

อุณหภูมิจากฤดูร้อนของตัวนำเวดที่ยังไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ
เมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มีนาคม 2547

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อุณหภูมิจุดเยือกของตัวนำวอดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ
เมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก



เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มีนาคม 2547

คมกริช โชคพระสมบัติ. (2547). อุณหภูมิมิวิกฤตของตัวนำวยดยั้งที่ไมใช่ของเหลวเฟอร์มิเมือ
มีสารเจือประเภทไมเป็นแม่เหล็ก. ปรินญาณิพนธ์ กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ :
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม :
ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นิรมล ปิตะนิละผลิน.

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะคำนวณหาอุณหภูมิมิวิกฤต (T_c) ของตัวนำวยดยั้งที่ไม
ใช่ของเหลวเฟอร์มิในภาวะบริสุทธิ์และเมื่อมีสารเจือประเภทไมเป็นแม่เหล็ก โดยใช้ฟังก์ชันกรีน
ของยีนและชากรวาร์ดี และให้อิเล็กตรอนจับคู่กันเหมือนในทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งพลังงานในการจับ
คู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไมเกินความถี่เดอบาย (ω_D) จึงแตกต่างจากงานวิจัยของโกรชู้ที่ให้พลัง
งานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์

ผลการคำนวณพบว่า ในกรณีตัวนำวยดยั้งบริสุทธิ์ อุณหภูมิมิวิกฤตมีค่าต่ำกว่าที่โกรชู้
คำนวณไว้และอุณหภูมิมิวิกฤตลดลงเมื่อพารามิเตอร์ α เพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0$ จะได้สูตรของ
อุณหภูมิมิวิกฤตสอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ส่วนในกรณีตัวนำวยดยั้งที่มีสารเจือประเภทไมเป็น
แม่เหล็ก พบว่าอุณหภูมิมิวิกฤตลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มเพียงเล็กน้อย
โดยอัตราการลดของอุณหภูมิมิวิกฤตขึ้นกับ α และเมื่อ $\alpha = 0$ อุณหภูมิมิวิกฤตลดเร็วกว่าที่ทฤษฎี
อบริกอสอฟ-กอร์คอฟทำนายไว้ในกรณีตัวนำวยดยั้งชนิดคลื่นดี ทั้งนี้ผลการคำนวณชี้ว่าพารา-
มิเตอร์การกระเจิงต้องมีค่าไมเกินค่าๆ หนึ่ง และเมื่อพิจารณาขีดจำกัด $\omega_D \gg T_c$ และ $0 < \alpha < 1/2$
จะได้สมการของอุณหภูมิมิวิกฤตตรงกับของโกรชู้

CRITICAL TEMPERATURE OF A NON-FERMI LIQUID SUPERCONDUCTOR
WITH NONMAGNETIC IMPURITIES



Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Physics
at Srinakharinwirot University
March 2004

Khomkrich Chokprasombute. (2004). *Critical Temperature of a Non-Fermi Liquid Superconductor with Nonmagnetic Impurities*. Master thesis, M.Ed. (Physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Professor. Dr. Suthat Yoksan, Assistant Professor. Niramol Pitaniaphalin.

The purpose of this research is to calculate the critical temperature (T_C) of a non-Fermi liquid superconductor in the pure state and when it contains nonmagnetic impurities, by using the Yin and Chagravarty 's Green function and assuming the BCS like pairing with a finite energy cutoff, Debye frequency (ω_D), in contrast to the infinite energy cutoff that was used by Grosu.

It is found that in the pure case, the critical temperature is much lower than that calculated by Grosu and it decreases as α increases, when $\alpha = 0$ the T_C formula as in the BCS theory is reobtained. In the impure case with nonmagnetic impurities, it is found that T_C is rapidly suppressed even for a small impurity concentration and the rate of T_C suppression is proportional to α , when $\alpha = 0$, T_C is suppressed much more rapidly than that of the d-wave superconductor as predicted by Abrikosov-Gor'kov theory. Our calculations indicate that the scattering time must not exceed a certain value, generally, when the limit $\omega_D \gg T_C$ and $0 < \alpha < 1/2$ are considered, our critical temperature equations agree with those of Grosu.

ปริญญาบัตร

เรื่อง

อุทธรณ์มิวกฤตของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

ของ

นายคมกริช โชคพระสมบัติ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ



คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาพรณ์ หะวานนท์)

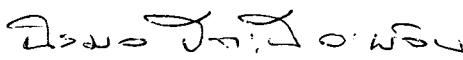
วันที่ 17 เดือน สิงหาคม พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญาบัตร




ประธาน

(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)



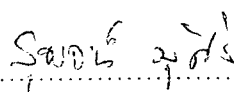
กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นิรมล ปิตะนีละผลิน)



กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ศิริลักษณ์ เรืองรุ่งโรจน์)



กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(อาจารย์ ดร. สุพจน์ มุศิริ)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาที่ทำการวิจัย ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นิรมล ปิตะนีละผลิน ที่ให้ความกรุณาตรวจแก้งานวิจัยนี้ และเมตตาให้โอกาสผู้วิจัยได้ศึกษาปัญหาที่สนใจ โดยพร้อมให้คำปรึกษาเสมอมา กราบขอบพระคุณ อาจารย์ ศิริลักษณ์ เรืองรุ่งโรจน์ และ อาจารย์ ดร. สุพจน์ มุศิริ ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ และให้คำแนะนำ แก้ไขเพิ่มเติม และกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้ในการคำนวณเชิงตัวเลข ซึ่งใช้ในงานวิจัยนี้

กราบขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้อบรม ให้ความรู้ผู้วิจัย ในรายวิชาต่าง ๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการทำวิจัยนี้ และการศึกษาต่อไปของผู้วิจัย

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ร่วมกันสร้างบรรยากาศทางวิชาการ ในการศึกษา และทำวิจัย รวมทั้งเป็นกำลังใจให้กันและกันเสมอ

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และญาติ ๆ ทุกคน ที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

คมกริช ไชยพระสมบัติ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ภูมิหลัง.....	1
ประวัติการค้นพบตัวนำวดยิ่งและสมบัติบางประการ.....	1
ตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือ.....	11
ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ.....	13
ความมุ่งหมายของงานวิจัย.....	15
ขอบเขตของงานวิจัย.....	16
นิยามศัพท์เฉพาะ.....	16
ความสำคัญของงานวิจัย.....	16
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	17
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งด้วยทฤษฎีบีซีเอส.....	17
การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งด้วยทฤษฎีที่ไม่ใช่ ของเหลวเฟอร์มิ.....	22
งานวิจัยที่ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อ ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง.....	26
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	34
กรณีตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์.....	35
กรณีตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก.....	39
4 ผลการวิจัย.....	48
กรณีตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์.....	48
กรณีตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก.....	57
5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	63
สรุปผล.....	63
อภิปรายผล.....	64

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5(ต่อ) ข้อเสนอแนะ.....	66
บรรณานุกรม.....	67
ภาคผนวก	71
ก ฟังก์ชันแกมมา ฟังก์ชันเบต้า และ ฟังก์ชันไฮเพอร์จีโอเมตริก.....	72
ข การทำซ้ำแบบนิวตัน (Newton Iteration).....	75
ประวัติย่อผู้วิจัย	79



บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ตัวอย่างอนุกรมวิกฤตและค่าสนามวิกฤตของธาตุและสารประกอบบางชนิด.....	3
2 แสดงค่าพารามิเตอร์ α ในปรากฏการณ์ไอโซโทป ของตัวนำยิ่งยวดบางชนิด.....	6
3 เปรียบเทียบสมบัติเชิงกายภาพบางประการของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงประเภท สารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ที่ทำนายด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ(BCS/FL) กับผลการทดลอง.....	13



บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท.....	1
2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด.....	2
3 แสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์.....	4
4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่ง.....	4
5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นสถานะ $g(E)$ กับพลังงานขณะเกิด สภาพนำยวดยิ่ง.....	5
6 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่าโฟนอน	7
7 กราฟแสดงอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งกับปีที่ค้นพบ.....	8
8 แสดงโครงสร้างผลึกของสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ เมื่อ $\delta = 0$ และ 1	9
9 แสดงช่องว่างพลังงานใน real space และ momentum space ของตัวนำยวดยิ่ง ชนิดคลื่นเอส และตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี.....	10
10 ผลของสารเจือต่อการเปลี่ยนสถานะของตัวนำยวดยิ่ง.....	11
11 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตกับค่าพารามิเตอร์ α เมื่อกำหนดให้ $\omega_c = 1000$ K, $\omega_0 = 200$ K และ $\lambda = 0.3$	26
12 กราฟแสดงอัตราส่วนการลดลงของช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)/\Delta_0(0)$ กับอุณหภูมิ T_c/T_{c0} ด้วยอัตราส่วนความเข้มข้นของสารเจือแตกต่างกัน.....	27
13 แสดงการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มขึ้น สำหรับ ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี และชนิดคลื่นเอสที่ขึ้นกับทิศทาง เมื่อความแรง การกระเจิงเป็น $c = 0, 1$	29
14 กราฟของ $\Delta(\Gamma, 0)/\Delta_{00}$, T_c/T_{c0} และ $N(0)/N_0$ แสดงเป็นฟังก์ชันของ Γ/Γ_c	30
15 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c/T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{c0}\tau$ เมื่อ $r = 0, -0.2, -0.4$ และ -0.8	32
16 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c/T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{c0}\tau$ เมื่อ $\omega_c/T_{c0} = 5, 10, 50$ และ 100	33
17 กราฟของค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ λ_c เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อพลังงาน ในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 โดยกำหนดให้ $\omega_0 = 200$ และ $\omega_c = 1000$	49

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท.....	1
2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด.....	2
3 แสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์.....	4
4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่ง.....	4
5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นสถานะ $g(E)$ กับพลังงานขณะเกิด สภาพนำยวดยิ่ง.....	5
6 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่าโฟนอน	7
7 กราฟแสดงอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยวดยิ่งกับปีที่ค้นพบ.....	8
8 แสดงโครงสร้างผลึกของสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ เมื่อ $\delta = 0$ และ 1	9
9 แสดงช่องว่างพลังงานใน real space และ momentum space ของตัวนำยวดยิ่ง ชนิดคลื่นเอส และตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี.....	10
10 ผลของสารเจือต่อการเปลี่ยนสถานะของตัวนำยวดยิ่ง.....	11
11 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตกับค่าพารามิเตอร์ α เมื่อกำหนดให้ $\omega_c = 1000$ K, $\omega_0 = 200$ K และ $\lambda = 0.3$	26
12 กราฟแสดงอัตราส่วนการลดลงของช่องว่างพลังงาน $\Delta(T)/\Delta_0(0)$ กับอุณหภูมิ T_c/T_{c0} ด้วยอัตราส่วนความเข้มข้นของสารเจือแตกต่างกัน.....	27
13 แสดงการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มขึ้น สำหรับ ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี และชนิดคลื่นเอสที่ขึ้นกับทิศทาง เมื่อความแรง การกระเจิงเป็น $c = 0, 1$	29
14 กราฟของ $\Delta(\Gamma, 0)/\Delta_{00}$, T_c/T_{c0} และ $N(0)/N_0$ แสดงเป็นฟังก์ชันของ Γ/Γ_c	30
15 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c/T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{c0}\tau$ เมื่อ $r = 0, -0.2, -0.4$ และ -0.8	32
16 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c/T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{c0}\tau$ เมื่อ $\omega_c/T_{c0} = 5, 10, 50$ และ 100	33
17 กราฟของค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ λ_c เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อพลังงาน ในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 โดยกำหนดให้ $\omega_D = 200$ และ $\omega_c = 1000$	49

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
18 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ α เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_D โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$	51
19 เปรียบเทียบระหว่างกราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ α เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ อนันต์และ ω_D โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$	52
20 เปรียบเทียบกราฟอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของ α ที่ได้จากสมการ (4.3) และ (3.14) โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$	53
21 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ ω_C มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$ และ $\omega_D = 200$	53
22 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ ω_D มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$ และ $\omega_C = 1000$	54
23 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ λ มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$	55
24 กราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{C0}\tau$ เมื่อ α มีค่า 0, 0.1, 0.15 และ 0.2 กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\varepsilon_C/\omega_C = 100$ (พลังงานสูงสุด มีค่าอนันต์).....	58
25 กราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{C0}\tau$ จากสมการ (57) ของโกรซู่ เมื่อ α มีค่า 0, 0.1, 0.15 และ 0.2 เมื่อ กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\varepsilon_C/\omega_C = 100$	58
26 กราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{C0}\tau$ เมื่อ α มีค่า 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08 และ 0.1 กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\varepsilon_C/\omega_C = 100$ (พลังงานสูงสุด มีค่าอนันต์).....	59

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ

หน้า

- 27 กราฟอูณหภูมิมิวิกฤตลดทอน T_c/T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{c0}\tau$ เมื่อ α มีค่า 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08 และ 0.1 กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_C/\omega_C = 100$ (พลังงานสูงสุด มีค่า ω_D).....60
- 28 เปรียบเทียบกราฟของอูณหภูมิมิวิกฤตลดทอนเป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ $1/T_{c0}\tau = 0.2$ ระหว่างกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอน มีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์และมีค่าไม่เกิน ω_D กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_C/\omega_C = 100$61
- 29 เปรียบเทียบกราฟของอูณหภูมิมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง ระหว่างทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอร์มิ เมื่อ $\alpha = 0$ และ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$, $\epsilon_C/\omega_C = 100$ กับทฤษฎีของอบริกอฟ-กอดคอฟ เมื่อความเข้มข้นของสารเจือน้อย.....62
- 30 แสดงอัลกอริทึมของวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน.....77

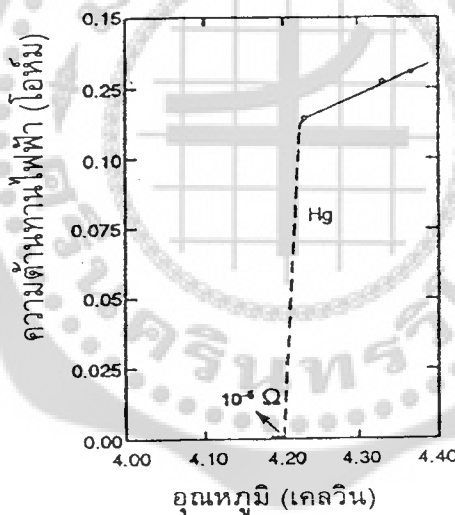
บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ประวัติการค้นพบตัวนำยิ่งยวดและสมบัติบางประการ

ในปี ค.ศ. 1911 ฮอนเนส (Kresin & Wolf. 1990 : 4 ; citing Onnes. 1911) ได้ค้นพบสภาพนำไฟฟ้ายิ่งยวด (Superconductivity) จากการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของสภาพต้านทานไฟฟ้าของปรอทบริสุทธิ์ที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์ โดยใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวลดยุณหภูมิ เขาพบว่าที่อุณหภูมิ 4.2 K ความต้านทานไฟฟ้าของปรอทจะลดลงเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใด ดังภาพประกอบ 1

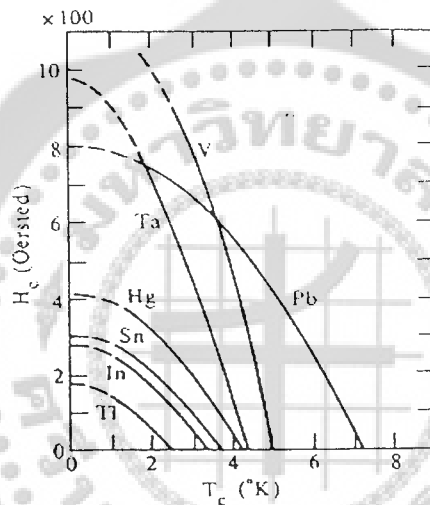


ภาพประกอบ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอท

(Bennemann & Ketterson. 2003 : 1)

สารที่ไร้สภาพต้านทานไฟฟ้า เรียกว่า ตัวนำยิ่งยวด (Superconductor) และอุณหภูมิขณะที่สารเปลี่ยนสถานะจากสถานะปกติเป็นสถานะนำยิ่งยวดเรียกว่า อุณหภูมิวิกฤต (Critical-temperature, T_c) ซึ่งเป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับสมบัติทางกายภาพของสาร ต่อมาได้พบว่าสารที่สามารถเป็นตัวนำยิ่งยวดยิ่งนั้นมีหลายชนิดทั้งที่เป็นธาตุบริสุทธิ์และสารประกอบ แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าธาตุที่เป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดีที่อุณหภูมิปกติ เช่น Ag Au และ Cu จะไม่เป็นตัวนำยิ่งยวดไม่ว่าอุณหภูมิจะลดต่ำเพียงใด

ขั้นตอนการเกิดสภาพนำยวดยิ่งนั้นเป็นกระบวนการที่ผันกลับได้ (Reversible-process) คือถ้าอุณหภูมิของตัวนำสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต ตัวนำก็จะสูญเสียสภาพนำยวดยิ่งกลับสภาพเป็นตัวนำปกติทันที นอกจากปัจจัยด้านอุณหภูมิแล้วยังพบว่าสนามแม่เหล็กก็สามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งได้ คือถ้าตัวนำยวดยิ่งถูกสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงยิ่งกว่าค่าหนึ่ง กระทำ สภาพนำยวดยิ่งก็จะสูญเสียไป โดยค่าความเข้มของสนามแม่เหล็กที่ทำให้ตัวนำยวดยิ่งเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำปกตินี้เรียกว่า สนามวิกฤต (Critical field, H_c) ซึ่งค่านี้ขึ้นกับอุณหภูมิ คือเมื่ออุณหภูมิมียุ่ค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ความเข้มของสนามวิกฤตจะมีค่าน้อยลง ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด (Burn. 1985 : 636)

ความสัมพันธ์ระหว่างสนามวิกฤตกับอุณหภูมิเป็นดังสมการ

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.1)$$

เมื่อ $H_c(0)$ คือ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

T คือ อุณหภูมิ

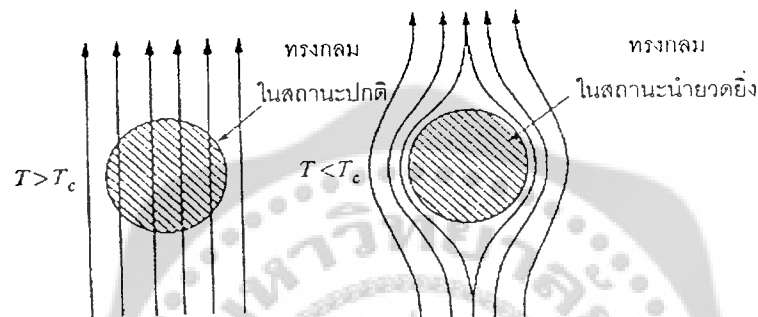
T_c คือ อุณหภูมิวิกฤต

สมการ (1.1) แสดงว่า ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์สนามวิกฤตจะมีค่ามากที่สุดและที่อุณหภูมิวิกฤต สนามวิกฤตจะมีค่าเป็นศูนย์

ตาราง 1 ตัวอย่างอุณหภูมิวิกฤตและค่าสนามวิกฤตของธาตุและสารประกอบบางชนิด

ของแข็ง	อุณหภูมิวิกฤต, T_c (K)	สนามวิกฤต, $H_c(0)$ (A/m)
ธาตุ		
Aluminum	1.196	7.88×10^3
Cadmium	0.56	2.36×10^3
Indium	3.405	2.25×10^3
Lead	7.193	6.39×10^3
Mercury	4.154	3.02×10^3
Molybdenum	0.917	7.80×10^3
Niobium	9.26	1.58×10^3
Osmium	0.655	5.17×10^3
Tellurium	2.39	1.36×10^3
Tin	3.722	2.43×10^3
Tungsten	0.012	8.51×10^3
Vanadium	5.30	8.12×10^3
Zinc	0.852	4.22×10^3
Zirconium	0.546	3.74×10^3
สารประกอบ		
BaBi ₃	5.69	5.89×10^3
Bi ₂ Pt	0.155	7.96×10^3
Cr _{0.1} Ti _{0.3} V _{0.6}	5.6	1.08×10^3
In _{0.8} Tl _{0.2}	3.223	2.01×10^3
Mg _{0.47} Tl _{0.53}	2.75	1.75×10^3
NbSn ₂	2.60	4.93×10^3
PbTl _{0.27}	6.43	6.02×10^3

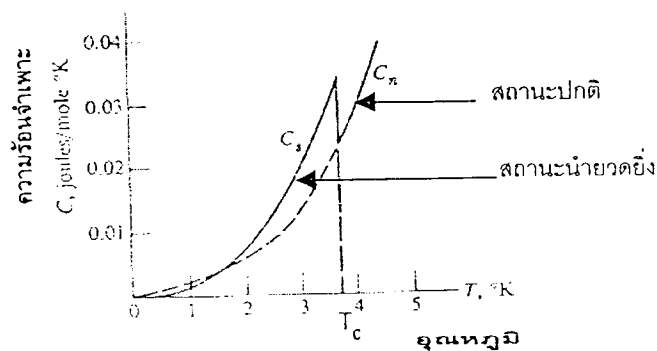
ในปี ค. ศ. 1933 ไมส์เนอร์และออกเซนเฟลด์ (Kresin & Wolf. 1990 : 8 ; citing Meissner & Ochsenfeld. 1933) ได้พบว่าหากตัวนำยวดยิ่งถูกทำให้มีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตขณะที่มีสนามแม่เหล็กกระทำ ตัวนำยวดยิ่งนั้นจะผลักฟลักซ์สนามแม่เหล็กให้เบนออกจากตัว ทำให้สนามแม่เหล็กภายในตัวนำยวดยิ่งเป็นศูนย์ ($B=0$) ซึ่งเป็นสมบัติของสารแม่เหล็กไดอาแบบสมบูรณ์ (Perfect diamagnetic) ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Meissner's effect) แสดงได้ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Omar. 1975 : 500)

การที่ตัวนำยวดยิ่งสามารถผลักฟลักซ์แม่เหล็กให้เบนออกจากตัวได้นั้น เนื่องจากสนามแม่เหล็กทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิวของตัวนำยวดยิ่งโดยกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำนี้จะสร้างสนามแม่เหล็กต่อต้านสนามแม่เหล็กภายนอกที่มากกระทำ

สมบัติอีกประการหนึ่งของตัวนำยวดยิ่งที่แตกต่างจากตัวนำปกติ คือ ความร้อนจำเพาะ (Specific heat) ซึ่งจากการทดลองได้ความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิ ดังภาพประกอบ 4



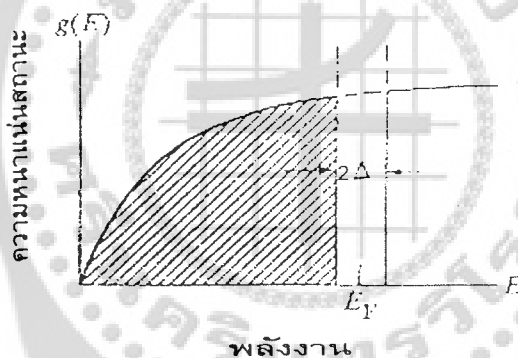
ภาพประกอบ 4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่ง (Omar. 1975 : 503)

จากภาพประกอบ 4 จะเห็นว่า เมื่อลดอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่งจนถึงอุณหภูมิวิกฤต ค่าของความร้อนจำเพาะจะไม่ต่อเนื่อง คือมีค่าเพิ่มขึ้นทันทีทันใดก่อนจะลดลงแบบเอ็กโปเนนเชียล แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความร้อนจำเพาะกับอุณหภูมิได้ดังสมการ (1.2)

$$C_v = ae^{-b(T_c/T)} \quad (1.2)$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของความร้อนจำเพาะเช่นนี้บ่งชี้ว่ามีช่องว่างพลังงาน (Energy gap) เกิดขึ้น ขณะที่ตัวนำเปลี่ยนสถานะจากตัวนำปกติเป็นตัวนำยวดยิ่ง โดยช่องว่างพลังงานนี้จะอยู่บริเวณระดับพลังงานเฟอร์มิ ดังภาพประกอบ 5



ภาพประกอบ 5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นสถานะ $g(E)$ กับพลังงานขณะเกิดสภาพนำยวดยิ่ง (Omar. 1975 : 504)

จากภาพประกอบ 5 E_F คือพลังงานเฟอร์มิ และ Δ คือ ช่องว่างพลังงาน ซึ่งมีค่าโดยประมาณเท่ากับ $k_B T_C$ เมื่อ k_B เป็นค่าคงที่ของโบลท์ซมัน (Boltzman's constant) ช่องว่างพลังงานนี้จะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิของตัวนำยวดยิ่ง คือ มีค่ามากที่สุดที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ และมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นจนเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิวิกฤต

ผลการทดลองอีกอย่างหนึ่งที่มีความสำคัญมาก ในการคิดทฤษฎีที่ใช้อธิบายสภาพนำยวดยิ่ง คือ ปรากฏการณ์ไอโซโทป (Isotope effect) ซึ่งเกิดจากการวัดอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งแล้วพบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าขึ้นกับ มวลไอโซโทป (Isotope mass) ของสารโดยมีความสัมพันธ์กันตามสมการ (1.3) (Kittel. 1986 : 330)

$$M^\alpha T_c = \text{constant} \quad (1.3)$$

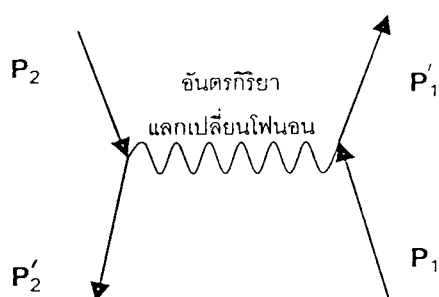
เมื่อ M คือ มวลไอโซโทป และ α มีค่าประมาณ $\frac{1}{2}$

ตาราง 2 แสดงค่าของพารามิเตอร์ α ในปรากฏการณ์ไอโซโทปของตัวนำยวดยิ่งบางชนิด

ตัวนำยวดยิ่ง	α	ตัวนำยวดยิ่ง	α
Zn	0.45 ± 0.05	Ru	0.00 ± 0.05
Cd	0.32 ± 0.07	Os	0.15 ± 0.05
Sn	0.47 ± 0.02	Mo	0.33
Hg	0.50 ± 0.03	Nb ₃ Sn	0.08 ± 0.02
Pb	0.48 ± 0.02	Zr	0.0 ± 0.05

(Kittel. 1986 : 331)

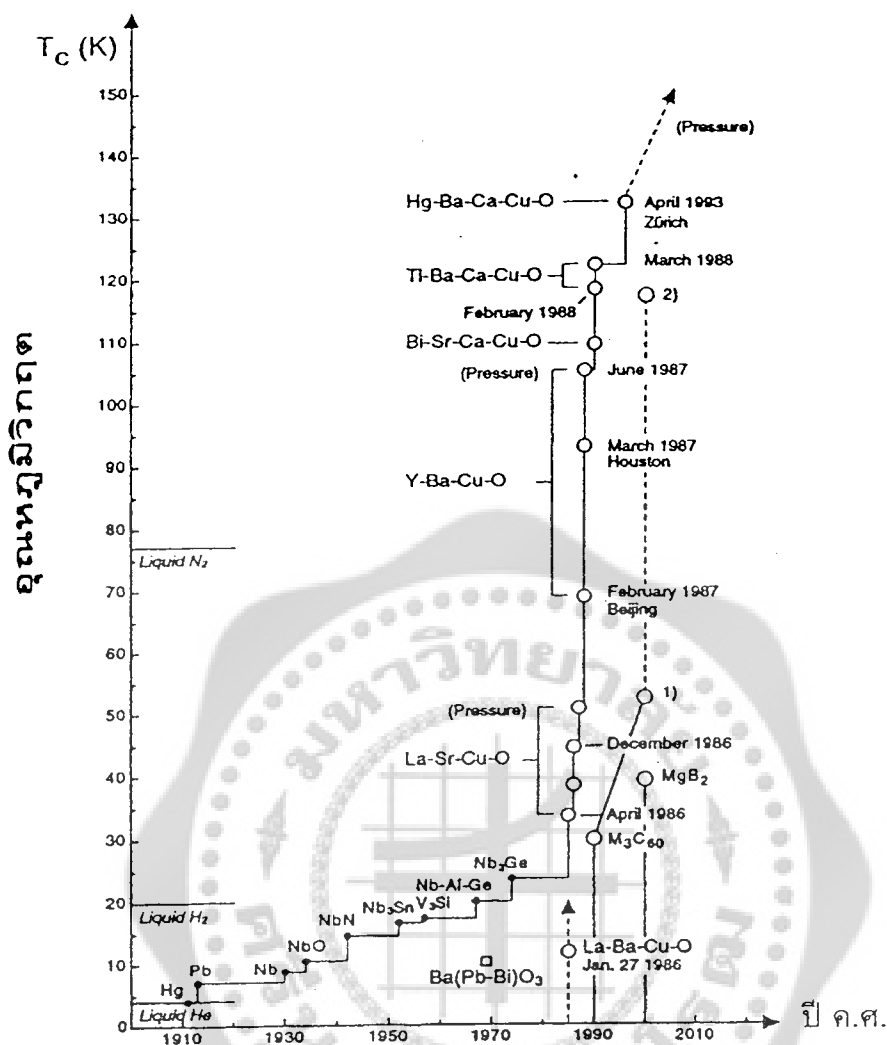
สำหรับทฤษฎีที่ใช้อธิบายการเกิดสภาพนำยวดยิ่งในระบะต้นๆ ของการค้นพบมีหลายทฤษฎี แต่ทฤษฎีที่เป็นที่ยอมรับว่าอธิบายสมบัติโดยทั่วไปของตัวนำยวดยิ่งได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับการทดลองมากที่สุดคือทฤษฎีของ บาร์ดีน คูเปอร์ และ ชริฟเฟอร์ (Bardeen, Cooper & Schrieffer. 1957 : 1175) ทฤษฎีนี้เรียกโดยย่อว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ซึ่งสามารถอธิบายกลไกสำคัญที่ทำให้ตัวนำปกติกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งว่าเกิดจากอิเล็กตรอนจับคู่กันโดยอาศัยอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน (Phonon) คือ เมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่เข้าไประหว่างกลุ่มอ็อนที่มีประจุบวกในแลตทิซผลึก อิเล็กตรอนตัวนี้จะดึงดูดอ็อนบวกในบริเวณรอบๆ ให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ ทำให้บริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนตัวนั้นมีความหนาแน่นของอ็อนบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งจะส่งผลต่ออิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้ๆ บริเวณนั้น เพราะจะถูกกลุ่มอ็อนบวกดึงดูดให้พุ่งเข้าหากลุ่ม เหตุการณ์นี้จึงเปรียบเหมือนกับว่าอิเล็กตรอนสองตัวมีอันตรกิริยาดึงดูดกัน และอันตรกิริยาดึงดูดนี้ต้องมีค่ามากกว่าอันตรกิริยาผลึกแบบคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน อิเล็กตรอนที่จับคู่กันในลักษณะนี้ที่บริเวณผิวเฟอร์มีเรียกว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pair) อิเล็กตรอนแต่ละตัวในคู่คูเปอร์จะมีขนาดของโมเมนตัมและสปินเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม และระยะห่างระหว่างคู่อิเล็กตรอน เรียกว่า ความยาวอาพันธ์ (Coherent length, ξ) อันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์นี้อาจพิจารณาได้ว่าเกิดจากการที่อิเล็กตรอนแลกเปลี่ยนโฟนอนกัน โดยโฟนอนนั้นเกิดจากการสั่นของแลตทิซผลึกที่มีอ็อนบวกอยู่นั่นเอง แสดงได้ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แสดงอันตรกิริยาดังกล่าวระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่า โฟนอน (Buckel. 1991 : 35) , P_1, P_2 และ P'_1, P'_2 คือ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนก่อน และหลังอันตรกิริยา ตามลำดับ

ทฤษฎีบีซีเอสสามารถอธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งได้ดีถ้าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งต่ำ ซึ่งต่อมาได้มีการพบสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 35 K ทฤษฎีบีซีเอสจะให้ผลไม่ตรงกับการทดลองในบางประการเช่น ค่าตัวประกอบ α ในปรากฏการณ์ไอโซโทป และช่องว่างพลังงาน เป็นต้น

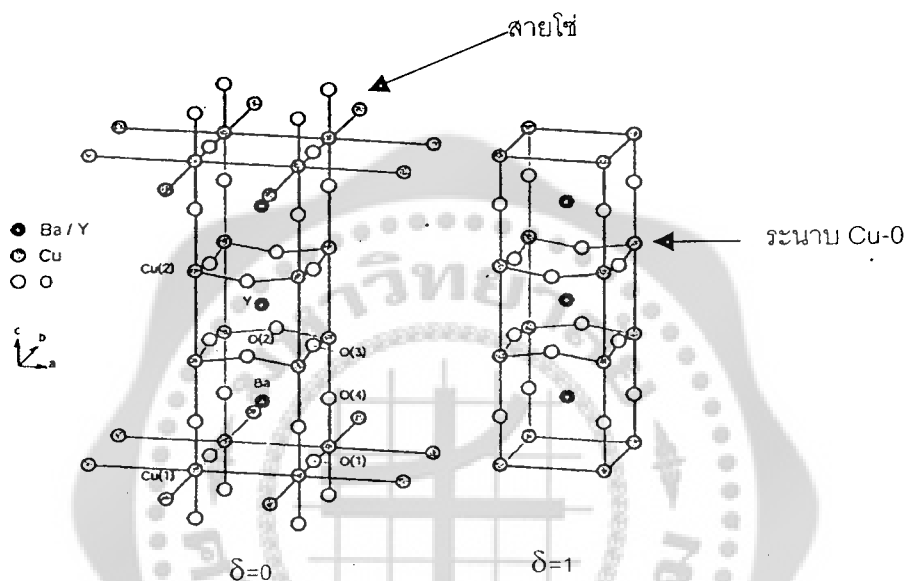
หลังจากการค้นพบสภาพนำยวดยิ่งชนิดต่างๆ และได้ศึกษาสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งแล้ว นักวิทยาศาสตร์ก็ได้พยายามค้นหาสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นๆ เพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในทางอุตสาหกรรม แต่ความพยายามในช่วงแรกๆ ไม่ประสบความสำเร็จ เพราะอุณหภูมิวิกฤตสูงสุดที่พบอยู่ที่ประมาณ 23.2 K เท่านั้นเอง จนกระทั่งปี ค.ศ. 1986 เบ็ดนอร์ซ และ มุลเลอร์ (Bednorz & Muller. 1986 : 189) ได้พบว่าสารประกอบ La-Cu-O เมื่อถูกเจือด้วย Ba จะเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่ง ที่มีอุณหภูมิวิกฤตประมาณ 35 K ต่อมา ชู และคณะ (Chu and others. 1987 : 908) ได้พบว่าสารประกอบ Y-Ba-Cu-O มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 90-100 K ปัจจุบันพบสารตัวนำยวดยิ่ง $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$ ที่มีอุณหภูมิวิกฤต 166 K ภายใต้อุณหภูมิสูง นอกจากนี้ก็มีรายงานการพบสารตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่านี้ภายใต้ความดันหรือในลักษณะของฟิล์มบาง แต่ยังไม่ได้รับการทดลองยืนยันว่าถูกต้อง ในการศึกษาประวัติการค้นพบสารตัวนำยวดยิ่ง เราจะพบว่าพัฒนาการในการค้นหาตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้น มีอัตราเร็วมาก เห็นได้จากภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 กราฟแสดงอุณหภูมิวิกฤตของสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งกับปีที่ค้นพบ (Bennemann & Ketterson. 2003 : 387)

การวิจัยสารตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิวิกฤตสูงพบว่ามีสมบัติต่างๆ ที่แตกต่างจากตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ และไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีบีซีเอส นักวิทยาศาสตร์จึงจำแนกตัวนำยิ่งยวดยิ่งออกเป็นสองประเภทคือตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ (Low - temperature superconductor) มีอุณหภูมิวิกฤตไม่เกิน 35 K ซึ่งสมบัติต่างๆอธิบายได้ดีด้วยทฤษฎีบีซีเอส และตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (High - temperature superconductor) ซึ่งนักวิทยาศาสตร์กำลังพยายามสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงให้สอดคล้องกับผลการทดลอง บางทฤษฎีก็ใช้ทฤษฎีบีซีเอสเป็นพื้นฐานแต่มีการเปลี่ยนแปลงในรายละเอียดบางประการ ปัจจุบันยังไม่มีทฤษฎีใดที่ได้รับการยอมรับว่าสามารถอธิบายสมบัติต่างๆ ของตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงได้อย่างสมบูรณ์ทุกประการ

ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่พบส่วนมากเป็นสารประกอบออกไซด์ โดยมีคอปเปอร์ (Cu) และ ออกซิเจน (O) เป็นองค์ประกอบหลักตัวอย่างเช่น $La_{2-x}Sr_xCuO_4$, $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$, $Tl_2Ba_2Cu_3O_{10}$, $YBa_2Cu_3O_7$, ซึ่งลักษณะโครงสร้างผลึกจะเป็นแบบ เตตระโกนอล (Tetragonal) หรือ ออโธโรมบิก (Orthorhombic) โดยอะตอม Cu และ O จะเรียงตัวเป็นระนาบและสายโซ่ (Chains) เช่นโครงสร้างผลึกของ $YBa_2Cu_3O_7$ ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 แสดงโครงสร้างผลึกของสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ เมื่อ $\delta = 0$ และ 1

(Bennemann & Ketterson, 1991 : 311)

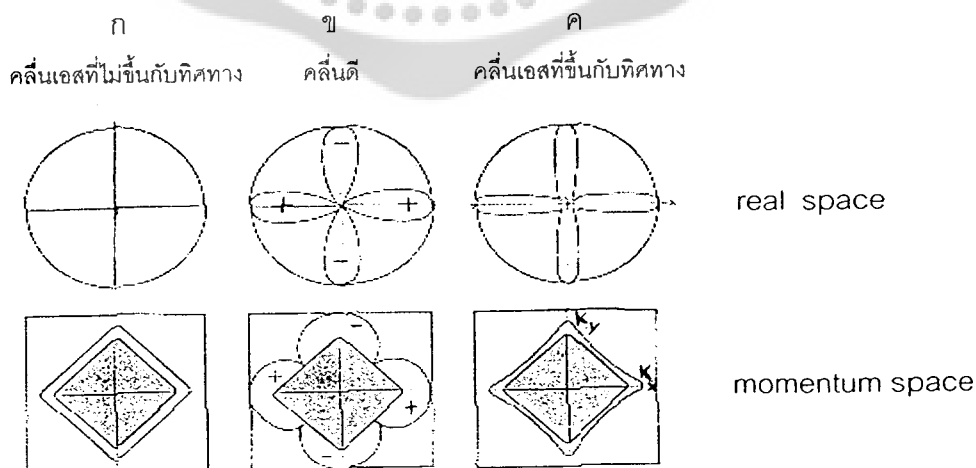
นอกจากตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่เป็นสารประกอบออกไซด์แล้ว ยังพบตัวนำวดยิ่งที่มีคุณสมบัติแตกต่างจากตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ ได้แก่ สารประกอบเฟอร์มิออนหนัก (Heavy Fermion) สารประกอบอินทรีย์ (Organic) และที่สร้างความตื่นเต้นให้แก่วงการวิทยาศาสตร์ เมื่อปี ค.ศ. 2001 คือการค้นพบสารประกอบแมกนีเซียมไดโบไรด์ (MgB_2) ที่มีอุณหภูมิวิกฤต 39 เคลวิน และมีโครงสร้างแบบเฮกซะโกนอล (Hexagonal)

เนื่องจากโครงสร้างผลึกของสารประกอบที่เป็นตัวนำวดยิ่งบางชนิดมีลักษณะที่ขึ้นกับทิศทาง (Anisotropy) ดังนั้นสมบัติทางไฟฟ้าของมันจึงมีลักษณะขึ้นกับทิศทางด้วย ในสารตัวนำวดยิ่งประเภทสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ นักฟิสิกส์เชื่อว่าคู่คูเปอร์จะอยู่กันอย่างหนาแน่นในระนาบ Cu-O เพราะสภาพนำไฟฟ้าจะมีค่ามากในทิศทางที่ขนานกับระนาบของ Cu-O และมีค่าน้อยในทิศตั้งฉากกับระนาบ Cu-O อันที่จริงที่อุณหภูมิปกติ ระนาบ Cu-O ไม่ได้มีคุณลักษณะของโลหะเลย ดังนั้นการที่จะนำไฟฟ้าได้มันจะต้องถูกโด๊ป (Doped) เช่น สารประกอบ La_2CuO_4 เป็นฉนวนแต่เมื่อโด๊ปอะตอมของ As, Sr, Ba หรือ Ca เข้าไปอิเล็กทรอนิกส์บางส่วน

ตัวในระนาบ Cu-O จะหลุดออกไปทำให้เกิดช่องว่างที่เรียกว่า โฮล (Hole) โฮลที่เกิดขึ้นนี้ทำให้ระนาบของ Cu-O สามารถนำไฟฟ้าได้เหมือนในโลหะ และจะกลายเป็นตัวนำยวดยิ่งได้ที่อุณหภูมิวิกฤตค่าหนึ่ง ซึ่งขึ้นกับความเข้มข้นของพาหะโฮลในระนาบ Cu-O นั้น

การทดลองทำให้เราทราบว่าสมบัติกายภาพต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงแตกต่างจากตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีบีซีเอส ในการสร้างทฤษฎีใหม่ขึ้นมาเพื่ออธิบายนั้น ประเด็นหนึ่งที่นักทฤษฎีจำเป็นต้องรู้คืออันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์ ซึ่งธรรมชาติของอันตรกิริยานี้สามารถรู้ได้ถ้าเรารู้ สมมาตรของฟังก์ชันคลื่นของคูคูเปอร์ ซึ่งสัมพันธ์กับความสมมาตรของ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Order parameter) ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำนั้น อิเล็กตรอนในคูคูเปอร์จะมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นศูนย์ ($l=0$) เรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นศูนย์ว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส (s - wave superconductor) และช่องว่างพลังงานที่ผิวเฟอร์มีมีสองลักษณะ คือ ช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง (Isotropic energy gap) คือ ค่าของช่องว่างพลังงานจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง ดังภาพประกอบ 9-ก และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง (Anisotropic energy gap) คือ ช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นบวกในบางทิศทาง และมีค่าเกือบเป็นศูนย์ในบางทิศทาง ดังภาพประกอบ 9-ค

ส่วนในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง คูคูเปอร์จะมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นสอง ($l = 2$) เรียกตัวนำยวดยิ่งที่มีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นสองนี้ว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี (d-wave superconductor) และช่องว่างพลังงานจะมีค่าไม่คงที่ คือขึ้นกับทิศทางมาก ซึ่งพบว่าที่ระดับเฟอร์มีช่องว่างพลังงานจะมีค่าเป็นบวกในบางทิศทาง บางทิศทางมีค่าเป็นลบและบางทิศทางมีค่าเป็นศูนย์ ดังภาพประกอบ 9-ข

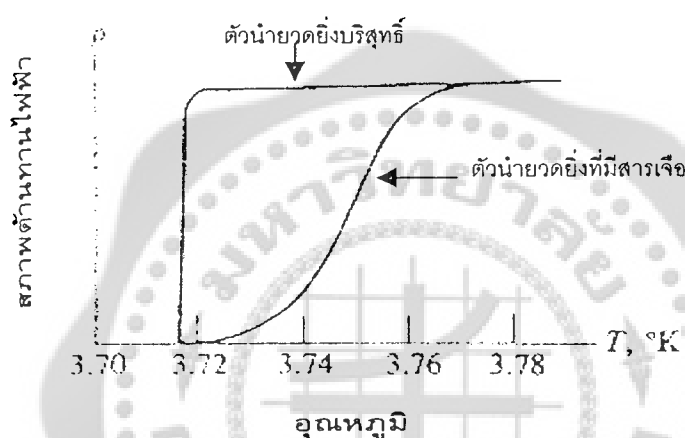


ภาพประกอบ 9 แสดงช่องว่างพลังงานใน real space และ momentum space ของตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส และตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี (Levi. 1996 : 19)

จากผลการศึกษาที่ผ่านมาได้พบว่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีลักษณะขึ้นกับทิศทางมาก และส่วนใหญ่เป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี

ตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือ

โดยทั่วไปเมื่อตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือสภาพต้านทานของตัวนำยิ่งยวดจะลดลงอย่างไม่ทันที่ทันใด เนื่องจากอิทธิพลของสารเจือ ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 ผลของสารเจือต่อการเปลี่ยนสถานะของตัวนำยิ่งยวด
(Omar. 1975 : 498)

ปัจจุบันได้มีการศึกษาผลของสารเจือที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสมบัติอื่นๆของตัวนำยิ่งยวด โดยทั่วไปแล้วอาจแบ่งสารเจือได้เป็น 2 ประเภท คือ

1. กรณีที่อะตอมของสารเจือมีสภาพไม่เป็นแม่เหล็ก (Non-magnetic impurities) เนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กลัพธ์ของอะตอมเป็นศูนย์ ทำให้อะตอมหรือไอออนนั้นไม่เป็นแม่เหล็ก
2. กรณีที่อะตอมของสารเจือมีสภาพเป็นแม่เหล็ก (Magnetic impurities) เนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กลัพธ์ของอะตอมหักล้างกันไม่หมด จึงมีค่าๆ หนึ่ง

ในปี ค.ศ. 1961 อบริกอฟ และกอร์คอฟ (Openov. 1998 : 9469 ; citing Abrikosov & Gor'kov. 1961) ได้พบว่าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กไม่มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงาน ถึงแม้ความเข้มข้นของสารเจือจะเพิ่ม แต่ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำถูกโคบด้วยสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก อุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงานจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว แม้ว่าความเข้มข้นของสารเจือจะมีค่าเพียงเล็กน้อยก็ตาม และถ้าความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มจนถึงค่าหนึ่ง ตัวนำยิ่งยวดก็จะสูญเสียสภาพนำยิ่งยวดไป

สาเหตุที่สารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งได้ เพราะสารเจือมีโมเมนต์แม่เหล็กซึ่งจะมีอันตรกิริยากับสปินของอิเล็กตรอนในคูคูเปอร์ ทำให้อิเล็กตรอนตัวใดตัวหนึ่งในคูคูเปอร์กลับทิศของสปินส่งผลให้คูคูเปอร์ถูกทำลาย และเมื่อจำนวนคูคูเปอร์ลดลงๆ อุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงานจึงลดลงด้วย โดยช่องว่างพลังงานจะลดลงในอัตราที่เร็วกว่าอุณหภูมิวิกฤต ทำให้เกิดปรากฏการณ์ที่แปลกประหลาด คือ ตัวนำยวดยิ่งที่ไม่มีช่องว่างพลังงาน (Gapless superconductor) อบริกอสอฟและกอร์คอฟพบว่าเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเป็น $n = 0.91n_{cr}$ เมื่อ n_{cr} คือความเข้มข้นของสารเจือขณะที่สภาพนำยวดยิ่งถูกทำลาย ช่องว่างพลังงานจะหายไปในขณะที่ยังคงสภาพเป็นตัวนำยวดยิ่งอยู่ ตัวนำยวดยิ่งที่ไม่มีช่องว่างพลังงานนั้นนอกจากจะเกิดจากการมีสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็กดังที่กล่าวมาแล้วก็อาจเกิดจากอิทธิพลของสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้า ที่สามารถทำลายคูคูเปอร์ให้อิเล็กตรอนแยกออกจากกัน การเกิดสภาพนำยวดยิ่งที่ไม่มีช่องว่างพลังงานนี้ แสดงให้เห็นว่าการมีช่องว่างพลังงานไม่ใช่เงื่อนไขที่จำเป็นในการเกิดสภาพนำยวดยิ่ง (Kresin & Wolf. 1990 : 38)

ทฤษฎีของอบริกอสอฟและกอร์คอฟนั้น ใช้ศึกษาผลกระทบของสารเจือต่อตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำซึ่งพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีลักษณะไม่ขึ้นกับทิศทาง และเป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอสได้ดี แต่ไม่สามารถอธิบายตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงซึ่งพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีลักษณะขึ้นกับทิศทางมาก จากการทดลองพบว่าสารเจือแบบไม่เป็นแม่เหล็กและเป็นแม่เหล็กต่างมีผลกระทบทำให้อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงลดลง (Crisan and others. 1998 : 699) งานวิจัยต่อมาได้พยายามปรับปรุงทฤษฎี ของอบริกอสอฟและกอร์คอฟ ด้วยการเพิ่มพารามิเตอร์การจับคู่แบบคลื่นดีเข้าไปในสมการ แต่ยังคงพบว่าการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตเร็วกว่าผลที่ได้จากการทดลอง (Openov. 1998 : 9468) จึงมีการเสนอแนวคิดเพื่อให้ได้ผลที่คล้องจองกับการทดลองมากขึ้น เช่น พิจารณาการขึ้นกับทิศทางของการกระเจิงเนื่องจากสารเจือ (Haran & Nagi. 1996 : 15463) การแปรผันของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Franz and others. 1997 : 7882) เป็นต้น แต่ส่วนใหญ่จะพิจารณาเฉพาะกรณีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ในปี ค.ศ. 1997 โกลูบอฟและมาซิน (Golubov & Mazin. 1997 : 15146) ได้ปรับปรุงสูตรของอบริกอสอฟและกอร์คอฟสำหรับหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือให้ใช้ได้ในกรณีที่พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบขึ้นกับทิศทางในกรณีของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงมีหลายแถบพลังงานและมีสารเจือทั้งประเภทที่เป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก ในปี ค.ศ. 1998 โอพินอฟ (Openov. 1998 : 9468) ได้พบสูตรสำหรับคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีแถบพลังงานเดียวและมีสารเจือทั้งที่เป็นแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็กและมีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ขึ้นกับทิศทางรูปแบบต่างๆ ได้สูตรที่ค่อนข้างง่ายกว่าสูตรของอบริกอสอฟและกอร์คอฟและมีพารามิเตอร์ที่มีความหมายจึงสามารถนำไปเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองได้ค่อนข้างดี ในปี ค.ศ. 2000 โกรซุ (Grosu. 2000 : 141) ได้วิจัยอิทธิพลของสารเจือแบบไม่เป็นแม่เหล็กในตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดี ที่มี

ความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงานใน 2 ลักษณะ โดยใช้ทฤษฎีของอบริกอฟและกอร์คอฟคำนวณหาการลดลงของอุณหภูมิวิกฤต เขาพบว่าอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงในอัตราที่ช้ากว่ากรณีความหนาแน่นสถานะคงที่

ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ (Non-Fermi liquid theory)

ทฤษฎีที่ใช้ศึกษาผลกระทบของสารเจือต่อตัวนำยิ่งยวดยิ่งที่ผ่านมาส่วนใหญ่เป็นทฤษฎีที่ใช้แบบจำลองของเหลวเฟอร์มิ (Fermi liquid model) ซึ่งสมมติว่าอิเล็กตรอนในโลหะหรือสารประกอบมีอันตรกิริยากันอย่างอ่อน แต่การวิจัยที่ผ่านมามีแนวโน้มที่อิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีอันตรกิริยากันค่อนข้างรุนแรงและมีสมบัติที่แปลกประหลาดหลายประการ การใช้ทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิไม่สามารถอธิบายสถานะปกติและสถานะนำยิ่งยวดของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงได้

ในปี ค.ศ. 1989 วาร์มาและคนอื่นๆ (Varma and others, 1989 : 1996) ได้วิเคราะห์สมบัติต่างๆ ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ และในปี ค.ศ. 1992 แอนเดอร์สัน (Anderson, 1992 : 1526) ได้เสนอว่าทฤษฎีที่จะใช้อธิบายตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงควรเป็นทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ ดังจะเห็นได้จากการเปรียบเทียบผลที่ทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิได้ทำนายไว้กับผลที่ได้จากการทดลองดังตาราง 3

ตาราง 3 เปรียบเทียบสมบัติเชิงกายภาพบางประการของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงประเภทสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ที่ทำนายด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ(BCS/FL)กับผลการทดลอง

สมบัติเชิงกายภาพ	การทำนายของ BCS/FL	ผลการทดลอง
สถานะนำยิ่งยวด ($T < T_c$)		
เวลาผ่อนคลาย สปิน-แลตทิซ ($1/T_1$) (Spin-Lattice relaxation time)	แสดงยอดอาพันธ์ (Coherent peak)	ไม่ปรากฏ
ปรากฏการณ์ไอโซโทป	$\alpha = 0.5$ หรือ น้อยกว่า	$-0.013 < \alpha < +1.0$
สภาพนำความร้อน	ลดลงเมื่ออุณหภูมิลด	เพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิลด
ช่องว่างพลังงาน	$3.5 T_c$	$7-8 T_c$ ($T_c = 90 \text{ K}$)

ตาราง 3 (ต่อ)

สมบัติเชิงกายภาพ	การทำนายของ BCS/FL	ผลการทดลอง
สถานะปกติ ($T > T_c$)		
อัตราส่วน Hall ($-1/ne$)	คงที่	แปรผันกับอุณหภูมิ
อัตราส่วน Korringa ($1/T_1T$)	คงที่	ขึ้นกับอุณหภูมิ
กำลังความร้อน	แปรผันกับอุณหภูมิแบบเชิงเส้น และมีค่าน้อย	แปรผันกับอุณหภูมิแบบไม่เชิงเส้นและมีค่ามาก
สภาพนำอินฟราเรด	มีความสัมพันธ์ตามกฎของดรูด์ (Drude's Law)	มีค่าสูงสุดในช่วงอินฟราเรด

(Alexandrov & Mott. 1994 : 102)

นักวิจัยทฤษฎีตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงในระยะต่อมาจึงสนใจทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ โดยใช้แบบจำลองของแอนเดอสันเป็นพื้นฐาน ซึ่งทฤษฎีนี้พิจารณาถึงลักษณะเฉพาะของสสารที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิจากฟังก์ชันสเปกตรัล $A(\Lambda k, \Lambda \omega) = \Lambda^{\alpha-1} A(k, \omega)$ เมื่อ α คือ พารามิเตอร์ของการไม่ใช่เฟอร์มิ (Non-Fermi parameter) Λ คือ พารามิเตอร์รีนอร์มอลไลซ์ k คือ โมเมนตัม และ ω คือ พลังงาน ($\hbar = 1$) โดย α มีค่าขึ้นกับอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์ (Grosu. 2002 : 263 ; citing Wen. 1990) ถ้า α เป็นศูนย์ทฤษฎีก็จะสอดคล้องกับทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าสูตรของอุณหภูมิวิกฤตในกรณีนี้ที่ $\alpha = 0$ จะลดรูปไปสอดคล้องกับสูตรของทฤษฎีของบีซีเอส และค่าคงที่ของการจับคู่ (Coupling constant) จะมีค่ามากขึ้นตามค่าพารามิเตอร์ α

สำหรับการศึกษาผลกระทบของสารเจือต่อตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงโดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มินั้น โอกาตะและแอนเดอสัน (Ogata & Anderson. 1993 : 3087) ได้ศึกษาในกรณี 1 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันกรีน (Green function) ในแบบจำลองของเหลวโทมานากะลูทติงเกอร์ (Tomanaga-Luttinger liquid) หาสภาพนำไฟฟ้าในกรณีที่มีสารเจือ ในปี ค.ศ. 2000 โกรชูและมอคานู (Grosu & Mocanu. 2000 : 587) ได้คำนวณหาพลังงานของอิเล็กตรอนเนื่องจากการกระเจิงโดยสารเจือแบบไม่เป็นแม่เหล็ก และใช้แบบจำลองที่สปีนและประจุแยกจากกัน ในกรณี 2 มิติ ในปี ค.ศ. 2002 โกรชู (Gruso. 2002 : 263) ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงานของอิเล็กตรอน และศึกษาผลกระทบเนื่องจากสารเจือแบบไม่เป็นแม่เหล็ก ในตัวนำยิ่งยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่เป็นสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์ โดยใช้แบบ-

จำลองของ Yin และ Chakravarty (Yin & Chakravarty, 1996 : 805-815) เขาพบว่าอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้สอดคล้องกับแบบจำลองของแอนเดอสัน และสารเจือทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดเร็วกว่าที่คำนวณด้วยทฤษฎีของเฮลวเฟอ์รมิ

แต่จากการศึกษาของโกรชู่นี้ ผู้วิจัยได้พบว่า สมการของอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากการพิจารณาอิทธิพลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อตัวนำยวดยิ่งนั้นไม่ถูกต้อง และโกรชู่ยังได้กำหนดให้พลังงานสูงสุดของอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์มีค่าได้ถึงอนันต์ ซึ่งแท้จริงแล้วแบบจำลองของ Yin และ Chakravarty ที่โกรชู่ใช้นั้น ยังคงสมมติให้อิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์จับคู่กันโดยมีอันตรกิริยาเหมือนในทฤษฎีบีซีเอส ดังนั้นพลังงานของอิเล็กตรอนที่ใช้ ควรจะมีค่าจำกัดคือไม่เกิน $\hbar\omega_D$ เมื่อ ω_D คือ ความถี่เดอบาย (Debye frequency) นอกจากนี้ผู้วิจัยยังพบว่า มีอีกบางสมการที่โกรชู่คำนวณไว้ไม่ถูกต้องด้วย

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าการศึกษาผลกระทบของสารเจือต่อสมบัติต่างๆ ของตัวนำยวดยิ่งนั้นนอกจากจะมีประโยชน์ในการค้นหาตัวนำยวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นแล้ว ยังเป็นวิธีการหนึ่งที่นักวิทยาศาสตร์ใช้เพื่อทราบลักษณะของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนในคู่คูเปอร์เพื่อใช้ในการพัฒนาทฤษฎีสำหรับอธิบายสภาพนำยวดยิ่งให้ถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และเพราะมีสมบัติหลายประการของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงทั้งในสถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่งที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีของเฮลวเฟอ์รมิ ปัจจุบันนักวิทยาศาสตร์จึงหันมาสนใจศึกษาตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงโดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอ์รมิกันมากขึ้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจศึกษาอิทธิพลของสารเจือต่อตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงโดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอ์รมิ โดยจะแก้ไขงานวิจัยของโกรชู่ (Gruso, 2002 : 263) ให้ถูกต้อง

ความมุ่งหมายของงานวิจัย

1. เพื่อคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์โดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอ์รมิเมื่อกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เกิน $\hbar\omega_D$
2. เพื่อคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก โดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอ์รมิ เมื่อกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์และ $\hbar\omega_D$
3. เพื่ออภิปรายเปรียบเทียบ ผลการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตโดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเฮลวเฟอ์รมิ เมื่อกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และ $\hbar\omega_D$

4. เพื่อทราบความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกฤตกับพารามิเตอร์ของการไม่ใช่เฟอร์มิ (Non-Fermi parameter, α) และความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกฤตของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิกับความเข้มข้นของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

ขอบเขตของงานวิจัย

งานวิจัยนี้ใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ ตามแบบจำลองของ Yin และ Chakravarty (Yin-Chargravarty model) ซึ่งกำหนดให้อิเล็กตรอนมีการจับคู่กันเหมือนในทฤษฎีบีซีเอส โดยกำหนดให้พลังงานสูงสุดในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เกินความถี่เดอบาย แล้วคำนวณหาอุณหภูมิกฤตของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์ และตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก สำหรับกรณีตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือจะพิจารณาการกระเจิงแบบบอร์น และการคำนวณตลอดงานวิจัยนี้กำหนดให้ $\hbar = k_B = 1$ และความถี่มีหน่วยเคลวิน (K) เช่นเดียวกับอุณหภูมิก

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ หมายถึง ทฤษฎีที่ใช้อธิบายระบบของอนุภาคเฟอร์มิออนที่มีอันตรกิริยากันที่อุณหภูมิต่ำโดยพิจารณาสถานะกระตุ้นเสมือนมีพฤติกรรมเป็นอนุภาคอิสระ
2. ตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ หมายถึง ตัวนำวดยิ่งที่ไม่สามารถอธิบายสมบัติบางประการได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ ได้แก่ ตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ และตัวนำวดยิ่งเฟอร์มิออนหนัก

ความสำคัญของงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะให้ผลการของอุณหภูมิกฤตของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์และตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก สำหรับอธิบายตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ โดยสูตรของอุณหภูมิกฤตที่ได้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกฤตกับพารามิเตอร์ของการไม่ใช่เฟอร์มิ และความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิกฤตกับความเข้มข้นของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก แบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถพัฒนาต่อไป เพื่ออธิบายสมบัติด้านอื่นๆ ของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ จึงอาจเป็นทฤษฎีหนึ่งที่สามารถอธิบายผลการทดลองได้ดียิ่งขึ้น

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และจะนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดด้วยทฤษฎีบีซีเอส
2. การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดด้วยทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ (Non-Fermi liquid theory)
3. งานวิจัยที่ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดด้วยทฤษฎีบีซีเอส

ทฤษฎีบีซีเอสอธิบายกลไกการเกิดสภาพนำยิ่งยวดว่าเกิดจากการที่อิเล็กตรอนในโลหะมีอันตรกิริยาดึงดูดกันเป็นคู่ๆ เรียกว่าคู่อุปเปอร์ การจับคู่กันของอิเล็กตรอนทำให้เกิดช่องว่างพลังงานระหว่างสถานะพื้นและสถานะกระตุ้น โดยอิเล็กตรอนที่จับคู่กันจะมีขนาดของโมเมนตัมเท่ากันแต่ทิศของโมเมนตัมและสปินตรงข้ามกัน อันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนนี้ เกิดจากการสั่นของแลตทิซ ซึ่งมีอันตรกิริยากับอิเล็กตรอน ทำให้ดูเหมือนว่าอิเล็กตรอนในคู่อุปเปอร์แลกเปลี่ยนโฟนอนกัน ดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 1

ในที่นี้จะคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดตามแบบจำลองของทฤษฎีบีซีเอส โดยใช้ระเบียบวิธีของ โบโกลิวบอฟ (Bogoliubov) ซึ่งใช้ในการศึกษาการจับคู่ในของไหลยิ่งยวด (Superfluid) โดยเริ่มจากการพิจารณาแฮมิลโตเนียนของระบบดังสมการ

$$\hat{H} = \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_\alpha^*(\vec{r}) \Delta \Psi_\alpha(\vec{r}) - \frac{V}{2} \Psi_\alpha^*(\vec{r}) \Psi_\beta^*(\vec{r}) \Psi_\beta(\vec{r}) \Psi_\alpha(\vec{r}) \right] d^3x \quad (2.1)$$

เมื่อ V คือ ค่าคงตัวของ การจับคู่มิค่ามากกว่าศูนย์ และ

$$\hat{\Psi}_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} u_\alpha(\sigma) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}$$

$$\hat{\Psi}_\alpha^+(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ u_\alpha(\sigma) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (2.2)$$

ในที่นี้ $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ และ $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+$ คือตัวดำเนินการทำลาย (Annihilation operator) และตัวดำเนินการสร้าง (Creation operator) สำหรับอนุภาคเฟอร์มิออน ที่มีโมเมนตัม \vec{p} และสปิน $\sigma = \pm 1/2$ ตามลำดับ

$u_\alpha(\sigma)$ คือ แอมพลิจูดของ spinor ที่มีสปิน σ และมีโมเมนตัม α ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $u_\alpha(\sigma)u_\alpha(\sigma') = \delta_{\sigma\sigma'}$ และ Ω คือ ปริมาตรของระบบ
ตัวดำเนินการทำลายและตัวดำเนินการสร้างสรรค์ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'} + \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} &= 0 \\ \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'}^+ + \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ &= 0 \\ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'}^+ + \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

แทนสมการ (2.2) ลงใน (2.1) และอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (2.3) จะได้แฮมิลโตเนียนใหม่ดังสมการ

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}\sigma} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} - \frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}'_1} \hat{a}_{\vec{p}'_1 \uparrow}^+ \hat{a}_{\vec{p}'_2 \downarrow}^+ \hat{a}_{\vec{p}_2 \downarrow} \hat{a}_{\vec{p}_1 \uparrow} \quad (2.4)$$

เมื่อ $\vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}'_1$ และ \uparrow, \downarrow แทนสปิน $+1/2$ และ $-1/2$ ตามลำดับ

ในแบบจำลองที่ใช้ อิเล็กตรอนที่จับคู่กันมีโมเมนตัมเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นจึงสามารถกำหนดให้ $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$ และ $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 \equiv \vec{p}'$ และใช้ $\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N}$ เมื่อ $\mu = \epsilon_F = p_F^2/2m$ คือ ศักย์เชิงเคมี (Chemical potential) p_F คือ โมเมนตัมของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ และ $\hat{N} = \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ คือ ตัวดำเนินการจำนวนอนุภาค (Particle number operator) ในที่สุดจะได้แฮมิลโตเนียนลดทอน ดังสมการ

$$\hat{H}' = \sum_{\vec{p}\sigma} \eta_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} - \frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{p}\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}'\uparrow}^+ \hat{a}_{-\vec{p}'\downarrow}^+ \hat{a}_{-\vec{p}\downarrow} \hat{a}_{\vec{p}\uparrow} \quad (2.5)$$

เมื่อ $\eta_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m} - \mu \approx v_F (p - p_F)$ บริเวณใกล้ผิวเฟอร์มิ

v_F คือ ความเร็วของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ

ถ้ากำหนดให้ \hat{b} และ \hat{b}^+ เป็นตัวดำเนินการทำลายและสร้างสถานะกระตุ้น ตามลำดับ ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการ \hat{a} และ \hat{a}^+ ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\bar{p}\uparrow} &= u_p \hat{b}_{\bar{p}\uparrow} + v_p \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow}^+ \\ \hat{a}_{\bar{p}\uparrow}^+ &= u_p \hat{b}_{\bar{p}\uparrow}^+ + v_p \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow} \\ \hat{a}_{\bar{p}\downarrow} &= u_p \hat{b}_{\bar{p}\downarrow} + v_p \hat{b}_{-\bar{p}\uparrow}^+ \\ \hat{a}_{\bar{p}\downarrow}^+ &= u_p \hat{b}_{\bar{p}\downarrow}^+ + v_p \hat{b}_{-\bar{p}\uparrow}\end{aligned}\quad (2.6)$$

ในที่นี้ \hat{b}, \hat{b}^+ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขตามสมการ (2.3) และ u_p, v_p สามารถเลือกให้เป็นฟังก์ชันจริง และมีสภาพปกติ ดังสมการ

$$u_p^2 + v_p^2 = 1 \quad (2.7)$$

สถานะพื้นของระบบ คือ สถานะที่ไม่มีการกระตุ้น กำหนดฟังก์ชันสถานะเป็น $|0\rangle$ มีความสัมพันธ์กับตัวดำเนินการ \hat{b}, \hat{b}^+ ดังสมการ

$$\hat{b}_{\bar{p}\sigma} |0\rangle = \langle 0 | \hat{b}_{\bar{p}\sigma}^+ = 0 \quad (2.8)$$

สำหรับสถานะกระตุ้น ค่าเฉลี่ยของตัวดำเนินการ $\hat{b}_{\bar{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\bar{p}\sigma}$ กำหนดให้เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนสถานะกระตุ้น

$$\langle \hat{b}_{\bar{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\bar{p}\sigma} \rangle = n_{\bar{p}\sigma} \quad (2.9)$$

สามารถเขียนแฮมิลโตเนียน H' ในเทอมของตัวดำเนินการ \hat{b} โดยแทนสมการ (2.6) ลงใน (2.5) และอาศัยความสัมพันธ์ดังสมการ (2.3) จะได้

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= 2 \sum_{\bar{p}} \eta_p v_p^2 + \sum_{\bar{p}} \eta_p (u_p^2 - v_p^2) (\hat{b}_{\bar{p}\uparrow}^+ \hat{b}_{\bar{p}\uparrow} + \hat{b}_{\bar{p}\downarrow}^+ \hat{b}_{\bar{p}\downarrow}) + \\ & 2 \sum_{\bar{p}} \eta_p u_p v_p (\hat{b}_{\bar{p}\uparrow}^+ \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow}^+ + \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow} \hat{b}_{\bar{p}\uparrow}) - \frac{V}{\Omega} \hat{D}^+ \hat{D}\end{aligned}\quad (2.10)$$

ในที่นี้กำหนดให้

$$\hat{D} = \sum_{\bar{p}} \left[u_p^2 \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow} \hat{b}_{\bar{p}\uparrow} - v_p^2 \hat{b}_{\bar{p}\uparrow}^+ \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow}^+ + u_p v_p \left(1 - \hat{b}_{\bar{p}\uparrow}^+ \hat{b}_{\bar{p}\uparrow} - \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow}^+ \hat{b}_{-\bar{p}\downarrow} \right) \right] \quad (2.11)$$

คำนวณหาพลังงานเฉลี่ยของระบบ ในที่นี้ไม่พิจารณาความแปรปรวนของ \hat{D} ดังนั้น $\langle \hat{D}^+ \hat{D} \rangle$ จึงเท่ากับ $\langle \hat{D} \rangle^2$ และอาศัยความสัมพันธ์ตามสมการ (2.8) และ (2.9) จะได้

$$E = \langle \hat{H}' \rangle = \sum_{\bar{p}} \eta_p \left[2v_p^2 + (u_p^2 - v_p^2)(n_{\bar{p}\uparrow} + n_{\bar{p}\downarrow}) \right] - \frac{V}{\Omega} \langle \hat{D} \rangle^2 \quad (2.12)$$

ในที่นี้ $\langle \hat{D} \rangle = \sum_{\bar{p}} u_p v_p (1 - n_{\bar{p}\uparrow} - n_{\bar{p}\downarrow})$

สัมประสิทธิ์ u_p และ v_p สามารถหาได้จากการ ทำให้พลังงาน E มีค่าต่ำสุด ซึ่งจากสมการ (2.7) จะได้ $u_p \delta u_p = -v_p \delta v_p$ ดังนั้น

$$\delta E = -2(1 - n_{\bar{p}\uparrow} - n_{\bar{p}\downarrow}) \left[2\eta_p u_p v_p - \Delta(u_p^2 - v_p^2) \right] \frac{\delta u_p}{v_p} = 0 \quad (2.13)$$

ในที่นี้กำหนดให้

$$\Delta = \frac{V}{\Omega} \langle \hat{D} \rangle = \frac{V}{\Omega} \sum_{\bar{p}} u_p v_p (1 - n_{\bar{p}\uparrow} - n_{\bar{p}\downarrow}) \quad (2.14)$$

สมการ (2.13) จะเป็นจริงเมื่อ

$$2\eta_p u_p v_p = \Delta(u_p^2 - v_p^2) \quad (2.15)$$

จากสมการ (2.7) และสมการ (2.15) จะได้

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\eta_p}{\sqrt{(\Delta^2 + \eta_p^2)}} \right), v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta_p}{\sqrt{(\Delta^2 + \eta_p^2)}} \right) \quad (2.16)$$

แทนสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.14) จะได้

$$\frac{V}{2\Omega} \sum_{\vec{p}} \frac{1 - n_{\vec{p}\uparrow} - n_{\vec{p}\downarrow}}{\sqrt{(\Delta^2 + \eta_p^2)}} = 1 \quad (2.17)$$

ปริมาณ Δ มีบทบาทสำคัญในทฤษฎี แสดงถึงสเปกตรัมของพลังงานของสถานะกระตุ้น โดยสอดคล้องกับทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิในการหาพลังงานของสถานะกระตุ้น $\varepsilon_\sigma(p)$ ที่มีโมเมนตัม p และสปิน σ ซึ่งใช้การแปรผันพลังงานรวมเทียบกับฟังก์ชันการกระจาย (Distribution - function) $n_{\vec{p}\sigma}$ ดังสมการ

$$\delta E = \sum_{\vec{p}\sigma} \varepsilon_\sigma(p) \delta n_{\vec{p}\sigma} \quad (2.18)$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาพลังงานของระบบในสมการ (2.12) จะได้

$$\varepsilon_\sigma(p) = \sqrt{\Delta^2 + \eta_p^2} \quad (2.19)$$

จากสมการ (2.19) จะเห็นว่าพลังงานของสถานะกระตุ้นต้องมีค่าไม่น้อยกว่า Δ แสดงว่าสถานะกระตุ้นนี้ถูกแยกจากสถานะพื้นโดยช่องว่างพลังงาน เมื่อพิจารณาในสมดุลเทอร์โมไดนามิก ฟังก์ชันการกระจาย $n_{\vec{p}\sigma}$ ไม่ขึ้นกับสปิน และมีค่าเท่ากับการกระจายเฟอร์มิ (Fermi distribution)

$$n_{\vec{p}\uparrow} = n_{\vec{p}\downarrow} \equiv n(\varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon(p)}{T}\right) + 1 \right]^{-1} \quad (2.20)$$

แทนสมการ (2.19) และ (2.20) ลงในสมการ (2.17) จะได้สมการของช่องว่างพลังงานเป็น

$$\frac{V}{2} \int \frac{1 - 2n(\varepsilon)}{\varepsilon(p)} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 1 \quad (2.21)$$

ซึ่ง $1 - 2n(\varepsilon) = \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right)$ จะเห็นว่าสมการ (2.21) มีคำตอบเฉพาะ $V > 0$ และขนาดของช่องว่างพลังงานขึ้นกับอุณหภูมิในฟังก์ชันการกระจาย n_p สามารถคำนวณหาอุณหภูมิ

วิกฤตได้จากการที่ช่องว่างพลังงาน Δ จะเป็นศูนย์ที่อุณหภูมิวิกฤต สมการ (2.21) จึงกลายเป็น

$$\frac{N(0)V}{2} \int_0^{\hbar\omega_D/2T_c} \tanh x \frac{dx}{x} = 1 \quad (2.22)$$

เมื่อ $N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ และ $x = \varepsilon/2T_c$ ในที่นี้ให้พลังงานของสถานะกระตุ้นมีค่าไม่เกิน $\hbar\omega_D$ เนื่องจากอันตรกิริยาดึงดูดเกิดจากการแลกเปลี่ยนโฟนอนพลังงานของอิเล็กตรอนจึงขึ้นกับความถี่ที่มากที่สุดของโฟนอนนั้นคือความถี่เดอบาย ω_D อินทิเกรตแยกส่วนสมการ (2.22) โดยกำหนดให้ $\tanh\left(\frac{\hbar\omega_D}{2T_c}\right) \approx 1$ เนื่องจาก $\omega_D \gg T_c$ จะได้

$$\frac{N(0)V}{2} [\log(\hbar\omega_D/T_c) - I/2] = 1$$

$$\text{เมื่อ } I = \int_0^\infty \frac{\log x}{\cosh(x/2)} dx = 2 \log(\pi/2\gamma), \quad \gamma = e^C = 1.78$$

ดังนั้นสมการของอุณหภูมิวิกฤตคือ

$$T_c = 1.14 \hbar\omega_D \exp(-1/N(0)V) \quad (2.23)$$

การคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดด้วยทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ

เนื่องจากสถานะปกติและสถานะนำยวดยิ่งของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ (Fermi liquid theory) ดังจะเห็นได้จากผลการทำนายทางทฤษฎี ไม่สอดคล้องกับผลการทดลองหลายประการ ปัจจุบันนักวิทยาศาสตร์จึงหันมาสนใจศึกษาตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงโดยใช้ทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิกันมากขึ้น ทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นมีทั้งในระดับจุลภาคและมหภาค ทฤษฎีที่ใช้กันแพร่หลายคือแบบจำลองของแอนเดอสัน ซึ่งยังคงยึดหลักการของแบบจำลองในทฤษฎีบีซีเอส แต่มีพารามิเตอร์เสริมที่ทำให้แตกต่างจากกรณีที่พิจารณาด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ แบบจำลองของแอนเดอสันกำหนดฟังก์ชันสเปกตรัล (Spectral function) ที่สัมพันธ์กับฟังก์ชันกรีนดังสมการ $A(k, \omega) = -1/\pi \text{Im} G(k, \omega)$ ซึ่ง

สอดคล้องกับสมการ $A(\Lambda k, \Lambda \omega) = \Lambda^{-1+\alpha} A(k, \omega)$ เมื่อ α คือ พารามิเตอร์ที่มีค่ามากกว่าศูนย์ และถ้า α มีค่าเป็นศูนย์ทฤษฎีที่ใช้ก็จะลดรูปเป็นทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ ต่อมานักวิทยาศาสตร์ได้พัฒนาแบบจำลองของแอนเดอสัน โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันไป ในที่นี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีของยีนและชากราวาร์ตี (Yin and Chakravarty method) ที่โกรซูใช้ในปี ค.ศ. 2002 (Grosu. 2002 : 263) ซึ่งโกรซูได้ศึกษาสถานะนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ ในกรณีที่เป็นตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์และมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก กรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์เริ่มต้นพิจารณาจากฟังก์ชันกรีน ดังนี้

$$G_0(\bar{k}, i\omega_n) = g(\alpha) \frac{\theta(\omega_n) e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}} + \theta(-\omega_n) e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}}{\omega_c^\alpha (i\omega_n - \varepsilon_k)^{1-\alpha}} \quad (2.24)$$

เมื่อ

$$g(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (2.25)$$

ω_c คือ ความถี่ตัดทิ้ง (Cutoff frequency)

$\omega_n = 2\pi T_c (n + 1/2)$ คือ ความถี่มัดซูมารา (Matsubara frequency)

$\theta(x)$ คือ ฟังก์ชัน Heaviside , $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$

α คือ พารามิเตอร์ที่อธิบายพฤติกรรมที่ไม่ใช่เฟอร์มิ

สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตได้จากเกณฑ์ของเทอเลส (Thouless criterion) คือ

$$1 - \nu\Pi(0,0) = 0 \quad (2.26)$$

ในที่นี้ $\Pi(0,0)$ คือ particle-particle bubble ที่สามารถหาได้จากสมการ

$$\Pi(0,0) = T_c \sum_n \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} G_0(\bar{k}, i\omega_n) G_0(-\bar{k}, -i\omega_n) \quad (2.27)$$

ใช้สมการ (2.24) แล้วพิจารณาผลคูณของฟังก์ชันกรีน เมื่อ $\varepsilon_k = \varepsilon_{-k}$ จะได้

$$G_0(\bar{k}, i\omega_n)G_0(-\bar{k}, -i\omega_n) = \frac{g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha}}{(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^{1-\alpha}} \quad (2.28)$$

ถ้าความหนาแน่นสถานะมีค่าคงที่ $\Pi(0,0)$ สามารถหาได้จากสมการ

$$\Pi(0,0) = 2N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_n \frac{1}{\omega_n^{2(1-\alpha)}} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2\right]^{1-\alpha}} \quad (2.29)$$

ในการทำอินทิกรัลในสมการ (2.29) สามารถหาค่าได้จากการใช้สูตร

$$\int_0^\infty dx x^{\mu-1} (1 + \beta x^p)^{-\nu} = \frac{1}{p} \beta^{-\mu/p} B\left(\frac{\mu}{p}, \nu - \frac{\mu}{p}\right) \quad (2.30)$$

โดย $|\arg \beta| < \pi$, $p > 0$, $0 < \text{Re } \mu < p \text{Re } \nu$ (Grosu. 2002 : 264)

เมื่อ $B\left(\frac{\mu}{p}, \nu - \frac{\mu}{p}\right)$ คือ ฟังก์ชันเบต้า (Beta function)

พิจารณาภายใต้เงื่อนไข $0 < \alpha < 1/2$ จะได้

$$\Pi(0,0) = \frac{N(0)}{\pi} g^2(\alpha) \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c}\right)^{-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n+1/2)^{1-2\alpha}} \quad (2.31)$$

ผลรวมในสมการ (2.31) สามารถหาได้โดยประมาณดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n+1/2)^{1-2\alpha}} = \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{(n+1/2)^{1-2\alpha}} \\ &= 2^{1-2\alpha} + \sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{(n+1/2)^{1-2\alpha}} \equiv 2^{1-2\alpha} + \tilde{S} \end{aligned} \quad (2.32)$$

เมื่อ \tilde{S} เป็นฟังก์ชันเรียบ (Smooth function) จึงสามารถเปลี่ยนผลรวมเป็นอินทิกรัลได้

$\tilde{S} \cong \int_{1/2}^{\omega_D/2\pi T_c} dx \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2\alpha-1}$ ถ้าใช้การประมาณ $\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \gg 1$ ผลรวม S จะกลายเป็น

$$S \cong \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \quad (2.33)$$

นำ $\Pi(0,0)$ แทนลงในสมการ (2.26) จะได้

$$1 - \frac{\lambda}{\pi} g^2(\alpha) \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) S = 0 \quad (2.34)$$

เมื่อ $\lambda = \lambda_c$ คือ ค่าคงที่ของการจับคู่ สมการ (2.34) ให้อุณหภูมิวิกฤตดังนี้

$$T_c = \frac{\omega_D}{\pi} \left(\frac{1}{2^{2\alpha} - 4\alpha} \right)^{1/2\alpha} \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^{1/2\alpha} \quad (2.35)$$

ในที่นี้ λ_c ค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ (Critical coupling constant) มีค่าดังสมการ

$$\lambda_c = \left(\frac{\omega_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \frac{2\alpha\pi g^{-2}(\alpha)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right)} \quad (2.36)$$

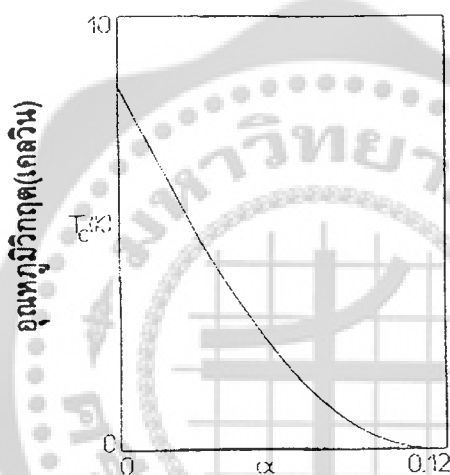
ในกรณีที่ α มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda_c = 0$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$,

$$\left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^{1/2\alpha} \cong \exp\left(-\frac{\lambda_c}{2\alpha\lambda}\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{และ} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2^{2\alpha} - 4\alpha} \right)^{1/2\alpha} = \frac{e^2}{2}$$

ดังนั้น อุณหภูมิวิกฤตจึงสามารถประมาณได้ ดังสมการ

$$T_c = \frac{\omega_D e^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cong 1.176\omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \quad (2.37)$$

จะเห็นว่าสมการ (2.37) สอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ดังนั้นแบบจำลองที่ใช้ในทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิจึงมีพารามิเตอร์ที่สำคัญคือ α และทฤษฎีจะสอดคล้องกับทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ เมื่อ $\alpha = 0$ สมการ (2.35) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับพารามิเตอร์ α ซึ่งนำมาเขียนกราฟได้ดังภาพประกอบ 11



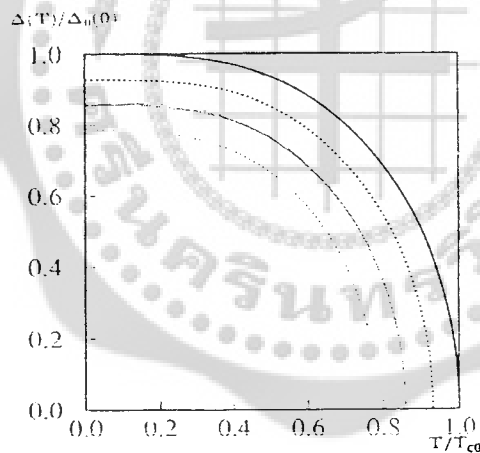
ภาพประกอบ 11 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตกับค่าพารามิเตอร์ α เมื่อกำหนดให้ $\omega_c = 1000$ K, $\omega_D = 200$ K และ $\lambda = 0.3$ (Grosu. 2002 : 265)

งานวิจัยที่ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 1993 อิชิตะและคนอื่นๆ (Ishida and others. 1993 : 2803) ได้ศึกษาคุณสมบัติของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงที่มีสารเจือในสภาพปกติและสภาพนำยวดยิ่ง โดยเติมสารเจือลงไปในระบบ CuO_2 ของสารประกอบ $\text{YBa}_2(\text{Cu}_{1-x}\text{M}_x)_3\text{O}_7$ เมื่อ M คืออะตอมของ Zn และ Ni แล้วใช้เทคนิค Cu-NMR วัดอัตราการผ่อนคลายสปินของนิวเคลียส (Nuclear spin relaxation rate) และ Cu-NQR วัดการเลื่อนแบบไนท์ (Knight shift) ผลการศึกษาพบว่า สารประกอบ YBCO มีอุณหภูมิวิกฤตต่ำลงเมื่อมีสารเจือ และในกรณีของ Zn อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเพิ่มความเข้มข้นของสารเจือขึ้นเพียงเล็กน้อย ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่งที่

ไม่มีช่องว่างพลังงาน และมีความหนาแน่นสถานะค่าหนึ่งที่ผิวเฟอร์มิ ส่วนในกรณีของ Ni นั้นพบว่า อุณหภูมิกวอดลดลงอย่างช้าๆ แม้จะเพิ่มความเข้มข้นของสารเจือ และไม่ทำให้เกิดสภานำยวดยิ่งที่ไม่มีช่องว่างพลังงาน ผลที่ได้นี้บ่งชี้ว่าคู่คูเปอร์ในระนาบ Cu-O ของสารประกอบ YBCO ควรมีการจับคู่แบบคลื่นดี

ในปี ค.ศ. 1993 ฮอตต้า (Hotta. 1993 : 274) ได้ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อความหนาแน่นสถานะใน 2 มิติ ของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ที่อิเล็กตรอนคู่คูเปอร์จับคู่กันลักษณะคลื่นแอส คลื่นแอสที่ขึ้นกับทิศทาง และคลื่นดี เขาพบว่าผลที่ได้สามารถอธิบายการทดลองวัดอัตราการผ่อนคลายของสปินนิวเคลียส จากการโตปสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ ด้วยอะตอมของสังกะสี และคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูงควรถูกจับคู่กันแบบคลื่นดี ในกรณีการจับคู่แบบคลื่นดี ฮอตต้าได้คำนวณอัตราส่วนการลดลงของช่องว่างพลังงาน $\frac{\Delta(T)}{\Delta_0(0)}$ เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ $\frac{T}{T_{c0}}$ และเขียนกราฟเมื่อความเข้มข้นของสารเจือมีค่าแตกต่างกันได้ ดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 กราฟแสดงอัตราส่วนการลดลงของช่องว่างพลังงาน $\frac{\Delta(T)}{\Delta_0(0)}$ กับ อุณหภูมิ

$$\frac{T}{T_{c0}} \text{ ด้วยอัตราส่วนความเข้มข้นของสารเจือ } \frac{c}{c_c} = 0.0 (\text{---}), \frac{c}{c_c} = 0.1 (\text{.....}),$$

$$\frac{c}{c_c} = 0.2 (\text{---}), \frac{c}{c_c} = 0.3 (\text{.....}) \quad (\text{Hotta. 1993 : 278})$$

เมื่อ $\Delta(0)$ คือ ช่องว่างพลังงานที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์

$\Delta_0(0)$ คือ ช่องว่างพลังงานเมื่อไม่มีสารเจือที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

T	คือ อุณหภูมิ
T_{c0}	คือ อุณหภูมิวิกฤตขณะไม่มีสารเจือ
c	คือ ความเข้มข้นของสารเจือ
c_c	คือ ความเข้มข้นวิกฤตของสารเจือ มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi^2 N(0) T_{c0}}{2e^\gamma}$
γ	คือ ค่าคงที่ของออยเลอร์ มีค่าเท่ากับ 1.7810
$N(0)$	คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มิ

ในปี ค.ศ. 1994 เฟเรนบาเชอร์และนอร์แมน (Fehrenbacher & Norman. 1994 : 3495) ได้ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ต่อคุณสมบัติของตัวนำยิ่งยวดที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบชนิดคลีนดี และชนิดคลีนเอสที่ขึ้นกับทิศทาง ที่มีโครงสร้างของช่องว่างพลังงานเหมือนกัน โดยใช้วิธีการ t-matrix ในการคำนวณ และพิจารณาตามความแรงของการกระเจิงคือ $c = 0$ สำหรับการกระเจิงรุนแรง และ $c = 1$ สำหรับการกระเจิงปานกลาง เขาพบว่าผลของสารเจือต่อตัวนำยิ่งยวดที่มีพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบทั้งสองชนิด แตกต่างกัน เช่น อุณหภูมิวิกฤต พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ และความหนาแน่นสถานะ สำหรับอุณหภูมิวิกฤต เขาพบว่าทั้งกรณีของ คลีนดี และคลีนเอสที่ขึ้นกับทิศทางได้ผลลัพธ์เหมือนกับสูตรบริกฮอฟ-กอร์คอฟ คือ

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = a \left[\Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi T_c}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.38)$$

เมื่อ $\alpha = \frac{\Gamma}{c^2 + 1}$ คือ พารามิเตอร์ของการแตกคู่ (Pair-breaking parameter)

$$\Gamma = \frac{n_i}{\pi N(0)}$$

$\Psi(n)$ คือ ฟังก์ชันไดแกมมา (Di-gamma function)

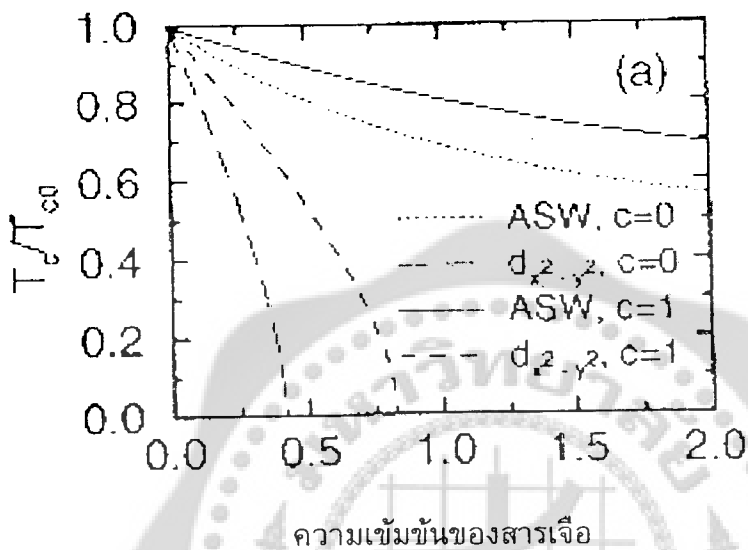
n_i คือ ความเข้มข้นของสารเจือ

และ $N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มิ

กรณีของคลีนดี a มีค่าเท่ากับ 1 และได้ความเข้มข้นวิกฤต เป็น $n_c = \frac{\pi^2 (c^2 + 1) N(0) T_{c0}}{2e^\gamma}$

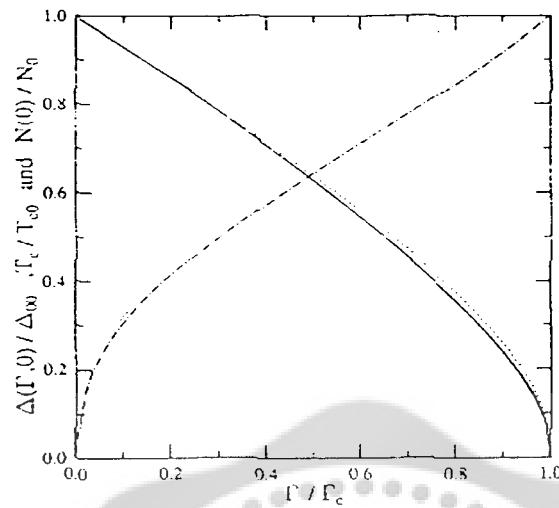
เมื่อ γ คือค่าคงที่ของออยเลอร์ และในกรณีที่ คลีนเอสที่ขึ้นกับทิศทาง $a = 1/4$ และ $n_c = \infty$

การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี จะลดด้วยอัตราที่เร็วกว่า คลื่นเอสที่ขึ้นกับทิศทางประมาณ 4 เท่า แสดงได้ดังภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 13 แสดงการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มขึ้น สำหรับตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี และชนิดคลื่นเอสที่ขึ้นกับทิศทาง เมื่อความแรงของการกระเจิงเป็น $c = 0, 1$ (Fehrenbacher & Norman. 1994 : 3496)

ในปี ค.ศ. 1995 ชันและมากิ (Sun & Maki. 1995 : 6059) ได้ศึกษาผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี โดยคำนวณสภาพซึมซับได้ของสปินในสถานะสถิต (Static spin susceptibility) และความสัมพันธ์ระหว่างสภาพซึมซับได้กับความหนาแน่นของไหลยวดยิ่ง (Superfluid density) $\rho_s(T) = [\lambda(0)/\lambda(T)]^2$ ในกรณีที่มีสารเจือชันและมากิยังได้คำนวณ การลดลงของอุณหภูมิวิกฤต ช่องว่างพลังงาน และการเพิ่มขึ้นของความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มิ โดยกำหนดให้พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ ขึ้นกับมุม ϕ ที่วัดในระนาบของ $k_1 - k_2$ เป็น $\Delta(k) = \Delta \cos(2\phi)$ และจากการแก้สมการช่องว่างพลังงาน ภายใต้เงื่อนไขการจับคู่อย่างอ่อนจะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤต สมการของช่องว่างพลังงาน และสมการของความหนาแน่นสถานะ ซึ่งสามารถนำมาเขียนกราฟได้ดังภาพประกอบ 14



ภาพประกอบ 14 กราฟของ $\Delta(\Gamma,0)/\Delta_{00}$ (.....), T_c/T_{c0} (—) และ $N(0)/N_0$ (- - -) แสดงเป็นฟังก์ชันของ Γ/Γ_c (Sun & Maki, 1995 : 6060)

- จากภาพประกอบ 14 $\Delta(\Gamma,0)$ คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบขณะมีสารเจือที่
อุณหภูมิต่ำของสารตัวนำยิ่งยวด
- Δ_{00} คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบขณะไม่มีสารเจือที่
อุณหภูมิต่ำของสารตัวนำยิ่งยวด
- T_c คือ อุณหภูมิวิกฤต
- T_{c0} คือ อุณหภูมิวิกฤตขณะไม่มีสารเจือ
- $N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ระดับเฟอร์มิ
- N_0 คือ ความหนาแน่นสถานะที่ระดับเฟอร์มิขณะไม่มีสารเจือ
- Γ คือ ความเข้มข้นของสารเจือ มีค่าเท่ากับ $n_i / \pi N_0$
- Γ_c คือ ความเข้มข้นของสารเจือวิกฤตมีค่าเท่ากับ $0.4122\Delta_{00}$

สำหรับพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่ขึ้นกับอุณหภูมิเมื่อพิจารณาที่ความเข้มข้นของสารเจือ
น้อย ได้ผลสอดคล้องกับงานของฮอตต้า (Hotta, 1993)

ในปี ค.ศ. 1997 ฟรานซ์ และคนอื่นๆ (Franz and others, 1997 : 7882) ได้โต้แย้ง
ว่าทฤษฎีของอบริกอสซอฟ-กอร์ดอฟ ที่ใช้ในการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตในตัวนำยิ่งยวดชนิด
คลื่นดีที่มีสารเจือนั้น ไม่สามารถใช้ได้กับกรณีตัวนำยิ่งยวดที่เป็นสารประกอบคอปเปอร์ออกไซด์
ซึ่งมีความยาวอาพันธ์สั้น ข้อโต้แย้งนี้มาจากการคำนวณเชิงตัวเลข ภายใต้ทฤษฎีของโบโกลิอู
บอฟ-เดอ เจนเนส (Bogoliubov – De Gennes equation) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการอธิบายที่ถูกต้อง

ต้องสำหรับตัวนำวยดิ่งที่มีความยาวอาพันธ์สั้น ต้องมีการพิจารณาการแปรปรวนตามตำแหน่งของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ (Spatial variation of the order parameter) คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบจะเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในบริเวณที่อยู่ใกล้สารเจือ แต่ในบริเวณอื่นพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบแทบจะไม่ได้รับผลกระทบเลย ผลการคำนวณพบว่า การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตจะช้ากว่าที่คำนวณไว้โดยทฤษฎีของอบริกอสอฟ-กอร์คอฟ ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลอง

ในปี ค.ศ. 1998 ไครสันและคนอื่นๆ (Crisan and others. 1998 : 699) ได้อธิบายความเที่ยงตรงของสูตรอบริกอสอฟ-กอร์คอฟ ที่ใช้อธิบายการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวยดิ่งที่มีการจับคู่แบบคลื่นดี เมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก และมีการกระเจิงแบบยูนิทารี (Unitary limit scattering) ผลที่ได้คือความเที่ยงตรงของสูตรขึ้นกับอัตราส่วน $R = \frac{2\Delta(0)}{T_c}$

ในปี ค.ศ. 1999 บายินเดอและเจดิก (Bayindir & Gedik. 1999 : 287) ได้ศึกษาผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่อสารตัวนำวยดิ่งอุณหภูมิสูง โดยการแก๊สมการโบโกลยบอฟ – เดอ เจนเนส สำหรับแลตทิซ 2 มิติ เขาพบว่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบชนิดคลื่นเอส เกือบจะไม่ได้รับผลกระทบจากสารเจือเลย ถ้าความเข้มข้นของสารเจือมีค่าน้อย ขณะที่พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบชนิดคลื่นดี จะลดลงแบบเชิงเส้นกับความเข้มข้นของสารเจือ และเขาได้คำนวณหาความเข้มข้นของสารเจือวิกฤต n_c^c ขณะที่สภาพนำวยดิ่งหมดไปได้เท่ากับ 0.1 ซึ่งตรงกับค่าที่ได้จากการทดลองดีพอประมาณ

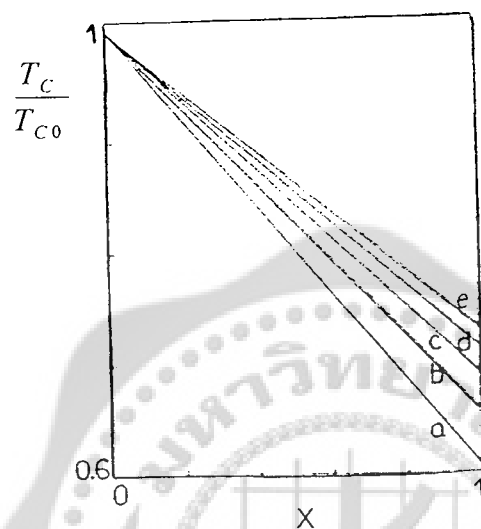
ในปี ค.ศ. 2000 โกรซุ (Grosu. 2000 : 141) ได้วิเคราะห์ผลกระทบของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กในตัวนำวยดิ่งชนิดคลื่นดี ที่มีความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงาน 2 ลักษณะ โดยใช้ทฤษฎีของอบริกอสอฟ-กอร์คอฟ คำนวณหาการลดลงของอุณหภูมิวิกฤต ผลการวิจัยเป็นดังนี้

ในกรณีตัวนำวยดิ่งแบบคลื่นดี พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบจะขึ้นกับมุม ϕ ในระนาบ k_x-k_y คือ $\Delta(k) = \Delta \cos(2\phi)$ เมื่อความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงานในลักษณะ

$$N(\varepsilon) = N(0)\left(\frac{\varepsilon}{D}\right)^r \quad ; \quad -1 < r < 0 \quad (2.39)$$

เมื่อ D	คือ ค่าคงที่
ε	คือ พลังงาน
$N(0)$	คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ
$N(\varepsilon)$	คือ ความหนาแน่นสถานะที่ขึ้นกับพลังงาน

ผลที่ได้สามารถเขียนกราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} กับ $x = 1/T_{C0}\tau$ สำหรับค่า r ต่างกัน ได้ดังภาพประกอบ 15 เมื่อ T_C คือ อุณหภูมิวิกฤต T_{C0} คือ อุณหภูมิวิกฤตขณะไม่มีสารเจือ และ $1/\tau$ คือ พารามิเตอร์ของการกระเจิงซึ่งมีค่าขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือ



ภาพประกอบ 15 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{C0}\tau$ เมื่อ (a) $r = 0$, (b) $r = -0.2$, (c) $r = -0.4$, (d) $r = -0.8$ (Grosu. 2000 : 143)

จากภาพประกอบ 15 จะเห็นว่าค่า r ที่น้อยกว่า อุณหภูมิวิกฤตลดลงในอัตราที่ช้ากว่าเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มขึ้น

