

512.5
๑ 1897
๖-๖

การหาค่าของเกมที่ผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น

ห้องสมุดนักศึกษาคณะ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์

ของ

อดิศักดิ์ มั่นดี

๓ 7 พ.ค. 2535

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาค้นคว้าหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2532

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

178412

การหาค่าของเกมที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น

บทคัดย่อ

ของ

อติศักดิ์ มั่นดี

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต

มีนาคม 2532

การศึกษาในครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการหาค่าของเกม n คน ที่มีผลรวม
การได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น เฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น
เพียง 2 หรือ 3 วิธี ส่วนผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็นจำนวนนับ พบว่าวิธีการหาค่าของเกม
ที่สมเหตุสมผลตามคุณสมบัติของค่าแนกซิมันและจุดสมดุลโดยใช้กราฟ

FINDING THE VALUES OF A NON COOPERATIVE ZERO SUM GAME

AN ABSTRACT

BY

ADISAK MONDEE

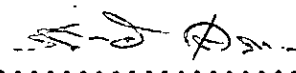
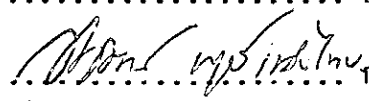
Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree
at Srinakharinwirot University

March 1989

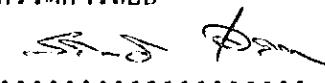
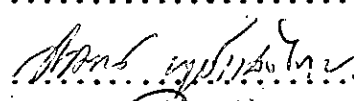
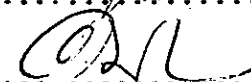
This experiment was to study a method of finding the values of an n - person non cooperative zero sum game in which at least one player has only two or three strategies. The others have m strategies where m is a natural number. It was found that there was the logical method of finding values of game according to the properties of maximin and equilibrium point by graph.

คณะกรรมการที่ปรึกษาประจำตัวนิสิต และคณะกรรมการสอบ ได้พิจารณาปริญญานิพนธ์
ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิตของ
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการที่ปรึกษา


..... ประธาน

..... กรรมการ

คณะกรรมการสอบ


..... ประธาน

..... กรรมการ

..... กรรมการ

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือและให้คำแนะนำ จากอาจารย์ราชันย์ อนันตะ
ประธานกรรมการที่ปรึกษา และอาจารย์วิวัฒน์ หงษ์แสงไทย กรรมการที่ปรึกษา ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณ
เป็นอย่างสูง

ผู้วิจัยขอกราบน้อมรำลึกพระคุณของบิดา มารดา ที่ไต่อบรมเลี้ยงดูให้ความอุปการะทั้งในด้าน
กำลังใจ และกำลังทรัพย์ สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา พระคุณนี้หาที่เปรียบมิได้

อดิศักดิ์ มั่นดี

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	3
ความสำคัญของการวิจัย	3
ขอบเขตของการวิจัย	3
คำนิยามศัพท์เฉพาะ	3
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
3 วิธีการและผลการวิจัย	8
4 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	32
บรรณานุกรม	36
ภาคผนวก	38

บทนำ

ภูมิหลัง

มนุษย์แต่ละคนมักจะต้องเผชิญกับการแข่งขัน หรือการต่อสู้ในรูปแบบต่าง ๆ กัน เช่น การแข่งขันเกมต่าง ๆ การแข่งขันชิงตำแหน่ง การแข่งขันในด้านการโฆษณา เพื่อแย่งตลาด การค้าในทางธุรกิจหรือแม้แต่การต่อสู้ในสงคราม ในแต่ละสถานการณ์เหล่านี้ จะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้นั้นขึ้นอยู่กับยุทธวิธีที่คู่ต่อสู้แต่ละฝ่ายเลือกใช้ ทฤษฎีเกมเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึงสถานการณ์ต่าง ๆ ที่มีการแข่งขัน โดยเน้นเรื่องขบวนการตัดสินใจของคู่ต่อสู้แต่ละฝ่าย (เพียร์ตัน จันท์แสวโล 2528 : 1) มีเหตุการณ์ที่น่าสนใจเหตุการณ์หนึ่ง คือ "ชาวศึกคอสมेटิกส์" ที่ทางสรรพสินค้าแห่งหนึ่งได้มีบริษัทใหญ่รวมในการดึงดูดลูกค้าให้เข้าไปบูธของตน 3 บริษัท ยุทธวิธีในการแย่งลูกค้า เช่น นวดหน้าพรมแดงหน้าฟรี นำคารามาปรากฏตัว และลดราคา ซึ่งยุทธวิธีบางอย่างใช้ค่าใช้จ่ายมาก แต่บางบริษัทไม่จำเป็นต้องลงทุนมากก็สามารถดึงดูดลูกค้าได้มากมาย จึงน่าจะมีการตัดสินใจที่จะใช้ยุทธวิธีใดที่เหมาะสม สินค้าที่มีกลุ่มเป้าหมายเดียวกันหรือใกล้เคียงกันมาอยู่ด้วยกันแน่นอนว่า ต้องมีการแข่งขันเกิดขึ้น (คูแซง 2530 : 265)

จอห์น วอน นิวแมน (John Von Neumann) และออสการ์ มอร์เกนสเทิร์น (Oskar Morgenstern) ได้เริ่มเผยแพร่ทฤษฎีเกมในคริสต์ทศวรรษ 1928 ทำให้พัฒนามาอย่างรวดเร็ว โดยเฉพาะทางด้านคณิตศาสตร์เท่านั้น (Burger. 1963 : 3) ผลของทฤษฎีต่าง ๆ ยังนำไปใช้ในทางรัฐศาสตร์ จิตวิทยา สังคมศาสตร์ การตลาด การเงิน และการสงครามอีกด้วย คำว่า "เกม" สำหรับคนธรรมดาแก่นักทฤษฎีเกมนั้น มีความหมายคล้ายกันในส่วนที่จะมีผู้เล่น และสิ่งที่ผู้เล่นต้องกระทำหรือสร้างการตัดสินใจที่แน่นอน ผู้เล่นฝ่ายหนึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นบุคคลเพียงคนเดียว อาจเป็นทีมหนึ่งทีม องค์กรณ์ใดองค์กรณ์หนึ่ง ชาติใดชาติหนึ่งก็ได้

คำตอบพื้นฐานเกี่ยวกับเกมใด ๆ คือ ผู้เล่นควรจะเล่นอย่างไร กับผลสุดท้ายของเกมควรจะเป็นอย่างไร บางครั้งเรียกคำตอบเหล่านี้ว่า ผลลัพธ์ของเกม (Morton. 1969 : 8 - 9)

การวิจัยทางทฤษฎีเกมส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับเกมที่มีผู้เล่น 2 ฝ่าย โดยที่ปริมาณการสูญเสียของฝ่ายหนึ่ง จะเท่ากับปริมาณที่อีกฝ่ายหนึ่งได้ไป เรียกเกมประเภทนี้ว่า เกม 2 คน ซึ่งผลรวมการได้การเสียของ 2 ฝ่ายเป็นศูนย์ (เพ็ชรรัตน์ จันทรแสนวิไล 2528 : 1) ผลลัพธ์ของเกมที่สามารถวัดได้ คือ ยุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุดกับค่าของเกม ซึ่งค่าของเกมจะเป็นส่วนที่ได้เฉลี่ยตลอดครั้ง ตลอดเวลาอันยาวนานของการเล่นเกม (สุทธิชัย โง้วศิริ และอุดม ไยเจริญ 2528 : 174) สำหรับการหาค่าของเกม 2 คน ซึ่งผลรวมการได้การเสียของ 2 ฝ่ายเป็นศูนย์ โดยผู้เล่นฝ่ายหนึ่งมียุทธวิธีเพียง 2 วิธีเท่านั้นในการเล่นเกม วิธีการหาค่าของเกมวิธีการหนึ่ง คือ วิธีการกราฟ ลักษณะกราฟที่ได้จะเป็นกราฟเส้นตรง (Hiller and Lieberman. 1969 : 272) แล้วหาจุดตัดของกราฟ ซึ่งเป็นจุดที่ให้ค่า แมกซิมีน (Maximin) ที่เป็นค่าของเกม ถ้าค่าของเกมเป็นบวก ผู้เล่นสามารถคาดหมายได้ว่า ต้องเป็นผู้ชนะ ถ้าหากว่าค่าของเกมเป็นลบ แสดงถึง การเสียเปรียบในเกมนั้น ๆ ของผู้เล่น แต่ก็ยังมีโอกาสชนะได้ (สุทธิชัย โง้วศิริ และอุดม ไยเจริญ 2528 : 183) สำหรับเกมที่มีค่าของเกมเป็นศูนย์ เรียกเกมนี้ว่า เกมยุติธรรม (Fair game) ซึ่งแสดงว่า ไม่มีการได้เปรียบหรือเสียเปรียบระหว่างผู้เล่นในเกมนั้น ๆ (เพ็ชรรัตน์ จันทรแสนวิไล 2528 : 3)

เกมแบบอื่น ๆ อาจมีผู้เล่นมากกว่า 2 ฝ่าย เช่น บริษัทคู่แข่งกันในธุรกิจ ซึ่งย่อมมีมากกว่า 1 หรือ 2 บริษัท หรืออาจเป็นเกม ซึ่งผลรวมการได้การเสียไม่เป็นศูนย์ หรือเกมที่มียุทธวิธีมากมายนับไม่ถ้วน การหาคำตอบสำหรับปัญหาเหล่านี้เป็นสิ่งที่ค่อนข้างยุ่งยาก และยังเป็นสิ่งที่ทำการวิเคราะห์ วิจัยหาผลสรุปกันอยู่ (เพ็ชรรัตน์ จันทรแสนวิไล 2528 : 11) จากความสำคัญดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษา การหาค่าของเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น เฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 หรือ 3 วิธี

ความหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาวิธีการหาค่าของเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น เฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 หรือ 3 วิธี ส่วนผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็นจำนวนนับ

ความสำคัญของการวิจัย

ทำให้ทราบถึงการประยุกต์ในทฤษฎีเกม

ขอบเขตของการวิจัย

ผู้วิจัยจะศึกษาวิธีการหายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมเฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีเพียง 2 หรือ 3 วิธี ในการเล่นเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น สิ่งที่ต้องทราบในการคำนวณหาค่าดังกล่าวคือ ค่าฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นที่มียุทธวิธีเพียง 2 หรือ 3 วิธี

เกมที่จะหายุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นทุกคนได้นั้น ผู้เล่นทุกคนต้องมียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 หรือ 3 วิธี

สำหรับตัวอย่างในการคำนวณหายุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมนั้น ผู้วิจัยเสนอเฉพาะกรณีผู้เล่น 3 คนเท่านั้น

คำนิยามศัพท์เฉพาะ

1. เกม (Game) หมายถึง การแข่งขัน ซึ่งมีผลได้ผลเสียเป็นเดิมพัน และมีการตกลงกันในกติกาการแข่งขัน เพื่อให้ผู้เข้าแข่งขัน แข่งกันในรอบระเบียบเดียวกัน

2. เกมที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ (Zero sum game) หมายถึง เกมที่ผู้เล่นบางคนมีผลได้และผู้เล่นบางคนมีผลเสีย ซึ่งผลรวมปริมาณการได้การเสียของผู้เล่นทั้งหมดนั้นเป็นศูนย์ โดยใช้จำนวนบวกแทนผลได้ และจำนวนลบแทนผลเสีย

3. เกมที่ไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น (Non cooperative game) หมายถึง เกมที่ผู้เล่นแต่ละคนเป็นอิสระต่อกัน

4. เกม n คน (n person game) หมายถึง เกมที่มีผู้เล่นเป็นจำนวนนับ n ฝ่าย

5. ยุทธวิธี (Strategies) หมายถึง รูปแบบหรือวิธีการที่ผู้เล่นแต่ละคนใช้ในการเล่นเกม ซึ่งยุทธวิธีแต่ละวิธีของผู้เล่นแต่ละคนจะเรียกว่า ยุทธวิธีแท้ (Pure strategies) ก็ต่อเมื่อ ผู้เล่นตัดสินใจเลือกยุทธวิธีนี้เท่านั้นในการเล่นเกมทุกครั้ง แต่ถาผู้เล่นแต่ละคนมีแผนการเล่น โดยกำหนดเป็นเพียงความน่าจะเป็นที่จะเลือกยุทธวิธีแต่ละวิธีนั้น ๆ เรียก เวกเตอร์ของความน่าจะเป็นตามลำดับยุทธวิธีนั้นว่า ยุทธวิธีผสม (Mixed strategies)

6. ยุทธวิธีที่ครอบงำยุทธวิธีอื่น (Dominance strategies) หมายถึง ยุทธวิธีที่ให้ผลอย่างน้อยที่สุดก็ดีกว่ายุทธวิธีอื่นเสมอไม่ว่าคู่แข่งคนอื่น ๆ จะใช้ยุทธวิธีใดก็ตาม

7. เกมจำกัด (Finite game) หมายถึง เกม n คน ที่แต่ละฝ่ายจะมีเซตของยุทธวิธีเป็นเซตจำกัด

8. ฟังก์ชันการจ่าย (Payoff function) หมายถึง ฟังก์ชันจากเซตของยุทธวิธีแต่ละวิธีที่ใช้ของผู้เล่นแต่ละคนไปยังเซตของจำนวนจริง ซึ่งสามารถแสดงได้ในตารางการจ่าย (Payoff table)

9. ค่าคาดหวังการจ่าย (Expected payoff) หมายถึง ค่าที่คำนวณจากตารางการจ่ายที่เกิดจากผู้เล่นแต่ละคนใช้ยุทธวิธีผสมต่าง ๆ

10. ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด สำหรับผู้เล่นคนนั้น ๆ (Optimal mixed strategy) หมายถึง ยุทธวิธีผสมที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดของค่าคาดหวังการจ่ายมีค่ามากที่สุด (Maximin expected payoff)

11. จุดสมดุล (Equilibrium point) หมายถึง จุดที่ประกอบด้วยยุทธวิธีผสมของผู้เล่นแต่ละคนที่จะทำให้ค่าคาดหวังการจ่ายของเขาเหล่านั้นมีค่าสูงสุด ภายใต้ยุทธวิธีของคนอื่น ๆ ถูกกำหนดให้คงที่ นั่นคือ เป็นจุดที่ให้ค่าที่ดีที่สุดที่แสดงถึงยุทธวิธีของผู้เล่นแต่ละคนที่จะต่อสู้กับผู้เล่นอื่น ๆ

12. ค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ i (Value of game) หมายถึง ค่าที่เกิดจากฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นคนที่ i ที่เลือกยุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับผู้เล่นคนนั้น ๆ

13. ค่าแมกซิมิน (Maximin) หมายถึง ค่าคาดหวังการจ่ายที่สูงที่สุดในบรรดา ค่าคาดหวังการจ่ายต่ำสุด ซึ่งเกิดจากจุดตัดของเส้นตรงหรือระนาบต่าง ๆ

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

วอน นิวแมน และมอร์แกนสเทอร์น ได้พัฒนาทฤษฎีเกม 2 คน ที่มีผลรวมการได้ การเสียเป็นศูนย์ ได้ผลอย่างสมบูรณ์มากแสดงไว้ในหนังสือ Theory of Games and Economic Behavior หนังสือเล่มนี้ยังมีทฤษฎีเกม n คน แสดงไว้ในแนวทางที่เรียกว่า มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น ทฤษฎีเหล่านี้อยู่บนฐานการวิเคราะห์ความสัมพันธ์รวม ระหว่าง กลุ่มต่าง ๆ ที่ร่วมกันสร้างรูปแบบโดยเหล่าผู้เล่นเกม ส่วนทฤษฎีของแนชมีแนวทางตรงกันข้าม คือ จะอยู่บนฐานของการที่ไม่มีการรวมกลุ่มกันระหว่างผู้เล่น โดยแต่ละฝ่ายของผู้เล่นเป็นอิสระต่อกัน ปราศจากการก้าวกายซึ่งกันและกัน หรือปราศจากการติดต่อสื่อสารระหว่างกันและกันกับผู้เล่นอื่น ๆ (Nash, 1951 : 286)

โรเซนทอล กล่าวถึง เกมที่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นที่เกิดจากปัญหาการโปรแกรม ทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยศึกษาถึง กลุ่มของสถานการณ์ที่สามารถเกิดขึ้นได้ในพื้นที่ การผลิต ระบบการขนส่งและชายงานการสื่อสารพบว่า ผลการขยายทฤษฎีให้เป็นรูปแบบทั่วไปนั้น เกมในชั้นนี้มีแก่นร่วมกัน ซึ่งทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะที่สุดแบบไม่ต่อเนื่อง (Rosenthal, 1986 : 3995 - B) และเอจมานส์ พบว่า เกมที่มีการร่วมมือกันระหว่าง ผู้เล่นนั้น อาจจะไม่มีผลลัพธ์ มีเพียงหนึ่งผลลัพธ์หรือมีหลายผลลัพธ์ที่เป็นผลลัพธ์แบบ วอน นิวแมน มอร์แกนสเทอร์น และผลลัพธ์สำหรับเกมที่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นที่มีการตัดสินใจซ้ำกันนั้นจะ ไม่ทราบค่าได้ บางผลลัพธ์ของเกมที่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นนั้นมีคุณสมบัติที่ดีพอ และใช้ฝึกได้ ซึ่งบางส่วนยังส่งผลถึงพฤติกรรมที่แตกต่างออกไป หรือพฤติกรรมที่แสดงถึงลักษณะการไม่ยุติธรรม ของเกมด้วย (Heijmans, 1987 : 3383 - B)

สำหรับการศึกษาทางด้านเกมที่ไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นนั้น เริ่มจากการแนะนำ ของแนช ซึ่งพิจารณาจากนิยามของจุดสมดุล และได้พิสูจน์ว่า เกมที่ไม่มีการร่วมมือกันระหว่าง

