย

c	=	ความหน่วง	Ns/m
c_{cr}	=	ความหน่วงวิกฤต	Ns/m
E	=	โมดูลัสของความยืดหยุ่น	GPa
F	=	แรง	N
I	=	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด	m^4
k	=	ค่าสตีฟเนส	$N.m^{-1}$
$[k]$	=	สตีฟเนสเมทริกซ์	
L	=	ระยะห่างระหว่างโหนด, ความยาวฟิล์มของแบริ่ง	m
m	=	มวล	kg
$[m]$	=	เมทริกซ์มวล	
R	=	รัศมีแบริ่ง	m
t	=	เวลา	s
v	=	ความเร็วสัมพัทธ์	m/s
z	=	การกระจัด	m
$\dot{z}$	=	ความเร็ว	m/s
$\ddot{z}$	=	ความเร่ง	m/s^2
ε	=	ค่าสัมประสิทธิ์ตัวหน่วงคงที่	
Φ	=	มุมเฟส	rad
ζ	=	อัตราส่วนการหน่วง	
δ	=	ระยะห่างระหว่างเพลากับแบริ่ง	m
μ	=	ความหนืด	Ns/m^2
ω	=	ค่าเจาะจง	
ω	=	ความถี่รอบ	s^{-1}

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายทวีพล พิรทรัพย์
วันเดือนปีเกิด	17 มกราคม 2522
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	172/4 ซอย10 ถนน พระราม 6 แขวง รongเมือง เขต ปทุมวัน จังหวัด กรุงเทพฯ 10330
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2536	มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนเทพศิรินทร์
พ.ศ. 2539	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนเทพศิรินทร์
พ.ศ. 2543	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
พ.ศ. 2550	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