

การศึกษาภาวะการเชื่อมต่อเชิงพื้นที่แบบมีสหสัมพันธ์โดยอาศัย
แบบจำลองสปีนของพอลส์บนแลตทิซจัตุรัส

ปริญาณันท์

ของ

ปรีชา สัจจอุตตรา

18 ส.ค. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกนิสิกส์

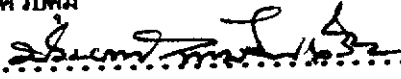
มีนาคม 2535

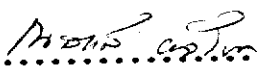
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

180155

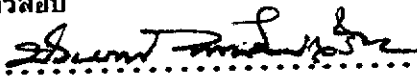
คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปัญหาในหนังสือฉบับนี้แล้วเห็น
สมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกนิสิทธ์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

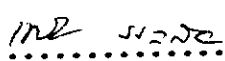
..........ประธาน
(รศ.ดร.ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ)

..........กรรมการ
(ผศ.ดร.ณสวรรค์ ผลโชค)

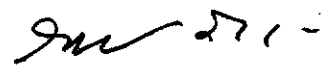
คณะกรรมการสอบ

..........ประธาน
(รศ.ดร.ประยงค์ พงษ์ทองเจริญ)

..........กรรมการ
(ผศ.ดร.ณสวรรค์ ผลโชค)

..........กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผศ.ดร.เฟื่องลดา วีระสัย)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปัญหานี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกนิสิทธ์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..........คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ศ.ดร.สมพร บัวทอง)

วันที่.....๖.....เดือน.....สิงหาคม.....พ.ศ.....๒๕๓๕.....

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความช่วยเหลือจาก รองศาสตราจารย์
ดร.ประสงค์ พงษ์ทองเจริญ ที่ให้คำปรึกษาแนะนำแนวทาง รวมทั้งการตรวจแก้ไขวิจัยตั้งแต่
เริ่มทำงานเป็นผลสำเร็จด้วยวิญญูของความเป็นครูอย่างแท้จริง ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณ
เป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ณสวรรค์ ผลโคก ที่ได้ให้ความกรุณาให้คำปรึกษา
ทางด้านคอมพิวเตอร์ที่เป็นประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอขอบคุณ คุณณรงค์ สัจจุตตรา และ คุณประพันธ์ อนุพงษ์ธองอาจ ที่กรุณานำ
และช่วยเหลือทางด้านคอมพิวเตอร์เป็นอย่างดี

ขอขอบคุณ คุณบุญฤทธิ์ รุ่งเรือง ที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือทางด้านวิชาการ
ท้ายสุดนี้ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ที่ให้กำลังใจในการทำวิจัยครั้งนี้
คุณประสิทธิ์จากการวิจัยขอมอบแด่ท่านทั้งสองและครูอาจารย์ทุกท่านที่ร่วมสร้างผู้วิจัย

ปรีชา สัจจุตตรา

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	บทนำ.....	1
	ปัญหาและจุดมุ่งหมายของงานวิจัย.....	9
	ความสำคัญของงานวิจัย.....	10
2	ความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอดส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะ แบบมีสหสัมพันธ์.....	11
	2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กกับความน่าจะเป็นของ ภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก.....	14
	2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็กกับขนาดเฉลี่ย ของกลุ่มนับได้.....	16
	2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายในของระบบกับจำนวนพันธะเฉลี่ย....	20
	2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อนกับความแปรปรวนของพันธะ.....	22
3	การเปลี่ยนแปลงเฟสของภาวะการเชื่อมต่อและแบบจำลองพอดส์.....	25
	สมการสำหรับคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต.....	28
	สมการสำหรับคำนวณค่าครรชนวิกฤตเชิงความร้อน.....	30
	สมการสำหรับคำนวณค่ามิติแฟรกทัล.....	30
	สมการสำหรับคำนวณค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก.....	31
	สมการสำหรับคำนวณค่าพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปิน.....	32
4	วิธีดำเนินการวิจัย.....	33
	4.1 วิธีคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต.....	54
	4.2 วิธีคำนวณค่าครรชนวิกฤตเชิงความร้อน.....	75
	4.3 วิธีคำนวณค่ามิติแฟรกทัล.....	75
	4.4 วิธีคำนวณความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก.....	75
	4.5 วิธีคำนวณพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปิน.....	76

บทที่	หน้า
5 ผลการวิจัย สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ.....	77
ความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพหุคูณและแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิง	
พันธะแบบมีสหสัมพันธ์.....	77
ค่าอันตรายภิกขุวิภิกขุ, ครรชนวิภิกขุเชิงความร้าย, มิติแปรกตล.....	79
ค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก.....	82
ค่าพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปีน.....	93
สรุปผลการวิจัย.....	121
อภิปรายผลการวิจัย.....	121
ข้อเสนอแนะ.....	123
บรรณานุกรม.....	124
ภาคผนวก.....	127
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	151
บทคัดย่อ.....	152

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 1 x 1 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	34
2 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 2 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	34
3 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 3 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	35
4 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 4 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	36
5 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 3 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	38
6 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 4 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	40
7 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 2 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว.....	43
8 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 3 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว.....	44
9 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 4 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว.....	46
10 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 3 สปิน กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว.....	50
11-ก คำอันตรกิริยาวิกฤต, ครรชนวิฤตเชิงความร้อนและมิตินพวกตลของเซลล์ ขนาดต่าง ๆ กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ.....	79
11-ข คำอันตรกิริยาวิกฤต, ครรชนวิฤตเชิงความร้อนและมิตินพวกตลของเซลล์ ขนาดต่าง ๆ กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว.....	81
12 ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก.....	83
13 ผลงานอิสระของระบบต่อสปิน.....	93
14 คำอันตรกิริยาวิกฤต ครรชนวิฤตเชิงความร้อน มิตินพวกตล โดยวิธีรีนอร์มัลไล เซชันกรุป แบบมิกคาล-คาตานอฟ.....	122

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ		หน้า
1	ค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ.....	2
2	แบบจำลองพอดส์ สปีดหนึ่ง ๆ มี 2, 3 และ 4 สถานะ.....	3
3	กราฟย่อยของสปีดแบบพอดส์ 6x6 สปีด บนแลตทิซ โดยสปีดในกลุ่มเดียวกันจะมี พันธะเชื่อมโหนดและสปีดบนแลตทิซมี $q = 4$ สถานะ.....	7
4	กราฟเชื่อมต่อข้ามฟากของสปีดแบบพอดส์ 6x6 สปีดบนแลตทิซ สปีดมีสถานะ $q = 4$	8
5	ก. การแบ่งกราฟ G ออกเป็นเซลล์ D.....	27
	ข. เซลล์ D แสดงพันธะที่เชื่อมกับเซลล์ที่อยู่เหนือถัดไป.....	27
	ค. กราฟย่อย D' แสดงเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว.....	27
6	การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับ ความน่าจะเป็นเชิงพันธะการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดย พิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$	85
7	การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับ ความน่าจะเป็นเชิงพันธะการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณา จำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$	86
8	การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับ ความน่าจะเป็นเชิงพันธะการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$	87
9	การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับ ความน่าจะเป็นเชิงพันธะการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$	88
10	การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับ ความน่าจะเป็นเชิงพันธะการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณา จำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$	89

- 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับค่าความน่าจะเป็นเชิงฟังก์ชันการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 90
- 12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับค่าความน่าจะเป็นเชิงฟังก์ชันการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 91
- 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับค่าความน่าจะเป็นเชิงฟังก์ชันการเชื่อมต่อกรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 92
- 14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 97
- 15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 98
- 16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 99
- 17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 100
- 18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 101
- 19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5 \dots\dots\dots$ 102

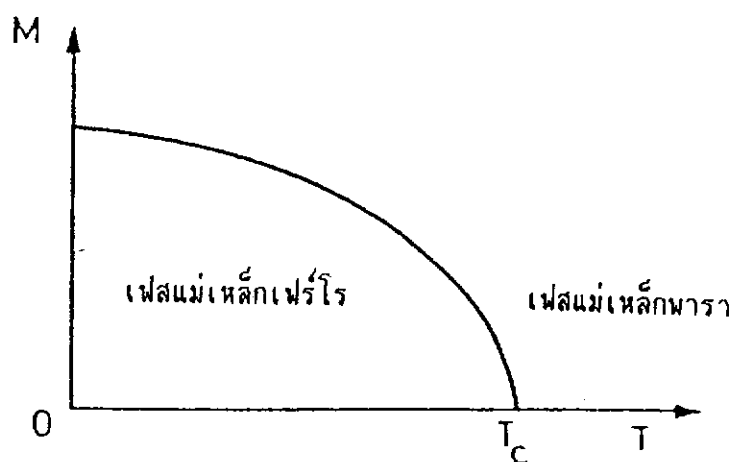
- 20 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 103
- 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 104
- 22 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:2
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 105
- 23 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ 3:2
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 106
- 24 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ 3:2
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 107
- 25 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ 3:2
สำหรับ $q = 1, 2, 5$ 108
- 26 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 1$ 109
- 27 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 1$ 110
- 28 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 1$ 111

- 29 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงบิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 1$ 112
- 30 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 2$ 113
- 31 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงบิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 2$ 114
- 32 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 2$ 115
- 33 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงบิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 2$ 116
- 34 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนของกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 5$ 117
- 35 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงบิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
สำหรับ $q = 5$ 118
- 36 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 5$ 119
- 37 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณีเงื่อนไข
ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงบิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
3:2 สำหรับ $q = 5$ 120

บทนำ

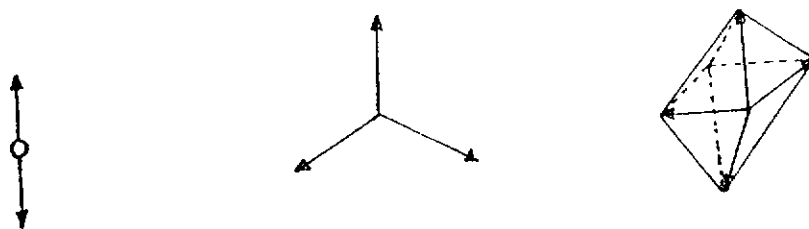
ได้มีการศึกษาปรากฏการณ์วิกฤต (critical phenomena) และการเปลี่ยนแปลงเฟส (phase transition) ของระบบของไหล (fluid system) และระบบแม่เหล็ก (magnetic system) มาเป็นเวลานาน ทำให้แบ่งปรากฏการณ์วิกฤตออกได้เป็น 2 ยุค คือยุคเก่า (classical era) ซึ่งเกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ของระบบ ๓ มิติ และยุคใหม่ (modern era) ที่ศึกษาเกี่ยวกับเลขชี้กำลังวิกฤต (critical exponents) ของระบบ (Stanley, 1971:79-82) เลขชี้กำลังวิกฤตนี้ใช้เป็นเลขกำลังที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงสมบัติต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ของสารใกล้จุดวิกฤต สำหรับระบบแม่เหล็กที่ศึกษากันโดยทั่วไปมีอยู่หลายระบบ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะระบบแม่เหล็กเฟอร์โร (ferromagnetic system) เท่านั้น

สารแม่เหล็กเฟอร์โร สามารถกลายเป็นแม่เหล็กได้แม้ว่าจะไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอกกระทำ หากอุณหภูมิของสารนั้นต่ำกว่าอุณหภูมิหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า อุณหภูมิคูรี (Curie temperature) อุณหภูมินี้ขึ้นกับชนิดของสาร ถ้าอุณหภูมิของสารสูงกว่าอุณหภูมิคูรี โมเมนต์แม่เหล็ก (magnetic moments) หรือสปิน (spins) จะมีทิศทางไม่คงที่ ทำให้ผลรวมของค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก (magnetization) มีค่าเป็นศูนย์ สารนี้จึงอยู่ในสภาวะแม่เหล็กพารา (paramagnetism) และเมื่ออุณหภูมิของสารต่ำกว่าอุณหภูมิคูรี สปินจะเรียงในทิศทางหนึ่งมากกว่าทิศทางอื่น ทำให้ผลรวมค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กมีค่าต่างจากศูนย์ สารแม่เหล็กพาราจึงเปลี่ยนเป็นสารแม่เหล็กเฟอร์โร (Kittel, 1976:608) ดังภาพประกอบ 1 เนื่องจากอุณหภูมิคูรีเป็นอุณหภูมิวิกฤต (critical temperature) ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าที่อุณหภูมิวิกฤตนี้มีการเปลี่ยนแปลงเฟสเกิดขึ้น



ภาพประกอบ 1 แสดงค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก (M) เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T)

นักวิทยาศาสตร์ได้ศึกษาค้นคว้าและพยายามอธิบายพฤติกรรมของสารแม่เหล็กเฟอร์โรว่า มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรที่อุณหภูมิกว้างกับอุณหภูมิจากจุด เป็นผลทำให้มีการกำหนดแบบจำลองของสปินที่หลายแบบ เป็นต้นว่า แบบจำลองไอซิง (Ising model) เสนอโดย ไอซิง (Ising, 1925:613) แบบจำลองนี้กำหนดว่าสปินของโมเลกุลแต่ละโมเลกุลเป็นได้ 2 สถานะ คือ สถานะสปินขึ้น ($\uparrow$) และสถานะสปินลง ($\downarrow$) อันตรกิริยาระหว่างสปินจะมีผลให้สปินอยู่ในแนวขนานกันและขึ้นในทิศทางเดียวกัน ($\uparrow\uparrow$) , ($\downarrow\downarrow$) และเกิดสถานะแม่เหล็กเฟอร์โร โดยมีค่าพลังงานอันเนื่องมาจากอันตรกิริยาเท่ากับ $-J$ ต่อมาแบบจำลองที่ขยายสถานะของสปินให้มากกว่า 2 สถานะ เช่นแบบจำลองเฮยคิน-เทลเลอร์ (Ashkin-Teller model) (Ashkin and Teller, 1943:178) ให้สปินหนึ่งๆ มี 4 สถานะ ในปี ค.ศ.1962 พอตส์ (Potts, 1962:160) เสนอแบบจำลองใหม่เรียกว่า แบบจำลองพอตส์ (Potts model) แบบจำลองนี้กำหนดให้สปินหนึ่งๆ มี q สถานะซึ่ง q เป็นเลขจำนวนเต็มโดยสปินจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งก็ได้ แบบจำลองไอซิงและแบบจำลองเฮยคิน-เทลเลอร์ จึงเป็นกรณีเฉพาะของแบบจำลองพอตส์ ซึ่งมี $q=2$ และ $q=4$ ตามลำดับ (พว.1982:235)



ภาพประกอบ 2 แบบจำลองพ็อตส์ สปินต่างๆ มี 2, 3 และ 4 สถานะ

แม้ว่าจะได้มีแบบจำลองของสปินหลายแบบต่าง ๆ กัน ทั้งที่กล่าวถึงแล้วและยังไม่ได้กล่าวถึง แต่ก็ไม่มีแบบจำลองใดที่ใช้หาคุณสมบัติวิกฤต และครีตวิฤตของระบบแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ได้โดยไม่ต้องมีการประมาณในทุกกรณี แบบจำลองของสปินที่ศึกษากันมากที่สุด ได้แก่แบบจำลองไอซิง ก็ยังไม่สามารถใช้หาคุณสมบัติวิกฤต และครีตวิฤตได้ในกรณี 3 มิติ โดยไม่ต้องมีการประมาณ (Stanley, 1971:79-82) ดังนั้นจึงมีการเสนอวิธีการประมาณต่าง ๆ เคียงคู่กันไปกับการเสนอแบบจำลองของสปิน เช่น ทฤษฎีสถานะเฉลี่ย (mean-field theory) วิธีกระจายเป็นอนุกรม (series-expansion method) และ วิธีรีนอร์มัลไลเซชันกรุป (renormalization-group method) (Domb and Green, 1972-1976) เป็นต้น

เมื่อประมาณ 30 ปีเศษที่ผ่านมา ได้เริ่มมีการศึกษากาการเชื่อมต่อ (percolation) (Hammersley, 1957:642) ปัญหาการเชื่อมต่อเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมบัติกลุ่ม (cluster property) ของระบบ แบบจำลองที่นิยมใช้ ได้แก่ แบบจำลองแลตทิซของกาการเชื่อมต่อ (lattice model of percolation) ในแบบจำลองนี้ ถ้าตำแหน่งแลตทิซ (lattice site) ที่อยู่ใกล้เคียงกันเป็นอันดับหนึ่ง เกาะกันเป็นกลุ่ม (cluster) แม้ขยายข้ามพลาจากตำแหน่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งของแลตทิซ กาการเชื่อมต่อแบบนี้เป็นการเชื่อมต่อข้ามพลาเชิงตำแหน่ง (site percolation) (Stauffer, 1985:124) แต่ถ้าพันธะ (bond) หรือเส้นลากต่อระหว่างตำแหน่งแลตทิซที่อยู่ใกล้เคียงกันเป็นอันดับหนึ่งต่อกันเป็นกลุ่มแม้ขยายข้ามพลาจากตำแหน่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งของแลตทิซ กาการเชื่อมต่อแบบนี้เป็นการเชื่อมต่อข้ามพลาเชิงพันธะ (bond percolation) การเกิดกลุ่มตำแหน่งแลตทิซหรือกลุ่มพันธะนั้น เนื่องมาจากความน่าจะเป็น (probability) ที่จะพบ

ตำแหน่งแลตทิซหนึ่งๆ หรือพันธะหนึ่งๆ มีค่าไม่เต็มหนึ่งหน่วย ถ้าความน่าจะเป็นในการพบตำแหน่งแลตทิซหนึ่งหรือพันธะหนึ่งไม่ขึ้นกับความน่าจะเป็นในการพบตำแหน่งแลตทิซหรือพันธะที่อยู่ใกล้เคียง ภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่งหรือเชิงพันธะ จะเป็นภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่งแบบสุ่ม (random-site percolation) หรือภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบสุ่ม (random-bond percolation) แล้วแต่กรณี แต่ถ้าในการเกิดกลุ่มตำแหน่งแลตทิซ หรือกลุ่มพันธะ ความน่าจะเป็นในการพบตำแหน่งแลตทิซหนึ่งหรือพันธะหนึ่งขึ้นกับความน่าจะเป็นในการพบตำแหน่งแลตทิซหรือพันธะที่อยู่ใกล้เคียง ภาวะการเชื่อมต่อตามแบบหลังนี้ เป็นภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่งแบบมีสหสัมพันธ์ (site-correlated percolation) หรือภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ (bond-correlated percolation) (Coniglio and others. 1977:205)

จะเห็นว่าปัญหาภาวะการเชื่อมต่อดังกล่าวเป็นปัญหาเชิงเรขาคณิต (Domb and Green. 1972-1976) ได้มีการศึกษาพบว่า ถ้าความน่าจะเป็นในการพบตำแหน่งแลตทิซ (p_s) หรือความน่าจะเป็นในการพบพันธะ (p_b) มีค่าสูงกว่าค่าวิกฤตค่าหนึ่ง กลุ่มตำแหน่งแลตทิซ หรือกลุ่มพันธะจะแผ่ขยายข้ามฟากได้ การเปลี่ยนแปลงจากกลุ่มเล็ก ๆ จนเป็นกลุ่มข้ามฟากได้จึงเป็นการเปลี่ยนแปลงเฟสชนิดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงภาวะการเชื่อมต่อ (percolation phase transition) หรือการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงเรขาคณิต (geometrical phase transition)

ในการเปลี่ยนแปลงเฟสแม่เหล็กพารา-เฟอร์โร คาดานอฟ (Kadanoff. 1967:395) ได้อธิบายว่า เมื่ออุณหภูมิลดลง สปินที่อยู่ใกล้กันจะจับกลุ่มโดยสปินในกลุ่มเดียวกันจะชี้ในทางเดียวกัน ทำให้เกิดค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กเฉพาะถิ่น (local magnetization) ขึ้น แม้ว่าค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กจะยังเป็นศูนย์ก็ตาม ขนาดของกลุ่มซึ่งวัดได้ด้วยปริมาณที่เรียกว่าความยาวสหสัมพันธ์ (correlation length) จะใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ ขณะที่อุณหภูมิลดลงโดยลำดับ และจะใหญ่มากจนกระทั่งค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กเริ่มมีค่ามากกว่าศูนย์ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตเล็กน้อย

ความคล้ายคลึงกันระหว่างการเปลี่ยนแปลงเฟสแม่เหล็กพารา-เฟอร์โร และการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงภาวะการเชื่อมต่อ ทำให้มีความพยายามหาแบบจำลองที่แสดงความเกี่ยวข้องระหว่างการเปลี่ยนแปลงเฟสแบบทั้งสอง เอสซัม (Essam. 1980:883) ได้พบว่า การเปลี่ยนแปลงเฟส

ของแบบจำลองไอซิงหรือแบบจำลองที่คล้ายแบบจำลองสปินไอซิง (Ising-like spin model) มีลักษณะหลายประการที่คล้ายกับการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก ต่อมาในปี ค.ศ.1974 มุลเลอร์ - ครัมบาร์ (Muller and Krumbhaar.1974:27) ได้ศึกษาความเป็นไปได้ในการเชื่อมโยงการเปลี่ยนแปลงเฟสของแบบจำลองไอซิง และการเปลี่ยนแปลงเฟสเชิงภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากแบบมีสหสัมพันธ์ โดยพบว่า การเปลี่ยนแปลงเฟสทั้งสองมีกลไกที่เหมือนกัน ในกรณีการเกิดภาวะการเชื่อมต่อทำให้เกิดกลุ่ม

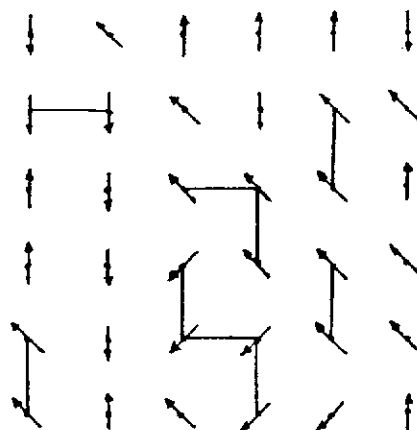
สปินตามแบบจำลองไอซิง ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่งแลตทิซใกล้เคียงกันเป็นอันดับหนึ่ง จัดว่าเป็น สปินในกลุ่มเดียวกัน โดยเหตุที่สปินมีอันตรกิริยากัน ตำแหน่งแลตทิซของสปินซึ่งอยู่ในกลุ่มเดียวกัน จึงมีภาวะการเชื่อมต่อแบบมีสหสัมพันธ์ ซึ่งขึ้นกับอุณหภูมิ ด้วยเหตุนี้จึงสามารถเขียนแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) ของระบบเรขาคณิตสำหรับภาวะการเชื่อมต่อได้จากแบบจำลองไอซิงของระบบ แม่เหล็ก (Coniglio and others.1977:205 ; Klein and others.1978:1145)

ความพยายามในการหาความเกี่ยวข้องระหว่างแบบจำลองไอซิงและแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อแบบมีสหสัมพันธ์ เป็นผลทำให้ถือว่าตำแหน่งแลตทิซที่อยู่ใกล้เคียงกันเป็นอันดับหนึ่งและมีสปิน อยู่ในกลุ่มเดียวกันเสมอ ซึ่งเรียกว่ากลุ่มไอซิงของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่งแบบมี สหสัมพันธ์ (Murata.1979:81 ; Coniglio, Stanley and Klein.1979:518) หรืออยู่ใน กลุ่มเดียวกันของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่ง-พันธะแบบมีสหสัมพันธ์ (site-bond-correlated percolation model) โดยมีความน่าจะเป็นของพันธะเป็น p_B (Coniglio and Klein.1980:2275) แต่พบว่า จุดวิกฤตของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อ เชิงตำแหน่งแบบมีสหสัมพันธ์ในกรณีสามมิติ มีค่าต่างจากจุดวิกฤตของแบบจำลองไอซิงในสามมิติ และครวชนีวิกฤตของขนาดกลุ่ม (cluster-size exponent) ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อ เชิงตำแหน่งแบบมีสหสัมพันธ์ในสองมิติ มีค่ามากกว่าครวชนีวิกฤตของสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก (magnetic- susceptibility) ของแบบจำลองไอซิงในสองมิติ (Sykes and Gaunt. 1976:2131)

โคนิกลิโอและไคลน์ (Coniglio and Klein.1980:2775) พบว่า แบบจำลอง ภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่ง-พันธะ แบบมีสหสัมพันธ์ของตน มีจุดวิกฤตเดียวกันกับจุดวิกฤต ของแบบจำลองไอซิงไม่ว่าจะเป็นกรณีมิติก็ตาม หากกำหนดให้ $p_B = 1 - \exp(-2K)$ เฉพาะ

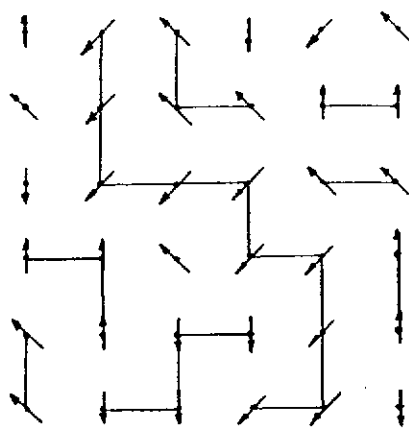
ลงไป ในเมื่อ $K = J/k_B T$ [J เป็นอันตรกิริยาแบบแม่เหล็กเฟอร์ระหว่างสปินที่อยู่ใกล้กัน เป็นอันดับหนึ่ง k_B คือค่าคงของโบลต์ซมันน์ (Boltzmann constant) และ T คืออุณหภูมิ] ทั้งสองยังพบว่าโดยวิธีคำนวณเชิงอาศัยรีนอร์มัลไลเซชันกรุปแบบมิกดาล-คาดานอฟ (Migdal-Kadanoff renormalization group) (Migdal.1975:413 ; Kadanoff.1976:395) หารชนีวิกฤตของขนาดกลุ่ม (γ_p) ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงตำแหน่ง-สถานะแบบมีสหสัมพันธ์ และหารชนีวิกฤตของสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก (γ) ของแบบจำลองไอซิงในกรณีสองมิติ มีค่าเท่ากัน หากให้ $p_c = 1 - \exp(-2K)$ และยังพบว่าหารชนีวิกฤต ν_p ของความยาวการเชื่อมต่อ (connectedness length) และหารชนีวิกฤต ν ของความยาวสหสัมพันธ์ ของแบบจำลองทั้งสองมีค่าเท่ากัน ไม่ว่า p_c จะเป็นเท่าไรก็ตาม

ในปี ค.ศ.1984 หู (Hu.1984:5103) ได้กระจายฟังก์ชันพาร์ติชัน (partition function) ของแบบจำลองไอซิงของสปิน N สปินบนแลตทิซหรือที่เรียกว่ากราฟ (graph) ออกเป็นผลบวกของกราฟย่อย (subgraph) ซึ่งกำหนดด้วยจำนวนพันธะ และได้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันพาร์ติชันของแบบจำลองไอซิง เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงสถานะแบบมีสหสัมพันธ์ โดยมีความน่าจะเป็นของพันธะเป็น $p_p = 1 - \exp(-2K)$ และยังชี้ให้เห็นว่าค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก, สภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก และฟังก์ชันสหสัมพันธ์คู่ (pair correlation function) ของแบบจำลองไอซิงมีความสัมพันธ์กับความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก (percolation probability) ขนาดเฉลี่ยของกลุ่มนับได้ (finite - cluster size) และฟังก์ชันการเชื่อมต่อคู่ (pair-connectedness function) ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงสถานะแบบมีสหสัมพันธ์ (Hu.1986:3067) โดยลำดับ และแบบจำลองทั้งสองมีอุณหภูมิวิกฤตเท่ากัน และหารชนีวิกฤตบางตัวเท่ากัน ต่อมา หู (Hu.1986:6280) ได้อาศัยการกระจายกราฟเป็นกราฟย่อย แสดงว่า ฟังก์ชันพาร์ติชันของแบบจำลองพอตส์ซึ่งมี q สถานะ (q -state Potts model) เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงสถานะแบบมีสหสัมพันธ์ซึ่งมี q สถานะ (q -state bond-correlated percolation model) และแบบจำลองทั้งสองมีหารชนีวิกฤตบางตัวเท่ากัน ภาพประกอบ 3 แสดงกลุ่มสปินแบบพอตส์ในกราฟย่อยกราฟหนึ่ง



ภาพประกอบ 3 แสดงกราฟย่อยของสปินแบบพอตส์ 6x6 สปินแลตทิซโดย สปินในกลุ่มเดียวกันจะมีพันธะเชื่อมโยง และสปินแลตทิซมี $q=4$ สถานะคือ 1, 2, 3, 4

ถ้าในกราฟย่อยมีกลุ่มสปินที่ถูกเชื่อมต่อโดยพันธะจากด้านหนึ่งของกราฟไปยังด้านตรงข้ามของกราฟ กลุ่มสปินนั้นจะเป็นกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟาก (percolating cluster) ส่วนกลุ่มสปินที่ไม่มีสมบัตินี้ เรียกว่า กลุ่มเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก (non - percolating cluster) (Hu, 1986:3067) กราฟย่อยที่มีกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟากอย่างน้อยหนึ่งกลุ่ม เรียกว่ากราฟเชื่อมต่อข้ามฟาก(percolating graph) ส่วนกราฟที่มีแต่เฉพาะกลุ่มเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก เรียกว่ากราฟเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก (non- percolating graph) ภาพประกอบ 4 แสดงกราฟเชื่อมต่อข้ามฟาก ซึ่งมีกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟาก 1 กลุ่ม และกลุ่มเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก 15 กลุ่ม ประกอบด้วยกลุ่มที่มี 1 สปิน 8 กลุ่ม กลุ่มที่มี 2 สปิน 4 กลุ่ม กลุ่มที่มี 3 สปิน 2 กลุ่ม และกลุ่มที่มี 4 สปิน 1 กลุ่ม



ภาพประกอบ 4 แสดงกราฟเชื่อมต่อข้ามฟากของสปินแบบพอตส์ 6x6 สปินแบบแลตทิซ สปิน

สถานะ $q = 4$

ระบบกลศาสตร์สถิติเป็นระบบ N ขนาด เมื่อ N เปลี่ยนเข้าหาค่าจำกัดอนันต์ การกระจายฟังก์ชันพาร์ติชันของระบบสปินตามแบบจำลองพอตส์ N สปิน เป็นผลบวกของกราฟย่อย จึงไม่เหมาะสำหรับใช้ศึกษาหาจุดวิกฤตและครั้นวิกฤตของระบบ เพราะฟังก์ชันพาร์ติชันจะประกอบด้วยจำนวนเทอมนับไม่ถ้วน วิธีที่หลีกเลี่ยงความยุ่งยากที่สำคัญวิธีหนึ่งได้แก่ วิธีรีโนร์มัลไลเซชันกรุป (renormalization-group method) ของวิลสัน (Wilson, 1971:3175) ซึ่งลดระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ของระบบลงเป็นลำดับขั้น เป็นผลให้สามารถคำนวณหาจุดวิกฤตและครั้นวิกฤตของระบบได้ ในปี ค.ศ. 1988 หูและเฉิน (Hu and Chen, 1988:2765) ได้ใช้วิธีกระจายฟังก์ชันพาร์ติชันของแบบจำลองพอตส์ของ N สปิน ให้อยู่ในเทอมของกราฟย่อย โดยแบ่ง N สปิน ออกเป็นเซลล์จัตุรัส (square cell) สำหรับระบบ 2 มิติ เมื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) กับสถานะภายในเซลล์ที่อยู่ติดต่อกันและกำหนดสมการรีโนร์มัลไลเซชันกรุปของภาวะการเชื่อมต่อ (percolation renormalization-group equations) คนทั้งสองได้ทำการศึกษาหาจุดวิกฤต ครั้นวิกฤต (v) และพลังงานอิสระ (free energy) ของแบบจำลองพอตส์ ทั้งนี้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอตส์ และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ และได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

ปัญหาและจุดมุ่งหมายของงานวิจัย

วิธีการคำนวณของทฤษฎีและเช่นเหมาะสำหรับใช้กับการหาโครงแบบ (configuration) ของเซลล์ขนาดใหญ่ ซึ่งกราฟย่อยที่มีโครงแบบเดียวกัน เช่น มีจำนวนลักษณะเท่ากัน มีเป็นจำนวนมาก การคำนวณจำนวนกราฟย่อยที่มีโครงแบบเดียวกัน แม้จะผิดไปบ้างก็จะมีผลต่อจุดวิกฤตมากนัก สำหรับเซลล์ขนาดใหญ่ แต่จะมีผลที่ค่อนข้างสำคัญสำหรับการคำนวณที่ใช้เซลล์ขนาดเล็ก

ในการวิจัยนี้จะแบ่ง N สปินตามแบบจำลองพอตส์บนผลึกสองมิติ ออกเป็นเซลล์ขนาด 1×1 , 2×2 , 3×3 และ 4×4 สปิน รวมทั้งเซลล์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจำนวนสปินสูงสุดไม่เกิน 4×4 สปินด้วย เซลล์เหล่านี้เป็นเซลล์ขนาดเล็ก การนับจำนวนกราฟย่อยที่มีโครงแบบเดียวกัน จึงเป็นเรื่องสำคัญ ในการวิจัยนี้ จะคำนวณกับกราฟย่อยจากหลักเกณฑ์เบื้องต้นโดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขต 2 ข้อ คือ

ก. เงื่อนไขขอบเขตอิสระ (free boundary condition)

ข. เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว (one-sided periodic boundary condition)

เพื่อนำไปหาค่า

1. จุดวิกฤต
2. ครรชนวิกฤตเชิงความร้อน (critical thermal exponent)
3. ความเปลี่ยนแปลงของพลังงานอิสระกับอุณหภูมิ
4. มิติแฟร็กทัล (fractal dimension)
5. ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก

นอกจากนี้จะแสดงให้เห็นโดยชัดเจนว่า แบบจำลองพอตส์ซึ่งมี q สถานะ มีความสัมพันธ์กับแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ ซึ่งมี q สถานะโดยแสดงความเกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

แบบจำลองพอตส์	<—>	แบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์
ค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก	<—>	ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก
สภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก	<—>	ขนาดเฉลี่ยของกลุ่มกันได้
พลังงานภายใน	<—>	จำนวนพันธะเฉลี่ย
ความร้อนจำเพาะ	<—>	ความแปรปรวน (fluctuation) ของพันธะ

โดยสรุป งานวิจัยนี้จึงเป็นการศึกษาทั้งภาวะการเชื่อมต่อและสมบัติแม่เหล็กไปพร้อมกัน

ความสำคัญของการวิจัย

เนื่องจากภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ เกี่ยวข้องกับแบบจำลองพอตส์ การศึกษาในเรื่องหนึ่งจึงให้ความกระจ่างในอีกเรื่องหนึ่งได้เป็นอย่างดี จึงอาจถือได้ว่างานวิจัยนี้เป็นการศึกษาสมบัติของสารแม่เหล็กเฟอร์โรอีกวิทีหนึ่ง

การศึกษภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ โดยกระจายเป็นการผ่อนคลายที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นวิธีที่กระจ่างและชัดเจน เข้าใจง่าย เหมาะสำหรับการแนะนำให้ผู้เริ่มสนใจเข้าใจภาวะการเชื่อมต่อได้เป็นอย่างดี จึงนับว่ามีความสำคัญในเชิงสร้างมโนคติ (concept) เรื่องภาวะการเชื่อมต่อเป็นอย่างดีวิธีหนึ่ง ซึ่งกว่านั้นยังเป็นเรื่องที่ใช้ศึกษาดังกล่าวนั้นที่ำคัญของการเปลี่ยนแปลงเฟสทั่ว ๆ ไปอีกด้วย

นอกจากความสำคัญสองประการของงานวิจัยนี้ได้กล่าวแล้ว ยังสามารถนำมโนคติที่ได้จากการศึกษานี้ ไปใช้ประกอบการอธิบายปัญหาค้าง ๆ ได้มากมาย ทั้งที่เป็นปัญหาวิทยาศาสตร์และปัญหาสังคมวิทยา ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาเรื่อง การเกิดพอลิเมอร์ (polymer) การเคลื่อนที่ของโมเลกุลของแก๊สผ่านรูเล็ก ๆ ที่เป็นโครงข่ายซับซ้อนระหว่างผนังคาร์บอนในท่อนำอากาศป้องกันแก๊สพิษ การแพร่กระจายของเชื้อโรคในสวนผลไม้ การลุกลามของไฟฟ้า และการแพร่สะพัดของข่าวลือ เป็นต้น

บทที่ 2

ความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอตส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสปินกักขัง

การแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอตส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสปินกักขังนั้น อาจเริ่มจากนิจาวนาฮามิลโทเนียน (Hamiltonian) H ของแบบจำลองพอตส์ (Wu.1982:235)

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J \delta(s_i, s_j) - h \sum_i s_i \quad (2.1)$$

ในเมื่อ J แทน อันตรกิริยาแบบแม่เหล็กเฟอร์ไรระหว่างสปินที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

h แทน สนามแม่เหล็กภายนอก

s_i แทน สปินตามแบบจำลองพอตส์ ซึ่งมีค่า $-j, -(j-1), \dots, -1, 0, 1, \dots,$

$(j-1), j$ รวม $q = 2j + 1$ ค่าด้วยกัน และ j เป็นจำนวนเต็ม

$\delta(s_i, s_j)$ คือ สัญลักษณ์เดลตาแบบโครเนเคอร์ (Kronecker's delta) ซึ่งมีค่าเป็น 1

เมื่อ $s_i = s_j$ และ เป็น 0 เมื่อ $s_i \neq s_j$

$\sum_{\langle i,j \rangle}$ แทน ผลบวกทุกคู่ของ i, j ของสปินบนแลตทิซที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

ฟังก์ชันพาร์ติชัน Z_N ของระบบสปิน N สปิน บนแลตทิซ จะมีค่า

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \exp \left[K \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(s_i, s_j) + B \sum_i s_i \right] \\ &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \prod_{\langle i,j \rangle} \exp \left[K \delta(s_i, s_j) \right] \prod_i e^{B s_i} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ในเมื่อ

$K = \beta J = J/k_B T$ โดย k_B แทนค่าคงตัวของโบลต์ซมันน์ (Boltzmann's constant)

T แทนอุณหภูมิ

$$B = \rho h$$

Σ แทนผลบวกทุกค่าของ s_i

$\prod_{\langle i,j \rangle}^{\infty}$ แทนผลคูณทุกคู่ i, j ที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

โดยการกระจายฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล สมการ (2.2) จะเปลี่ยนเป็น

$$Z_N = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \prod_{\langle i,j \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[K \delta(s_i, s_j)]^n}{n!} \prod_i e^{B s_i}$$

เนื่องจาก $(\delta(s_i, s_j))^n = \delta(s_i, s_j)$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \prod_{\langle i,j \rangle} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{n!} \delta(s_i, s_j) \right] \prod_i e^{B s_i} \\ &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \prod_{\langle i,j \rangle} [1 + (e^K - 1) \delta(s_i, s_j)] \prod_i e^{B s_i} \\ &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \prod_{\langle i,j \rangle} [1 + v \delta(s_i, s_j)] \prod_i e^{B s_i} \quad (2.3) \end{aligned}$$

โดย

$$v = (e^K - 1)$$

เมื่อกระจายฟังก์ชันพาร์ติชันของ N สปิน บนแลตทิซ ซึ่งเรียกว่ากราฟ G ให้อยู่ในเทอมของกราฟย่อย $G' \subseteq G$ โดยกำหนดว่า สปินมีอันตรกิริยาเฉพาะสปินที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น สมการ (2.3) จะมีรูปใหม่เป็น

$$Z_N = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \left[1 + \sum_{\alpha' \in \alpha} v \delta(s_i, s_j) + \sum_{\alpha' \in \alpha} v^2 \delta(s_i, s_j) \delta(s_k, s_l) + \dots \right] \prod_i e^{B s_i} \quad (2.4)$$

ในเมื่อ

$\sum_{G' \in G} v$ แทนกราฟย่อย G' ทั้งหมดที่มี 1 พันธะ

$\sum_{G' \in G} v^2$ แทนกราฟย่อย G' ทั้งหมดที่มี 2 พันธะ

เมื่อกระจายเทอม $\prod_i e^{bs_i}$ ในสมการ (2.4) และหาผลบวกทุกค่าของสปิน s_i ซึ่งมีค่า $-j, -(j-1), \dots, (j-1), j$ รวมทั้งสิ้น q ค่า และระลึกว่าสปินที่มีค่าเท่ากันอยู่ในกลุ่ม (cluster) c เดียวกัน สมการ (2.4) จะมีรูปเป็น

$$Z_N = \sum_{G' \in G} v^{b(G')} \prod_c \left[e^{bn_c(G')j} + e^{bn_c(G')(j-1)} + \dots + e^{-bn_c(G')j} \right] \quad (2.5)$$

ในเมื่อ $n_c(G')$ แทนจำนวนตำแหน่งแลตทิซในกลุ่ม c ของกราฟย่อย G'

$b(G')$ แทนจำนวนพันธะในกราฟย่อย G'

$\prod_c$ แทนผลคูณทุกกลุ่มในกราฟย่อย G'

รายละเอียดการคำนวณแสดงไว้ในภาคผนวก ก

ถ้า E แทนจำนวนพันธะที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่งในกราฟ G ซึ่งเริ่มแลตทิซจัตุรัส ประกอบด้วยแนวนอน M แถว และแนวตั้ง M แถว โดยมีสปินบนแลตทิซ N สปิน ดังนั้น $M^2 = N$ หรือ $M = \sqrt{N}$ ซึ่งแต่ละแถวจะมีจำนวนพันธะ $M-1$ พันธะ เพราะฉะนั้น จำนวนพันธะ ในแนวนอนทั้งหมดมี $M(M-1)$ พันธะ ในทำนองเดียวกันในแนวตั้งจะมีจำนวนพันธะทั้งหมด $M(M-1)$ พันธะ ดังนั้น

$$E = 2M(M-1) = 2N(1 - 1/\sqrt{N})$$

ถ้า Z แทนจำนวนตำแหน่งแลตทิซที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

$$E = \frac{Z}{2} N \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

เมื่อแทน $v = (e^K - 1)$ ในสมการ (2.5) และปรับเปลี่ยนอีกเล็กน้อย จะได้

$$Z_N = e^{KE} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} \prod_c \left[e^{Bn_c(G')J} + \dots + e^{-Bn_c(G')J} \right] \quad (2.6)$$

ในเมื่อ

$$p = (1 - e^{-K}) \quad \text{แทนความน่าจะเป็นของพันธะ}$$

สมการ (2.6) เป็นสมการหลักในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองสปินพอตส์ ซึ่งมี q ค่า กับแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์

2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก (magnetization) M กับความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก (percolation probability) P

ค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กต่อสปินของระบบแม่เหล็กเฟอร์โร มีนิยามเป็น

$$M = \lim_{B \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial B}$$

ในเมื่อ

$$f = -F/Nk_B T \quad \text{แทนพลังงานอิสระ (free energy) ต่อสปินในหน่วยของ } k_B T$$

$$F = -k_B T \ln Z_N \quad \text{แทนพลังงานอิสระของระบบ } N \text{ สปิน}$$

ดังนั้น

$$M = \lim_{B \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial B} \frac{1}{N} \ln Z_N \quad (2.7)$$