ในกรณีที่ 2 เมื่อความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงานตามสมการ

$$N(\varepsilon) = N(0) \cdot \ln \left| \frac{\omega_c}{\varepsilon} \right| \quad (2.40)$$

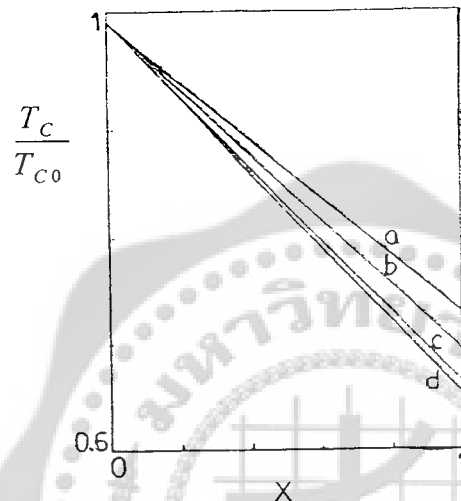
เมื่อ ω_c คือ ความถี่ตัดทิ้ง (Cutoff frequency)

ε คือ พลังงาน

$N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่ผิวเฟอร์มิ

$N(\varepsilon)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ขึ้นกับพลังงาน

ผลที่ได้สามารถเขียนกราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} กับ $x = 1/T_{C0}\tau$ สำหรับค่า $\frac{\omega_C}{T_{C0}}$ แตกต่างกันได้ดังภาพประกอบ 16 เมื่อ T_C คือ อุณหภูมิวิกฤต T_{C0} คือ อุณหภูมิวิกฤตขณะไม่มีสารเจือ และ $1/\tau$ คือ พารามิเตอร์ของการกระเจิงซึ่งมีค่าขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือ



ภาพประกอบ 16 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_C/T_{C0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $x = 1/T_{C0}\tau$ เมื่อ (a) $\frac{\omega_C}{T_{C0}} = 5$, (b) $\frac{\omega_C}{T_{C0}} = 10$, (c) $\frac{\omega_C}{T_{C0}} = 50$, (d) $\frac{\omega_C}{T_{C0}} = 100$
(Grosu. 2000 : 144)

จากภาพประกอบ 16 จะเห็นว่าสำหรับค่า ω_C ค่าหนึ่ง ถ้าอัตราส่วน ω_C/T_C น้อย อุณหภูมิวิกฤตจะลดลงในอัตราที่ช้า

ผลที่ได้จากงานวิจัยของโกรซูนีเป็นทางเลือกหนึ่งในการอธิบายผลการทดลอง ที่พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงในอัตราช้ากว่าที่คำนวณได้จากทฤษฎี เมื่อเพิ่มความเข้มข้นของสารเจือ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยของ โกรซุ (Grosu, 2002 : 263) ผู้วิจัยพบว่า โกรซุคำนวณหาสมการที่แสดงอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งขณะที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กไม่ถูกต้อง จึงทำให้ได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับพารามิเตอร์ α ไม่ถูกต้อง นอกจากนี้โกรซุยังใช้การคำนวณแบบประมาณ คือ ได้กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเป็นอนันต์ ซึ่งทำให้ได้สูตรคำนวณที่ง่าย แต่ตามทฤษฎีบีซีเอสนั้นพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าจำกัด คือไม่เกินความถี่เดอบาย (Debye frequency, ω_D) ดังนั้นผู้วิจัยจึงต้องการแก้ไขงานของโกรซุให้ถูกต้อง โดยในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิทั้งที่บริสุทธิ์และที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กโดยใช้ฟังก์ชันกรีนของยีนและซากรวาร์ดี และกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดไม่เกินความถี่เดอบาย ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งบริสุทธิ์ เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ไม่เกิน ω_D

1.1 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับพารามิเตอร์ α

1.2 วิเคราะห์สมการของอุณหภูมิวิกฤตในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ ซึ่งคาดหวังว่าจะลดรูปไปสู่สมการของอุณหภูมิวิกฤตที่โกรซุได้คำนวณไว้

1.3 วิเคราะห์สมการของอุณหภูมิวิกฤตในกรณีที่พารามิเตอร์ α มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งคาดหวังว่าจะลดรูปไปสู่สมการของอุณหภูมิวิกฤตของทฤษฎีบีซีเอส

2. คำนวณหาพลังงานในตนเอง (Self energy) ของอิเล็กตรอนซึ่งเกิดจากการกระเจิงโดยสารเจือ โดยใช้การประมาณแบบบอร์น (Born approximation)

3. คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเป็นอนันต์ และมีค่า ไม่เกิน ω_D

3.1 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความเข้มข้นของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

3.2 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับพารามิเตอร์ α

3.3 วิเคราะห์สมการของอุณหภูมิวิกฤตในกรณีที่ $\omega_D \gg T_c$

3.4 วิเคราะห์สมการของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

กรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์

พิจารณาสถานะนำยวดยิ่ง ที่เกิดจากการจับคู่ระหว่างอิเล็กตรอนที่อันตรกิริยาดึงดูดมีค่าคงที่เป็น V ตามแบบจำลองของทฤษฎีบีซีเอส แต่ใช้ฟังก์ชันกรีนของยีนและซากราวาร์ดี ดังนี้

$$G_0(\bar{k}, i\omega_n) = g(\alpha) \frac{\Theta(\omega_n) e^{\frac{i\pi}{2}} + \Theta(-\omega_n) e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\omega_c^\alpha (i\omega_n - \varepsilon_k)^{1-\alpha}} \quad (3.1)$$

$$\text{เมื่อ } g(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (3.2)$$

ω_c คือ ความถี่ตัดทิ้ง (Cutoff frequency)

$\omega_n = 2\pi T_c \left(n + \frac{1}{2}\right)$ คือ ความถี่มัตซุบารา (Mutsubara frequency)

$\theta(x)$ คือ ฟังก์ชัน Heaviside, $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$

α คือ พารามิเตอร์ของความไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ (Non-Fermi parameter) โดยมีค่าอยู่ในช่วง $0 < \alpha < 1$ และถ้า α มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้ฟังก์ชันกรีนของทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ

จากฟังก์ชันกรีนของยีนและซากราวาร์ดี สามารถคำนวณอนุกรมวิกฤตได้ โดยใช้เกณฑ์ของเทเลส (Thouless criterion) ดังสมการ

$$1 - V \Pi(0,0) = 0 \quad (3.3)$$

เมื่อ $\Pi(0,0)$ คือ particle-particle bubble ซึ่งหาได้จากสมการ

$$\Pi(0,0) = T_c \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_0(\bar{k}, i\omega_n) G_0(-\bar{k}, -i\omega_n) \quad (3.4)$$

ในที่นี้ $\varepsilon_k = \varepsilon_{-k}$ ดังนั้น จากฟังก์ชันกรีนในสมการ (3.1) จะได้

$$G_0(\bar{k}, i\omega_n)G_0(-\bar{k}, -i\omega_n) = \frac{g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha}}{(\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^{1-\alpha}} \quad (3.5)$$

แทนลงในสมการ (3.4) แล้วใช้เงื่อนไขการอินทิเกรตปริมาตรใน ปริภูมิโมเมนตัม (momentum - space) คือให้ $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N(0) \int d\varepsilon$ เมื่อ $N(0)$ คือความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิในที่นี้ กำหนดให้มีค่าคงที่ และถ้ากำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ไม่เกิน ω_D จะได้ว่า

$$\Pi(0,0) = 2N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_n \frac{1}{\omega_n^{2-2\alpha}} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2\right]^{1-\alpha}} \quad (3.6)$$

สามารถหาค่าอินทิกรัลในสมการ (3.6) ได้จากการเปลี่ยนตัวแปรในการอินทิเกรต ในที่นี้กำหนดให้ $x = \varepsilon/\omega_D$ ซึ่งจะได้ $\omega_D dx = d\varepsilon$ ดังนั้นสมการ (3.6) สามารถเขียนได้เป็น

$$\Pi(0,0) = 2N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_n \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^{2\alpha-1}} \int_0^1 dx \left(\left(\frac{\omega_n}{\omega_D}\right)^2 + x^2 \right)^{\alpha-1} \quad (3.7)$$

และจากตารางอินทิกรัลของ (Gradshteyn & Ryzhik. 1965 : 297) ซึ่งแสดงว่า

$$\int_0^u x^{\lambda-1} (u-x)^{\mu-1} (\beta^2 + x^2)^\nu dx = \beta^{2\nu} u^{\lambda+\mu-1} B(\lambda, \mu) {}_3F_2\left(-\nu, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}; \frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu+1}{2}; -\frac{u^2}{\beta^2}\right) \quad (3.8)$$

เมื่อ $\text{Re}\left(\frac{u}{\beta}\right) > 0, \text{Re}\lambda > 0$ และ $\text{Re}\mu > 0$

ในที่นี้ $B(\lambda, \mu)$ คือ ฟังก์ชันเบต้า มีค่าเท่ากับ $\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$ เมื่อ $\Gamma(\lambda)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) และ ${}_3F_2(\)$ คือ ฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric function)

เมื่อเปรียบเทียบอินทิกรัลในสมการ (3.7) กับ (3.8) จะเห็นว่าถ้า $u = \lambda = \mu = 1, \beta = \frac{\omega_n}{\omega_D}$ และ $\nu = \alpha - 1$ แล้ว อินทิกรัลในสมการ (3.8) จะสอดคล้องกับอินทิกรัลใน (3.7) ดังนั้น สมการ (3.7) จึงเขียนได้เป็น

$$\Pi(0,0) = 2N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_n \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \frac{\omega_D}{\omega_n} F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left[\frac{\omega_D}{\omega_n}\right]^2\right) \quad (3.9)$$

และจากตารางเอกลักษณ์ (Abramowitz & Stegun. 1965 : 559)

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; 1/z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1-a+b; 1/z), \quad (|\arg(-z)| < \pi) \quad (3.10)$$

ดังนั้น สมการ (3.9) จะเป็น

$$\begin{aligned} \Pi(0,0) &= 2N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_n \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \frac{\omega_D}{\omega_n} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^{2\alpha-2} \right. \\ &\quad \times F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\omega_n}{\omega_D} \\ &\quad \left. \times F\left(\frac{1}{2}, 0, \alpha + \frac{1}{2}; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right] \\ &= 2N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_n^{\max} \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \frac{\omega_D}{\omega_n} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^{2\alpha-1} \right. \\ &\quad \left. \times F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N(0)}{\pi} g^2(\alpha) \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

ในที่นี้ $n_{\max} = \frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}$ แทนสมการ (3.11) ลงใน (3.3) จะได้

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\} = 0 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

ในที่นี้ $\lambda = N(0)V$ คือ ค่าคงที่ของการจับคู่ (Coupling constant) แสดงถึงความแรงของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอน

ในการหาผลรวม $\sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}}$ ในสมการ (3.12) สามารถหาได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} &= \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} \\
&= 2^{1-2\alpha} + \sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} = 2^{1-2\alpha} + \int_{1/2}^{\omega_D/2\pi T_c} dx \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2\alpha-1}
\end{aligned}$$

ในกรณีที่ $\omega_D/2\pi T_c \gg 1$ จะได้

$$\sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{(n + 1/2)^{1-2\alpha}} = \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \quad (3.13)$$

แทนสมการ (3.13) ลงใน สมการ (3.12) จะได้

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D} \right]^2\right) \right\} = 0 \quad (3.14)$$

นี่คือสมการอนุกรมวิฤตของตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ ในกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เกิน ω_D

กรณีตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

1. พิจารณาการกระเจิงแบบบอร์น โดยเริ่มจากฟังก์ชันกรีน ดังนี้

$$G_0(\vec{k}, \omega) = g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} \left[\frac{\Theta(\omega) e^{-i\pi\alpha/2}}{(\omega - \varepsilon_k + i\delta)^{1-\alpha}} + \frac{\Theta(-\omega) e^{i\pi\alpha/2}}{(\omega - \varepsilon_k - i\delta)^{1-\alpha}} \right] \quad (3.15)$$

สำหรับการหาพลังงานในตนเอง (Self-energy) ของอิเล็กตรอนเนื่องจากการกระเจิงโดยอะตอมสารเจือ นั้น เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งอะตอมของสารเจือมีการกระจายแบบสุ่ม สามารถหาพลังงานในตนเองได้จากสมการ

$$\Sigma(\omega, \alpha) = n_i v_0^2 \sum_{\vec{k}} G_0(\vec{k}, \omega) \quad (3.16)$$

เมื่อ n_i คือ ความเข้มข้นของสารเจือ และ

v_0 คือ ความแรงของศักย์ของอะตอมสารเจือ

พิจารณากรณี $\omega > 0$ จากฟังก์ชันกรีนในสมการ (3.15) พลังงานในตนเองจะเป็น

$$\Sigma(\omega, \alpha) = n_i v_0^2 g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} N(0) \int_{-\varepsilon_c}^{\varepsilon_c} d\varepsilon (\omega - \varepsilon + i\delta)^{\alpha-1} \quad (3.17)$$

เมื่อ ε_c คือ พลังงานตัดทิ้ง (Cutoff energy)

การหาค่าของอินทิกรัลในสมการ (3.17) สามารถหาได้โดยใช้สูตร (Grosu. 2002 : 267)

$$(x+i\delta)^\gamma = \begin{cases} e^{i\gamma\pi}|x|^\gamma & , x < 0 \\ x^\gamma & , x > 0 \end{cases} \quad \gamma \neq -1, -2, \dots \text{ และ } \delta \rightarrow 0^+ \quad (3.18)$$

โดยกำหนดให้ $x = \omega - \varepsilon$ ดังนั้น สมการ (3.17) จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega, \alpha) &= n_i v_0^2 g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} N(0) \int_{\omega-\varepsilon_c}^{\omega+\varepsilon_c} dx (x+i\delta)^{\alpha-1} \\ &= n_i v_0^2 g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} N(0) \left\{ \int_{\omega-\varepsilon_c}^0 dx e^{i\pi(\alpha-1)} |x|^{\alpha-1} + \int_0^{\omega+\varepsilon_c} dx x^{\alpha-1} \right\} \\ &= n_i v_0^2 g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} N(0) \left\{ \frac{-e^{i\pi\alpha} (\varepsilon_c - \omega)^\alpha + (\omega + \varepsilon_c)^\alpha}{\alpha} \right\} \end{aligned}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ส่วนจินตภาพของ $\Sigma(\omega, \alpha)$ ดังสมการ

$$\text{Im } \Sigma(\omega, \alpha) = -n_i v_0^2 g(\alpha) \frac{2}{\alpha} N(0) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[\frac{\varepsilon_c}{\omega_c}\right]^\alpha \quad (3.19)$$

และจากพารามิเตอร์การกระเจิงสามารถหาได้จากสมการ

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} = -\text{Im } \Sigma(\omega, \alpha) \quad (3.20)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าของ $g(\alpha)$ ในสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.19) จะได้

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} = \pi n_i v_0^2 N(0) \left[\frac{\varepsilon_c}{\omega_c}\right]^\alpha$$

และเมื่อพิจารณากรณี $\omega < 0$ ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} = -\pi n_i v_0^2 N(0) \left[\frac{\varepsilon_c}{\omega_c} \right]^\alpha$$

ดังนั้น เมื่อพิจารณาทุกความถี่ไม่ว่าจะเป็นความถี่บวกหรือความถี่ลบ จะได้พารามิเตอร์ของการกระเจิง ดังสมการ

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} = \pi n_i v_0^2 N(0) \left[\frac{\varepsilon_c}{\omega_c} \right]^\alpha \text{sign}(\omega) \quad (3.21)$$

จาก สมการ (3.21) จะเห็นว่าพารามิเตอร์การกระเจิงที่ได้มีค่าขึ้นกับความเข้มข้นของสารเจือและพารามิเตอร์ α และเมื่อ α มีค่าเป็นศูนย์พารามิเตอร์การกระเจิงที่ได้ จะตรงกับกรณีที่คำนวณโดยใช้ทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ คือ $1/\tau = \pi n_i N(0) v_0^2$

2. อุณหภูมิวิกฤต เมื่อให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์

เริ่มจากการคำนวณหาฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือจากสมการของไดสัน (Dyson's equation) ดังสมการ

$$G^{-1}(\bar{k}, i\omega_n) = G_0^{-1}(\bar{k}, i\omega_n) - \Sigma(\bar{k}, i\omega_n) \quad (3.22)$$

เมื่อให้ $\Sigma(\bar{k}, i\omega_n) = -\frac{i}{\tau(\alpha)} \frac{\omega_n}{|\omega_n|}$ โดย $\frac{1}{\tau(\alpha)}$ ได้มาจากสมการ (3.21) และใช้ฟังก์ชันกรีนของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ $G_0(\bar{k}, i\omega_n)$ ตามสมการ (3.1)

ในที่นี้ $\omega_n > 0$ จะได้ ฟังก์ชันกรีนในสมการ (3.22) เป็น

$$G(\bar{k}, i\omega_n) = \frac{g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2} (i\omega_n - \varepsilon_k)^\alpha}{i\omega_n \left[1 + \frac{g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha/2}}{|\omega_n| \tau(\alpha)} (i\omega_n - \varepsilon_k)^\alpha \right] - \varepsilon_k} \quad (3.23)$$

ที่สามารถใช้คำนวณอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือได้จากสมการ (3.3) โดยหาค่าของ particle - particle bubble ด้วยการแทนฟังก์ชันกรีนในสมการ (3.23) ลงในสมการ

$$\Pi(0,0) = T_c \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G(\bar{k}, i\omega_n) G(-\bar{k}, -i\omega_n) \quad (3.24)$$

ในที่นี้พิจารณาที่ความถี่ต่ำ และ $0 < \alpha \ll 1$ ผลคูณของฟังก์ชันกรีน ในสมการ (3.23) สามารถประมาณได้เป็น

$$G(\bar{k}, i\omega_n) G(-\bar{k}, -i\omega_n) \cong \frac{g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} (\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^\alpha}{\varepsilon_k^2 + \omega_n^2 b^2(\alpha)} \quad (3.25)$$

$$\text{เมื่อ } b(\alpha) = 1 + \frac{g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} \cos(\pi\alpha/2)}{\omega_n \tau(\alpha)} (\varepsilon_k^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2}$$

นำสมการ (3.25) แทนลงในสมการ (3.24) และให้ $\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = N(0) \int d\varepsilon$ จะได้

$$\Pi(0,0) \cong 4N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \int d\varepsilon \frac{(\varepsilon^2 + \omega_n^2)^\alpha}{\varepsilon^2 + \omega_n^2 \left[1 + \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\omega_n \tau(\alpha)} (\varepsilon^2 + \omega_n^2)^{\alpha/2} \right]^2} \quad (3.26)$$

ในที่นี้ $\tilde{A}(\alpha) = g(\alpha) \omega_c^{-\alpha} \cos(\pi\alpha/2)$ และเมื่อพิจารณากรณีที่ความเข้มข้นของสารเจือมีค่าน้อย จะได้ $\frac{1}{\tau(\alpha)}$ มีค่าน้อย นั่นคือ สามารถเขียนสมการ (3.26) ได้ว่า

$$\begin{aligned} \Pi(0,0) &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \int d\varepsilon \frac{\omega_n^{2\alpha} \left(1 + \varepsilon^2 / \omega_n^2 \right)^\alpha}{\omega_n^2 \left(1 + \varepsilon^2 / \omega_n^2 \right) + 2\omega_n \frac{A(\alpha)}{\tau(\alpha)} \omega_n^2 \left(1 + \varepsilon^2 / \omega_n^2 \right)^{\alpha/2}} \\ &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha) \omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \int d\varepsilon \frac{1}{\omega_n^{2-2\alpha}} \frac{\left(1 + \varepsilon^2 / \omega_n^2 \right)^{\alpha-1}}{\left[1 + 2\omega_n^{\alpha-1} \frac{A(\alpha)}{\tau(\alpha)} \left(1 + \varepsilon^2 / \omega_n^2 \right)^{\alpha/2-1} \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\omega_n^{2-2\alpha}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(1 + \varepsilon^2/\omega_n^2\right)^{\alpha-1} \left[1 + 2\omega_n^{\alpha-1} \frac{A(\alpha)}{\tau(\alpha)} \left(1 + \varepsilon^2/\omega_n^2\right)^{\alpha/2-1}\right]^{-1} \\ \Pi(0,0) &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left[\frac{1}{\omega_n^{2-2\alpha}} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2\right)^{\alpha-1} - \frac{2}{\omega_n^{3-3\alpha}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_n}\right)^2\right)^{\frac{3\alpha-2}{2}-2} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

อินทิกรัลในสมการ (3.27) ได้กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ อนันต์ ทำให้สามารถหาค่าอินทิกรัลในสมการได้จากสูตร (Grosu. 2002 : 264)

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} (1 + \beta x^p)^{-\nu} = \frac{1}{p} \beta^{-\mu/p} B\left(\frac{\mu}{p}, \nu - \frac{\mu}{p}\right) \quad (3.28)$$

เมื่อ $|\arg \beta| < \pi$, $p > 0$ และ $0 < \operatorname{Re} \mu < p \operatorname{Re} \nu$

ซึ่งเมื่อกำหนดให้ $x = \varepsilon/\omega_n$ ในสมการ (3.27) แล้วเทียบกับสมการ (3.28) จะได้ พารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการ (3.28) ดังนี้ $\beta = 1$, $p = 2$, $\mu = 1$ และ $\nu = 1 - \alpha$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขในการใช้สูตร ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} \Pi(0,0) &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \left[\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} - \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \right. \\ &\quad \left. \times B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3\alpha}{2}\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

สำหรับผลรวมในสมการ (3.29) สามารถหาได้โดยประมาณ ดังนี้

$$\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} = \frac{1}{(2\pi T_c)^{1-2\alpha}} \sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1-2\alpha}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi T_c)^{1-2\alpha}} \left(2^{1-2\alpha} + \frac{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - 1}{\sum_{n=1}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - 1} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-2\alpha}} \right) \cong \frac{1}{(2\pi T_c)^{1-2\alpha}} \left(2^{1-2\alpha} + \int_{1/2}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c}} dx \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2\alpha-1} \right) \\
&\cong \frac{1}{(2\pi T_c)^{1-2\alpha}} \left\{ \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right\} \tag{3.30}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\sum_{n=0}^{\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - 1} \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} \cong \frac{1}{(2\pi T_c)^{2-3\alpha}} \left\{ \frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha-1} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right] \right\} \tag{3.31}$$

แทนค่าผลรวมในสมการ (3.29) แล้วนำไปแทนในสมการ (3.3) ก็จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ในกรณีที่พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเป็นอนันต์ ดังสมการ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left\{ \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right\} + \\
&\frac{g^3(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-3\alpha} \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{\pi T_c \tau(\alpha)} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right) \left\{ \frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha-1} \right. \\
&\left. \times \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right] \right\} = 0 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.32) ถ้ากำหนดให้ $1/\tau(\alpha) = 0$ จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ (T_{c0}) ดังสมการ

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_{c0}} \right)^{-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left\{ \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_{c0}} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right\} = 0 \tag{3.33}$$

3. อุณหภูมิวิกฤต เมื่อให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เกิน ω_D

กรณีที่พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ω_D สามารถคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตได้โดยการเปลี่ยนขีดจำกัดบนของอินทิกรัลในสมการ (3.27) เป็น ω_D แล้วกำหนดให้ $x = \varepsilon/\omega_D$ ซึ่งจะได้ particle-particle bubble ดังสมการ

$$\begin{aligned} \Pi(0,0) \cong & 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left[\frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^{2\alpha-1} \int_0^1 dx \left(\left(\frac{\omega_n}{\omega_D}\right)^2 + x^2 \right)^{\alpha-1} - \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} \right. \\ & \left. \times \frac{2\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right)^{3\alpha-3} \int_0^1 dx \left(\left(\frac{\omega_n}{\omega_D}\right)^2 + x^2 \right)^{\frac{3\alpha}{2}-2} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

สามารถหาค่าอินทิกรัลในสมการ (3.34) ได้จากสูตรในสมการ (3.8) โดยค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในสมการ (3.8) เมื่อเทียบกับสมการ (3.34) แล้วมีค่า ดังนี้ $u = \lambda = \mu = 1$, $\beta = \omega_n/\omega_D$ และ $\nu = \alpha - 1$ ในอินทิกรัลเทอมแรก และ $\nu = 3\alpha/2 - 2$ ในอินทิกรัลเทอมที่สอง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขในการใช้สูตร คือ

$$\operatorname{Re}\left(\frac{u}{\beta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) > 0 \quad \text{และ} \quad \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\mu) = \operatorname{Re}(1) > 0$$

ดังนั้นสมการ (3.34) จึงเป็น

$$\begin{aligned} \Pi(0,0) \cong & 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left[\frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left[\frac{\omega_D}{\omega_n}\right]^2\right) - \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} 2 \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\omega_D}{\omega_n}\right) F\left(2-\frac{3}{2}\alpha, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left[\frac{\omega_D}{\omega_n}\right]^2\right) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

และใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก ตามสมการ (3.10) จะได้สมการ (3.35) เป็น

$$\begin{aligned}
\Pi(0,0) &\cong 4N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left\{ \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n} \right)^{2\alpha-1} F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) \right] - \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} 2 \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(3\alpha/2 - 3/2)}{\Gamma(3\alpha/2 - 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{\omega_n} \right)^{3\alpha-3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times F\left(2-\frac{3}{2}\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \frac{5}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) + \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right) \right] \right\} \\
\Pi(0,0) &\cong 2N(0)T_c g^2(\alpha)\omega_c^{-2\alpha} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \omega_D^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) + B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) \right. \\
&\quad \times \left. \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\omega_n^{1-2\alpha}} \right] - 2 \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tau(\alpha)} \left[\frac{\Gamma(3\alpha/2 - 3/2)}{\Gamma(3\alpha/2 - 1/2)} \omega_D^{3\alpha-3} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \omega_n F\left(2-\frac{3}{2}\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \frac{5}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right. \\
&\quad \left. \left. B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right) \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\omega_n^{2-3\alpha}} \right] \right\} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

แทนผลรวมในสมการ (3.36) ด้วยสมการ (3.30) และ (3.31) และจัดรูปของสมการ จะได้

$$\begin{aligned}
\Pi(0,0) &= N(0) \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\} - N(0) \frac{g^3(\alpha)}{\pi} \\
&\quad \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-3\alpha} \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{\pi T_c \tau(\alpha)} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\alpha\right) \left(\frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha-1} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right] \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\omega_n}{\omega_n} F\left(2-\frac{3}{2}\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \frac{5}{2}-\alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

เมื่อนำ (3.37) ไปแทนในสมการ (3.3) จะได้สมการของอนุกรมวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ω_D ดังสมการ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \right. \\ & \left. \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D} \right]^2\right) \right\} + \frac{g^3(\alpha)}{\pi} \\ & \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-3\alpha} \frac{\cos(\pi\alpha/2)}{\pi T_c \tau(\alpha)} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right) \left(\frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha - 1} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right] \right) + \right. \\ & \left. \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{3\alpha-2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\omega_n}{\omega_D} F\left(2 - \frac{3}{2}\alpha, \frac{3}{2} - \alpha; \frac{5}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D} \right]^2\right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

จากสมการ (3.38) เมื่อพิจารณาตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ $1/\tau(\alpha) = 0$ จะได้สมการของอนุกรมวิกฤต T_{c0} เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_{c0}} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_{c0}} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \right. \\ & \left. \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_{c0}} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D} \right]^2\right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

ซึ่งตรงกับสมการของอนุกรมวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ (3.14) ที่ได้คำนวณหามาแล้ว

บทที่ 4 ผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการอนุกรมวิกฤตของตัวนำเวดิงที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ โดยใช้ฟังก์ชันกรีนของยีนและซากรวาร์ดี ซึ่งมี α เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงพฤติกรรมที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิของตัวนำเวดิง โดยฟังก์ชันกรีนของยีนและซากรวาร์ดีจะลดรูปเป็นฟังก์ชันกรีนในทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าเป็นศูนย์ งานวิจัยนี้ได้พิจารณาทั้งกรณีตัวนำเวดิงบริสุทธิ์และกรณีตัวนำเวดิงที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก กรณีตัวนำเวดิงบริสุทธิ์กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ไม่เกินความถี่เดอบาย ω_0 ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยของโกรชู้ที่ได้กำหนดให้พลังงานสูงสุดในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าอนันต์ และในกรณีตัวนำเวดิงที่มีสารเจือได้คำนวณโดยให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเป็นอนันต์ และมีค่าไม่เกินความถี่เดอบาย ผลการวิจัยเป็นดังนี้

กรณีตัวนำเวดิงบริสุทธิ์

จากสมการอนุกรมวิกฤตของตัวนำเวดิงที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ (3.14)

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha-1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D} \right]^2\right) \right\} = 0$$

ประมาณผลรวมของฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริกจากเงื่อนไข $\omega_D \gg T_c$ จะได้

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left\{ \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_c} \right)^{2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) 2^{1-2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\omega_D}{\omega_c} \right)^{2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_c} \right)^{2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) + \frac{\Gamma(\alpha - 1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right) \left(\frac{\omega_D}{\omega_c} \right)^{2\alpha} \left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

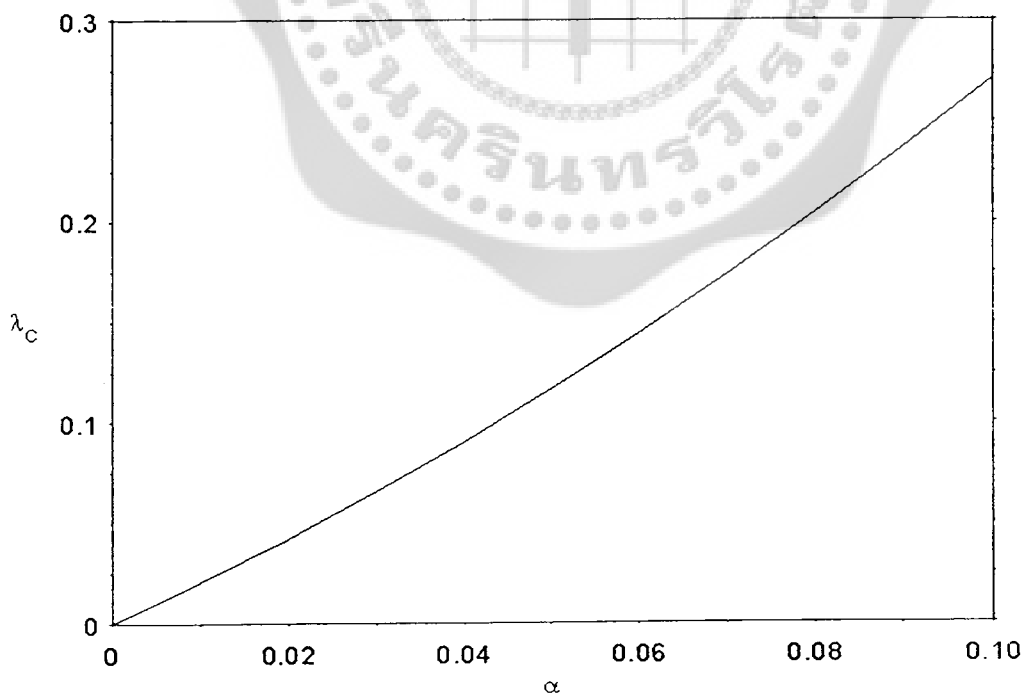
และหากอนุกรมวิกฤตมีค่าใกล้เคียงศูนย์องศาสมบูรณ์ จะได้

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{g^2(\alpha)}{\pi} \left(\frac{\omega_D}{\omega_c} \right)^{2\alpha} \left\{ \frac{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right)}{2\alpha} + \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \right\} \quad (4.1)$$

ในที่นี้ λ_c คือ ค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ (Critical coupling constant) และ จากความสัมพันธ์ $\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$ จะได้

$$\lambda_c = \left(\frac{\omega_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \frac{2\pi\alpha g^{-2}(\alpha)}{\left[B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) + \frac{2\alpha}{\alpha - 1/2} \right]} \quad (4.2)$$

จากสมการ (4.2) จะเห็นว่า ค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ขึ้นกับ α และมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ α เป็นศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบีบีเอส ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 กราฟของค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ λ_c เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_D โดยกำหนดให้ $\omega_D = 200$ และ $\omega_c = 1000$

สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตโดยประมาณได้ โดยหารสมการ (3.14) ด้วย (4.1) ซึ่งจะได้

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{1}{\frac{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha)}{2\alpha} \left[1 + \frac{2\alpha}{(\alpha - \frac{1}{2})B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha)} \right]} \left\{ \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right) \right\}$$

$$f(\alpha) \frac{\lambda_c}{\lambda} = 2\alpha \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) + \frac{2\alpha}{(\alpha - \frac{1}{2})B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha)}$$

$$\left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right)$$

ในที่นี้ $f(\alpha) = \left[1 + \frac{2\alpha}{(\alpha - \frac{1}{2})B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha)} \right] = 1 - \frac{2\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}$

$$f(\alpha) \frac{\lambda_c}{\lambda} - 1 = \left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \left[4\alpha 2^{-2\alpha} - 1 \right] - \frac{2\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \sum_{n=0}^{n_{\max}} F\left(1 - \alpha, \frac{1}{2} - \alpha; \frac{3}{2} - \alpha; -\left[\frac{\omega_n}{\omega_D}\right]^2\right)$$

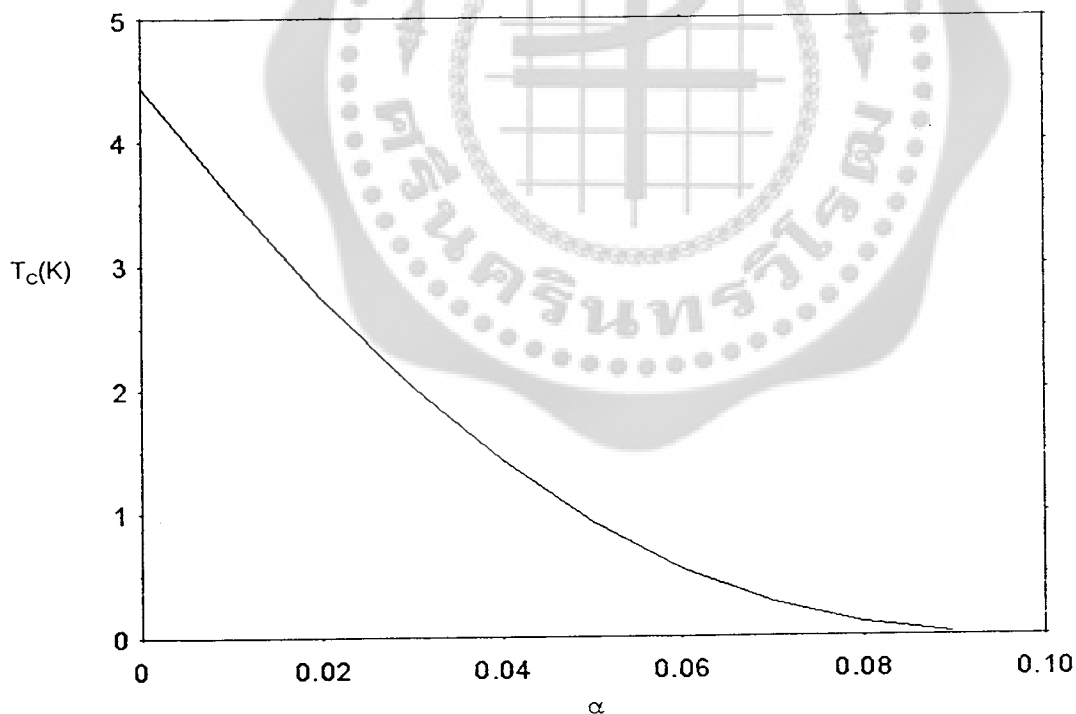
เมื่อ α มีค่าน้อย นั่นคือกรณีที่ตัวนำวยดยิ่งเกือบเป็นแบบของเหลวเฟอร์มิ จะได้

$$\left(\frac{2\pi T_c}{\omega_D} \right)^{2\alpha} \left[1 - 4\alpha 2^{-2\alpha} \right] \cong 1 - f(\alpha) \frac{\lambda_c}{\lambda}$$

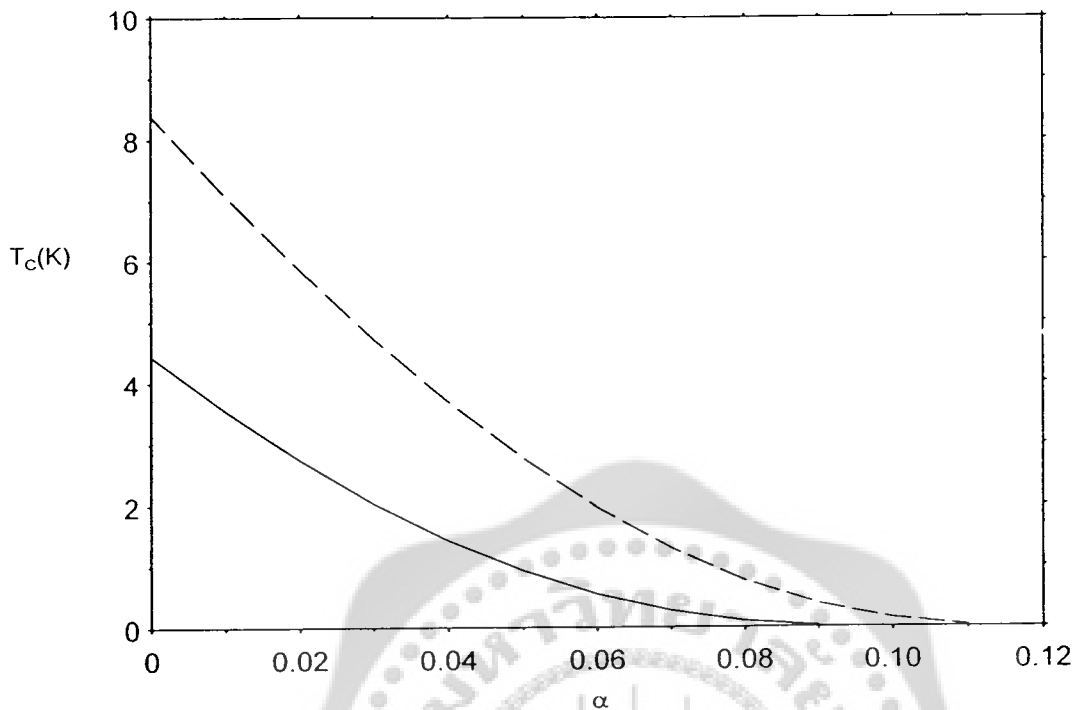
ซึ่งจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวยดยิ่งบริสุทธิ์ ดังสมการ

$$T_c = \frac{\omega_D}{\pi} \left(\frac{1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} f(\alpha)}{2^{2\alpha} - 4\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad (4.3)$$

สมการ (4.3) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับพารามิเตอร์ α ซึ่งหาก $\alpha \neq 0$ ตัวนำยิ่งยวดจะแสดงพฤติกรรมที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ เมื่อคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตจากสมการ (4.3) ด้วยวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) แล้วนำมาเขียนกราฟของอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ α ได้ความสัมพันธ์ ดังภาพประกอบ 18 และเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับสมการของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ ที่กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 ซึ่งโกรซู่ได้คำนวณไว้ดังสมการ (2.35) ได้กราฟดังภาพประกอบ 19



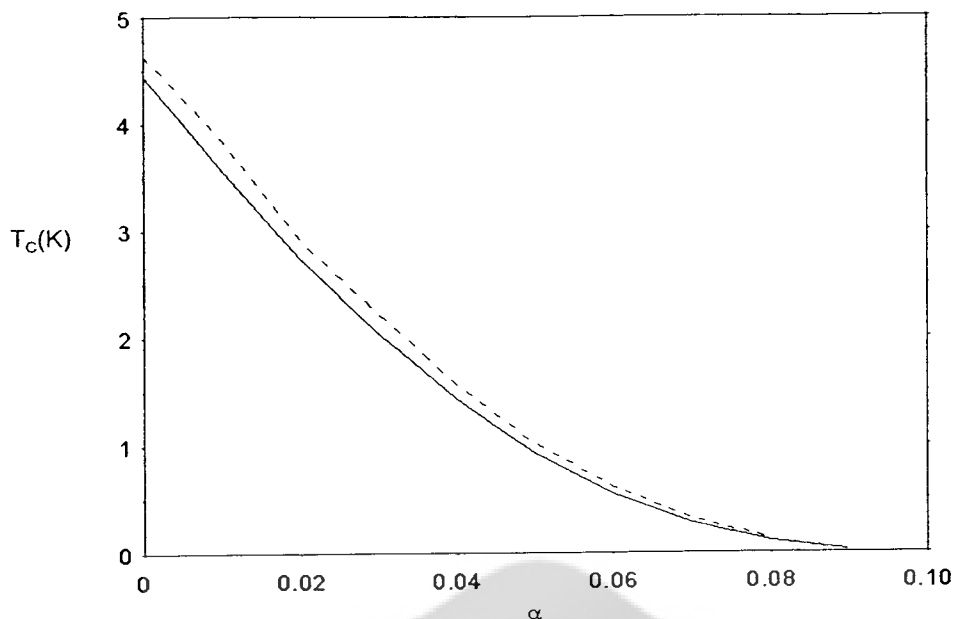
ภาพประกอบ 18 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ α เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_c = 1000$



ภาพประกอบ 19 เปรียบเทียบระหว่างกราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับพารามิเตอร์ α เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์ (___) และ ω_D (___) โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_c = 1000$

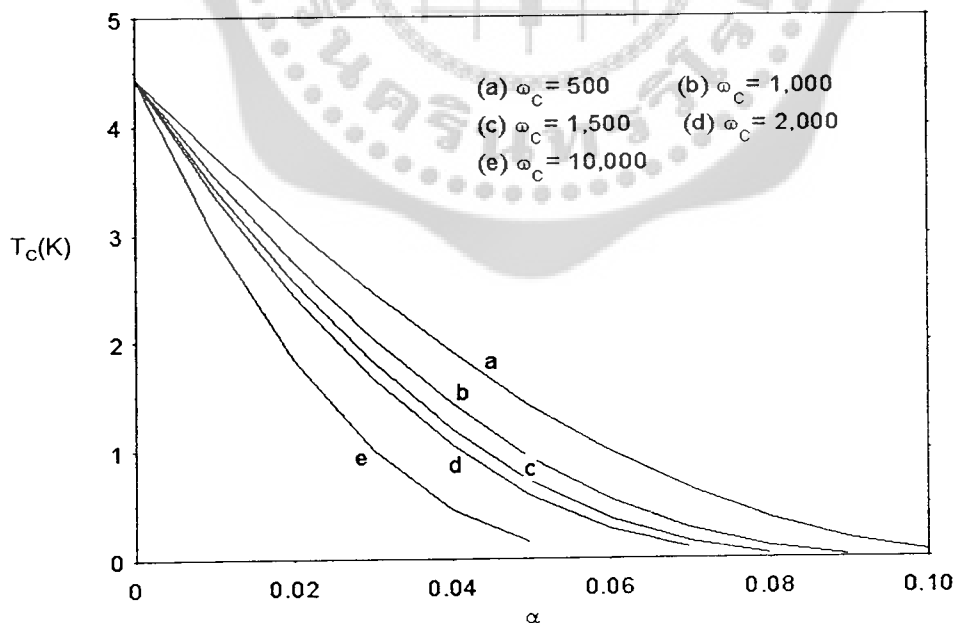
จากภาพประกอบ 18 จะเห็นว่า อุณหภูมิวิกฤตแปรผกผันกับ α โดยอุณหภูมิวิกฤตมีค่าสูงสุดที่ α เป็นศูนย์ และมีค่าเกือบเป็นศูนย์ที่ $\alpha = 0.09$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda=0.3$, $\omega_D=200$ และ $\omega_c=1000$ และจากภาพประกอบ 19 จะเห็นว่า กรณีพลังงานในการจับคู่มีค่าจำกัดไม่เกิน ω_D อุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้มีค่าต่ำกว่ากรณีพลังงานในการจับคู่มีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์ โดยขณะที่ α เป็นศูนย์ อุณหภูมิวิกฤตต่างกันประมาณ 3.9 K เมื่อกำหนดให้ $\lambda=0.3$, $\omega_D=200$ และ $\omega_c=1000$

สมการ (4.3) ได้จากการประมาณเมื่อ α มีค่าน้อย เพื่อตัดเทอมที่เป็นฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริกออกไป แต่เมื่อเปรียบเทียบกับอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณจากสมการ (3.14) โดยตรงด้วยวิธีเชิงตัวเลขเช่นกัน พบว่า อุณหภูมิวิกฤตใน (4.3) และ (3.14) แตกต่างในเชิงปริมาณเพียงเล็กน้อย ดังภาพประกอบ 20 ซึ่งจุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์เชิงคุณภาพ



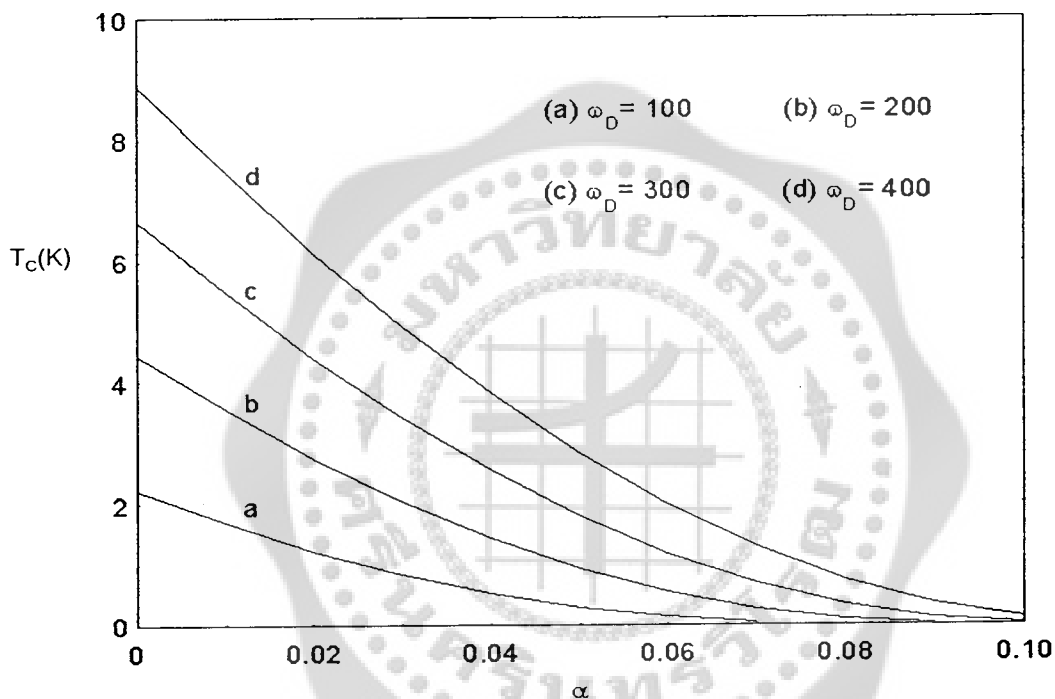
ภาพประกอบ 20 เปรียบเทียบกราฟอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเป็นฟังก์ชันของ α ที่ได้จากสมการ (4.3) (—) และ (3.14) (- - -) โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$, $\omega_D = 200$ และ $\omega_c = 1000$

และนอกจากอุณหภูมิวิกฤตใน (4.3) จะขึ้นกับ α แล้วยังขึ้นกับค่าของ ω_c , ω_D และ λ ที่ใช้ในการคำนวณด้วย ดังภาพประกอบ 21 22 และ 23



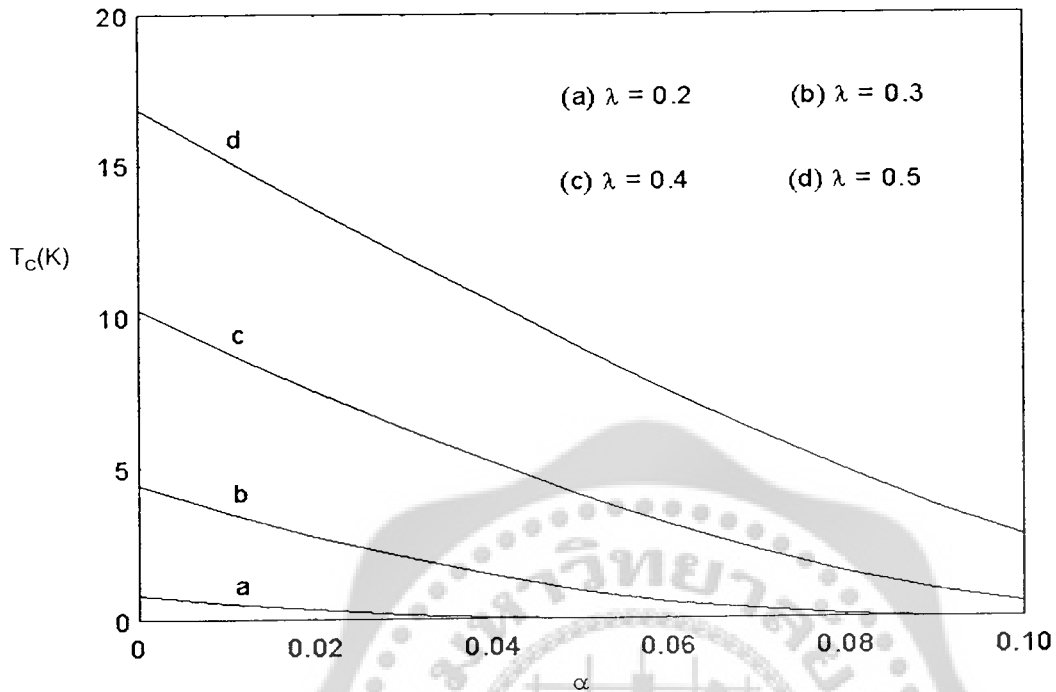
ภาพประกอบ 21 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ ω_c มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$ และ $\omega_D = 200$

จากภาพประกอบ 21 ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของ α โดยให้ λ และ ω_0 คงที่ แต่ให้ ω_c มีค่าต่าง ๆ เพื่อศึกษาผลของความถี่ตัดต่ออุณหภูมิวิกฤต พบว่า ที่ α เป็นศูนย์ อุณหภูมิวิกฤตมีค่าเท่ากันไม่ว่า ω_c จะมีค่าเป็นเท่าใด แต่เมื่อ α มากขึ้น อุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณโดยใช้ ω_c มีค่ามากจะลดเร็วกว่าที่คำนวณโดยใช้ ω_c มีค่าน้อย และความแตกต่างนี้จะยิ่งลดลงเมื่อ ω_c มีค่าสูง ๆ