ผู้เล่นที่มียุทธวิธีจำกัดนั้น มีอย่างน้อยหนึ่งจุดสมดุลเสมอ ทั้งยังได้เสนอตัวอย่างการเล่นโป๊กเกอร์ 3 คน รูปแบบของเกมนั้นมีระบบการเล่นที่ต่อเนื่องกันพร้อมทั้งหาค่าของเกมของผู้เล่นแต่ละคนเป็นตัวอย่างด้วย (Nash. 1951 : 286 - 294) ทำให้มีการศึกษาทางด้านนี้กว้างขวางขึ้น ดังเช่น เพาเวอร์ ได้ศึกษาถึงการกระจายของจำนวนยุทธวิธีสมดุลแบบแนชในเกม n คน แบบสุ่มพบว่าการกระจายความน่าจะเป็นเข้าสู่ศูนย์ (Power. 1987 : 3237 - B) และแลงลอยส์ ได้ศึกษาถึงการเล่นเกมซ้ำ ซึ่งเป็นรูปแบบของขบวนการเรียนรู้ของผู้เล่นแต่ละคนที่มียุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุดที่ได้ถูกกำหนดก่อนที่จะเล่นเกมหรือเป็นการกระทำตามลำดับของเกมซ้ำ พบว่า พฤติกรรมต่าง ๆ ของผู้เล่นจะลู่เข้า (converge) ไปยังจุดสมดุลเร็วกว่าการเล่นสนองตอบที่ดีที่สุด (best reply play) ในกรณีของเกมที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์และทุก ๆ ยุทธวิธีได้ถูกนำมาใช้เล่นเกม (Langlois. 1983 : 196 - B) นอกจากนี้ยังมีการเปรียบเทียบผลลัพธ์แบบแนชกับอาร์ชานยี ไวหลายประเด็นที่สำคัญคือ อาร์ชานยี กล่าวว่า ผลลัพธ์แบบแนช สำหรับเกมที่ไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นนั้น หากได้เฉพาะกรณีพิเศษ เมื่อจุดสมดุลต่าง ๆ ในเกมนั้นสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ สำหรับของอาร์ชานยีนั้น จะหาได้เสมอ โดยใช้ยุทธวิธีสูงสุดของค่าต่ำ (Maximin Strategies) ช่วยในการหา (Harsanyi. 1977 : 274)

วิธีการและผลการวิจัย

ทฤษฎีเกมเป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึงสถานการณ์ต่าง ๆ ที่มีการแข่งขัน โดยเน้นเรื่องขบวนการตัดสินใจของบุคคลแต่ละฝ่าย แนวทางในการศึกษามีหลายแนวทาง เช่น ศึกษาเกมที่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นว่า ควรจะเล่นรวมกันกับฝ่ายใดจึงจะเอื้ออำนวยผลประโยชน์มากที่สุด หรือศึกษาเกมที่ไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น ผู้เผยแพร่การศึกษาในแนวทางนี้ คือ จอห์น แนช พบว่า ทุก ๆ เกมจำกัดจะมีอย่างน้อยหนึ่งจุดสมดุลเสมอ และไม่มีจุดสมดุลใดที่ประกอบด้วยยุทธวิธีผสมที่ครอบงำยุทธวิธีอื่น นอกจากนี้ อาร์ชานียังกล่าวว่า ในเกมจำกัดใด จะหาค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันการจ่าย และยุทธวิธีของผู้เล่นคนที่ i ที่ให้ค่าแมกซิมีนหนึ่งยุทธวิธีหรือมากกว่านั้น ได้เสมอ

วิธีการหาค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 1 หรือ 2 ในเกม 2 คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นนั้น มีหลายวิธี ถ้าผู้เล่นคนหนึ่งคนใดมียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 ยุทธวิธีแล้ว วิธีการที่สะดวกในการหาค่าของเกมและยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดวิธีหนึ่งคือ วิธีกราฟ โดยลักษณะกราฟที่ได้จะเป็นเส้นตรงโดยยึดตารางการจ่ายของผู้ที่มียุทธวิธีเพียงสองวิธีนั้นเป็นหลักในการคำนวณ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างการคำนวณหาค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 1 ในการเล่นเกม 2 คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น ดังมีตารางการจ่ายของผู้เล่นทั้งสองปรากฏต่อไปนี้ โดยผู้เล่นคนที่ 1 มียุทธวิธีในการเล่น 2 ยุทธวิธี และผู้เล่นคนที่ 2 มียุทธวิธีในการเล่น 3 ยุทธวิธี เพื่อความสะดวกผู้วิจัยจะใช้รูปแบบตารางการจ่ายดังนี้

ยุทธวิธีที่ใช้ ผู้เล่นคนที่ ตามลำดับผู้เล่น	1	2
(1,1)	0	0
(1,2)	-2	2
(1,3)	2	-2
(2,1)	5	-5
(2,2)	4	-4
(2,3)	-3	3

ให้ผู้เล่นคนที่ 1 มีความน่าจะเป็นที่จะใช้ยุทธวิธีที่ 1 และ 2 เป็น x_1 และ $1-x_1$ ตามลำดับ

และ A_i คือ พังชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 โดยผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธี $(0,0,\dots,1,\dots,0)$ มี 1 ในตำแหน่งที่ i

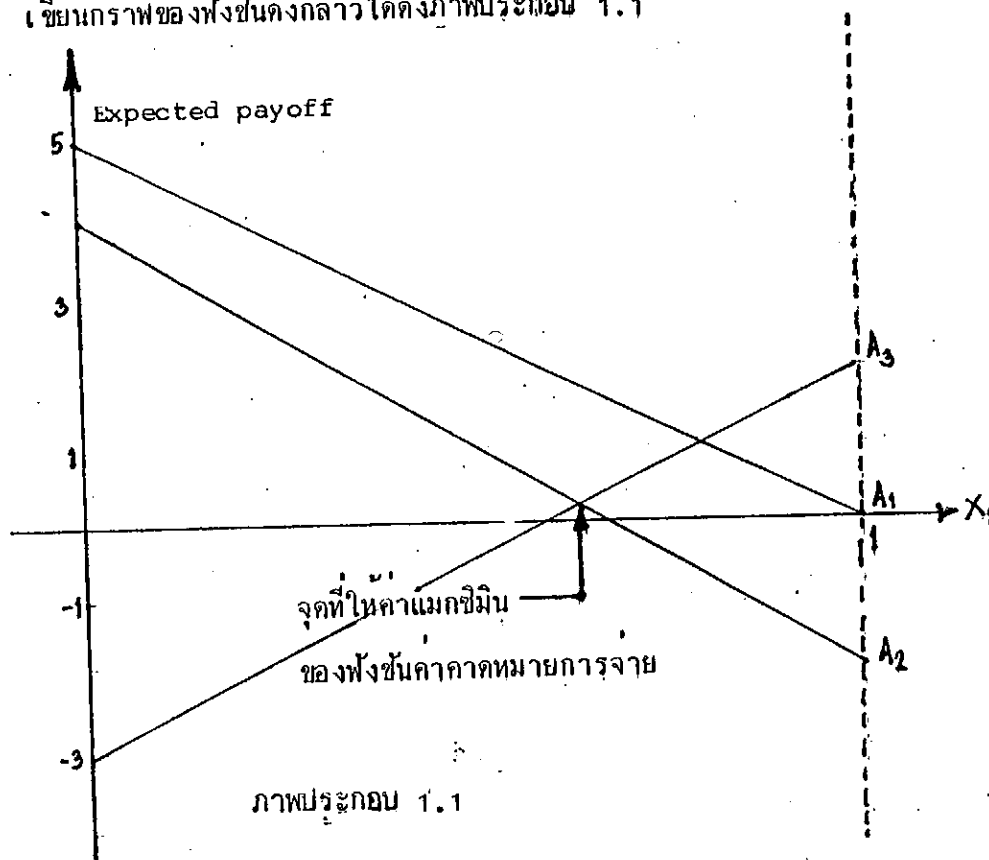
$$A_1(x_1) = 0x_1 + 5(1-x_1) = 5-5x_1$$

$$A_2(x_1) = -2x_1 + 4(1-x_1) = 4-6x_1$$

$$A_3(x_1) = 2x_1 - 3(1-x_1) = -3+5x_1$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าวก่อน เช่น $A_1(x_1)$ หมายถึง พังชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นที่ 1 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(x_1, 1-x_1)$ ใช้ยุทธวิธีที่ 1 ค่าคาดหวังการจ่ายที่นำมาเป็น นามการคาดคะเนที่ 1 ในแถวที่ตรงกับยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่น คือ (1,1) และ (2,1) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 และ 5 ตามลำดับ นำมาคูณด้วย x_1 และ $1-x_1$ ตามลำดับเช่นกัน

เขียนกราฟของฟังก์ชันดังกล่าวได้ดังภาพประกอบ 1.1



จากภาพประกอบ 1.1 จะเห็นได้ว่าจุดตัดของ $A_2(x_1)$ และ $A_3(x_1)$ นั้น เป็นจุดที่ให้ค่าแมกซ์มีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย คือ จุด $(\frac{7}{11}, \frac{2}{11})$ ดังนั้น ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 1 คือ $(\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ และให้ค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 1 $v_1 = \frac{2}{11}$.

สำหรับการหายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 2 อาจหาจากค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 1 ได้ดังนี้

ให้ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 2 เป็น (y_1^*, y_2^*, y_3^*) ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$y_1^* (5 - 5x_1) + y_2^* (4 - 6x_1) + y_3^* (-3 + 5x_1) \leq v_1 = \frac{2}{11} \quad \text{เมื่อ } 0 \leq x_1 \leq 1$$

และ เมื่อ $x_1 = \frac{7}{11}$ จะได้ว่า

$$\frac{20}{11} y_1^* + \frac{2}{11} y_2^* + \frac{2}{11} y_3^* = \frac{2}{11}$$

โดยทั่วไปค่าของ y_i ซึ่งประกอบเป็นเส้นตรงที่ไม่ผ่านจุดที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายนั้นจะมีค่าเป็น 0 เสมอ ดังนั้น $y_1^* = 0$ เพราะเส้นตรง $A_1(x_1)$ ไม่ผ่านจุดที่ให้ค่าแมกซิมีนดังกล่าว

เนื่องจาก y_2^* และ y_3^* เป็นค่าตัวเลข $y_2^*(4-6x_1) + y_3^*(-3+5x_1)$ จะมีกราฟเป็นเส้นตรง ไม่มีการหักมุม มีค่าไม่เกิน $\frac{2}{11}$ จึงสรุปได้ว่า เส้นตรงนั้นต้องเป็นเส้น ซึ่งขนานกับแกน x_1 และตัดแกน Expected payoff ที่ $\frac{2}{11}$ ดังนั้น

$$y_2^*(4-6x_1) + y_3^*(-3+5x_1) = \frac{2}{11} \quad \text{สำหรับ } 0 \leq x_1 \leq 1$$

$$\text{ให้ } x_1 = 0 \quad \text{จะได้ } 4y_2^* - 3y_3^* = \frac{2}{11}$$

$$\text{และ } x_1 = 1 \quad \text{จะได้ } -2y_2^* - 2y_3^* = \frac{2}{11}$$

แก้สมการได้ $y_2^* = \frac{5}{11}$, $y_3^* = \frac{6}{11}$ ดังนั้นยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดสำหรับผู้เล่นคนที่ 2 คือ $(0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$

ในกรณีที่มีเส้นตรงผ่านจุดที่ให้ค่าแมกซิมีนดังกล่าว มากกว่า 2 เส้น แสดงว่ามียุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดมากกว่า 1 วิธี การหาค่า y_i^* ต่าง ๆ ทำได้โดยการให้ y_i^* ที่ไม่เป็นศูนย์มีเพียง 2 ค่า นอกนั้นเป็นศูนย์หมด ก็จะหาค่าที่เหมาะสมที่สุดชุดหนึ่งของ y_i^* ได้

จะเห็นว่า ขั้นตอนการหายุทธวิธีผสมของผู้เล่นคนที่ 2 ค่อนข้างยุ่งยาก ถ้าพิจารณาจากตารางการจ่ายข้างต้นของผู้เล่นคนที่ 2 เนื่องจากมียุทธวิธีเพียง 3 วิธีในการเล่น ดังนั้นถ้าพิจารณาวิธีการต่อไปนี้หายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 2 ดังนี้

ให้ $y_1, y_2, 1-y_1-y_2$ แทน ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2

และ 3 ตามลำดับ

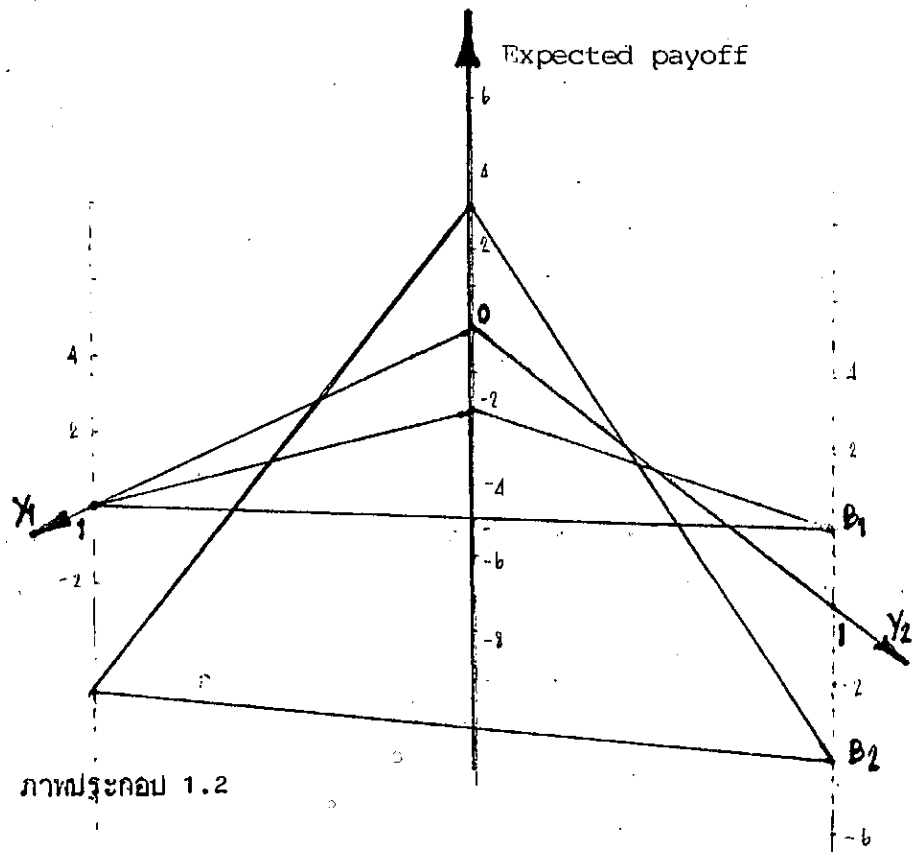
และ B_i คือ ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 2 โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีผสม $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ มี 1 ในตำแหน่งที่ i

ดังนั้น

$$B_1(y_1, y_2) = 0y_1 + 2y_2 - 2(1-y_1-y_2) = 2y_1 + 4y_2 - 2$$

$$B_2(y_1, y_2) = -5y_2 + 4y_2 + 3(1-y_1-y_2) = -8y_1 - 7y_2 + 3$$

เขียนกราฟของฟังก์ชันดังกล่าวเป็นระนาบได้ดังภาพประกอบ 1.2



ภาพประกอบ 1.2

จากภาพประกอบ 1.2 เนื่องจากมีเพียง 2 ระนาบ ดังนั้นจุดตัดของระนาบจะเป็น

$$\text{เส้นตรง } 2y_1 + 4y_2 - 2 = -8y_1 - 7y_2 + 3$$

$$10y_1 + 11y_2 = 5$$

จุดปลายของเส้นตรงนี้จะป็นจุดที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย จุดปลาย

อยู่ในกรณีที่ $y_1 = 0$ หรือ $y_2 = 0$ กรณีใดกรณีหนึ่ง

$$\text{ถ้า } y_1 = 0 \text{ ได้ } y_2 = \frac{5}{11} \text{ ซึ่งได้ค่าฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย } = \frac{-2}{11}$$

$$\text{ถ้า } y_2 = 0 \text{ ได้ } y_1 = \frac{1}{2} \text{ ซึ่งได้ค่าฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย } = -1$$

จะเห็นได้ว่า $\frac{-2}{11} > -1$ ดังนั้น จุดที่ให้ค่าแมกซิมัมดังกล่าวคือ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{11}$
 ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 2 คือ $(0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$ และค่าของเกม

ของผู้เล่นคนที่ 2 $v_2 = \frac{-2}{11}$

วิธีการดังกล่าวให้ผลสอดคล้องตรงกับวิธีแรกที่ยกค่าของผู้เล่นคนที่ 1 เป็นหลัก ดังนั้น
 ผู้วิจัยจึงขอเสนอขั้นตอนในการหาค่าของเกม และยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น
 2 หรือ 3 วิธี ดังนี้

3.1 ลำดับขั้นตอนในการดำเนินการหาค่าของเกม

ลำดับขั้นตอนในการดำเนินการหาค่าของเกมของผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 2 หรือ
 3 วิธี และยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดดังนี้

1. กำหนดตัวแปรที่ใช้แทนความน่าจะเป็นของผู้เล่นที่มียุทธวิธีที่ 1 หรือ 2 หรือใช้
 ยุทธวิธีที่ 1, 2 และ 3 ในกรณีที่ 3 ยุทธวิธี ตามลำดับ ดังนั้นจะมีตัวแปรที่ปรากฏเพียง 1 หรือ 2
 ตัวแปรเท่านั้น เพราะผลรวมความน่าจะเป็นที่จะใช้ยุทธวิธีแต่ละวิธีทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1

2. กำหนดฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนนั้น โดยที่ผู้เล่นคนอื่น ๆ ใช้ยุทธ
 วิธีต่าง ๆ

3. พิจารณายุทธวิธีผสมที่ครอบคลุมยุทธวิธีอื่น ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยกราฟ
 กรณีที่ผู้เล่นมียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี กราฟที่ปรากฏตามฟังก์ชันค่าคาดหวัง
 การจ่ายของผู้เล่นคนนั้นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง เส้นตรงที่อยู่เหนือเส้นตรงหนึ่งเส้นตรงใดในบริเวณ
 $[0, 1] \times \mathbb{R}$ คือเส้นตรงที่เกิดจากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของคนนั้นที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ครอบคลุมยุทธวิธี
 ผลมอื่น

กรณีที่ผู้เล่นมียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี กราฟที่ปรากฏตามฟังก์ชันค่าคาดหวัง
 การจ่ายของผู้เล่นคนนั้น จะมีลักษณะเป็นระนาบ ระนาบที่อยู่เหนือระนาบหนึ่งระนาบใด ในบริเวณ
 $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ และผลบวกของตัวแปรทั้งสองนั้น น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 จะเป็นระนาบที่เกิด
 จากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนนั้นที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ครอบคลุมยุทธวิธีผสมอื่น

4. หากจุดตัดของเส้นตรงหรือระนาบที่ไม่ได้เกิดจากยุทธวิธีเฉพาะที่ครอบงำ ยุทธวิธีอื่น ซึ่งจุดตัดนั้นตั้งอยู่ในขอบเขต $[0,1] \times R$ หรือ $[0,1] \times [0,1] \times R$ และผลบวกของตัวแปรทั้งสองนั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

พิจารณาเลือกจุดตัดของเส้นตรงหรือระนาบที่เหล่านักซิมิของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย ซึ่งจะเป็นจุดที่ให้ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนนั้น พร้อมทั้งค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้นด้วย

ตัวอย่างการเล่นเกม 2 คน ที่ผู้เล่นทั้ง 2 มียุทธวิธีฝ่ายละ 3 วิธี เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีซิมิเพลก ดังนี้

เพื่อความสะดวกผู้วิจัยจะใช้รูปแบบตารางการจ่าย ดังนี้

ผู้เล่นคนที่ ยุทธวิธีที่ใช้ตาม ลำดับผู้เล่น	1	2
(1,1)	4	-4
(1,2)	3	-3
(1,3)	-3	3
(2,1)	1	-1
(2,2)	1	-1
(2,3)	4	-4
(3,1)	-3	3
(3,2)	6	-6
(3,3)	-2	2

วิธีการซิมิเพลก กำหนดให้ x_1, x_2, x_3 เป็นค่าและค่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ และ y_i คือ ค่าของเกมของผู้เล่นที่ 1 จะได้อสมการ

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 \leq v_1$$

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 \leq v_1$$

$$-3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq v_1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

แล้วปรับสมการให้วิธีซิมเพลกดำเนินการหาได้ $x_1 = \frac{27}{92}$, $x_2 = \frac{62}{92}$, $x_3 = \frac{3}{92}$, และ $v_1 = \frac{7}{4}$

ทำนองเดียวกับยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 2 คือ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

พิจารณาการหาโดยวิธีการที่ผู้วิจัยเสนอ ดังนี้

ให้ $x_1, x_2, 1-x_1-x_2$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 หรือ 3 ตามลำดับ

ให้ A_1 คือ พังชั้นค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นที่ 1 โดยผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธี $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ มี 1 อยู่ในตำแหน่งที่ 1

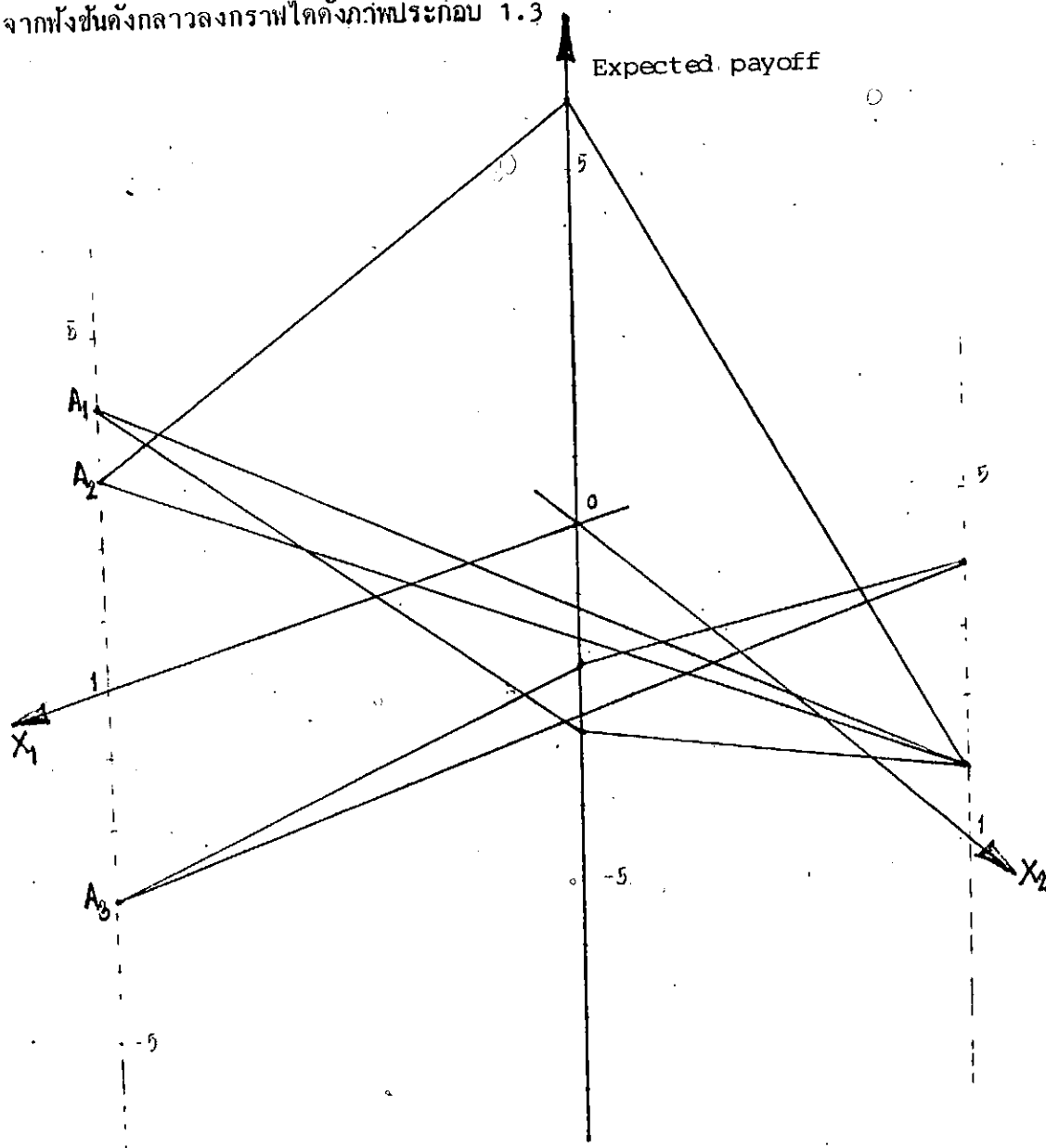
$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2) &= 4x_1 + x_2 - 3(1-x_1-x_2) = 4x_1 + x_2 - 3 + 3x_1 + 3x_2 \\ &= 7x_1 + 4x_2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(x_1, x_2) &= 3x_1 + x_2 + 6(1-x_1-x_2) = 3x_1 + x_2 + 6 - 6x_1 - 6x_2 \\ &= -3x_1 - 5x_2 + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3(x_1, x_2) &= -3x_1 + 4x_2 - 2(1-x_1-x_2) = -3x_1 + 4x_2 - 2 + 2x_1 + 2x_2 \\ &= -x_1 + 6x_2 - 2 \end{aligned}$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าว เช่น $A_2(x_1, x_2)$ หมายถึง พังชั้นค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(x_1, x_2, 1-x_1-x_2)$ โดยผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ 2 ค่าจากตารางการจ่ายที่นำมานั้น นำมาจากสัณทกที่ 1 ในแถวที่ตรงกับยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่น คือ $(1, 2)$, $(2, 2)$ และ $(3, 2)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3, 1 และ 6 ตามลำดับ นำมาคูณกับ x_1, x_2 และ $1-x_1-x_2$ ตามลำดับเช่นกัน

จากฟังก์ชันดังกล่าวลงกราฟได้ดังภาพประกอบ 1.3



ภาพประกอบ 1.3

จากภาพประกอบ 1.3 จะเห็นว่า ไม่มีระนาบใดอยู่เหนือระนาบอื่นจึงไม่มียุทธวิธีที่ครอบงำ
จึงหาจุดตัดของระนาบทั้ง 3 ซึ่งได้จุดตัดคือ $(\frac{27}{92}, \frac{62}{92}, \frac{7}{4})$ ดังนั้น ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสม
ที่สุดของผู้เล่นคนที่ 1 คือ $(\frac{27}{92}, \frac{62}{92}, \frac{3}{92})$ ไรค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 1 $v_1 = \frac{7}{4}$

หาของเดียวกันสำหรับผู้เล่นคนที่ 2

ให้ $y_1, y_2, 1-y_1-y_2$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 2 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2

หรือ 3 ตามลำดับ

ให้ B_i คือ ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 2 โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธี $(0,0,\dots,1,\dots,0)$ มี 1 อยู่ในตำแหน่งที่ i

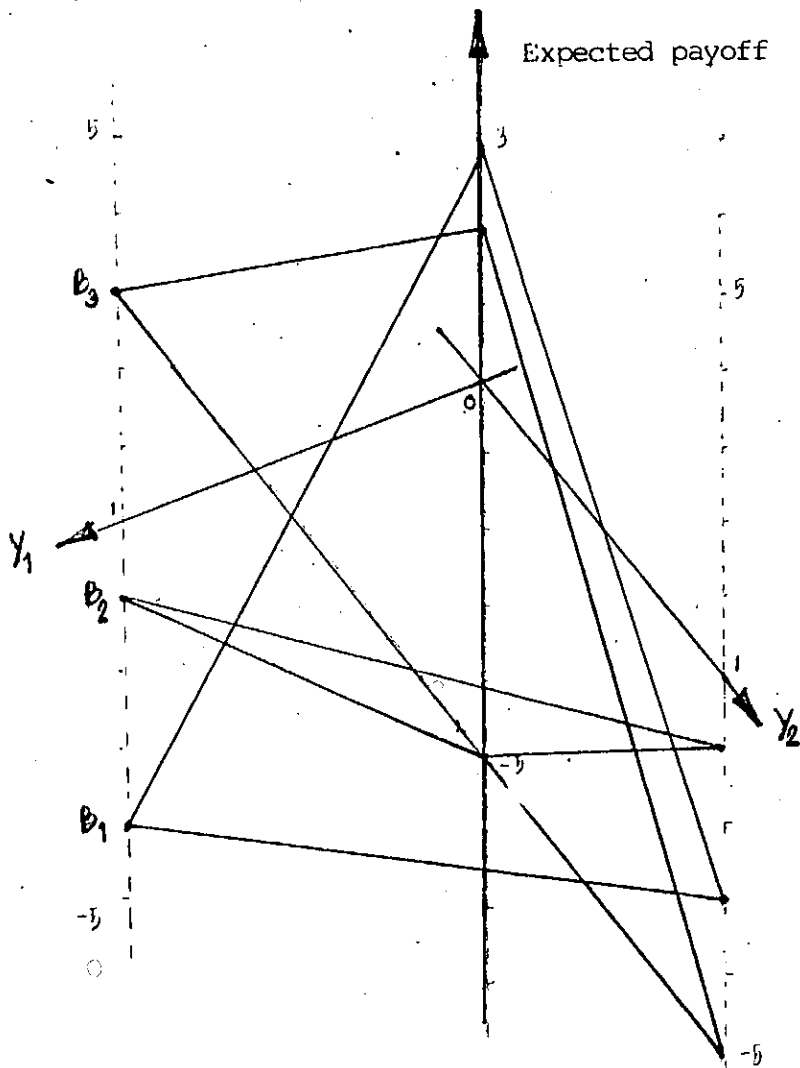
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } B_1(y_1, y_2) &= -4y_1 - 3y_2 + 3(1-y_1-y_2) = -4y_1 - 3y_2 + 3y_1 - 3y_2 + 3 \\ &= -y_1 - 6y_2 + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(y_1, y_2) &= -y_1 - y_2 - 4(1-y_1-y_2) = -y_1 - y_2 - 4 + 4y_1 + 4y_2 \\ &= 3y_1 + 3y_2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3(y_1, y_2) &= 3y_1 - 6y_2 + 2(1-y_1-y_2) = 3y_1 - 6y_2 + 2 - 2y_1 - 2y_2 \\ &= y_1 - 8y_2 + 2 \end{aligned}$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าว เช่น $B_3(y_1, y_2)$ หมายถึง ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 2 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(y_1, y_2, 1-y_1-y_2)$ โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ 3. ค่าจากตารางการจ่ายที่นำมาใช้นั้น นำมาจากสมมติที่ 2 ในแถวที่ตรงกับยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่นคือ $(3,1), (3,2)$ และ $(3,3)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3, -6 และ 2 ตามลำดับ นำมาคูณกับ y_1, y_2 และ $1-y_1-y_2$ ตามลำดับเช่นกัน

จากเงื่อนไขดังกล่าวลงกราฟได้ดังภาพประกอบ 1.4



ภาพประกอบ 1.4

จากภาพประกอบ 1.4 จะเห็นว่าไม่มีระนาบใดอยู่เหนือระนาบอื่นจึงไม่มียุทธวิธีที่ครอบงำ ดังนั้นจึงหาจุดตัดของระนาบทั้ง 3 ได้จุดตัดคือ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-7}{4})$

ดังนั้น ยุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุด สำหรับผู้เล่นคนที่ 2 คือ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ให้ค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 2 $v_2 = \frac{-7}{4}$

$\therefore$ จุดสมดุลคือ $((\frac{27}{92}, \frac{62}{92}, \frac{3}{92}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}))$

ซึ่งเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้ตรงกันกับวิธีซิมเพลก ดังนั้นจะพิจารณาเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการรวมมือกันระหว่างผู้เล่น

3.2 การพิจารณาวิธีการในหัวข้อ 3.1

กรณีที่ 1 สำหรับผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี ผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า จุดที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย ที่ได้จากเซตผลตัดของเส้นตรง จะเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้น

พิจารณาโดย ให้ผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธีมีความน่าจะเป็นที่จะใช้ยุทธวิธีทั้ง 2 ตามลำดับเป็น $x_1, 1-x_1$ และเป็นผู้เล่นคนที่ 1 เนื่องจากยุทธวิธีแท้ เป็นยุทธวิธีผสมอย่างหนึ่ง ซึ่งมีองค์ประกอบที่เป็น 1 เพียงตัวเดียวในลำดับข้อ ของยุทธวิธีที่ใช้้นั้น

ให้ s_n แทน ยุทธวิธีผสมของผู้เล่นคนที่ n

$S = (x_1, 1-x_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่มีองค์ประกอบเป็นยุทธวิธีผสม s_n ดังกล่าว

L_{si} แทน ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่ i โดยผู้เล่นคนอื่น ๆ ใช้ยุทธวิธีแตกต่าง ๆ จะ เห็นได้ว่าประกอบด้วยตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ x_1 ดังนั้น เมื่อแสดงด้วยกราฟจะแทนได้ด้วยเส้นตรง

ถ้า $L_{si}(x_1) > L_{sj}(x_1)$ หมายถึง เส้นตรง i อยู่เหนือเส้นตรง j ในบริเวณ $[0,1] \times R$ ย่อมแสดงว่า ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย i ที่มากกว่า j ไม่ว่า x_1 จะเป็นค่าใด ๆ ในช่วง $[0,1]$ จึงเป็นยุทธวิธีผสมที่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น ซึ่งแน่ชัด พบว่าไม่มีจุดสมมูลใดที่จะสามารถรวมยุทธวิธีผสมที่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่นได้ เราจึงสามารถละเวกเตอร์พิจารณา $L_{si}(x_1)$ ได้

เนื่องจากผู้เล่นแต่ละคนยอมต้องการให้ตนมีผลได้มากที่สุดและคู่ต่อสู้ต่าง ๆ ต้องพยายามให้คนอื่น ๆ มีผลได้น้อยที่สุด จากการพิจารณาผลที่ได้น้อยที่สุดโดยความพยายามของคู่ต่อสู้ต่าง ๆ นั้น ผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี ก็ย่อมต้องการให้ตนมีผลได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

ดังนั้น จุดตัดของเส้นตรงที่อยู่ต่ำกว่าเส้นตรงอื่น จุดใดที่โหลค่าแมกซิมีน ย่อมเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้น

ให้ x_1^* แทน ค่า x_{1i} ที่โหลค่าแมกซิมีน.