พิจารณากราฟย่อย G' กราฟหนึ่งซึ่งประกอบด้วย กลุ่มที่มี 1 สปิน n_1 กลุ่ม กลุ่มที่มี 2 สปิน n_2 กลุ่ม และกลุ่มที่มี $N^*(G')$ สปิน 1 กลุ่ม ซึ่งกลุ่มหลังนี้เป็นกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟากเป็นตัวอย่าง เทอม $\prod_c [e^{Bn_c(G')J} + \dots + e^{-Bn_c(G')J}]$ ในสมการ (2.6) สำหรับกราฟย่อย G' จะเป็น

$$\prod_c \left[e^{B n_c(G'')_j} + \dots + e^{-B n_c(G'')_j} \right] = \left[e^{B_j} + \dots + e^{-B_j} \right]^n$$

$$\left[e^{2B_j} + \dots + e^{-2B_j} \right]^n \dots$$

$$\left[e^{B n(G'')_j} + \dots + e^{-B n(G'')_j} \right] \quad (2.8)$$

ในขีดจำกัดที่ N เข้าสู่ค่าอนันต์ ทำให้ $N^*(G')$ มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ด้วย ดังนั้นเทอม $e^{B N^*(G')_j}$ จึงเป็นเทอมที่สำคัญที่สุด เมื่อเทียบกับเทอมอื่น ๆ เมื่อพิจารณาในขีดจำกัดที่ B เข้าสู่ศูนย์ จะได้

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial B} \left[(e^{B_j} + \dots + e^{-B_j})^{n_1} (e^{2B_j} + \dots + e^{-2B_j})^{n_2} \dots \right.$$

$$\left. (e^{B N^*(G')_j} + \dots + e^{-B N^*(G')_j}) \right] = (q^{n_1} q^{n_2} \dots) N^*(G')_j$$

$$= N^*(G')_j q^{n_f(G')} \quad (2.9)$$

โดย

$n_f(G')$ แทน จำนวนกลุ่มเชื่อมต่อไม่ข้ามฝากทั้งหมดในกราฟ G' (ในกรณีที่ $n_f(G')$ ไม่เข้าสู่ค่าอนันต์)

$N^*(G')$ แทน จำนวนสปินทั้งหมดในกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฝาก

เมื่อแทนสมการ (2.6) ในสมการ (2.7) และพิจารณาในทำนองเดียวกับสมการ

(2.9) จะได้

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{N} \ln Z_N \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{e^{KE} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} \frac{\partial}{\partial B} \prod_c \left[e^{B n_c(G'')_j} + \dots + e^{-B n_c(G'')_j} \right]}{N e^{EK} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} \prod_c \left[e^{B n_c(G'')_j} + \dots + e^{-B n_c(G'')_j} \right]}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} j [N^*(G')/N]}{\sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')}} \quad (2.10)$$

หรือสรุปได้ว่า

$$M = jP \quad (2.10)$$

ในเมื่อ

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} [N^*(G')/N]}{\sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')}} \quad (2.11)$$

ซึ่งได้แก่ ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก

สมการ (2.10) แสดงว่าค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กของแบบจำลองพอตส์ มีความสัมพันธ์โดยตรงกับความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ (Hu.1986:3067)

2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก (magnetic susceptibility)

กับขนาดเฉลี่ยของกลุ่มนับได้ (mean cluster - size)

สภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็กนั้น หาได้จากค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก ตามสมการ

$$\begin{aligned} \chi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{B \rightarrow 0} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial B} \left[\frac{\partial}{\partial B} \ln Z_N \right] \quad (2.11) \end{aligned}$$

แทนสมการ (2.6) ในสมการ (2.11) และหาอนุพันธ์เทียบกับสนามแม่เหล็กภายนอก โดยพิจารณาเทอม $\sum_c e^{B n_c(G'')} + \dots + e^{-B n_c(G'')}]$ จะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial B^2} \prod_c [e^{Bn_c(G')j} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}]$$

$$= \sum_1 [n_1(G')j e^{Bn_1(G')j} + \dots - n_1(G')j e^{-Bn_1(G')j}] \prod_{c \neq 1} [e^{Bn_c(G')j} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}]$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของจำนวนทางขวางมือกับสนามแม่เหล็ก B อีกครั้ง จะได้

$$\sum_1 [n_1^2(G')j^2 e^{Bn_1(G')j} + \dots + n_1^2(G')j^2 e^{-Bn_1(G')j}] \prod_{c \neq 1} [e^{Bn_c(G')j} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}] + \sum_1 [n_1(G')j e^{Bn_1(G')j} + \dots - n_1(G')j e^{-Bn_1(G')j}]$$

$$\sum_{k \neq 1} [n_k(G')j e^{Bn_k(G')j} + \dots - n_k(G')j e^{-Bn_k(G')j}] \prod_{c \neq 1, k} [e^{Bn_c(G')j} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}] \quad (2.12)$$

ในขีดจำกัดที่ N มีค่าเข้าสู่อนันต์ และ B มีค่าเข้าสู่ศูนย์ จะทำให้สมการ (2.12) เป็น

$$\sum_c n_c^2 (j^2 + (j-1)^2 + \dots + (j-1)^2 + j^2) q^{n_f(G')-1} + N^{*2}(G')j^2 q^{n_f(G')} \quad (2.13)$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์ (Charles, Samuel and Robert. 1959)

$$\sum_{k=1}^j k^2 = j(j+1)(2j+1) / 6$$

และความสัมพันธ์ $q = 2j + 1$ จะเปลี่ยนสมการ (2.13) ได้เป็น

$$\frac{\partial^2}{\partial B^2} \prod_c [e^{Bn_c(G')j} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}] = \frac{1}{12} (q^2 - 1) \sum_c n_c^2(G') q^{n_f(G')}$$

$$+ N^{*2}(G') j^2 q^{n_f(G')} \quad (2.14)$$

โดย $\sum_c$ แทน ผลบวกของกลุ่มที่เชื่อมต่อไปข้ามฟากทุกกลุ่ม
พิจารณาเทอม

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial B} Z_N &= \frac{\partial}{\partial B} \left[e^{KE} \sum_{G'' \in G} p^{b(G'')} (1-p)^{E-b(G'')} \prod_c (e^{Bn_c(G'')} j + \dots + e^{-Bn_c(G'')} j) \right] \\ &= e^{KE} \sum_{G'' \in G} p^{b(G'')} (1-p)^{E-b(G'')} \left\{ [N^*(G'') j e^{BN^*(G'')} j + \dots \right. \\ &\quad \left. - N^*(G'') j e^{-BN^*(G'')} j] \prod_c [e^{Bn_c(G'')} j + \dots + e^{-Bn_c(G'')} j] \right\} \end{aligned}$$

ในเมื่อ $\prod_c$ หมายถึงผลคูณทุกกลุ่มที่ไม่ข้ามฟาก

ในขีดจำกัดที่ B มีค่าเข้าสู่ศูนย์ และ N มีค่าเข้าสู่อนันต์ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial B} Z_N = e^{KE} \sum_{G'' \in G} p^{b(G'')} (1-p)^{E-b(G'')} N^*(G'') j q^{n_f(G'')} \quad (2.15)$$

แทนสมการ (2.14) และ (2.15) ในสมการ (2.11) ในขีดจำกัดที่ B มีค่าเข้าสู่ศูนย์ จะได้

$$\begin{aligned} X &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{e^{KE}}{NZ_N} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} \left[\frac{1}{12}(q^2-1) \sum_c n_c^2(G') q^{n_f(G')} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + N^{*2}(G') j^2 q^{n_f(G')} \right] - \frac{e^{KE}}{NZ_N^2} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} N^*(G') j q^{n_f(G')} \right. \\ &\quad \left. \left[e^{KE} \sum_{G'' \in G} p^{b(G'')} (1-p)^{E-b(G'')} N^*(G'') j q^{n_f(G'')} \right] \right\} \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวก จะสมมติให้

$$W = \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) \quad (2.16)$$

$$\pi(G', p, q) = p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \quad (2.17)$$

ดังนี้

$$\begin{aligned} X &= AS + \lim_{N \rightarrow \infty} j^2 \frac{W^{-1}}{N} \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) N^{*2}(G') \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} j^2 \frac{W^{-2}}{N} \sum_{G'' \in G} \pi(G'', p, q) \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) N^*(G') N^*(G'') \quad (2.18) \end{aligned}$$

โดย

$$A = (q^2 - 1)/12$$

และ

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) \sum_c n_c^2(G')/N$$

แทน ขนาดเฉลี่ยของกลุ่มกันได้

สมการ (2.18) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$X = AS + \lim_{N \rightarrow \infty} j^2 \frac{W^{-2}}{N} \sum_{G', G'' \in G} \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q) [N^*(G') - N^*(G'')]^2 / 2N \quad (2.19)$$

ในขีดจำกัดที่ N มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ สมการ (2.19) เขียนได้เป็น

$$X = AS \quad (2.20)$$

สมการ (2.20) แสดงให้เห็นว่า สามารถวัดได้เชิงแม่เหล็กของแบบจำลองพอดส์

มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยของกลุ่มนับได้ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงพันธะแบบ มีสหพันธ์ (Hu.1984:5103)

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายในของระบบ (internal energy) U กับจำนวนสถานะเฉลี่ย

จากสมการ (2.4) เมื่อกระจายเทอม $\prod_{i=1}^N e^{B s_i}$ จะได้

$$Z_N = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \left\{ [e^{B s_1} \cdot e^{B s_2} \dots e^{B s_N}] + [e^{B s_1} \cdot e^{B s_2} \dots e^{B s_N}] \sum_{G' \in G} v \delta(s_1, s_{j'}) + \dots \right\} \quad (2.21)$$

เมื่อบวกทุกสถานะของสปินซึ่งมี q สถานะ ในขีดจำกัดที่ B มีค่าเข้าสู่ศูนย์ จะเห็นได้ว่าในเทอมที่ 1 สปินมีสถานะไม่ตรงกัน ดังนั้นจึงมีกลุ่มสปินทั้งหมด N กลุ่ม ในเทอมที่ 2 s_1 และ $s_{j'}$ อยู่ในสถานะเดียวกัน จะเห็นว่าในบรรดา $s_1, s_2, \dots, s_N$ มีกลุ่มที่อยู่ในสถานะเดียวกัน 1 กลุ่ม และกลุ่มที่ไม่ได้อยู่ในสถานะเดียวกัน $N-2$ กลุ่ม ดังนั้นกลุ่มสปินทั้งหมดจึงมี $N-1$ กลุ่ม ถ้าจำนวนกราฟย่อย G' ออกตามจำนวนกลุ่ม $n(G')$, จำนวนพันธะ $b(G')$, จำนวนวงปิด (Loop) $n_L(G')$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์

$$n(G') = N - b(G') + n_L(G') \quad (2.22)$$

ดังนั้น ในขีดจำกัดที่ B เข้าสู่ศูนย์ จะเขียนสมการ (2.21) ได้ใหม่ในรูป

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{G' \in G} v^{b(G')} q^{n(G')} \\ &= e^{KE} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n(G')} \end{aligned} \quad (2.23)$$

สมการ (2.23) เป็นสมการนำไปหาพลังงานภายในและความจุความร้อนของระบบ
จากพลังงานภายในต่อสปินของแบบจำลองพอตส์ในหน่วยของ $k_B T$

$$U = \lim_{B \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} - \frac{\partial}{\partial \beta} [\ln Z_N] / N \quad (2.24)$$

เมื่อแทนสมการ (2.23) ในสมการ (2.24) ในขีดจำกัดที่ B มีค่าเข้าสู่นศูนย์ จะได้

$$U = \frac{-1}{NZ_N} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[e^{KE} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n(G')} \right]$$

โดยระลึกว่า $p = 1 - e^{-K}$, $K = \beta J$ และให้ $n(G') = n_f(G')$ แทนจำนวนกลุ่มเชื่อมต่อ
ไม่ข้ามฟากทั้งหมดในกราฟย่อย G' ซึ่งมีค่าเข้าสู่นศูนย์ จะได้

$$U = \frac{-1}{NZ_N} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[e^{KE} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \right] \left[JE + \frac{b(G')J(1-p)}{p} - JB + Jb(G') \right] \quad (2.25)$$

เมื่อแทนสมการ (2.16) และ (2.17) ในสมการ (2.25) ทำให้สมการเปลี่ยนรูปเป็น

$$\begin{aligned} U &= \frac{-1}{N} \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) \frac{Jb(G')}{p} \\ &= \frac{-JZ}{2p} \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{G' \in G} \pi(G', p, q) \left(\frac{b(G')}{E} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

โดย $E = \frac{ZN}{2}$ เป็นจำนวนพันธะทั้งหมด

สมการ (2.26) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานภายในของแบบจำลองพอตส์กับ
จำนวนพันธะเฉลี่ยของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อ (Hu, 1986:3067)

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อน (heat capacity) C_h กับความแปรปรวน (fluctuation) ของพลังงาน

ความจุความร้อนของระบบหาได้จาก การหาอนุพันธ์ของพลังงานภายในของระบบกับอุณหภูมิโดย

$$C_h = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{-J}{k_B T^2} \frac{\partial U}{\partial K}$$

ในเมื่อ C_h เป็นความจุความร้อนที่สนามแม่เหล็กคงที่

พิจารณาเทอม $\frac{\partial U}{\partial K}$ โดยใช้พลังงานภายในจากสมการ (2.26) และระลึกว่า W และ

$\pi(G', p, q)$ มีรูปตามสมการ (2.16) และสมการ (2.17) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial K} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{JZ(1-p)}{2p^2} W^{-1} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \frac{b(G')}{E} \right] \right. \\ + \left[\frac{JZ}{2p} W^{-2} \frac{\partial W}{\partial K} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \frac{b(G')}{E} \right] \\ - \left[\frac{JZ}{2p^2} W^{-1} \sum_{G' \in G} b(G') p^{b(G')} (1-p)(1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \frac{b(G')}{E} \right] \\ \left. + \left[\frac{JZ}{2p} W^{-1} \sum_{G' \in G} p^{b(G')} (E-b(G')) (1-p)^{E-b(G')} q^{n_f(G')} \frac{b(G')}{E} \right] \right\} \quad (2.27) \end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ $\frac{\partial W}{\partial K}$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial K} = \sum_{G'' \in G} \left\{ \left[\frac{b(G'')}{p} p^{b(G'')} (1-p)^{E-b(G'')} q^{n_f(G'')} \right] \right. \\ \left. - \left[p^{b(G'')} (E-b(G'')) (1-p)^{E-b(G'')} q^{n_f(G'')} \right] \right\} \end{aligned}$$

และเมื่อนำแทนในสมการ (2.27) จะได้

$$C_h = \frac{k_B K^2}{2p^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [zW^{-1} \sum_{\alpha' \in \alpha} (1-p) \bar{p}] + [zW^{-2} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} \frac{b(G'') b(G')}{E} \right. \\ \left. \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q)] - [zW^{-1} \sum_{\alpha' \in \alpha} \frac{b^2(G')}{E} \pi(G', p, q)] \right\}$$

หรือ

$$C_h = \frac{k_B K^2}{p^2} \left\{ \left[-\frac{z}{2} (1-p) \bar{p} \right] + R \right\} \quad (2.28)$$

ในเมื่อ

$$\bar{p} = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{\alpha' \in \alpha} \pi(G', p, q) \left(b(G')/E \right)$$

และ

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ [-W^{-2} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} \frac{b(G'') b(G')}{N} \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q)] \right. \\ \left. + [W^{-1} \sum_{\alpha' \in \alpha} \frac{b^2(G')}{N} \pi(G', p, q)] \right\} \quad (2.29)$$

เทอม R ในสมการ (2.29) สามารถปรับได้รูปใหม่เป็น

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{W^{-1}}{N} \sum_{\alpha' \in \alpha} b^2(G') \pi(G', p, q) - \frac{2W^{-2}}{N} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} b(G') b(G'') \right. \\ \left. \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q) + \frac{W^{-2}}{N} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} b(G') b(G'') \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q) \right] \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{W^{-1}}{N} \sum_{\alpha' \in \alpha} b^2(G') \pi(G', p, q) - \frac{2W^{-2}}{N} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} b(G') [b(G')]_{av} \right. \\ \left. \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q) + \frac{W^{-2}}{N} \sum_{\alpha'', \alpha' \in \alpha} b(G') b(G'') \pi(G', p, q) \pi(G'', p, q) \right]$$

$$\pi(G', p, q) + \frac{W^{-1}}{N} [b(G')]_{av}^2 \pi(G', p, q) \Big]$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} [b(G') - [b(G')]_{av}]^2 \pi(G', p, q) / N$$

เมื่อนำผลนี้ไปแทนในสมการ (2.28) จะให้ผล

$$C_h = \frac{k_B K^2}{p^2} \left\{ \left[\frac{Z}{2} (1-p) \bar{p} \right] + \langle (sb(G'))^2 \rangle \right\} \quad (2.30)$$

โดย

$$\langle (sb(G'))^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} [b(G') - [b(G')]_{av}]^2 \pi(G', p, q) / N$$

แทนความแปรปรวนของทักษะ

สมการ (2.30) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อนกับความแปรปรวนของทักษะ (Hu.1986:3067)

การเปลี่ยนแปลงเฟสของภาวะการเชื่อมต่อและแบบจำลองพอตส์

ในการศึกษาการเปลี่ยนแปลงเฟสของภาวะการเชื่อมต่อและแบบจำลองพอตส์ จะพิจารณาพารามิเตอร์ขึ้นฟังก์ชันของแบบจำลองพอตส์ ในขีดจำกัดที่ N มีค่าเข้าสู่อนันต์ และ B มีค่าเข้าสู่ศูนย์ ซึ่งได้แก่สมการ (2.23) จะเขียนสมการนี้ใหม่เป็น

$$Z_N = e^{KE} \sum_{G' \subseteq G} x^{b(G')} y^{E-b(G')} q^{n(G')} \quad (3.1)$$

ในเมื่อ

$$x = p = 1 - e^{-K} \quad , \quad y = 1 - p = e^{-K}$$

หรือเมื่อพิจารณาจำนวนวงปิด (closed loop) $n_L(G')$ จะสามารถเขียนสมการใหม่ โดยการแทนจากสมการ (2.22) ซึ่งให้ผล

$$Z_N = q^{N-E} (e^K + q - 1)^E \sum_{G' \subseteq G} (\bar{x})^{b(G')} (\bar{y})^{E-b(G')} q^{n_L(G')} \quad (3.2)$$

ในเมื่อ

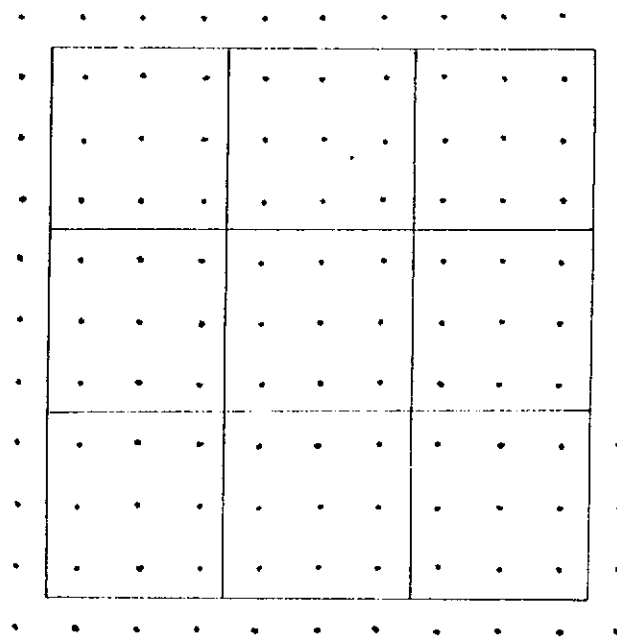
$$\bar{x} = \frac{(e^K - 1)}{(e^K + q - 1)} \quad , \quad \bar{y} = 1 - \bar{x} = \frac{q}{(e^K + q - 1)}$$

หากแบ่งกราฟ G ออกเป็นเซลล์จัตุรัสซึ่งมี $\lambda \times \lambda$ สปิน (โดยอาศัยขนาดความคิดเดียวกันจะแบ่งเป็นเซลล์สี่เหลี่ยมผืนผ้าก็ได้) จะเรียกแต่ละเซลล์ว่า เซลล์ D ภาพประกอบ 6 (ก) แสดงการแบ่งกราฟ G ออกเป็นเซลล์ D เพื่อให้การเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงกันชนะจากด้าน

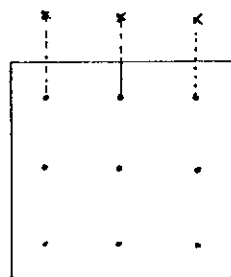
ล่างของกราฟ G ซึ่งสัณฐานของกราฟ G ได้ จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่ใช้ขึ้น 2 แบบ คือ

1. เงื่อนไขขอบเขตอิสระ (free boundary condition) ซึ่งกำหนดให้ตำแหน่งแลตทิซในแถวบนสุดของเซลล์ D มีพันธะเชื่อมต่อกับตำแหน่งแลตทิซในแถวล่างสุดของเซลล์ที่อยู่เหนือถัดขึ้นไปเป็นจำนวนทั้งสิ้น λ พันธะด้วยกัน ดังภาพประกอบ 5 (ข)

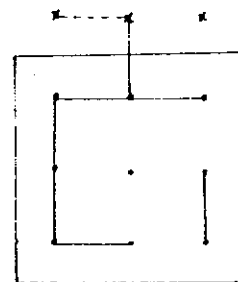
2. เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว (one - sided periodic boundary condition) ซึ่งกำหนดให้พันธะเชื่อมต่อกับเซลล์ D กับเซลล์ที่อยู่เหนือถัดไปได้เช่นเดียวกับเงื่อนไขขอบเขตอิสระ และให้พันธะในแถวบนล่างสุดของกราฟย่อย D' ของกราฟ D ไปปรากฏซ้ำในแถวบนล่างสุดของเซลล์ที่อยู่เหนือถัดไป ดังที่แสดงด้วยเส้นประในภาพประกอบ 5 (ค)



(ก)



(ข)



(ค)

ภาพประกอบ 5 (ก) แสดงการแบ่งกราฟ G ออกเป็นเซลล์ D (ข) เซลล์ D แสดงลักษณะที่เชื่อมกับเซลล์ที่อยู่เหนือถัดไป (ค) กราฟย่อย D' แสดงเงื่อนไขขอบเขตมีค่านับด้านเดียว . แทนสีภายในเซลล์ และ $\times$ แทนสีนที่อยู่นอกเซลล์

โดยการกำหนดขนาดของเซลล์ D ต่าง ๆ กัน จะสามารถคำนวณจากหลักเกณฑ์เบื้องต้นและสร้างตารางแสดงจำนวนกราฟย่อย D' ที่มีจำนวนพันธะ $b(D')$ จำนวนกลุ่ม $n(D')$ และจำนวนวงปิด $n_L(D')$ ต่าง ๆ กันได้และในตารางนี้ยังจำแนกด้วยว่ามีกราฟเชื่อมต่อข้ามฟากและกราฟเชื่อมต่อไม่ข้ามฟากเป็นจำนวนเท่าใดแต่ละอย่าง จากตารางที่สร้างขึ้นมาสำหรับเงื่อนไขขอบเขตแต่ละแบบจะสามารถแยกพาร์ติชัน $Z(D)$ สำหรับเซลล์ D ออกได้เป็นสองส่วน คือ ส่วนของกราฟเชื่อมต่อข้ามฟาก (percolating configuration) D_p และกราฟเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก (non-percolating configuration) D_f กล่าวคือ

$$Z(D) = A \left\{ Z[D(p), x_o, y_o, q_1, q_2] + Z[D(f), x_o, y_o, q_1, q_2] \right\} \quad (3.3)$$

เราใช้ p และ f เป็นอักษรที่บอกการเชื่อมต่อข้ามฟากและเชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก ตามลำดับ ในที่นี้

$$Z[D(p), x_o, y_o, q_1, q_2] = e^{KE} \sum_{D_f' \in D} x_o^{b(D')} y_o^{E-b(D')} q_1^{n(D')} q_2^{n_L(D')} \quad (3.4)$$

$$Z[D(f), x_o, y_o, q_1, q_2] = e^{KE} \sum_{D_f' \in D} x_o^{b(D')} y_o^{E-b(D')} q_1^{n(D')} q_2^{n_L(D')} \quad (3.5)$$

ความหมายของ q_1 และ q_2 กำหนดไว้หลังสมการ (3.6) ส่วน A คือ ตัวคูณร่วม

โดยการใช้แนวเทียบกับการกำหนดรีโนร์มัลไลเซชันกรุปของสนามเฉลี่ย (mean-field renormalization group) ตามวิธีโดยอินเดอคิมและคณะ (Indekeu et al. 1982 :291) จะได้สมการรีโนร์มัลไลเซชันกรุป จากการเปรียบเทียบส่วนของกราฟเชื่อมต่อข้ามฟาก และส่วนของกราฟเชื่อมต่อไม่ข้ามฟากของฟังก์ชันพาร์ติชันของเซลล์ขนาดต่างกัน 2 เซลล์ คือ D_1 ขนาด $(\lambda_1 \times \lambda_1)$ และ D_2 ขนาด $(\lambda_2 \times \lambda_2)$ โดย $\lambda_1 > \lambda_2$ (Hu and Chen.1988:2765) ดังนี้

$$e^{K'} Z[D_2(p), x'_o, y'_o, q_1, q_2] = Z[D_1(p), x_o, y_o, q_1, q_2] \quad (3.6 ก)$$

$$e^{K'_0} Z[D_2(f), x'_0, y'_0, q_1, q_2] = Z[D_1(f), x_0, y_0, q_1, q_2] \quad (3.6 \text{ ข})$$

ในเมื่อ K'_0 เป็นค่าคงที่ซึ่งมีที่มาจากพลังงานพื้นหลัง (background energy) (Burkhardt and Leeuwen. 1982 :214) ของการแปลงแบบรีโนรมัลไลเซชันภาพ (renormalization - group tranformation) สมการ (3.6) ทั้งสองสมการนี้ คือ สมการรีโนรมัลไลเซชันภาพ

สมการ (3.6) เป็นการแปลงระหว่างเซลล์ D_1 และ D_2 เรียกว่า การแปลง (λ_1/λ_2) สมการนี้ใช้ได้กับฟังก์ชันพาร์ติชันทั้งในรูปสมการ (3.1) และสมการ (3.2) เมื่อใช้กับฟังก์ชันพาร์ติชันตามรูปสมการ (3.1) จะต้องให้

$$\begin{aligned} q_1 &= q, & q_2 &= 1 \\ x_0 &= 1 - e^{-K}, & y_0 &= 1 - x_0 = e^{-K} \\ x'_0 &= 1 - e^{-K'}, & y'_0 &= 1 - x'_0 = e^{-K'} \end{aligned}$$

และเมื่อใช้กับฟังก์ชันพาร์ติชันตามรูปสมการ (3.2) จะต้องให้

$$\begin{aligned} q_1 &= 1, & q_2 &= q \\ x_0 &= \bar{x}_0 = (e^K - 1)/(e^K + q - 1), & y_0 &= \bar{y}_0 = 1 - \bar{x}_0 = q/(e^K + q - 1) \\ x'_0 &= \bar{x}'_0 = (e^{K'} - 1)/(e^{K'} + q - 1), & y'_0 &= \bar{y}'_0 = 1 - \bar{x}'_0 = q/(e^{K'} + q - 1) \end{aligned}$$

K' คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาระหว่างสปินในเซลล์ D_2 เนื่องจากการแปลงแบบรีโนรมัลไลเซชันภาพมาจากเซลล์ D_1

จากสมการ (3.4) และ (3.5) และสมการ (3.6) จะช่วยให้หาจุดตรึง x_o^* ของสมการรีนอร์มัลไลเซชันการและอนุกรมวิฤตของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อได้ และยังหาครรชนวิฤตเชิงความร้อน $Y_T = (1/\nu)$ ได้จากความสัมพันธ์

$$\left. \frac{\partial x_o'}{\partial x_o} \right|_{x_o^*} = (\lambda_1 / \lambda_2)^{Y_T} \quad (3.7)$$

นอกจากอนุกรมวิฤตและครรชนวิฤตเชิงความร้อนของภาวะการเชื่อมต่อแล้ว ยังมีปริมาณอื่น ๆ ของภาวะการเชื่อมต่อที่อาจศึกษาได้ จากวิธีรีนอร์มัลไลเซชันการข้างต้นอีก ได้แก่ มิติแฟร็กทัล ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงพื้นที่และพลังงานอิสระของระบบ

ถ้า $\langle S(D'_{1p}) \rangle$ และ $\langle S(D'_{2p}) \rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนตำแหน่งแลตทิซในกลุ่มที่ใหญ่ที่สุดที่จุดตรึง x_o^* จะหามิติแฟร็กทัล ได้จาก

$$\frac{\langle S(D'_{1p}) \rangle}{\langle S(D'_{2p}) \rangle} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{d'} \quad (3.8)$$

ในเมื่อ d' คือ มิติแฟร็กทัล

ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงพื้นที่ มีนิยามเป็น

$$P_\infty = \frac{\langle S(D'_p) \rangle}{\lambda^d}$$

สำหรับขนาดเซลล์ $(\lambda)^d$ ในเมื่อ d คือ มิติของแลตทิซ

โดย (Tsallis and others. 1985 :3322)

$$P_\infty(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\infty(p^{(n)}) \frac{m^{(n)}}{\lambda^{nd} m_0}$$

ในเมื่อ

$$m_0 \langle S(p) \rangle = m'_0 \langle S(p') \rangle$$

โดย

$\mathfrak{M}_0 \langle S(p) \rangle$ แทน มวลของกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟากที่มีขนาด $\lambda_1 \times \lambda_1$

$\mathfrak{M}_0 \langle S(p') \rangle$ แทน มวลของกลุ่มเชื่อมต่อข้ามฟากที่มีขนาด $\lambda_2 \times \lambda_2$

ดังนั้น

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\langle S(p) \rangle}{\lambda^d \langle S(p') \rangle} \quad (3.9)$$

พลังงานอิสระต่อหนึ่งสปิน

$$-f(x, q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N \quad (3.10)$$

เมื่อแทนสมการ (3.1) ทำให้สมการ (3.10) เปลี่ยนรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} -f(x, q) &= \frac{1}{N} \left[KE + \ln \sum_{\mathbf{a}' \in \mathbf{G}} x^{b(\mathbf{a}')} y^{E-b(\mathbf{a}')} q^{n(\mathbf{a}')} \right] \\ &= \frac{zK}{2} + f_c(x, q) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ในเมื่อ

$$z = \frac{2E}{N} \quad \text{แทนจำนวนตำแหน่งแลตทิซที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง}$$

$$f_c(x, q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \sum_{\mathbf{a}' \in \mathbf{G}} x^{b(\mathbf{a}')} y^{E-b(\mathbf{a}')} q^{n(\mathbf{a}')}$$

จากสมการรีเอนอร์มัลไลเซชันกรุป (3.6 ก) และสมการ (3.6 ข) ทำให้ปรับเทอม

$f_c(x, q)$ ใหม่ได้เป็น

$$f_c(x, q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^z} \ln \left\{ e^{K_0} \{ Z[D_2(p), x_0, y_0, q_1, q_2] + Z[D_2(f), x_0, y_0, q_1, q_2] \} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K'_0}{\lambda_1^2} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{1}{\lambda_2^2} \ln \left\{ e^{K''} \{ Z[D_2(p), x''_0, y''_0, q_1, q_2] \right. \\
&\quad \left. + Z[D_2(f), x'_0, y'_0, q_1, q_2] \} \right\} \\
&= \frac{K'_0}{\lambda_1^2} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 f_c(x', q) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

เมื่อแทนสมการ (3.12) ในสมการ (3.11) และปรับเปลี่ยนรูปในทำนองเดียวกับข้างต้น จะได้

$$-f(x, q) = \frac{2K}{2} + \frac{K'_0}{\lambda_1^2} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 f_c(x', q) \quad (3.13)$$

สมการ (3.13) เป็นสมการซึ่งนำไปหาค่าพลังงานอิสระ ค่าดังกล่าวจะแสดงด้วยกราฟที่เหมาะสม

บทที่ 4

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มุ่งหมายเพื่อศึกษาเรื่องที่สำคัญสองประการคือ

ประการแรก ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอดส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ ทั้งนี้เพราะได้มีการกล่าวอ้างว่าเรื่องทั้งสองมีความเกี่ยวข้องกัน และอาจใช้เรื่องหนึ่งศึกษาและอธิบายอีกเรื่องหนึ่งได้ ในเร็ว ๆ นี้ได้มีการแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอดส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์บ้างแต่ยังไม่สมบูรณ์ ในการวิจัยครั้งนี้จึงได้พิสูจน์แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองพอดส์และแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะแบบมีสหสัมพันธ์ให้เห็นโดยชัดเจน

การวิจัยในส่วนนี้เริ่มจากการกระจายฟังก์ชันมาร์ติงกัลของแบบจำลองเฟอร์โรแมกเนติกของสปีนแบบพอดส์ให้อยู่ในเทอมของกราฟย่อย และอาศัยนิยามของค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กสภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก พลังงานภายในและความจุความร้อนของระบบ หาคความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเหล่านี้ กับปริมาณที่แสดงภาวะการเชื่อมต่อของแลตทิซ รายละเอียดของการคำนวณหาความสัมพันธ์ แสดงไว้ชัดเจนแล้วในบทที่ 2

ประการที่สอง ศึกษาค่าอันตรกิริยาวิกฤต ค่าครรชนวิกฤตเชิงความร้อน มิติแฟร็กทัลความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก และการเปลี่ยนแปลงของพลังงานอิสระกับอุณหภูมิ โดยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

แบ่งสปีน N สปีน ตามแบบจำลองพอดส์แลตทิซสองมิติออกเป็นเซลล์ขนาดต่าง ๆ ทั้งที่เป็นเซลล์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและเซลล์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยให้มีจำนวนสปีนสูงสุดไม่เกิน 16 สปีน

เพื่อให้มีการเชื่อมต่อระหว่างเซลล์บนและเซลล์ล่าง จึงได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตขึ้นไว้สองแบบ คือ เงื่อนไขขอบเขตอิสระ และเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว ดังที่ได้อธิบายไว้แล้วในบทที่ 3

โดยอาศัยวิธีการจัดหมู่ (combination) หาจำนวนกราฟย่อยของเซลล์ซึ่งมีพันธะจำนวนต่าง ๆ กัน โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตแต่ละแบบ จะได้ผลดังที่แสดงในตาราง 1 ถึง

ตาราง 10 ในตารางเหล่านี้ได้จำแนกกราฟย่อยให้ละเอียดยิ่งขึ้นตามจำนวนกลุ่ม จำนวนวงปิด รวมทั้งจำนวนกราฟที่เชื่อมต่อข้ามฟากและจำนวนกราฟที่เชื่อมต่อไม่ข้ามฟาก

กรณีที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ

ตาราง 1 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 1×1 สปิน

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
1	1	0	1	2	-	-	1
		1	1	1	-	1	-

ตาราง 2 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2×2 สปิน

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
4	6	0	1	6	-	-	1
		1	6	5	-	-	1
		2	15	4	-	2	13
		3	20	3	-	10	10
		4	15	2	-	13	1
				3	1	-	1
		5	6	1	-	4	-
				2	1	2	-
		6	1	1	1	1	-

ตาราง 3 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2×3 สกิน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
6	10	0	1	9	-	-	1
		1	10	8	-	-	10
		2	45	7	-	3	42
		3	120	6	-	28	92
		4	210	5	-	103	105
				6	1	-	2
		5	252	4	-	184	56
				5	1	4	8
		6	210	3	-	173	6
				4	1	22	9
		7	120	2	-	77	1
				3	1	41	-
				4	2	-	1
		8	45	1	-	15	-
				2	1	27	-
				3	2	3	-
		9	10	1	1	7	-
				2	2	3	-
		10	1	1	2	1	-

ตาราง 4 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2×4 สปิน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
8	14	0	1	12	-	-	1
		1	14	11	-	-	14
		2	91	10	-	4	87
		3	364	9	-	54	310
		4	1001	8	-	320	678
				9	1	-	3
		5	2002	7	-	1003	969
				8	1	6	24
		6	3003	6	-	2161	713
				7	1	55	74
		7	3432	5	-	2885	215
				6	1	192	138
				7	2	-	2
		8	3003	4	-	2270	45
				5	1	497	176
				6	2	6	9
		9	2002	3	-	1178	10
				4	1	680	64
				5	2	34	16
		10	1001	2	-	321	-

ตาราง 4 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				3	1	590	-
				4	2	90	-
				5	3	-	1
		11	364	1	-	11	-
				2	1	241	-
				3	2	108	-
				4	3	4	-
		12	91	1	1	19	-
				2	2	66	-
				3	3	6	-
		13	14	1	2	10	-
				2	3	4	-
		14	1	1	3	1	-

ตาราง 5 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 3 สปีน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
9	15	0	1	12	-	-	1
		1	15	11	-	-	15
		2	105	10	-	-	105
		3	455	9	-	3	452
		4	1365	8	-	44	1317
				9	1	-	4
		5	3003	7	-	288	2671
				8	1	-	44
		6	5005	6	-	1091	3734
				7	1	8	172
		7	6435	5	-	2631	3116
				6	1	96	588
				7	2	-	4
		8	6435	4	-	3697	1379
				5	1	461	864
				6	2	4	30
		9	5005	3	-	2366	313
				4	1	1496	589
				5	2	44	197
		10	3001	2	-	953	-

ตาราง 5 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				3	1	1292	444
				4	2	192	118
				5	3	-	4
		11	1365	1	-	497	-
				2	1	565	-
				3	2	272	7
				4	3	10	14
		12	445	1	1	198	-
				2	2	206	2
				3	3	48	-
				4	4	-	1
		13	105	1	2	62	-
				2	3	40	-
				3	4	3	-
		14	15	1	3	12	-
				2	4	3	-
		15	1	1	4	1	-

ตาราง 6 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 4 สีน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
12	21	0	1	16	-	-	1
		1	21	15	-	-	21
		2	210	14	-	-	210
		3	1330	13	-	4	1326
		4	5985	12	-	84	5896
				13	1	-	6
		5	20349	11	-	770	19477
				12	1	-	102
		6	54264	10	-	4142	49299
				11	1	18	805
		7	116280	9	-	18172	94022
				10	1	286	3795
				11	2	-	5
		8	203490	8	-	58600	130054
				9	1	2280	12454
				10	2	6	96
		9	293930	7	-	130308	124524
				8	1	8841	29548
				9	2	111	598
		10	352716	6	-	149764	121579

ตาราง 6 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				7	1	21518	56923
				8	2	816	2110
				9	3	-	6
		11	352716	5	-	191292	30382
				6	1	39614	83053
				7	2	3470	4829
				8	3	10	66
		12	293930	4	-	124456	270
				5	1	95127	55689
				6	2	7738	10040
				7	3	222	388
		13	203490	3	-	30235	170
				4	1	96559	55905
				5	2	12786	6571
				6	3	722	518
		14	116280	2	-	575	9
				3	1	84837	5253
				4	2	13987	8834
				5	3	2017	623
				6	4	66	79

ตาราง 6 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
		15	54264	1	-	43	-
				2	1	20332	9797
				3	2	15006	2268
				4	3	3815	2599
				5	4	175	225
				6	5	-	4
		16	20349	1	1	3399	-
				2	2	9701	57
				3	3	4194	2169
				4	4	705	94
				5	5	14	16
		17	5985	1	2	2031	-
				2	3	3123	-
				3	4	648	-
				4	5	92	-
				5	6	-	1
		18	1330	1	3	795	-
				2	4	413	-
				3	5	118	-
				4	6	4	-

ตาราง 6 (ต่อ)

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
		19	210	1	4	139	-
				2	5	65	-
				3	6	6	-
		20	21	1	5	18	-
				2	6	3	-
		21	1	1	6	1	-

กรณีที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว

ตาราง 7 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 2 สปิน

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
4	6	0	1	6	-	-	1
		1	6	5	-	-	5
				4	-	-	1
		2	15	4	-	2	8
				3	-	-	5
		3	20	3	-	8	4

ตาราง 7 (ต่อ)

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				2	-	2	6
		4	15	2	-	5	1
				1	-	8	-
				2	1	-	1
		5	6	1	-	1	-
				1	1	5	-
		6	6	1	2	1	-

ตาราง 8 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 3 สกิน

N	E	$b(D')$	#GRAPHS	$n(D')$	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
6	10	0	1	9	-	-	1
		1	10	8	-	-	8
				7	-	-	2
		2	45	7	-	3	25
				6	-	-	16
				5	-	-	1
		3	120	6	-	22	34

ตาราง 8 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อกับ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อกับ ไม่ข้ามฟาก
				5	-	6	50
				4	-	-	8
		4	210	5	-	58	12
				5	1	-	2
				4	-	42	68
				3	-	3	25
		5	252	4	-	64	4
				4	1	4	6
				3	-	98	20
				3	1	-	2
				2	-	22	32
		6	210	4	2	2	-
				3	-	32	-
				3	1	32	2
				2	-	125	6
				2	1	4	7
		7	120	3	2	6	-
				3	1	4	-
				2	-	8	-
				2	1	34	-
				2	2	2	2

ตาราง 8 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				1	-	24	-
				1	1	40	-
		8	45	2	2	6	-
				1	-	1	-
				1	1	9	-
				1	2	27	-
				1	3	2	-
		9	10	1	2	2	-
				1	3	8	-
		10	1	1	4	1	-

ตาราง 9 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 2 x 4 สบิน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
8	14	0	1	12	-	-	1
		1	14	11	-	-	11
				10	-	-	3
		2	91	10	-	4	51
				9	-	-	33

ตาราง 9 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
		7	3432	4	-	821	210
				5	-	329	1
				5	1	122	46
				5	2	-	2
				4	-	2378	62
				4	1	94	74
				3	-	178	152
				3	1	6	18
		8	3003	4	-	165	-
				4	1	113	6
				4	2	30	8
				3	-	153	26
				3	1	735	58
				3	2	258	8
				2	-	394	-
				2	1	576	43
				1	-	349	81
		9	2002	4	3	21	46
				3	-	311	-
				3	1	517	13

ตาราง 9 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				8	-	-	3
		3	364	9	-	42	123
				8	-	12	153
				7	-	-	33
				6	-	-	1
		4	1001	8	-	182	148
				8	1	-	3
				7	-	126	39
				6	-	12	150
				5	-	-	11
		5	2002	7	-	386	76
				7	1	6	18
				6	-	487	473
				6	1	-	6
				5	-	126	369
				4	-	4	51
		6	3003	6	-	458	4
				6	1	43	41
				5	-	882	504
				5	1	12	32

ตาราง 9 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				3	2	354	33
				2	-	314	-
				2	1	405	6
				2	2	262	12
				1	1	343	-
		10	1001	3	2	45	-
				2	-	102	-
				2	1	275	-
				2	2	45	-
				2	3	17	1
				1	1	348	-
				1	2	52	-
				4	4	2	-
				3	3	16	-
		11	364	3	4	9	-
				2	2	18	-
				2	3	30	-
				1	-	1	-
				1	1	3	-
				1	2	136	-

ตาราง 9 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				1	3	165	-
		12	91	2	4	1	-
				1	2	3	-
				1	3	32	-
				1	4	55	-
		13	14	1	4	4	-
				1	5	10	-
		14	11	1	6	1	-

ตาราง 10 กราฟย่อยของเซลล์ขนาด 3 x 3 สี่ใน

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
9	15	0	1	12	-	-	1
		1	15	11	-	-	13
				10	-	-	2
		2	105	10	-	-	78
				9	-	-	26