ภาพประกอบ 22 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์เป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ ω_0 มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\lambda = 0.3$ และ $\omega_c = 1000$

จากภาพประกอบ 22 ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของ α โดยให้ λ และ ω_c คงที่ แต่ให้ ω_0 มีค่าต่าง ๆ เพื่อศึกษาผลของความถี่เดอบายต่ออุณหภูมิวิกฤต พบว่า อุณหภูมิวิกฤตมีค่ามากขึ้น เมื่อ ω_0 มีค่ามากขึ้น และจะเห็นว่าเมื่อ $\omega_0 = 400$ อุณหภูมิวิกฤตมีค่าใกล้เคียงกับกรณีพลังงานในการจับคู่สูงสุดเท่ากับบอนด์ที่ไครซุ่ได้คำนวณไว้ ดังนั้นการคำนวณด้วยแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้อาจจะกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์ได้ สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่มี $\omega_0 \gg T_c$



ภาพประกอบ 23 กราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ λ มีค่าต่างกัน โดยกำหนดให้ $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$

จากภาพประกอบ 23 ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของ α โดยให้ ω_D และ ω_C คงที่ แต่ให้ λ มีค่าต่าง ๆ เพื่อศึกษาผลของค่าคงที่ของการจับคู่ต่ออุณหภูมิวิกฤต พบว่า อุณหภูมิวิกฤตมีค่ามากขึ้น เมื่อ λ มีค่ามากขึ้น โดยเมื่อ λ มีค่าเข้าใกล้หนึ่ง จะได้อุณหภูมิวิกฤตอยู่ในช่วงของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ให้อิเล็กตรอนจับคู่กันเหมือนในทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งค่า λ ที่เหมาะสมมีค่าประมาณ 0.2-0.3 เท่านั้น และพบว่าไม่สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเมื่อ λ มีค่าต่ำกว่า 0.2 ได้

และจากสมการ (3.14) เมื่อพิจารณากรณีที่ $\omega_D \gg T_c$ จะได้

$$1 - \frac{\lambda}{\pi} g^2(\alpha) \left(\frac{\omega_c}{2\pi T_c} \right)^{-2\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \left(\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{\omega_D}{2\pi T_c} \right)^{2\alpha} - 1 \right] \right) = 0 \quad (4.4)$$

ซึ่งตรงกับสมการของอนุกรมวิกฤตของตัวนำยาวที่ยังที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ (2.34) ในงานวิจัยของโกรชูที่กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์ และจาก (4.3) เมื่อพิจารณาที่ α มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2^{2\alpha} - 4\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} = x$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\alpha} \ln \left(2^{2\alpha} [1 - 4\alpha 2^{-2\alpha}] \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\alpha} (2\alpha \ln 2 - 4\alpha 2^{-2\alpha}) = \ln x$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\ln 2 + \frac{2}{2^{2\alpha}} \right) = \ln x = 2 - \ln 2$$

$$x = \frac{e^2}{2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2^{2\alpha} - 4\alpha} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \text{และ}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} f(\alpha) \right)^{\frac{1}{2\alpha}} = x$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha} \ln \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} f(\alpha) \right) = \ln x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{\lambda_c}{2\alpha\lambda} f(\alpha) \right) = -\frac{1}{\lambda}$$

$$x = e^{-\frac{1}{\lambda}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\lambda_c}{\lambda} f(\alpha) \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \text{ซึ่งจะได้}$$

$$T_c = \frac{\omega_D e^2}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cong 1.176 \omega_D \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \quad (4.5)$$

สอดคล้องกับสมการอนุกรมวิกฤตของทฤษฎีบีซีเอส

กรณีตัวนำยาวยั้งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

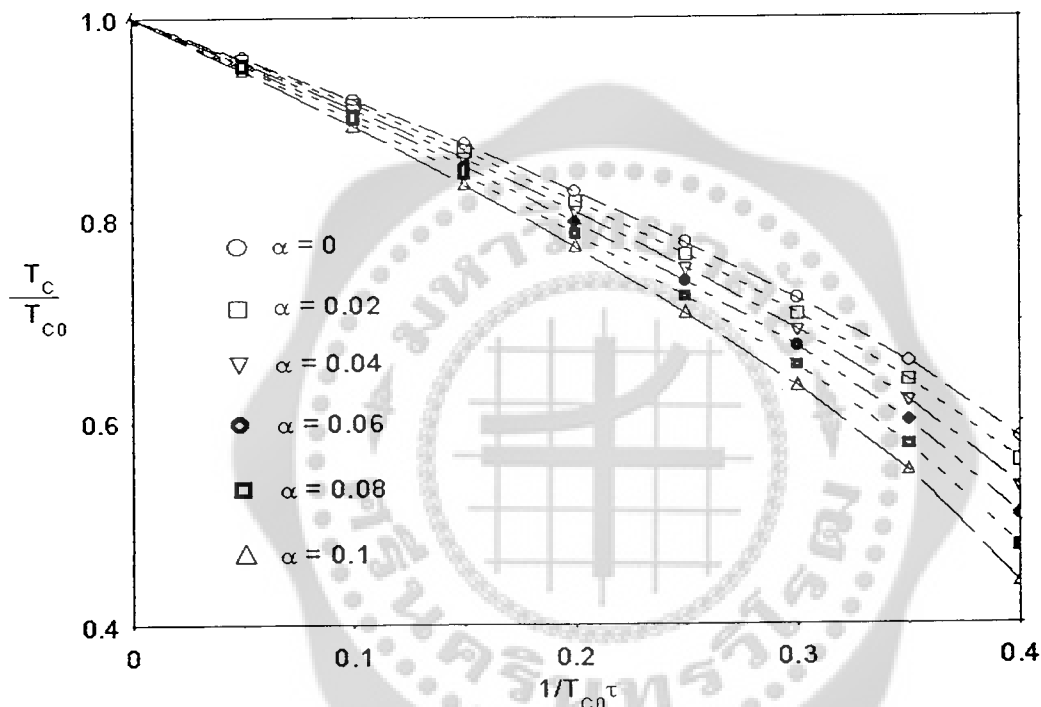
เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์

นำสมการ (3.33) ทหาร (3.32) และกำหนดให้ $y = T_c / T_{c0}$ คืออุณหภูมิวิกฤตลดทอน และ $d_0 = \omega_D / 2\pi T_{c0}$ จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน ดังสมการ

$$1 - y^{2\alpha} \frac{\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(\frac{d_0}{y} \right)^{2\alpha} - 1 \right]}{\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} [d_0^{2\alpha} - 1]} + y^{3\alpha-1} g(\alpha) \left(d_0 \frac{\omega_c}{\omega_D} \right)^{-\alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \times \frac{1}{\pi T_{c0} \tau(\alpha)} \frac{B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right) \frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha-1} \left[\left(\frac{d_0}{y} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right]}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha\right) \frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} [d_0^{2\alpha} - 1]} = 0 \quad (4.6)$$

สมการ (4.6) ต่างจากสมการ (57) ที่โกรซุ่ได้คำนวณไว้ (Grosu. 2002 : 268) ตรง $y^{3\alpha-1}$ ซึ่งในสมการ (57) ของโกรซุ่เป็น $y^{3\alpha}$ และเมื่อคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตลดทอน (y) ในสมการ (4.6) ด้วยวิธีเชิงตัวเลข แล้วนำมาเขียนกราฟเป็นฟังก์ชันของความเข้มข้นของสารเจือ ที่อยู่ในรูปของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{c0}\tau$ ตามสมการ (3.21) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความเข้มข้นของสารเจือ ที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ α ดังภาพประกอบ 24 ซึ่งแตกต่างจากผลที่ได้จากสมการ (57) ของโกรซุ่ ที่แสดงไว้ในภาพประกอบ 25 ในที่นี้คำนวณโดยกำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_c = 1000$, $d_0 = 10$, $\varepsilon_c/\omega_c = 100$ และ $1/\tau = \pi n_i N(0) v_0^2$ ซึ่งจากกราฟของอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิงที่ได้ จะเห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตจะลดลงค่อนข้างเร็ว เมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย โดยอัตราการลดของอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับ α อย่างชัดเจน และผลที่โกรซุ่คำนวณไว้ไม่ถูกต้อง ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความเข้มข้นของสารเจือแตกต่างจากที่เป็นจริงมาก

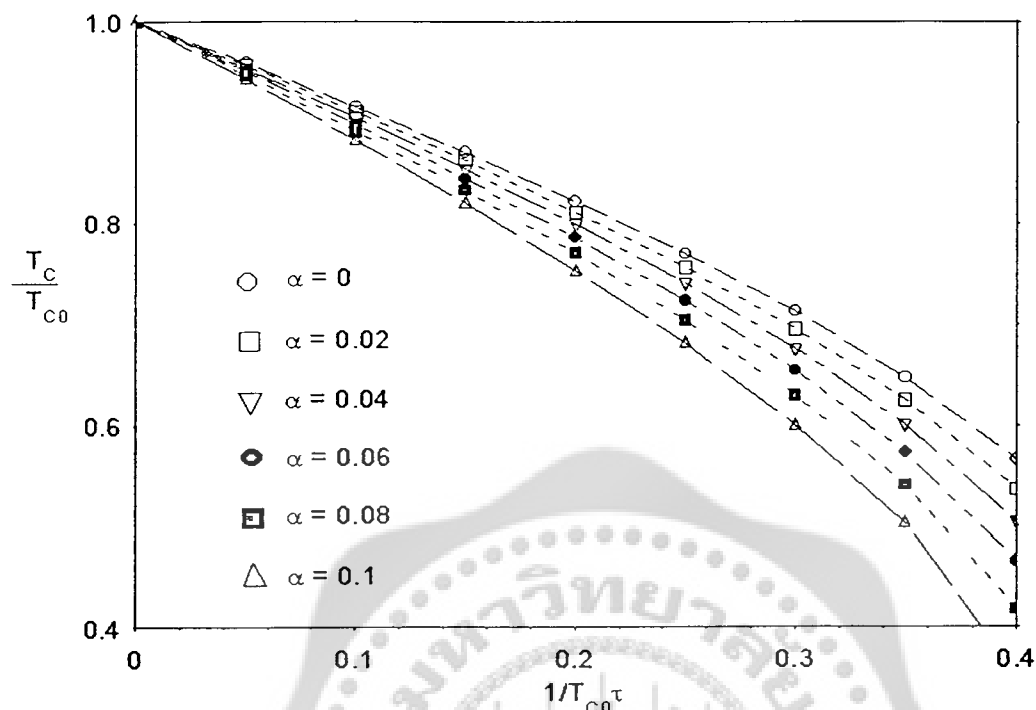
มีข้อสังเกตว่ากราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน ในภาพประกอบที่ 24 และ 25 นั้น กำหนดให้ α มีค่าตั้งแต่ 0 - 0.2 ซึ่งไม่สอดคล้องกับกราฟของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์ในภาพประกอบ 18 ที่พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงจนเกือบเป็นศูนย์เมื่อ α มีค่าประมาณ 0.1 เมื่อใช้ $\omega_D = 200$ และ $\omega_C = 1000$ เช่นกัน ดังนั้นการเขียนกราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอน จึงควรกำหนดให้ α มีค่าไม่เกิน 0.1 ดังภาพประกอบ 26



ภาพประกอบ 26 กราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c / T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1 / T_{c0} \tau$ เมื่อ α มีค่า 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08 และ 0.1 ในที่นี้ กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_C / \omega_C = 100$ (พลังงานสูงสุด มีค่าอนันต์)

เมื่อกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0

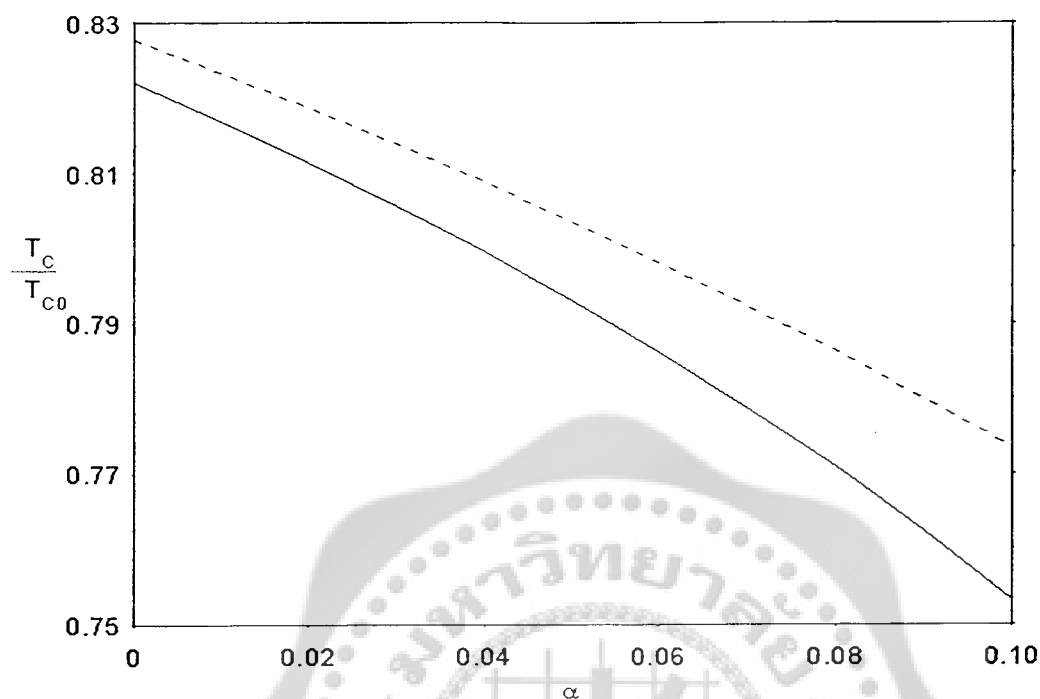
นำสมการ (3.39) หารสมการ (3.38) แล้วคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตลดทอน $y = T_c / T_{c0}$ ด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง เหมือนกันกับกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ แล้วนำค่าที่คำนวณได้มาเขียนกราฟเป็นฟังก์ชันของความเข้มข้นของสารเจือ ซึ่งอยู่ในรูปของพารามิเตอร์การกระเจิง $1 / T_{c0} \tau$ ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับความเข้มข้นของสารเจือ ซึ่งขึ้นกับพารามิเตอร์ α ดังภาพประกอบ 27



ภาพประกอบ 27 กราฟอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c / T_{c0} เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิง $1/T_{c0}\tau$ เมื่อ α มีค่า 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08 และ 0.1 ในที่นี้ กำหนดให้ $\omega_0 = 200$, $\omega_c = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_c / \omega_c = 100$ (พลังงานสูงสุด มีค่า ω_0)

จากภาพประกอบ 27 จะเห็นว่า อุณหภูมิวิกฤตลดลงค่อนข้างเร็วเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม และการลดของอุณหภูมิวิกฤตมากขึ้นเมื่อ α มีค่ามากขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กต่ออุณหภูมิวิกฤตระหว่างกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และมีค่า ω_0 โดยคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของ α ขณะที่ $1/T_{c0}\tau$ มีค่าเท่ากับ 0.2 และ $\omega_0 = 200$, $\omega_c = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_c / \omega_c = 100$ เท่ากัน พบว่ามีความแตกต่างกันอย่างชัดเจน ดังภาพประกอบ 28

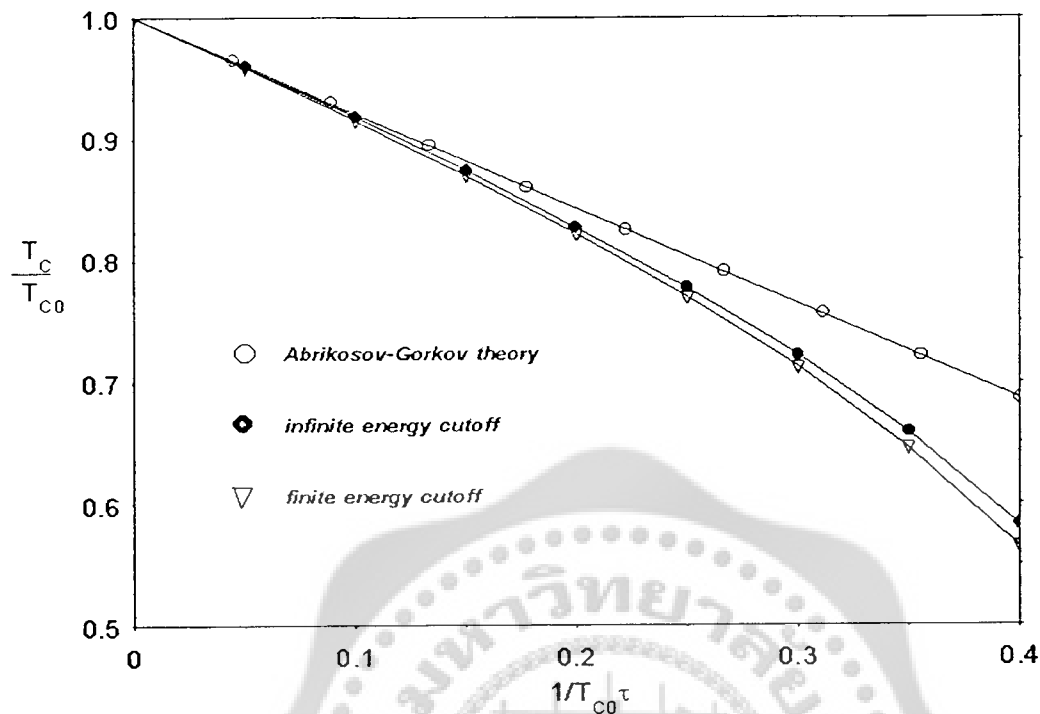


ภาพประกอบ 28 เปรียบเทียบกราฟของอุณหภูมิวิกฤตลดทอนเป็นฟังก์ชันของ α เมื่อ $1/T_{c0}\tau = 0.2$ ระหว่างกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับ อนันต์ (—) และมีค่าไม่เกิน ω_D (---) กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$ และ $\epsilon_C/\omega_C = 100$

จากภาพประกอบ 28 จะเห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตในกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าไม่เกิน ω_D จะลดลงด้วยอัตราที่มากกว่ากรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และความแตกต่างนี้จะมากขึ้นตามค่า α ที่มากขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กขณะที่ α เป็นศูนย์ กับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งชนิดคลื่นดีเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ที่ได้จากการคำนวณด้วยทฤษฎีของอบริกอสอฟ-กอร์คอฟ (Franz and others. 1997 : 7882) เมื่อความเข้มข้นของสารเจือน้อย ดังสมการ (4.7) ได้ความสัมพันธ์ ดังภาพประกอบ 29

$$\frac{T_c}{T_{c0}} \cong 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{T_{c0}\tau} \quad (4.7)$$



ภาพประกอบ 29 เปรียบเทียบกราฟของอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์การกระเจิงระหว่างทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ เมื่อ $\alpha = 0$ และ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $d_0 = 10$, $\epsilon_C/\omega_C = 100$ กับทฤษฎีของอบริกอสอฟ-กอร์กอฟ เมื่อความเข้มข้นของสารเจือน้อย

จากภาพประกอบ 29 จะเห็นว่าเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม อุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากคำนวณด้วยทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะลดลงเร็วกว่าอุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากการคำนวณด้วยทฤษฎีของอบริกอสอฟ-กอร์กอฟที่พิจารณาตัวนำยิ่งยวดยิ่งชนิดคลื่นดีเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก ซึ่งถือว่าเป็นทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ

บทที่ 5

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาสมบัติต่างๆ ของตัวนำเวดิงอุณหภูมิสูง และตัวนำเวดิงชนิดเฟอร์มิ-ออนหนัก ด้วยทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ เช่น ทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งใช้อธิบายตัวนำเวดิงอุณหภูมิต่ำได้ดีมาก พบว่าทฤษฎีบีซีเอสไม่สามารถอธิบายผลการทดลองหลายประการ ไม่ว่าตัวนำเวดิงนั้นจะอยู่ในสถานะปกติหรือสถานะนำเวดิง ดังรายละเอียดที่ปรากฏในบทที่ 1 นักทฤษฎีจึงได้พยายามสร้างแบบจำลองหรือคิดทฤษฎีใหม่ขึ้นมาเพื่ออธิบายคุณสมบัติต่าง ๆ ให้ถูกต้องและครอบคลุม ถึงกระนั้นทฤษฎีส่วนใหญ่ก็ยังอธิบายว่าสภาพนำเวดิงเกิดจากการจับคู่ของอิเล็กตรอนดังเช่นในทฤษฎีบีซีเอส เพียงแต่เปลี่ยนแปลงชนิดของอันตรกิริยาที่ใช้ในการจับคู่ของอิเล็กตรอนเท่านั้น

ฟังก์ชันกรีนของยีนและซากราวาร์ตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ถูกคิดขึ้นเพื่ออธิบายตัวนำเวดิงที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ โดยยังยึดแบบจำลองการจับคู่ของอิเล็กตรอนตามแบบของทฤษฎีบีซีเอส ซึ่งพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนนั้นมีค่าไม่เกินความถี่เดอบาย ω_D ฟังก์ชันกรีนที่ใช้แตกต่างจากทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ คือมีพารามิเตอร์ α ซึ่งแสดงคุณสมบัติความไม่ใสของเหลวเฟอร์มิของตัวนำเวดิง โดยทฤษฎีที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มินี้ จะให้ผลเหมือนกันทุกประการกับทฤษฎีของเหลวเฟอร์มิ เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าเท่ากับศูนย์

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดิงบริสุทธิ์และตัวนำเวดิงที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก โดยได้กำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอห์นัต และมีความจำกัดเท่ากับ ω_D เพื่อเปรียบเทียบกัน เพราะในตัวนำเวดิงที่มี $\omega_D \gg T_c$ อาจพิจารณาให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอน มีค่าสูงสุดเท่ากับบอห์นัตได้

สรุปผล

1. กรณีตัวนำเวดิงบริสุทธิ์

1.1 จากภาพประกอบ 17 และ 18 พบว่า อุณหภูมิวิกฤตและค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ขึ้นกับพารามิเตอร์ α อย่างเห็นได้ชัด โดยอุณหภูมิวิกฤตแปรผกผันกับ α ส่วนค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่แปรผันตรงกับ α และเมื่อ α มีค่าเท่ากับศูนย์จะได้สูตรของอุณหภูมิวิกฤตและค่าคงที่วิกฤตของการจับคู่ สอดคล้องกับทฤษฎีบีซีเอส ทุกประการ

1.2 ในการเปรียบเทียบ กรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอห์นัตและ ω_D จากกราฟในภาพประกอบ 19 ที่แสดงอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของพารา-

มิเตอร์ α พบว่า กรณีทั้งสองแตกต่างกันอย่างชัดเจน โดยกรณีพลังงานในการจับคู่มิเตอร์ค่าไม่เกิน ω_0 อุณหภูมิวิกฤตที่ได้มีค่าต่ำกว่า กรณีพลังงานในการจับคู่มิเตอร์ค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์

1.3 จากภาพประกอบ 21, 22 และ 23 พบว่า อุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับพารามิเตอร์ ω_c , ω_0 และ λ คือ อุณหภูมิวิกฤตเพิ่มขึ้นเมื่อ ω_0 และ λ มีค่ามากขึ้น แต่อุณหภูมิวิกฤตยังแปรผกผันกับ α เช่นเดิม ส่วนกรณี ω_c พบว่า เมื่อ α เป็นศูนย์ อุณหภูมิวิกฤตไม่ขึ้นกับ ω_c แต่เมื่อ α เพิ่มขึ้น อุณหภูมิวิกฤตจะลดในอัตราที่ต่างกัน ขึ้นกับ ค่า ω_c ที่ใช้ในการคำนวณ

2. กรณีตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

2.1 ภาพประกอบ 26 และ 27 แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงค่อนข้างเร็ว เมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม และอัตราการลดลงขึ้นกับพารามิเตอร์ α ไม่ว่าจะเป็กรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ หรือมีค่า ω_0

2.2 เมื่อเปรียบเทียบ อิทธิพลของสารเจือต่ออุณหภูมิวิกฤต กรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ กับกรณีมีค่า ω_0 ขณะที่ความเข้มข้นของสารเจือ ($1/T_{c0}\tau$) มีค่าเท่ากัน จากภาพประกอบ 28 พบว่า กรณีพลังงานในการจับคู่มิเตอร์ค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 อัตราการลดอุณหภูมิวิกฤตจะมากกว่ากรณีพลังงานในการจับคู่มิเตอร์ค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าเพิ่มขึ้น

2.3 เมื่อพิจารณาที่พารามิเตอร์ α มีค่าเป็นศูนย์ จากภาพประกอบ 29 พบว่า อุณหภูมิวิกฤตลดลงเร็วกว่า อุณหภูมิวิกฤตที่ได้จากสูตรของออบริกอฟ-กอร์คอฟ ที่ใช้อธิบายตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นดีที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (Franz and others. 1997 : 7883)