$p_1(s; x_{1i})$ แทน ค่าฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(x_{1i}, 1-x_{1i})$ และผู้เล่นคนอื่นใช้ยุทธวิธีผสม s_n

$\therefore p_1(s; x_1^*) \geq p_1(s; x_{1i}) : \forall i$ สำหรับ s ดังกล่าว

ดังนั้น $p_1(s; x_1^*) = \max [p_1(s; x_{1i})]$ ทำให้ $(x_1^*, 1-x_1^*)$ เป็น

องค์ประกอบหนึ่งของจุดสมดุลจุดหนึ่งนั่นเอง

ดังนั้นสำหรับเกม n คน ซึ่งแต่ละคนมียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี เราก็สามารถที่จะหายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นแต่ละคน พร้อมทั้งได้จุดสมดุลอย่างน้อยหนึ่งจุดด้วยวิธีการดังกล่าว

กรณีที่ 2 สำหรับผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี ผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็นจำนวนนับ

จะได้อีกว่า จุดที่โหลค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย ที่ได้จากเซตผลตัดของระนาบ จะเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้น

พิจารณาโดย ให้ผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี มีความน่าจะเป็นที่จะใช้ยุทธวิธีทั้ง 3 ตามลำดับเป็น $x_1, x_2, 1-x_1-x_2$ และเป็นผู้เล่นคนที่ 1 เนื่องจากยุทธวิธีแท้ เป็นยุทธวิธีผสมอย่างหนึ่ง ซึ่งมีองค์ประกอบที่เป็น 1 เพียงตัวเดียว ในลำดับชื่อของยุทธวิธีที่ใช้นั้น

ให้ s_n แทน ยุทธวิธีผสมของผู้เล่นคนที่ n

$s = ((x_1, x_2, 1-x_1-x_2), s_2, s_3, \dots, s_n)$

P_{si} แทน ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่ i โดยผู้เล่นคนอื่น ๆ ใช้ยุทธวิธีแท้ต่าง ๆ จะเห็นได้ว่าประกอบด้วย ตัวแปรเพียง 2 ตัวเท่านั้น คือ x_1, x_2 ดังนั้น เมื่อแสดงด้วยกราฟจะแทนได้ด้วยระนาบ

ถ้า $P_{si}(x_1, x_2) > P_{sj}(x_1, x_2)$ หมายถึง ระบาย i อยู่เหนือ
ระบาย j ในบริเวณ $[0,1] \times [0,1] \times R$ และ $x_1 + x_2 \leq 1$ ย่อมแสดงว่า
ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย i ที่มากกว่า j ไม่ว่า x_1, x_2 จะเป็นค่าใด ๆ ในช่วง $[0,1]$
และ $x_1 + x_2 \leq 1$ จึงเป็นยุทธวิธีผสมที่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น ซึ่งแนชพบว่า ไม่มีจุดสมดุลใด
ที่จะสามารถรวมยุทธวิธีผสมที่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่นได้ เราจึงสามารถละเว้น ที่จะพิจารณาระบาย
 $P_{si}(x_1, x_2)$ ได้

เนื่องจากผู้เล่นแต่ละคนยอมต้องการให้ตนมีผลได้มากที่สุด และคู่ต่อสู้ต่าง ๆ นั้นพยายามให้
คนอื่นมีผลได้น้อยที่สุด จากการพิจารณาผลได้น้อยที่สุด โดยความพยายามของคู่ต่อสู้ต่าง ๆ นั้น
ผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี ก็ยอมต้องการให้ตนมีผลได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ดังนั้น
จุดตัดของระบายที่อยู่ต่ำกว่าระบายอื่น จุดใดที่ให้ค่าแมกซิมีนยอมเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่
เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้น

ให้ (x_1^*, x_2^*) แทน ค่า (x_{1i}, x_{2i}) ที่ให้ค่าแมกซิมีน

$p_1(s; (x_{1i}, x_{2i}))$ แทน ค่าฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม
 $(x_{1i}, x_{2i}, 1-x_{1i}-x_{2i})$ และผู้เล่นคนอื่นใช้
ยุทธวิธีผสม s_n

$\therefore p_1(s; (x_1^*, x_2^*)) \geq p_1(s; (x_{1i}, x_{2i})) \quad \forall i$ สำหรับ s ดังกล่าว

ดังนั้น $p_1(s; (x_1^*, x_2^*)) = \max [p_1(s; (x_{1i}, x_{2i}))]$ ทำให้

$(x_1^*, x_2^*, 1-x_1^*-x_2^*)$ เป็นองค์ประกอบหนึ่งของจุดสมดุลจุดหนึ่งนั่นเอง

ดังนั้น สำหรับเกม n คน ซึ่งแต่ละคนมียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี เราก็สามารถที่จะ
หายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดและค่าของเกมของผู้เล่นแต่ละคน พร้อมทั้งได้จุดสมดุลอย่างน้อยหนึ่งจุด
ด้วยวิธีการดังกล่าว

ตัวอย่างการหาค่าของเกม 3 คน ที่ผู้เล่นคนที่ 1 มี 2 ยุทธวิธี คนที่ 2 มี 3 ยุทธวิธี และคนที่ 3 มี 3 ยุทธวิธี

ตารางการจ่าย ของผู้เล่นคนที่ 1, 2 และ 3 ตามยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับ

ผู้เล่นคนที่ ยุทธวิธีที่ใช้ ตามลำดับผู้เล่น	1	2	3
(1,1,1)	-3	2	1
(1,1,2)	9	-6	-3
(1,1,3)	-1	6	-5
(1,2,1)	3	2	-5
(1,2,2)	0	-4	4
(1,2,3)	-9	7	2
(1,3,1)	7	-2	-5
(1,3,2)	2	3	-5
(1,3,3)	-5	3	2
(2,1,1)	-6	7	-1
(2,1,2)	7	-3	-4
(2,1,3)	-8	5	3
(2,2,1)	-6	2	4
(2,2,2)	-5	3	2
(2,2,3)	1	-2	1
(2,3,1)	7	-4	-3
(2,3,2)	-9	7	2
(2,3,3)	7	1	-8

ให้ $x_1, 1-x_1$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 1 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1 หรือ 2 ตามลำดับ
 A_{ij} แทน ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 โดยผู้เล่นคนที่ 2
 ใช้ยุทธวิธี i และผู้เล่นคนที่ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ j โดย $i, j = 1, 2, 3$

จากตารางการจ่ายดังกล่าวจะได้

$$A_{11}(x_1) = -3x_1 - 6(1-x_1) = 3x_1 - 6$$

$$A_{12}(x_1) = 9x_1 + 7(1-x_1) = 2x_1 + 7$$

$$A_{13}(x_1) = -1x_1 - 8(1-x_1) = 7x_1 - 8$$

$$A_{21}(x_1) = 3x_1 - 6(1-x_1) = 9x_1 - 6$$

$$A_{22}(x_1) = 0x_1 - 5(1-x_1) = 5x_1 - 5$$

$$A_{23}(x_1) = -9x_1 + 1(1-x_1) = -10x_1 + 1$$

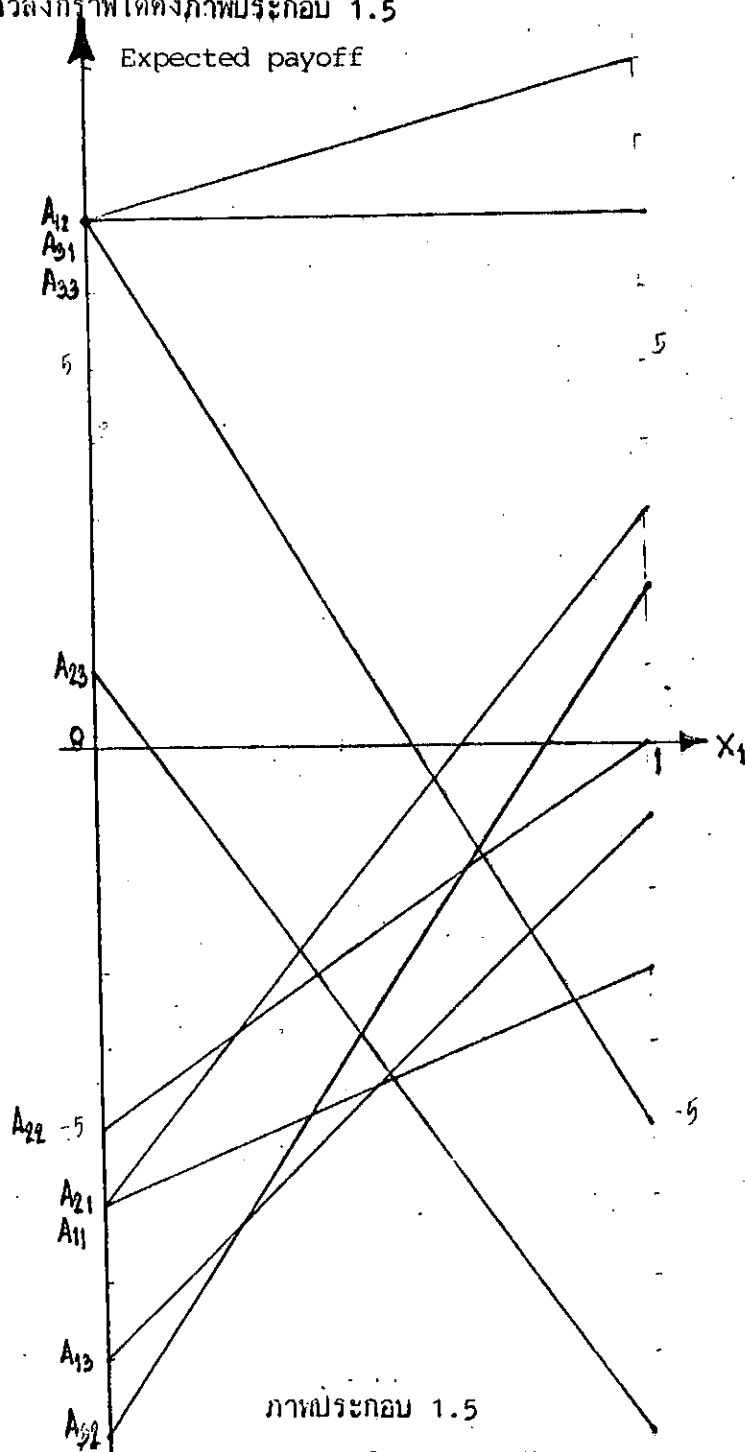
$$A_{31}(x_1) = 7x_1 + 7(1-x_1) = 7$$

$$A_{32}(x_1) = 2x_1 - 9(1-x_1) = 11x_1 - 9$$

$$A_{33}(x_1) = -5x_1 + 7(1-x_1) = -12x_1 + 7$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าวเช่น $A_{32}(x_1)$ หมายถึง ฟังก์ชันค่าคาดหวัง
 การจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(x_1, 1-x_1)$ โดยผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ 3 และ
 ผู้เล่นคนที่ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ 2 ค่าจากตารางการจ่ายที่นำมานั้น นำมาจากสมมติที่ 1 ในแถวที่ตรงกับ
 ยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่น คือ $(1, 3, 2)$ กับ $(2, 3, 2)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 และ -9 ตามลำดับ
 นำมาคูณกับ x_1 และ $1-x_1$ ตามลำดับเช่นกัน

จากฟังก์ชันดังกล่าวลงกราฟได้ดังภาพประกอบ 1.5



จากภาพประกอบ 1.5 เราสามารถพิจารณา จุดตัดของ A_{11} , A_{13} และจุดตัดของ

A_{11} , A_{23}

กรณีการตัดกันของเส้น A_{11}, A_{13}

$$3x_1 - 6 = 7x_1 - 8$$

$$2 = 4x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ยุทธวิธีผสมคือ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ให้ความค่าของเกม $v_1 = \frac{-9}{2}$

กรณีการตัดกันของเส้น A_{11}, A_{23}

$$3x_1 - 6 = -10x_1 + 1$$

$$13x_1 = 7$$

$$x_1 = \frac{7}{13}$$

$\therefore$ ยุทธวิธีผสมคือ $(\frac{7}{13}, \frac{6}{13})$ ให้ความค่าของเกม $v_1 = \frac{-57}{13}$

$\therefore$ ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดคือ $(\frac{7}{13}, \frac{6}{13})$ ซึ่งให้ความค่าของเกมสำหรับผู้เล่นคนที่ 1

$$v_1 = \frac{-57}{13}$$

สำหรับผู้เล่นคนที่ 2

ให้ $y_1, y_2, 1-y_1-y_2$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 2 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 หรือ 3 ตามลำดับ

B_{ij} แทน พังชั้นค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 2 โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ i ผู้เล่นคนที่ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ j ซึ่ง $i = 1, 2$

$$j = 1, 2, 3$$

จากตารางการจ่ายดังกล่าวจะได้

$$B_{11}(Y_1, Y_2) = 2Y_1 + 2Y_2 - 2(1 - Y_1 - Y_2) = 4Y_1 + 4Y_2 - 2$$

$$B_{12}(Y_1, Y_2) = -6Y_1 - 4Y_2 + 3(1 - Y_1 - Y_2) = -9Y_1 - 7Y_2 + 3$$

$$B_{13}(Y_1, Y_2) = 6Y_1 + 7Y_2 + 3(1 - Y_1 - Y_2) = 3Y_1 + 4Y_2 + 3$$

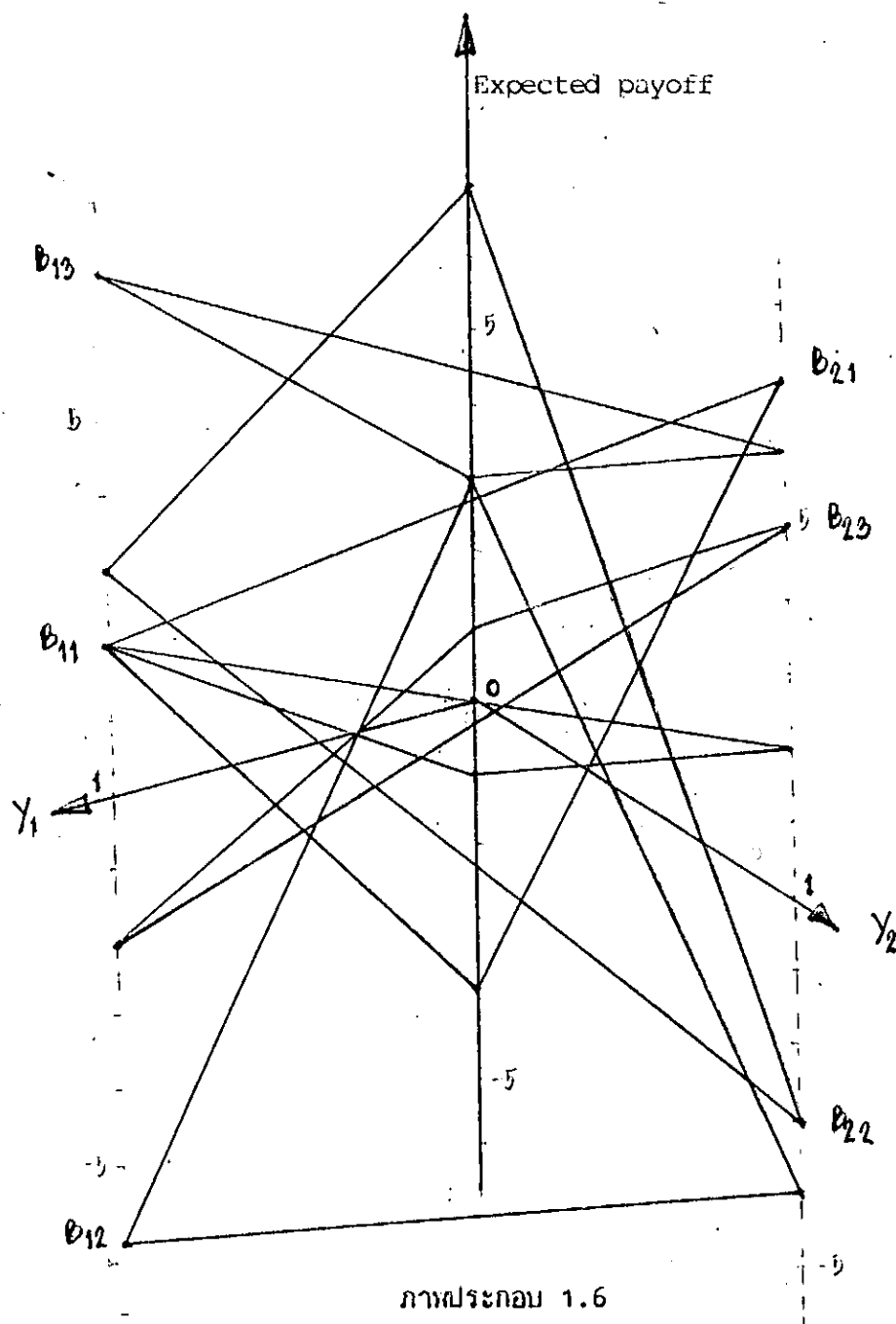
$$B_{21}(Y_1, Y_2) = 7Y_1 + 2Y_2 - 4(1 - Y_1 - Y_2) = 11Y_1 + 6Y_2 - 4$$

$$B_{22}(Y_1, Y_2) = -3Y_1 + 3Y_2 + 7(1 - Y_1 - Y_2) = -10Y_1 - 4Y_2 + 7$$

$$B_{23}(Y_1, Y_2) = 5Y_1 - 2Y_2 + 1(1 - Y_1 - Y_2) = 4Y_1 - 3Y_2 + 1$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าว เช่น ฟังก์ชัน $B_{23}(Y_1, Y_2)$ หมายถึงฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 2 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(Y_1, Y_2, 1 - Y_1 - Y_2)$ โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ 2 และผู้เล่นคนที่ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ 3 ค่าจากตารางการจ่ายที่นำมานั้น นำมาจากสคีมที่ 2 ในแถวตรงกับยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่นคือ $(2, 1, 3)$, $(2, 2, 3)$ และ $(2, 3, 3)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 5, -2 และ 1 ตามลำดับ นำมาคูณกับ Y_1, Y_2 และ $1 - Y_1 - Y_2$ ตามลำดับเช่นกัน