ตาราง 10 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				8	-	-	1
		3	455	9	-	3	283
				8	-	-	156
				7	-	-	13
		4	1365	9	1	-	2
				8	-	38	675
				8	1	38	2
				7	-	6	564
				6	-	-	78
		5	3003	8	1	-	18
				7	-	209	1060
				7	1	-	20
				6	-	76	1334
				5	-	3	283
		6	5005	7	1	8	65
				6	-	485	1159
				6	1	12	174
				5	-	556	1830
				5	1	-	23
				4	-	38	655

ตาราง 10 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
		7	6435	7	2	-	1
				6	2	-	2
				5	-	1585	130
				5	1	94	458
				5	2	-	1
				4	-	1040	1838
				4	1	4	102
				3	-	4	1176
		8	6435	6	2	-	6
				5	1	93	174
				5	2	10	20
				4	-	1181	13
				4	1	216	372
				4	2	-	8
				3	-	1965	661
				3	1	26	97
				2	-	671	922
		9	5005	5	2	9	6
				4	1	18	2
				4	2	48	12

ตาราง 10 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	n _L (D')	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				3	-	941	-
				3	1	438	358
				3	2	9	35
				2	-	1380	217
				2	1	42	53
				1	-	1021	416
		10	3003	4	1	-	-
				4	2	18	2
				4	3	10	2
				3	1	183	-
				3	2	-	-
				3	3	2	4
				2	-	761	338
				2	-	290	112
				2	2	26	47
				1	1	1147	61
		11	1365	3	2	15	-
				3	3	30	-
				2	2	420	-
				2	3	7	8

ตาราง 10 (ต่อ)

N	E	b(D')	#GRAPHS	n(D')	$n_L(D')$	กราฟเชื่อมต่อ ข้ามฟาก	กราฟเชื่อมต่อ ไม่ข้ามฟาก
				1	-	4	-
				1	1	721	-
				1	2	147	13
		12	445	2	2	6	1
				2	3	18	-
				2	4	4	2
				1	1	7	-
				1	2	383	-
				1	3	24	-
		13	105	1	2	1	-
				1	3	26	-
				1	4	78	-
		14	15	1	4	2	-
				1	5	13	-
		15	1	1	6	1	-

4.1 วิธีคำนวณหาค่าอันตรกิริยาริภาค โดยใช้สมการรีนอร์มัลไลเซชันกราฟ (3.6 ก) , (3.6 ข) ประกอบกับสมการ (3.4) , (3.5) และข้อมูลจากตาราง 1 ถึง ตาราง 10 ทำการเปรียบเทียบเซลล์ที่มีขนาดต่าง ๆ กัน และหาจุดตรึง $x_0 = x'_0 = x_0^*$ ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงให้สมการ (3.4) , (3.5) , (3.6) ซึ่งมีเทอม x_0 , x'_0 , y_0 และ

y'_0 เป็น

$$\begin{array}{ll} x = x_0 & \text{และ} \quad x' = x'_0 \\ y = y_0 & \text{และ} \quad y' = y'_0 \end{array}$$

การให้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ

1. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{4} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดตรง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = \frac{e^{8K} [2x^2 y^4 q^4 + 10x^3 y^3 q^3 + 13x^4 y^2 q^2 + 4x^5 y q + 2x^6 y q^2 + x^6 q]}{e^{8K} [y^6 q^6 + 6xy^5 q^5 + 13x^2 y^4 q^4 + 10x^3 y^3 q^3 + x^4 y^2 q^2 + x^4 y^2 q^3]} \quad (4.1 \text{ ก})$$

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = \frac{e^{8K} [2x^2 y^4 + 10x^3 y^3 + 13x^4 y^2 + 4x^5 y + 2x^6 y q + x^6 q]}{e^{8K} [y^6 + 6xy^5 + 13x^2 y^4 + 10x^3 y^3 + x^4 y^2 + x^4 y^2 q]} \quad (4.1 \text{ ข})$$

2. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{6} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดตรง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = \frac{e^{10K} [3x^2 y^8 q^7 + 28x^3 y^7 q^6 + 103x^4 y^6 q^5 + 184x^5 y^5 q^4 + 4x^6 y^5 q^5 + 173x^6 y^4 q^3 + 22x^6 y^4 q^4 + 77x^7 y^3 q^2 + 41x^7 y^3 q^3 + 15x^8 y^2 q + 27x^8 y^2 q^2 + 3x^8 y^2 q^3 + 7x^9 y q + 3x^9 y q^2 + x^{10} q]}{e^{10K} [y^{10} q^9 + 10xy^9 q^8 + 42x^2 y^8 q^7 + 92x^3 y^7 q^6 + 105x^4 y^6 q^5 + 2x^4 y^6 q^6 + 56x^5 y^5 q^4 + 8x^5 y^5 q^5 + 6x^6 y^4 q^3 + 9x^6 y^4 q^4 + x^7 y^3 q^2 + x^7 y^3 q^4]} \quad (4.2 \text{ ก})$$

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = \frac{e^{10K} [3x^2y^8 + 28x^3y^7 + 103x^4y^6 + 184x^5y^5 + 4x^6y^4q + 173x^6y^4 + 22x^6y^4q + 77x^7y^3 + 41x^7y^3q + 15x^8y^2 + 27x^8y^2q + 3x^8y^2q^2 + 7x^9yq + 3x^9yq^2 + x^{10}q^2]}{e^{10K} [y^{10}q + 10xy^9 + 42x^2y^8 + 92x^3y^7 + 105x^4y^6 + 2x^4y^6q + 56x^5y^5 + 8x^5y^5q + 6x^6y^4q + 9x^6y^4q + x^7y^3 + x^7y^3q^2]} \quad (4.2 \text{ n})$$

3. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{8} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดครึ่ง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = \frac{e^{14K} [4x^2y^{12}q^{10} + 54x^3y^{11}q^9 + 320x^4y^{10}q^8 + 1003x^5y^9q^7 + 6x^5y^9q^8 + 2161x^6y^8q^8 + 55x^6y^8q^7 + 2886x^7y^7q^5 + 192x^7y^7q^6 + 2270x^8y^6q^4 + 497x^8y^6q^5 + 6x^8y^6q^6 + 1178x^9y^5q^3 + 680x^9y^5q^4 + 34x^9y^5q^5 + 321x^{10}y^4q^2 + 590x^{10}y^4q^3 + 90x^{10}y^4q^4 + 11x^{11}y^3q + 241x^{11}y^3q^2 + 108x^{11}y^3q^3 + 4x^{11}y^3q^4 + 19x^{12}y^2q + 66x^{12}y^2q^2 + 6x^{12}y^2q^3 + 10x^{13}yq + 4x^{13}yq^2 + x^{14}q]}{e^{14K} [y^{14}q^{12} + 14xy^{13}q^{11} + 87x^2y^{12}q^{10} + 310x^3y^{11}q^9 + 678x^4y^{10}q^8 + 3x^4y^{10}q^9 + 969x^5y^9q^7 + 24x^5y^9q^8 + 713x^6y^8q^6 + 74x^6y^8q^7 + 215x^7y^7q^5 + 138x^7y^7q^6 + 2x^7y^7q^7 + 45x^8y^6q^4 + 176x^8y^6q^5 + 9x^8y^6q^6 + 10x^9y^5q^3 + 84x^9y^5q^4 + 16x^9y^5q^5 + x^{10}y^4q^5]} \quad (4.3 \text{ n})$$

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\frac{e^{k'}(x')}{e^{k'}(y')} = \frac{e^{14k} [4x^2 y^{12} + 54x^3 y^{11} + 320x^4 y^{10} + 1003x^5 y^9 + 6x^5 y^9 q + 2161x^6 y^8 + 55x^6 y^8 q + 2885x^7 y^7 + 192x^7 y^7 q + 2270x^8 y^6 + 497x^8 y^6 q + 6x^8 y^6 q^2 + 1178x^9 y^5 + 680x^9 y^5 q + 34x^9 y^5 q^2 + 321x^{10} y^4 + 590x^{10} y^4 q + 90x^{10} y^4 q^2 + 11x^{11} y^3 + 241x^{11} y^3 q + 108x^{11} y^3 q^2 + 4x^{11} y^3 q^3 + 19x^{12} y^2 + 66x^{12} y^2 q + 6x^{12} y^2 q^3 + 10x^{13} y q^2 + 4x^{13} y q^2 + x^{14} q^3]}{e^{14k} [y^{14} + 14xy^{13} + 87x^2 y^{12} + 310x^3 y^{11} + 678x^4 y^{10} + 3x^4 y^{10} q + 969x^5 y^9 + 24x^5 y^9 q + 713x^6 y^8 + 74x^6 y^8 q + 215x^7 y^7 + 138x^7 y^7 q + 2x^7 y^7 q^2 + 45x^8 y^6 + 176x^8 y^6 q + 9x^8 y^6 q^2 + 10x^9 y^5 + 84x^9 y^5 q + 16x^9 y^5 q^2 + x^{10} y^4 q^3]} \quad (4.3 \text{ II})$$

4. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{9} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดครึ่ง

พิจารณาจำนวนกลุ่

$$\frac{e^{k'}(x'q)}{e^{k'}(y'q^2)} = \frac{e^{15k} [3x^3 y^{12} q^9 + 44x^4 y^{11} q^8 + 288x^5 y^{10} q^7 + 1091x^6 y^9 q^6 + 8x^6 y^9 q^7 + 2631x^7 y^8 q^5 + 96x^7 y^8 q^6 + 3697x^8 y^7 q^4 + 461x^8 y^7 q^5 + 4x^8 y^7 q^6 + 2366x^9 y^6 q^3 + 1496x^9 y^6 q^4 + 44x^9 y^6 q^5 + 953x^{10} y^5 q^2 + 1292x^{10} y^5 q^3 + 192x^{10} y^5 q^4 + 497x^{11} y^4 q + 565x^{11} y^4 q^2 + 272x^{11} y^4 q^3 + 10x^{11} y^4 q^4 + 198x^{12} y^3 q^3 + 206x^{12} y^3 q^2 + 48x^{12} y^3 q^3 + 62x^{13} y^2 q + 40x^{13} y^2 q^2 + 3x^{13} y^2 q^3 + 12x^{14} y q + 3x^{14} y q^2 + x^{15} q^3]}{e^{15k} [y^{15} q^{12} + 15xy^{14} q^{11} + 105x^2 y^{13} q^{10} + 452x^3 y^{12} q^9 + 1317x^4 y^{11} q^8 + 4x^4 y^{11} q^9 + 2671x^5 y^{10} q^7 + 44x^5 y^{10} q^8 + 3734x^6 y^9 q^6 + 172x^6 y^9 q^7 + 3116x^7 y^8 q^5 + 588x^7 y^8 q^6]}$$

$$\begin{aligned}
& + 4x^7 y^6 q^7 + 1379x^8 y^7 q^4 + 864x^8 y^7 q^5 + 30x^8 y^7 q^6 \\
& + 313x^9 y^6 q^3 + 589x^9 y^6 q^4 + 197x^9 y^6 q^5 + 444x^{10} y^5 q^3 \\
& + 118x^{10} y^5 q^4 + 4x^{10} y^5 q^5 + 7x^{11} y^4 q^3 + 14x^{11} y^4 q^4 \\
& + 2x^{12} y^3 q^2 + x^{12} y^3 q^4]
\end{aligned}$$

(4.4 ก)

พิจารณาจำนวนปกติ

$$\begin{aligned}
& e^{15K} [3x^3 y^{12} + 44x^4 y^{11} + 288x^5 y^{10} + 1091x^6 y^9 q \\
& + 8x^6 y^9 q + 2631x^7 y^8 + 96x^7 y^8 q + 3697x^8 y^7 \\
& + 461x^8 y^7 q + 4x^8 y^7 q^2 + 2386x^9 y^6 + 1496x^9 y^6 q \\
& + 44x^9 y^6 q^2 + 953x^{10} y^5 + 1292x^{10} y^5 q + 192x^{10} y^5 q^2 \\
& + 497x^{11} y^4 + 565x^{11} y^4 q + 272x^{11} y^4 q^2 + 10x^{11} y^4 q^3 \\
& + 198x^{12} y^3 q + 206x^{12} y^3 q^2 + 48x^{12} y^3 q^3 + 62x^{13} y^2 q^2 \\
& + 40x^{13} y^2 q^3 + 3x^{13} y^2 q^4 + 12x^{14} y q^3 + 3x^{14} y q^4 + x^{15} q^4] \\
\frac{e^K(x')}{e^K(y')} &= \frac{e^{15K} [y^{15} + 15xy^{14} + 105x^2 y^{13} + 452x^3 y^{12} \\
& + 1317x^4 y^{11} + 4x^4 y^{11} q + 2671x^5 y^{10} + 44x^5 y^{10} q \\
& + 3734x^6 y^9 + 172x^6 y^9 q + 3116x^7 y^8 + 588x^7 y^8 q \\
& + 4x^7 y^8 q^2 + 1379x^8 y^7 + 864x^8 y^7 q + 30x^8 y^7 q^2 \\
& + 313x^9 y^6 + 589x^9 y^6 q + 197x^9 y^6 q^2 + 444x^{10} y^5 q \\
& + 118x^{10} y^5 q^2 + 4x^{10} y^5 q^3 + 7x^{11} y^4 q^2 + 14x^{11} y^4 q^3 \\
& + 2x^{12} y^3 q^2 + x^{12} y^3 q^4] }{ }
\end{aligned}$$

(4.4 ข)

5. เปลี่ยนเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{12} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดตรึง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
& e^{21K} [4x^3 y^{18} q^{13} + 84x^4 y^{17} q^{12} + 770x^5 y^{16} q^{11} \\
& + 4142x^6 y^{15} q^{10} + 18x^6 y^{15} q^{11} + 18172x^7 y^{14} q^9 \\
& + 286x^7 y^{14} q^{10} + 58600x^8 y^{13} q^8 + 2280x^8 y^{13} q^9]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6x^8 y^{13} q^{10} + 130308x^9 y^{12} q^7 + 8841 x^9 y^{12} q^8 \\
& + 111x^9 y^{12} q^9 + 149764x^{10} y^{11} q^6 + 21518x^{10} y^{11} q^7 \\
& + 816x^{10} y^{11} q^8 + 191292x^{11} y^{10} q^5 + 39614x^{11} y^{10} q^6 \\
& + 3470x^{11} y^{10} q^7 + 10x^{11} y^{10} q^8 + 124456x^{12} y^9 q^4 \\
& + 95127x^{12} y^9 q^5 + 7738x^{12} y^9 q^6 + 222x^{12} y^9 q^7 \\
& + 30235x^{13} y^8 q^3 + 96559x^{13} y^8 q^4 + 12786x^{13} y^8 q^5 \\
& + 722x^{13} y^8 q^6 + 6x^{13} y^8 q^7 + 575x^{14} y^7 q^2 \\
& + 84837x^{14} y^7 q^3 + 13987x^{14} y^7 q^4 + 2017x^{14} y^7 q^5 \\
& + 66x^{14} y^7 q^6 + 43x^{15} y^6 q^5 + 20332x^{15} y^6 q^2 + 15006x^{15} y^6 q^3 \\
& + 3816x^{15} y^6 q^4 + 175x^{15} y^6 q^5 + 3399x^{16} y^5 q^5 \\
& + 9701x^{16} y^5 q^2 + 4194x^{16} y^5 q^3 + 705x^{16} y^5 q^4 \\
& + 14x^{16} y^5 q^5 + 2031x^{17} y^4 q^4 + 3213x^{17} y^4 q^2 \\
& + 648x^{17} y^4 q^3 + 92x^{17} y^4 q^4 + 795x^{18} y^3 q^3 + 413x^{18} y^3 q^2 \\
& + 118x^{18} y^3 q^3 + 4x^{18} y^3 q^4 + 139x^{19} y^2 q^2 + 65x^{19} y^2 q^2 \\
& + 6x^{19} y^2 q^3 + 18x^{20} y q + 3x^{20} y q^2 + x^{21} q] \\
\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = & \frac{e^{21K} [y^{21} q^{10} + 21xy^{20} q^{15} + 210x^2 y^{19} q^{14} \\
& + 1326x^3 y^{18} q^{13} + 5896x^4 y^{17} q^{12} + 6x^4 y^{17} q^{13} \\
& + 19477x^5 y^{16} q^{11} + 102x^5 y^{16} q^{12} + 49299x^6 y^{15} q^{10} \\
& + 805x^6 y^{15} q^{11} + 94022x^7 y^{14} q^9 + 3795x^7 y^{14} q^{10} \\
& + 5x^7 y^{14} q^{11} + 130054x^8 y^{13} q^8 + 12454x^8 y^{13} q^9 \\
& + 96x^8 y^{13} q^{10} + 124524x^9 y^{12} q^7 + 29548x^9 y^{12} q^8 \\
& + 598x^9 y^{12} q^9 + 121579x^{10} y^{11} q^6 + 56923x^{10} y^{11} q^7 \\
& + 2110x^{10} y^{11} q^8 + 6x^{10} y^{11} q^9 + 30382x^{11} y^{10} q^5 \\
& + 83053x^{11} y^{10} q^6 + 4829x^{11} y^{10} q^7 + 66x^{11} y^{10} q^8 \\
& + 270x^{12} y^9 q^4 + 55689x^{12} y^9 q^5 + 10040x^{12} y^9 q^6 \\
& + 388x^{12} y^9 q^7 + 170x^{13} y^8 q^3 + 55905x^{13} y^8 q^4] }{ }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6571x^{13}y^8q^5 + 518x^{13}y^8q^6 + 18x^{13}y^8q^7 \\
& + 9x^{14}y^7q^2 + 5253x^{14}y^7q^3 + 8834x^{14}y^7q^4 \\
& + 623x^{14}y^7q^5 + 79x^{14}y^7q^6 + 9797x^{15}y^6q^2 \\
& + 2268x^{15}y^6q^3 + 2599x^{15}y^6q^4 + 225x^{15}y^6q^5 \\
& + 4x^{15}y^6q^6 + 57x^{16}y^5q^2 + 2169x^{16}y^5q^3 \\
& + 94x^{16}y^5q^4 + 16x^{16}y^5q^5 + x^{17}y^4q^5]
\end{aligned}$$

(4.5 ก)

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\begin{aligned}
& e^{21K} [4x^3y^{18} + 84x^4y^{17} + 770x^5y^{16} \\
& + 4142x^6y^{15} + 18x^6y^{15}q + 18172x^7y^{14} \\
& + 286x^7y^{14}q + 58600x^8y^{13} + 2280x^8y^{13}q \\
& + 6x^8y^{13}q^2 + 130308x^9y^{12} + 8841x^9y^{12}q \\
& + 111x^9y^{12}q^2 + 149764x^{10}y^{11} + 21518x^{10}y^{11}q \\
& + 816x^{10}y^{11}q^2 + 191292x^{11}y^{10} + 39614x^{11}y^{10}q \\
& + 3470x^{11}y^{10}q^2 + 10x^{11}y^{10}q^3 + 124456x^{12}y^9 \\
& + 95127x^{12}y^9q + 7738x^{12}y^9q^2 + 222x^{12}y^9q^3 \\
& + 30235x^{13}y^8 + 96559x^{13}y^8q + 12786x^{13}y^8q^2 \\
& + 722x^{13}y^8q^3 + 6x^{13}y^8q^4 + 575x^{14}y^7 \\
& + 84837x^{14}y^7q + 13987x^{14}y^7q^2 + 2017x^{14}y^7q^3 \\
& + 66x^{14}y^7q^4 + 43x^{15}y^6 + 20332x^{15}y^6q + 15006x^{15}y^6q^2 \\
& + 3815x^{15}y^6q^3 + 175x^{15}y^6q^4 + 3399x^{16}y^5q \\
& + 9701x^{16}y^5q^2 + 4194x^{16}y^5q^3 + 705x^{16}y^5q^4 \\
& + 14x^{16}y^5q^5 + 2031x^{17}y^4q^2 + 3213x^{17}y^4q^3 \\
& + 648x^{17}y^4q^4 + 92x^{17}y^4q^5 + 795x^{18}y^3q^3 + 413x^{18}y^3q^4 \\
& + 118x^{18}y^3q^5 + 4x^{18}y^3q^6 + 139x^{19}y^2q^4 + 65x^{19}y^2q^5 \\
& + 6x^{19}y^2q^6 + 18x^{20}y^5q + 3x^{20}y^6q + x^{21}q^6] \\
& \frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = \frac{e^{21K} [y^{21} + 21xy^{20} + 210x^2y^{19} + 1326x^3y^{18} }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 5896x^4 y^{17} + 6x^4 y^{17} q + 19477x^5 y^{16} + 102x^5 y^{16} q \\
& + 49299x^6 y^{15} + 805x^6 y^{15} q + 94022x^7 y^{14} + 3795x^7 y^{14} q \\
& + 5x^7 y^{14} q^2 + 130054x^8 y^{13} + 12454x^8 y^{13} q \\
& + 96x^8 y^{13} q + 124524x^9 y^{12} + 29548x^9 y^{12} q \\
& + 598x^9 y^{12} q^2 + 121579x^{10} y^{11} + 56923x^{10} y^{11} q \\
& + 2110x^{10} y^{11} q^2 + 6x^{10} y^{11} q^3 + 30382x^{11} y^{10} \\
& + 83053x^{11} y^{10} q + 4829x^{11} y^{10} q^2 + 66x^{11} y^{10} q^3 \\
& + 270x^{12} y^9 + 55689x^{12} y^9 q + 10040x^{12} y^9 q^2 \\
& + 388x^{12} y^9 q^3 + 170x^{13} y^8 + 55905x^{13} y^8 q \\
& + 6571x^{13} y^8 q^2 + 518x^{13} y^8 q^3 + 18x^{13} y^8 q^4 \\
& + 9x^{14} y^7 + 5253x^{14} y^7 q + 8884x^{14} y^7 q^2 \\
& + 623x^{14} y^7 q^3 + 79x^{14} y^7 q^4 + 9797x^{15} y^6 q \\
& + 2268x^{15} y^6 q^2 + 2599x^{15} y^6 q^3 + 225x^{15} y^6 q^4 \\
& + 4x^{15} y^6 q^5 + 57x^{16} y^5 q^2 + 2169x^{16} y^5 q^3 \\
& + 94x^{16} y^5 q^4 + 16x^{16} y^5 q^5 + x^{17} y^4 q^6]
\end{aligned}$$

(4.5 n)

6. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{9} / \sqrt{4})$ จะได้สมการสำหรับจุดครึ่ง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 & e^{15K} [3x^3 y^{12} q^9 + 44x^4 y^{12} q^9 + 288x^5 y^{10} q^7 \\
 & + 1091x^6 y^9 q^6 + 8x^6 y^9 q^7 + 2631x^7 y^8 q^5 \\
 & + 96x^7 y^8 q^6 + 3697x^8 y^7 q^4 + 461x^8 y^7 q^5 \\
 & + 4x^8 y^7 q^6 + 2366x^9 y^6 q^3 + 1496x^9 y^6 q^4 \\
 & + 44x^9 y^6 q^5 + 953x^{10} y^5 q^2 + 1292x^{10} y^5 q^3 \\
 & + 192x^{10} y^5 q^4 + 497x^{11} y^4 q + 585x^{11} y^4 q^2 \\
 & + 272x^{11} y^4 q^3 + 10x^{11} y^4 q^4 + 198x^{12} y^3 q^3 \\
 & + 206x^{12} y^3 q^2 + 48x^{12} y^3 q^3 + 62x^{13} y^2 q^2 \\
 & + 40x^{13} y^2 q^2 + 3x^{13} y^2 q^3 + 12x^{14} y q \\
 & + 3x^{14} y q^2 + x^{15} q^4] \\
 & e^{6K'} [2x'^2 y'^4 q^4 \\
 & + 10x'^3 y'^3 q^3 + 13x'^4 y'^2 q^2 \\
 & + 4x'^5 y' q + 2x'^5 y' q^2 + x'^6 q] \\
 & e^{6K'} [y'^6 q^6 + 6x' y'^5 q^5 \\
 & + 13x'^2 y'^4 q^4 + 10x'^3 y'^3 q^3 \\
 & + x'^4 y'^2 q^2 + x'^4 y'^2 q^3] \\
 & = \frac{e^{15K} [y^{15} q^{12} + 15xy^{14} q^{11} + 105x^2 y^{13} q^{10} \\
 & + 452x^3 y^{12} q^9 + 1317x^4 y^{11} q^8 + 4x^4 y^{11} q^9 \\
 & + 2671x^5 y^{10} q^7 + 44x^5 y^{10} q^8 + 3734x^6 y^9 q^6 \\
 & + 172x^6 y^9 q^7 + 3116x^7 y^8 q^5 + 588x^7 y^8 q^6 \\
 & + 4x^7 y^8 q^7 + 1379x^8 y^7 q^4 + 864x^8 y^7 q^5 \\
 & + 30x^8 y^7 q^6 + 313x^9 y^6 q^3 + 589x^9 y^6 q^4 \\
 & + 197x^9 y^6 q^5 + 444x^{10} y^5 q^2 + 118x^{10} y^5 q^3 \\
 & + 4x^{10} y^5 q^4 + 7x^{11} y^4 q^3 + 14x^{11} y^4 q^4 \\
 & + 2x^{12} y^3 q^2 + x^{12} y^3 q^4] }{e^{6K'} [y'^6 q^6 + 6x' y'^5 q^5 + 13x'^2 y'^4 q^4 + 10x'^3 y'^3 q^3 + x'^4 y'^2 q^2 + x'^4 y'^2 q^3]}
 \end{aligned}$$

(4.6 n)

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\begin{aligned}
 & e^{15K} [3x^3 y^{12} + 44x^4 y^{11} + 288x^5 y^{10} + 1091x^6 y^9 \\
 & + 8x^6 y^9 q + 2631x^7 y^8 + 96x^7 y^8 q + 3697x^8 y^7 \\
 & + 481x^8 y^7 q + 4x^8 y^7 q^2 + 2366x^9 y^6 + 1496x^9 y^6 q \\
 & + 44x^9 y^6 q^2 + 953x^{10} y^5 + 1292x^{10} y^5 q + 192x^{10} y^5 q^2 \\
 & + 497x^{11} y^4 + 565x^{11} y^4 q + 272x^{11} y^4 q^2 + 10x^{11} y^4 q^3 \\
 & + 198x^{12} y^3 q + 206x^{12} y^3 q^2 + 48x^{12} y^3 q^3 + 62x^{13} y^2 q^2 \\
 & + 40x^{10} y^2 q^3 + 3x^{13} y^2 q^4 + 12x^{14} y q^3 + 3x^{14} y q^4 + x^{15} q^4] \\
 & e^{6K} [2x'^2 y'^4 + 10x'^3 y'^3 + 13x'^4 y'^2 + 4x'^5 y' + 2x'^5 y' q + x'^6 q] \\
 & e^{6K} [y'^6 + 6x'y'^5 + 13x'^2 y'^4 + 10x'^3 y'^3 + x'^4 y'^2 + x'^4 y'^2 q] \\
 & = e^{15K} [y^{15} + 15xy^{14} + 105x^2 y^{13} + 452x^3 y^{12} \\
 & + 1317x^4 y^{11} + 4x^4 y^{11} q + 2671x^5 y^{10} + 44x^5 y^{10} q \\
 & + 3734x^6 y^9 + 172x^6 y^9 q + 3116x^7 y^8 + 588x^7 y^8 q \\
 & + 4x^7 y^8 q^2 + 1379x^8 y^7 + 864x^8 y^7 q + 30x^8 y^7 q^2 \\
 & + 313x^9 y^6 + 589x^9 y^6 q + 197x^9 y^6 q^2 + 444x^{10} y^5 q \\
 & + 118x^{10} y^5 q^2 + 4x^{10} y^5 q^3 + 7x^{11} y^4 q^2 + 14x^{11} y^4 q^3 \\
 & + 2x^{12} y^3 q^2 + x^{12} y^3 q^4]
 \end{aligned}$$

(4.6 ข)

7. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{12} / \sqrt{4})$ จะได้สมการสำหรับจุดจริง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 & e^{21K} [4x^3 y^{18} q^{13} + 84x^4 y^{17} q^{12} + 770x^5 y^{16} q^{11} \\
 & + 4142x^6 y^{15} q^{10} + 18x^6 y^{15} q^{11} + 18172x^7 y^{14} q^9 \\
 & + 286x^7 y^{14} q^{10} + 58600x^8 y^{13} q^8 + 2280x^8 y^{13} q^9 \\
 & + 6x^8 y^{13} q^{10} + 130308x^9 y^{12} q^7 + 8841x^9 y^{12} q^8 \\
 & + 111x^9 y^{12} q^9 + 149764x^{10} y^{11} q^6 + 21518x^{10} y^{11} q^7 \\
 & + 816x^{10} y^{11} q^8 + 191292x^{11} y^{10} q^5 + 89614x^{11} y^{10} q^6 \\
 & + 3470x^{11} y^{10} q^7 + 10x^{11} y^{10} q^8 + 124456x^{12} y^9 q^4 \\
 & + 95127x^{12} y^9 q^5 + 7738x^{12} y^9 q^6 + 222x^{12} y^9 q^7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 30235x^{13}y^8q^3 + 96559x^{13}y^8q^4 + 12786x^{13}y^8q^5 \\
& + 722x^{13}y^8q^6 + 6x^{13}y^8q^7 + 575x^{14}y^7q^2 \\
& + 84837x^{14}y^7q^3 + 13987x^{14}y^7q^4 + 2017x^{14}y^7q^5 \\
& + 66x^{14}y^7q^6 + 43x^{15}y^6q + 20332x^{15}y^6q^2 \\
& + 15006x^{15}y^6q^3 + 3815x^{15}y^6q^4 + 175x^{15}y^6q^5 \\
& + 3399x^{16}y^5q + 9701x^{16}y^5q^2 + 4194x^{16}y^5q^3 \\
& + 705x^{16}y^5q^4 + 14x^{16}y^5q^5 + 2031x^{17}y^4q \\
& + 3213x^{17}y^4q^2 + 648x^{17}y^4q^3 + 92x^{17}y^4q^4 \\
& + 795x^{18}y^3q + 413x^{18}y^3q^2 + 118x^{18}y^3q^3 \\
& + 4x^{18}y^3q^4 + 139x^{19}y^2q + 65x^{19}y^2q^2 \\
& + 6x^{19}y^2q^3 + 18x^{20}yq + 3x^{20}yq^2 + x^{21}q] \\
& \frac{e^{cx'} [2x'^2y'^4q^4 + 10x'^3y'^3q^3 + 13x'^4y'^2q^2 + 4x'^5y'q + 2x'^5y'q^2 + x'^6q]}{e^{cx'} [y'^6q^6 + 6x'y'^5q^5 + 13x'^2y'^4q^4 + 10x'^3y'^3q^3 + x'^4y'^2q^2 + x'^4y'^2q^3]} = \frac{e^{21k} [y^{21}q^{18} + 21xy^{20}q^{15} + 210x^2y^{19}q^{14} + 1326x^3y^{18}q^{13} + 5896x^4y^{17}q^{12} + 6x^4y^{17}q^{18} + 19477x^5y^{16}q^{11} + 102x^5y^{16}q^{12} + 49299x^6y^{15}q^{10} + 805x^6y^{15}q^{11} + 94022x^7y^{14}q^9 + 3795x^7y^{14}q^{10} + 5x^7y^{14}q^{11} + 130054x^8y^{13}q^8 + 12454x^8y^{13}q^9 + 96x^8y^{13}q^{10} + 124524x^9y^{12}q^7 + 29548x^9y^{12}q^8 + 598x^9y^{12}q^9 + 121579x^{10}y^{11}q^6 + 56923x^{10}y^{11}q^7 + 2110x^{10}y^{11}q^8 + 6x^{10}y^{11}q^9 + 30382x^{11}y^{10}q^5 + 83053x^{11}y^{10}q^6 + 4829x^{11}y^{10}q^7 + 66x^{11}y^{10}q^8 + 270x^{12}y^9q^4 + 55689x^{12}y^9q^5 + 10040x^{12}y^9q^6 + 388x^{12}y^9q^7 + 170x^{13}y^8q^3 + 55905x^{13}y^8q^4 + 6571x^{13}y^8q^5 + 518x^{13}y^8q^6 + 18x^{13}y^8q^7 + 9x^{14}y^7q^2 + 5253x^{14}y^7q^3 + 8834x^{14}y^7q^4 + 623x^{14}y^7q^5 + 79x^{14}y^7q^6 + 9797x^{15}y^6q^2 + 2268x^{15}y^6q^3 + 2599x^{15}y^6q^4 + 225x^{15}y^6q^5]}{e^{21k} [y^{21}q^{18} + 21xy^{20}q^{15} + 210x^2y^{19}q^{14} + 1326x^3y^{18}q^{13} + 5896x^4y^{17}q^{12} + 6x^4y^{17}q^{18} + 19477x^5y^{16}q^{11} + 102x^5y^{16}q^{12} + 49299x^6y^{15}q^{10} + 805x^6y^{15}q^{11} + 94022x^7y^{14}q^9 + 3795x^7y^{14}q^{10} + 5x^7y^{14}q^{11} + 130054x^8y^{13}q^8 + 12454x^8y^{13}q^9 + 96x^8y^{13}q^{10} + 124524x^9y^{12}q^7 + 29548x^9y^{12}q^8 + 598x^9y^{12}q^9 + 121579x^{10}y^{11}q^6 + 56923x^{10}y^{11}q^7 + 2110x^{10}y^{11}q^8 + 6x^{10}y^{11}q^9 + 30382x^{11}y^{10}q^5 + 83053x^{11}y^{10}q^6 + 4829x^{11}y^{10}q^7 + 66x^{11}y^{10}q^8 + 270x^{12}y^9q^4 + 55689x^{12}y^9q^5 + 10040x^{12}y^9q^6 + 388x^{12}y^9q^7 + 170x^{13}y^8q^3 + 55905x^{13}y^8q^4 + 6571x^{13}y^8q^5 + 518x^{13}y^8q^6 + 18x^{13}y^8q^7 + 9x^{14}y^7q^2 + 5253x^{14}y^7q^3 + 8834x^{14}y^7q^4 + 623x^{14}y^7q^5 + 79x^{14}y^7q^6 + 9797x^{15}y^6q^2 + 2268x^{15}y^6q^3 + 2599x^{15}y^6q^4 + 225x^{15}y^6q^5]}
\end{aligned}$$

$$+ 4x^{15}y^6q^6 + 57x^{16}y^5q^2 + 2169x^{16}y^5q^3 \\ + 94x^{16}y^5q^4 + 16x^{16}y^5q^5 + x^{17}y^4q^5]$$

(4.7 ก)

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\begin{aligned} e^{21K} [& 4x^3y^{18} + 84x^4y^{17} + 770x^5y^{16} \\ & + 4142x^6y^{15} + 18x^6y^{15}q + 18172x^7y^{14} \\ & + 286x^7y^{14}q + 58600x^8y^{13} + 2280x^8y^{13}q \\ & + 6x^8y^{13}q^2 + 130308x^9y^{12} + 8841x^9y^{12}q \\ & + 111x^9y^{12}q^2 + 149764x^{10}y^{11} + 21518x^{10}y^{11}q \\ & + 816x^{10}y^{11}q^2 + 191292x^{11}y^{10} + 39614x^{11}y^{10}q \\ & + 3470x^{11}y^{10}q^2 + 10x^{11}y^{10}q^3 + 124456x^{12}y^9 \\ & + 95127x^{12}y^9q + 7738x^{12}y^9q^2 + 222x^{12}y^9q^3 \\ & + 30235x^{13}y^8 + 96559x^{13}y^8q + 12786x^{13}y^8q^2 \\ & + 722x^{13}y^8q^3 + 6x^{13}y^8q^4 + 575x^{14}y^7 \\ & + 84837x^{14}y^7q + 13987x^{14}y^7q^2 + 2017x^{14}y^7q^3 \\ & + 66x^{14}y^7q^4 + 43x^{15}y^6 + 20332x^{15}y^6q \\ & + 15006x^{15}y^6q^2 + 3815x^{15}y^6q^3 + 175x^{15}y^6q^4 \\ & + 3399x^{16}y^5q + 9701x^{16}y^5q^2 + 4194x^{16}y^5q^3 \\ & + 705x^{16}y^5q^4 + 14x^{16}y^5q^5 + 2031x^{17}y^4q^2 \\ & + 3213x^{17}y^4q^3 + 648x^{17}y^4q^4 + 92x^{17}y^4q^5 \\ & + 795x^{18}y^3q^3 + 413x^{18}y^3q^4 + 118x^{18}y^3q^5 \\ & + 4x^{18}y^3q^6 + 139x^{19}y^2q^4 + 65x^{19}y^2q^5 \\ & + 6x^{19}y^2q^6 + 18x^{20}yq^5 + 3x^{20}yq^6 + x^{21}q^6] \\ e^{6K'} [& 2x'^2y'^4 \\ & + 10x'^3y'^3 + 13x'^4y'^2 \\ & + 4x'^5y' + 2x'^5y'q + x'^6q] \\ e^{6K'} [& y'^6 + 6x'y'^5 \\ & + 13x'^2y'^4 + 10x'^3y'^3 \\ & + x'^4y'^2 + x'^4y'^2q] \end{aligned} = \frac{e^{21K} [y^{21} + 21xy^{20} + 210x^2y^{19} \\ + 1326x^3y^{18} + 5896x^4y^{17} + 6x^4y^{17}q \\ + 19477x^5y^{16} + 102x^5y^{16}q + 49299x^6y^{15}]}{e^{21K} [y^{21} + 21xy^{20} + 210x^2y^{19} \\ + 1326x^3y^{18} + 5896x^4y^{17} + 6x^4y^{17}q \\ + 19477x^5y^{16} + 102x^5y^{16}q + 49299x^6y^{15}]}$$

$$\begin{aligned}
& + 805x^0y^{15}q + 94022x^7y^{14} + 3795x^7y^{14}q \\
& + 5x^7y^{14}q^2 + 130054x^8y^{13} + 12454x^8y^{13}q \\
& + 96x^8y^{13}q^2 + 124524x^9y^{12} + 29548x^9y^{12}q \\
& + 598x^9y^{12}q^2 + 121579x^{10}y^{11} + 56923x^{10}y^{11}q \\
& + 2110x^{10}y^{11}q^2 + 6x^{10}y^{11}q^3 + 80382x^{11}y^{10} \\
& + 83053x^{11}y^{10}q + 4829x^{11}y^{10}q^2 + 66x^{11}y^{10}q^3 \\
& + 270x^{12}y^9 + 55689x^{12}y^9q + 10040x^{12}y^9q^2 \\
& + 388x^{12}y^9q^3 + 170x^{13}y^8 + 55905x^{13}y^8q \\
& + 6571x^{13}y^8q^2 + 518x^{13}y^8q^3 + 18x^{13}y^8q^4 \\
& + 9x^{14}y^7 + 5253x^{14}y^7q + 8834x^{14}y^7q^2 \\
& + 623x^{14}y^7q^3 + 79x^{14}y^7q^4 + 9797x^{15}y^6q \\
& + 2268x^{15}y^6q^2 + 2599x^{15}y^6q^3 + 226x^{15}y^6q^4 \\
& + 4x^{15}y^6q^5 + 57x^{16}y^5q^2 + 2169x^{16}y^5q^3 \\
& + 94x^{16}y^5q^4 + 16x^{16}y^5q^5 + x^{17}y^4q^6]
\end{aligned}$$

(4.7 ข)

กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว

8. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{4} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดครึ่ง

พิจารณาร้านงานกลุ่ม

$$\begin{aligned}
& e^{6K} [2x^2y^4q^4 + 8x^3y^3q^3 + 2x^3y^3q^2 + 5x^4y^2q^2 \\
& + 8x^4y^2q + x^5yq + 5x^5yq + x^6q] \\
\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = & \frac{e^{6K} [2x^2y^4q^4 + 8x^3y^3q^3 + 2x^3y^3q^2 + 5x^4y^2q^2 \\
& + 8x^4y^2q + x^5yq + 5x^5yq + x^6q]}{e^{6K} [y^6q^6 + 5xy^5q^5 + xy^5q^4 + 8x^2y^4q^4 + 5x^2y^4q^3 \\
& + 4x^3y^3q^3 + 6x^3y^3q^2 + 4x^4y^2q^2 + x^4y^2q^2]}
\end{aligned}$$

(4.8 ก)

พิจารณาร้านงานวงปิด

$$\begin{aligned}
& e^{K'}(x') \\
\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = & \frac{e^{6K} [2x^2y^4 + 10x^3y^3 + 13x^4y^2 + 4x^5y + 2x^5yq + x^6q]}{e^{6K} [y^6 + 6xy^5 + 13x^2y^4 + 10x^3y^3 + x^4y^2 + x^4y^2q]}
\end{aligned}$$

(4.8 ข)

9. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{6} / \sqrt{I})$ จะได้สมการสำหรับจุดครึ่ง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = \frac{e^{10K} [3x^2y^8q^7 + 22x^3y^7q^6 + 6x^3y^7q^5 + 58x^4y^6q^5 + 42x^4y^6q^4 + 3x^4y^6q^3 + 64x^5y^5q^4 + 4x^5y^5q^4 + 98x^5y^5q^3 + 22x^5y^5q^2 + 2x^6y^4q^4 + 32x^6y^4q^3 + 32x^6y^4q^3 + 125x^6y^4q^2 + 4x^6y^4q^2 + 6x^7y^3q^3 + 8x^7y^3q^2 + 36x^7y^3q^2 + 64x^7y^3q + 4x^7y^3q^3 + 6x^8y^2q^2 + 39x^8y^2q + 10x^9yq + x^{10}q]}{e^{10K} [y^{10}q^9 + 8xy^9q^8 + 2xy^9q^7 + 25x^2y^8q^7 + 16x^2y^8q^6 + x^2y^8q^5 + 34x^3y^7q^6 + 50x^3y^7q^5 + 8x^3y^7q^4 + 14x^4y^6q^5 + 68x^4y^6q^4 + 25x^4y^6q^3 + 10x^5y^5q^4 + 22x^5y^5q^3 + 32x^5y^5q^2 + 2x^6y^4q^3 + 13x^6y^4q^2 + 2x^7y^3q^2]} \quad (4.9 \text{ ก})$$

พิจารณาจำนวนวงปิด

$$\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = \frac{e^{10K} [3x^2y^8 + 22x^3y^7 + 6x^3y^7 + 58x^4y^6 + 45x^4y^6 + 64x^5y^5 + 4x^5y^5q + 98x^5y^5 + 22x^5y^5 + 2x^6y^4q^2 + 32x^6y^4 + 32x^6y^4q + 125x^6y^4 + 4x^6y^4q + 6x^7y^3q^2 + 8x^7y^3 + 34x^7y^3q + 2x^7y^3q^2 + 24x^7y^3 + 40x^7y^3q + 4x^7y^3q + 6x^8y^2q^2 + x^8y^2 + 9x^8y^2q + 27x^8y^2q^2 + 2x^8y^2q^3 + 2x^9yq^2 + 8x^9yq^3 + x^{10}q^4]}{e^{10K} [y^{10} + 10xy^9 + 42x^2y^8 + 92x^3y^7 + 105x^4y^6 + 56x^5y^5 + 6x^5y^5q + 2x^5y^5q + 2x^6y^4q + 6x^6y^4]} \quad (4.9 \text{ ข})$$

10. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{8} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดจริง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
 & e^{14K} [4x^2 y^{12} q^{10} + 42x^3 y^{11} q^9 + 12x^3 y^{11} q^8 \\
 & + 182x^4 y^{10} q^8 + 126x^4 y^{10} q^7 + 12x^4 y^{10} q^6 + 386x^5 y^9 q^7 \\
 & + 6x^5 y^9 q^6 + 487x^5 y^9 q^5 + 126x^5 y^9 q^4 + 4x^5 y^9 q^3 \\
 & + 458x^6 y^8 q^6 + 43x^6 y^8 q^5 + 882x^6 y^8 q^4 + 12x^6 y^8 q^3 \\
 & + 821x^6 y^8 q^2 + 329x^7 y^7 q^5 + 122x^7 y^7 q^4 + 2378x^7 y^7 q^3 \\
 & + 94x^7 y^7 q^2 + 178x^7 y^7 q^1 + 6x^7 y^7 q^0 + 165x^8 y^6 q^4 \\
 & + 113x^8 y^6 q^3 + 30x^8 y^6 q^2 + 153x^8 y^6 q^1 + 735x^8 y^6 q^0 \\
 & + 258x^8 y^6 q^0 + 394x^8 y^6 q^0 + 576x^8 y^6 q^2 + 349x^8 y^6 q^1 \\
 & + 21x^9 y^5 q^4 + 311x^9 y^5 q^3 + 517x^9 y^5 q^2 + 354x^9 y^5 q^1 \\
 & + 314x^9 y^5 q^0 + 405x^9 y^5 q^0 + 262x^9 y^5 q^2 + 343x^9 y^5 q^1 \\
 & + 45x^{10} y^4 q^3 + 102x^{10} y^4 q^2 + 275x^{10} y^4 q^1 + 45x^{10} y^4 q^0 \\
 & + 17x^{10} y^4 q^2 + 348x^{10} y^4 q^1 + 52x^{10} y^4 q^0 + 2x^{10} y^4 q^0 \\
 & + 16x^{10} y^4 q^3 + 9x^{11} y^3 q^3 + 18x^{11} y^3 q^2 + 30x^{11} y^3 q^1 \\
 & + x^{11} y^3 q^0 + 304x^{11} y^3 q^1 + x^{12} y^2 q^2 + 90x^{12} y^2 q^1 \\
 & + 14x^{13} y q + x^{14}] \\
 \frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} &= \frac{e^{14K} [y^{14} q^{12} + 11xy^{13} q^{11} + 3xy^{13} q^{10} + 51x^2 y^{12} q^{10} \\
 & + 38x^2 y^{12} q^9 + 3x^2 y^{12} q^8 + 123x^3 y^{11} q^9 + 153x^3 y^{11} q^8 \\
 & + 33x^3 y^{11} q^7 + x^3 y^{11} q^6 + 148x^4 y^{10} q^8 + 3x^4 y^{10} q^7 \\
 & + 369x^4 y^{10} q^7 + 150x^4 y^{10} q^6 + 11x^4 y^{10} q^5 + 76x^5 y^9 q^7 \\
 & + 18x^5 y^9 q^6 + 473x^5 y^9 q^5 + 6x^5 y^9 q^4 + 369x^5 y^9 q^3 \\
 & + 51x^5 y^9 q^2 + 41x^6 y^8 q^5 + 504x^6 y^8 q^4 + 32x^6 y^8 q^3 \\
 & + 210x^6 y^8 q^2 + x^7 y^7 q^5 + 46x^7 y^7 q^4 + 2x^7 y^7 q^3 \\
 & + 62x^7 y^7 q^2 + 74x^7 y^7 q^1 + 152x^7 y^7 q^0 + 18x^7 y^7 q^0 \\
 & + 6x^8 y^6 q^4 + 8x^8 y^6 q^3 + 26x^8 y^6 q^2 + 56x^8 y^6 q^1 + 8x^8 y^6 q^0] }{ }
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 43x^8y^8q^2 + 81x^8y^8q + 46x^9y^5q^4 + 13x^9y^5q^3 \\
& + 33x^9y^5q^3 + 6x^9y^5q^2 + 12x^9y^5q^2 + x^{10}y^4q^2]
\end{aligned}$$

(4.10 ก)

พิจารณาจำนวนทางใด

$$\begin{aligned}
& e^{14K} [4x^2y^{12} + 42x^3y^{11} + 12x^3y^{11} \\
& + 182x^4y^{10} + 126x^4y^{10} + 12x^4y^{10} + 386x^5y^9 \\
& + 6x^5y^9q + 487x^5y^9 + 126x^5y^9 + 4x^5y^9 \\
& + 458x^6y^8 + 43x^6y^8q + 882x^6y^8 + 12x^6y^8q \\
& + 821x^6y^8 + 329x^7y^7 + 122x^7y^7q + 2378x^7y^7 \\
& + 94x^7y^7q + 178x^7y^7 + 6x^7y^7q + 165x^8y^6 \\
& + 113x^8y^6q + 30x^8y^6q^2 + 153x^8y^6 + 735x^8y^6q \\
& + 258x^8y^6q^2 + 394x^8y^6 + 576x^8y^6q + 349x^8y^6 \\
& + 21x^9y^5q^3 + 311x^9y^5 + 517x^9y^5q + 854x^9y^5q^2 \\
& + 314x^9y^5 + 405x^9y^5q + 262x^9y^5q^2 + 343x^9y^5q \\
& + 45x^{10}y^4q^2 + 102x^{10}y^4 + 275x^{10}y^4q + 45x^{10}y^4q^2 \\
& + 17x^{10}y^4q^3 + 348x^{10}y^4q + 52x^{10}y^4q^2 + 2x^{10}y^4q^4 \\
& + 16x^{10}y^4q^3 + 9x^{11}y^3q^4 + 18x^{11}y^3q^2 + 30x^{11}y^3q^3 \\
& + 30x^{11}y^3q^3 + x^{11}y^3 + 3x^{11}y^3q + 136x^{11}y^3q^2 \\
& + 165x^{11}y^3q^3 + x^{12}y^2q^4 + 3x^{12}y^2q^2 + 32x^{12}y^2q^3 \\
& + 55x^{12}y^2q^4 + 4x^{13}yq^4 + 10x^{13}yq^5 + x^{14}q^6] \\
\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} &= \frac{e^{14K} [y^{14} + 11xy^{13} + 3xy^{13} + 51x^2y^{12} \\
& + 33x^2y^{12} + 3x^2y^{12} + 123x^3y^{11} + 153x^3y^{11} \\
& + 33x^3y^{11} + x^3y^{11} + 148x^4y^{10} + 3x^4y^{10}q \\
& + 369x^4y^{10} + 150x^4y^{10} + 11x^4y^{10} + 76x^5y^9 \\
& + 18x^5y^9q + 473x^5y^9 + 6x^5y^9q + 369x^5y^9 \\
& + 51x^5y^9 + 4x^6y^8 + 41x^6y^8q + 504x^6y^8 + 32x^6y^8q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 210x^8y^8 + x^7y^7 + 46x^7y^7q + 2x^7y^7q^2 \\
& + 62x^7y^7 + 74x^7y^7q + 152x^7y^7 + 18x^7y^7q \\
& + 6x^8y^8q + 8x^8y^8q^2 + 26x^8y^8 + 58x^8y^8q + 8x^8y^8q^2 \\
& + 43x^8y^8q + 81x^8y^8 + 46x^8y^8q^2 + 13x^8y^8q \\
& + 33x^8y^8q^2 + 6x^8y^8q + 12x^8y^8q^2 + x^{10}y^4q^3]
\end{aligned}$$

(4.10 ข)

11. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{9} / \sqrt{1})$ จะได้สมการสำหรับจุดจริง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
e^{15K} [& 3x^9y^{12}q^9 + 38x^4y^{11}q^8 + 6x^4y^{11}q^7 \\
& + 209x^5y^{10}q^7 + 76x^5y^{10}q^6 + 3x^5y^{10}q^5 + 8x^6y^9q^7 \\
& + 485x^6y^9q^6 + 12x^6y^9q^5 + 556x^6y^9q^4 + 38x^6y^9q^3 \\
& + 1585x^7y^8q^5 + 94x^7y^8q^4 + 1040x^7y^8q^3 + 4x^7y^8q^2 \\
& + 4x^7y^8q^3 + 93x^7y^8q^4 + 10x^8y^7q^5 + 1181x^8y^7q^4 \\
& + 216x^8y^7q^3 + 1965x^8y^7q^2 + 26x^8y^7q^3 + 671x^8y^7q^2 \\
& + 9x^9y^6q^5 + 18x^9y^6q^4 + 48x^9y^6q^3 + 941x^9y^6q^2 \\
& + 438x^9y^6q^3 + 9x^9y^6q^2 + 1380x^9y^6q^2 + 42x^9y^6q^2 \\
& + 1021x^9y^6q + 18x^{10}y^5q^4 + 10x^{10}y^5q^3 + 183x^{10}y^5q^2 \\
& + 2x^{10}y^5q^3 + 761x^{10}y^5q^2 + 290x^{10}y^5q^2 + 26x^{10}y^5q^2 \\
& + 1147x^{10}y^5q + 15x^{11}y^4q^3 + 30x^{11}y^4q^2 + 420x^{11}y^4q^2 \\
& + 7x^{11}y^4q^2 + 4x^{11}y^4q + 721x^{11}y^4q + 147x^{11}y^4q \\
& + 6x^{12}y^3q^2 + 18x^{12}y^3q^2 + 4x^{12}y^3q^2 + 7x^{12}y^3q \\
& + 383x^{12}y^3q + 24x^{12}y^3q + 105x^{13}y^2q \\
& + 15x^{14}yq + x^{15}q] \\
\frac{e^{K'}(x'q)}{e^{K'}(y'q^2)} = & \frac{e^{15K} [y^{15}q^{12} + 13xy^{14}q^{11} + 2xy^{14}q^{10} + 78x^2y^{13}q^{10} \\
& + 26x^2y^{13}q^9 + x^2y^{13}q^8 + 283x^3y^{12}q^9 + 156x^3y^{12}q^8 \\
& + 13x^3y^{12}q^7 + 2x^4y^{11}q^9 + 675x^4y^{11}q^8 + 2x^4y^{11}q^8] }{ }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 564x^4y^{11}q^7 + 76x^4y^{11}q^6 + 18x^5y^{10}q^8 + 1060x^5y^{10}q^7 \\
& + 20x^5y^{10}q^6 + 1334x^5y^{10}q^5 + 283x^5y^{10}q^4 + 65x^6y^9q^7 \\
& + 1159x^6y^9q^6 + 174x^6y^9q^5 + 1830x^6y^9q^4 + 23x^6y^9q^3 \\
& + 655x^6y^9q^2 + x^7y^8q^7 + 2x^7y^8q^6 + 130x^7y^8q^5 \\
& + 458x^7y^8q^4 + x^7y^8q^3 + 1838x^7y^8q^2 + 102x^7y^8q \\
& + 1176x^7y^8q^3 + 6x^8y^7q^5 + 174x^8y^7q^4 + 20x^8y^7q^3 \\
& + 13x^8y^7q^2 + 372x^8y^7q + 8x^8y^7q^4 + 661x^8y^7q^3 \\
& + 97x^8y^7q^2 + 922x^8y^7q + 6x^9y^6q^5 + 2x^9y^6q^4 \\
& + 12x^9y^6q^3 + 358x^9y^6q^2 + 35x^9y^6q + 217x^9y^6q^2 \\
& + 53x^9y^6q + 416x^9y^6q + 2x^{10}y^5q^4 + 2x^{10}y^5q^3 \\
& + 4x^{10}y^5q^2 + 338x^{10}y^5q + 112x^{10}y^5q^2 + 47x^{10}y^5q \\
& + 61x^{10}y^5q + 8x^{11}y^4q^2 + 13x^{11}y^4q + x^{12}y^3q^2 \\
& + 2x^{12}y^3q^2]
\end{aligned}$$

(4.11 ก)

พิจารณาจำนวนภาค

$$\begin{aligned}
e^{15k} [& 3x^3y^{12} + 38x^4y^{11} + 6x^4y^{11} \\
& + 209x^5y^{10} + 76x^5y^{10} + 3x^5y^{10}q + 8x^6y^9q \\
& + 485x^6y^9 + 12x^6y^9q + 556x^6y^9 + 38x^6y^9 \\
& + 1585x^7y^8 + 94x^7y^8q + 1040x^7y^8 + 4x^7y^8q \\
& + 4x^7y^8q + 93x^7y^8q + 10x^8y^7q^2 + 1181x^8y^7 \\
& + 216x^8y^7q + 1965x^8y^7 + 26x^8y^7q + 671x^8y^7 \\
& + 9x^9y^6q^2 + 18x^9y^6q + 48x^9y^6q^2 + 941x^9y^6 \\
& + 438x^9y^6q + 9x^9y^6q^2 + 1380x^9y^6 + 42x^9y^6q \\
& + 1021x^9y^6 + 18x^{10}y^5q^2 + 10x^{10}y^5q^3 + 183x^{10}y^5q \\
& + 2x^{10}y^5q^3 + 761x^{10}y^5 + 290x^{10}y^5q + 26x^{10}y^5q^2 \\
& + 1147x^{10}y^5q + 15x^{11}y^4q^2 + 30x^{11}y^4q^3 + 420x^{11}y^4q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 7x^{11}y^4q^3 + 4x^{11}y^4 + 721x^{11}y^4q + 147x^{11}y^4q^2 \\
& + 6x^{12}y^3q^2 + 18x^{12}y^3q^3 + 4x^{12}y^3q^4 + 7x^{12}y^3q \\
& + 383x^{12}y^3q^2 + 24x^{12}y^3q^3 + x^{13}y^2q^2 + 26x^{13}y^2q^3 \\
& + 78x^{13}y^2q^4 + 2x^{14}yq^4 + 13x^{14}yq^5 + x^{15}q^6] \\
\frac{e^{K'}(x')}{e^{K'}(y')} = & \frac{e^{15K} [y^{15} + 13xy^{14} + 2xy^{14} + 78x^2y^{13} \\
& + 26x^2y^{13} + x^2y^{13} + 283x^3y^{12} + 156x^3y^{12} \\
& + 13x^3y^{12} + 2x^4y^{11}q + 675x^4y^{11} + 2x^4y^{11}q \\
& + 564x^4y^{11} + 78x^4y^{11} + 18x^5y^{10}q + 1060x^5y^{10} \\
& + 20x^5y^{10}q + 1334x^5y^{10} + 283x^5y^{10} + 65x^6y^9q \\
& + 1159x^6y^9 + 174x^6y^9q + 1830x^6y^9 + 23x^6y^9q \\
& + 655x^6y^9 + x^7y^8q^2 + 2x^7y^8q^2 + 130x^7y^8 \\
& + 458x^7y^8q + x^7y^8q^2 + 1838x^7y^8 + 102x^7y^8q \\
& + 1176x^7y^8 + 6x^8y^7q^2 + 174x^8y^7q + 20x^8y^7q^2 \\
& + 13x^8y^7 + 372x^8y^7q + 8x^8y^7q^2 + 661x^8y^7 \\
& + 97x^8y^7q + 922x^8y^7q + 6x^9y^6q^2 + 2x^9y^6q \\
& + 12x^9y^6q^2 + 358x^9y^6q + 35x^9y^6q^2 + 217x^9y^6 \\
& + 53x^9y^6q + 416x^9y^6 + 2x^{10}y^5q^2 + 2x^{10}y^5q^3 \\
& + 4x^{10}y^5q^3 + 338x^{10}y^5 + 112x^{10}y^5q + 47x^{10}y^5q^2 \\
& + 61x^{10}y^5q + 8x^{11}y^4q^3 + 13x^{11}y^4q^2 + x^{12}y^3q^2 \\
& + 2x^{12}y^3q^4] }{ }
\end{aligned}$$

(4.11 ๒)

12. เปรียบเทียบเซลล์ขนาด $(\sqrt{9} / \sqrt{4})$ จะได้ผลการลำหักกับจุดจริง

พิจารณาจำนวนกลุ่ม

$$\begin{aligned}
& e^{15K} [3x^3y^{12}q^9 + 38x^4y^{11}q^8 + 6x^4y^{11}q^7 \\
& + 209x^5y^{10}q^7 + 76x^5y^{10}q^6 + 3x^5y^{10}q^5 + 8x^6y^9q^7 \\
& + 485x^6y^9q^6 + 12x^6y^9q^5 + 556x^6y^9q^4 + 38x^6y^9q^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1585x^7y^8q^5 + 94x^7y^8q^5 + 1040x^7y^8q^4 + 4x^7y^8q^4 \\
& + 4x^7y^8q^3 + 93x^7y^8q^5 + 10x^8y^7q^5 + 1181x^8y^7q^4 \\
& + 216x^8y^7q^4 + 1965x^8y^7q^3 + 26x^8y^7q^3 + 671x^8y^7q^2 \\
& + 9x^9y^6q^5 + 18x^9y^6q^4 + 48x^9y^6q^4 + 941x^9y^6q^3 \\
& + 438x^9y^6q^3 + 9x^9y^6q^3 + 1380x^9y^6q^2 + 42x^9y^6q^2 \\
& + 1021x^9y^6q + 18x^{10}y^5q^4 + 10x^{10}y^5q^4 + 183x^{10}y^5q^3 \\
& + 2x^{10}y^5q^3 + 761x^{10}y^5q^2 + 290x^{10}y^5q^2 + 26x^{10}y^5q^2 \\
& + 1147x^{10}y^5q + 15x^{11}y^4q^3 + 30x^{11}y^4q^3 + 420x^{11}y^4q^2 \\
& + 7x^{11}y^4q^2 + 4x^{11}y^4q + 721x^{11}y^4q + 147x^{11}y^4q \\
& + 6x^{12}y^3q^2 + 18x^{12}y^3q^2 + 4x^{12}y^3q^2 + 7x^{12}y^3q \\
& + 383x^{12}y^3q + 24x^{12}y^3q + 105x^{13}y^2q \\
& + 15x^{14}yq + x^{15}q] \\
& e^{6K'} [2x'^2y'^4q^4 \\
& + 8x'^3y'^3q^3 + 2x'^3y'^3q^2 \\
& + 5x'^4y'^2q^2 + 8x'^4y'^2q \\
& + x'^5y'q + 5x'^5y'q + x'^6q] \\
& e^{6K'} [y'^6q^6 + 5x'y'^5q^5 \\
& + x'y'^5q^4 + 8x'^2y'^4q^4 \\
& + 5x'^2y'^4q^3 + 4x'^3y'^3q^3 \\
& + 6x'^3y'^3q^2 + 4x'^4y'^2q^2 \\
& + x'^4y'^2q^2] \\
& e^{15K} [y'^{15}q^{12} + 13xy'^{14}q^{11} + 2xy'^{14}q^{10} + 78x^2y'^{13}q^{10} \\
& + 26x^2y'^{13}q^9 + x^2y'^{13}q^8 + 283x^3y'^{12}q^9 + 156x^3y'^{12}q^8 \\
& + 13x^3y'^{12}q^7 + 2x^4y'^{11}q^9 + 675x^4y'^{11}q^8 + 2x^4y'^{11}q^8 \\
& + 564x^4y'^{11}q^7 + 78x^4y'^{11}q^6 + 18x^5y'^{10}q^8 + 1060x^5y'^{10}q^7 \\
& + 20x^5y'^{10}q^6 + 1334x^5y'^{10}q^6 + 283x^5y'^{10}q^6 + 65x^6y'^9q^7 \\
& + 1159x^6y'^9q^6 + 174x^6y'^9q^6 + 1830x^6y'^9q^5 + 23x^6y'^9q^5 \\
& + 655x^6y'^9q^4 + x^7y'^8q^7 + 2x^7y'^8q^6 + 130x^7y'^8q^5 \\
& + 458x^7y'^8q^5 + x^7y'^8q^5 + 1838x^7y'^8q^4 + 102x^7y'^8q^4 \\
& + 1176x^7y'^8q^3 + 6x^8y'^7q^6 + 174x^8y'^7q^5 + 20x^8y'^7q^5 \\
& + 13x^8y'^7q^4 + 372x^8y'^7q^4 + 8x^8y'^7q^4 + 661x^8y'^7q^3 \\
& + 97x^8y'^7q^3 + 922x^8y'^7q^2 + 6x^9y'^6q^5 + 2x^9y'^6q^4 \\
& + 12x^9y'^6q^4 + 358x^9y'^6q^3 + 35x^9y'^6q^3 + 217x^9y'^6q^2 \\
& + 53x^9y'^6q^2 + 416x^9y'^6q + 2x^{10}y'^5q^4 + 2x^{10}y'^5q^4 \\
& + 4x^{10}y'^5q^3 + 338x^{10}y'^5q^2 + 112x^{10}y'^5q^2 + 47x^{10}y'^5q^2]
\end{aligned}$$

$$+ 61x^{10}y^5q + 8x^{11}y^4q^2 + 13x^{11}y^4q + x^{12}y^3q^2 \\ + 2x^{12}y^3q^2]$$

(4.12 ก)

พิจารณาจำนวนวงโคจร

$$\begin{aligned} & e^{15K} [3x^3y^{12} + 38x^4y^{11} + 6x^4y^{11} \\ & + 209x^5y^{10} + 76x^5y^{10} + 3x^5y^{10}q + 8x^6y^9q \\ & + 485x^6y^9 + 12x^6y^9q + 556x^6y^9 + 38x^6y^9 \\ & + 1585x^7y^8 + 94x^7y^8q + 1040x^7y^8 + 4x^7y^8q \\ & + 4x^7y^8q + 93x^7y^8q + 10x^8y^7q^2 + 1181x^8y^7 \\ & + 216x^8y^7q + 1965x^8y^7 + 26x^8y^7q + 671x^8y^7 \\ & + 9x^9y^6q^2 + 18x^9y^6q + 48x^9y^6q^2 + 841x^9y^6 \\ & + 438x^9y^6q + 9x^9y^6q^2 + 1380x^9y^6 + 42x^9y^6q \\ & + 1021x^9y^6 + 18x^{10}y^5q^2 + 10x^{10}y^5q^3 + 183x^{10}y^5q \\ & + 2x^{10}y^5q^3 + 761x^{10}y^5 + 290x^{10}y^5q + 26x^{10}y^5q^2 \\ & + 1147x^{10}y^5q + 15x^{11}y^4q^2 + 30x^{11}y^4q^3 + 420x^{11}y^4q^2 \\ & + 7x^{11}y^4q^3 + 4x^{11}y^4 + 721x^{11}y^4q + 147x^{11}y^4q^2 \\ & + 6x^{12}y^3q^2 + 18x^{12}y^3q^3 + 4x^{12}y^3q^4 + 7x^{12}y^3q \\ & + 383x^{12}y^3q^2 + 24x^{12}y^3q^3 + x^{13}y^2q^2 + 26x^{13}y^2q^3 \\ & + 4x^{15}y' + 2x^{15}y'q + x^{16}q] \\ & + 78x^{13}y^2q^4 + 2x^{14}yq^4 + 13x^{14}yq^5 + x^{15}q^6] \\ & e^{9K'} [2x'^2y'^4 \\ & + 10x'^3y'^3 + 13x'^4y'^2 \\ & + 4x'^5y' + 2x'^5y'q + x'^6q] \\ & e^{9K'} [y'^6 + 6x'y'^5 \\ & + 13x'^2y'^4 + 10x'^3y'^3 \\ & + x'^4y'^2 + x'^4y'^2q] \\ & e^{15K} [y^{15} + 13xy^{14} + 2xy^{14} + 78x^2y^{13} \\ & + 26x^2y^{13} + x^2y^{13} + 283x^3y^{12} + 156x^3y^{12} \\ & + 13x^3y^{12} + 2x^4y^{11}q + 675x^4y^{11} + 2x^4y^{11}q \\ & + 564x^4y^{11} + 78x^4y^{11} + 18x^5y^{10}q + 1060x^5y^{10} \\ & + 20x^5y^{10}q + 1334x^5y^{10} + 283x^5y^{10} + 65x^6y^9q \\ & + 1159x^6y^9 + 174x^6y^9q + 1830x^6y^9 + 23x^6y^9q \\ & + 665x^6y^9 + x^7y^8q^2 + 2x^7y^8q^2 + 130x^7y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 458x^7y^8q + x^7y^8q^2 + 1838x^7y^9 + 102x^7y^9q \\
& + 1176x^7y^9 + 6x^8y^7q^2 + 174x^8y^7q + 20x^8y^7q^2 \\
& + 13x^8y^7 + 372x^8y^7q + 8x^8y^7q^2 + 661x^8y^7 \\
& + 97x^8y^7q + 922x^8y^7q + 6x^9y^6q^2 + 2x^9y^6q \\
& + 12x^9y^6q^2 + 358x^9y^6q + 35x^9y^6q^2 + 217x^9y^6 \\
& + 53x^9y^6q + 416x^9y^6 + 2x^{10}y^5q^2 + 2x^{10}y^5q^3 \\
& + 4x^{10}y^5q^3 + 338x^{10}y^5q + 112x^{10}y^5q + 47x^{10}y^5q^2 \\
& + 61x^{10}y^5q + 8x^{11}y^4q^3 + 13x^{11}y^4q^2 + x^{12}y^3q^2 \\
& + 2x^{12}y^3q^4]
\end{aligned}$$

(4.12 ข)

ผลการคำนวณแสดงไว้ในตาราง 11

4.2 วิธีคำนวณค่าครรหนิวกตเชิงความร้อน

การคำนวณค่าครรหนิวกตเชิงความร้อน สามารถทำได้โดยอาศัยสมการ (4.1) ถึงสมการ (4.12) สำหรับเซลล์ขนาดต่าง ๆ ประกอบกับสมการ (3.7) ที่กำหนดนิยามของค่าครรหนิวกตเชิงความร้อน ผลการคำนวณปรากฏดังแสดงในตาราง 11

4.3 วิธีคำนวณค่ามิติแฟรกทัล

การคำนวณค่ามิติแฟรกทัล ทำได้โดยนับตำแหน่งผลตกในกล่องข้ามฟากที่ใหญ่ที่สุด และโดยอาศัยข้อมูลจากตาราง 1 ถึงตาราง 10 คัดเฉพาะกราฟที่เชื่อมต่อยข้ามฟากของเซลล์ ประกอบกับสมการ (3.8) ที่กำหนดความหมายของมิติแฟรกทัล ผลการคำนวณแสดงไว้ในตาราง 11

4.4 วิธีคำนวณค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงคัสเซ

จากข้อมูลในตาราง 1 ถึงตาราง 10 คัดเฉพาะส่วนของกราฟที่เชื่อมต่อข้ามฟาก และอาศัยสมการ (3.9) ซึ่งเปรียบระหว่างเซลล์ขนาดต่าง ๆ กับเซลล์ขนาด 1x1 สปิน จะ

ทำให้คำนวณค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากเชิงพื้นที่ ผลการคำนวณปรากฏ
ดังแสดงในตาราง 12

4.5 วิธีคำนวณพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปีน

พลังงานอิสระต่อหนึ่งสปีน หาได้โดยหาค่าพลังงานเฉลี่ย K'_0 จากสมการวินเทอร์มัล
ไลเซชันกรุป (3.6ก) แล้วนำค่า K'_0 นี้ไปคำนวณในสมการ (3.13) โดยอาศัยข้อมูลจาก
ตาราง 1 ถึงตาราง 10 จะทำให้หาค่าพลังงานอิสระต่อสปีนได้ ผลการคำนวณแสดงในตาราง

บทที่ 5

ผลการวิจัย สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

แบบจำลองพอตส์ และ แบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อเชิงสถานะแบบมีสหสัมพันธ์ มีความสัมพันธ์ที่แน่นชัดซึ่งกันและกัน ดังที่แสดงให้เห็นในบทที่ 2 กล่าวคือ

1. ค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็ก M เกี่ยวข้องกับ ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้าม ฟาก P ตามความสัมพันธ์

$$M = jP \quad (5.1)$$

ในเมื่อ $j = \frac{q-1}{2}$ โดย q คือ จำนวนค่าของสปินแบบพอตส์

2. สภาพรับไว้ได้เชิงแม่เหล็ก X เกี่ยวข้องกับ ขนาดเฉลี่ยของกลุ่มนับได้ ตามความสัมพันธ์

$$X = AS \quad (5.2)$$

ในเมื่อ

$$A = (q^2 - 1)/12$$

และ

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{\substack{\alpha' \in \alpha \\ \text{แทนขนาดเฉลี่ยของกลุ่มนับได้}}} \pi(G', p, q) \sum_c n_c^2(G')/N$$

3. พลังงานภายในของระบบ U เกี่ยวข้องกับ จำนวนพันธะเฉลี่ยตามความสัมพันธ์

$$U = \frac{Jz}{2p} \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \sum_{\alpha' \in \alpha} \pi(G', p, q) \left(\frac{b(G')}{E} \right) \quad (5.3)$$

ในเมื่อ

J แทน อันตรกิริยาแบบแม่เหล็กเฟอร์ระหว่างสปินที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

z แทน จำนวนตำแหน่งแลตทิซที่อยู่ใกล้กันเป็นอันดับหนึ่ง

$b(G')$ แทน จำนวนพันธะในกราฟย่อย G'

E แทน จำนวนพันธะทั้งหมดในกราฟ G

4. ความจุความร้อน C_h เกี่ยวข้องกับความแปรปรวนของพันธะ ตามความสัมพันธ์

$$C_h = \frac{k_B K^2}{p^2} \left\{ \left[-\frac{z}{2} (1-p)\bar{p} \right] + \langle (\delta b(G'))^2 \rangle \right\} \quad (5.4)$$

ในเมื่อ

$$K = \beta J \quad \text{โดย} \quad \beta = 1/k_B T$$

$$\bar{p} = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \pi(G', p, q) (b(G')/E) \quad \text{แทน จำนวนพันธะเฉลี่ย}$$

$$\langle (\delta b(G'))^2 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{-1} \left[b(G') - [b(G')]_{av} \right]^2$$

แทนความแปรปรวนของพันธะ

อันตรกิริยาวิกฤต , ครรชนวิฤตเชิงความร้อน , มิติแฟรกทัล

การหาค่าอันตรกิริยาวิกฤต , ครรชนวิฤตเชิงความร้อน และ มิติแฟรกทัล ของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อแบบมีสหพันธ์ คำนวณตามขั้นตอนที่ 4.1, 4.2 และ 4.3 ในบทที่ 4 โดยเปรียบเทียบเซลล์ที่มีขนาดต่าง ๆ กัน และใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ภาษาเบสิก (BASIC) ดังที่แสดงในภาคผนวก ข ค่าอันตรกิริยาวิกฤต K_c , ครรชนวิฤตเชิงความร้อน Y_T และ มิติแฟรกทัล d' ที่คำนวณได้แสดงไว้ในตาราง 11-ก กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ และ ตาราง 11-ข กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว

ตาราง 11-ก ค่าอันตรกิริยาวิกฤต , ครรชนวิฤตเชิงความร้อน และ มิตินพวกตัล
ของเซลล์ขนาดต่าง ๆ การแก้ไขเงื่อนไขขอบเขตอิสระ

$\lambda_1:\lambda_2$	q	จำนวนกลุ่ม			จำนวนวงปิด		
		K_c	Y_T	d'	K_c	Y_T	d'
2:1	1	0.6931	0.7199	1.2384	0.6931	0.7198	1.2384
	2	1.0433	0.7662	1.2356	1.0431	0.7689	1.2356
	3	1.2776	0.7932	1.2339	1.2774	0.7898	1.2339
	4	1.4537	0.8387	1.2329	1.4535	0.8451	1.2328
	5	1.5946	0.8673	1.2321	1.5947	0.8745	1.2321
$\sqrt{6}:1$	1	0.3613	0.6867	1.0820	0.3613	0.6867	1.0820
	2	0.6134	0.7042	1.0821	0.6135	0.6984	1.0821
	3	0.8065	0.7088	1.0823	0.8063	0.7233	1.0822
	4	0.9621	0.7349	1.0825	0.9618	0.7484	1.0824
	5	1.0921	0.7597	1.0827	1.0920	0.7779	1.0827
$\sqrt{8}:1$	1	0.2522	0.6356	0.9892	0.2522	0.6356	0.9892
	2	0.4499	0.6550	0.9896	0.4498	0.6446	0.9895
	3	0.6119	0.6225	0.9899	0.6120	0.6448	0.9899
	4	0.7491	0.6603	0.9903	0.7491	0.6667	0.9903
	5	0.8677	0.6792	0.9907	0.8677	0.6579	0.9907
3:1	1	0.6826	0.6841	1.3845	0.6820	0.6841	1.3843
	2	1.0114	0.7591	1.3808	1.0109	0.7658	1.3805
	3	1.2245	0.8173	1.3787	1.2234	0.8241	1.3783
	4	1.3807	0.8687	1.3773	1.3793	0.8548	1.3768

ตาราง 11-ก (ต่อ)

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	จำนวนกลุ่ม			จำนวนวงปิด		
		K_c	Y_T	d'	K_c	Y_T	d'
$\sqrt{12}:1$	5	1.5037	0.9043	1.3763	1.5023	0.9089	1.3858
	1	0.5829	0.5869	1.3805	0.5829	0.5869	1.3805
	2	0.9173	0.6058	1.3889	0.9171	0.6139	1.3888
	3	1.1394	0.6767	1.3912	1.1391	0.6536	1.3913
	4	1.3005	0.7017	1.3910	1.2990	0.7131	1.3910
3:2	5	1.4250	0.7579	1.3888	1.4210	0.7621	1.3889
	1	0.6698	0.7095	1.6379	0.6700	0.7095	1.6379
	2	0.9768	0.8039	1.6454	0.9768	0.7640	1.6388
	3	1.1702	0.8933	1.6426	1.1702	0.8518	1.6417
	4	1.3112	0.9301	1.6452	1.3111	0.9715	1.6451
$\sqrt{12}:2$	5	1.4221	1.0093	1.6488	1.4221	0.9939	1.6488
	1	0.4657	0.5717	1.5562	0.5829	0.6865	1.6241
	2	0.7649	0.5919	1.5648	0.9171	0.6622	1.6409
	3	0.9752	0.5671	1.5682	1.1393	0.7702	1.6496
	4	1.1316	0.6062	1.5680	1.3005	0.8286	1.6547
	5	1.2535	0.6728	1.5658	1.4250	0.9711	1.6580

ตาราง 11-ข ค่าอันตรกิริยาวิกฤต , ครรชนวิฤตเชิงความร้อน และ มิตินพรกัตลของ
เซลล์ขนาดต่าง ๆ กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว

$\lambda_1:\lambda_2$	q	จำนวนกลุ่ม			จำนวนวงปิด		
		K_c	Y_T	d'	K_c	Y_T	d'
2:1	1	0.6931	0.7199	1.3487	0.6931	0.7199	1.3487
	2	1.0339	0.7624	1.2951	0.9554	0.8911	1.3442
	3	1.2726	0.8689	1.2535	1.1125	0.9999	1.3437
	4	1.4567	0.9100	1.2430	1.2515	1.0856	1.3446
	5	1.6064	0.9523	1.2375	1.3527	1.1468	1.3461
$\sqrt{6}:1$	1	0.3613	0.6337	1.1976	0.3613	0.6201	1.1985
	2	0.5983	0.6910	1.1040	0.6048	0.7065	1.2091
	3	0.7853	0.7044	1.0650	0.7745	0.8031	1.2129
	4	0.9429	0.7331	1.0440	0.9050	0.8865	1.2170
	5	1.0780	0.7401	1.0312	1.0107	0.9497	1.2216
$\sqrt{8}:1$	1	0.2517	0.6223	1.0944	0.2516	0.6178	1.0939
	2	0.4483	0.6435	1.0058	0.4437	0.6533	1.0984
	3	0.6119	0.6353	0.9676	0.5983	0.6887	1.1036
	4	0.7527	0.6477	0.9467	0.7231	0.7191	1.1081
	5	0.8759	0.6357	0.9335	0.8296	0.7739	1.1131
3:1	1	0.6826	0.6873	1.4707	0.6826	0.6873	1.4708
	2	0.9792	0.8651	1.4262	0.9825	0.8697	1.4714
	3	1.1996	0.9729	1.4153	1.1674	1.0117	1.4726
	4	1.3719	1.0203	1.4139	1.2983	1.1264	1.4745

ตาราง 11-๗ (ต่อ)

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	จำนวนกลุ่ม			จำนวนวงปิด		
		K_c	Y_T	d'	K_c	Y_T	d'
3:2	5	1.5123	1.0966	1.4158	1.3981	1.2222	1.4769
	1	0.5915	0.5131	1.6527	0.4887	0.7065	1.6837
	2	0.9281	0.9749	1.6701	0.4667	0.9013	1.6800
	3	1.1348	1.0676	1.6863	0.4387	1.0983	1.6801
	4	1.2987	1.2138	1.7074	0.4125	1.2396	1.6831
	5	1.4330	1.2490	1.7087	0.3898	1.3921	1.6878

ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก

การหาความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากของแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อแบบมีสหสัมพันธ์ คำนวณตามขั้นตอน 4.4 ซึ่งคำนวณโดยใช้โปรแกรมภาษาเบสิก ดังแสดงไว้ในภาคผนวก ข ผลที่ได้แสดงไว้ใน ตาราง 12 ทั้งในกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ และ กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีค่าบังคับด้วย

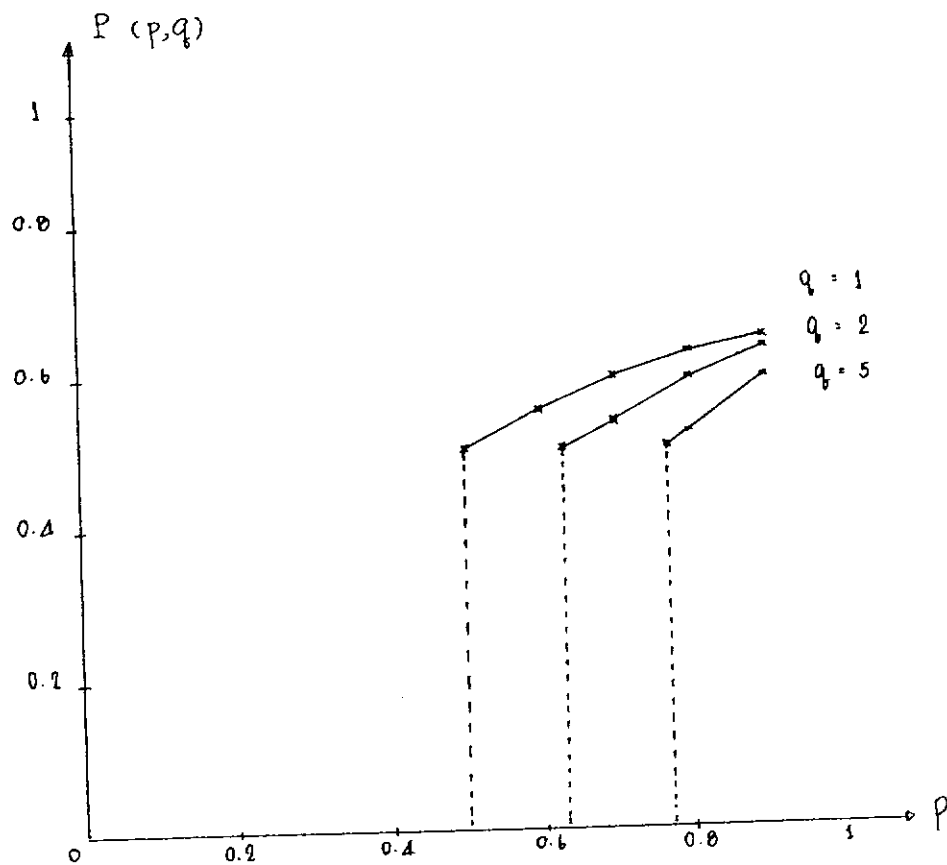
ตาราง 12 ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก

$\lambda_1 = \lambda_2$	q	p	ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก			
			เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีความดันเคียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
2:1	1	0.5	0.5898	0.5898	0.6367	0.6367
		0.6	0.6242	0.6242	0.6727	0.6727
		0.7	0.6579	0.6579	0.7034	0.7034
		0.8	0.6907	0.6907	0.7278	0.7278
		0.9	0.7221	0.7221	0.7441	0.7441
	2	0.5	0.5330	0.5964	0.5455	0.6594
		0.6	0.5699	0.6319	0.5912	0.6966
		0.7	0.6103	0.6653	0.6426	0.7235
		0.8	0.6544	0.6960	0.6949	0.7400
		0.9	0.7013	0.7242	0.7356	0.7480
	5	0.5	0.4644	0.6108	0.4538	0.7023
		0.6	0.4950	0.6458	0.4827	0.7288
		0.7	0.5351	0.6758	0.5254	0.7420
		0.8	0.5891	0.7019	0.5955	0.7476
		0.9	0.6593	0.7259	0.6987	0.7496
3:1	1	0.5	0.5108	0.5108	0.5616	0.5616
		0.6	0.5534	0.5534	0.6045	0.6038
		0.7	0.5935	0.5935	0.6355	0.6350
		0.8	0.6257	0.6257	0.6552	0.6551

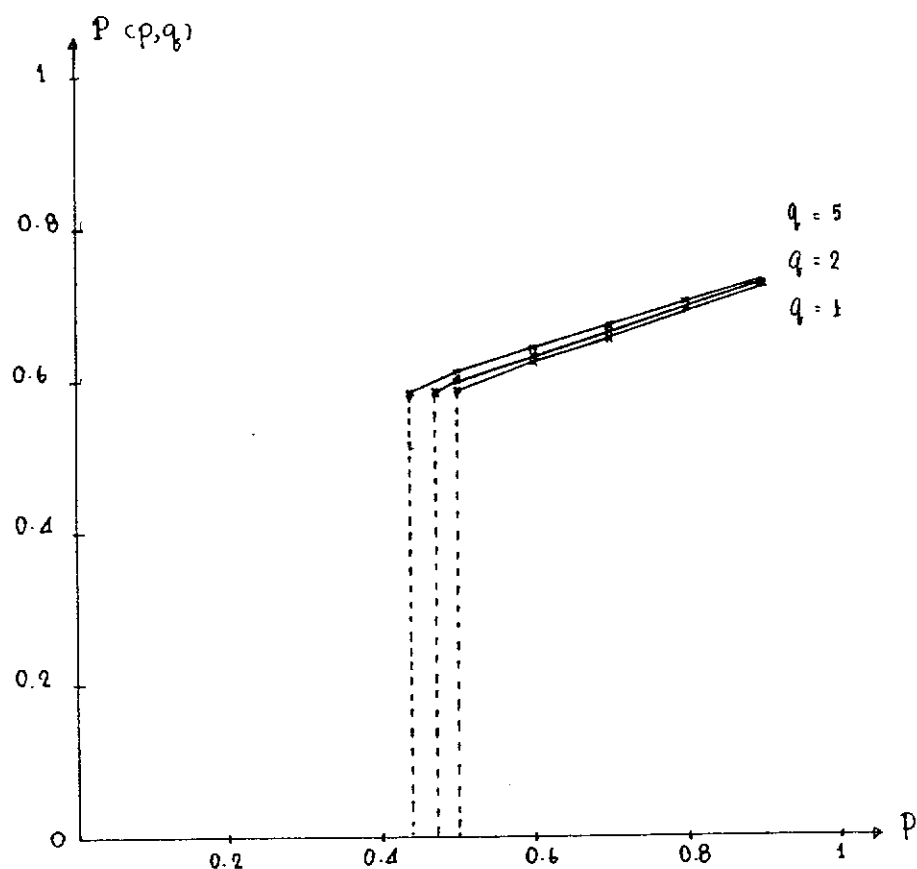
ตาราง 12 (ต่อ)