อภิปรายผล

จากสมการของอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้ในกรณีตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์จะเห็นว่า อุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับพารามิเตอร์ α คือ อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่าลดลงเมื่อ α มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อให้ $\omega_0 = 200$, $\omega_c = 1000$ และ $\lambda = 0.3$ จะได้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าเกือบเป็นศูนย์ ที่ α มีค่า 0.11 ในกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และ ที่ α มีค่า 0.9 ในกรณีพลังงานในการจับคู่ที่ค่าสูงสุดเท่ากับ ω_0 ค่า α ที่อุณหภูมิวิกฤตเป็นศูนย์นี้ เป็นค่าวิกฤต คือหาก α มีค่ามากกว่าค่าวิกฤต ตัวนำจะเป็นตัวนำปกติตลอดไปไม่ว่าอุณหภูมิจะลดเพียงใด

เมื่อพิจารณา กราฟของอุณหภูมิวิกฤตเป็นฟังก์ชันของ α ดังภาพประกอบ 19 จะเห็นว่ากรณีพลังงานในการจับคู่มิเตอร์ค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ กับกรณีมีค่าจำกัด ω_0 มีความแตกต่างกันชัดเจน ดังนั้นในการคำนวณสมบัติกายภาพอื่นๆ ของตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิด้วยฟังก์ชันกรีนของยีนและซากราวาร์ดี ควรกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าจำกัดไม่เกิน ω_0

เมื่อพิจารณากรณีที่ α มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตสอดคล้องกับสมการอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้จากทฤษฎีบีซีเอส แต่พบว่าอุณหภูมิวิกฤตมีค่าต่ำกว่าที่คาดไว้คือ เมื่อให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$ และ $\lambda = 0.3$ จะได้อุณหภูมิวิกฤตมีค่าประมาณ 8.39 K สำหรับกรณีพลังงานในการจับคู่มี่ค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และมีค่าประมาณ 4.44 K ในกรณีพลังงานในการจับคู่มี่ค่าสูงสุด ω_D แสดงว่าแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้อาจไม่สามารถใช้อธิบายตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง แต่อาจใช้อธิบายตัวนำยวดยิ่งเฟอร์มิออนหนักได้ อย่างไรก็ตามจากผลการศึกษาที่ผ่านมาพบว่า หากใช้ฟังก์ชันกรีน $G_0(k, i\omega_n) = \omega_c^{-\alpha} / (i\omega_n - \epsilon_k)^{1-\alpha}$ ค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่ง โดยกำหนดให้ความหนาแน่นสถานะขึ้นกับพลังงานแบบแวนโฮฟ (van Hove density of states) และ α มีค่าน้อยๆ จะได้ค่าของอุณหภูมิวิกฤตอยู่ในช่วงของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง (Grosu and others. 1997 : 8301)

จากการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตในกรณีตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อความเข้มข้นของสารเจือเพิ่ม และอัตราการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับพารามิเตอร์ α คือ อัตราการลดลงของอุณหภูมิวิกฤตจะมากขึ้นเมื่อ α มีค่ามากขึ้น แต่จากการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข พบว่า ไม่สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตลดทอน T_c / T_{c0} ได้ หากความเข้มข้นของสารเจือ (อยู่ในพารามิเตอร์การกระเจิง, $1/T_{c0}\tau$) มีค่ามากกว่าค่าๆ หนึ่ง ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ $\omega_D = 200$, $\omega_C = 1000$, $\omega_D / 2\pi T_{c0} = 10$ และ $\epsilon_C / \omega_C = 100$ พบว่าสามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตได้เมื่อ $1/T_{c0}\tau$ มีค่าไม่เกิน 0.4 เพราะเมื่อพารามิเตอร์การกระเจิงมากกว่า 0.4 อุณหภูมิวิกฤตจะมีค่ามากขึ้นซึ่งขัดแย้งกับผลการทดลอง ข้อบกพร่องนี้อาจเกิดจากความไม่สมบูรณ์ของฟังก์ชันกรีนที่ใช้ หรือการประมาณบางอย่างที่ใช้ในการคำนวณ

เมื่อเปรียบเทียบกรณีพลังงานในการจับคู่อิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์และมีค่าไม่เกิน ω_D ในกรณีตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก จะเห็นว่า การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตแตกต่างกัน คือ กรณีพลังงานในการจับคู่มี่ค่าไม่เกิน ω_D การลดลงของอุณหภูมิวิกฤตจะมากกว่า กรณีพลังงานในการจับคู่มี่ค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ และความแตกต่างนี้จะมากขึ้น เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่ามากขึ้น และเมื่อพิจารณาที่ α มีค่าเป็นศูนย์ พบว่า อุณหภูมิวิกฤตลดอย่างไม่เป็นเชิงเส้นและลดเร็วกว่า สูตรอปริกอซอฟ-กอร์คอฟ ที่ใช้อธิบายตัวนำยวดยิ่งชนิดคลิ่นดีที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กอย่างชัดเจน ความแตกต่างนี้อาจเกิดจาก แบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นตัวนำยวดยิ่งชนิดคลิ่นเอส และคำนวณโดยใช้การกระเจิงแบบบอร์น ซึ่งยังคงต้องศึกษาโดยใช้แบบจำลองตัวนำยวดยิ่งชนิดคลิ่นดี และคำนวณการกระเจิงเนื่องจากศักย์สารเจือ โดยใช้วิธี t-matrix ต่อไป อย่างไรก็ตามผลที่ได้จากงานวิจัยนี้อาจจะใช้อธิบายตัวนำยวดยิ่งไม่บริสุทธิ์ที่พบว่าอุณหภูมิวิกฤตลดในอัตราที่เร็วกว่าที่ทฤษฎีของอปริกอซอฟ-กอร์คอฟทำนายไว้ได้ และจากที่อัตราการลดของอุณหภูมิวิกฤตขึ้นกับ α ดังนั้นถ้าทราบว่า α ขึ้นกับ

ลักษณะทางกายภาพของตัวนำวดยิ่งแต่ละชนิดอย่างไร ก็สามารถอธิบายผลการทดลองได้ดีขึ้น โดยการปรับค่า α ให้สอดคล้องกับตัวนำวดยิ่งชนิดนั้นๆ

และจากการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งทั้งกรณีพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์และ ω_0 พบว่าสมการของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อให้พลังงานในการจับคู่มีค่าไม่เกิน ω_0 จะลดรูปไปตรงกับสมการของอุณหภูมิวิกฤตเมื่อให้พลังงานในการจับคู่มีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ ภายใต้เงื่อนไข $\omega_0 \gg T_c$ และ $0 < \alpha < 1/2$ ดังนั้นการอธิบายสมบัติของตัวนำวดยิ่งด้วยแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้ อาจจะสามารถให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับอนันต์ได้ ถ้าตัวนำวดยิ่งนั้นมี $\omega_0 \gg T_c$

ข้อเสนอแนะ

ผลที่ได้จากงานวิจัยนี้บ่งชี้ว่า การอธิบายสมบัติต่าง ๆ ของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิ ด้วยฟังก์ชันกรีนของยีนและซากุราวารัตตี ควรจะกำหนดให้พลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุด ω_0 และตัวนำวดยิ่งที่เหมาะสมในการอธิบายด้วยแบบจำลองนี้ ควรจะเป็นตัวนำวดยิ่งที่มีอุณหภูมิวิกฤตไม่สูง แต่มีสมบัติแตกต่างจากตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำทั่วไป โดยเฉพาะอย่างยิ่ง อิทธิพลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่ทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งเหตุการณ์นี้ไม่ปรากฏในตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ ดังนั้นตัวนำวดยิ่งดังกล่าวอาจได้แก่ ตัวนำวดยิ่งเฟอร์มิออนหนัก และตัวนำวดยิ่งสารประกอบอินทรีย์ (Organic - superconductors) เป็นต้น

เนื่องจากแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ได้กำหนดให้อิเล็กตรอนมีการจับคู่กัน แบบคลื่นเอส (s-wave) แต่ผลการทดลองปัจจุบันยืนยันว่า ในตัวนำวดยิ่งอุณหภูมิสูง อิเล็กตรอนจะจับคู่กันแบบ คลื่นดี (d-wave) ดังนั้น งานวิจัยต่อไปอาจศึกษาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำวดยิ่งแบบคลื่นดี หรือสมบัติของตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิอีกหลายประการที่ยังไม่ได้ศึกษาด้วยแบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน ความจุความร้อน ช่องว่างพลังงาน อิทธิพลของสนามแม่เหล็ก และอิทธิพลของสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก นอกจากนี้กรณีความหนาแน่นสถานะมีค่าขึ้นกับพลังงาน และการคำนวณผลการกระเจิงเนื่องจากศักย์ของสารเจือด้วยวิธี t-matrix ก็อาจเป็นหัวข้อที่จะศึกษาต่อไปได้

อย่างไรก็ตามฟังก์ชันกรีนที่ใช้อธิบายตัวนำวดยิ่งที่ไม่ใช่ของเหลวเฟอร์มิเนี่ย ยังมีประเด็นที่ต้องศึกษาอีกบางประการ ได้แก่ Spin-charge separation (Sudbo. 1995 : 2575) และ Mass renormalization factor (Rodriguez-Nunes, Tifrea & Magalhaes. 2000 : 4026) อีกทั้งความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ α กับปริมาณทางกายภาพของตัวนำวดยิ่งก็ยังเป็นปัญหาที่น่าสนใจ



บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*.
New York : Dover Publications.
- Alexandrov, A.S. & Mott, S.N. (1994). *High Temperature Superconductors and Others Superfluids*. London : Taylor & Francis.
- Anderson, P.W. (1992, June 12). "Experimental Constraints on The Theory of High-Tc Superconductivities," *Science*. 256 : 1526-1529.
- Bardeen, J., Cooper, L.N. & Schrieffer, J.R. (1957, December 1). "Theory of Superconductivity," *Physical Review*. 108(5) : 1175-1204.
- Bayindir, M. & Gedik, Z. (1999). "Suppression of Superconductivity in High-Tc Cuprates Due to Nonmagnetic Impurities : Implications for The Order Parameter Symmetry," *The European Physical Journal B*. 10 : 287-291.
- Bednorz, J.G. & Müller, K.A. (1986, April 17). "Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System," *Zeitschrift für Physik B*. 64 : 189.
- Bennemann, K.H. & Ketterson, J.B. (2003). *The Physics of Superconductors : Vol. I Conventional and High-Tc Superconductors*. New York : Springer-Verlag.
- Buckel, W. (1991). *Superconductivity : Fundamentals and Applications*. Weinheim : VCH.
- Burn, G. (1985). *Solid State Physics*. London : Academic Press.
- Christman, J.R. (1988). *Fundamentals of Solid State Physics*. Singapore : John Wiley & Sons.
- Chu, C.W. and others. (1987, March 2). "Superconductivity at 93 K in a New Mixed-Phase Y-Ba-Cu-O Compound System at Ambient Pressure," *Physical Review Letters*. 58(9) : 908.
- Crisan, M. and others. (1998, June 25). "Nonmagnetic Impurities in d-pairing Superconductor," *Journal of Superconductivity*. 11(6) : 699-705.
- Fehrenbacher, R. & Norman, M.R. (1994, August 1). "Gap Renormalization in Dirty Anisotropic Superconductors : Implications for The Order Parameter of The Cuprate," *Physical Review B*. 50(5) : 3495-3498.

- Franz, M. and others. (1997, October 1). "Critical Temperature and Superfluid Density Suppression in Disordered High-Tc Cuprate Superconductors," *Physical Review B*. 56(13) : 7882-7885.
- Golubov, A.A. & Mazin, I.I. (1997, June 1). "Effect of Magnetic and Nonmagnetic Impurities on Highly Anisotropic Superconductivity," *Physical Review B*. 55(22) : 15146.
- Gradshteyn, I.S. & Ryzhik, I.M. (1980). *Table of Integrals, Series and Products*. 4th ed. New York : Academic Press.
- Grosu, I. and others. (1997, October 1). "Critical Temperature of A Non-Fermi-Liquid Superconductor with An Energy-Dependent Density of States," *Physical Review B*. 56(13) : 8298-8320.
- Grosu, I. (2000, January). "Impurities in d-wave Superconductors : Effect of Singular Density of State," *Journal of Superconductivity*. 13(1) : 141-144.
- Grosu, I. & Mocanu, C. (2000, April 25). "Scattering in A Spin-Charge Separated Non-Fermi Liquid," *Journal of Superconductivity*. 13(4) : 587.
- Grosu, I. (2002, August). "Density of State and Impurity Effects in Non-Fermi Superconductors," *Journal of Superconductivity*. 15(4) : 263-269.
- Haran, G. & Nagi, A.D.S. (1996, December 1). "Role of Anisotropic Impurity Scattering in Anisotropic Superconductors," *Physical Review B*. 54(21) : 15463.
- Hotta, T. (1993, January). "Impurity Effects in Cuprate Superconductors," *Journal of The Physical Society of Japan*. 62(1) : 274-280.
- Ishida, K. and others. (1993, August). "Cu NMR and NQR Studies of Impurities-Doped $\text{YBa}_2(\text{Cu}_{1-x}\text{M}_x)_3\text{O}_7$ (M=Zn and Ni)," *Journal of The Physical Society of Japan*. 62(8) : 2803-2804.
- Kittel, C. (1986). *Introduction to Solid State Physics*. 6th ed. Singapore : John Wiley & Sons.
- Kresin, V.Z. & Wolf, S.A. (1990). *Fundamentals of Superconductivity*. New York : Plenum Press.
- Levi, B.G. (1996, January). "Experiments Probe The Wave Function of Electron Pairs in High-Tc Superconductors," *Physics Today*. 46 : 19.
- Nakamura, S. (1996). *Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB*. New Jersey : Prentice-Hall.

- Ogata, M. & Anderson, P.W. (1993, May 17). "Transport Properties in The Tomonaga-Luttinger Liquid," *Physical Review Letters*. 70(20) : 3087.
- Omar, M.A. (1975). *Elementary Solid State Physics : Principles and Applications*. Singapore : Addison – Wesley.
- Openov, L.A. (1998, October 1). "Critical Temperature of An Anisotropic Superconductor Containing Both Nonmagnetic and Magnetic Impurities," *Physical Review B*. 58(14) : 9468-9469.
- Rodriguez-Nunez, J.J., Tifrea, I. & Magalhaes, S.G. (2000, August 1). "Some Sum Rules for Non-Fermi Liquids : Applications Taking into Account the Mass Renormalization Factor," *Physical Review B*. 62(6) : 4026.
- Sudbo, A. (1995, March 27). "Pair Susceptibilities and Gap Equations in Non-Fermi Liquids," *Physical Review Letters*. 74(13) : 2575.
- Sun, Y. & Maki, K. (1995, March 1). "Impurity Effect in d-wave Superconductors," *Physical Review B*. 51(9) : 6059-6060.
- Varma, C.M. and others. (1989, October 30). "Phenomenology of The Normal State of Cu-O High Tc Superconductors," *Physical Review Letters*. 63(18) : 1996-1999.
- Yin, L. & Chakravarty, M. (1996). "Spectral Anomaly and High Tc Superconductors," *International Journal of Modern Physics B*. 10(7) : 805-815.





ภาควิชา ก

ฟังก์ชันแกมมา ฟังก์ชันเบต้า และ ฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก

ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)

ฟังก์ชันแกมมาใช้สัญลักษณ์เป็น $\Gamma(x)$ และนิยามด้วยอินทิกรัล

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

มีคุณสมบัติบางประการ ดังนี้

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

$$\Gamma(1/4) = 3.62560990$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3/4) = 1.22541670\dots$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ x เป็นจำนวนใด ๆ

ฟังก์ชันเบต้า (Beta function)

ฟังก์ชันเบต้าใช้สัญลักษณ์เป็น $B(x,y)$ และนิยามด้วยอินทิกรัล

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

เมื่อ $x > 0$ และ $y > 0$

มีคุณสมบัติบางประการดังนี้

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$B(x,y) = B(y,x)$$

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

ในที่นี้ m และ n ไม่ใช่จำนวนเต็มลบ

ฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric function)

นิยามด้วยอนุกรม

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &= F(b, a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

ซึ่งอนุกรมนี้จะลู่ออกเมื่อ $\operatorname{Re}(c - a - b) \leq -1$, ลู่เข้าสัมบูรณ์ เมื่อ $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$ และ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขเมื่อ $-1 < \operatorname{Re}(c - a - b) \leq 0$ ทั้งนี้ $z \neq 1$ หรือแสดงในรูปอินทิกรัลดังสมการ

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

[$\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$]

มีคุณสมบัติบางประการดังนี้

$$\begin{aligned} F(1, 1; 2; z) &= -z^{-1} \ln(1-z) \\ F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) &= \frac{1}{2} z^{-1} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\ F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) &= z^{-1} \arctan z \\ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) &= (1-z^2)^{1/2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = z^{-1} \arcsin z \\ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) &= (1+z)^{1/2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = z^{-1} \ln\left[z + (1+z^2)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

$$F(a, b, c, d) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) +$$

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right) \quad (|\arg(-z)| < \pi)$$



ภาคผนวก ข

การทำซ้ำแบบนิวตัน (Newton Iteration)

การทำซ้ำแบบนิวตัน (Newton iteration)

เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ใช้หารากของสมการไม่เชิงเส้นที่มีสมการในรูป $f(x) = 0$ โดยสามารถหาได้ทั้งรากที่เป็นค่าจริง และรากที่เป็นค่าจินตภาพ การทำซ้ำแบบนิวตันได้มาจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) รอบค่าเริ่มต้น x_0 แล้วคงไว้เฉพาะเทอมอันดับหนึ่ง ดังสมการ

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{ข.1})$$

สมการ (ข.1) เป็นการประมาณค่าของ $f(x)$ โดย $f'(x_0)$ คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ $x = x_0$ และเมื่อให้สมการ (ข.1) เท่ากับศูนย์ จะได้การประมาณลำดับต่อไป ดังสมการ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

เมื่อทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จะได้

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (\text{ข.2})$$

อัลกอริทึม (Algorithm) ของวิธีการนี้แสดงให้เห็นได้ ดังภาพประกอบ 30 ซึ่งแสดงฟังก์ชัน $f(x)$ ที่สมมติขึ้น สามารถหารากของสมการ $f(x)=0$ (จุดที่ $f(x)$ ตัดแกน x) ได้โดยกำหนดค่าเริ่มต้น x_0 แล้วลากเส้นสัมผัส (Tangentially) จากจุด (x_0, f_0) ไปตัดแกน x ซึ่งจุดตัดนี้คือ x_1 แล้วลากเส้นสัมผัสจากจุด (x_1, f_1) ไปตัดแกน x อีกก็จะได้ x_2 ทำกระบวนการนี้ซ้ำไปเรื่อยๆ ก็จะได้รากของสมการ แต่หากเลือกค่าเริ่มต้นไม่เหมาะสมอาจทำให้กระบวนการนี้ไม่สามารถลู่เข้าหารากของสมการได้ ในที่นี้ f_0 และ f_1 คือ $f(x=x_0)$ และ $f(x=x_1)$ ตามลำดับ

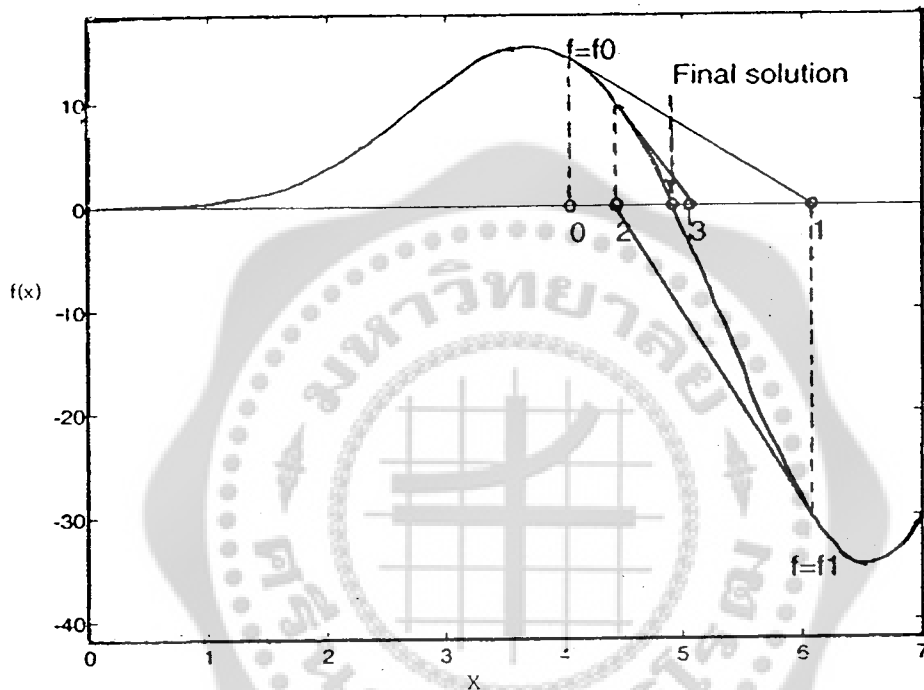
การหาอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันที่ยุ่งยากอาจทำได้ลำบากหรือไม่สามารถหาได้ กรณี $f'(x)$ ในสมการ (ข.2) อาจจะคำนวณหาได้โดยประมาณแทนที่จะคำนวณอย่างแม่นยำ ตัวอย่างเช่น $f'(x_{n-1})$ อาจประมาณได้ดังนี้

$$f'_{n-1} = \frac{f(x_{n-1} + h) - f(x_{n-1})}{h} \quad (\text{ข.3})$$

หรือ

$$f'_{n-1} = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} - h)}{h} \quad (\text{ข.4})$$

เมื่อ h มีค่าน้อย ๆ เช่น 0.0001 ความคลาดเคลื่อนในสมการ (ข.3) และ (ข.4) ไม่มีผลต่ออัตราการลู่เข้าของการทำซ้ำแบบนิวตัน และไม่มีผลต่อความถูกต้องของคำตอบสุดท้าย อย่างไรก็ตามการหาอนุพันธ์โดยประมาณเช่นนี้ต้องระมัดระวังหากมีจุดเอกฐาน (Singularity) อยู่ใกล้รากของสมการ



ภาพประกอบ 30 แสดงอัลกอริทึมของวิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน (Nakamura. 1996 : 261)

ด้านล่างเป็นตัวอย่างการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำเวดิงที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก เมื่อพลังงานในการจับคู่ของอิเล็กตรอนมีค่าสูงสุดเท่ากับบอนด์ จากสมการ (4.6) โดยใช้วิธีการทำซ้ำแบบนิวตัน และเขียนคำสั่งด้วยโปรแกรม MATHEMATICA ในที่นี้กำหนดให้ $y=T_c/T_{c0}$, $x=1/T_{c0}\tau$, $wcd=\omega_c/\omega_0=5$, $ewc=\epsilon_c/\omega_c=100$, $d0=\omega_D/2\pi T_{c0}=10$ และ $\alpha=0.1$ สำหรับการคำนวณในกรณีอื่นๆ ในงานวิจัยนี้ก็ใช้อัลกอริทึมเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนสมการที่ต้องการหาคำตอบและค่าพารามิเตอร์ที่ใช้คำนวณเท่านั้น

```
ClearAll[func, wcd, ewc, d0,  $\alpha$ ];
```

```
wcd = 5;
```

```
ewc = 100;
```

```
d0 = 10;
```

```
 $\alpha$  = 0.1;
```

$$\text{func}[x_ , Y_] := 1 - Y^{2\alpha} \frac{\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{d0}{Y} \right)^{2\alpha} - 1 \right)}{\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} (d0^{2\alpha} - 1)} + Y^{3\alpha-1} (d0 \text{ wcd})^{-\alpha} \text{Cot}[\text{Pi } \alpha / 2] \frac{\alpha}{2} x \text{ ewc}^\alpha \frac{\text{Beta}[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \alpha]}{\text{Beta}[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \alpha]} \frac{\frac{4}{2^{3\alpha}} + \frac{1}{3\alpha-1} \left(\left(\frac{d0}{Y} \right)^{3\alpha-1} - 1 \right)}{\frac{2}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2\alpha} (d0^{2\alpha} - 1)};$$

```
h = 0.000001;
```

```
err = 1;
```

```
y = 1;
```

```
x = 0.000001;
```

```
While[x < .45, err = 1;
```

```
  While[err > 0.000001,
```

```
    p1 = y;
```

```
    sff = N[func[x, y]];
```

```
    ssf1 = N[func[x, y+h]];
```

```
    Y = Y -  $\frac{sff * h}{ssf1 - sff}$ ;
```

```
    err = Abs[y - p1];
```

```
  ];
```

```
  Print[Abs[y]];
```

```
  x = x + .05]
```



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล	นายคมกริช โชคพระสมบัติ
วันเดือนปีเกิด	28 มิถุนายน 2519
สถานที่เกิด	อ. ศรีเชียงใหม่ จ. หนองคาย
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	02 ม. 3 ต. บ้านหม้อ อ. ศรีเชียงใหม่ จ. หนองคาย 41310
ตำแหน่งหน้าที่การงาน	อาจารย์ 1 ระดับ 4
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนสามัคคีพิทยาคาร สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา- อุดรธานี เขต 4
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2537	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนพานพร้าว
พ.ศ. 2541	ค.บ. (ฟิสิกส์) จากสถาบันราชภัฏมหาสารคาม
พ.ศ. 2546	กศ.ม. (ฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