จากเงื่อนไขดังกล่าวลงกราฟได้ดังภาพประกอบ 1.6



จากภาพประกอบ 1.6 จะเห็นได้ว่า

ระนาบ $B_{13}(y_1, y_2)$ อยู่เหนือระนาบ $B_{23}(y_1, y_2)$

ระนาบ $B_{22}(y_1, y_2)$ อยู่เหนือระนาบ $B_{12}(y_1, y_2)$ ในบริเวณ $[0, 1] \times [0, 1] \times R$

และ $y_1 + y_2 \leq 1$

ดังนั้นเหลือระยะนาที่ จะพิจารณาหาจุดตัดเพียง 4 ระยะนา คือ $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{23}$
แบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 B_{11}, B_{12}, B_{21} ได้จุดตัด $(\frac{12}{51}, \frac{9}{51}, -\frac{18}{51})$

กรณีที่ 2 B_{11}, B_{12}, B_{23} ได้จุดตัด $(\frac{2}{91}, \frac{39}{91}, -\frac{18}{91})$

กรณีที่ 3 B_{11}, B_{21}, B_{23} ได้จุดตัด $(\frac{8}{49}, \frac{21}{49}, \frac{18}{49})$

กรณีที่ 4 B_{12}, B_{21}, B_{23} ได้จุดตัด $(-\frac{2}{89}, \frac{51}{89}, -\frac{72}{89})$ ซึ่ง $y_1 = -\frac{2}{89} < 0$

จากกรณีที่ 1, 2 และ 3 จะได้ว่า $-\frac{18}{51} < -\frac{18}{91} < \frac{18}{49}$

ดังนั้น ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนที่ 2 คือ $(\frac{8}{49}, \frac{21}{49}, \frac{20}{49})$

ให้ค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 2 $v_2 = \frac{18}{49}$

สำหรับผู้เล่นคนที่ 3

ให้ $z_1, z_2, 1-z_1-z_2$ เป็นความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนที่ 3 จะใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 หรือ 3 ตามลำดับ

c_{ij} แทน พังชัน ค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 3 โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ i ผู้เล่นคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ j ซึ่ง $i = 1, 2$
 $j = 1, 2, 3$

จากตารางการจ่ายดังกล่าวจะได้

$$C_{11}(z_1, z_2) = 1z_1 - 3z_2 - 5(1 - z_1 - z_2) = 6z_1 + 2z_2 - 5$$

$$C_{12}(z_1, z_2) = -5z_1 + 4z_2 + 2(1 - z_1 - z_2) = -7z_1 + 2z_2 + 2$$

$$C_{13}(z_1, z_2) = -5z_1 - 5z_2 + 2(1 - z_1 - z_2) = -7z_1 - 7z_2 + 2$$

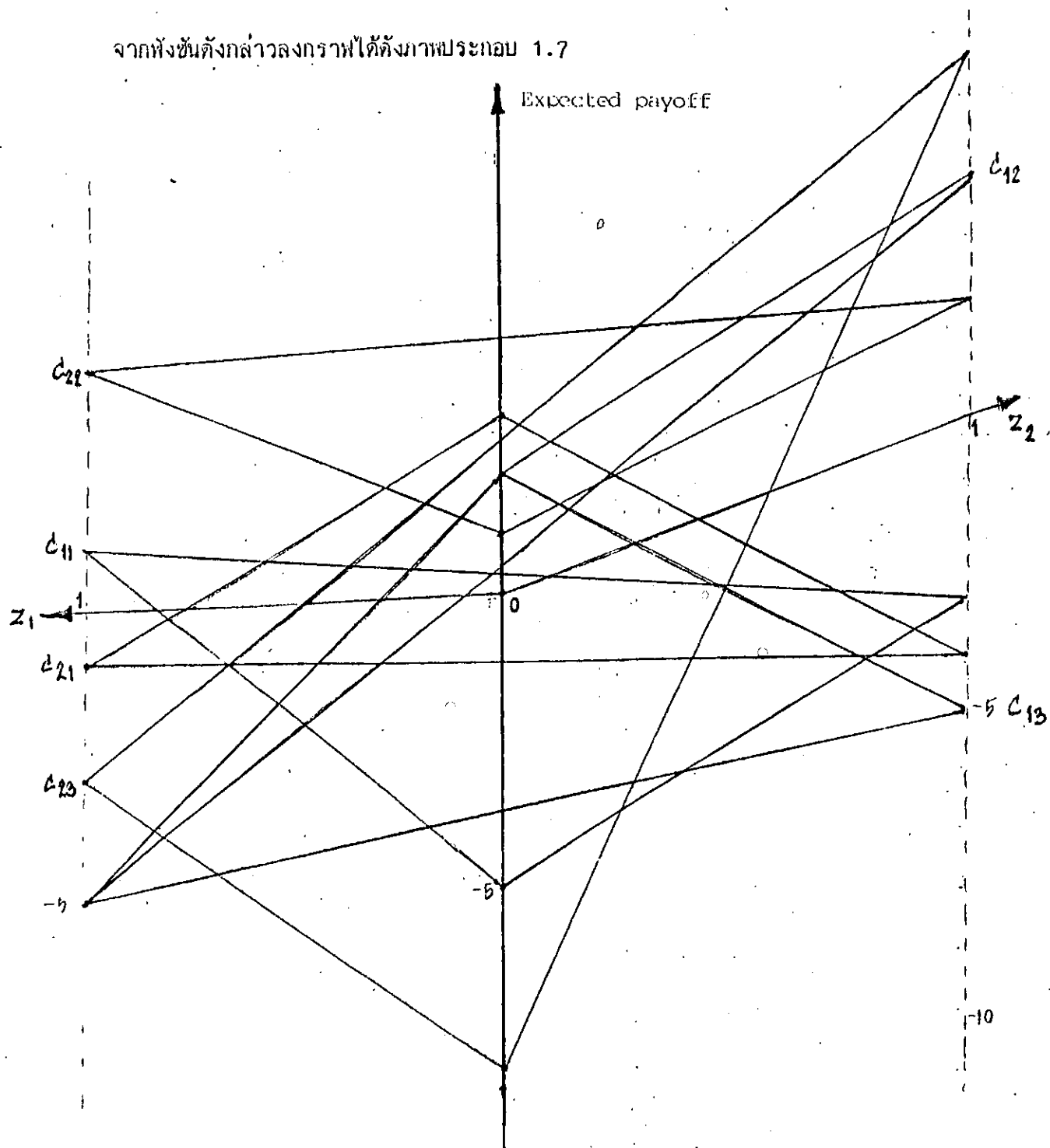
$$C_{21}(z_1, z_2) = -1z_1 - 4z_2 + 3(1 - z_1 - z_2) = -4z_1 - 7z_2 + 3$$

$$C_{22}(z_1, z_2) = 4z_1 + 2z_2 + 1(1 - z_1 - z_2) = 3z_1 + z_2 + 1$$

$$C_{23}(z_1, z_2) = -3z_1 + 2z_2 - 8(1 - z_1 - z_2) = 5z_1 + 10z_2 - 8$$

ซึ่งฟังก์ชันข้างบนนี้สร้างจากตารางการจ่ายดังกล่าว เช่น ฟังก์ชัน $C_{23}(z_1, z_2)$ หมายถึง ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 3 ที่ใช้ยุทธวิธีผสม $(z_1, z_2, 1 - z_1 - z_2)$ โดยผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ 2 และคนที่ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ 3 ถ้าจากตารางการจ่ายที่นำมาใช้นี้ นำมาจากสมมติที่ 3 ในแถวที่ตรงกับยุทธวิธีที่ใช้ตามลำดับผู้เล่นคือ $(2, 3, 1)$ $(2, 3, 2)$ และ $(2, 3, 3)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $-3, 2, -8$ ตามลำดับ นำมาคูณกับ z_1, z_2 และ $1 - z_1 - z_2$ ตามลำดับเช่นกัน

จากทั้งชั้นดังกล่าวลงกราฟได้ดังภาพประกอบ 1.7



ภาพประกอบ 1.7

จากภาพประกอบ 1.7 จะเห็นได้ว่า

ระนาบ $c_{21}(z_1, z_2)$ อยู่เหนือระนาบ $c_{23}(z_1, z_2)$

$c_{22}(z_1, z_2)$ อยู่เหนือระนาบ $c_{23}(z_1, z_2)$ ในบริเวณ

$$[1, 0] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \text{ และ } z_1 + z_2 < 1$$

ดังนั้น เหลือระนาบที่จะต้องพิจารณาจุดตัดเพียง 4 ระนาบ คือ $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{23}$
แบ่งเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 c_{11}, c_{12}, c_{13} ได้จุดตัด $(\frac{63}{117}, 0, \frac{-207}{117})$

กรณีที่ 2 c_{11}, c_{12}, c_{23} ได้จุดตัด $(\frac{56}{104}, \frac{46}{104}, \frac{-92}{104})$

กรณีที่ 3 c_{11}, c_{13}, c_{23} ได้จุดตัด $(\frac{29}{113}, \frac{46}{113}, \frac{-299}{113})$

กรณีที่ 4 c_{12}, c_{13}, c_{23} ได้จุดตัด $(\frac{90}{108}, 0, \frac{-414}{108})$

จากกรณีทั้งหมดจะได้ว่า $\frac{-414}{108} < \frac{-299}{113} < \frac{-207}{117} < \frac{-92}{104}$

ดังนั้น ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมของผู้เล่นคนที่ 3 คือ $(\frac{56}{104}, \frac{46}{104}, \frac{2}{104})$

ให้ค่าของเกมของผู้เล่นคนที่ 3 $v_3 = \frac{-92}{104}$

จุดสมมูลของเกมนี้จุดหนึ่งคือ $((\frac{7}{13}, \frac{6}{13}), (\frac{8}{49}, \frac{21}{49}, \frac{20}{49}), (\frac{56}{104}, \frac{46}{104}, \frac{2}{104}))$

จากผลดังกล่าวเปรียบเทียบค่าของเกมจะได้ว่า $v_1 < v_3 < v_2$ จะเห็นได้ว่า ผู้เล่นคนที่ 2 มีค่าคาดหวังการจ่ายมากที่สุด นั้นย่อมแสดงว่า ผู้เล่นคนที่ 2 นี้มีโอกาสที่จะเสียประโยชน์น้อยที่สุดในการเล่นเกมนี้อยู่ โดยใช้ยุทธวิธีในการแข่งขันด้วยความน่าจะเป็นตามยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

เพื่อศึกษาวิธีการหาค่าของเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่นเฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 หรือ 3 วิธี ส่วนผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็นจำนวนนับ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ขอบเขตของการวิจัย

ผู้วิจัยจะศึกษาวิธีการหายุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมเฉพาะผู้เล่นที่มียุทธวิธีเพียง 2 หรือ 3 วิธี ในการเล่นเกม n คน ที่มีผลรวมการได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการร่วมมือกันระหว่างผู้เล่น สิ่งที่ต้องทราบในการคำนวณหาค่าดังกล่าวคือ ค่าฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นที่มียุทธวิธีเพียง 2 หรือ 3 วิธี

เกมที่จะหายุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุด และค่าของเกมของผู้เล่นทุกคนใดนั้น ผู้เล่นทุกคนต้องมียุทธวิธีในการเล่นเพียง 2 หรือ 3 วิธี

สำหรับตัวอย่างในการคำนวณหายุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุดและค่าของเกมนั้น ผู้วิจัยเสนอเฉพาะกรณีผู้เล่น 3 คนเท่านั้น

2. ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยแบ่งขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยดังนี้

2.1 ศึกษาทบทวนเอกสารและงานวิจัยพร้อมทั้งหนังสือที่ใช้ประกอบในการวิจัย

2.2 ศึกษาความเป็นไปได้ของวิธีการที่นำมาใช้หาค่าของเกมพร้อมตัวอย่างประกอบ
ดังมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้

2.2.1 ตรวจสอบความเป็นไปได้จากตัวอย่างการเล่นเกม 2 คน ที่ผู้เล่น
ทั้งสองมียุทธวิธีฝ่ายละ 3 วิธี ซึ่งเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีซิมเพลก

2.2.2 เสนอบทพิสูจน์ วิธีการนี้สำหรับเกม n คน

2.2.3 เสนอตัวอย่างในการหาค่าของเกม สำหรับเกม 3 คนในเกม $2 \times 3 \times 3$

2.3 เขียนโปรแกรมเครื่องจักรกลคำนวณ สำหรับการหาค่าของเกมตามวิธีการดังกล่าว
ซึ่งเสนอไว้ในภาคผนวก

สรุปผลการวิจัย

จากการดำเนินการศึกษาครั้งนี้ได้พบ วิธีการดำเนินการหาค่าของเกม n คน ที่มีผลรวม
การได้การเสียเป็นศูนย์ ซึ่งไม่มีการรวมมือกันระหว่างผู้เล่น สำหรับผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่นเพียง
2 หรือ 3 วิธีนั้น สามารถทำตามลำดับขั้นตอนได้ดังนี้

1. กำหนดตัวแปรที่ใช้แทนความน่าจะเป็นของผู้เล่นคนนั้น ซึ่งใช้ยุทธวิธีที่ 1 หรือ 2
หรือใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 หรือ 3 ในกรณีที่มี 3 ยุทธวิธี ตามลำดับ ดังนั้นจะมีตัวแปรที่ปรากฏเพียง
1 หรือ 2 ตัวแปรเท่านั้น เพราะผลรวมความน่าจะเป็นที่จะใช้ยุทธวิธีแต่ละวิธีทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1

2. กำหนดฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนนั้น โดยที่ผู้เล่นคนอื่น ๆ ใช้ยุทธวิธี

ต่าง ๆ

3. พิจารณายุทธวิธีผสมที่รอบง่ายยุทธวิธีอื่น ๆ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยกราฟ

กรณีที่ผู้เล่นมียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี กราฟที่ปรากฏตามฟังก์ชันค่าคาดหวัง
การจ่ายของผู้เล่นคนนั้นจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง เส้นตรงที่อยู่เหนือเส้นตรงหนึ่งเส้นตรงใดในบริเวณ
 $[0,1] \times R$ จะเป็นเส้นตรงที่เกิดจากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของคนที่เกิดจากยุทธวิธีผสม
ที่รอบง่ายยุทธวิธีผสมอื่น

กรณีที่ผู้เล่นมียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี กราฟที่ปรากฏตามฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย
 ของผู้เล่นคนนั้น จะมีลักษณะเป็นระนาบ ระนาบที่อยู่เหนือระนาบหนึ่งระนาบใด ในบริเวณ
 $[0,1] \times]0,1[\times \mathbb{R}$ และผลบวกของตัวแปรทั้งสองนั้น น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 จะเป็นระนาบที่
 เกิดจากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายของผู้เล่นคนนั้นที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ครอบงำ ยุทธวิธีผสมอื่น

4. หากจุดตัดของเส้นตรงหรือระนาบ ที่ไม่ได้เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ครอบงำ ยุทธวิธีอื่น
 ซึ่งจุดตัดนั้น ต้องอยู่ในขอบเขต $[0,1] \times \mathbb{R}$ หรือ $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ และผลบวก
 ของตัวแปรทั้งสองนั้นน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

พิจารณาเลือกจุดตัดของเส้นตรงหรือระนาบที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวัง
 การจ่าย ซึ่งจะเป็นจุดที่ให้ยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุดของผู้เล่นคนนั้น พร้อมทั้งค่าของเกมของผู้เล่น
 คนนั้นด้วย

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของวิธีการดังกล่าวใช้คุณสมบัติของจุดสมมูลและค่าแมกซิมีน
 ของฟังก์ชันช่วยในการตรวจสอบ ซึ่งแบ่งเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 สำหรับผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 2 วิธี ผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็น
 จำนวนนับ จะได้ว่าจุดที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่หาจาก
 เซตผลตัดของเส้นตรง จะเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และค่า
 ของเกมของผู้เล่นคนนั้น ทั้งนี้เส้นตรงที่นำมาพิจารณาหาจุดตัดนั้นเป็นเส้นตรง
 ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่ไม่อยู่เหนือเส้นตรงอื่นใดในบริเวณ
 $[0,1] \times \mathbb{R}$

กรณีที่ 2 สำหรับผู้เล่นที่มียุทธวิธีในการเล่น 3 วิธี ผู้เล่นคนอื่นมีจำนวนยุทธวิธีเป็น
 จำนวนนับ จะได้ว่า จุดที่ให้ค่าแมกซิมีนของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่
 หาจากเซตผลตัดของระนาบ จะเป็นจุดที่แสดงถึงยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด และ
 ค่าของเกมของผู้เล่นคนนั้น ทั้งนี้ระนาบที่นำมาพิจารณาหาจุดตัดนั้น เป็นระนาบ
 ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่ไม่อยู่เหนือระนาบอื่นใดในบริเวณ
 $[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$

ข้อเสนอแนะ

ควรมีการศึกษาผลของวิธีการนี้ที่นำไปใช้กับปัญหาจริงในชีวิตประจำวัน เพราะปัจจุบันมีการแข่งขันมากมาย และยุทธวิธีที่ผู้นำมาใช้ในการแข่งขัน เมื่อพิจารณาความเหมาะสมกันอื่น ๆ แล้ว เช่น สภาพเวลา ทุนทรัพย์ต่าง ๆ จะเห็นได้ว่า มียุทธวิธีที่ใช้น้อย ซึ่งถ้าเหลือยุทธวิธีที่ใช้เพียง 2 หรือ 3 วิธี ก็สามารภที่จะได้ข้อมูลช่วยในการตัดสินใจใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการแข่งขัน ซึ่งทำให้เสียผลประโยชน์น้อยที่สุด ตามวิธีการที่ผู้วิจัยเสนอไว้

บรรณาการ

บรรณานุกรม

- เพชรรัตน์ จันทรแสนวิไล "ทฤษฎีเกมส์" เอกสารประกอบการสอนวิชา สถิติ 451 มหาวิทยาลัย
ศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตประสานมิตร 2528, ไม่มีเลขหน้า อัดสำเนา
- สุทธิชัย โง่วศิริ และอุดม ไยเจริญ การวิจัยดำเนินงานเบื้องต้น มหาวิทยาลัยรามคำแหง
2528, 260 หน้า
- _____ "ศึกคอสมติกส์" คู่แข่ง 8 : 264 - 265 ตุลาคม 2530
- Burger, Ewald and Freund, John E. Introduction to the theory of games.
Prentice Hall, 1963. 202 p.
- Harsanyi, John C. Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games
and Social Situations. Cambridge University Press, 1977. 314 p.
- Heijmans, Johannes Gertrudis. "Discriminatory and Symmetric Von
Neumann-Morgenstern Solutions for a class of Symmetric Games,"
Dissertation Abstracts International. 47 : 3383 - B, February, 1987.
- Hillier, Frederick S. and Lieberman, Gerald J. Introduction to
Operations Research. San Francisco, 1980. 829 p.
- Langlois, Jean and Pirre Patrick. "Repeated Play in Non-Cooperative
Game Theory," Dissertation Abstracts International. 44 : 196 - B,
July, 1983.
- Morton, David D. Game theory : a nontechnical introduction. New York,
1970. 208 p.
- Nash, John. "Non-Cooperative Games," Annals of Mathematics. 5 : 287-
295, September, 1951.
- Powers, Imelda Yeung. "Three Essays in Game theory," Dissertation
Abstracts International. 47 : 3937 - B, March, 1987.
- Rosenthal, Edward Charles. "Cooperative Games Arising from Mathematical
Programming Problems," Dissertation Abstracts International. 46 :
3995 - B, May, 1986.