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	p	ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก			
			เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
	2	0.9	0.6485	0.6458	0.6649	0.6649
		0.5	0.4422	0.5217	0.4544	0.5854
		0.6	0.4888	0.5653	0.5161	0.6301
		0.7	0.5389	0.6021	0.5832	0.6540
		0.8	0.5909	0.6291	0.6369	0.6636
	5	0.9	0.6331	0.6491	0.6625	0.6664
		0.5	0.3487	0.5478	0.3370	0.6421
		0.6	0.3934	0.5859	0.3812	0.6602
		0.7	0.4499	0.6122	0.4423	0.6650
		0.8	0.5212	0.6320	0.5513	0.6664
		0.9	0.5983	0.6497	0.6504	0.6666

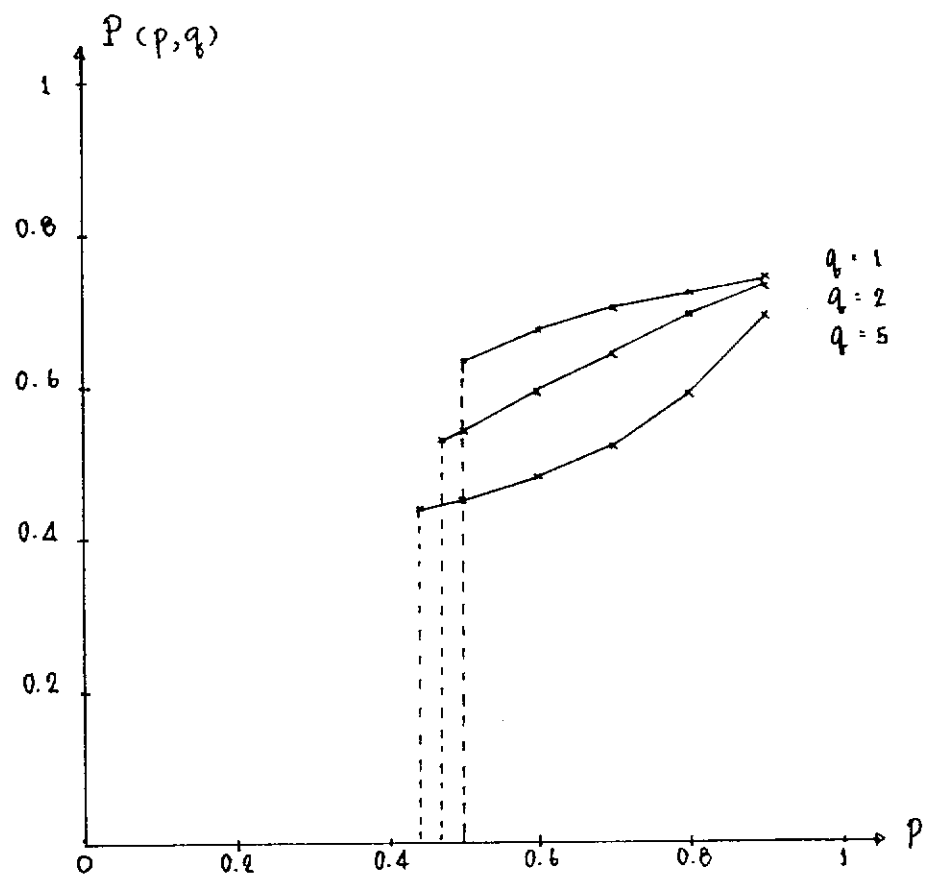
ผลจากตาราง 12 นำมาแสดงเป็นกราฟได้ตั้งภาพประกอบ 6 ถึง ภาพประกอบ 13



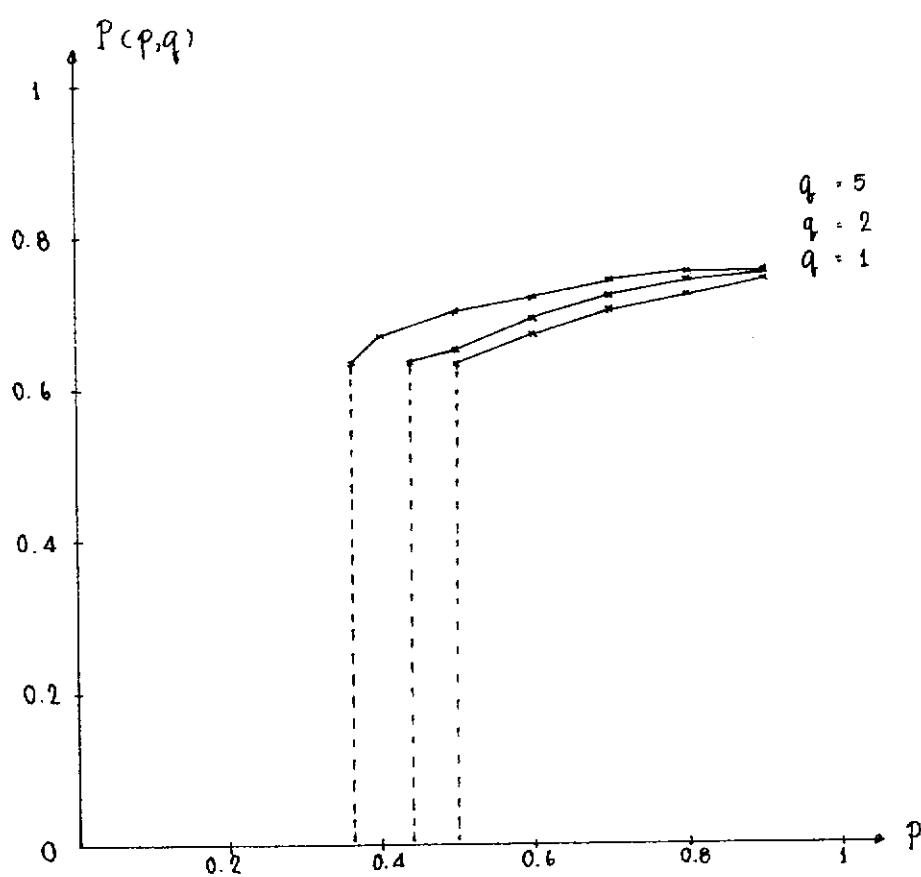
ภาพประกอบ 6 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับความน่าจะเป็นเชิงดัชนีการเชื่อมต่อ กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



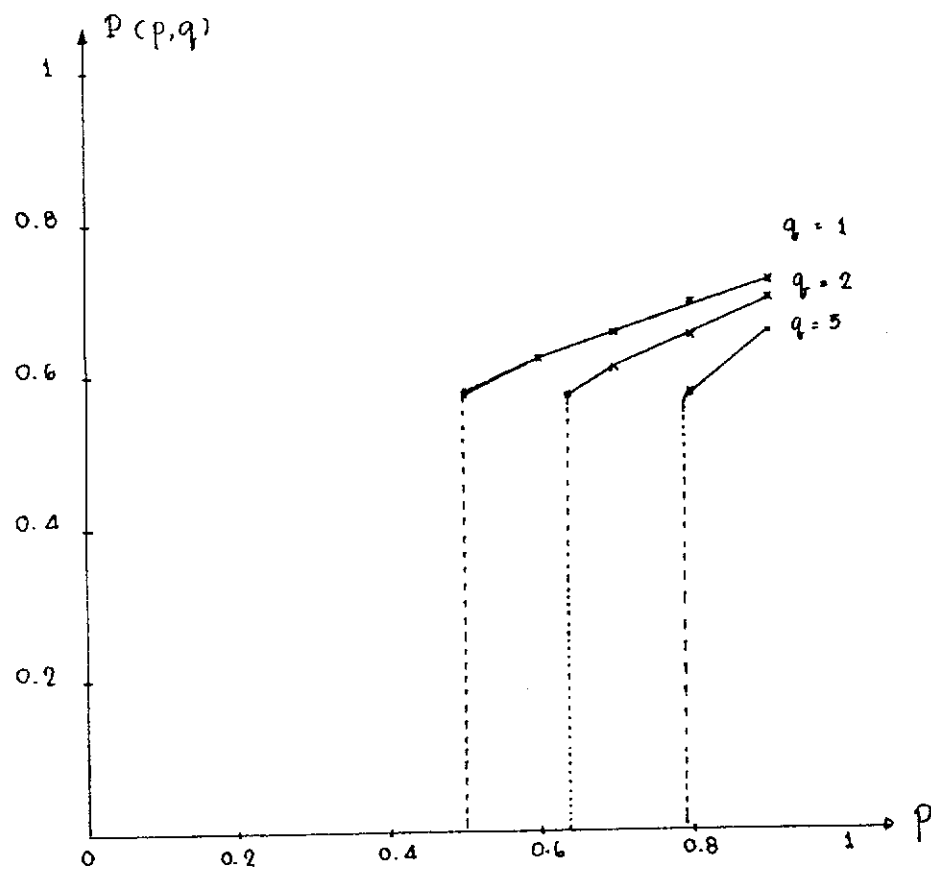
ภาพประกอบ 7 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก
กับความน่าจะเป็นเชิงพื้นที่ของการเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวน
วงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



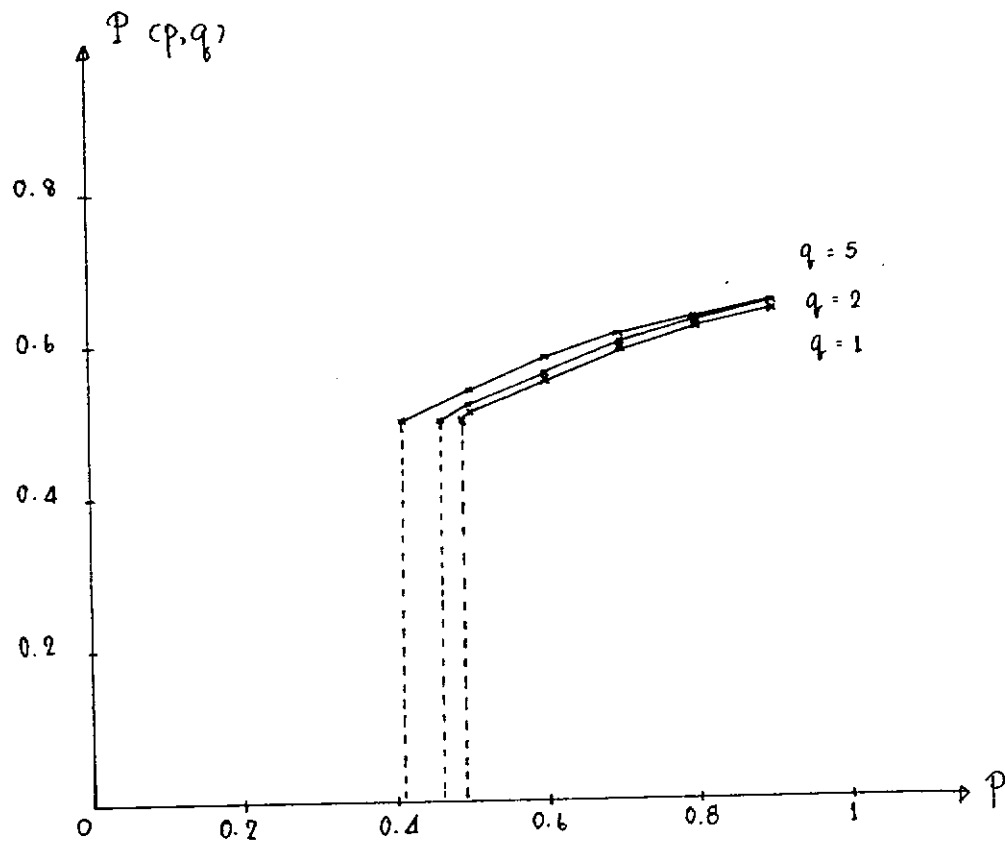
ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก กับความน่าจะเป็นเชิงฟังก์ชันการเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณา จำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



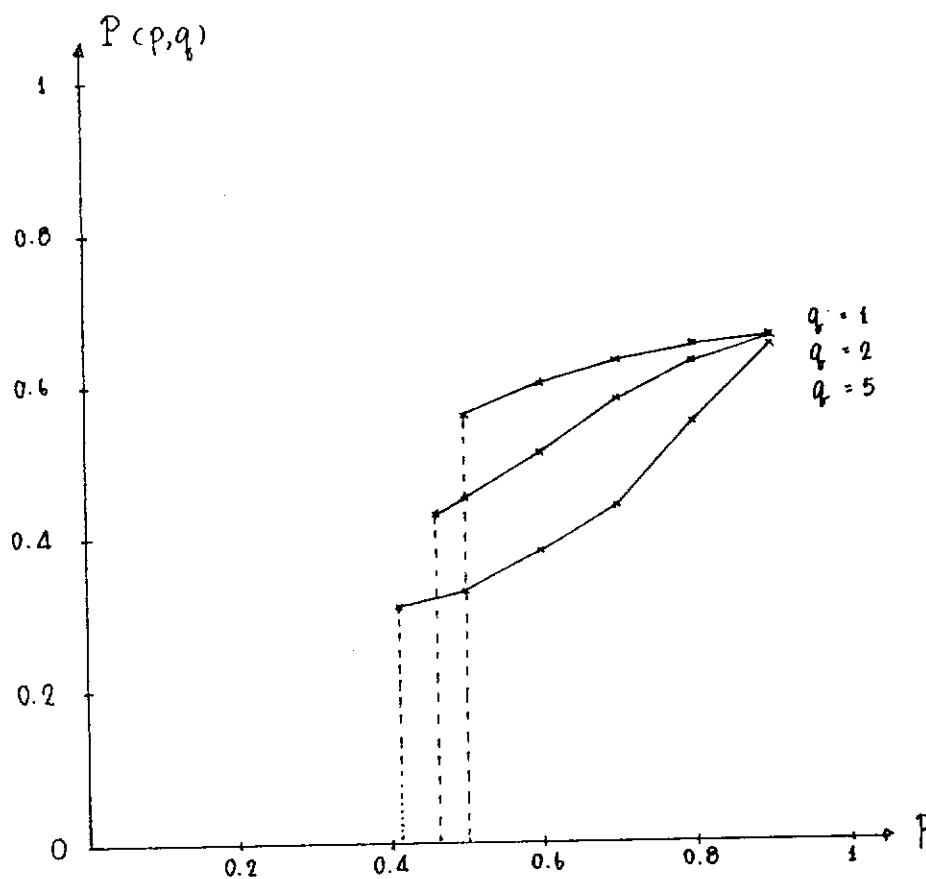
ภาพประกอบ 9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของการเชื่อมต่อข้ามฟาก กับความน่าจะเป็นเชิงหักเหของการเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณา จำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



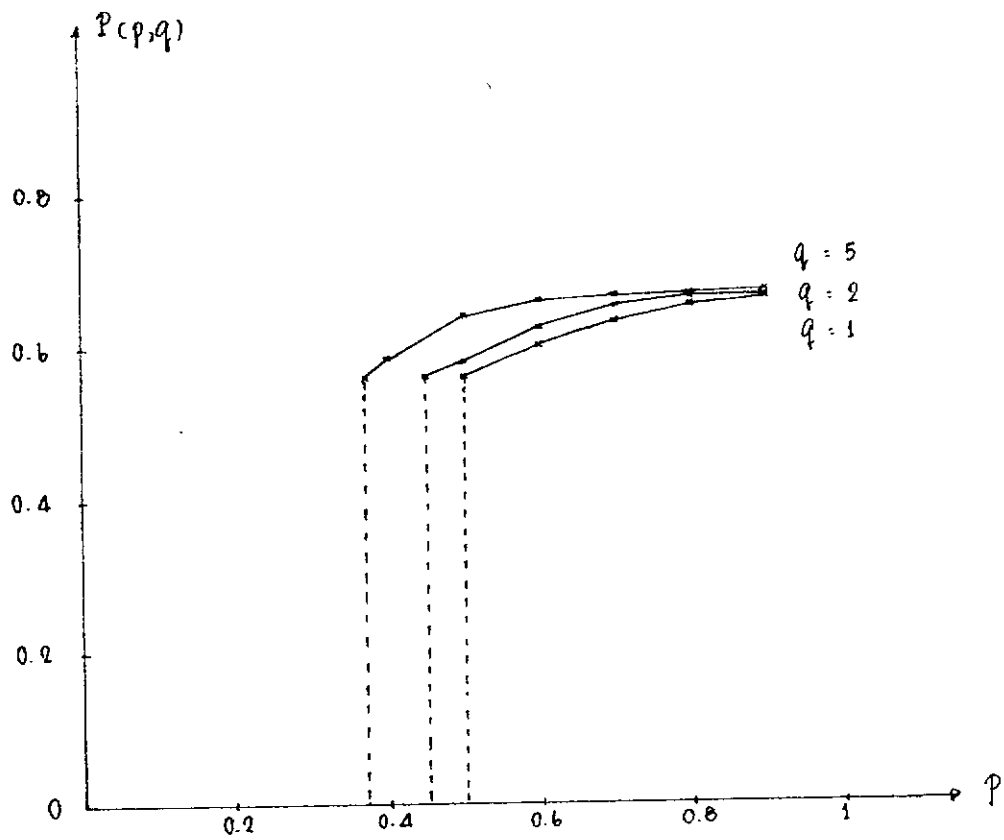
ภาพประกอบ 10 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก
กับความน่าจะเป็นเชิงพื้นที่การเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวน
กลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



ภาพประกอบ 11 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้าม
 พากกับค่าน่าจะเป็นเชิงทักษะการเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวน
 วงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



ภาพประกอบ 12 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก
กับความน่าจะเป็นเชิงพื้นที่การเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าทางด้านเดียว โดยพิจารณา
จำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



ภาพประกอบ 13 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก
กับความน่าจะเป็นเชิงทักษะการเชื่อมต่อ กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณา
จำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ $q = 1, 2, 5$

พลังงานอิสระของระบบต่อสปีน

การคำนวณค่าพลังงานอิสระของระบบต่อสปีนนับคำนวณตามขั้นตอนที่ 4.5 โดยใช้โปรแกรมภาษาเบสิก ซึ่งแสดงไว้ในภาคผนวก ข ในการคำนวณครั้งนี้ได้พิจารณา จำนวนค่าของสปีนแบบเฟอร์มิ (q) 5 ค่า คือ $q = 1$ ถึง 5 สำหรับเซลล์ 2:1, $\sqrt{6}$:1, $\sqrt{8}$:1, 3:1, $\sqrt{12}$:1, 3:2 และ $\sqrt{12}$:2 โดยพิจารณาทั้งจำนวนกลุ่ม และ จำนวนวงปิด โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ และ เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว

เนื่องด้วย เมื่อนำผลการคำนวณมาวิเคราะห์แล้วทุกกรณี ปรากฏว่า กราฟ f กับ K มีลักษณะคล้ายคลึงกัน ดังนั้น จึงนำผลเฉพาะเซลล์ λ_1 / λ_2 เป็น 2:1, 3:1 และ 3:2 มาแสดงสำหรับ $q=1, 2$ และ 5 แสดงในตาราง 13 และ แสดงผลด้วยกราฟ f กับ K

ตาราง 13 พลังงานอิสระของระบบต่อสปีน

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	K	เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
2:1	1	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		1.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
		1.5	3.0000	3.0000	3.0000	3.0000
		2.0	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
		2.5	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
	2	0.0	0.5634	0.0128	0.5103	0.0016
		0.5	1.4923	1.0128	1.4806	1.0016
		1.0	2.4675	2.0128	2.4175	2.0016

ตาราง 13 (ต่อ)

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	K	เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
3:1	5	1.5	3.4504	3.0128	3.3710	3.0016
		2.0	4.4375	4.0128	4.3492	4.0016
		2.5	5.4276	5.0128	5.3370	5.0016
		0.0	1.1802	0.0799	1.0562	0.0059
		0.5	2.0240	1.0799	2.0378	1.0059
		1.0	2.9704	2.0799	2.9450	2.0059
		1.5	3.9330	3.0799	3.8261	3.0059
		2.0	4.9037	4.0799	4.7289	4.0059
		2.5	5.8799	5.0799	5.6788	5.0059
		0.0	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000
	1	0.5	1.0000	0.9999	0.9999	1.0000
		1.0	2.0000	1.9999	1.9999	2.0000
		1.5	3.0000	2.9999	2.9999	3.0000
		2.0	4.0000	3.9999	3.9999	4.0000
		2.5	5.0000	4.9999	4.9999	5.0000
		0.0	0.3534	0.0247	0.3046	0.0014
		0.5	1.3290	1.0247	1.2980	1.0014
		1.0	2.3111	2.0247	2.2615	2.0014
		1.5	3.3054	3.0247	3.2353	3.0014
		2.0	4.3008	4.0247	4.2276	4.0014
	2	0.0	0.3534	0.0247	0.3046	0.0014
		0.5	1.3290	1.0247	1.2980	1.0014
		1.0	2.3111	2.0247	2.2615	2.0014
		1.5	3.3054	3.0247	3.2353	3.0014

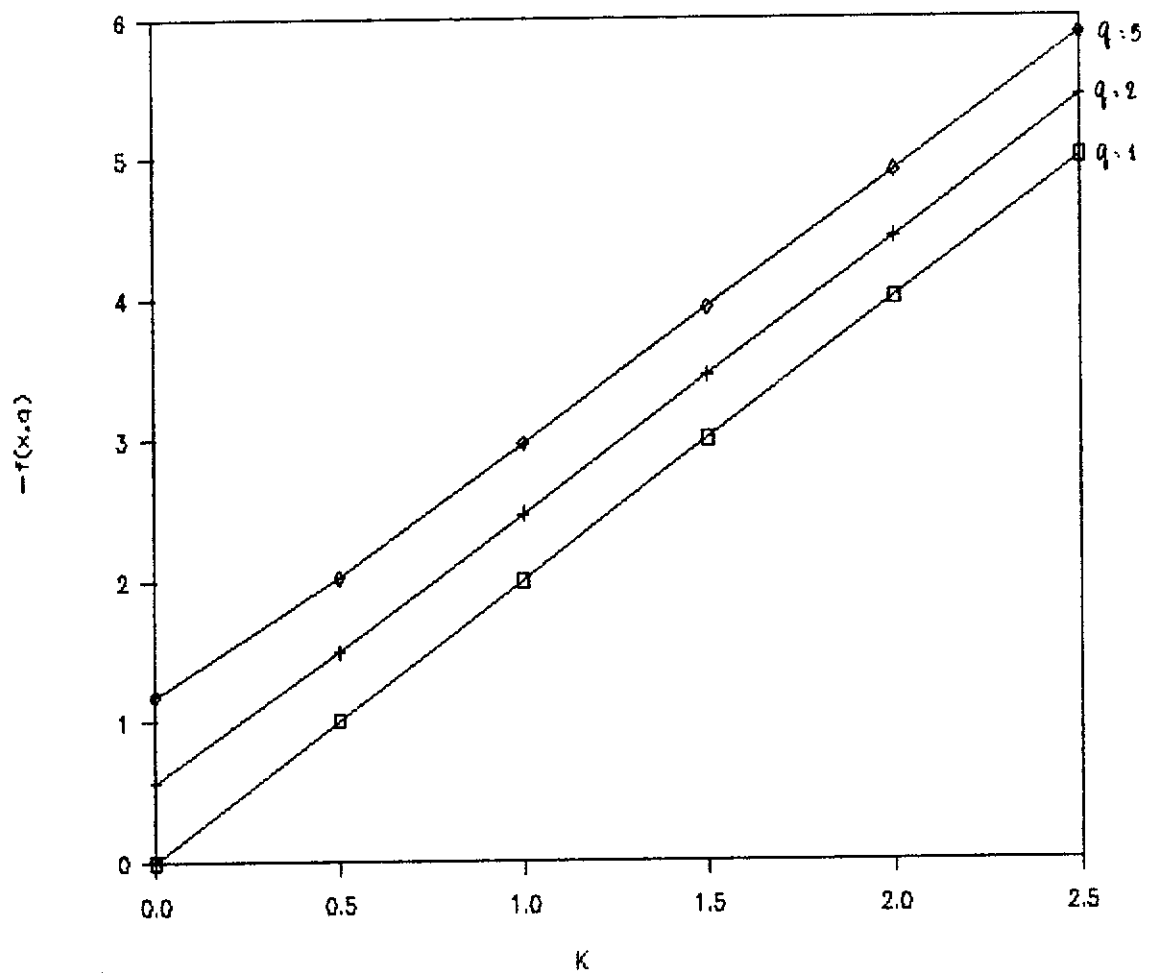
ตาราง 13 (ต่อ)

$\lambda_1 : \lambda_2$	q	K	เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีค่าบังคับเดียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
3:2	5	2.5	5.2972	5.0247	5.2276	5.0014
		0.0	0.6953	0.0629	0.5776	0.0270
		0.5	1.6140	1.0629	1.5776	1.0270
		1.0	2.5984	2.0629	2.5485	2.0270
		1.5	3.5875	3.0629	3.4706	3.0270
		2.0	4.5783	4.0629	4.4107	4.0207
		2.5	5.5704	5.0629	5.3987	5.0207
	1	0.0	0.0000	0.0000	0.0058	0.0000
		0.5	1.0000	1.0000	0.9942	1.0000
		1.0	2.0000	2.0000	1.9942	2.0000
		1.5	3.0000	3.0000	2.9942	3.0000
		2.0	4.0000	4.0000	3.9942	4.0000
		2.5	5.0000	5.0000	4.9942	5.0000
		0.0	0.1025	0.0175	0.0830	0.0016
	2	0.5	0.6962	0.7153	0.7798	0.6985
		1.0	2.0761	1.9967	2.0714	1.9886
		1.5	3.2646	3.1806	3.2900	3.2213
		2.0	4.4454	4.3606	4.3777	4.4365
		2.5	5.3721	5.5748	5.6977	5.7120
		0.0	0.1783	0.0394	0.1098	0.0098
	5	0.0	0.1783	0.0394	0.1098	0.0098

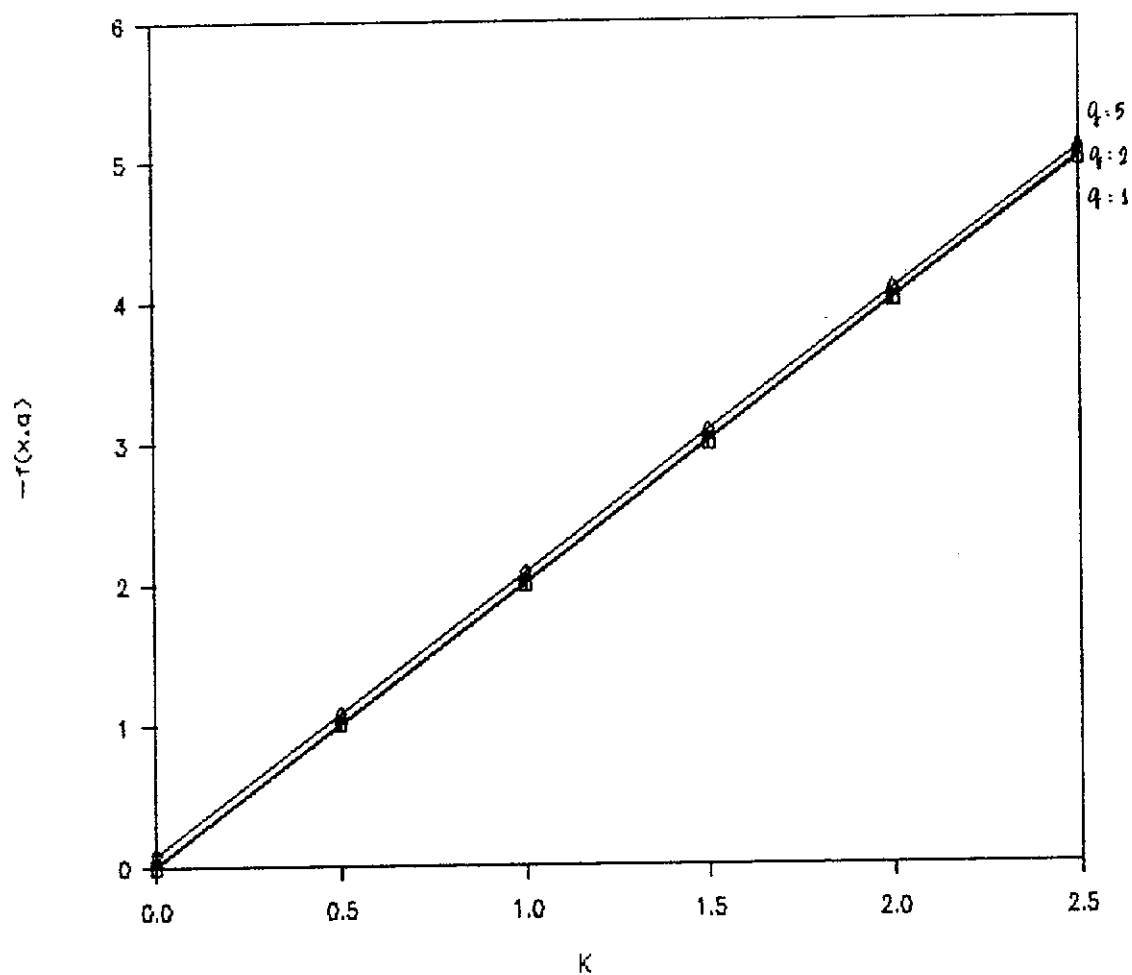
ตาราง 13 (ต่อ)

$\lambda_1 = \lambda_2$	q	K	เงื่อนไขขอบเขตอิสระ		เงื่อนไขขอบเขตมีค่าบังคับด้านเดียว	
			จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด	จำนวนกลุ่ม	จำนวนวงปิด
		0.5	0.5906	1.0394	1.1098	1.0098
		1.0	1.9190	1.7694	1.8301	1.7386
		1.5	3.1370	2.9967	3.0669	3.0130
		2.0	4.3181	4.1787	4.3234	4.3133
		2.5	5.6734	5.3520	5.5696	5.6074

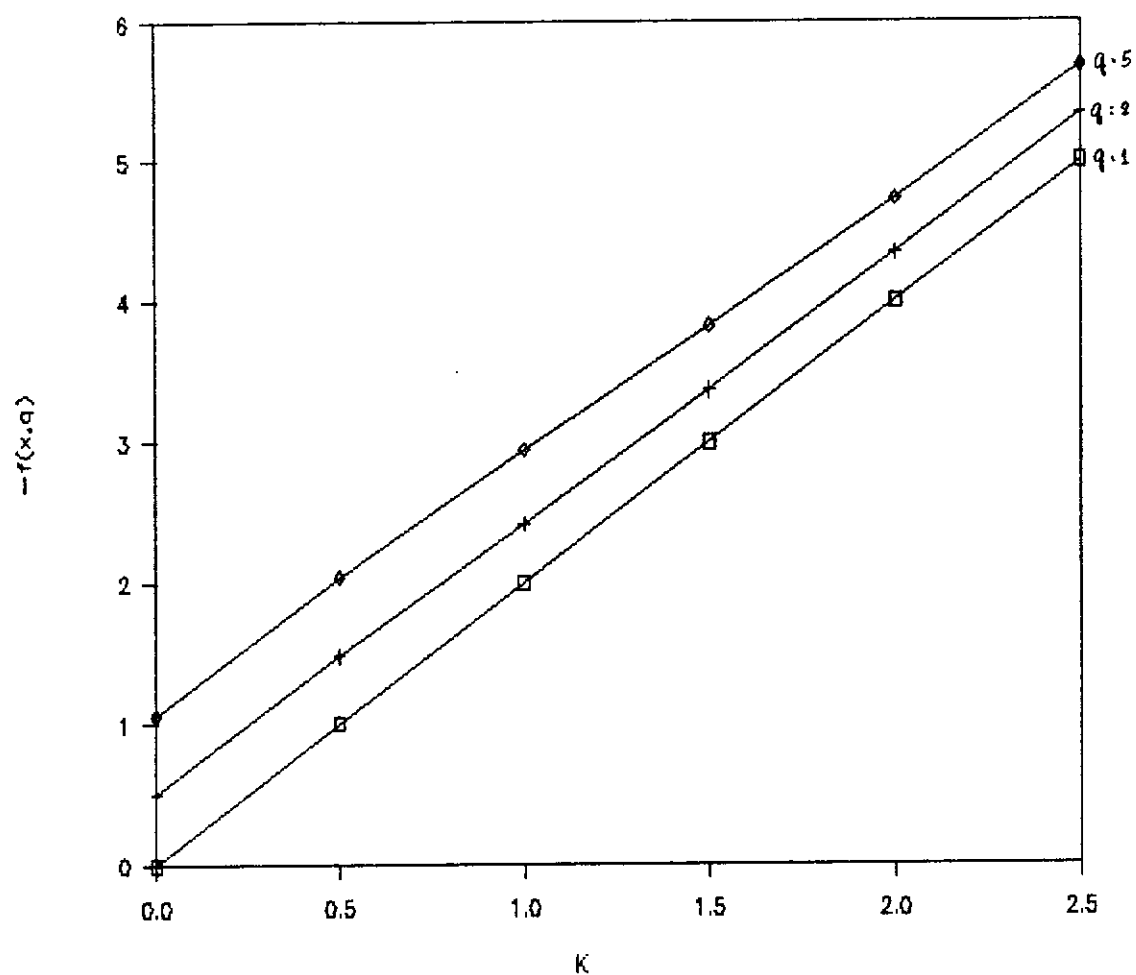
ผลจากตาราง 13 นำมาแสดงเป็นกราฟได้ดังภาพประกอบ 14 ถึง ภาพประกอบ 37



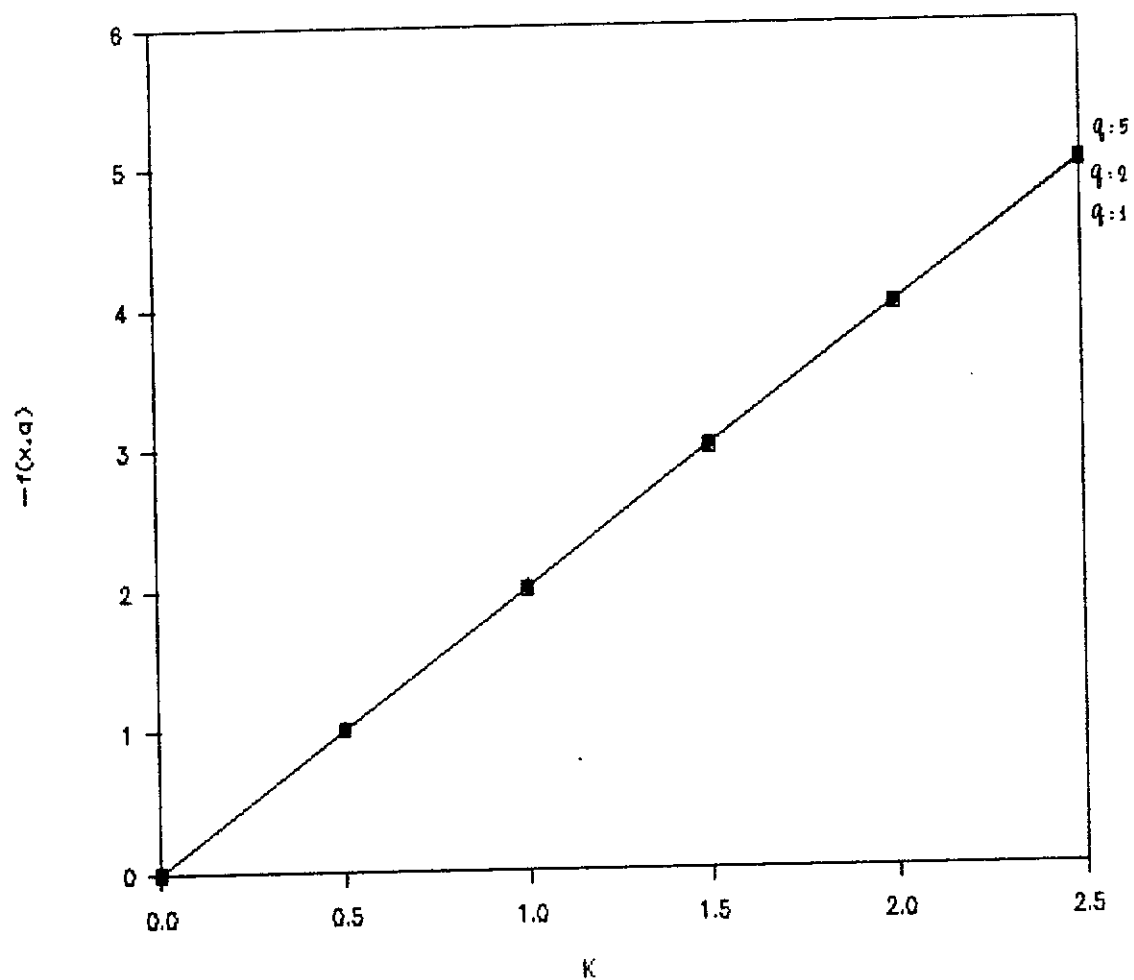
ภาพประกอบ 14 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยาเคมี
 เจือปนไฮดรอกซิดอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



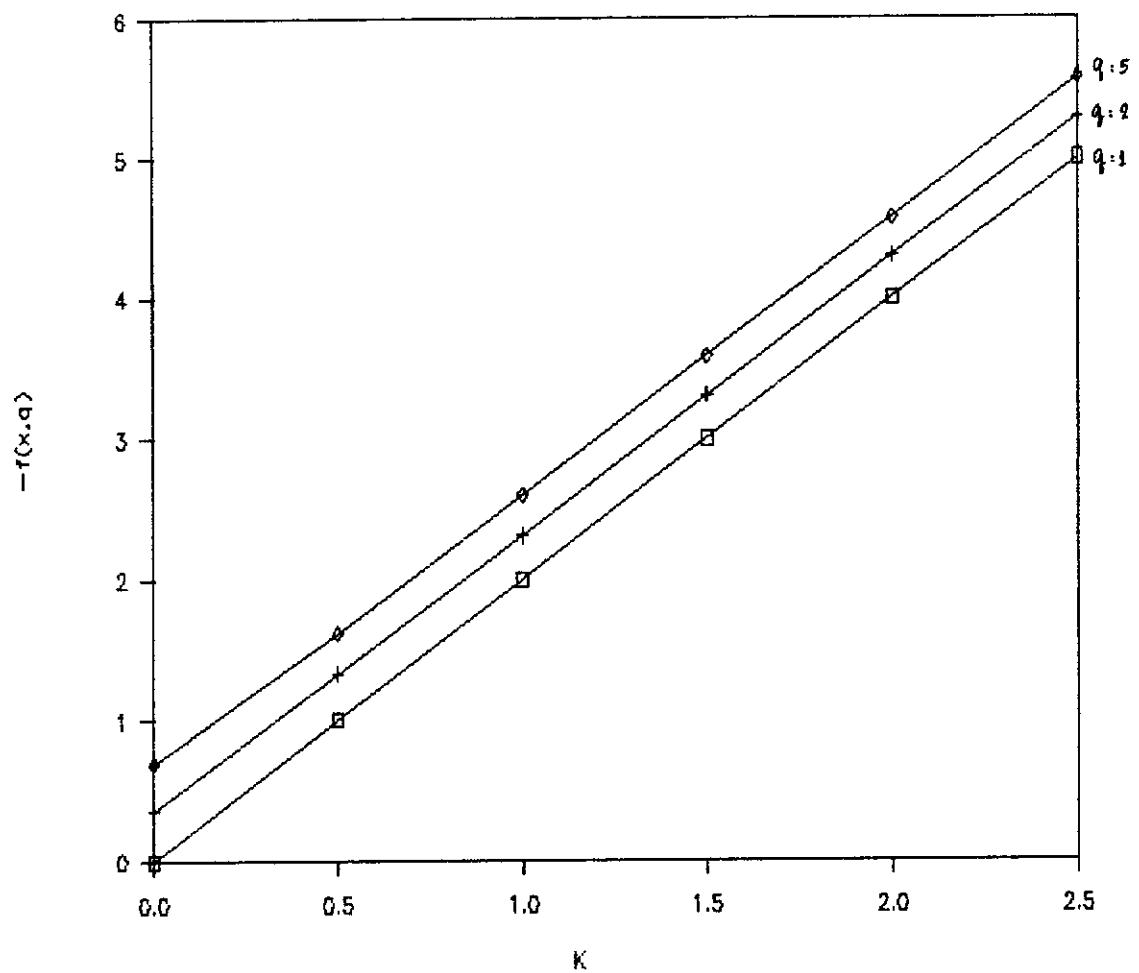
ภาพประกอบ 15 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับต่ออันตรกิริยาการที่
 เจือปนโซ่ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



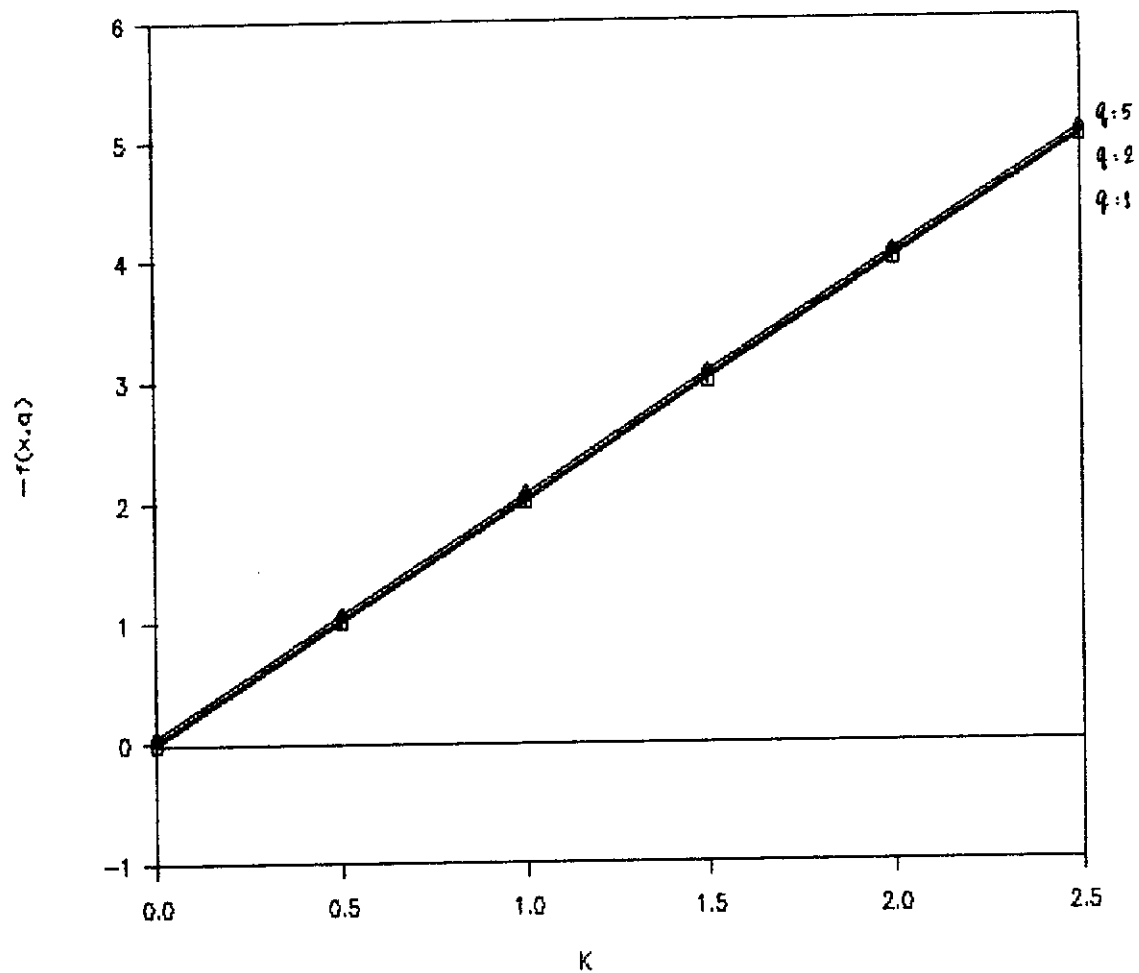
ภาพประกอบ 16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีนกับค่าอันตรกิริยา
 กรณีเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1
 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