ภาพผนวก

เอกสารประกอบโปรแกรม

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ปรากฏต่อไปนี้ เป็นเพียงโปรแกรมตัวอย่างใช้คำนวณหาค่าของเกมส์สำหรับเกม $2 \times 3 \times 3$ ถ้าเป็นเกมลักษณะอื่น แต่ทราบว่าผู้เล่นอย่างน้อย 1 คน มียุทธวิธีในการเล่น 2 หรือ 3 ยุทธวิธี สามารถปรับปรุงโปรแกรมนี้นี้ได้ โดยเปลี่ยน DIMENSION และจำนวนครั้งของการวนรอบในการดำเนินการหาค่าให้เหมาะสมก่อน

ภาษาที่ใช้เขียน ใช้ภาษา BASIC

ขณะ RUN โปรแกรมต้องใช้ควบคู่กับ PRINTER ด้วย

รายละเอียดของโปรแกรม

1. โครงสร้างของโปรแกรม ประกอบด้วย

1.1 ส่วนที่เป็นโปรแกรมหลัก (MAIN PROGRAM) เป็นโปรแกรมให้รับข้อมูลต่าง ๆ ควบคุมและสั่งการให้ส่วนอื่น ๆ ปฏิบัติงานตามเงื่อนไขต่าง ๆ จากข้อมูลที่ได้รับเข้า

1.2 ส่วนที่เป็นโปรแกรมน้อย (SUBPROGRAM) จะทำหน้าที่แต่ละด้านตามต้องการ แยกเป็นด้านต่าง ๆ ดังนี้

1.2.1 โปรแกรมย่อยสร้างตารางการจ่าย

1.2.2 โปรแกรมย่อยสร้างฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายและหาฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบคลุมยุทธวิธีผสมอื่น

1.2.3 โปรแกรมย่อย คำนวณค่าของเกมส์และยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด

2. ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรม

2.1 ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรมหลัก

ANSWER 1 : ใช้เก็บค่าเท่ากับ 1 ในกรณี ต้องการให้พิมพ์ตารางการจ่าย

เก็บค่าเท่ากับ 2 ในกรณี ต้องการให้พิมพ์ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย

เก็บค่าเท่ากับ 3 ในกรณี ต้องการคำนวณค่าของเกมส์

และเก็บค่าเท่ากับ 0 ในกรณี ต้องการสิ้นสุดการทำงาน

2.2 ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรมน้อย 1.2.1

2.2 ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรมย่อย 1.2.1

$A(I), B(I), C(I)$: ใช้เก็บค่าฟังก์ชันการจ่ายของผู้เล่นคนที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับโดยที่ I มีค่าถึง 18

2.3 ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรมย่อย 1.2.2

$A(I)$: ใช้เก็บค่าในการนำเข้าสู่ข้อมูลเพื่อสร้างฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายทั้งหมด สำหรับผู้เล่นที่มี 2 ยุทธวิธี โดยที่ I มีค่า 1 ถึง 18

$B(J)$: ใช้เก็บค่าข้อมูลนำเข้าสู่ฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย สำหรับผู้เล่นที่มี 3 ยุทธวิธี ซึ่ง J มีค่า 1 ถึง 18

E : ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ x_1 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น

F : ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น

P : ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย

$PAY1(I, J)$: ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_1 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายในรูป 2 มิติ เพื่อพิจารณาหาฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น โดย I มีค่า 1 ถึง 3 และ J มีค่า 1 ถึง 3

$PAY2(I, J)$: ใช้เก็บค่าของค่าคงตัวในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายในรูป 2 มิติ เพื่อพิจารณาหาฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่น โดย I มีค่า 1 ถึง 3 และ J มีค่า 1 ถึง 3

$PAY3(I, J)$: ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายในรูป 2 มิติ โดย I มีค่า 1 ถึง 2 และ J มีค่า 1 ถึง 3

$PAY4(I, J)$: ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายในรูป 2 มิติ โดย I มีค่า 1 ถึง 2 และ J มีค่า 1 ถึง 3

$PAY5(I, J)$: ใช้เก็บค่าของค่าคงตัวในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายในรูป 2 มิติ โดย I มีค่า 1 ถึง 2 และ J มีค่า 1 ถึง 3

Q : ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของ x_2 ในฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่าย

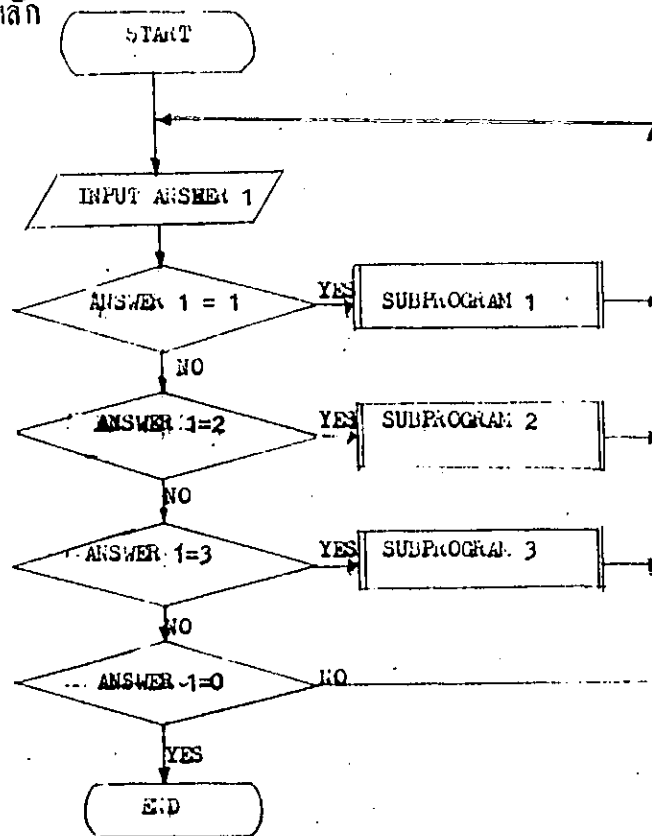
2.4 ตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรมย่อย 1.2.3

A	: ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่จะคำนวณหาจุดตัดของฟังก์ชันที่สอง
ANX1	: ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 1 ของยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด
ANS2	: ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 2 ของยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด
C1	: ใช้เก็บค่าของค่าคงตัวของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่จะคำนวณหาจุดตัดของฟังก์ชันแรก
C2	: ใช้เก็บค่าของค่าคงตัวของฟังก์ชันค่าคาดหวังการจ่ายที่จะคำนวณหาจุดตัดของฟังก์ชันที่สอง
CP(L,1)	: ใช้เก็บค่าเมตริกซ์ค่าคงตัวสำหรับคำนวณหาจุดตัดซึ่ง L มีค่า 1 ถึง 3
D(M1,M2)	: ใช้เก็บค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เพื่อคำนวณหาจุดตัดโดย M1 และ M2 มีค่า 1 ถึง 3
D1	: ใช้เก็บค่าผลคูณในการคูณแยงลงของการคำนวณหาค่า DETERMINANT
D2	: ใช้เก็บค่าผลคูณในการคูณแยงขึ้นของการคำนวณหาค่า DETERMINANT
DE(I,K)	: ใช้เก็บค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เพื่อคำนวณหาจุดตัดตามลักษณะของ CRAMMER'S RULE โดย I มีค่า 1 ถึง 3 และ K เป็นค่าในการวนรอบที่กระทำซึ่ง K มีค่า 1 ถึง 3
DETD(J)	: ใช้เก็บค่า DETERMINANT ที่คำนวณได้ โดย J มีค่า 1 ถึง ค่าของ PLAN
INL	: ใช้เก็บค่าของจำนวนจุดตัดของเส้นตรงที่ต้องการพิจารณา
MP(J,K)	: ใช้เก็บค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่รับเข้าเพื่อคำนวณหาจุดตัด J และ K มีค่า 1 ถึง 3
OPsx1	: ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 1 ของยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด
OPsx2	: ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 2 ของยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด
OPsx3	: ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 3 ของยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด
OPV1	: ใช้เก็บค่าของเกม
PLAF	: ใช้เก็บค่า หมายเลขของผู้เล่น
PLAN	: ใช้เก็บค่าจำนวนจุดตัดที่ต้องการพิจารณา
STRAT	: ใช้เก็บค่า จำนวนยุทธวิธีของผู้เล่นที่กำลังดำเนินการหาค่าของเกมและยุทธวิธีผสมที่เหมาะสมที่สุด

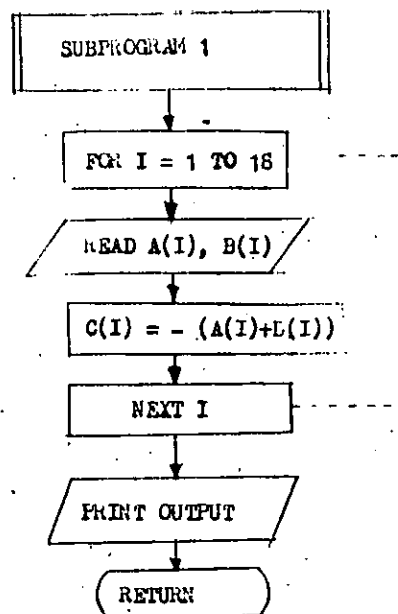
- SX(I, 1) : ใช้เก็บค่าเมตริกซ์คำตอบที่ได้จากการแก้สมการหาจุดตัดโดย CRAMMET'S RULE โดย I มีค่า 1 ถึง 3
- SX1 : ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 1 ของยุทธวิธีผสมที่ได้จากจุดตัดของระนาบหรือเส้นตรง
- SX2 : ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 2 ของยุทธวิธีผสมที่ได้จากจุดตัดของระนาบหรือเส้นตรง
- SX3 : ใช้เก็บค่าองค์ประกอบที่ 3 ของยุทธวิธีผสมที่ได้จากจุดตัดของระนาบ
- V(I) : ใช้เก็บค่าของเกมที่ยังไม่ได้เปรียบเทียบ ซึ่งได้จากจุดตัดของเส้นตรงต่าง ๆ โดยที่ I มีค่า 1 ถึง ค่าของ INL

3. ผังงานการทำงานของโปรแกรม

3.1 ผังงานโปรแกรมหลัก



3.2 ตัวอย่างโปรแกรมย่อย 1.2.1



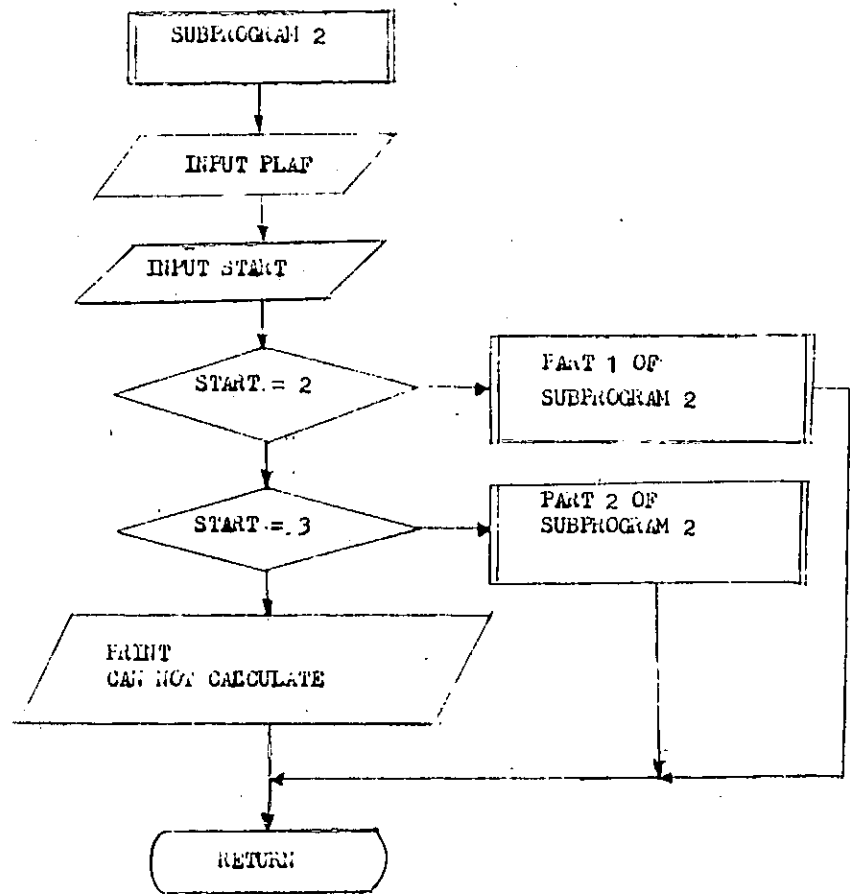
ลักษณะ

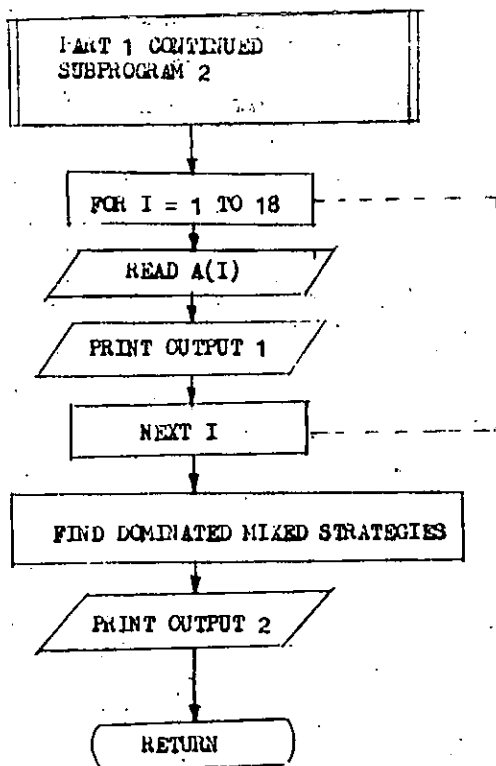
OUTPUT

* PAYOFF TABLE *

	PLAYER	1	2	3
STRATEGIES				
(1, 1, 1)		-3	2	1
(1, 1, 2)		9	-6	-3
.			.	
.			.	
.			.	
(2, 3, 3)		7	1	8

3.3 ตัวอย่างโปรแกรมย่อย 1.2.2





OUTPUT 1

* PLAYER ... WHO HAS ... STRATEGIES *

* EXPECTED PAYOFF FUNCTION

$L11(x1) = \dots$

⋮

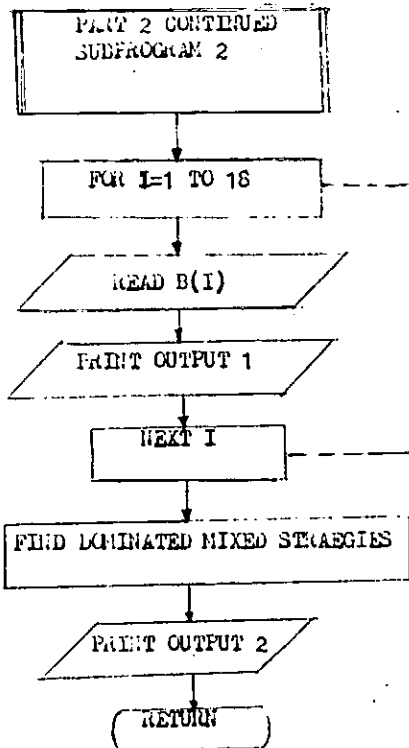
$L33(x1) = \dots$

OUTPUT 2

* FUNCTION ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION

$L... (s1) = \dots$

⋮



OUTPUT 1

* PLAYER ... WHO HAS ... STRATEGIES *

* EXPECTED PAYOFF FUNCTION

$P_{11}(x_1, s_2) = \dots$

⋮

$P_{23}(x_1, x_2) = \dots$

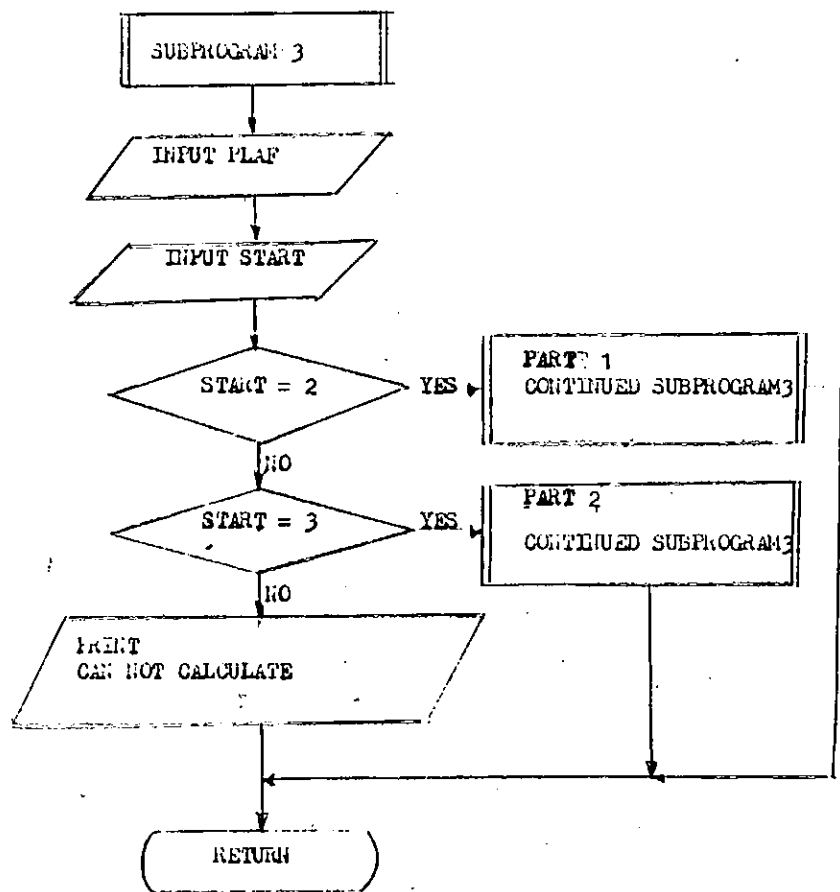
OUTPUT 2

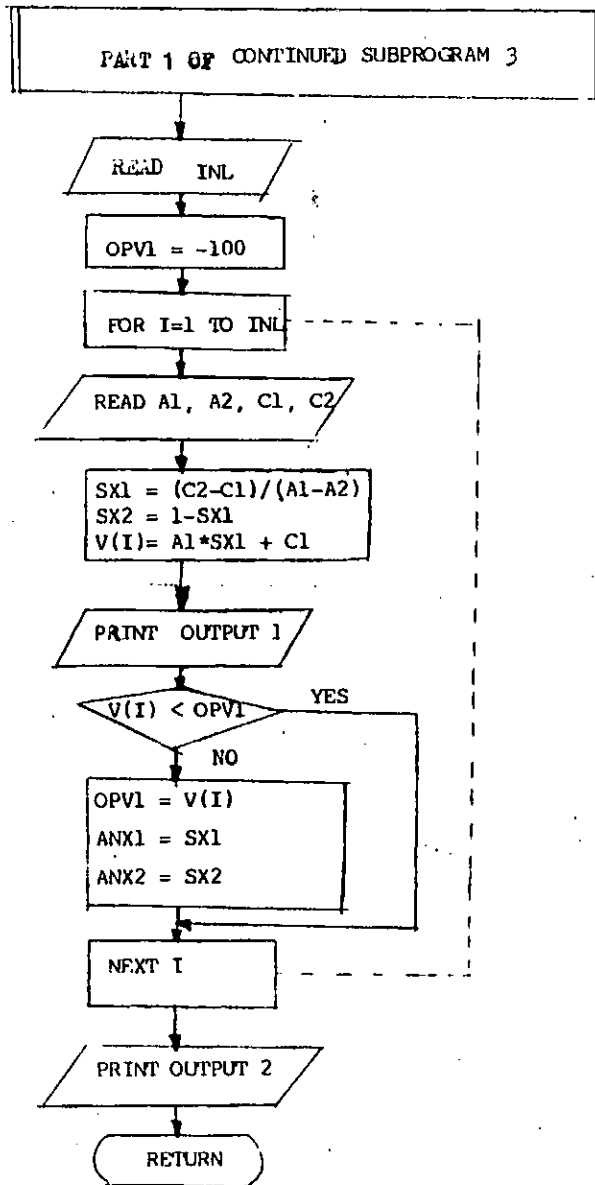
* FUNCTION ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION

$P_{..}(x_1, x_2) = \dots$

⋮

3.4 ใช้งานโปรแกรมย่อย 1.2.3





***** OUTPUT 1

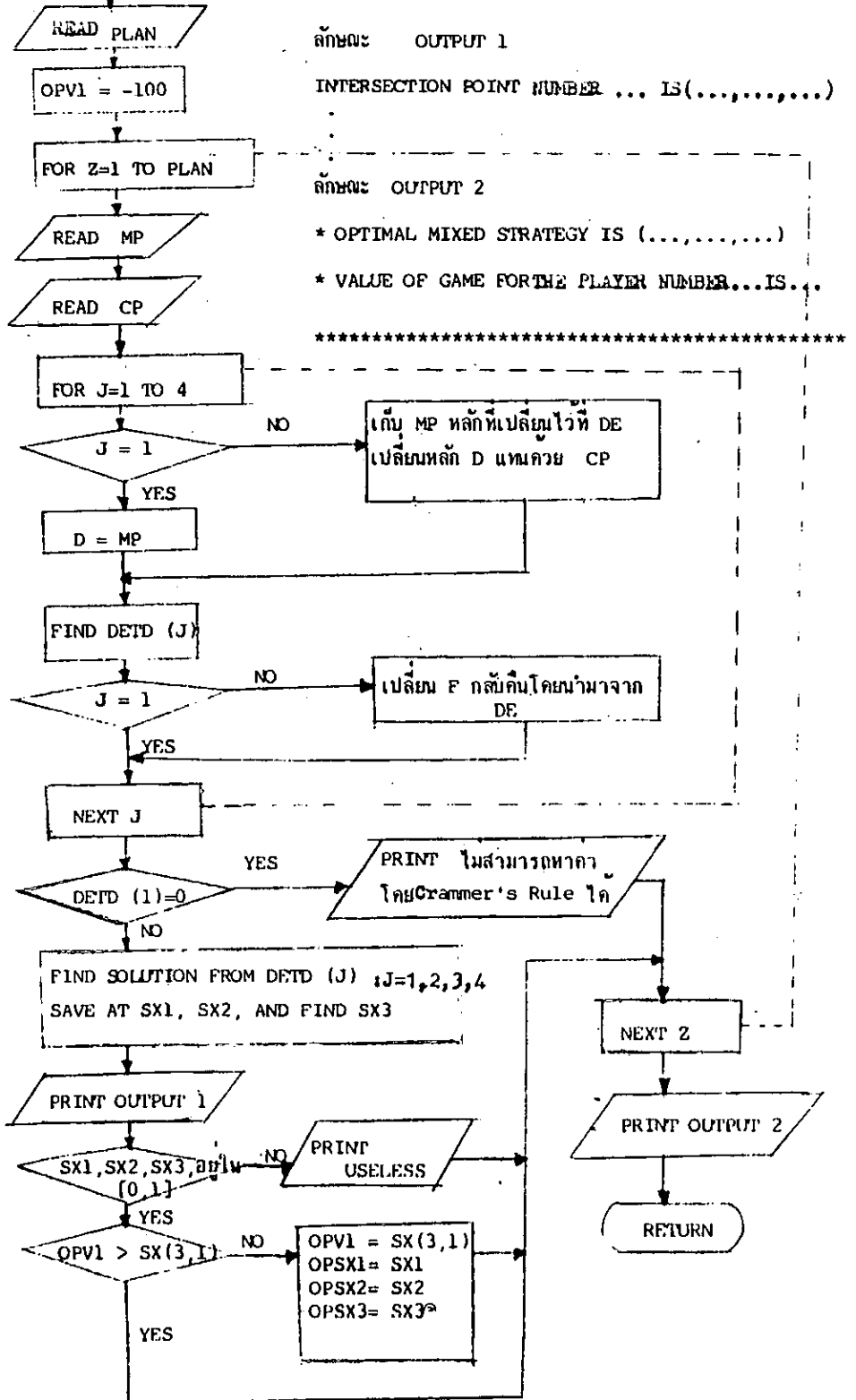
INTERSECTION POINT NUMBER IS (...,...)

***** OUTPUT 2

*** OPTIMAL MIXED STRATEGY IS (...,...)

*** VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER IS...

PART 2 OF CONTINUED SUBPROGRAM 3



4. โปรแกรมการหาของเกม

```

10 CLS
20 DIM A(10),B(10),C(10),PAY1(3,3),PAY2(3,3),PAY3(2,3),PAY4(2,3),PAY5(2,3)
30 DIM V(5),MF(3,3),CF(3,1),SX(3,1),D(3,3),DETD(4),DE(3,3)
40 PRINT STRING$(80,"*")
50 PRINT " "
60 PRINT " THIS PROGRAM CALCULATES THE VALUES OF THREE PERSONS NON COORAPERTIVE "
70 PRINT " "
80 PRINT " "
90 PRINT " "
100 PRINT " "
110 PRINT " "
120 PRINT " "
130 PRINT " "
140 PRINT " "
150 PRINT " "
160 PRINT " "
170 PRINT " "
180 PRINT " "
190 PRINT " "
200 PRINT " "
210 PRINT " "
220 PRINT " "
230 PRINT " "
240 PRINT " "
250 PRINT " "
260 PRINT " "
270 PRINT " "
280 PRINT " "
290 PRINT " "
300 PRINT " "
310 PRINT " "
320 PRINT " "
330 PRINT " "
340 PRINT " "
350 PRINT " "
360 PRINT " "
370 PRINT " "
380 PRINT " "
390 PRINT " "
400 PRINT " "
410 PRINT " "
420 PRINT " "
430 PRINT " "
440 PRINT " "
450 PRINT " "
460 PRINT " "
470 PRINT " "
480 PRINT " "
490 PRINT " "
500 PRINT " "
510 PRINT " "
520 PRINT " "
530 PRINT " "
540 PRINT " "
550 PRINT " "
560 PRINT " "
570 PRINT " "
580 PRINT " "
590 PRINT " "
600 PRINT " "
610 PRINT " "
620 PRINT " "
630 PRINT " "
640 PRINT " "
650 PRINT " "
660 PRINT " "
670 PRINT " "
680 PRINT " "
690 PRINT " "
700 PRINT " "
710 PRINT " "
720 PRINT " "
730 PRINT " "
740 PRINT " "
750 PRINT " "
760 PRINT " "
770 PRINT " "
780 PRINT " "
790 PRINT " "
800 PRINT " "
810 PRINT " "
820 PRINT " "
830 PRINT " "
840 PRINT " "
850 PRINT " "
860 PRINT " "
870 PRINT " "
880 PRINT " "
890 PRINT " "
900 PRINT " "
910 PRINT " "
920 PRINT " "
930 PRINT " "
940 PRINT " "
950 PRINT " "
960 PRINT " "
970 PRINT " "
980 PRINT " "
990 PRINT " "

```

```

5150 FOR J=1 TO 2
5160 FOR K=1 TO 3
5170 FOR L=1 TO 3
5180 M=M+1
5190 LPRINT TAB(7); "("; J; ","; K; ","; L; ")" ; TAB(48); A(M); TAB(58); B(M); TAB(68); C(M)
5200 PRINT TAB(7); "("; J; ","; K; ","; L; ")" ; TAB(48); A(M); TAB(58); B(M); TAB(68); C(M)
5210 NEXT L
5220 NEXT K
5230 NEXT J
5240 PRINT " "
5250 LPRINT " "
5260 PRINT STRING$(80,"*")
5270 LPRINT STRING$(80,"*")
5300 RETURN
6000 REM SUBPROGRAM 2 PRINT EXPECTED PAYOFF FUNCTION
6010 CLS
6020 PRINT "THE PLAYER NUMBER"
6030 INPUT PLAF
6040 PRINT "NUMBER OF STRATEGIES"
6050 INPUT STRAT
6060 IF (STRAT=2) THEN 6100
6070 IF (STRAT=3) THEN 7110
6080 PRINT "CANNOT CALCULATE BY THIS METHOD"
6085 LPRINT "CANNOT CALCULATE BY THIS METHOD"
6090 RETURN
6100 REM THIS PART PRINTS FUNCTIONS OF THE PLAYER WHO HAS 2 STRATEGIES
6110 PRINT " "
6120 LPRINT " "
6130 FOR I=1 TO 18
6140 READ A(I)
6150 NEXT I
6160 LPRINT TAB(15); "**THE PLAYER NUMBER"; PLAF; " HAS "; STRAT; "STRATEGIES*"
6170 PRINT TAB(15); "**THE PLAYER NUMBER"; PLAF; " HAS "; STRAT; "STRATEGIES*"
6180 LPRINT " "
6190 PRINT " "
6200 LPRINT "**EXPECTED PAYOFF FUNCTION"
6210 PRINT "**EXPECTED PAYOFF FUNCTION"
6220 LPRINT " "
6230 PRINT " "
6240 B=1

```

```

6250 FOR I=1 TO 3
6260 FOR J=1 TO 3
6270 L=K+1
6280 P=A(K)-A(L)
6290 LPRINT TAB(15); "L"; I; J; " (X1)="; P; "X1+("; A(L); ")"
6300 PRINT TAB(15); "L"; I; J; " (X1)="; P; "X1+("; A(L); ")"
6310 PAY1(I,J)=A(K)
6320 PAY2(I,J)=A(L)
6330 K=K+2
6340 NEXT J
6350 NEXT I
6360 REM CHECK DOMINATE MIXED STRATEGIES
6370 LPRINT TAB(10); "**FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION"
6380 PRINT TAB(10); "**FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION"
6390 FOR I=1 TO 3
6400 FOR J=1 TO 3
6410 FOR K=1 TO 3
6420 FOR L=1 TO 3
6430 R=I
6440 S=J
6450 IF (I=K) AND (J=L) THEN 6470
6460 IF (PAY1(I,J)>PAY1(K,L)) AND (PAY2(I,J)>PAY2(K,L)) THEN 6520
6470 NEXT L
6480 NEXT K
6490 P=PAY1(I,J)-PAY2(I,J)
6500 LPRINT TAB(15); "L"; R; S; " (X1)="; P; "X1+("; PAY2(I,J); ")"
6510 PRINT TAB(15); "L"; R; S; " (X1)="; P; "X1+("; PAY2(I,J); ")"
6520 NEXT J
6530 NEXT I
6540 PRINT "*****" TRACE GRAPH AND CONSIDER INTERSECTION "*****"
6550 PRINT " "
6570 RETURN
6600 REM THIS PART EXECUTES VALUE OF GAME OF PLAYER WHO HAS 2 STRATEGIES
6610 READ INL
6620 OPV1=-100
6630 FOR I=1 TO INL

```

```

6640 READ A1,A2,C1,C2
6650 SX1=(C2-C1)/(A1-A2)
6660 SX2=1-SX1
6670 V(I)=A1*SX1+C1
6680 PRINT "THE INTERSECTION POINT NUMBER ";I;" IS (";SX1;"",";V(I);")"
6690 LPRINT "THE INTERSECTION POINT NUMBER ";I;" IS (";SX1;"",";V(I);")"
6700 IF (V(I) > OPV1) THEN 6740
6710 OPV1=V(I)
6720 ANX1=SX1
6730 ANX2=SX2
6740 NEXT I
6750 PRINT " "
6760 LPRINT " "
6770 LPRINT TAB(10); "****OPTIMAL MIXED STRATEGY IS (";ANX1;"",";ANX2;"")"
6780 PRINT TAB(10); "****OPTIMAL MIXED STRATEGY IS (";ANX1;"",";ANX2;"")"
6790 LPRINT " "
6800 PRINT " "
6810 LPRINT TAB(10); "***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER ";PLAF;" IS ";OPV1
6820 PRINT TAB(10); "***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER ";PLAF;" IS ";OPV1
6830 LPRINT STRING$(80,"*")
6840 PRINT STRING$(80,"*")
6850 RETURN
7000 REM SUBPROGRAM 3 CALCULATE VALUE OF GAME
7010 CLS
7020 PRINT "THE PLAYER NUMBER"
7030 INPUT PLAF
7040 PRINT "NUMBER OF STRATEGIES"
7050 INPUT STRAT
7060 IF STRAT=1 THEN 6600
7070 IF STRAT=3 THEN 7660
7080 PRINT "CANNOT CALCULATE BY THIS METHOD"
7090 LPRINT "CANNOT CALCULATE BY THIS METHOD"
7100 RETURN
7110 REM THIS PART PRINTS FUNCTIONS OF THE PLAYER WHO HAS 3 STRATEGIES
7120 FOR J=1 TO 10
7130 READ V(J)
7140 PRINT V(J)