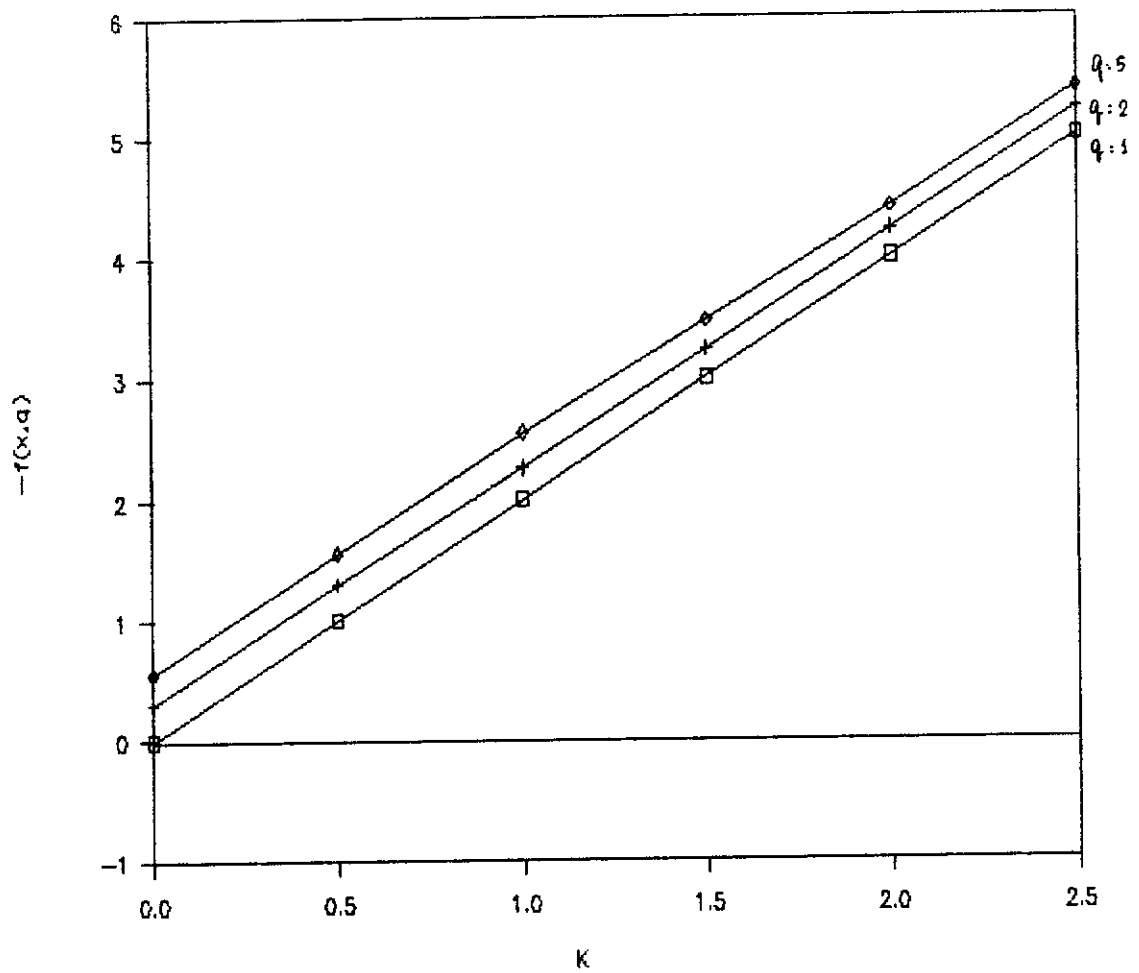
ภาพประกอบ 17 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยาการนี้
 เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



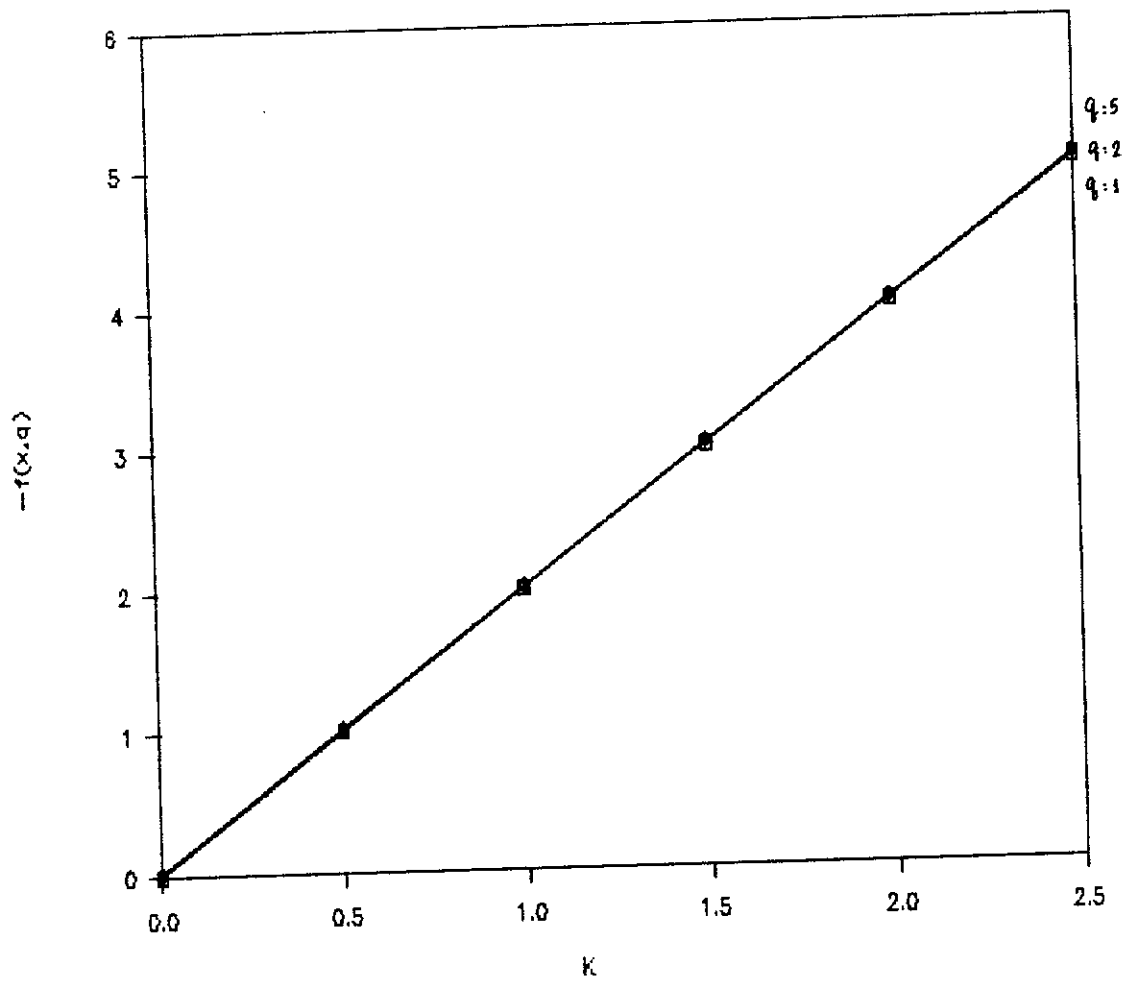
ภาพประกอบ 18 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



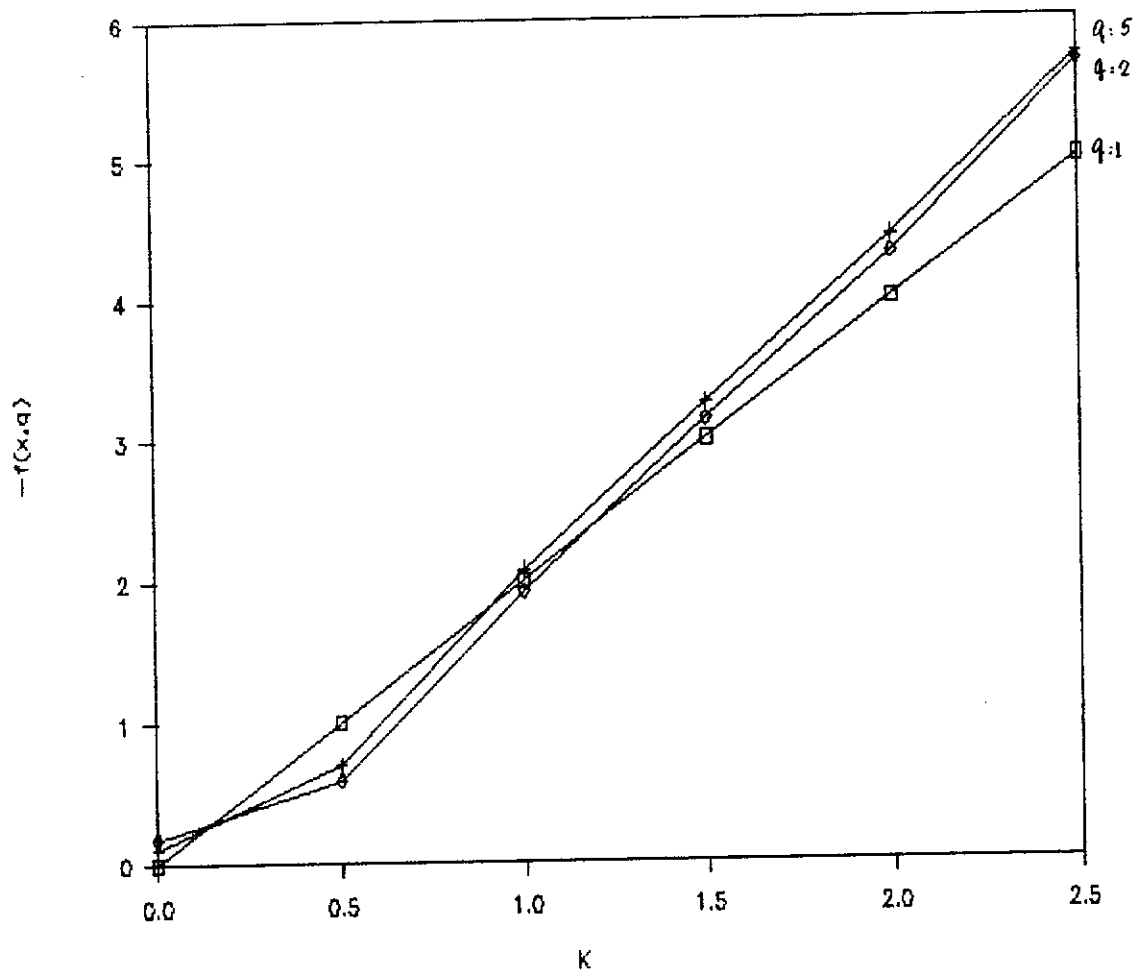
ภาพประกอบ 19 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีนกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



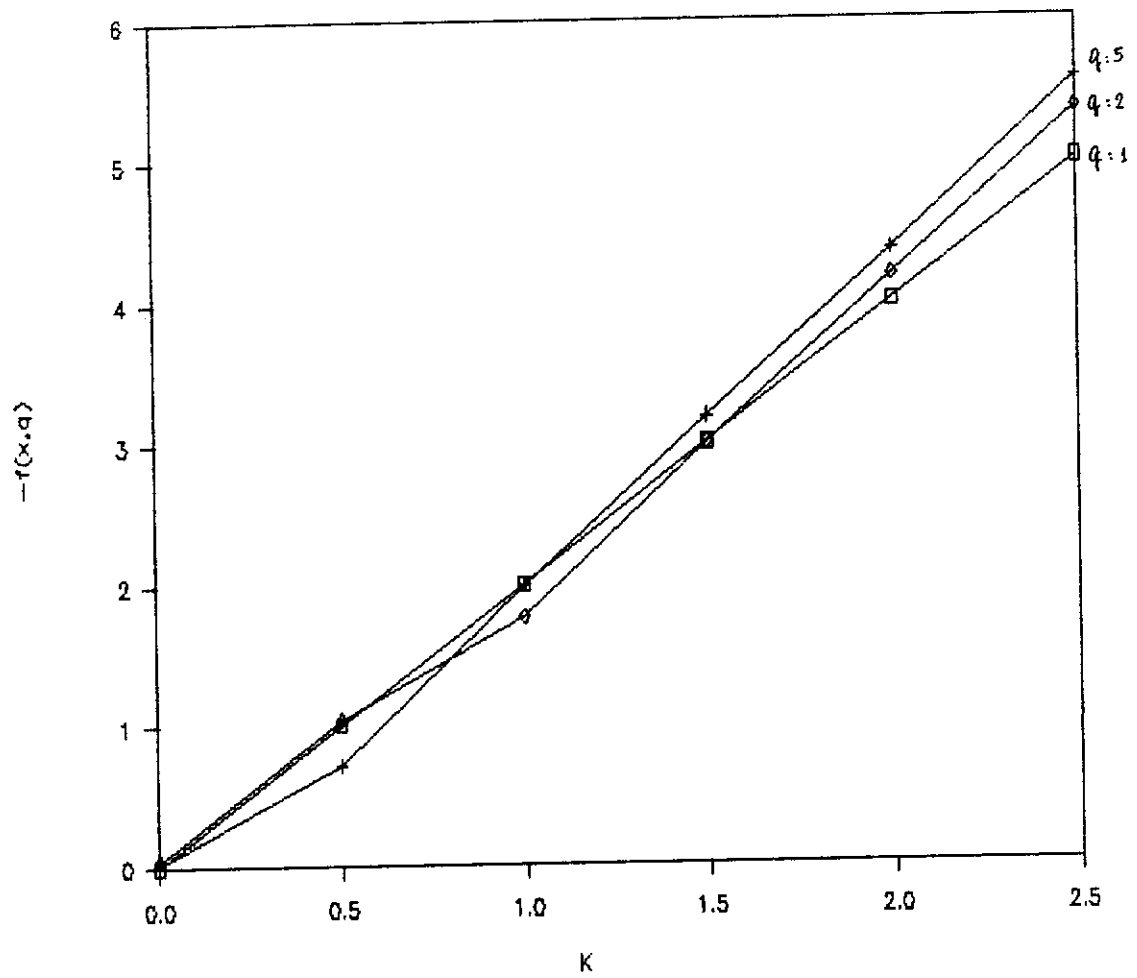
ภาพประกอบ 20 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



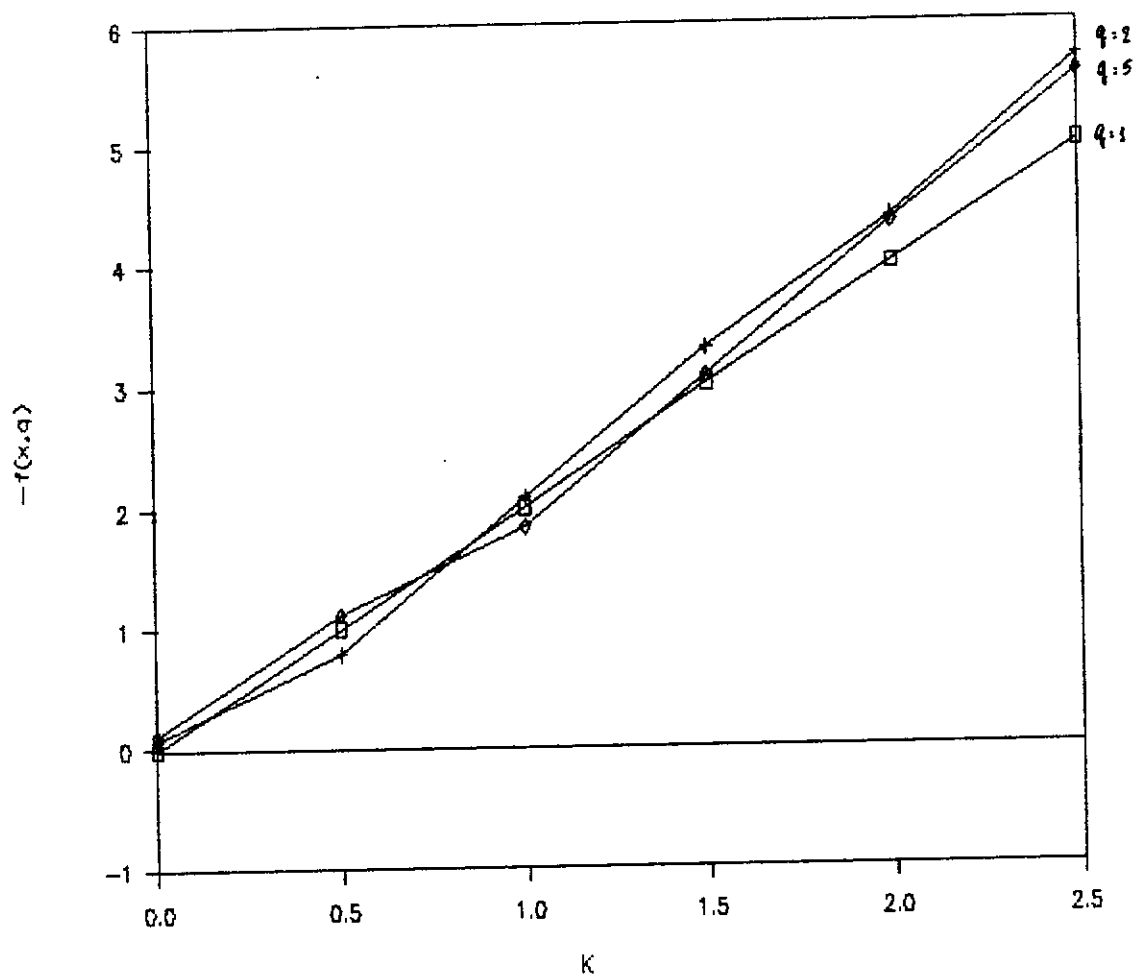
ภาพประกอบ 21 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีนกับค่าอันตรกิริยาการมี
 เงื่อนไขว้ขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 3:1 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



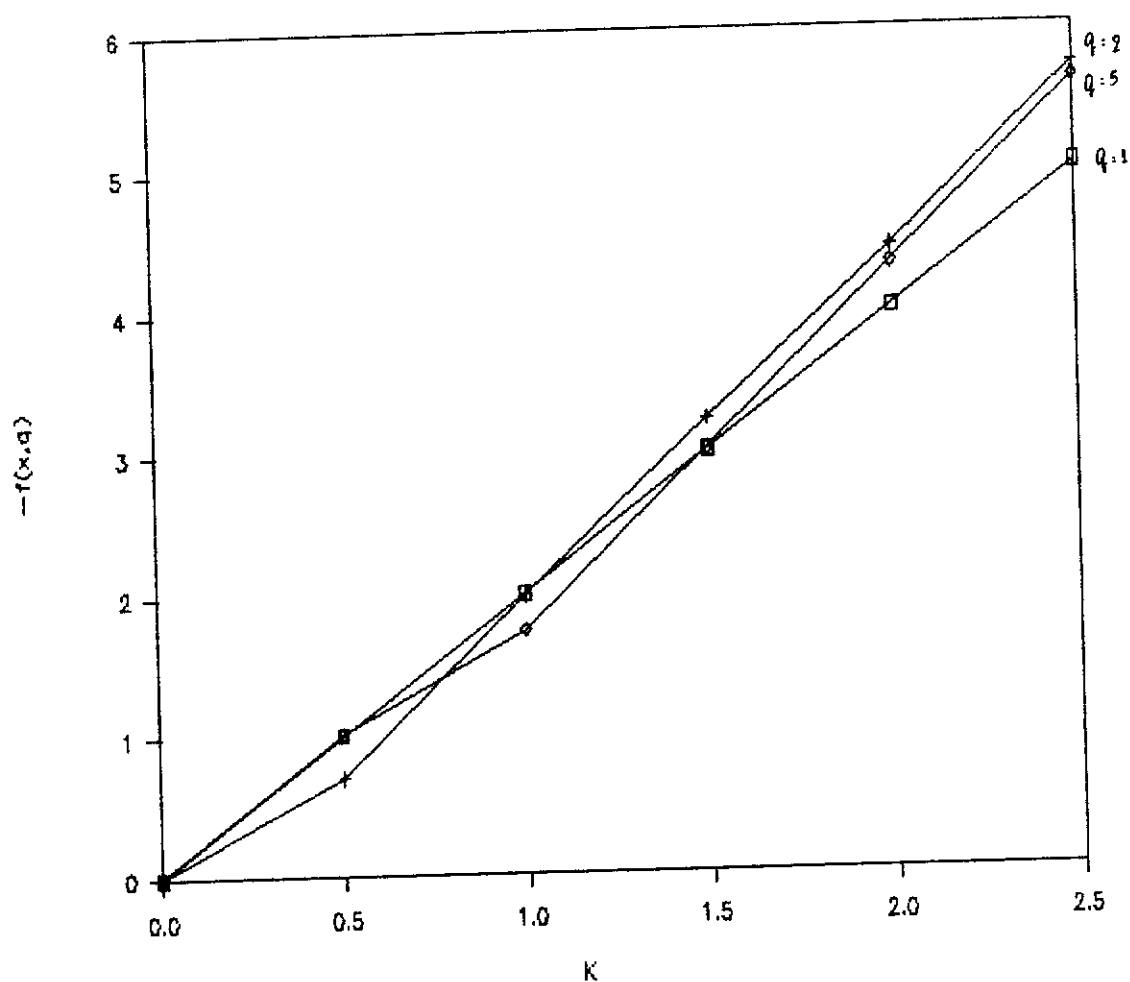
ภาพประกอบ 22 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เจือปนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 3:2 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



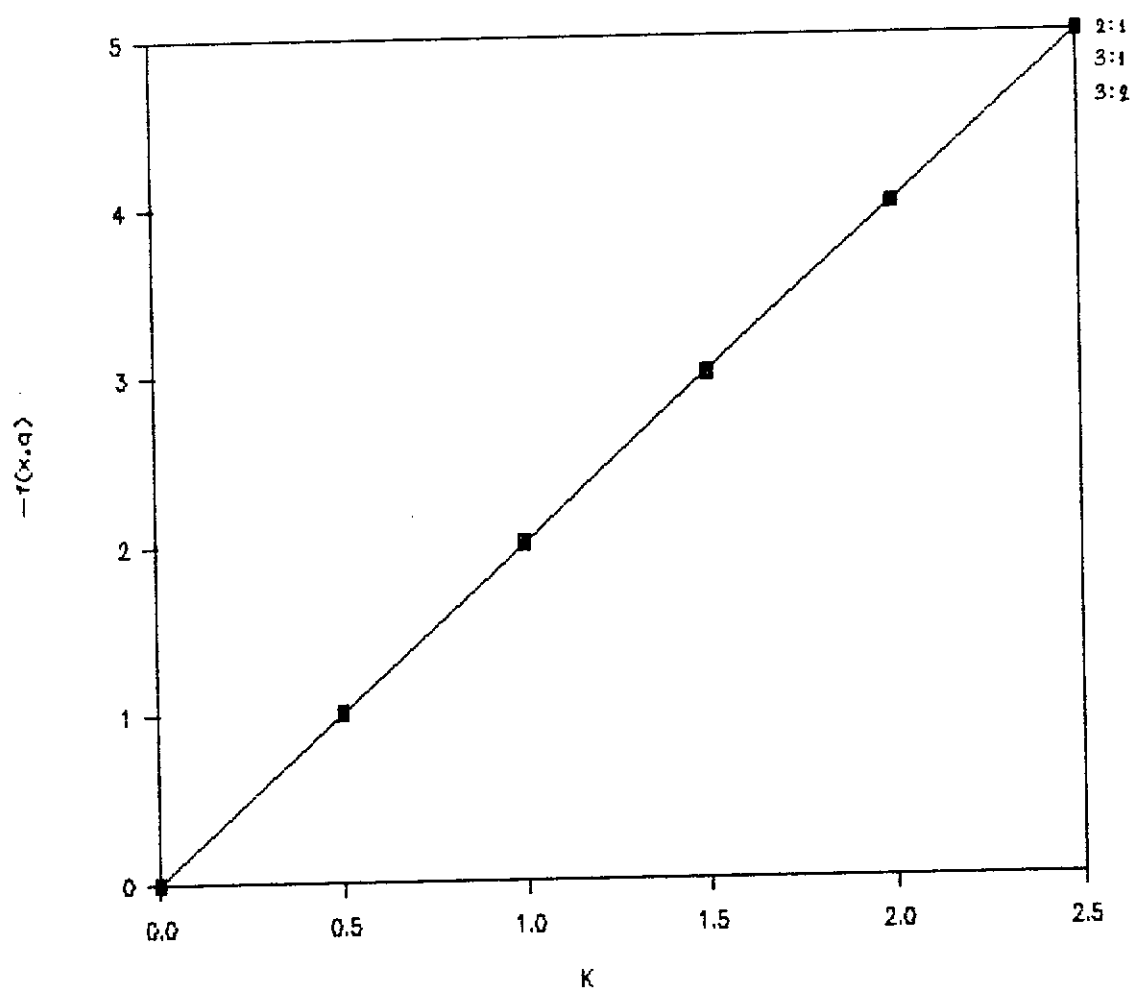
ภาพประกอบ 23 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยาการมี
 เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ 3:2 สำหรับ $q = 1, 2, 5$



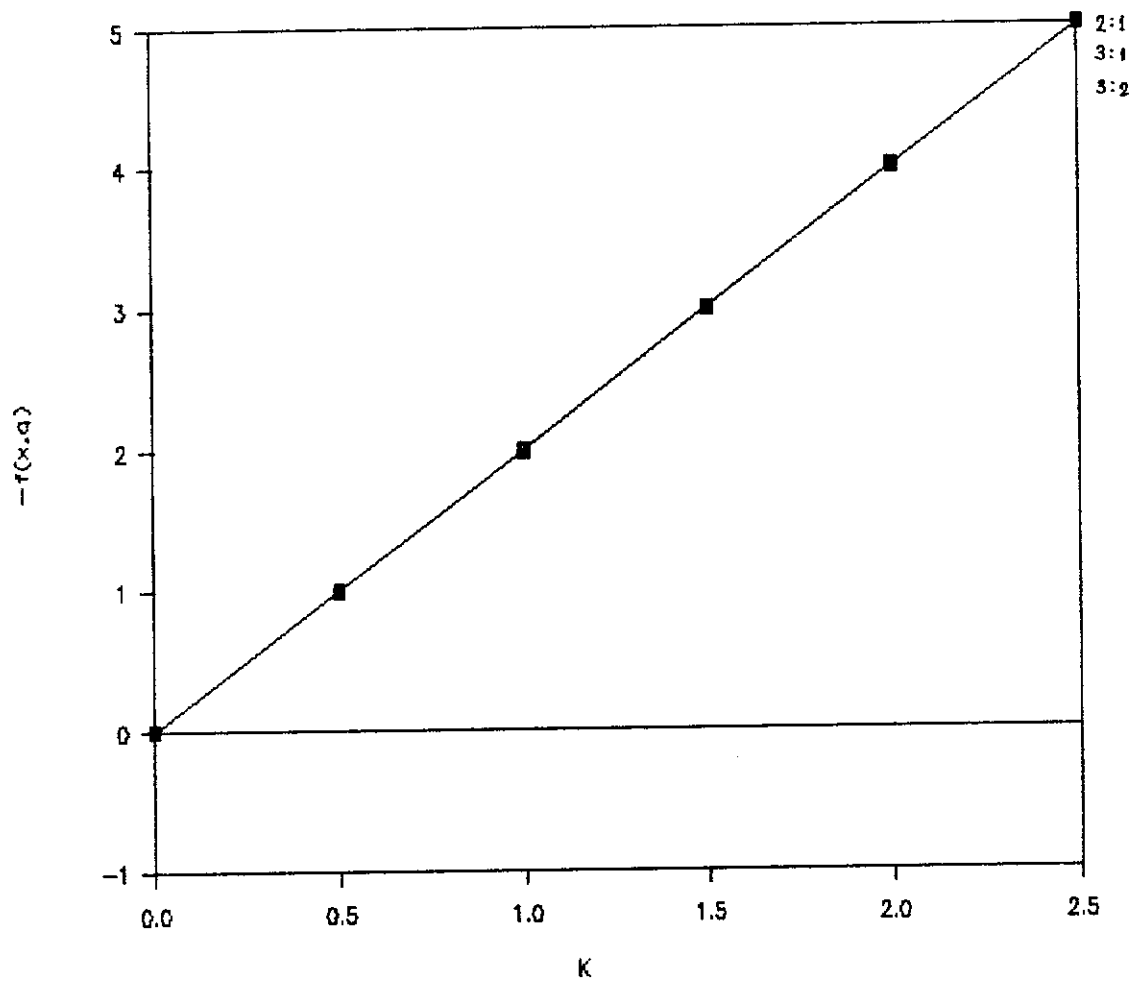
ภาพประกอบ 24 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยาการที่
 เจื่อนไซขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ 3:2 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



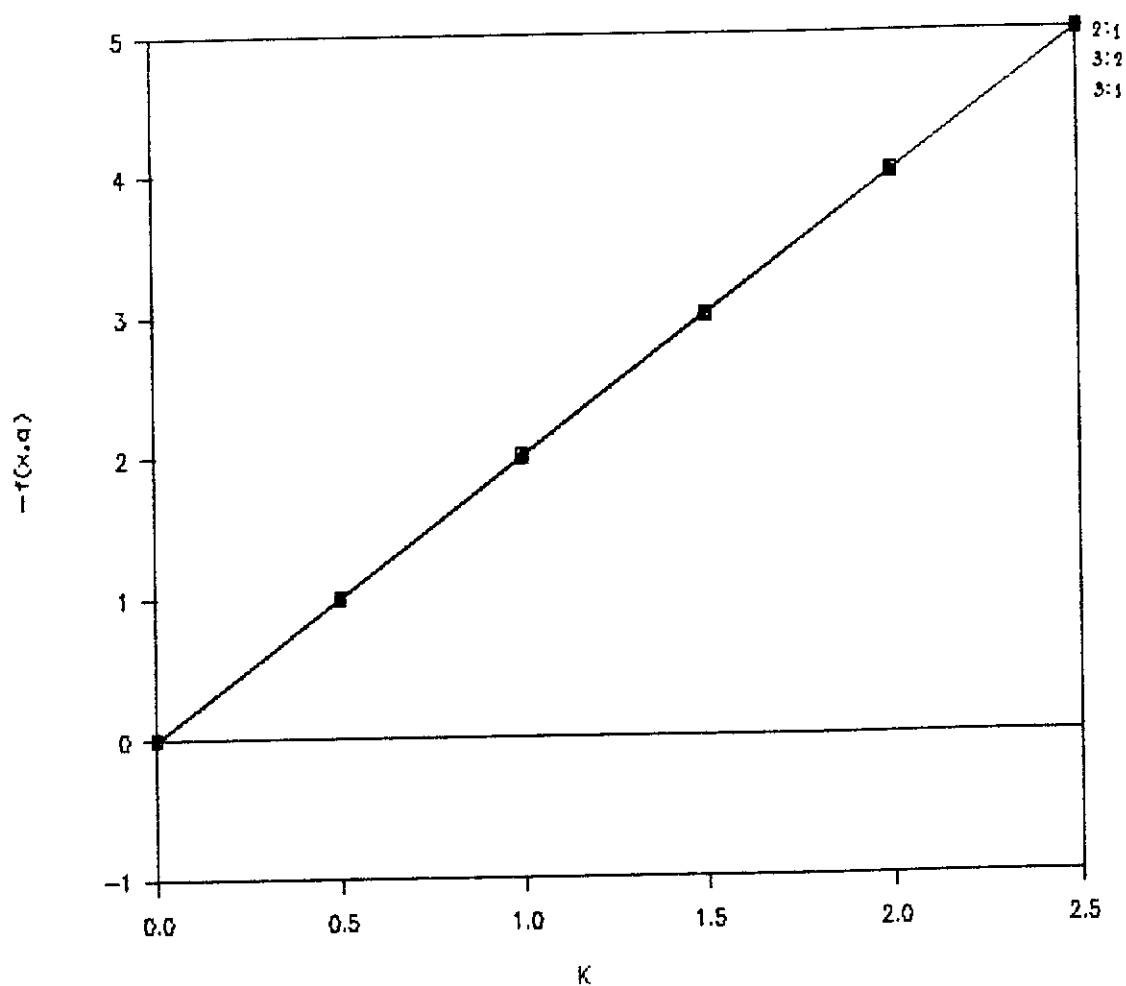
ภาพประกอบ 25 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ 3:2 สำหรับ
 $q = 1, 2, 5$



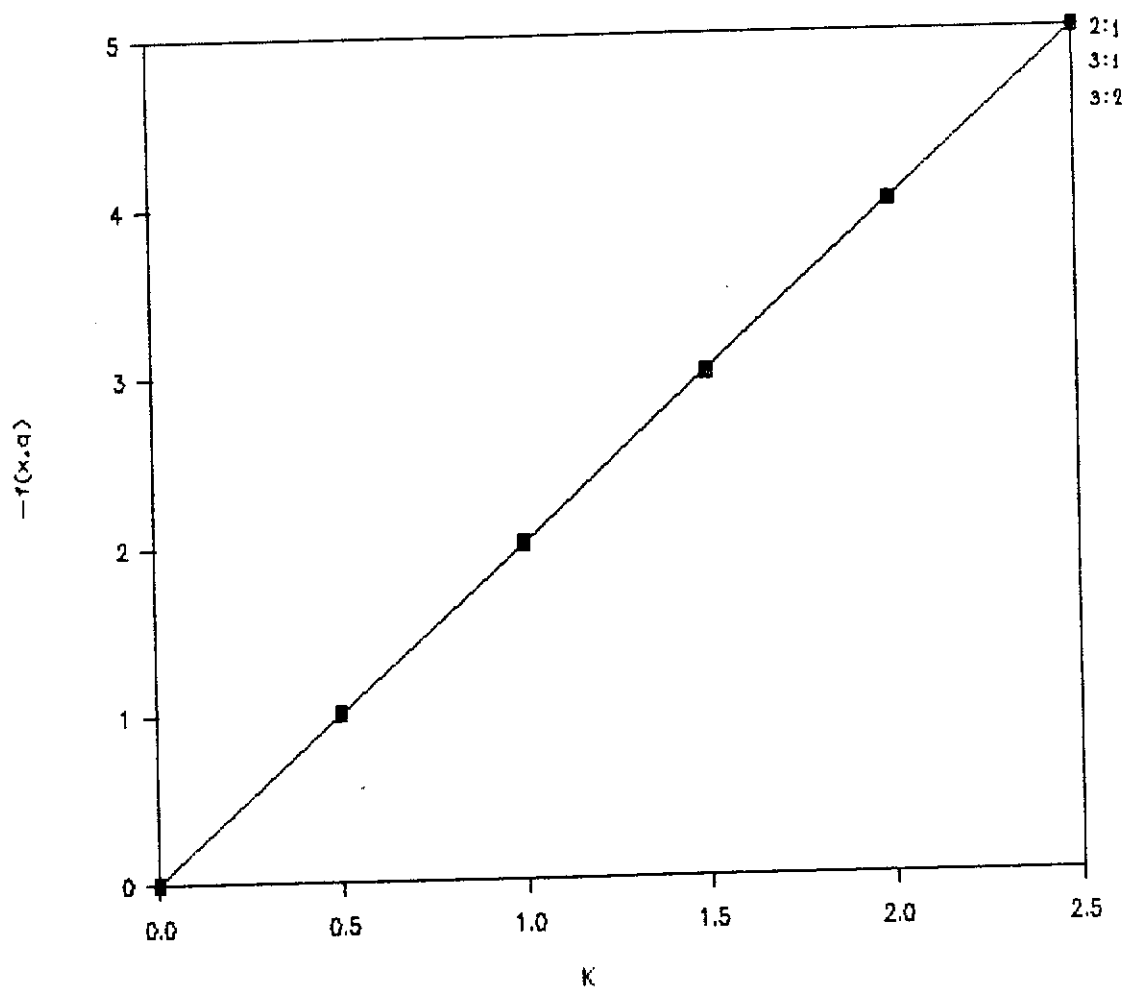
ภาพประกอบ 26 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยาควณี่
 เจอนไซขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $q = 1$



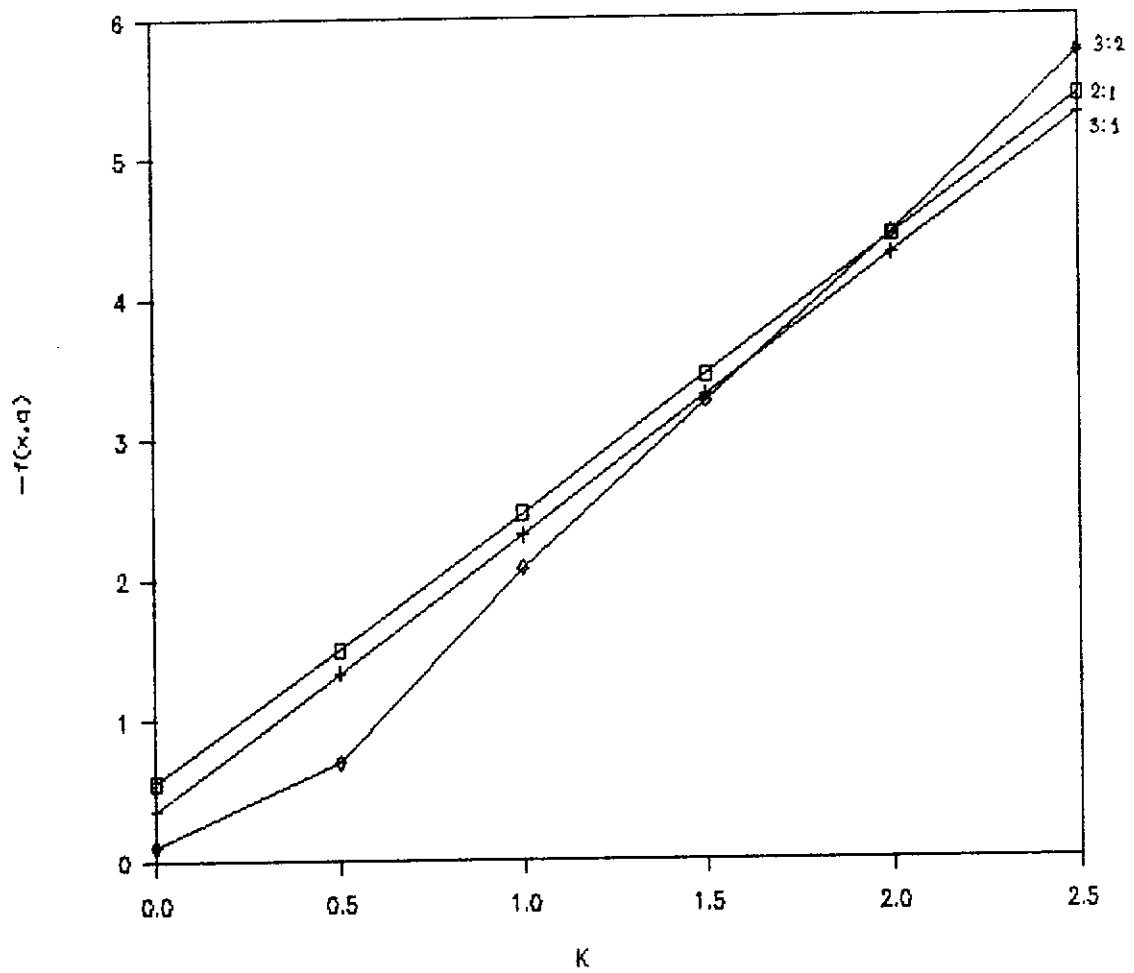
ภาพประกอบ 27 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีนกับค่าอันตรกิริยาการที่
 เจอนไซชอบเซตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงโคของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $q = 1$



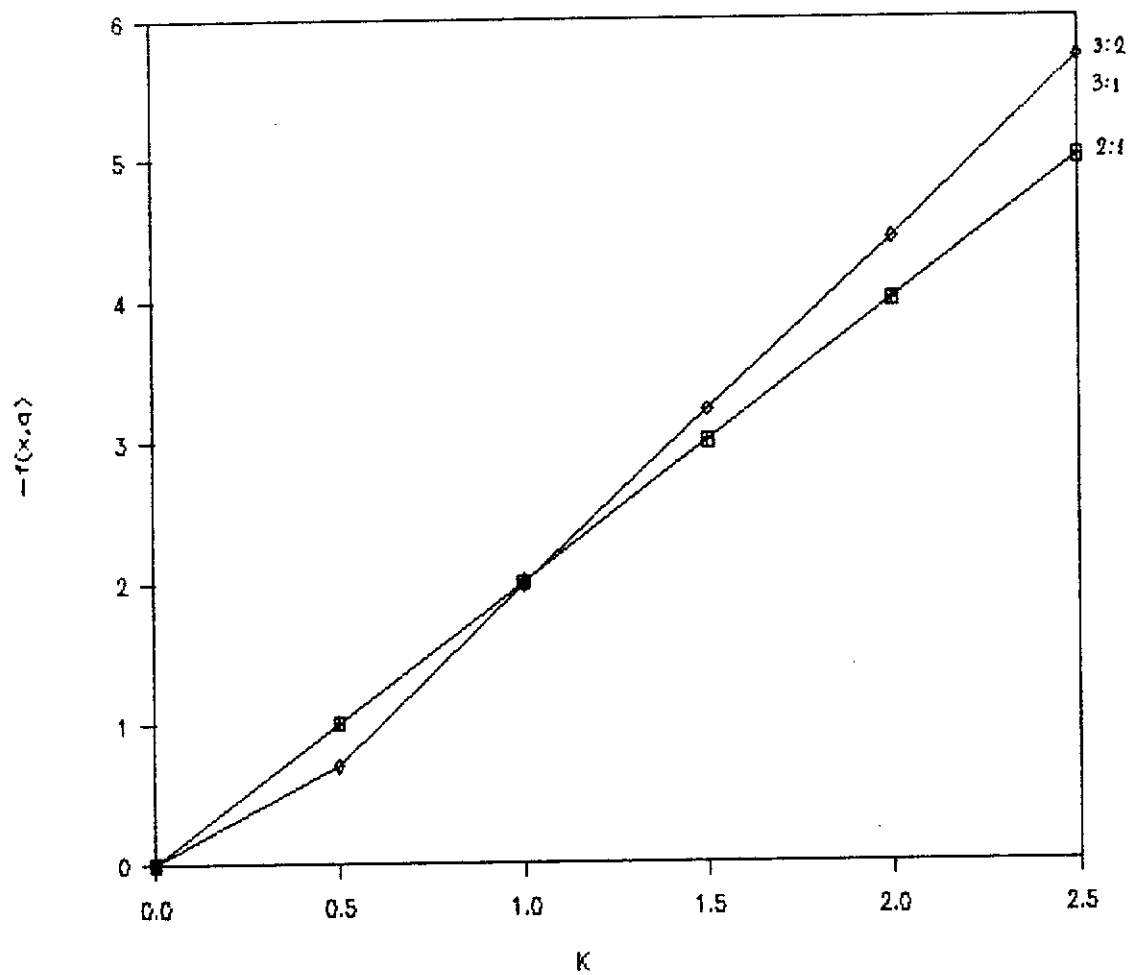
ภาพประกอบ 28 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 1$



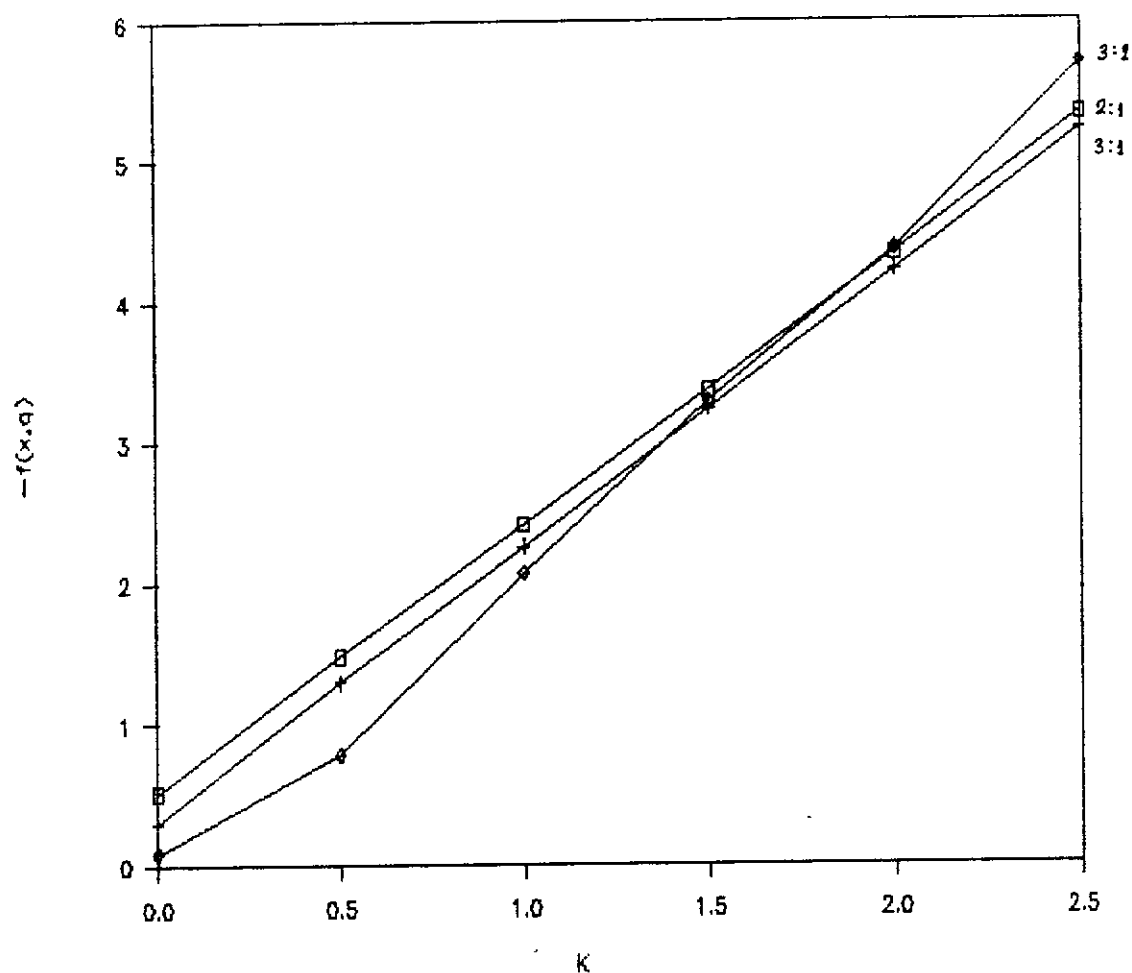
ภาพประกอบ 29 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เจอนไซชอบเคมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 1$



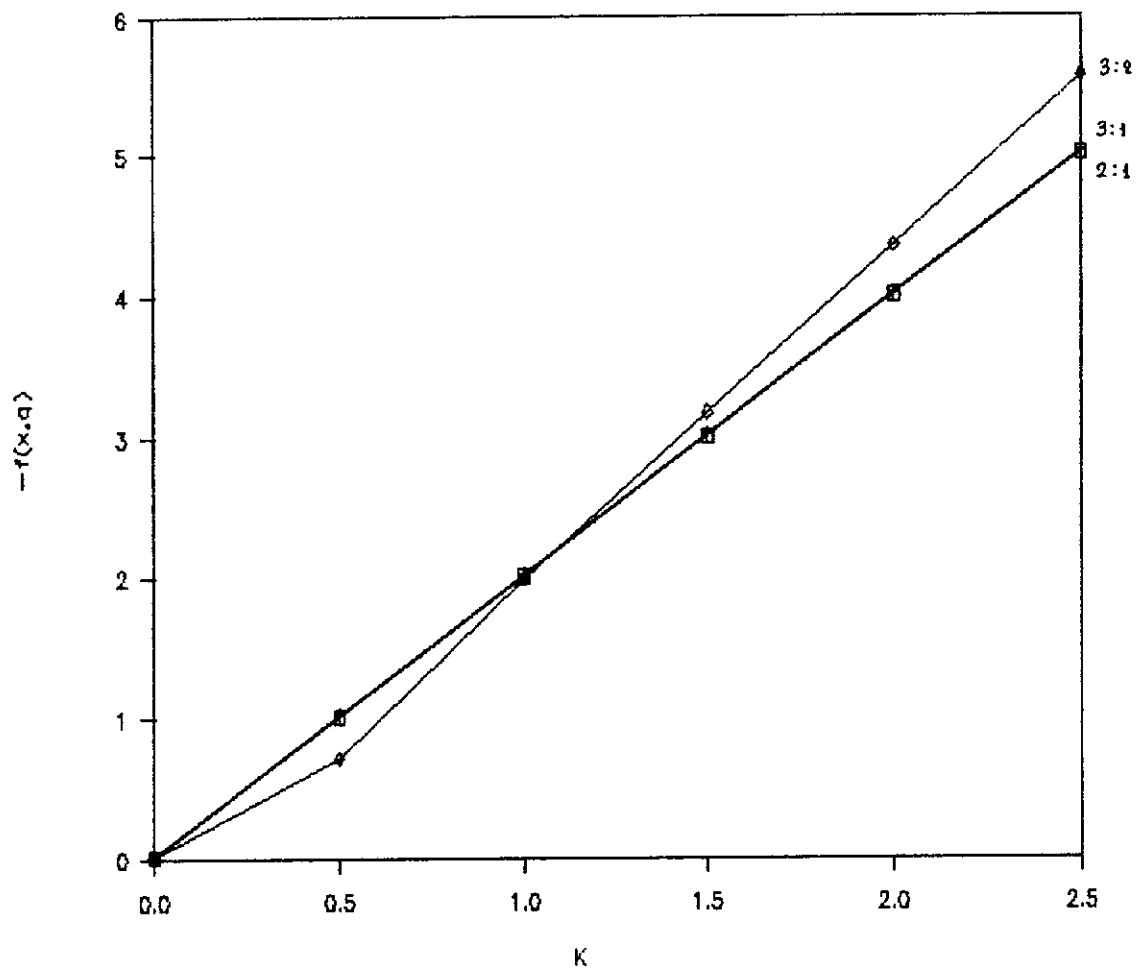
ภาพประกอบ 30 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $q = 2$



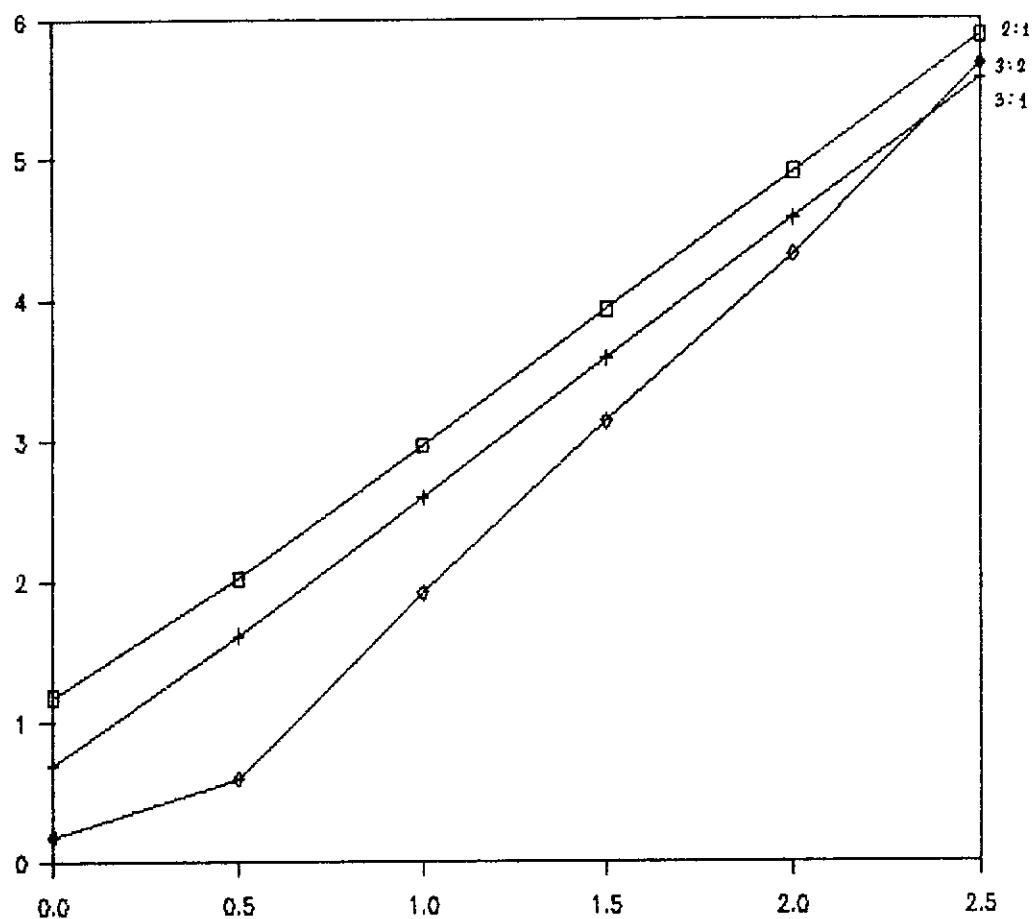
ภาพประกอบ 31 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $q = 2$



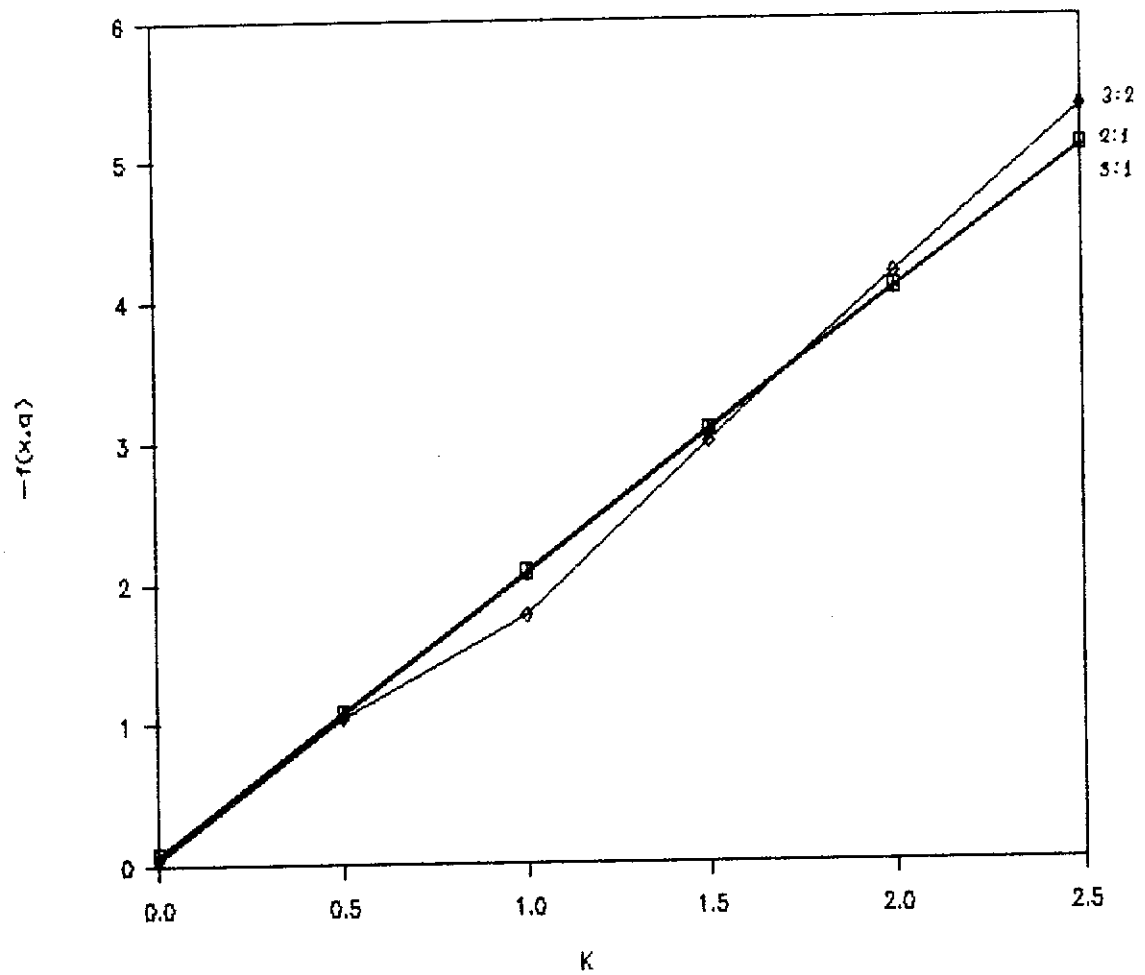
ภาพประกอบ 32 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับต่ออันตรกิริยาการนี้
 เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 2$



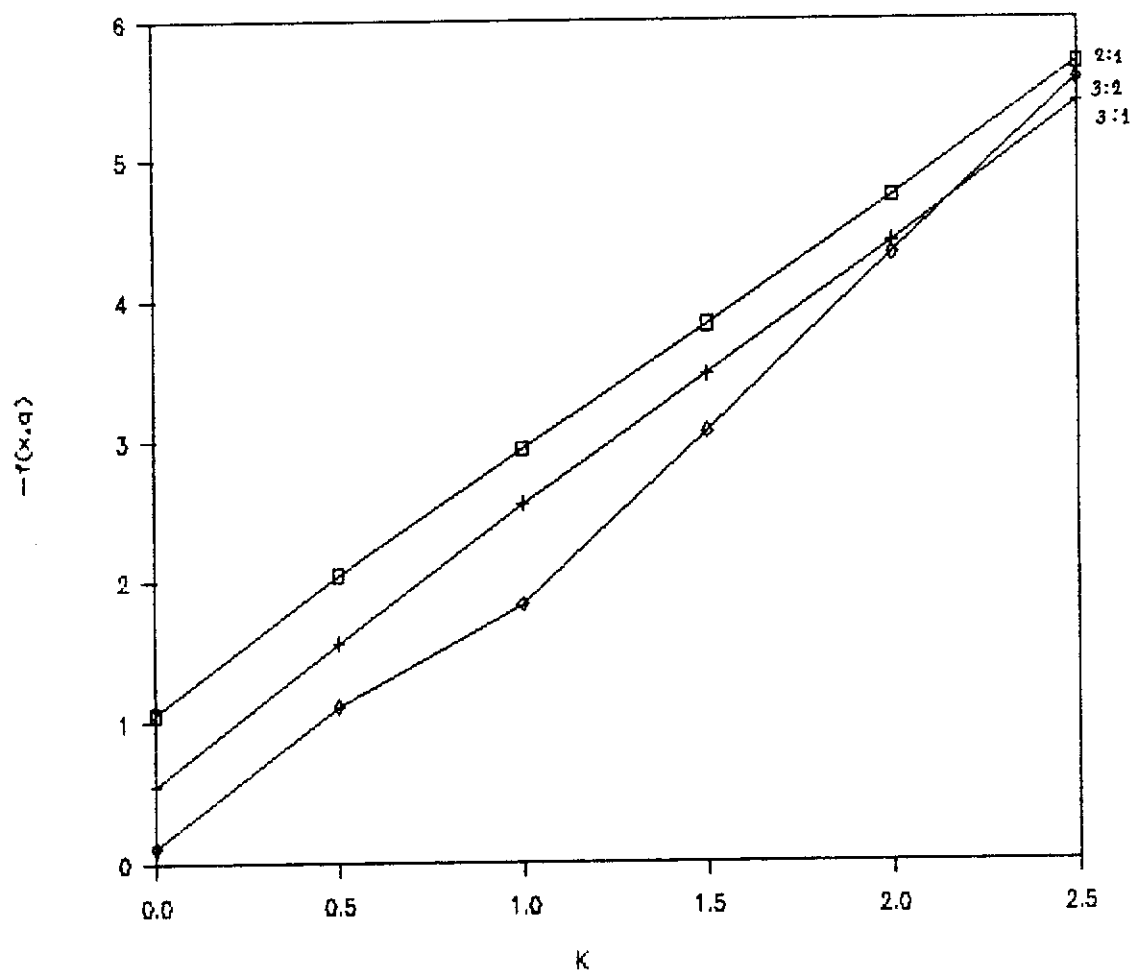
ภาพประกอบ 33 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เจื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 2$



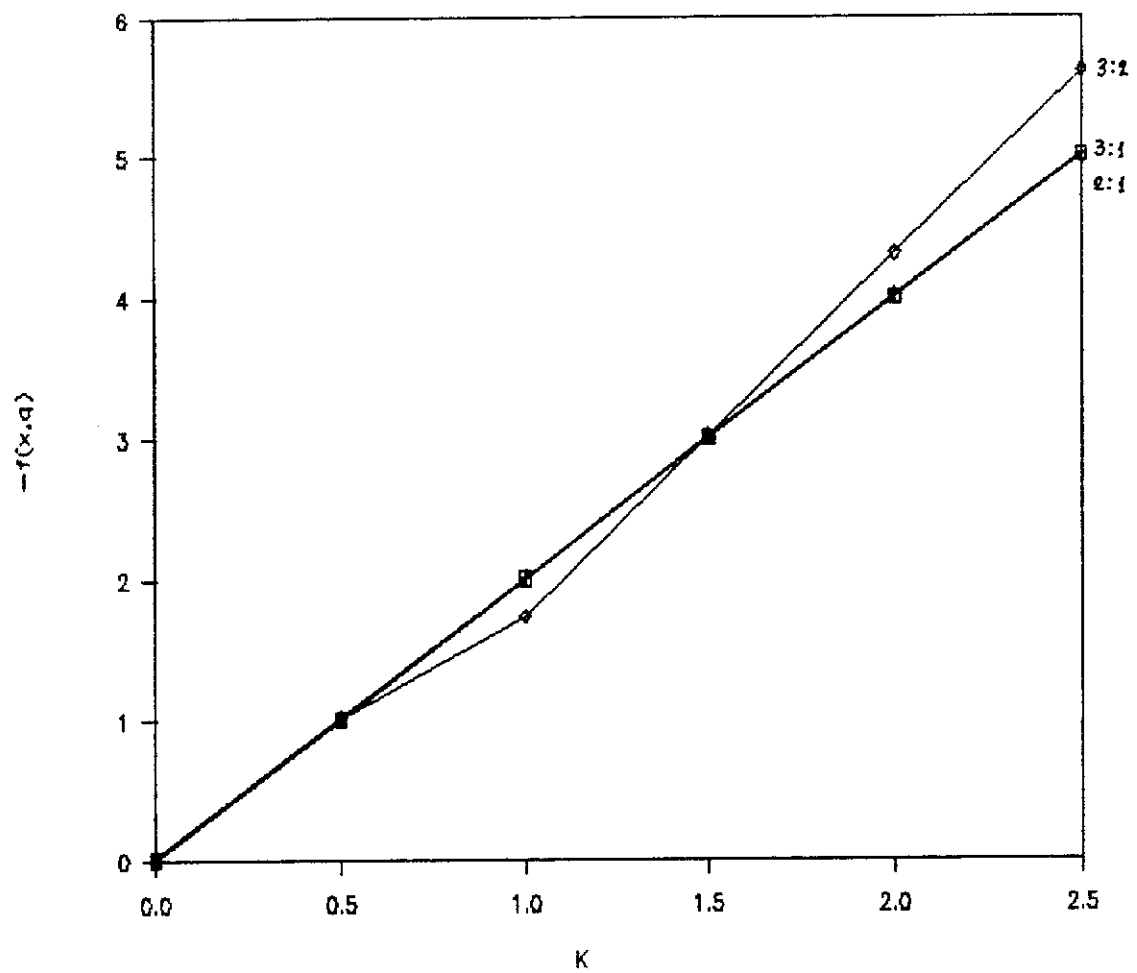
ภาพประกอบ 34 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงินไซชอบเซตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนของกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $\alpha = 5$



ภาพประกอบ 35 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยาการที่
 เจือปนในขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1, 3:2
 สำหรับ $q = 5$



ภาพประกอบ 36 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เงื่อนไขขอบเขตมีค่าด้านเดียว โดยพิจารณาจำนวนกลุ่มของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 5$



ภาพประกอบ 37 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานอิสระต่อสปีกับค่าอันตรกิริยากรณี
 เจื่อนไขขอบเขตมีคาบคั่นเดียว โดยพิจารณาจำนวนวงปิดของเซลล์ขนาด 2:1, 3:1,
 3:2 สำหรับ $q = 5$

สรุปผลการวิจัย

การคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต ครรชนวิฤตเชิงความร้อน มิตินแฟกต์ลี้ นิยามาจากจำนวนกลุ่มและจำนวนวงปิด พบว่าผลการคำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต ครรชนวิฤตเชิงความร้อนและมิตินแฟกต์ลี้ จากวิธีทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันทั้งในกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระและกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว

สำหรับกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระและกรณีใช้เงื่อนไขมีคาบด้านเดียว ค่าอันตรกิริยาวิกฤต ครรชนวิฤตเชิงความร้อน มิตินแฟกต์ลี้คำนวณได้จากการเปรียบเทียบเซลล์สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีค่าค่อนข้างต่ำ และจากการเปรียบเทียบเซลล์สี่เหลี่ยมจัตุรัส ผลการคำนวณค่าเหล่านี้มีค่าต่ำกว่าจากการเปรียบเทียบเซลล์สี่เหลี่ยมผืนผ้า ไม่ว่าจะพิจารณาจำนวนกลุ่มหรือพิจารณาจำนวนวงปิด

จากการความสัมพันธ์ระหว่างค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากกับความน่าจะเป็นของพันธะ พบว่า ค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากมีค่ามากขึ้น เมื่อความน่าจะเป็นของพันธะมีค่ามากขึ้น และค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟากจะมีค่าแตกต่างกันตามค่าของ q สำหรับเซลล์ที่กำหนดให้ทั้งกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ และกรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว

ค่าพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปิน สำหรับเงื่อนไขขอบเขตอิสระและเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว เมื่อพิจารณาจำนวนกลุ่มและจำนวนวงปิด ค่าที่ได้จากนิยามวงปิดจะมีค่าต่ำกว่าเมื่อพิจารณาจำนวนกลุ่ม และจากการพหุคูณพลังงานอิสระต่อสปินกับค่าอันตรกิริยาจะมีค่าแตกต่างกันตามค่าของ q สำหรับเซลล์หนึ่ง ๆ

อภิปรายผลการวิจัย

การคำนวณหาค่าอันตรกิริยาวิกฤตและครรชนวิฤตเชิงความร้อน โดยใช้แบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อแบบมีสหสัมพันธ์สำหรับ q ต่าง ๆ กัน ปรากฏว่า ค่าที่คำนวณได้มีค่าเทียบเคียงได้กับค่าที่คำนวณได้โดยวิธีวันอ์มิลไล เซชันการพหุคูณจริง (real-space

renormalization) แบบมิกดาล-คาคานอฟ(Chen et al.1986:6448) ซึ่งค่าอันตรกิริยา
วิกฤต ครรชนวิกฤตเชิงความร้อน มิติแฟรกทัล สำหรับ q ต่าง ๆ กัน ของวีร์นอร์มัลไล
เซชันแบบมิกดาล-คาคานอฟแสดงไว้ดังตาราง 14

ตาราง 14 ค่าอันตรกิริยาวิกฤต ครรชนวิกฤตเชิงความร้อน มิติแฟรกทัล โดยวีร์นอร์มัลไล
เซชันของมิกดาล-คาคานอฟ (MK)

q	K_c		Y_T		Y_h	
	EXACT	MK($K_c/2$)	EXACT	MK	EXACT	MK
1	0.694	0.482	0.75	0.612	1.896	1.891
2	0.882	0.610	1.00	0.747	1.815	1.879
3	1.006	0.694	1.20	0.830	1.867	1.875
4	1.098	0.756	1.50	0.890	1.875	1.872

ค่ามิติแฟรกทัลมีค่าเท่ากับค่าครรชนวิกฤตแม่เหล็ก (Critical magnetic exponent)
(Hu and Chen,1989:854) ดังนั้นค่ามิติแฟรกทัลที่คำนวณได้จากตาราง 11 มีค่าต่ำกว่าค่า
ครรชนวิกฤตเชิงแม่เหล็ก เป็นเพราะว่าเซลล์ที่ใช้เป็นขนาดเล็ก ทำให้กราฟเชื่อมต่อกจาก
แลตทิซแถวล่างสุดของเซลล์ล่างขึ้นสู่แลตทิซแถวล่างสุดของเซลล์บนได้ง่าย ทำให้ผลการคำนวณ
ไม่ค่อยดี และจากการคำนวณพบว่าค่าอันตรกิริยาวิกฤต และครรชนวิกฤตเชิงความร้อนของ
เซลล์ขนาดใหญ่ จะให้ผลการคำนวณดีกว่าเซลล์ขนาดเล็ก

สำหรับค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก P ที่ $p = p_c$ ผลการ
คำนวณควรจะเป็น 0 แต่ที่ไม่เป็นเช่นนั้นอาจเป็นเพราะการเปรียบเทียบกับเซลล์เล็กเท่านั้น แต่
ลักษณะทั่วไปของกราฟที่ $p > p_c$ เป็นไปตามที่คาดหมาย

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยครั้งนี้ พิจารณาแบบจำลองภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก ดำเนินการโดยหา กราฟย่อยจากหลักเกณฑ์เบื้องต้นและนำมาคำนวณค่าอันตรายกิริยาวิกฤต ครรชณวิกฤตเชิงความไวอัน มิติแปรกัตล ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อและพลังงานอิสระต่อหนึ่งสปีน ซึ่งพบว่า ใน กรณี่เซลล์ขนาดเล็กนั้นสามารถคำนวณได้อย่างสะดวก ผลที่คำนวณได้ไม่ค่อยดีเมื่อเปรียบกับผลที่ ได้จากเซลล์ขนาดใหญ่ แต่ถ้าเซลล์ขนาดใหญ่การคำนวณโดยวิธีเบื้องต้นนี้ไม่เหมาะ เพราะจำ นวนกราฟย่อยมีเป็นจำนวนมาก ทำให้เกิดความยุ่งยาก ดังนั้นในการค้นคว้าครั้งต่อไปจึงควรจ ะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์มาใช้ในการคำนวณหากราฟย่อย อาจจะทำให้รวดเร็วขึ้นและยังให้ค่า ต่าง ๆ คำนวณ

גדרת המונחים

บรรณานุกรม

- Ashkin J. and Teller E., Physical Review. 64 : 178, 1943
- Burkhardt T.W. and Van Leeuwen J.M.J., Real-Space Renormalization.
Springer-Verlag, Berlin, 1982, 214 p.
- Charles D.H., Samuel M.S., Robert C.W., Standard Mathematical Table,
Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland Ohio, 1959
- Chen H.H., Felix Lee and Tseng H.C., Physical Review. B 34 : 6448,
1986
- Coniglio A. and Klein W., Journal of Physics, A 13 : 2775, 1980
- Coniglio A., Nappi C., Perrugi F., and Russo L., Journal of Physics.
A 10 : 205, 1977
- Coniglio A., Stanley H.E. and Klein W., Physical Review Letters.
42 : 518, 1979
- Domb C., Green M.S., Phase Transitions and Critical Phenomena.
Academic Press, London, Vol 1-6, 1972-1976
- Essam J.W., Reports of Progress in Physics, 43 : 833, 1980
- Hammersley J.M., Proceedings of Cambridge Philosophical Society.
53 : 642, 1957
- Hu C.K., Physical Review. B 29 : 5103, 1984
- Hu C.K., Journal of Physics, A 19 : 3067, 1986
- Hu C.K., Physical Review. B 34 : 6280, 1986
- Hu C.K. and Chen C.N., Physical Review. B 38 : 2765, 1988
- Hu C.K. and Chen C.N., Physical Review. B 40 : 854, 1989
- Indekeu J.O., Maritan A., Stella A.L., Journal of Physics.
A 15 : 291, 1982
- Ising E., Zeitschrift für Physik. 21 : 613, 1925
- Kadanoff L.P., Annals. Physical Review, New York 100 : 395, 1976
- Kadanoff L.P., Gotze W., Hamblen D., Hecht R., Lewis E.A.S.,
Palciauskas V.V., Rayl M., Swift J., Aspnes D. and Kane J.,
Reviews of Modern Physics. 39 : 395, 1967

- Kittel C., Introduction to Solid State Physics. fifty edition,
John Wiley & Son, 1976. 608 p.
- Klein W., Stanley H.E., Reynolds P.J. and Coniglio A., Physical
Review Letters. 41 : 1145, 1978
- Migdal A.A., Soviet Physics. JEPT 42: 743; 413, 1975
- Muller - Krumbhaar H., Physics Letters. 50 A : 27, 1974
- Murata K.K., Journal of Physics. A 12 : 81, 1979
- Potts R.B., Proceedings of Cambridge Philosophical Society.
48 : 160, 1952
- Stanley H.E., Introduction to Phase Transitions and Critical
Phenomena. Oxford University Press, New York, 1971, 308p.
- Stauffer D., Introduction to Percolation Theory. Taylor and
Francis, London, 1985 : 124 p.
- Sykes M.F. and Gaunt D.S., Journal of Physics. A 9 : 2131, 1976
- Tsallis C., Coniglio A., and Schwachheim G., Physical Review. B 32 :
3322, 1985
- Wilson K.G., Physical Review. B 4 : 3175, 1971
- Wu F.Y., Reviews of Modern Physics. 54 : 235, 1982

තරුණයා

การคำนวณ ก.

การกระจายฟังก์ชันพาร์ติชันของ N สปิน บนกราฟ G ให้อยู่ในเทอมกราฟย่อย G'

สมการ (2.4) เมื่อกระจายเทอม $\prod_1 e^{Bs_i}$ จะได้

$$Z_N = \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} \left[(e^{Bs_1 + Bs_2 + \dots + Bs_N}) + (e^{Bs_1 + Bs_2 + \dots + Bs_N}) \sum_{G' \subseteq G} v \delta(s_1, s_j) \right. \\ \left. + (e^{Bs_1 + Bs_2 + \dots + Bs_N}) \sum_{G' \subseteq G} v^2 \delta(s_1, s_j) \delta(s_k, s_1) + \dots \right] \quad (1)$$

หาผลบวกทุกค่าของสปิน s_i ซึ่งมีค่า $-j, -(j-1), \dots, (j-1), j$ รวมทั้งสิ้น q ค่า และ สปินที่มีค่าเท่ากันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน จะได้

$$Z_N = \left\{ [(e^{Bs_j} + e^{Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-Bs_j}) x (e^{Bs_j} + e^{Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-Bs_j}) x \dots] \right. \\ \left. + [(e^{2Bs_j} + e^{2Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-2Bs_j}) x (e^{Bs_j} + e^{Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-Bs_j}) x \dots x \sum_{G' \subseteq G} v \right. \\ \left. + [(e^{3Bs_j} + e^{3Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-3Bs_j}) x (e^{Bs_j} + e^{Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-Bs_j}) x \dots x \sum_{G' \subseteq G} v^2] \dots \right\} \quad (2)$$

พิจารณาเทอม $(e^{Bs_1 + Bs_2 + \dots + Bs_N}) \sum_{G' \subseteq G} v^2 \delta(s_1, s_j) \delta(s_k, s_1)$ เทอมนี้ มีกลุ่ม

สปินเกิด 2 แบบ คือถ้า $s_j = s_k$ กลุ่มสปินจะมีรูปเป็น  ,  ซึ่งเป็นเทอมสุดท้ายของสมการ (2) แต่ถ้า $s_j \neq s_k$ กลุ่มสปินจะมีรูปเป็น  ,  ทำให้เทอม

$(e^{Bs_1 + Bs_2 + \dots + Bs_N})$ มีรูปเป็น $[(e^{2Bs_j} + e^{2Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-2Bs_j})^2 x$

$(e^{Bs_j} + e^{Bs_{(j-1)}} + \dots + e^{-Bs_j}) x \dots]$ แต่เมื่อทำยสุดท้ายนับจำนวนกลุ่มที่มีในกราฟย่อย

G' แล้ว จะมีจำนวนกลุ่ม (c) ทั้งหมดเท่ากัน ดังนี้

$$Z_N = \sum_{G' \in G} v^{b(G')} \prod_c [e^{Bn_c(G')} + e^{Bn_c(G')(j-1)} + \dots + e^{-Bn_c(G')j}]$$

ภาคผนวก ข.

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าอันตรกิริยาวิกฤต กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ

โดยพิจารณาจำนวนกลุ่ม

```

10 REM .....Kc.....free boundary condition....method 1 (cluster).....
20 CLS
30 INPUT "Q =",Q
40 INPUT "start =",SR
50 INPUT "stop =",SP
60 INPUT "step =",ST
70 FOR X=SR TO SP STEP ST
80 K=-(LOG(1-X))
90 GOSUB 140
100 IF A=EF THEN DIF=0 ELSE DIF=A-EF
110 PRINT"x=";X,"K=";K,"A=";A,"ef=";EF,"dif=";DIF
120 NEXT X
130 END
140 Y=1-X
150 A=(X*Q)/(Y*(Q^2))
160 E1=2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
170 E2=4*(X^5)*Y*Q +2*(X^5)*Y*(Q^2) +(X^6)*Q
180 F1=(Y^6)*(Q^6) +6*X*(Y^5)*(Q^5) +13*(X^2)*(Y^4)*(Q^4)
190 F2=10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +(X^4)*(Y^2)*(Q^2) +(X^4)*(Y^2)*(Q^3)
200 EF=(E1+E2)/(F1+F2)
210 G1=3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
220 G2=184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
230 G3=22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
240 G4=15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
250 G5=7*(X^9)*Y*Q +3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +(X^10)*Q
260 GG=G1+G2+G3+G4+G5
270 H1=(Y^10)*(Q^9) +10*(X)*(Y^9)*(Q^8) +42*(X^2)*(Y^8)*(Q^7)
280 H2=92*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +105*(X^4)*(Y^6)*(Q^5) +2*(X^4)*(Y^6)*(Q^6)
290 H3=56*(X^5)*(Y^5)*(Q^4) +8*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +6*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
300 H4=9*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +(X^7)*(Y^3)*(Q^4)
310 HH=H1+H2+H3+H4
320 GH=GG/HH
330 I1=4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10) +54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9) +320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
340 I2=1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
350 I3=55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
360 I4=2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5) +6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
370 I5=1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4) +34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
380 I6=321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2)+590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)+90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
390 I7=11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)+108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
400 I8=4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4) +19*(X^12)*(Y^2)*Q +66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
410 I9=6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +10*(X^13)*Y*Q +4*(X^13)*Y*(Q^2) +(X^14)*Q
420 II=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9
430 J1=(Y^14)*(Q^12) +14*(X)*(Y^13)*(Q^11) +87*(X^2)*(Y^12)*(Q^10)
440 J2=310*(X^3)*(Y^11)*(Q^9)+678*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)+3*(X^4)*(Y^10)*(Q^9)
450 J3=969*(X^5)*(Y^9)*(Q^7) +24*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +713*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)

```

```

460 J4=74*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +215*(X^7)*(Y^7)*(Q^5) +138*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
470 J5=2*(X^7)*(Y^7)*(Q^7) +45*(X^8)*(Y^6)*(Q^4) +176*(X^8)*(Y^6)*(Q^5)
480 J6=9*(X^8)*(Y^6)*(Q^6) +10*(X^9)*(Y^5)*(Q^3) +84*(X^9)*(Y^5)*(Q^4)
490 J7=16*(X^9)*(Y^5)*(Q^5) +(X^10)*(Y^4)*(Q^5)
500 JJ=J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7
510 IJ=II/JJ
520 K1=3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
530 K2=288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
540 K3=8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
550 K4=96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
560 K5=461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
570 K6=2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
580 K7=44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
590 K8=1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
600 K9=497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
610 K10=272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
620 K11=198*(X^12)*(Y^3)*Q +206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
630 K12=48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +62*(X^13)*(Y^2)*Q
640 K13=40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
650 K14=12*(X^14)*Y*Q +3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +(X^15)*Q
660 KK=K1+K2+K3+K4+K5+K6+K7+K8+K9+K10+K11+K12+K13+K14
670 L1=(Y^15)*(Q^12) +15*X*(Y^14)*(Q^11)
680 L3=452*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +1317*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
690 L4=4*(X^4)*(Y^11)*(Q^9) +2671*(X^5)*(Y^10)*(Q^7)
700 L5=44*(X^5)*(Y^10)*(Q^8) +3734*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
710 L6=172*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +3116*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
720 L7=588*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +4*(X^7)*(Y^8)*(Q^7)
730 L8=1379*(X^8)*(Y^7)*(Q^4) +864*(X^8)*(Y^7)*(Q^5)
740 L9=30*(X^8)*(Y^7)*(Q^6) +313*(X^9)*(Y^6)*(Q^3)
750 L10=589*(X^9)*(Y^6)*(Q^4) +197*(X^9)*(Y^6)*(Q^5)
760 L11=444*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +118*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
770 L12=4*(X^10)*(Y^5)*(Q^5) +7*(X^11)*(Y^4)*(Q^3)
780 L13=14*(X^11)*(Y^4)*(Q^4) +2*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
790 L14=(X^12)*(Y^3)*(Q^4) +105*(X^2)*(Y^13)*(Q^10)
800 LL=L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14
810 KL=KK/LL
820 M1=4*(X^3)*(Y^18)*(Q^13) +84*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)+770*(X^5)*(Y^16)*(Q^11)
830 M2=4142*(X^6)*(Y^15)*(Q^10)+18*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)+18172*(X^7)*(Y^14)*(Q^9)
840 M3=286*(X^7)*(Y^14)*(Q^10)+58600!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)+2280*(X^8)*(Y^13)*(Q^9)
850 M4=6*(X^8)*(Y^13)*(Q^10)+130308!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7)+8841*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
860 M5=111*(X^9)*(Y^12)*(Q^9) +149764!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
870 M6=21518*(X^10)*(Y^11)*(Q^7) +816*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
880 M7=191292!*(X^11)*(Y^10)*(Q^5) +39614!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6)
890 M8=3470*(X^11)*(Y^10)*(Q^7) +10*(X^11)*(Y^10)*(Q^8)
900 M9=124456!*(X^12)*(Y^9)*(Q^4) +95127!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5)
910 M10=7738*(X^12)*(Y^9)*(Q^6) +222*(X^12)*(Y^9)*(Q^7)
920 M11=30235*(X^13)*(Y^8)*(Q^3) +96559!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4)
930 M12=12786*(X^13)*(Y^8)*(Q^5) +722*(X^13)*(Y^8)*(Q^6)
940 M13=6*(X^13)*(Y^8)*(Q^7) +575*(X^14)*(Y^7)*(Q^2)
950 M14=84837!*(X^14)*(Y^7)*(Q^3) +13987*(X^14)*(Y^7)*(Q^4)
960 M15=2017*(X^14)*(Y^7)*(Q^5) +66*(X^14)*(Y^7)*(Q^6)

```

```

970 M16=43*(X^15)*(Y^6)*Q +20332*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
980 M17=15006*(X^15)*(Y^6)*(Q^3) +3815*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
990 M18=175*(X^15)*(Y^6)*(Q^5) +3399*(X^16)*(Y^5)*Q
1000 M19=9701*(X^16)*(Y^5)*(Q^2) +4194*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1010 M20=705*(X^16)*(Y^5)*(Q^4) +14*(X^16)*(Y^5)*(Q^5)
1020 M21=2031*(X^17)*(Y^4)*Q +3215*(X^17)*(Y^4)*(Q^2)
1030 M22=648*(X^17)*(Y^4)*(Q^3) +92*(X^17)*(Y^4)*(Q^4)
1040 M23=795*(X^18)*(Y^3)*Q +413*(X^18)*(Y^3)*(Q^2) +118*(X^18)*(Y^3)*(Q^3)
1050 M24=4*(X^18)*(Y^3)*(Q^4)+139*(X^19)*(Y^2)*Q +65*(X^19)*(Y^2)*(Q^2)
1060 M25=6*(X^19)*(Y^2)*(Q^3)+18*(X^20)*Y*Q +3*(X^20)*Y*(Q^2) +(X^21)*Q
1070 MM=M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8+M9+M10+M11+M12+M13+M14+M15+M16+M17+M18+M19+M20
      +M21+M22+M23+M24+M25
1080 N1=(Y^21)*(Q^16) +21*X*(Y^20)*(Q^15) +210*(X^2)*(Y^19)*(Q^14)
1090 N2=1326*(X^3)*(Y^18)*(Q^13)+5895*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)+6*(X^4)*(Y^17)*(Q^13)
1100 N3=19477*(X^5)*(Y^16)*(Q^11) +102*(X^5)*(Y^16)*(Q^12)
1110 N4=49299!*(X^6)*(Y^15)*(Q^10) +805*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)
1120 N5=94022!*(X^7)*(Y^14)*(Q^9) +3795*(X^7)*(Y^14)*(Q^10)
1130 N6=5*(X^7)*(Y^14)*(Q^11) +130054!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)
1140 N7=12454*(X^8)*(Y^13)*(Q^9) +96*(X^8)*(Y^13)*(Q^10)
1150 N8=124524!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7) +29548*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
1160 N9=598*(X^9)*(Y^12)*(Q^9) +121579!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
1170 N10=56923!*(X^10)*(Y^11)*(Q^7) +2110*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
1180 N11=6*(X^10)*(Y^11)*(Q^9) +30382*(X^11)*(Y^10)*(Q^5)
1190 N12=83053!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6) +4829*(X^11)*(Y^10)*(Q^7)
1200 N13=66*(X^11)*(Y^10)*(Q^8) +270*(X^12)*(Y^9)*(Q^4)
1210 N14=55689!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5) +10040*(X^12)*(Y^9)*(Q^6)
1220 N15=388*(X^12)*(Y^9)*(Q^7) +170*(X^13)*(Y^8)*(Q^3)
1230 N16=55905!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4) +6571*(X^13)*(Y^8)*(Q^5)
1240 N17=518*(X^13)*(Y^8)*(Q^6) +18*(X^13)*(Y^8)*(Q^7)
1250 N18=9*(X^14)*(Y^7)*(Q^2) +5253*(X^14)*(Y^7)*(Q^3)
1260 N19=8834*(X^14)*(Y^7)*(Q^4) +623*(X^14)*(Y^7)*(Q^5)
1270 N20=79*(X^14)*(Y^7)*(Q^6) +9797*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
1280 N21=2268*(X^15)*(Y^6)*(Q^3) +2599*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
1290 N22=225*(X^15)*(Y^6)*(Q^5) +4*(X^15)*(Y^6)*(Q^6)
1300 N23=57*(X^16)*(Y^5)*(Q^2) +2169*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1310 N24=94*(X^16)*(Y^5)*(Q^4)+16*(X^16)*(Y^5)*(Q^5)+(X^17)*(Y^4)*(Q^5)
1320 NN=N1+N2+N3+N4+N5+N6+N7+N8+N9+N10+N11+N12+N13+N14+N15+N16+N17+N18
      +N19+N20+N21+N22+N23+N24
1330 MN=MM/NN
1340 RETURN