```

```

7150 LPRINT "
7160 PRINT "
7170 LPRINT TAB(15); "THE PLAYER NUMBER "; PLAF; " HAS"; STRAT; "STRATEGIES*"
7180 PRINT TAB(15); "**THE PLAYER NUMBER "; PLAF; " HAS"; STRAT; "STRATEGIES**"
7190 LPRINT "
7200 PRINT "
7210 PRINT "##PART2; EXPECTED PAYOFF FUNCTION##"
7220 LPRINT "EXPECTED PAYOFF FUNCTIONS"
7230 PRINT "EXPECTED PAYOFF FUNCTIONS"
7240 LPRINT "
7250 PRINT "
7260 K=1
7270 FOR I=1 TO 2
7280 FOR J=1 TO 3
7290 L=K+1
7300 M=K+2
7310 P=B(K)-B(M)
7320 Q=B(L)-B(M)
7330 LPRINT TAB(15); "P"; I; J; " (X1,X2)="; P; "X1+("; Q; ") X2+("; B(M); ") "
7340 PRINT TAB(15); "P"; I; J; " (X1,X2)="; P; "X1+("; Q; ") X2+("; B(M); ") "
7350 PAY3(I,J)=B(K)
7360 PAY4(I,J)=B(L)
7370 PAY5(I,J)=B(M)
7380 K=K+3
7390 NEXT J
7400 NEXT I
7410 REM CHECKED DOMINATE MIXED STRATEGIES
7420 LPRINT "FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION"
7430 PRINT "FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION"
7440 FOR I=1 TO 2
7450 FOR J=1 TO 3
7460 FOR P=1 TO 2
7470 FOR Q=1 TO 3
7480 R=1
7490 S=0
7500 IF (I=P AND (J=Q)) THEN 7540
7510 IF (PAY3(I,J) > PAY3(P,Q) AND (PAY4(I,J) > PAY4(P,Q))) THEN 7530
7520 GOTO 7480
7530 IF (PAY3(I,J) > PAY3(P,Q) THEN 7600
7540 NEXT Q
7550 NEXT P
7560 NEXT J
7570 NEXT I

```

```

7560 K=PAY3(I,J)-PAY5(I,J)
7570 F=PAY4(I,J)-PAY5(I,J)
7580 LPRINT TAB(15); "P"; R; S; " (X1,X2)="; E; "X1+("; F; ")X2+("; PAY5(I,J); ")"
7590 PRINT TAB(15); "P"; R; S; " (X1,X2)="; E; "X1+("; F; ")X2+("; PAY5(I,J); ")"
7600 NEXT J
7610 NEXT I
7620 PRINT "***** PLEASE TRACE GRAPH AND CONSIDER INTERSECTION *****"
7630 PRINT " "
7650 RETURN
7660 REM THIS PART EXECUTES VALUE OF GAME OF THE PLAYER WHO HAS 3 STRATEGIES
7670 READ PLAN
7680 OPV1=-100
7690 FOR Z=1 TO PLAN
7700 FOR J=1 TO 3
7710 FOR K=1 TO 3
7720 READ MP(J,K)
7730 NEXT K
7740 NEXT J
7750 FOR L=1 TO 3
7760 READ CP(L,1)
7770 NEXT L
7780 FOR J=1 TO 4
7790 IF (J=1) THEN 7880
7800 K=J-1
7810 DE(1,K)=MP(1,K)
7820 DE(2,K)=MP(2,K)
7830 DE(3,K)=MP(3,K)
7840 D(1,K)=CP(1,1)
7850 D(2,K)=CP(2,1)
7860 D(3,K)=CP(3,1)
7870 GOTO 7930
7880 FOR M1=1 TO 3
7890 FOR M2=1 TO 3
7900 D(M1,M2)=MP(M1,M2)
7910 NEXT M2
7920 NEXT M1
7930 D1=(D(1,1)*D(2,2)*D(3,3))+(D(1,2)*D(2,3)*D(3,1))+(D(1,3)*D(2,1)*D(3,2))
7940 D2=(D(3,1)*D(2,2)*D(1,3))+(D(1,2)*D(1,3)*D(1,1))+(D(3,3)*D(2,1)*D(1,2))
7950 DETD(J)=D1-D2

```

```

760 IF (K=1) THEN 8000
770 D(1,K)=DE(1,K)
780 D(2,K)=DE(2,K)
790 D(3,K)=DE(3,K)
8000 NEXT K
8010 IF (DETD(1)=0) THEN 8230
8020 SX(1,1)=DETD(2)/DETD(1)
8030 SX(2,1)=DETD(3)/DETD(1)
8040 SX(3,1)=DETD(4)/DETD(1)
8050 SX1=SX(1,1)
8060 SX2=SX(2,1)
8070 SX3=1-(SX(1,1)+SX(2,1))
8080 PRINT "THE INTERSECTION POINT NUMBER ";Z;" IS( ";SX1;" ";SX2;" ";SX(3,1);")"
8090 LPRINT "THE INTERSECTION POINT NUMBER ";Z;" IS( ";SX1;" ";SX2;" ";SX(3,1);")"
8100 REM CHECK MIXED STRATEGIES
8110 IF (SX1=0) OR (SX1>1) THEN 8200
8120 IF (SX2=0) OR (SX2>1) THEN 8200
8130 IF (SX3=0) OR (SX3>1) THEN 8200
8140 IF (OPV1>SX(3,1)) THEN 8250
8150 OPV1=SX(3,1)
8160 OPSX1=SX1
8170 OPSX2=SX2
8180 OPSX3=SX3
8190 GOTO 8250
8200 LPRINT "THIS INTERSECTION POINT NUMBER ";Z;" IS USELESS."
8210 PRINT "THIS INTERSECTION POINT NUMBER ";Z;" IS USELESS."
8220 GOTO 8250
8230 LPRINT "CANNOT FIND INTERSECTION POINT BY CRAMER'S RULE"
8240 PRINT "CANNOT FIND INTERSECTION POINT BY CRAMER'S RULE"
8250 NEXT Z
8260 PRINT " "
8270 LPRINT " "
8280 PRINT "***OPTIMAL MIXED STRATEGY IS( ";OPV1;" ";OPSX1;" ";OPSX2;" ";OPSX3;" )"
8290 LPRINT "***OPTIMAL MIXED STRATEGY IS( ";OPV1;" ";OPSX1;" ";OPSX2;" ";OPSX3;" )"
8300 PRINT " "
8310 LPRINT " "
8320 PRINT "***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER";PLAF;" IS ";OPV1
8330 PRINT "***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER";PLAF;" IS ";OPV1
8340 PRINT "END OF PROGRAM"
8350 PRINT " "

```

```

8000 RETURN
9000 REM DATA FOR PAYOFF TABLE
9010 DATA 3,2,9,-6,-1,6,3,2,0,-4,-9,7,7,-2,2,3,-5,3,-6,7,7,-3,-8,5,-6,2
9020 DATA -5,3,1,-2,7,-4,-9,7,7,1
9100 REM DATA FOR PLAYER NUMBER 1 WHO HAS 2 STRATEGIES
9110 DATA -3,-6,9,7,-1,-8,3,-6,0,-5,-9,1,7,7,2,-9,-5,7
9120 DATA 2
9130 DATA 3,7,-6,-8
9140 DATA 3,-10,-6,1
9200 REM DATA FOR PLAYER NUMBER 2 WHO HAS 3 STRATEGIES
9210 DATA 2,2,-2,-6,-4,3,6,7,3,7,2,-4,-3,3,7,5,-2,1
9220 DATA 4
9230 DATA 4,4,-1,-9,-7,-1,11,6,1
9240 DATA 2,-3,4
9250 DATA 4,4,-1,-9,-7,-1,4,-3,-1
9260 DATA 2,-3,-1
9270 DATA 4,4,-1,11,6,1,4,-3,-1
9280 DATA 2,4,-1
9290 DATA -9,-7,-1,11,6,-1,4,-3,-1
9300 DATA -3,4,-1
9500 REM DATA FOR PLAYER NUMBER 3 WHO HAS 3 STRATEGIES
9510 DATA 1,-3,-5,-5,4,2,-5,-5,2,-1,-4,3,4,2,1,-3,2,-8
9520 DATA 4
9530 DATA 6,2,-1,-7,2,-1,-7,-7,-1
9540 DATA 5,-2,-2
9550 DATA 6,2,-1,-7,2,-1,5,10,-1
9560 DATA 5,-2,9
9570 DATA 6,2,-1,-7,-7,-1,5,10,-1
9580 DATA 5,-2,8
9590 DATA -7,2,-1,-7,-7,-1,5,10,-1
9600 DATA -2,-2,8
10000 END

```

5. ลักษณะข้อมูลที่นำเข้าไปในโปรแกรมตัวอย่างมีรายละเอียดดังนี้

นอกจากข้อมูลที่ตอบทางจอภาพแล้วต้องมีข้อมูลไว้ให้เครื่องคอมพิวเตอร์รับเข้าดังนี้

- บรรทัดที่ 9000-9099 เป็นข้อมูลสำหรับสร้างตารางการจ่ายโดยเรียงผู้เล่นคนที่ 1,2 ตามลำดับ เป็นคู่ ๆ ดังยุทธวิธีที่ใช้ของผู้เล่นแต่ละคน (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2)
- บรรทัดที่ 9100... เป็นข้อมูลสำหรับผู้เล่นคนแรกที่มี 2 ยุทธวิธี นำเข้าตามลำดับยุทธวิธีที่ใช้ของผู้เล่นแต่ละคน (1,1,1), (2,1,1), (1,1,2), (2,1,2), (1,1,3)...
- บรรทัดที่ 9120... เป็นข้อมูลเฉพาะฟังก์ชัน ค่าคาดหวังการจ่ายที่จะหาจุดตัดของผู้เล่นที่มี 2 ยุทธวิธี
- บรรทัดที่ 9200... เป็นข้อมูลสำหรับผู้เล่นคนที่ 2 ที่มี 3 ยุทธวิธี นำเข้าตามลำดับยุทธวิธีที่ใช้ของผู้เล่นแต่ละคน (1,1,1), (1,2,1), (1,3,1), (1,2,2), (1,3,2)...
- บรรทัดที่ 9220... เป็นข้อมูลเฉพาะฟังก์ชัน ค่าคาดหวังการจ่ายที่จะหาจุดตัดของผู้เล่นที่มี 3 ยุทธวิธี โดยลงข้อมูลเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในตำแหน่ง (1,1), (1,2), (1,3), (2,1)... จนหมดก่อนแล้วจึงลงเมตริกซ์ค่าคงตัวในตำแหน่ง (1,1), (2,1), (3,1) เป็นชุด ๆ ตามจำนวนที่ต้องการ
- บรรทัดที่ 9500 เป็นข้อมูลสำหรับผู้เล่นคนที่ 3 ที่มี 3 ยุทธวิธี นำเข้าตามลำดับยุทธวิธีที่ใช้ของผู้เล่นแต่ละคน (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,3)...
- บรรทัดที่ 9520... เป็นข้อมูลลักษณะเดียวกับบรรทัดที่ 9210... เพียงแต่เป็นของผู้เล่นคนที่ 3

หมายเหตุ การบันทึกข้อมูลในโปรแกรมเฉพาะช่วงบรรทัดที่ 9120, 9220, 9520 นั้นจะบันทึกหลังการเขียนกราฟแล้วเสมอ เพื่อพิจารณาจุดตัดที่ต้องการและลงจำนวนจุดตัดก่อนเสมอ

6. ผลจากการ RUN โปรแกรม

*****THREE PERSONS NON COOPERATIVE ZERO SUM GAME*****

PAYOFF TABLE

STRATEGIES	PLAYER 1	2	3
(1 , 1 , 1)	-3	2	1
(1 , 1 , 2)	9	-6	-3
(1 , 1 , 3)	-1	6	-5
(1 , 2 , 1)	3	2	-5
(1 , 2 , 2)	0	-4	4
(1 , 2 , 3)	-9	7	2
(1 , 3 , 1)	7	-2	-5
(1 , 3 , 2)	2	3	-5
(1 , 3 , 3)	-5	3	2
(2 , 1 , 1)	-6	7	-1
(2 , 1 , 2)	7	-3	-4
(2 , 1 , 3)	-8	5	3
(2 , 2 , 1)	-6	2	4
(2 , 2 , 2)	-5	3	2
(2 , 2 , 3)	1	-2	1
(2 , 3 , 1)	7	-4	-3
(2 , 3 , 2)	-9	7	2
(2 , 3 , 3)	7	1	-8

THE PLAYER NUMBER 1 HAS 2 STRATEGIES

*EXPECTED PAYOFF FUNCTION

$$L\ 1\ 1\ (X_1) = 3\ X_1 + (-6)$$

$$L\ 1\ 2\ (X_1) = 2\ X_1 + (7)$$

$$L\ 1\ 3\ (X_1) = 7\ X_1 + (-8)$$

$$L\ 2\ 1\ (X_1) = 9\ X_1 + (-6)$$

$$L\ 2\ 2\ (X_1) = 5\ X_1 + (-5)$$

$$L\ 2\ 3\ (X_1) = -10\ X_1 + (1)$$

$$L\ 3\ 1\ (X_1) = 0\ X_1 + (7)$$

$$L\ 3\ 2\ (X_1) = 11\ X_1 + (-9)$$

$$L\ 3\ 3\ (X_1) = -12\ X_1 + (7)$$

*FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION

$$L\ 1\ 1\ (X_1) = 3\ X_1 + (-6)$$

$$L\ 1\ 3\ (X_1) = 7\ X_1 + (-8)$$

$$L\ 2\ 3\ (X_1) = -10\ X_1 + (1)$$

$$L\ 3\ 2\ (X_1) = 11\ X_1 + (-9)$$

THE INTERSECTION POINT NUMBER 1 IS (.5 , -4.5)

THE INTERSECTION POINT NUMBER 2 IS (.5384616 , -4.384616)

***OPTIMAL MIXED STRATEGY IS (.5384616 , .4615385)

***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER 1 IS -4.384616

THE PLAYER NUMBER 2 HAS 3 STRATEGIES

*EXPECTED PAYOFF FUNCTIONS

P 1 1 (X1,X2)= 4 X1+(4)X2+(-2)
P 1 2 (X1,X2)=-9 X1+(-7)X2+(3)
P 1 3 (X1,X2)= 3 X1+(4)X2+(3)
P 2 1 (X1,X2)= 11 X1+(6)X2+(-4)
P 2 2 (X1,X2)=-10 X1+(-4)X2+(7)
P 2 3 (X1,X2)= 4 X1+(-3)X2+(1)

FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION

P 1 1 (X1,X2)= 4 X1+(4)X2+(-2)
P 1 2 (X1,X2)=-9 X1+(-7)X2+(3)
P 2 1 (X1,X2)= 11 X1+(6)X2+(-4)
P 2 3 (X1,X2)= 4 X1+(-3)X2+(1)

THE INTERSECTION POINT NUMBER 1 IS(.2352941 , .1764706 , -.3529412)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 2 IS(2.197802E-02 , .4285715 , -.1978022)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 3 IS(.1632653 , .4285715 , .367347)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 4 IS(-2.247191E-02 , .5730337 , -.8089088)
THIS INTERSECTION POINT NUMBER 4 IS USELESS.

***OPTIMAL MIXED STRATEGY IS(.1632653 , .4285715 , .4081633)

***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER 2 IS .367347

THE PLAYER NUMBER 3 HAS 3 STRATEGIES

*EXPECTED PAYOFF FUNCTIONS

P 1 1 (X1,X2)= 6 X1+(2)X2+(-5)
P 1 2 (X1,X2)=-7 X1+(2)X2+(2)
P 1 3 (X1,X2)=-7 X1+(-7)X2+(2)
P 2 1 (X1,X2)=-4 X1+(-7)X2+(3)
P 2 2 (X1,X2)= 3 X1+(1)X2+(1)
P 2 3 (X1,X2)= 5 X1+(10)X2+(-8)

FUNCTIONS ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION

P 1 1 (X1,X2)= 6 X1+(2)X2+(-5)
P 1 2 (X1,X2)=-7 X1+(2)X2+(2)
P 1 3 (X1,X2)=-7 X1+(-7)X2+(2)
P 2 3 (X1,X2)= 5 X1+(10)X2+(-8)

THE INTERSECTION POINT NUMBER 1 IS(.5384616 , 0 , -1.769231)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 2 IS(.5384616 , .4423077 , -.8846154)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 3 IS(.2566372 , .4070796 , -2.646018)
THE INTERSECTION POINT NUMBER 4 IS(.8333333 , 0 , -3.833333)

***OPTIMAL MIXED STRATEGY IS(.5384616 , .4423077 , 1.923072E-02)

***VALUE OF GAME FOR THE PLAYER NUMBER 3 IS -.8846154

7. คำอธิบายเกี่ยวกับตัวแปรบางตัวจาก OUTPUT

ส่วนแรกเป็นหัวตาราง

ส่วนที่สองเป็นตารางการจ่าย

ส่วนที่สามเป็นผลลัพธ์ของผู้เล่นคนที่ 1 ที่มี 2 ยุทธวิธีในการเล่น

LIJ (X1) หมายถึง ฟังก์ชัน ค่าคาดหวังการจ่ายที่ผู้เล่นคนที่ 1 ใช้ยุทธวิธีที่ 1 ด้วยความน่าจะเป็น x_1 และ ใช้ยุทธวิธีที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น $1-x_1$ ในขณะที่ผู้เล่นคนที่ 2 และ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ I และ J ตามลำดับ แทนได้ด้วยกราฟเส้นตรง

สำหรับส่วน FUNCTION ARE CONSIDERED FOR INTERSECTION นั้นเป็นฟังก์ชันที่

เกิดจากยุทธวิธีผสมที่ไม่ครอบงำยุทธวิธีผสมอื่นใช้คำนวณหาจุดตัด

ส่วนที่สี่และห้าเป็นผลลัพธ์ของผู้เล่นคนที่ 2 และ 3 ที่มี 3 ยุทธวิธีในการเล่น

PIJ (X1,X2) หมายถึง ฟังก์ชัน ค่าคาดหวังการจ่ายที่ผู้เล่นคนที่ 2 หรือ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ 1, 2 และ 3 ด้วยความน่าจะเป็น x_1, x_2 และ $1-x_1-x_2$ ตามลำดับ

ถ้าเป็นผู้เล่นคนที่ 2 จะเป็นขณะที่ผู้เล่นคนที่ 1 และ 3 ใช้ยุทธวิธีที่ I และ J ตามลำดับ

ถ้าเป็นผู้เล่นคนที่ 3 จะเป็นขณะที่ผู้เล่นคนที่ 1 และ 2 ใช้ยุทธวิธีที่ I และ J ตามลำดับ

แทนได้ด้วยระนาบ