```

หมายเหตุ

- ค่า Kc ของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 4 สปีน คือ A =";EF;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 6 สปีน คือ A =";GH;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 8 สปีน คือ A =";IJ;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 9 สปีน คือ A =";KL;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 12 สปีน คือ A =";MN;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 4 สปีนและกลุ่ม 9 สปีน คือ EF =";KL;"
- ค่า Kc ของกลุ่ม 4 สปีนและกลุ่ม 12 สปีน คือ EF =";MN;"

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าตัวรชนิกฤตเชิงความร้อน

กรณีใช้เงื่อนไข

ขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่ม

```

10 REM ...exponent(YT)...free boundary condition....method 1 (cluster).....
20 CLS
30 INPUT "Q =",Q
40 INPUT "x1 =",X1
50 X=X1-.000001
60 GOSUB 190
70 PRINT"x=";X,"A=";A,"EF=";EF
80 U1=A:V1=EF
90 X=X1+.000001
100 GOSUB 190
110 PRINT"x=";X,"A=";A,"EF=";EF
120 U2=A:V2=EF
130 D1=(U2-U1)/.000002: D2=(V2-V1)/.000002
140 QX=(D2)/(D1)
150 YT=2*LOG(QX)/LOG(4)
160 PRINT
170 PRINT"x1=";X1,"Q=";Q,"D1=";D1,"D2=";D2,"yt=";YT
180 END
190 Y=1-X
200 A=(X*Q)/(Y*(Q^2))
210 E1=2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
220 E2=4*(X^5)*Y*Q +2*(X^5)*Y*(Q^2) +(X^6)*Q
230 F1=(Y^6)*(Q^6) +6*X*(Y^5)*(Q^5) +13*(X^2)*(Y^4)*(Q^4)
240 F2=10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +(X^4)*(Y^2)*(Q^2) +(X^4)*(Y^2)*(Q^3)
250 EF=(E1+E2)/(F1+F2)
260 G1=3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
270 G2=184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
280 G3=22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
290 G4=15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
300 G5=7*(X^9)*Y*Q +3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +(X^10)*Q
310 GG=G1+G2+G3+G4+G5
320 H1=(Y^10)*(Q^9) +10*(X)*(Y^9)*(Q^8) +42*(X^2)*(Y^8)*(Q^7)
330 H2=92*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +105*(X^4)*(Y^6)*(Q^5) +2*(X^4)*(Y^6)*(Q^6)
340 H3=56*(X^5)*(Y^5)*(Q^4) +8*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +6*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
350 H4=9*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +(X^7)*(Y^3)*(Q^4)
360 HH=H1+H2+H3+H4
370 GH=GG/HH
380 I1=4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10) +54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9) +320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
390 I2=1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
400 I3=55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
410 I4=2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5) +6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
420 I5=1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4) +34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
430 I6=321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2)+590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)+90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
440 I7=11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)+108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
450 I8=4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4) +19*(X^12)*(Y^2)*Q +66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)

```

```

460 I9=6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +10*(X^13)*Y*Q +4*(X^13)*Y*(Q^2) +(X^14)*Q
470 II=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9
480 J1=(Y^14)*(Q^12) +14*(X)*(Y^13)*(Q^11) +87*(X^2)*(Y^12)*(Q^10)
490 J2=310*(X^3)*(Y^11)*(Q^9)+678*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)+3*(X^4)*(Y^10)*(Q^9)
500 J3=969*(X^5)*(Y^9)*(Q^7) +24*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +713*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
510 J4=74*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +215*(X^7)*(Y^7)*(Q^5) +138*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
520 J5=2*(X^7)*(Y^7)*(Q^7) +45*(X^8)*(Y^6)*(Q^4) +176*(X^8)*(Y^6)*(Q^5)
530 J6=9*(X^8)*(Y^6)*(Q^6) +10*(X^9)*(Y^5)*(Q^3) +84*(X^9)*(Y^5)*(Q^4)
540 J7=16*(X^9)*(Y^5)*(Q^5) +(X^10)*(Y^4)*(Q^5)
550 JJ=J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7
560 IJ=II/JJ
570 K1=3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
580 K2=288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
590 K3=8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
600 K4=96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
610 K5=461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
620 K6=2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
630 K7=44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
640 K8=1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
650 K9=497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
660 K10=272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
670 K11=198*(X^12)*(Y^3)*Q +206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
680 K12=48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +62*(X^13)*(Y^2)*Q
690 K13=40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
700 K14=12*(X^14)*Y*Q +3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +(X^15)*Q
710 KK=K1+K2+K3+K4+K5+K6+K7+K8+K9+K10+K11+K12+K13+K14
720 L1=(Y^15)*(Q^12) +15*X*(Y^14)*(Q^11)
730 L3=452*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +1317*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
740 L4=4*(X^4)*(Y^11)*(Q^9) +2671*(X^5)*(Y^10)*(Q^7)
750 L5=44*(X^5)*(Y^10)*(Q^8) +3734*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
760 L6=172*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +3116*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
770 L7=588*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +4*(X^7)*(Y^8)*(Q^7)
780 L8=1379*(X^8)*(Y^7)*(Q^4) +864*(X^8)*(Y^7)*(Q^5)
790 L9=30*(X^8)*(Y^7)*(Q^6) +313*(X^9)*(Y^6)*(Q^3)
800 L10=589*(X^9)*(Y^6)*(Q^4) +197*(X^9)*(Y^6)*(Q^5)
810 L11=444*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +118*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
820 L12=4*(X^10)*(Y^5)*(Q^5) +7*(X^11)*(Y^4)*(Q^3)
830 L13=14*(X^11)*(Y^4)*(Q^4) +2*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
840 L14=(X^12)*(Y^3)*(Q^4) +105*(X^2)*(Y^13)*(Q^10)
850 LL=L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14
860 KL=KK/LL
870 M1=4*(X^3)*(Y^18)*(Q^13) +84*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)+770*(X^5)*(Y^16)*(Q^11)
880 M2=4142*(X^6)*(Y^15)*(Q^10)+18*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)+18172*(X^7)*(Y^14)*(Q^9)
890 M3=286*(X^7)*(Y^14)*(Q^10)+58600!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)+2280*(X^8)*(Y^13)*(Q^9)
900 M4=6*(X^8)*(Y^13)*(Q^10)+130308!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7)+8841*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
910 M5=111*(X^9)*(Y^12)*(Q^9) +149764!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
920 M6=21518*(X^10)*(Y^11)*(Q^7) +816*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
930 M7=191292!*(X^11)*(Y^10)*(Q^5) +39614!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6)
940 M8=3470*(X^11)*(Y^10)*(Q^7) +10*(X^11)*(Y^10)*(Q^8)
950 M9=124456!*(X^12)*(Y^9)*(Q^4) +95127!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5)
960 M10=7738*(X^12)*(Y^9)*(Q^6) +222*(X^12)*(Y^9)*(Q^7)

```

```

970 M11=30235*(X^13)*(Y^8)*(Q^3)      +96559!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4)
980 M12=12786*(X^13)*(Y^8)*(Q^5)      +722*(X^13)*(Y^8)*(Q^6)
990 M13=6*(X^13)*(Y^8)*(Q^7)          +575*(X^14)*(Y^7)*(Q^2)
1000 M14=84837!*(X^14)*(Y^7)*(Q^3)    +13987*(X^14)*(Y^7)*(Q^4)
1010 M15=2017*(X^14)*(Y^7)*(Q^5)      +66*(X^14)*(Y^7)*(Q^6)
1020 M16=43*(X^15)*(Y^6)*Q            +20332*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
1030 M17=15006*(X^15)*(Y^6)*(Q^3)    +3815*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
1040 M18=175*(X^15)*(Y^6)*(Q^5)      +3399*(X^16)*(Y^5)*Q
1050 M19=9701*(X^16)*(Y^5)*(Q^2)     +4194*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1060 M20=705*(X^16)*(Y^5)*(Q^4)     +14*(X^16)*(Y^5)*(Q^5)
1070 M21=2031*(X^17)*(Y^4)*Q         +3215*(X^17)*(Y^4)*(Q^2)
1080 M22=648*(X^17)*(Y^4)*(Q^3)     +92*(X^17)*(Y^4)*(Q^4)
1090 M23=795*(X^18)*(Y^3)*Q+413*(X^18)*(Y^3)*(Q^2)+118*(X^18)*(Y^3)*(Q^3)
1100 M24=4*(X^18)*(Y^3)*(Q^4)+139*(X^19)*(Y^2)*Q+65*(X^19)*(Y^2)*(Q^2)
1110 M25=6*(X^19)*(Y^2)*(Q^3)+18*(X^20)*Y*Q+3*(X^20)*Y*(Q^2)+(X^21)*Q
1120 MM=M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8+M9+M10+M11+M12+M13+M14+M15+M16+M17+M18
      +M19+M20+M21+M22+M23+M24+M25
1130 N1=(Y^21)*(Q^16)+21*X*(Y^20)*(Q^15)+210*(X^2)*(Y^19)*(Q^14)
1140 N2=1326*(X^3)*(Y^18)*(Q^13)+5895*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)+6*(X^4)*(Y^17)*(Q^13)
1150 N3=19477*(X^5)*(Y^16)*(Q^11)    +102*(X^5)*(Y^16)*(Q^12)
1160 N4=49299!*(X^6)*(Y^15)*(Q^10)   +805*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)
1170 N5=94022!*(X^7)*(Y^14)*(Q^9)    +3795*(X^7)*(Y^14)*(Q^10)
1180 N6=5*(X^7)*(Y^14)*(Q^11)        +130054!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)
1190 N7=12454*(X^8)*(Y^13)*(Q^9)     +96*(X^8)*(Y^13)*(Q^10)
1200 N8=124524!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7)   +29548*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
1210 N9=598*(X^9)*(Y^12)*(Q^9)       +121579!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
1220 N10=56923!*(X^10)*(Y^11)*(Q^7)  +2110*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
1230 N11=6*(X^10)*(Y^11)*(Q^9)       +30382*(X^11)*(Y^10)*(Q^5)
1240 N12=83053!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6)  +4829*(X^11)*(Y^10)*(Q^7)
1250 N13=66*(X^11)*(Y^10)*(Q^8)      +270*(X^12)*(Y^9)*(Q^4)
1260 N14=55689!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5)   +10040*(X^12)*(Y^9)*(Q^6)
1270 N15=388*(X^12)*(Y^9)*(Q^7)      +170*(X^13)*(Y^8)*(Q^3)
1280 N16=55905!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4)   +6571*(X^13)*(Y^8)*(Q^5)
1290 N17=518*(X^13)*(Y^8)*(Q^6)      +18*(X^13)*(Y^8)*(Q^7)
1300 N18=9*(X^14)*(Y^7)*(Q^2)        +5253*(X^14)*(Y^7)*(Q^3)
1310 N19=8834*(X^14)*(Y^7)*(Q^4)     +623*(X^14)*(Y^7)*(Q^5)
1320 N20=79*(X^14)*(Y^7)*(Q^6)       +9797*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
1330 N21=2268*(X^15)*(Y^6)*(Q^3)     +2599*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
1340 N22=225*(X^15)*(Y^6)*(Q^5)     +4*(X^15)*(Y^6)*(Q^6)
1350 N23=57*(X^16)*(Y^5)*(Q^2)       +2169*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1360 N24=94*(X^16)*(Y^5)*(Q^4) +16*(X^16)*(Y^5)*(Q^5) +(X^17)*(Y^4)*(Q^5)
1370 NN=N1+N2+N3+N4+N5+N6+N7+N8+N9+N10+N11+N12+N13+N14+N15+N16+N17+N18
      +N19+N20+N21+N22+N23+N24
1380 MN=MM/NN
1390 RETURN

```

หมายเหตุ

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 4 สปีชีส์ คือ $A = ";EF;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 6 สปีชีส์ คือ $A = ";GH;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 8 สปีชีส์ คือ $A = ";IJ;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ คือ $A = ";KL;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ คือ $A = ";MN;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ คือ $EF = ";KL;"$

ค่า Y_T ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ คือ $EF = ";MN;"$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 4 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(4/1)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 6 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(6/1)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 8 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(8/1)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(9/1)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(12/1)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(9/4)$

การคำนวณของค่า Y_T ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ $Y_T = 2 * \text{LOG}(QX) / \text{LOG}(12/4)$

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่ามิติแฟร็กทัล

กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขตอิสระ

โดยพิจารณาจำนวนกลุ่ม

```

10 REM ..fractal dimension..free boundary condition....method 1 (cluster).....
20 CLS
30 INPUT "Q =",Q
40 INPUT "x =",X
50 GOSUB 90
60 DF=LOG(EF/A)/LOG((SQR(4))/1)
70 PRINT"x=";X, "A=";A,"B=";B ,"df=";DF
80 END
90 Y=1-X
100 A1=2*(X*Q)
110 A2=(X*Q)
120 A=A1/A2
130 E1=3*2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4)+4*10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3)+5*13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
140 E2=6*4*(X^5)*Y*Q +5*2*(X^5)*Y*(Q^2) +6*(X^6)*Q
150 F1=2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
160 F2=4*(X^5)*Y*Q +2*(X^5)*Y*(Q^2) +(X^6)*Q
170 EF=(E1+E2)/(F1+F2)
180 G1=3*3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7)+4*28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6)+5*103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
190 G2=6*184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+5*4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5)+7*173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
200 G3=6*22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +8*77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2)+7*41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
210 G4=9*15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +8*27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2)+7*3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
220 G5=9*7*(X^9)*Y*Q +8*3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +9*(X^10)*Q
230 GG=G1+G2+G3+G4+G5
240 H1=3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
250 H2=184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
260 H3=22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
270 H4=15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
280 H5=7*(X^9)*Y*Q +3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +(X^10)*Q
290 HH=H1+H2+H3+H4+H5
300 GH=GG/HH
310 I1=3*4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10)+4*54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9)+5*320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
320 I2=6*1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+5*6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8)+7*2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
330 I3=6*55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7)+8*2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+7*192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
340 I4=9*2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+8*497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5)+7*6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
350 I5=10*1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+9*680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4)+8*34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
360 I6=11*321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2) +10*590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)
+9*90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
370 I7=12*11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +11*241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)
+10*108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
380 I8=9*4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4)+12*19*(X^12)*(Y^2)*Q+11*66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
390 I9=10*6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +12*10*(X^13)*Y*Q
+11*4*(X^13)*Y*(Q^2) +12*(X^14)*Q
400 II=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9
410 J1=4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10) +54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9) +320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
420 J2=1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
430 J3=55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)

```

```

440 J4=2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5) +6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
450 J5=1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4) +34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
460 J6=321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2)+590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)+90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
470 J7=11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)+108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
480 J8=4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4) +19*(X^12)*(Y^2)*Q +66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
490 J9=6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +10*(X^13)*Y*Q +4*(X^13)*Y*(Q^2) +(X^14)*Q
500 JJ=J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7+J8+J9
510 IJ=II/JJ
520 K1=4*3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +5*44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
530 K2=6*288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +7*1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
540 K3=6*8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +8*2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
550 K4=7*96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +9*3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
560 K5=8*461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +7*4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
570 K6=10*2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +9*1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
580 K7=8*44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +11*953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
590 K8=10*1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +9*192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
600 K9=12*497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +11*565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
610 K10=10*272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +9*10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
620 K11=12*198*(X^12)*(Y^3)*Q +11*206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
630 K12=10*48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +12*62*(X^13)*(Y^2)*Q
640 K13=11*40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +10*3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
650 K14=12*12*(X^14)*Y*Q +11*3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +12*(X^15)*Q
660 KK=K1+K2+K3+K4+K5+K6+K7+K8+K9+K10+K11+K12+K13+K14
670 L1=3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
680 L2=288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
690 L3=8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
700 L4=96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
710 L5=461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
720 L6=2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
730 L7=44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
740 L8=1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
750 L9=497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
760 L10=272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
770 L11=198*(X^12)*(Y^3)*Q +206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
780 L12=48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +62*(X^13)*(Y^2)*Q
790 L13=40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
800 L14=12*(X^14)*Y*Q +3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +(X^15)*Q
810 LL=L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14
820 KL=KK/LL
830 M1=4*4*(X^3)*(Y^18)*(Q^13) +5*84*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)
+6*770*(X^5)*(Y^16)*(Q^11)
840 M2=7*4142*(X^6)*(Y^15)*(Q^10) +6*18*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)
+8*18172*(X^7)*(Y^14)*(Q^9)
850 M3=7*286*(X^7)*(Y^14)*(Q^10) +9*58600!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)
+8*2280*(X^8)*(Y^13)*(Q^9)
860 M4=7*6*(X^8)*(Y^13)*(Q^10) +10*130308!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7)
+9*8841*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
870 M5=8*111*(X^9)*(Y^12)*(Q^9) +11*149764!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
880 M6=10*21518*(X^10)*(Y^11)*(Q^7) +9*816*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
890 M7=12*191292!*(X^11)*(Y^10)*(Q^5) +11*39614!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6)
900 M8=10*3470*(X^11)*(Y^10)*(Q^7) +9*10*(X^11)*(Y^10)*(Q^8)
910 M9=13*124456!*(X^12)*(Y^9)*(Q^4) +12*95127!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5)
920 M10=11*7738*(X^12)*(Y^9)*(Q^6) +10*222*(X^12)*(Y^9)*(Q^7)

```

```

930 M11=14*30235*(X^13)*(Y^8)*(Q^3) +13*96559!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4)
940 M12=12*12786*(X^13)*(Y^8)*(Q^5) +11*722*(X^13)*(Y^8)*(Q^6)
950 M13=10*6*(X^13)*(Y^8)*(Q^7) +15*575*(X^14)*(Y^7)*(Q^2)
960 M14=14*84837!*(X^14)*(Y^7)*(Q^3) +13*13987*(X^14)*(Y^7)*(Q^4)
970 M15=12*2017*(X^14)*(Y^7)*(Q^5) +11*66*(X^14)*(Y^7)*(Q^6)
980 M16=16*43*(X^15)*(Y^6)*Q +15*20332*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
990 M17=14*15006*(X^15)*(Y^6)*(Q^3) +13*3815*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
1000 M18=12*175*(X^15)*(Y^6)*(Q^5) +16*3399*(X^16)*(Y^5)*Q
1010 M19=15*9701*(X^16)*(Y^5)*(Q^2) +14*4194*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1020 M20=13*705*(X^16)*(Y^5)*(Q^4) +12*14*(X^16)*(Y^5)*(Q^5)
1030 M21=16*2031*(X^17)*(Y^4)*Q +15*3215*(X^17)*(Y^4)*(Q^2)
1040 M22=14*648*(X^17)*(Y^4)*(Q^3) +13*92*(X^17)*(Y^4)*(Q^4)
1050 M23=16*795*(X^18)*(Y^3)*Q +15*413*(X^18)*(Y^3)*(Q^2)
      +14*118*(X^18)*(Y^3)*(Q^3)
1060 M24=13*4*(X^18)*(Y^3)*(Q^4) +16*139*(X^19)*(Y^2)*Q
      +15*65*(X^19)*(Y^2)*(Q^2)
1070 M25=14*6*(X^19)*(Y^2)*(Q^3) +16*18*(X^20)*Y*Q
      +15*3*(X^20)*Y*(Q^2) +16*(X^21)*Q
1080 MM=M1+M2+M3+M4+M5+M6+M7+M8+M9+M10+M11+M12+M13+M14+M15+M16+M17+M18
      +M19+M20+M21+M22+M23+M24+M25
1090 N1=4*(X^3)*(Y^18)*(Q^13) +84*(X^4)*(Y^17)*(Q^12)+770*(X^5)*(Y^16)*(Q^11)
1100 N2=4142*(X^6)*(Y^15)*(Q^10)+18*(X^6)*(Y^15)*(Q^11)+18172*(X^7)*(Y^14)*(Q^9)
1110 N3=286*(X^7)*(Y^14)*(Q^10) +58600!*(X^8)*(Y^13)*(Q^8)
      +2280*(X^8)*(Y^13)*(Q^9)
1120 N4=6*(X^8)*(Y^13)*(Q^10) +130308!*(X^9)*(Y^12)*(Q^7)
      +8841*(X^9)*(Y^12)*(Q^8)
1130 N5=111*(X^9)*(Y^12)*(Q^9) +149764!*(X^10)*(Y^11)*(Q^6)
1140 N6=21518*(X^10)*(Y^11)*(Q^7) +816*(X^10)*(Y^11)*(Q^8)
1150 N7=191292!*(X^11)*(Y^10)*(Q^5) +39614!*(X^11)*(Y^10)*(Q^6)
1160 N8=3470*(X^11)*(Y^10)*(Q^7) +10*(X^11)*(Y^10)*(Q^8)
1170 N9=124456!*(X^12)*(Y^9)*(Q^4) +95127!*(X^12)*(Y^9)*(Q^5)
1180 N10=7738*(X^12)*(Y^9)*(Q^6) +222*(X^12)*(Y^9)*(Q^7)
1190 N11=30235*(X^13)*(Y^8)*(Q^3) +96559!*(X^13)*(Y^8)*(Q^4)
1200 N12=12786*(X^13)*(Y^8)*(Q^5) +722*(X^13)*(Y^8)*(Q^6)
1210 N13=6*(X^13)*(Y^8)*(Q^7) +575*(X^14)*(Y^7)*(Q^2)
1220 N14=84837!*(X^14)*(Y^7)*(Q^3) +13987*(X^14)*(Y^7)*(Q^4)
1230 N15=2017*(X^14)*(Y^7)*(Q^5) +66*(X^14)*(Y^7)*(Q^6)
1240 N16=43*(X^15)*(Y^6)*Q +20332*(X^15)*(Y^6)*(Q^2)
1250 N17=15006*(X^15)*(Y^6)*(Q^3) +3815*(X^15)*(Y^6)*(Q^4)
1260 N18=175*(X^15)*(Y^6)*(Q^5) +3399*(X^16)*(Y^5)*Q
1270 N19=9701*(X^16)*(Y^5)*(Q^2) +4194*(X^16)*(Y^5)*(Q^3)
1280 N20=705*(X^16)*(Y^5)*(Q^4) +14*(X^16)*(Y^5)*(Q^5)
1290 N21=2031*(X^17)*(Y^4)*Q +3215*(X^17)*(Y^4)*(Q^2)
1300 N22=648*(X^17)*(Y^4)*(Q^3) +92*(X^17)*(Y^4)*(Q^4)
1310 N23=795*(X^18)*(Y^3)*Q+413*(X^18)*(Y^3)*(Q^2)+118*(X^18)*(Y^3)*(Q^3)
1320 N24=4*(X^18)*(Y^3)*(Q^4)+139*(X^19)*(Y^2)*Q+65*(X^19)*(Y^2)*(Q^2)
1330 N25=6*(X^19)*(Y^2)*(Q^3)+18*(X^20)*Y*Q +3*(X^20)*Y*(Q^2) +(X^21)*Q
1340 NN=N1+N2+N3+N4+N5+N6+N7+N8+N9+N10+N11+N12+N13+N14+N15+N16+N17+N18
      +N19+N20+N21+N22+N23+N24+N25
1350 MN=MM/NN
1360 RETURN

```

หมายเหตุ

ค่า DF ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 4 สปีชีส์ คือ $A = ";EF;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 6 สปีชีส์ คือ $A = ";CH;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 8 สปีชีส์ คือ $A = ";IJ;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ คือ $A = ";KL;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ คือ $A = ";MN;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ คือ $EF = ";KL;"$

ค่า DF ของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ คือ $EF = ";MN;"$

การคำนวณของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 4 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(EF/A) / \text{LOG}(\text{SQR}(4/1))$

การคำนวณของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 6 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(CH/A) / \text{LOG}(\text{SQR}(6/1))$

การคำนวณของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 8 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(IJ/A) / \text{LOG}(\text{SQR}(8/1))$

การคำนวณของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(KL/A) / \text{LOG}(\text{SQR}(9/1))$

การคำนวณของกลุ่ม 1 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(MN/A) / \text{LOG}(\text{SQR}(12/1))$

การคำนวณของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 9 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(KL/EF) / \text{LOG}(\text{SQR}(9/4))$

การคำนวณของกลุ่ม 4 สปีชีส์และกลุ่ม 12 สปีชีส์ $DF = \text{LOG}(MN/EF) / \text{LOG}(\text{SQR}(12/4))$

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อ กรณีใช้
เงื่อนไขขอบเขตอิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่ม

```

10 REM ..percolation probability..free boundary condition..method 1 (cluster)...
20 CLS
30 PRINT"2x2:1x1 percolation f1(cluster)"
40 INPUT "Q =",Q
50 INPUT"l=",L
60 PRINT"q=";Q
70 PRINT TAB(6);"p";TAB(13)"<s2(p)>";TAB(23);"P"
80 FOR T=.1 TO 1 STEP .1
90 X=T
100 GOSUB 190
110 PP=(1/(L^2))*(EF/2)
120 LPRINT USING"####.####";X,EF,PP
130 NEXT T
140 END
150 Y=1-X
160 A1=2*(X*Q)
170 A2=(X*Q)
180 A=A1/A2
190 Y=1-X
200 E1=3*2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +4*10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +5*13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
210 E2=6*4*(X^5)*Y*Q +5*2*(X^5)*Y*(Q^2) +6*(X^6)*Q
220 F1=2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
230 F2=4*(X^5)*Y*Q +2*(X^5)*Y*(Q^2) +(X^6)*Q
240 EF=(E1+E2)/(F1+F2)
250 RETURN
260 G1=3*3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +4*28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +5*103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
270 G2=6*184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+5*4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +7*173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
280 G3=6*22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +8*77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2)+7*41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
290 G4=9*15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +8*27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2)+7*3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
300 G5=9*7*(X^9)*Y*Q +8*3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +9*(X^10)*Q
310 GG=G1+G2+G3+G4+G5
320 H1=3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
330 H2=184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
340 H3=22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
350 H4=15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
360 H5=7*(X^9)*Y*Q +3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +(X^10)*Q
370 HH=H1+H2+H3+H4+H5
380 GH=GG/HH
390 I1=3*4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10)+4*54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9)+5*320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
400 I2=6*1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+5*6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8)+7*2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
410 I3=6*55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7)+8*2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+7*192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
420 I4=9*2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+8*497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5)+7*6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
430 I5=10*1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+9*680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4)+8*34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
440 I6=11*321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2) +10*590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)
+9*90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
450 I7=12*11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +11*241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)
+10*108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)

```

```

460 I8=9*4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4)+12*19*(X^12)*(Y^2)*Q+11*66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
470 I9=10*6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3)+12*10*(X^13)*Y*Q+11*4*(X^13)*Y*(Q^2)+12*(X^14)*Q
480 I1=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9
490 J1=4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10) +54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9) +320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
500 J2=1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
510 J3=55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
520 J4=2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5) +6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
530 J5=1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4) +34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
540 J6=321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2)+590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)+90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
550 J7=11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)+108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
560 J8=4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4) +19*(X^12)*(Y^2)*Q +66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
570 J9=6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +10*(X^13)*Y*Q +4*(X^13)*Y*(Q^2) +(X^14)*Q
580 JJ=J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7+J8+J9
590 IJ=II/JJ
600 Y=1-X
610 K1=4*3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +5*44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
620 K2=6*288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +7*1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
630 K3=6*8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +8*2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
640 K4=7*96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +9*3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
650 K5=8*461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +7*4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
660 K6=10*2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +9*1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
670 K7=8*44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +11*953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
680 K8=10*1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +9*192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
690 K9=12*497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +11*565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
700 K10=10*272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +9*10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
710 K11=12*198*(X^12)*(Y^3)*Q +11*206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
720 K12=10*48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +12*62*(X^13)*(Y^2)*Q
730 K13=11*40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +10*3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
740 K14=12*12*(X^14)*Y*Q +11*3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +12*(X^15)*Q
750 KK=K1+K2+K3+K4+K5+K6+K7+K8+K9+K10+K11+K12+K13+K14
760 L1=3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
770 L2=288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
780 L3=8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
790 L4=96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
800 L5=461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
810 L6=2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
820 L7=44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
830 L8=1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
840 L9=497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
850 L10=272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
860 L11=198*(X^12)*(Y^3)*Q +206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
870 L12=48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +62*(X^13)*(Y^2)*Q
880 L13=40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
890 L14=12*(X^14)*Y*Q +3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +(X^15)*Q
900 LL=L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14
910 KL=KK/LL
920 RETURN

```

หมายเหตุ

กรณีของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 4 สปีน $PP = (1/(L^2)) * (EF/2)$ โดย $L = 2$

กรณีของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 9 สปีน $PP = (1/(L^2)) * (KL/2)$ โดย $L = 3$

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณค่าพลังงานอิสระต่อสปีน กรณีใช้เงื่อนไขขอบเขต
อิสระ โดยพิจารณาจำนวนกลุ่ม

```

10 REM ..free energy.....free boundary condition....method 1 (cluster).....
20 CLS
30 Z=4
40 INPUT "Q =",Q
50 INPUT "K'0 =",K0
60 PRINT"q=";Q
70 PRINT TAB(6);"K";TAB(16);"x";TAB(27);"x'";TAB(38);"EF";TAB(49);"A";
   TAB(60);"-f(x,q)"
80 FOR K=0 TO 3 STEP .5
90 X=1-EXP(-K)
100 GOSUB 280
110 PH=X
120 FOR S=0 TO 1 STEP .0005
130 X=S
140 GOSUB 250
150 IF ABS(EF-A) <.01 THEN 180
160 NEXT S
170 C1=0
180 IF A = 0 THEN 200
190 C1=(LOG(A1+A2))/(SQR(1))^2
200 C2=(K0/(SQR(4))^2)+((SQR(1/4))^2)*C1
210 C3=((Z*K)/2)+C2
220 PRINT USING"####.#### ";K,PH,S,EF,A,C3
230 NEXT K
240 END
250 Y=1-X
260 A1=(X*Q): A2=(Y*(Q^2)): A=A1+A2
270 RETURN
280 Y=1-X
290 E1=2*(X^2)*(Y^4)*(Q^4) +10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3) +13*(X^4)*(Y^2)*(Q^2)
300 E2=4*(X^5)*Y*Q +2*(X^5)*Y*(Q^2) +(X^6)*Q
310 F1=(Y^6)*(Q^6) +6*X*(Y^5)*(Q^5) +13*(X^2)*(Y^4)*(Q^4)
320 F2=10*(X^3)*(Y^3)*(Q^3)+(X^4)*(Y^2)*(Q^2) +(X^4)*(Y^2)*(Q^3)
330 EF=(E1+E2)/(F1+F2)
340 EFF=E1+E2+F1+F2
350 RETURN
360 G1=3*(X^2)*(Y^8)*(Q^7) +28*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +103*(X^4)*(Y^6)*(Q^5)
370 G2=184*(X^5)*(Y^5)*(Q^4)+4*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +173*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
380 G3=22*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +77*(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +41*(X^7)*(Y^3)*(Q^3)
390 G4=15*(X^8)*(Y^2)*(Q) +27*(X^8)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^8)*(Y^2)*(Q^3)
400 G5=7*(X^9)*Y*Q +3*(X^9)*(Y)*(Q^2) +(X^10)*Q
410 GG=G1+G2+G3+G4+G5
420 H1=(Y^10)*(Q^9) +10*(X)*(Y^9)*(Q^8) +42*(X^2)*(Y^8)*(Q^7)
430 H2=92*(X^3)*(Y^7)*(Q^6) +105*(X^4)*(Y^6)*(Q^5) +2*(X^4)*(Y^6)*(Q^6)
440 H3=56*(X^5)*(Y^5)*(Q^4) +8*(X^5)*(Y^5)*(Q^5) +6*(X^6)*(Y^4)*(Q^3)
450 H4=9*(X^6)*(Y^4)*(Q^4) +(X^7)*(Y^3)*(Q^2) +(X^7)*(Y^3)*(Q^4)

```

```

460 HH=H1+H2+H3+H4
470 GH=GG/HH
480 GGH=GG+HH
490 I1=4*(X^2)*(Y^12)*(Q^10) +54*(X^3)*(Y^11)*(Q^9) +320*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)
500 I2=1003*(X^5)*(Y^9)*(Q^7)+6*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +2161*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
510 I3=55*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +2885*(X^7)*(Y^7)*(Q^5)+192*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
520 I4=2270*(X^8)*(Y^6)*(Q^4)+497*(X^8)*(Y^6)*(Q^5) +6*(X^8)*(Y^6)*(Q^6)
530 I5=1178*(X^9)*(Y^5)*(Q^3)+680*(X^9)*(Y^5)*(Q^4) +34*(X^9)*(Y^5)*(Q^5)
540 I6=321*(X^10)*(Y^4)*(Q^2)+590*(X^10)*(Y^4)*(Q^3)+90*(X^10)*(Y^4)*(Q^4)
550 I7=11*(X^11)*(Y^3)*(Q) +241*(X^11)*(Y^3)*(Q^2)+108*(X^11)*(Y^3)*(Q^3)
560 I8=4*(X^11)*(Y^3)*(Q^4) +19*(X^12)*(Y^2)*Q +66*(X^12)*(Y^2)*(Q^2)
570 I9=6*(X^12)*(Y^2)*(Q^3) +10*(X^13)*Y*Q +4*(X^13)*Y*(Q^2) +(X^14)*Q
580 I1=I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7+I8+I9
590 J1=(Y^14)*(Q^12) +14*(X)*(Y^13)*(Q^11) +87*(X^2)*(Y^12)*(Q^10)
600 J2=310*(X^3)*(Y^11)*(Q^9)+678*(X^4)*(Y^10)*(Q^8)+3*(X^4)*(Y^10)*(Q^9)
610 J3=969*(X^5)*(Y^9)*(Q^7) +24*(X^5)*(Y^9)*(Q^8) +713*(X^6)*(Y^8)*(Q^6)
620 J4=74*(X^6)*(Y^8)*(Q^7) +215*(X^7)*(Y^7)*(Q^5) +138*(X^7)*(Y^7)*(Q^6)
630 J5=2*(X^7)*(Y^7)*(Q^7) +45*(X^8)*(Y^6)*(Q^4) +176*(X^8)*(Y^6)*(Q^5)
640 J6=9*(X^8)*(Y^6)*(Q^6) +10*(X^9)*(Y^5)*(Q^3) +84*(X^9)*(Y^5)*(Q^4)
650 J7=16*(X^9)*(Y^5)*(Q^5) +(X^10)*(Y^4)*(Q^5)
660 JJ=J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7
670 IJ=IJ/JJ
680 I1J=I1+JJ
690 K1=3*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +44*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
700 K2=288*(X^5)*(Y^10)*(Q^7) +1091*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
710 K3=8*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +2631*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
720 K4=96*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +3697*(X^8)*(Y^7)*(Q^4)
730 K5=461*(X^8)*(Y^7)*(Q^5) +4*(X^8)*(Y^7)*(Q^6)
740 K6=2366*(X^9)*(Y^6)*(Q^3) +1496*(X^9)*(Y^6)*(Q^4)
750 K7=44*(X^9)*(Y^6)*(Q^5) +953*(X^10)*(Y^5)*(Q^2)
760 K8=1292*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +192*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
770 K9=497*(X^11)*(Y^4)*(Q) +565*(X^11)*(Y^4)*(Q^2)
780 K10=272*(X^11)*(Y^4)*(Q^3) +10*(X^11)*(Y^4)*(Q^4)
790 K11=198*(X^12)*(Y^3)*Q +206*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
800 K12=48*(X^12)*(Y^3)*(Q^3) +62*(X^13)*(Y^2)*Q
810 K13=40*(X^13)*(Y^2)*(Q^2) +3*(X^13)*(Y^2)*(Q^3)
820 K14=12*(X^14)*Y*Q +3*(X^14)*(Y)*(Q^2) +(X^15)*Q
830 KK=K1+K2+K3+K4+K5+K6+K7+K8+K9+K10+K11+K12+K13+K14
840 L1=(Y^15)*(Q^12) +15*X*(Y^14)*(Q^11)
850 L3=452*(X^3)*(Y^12)*(Q^9) +1317*(X^4)*(Y^11)*(Q^8)
860 L4=4*(X^4)*(Y^11)*(Q^9) +2671*(X^5)*(Y^10)*(Q^7)
870 L5=44*(X^5)*(Y^10)*(Q^8) +3734*(X^6)*(Y^9)*(Q^6)
880 L6=172*(X^6)*(Y^9)*(Q^7) +3116*(X^7)*(Y^8)*(Q^5)
890 L7=588*(X^7)*(Y^8)*(Q^6) +4*(X^7)*(Y^8)*(Q^7)
900 L8=1379*(X^8)*(Y^7)*(Q^4) +864*(X^8)*(Y^7)*(Q^5)
910 L9=30*(X^8)*(Y^7)*(Q^6) +313*(X^9)*(Y^6)*(Q^3)
920 L10=589*(X^9)*(Y^6)*(Q^4) +197*(X^9)*(Y^6)*(Q^5)
930 L11=444*(X^10)*(Y^5)*(Q^3) +118*(X^10)*(Y^5)*(Q^4)
940 L12=4*(X^10)*(Y^5)*(Q^5) +7*(X^11)*(Y^4)*(Q^3)
950 L13=14*(X^11)*(Y^4)*(Q^4) +2*(X^12)*(Y^3)*(Q^2)
960 L14=(X^12)*(Y^3)*(Q^4) +105*(X^2)*(Y^13)*(Q^10)

```

```
970 LL=L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14
980 KL=KK/LL
990 KKL=KK+LL
1000 RETURN
```

หมายเหตุ

กรณีของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 4 สปีน

$$C1 = (\text{LOG}(A1+A2))/(\text{SQRT}(1/4))^2$$

$$C2 = (K0/(\text{SQRT}(4))^2 + ((\text{SQRT}(1/4))^2 * C1$$

$$C3 = (z * K) / 2 + C2$$

กรณีของกลุ่ม 1 สปีนและกลุ่ม 9 สปีน

$$C1 = (\text{LOG}(A1+A2))/(\text{SQRT}(1/9))^2$$

$$C2 = (K0/(\text{SQRT}(9))^2 + ((\text{SQRT}(1/9))^2 * C1$$

$$C3 = (z * K) / 2 + C2$$

กรณีของกลุ่ม 4 สปีนและกลุ่ม 9 สปีน

$$C1 = (\text{LOG}(EFF))/(\text{SQRT}(4/9))^2$$

$$C2 = (K0/(\text{SQRT}(9))^2 + ((\text{SQRT}(4/9))^2 * C1$$

$$C3 = (z * K) / 2 + C2$$

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นางสาวปวีณา ชื่อสกุล สัจจอุตตรา

เกิดวันที่ 12 เดือน ธันวาคม พุทธศักราช 2507

สถานที่เกิด กรุงเทพมหานคร

สถานที่อยู่ปัจจุบัน 50/118 หมู่บ้านเสนานิเวศน์ ซอยเสนานิคม 1

ถนน พหลโยธิน กรุงเทพมหานคร 10230

สถานที่ทำงานปัจจุบัน -

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2525 เติบโตขึ้นตอนศึกษา (แผนกวิทยาศาสตร์) จากโรงเรียนสาธิตปทุมมา

พ.ศ. 2529 กศ.บ. วิชาเอกนิเทศ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ปทุมวัน

พ.ศ. 2534 วท.ม. วิชาเอกนิเทศ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

การศึกษาภาวะการเชื่อมต่อเชิงทักษะแบบมีสหสัมพันธ์โดยอาศัย
แบบจำลองสปีนของพอยต์สมแลตทิซจัตุรัส

บทคัดย่อ
ของ
ปรีชา สัจจอุตตรา

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต วิชาเอกนิรุกติศาสตร์
มีนาคม 2535

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้กระจายฟังก์ชันพาร์ติชันของระบบแม่เหล็กเฟอร์ไรต์ตามแบบจำลองสปินแบบพอตส์ซึ่งมี q สถานะ และอยู่บนตำแหน่งแลตทิซในสองมิติ นอกเป็นผลบวกของฟังก์ชันของกราฟย่อย ซึ่งกำหนดด้วยจำนวนพันธะ จำนวนกลุ่มและจำนวนวงปิด การกระจายดังกล่าว ได้แสดงให้เห็นว่าความน่าจะเป็นที่จะมีพันธะเชื่อมต่อระหว่างตำแหน่งแลตทิซสองตำแหน่งใด ๆ ที่ใกล้เคียงกันเป็นอันดับหนึ่ง มีค่าเป็น $p = 1 - e^{-K}$ ในเมื่อ K คือความแรงของพันธะที่อุณหภูมิ T จากฟังก์ชันพาร์ติชันได้แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางแม่เหล็ก และปริมาณทางภาวะการเชื่อมต่อเชิงพันธะเป็นคู่กันไป คือ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าเฉลี่ยความเป็นแม่เหล็กและความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อข้ามฟาก สามารถวัดได้เชิงแม่เหล็กและขนาดเฉลี่ยของกลุ่มแม่เหล็กได้ พลังงานภายในของระบบและจำนวนพันธะเฉลี่ย และความสัมพันธ์ระหว่างความจุความร้อนและความแปรปรวนของพันธะ การวิจัยนี้ได้อาศัยวิธีวันอร์มัลไลเซชันกราฟ หาค่าจุลวิฤตของการเปลี่ยนเฟส วรรณวิฤตเชิงความร้อนมิติแฟรกทัล ความน่าจะเป็นของภาวะการเชื่อมต่อ และพลังงานอิสระของระบบ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตอิสระและเงื่อนไขขอบเขตมีคาบด้านเดียว ทั้งในการที่ยึดจำนวนกลุ่ม และจำนวนวงปิดในกราฟย่อยเป็นหลัก ผลที่ได้มีค่าเทียบเคียงได้กับผลจากการศึกษาโดยวิธีวันอร์มัลไลเซชันในปริภูมิจริง ซึ่งถูกจำกัดด้วยความจำเป็นในการเปรียบเทียบเซลล์ขนาดเล็ก

A STUDY OF BOND - CORRELATED PERCOLATION USING
POTTS MODEL OF SPINS ON A SQUARE LATTICE

AN ABSTRACT

BY

PREYA SUJAUTRA

Presented in partial fulfillment of the requirements for the

Master of Science degree in Physics

at Srinakharinwirot University

March 1992

In this research, the partition function of a ferromagnetic system of q -state Potts spins on a two-dimensional lattice is expanded as a sum of partition functions of subgraphs characterized by number of bonds, number of clusters and number of closed loops. Such expansion shows that a bond probability that any two nearest-neighbor sites are connected is given by $p = 1 - e^{-K}$ where K is the bond strength at temperature T . From the partition function, relations between pairs of magnetic and bond-percolation quantities are established: magnetization and percolation probability, magnetic susceptibility and average size of finite clusters, internal energy of the system and bond average and heat capacity and bond fluctuation. Also in this research the renormalization-group method is applied to determine the critical point of phase-transition, thermal critical exponent, fractal dimension, percolation probability and free energy of the system. Cases upon which free boundary condition and one-sided periodic boundary condition are imposed and in which the principal characteristics of subgraphs are the number of clusters and the number of closed loops are considered. Numerical results obtained are generally comparable to results from real-space renormalization methods which are unavoidably restricted by small-cell comparison.